



HAL
open science

Imagerie Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) Par Analyse En Ondelettes Continues Multidimensionnelles.

Mohamed Tria

► **To cite this version:**

Mohamed Tria. Imagerie Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) Par Analyse En Ondelettes Continues Multidimensionnelles.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 2005. Français. NNT: . tel-00011181

HAL Id: tel-00011181

<https://theses.hal.science/tel-00011181>

Submitted on 9 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Imagerie Radar à Synthèse d'Ouverture Par Analyse en Ondelettes Continues Multidimensionnelles

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 18 novembre 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Paris-Sud XI
(Branche PHYSIQUE)

par

TRIA Mohamed

Composition du jury

Président : J. C. PESQUET, Professeur des universités.
Rapporteurs : J. P. ANTOINE, Professeur des universités.
E. POTTIER, Professeur des universités.
Examineurs : M. BENIDIR, Professeur des universités.
J. F. GIOVANELLI, Maître de conférence.
J. P. OVARLEZ, Maître de recherche.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Jean-Philippe Ovarlez et Messaoud Benidir. Jean-Philippe Ovarlez a mis tout en œuvre pour que la thèse se déroule dans les meilleures conditions, a veillé à ce que la thèse s'oriente vers la bonne direction tout en laissant libre cours à ma réflexion, m'a encouragé à aller au bout de mes idées et enfin m'a appris à valoriser mon travail auprès de la communauté scientifique et industrielle. Messaoud Benidir, qui a suivi mon parcours depuis un certain nombre d'années, m'a soutenu, encouragé, m'a accordé toute sa confiance et a porté un certain intérêt pour mon travail en tant que directeur de thèse. Au cours de la thèse, ce soutien a été indiscutablement un atout psychologique qui a contribué à maintenir le cap vers les objectifs fixés.

Je remercie ensuite Luc Vignaud qui, par ses conseils, a entraîné des tournants décisifs au cours de la thèse. Mes remerciements vont également vers Juan-Carlos Castelli qui, en étant un de mes principaux interlocuteurs dans la première partie de la thèse, m'a facilité l'assimilation des connaissances en imagerie SAR. J'ai également une pensée pour Élise Colin avec qui j'ai collaboré dans des conditions très agréables grâce à ses qualités scientifiques et humaines. Aussi, je remercie Hubert Cantalloube et Colette Coulombeix pour m'avoir facilité l'accès aux signaux SAR réels.

Plus généralement, je remercie Jean-Louis Boulay pour l'intérêt qu'il a porté à l'ensemble des doctorants du Département d'ÉlectroMagnétisme et Radar (DEMR), Christian Riché et l'équipe de Traitement du Signal (TSI) : Luc B., Gilles, Christèle, Philippe, Cécile, Marc, Dominique et Bob pour le climat chaleureux qu'ils ont instauré. Aussi, j'ai une petite pensée pour Martine, Philippe Martineau et Valérie ainsi que l'ensemble des doctorants que j'ai eu la chance de côtoyer : Emmanuelle, Robert, Cyril, Lise, Sébastien, Giovanni C., David, Mickaël, Frédéric, Yoan, Vincent, Giovanni O. et Émilie.

J'adresse également des remerciements à Éric Pottier et Jean-Pierre Antoine pour avoir accepté spontanément d'être rapporteurs de thèse, à Jean-Christophe Pesquet et Jean-François Giovanelli pour avoir bien voulu examiner mon travail de thèse.

Enfin, je souhaiterais rendre hommage à Pierre et Jacqueline Bertrand qui sont les précurseurs de tout le travail que j'ai réalisé dans cette thèse autour du thème de l'imagerie SAR par analyse en ondelettes continues.

*Je dédie cette thèse à mes parents : Ouassini et Zoubida,
ainsi qu'à mes soeurs : Anissa et Fouzia, et à mon frère : Sofian.*

Notations

λ	: longueur d'onde.
θ	: angle en azimut.
$\delta\theta$: ouverture angulaire.
D_{SAR}	: dimension de l'antenne synthétique.
δy	: résolution transverse.
δx	: résolution radiale.
t	: temps.
f	: fréquence.
f_c	: fréquence centrale.
B	: bande fréquentielle émise.
c	: célérité de l'onde émise.
$p(t)$: impulsion émise par le radar.
$P(f)$: spectre de l'impulsion émise.
σ_i	: réflectivité du réflecteur $\#i$.
$\vec{k} = (k_x, k_y)$: vecteur d'onde.
$k = 2f/c$: module du vecteur d'onde.
$\vec{r} = (x, y)$: vecteur position.
u	: position du radar sur la trajectoire nominale rectiligne.
\mathcal{F}	: transformée de Fourier.
k_u	: variable duale de u par transformée de Fourier.
X_1	: distance de référence selon l'axe radial.
Y_1	: distance de référence selon l'axe transverse.
$\theta_1 = \arctan(Y_1/X_1)$: angle de squint.
Ψ_1	: angle de dépression.
$H(\vec{k})$: coefficient de rétrodiffusion.
$I(\vec{r})$: image SAR.

ϕ	: ondelette mère.
K_ϕ	: coefficient d'admissibilité sur l'ondelette mère ϕ .
$\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}$: ondelette générée à partir de l'ondelette mère.
$C(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$: coefficient d'ondelette.
$I(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$: hyperimage.
$\vec{s}(x, y)$: vecteur diffusion pour le pixel (x, y) .
$T(x, y)$: matrice de cohérence pour le pixel (x, y) .
$E(x, y)$: entropie pour le pixel (x, y) .
$\gamma(x, y)$: cohérence interférométrique pour le pixel (x, y) .

Table des matières

Notations	vii
Introduction générale	xv

Partie I État de l'art	1
------------------------	---

Chapitre 1

Principe de l'imagerie SAR

3

1.1	Modélisation du signal en radar	7
1.1.1	Présentation	7
1.1.2	Modélisation du signal écho	8
1.1.3	Reconstruction de l'image 1D	9
1.1.4	Résolution radiale	13
1.2	Modélisation du signal SAR	15
1.2.1	Modélisation du signal SAR en configuration 3D	15
1.2.2	Modélisation du signal SAR en configuration 2D	22
1.3	L'Algorithme RMA pour la reconstruction d'images	25
1.3.1	Phénomène de migration radiale	25
1.3.2	Les étapes de l'algorithme RMA	27
1.3.3	Détermination du support du spectre $H(k_x, k_y)$	28
1.3.4	Interpolation de Stolt	34
1.3.5	Résolutions radiale et transverse	37
1.3.6	Inversion exacte du modèle SAR par transformée de Hankel-Fourier	38

1.3.7	Reconstruction d'images en configuration 3D	41
1.4	Quelques exemples de construction d'images	46
1.4.1	Construction d'images à partir de signaux 2D simulés en bande X. . .	46
1.4.2	Un exemple d'image réelle obtenue par algorithme de formation d'images à l'ONERA	49
<hr/>		
Chapitre 2		
Théorie des distributions Temps-Fréquence		55
<hr/>		
2.1	Présentation de l'analyse temps-fréquence	55
2.2	Le concept bande étroite-bande large	56
2.2.1	Définition du signal analytique	56
2.2.2	Les signaux bande étroite	57
2.2.3	Signaux large bande	58
2.3	Construction de distributions bilinéaires	59
2.4	Représentation temps-fréquence des signaux bande étroite	60
2.4.1	La classe de Cohen	60
2.4.2	Une représentation t-f particulière : la distribution de Wigner-Ville . .	62
2.4.3	Le spectrogramme : une forme régularisée de la distribution de Wigner- Ville	64
2.5	Représentation temps-fréquence des signaux large bande	67
2.5.1	La classe de Bertrand	68
2.5.2	La distribution affine unitaire : une solution particulière de la classe de Bertrand	68
2.5.3	Le scalogramme : une forme régularisée de la distribution affine unitaire	70
2.6	Quelques exemples d'extension de l'analyse temps-fréquence aux signaux SAR	74
2.6.1	Spectrogramme sur signaux SAR bruts	74
2.6.2	Distribution de Wigner-Ville	76
2.6.3	Transformée de Fourier à Court Terme et Spectrogramme	76
2.6.4	Transformée en Ondelettes Continues et Scalogramme	78

Chapitre 3**Imagerie SAR par analyse en ondelettes****83**

3.1	Modèle des réflecteurs blancs et isotropes	83
3.2	Modèles des réflecteurs colorés et anisotropes	84
3.3	Notion d'hyperimage et groupe des similitudes	85
3.3.1	Notion de changement d'observateur et groupe des similitudes	86
3.4	Imagerie SAR par analyse en ondelettes continues	88
3.4.1	Procédé de construction des coefficients d'ondelettes	88
3.4.2	Propriétés de la transformée en ondelettes	89
3.4.3	Formation de l'hyperimage à partir des coefficients d'ondelette	89
3.5	Construction d'une hyperimage réelle	95
3.5.1	Paramètres SAR pour l'image étudiée	95
3.5.2	Paramètres de l'ondelette mère pour la construction de l'hyperimage	96
3.5.3	Illustration de l'hyperimage par interface i4d	99

Chapitre 4**L'analyse par ondelettes en imagerie SAR : un intérêt pour l'extraction d'objets****113**

4.1	Modèle GTD	115
4.2	Comparaison de répartitions d'énergie de différents réflecteurs d'une image.	116
4.2.1	Réflecteurs d'une image constituée d'un tuyau et d'un bâtiment.	116
4.2.2	Réflecteurs d'une image composée de deux cuves, une passerelle et un escalier.	134
4.2.3	Réflecteurs d'une image composée d'un bloc de bâtiments.	147
4.2.4	Premières conclusions	160
4.3	Algorithme d'extraction d'objets et résultats.	161
4.3.1	Algorithme d'extraction d'objets.	161
4.3.2	Résultats d'extraction d'objets.	162
4.3.3	Commentaires et conclusions du chapitre	197

Chapitre 5	
Polarimétrie et interférométrie par analyse en ondelettes continues	199
5.1 Analyse par ondelettes en polarimétrie	199
5.1.1 Rappels de polarimétrie	199
5.1.2 Introduction de l'analyse par ondelettes en polarimétrie	201
5.1.3 Amélioration du contraste de l'image d'entropie	202
5.2 Analyse par ondelettes en interférométrie	204
5.2.1 Phase interférométrique et hauteur de cible	204
5.2.2 Optimisation basée sur l'analyse par ondelettes	205
5.2.3 Combinaison de l'optimisation polarimétrique et par ondelettes	205
5.2.4 Carte d'élévation finale	212
Conclusion générale	215
Annexes du chapitre 1	
Annexe A Relation entre les spectres $P(f)$, $S(f)$ et $H_o(k_x)$	221
Annexe B Filtrage adapté pour la reconstruction de l'image de terrain	223
Annexe C Décomposition d'une onde cylindrique en ondes planes	225
Annexe D Reformulation du signal SAR 3D	233
Annexe E Reconstruction d'images par transformée de Hankel-Fourier	237
Annexes du chapitre 2	
Annexe F Effet doppler en bande large et étroite	245
F.1 Effet Doppler large bande	245
F.2 Approximation bande étroite	247
Annexe G Inégalité d'Heisenberg-Gabor	249
Annexe H Condition d'admissibilité sur l'ondelette-mère	253
Annexes du chapitre 3	
Annexe I Reconstruction du signal à partir de ses coefficients d'ondelette	257

Annexe J Formule d'isométrie	259
Annexe K Intégration de l'hyperimage dans le plan (x, y)	261
Annexe L Passage du domaine (k_x, k_y) au domaine (k, θ) par interpolation.	263
Annexes du chapitre 4	267
Annexe M Complément de résultats pour la première étude	269
Annexe N Complément de résultats pour la deuxième étude	273
Annexe O Complément de résultats pour la dernière étude	281
Bibliographie	291
Publications et travaux	295

Introduction générale

Il existe plusieurs techniques qui permettent d'obtenir l'image d'une large étendue à la surface de la terre. Deux gammes de fréquence sont principalement utilisées : la gamme optique et la gamme radio-électrique (voir figure 1). La gamme optique est utilisée pour obtenir des photos aériennes mais n'est utilisable que de jour et par beau temps. La gamme radio-électrique peut, quant à elle, être utilisée de jour comme de nuit et même par temps couvert puisque les nuages et dans une moindre mesure les précipitations sont transparents à cette gamme de fréquence.

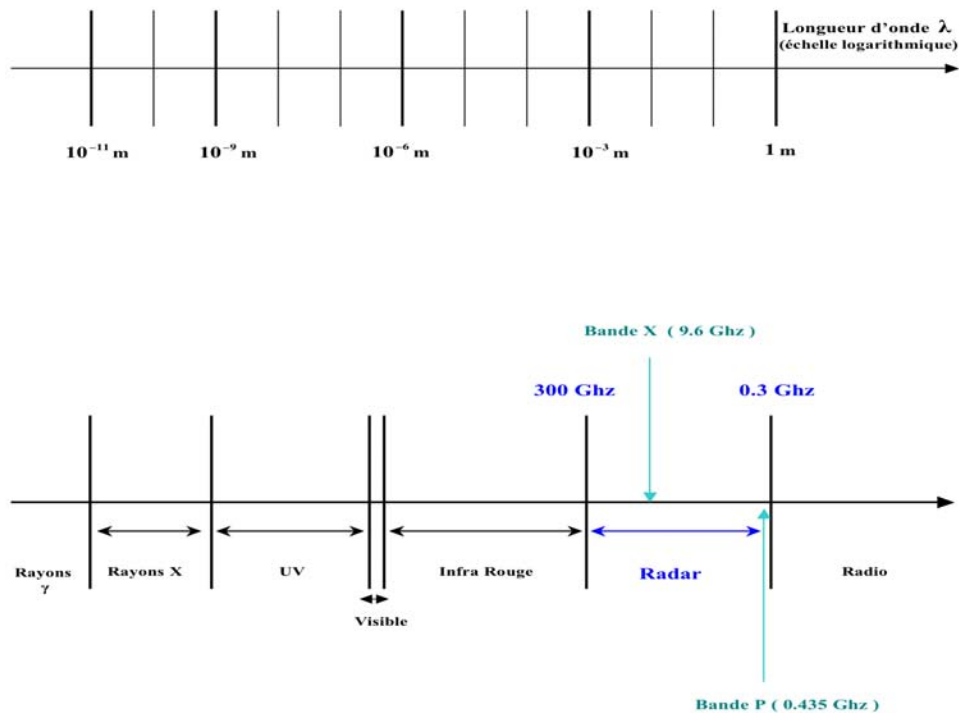


FIG. 1 – Spectre des fréquences des rayons Gamma aux ondes radio

Le mot RADAR de l'anglais "Radio Detection And Ranging" signifie détection et mesure des distances par ondes radio-électriques. L'imagerie RADAR permet la formation d'images par tous les temps et de jour comme de nuit. Elle apporte, entre autres, par rapport à l'imagerie optique, une information polarimétrique de chaque pixel de l'image. De plus, du fait que les signaux sont récoltés de manière cohérente, l'imagerie RADAR permet d'accéder à des informations interférométriques de l'image.

Les résolutions radiale et transverse des images sont respectivement proportionnelles à la bande fréquentielle d'émission et à la dimension de l'antenne radar. Pour améliorer la résolution transverse, on utilise le déplacement de l'antenne pour former une antenne *virtuelle* de plus grande dimension : ce procédé s'appelle Radar à Ouverture Synthétique (ROS en français et SAR en anglais) qui a, donc, pour objectif de former des images de haute résolution.

L'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA), développe d'ailleurs depuis la fin des années 80 des moyens expérimentaux d'imagerie SAR aéroportés pour des applications prospectives dans les domaines aussi bien militaire que civil. Un des piliers est le Radar d'Analyse Multispectrale d'Etude des Signatures (RAMSES) dont la mise en oeuvre est assez rapide pour permettre des campagnes de mesures thématiques très diverses.

Le principe de l'imagerie SAR consiste à illuminer une zone du sol avec le faisceau d'ondes électromagnétiques de l'antenne (voir figures 2, 3). Cette zone se compose d'une ou plusieurs cibles. Le faisceau de l'antenne est pointée vers la zone à imager, souvent dans une direction perpendiculaire à la trajectoire du porteur de l'antenne (mode non squinté). Alors que le porteur se déplace sur sa trajectoire de vol, l'antenne émet périodiquement des impulsions qui parviennent à l'ensemble des cibles présentes dans la zone illuminée. Une partie non-négligeable de chaque impulsion est alors réfléchi par les cibles puis interceptée par le radar. L'ensemble des données collectées par le radar va permettre d'établir l'image de terrain via un algorithme de reconstruction d'images.

En imagerie SAR, on fait l'hypothèse que la position du radar sur sa trajectoire de vol ainsi que la fréquence d'émission n'influent pas sur la réflectivité de chaque réflecteur de la zone imagée. Autrement dit, on suppose que la réflectivité de chaque réflecteur varie très peu dans l'excursion angulaire du lobe d'antenne radar ainsi que dans la gamme de fréquences émise.

Or, cette hypothèse est peut être à remettre en cause avec l'émergence de nouvelles techniques d'imagerie dites Très Haute Résolution (THR) qui travaillent avec un signal d'émission *large bande* et sur un déplacement important du radar (grande ouverture synthétique). Ainsi, un réflecteur dont la réponse varie dans la bande fréquentielle est dit *coloré* ; si cette réponse dépend de la direction d'éclairement de l'antenne, le réflecteur est dit *anisotrope*.

Cette thèse propose de mettre en lumière ces phénomènes de *coloration* et d'*anisotropie* à l'aide des méthodes *temps-fréquence* qui permettent une *analyse locale* du signal. Parmi les méthodes temps-fréquence, on étudiera, tout particulièrement, l'*analyse par ondelettes continues* que l'on appliquera à l'imagerie SAR pour mettre en évidence ces phénomènes physiques.

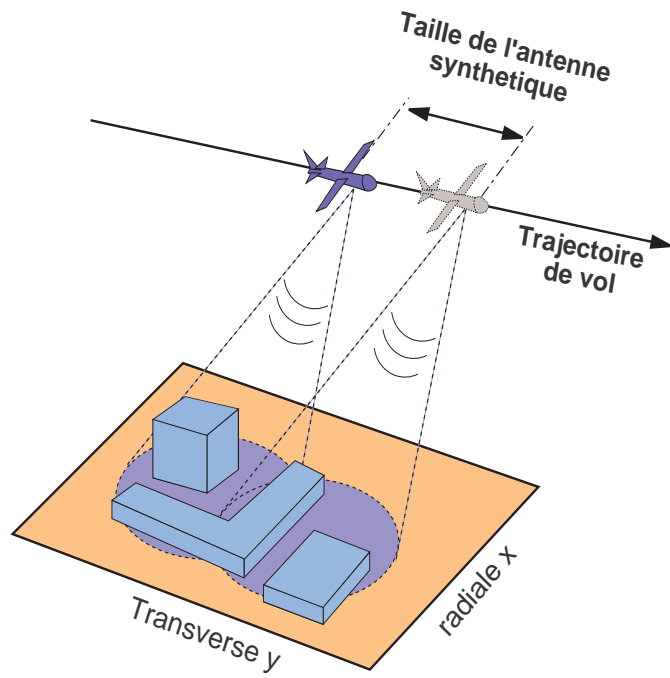


FIG. 2 – Géométrie SAR en mode stripmap.

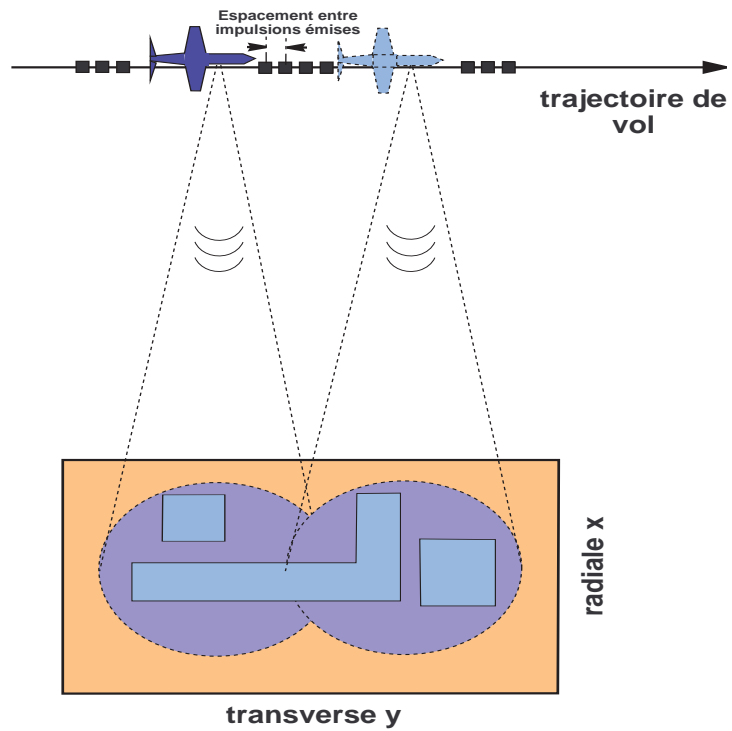


FIG. 3 – Géométrie SAR en mode stripmap (Vue de dessus).

Un premier travail a été effectué sur le thème *Imagerie Radar Par Analyse en Ondelettes*¹. Ce travail avait montré que décomposer le signal SAR réel en ondelettes continues permettait, effectivement de mettre en lumière ces phénomènes de coloration et d'anisotropie des réflecteurs. Néanmoins, la procédure informatique pour appliquer l'analyse en ondelettes était fastidieuse.

Par conséquent, notre principale préoccupation dans cette thèse, était de mettre en lumière d'éventuels phénomènes de coloration et d'anisotropie des réflecteurs dans les images SAR réelles ; et ce, en concevant un algorithme qui réalise la décomposition du signal SAR en ondelettes continues, si possible, dans un moindre coût en termes de temps de calcul afin d'analyser un nombre convenable d'images SAR en un temps raisonnable.

La seconde problématique consistait à s'intéresser à cette extraction des caractéristiques physiques des réflecteurs afin d'améliorer la reconnaissance et l'identification des cibles réelles.

Le manuscrit, qui va tenter de répondre à ces deux problématiques, se présente de la manière suivante :

- Un état de l'art est effectué à travers les deux premiers chapitres :
 - Le premier chapitre présente le principe de l'imagerie SAR : modélisation du signal SAR, inversion du modèle du signal SAR et algorithmes de reconstruction d'images.
 - Le deuxième chapitre fait quelques rappels sur l'analyse temps- fréquence. Il présente la classe de Cohen et la classe de Bertrand répertoriant respectivement les représentations temps-fréquence des signaux bande étroite et large bande. Ce chapitre a été l'occasion de rappeler certaines propriétés du *scalogramme* (module au carré de la transformée en ondelettes) : il appartient à la classe de Bertrand, il définit une distribution d'énergie dans le plan temps-fréquence puisqu'il est positive, respecte l'*inégalité d'Heisenberg* et ne vérifie pas la propriété dite de *marginalisation*.
- L'analyse par ondelettes en imagerie SAR est traitée dans les chapitres 3 et 4 ainsi que dans le chapitre 5 :
 - Le chapitre 3 détaille la procédure de construction d'une famille d'ondelettes pour analyser le signal SAR ainsi que l'implantation informatique de la transformée en ondelettes.
 - Le quatrième chapitre est exclusivement expérimental dans la mesure où il présente des résultats d'extraction de caractéristiques physiques des réflecteurs dans une image SAR grâce à l'analyse en ondelettes. Ce chapitre propose, notamment, d'exploiter ces caractéristiques pour discriminer un objet parmi d'autres, dans une image SAR.
 - Enfin le chapitre 5 est consacré à l'analyse par ondelettes en polarimétrie et en interférométrie. Plus précisément, on verra la contribution de l'analyse par ondelettes en polarimétrie pour séparer les cibles aléatoires des cibles déterministes ainsi qu'en interférométrie pour estimer la hauteur des cibles.

¹J.C. Castelli, J.P. Ovarlez, E. Thoumie, L. Vignaud, Imagerie SAR par analyse en ondelettes, *Rapport d'activités ONERA, Branche Physique, 2000.*

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Principe de l'imagerie SAR

En radar, l'angle d'ouverture $\delta\theta$ (voir figure 1.1) est inversement proportionnel à la dimension D de l'antenne [Jak97] :

$$\delta\theta = \lambda/D$$

où λ est la longueur d'onde du rayonnement émis par l'antenne radar.

Par conséquent, la zone éclairée à la distance R du radar aura une étendue transverse δy telle que :

$$\begin{aligned}\delta y &\approx R\delta\theta \\ &= (R\lambda)/D\end{aligned}\tag{1.1}$$

Cette étendue δy définit le pouvoir de résolution transverse (aptitude à séparer deux réflecteurs en distance sur l'axe transverse) : ce pouvoir de résolution transverse sera d'autant meilleur que l'étendue δy sera petite. D'après (1.1), δy est inversement proportionnelle à la dimension D de l'antenne : par conséquent, pour une distance R donnée, plus la dimension D de l'antenne sera grande, plus la résolution transverse sera bonne.

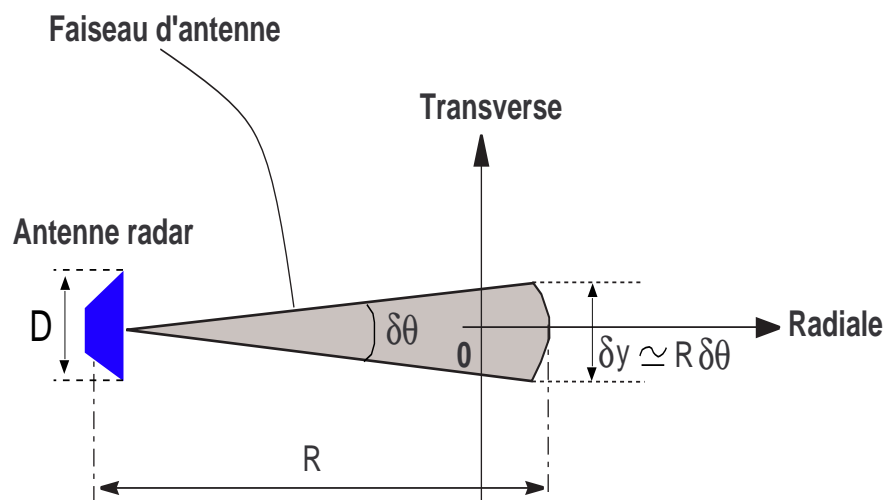


FIG. 1.1 – Le pouvoir de résolution transverse est proportionnel à la dimension D de l'antenne.

Supposons, par exemple, un rayonnement émis de longueur d'onde $\lambda = 0.03$ m et une distance antenne-cible $R = 4000$ m. Avec ces paramètres, pour obtenir une résolution transverse $\delta_y = 25$, il faut que l'antenne physique soit de dimension :

$$D = \lambda R / \delta_y = (0.03 * 4000) / 0.25 = 480 \text{ m},$$

ce qui est bien sûr non réalisable en pratique.

Les systèmes radar embarqués sur des objets mobiles (avion, satellite, etc, ...) créent, en se déplaçant, une antenne (dite *synthétique*) de plus grande dimension par rapport à l'antenne réelle. Ces systèmes appelés SAR (**S**ynthetic **A**perture **R**adar) en anglais et ROS (**R**adar à **O**uverture **S**ynthétique) en français, permettent alors d'améliorer la résolution transverse, et donc d'obtenir des images de meilleure qualité.

Le principe de l'imagerie SAR consiste à illuminer une zone du sol avec le faisceau d'ondes électromagnétiques de l'antenne physique. Cette zone se compose d'une ou plusieurs cibles. Le faisceau de l'antenne est pointé vers la zone à imager. L'axe antenne-cible constitue l'axe *radial* tandis que la direction de vol définit l'axe *transverse* (ou *azimutal*). Alors que le porteur circule sur sa trajectoire de vol, l'antenne émet périodiquement des impulsions se propageant à l'ensemble des cibles présentes dans la zone illuminée (voir figure 1.2). Une partie non-négligeable d'énergie de chaque impulsion est alors rétrodiffusée par ces cibles vers le radar. Toutes les données ainsi collectées par le radar permettent de reconstituer l'image à haute résolution de la zone imagée.

Parmi les modes d'acquisition des données SAR, on distingue (voir figure 1.3) :

- Le mode **stripmap** : l'antenne radar garde la même direction de pointage tout au long du trajet de vol. Ce mode permet de former des images de grande dimension transverse. C'est, d'ailleurs, le mode principal d'acquisition des données SAR à l'ONERA.
- Le mode **spotlight**, assez récent : l'antenne éclaire toujours la même zone du sol à mesure que l'avion se déplace. Ce procédé a pour objectif d'obtenir des images de meilleure qualité que celles obtenues à partir du mode stripmap [Jak97], c'est à dire de meilleure résolution transverse puisque l'ouverture angulaire en azimut $\Delta\theta$ est plus importante².

Les données SAR, à l'ONERA, sont acquises en mode stripmap. Un exemple de radar, développé au département DEMR depuis la fin des années 80, est le **R**adar d'**A**nalyse **M**ulti**S**pectrale et d'**E**tudes de **S**ignatures (RAMSES) [Bou96]. RAMSES est installé à bord d'un transall C260 (voir figure 1.4). Il subit depuis sa création de constantes évolutions afin d'améliorer ses performances et donc la qualité des images produites par l'ONERA. Sa version actuelle est totalement polarimétrique et multispectrale incluant les bandes de fréquences mentionnées dans le tableau 1.1.

²En effet, on verra dans ce manuscrit que la résolution transverse est proportionnelle au secteur angulaire azimutal d'illumination : l'angle azimutal est l'angle (décrit dans le plan de l'image) sous lequel est vue la cible.

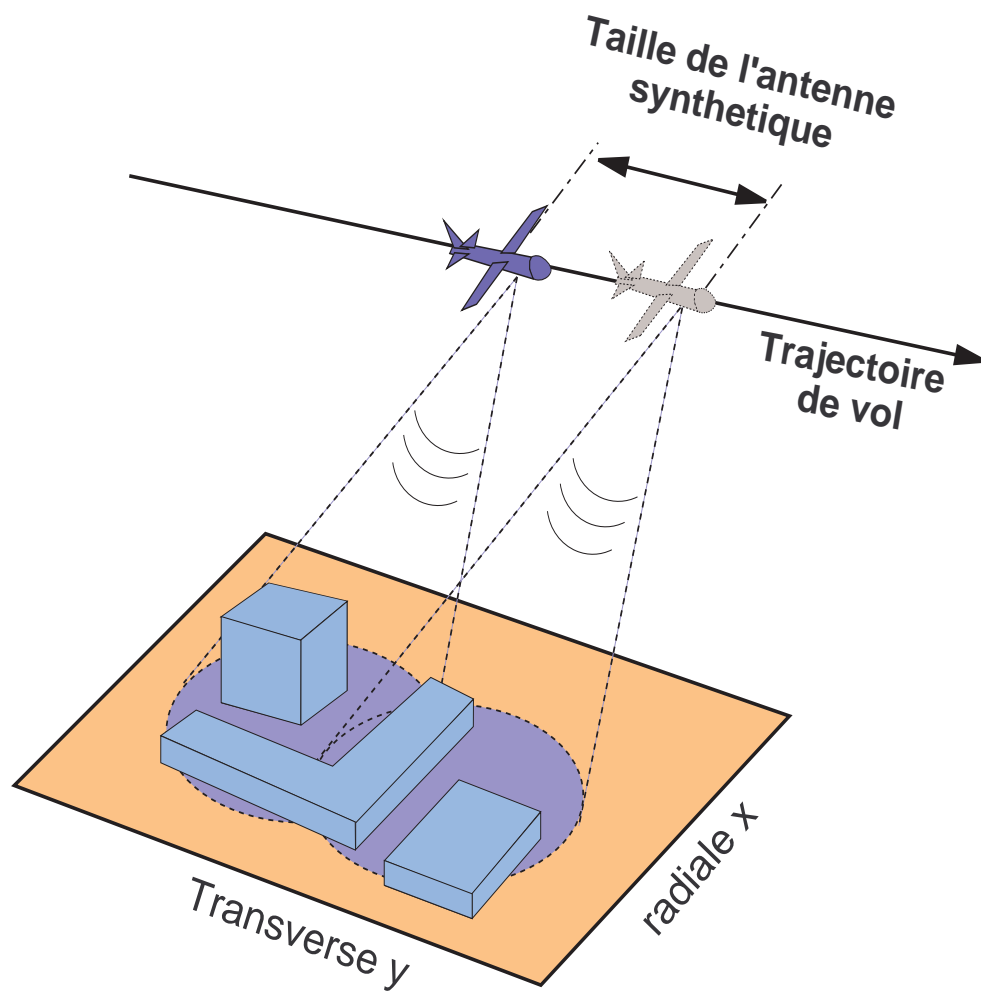


FIG. 1.2 – Imagerie SAR (mode stripmap).

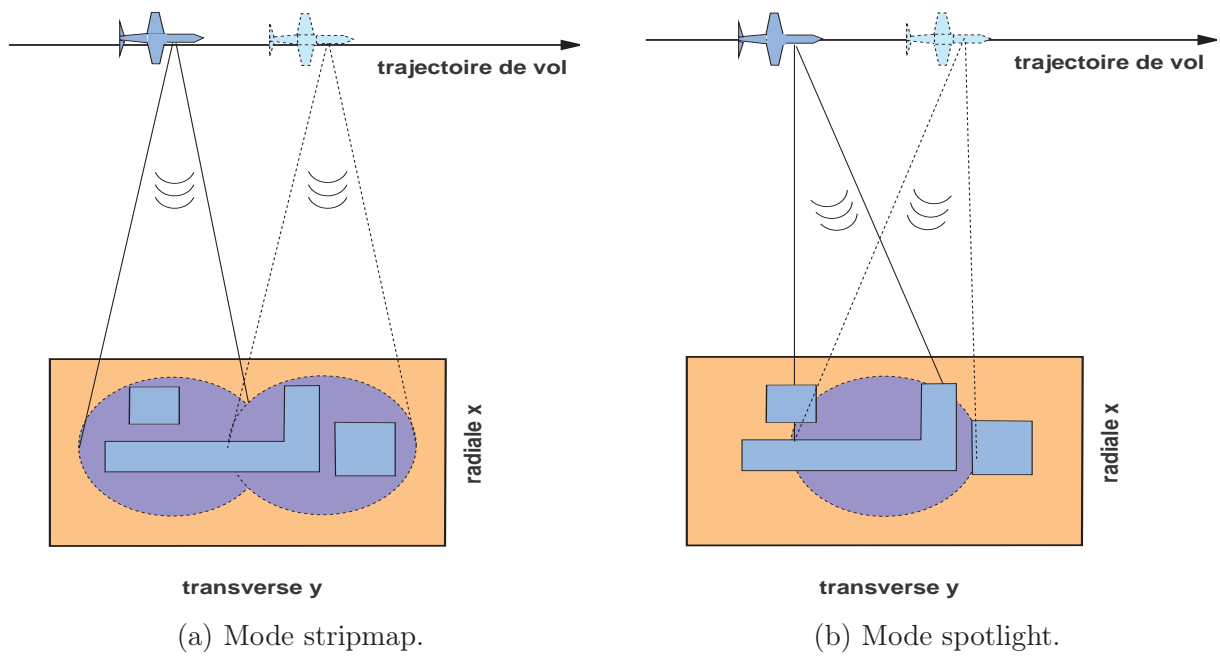


FIG. 1.3 – Stripmap et spotlight : deux modes d'acquisitions différents.



FIG. 1.4 – Le transall C260 transportant le radar RAMSES.

Bande	Fréquence centrale (GHz)	Bande émise (MHz)	Polarisation
P	0.435	70	full ^a
L	1.3	200	full
S	3.2	300	full
C	5.3	300	full
X	9.6	1200	full
Ku	14.3	1200	full
Ka	35	1200	V _v ^b
W	95	500	LR,LL ^c

^asignifie toutes les configurations polarimétriques possibles : polarisation horizontale (H) ou verticale (V) en émission, polarisation horizontale (h) ou verticale (v) en réception.

^bPolarisation verticale en émission et en réception

^cLR : l'extrémité du champ électrique circule vers la gauche en émission et vers la droite en réception.

TAB. 1.1 – Les bandes de fréquences intégrées à RAMSES.

1.1 Modélisation du signal en radar

Avant de décrire le modèle du signal SAR en mode stripmap, il convient de rappeler comment peut être modélisé le signal radar monodimensionnel d'une manière générale.

1.1.1 Présentation

Le modèle suppose une scène composée de n réflecteurs indépendants. On peut imaginer, par exemple, que ces réflecteurs appartiennent à une même cible. Le milieu ambiant est l'air, supposé homogène.

Chaque réflecteur est caractérisé par son coefficient de réflexion σ_i (qui dépend des propriétés physiques du réflecteur telles que la conductivité, la permittivité ou la rugosité) et de sa coordonnée radiale x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Un exemple de modèle de cible est donné en figure 1.5. Ce modèle est conforme au problème de l'imagerie radar où la cible peut être considérée comme une collection de réflecteurs sur sa surface.

Un radar localisé en $x = 0$ illumine la zone où se situe la cible. Le radar émet une impulsion $p(t)$ dont la durée T est, en général, plus courte que le temps mis par le signal pour revenir au radar.

On considère que le récepteur et l'émetteur sont situés à la même coordonnée : on dit alors que le système est **monostatique**. Ce sera d'ailleurs l'hypothèse retenue dans notre modélisation en imagerie SAR puisque l'acquisition des données SAR réelles, dans notre cas, sera faite à partir d'un tel système.

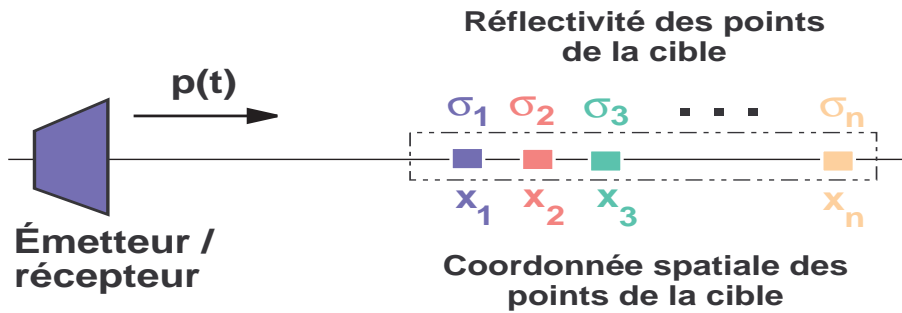


FIG. 1.5 – Géométrie en imagerie 1D

1.1.2 Modélisation du signal écho

Le signal émis $p(t)$ atteint le premier point de la cible au temps $t_1 = x_1/c$, où c est la vitesse de la lumière. Ainsi, le signal qui atteint ce premier point s'exprime par : $p(t - t_1)$. Après réflexion, comme le montre la figure 1.6, le signal $\sigma_1 p(t - t_1)$ revient vers le récepteur et arrive en $x = 0$, t_1 secondes plus tard. Le récepteur enregistre donc le signal $s_1(t) = \sigma_1 p(t - 2t_1)$. La composante non-réfléchi par ce premier réflecteur (et parvenant au second point) est supposée négligeable. D'une manière générale, on néglige les couplages entre réflecteurs.

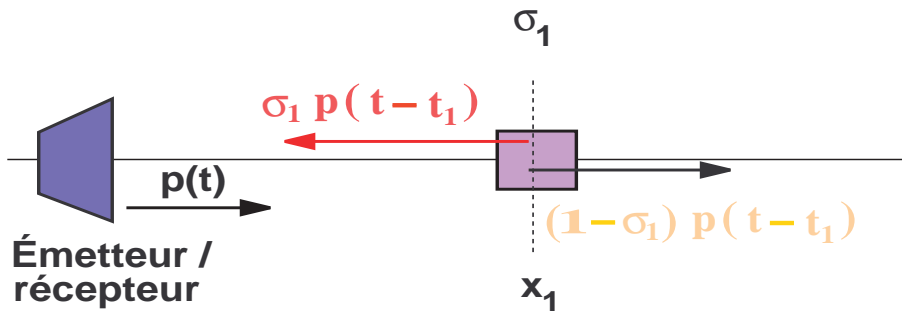


FIG. 1.6 – Signal renvoyé par un réflecteur

Ainsi, le récepteur enregistre le signal $s(t)$ correspondant à la somme des signaux renvoyés par l'ensemble des réflecteurs de la cible :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{i=1}^n s_i(t) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i p(t - 2t_i) \quad (1.2) \\
 \text{où } t_i &= x_i/c.
 \end{aligned}$$

1.1.3 Reconstruction de l'image 1D

Le principe de l'imagerie est de localiser les réflecteurs à partir de la mesure du signal $s(t)$ dans le but d'identifier la ou les cibles de la scène illuminée. Pour ce faire, on réécrit le modèle du système en (1.2) en introduisant le produit de convolution :

$$s(t) = p(t) * [(c/2) I_o(ct/2)] \quad (1.3)$$

$$\text{où } I_o(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i) \quad , \text{ avec } x = ct/2. \quad (1.4)$$

$I_o(x)$ est l'image 1D qui fournit la répartition spatiale des réflecteurs : elle s'exprime idéalement comme une somme de distributions de Dirac localisées aux coordonnées des réflecteurs et d'amplitude égale au coefficient de réflexion respectif de ces réflecteurs (figure 1.8).

Notre but est de reconstituer l'image $I_o(x)$ à partir du signal observé $s(t)$. La procédure est, alors, de *déconvoluer* le modèle (1.3). Cette déconvolution ou *inversion* du modèle est effectuée en quelques étapes :

- La première étape consiste à appliquer la transformée de Fourier temporelle à chaque membre de l'équation (1.3). Le modèle réécrit en fréquence se définit par³ :

$$S(f) = P(f) \cdot H_o(k_x) \quad (1.5)$$

$$\text{où } H_o(k_x) = \mathcal{F}_{x \rightarrow k_x} [I_o(x)]$$

avec f et $k_x = 2f/c$ les fréquences temporelle et spatiale.

- Ensuite, comme conséquence de la première étape, le spectre $H_o(k_x)$ de l'image $I_o(x)$ peut être calculé comme suit :

$$H_o(k_x) = S(f)/P(f) \quad (1.6)$$

à condition que le spectre d'émission $P(f)$ soit à bande infinie avec toutes ses composantes non nulles⁴.

Le spectre $H_o(k_x)$ s'explicite, en appliquant la transformée de Fourier temporelle à chaque

³On pourra se reporter à l'annexe A pour la démonstration de la relation (1.5).

⁴Il est évident que cette procédure n'est pas possible en pratique puisque le spectre réel d'émission peut prendre des valeurs nulles. Il s'agit, ici, simplement d'expliquer la procédure d'inversion. En pratique, il est courant d'utiliser le *filtrage adapté* suivant : $H_M(k_x) = P^*(f) S(f) = |P(f)|^2 H_o(k_x)$. Cette procédure est détaillée en annexe B dans le cas de l'imagerie 2D.

membre de l'équation (1.2) :

$$\begin{aligned}
 H_o(k_x) &= S(f)/P(f) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \exp[-j2\pi f(2x_i/c)] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \exp[-j2\pi k_x x_i]
 \end{aligned}$$

- La distribution spatiale des réflecteurs $I_o(x)$ est alors reconstruite par simple transformation de Fourier inverse appliquée au spectre $H_o(k_x)$:

$$\begin{aligned}
 I_o(x) &= \mathcal{F}_{k_x \rightarrow x}^{-1} [H_o(k_x)] \quad (1.7) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i)
 \end{aligned}$$

En pratique, le spectre d'émission $P(f)$ est centré autour d'une fréquence f_c et de largeur Δf (voir figure 1.7) :

$$P(f) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } f \in [f_c - \Delta f/2, f_c + \Delta f/2], \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.8)$$

On représente, sur la figure 1.7, un spectre d'émission à bande limitée et centré autour de la fréquence porteuse f_c .

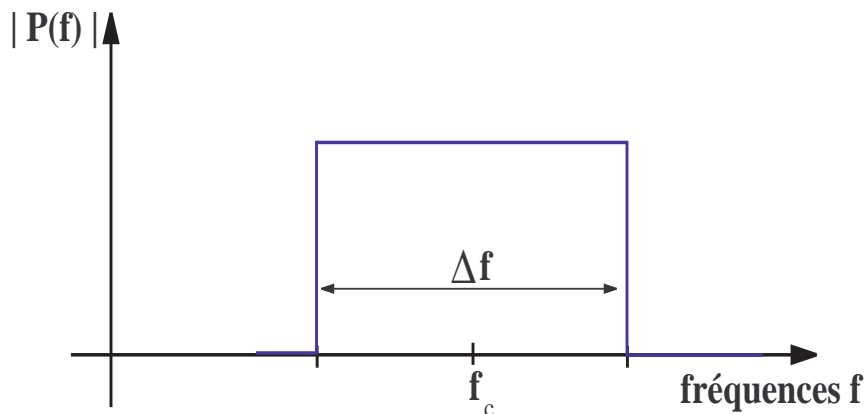


FIG. 1.7 – Signal d'émission à bande fréquentielle limitée.

Le spectre $H(k_x)$ de l'image ne peut plus être obtenu par la formule d'inversion (1.6), mais déterminé par⁵ :

$$H(k_x) = \begin{cases} S(f)/P(f) & \text{si } k_x \in [k_c - \Delta k/2, k_c + \Delta k/2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\Delta k = 2\Delta f/c$ et $k_c = 2f_c/c$

Par conséquent, l'image $I(x)$, s'explique par :

$$\begin{aligned} I(x) &= \mathcal{F}_{k_x \rightarrow x}^{-1} [H(k_x)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \Delta k \operatorname{sinc} [\pi \Delta k (x - x_i)] \exp [+j2\pi k_c (x - x_i)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Remarque :

L'image $I(x)$ tend asymptotiquement vers $I_o(x)$ lorsque la bande fréquentielle transmise Δk tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta k \rightarrow +\infty} I(x) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\lim_{\Delta k \rightarrow +\infty} \Delta k \operatorname{sinc} [\Delta k (x - x_i)] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i) \\ &= I_o(x) \end{aligned}$$

En effet, la fonction dirac $\delta(x)$ peut être obtenue au sens de la *convergence faible* [Mal98] à partir de toute fonction $g(x)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$ (ce qui est le cas pour la fonction *sinus cardinal*) comme suit :

$$\delta(x) = \lim_{s \rightarrow 0} [(1/s) g(x/s)].$$

La figure 1.8 montre la distribution spatiale d'une collection de réflecteurs localisés dans une zone $X = [X_1 - X_o, X_1 + X_o]$. Cette distribution spatiale est donnée dans le cas d'un signal d'émission à bande infinie et limitée. Dans les deux cas, la distribution donne la position et le niveau de réflectivité des diffuseurs.

⁵En reprenant la remarque faite sur la formule d'inversion (1.6) on utilisera plutôt le *filtrage adapté* en pratique : $H_M(k_x) = P^*(f) S(f) = |P(f)|^2 H_o(k_x)$.

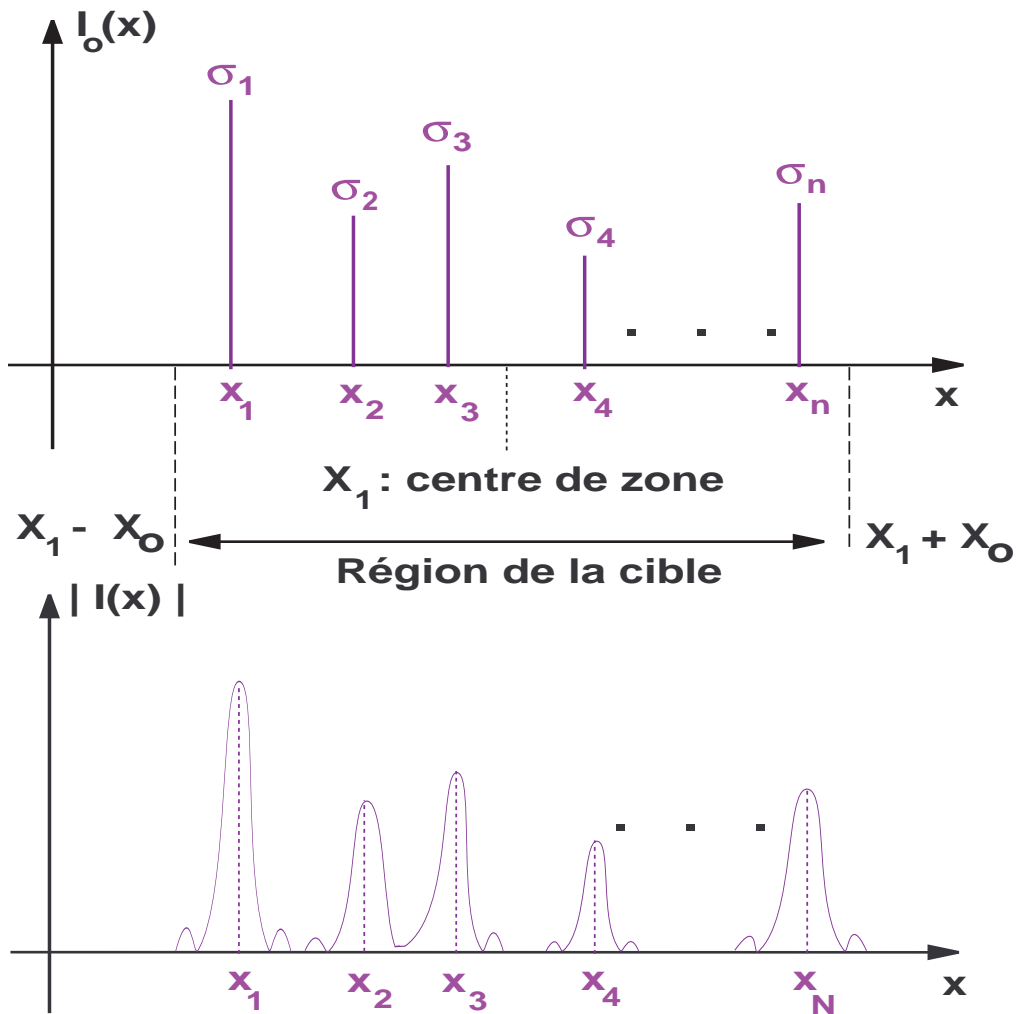


FIG. 1.8 – Distribution spatiale des réflecteurs dans le cas d'un signal d'émission à bande infinie (au dessus) et à bande limitée (au dessous).

1.1.4 Résolution radiale

Le pouvoir de résolution en radar est défini comme l'*aptitude à séparer en distance 2 réflecteurs*. Le pouvoir de résolution radiale est directement proportionnel à la bande B émise par le radar.

En effet, supposons un réflecteur localisé en $x = 0$ et de réponse impulsionnelle $R(x)$ comme le montre la figure 1.9. La distance δx représente la distance en dessous de laquelle deux réflecteurs ne peuvent plus être résolus, c'est à dire ne sont plus séparés en distance. Cette distance est définie, au sens de *Rayleigh*, comme la largeur à -3 dB du lobe principal de la puissance $|R(x)|^2$. Si l'on note B la largeur du spectre d'émission à -3 dB et $\Delta k = 2B/c$, on a la relation suivante [Bar88, Weh95] :

$$\delta x \Delta k \approx 1 \quad (1.11)$$

Par conséquent, la distance δx est inversement proportionnelle à la bande émise B :

$$\delta x = c/(2B) \quad (1.12)$$

Autrement dit, plus la bande d'émission sera grande, meilleure sera la résolution des réflecteurs⁶ sur l'axe radial.

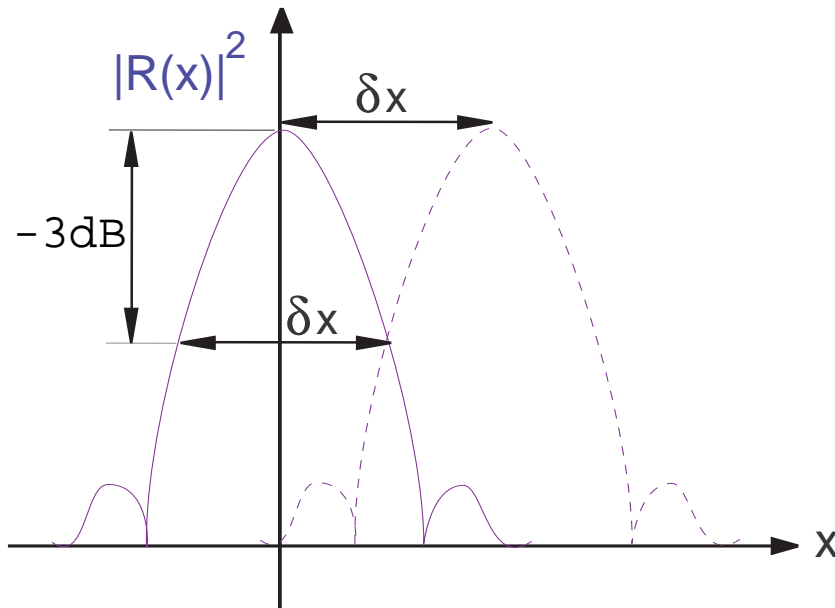


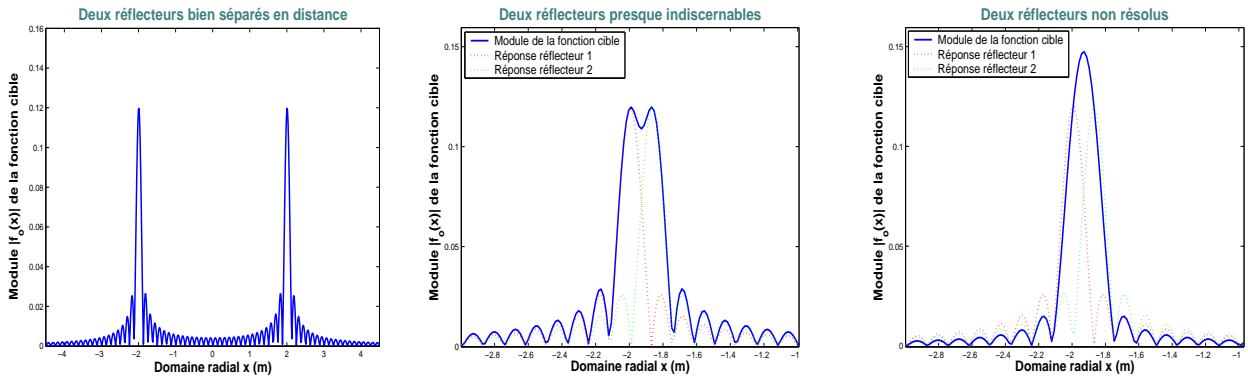
FIG. 1.9 – Définition de la résolution distance.

⁶À condition que ces réflecteurs soient *blancs*, c'est à dire qu'ils renvoient de l'énergie dans toute la bande fréquentielle émise.

• Simulation à 2 réflecteurs en bande X

On montre en figure 1.10, une série de simulations décrivant le pouvoir de résolution pour une bande d'émission B donnée. La largeur de bande est $B = 1.2$ GHz et la fréquence centrale est $f_c = 9.5$ GHz (Bande X).

D'après (1.12), deux réflecteurs sont résolus si la distance qui les sépare est supérieure à $c/2B = 12.5$ cm (voir figures 1.10 (a) et (b)). Dans le cas contraire, ils seront indiscernables (voir figure 1.10 (c)).



(a) Distance réflecteurs : 4 m (b) Distance réflecteurs : 13 cm (c) Distance réflecteurs : 12.5 cm.

FIG. 1.10 – Lorsque la distance séparant les 2 points est inférieure à $\delta x = 12.5$ cm : les points ne sont pas résolus.

1.2 Modélisation du signal SAR

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment est modélisé le signal SAR. On entend par signal SAR, le signal collecté par le radar au cours de son déplacement. Le système retenu est monostatique⁷ : l'émetteur et le récepteur radar ont la même localisation spatiale. Le mode stripmap étant le mode principal d'acquisition du signal SAR à l'ONERA, il sera retenu pour la modélisation du signal.

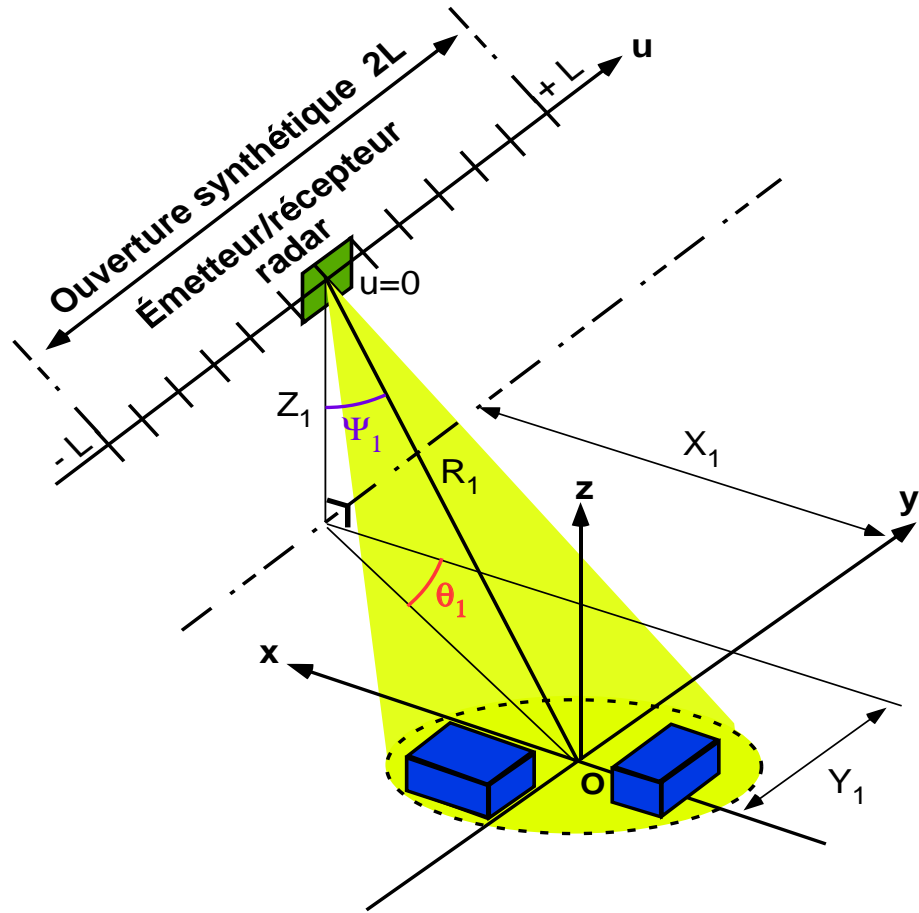
Dans un premier temps, nous développons le modèle du signal SAR en configuration 3D (géométrie réelle). Par la suite, nous nous limiterons à la modélisation 2D du signal SAR pour introduire l'algorithme RMA qui permet de reconstruire mathématiquement l'image des réflecteurs à partir du signal SAR 2D.

1.2.1 Modélisation du signal SAR en configuration 3D

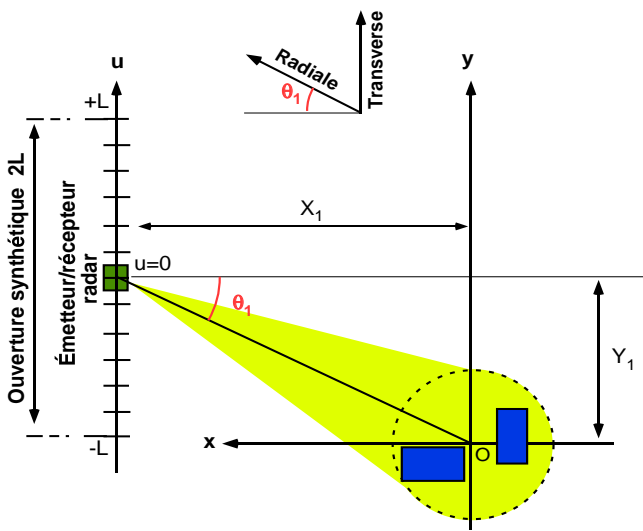
Pour développer la modélisation du signal SAR 3D, nous nous appuyons sur les figures 1.11 et 1.12 en posant les hypothèses suivantes :

- Le radar se déplace suivant une direction parallèle à l'axe transverse y et parcourt une distance $D = 2L$.
- En milieu de parcours, le radar est à une distance $R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$ par rapport au centre O de la zone imagée ; X_1 est la distance séparant le radar et le point O selon l'axe x , Y_1 la distance séparant le radar et le point O selon l'axe y et Z_1 l'altitude à laquelle circule l'avion. On supposera que, X_1 , Y_1 et Z_1 et à fortiori R_1 sont constantes dans tout le parcours de vol : elles constituent, donc, des distances de *référence* (voir figures 1.11 (a) et (b)).
- L'antenne pointe dans une direction $\theta_1 = \arctan(Y_1/X_1)$ par rapport à la trajectoire de vol dans le plan (x, y) : ce cas de figure général, correspond en fait au mode dit *squint* de l'antenne (voir figures 1.11 (a) et (b)) ; l'angle θ_1 est d'ailleurs appelé *angle de squint*. Le mode *non-squint* correspond au cas particulier où l'antenne pointe dans une direction perpendiculaire à la trajectoire de l'avion (voir figures 1.13 (a) et (b)).
- L'angle Ψ_1 sous lequel est vue la cible par rapport à l'horizontale et dans le plan z -radial est appelé *angle de dépression* (voir figure 1.11 (c) pour le mode squint et figure 1.13 (c) pour le mode non-squint)
- La position du porteur de l'antenne radar, sur sa trajectoire de vol, est caractérisée par la variable u . Cette variable u prend ces valeurs dans l'intervalle $[-L, +L]$. Pour chaque position de l'antenne, le radar émet une impulsion et reçoit une somme des signaux échos provenant des points de la cible (voir figure 1.12). On suppose que l'avion, porteur du radar, n'a pas changé de position sur sa trajectoire, entre le moment où l'antenne a émis une impulsion et le moment où elle reçoit les signaux échos correspondants : cette hypothèse se justifie par le fait que l'avion a une vitesse très petite devant la vitesse de propagation des ondes.

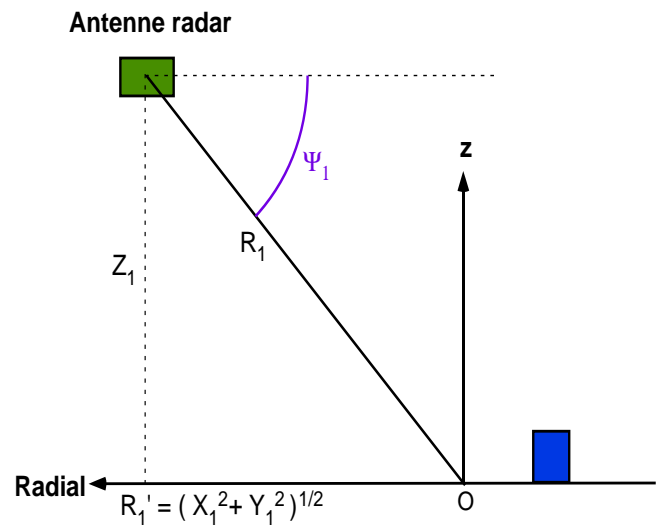
⁷Par opposition au système *bistatique* où l'émetteur et le récepteur sont à des coordonnées spatiales différentes.



(a) Géométrie 3D du SAR stripmap squinté.

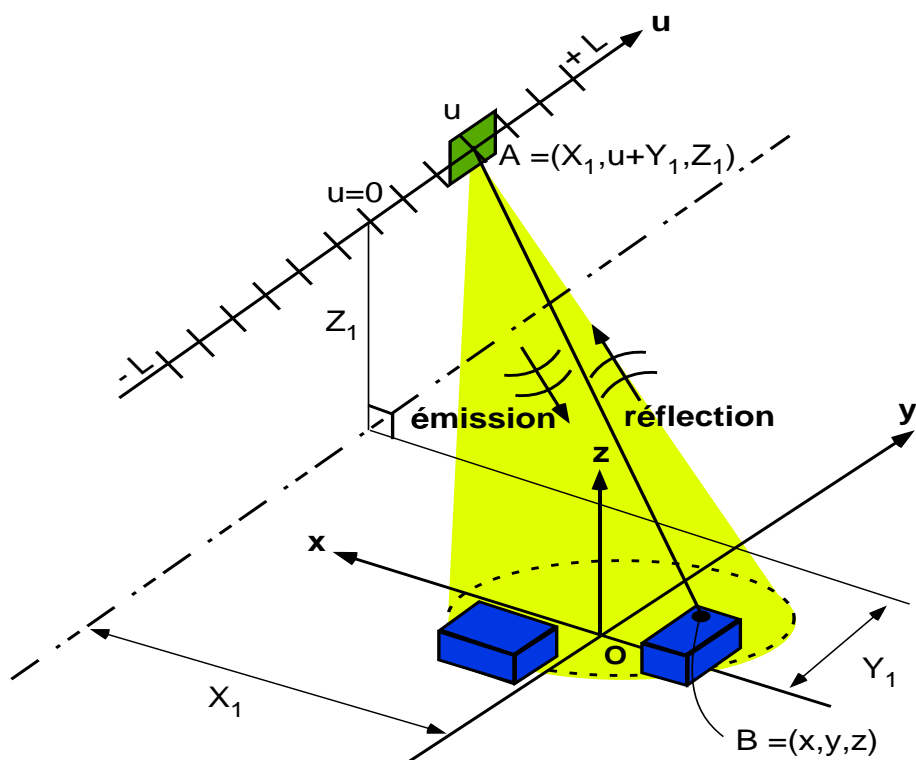


(b) Vue de dessus et angle de squint θ_1

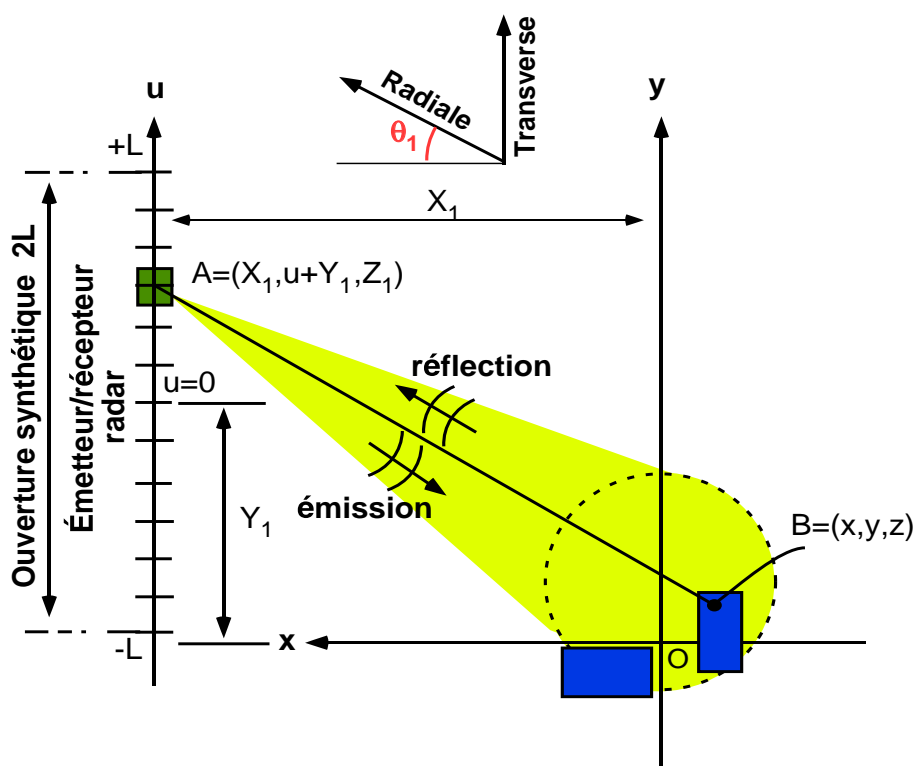


(c) Coupe dans le plan radial-z et angle de dépression Ψ_1 .

FIG. 1.11 – Imagerie SAR stripmap mode squint en configuration 3D.

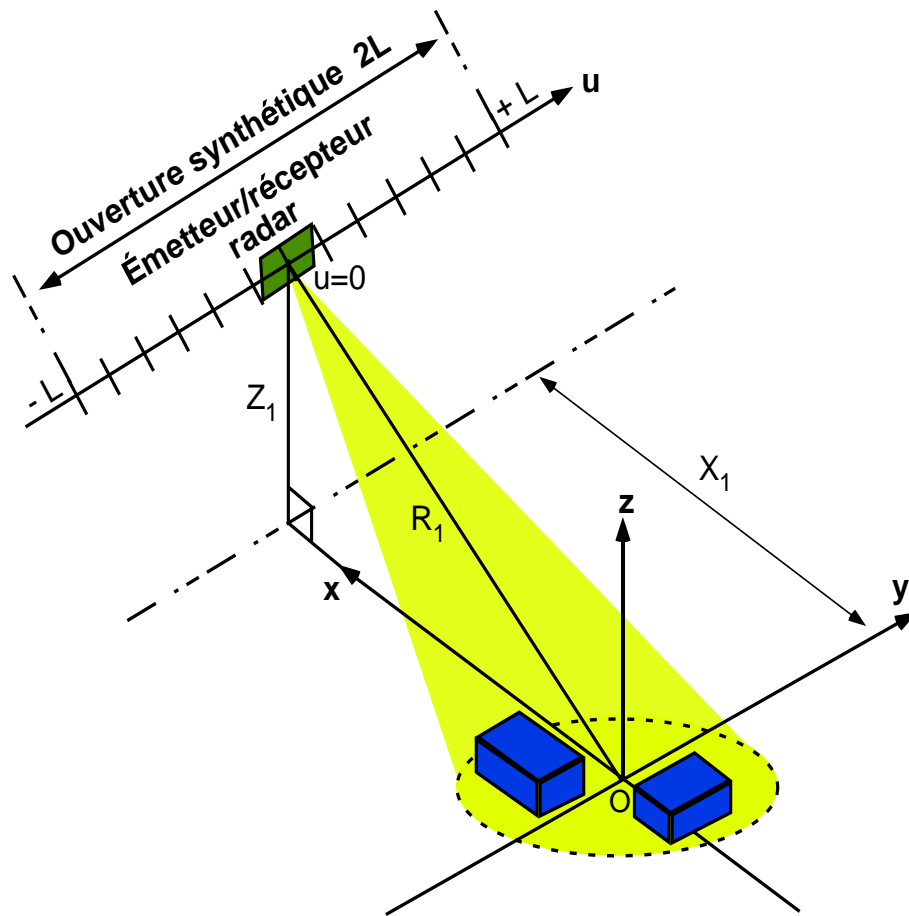


(a) Acquisition du signal SAR 3D.

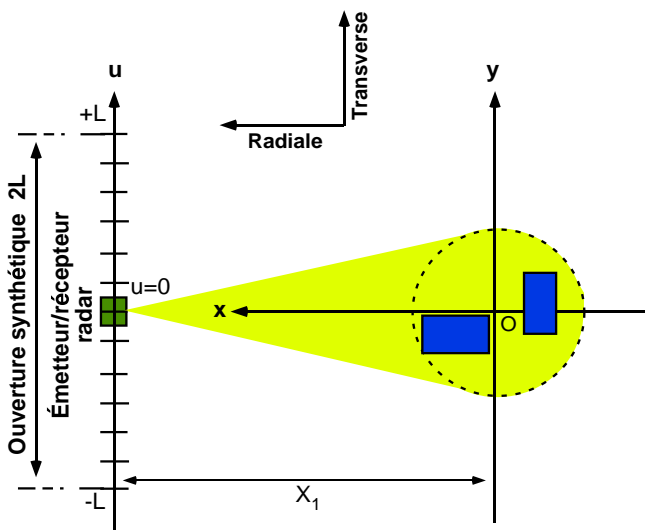


(b) Acquisition du signal SAR 3D stripmap squint (vue de dessus).

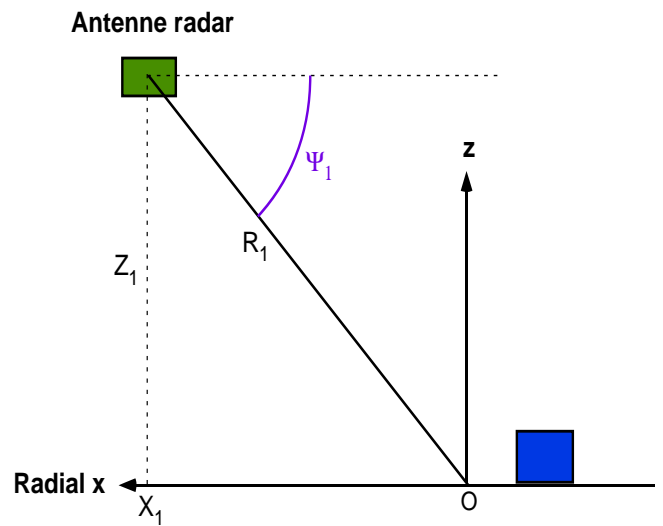
FIG. 1.12 – Acquisition du signal SAR 3D en mode stripmap squint.



(a) Géométrie 3D du SAR stripmap non squinté.

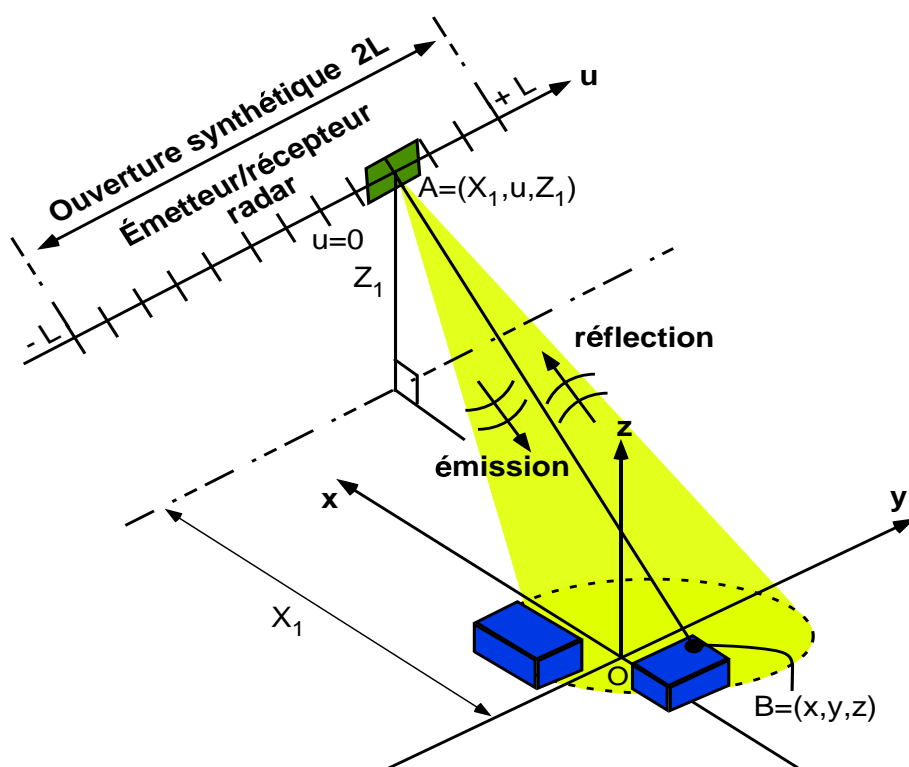


(b) Vue de dessus

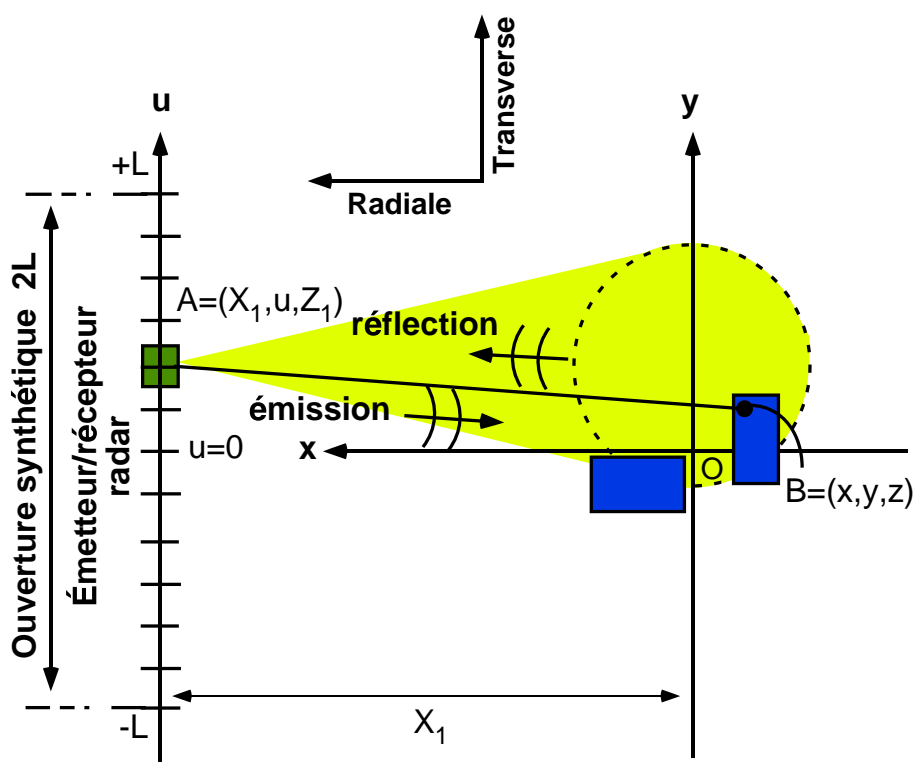


(c) Coupe dans le plan x-z et angle de dépression Ψ_1 .

FIG. 1.13 – Imagerie SAR stripmap mode non squint en configuration 3D.



(a) Acquisition du signal SAR 3D stripmap non squint.



(b) Acquisition du signal SAR 3D stripmap squint (vue de dessus).

FIG. 1.14 – Acquisition du signal SAR 3D en mode stripmap non squinté.

Pour chaque position u de l'antenne, le radar émet une impulsion $p(t)$ et reçoit le signal $p_r(t, u)$ correspondant à la somme des signaux échos provenant des points de la cible. Ces signaux échos sont des répliques retardées du signal émis.

Le retard qu'accuse un signal écho provenant d'un réflecteur positionné en $B = (x, y, z)$ est fonction de la distance antenne-réflecteur. Lorsque l'antenne est à une position u sur sa trajectoire, ses coordonnées dans le repère (x, y, z) sont $(X_1, u + Y_1, Z_1)$. En assimilant l'antenne à un point A , la distance antenne-réflecteur est :

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \\ &= \sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

En rappelant que les signaux se propagent à la vitesse de la lumière c en milieu ambiant et que le signal parcourt deux fois la distance antenne-cible pour revenir au radar, le retard du signal écho par rapport au signal émis est : $t_{AB} = (2 R_{AB})/c$.

Ainsi, le signal que reçoit le radar et provenant de l'ensemble des réflecteurs de la cible, lorsque l'avion est à la position u sur sa trajectoire de vol est [Sou94] :

$$p_r(t, u) = \int_{\mathbb{R}^3} I(x, y, z) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}\right)}{\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}} dx dy dz. \quad (1.14)$$

où le facteur $\frac{1}{\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}}$ correspond à un terme d'atténuation introduit dans le signal de réflexion : cette atténuation est d'autant plus forte que la distance radar-réflecteur est importante. $I(x, y, z)$ est l'image 3D des réflecteurs qui se formule comme :

$$I(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) \quad (1.15)$$

où n est le nombre de réflecteurs dans l'image ; $\sigma_i = A_i \exp(j\varphi_i)$ et (x_i, y_i) désignent respectivement le coefficient de réflectivité⁸ et la localisation dans le plan (x, y) du réflecteur i ; z_i est l'élévation de ce réflecteur par rapport au sol (voir figure 1.15).

Dans la suite, on néglige le facteur d'atténuation dans (1.14) qui est à variation lente par rapport au signal $p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}\right)$ lorsque u varie.

Par conséquent, le signal SAR s'écrit simplement :

$$p_r(t, u) = \int_{\mathbb{R}^3} I(x, y, z) p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}\right) dx dy dz. \quad (1.16)$$

Cette action émission/réception est répétée pour chaque position u de l'avion sur sa trajectoire de vol. L'ensemble des données ainsi récoltées par le radar $\{p_r(t, u), u \in [-L, +L]\}$ va

⁸ A_i est l'amplitude et φ_i la phase propre du réflecteur i .

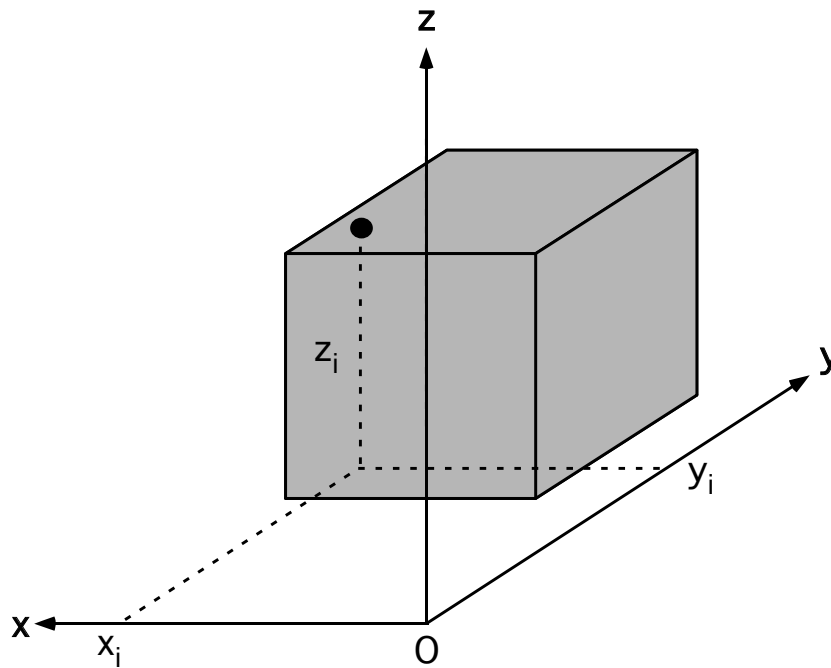


FIG. 1.15 – Représentation de l'image 3D.

servir à former l'image de terrain grâce à un algorithme de reconstruction d'images.

L'algorithme RMA, que nous allons détailler ultérieurement, permet de reconstruire l'image 2D des réflecteurs mathématiquement à partir d'un modèle 2D du signal SAR : le paragraphe suivant fournit le modèle SAR obtenu à partir d'une géométrie 2D (géométrie simplifiée par rapport à la configuration 3D).

1.2.2 Modélisation du signal SAR en configuration 2D

La modélisation du signal SAR 2D est basée sur la géométrie simplifiée suivante :

- On pose $Z_1 = 0$, c'est à dire qu'on suppose l'avion dans le plan (x, y) .
- On fait l'hypothèse que les réflecteurs de la zone imagée ont une élévation nulle, autrement dit $z_i = 0$; $\forall i \in [1, n]$.

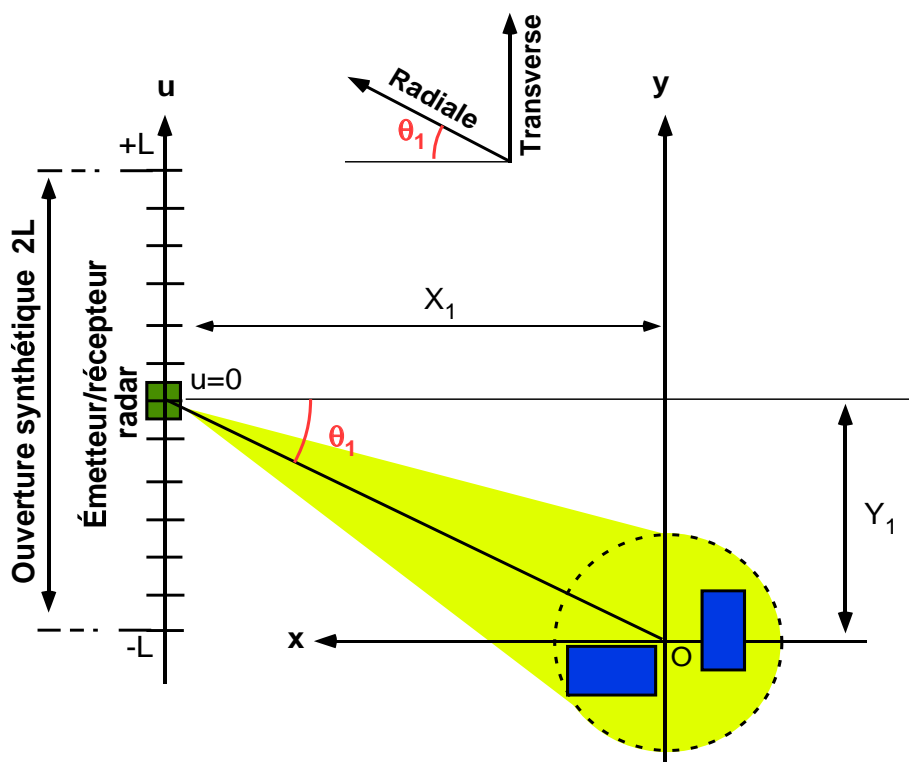
Avec ces hypothèses, on obtient les configurations géométriques des figures 1.16 et 1.17 décrivant respectivement les modes stripmap squint et non squint.

Le signal SAR stripmap 2D en mode squint s'écrit :

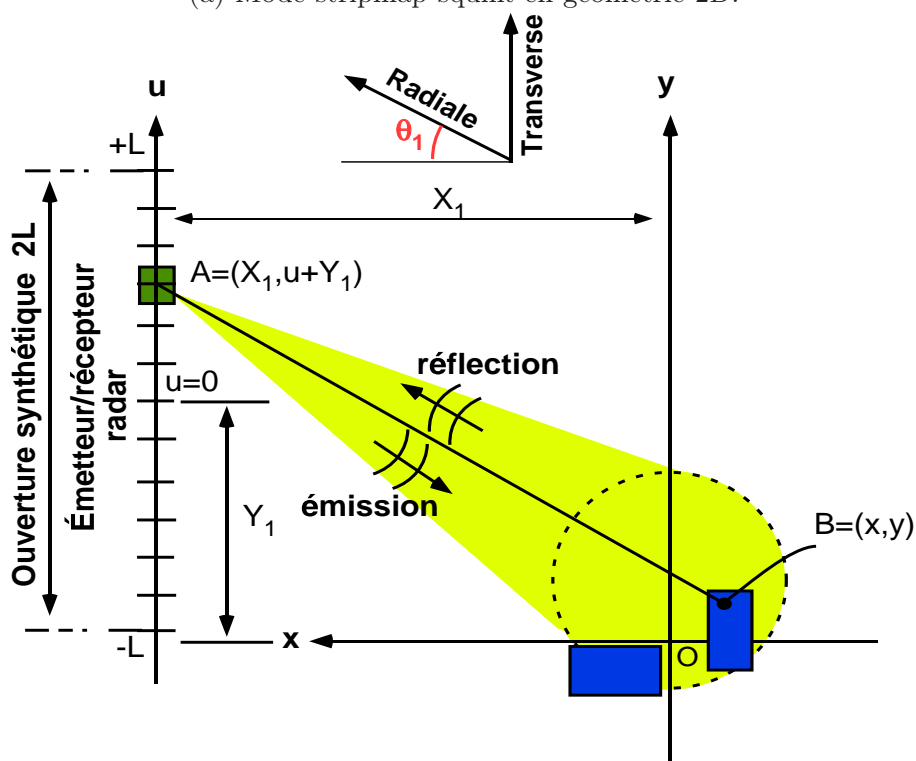
$$p_r(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) p\left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2}\right) dx dy. \quad (1.17)$$

Pour obtenir le signal SAR 2D en mode non squint, il suffit de poser $Y_1 = 0$ dans le modèle (1.17).

Il existe plusieurs algorithmes de formation d'images en SAR : Range Doppler Algorithm (RDA) [Car95], Polar Formating Algorithm (PFA) [Jak97, Car95] qui est adapté au mode spotlight, Chirp Scaling Algorithm (CSA) [Car95] qui fait l'hypothèse d'un signal chirp en émission, Range Migration Algorithm (RMA) [Caf91, Car95] adapté au mode stripmap. C'est ce dernier algorithme que nous allons développer puisque le mode stripmap est le mode principal d'acquisition des données SAR à l'ONERA.

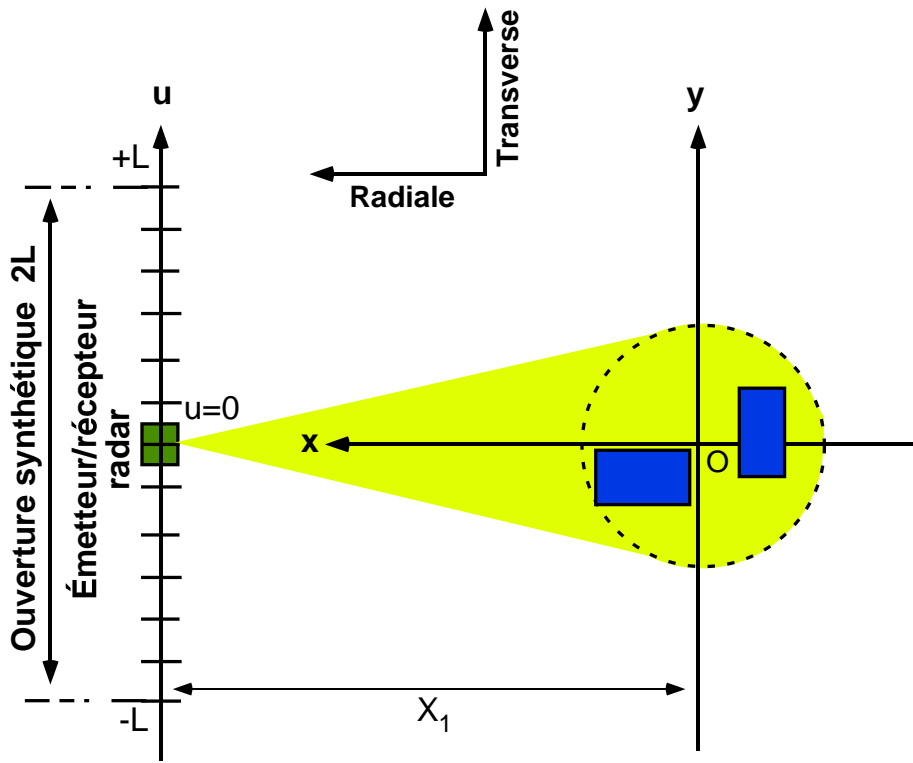


(a) Mode stripmap squint en géométrie 2D.

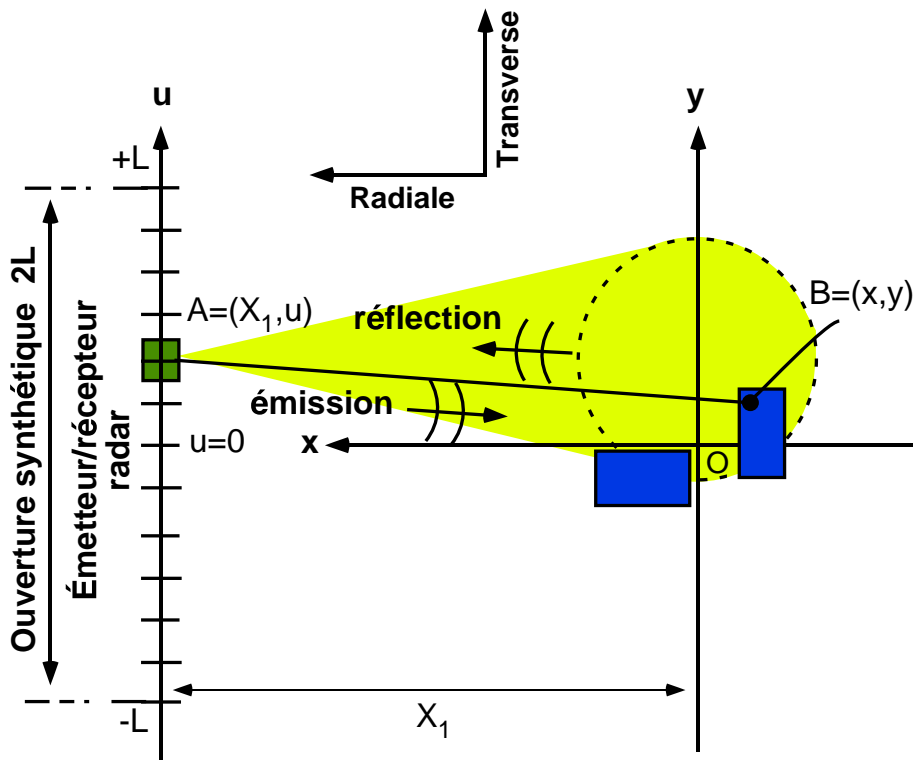


(b) Acquisition du signal SAR 2D en mode stripmap squint.

FIG. 1.16 – Acquisition du signal SAR stripmap squint en géométrie 2D.



(a) Mode stripmap non squint en géométrie 2D.



(b) Acquisition du signal SAR 2D en mode stripmap non squint.

FIG. 1.17 – Acquisition du signal SAR stripmap non squint en géométrie 2D.

1.3 L'Algorithme RMA pour la reconstruction d'images

On aborde dans cette section un algorithme général appelé RMA (**R**ange **M**igration **A**lgorithm) pour la reconstruction d'images SAR [Caf91, Sou94, Sou97, Gou97, Pas03]. L'algorithme RMA a été conçu pour corriger un phénomène de *migration radiale* des réflecteurs de la scène éclairée.

1.3.1 Phénomène de migration radiale

Expliquons succinctement ce phénomène. Considérons un réflecteur dans une scène éclairée par un radar en mode stripmap non-squinté ($Y_1 = 0$). La distance séparant le centre de la zone et le radar, suivant l'axe radial est X_1 . L'impulsion émise par le radar est $p(t)$.

Le radar se déplace et, pour chaque position u , reçoit le signal provenant du réflecteur positionné en (x_i, y_i) et de réflectivité σ_i . Ce signal est :

$$p_r(t, u) = \sigma_i p \left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (u - y_i)^2} \right)$$

Pour mettre en évidence la migration du réflecteur en distance radiale, réalisons une *carte distance* $I(D, u)$ qui exprime la distance à laquelle se situe le point réflecteur (par rapport au radar) en fonction de la position u du radar. Cette carte peut être réalisée en utilisant un filtrage adapté⁹ suivant la variable temporelle t :

$$\begin{aligned} p_M(t, u) &= \int_{\mathbb{R}} p_r(t', u) p^*(t' - t) dt' \\ &\stackrel{\text{Parseval}}{=} \sigma_i \int_{\mathbb{R}} |P(f)|^2 \exp \left[+j2\pi f \left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (u - y_i)^2} \right) \right] df \\ &\propto \sigma_i \delta \left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (u - y_i)^2} \right) \end{aligned}$$

La carte distance I se définit comme :

$$\begin{aligned} I(ct/2, u) &= (2/c) p_M(t, u) \\ &\propto \sigma_i \delta \left(ct/2 - \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (u - y_i)^2} \right) \end{aligned}$$

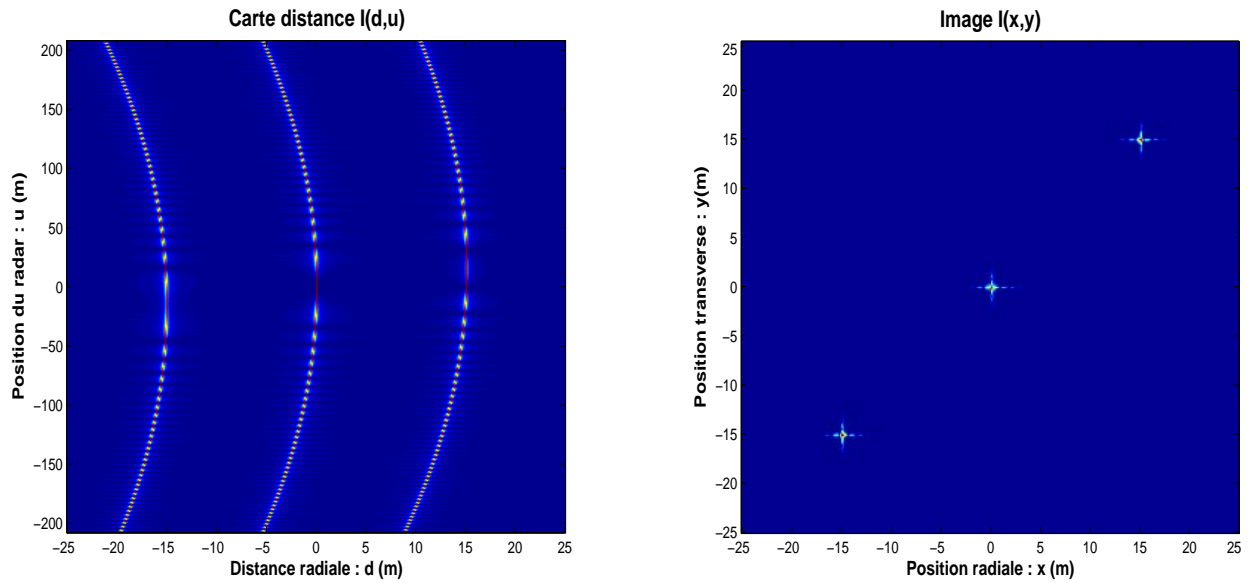
Autrement dit, en notant $D = ct/2$ la variable distance radiale, la carte distance s'écrit simplement :

$$I(D, u) \propto \sigma_i \delta \left(D - \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (u - y_i)^2} \right)$$

Elle exprime le fait qu'un point localisé spatialement en (x_i, y_i) décrit une courbe *hyperbolique* dans l'espace (D, u) : le point est donc positionné à différentes cases distance D pour différentes positions u du radar. Ceci traduit la migration radiale du réflecteur.

En figure 1.18 (a), nous montrons la carte distance $I(d, u)$ pour 3 réflecteurs : u est la position du radar, d est la variable distance radiale ramenée autour du centre de zone ($d = D - X_1$). La figure 1.18 (b) montre l'image des 3 réflecteurs obtenue par algorithme RMA.

⁹Nous nous plaçons, ici, dans le cas idéal où $|P(f)|^2$ est constant sur \mathbb{R} .



(a) Migration radiale des 3 réflecteurs.

(b) Application de l'algorithme RMA.

FIG. 1.18 – L'algorithme RMA : une méthode de reconstruction d'images.

À présent, il s'agit de développer l'algorithme RMA de reconstruction d'images. Dans la littérature, cet algorithme est basé principalement sur la décomposition d'une onde cylindrique en ondes planes [Sou94, Sou97, Gou97]; deux méthodes sont proposées pour effectuer cette décomposition :

- la première méthode est fondée sur l'équation des ondes (dite de Helmholtz) et utilise la théorie des résidus [Sla85, Sou94]
- la seconde manière pour obtenir cette décomposition est d'utiliser la méthode de la phase stationnaire [Pap84, Haw96].

Que l'on utilise la méthode par résidus ou celle de la phase stationnaire, la décomposition d'une onde cylindrique en ondes planes reste une approximation valable sous une certaine hypothèse physique.

Il existe, cependant, une méthode exacte permettant d'inverser le modèle du signal SAR afin d'obtenir l'image des réflecteurs. Cette méthode exprime le fait que l'image I peut être obtenue en appliquant une transformation dite de *Hankel-Fourier* au signal SAR [Mil04].

Dans un premier temps, nous développerons l'algorithme RMA tel qu'on peut le trouver dans la littérature, c'est à dire basé sur la décomposition en ondes planes. On s'appuiera, notamment, sur cet algorithme pour déterminer le support du spectre de l'image, détailler une procédure appelée *interpolation de Stolt* et formuler les pouvoirs de résolution radiale et transverse.

Dans un second temps, il s'agira de montrer que l'image des réflecteurs peut être obtenue de manière exacte en inversant le modèle du signal SAR par transformée de Hankel-Fourier. On

verra, notamment, qu'en introduisant une approximation dans une des étapes de cette méthode d'inversion, on retrouve le résultat de la décomposition en ondes planes utilisée dans l'algorithme RMA.

1.3.2 Les étapes de l'algorithme RMA

Voici les différentes étapes de l'algorithme RMA pour obtenir la répartition spatiale des réflecteurs de l'image :

- On applique la transformée de Fourier au signal $p_r(t, u)$ de l'équation (1.17) :

$$\begin{aligned} P_r(f, u) &= \mathcal{F}_{t \rightarrow f} [p_r(t, u)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) P(f) \exp \left[-j2\pi \frac{2f}{c} \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2} \right] dx dy \end{aligned} \quad (1.18)$$

- Ensuite, on supprime le spectre d'émission $P(f)$, supposée ici à bande infinie pour des raisons de simplifications dans les calculs. La procédure est donc la suivante¹⁰ :

$$\begin{aligned} S(k, u) &= P_r(f, u) / P(f) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[-j2\pi k \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2} \right] dx dy \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec $k = 2f/c$, module¹¹ du vecteur d'onde \vec{k} .

- La troisième étape consiste à appliquer la transformée de Fourier inverse au signal $S(k, u)$ par rapport à la variable u . Cette étape provient du fait qu'une *onde cylindrique* s'approche comme une somme continue d'*ondes planes*¹² :

$$\begin{aligned} &\exp \left[-j2\pi k \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2} \right] \\ &\approx \int_{-k}^k \exp \left[-j2\pi \left(\sqrt{k^2 - \eta^2} (X_1 - x) + \eta (Y_1 + u - y) \right) \right] d\eta \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier inverse au signal $S(k, u)$ par rapport à la

¹⁰Il est évident que cette procédure n'est pas possible en pratique puisque le spectre réel d'émission peut prendre des valeurs nulles. Il s'agit, ici, simplement d'expliquer la procédure d'inversion. En pratique, il est courant d'utiliser le *filtrage adapté* suivant : $S(k, u) = P^*(f) P_r(f, u)$. Cette procédure est détaillée en annexe B.

¹¹En toute rigueur, le module du vecteur d'onde est $k = 2\pi (2f/c)$ mais pour des raisons de commodité, nous garderons $k = 2f/c$.

¹²Cette décomposition est possible si $k\sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2} \gg 1$: dans la plupart des applications SAR, cette condition est vérifiée. On pourra se reporter à l'annexe C pour la démonstration menant à cette décomposition à l'aide de la théorie des résidus : on retrouve, d'ailleurs, le résultat (1.20) dans l'équation (C.18).

variable u , on a :

$$\begin{aligned}
 S(k, k_u) &= \mathcal{F}_{u \rightarrow k_u}^{-1} [S(k, u)] \\
 &= \int S(k, u) \exp [+j2\pi k_u u] \\
 &\approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[-j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} (X_1 - x) + k_u (Y_1 - y) \right) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Pour la suite, il est plus commode de considérer le couple de variables $(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$ au lieu de (k, k_u) . Ainsi le signal $S(k, k_u)$ peut être noté $S(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$.

- La quatrième étape consiste à ramener le support de l'image $I(x, y)$ autour de l'origine $\mathcal{O}_{x,y}$ du repère (x, y) . Ceci s'effectue, concrètement, en introduisant au signal S , une phase mettant en jeu les distances de références X_1 et Y_1 . On nomme S' le signal ainsi obtenu :

$$\begin{aligned}
 S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) &= S(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} X_1 + k_u Y_1 \right) \right] \\
 &\approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y \right) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

- On effectue, alors, le changement de variables $k_x = \sqrt{k^2 - k_u^2}$ et $k_y = k_u$ au signal S'^{13} :

$$\begin{aligned}
 H(k_x, k_y) &= S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) \\
 &\approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp [+j2\pi (k_x x + k_y y)] dx dy
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

- Enfin, on obtient la distribution spatiale $I(x, y)$ des réflecteurs de la zone imagée par application de la transformée de Fourier au spectre $H(k_x, k_y)$:

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{F} \quad [H(k_x, k_y)] \approx I(x, y) \\
 k_x \rightarrow x \\
 k_y \rightarrow y
 \end{array}$$

1.3.3 Détermination du support du spectre $H(k_x, k_y)$.

D'après la figure 1.19, le spectre $H(k_x, k_y)$ de l'image $I(x, y)$ est obtenu par changement de variables (transformation de Stolt) sur le signal $S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$. Avant de détailler cet étape en pratique, il convient de déterminer le support du signal S' dans l'espace $(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$.

¹³Ce changement de variables est plus connu en SAR sous le nom de *transformation de Stolt* [Sto78, Caf91]

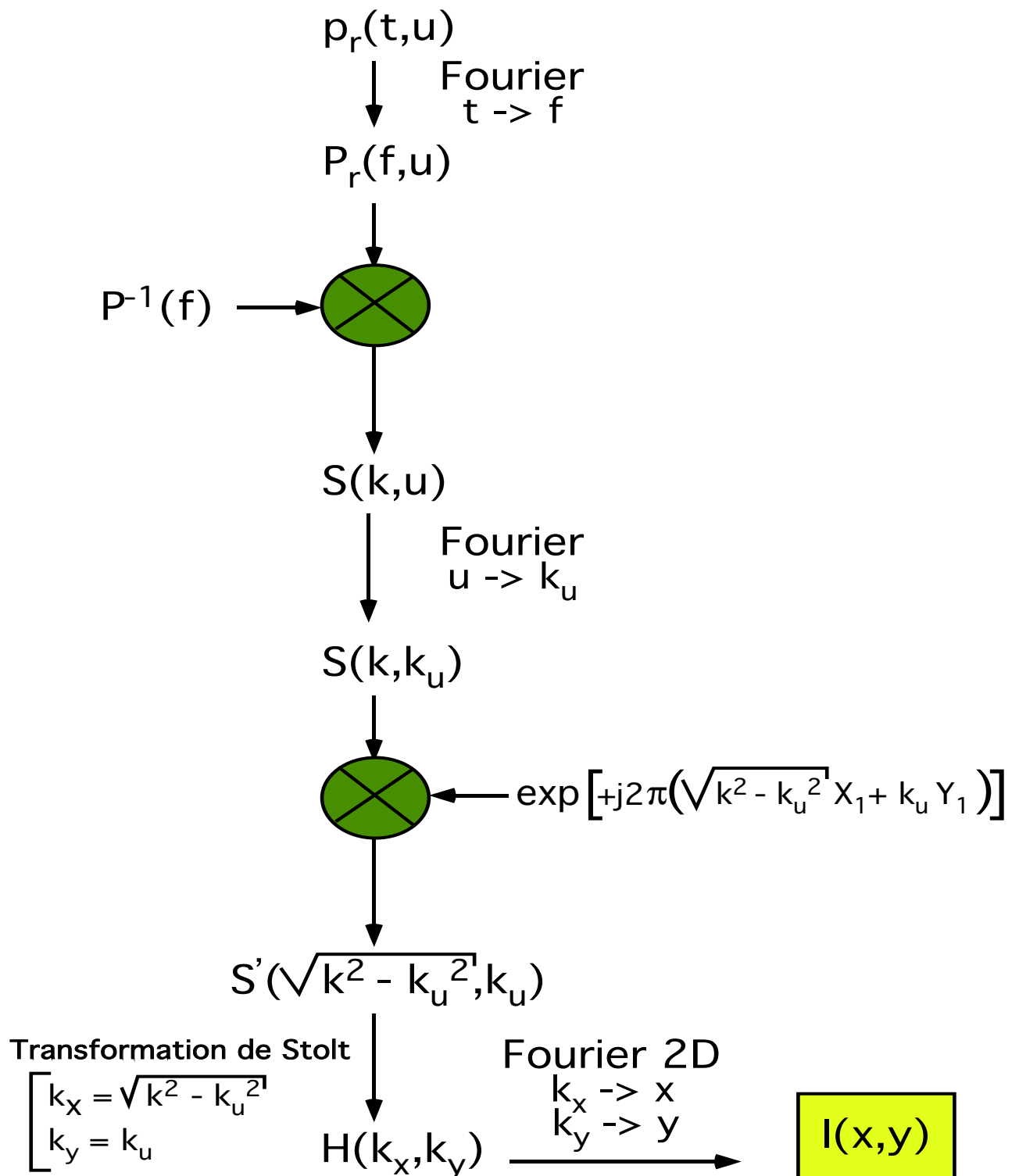


FIG. 1.19 – Reconstruction de l'image de terrain $I(x,y)$ par algorithme RMA.

Le signal S' d'après l'équation (1.23) s'approxime une somme continue d'ondes planes provenant des points de la cible :

$$S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) \approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y \right) \right] dx dy$$

avec $(k_x, k_y) = \left(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u \right)$ les composantes du vecteur d'onde \vec{k} .

Comme le montre la figure 1.20, les composantes du vecteur d'onde \vec{k} s'expriment à partir de l'angle azimutal θ (angle sous lequel sont vus les réflecteurs de la zone imagée) et de la fréquence d'émission f :

$$k_x = k \cos(\theta)$$

$$k_y = k \sin(\theta)$$

avec $k = |\vec{k}| = 2f/c$ et $\theta = \arg [\vec{k}]$

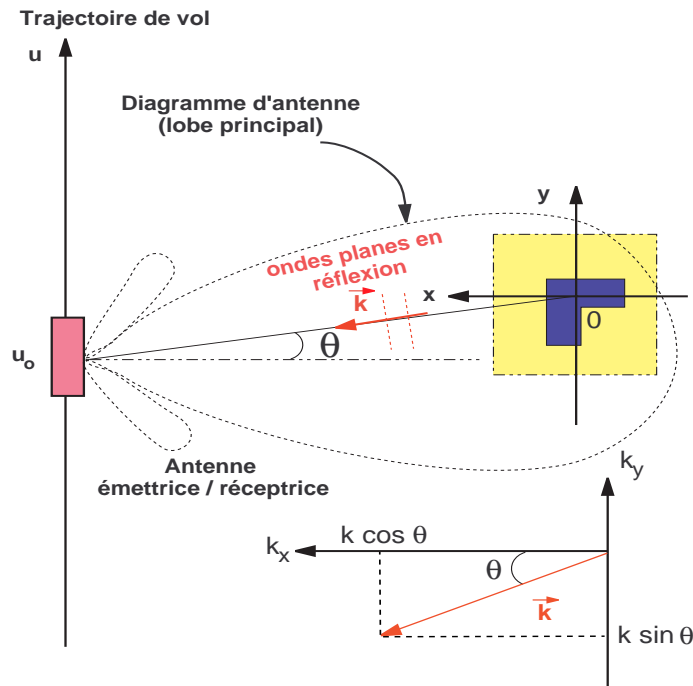


FIG. 1.20 – Somme d'ondes planes en réflexion.

Avant d'aller plus loin, plusieurs remarques sont à faire au vu de la figure 1.20 :

- On fait l'hypothèse que tous les réflecteurs composant une cible sont vus d'un même angle θ . C'est une hypothèse valable dans la mesure où la distance antenne-cible est largement plus grande que les dimensions de la cible imagée.

- La cible est vue sous un angle d'illumination θ différent à mesure que l'antenne se déplace sur la trajectoire de vol.
- Le diagramme d'antenne illustré dans la figure 1.21 détermine la zone qui sera éclairée pendant la synthèse de l'image. Ce diagramme représente la puissance émise par l'antenne radar dans l'espace (x, y) . Il peut être représenté en fonction de l'angle de visée θ comme le montrent les figures 1.21 (a) et (b) dans le cas des bandes X et P.

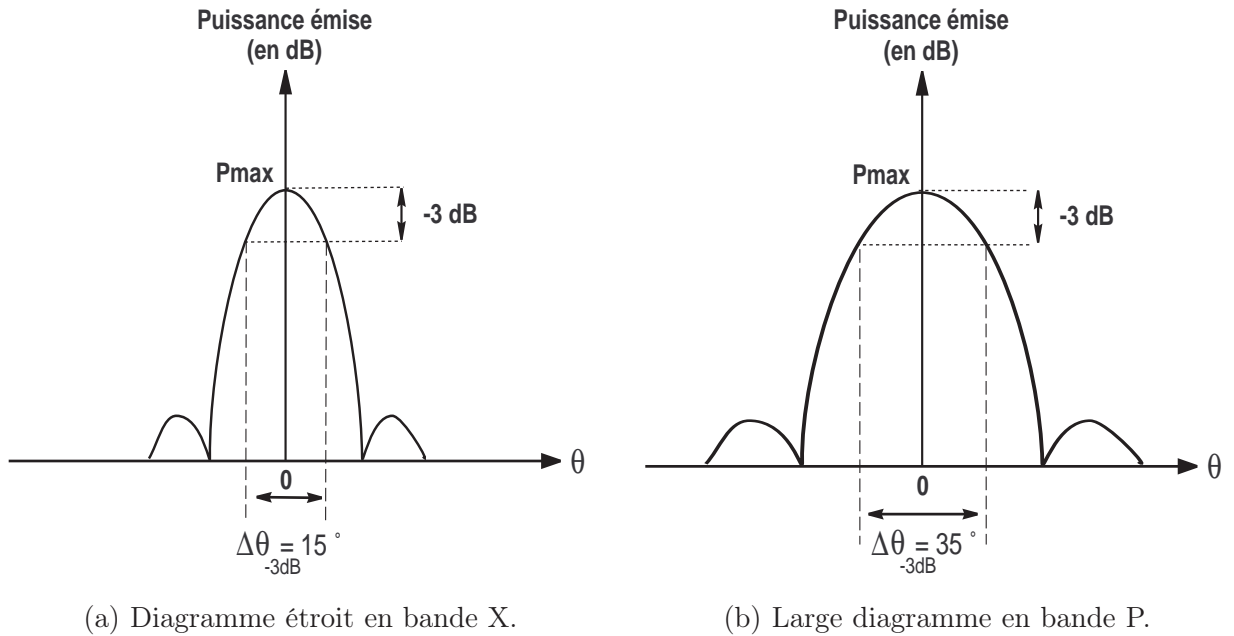


FIG. 1.21 – Exemples de diagramme d'antenne en bande X et P.

Par conséquent, deux grandeurs physiques vont définir le support du signal $S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$:

- La bande fréquentielle $B = [f_m, f_M]$ des impulsions émises par le radar, avec f_m et f_M respectivement les fréquences minimale et maximale.
- L'ouverture angulaire $\Delta\theta$, c'est à dire le secteur angulaire que couvre l'antenne synthétique. La figure 1.22 illustre cette ouverture angulaire dans le cas du mode non-squinté¹⁴ avec $\Delta\theta = [-\theta_M, +\theta_M]$, les angles $-\theta_M$ et θ_M représentant respectivement l'orientation du vecteur d'onde en début et fin d'acquisition du signal écho.

¹⁴L'antenne pointée dans une direction perpendiculaire à la trajectoire de vol.

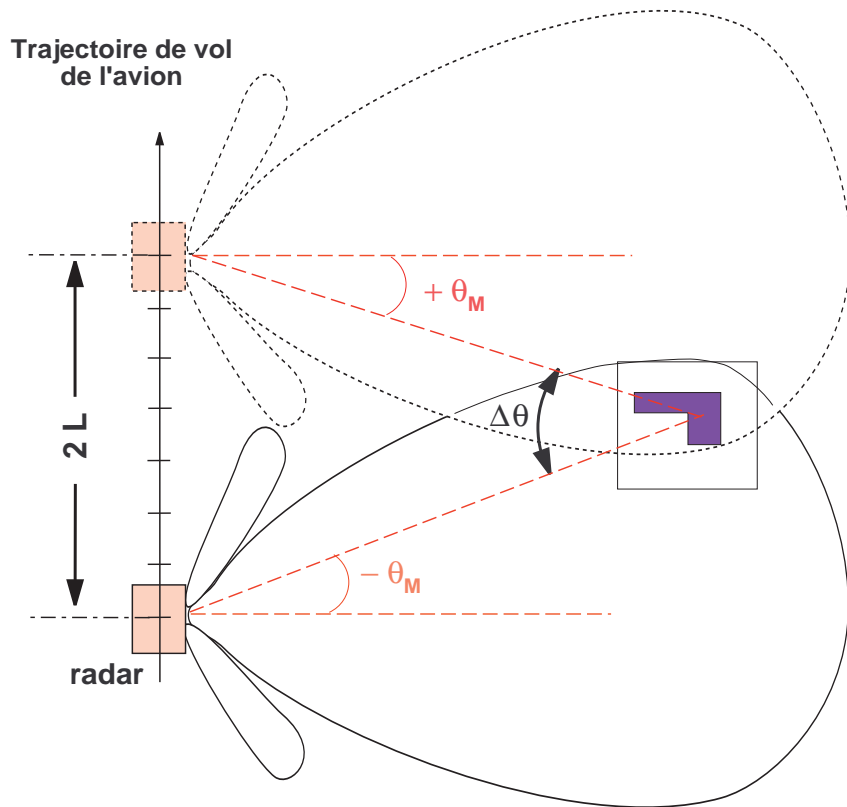


FIG. 1.22 – Exemple de secteur angulaire d'ouverture de l'antenne synthétique en mode non-squinté.

Les échantillons du signal SAR $S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$ se situent à l'intersection des lignes horizontales k_u (en bleu) et des courbes $(\sqrt{k^2 - k_u^2})$ (également en bleu). Le support Π du signal, représenté en jaune, est délimité par les points $\{A, B, C, D, E, F\}$ comme le montre la figure 1.23. Ces points ont pour coordonnées dans le repère cartésien (k_x, k_y) :

$$\begin{aligned} A &= (k_M \cos(\theta_M), k_M \sin(\theta_M)) \\ B &= (k_M, 0) \\ C &= (k_M \cos(\theta_M), -k_M \sin(\theta_M)) \\ D &= (k_m \cos(\theta_M), -k_m \sin(\theta_M)) \\ E &= (k_m, 0) \\ F &= (k_m \cos(\theta_M), k_m \sin(\theta_M)) \end{aligned}$$

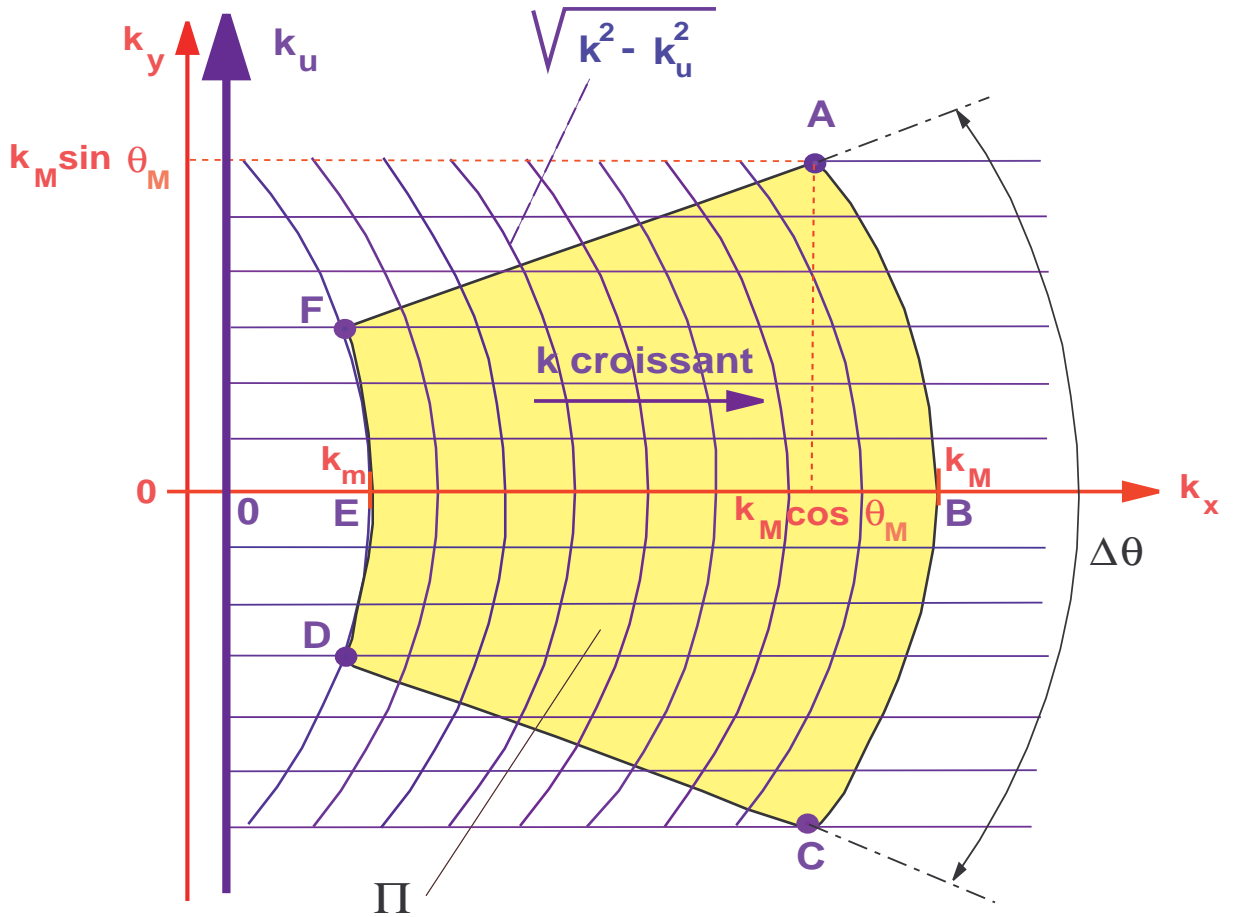


FIG. 1.23 – Support du signal S' dans le domaine $(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$.

Par conséquent, en s'appuyant sur l'équation (1.23) et la figure 1.23, le signal S' se définit en pratique comme :

$$S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) \begin{cases} \approx \int I(x, y) \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y \right) \right] dx dy & \text{si } (\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) \in \Pi, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.24)$$

Il s'agit maintenant de détailler l'étape permettant d'obtenir le spectre $H(k_x, k_y)$ à partir du signal $S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$. En pratique, cette procédure est connue sous le nom d'*interpolation de Stolt* [Sto78, Caf91, Sou94].

1.3.4 Interpolation de Stolt

Dans la dernière étape de l'algorithme RMA, pour réaliser efficacement la transformation de Fourier bidimensionnelle, nous utilisons l'algorithme rapide de transformation de Fourier discrète (**F**ast **F**ourier **T**ransform). Cet algorithme exige que les échantillons de données soient uniformément espacés sur une grille rectangulaire. Or, les échantillons $S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$ se situent à l'intersection des courbes ($\sqrt{k^2 - k_u^2}$) et des droites k_u (voir figure 1.23) : il est alors facile de constater que leur position ne coïncide pas avec la position d'échantillons régulièrement espacés sur une grille.

L'idée est alors de construire une grille (k_x, k_y) rectangulaire avec un échantillonnage régulier¹⁵. La procédure consiste à calculer une nouvelle séquence d'échantillons du signal sur cette grille (k_x, k_y) à partir des échantillons du signal : ce procédé est appelé *interpolation de Stolt*.

La figure 1.24 montre l'emplacement des échantillons du signal S' dans l'espace $(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$ et l'emplacement des nouveaux échantillons interpolés dans la grille cartésienne (k_x, k_y) .

La procédure consiste simplement à interpoler de nouveaux échantillons $H(k_x, k_{u_o})$ sur l'intervalle k_x à partir de la séquence de données $S'(\sqrt{k^2 - k_{u_o}^2}, k_{u_o})$ (voir figure 1.25). Cette procédure est à faire pour chaque valeur k_{u_o} de l'intervalle k_u .

L'interpolation peut être réalisée, par exemple, au moyen d'une méthode de type *splines cubiques* [Bor97] : on détermine un polynôme d'ordre 3 différent entre chaque paire d'échantillons de données. On peut, alors, évaluer un nouvel échantillon entre 2 échantillons de données (voir figure 1.26).

Une fois l'interpolation effectuée, la nouvelle séquence de données est $H(k_x, k_u)$. Comme les intervalles k_x et k_y coïncident, on a : $H(k_x, k_y) = H(k_x, k_u)$.

Ensuite par simple application de la transformation de Fourier 2D sur le spectre $H(k_x, k_y)$, on obtient l'image $I(x, y)$ dont le module fournit la repartition spatiale des réflecteurs.

¹⁵Les intervalles k_x et k_y doivent être d'espacement respectif dk_x et dk_y constants mais non nécessairement identiques.

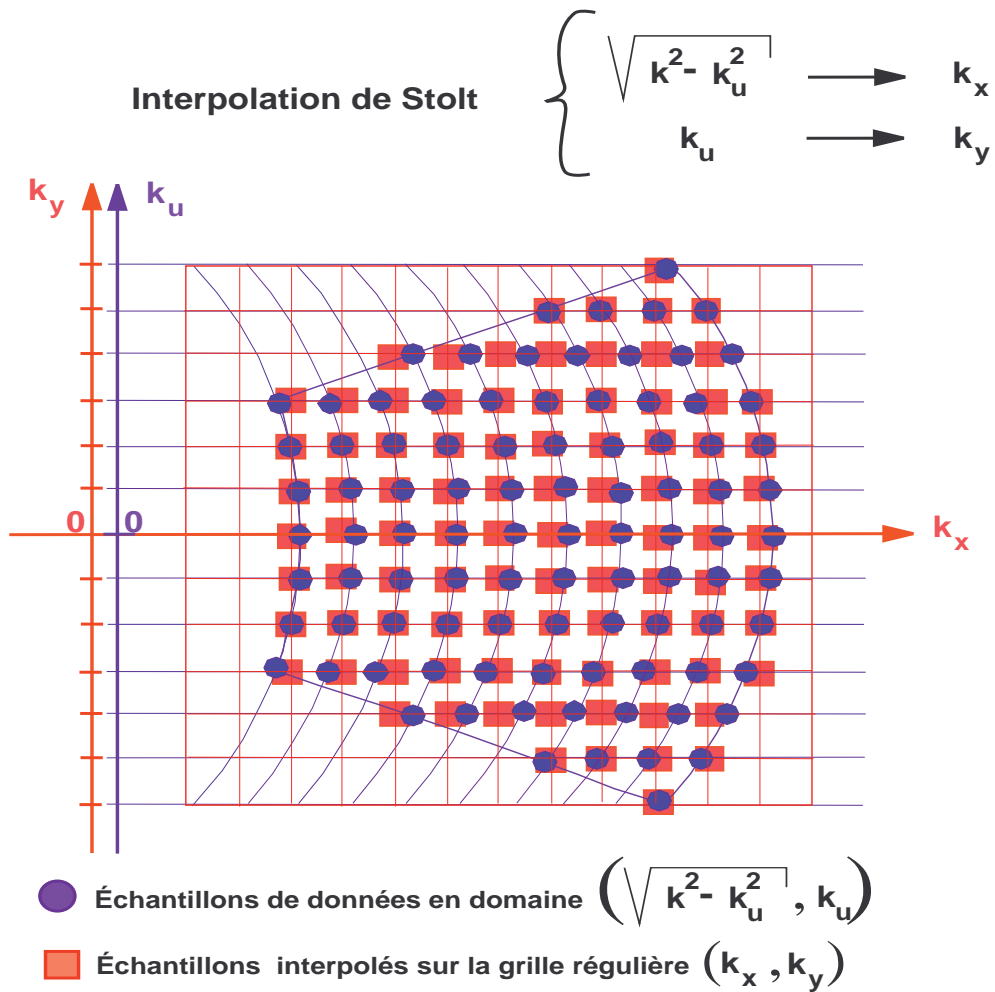


FIG. 1.24 – Emplacement des échantillons de données et des échantillons interpolés sur une grille régulière (k_x, k_y) .

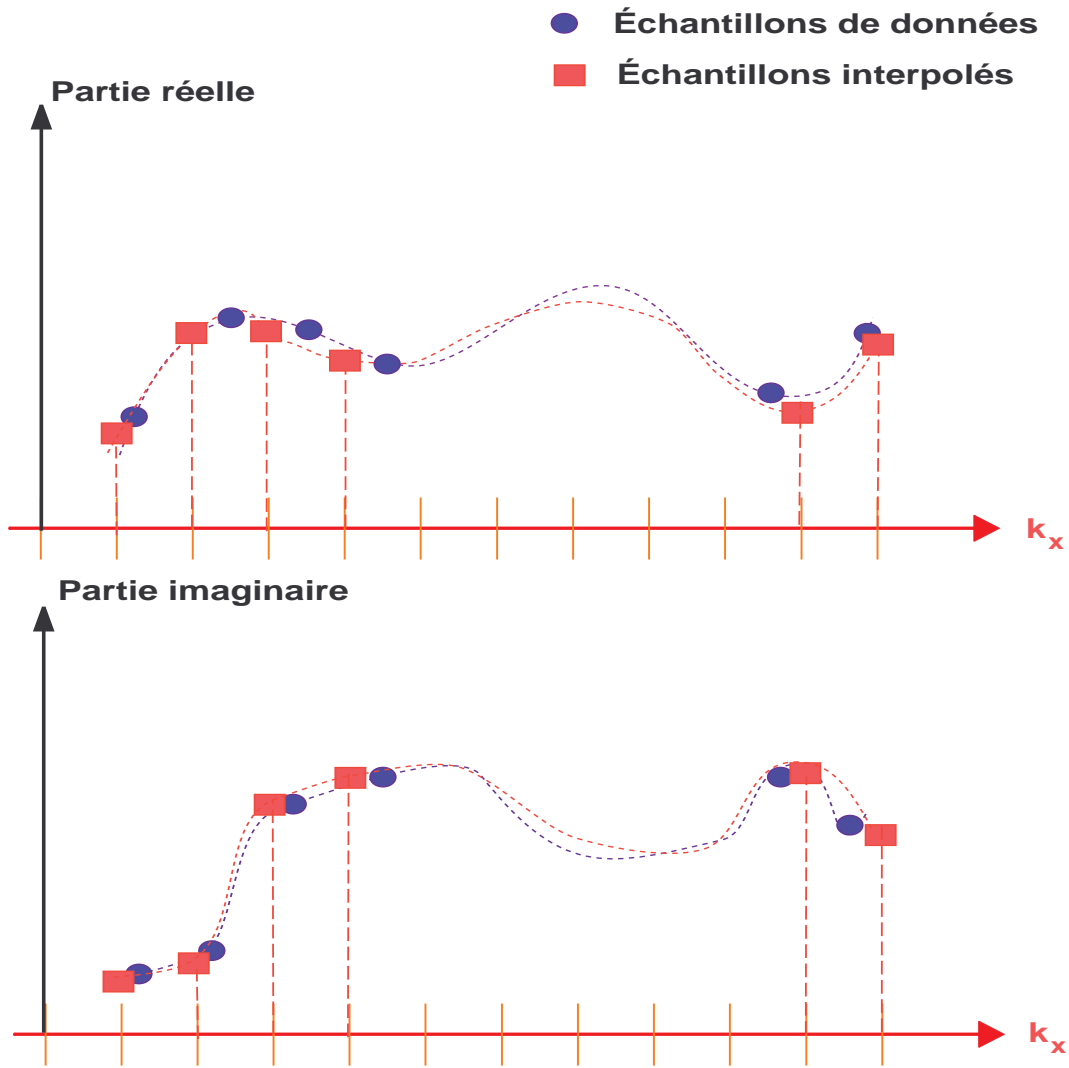


FIG. 1.25 – Interpolation d'échantillons $H(k_x, k_u)$ sur l'intervalle k_x à partir des échantillons de données complexes $S'(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$.

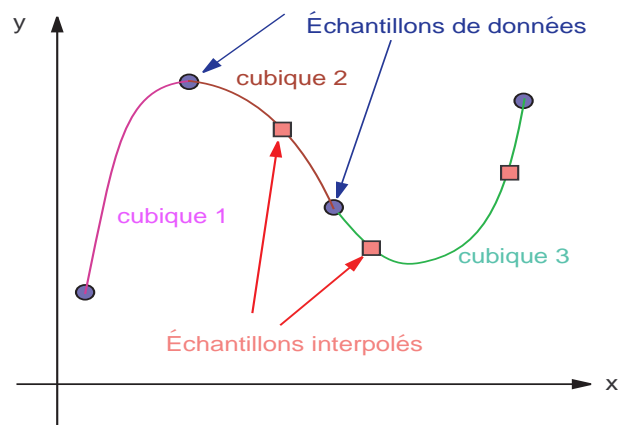


FIG. 1.26 – Interpolation par splines cubiques.

1.3.5 Résolutions radiale et transverse

Les pouvoirs de résolution radiale δx et transverse δy sont respectivement déterminés par les supports Δk_x et Δk_y du spectre $H(k_x, k_y)$ en k_x et k_y :

$$\begin{aligned}\delta x &= 1/\Delta k_x = 1/\Delta[k \cos(\theta)] \\ \delta y &= 1/\Delta k_y = 1/\Delta[k \sin(\theta)]\end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que la bande relative d'émission B/f_c est petite devant l'unité (bande étroite) et que le secteur angulaire d'éclairage $\Delta\theta$ est peu également petit, on obtient l'approximation suivante (voir figure 1.27) :

$$\begin{aligned}\delta x &\approx 1/\Delta k \\ \delta y &\approx 1/(k_c \Delta\theta)\end{aligned}$$

où $\Delta k = 2B/c$ et $k_c = 2f_c/c$ avec f_c la fréquence centrale d'émission.

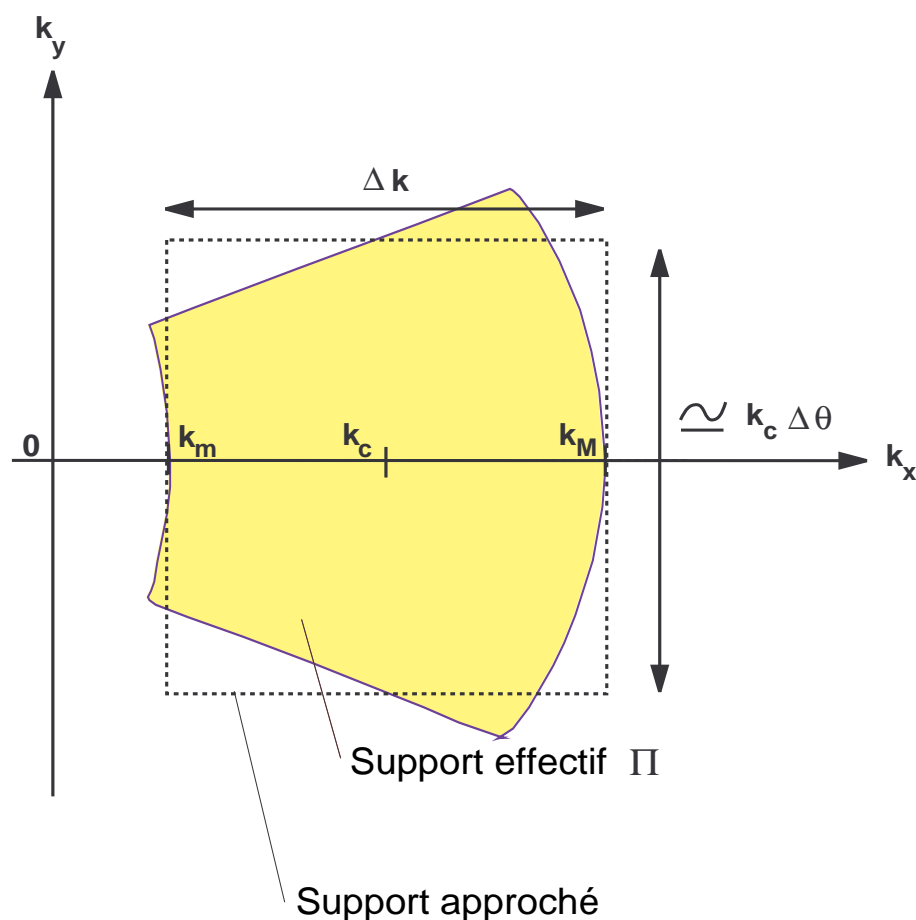


FIG. 1.27 – Support du spectre $H(k_x, k_y)$ en bande et secteur angulaire étroits.

On trouve, avec cette approximation, que la résolution radiale en SAR est identique à celle obtenue en radar :

$$\begin{aligned} \delta x &\approx 1/\Delta k \\ &= c/2B \end{aligned}$$

La résolution transverse en SAR est, elle, bien meilleure que celle obtenue en radar. En effet, en rappelant que la dimension du SAR est $D_{SAR} = 2L$, en notant R la distance antenne-cible, en désignant $\lambda = c/f_c$ la longueur d'onde du faisceau d'émission, et avec l'approximation géométrique $\Delta\theta \approx D_{SAR}/R$, la résolution transverse se réécrit :

$$\delta y \approx R\lambda/(2D_{SAR})$$

alors que la résolution transverse en radar dans les mêmes conditions (même distance antenne-cible R et même longueur d'onde λ) est $\delta y = R\lambda/D$ avec D la dimension de l'antenne physique bien inférieure à la dimension D_{SAR} de l'antenne synthétique.

1.3.6 Inversion exacte du modèle SAR par transformée de Hankel-Fourier

On démontre, dans ce paragraphe, que l'image des réflecteurs peut être obtenue à partir du signal SAR sans aucune approximation. Précisément, on établit que l'image des réflecteurs et le signal SAR sont reliés par une transformation bidimensionnelle dite de *Hankel-Fourier* [Mil04].

a/ Rappels sur la transformée de Hankel

Comme la transformée de Fourier, la transformée de Hankel est caractérisée par un noyau appelé *noyau de Hankel*. Commençons par expliciter la transformée de Fourier à partir du noyau qui la caractérise :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_F(ft) s(t) dt$$

où le noyau de Fourier se définit par $K_F(ft) = \exp[-j2\pi ft]$. La transformée de Fourier inverse s'écrit, quant à elle :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_F^*(ft) S(f) df$$

où $K_F^*(ft) = \exp[+j2\pi ft]$ est le complexe conjugué de $K_F(ft)$.

De la même manière, la transformée de Hankel se définit par [Sou94, Bra99] :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_H(ft) s(t) dt$$

où le noyau de Hankel s'exprime par $K_H(ft) = t H_0^{(2)}(ft)$. La fonction $H_0^{(2)}(x)$ est la fonction de Hankel d'ordre zéro de deuxième espèce. Elle est définie par :

$$H_0^{(2)}(x) = \frac{2}{j\pi} \int_0^{+\infty} \exp[-jx \cosh \theta] d\theta \quad (1.25)$$

La transformée de Hankel inverse est, elle, définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}_H(ft) S(f) df$$

où $\hat{K}_H(ft) = f H_0^{(1)}(ft)$ avec $H_0^{(1)}(x)$ la fonction complexe conjuguée de $H_0^{(2)}(x)$ et appelée fonction de Hankel d'ordre zéro de première espèce :

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2}{j\pi} \int_0^{+\infty} \exp[jx \cosh \theta] d\theta$$

b/ Formation de l'image SAR par transformée de Fourier-Hankel

Le signal SAR se formule, en se référant à l'équation (1.17) et en tenant compte de l'atténuation des signaux échos, comme :

$$S(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{p \left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2} \right)}{\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2}} dx dy \quad (1.26)$$

où $\frac{1}{\sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2}}$ est un terme traduisant l'atténuation¹⁶ du signal écho provenant du réflecteur localisé en (x, y) et reçu par le radar.

À la fin de l'annexe E, on démontre que l'image $\frac{I(x + X_1, y + Y_1)}{x}$ s'explicite comme transformée de Hankel-Fourier d'un signal $H_M(k_x, k_u)$ qui se déduit du signal SAR $S(u, t)$:

$$\boxed{\frac{I(x + X_1, y + Y_1)}{x} \propto \int_{\mathbb{R}^2} H_M(k_x, k_u) K_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) dk_x dk_u \quad (1.27)}$$

avec $K_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) = k_x H_0^{(2)}(2\pi k_x x) \exp[-j2\pi k_u y]$ et $H_M(k_x, k_u)$ obtenu à partir du signal $S(t, u)$ en suivant les étapes suivantes :

- D'abord, on effectue un filtrage adapté en se plaçant dans le cas idéal d'un signal d'émission à bande infinie :

$$S_M(u, t) = \int_{\mathbb{R}} S(u, t') p^*(t' - t) dt'$$

- On applique, ensuite, une transformée de Fourier selon la variable f et une transformée de Fourier inverse selon la variable u au signal $S_M(u, t)$ pour obtenir le signal $S_M(k_u, f)$:

$$S_M(k_u, f) = \mathcal{F}_{u \rightarrow k_u}^{-1} \mathcal{F}_{t \rightarrow f} [S_M(u, t)]$$

- On effectue, enfin, le changement de variable $k_x = \sqrt{k^2 - k_u^2}$ avec $k = \frac{2f}{c}$ pour obtenir le signal $H_M(k_u, k_x)$:

$$H_M(k_u, k_x) = S_M(k_u, \sqrt{k^2 - k_u^2})$$

¹⁶On remarquera que ce facteur est d'autant plus faible que la distance antenne-réflecteur est grande : autrement dit, l'atténuation du signal écho augmente avec cette distance.

c/ Remarque

On peut effectuer un rapprochement avec la première version de l'algorithme RMA abordée au paragraphe précédent. Partant de la relation (1.27), on peut exprimer le signal $H_M(k_x, k_u)$ comme transformée de Hankel-Fourier de l'image $\frac{I(x + X_1, y + Y_1)}{x}$:

$$H_M(k_x, k_u) \propto \int_{\mathbb{R}^2} \frac{I(x + X_1, y + Y_1)}{x} \hat{K}_{F-H}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) dx dy \quad (1.28)$$

avec $\hat{K}_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) = x H_0^{(1)}(2\pi k_x x) \exp[j2\pi k_u y]$.

Le signal $H_M(k_x, k_u)$ peut, donc, se réécrire :

$$H_M(k_x, k_u) \propto \int_{\mathbb{R}^2} I(x + X_1, y + Y_1) H_0^{(1)}(2\pi k_x x) \exp[j2\pi k_u y] dx dy$$

En effectuant un changement de variables, on obtient :

$$\begin{aligned} H_M(k_x, k_u) &\propto \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) H_0^{(1)}(2\pi k_x(x - X_1)) \exp[j2\pi k_u(y - Y_1)] dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) H_0^{(2)}(2\pi k_x(X_1 - x)) \exp[j2\pi k_u(y - Y_1)] dx dy \end{aligned}$$

Dans la plupart des applications SAR, on a $2\pi k_x(X_1 - x) > 3$. Par conséquent, on peut utiliser l'approximation $H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[-j(x - \pi/4)]$ valable lorsque $x > 3$ [Mil04]. On obtient, ainsi, l'approximation suivante pour le signal $H_M(k_x, k_u)$ ¹⁷ :

$$H_M(k_x, k_u) \approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp[-j2\pi k_x(X_1 - x)] \exp[-j2\pi k_u(Y_1 - y)] dx dy \quad (1.29)$$

On retrouve, par conséquent, l'expression de l'équation (1.21). L'image $I(x, y)$ peut alors être reconstruite en respectant les étapes de la première approche de l'algorithme RMA .

¹⁷Dans cette approximation, on a omis le facteur $\sqrt{\frac{2}{2\pi^2 k_x(X_1 - x)}}$ (qui est à variation lente par rapport au terme exponentiel $\exp[-j2\pi k_x(X_1 - x)]$ lorsque x varie), et le terme de phase $\exp[+j\pi/4]$.

1.3.7 Reconstruction d'images en configuration 3D

En appliquant l'algorithme RMA introduit en 1.3.2 sur le modèle SAR 3D, on obtient une image des réflecteurs $\tilde{I}(r, y)$ représentée dans un domaine (r, y) où r définit l'axe radial réel par opposition à x qui est l'axe radial au sol. En effet, reprenons le modèle 3D du signal SAR squint de l'équation (1.16) :

$$p_r(t, u) = \int_{\mathbb{R}^3} I(x, y, z) p\left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2}\right) dx dy dz \quad (1.30)$$

mais en supposant la hauteur de la cible négligeable, autrement dit en faisant l'hypothèse que la cible appartient au plan $(x, y) : I(x, y) = I(x, y, z = 0)$ (voir figure 1.28), le modèle devient :

$$p_r(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) p\left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + Z_1^2}\right) dx dy \quad (1.31)$$

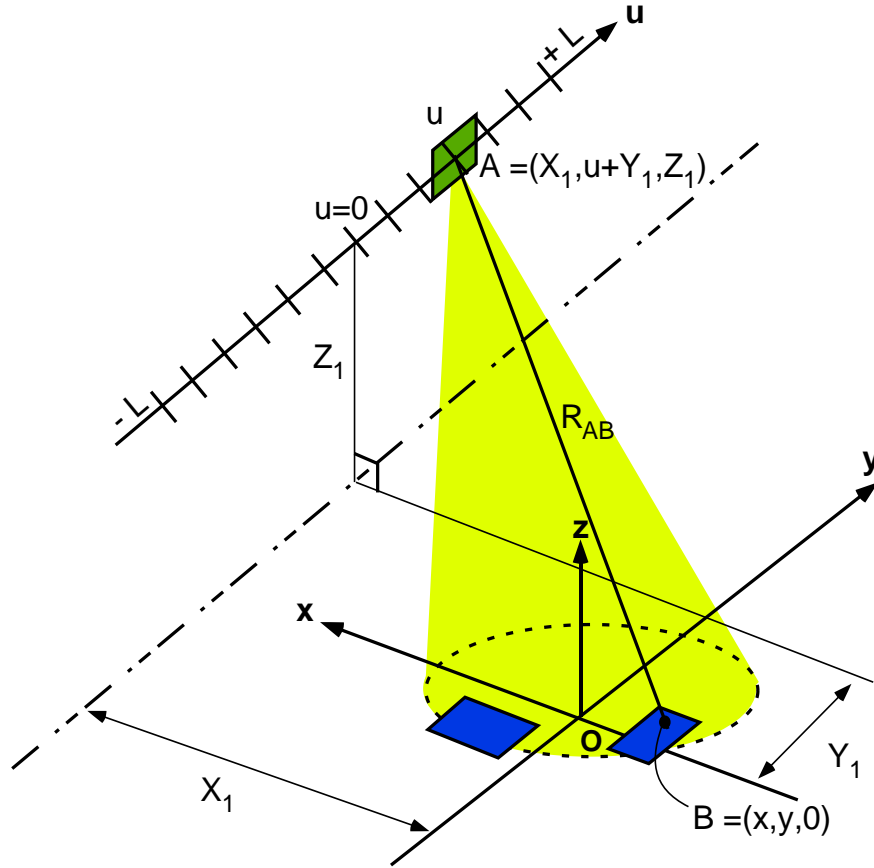


FIG. 1.28 – Configuration 3D avec $I(x, y) = I(x, y, z = 0)$.

En annexe D, on montre, sous l'hypothèse que la cible est très petite devant la distance antenne-cible, que le signal reçu par le radar peut s'approximer par :

$$p_r(t, u) \approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) p\left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(R'_1 - x \cos(\varphi_1))^2 + (u + Y_1 - y)^2}\right) dx dy \quad (1.32)$$

où $R'_1 = \sqrt{X_1^2 + Z_1^2}$ et $\varphi_1 = \arctan(Z_1/X_1)$

Par exemple, les images réelles que l'on présentera dans tout le manuscrit ont été acquises en mode non squinté ($Y_1 = 0$), c'est à dire que le radar en milieu de parcours est localisé en $A = (X_1, 0, Z_1)$: par conséquent, l'angle φ_1 coïncide avec l'angle de dépression Ψ_1 (voir figure 1.32 (a))

Ainsi, en reprenant les étapes de l'algorithme RMA au paragraphe 1.3.2 mais en remplaçant X_1 et x respectivement par $\sqrt{X_1^2 + Z_1^2}$ et $r = x \cos(\Psi_1)$, on obtient le spectre :

$$H(k_r, k_y) \approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp [+j2\pi (k_r x \cos(\Psi_1) + k_y y)] dx dy$$

avec $k_r = \sqrt{k^2 - k_y^2}$.

En faisant le changement de variable $r = x \cos(\Psi_1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} H(k_r, k_y) &\approx \frac{1}{\cos(\Psi_1)} \int_{\mathbb{R}^2} I(r/\cos(\Psi_1), y) \exp [+j2\pi (k_r r + k_y y)] dr dy \\ &\propto \int_{\mathbb{R}^2} I(r/\cos(\Psi_1), y) \exp [+j2\pi (k_r r + k_y y)] dr dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{I}(r, y) \exp [+j2\pi (k_r r + k_y y)] dr dy \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec $\tilde{I}(r, y) = I(r/\cos(\Psi_1), y)$.

Le support du spectre $H(k_r, k_y)$ est représenté en figure 1.29 : les étendues de ce support, selon les axes k_r et k_y , sont définies respectivement à partir de la bande émise B à travers la grandeur $\Delta k = 2B/c$ et de l'ouverture angulaire $\Delta\theta$; ce spectre est centré autour de la valeur $k_c = 2f_c/c$ selon l'axe k_r et autour de l'angle $\theta = 0$, selon l'axe k_y , dans le cas du mode non squinté. D'autre part, si l'on veut représenter le spectre $H(k_r, k_y)$ dans l'espace [Jak97], il nous faut expliciter le vecteur d'onde \vec{k} correspondant à un réflecteur de l'image et dirigé vers le radar (voir figure 1.30). Il s'écrit :

$$\vec{k} = \vec{k}_r + \vec{k}_y$$

avec $\vec{k}_r = k_r \left(\cos(\Psi_1) \frac{\vec{K}_x}{|\vec{K}_x|} + \sin(\Psi_1) \frac{\vec{K}_z}{|\vec{K}_z|} \right)$ et $\vec{k}_y = k_y \frac{\vec{K}_y}{|\vec{K}_y|}$ (voir figure 1.30). Autrement dit,

le vecteur \vec{k}_r est incliné d'un angle Ψ_1 , dans le plan (\vec{K}_x, \vec{K}_z) , par rapport au vecteur \vec{K}_x : par conséquent, le spectre $H(k_r, k_y)$ sera dans un plan (\vec{k}_r, \vec{K}_y) incliné d'un angle Ψ_1 par rapport au plan (\vec{K}_x, \vec{K}_y) (voir figure 1.31) [Jak97].

Revenons, à présent, sur la formation de l'image réelle ; cette image, comme toutes celles que nous montrerons et analyserons, dans ce manuscrit, sont obtenues à partir du spectre $H(k_r, k_y)$, défini en (1.33), par transformée de Fourier bidimensionnelle :

$\begin{array}{l} \mathcal{F} \quad [H(k_r, k_y)] \approx \tilde{I}(r, y) \quad (1.34) \\ k_r \rightarrow r \\ k_y \rightarrow y \end{array}$

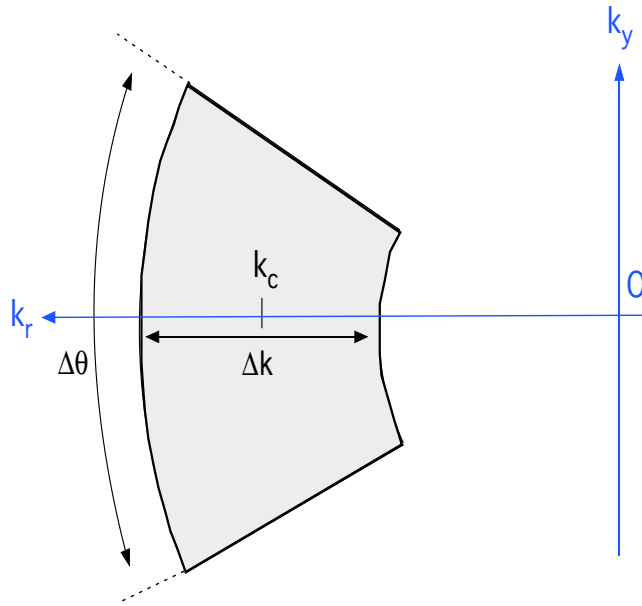


FIG. 1.29 – Support du spectre $H(k_r, k_y)$ de l'image réelle.

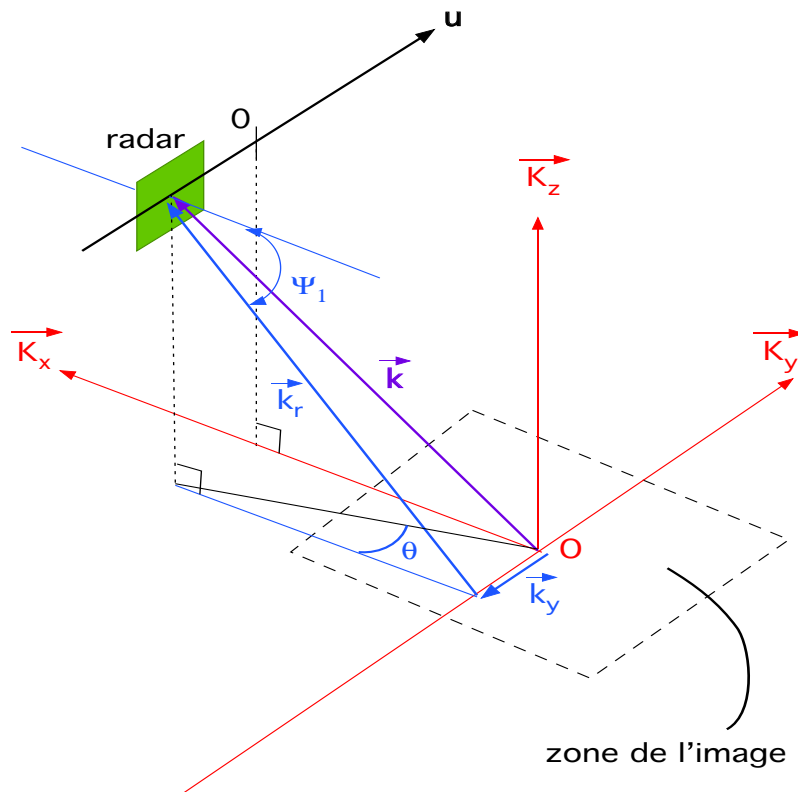


FIG. 1.30 – Vecteur d'onde \vec{k} en configuration 3D pour un réflecteur au centre de l'image (en supposant une cible au centre de l'image, tous les réflecteurs composant la cible ont approximativement le même vecteur d'onde \vec{k} si la cible est petite devant la distance antenne-cible).

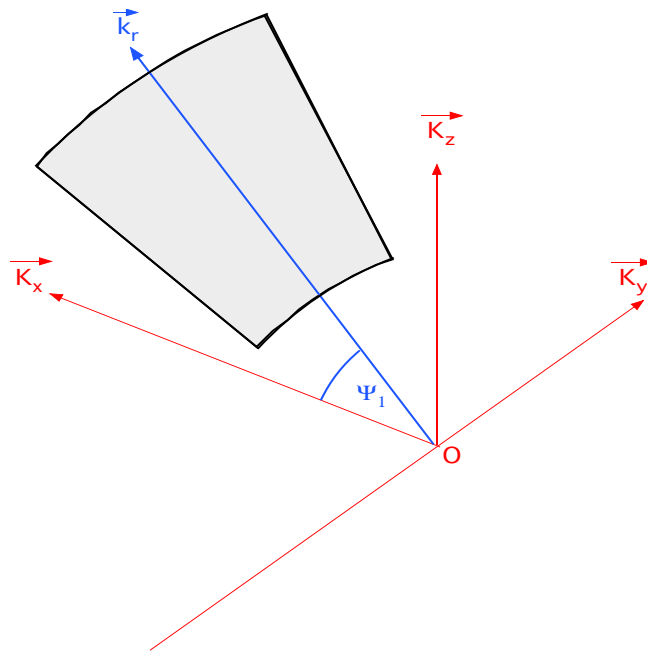
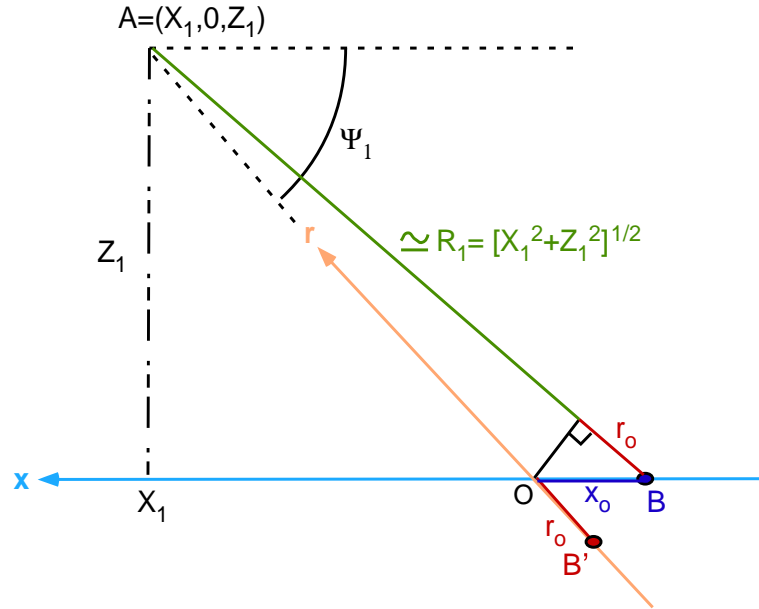
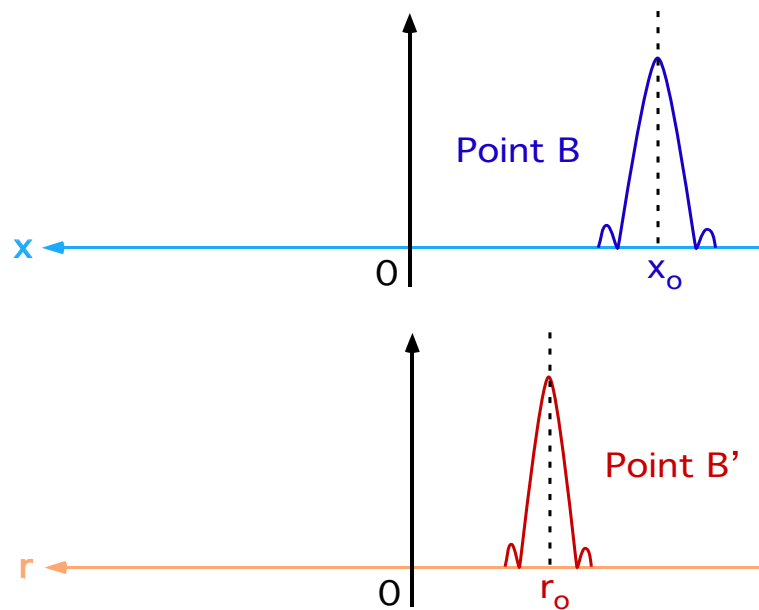


FIG. 1.31 – Disposition du spectre $H(k_r, k_y)$ dans l'espace.

Concrètement, un réflecteur B situé sur l'axe x en x_o sera localisé en $r_o = x_o \cos(\Psi_1)$ sur l'axe radial incliné r (voir schéma de la figure 1.32). Ainsi, l'image $\tilde{I}(r, y)$ des réflecteurs représentée dans le repère (r, y) est contractée d'un facteur $\cos(\Psi_1)$ selon l'axe r par rapport à l'image au sol $I(x, y)$.



(a) Géométrie SAR 3D en mode non squinté (coupe $y = 0$).



(b) Localisation d'un réflecteur sur l'axe radial au sol x et l'axe radial incliné r .

FIG. 1.32 – Le réflecteur est localisé sur l'axe r dans l'image réelle $\tilde{I}(r, y)$.

1.4 Quelques exemples de construction d'images

1.4.1 Construction d'images à partir de signaux 2D simulés en bande X.

On considère le scénario SAR 2D des figures 1.33 et 1.34 respectivement en mode stripmap non squinté et squinté. On génère le signal $S(f, u)$ reçu par le radar avec les paramètres suivants [Pas03] :

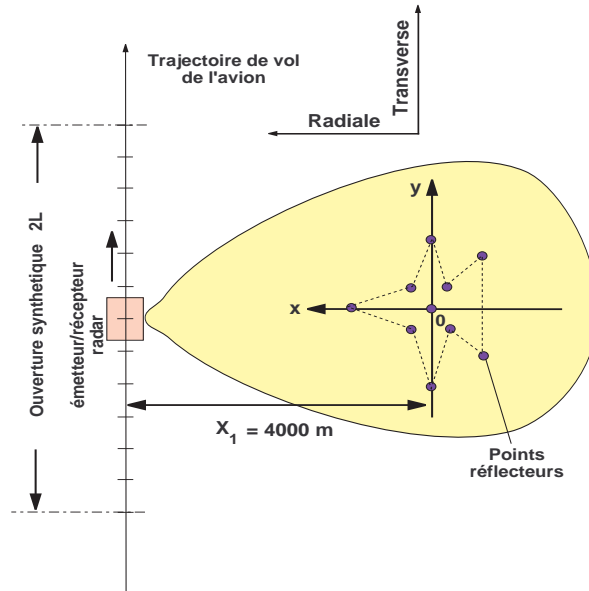
- On émet en bande X :
 - ◊ fréquence centrale $f_c = 9.6$ GHz.
 - ◊ bande émise $B=1$ GHz : ce qui correspond à une résolution radiale des points de l'image égale à $\delta x = 15$ cm.
- La distance qui sépare le radar et le centre de zone suivant l'axe x est $X_1 = 4000$ m.
- L'antenne synthétique a une dimension de $2L = 416$ m afin d'obtenir une résolution azimutale (ou transverse) des points de l'image égale à $\delta y = 15$ cm.
- Les signaux simulés en figures 1.33 et 1.34 ont été respectivement construits à partir du mode non-squinté ($\theta_1 = 0$) et du mode squinté ($\theta_1 = 8^\circ$).
- Les dimensions de l'image sont $X_o = 50$ m et $Y_o = 50$ m.

a/ Première simulation en mode non squinté

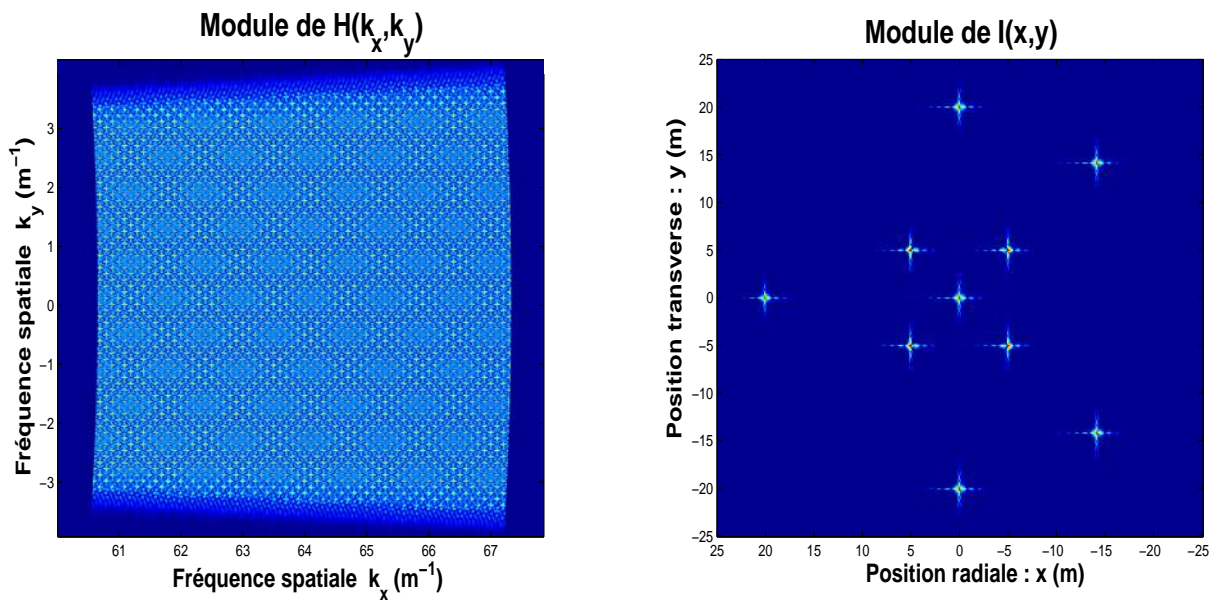
On simule le signal acquis par le radar au cours de son trajet de vol à partir du scénario non-squinté de la figure 1.33. Tous les points de l'image ont été affectés d'un même coefficient de réflectivité $\sigma = 1$. On applique, au signal reçu par le radar, l'algorithme RMA de formation d'images présenté en section 1.3. On effectue, notamment, l'interpolation de Stolt évoquée en 1.3.4 pour obtenir le spectre $H(k_x, k_y)$. Finalement, en appliquant la transformée de Fourier bidimensionnelle au spectre, on obtient l'image $I(x, y)$ dont le module fournit la répartition spatiale des réflecteurs.

b/ Seconde simulation en mode squinté

De la même manière, on génère le signal acquis par le radar à partir du scénario squinté de la figure 1.34. On procède également par algorithme RMA pour former l'image de la zone éclairée. La différence, par rapport à la simulation précédente (en mode non-squinté) réside dans le fait que l'antenne pointe dans une direction faisant un angle θ_1 avec l'axe x : l'axe radial et l'axe transverse ne sont plus perpendiculaires. Ceci a pour conséquence que l'image obtenue est légèrement déformée dans ce repère radiale-transverse non cartésien.



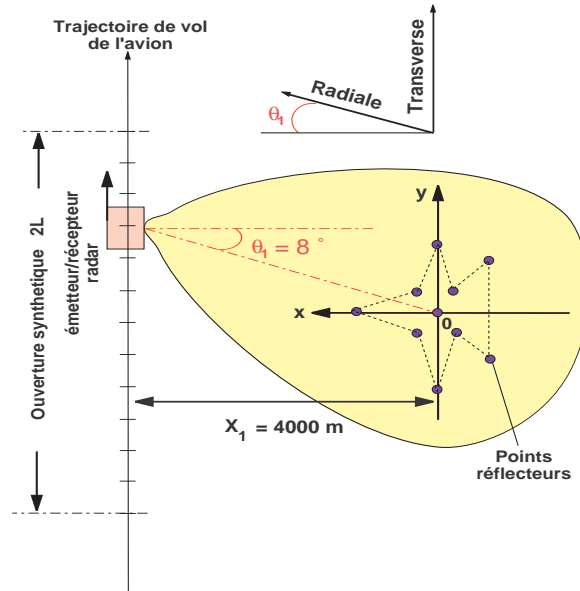
(a) Scénario stripmap en mode non-squinté pour la simulation du signal reçu par le radar.



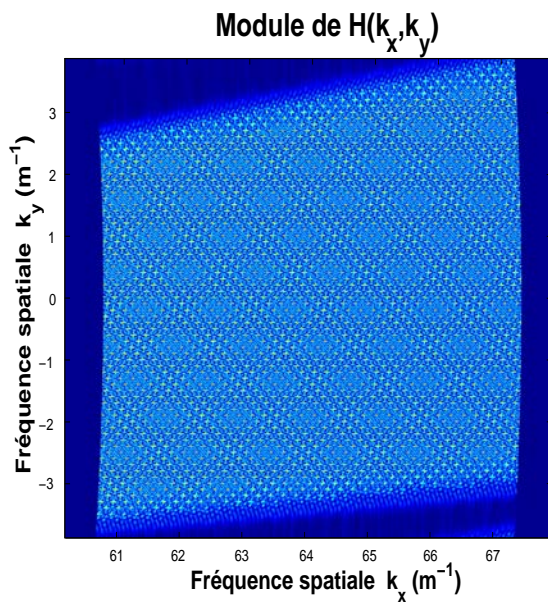
(b) Spectre de l'image SAR.

(c) Image SAR.

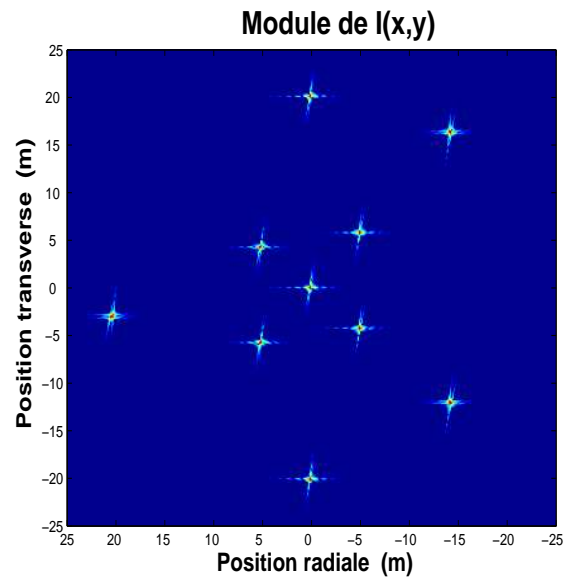
FIG. 1.33 – Spectre et image en mode non-squinté.



(a) Scénario stripmap en mode squinté pour la simulation du signal reçu par le radar.



(b) Spectre de l'image SAR.



(c) Image SAR.

FIG. 1.34 – Spectre et image en mode squinté.

1.4.2 Un exemple d'image réelle obtenue par algorithme de formation d'images à l'ONERA

La figure 3.3 (c) montre le type d'images réelles $\tilde{I}(r, y)$ qui peut être formé à l'ONERA au Département ElectroMagnétisme et Radar (DEMR) avec le radar RAMSES [Bou96]. Les caractéristiques générales sont les suivantes :

- Angle de squint nul : $\theta_1 = 0^\circ$.
- Angle de dépression : $\Psi_1 = 31^\circ$.
- Bande K_u :
 - ◊ Fréquence centrale d'émission $f_c = 14.2$ Ghz.
 - ◊ Bande émise $B = 900$ Mhz.
- Vitesse de l'avion : $v = 82.61$ m/s.
- Distance antenne-centre de zone imagée : $R = 4083$ m.
- Temps d'intégration du signal : $\Delta T = 2.86$ s.

a/ Dimension de l'antenne synthétique

L'avion circule à une vitesse $v = 82.61$ m/s. D'autre part, le radar intègre le signal écho pendant une durée $\Delta T = 2.86$ s. Ces deux informations donnent une antenne synthétique de dimension $D_{SAR} = \Delta T \cdot v = 236$ m.

b/ Résolutions radiale et transverse

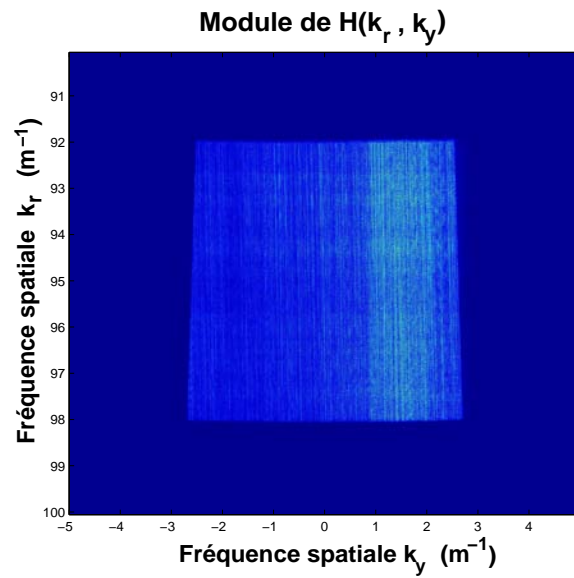
- La résolution radiale est $\delta r = c/2B = 16.6$ cm.
- La résolution transverse est $\delta y = cR/(2f_c D_{SAR}) = 18$ cm.

c/ Notations adoptées

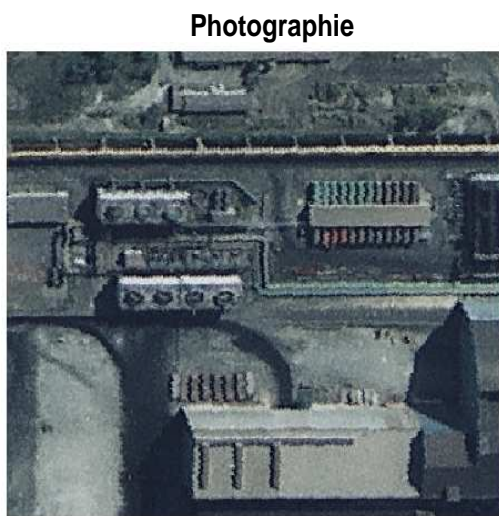
Pour des raisons de commodité, dans toute la suite, les variables k_r et r seront renotées k_x et x : Ainsi le spectre $H(k_r, k_y)$ sera renoté $H(k_x, k_y)$. De plus, l'image réelle sera notée I au lieu de \tilde{I} : par conséquent, on désignera par $I(x, y)$ l'image réelle au lieu de $\tilde{I}(r, y)$.

d/ Modèle des réflecteurs colorés et anisotropes

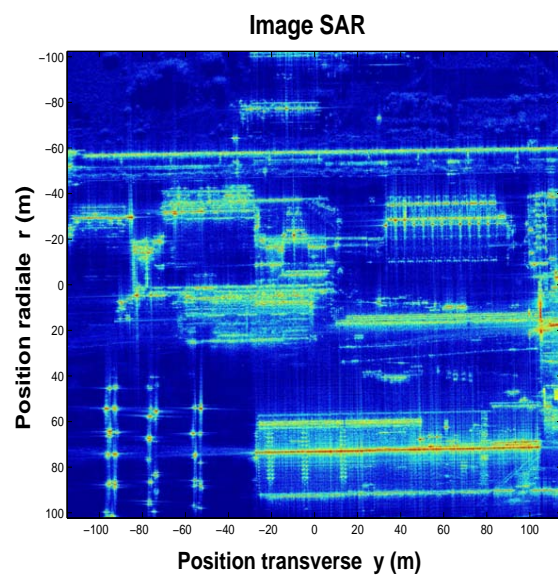
Jusqu'à présent, on a supposé que le coefficient de réflectivité des réflecteurs était constant dans la bande de fréquence (les réflecteurs sont dits *blancs*) et ne dépend pas de l'angle d'illumination θ (les réflecteurs sont dits *isotropes*) or la réflectivité $\{\sigma_i\}_{i=1..n}$ des diffuseurs dans une image réelle est suspectée de varier en fonction de la fréquence f (phénomène de coloration) et



(a) Spectre de l'image réelle.



(b) Photo aérienne fournie par l'IGN.



(c) Image réelle formée à partir de données acquises par RAMSES.

FIG. 1.35 – Zone d'un centre sidérurgique du sud de la France.

de l'angle θ (phénomène d'anisotropie). Autrement dit, le modèle SAR défini en (1.23) :

$$H(k_x, k_y) \approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp [+j2\pi (k_x x + k_y y)] dx dy \quad (1.35)$$

$$\text{avec } I(x, y) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i, y - y_i) \quad (1.36)$$

est remis en cause pour des signaux large bande et grandes ouvertures angulaires. D'ailleurs, des modèles théoriques expriment le coefficient de réflexion en fonction de la fréquence f et de l'angle θ : par exemple, en [Trin97], il est proposé une modélisation gaussienne en angle de l'amplitude. Un autre exemple est le modèle GTD¹⁸ qui prend en compte la géométrie des diffuseurs [Pot95, Pot97] : il sera évoqué au chapitre 4. Autrement dit, le pouvoir réfléchissant des diffuseurs est variable dans la gamme fréquentielle d'émission et dépend de l'angle azimutal θ sous lequel est vue la cible.

À titre d'exemple et pour illustrer les effets qu'induisent ces phénomènes sur l'image SAR, on présente :

- dans la figure 1.36 (a), l'image SAR obtenue en faisant l'hypothèse de 5 réflecteurs blancs et isotropes. On a modélisé le spectre, que l'on appellera dorénavant *coefficient de rétrodiffusion*, comme :

$$H(\vec{k}) = \sum_{i=1}^5 \sigma_i \cdot e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \quad (1.37)$$

où l'on a affecté la valeur unité aux coefficients de réflectivité : $\sigma_i = 1$; $i \in [1, 5]$. L'image SAR est obtenue en appliquant la transformée de Fourier bidimensionnelle au coefficient de rétrodiffusion défini en (1.37).

- dans la figure 1.36 (b), l'image SAR construite en supposant que les réflecteurs de la figure 1.36 (a) sont, à présent, anisotropes et soit colorés soit blancs selon les cas : la réponse $|\sigma_i(f, \theta)|$ de chaque réflecteur est illustrée en figure 1.37 ; L'ensemble de ces réponses est basée sur le modèle GTD en angle présenté ultérieurement hormis la réponse en 1.37 (c) qui suit le modèle gaussien en angle proposé en [Trin97]. Le modèle du coefficient de rétrodiffusion H est :

$$H(\vec{k}) = \sum_{i=1}^5 \sigma_i(f, \theta) \cdot e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \quad (1.38)$$

L'image SAR est obtenue en appliquant la transformée de Fourier bidimensionnelle au coefficient de rétrodiffusion défini en (2.57).

L'essentiel de notre travail est de mettre en lumière ces phénomènes physiques de coloration et d'anisotropie. Cette mise en lumière est rendue possible grâce aux méthodes *temps-fréquence* qui permettent d'analyser le signal SAR localement¹⁹. Mais avant d'introduire l'analyse temps-fréquence en imagerie SAR, il convient de présenter, dans le chapitre suivant, quelques généralités de l'analyse temps-fréquence dans le cas d'un signal 1D.

¹⁸Geometrical Theory of Diffraction.

¹⁹Par opposition à l'imagerie classique, décrite dans ce chapitre, qui effectue l'intégration du signal SAR sur toutes les fréquences et sur tous les angles dans le but d'obtenir la répartition spatiale des réflecteurs.

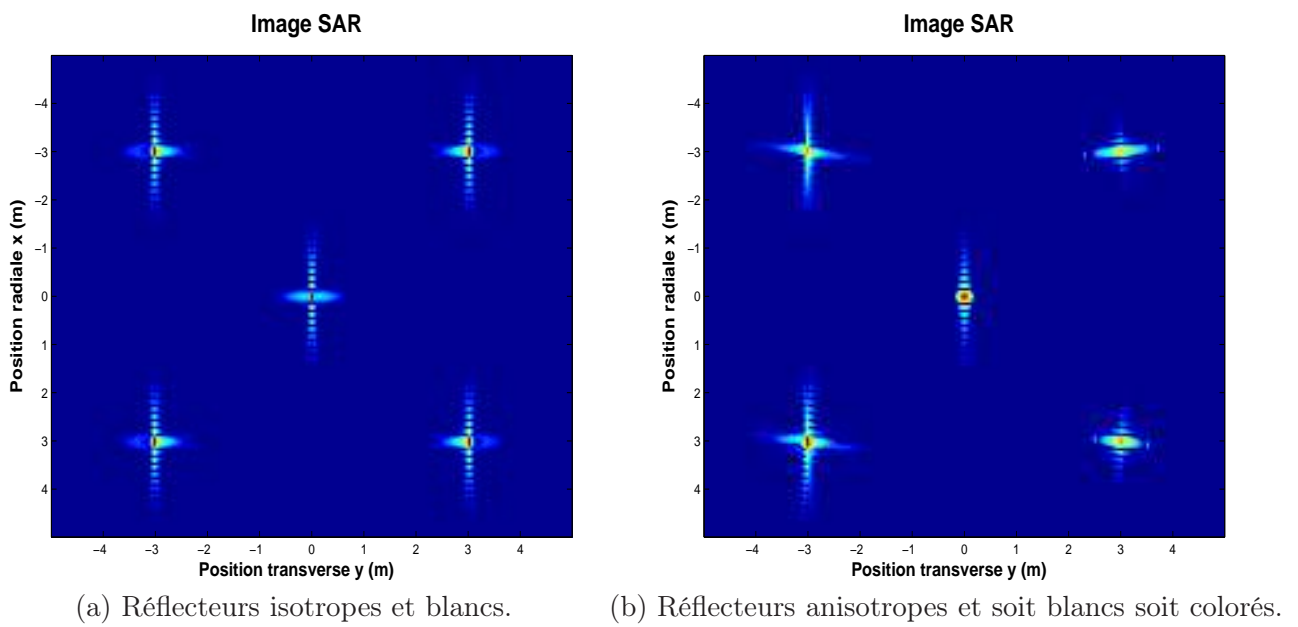


FIG. 1.36 – Images SAR dans le cas de réflecteurs isotropes et blancs puis dans le cas de réflecteurs anisotropes et blancs ou colorés.

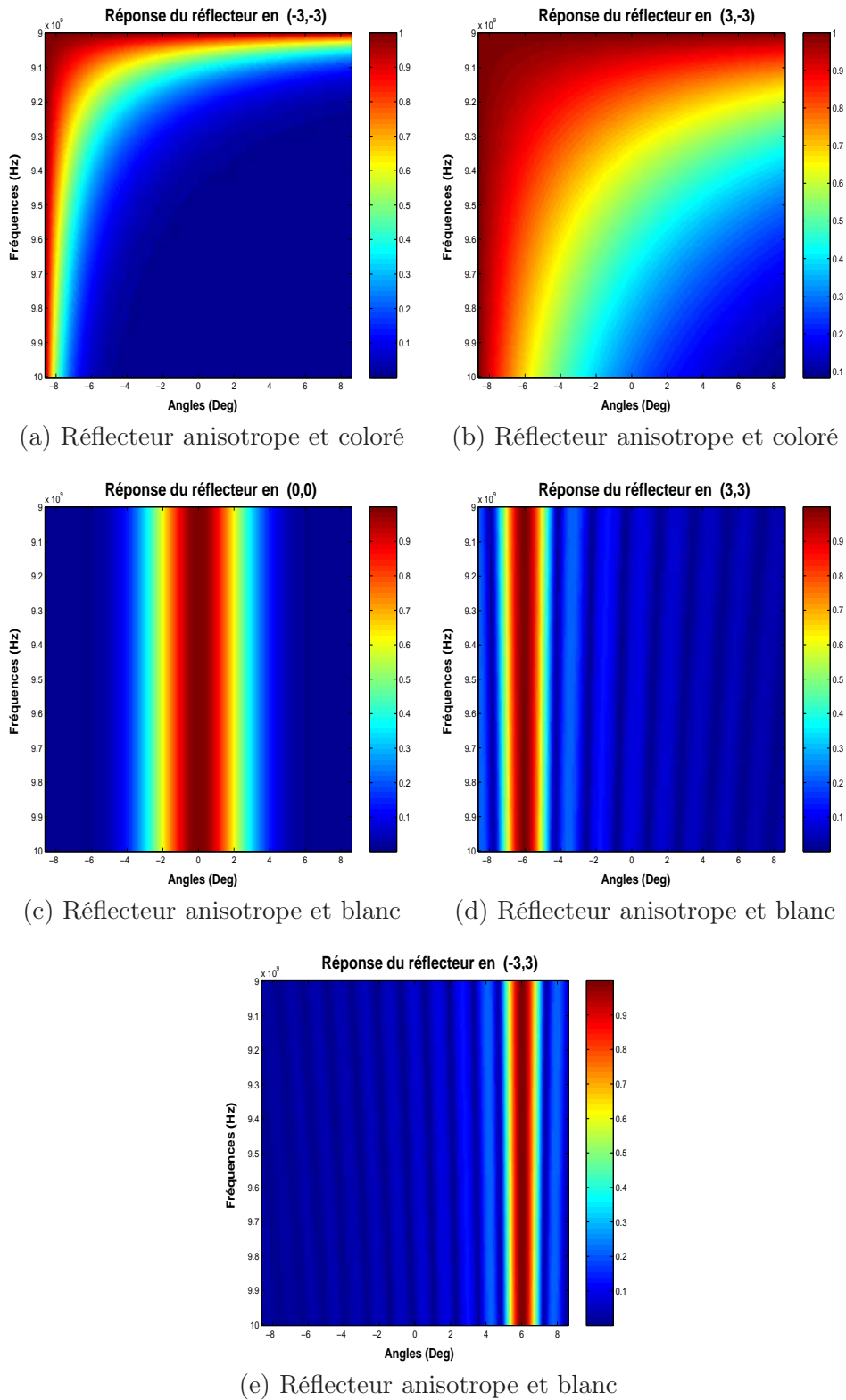


FIG. 1.37 – Réponse $|\sigma_i(f, \theta)|$ de chaque réflecteur de l'image SAR illustrée en figure 1.36 (b).

Chapitre 2

Théorie des distributions Temps-Fréquence

Pour mettre en lumière d'éventuels phénomènes d'anisotropie et de coloration des réflecteurs en imagerie SAR, il est nécessaire d'effectuer une analyse locale du signal SAR. Ce traitement local est rendu possible grâce à l'analyse temps-fréquence étendue aux signaux SAR qui sont bidimensionnels.

La plus grande partie de ce chapitre est consacrée à familiariser le lecteur à l'analyse temps-fréquence dans le cas de signaux 1D. On rappellera, pour cela, quelques généralités de l'analyse temps-fréquence en contexte monodimensionnel.

En fin de ce chapitre, nous étendrons les méthodes temps-fréquence 1D au cas de signaux 2D et plus particulièrement au cas des signaux SAR ; on justifiera, notamment, l'utilisation du scalogramme (module au carré de la transformée en ondelettes continues) pour mettre en lumière le caractère anisotrope et coloré des réflecteurs.

2.1 Présentation de l'analyse temps-fréquence

L'analyse temps-fréquence a été introduite pour remédier aux limitations de l'analyse spectrale classique (transformée de Fourier) à décrire des signaux dont les caractéristiques spectrales varient au cours du temps. On trouve généralement ces signaux dits *non-stationnaires* dans les domaines aussi variés tels que le radar, le sonar, la parole ou les télécommunications.

Dans ce chapitre, on distinguera deux grandes classes de distributions temps-fréquence :

- La classe de *Cohen* regroupant des distributions temps-fréquence adaptées aux signaux dits à *bande étroite*²⁰ (bande fréquentielle relative petite devant l'unité). Dans cette classe, on trouve, par exemple, le spectrogramme et la distribution de *Wigner-Ville*.

²⁰Ces signaux obéissent au groupe physique de transformations par translation en temps et en fréquence. La classe de Cohen a été construite pour être *covariante* par ce groupe de transformations.

- La classe de *Bertrand* composée de nouvelles méthodes d'analyse plus avancées, spécifiques aux signaux *large bande*²¹. Dans cette classe, on trouve, par exemple, la distribution *affine unitaire* et le scalogramme.

En outre, on demandera à ces distributions de respecter certaines contraintes. Par exemple, pour interpréter la distribution comme une répartition *énergétique* du signal dans le plan temps-fréquence, on exigera la *positivité* de la distribution.

En particulier, on verra que le spectrogramme et le scalogramme, qui définissent des distributions d'énergie dans le plan (t, f) , sont, en fait, des formes obtenues par *lissage* respectivement de la distribution de Wigner-Ville et de la distribution affine unitaire (ces deux dernières distributions n'étant pas partout positives dans le plan temps-fréquence). On dit que le spectrogramme et le scalogramme sont des *formes régularisées* de ces dernières distributions. Ils ont, toutefois, l'inconvénient, de ne pas vérifier les propriétés dites de *marginalisation*, et d'introduire une inégalité de type Heisenberg-Gabor entre la résolution temporelle et fréquentielle.

2.2 Le concept bande étroite-bande large

Dans la pratique, on distingue deux types de signaux : les signaux dits à *bande étroite* et les signaux dits à *large bande* .

Ici, on attire l'attention du lecteur sur le fait que le groupe physique qui agit sur les signaux bande étroite est le groupe des translations en temps et en fréquence, et que le groupe affine (translation et contraction/dilatation), est, lui, approprié aux signaux large bande.

On montrera, qu'à partir de tel ou tel groupe de transformations, une classe de distributions temps-fréquence sera construite et appropriée soit aux signaux bande étroite soit aux signaux large bande.

Mais avant de présenter les concepts bande étroite et large bande, il convient de rappeler la notion de *signal analytique* associé à un signal réel quelconque. Cette notion a été introduite par Ville [Vil48] et Gabor [Gab46] pour tenter d'attribuer des paramètres physiques (enveloppe, fréquence instantanée) à tout signal réel et en particulier aux signaux non stationnaires.

2.2.1 Définition du signal analytique

Le signal analytique associé au signal réel $s(t)$ de manière bijective, se définit comme :

$$z(t) = \int_0^{+\infty} 2 S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.1)$$

où $S(f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$ est la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

²¹Ces signaux obéissent au groupe *affine* (transformations de translation et compression/dilatation en temps). La classe de Bertrand a été construite pour être *covariante* par le groupe affine.

Il est à fréquences positives²² et prend la forme complexe suivante :

$$z(t) = |z(t)| e^{j(2\pi f_c t + \varphi(t))} \quad (2.2)$$

où $|z(t)|$ est l'enveloppe du signal analytique (elle est à variation lente devant le terme exponentiel) et,

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.3)$$

est la fréquence instantanée.

Il convient, à présent, de définir le concept de signal bande étroite et large bande.

2.2.2 Les signaux bande étroite

Un signal bande étroite est un signal dont la largeur de bande relative $(B/f_c) \ll 1$, avec B , et f_c définissant respectivement la bande fréquentielle et la fréquence centrale du signal.

Ces signaux peuvent généralement être mis sous la forme complexe suivante :

$$s(t) = |a(t)| \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \quad (2.4)$$

- Le terme $a(t)$ décrit la façon dont varie l'amplitude du signal.
- La fonction $\phi(t)$ représente la loi de modulation de phase (ou de fréquence).
- La fréquence centrale f_c est souvent appelée *fréquence porteuse* du signal.

Considérant l'écriture (2.4) du signal réel bande étroite $s(t)$, la forme complexe $\mathbf{s}(t)$ associée à ce signal $s(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{s}(t) = |a(t)| e^{j(2\pi f_c t + \phi(t))} \quad (2.5)$$

En bande étroite, le signal analytique $z(t)$ est une approximation du signal complexe $\mathbf{s}(t)$ caractérisé en (2.2). Autrement dit, on a :

$$|a(t)| \approx |z(t)| \quad (2.6)$$

$$\phi(t) \approx \varphi(t) \quad (2.7)$$

à condition que $f_c \notin [-B/2, B/2]$ (théorème de Bedrosian) [Bed63].

Les approximations (2.6) et (2.7) seront d'autant justifiées que $(B/f_c) \rightarrow 0$, c'est à dire que la bande relative sera petite [Boa92].

D'ailleurs, on recourt à cette approximation en radar pour assimiler l'*effet Doppler* en bande étroite comme un simple décalage fréquentiel du signal réfléchi (par un point-cible en mouvement) par rapport au signal d'émission [Kal92]. Autrement dit, le signal réfléchi se présente comme une version du signal d'émission translaté en temps et en fréquence²³.

²²Son spectre $Z(f)$ est obtenu en tronquant les fréquences négatives au spectre réel : $Z(f) = 2Y(f)S(f)$, avec $Y(f)$ l'échelon unité. Le contenu informationnel n'est toutefois pas altéré puisque les composantes fréquentielles négatives du signal réel peuvent être retrouvées grâce à la relation $S(-f) = S^*(f)$.

²³On trouvera le détail de l'effet Doppler en bande étroite en section (F.2) de l'annexe F.

À l'image de cet exemple, l'étude des signaux à bande étroite est principalement fondée sur le groupe des translations en temps et en fréquence qui agit sur les signaux complexes en général comme :

$$\begin{aligned} z(t) &\longrightarrow z'(t) = e^{j2\pi f_o t} z(t - t_o) \\ Z(f) &\longrightarrow Z'(f) = e^{-j2\pi f t_o} Z(f - f_o) \end{aligned}$$

avec $Z(f)$ la transformée de Fourier de $z(t)$.

Les signaux analytiques large bande, quant à eux, obéissent à un autre groupe de transformations qu'est le groupe affine présenté dans le paragraphe suivant.

2.2.3 Signaux large bande

Un signal large bande est un signal dont la largeur de bande relative n'est plus négligeable devant l'unité.

On rencontre ce type de signaux le plus souvent en acoustique ou en sonar. À titre d'exemple, l'effet Doppler se traduit par une transformation de translation et contraction/dilatation sur le temps²⁴ :

$$s(t) = \sqrt{\gamma} p(\gamma [t - \tau])$$

où $p(t)$ et $s(t)$ sont respectivement les signaux réels d'émission et de réflexion [Kal92]. Les constantes τ et γ sont respectivement le *retard du signal* et le *facteur de compression*. Le terme $\sqrt{\gamma}$ n'existe que pour garantir la conservation d'énergie (définie par le produit scalaire usuel) entre le signal réfléchi $s(t)$ et le signal émis $p(t)$.

D'une manière générale, le groupe *affine* (relatif aux transformations de translation et contraction/dilatation en temps) agit sur les signaux analytiques large bande, en temps ou en fréquence, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} z(t) &\longrightarrow z'(t) = a^r z(a^{-1}(t - b)) \\ Z(f) &\longrightarrow Z'(f) = a^{r+1} e^{-j2\pi f b} Z(a f) \end{aligned}$$

où a est un réel strictement positif et b un réel quelconque. Le paramètre réel r est introduit afin de respecter le dimensionnement physique du signal²⁵, c'est à dire la concordance des unités physiques entre observateurs ayant subi une contraction ou une dilatation de leur horloge [Ber88, Ber91b, Ova92, Vig96].

²⁴L'effet Doppler exact, c'est à dire en large bande, est détaillé dans le paragraphe (F.1) de l'annexe F.

²⁵L'introduction de ce paramètre r permet d'élargir le cas classique $r = -1/2$. En effet, ce cas est rencontré, notamment, dans les applications radar (comme l'effet Doppler large bande) dans le but de conserver l'énergie après une transformation affine.

2.3 Construction de distributions bilinéaires

À chaque type de signaux (bande étroite, large bande), est associé un groupe de transformations (groupe des translations en temps et en fréquence, groupe affine).

Par conséquent, pour chaque type de signaux, on va chercher à construire une classe générale de représentations temps-fréquence vérifiant un *diagramme de covariance* par le groupe de transformations considéré.

Ces représentations temps-fréquence sont construites à partir d'une structure bilinéaire²⁶ du signal analytique $z(t)$ associé au signal $s(t)$.

Cette structure est appelée *partie utile* du signal analytique et peut être définie en temps ou en fréquence par :

$$u_z(t_1, t_2) = z^*(t_1) z(t_2) \quad (2.8)$$

$$U_z(f_1, f_2) = Z^*(f_1) Z(f_2) \quad (2.9)$$

Ainsi, la représentation temps-fréquence d'un signal $z(t)$ prendra la forme suivante :

$$P_z(t, f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} k(t, f; t_1, t_2) u_z(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.10)$$

ou encore

$$P_z(t, f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(t, f; f_1, f_2) U_z(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (2.11)$$

où les quantités $k(t, f; t_1, t_2)$ et $K(t, f; f_1, f_2)$ sont des *noyaux* qui sont transformées de Fourier bidimensionnelles l'une de l'autre par rapport aux variables (t_1, t_2) et (f_1, f_2) . La connaissance de ces noyaux détermine complètement la représentation temps-fréquence.

Ainsi, selon le type de signal étudié (bande étroite, large bande), on imposera aux signaux et à leurs représentations temps-fréquence associées de vérifier un diagramme de covariance de groupe (groupe des translations en temps et en fréquence, groupe affine). De cette manière, on détermine le noyau défini en (2.10) ou (2.11). Ceci aura pour conséquence la construction de la classe de Cohen, adaptée aux signaux bande étroite et la classe de Bertrand, spécifique aux signaux large bande.

Les deux paragraphes suivants sont dédiés à ces deux grandes classes de distributions temps-fréquence.

²⁶Un signal réel $s(t)$ est toujours mesuré ou analysé à une phase près : le recours à la structure bilinéaire permet d'obtenir une quantité indépendante de cette phase.

2.4 Représentation temps-fréquence des signaux bande étroite

L'étude des signaux à bande étroite est principalement fondée sur le groupe des translations en temps et en fréquence qui agit sur les signaux complexes, en temps ou en fréquence, en général comme :

$$\begin{aligned} z(t) &\longrightarrow z'(t) = e^{j2\pi f_o t} z(t - t_o) \\ Z(f) &\longrightarrow Z'(f) = e^{-j2\pi f t_o} Z(f - f_o) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Par action du groupe (2.12) sur les signaux complexes, on demande aux représentations temps-fréquence $I(t, f)$ de respecter le diagramme de covariance suivant :

$$\begin{array}{ccc} z(t) &\longrightarrow & z'(t) = e^{j2\pi f_o t} z(t - t_o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z(f) &\longrightarrow & Z'(f) = e^{-j2\pi f t_o} Z(f - f_o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_z(t, f) &\longrightarrow & I_{z'}(t, f) = I_z(t - t_o, f - f_o) \end{array} \quad (2.13)$$

2.4.1 La classe de Cohen

a/ Définition

Les représentations temps-fréquence qui vérifient le diagramme de covariance (2.13) sont répertoriées dans une classe, appelée *classe de Cohen* [Coh89, Fla98]. Elle est donnée par :

$$C_z(t, f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi n(u-t)} \phi(n, \tau) z(u + \tau/2) z^*(u - \tau/2) e^{-j2\pi f \tau} dn du d\tau \quad (2.14)$$

où $\phi(n, \tau)$ est une fenêtre d'observation telle que :

$$\begin{aligned} \phi(n, \tau) &= \phi^*(-n, -\tau) \\ \phi(0, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Par construction, toutes les représentations temps-fréquences de la classe de Cohen vérifient le diagramme de covariance (2.13). Ceci étant dit, on demande à ces représentations de vérifier d'autres contraintes. Les contraintes les plus importantes sont mentionnées dans le paragraphe suivant.

b/ Contraintes imposées à la classe de Cohen

Pour des raisons de clarté et de commodité, il serait souhaitable que les représentations temps-fréquence de la classe de Cohen, construites sur le signal analytique $z(t)$ et notées $C_z(t, f)$, vérifient certaines contraintes dont les plus importantes sont les suivantes :

Contrainte 1 Pour définir une densité d'énergie dans le plan temps-fréquence, $C_z(t, f)$ doit être réelle, positive et vérifier :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} C_z(t, f) dt df = E_z \quad (2.15)$$

où E_z définit l'énergie du signal donnée par :

$$E_z = \int_{\mathbb{R}} |z(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |Z(f)|^2 df$$

Contrainte 2 La représentation $C_z(t, f)$ doit vérifier la propriété de marginalisation sur le temps :

$$\int_{\mathbb{R}} C_z(t, f) dt = |Z(f)|^2 \quad (2.16)$$

L'intégration de la représentation temps-fréquence sur l'axe du temps donne la densité spectrale d'énergie.

Contrainte 3 La représentation $C_z(t, f)$ doit vérifier la propriété de marginalisation sur la fréquence :

$$\int_{\mathbb{R}} C_z(t, f) df = |z(t)|^2 \quad (2.17)$$

L'intégration de la représentation temps-fréquence sur l'axe de la fréquence donne la puissance instantanée.

Contrainte 4 Définition des principaux moments de la distribution

Si le signal temporel $z(t)$ analytique et sa transformée de Fourier $Z(f)$ sont définis par une enveloppe et une phase :

$$z(t) = a(t) e^{j\phi(t)} \longleftrightarrow Z(f) = A(f) e^{j\varphi(f)}$$

alors, les moments du premier ordre de la distribution définissent la fréquence instantanée $f_i(t)$ et le temps de propagation de groupe $\tau_g(f)$:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f C_z(t, f) df}{\int_{\mathbb{R}} C_z(t, f) df} = f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \quad (2.18)$$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} t C_z(t, f) dt}{\int_{\mathbb{R}} C_z(t, f) dt} = \tau_g(f) = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi}{df} \quad (2.19)$$

Contrainte 5 Conservation du support du signal temporel ou fréquentiel

Si le signal occupe une bande de fréquence donnée B ou a une durée T , la distribution temps-fréquence possède alors le même support fréquentiel ou temporel.

Contrainte 6 Propriété d'unitarité ou de Moyal

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} C_{z_1}(t, f) C_{z_2}^*(t, f) dt df = \left| \int_{\mathbb{R}} z_1(t) z_2^*(t) dt \right|^2 \quad (2.20)$$

Malheureusement, aucune distribution ne peut vérifier à la fois toutes ces propriétés. Ceci dit, on demande aux distributions de ne vérifier que les plus importantes.

Une des distributions de la classe de Cohen qui vérifie la plupart des contraintes précédentes est la distribution de *Wigner-Ville* [Coh89]. Elle est très populaire et une des plus utilisées en traitement du signal.

2.4.2 Une représentation t-f particulière : la distribution de Wigner-Ville

a/ Définition

Partant de la formulation de la classe de Cohen (2.14), la distribution de Wigner-Ville est obtenue, en imposant à la fonction de pondération ϕ d'être indépendante de n et de τ :

$$\phi(n, \tau) = 1, \quad \forall (n, \tau)$$

Par conséquent, la distribution de Wigner-Ville est définie comme :

$$W_z(t, f) = \int_{\mathbb{R}} z(t + \tau/2) z^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.21)$$

ou encore

$$W_z(t, f) = \int_{\mathbb{R}} Z(f + u/2) Z^*(f - u/2) e^{+j2\pi tu} du \quad (2.22)$$

b/ Propriétés de la distribution de Wigner-Ville

Elle vérifie, entre autres, les propriétés suivantes :

- (1) La distribution de Wigner-Ville $W(t, f)$ appartient à la classe de Cohen : elle respecte donc le diagramme de covariance (2.13) basé sur le groupe des translations en temps et en fréquence.
- (1) La distribution de Wigner-Ville $W(t, f)$ est réelle mais non forcément positive pour toutes les valeurs de t et de f .

- (2) La distribution de Wigner-Ville $W(t, f)$ satisfait les propriétés marginales en temps et en fréquence permettant respectivement d'accéder à la densité spectrale d'énergie et à la puissance instantanée du signal :

$$\int_{\mathbb{R}} W_z(t, f) dt = |Z(f)|^2 \quad (2.23)$$

$$\int_{\mathbb{R}} W_z(t, f) df = |z(t)|^2 \quad (2.24)$$

- (3) Les moments du premier ordre de la distribution permettent d'accéder à la fréquence instantanée $f_i(t)$ et au temps de propagation de groupe $\tau_g(f)$:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f W_z(t, f) df}{\int_{\mathbb{R}} W_z(t, f) df} = f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \quad (2.25)$$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} t W_z(t, f) dt}{\int_{\mathbb{R}} W_z(t, f) dt} = \tau_g(f) = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi}{df} \quad (2.26)$$

- (4) La distribution de Wigner-Ville $W(t, f)$ satisfait la formule de Moyal (2.20).

- (5) Elle localise parfaitement les signaux monochromatiques ainsi que les signaux *chirps* sur des courbes d'équation $f = kt$:

$$\begin{aligned} Z(f) = \delta(f - f_o) &\rightarrow W_z(t, f) = \delta(f - f_o) \\ z(t) = e^{j2\pi kt^2} &\rightarrow W_z(t, f) = \delta(f - kt) \end{aligned}$$

À titre d'illustration, on montre en figure 2.1(a), la distribution de Wigner-Ville d'un chirp de bande $B = 1$ Ghz et de fréquence centrale $f_c = 10$ Ghz : l'énergie du signal est concentré sur une courbe $f = kt + f_{min}$.

- (6) De part sa structure bilinéaire, la distribution de Wigner-Ville crée des interactions entre les composantes du signal [Kad92]. Soit, par exemple, le signal $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, la distribution de Wigner-Ville du signal $z(t)$ est donnée par

$$W_z(t, f) = W_{z_1}(t, f) + W_{z_2}(t, f) + 2 \mathcal{R}_e \left[\int_{\mathbb{R}} z_1(t + \tau/2) z_2^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] \quad (2.27)$$

Dit d'une autre manière, deux points dans le plan temps-fréquence génèrent une interaction localisée en leur barycentre. En particulier, si les signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ ne sont pas analytiques, la distribution de Wigner-Ville fait apparaître des interactions entre les composantes à fréquences positives et négatives. À titre d'exemple, on illustre en figure 2.1(b)

la distribution de Wigner-Ville d'un signal somme de deux chirps : on peut effectivement observé qu'il existe des interactions entre les deux chirps.

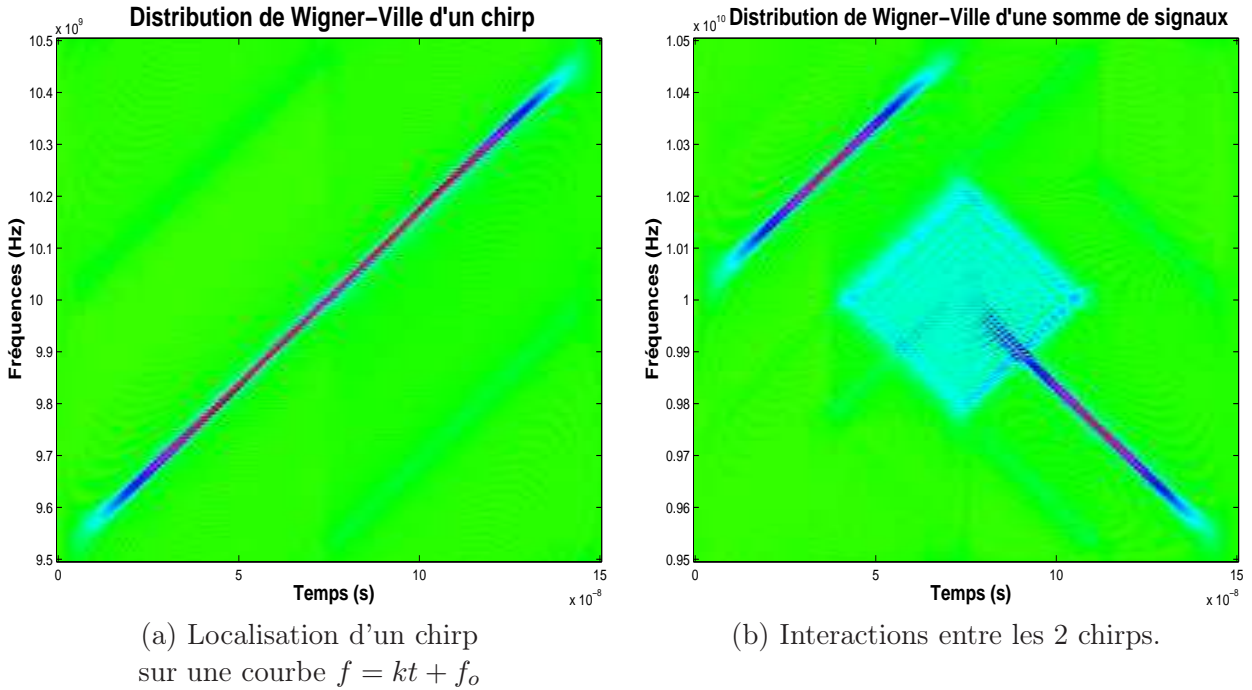


FIG. 2.1 – Distribution de Wigner-Ville d'un chirp puis celle d'un signal résultat de la somme de 2 signaux (existence de termes d'interférences).

2.4.3 Le spectrogramme : une forme régularisée de la distribution de Wigner-Ville

a/ Construction de la forme régularisée

La représentation $W(t, f)$ n'est pas partout positive. Elle ne peut donc être considérée comme une densité d'énergie dans le plan temps-fréquence. Un moyen de remédier à ce problème est de construire une forme *régularisée* associée à cette distribution en utilisant la formule de Moyal (2.20).

La distribution de Wigner-Ville étant réelle, la formule de Moyal s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_z(t, f) W_g(t, f) dt df = \left| \int_{\mathbb{R}} z(t) g^*(t) dt \right|^2 \quad (2.28)$$

Soit le signal analysant $g_{t_o, f_o}(t) = h(t - t_o) e^{+j2\pi f_o t}$ avec h une fenêtre d'analyse réelle. En utilisant le diagramme de covariance (2.13) (relatif aux translations en temps et en fréquence) sur la distribution de Wigner-Ville, on a :

$$64 \quad W_{g_{t_o, f_o}}(t, f) = W_h(t - t_o, f - f_o) \quad (2.29)$$

Par conséquent, la forme régularisée S_z de la distribution de Wigner-Ville s'exprime par :

$$S_z(t_o, f_o) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_z(t, f) W_h(t - t_o, f - f_o) dt df \quad (2.30)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} z(t) h^*(t - t_o) e^{-j2\pi f_o t} dt \right|^2 \quad (2.31)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} z(t) g_{t_o, f_o}^*(t) dt \right|^2 \quad (2.32)$$

La forme régularisée S_z est obtenue par *lissage* de la distribution de Wigner-Ville d'après (2.30). Elle est, finalement, d'après (2.31), le *spectrogramme*, s'exprimant comme le module au carré de la transformée à court terme [Fla88, Coh89, Ova92, Vig96].

Il faut noter que ce lissage permet de réduire les interférences qu'engendre la distribution de Wigner-Ville²⁷ [Fla98] mais au prix d'une dégradation de la résolution (voir figures 2.2(a) et 2.2(b)). On perd également les propriétés marginales (2.23) et (2.24) et les résolutions temporelle et fréquentielle ne peuvent être fixées indépendamment l'une de l'autre du fait de l'inégalité d'Heisenberg-Gabor.

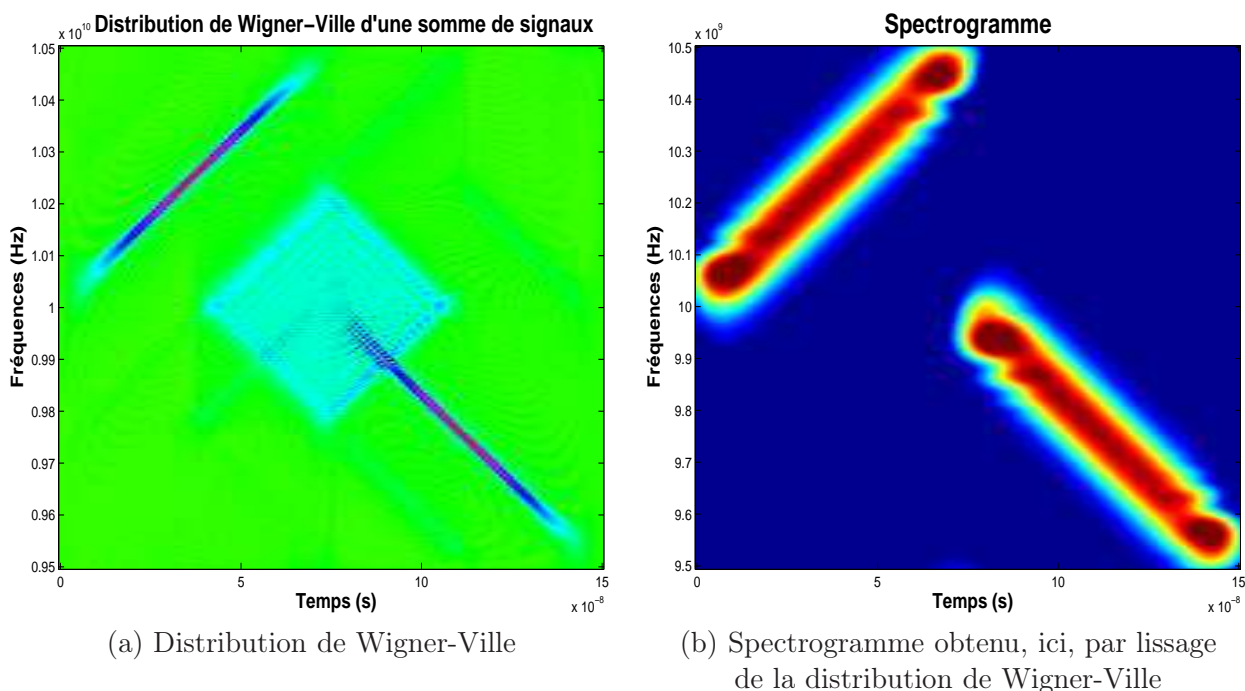


FIG. 2.2 – Lissage de la distribution de Wigner-Ville : réduction des interférences au prix d'une dégradation de la résolution.

²⁷Les deux éléments *positivité* et *lissage* sont intimement liés. En effet, les valeurs négatives de la distribution de Wigner-Ville apparaissent de manière primordiale dans les termes d'interférences qui sont de nature oscillante. Opérer un lissage réduit ces interférences tout en garantissant la positivité.

b/ Inconvénient du spectrogramme : compromis temps-fréquence.

Les cellules de résolution temporelle et fréquentielle sont liées par le *principe d'Heisenberg-Gabor*²⁸. Pour expliquer ce phénomène, mettons en évidence la dualité temps-fréquence en ré-écrivant le spectrogramme à partir du signal fréquentiel $Z(f)$. Avec la formule de Parseval²⁹, on a :

$$\begin{aligned} S_z(t_o, f_o) &= \left| \int_{\mathbb{R}} Z(f) H^*(f - f_o) e^{+j2\pi f t_o} df \right|^2 \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} Z(f) G_{t_o, f_o}^*(f) \right|^2 \end{aligned}$$

Avec $G_{t_o, f_o}(f) = H(f - f_o) e^{-j2\pi f t_o}$

On définit, alors, les étendues temporelle σ_t et fréquentielle σ_f des atomes temps-fréquence :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \frac{1}{\|g_{t_o, f_o}\|} \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle)^2 |g_{t_o, f_o}(t)|^2 dt \\ \sigma_f^2 &= \frac{1}{\|G_{t_o, f_o}\|} \int_{\mathbb{R}} (f - \langle f \rangle)^2 |G_{t_o, f_o}(f)|^2 df \end{aligned}$$

avec $\langle t \rangle$ et $\langle f \rangle$ respectivement les époque et fréquence moyenne définit par :

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{1}{\|g_{t_o, f_o}\|} \int_{\mathbb{R}} t |g_{t_o, f_o}(t)|^2 dt \\ \langle f \rangle &= \frac{1}{\|G_{t_o, f_o}\|} \int_{\mathbb{R}} f |G_{t_o, f_o}(f)|^2 df \end{aligned}$$

Les étendues σ_t et σ_f vérifient l'*inégalité d'Heisenberg-Gabor* dont la démonstration est fournie en annexe G :

$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (2.33)$
--

La relation (2.33) signifie simplement que les deux paramètres σ_t et σ_f ne peuvent être choisis de manière indépendante et que les atomes temps-fréquence ne peuvent être parfaitement localisés à la fois en temps et en fréquence : les résolutions temporelle et fréquentielle ne peuvent être fixées délibérement l'une de l'autre.

D'autre part, on peut vérifier que ces deux paramètres σ_t et σ_f sont constants dans tout le plan temps-fréquence : autrement dit, ils ne dépendent pas des paramètres de localisation (t_o, f_o) des atomes temps-fréquence. La figure 2.3 montre le pavage temps-fréquence dans le cas du spectrogramme [Mal98].

²⁸Du fait de la dualité des espaces temps et fréquence, on ne peut connaître avec suffisamment de précision la localisation à la fois en temps et en fréquence d'un signal : par exemple, un signal de très brève durée possède une densité spectrale très étendue et vice-versa.

²⁹Cette formule exprime le fait que le produit scalaire entre deux signaux se conserve par passage du domaine temporel au domaine fréquentiel : $\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$

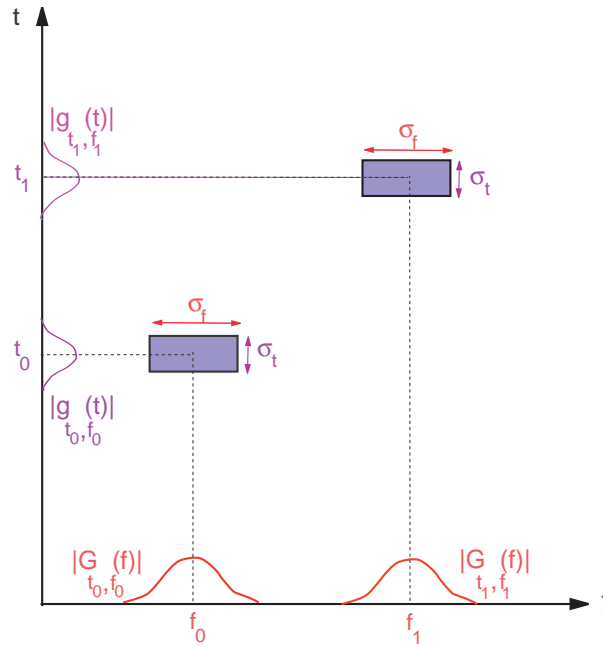


FIG. 2.3 – Représentation symbolique des cellules de résolution dans le plan temps-fréquence dans le cas de la transformée de Fourier à court terme.

2.5 Représentation temps-fréquence des signaux large bande

Le groupe (2.12) des translations en temps et en fréquence n'est pas cohérent avec les signaux large bande. De plus, il ne conserve pas l'espace des signaux analytiques qui ont pour propriété d'être à fréquence positive.

Le groupe physique qui est cohérent avec les signaux analytiques large bande est le *groupe affine* des translations et contractions/dilatations en temps. Ce groupe agit sur les signaux analytiques en général comme :

$$\begin{aligned}
 z(t) &\longrightarrow z'(t) = a^r z(a^{-1}(t-b)) & (2.34) \\
 \downarrow & \qquad \downarrow \\
 Z(f) &\longrightarrow Z'(f) = a^{r+1} e^{-j2\pi fb} Z(af)
 \end{aligned}$$

où a est un réel strictement positif et b un réel quelconque. On rappelle que le paramètre réel r ³⁰ est introduit afin de respecter le dimensionnement physique du signal, c'est à dire la concordance des unités physiques entre observateurs ayant subi une contraction ou une dilatation de leur

³⁰Il faut mentionner que le produit scalaire invariant par le groupe (2.34) dépend de ce paramètre r :

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle = \int_0^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) f^{2r+1} df$$

Les définitions usuelles du produit scalaire et de l'énergie sont retrouvés avec la valeur particulière $r = -1/2$.

horloge³¹.

De ce fait, on impose aux représentations temps-fréquence $I(t, f)$ de vérifier le diagramme de covariance relatif au groupe affine [Ber88, Ova92, Vig96]. Ce diagramme s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 z(t) & \longrightarrow & z'(t) = a^r z(a^{-1}(t-b)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z(f) & \longrightarrow & Z'(f) = a^{r+1} e^{-j2\pi fb} Z(af) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 I_z(t, f) & \longrightarrow & I_{z'}(t, f) = a^q I_z(a^{-1}(t-b), af)
 \end{array} \tag{2.35}$$

où q est aussi un paramètre de dimensionnement physique³², indépendant de r . Pour plus de clarté, dans toute la suite, on posera $r = -1/2$ (cas usuel) et $q = 0$ (interprétation probabiliste de la représentation temps-fréquence).

2.5.1 La classe de Bertrand

Les représentations temps-fréquence qui vérifient le diagramme de covariance (2.35) sont répertoriées dans une classe, appelée *classe de Bertrand* [Ber91a, Ber88, Ova92]. Elle est donnée par :

$$B_z(t, f) = f \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} K(v, v') Z(fv) Z^*(fv') e^{+j2\pi ft(v-v')} dv dv' \tag{2.36}$$

où $K(v, v')$ est un noyau symétrique et réel : $K(v, v') = K^*(v', v)$.

Cette famille de distribution respecte le diagramme de covariance relatif au groupe affine donné par (2.34). Le noyau $K(v, v')$ dans (2.36) est libre : il existe, de ce fait, une infinité de distributions appartenant à cette classe. Une des plus connues est la *distribution affine unitaire* présentée dans le paragraphe suivant.

2.5.2 La distribution affine unitaire : une solution particulière de la classe de Bertrand

a/ Définition

Parmi les formes de la classe de Bertrand (2.36), il existe, donc, une distribution appelée *distribution affine unitaire* [Ber88, Ber91a, Ova92, Rio92]. Elle est en quelque sorte l'analogue affine de ce que représente la distribution de Wigner-Ville pour le groupe des translations. Elle s'écrit à partir du signal analytique $Z(f)$ comme :

$$U_z(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda(s)\lambda(-s))^{1/2} Z(f\lambda(s)) Z^*(f\lambda(-s)) e^{2i\pi fts} ds \tag{2.37}$$

³¹On reviendra sur ce paramètre de dimensionnement au troisième chapitre où l'on étudiera un signal appelé *coefficient de rétrodiffusion* qui a la dimension d'une longueur.

³²Par exemple, si l'on veut de donner à $I_{z'}(t, f)$ une signification probabiliste (densité de probabilité), le choix $q = 0$ (caractérisant la non-dimensionalité de $I_{z'}(t, f)$) est alors imposé.

avec la fonction λ continue, croissante et bijective de \mathcal{R} dans \mathcal{R}^{+*} :

$$\lambda(s) = \frac{s}{1 - e^{-s}}$$

Elle possède des propriétés intéressantes dont certaines sont mentionnées dans le paragraphe suivant.

b/ Quelques propriétés de la distribution unitaire

En effet, la distribution unitaire compte, entre autres, les propriétés suivantes :

- Elle possède une marginale sur le temps :

$$\int_{\mathbb{R}} U_z(t, f) dt = |Z(f)|^2$$

Par contre, la marginalisation sur la fréquence, contrairement au cas bande étroite, est difficile à calculer ici. Il est, de plus, inconcevable que cette marginalisation puisse donner, comme dans le cas bande étroite, la puissance instantanée du signal analytique (module au carré de l'enveloppe). En effet, l'enveloppe définie en (2.2) ne correspond pas à une quantité physique en large bande [Boa92].

- Elle est réelle mais pas partout positive dans le plan temps-fréquence.
- Elle localise parfaitement les signaux monochromatiques $Z(f) = Y(f) f^{1/2} \delta(f - f_o)$, les signaux *chocs* $Z(f) = Y(f) f^{-1/2} \exp[-j2\pi f t_o]$ et également les signaux dit *hyperboliques* (à temps de propagation de groupe hyperbolique) sur des courbes $t = t_o + \beta/f$ [Ova92]. La localisation des signaux hyperboliques se traduit par (voir figure 2.4 (a)) :

$$Z(f) = Y(f) f^{-j2\pi\beta-1/2} e^{-j2\pi f t_o} \rightarrow U_z(t, f) = f^{-1} \delta(t - (t_o + \beta/f))$$

où $Y(f)$ est l'échelon unité, également appelée distribution de Heaviside.

- Elle crée des interactions entre les composantes du signal (voir figure 2.4(b)).
- Elle est unitaire par construction :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} U_{z_1}(t, f) U_{z_2}(t, f) dt df = \left| \int_0^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) df \right|^2 \quad (2.38)$$

- Le moment du premier ordre sur le temps de la distribution définit le temps de propagation de groupe $\tau_g(f)$:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} t U_z(t, f) dt}{\int_{\mathbb{R}} U_z(t, f) dt} = \tau_g(f)$$

Par contre, le moment du premier ordre sur la fréquence, contrairement au cas bande étroite, est difficile à calculer ici. Il est, de plus, inconcevable que ce moment puisse donner, comme dans le cas bande étroite, la fréquence instantanée du signal analytique. En effet, la fréquence instantanée définie en (2.3) ne correspond pas à une quantité physique en large bande [Boa92].

- La distribution affine unitaire tend vers la distribution de Wigner-Ville lorsque la bande relative tend vers zéro [Vig96].
- Elle conserve le support des signaux ; en particulier elle est nulle sur l'espace des fréquences négatives.

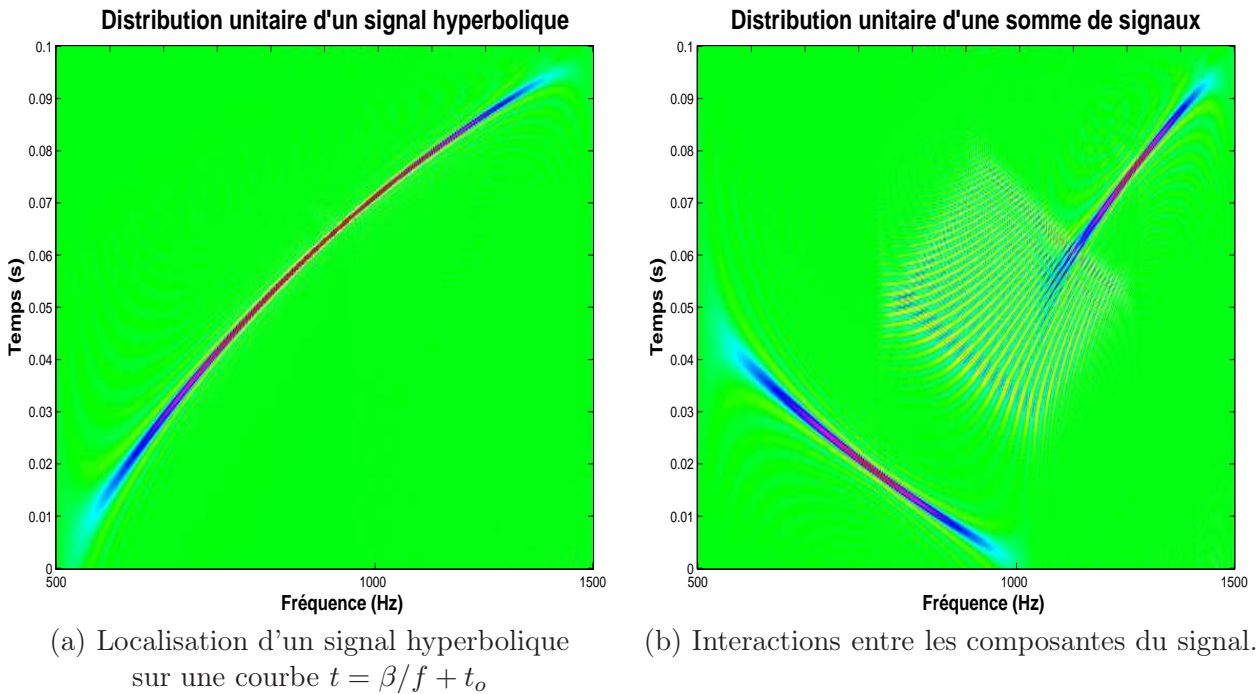


FIG. 2.4 – Distribution unitaire d'un signal hyperbolique puis celle de la somme de 2 signaux (existence de termes d'interférences).

2.5.3 Le scalogramme : une forme régularisée de la distribution affine unitaire

a/ Construction de la forme régularisée

Comme la distribution de Wigner-Ville, la distribution unitaire $U(t, f)$ n'est pas positive. Elle ne définit donc pas une densité d'énergie dans le plan temps-fréquence. Un moyen de remédier à ce problème est de construire une forme *régularisée* associée à cette distribution en utilisant la formule de Moyal (2.38) [Ova92, Vig96].

Soit la fonction $\Phi_{0,1}(f)$ localisée autour de la fréquence $f = 1$ Hz, du temps $t = 0$ et nulle pour les fréquences négatives : on appelle cette fonction, *ondelette-mère*. On construit, alors, une famille d'ondelettes³³ $\Phi_{t_o, f_o}(f) = \frac{1}{\sqrt{f_o}} \Phi_{0,1}(f/f_o) e^{-j2\pi f t_o}$ à partir de l'ondelette-mère : l'énergie de chaque ondelette $\Phi_{t_o, f_o}(f)$ est alors concentrée autour de (t_o, f_o) dans le plan temps-fréquence, celle de l'ondelette mère est, elle, concentrée autour de $(t, f) = (0, 1)$.

En appliquant le diagramme de covariance (2.35) relatif au groupe affine sur la distribution affine unitaire avec $(a, b; r, q) = (1/f_o, t_o; -1/2, 0)$, on a :

$$U_{\Phi_{t_o, f_o}}(t, f) = U_{\Phi_{0,1}}(f_o(t - t_o), f/f_o) \quad (2.39)$$

Par conséquent, la forme régularisée Ω_z obtenue par un *lissage* particulier de la distribution affine unitaire s'exprime par :

$$\Omega_z(t_o, f_o) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} U_Z(t, f) U_{\Phi_{t_o, f_o}}(t, f) dt df \quad (2.40)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} U_Z(t, f) U_{\Phi_{0,1}}(f_o(t - t_o), f/f_o) dt df \quad (2.41)$$

Enfin, en utilisant la formule de Moyai (2.38) avec $Z_1(f) = Z(f)$ et $Z_2(f) = \Phi_{t_o, f_o}(f)$, on a :

$$\Omega_z(t_o, f_o) = \left| \int_0^{+\infty} Z(f) \Phi_{t_o, f_o}^*(f) df \right|^2 \quad (2.42)$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} Z(f) \frac{1}{\sqrt{f_o}} \Phi_{0,1}^*(f/f_o) e^{+j2\pi f t_o} df \right|^2 \quad (2.43)$$

On reconnaît la *transformée en ondelettes continues* T_z du signal $Z(f)$ [Mal98, Tor95]. Les coefficients d'ondelettes $T_z(t_o, f_o)$ sont définis par³⁴ :

$$T_z(t_o, f_o) = \int_0^{+\infty} Z(f) \Phi_{t_o, f_o}^*(f) df$$

Par conséquent, Ω_z est le *scalogramme* s'exprimant comme le module au carré de la transformée en ondelettes continues. Il est positif et définit une distribution d'énergie du signal dans le plan temps-fréquence.

Avec cette régularisation, on réduit les interactions entre composantes du signal mais on dégrade la résolution dans le plan temps-fréquence (voir figure 2.5 (b)) suivant l'inégalité d'Heisenberg-Gabor et on perd les propriétés marginales.

³³On pourra vérifier la conservation de l'énergie entre l'ondelette-mère et les ondelettes ainsi construites : $\|\Phi_{t_o, f_o}\| = \|\Phi_{0,1}\|$. La définition de l'énergie est ici, $E_Z = \|Z\| = \int_0^{+\infty} |Z(f)|^2 df$ avec le choix $r = -1/2$.

³⁴Le signal $Z(f)$ peut être recomposé à partir de ces coefficients d'ondelette par la formule dite de *reconstruction* :

$$Z(f) = \int_0^{+\infty} df_o \int_{-\infty}^{+\infty} T_z(t_o, f_o) \Phi_{t_o, f_o}(f) dt_o \text{ à condition que } \int_0^{+\infty} \frac{|\Phi_{0,1}(f)|^2}{f} df = 1$$

Cette dernière contrainte constitue la *condition d'admissibilité* sur l'ondelette-mère pour retrouver le signal $Z(f)$. On pourra se reporter à l'annexe H pour la démonstration.

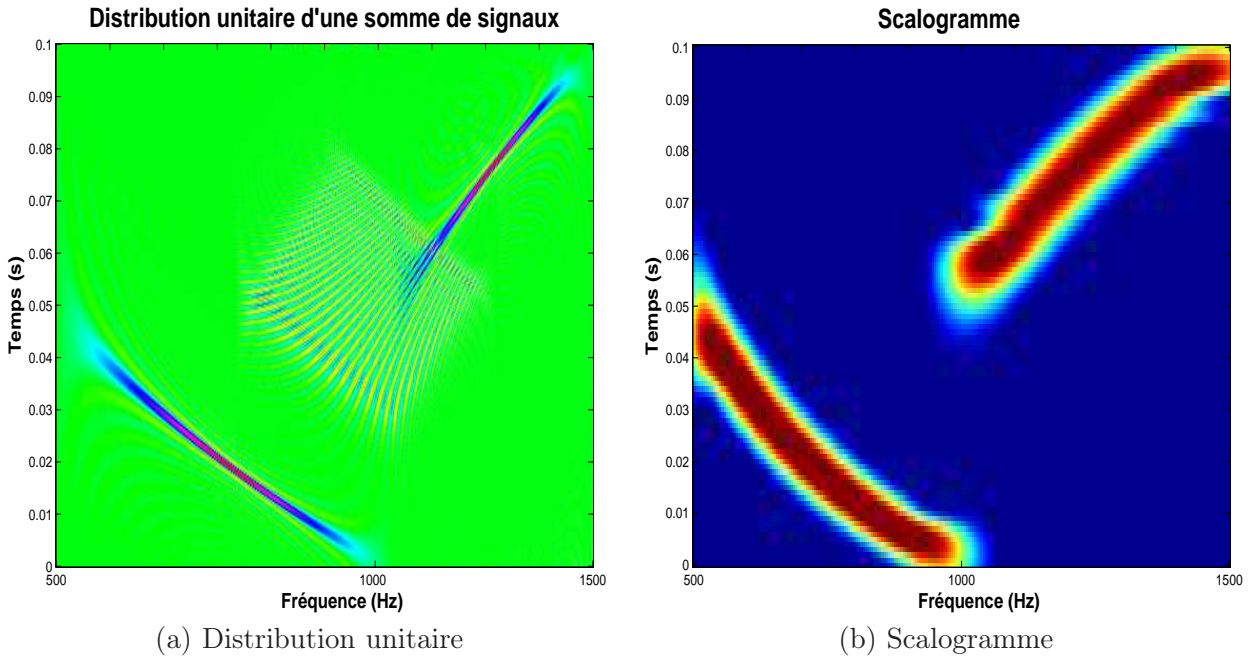


FIG. 2.5 – Distribution unitaire et scalogramme.

b/ Inconvénients du scalogramme : compromis temps-fréquence

À nouveau, comme dans le cas du spectrogramme, les cellules de résolutions temporelles et fréquentielles ne peuvent être choisies de manière indépendante dans le plan temps-fréquence.

Pour expliquer cet inconvénient, mettons en évidence la dualité temps-fréquence en réécrivant le scalogramme à partir du signal temporel $z(t)$. En utilisant la formule de Parseval³⁵, on a :

$$\begin{aligned}
 T_z(t_o, f_o) &= \left| \int_{\mathbb{R}} z(t) \sqrt{f_o} \varphi_{0,1}^*(f_o(t - t_o)) dt \right|^2 \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}} z(t) \varphi_{t_o, f_o}^*(t) \right|^2
 \end{aligned}$$

avec $\varphi_{0,1}(t) = \mathcal{F}^{-1} \Phi_{0,1}(f)$ et $\varphi_{t_o, f_o}(t) = \sqrt{f_o} \varphi_{0,1}(f_o(t - t_o))$.

Comme dans le cas précédent du spectrogramme, on définit les étendues temporelle σ_t et fréquentielle σ_f de l'ondelette-mère par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^2 &= \frac{1}{\|\varphi_{0,1}\|} \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle)^2 |\varphi_{0,1}(t)|^2 dt \\
 \sigma_f^2 &= \frac{1}{\|\Phi_{0,1}\|} \int_0^{+\infty} (f - \langle f \rangle)^2 |\Phi_{0,1}(f)|^2 df
 \end{aligned}$$

³⁵On rappelle que cette formule exprime le fait que le produit scalaire entre deux signaux se conserve par passage du domaine temporel au domaine fréquentiel : $\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$.

avec les époque et fréquence moyennes définies par :

$$\begin{aligned}\langle t \rangle &= \frac{1}{\|\varphi_{0,1}\|} \int_{\mathbb{R}} t |\varphi_{0,1}(t)|^2 dt \\ \langle f \rangle &= \frac{1}{\|\Phi_{0,1}\|} \int_0^{+\infty} f |\Phi_{0,1}(f)|^2 df\end{aligned}$$

De la même manière, on peut définir les époque et fréquence moyennes, ainsi que les étendues temporelle et fréquentielle pour chaque ondelette localisée en (t_o, f_o) :

$$\begin{aligned}\sigma_{t(t_o, f_o)}^2 &= \frac{1}{\|\varphi_{t_o, f_o}\|} \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle_{(t_o, f_o)})^2 |\varphi_{t_o, f_o}(t)|^2 dt \\ \sigma_{f(t_o, f_o)}^2 &= \frac{1}{\|\Phi_{t_o, f_o}\|} \int_0^{+\infty} (f - \langle f \rangle_{(t_o, f_o)})^2 |\Phi_{t_o, f_o}(f)|^2 df\end{aligned}$$

avec les époque et fréquence moyennes définies par :

$$\begin{aligned}\langle t \rangle_{(t_o, f_o)} &= \frac{1}{\|\varphi_{t_o, f_o}\|} \int_{\mathbb{R}} t |\varphi_{t_o, f_o}(t)|^2 dt \\ \langle f \rangle_{(t_o, f_o)} &= \frac{1}{\|\Phi_{t_o, f_o}\|} \int_0^{+\infty} f |\Phi_{t_o, f_o}(f)|^2 df\end{aligned}$$

Contrairement au cas du spectrogramme, les étendues temporelle et fréquentielle localisée en (t_o, f_o) dépendent du paramètre de localisation fréquentielle f_o :

$$\sigma_{t(t_o, f_o)}^2 = \sigma_t^2 / f_o^2 \quad (2.44)$$

$$\sigma_{f(t_o, f_o)}^2 = f_o^2 \sigma_f^2 \quad (2.45)$$

Par contre, l'inégalité d'Heisenberg-Gabor reste vérifiée pour chaque ondelette :

$$\sigma_{t(t_o, f_o)} \sigma_{f(t_o, f_o)} = \sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

À nouveau, ces deux paramètres ne peuvent être choisis de manière indépendante et les atomes temps-fréquence ne peuvent être parfaitement localisés à la fois en temps et en fréquence : les résolutions temporelle et fréquentielle ne peuvent être fixées délibérément l'une de l'autre. La figure 2.6 montre le pavage temps-fréquence dans le cas du scalogramme [Mal98].

Le paragraphe suivant présente quelques exemples de méthodes temps-fréquence étendues aux signaux bidimensionnels et plus particulièrement aux signaux SAR.

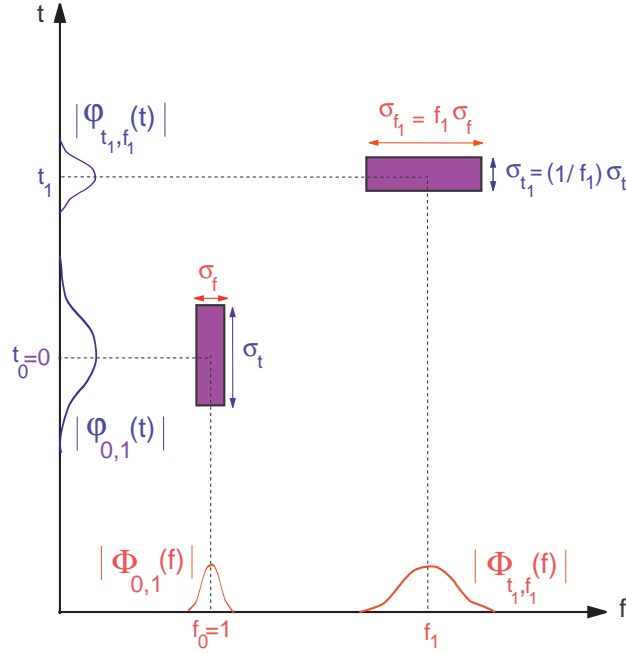


FIG. 2.6 – Représentation symbolique des cellules de résolution dans le plan temps-fréquence dans le cas de la transformée en ondelettes continues.

2.6 Quelques exemples d'extension de l'analyse temps-fréquence aux signaux SAR

2.6.1 Spectrogramme sur signaux SAR bruts

On entend par signal brut, le signal tel qu'il est acquis par le radar : l'équation (1.19) formule ce signal brut $S(k, u)$ après suppression de la porteuse $P(f)$ et en supposant la compensation de mouvement du radar effectuée³⁶. En supposant n réflecteurs colorés (l'amplitude dépend de la fréquence) et anisotropes (l'amplitude dépend de l'angle azimutal d'illumination θ ou de manière équivalente de la position u du radar sur sa trajectoire), ce signal se réécrit :

$$S(k, u) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(f, u) e^{-j2\pi k \sqrt{(X_1 - x_i)^2 + (Y_1 + u - y_i)^2}} \quad (2.46)$$

Ainsi, le premier outil temps-fréquence que l'on peut proposer pour mettre en lumière le caractère coloré et anisotrope des réflecteurs s'apparente au spectrogramme³⁷ et s'applique au signal SAR que l'on renomme pour l'occasion $H(f, u)$ de la manière suivante :

$$S_H(x_o, y_o, f_o, u_o) = \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} H(f, u) F^*(f - f_o, u - u_o) e^{j2\pi k \sqrt{(X_1 - x_o)^2 + (Y_1 + u - y_o)^2}} df du \right|^2 \quad (2.47)$$

³⁶En effet, dans la réalité, le radar accuse un écart par rapport à la trajectoire nominale. La compensation de mouvement consiste à corriger cet écart et par conséquent tout se passe comme si le radar se déplaçait effectivement sur la trajectoire nominale.

³⁷Bien que cet outil ne soit pas au sens stricte le spectrogramme 2D, on l'appellera malgré tout spectrogramme par abus de langage.

où $F(f, u)$ est une fenêtre d'analyse.

Le spectrogramme (2.47) se réécrit, dans le cas où le mouvement du radar n'est pas compensé, comme :

$$S_H(x_o, y_o, f_o, u_o) = \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} H(f, u) F^*(f - f_o, u - u_o) e^{j2\pi k \sqrt{(X_1 - x_o)^2 + (Y_1 + u + e(u) - y_o)^2}} df du \right|^2 \quad (2.48)$$

où $e(u)$ est l'écart qu'accuse le radar par rapport à la trajectoire nominale lorsque ce dernier est sensé être à la position u sur cette même trajectoire (voir figure 2.7). En pratique, cet écart $e(u)$ peut être calculé et donc est considéré comme connu.

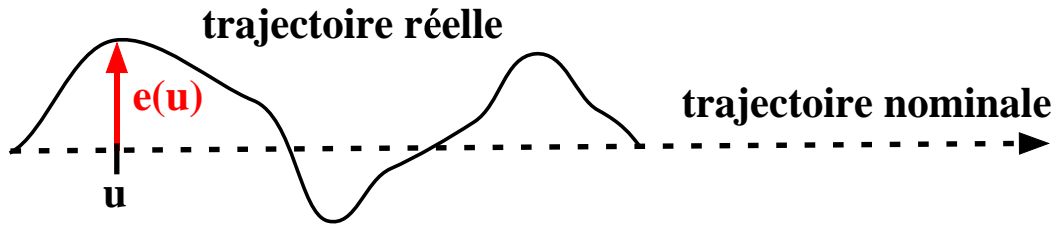


FIG. 2.7 – Mouvement réel du porteur radar.

À titre d'exemple, on a considéré une zone constituée de 5 réflecteurs colorés (sauf un qui est blanc) et anisotropes et imagée par un radar se déplaçant sur la trajectoire nominale rectiligne de longueur $D_{SAR} = 416$ m, situé à $X_1 = 4000$ m du centre de zone, en mode non-squinté ($Y_1 = 0$) et émettant une bande de fréquence $B = 1$ GHz autour de la fréquence centrale $f_c = 9.6$ GHz. La figure 2.8(a) illustre le module du signal $H(f, u)$ simulé tandis que la figure 2.8(b) montre le module de l'image reconstruite par l'algorithme RMA développé au chapitre 1. La figure 2.9(a) montre le caractère coloré et anisotrope que l'on a attribué à chacun des 5 réflecteurs et la figure 2.9(b) illustre la mise en lumière de la coloration et de l'anisotropie des réflecteurs grâce au spectrogramme : en effet, $S_H(x_o, y_o; f, u)$ fournit la distribution d'énergie, dans le plan (f, u) du réflecteur localisé en (x_o, y_o) . On constate que la distribution d'énergie des réflecteurs est une version lissée de la réponse de ces réflecteurs illustrée en 2.9(a).

Cependant, la mise en pratique de cet outil temps-fréquence est coûteuse en terme de temps de calcul. De plus, bien que cet outil ait été développé, il n'a été appliqué qu'aux seuls signaux simulés. Pour l'appliquer sur signaux réels, il faut s'assurer qu'un certain nombre de procédures fastidieuses (compensation de mouvement, refocalisation des réflecteurs, ...) propres à l'imagerie SAR soient effectuées. Pour s'affranchir de ces traitements, nous nous sommes consacrés à la recherche d'outils temps-fréquence applicables sur le spectre de petites imagerie sélectionnées dans l'image reconstruite. Un certain nombre d'outils est présenté dans les paragraphes suivants.

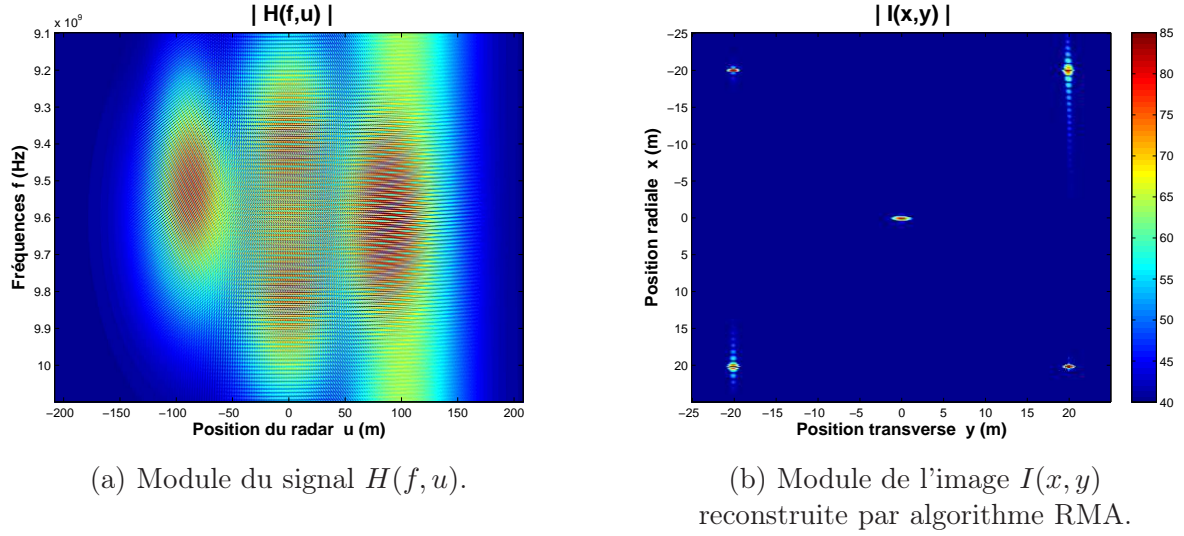


FIG. 2.8 – Simulation du signal récolté par le radar et provenant de 5 réflecteurs colorés et anisotropes.

2.6.2 Distribution de Wigner-Ville

La distribution de Wigner-Ville d'un signal 1D définie en (2.22) s'étend naturellement au cas bidimensionnel comme suit :

$$W_H(\vec{r}, \vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\vec{k} + \frac{\vec{\xi}}{2}\right) H^*\left(\vec{k} - \frac{\vec{\xi}}{2}\right) e^{j2\pi\vec{\xi}\vec{r}} d\vec{\xi} \quad (2.49)$$

Comme dans le cas 1D, elle est réelle mais pas partout positive dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) . De plus, la distribution de Wigner-Ville bidimensionnelle crée des interactions, dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) , entre les composantes du signal. En effet, soit le coefficient de rétrodiffusion H reçu par le radar et résultant de la somme des coefficients H_1 et H_2 rétrodiffusés par deux réflecteurs r_1 et r_2 : $H(\vec{k}) = H_1(\vec{k}) + H_2(\vec{k})$; la distribution de Wigner-ville d'un tel signal est :

$$W_H(\vec{r}, \vec{k}) = W_{H_1}(\vec{r}, \vec{k}) + W_{H_2}(\vec{r}, \vec{k}) + 2\mathcal{R}_e \left[\int_{\mathbb{R}^2} H_1\left(\vec{k} + \frac{\vec{\xi}}{2}\right) H_2^*\left(\vec{k} - \frac{\vec{\xi}}{2}\right) e^{j2\pi\vec{\xi}\vec{r}} d\vec{\xi} \right] \quad (2.50)$$

2.6.3 Transformée de Fourier à Court Terme et Spectrogramme

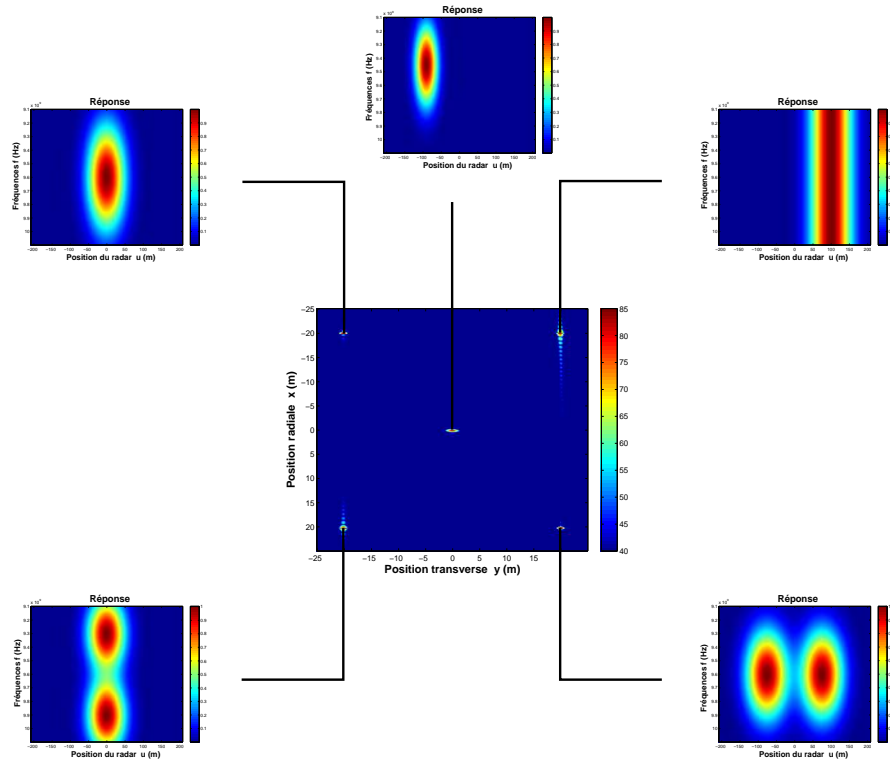
La transformée de Fourier à court terme monodimensionnel est définie pour un signal fréquentiel comme :

$$TFCT_H(t_o, f_o) = \int_{\mathbb{R}} H(f) W^*(f - f_o) e^{j2\pi f t_o} df \quad (2.51)$$

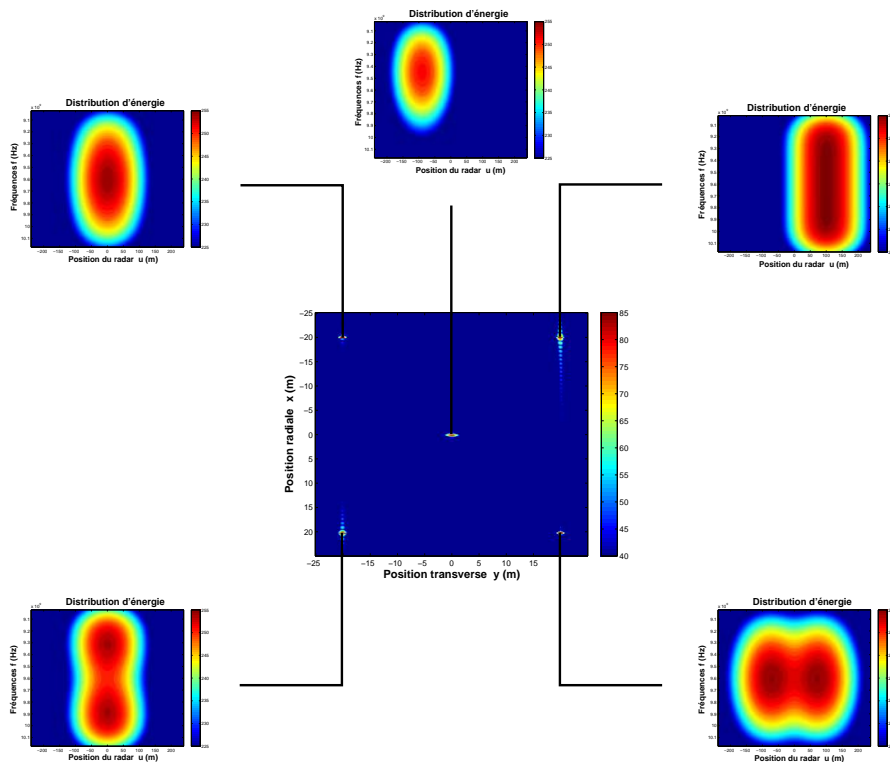
où W est une fenêtre d'analyse.

On peut établir une transformée analogue à (2.51) pour le cas de signaux SAR en écrivant :

$$TFCT_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \int_{\mathbb{R}^2} H(\vec{k}) W^*\left(\mathcal{R}_{-\theta_o}(\vec{k} - \vec{\eta}_o)\right) e^{j2\pi\vec{k}\vec{r}_o} d\vec{k} \quad (2.52)$$



(a) Simulation de réflecteurs colorés (seul le réflecteur en $(x, y) = (-20, 20)$ est blanc) et anisotropes.



(b) Distribution énergétique des réflecteurs obtenue grâce au spectrogramme.

FIG. 2.9 – Mise en lumière du caractère coloré et anisotrope des réflecteurs grâce au spectrogramme.

$$\text{avec } \vec{\eta}_o = \begin{pmatrix} k_o \cos(\theta) \\ k_o \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

En effet, en réécrivant (2.52) par changement de variables $\vec{k} = (k_x, k_y)^T \rightarrow (k, \theta)^T$, on obtient :

$$TFCT_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk k H(k, \theta) W^*(k - k_o, \theta - \theta_o) e^{j2\pi[k \cos(\theta)x_o + k \sin(\theta)y_o]} \quad (2.53)$$

qui s'apparente à la transformée de Fourier à court terme 1D définie en (2.51).

On peut, également, définir le spectrogramme pour les signaux SAR comme le module au carré de la transformée (2.53) :

$$\begin{aligned} S_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \left| TFCT_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2 \\ &= \left| \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk k H(k, \theta) W^*(k - k_o, \theta - \theta_o) e^{j2\pi[k \cos(\theta)x_o + k \sin(\theta)y_o]} \right|^2 \end{aligned}$$

2.6.4 Transformée en Ondelettes Continues et Scalogramme

La transformée en ondelettes continues appliquée à un signal SAR prend la forme suivante :

$$TO_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \int_{\mathbb{R}^2} H(\vec{k}) \Psi_{\vec{k}_o, \vec{r}_o}^*(\vec{k}) d\vec{k} \quad (2.54)$$

avec $\Psi_{\vec{k}_o, \vec{r}_o}(\vec{k})$ une ondelette déduite d'une ondelette mère $\phi(\vec{k})$ par rotation \mathcal{R}_{θ_o} d'angle θ_o , par dilatation $1/k_o$ et par translation spatiale \vec{r}_o :

$$\Psi_{\vec{k}_o, \vec{r}_o}(\vec{k}) = \frac{1}{k_o} \phi\left(\frac{1}{k_o} \mathcal{R}_{-\theta_o} \vec{k}\right) e^{-j2\pi \vec{k} \vec{r}_o}$$

D'une manière plus littérale, la transformée en ondelettes définie en (2.54) se réécrit :

$$\begin{aligned} TO_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \int H(\vec{k}) \frac{1}{k_o} \phi^*\left(\frac{1}{k_o} \mathcal{R}_{-\theta_o} \vec{k}\right) e^{j2\pi \vec{k} \vec{r}_o} d\vec{k} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk k H(k, \theta) \frac{1}{k_o} \phi^*\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) e^{j2\pi[k \cos(\theta)x_o + k \sin(\theta)y_o]} \end{aligned} \quad (2.55)$$

De la même manière qu'on a défini le spectrogramme pour les signaux SAR, le scalogramme s'exprime comme le module au carré de la transformée en ondelettes continues définie en (2.55) :

$$\begin{aligned} \Omega_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \left| TO_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2 \\ &= \left| \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk k H(k, \theta) \frac{1}{k_o} \phi^*\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) e^{j2\pi[k \cos(\theta)x_o + k \sin(\theta)y_o]} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

C'est le scalogramme (2.56) que nous proposons d'utiliser en imagerie SAR pour mettre en lumière les éventuels phénomènes d'anisotropie et de coloration des réflecteurs de la scène imagée. Ce choix est motivé pour plusieurs raisons :

- On souhaite mettre en lumière la distribution d'énergie des réflecteurs dans le plan (f, θ) ; il nous faut donc choisir une distribution qui soit positive dans tout l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) : le scalogramme et le spectrogramme sont de bons candidats puisqu'ils sont positifs contrairement à la distribution de Wigner-Ville qui est, certes, réelle mais pas partout positive dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) ; la transformée de Fourier à court terme et la transformée en ondelettes continues sont également à écarter puisqu'elles sont toutes deux complexes³⁸.
- Pour une bonne lisibilité des résultats, il nous faut choisir une distribution qui ne crée pas d'interactions entre les composantes du signal : à nouveau, le scalogramme et le spectrogramme priment devant la distribution de Wigner-Ville qui engendre des interférences comme l'indique (2.50).
- Enfin, le scalogramme est un outil théorique adapté aux signaux large bande contrairement au spectrogramme qui est adapté aux signaux bande étroite. Aussi, bien que les signaux SAR traités dans ce manuscrit soient à bande étroite, il est à envisager de traiter des signaux large bande dans un travail futur³⁹ : ceci nous a incité à choisir le scalogramme plutôt que le spectrogramme.

Pour mettre en lumière le caractère coloré et anisotrope de réflecteurs grâce au scalogramme, on a imaginé en simulation, le scénario suivant : la zone imagée est constituée de 5 réflecteurs anisotropes et soit colorés soit blancs selon les cas : la réponse $|\sigma_i(f, \theta)|$ de chaque réflecteur est illustrée en figure 2.10 (a). Le coefficient de rétrodiffusion H simulé est donc :

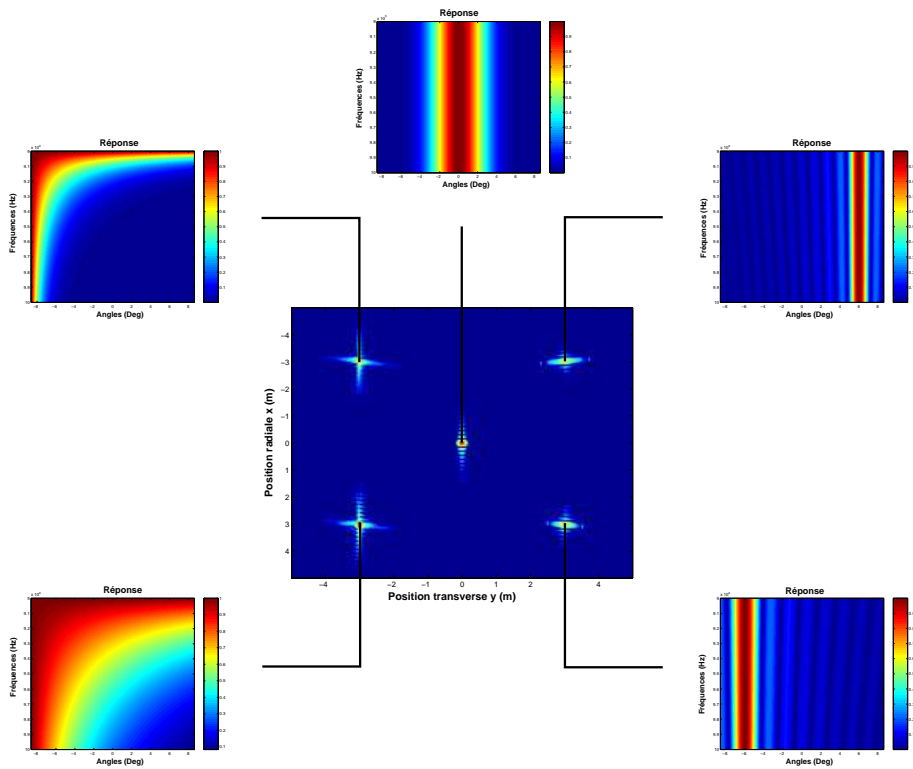
$$H(\vec{k}) = \sum_{i=1}^5 \sigma_i(f, \theta) \cdot e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \quad (2.57)$$

On a, alors, construit le scalogramme suivant l'équation (2.56) : $\Omega_H(x_o, y_o; f, \theta)$ fournit la distribution d'énergie, dans le plan (f, θ) , du réflecteur localisé en (x_o, y_o) . La figure 2.10 (b) met en lumière le caractère anisotrope et coloré/blanc des 5 réflecteurs grâce au scalogramme. On constate que la distribution d'énergie des réflecteurs est une version lissée de la réponse de ces réflecteurs illustrée en 2.10(a).

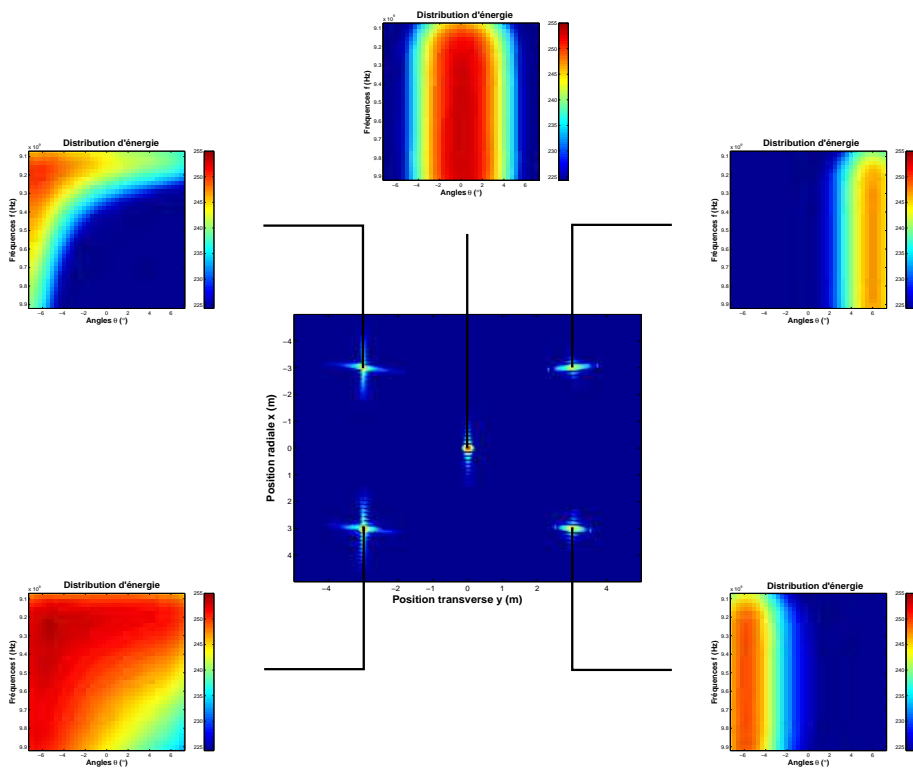
Le chapitre suivant est consacré à l'imagerie SAR par analyse en ondelettes continues. On détaillera, notamment, la procédure de construction de la base d'ondelettes ainsi que le calcul des coefficients d'ondelette. Partant de cette construction, on verra que le scalogramme (2.56) est effectivement, à une constante près, le candidat naturel si l'on souhaite obtenir une distribution partout positive dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) pour que celle-ci définisse une répartition d'énergie.

³⁸On verra, toutefois, dans la partie consacrée à la polarimétrie et à l'interférométrie, qu'il est plus judicieux d'utiliser la transformée en ondelettes continues (ou la transformée à court terme) plutôt que le scalogramme (ou le spectrogramme) pour préserver la phase propre des réflecteurs qui est porteuse d'information.

³⁹L'étude des signaux large bande peut se justifier par le fait qu'on suspecte les phénomènes de coloration d'être plus prononcés en large bande.



(a) Simulation de réflecteurs colorés ou blancs et anisotropes.



(b) Distribution énergétique des réflecteurs obtenue grâce au scalogramme.

FIG. 2.10 – Mise en lumière du caractère coloré et anisotrope des réflecteurs grâce au scalogramme.

Deuxième partie

L'analyse par ondelettes continues en
imagerie SAR

Chapitre 3

Imagerie SAR par analyse en ondelettes

Pour introduire l'analyse par ondelettes continues en imagerie SAR, nous allons procéder de la manière suivante : d'abord, nous rappellerons le modèle des réflecteurs blancs et isotropes, puis nous lui opposerons celui des réflecteurs colorés et anisotropes susceptible de mieux convenir au cas des signaux SAR réels ; ce dernier modèle va nous permettre de justifier le recours à l'analyse temps-fréquence en imagerie SAR pour mettre en lumière le caractère anisotrope et coloré des réflecteurs : on définira une famille de distributions bilinéaires dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) qui seront, d'ailleurs, appelées *hyperimages* ; nous expliciterons, ensuite, le procédé de construction de la base d'ondelettes à partir d'une ondelette mère ; cette construction va nous permettre, finalement, de montrer par deux approches, que le module au carré du coefficient d'ondelette (à une constante près) constitue une solution particulière de la famille des distributions bilinéaires qui définit une distribution d'énergie dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) .

On verra, ensuite, comment implanter informatiquement la transformée en ondelettes continues en imagerie SAR ; puis nous verrons comment interpréter et exploiter l'hyperimage (module au carré de la transformée en ondelettes) issue de l'analyse par ondelettes d'une image SAR réelle.

3.1 Modèle des réflecteurs blancs et isotropes

Le modèle suppose que chaque réflecteur localisé spatialement en $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ a un coefficient de réflexion σ_i constant dans toute la bande fréquentielle B émise et ne dépend pas de la position de l'antenne radar sur la trajectoire de vol de l'avion ; autrement dit, ne dépend pas de l'angle en azimuth θ sous lequel est vue la cible.

Sous ces hypothèses, le *coefficient de rétrodiffusion* s'écrit :

$$H(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} I(\vec{r}) \cdot e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.1)$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde dont les composantes (k_x, k_y) s'expriment par :

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos(\theta) \\ k \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

avec $k = |\vec{k}| = 2f/c$, f étant la fréquence, c la vitesse de la lumière et θ l'angle sous lequel est vue la cible (angle azimuthal) ; et où $\vec{r} = (x, y)$ est le vecteur position s'écrivant à partir des

composantes radiale x et transverse y .

Le coefficient de rétrodiffusion $H(\vec{k})$ a la dimension d'une longueur lorsqu'on se place dans le plan ; Autrement dit il est mesuré en mètres. On verra dans le paragraphe suivant que ce *dimensionnement physique* du signal a pour conséquence d'introduire un facteur multiplicatif pour évaluer correctement le coefficient de rétrodiffusion après une transformation de contraction du signal $H(\vec{k})$.

Par conséquent, l'image des réflecteurs I , qui est obtenue par simple transformée de Fourier bidimensionnelle inverse appliquée au coefficient de rétrodiffusion H , s'écrit :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} [H(k_x, k_y)] \\ &\quad \begin{array}{l} k_x \rightarrow x \\ k_y \rightarrow y \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i, y - y_i) \end{aligned}$$

Malheureusement, on suspecte ce modèle d'être non valable dans le cas des signaux réels. En effet, même si l'hypothèse de blancheur reste réaliste en bande étroite, elle est remise en cause dans le cas des signaux large bande. L'hypothèse d'isotropie est, elle, également susceptible d'être mise à défaut que ce soit pour de petites ou d'importantes ouvertures angulaires. Par conséquent, il faut envisager un modèle plus général qu'est le modèle des réflecteurs colorés et anisotropes, rappelé dans le paragraphe suivant.

3.2 Modèles des réflecteurs colorés et anisotropes

Le modèle des réflecteurs colorés et anisotropes part de l'hypothèse que le coefficient de réflexion de chaque réflecteur est fonction de la fréquence f et de l'angle θ . Autrement dit, il est fonction du vecteur d'onde \vec{k} et s'écrit $\sigma_i(\vec{k})$. Par conséquent, l'image des réflecteurs dépend, non seulement du vecteur position \vec{r} , mais aussi du vecteur d'onde \vec{k} : elle est notée $I(\vec{r}, \vec{k})$. Le coefficient de rétrodiffusion se modélise, alors, comme :

$$H(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^2} I(\vec{r}, \vec{k}) e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.3)$$

Contrairement au cas du modèle (3.1), l'inversion du modèle (3.3) par transformée de Fourier bidimensionnelle n'est pas possible pour retrouver l'image $I(\vec{r}, \vec{k})$. On verra, au paragraphe suivant, qu'en effectuant une analyse de type temps-fréquence sur le coefficient de rétrodiffusion $H(\vec{k})$, on construit une image autour d'une fréquence f_o et d'un angle θ_o : en considérant l'ensemble des fréquences f_o et angles θ_o , l'image notée $I_H(x, y; f_o, \theta_o)$ est appelée *hyperimage*.

Pour introduire l'analyse temps-fréquence en imagerie SAR, il convient de définir une notion, propre au radar, qui est la *Section Efficace Radar* (SER)⁴⁰ d'une cible. Elle est définie comme le module au carré du coefficient de rétrodiffusion et a la dimension d'une surface⁴¹ lorsqu'on se place dans l'espace [Ber91b] :

$$\sigma(\vec{k}) = |H(\vec{k})|^2 \quad (3.4)$$

⁴⁰En anglais, *Radar Cross Section* (RCS).

⁴¹puisque le coefficient de rétrodiffusion a la dimension d'une longueur lorsqu'on se place dans l'espace.

La SER est une fonction du vecteur d'onde \vec{k} donc de (f, θ) . Elle caractérise le niveau d'énergie renvoyée par la cible à une fréquence et un angle donnés. En d'autres termes, elle fournit la répartition de l'énergie renvoyée par les réflecteurs de la cible dans l'espace (f, θ) . Mais elle ne donne aucune information sur la position des réflecteurs de la cible qui diffusent de l'énergie.

Une analyse de type temps-fréquence est, donc, introduite en imagerie SAR, pour fournir non seulement la distribution énergétique des réflecteurs dans l'espace (f, θ) mais aussi pour accéder à leur position spatiale $\vec{r} = (x, y)$. Ces deux types d'informations sont accessibles grâce à la construction d'hyperimages $I_H(\vec{r}, \vec{k})$. Le paragraphe suivant est dédié à la construction de ce type d'images radar en introduisant l'analyse temps-fréquence associée au groupe des similitudes.

3.3 Notion d'hyperimage et groupe des similitudes

Ces hyperimages sont construites à partir d'une structure bilinéaire du coefficient de rétrodiffusion $H(\vec{k})$ et définissent, de fait, des *distributions bilinéaires* dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) [Ber96, Ber91b, Ova92, Vig96] :

$$I_H(\vec{r}, \vec{k}) = \int K(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{r}, \vec{k}) H(\vec{k}_1) H^*(\vec{k}_2) dk_1 dk_2 \quad (3.5)$$

où K est un noyau hermitien⁴². Le membre de droite de l'expression (3.5) est, en fait, une généralisation de la formulation de la SER d'une cible exprimée en (3.4).

Le noyau K n'est pas connu mais peut être déterminé en imposant un certain nombre de contraintes aux hyperimages dont les plus importantes sont les suivantes :

- Les distributions $I_H(\vec{r}, \vec{k})$ doivent être positive dans tout l'espace (x, y) pour que l'intégrale sur toute surface \mathcal{D} puisse représenter une partie de la SER due aux réflecteurs contenus dans cette surface \mathcal{D} :

$$\sigma_{\mathcal{D}}(\vec{k}) = \int_{\mathcal{D}} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} \quad (3.6)$$

- Si \mathcal{D} représente le plan tout entier, il est souhaitable que les distributions vérifient la propriété de *marginalisation* suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} = |H(\vec{k})|^2 \quad (3.7)$$

- On souhaite que les distributions vérifient la formule de Moyal qui relie le produit scalaire entre deux coefficients de rétrodiffusion H_1 et H_2 et le produit scalaire entre leur distribution associée I_{H_1} et I_{H_2} :

$$\left| \int H_1(\vec{k}) H_2^*(\vec{k}) d\vec{k} \right|^2 = \int \int I_{H_1}(\vec{r}, \vec{k}) I_{H_2}^*(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} d\vec{k} \quad (3.8)$$

⁴²c'est à dire $K(\vec{k}_1, \vec{k}_2; \vec{r}, \vec{k}) = K^*(\vec{k}_2, \vec{k}_1; \vec{r}, \vec{k})$

- On demande aux distributions de satisfaire la propriété de covariance par le groupe des similitudes \mathcal{S} décrite dans l'équation (3.14). Cette propriété est détaillée au paragraphe 3.3.1.

L'analyse temps-fréquence montre qu'aucune distribution ne peut vérifier toutes ces contraintes. Par exemple, la formule de Moyal (3.8) est contradictoire avec le fait d'avoir une distribution partout positive. Autrement dit la propriété (3.8) est incompatible avec la contrainte (3.6) [Fla98].

La contrainte la plus importante est d'imposer aux l'hyperimages $I_H(\vec{r}, \vec{k})$ d'être *invariantes* par un *changement d'observateur*, c'est à dire par un *changement de système de référence*. Ce changement de système est effectué au moyen de transformations. Le groupe de transformations qu'il faut considérer en imagerie radar 2D est le groupe des *similitudes* dans le plan [Ber94, Ova92, Vig96]. Cette contrainte de covariance par le groupe des similitudes est détaillée dans le paragraphe suivant.

3.3.1 Notion de changement d'observateur et groupe des similitudes

En imagerie radar, le changement de système de référence est essentiellement un changement d'origine (translation \vec{b}), d'orientation des axes (rotation \mathcal{R} d'angle φ qui sera notée \mathcal{R}_φ), et d'échelle de longueur (dilatation/contraction par un facteur $a > 0$). Ce groupe de transformations constitue le *groupe des similitudes* et sera noté \mathcal{S} .

Il faut ajouter qu'un changement d'échelle de longueur doit être accompagné d'un changement d'échelle de temps de même facteur a de sorte que la valeur de la vitesse de la lumière soit constante par une telle transformation.

Les coordonnées spatio-temporelles (\vec{r}, t) et (\vec{r}', t') d'un point pour 2 observateurs différents \mathcal{A} et \mathcal{B} sont reliées par :

$$\begin{aligned} \vec{r} &\longrightarrow \vec{r}' = a \mathcal{R}_\varphi \vec{r} + \vec{b} \\ t &\longrightarrow t' = a t \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les coordonnées du vecteur d'onde \vec{k} se transforment comme :

$$\vec{k} \longrightarrow \vec{k}' = a^{-1} \mathcal{R}_\varphi \vec{k} \quad (3.10)$$

puisque toute transformation d'échelle d'un facteur a en temps se traduit par une transformation d'un facteur a^{-1} en fréquence.

Avec le changement de système de référence défini par (3.9) et (3.10), la loi de transformation du coefficient de rétrodiffusion $H(\vec{k})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ H(\vec{k}) &\xrightarrow{\mathcal{S}_{a, \vec{b}, \varphi}} H'(\vec{k}) = a e^{-2j\pi \vec{k} \cdot \vec{b}} H(a \mathcal{R}_\varphi^{-1} \vec{k}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\mathcal{S}_{a, \vec{b}, \varphi}$ désigne les transformations de contraction a , de translation \vec{b} et de rotation d'angle φ du groupe \mathcal{S} ; $H(\vec{k})$ est le coefficient de rétrodiffusion mesuré par un observateur \mathcal{A} ; $H'(\vec{k})$ est le coefficient de rétrodiffusion mesuré par un observateur \mathcal{B} et parfaitement cohérent avec le

coefficient $H(\vec{k})$.

Le changement d'échelle de longueur n'affecte pas seulement les coordonnées (\vec{r}, \vec{k}) des points brillants, mais aussi l'unité de longueur pour évaluer H . Le facteur multiplicatif a dans (3.11)⁴³ est un terme qui permet de rétablir l'unité de longueur adéquate pour évaluer correctement le coefficient de rétrodiffusion $H'(\vec{k})$.

Pour illustrer l'explication sur le facteur a , supposons une maquette contenant une cible réduite d'un facteur γ par rapport à la réalité : on note $H(\vec{k})$ le coefficient de rétrodiffusion de cette cible réduite ; on suppose que la SER a été mesurée : par exemple, $|H(\vec{k}_o)|^2 = \sigma_o$ (en m^2) aux fréquence et angle (f_o, θ_o) donnés. En se référant à (3.11) et en ne considérant que la transformation par contraction a pour simplifier la démarche, la SER réelle aux fréquence et angle $(f_o/\gamma, \theta_o)$ peut être calculée à partir de la maquette :

$$\begin{aligned} |H'(\vec{k}_o/\gamma)|^2 &= \gamma^2 |H(\vec{k}_o)|^2 \\ &= \gamma^2 \sigma_o \end{aligned}$$

On obtient donc une SER réelle γ^2 fois plus importante que celle obtenue sur maquette : ce qui est cohérent avec le fait que la surface de la cible réelle est, elle aussi, γ^2 fois plus grande que la surface de la cible sur maquette réduite.

Revenons, à présent, sur la loi de transformation (3.11) du coefficient de rétrodiffusion. Le produit scalaire invariant par cette transformation est :

$$\langle H_1, H_2 \rangle = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} H_1(k, \theta) H_2^*(k, \theta) k dk \quad (3.12)$$

Le produit scalaire (3.12) a pour propriétés d'être *sans dimension* et de se conserver après une transformation du groupe des similitudes :

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \xrightarrow{S_{a,\vec{b},\varphi}} H'_1 \\ H_2 \xrightarrow{S_{a,\vec{b},\varphi}} H'_2 \end{array} \right\} \implies \langle H_1, H_2 \rangle = \langle H'_1, H'_2 \rangle \quad (3.13)$$

Suivant la loi de transformation (3.11), on impose aux hyperimages définies par (3.5) de vérifier le diagramme de covariance suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} : (\vec{r}, \vec{k}) & \longrightarrow & \mathcal{B} : (\vec{r}' = a \mathcal{R}_\varphi \vec{r} + \vec{b}, \vec{k}' = a^{-1} \mathcal{R}_\varphi \vec{k}) \\ H(\vec{k}) & \xrightarrow{S_{a,\vec{b},\varphi}} & H'(\vec{k}) = a e^{-2j\pi \vec{k} \cdot \vec{b}} H(a \mathcal{R}_\varphi^{-1} \vec{k}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_H(\vec{r}, \vec{k}) & \xrightarrow{S_{a,\vec{b},\varphi}} & I_{H'}(\vec{r}, \vec{k}) = I_H(a^{-1} \mathcal{R}_\varphi^{-1}(\vec{r} - \vec{b}), a \mathcal{R}_\varphi^{-1} \vec{k}) \end{array} \quad (3.14)$$

Un tel diagramme assure d'obtenir des hyperimages sans dimension⁴⁴ de sorte que l'intégrale sur un domaine \mathcal{D} du plan :

$$\sigma_{\mathcal{D}}(\vec{k}) = \int_{\mathcal{D}} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} \quad (3.15)$$

⁴³En se référant au chapitre 2, ce cas correspond au *paramètre de dimensionnement* $r=0$ dans la loi de transformation (2.34) du groupe affine.

⁴⁴En se référant au chapitre 2, la loi de transformation des hyperimages (3.14) correspond au *paramètre de dimensionnement* $q=0$ dans le diagramme de covariance (2.35) relatif au groupe affine.

ait la dimension d'une surface et puisse être interprétée comme une partie de la SER due aux réflecteurs de la cible contenus dans le domaine \mathcal{D} .

La contrainte d'invariance des hyperimages (3.14) par le groupe des similitudes n'est pas suffisante pour déterminer $I_H(\vec{r}, \vec{k})$ de manière unique. La solution, que nous étudions dans le paragraphe suivant, est basée sur l'analyse en ondelettes continues associée au groupe des similitudes dans le plan.

3.4 Imagerie SAR par analyse en ondelettes continues

3.4.1 Procédé de construction des coefficients d'ondelettes

Considérons le coefficient de rétrodiffusion $\phi(\vec{k})$ d'une cible de référence. Cette cible est supposée être localisée autour de $\vec{r} = \vec{0}$ et réfléchir essentiellement dans la direction $\theta = 0$ et à la fréquence f donnée par $k = 2f/c = 1$. La fonction $\phi(\vec{k}) \equiv \phi(k, \theta)$ est, donc, localisée autour de $\vec{r} = \vec{0}$ et $(k, \theta) = (1, 0)$.

On construit, alors, une famille de fonctions $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}$ à partir de $\phi(\vec{k})$ par le groupe des similitudes et suivant la loi de transformation (3.11) (pour $a = 1/k_o$, $\vec{b} = \vec{r}_o$, et rotation \mathcal{R} d'angle θ_o) [Ber94, Ova92] :

$$\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k}) = \frac{1}{k_o} e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_o} \phi\left(\frac{1}{k_o}\mathcal{R}_{\theta_o}^{-1}\vec{k}\right) \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{k_o} e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_o} \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right). \quad (3.17)$$

Cet ensemble de fonctions constitue une famille d'*ondelettes* et la fonction de référence $\phi(\vec{k})$ définit l'*ondelette mère*. Du fait qu'elle soit construite par le groupe des similitudes, cette base d'ondelettes est identique pour tous les observateurs définis dans ce groupe⁴⁵ et ne dépend que du choix de l'ondelette mère.

Le coefficient d'ondelette $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ est défini comme le produit scalaire entre le coefficient de rétrodiffusion H et l'ondelette $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}$:

$$C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \langle H, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \quad (3.18)$$

soit en introduisant le produit scalaire (3.12) invariant par la transformation (3.11), et en introduisant la formulation (3.17) de l'ondelette, on a :

$$C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} k H(k, \theta) \frac{1}{k_o} e^{+j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_o} \phi^*\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) dk \quad (3.19)$$

⁴⁵Par exemple, supposons une ondelette $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k})$ définie par (3.16) pour un observateur \mathcal{A} . Cette ondelette devient, par transformation $\mathcal{S}_{a, \vec{b}, \varphi}$ définie en (3.11), $\Psi_{\vec{r}_1, \vec{k}_1}(\vec{k})$ pour un observateur \mathcal{B} ; (\vec{r}_1, \vec{k}_1) sont respectivement définies par $\vec{r}_1 = a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o + \vec{b}$ et $\vec{k}_1 = a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o$. La famille d'ondelettes reste, donc, inchangée après un changement de système de référence du groupe \mathcal{S} .

L'invariance du coefficient d'ondelette par un changement de système de référence se traduit par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\
 H &\xrightarrow{\mathcal{S}_{a,\vec{b},\phi}} H' \\
 \Psi_{\vec{r}_o,\vec{k}_o} &\xrightarrow{\mathcal{S}_{a,\vec{b},\phi}} \left\{ \Psi_{\vec{r}_o,\vec{k}_o} \right\}' = \Psi_{a\mathcal{R}_\phi\vec{r}_o+\vec{b},a^{-1}\mathcal{R}_\phi\vec{k}_o} \\
 C_H(\vec{r}_o,\vec{k}_o) &\xrightarrow{\mathcal{S}_{a,\vec{b},\phi}} C_{H'}(a\mathcal{R}_\phi\vec{r}_o+\vec{b},a^{-1}\mathcal{R}_\phi\vec{k}_o)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

et signifie que le coefficient d'ondelette $C_{H'}(a\mathcal{R}_\phi\vec{r}_o+\vec{b},a^{-1}\mathcal{R}_\phi\vec{k}_o)$ calculé par l'observateur \mathcal{B} est cohérent avec le coefficient $C_H(\vec{r}_o,\vec{k}_o)$ calculé par l'observateur \mathcal{A} .

De plus, on a :

$$C_H(\vec{r}_o,\vec{k}_o) = C_{H'}(a\mathcal{R}_\phi\vec{r}_o+\vec{b},a^{-1}\mathcal{R}_\phi\vec{k}_o) \tag{3.21}$$

compte-tenu de la propriété de conservation (3.13) du produit scalaire par une transformation du groupe \mathcal{S} .

3.4.2 Propriétés de la transformée en ondelettes

a/ Reconstruction

il est possible de reconstruire le coefficient de rétrodiffusion $H(\vec{k})$ à partir de ses coefficients d'ondelette $C_H(\vec{r}_o,\vec{k}_o)$:

$$H(\vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} \int_S d\vec{r}_o \int C_H(\vec{r}_o,\vec{k}_o) \Psi_{\vec{r}_o,\vec{k}_o}(\vec{k}) d\vec{k}_o \tag{3.22}$$

avec K_ϕ défini comme le *coefficient d'admissibilité* de l'ondelette mère qui doit, pour reconstruire $H(\vec{k})$ à partir des coefficients d'ondelette, vérifier⁴⁶ :

$$K_\phi = \int \left| \phi(\vec{k}) \right|^2 \frac{d\vec{k}}{k^2} < +\infty \tag{3.23}$$

b/ Isométrie

La relation d'isométrie donne au carré du module du coefficient d'ondelette sur le coefficient d'admissibilité de l'ondelette un sens *probabiliste*⁴⁷ :

$$\frac{1}{K_\phi} \int_S d\vec{r}_o \int \left| C_H(\vec{r}_o,\vec{k}_o) \right|^2 d\vec{k}_o = \|H\|^2 \tag{3.24}$$

3.4.3 Formation de l'hyperimage à partir des coefficients d'ondelette

a/ Approche probabiliste

En se référant à (3.24), le carré du module du coefficient d'ondelette sur le coefficient d'admissibilité de l'ondelette peut, effectivement, être interprété comme une densité de probabilité

⁴⁶Se reporter à l'annexe I pour la démonstration de la formule de reconstruction.

⁴⁷Se reporter à l'annexe J pour la démonstration de la formule d'isométrie.

dans tout l'espace (\vec{r}, \vec{k}) [Ova92]. Une hyperimage $\hat{I}_H(\vec{r}, \vec{k})$ peut, alors, être construite en tant que moyenne d'états localisés $L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k})$ avec la densité de probabilité $p(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = |C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 / K_\phi$:

$$\hat{I}_H(\vec{r}, \vec{k}) = \int \frac{1}{K_\phi} |C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r}_o d\vec{k}_o \quad (3.25)$$

Ces états localisés $L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k})$ doivent vérifier :

$$L_{a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o+\vec{b}, a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k}) = L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(a^{-1}\mathcal{R}_\varphi^{-1}(\vec{r}-\vec{b}), a\mathcal{R}_\varphi^{-1}\vec{k}) \quad (3.26)$$

Démonstration :

D'après (3.14) et (3.25), l'hyperimage $\hat{I}_{H'}$ calculée par un observateur \mathcal{B} , cohérente avec l'hyperimage \hat{I}_H calculée par un observateur \mathcal{A} , s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{I}_{H'}(\vec{r}, \vec{k}) &= \hat{I}_H(a^{-1}\mathcal{R}_\varphi^{-1}(\vec{r}-\vec{b}), a\mathcal{R}_\varphi^{-1}\vec{k}) \\ &= \int \frac{1}{K_\phi} |C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(a^{-1}\mathcal{R}_\varphi^{-1}(\vec{r}-\vec{b}), a\mathcal{R}_\varphi^{-1}\vec{k}) d\vec{r}_o d\vec{k}_o \end{aligned} \quad (3.27)$$

Or, l'hyperimage $\hat{I}_{H'}$ peut aussi être construite par (3.25). En se référant à (3.20), elle s'exprime par :

$$\hat{I}_{H'}(\vec{r}, \vec{k}) = \int \frac{1}{K_\phi} |C_{H'}(a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o+\vec{b}, a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o)|^2 L_{a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o+\vec{b}, a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r}_o d\vec{k}_o, \quad (3.28)$$

ce qui donne en introduisant l'égalité $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = C_{H'}(a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o+\vec{b}, a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o)$ de l'équation (3.21) :

$$\hat{I}_{H'}(\vec{r}, \vec{k}) = \int \frac{1}{K_\phi} |C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 L_{a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o+\vec{b}, a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r}_o d\vec{k}_o. \quad (3.29)$$

Finalement, en identifiant (3.29) avec (3.27), on obtient la condition (3.26) sur les états localisés $L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}$, à savoir :

$$L_{a\mathcal{R}_\varphi\vec{r}_o+\vec{b}, a^{-1}\mathcal{R}_\varphi\vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k}) = L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(a^{-1}\mathcal{R}_\varphi^{-1}(\vec{r}-\vec{b}), a\mathcal{R}_\varphi^{-1}\vec{k}) \quad (3.30)$$

dont les solutions sont données par :

$$L_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{r}, \vec{k}) = A \delta(\vec{r}-\vec{r}_o, \vec{k}-\vec{k}_o) \quad (3.31)$$

où A est un coefficient réel quelconque [Ova92].

En conclusion, l'hyperimage \hat{I}_H construite en (3.25) s'écrit, à partir des coefficients d'ondelette $C_H(\vec{r}, \vec{k})$, simplement :

$$\hat{I}_H(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} |C_H(\vec{r}, \vec{k})|^2 \quad (3.32)$$

b/ Approche par régularisation d'une distribution

Une seconde manière de retrouver (3.32) est de construire, par lissage 2D, une forme régularisée $\tilde{I}_H^{(r)}(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ d'une distribution $\tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k})$ n'étant pas partout positive.

Considérons une distribution $\tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k})$ issue de l'expression générale (3.5) des hyperimages. On suppose que cette distribution vérifie la formule de Moyal (3.8) et la contrainte de covariance (3.14) par le groupe \mathcal{S} .

Or, comme on l'a dit au paragraphe 3.3, le respect de la formule de Moyal par la distribution implique que $\tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k})$ n'est pas partout positive dans l'hyperplan (\vec{r}, \vec{k}) . Ceci implique que la contrainte (3.6) n'est pas vérifiée par la distribution : l'intégration de la distribution sur toute surface \mathcal{D} ne peut, donc, être interprétée comme une partie de la SER due aux réflecteurs contenus dans \mathcal{D} .

Un moyen de remédier à ce problème de non positivité de la distribution consiste à construire une forme lissée de la distribution $\tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k})$ [Ova03] :

$$\tilde{I}_H^{(r)}(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \int \int \tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k}) \tilde{I}_\phi^* \left(k_o \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1}(\vec{r} - \vec{r}_o), \frac{1}{k_o} \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1} \vec{k} \right) d\vec{r} d\vec{k} \quad (3.33)$$

D'après (3.14), le diagramme de covariance que vérifie $\tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k})$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} \phi(\vec{k}) & \xrightarrow{\mathcal{S}(1/k_o, \vec{r}_o, \theta_o)} & \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k}) = \frac{1}{k_o} e^{-j2\pi \vec{k} \cdot \vec{r}_o} \phi \left(\frac{1}{k_o} \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1} \vec{k} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{I}_\phi(\vec{r}, \vec{k}) & \xrightarrow{\mathcal{S}(1/k_o, \vec{r}_o, \theta_o)} & \tilde{I}_{\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}}(\vec{r}, \vec{k}) = \tilde{I}_\phi \left(k_o \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1}(\vec{r} - \vec{r}_o), \frac{1}{k_o} \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1} \vec{k} \right) \end{array} \quad (3.34)$$

Donc, en se référant à ce diagramme de covariance (3.34) et à la formule de Moyal (3.8) avec $H_1(\vec{k}) = H(\vec{k})$ et $H_2(\vec{k}) = \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k})$, la forme régularisée s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_H^{(r)}(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \int \int \tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k}) \tilde{I}_\phi^* \left(k_o \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1}(\vec{r} - \vec{r}_o), \frac{1}{k_o} \mathcal{R}_{\theta_o}^{-1} \vec{k} \right) d\vec{r} d\vec{k} \\ &\stackrel{\text{covariance}}{=} \int \int \tilde{I}_H(\vec{r}, \vec{k}) \tilde{I}_{\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}}^*(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} d\vec{k} \\ &\stackrel{\text{Moyal}}{=} \left| \int H(\vec{k}) \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}^*(\vec{k}) d\vec{k} \right|^2 \\ &= \left| C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2 \end{aligned}$$

L'hyperimage régularisée $\tilde{I}_H^{(r)}(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ s'exprime, donc, comme le carré du module du coefficient d'ondelette $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$. En introduisant K_ϕ^{-1} comme facteur multiplicatif dans (3.33), l'hyperimage régularisée se réécrit :

$$\boxed{\tilde{I}_H^{(r)}(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \frac{1}{K_\phi} \left| C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2} \quad (3.35)$$

et l'on retrouve exactement le résultat (3.32) obtenue par l'approche probabiliste.

Pour conclure ce paragraphe, on peut dire qu'une solution d'hyperimage $I_H(\vec{r}, \vec{k})$ issue de (3.5) peut être proposée : elle est construite à partir des coefficients d'ondelette et s'exprime, d'après (3.32) et (3.35), par :

$$I_H(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} \left| C_H(\vec{r}, \vec{k}) \right|^2 \quad (3.36)$$

Le noyau K en (3.5) qui correspond à cette solution est :

$$K(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} \frac{k_1 k_2}{k^2} e^{+j2\pi(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}} \phi^*\left(\frac{k_1}{k}, \theta_1 - \theta\right) \phi\left(\frac{k_2}{k}, \theta_2 - \theta\right) \quad (3.37)$$

L'hyperimage $I_H(\vec{r}, \vec{k})$ définie en (3.36) est positive mais ne vérifie pas la propriété de marginalisation (3.7). En effet, en intégrant l'hyperimage $I_H(\vec{r}, \vec{k})$ sur tout l'espace (x, y) , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} = \frac{1}{K_\phi k^2} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{+\infty} dk' k' |H(k', \theta')|^2 \left| \phi\left(\frac{k'}{k}, \theta' - \theta\right) \right|^2 \quad (3.38)$$

où le membre de droite est une version lissée de la SER. On pourra se reporter à l'annexe K pour la démonstration de la relation (3.38).

c/ La construction de l'hyperimage en pratique

Pour construire l'hyperimage $I_H(x, y; f, \theta)$ en pratique, nous appliquons la transformation en ondelettes sur le spectre $H(k_x, k_y)$ de l'image complexe $I(x, y)$. Ce spectre est obtenue, à partir de l'image par transformée de Fourier bidimensionnelle :

$$H(k_x, k_y) = \begin{array}{l} \mathcal{F} \\ x \rightarrow k_x \\ y \rightarrow k_y \end{array} [I(x, y)]$$

Les étapes de l'algorithme pour construire l'hyperimage sont les suivantes [Tri05] :

Pour chaque couple de valeurs fréquence-angle $(k_i = 2f_i/c, \theta_j)$; $(i, j) \in [1, n_{k_o}] \times [1, n_{\theta_o}]$ ⁴⁸

- (1) On construit la fenêtre d'analyse $\phi_{k_i, \theta_j}(k, \theta) = \frac{1}{k_i} \phi\left(\frac{k}{k_i}, \theta - \theta_j\right)$ dans le plan (k_x, k_y) . On rappelle, pour cela, que les composantes (k_x, k_y) du vecteur d'onde \vec{k} s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos(\theta) \\ k \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la fenêtre d'analyse $\phi_{k_i, \theta_j}(k, \theta)$, que l'on exprime dans le plan (k_x, k_y) , est notée $\Phi_{k_i, \theta_j}(k_x, k_y)$. Elle s'écrit :

$$\Phi_{k_i, \theta_j}(k_x, k_y) = \frac{1}{k_i} \phi\left(\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_i}, \arctan\left(\frac{k_y}{k_x}\right) - \theta_j\right)$$

- (2) On effectue, ensuite, le produit entre H et Φ_{k_i, θ_j}^* :

$$A_{k_i, \theta_j}(k_x, k_y) = H(k_x, k_y) \Phi_{k_i, \theta_j}^*(k_x, k_y)$$

- (3) On applique, enfin, la transformée de Fourier bidimensionnelle inverse sur $A_{k_i, \theta_j}(k_x, k_y)$: le résultat obtenu n'est rien d'autre que le coefficient d'ondelette $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_{ij})$ pour la fréquence f_i et l'angle θ_j :

$$C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_{ij}) = \begin{matrix} \mathcal{F}^{-1} \\ k_x \rightarrow x_o \\ k_y \rightarrow y_o \end{matrix} [A_{k_i, \theta_j}(k_x, k_y)]$$

FIN.

En sortant de la boucle, on construit l'hyperimage en divisant le carré du module du coefficient d'ondelette sur le coefficient d'admissibilité K_ϕ de l'ondelette ϕ :

$$I_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \frac{1}{K_\phi} \left| C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2$$

Dans l'étape (3) de l'algorithme, pour réduire le temps de calcul, nous utilisons l'algorithme rapide de transformée de Fourier que nous notons FFT (**F**ast **F**ourier **T**ransform). Par conséquent, la complexité de l'algorithme s'exprime, approximativement, par le nombre de FFT appliquées à l'étape (3) de cet algorithme :

Si $I(x, y)$ est une image définie dans une grille de $(n_x \times n_y)$ échantillons : en appliquant, une transformée de Fourier bidimensionnelle sur cette image, le spectre $H(k_x, k_y)$ est également défini dans une grille de $(n_{k_x} \times n_{k_y})$ échantillons où $(n_{k_x}, n_{k_y}) = (n_x, n_y)$.

⁴⁸ n_{k_o} et n_{θ_o} étant respectivement le nombre total de fréquences f_o et d'angles θ_o .

Par conséquent, en se référant à l'étape (3) de l'algorithme, nous avons à appliquer $n_{k_o} n_{\theta_o} (n_{k_x} \text{FFT}(\text{sur } n_{k_y} \text{ échantillons}) + n_{k_y} \text{FFT}(\text{sur } n_{k_x} \text{ échantillons}))$.

À titre d'exemple, dans le chapitre suivant⁴⁹, les valeurs utilisées pour les paramètres caractérisant la complexité de l'algorithme sont les suivantes :

$$n_x = n_{k_x} = 512, \quad n_y = n_{k_y} = 512, \quad n_{k_o} = n_{\theta_o} = 40.$$

d/ Interprétation de l'hyperimage

En réécrivant l'hyperimage $I_H(\vec{r}, \vec{k}) \equiv I_H(x, y; f, \theta)$, on peut dire que :

- $I_H(x, y; f_o, \theta_o)$ définit la répartition spatiale des réflecteurs qui renvoient de l'énergie à la fréquence f_o et à l'angle θ_o . Par abus de langage, on dira que cette quantité est l'*image SAR autour de la fréquence f_o et l'angle θ_o* .
- $I_H(x_o, y_o; f, \theta)$ définit la répartition de l'énergie, dans l'espace (f, θ) , renvoyée par le réflecteur localisé en (x_o, y_o) .

Pour analyser cette hyperimage, un outil nommé i4d [Cas97] a été développé à l'ONERA. Il permet la visualisation de structure 4D de manière interactive et dynamique comme l'illustrent les figures (3.1) et (3.2).

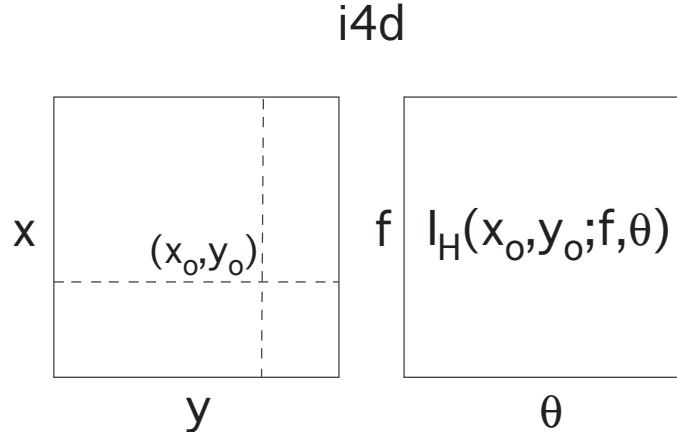


FIG. 3.1 – En sélectionnant un pixel de coordonnées (x_o, y_o) dans le plan (x, y) , on accède à la répartition, dans le plan fréquence-angle, de l'énergie renvoyée par le réflecteur localisé en (x_o, y_o) .

⁴⁹chapitre dédié à l'application des ondelettes sur les signaux réels.

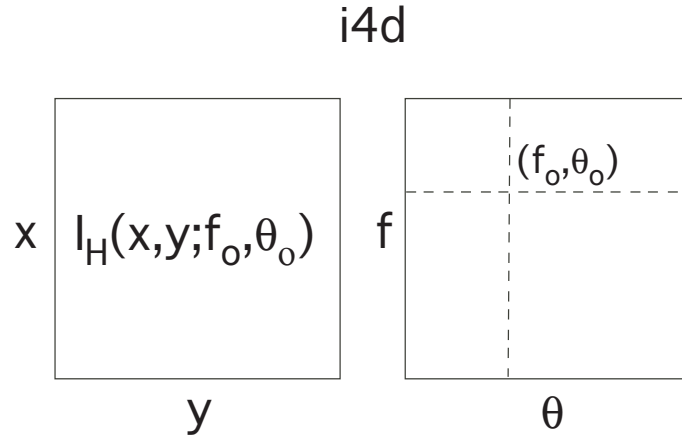


FIG. 3.2 – En sélectionnant un pixel de coordonnées (f_o, θ_o) dans le plan (f, θ) , on accède à la répartition spatiale des réflecteurs renvoyant de l'énergie à la fréquence f_o et à l'angle θ_o .

3.5 Construction d'une hyperimage réelle

3.5.1 Paramètres SAR pour l'image étudiée

La figure 3.3 (c) montre le type d'image qui peut être formée à l'ONERA au Département **E**lectro**M**agnétisme et **R**adar (DEMR) avec le radar RAMSES [Bou96]. Les caractéristiques principales sont les suivantes :

- Angle de squint nul : $\theta_1 = 0^\circ$.
- Bande K_u :
 - ◇ Fréquence centrale d'émission : $f_c = 14.2$ Ghz.
 - ◇ Bande émise : $B = 900$ Mhz.
- Ouverture angulaire de l'antenne synthétique : $\Delta_\theta = 3^\circ$.

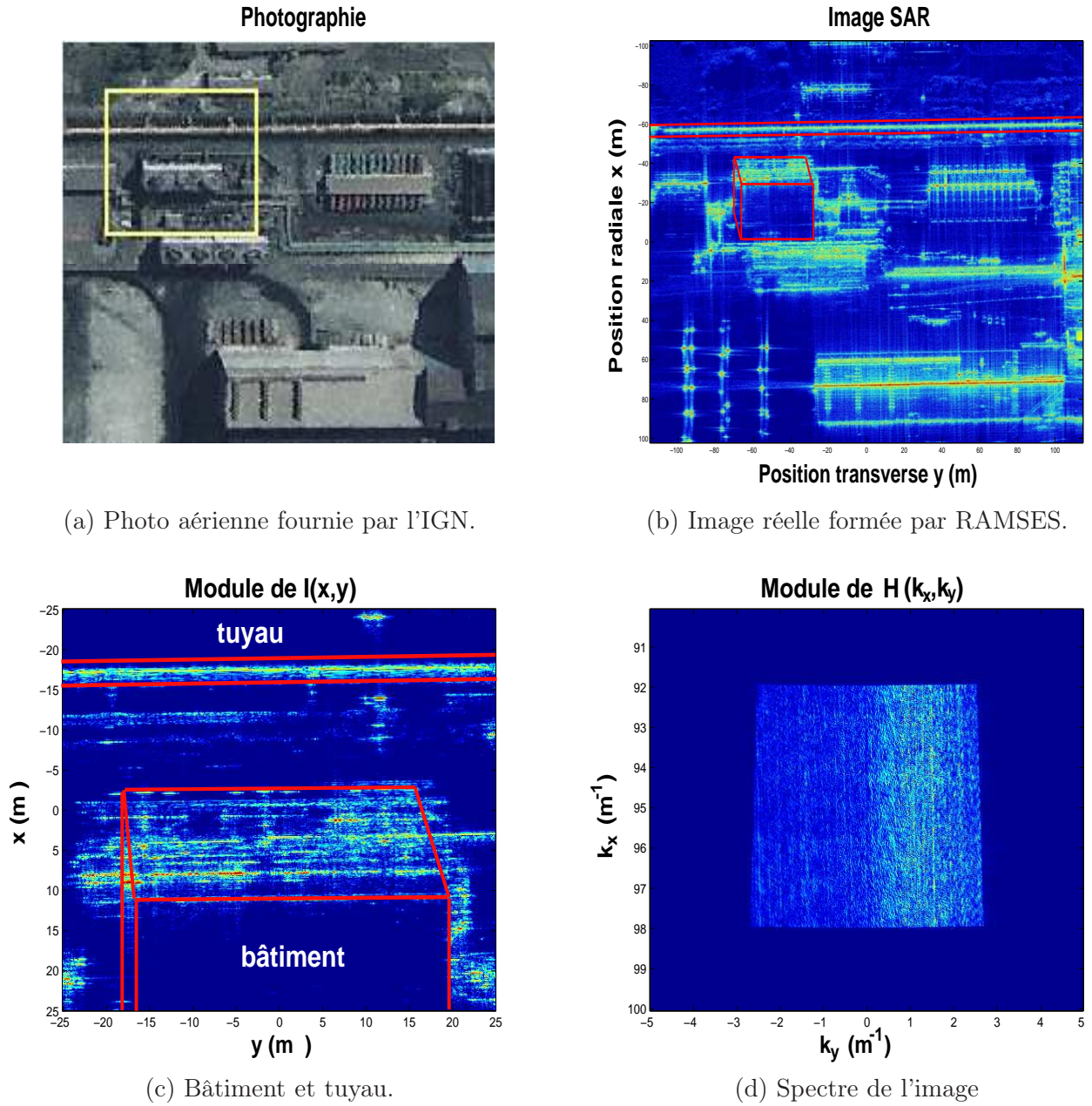


FIG. 3.3 – Zone d'un centre sidérurgique du sud de la France.

3.5.2 Paramètres de l'ondelette mère pour la construction de l'hyperimage

L'ondelette mère $\phi(k, \theta)$ est localisée en $(k, \theta) = (1, 0)$. Elle est choisie gaussienne (tronquée) en k et gaussienne en θ (voir figure 3.4) :

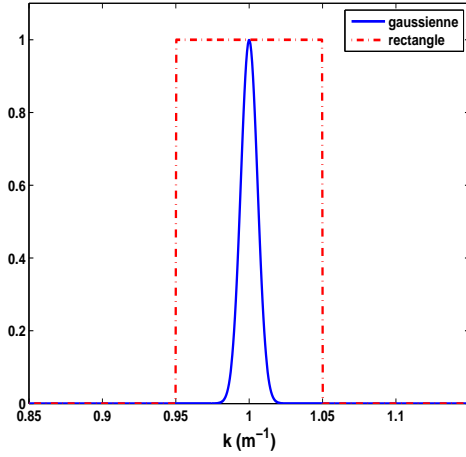
$$\phi(k, \theta) = \underset{[-\delta/2 \ \delta/2]}{\text{rect}}(k-1) e^{-(k-1)^2/\sigma_k^2} e^{-\theta^2/\sigma_\theta^2}$$

où $\text{rect}(k)$ est la fonction porte définie par :

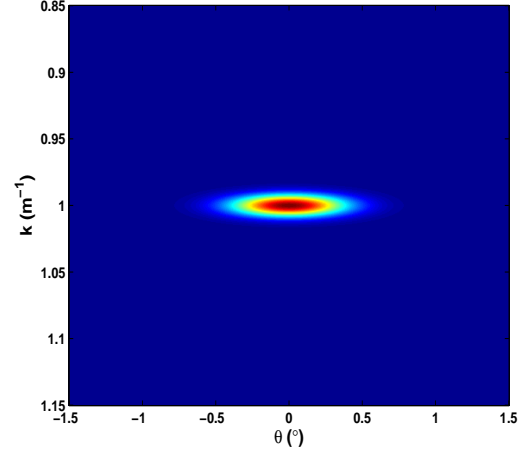
$$\underset{[-\delta/2 \ \delta/2]}{\text{rect}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in [-\delta/2, \delta/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le produit de la gaussienne par la fonction porte selon l'axe k permet d'assurer la condition d'admissibilité sur l'ondelette mère ϕ :

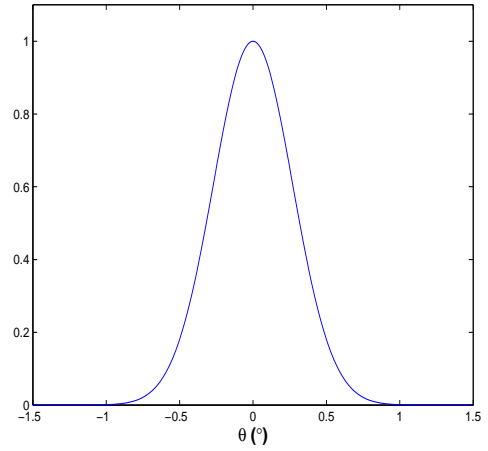
$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk \frac{|\phi(k, \theta)|^2}{k} < +\infty$$



(a) Ondelette mère selon k .



(b) Ondelette mère en (k, θ) .



(c) Ondelette mère selon θ .

FIG. 3.4 – Ondelette mère en pratique.

La largeur de la fenêtre d'analyse ϕ , est définie comme la *bande à -3 dB* de la puissance $|\phi|^2$ [Mal98], comme l'illustre la figure 3.5 :

Si on veut telle ou telle étendue de l'ondelette mère en angle et en fréquence, il est très facile de déterminer les paramètres de la gaussienne 2D, σ_k et σ_θ , permettant d'obtenir l'étendue souhaitée : c'est la raison du choix de la gaussienne 2D comme ondelette mère.

Un exemple d'ondelette mère gaussienne $\phi(k, \theta)$ est illustrée en figure 3.6 (b). En pratique, et d'après l'algorithme en 3.4.3 (c), la transformée en ondelettes est effectuée en domaine (k_x, k_y) :

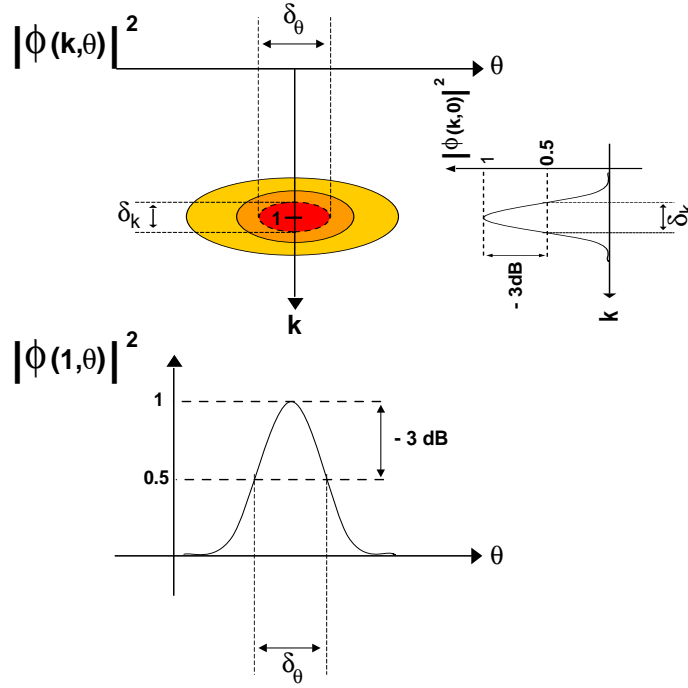


FIG. 3.5 – Définition des étendues fréquentielle et angulaire de l'ondelette mère.

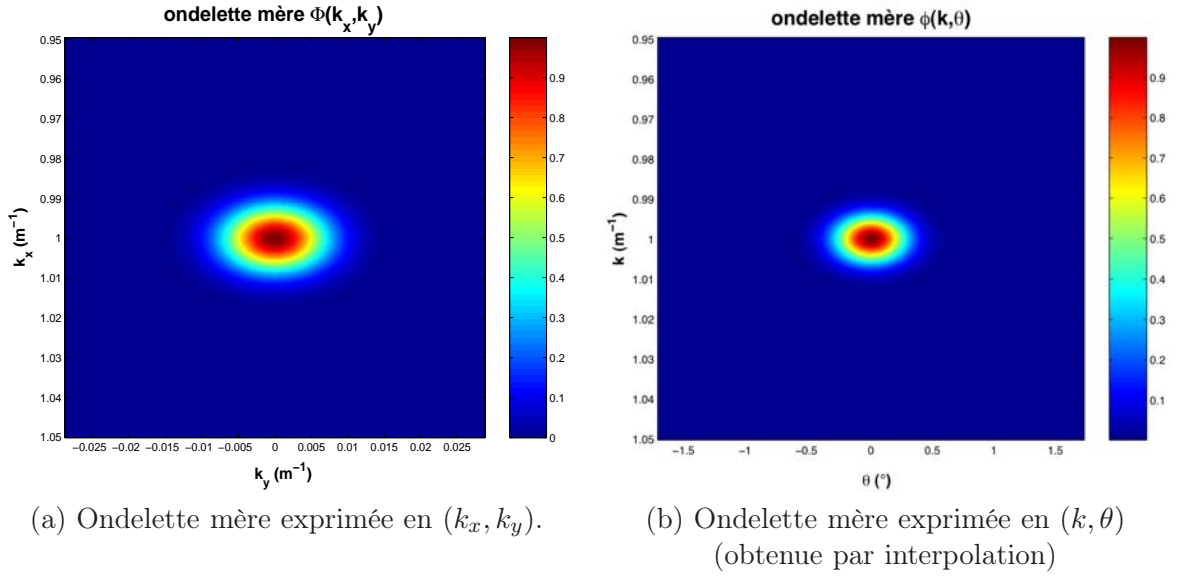
c'est pourquoi, nous illustrons, en figure 3.6 (a), l'ondelette $\Phi(k_x, k_y)$ définie comme :

$$\Phi(k_x, k_y) = \phi\left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \arctan\left(\frac{k_y}{k_x}\right)\right)$$

Dans cet exemple, on a proposé de construire $\phi(k, \theta)$ à partir de $\Phi(k_x, k_y)$ par une procédure d'interpolation permettant le passage du domaine (k_x, k_y) vers le domaine (k, θ) . Le détail de la procédure d'interpolation est donnée en Annexe L. Dans cette même annexe, on pourra également voir comment s'étend l'ondelette Φ dans le domaine (k_x, k_y) pour des secteurs angulaires $\Delta\theta$ importants.

Le paragraphe suivant illustre quelques exemples de l'utilisation de l'interface i4d pour l'exploitation de l'hyperimage $I_H(x, y, f, \theta)$ construite par l'algorithme développé au paragraphe 3.4.3 (c). Il faut, à ce stade, informer le lecteur que tous les résultats d'hyperimages que l'on présentera dans ce chapitre et dans le chapitre 4 ont été obtenus avec les valeurs de paramètres d'ondelette suivantes :

- Étendue en k de l'ondelette mère : $\delta_k = 0.0095 \text{ m}^{-1}$. Cette valeur de δ_k permet d'obtenir une ondelette $\Psi_{f_c, \theta_o, r_o}(\vec{k})$ localisée en $f_c = 14.25 \text{ GHz}$ d'étendue fréquentielle $\delta_f(f_c) = 135 \text{ MHz}$ qui correspond à 15% d'une bande d'émission $B = 900 \text{ MHz}$.
- Étendue angulaire de l'ondelette mère : $\delta_\theta = 0.47^\circ$; ce qui correspond à 15% d'un secteur angulaire $\Delta\theta = 3^\circ$.

FIG. 3.6 – Ondelette mère dans le plan (k_x, k_y) et dans le plan (k, θ) .

3.5.3 Illustration de l'hyperimage par interface i4d

a/ Différentes images SAR autour de différentes valeurs de fréquence et angle.

Les figures 3.7 à 3.16 montrent qu'on peut obtenir une images SAR autour de différentes fréquences et angles en fixant la troisième et la quatrième dimension de l'hyperimage $I(x, y; f, \theta)$ à une valeur fréquentielle f_o et angulaire θ_o .

En effet, en sélectionnant un pixel de coordonnées (f_o, θ_o) dans le plan (f, θ) , on accède à la répartition spatiale des réflecteurs renvoyant de l'énergie autour de la fréquence f_o et l'angle θ_o .

On remarquera que les différentes images présentées dans les figures 3.7 à 3.16 ont des résolutions radiale et transverse moins fines que l'image SAR initiale de la figure 3.3 (c) puisque l'analyse en ondelettes effectue une analyse locale du signal, c'est à dire sur une portion de la bande totale B et du secteur angulaire total $\Delta\theta$; or la bande fréquentielle et le secteur angulaire déterminent le support du spectre $H(k_x, k_y)$ et donc les résolutions radiale et transverse : on pourra se reporter au premier chapitre et plus particulièrement au paragraphe 1.3.5 pour plus de précisions.

Les figures 3.7 et 3.8 montrent des images SAR respectivement autour des fréquences $f_o = 14.52$ GHz et $f_o = 14.33$ GHz et autour d'un même angle $\theta_o = 0.58^\circ$; ces deux images sont confrontées dans la figure 3.9 : dans la zone indiquée du tuyau, la répartition spatiale des réflecteurs diffère d'une image à l'autre.

De la même manière, les figures 3.10 et 3.11 illustrent des images SAR respectivement autour des fréquences $f_o = 14.44$ GHz et $f_o = 14.23$ GHz et autour d'un même angle $\theta_o = 0.66^\circ$; ces deux images sont confrontées dans la figure 3.12 : on constate que ces deux images sont différentes dans la région indiquée du tuyau.

Enfin, les figures 3.13, 3.14 et 3.15 montrent des images autour de la fréquence $f_o = 14.25$ GHz et respectivement autour des angles d'illumination $\theta_o = -1^\circ$, $\theta_o = 0.25^\circ$ et $\theta_o = 0.65^\circ$. On remarque, en s'appuyant sur la figure 3.16, que la distribution des réflecteurs de l'image diffère significativement pour ces trois angles. En effet, l'ensemble des réflecteurs renvoie un maximum d'énergie vers le radar lorsque ce dernier à une direction d'illumination $\theta_o = 0.65^\circ$.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

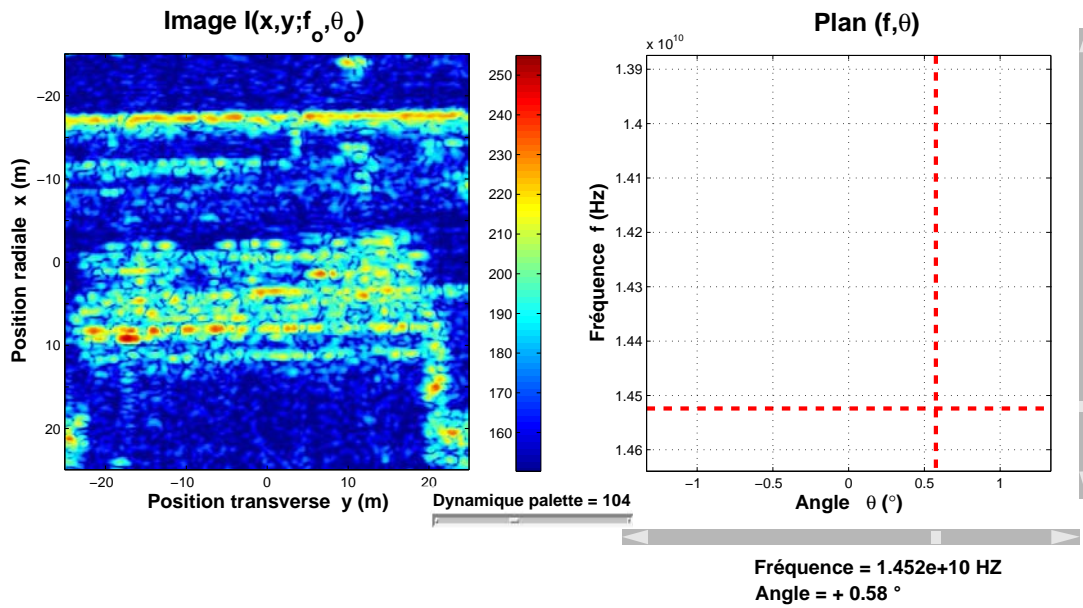


FIG. 3.7 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.52 \text{ GHz}, 0.58^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

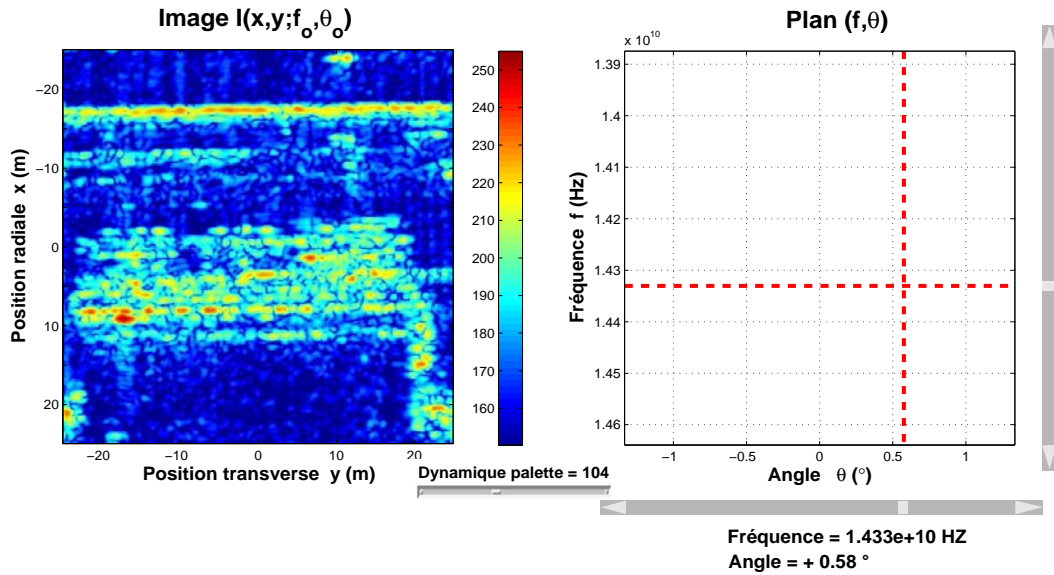


FIG. 3.8 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.33 \text{ GHz}, 0.58^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.

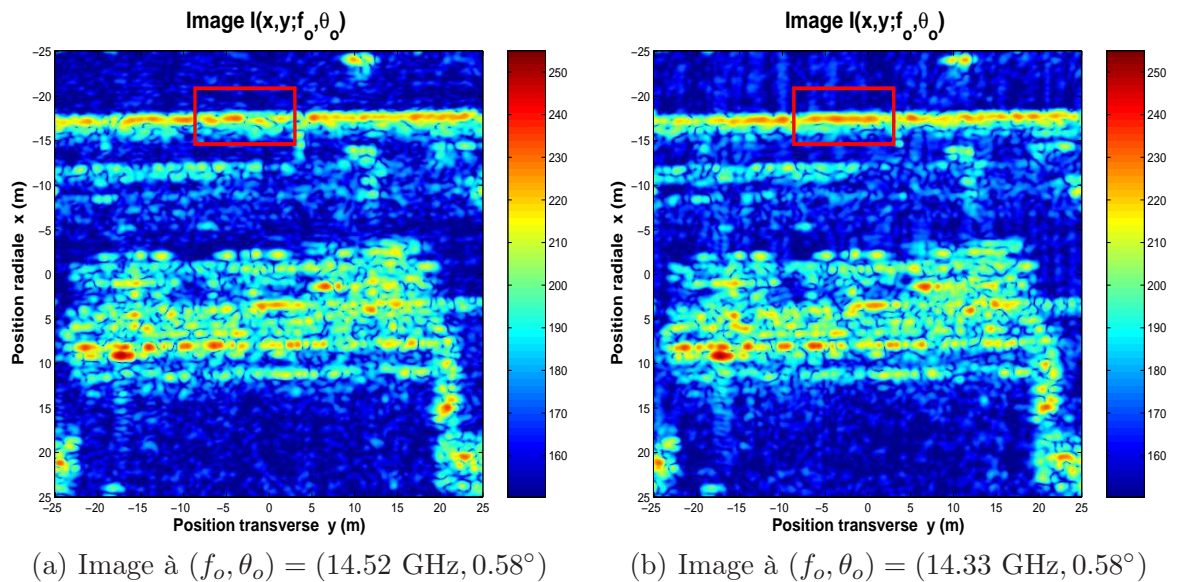


FIG. 3.9 – La répartition spatiale des réflecteurs autour d'un même angle mais autour de deux fréquences distinctes : on observe des différences significatives sur le tuyau dans la zone indiquée.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

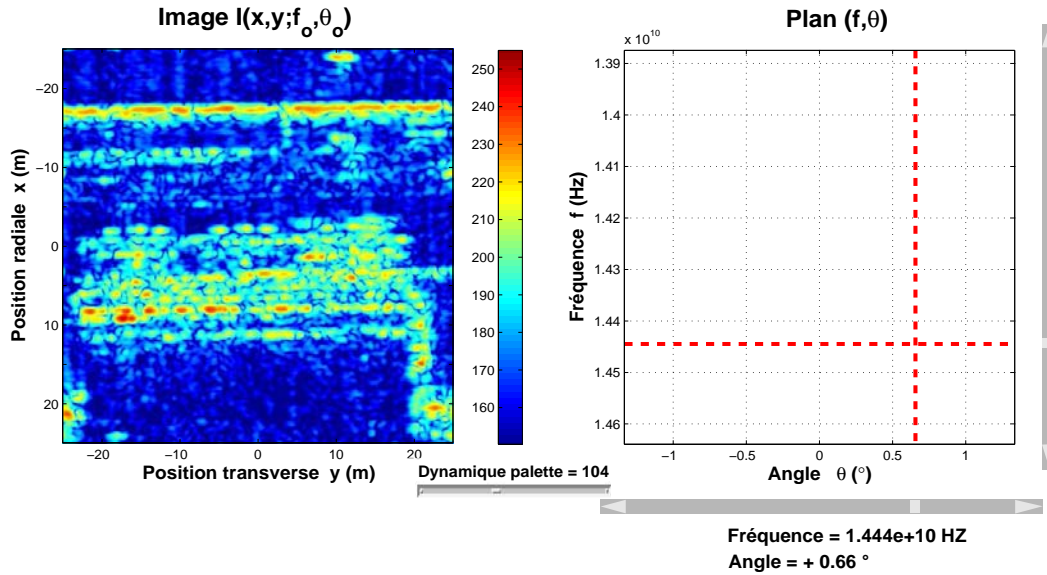


FIG. 3.10 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.44 \text{ GHz}, 0.66^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

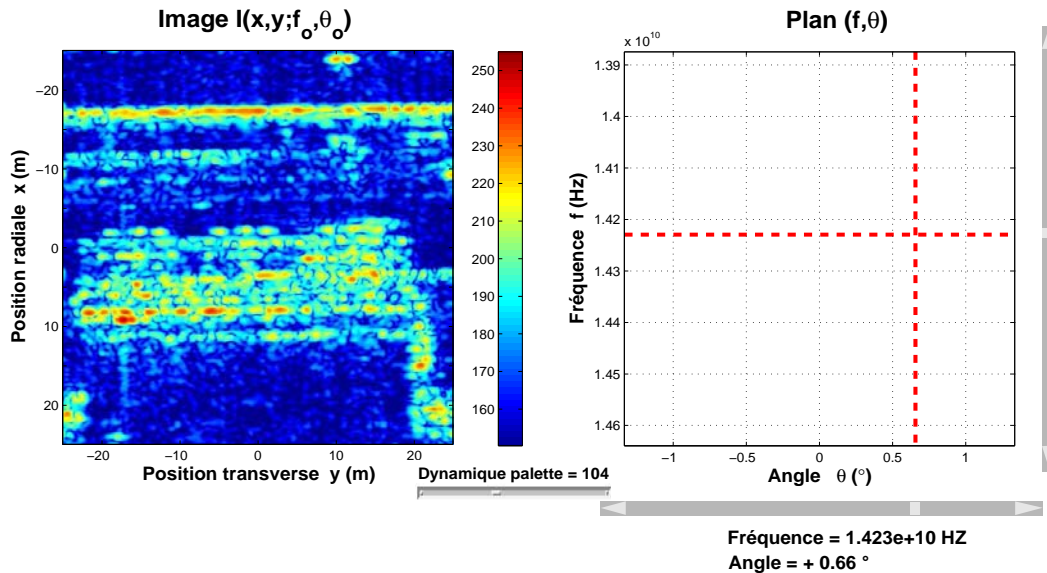
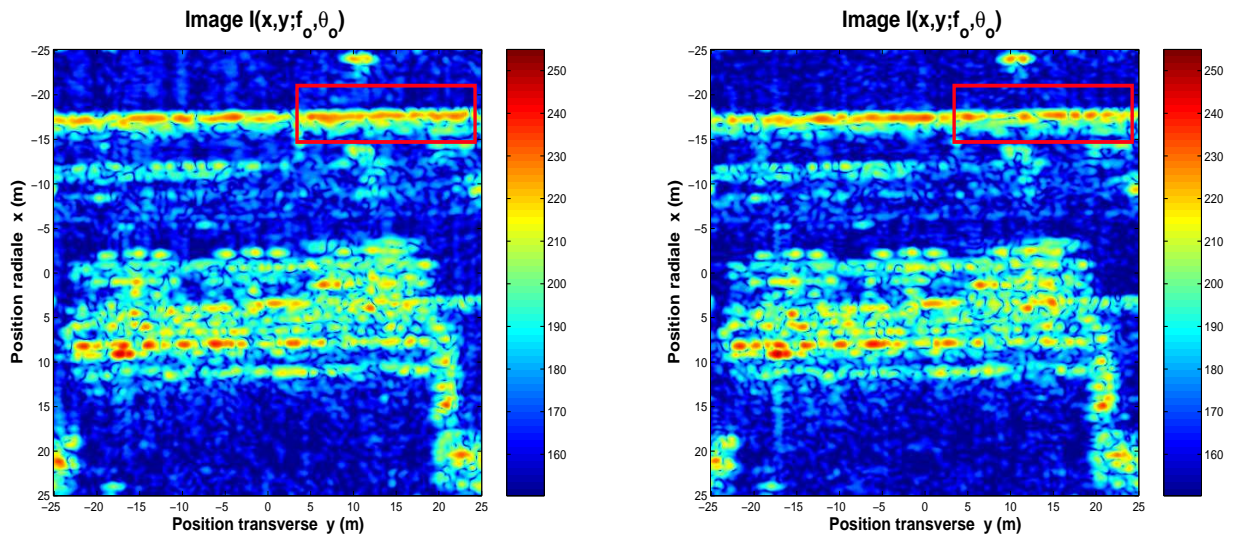


FIG. 3.11 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.23 \text{ GHz}, 0.66^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.



(a) Image autour de $(f_o, \theta_o) = (14.44 \text{ GHz}, 0.66^\circ)$ (b) Image autour de $(f_o, \theta_o) = (14.23 \text{ GHz}, 0.66^\circ)$

FIG. 3.12 – La répartition spatiale des réflecteurs autour d'un même angle mais autour de deux fréquences distinctes : à nouveau, des différences apparaissent sur le tuyau dans la zone indiquée.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

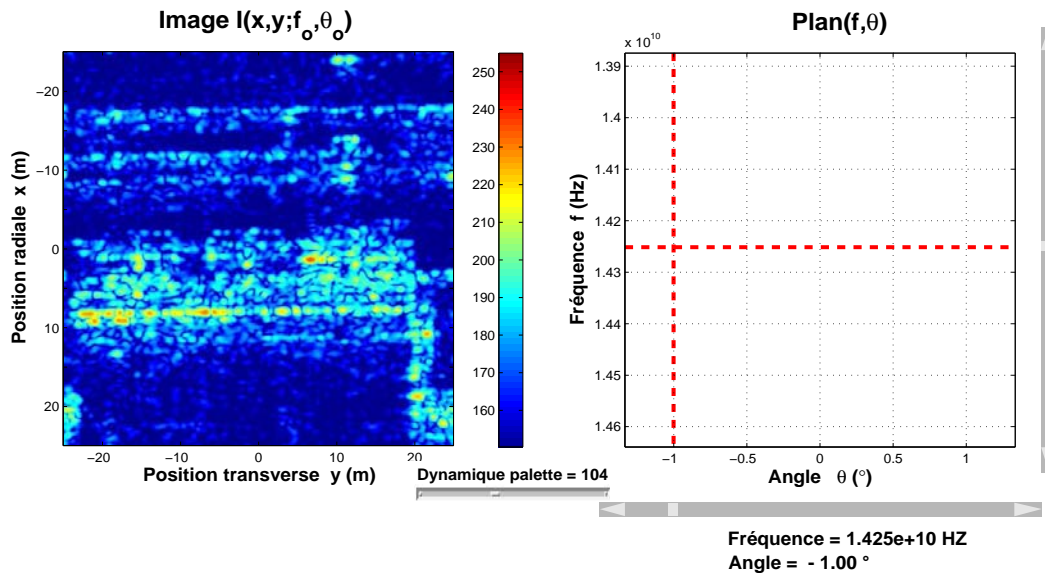


FIG. 3.13 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.25 \text{ GHz}, -1^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

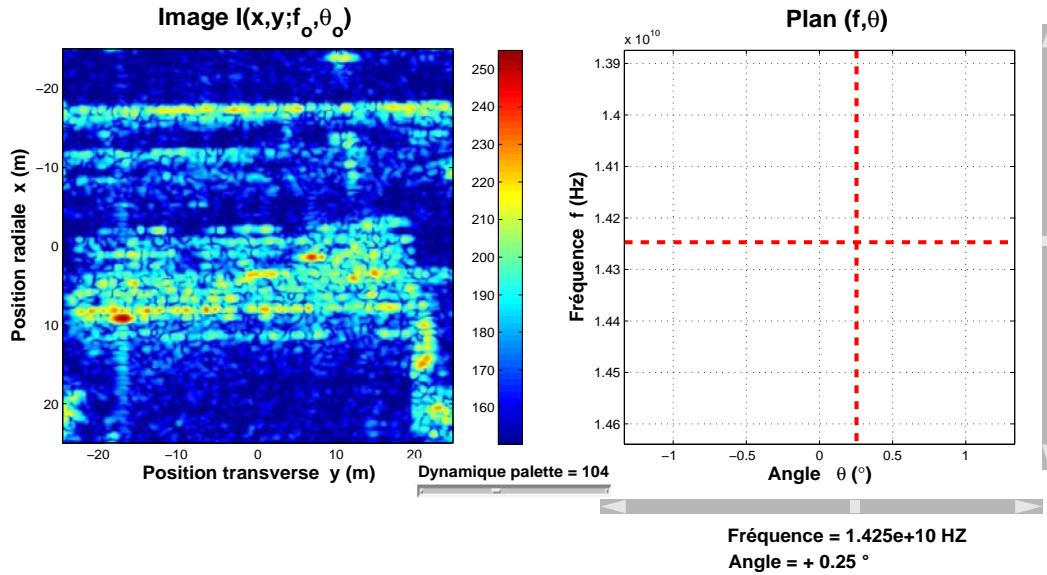


FIG. 3.14 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.25 \text{ GHz}, 0.25^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.

Image radar autour d'une fréquence et d'un angle donnés

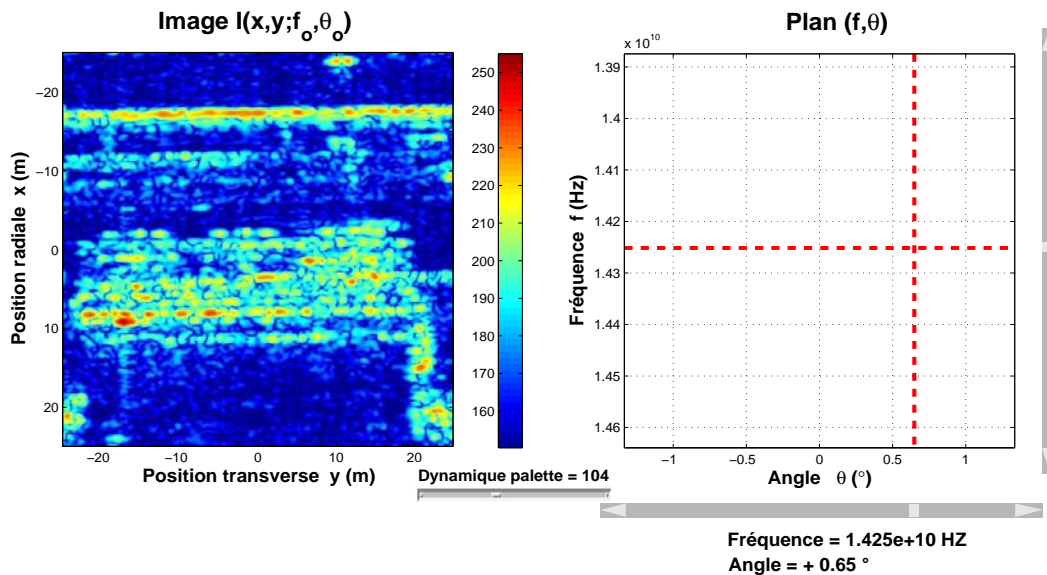
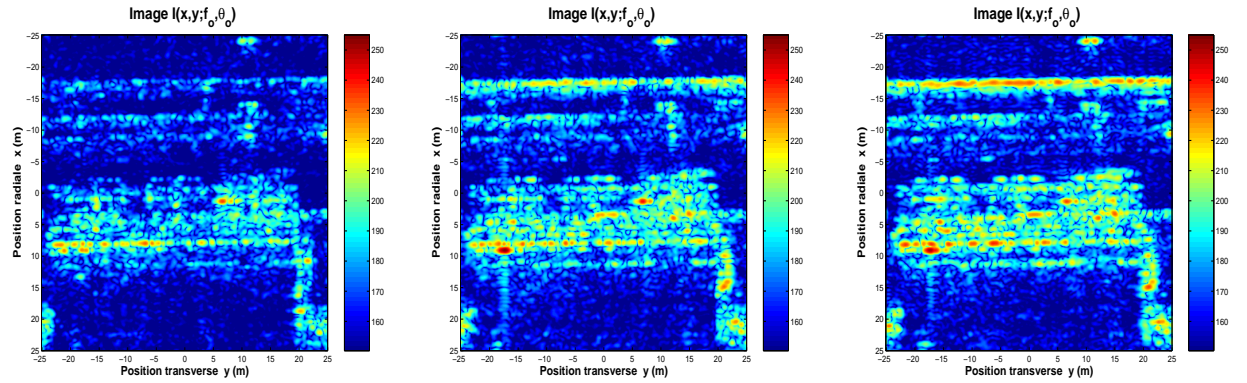


FIG. 3.15 – Sélection du couple $(f_o, \theta_o) = (14.25 \text{ GHz}, 0.65^\circ)$ dans le cadran de droite et visualisation de l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche.



(a) Image autour de $\theta_o = -1^\circ$ (b) Image autour de $\theta_o = 0.25^\circ$ (c) Image autour de $\theta_o = 0.65^\circ$

FIG. 3.16 – Images autour de la fréquence $f_o = 14.25$ GHz et autour de trois angles d'illumination différents : la répartition spatiale des réflecteurs de l'image diffère à ces trois images.

b/ Répartition énergétique dans le plan fréquence-angle des réflecteurs.

On peut également, à partir de l'hyperimage $I(x, y; f, \theta)$, visualiser la distribution énergétique, dans l'espace fréquence-angle, des réflecteurs de l'image. En effet, en sélectionnant un pixel de coordonnée (x_o, y_o) dans l'espace (x, y) , on accède à la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ de ce réflecteur [Tri05, Tri04b, Tri04a].

Cette procédure est effectuée au moyen d'une interface graphique présentée dans les figures 3.17 à 3.22. Dans le cadran de gauche (on a disposé l'image SAR d'origine dans le fond de ce cadran pour faciliter la compréhension du lecteur), on effectue la sélection du pixel (x_o, y_o) dans l'espace (x, y) et on visualise, dans le cadran de droite, la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ du pixel sélectionné.

Par exemple, les figures 3.17 et 3.18 montrent la répartition d'énergie de réflecteurs appartenant au tuyau métallique. Les figures 3.19 et 3.20 mettent en évidence la distribution d'énergie de réflecteurs situés sur l'arête supérieure du bâtiment. Et enfin, on met en lumière, dans les figures 3.21 et 3.22, la répartition énergétique de réflecteurs localisés sur le toit du bâtiment.

Distribution énergétique dans le plan fréquence-angle

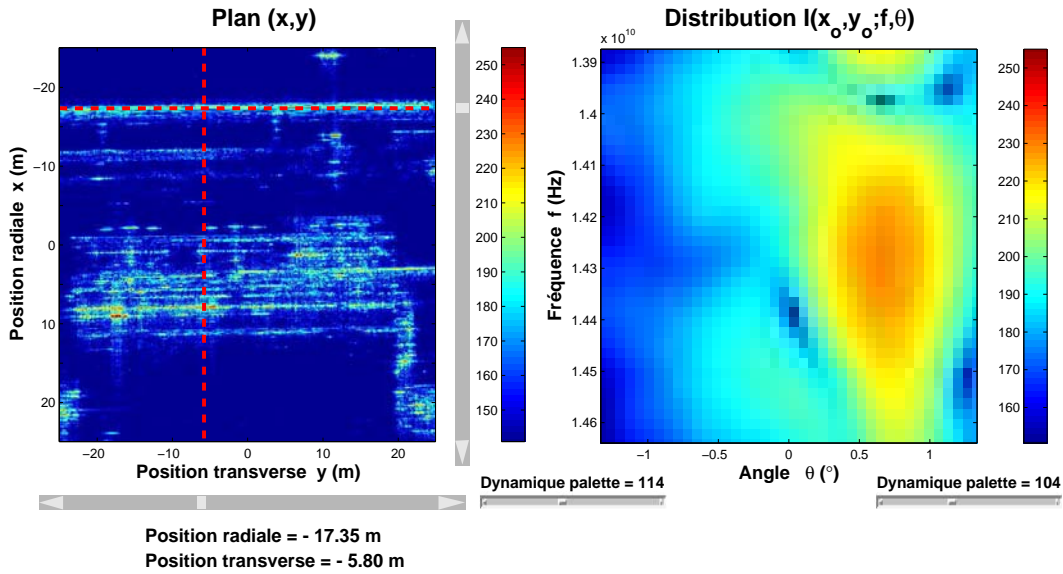


FIG. 3.17 – Sélection du couple $(x_o, y_o) = (-17.35 \text{ m}, -5.80 \text{ m})$ dans le cadran de gauche et visualisation, dans le cadran de droite, de la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le plan fréquence-angle du réflecteur localisé autour de (x_o, y_o) .

Distribution énergétique dans le plan fréquence-angle

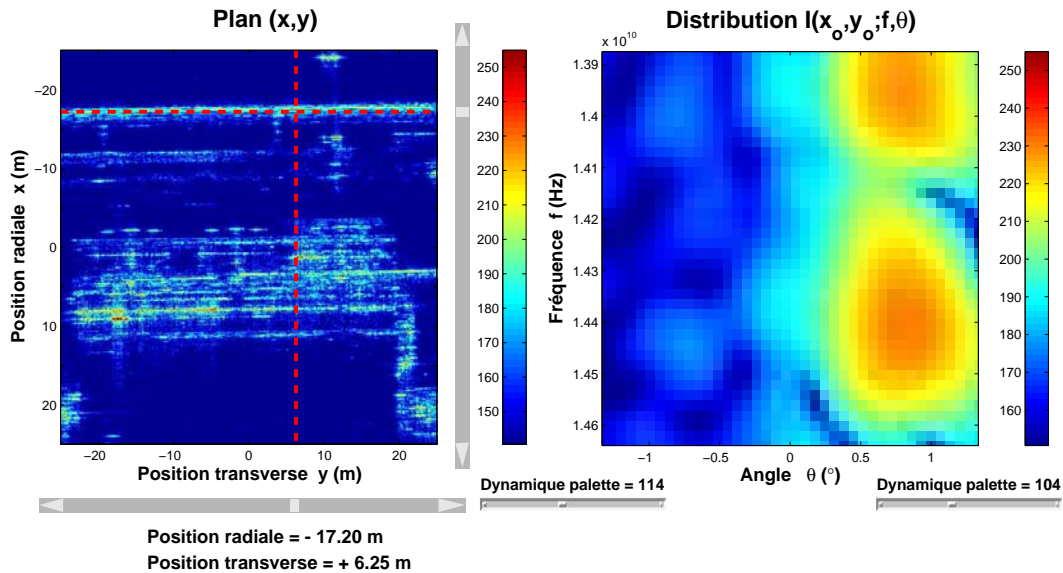


FIG. 3.18 – Sélection du couple $(x_o, y_o) = (-17.20 \text{ m}, 6.25 \text{ m})$ dans le cadran de gauche et visualisation, dans le cadran de droite, de la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le plan fréquence-angle du réflecteur localisé autour de (x_o, y_o) .

Distribution énergétique dans le plan fréquence-angle

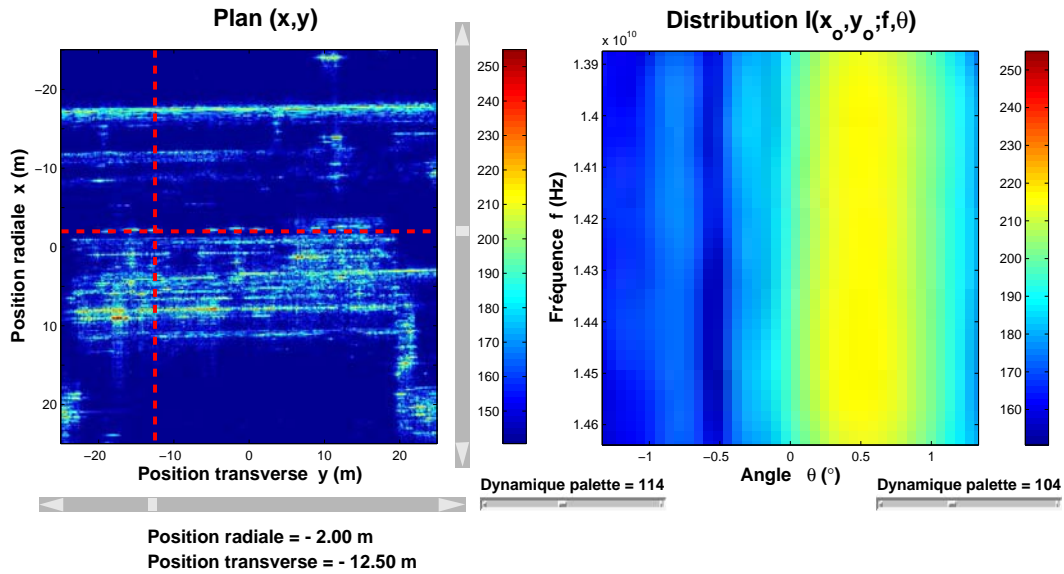


FIG. 3.19 – Sélection du couple $(x_o, y_o) = (-2.00 \text{ m}, -12.50 \text{ m})$ dans le cadran de gauche et visualisation, dans le cadran de droite, de la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le plan fréquence-angle du réflecteur localisé autour de (x_o, y_o) .

Distribution énergétique dans le plan fréquence-angle

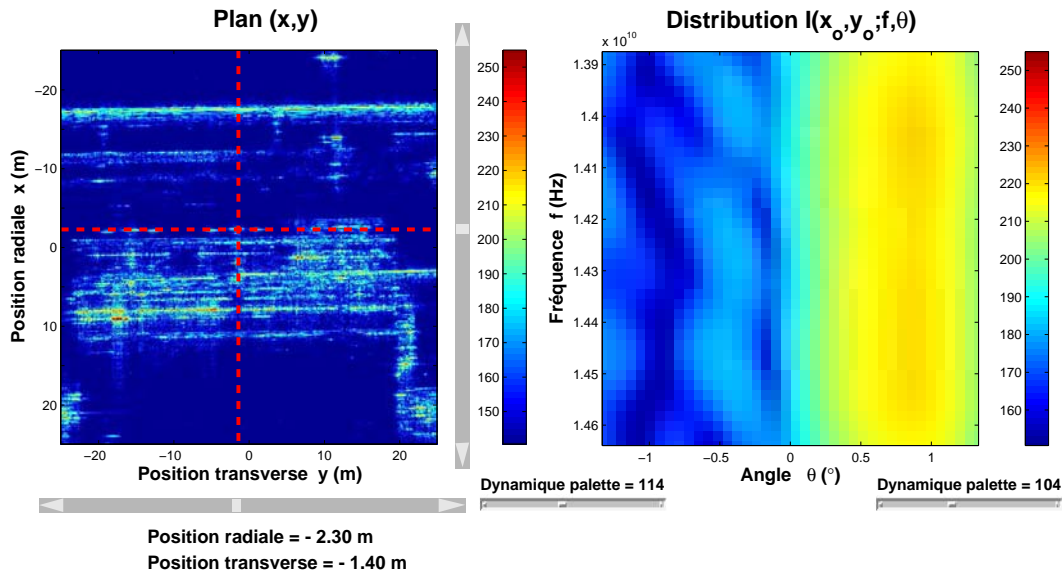


FIG. 3.20 – Sélection du couple $(x_o, y_o) = (-2.30 \text{ m}, -1.40 \text{ m})$ dans le cadran de gauche et visualisation, dans le cadran de droite, de la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le plan fréquence-angle du réflecteur localisé autour de (x_o, y_o) .

Distribution énergétique dans le plan fréquence-angle

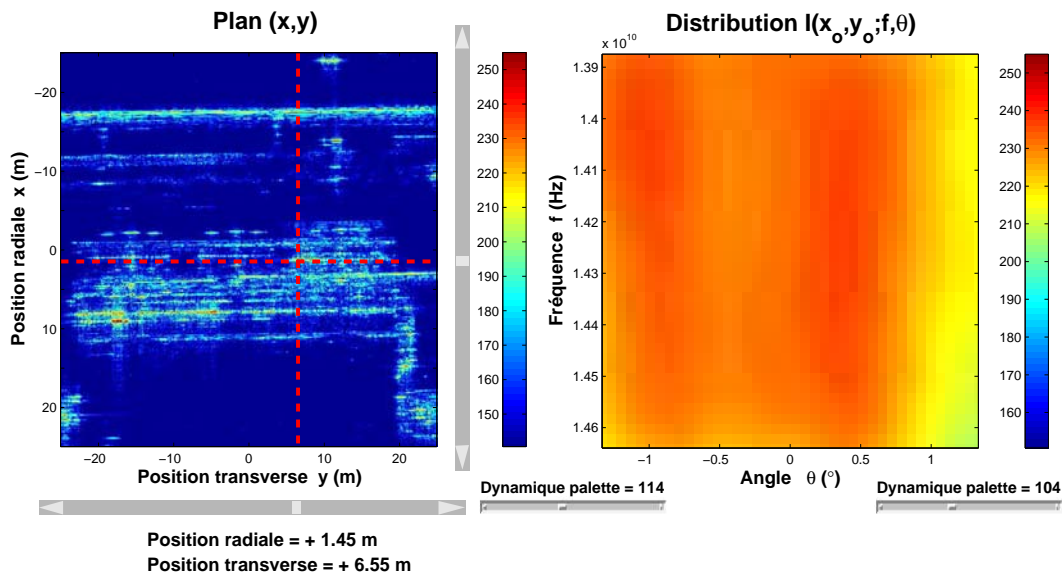


FIG. 3.21 – Sélection du couple $(x_o, y_o) = (1.45 \text{ m}, 6.55 \text{ m})$ dans le cadran de gauche et visualisation, dans le cadran de droite, de la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le plan fréquence-angle du réflecteur localisé autour de (x_o, y_o) .

Distribution énergétique dans le plan fréquence-angle

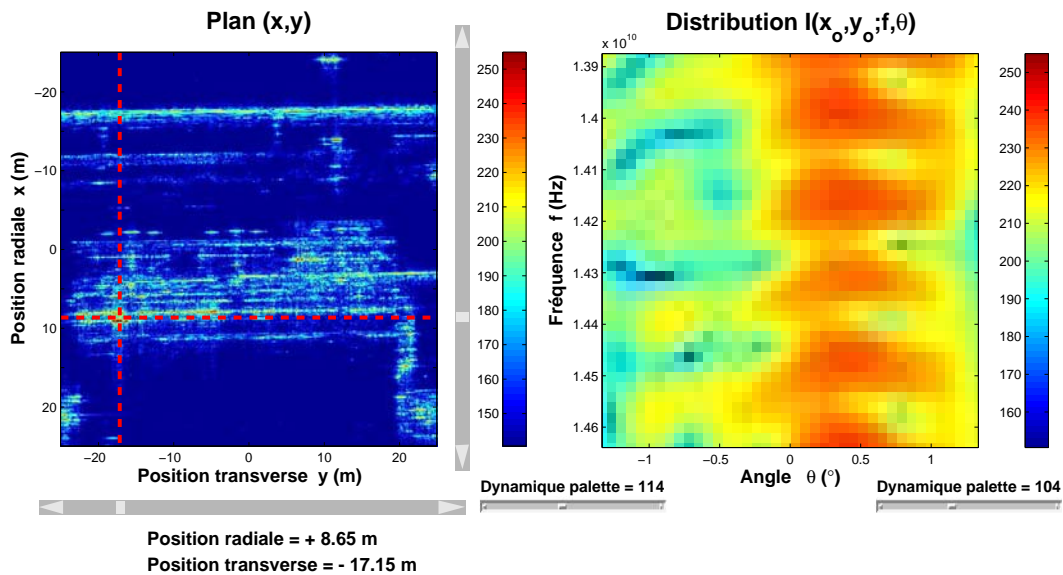


FIG. 3.22 – Sélection du couple $(x_o, y_o) = (8.65 \text{ m}, -17.15 \text{ m})$ dans le cadran de gauche et visualisation, dans le cadran de droite, de la distribution énergétique $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le plan fréquence-angle du réflecteur localisé autour de (x_o, y_o) .

c/ Visualisation de l'hyperimage par interface i4d.

Enfin, on peut, au moyen d'une interface appelée i4d, sélectionner un pixel (f_o, θ_o) dans le cadran de droite et visualiser l'image $I(x, y; f_o, \theta_o)$ dans le cadran de gauche et dans le même temps, sélectionner un pixel (x_o, y_o) dans ce même cadran et visualiser la distribution $I(x_o, y_o; f, \theta)$ dans le cadran de droite [Ova03].

Par exemple, les figures 3.23 et 3.24 montrent, dans le cadran de droite, la distribution d'énergie, dans l'espace fréquence-angle, d'un réflecteur du tuyau en $(x_o, y_o) = (-17.35 \text{ m}, -12.25 \text{ m})$. En observant la distribution énergétique, on constate que ce réflecteur renvoie essentiellement de l'énergie pratiquement à toutes les fréquences de la bande d'émission lorsque l'angle d'illumination θ de l'antenne radar est dans l'intervalle $[0.25^\circ, 1^\circ]$. Par conséquent, en se référant à la figure 3.23, il est tout à fait logique, que l'intensité de ce réflecteur soit faible dans le cadran de gauche puisque ce cadran illustre la répartition spatiale des réflecteurs renvoyant de l'énergie autour de la fréquence $f_o = 14.25 \text{ Ghz}$ et de l'angle $\theta_o = -0.50^\circ \notin [0.25^\circ, 1^\circ]$ sélectionnés dans le cadran de droite. Par contre, le cadran de gauche de la figure 3.24 représente la distribution des réflecteurs renvoyant de l'énergie autour de la fréquence $f_o = 14.25 \text{ Ghz}$ et de l'angle $\theta_o = 0.68^\circ \in [0.25^\circ, 1^\circ]$ sélectionnés dans le cadran de droite. Il est à remarquer une forte intensité du réflecteur considéré : ce qui en concordance avec sa répartition énergétique.

Un dernier exemple, est fourni dans les figures 3.25 et 3.26. Dans les cadrans gauche de ces deux figures, est représentée une même image de réflecteurs renvoyant de l'énergie autour de la fréquence $f_o = 14.30 \text{ Ghz}$ et de l'angle $\theta_o = +0.17^\circ$. Dans le cadran gauche de la figure 3.25, le réflecteur en $(x_o, y_o) = (-1.85 \text{ m}, -18.55 \text{ m})$ a une faible intensité : ce qui est en accord avec le fait que, dans le cadran droit, son énergie se répartie essentiellement dans un domaine qui n'inclut pas le couple $(f_o, \theta_o) = (14.30 \text{ Ghz}, 0.17^\circ)$. Par opposition, le réflecteur localisé en $(x_o, y_o) = (9.20 \text{ m}, -17.45 \text{ m})$ dans le cadran gauche de la figure 3.26 a une forte intensité : ceci est en concordance avec le fait que l'énergie renvoyée par ce réflecteur, illustrée dans le cadran droit de cette même figure, est forte autour de la fréquence $f_o = 14.30 \text{ Ghz}$ et de l'angle $\theta_o = +0.17^\circ$.

Interface I4D

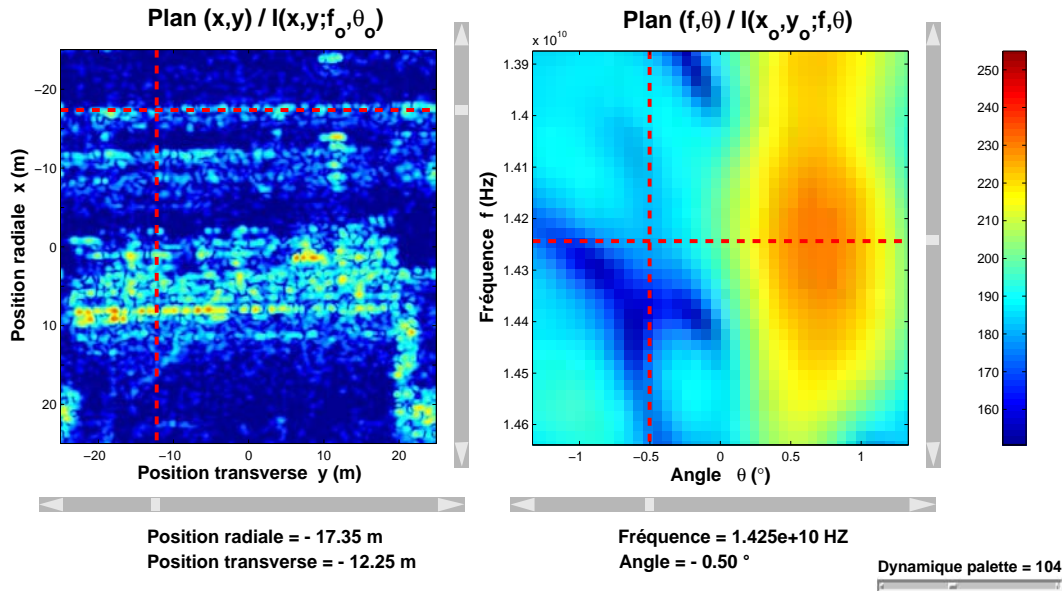


FIG. 3.23 – Illustration simultanée de la distribution énergétique d’un réflecteur et l’image des réflecteurs autour d’une fréquence et d’un angle donnés par interface i4D.

Interface I4D

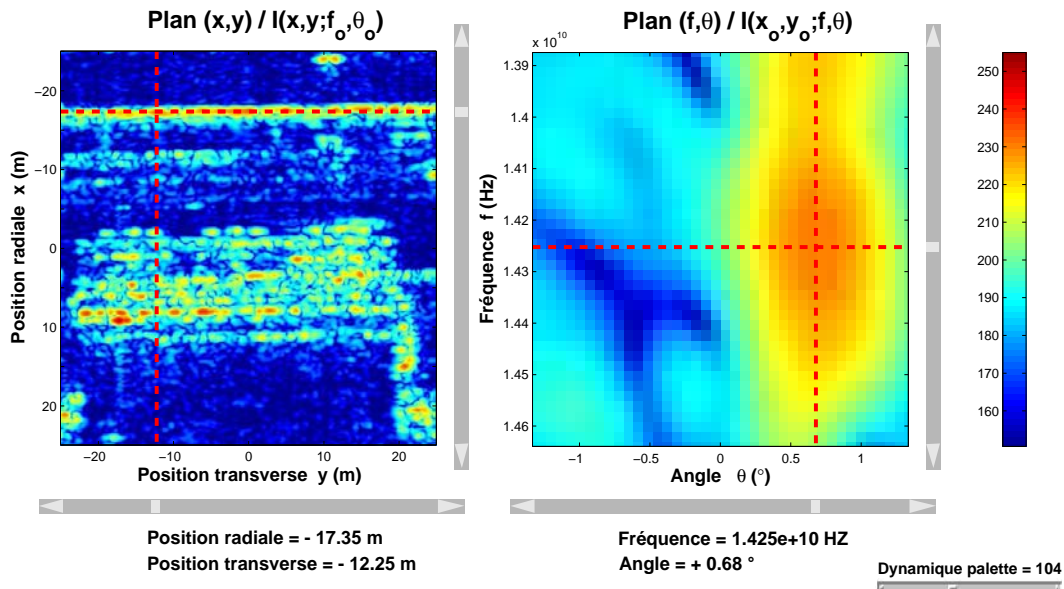


FIG. 3.24 – Illustration simultanée de la distribution énergétique d’un réflecteur et l’image des réflecteurs autour d’une fréquence et d’un angle donnés par interface i4D.

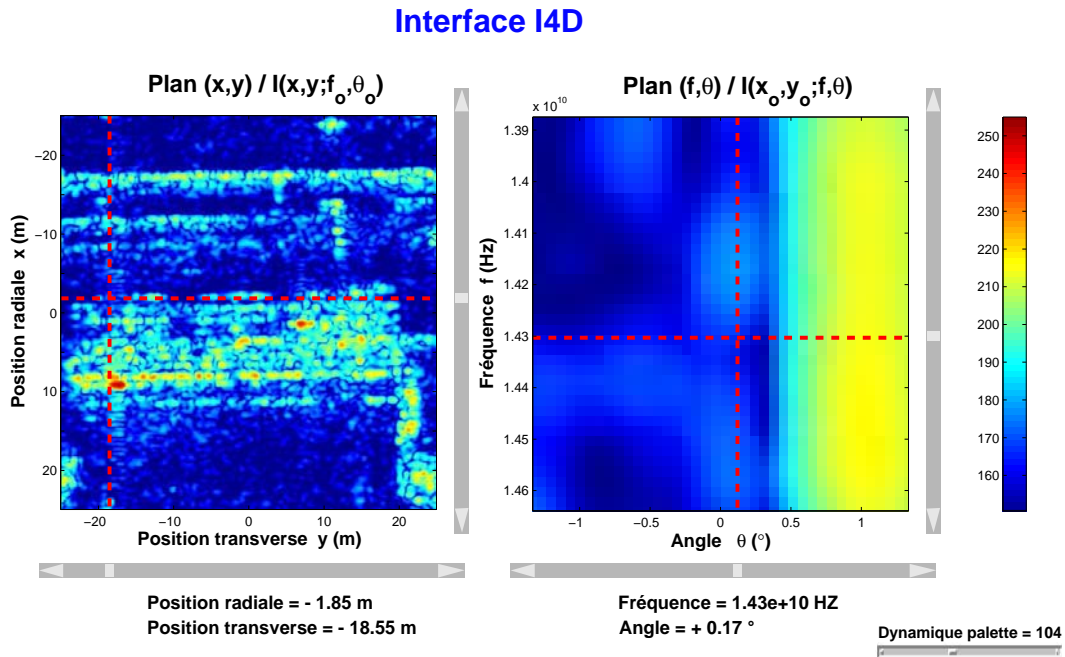


FIG. 3.25 – Illustration simultanée de la distribution énergétique d'un réflecteur et l'image des réflecteurs autour d'une fréquence et d'un angle donnés par interface i4D.

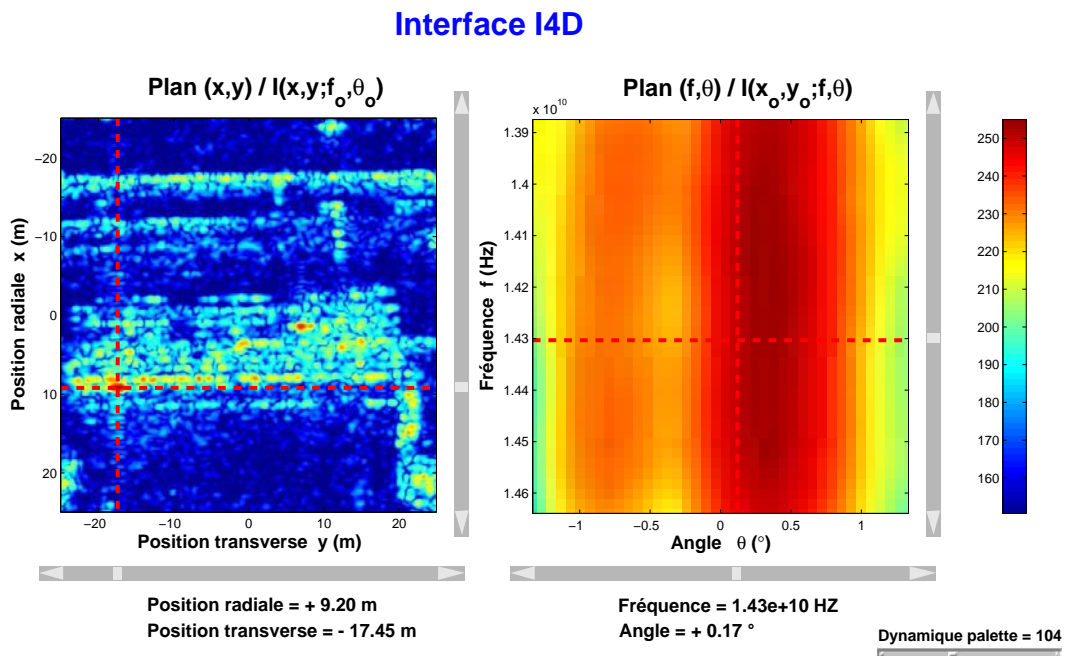


FIG. 3.26 – Illustration simultanée de la distribution énergétique d'un réflecteur et l'image des réflecteurs autour d'une fréquence et d'un angle donnés par interface i4D.

Chapitre 4

L'analyse par ondelettes en imagerie SAR : un intérêt pour l'extraction d'objets

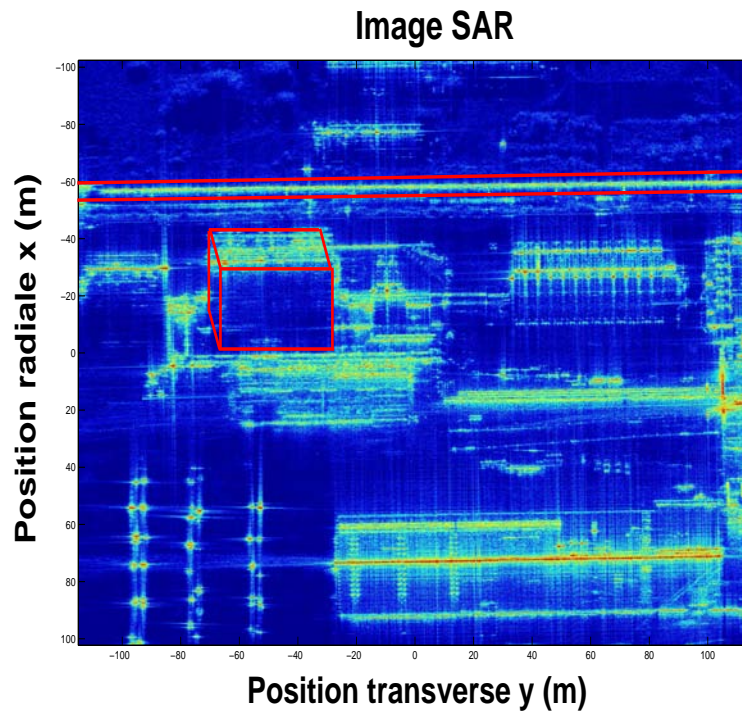
Ce chapitre constitue une des parties les plus importantes de ce manuscrit car il met en évidence, à travers de résultats, l'intérêt de l'analyse par ondelettes à extraire des objets dans une image SAR. En effet, nous montrons que la connaissance de la répartition énergétique des réflecteurs d'une image SAR peut être une information très utile pour séparer des objets dans l'image.

Pour justifier cette idée, on peut, par exemple, s'appuyer sur le modèle paramétrique GTD [Pot95, Pot97] qui fournit une modélisation de la réponse énergétique en fréquence-angle des réflecteurs en fonction de la géométrie de l'objet dont appartiennent ces derniers. La modélisation en fréquence d'un réflecteur est fonction de la forme de la surface de l'objet ; par exemple : forme plate, cylindrique ou sphérique. Le modèle en angle, est lui, fonction de la taille et de l'orientation des diffuseurs dans le cas de mécanismes distribués (ex : réflexion sur plaque, dièdre, cylindre).

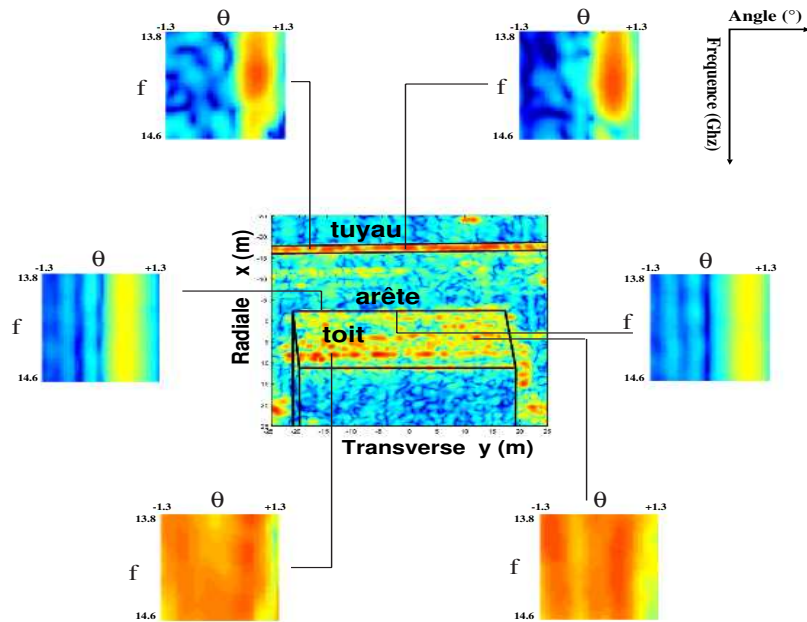
Nous montrons, dans ce chapitre, qu'un réflecteur localisé au sein d'un certain objet peut avoir une répartition énergétique similaire à celle d'autres réflecteurs appartenant à ce même objet. Et d'autre part, des réflecteurs appartenant à un premier objet (exemple : tuyau) peuvent avoir une distribution énergétique très différente de celle de réflecteurs localisés sur un second objet (exemple : bâtiment) de géométrie différente du premier (voir figure 4.1 (b))[Tri04a].

L'idée de base est, alors, de se fixer une distribution énergétique de référence susceptible d'être caractéristique de l'objet que l'on souhaite extraire et d'identifier les réflecteurs de l'image qui ont une distribution d'énergie similaire à cette distribution de référence [Tri04b].

Avant de développer cette idée sous forme algorithmique et les résultats d'extraction d'objets qui en découlent [Tri05], on propose de présenter brièvement le modèle GTD (Geometrical Theory of Diffraction) qui formalise la réponse des réflecteurs en fonction de la géométrie de l'objet auquel appartiennent ces derniers.



(a) Image SAR contenant un tuyau et un bâtiment .



(b) Distribution énergétique de réflecteurs localisés au sein du tuyau et du bâtiment.

FIG. 4.1 – L'analyse en ondelettes : un intérêt pour la classification d'objets.

4.1 Modèle GTD

Les hypothèses, permettant de définir le modèle, sont les suivantes :

- Un objet, composé de n réflecteurs, est éclairé par un radar aéroporté circulant sur une trajectoire donnée.
- On se place en hautes fréquences (par exemple $f_c = 10$ Ghz) pour modéliser le signal renvoyé par un objet comme une somme de signaux individuels (indépendants les uns des autres) provenant des diffuseurs de l'objet.
- L'objet est supposé de petite taille devant la distance radar-objet.
- La longueur d'onde d'émission est supposée petite devant la taille de l'objet.

Sous ces hypothèses, le signal total reçu par le radar s'écrit comme une somme de n termes élémentaires. Chaque terme élémentaire est le signal réfléchi par un réflecteur :

$$H(k, \theta) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(k, \theta) \exp(-j2\pi[k \cos(\theta) x_i + k \sin(\theta) y_i]) \quad (4.1)$$

où (x_i, y_i) est la localisation d'un réflecteur dans le plan (x, y) et $\sigma_i(k, \theta)$ est le coefficient de réflectivité de ce réflecteur, fonction de la fréquence $f = (ck/2)$ et de l'angle d'illumination θ :

$$\sigma_i(k, \theta) = A_i \mu_i(k) \eta_i(k, \theta) \quad (4.2)$$

où A_i est l'amplitude du signal réfléchi par le réflecteur i .

La relation (4.2) fournit une première dépendance fréquentielle $\mu_i(k) = (jk/k_c)^\gamma$ où γ est un multiple entier de $1/2$ et qui est relié à la géométrie du réflecteur. Par exemple, les valeurs de γ pour des réflecteurs situés sur des surfaces plate et incurvée sont respectivement $\gamma = 1$ et $\gamma = 1/2$. On ne s'attardera pas sur cette dépendance fréquentielle car elle est difficile à mettre en évidence, avec l'analyse en ondelettes, dans le cas d'images SAR réelles à bande étroite.

La seconde dépendance en fréquence-angle $\eta_i(k, \theta)$ mentionnée dans (4.2) se formule en différenciant deux mécanismes :

$$\eta_i(k, \theta) = \begin{cases} \exp(-2\pi k \nu_i \sin(\theta)) \text{ (exponentielle amortie) pour des mécanismes } \textit{localisés} \text{ tels que la réflexion sur un trièdre, la diffraction sur un coin et sur un bord d'objet.} \\ \text{sinc}[k L_i \sin(\theta - \theta_i)] \text{ (sinus cardinal) pour des mécanismes } \textit{distribués} \text{ tels que les réflexions sur une surface plate, un dièdre ou un cylindre.} \end{cases} \quad (4.3)$$

où ν_i est un paramètre sans interprétation physique directe, L_i et θ_i sont respectivement l'étendue et l'angle d'orientation (par rapport à la direction de circulation du radar) du diffuseur.

La modélisation $\eta_i(k, \theta)$ pour les mécanismes distribués sera, d'ailleurs, assez vérifiée pour certains diffuseurs réels dont nous analyserons la répartition énergétique dans ce chapitre. Cette dernière modélisation (en sinus cardinal) est illustrée dans les figures 4.2 (a) et 4.2 (b). Ces figures montrent l'exemple de deux objets d'orientation différente avec un diffuseur sur leur surface : un premier objet d'orientation θ_1 est vu essentiellement sous un angle d'illumination θ_1 . Par conséquent, les deux réflecteurs appartenant respectivement aux deux objets d'orientation différente ont une réponse angulaire distincte.

L'analyse par ondelettes en imagerie SAR permet de mettre en lumière la répartition énergétique dans le plan (f, θ) de réflecteurs. Le paragraphe suivant, en présentant des résultats d'imagerie SAR par analyse en ondelettes, a pour objectif de montrer qu'un réflecteur appartenant à un certain objet a une distribution d'énergie qui présente des similitudes avec celle d'autres réflecteurs composant ce même objet. Et à l'inverse, on mettra en lumière le fait que la répartition énergétique de réflecteurs composant un objet présente des différences significatives avec celle de réflecteurs constituant un second objet de caractéristiques géométriques distinctes du premier objet.

4.2 Comparaison de répartitions d'énergie de différents réflecteurs d'une image.

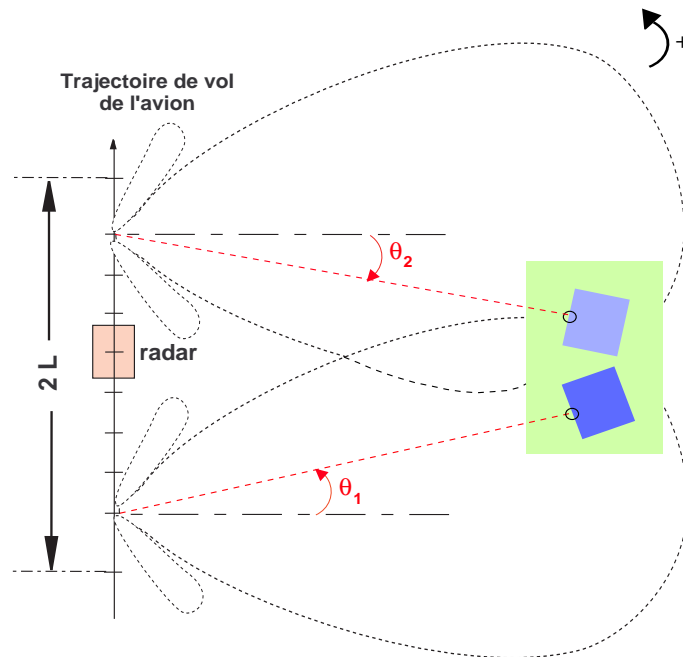
4.2.1 Réflecteurs d'une image constituée d'un tuyau et d'un bâtiment.

Dans cette première étude, on analyse la répartition d'énergie de réflecteurs appartenant à un tuyau métallique et à un bâtiment proche de ce tuyau (voir figure 4.3). À travers les figures 4.4 à 4.10, on étudiera la distribution de réflecteurs sur le tuyau (en Annexe M, on trouvera des résultats supplémentaires de distributions énergétiques de réflecteurs sur le tuyau). Ensuite, on montrera la distribution d'énergie de réflecteurs sur l'arête du bâtiment et sur le toit avant de fournir un récapitulatif général de distributions de réflecteurs analysés sur le tuyau et sur le bâtiment en figure 4.17.

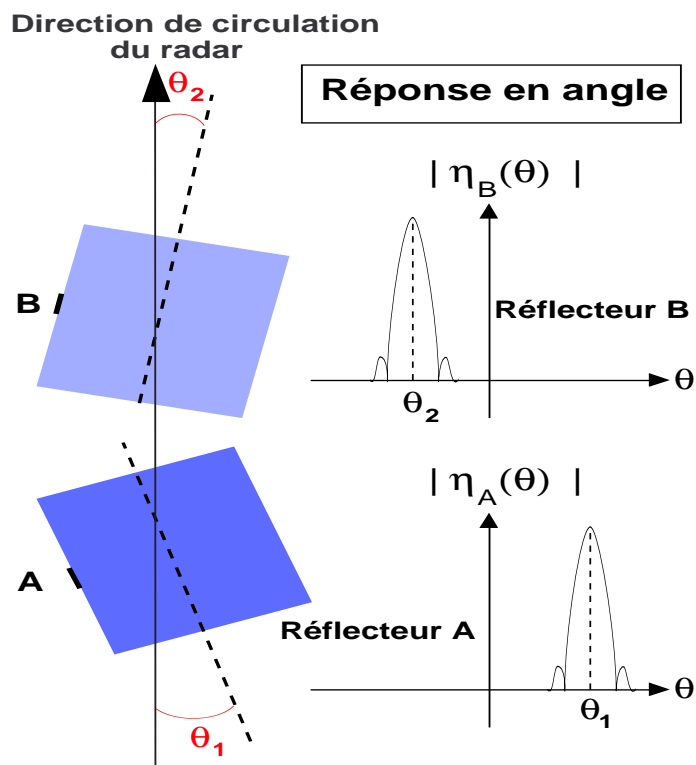
a/ Réflecteurs composant le tuyau métallique.

Dans ce paragraphe, on propose d'étudier la distribution d'énergie de réflecteurs constituant le tuyau métallique. Les observations sont les suivantes :

- L'ensemble des réflecteurs analysés dans les figures 4.4 à 4.9 a une réponse énergétique dans le secteur angulaire $[0.5^\circ, 1^\circ]$ sauf certains qui ont une réponse énergétique dominante autour de $\theta = 0.5^\circ$ (figures 4.5 (a) et (b)). Cette répartition d'énergie dans un secteur angulaire confiné est conforme au modèle angulaire GTD (4.3) pour les mécanismes distribués : le tuyau semble être orienté, en azimut, d'un angle $\theta_{tuyau} = 0.75^\circ$ par rapport à la direction de circulation du radar.
- Dans ce secteur angulaire, la réponse fréquentielle est relativement variable dans la bande de fréquence B sauf dans certains cas (figures 4.4 (b), 4.6 (b) et 4.9 (b)). De plus, cette variation est différente selon les réflecteurs analysés et à fortiori ne suit pas une loi en f^γ comme le prévoit le modèle GTD : on peut en conclure que ces variations sont certainement dues à des imperfections sur le tuyau qui peuvent être d'ordre géométrique ou autre.



(a) Un objet d'orientation θ_1 est vu essentiellement sous un angle d'illumination θ_1 .



(b) Réponse angulaire de deux objets d'orientation θ_1 et θ_2 .

FIG. 4.2 – La réponse en angle de réflecteurs appartenant à des objets d'orientation différente.

La figure 4.10 résume quelques distributions d'énergie de réflecteurs analysés sur le tuyau et met l'accent sur les similitudes et différences entre distributions.

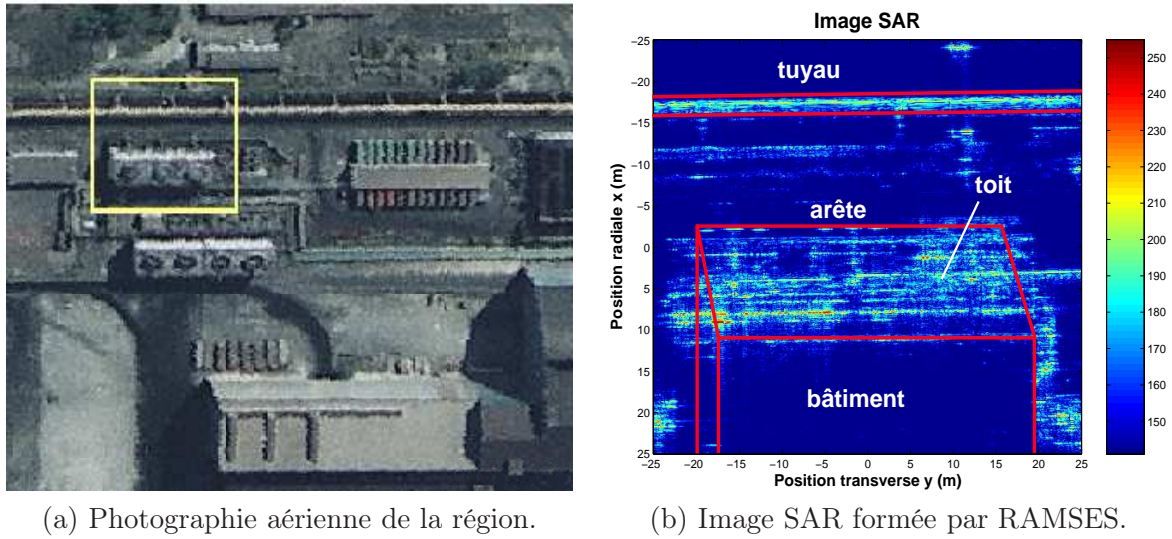
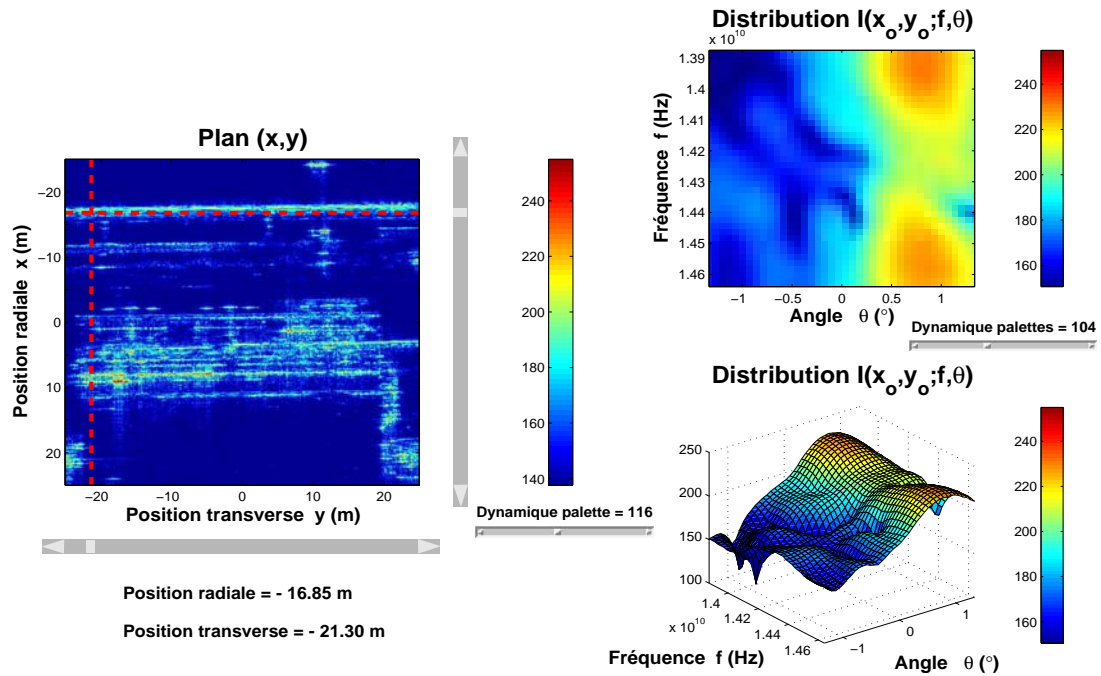
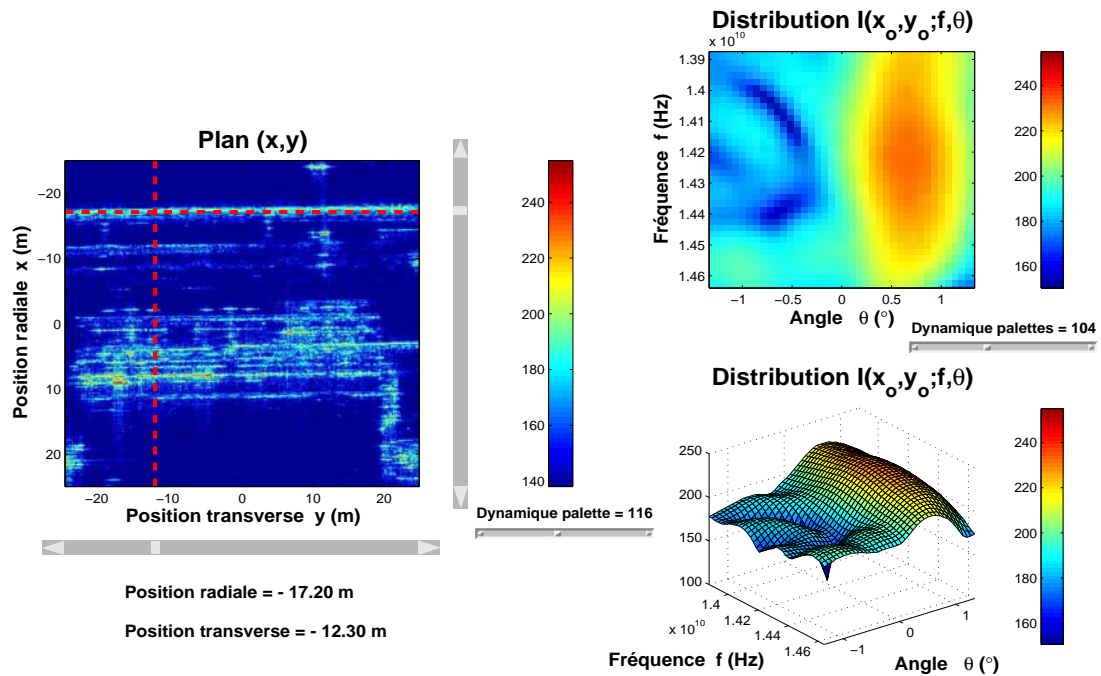


FIG. 4.3 – Image constituée du bâtiment et du tuyau.

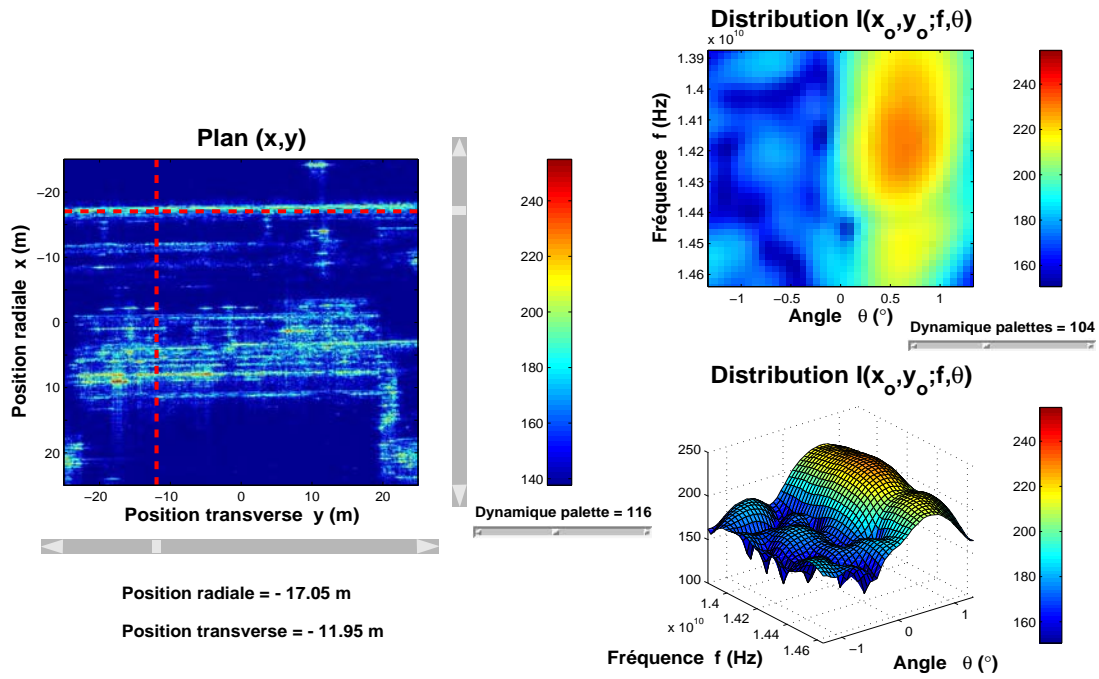


(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-16.85 \text{ m}, -21.30 \text{ m})$.

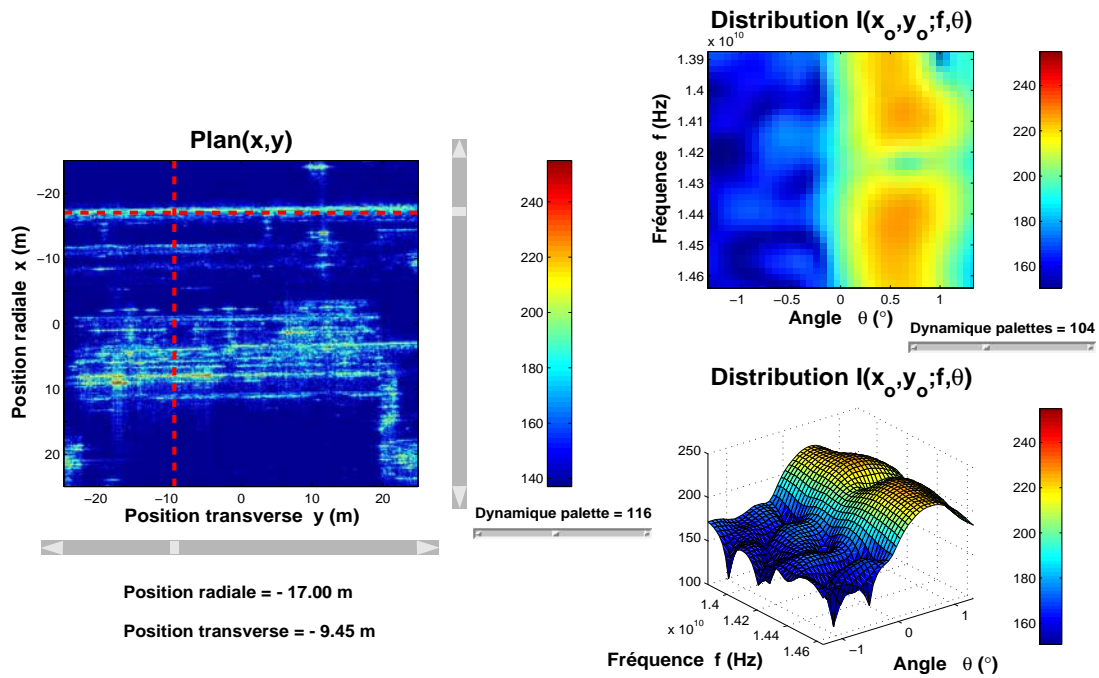


(b) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.20 \text{ m}, -12.30 \text{ m})$.

FIG. 4.4 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.

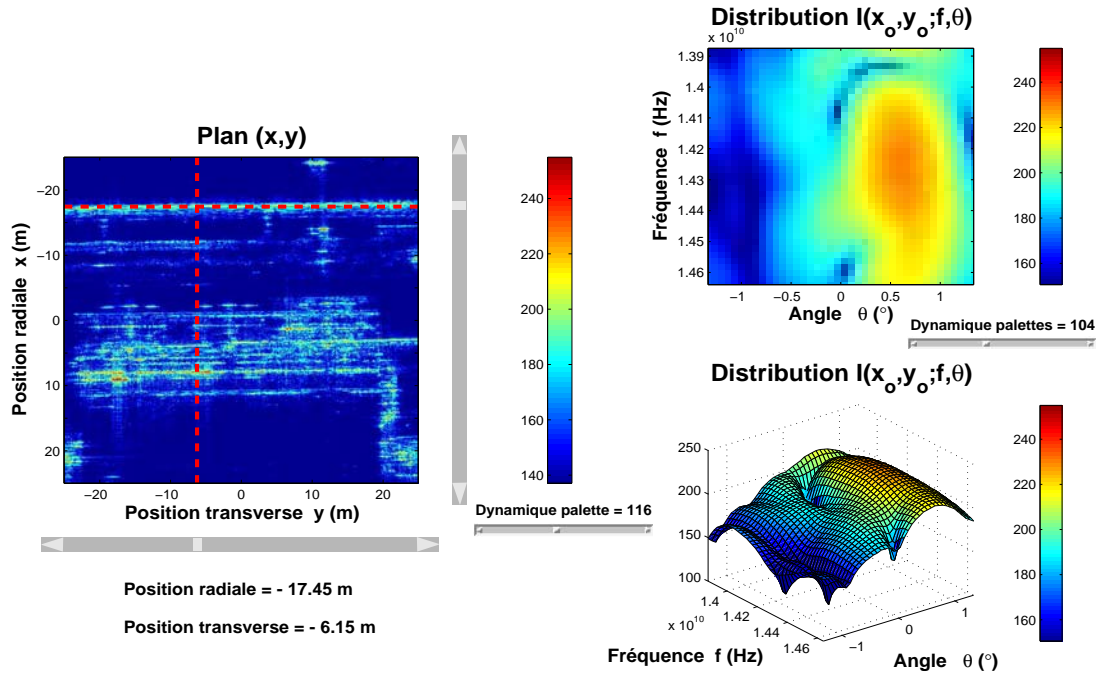


(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.05 \text{ m}, -11.95 \text{ m})$.

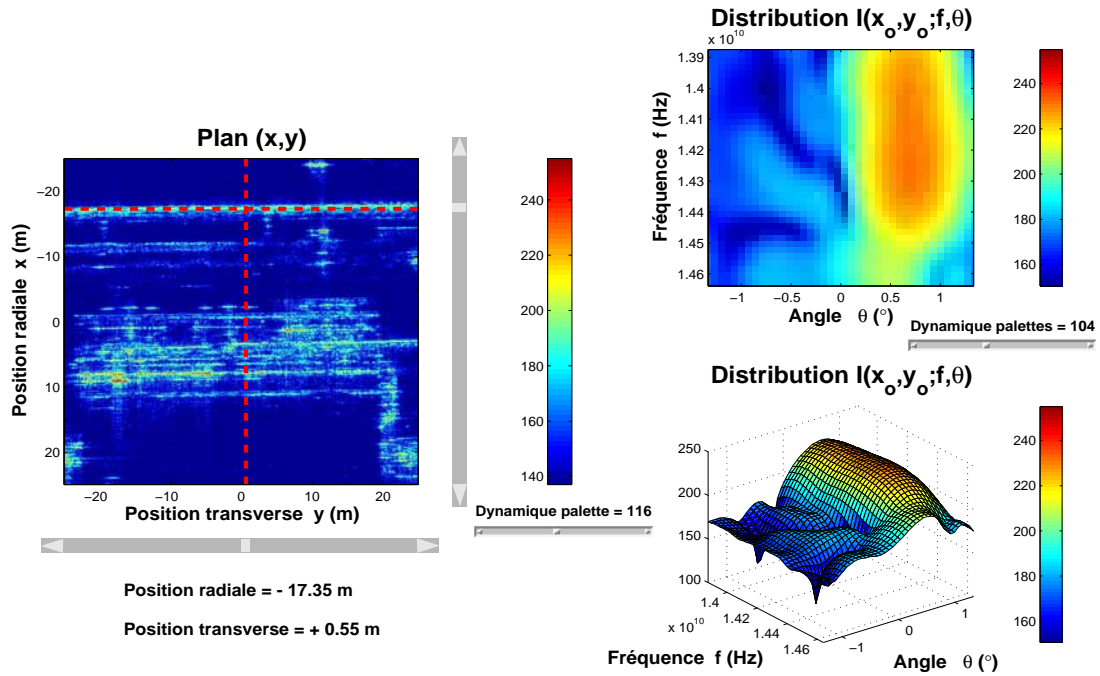


(b) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17 \text{ m}, -9.45 \text{ m})$.

FIG. 4.5 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.

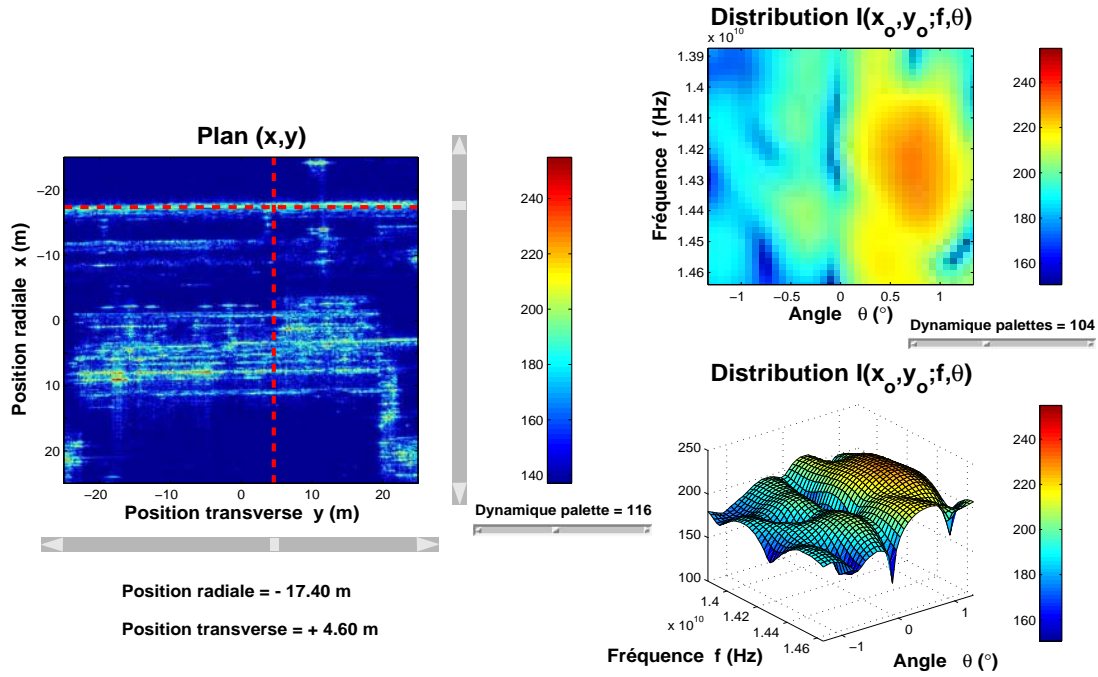


(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.45 \text{ m}, -6.15 \text{ m})$.

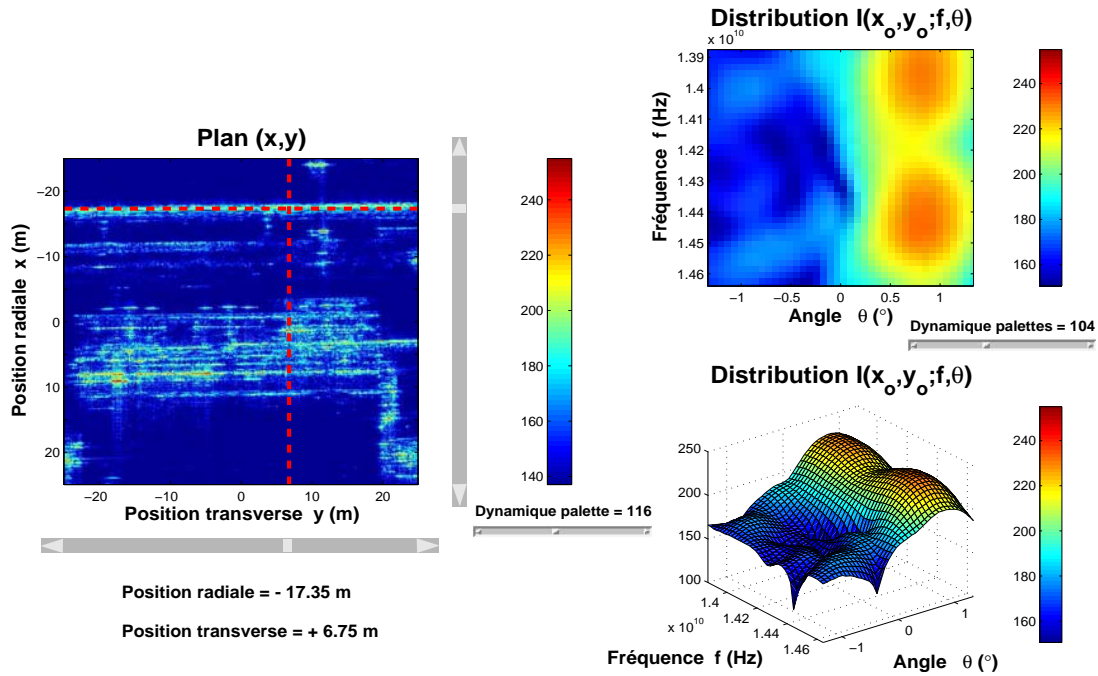


(b) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.35 \text{ m}, 0.55 \text{ m})$.

FIG. 4.6 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.

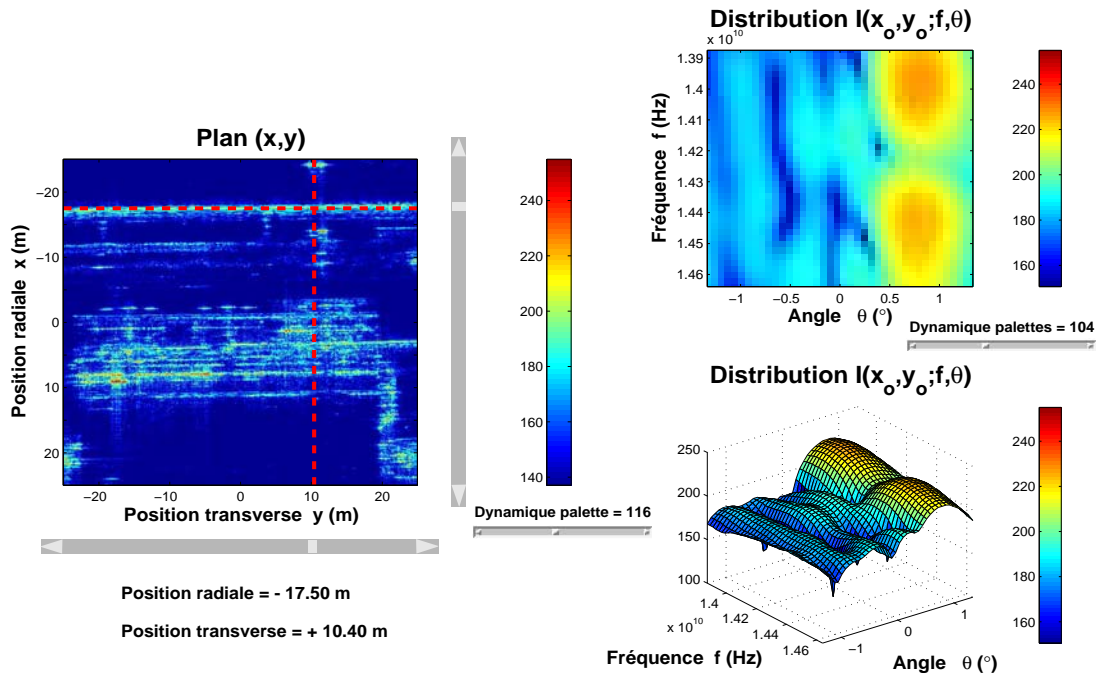


(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.40 \text{ m}, 4.60 \text{ m})$.

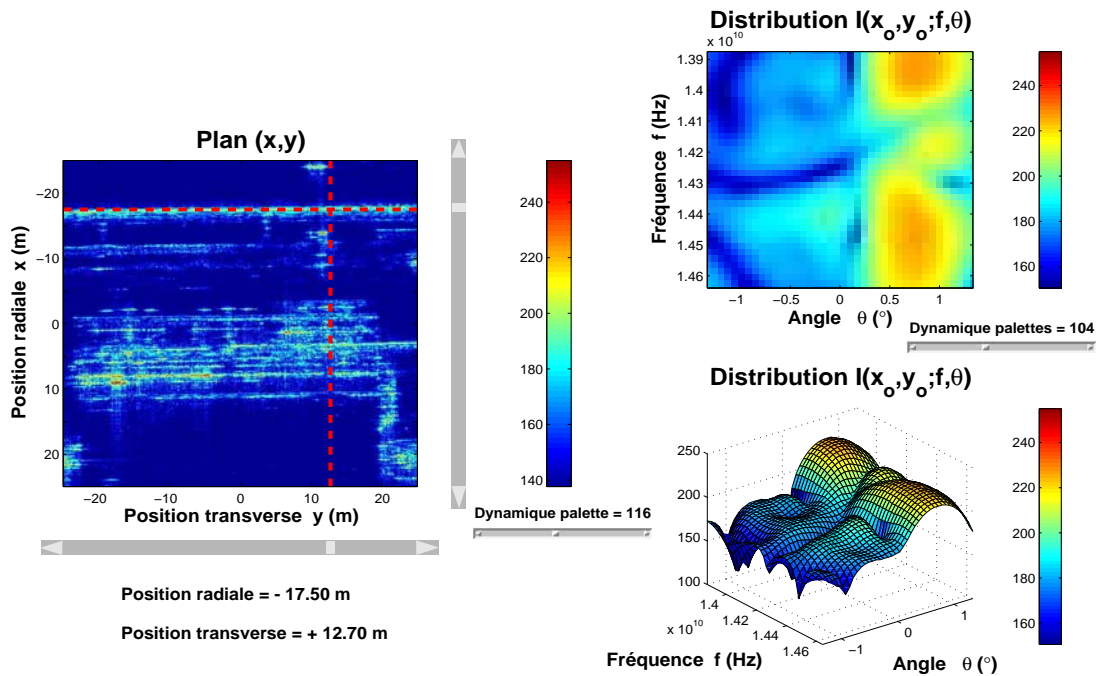


(b) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.35 \text{ m}, 6.75 \text{ m})$.

FIG. 4.7 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.

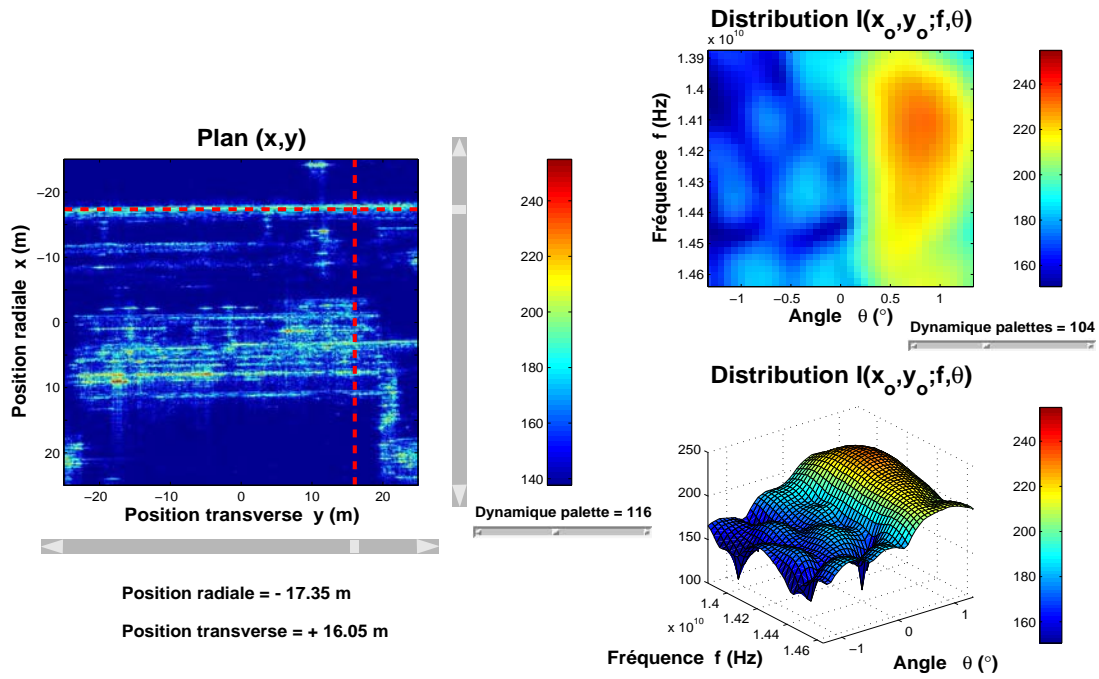


(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.50 \text{ m}, 10.40 \text{ m})$.

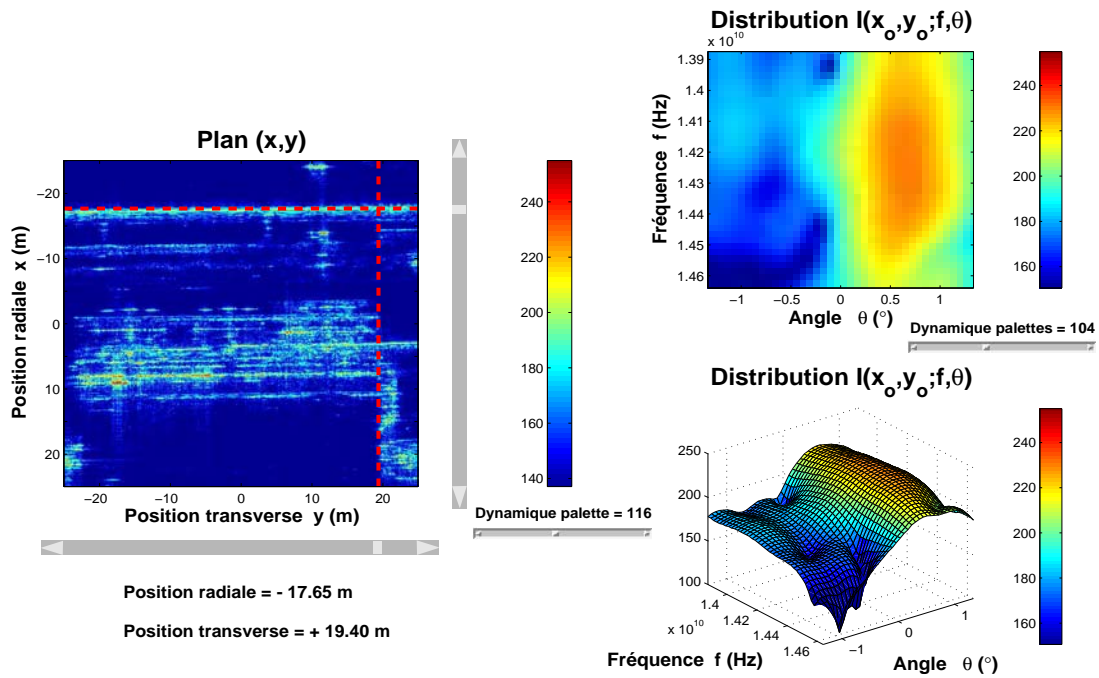


(b) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.50 \text{ m}, 12.70 \text{ m})$.

FIG. 4.8 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.



(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.35 \text{ m}, 16.05 \text{ m})$.



(b) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.65 \text{ m}, 19.40 \text{ m})$.

FIG. 4.9 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.

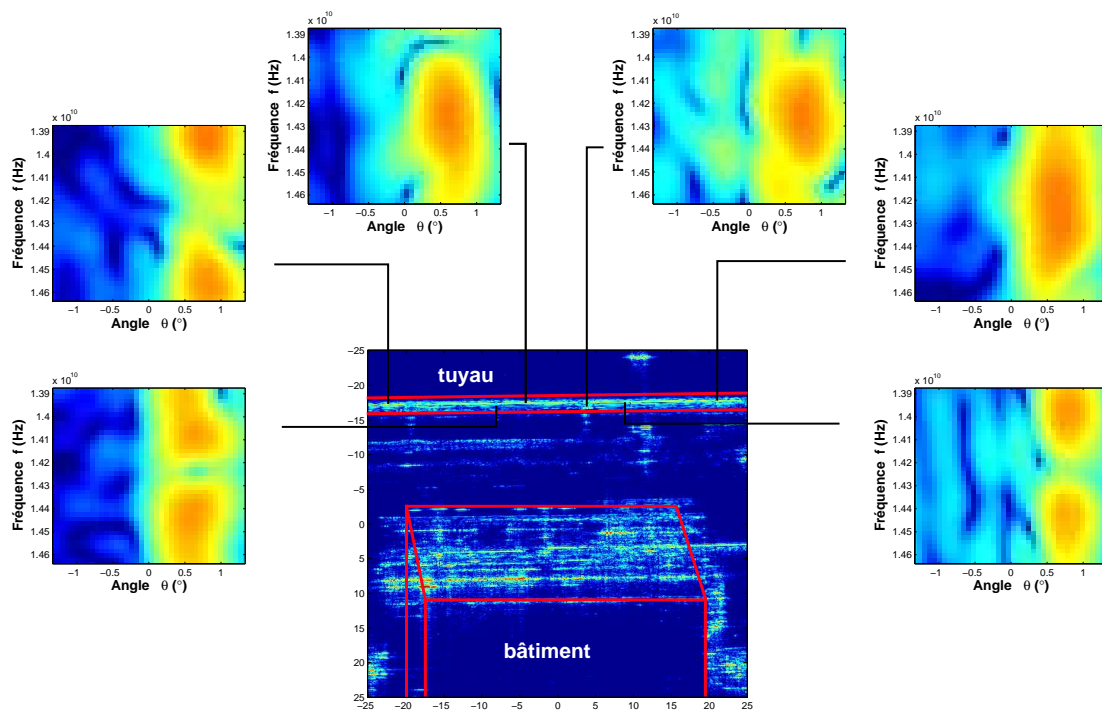


FIG. 4.10 – Récapitulatif de distributions énergétiques correspondant à des réflecteurs sur le tuyau.

b/ Réflecteurs composant l'arête supérieure et le toit du bâtiment.

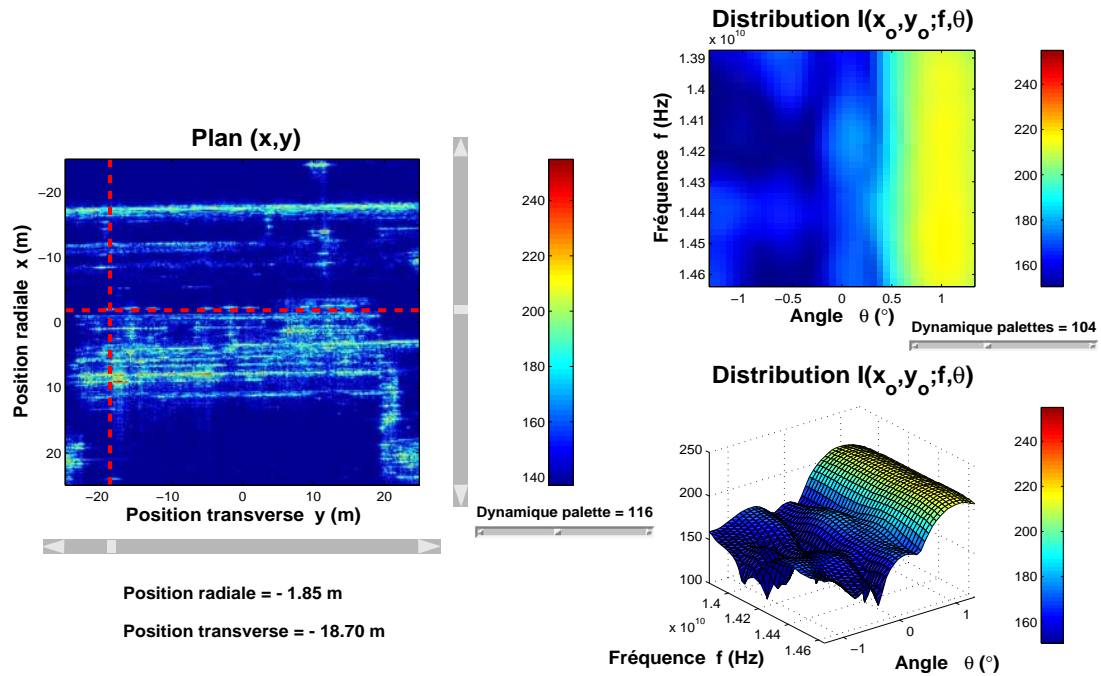
Cette fois, on met en lumière la distribution énergétique de réflecteurs sur une arête et le toit du bâtiment à proximité du tuyau métallique :

- Les figures 4.11, 4.12 et 4.13 illustrent la répartition d'énergie de diffuseurs sur l'arête du bâtiment (côté radar) : on observe que ces distributions sont très semblables. En effet, l'énergie se répartit de manière assez uniforme sur toute la bande fréquence dans un secteur angulaire très restreint⁵⁰ : cette répartition est conforme au modèle GTD en angle pour les mécanismes distribués définie en (4.3) et semble suivre une loi fréquentielle f^γ avec $\gamma = 0$ qui correspond, dans le modèle GTD, à plusieurs mécanismes possibles [Pot95] dont la réflexion directe (rectiligne) sur un bord d'objet qui semble être le mécanisme à privilégier ici. Les observations qu'on peut tirer de ces figures sont les suivantes :
 - Dans les figures 4.11 (a) et 4.11 (b), la réponse angulaire est autour de $\theta = 1^\circ$.
 - Dans les figures 4.12 (a) et 4.13 (b), la réponse angulaire est autour de $\theta = 0.5^\circ$.
 - Dans les figures 4.12 (b) et 4.13 (a), la réponse angulaire est autour de $\theta = 0.75^\circ$.

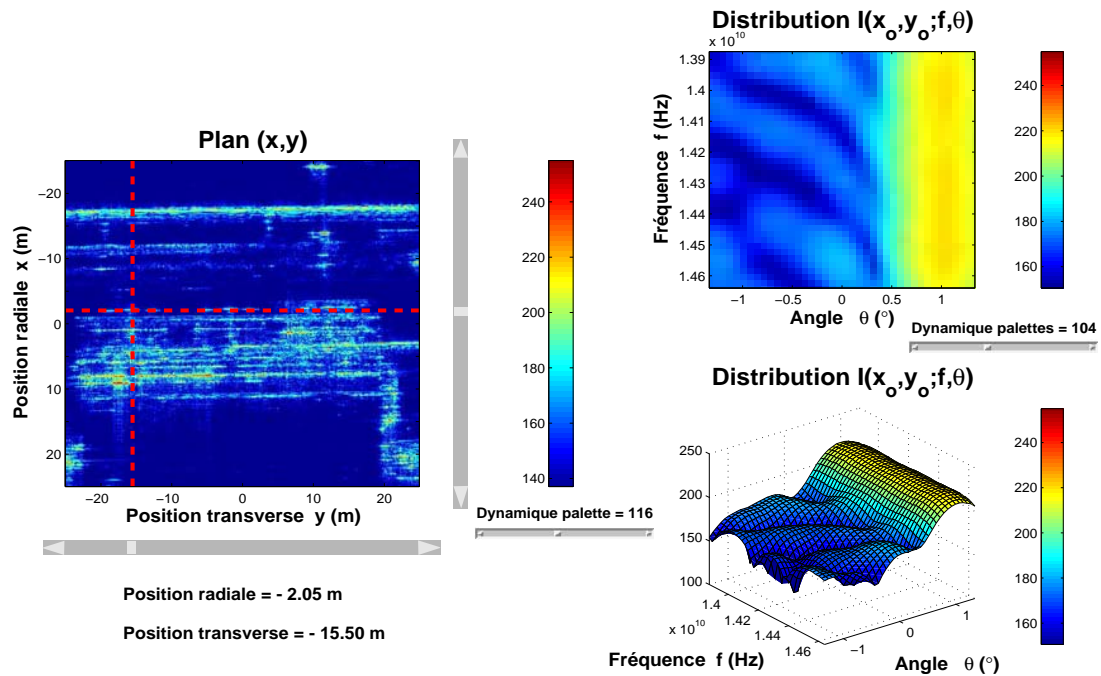
Le bâtiment semble, donc, être orienté d'un angle θ (dont la valeur est manifestement comprise entre 0.5° et 1°) par rapport à la direction de vol de l'avion.

- Dans les figures 4.14, 4.15 et 4.16, on a choisi d'analyser la distribution d'énergie de quelques réflecteurs bien particuliers sur le toit du bâtiment :
 - Les figures 4.14 (a) et 4.15 (b) montrent des réflecteurs qui ont un caractère coloré bien particulier : la répartition énergétique est telle que les maximums d'énergie sont localisés, selon l'axe fréquentiel, à des intervalles réguliers. On attire l'attention du lecteur sur le fait que l'on retrouvera ce type de répartition, ultérieurement, dans la seconde image analysée et notamment pour des réflecteurs situés sur des cuves. Par conséquent, si l'on s'appuie sur la photographie 4.3 (a), il est tout à fait possible que ces distributions d'énergie correspondent à des réflecteurs constituant les cuves situés sur le toit.
 - Les réflecteurs, dans les figures 4.14 (b), 4.15 (a) et 4.16 (b), ont des distributions d'énergie relativement homogènes dans le plan (f, θ) : ce type de distribution est à rapprocher de la réponse (f, θ) d'un trièdre. En effet, un tel objet présente toujours une face par rapport au radar ; par conséquent, il renvoie de l'énergie quel que soit l'angle d'illumination : d'après le modèle GTD en angle (4.3), la réponse en angle suit une loi exponentielle amortie ; en outre, plusieurs mécanismes de surface existent sur un trièdre : la réponse en fréquence suit, donc, une loi de type f^γ avec $\gamma \lesssim -1$ [Ful98]. Par conséquent, à bande étroite, la réponse fréquentielle est peu variable dans la bande d'émission. On peut, donc, dire que ces réflecteurs ont une géométrie proche du trièdre et sont pratiquement blancs et isotropes.
 - Enfin, la figure 4.16 (a) met en lumière la distribution d'énergie d'un autre réflecteur sur le toit : l'énergie se concentre autour de l'angle $\theta = 0.5^\circ$ comme dans le cas de quelques réflecteurs analysés sur l'arête du bâtiment. Autrement dit, ce diffuseur semble appartenir à un objet sur le toit qui est orienté parallèlement à l'arête du bâtiment.

⁵⁰Les réflecteurs possédant ce type de répartition énergétique sont dits *directifs*.

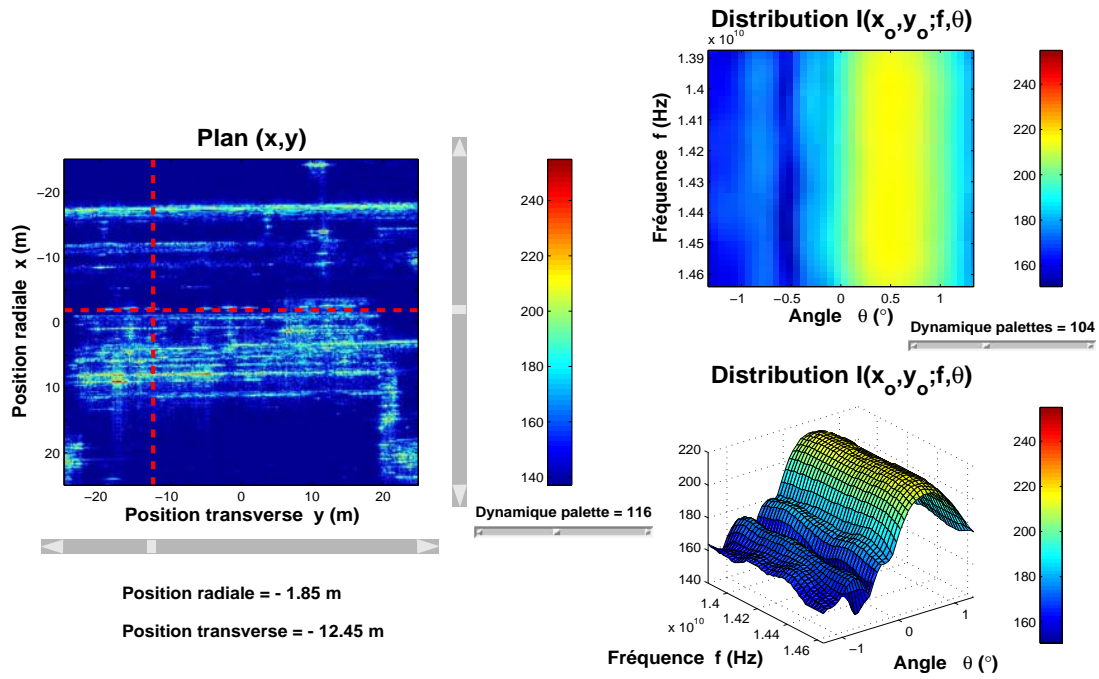


(a) Distribution du réflecteur situé sur l'arête en $(-1.85 \text{ m}, -18.70 \text{ m})$.

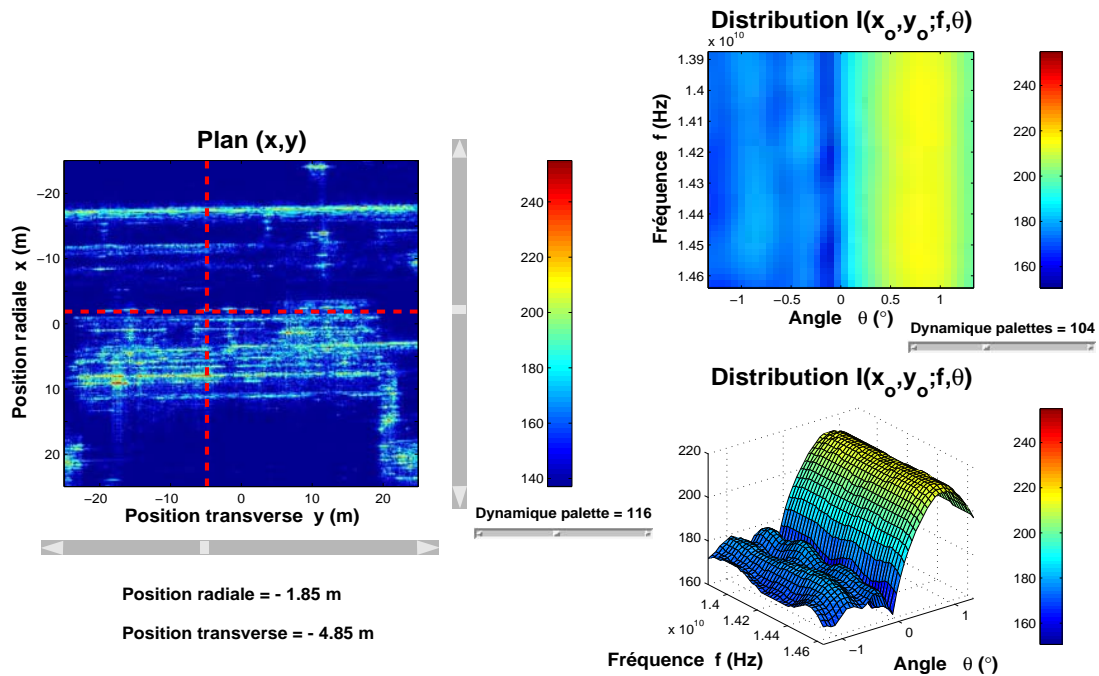


(b) Distribution du réflecteur situé sur l'arête en $(-2.05 \text{ m}, -15.50 \text{ m})$.

FIG. 4.11 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'arête du bâtiment.

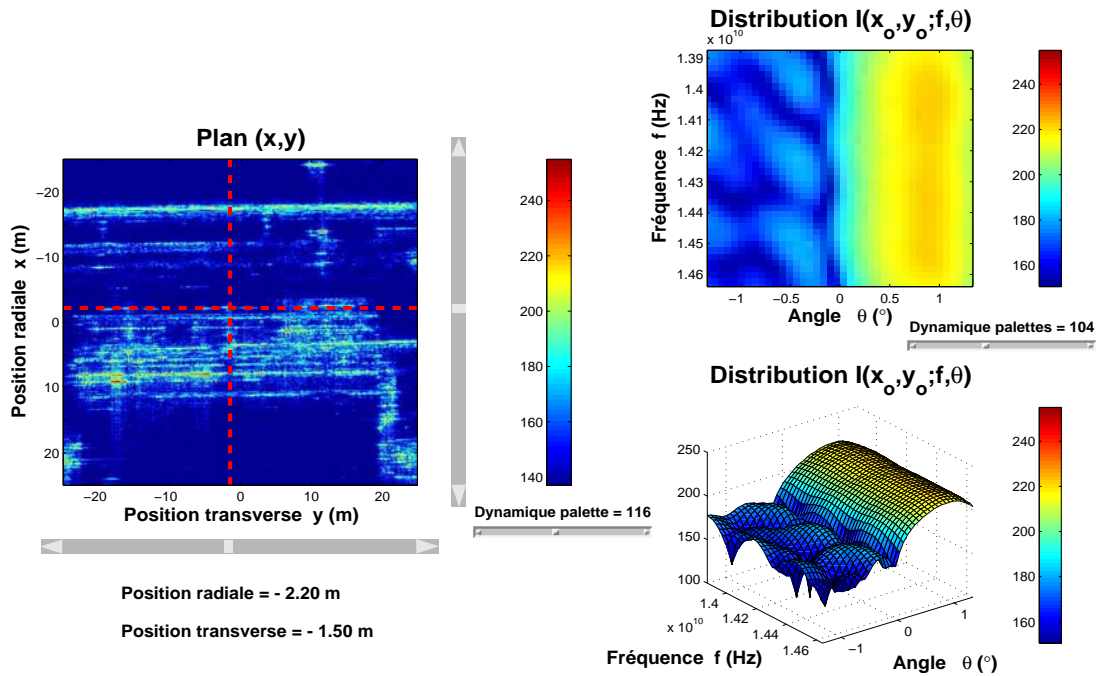


(a) Distribution du réflecteur situé sur l'arête en $(-1.85 \text{ m}, -12.45 \text{ m})$.

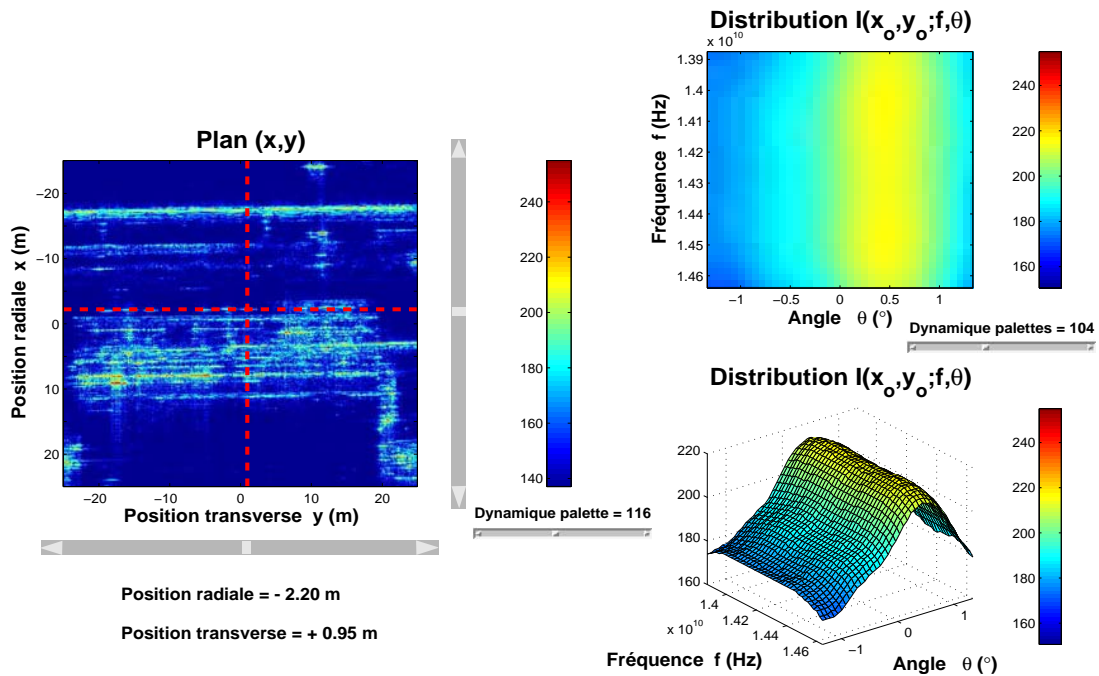


(b) Distribution du réflecteur situé sur l'arête en $(-1.85 \text{ m}, -4.85 \text{ m})$.

FIG. 4.12 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'arête du bâtiment.

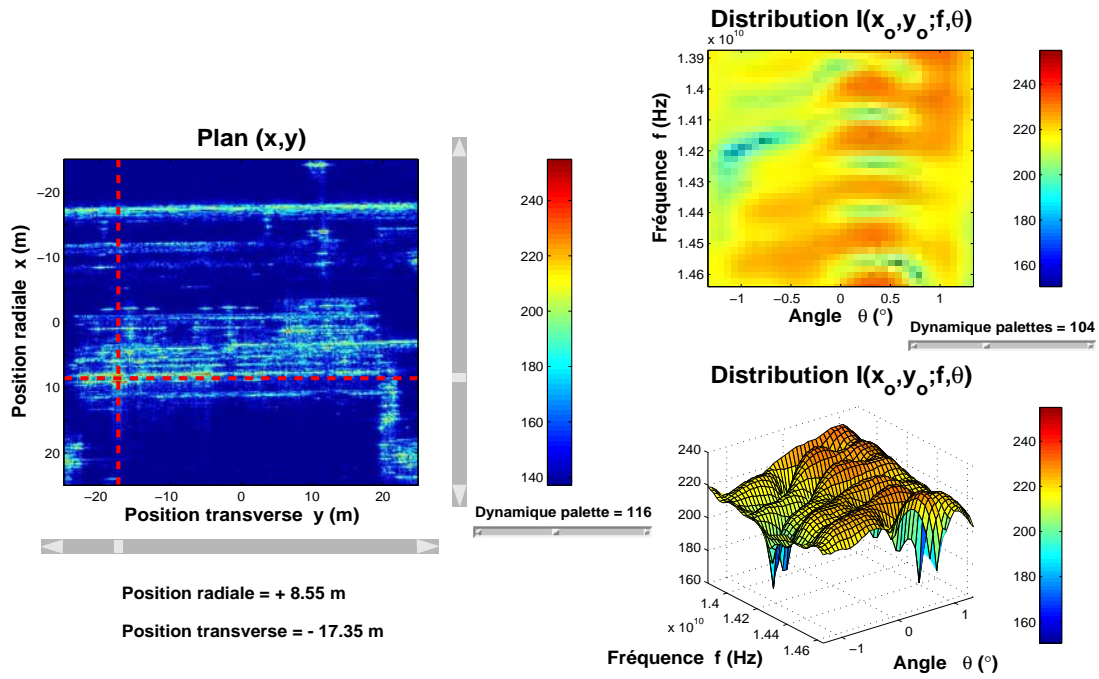


(a) Distribution du réflecteur situé sur l'arête en $(-2.20 \text{ m}, -1.50 \text{ m})$.

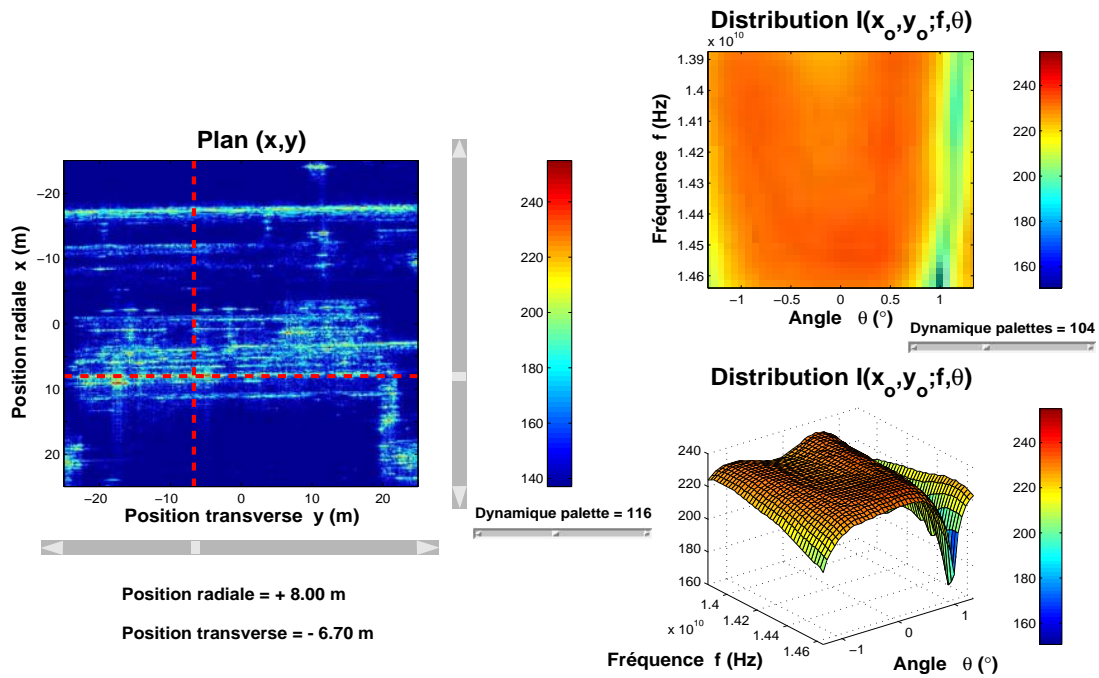


(b) Distribution du réflecteur situé sur l'arête en $(-2.20 \text{ m}, 0.95 \text{ m})$.

FIG. 4.13 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'arête du bâtiment.

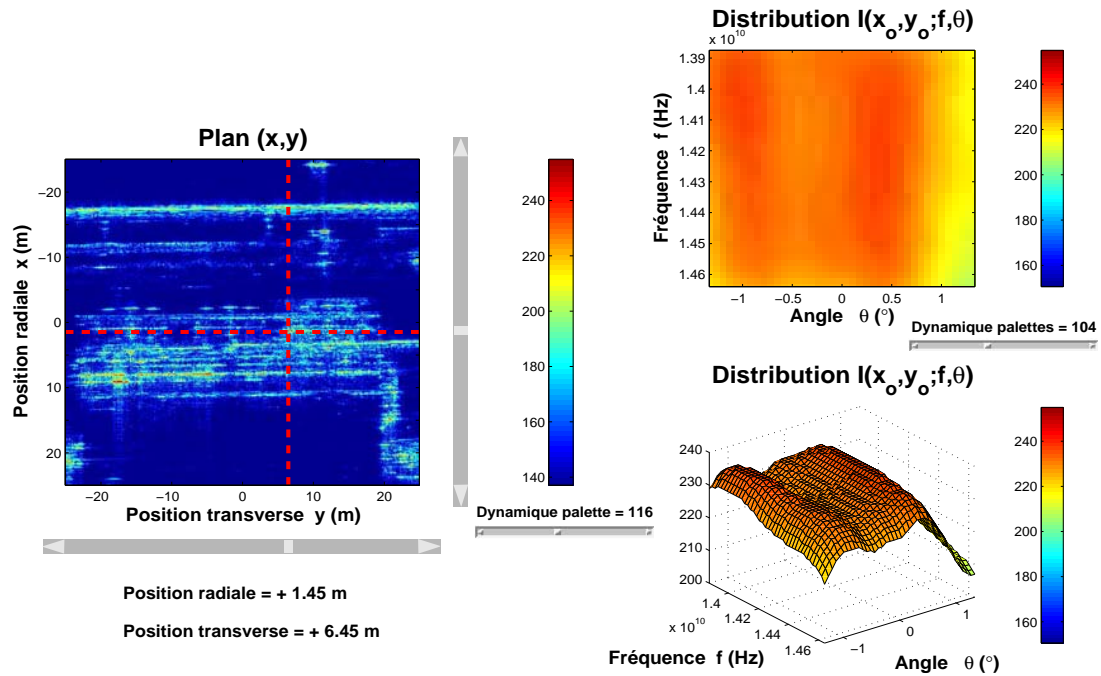


(a) Distribution du réflecteur situé sur le toit en $(-8.55 \text{ m}, -17.35 \text{ m})$.

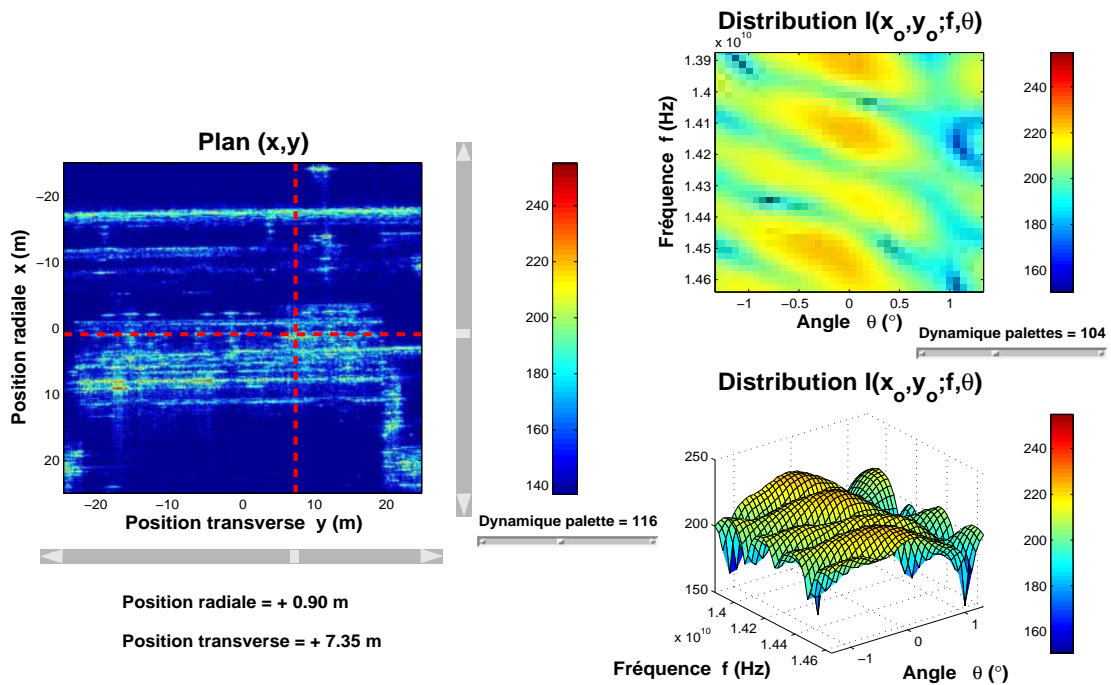


(b) Distribution du réflecteur sur le toit en $(8.00 \text{ m}, -6.70 \text{ m})$.

FIG. 4.14 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit du bâtiment.

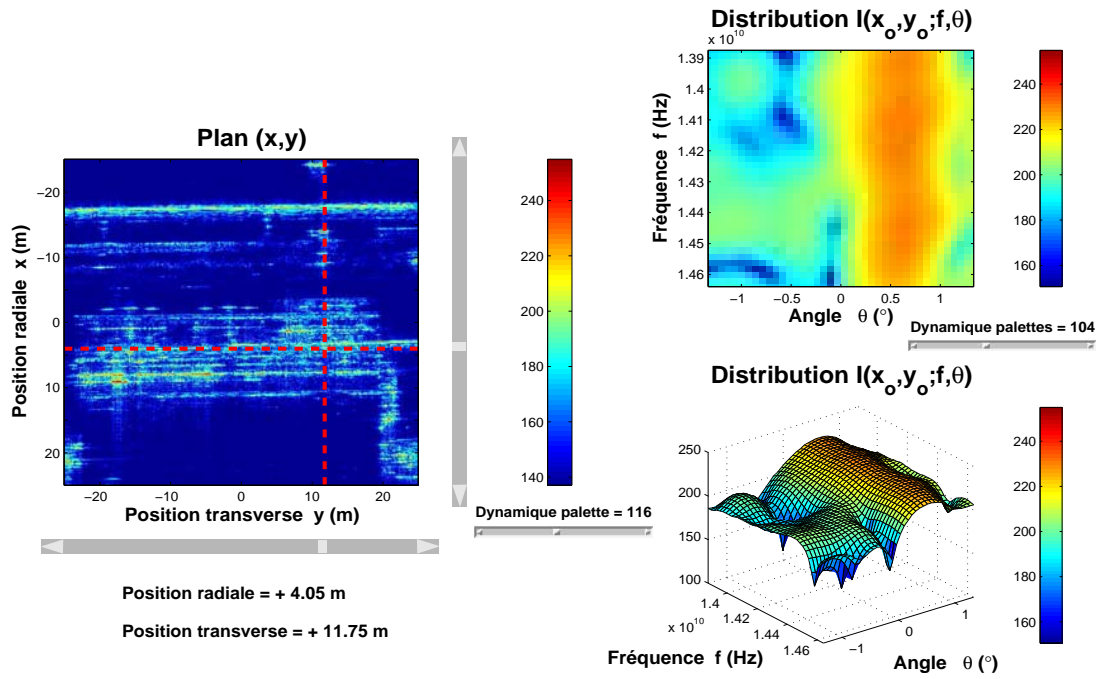


(a) Distribution du réflecteur situé sur le toit en (1.45 m, 6.45 m).

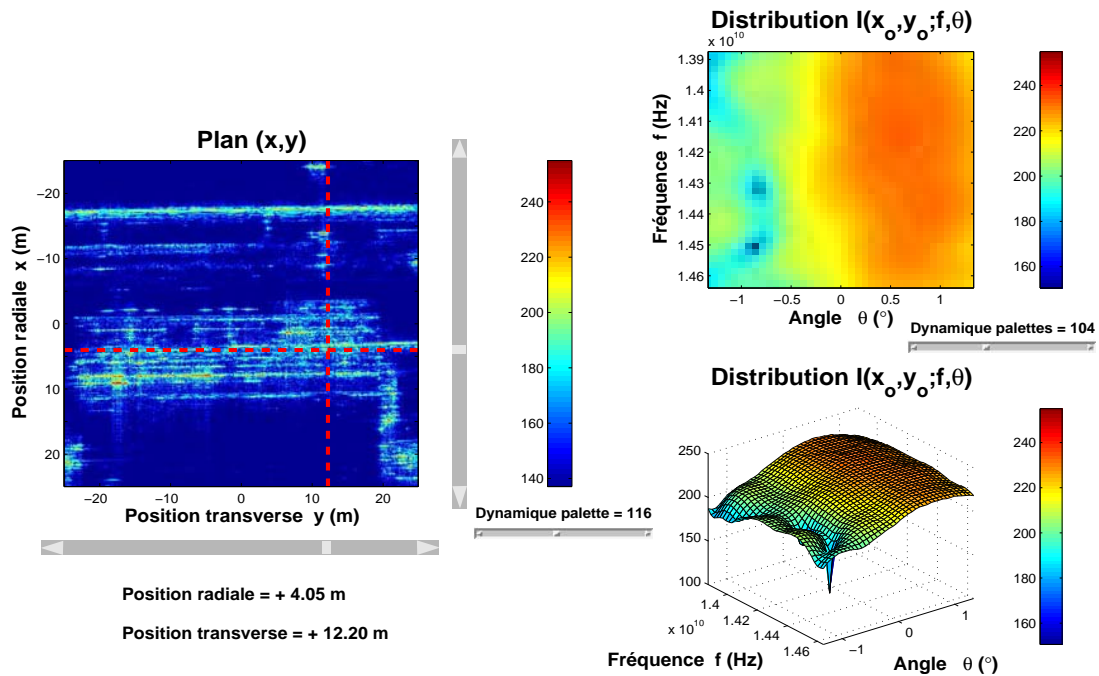


(b) Distribution du réflecteur situé sur le toit en (0.90 m, 7.35 m).

FIG. 4.15 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit du bâtiment.



(a) Distribution du réflecteur situé sur le toit en (4.05 m, 11.75 m).



(b) Distribution du réflecteur situé sur le toit en (4.05 m, 12.20 m).

FIG. 4.16 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit du bâtiment.

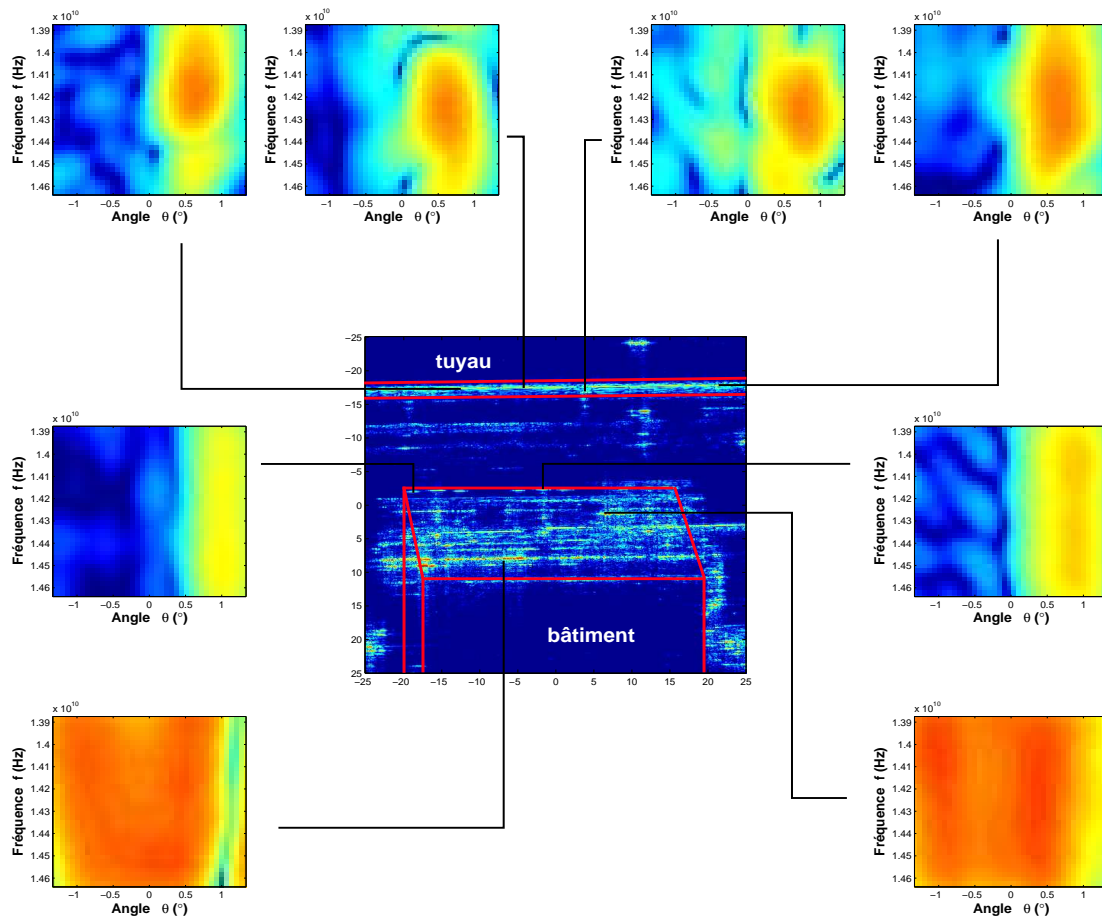


FIG. 4.17 – Exemples de distributions énergétiques correspondant à des réflecteurs sur le tuyau, l'arête et le toit du bâtiment.

4.2.2 Réflecteurs d'une image composée de deux cuves, une passerelle et un escalier.

On se propose, dans ce paragraphe, d'analyser des réflecteurs dans une image composée de cuves, d'une passerelle et d'un escalier sur le prolongement latéral de la passerelle (voir figure 4.18). On mettra en évidence la répartition d'énergie de réflecteurs sur la paire de cuves, sur la passerelle et l'escalier (en Annexe N, on trouvera des résultats supplémentaires de distributions énergétiques de réflecteurs sur ces différents objets) avant de fournir, en figure 4.29, un récapitulatif de distributions énergétiques sur ces différents objets.

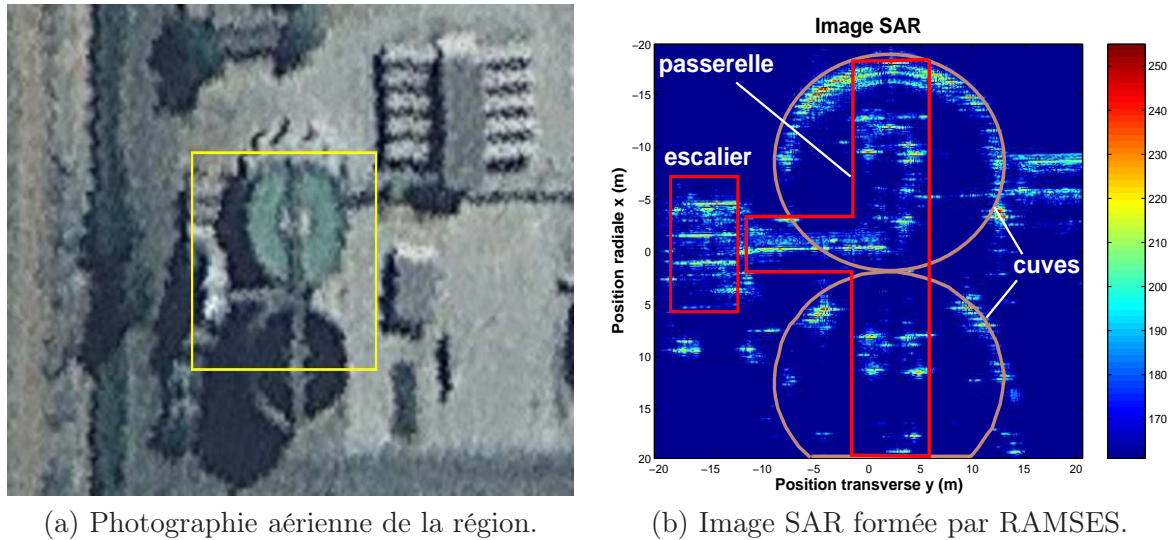
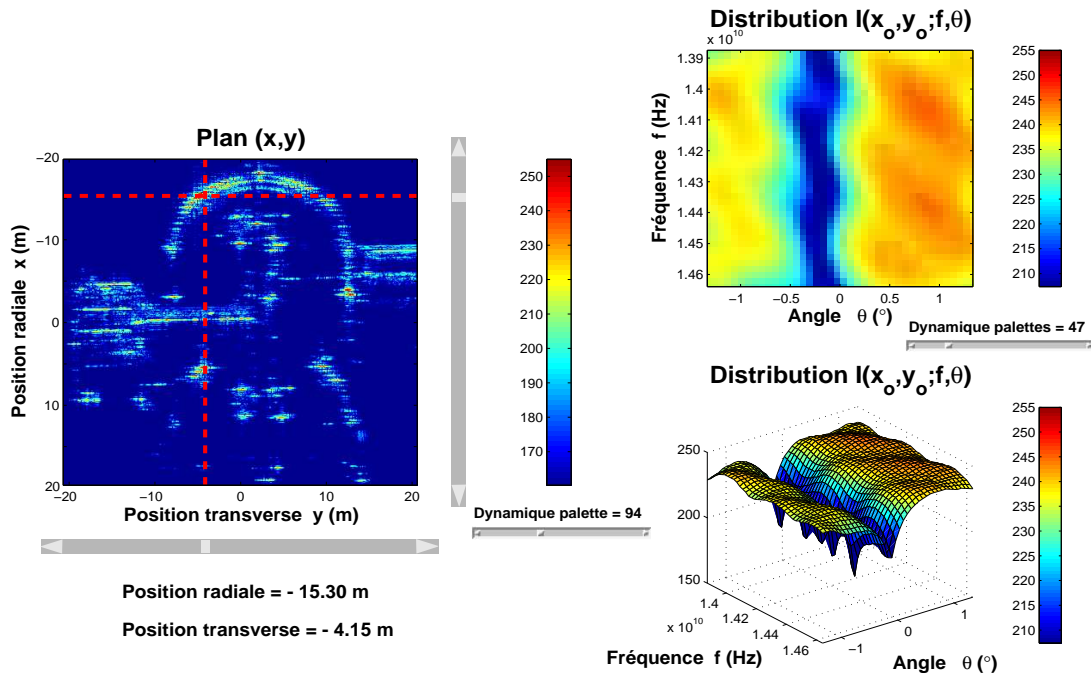


FIG. 4.18 – Image constituée des cuves, de la passerelle et de l'escalier.

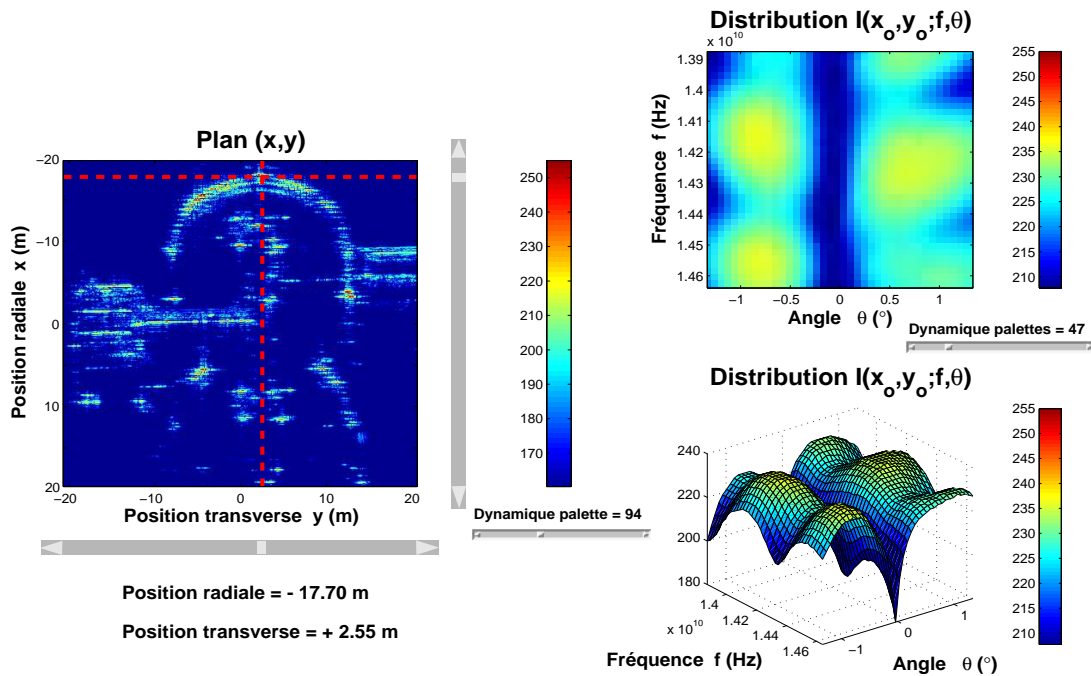
a/ Réflecteurs sur l'ensemble des deux cuves

La distribution d'énergie d'une première série de réflecteurs situés sur les deux cuves est illustrée dans les figures 4.19, 4.20 et 4.21 (a). La particularité de ces distributions est que la quantité d'énergie renvoyée par ces réflecteurs est très faible, quelle que soit la fréquence, lorsque l'angle de vue de l'antenne est dans l'intervalle $[-0.5^\circ, 0.25^\circ]$. L'énergie se répartit, cependant, plus ou moins uniformément dans les secteurs angulaires $[-1.5^\circ, -0.5^\circ]$ et $[0.25^\circ, 1.5^\circ]$.

Les figures 4.21 (b), 4.22 fournissent la distribution d'énergie de quelques réflecteurs, situés sur la courbure gauche des cuves : on observe que les lignes de forte énergie se répartissent, dans le plan (f, θ) , de manière oblique et que les maximums d'énergie sont localisés, selon l'axe fréquentiel, à des intervalles réguliers. La figure 4.23 illustre la distribution d'énergie de réflecteurs sur le côté droit de la cuve supérieure : les pics d'énergie sont également localisés à des intervalles réguliers en fréquence mais les lignes obliques de forte énergie sont dans une direction perpendiculaire aux lignes d'énergie des réflecteurs appartenant à la courbure gauche des cuves.

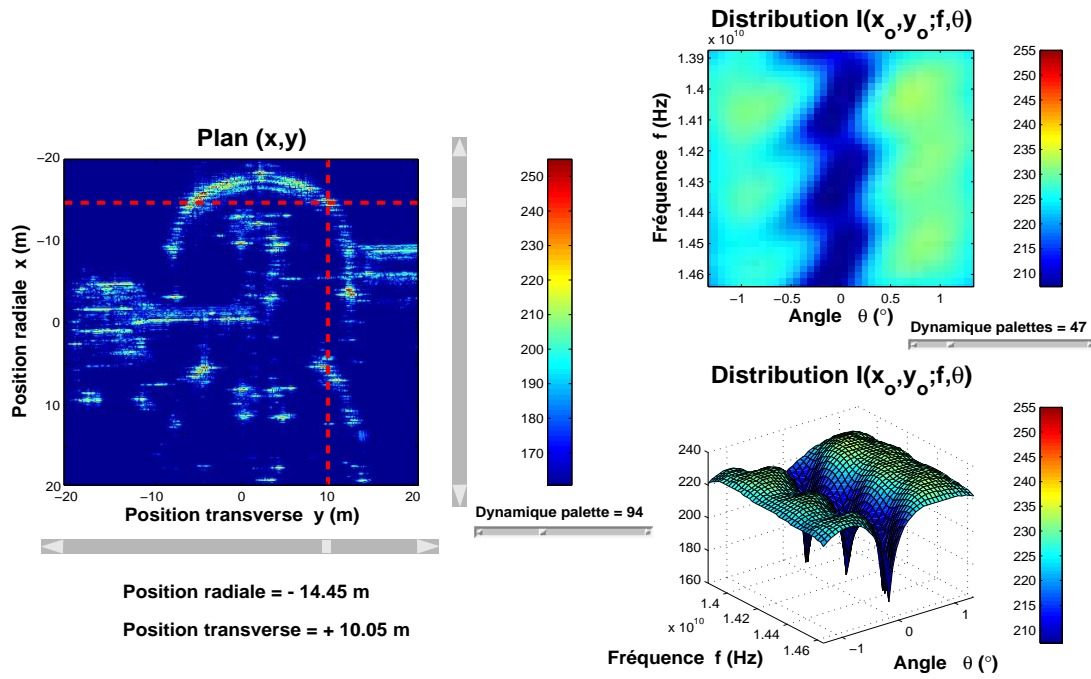


(a) Distribution du réflecteur situé sur la cuve supérieurs en (-15.30 m, -4.15 m).

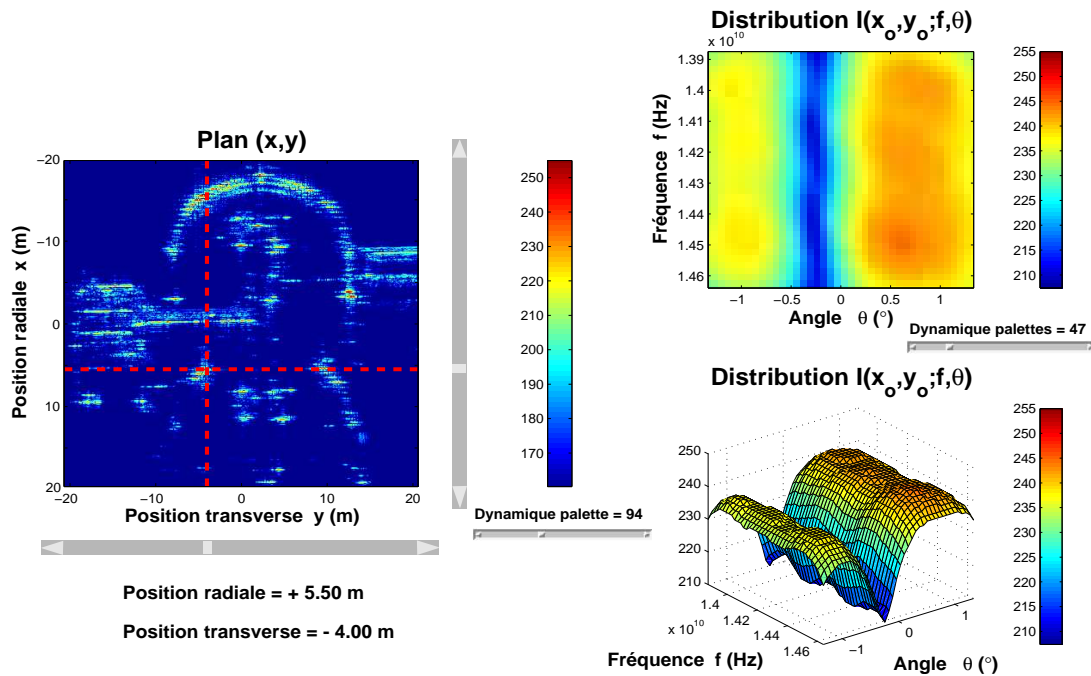


(b) Distribution du réflecteur situé sur la cuve supérieure en (-17.70 m, 2.55 m).

FIG. 4.19 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'ensemble des deux cuves.

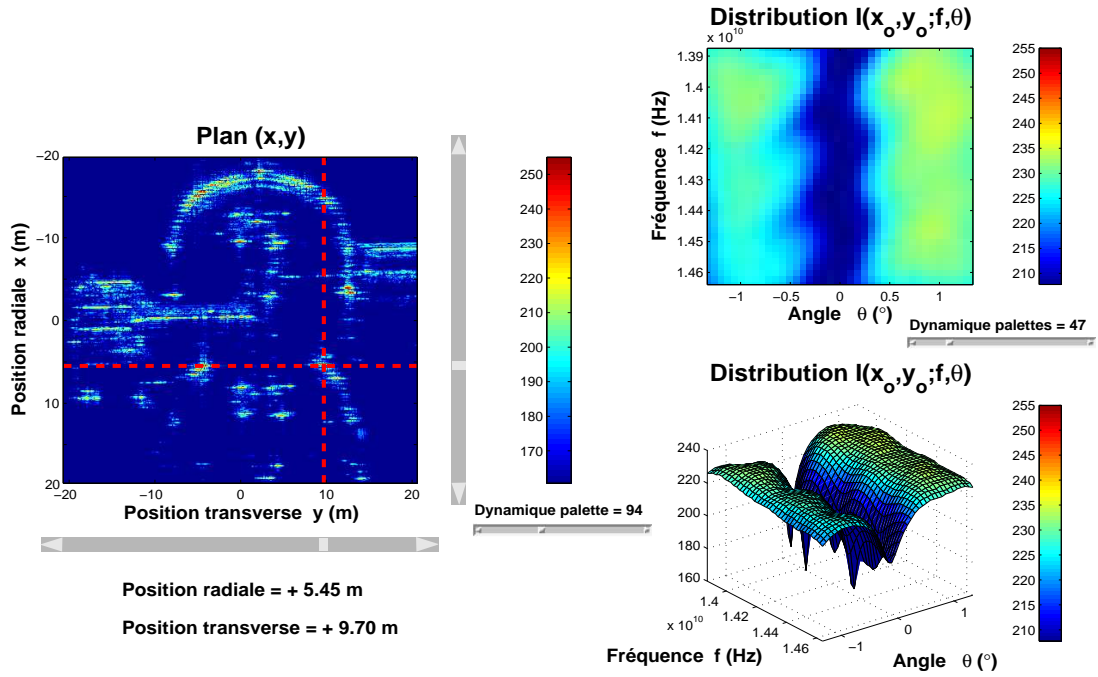


(a) Distribution du réflecteur localisé sur la cuve supérieure en $(-14.45 \text{ m}, 10.05 \text{ m})$.

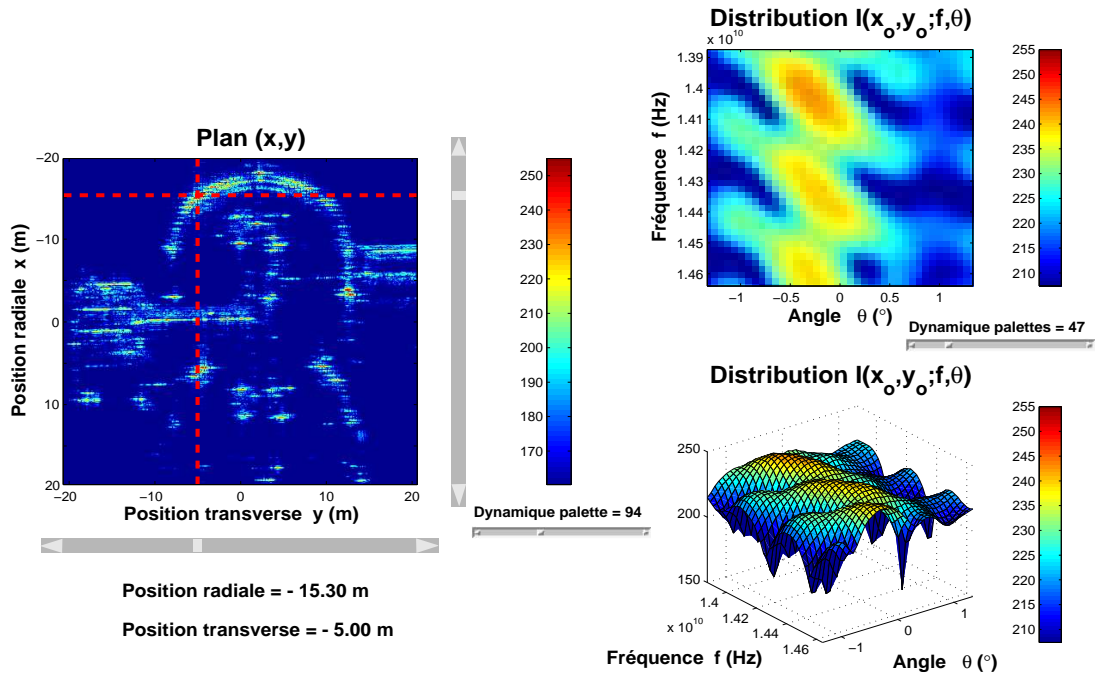


(b) Distribution du réflecteur localisé sur la cuve inférieure en $(5.50 \text{ m}, -4 \text{ m})$.

FIG. 4.20 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'ensemble des deux cuves.

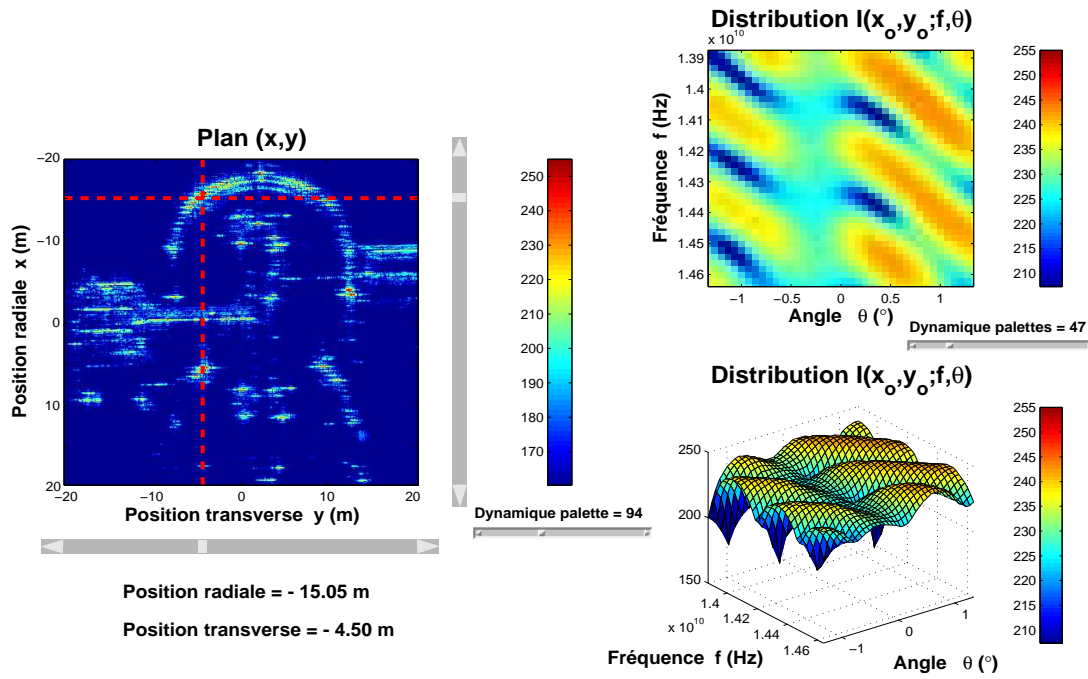


(a) Distribution du réflecteur localisé sur la cuve inférieure en (5.45 m, 9.70 m).

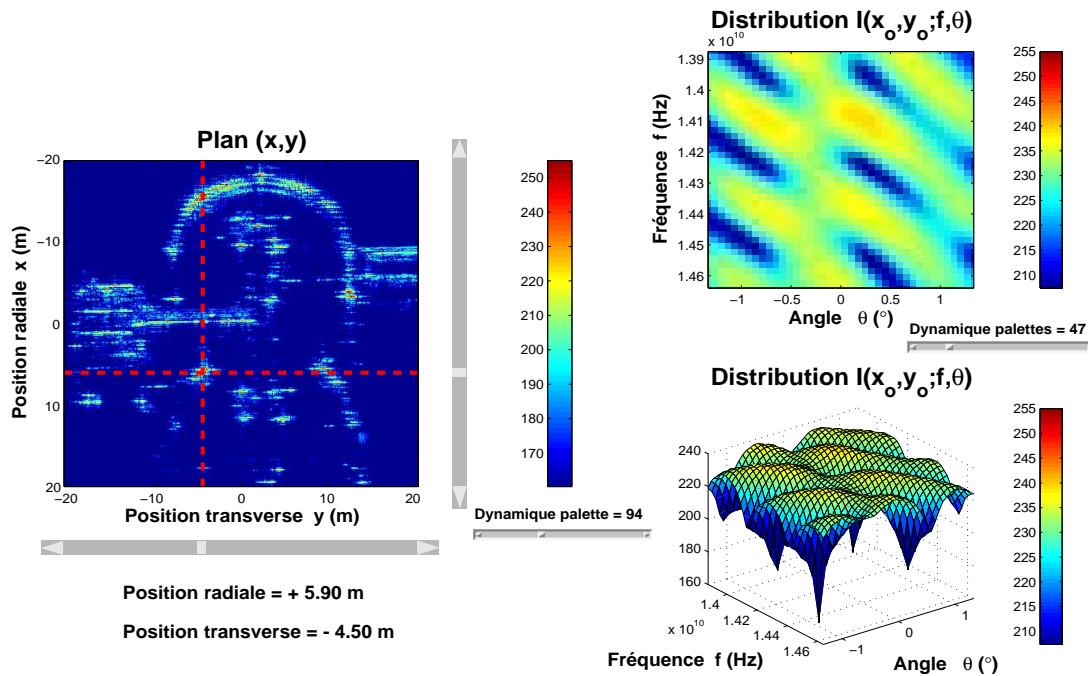


(b) Distribution du réflecteur localisé sur le cuve supérieure en (-15.30 m, -5 m).

FIG. 4.21 – Distribution énergétique d'un réflecteur sur une des deux cuves.

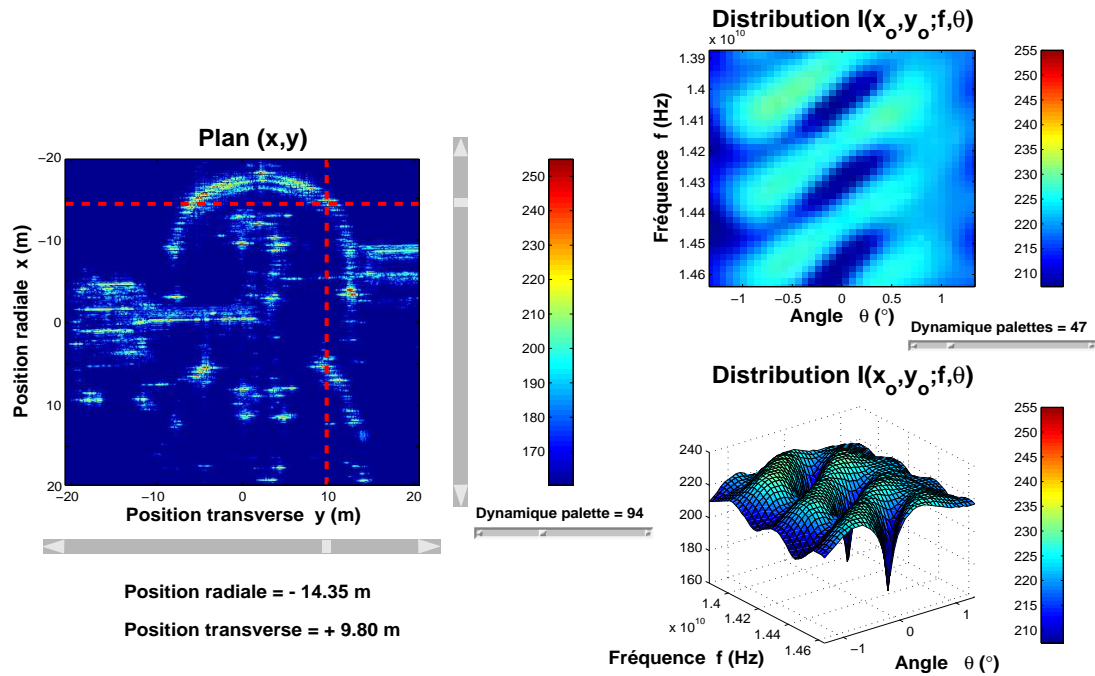


(a) Distribution du réflecteur situé sur la cuve supérieure en $(-15.05 \text{ m}, -4.50 \text{ m})$.

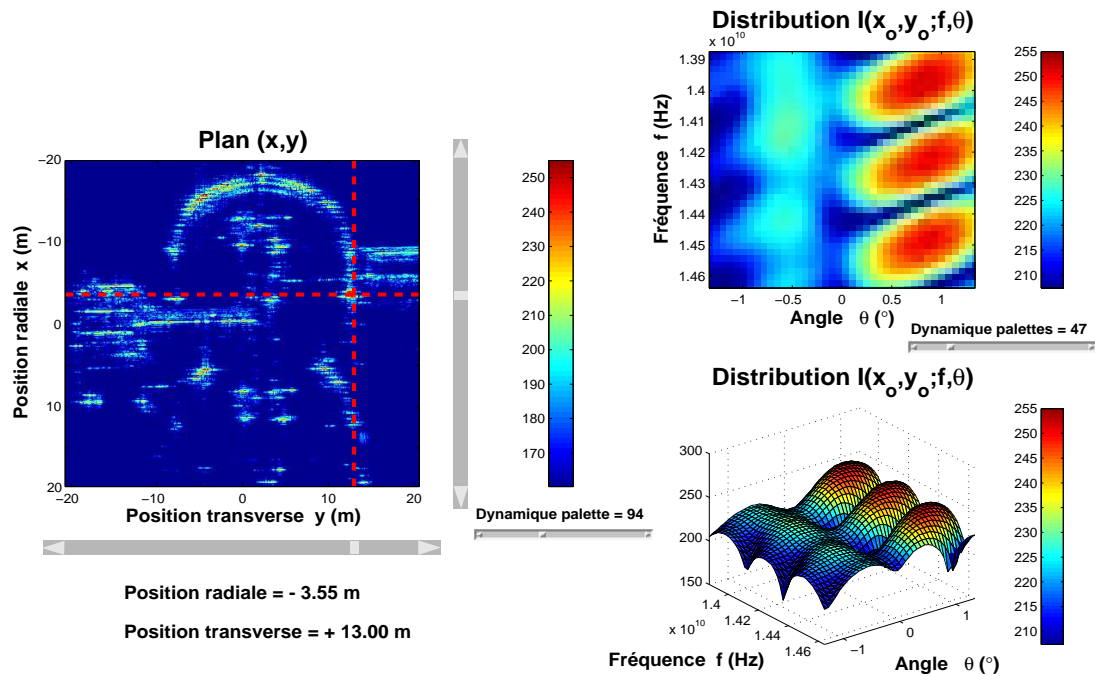


(b) Distribution du réflecteur localisé sur la cuve inférieure en $(5.90 \text{ m}, -4.50 \text{ m})$.

FIG. 4.22 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'ensemble des deux cuves.



(a) Distribution du réflecteur situé sur la cuve supérieure en $(-14.35 \text{ m}, 9.80 \text{ m})$.

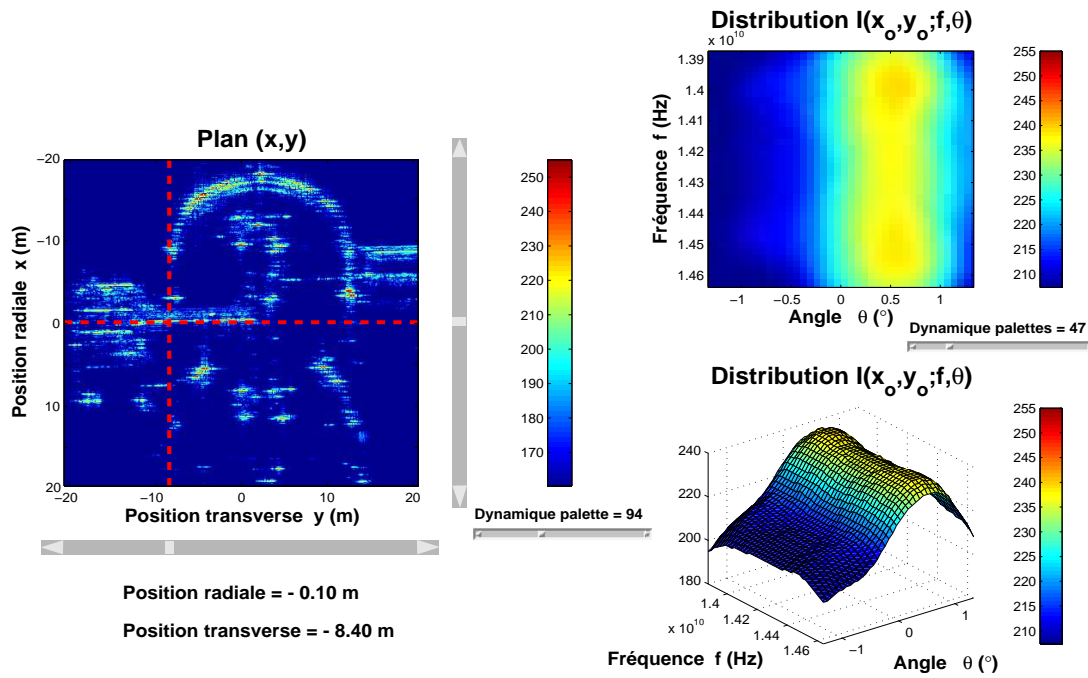


(b) Distribution du réflecteur situé sur la cuve supérieure en $(-3.55 \text{ m}, 13 \text{ m})$.

FIG. 4.23 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'ensemble des deux cuves.

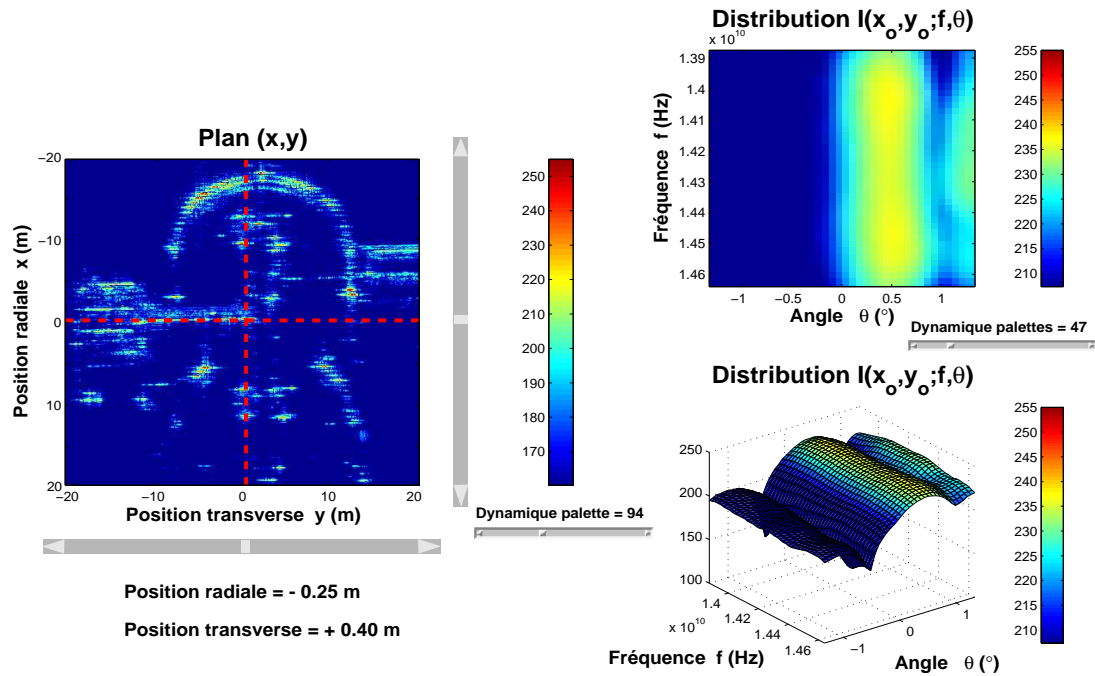
b/ Réflecteurs situés sur la passerelle

Dans les figures 4.24, 4.25, 4.26, on étudie la répartition d'énergie de réflecteurs sur la passerelle. Ces réflecteurs ont une réponse énergétique concentrée autour d'un certain angle sans réelle dépendance en fréquence (pas de caractère de coloration). À nouveau, cette réponse suit le modèle GTD en angle pour des mécanismes distribués.

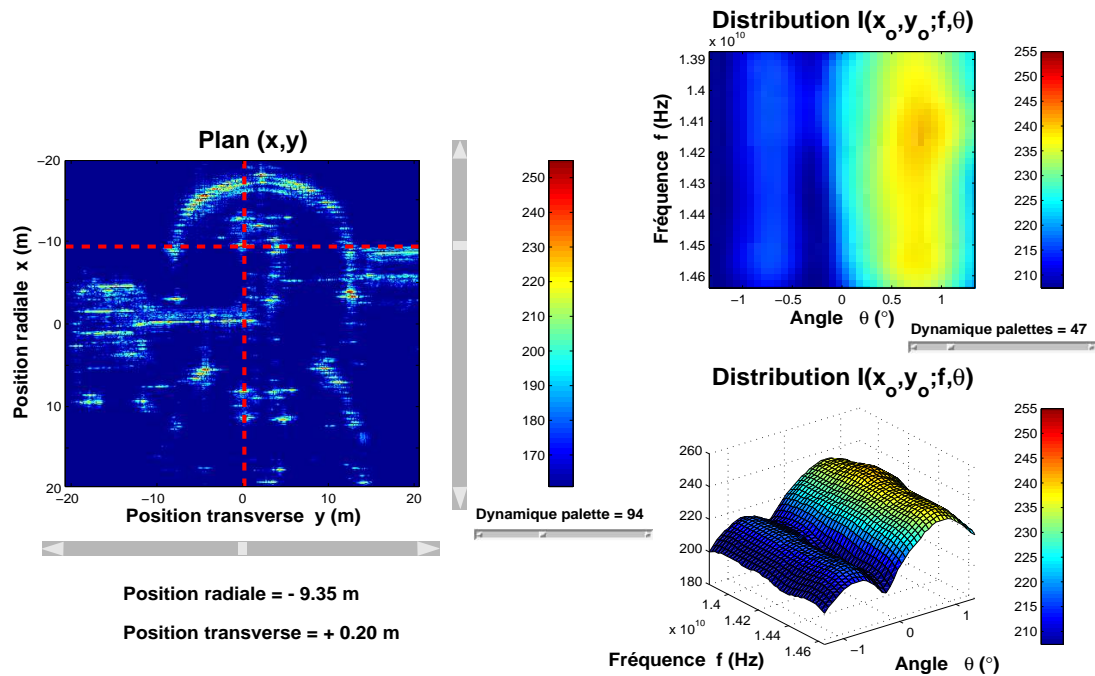


Distribution du réflecteur localisé sur la passerelle en $(-0.10 \text{ m}, -8.40 \text{ m})$.

FIG. 4.24 – Distribution énergétique d'un réflecteur sur la passerelle.

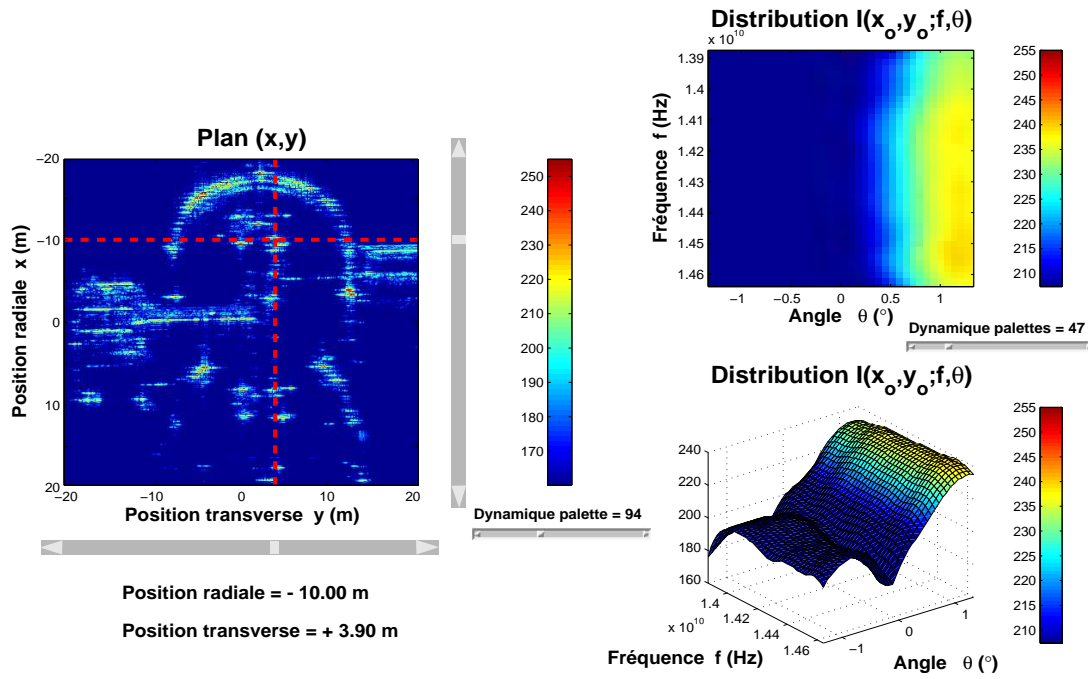


(a) Distribution du réflecteur situé sur la passerelle en $(-0.25 \text{ m}, 0.40 \text{ m})$.

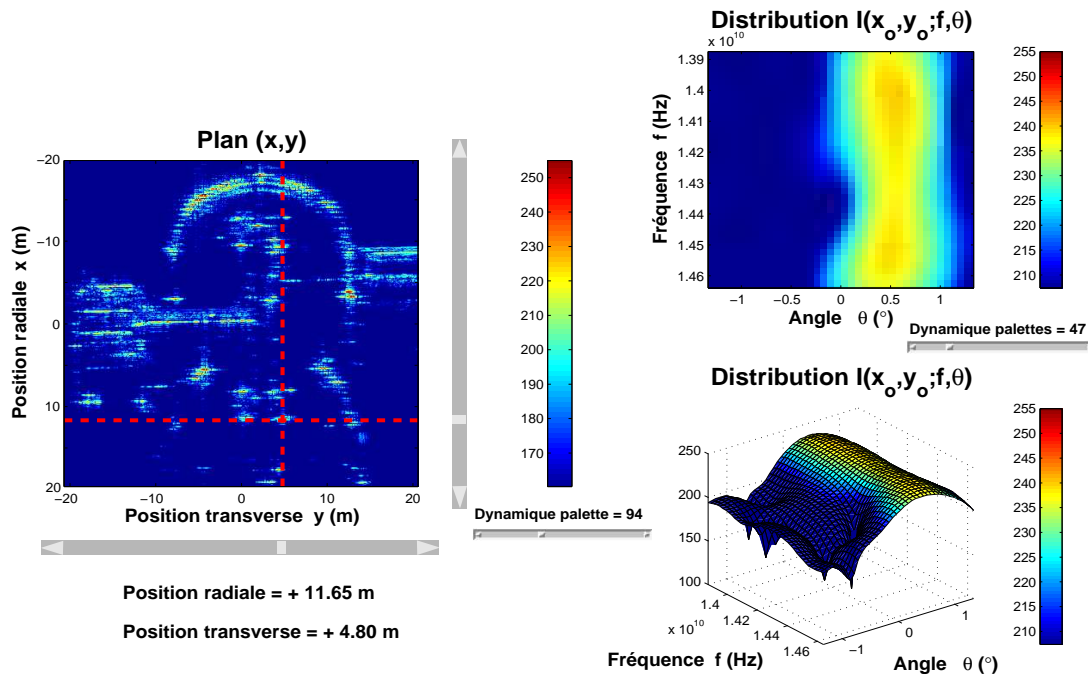


(b) Distribution du réflecteur situé sur la passerelle en $(-9.35 \text{ m}, 0.20 \text{ m})$.

FIG. 4.25 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la passerelle.



(a) Distribution du réflecteur localisé sur la passerelle en (-10 m, 3.90 m).

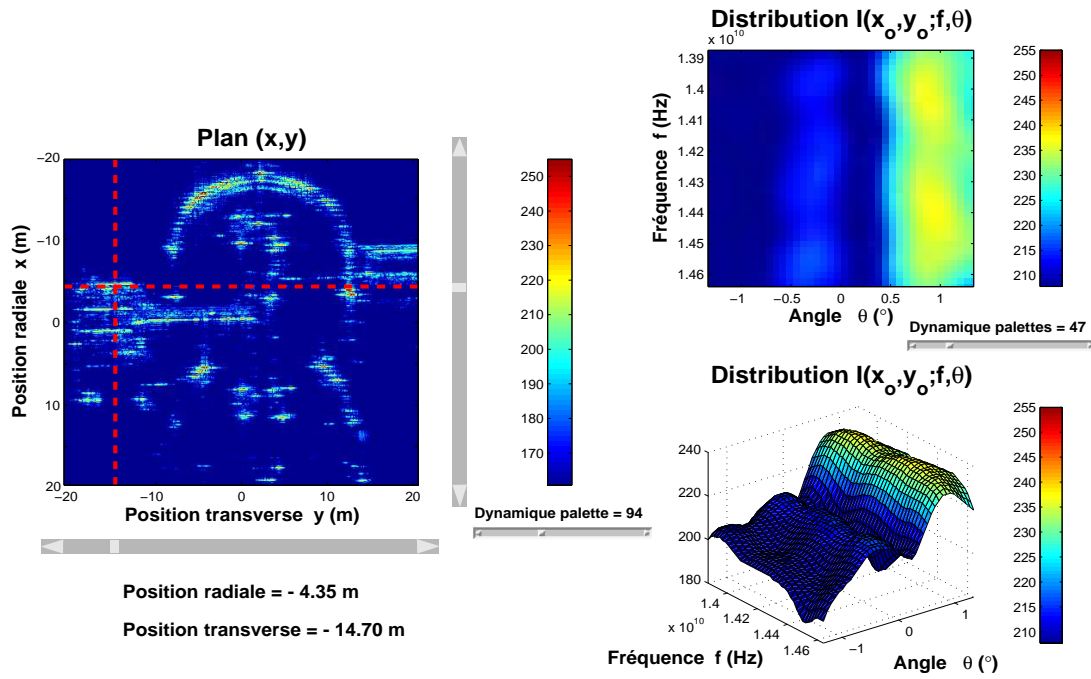


(b) Distribution du réflecteur situé sur la passerelle en (11.65 m, 4.80 m).

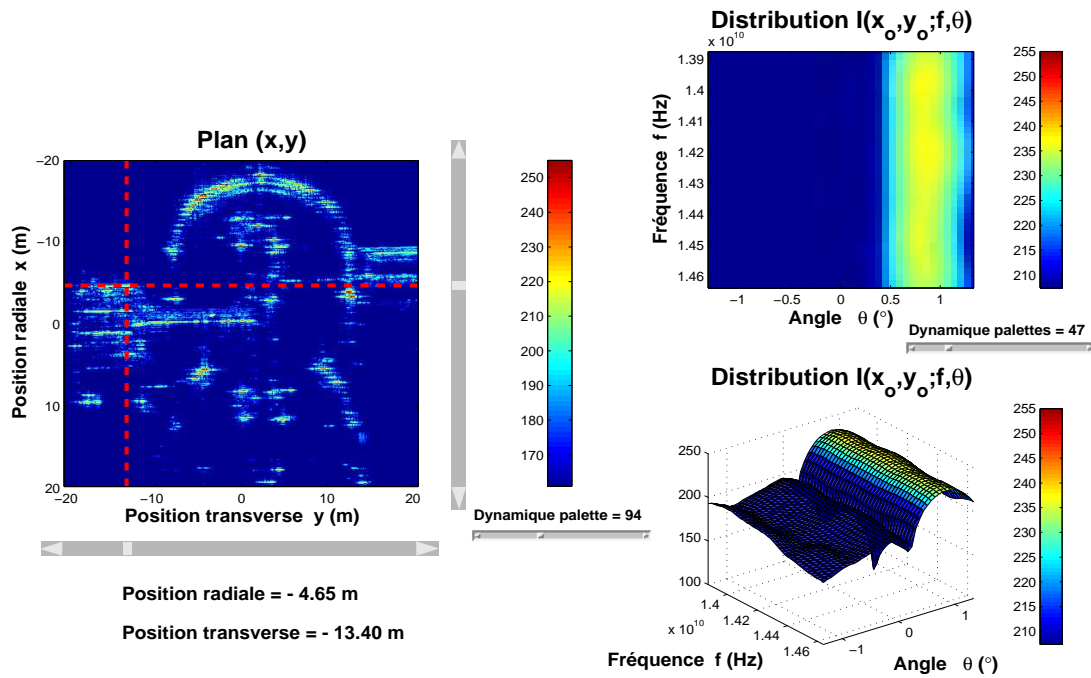
FIG. 4.26 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la passerelle.

c/ Réflecteurs composant l'escalier

Enfin, dans les figures 4.27, 4.28, on caractérise la réponse énergétique de réflecteurs composant l'escalier qui se situe à gauche dans l'image, sur le prolongement de la passerelle. À nouveau, on peut constater que les réflecteurs sont très directifs : en effet, l'énergie est concentrée dans le secteur $[0.5^\circ, 1^\circ]$. On peut même dire que les caractéristiques énergétiques de ces réflecteurs sont très semblables à celles des réflecteurs de la passerelle étudiés en dans le paragraphe précédent.

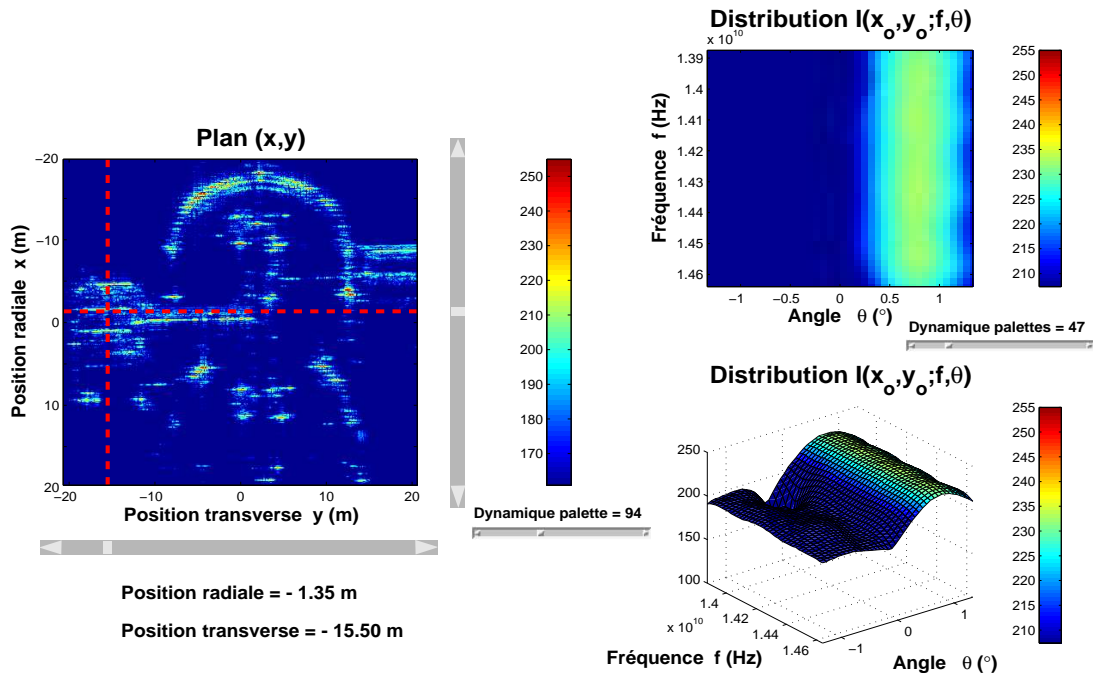


(a) Distribution du réflecteur localisé sur l'escalier en $(-4.35 \text{ m}, -14.70 \text{ m})$.

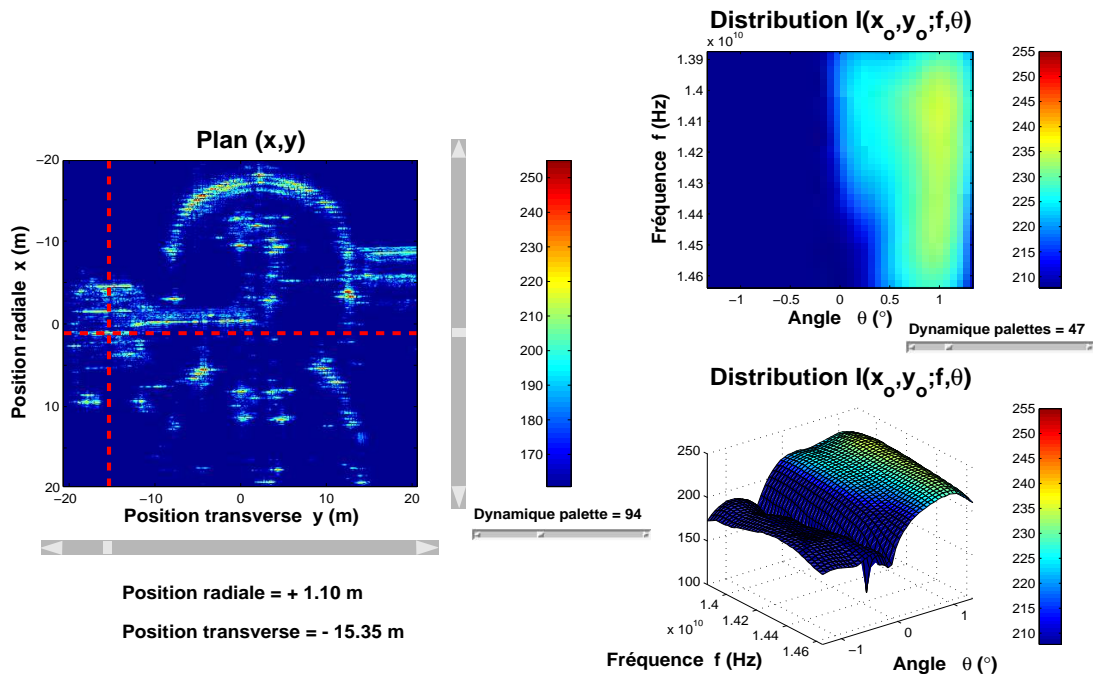


(b) Distribution du réflecteur situé sur l'escalier en $(-4.65 \text{ m}, -13.40 \text{ m})$.

FIG. 4.27 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'escalier.



(a) Distribution du réflecteur situé sur l'escalier en $(-1.35 \text{ m}, -15.50 \text{ m})$.



(b) Distribution du réflecteur situé sur l'escalier en $(1.10 \text{ m}, -15.35 \text{ m})$.

FIG. 4.28 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'escalier.

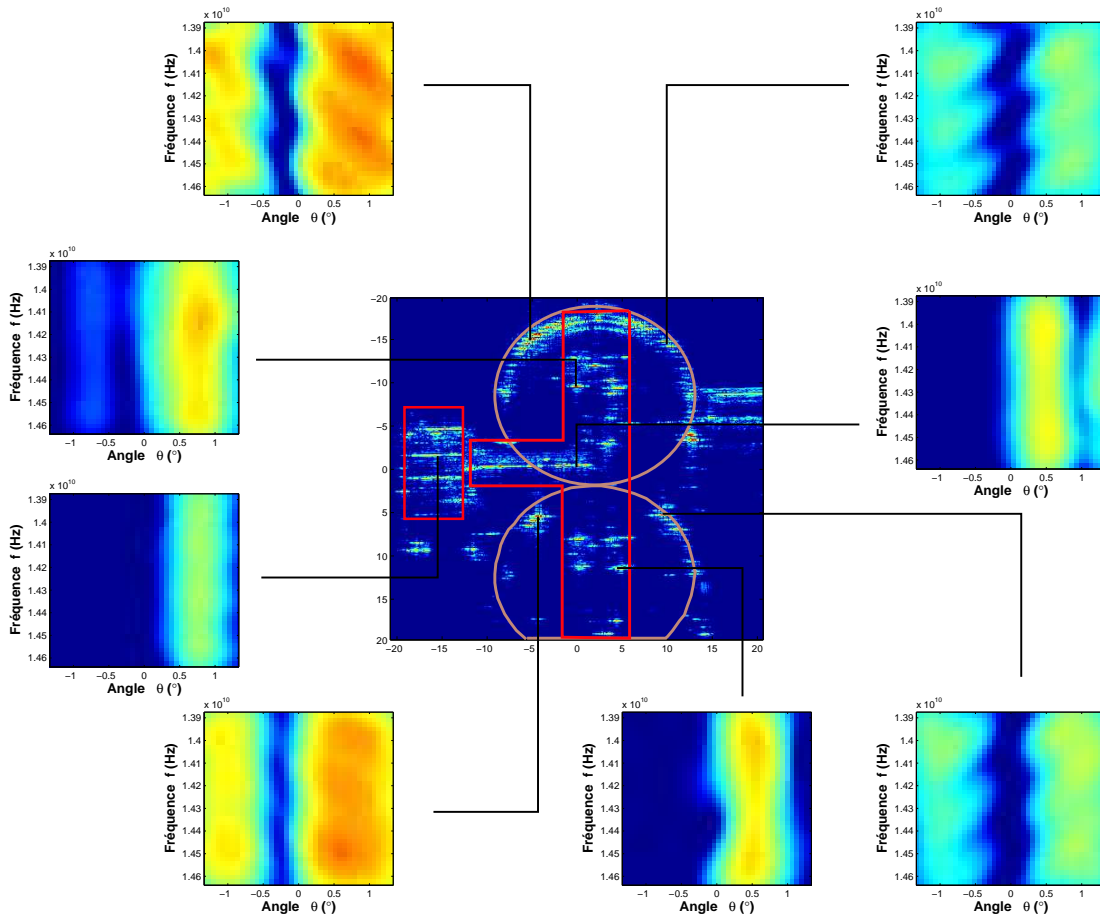
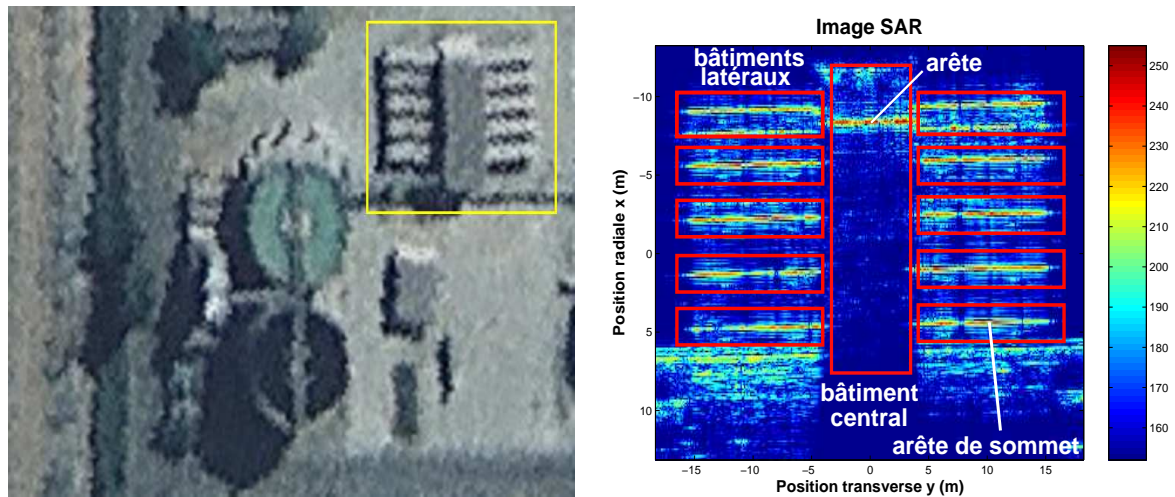


FIG. 4.29 – Exemples de distributions énergétiques correspondant à des réflecteurs sur la paire de cuves, la passerelle et l'escalier.

4.2.3 Réflecteurs d'une image composée d'un bloc de bâtiments.

Enfin, la dernière étude concerne un bloc de bâtiments qui se compose d'un gros bâtiment central et de bâtiments de plus petite taille disposés autour, de manière orthogonale (voir figure 4.30). On montre, dans cette partie, la distribution énergétique de réflecteurs situés sur le toit des bâtiments latéraux, sur l'arête du bâtiment central et sur le sol autour du bloc de bâtiments. Ces résultats seront résumés en figure 4.41.



(a) Photographie aérienne de la région.

(b) Image SAR formée par RAMSES.

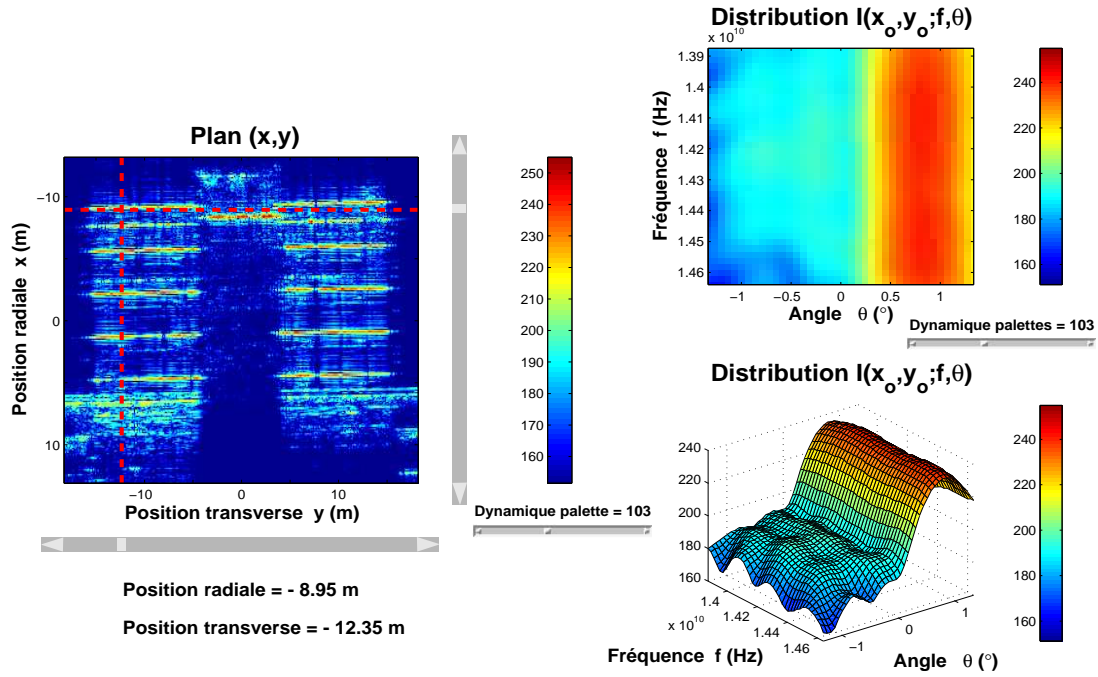
FIG. 4.30 – Image constituée d'un bloc de bâtiments.

a/ Réflecteurs sur le toit des bâtiments

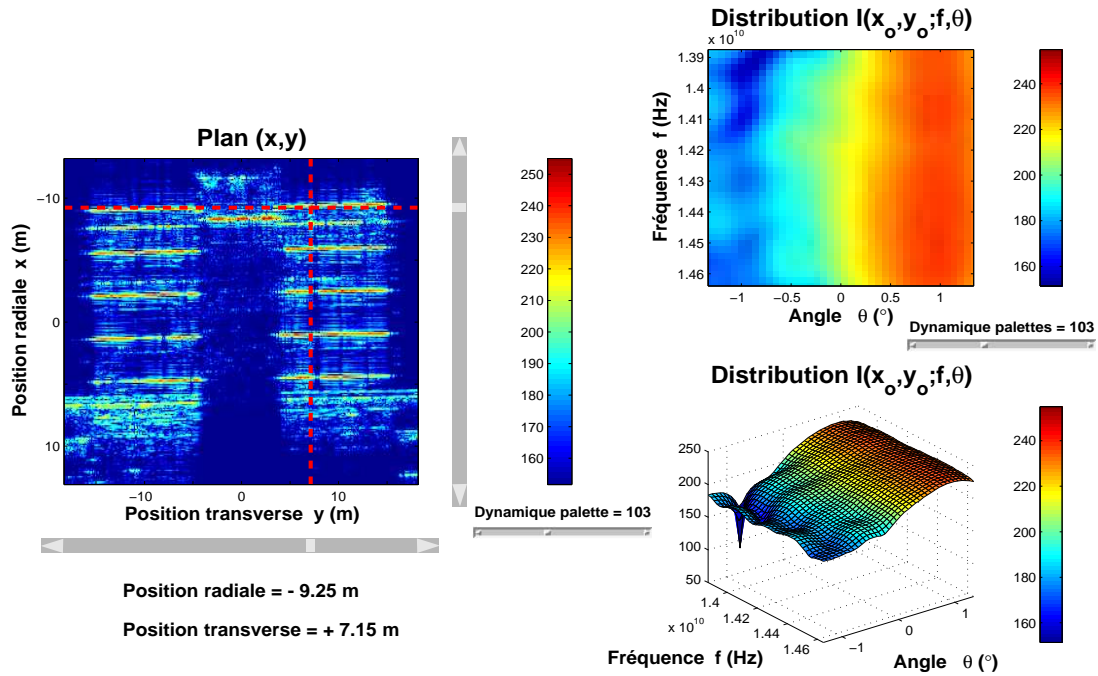
On propose, donc, d'analyser la réponse énergétique de réflecteurs sur les sommets des bâtiments latéraux (ou pourra se reporter à l'Annexe O pour voir des résultats supplémentaires de distributions énergétiques de réflecteurs sur le toit des des bâtiments). Pour les réflecteurs, que l'on a choisi d'analyser, l'énergie renvoyée est très importante dans un certain secteur angulaire. Et pour chaque angle de ce secteur, l'énergie se répartit de manière quasi uniforme dans la bande fréquentielle. En effet, les réflecteurs analysés dans les figures 4.31 à 4.35 renvoient un maximum d'énergie autour de l'angle d'illumination $\theta = 1^\circ$: ceci n'est pas surprenant si l'on regarde la photographie de la figure 4.30 (a) et l'image SAR de la figure 4.30 (b) puisque les bâtiments latéraux sont sensiblement inclinés par rapport à l'horizontale qui est la direction de circulation du radar.

b/ Réflecteurs sur l'arête du bâtiment central

On étudie, à présent, la répartition énergétique de réflecteurs situés sur l'arête du bâtiment central. On peut constater, en se référant aux figures 4.36 et 4.37, que cette répartition diffère significativement de celle des réflecteurs analysés dans le paragraphe précédent qui sont localisés sur le toit des bâtiments latéraux.

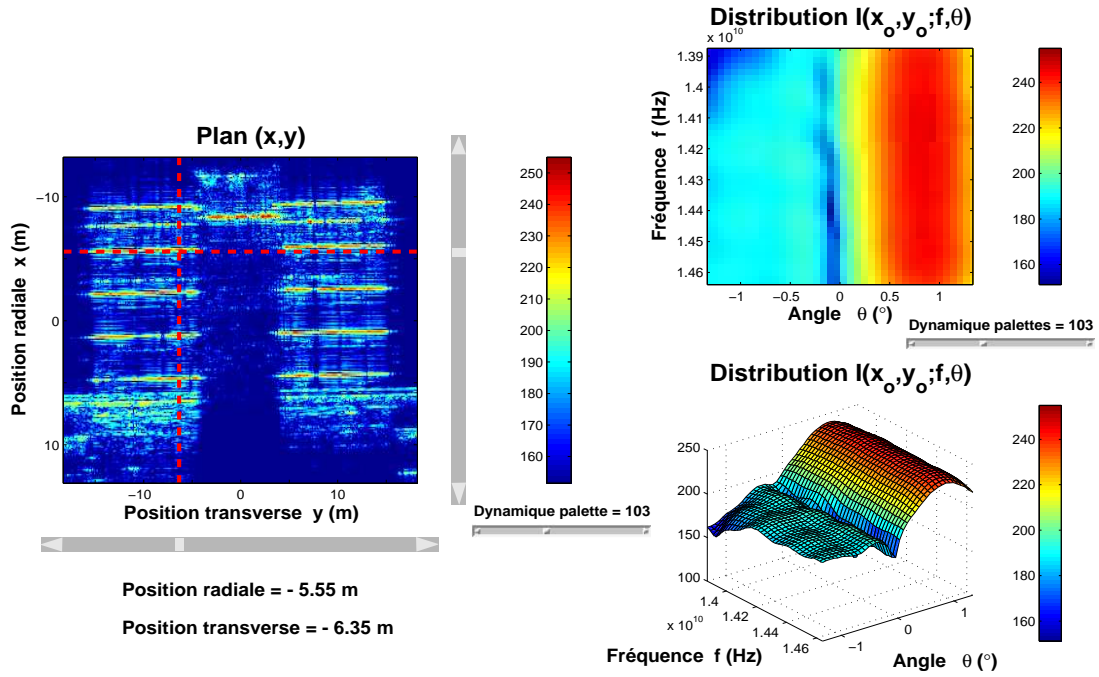


(a) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en $(-8.95 \text{ m}, -12.35 \text{ m})$.

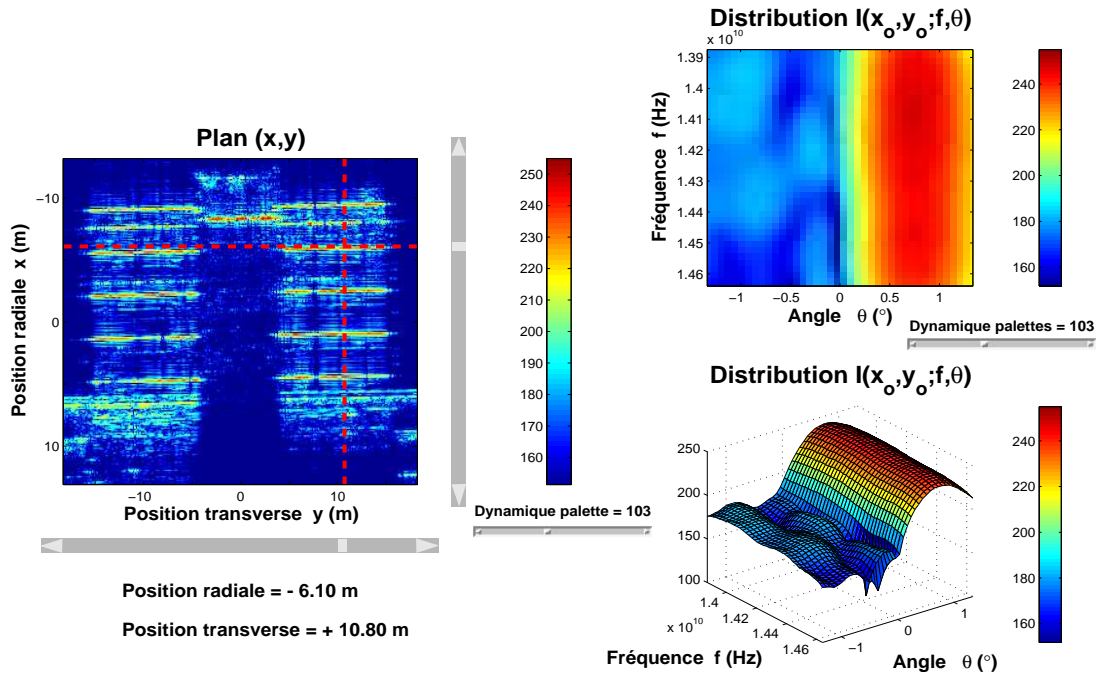


(b) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en $(-9.25 \text{ m}, 7.15 \text{ m})$.

FIG. 4.31 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

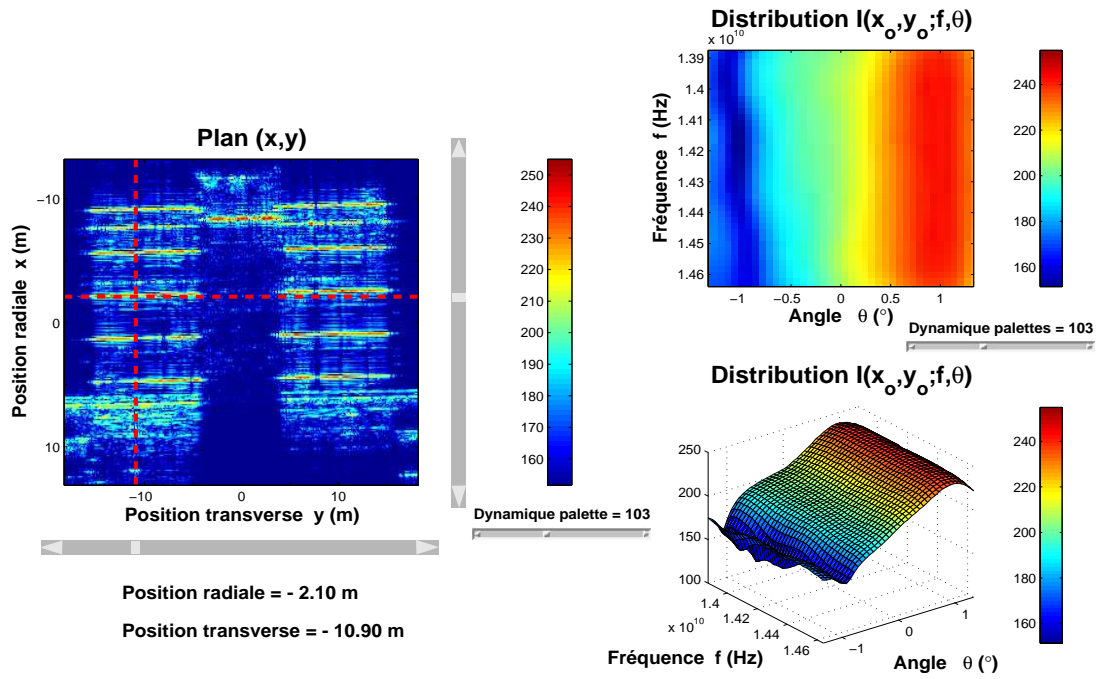


(a) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en $(-5.55 \text{ m}, -6.35 \text{ m})$.

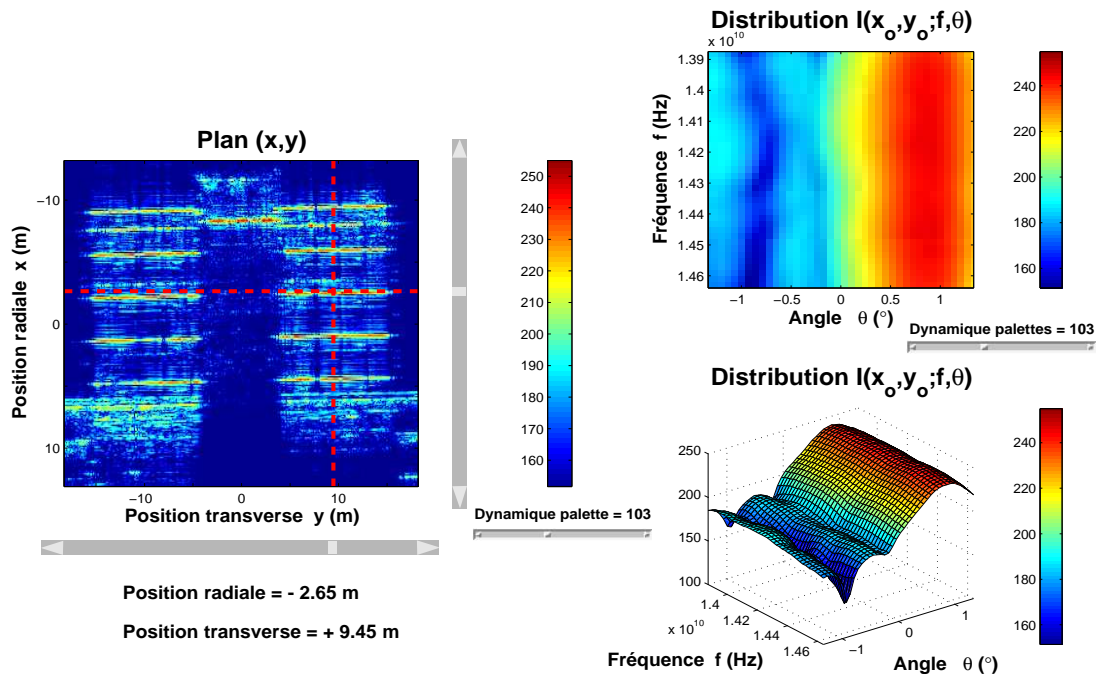


(b) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en $(-6.10 \text{ m}, 10.80 \text{ m})$.

FIG. 4.32 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

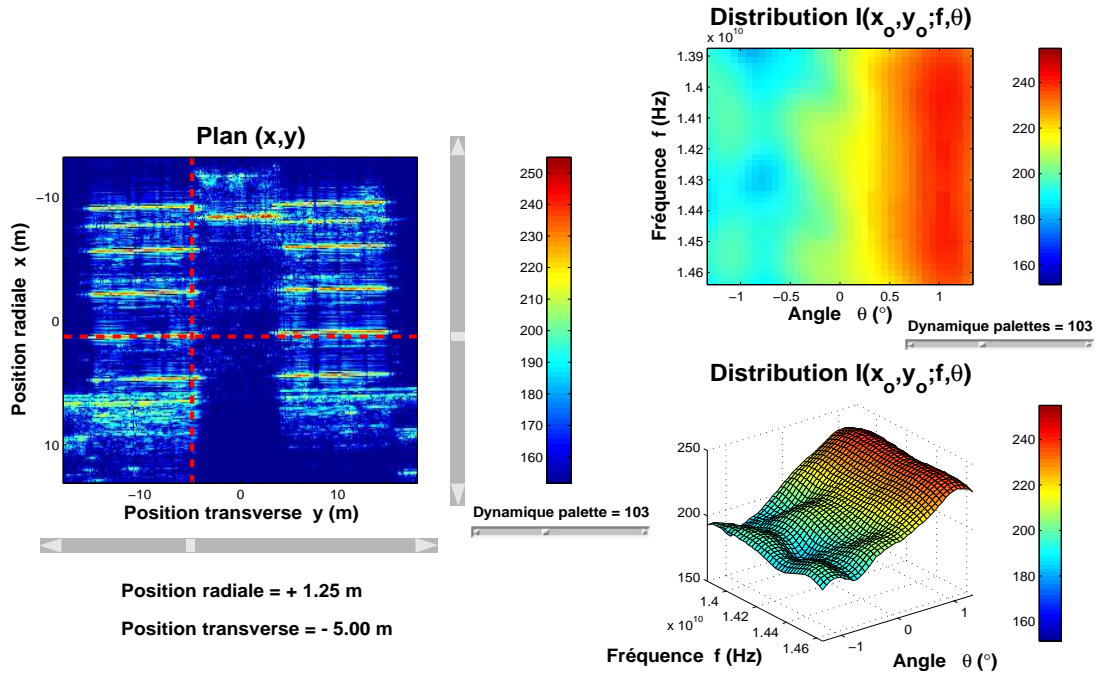


(a) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en $(-2.10 \text{ m}, -10.90 \text{ m})$.

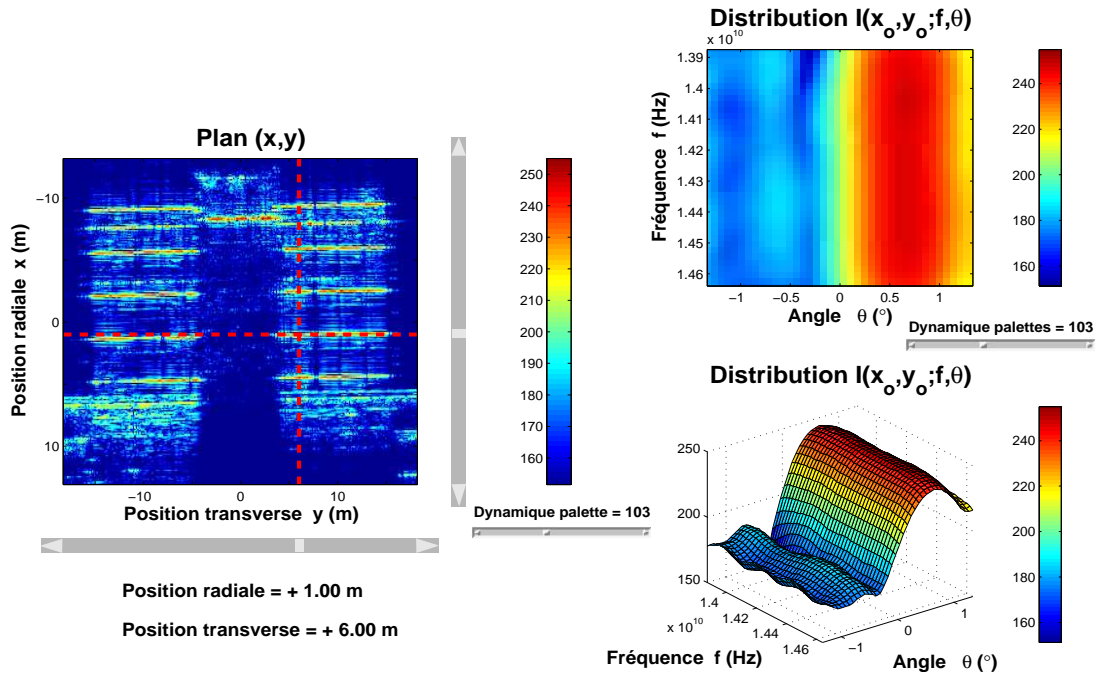


(b) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en $(-2.65 \text{ m}, 9.45 \text{ m})$.

FIG. 4.33 – Distribution énergétique de réflecteurs sur les toits de bâtiments latéraux.

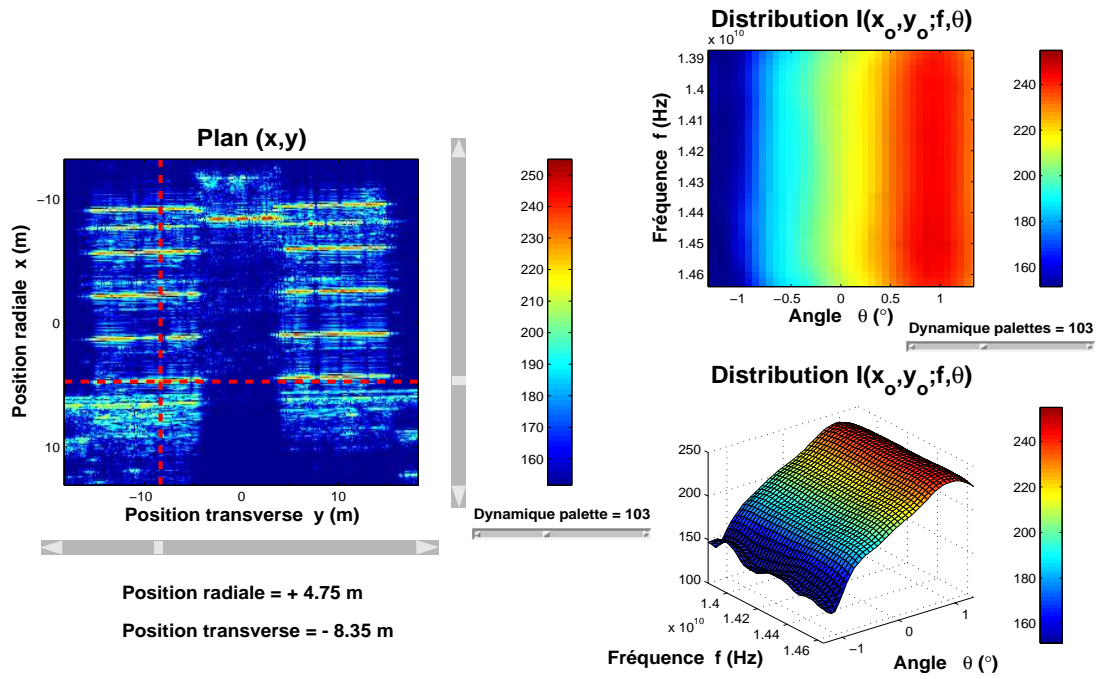


(a) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en (1.25 m, -5 m).

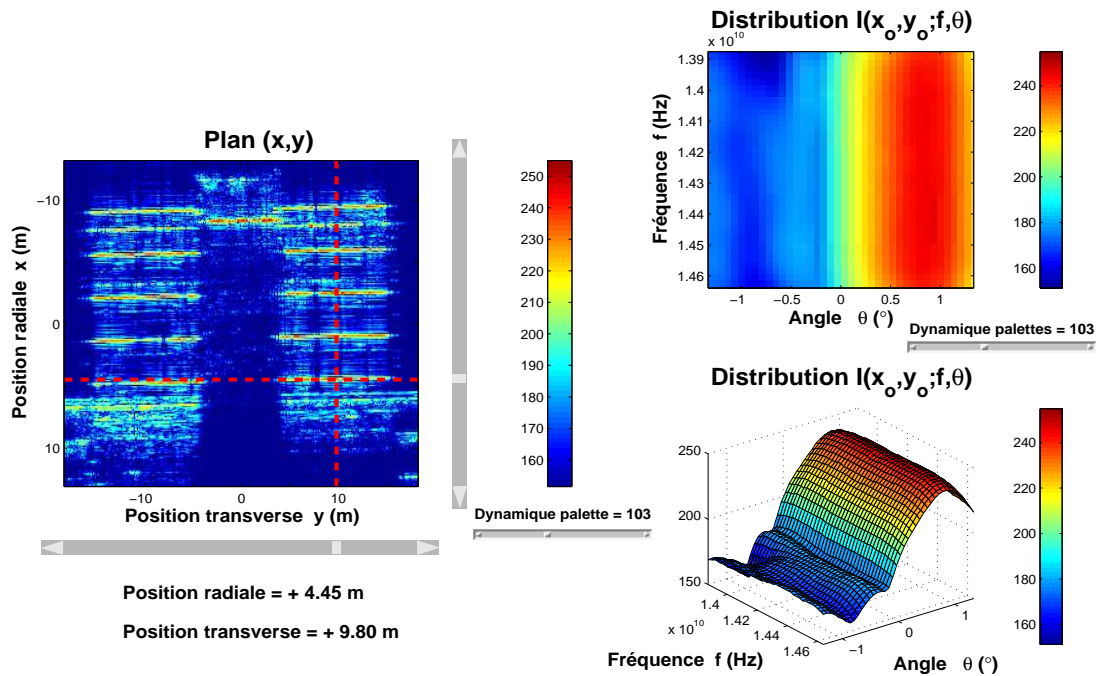


(b) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en (1 m, 6 m).

FIG. 4.34 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

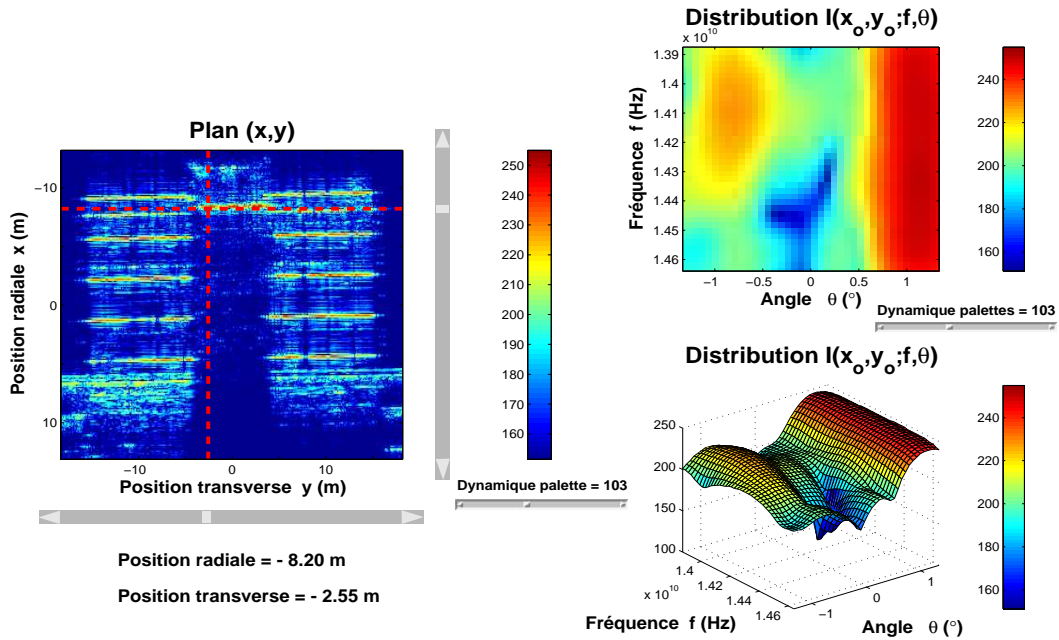


(a) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en (4.75 m, -8.35 m).

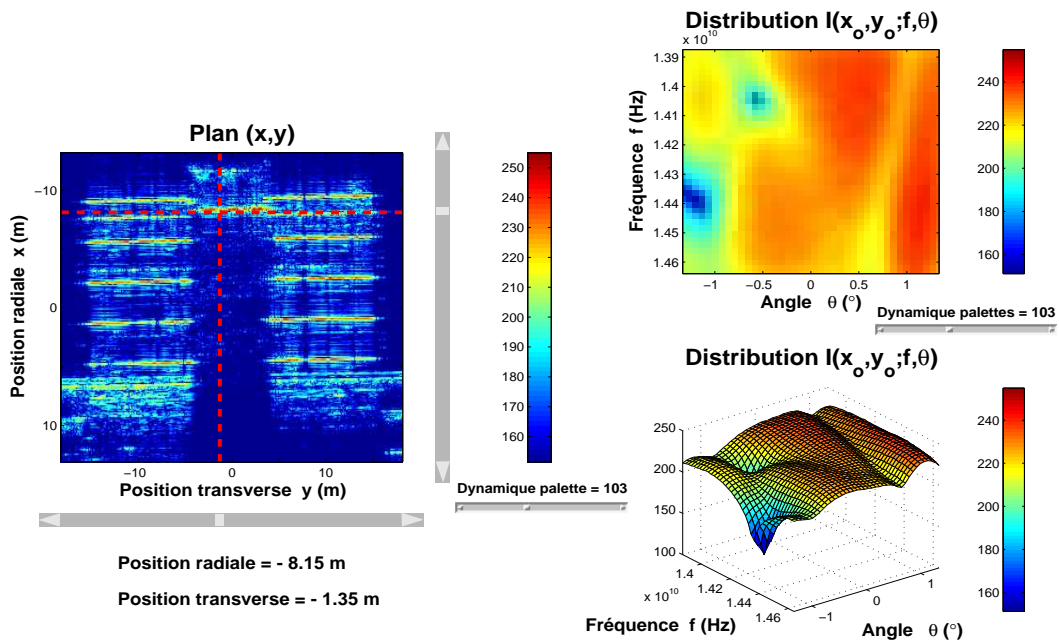


(b) Distribution du réflecteur situé sur le sommet d'un bâtiment en (4.45 m, 9.80 m).

FIG. 4.35 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

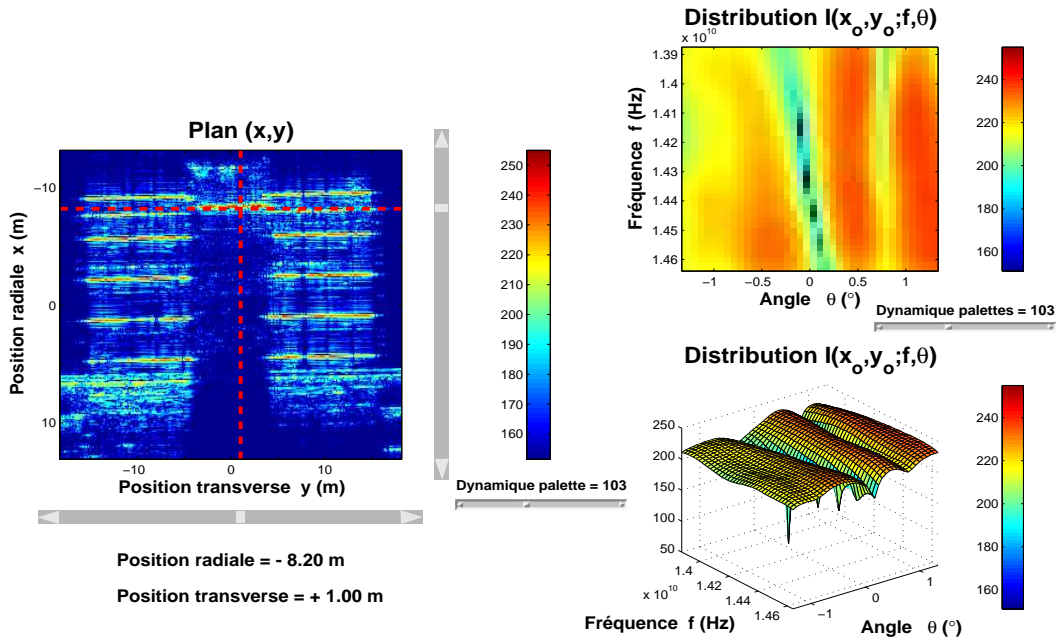


(a) Distribution du réflecteur en $(-8.20 \text{ m}, -2.55 \text{ m})$ sur l'arête du bâtiment central.

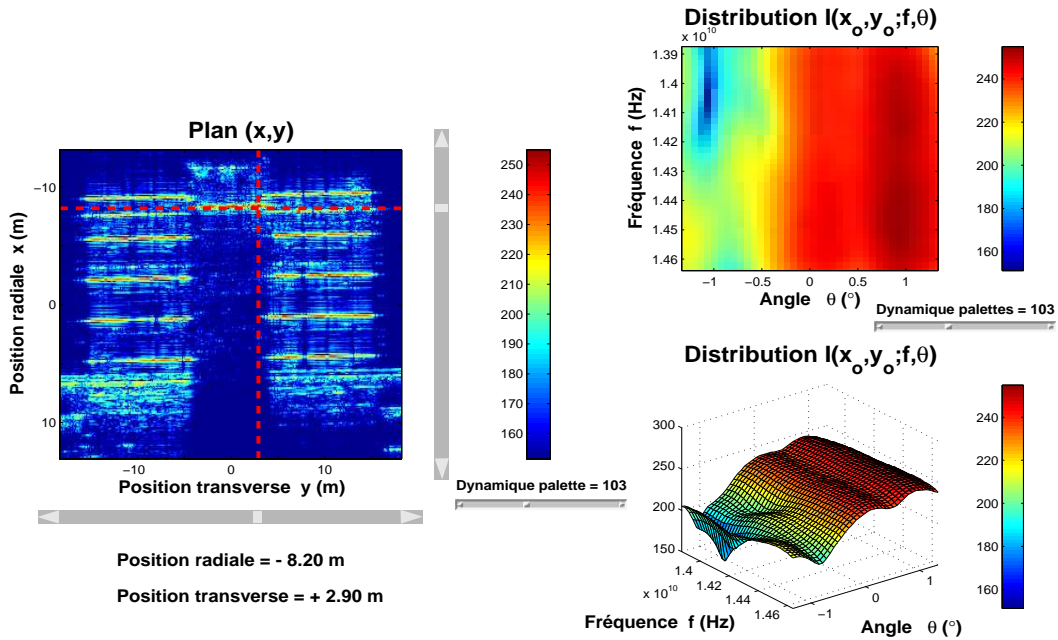


(b) Distribution du réflecteur en $(8.15 \text{ m}, -1.35 \text{ m})$ sur l'arête du bâtiment central.

FIG. 4.36 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'arête du bâtiment central.



(a) Distribution du réflecteur en $(-8.20 \text{ m}, 1 \text{ m})$ sur l'arête du bâtiment central.

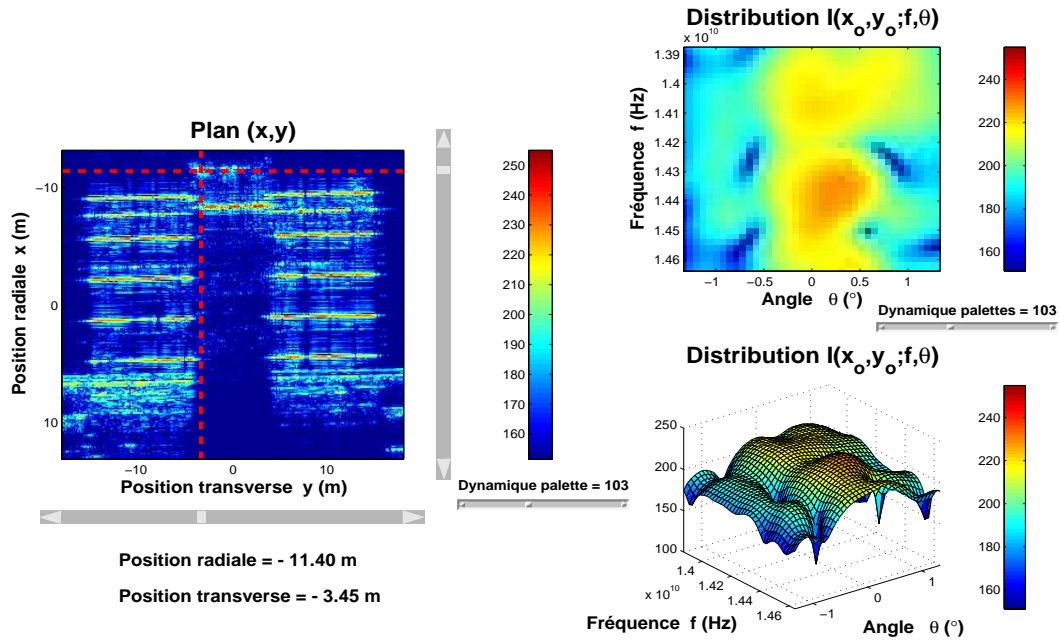


(b) Distribution du réflecteur en $(-8.20 \text{ m}, 2.90 \text{ m})$ sur l'arête du bâtiment central.

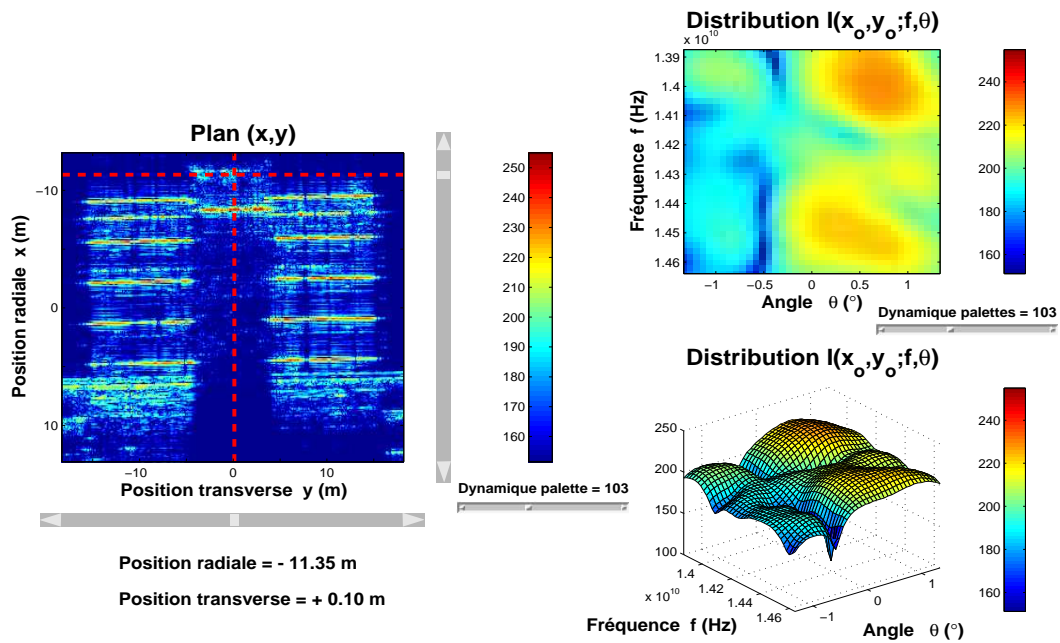
FIG. 4.37 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'arête du bâtiment central.

c/ Réflecteurs sur le sol

Enfin, les figures 4.38, 4.39 et 4.40 mettent en évidence la distribution d'énergie de réflecteurs sur le sol en périphérie du bloc de bâtiments. Comme les réflecteurs de l'arête du bâtiment central étudiés au paragraphe précédent, ces réflecteurs ont une répartition d'énergie différente de celle des réflecteurs appartenant aux sommets des bâtiments latéraux.

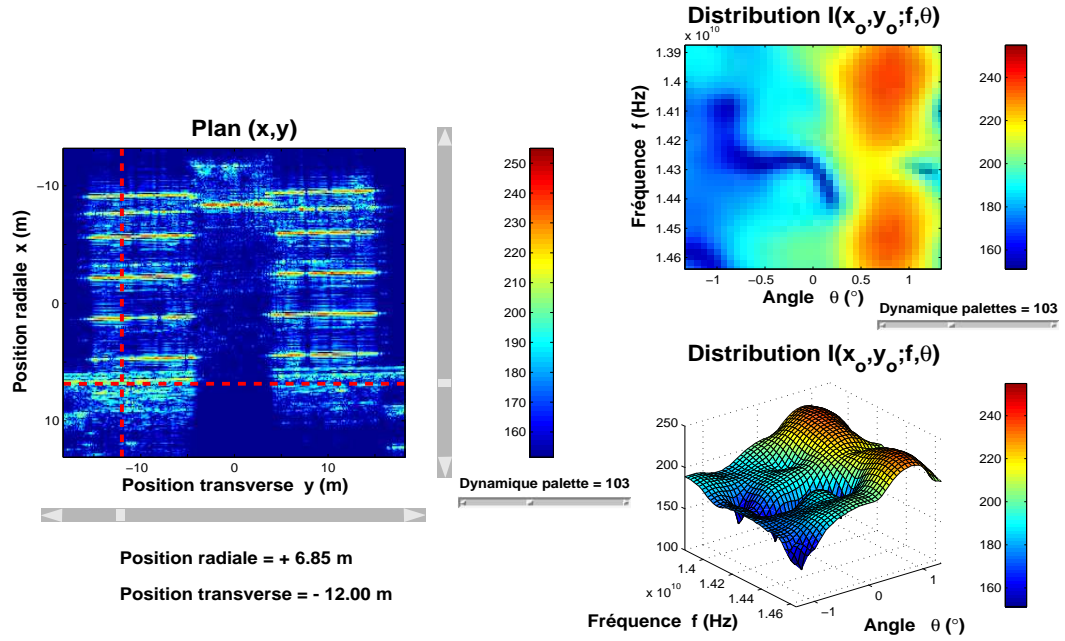


(a) Distribution du réflecteur en $(-11.40 \text{ m}, -3.45 \text{ m})$ à la périphérie du bloc de bâtiments.

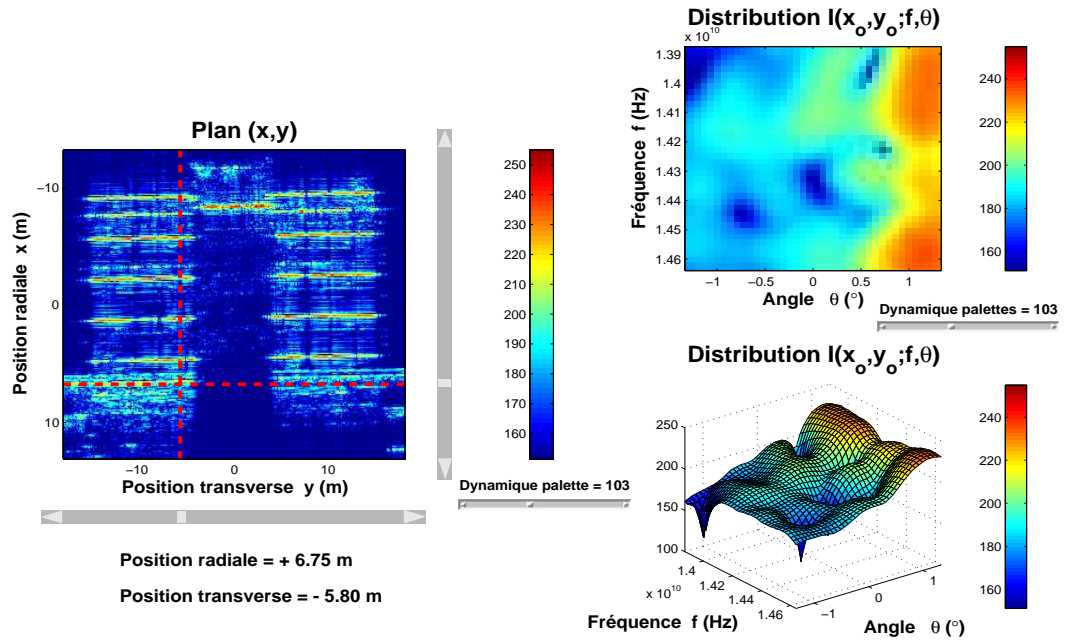


(b) Distribution du réflecteur en $(-11.35 \text{ m}, 0.10 \text{ m})$ à la périphérie du bloc de bâtiments.

FIG. 4.38 – Distribution énergétique de réflecteurs à la périphérie du bloc de bâtiments.

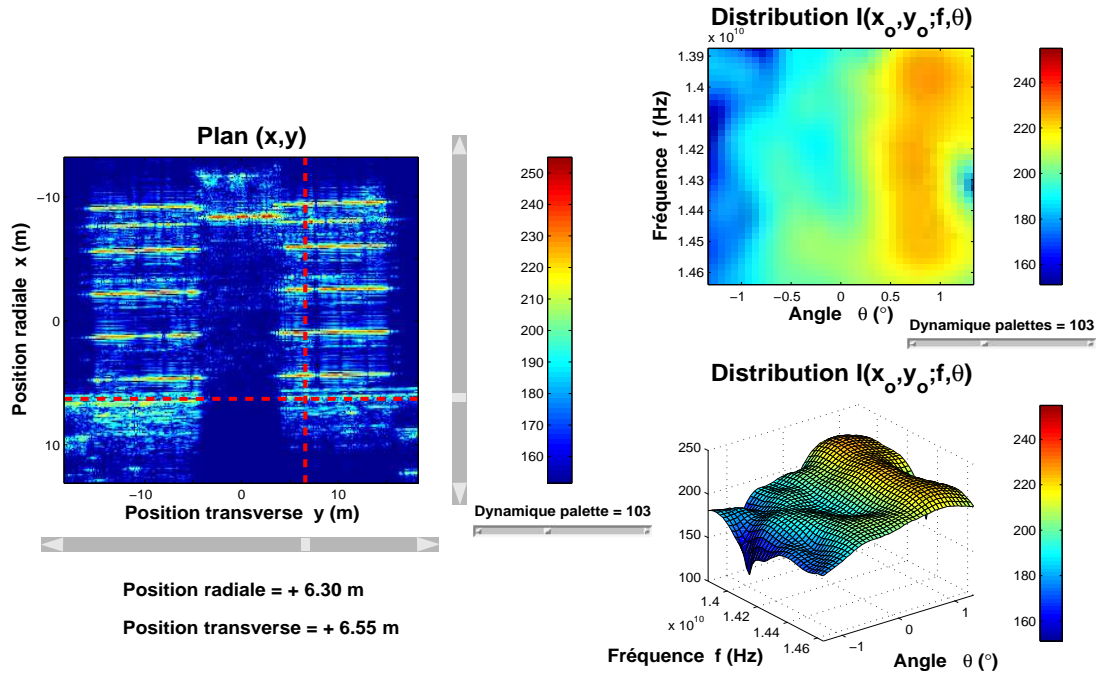


(a) Distribution du réflecteur en (6.85 m, -12 m) à la périphérie du bloc de bâtiments.

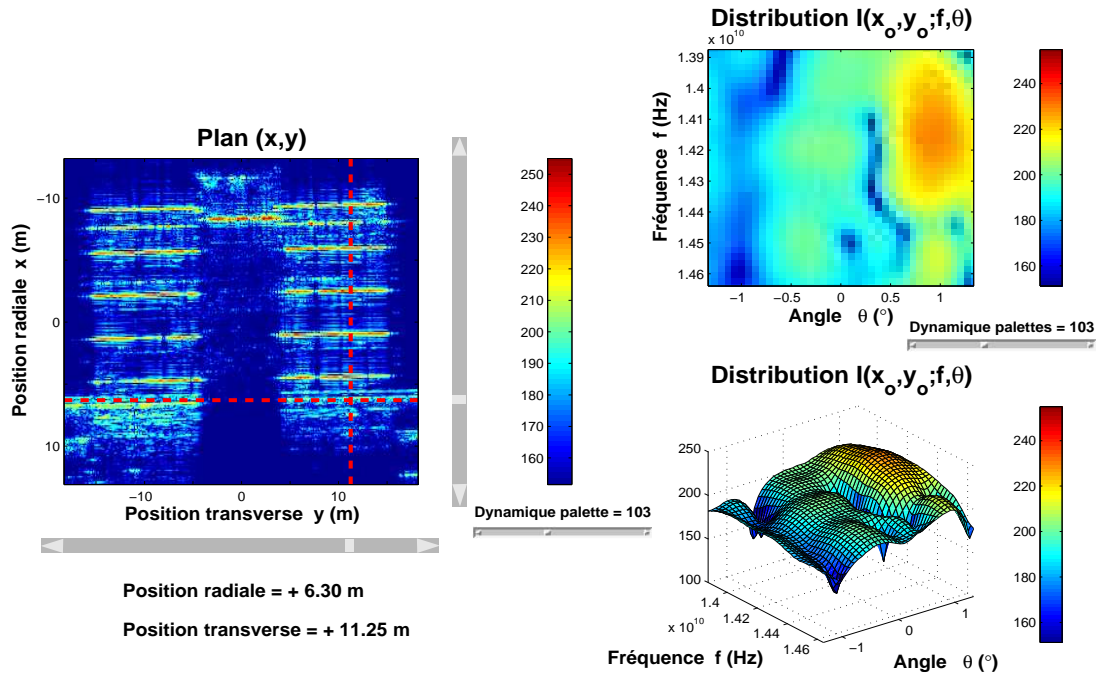


(b) Distribution du réflecteur en (6.75 m, -5.80 m) à la périphérie du bloc de bâtiments.

FIG. 4.39 – Distribution énergétique de réflecteurs à la périphérie du bloc de bâtiments.



(a) Distribution du réflecteur en (6.30 m, 6.55 m) à la périphérie du bloc de bâtiments.



(b) Distribution du réflecteur en (6.30 m, 11.25 m) à la périphérie du bloc de bâtiments.

FIG. 4.40 – Distribution énergétique de réflecteurs à la périphérie du bloc de bâtiments.

4.2. Comparaison de répartitions d'énergie de différents réflecteurs d'une image.

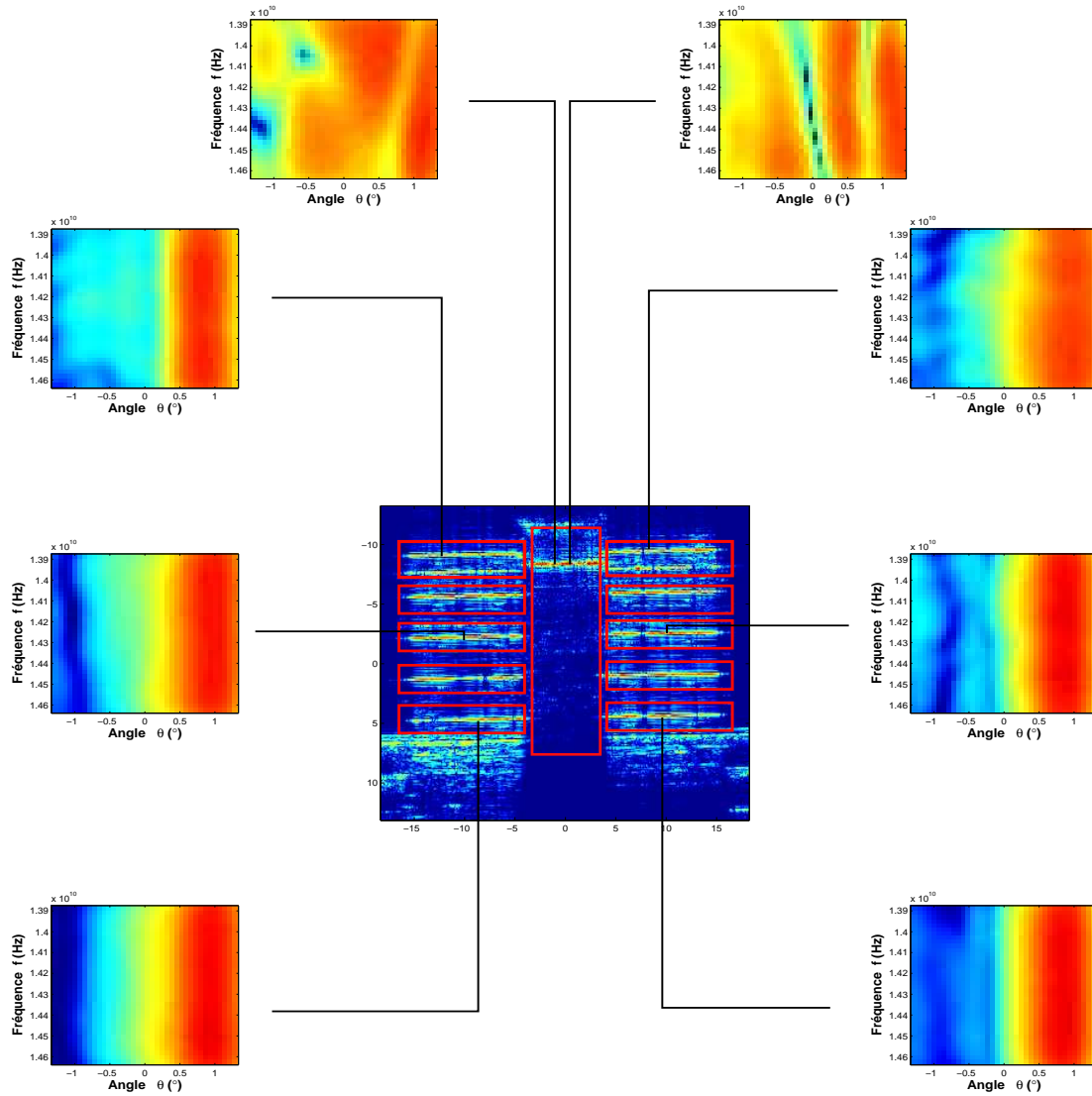


FIG. 4.41 – Différence significative entre la répartition d'énergie des réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux et celle des réflecteurs sur l'arête du bâtiment central.

4.2.4 Premières conclusions

On peut, d'ores et déjà, tirer quelques points de conclusions : la répartition d'énergie des réflecteurs nous renseigne sur la géométrie de l'objet qui contient ces réflecteurs. En effet, dans la première étude, les réflecteurs sur le tuyau métallique et sur l'arête du bâtiment sont très directifs (ils renvoient essentiellement de l'énergie autour d'un angle d'illumination bien particulier). Ce caractère directif est sans doute dû à la géométrie filiforme de ces deux objets. D'autre part, la distribution de ces mêmes réflecteurs (tuyau et arête) diffère significativement de celle de réflecteurs localisés sur le toit du bâtiment. De plus, la distribution de certains réflecteurs sur le toit est similaire à celle d'un trièdre ou à celle de réflecteurs appartenant aux cuves de la seconde image analysée : ceci suggère de la présence d'objets sur le toit.

D'autre part, en observant les résultats des trois études, on se rend compte que la réponse énergétique des réflecteurs varie surtout en angle. En effet, dans la première étude, la réponse énergétique des réflecteurs du tuyau se concentre dans un petit secteur angulaire où, certes, le niveau d'énergie varie en fonction de la fréquence mais cette variation est moins marquée que la dépendance en angle. Toujours dans cette première étude, la réponse énergétique de réflecteurs sur l'arête du bâtiment se localise, de même, autour d'une valeur d'angle particulière mais se distribue de manière assez homogène dans la bande fréquentielle. Ce type de répartition énergétique est observé également chez les réflecteurs dans la seconde image situés sur la passerelle et sur l'escalier et chez les réflecteurs, dans la dernière image, situés sur le toit des bâtiments latéraux.

Compte-tenu de ces précédentes observations et remarques, on est en droit de se poser la question suivante : peut-on identifier, autrement dit, extraire un objet d'une image connaissant la distribution énergétique des réflecteurs qui composent l'image ? Pour répondre à cette question, nous proposons un algorithme d'extraction d'objets et présentons les résultats qui en découlent dans le paragraphe suivant.

4.3 Algorithme d'extraction d'objets et résultats.

Nous abordons, à présent, ce qui constitue le point le plus important de ce chapitre, à savoir tenter d'extraire un objet dans l'image SAR grâce à l'analyse en ondelettes. L'idée que nous proposons est de se fixer, parmi les distributions d'énergie des réflecteurs composant l'objet, une distribution d'énergie susceptible d'être caractéristique de l'objet à extraire : cette distribution devient, de fait, une *distribution de référence*. Il s'agit, ensuite, de *corrél*er cette distribution de référence avec celle de tous les réflecteurs de l'image : le résultat escompté, est, bien sûr, de ne trouver une forte corrélation qu'avec la distribution énergétique des réflecteurs composant l'objet à distinguer.

4.3.1 Algorithme d'extraction d'objets.

On part de l'idée que la caractéristique énergétique essentielle d'un réflecteur se situe dans une dynamique restreinte de sa distribution énergétique. C'est pourquoi, préalablement, on effectue un seuillage sur la distribution d'énergie de tous les réflecteurs de l'image. On fixe, pour cela, une dynamique Δ_{dB} identique pour toutes les distributions d'énergie : le seuil, pour chaque distribution, est fixée à $-\Delta_{dB}$ du maximum de cette distribution. Ce seuillage préalable se présente algorithmiquement de la manière suivante :

Pour chaque pixel de coordonnées (x_i, y_j) ; $(i, j) \in [1, N_x] \times [1, N_y]$

$$I_{i,j}^{Max} := \max_{f,\theta} [I(x_i, y_j; f, \theta)]$$

$$\text{Si } \left(I(x_i, y_j; f, \theta) \leq I_{i,j}^{Max} 10^{-(\Delta_{dB}/20)} \right)$$

$$I(x_i, y_j; f, \theta) := 0$$

Fin

Fin.

Après, cette procédure de seuillage, il s'agit d'appliquer l'algorithme suivant :

- (1) Sélectionner un pixel de coordonnées (x_{ref}, y_{ref}) dans l'image, susceptible de correspondre à la localisation d'un réflecteur appartenant à l'objet à extraire : $I(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta)$ représente, alors, une distribution énergétique de référence.
- (2) Calculer, ensuite, la fonction de corrélation bidimensionnelle mettant en jeu la distribution de référence et la distribution $\{I(x_i, y_j; f, \theta) ; (i, j) \in [1, N_x] \times [1, N_y]\}$ des autres réflecteurs de l'image :

Pour $i := 1$ to N_x

Pour $j := 1$ to N_y

$$C_{ref}(i, j) := \frac{\int I(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta) I(x_i, y_j; f, \theta) df d\theta}{\sqrt{E_{ref}} \sqrt{E_{i,j}}}$$

Fin

Fin

où $E_{ref} = \int |I(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta)|^2 df d\theta$ et $E_{i,j} = \int |I(x_i, y_j; f, \theta)|^2 df d\theta$ sont des termes de normalisation permettant d'avoir $C_{ref} \in [0, 1]$.

On propose d'appliquer l'algorithme au moyen d'une interface graphique. Le paragraphe suivant présente des résultats issus de cet algorithme pour plusieurs types d'objets : tuyau métallique, cuves, passerelle, escalier, toits de bâtiments.

4.3.2 Résultats d'extraction d'objets.

L'algorithme d'extraction d'objets est appliqué au moyen d'une interface graphique qui se présente de la manière suivante (voir figure 4.43) :

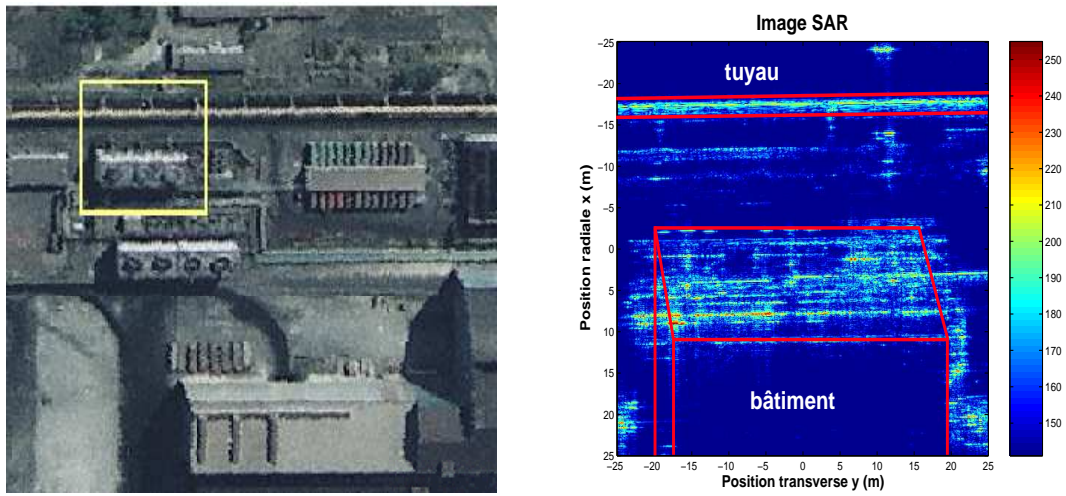
- La sélection, dans le plan (x, y) d'un pixel de coordonnées (x_{ref}, y_{ref}) s'effectue dans le premier cadran supérieur gauche. L'utilisateur sélectionne un pixel qui correspond à la localisation d'un réflecteur appartenant à l'objet que l'on souhaite extraire. Pour des raisons de clarté vis à vis du lecteur, on a inséré l'image SAR initial dans le fond de ce cadran.
- Les deux cadrans inférieurs mettent en lumière la distribution énergétique du réflecteur sélectionné représentée respectivement dans le plan et dans l'espace. Cette distribution constitue la distribution de référence.
- La barre de glissement central permet de fixer la dynamique Δ_{dB} qui détermine le niveau de seuillage appliqué à la distribution d'énergie des réflecteurs de l'image.
- Enfin, la carte de corrélation calculée est présentée dans le cadran supérieur droit.

a/ Extraction du tuyau métallique

La première étude concerne, donc, l'image constituée du bâtiment et du tuyau. Les figures 4.42 (a) et 4.42 (b) présentent respectivement une photo aérienne et l'image SAR contenant le bâtiment et le tuyau.

L'objectif, en appliquant l'algorithme, est d'extraire le tuyau. Des résultats, correspondants à différentes distributions énergétiques de référence susceptibles d'être caractéristiques du tuyau, sont présentés dans ce paragraphe :

- En figure 4.43, on applique l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17.20 \text{ m}, -12.30 \text{ m})$ comme référence. La figure 4.44 illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
- En figure 4.45, on applique l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17 \text{ m}, -9.45 \text{ m})$ comme référence. La figure 4.46 illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.



(a) Photographie aérienne de la région. (b) Image SAR contenant le tuyau à extraire.

FIG. 4.42 – Le tuyau constitue l'objet à extraire.

- En figure 4.47, on applique l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17.45 \text{ m}, -6.15 \text{ m})$ comme référence. La figure 4.48 illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
- En figure 4.49, on applique l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17.30 \text{ m}, -2.40 \text{ m})$ comme référence. La figure 4.50 illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

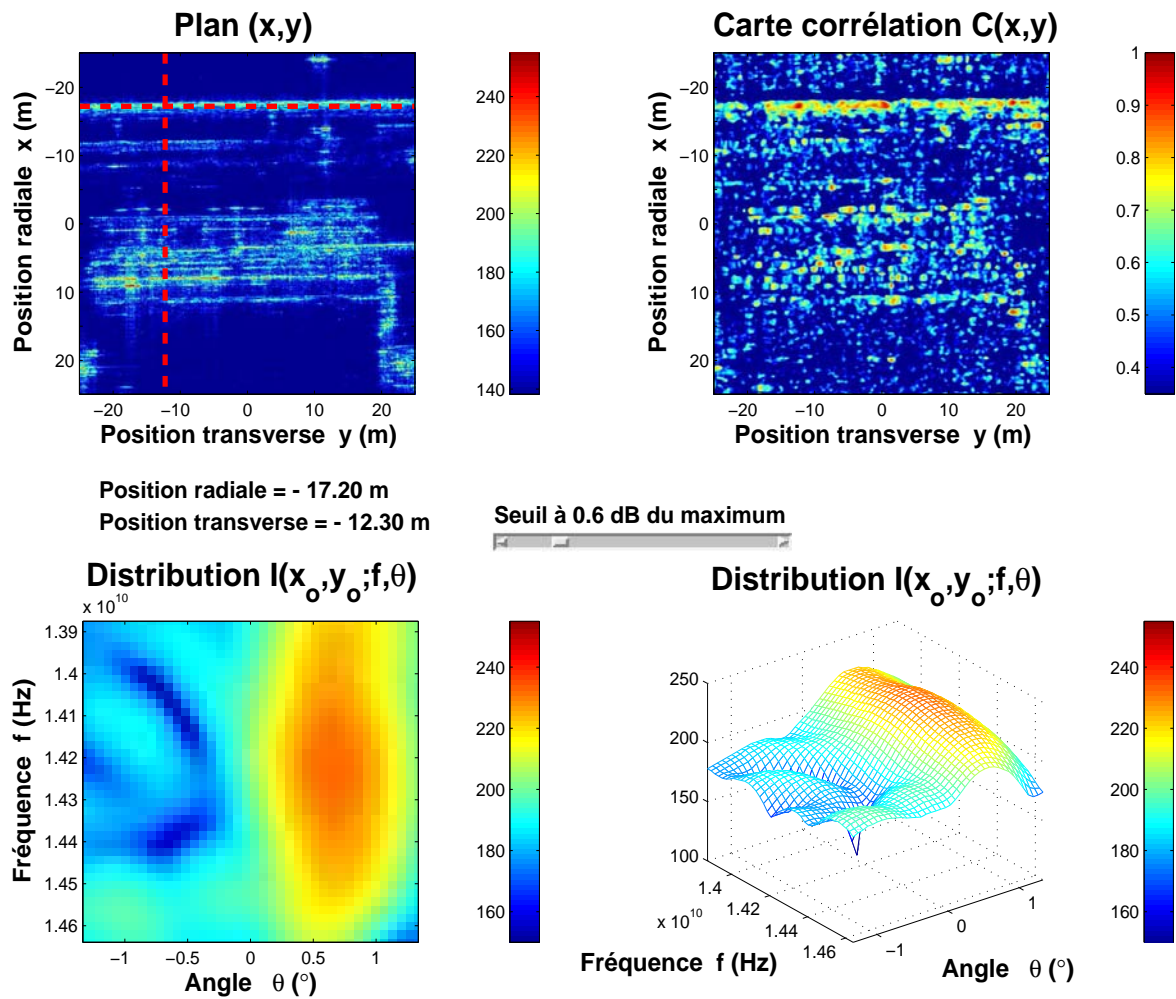
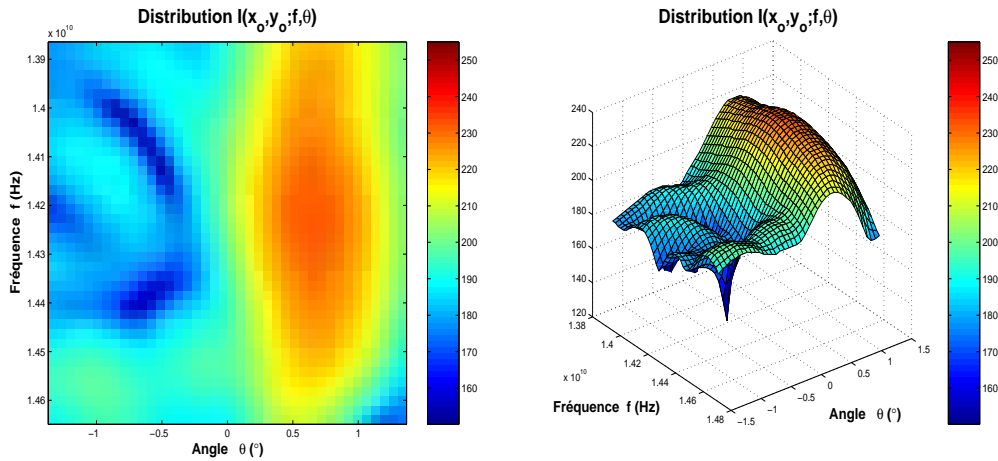
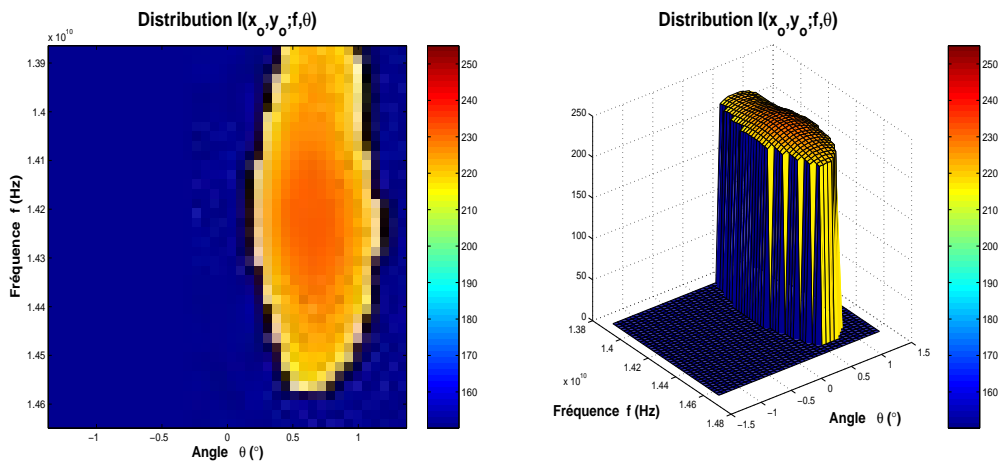


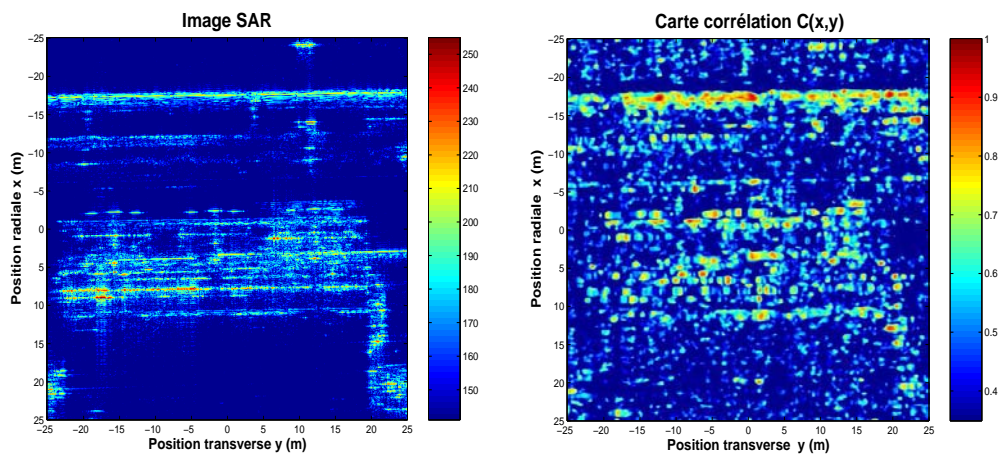
FIG. 4.43 – Extraction du tuyau en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17.20 \text{ m}, -12.30 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.6 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.44 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.6$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

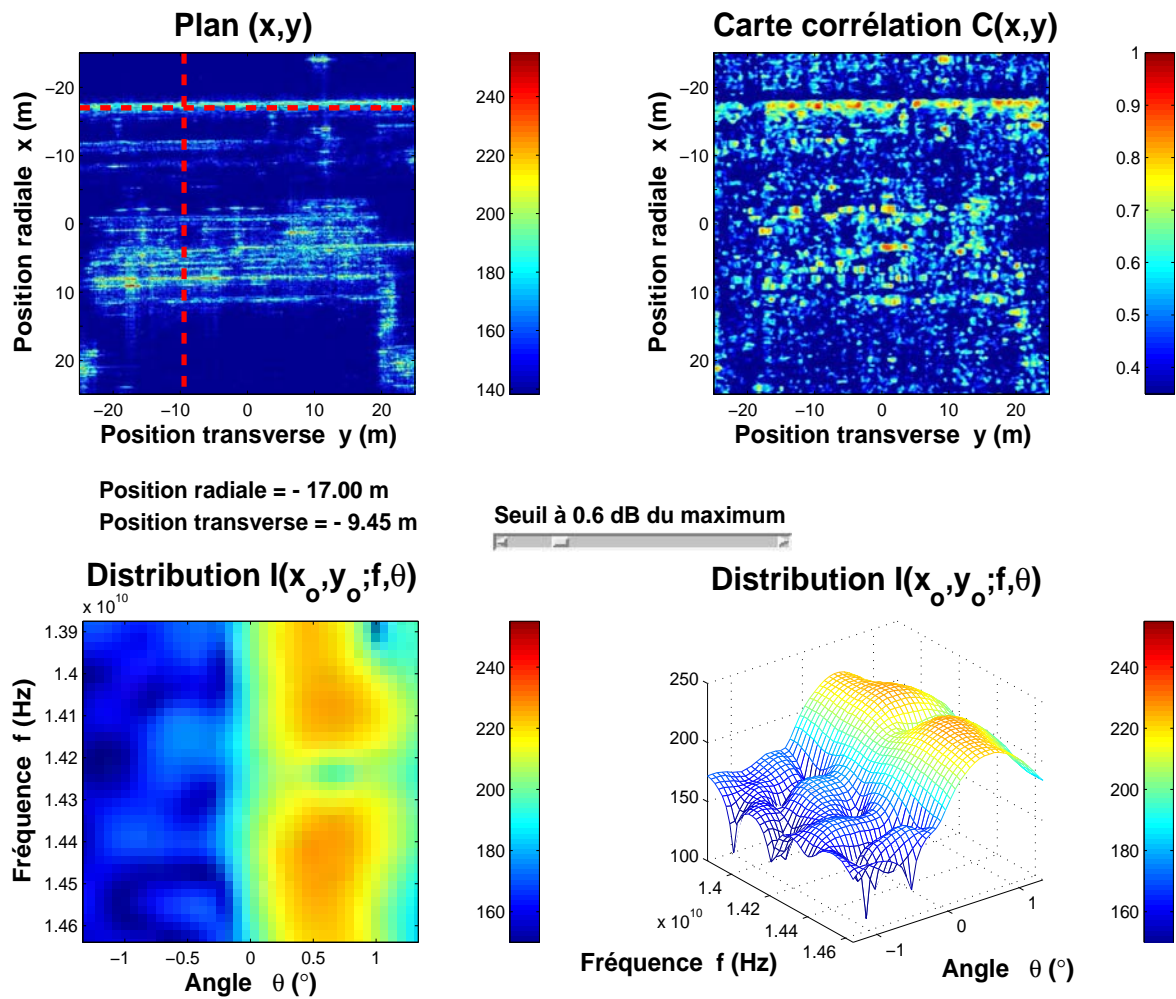
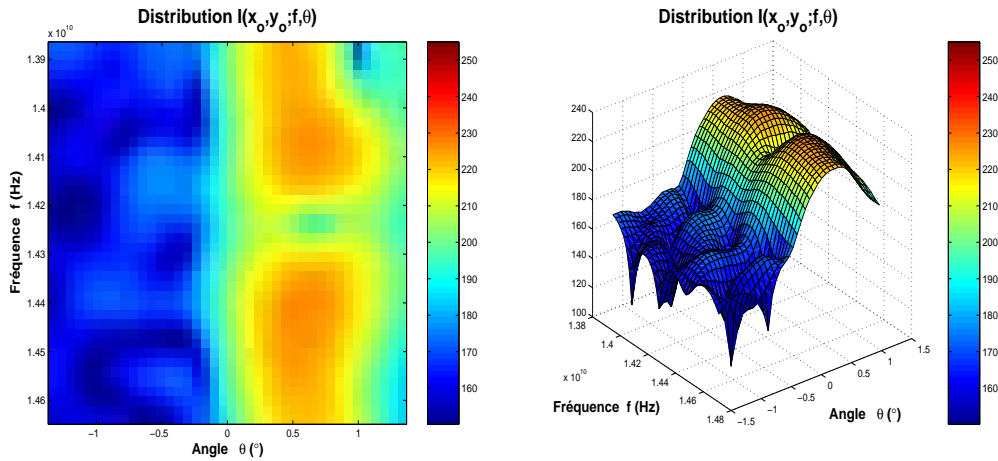
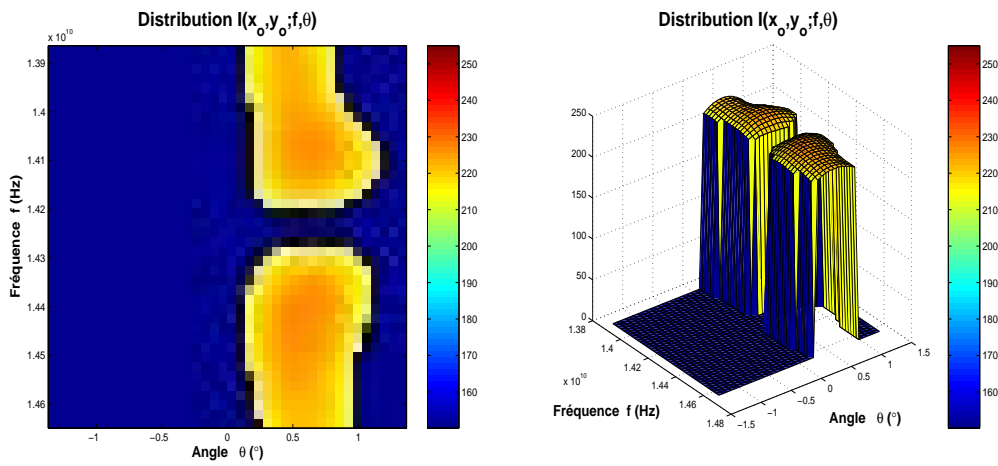


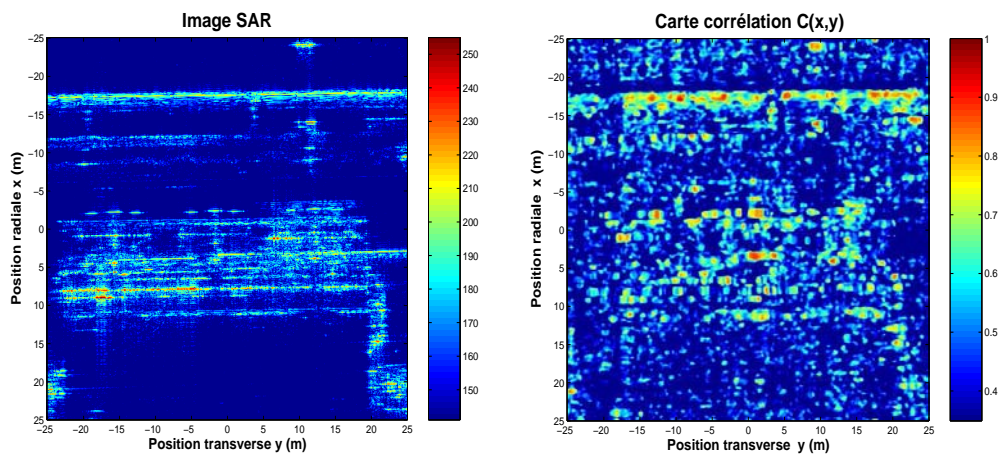
FIG. 4.45 – Extraction du tuyau en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17 \text{ m}, -9.45 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.6 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.46 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.6$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

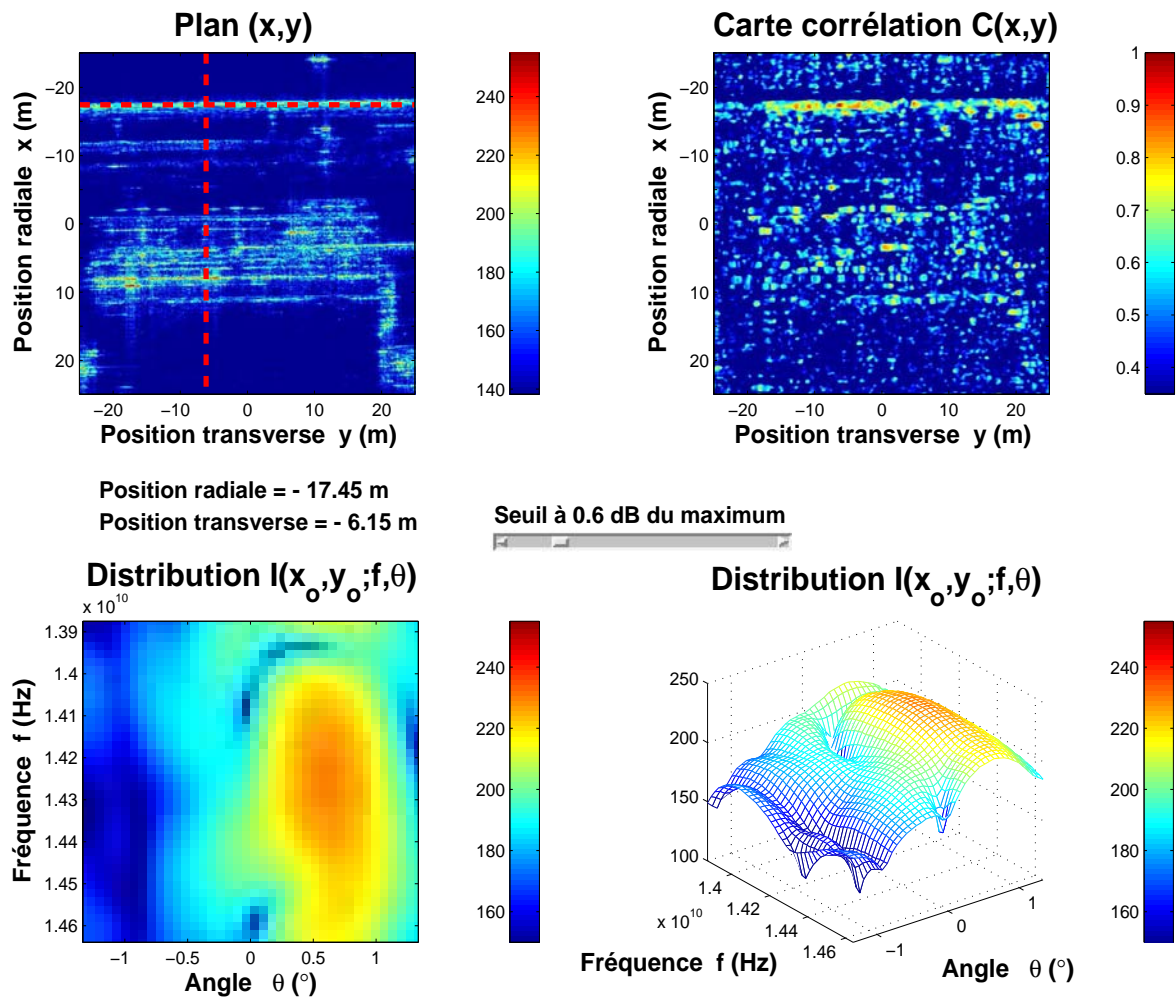
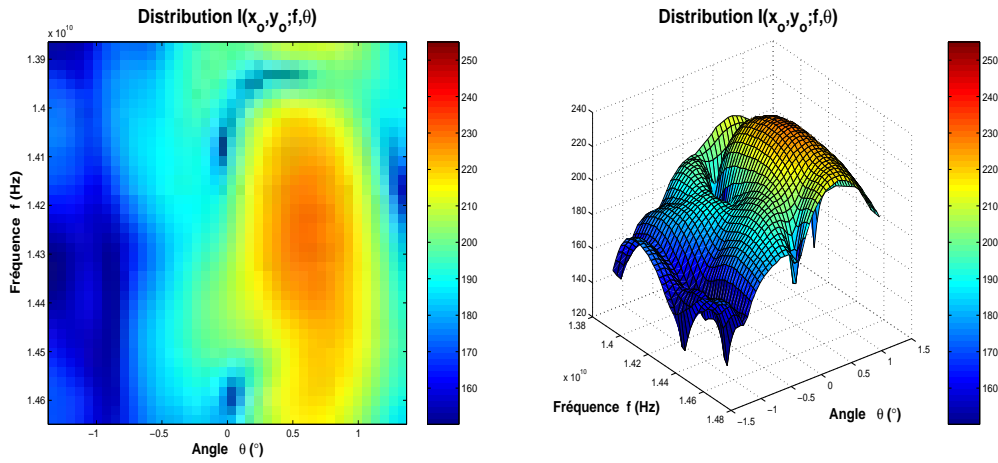
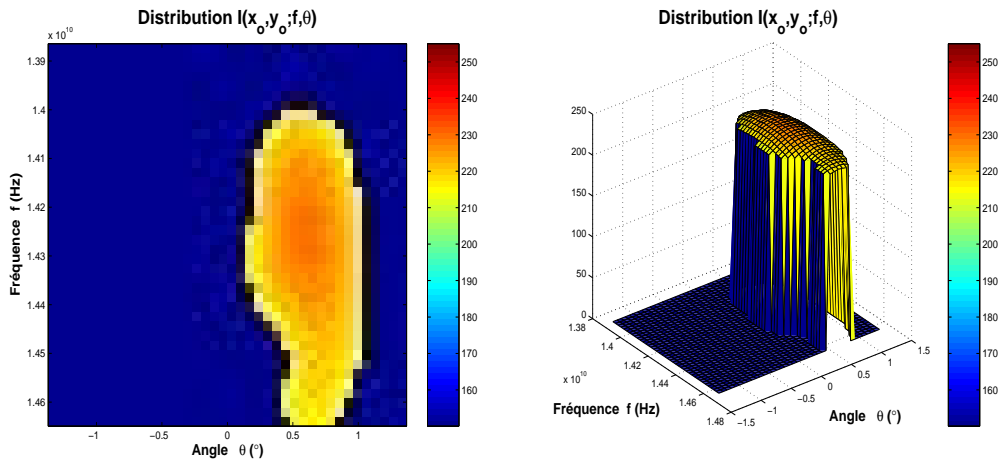


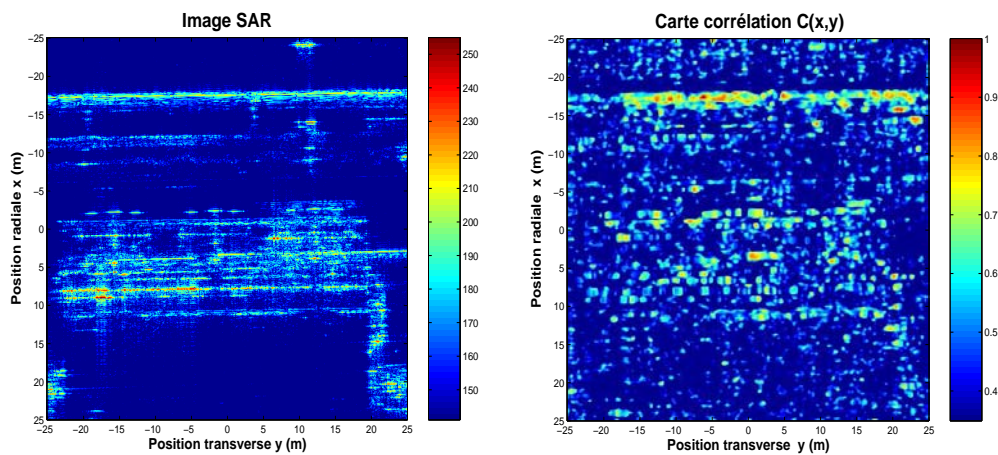
FIG. 4.47 – Extraction du tuyau en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17.45 \text{ m}, -6.15 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.6 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.48 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.6$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

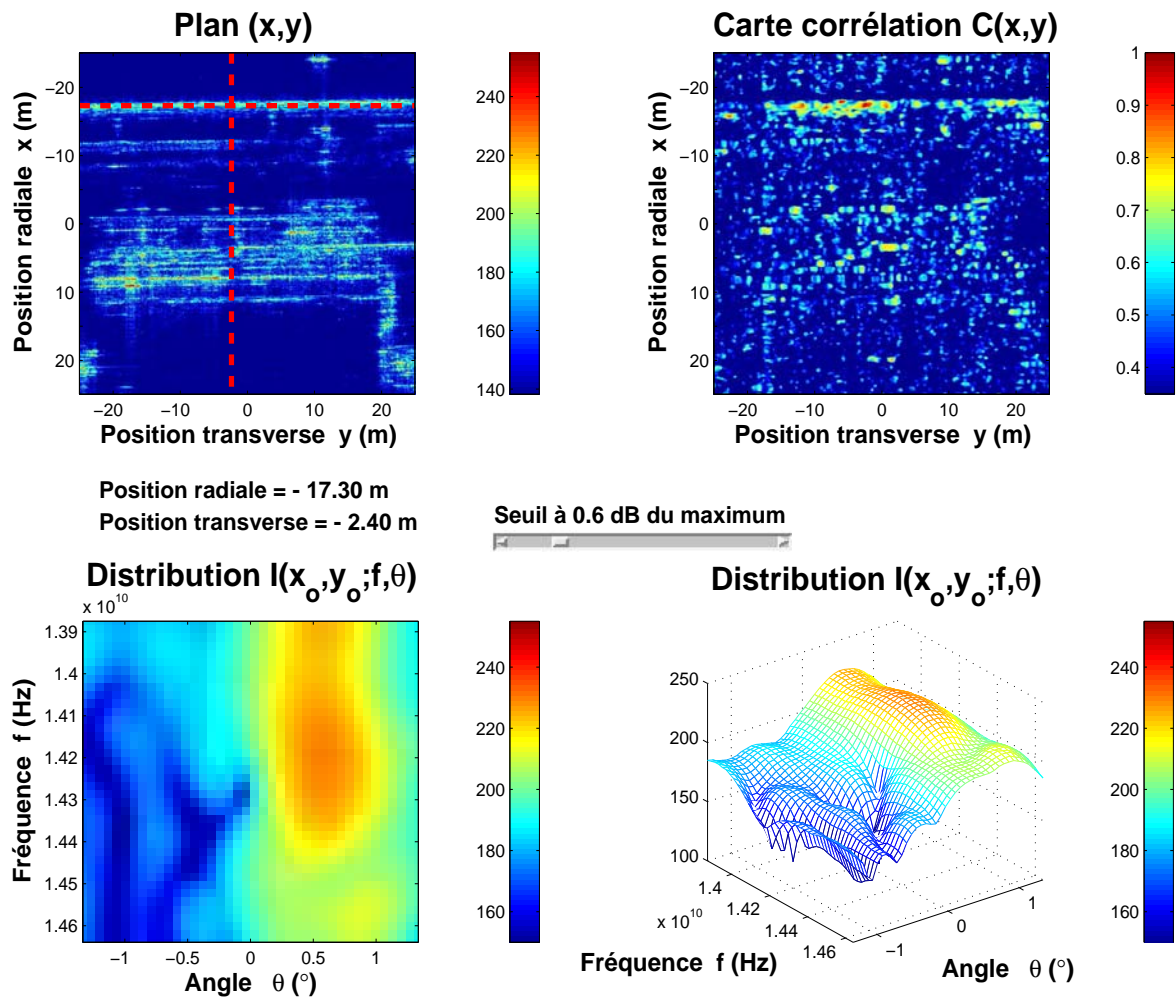
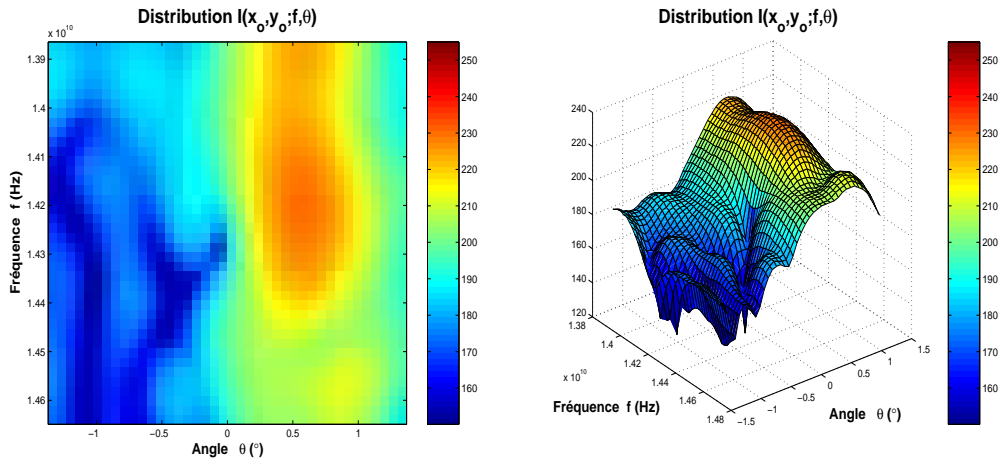
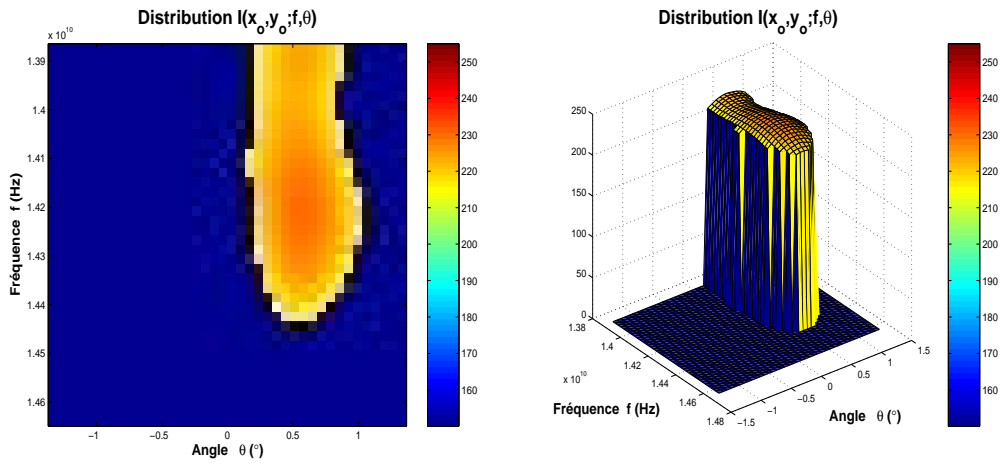


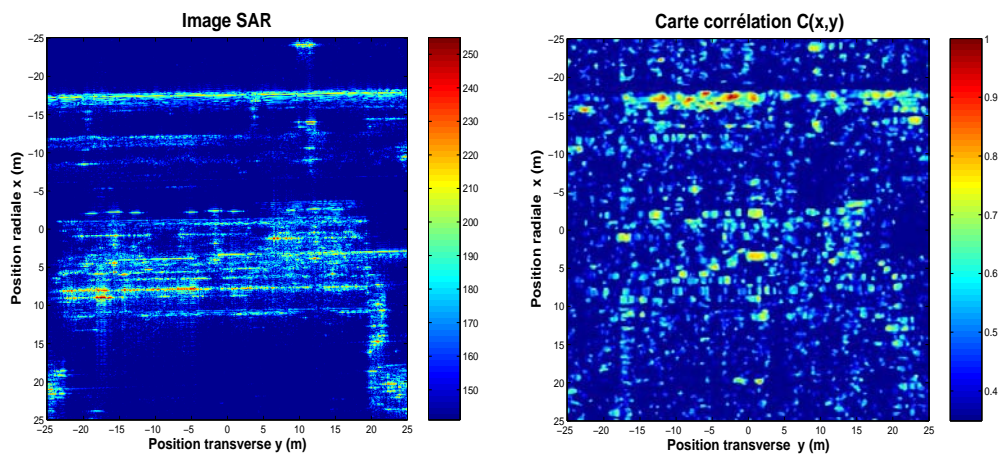
FIG. 4.49 – Extraction du tuyau en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-17.30 \text{ m}, -2.40 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.6 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.50 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.6$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

b/ Extraction de la paire de cuves, de la passerelle et l'escalier

La seconde étude concerne l'image contenant deux cuves, une passerelle et un escalier. Les figures 4.51 (a) et 4.51 (b) présentent respectivement une photo aérienne et l'image SAR contenant ces objets à extraire.

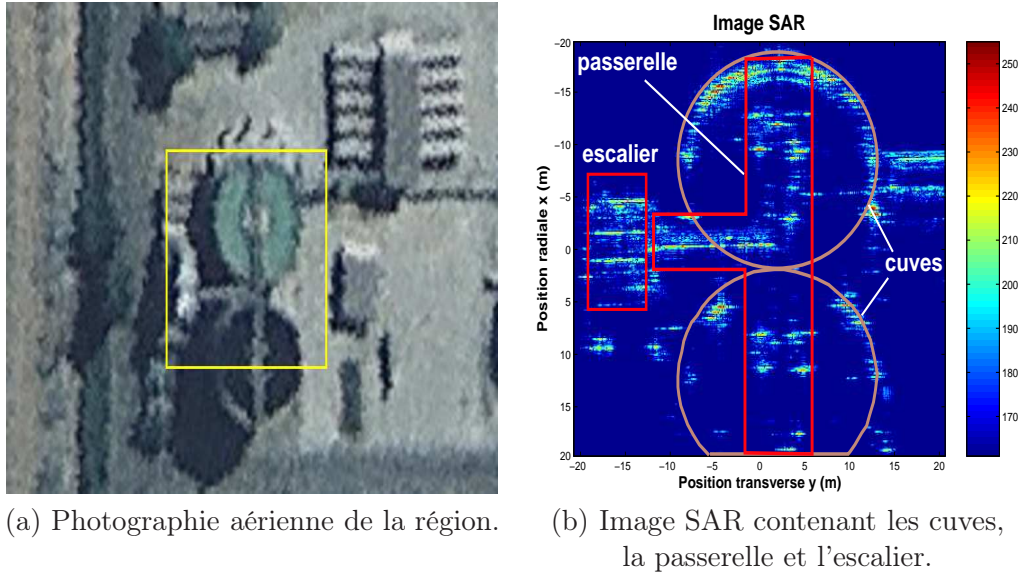


FIG. 4.51 – La paire de cuves, la passerelle et l'escalier constituent les objets à extraire.

Les résultats se présentent de la manière suivante :

- Pour tenter d'extraire la paire de cuves, on applique, à travers la figure (4.52), l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur la cuve supérieure en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-14.45 \text{ m}, 10.05 \text{ m})$ comme référence. La figure (4.53) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
- Pour tenter d'extraire la passerelle, on applique l'algorithme en choisissant deux distributions de référence :
 - en figure (4.54), la distribution du réflecteur localisé en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-9.35 \text{ m}, 0.20 \text{ m})$ sur la passerelle est prise comme référence. La figure (4.55) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
 - en figure (4.56), la distribution du réflecteur localisé en $(x_{ref}, y_{ref}) = (8.25 \text{ m}, 0.10 \text{ m})$ sur la passerelle est prise comme référence. La figure (4.57) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.

- Pour tenter d'extraire l'escalier, on applique l'algorithme en choisissant deux distributions de référence :
 - en figure (4.58), la distribution du réflecteur localisé en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-4.60 \text{ m}, -13.40 \text{ m})$ sur l'escalier est prise comme référence. La figure (4.59) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
 - en figure (4.60), la distribution du réflecteur localisé en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-1.45 \text{ m}, -15.50 \text{ m})$ sur l'escalier est prise comme référence. La figure (4.61) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.

- Enfin, pour tenter d'extraire une partie de la courbure gauche des cuves, on applique l'algorithme en choisissant deux distributions de référence :
 - en figure (4.62), la distribution du réflecteur localisé en $(x_{ref}, y_{ref}) = (5.95 \text{ m}, -4.40 \text{ m})$ sur la cuve inférieure est prise comme référence. La figure (4.63) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
 - en figure (4.64), la distribution du réflecteur localisé en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-14.65 \text{ m}, -5.80 \text{ m})$ sur la cuve supérieure est prise comme référence. La figure (4.65) illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

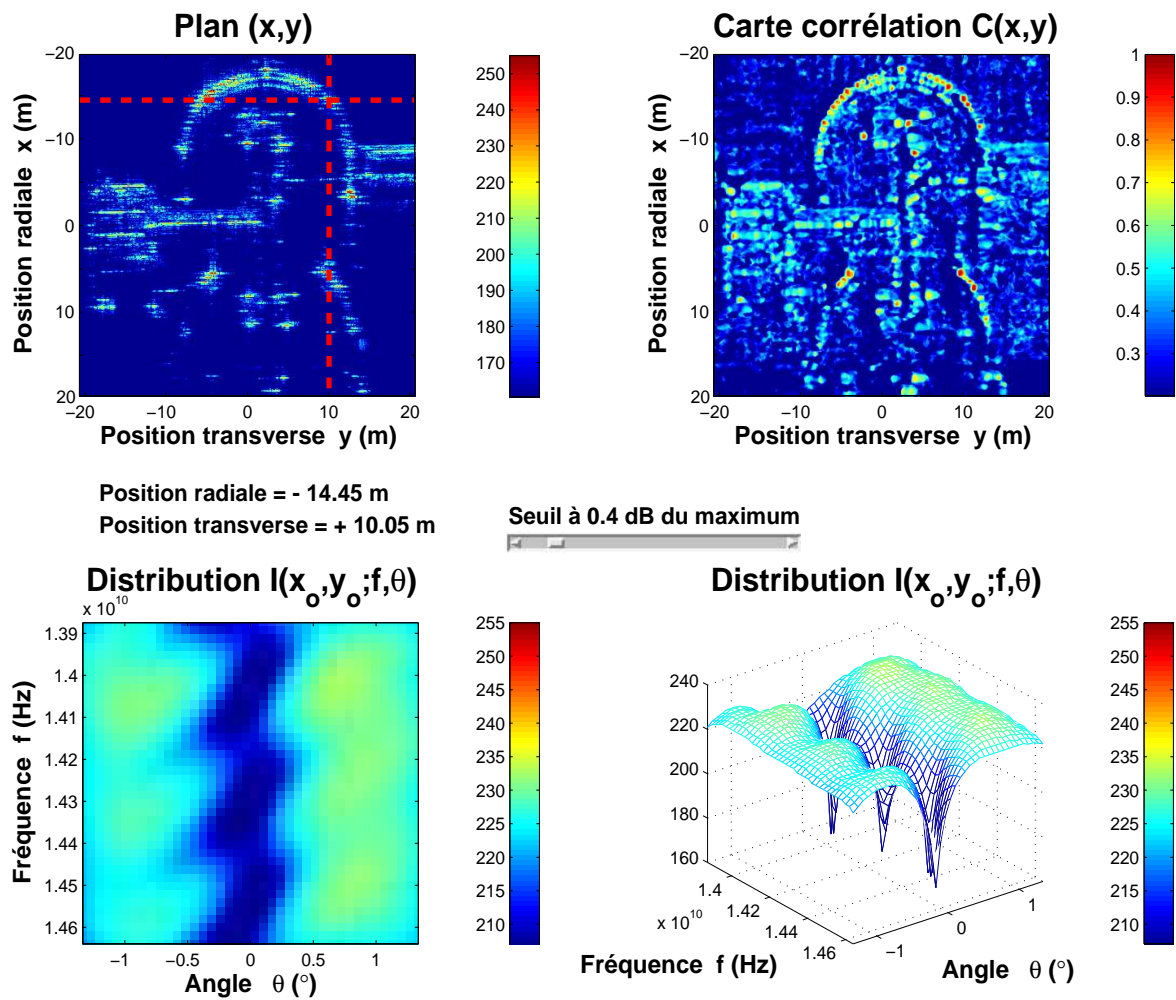
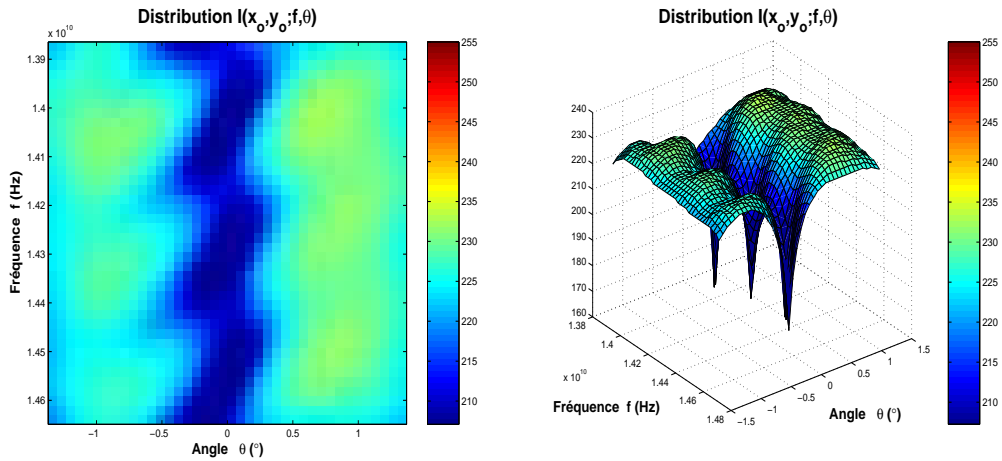
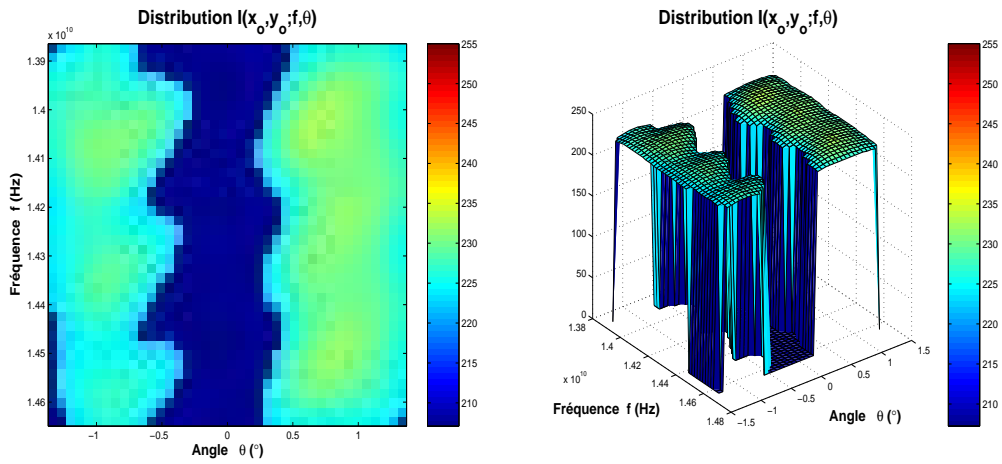


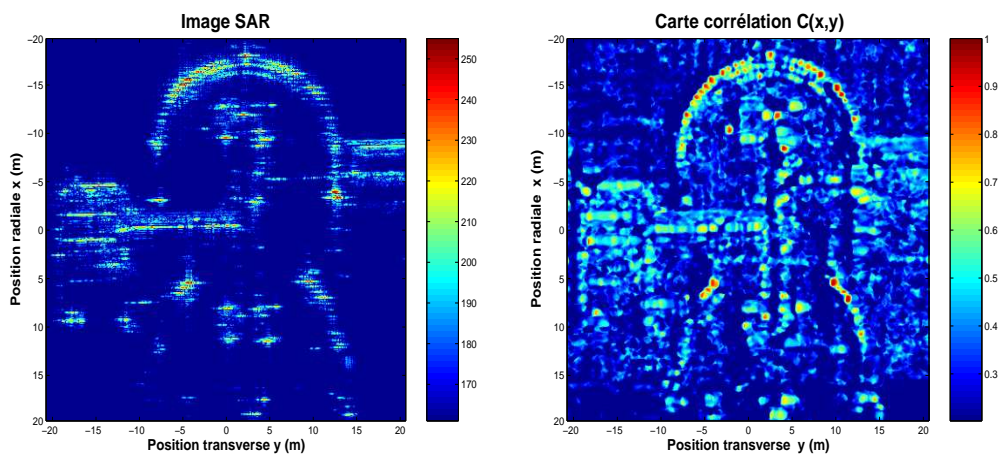
FIG. 4.52 – Extraction de la paire de cuves en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-14.45 \text{ m}, 10.05 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.6 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.53 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

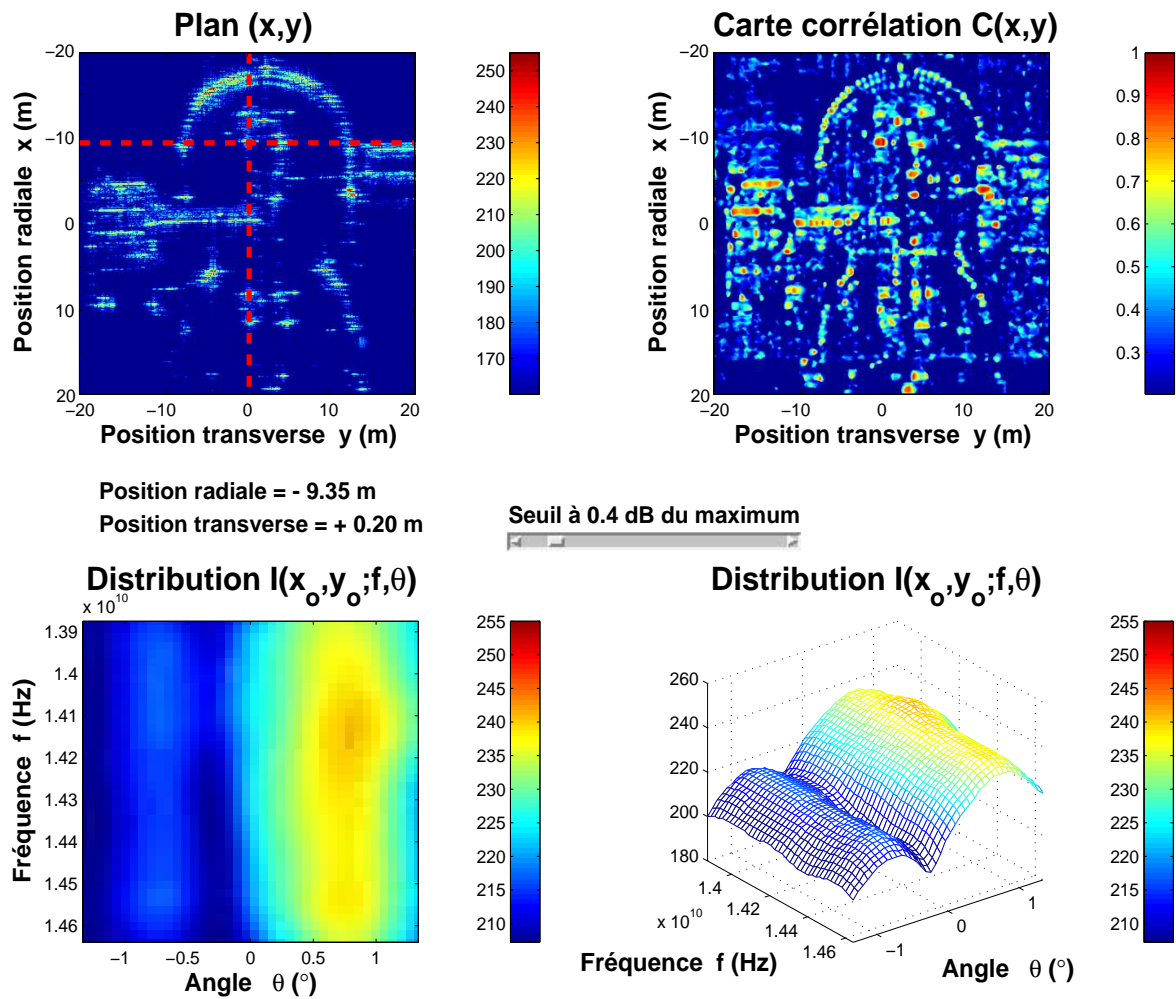
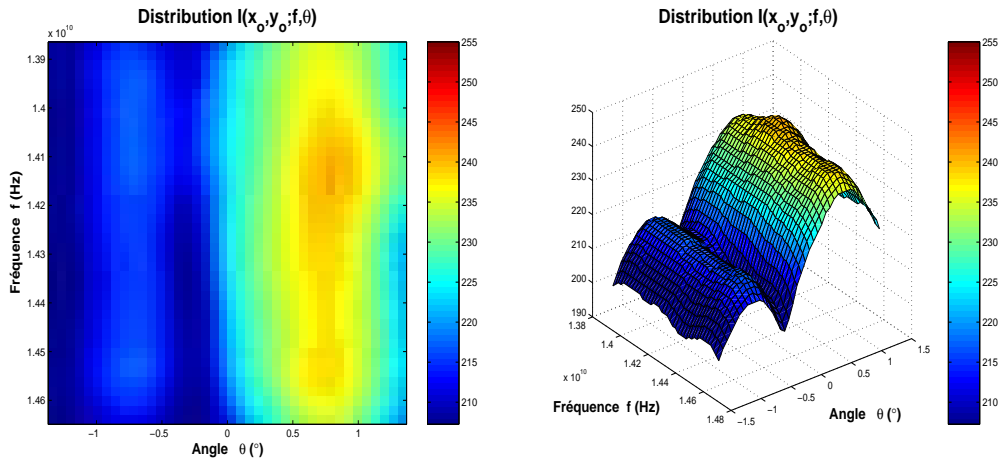
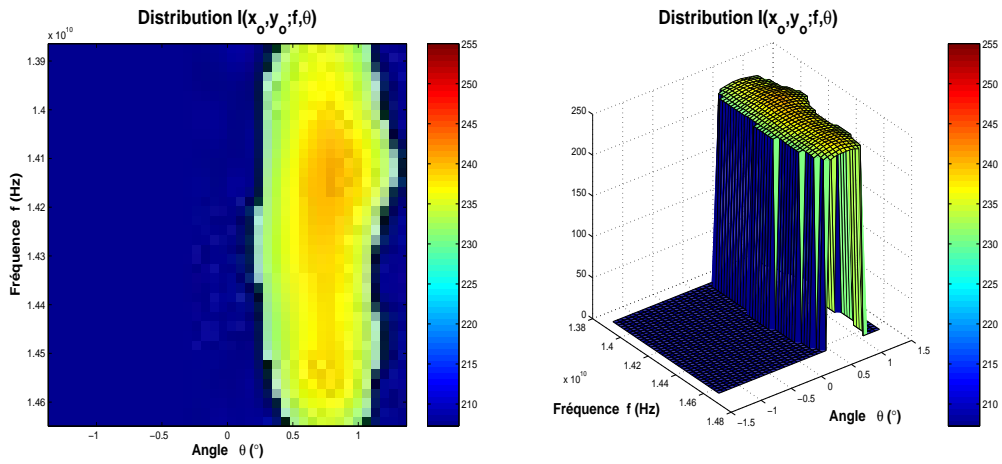


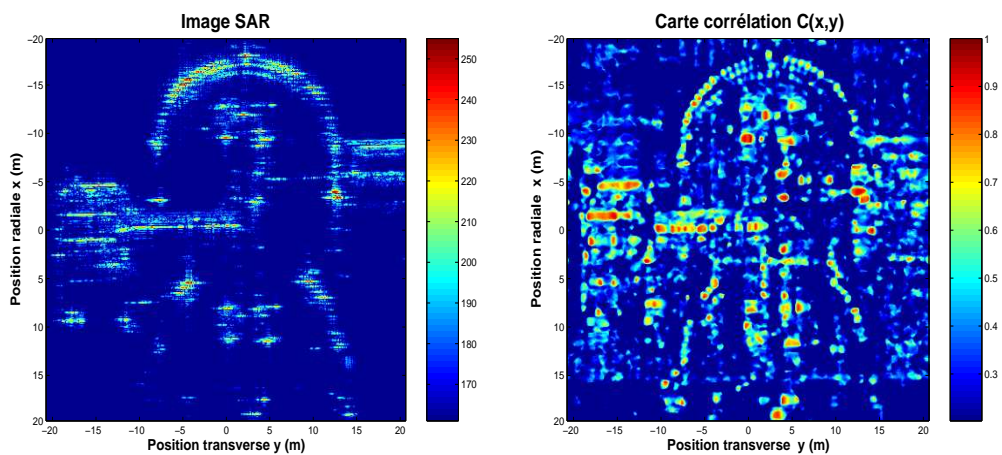
FIG. 4.54 – Extraction de la passerelle en appliquant l’algorithme où l’on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-9.35 \text{ m}, 0.20 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.4 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.55 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

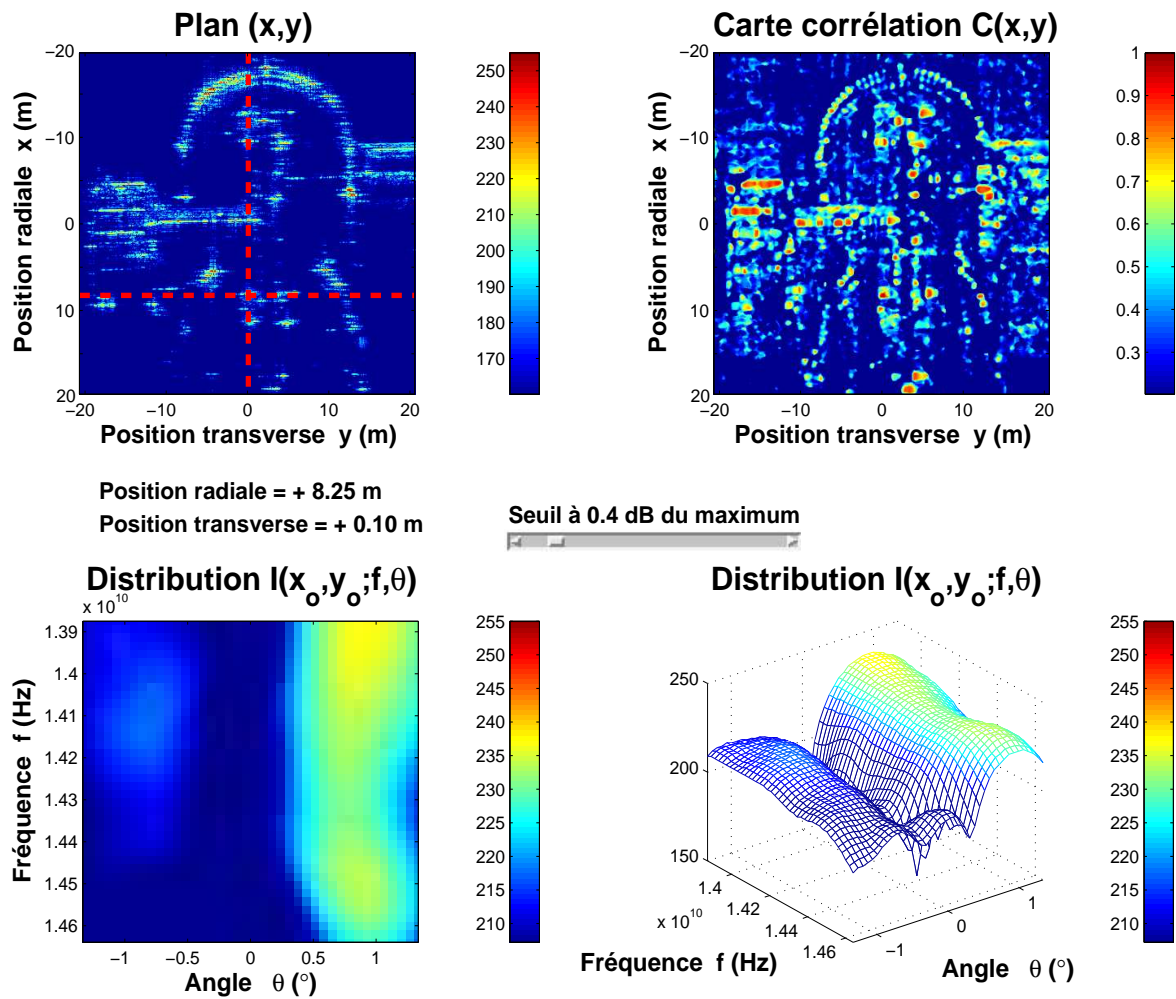
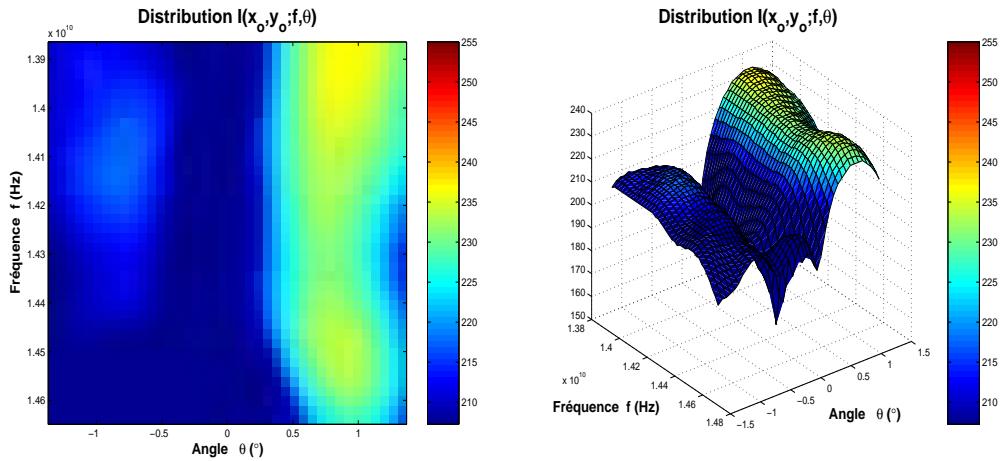
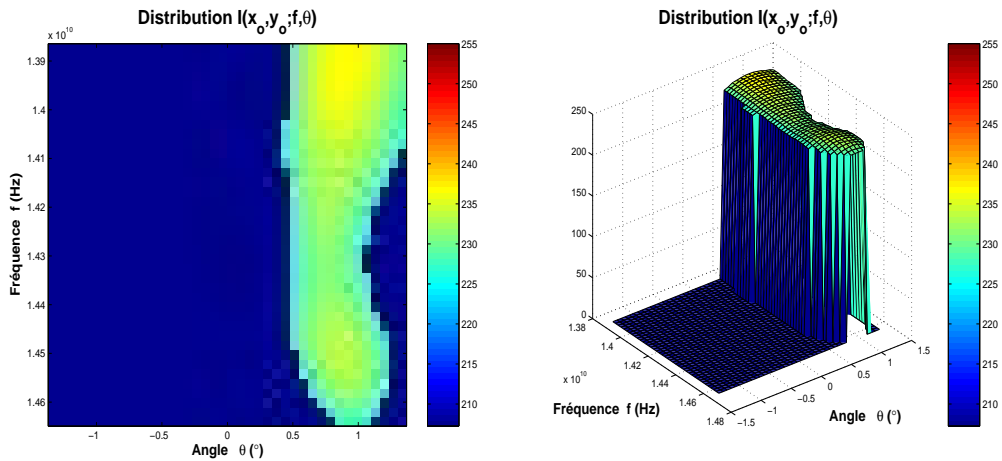


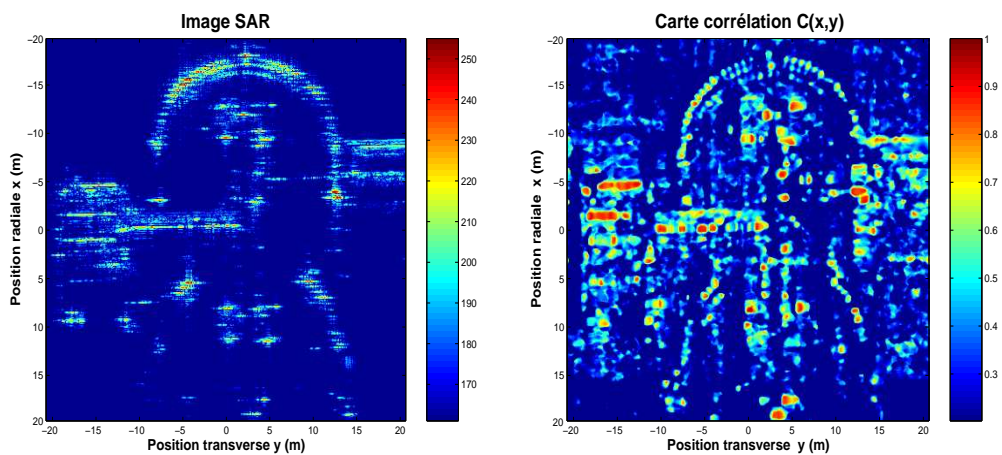
FIG. 4.56 – Extraction de la passerelle en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (8.25 \text{ m}, 0.10 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.4 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.57 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

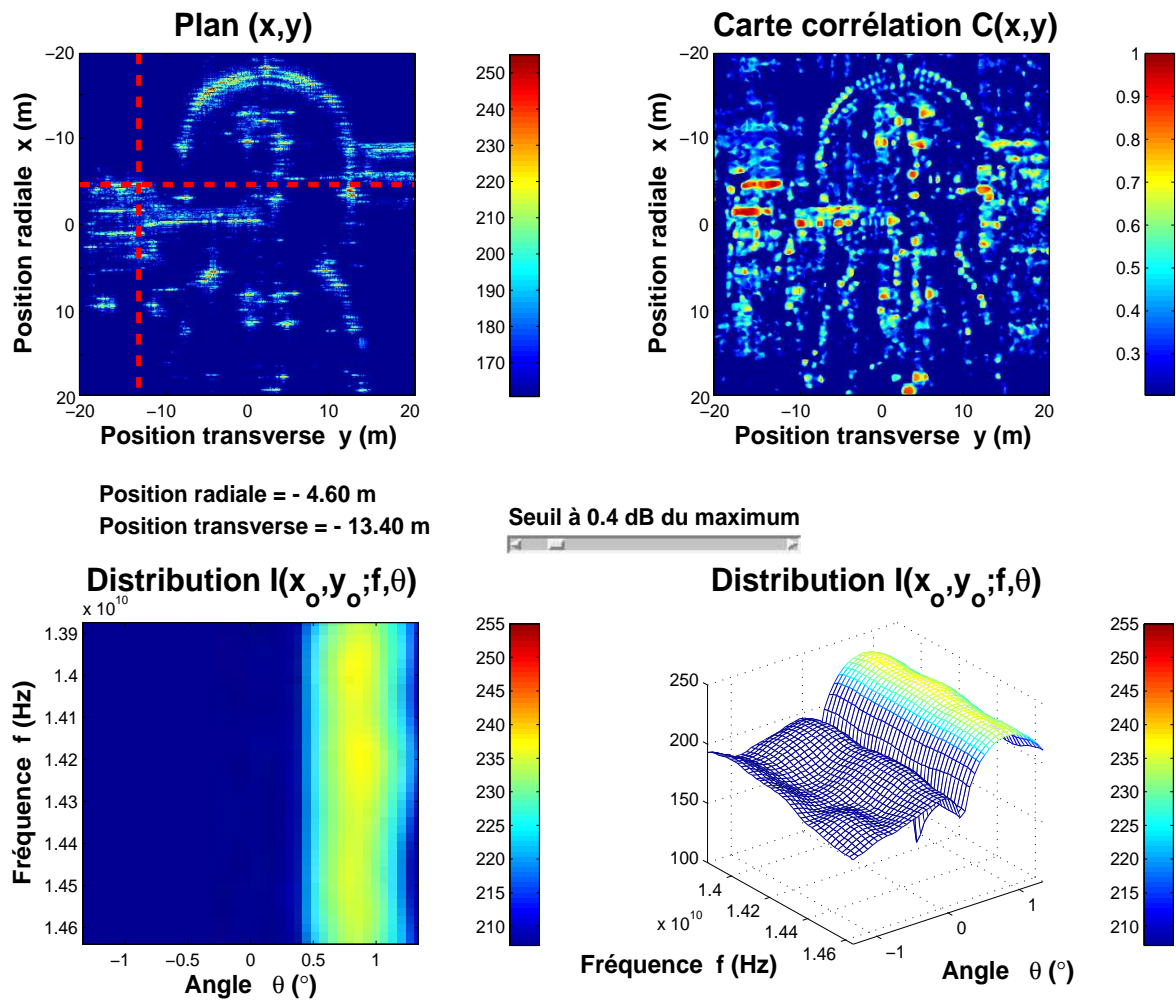
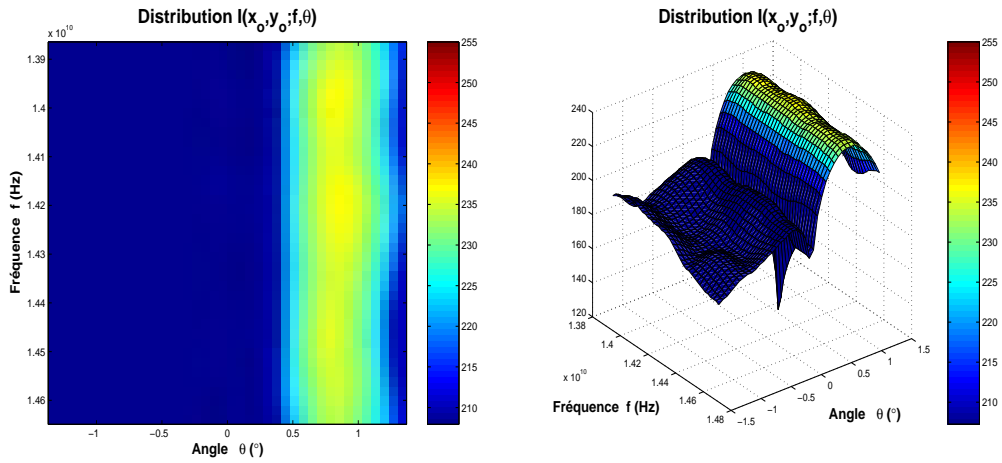
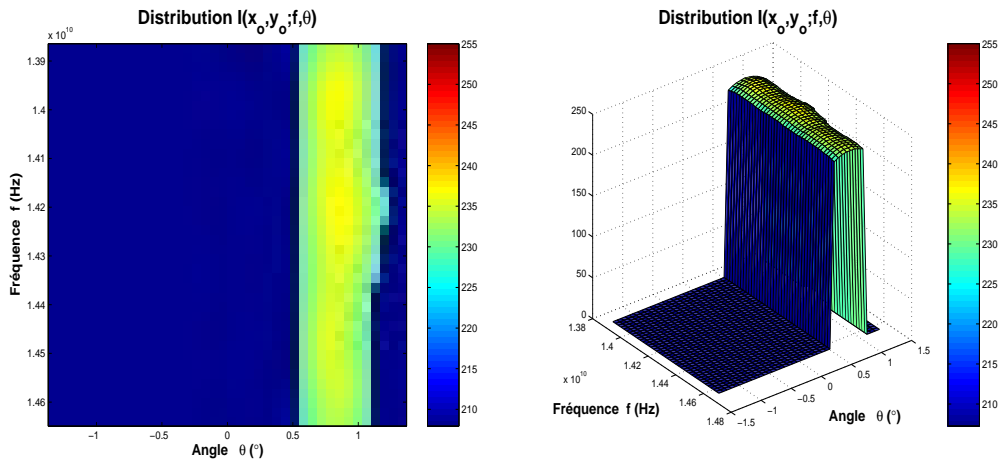


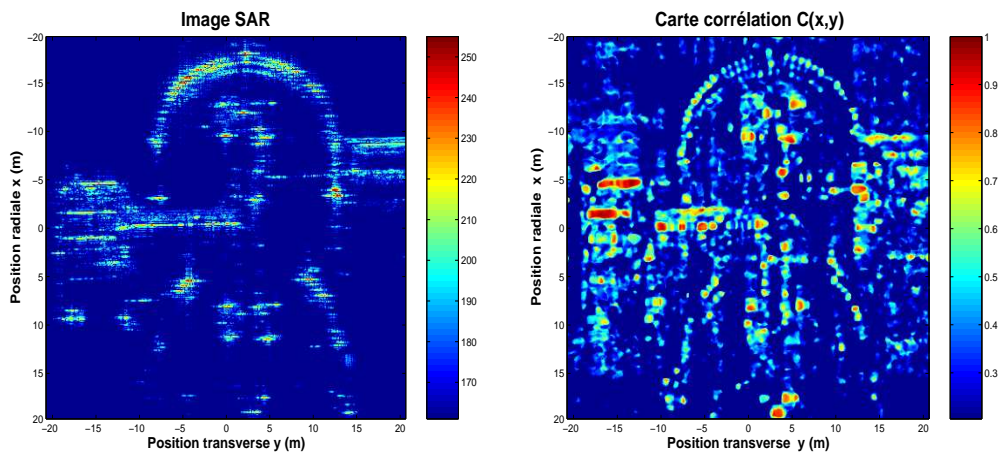
FIG. 4.58 – Extraction de l'escalier en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-4.60 \text{ m}, -13.40 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.4 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.59 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

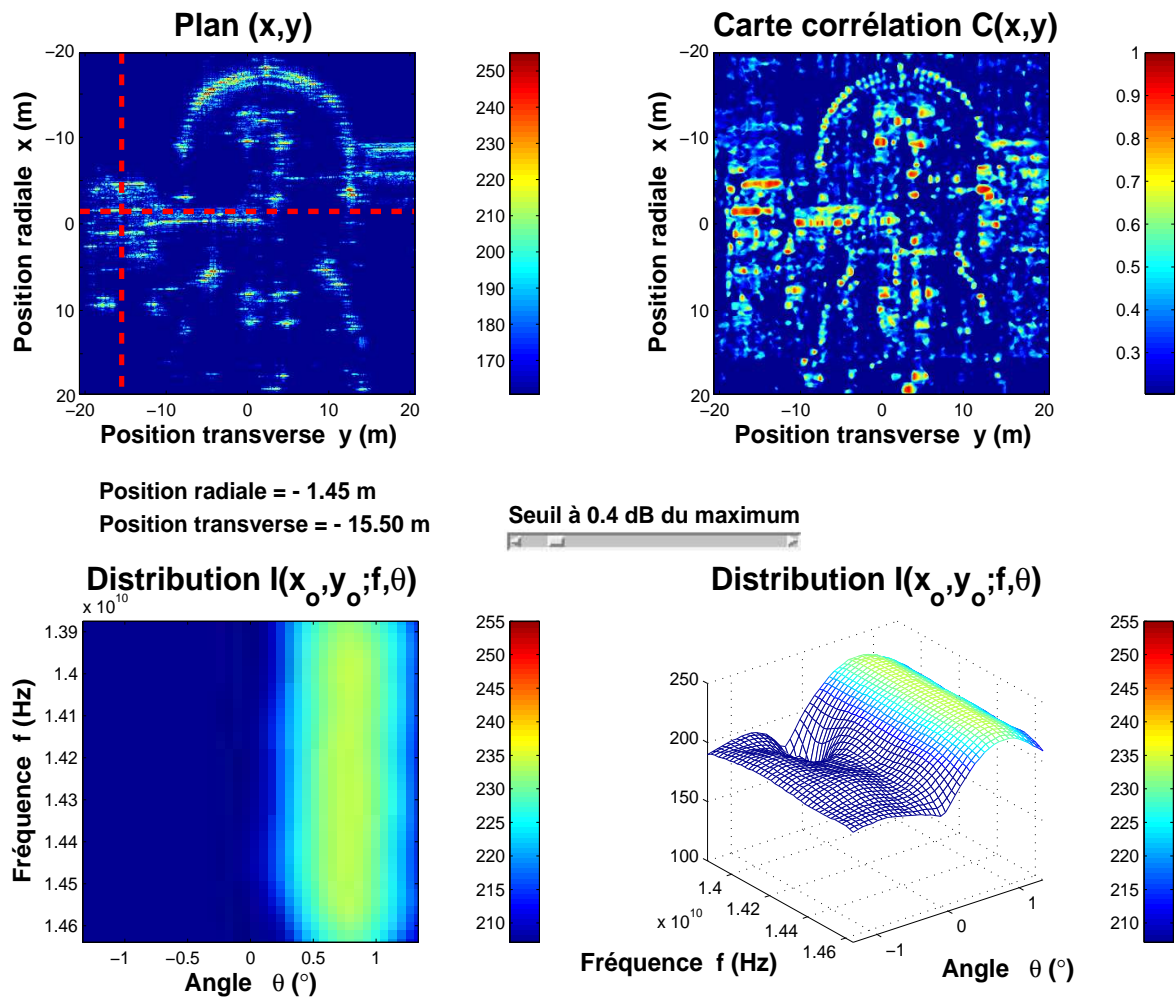
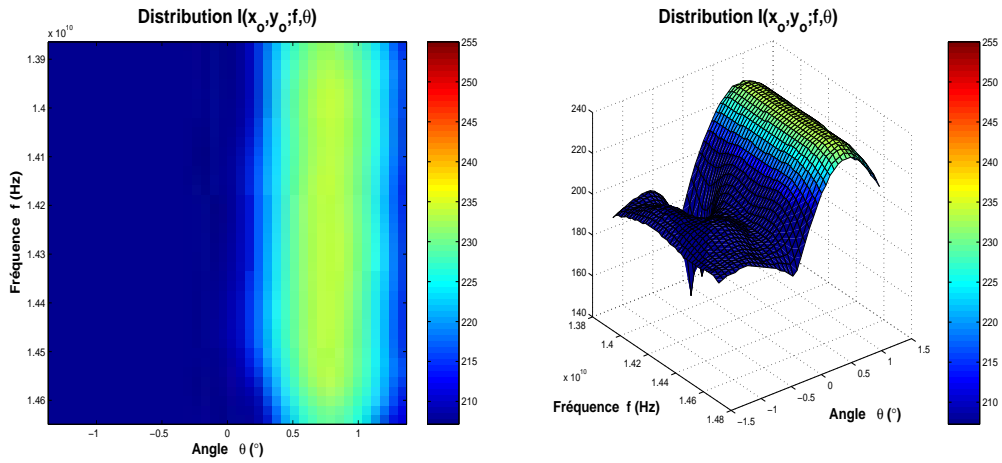
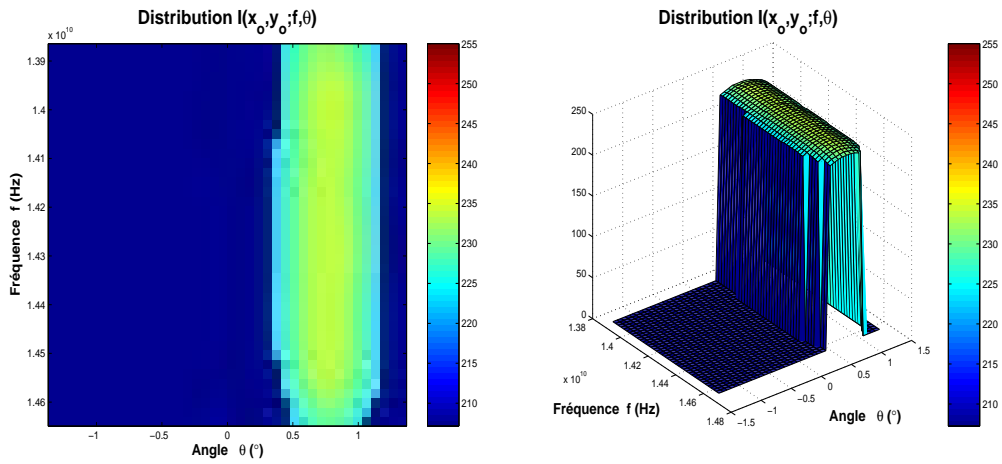


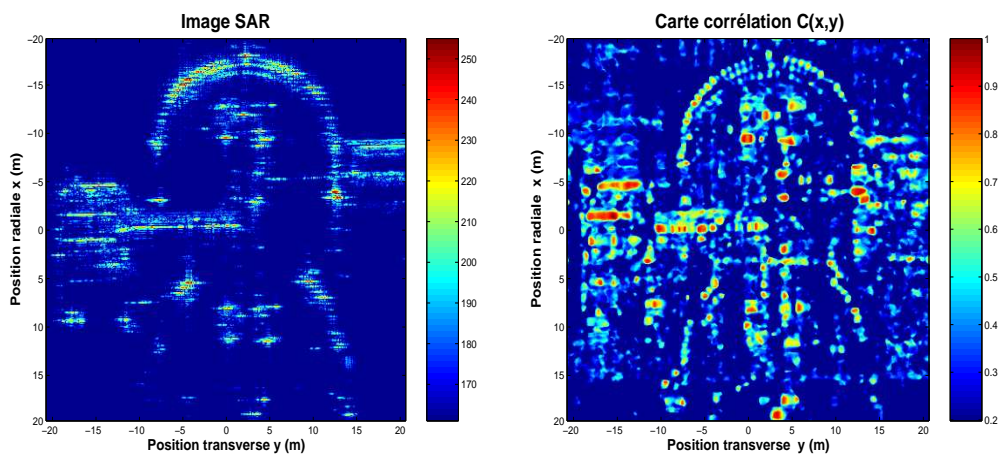
FIG. 4.60 – Extraction de la passerelle en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-1.45 \text{ m}, -15.50 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.4 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.61 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

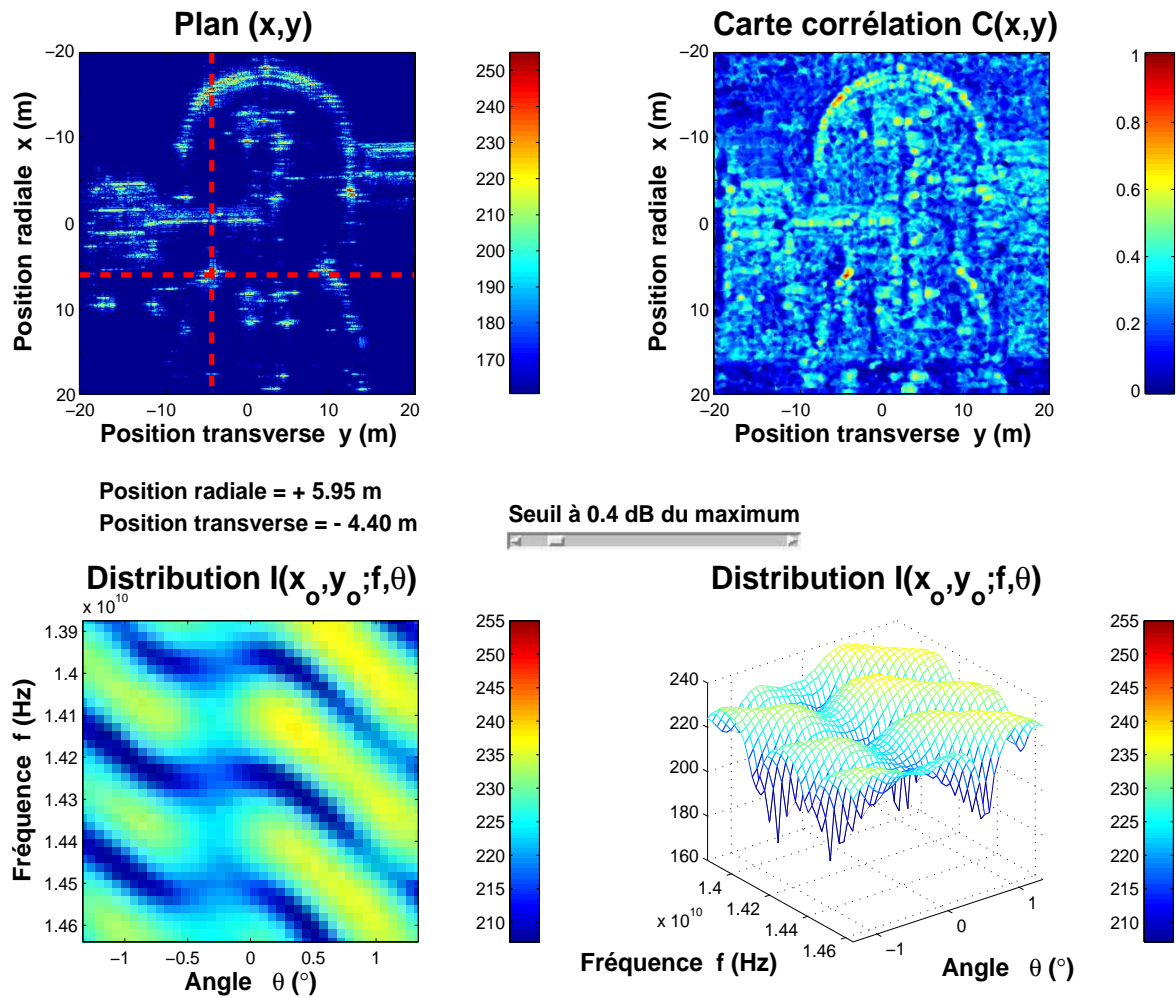
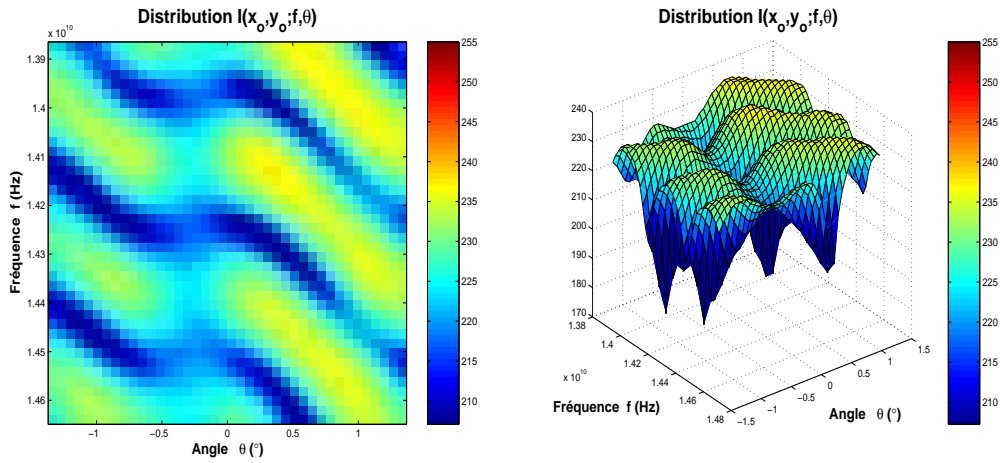
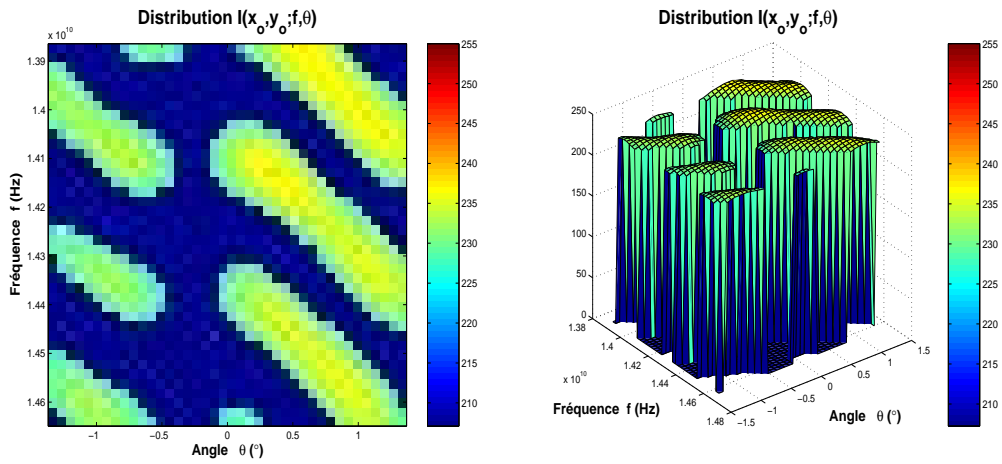


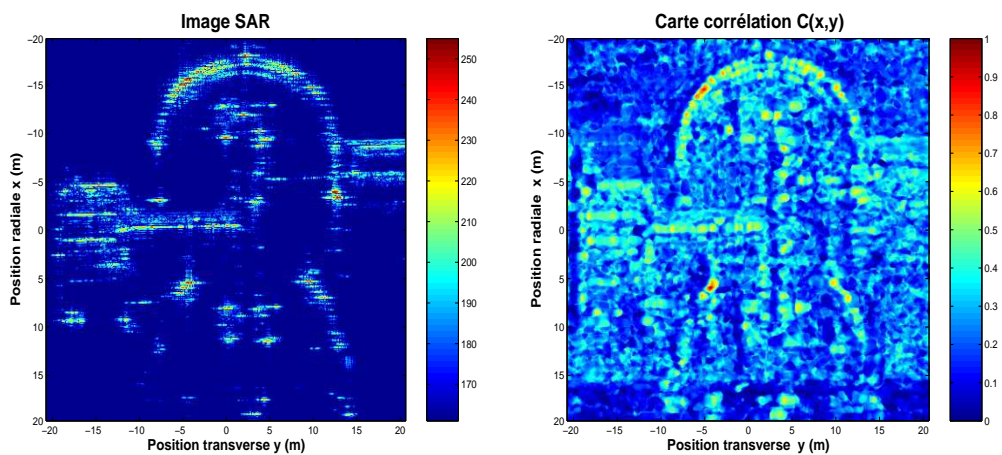
FIG. 4.62 – Extraction d'une portion gauche des deux cuves en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (5.95 \text{ m}, -4.40 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.4 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.63 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

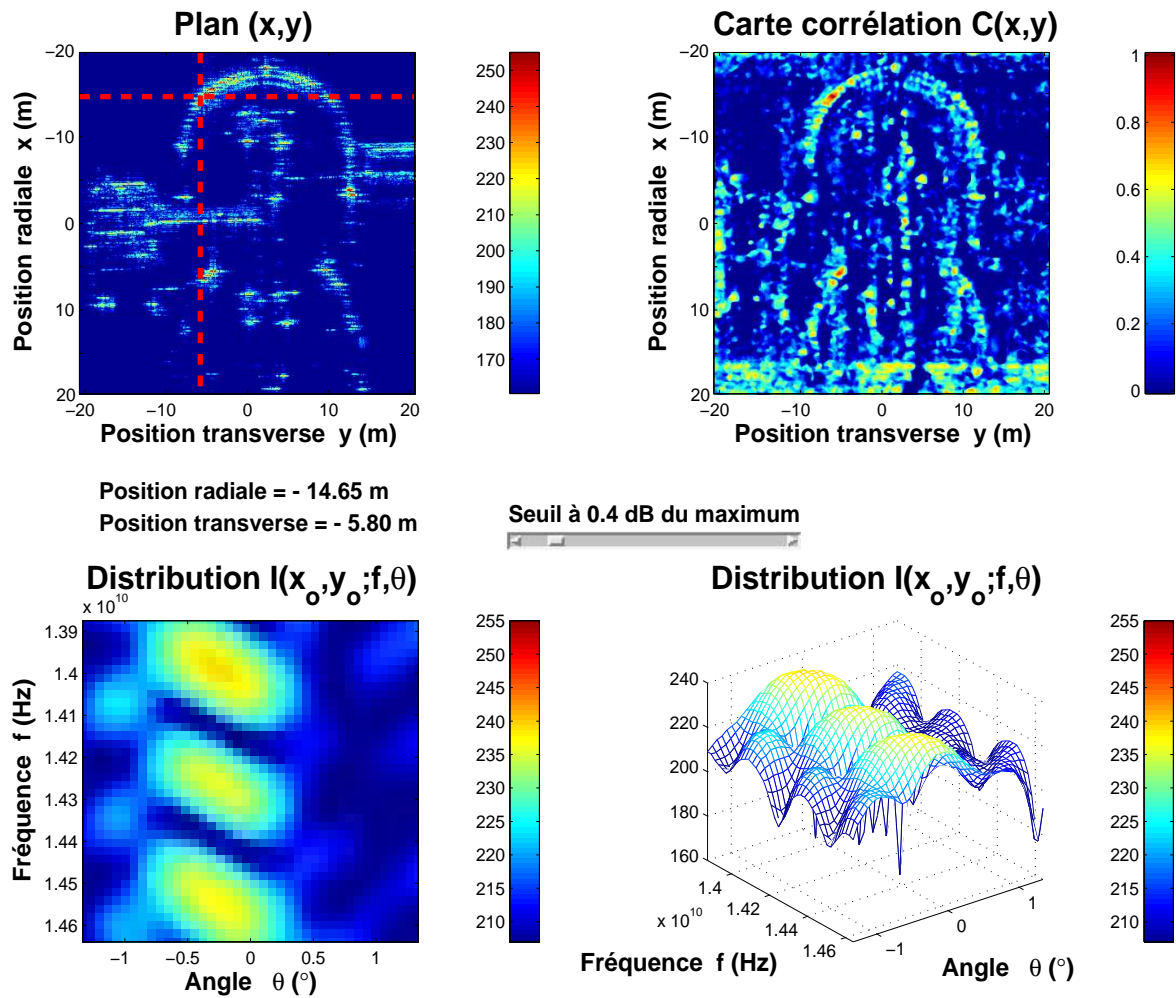
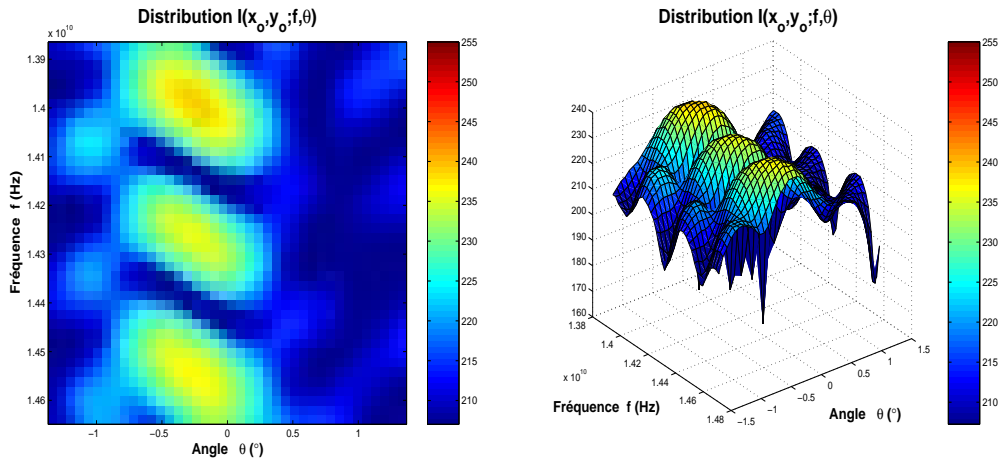
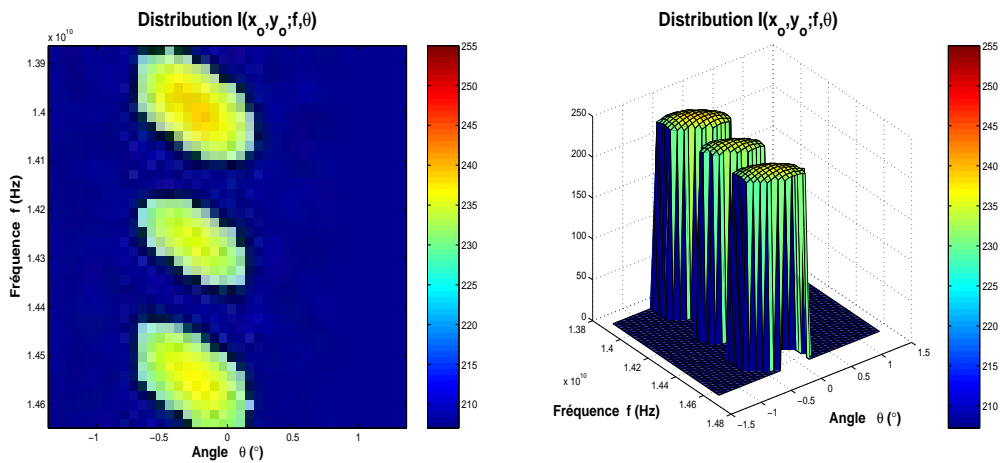


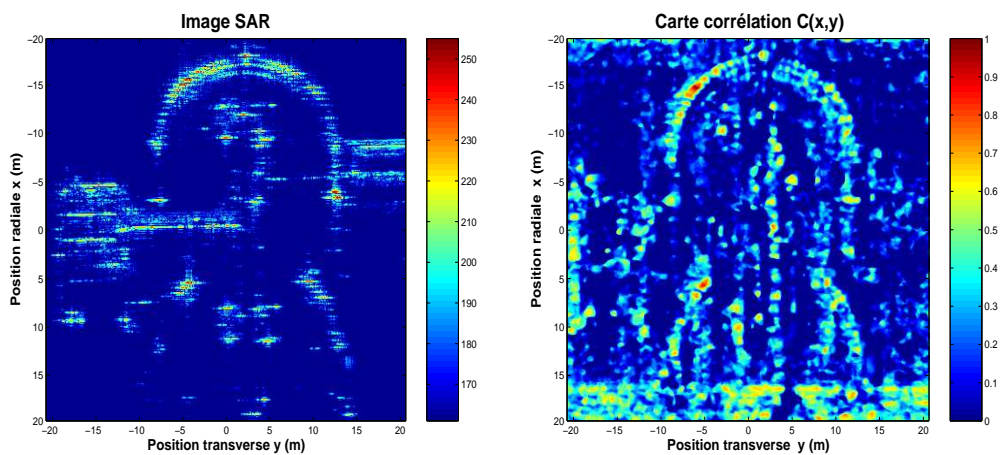
FIG. 4.64 – Extraction d'une portion gauche des deux cuves en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-14.65 \text{ m}, -5.80 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.4 dB du maximum.

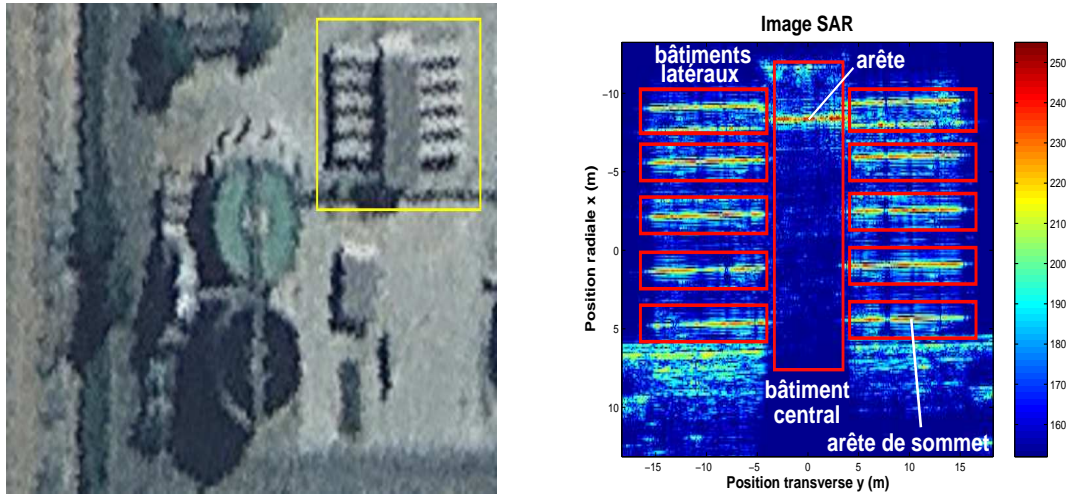


(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.65 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.4$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

c/ Distinction d'un sommet d'une arête de bâtiment

La dernière étude concerne l'image contenant un bloc de bâtiments composé de bâtiments latéraux et d'un bâtiment central. Les figures 4.66 (a) et 4.66 (b) présentent respectivement une photo aérienne et l'image SAR contenant ce bloc de bâtiments.



(a) Photographie aérienne de la région. (b) Image SAR contenant le bloc de bâtiment.

FIG. 4.66 – Photographie et image contenant le bloc de bâtiment.

L'objectif, en appliquant l'algorithme, est d'extraire le sommet des bâtiments latéraux et plus précisément de séparer ces sommets de l'arête du bâtiment central dont les réflecteurs ont des caractéristiques énergétiques différentes de celles des réflecteurs des bâtiments latéraux (voir figures 4.31 à 4.37). Autrement dit, le but est, ici, d'extraire le sommet des bâtiments latéraux tout en *soustrayant* l'arête du bâtiment central.

Les résultats se présentent de la manière suivante :

- En figure 4.67, on applique l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur un des sommets en $(x_{ref}, y_{ref}) = (4.55 \text{ m}, -10.40 \text{ m})$ comme référence. La figure 4.68 illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.
- En figure 4.69, on applique l'algorithme d'extraction d'objets en choisissant la distribution du réflecteur localisé sur un des sommets en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-2.25 \text{ m}, 9.85 \text{ m})$ comme référence. La figure 4.70 illustre la procédure de seuillage pour la distribution de référence et confronte l'image SAR initiale et la carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

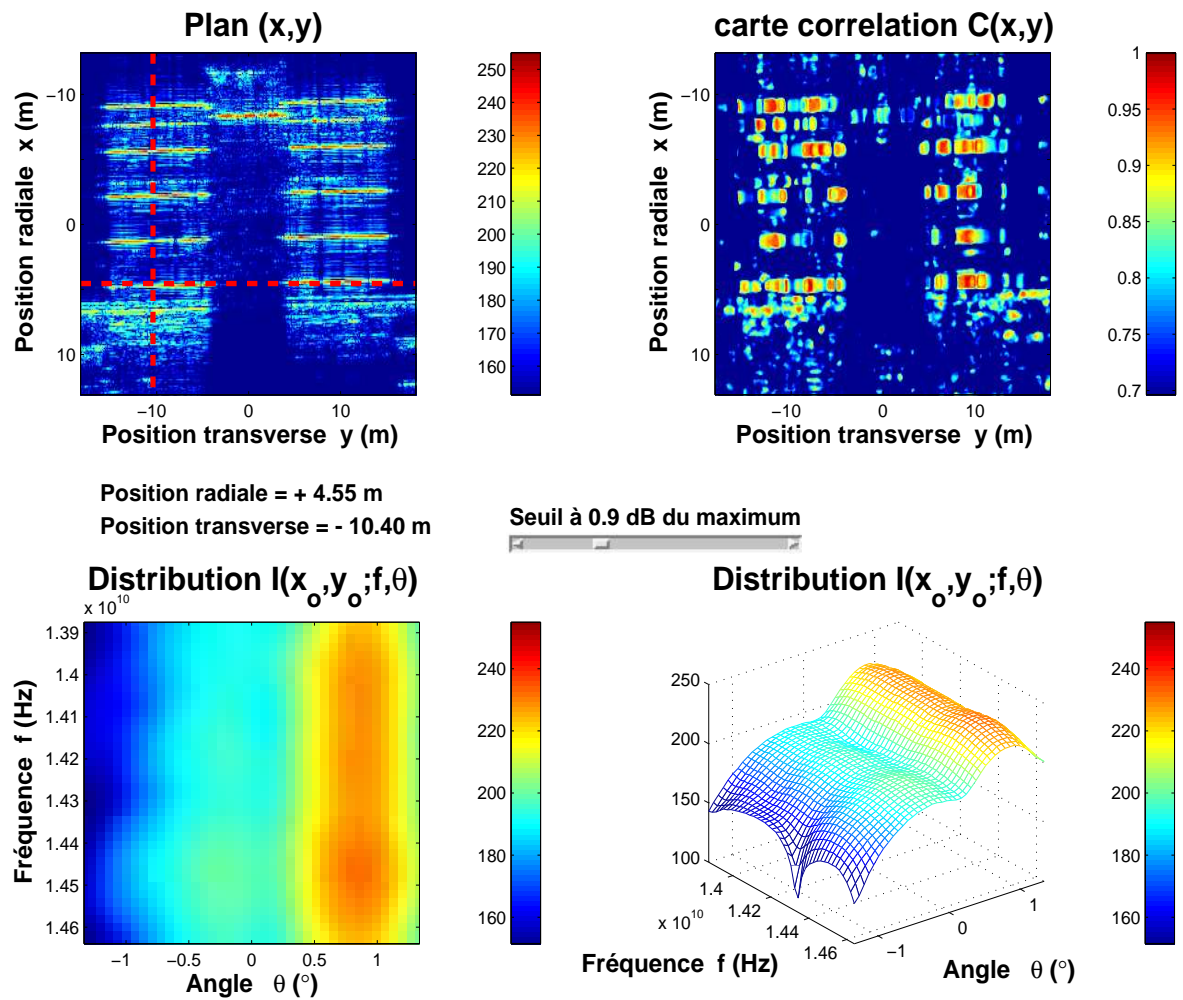
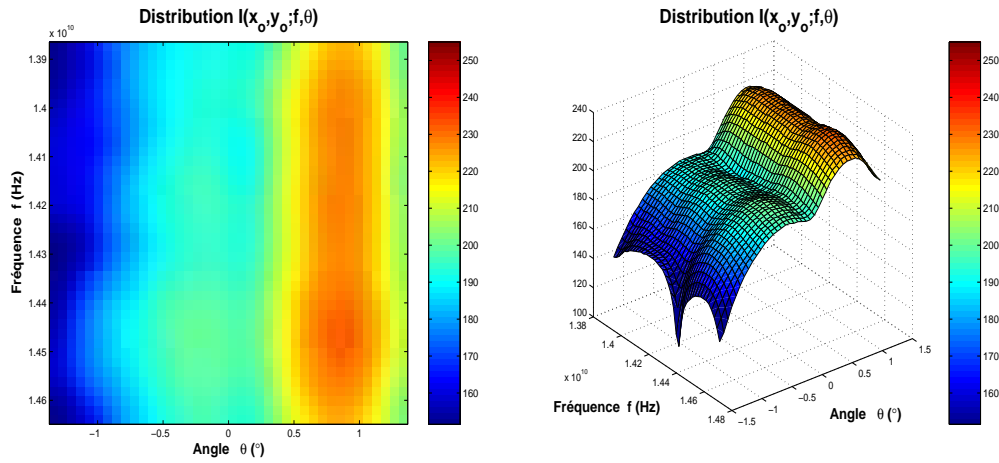
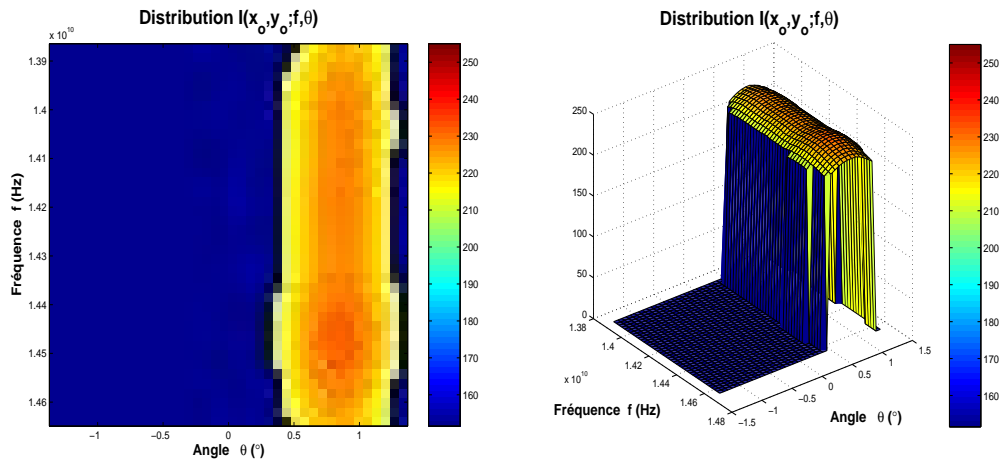


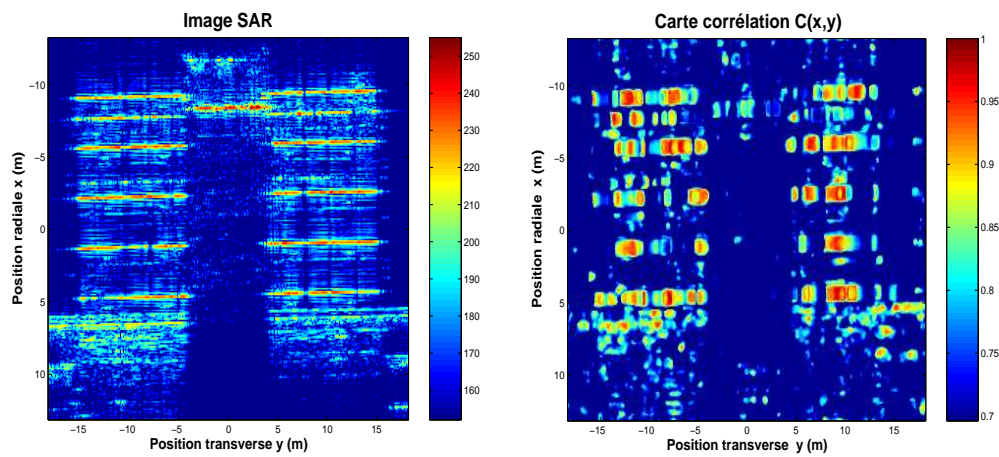
FIG. 4.67 – Extraction des sommets des bâtiments latéraux en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (4.55 \text{ m}, -10.40 \text{ m})$ comme distribution de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.9 dB du maximum.



(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

FIG. 4.68 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.9$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

Interface graphique illustrant l'algorithme d'extraction d'objets

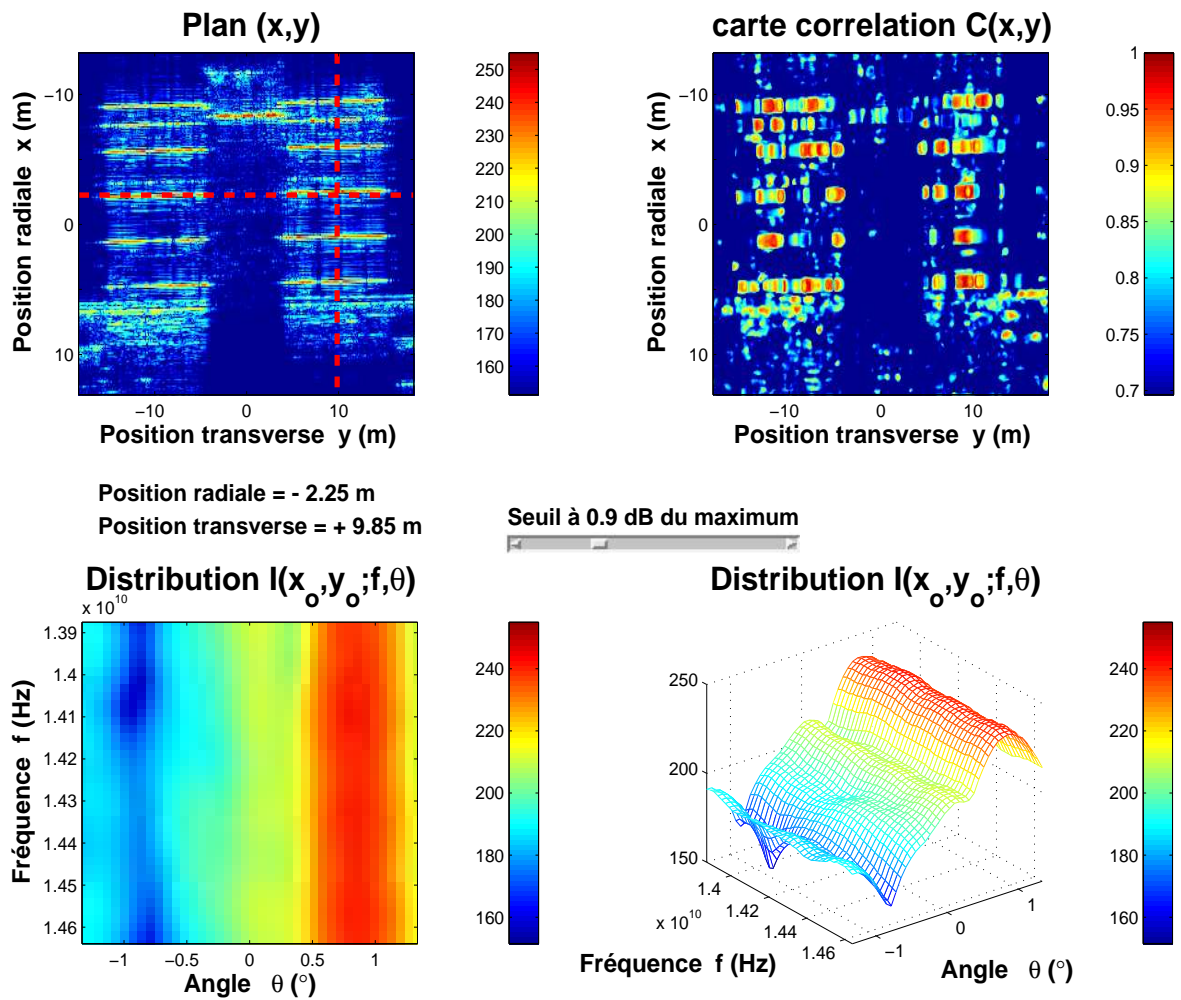
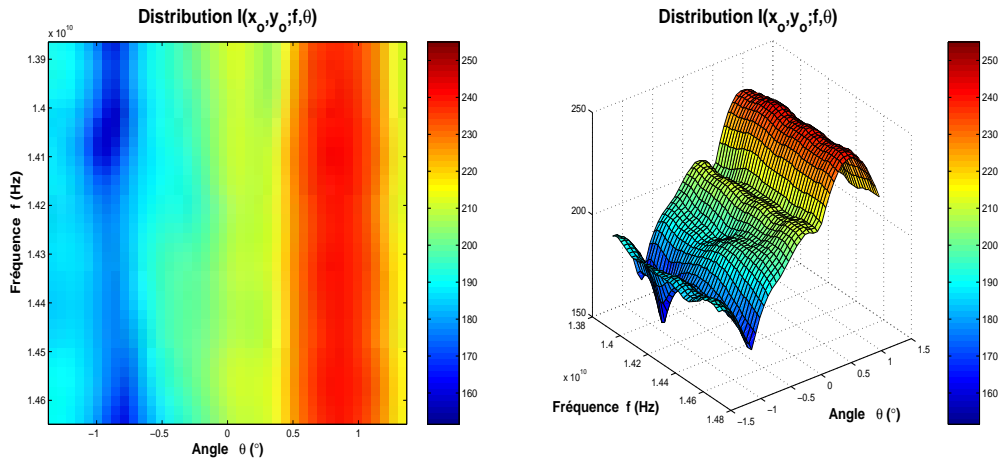
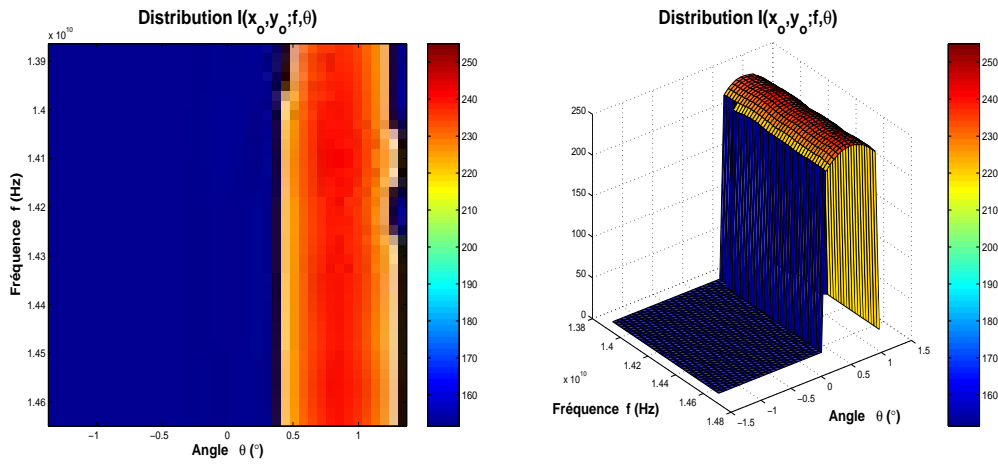


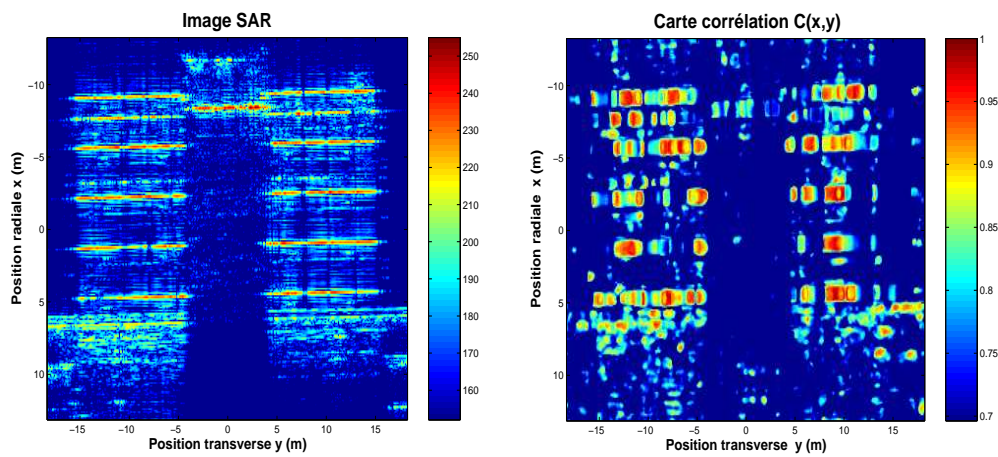
FIG. 4.69 – Extraction des sommets des bâtiments latéraux en appliquant l'algorithme où l'on choisit la distribution énergétique du réflecteur en $(x_{ref}, y_{ref}) = (-2.25 \text{ m}, 9.85 \text{ m})$ comme pixel de référence.



(a) Distribution énergétique de référence dans le plan fréquence-angle.



(b) Distribution énergétique de référence après seuillage à 0.9 dB du maximum.

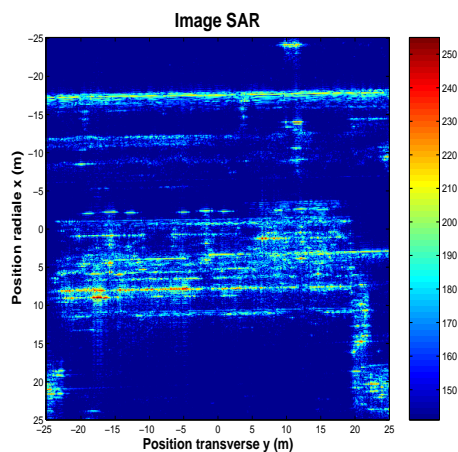


(c) Image SAR initiale et carte de corrélation dans le plan (x, y) .

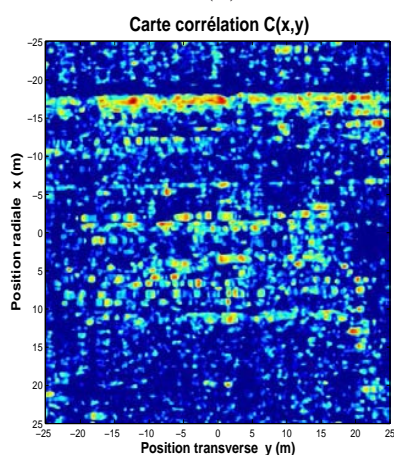
FIG. 4.70 – Illustration de la distribution de référence avant et après seuillage à $\Delta_{dB} = 0.9$ dB du maximum puis comparaison image SAR initiale et carte de corrélation.

d/ Résultats récapitulatifs d'extraction d'objets

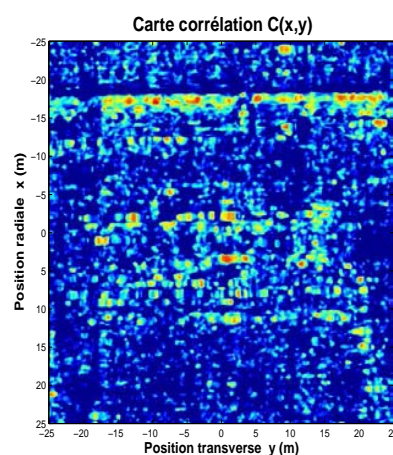
On résume, respectivement dans les figures 4.71, 4.72 et 4.73, les résultats d'extraction du tuyau, de séparation de la paire de cuves et de la combinaison passerelle-escalier, et l'extraction du toit de bâtiments.



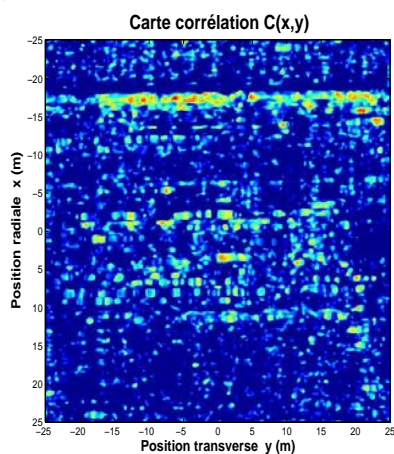
(a) Image SAR initiale du tuyau et du bâtiment.



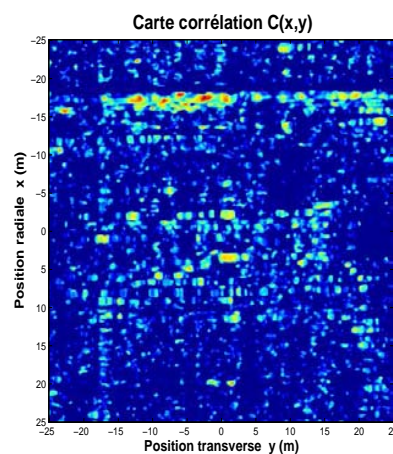
(b) Première application de l'algorithme.



(c) Deuxième application de l'algorithme.



(d) Troisième application de l'algorithme.



(e) Dernière application de l'algorithme.

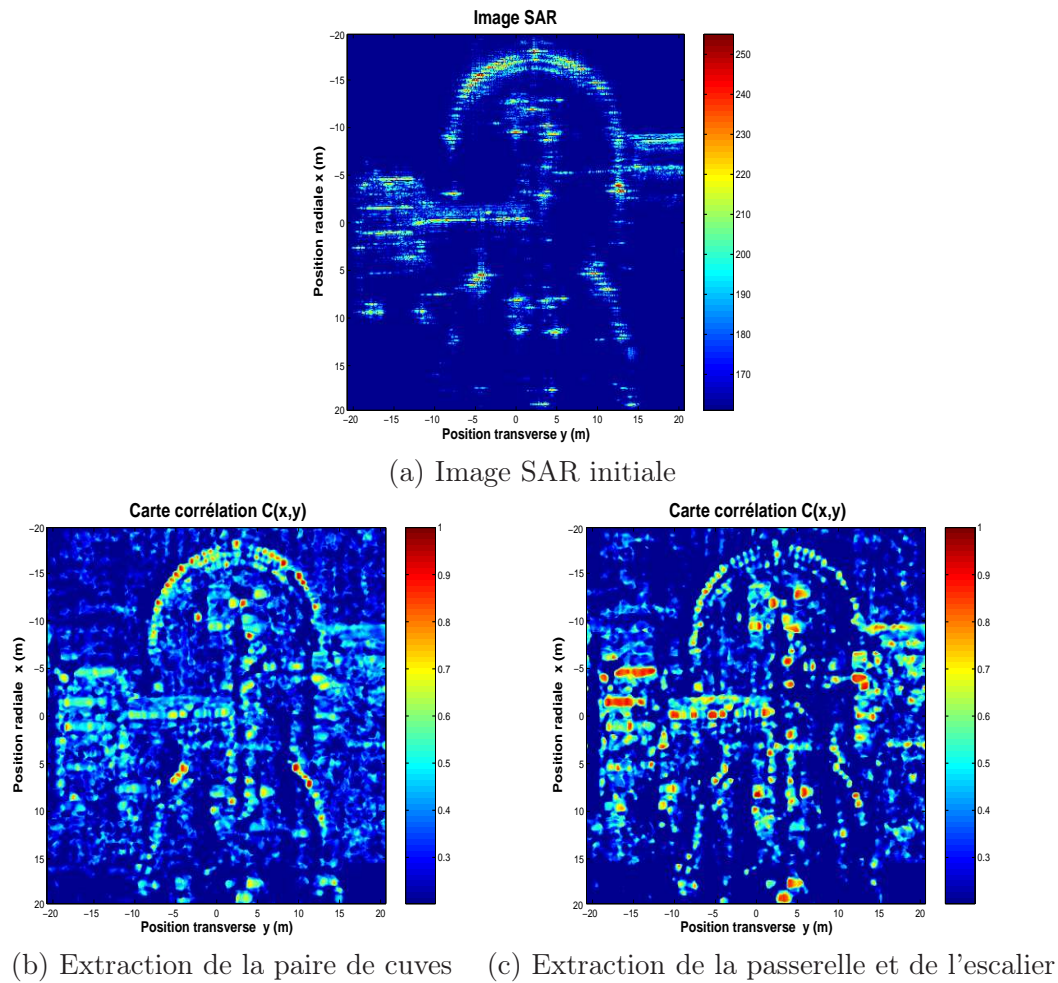


FIG. 4.72 – Séparation des cuves et de la combinaison passerelle-escalier.

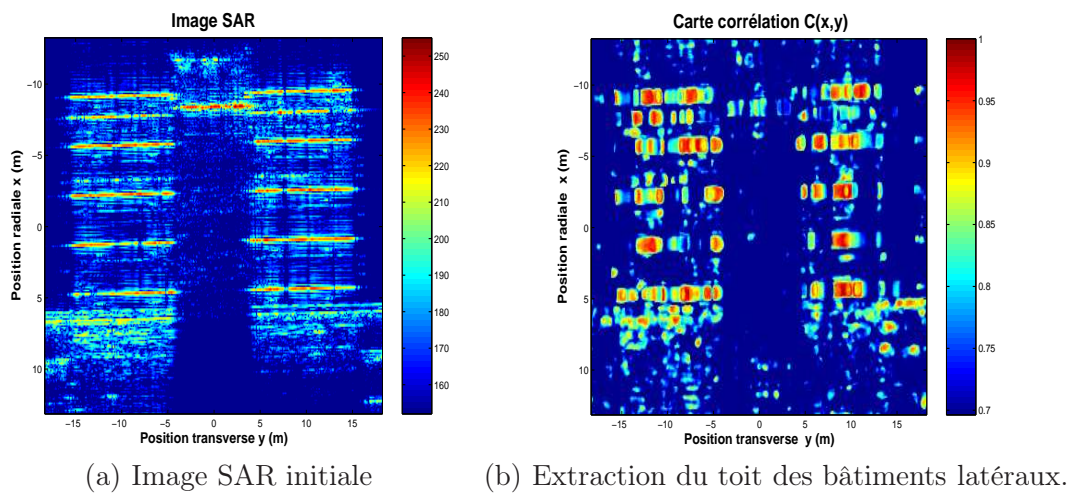


FIG. 4.73 – Extraction du toit des bâtiments latéraux et soustraction de l'arête du bâtiment central.

e/ **Modification de l'algorithme de discrimination d'objets.**

Pour tenter d'améliorer la discrimination d'objets, nous proposons, dans ce paragraphe, une modification de l'algorithme décrit en 4.3.1. La fonction de corrélation 2D qui y est introduite met en jeu la distribution d'énergie des pixels de l'image, autrement dit le module au carré du coefficient d'ondelette⁵¹ :

$$C_{ref}(x_i, y_j) = \frac{\int I(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta) I(x_i, y_j; f, \theta) df d\theta}{\sqrt{E_{ref}} \sqrt{E_{i,j}}} \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} I(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \frac{1}{K_\phi} |W(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 \\ &= \frac{1}{K_\phi} |\langle H, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle|^2 \end{aligned}$$

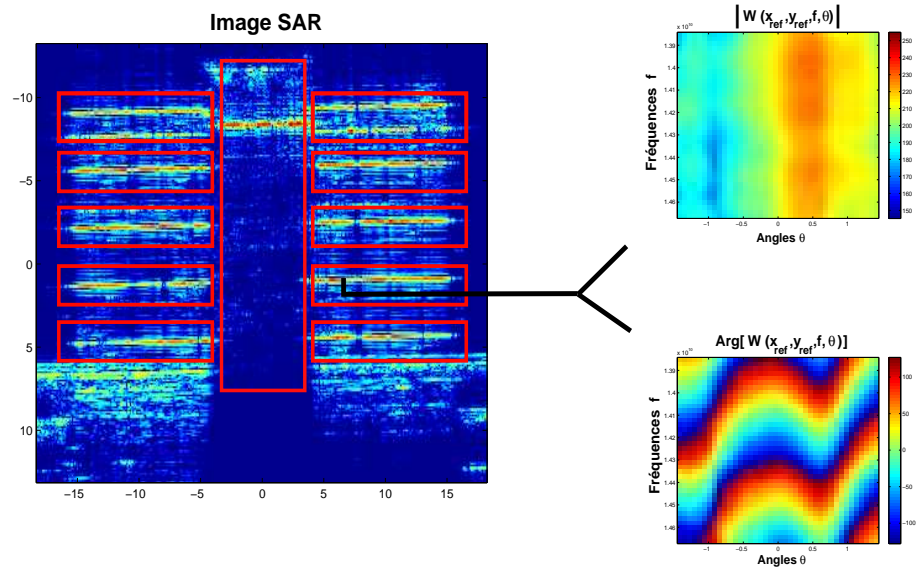
Autrement dit, on ne prend pas en compte la phase des coefficients d'ondelette. Or la phase est susceptible de porter un certain type d'information qu'il faut exploiter. C'est pourquoi, nous proposons de substituer le coefficient d'ondelette $W(x_i, y_j; f, \theta)$ à $I(x_i, y_j, f, \theta)$ dans (4.4). La fonction de corrélation devient :

$$C_{ref}(x_i, y_j) = \frac{\int W(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta) W^*(x_i, y_j; f, \theta) df d\theta}{\sqrt{E_{ref}} \sqrt{E_{i,j}}} \quad (4.5)$$

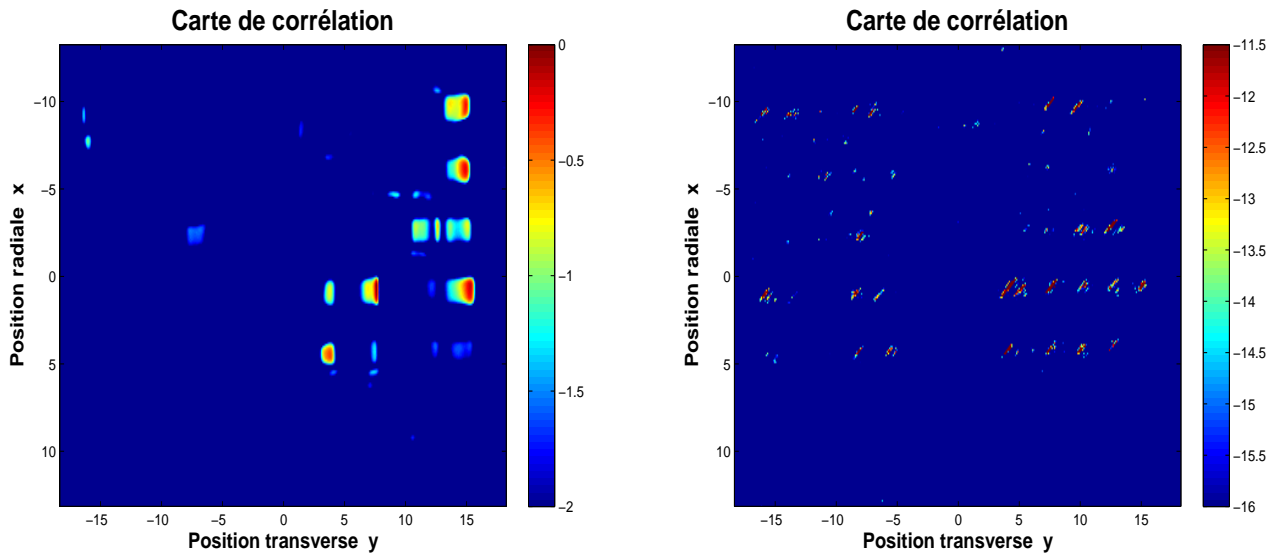
avec $E_{ref} = \int |W(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta)|^2 df d\theta$ et $E_{i,j} = \int |W(x_i, y_i; f, \theta)|^2 df d\theta$.

Un résultat de cette substitution est donné en figure 4.74 : la figure 4.74 (a) illustre le réflecteur qui est pris comme référence ainsi que le module et la phase du coefficient d'ondelette $W(x_{ref}, y_{ref}, f, \theta)$ lui correspondant. La figure 4.74 (b) montre la carte obtenue en corrélant les distributions d'énergie. La figure 4.74 (c) illustre la carte obtenue en corrélant les coefficients d'ondelette : on constate que cette carte fournit une meilleure extraction des toits des bâtiments latéraux que celle de la figure 4.74 (b).

⁵¹Le coefficient d'ondelette sera noté $W(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ au lieu de $C(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ pour ne pas confondre avec le coefficient de corrélation C_{ref} .



(a) Coefficient d'ondelette $W(x_{ref}, y_{ref}; f, \theta)$ pris comme référence.



(b) Corrélation des distributions d'énergie.

(c) Corrélation des coefficients d'ondelette.

FIG. 4.74 – Amélioration de l'extraction d'objet en corrélant les coefficients d'ondelette.

4.3.3 Commentaires et conclusions du chapitre

Concernant la première étude, à savoir l'extraction du tuyau métallique, deux types de résultats se dégagent :

- En figures 4.71 (b) et 4.71 (c), le tuyau est extrait presque dans sa totalité mais quelques réflecteurs du toit du bâtiment, certes minoritaires, ont une distribution énergétique qui corrèle fortement avec la distribution de référence (choisie sur le tuyau).
- Si l'on compare les résultats des figures 4.71 (d) et 4.71 (e) avec ceux des figures 4.71 (b) et 4.71 (c), il apparaît moins de réflecteurs sur le toit du bâtiment ayant des caractéristiques énergétiques similaires à celles du réflecteur de référence (sélectionné sur le tuyau), mais le tuyau est extrait sur une plus petite portion.

L'extraction de la paire de cuves, dans la seconde étude, est tout à fait satisfaisante (voir figure 4.72 (b)) et l'extraction de la passerelle s'accompagne de celle de l'escalier (voir figure 4.72 (c)) : ce qui n'est pas étonnant puisque, si l'on en juge par les figures 4.24 à 4.28, les réflecteurs sur la passerelle et sur l'escalier ont des caractéristiques énergétiques similaires. Les figures 4.62 et 4.64 illustrent l'extraction d'une portion de la courbure gauche de la paire de cuves ; autrement dit, ces figures montrent que l'algorithme d'extraction d'objets est capable d'extraire des *détails* sur un objet.

La figure 4.73 illustre l'extraction du toit des bâtiments latéraux et plus particulièrement la *disparition* de l'arête du bâtiment central dans la carte de corrélation : ceci est conforme aux résultats des figures 4.31 à 4.37 qui mettent en évidence que la distribution énergétique des réflecteurs du toit des bâtiments latéraux diffère de celle des réflecteurs de l'arête du bâtiment central.

Enfin, le résultat illustré en figure 4.74 (c) et représentant la carte obtenue en corrélant les coefficients d'ondelette est très prometteur. L'introduction du coefficient d'ondelette plutôt que de la distribution d'énergie se justifie par le fait que le coefficient d'ondelette *préserve l'information de phase propre des réflecteurs* tandis que la distribution d'énergie ne préserve que les différences de phase entre les réflecteurs dans des termes d'interférences, comme le montre l'exemple suivant à deux réflecteurs. Autrement dit, partant de l'idée que la phase propre d'un réflecteur est une donnée susceptible d'être *caractéristique* de l'objet à extraire, on peut s'attendre à ce que la fonction de corrélation 2D définie en (4.5) soit plus efficace pour discriminer l'objet souhaité.

Exemple à deux réflecteurs :

Prenons un exemple simple de deux réflecteurs respectivement de phase propre φ_1 et φ_2 indépendantes de (f, θ) . Ces réflecteurs renvoient respectivement les signaux H_1 et H_2 :

$$\begin{aligned} H_1(k, \theta) &= A_1(k, \theta) \exp[-j(2\pi\vec{k}\vec{r}_1 + \varphi_1)] \\ H_2(k, \theta) &= A_2(k, \theta) \exp[-j(2\pi\vec{k}\vec{r}_2 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

où A_i , φ_i et \vec{r}_i sont respectivement l'amplitude, la phase propre et le vecteur position du réflecteur i . On note $H = H_1 + H_2$ le signal réfléchi par la paire de réflecteurs et on calcule le

coefficient d'ondelette $W_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$:

$$W_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = e^{j\varphi_1} M_1(\vec{r}_o, \vec{k}_o) + e^{j\varphi_2} M_2(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \quad (4.6)$$

où

$$M_i(\vec{r}_o, \vec{k}_o) = \int k A_i(k, \theta) \frac{1}{k_o} \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \exp[-j2\pi\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_o)] dk d\theta$$

Par conséquent, on constate, dans la formulation du coefficient d'ondelette en (4.6), que la phase propre des réflecteurs est conservée alors que l'hyperimage $I(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ donne :

$$\begin{aligned} I_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \frac{1}{K_\phi} \left| W_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2 \\ &= \frac{1}{K_\phi} \left(\left| M_1(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2 + \left| M_2(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \right|^2 + 2Re \left[M_1^*(\vec{r}_o, \vec{k}_o) M_2(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right] \right) \end{aligned}$$

où la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ n'est préservée que dans un terme d'oscillations traduisant l'interaction entre les 2 composantes du signal.

Jusqu'à présent, l'analyse par ondelettes a été appliquée à partir d'une imagerie SAR où l'on a tenu compte ni de l'information polarimétrique ni de l'information interférométrique des pixels de l'imagerie. Le chapitre suivant propose d'étendre l'analyse par ondelettes continues en polarimétrie dans l'objectif d'améliorer la classification des cibles artificielles et naturelles et en interférométrie dans le but d'obtenir une meilleure estimation de la hauteur des cibles.

Chapitre 5

Polarimétrie et interférométrie par analyse en ondelettes continues

Ce chapitre constitue un complément de ce manuscrit dans la mesure où l'on a eu l'opportunité d'appliquer l'analyse par ondelettes en polarimétrie et en interférométrie. Ce complément met l'accent sur le fait qu'une analyse locale autour d'une fréquence et un angle du signal SAR en polarimétrie et en interférométrie est bénéfique pour séparer les cibles aléatoires des cibles déterministes en polarimétrie et estimer correctement la hauteur des cibles en interférométrie [Col04a, Col04b, Col04c, Tri04].

Dans un premier temps, on effectuera quelques rappels succincts en polarimétrie ; puis on montrera comment on a introduit l'analyse par ondelettes dans ce domaine. Plus précisément, on illustrera des résultats issus de l'application de la méthode par ondelettes sur le paramètre d'entropie. Dans une seconde partie, on fera également quelques rappels d'interférométrie puis on combinera l'analyse par ondelettes avec une méthode d'optimisation polarimétrique exploitée en interférométrie : on présentera les quelques résultats obtenus grâce à cette combinaison.

5.1 Analyse par ondelettes en polarimétrie

5.1.1 Rappels de polarimétrie

Le but de l'analyse polarimétrique est de séparer et d'identifier les mécanismes électromagnétiques se produisant pour la cible analysée (exemple : identifier les réflexions par simple et double rebond sur la cible) en étudiant un certain nombre de paramètres polarimétriques. Avant de présenter certains de ces paramètres, nous proposons de rappeler la définition de la polarisation d'une onde.

a/ Polarisation d'une onde

La polarisation d'une onde plane est la courbe décrite dans le temps par l'extrémité du champ électrique $\vec{\xi}(t)$ régnant dans le plan d'onde. Ce champ électrique peut se mettre sous la forme $\vec{\xi}(t) = \Re(e^{j\omega t} \vec{E})$ où \vec{E} est un vecteur complexe indépendant du temps appelé vecteur de Jones (ou *vecteur de polarisation*).

Dans le cas d'une onde dite "complètement polarisée", la courbe décrite par l'extrémité du champ électrique dans un plan d'onde est une *ellipse* de paramètres (ϕ, τ) (voir figure 5.1).

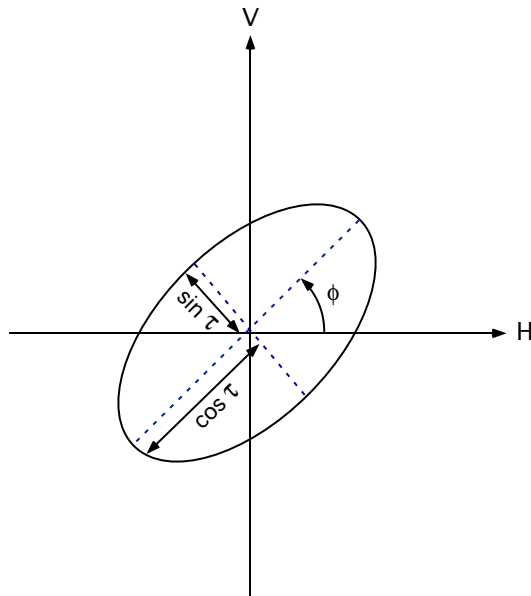


FIG. 5.1 – Paramètres de l'ellipse de polarisation.

Ainsi, si $(\phi, \tau) = (0, 0)$, l'onde est dite *polarisée horizontalement* ; si $(\phi, \tau) = (\pi/2, 0)$, l'onde est dite *polarisée verticalement*. Par exemple, le radar RAMSES de l'ONERA est *totalemt polarimétrique*, c'est à dire qu'il est capable d'émettre et recevoir une onde qui est soit polarisée horizontalement (H), soit polarisée verticalement (V).

b/ Théories déterministe et non déterministe

En polarimétrie, on distingue deux types de cibles :

- Les cibles déterministes dites "simples" ; elles sont caractérisées par un nombre réduit de réflecteurs. Les ondes renvoyées par les réflecteurs s'additionnent de manière cohérente. Chaque réflecteur élémentaire est caractérisé par sa *matrice de diffusion* [Pot92] (théorie déterministe). En général ces cibles sont fabriquées par l'homme : véhicules, bâtiments, etc.
- Les cibles aléatoires dites "distribuées" ; par exemple : cultures, prairies, forêts, etc. Le signal renvoyé par ce type de cible, résulte de l'addition non cohérente d'un nombre indéterminé de processus élémentaires. Ces cibles sont caractérisées par une grandeur statistique du second ordre (théorie non déterministe) [Clou96] : matrice de covariance ou matrice de cohérence. La théorie non déterministe englobe, en tant que cas particulier, la théorie déterministe.

Dans toute la suite, on se placera dans le cadre de la théorie non déterministe puisque les images SAR que nous analysons dans cette partie contiennent, entre autres, des cibles aléatoires. Une des grandeurs statistiques les plus importantes est la *matrice de cohérence* dans la mesure où la plupart des paramètres polarimétriques, susceptibles de séparer ou identifier les mécanismes

électromagnétiques relatifs à une cible aléatoire, se déduisent de cette quantité. Cette matrice de cohérence se définit, elle-même, à partir d'une autre quantité qu'est le *vecteur de diffusion* : ces deux quantités sont présentées dans le paragraphe suivant.

b/ Vecteur diffusion et matrice de cohérence

Notons $S(x, y; k_x, k_y)$ le signal reçu par le radar et provenant du réflecteur de coordonnées (x, y) pour le vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y)$:

$$S(x, y; k_x, k_y) = A(f, \theta) \exp[-j2\pi(k_x x + k_y y) + \varphi(f, \theta)]$$

où $A(f, \theta)$ est l'amplitude traduisant le caractère coloré (dépendance en fréquence) et non-isotrope (dépendance en angle)⁵² du réflecteur localisé en (x, y) ; φ est la phase propre du réflecteur supposée, également, dépendre de la fréquence et de l'angle d'illumination.

Dans un système SAR, ce signal est intégré sur toutes les fréquences f et tous les angles d'illumination θ , ce qui donne :

$$S(x, y) = \iint A(f, \theta) \exp[-j2\pi(k_x x + k_y y) + \varphi(f, \theta)] dk_x dk_y$$

En polarimétrie, ce signal $S(x, y)$, mesuré à une phase près⁵³, est appelé *coefficient de rétro-diffusion* du réflecteur localisé en (x, y) . Il est obtenu pour une certaine polarisation d'émission (H ou V) et de réception (h ou v)⁵⁴. Autrement dit, si l'onde émise est polarisée horizontalement et l'onde reçue par le radar est polarisée verticalement, le coefficient de rétrodiffusion est notée $S_{Hv}(x, y)$. À ce stade, il faut rappeler que dans les chapitres précédents où il est question du SAR non polarimétrique, le coefficient de rétrodiffusion désigne $H(f, \theta)$ que nous renommons ici, pour l'occasion, *signal rétrodiffusé* ou *signal de rétrodiffusion*.

On définit, alors, pour chaque pixel de l'image de coordonnée (x, y) , le *vecteur diffusion* de la manière suivante⁵⁵ :

$$\vec{s}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} S_{Hh}(x, y) + S_{Vv}(x, y) \\ S_{Hh}(x, y) - S_{Vv}(x, y) \\ 2S_{Vh}(x, y) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

La *matrice de cohérence* se définit, quant à elle, comme :

$$T(x, y) = \langle \vec{s}(x, y), \vec{s}^\dagger(x, y) \rangle \quad (5.2)$$

5.1.2 Introduction de l'analyse par ondelettes en polarimétrie

L'outil ondelette permet de calculer le vecteur diffusion, non seulement autour d'un pixel de coordonnées (x_o, y_o) , mais également autour d'une fréquence f_o et d'un angle θ_o donnés [Col04a, Col04b, Col04c] : ce que ne peut faire la polarimétrie classique. Ce nouveau vecteur s'écrit, alors, $\vec{s}(x_o, y_o; f_o, \theta_o)$.

⁵² On rappelle que $f = (c/2) \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ avec c la célérité de l'onde et $\theta = \arctan(k_y/k_x)$.

⁵³ En effet, ce signal contient une phase relative et non une phase absolue

⁵⁴ Cette notation est la notation adoptée par l'ONERA : une majuscule représente la polarisation d'un champ émis, tandis que la minuscule représente la polarisation d'un champ reçu.

⁵⁵ Cette définition est faite sous l'hypothèse de réciprocité $S_{Hv} = S_{Vh}$.

En effet, il suffit d'introduire le coefficient d'ondelette s'exprimant comme le produit scalaire entre le signal $H(\vec{k})$ rétrodiffusé par l'ensemble des n réflecteurs de l'image et l'ondelette analysante $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k})$ localisée spatialement autour de $\vec{r}_o = (x_o, y_o)$ et autour de (f_o, θ_o) ⁵⁶ :

$$C(x_o, y_o, f_o, \theta_o) = \langle H, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle$$

où $H(k_x, k_y) = \sum_{i=1}^n A_i(f, \theta) \exp[-j2\pi(k_x x_i + k_y y_i) + \varphi_i(f, \theta)]$ pour un modèle de réflecteurs colorés et anisotropes.

Le signal de rétrodiffusion H est obtenu pour les différentes configurations polarimétriques Hh, Vh et Vv. Ainsi le coefficient d'ondelette peut, également, être calculé pour ces configurations :

$$\begin{aligned} C_{\text{Hh}}(x_o, y_o, f_o, \theta_o) &= \langle H_{\text{Hh}}, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \\ C_{\text{Vh}}(x_o, y_o, f_o, \theta_o) &= \langle H_{\text{Vh}}, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \\ C_{\text{Vv}}(x_o, y_o, f_o, \theta_o) &= \langle H_{\text{Vv}}, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \end{aligned}$$

Et ainsi, en substituant C_{Hh} , C_{Vh} et C_{Vv} respectivement à S_{Hh} , S_{Vh} et S_{Vv} dans la définition du vecteur diffusion en (5.1), on obtient $\vec{s}(x_o, y_o; f_o, \theta_o)$.

De la même manière, tous les paramètres polarimétriques peuvent être obtenus autour d'une fréquence f_o et un angle θ_o .

L'un des paramètres clés pour distinguer les cibles non déterministes (exemple : forêt) des cibles déterministes (exemple : bâtiment) est l'entropie $E(x, y)$: elle est définie comme l'indicateur du caractère aléatoire du phénomène de rétrodiffusion. Par définition :

$$E(x, y) = - \sum_{i=1}^3 p_i \log_3(p_i), \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (5.3)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de cohérence $T(x, y)$ définie en (5.2). L'entropie E est proche de 0 pour des cibles dites "simples", c'est à dire déterministes. L'entropie est égale à 1 si et seulement si les trois valeurs propres de la matrice T sont égales : cette valeur de l'entropie correspond à une cible totalement aléatoire.

5.1.3 Amélioration du contraste de l'image d'entropie

L'outil ondelette nous permet, donc, d'obtenir l'entropie non seulement autour d'un pixel (x_o, y_o) mais aussi autour d'une fréquence f_o et d'un angle d'illumination θ_o .

En effet, à partir de la matrice de diffusion $\vec{s}(x_o, y_o, f_o, \theta_o)$ et en s'appuyant sur la définition de la matrice de cohérence en (5.2), on construit $T(x_o, y_o, f_o, \theta_o) = \langle \vec{s}(x_o, y_o, f_o, \theta_o), \vec{s}^\dagger(x_o, y_o, f_o, \theta_o) \rangle$. On calcule, ensuite les valeurs propres $\lambda_i(x_o, y_o, f_o, \theta_o)$ de la matrice $T(x_o, y_o, f_o, \theta_o)$. Enfin, en se référant à (5.3), on détermine $E(x_o, y_o, f_o, \theta_o)$.

⁵⁶On rappelle que $2f_o/c = |\vec{k}_o|$ et $\theta_o = \arg(\vec{k}_o)$

L'analyse de la variation de l'entropie en fonction de la fréquence et de l'angle pour un pixel donné montre que :

- sur la majorité des pixels, l'entropie semble varier de manière totalement aléatoire lorsque la fréquence et l'angle de vue varient.
- sur un petit nombre de pixels (points très brillants de bâtiment, voitures), l'entropie est faible et quasi-constante dans les intervalles $[f_{omin}, f_{omax}]$ et $[\theta_{omin}, \theta_{omax}]$.

Dans le but d'améliorer le contraste de la carte d'entropie, les deux précédents points nous conduisent à retenir, pour chaque pixel de coordonnées (x_o, y_o) , la valeur maximale de l'entropie obtenue en balayant toute la plage de fréquences et d'angles :

$$E_{max}(x_o, y_o) = \max_{f_o, \theta_o} E(x_o, y_o; f_o, \theta_o)$$

Ainsi les cibles déterministes garderont une entropie faible, puisque celle-ci l'est pour tout angle θ_o et toute fréquence f_o , tandis que les cibles non déterministes auront une entropie très élevée, correspondant au maximum pouvant être atteint. Cette image d'entropie maximum est donnée en figure 5.2(b) et comparée à la carte entropique initiale illustrée en 5.2(a) [Col04a, Col04b] : on remarque, sur la carte d'entropie initiale, que certains champs (cibles aléatoires), comme celui sur le bas gauche de l'image, ont un niveau d'entropie anormalement faible. Dans la carte d'entropie, après analyse par ondelettes, ces champs ont un niveau d'entropie élevé conformément à ce que prévoit la théorie : ceci a pour conséquence de mieux discerner les cibles déterministes d'entropie plus faible.

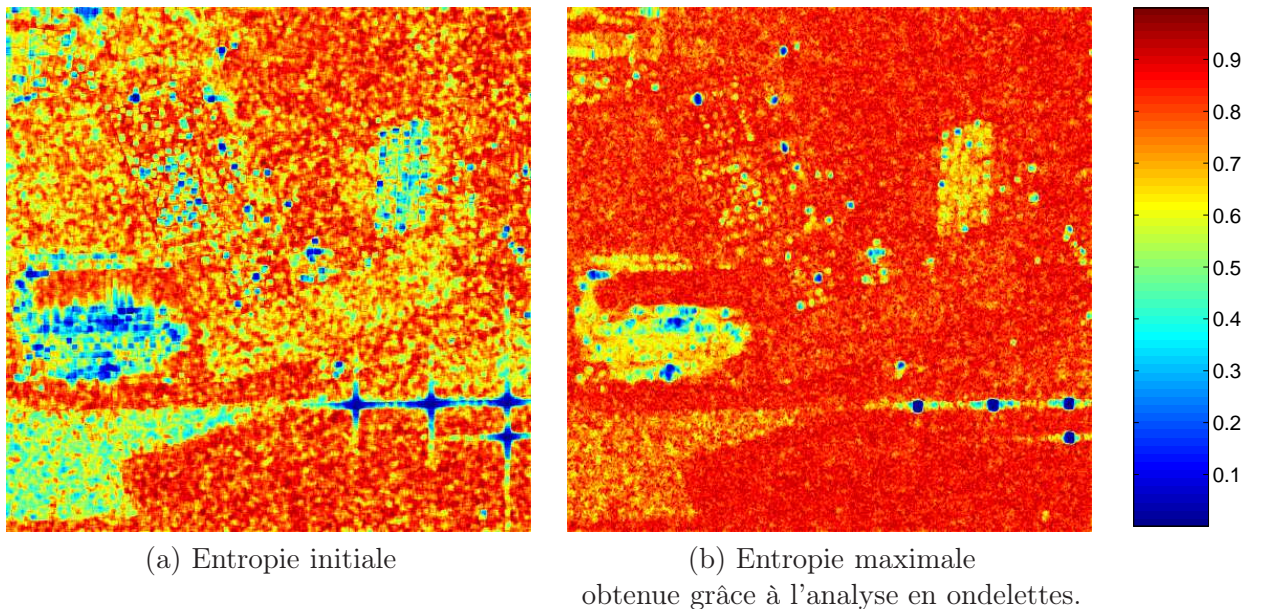


FIG. 5.2 – Amélioration du contraste de l'image par analyse en ondelettes.

5.2 Analyse par ondelettes en interférométrie

5.2.1 Phase interférométrique et hauteur de cible

L'interférométrie est un outil permettant de reconstruire la topographie d'une zone donnée. Cette technique est basée sur la mesure des différences de phase entre deux signaux SAR apparées, obtenus par deux antennes faiblement délocalisées spatialement (voir figure 5.3).

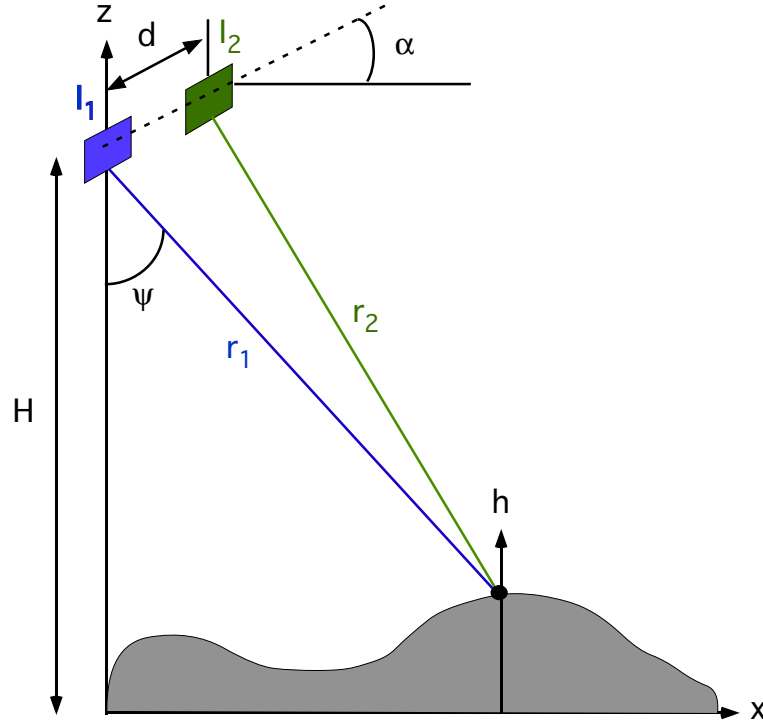


FIG. 5.3 – Géométrie du SAR Interférométrique.

Si S_1 est le signal collecté par la première antenne, et S_2 le signal enregistré par la seconde, alors la cohérence interférométrique du pixel de coordonnées (x, y) est définie mathématiquement par :

$$\gamma(x, y) = \frac{\langle S_1(x, y) S_2^*(x, y) \rangle}{\sqrt{\langle S_1(x, y) S_1^*(x, y) \rangle} \sqrt{\langle S_2(x, y) S_2^*(x, y) \rangle}} \quad (5.4)$$

L'argument de la cohérence définie en (5.4) est proportionnel à la hauteur du réflecteur localisé en (x, y) : si l'on note h la hauteur de la cible, Φ l'argument de cette fonction cohérence que l'on appelle *phase interférométrique*, on a :

$$h = \frac{\Phi}{2\pi} h_a \quad (5.5)$$

où h_a désigne une "hauteur d'ambiguïté" qui dépend de la configuration géométrique du radar et de la distance antenne-cible.

Le module de la cohérence, est lui, compris entre 0 et 1, et est d'autant plus grand que les mesures fournies par les deux antennes sont proches. On peut donc supposer que l'estimation des hauteurs est d'autant plus fiable que le module de la cohérence est élevé. Les méthodes d'"optimisation de la cohérence" visent donc à déterminer la cohérence de module maximum, et d'utiliser l'argument de cette cohérence pour estimer la hauteur des réflecteurs de l'image.

5.2.2 Optimisation basée sur l'analyse par ondelettes

De la même manière que pour les paramètres polarimétriques, il est possible de calculer la cohérence interférométrique autour d'une fréquence et d'un angle donnés. En effet, si l'on note H_1 et H_2 les signaux de rétrodiffusion enregistrés par les antennes 1 et 2, on peut calculer les coefficients d'ondelettes :

$$\begin{aligned} C_1(x_o, y_o, f_o, \theta_o) &= \langle H_1, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \\ C_2(x_o, y_o, f_o, \theta_o) &= \langle H_2, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \end{aligned}$$

Et ainsi, en substituant $C_1(x_o, y_o, f_o, \theta_o)$ à $S_1(x, y)$ et $C_2(x_o, y_o, f_o, \theta_o)$ à $S_2(x, y)$ dans la définition de la cohérence en (5.4), on obtient la cohérence $\gamma(x_o, y_o; f_o, \theta_o)$.

L'idée est, alors, de chercher, pour chaque pixel (x_o, y_o) , le couple $(\hat{f}_o, \hat{\theta}_o)$ qui maximise le module de la cohérence :

$$\{ (\hat{f}_o, \hat{\theta}_o) / \left| \gamma(x_o, y_o, \hat{f}_o, \hat{\theta}_o) \right| = \max_{f_o, \theta_o} |\gamma(x_o, y_o; f_o, \theta_o)| \}$$

Cette méthode d'optimisation est appelée, dans la suite, optimisation par ondelettes.

On détermine, alors, l'angle interférométrique (porteur de l'information de hauteur des cibles) pour chaque pixel de coordonnées (x_o, y_o) :

$$\Phi(x_o, y_o) = \arg \left[\gamma(x_o, y_o, \hat{f}_o(x_o, y_o), \hat{\theta}_o(x_o, y_o)) \right] \quad (5.6)$$

L'angle interférométrique se visualise au moyen d'un *interférogramme*. L'angle interférométrique de l'équation (5.6) est visualisé dans l'interférogramme de droite de la figure 5.4. L'interférogramme initial, c'est à dire visualisant l'argument de la cohérence définie en (5.4), est présenté dans le graphe de gauche de la figure 5.4. On constate que l'interférogramme obtenu après optimisation par ondelettes est de meilleure qualité que l'interférogramme initial dans la mesure où il "gomme" certains effets parasites et "lisse" l'estimation de hauteur des cibles artificielles.

À présent, on propose, dans toute la suite, de combiner l'optimisation par ondelettes et celle par la polarimétrie dans le but d'améliorer l'estimation de hauteur des cibles.

5.2.3 Combinaison de l'optimisation polarimétrique et par ondelettes

La première méthode consiste à appliquer l'optimisation par la polarimétrie puis l'optimisation par ondelettes [Col04a, Col04b]. La méthode d'optimisation par la polarimétrie que nous avons proposés est une variante simplifiée de la méthode d'optimisation proposée par Cloude et Papathanassiou [Clou98]. Elle est présentée, brièvement dans le paragraphe suivant.

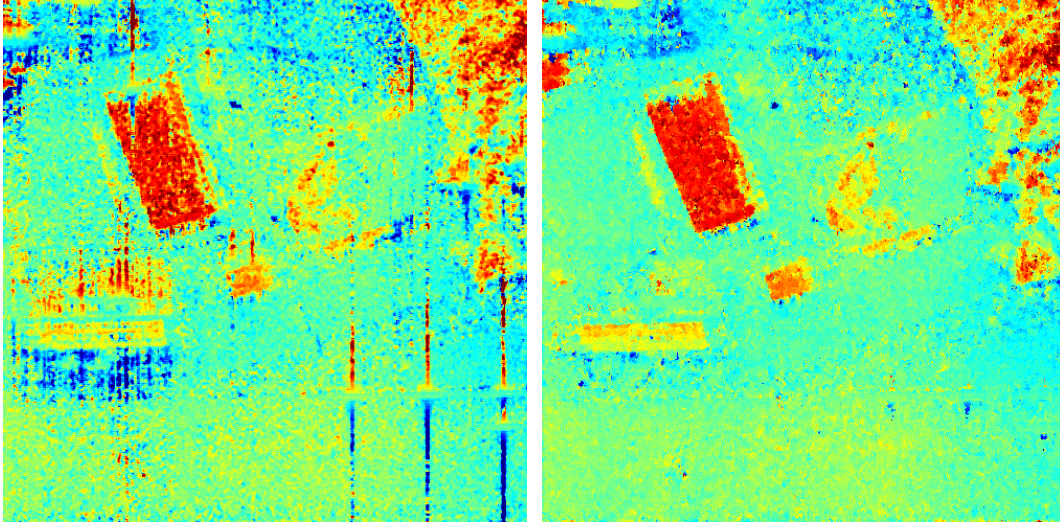


FIG. 5.4 – Interférogramme initial en polarisation hH, et le même après optimisation par ondelettes.

a/ Optimisation par la polarimétrie

Pour introduire cette méthode, on définit la *cohérence généralisée* $\gamma(\vec{\omega})$ suivante :

$$\gamma_g(\vec{\omega}) = \frac{\vec{\omega}^\dagger T_{12} \vec{\omega}}{\sqrt{\vec{\omega}^\dagger T_{11} \vec{\omega}} \sqrt{\vec{\omega}^\dagger T_{22} \vec{\omega}}} \quad (5.7)$$

où $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque à 3 composantes. La matrice $T_{i,j}$ est définie, en se référant à (5.2), par :

$$T_{ij}(x, y) = \langle \vec{s}_i(x, y), \vec{s}_j^\dagger(x, y) \rangle ; \text{ où } (i, j) \in \{(1, 1); (1, 2); (2, 2)\} \quad (5.8)$$

où l'on rappelle, d'après (5.1) que :

$$\vec{s}_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} S_{i,\text{Hh}}(x, y) + S_{i,\text{Vv}}(x, y) \\ S_{i,\text{Hh}}(x, y) - S_{i,\text{Vv}}(x, y) \\ 2S_{i,\text{Vh}}(x, y) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$S_{i,\text{Hh}}(x, y)$ désignant le coefficient de rétrodiffusion du pixel (x, y) reçu par l'antenne i pour une polarisation d'émission horizontale H et une polarisation de réception également horizontale h : la signification des autres éléments de la matrice se déduit de cette notation.

Par exemple, le vecteur $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fournit :

$$\gamma_g(\vec{\omega}) = \frac{[S_{1,\text{Hh}}(x, y) + S_{1,\text{Vv}}(x, y)] [S_{2,\text{Hh}}(x, y) + S_{2,\text{Vv}}(x, y)]^*}{\sqrt{|S_{1,\text{Hh}}(x, y) + S_{1,\text{Vv}}(x, y)|^2} \sqrt{|S_{2,\text{Hh}}(x, y) + S_{2,\text{Vv}}(x, y)|^2}}$$

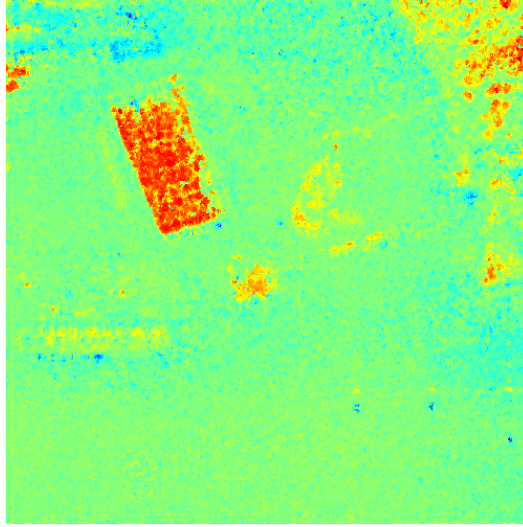


FIG. 5.5 – Optimisation par ondelettes puis optimisation polarimétrique

qui désigne, par abus de langage, la cohérence correspondant à la polarisation Hh+Vv.

De la même manière, les vecteurs $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ fournissent les cohérences correspondants respectivement aux polarisations Hh-Vv et 2Vh.

La méthode d'optimisation polarimétrique consiste à trouver le vecteur $\hat{\vec{\omega}}$ qui maximise le module de la cohérence :

$$\{ \hat{\vec{\omega}} / |\gamma_g(\hat{\vec{\omega}})| = \max_{\vec{\omega}} |\gamma_g(\vec{\omega})| \} \quad (5.10)$$

b/ Optimisation par ondelettes puis polarimétrique

On effectue une optimisations par ondelettes sur chacune des polarisations de la base (Hh, Vh, Vv), puis une optimisation polarimétrique. L'interférogramme issu de cette première méthode est illustré en figure 5.5 : on constate une sous-estimation importante des hauteurs.

c/ Moyennage coefficients d'ondelette puis optimisation polarimétrique

Avant de justifier la démarche de la seconde méthode, il faut savoir, qu'en pratique, tout calcul de cohérence $\gamma(x, y)$ se fait à partir d'un moyennage mettant en jeu les échantillons voisins du pixel (x, y) :

$$\tilde{\gamma}(x, y) = \frac{\overline{\langle S_1(x, y)S_2^*(x, y) \rangle}}{\sqrt{\overline{\langle S_1(x, y)S_1^*(x, y) \rangle}} \sqrt{\overline{\langle S_2(x, y)S_2^*(x, y) \rangle}}} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \overline{S_1(x, y)S_2^*(x, y)} &= \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N S_1(x+i, y+j)S_2^*(x+i, y+j), \\ \text{et } \overline{S_p(x, y)S_p^*(x, y)} &= \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N |S_p(x+i, y+j)|^2 \quad ; \quad p = 1, 2. \end{aligned}$$

Par exemple, pour faire le moyennage sur une fenêtre 3×3 , il faut choisir $N = 1$.

Malheureusement, ce moyennage de pixels dans l'espace (x, y) est inadapté dans une zone frontalière entre deux différentes cibles.

C'est pourquoi, nous proposons d'introduire dans la cohérence, non pas un moyennage dans l'espace (x, y) mais un moyennage dans l'espace (f, θ) grâce à l'analyse en ondelettes.

$$\overline{\gamma}(x_o, y_o) = \frac{\sum_{(f_o, \theta_o)} C_1(x_o, y_o; f_o, \theta_o)C_2^*(x_o, y_o; f_o, \theta_o)}{\sqrt{\sum_{(f_o, \theta_o)} |C_1(x_o, y_o; f_o, \theta_o)|^2 \sum_{(f_o, \theta_o)} |C_2(x_o, y_o; f_o, \theta_o)|^2}} \quad (5.12)$$

La méthode (5.12), fournissant la cohérence $\overline{\gamma}(x_o, y_o)$, sera nommée, dans la suite, méthode "moyennage coefficients d'ondelettes".

En s'appuyant sur (5.12), et en se référant à (5.7), on définit la cohérence généralisée $\overline{\gamma}_g$ comme :

$$\overline{\gamma}_g(\vec{\omega}) = \frac{\vec{\omega}^\dagger \overline{T}_{12} \vec{\omega}}{\sqrt{\vec{\omega}^\dagger \overline{T}_{11} \vec{\omega} \vec{\omega}^\dagger \overline{T}_{22} \vec{\omega}}} \quad (5.13)$$

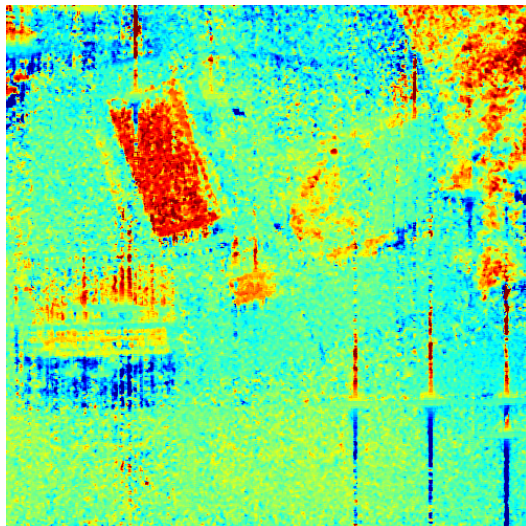
où les matrices de cohérences \overline{T}_{11} , \overline{T}_{12} et \overline{T}_{22} sont calculées à l'aide d'un moyennage sur tous les coefficients d'ondelette :

$$\overline{T}_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{C}_{ij,aa} & \overline{C}_{ij,ab} & \overline{C}_{ij,ac} \\ \overline{C}_{ij,ba} & \overline{C}_{ij,bb} & \overline{C}_{ij,bc} \\ \overline{C}_{ij,ca} & \overline{C}_{ij,cb} & \overline{C}_{ij,cc} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

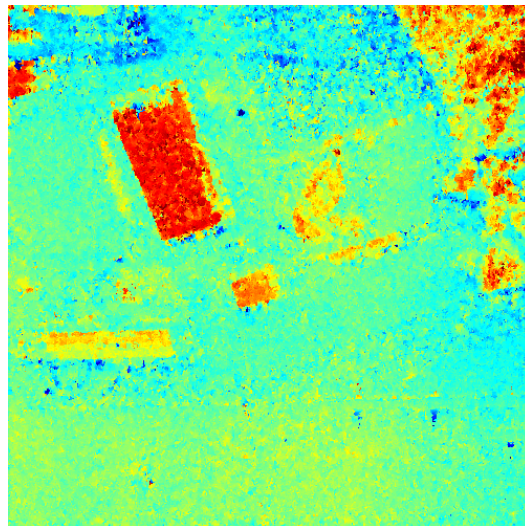
avec $\overline{C}_{ij,aa} = \sum_{(f_o, \theta_o)} C_{i,a}(x_o, y_o; f_o, \theta_o)C_{j,a}^*(x_o, y_o; f_o, \theta_o)$; a désignant la polarisation Hh+Vv.

On rappelle que $C_{i,a}(x_o, y_o; f_o, \theta_o)$ est le coefficient d'ondelette se définissant comme le produit scalaire entre le signal $H_{i,a}(\vec{k}) = H_{i,Hh}(\vec{k}) + H_{i,Vv}(\vec{k})$ reçu par l'antenne i et l'ondelette analysante $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k})$. En précisant que $b = Hh - Vv$ et $c = 2Vh$, les autres termes de la matrice s'explicitent de la même manière.

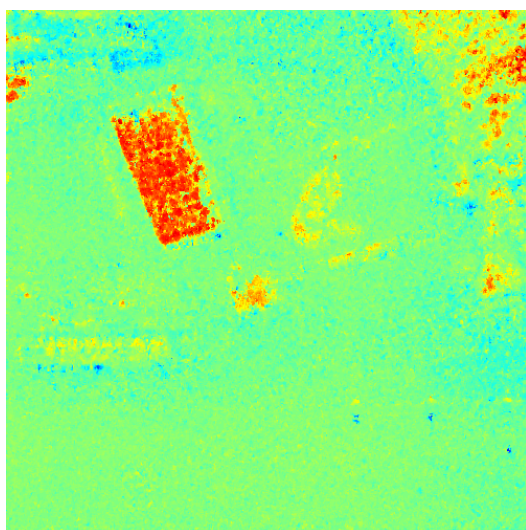
Une fois la cohérence $\overline{\gamma}_g(\vec{\omega})$ calculée, on effectue une optimisation de cohérence par la polarimétrie suivant le schéma de l'équation (5.10). Cette méthode "moyennage coefficients ondelettes + optimisation polarimétrique" et la méthode "optimisation par ondelettes" sont celles qui fournissent les meilleurs cartes d'angle interférométrique, visibles respectivement dans les graphes (d) et (b) de la figure 5.6.



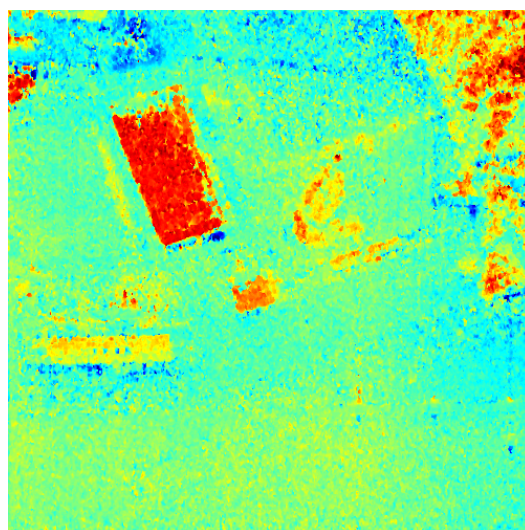
(a) Interférogramme initial en polarisation Hh.



(b) Interférogramme après optimisation par ondelettes.



(c) Interférogramme après optimisation par ondelettes puis polarimétrique.



(d) Interférogramme obtenu par la méthode "moyennage des coefficients d'ondelettes puis optimisation polarimétrique"

FIG. 5.6 – Comparaison des différentes méthodes étudiées pour l'estimation de la hauteur des cibles : Les méthode "optimisation par ondelettes" et "moyennage coefficients ondelettes + optimisation polarimétrique" sont les méthodes les plus performantes.

d/ Influence de l'étendue angulaire et fréquentielle de l'ondelette mère sur la méthode.

On rappelle que, dans tout ce manuscrit, l'étendue d'un signal est définie comme la largeur de bande à -3 dB de la densité spectrale de ce signal. Ainsi les étendues angulaire δ_θ et fréquentielle δ_k de l'ondelette mère sont déterminées suivant cette définition, comme le montre la figure (5.7).

Dans ce paragraphe, la méthode "moyennage coefficients d'ondelette+optimisation polarimétrique" est appliquée dans quatre cas différents :

- $\delta_k = 30\%(B_k/k_c)$ et $\delta_\theta = 30\%\Delta\theta$
- $\delta_k = 20\%(B_k/k_c)$ et $\delta_\theta = 20\%\Delta\theta$
- $\delta_k = 10\%(B_k/k_c)$ et $\delta_\theta = 10\%\Delta\theta$
- $\delta_k = 5\%(B_k/k_c)$ et $\delta_\theta = 5\%\Delta\theta$

où $B_k = (2/c)B_f$, avec B_f désignant la bande fréquentielle d'émission ; $k_c = (2/c)f_c$, avec f_c désignant la fréquence centrale ; et $\Delta\theta$ le secteur angulaire d'ouverture du radar synthétique. Il faut rappeler qu'une ondelette mère d'étendue fréquentielle $\delta_k = 30\%(B_k/k_c)$ génère une ondelette $\Psi_{\vec{r}_o, f_c, \theta_o}(k)$ localisée autour de $f = f_c$ d'étendue fréquentielle $\delta_f(f_c) = 30\%B_f$.

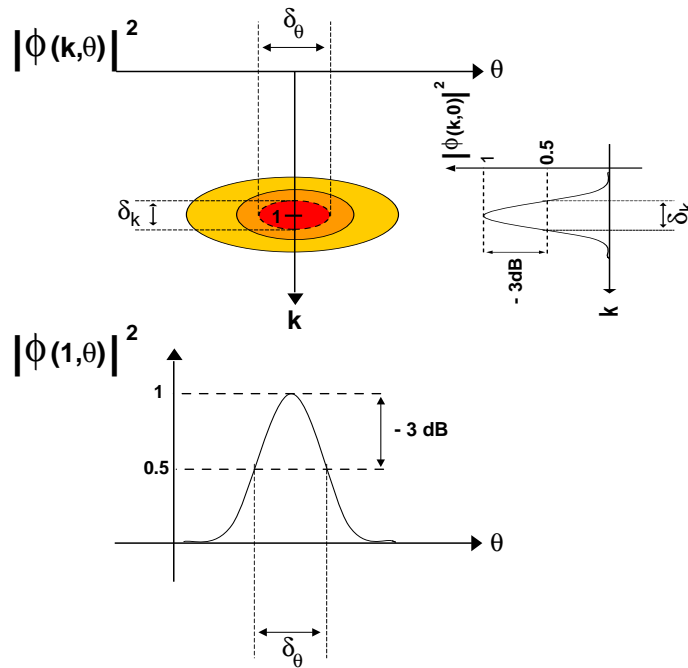


FIG. 5.7 – Définition des étendues angulaire et fréquentielle de l'ondelette mère.

Plus on utilise un grand pourcentage de bande, plus l'interférogramme obtenu se rapproche de l'interférogramme initial. Plus ce pourcentage est faible, plus les images obtenues sont lissées, comme en témoignent les profils de hauteurs obtenus en figure 5.8.

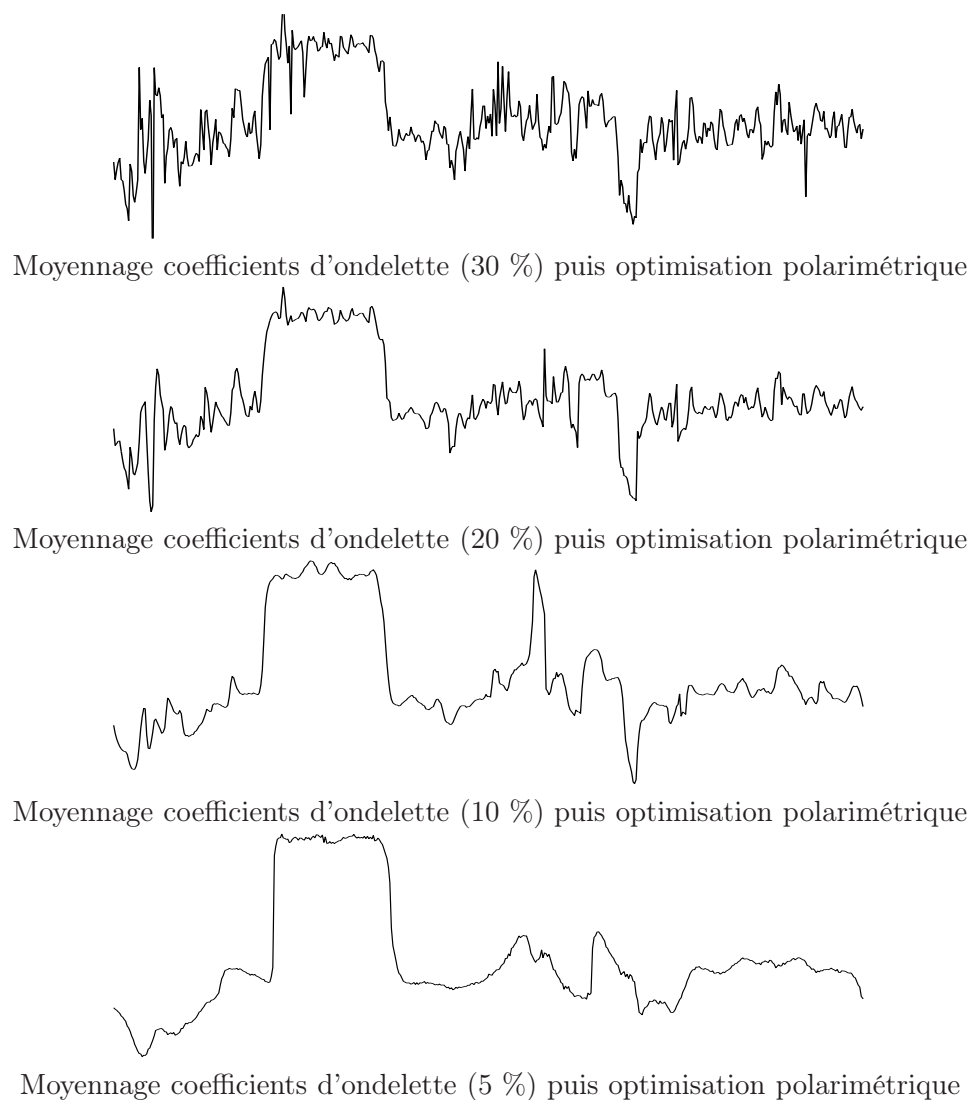
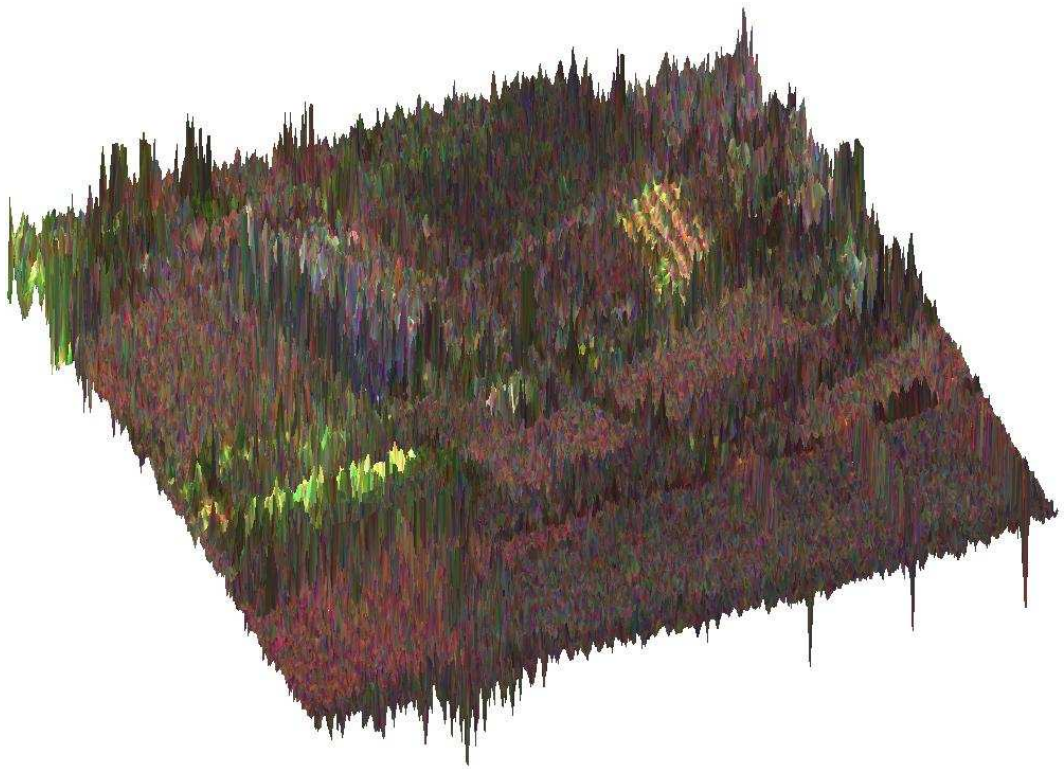


FIG. 5.8 – profils de bâtiments obtenus avec la méthode "moyennage coefficients d'ondelette + optimisation polarimétrique", en utilisant, dans l'analyse en ondelettes, des pourcentages de bande respectivement de 30 %, 20%, 10 % et 5 %.

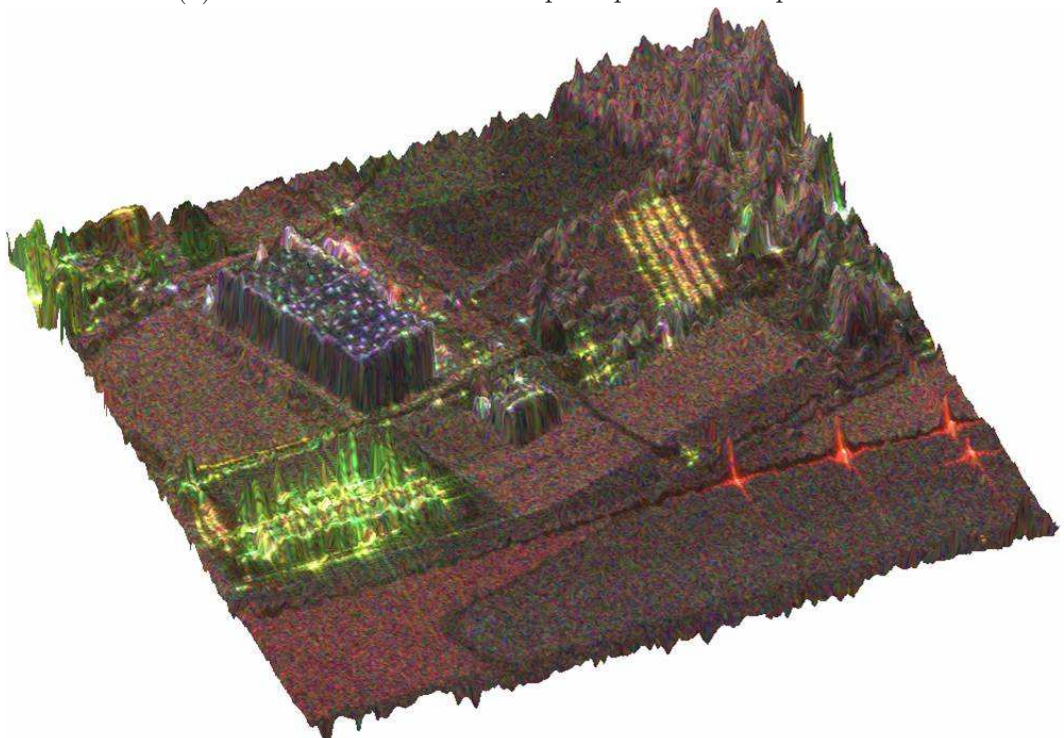
5.2.4 Carte d'élévation finale

Après toutes ces séries de résultats, on propose de construire une carte d'élévation donnant la hauteur estimée des différents éléments de l'image. Pour cela, pour chaque pixel (x, y) de l'image, on calcule la cohérence $\bar{\gamma}_g(\vec{\omega})$ définie en (5.13) (dans le calcul des coefficients d'ondelettes, le pourcentage de bande est 10 %) puis on effectue l'optimisation par la polarimétrie décrite en (5.10). Ainsi, pour chaque pixel, on prend l'argument $\hat{\Phi}$ de la cohérence optimisée $\bar{\gamma}_g(\hat{\vec{\omega}})$: la hauteur h est donc calculée, à partir de $\hat{\Phi}$ en se référant à (5.5). La hauteur h étant estimée pour chaque pixel (x, y) de l'image, on établit la carte d'élévation. A la carte d'élévation ainsi construite, on peut superposer la composition polarimétrique RGB (Rouge : Hh+Vv, Vert Hh-Vv, bleu : 2Hv) de chaque réflecteur de l'image⁵⁷. Le résultat final est donné en figure 5.9 (b) [Col04a, Col04b, Tri04a] et comparé à la carte d'élévation initiale en 5.9 (a), c'est à dire avant le traitement par ondelettes.

⁵⁷La composition RGB est, en fait un codage par couleurs : par exemple, un réflecteur sera codée bleu si pour une onde polarisée horizontalement (H), il renvoie une onde polarisée verticalement (v).



(a) Carte d'élévation initiale pratiquement inexploitable.



(b) Carte d'élévation après le traitement par ondelettes :
meilleure estimation de la hauteur des bâtiments et des arbres et différenciation par rapport au sol.

FIG. 5.9 – Carte de hauteur, colorée grâce aux canaux polarimétriques

Conclusion générale

Pour conclure, il faut rappeler les enjeux de la thèse mentionnés dans l'introduction : notre préoccupation essentielle était de mettre en lumière de possibles phénomènes de coloration et d'anisotropie chez les réflecteurs contenus dans les images SAR réelles. Pour ce faire, nous avons proposé d'analyser le signal SAR par ondelettes continues et d'exploiter le module au carré de la transformée en ondelettes pour montrer la distribution énergétique des réflecteurs dans le plan (f, θ) . On a pu constater, au chapitre 4, que la plupart des réflecteurs analysés étaient anisotropes et colorés : ces observations viennent, donc, contredire l'hypothèse de l'imagerie classique des réflecteurs isotropes et blancs.

En outre, on souhaitait que la décomposition du signal SAR en ondelettes continues se fasse dans un moindre coût en terme de temps de calcul : l'algorithme, que nous avons proposé, s'appuie sur la transformée de Fourier ; par conséquent, en utilisant l'algorithme rapide de transformée de Fourier, le calcul de la transformée en ondelettes en imagerie SAR est rapide.

Le second enjeu de la thèse était d'extraire des caractéristiques physiques des réflecteurs pour les exploiter dans le but d'améliorer la reconnaissance et l'identification des cibles réelles : on a vu au chapitre 4 que l'idée d'exploiter la distribution énergétique des réflecteurs pour l'extraction d'objets était encourageante et prometteuse. On a pu également constater, dans la partie complémente, qu'une analyse locale du signal autour d'une fréquence et d'un angle en polarimétrie et en interférométrie était bénéfique en terme de reconnaissance et d'identification de cibles : d'abord en polarimétrie, cette analyse a permis d'améliorer le contraste, dans la carte d'entropie, entre les cibles aléatoires et déterministes ; puis en interférométrie, elle a contribué à améliorer l'estimation de hauteur des cibles dans la mesure où cette estimation est plus conforme à ce qui est attendu par rapport à l'estimation obtenue par l'interférométrie classique.

On peut, d'ores et déjà, dire que les résultats d'extraction d'objets du chapitre 4 sont prometteurs et donnent beaucoup d'espoir quant à l'utilisation future de l'analyse temps-fréquence pour la reconnaissance et l'identification de cibles. On peut, toutefois, faire certaines remarques et proposer quelques améliorations de l'algorithme d'extraction d'objets :

- D'abord, deux réflecteurs peuvent avoir des distributions énergétiques similaires sans que cela signifie qu'ils appartiennent à un même objet. À l'inverse, deux réflecteurs peuvent appartenir à un même objet et avoir des distributions énergétiques totalement différentes : ces cas de figures peuvent rendre l'algorithme inefficace pour extraire un objet. L'algorithme suppose, en fait, que l'objet à extraire est à géométrie suffisamment simple et composé d'un matériau suffisamment homogène pour que les diffuseurs qui le composent aient des caractéristiques énergétiques proches.

- Ensuite, l'algorithme donne un pouvoir de décision trop important à l'utilisateur qui choisit lui-même une distribution de référence dans l'image étudiée et fixe le niveau de seuillage des distributions énergétiques.
- Le troisième inconvénient a été évoqué dans le point précédent : il n'est pas acceptable que la distribution de référence soit choisie dans l'image étudiée ; il faudrait établir une banque de distributions issues de la théorie et caractéristiques d'objets canoniques (trièdre, dièdre, sphère, cylindre, surface plate, etc...) où chacune pourrait être utilisée comme distribution de référence.
- On peut se demander, si les résultats d'extraction ne seraient pas meilleurs en mettant en jeu, dans la fonction de corrélation 2D, non pas les distributions en un pixel (x_i, y_j) mais la distribution en un ensemble de pixels $V_{i,j}$ au voisinage du pixel (x_i, y_j) :

$$I(V_{i,j}; f, \theta) = \int_{V_{i,j}} I(x, y; f, \theta) dx dy$$

puisque la résolution en distance est dégradée, par le principe d'Heisenberg, en introduisant l'analyse en ondelettes et que, par conséquent, la position du réflecteur, que l'on souhaite analyser, est rendu incertaine.

- Enfin, la fonction de corrélation 2D introduite dans l'algorithme met en jeu la distribution énergétique des réflecteurs où l'information de phase des réflecteurs est pratiquement perdue. L'idée que l'on a proposée à la fin du chapitre 4 est de remplacer les distributions énergétiques par les coefficients d'ondelette. Le résultat que l'on a montré à la fin de ce même chapitre est prometteur et on peut espérer que cette nouvelle fonction de corrélation va permettre une meilleure extraction des objets dans la mesure où la phase des coefficients d'ondelette est susceptible d'être porteuse d'information.

D'autre part, on a constaté, dans la plupart des résultats du chapitre 4, que la réponse énergétique des réflecteurs dépend surtout de l'angle d'illumination θ plus que de la fréquence. Cette constatation doit nous amener à étudier des images reconstruites à partir d'une antenne synthétique de plus grande ouverture angulaire $\Delta\theta$. À titre d'exemple, en bande X et en bande P, cette ouverture peut atteindre respectivement $\Delta\theta = 20^\circ$ et $\Delta\theta = 120^\circ$, or nous n'avons étudié, au chapitre 4, que des images formées à partir d'une ouverture $\Delta\theta = 3^\circ$. Cette extension à des ouvertures plus importantes peut être tout à fait intéressante pour classer les objets selon leur orientation. De plus, l'idée d'étudier des images formées à partir d'une bande relative plus importante doit également être envisagée pour mettre en évidence la coloration fréquentielle des réflecteurs de manière plus remarquable : par exemple, nos études ont été effectuées en bande Ku avec une bande relative de $B_r = B/f_c = 6\%$ alors qu'avec la bande P, on a la possibilité de travailler avec une bande relative de $B_r = 16\%$.

Ensuite, ce souci de séparer les objets traduit, en fait, un problème de *séparation de sources* : les sources sont les réflecteurs sur les différents objets qui émettent chacune un signal d'une couleur fréquentielle et angulaire bien caractéristique. Le signal reçu par le radar constitue un *mélange* des signaux émis par ces sources. Par conséquent, ce problème de séparation d'objets pourrait être repris à l'aide de méthodes de séparation de sources en faisant l'hypothèse que la distance radar-réflecteur est connue (ce qui est le cas puisque la position des réflecteurs dans

l'image est connue).

Concernant la polarimétrie et l'interférométrie par analyse en ondelettes, on s'aperçoit que les résultats obtenus, notamment les résultats d'estimation de hauteur en interférométrie, sont satisfaisants. La première question qui se pose est de savoir si la qualité des résultats obtenus est due essentiellement à une analyse locale du signal en fréquence ou au contraire en angle. Ensuite, il serait intéressant de savoir pourquoi les résultats de l'estimation de hauteur en interférométrie sont meilleurs lorsqu'on utilise des ondelettes de petite étendue fréquentielle et angulaire. Enfin, avec l'analyse en ondelettes, on a l'opportunité d'obtenir les différents paramètres polarimétriques et interférométriques en fonction de la fréquence et de l'angle : il serait intéressant de voir si, en fonction de la fréquence ou de l'angle, ces paramètres suivent une loi particulière.

Enfin, en guise de perspective, il est à envisager de rattacher les ondelettes à d'autres grandeurs physiques, autres que la fréquence et l'angle d'illumination. Par exemple, pour analyser les cibles mobiles, il pourrait être intéressant de relier les ondelettes au paramètre vitesse dans le but de mettre en lumière la distribution de vitesse des réflecteurs composant une cible mobile⁵⁸.

⁵⁸Voir, à ce propos, la thèse de L. Vignaud : "Imagerie Micro-Ondes des Scènes Instationnaires", Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 1996.

Annexes du chapitre 1

Annexe A

Relation entre les spectres $P(f)$, $S(f)$ et $H_o(k_x)$

Il s'agit, ici de démontrer la relation qui existe entre le spectre $S(f)$ du signal écho, le spectre d'émission $P(f)$ et le spectre $H_o(k_x)$ de l'image $I_o(x)$. Cette relation se traduit par :

$$S(f) = P(f) \cdot H_o(k_x)$$

On montrera, au passage, la relation qui lie la fréquence temporelle f et la fréquence spatiale k_x , à savoir :

$$k_x = 2f/c$$

Démonstration :

On rappelle que le signal écho $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i p(t - 2t_i)$$

On pose, par ailleurs, $x = at$ avec $a = c/2$: ceci est dû au fait que l'onde qui se déplace à la vitesse de la lumière c parcourt deux fois la distance x pour revenir au radar.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i [p(t) * \delta(t - 2t_i)] \\ &= p(t) * \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(t - x_i/a) \right] \end{aligned}$$

soit en utilisant le fait que :

$$\delta(t - x_i/a) = a \delta(at - x_i) \text{ [Rei02]},$$

on a :

$$\begin{aligned} s(t) &= p(t) * \left[a \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(at - x_i) \right] \\ &= p(t) * [a I_o(at)] \end{aligned}$$

$$\text{avec } I_o(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta(x - x_i) \text{ l'image.}$$

Soit, par transformation de Fourier par rapport au temps, on a :

$$\begin{aligned} S(f) &= P(f) \cdot \int a I_o(at) \exp[-j2\pi ft] dt \\ &= P(f) \cdot \int I_o(x) \exp[-j2\pi f(x/a)] dx \\ &= P(f) \cdot \int I_o(x) \exp[-j2\pi(f/a)x] dx \\ &= P(f) \cdot H_o(f/a) \end{aligned}$$

Ainsi en nommant $k_x = f/a = 2f/c$ la variable duale de x par transformation de Fourier, on obtient la relation liant le spectre du signal reçu, le spectre d'émission et le spectre de l'image :

$$S(f) = P(f) \cdot H_o(k_x)$$

Annexe B

Filtrage adapté pour la reconstruction de l'image de terrain

En pratique, pour obtenir la distribution spatiale des réflecteurs, on utilise le filtrage adapté (*match filtering* en anglais). Ce filtrage s'exprime, en temps, comme une *corrélation* entre le signal émis $p(t)$ et le signal $p_r(t, u)$ reçu par le radar :

$$s_M(t, u) = \int_{\mathbb{R}} p_r(t', u) p^*(t' - t) dt' \quad (\text{B.1})$$

Exprimé en fréquence, le filtrage adapté se définit par :

$$S_M(f, u) = P_r(f, u) P^*(f) \quad (\text{B.2})$$

Il est, en effet, obtenu en appliquant la transformée de Fourier aux membres de l'équation (B.1) par rapport à la variable t . On utilise notamment, en vertu du théorème de Parseval, le fait que :

$$\begin{aligned} s_M(t, u) &= \int_{\mathbb{R}} P_r(f, u) P^*(f) \exp[+j2\pi ft] df \\ &= \mathcal{F}_{f \rightarrow t}^{-1} [P_r(f, u) P^*(f)] \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les équations (1.18) et (B.2) et en posant $k = 2f/c$, on a :

$$S_M(k, u) = |P(f)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[-j2\pi k \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2} \right] dx dy$$

À présent, on applique la transformée de Fourier au signal $S_M(k, u)$ par rapport à la variable u et en utilisant la décomposition d'une onde cylindrique en ondes planes (voir annexe C), on a :

$$S_M(k, k_u) \approx |P(f)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[-j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} (X_1 - x) + k_u (Y_1 - y) \right) \right] dx dy$$

Par commodité, le signal $S_M(k, k_u)$ est noté $S_M(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$. Il faut, à présent, repositionner le support de l'image $I(x, y)$ autour de l'origine $\mathcal{O}_{x,y}$ par la procédure suivante :

$$\begin{aligned} S'_M(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) &= S_M(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u) \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} X_1 + k_u Y_1 \right) \right] \\ &\approx |P(f)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_u^2} x + k_u y \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variable suivant $(k_x, k_y) = (\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$ et poser $H_M(k_x, k_y) = S'_M(\sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$ pour finalement obtenir :

$$H_M(k_x, k_y) \approx |P(f)|^2 H(k_x, k_y)$$

où $H(k_x, k_y) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp [j2\pi (k_x x + k_y y)] dx dy$ est le spectre théorique de l'image $I(x, y)$.

La dernière étape consiste simplement à appliquer la transformée de Fourier bidimensionnelle au spectre $H_M(k_x, k_y)$ pour obtenir l'image complexe $I_M(x, y)$ dont le module fournit la répartition spatiale des réflecteurs :

$$\begin{array}{l} \mathcal{F}^{-1} [H_M(k_x, k_y)] = I_M(x, y) \\ k_x \rightarrow x \\ k_y \rightarrow y \end{array}$$

Annexe C

Décomposition d'une onde cylindrique en ondes planes

On s'intéresse ici, à la décomposition d'une onde cylindrique $h(x, y)$ en ondes planes [Sou94, Sla85]. Cette onde s'explicite comme :

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-j2\pi k(\sqrt{x^2 + y^2})} \quad (\text{C.1})$$

Pour illustrer la propagation d'une telle onde dans l'espace (x, y) , il suffit de tracer les courbes d'équipphase, autrement dit les courbes d'équation $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ (voir figure C.1)

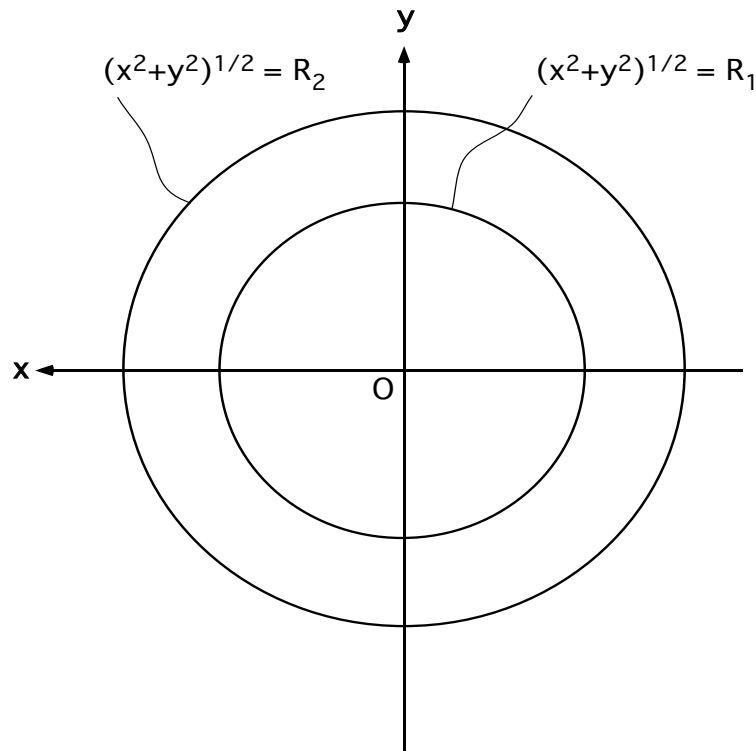


FIG. C.1 – Propagations des ondes cylindriques dans l'espace (x, y) .

La décomposition est basée sur l'équation de *Helmholtz* suivante⁵⁹ :

$$[\nabla^2 + (2\pi k)^2] \cdot s(x, y) = -\delta(x, y) \quad (\text{C.2})$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et le second membre correspond à une entrée d'impulsion caractérisée par la distribution de Dirac.

Le premier point important du raisonnement est que l'onde $h(x, y)$ est une solution de l'équation (C.2) lorsque $k \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$. Nous reprendrons ce point un peu plus tard dans le raisonnement.

Le second point d'importance est que la solution générale $s(x, y)$ de l'équation (C.2) est une somme d'*ondes planes*. Pour démontrer cela, nous procédons en plusieurs étapes. Écrivons tout d'abord l'équation (C.2) dans le domaine des fréquences spatiales (k_x, k_y) par transformation de Fourier bidimensionnelle :

$$[(j2\pi(k_x + k_y))^2 + (2\pi k)^2] \cdot S(k_x, k_y) = -1 \quad (\text{C.3})$$

Le spectre $S(k_x, k_y)$ se réécrit d'après (C.3) :

$$\begin{aligned} S(k_x, k_y) &= \frac{1}{4\pi^2(k_x^2 + k_y^2 - k^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(k_x - k_1) \cdot (k_x + k_1)} \\ \text{avec } k_1 &= \sqrt{k^2 - k_y^2} \end{aligned}$$

La solution générale $s(x, y)$ peut alors être réécrite comme transformée de Fourier inverse du spectre $S(k_x, k_y)$:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(k_x, k_y) \cdot \exp[+j2\pi(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(k_x - k_1) \cdot (k_x + k_1)} \cdot \exp[j2\pi(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(+j2\pi k_x x)}{(k_x - k_1) \cdot (k_x + k_1)} dk_x \right\} \exp(+j2\pi k_y y) dk_y \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Avant de poursuivre le raisonnement, il convient de séparer deux cas dans l'expression (C.4) :

$$\begin{cases} s^+(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(+j2\pi k_x x)}{(k_x - k_1) \cdot (k_x + k_1)} dk_x \right\} \exp(+j2\pi k_y y) dk_y & \text{si } x > 0 \\ s^-(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-j2\pi k_x |x|)}{(k_x - k_1) \cdot (k_x + k_1)} dk_x \right\} \exp(+j2\pi k_y y) dk_y & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

⁵⁹En toute rigueur, le module du vecteur d'onde est $k' = 2\pi k$: ce qui explique l'écriture (C.2) pour formuler l'équation de Helmholtz.

Étudions, dans un premier temps, la solution $s^+(x, y)$: nous voulons calculer l'intégrale en k_x dans l'expression de $s^+(x, y)$ de l'équation (C.5). Pour calculer cette intégrale, nous proposons d'utiliser la *formule des résidus* qui s'écrit dans notre cas (illustré en figure C.2) :

$$\int_{\Gamma^+} f(z) \cdot dz = 0$$

$$\text{où } f(z) = \frac{e^{j2\pi z x}}{(z - k_1) \cdot (z + k_1)} \text{ avec } z = k_x + j\sigma$$

et Γ^+ est un chemin n'incluant pas les deux pôles k_1 et $-k_1$.

On décompose le chemin Γ^+ selon le schéma de la figure C.2, à savoir :

$$\Gamma^+ = (I) + (II) + (III) + (IV) + (V) + (VI)$$

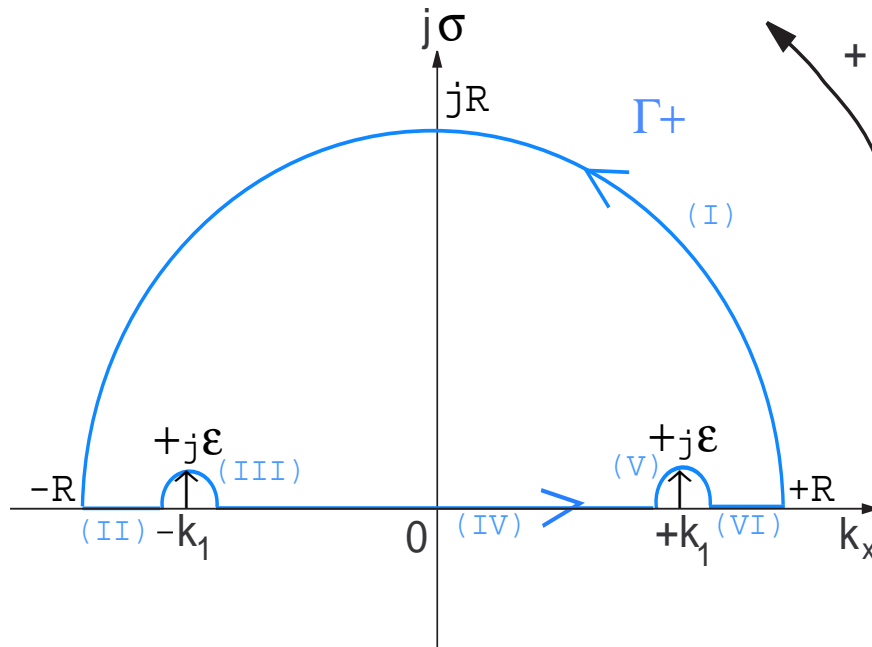


FIG. C.2 – Intégration dans le champ complexe et théorème des résidus.

D'après le *lemme de Jordan* [Azo95], on a :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{(I)} f(z) \cdot dz = 0 \quad \text{si } x > 0 \quad (\text{C.6})$$

et d'après le *lemme des petites encoches*, il vient que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{(III)} f(z) \cdot dz = +j\pi \frac{\exp(-j2\pi k_1 x)}{2k_1}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{(V)} f(z) \cdot dz = -j\pi \frac{\exp(+j2\pi k_1 x)}{2k_1}$$

Par conséquent, lorsqu'on fait tendre $R \rightarrow +\infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$, on a :

$$\int_{(II)} f(k_x) dk_x + \int_{(IV)} f(k_x) dk_x + \int_{(VI)} f(k_x) dk_x = +j\pi \left[\frac{\exp(+j2\pi k_1 x)}{2k_1} - \frac{\exp(-j2\pi k_1 x)}{2k_1} \right]$$

ce qui se traduit par :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(+j2\pi k_x x)}{(k_x - k_1) \cdot (k_x + k_1)} dk_x = j\pi \left[\frac{\exp(+j2\pi k_1 x)}{2k_1} - \frac{\exp(-j2\pi k_1 x)}{2k_1} \right] \quad (\text{C.7})$$

Finalement, en injectant (C.7) dans l'expression de $s^+(x, y)$ en (C.5), on a :

$$s^+(x, y) = \frac{j}{4} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(k_1 x + k_y y)]}{2\pi k_1} dk_y + \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(-k_1 x + k_y y)]}{-2\pi k_1} dk_y \right] \quad (\text{C.8})$$

Pour étudier la solution $s^-(x, y)$ défini en (C.5), il s'agit d'appliquer la formule des résidus avec :

$$f(z) = \frac{e^{-j2\pi z|x|}}{(z - k_1) \cdot (z + k_1)}$$

dans un circuit Ω^- symétrique de Γ^+ par rapport à l'axe k_x et de circulation dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure C.3). On obtient, pour $s^-(x, y)$, la même expression qu'en (C.8).

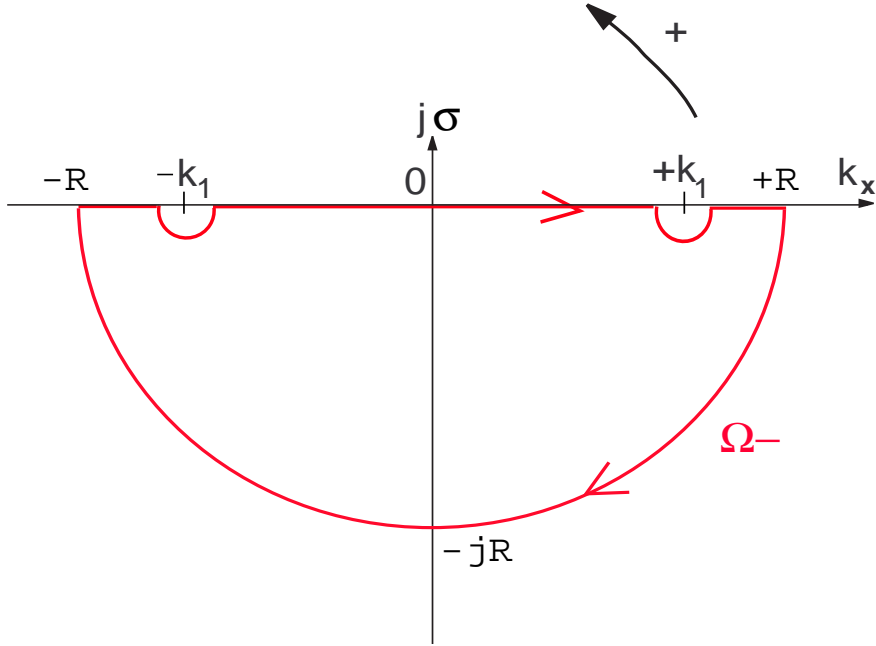


FIG. C.3 – Intégration dans le champ complexe et théorème des résidus.

Autrement dit, la solution générale $s(x, y)$ de l'équation (C.2) s'écrit comme en (C.8) :

$$s(x, y) = \frac{j}{4} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(k_1 x + k_y y)]}{2\pi k_1} dk_y + \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(-k_1 x + k_y y)]}{-2\pi k_1} dk_y \right] \quad (\text{C.9})$$

Chacune des deux intégrales du membre de droite de l'équation (C.9) correspond à la sommation d'ondes planes : les ondes planes dans la première intégrale évoluent dans le demi-plan $x < 0$ et vers les x décroissants tandis que, dans la seconde, les ondes se propagent dans le

demi-plan $x > 0$ et vers les x croissants [Sou94, Sla85].

Rappelons, à présent, que l'onde cylindrique $h(x, y)$ définie en (C.1) est une solution asymptotique de l'équation (C.2); par conséquent, l'onde cylindrique se décompose en ondes planes de la manière suivante :

$$\begin{cases} h(x, y) = \frac{j}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(-k_1x + k_yy)]}{-2\pi k_1} dk_y & \text{si } x > 0 \\ h(x, y) = \frac{j}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(k_1x + k_yy)]}{2\pi k_1} dk_y & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

On s'intéressera, dans la suite, à la portion de l'onde se propageant dans le demi-plan $x < 0$, à savoir :

$$h(x, y) = \frac{j}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp [+j2\pi(k_1x + k_yy)]}{2\pi k_1} dk_y \quad (\text{C.11})$$

Ce cas permet d'étudier le signal récolté par un radar positionné en $(x, y) = (0, 0)$ et illuminant le demi-plan $x < 0$ (voir figure C.4). Ce signal s'écrit :

$$S(k) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \exp [+j2\pi k(x^2 + y^2)] \quad (\text{C.12})$$

où $I(x, y)$ est la zone illuminée qui doit vérifier :

$$I(x, y) = 0 \quad \text{si } x > 0$$

Revenons, à présent, sur l'onde $h(x, y)$; en rappelant que $k_1 = \sqrt{k^2 - k_y^2}$, l'onde s'écrit sous sa forme finale :

$$h(x, y) = \frac{j}{4} \int_{-k}^{+k} \frac{\exp [+j2\pi (\sqrt{k^2 - k_y^2} x + k_yy)]}{2\pi \sqrt{k^2 - k_y^2}} dk_y \quad (\text{C.13})$$

où l'on a restreint l'intervalle d'intégration à $[-k, +k]$. En effet, en dehors de cet intervalle, le terme exponentiel en x de l'équation (C.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} \exp (+j2\pi \sqrt{k^2 - k_y^2} x) &= \exp (+j2\pi \sqrt{j^2(k_y^2 - k^2)} x) \\ &= \exp (-2\pi \sqrt{k_y^2 - k^2} x) \end{aligned}$$

et correspond, donc, à une exponentielle croissante lorsque $x \rightarrow -\infty$: ce terme n'a donc aucune signification physique.

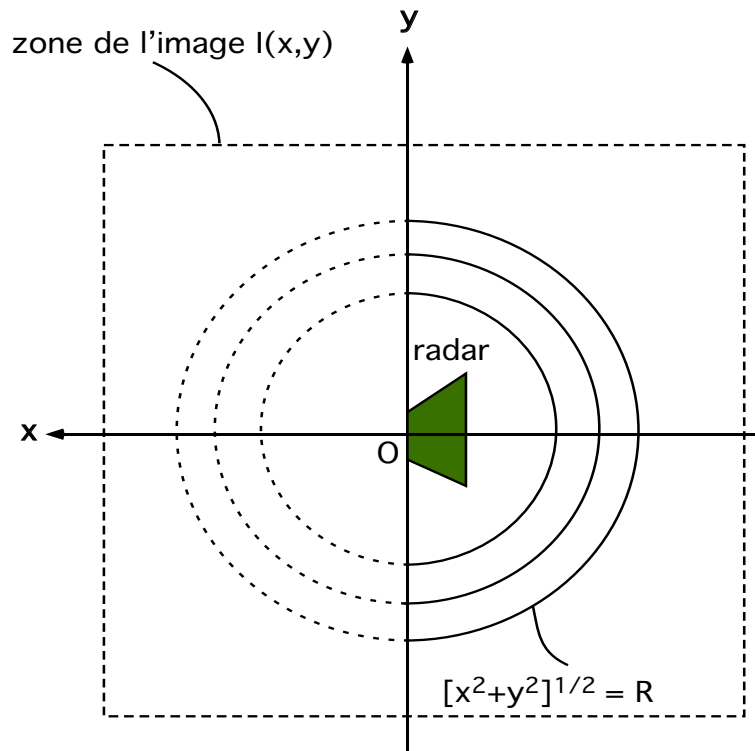


FIG. C.4 – Onde cylindrique et scénario radar.

Pour résumer : La partie de l'onde sphérique $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{[-j2\pi k(\sqrt{x^2+y^2})]}$ évoluant dans le demi-plan $x < 0$ s'écrit bien comme somme continue d'ondes planes à condition que le terme $k\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$:

$$h(x, y) = \frac{j}{4} \int_{-k}^{+k} \frac{\exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_y^2} x + k_y y \right) \right]}{2\pi \sqrt{k^2 - k_y^2}} dk_y \quad \text{si } x < 0$$

avec $(k_x = \sqrt{k^2 - k_y^2}, k_y)$ les composantes du vecteur d'onde.

En pratique, dans la plupart des applications SAR, on a $k \sqrt{x^2 + y^2} \gg 1$. Par conséquent, pour reconstruire l'image des réflecteurs, on utilise l'approximation suivante :

$$h(x, y) \approx \int_{-k}^{+k} \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - k_y^2} x + k_y y \right) \right] dk_y \quad (\text{C.14})$$

Le terme $\frac{1}{2\pi \sqrt{k^2 - k_y^2}}$ a été omis dans l'approximation (C.14) car il est à variation lente par rapport au terme exponentiel lorsque k_y varie.

Utilisation de la décomposition en SAR :

En considérant, par exemple, le système SAR en mode stripmap squint de la figure C.5, le signal 2D récolté par le radar s'écrit :

$$S(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2}\right)}{\sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2}} dx dy \quad (\text{C.15})$$

avec X_1 et Y_1 respectivement les distances de référence radiale et transverse. L'image $I(x, y)$ est telle que :

$$I(x, y) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } (x, y) \in [-X_o, +X_o] \times [-Y_o, +Y_o] \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $2X_o$ et $2Y_o$ respectivement les dimensions radiale et transverse de l'image. Elles sont supposées petites devant la distance de référence radiale X_1 .

En réécrivant le signal SAR comme :

$$S(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(x - X_1)^2 + (\{y - Y_1\} - u)^2}\right)}{\sqrt{(x - X_1)^2 + (\{y - Y_1\} - u)^2}} dx dy \quad (\text{C.16})$$

et en effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} x' & = x - X_1 \\ y' & = y - Y_1, \end{cases}$$

le signal $S(t, u)$ s'écrit :

$$S(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x' + X_1, y' + Y_1) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{x'^2 + (y' - u)^2}\right)}{\sqrt{x'^2 + (y' - u)^2}} dx' dy' \quad (\text{C.17})$$

On peut remarquer que ce signal correspond à une somme d'ondes cylindriques réparties dans le demi-plan $x' < 0$ (voir figure C.5) puisque :

$$I(x' + X_1, y' + Y_1) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } x' \in [-X_1 - X_o, -X_1 + X_o] \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Fourier au signal $S(t, u)$ par rapport à la variable t et en se référant à (C.14), on obtient le signal $S(k, u)$:

$$\begin{aligned} S(k, u) &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x' + X_1, y' + Y_1) P(f) \frac{\exp[-j2\pi k(x'^2 + (y' - u)^2)]}{\sqrt{x'^2 + (y' - u)^2}} dx' dy' \\ &\approx P(f) \int_{\mathbb{R}^2} I(x' + X_1, y' + Y_1) \left[\int_{-k}^{+k} \exp\left[+j2\pi\left(\sqrt{k^2 - \eta^2}x' + \eta(y' - u)\right)\right] d\eta \right] dx' dy' \end{aligned}$$

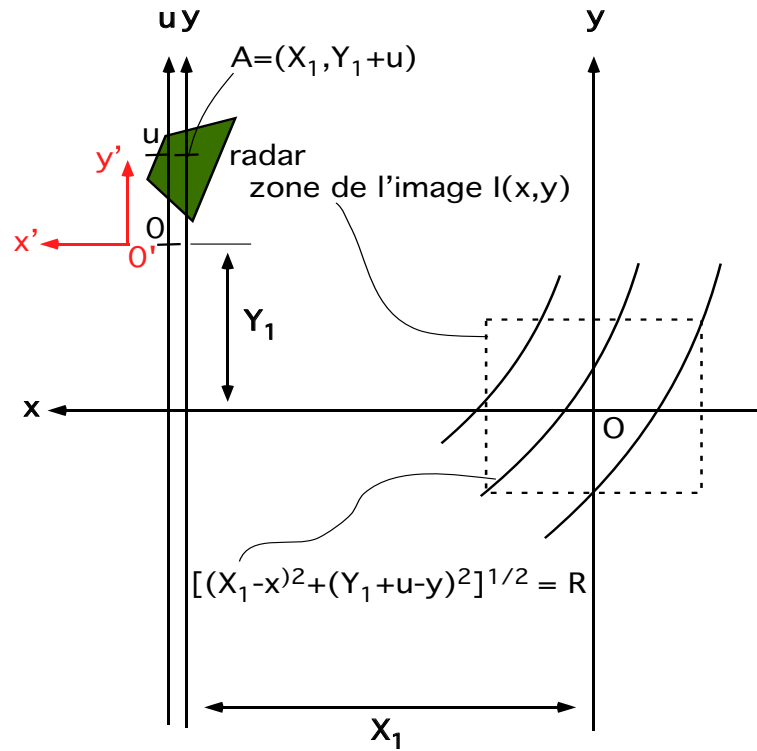


FIG. C.5 – Onde cylindrique et scénario stripmap.

soit en rétablissant les variables (x, y) :

$$\begin{aligned}
 S(k, u) &\approx P(f) \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \left[\int_{-k}^{+k} \exp \left[+j2\pi \left(\sqrt{k^2 - \eta^2} (x - X_1) + \eta (y - Y_1 - u) \right) \right] d\eta \right] dx dy \\
 &= P(f) \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \left[\int_{-k}^{+k} \exp \left[-j2\pi \left(\sqrt{k^2 - \eta^2} (X_1 - x) + \eta (Y_1 + u - y) \right) \right] d\eta \right] dx dy
 \end{aligned}
 \tag{C.18}$$

Annexe D

Reformulation du signal SAR 3D

Ce paragraphe a pour but de montrer qu'il est possible de reconstruire l'image $I(x, y)$ à partir du signal SAR réel (configuration tridimensionnelle).

On se place en stripmap 3D squint : la figure D.1 (a) illustre ce scénario. Les points A et B désignent respectivement les positions de l'antenne et d'un réflecteur quelconque dans le plan (x, y) .

Par conséquent, en supposant des réflecteurs contenus dans le plan (x, y) , le signal SAR réel se modélise, en s'appuyant sur l'équation (1.16), comme :

$$p_r(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) p \left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(X_1 - x)^2 + (u + Y_1 - y)^2 + Z_1^2} \right) dx dy \quad (\text{D.1})$$

Considérons à présent, le scénario de la figure D.1 (b) : Les points A' et B' sont respectivement les projetés des points A et B de la figure D.1 ; le point O représente le centre de l'image.

On définit la distance $R_{A'O} = \sqrt{X_1^2 + Z_1^2}$ la distance séparant le point A' du point O. La distance séparant le point A' du point B' est

$$R_{A'B'} = R_{A'J} + R_{JB'} \quad (\text{D.2})$$

$$= \sqrt{R_{A'O}^2 - OJ^2} + r \approx R_{A'O} + r \quad (\text{D.3})$$

Pour l'approximation dans (D.3), on a utilisé le fait que OJ est inférieur ou de l'ordre de⁶⁰ x et que $x \ll R_{A'O}$ ⁶¹.

Compte tenu de la géométrie, la distance r peut se réécrire :

$$r(x) = -x \cos(\varphi) \quad (\text{D.4})$$

À nouveau, en invoquant que $x \ll R_{A'O}$, on peut écrire $\varphi \approx \varphi_1$ où $\varphi_1 = \arctan(Z_1/X_1)$. Ainsi :

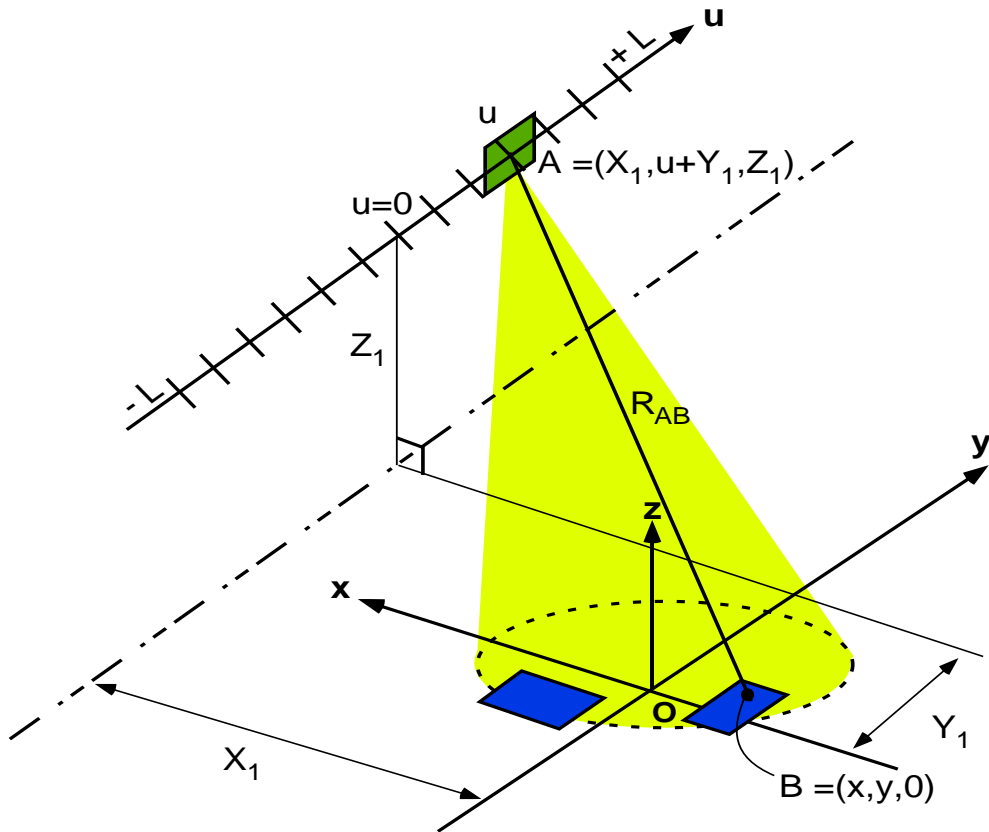
$$r(x) \approx -x \cos(\varphi_1) \quad (\text{D.5})$$

Or, la distance séparant le point A' du point B' peut se réécrire :

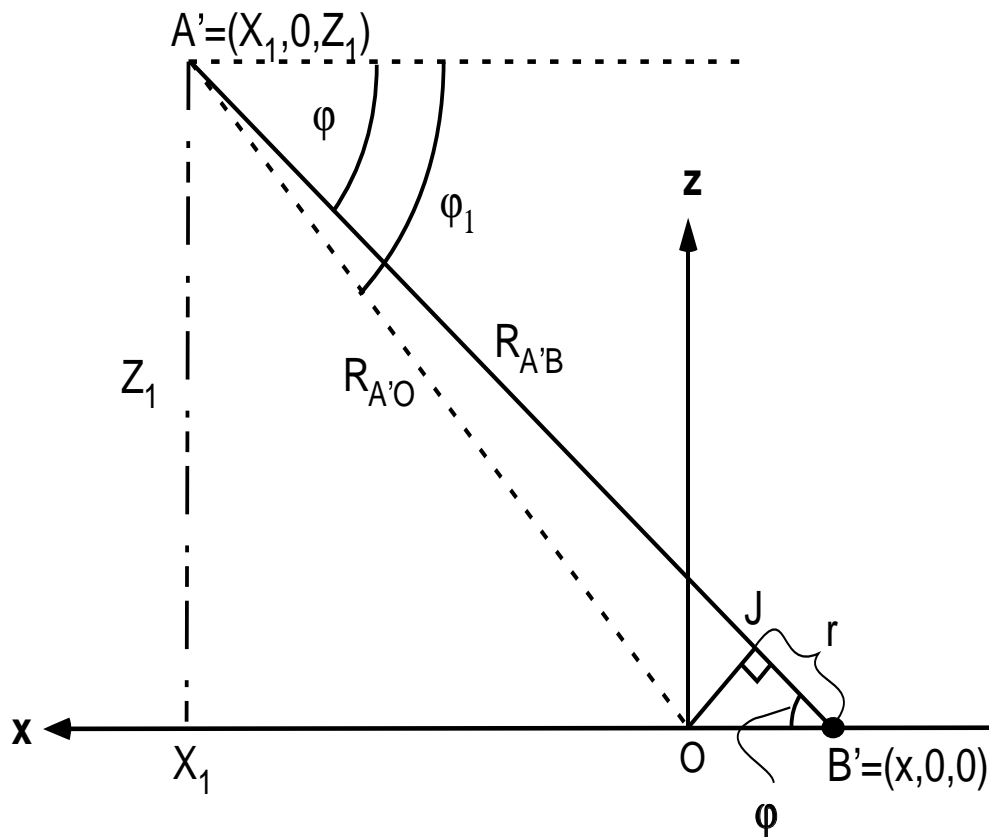
$$R_{A'B'} = \sqrt{(X_1 - x)^2 + Z_1^2} \quad (\text{D.6})$$

⁶⁰ $OJ = -x \tan(\varphi)$ et par conséquent pour un angle $\varphi \in [0^\circ 80^\circ]$: $OJ \sim |x|$

⁶¹ Dit autrement, on suppose que les dimensions de la cible sont très petites devant la distance antenne-cible



(a) Scénario 3D en supposant la cible dans le plan (x, y) .



(b) Stripmap 3D squint (coupe dans le plan x - z).

FIG. D.1 – Géométrie SAR 3D en mode squint.

Autrement dit, en se référant à (D.3), (D.4) et (D.6), on a :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(X_1 - x)^2 + Z_1^2} &= R_{A'B'} \\
 &\approx R_{A'O} + r(x) \\
 &= \sqrt{X_1^2 + Z_1^2} + r(x) \\
 &\approx \sqrt{X_1^2 + Z_1^2} - x \cos(\varphi_1)
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Enfin, en utilisant (D.7), le signal SAR réel en (D.1) s'approxime comme :

$$p_r(t, u) \approx \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) p \left(t - \frac{2}{c} \sqrt{(R'_1 - x \cos(\varphi_1))^2 + (u + Y_1 - y)^2} \right) dx dy \tag{D.8}$$

où $R'_1 = \sqrt{X_1^2 + Z_1^2}$ et $\varphi_1 = \arctan(Z_1/X_1)$

Annexe E

Reconstruction d'images par transformée de Hankel-Fourier

Pour plus de clarté dans les calculs, on considère, dans un premier temps, le signal SAR simplifié (sans introduction des distances de références X_1 et Y_1) suivant :

$$S(t, u) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{x^2 + (y-u)^2}\right)}{\sqrt{x^2 + (y-u)^2}} dx dy \quad (\text{E.1})$$

Avant de développer l'algorithme de reconstruction de l'image $I(x, y)$ à partir du signal SAR, il convient de remarquer que le signal $S(t, u)$ correspond à une somme d'ondes cylindriques se propageant simultanément vers les $x > 0$ et vers les $x < 0$. Pour s'en persuader, considérons le signal $S(f, u)$ obtenu par transformée de Fourier du signal $S(t, u)$ par rapport à la variable t . Il s'écrit :

$$S(f, u) = P(f) \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{\exp[-j2\pi k\sqrt{x^2 + (y-u)^2}]}{\sqrt{x^2 + (y-u)^2}} dx dy \quad (\text{E.2})$$

$$\text{avec } k = \frac{2f}{c}.$$

On reconnaît, en effet, dans le membre de droite de l'équation (E.2), une somme d'ondes cylindriques. En figure E.1, on illustre la propagation d'une onde $\frac{\exp[-j2\pi k\sqrt{x^2 + y^2}]}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ dans l'espace (x, y) . On peut s'apercevoir que l'onde se propage de part et d'autre de l'axe y . Or, un radar éclaire soit le demi-plan $x > 0$ soit le demi-plan $x < 0$. En considérant le scénario de la figure E.1, il nous faut nous limiter aux ondes se propageant vers les $x < 0$. Pour ce faire, il nous faut imposer :

$$I(x, y) = 0 \quad \text{si } x > 0 \quad (\text{E.3})$$

Ensuite, on introduira le modèle du signal SAR à proprement parlé. On verra, notamment que cette *troncature* se fait naturellement dans ce cas.

Développons, à présent, l'algorithme permettant d'exprimer le signal SAR comme transformée de Hankel-Fourier de l'image $I(x, y)$. Pour cela, reprenons le signal $S(u, t)$ en tenant compte de la contrainte (E.3).

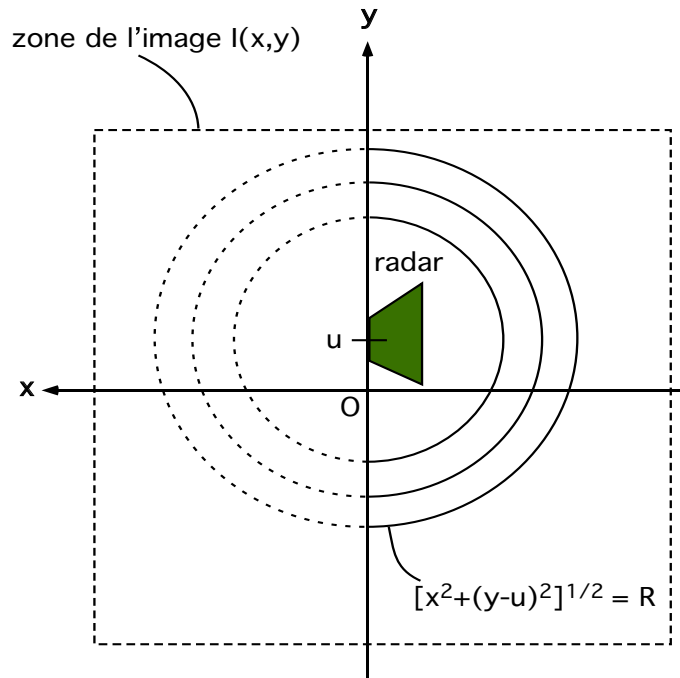


FIG. E.1 – Propagations des ondes cylindriques dans l'espace (x, y) .

a/ Filtrage adapté

En considérant le cas idéal d'un signal d'émission $p(t)$ à bande infinie, le signal à la sortie du filtrage adapté est :

$$S_M(t, u) = \int_{\mathbb{R}} S(t', u) p^*(t' - t) dt'$$

$$\propto \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} I(x, y) \frac{\delta\left(\frac{2}{c}\sqrt{x^2 + (y-u)^2} - t\right)}{\sqrt{x^2 + (y-u)^2}} dx dy$$

b/ Changement de variables $(x, y) \rightarrow (\rho, \Psi)$

On introduit les variables (ρ, Ψ) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sinh \Psi &= \frac{y-u}{x} \\ \rho &= \sqrt{x^2 + (y-u)^2} \end{cases}$$

Les variables (x, y) se réécrivent :

$$\begin{cases} x &= -\rho \frac{1}{\cosh \Psi} = -\rho \operatorname{sech} \Psi \leq 0 \\ y &= u - \rho \tanh \Psi \end{cases}$$

et le Jacobien de transformation est $J_{x,y}(\rho, \Psi) = \rho \operatorname{sech} \Psi$

Le signal $S_M(t, u)$ se réécrit après quelques étapes de calculs :

$$\begin{aligned} S_M(t, u) &\propto \int_{\mathbb{R}} d\Psi \operatorname{sech} \Psi \int_{\mathbb{R}^+} d\rho I(-\rho \operatorname{sech} \Psi, u - \rho \tanh \Psi) \delta\left(\rho - \frac{ct}{2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\Psi \operatorname{sech} \Psi I\left(-\frac{ct}{2} \operatorname{sech} \Psi, u - \frac{ct}{2} \tanh \Psi\right) \end{aligned}$$

c/ Passage $(t, u) \rightarrow (f, k_u)$ par transformée de Fourier

On applique, ensuite, la transformée de Fourier bidimensionnelle⁶² par rapport aux variables (t, u) :

$$S_M(f, k_u) = \int_{\mathbb{R}^2} S_M(t, u) \exp[-j2\pi(ft - k_u u)] dt du$$

La variable t , pour correspondre à un temps et être associée à une distance radiale $ct/2$, doit être positive. Pour respecter cette condition, il suffit d'imposer :

$$S_M(t, u) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

Par conséquent, le signal $S_M(f, k_u)$ se formule :

$$S_M(f, k_u) \propto \int_{\mathbb{R}} d\Psi \operatorname{sech} \Psi \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}^+} dt I\left(-\frac{ct}{2} \operatorname{sech} \Psi, u - \frac{ct}{2} \tanh \Psi\right) \exp[-j2\pi(ft - k_u u)]$$

d/ Changement de variable $t \rightarrow x$

A présent, on pose $x = -\frac{ct}{2} \operatorname{sech} \Psi$, le signal $S_M(f, k_u)$ se reformule :

$$S_M(k, k_u) \propto \int_{\mathbb{R}} d\Psi \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}^-} dx I(x, u + x \sinh \Psi) \exp[+j2\pi(kx \cosh \Psi + k_u u)]$$

avec $k = \frac{2f}{c}$

e/ Changement de variable $u \rightarrow y$

En posant $y = u + x \sinh \Psi$, le signal $S_M(k, k_u)$ s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} S_M(k, k_u) &\propto \int_{\mathbb{R}} d\Psi \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}^-} dx I(x, y) \exp[+j2\pi\{kx \cosh \Psi + k_u(y - x \sinh \Psi)\}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\Psi \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}^-} dx I(x, y) \exp[+j2\pi k_u y] \exp[+j2\pi x(k \cosh \Psi - k_u \sinh \Psi)] \end{aligned}$$

⁶²On effectue une transformée de Fourier selon la variable t et une transformée de Fourier inverse selon la variable u . Cette procédure est identique à celle effectuée dans l'algorithme RMA développé dans ce manuscrit.

f/ **Changement de variables** $(k, k_u) \rightarrow (k_x = \sqrt{k^2 - k_u^2}, k_u)$

Finalement, on introduit un nouveau couple de variables (k_x, ϕ) telles que :

$$\begin{aligned} k &= k_x \cosh \phi \\ k_u &= k_x \sinh \phi \end{aligned}$$

avec $k_x = \sqrt{k^2 - k_u^2}$ et $\tanh \phi = k_u/k$

Le signal $S_M(k, k_u)$ devient $H_M(k_x, k_u)$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} H_M(k_x, k_u) &\propto \int_{\mathbb{R}} d\Psi \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}^-} dx I(x, y) \exp[+j2\pi k_u y] \exp[+j2\pi x(k_x \cosh \phi \cosh \Psi - k_x \sinh \phi \sinh \Psi)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} dx dy I(x, y) \exp[+j2\pi k_u y] \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp[+j2\pi x k_x \cosh(\Psi - \phi)] d\Psi \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} dx dy I(x, y) \exp[+j2\pi k_u y] \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp[+j2\pi x k_x \cosh \Psi'] d\Psi' \right\} \\ &\propto \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} dx dy I(x, y) \exp[+j2\pi k_u y] H_0^{(1)}(2\pi k_x x) \end{aligned}$$

où $H_0^{(1)}(z) = \frac{1}{j\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp[+jz \cosh \Psi] d\Psi$ est la fonction de Hankel d'ordre 0 de première espèce.

A présent, pour faire intervenir la transformée de Hankel-Fourier inverse, nous introduisons le noyau \hat{K}_{H-F} tel que :

$$\hat{K}_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) = x H_0^{(1)}(2\pi k_x x) \exp[+j2\pi k_u y]$$

Ainsi, on constate que le signal $H_M(k_x, k_u)$ s'exprime comme transformée de Fourier-Hankel inverse de l'image $\frac{I(x, y)}{x}$:

$$H_M(k_x, k_u) \propto \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^-} \frac{I(x, y)}{x} \hat{K}_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) dx dy$$

L'image $\frac{I(x, y)}{x}$ est obtenue par application de la transformée de Hankel-Fourier :

$$\frac{I(x, y)}{x} \propto \int_{\mathbb{R}^2} H_M(k_x, k_u) K_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) dk_x dk_u \quad (\text{E.4})$$

avec $K_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) = k_x H_0^{(2)}(2\pi k_x x) \exp[-j2\pi k_u y]$

où $H_0^{(2)}$ est le complexe conjugué de $H_0^{(1)}$ appelée fonction de Hankel d'ordre 0 de seconde espèce.

Utilisation de la transformée de Hankel-Fourier en SAR :

Pour finir, considérons le signal SAR en tant que tel. Il s'écrit :

$$S(u, t) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2}\right)}{\sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 + u - y)^2}} dx dy \quad (\text{E.5})$$

avec X_1 et Y_1 respectivement les distances de référence radiale et transverse. L'image $I(x, y)$ est telle que :

$$I(x, y) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } (x, y) \in [-X_o, +X_o] \times [-Y_o, +Y_o] \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $2X_o$ et $2Y_o$ respectivement les dimensions radiale et transverse de l'image. Elles sont supposées petites devant la distance de référence radiale X_1 .

En réécrivant le signal SAR comme :

$$S(u, t) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{(x - X_1)^2 + (\{y - Y_1\} - u)^2}\right)}{\sqrt{(x - X_1)^2 + (\{y - Y_1\} - u)^2}} dx dy \quad (\text{E.6})$$

et en effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} x' & = x - X_1 \\ y' & = y - Y_1, \end{cases}$$

le signal $S(u, t)$ s'écrit :

$$S(u, t) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x' + X_1, y' + Y_1) \frac{p\left(t - \frac{2}{c}\sqrt{x'^2 + (y' - u)^2}\right)}{\sqrt{x'^2 + (y' - u)^2}} dx dy \quad (\text{E.7})$$

qui correspond à une somme d'ondes cylindriques situées dans le demi-plan $x' < 0$ (voir figure E.2) puisque :

$$I(x' + X_1, y' + Y_1) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } x' \in [-X_1 - X_o, -X_1 + X_o] \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, en reprenant tout le raisonnement menant à la relation (E.4) mais en partant du signal $S(u, t)$ défini en (E.7), on reconstruit l'image SAR $I(x + X_1, y + Y_1)/x$ par application de la transformée de Hankel-Fourier au signal SAR $H_M(k_x, k_u)$:

$$\frac{I(x + X_1, y + Y_1)}{x} \propto \int_{\mathbb{R}^2} H_M(k_x, k_u) K_{H-F}(2\pi k_x x, 2\pi k_u y) dk_x dk_u \quad (\text{E.8})$$

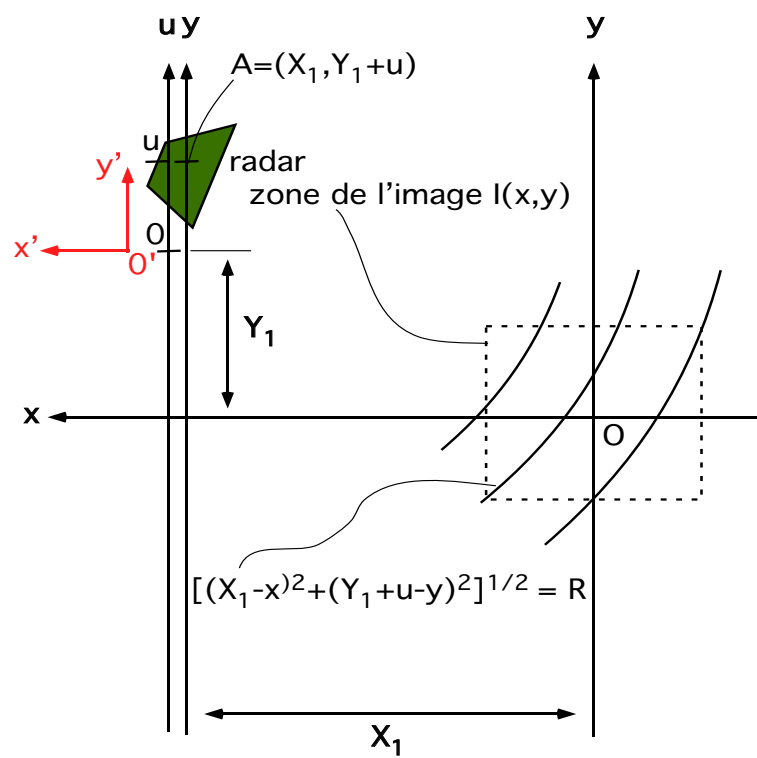


FIG. E.2 – Onde cylindrique et scénario radar.

Annexes du chapitre 2

Annexe F

Effet doppler en bande large et étroite

Pour mettre en évidence, le phénomène d'effet Doppler, considérons un émetteur/récepteur fixe et une cible *mobile* localisée à la distance $R(t)$ de l'émetteur/récepteur à l'instant t . Pour simplifier le problème, on suppose que la distance $R(t)$ varie linéairement avec le temps :

$$R(t) = R_o + vt$$

où R_o est la distance à l'instant $t = 0$ et v la vitesse du mobile. Le scénario est présenté en figure F.1.

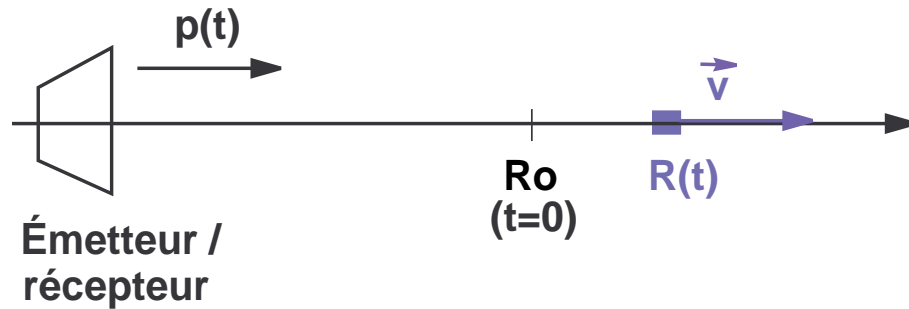


FIG. F.1 – Émetteur/récepteur fixe et cible mobile.

F.1 Effet Doppler large bande

L'émetteur émet une impulsion électromagnétique $p(t)$ réelle de durée Δt quelconque, et de célérité c dans le milieu ambiant .

En notant $T(t)$ le temps mis par l'onde émise pour arriver à la cible, on a [Sou94] :

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{R[t - T(t)]}{c} \\ &= \frac{R_o + v(t - T(t))}{c} \\ \text{soit } T(t) &= \frac{R_o + vt}{c + v} \end{aligned} \tag{F.1}$$

Ainsi le signal écho est de la forme suivante :

$$s(t) = p(t - 2T(t))$$

Ce qui donne en combinant avec (F.1) :

$$s(t) = p\left(t \left[\frac{c-v}{c+v} \right] - \frac{2R_o}{c+v}\right)$$

Il faut, à ce stade, introduire un facteur permettant d'assurer la conservation de l'énergie entre l'émission et la réflexion :

$$\int_{\mathbb{R}} |e(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt$$

Le signal écho prend alors la forme finale :

$$s(t) = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} p\left(t \left[\frac{c-v}{c+v} \right] - \frac{2R_o}{c+v}\right)$$

Ce qui donne en changeant les notations :

$s(t) = \sqrt{\gamma} p(\gamma [t - \tau]) \quad (\text{F.2})$ <p style="text-align: center;">Avec $\gamma = \frac{c-v}{c+v}$</p> <p style="text-align: center;">et $\tau = \frac{2R_o}{c+v}$</p>

γ est le *facteur de compression* et τ le retard du signal en réflexion. Ainsi, le signal de réflexion $s(t)$ se déduit du signal d'émission $p(t)$ par transformation affine (contraction/dilatation et translation en temps). Cette expression constitue *l'effet Doppler exact* dit aussi à *large bande* [Aus85, Kal92].

F.2 Approximation bande étroite

On montre, dans ce paragraphe, qu'en faisant l'hypothèse de bande étroite dans l'expression (F.2), le signal de réflexion se définit du signal d'émission par translation en temps et en fréquence. En bande étroite, le signal d'émission est *quasi-analytique* (voir (2.5), (2.6) et (2.7)). Sous forme complexe, il se formule à bande étroite par :

$$\mathbf{p}(t) \approx \alpha(t) \exp [+j2\pi f_o t] \quad (\text{F.3})$$

où f_o est la fréquence porteuse du signal d'émission et $\alpha(t) = |z(t)| e^{j\varphi(t)}$ avec $\{|z(t)|, \varphi(t)\}$ respectivement l'enveloppe et la phase de modulation du signal analytique $z(t)$ correspondant au signal réel $p(t)$. Dans l'équation (F.3), le terme $\alpha(t)$ a la propriété d'être à variation lente devant le terme exponentiel $\exp [+j2\pi f_o t]$.

Par ailleurs, la vitesse v du mobile est généralement négligeable devant la vitesse de propagation c du signal d'émission. Cette remarque est surtout valable en radar où l'on a :

$$\begin{aligned} c &= 3e8 \text{ m/s} \\ v &\leq 5000 \text{ m/s} \ll c. \end{aligned}$$

Par conséquent, en introduisant l'hypothèse de quasi-analyticité du signal d'émission, le signal $\mathbf{s}(t)$ de réflexion s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \sqrt{\gamma} \mathbf{p}(\gamma [t - \tau]) \\ &\approx \sqrt{\gamma} \alpha(\gamma [t - \tau]) \exp [j2\pi f_o(\gamma [t - \tau])]. \end{aligned}$$

En ajoutant l'hypothèse $v \ll c$, on a :

$$\gamma = \frac{c - v}{c + v} \approx 1 - \frac{2v}{c},$$

ce qui a pour conséquence directe d'avoir $\alpha(\gamma [t - \tau]) \approx \alpha(t - \tau)$ puisque $\alpha(t)$ est à variation lente par rapport au terme exponentiel. Finalement, le signal en réflexion s'écrit :

$$\mathbf{s}(t) \approx \mu \mathbf{p}(t - \tau) \exp [-j2\pi f_d t] \quad (\text{F.4})$$

Avec $f_d = \frac{2v}{c} f_o$, appelée fréquence Doppler

et $\mu = \exp [+j2\pi f_d \tau]$, un terme de déphasage constant.

Ainsi, en bande étroite, le signal radar réfléchi se déduit du signal d'émission par **translation en temps et en fréquence**. Le décalage fréquentiel f_d observé dans le signal de réflexion par rapport au signal d'émission caractérise l'*effet Doppler à bande étroite* [Kal92].

Annexe G

Inégalité d'Heisenberg-Gabor

Le principe d'incertitude d'Heisenberg provient de la mécanique quantique et décrit l'impossibilité, par exemple, de connaître avec précision à la fois la *position* et la *vitesse* d'une particule. Dans l'analyse temps-fréquence, du fait de la dualité des espaces temps et fréquence, il existe un principe d'incertitude similaire. Ce principe exprime le fait que l'on ne peut connaître avec suffisamment de précision la localisation à la fois en temps et en fréquence d'un signal : un signal de très brève durée possède une densité spectrale très étendue et vice-versa.

Avant de démontrer l'inégalité d'Heisenberg-Gabor, il convient de définir certaines grandeurs telles que l'énergie, l'époque moyenne, la fréquence centrale et les étendues temporelle et fréquentielle d'un signal :

- L'énergie E_s d'un signal est donné par :

$$E_s = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |S(f)|^2 df$$

- L'époque moyenne $\langle t \rangle$ et la fréquence centrale $\langle f \rangle$ d'un signal $s(t)$ sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\langle t \rangle &= \frac{1}{E_s} \int_{\mathbb{R}} t |s(t)|^2 dt \\ \langle f \rangle &= \frac{1}{E_s} \int_{\mathbb{R}} f |S(f)|^2 df\end{aligned}$$

- Les étendues temporelle σ_t et fréquentielle σ_f du signal $s(t)$ sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \frac{1}{E_s} \int_{\mathbb{R}} (t - \langle t \rangle)^2 |s(t)|^2 dt \\ \sigma_f^2 &= \frac{1}{E_s} \int_{\mathbb{R}} (f - \langle f \rangle)^2 |S(f)|^2 df\end{aligned}$$

Ces deux grandeurs peuvent être respectivement interprétées comme la *durée moyenne* et la *largeur de bande* du signal.

◇ Démonstration de l'inégalité d'Heisenberg-Gabor :

On fait les hypothèses suivantes :

- On suppose une époque nulle ($\langle t \rangle = 0$) et une fréquence centrale nulle ($\langle f \rangle = 0$). On pourra toujours se ramener à ce cas par translations temporelle et fréquentielle appliquées au signal $s(t)$.
- Le signal $s(t)$ est supposé d'énergie finie, c'est à dire que soit le signal possède un support compact fini soit que la décroissance de sa puissance instantanée est *plus forte* que $1/t$ à l'infini ($\lim_{|t| \rightarrow \infty} t |s(t)|^2 = 0$).

Soit la quantité I telle que :

$$I = \int_{\mathbb{R}} t s(t) \frac{ds^*(t)}{dt} dt$$

- En procédant par intégration par partie et en posant $u = t s(t)$ et $v' = \frac{ds^*(t)}{dt}$, on a :

$$I = \underbrace{[t s(t) s^*(t)]_{-\infty}^{+\infty}}_{= 0} - \int_{\mathbb{R}} \left[s(t) + t \frac{ds(t)}{dt} \right] s^*(t) dt$$

Le premier terme du second membre étant nul par hypothèse, il reste :

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt - \left[\int_{\mathbb{R}} t \frac{ds^*(t)}{dt} s(t) \right]^* dt \\ &= -E_s - I^* \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\mathcal{R}_e(I) = \frac{I + I^*}{2} = -\frac{E_s}{2}$$

- Ensuite, en utilisant l'*inégalité de Cauchy-Schwartz*, on a :

$$(\mathcal{R}_e(I))^2 \leq |I|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |t s(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{ds(t)}{dt} \right|^2 dt$$

De plus, la propriété de la transformation de Fourier d'une dérivée donne :

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{\text{Fourier}} \mathcal{F}_{t \rightarrow f} \left[\frac{ds(t)}{dt} \right] = j2\pi f S(f)$$

Ainsi, par conservation de l'énergie (Parseval) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{ds(t)}{dt} \right|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} |j2\pi f S(f)|^2 df \\ &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 f^2 |S(f)|^2 df \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$(\mathcal{R}_e(I))^2 = \frac{E_s^2}{4} \leq 4\pi^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} t^2 |s(t)|^2 dt}_{E_s \sigma_t^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f^2 |S(f)|^2 df}_{E_s \sigma_f^2}$$

L'inégalité d'Heisenberg-Gabor est donc donnée par :

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (\text{G.1})$$

Elle montre qu'aucun signal ne peut être caractérisé à la fois par une durée $\sigma_t = 0$ et une largeur de bande $\sigma_f = 0$.

On ajoutera simplement que l'égalité des deux membres de la relation (G.1) est obtenue pour un signal gaussien.

Annexe H

Condition d'admissibilité sur l'ondelette-mère

Nous démontrons, dans ce paragraphe, la condition d'admissibilité qui permet de retrouver le signal $z(t)$ à partir des coefficients d'ondelettes $T_z(t_o, f_o)$.

Écrivons tout d'abord la formule de reconstruction du signal $Z(f)$ à partir des coefficients d'ondelettes $T_z(t_o, f_o)$:

$$Z(f) = \int_0^{+\infty} df_o \int_{-\infty}^{+\infty} T_z(t_o, f_o) \Phi_{t_o, f_o}(f) dt_o,$$

ce qui se réécrit en introduisant l'expression de $T_z(t_o, f_o)$:

$$Z(f) = \int_0^{+\infty} df_o \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} Z(\xi) \frac{1}{\sqrt{f_o}} \Phi_{0,1}^*(\xi/f_o) e^{+j2\pi\xi t_o} d\xi \right] \Phi_{t_o, f_o}(f) dt_o,$$

soit encore,

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_0^{+\infty} df_o \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} Z(\xi) \frac{1}{\sqrt{f_o}} \Phi_{0,1}^*(\xi/f_o) e^{+j2\pi\xi t_o} d\xi \right] \frac{1}{\sqrt{f_o}} \Phi_{0,1}(f/f_o) e^{-j2\pi f t_o} dt_o \\ &= \int_0^{+\infty} df_o \frac{\Phi_{0,1}(f/f_o)}{f_o} \left[\int_0^{+\infty} d\xi Z(\xi) \Phi_{0,1}^*(\xi/f_o) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j2\pi t_o(\xi-f)} dt_o \right\} \right], \end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à t_o :

$$Z(f) = \int_0^{+\infty} df_o \frac{\Phi_{0,1}(f/f_o)}{f_o} \left[\int_0^{+\infty} d\xi Z(\xi) \Phi_{0,1}^*(\xi/f_o) \delta(\xi - f) \right],$$

puis par rapport à ξ :

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_0^{+\infty} df_o \frac{\Phi_{0,1}(f/f_o)}{f_o} Z(f) \Phi_{0,1}^*(f/f_o) \\ &= Z(f) \int_0^{+\infty} df_o \frac{|\Phi_{0,1}(f/f_o)|^2}{f_o}. \end{aligned}$$

Enfin, en faisant le changement de variable $\zeta = f/f_o$, on obtient :

$$Z(f) = Z(f) \int_0^{+\infty} d\zeta \frac{|\Phi_{0,1}(\zeta)|^2}{\zeta}$$

D'où la condition d'admissibilité sur l'ondelette-mère :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} d\zeta \frac{|\Phi_{0,1}(\zeta)|^2}{\zeta} = 1}$$

Annexes du chapitre 3

Annexe I

Reconstruction du signal à partir de ses coefficients d'ondelette

Nous montrons, dans ce paragraphe, la formule dite de *reconstruction* permettant de reconstituer le coefficient de rétrodiffusion $H(\vec{k})$ à partir de ses coefficients d'ondelette $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ [Ova92] :

$$H(\vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} \int d\vec{r}_o \int C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k}) d\vec{k}_o$$

avec K_ϕ défini comme le coefficient d'admissibilité de l'ondelette mère ϕ qui doit, pour reconstruire $H(\vec{k})$ à partir des coefficients d'ondelette, vérifier :

$$K_\phi = \int \left| \phi(\vec{k}) \right|^2 \frac{d\vec{k}}{k^2} < +\infty$$

Démonstration :

Soit le signal $S(\vec{k})$ tel que :

$$S(\vec{k}) = \int d\vec{r}_o \int C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k}) d\vec{k}_o$$

Nous allons montrer que :

$$H(\vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} S(\vec{k}).$$

On rappelle que le coefficient d'ondelette $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o) &= \langle H, \Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} k H(k, \theta) \frac{1}{k_o} e^{+j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_o} \phi^*\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) dk \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

où l'ondelette $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k})$ est définie par :

$$\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o} = \frac{1}{k_o} e^{-j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_o} \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \quad (\text{I.2})$$

Par conséquent, en remplaçant $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ par son expression (I.1) et $\Psi_{\vec{r}_o, \vec{k}_o}(\vec{k})$ par (I.2) le signal $S(\vec{k})$ se réécrit :

$$\begin{aligned} S(\vec{k}) &= \int d\vec{r}_o \int d\vec{k}_o \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{+\infty} \frac{k_1}{k_o^2} H(k_1, \theta_1) e^{+j2\pi\vec{r}_o \cdot (\vec{k}_1 - \vec{k})} \phi^*\left(\frac{k_1}{k_o}, \theta_1 - \theta_o\right) \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) dk_1 \\ &= \int d\vec{k}_o \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{+\infty} \frac{k_1}{k_o^2} H(k_1, \theta_1) \phi^*\left(\frac{k_1}{k_o}, \theta_1 - \theta_o\right) \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \\ &\quad \left[\int e^{+j2\pi\vec{r}_o \cdot (\vec{k}_1 - \vec{k})} d\vec{r}_o \right] dk_1 \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à \vec{r}_o et en notant que :

$$\begin{aligned} \int e^{+j2\pi\vec{r}_o \cdot (\vec{k}_1 - \vec{k})} d\vec{r}_o &= \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}) \\ &= \frac{1}{k} \delta(k_1 - k) \delta(\theta_1 - \theta), \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} S(\vec{k}) &= \int d\vec{k}_o \frac{1}{k_o^2} \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \int_0^{2\pi} d\theta_1 \delta(\theta_1 - \theta) \int_0^{+\infty} \frac{k_1}{k} H(k_1, \theta_1) \\ &\quad \phi^*\left(\frac{k_1}{k_o}, \theta_1 - \theta_o\right) \delta(k_1 - k) dk_1 \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à k_1 puis θ_1 , $S(\vec{k})$ devient simplement :

$$S(\vec{k}) = H(k, \theta) \int \frac{1}{k_o^2} \left| \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \right|^2 d\vec{k}_o \quad (\text{I.4})$$

En passant la variable d'intégration \vec{k}_o en coordonnées polaires (k_o, θ_o) , on a :

$$\begin{aligned} S(\vec{k}) &= H(k, \theta) \int \frac{1}{k_o^2} \left| \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \right|^2 k_o dk_o d\theta_o \\ &= H(k, \theta) \int \frac{1}{k_o} \left| \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \right|^2 dk_o d\theta_o \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Enfin, en faisant le changement de variable $(k_o, \theta_o) \rightarrow (k'_o, \theta'_o) = (k/k_o, \theta - \theta_o)$, le signal $S(\vec{k})$ s'écrit :

$$S(\vec{k}) = H(k, \theta) \int \frac{1}{k'_o} \left| \phi(k'_o, \theta'_o) \right|^2 dk'_o d\theta'_o \quad (\text{I.6})$$

soit en revenant en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} S(\vec{k}) &= H(\vec{k}) \int \frac{1}{u^2} |\phi(\vec{u})|^2 d\vec{u} \\ &= H(\vec{k}) K_\phi \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Le signal $H(\vec{k})$ peut donc être reconstituer à condition que $K_\phi < +\infty$. Il est reconstruit par :

$$H(\vec{k}) = K_\phi^{-1} S(\vec{k})$$

Annexe J

Formule d'isométrie

Il s'agit, dans ce paragraphe, de démontrer la formule d'isométrie suivante [Ova92] :

$$\frac{1}{K_\phi} \int d\vec{r}_o \int |C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 d\vec{k}_o = \|H\|^2 \quad (\text{J.1})$$

En remplaçant $C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)$ par son expression (I.1) rappelée à l'annexe I, on a :

$$\begin{aligned} \|C\|^2 &= \int d\vec{r}_o \int d\vec{k}_o |C_H(\vec{r}_o, \vec{k}_o)|^2 \\ &= \int d\vec{r}_o \int d\vec{k}_o \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} k H(k, \theta) \frac{1}{k_o} e^{+j2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}_o} \phi^*\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) dk \right\} \\ &\quad \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{+\infty} k' H^*(k', \theta') \frac{1}{k_o} e^{-j2\pi\vec{k}'\cdot\vec{r}_o} \phi\left(\frac{k'}{k_o}, \theta' - \theta_o\right) dk' \right\} \\ &= \int d\vec{k}_o \frac{1}{k_o^2} \iiint\int dk d\theta dk' d\theta' k k' H(k, \theta) H^*(k', \theta') \phi^*\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \phi\left(\frac{k'}{k_o}, \theta' - \theta_o\right) \\ &\quad \left[\int e^{+j2\pi\vec{r}_o\cdot(\vec{k}-\vec{k}')} d\vec{r}_o \right] \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à \vec{r}_o et en tenant compte de la remarque (I.3) de l'annexe I, on obtient :

$$\|C\|^2 = \iint dk d\theta k |H(k, \theta)|^2 \int d\vec{k}_o \frac{1}{k_o^2} \left| \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \right|^2 \quad (\text{J.2})$$

En reprenant les étapes (I.4), (I.5), (I.6), (I.7) de l'annexe I, on a :

$$\int d\vec{k}_o \frac{1}{k_o^2} \left| \phi\left(\frac{k}{k_o}, \theta - \theta_o\right) \right|^2 = K_\phi \quad (\text{J.3})$$

Et finalement, en introduisant (J.3) dans la relation (J.2), on trouve la formule d'isométrie :

$$\|C\|^2 = \|H\|^2 K_\phi$$

Annexe K

Intégration de l'hyperimage dans le plan (x, y)

Il s'agit, ici, de démontrer que l'hyperimage construite à partir des coefficients d'ondelette de la manière suivante :

$$I_H(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{K_\phi} \left| C_H(\vec{r}, \vec{k}) \right|^2$$

ne vérifie pas la propriété de marginalisation (3.7) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} = \left| H(\vec{k}) \right|^2$$

Démonstration :

La démonstration, correspond, en fait aux premières étapes de la démonstration de la formule d'isométrie de l'annexe J :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} &= \frac{1}{K_\phi} \int_{\mathbb{R}^2} \left| C_H(\vec{r}, \vec{k}) \right|^2 d\vec{r} \\ &= \frac{1}{K_\phi} \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{r} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{+\infty} k_1 H(k_1, \theta_1) \frac{1}{k} e^{+j2\pi \vec{k}_1 \cdot \vec{r}} \phi^*\left(\frac{k_1}{k}, \theta_1 - \theta\right) dk_1 \right\} \\ &\quad \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_0^{+\infty} k_2 H^*(k_2, \theta_2) \frac{1}{k} e^{-j2\pi \vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \phi\left(\frac{k_2}{k}, \theta_2 - \theta\right) dk_2 \right\} \\ &= \frac{1}{K_\phi} \frac{1}{k^2} \iiint\!\!\!\int dk_1 d\theta_1 dk_2 d\theta_2 k_1 k_2 H(k_1, \theta_1) H^*(k_2, \theta_2) \\ &\quad \phi^*\left(\frac{k_1}{k}, \theta_1 - \theta\right) \phi\left(\frac{k_2}{k}, \theta_2 - \theta\right) \left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{+j2\pi \vec{r} \cdot (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)} d\vec{r} \right] \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à \vec{r} et en tenant compte de la remarque (I.3) de l'annexe I, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} I_H(\vec{r}, \vec{k}) d\vec{r} = \frac{1}{K_\phi} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{+\infty} dk_1 k_1 |H(k_1, \theta_1)|^2 \left| \phi\left(\frac{k_1}{k}, \theta_1 - \theta\right) \right|^2 \quad (\text{K.1})$$

L'intégration de l'hyperimage dans le plan (x, y) ne permet, donc, pas d'obtenir la SER⁶³ $\left| H(\vec{k}) \right|^2$ mais seulement une version lissée de cette quantité (membre de droite de la relation (K.1)) [Ber94].

⁶³Section Efficace Radar.

Annexe L

Passage du domaine (k_x, k_y) au domaine (k, θ) par interpolation.

Il s'agit, dans cette annexe, de détailler la procédure qui permet de convertir un signal $S(k_x, k_y)$ exprimé dans un domaine (k_x, k_y) vers un domaine (k, θ) . Cette procédure est utilisée dans cette annexe, en particulier, pour obtenir l'ondelette-mère $\phi(k, \theta)$ à partir de l'ondelette-mère $\Phi(k_x, k_y)$.

Cette procédure est effectuée par interpolation. Nous proposons d'effectuer deux interpolations successives : d'abord suivant la seconde dimension du signal puis suivant la première dimension :

- On construit, d'abord, les intervalles en (k, θ) : $k = [k_m, k_M]$ et $\theta = [\theta_m, \theta_M]$ avec :

$$\begin{aligned} [k_m, k_M] &\supseteq \left[\min_{k_x, k_y} \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right), \max_{k_x, k_y} \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right) \right] \\ [\theta_m, \theta_M] &\supseteq \left[\min_{k_x, k_y} \left(\arctan(k_y/k_x) \right), \max_{k_x, k_y} \left(\arctan(k_y/k_x) \right) \right] \end{aligned}$$

- Ensuite, pour chaque valeur $k_x(i)$; $i \in [1, n_{k_x}]$ ⁶⁴, on évalue, par interpolation⁶⁵ selon la deuxième dimension du signal, les échantillons $S_1(k_x(i), \theta)$ à partir des échantillons du signal $S(k_x(i), \arctan(k_y/k_x(i)))$.
- Enfin, pour chaque valeur $\theta(j)$; $j \in [1, n_\theta]$ ⁶⁶, on évalue, à nouveau par interpolation mais cette fois selon la première dimension du signal, les échantillons $S_2(k, \theta(j))$ à partir des échantillons $S_1(k_x/\cos(\theta(j)), \theta(j))$ évalués dans l'étape précédente.

Au final, on obtient le signal $S_2(k, \theta)$ correspondant au signal $S(k_x, k_y)$ par changement de domaine $(k_x, k_y) \rightarrow (k, \theta)$.

Les figures L.1(a), L.2(a), L.3(a) montrent une ondelette mère $\Phi(k_x, k_y)$ d'étendue angulaire respectivement de $\delta_\theta = 15^\circ$, $\delta_\theta = 7^\circ$ et $\delta_\theta = 0.47^\circ$. Les trois ondelettes ont la même étendue

⁶⁴ n_{k_x} étant le nombre d'échantillons en k_x .

⁶⁵On peut utiliser l'interpolation par splines cubiques mentionnée au chapitre 1.

⁶⁶ n_θ étant le nombre d'échantillons en θ .

en k : $\delta_k = 0.0095 \text{ m}^{-1}$ (ce qui correspond à obtenir une ondelette $\Psi_{f_c, \theta_o, \vec{r}_o}(\vec{k})$ localisée en $f_c = 14.25 \text{ GHz}$ d'étendue fréquentielle $\delta_f(f_c) = 135 \text{ MHz}$. Cette valeur de $\delta_f(f_c)$ correspond à 15% d'une bande d'émission $B = 900 \text{ MHz}$).

L'ondelette mère $\phi(k, \theta)$ peut être obtenue à partir de $\Phi(k_x, k_y)$ en suivant la procédure d'interpolation précédente. Elle est illustrée dans les figures L.1(b), L.2(b), L.3(b).

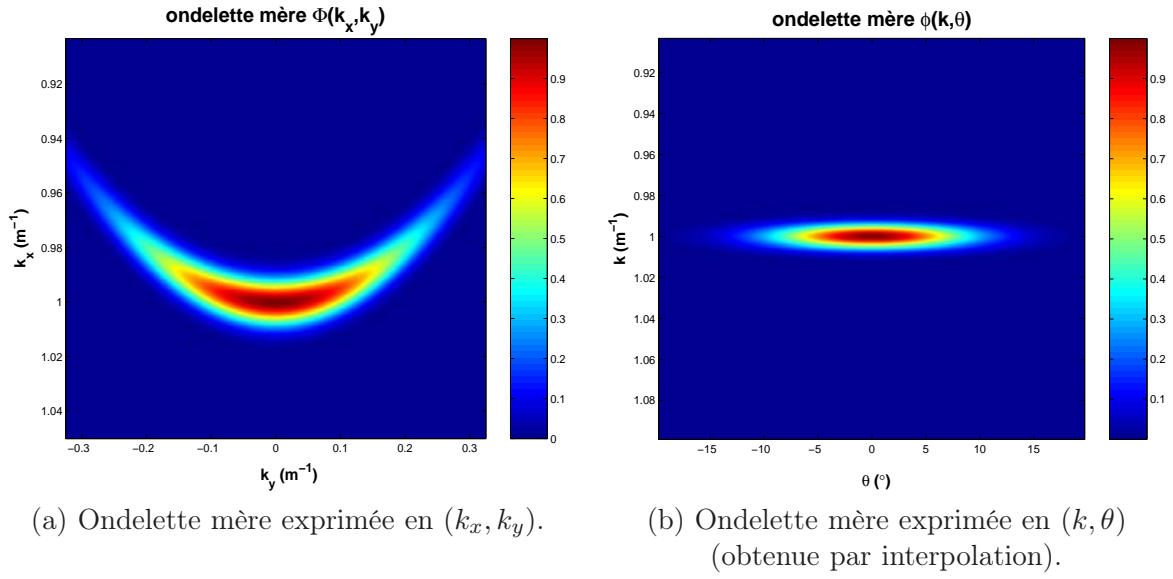
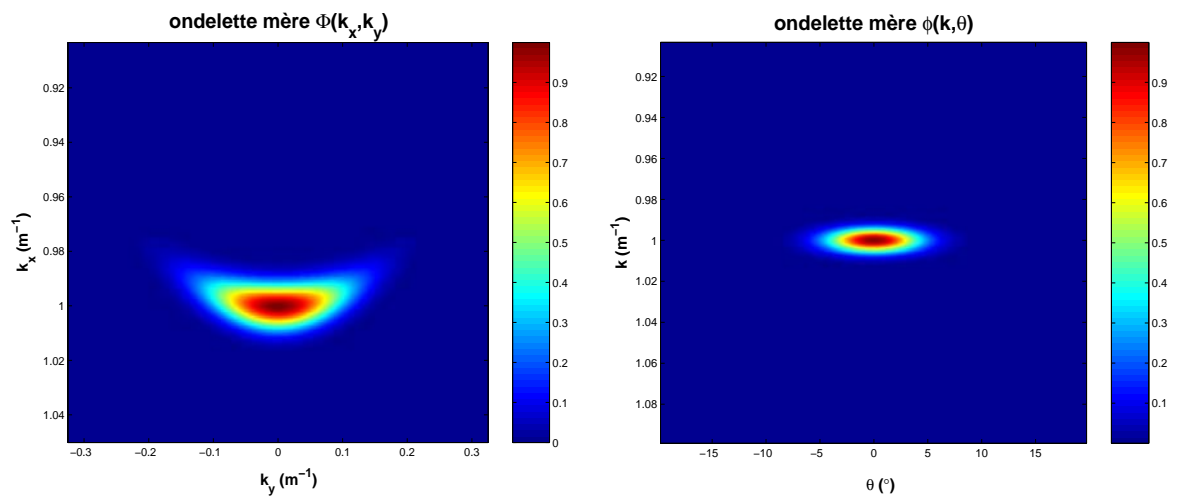


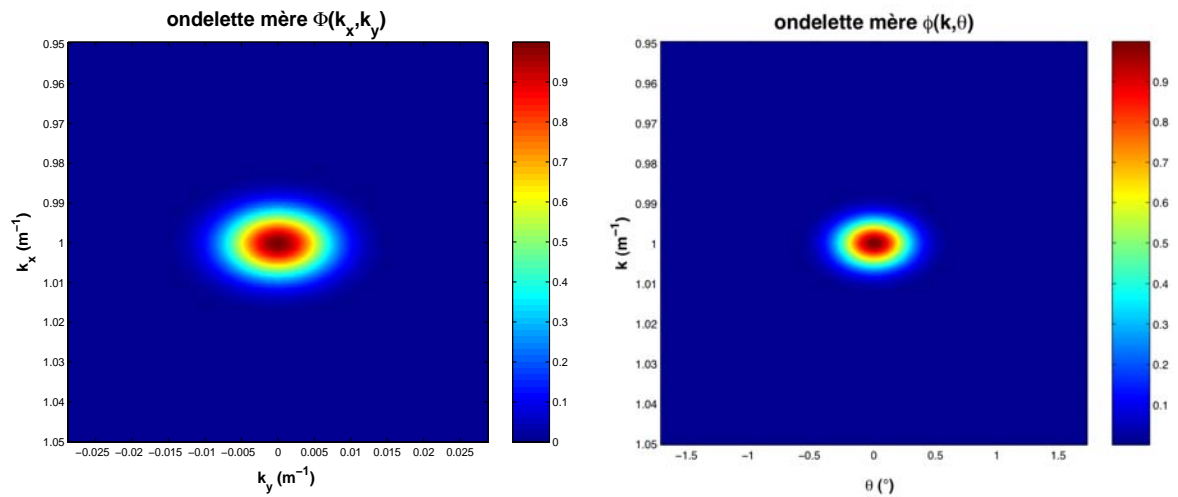
FIG. L.1 – Étendue en k de l'ondelette mère : $\delta_k = 0.0095 \text{ m}^{-1}$. Étendue angulaire de l'ondelette mère : $\delta_\theta = 15^\circ$.



(a) Ondelette mère exprimée en (k_x, k_y) .

(b) Ondelette mère exprimée en (k, θ)
(obtenue par interpolation).

FIG. L.2 – Étendue en k de l'ondelette mère : $\delta_k = 0.0095 \text{ m}^{-1}$. Étendue angulaire de l'ondelette mère : $\delta_\theta = 7^\circ$.



(a) Ondelette mère exprimée en (k_x, k_y) .

(b) Ondelette mère exprimée en (k, θ)
(obtenue par interpolation).

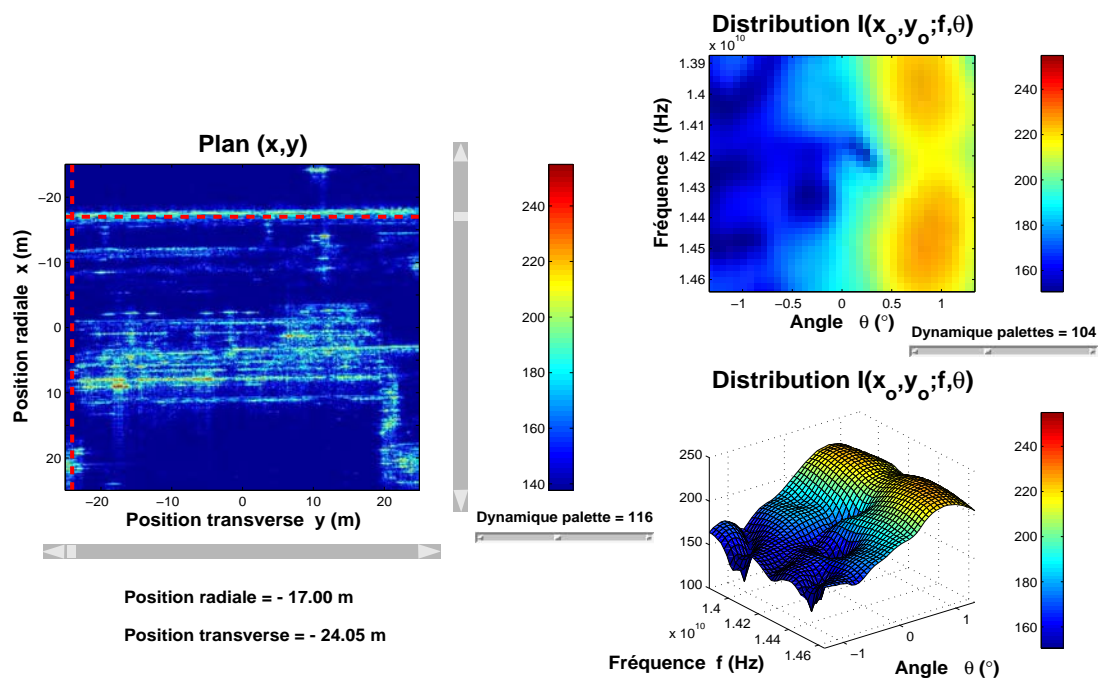
FIG. L.3 – Étendue en k de l'ondelette mère : $\delta_k = 0.0095 \text{ m}^{-1}$. Étendue angulaire de l'ondelette mère : $\delta_\theta = 0.47^\circ$.

Annexe L. Passage du domaine (k_x, k_y) au domaine (k, θ) par interpolation.

Annexes du chapitre 4

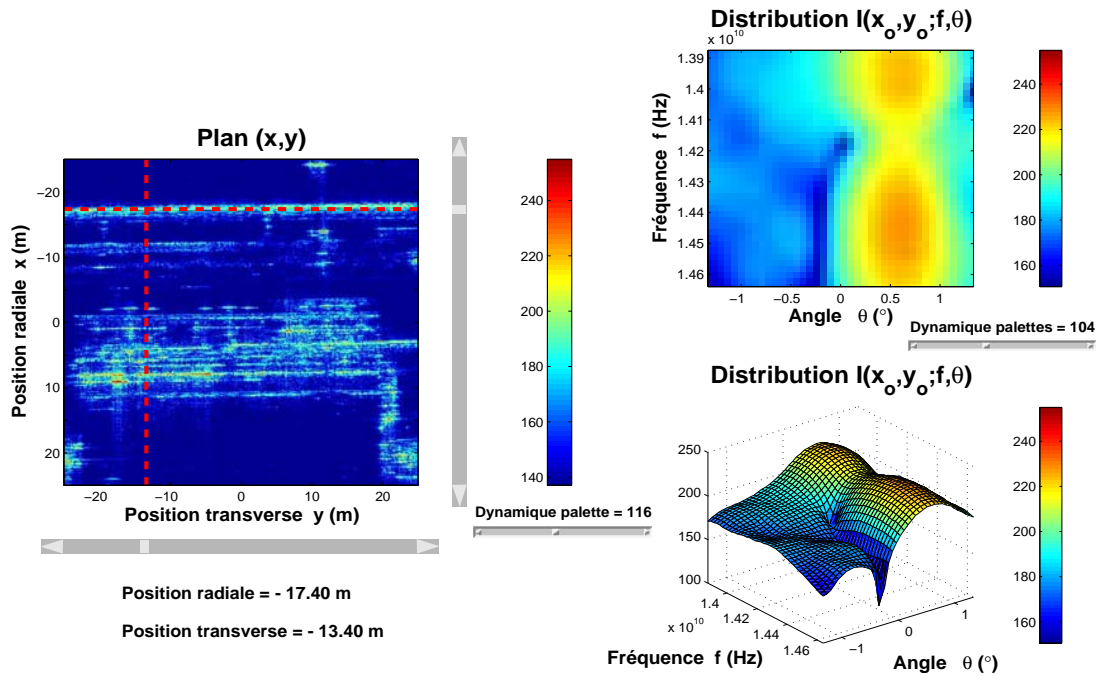
Annexe M

Complément de résultats pour la première étude

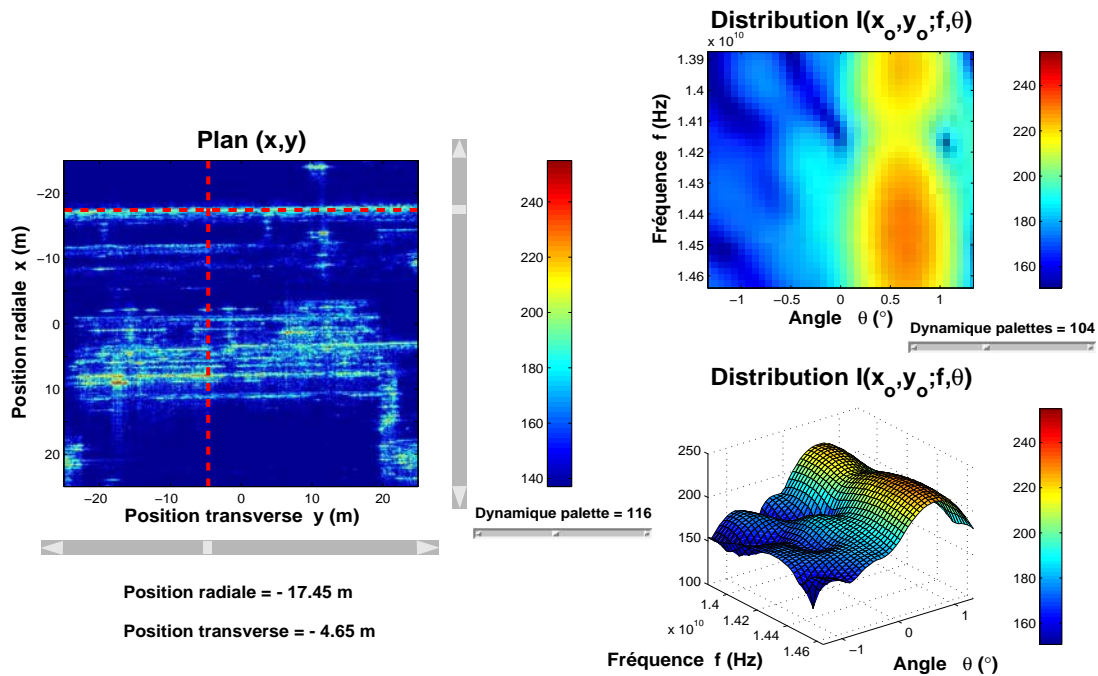


Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17 \text{ m}, -24.05 \text{ m})$.

FIG. M.1 – Distribution énergétique d'un réflecteur sur le tuyau.

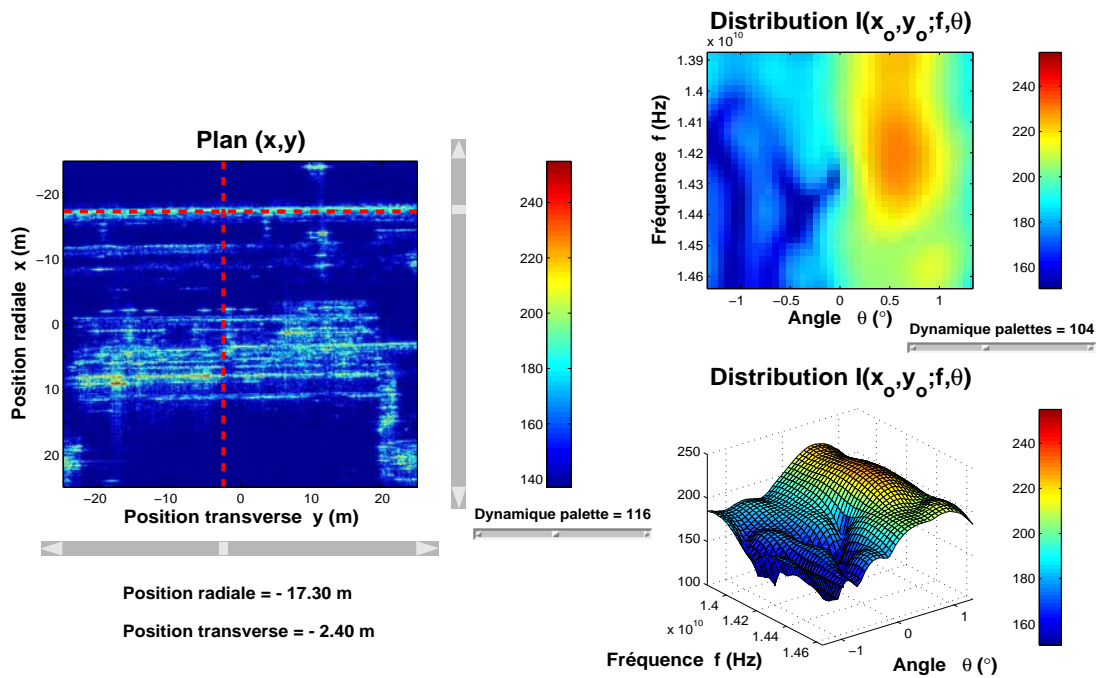


(a) Distribution du réflecteur situé sur le tuyau en $(-17.40 \text{ m}, -13.40 \text{ m})$.

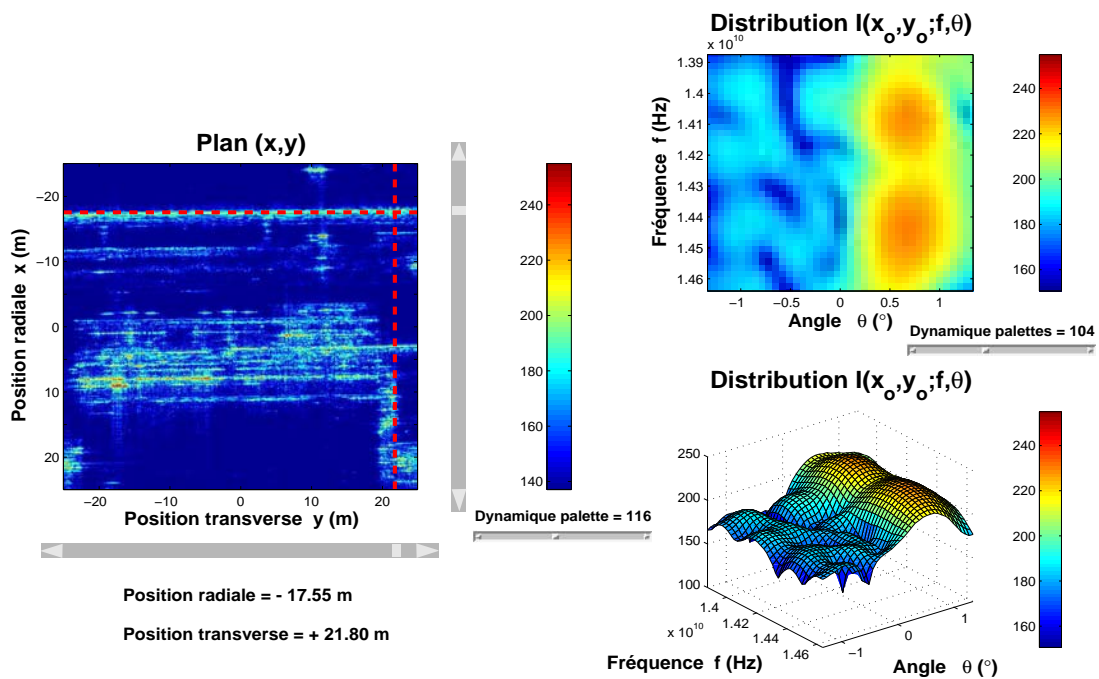


(b) Distribution du réflecteur situé sur le tuyau en $(-17.45 \text{ m}, -4.65 \text{ m})$.

FIG. M.2 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.



(a) Distribution du réflecteur localisé sur le tuyau en $(-17.30 \text{ m}, -2.40 \text{ m})$.

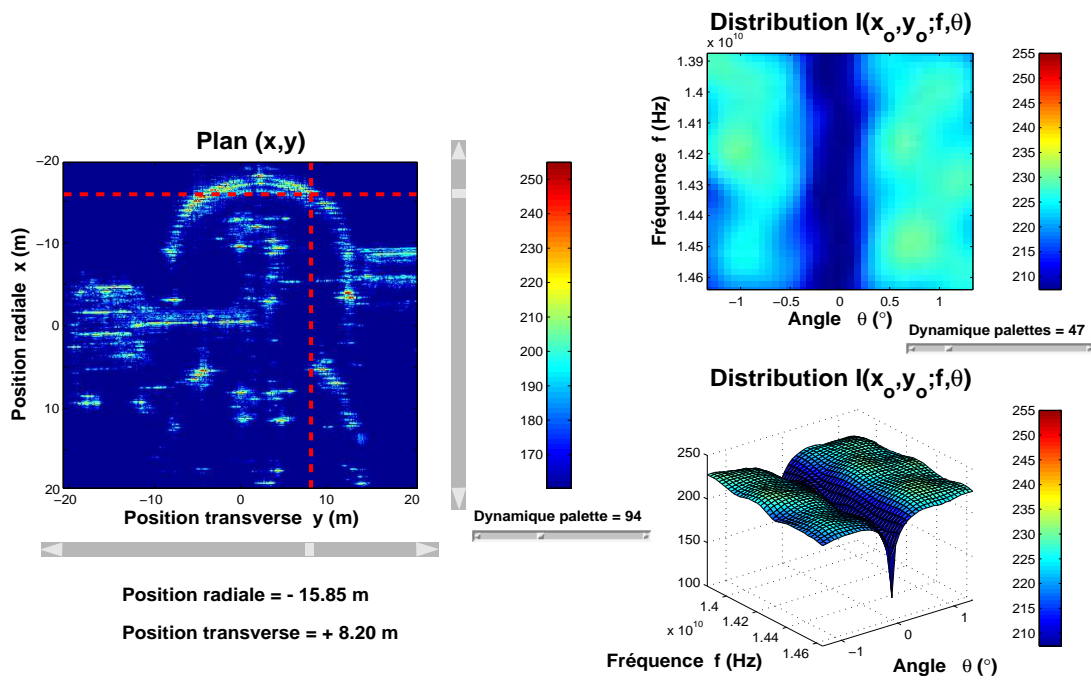


Distribution du réflecteur situé sur le tuyau en $(-17.55 \text{ m}, 21.80 \text{ m})$.

FIG. M.3 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le tuyau.

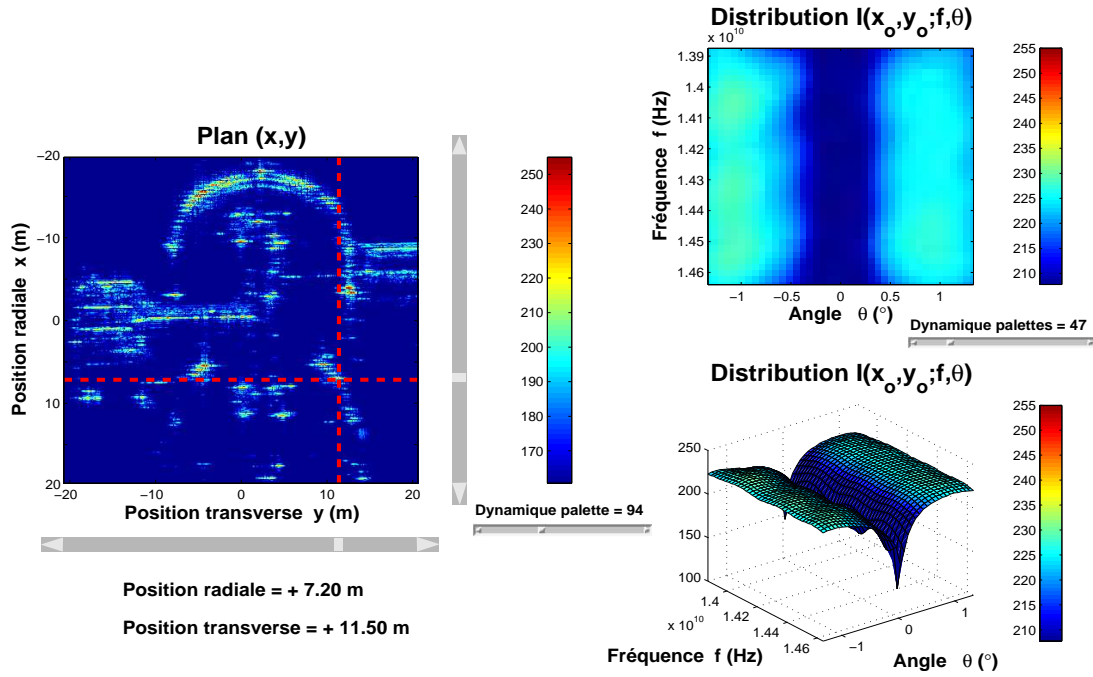
Annexe N

Complément de résultats pour la deuxième étude

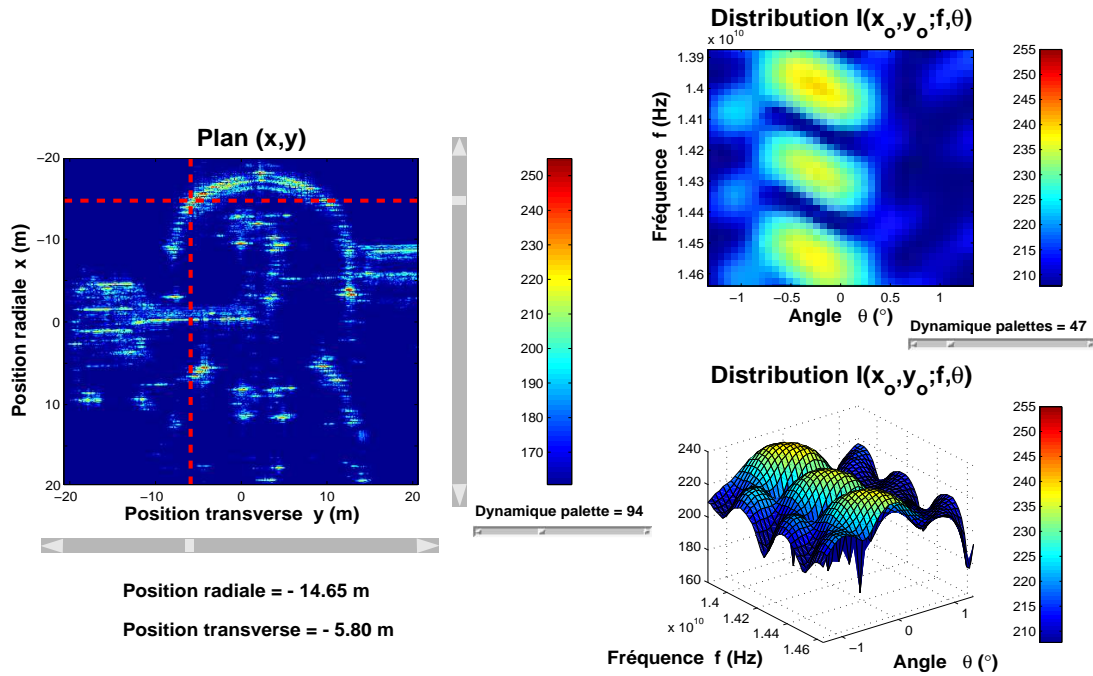


Distribution du réflecteur localisé sur la cuve supérieure en $(-15.85 \text{ m}, 8.20 \text{ m})$.

FIG. N.1 – Distribution énergétique d'un réflecteur sur une des deux cuves.

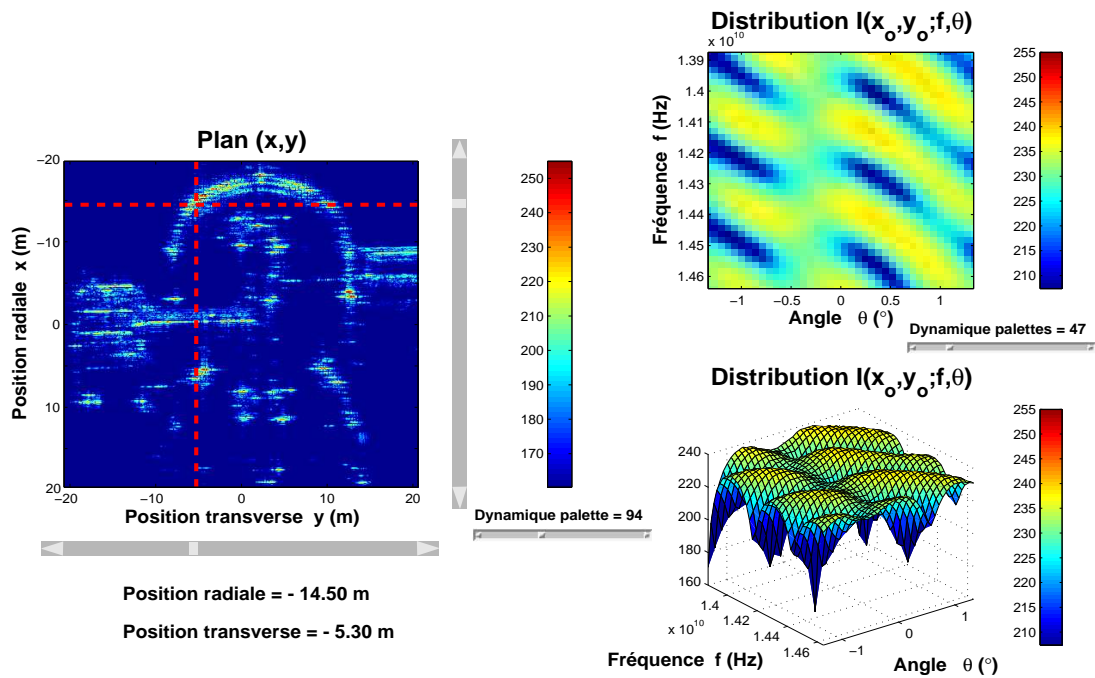


(a) Distribution du réflecteur situé sur la cuve inférieure en (7.20 m, 11.50 m).

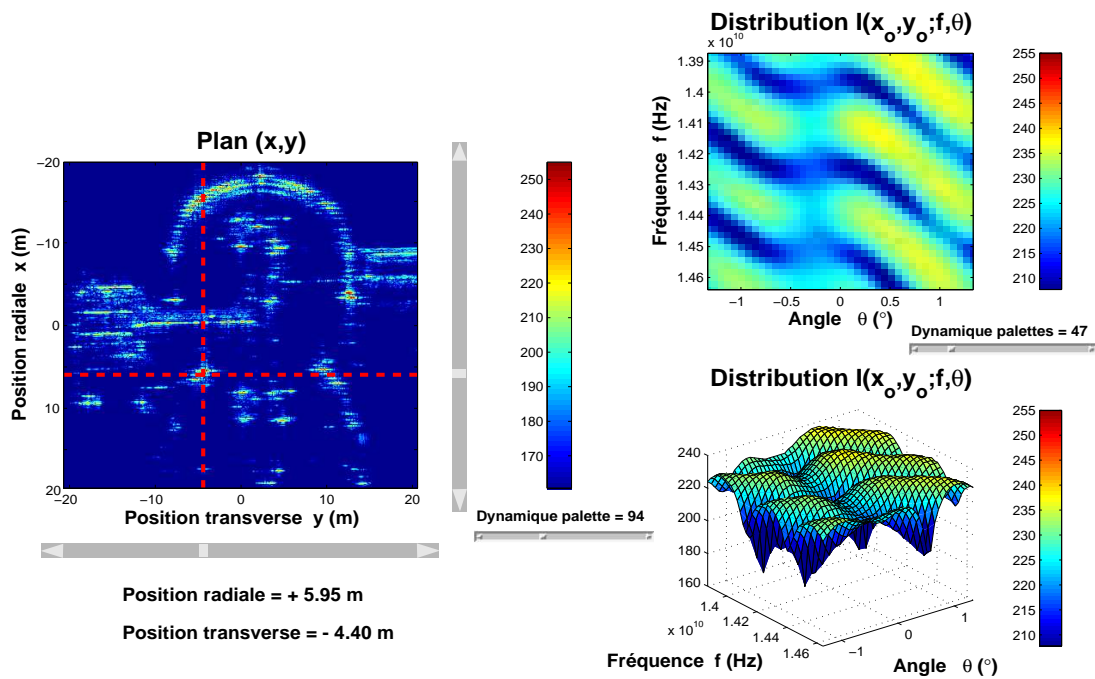


(b) Distribution du réflecteur localisé sur la cuve supérieure en (-14.65 m, -5.80 m).

FIG. N.2 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la paire de cuves.

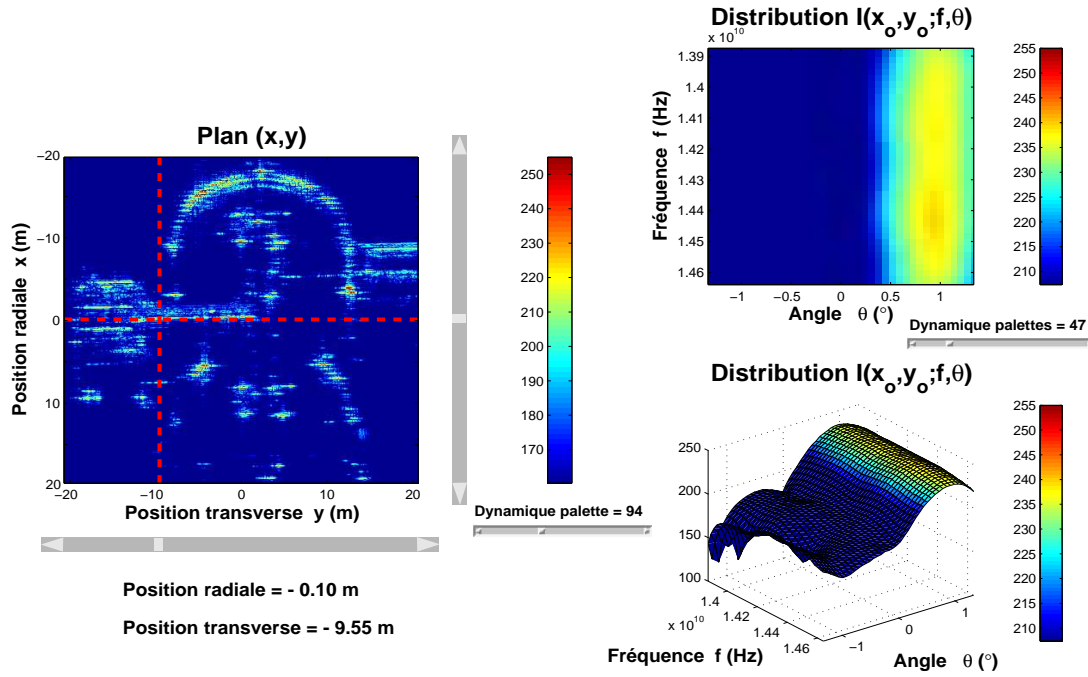


(a) Distribution du réflecteur situé sur la cuve supérieure en $(-14.50 \text{ m}, -5.30 \text{ m})$.

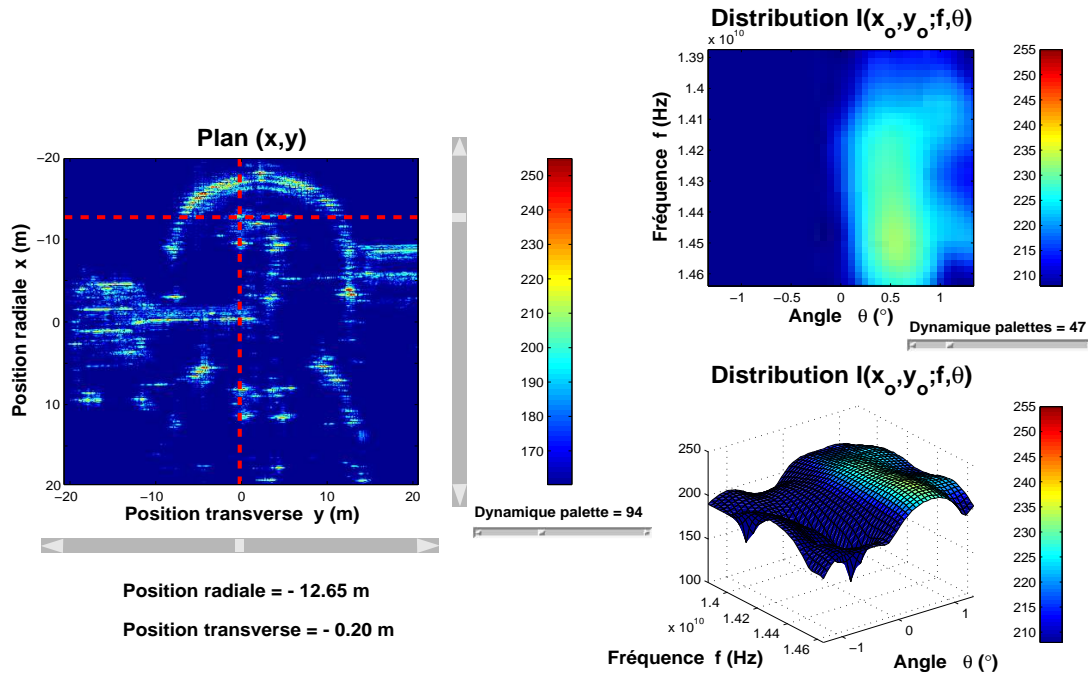


(b) Distribution du réflecteur localisé sur la cuve inférieure en $(5.95 \text{ m}, -4.40 \text{ m})$.

FIG. N.3 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la paire de cuves.

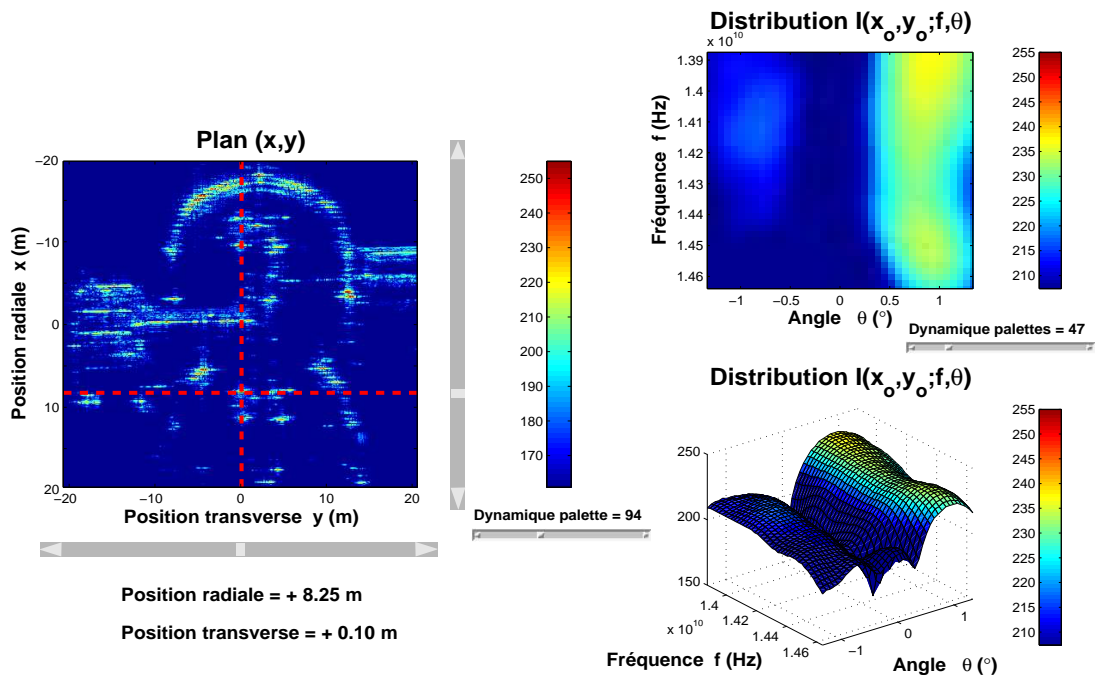


(a) Distribution du réflecteur localisé sur la passerelle en $(-0.10 \text{ m}, -9.55 \text{ m})$.

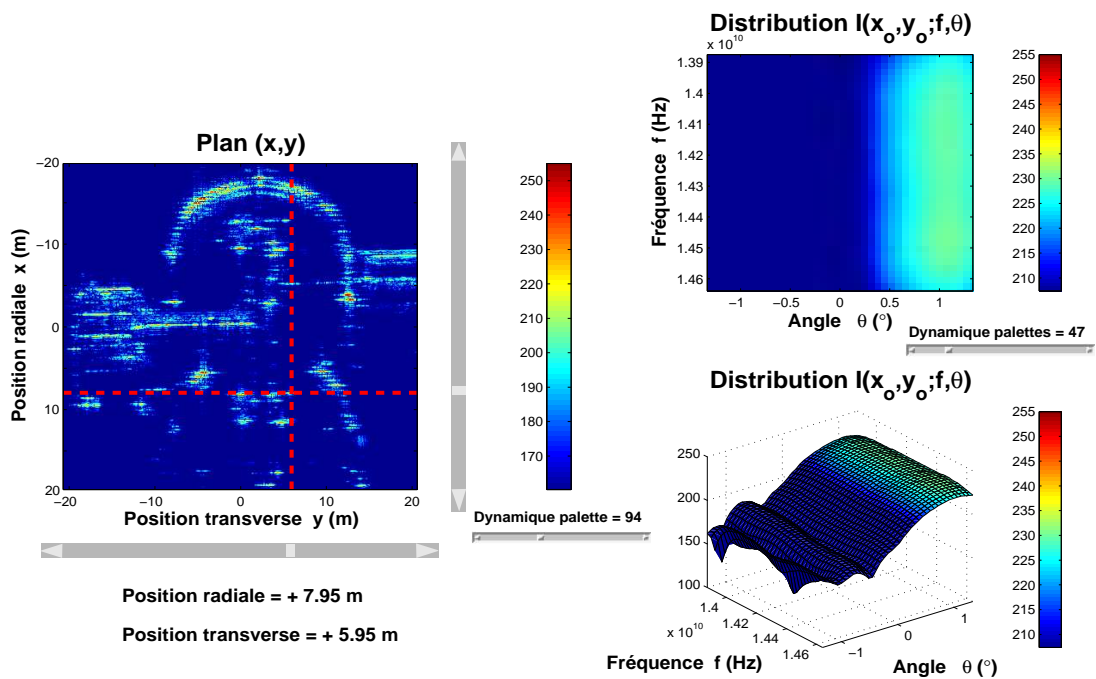


(b) Distribution du réflecteur situé sur la passerelle en $(-12.65 \text{ m}, -0.20 \text{ m})$.

FIG. N.4 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la passerelle.

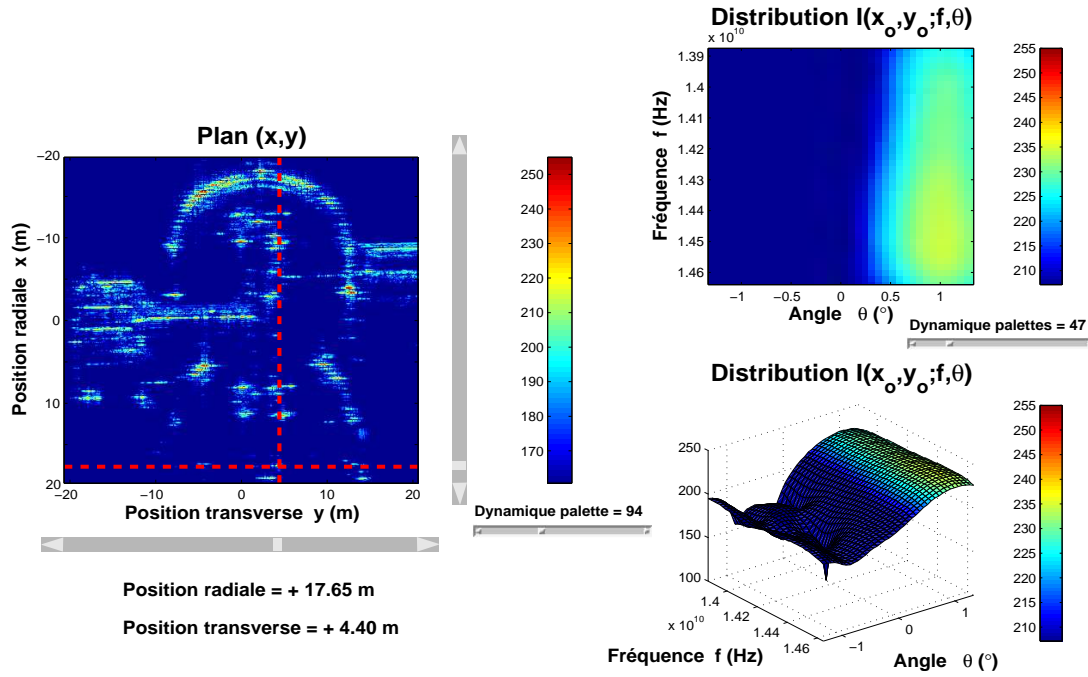


(a) Distribution du réflecteur localisé sur la passerelle en (8.25 m, 0.10 m).

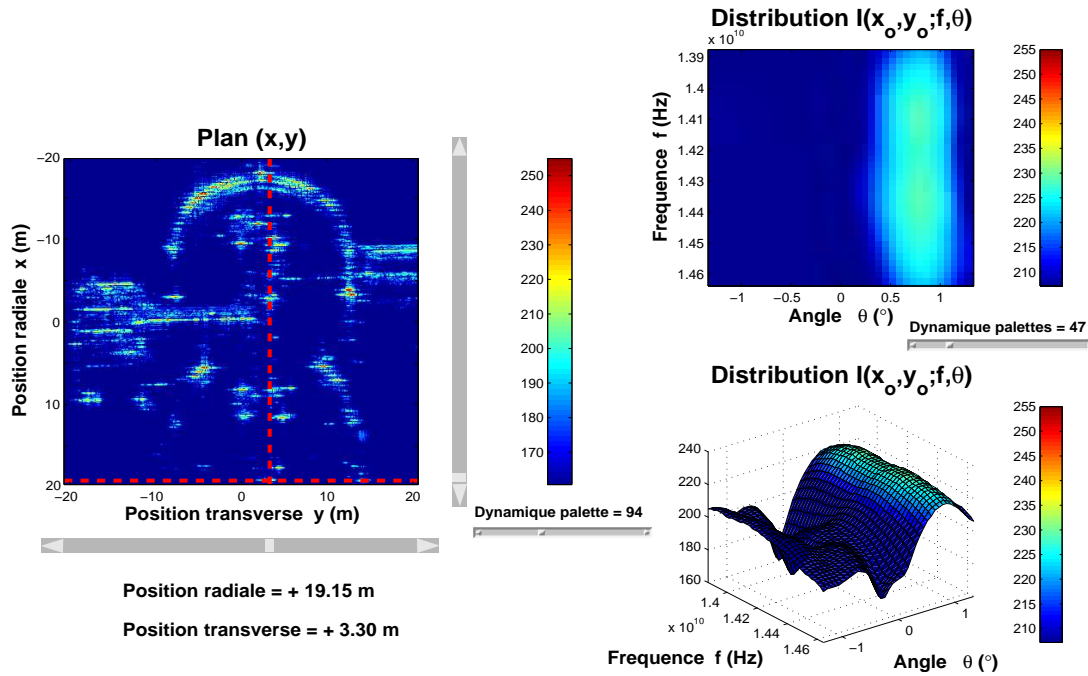


(b) Distribution du réflecteur situé sur la passerelle en (7.95 m, 5.95 m).

FIG. N.5 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la passerelle.

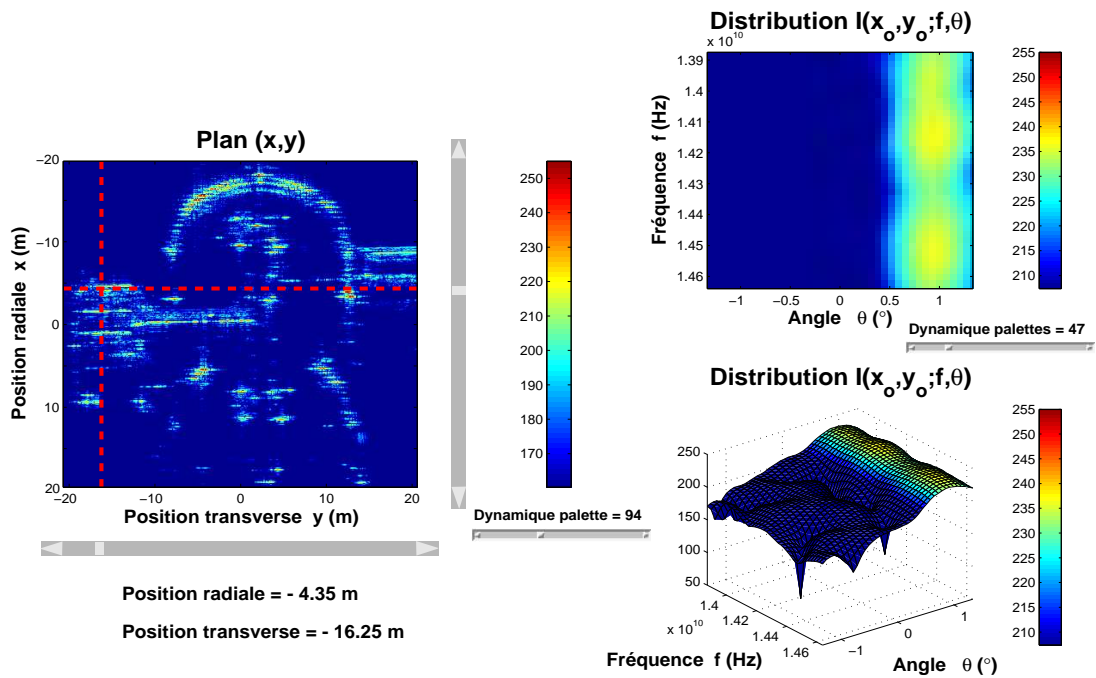


(a) Distribution du réflecteur localisé sur la passerelle en (17.65 m, 4.40 m).

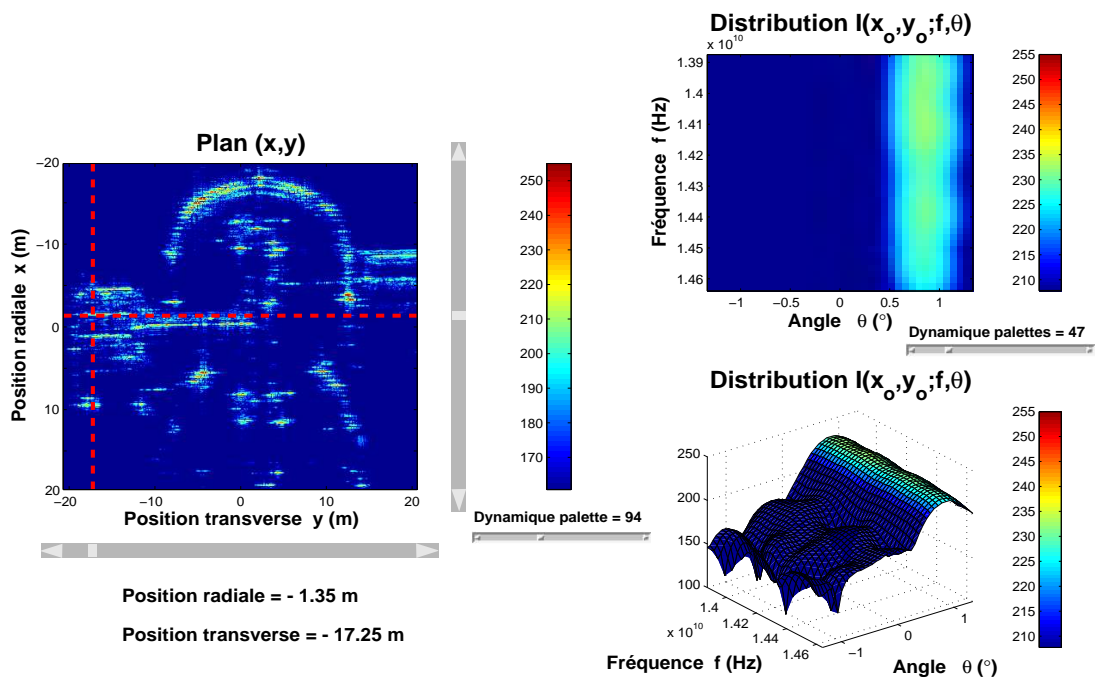


(b) Distribution du réflecteur situé sur la passerelle en (19.15 m, 3.30 m).

FIG. N.6 – Distribution énergétique de réflecteurs sur la passerelle.

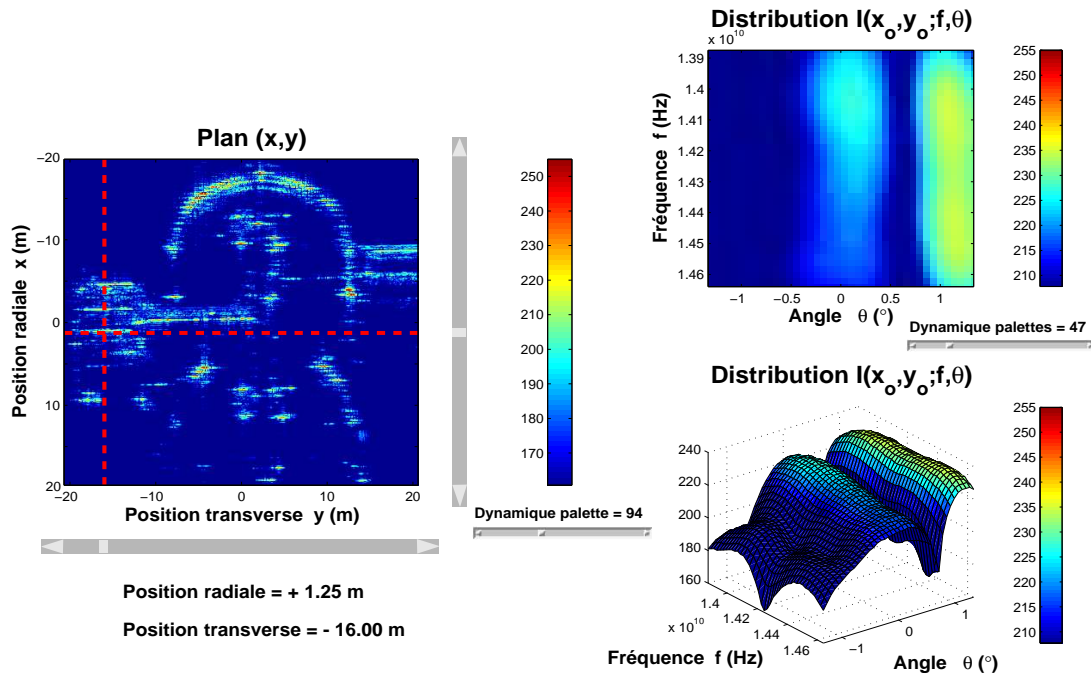


(a) Distribution du réflecteur localisé sur l'escalier en $(-4.35 \text{ m}, -16.25 \text{ m})$.

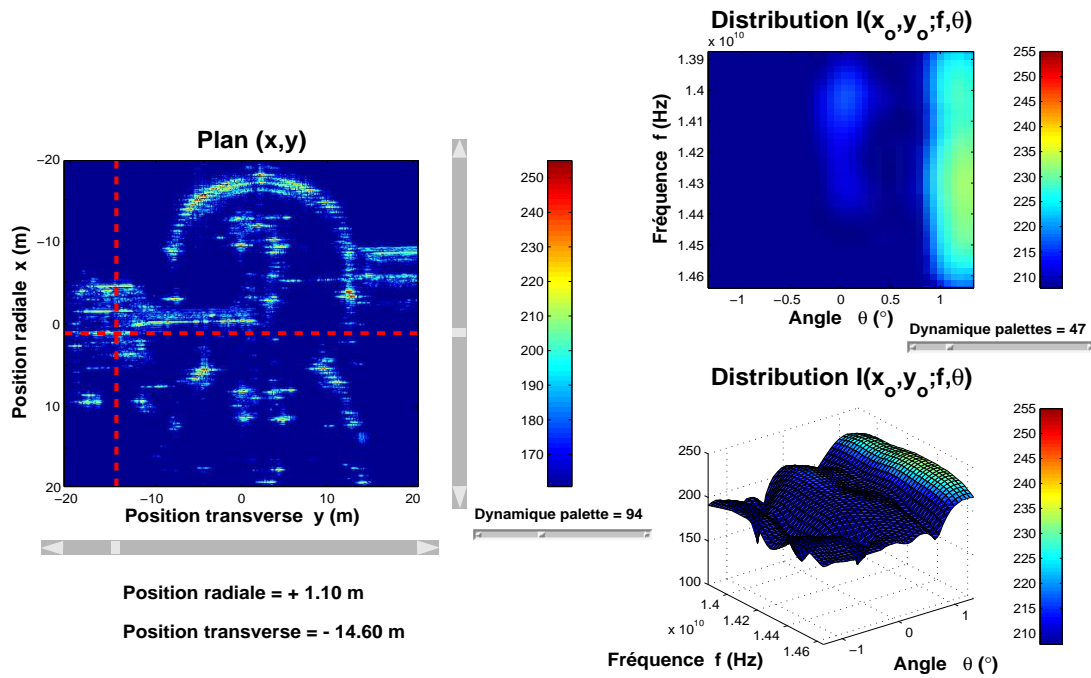


(b) Distribution du réflecteur situé sur l'escalier en $(-1.35 \text{ m}, -17.25 \text{ m})$.

FIG. N.7 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'escalier.



(a) Distribution du réflecteur localisé sur l'escalier en (1.25 m, -16 m).

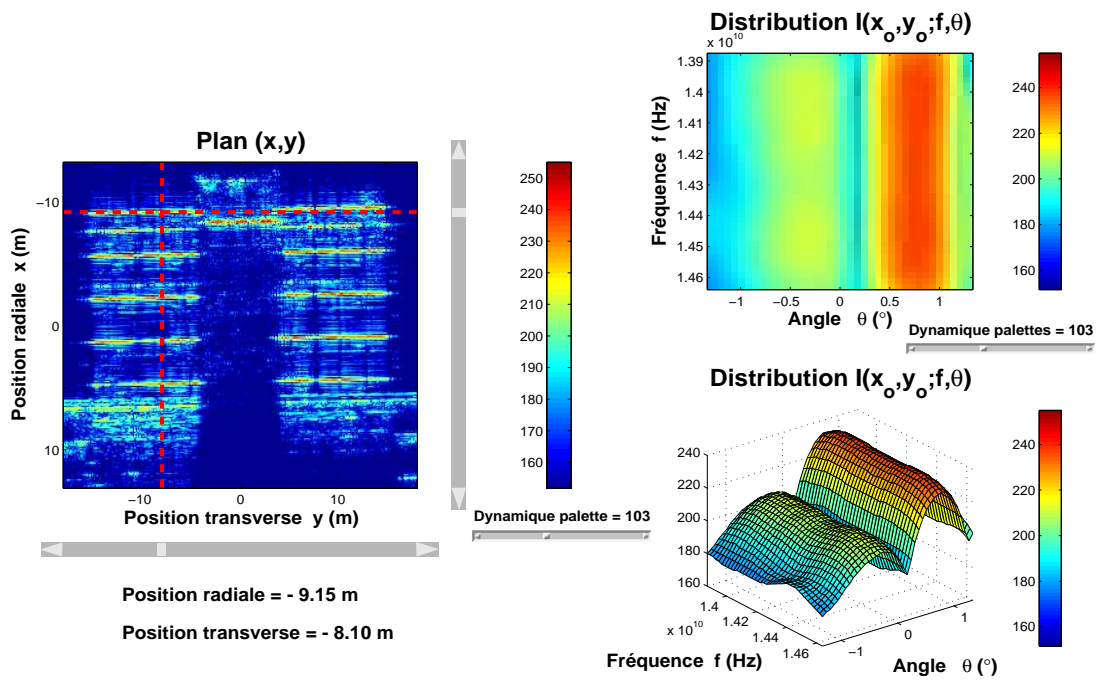


(b) Distribution du réflecteur situé sur l'escalier en (1.10 m, -14.60 m).

FIG. N.8 – Distribution énergétique de réflecteurs sur l'escalier.

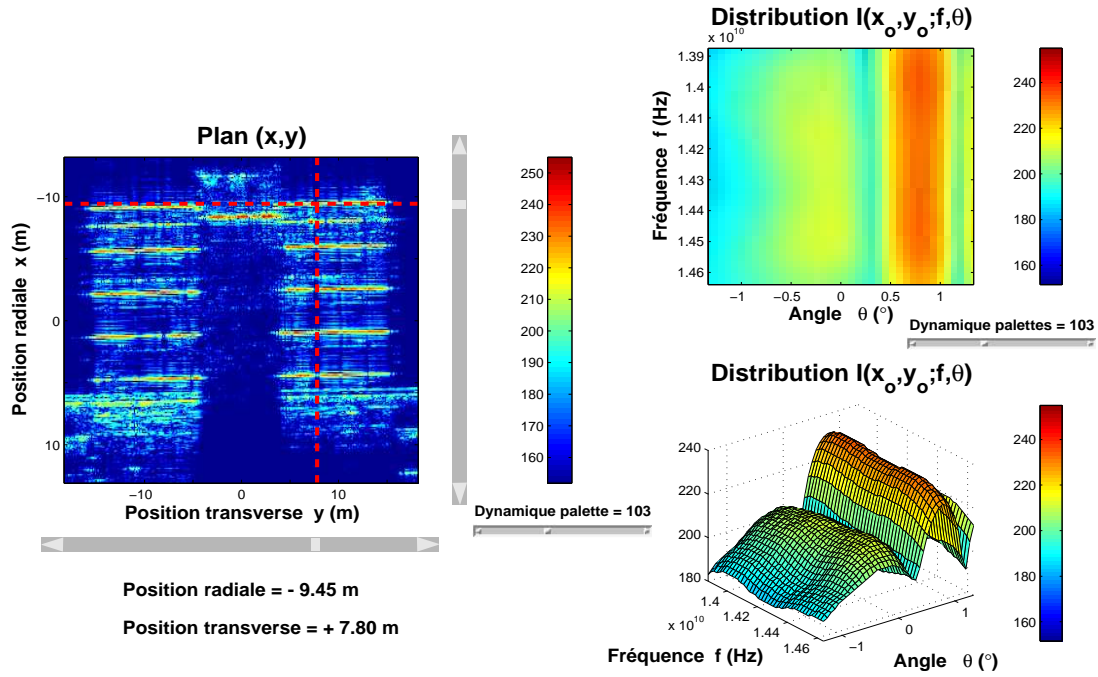
Annexe O

Complément de résultats pour la dernière étude

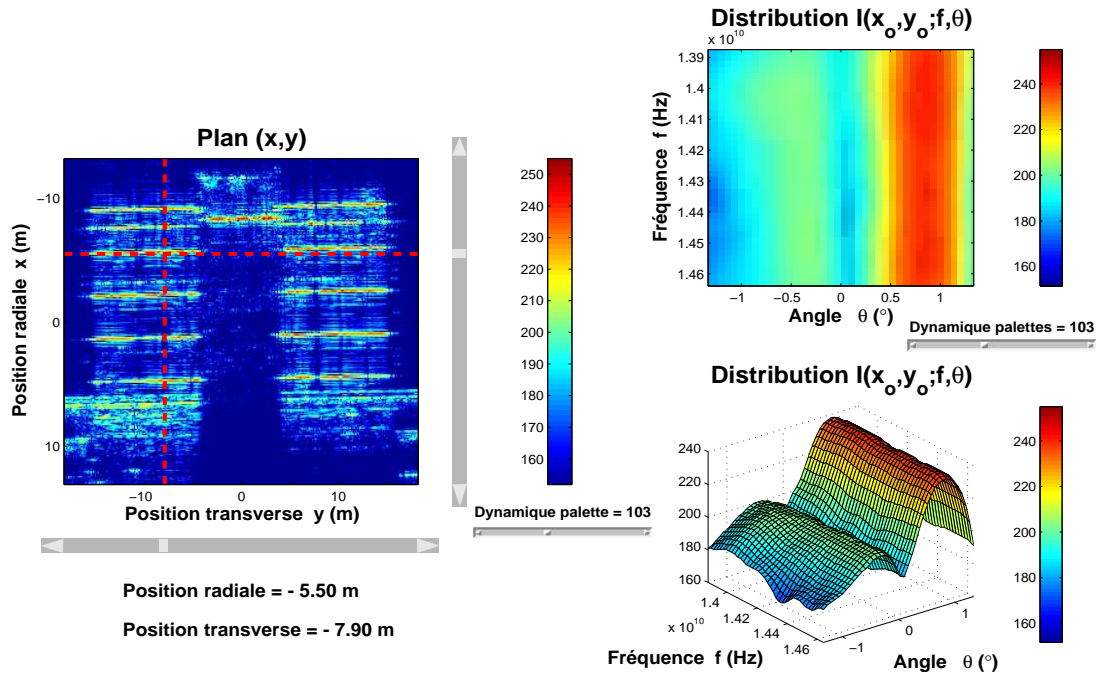


Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-9.15 \text{ m}, -8.10 \text{ m})$.

FIG. O.1 – Distribution énergétique d'un réflecteur sur un des toits de bâtiment.

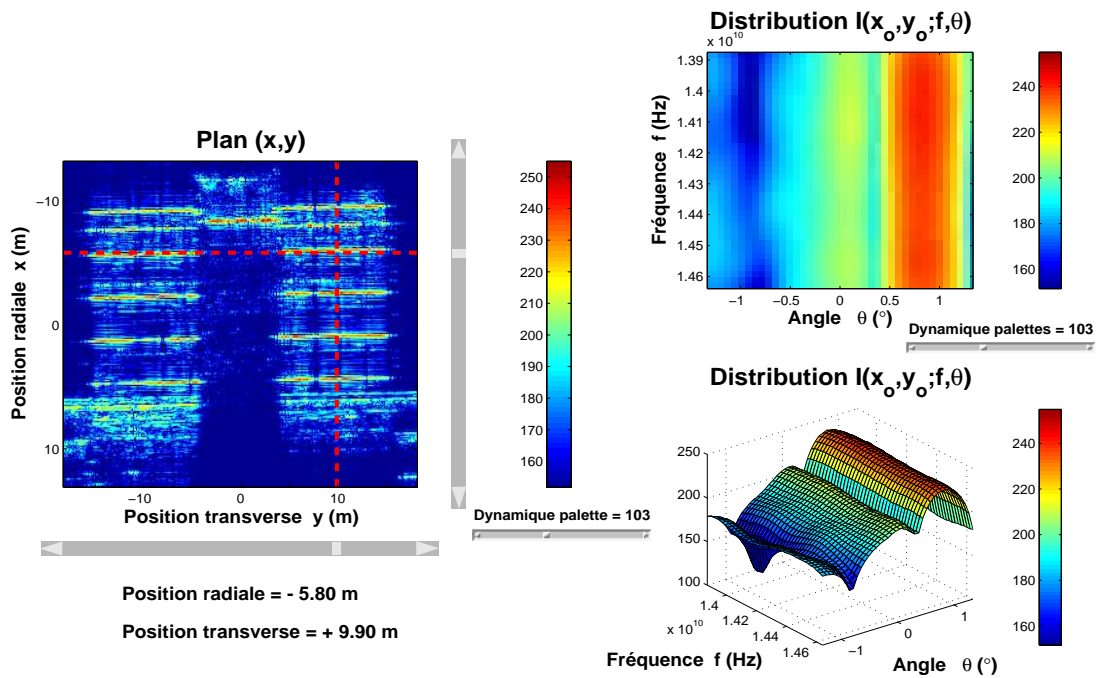


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-9.45 \text{ m}, 7.80 \text{ m})$.

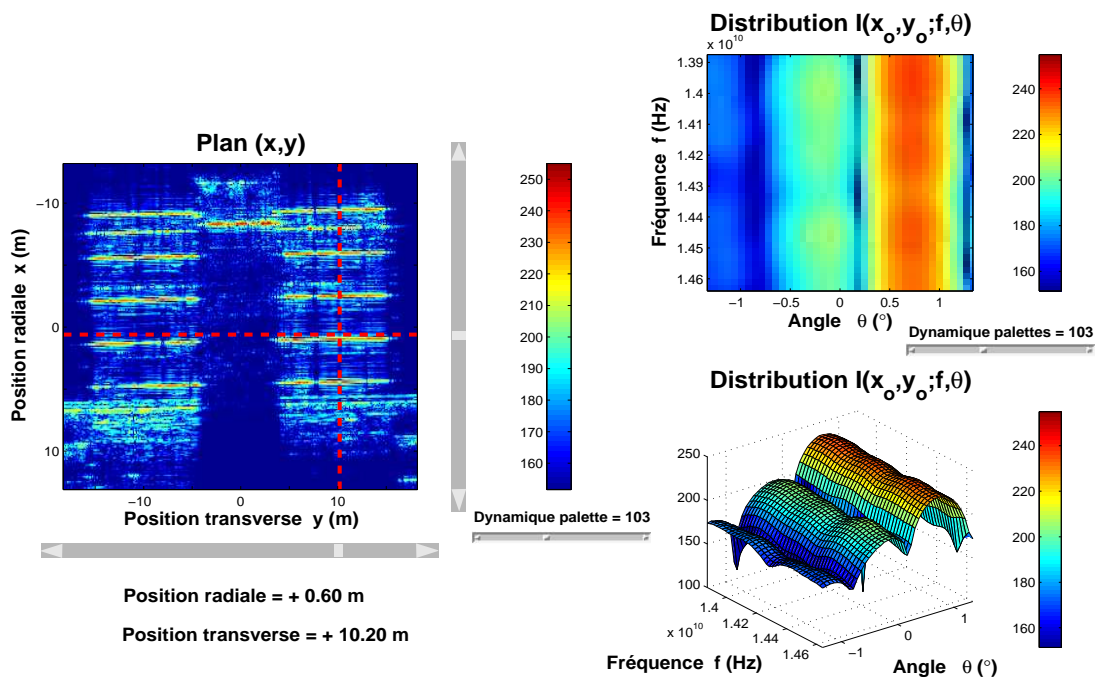


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-5.50 \text{ m}, -7.90 \text{ m})$.

FIG. O.2 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

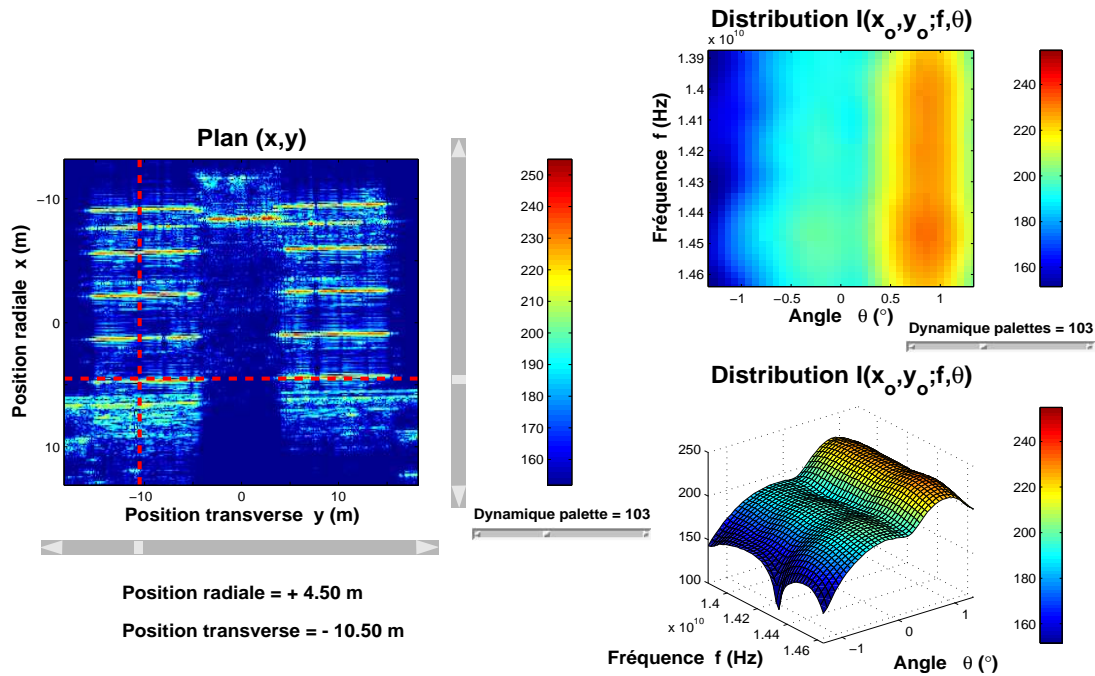


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (-5.80 m, 9.90 m).

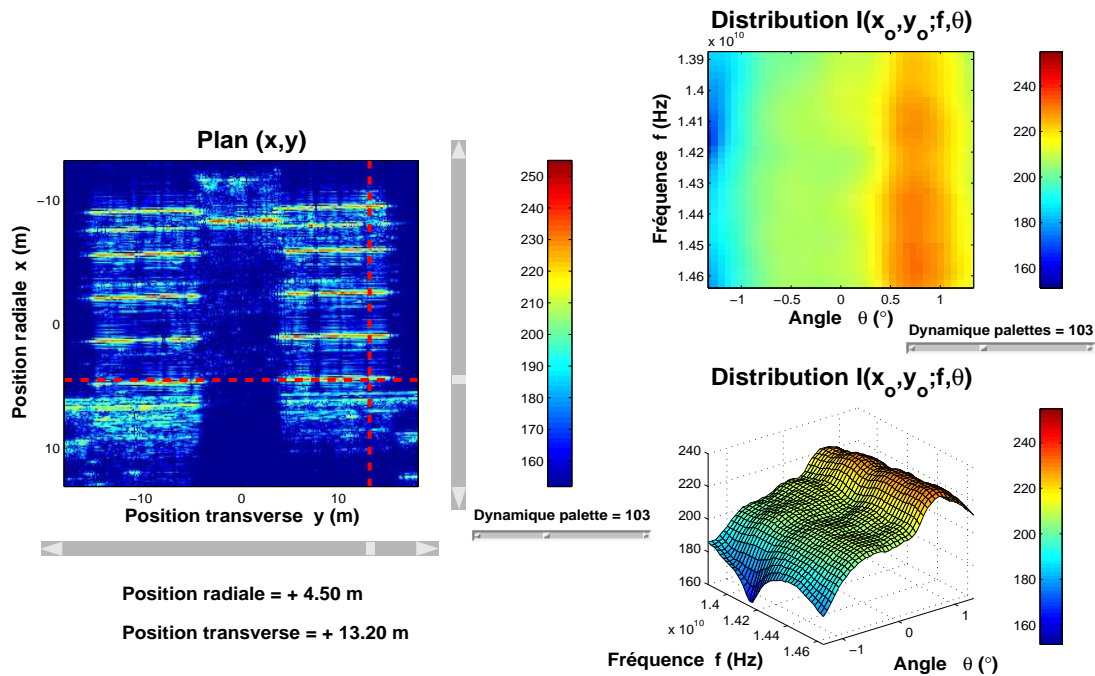


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (0.60 m, 10.20 m).

FIG. O.3 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

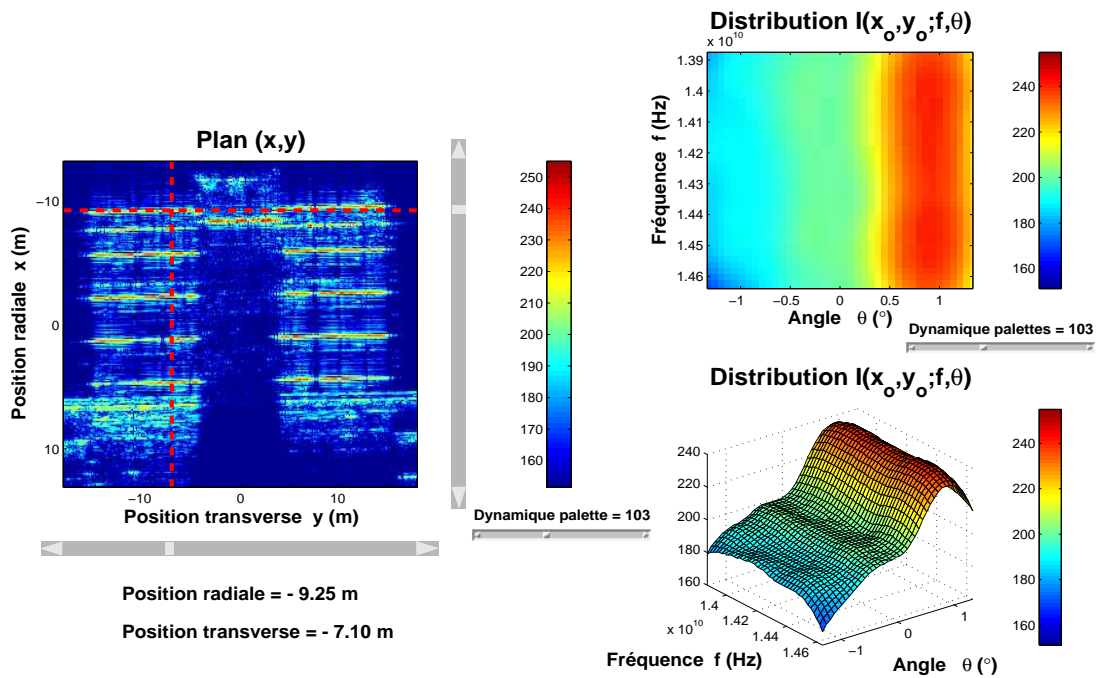


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (4.50 m, -10.50 m).

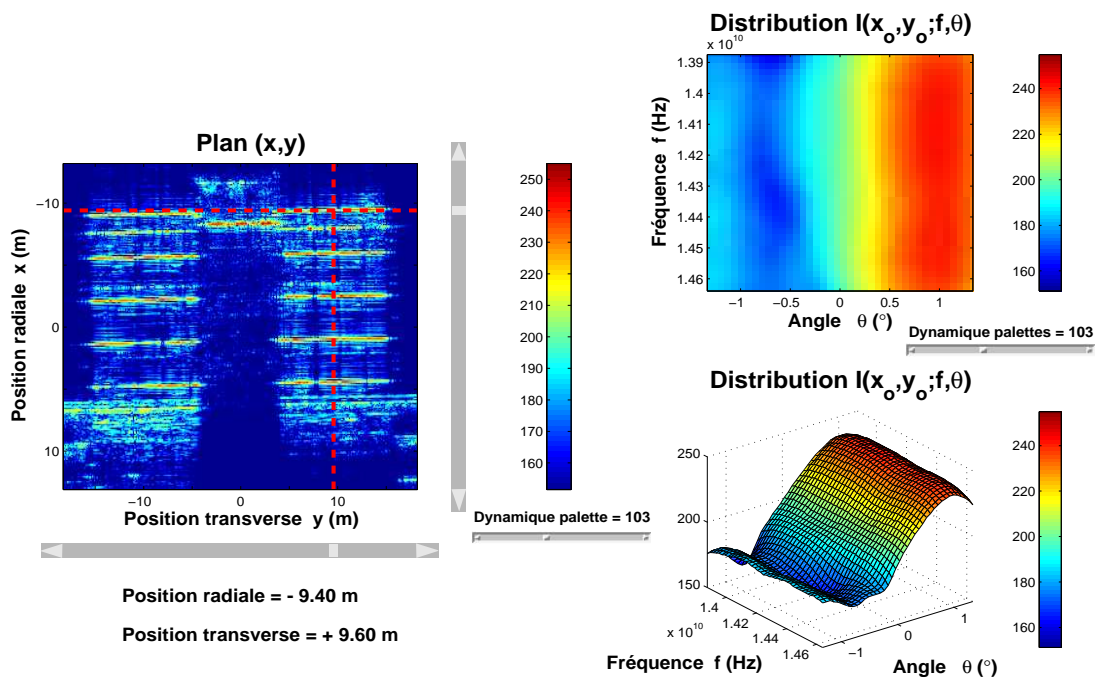


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (4.50 m, 13.20 m).

FIG. O.4 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

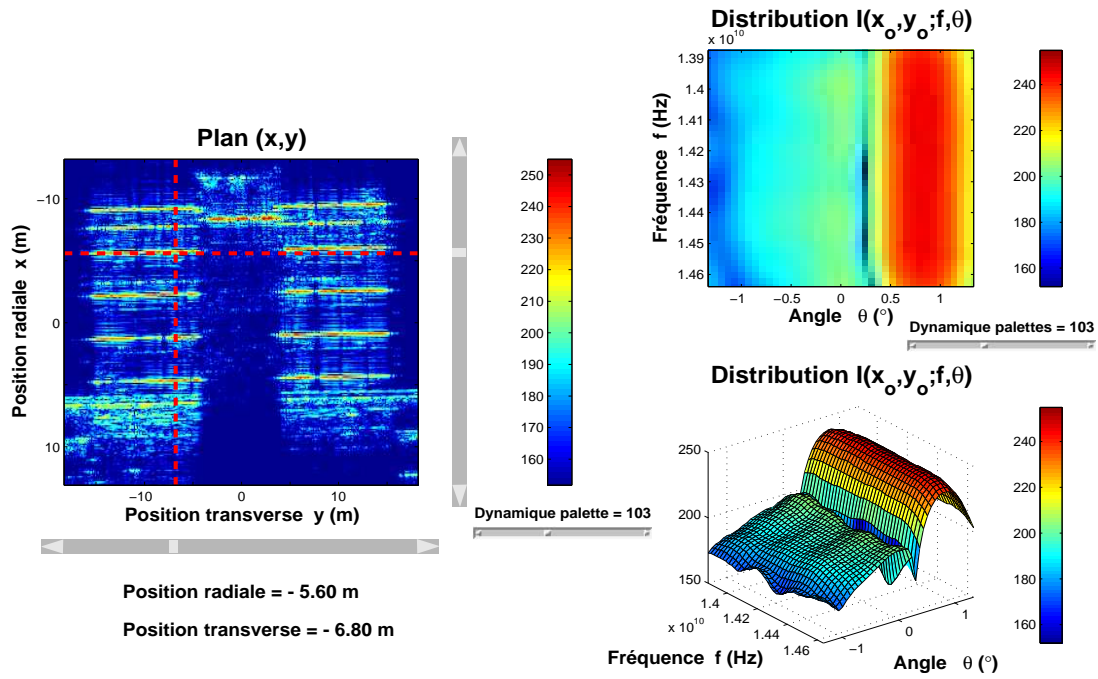


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-9.25 \text{ m}, -7.10 \text{ m})$.

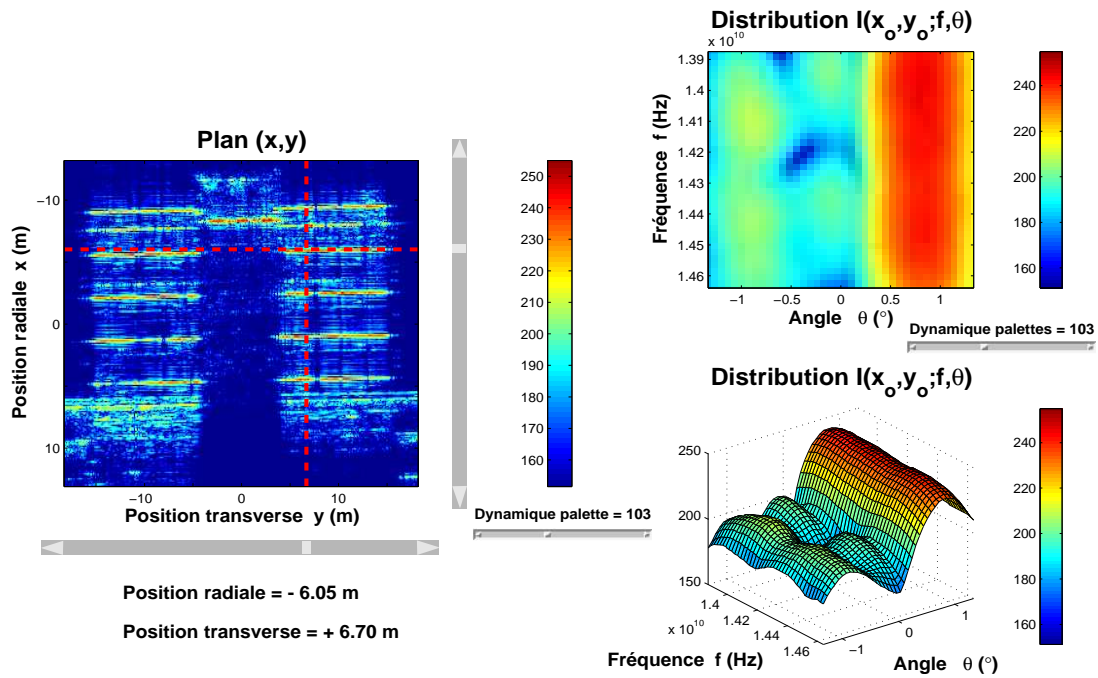


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-9.40 \text{ m}, 9.60 \text{ m})$.

FIG. O.5 – Distribution énergétique d'un réflecteur sur le toit d'un des bâtiments latéraux.

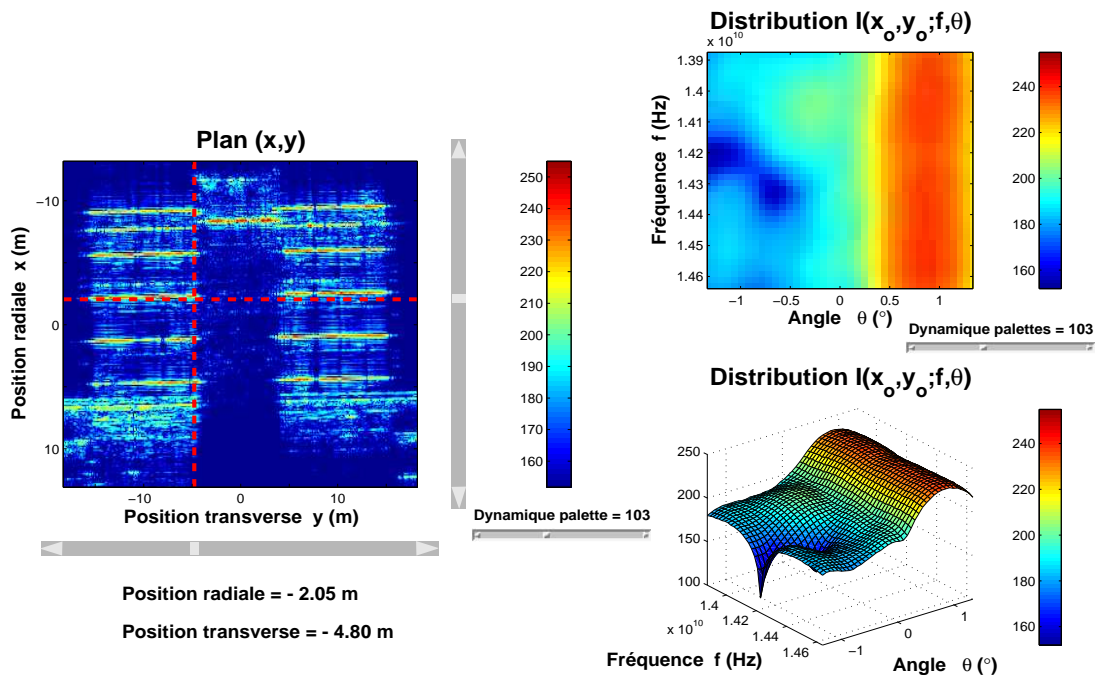


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-5.60 \text{ m}, -6.80 \text{ m})$.

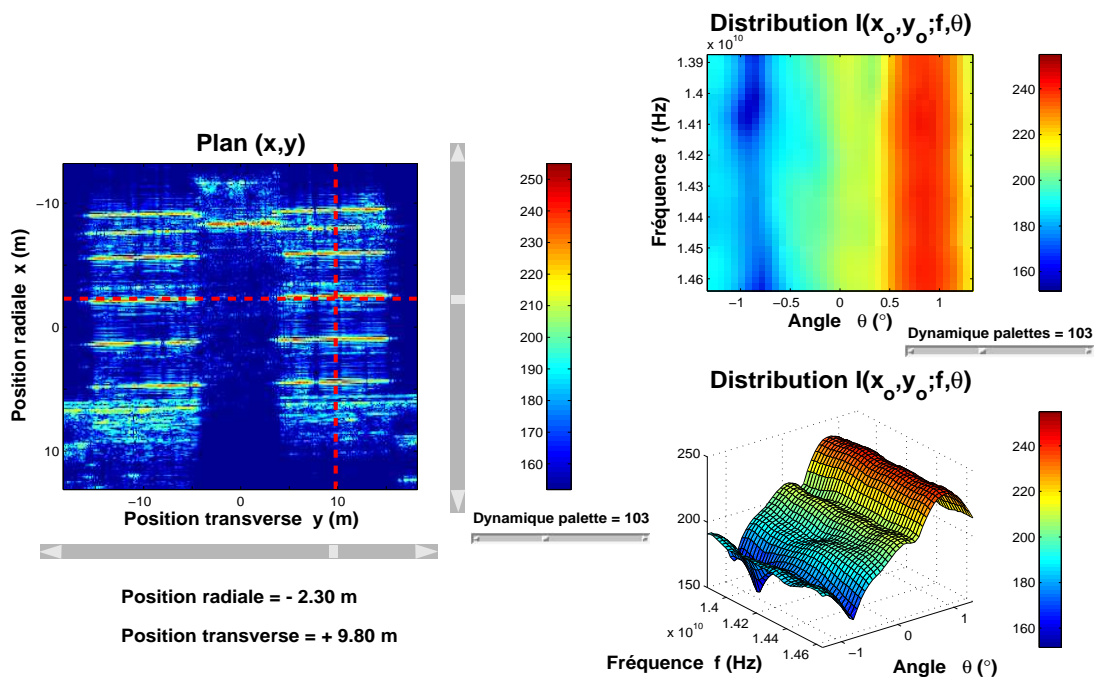


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-6.05 \text{ m}, 6.70 \text{ m})$.

FIG. O.6 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

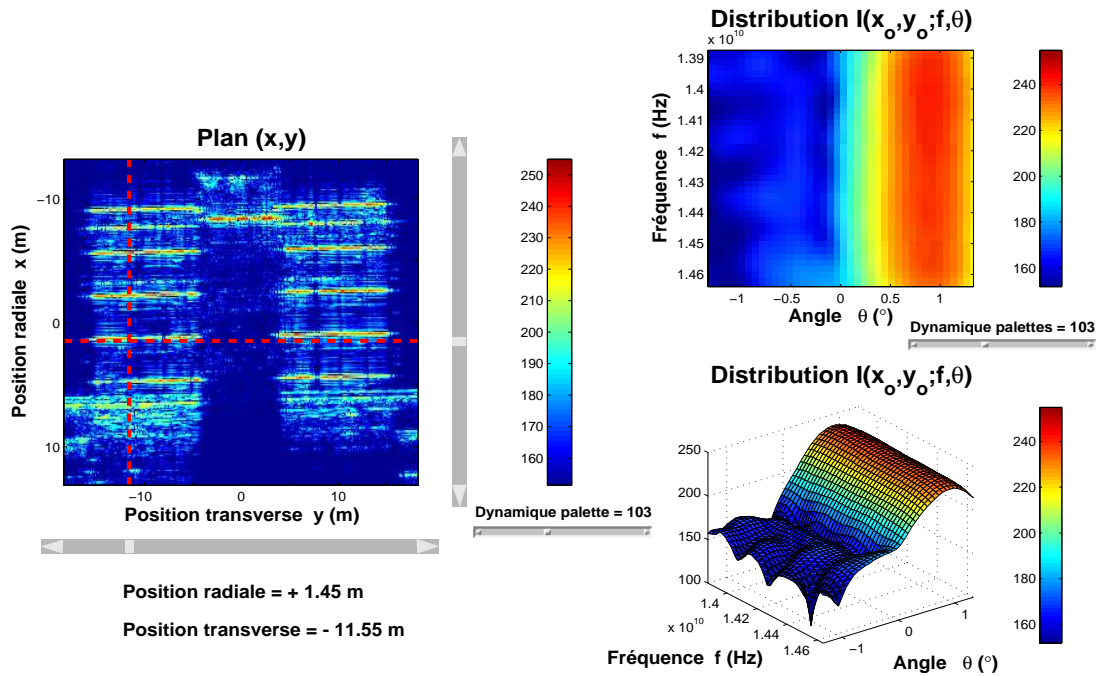


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-2.05 \text{ m}, -4.80 \text{ m})$.

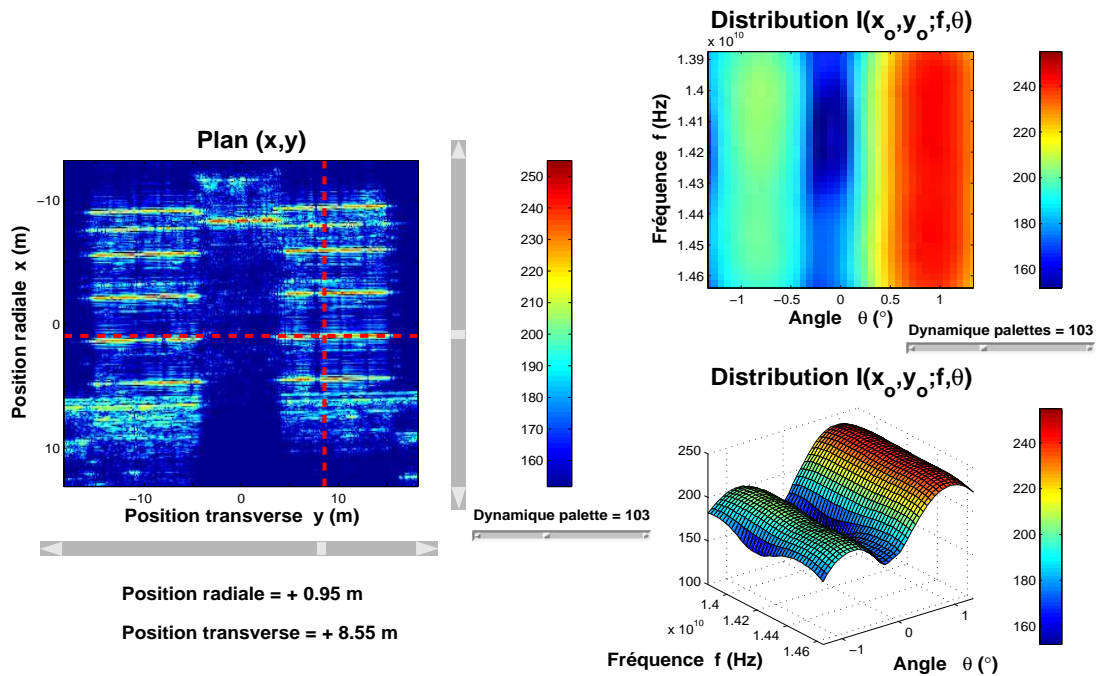


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en $(-2.30 \text{ m}, 9.80 \text{ m})$.

FIG. O.7 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

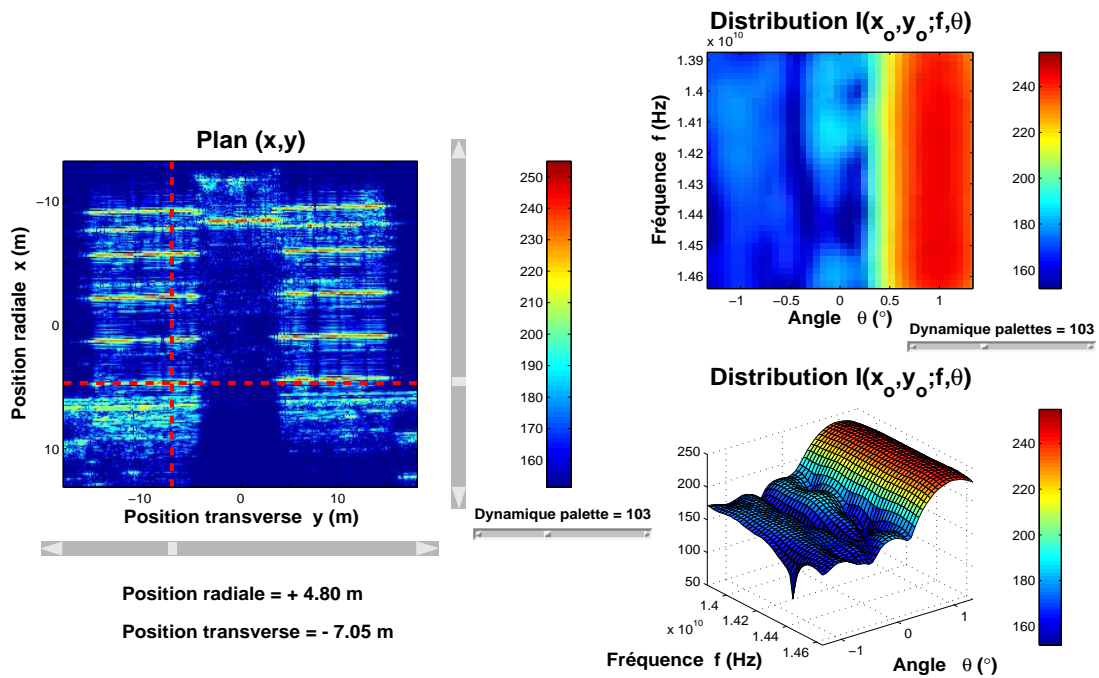


(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (1.45 m, -11.55 m).

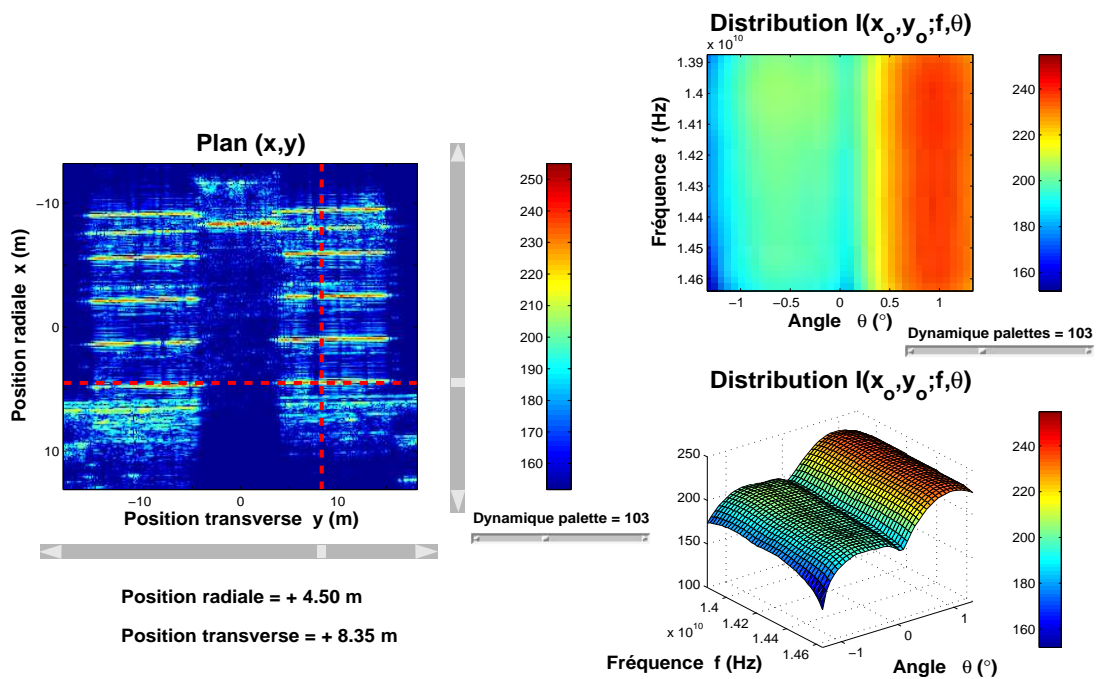


(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (0.95 m, 8.55 m).

FIG. O.8 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.



(a) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (4.80 m, -7.05 m).



(b) Distribution du réflecteur localisé sur un des toits de bâtiment en (4.50 m, 8.35 m).

FIG. O.9 – Distribution énergétique de réflecteurs sur le toit des bâtiments latéraux.

Bibliographie

- [Jak97] C.V. Jacowatz D.E. Wahl D.C. Ghiglia and P.A. Thompson, *Spotlight-Mode Synthetic Aperture Radar : A Signal Processing Approach*, Kluwer Academic Publishers (1997), Boston, London, Dordrecht.
- [Bou96] J.M. Boutry, ONERA Airborne SAR Facilities, *2nd International Airborne Remote Sensing Conference* (June 1996), San Francisco, USA.
- [Mal98] S.Mallat, *Wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1998.
- [Bar97] D.K. Barton S.A. Leonov, *Radar Technology Encyclopedia*, Artech House (1997).
- [Weh95] D.R. Wehner, *High-Resolution Radar, Second Edition*, Artech House (1995).
- [Sou94] M. Soumekh, *Fourier Array Imaging*, PTR Prentice Hall (1994), Englewood Cliffs.
- [Car95] W.G. Carrara R.S. Goodman and R.M. Majewski, *Spotlight Synthetic Aperture Radar*, Artech House (1995), Boston, London.
- [Caf91] C. Cafforio, C. Prati and F. Rocca, SAR data focusing using seismic migration techniques, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **27** (1991), 194-207.
- [Sou97] M. Soumekh, *Synthetic Aperture Radar Signal Processing*, John Wiley & Sons, Inc.
- [Gou97] P.T. Gough D.W. Hawkins, Unified Framework for Modern Synthetic Aperture Imaging Algorithms, *Int. J. of Imaging Systems and Technology*, **8** (1997), 343-358.
- [Pas03] L. Pastoré, *Imagerie radar par synthèse d'ouverture en basse fréquence*, Thèse de doctorat, Université Paris X (2003).
- [Sla85] M.G. Slaney, *Imaging with diffraction tomography*, Philosophy Doctorate, Purdue University (May 1985).
- [Pap84] A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill (1984), New York, 271-273.
- [Haw96] D. W. Hawkins, *Synthetic Aperture imaging Algorithms : With Application to Wide Bandwidth Sonar*, Electrical and Electronic Engineering, University of Canterbury (october 1996), New Zealand.
- [Mil04] A.S. Milman, The Hyperbolic Geometry of SAR Imaging, *submitted to Radio Science*, 2004.
- [Sto78] R. H Stolt, Migration by Fourier transform, *Geophysics*, **43** (1978), 23-48.
- [Bor97] G.J. Borse, *Numerical Methods with MATLAB*, PWS Publishing Company, 1997.
- [Bra99] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1999.
- [Trin97] L. Trintinalia and Hao Ling, Scattering Center Parameterization of Wide-Angle Backscattered Data Using Adaptive Gaussian Representation, *IEEE Trans. On Antennas and Propagation*, **45** (Nov. 1997), 1664-1668.

- [Pot95] L.C. Potter D.M. Chiang R. Carrière and M.J. Gerry, A Geometrical Theory of Diffraction (GTD)-Based Parametric Model for Radar Scattering, *IEEE Trans. On Antennas and Propagation*, **43** (Oct. 1995), 1058-1067.
- [Pot97] L.C. Potter and R.L. Moses, Attributed Scattering Centers for SAR ATR, *IEEE Trans. On Image Processing*, **6** (Jan. 1997), 79-91.
- [Rei02] H. Reinhard, *Éléments de mathématiques du signal*, DUNOD, 2002.
- [Azo95] E. Azoulay et J. Avignant, *Mathématiques DEUG A*, Ediscience internationale, 1995.
- [Kno85] E.F. Knott J.F. Shaeffer and M.T. Tuley, *Radar Cross Section*, Artech House (1985).
- [Bar88] D.K. Barton, *Modern Radar System Analysis*, Artech House (1988).
- [Mun89] D.C. Munson R.L. Visentin, A Signal Processing View of Strip-Mapping Synthetic Aperture Radar, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **37** (December 1989), 2131-2147.
- [Men91] D.L. Mensa, *High Resolution Radar Cross-Section Imaging*, Artech House, Inc. (1991), Boston, London.
- [Rih96] A.W. Rihaczek S.J. Hershkowitz, *Radar Resolution and Complex-Image Analysis*, Artech House (1996).
- [Mai01] H. Maître, *Traitement des images de RSO*, Hermès Science Publications (2001), Paris.
- [Vil48] J. Ville, Théorie et applications de la notion de signal analytique, *Câbles et transmission*, vol.2A, pp. 61-74, 1948.
- [Gab46] D. Gabor, Theory of communications, *J. IEE*, 93(III), pp. 429-457, 1946.
- [Bed63] E. Bedrosian, A product theorem for Hilbert transforms, *Proc. IEEE*, vol. 51, pp. 686-689, 1963.
- [Boa92] B. Boashash, Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal - Part 1 : Fundamentals, *Proc. IEEE*, vol. 80, pp. 520-538, Apr. 1992.
- [Kal92] E.G. Kalnins and W. Miller, A note on group contractions and radar ambiguity functions in *Radar and Sonar, Part II*, M.B.F.A. Grunbaum and R.E. Blahut, eds., pp 71-82, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Ber88] J. Bertrand and P. Bertrand, Time-Frequency Representations of Broad-Band Signals, *Proc. IEEE-ICASSP*, New York, 1988.
- [Ber91b] J. Bertrand P. Bertrand and J.P. Ovarlez, Dimensionalized Wavelet Transform with Application to Radar Imaging, *Proc. IEEE-ICASSP* (May 1991), Toronto, Canada.
- [Ova92] J.P. Ovarlez, *La transformation de Mellin : un outil pour l'analyse des signaux à large bande*, Thèse de doctorat, Université Paris VI (1992).
- [Vig96] L. Vignaud, *Imagerie micro-ondes des scènes instationnaires*, Thèse de doctorat, Université Paris VI (1996).
- [Coh89] L. Cohen, Time-Frequency Distributions - a review, *Proc IEEE*, vol. 77, pp. 941-981, July 1989.
- [Kad92] S. Kadambe and G.F Boudreaux-Bartels, A comparison of the Existence of Cross Terms in the Wigner Distribution and the Squared Magnitude of the Wavelet Transform and the Short Time Fourier Transform, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, pp. 2498-2517, Oct. 1992.
- [Fla88] P. Flandrin, Time-Frequency and Time-scale, *Proc. IEEE Fourth ASSP Workshop Spectrum Estimation Modeling*, pp. 77-80, 1988.

-
- [Fla98] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, Hermès (1998), Paris.
- [Ber91a] J. Bertrand and P. Bertrand, Affine Time-Frequency Distributions in *Proc. Time-Frequency Signal Analysis. Methods and Applications*, Editor B. Boashash, Longman Cheshire, 1991.
- [Rio92] O. Rioul and P. Flandrin, Time-Scale Energy Distributions : A General Class Extending Wavelet Transforms, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1746-1757, July 1992.
- [Tor95] B. Torrèsani, *Analyse continue par ondelettes*, CNRS Editions (1995), Paris.
- [Aus85] L. Auslander and R. Tolimieri, Radar Ambiguity Functions and Group Theory, *SIAM J. Math. An.*, vol. 16, No.3, May 1985.
- [Hla94] F. Hlawathsch, Bilinear Time-Frequency Representations of Signals : the Shift-Scale Invariant Class, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, pp. 357-366, Feb. 1994.
- [Lou95] P.J. Loughlin, Comments on Scale Invariance of Time-Frequency Distributions, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 2, pp. 217-218, Dec. 1995.
- [Aug95] F. Auger, P. Flandrin, P. Gonçalves and O. Lemoine, *Time-Frequency Toolbox For Use with Matlab, Tutorial*, 1995-1996.
- [Ber91b] J. Bertrand P. Bertrand and J.P. Ovarlez, Dimensionalized Wavelet Transform with Application to Radar Imaging, *Proc. IEEE-ICASSP* (May 1991), Toronto, Canada.
- [Ber96] J. Bertrand and P. Bertrand, The Concept of Hyperimage in Wide-Band Radar Imaging, *IEEE Trans. Geosc. Remote Sensing*, **34** (1996), 1144-1150.
- [Fla98] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, Hermès (1998), Paris.
- [Ber94] J. Bertrand P. Bertrand and J.P. Ovarlez, Frequency Directivity Scanning in Laboratory Radar Imaging, *Int. J. of Imaging Systems and Technology*, **5** (1994), 39-51.
- [Ova03] J.P. Ovarlez L. Vignaud J.C. Castelli M. Tria and M. Benidir, Analysis of SAR Images by Multidimensional Wavelet Transform, *IEE-Radar, Sonar and Navigation- Special Issue On Time-Frequency Analysis for Synthetic Aperture Radar and Feature Extraction*, **150**(4) (august 2003), 234-241.
- [Cas97] J.C. Castelli and G. Bobillot, I4D : A New Approach to RCS Imaging Analysis, *Proc. AMTA* (Nov. 1997) Boston, USA.
- [Tri05] M. Tria J.P Ovarlez L. Vignaud J.C. Castelli and M. Benidir, Extracting Real Objects in Radar Imaging by Exploiting the Square Modulus of the Continuous Wavelet Transform, soumis en juillet 2005 à la revue *IEE, Radar, Sonar and Navigation*.
- [Tri04a] M. Tria J.P Ovarlez L. Vignaud J.C. Castelli and M. Benidir, SAR imaging using multidimensional continuous wavelet transform, *Proc. Eusipco'04, European Signal Processing Conference* (Sept. 2004), Vienna-Austria.
- [Tri04b] M. Tria J.P Ovarlez L. Vignaud J.C. Castelli and M. Benidir, The multidimensional continuous wavelet transform in SAR imaging, a tool for the object classification, *Proc. Radar'04, International Conference on Radar Systems* (Oct. 2004), Toulouse-France.
- [An04] J.P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst and S.T. Ali, *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives*, Cambridge University Press (2004), United Kingdom.
- [Ful98] D.F. Fuller A.J. Terzuoli P.J. Collins and R. Williams, ,1D feature extraction using a dispersive scattering center parametric model, *Antennas and Propagation Society International Symposium (IEEE)*, **2** (June 1998), 1296-1299.

- [Pot92] E. Pottier and J. Saillard, Mathematical Basis Theory of the Polarimetry and its Application in Radar Domain, *Annals of Telecommunications*, **vol. 47**, Issue 7-8, pp. 304-336.
- [Clou96] S.R. Cloude and E. Pottier, A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry, *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, **vol. 34**, N°2, Mar. 1996, pp. 498-518.
- [Clou98] S.R. Cloude and K.P. Papathanassiou, Polarimetric SAR Interferometry, **vol. 36**, N°5, Sept. 1998, pp. 1551-1565.
- [Col04a] E. Colin, M. Tria, C. Schnaider, J.P. Ovarlez and M. Benidir, SAR Imaging Using Multidimensional Continuous Wavelet Transform and Applications to Polarimetry and Interferometry, *International Journal of Imaging Systems and Technology* **vol. 14**, Issue 5 (Nov. 2004), pp. 206-212.
- [Col04b] E. Colin, M. Tria, C. Schnaider and J.P. Ovarlez, SAR Imaging Using Multidimensional Continuous Wavelet Transform and Applications to Polarimetry and Interferometry, *Proc. Radar'04, International Conference on Radar Systems* (Oct. 2004), Toulouse-France.
- [Col04c] E. Colin, M. Tria, C. Schnaider and J.P. Ovarlez, Applications of Continuous Wavelet Transform to Polarimetry and Interferometry, *Workshop CEOS, Conference on Earth Observation by Satellites* (May. 2004), Ulm, Germany.
- [Tri04] M. Tria, E. Colin, Imagerie SAR par analyse en ondelettes continues, à paraître dans *Rapport annuel d'activité de l'ONERA* (2004).

Publications et travaux

Articles revue

- Tria, M. and Ovarlez, J.P. and Vignaud, L. and Castelli, J.C. and Benidir, M., **Improving Target Extraction in Radar Imaging by Correlating Wavelet Coefficients**, à soumettre à *IEE-Radar, Sonar and Navigation*.
- Tria, M. and Ovarlez, J.P. and Vignaud, L. and Castelli, J.C. and Benidir, M., **Discriminating Real Objects in Radar Imaging by Exploiting the Squared Modulus of the Continuous Wavelet Transform**, soumis à *IEE-Radar, Sonar and Navigation*.
- Colin, E. and Tria, M. and Titin-Schnaider, C. and Ovarlez, J.P. and Benidir, M., **SAR Imaging Using Multidimensional Continuous Wavelet Transform and Applications to Polarimetry and Interferometry**, *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 14, Issue 5, pp. 206-212.
- Ovarlez, J.P. and Vignaud, L. and Castelli, J.C. and Tria, M. and Benidir, M., **Analysis of SAR Images by Multidimensional Wavelet Transform**, *IEE-Radar, Sonar, and Navigation - Special Issue On Time-Frequency Analysis for Synthetic Aperture Radar and Feature Extraction*, vol.150 (August 2003), pp. 234-241.

Articles Conférence

- Tria, M. and Ovarlez, J.P. and Vignaud, L. and Castelli, J.C. and Benidir, M., **The Multidimensional Continuous Wavelet Transform in SAR Imaging, a Tool for the Object Separation**, *Proc. Radar'04, International Conference On Radar Systems* (Oct. 2004), Toulouse, France.
- Colin, E. and Tria, M. and Titin-Schnaider, C. and Ovarlez, J.P. and Benidir, M., **SAR Imaging Using Multidimensional Continuous Wavelet Transform and Applications to Polarimetry and Interferometry**, *Proc. Radar'04, International Conference On Radar Systems* (Oct. 2004), Toulouse, France.
- Tria, M. and Ovarlez, J.P. and Vignaud, L. and Castelli, J.C. and Benidir, M., **SAR Imaging Using Multidimensional Continuous Wavelet Transform**, *Proc. Eusipco'04, XII European Signal Processing Conference* (Sept. 2004), Vienna, Austria.

Article Rapport d'Activités

- Tria, M. and Colin, E. **Imagerie SAR par Analyse en Ondelettes Continues**, *Rapport Annuel d'activité 2004 - ONERA*.

Résumé

Les méthodes classiques d'imagerie SAR (Synthetic Aperture Radar) font l'hypothèse d'*isotropie* (les points imagés se comportent de la même manière selon l'angle sous lequel ils sont vus) et de *blancheur* (les points imagés ont le même comportement dans la bande fréquentielle émise) des réflecteurs imagés. Néanmoins, ces hypothèses ne sont plus valables avec l'émergence de nouvelles capacités d'imagerie (large bande fréquentielle, grandes excursions angulaires, ...).

L'objectif du travail de thèse a consisté à développer une méthode d'analyse temps-fréquence basée sur l'utilisation d'ondelettes continues permettant de mettre en lumière les phénomènes d'*anisotropie* et de *coloration* des points imagés.

Une grande partie du travail a consisté à exploiter le caractère coloré et anisotrope des réflecteurs pour discriminer une cible dans une image SAR.

Enfin l'analyse par ondelettes continues a été étendue à la polarimétrie pour améliorer la classification des cibles aléatoires et cibles déterministes puis à l'interférométrie afin obtenir une meilleure estimation de la hauteur des cibles.

Mots-clés: Imagerie SAR, analyse temps-fréquence, transformée en ondelettes continues, polarimétrie, interférométrie.

Abstract

The classical SAR (Synthetic Aperture Radar) imaging methods assume that the reflectors are *isotropic* (they behave the same way regardless the aspect under which they are viewed) and *white* (they have the same properties within the emitted bandwidth). Unfortunately, new capacities in SAR imaging (large bandwidth, large angular excursions of analysis) make these assumptions obsolete.

The purpose of the thesis work consisted in developing a time-frequency method based on the use of continuous wavelets allowing to highlight the *anisotropic* and *coloration* effects of the irradiated points.

A great part of the work consisted in exploiting the coloration and the anisotropy of the reflectors to discriminate a target in a SAR image.

Finally, the continuous wavelet analysis has been extended to polarimetric in order to improve the classification of random targets and deterministic ones then to interferometry with the aim of obtaining a better estimation of target height estimation.

Keywords: SAR imaging, time-frequency analysis, continuous wavelet transform, polarimetry, interferometry.

