THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE III

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE III

Mention Mathématiques et Applications

par

Guillaume RONDE

Institut de Mathématiques de Toulouse

École Doctorale de mathématiques de l'UPS

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Fonction de Artin et théorème d'Izumi.

Soutenue le 30 juin 2005 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

E. Bierstone	Examinateur
M. Hickel	Rapporteur
M. Lejeune-Jalabert	Rapporteur
F. Loeser	Examinateur
M. Spivakovsky	Directeur de Thèse
J. Tapia	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidé ou accompagné dans ce travail de longue haleine.

Je remercie tout d'abord Mark Spivakovsky pour m'avoir proposé ce sujet très intéressant (en tout cas pour moi). Je le remercie aussi pour avoir toujours été à l'écoute de mes problèmes mathématiques et angoisses morales (qui ne furent pas des moindres), et pour toutes les maths que j'ai pu apprendre avec lui. Il a su me laisser libre dans l'orientation de mes recherches et je le suis gré de cette confiance.

Je tiens ensuite à remercier Michel Hickel à qui cette thèse doit beaucoup. Il a su me relancer à un moment difficile de ce travail et les (trop) rares discussions que nous avons eu m'ont été très précieuses. Il m'a aussi beaucoup apporté au niveau de la rigueur, qui me faisait (fait ?) cruellement défaut. Enfin je le remercie d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Monique Lejeune-Jalabert a accepté de rapporter ce travail et je l'en remercie. Je la remercie aussi pour les longues discussions que nous avons eues a propos du quatrième chapitre et pour sa grande patience face à mes explications souvent confuses.

Edward Bierstone, François Loeser et Joseph Tapia ont accepté de faire partie du jury et je les en remercie. Je suis aussi reconnaissant à E. Bierstone d'avoir accepté de m'accueillir à Toronto l'an prochain.

Ces trois années de travail mathématiques m'ont permis de rencontrer différentes personnes que ce soit au labo Picard de Toulouse, lors de GAEL, des multiples conférences pour jeunes chercheurs organisées par Jean-Paul Brasselet (que je remercie pour cela au passage), à L'Université de Valladolid ou lors de mes passages dans différentes Universités. Je tiens ainsi particulièrement à remercier Ann, Assia et Erwan, Bélinda et Guy, Camille, Charef, Felipe, Johannes, Julien, Laurent, Manu et Agnès, Mathieu, Matthieu, Niko, pour les joyeuses discussions mathématiques et les bons moments passés ensemble.

Je remercie aussi M.-L. Chemin, R. Gomez, Y. Panabière et A. Requis pour leur bonne humeur et leur efficacité face à tous mes problèmes administratifs.

De Misahualli à Leuven en passant par différents endroits, pour les encouragements et bons moments passés ensemble, merci à mes parents, Antoine et Quynh, Claude et Christiane, et Daniel, à Bruno et Vanessa, Claire et Etienne, Damien et Solen, Fabienne, Florian et Julie, Gwéno, Joan et Louba, Julien, Muriel et Yann, et Théo.

Enfin, je tiens par dessus tout à remercier Opaline, avec tout mon amour, pour tout...

Introduction

Ce travail est avant tout consacré à l'étude de l'objet appelé "fonction de Artin". Cette fonction numérique, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, est associée à un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow A[X_1, ..., X_n]/I$ où A est hensélien (c'est-à-dire un anneau où le théorème des fonctions implicites est vrai) et excellent. Plus précisément nous avons le théorème suivant (version forte du théorème d'approximation de Artin) :

Théorème : [Ar2][PP] Soit I un idéal de $A[X_1, ..., X_n]$, où A est local, hensélien et excellent. Alors il existe $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la condition suivante :
Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x_1, ..., x_n) \in A^n$ tels que $f(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(i)+1}$ pour tout $f \in I$, il existe $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in A^n$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ pour tout $f \in I$ et $x_j - \overline{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout j.

Trois cas se présentent. Soit il n'existe aucun morphisme de A-algèbre de la forme $A[X_1, ..., X_n]/I \longrightarrow A$, auquel cas la fonction de Artin de I est constante. Soit $A \longrightarrow A[X_1, ..., X_n]/I$ est lisse, auquel cas la fonction de Artin de I est égale à l'identité. Enfin, si nous ne sommes dans aucun de ces deux cas, la fonction de Artin de I est plus grande, en tant que fonction numérique, que l'identité. Cette fonction est donc, en quelque sorte, une mesure de la non-lissité de ce morphisme.
Dans les quelques cas connus avant ce travail, cette fonction est toujours bornée par une fonction affine. C'est par exemple le cas où A est un anneau de valuation discrète (théorème de J. M. Greenberg [Gr]), le cas où I est engendré par des polynômes de degré 1 (Lemme d'Artin-Rees), le cas du théorème d'Izumi [I2], le cas du théorème fort de valuation de Rees [Re2] ou le cas du théorème de Delfino et Swanson [DS]. Ceci a été conjecturé en toute généralité, à savoir que toute fonction de Artin est bornée par une fonction affine ([Spi3] ou [DS]). Nous donnons en particulier deux contre-exemples à cette conjecture.

Le premier chapitre est essentiellement consacré à rappeler les résultats connus et à donner les outils nécessaires à la compréhension de ce travail. Nous commençons tout d'abord par donner la réduction au cas où l'anneau de base est complet et régulier. Nous présenterons aussi quelques cas simples ou la conjecture est vraie, comme par exemple le cas des polynômes en une variable. Nous montrons ensuite de quelle manière la fonction de Artin peut être utilisée comme invariant d'un germe de variété analytique. Nous donnons la définition des fonctions de Artin d'un germe de variété analytique $(X,\,0)$ qui sont des invariants analytiques de celui-ci. La première fonction de Artin de $(X,\,0)$ est la seule à avoir été étudiée jusqu'à présent [LJ1], [H1]. Celle-ci nous donne en particulier une information sur le nombre d'éclatements nécessaires à la résolution des singularités de ce germe [H2], et dans le cas d'une hypersurface, M. Hickel a relié la première fonction de $(X,\,0)$ (notée β_1) avec la première fonction de Artin de l'idéal jacobien de $(X,\,0)$ (notée β'_1) et montré que $\beta_1(i) \leq \beta'_1(i)+i$ pour tout i [H1]. Nous montrons que la suite des fonctions de Artin d'un germe de variété analytique forme une suite croissante de fonctions et étudions l'exemple d'un cusp $X^2-Y^3=0$. Nous montrons à l'aide de cet exemple que les N-ièmes fonctions de Artin de $(X,\,0)$, pour $N \geq 2$, ne vérifient pas l'inégalité précédente prouvée par M. Hickel pour $N=1$.

Le deuxième chapitre a pour objet une étude des propriétés arithmétiques de l'anneau des séries formelles en plusieurs variables $\mathcal{O}_N := \mathbb{k}[[T_1,...,\,T_N]]$ et du complété de l'anneau de valuation qui le domine $\mathbb{k}\left(\frac{T_2}{T_1},...,\,\frac{T_N}{T_1}\right)[[T_1]]$. En effet le second est un anneau complet de valuation discrète sur lequel la conjecture est vraie [Gr]. Il est donc naturel d'étudier se qui se passe quand "on passe" du premier anneau au second. La différence fondamentale entre ces deux anneaux est le fait que la division est beaucoup plus facile dans le second que dans le premier. En effet, si l'on se donne deux séries en une variable, l'une des deux divise la seconde. Ceci est clairement faux pour les séries en plusieurs variables. C'est ce problème de "manque" de divisibilité dans $\mathcal{O}_N$, pour $N \geq 2$, que nous abordons ici.
Nous étudions la fonction de Artin des polynômes homogènes dont la seule solution est $(0,...,\,0)$. Nous montrons que ce problème est équivalent au problème de l'approximation diophantienne entre le corps des séries en plusieurs variables $\mathbb{K}_N$ et son complété pour la topologie $(T_1,...,\,T_N)$-adique $\widehat{\mathbb{K}}_N$ (ou pour la norme $(T_1,...,\,T_N)$-adique ; voir partie 1.3). Il existe des résultats à propos

de l'approximation diophantienne dans le corps des séries en une variable [La], problème très proche du cas de l'approximation diophantienne entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, mais aucun sur celui qui nous interesse. Le problème qui nous concerne est radicalement différent du problème d'approximation diophantienne entre $\mathbb{Q}$ (le corps des fractions de $\mathbb{Z}$) et $\mathbb{R}$, essentiellement du fait que les éléments non nuls de $\mathbb{Z}$ sont tous de norme supérieure à 1, alors que dans notre cas, les éléments non nuls de $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ sont tous de norme inférieure à 1 (la norme de $x \in \mathbb{K}_N$, dite norme $(T_1, ..., T_N)$-adique, est égale à $e^{-\mathrm{ord}(x)}$ où ord est la valuation $(T_1, ..., T_N)$-adique).
Nous démontrons dans ce travail le résultat suivant d'approximation diophantienne :

Théorème 2.2.1 : *Soient $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N \backslash \mathbb{K}_N$ algébrique sur $\mathbb{K}_N$. Alors il existe $a \geq 1$ et $K \geq 0$ tels que*

$$\left|\frac{x}{y} - z\right| \geq K|y|^a, \ \forall x, y \in \mathcal{O}_N.$$

Nous en déduisons alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.4 : *Soit $P(X, Y)$ un polynôme homogène en X et Y à coefficients dans $\mathcal{O}_N$. Alors P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.*

À partir d'un exemple, nous montrons qu'il n'existe pas d'équivalent du théorème de Liouville dans ce contexte (c'est-à-dire que a ne peut pas être choisi égal au degré de l'extension $\mathbb{K}_N \longrightarrow \mathbb{K}_N[z]$).
À partir de cet exemple nous construisons un contre-exemple (le parapluie de Whitney) à la conjecture de Spivakovsky (théorème 2.0.4). Plus précisemment, nous montrons que les N-ièmes fonctions de Artin du germe de variété défini par $X^2 - ZY^2$ pour $N \geq 2$ sont bornées inférieurement par une fonction polynomiale de degré 2 :

Théorème 2.0.4 : *La fonction de Artin du polynôme*

$$P(X, Y, Z) := X^2 - ZY^2 \in \mathcal{O}_N[X, Y, Z]$$

est bornée inférieurement par une fonction polynomiale de degré 2 si $N \geq 2$ et *si car*$(\Bbbk) \neq 2$.

Nous déduisons de ce résultat qu'il n'existe pas d'élimination des quantificateurs pour le corps des séries en plusieurs variables muni d'un langage à plusieurs sortes de Presburger, c'est-à-dire un langage qui, restreint à $\mathbb{Z}$, ne possède pas de symbole pour la multiplication (théorème 2.4.1).

Dans le troisième chapitre, nous étudions la fonction de Artin du point de vue de l'algèbre commutative. Il existe en effet plusieurs résultats d'algèbre commutative qui font intervenir une fonction de Artin. C'est le cas en particulier du lemme d'Artin-Rees [Ma], du théorème fort de valuation de Rees [Re2] et du théorème d'Izumi [I2] [Re3].
Nous étudions d'abord le cas des systèmes d'équations polynomiales linéaires qui est équivalent à une version faible du lemme d'Artin-Rees ; puis le cas du théorème d'Izumi, qui est équivalent au fait que la fonction de Artin du polynôme $XY - \sum f_i Z_i$ à coefficients dans un anneau local nœthérien A, où l'idéal $I = (f_1, ..., f_p)$ est premier dans le complété de A, est bornée par une fonction affine. Nous déduisons du théorème d'Izumi une version stable du lemme d'Artin-Rees (théorème 3.2.6) qui ouvre peut-être une voie à une détermination des constantes intervenant dans le théorème d'Izumi :

Théorème 3.2.6 : *Soient A un anneau local nœthérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et I un idéal de A tel que A/I soit analytiquement irréductible.*
Alors il existe $a \geq 1$ et $b \geq 0$ tels que nous ayons la version faible d'Artin-Rees uniforme suivante

$$((x) + I) \cap \mathfrak{m}^{i+a\nu_I(x)+b} \subset ((x) + I)\,\mathfrak{m}^i \quad \forall x \in A\ \forall i \in \mathbb{N}$$

où ν_I est l'ordre $\mathfrak{m}$-adique sur A/I.

En effet, trouver des constantes intervenant dans le théorème d'Izumi pour l'idéal I est équivalent à déterminer comment varie $i(x)$ où $i(x)$ est le plus petit entier qui vérifie $(I + (x)) \cap \mathfrak{m}^{i+i(x)} \subset (I + (x))\mathfrak{m}^i$. Dans cette optique, nous faisons quelques remarques sur la fonction $x \longmapsto i(x)$ et nous montrons comment nous ramener au cas où I est principal.
Nous donnons ensuite différentes applications à cela. Tout d'abord nous construisons un germe de variété analytique (défini par $X_1X_2 - X_3X_4 = 0$ en l'occurrence) dont les N-ièmes fonctions de Artin sont bornées inférieurement par une

fonction polynomiale de degré 2 pour $N \geq 3$ (théorème 3.3.1). Ce germe est à singularité isolée contrairement au premier exemple :

Théorème 3.3.1 : *La fonction de Artin du polynôme*

$$X_1X_2 - X_3X_4 \in \mathcal{O}_N[X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4]$$

est bornée inférieurement par la fonction $i \longmapsto i^2 - 1$ *si* $N \geq 3$.

Ensuite nous montrons comment utiliser les précédents résultats pour majorer la fonction de Artin de différentes classes de polynômes. Voici les principaux résultats que nous obtenons :

Théorème 3.4.2 : *Soient A un anneau local nœthérien et $I = (f_j)$ un idéal de A tels que A/I soit analytiquement irréductible ou tels que A/I soit réduit et A vérifie la PA. Alors tout polynôme à coefficients dans A de la forme $f\prod_{k=1}^{r} X_k^{n_k} + \sum_{j=1}^{p} f_jZ_j$ admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine.*

Proposition 3.5.4 : *le polynôme*

$$X^n + X^{n-1}\sum_j g_jX_{1,j} + \cdots + \sum_{j_1\leq\cdots\leq j_n} g_{j_1}...g_{j_n}X_{n,j_1,\ldots,j_n} + \sum_{l=1}^{q} f_lY_l$$

avec les g_j et les f_l dans A, local complet nœthérien, tels que $I = (f_l) + (g_j)$ soit radical, admet une fonction de Artin majorée par la fonction de la forme $i \longmapsto i + i_0$, où i_0 est une constante positive.

Proposition 3.5.5 : *Soient f_j et f dans A, local complet nœthérien, tels que $((f_j) : f) = (f_j)$ et $(f,\, f_j)$ soit radical, et soit t un entier strictement positif. Alors le polynôme*

$$X^n + f^tX^{n-1}X_1 + \cdots + f^{nt}X_n + \sum_{l=1}^{q} f_lY_l$$

admet une fonction de Artin majorée par une fonction de la forme $i \longmapsto i + i_0$, où i_0 est une constante positive.

Enfin nous utilisons ces résultats pour calculer des clôtures intégrales approchées d'idéaux (exemple 3.5.3), c'est-à-dire, si I est un idéal d'un anneau local

A excellent, pour trouver a et b tels que $\overline{I+\mathfrak{m}^{ai+b}} \subset \overline{I}+\mathfrak{m}^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ce problème a été introduit par Delfino et Swanson dans [DS]. Ceci nous permet, par exemple, de corriger un exemple incorrectement traité par Delfino et Swanson :

Proposition 3.5.7 : *Soient a, t, $N \in \mathbb{N}$ tels que $a \geq 2$, $t \geq 1$ et $N \geq 3$ et $\Bbbk$ un corps contenant les racines a-ièmes de l'unité et de caractéristique ne divisant pas a et $A = \frac{\Bbbk[[T_1,...,T_N]]}{(T_1^a+\cdots+T_N^a)}$. Alors*

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad \overline{T_1^t A+\mathfrak{m}^i} \subset T_1^t A+\mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{i}{nt} \right\rfloor - t(a+n)}$$

où $n = [Frac(A) : Frac(B)]$ et $B := \Bbbk[[T_1, ..., T_{N-1}]]$.

Table des matières

Chapitre 1

Fonction de Artin : préliminaires

Nous noterons dans toute la suite $T = (T_1, .., T_N)$, $X = (X_1, .., X_n)$ et $f = (f_1, .., f_p)$. Sauf indication contraire, nous noterons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau local étudié quand il n'y aura aucune confusion possible.

1.1 Propriétés d'approximation

Nous rappelons quelques résultats d'approximation, mais nous donnons tout d'abord la définition suivante :

Définition 1.1.1 *Nous appellerons couple* $(A, \mathfrak{I})$ *la donnée d'un anneau* A *et d'un idéal* $\mathfrak{I}$ *de* A. *Nous dirons que le couple* $(A, \mathfrak{I})$ *est nœthérien (resp. local, complet, réduit, intègre) si l'anneau* A *est nœthérien (resp. local, complet, réduit, intègre).*

Définition 1.1.2 *Soit* $(A, \mathfrak{I})$ *un couple nœthérien et* $\widehat{A}$ *le complété de* A *pour la topologie* $\mathfrak{I}$*-adique. Nous dirons que* $(A, \mathfrak{I})$ *vérifie la propriété d'approximation (PA) (resp. vérifie la propriété d'approximation pour* f*) si pour tout système d'équations polynomiales, noté* $f(X) = 0$*, à coefficients dans* A *(resp. si pour le système d'équations polynomiales noté* $f(X) = 0$ *à coefficients dans* A*), pour toute solution* $\overline{x} \in \widehat{A}$ *et pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, il existe une solution* x *dans* A *de ce système qui vérifie* $x_j = \overline{x}_j \mod \mathfrak{I}^{i+1}$ *pour tout* j.
Dans le cas où A *est local et* $\mathfrak{I}$ *est son idéal maximal, nous dirons que* A *a la propriété d'approximation.*

Définition 1.1.3 *Soit* $(A, \mathfrak{I})$ *un couple nœthérien. Nous dirons que* $(A, \mathfrak{I})$ *vérifie la propriété d'approximation forte (PAF) si pour tout système d'équations polynomiales, noté* $f(X) = 0$*, à coefficients dans* A*, il existe une fonction*

à valeurs entières β avec la propriété suivante :
Soient $x \in A^n$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(x) = 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}.$$

Alors il existe $\overline{x} \in A^n$ tel que

$$f(\overline{x}) = 0 \text{ et } x_j \equiv \overline{x}_j \qquad \text{mod } \mathfrak{I}^{i+1} \text{ pour tout } j.$$

La plus petite fonction vérifiant cette propriété sera appelée fonction de Artin de l'idéal (f).
Là encore, si A est local et $\mathfrak{I}$ est son idéal maximal, nous dirons que A a la propriété d'approximation forte.

Lemme 1.1.4 *Soient f et g deux systèmes d'équations polynomiales engendrant le même idéal de $A[X_1, ..., X_n]$. Alors, si la fonction de Artin de f existe, celle de g aussi et ces deux fonctions sont égales. On peut donc parler de la fonction de Artin d'un idéal (f) de $A[X_1, ..., X_n]$.*

Preuve : Supposons que la fonction de Artin de f existe. Notons la β. Pour tout k, $g_k = \sum_l a_{k,\, l} f_l$ et pour tout l, $f_l = \sum_k b_{l,\, k} g_k$ avec les $a_{k,\, l}$ et $b_{l,\, k} \in A[X_1, ..., X_n]$.
Soit x tel que $g(x) \in \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Alors $f(x) \in \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$ et il existe $\overline{x} \in x + \mathfrak{I}^{i+1}$ tel que $f(\overline{x}) = 0$. Donc g admet une fonction de Artin majorée par celle de f. Par symétrie, on voit que les deux fonctions de Artin sont égales. $\square$

A partir de maintenant nous parlerons donc indifféremment de système d'équations polynomiales à coefficients dans A ou d'idéal de $A[X]$.
Remarquons que si le couple $(A, \mathfrak{I})$ vérifie la propriété d'approximation forte, il vérifie nécessairement la propriété d'approximation (PAF $\Longrightarrow$ PA). Une condition nécessaire pour qu'un couple $(A, \mathfrak{I})$ vérifie la propriété d'approximation (et a fortiori la propriété d'approximation forte) est que ce couple soit hensélien (cf. [Ra]). En effet, si $A \longrightarrow B = \frac{A[T_1,..,T_n]}{(f_1,..,f_p)}$ est étale, alors $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{A}[T_1,..,T_n]}{(f_1,..,f_p)}$ est étale. Comme $\widehat{A}$ est hensélien, il existe une section $\widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$, c'est-à-dire une solution formelle de $f_1 = \cdots = f_p = 0$. Il existe donc une solution de $f_1 = \cdots = f_p = 0$ dans A d'après la propriété d'approximation, c'est-à-dire une section de $A \longrightarrow B$. Donc A est hensélien.
Nous allons donner deux résultats importants concernant l'existence de ces propriétés d'approximation. Mais tout d'abord nous rappelons la définition d'un morphisme d'anneaux régulier. Nous dirons qu'un morphisme d'anneaux nœthériens $\varphi : A \longrightarrow B$ est régulier, si il est plat et si pour tout idéal premier P

de A, la fibre $B \otimes_A \kappa(P)$ de φ au-dessus de P est géométriquement régulière sur le corps $\kappa(P)$ (c'est-à-dire si l'anneau $B \otimes_A \Bbbk$ est régulier pour toute extension finie $\Bbbk$ de $\kappa(P)$) (cf. [Ma], paragraphe 32). Nous avons alors les deux résultats suivants :

Théorème 1.1.5 *[Ar2][Po][Spi2] Soit $(A, \mathfrak{I})$ une paire hensélienne. Alors $(A, \mathfrak{I})$ possède la propriété d'approximation si $A \longrightarrow \widehat{A}$ est régulier (où $\widehat{A}$ est le complété $\mathfrak{I}$-adique de A).*

Remarquons que $A \longrightarrow \widehat{A}$ est régulier dans le cas où le couple $(A, \mathfrak{I})$ est local, hensélien et excellent.
D'autre part, le résultat suivant nous dit que PA $\Longrightarrow$ PAF dans le cas local :

Théorème 1.1.6 *[Ar2][PP] Soit $(A, \mathfrak{m})$ un couple local nœthérien. Si ce couple vérifie la propriété d'approximation, alors il vérifie la propriété d'approximation forte.*

1.2 Réductions

Nous allons ici énoncer quelques lemmes qui nous permettront de nous ramener à étudier le cas où l'anneau de base est un anneau complet régulier :

Lemme 1.2.1 *[PP] Soit $(A, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien vérifiant la PA pour l'idéal (f) de $A[X]$ et tel que l'idéal de $\widehat{A}[X]$ engendré par (f) admette une fonction de Artin. Alors (f) admet une fonction de Artin et celle-ci est égale à celle de l'idéal de $\widehat{A}[X]$ engendré par (f).*

Preuve : Soient (f) un idéal de $A[X]$, $\widehat{\beta}$ sa fonction de Artin vu comme idéal de $\widehat{A}[X]$ et $x \in A$ tel que $f(x) \equiv 0 \mod \mathfrak{I}^{\widehat{\beta}(i)+1}$. Donc il existe $x' \in \widehat{A}$ tel que $f(x') = 0$ et $x' - x \in \mathfrak{I}^{i+1}$. Comme A vérifie la PA pour (f), il existe $\overline{x} \in A$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ et $\overline{x} - x' \in \mathfrak{I}^{i+1}$. En combinant cela nous avons $\overline{x} \in A$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ et $x - \overline{x} \in \mathfrak{I}^{i+1}$.
Inversement, soit β la fonction de Artin de (f) vu comme idéal de $A[X]$. Soit $x \in \widehat{A}$ tel que $f(x) \equiv 0 \mod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Choisissons $x' \in A$ tel que $x - x' \in \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Nous avons alors $f(x') \equiv 0 \mod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Donc il existe $\overline{x} \in A$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ et $x' - \overline{x} \in \mathfrak{I}^{i+1}$. D'où $x - \overline{x} \in \mathfrak{I}^{i+1}$. $\square$

Lemme 1.2.2 *[PP] Soit $(A, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien et I un idéal de A. Soient (f) un idéal de $\frac{A}{I}[X]$, (F) un idéal de $A[X]$ égal à (f) modulo I et $(g_1, ..., g_q)$ un système de générateurs de I. Posons*

$$G_k = F_k + \sum_j Y_{kj} g_j \quad k = 1, .., m.$$

Si (G) admet une fonction de Artin, alors (f) admet une fonction de Artin bornée par celle de (G).

Preuve : Soient (f), (F) et (G) comme dans l'énoncé. Soit β la fonction de Artin de (G).
Soit $x \in \frac{A}{I}$ tel que $f(x) \equiv 0 \mod \left(\frac{\mathfrak{I}}{I \cap \mathfrak{I}}\right)^{\beta(i)+1}$ avec $i \in \mathbb{N}$. Soit x' un relèvement de x dans A. Alors $F(x') \equiv 0 \mod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1} + I$, c'est-à-dire qu'il existe des $y_{kj} \in A$ tels que $F(x') + \sum_j y_{kj} g_j \equiv 0 \mod \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Il existe alors une solution $(\overline{x}, \overline{y})$ de ce système $G = 0$ avec $\overline{x} \equiv x \mod \mathfrak{I}^{i+1}$. Modulo I cette solution convient. Et donc (f) admet une fonction de Artin bornée par celle de (G). $\square$

Nous énonçons maintenant un lemme utile pour la suite :

Lemme 1.2.3 *Soit $F(X_1, ..., X_n) \in A[X_1, ..., X_n]$ où $(A, \mathfrak{I})$ est un couple nœthérien. Soit I un idéal de A, $\{f_1, ..., f_p\}$ et $\{g_1, ..., g_q\}$ deux systèmes de générateurs de I. Alors les fonctions de Artin de $h_1 = F(X_1, ..., X_n) + \sum_j f_j Y_j$ et de $h_2 = F(X_1, ..., X_n) + \sum_l g_l Z_l$ sont égales.*

Preuve : Il nous suffit de montrer le résultat quand $q = p + 1$, $g_i = f_i$ pour $1 \leq i \leq p$ et $g_q = g_{p+1} \in I$ est quelconque. En effet dans ce cas, par induction nous voyons que la fonction de Artin de h_1 est égale à la fonction de Artin de $F(X_1, ..., X_n) + \sum_l g_l Z_l + \sum_j f_j Y_j$ ainsi que celle de h_2.
Soit h_1 comme dans l'énoncé et

$$h_2 := F(X_1, ..., X_n) + \sum_{j=1}^{p} f_j Y_j + f Y_{p+1}$$

où $f \in I$. Nous pouvons écrire $f = \sum_j f_j u_j$ où les u_j sont dans A. Notons β_i la fonction de Artin de h_i ($i = 1$ et 2).
Soient $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_p \in A$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$h_1(x, y) = F(x_1, ..., x_n) + \sum_j^{p} f_j y_j \in \mathfrak{I}^{\beta_2(i)+1}.$$

Nous avons $h_2(x, y_1, ..., y_p, 0) = h_1(x, y_1, ..., y_p)$, donc il existe $n+p+1$ éléments $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_p, \overline{y}_{p+1}$ tels que $h_2(\overline{x}, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_p, \overline{y}_{p+1}) = 0$, et d'autre part $\overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq k \leq n$, $\overline{y}_j - y_j \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq j \leq p$, $\overline{y}_{p+1} \in \mathfrak{I}^{i+1}$. Notons alors $\overline{\overline{y}}_j = \overline{y}_j + u_j\overline{y}_{p+1}$, $1 \leq j \leq p$. Nous avons alors $h_1(\overline{x}, \overline{\overline{y}}) = 0$ et $\overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq k \leq n$, $\overline{\overline{y}}_j - y_j \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq j \leq p$. Donc $\beta_2(i) \geq \beta_1(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Inversement, soient $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p, y_{p+1} \in A$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$h_2(x, y) = F(x_1, ..., x_n) + \sum_j^p f_j y_j + f y_{p+1} \in \mathfrak{I}^{\beta_1(i)+1}.$$

Nous avons

$$h_1(x, y_1 + u_1 y_{p+1}, ..., y_p + u_p y_{p+1}) = h_2(x, y_1, ..., y_p, y_{p+1}),$$

Donc il existe $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_p$ tels que $h_1(\overline{x}, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_p) = 0$, et d'autre part $\overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq k \leq n$, $\overline{y}_j - (y_j + u_j y_{p+1}) \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq j \leq p$. Notons alors $\overline{\overline{y}}_j = \overline{y}_j - u_j y_{p+1}$, $1 \leq j \leq p$, et $\overline{\overline{y}}_{p+1} = y_{p+1}$. Nous avons $h_2(\overline{x}, \overline{\overline{y}}) = 0$, et $\overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq k \leq n$, $\overline{\overline{y}}_j - y_j \in \mathfrak{I}^{i+1}$, $1 \leq j \leq p+1$. Donc $\beta_2(i) \leq \beta_1(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $\beta_1 = \beta_2$. $\square$

Nous rappelons ensuite le théorème de structure de I.S. Cohen pour les anneaux complets locaux ([Ma], paragraphe 29).

Définition 1.2.4 *Un anneau de Cohen R est un corps de caractéristique 0 ou un anneau de valuation discrète complet dont le corps résiduel a une caractéristique $p > 0$ et dont l'idéal maximal est engendré par $p.1$.*

Théorème 1.2.5 *[Ma] (paragraphe 29) Soit A un anneau local nœthérien complet. Alors il existe un unique anneau de Cohen R tel que A soit isomorphe au quotient d'un anneau de séries formelles $R[[T]]$.*

1.3 Topologie $\mathfrak{m}$-adique

Soit $(A, \mathfrak{m})$ un couple local nœthérien et soit ord définie par

$$\forall x \in A \quad \mathrm{ord}(x) = \max\{n \in \mathbb{N} \,/\, x \in \mathfrak{m}^n\} \ .$$

Ceci a un sens d'après le théorème d'intersection de Krull. C'est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui vérifie $\mathrm{ord}(xy) \geq \mathrm{ord}(x) + \mathrm{ord}(y)$ et $\mathrm{ord}(x+y) \geq$

$\min(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y))$ pour tous x et y dans A. Cette fonction définit donc une ultra-norme sur A en posant $||x|| = e^{-\mathrm{ord}(x)}$. On peut aussi définir une ultra-norme sur A^n en posant, pour $x = (x_1, .., x_n)$, $||x|| = \max(||x_i||)$. Le A-module A^n a donc une structure d'espace métrique muni de la distance $d(x, y) = ||x-y||$ pour tous $x, y \in A^n$. On appelle cette topologie la *topologie* $\mathfrak{m}$*-adique* ou *topologie de Krull*. Les $x + \mathfrak{m}^i A^n$ forment une base d'ouverts pour cette topologie quand x parcourt A^n et i parcourt $\mathbb{N}$. On peut remarquer que la topologie $\mathfrak{m}$-adique est plus fine que la topologie de Zariski.
Si $(A, \mathfrak{m})$ est complet, A^n est complet pour cette norme. Par contre il n'est pas localement compact, car il n'est pas localement précompact.
Si A est régulier, ord est une valuation sur A à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Remarque 1.3.1 *Si $(A, \mathfrak{m})$ est complet et si F est un fermé de A^n pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique et x un point de A^n, alors il existe un point y de A^n qui minimise la distance entre le fermé F et x.*
En effet soit $(y_p)_p$ une suite de points de F telle que

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} ||y_p - x|| = \inf_{z \in F} ||z - x||.$$

Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que la suite $(||y_p - x||)_p$ est décroissante. Soit cette suite est stationnaire à partir d'un certain rang p_0 et dans ce cas il suffit de prendre $y = y_{p_0}$, soit cette suite tend vers 0. Dans le second cas, (y_p) a alors pour limite x et comme F est un fermé, x est dans F. Cette propriété est vraie aussi si l'on remplace F par un fermé pour la topologie de Zariski.

1.4 Opérations sur les polynômes et conséquences sur les fonctions de Artin

Nous pouvons faire quelques remarques :

Lemme 1.4.1 *Soient $(A, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien et $(f) = (f_1, .., f_m)$ un idéal de l'anneau $A[X_1, .., X_n]$ admettant une fonction de Artin. Soit Φ dans $Aut_A A[[X]]$. Notons $\Phi_k(X) = \Phi(X_k)$. Alors la fonction de Artin de $f(X)$ existe si et seulement si celle de $g(X) = f(\Phi_1(X), \ldots, \Phi_n(X)) = \Phi(f(X))$ existe. Dans ce cas les deux fonctions de Artin sont égales.*

Preuve : Soit $x \in A^n$ tel que $g(x) \in \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$ où β est la fonction de Artin de f et $i \in \mathbb{N}$. Soit $y_k = \Phi_k(x)$, on a donc $g(x) = f(y)$. On a alors $f(y) \in \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$, d'où l'existence de $\overline{y} \in A^n$ tel que $\overline{y} - y \in \mathfrak{I}^{i+1}$ et $f(\overline{y}) = 0$. Donc, comme Φ est bijective il existe $\overline{x}$ tel que $\phi_k(\overline{x}) = \overline{y}$ on a $\overline{x} - x \in \mathfrak{I}^{i+1}$ et $g(\overline{x}) = 0$. La fonction de Artin de g est donc bornée par celle de f. Par symétrie, on voit que ces deux fonctions sont en fait égales. $\square$

Exemple 1.4.2 *Le résultat précédent est en particulier valable pour* Φ *défini par*

$$\forall i, \quad \Phi(X_i) = X_i + a_i$$

pour des $a_i \in A$ *quelconques.*

Lemme 1.4.3 *Soient* $(A, \mathfrak{I})$ *un couple nœthérien et* (f) *un idéal de l'anneau* $A[X_1, ..., X_n]$. *Soit* (f^*) *l'idéal de* $A[X_1, ..., X_{n+p}]$ *engendré par* (f). *Alors la fonction de Artin de* (f) *existe si et seulement si la fonction de Artin de* (f^*) *existe et dans ce cas elles sont égales.*

Preuve : C'est évident car on peut choisir arbitrairement les p dernières composantes. $\square$

Lemme 1.4.4 *Soit* A *un anneau local pour lequel ord est une valuation. Nous noterons* $\beta(f)$ *pour désigner la fonction de Artin de* (f), *pour* (f) *un idéal de* $A[X_1, ..., X_n]$, *quand elle existe. Soit* $(f) = (f_1, .., f_m)$ *et* $(g) = (g_1, .., g_r)$ *deux idéaux de* $A[X_1, .., X_n]$. *On a alors :*
i) La fonction de Artin de (f) *existe si et seulement si celle de* $(f)^p$ *existe. Dans ce cas, nous avons*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \beta((f)^p)(i) = p\beta(f)(i).$$

ii) Supposons que les fonctions de Artin de (f) *et* (g) *existent. On note* (fg) *l'idéal de* $A[X]$ *engendré par les* $m \times r$ *produits* $f_i g_j$. *Alors la fonction de Artin de* (fg) *existe et nous avons*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \beta(fg)(i) \leq \beta(f)(i) + \beta(g)(i).$$

Preuve : i) Soit $x \in A^n$. Nous avons $f(x)^p \in \mathfrak{m}^{pj+1}$ si et seulement si $f(x) \in \mathfrak{m}^{j+1}$. Le résultat en découle.
ii) Soit $x \in A^n$ tel que $f_j(x)g_k(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(f)(i)+\beta(g)(i)+1}$ pour tout j et k. Alors, comme ord est une valuation, nous avons soit $f_j(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(f)(i)+1}$ pour tout j, soit $g_k(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(g)(i)+1}$ pour tout k. D'où l'existence de $\overline{x}$ tel que $x - \overline{x} \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $f(\overline{x})g(\overline{x}) = 0$. $\square$

1.5 Etude de quelques cas

1.5.1 Cas des systèmes d'équations polynomiales qui n'admettent pas de solution

Soient $(A, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien vérifiant la PAF et (f) un idéal de $A[X]$ représentant un système d'équations polynomiales n'admettant pas de solution dans A. Notons β la fonction de Artin de (f). Soient $i \in \mathbb{N}$ et x tels que $f(x) \in \mathfrak{I}^{\beta(i)+1}$. Alors il existe $x' = x \mod \mathfrak{I}^{i+1}$ tel que $f(x') = 0$. Or il n'existe pas de tel x'. Donc il ne peut pas exister de tel x non plus. Donc $\beta(i)$ est le plus grand entier pour lequel il existe x avec $f(x) \in \mathfrak{I}^{\beta(i)}$. En particulier la fonction de Artin de (f) est constante. Plus précisemment, si $\beta \in \mathbb{N}$ est la valeur constante de la fonction de Artin de (f), alors

$$\exists\, x \in A \setminus f(x) \in \mathfrak{I}^{\beta},$$
$$\text{et } \nexists\, x \in A \setminus f(x) \in \mathfrak{I}^{\beta+1}.$$

Le lemme 1.6.7 donne une preuve de l'existence de la fonction de Artin dans le cas où $A = \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ avec $\Bbbk$ un corps non dénombrable et $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal. Cette remarque entraine le résultat suivant :

Lemme 1.5.1 *Soit (f) un système de p équations polynomiales en n variables. Il définit une application de A^n dans A^p notée f. Alors $Im\, f$ est un sous-ensemble fermé de A^p pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique. De plus, pour tout $a \in A^p \backslash Im\, f$, si l'on note β_a la valeur de la fonction de Artin en tout point de $(f-a)$, nous avons*

$$\beta_a = \max \{n \,/\, (a + \mathfrak{I}^n) \cap Im\, f \neq \emptyset\}$$

ou encore

$$e^{-\beta_a} = d(a,\, Imf)$$

Preuve : Soit $a \in A^p \backslash \mathrm{Im}\, f$. Soit $b \in a + \mathfrak{I}^{\beta_a+1}$. Alors $b \in A^p \backslash \mathrm{Im}\, f$. En effet, si cela n'était pas le cas on pourrait trouver, pour $i \geq \beta_a$, un $x \in A^n$ tel que $f(x) \in b + \mathfrak{I}^{i+1}$. Dans ce cas nous aurions

$$f(x) \in a + \mathfrak{I}^{\beta_a+1}.$$

Cela est impossible par définition de β_a. Donc $A^p \backslash \mathrm{Im}\, f$ est ouvert et $\mathrm{Im}\, f$ est fermé.
De plus, si nous notons $\beta = \max \{n \,/\, (a + \mathfrak{I}^n) \cap \mathrm{Im}\, f \neq \emptyset\}$, nous voyons par là même que $\beta \leq \beta_a$.
Inversement, nous savons, par définition de β_a, qu'il existe un x tel que $f(x) - a \in \mathfrak{I}^{\beta_a}$ et comme $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, nous avons $\beta \geq \beta_a$. $\square$

1.5.2 Cas d'un système lisse de polynômes

Nous avons le

Lemme 1.5.2 *Soient A un anneau local hensélien et $(f) \in A[X_1,..,X_n]$ un système d'équations polynomiales tel que*

$$A \longrightarrow \frac{A[X_1,..,X_n]}{(f_1,..,f_m)}$$

soit lisse. Alors f admet une fonction Artin égale à l'identité.

Preuve : Supposons que l'on a une solution approchée $(x_1,..,x_n)$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. On a donc un diagramme comme celui-ci :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & \frac{A}{\mathfrak{m}^{i+1}} \\ \frac{A[X_1,..,X_n]}{(f_1,..,f_m)} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

que l'on voudrait compléter en un diagramme commutatif comme celui-ci :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, shift right] & \frac{A}{\mathfrak{m}^{i+1}} \\ \frac{A[X_1,..,X_n]}{(f_1,..,f_m)} \arrow[ur] \arrow[u, shift right, bend right] & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Notons $\mathcal{M}$ la contraction de l'idéal maximal de $\frac{A}{\mathfrak{m}^{i+1}}$ à $\frac{A[X_1,..,X_n]}{(f_1,..,f_m)}$. On peut remplacer $\frac{A[X_1,..,X_n]}{(f_1,..,f_m)}$ par $\frac{A[X_1,..,X_n]_{\mathcal{M}}}{(f_1,..,f_m)}$ car en effet, une section de ce nouvel anneau vers A induit évidemment une section de $\frac{A[X_1,..,X_n]}{(f_1,..,f_m)}$ vers A. On voit que

$$A \longrightarrow \frac{A[X_1,..,X_n]_{\mathcal{M}}}{(f_1,..,f_m)}$$

est lisse et local. On peut donc décomposer ce morphisme en une extension transcendante et une extension étale :

$$A \xrightarrow{\text{trans}} A[Y_1,..,Y_p]_{(Y)} \xrightarrow{\text{étale}} \frac{A[X_1,..,X_n]_{\mathcal{M}}}{(f_1,..,f_m)}$$

On choisit une section quelconque du premier morphisme ce qui permet de nous ramener au cas où $\frac{A[X_1,..,X_n]_{\mathcal{M}}}{(f_1,..,f_m)}$ est étale sur A. Du fait que A est hensélien, on a une section modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ comme voulue dans le diagramme 1.2. $\square$

Il est clair que si le système d'équations polynomiales non nulles admet des solutions dans A, alors sa fonction de Artin est nécessairement bornée inférieurement par l'identité. En effet, si $\overline{x} \in A^n$ vérifie $f(\overline{x}) = 0$, choisissons x tel que $\mathrm{ord}(x - \overline{x}) = i + 1$, où i est un entier fixé par avance, et tel que $\overline{x}$ est la solution de f la plus proche de x. Ceci est toujours possible car les équations sont non nulles. Alors $f(x) \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et donc la fonction de Artin de (f) est bornée inférieurement par l'identité.
Nous voyons ici que, si le morphisme $A \longrightarrow A[X]/(f)$ est lisse, la fonction de Artin de (f) est égale à l'identité. La fonction de Artin est donc, en quelque sorte, une mesure de la non-lissité du morphisme $A \longrightarrow A[X]/(f)$.

1.5.3 Idéal jacobien et lemme de Newton

Nous allons d'abord définir l'idéal jacobien d'une algèbre C essentiellement de type fini sur un anneau A. Nous pouvons écrire C sous la forme

$$\frac{A[X_1, ..., X_n]_S}{(f_1, ..., f_p)}$$

où S est une partie multiplicative de $A[X_1, ..., X_n]$.

Définition 1.5.3 *[El] Sous les hypothèses précédentes, nous appelerons idéal jacobien de C sur A l'idéal $\sum_g \Delta_g((g) : (f_1, ..., f_p))C$ où la somme est prise sur tous les sous-ensembles (g) de $(f_1, ..., f_p)$ et où Δ_g est l'idéal engendré par tous les mineurs $r \times r$ de la matrice $\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)$ avec r le nombre d'éléments du sous-ensemble (g). Nous noterons cet idéal $J_{C/A}$ ou J quand A et C seront clairement déterminés.*

L'idéal $J_{C/A}$ a la propriété de ne pas dépendre du choix de la représentation de C. De plus nous avons

Proposition 1.5.4 *[El] Soit P un idéal premier de C. Nous avons*

$$C_P \text{ est lisse sur } A \Longleftrightarrow J_{C/A} \not\subset P \ .$$

Remarque 1.5.5 *La définition de l'idéal jacobien de R. Elkik permet d'avoir une version du lemme de Newton comme suit (théorème 1.5.7). Il existe une autre définition (voir par exemple définition 2.11 de [Spi2]) qui consiste à prendre le radical de cet idéal. Par exemple, dans le cas où $A = \Bbbk$ un corps et $C = \Bbbk[X, Y]/(X^2 - Y^3)$, l'idéal jacobien de $(X^2 - Y^3)$ est (X, Y^2) pour la définition que nous adoptons ici et (X, Y) cette autre définition.*

Remarque 1.5.6 *Si f est un germe irréductible de fonction analytique ou un polynôme irréductible, alors l'idéal jacobien de (f) est l'idéal engendré par les dérivées partielles de f.*

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 1.5.7 *[El] Soient A un anneau local pour lequel ord est une valuation et (f) un idéal de $A[X]$. Soit $x \in A^n$ et i, $s \in \mathbb{N}$. Notons $J(x)$ l'idéal de A engendré par les éléments de J évalués en x. Supposons alors que*

$$\mathfrak{m}^s \subset J(x)$$

$$et\ (f(x)) \subset \mathfrak{m}^{i+s}\ .$$

Alors il existe $\overline{x} \in x + \mathfrak{m}^i$ tel que $(f(\overline{x})) \subset \mathfrak{m}^{2i}$.

Il existe un théorème plus général dû à Tougeron (cf. [To] théorème 3.2), mais dont nous n'aurons pas besoin ici.

Corollaire 1.5.8 *[El] Soient A un anneau local complet pour lequel ord est une valuation et (f) un idéal de $A[X]$. Supposons qu'il existe s tel que*

$$\mathfrak{m}^s C \subset J$$

où $C = \frac{A[X_1,...,X_n]_S}{(f_1,...,f_p)}$. Alors l'idéal (f) admet une fonction de Artin majorée pour $i > 2s+1$ par

$$i \longmapsto i + s\ .$$

En particulier sa fonction de Artin est bornée par une fonction linéaire.

Preuve : Soit $i > 2s + 1$ et soit $x \in A$ tel que $(f(x)) \subset \mathfrak{m}^{i+1}$. Cela définit un morphisme

$$C \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}^{i+1}}.$$

Notons $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap C$. On a alors, en localisant, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A_{\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{m}^{i+1}} \\ C_{\mathfrak{p}} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Si $J(x) \not\subset \mathfrak{m}$, alors J est inversible dans $C_{\mathfrak{p}}$ et $C_{\mathfrak{p}}$ est lisse sur A_m, cas que l'on sait résoudre d'après la preuve du lemme 1.5.2.

Si $J(x) \subset \mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{m}^s \subset J(x)$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. Or $i+1 > s$, donc $\mathfrak{m}^s \subset J(x)$. D'après le théorème 1.5.7, il existe $x_1 \in x + \mathfrak{m}^{i+1-s}$ tel que $(f(x_1)) \subset \mathfrak{m}^{2(i+1-s)}$. Comme $i+1 > 2s$, alors $2(i+1-s) > i+1$ et on peut réitérer ce processus. Comme A est complet, on construit un élément $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ et $x - \overline{x} \in \mathfrak{m}^{i+1-s}$. $\square$

1.5.4 théorème d'Izumi

Nous donnons ici l'énoncé d'un théorème d'Izumi que nous interprétons en terme de linéarité de la fonction de Artin d'un certain type de polynôme. Nous donnons tout d'abord une définition :

Définition 1.5.9 *Soit $(R, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien où R est local et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire avec $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. Nous noterons $\nu_{R,\mathfrak{I}}$ la fonction à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par*

$$\forall x \in R\backslash\{0\},\ \nu_{R,\mathfrak{I}}(x) = n \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{I}^n \ \text{et}\ x \notin \mathfrak{I}^{n+1}$$

$$\text{et}\ \nu_{R,\mathfrak{I}}(0) = \infty.$$

On appelle cette fonction l'ordre $\mathfrak{I}$-adique sur R.
Soit I un idéal propre de R, nous noterons $\nu_{I,\mathfrak{I}}$ pour $\nu_{R/I,\mathfrak{I}R/I}$ quand aucune confusion sur R ne sera possible. Dans le cas où $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de R, nous noterons $\nu_R := \nu_{R,\mathfrak{I}}$ et $\nu_I := \nu_{R/I,\mathfrak{I}R/I}$ (la dernière notation est à ne pas confondre avec la valuation I-adique).

Une telle définition est licite d'après le théorème d'intersection de Krull.
Soit R un anneau local nœthérien et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R. Il est clair que nous avons $\nu_{I,\mathfrak{I}}(gh) \geq \nu_{I,\mathfrak{I}}(g) + \nu_{I,\mathfrak{I}}(h)$ $\forall g, h \in R$. Il y a égalité si et seulement si $Gr_{\mathfrak{I}/(\mathfrak{I}\cap I)}R/I$ est intègre. Nous dirons que $\nu_{I,\mathfrak{I}}$ admet une inégalité complémentaire linéaire (ICL) si il existe a et b réels tels que

$$\nu_{I,\mathfrak{I}}(gh) \leq a(\nu_{I,\mathfrak{I}}(g) + \nu_{I,\mathfrak{I}}(h)) + b \quad \forall g, h \in R.$$

Nous dirons dans ce cas que a et b sont des constantes apparaissant dans une ICL pour $(R, \mathfrak{I})$. Nous pouvons remarquer que si a et b existent, alors nécessairement $a \geq 1$ et $b \geq 0$.
Nous avons alors le

Théorème 1.5.10 *[I2][Re3] Soit R un anneau local nœthérien. Alors il existe deux constantes a et b telles que*

$$\nu_R(gh) \leq a(\nu_R(g) + \nu_R(h)) + b \quad \forall g, h \in R\backslash\{0\}$$

si et seulement si R est analytiquement irréductible.

Nous verrons plus loin que ce théorème est équivalent au fait que la fonction de Artin du polynôme XY par rapport au couple $(R,\, \mathfrak{I})$ est bornée par une fonction affine (cf. proposition 3.2.2).

1.5.5 Cas d'un système de polynômes d'une variable

Nous supposerons ici que A est un anneau local régulier vérifiant la PA. Nous avons alors la proposition suivante

Proposition 1.5.11 *Soit $f \in A[X]$ scindé, $f = a\prod(X-a_j)^{\alpha_j}$, alors f admet une fonction de Artin qui est égale à $i \longmapsto ord(a)+\sup\{\alpha_j i+\sum_{k\neq j}\alpha_k d_{k,j}\}$ pour $i \geq \sup d_{k,j}$, où $d_{k,j} = ord(a_k - a_j)$. Dans le cas général, f admet une fonction de Artin qui est bornée par une fonction affine $i \longmapsto \alpha i + k$ pour i assez grand, où k est une constante et α est la borne supérieure des multiplicités de f en ses zéros.*
En particulier, f admet une fonction de Artin majorée par une fonction linéaire.

Preuve : Supposons tout d'abord que $f(X) = (X-a_1)^{\alpha_1}(X-a_2)^{\alpha_2}$ où a_1 est différent de a_2. Soit d tel que $||a_1 - a_2|| = e^{-d}$. Comme A est régulier, ord est une valuation et donc $(X-a_1)^{\alpha_1}$ et $(X-a_2)^{\alpha_2}$ admettent respectivement des fonctions de Artin $i \longmapsto \alpha_1 i$ et $i \longmapsto \alpha_2 i$. Soit x tel que

$$f(x) \in \mathfrak{m}^{\sup(\alpha_1 i+\alpha_2 d+1\,,\alpha_2 i+\alpha_1 d+1)}.$$

Nous avons

$$e^{-d} = ||a_1 - a_2|| = ||a_1 - x - (a_2 - x)|| \leq \sup ||a_i - x||.$$

Supposons que $\sup ||a_i - x|| = ||a_1 - x||$. Nous avons donc $(x-a_1) \notin \mathfrak{m}^{d+1}$, ou encore $(x-a_1)^{\alpha_1} \notin \mathfrak{m}^{\alpha_1 d+1}$. Nous en déduisons alors que $(x-a_2)^{\alpha_2} \in \mathfrak{m}^{\alpha_2 i+1}$, d'où l'existence d'un $\overline{x} \equiv x \mod \mathfrak{m}^{i+1}$ tel que $f(\overline{x}) = 0$.
De plus, supposons que $\alpha_1 \geq \alpha_2$, alors choisissons x tel que $x = a_1 \mod \mathfrak{m}^{i+1}$ et $x = a_2 \mod \mathfrak{m}^{d+1}$ avec $i \geq d$. Alors le plus proche zéro de x est a_1 et $f(x) \in \mathfrak{m}^{\alpha_1 i+\alpha_2 d+1}$. Donc la fonction de Artin de f est égale à

$$i \longmapsto \sup(\alpha_1 i + \alpha_2 d\,, \alpha_2 i + \alpha_1 d)$$

pour $i \geq d$.
Par induction, nous montrons que si $f(X) = \prod(X-a_j)^{\alpha_j}$, alors f admet une fonction de Artin égale à $i \longmapsto \sup\{\alpha_j i + \sum_{k\neq j}\alpha_k d_{k,j}\}$ pour $i \geq \sup d_{k,j}$ où

$e^{-d_{k,j}}$ est la distance entre a_k et a_j, c'est-à-dire $d_{k,j} = \mathrm{ord}(a_k - a_j)$.
Si f n'admet pas de zéro, comme A vérifie la PA, d'après le théorème 1.1.6, f admet une fonction de Artin. L'existence de la fonction de Artin est équivalente dans ce cas à dire que l'on ne peut pas trouver de zéro approché à partir d'un certain rang et donc la fonction de Artin de f est évidemment bornée par une fonction affine. Le cas général découle du fait qu'un polynôme se décompose toujours en le produit d'un polynôme qui n'admet pas de zéro dans A et d'un polynôme de la forme $\prod(X - a_j)^{\alpha_j}$. $\square$

Nous pouvons généraliser ce résultat à un nombre quelconque d'équations :

Proposition 1.5.12 *Soit $(f) = (f_1, ..., f_m) \subset A[X]$ un système d'équations polynomiales en une variable. Alors (f) admet une fonction de Artin bornée par $i \longmapsto \alpha i + k$ pour c assez grand où k est une constante et*

$$\alpha = \inf_{j=1,..., m} \sup_{l=1,..., p} \alpha_{j,l}$$

où les $\alpha_{j,l}$ sont les multiplicités des f_j en les a_l, zéros communs des f_j, si les f_j ont des zéros communs. Sinon (f) admet une fonction de Artin constante.

Preuve : Comme dans la preuve de la proposition précédente, si nous avons $f_j(x) \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout j et pour i assez grand, x est nécessairement très proche d'un zéro b_j de chaque f_j pour la norme définie sur A^N : c'est-à-dire $||x - b_j|| \leq \frac{i-k_j}{\alpha_j}$ pour k_j et α_j des constantes comme dans la proposition 1.5.11 qui ne dépendent que de f_j. Si i est choisit suffisamment grand, x est nécessairement très proche d'un zéro commun des f_j. Si il n'en existe pas, alors on ne peut pas choisir j de cette manière et (f) admet une fonction de Artin qui est constante. S'il existe au moins un zéro commun, notons a_l, $l = 1, ..., p$, ces zéros communs, alors pour i assez grand il existe l_0 tel que

$$\forall j,\ ||x - a_{l_0}|| \leq \frac{i - k_{j,l_0}}{\alpha_{j,l_0}}$$

où k_{j,l_0} est une constante qui dépend de f_j et de a_{l_0}, et α_{j,l_0} est la multiplicité de f_j en a_{l_0}. Donc (f) admet une fonction de Artin qui est bornée, pour i assez grand, par

$$i \longmapsto \inf_{j=1,..., m} \sup_{l=1,..., p} \alpha_{j,l} i + k_{j,l}$$

où $k_{j,l}$ est une constante qui dépend de f_j et de a_{l_0}, et où$\alpha_{j,l}$ est la multiplicité de f_j en a_{l_0}. $\square$

Remarque 1.5.13 *Supposons ici que A contient $\mathbb{C}$. Soit (f) un idéal de l'anneau $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \subset A[X_1, ..., X_n]$. Pour tout zéro a de (f), il existe $\theta \in \mathbb{R}^+$, $C > 0$ et un voisinage U de a dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $x \in U$,*

$$|f_1(x)| + \cdots + |f_m(x)| \geq C|x - a|^\theta.$$

La borne inférieure de l'ensemble des θ pour lesquels il existe un tel C et un tel voisinage U est appelée exposant de Łojasiewicz de (f) en a et est noté ν_a et la borne supérieure de tous les ν_a sur les a zéros de (f) est appelé exposant de Łojasiewicz de (f) et est noté ν. Dans le cas $n = 1$, ν_a est exactement le minimum des multiplicités des f_i en a. Dans ce cas, on voit que

$$\nu = \limsup_{i \longrightarrow +\infty} \frac{\beta(i)}{i}$$

où β est la fonction de Artin de (f).

1.6 Etude dans le cas où $A = \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$

Ceci revient à étudier les anneaux locaux qui contiennent un corps.
En fait nous parlerons indifféremment de $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ ou de $\Bbbk\{T_1, ..., T_N\}$ si $\Bbbk$ est corps muni d'une norme, c'est-à-dire d'une valuation multiplicative ν à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. On appellera valuation multiplicative toute application vérifiant les conditions suivantes (cf. [Ng]) :
- $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$ pour tous x et y dans $\Bbbk$,
- $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ pour tous x et y dans $\Bbbk$.

Par exemple $\mathbb{C}$ muni de la norme absolue, $\mathbb{Q}_p$ muni de la norme p-adique ou $\Bbbk(t_1, ..., t_p)$ muni de la norme $(t_1, ..., t_p)$-adique avec $\Bbbk$ un corps sont des corps normés.
Nous noterons indifféremment $\Bbbk\{T_1, ..., T_N\}$ et $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ par $\mathcal{O}_N$. De même nous noterons $\mathfrak{m}_N$, ou $\mathfrak{m}$ quand aucune confusion ne sera possible, l'idéal maximal de cet anneau.

Tout d'abord nous avons le

Théorème 1.6.1 *[Ar1] Soit (f) un idéal de $\mathcal{O}_N[X_1, ..., X_n]$. Il existe une fonction $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathcal{O}_N^n \text{ tel que } f(x) \in \mathfrak{m}_N^{\beta(i)+1}$$

$$\exists\, \overline{x} \in x + \mathfrak{m}_N^{i+1} \text{ tel que } f(\overline{x}) = 0.$$

Il existe aussi une version analytique de ce théorème dû à J. J. Wavrik :

Théorème 1.6.2 *[W1] Soit* (f) *un idéal de* $\mathcal{O}_N\{X_1, ..., X_n\}$ *où* $\Bbbk$ *est de caractéristique nulle et* $\mathcal{O}_N\{X_1, ..., X_n\} := \Bbbk\{T_1, ...,, T_N, X_1, ..., X_n\}$*. Il existe une fonction* $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que :*

$$\forall x \in \mathcal{O}_N^n \textit{ tel que } x(0) = 0 \textit{ et } f(x) \in \mathfrak{m}_N^{\beta(i)+1}$$
$$\exists\, \overline{x} \in x + \mathfrak{m}_N^{i+1} \textit{ tel que } f(\overline{x}) = 0.$$

1.6.1 Deux remarques

Nous pouvons faire deux remarques. Tout d'abord, nous avons le

Lemme 1.6.3 *Soit* (f) *un idéal de* $\mathcal{O}_N[X_1, ..., X_n]$*. Nous notons* $(f)_{+k}$ *l'idéal de l'anneau* $\mathcal{O}_{N+k}[X_1, ..., X_n]$ *engendré par* f*.*
Si la fonction de Artin de $(f)_{+k}$ *existe alors la fonction de Artin de* (f) *existe et la première majore la seconde.*

Preuve : Soit $x \in A_N^n$ tel que $f(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(i)+1}$ avec β la fonction de Artin de $(f)_{+k}$. On a donc l'existence d'un $y \in A_{N+p}^n$ tel que $f(y) = 0$ et $x - y \in \mathfrak{m}^{i+1}$. En annulant toutes les composantes T_{N+1},..., T_{N+p} dans l'écriture de y, on trouve $\overline{x} \in A_N^n$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ et $x - \overline{x} \in \mathfrak{m}^{i+1}$. $\square$
Nous verrons plus tard qu'il n'y a pas égalité en général.

Lemme 1.6.4 *Soient* A *un anneau local,* $\Bbbk$ *un sous-corps de* A *et* $\phi \in Aut_{\Bbbk}A$*. Alors* ϕ *induit un automorphisme de* $A[X]$ *fixant* $\Bbbk$ *en posant* $\phi(X_i) = X_i$ *pour tout* i*. Alors* f *admet une fonction de Artin si et seulement si* $\phi(f)$ *en admet une. Dans ce cas, les deux fonctions sont égales.*

Preuve : Soit x tel que $\phi(f)(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(i)+1}$ avec β la fonction de Artin de f. En composant avec ϕ^{-1}, nous obtenons $f(\phi^{-1}(x)) \in \mathfrak{m}^{\beta(i)+1}$ car ϕ préserve ord. En effet, $x \in A^*$ si et seulement si $\phi(x) \in A^*$, et de même $x \in \mathfrak{m}$ si et seulement si $\phi(x) \in \mathfrak{m}$; on en déduit alors que $\phi(\mathfrak{m}^i) = \mathfrak{m}^i$ pour tout i. Donc il existe y tel que $f(y) = 0$ et $y - \phi^{-1}(x) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. En composant par ϕ, on trouve $\overline{x}$ tel que $\phi(f)(\overline{x}) = 0$ et $\overline{x} - x \in \mathfrak{m}^{i+1}$ en posant $\overline{x} = \phi(y)$. La réciproque se fait de la même manière puisque ϕ est bijective et on voit donc que les deux fonctions de Artin sont égales. $\square$

1.6.2 Espace des jets et des arcs

Définition 1.6.5 *Soit $(f) \subset \mathcal{O}_N[X_1, \ldots, X_n]$ et $N \in \mathbb{N}$ fixés. Nous appellerons jet d'ordre i de dimension N (ou i-jet de dimension N) de (f) tout morphisme de $\mathcal{O}_N$-algèbre*

$$\frac{\mathcal{O}_N[X_1, \ldots, X_n]}{(f)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_N}{\mathfrak{m}^{i+1}}.$$

Nous noterons $\mathcal{X}_i^N$ (ou $\mathcal{X}_i$ quand aucune confusion ne sera possible) l'ensemble des jets d'ordre i de dimension N.
Nous appellerons arc (si $N = 1$) ou coin (si $N \geq 2$) de (f) tout morphisme de $\mathcal{O}_N$-algèbre

$$\frac{\mathcal{O}_N[X_1, \ldots, X_n]}{(f)} \longrightarrow \mathcal{O}_N.$$

Nous noterons $\mathcal{X}_\infty^N$ (ou $\mathcal{X}_\infty$ quand aucune confusion ne sera possible) l'ensemble des arcs (si $N = 1$) ou l'ensemble des coins (si $N \geq 2$).

Un i-jet est la donnée de n polynômes en N variables de degré total inférieur ou égal à i. Il est déterminé par les coefficients de ces n polynômes. L'ensemble des i-jets, $\mathcal{X}_i$, est donc naturellement plongé dans $\mathbb{k}^{n \times n_i}$ où $n_i = \binom{N+i}{N}$. Nous noterons aussi $m_i = n_i - n_{i-1}$. De plus un point de $\mathbb{k}^{n \times n_i}$ est dans $\mathcal{X}_i$ si et seulement si ses coordonnées annulent un système polynomial qui découle de l'annulation de (f) modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. L'ensemble $\mathcal{X}_i$ est donc naturellement muni d'une structure de variété affine. A partir de maintenant, nous identifierons un jet à son image dans $\mathbb{k}^{n\binom{N+i}{N}}$ par le plongement précédent.
L'ensemble $\mathcal{X}_\infty$ est la limite projective des $\mathcal{X}_i$. $\mathcal{X}_\infty$ n'est pas une variété au sens usuel : c'est une "variété de dimension infinie" ou pro-variété.
Pour un i-jet ou un arc x, nous noterons $x(k)$, $1 \leq k \leq n$, les séries qui réalisent ce jet, $x_j(k)$ les termes de ces séries d'ordre j, $x_{\leq j}(k)$ les termes de ces séries d'ordre inférieur ou égal à j et $x_{\geq j}(k)$ les termes de ces séries d'ordre supérieur ou égal à j.
Nous avons naturellement des morphismes de projection

$$\pi_{i,j} : \mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}_j$$

pour $i \geq j$ et

$$\pi_i : \mathcal{X}_\infty \longrightarrow \mathcal{X}_i$$

qui vérifient

$$\pi_{i,j} \circ \pi_{k,i} = \pi_{k,j}$$

et

$$\pi_{i,j} \circ \pi_i = \pi_j$$

pour $k \geq i \geq j$.
On peut reformuler l'existence de la fonction de Artin d'un idéal (f) comme ceci : un i-jet qui se relève en un $\beta(i)$-jet se relève en un arc. Nous avons donc

$$\pi_i(\mathcal{X}_\infty) = \pi_{\beta(i),i}(\mathcal{X}_{\beta(i)})$$

Nous obtenons en particulier, par le théorème de Chevalley, le

Corollaire 1.6.6 *[Na] Supposons que $\Bbbk$ est un corps algébriquement clos. Soient $(f) \subset \mathcal{O}_N[X_1, \ldots, X_n]$ et $N \in \mathbb{N}$ fixés. Alors pour tout i entier, $\pi_i(\mathcal{X}_\infty)$ est un sous-ensemble constructible de $\mathcal{X}_i$.*

Nous pouvons remarquer que si $\mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_N[X]/(f)$ est lisse, la fonction de Artin de (f) étant égale à l'identité, $\pi_{i+1,i}$ est une fibration localement triviale de fibre $\Bbbk^{n(n_i - n_{i-1})} = \Bbbk^{nm_i}$.

1.6.3 Structure des espaces de jets et fonction de Artin

Nous pouvons déjà formuler deux résultats simples qui découlent simplement du fait que les espaces de jets forment un système projectif de limite l'espace des arcs :

Lemme 1.6.7 *Supposons que $\Bbbk$ est un corps non dénombrable (par exemple, $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) et (f) un idéal de $\mathcal{O}_N[X]$. Si (f) a des solutions modulo $\mathfrak{m}^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors (f) admet des solution exactes.*
En particulier, si (f) n'a pas de solution dans $\mathcal{O}_N$, alors (f) admet une fonction de Artin constante.

Preuve : Considérons les $\pi_{j,0}(\mathcal{X}_j)$ pour $j > 0$. Ce sont des ensembles constructibles d'après le théorème de Chevalley. De plus on sait que les $\overline{\pi_{j,0}(\mathcal{X}_j)}$ forment un système décroissant de fermés de $\mathcal{X}_0$ pour j croissant. L'espace $\mathcal{X}_o$ est une variété algébrique et donc, par nœthérianité, nous voyons que ce système de fermés se stabilise à partir d'un certain rang noté j_0. Soit F une composante irréductible de $\overline{\pi_{j_0,0}(\mathcal{X}_{j_0})}$. Notons $C_j = F \cap \pi_{j,0}(\mathcal{X}_j)$ pour $j \geq j_0$. Les C_j sont de la forme $F \backslash F_j$ où F_j est un fermé propre de F. Si $\Bbbk$ n'est pas dénombrable, l'intersection des $F \backslash F_j$ est d'adhérence égale à F. Donc l'adhérence de l'intersection des $\pi_{j,0}(\mathcal{X}_j)$ est égale à l'intersection des $\overline{\pi_{j,0}(\mathcal{X}_j)}$. Soit cette intersection est vide et dans ce cas on ne peut pas trouver de solutions modulo j_0, soit cette intersection n'est pas vide et (f) a des solutions exactes. □

Nous pouvons de manière similaire montrer l'existence de la fonction de Artin dans le cas d'un corps fini :

Lemme 1.6.8 *Soit $\Bbbk$ un corps fini. Alors tout idéal (f) de $\mathcal{O}_N[X_1, ..., X_n]$ admet une fonction de Artin pour tous N et n.*

Preuve : Soit i un entier. Les $\pi_{j,i}(\mathcal{X}_j)$, pour $j \geq i$ sont des sous-ensembles finis de $\mathcal{X}_i$ (lui-même fini). La famille $\{\pi_{j,i}(\mathcal{X}_j)\}_{j\geq i}$ est une suite décroissante de sous-ensembles finis de $\mathcal{X}_i$. Cette famille se stabilise donc, c'est-à-dire qu'il existe $\beta(i) \geq i$ tel que pour tout $j \geq \beta(i)$, $\pi_{j,i}(\mathcal{X}_j) = \pi_{\beta(i),i}(\mathcal{X}_{\beta(i)})$. □

1.6.4 Topologie $\mathfrak{m}$-adique sur l'espace des arcs et inégalités de type Łojasiewicz

Nous avons défini une distance ultramétrique sur $\mathcal{O}_N^n$ à l'aide de la valuation ord. Nous pouvons alors interpréter la linéarité de la fonction de Artin en terme d'inégalité de type Łojasiewicz :

Proposition 1.6.9 *[H2] Soit $(f) = (f_1, ..., f_m)$ un idéal de $\mathcal{O}_N[X]$ et β sa fonction de Artin. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$i)\ \exists (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2\ /\ \forall i \in \mathbb{N},\ \beta(i) \leq ai + b.$$

$$ii)\ \exists (A, B) \in (\mathbb{R}^+)^2\ /\ \forall x \in \mathcal{X}_\infty,\ \sum_k ||f_k(x)|| \geq Bd(x, V(f_1, ..., f_m))^A.$$

où $V(f_1, ..., f_m)$ désigne l'ensemble des coins qui annulent (f). Et nous avons alors $A = a$ et $B = e^{-b}$.

La preuve est directe.

1.7 Fonction de Artin pour un anneau de valuation discrète

En 1966, M. J. Greenberg a montré l'existence de la fonction de Artin pour les systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans un anneau de valuation discrète A, pour lequel le corps des fractions du complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique est une extension séparable du corps des fractions de V. Il a montré en même temps que cette fonction était bornée par une fonction affine. Nous allons présenter un exemple simple, puis nous donnerons une preuve rapide du résultat de Greenberg dans le cas où $A = \mathbb{k}[[T]]$ avec $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique nulle.

1.7.1 Exemple dans un cas simple

Soit $f(X) = aX_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}$ un monôme de $\mathbb{k}[[T]][X_1, ..., X_n]$ où $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique quelconque, les α_i sont strictement positifs et $\operatorname{ord} a = \alpha_0$. Nous allons calculer la fonction de Artin de f en étudiant la structure des $\pi_{j,i}(\mathcal{X}_j)$ pour i fixé et $j > i$. Plus précisemment, il est possible de définir explicitement une partition de $\mathcal{X}_i$ en sous-ensembles constructibles $C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$ tels que nous puissions déterminer le plus grand j pour lequel les i-jets de $C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$ se relèvent sur $\mathcal{X}_j$. Cette approche a été poussée plus en avant par M. Lejeune-Jalabert dans le cas d'une équation [LJ1].
Fixons $i > 0$ et notons

$$O^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n} = \left\{(x_1, ...,\ x_n) \in \mathcal{X}_i \ / \ x_{p_1}(1)^{\alpha_1} ...\ x_{p_k}(k)^{\alpha_k - 1} ...\ x_{p_n}(n)^{\alpha_n} \neq 0\right\}$$

où les p_l sont inférieurs ou égaux à i. Les $O^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$ sont des ouverts de $\mathcal{X}_i$.
Soit $C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$ défini comme suit :

$$C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n} = O^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n} \setminus \bigcup_{\substack{\sum_l \alpha_l q_l \leq \sum_l \alpha_l p_l \\ (q_1, ...,\ q_n) \neq (p_1, ...,\ p_n)}} O^{\alpha}_{k,\ q_1,...,\ q_n}.$$

Soit $x \in C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$. Pour relever x dans $\mathcal{X}_j$, il faut annuler

$$f(x)_{j+1} = a_{\alpha_0} x_{p_1}(1)^{\alpha_1} ...\ x_{p_k}(k)^{\alpha_k - 1} ...\ x_{p_n}(n)^{\alpha_n} \times x_{j+1-\alpha_0-\sum_l \alpha_l p_l + p_k}(k) + g_{j+1}(x)$$

où $g_{j+1}(x)$ ne dépend pas des $x_l(k)$ pour $l \geq j + 1 - \alpha_0 - \sum_l \alpha_l p_l + p_k$.
Pour $j \leq i + \alpha_0 + \sum_l \alpha_l p_l - p_k$ ces équations définissent des conditions fermées de relèvement sur $C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$. Les nouvelles équations qui apparaissent pour $j > i + \alpha_0 + \sum_l \alpha_l p_l - p_k$ forment un système triangulaire. Nous voyons donc que la famille $\pi_{j,i}(\mathcal{X}_j) \cap C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$ est une famille décroissante de fermés de $C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$ et est stable pour $j \geq i + \alpha_0 + \sum_l \alpha_l p_l - p_k$.

Or les $C^{\alpha}_{k,\ p_1,...,\ p_n}$, pour k fixé, définissent une partition de $\mathcal{X}_i$. Le polynôme f admet donc une fonction de Artin égale à la fonction affine

$$i \longmapsto \left(\sum_l \alpha_l\right) i + \alpha_0.$$

1.7.2 Cas général

Proposition 1.7.1 *Soit (f) un idéal de $\mathbb{k}[[T]][X_1, ..., X_n]$ où $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique quelconque. Soit (J_f) l'idéal de $\mathbb{k}[[T]][X_1, ..., X_n]$ défini comme la restriction de l'idéal jacobien de (f) (qui est un idéal de $\mathbb{k}[[T]][X_1, ..., X_n]/(f)$. Si (J_f) admet une fonction de Artin β', alors (f) admet une fonction de Artin β qui vérifie*

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \beta(i) \leq 2\beta'(i). \tag{1.4}$$

Preuve : Notons $\mathcal{X}_i$ l'espace des i-jets de (f) et $\mathcal{X}'_i$ l'espace des i-jets de $(f) + (J_f)$. Nous avons $\mathcal{X}'_i \subset \mathcal{X}_i$. Soit x_i un jet d'ordre i de (f) et supposons qu'il se relève en $x_{2\beta'(i)}$ dans $\mathcal{X}_{2\beta'(i)}$.
Deux cas peuvent se produire : soit nous avons $\mathrm{ord}(J_f(x_{2\beta'(i)})) \geq \beta'(i) + 1$, soit nous avons $\mathrm{ord}(J_f(x_{2\beta'(i)})) < \beta'(i) + 1$.
Dans le premier cas, le projeté de $x_{2\beta'(i)}$ sur $\mathcal{X}_{\beta'(i)}$ appartient à $\mathcal{X}'_{\beta'(i)}$ et donc ce projeté se relève en $\mathcal{X}_\infty$ et x_i aussi.
Dans le second cas, $\mathrm{ord}(J_f(x)) = p \leq \beta'(i)$, donc nous avons dans ce cas $(f(x_{2\beta'(i)})) \subset (J_f(x_{2\beta'(i)}))\mathfrak{m}^{\beta'(i)+1}$ et $x_{2\beta'(i)}$ se relève dans $\mathcal{X}_{2\beta'(i)+1}$ en $x_{2\beta'(i)+1}$ d'après le théorème 1.5.7. Nous avons encore $\mathrm{ord}(J_f(x_{2\beta'(i)+1})) = p$, donc par induction nous pouvons relever $x_{2\beta'(i)}$ dans $\mathcal{X}_j$ pour tout $j > 2\beta'(i)$ et donc dans $\mathcal{X}_\infty$. $\square$

Théorème 1.7.2 *[Gr] Soit (f) un idéal non nul de $\mathbb{k}[[T]][X_1, ..., X_n]$ où $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique nulle. L'idéal (f) admet une fonction de Artin bornée par une fonction linéaire.*

Preuve : Nous allons effectuer une récurrence sur la hauteur de (f). Montrons tout d'abord le résultat pour $ht(f) = n + 1$. D'après les réductions de la partie 1.4, il nous suffit de montrer le résultat pour chaque idéal premier associé à (f). Dans le cas présent, les idéaux associés à (f) sont les idéaux maximaux de $\mathbb{k}[[T]][X_1, ..., X_n]$. En particulier, de tels idéaux ont des éléments dans $\mathbb{k}[[T]]$. La fonction de Artin d'un tel idéal est donc constante.
Supposons que le résultat est vrai pour $ht(f) > k$ avec $n + 1 > k$, et montrons le pour $ht(f) = k$. Soit (f) un tel idéal. Toujours d'après la partie 1.4, il nous suffit de montrer le résultat pour chaque idéal premier associé à (f). Ces idéaux sont de hauteur supérieure ou égale à k. D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de le montrer pour les idéaux premiers (f) de hauteur k. D'après le théorème 1.7.1, la fonction de Artin de (f) est bornée par deux fois celle de (J_f). Comme $\mathbb{k}$ est de caractéristique nulle et que (f) est premier, cet idéal est de hauteur strictement supérieure à celle de (f). L'hypothèse de

récurrence s'applique à cet idéal, le résultat s'ensuit alors. $\square$

1.8 Fonction de Artin d'un germe de variété analytique

1.8.1 Rappels et définitions

Soit (f) un idéal de $\Bbbk\{X_1, ..., X_n\}$ définissant un germe de variété analytique $(X, 0)$ plongé dans $(\Bbbk^n, 0)$. Soit $N \geq 1$ un entier. Considérons la fonction de Artin de l'idéal $(f)_N$ de $\mathcal{O}_N\{X_1, ..., X_n\}$ engendré par (f), et notons la $\beta_{(f),N}$. Nous donnons alors la

Proposition-Définition 1.8.0.1 *Soit (f) un idéal de $\Bbbk\{X_1, ..., X_n\}$ définissant un germe de variété analytique $(X, 0)$ plongé dans $(\Bbbk^n, 0)$. Soit $N \geq 1$ un entier. Nous appellerons N-ième fonction de Artin de $(X, 0)$ la fonction $\beta_{(f),N}$. D'après le lemme 1.6.4, cette suite de fonctions est un invariant analytique du germe. D'autre part nous avons les inégalités*

$$\forall N \geq 1,\ \forall i \in \mathbb{N},\ \ \beta_{(f),N}(i) \leq \beta_{(f),N+1}(i)$$

d'après le lemme 1.6.3.

Nous verrons plus tard que ces inégalités peuvent être strictes. Si le germe est non-singulier, alors le morphisme $\Bbbk \longrightarrow \Bbbk\{X\}/(f)$ est lisse et donc le morphisme $\mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_N\{X\}/(f)_N$ aussi et $\beta_{(f),N}$ est égale à l'identité. La réciproque est vraie d'après la proposition 1 de [H1]. La suite de fonctions $(\beta_{(f),N})_N$ est donc une mesure de la singularité du germe considéré. Dans le cas des hypersurfaces, plusieurs auteurs ont étudié β_1, appelée parfois fonction de Artin-Greenberg du germe [LJ1], [H1]. Le calcul explicite de β_1 pour les courbes planes a même été effectué [H2]. M. Hickel a montré que la constante égale à $\theta := \overline{\lim}_i \beta_1(i)/i$ est une mesure du nombre d'éclatements nécessaires pour désingulariser un germe d'hypersurface :

Proposition 1.8.1 *[H2] Soit $(X, 0)$ un germe d'hypersurface singulier défini par une équation. Soit une suite d'éclatements π_j de centres lisses Z_j où X_j est équimultiple le long de Z_j, X_{j+1} est la transformée stricte de X_j et où X_n est lisse :*

$$\begin{tikzcd}
W_n \arrow[r, "\pi_n"] & W_{n-1} \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\pi_1"] & W_0 \\
X_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_n"] & X_{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\pi_1"] & X_0 = X \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Alors nous avons

$$n \geq \frac{\theta - 1}{m_0} \tag{1.5}$$

où $\theta := \overline{\lim}_i \beta_1(i)/i$ *et* m_0 *est la multiplicité de* X *en l'origine.*

La première fonction de Artin de $(X, 0)$ nous donne donc une condition nécessaire quant à la désingularisation d'un germe de variété analytique.
Par ailleurs, M. Hickel a montré le théorème suivant :

Théorème 1.8.2 *[H1] Soient* f *un germe de fonction holomorphe à l'origine de* $\mathbb{C}^n$ *et* J_f *l'idéal jacobien de* $I = (f)$*. Alors nous avons*

$$\beta_{(f),1}(i) \leq \beta_{J_f,1}(i) + i\,,\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Ce théorème relie la fonction de Artin de (f) avec celle de son jacobien, et cette inégalité est bien meilleure que celle de Greenberg (cf. théorème 1.7.1). En particulier, dans le cas d'un germe à singularité isolée, ce théorème permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 1.8.3 *[H1] Soit* f *un germe de fonction holomorphe à l'origine de* $\mathbb{C}^n$*. Supposons que* f *est à singularité isolée et notons* ν *son exposant de Łojasiewicz (c'est-à-dire l'exposant de Łojasiewicz du jacobien de* (f)*, cf. remarque 1.5.13 ou section 2 de [H1]). Alors*

$$\beta_{(f),1}(i) \leq \lfloor \nu\, i \rfloor + i\,,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ces deux derniers résultats sont cependant faux si $N \geq 2$. Nous allons le montrer en étudiant le cas $f = X^2 - Y^3$. Nous ne savons pas dans ce cas si $\beta_{(f),N}$ est majorée par une fonction affine quand $N \geq 2$.

1.8.2 Approximation par une puissance p-ième

Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,, 1\}$. Nous nous plaçons dans le cas où l'anneau de base est $\mathcal{O}_N$ (l'anneau des séries formelles ou convergentes) avec $\Bbbk$ un corps normé de caractéristique première à p. Cet anneau est muni de la valuation $\mathfrak{m}_N$-adique que nous noterons ord.
Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Nous allons tout d'abord présenter un algorithme d'approximation, pour la valuation ord, d'un d'élément de $\mathcal{O}_N$ par une puissance p-ième, c'est-à-dire trouver, pour tout $x \in \mathcal{O}_N$, un élément z_x qui vérifie l'égalité $\sup_z \mathrm{ord}(x - z^p) = \mathrm{ord}(x - z_x^p)$.
Notons $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ où x_k est le terme d'ordre k de x. Soit k^0 le plus petit indice pour lequel $x_k \neq 0$.

Initialisation : Si x_{k^0} est une puissance p-ième d'un élément de $\mathcal{O}_N$, nous pouvons initialiser l'algorithme, sinon $\sup_z \operatorname{ord}(x - z^p) = \operatorname{ord}(x)$. Dans le cas où ce terme est une puissance p-ième, nous posons

$$z_1 = \sqrt[p]{x_{k^0}} \text{ et } x_1 = x - z_1^p$$

avec $\sqrt[p]{x_{k^0}}$ une racine p-ième de x_{k^0}. Nous voyons que $p \operatorname{ord} z_1 = \operatorname{ord} x$ et que $\operatorname{ord}(x_1) > \operatorname{ord}(x)$.

Récurrence : Supposons que l'on ait construit z_n à la n-ième étape tel que

$$x_n = x - z_n^p = \sum_k x_{n,k}$$

vérifie $\operatorname{ord}(x_n) > \operatorname{ord}(x)$ où $x_{n,k}$ est le terme d'ordre k de x_n. Soit k_n^0 tel que $\operatorname{ord}(x_n) = \operatorname{ord}(x_{n,k_n^0})$. Supposons que x_{n,k_n^0} soit divisible par $\sqrt[p]{x_{k_0}}^{p-1}$. Nous posons alors

$$z_{n+1} = z_n + \frac{x_{n,k_n^0}}{p\sqrt[p]{x_{k^0}}^{p-1}} \text{ et } x_{n+1} = x - z_{n+1}^p.$$

Nous avons $x_{n+1} = x - z_{n+1}^p = x_n - \frac{x_{n,k_n^0}}{\sqrt[p]{x_{k^0}}^{p-1}} z_n^{p-1} + \varepsilon$ où nous avons $\operatorname{ord}(\varepsilon) > \operatorname{ord}(\frac{x_{n,k_n^0}}{\sqrt[p]{x_{k^0}}^{p-1}} z_n^{p-1})$. Le terme initial de x_n est égal à x_{n,k_n^0} qui est aussi le terme initial de $\frac{x_{n,k_n^0}}{\sqrt[p]{x_{k^0}}^{p-1}} z_n^{p-1}$. Donc $\operatorname{ord}(x_{n+1}) > \operatorname{ord}(x_n)$.

Arrêt : Dans le cas où x n'est pas une puissance p-ième, l'algorithme s'arrête. En effet, si $\mathcal{O}_N$ est l'anneau des séries formelles, nous voyons que la suite (z_n) est de Cauchy et donc converge. Dans ce cas sa limite est une racine p-ième de x. Si $\mathcal{O}_N$ est l'anneau des séries convergentes, si x est une racine p-ième dans l'anneau des séries formelles, alors d'après l'existence de la fonction de Artin du polynôme $Z^p - x$, nous voyons que x est une racine p-ième dans $\mathcal{O}_N$.
Il donc existe un rang n pour lequel x_{n,k_n^0} n'est plus divisible par $\sqrt[p]{x_{k_0}}^{p-1}$ dans la récurrence. Nous avons un terme que nous ne pouvons pas éliminer et z_n est une puissance p-ième parmi celles qui sont les plus proches de x pour la topologie $\mathfrak{m}_N$-adique.

1.8.3 Etude la fonction de Artin de $X^2 - Y^3$

Supposons que la caractéristique de $\Bbbk$ est différente de 2 et de 3. Posons $f = X^2 - Y^3$ et fixons $N \geq 2$. Les solutions de f dans $\mathcal{O}_N^2$ sont les couples de la forme (z^3, z^2) avec $z \in \mathcal{O}_N$. Pour tout entier $j > 3$, nous allons donner $x_j \in \mathcal{O}_N$

tel que $\max_{u\in\mathcal{O}_N} \operatorname{ord}(x_j - u^3) = 2j+9$ et $\max_{z\in\mathcal{O}_N} \operatorname{ord}(x_j^2 - z^3) = 8j+6$. En choisissant y_j tel que $\max_{z\in\mathcal{O}_N} \operatorname{ord}(x_j^2 - z^3) = \operatorname{ord}(x_j^2 - y_j^3)$, nous voyons que toute solution $(z^3,\, z^2)$ de f vérifie nécessairement $\operatorname{ord}(x_j - z^3) \leq 2j+9$. Cela nous permet de dire que si $N \geq 2$

$$\limsup_{i\longmapsto+\infty} \frac{\beta_{(X^2-Y^3),\,N}(i)}{i} \geq 4\ .$$

L'idéal jacobien de $(X^2 - Y^3)$ est égal à $(X,\, Y^2)$ dont la fonction de Artin est égale à $i \longmapsto 2i$. En particulier nous n'avons pas la majoration

$$\beta_{(X^2-Y^3),\,N}(i) \leq \beta_{J_{(X^2-Y^3)},\,N}(i) + i\ ,\ \forall i >> 0,\ \ \forall N \geq 2\,,$$

vérifiée pour $N = 1$ d'après le théorème 1.8.2.
L'idée est la suivante : supposons que $x = z^3 + \Delta x$ où z^3 est un plus proche cube de x. En particulier, le terme initial de Δx n'est pas divisible par $\operatorname{in}(z)^2$, le terme initial de z, d'après l'algorithme précédent. Or $x^2 = z^6 + 2z^3\Delta x + (\Delta x)^2$ et le terme initial de $2z^3\Delta x$ peut être divisible par $\operatorname{in}(z)^4$, c'est-à-dire que le terme initial de Δx peut être divisible par $\operatorname{in}(z)$. Si cela est le cas, nous pouvons continuer l'algorithme d'approximation de x^2 par un cube. Nous approfondissons ici cet argument :

Soit

$$x_j := T_1^{15} + \frac{3}{2}T_1^{12}T_2^{j} + T_1^{9}T_2^{2j} + \frac{1}{3}T_1^{6}T_2^{3j} + \frac{5}{96}T_1^{3}T_2^{4j} + \frac{1}{576}T_2^{5j}$$

avec $j > 3$. Nous avons, en appliquant l'algorithme d'approximation par une puissance 3-ième à x_j,

$$\max_{z\in\mathcal{O}_N} \operatorname{ord}(x_j - z^3) = \operatorname{ord}(x_j - (T_1^5 + \frac{1}{2}T_1^2T_2^j)^3) =$$

$$= \operatorname{ord}\left(\frac{1}{4}T_1^9T_2^{2j} + \frac{5}{24}T_1^6T_2^{3j} + \frac{5}{96}T_1^3T_2^{4j} + \frac{1}{576}T_2^{5j}\right) = 2j+9.$$

Par ailleurs

$$x_j^2 = T_1^{30} + 3T_1^{27}T_2^{j} + \frac{17}{4}T_1^{24}T_2^{2j} + \frac{11}{3}T_1^{21}T_2^{3j} + \frac{101}{48}T_1^{18}T_2^{4j} + \frac{119}{144}T_1^{15}Y_2^{5j} +$$

$$+\frac{127}{576}T_1^{12}T_2^{6j} + \frac{11}{288}T_1^{9}T_2^{7j} + \frac{107}{27648}T_1^{6}T_2^{8j} + \frac{5}{27648}T_1^{3}T_2^{9j} + \frac{1}{331776}T_2^{10j}.$$

Appliquons l'algorithme d'approximation par une puissance 3-ième à x_j^2. Nous voyons que

$$x_j^2 = \left((T_1^5 + \frac{1}{2}T_1^2T_2^j)^2 + \frac{1}{6}T_1^4T_2^{2j} + \frac{1}{18}T_1T_2^{3j}\right)^3 +$$

$$+\frac{1}{82944}T_1^6T_2^{8j}+\frac{7}{746496}T_1^3T_2^{9j}+\frac{1}{331776}T_2^{10j}.$$

Donc

$$\max_{z\in\mathcal{O}_N}\operatorname{ord}(x_j^2-z^3)=8j+6.$$

Posons alors

$$y_j:=(T_1^5+\frac{1}{2}T_1^2T_2^j)^2+\frac{1}{6}T_1^4T_2^{2j}+\frac{1}{18}T_1T_2^{3j}.$$

Nous avons alors $\operatorname{ord}(x_j^2-y_j^3)=8j+6$ et $\max_{z\in\mathcal{O}_N}\operatorname{ord}(x_j-z^3)=2j+9$ comme annoncé.

Chapitre 2

Approximation diophantienne et fonction de Artin

En 1989, M. Spivakovsky a énoncé la conjecture suivante : "la fonction de Artin de tout idéal de $\mathcal{O}_N$ est bornée par une fonction affine, pour $N \geq 2$" (cf. [Spi3]). Nous donnons ici un contre-exemple à cette conjecture :

Théorème 2.0.4 *La fonction de Artin du polynôme*

$$P(X, Y, Z) := X^2 - ZY^2 \in \mathcal{O}_N[X, Y, Z]$$

est bornée inférieurement par une fonction polynomiale de degré 2 si $N \geq 2$ et si $car(\mathbb{k}) \neq 2$.

Nous relions tout d'abord un résultat de type approximation diophantienne sur le corps $\mathbb{K}_N$ (le corps des fractions de $\mathcal{O}_N$) à l'existence d'une fonction de Artin (proposition 2.1.1 et corollaire 2.1.4). Nous montrons ensuite un résultat d'approximation diophantienne entre le corps de séries en plusieurs variables et son complétété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique (théorème 2.2.1). Nous montrons alors, à l'aide d'un exemple (cf. exemple 2.2.5), qu'il n'existe pas de résultat du type théorème de Liouville pour une extension finie de $\mathbb{K}_N$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$, son complété pour la topologie $\mathfrak{m}_N$-adique. Nous remarquons alors que nous pouvons construire, à partir de cet exemple, un polynôme dont la fonction de Artin n'est pas bornée par une fonction affine (théorème 2.0.4). Nous déduisons de cela, en dernière partie, qu'il n'existe pas de théorie d'élimination des quantificateurs dans $\mathbb{K}_N$, pour $N \geq 2$ (théorème 2.4.1), pour le langage défini dans la dernière partie.

Soient N un entier positif non nul et $\mathbb{k}$ un corps ; nous utiliserons les notations suivantes :

– $\mathcal{O}_N$ est l'anneau des séries formelles $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ et $\mathfrak{m}_N$ son idéal maximal (ou $\mathfrak{m}$ quand il n'y aura pas d'équivoque possible sur N).
– ord est la valuation $\mathfrak{m}_N$-adique sur $\mathcal{O}_N$. Cette valuation définit une norme $|\ |$ sur $\mathcal{O}_N$ en posant $|x| = e^{-\mathrm{ord}(x)}$ et cette norme induit une topologie appelée topologie $\mathfrak{m}$-adique.
– $V_N := \left\{\frac{x}{y} \,/\, x,\, y \in \mathcal{O}_N \text{ et } \mathrm{ord}(x) \geq \mathrm{ord}(y)\right\}$, l'anneau de valuation discrète qui domine $\mathcal{O}_N$ pour ord. Nous noterons $\mathfrak{m}'_N$ son idéal maximal.
– $\widehat{V}_N := \Bbbk\left(\frac{T_1}{T_N}, ..., \frac{T_{N-1}}{T_N}\right)[[T_N]]$ est le complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique de V_N. Nous noterons $\widehat{\mathfrak{m}}_N$ l'idéal maximal de cet anneau, ord l'extension de la valuation $\mathfrak{m}_N$-adique et $|\ |$ l'extension de la norme associée.
– $\mathbb{K}_N$ et $\widehat{\mathbb{K}}_N$ sont respectivement les corps de fractions de $\mathcal{O}_N$ et de $\widehat{V}_N$. On peut remarquer que $\widehat{\mathbb{K}}_N$ est le complété de $\mathbb{K}_N$ pour la norme $|\ |$.

Remarque 2.0.5 *Le théorème d'approximation analytique de Wavrik (cf. [W1]) donne l'existence de la fonction de Artin pour les systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans $\Bbbk\{T_1, ..., T_N\}$, l'anneau des séries convergentes, quand $\Bbbk$ est muni d'une norme et est de caractéristique 0. Tout ce qui est énoncé dans la suite est encore valable dans ce cas.*

2.1 Polynôme homogène à zéro isolé et approximation diophantienne

Nous allons montrer ici que la fonction de Artin d'un polynôme homogène à zéro isolé est bornée par une fonction affine si et seulement si nous avons un résultat de type approximation diophantienne (cf. remarque 2.1.2) :

Proposition 2.1.1 *Soit $P \in \mathcal{O}_N[X_1, ..., X_n]$ un polynôme homogène qui a pour unique zéro dans $\mathcal{O}_N$ le point $(0, ..., 0)$. Notons $Q_i(X_1, ..., \widehat{X}_i, ..., X_n)$ le polynôme $P(X_1, ..., 1, ..., X_n)$ où la variable X_i est remplacée par 1 dans P, pour $i \in \{1, ..., n\}$.*
Le polynôme P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine si et seulement si il existe deux constantes positives a et b telles que nous ayons

$$\min_j \left\{ord\left(\frac{u_j}{v} - y_j\right)\right\} \leq a\, ord(v) + b. \tag{2.1}$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, pour toute racine $(y_1, ..., \widehat{y}_i, ..., y_n)$ de Q_i dans $\widehat{V}_N$ et pour tout $u_1, ..., \widehat{u}_i, ..., u_n$ et v dans $\mathcal{O}_N$.

Remarque 2.1.2 *La condition (2.1) peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : il existe deux constantes positives c et K telles que pour tout entier $i \in \{1, ..., n\}$, pour toute racine $(y_1, ..., \widehat{y_i}, ..., y_n)$ de Q_i dans $\widehat{V}_N$ et pour tout $u_1, ..., \widehat{u_i}, ..., u_n$ et v dans $\mathcal{O}_N$, nous ayons*

$$\max_j \left\{ \left| \frac{u_j}{v} - y_j \right| \right\} \geq K|v|^c.$$

Remarque 2.1.3 *Deux cas peuvent se produire : soit aucun des polynômes Q_i n'admet de solutions dans $\widehat{V_N}$, soit au moins un de ces polynômes en admet une. Dans le premier cas, d'après la preuve qui suit de la proposition 2.1.1, la fonction de Artin de P est bornée par une fonction de la forme $i \longmapsto di + c$ où $c \in \mathbb{N}$ et d est le degré de P.*
Dans le second cas, si la condition (2.1) est vérifiée, alors la fonction de Artin de P est bornée par une fonction de la forme $i \longmapsto (\lambda a + d)i + c$ où $c \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \geq 1$ sont des constantes.

Preuve : Soit P comme dans l'énoncé et $x_1, ..., x_n \in \mathcal{O}_N$. Quitte à changer le nom des variables, nous pouvons supposer que $\mathrm{ord}(x_1) \leq ... \leq \mathrm{ord}(x_n)$. Nous avons alors

$$P(x_1, ..., x_n) = x_1^d P\left(1, \frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$$

où d est le degré de P. Notons alors $Q(Y_2, ..., Y_n) := Q_1(Y_2, ..., Y_n)$ le polynôme $P(1, Y_2, ..., Y_n)$. Le polynôme Q n'a pas de racine dans $\mathcal{O}_N$. Il n'en a donc pas non plus dans V_N, mais peut en avoir dans $\widehat{V}_N$.
Supposons que Q n'a pas de racine dans $\widehat{V}_N$. Comme $\widehat{V}_N$ est de la forme $\mathbb{K}[[T]]$ où $\mathbb{K}$ est un corps et T une variable formelle, d'après le théorème de Greenberg (cf. [Gr]), Q admet une fonction de Artin bornée par une constante c et dans ce cas, nous obtenons alors $\mathrm{ord}\left(P\left(1, \frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)\right) < c + 1$. Donc

$$\mathrm{ord}\left(P(x_1, ..., x_n)\right) < d\,\mathrm{ord}(x_1) + c + 1\,.$$

Si Q a des racines dans $\widehat{V}_N$, toujours d'après [Gr], Q admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine $i \longmapsto \lambda i + \mu$. Remarquons que $(0, ..., 0)$ n'est pas un zéro de Q. Notons $(y_2, ..., y_n)$ un plus proche zéro de $\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique et supposons, quitte à faire un changement de variables, que $y_2 \neq 0$ et $\mathrm{ord}(y_2) \leq ... \leq \mathrm{ord}(y_n)$.
Supposons que nous ayons $\min_j \left\{\mathrm{ord}\left(\frac{x_j}{x_1} - y_j\right)\right\} \leq a\,\mathrm{ord}(x_1) + b$ où a et b sont des constantes. Alors nous avons

$$\mathrm{ord}\left(Q\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)\right) < \lambda\left(\min_j\left\{\mathrm{ord}\left(\frac{x_j}{x_1} - y_j\right)\right\} + 1\right) + \mu + 1$$

$$< \lambda(a\,\mathrm{ord}(x_1) + b + 1) + \mu + 1.$$

D'où

$$\mathrm{ord}(P(x_1, ..., x_n)) < (a\lambda + d)\,\mathrm{ord}(x_1) + \lambda a(b+1) + \mu + 1.$$

Inversement, supposons qu'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que, pour tout $c \in \mathbb{N}$, il existe une racine $(y_{1,c}, ..., \widehat{y}_{i,c}, ..., y_{n,c})$ de Q_i dans $\widehat{V}_N$ et des $u_{j,c}$ et v_c dans $\mathcal{O}_N$ tels que

$$\min_j \left\{ \mathrm{ord}\left(\frac{u_{j,c}}{v_c} - y_{j,c} \right) \right\} \geq c\,\mathrm{ord}(v_c).$$

Supposons, quitte à changer les variables, que $Q_i = Q_1 = Q$. Nous avons

$$\mathrm{ord}\left(Q\left(\frac{u_{2,c}}{v_c}, ..., \frac{u_{n,c}}{v_c} \right) \right) \geq \min_j \left\{ \mathrm{ord}\left(\frac{u_{j,c}}{v_c} - y_{j,c} \right) \right\} \geq c\,\mathrm{ord}(v_c).$$

D'où

$$\mathrm{ord}(P(v_c, u_{2,c}, ..., u_{n,c})) \geq (c+d)\,\mathrm{ord}(v_c).$$

Or, comme $\mathrm{ord}(y_{j,c}) \geq 0$, nous avons $\mathrm{ord}\left(\frac{u_{j,c}}{v_c}\right) \geq 0$ pour tout j et pour tout c et alors $\min(\mathrm{ord}(v_c), \mathrm{ord}(u_{2,c}), ..., \mathrm{ord}(u_{n,c})) = \mathrm{ord}(v_c)$. Donc P n'admet pas de fonction de Artin bornée par une fonction affine. $\square$

Nous déduisons de la proposition précédente le résultat d'approximation diophantienne suivant :

Corollaire 2.1.4 *Soit $x \in \widehat{\mathbb{K}}_N \backslash \mathbb{K}_N$ entier sur $\mathbb{K}_N$. Alors il existe une fonction croissante $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que*

$$\mathit{ord}\left(\frac{u}{v} - x \right) \leq \gamma(\mathit{ord}(v))$$

pour tous u et v dans $\mathcal{O}_N$.
Si $Q = a_d X^d + \cdots + a_0$ est le polynôme minimal de x sur $\mathcal{O}_N$, alors γ est majorée par une fonction affine si et seulement si la fonction de Artin du polynôme $P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} Y \cdots + a_0 Y^d \in \mathcal{O}_N[X, Y]$ est majorée par une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $a \geq 1$ et $K \geq 0$ tels que

$$\left| \frac{u}{v} - x \right| \geq K|v|^a, \ \forall u, v \in \mathcal{O}_N.$$

Preuve : Soit $x \in \widehat{\mathbb{K}}_N$ entier sur $\mathbb{K}_N$. Si $\mathrm{ord}(x) \geq 0$, soit Q un polynôme irréductible de $\mathcal{O}_N[X]$ tel que $Q(x) = 0$ et $P(X, Y)$ l'homogénéisé de Q. Le corollaire découle alors de la proposition précédente si P admet une fonction

de Artin bornée par une fonction affine. Si ce n'est pas le cas, l'existence de la fonction de Artin de P nous garantit de toute façon l'existence d'un tel γ d'après la dernière partie de la preuve précédente.
Si $\mathrm{ord}(x) < 0$, notons Q un polynôme irréductible de $\mathcal{O}_N[X]$ tel que $Q(x) = 0$. Soit $P(X, Y)$ l'homogénéisé de Q et $R(Y) = P(1, Y)$. Le polynôme R est irréductible, de même degré que Q, et $R(1/x) = 0$. Nous en déduisons alors que $Q\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u^d}{v^d} R\left(\frac{v}{u}\right)$. Si le terme initial de $\frac{u}{v}$ est différent du terme initial de x pour la valuation ord, alors nous avons $\mathrm{ord}\left(\frac{u}{v} - x\right) \leq \mathrm{ord}(x)$. Sinon, $\mathrm{ord}(u) + \mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(v)$. Sachant que $1/x \in \widehat{V}_N$, d'après la proposition précédente et l'existence la fonction de Artin pour le polynôme P, nous savons qu'il existe une fonction β telle que $\mathrm{ord}\left(\frac{v}{u} - \frac{1}{x}\right) \leq \beta(\mathrm{ord}(u))$. Or nous avons

$$\mathrm{ord}\left(\frac{u}{v} - x\right) = \mathrm{ord}\left(\frac{v}{u} - \frac{1}{x}\right) + \mathrm{ord}\left(\frac{u}{v}\right) + \mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}\left(\frac{v}{u} - \frac{1}{x}\right) + 2\mathrm{ord}(x).$$

Et donc $\mathrm{ord}\left(\frac{u}{v} - x\right) \leq \beta(\mathrm{ord}(v) - \mathrm{ord}(x)) - 2\mathrm{ord}(x)$. Dans tous les cas, nous avons $\mathrm{ord}\left(\frac{u}{v} - x\right) \leq \beta(\mathrm{ord}(v) - \mathrm{ord}(x)) + \mathrm{ord}(x)$. $\square$

Remarque 2.1.5 *S. Izumi a montré que les polynômes de la forme $X^d - uY^d$, où $u \in \mathcal{O}_N$ n'est pas une racine d-ième, admettent une fonction de Artin bornée par une fonction affine (cf. proposition 5.1 de [I2]).*

2.2 Approximation diophantienne dans le corps des séries en plusieurs variables

Nous allons montrer ici que l'approximation diophantienne du corollaire 2.1.4 est "linéaire". Nous nous sommes inspiré là de la preuve de la proposition 5.1 de [I2]. Nous utilisons en particulier le théorème d'Izumi sur les Inégalités Complémentaires Linéaires associées à l'ordre $\mathfrak{m}$-adique sur un anneau local analytiquement irréductible.
Pour cela, nous allons tout d'abord introduire les notations suivantes :
Soit $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N \backslash \mathbb{K}_N$ entier sur $\mathbb{K}_N$. Soit $Q(Z)$ un polynôme irréductible de $\mathcal{O}_N[Z]$ annulant z. Ce polynôme engendre l'idéal des polynômes de $\mathbb{K}_N[Z]$ s'annulant en z. Nous pouvons écrire $Q(Z) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_d Z^d$. Nous noterons $P(X, Y) := a_0 Y^d + a_1 X Y^{d-1} + \cdots + a_d X^d$. Considérons les extensions suivantes :

$$\mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_N[Z]_{(T_1,\dots,T_N,Z)} \longrightarrow \mathcal{O}_N[Z]_{(T_1,\dots,T_N,Z)}/(Q(Z)) = \mathcal{O}$$

Notons ord la valuation $(T_1, \dots, T_N, Z)$-adique sur $\mathcal{O}_N[Z]_{(T_1,\dots,T_N,Z)}$ qui étend la valuation ord définie précédemment et $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}$ l'ordre $(T_1, \dots, T_N, Z)$-adique sur $\mathcal{O}_N[Z]_{(T_1,\ldots,T_N,Z)}/(Q(Z))$. Considérons $\overline{Q(Z)}$, le terme initial de $Q(Z)$ pour la valuation ord sur $\mathcal{O}_N[Z]_{(T_1,\ldots,T_N,Z)}$. Nous avons alors

$$Gr_{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}}\mathcal{O} = \frac{(Gr_{\mathfrak{m}_N}\mathcal{O}_N \otimes_{\Bbbk} (\Bbbk \oplus (Z)/(Z)^2 \oplus (Z)^2/(Z)^3 \oplus \cdots))}{(\overline{Q(Z)})}.$$

Nous avons alors le

Théorème 2.2.1 *Soient $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N \backslash \mathbb{K}_N$ algébrique sur $\mathbb{K}_N$. Alors il existe $a \geq 1$ et $K \geq 0$ tels que*

$$\left|\frac{x}{y} - z\right| \geq K|y|^a,\ \forall x,\, y \in \mathcal{O}_N. \tag{2.2}$$

Preuve : Tout d'abord, nous allons nous ramener au cas où $\mathcal{O}$ est intègre et $\overline{Q(Z)} = Z^d$. Nous serons alors sous les hypothèses du théorème d'Izumi que nous pourrons donc utiliser.

Pour tout $u \in \mathcal{O}_N$, nous notons $Q_u(Z) = u^d a_d^{d-1} Q(Z/ua_d)$. Nous avons

$$Q_u(Z) = a_0 u^d a_d^{d-1} + a_1 u^{d-1} a_d^{d-2} Z + \cdots + Z^d.$$

Le polynôme $Q_u(Z)$ est dans $\mathcal{O}_N[Z]$, unitaire, et irréductible comme polynôme de $\mathbb{K}_N[Z]$ car $Q(Z)$ est irréductible. Donc $Q_u(Z)$ est irréductible dans $\mathcal{O}_N[Z]$. Fixons u de telle manière à ce que $\overline{Q_u(Z)} = Z^d$ et tel que $\mathrm{ord}(u) \geq 1$ (il suffit de choisir u d'ordre grand). Le polynôme $Q_u(Z)$ est un polynôme distingué car $\mathrm{ord}(u) \geq 1$. Donc $Q_u(Z)$ est irréductible dans $\mathcal{O}_{N+1}$ ([To], lemme 1.7) et $\mathcal{O}$ est intègre. Les zéros de $Q_u(Z)$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$ sont les uz_i où les z_i sont les zéros de $Q(Z)$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Soit z un zéro de $Q(Z)$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Si nous avons $\left|\frac{x}{y} - uz\right| \geq K|y|^a$, $\forall x,\, y \in \mathcal{O}_N$, alors nous avons $\left|\frac{x}{y} - z\right| \geq \frac{K}{|u|}|y|^a$, $\forall x,\, y \in \mathcal{O}_N$.

Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{O}$ est intègre et que $\overline{Q(Z)} = Z^d$, ce que nous ferons à partir de maintenant.

Notons $z_1, \ldots, z_p$ les différentes solutions de $Q(Z)$ autres que z dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$, et fixons x et y dans $\mathcal{O}_N$. Notons $\overline{Z}$ l'image de Z dans $\mathcal{O}$.

Notons $r := \max\{\mathrm{ord}(z),\, \mathrm{ord}(z - z_k),\, k = 1, .., p\}$ si $p \neq 0$ et $r = \mathrm{ord}(z)$ sinon. Supposons que $\mathrm{ord}(x/y - z) > r$. En particulier $\mathrm{ord}(x) - \mathrm{ord}(y) = \mathrm{ord}(z)$. Notons $C := \mathrm{ord}(x) - \mathrm{ord}(y) = \mathrm{ord}(z)$.

Nous avons $Y^d Q\left(\frac{X}{Y}\right) = P(X, Y)$. Or $Q(\overline{Z}) = 0$ dans l'anneau $\mathcal{O}$ qui est intègre, donc $Q(T) = (T - \overline{Z})(b_{d-1}T^{d-1} + b_{d-2}T^{d-2} + \cdots + b_0)$ dans $\mathcal{O}[T]$, et donc

$P(X, Y) = (X - \overline{Z}Y)(b_{d-1}X^{d-1} + b_{d-2}X^{d-2}Y + \cdots + b_0Y^{d-1})$ dans $\mathcal{O}[X, Y]$. En développant l'expression précédente nous voyons que

$$\begin{aligned} &b_{d-1} = a_d \\ &b_i = a_{i+1} + \overline{Z}b_{i+1},\ 1 \leq i \leq d-2 \\ &b_0 = -a_0/\overline{Z} \end{aligned}$$

D'où

$$b_i := \overline{Z}^{d-i-1}a_d + \overline{Z}^{d-i-2}a_{d-1} + \cdots + a_{i+1}.$$

Notons

$$h := b_{d-1}x^{d-1} + b_{d-2}x^{d-2}y + \cdots + b_0y^{d-1}.$$

Nous avons alors $(x - \overline{Z}y)h = P(x, y)$ dans $\mathcal{O}$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} h = &\frac{P(x, y) - a_0y^d}{x} + \frac{P(x, y) - a_0y^d - a_1xy^{d-1}}{x^2}y\overline{Z} + \cdots \\ &+ \frac{P(x, y) - a_0y^d - a_1xy^{d-1} - \cdots - a_{d-1}x^{d-1}y}{x^d}(y\overline{Z})^{d-1}. \end{aligned}$$

Notons

$$f_i := \frac{P(x, y) - a_0y^d - \cdots - a_ix^iy^{d-i}}{x^{i+1}}y^i$$

Nous avons alors $h = f_0 + f_1\overline{Z} + \cdots + f_{d-1}\overline{Z}^{d-1}$ et les f_i sont dans $\mathcal{O}_N$.

L'anneau $\mathcal{O}$ étant intègre, d'après le théorème d'Izumi [I2], il existe deux constantes $A \geq 1$ et $B \geq 0$ telles que

$$A(\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(x - \overline{Z}y) + \mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(h)) + B \geq \mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(P(x, y)) \geq \mathrm{ord}(P(x, y)). \tag{2.3}$$

Deux cas se présentent alors :
Cas 1 : Soit $\mathrm{ord}(P(x, y)) \leq \mathrm{ord}(a_0y^d)$, et alors dans ce cas

$$\mathrm{ord}(P(x, y)) \leq d\,\mathrm{ord}(y) + \mathrm{ord}(a_0). \tag{2.4}$$

Cas 2 : Soit $\mathrm{ord}(P(x, y)) > \mathrm{ord}(a_0y^d)$. Soit $g = g_0 + g_1\overline{Z} + \cdots + g_{d-1}\overline{Z}^{d-1}$ avec les $g_i \in \mathcal{O}_N$. Alors l'image de g dans $Gr_{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}}$ est non nulle puisque $\overline{Q(Z)}$ est de degré d en Z. Donc $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(g) = \min_i\{\mathrm{ord}(g_i) + i\}$. En particulier,

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(h) \leq \mathrm{ord}\left(\frac{P(x, y) - a_0y^d}{x}\right) = d\,\mathrm{ord}(y) - \mathrm{ord}(x) + \mathrm{ord}(a_0).$$

D'autre part $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(x - \overline{Z}y) = \min\{\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y) + 1\}$. Donc, d'après l'équation (2.3), nous obtenons

$$\mathrm{ord}(P(x, y)) \leq Ad\,\mathrm{ord}(y) - A\,\mathrm{ord}(x) + A\,\min\{\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)+1\} + A\mathrm{ord}(a_0) + B.$$

Nous avons alors

$$\operatorname{ord}(P(x,\,y)) \leq Ad\,\operatorname{ord}(y) + A\operatorname{ord}(a_0) + B \tag{2.5}$$

Conclusion : Si $\operatorname{ord}(x/y - z) > r$, alors il existe deux constantes, a et b telles que

$$\operatorname{ord}(P(x,\,y)) \leq a\operatorname{ord}(y) + b.$$

Or $P(x,\,y) = y^d Q(x/y)$. Nous pouvons écrire $Q(Z)$ sous la forme

$$Q(Z) = R(Z)\prod_{k=1}^{p}(Z - z_k)^{n_k}.(Z - z)^n$$

avec R un polynôme de degré q en Z qui n'admet pas de zéro dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Nous avons alors $\operatorname{ord}(R(x/y)) \geq c$ pour une constante c indépendante de x et de y car $\operatorname{ord}(x/y) = C$ est fixé. Comme $\operatorname{ord}(x/y - z) > r$, nous avons $\operatorname{ord}(x/y - z_k) \leq r$. D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(Q(x/y)) &\geq c + \sum_{k=1}^{p} n_k \min\{\operatorname{ord}(x/y),\, \operatorname{ord}(z_k)\} + n\operatorname{ord}(x/y - z)\\ &\geq c + \sum_{k=1}^{p} n_k \min\{C,\, \operatorname{ord}(z_k)\} + n\operatorname{ord}(x/y - z).\end{aligned}$$

Notons $D = c + \sum_{k=1}^{p} n_k \min\{C,\, \operatorname{ord}(z_k)\}$. Nous obtenons alors

$$(a-d)\operatorname{ord}(y) + b \geq n\operatorname{ord}(x/y - z) + D$$

où encore

$$\left|\frac{x}{y} - z\right| \geq K|v|^{\alpha}$$

avec $K := e^{D-b}$ et $\alpha := (a-d)/n$. Si $\operatorname{ord}(x/y - z) \leq r$, nous avons alors $\left|\frac{x}{y} - z\right| \geq K'$ avec $K' := e^{-r}$. Dans tous les cas nous avons l'inégalité voulue. □

La proposition 2.1.1 nous permet alors de déduire le corollaire suivant qui donne une réponse à une question qui nous a été posée par M. Hickel :

Corollaire 2.2.2 *Soit $P(X,\,Y)$ un polynôme homogène en X et Y à coefficients dans $\mathcal{O}_N$. Supposons que $(0,\,0)$ est le seul zéro de P dans $\mathcal{O}_N$. Alors P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine. C'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ et $a \geq 1$ tels que*

$$|P(x,\,y)| \geq K|(x,\,y)|^{a}, \quad \forall x, y \in \mathcal{O}_N.$$

Exemple 2.2.3 *Soit $Q(Z) \in \mathcal{O}_N[Z]$ un polynôme n'ayant aucune racine dans $\mathcal{O}_N$. Par exemple $Q(Z) = Z^d - T_1^{d+1}$ ou $Q(Z) = Z^d - (T_1^d + T_2^{d+1})$. Définissons $P(X, Y) := Y^d Q(X/Y)$. Le polynôme P est homogène en X et Y et n'admet pas d'autre solution dans $\mathcal{O}_N$ que $(0, 0)$. Un tel polynôme admet donc une fonction de Artin bornée par une fonction affine. La preuve de la proposition 2.1.1 nous permet de dire que l'on peut choisir le coefficient de linéarité de la fonction égal à d dans le premier cas (car $Q(Z)$ n'a pas de zéro dans $\widehat{V}_N$). Dans le second cas α est strictement plus grand que d car $Q(Z)$ admet des zéro dans $\widehat{V}_N$ (voir aussi la preuve du théorème 2.2.4).*

En fait plus généralement, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2.4 *Soit $P(X, Y)$ un polynôme homogène en X et Y à coefficients dans $\mathcal{O}_N$. Alors P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.*

Preuve : Soit P comme dans l'énoncé et $x, y \in \mathcal{O}_N$. Quitte à renommer les variables, nous pouvons supposer que $\mathrm{ord}(y) \leq \mathrm{ord}(x)$. Nous avons alors

$$P(x, y) = y^d P\left(1, \frac{x}{y}\right).$$

Notons alors $Q(Y)$ le polynôme $P(1, Y)$.
i) Supposons que Q n'a pas de racine dans $\widehat{V}_N$. Comme $\widehat{V}_N$ est de la forme $\mathbb{K}[[T]]$ où $\mathbb{K}$ est un corps et T une variable formelle, d'après le théorème de Greenberg (cf. [Gr]), Q admet une fonction de Artin bornée par une constante c et dans ce cas nous obtenons alors $\mathrm{ord}\left(P\left(1, \frac{x}{y}\right)\right) < c + 1$. Donc

$$\mathrm{ord}\left(P(x, y)\right) < d\,\mathrm{ord}(y) + c + 1 \ .$$

ii) Si Q a des racines dans $\widehat{V}_N$, toujours d'après [Gr], Q admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine $i \longmapsto \lambda i + \mu$ où $\lambda \leq d$. Remarquons que Q n'a qu'un nombre fini de racines car $\widehat{V}_N$ est intègre. Soit z un zéro de Q dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$, plus proche de x/y que tous les autres zéros de Q pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Comme $i \longmapsto \lambda i + \mu$ majore la fonction de Artin de Q, nous avons

$$Q\left(\frac{x}{y}\right) \leq \lambda\,\mathrm{ord}\left(z - \frac{x}{y}\right) + \mu.$$

- Si $z \in V_N$, alors $z = u/v$ avec u et v dans $\mathcal{O}_N$ premiers entre eux, et

$$\mathrm{ord}\left(z - \frac{x}{y}\right) = \mathrm{ord}\left(\frac{uy - vx}{vy}\right).$$

Donc

$$\mathrm{ord}\,(P(x,\,y)) \leq (d-\lambda)\mathrm{ord}(y) + \lambda \mathrm{ord}(uy-vx) + (\mu - \lambda \mathrm{ord}(v)).$$

D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe $i_0 \geq 0$ ne dépendant que de u et v, tel que

$$(u,\,v) \cap \mathfrak{m}^{i+i_0} \subset (u,\,v)\mathfrak{m}^i \tag{2.6}$$

pour tout entier i positif. Donc si $\mathrm{ord}(uy-vx) \geq i+i_0$, alors il existe $\overline{x}$ et $\overline{y}$ tels que $u\overline{y}-v\overline{x}=0$ et $\overline{x}-x,\,\overline{y}-y \in \mathfrak{m}^i$. Nous choisirons dorénavant une constante i_0 pour laquelle l'inclusion (2.6) ci-dessus est vérifiée pour tout $(u,\,v)$, où u/v est une racine de Q et u et v sont premiers entre eux. Comme Q n'a qu'un nombre fini de racines, une telle constante existe.

• Si $z \notin V_N$, d'après le théorème 2.2.1, il existe a et b tels que

$$\mathrm{ord}\left(z-\frac{x}{y}\right) \leq a\,\mathrm{ord} y + b.$$

Donc nous avons

$$\mathrm{ord}(P(x,\,y)) \leq \lambda\,\mathrm{ord}\left(z-\frac{x}{y}\right) + d\mathrm{ord}(y) + \mu \leq (a\lambda+d)\mathrm{ord}y + \lambda b + \mu.$$

Nous pouvons faire le même raisonnement si $\mathrm{ord}(y) \geq \mathrm{ord}(x)$. Donc dans tous les cas nous avons

$$\mathrm{ord}\,(P(x,\,y)) \leq A \min\{\mathrm{ord}(x),\,\mathrm{ord}(y)\} + B \max_{u/v \text{ zéro de } Q} \mathrm{ord}(uy-vx) + C$$

où A, B et C sont des constantes, et u/v est un zéro de Q dans $\mathbb{K}_N$ avec u et v premiers entre eux dans $\mathcal{O}_N$.

Supposons que nous ayons $\mathrm{ord}(P(x,\,y) \geq 2\max\{A,\,B\}(i+i_0)+C$, alors nous avons soit $\min\{\mathrm{ord}(x),\,\mathrm{ord}(y)\} \geq i+i_0 \geq i$, soit $\mathrm{ord}(uy-vx) \geq i+i_0$. Dans le premier cas, nous posons $\overline{x}=\overline{y}=0$. Dans le second cas, d'après le lemme d'Artin-Rees, il existe $\overline{x}$ et $\overline{y}$ tels que $u\overline{y}-v\overline{x}=0$ et $\overline{x}-x,\,\overline{y}-y \in \mathfrak{m}^i$. Dans tous les cas $P(\overline{x},\overline{y})=0$ et $\overline{x}-x,\,\overline{y}-y \in \mathfrak{m}^i$. C'est-à-dire que P admet une fonction de Artin bornée par la fonction affine $i \longmapsto 2\max\{A,\,B\}(i+i_0)+C$. $\square$

Exemple 2.2.5 *Nous présentons ici une suite d'éléments $x_p \in \widehat{\mathbb{K}}_N$, pour $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,\,1,\,2\}$, de degré 2 sur $\mathbb{K}_N$, pour lesquels il existe $u_{p,\,k}$ et $v_{p,\,k}$ tels que $\left|x_p - \frac{u_{k,\,p}}{v_{k,\,p}}\right| = C_p|v_k|^{\frac{p}{2}-1}$ et ord$(v_{p,\,k})$ tend vers $+\infty$ avec k, où C_p est une constante qui dépend de p. Nous voyons donc que, contrairement au cas des nombres réels algébriques, la meilleure borne a telle qu'il existe K avec*

$$\left|x-\frac{u}{v}\right| > K|v|^a,\ \forall u,\,v \in \mathcal{O}_N$$

ne peut pas être bornée par le degré de l'extension de $\mathbb{K}_N$ par x. Il n'existe donc pas de version du théorème de Liouville pour les extensions finies de $\mathbb{K}_N$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$.

Supposons que $\operatorname{car}\mathbb{k} \neq 2$.
Soit $P_p(X,Y)$ le polynôme $X^2 - (T_1^2 + T_2^p)Y^2$ avec $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,\, 1\ 2\}$. Le terme $T_1^2 + T_2^p$ n'est pas un carré car la caractéristique du corps de base est différente de 2. Le seul zéro de P_p est alors $(0,0)$. Soit $Q_p(X) = X^2 - (T_1^2 + T_2^p)$. Le polynôme Q_p a deux racines dans $\widehat{V}_N$ qui sont x_p et $-x_p$ avec

$$x_p = T_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{T_2^p}{T_1^2} - \frac{1}{8}\frac{T_2^{2p}}{T_1^4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\frac{T_2^{np}}{T_1^{2n}} + \cdots\right)$$

Notons $a_n := (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}$. Soit k un entier positif et notons

$$x_{p,\,k} := T_1 \sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{T_2^{ip}}{T_1^{2i}}.$$

Nous avons

$$x_p - x_{p,\,k} \in \mathfrak{m}^{k(p-2)+1}$$

et $x_{p,\,k}$ s'écrit sous la forme $\frac{u_{p,\,k}}{v_{p,\,k}}$ avec $u_{p,\,k}$ et $v_{p,\,k}$ premiers entre eux et de plus $v_{p,\,k} = T_1^{2k-3}$. D'où

$$\mathit{ord}\left(x_p - \frac{u_{p,\,k}}{v_{p,\,k}}\right) = k(p-2)+1 = \left(\frac{p}{2}-1\right)\mathit{ord}(v_{p,\,k}) + \frac{3}{2}p - 2,$$

$$\textit{ou encore}\ \left|x_p - \frac{u_{p,\,k}}{v_{p,\,k}}\right| = e^{-\frac{3}{2}p+2}|v_{p,\,k}|^{\frac{p}{2}-1}.$$

2.3 Preuve du théorème 2.0.4

Nous pouvons alors donner la preuve du théorème 2.0.4 annoncé dans l'introduction. Pour cela nous allons reprendre les notations de l'exemple 2.2.5. Supposons la caractéristique de $\mathbb{k}$ différente de 2. Soient p et k des entiers strictement plus grands que 2 et soient

$$u_{p,\,k} = T_1^{2k-2}\sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{T_2^{ip}}{T_1^{2i}},\ v_k = T_1^{2k-3},\ \text{et}\ z_p = T_1^2 + T_2^p.$$

Alors

$$P(u_{p,k},\, v_k,\, z_p) = \left(T_1^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{T_2^{ip}}{T_1^{2i}} \right)^2 - (T_1^2 + T_2^p) \right) T_1^{4k-6} \in \mathfrak{m}^{(p+2)k-4}$$

Si $(x,\, y,\, z)$ est un zéro de P alors soit z est un carré, soit $x = y = 0$. Or

$$\sup_{t \in \mathcal{O}_N} (\mathrm{ord}(z_p - t^2)) = p$$

car la caractéristique de $\Bbbk$ est différente de 2, et

$$\min(\mathrm{ord}(u_{p,k}),\, \mathrm{ord}(v_k)) = 2k - 3.$$

Donc, en posant $p = k - 2$, nous avons

$$P(u_{k-2,k},\, v_k,\, z_{k-2}) \in \mathfrak{m}^{k^2-4}$$

$$\text{et } \sup \big(\min\{\mathrm{ord}(u_{k-2,k} - x),\, \mathrm{ord}(v_k - y),\, \mathrm{ord}(z_{k-2} - z)\} \big) \leq 2k - 3$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les racines $(x,\, y,\, z)$ de P.
Notons β_N la fonction de Artin de P. Si $i \in \mathbb{N}$ est impair, d'après ce qui précède, nous avons alors $\beta_N(i) \geq \left(\frac{i+3}{2}\right)^2 - 5$. Si i est pair, comme $\beta_N(i) \geq \beta_N(i-1)$, nous avons $\beta_N(i) \geq \left(\frac{i}{2} + 1\right)^2 - 5$. Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\beta_N(i) \geq \frac{i^2}{4} + i - 4\,. \qquad \square$$

Remarque 2.3.1 *Pour tout entier p strictement supérieur à 1, nous pouvons montrer de manière identique que la fonction de Artin de $X^p - ZY^p$ est bornée inférieurement par une fonction polynomiale de degré 2 si la caractéristique de $\Bbbk$ est différente de p.*

Remarque 2.3.2 *Si la caractéristique de $\Bbbk$ vaut 2, alors la fonction de Artin de $X^2 - ZY^2 \in \mathcal{O}_N[X,\, Y,\, Z]$ est bornée par la fonction linéaire $i \longmapsto 3i$. En effet, soient x, y et z dans $\mathcal{O}_N$, avec $N \geq 2$, tels que $x^2 - zy^2 \in \mathfrak{m}^{3i+1}$. Notons*

$$\alpha = ord(x),\ \beta = ord(y),\ \gamma = ord(z).$$

Si $\beta > i$, nous posons $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$ et $\overline{z} = z$. Nous avons alors

$$(x - \overline{x})^2 = x^2 \in \mathfrak{m}^{\min\{3i+1,\, 2\beta+\gamma\}} \subset \mathfrak{m}^{2i+2}$$

et donc $\overline{x} - x \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Clairement $\overline{y} - y$ et $\overline{z} - z$ sont dans $\mathfrak{m}^{i+1}$ et $\overline{x}^2 - \overline{z}\overline{y}^2 = 0$. Supposons maintenant que $\beta \leq i$. Nous pouvons écrire $z = z_\gamma + z_{\gamma+1} + z_{\gamma+2} + \cdots$

où z_d est homogène de degré d. Soit γ_1 le plus petit entier pour lequel z_{γ_1} n'est pas un carré. Comme car$\mathbb{k} = 2$, les monômes apparaissant dans l'écriture de x^2 et de y^2 sont tous des carrés et donc $\gamma_1 + 2\beta \geq 3i + 1$. Notons $\overline{z} = z_\gamma + z_{\gamma+1} + \cdots + z_{\gamma_1 - 1}$; en particulier $\overline{z} - z \in \mathfrak{m}^{3i+1-2\beta} \subset \mathfrak{m}^{i+1}$. Cet élément est un carré, disons $\overline{z} = u^2$, car car$\mathbb{k} = 2$. Nous avons alors $x^2 - (uy)^2 = (x - uy)(x + uy) \in \mathfrak{m}^{3i+1}$. Donc, par exemple, $x - uy \in \mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{3i+1}{2} \right\rfloor} \subset \mathfrak{m}^{i+1}$. Posons alors $\overline{x} = uy$ et $\overline{y} = y$. Nous avons alors $x - \overline{x} \in \mathfrak{m}^{i+1}$, $y - \overline{y} \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $z - \overline{z} \in \mathfrak{m}^{i+1}$, et de plus $\overline{x}^2 - \overline{z}\overline{y}^2 = 0$.

2.4 Non-existence d'élimination des quantificateurs dans le corps $\mathbb{k}((T_1, ..., T_N))$ pour $N \geq 2$

J. Denef et F. Loeser [DL1] ont donné une preuve du théorème de Greenberg à l'aide d'un résultat d'élimination des quantificateurs dû à J. Pas [Pa]. Nous pouvons appliquer ici la même méthode pour montrer que, dans le cas $N \geq 2$, il n'y a pas d'existence d'une théorie d'élimination des quantificateurs dans le corps $\mathbb{k}((T_1, ..., T_N))$ muni du langage défini ci-dessous.
Dans cette partie, $\mathbb{k}$ est un corps algébriquement clos. Soit $\mathcal{L}_{Pre}$ le langage de premier ordre, dont un modèle est $\mathbb{Z}$, et les symboles sont $+$, $\leq$, 0, 1 et pour tout $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ un symbole $\equiv_d$ pour signifier la relation binaire $x \equiv y \bmod d$. Nous l'appelerons $\mathbb{Z}$-sorte.
Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{k}}$ le langage de premier ordre de corps dont les symboles sont $+$, $-$, $\times$, 0, 1, appelée $\mathbb{k}$-sorte, dont le modèle est $\mathbb{k}$.
Soit $\mathcal{L}_N$ le langage de premier ordre, dont le modèle est $\mathbb{K}_N$, et les symboles sont $+$, $-$, $\times$, 0, 1, appelée $\mathbb{K}_N$-sorte
Soit ord le symbole de fonction de la $\mathbb{K}_N$-sorte vers la $\mathbb{Z}$-sorte, dont le modèle est ord définie précédemment.
Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 *Soit $N \geq 2$ fixé. Considérons $\mathcal{L}$ le langage de premier ordre à trois sortes $(\mathcal{L}_{Pre}, \mathcal{L}_{\mathbb{k}}, \mathcal{L}_N, ord, \pi)$, où π est une fonction de la $\mathbb{K}_N$-sorte vers la $\mathbb{k}$-sorte, auquel on rajoute autant de symboles souhaités de telle manière que la restriction de $\mathcal{L}$ à la $\mathbb{Z}$-sorte soit égale à $\mathcal{L}_{Pre}$. Alors $\mathcal{L}$ n'admet pas d'élimination des $\mathbb{K}_N$-quantificateurs.*

Preuve : Considérons β, la fonction de Artin du polynôme $P = X^2 - ZY^2$ vu comme polynôme de $\mathcal{O}_N[X, Y, Z]$. Cette fonction peut se définir dans le langage $\mathcal{L}$ et donc son graphe aussi. En effet, pour tout entier n nous avons

$$\big(P(x,\,y,\,z) \in \mathfrak{m}^{\beta(n)+1} \Longrightarrow \big(\exists \overline{x},\,\overline{y},\,\overline{z}\,/\,\big(x-\overline{x},\,y-\overline{y},\,z-\overline{z} \in \mathfrak{m}^{n+1}\big)$$
$$\wedge P(\overline{x},\,\overline{y},\,\overline{z}) = 0))$$
$$\wedge\neg\left(\big(P(x,\,y,\,z) \in \mathfrak{m}^{\beta(n)} \Longrightarrow \big(\neg\exists \overline{x},\,\overline{y},\,\overline{z}\,/\,\big(x-\overline{x},\,y-\overline{y},\,z-\overline{z} \in \mathfrak{m}^{n+1}\big)\right.$$
$$\wedge P(\overline{x},\,\overline{y},\,\overline{z}) = 0)))$$

S'il existait une élimination des $\mathbb{K}_N$-quantificateurs sur $\mathcal{L}$, alors d'après un résultat de Presburger (cf. [Pr]) et d'après le théorème de constructibilité de Chevalley, le langage $\mathcal{L}$ admettrait une élimination des quantificateurs. Le graphe de β, inclus dans $\mathbb{Z}^2$, serait donc semi-algébrique dans le langage $\mathcal{L}_{Pre}$. Ce graphe serait donc défini par un nombre fini de phrases utilisant les signes $+$, 0, 1, $\leq$ et $\equiv_d$ mais pas le symbole $\times$. Il existerait alors une partition finie de $\mathbb{N}$ en classes de congruences telle que, pour n grand, β soit affine sur chacune de ces classes, ce qui est faux d'après ce qui précède. $\square$

Remarque 2.4.2 *Pour $N = 1$ un résultat d'élimination des quantificateurs a été obtenu par J. Pas (cf. [Pa]).*

Chapitre 3

Théorème d'Izumi et linéarité de fonctions de Artin

La motivation de ce chapitre est d'utiliser le lemme d'Artin-Rees [Ma] et le théorème d'Izumi [I2] [Re3] pour déterminer une certaine classe de polynômes dont les fonctions de Artin sont bornées par des fonctions affines. Nous savons qu'en général ceci est faux, d'après la partie précédente. Néanmoins il existe certains cas pour lesquels ce résultat est vrai.
Nous commençons par citer le cas des systèmes d'équations linéaires qui découle du lemme d'Artin-Rees (théorème 3.1.1). Nous montrons ensuite que le théorème d'Izumi est équivalent à une majoration uniforme des fonctions de Artin d'une certaine famille de polynômes linéaires (proposition 3.2.2 et théorème 3.2.5) et en déduisons une version stable du lemme d'Artin-Rees (théorème 3.2.6). Nous donnons ensuite différentes applications de ces deux résultats :
En troisième partie, nous montrons que la fonction de Artin de $X_1X_2 - X_3X_4$, vu comme polynôme à coefficients dans l'anneau des séries formelles en plus de trois variables, est bornée inférieurement par une fonction polynomiale de degré 2.
En quatrième partie, nous utilisons simultanément le lemme d'Artin-Rees et le théorème d'Izumi pour montrer que les polynômes de la forme $f\prod_{k=1}^{r} X_k^{n_k} + \sum_{j=1}^{p} f_j Z_j$ ont une fonction de Artin bornée par une fonction affine, dans le cas où l'anneau de base quotienté par l'idéal $(f_1, ..., f_p)$ est réduit (théorème 3.4.2).
Enfin, en dernière partie nous montrons que ceci implique que la fonction de Artin d'une autre classe de polynômes est bornée par une fonction affine (propositions 3.5.4 et 3.5.5) et nous utilisons ces résultats pour calculer des clôtures intégrales approchées d'idéaux (exemple 3.5.3).

3.1 Fonction de Artin d'un système linéaire et lemme d'Artin-Rees

3.1.1 Fonction de Artin d'un système linéaire

Nous avons le résultat suivant qui nous donne la forme de la fonction de Artin d'un système d'équations linéaires et qui montre au passage que dans le cas linéaire, l'existence de la fonction de Artin n'est absolument pas liée à la propriété hensélienne mais au fait que l'anneau de base est nœthérien.

Théorème 3.1.1 *Soit*

$$\left(f_1^1X_1+\cdots+f_n^1X_n, ..., \ f_1^pX_1+\cdots+f_n^pX_n\right)$$

un idéal de polynômes linéaires noté (f) *de* $A[X_1, ..., X_n]$ *où* $(A,\mathfrak{I})$ *est un couple. Alors* (f) *admet une fonction de Artin bornée par la fonction affine* $i \longmapsto i+i_0$ *si et seulement si nous avons la version faible du lemme de Artin-Rees suivante :*

$$I\cap\widetilde{\mathfrak{I}}^i\subset\mathfrak{I}^{i-i_0}I \text{ pour } i\geq i_0$$

où I *est le sous-A-module de* A^p *engendré par les* $(f_j^1, ..., f_j^p)$ *pour* $1\leq j\leq n$ *et* $\widetilde{\mathfrak{I}}^i$ *le sous-A-module de* A^p *égal à* $\oplus_{k=1}^p\mathfrak{I}^i$ *pour tout entier* i.
En particulier, si $(A,\mathfrak{I})$ *est un couple nœthérien,* (f) *admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine. De plus le plus petit* i_0 *tel que* $i\longmapsto i+i_0$ *majore la fonction de Artin de* (f) *ne dépend que du A-module* I.

Preuve : Avoir $I\cap\widetilde{\mathfrak{I}}^{i+1}\subset\mathfrak{I}^{i+1-i_0}I$ pour i_0 une constante positive, cela est équivalent à ce que pour tout $x_1, ..., \ x_n\in A$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1^1x_1+\cdots+f_n^1x_n & \in & \mathfrak{I}^{i+1}\\ \vdots & & \\ f_1^px_1+\cdots+f_n^px_n & \in & \mathfrak{I}^{i+1}\end{array}\right. \tag{3.1}$$

il existe $\varepsilon_1, ..., \ \varepsilon_n\in\mathfrak{I}^{i+1-i_0}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1^1x_1+\cdots+f_n^1x_n & = & f_1^1\varepsilon_1+\cdots+f_n^1\varepsilon_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ f_1^px_1+\cdots+f_n^px_n & = & f_1^p\varepsilon_1+\cdots+f_n^p\varepsilon_n\end{array}\right.$$

En posant $\overline{x}_k=x_k-\varepsilon_k$, cela est équivalent à ce que pour tout $x_1, ..., \ x_n\in A$ qui vérifient le système (3.1) précédent, il existe $\overline{x}_1$,..., $\overline{x}_n\in A$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccc} f_1^1\overline{x}_1+\cdots+f_n^1\overline{x}_n & = & 0\\ \vdots & & \\ f_1^p\overline{x}_1+\cdots+f_n^p\overline{x}_n & = & 0\end{array}\right.$$

et $\overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1-i_0}$. Cette dernière condition est exactement équivalente à dire que l'idéal (f) admet une fonction de Artin bornée par $i \longmapsto i + i_0$.
La dernière assertion découle du fait que si A est nœthérien nous avons le lemme d'Artin-Rees (cf. [Ma] par exemple). $\square$

Remarque 3.1.2 *T. Wang [Wa2] a caractérisé le plus petit i_0 de la proposition précédente, dans le cas où $A = \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ et $\mathfrak{I}$ est son idéal maximal, en terme de bases standards.*

3.1.2 Intermède : bases standarts et diagramme des exposants initiaux

Nous allons ici nous placer dans le cas où A est l'anneau $\mathcal{O}_N$ des séries convergentes ou formelles en N variables sur un corps $\Bbbk$. Dans ce cas nous pouvons donner une caractérisation du plus petit entier i_0 vérifiant

$$I \cap \mathfrak{m}_N^i \subset \mathfrak{m}_N^{i-i_0} I \text{ pour } i \geq i_0 \tag{3.2}$$

pour un idéal I de $\mathcal{O}_N$.
Définissons tout d'abord la valuation ν. Celle-ci est la valuation qui associe à une série de $x = \sum a_\alpha T^\alpha$ de $\mathcal{O}_N$ le terme

$$\mu(x) := \min\{(|\alpha|, \alpha_1, ..., a_N \,/\, a_\alpha \neq 0\}$$

où l'ordre sur $\mathbb{Z}^{N+1}$ est l'ordre lexicographique. Nous pouvons définir un ordre total sur $\mathbb{N}^N$ à l'aide de μ en posant $\alpha \geq \beta$ si $\nu(T^\alpha) \geq \nu(T^\beta)$.
Pour une série $x = \sum a_\alpha T^\alpha$ comme précédemment nous noterons $\exp(x)$ le N-uplet β tel que $\mu(x) = \mu(T^\beta)$ et $\text{supp}(x) := \{\alpha \,/\, a_\alpha \neq 0\}$. Le support de X, noté $\text{supp}(x)$, est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^N$. Nous définissons, de plus, in_μ comme étant la fonction qui à une série de $\mathcal{O}_N$ associe son terme d'ordre minimal pour la valuation ν.
Soient $f_1, ..., f_p \in \mathcal{O}_N$. Notons $\alpha_i = \exp(f_i)$. Les α_i définissent une partition de $\mathbb{N}^N$ comme suit. Soit

$$\Delta_1 = \alpha_1 + \mathbb{N}^N ,$$

$$\Delta_i = (\alpha_i + \mathbb{N}^N) \setminus \cup_{k=1}^{i-1} \Delta_k, \; i = 2, ..., p ,$$

$$\text{et } \Delta = \mathbb{N}^N \setminus \cup_{k=1}^{p} \Delta_k .$$

Nous pouvons alors énoncer l'algorithme de division de Grauert-Hironaka :

Théorème 3.1.3 *Soient $f_1, ..., f_p \in \mathcal{O}_N$. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}_N$, il existe $q_1, ..., q_p \in \mathcal{O}_N$ et $r \in \mathcal{O}_N$ uniques tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{p} q_i f_i + r\,,$$

avec $\alpha_i + supp(q_i) \subset \Delta_i$ pour $i = 1, ..., p$ et $supp(r) \subset \Delta$.

Nous pouvons alors définir la notion de base standart :

Proposition-Définition 3.1.3.1 *Soit I un idéal de $\mathcal{O}_N$ et soit $\mathcal{N}_I$ le diagramme des exposants initiaux de I, c'est-à-dire l'ensemble des $in_\mu(h)$ quand h parcourt I. Notons $\alpha_1, ..., \alpha_p$ les sommets de $\mathcal{N}_I$. Alors il existe une famille $(f_1, ..., f_p)$ de générateurs de I dont les termes initiaux (pour in_μ) sont égaux aux α_i (et donc engendrent $in_\mu(I)$). Une telle famille est appelé base standart de I. L'existence d'une telle famille provient directement de l'algorithme de division de Grauert-Hironaka.*

T. Wang [Wa2] a donné une caractérisation du plus petit i_0 vérifiant la relation (3.2) en termes de base standart :

Définition 3.1.4 *Soit $(f_1, ..., f_p)$ une base standart de I idéal de $\mathcal{O}_N$ telle que $ord(f_j) \leq ord(f_{j+1})$ pour tout i. Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. On définit $r_\lambda \in \mathbb{N}$ par :*

$$ord(f_1) \leq \cdots \leq ord(f_{r_\lambda}) \leq \lambda < ord(f_{r_\lambda+1}) \leq \cdots \leq ord(f_p)\ .$$

Théorème 3.1.5 *[Wa2] Soit $\lambda \in \mathbb{N}$. Nous avons la version de faible de Artin-Rees*

$$I \cap \mathfrak{m}_N^i \subset \mathfrak{m}_N^{i-\lambda} I \text{ pour } i \geq \lambda$$

si et seulement si $r_\lambda \geq 1$ et pour tout $j > r_\lambda$

$$f_j \in \mathfrak{m}_N^{ord(f_j)-\lambda} f_1 + \cdots + \mathfrak{m}_N^{ord(f_j)-\lambda} f_{r_\lambda}\ .$$

3.2 Théorème d'Izumi et version stable du lemme d'Artin-Rees

3.2.1 Théorème d'Izumi et majoration stable de la fonction de Artin d'une famille de polynômes linéaires

Nous donnons ici l'énoncé d'un théorème d'Izumi que nous interprétons en terme de linéarité de la fonction de Artin d'un certain type de polynôme. Nous redonnons tout d'abord une définition :

Définition 3.2.1 *Soit $(R, \mathfrak{I})$ un couple nœthérien où R est local et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire avec $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. Nous noterons $\nu_{R,\mathfrak{I}}$ la fonction à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par*

$$\forall x \in R \backslash \{0\},\ \nu_{R,\mathfrak{I}}(x) = n \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{I}^n \text{ et } x \notin \mathfrak{I}^{n+1}$$

$$\text{et } \nu_{R,\mathfrak{I}}(0) = \infty.$$

On appelle cette fonction l'ordre $\mathfrak{I}$-adique sur R.
Soit I un idéal propre de R, nous noterons $\nu_{I,\mathfrak{I}}$ pour $\nu_{R/I,\mathfrak{I}R/I}$ quand aucune confusion sur R ne sera possible. Dans le cas où $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de R, nous noterons $\nu_R := \nu_{R,\mathfrak{I}}$ et $\nu_I := \nu_{R/I,\mathfrak{I}R/I}$ (la dernière notation est à ne pas confondre avec la valuation I-adique).

Soient A un anneau local nœthérien et I un idéal de A, engendré par f_1,..., f_p. Notons alors i_I le plus petit entier tel que $i \longmapsto i + i_I$ majore la fonction de Artin de $f_1X_1 + \cdots + f_pX_p \in A[X]$. Pour tout $x \in A$, notons β_x la fonction de Artin de $xX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_pX_p$. Nous avons alors la

Proposition 3.2.2 *Soient A un anneau local nœthérien et I un idéal de A. Notons R le quotient A/I. Nous avons alors :*

(i) Si R admet une ICL avec les coefficients a et b, alors, pour tout $x \in A$, nous avons la majoration suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \beta_x(i) \leq ai + a\nu_I(x) + ai_I + b.$$

(ii) Si nous avons une majoration uniforme de la fonction β_x par une fonction de la forme $i \longmapsto ai + c\nu_I(x) + b$, avec $a + c \geq 1$, alors le polynôme $XY + \sum_k f_iX_i \in A[X, Y, X_1, ..., X_p]$ admet une fonction de Artin bornée par la fonction $i \longmapsto (a + c)(i + i_I) + \max(b, i_I)$, et de plus l'idéal I est soit premier, soit $\mathfrak{m}$-primaire.

(iii) Si le polynôme $XY + \sum_k f_iX_i$ admet une fonction de Artin bornée par la fonction $i \longmapsto ai + b$ et si I est premier alors R admet une ICL

$$\nu_I(gh) \leq a(\nu_I(g) + \nu_I(h)) + b \quad \forall g, h \in R.$$

Preuve : Montrons (i) :
Soient x_0, x_1, ..., $x_p \in A$ tels que

$$xx_0 + f_1x_1 + \cdots + f_px_p \in \mathfrak{m}^{ai+a\nu_I(x)+ai_I+b+1}.$$

Nous avons donc $\nu_I(xx_0) \geq ai + a\nu_I(x) + ai_I + b + 1$. D'où

$$a(\nu_I(x) + \nu_I(x_0)) + b \geq ai + a\nu_I(x) + ai_I + b + 1$$

$$\nu_I(x_0) \geq i + i_I + 1.$$

Nous avons donc $x_0 = \sum_k f_k z_k + x_0'$ avec $\mathrm{ord}(x_0') \geq i + i_I + 1$, ce qui implique que

$$\sum_{k=1}^{p} f_k(x_k + xz_k) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$$

car $a \geq 1$. Il existe donc, par définition de i_I, des $t_k \in A$ qui vérifient

$$\forall k \geq 1 \quad t_k \in x_k + xz_k + \mathfrak{m}^{i+1}$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{p} f_k t_k = 0\,.$$

Nous posons alors $\overline{x}_0 = \sum_k f_k z_k$ et $\overline{x}_k = t_k - xz_k$ pour $k \geq 1$. Nous avons alors

$$x\overline{x}_0 + f_1\overline{x}_1 + \cdots + f_p\overline{x}_p = 0 \text{ et } \forall k\ \overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{m}^{i+1}.$$

Et donc (i) est démontré.

Montrons maintenant (ii) :
Nous allons tout d'abord montrer la majoration de la fonction de Artin annoncée, puis nous montrerons que I est soit premier, soit $\mathfrak{m}$-primaire.
Soient a, b et c comme dans l'énoncé. Fixons tout d'abord $i \geq i_I$. Nous allons montrer que la fonction de Artin de $XY + \sum_k f_i X_i$ pour le couple $(A, \mathfrak{m})$ est majorée par la fonction $i \longmapsto (a+c)i + \max(b, i_I)$. Dans ce cas la fonction de Artin du polynôme $XY + \sum_k f_i X_i$ sera majorée par $i \longmapsto (a+c)(i+i_I) + \max(b, i_I)$ comme annoncée.
Soit $i \geq i_I$ et Soient x, y, x_1,..., x_p tels que

$$xy + f_1x_1 + \cdots + f_px_p \in \mathfrak{m}^{(a+c)i+\max(b,\, i_I)+1}. \tag{3.3}$$

Nous allons distinguer deux cas, selon que x et y sont tous les deux dans $I + \mathfrak{m}^{i+1}$ ou non.

1. Supposons que x et y sont dans $I + \mathfrak{m}^{i+1}$, c'est-à-dire qu'il existe des $z_{1,j}$ et des $z_{2,j}$ tels que $x - \sum_j f_j z_{1,j} \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $y - \sum_j f_j z_{2,j} \in \mathfrak{m}^{i+1}$. En multipliant ces deux termes nous voyons que

$$xy - x\sum_j f_j z_{2,j} - y\sum_j f_j z_{1,j} + \sum_j f_j z_{1,j} \sum_j f_j z_{2,j} \in \mathfrak{m}^{2i+1}.$$

D'après cette relation et la relation (3.3), on est ramené à

$$\sum_j f_j(x_j + yz_{1,j} + xz_{2,j} - \sum_l f_l z_{1,l} z_{2,j}) \in \mathfrak{m}^{\min(2i,\, (a+c)i+i_I)+1}$$

Par définition de i_I, il existe donc des t_j tels que $\sum_j f_j t_j = 0$ et

$$t_j - \left(x_j + x z_{2,j} + y z_{1,j} - \sum_l f_l z_{1,l} z_{2,j}\right) \in \mathfrak{m}^{\min(2i,\,(a+c)i+i_I)-i_I+1} \subset \mathfrak{m}^{i+1}.$$

Nous posons alors

$$\overline{x} = \sum_j f_j z_{1,j},\ \overline{y} = \sum_j f_j z_{2,j}$$

$$\text{et } \overline{x}_j = t_j - \left(\overline{x} z_{2,j} + \overline{y} z_{1,j} - \sum_l f_l z_{1,l} z_{2,j}\right) = -\sum_l f_l z_{2,l} z_{1,j}.$$

Nous avons donc

$$\overline{xy} + \sum_j f_j \overline{x}_j = 0,$$

$$\text{et } \overline{x} - x,\ \overline{y} - y \text{ et } x_j - \overline{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+1} \text{ pour tout } j.$$

2. Supposons maintenant que $x \in I + \mathfrak{m}^{k+1}$ et $x \notin I + \mathfrak{m}^{k+2}$ avec $0 \leq k < i$. Notons

$$x = \sum_j f_j z_{1,j} + x'$$

avec $\nu_A(x') = k+1$ et $x' \notin I + \mathfrak{m}^{\nu_A(x')+1}$. En particulier, nous voyons que $\nu_I(x) = \nu_I(x') = k+1$. Nous avons alors

$$x'y + \sum_j f_j (x_j + y z_{1,j}) \in \mathfrak{m}^{(a+c)i+\max(b,\,i_I)+1}.$$

Ou encore

$$x'y + \sum_j f_j x'_j \in \mathfrak{m}^{(a+c)i+\max(b,\,i_I)+1}$$

avec $x'_j = x_j + y z_{1,j}$.
La fonction de Artin de $x'Y + \sum_k f_k X'_k \in A[Y, X'_1, ..., X'_n]$ est majorée par

$$i \longmapsto ai + c\nu_I(x') + b \leq (a+c)i + b.$$

Donc il existe $\overline{y} \in y + \mathfrak{m}^{i+1}$ et $\overline{x}'_j \in x'_j + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que

$$x'\overline{y} + \sum_j f_j \overline{x}'_j = 0\ .$$

Posons alors

$$\overline{x}_j = \overline{x}'_j - \overline{y} z_{1,j} \text{ et } \overline{x} = x.$$

Nous avons
$$\overline{xy}+\sum_j f_j\overline{x}_j=(x'+\sum_j f_jz_{1,j})\overline{y}+\sum_j f_j(\overline{x}'_j-\overline{y}z_{1,j})=0$$
et $\overline{x}-x\in\mathfrak{m}^{i+1}$, $\overline{y}-y\in\mathfrak{m}^{i+1}$ et $\overline{x}_j-x_j\in\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout j.

Donc pour $i\geq i_I$ la fonction de Artin de $XY+\sum_k f_iX_i$ est bornée par la fonction $i\longmapsto(a+c)i+\max(b,\,i_I)$.

Montrons maintenant que I est premier ou $\mathfrak{m}$-primaire. Montrons tout d'abord que I n'a qu'un idéal premier minimal associé. Supposons le contraire, c'est-à-dire que nous avons $I=I_1\cap I_2$ avec $I\neq I_1$ et $I\neq I_2$, où I_1 est un idéal P-primaire avec P premier, et P n'est pas un idéal premier associé à I_2. Soit $x\in I_1\backslash I_1\cap I_2$. Pour tout entier l, il existe $\overline{x}(l)$ tel que $\nu_A(\overline{x}(l))\geq l$ et $x(l)=x+\overline{x}(l)\notin P$. En effet, si cela n'était pas possible, nous aurions $x+\mathfrak{m}^l\subset P$ pour $l\in\mathbb{N}$. Par conséquent, comme $x\in P$ et que P est premier, nous avons $\mathfrak{m}\subset P$, et donc $\mathfrak{m}=P$, ce qui est impossible par hypothèse sur P. Choisissons alors $y\in I_2\backslash I_1\cap I_2$. Il existe un entier k tel que $y\notin I_1+\mathfrak{m}^k$ car $y\notin I_1$. Nous avons $xy\in I_1I_2\subset I$, il existe donc des z_j tels que
$$x(l)y=xy+\overline{x}(l)y=-\sum_j f_jx_j+\overline{x}(l)y.$$
Donc $x(l)y+\sum_j f_jx_j\in\mathfrak{m}^l$. Si $\overline{y}$, $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_p$ vérifient $x(l)\overline{y}+\sum_j f_j\overline{x}_j=0$, alors $x(l)\overline{y}\in I\subset I_1\subset P$. Donc $\overline{y}\in I_1$, car $x(l)\notin P$ et I_1 et P-primaire. Donc $y-\overline{y}\notin\mathfrak{m}^k$. D'autre part, pour l assez grand (en fait pour $l>\nu_I(x)$), nous avons $\nu_I(x(l))=\nu_I(x)<+\infty$. La fonction de Artin β_x n'est donc pas majorée par une fonction de $\nu_I(x)$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, et donc I n'a qu'un idéal premier minimal associé.

Supposons maintenant que I n'a qu'un idéal minimal associé mais que I n'est ni premier ni $\mathfrak{m}$-primaire. C'est-à-dire I est P-primaire, $I\neq P$ et $P\neq\mathfrak{m}$. L'idéal P est de la forme $(I:y)$ avec $y\notin I$. Soit $x\in P\backslash P\cap I$. Alors $xy\in I$ par définition de y.

Pour tout entier l, il existe $\overline{x}(l)$ tel que $\nu_A(\overline{x}(l))\geq l$ et $x(l)=x+\overline{x}(l)\notin P$. Si cela n'était pas possible, alors, comme précédemment, nous aurions $P=\mathfrak{m}$ ce qui est contraire à l'hypothèse donc impossible.

Il existe un entier k tel que $y\notin I+\mathfrak{m}^k$ car $y\notin I$. Or $xy\in I$, donc il existe des x_j tels que
$$x(l)y=xy+\overline{x}(l)y=-\sum_j f_jx_j+\overline{x}(l)y.$$
Donc $x(l)y+\sum_j f_jx_j\in\mathfrak{m}^l$. Comme précédemment, si $\overline{y}$, $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_p$ vérifient $x(l)\overline{y}+\sum_j f_j\overline{x}_j=0$, alors $x(l)\overline{y}\in I\subset P$, donc $\overline{y}\in I$ car $x(l)\notin P$ et I est

P-primaire. Donc $y - \overline{y} \notin \mathfrak{m}^k$. Comme précédemment, la fonction de Artin β_x n'est donc pas majorée par une fonction de $\nu_I(x)$ et donc I est premier ou $\mathfrak{m}$-primaire.

Montrons finalement (iii) :
Soient x, y et i tels que $a(i+1)+b \geq \nu_I(xy) \geq ai+b+1$. C'est-à-dire $xy \in I+\mathfrak{m}^{ai+b+1}$. Il existe alors des z_k tel que $xy+\sum_k f_k z_k \in \mathfrak{m}^{ai+b+1}$. Il existe donc $\overline{x}$, $\overline{y}$ et $\overline{z}_k$ tels que $\overline{xy}+\sum_k f_k\overline{z}_k = 0$ et $x-\overline{x} \in \mathfrak{m}^{i+1}$, $y-\overline{y} \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Comme I est premier, alors soit $\overline{y} \in I$, soit $\overline{x} \in I$. D'où soit $\nu_I(x) \geq i+1$, soit $\nu_I(y) \geq i+1$. C'est-à-dire

$$\text{soit } a\nu_I(x)+b \geq \nu_I(xy),$$

$$\text{soit } a\nu_I(y)+b \geq \nu_I(xy).$$

Nous avons donc

$$\nu(xy) \leq a\max(\nu_I(x),\, \nu_I(y))+b \leq a(\nu_I(x)+\nu_I(y))+b.$$

D'où le résultat. $\square$

Remarque 3.2.3 *La preuve de ii) précédente nous montre en fait que, si I n'est ni premier ni $\mathfrak{m}$-primaire, nous n'avons aucune majoration de β_x par une fonction de $\nu_I(x)$ (même non affine).*

3.2.2 Version stable du lemme d'Artin-Rees

Nous avons en fait le résultat suivant dû à Rees [Re3] qui est un peu plus fort que celui d'Izumi :

Théorème 3.2.4 *[Re3] Soit R un anneau local nœthérien. Alors R est analytiquement irréductible si pour au moins un idéal $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{m}$-primaire, et seulement si pour tout idéal $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{m}$-primaire, il existe deux constantes a et b telles que*

$$\nu_{R,\mathfrak{I}}(gh) \leq \nu_{R,\mathfrak{I}}(g)+a\nu_{R,\mathfrak{I}}(h)+b \quad \forall g,h \in R\backslash\{0\}\ .$$

Nous en déduisons le

Théorème 3.2.5 *Soient A un anneau local nœthérien, I un idéal de A et $\mathfrak{I}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de A où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, tels que A/I soit analytiquement irréductible. Alors pour tout $x \in A$, nous avons la majoration uniforme suivante :*

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \beta_x(i) \leq i+a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x)+i_I+b$$

où β_x est la fonction de Artin de $xX_0+f_1X_1+\cdots+f_pX_p$ pour le couple $(A,\, \mathfrak{I})$.

Preuve : Soient x_0, $x_1, ..., x_p \in A$ tels que

$$xx_0 + f_1x_1 + \cdots + f_px_p \in \mathfrak{I}^{i+a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x)+i_I+b+1}.$$

Nous avons donc $\nu_{I,\mathfrak{I}}(xx_0) \geq i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + i_I + b + 1$. D'où

$$a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + \nu_{I,\mathfrak{I}}(x_0) + b \geq i + a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x) + i_I + b + 1$$

$$\nu_{I,\mathfrak{I}}(x_0) \geq i + i_I + 1.$$

Nous avons donc $x_0 = \sum_k f_k z_k + x_0'$ avec $\nu_{A,,\mathfrak{I}}(x_0') \geq i + i_I + 1$, ce qui implique que

$$\sum_{k=1}^{p} f_k(x_k + xz_k) \in \mathfrak{I}^{i+i_I+1}.$$

Il existe donc, par définition de i_I, des $t_k \in A$ qui vérifient

$$\forall k \geq 1 \quad t_k \in x_k + xz_k + \mathfrak{I}^{i+1} \text{ et } \sum_{k=1}^{p} f_k t_k = 0\,.$$

Nous posons alors $\overline{x}_0 = \sum_k f_k z_k$ et $\overline{x}_k = t_k - xz_k$ pour $k \geq 1$. Nous avons alors

$$x\overline{x}_0 + f_1\overline{x}_1 + \cdots + f_p\overline{x}_p = 0 \text{ et } \forall k\ \overline{x}_k - x_k \in \mathfrak{I}^{i+1}\,. \quad \square$$

Ce théorème nous donne l'espoir d'obtenir des bornes explicites pour le théorème d'Izumi dans le cas où $A = \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ et $\mathfrak{I}$ est l'idéal maximal de A, en travaillant sur le diagramme des exposants initiaux de $I + (x)$. Dans ce cas, nous montrons comment nous ramener au cas d'une hypersurface à l'aide d'un théorème de normalisation de Nœther dans la partie 3.2.3.
Nous formulons maintenant une version stable du lemme d'Artin-Rees :

Théorème 3.2.6 *Soient A un anneau nœthérien, $\mathfrak{I}$ un idéal P-primaire de A avec P premier et $I \subset P$ un idéal de A tel que A_P/IA_P soit analytiquement irréductible. Supposons que*

i) $\forall k \geq 1,\ \mathfrak{I}^k A_P \cap A = \mathfrak{I}^k$,

ii) $\forall k \geq 1, \forall x \in P,\ ((x) + I)\mathfrak{I}^k A_P \cap A = ((x) + I)\mathfrak{I}^k$.

Alors il existe $a \geq 1$ et $b \geq 0$ tels que nous ayons la version faible d'Artin-Rees uniforme suivante

$$((x) + I) \cap \mathfrak{I}^{i+a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x)+b} \subset ((x) + I)\,\mathfrak{I}^i \quad \forall x \in P\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Preuve : D'après i), pour tout $x \in A$, $\nu_{A,\mathfrak{I}}(x) = \nu_{A_P,\mathfrak{I}A_P}(x/1)$. D'après le théorème précédent et le théorème 3.1.1, il existe a et b tels que

$$((x)+I)\,A_P \cap \mathfrak{I}^{i+a\nu_{A_P,\mathfrak{I}A_P}(x)+b}A_P \subset ((x)+I)\,\mathfrak{I}^i A_P \quad \forall x \in PA_P\ \forall i \in \mathbb{N}$$

car A_P/IA_P est analytiquement irréductible. Choisissons $x \in P$ et $i \in \mathbb{N}$, nous avons alors

$$((x)+I) \cap \mathfrak{I}^{i+a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x)+b} \subset ((x)+I)\,A_P \cap \mathfrak{I}^{i+a\nu_{I,\mathfrak{I}}(x)+b}A_P \subset ((x)+I)\,\mathfrak{I}^i A_P\,.$$

Le résultat découle alors de l'hypothèse ii). $\square$

Remarque 3.2.7 *Ceci est vrai en particulier si A est local, $P = \mathfrak{m}$ est son idéal maximal, $\mathfrak{I}$ est $\mathfrak{m}$-primaire et A/I est analytiquement irréductible.*

Remarque 3.2.8 *Il existe deux versions de ce que l'on appelle lemme d'Artin-Rees uniforme [Hu] et [B-M1] qui sont à ne pas confondre avec cette version stable.*

3.2.3 Réduction au cas des hypersurfaces dans le cas de caractéristique nulle

Nous allons montrer ici, pour le problème qui est de déterminer des bornes explicites au théorème d'Izumi, comment se ramener au cas des hypersurfaces. Nous utilisons ici une version du théorème de normalisation de Nœther due à M. Hickel [H3].

Proposition 3.2.9 *Supposons que car$\mathbb{k} = 0$. Soit I un idéal premier de $\mathcal{O}_N$ tel que dim $\mathcal{O}_N/I = p$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}_p[T_{p+1}]$, irréductible, tel que si le théorème d'Izumi est vrai pour $\mathcal{O}_{p+1}/(P)$ avec les constantes a et b alors il est vrai pour $\mathcal{O}_N/I$ avec les constantes a et $b + 2(c - ord(\Delta))$ où Δ est le discriminant de P vu comme polynôme en T_{p+1} et c est la constante du lemme d'Artin-Rees pour l'idéal (Δ).*

Soit I un idéal premier de $\mathcal{O}_N$. D'après le théorème de normalisation de Nœther, on peut supposer qu'il existe p tel que le morphisme $\mathcal{O}_p \longrightarrow \mathcal{O}_N/I$, induit par l'injection $\mathcal{O}_p \longrightarrow \mathcal{O}_N$, soit injectif et fini.
Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$, respectivement les corps de fractions de $\mathcal{O}_p$ et $\mathcal{O}_N/I$. Nous avons $\mathbb{K}' = \mathbb{K}.\mathcal{O}_N/I$. En effet, soit $x \in \mathcal{O}_N/I$, alors x est entier sur $\mathcal{O}_p$, c'est-à-dire annule un polynôme de la forme $X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ où les a_i sont dans $\mathcal{O}_p$. Alors $\frac{1}{x} = -\frac{1}{a_n}(a_{n-1} + \cdots + a_1x^{n-2} + x^{n-1})$ donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{K}.\mathcal{O}_N/I$.
L'extension de corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ est finie. Or $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(\overline{T}_{p+1}, ..., \overline{T}_N)$, donc le théorème de l'élément primitif, car $car\mathbb{k} = 0$, nous permet de dire que $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(\overline{T}_{p+1})$

quitte à faire un changement linéaire de coordonnées.

Soit P le polynôme minimal de $\overline{T}_{p+1}$ sur $\mathbb{K}$. Alors $P \in \mathcal{O}_p[X]$. En effet P est irréductible et ses racines sont conjuguées dans un sur-corps de $\mathbb{K}$. Comme $\overline{T}_{p+1}$ est entier sur $\mathcal{O}_p$, les autres racines de P le sont aussi et donc les coefficients de P, qui sont des fonctions polynomiales de ces racines, sont entiers sur $\mathcal{O}_p$. Or $\mathcal{O}_p$ est normal donc ces coefficients sont dans $\mathcal{O}_p$.

Notons Δ le discriminant de P. Si $x \in \mathcal{O}_N/I$, alors $\Delta x \in \mathcal{O}_p[\overline{T}_{p+1}] \subset \mathcal{O}_p[[\overline{T}_{p+1}]]$. En effet nous avons (d'après Van der Monde)

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta = \prod_{1\leq i<j\leq n}(z_i - z_j)^2 = \left(\text{Dét}(z_i^k)_{\left\{\begin{array}{c} 1\leq i\leq n \\ 0\leq k\leq n-1\end{array}\right\}}\right)^2$$

où les z_i sont les racines de P.

L'élément x peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{k=0}^{d-1} x_k \overline{T}_{p+1}^k$ où d est le degré du polynôme P et les x_i sont dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{K}''$ un sur-corps de $\mathbb{K}$ qui contient tous les conjugués de $\overline{T}_{p+1}$, noté $z_1, ..., z_d$ (avec la convention $z_1 = \overline{T}_{p+1}$). Il existe σ_1,..., σ_m des $\mathbb{K}$-automorphismes de $\mathbb{K}''$ tels que $\sigma_i(\overline{T}_{p+1}) = z_i$ pour tout i. Considérons le système de d équations linéaires en d variables x_k suivant :

$$\sigma_i(x) = \sum_{k=0}^{d-1} x_k z_i^k\,, \quad i = 1, ..., d$$

Son déterminant, noté D, a pour carré $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta$. Par Cramer, nous voyons que les solutions de ce système sont de la forme $r_k/\sqrt{D}$ où les r_k sont des polynômes en les $\sigma_i(x)$ et les z_i^k. Pour tout k, r_k est entier sur $\mathcal{O}_p$ et donc $\Delta x_k = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sqrt{D}\, r_k$ est entier sur $\mathcal{O}_p$. De plus Δx_k est dans $\mathbb{K}$, donc $\Delta x_k \in \mathcal{O}_p$, par normalité de $\mathcal{O}_p$.

Enfin, l'anneau local $\mathcal{O}_N/I$ domine $\mathcal{O}_p[[\overline{T}_{p+1}]]$ donc la fonction ord est bien définie.

Soient x et y dans $\mathcal{O}_N/I$. Alors $\text{ord}(\Delta x\Delta y) \geq 2\text{ord}(\Delta)+\text{ord}(xy)$. Si le théorème d'Izumi est vrai pour $\mathcal{O}_p[[\overline{T}_{p+1}]]$, alors il existe a et b des constantes telles que $\text{ord}(\Delta x\Delta y) \leq a(\text{ord}(\Delta x) + \text{ord}(\Delta y)) + b$. Or, d'après le lemme d'Artin-Rees, $\text{ord}(\Delta x) \leq \text{ord}(x) + c$ où c est une constante indépendante de x. D'où

$$\text{ord}(xy) \leq a(\text{ord}(x) + \text{ord}(y)) + b - 2\text{ord}(\Delta) + 2c$$

et le théorème d'Izumi est vrai pour $\mathcal{O}_N/I$. $\square$

3.2.4 Etude de la fonction $x \longmapsto i_{I+(x)}$

D'après le théorème 3.2.2, une manière d'appréhender le théorème d'Izumi est donc de trouver une majoration de $i_{I+(x)}$ (avec les notations précédentes) en fonction de $\nu_I(x)$. La question qui se pose est de savoir comment varie $i_{I+(x)}$ avec x, où $I = (f_1, ..., f_p)$. Nous allons nous placer dans le cas où $A = \mathcal{O}_N$ et $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$. Nous donnons ici quelques remarques sur la fonction

$$\mathcal{O}_N \longmapsto \mathbb{N}$$

$$x \longrightarrow i_{I+(x)}$$

Tout d'abord nous avons le

Lemme 3.2.10 *Soit I un idéal propre de A. Si I n'est pas premier alors la fonction $x \longmapsto i_{I+(x)}$ n'est pas localement bornée pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.*

Preuve : Cela découle directement de la preuve du ii) du théorème 3.2.2. $\square$

Lemme 3.2.11 *Soit I un idéal propre de A. La fonction $x \longmapsto i_{I+(x)}$ est uniformément bornée par une constante si et seulement si I est $\mathfrak{m}$-primaire.*

Preuve : Supposons que I est $\mathfrak{m}$-primaire. Donc nous avons $\mathfrak{m}^n \subset I \subset \mathfrak{m}$ pour un certain entier n. Soit $i \geq n$, nous avons alors

$$I \cap \mathfrak{m}^i = \mathfrak{m}^i = \mathfrak{m}^n\mathfrak{m}^{i-n} \subset I\mathfrak{m}^{i-n} \ .$$

De la même manière, pour tout x non inversible, $\mathfrak{m}^n \subset I + (x) \subset \mathfrak{m}$, donc $(I + (x)) \cap \mathfrak{m}^i \subset (I + (x))\mathfrak{m}^{i-n}$.
Supposons maintenant que la fonction $x \longmapsto i_{I+(x)}$ est uniformément bornée par une constante n. Supposons que I n'est pas $\mathfrak{m}$-primaire. Soit P un premier minimal de I différent de $\mathfrak{m}$ et $x \notin P$ d'ordre $i > n$. Alors $x \in (I + (x)) \cap \mathfrak{m}^i \subset (I + (x))\mathfrak{m}^{i-n}$. Il existe alors des $f_j \in I$, des $y_j \in A$ et $z_j \in \mathfrak{m}^{i-n}$ tels que $x = \sum_j (f_j + y_jx)z_j$. Donc $x(1 - \sum_j y_jz_j) = \sum_i f_jz_j \in P$. Comme $i > n$, $1 - \sum_j y_jz_j$ est inversible et $x \in P$ ce qui contredit l'hypothèse et donc I est $\mathfrak{m}$-primaire. $\square$

Le théorème 3.1.5 nous donne :

Lemme 3.2.12 *Soit I un idéal propre de A. La fonction $x \longrightarrow i_{I+(x)}$ est semi-continue inférieurement pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.*

Preuve : Soit x fixé dans $\mathcal{O}_N$. Soit $(g_1, ..., g_q)$ une base standart de $I+(x)$ ordonnée pour la valuation ord. Notons $\lambda = i_{I+(x)}$; d'après le théorème 3.1.5, nous avons deux cas possibles :

1.
$$\lambda < \mathrm{ord}(g_2)$$
$$\text{et pour tout } j > 1,\ g_j \in \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_j)-\lambda} g_1 \ .$$

2.
$$\mathrm{ord}(g_r) \leq \lambda < \mathrm{ord}(g_{r+1})$$
$$\text{et pour tout } j > r,\ g_j \in \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_j)-\lambda} g_1 + \cdots + \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_j)-\lambda} g_r$$
$$\text{et } g_r \notin \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_r)-\lambda} g_1 + \cdots + \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_r)-\lambda} g_{r-1}$$

Si $I+(x)$ est $\mathfrak{m}$-primaire, alors il est clair que $I+(x+\varepsilon)$, pour ε d'ordre grand, reste $\mathfrak{m}$-primaire avec la même base standart.
Si $I+(x)$ n'est pas $\mathfrak{m}$-primaire, soit ε d'ordre grand et considérons une base standart de $I+(x+\varepsilon)$. Elle sera de la forme

$$g_1 + \varepsilon_1(\varepsilon), ..., g_q + \varepsilon_q(\varepsilon), g_{q+1}(\varepsilon), ..., g_{q(\varepsilon)}(\varepsilon)$$

où les termes sont ordonnés pour ord, avec $\mathrm{ord}(\varepsilon_j(\varepsilon)) \geq \mathrm{ord}(\varepsilon)$ et, pour $j > q$, $\mathrm{ord}(g_j(\varepsilon)) \geq \mathrm{ord}(\varepsilon)$, d'après l'algorithme de division de Hironaka.
Considérons la condition $g_r \notin \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_r)-\lambda} g_1 + \cdots + \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_r)-\lambda} g_{r(\lambda)-1}$. Notons $k = \mathrm{ord}(g_r) - \lambda$. La condition précédente signifie qu'il n'existe pas de $x_{j,i_1,...,i_k}$ qui annulent en les g_j le polynôme suivant :

$$P(X_{j,i_1,...,i_k}, G_j) = G_r + G_1 \sum_{i_1,...,\, i_k} T_{i_1}...T_{i_k} X_{1,i_1,...,i_k} + \cdots$$
$$+ G_{r-1} \sum_{i_1,...,\, i_k} T_{i_1}...T_{i_k} X_{r-1,i_1,...,i_k} \ .$$

Cela veut encore dire que g_r n'appartient pas à l'idéal engendré par les $T_{i_1}...T_{i_k} g_j$. Notons K l'idéal engendré par ces éléments. Nous avons donc $g_r \notin K$. Notons c l'entier qui vérifie $e^{-c} = d(g_r, K)$. Pour ε d'ordre $e > c$, considérons l'idéal K_ε engendré par les $T_{i_1}...T_{i_k}(g_j + \varepsilon_j(\varepsilon))$. Soit $x \in K_\varepsilon$, alors $d(x, K) \leq e^{-e}$. Nous avons aussi $d(g_r, g_r + \varepsilon_r(\varepsilon)) \leq e^{-e}$. Donc nous avons $d(g_r + \varepsilon_r(\varepsilon), K_\varepsilon) = e^{-c}$ et

$$g_r + \varepsilon_r(\varepsilon) \notin \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_j)-\lambda}(g_1 + \varepsilon_1(\varepsilon)) + \cdots + \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(g_j)-\lambda}(g_{r(\lambda)-1} + \varepsilon_{r-1}(\varepsilon)) \ .$$

Donc sur un voisinage de x, la fonction ci-dessus ne peut que croître. $\square$

3.2.5 Exemples

Nous donnons ici quelques exemples explicites, toujours dans le cas où l'idéal $\mathfrak{I}$ est l'idéal maximal de l'anneau A. Nous noterons alors $\mathfrak{m}$ cet idéal. Dans la suite, l'anneau $\mathcal{O}_N$ désignera indifféremment l'anneau des séries formelles en N variables sur un corps $\mathbb{k}$ et l'anneau des séries convergentes en N variables sur $\mathbb{k}$ (quand cela a un sens).

Premier exemple

Si l'anneau gradué $Gr_{\mathfrak{m}}\frac{A}{I}$ est intègre alors $\nu_{A,\,I}$ est une valuation, i.e.

$$\nu_{A,\,I}(gh) = (\nu_{A,\,I}(g) + \nu_{A,\,I}(h)) \quad \forall g, h \in A$$

En particulier d'après le théorème 3.2.2, la fonction de Artin du polynôme $xX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_pX_p$ (où $I = (f_1, ..., f_p)$) est bornée par une fonction de la forme $i \longmapsto i + \nu_{A,\,I}(x) + p$.
C'est le cas par exemple si $I = (f)$ et f est irréductible et homogène de degré p dans $\mathcal{O}_N$.

Deuxième exemple

Nous allons donner tout d'abord le

Lemme 3.2.13 *Soit $L(X_1, ..., X_n) = f_1X_1 + \cdots + f_nX_n \in \mathcal{O}_N[X_1, ..., X_n]$ avec ord$(f_1) \leq$ ord$(f_2) \leq ... \leq$ ord(f_n). Supposons que les termes de plus bas ordre (termes initiaux) des f_k forment une suite régulière. Alors L admet une fonction de Artin qui est majorée, pour tout $i \geq 0$, par la fonction affine $i \longmapsto i +$ ord(f_n).*

Preuve : Les termes initiaux des f_k formant une suite régulière, les f_k forment une suite régulière et nous savons donc que les zéros de L sont de la forme

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k z(k,1), ..., \sum_{k=1}^{n} f_k z(k,n)\right)$$

avec $z(k,j) = -z(j,k)$ pour tous k et j. En particulier $z(k,k) = 0$ pour tout k.
Dans la suite, pour tout élément x de $\mathcal{O}_N$, nous noterons $x(p)$ le terme homogène de degré p de x.
Soient x_1,..., $x_n \in \mathcal{O}_N$ tels que $f_1x_1 + \cdots + f_nx_n \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)+1}$. Si nous avons $\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j)) \geq i + \mathrm{ord}(f_n) + 1$, nous posons $\overline{x}_j = 0$ pour tout j. Nous avons

$L(\overline{x}) = 0$ et $x_j - \overline{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout j.
Dans le cas contraire, nous allons construire, par récurrence sur $\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j))$, des éléments $\overline{x}_j$, pour tout j, tels que $\sum_j f_j\overline{x}_j = 0$ et $\overline{x}_j - x_j \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)-\mathrm{ord}(f_j)+1}$ pour tout j.
Comme $\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j)) < i + \mathrm{ord}(f_n) + 1$, nous avons

$$in\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathrm{ord}(f_j))x_j(\mathrm{ord}(x_j))\right) = 0$$

où $in(x)$ désigne le terme initial de x pour ord. C'est-à-dire

$$\sum_{j\in I_1} f_j(\mathrm{ord}(f_j))x_j(\mathrm{ord}(x_j)) = 0$$

où I_1 est l'ensemble

$$I_1 := \{j \in \{1, ..., n\} \,/\, \mathrm{ord}(f_jx_j) \leq \mathrm{ord}(f_kx_k),\ \forall k \in \{1, ..., n\}\}\,.$$

Il existe donc des polynômes homogènes $z^1(k, j) \in \mathcal{O}_N$ tels que

$$z^1(k, j) = 0 \text{ si } j \notin I_1,\ z^1(k, j) = -z^1(j, k)$$

$$\text{et } x_j(\mathrm{ord}(x_j)) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\mathrm{ord}(f_k))z(k, j) \text{ pour tout } j \in I_1$$

car les termes initiaux des f_j, où $j \in I_1$, forment une suite régulière. Nous posons alors

$$x_j^1 = x_j - \sum_{k=1}^{n} f_k z^1(k, j)\ \forall j.$$

Nous avons donc $f_1x_1^1 + \cdots + f_nx_n^1 \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)+1}$ et $\mathrm{ord}(x_j^1) > \mathrm{ord}(x_j)$ si $j \in I_1$ et $\mathrm{ord}(x_j^1) = \mathrm{ord}(x_j)$ sinon. Nous avons aussi que

$$\min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j)) < \min_j(\mathrm{ord}(f_jx_j^1)).$$

Nous pouvons alors continuer ce processus jusqu'au rang l de manière à avoir contruit des x_j^l tels que $f_jx_j^l \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)+1}$ pour tout j avec

$$x_j^l = x_j - \sum_{k=1}^{n} f_k\overline{z}(k, j) \text{ tels que } \overline{z}(k, j) = -\overline{z}(j, k)\ \forall k,\ j.$$

C'est-à-dire qu'il existe $\overline{x}_j = \sum_{j=1}^{n} f_k\overline{z}(k, j)$ tels que

$$f_1\overline{x}_1 + \cdots + f_n\overline{x}_n = 0$$

$$\text{et } \forall j,\ x_j - \overline{x}_j \in \mathfrak{m}^{i+\mathrm{ord}(f_n)-\mathrm{ord}(f_j)+1} \subset \mathfrak{m}^{i+1}. \quad \square$$

Nous en déduisons le

Corollaire 3.2.14 *Soit $I = (f_1, ..., f_n)$ un idéal de $\mathcal{O}_N$. Si l'idéal engendré par les termes initiaux des éléments de I est premier et d'intersection complète alors nous avons l'inégalité*

$$\nu_I(gh) \leq 2(\nu_I(g) + \nu_I(h)) + 3i_I \quad \forall f, g \in \mathcal{O}_N$$

où i_I est tel que $i \longmapsto i + i_I$ majore la fonction de Artin de $\sum_k f_k X_k$.

Preuve : Soit $f_1, ..., f_n$ une famille d'éléments de I dont les termes initiaux forment une suite régulière et engendrent l'idéal des termes initiaux de I. Alors cette famille engendre I en tant qu'idéal. Soit $f \in \mathcal{O}_N$ et f' son reste après division par I (théorème de division de Grauert-Hironaka cf. [A-H-V]). Si $f' = 0$, alors $f \in I$ et la fonction de Artin de $fX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_nX_n$ est bornée par $i \longmapsto i + i_I$.
Si $f' \neq 0$, alors $\nu_I(f) = \nu_I(f')$, et la suite formée des termes initiaux des f_l et du terme initial de f' est régulière. En effet, en notant $in(g)$ le terme initial de $g \in \mathcal{O}_N$, supposons qu'il existe $x \in in(I + (f))$ tel que nous ayons $x\, in(f') = 0$ dans $in(I+(f))/(in(f_1, ..., f_n))$. Comme $in(I)$ est premier, nécessairement $x \in in(I)$ et donc la suite $(in(f_1), ..., in(f_n), in(f'))$ est régulière.
D'après le théorème 3.1.1, la fonction de Artin de $fX_0 + f_1X_1 + \cdots + f_nX_n$ est égale à celle de $f'X_0 + f_1X_1 + \cdots + f_nX_n$ qui est bornée par

$$i \longmapsto i + \max\{\mathrm{ord}(f'), i_I\} \leq i + \mathrm{ord}(f') + i_I.$$

En utilisant alors le (ii) de la proposition 3.2.2, nous voyons que $\mathcal{O}_N/I$ admet une ICL avec les coefficients 2 et $3i_I$. $\square$

Troisième exemple

Soit $f = T_1^2 + g(T_2, T_3) \in \mathcal{O}_3$ avec $g(0, 0) = 0$. Alors d'après [I2], (f) admet une ICL avec les coefficients 1 et $\mathrm{ord}(g) - 2$ si $\mathrm{ord}(g)$ est impair. Donc la fonction de Artin de $xX_0 + fX_1$ est bornée par

$$i \longmapsto i + \nu_{(f),\mathfrak{m}}(x) + \mathrm{ord}(g) \ .$$

Quatrième exemple

Nous allons donner une ICL dans le cas où $f = T_1^k + g \in \mathcal{O}_N$ sous l'hypothèse $\mathrm{ord}(g) = k + 1$ et T_1 ne divisant pas le terme initial de g. Nous avons tout d'abord le

Lemme 3.2.15 *Soit $f = T_1^k + g$ avec $ord(g) = k + 1$ et T_1 ne divisant pas le terme initial de g. Alors pour tout h la fonction de Artin de $fX + hY$ est bornée par*

$$i \longmapsto i + \max\{k, \nu_{f,\mathfrak{m}}(h) + 1\}.$$

Preuve : Soit $h = af + h_0T_1^l + \sum_{j\geq 1} h_j$ avec $l < k$ et T_1 ne divisant pas h_0, et les h_j sont homogènes de degré $j > \mathrm{ord}(h_0) + l$ et ne sont pas divisibles par T_1^k. Notons $h' = h_0T_1^l + \sum_{j\geq 1} h_j$.
Soient x et y tels que $fx + hy \in \mathfrak{m}^{i+\max\{k,\,\nu_{f,\mathfrak{m}}(h)\}+2}$. Nous avons donc

$$f(x + ay) + h'y \in \mathfrak{m}^{i+\max\{k,\,\nu_{f,\mathfrak{m}}(h)\}+2}.$$

Nous pouvons faire le changement de variables $X = X+aY$, $Y = Y$ et supposer que $h = h'$.
Notons x_j le terme homogène de degré j dans l'écriture de x (idem pour y). Si $\mathrm{ord}(x) \geq i+\max\{k,\, \nu_{f,\mathfrak{m}}(h)+1\}-k+1 \geq i+1$, nous posons $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Nous avons bien $\overline{x} - x$, $\overline{y} - y \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $f\overline{x} + h'\overline{y} = 0$.
Autrement nous avons

$$T_1^k x_{\mathrm{ord}(x)} + h_0T_1^l y_{\mathrm{ord}(y)} = 0$$

$$T_1^k x_{\mathrm{ord}(x)+1} + in(g)x_{\mathrm{ord}(x)} + h_0T_1^l y_{\mathrm{ord}(y)+1} + h_1 y_{\mathrm{ord}(y)} = 0.$$

La première équation nous donne que T_1^{k-l} divise $y_{\mathrm{ord}(y)}$. La seconde équation nous donne alors que $T_1^{min\{l,\,k-l\}}$ divise $x_{\mathrm{ord}(x)}$.
Si $l \leq k-l$ alors nous avons $x_{\mathrm{ord}(x)} = h_0T_1^l z_0$ et $y_{\mathrm{ord}(y)} = T_1^k z_0$. Nous posons alors $x(1) = x - hz_0$ et $y(1) = y + fz_0$. Nous avons $\mathrm{ord}(x(1)) > \mathrm{ord}(x)$ et $\mathrm{ord}(y(1)) > \mathrm{ord}(y)$.
Si $l > k-l$, la première équation nous donne que $T_1^{2(k-l)}$ divise $y_{\mathrm{ord}(y)}$ et la seconde que $T_1^{min\{l,\,2(k-l)\}}$ divise $x_{\mathrm{ord}(x)}$.
Par induction nous pouvons continuer cette procédure jusqu'au rang p tel que $l \leq p(k-l)$ et tel que $T_1^{min\{l,\,p(k-l)\}} = T_1^l$ divise $x_{\mathrm{ord}(x)}$. Il existe donc z_0 tel que $x_{\mathrm{ord}(x)} = h_0T_1^l z_0$ et $y_{\mathrm{ord}(y)} = T_1^k z_0$. Nous posons alors $x(1) = x - hz_0$ et $y(1) = y + fz_0$. Nous avons $\mathrm{ord}(x(1)) > \mathrm{ord}(x)$ et $\mathrm{ord}(y(1)) > \mathrm{ord}(y)$.
Nous recommençons alors la procédure précédente et nous construisons ainsi z tel que $\mathrm{ord}(x - hz) \geq i + \max\{k,\, \nu_{f,\mathfrak{m}}(h)\} - k + 1 \geq i+1$. Nous posons alors $\overline{x} = hz$ et $\overline{y} = -fz$. Clairement $\overline{x} - x$, $\overline{y} - y \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $f\overline{x} + h'\overline{y} = 0$. □

D'après la proposition 3.2.2, nous voyons donc que le germe d'hypersurface défini par $f = T_1^k + g = 0$ avec $\mathrm{ord}(g) = k+1$ et $\mathrm{pgcd}(T_1,\, \mathrm{in}(g)) = 1$ admet une ICL :

$$\nu_\xi(gh) \leq 2(\nu_\xi(g) + \nu_\xi(h)) + 3k \quad \forall g, h \in \mathcal{O}_N.$$

3.3 Etude de la fonction de Artin de $X_1X_2-X_3X_4$

Nous donnons ici un exemple de polynôme dont la fonction de Artin n'est pas bornée par une fonction affine. Nous utilisons pour cela le théorème d'Izumi appliqué au germe d'hypersurface de $\Bbbk^N$ définie par l'équation $T_1T_2 - T_3^i = 0$ pour $i \geq 2$, c'est-à-dire avec une singularité A_{i-1} (cf. exemple (iv) de [I2]).

Théorème 3.3.1 *La fonction de Artin du polynôme*

$$X_1X_2 - X_3X_4 \in \mathcal{O}_N[X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4]$$

est bornée inférieurement par la fonction $i \longmapsto i^2 - 1$*, pour* $i > 2$*, si* $N \geq 3$*.*

Nous savions déjà qu'en général une fonction de Artin n'était pas bornée par une fonction affine. L'exemple étudié ici correspond à une singularité isolée d'hypersurface. La fonction de Artin-Greenberg des singularités isolées d'hypersurface a déjà été étudiée (cf. [LJ1] et [H1]).

Preuve : Appelons P le polynôme $X_1X_2 - X_3X_4$ et fixons un entier $i > 2$ quelconque. Notons $x_1(i) := T_1^i$, $x_2(i) := T_2^i$ et $x_3(i) := T_1T_2 - T_3^i$. Nous avons

$$x_1(i)x_2(i) = \big(x_3(i) + T_3^i\big)^i = x_3(i)x_4(i) + T_3^{i^2}$$

avec $x_4(i)$ bien choisi. Nous avons donc

$$P(x_1(i),\, x_2(i),\, x_3(i),\, x_4(i)) \in \mathfrak{m}^{i^2}.$$

Supposons que nous ayons x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que $P(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = 0$, alors deux cas peuvent se produire :

1- Soit $x_3 - x_3(i) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Alors x_3 est irréductible. En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe x et y tels que $xy = x_3$. Alors nous avons $xy - x_3(i) \in \mathfrak{m}^{i+1}$, ce qui est impossible. En effet, d'après le lemme 3.3.2 dont nous donnons la preuve à la fin, la fonction de Artin du polynôme $XY - x_3(i)$ est la fonction constante égale à i. Donc x_3 est irréductible.
Alors soit $x_1 \in (x_3)$, soit $x_2 \in (x_3)$. Or

$$\sup_{f\in\mathcal{O}_N} \big(\mathrm{ord}(x_1(i) - fx_3)\big) = \sup_{f\in\mathcal{O}_N} \big(\mathrm{ord}(x_2(i) - fx_3)\big) = i$$

car les termes initiaux de $x_1(i)$ et de $x_2(i)$ ne sont pas divisibles par T_1T_2.

2- Soit $\mathrm{ord}\big(x_3 - x_3(i)\big) \leq i$.

Dans tous les cas nous avons

$$\sup\left(\min_{j=1,..,4}(\mathrm{ord}(x_j(i)-x_j))\right)\leq i$$

où la borne supérieure est prise sur tous les 4-uplets (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $P(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. La fonction de Artin de P est donc minorée par la fonction $i \longrightarrow i^2 - 1$. $\square$
Nous donnons maintenant la preuve du lemme utilisé :

Lemme 3.3.2 *Pour $i > 2$, la fonction de Artin du polynôme $XY - x_3(i) \in \mathcal{O}_N[X, Y]$ est la fonction constante égale à i.*

Preuve : Soient x et y dans $\mathcal{O}_N$, non inversibles, tels que $xy - x_3(i) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Ecrivons

$$x=\sum_{j=1}^{i+1}x_j \quad \text{et} \quad y=\sum_{j=1}^{i+1}y_j$$

où x_j (resp. y_j) est le terme homogène d'ordre j dans l'écriture de x (resp. de y). Quitte à intervertir x et y, nous avons nécessairement $x_1 = aT_1$ et $y_1 = a^{-1}T_2$. Nous allons montrer par induction, que pour tout $j \in \{1, ..., i-2\}$, $x_j \in (T_1)$ et $y_j \in (T_2)$. Supposons que ceci soit vrai pour $j \in \{1, ..., n-1\}$ avec $n < i-1$. Le terme homogène d'ordre $n+1$ de xy est nul car $n+1 < i$. Nous avons alors

$$aT_1y_n + a^{-1}T_2x_n + \sum_{j=2}^{n-1}x_jy_{n+1-j} = 0$$

Par hypothèse de récurrence, $\sum_{j=2}^{n-1} x_jy_{n+1-j} \in (T_1T_2)$. Par factorialité de $\mathcal{O}_N$, nous voyons donc que $y_n \in (T_2)$ et $x_n \in (T_1)$.
Le terme homogène d'ordre i de xy est donc égal à

$$aT_1y_{i-1} + a^{-1}T_2x_{i-1} + \sum_{j=2}^{i-2}x_jy_{i-j}.$$

Or ce terme appartient à l'idéal engendré par T_1 et T_2. Il ne peut donc pas être égal à T_3^i. Il n'existe donc pas de tels x et y, d'où le résultat. $\square$

3.4 Fonction de Artin d'un monôme

Nous allons utiliser ici les résultats précédents pour montrer que la fonction de Artin de certains polynômes, en particulier des monômes, est bornée par une fonction affine, dans le cas où l'anneau de base est réduit et vérifie la PA, ou est analytiquement irréductible. Nous avons tout d'abord le résultat suivant qui est un corollaire direct de la proposition 3.2.2 :

Théorème 3.4.1 *Soit*

$$g(X,\,Y,\,Z_j):=XY+\sum_{j=1}^{p}f_jZ_j$$

avec $I=(f_1,...,\,f_p)$ un idéal propre de A nœthérien tel que A/I soit analytiquement irréductible. Alors g admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine.

Nous donnons ensuite une généralisation du corollaire 3.4.1 :

Théorème 3.4.2 *Soient A un anneau local nœthérien et $I=(f_j)$ un idéal de A tels que A/I soit réduit et A vérifie la PA, ou tels que A/I soit analytiquement irréductible. Alors tout polynôme à coefficients dans A de la forme $f\prod_{k=1}^{r}X_k^{n_k}+\sum_{j=1}^{p}f_jZ_j$ admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine.*

Remarque 3.4.3 *Le théorème précédent est vrai en particulier pour un monôme vu comme polynôme à coefficients dans un anneau réduit et vérifiant la PA, ou analytiquement irréductible.*

Preuve : Notons $g(X_k,\,Z_j)=f\prod_{k=1}^{r}X_k^{n_k}+\sum_{j=1}^{p}f_jZ_j$.

Première étape : Nous allons d'abord nous ramener au cas où $I=(0)$, c'est-à-dire au cas où g est un monôme. Nous notons $\overline{g}(X_k)$ le polynôme $f\prod_{k=1}^{r}X_k^{n_k}\in A/I[X_k]$ et supposons que ce polynôme admette une fonction de Artin bornée par une fonction affine $a\longmapsto ai+b$. Soient $x_1,...,\,x_r,\,y_1,...,\,y_p$ tels que $g(x_k,\,y_j)\in\mathfrak{m}^{i+1}$. Alors $\overline{g}(x_k)\in\mathfrak{m}^{i+1}$ et donc il existe $\overline{x}_k\in A$ tel que $\overline{g}(\overline{x_k})=0$ dans A/I et $\overline{x}_k-x_k\in\mathfrak{m}^{\frac{i-b}{a}}$. Donc il existe des z'_j tels que $f\prod_{k=1}^{r}\overline{x}_k^{n_k}=\sum_j f_jz'_j$ dans A. D'où $\sum_j f_j(z_j+z'_j)\in\mathfrak{m}^{\frac{i-b}{a}}$ et d'après Artin-Rees (théorème 3.1.1) il existe des t_j tels que $\sum_j f_jt_j=0$ et $t_j-(z_j+z'_j)\in\mathfrak{m}^{\frac{i-b}{a}-i_0}$ où i_0 ne dépend que de I. Nous posons alors $\overline{z}_j=t_j-z'_j$ pour tout j. Nous avons alors $g(\overline{x}_k,\,\overline{z}_j)=0$, et $\overline{x}_k-x_k\in\mathfrak{m}^{\frac{i-b}{a}}$ et $\overline{z}_j-z_j\in\mathfrak{m}^{\frac{i-b}{a}-i_0}$ pour tous k et j. Il nous suffit donc de montrer que $\overline{g}$ admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.

Deuxième étape : Nous allons nous ramener au cas où $f=1$. Nous avons

$f\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}=0$ si et seulement si $\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\in((0):f)$. De plus si nous avons $f\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\in\mathfrak{m}^{i+1}$, alors d'après Artin-Rees, il existe i_0 qui ne dépend que de $((0):f)$, tel que $\prod_{k=1}^r x_k^{n_k}\in((0):f)\mathfrak{m}^{i-i_0+1}$. Donc montrer que le polynôme $f\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}\in A[X_k]$ admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine revient à montrer que $\prod_{k=1}^r X_k^{n_k}\in A/((0):f)[X_k]$ admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.
Nous pouvons remarquer que si A est réduit et si $x^k\in((0):(f))$ alors $fx^k=0$ et donc $xf=0$ et $x\in((0):f)$, d'où $((0):f)$ est radical et $A/((0):f)$ est réduit.
De même nous pouvons remarquer que si A est analytiquement irréductible alors A est intègre et donc $((0):f)=(0)$. Donc $A/((0):f)=A$ est analytiquement irréductible.

Troisième étape : Nous allons traiter le cas où A/I est analytiquement irréductible. Supposons que $f=1$. Soit $i\in\mathbb{N}$ et soient $x_1,...,x_r$, $y_1,...,y_p$ tels que $g(x_k,\,y_j)\in\mathfrak{m}^{i+1}$. Alors nous avons

$$\nu_I(\prod_{k=1}^r x_k^{n_k})\geq i+1$$

$$\text{et } a\left(\nu_I(\prod_{k=1}^{r-1} x_k^{n_k}),\,\nu_I(x_r^{n_r})\right)+b\geq i+1$$

où a et b sont les constantes d'une ICL vérifiée par I. Par récurrence sur r il existe $k\in\{1,...,r\}$ tel que

$$\nu_I(x_k^{n_k})\geq\left\lfloor\frac{i-b'}{a'}\right\rfloor+1$$

pour a' et b' des constantes indépendantes des x_k, des y_k et de i et où $\lfloor c\rfloor$ est la partie entière de c. Ensuite si $\nu_I(x^n)\geq\lfloor\frac{i-b'}{a'}\rfloor+1$, alors par récurrence sur n nous avons

$$\nu_I(x)\geq\left\lfloor\frac{i-b''}{a''}\right\rfloor+1$$

pour a'' et b'' des constantes indépendantes de x et de i. Donc le théorème est prouvé pour A/I analytiquement irréductible.

Quatrième étape : Nous allons montrer qu'il suffit, dans le cas où A est réduit et vérifie la PA, de montrer le résultat pour A complet nœthérien et régulier et I radical. Cela découle des lemmes 1.2.1 et 1.2.2, et du lemme suivant :

Lemme 3.4.4 *Soit A un anneau local réduit nœthérien vérifiant la PA. Alors $\widehat{A}$ (le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique) est réduit.*

Nous donnerons une preuve de ce résultat à la fin.

Dernière étape : Supposons maintenant que A est complet, nœthérien et régulier et I radical et soient $i \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_p$ fixés tels que $g(x_k, y_j) \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Soit

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_q$$

la décomposition primaire de I avec les P_j premiers. Alors nous avons

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{n_k} \in P_1 \cap ... \cap P_q + \mathfrak{m}^{i+1} .$$

Donc pour tout j, $\prod_{k=1}^{r} x_k^{n_k} \in P_j + \mathfrak{m}^{i+1}$. Donc d'après ce qui précède, il existe k tel que $x_k \in P_j + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d}{c} \rfloor + 1}$ avec c et d des constantes qui ne dépendent que des P_j. Fixons $k \in \{1, ..., r\}$. Notons J_k l'ensemble des j tel que $x_k \in P_j + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d}{c} \rfloor + 1}$. Donc pour tout $j \in J_k$,

$$x_k = \sum_{l \in H_j} p_{j,l} x_{j,l} + m_{k,j}$$

où les $p_{j,l}$ (quand l parcourt l'ensemble H_j) engendrent P_j et $m_{k,j} \in \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d}{c} \rfloor + 1}$ pour tout j. Soit l_{j_1,j_2} la forme linéaire

$$l_{j_1,j_2}(X_{j_1,l}, X_{j_2,l'}) := \sum_{l \in H_{j_1}} p_{j_1,l} x_{j_1,l} - \sum_{l' \in H_{j_2}} p_{j_2,l'} x_{j_2,l'} .$$

Nous avons $l_{j_1,j_2}(x_{j_1,l}, x_{j_2,l'}) \in \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d}{c} \rfloor + 1}$ pour tout j_1 et j_2 dans J_k. D'après le théorème 3.1.1, pour tous $j \in J_k$ et pour tout $l \in H_j$, il existe donc des $\overline{x}_{j,l} \in x_{j,l} + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d'}{c'} \rfloor + 1}$ tels que :

$$l_{j_1,j_2}(\overline{x}_{j_1,l}, \overline{x}_{j_2,l'}) = 0 \text{ pour tout } j_1,\, j_2 \in J_k, \text{ tout } l \in H_{j-1} \text{ et tout } l' \in H_{j_2},$$

avec c' et d' des constantes qui ne dépendent que des P_j. Nous notons alors $\overline{x}_k = \sum p_{j_1,l} \overline{x}_{j_1,l}$ et d'après ce qui précède

$$\forall k \quad \overline{x}_k \in \left(\bigcap_{j \in J_k} P_j \right) \cap (x + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d'}{c'} \rfloor + 1}) .$$

Comme $\cup_k J_k = \{1, ..., r\}$, nous avons

$$\prod_{k=1}^{r} \overline{x}_k^{n_k} \in I \cap (\prod_{k=1}^{r} x_k^{n_k} + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i-d'}{c'} \rfloor + 1}) .$$

Donc il existe des z_j^* tels que $\prod_{k=1}^r \overline{x}_k^{n_k} + \sum_{j=1}^p f_j z_j^* = 0$ ou encore

$$\sum_{j=1}^{p} f_j(z_j^* - z_j) \in \mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{i-d'}{c'} \right\rfloor + 1} .$$

Donc, d'après le lemme d'Artin-Rees, il existe des $\varepsilon_j \in \mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{i-d''}{c''} \right\rfloor + 1}$ tels que $\sum f_j(z_j^* - z_j + \varepsilon_j) = 0$, où c'' et d'' ne dépendent que des P_j et de I. Nous posons alors $\overline{z}_j = z_j - \varepsilon_j$ pour tout j. Nous avons donc

$$\prod_{k=1}^{r} \overline{x}_k^{n_k} + \sum_{j=1}^{p} f_j \overline{z}_j = 0$$

et

$$\forall j \ \forall k, \quad \overline{x}_k - x_k, \, \overline{z}_j - z_j \in \mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{i-d''}{c''} \right\rfloor + 1}. \qquad \square$$

Nous allons maintenant donner la preuve du lemme utilisé. En fait nous pouvons énoncer la proposition suivante qui repose sur l'existence de la fonction de Artin :

Proposition 3.4.5 *i) Soit A un anneau local intègre nœthérien vérifiant la PA. Alors A est analytiquement irréductible.*
ii) Soit A un anneau local réduit nœthérien vérifiant la PA. Alors $\widehat{A}$ est réduit.

Preuve : Montrons d'abord i). Supposons sous les hypothèses du corollaire que A n'est pas analytiquement irréductible. Alors il existe x et y non nuls dans $\widehat{A}$ tels que $xy = 0$. Pour tout entier n positif, choisissons x_n et y_n dans A tels que $\mathrm{ord}(x - x_n) = \mathrm{ord}(y - y_n) = n$. Alors $x_n y_n \in \mathfrak{m}^n$. Comme (x_n) et (y_n) tendent respectivement vers x et y pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, pour n assez grand, x_n et y_n sont non nuls et $\mathrm{ord}(x_n)$ et $\mathrm{ord}(y_n)$ sont fixes. Or le seul diviseur de zéro dans A est 0. Donc il n'existe pas de fonction de Artin au polynôme $XY \in A[X, Y]$ ce qui contredit le théorème 3.4.2.
Montrons ii). Supposons que $\widehat{A}$ n'est pas réduit, il existe $x \in \widehat{A}$ non nul et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^k = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons x_n A tel que $\mathrm{ord}(x - x_n) = n$. Alors $x_n^k \in \mathfrak{m}^n$. Pour n assez grand, x_n est non nul et $\mathrm{ord}(x_n)$ est fixe. Or le seul élément nilpotent dans A est 0. Donc il n'existe pas de fonction de Artin au polynôme $X^k \in A[X]$, ce qui est faux. Donc $\widehat{A}$ est réduit.
$\square$

Exemple 3.4.6 *Soit f un germe de fonction de Nash (resp. de fonction holomorphe). Si $f = gh$ avec g et h deux séries formelles non inversibles alors f peut s'écrire comme le produit de deux germes de fonctions de Nash (resp. de deux fonctions holomorphes) non inversibles.*

Exemple 3.4.7 *Il est en général faux que XY admette une fonction de Artin. Considérons par exemple l'anneau*

$$A := \frac{\mathbb{k}[T_1, T_2]_{(T_1,T_2)}}{T_1^2 - T_2^2(1+T_2)} \qquad \text{avec } \mathbb{k} \text{ un corps de caractéristique nulle.}$$

A est irréductible mais pas analytiquement irréductible. Nous avons la relation $T_1^2 - T_2^2(1+T_2) = (T_1 - T_2\sqrt{1+T_2})(T_1 + T_2\sqrt{1+T_2})$ où $\sqrt{1+T_2}$ est une des deux séries formelles dont le carré vaut $1+T_2$. Soit $\left(\sqrt{1+T_2}\right)_n$ la série $\sqrt{1+T_2}$ tronquée à l'ordre n. Nous avons

$$ord\left(\left(\sqrt{1+T_2}\right)_n - \sqrt{1+T_2}\right) = n+1.$$

Regardons le polynôme $g(X, Y, Z) = XY - (T_1^2 - T_2^2(1+T_2))Z$ de l'anneau $\mathbb{k}[T_1, T_2]_{(T_1,T_2)}[X, Y, Z]$. Posons

$$x_n = T_1\left(T_1 - T_2\left(\sqrt{1+T_2}\right)_n\right),\ y_n = T_1 + T_2\left(\sqrt{1+T_2}\right)_n \quad \text{et } z = T_1.$$

Nous avons $x_ny_n - (T_1^2 - T_2^2(1+T_2))z \in \mathfrak{m}^{n+4}$ pour tout entier $n \geq 1$. Or $x_n \notin (T_1^2 - T_2^2(1+T_2)) + \mathfrak{m}^3$ et $y_n \notin (T_1^2 - T_2^2(1+T_2)) + \mathfrak{m}^2$. Donc il n'existe pas de solution de g "proche" de (x_n, y_n, z) pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

La preuve précédente est constructive, dans le sens où l'on peut donner une expression d'une fonction affine bornant la fonction de Artin de g en terme de coefficients apparaissant dans des ICL et de coefficients pour lesquels le lemme d'Artin-Rees est vérifié pour des idéaux dépendants de I. Nous donnons un exemple de telles bornes explicites ci-dessous.

3.4.1 Bornes explicites

Nous allons donner ici deux majorations affines de la fonction de Artin du polynôme $X^n + \sum_j f_jZ_j$: l'une à l'aide du théorème d'Izumi et l'autre à l'aide d'un théorème de Rees (cf. théorème 3.4.9).

Lemme 3.4.8 *Soient A un anneau local nœthérien complet et I un idéal radical de A engendré par $f_1, ..., f_p$. Soit $g(X, Z_i) := X^n + \sum_i f_i Z_i$. Alors g admet une fonction de Artin majorée par*

$$i \longmapsto (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor + 1}(i + i_P + i_I) + b(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor})$$

où a et b sont les plus petites constantes d'une ICL vérifiée par tous les idéaux premiers associés à I, i_P est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin-Rees est vérifié pour les idéaux engendré par deux idéaux premiers associés à I et i_I est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin-Rees est vérifié pour I (c'est-à-dire $I \cap \mathfrak{m}^{i+i_I} \subset I\mathfrak{m}^i$).

Preuve : Soient x et des z_j tels que

$$x^n + \sum_j f_j z_j \in \mathfrak{m}^{(2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor + 1}(i + i_P + i_I) + b(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}) + 1}.$$

Soit

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_r$$

la décomposition primaire de I avec les P_l premiers. Alors

$$\nu_{P_l}(x^n) \geq (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor + 1}(i + i_P + i_I) + b(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}) + 1$$

pour tout l.
Nous pouvons construire la suite suivante par récurrence (où $n_0 = n$) :
Si n_k est pair on pose $n_{k+1} = \frac{n}{2}$, sinon on pose $n_{k+1} = \frac{n+1}{2}$. Ecrivons n_k et n_{k+1} en base 2 :

$$n_k = \alpha_0 + \alpha_1 2 + \cdots + \alpha_{q-1} 2^{q-1} + 2^q \quad (q = \lfloor \ln_2(n_k) \rfloor)$$

$$n_{k+1} = \beta_0 + \beta_1 2 + \cdots + \beta_{q-1} 2^{q-1} + \beta_q 2^q$$

avec les α_j et les β_j dans $\{0, 1\}$.
Si $\alpha_0 = 0$, alors $\beta_q = 0$ et $\beta_{q-1} = 1$. Si $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-1} = 1$ alors $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{q-1} = 0$ et $\beta_q = 1$. Si l'un des α_j, pour $0 \leq j \leq q - 1$, est nul, alors $\beta_q = 0$.
Si $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-1} = 0$ alors $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{q-2} = 0$ et $\beta_{q-1} = 1$. Nous voyons donc, si $q = \lfloor \ln_2(n) \rfloor$, que $n_q = 1$ ou $n_{q+1} = 1$.
Donc, d'après les hypothèses, nous avons

$$\nu_{P_l}(x^{n_1}) \geq (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}(i + i_P + i_I) + b(1 + 2a + \cdots + (2a)^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor - 1}) + 1 \ .$$

Par induction nous avons alors

$$\nu_{P_l}(x) \geq i + i_P + i_I + 1 \ .$$

Il existe donc des $x_{l,j}$ tels que $x - \sum_j p_{l,j} x_{l,j} \in \mathfrak{m}^{i+i_P+i_I+1}$ où les $p_{l,j}$ engendrent P_l. D'après la dernière étape de la preuve du théorème 3.4.2, il existe donc $\overline{x} \in (P_1 \cap ... \cap P_r) \cap (x + \mathfrak{m}^{i+i_I+1})$.
Il existe alors des z_j^* tels que $x - \sum_j f_j z_j^* \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$. Notons $\overline{x} = \sum_j f_j z_j^*$ et $\overline{x}^n = \sum_j f_j z_j^{**}$ avec les z_j^{**} dans A. Nous avons alors $\sum_j f_j(z_j + z_j^{**}) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ et il existe alors des $t_j \in z_j + z_j^{**} + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que $\sum_j f_j t_j = 0$. On pose alors $\overline{z}_j = t_j - z_j^{**}$ et $\overline{x} = \sum_j f_j z_j^*$. Nous avons bien $g(\overline{x}, \overline{z}_j) = 0$ et $\overline{x} - x \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $\overline{z}_j - z_j \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout j. $\square$

Nous voyons ici que le coefficient λ de la fonction $i \longrightarrow \lambda i + c$ décrite ci-dessus est de la forme n^c pour une constante $c \geq 1$. Il est possible dans ce cas d'améliorer cette borne à l'aide du théorème suivant :

Théorème 3.4.9 *[Re1] Soit A un anneau local et nœthérien et I un idéal de A tel que A/I est non ramifié. Alors, pour tout x dans A, la limite $\lim_n \frac{\nu_I(x^n)}{n}$ existe et est égale à la limite supérieure de cette suite. Notons $\overline{\nu}_I$ la fonction définie par*

$$\forall x \in A,\ \overline{\nu}_I(x) = \lim_n \frac{\nu_I(x^n)}{n}.$$

Il existe alors une constante $c \geq 0$ telle que

$$\forall x \in A,\ \nu_I(x) \leq \overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + c.$$

Pour un entier c nous notons $\lceil c \rceil$ sa partie entière supérieure, c'est-à-dire $\lceil c \rceil = c$ si c est entier et $\lceil c \rceil = \lfloor c \rfloor + 1$ si c n'est pas entier. Nous pouvons alors déduire le lemme suivant

Lemme 3.4.10 *Soit A un anneau local nœthérien complet et I un idéal radical de A engendré par $f_1, ..., f_p$. Soit $g(X, Z_i) := X^n + \sum_i f_i Z_i$. Alors g admet une fonction de Artin majorée par la fonction*

$$i \longmapsto n \left\lceil \frac{i + i_I}{n} \right\rceil + nc \leq i + i_I + n(c+1)$$

où c est la plus petite constante telle que $\forall x \in A,\ \overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + c$ et i_I est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin-Rees est vérifié pour I (c'est-à-dire $I \cap \mathfrak{m}^{i+i_I} \subset I\mathfrak{m}^i$).

Preuve : Soient x et des z_j tels que

$$x^n + \sum_j f_j z_j \in \mathfrak{m}^{n\left\lceil \frac{i+i_I}{n} \right\rceil + nc+1}$$

avec les notations du lemme. Alors

$$\frac{\nu_I(x^n)}{n} \leq \overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + c$$

d'après le théorème de Rees. Or nous avons $\nu_I(x^n) \geq n\left\lceil \frac{i+i_I}{n} \right\rceil + nc + 1$, donc $\nu_I(x) \geq \left\lceil \frac{i+i_I}{n} \right\rceil + 1$. Il existe alors des z_j^* tels que $x - \sum_j f_j z_j^* \in \mathfrak{m}^{\left\lceil \frac{i+i_I}{n} \right\rceil + 1}$, c'est-à-dire $x = \sum_j f_j z_j^* + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathfrak{m}^{\left\lceil \frac{i+i_I}{n} \right\rceil + 1}$. D'où $x^n = \sum_j f_j R_j(z_j^*, \varepsilon) + \varepsilon^n$ avec R_j des polynômes en $p+1$ variables. D'où $\sum_j f_j(z_j + R_j(z_j^*, \varepsilon)) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ et il existe alors des $t_j \in z_j + R_j(z_j^*, \varepsilon) + \mathfrak{m}^{i+1}$ tels que $\sum_j f_j t_j = 0$. On pose alors $\overline{z}_j = t_j - R_j(z_j^*, \varepsilon)$ et $\overline{x} = \sum_j f_j z_j^*$. $\square$

Nous allons maintenant utiliser ce dernier lemme pour obtenir des déterminations explicites de clôtures intégrales approchées d'idéaux.

3.5 Application à des déterminations explicites de clôtures intégrales approchées d'idéaux

3.5.1 Clôtures intégrales approchées d'un idéal

Nous commençons tout d'abord par rappeler certains résultats connus.

Définition 3.5.1 *Soient I un idéal d'un anneau A intègre. Nous notons $\overline{I}$ la clôture intégrale de I, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A satisfaisant une équation de la forme*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

avec $a_i \in I^i$ pour tout i. L'ensemble $\overline{I}$ est un idéal de A.

Proposition 3.5.2 *Soit A un anneau intègre et I un idéal de A. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

1- $I \subset \overline{I} \subset \sqrt{I}$. En particulier si I est radical alors $\overline{I} = I$.

2- Si A est principal et normal, pour tout idéal I de A, $\overline{I} = I$.

On pourra se réferer par exemple à [Eis] pour les preuves de ces résultats.

Delfino et Swanson ont montré le théorème suivant qui est une généralisation d'un théorème de Rees [Re2] :

Théorème 3.5.3 *[DS] Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien excellent. Soit I un idéal de A. Alors il existe a et b des entiers tels que*

$$\overline{I + \mathfrak{m}^{ai+b}} \subset \overline{I} + \mathfrak{m}^i \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\textit{ou encore} \quad \overline{I + \mathfrak{m}^i} \subset \overline{I} + \mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{i-b}{a} \right\rfloor} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pour prouver ce théorème, D. Delfino et I. Swanson se ramènent au cas où I est principal et A complet, intègre et normal. Dans ce cas elles montrent que tout élément de $\overline{I + \mathfrak{m}^i}$ vérifie une équation de la forme

$$X^n + X^{n-1} \sum_j g_j X_{1,j} + \cdots + \sum_{j_1 \leq \cdots \leq j_n} g_{j_1} \cdots g_{j_n} X_{n,j_1,\ldots,j_n} \in \mathfrak{m}^{\left\lfloor \frac{i}{l} \right\rfloor}$$

où n et l sont indépendants de l'élément choisi et de l'entier i. Ensuite elles montrent, toujours sous les mêmes hypothèses, que le polynôme précédent admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine (théorème 3.10 de [DS]).
Nous allons donner dans cette partie une généralisation du théorème 3.10 de [DS]. L'intérêt de notre preuve vient du fait que celle-ci est constructive et permet d'obtenir des bornes explicites en termes de coefficients apparaissant dans certaines ICL.

3.5.2 Généralisation d'un résultat de Delfino et Swanson

En utilisant le lemme 3.4.10, nous allons donc donner deux propositions qui généralisent le théorème 3.10 de [DS] (les hypothèses de Delfino et Swanson sont : $A/(f_l)$ complet, intègre et normal, et (g_j) principal) et qui, de plus, bornent explicitement les fonctions de Artin des polynômes considérés :

Proposition 3.5.4 *Soit*

$$g(X,\, X_{1,j}, \ldots,\, X_{n,j_1,\ldots,j_n},\, Y_1, \ldots,\, Y_q) := X^n + X^{n-1} \sum_j g_j X_{1,j} + \cdots$$

$$+ \sum_{j_1 \leq \cdots \leq j_n} g_{j_1} \cdots g_{j_n} X_{n,j_1,\ldots,j_n} + \sum_{l=1}^{q} f_l Y_l$$

avec les g_j et les f_l dans A, local complet nœthérien, tels que $I = (f_l) + (g_j)$ soit radical. Alors g admet une fonction de Artin majorée par la fonction

$$i \longmapsto i + i_I + n(c+1)$$

où c est la plus petite constante telle que $\forall x \in A$, $\overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + c$ et i_I est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin-Rees est vérifié pour I (c'est-à-dire $I \cap \mathfrak{m}^{i+i_I} \subset I\mathfrak{m}^i$).

Preuve : Soient $(x,\, x_{1,j}, ...,\, x_{n,j_1,...,j_n},\, y_1, ...,\, y_q) \in A$ tels que

$$g(x,\, x_{1,j}, ...,\, x_{n,j_1,...,j_n},\, y_l) \in \mathfrak{m}^{n\lceil \frac{i+i_I}{n} \rceil + nc+1} .$$

Posons

$$t'_j = x^{n-1}x_{1,j} + x^{n-2}\sum_{j_2 \geq j} g_{j_2}x_{2,j,j_2} + \cdots + \sum_{j_n \geq \cdots \geq j_2 \geq j} g_{j_2}...g_{j_n}x_{n,j,j_2,...,j_n} .$$

Alors nous avons

$$x^n + \sum_j g_j t'_j + \sum_l f_l y_l = g(x,\, x_{1,j}, ...,\, x_{n,j_1,...,j_n},\, y) .$$

D'après la preuve du lemme 3.4.10, il existe $x^* \in x + \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$ tels que $x^* \in I$. Nous pouvons écrire $x^* = \sum_j g_j x'_j + \sum_l f_l z_l$. Nous avons alors

$$g(x^*,\, x_{1,j}, ...,\, x_{n,j_1,...,j_n},\, y_l) \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}.$$

D'où

$$\sum_{j_1 \leq \cdots \leq j_n} g_{j_1}...g_{j_n}\left(x_{n,j_1,...,j_n} + h_{j_1,...,j_n}(x_{1,j}, ..., x_{n-1,j'_1,...,j'_{n-1}}, x'_j)\right) + \\ + \sum_l f_l t_l \in \mathfrak{m}^{i+i_I+1}$$

avec $t_l = y_l + \cdots = y_l + t^*_l(x'_j, z_l)$ et $h_{j_1,...,j_n}$ polynomiale à coefficients dans A. D'après Artin-Rees, il existe alors $(\overline{t}_1, ..., \overline{t}_q) \in (t_1, ..., t_q) + \mathfrak{m}^{i+1}$ et

$$\overline{t}_{j_1,...,j_n} \in x_{n,j_1,...,j_n} + h_{j_1,...,j_n}(x_{1,j}, ..., x_{n-1,j'_1,...,j'_{n-1}}, x'_j) + \mathfrak{m}^{i+1}$$

tels que $\sum_{j_1 \leq \cdots \leq j_n} g_{j_1}...g_{j_n}\overline{t}_{j_1,...,j_n} + \sum_l f_l \overline{t}_l = 0$. Posons alors

$$\overline{x}_{i,j_1,...,j_i} = x_{i,j_1,...,j_i} \text{ pour tout } i < n$$

et

$$\overline{x}_{n,j_1,...,j_n} = \overline{t}_{j_1,...,j_n} - h_{j_1,...,j_n}(x_{1,j}, ..., x_{n-1,j'_1,...,j'_{n-1}}, x'_j) \ .$$

Nous avons $\overline{x}_{i,j_1,...,j_i} - x_{i,j_1,...,j_i} \in \mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout i et j_k. Posons $\overline{y}_l = \overline{t}_l - t^*_l$ pour tout l et $\overline{x} = x^*$. Nous avons donc $\overline{y}_l - y_l \in \mathfrak{m}^{i+1}$ et $\overline{x} - x \in \mathfrak{m}^{i+1}$. De plus il est clair que $g(\overline{x}, \overline{x}_j, \overline{y}_l) = 0$. $\square$

Proposition 3.5.5 *Soit*

$$g(X,\, X_1, ...,\, X_n,\, Y_1, ...,\, Y_q) = X^n + f^t X^{n-1} X_1 + \cdots + f^{nt} X_n + \sum_{l=1}^{q} f_l Y_l$$

avec les f_j et f dans A, local complet nœthérien, tels que $((f_j) : f) = (f_j)$ et $(f,\, f_j)$ soit radical, et soit t un entier strictement positif. Alors g admet une fonction de Artin majorée par

$$i \longrightarrow i + t i_{J_n} + tn(c+1)$$

où c est la plus petite constante telle que $\forall x \in A$, $\overline{\nu}_I(x) \leq \nu_I(x) + c$ et i_{J_n} est la plus petite constante pour laquelle le lemme d'Artin-Rees est vérifié pour $J_n = (f^n, (f_j))$ (c'est-à-dire $J_n \cap \mathfrak{m}^{i+i_{J_n}} \subset J_n \mathfrak{m}^i$).

Preuve : Notons $I := (f,\, f_l)$. Soit i un entier positif. Soient x, des x_j et des y_k tels que

$$g(x,\, x_j,\, y_k) \in \mathfrak{m}^{i+t i_{J_n}+tn(c+1)+1}.$$

Alors, comme dans la preuve de la proposition précédente, il existe $\overline{x} \in I$ tel que nous ayons $\overline{x} = x$ modulo $\mathfrak{m}^{i+t i_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}$. Donc nous avons

$$x = f x' + \sum_{l=1}^{q} f_l y'_l + \varepsilon_1$$

avec $\varepsilon_1 \in \mathfrak{m}^{i+t i_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}$. Nous avons alors

$$f^n x'^n + f^{t+n-1} x'^{n-1} x_1 + \cdots + f^{nt} x_n +$$

$$+ \sum_{l=1}^{q} f_l (y_l + h_l(x',\, y'_m)) \in \mathfrak{m}^{i+t i_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}$$

avec les h_l polynomiales. D'où

$$f^n \left(x'^n + f^{t-1} x'^{n-1} x_1 + \cdots + f^{n(t-1)} x_n\right) +$$

$$+\sum_{l=1}^{q} f_l(y_l + h_l(x',\, y'_m)) \in \mathfrak{m}^{i+ti_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}\ .$$

Il existe donc

$$u \in (f_j) \cap \Big((x'^n + f^{t-1}x'^{n-1}x_1 + \cdots + f^{n(t-1)}x_n) + \mathfrak{m}^{i+(t-1)i_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}\Big)$$

car le conducteur $((f_j) : f) = (f_j)$. On est donc ramené à

$$x'^n + f^{t-1}x'^{n-1}x_1 + \cdots + f^{n(t-1)}x_n \in I + \mathfrak{m}^{i+(t-1)i_{J_n}+n(t-1)(c+1)+1}\ .$$

On obtient le résultat par récurrence sur t, car pour $t = 0$ le polynôme est lisse en tout point (le coefficient de x_n est égal à 1). □

3.5.3 Exemple explicite

Cet exemple est cité dans [DS] mais incorrectement étudié car les auteurs utilisent un résultat de M. Lejeune-Jalabert uniquement valable pour l'anneau $A = \mathbb{k}[[T]]$. Pour étudier cet exemple, nous allons utiliser ici la proposition 3.5.5 et un résultat de Delfino et Swanson [DS].
Soient $a,\, t,\, N \in \mathbb{N}$ tels que $a \geq 2$, $t \geq 1$ et $N \geq 3$ et $\mathbb{k}$ un corps contenant les racines a-ièmes de l'unité et de caractéristique ne divisant pas a. Notons

$$A := \frac{\mathbb{k}[[T_1, ..., T_N]]}{(T_1^a + \cdots + T_N^a)}\ .$$

Soit $B = \mathbb{k}[[T_1,\, T_2, ..., T_{N-1}]]$. L'extension $\mathrm{Frac}(A) \subset \mathrm{Frac}(B)$ est galoisienne et séparable et notons $n = [\mathrm{Frac}(A) : \mathrm{Frac}(B)]$. L'entier n divise $\Phi(a)$, la fonction d'Euler de a, donc $n < a$. Nous utilisons alors le

Lemme 3.5.6 *[DS] Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local complet normal nœthérien et soit f un élément non nul de A. Soit $B = \mathbb{k}[[f, f_2, ..., f_N]]$ où $(f, f_2, ..., f_N)$ est un système de paramètres de A. Supposons que Frac$(A) \subset$ Frac(B) est une extension galoisienne séparable et notons $n =$ [Frac(A) : Frac(B)]. Alors tout élément de $\overline{f^tA + \mathfrak{m}^i}$ vérifie une équation de degré n sur $f^tA + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i}{nt} \rfloor}$*

Donc d'après le lemme précédent, tout élément de $\overline{T_1^tA + \mathfrak{m}^i}$ vérifie une équation de degré n sur $T_1^tA + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i}{nt} \rfloor}$.
Soit $x \in A$ vérifiant une équation de degré n sur $T_1^tA + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i}{nt} \rfloor}$. Notons I l'idéal $(T_1,\, T_2^a + \cdots + T_N^a)$. Si $N > 3$, ν_I est une valuation car $Gr_{\mathfrak{m}}A/I$ est intègre.
Si $N = 3$, l'idéal I étant homogène et radical, nous avons aussi $c = 0$. D'après le corollaire 3.2.14, nous avons $i_{J_n} = a$.
Donc, d'après la proposition 3.5.5, il existe $\overline{x} \in T_1^tA \cap \Big(x + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i}{nt} \rfloor - t(a+n)}\Big)$.
Nous obtenons alors la

Proposition 3.5.7 *Soient* a, t, $N \in \mathbb{N}$ *tels que* $a \geq 2$, $t \geq 1$ *et* $N \geq 3$ *et* $\Bbbk$ *un corps contenant les racines* a*-ièmes de l'unité et de caractéristique ne divisant pas* a *et* $A = \frac{\Bbbk[[T_1,\dots,T_N]]}{(T_1^a+\cdots+T_N^a)}$. *Alors*

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad \overline{T_1^t A + \mathfrak{m}^i} \subset T_1^t A + \mathfrak{m}^{\lfloor \frac{i}{nt} \rfloor - t(a+n)} \tag{3.4}$$

où $n = [Frac(A) : Frac(B)]$.

Bibliographie

[A-H-V] J. M. Aroca, H. Hironaka, J. L. Vicente, The theory of maximal contact, *Mem. Mat. Inst. Jorge Juan*, **29**, (1975).

[Ar1] M. Artin, On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.*, **5**, (1968), 177-291.

[Ar2] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. IHES*, **36**, (1969), 23-58.

[BDLD] J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz, L. van den Dries, Ultraproducts and approximation in local rings I, *Invent. Math.*, **51**, (1979), 189-203.

[B-M1] E. Bierstone, P. D. Milman, Relations among analytic functions I, *Ann. Inst. Fourier*, **37**, (1987), 187-239.

[B-M2] E. Bierstone, P. D. Milman, Relations among analytic functions II, *Ann. Inst. Fourier*, **37**, (1987), 49-77.

[B-M3] E. Bierstone, P. D. Milman, Uniformization of analytic spaces, *J. Amer. Math. Soc.*, **2-4**, (1989), 801-836.

[DS] D. Delfino - I. Swanson, Integral closure of ideals in excellent local rings, *J. Algebra*, **187**, (1997), 422-445.

[DL1] J. Denef - F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, *Invent. Math.*, **135**, (1999), 201-232.

[DL2] J. Denef - F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties, European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 327–348, Progr. Math., **201**, Birkhäuser, Basel, (2001).

[Eis] D. Eisenbud, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, New York, (1995).

[Eli] Juan Elías, A note on the one-dimensional systems of formal equations, *Ann. Inst. Fourier*, **39**, (1989), no. 3, 633-640.

[El] R. Elkik, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Sci. ENS*, **6** (1973), 553-604.

[GP-LJ] G. Gonzalez-Sprinberg, M Lejeune-Jalabert, Sur l'espace des courbes tracées sur une singularité, Algebraic geometry and singularities (La Rábida, 1991), Progress in Maths. **134**, (1996), 9-32.

[Gr] M. J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, *Publ. Math. IHES*, **31**, (1966), 59-64.

[EGA] A. Grothendieck - J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique*, *Publ. Math. IHES*, **20**, (1964).

[H1] M. Hickel, Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique, *Am. J. of Math.*, **115**, (1993), 1299-1334.

[H2] M. Hickel, Calcul de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane, *Pacific J. of Math.*, **213**, (2004), 37-47.

[H3] M. Hickel, *Cours de géométrie analytique*, à paraître.

[Hu] C. Huneke, Uniform bounds in Noetherian rings, *Invent. Math.*, **107**, (1992), 203-223.

[I1] S. Izumi, Linear complementary inequalities for orders of germs of analytic functions, *Invent. Math.*, **65**, (1982), 459-471.

[I2] S. Izumi, A mesure of integrity for local analytic algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **21**, (1985), 719-736.

[Kon] M. Kontsevich, Cours à Orsay, 7 décembre 1995.

[Las] D. Lascar, Caractère effectif des théorèmes d'approximation d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **287**, no. 14, 907-910, (1978).

[La] A. Lasjaunias, A survey of Diophantine approximation in fields of power series, *Monatsh. Math.*, **130**, (2000), no. 3, 211-229.

[LJ1] M. Lejeune-Jalabert, Courbes tracées sur un germe d'hypersurface, *Am. J. of Math.*, **112**, (1990).

[Man] Y. Manin, *A course in mathematical logic*, Springer-Verlag, (1977).

[Ma] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, (1986).

[Mi] J. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press, (1980).

[Ng] M. Nagata, *Local rings*, Interscience, New York, (1962).

[Na] J. Nash, Arcs structure of singularities, *Duke Math. J.*, **81**, (1995), 31-38.

[Pa] J. Pas, Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions, *J. reine angew. Math.*, **399**, (1989), 137-172.

[PP] G. Pfister - D. Popescu, Die strenge Approximationeigenschaft lokaler Ringe, *Invent. Math.*, **30**, (1975), 145-174.

[Po] D. Popescu, General Neron desingularisation and approximation, *Nagoya Math. J.*, **104**, (1986), 85-115.

[Pr] M. Presburger, Uber die Vollständigkeit eines gewissen Systems des Arithmetik ganzer Zahlen, im welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, *Comptes-rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves*, **395**, Warsaw, (1927), 92-101.

[Ra] M. Raynaud, *Anneaux Locaux Henséliens*, Lectures Notes in Math., **169**, Springer, (1970).

[Re1] D. Rees, Valuations associated with a local ring (II), *J. London Math. soc.*, **31**, (1956), 228-235.

[Re2] D. Rees, A note on analytically unramifed local rings, *J. London Math. soc.*, **36**, (1961), 24-28.

[Re3] D. Rees, Izumi's theorem, Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987), 407–416, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **15**, Springer, New York, (1989).

[Ro1] G. Rond, A propos de la fonction de Artin en dimension $N \geq 2$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **340**, no. 8, (2005), 577-580.

[Ro2] G. Rond, Contre-exemple à la linéarité de la fonction de Artin, prépublication ArXiv, (2004).

[Ro3] G. Rond, Lemme d'Artin-Rees, théorème d'Izumi et fonctions de Artin, *J. Algebra*, à paraître.

[Ro4] G. Rond, Approximation diophantienne dans les corps de series en plusieurs variables, prépublication ArXiv, (2005).

[Spi1] M. Spivakovsky, Non-existence of the Artin function for henselian pairs, *Math. Ann.*, **299**, (1994), 727-729.

[Spi2] M. Spivakovsky, A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms, *J. Am. Math. Soc.*, **12-2**, (1999), 381-444.

[Spi3] M. Spivakovsky, Valuations, the linear Artin approximation theorem and convergence of formal functions, Proceedings of the II SBWAG, Santiago de Compostela, Felipe Gago and Emilio Villanueva, editors, ALXEBRA, **54**, (1990), 237-254.

[Te] B. Teissier, Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative [d'après Artin, Popescu et Spivakovsky], *Sém. Bourbaki*, **784**, (1994).

[To] J.-Cl., Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1972).

[Va] M. Vaquié, Valuations, Progress in Mathematics, **181**, (2000), 541-590.

[Ve] W. Veys, Arc spaces, motivic integration and stringy invariants, prépublication ArXiv, (2004).

[Wa1] T. Wang, Linear inequalities in local analytic geometry, Thesis, University of Toronto, (1993).

[Wa2] T. Wang, A stratification given by Artin-Rees estimates, *Canad. J. Math.*, **44**, no. 1, (1992), 194-205.

[W1] J. J. Wavrik, A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures, *Math. Ann.*, **216**, (1975), 127-142.

[W2] J. J. Wavrik, Analytic equations and singularities of plane curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **245**, (1978), 409-417.