UNIVERSITE GRENOBLE 1

+ + +

THESE DOCTORAT D'ETAT
(2e PARTIE)

spécialité : math. appliquées

+ + +

SUJET n°2 : INÉQUATIONS VARIATIONNELLES et PROBLÈMES AUX LIMITES.

+ + +

par François ROBERT

le 12.11.1968

INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

et problèmes aux limites

1. Introduction.

1- La notion d'inéquation variationnelle, dont l'étude permet diverses applications, particulièrement pour des problèmes aux limites, peut être présentée à partir du problème suivant:

Soit V un espace vectoriel normé, V' son dual topologique, K une partie convexe, fermée de V. $(\ ,\ )$ désigne la dualité entre V' et V. On se donne une application T de V dans V' [ou seulement de K dans V'] et l'on cherche s'il existe u dans K tel que

$$\forall v \in K \quad (Tu\,,\, v-u) \geq 0 \qquad (1\text{-}1)$$

Un tel u, s'il existe, sera dit satisfaire à l'inéquation variationnelle (1-1).

V sera souvent un espace de Hilbert, comme dans toutes les applications que nous étudierons, ou du moins un espace de Banach réflexif.

2. Quelques exemples simples (*)

2-1 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. On cherche u dans K tel que

$$f(u) = \underset{v \in K}{\mathrm{Min}}\ f(v)$$

Un tel u, s'il existe, doit satisfaire à l'inéquation variationnelle :

* repris d'un exposé de G. STAMPACCHIA [2]

$$\forall v \in K \qquad [\operatorname{grad} f(u)]^t [v-u] \geq 0$$

si K est borné, il existe une solution.

2-2. Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On prend V l'espace $H_0^1(\Omega)$ et l'on pose :

$$J(v) = \int_\Omega [\operatorname{grad}(v)]^t [\operatorname{grad}(v)]\, dx \quad \left(= \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} < +\infty \right)$$

ψ_1, ψ_2 appartenant à V et telles que $\psi_1 \leq \psi_2$ (*) on pose :

$$K = \{ v \in V \quad \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \}$$

et l'on cherche u dans K minimisant la norme, autrement dit tel que

$$J(u) = \operatorname*{Min}_{v \in K} J(v)$$

Un tel u doit vérifier l'inéquation variationnelle :

$$\forall v \in K \qquad \int_\Omega [\operatorname{grad} u]^t [\operatorname{grad}(v-u)]\, dx \geq 0$$

2-3 V est un espace de Hilbert et K un convexe fermé de V. Pour x donné dans V, on cherche u dans K tel que :

$$\forall v \in K \qquad \|u - x\| \leq \|v - x\| \qquad (1\text{-}2)$$

La solution unique, $u = P_K x$, projection de x sur K est <u>caractérisée</u> ((1-2)$\Leftrightarrow$(1-3)) par l'inéquation variationnelle :

$$\forall v \in K \qquad ((u - x \,,\, v - u)) \geq 0 \qquad (1\text{-}3)$$

où ((,)) désigne le produit scalaire dans V.

<u>Remarques</u> 1) si $u \in \mathring{K}$ ($x \in \mathring{K}$ et $u = x$) l'inégalité (1-3) devient une égalité. Ceci est général

2) L'exemple 2-2 est cas particulier de 2-3, avec $x = 0$

(*) se référer à la Section 6, Exemple 1, pour la signification précise de cette inégalité.

3. On sait prouver l'existence de solutions au problème (1-1) dans le cas d'opérateurs <u>monotones</u> sur des espaces de Banach <u>réflexifs</u>.
De façon précise, on a le

<u>Théorème 1</u> Soit * V un espace de Banach réflexif $((V')' = V)$

* T un opérateur <u>monotone</u> de V dans V' :

$$\forall x, y \in V \qquad (Tx - Ty\ ,\ x - y) \geq 0$$

T est supposé <u>hémicontinu</u> :

$\forall x, y \in V$ l'application $t \in [0\ 1] \to (T(x - tx + ty)\ ,\ x - y)$ est continue.

Alors

i) Si K est borné dans V, il existe une solution au problème (1-1)

ii) Si K n'est pas borné, la condition :

$$\exists\ v_0 \in K \ : \qquad \frac{(Tv - Tv_0\ ,\ v - v_0)}{\| v - v_0 \|} \xrightarrow[\substack{\|v\| \to \infty \\ v \in K}]{} +\infty$$

assure l'existence d'une solution.

<u>Remarques</u> 1- Ce théorème, donné ici sous une forme simple, admet diverses variantes et perfectionnements. Si T est monotone et hémicontinu et si $f \in V'$ l'application $u \in V \to Tu - f \in V'$ est encore monotone et hémicontinue : l'inéquation variationnelle devient

$$\forall v \in K \qquad (Tu - f\ ,\ v - u) \geq 0 \qquad (1\text{-}4)$$

C'est sous cette forme que le théorème est donné dans [12], formellement pour $V_0 = 0$ supposé dans K, on le trouve aussi, démontré indépendamment, dans [8]. T peut n'être défini, monotone et hémicontinu que de K dans V'

2. les opérateurs monotones, étudiés par G. MINTY [11], F.E. BROWDER [12] [16] [A] [k] [l] ont donné lieu à diverses extensions : opérateurs semi-monotones [k] et quasi-monotones [l] étudiés par BROWDER, opérateurs demi-monotones, introduits par H. BREZIS [13] [14] dont les précédents sont cas particuliers. Brezis donne un résultat

étendant aux opérateurs demi-monotones le théorème ci-dessus, et définit les opérateurs de type M, classe contenant celle des opérateurs demi-monotones. Enfin la monotonie peut être définie pour des applications multivoques [11] [15] [16].

3- Si $K = V$, un raisonnement élémentaire montre que l'inéquation variationnelle (1-4) devient une équation. le théorème précédent, avec la variante indiquée, assure l'existence de $u \in V$ tel que

$$Tu = f$$

redonnant un théorème de Minty [9] et Browder [A].

Si K est un sous espace (fermé) de V, le théorème indique l'existence d'un u dans K tel que $Tu - f$ appartient à $K^\perp$ ($K^\perp \underset{df}{=} \{w \in V' : \forall v \in K \ (w, v) = 0\}$)

4- L'opérateur T est dit coercif (ou coercitif) (condition plus forte que la monotonie) s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in V \qquad (Tx - Ty, x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2 \quad (1\text{-}5)$$

la coercitivité de T entraine que la condition du Théorème 1, relative à K non borné, est vérifiée (pour tout v_0 dans K d'ailleurs.)

la coercitivité de T entraine de plus que si le problème (1-4) admet une solution celle ci est unique. En effet, soient deux solutions u_1 et u_2 ; on peut écrire

$$(Tu_1 - f \ , u_2 - u_1) \geq 0$$
$$(Tu_2 - f \ , u_1 - u_2) \geq 0$$

D'où $\quad (Tu_1 - Tu_2 \ , u_1 - u_2) \leq 0$

ce qui entraine (coercitivité) que $\|u_1 - u_2\| = 0$ soit $u_1 = u_2$

D'où le:

Corollaire : Si T est coercitif et hemicontinu, il existe, pour tout $f \in V'$, un u unique dans K tel que

$$\forall v \in K \quad (Tu - f, v - u) \geq 0$$

4. On se propose dorénavant l'étude d'inéquations variationnelles dans le contexte où se place l'article de référence [1], adapté aux applications concernant les problèmes aux limites.

<u>Notations</u> V est un espace de Hilbert réel (pour simplifier) ; V' est son dual topologique. ((,)) est le produit scalaire dans V, et ‖ ‖ la norme correspondante. On note (,) la dualité entre V' et V, et Λ l'isomorphisme canonique de V' sur V :

$$f \in V' \quad v \in V \qquad (f, v) = ((\Lambda f, v))$$

Soit a une forme bilinéaire sur $V \times V$, continue :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$$

Il existe alors $A \in \mathcal{L}(V, V')$ tel que

$$\forall u, v \in V \qquad a(u, v) = (Au, v)$$

On se donne <u>une partie K convexe, fermée</u> de V et l'on cherche u dans K tel que

$$\forall v \in K \qquad a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad (1\text{-}6)$$

Un tel u, s'il existe sera dit satisfaire à <u>l'inéquation variationnelle</u> (1-6)

<u>Remarque 1</u> L'opérateur T du problème général (1-1) est ici l'application :

$$v \in V \longrightarrow Tv = Au - f$$

en effet (1-6) s'écrit aussi

$$\forall v \in K \quad (Au - f, v - u) \geq 0 \quad (1\text{-}6')$$

T est ici hemicontinu, puisque A est linéaire

Dire que T est monotone, c'est dire que la forme $a(u, v)$ est <u>non négative</u> :

$$\forall v \in V \quad a(v,v) \geq 0 \qquad (1\text{-}7)$$

Dire que T est coercitif c'est dire que la forme $a(u,v)$ est coercitive:

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall v \in V \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad (1\text{-}8)$$

Il resulte donc du théoreme et corollaire précedents que

* si la forme $a(u,v)$ est non-négative, et si K est borné, il existe une solution au probleme (1-6)

* si la forme $a(u,v)$ est coercitive, il existe une solution unique à ce problème.

Ces resultats sont redemontrés et completés dans l'article de référence [1]

Remarque 2. La encore, si on prend pour K un sous espace (fermé, donc espace de Hilbert lui même pour la norme induite) de V, (1-6) est equivalente à l'équation variationnelle:

$$\forall v \in K \quad a(u,v) = (f,v) \quad (1\text{-}9)$$

Rappels le probleme de la recherche d'un u dans V tel que

$$\forall v \in V \quad a(u,v) = (f,v) \quad (1\text{-}10)$$

est un probleme très classique, qui est donc cas particulier du probleme (1-6). [formellement pour K = V] Rappelons le resultat principal: Introduisant A, le probleme (1-10) est donc equivalent à la recherche d'un u dans V tel que

$$Au = f$$

si $a(u,v)$ est coercitive, le théoreme de Lax-Milgram indique que A est un isomorphisme de V sur V'. Il y a donc une solution unique.

Ce resultat est à la base de la formulation variationnelle de problemes aux limites [3] [4] [7]. Pour prouver l'existence de solutions à une équation aux derivées partielles, définie par un operateur différentiel L, on associe à L une forme bilineaire a continue sur un espace de Hilbert V "bien choisi". Si on peut prouver la coercitivité de a sur V, on assure par là l'existence et l'unicité dans V de la solution du problème (1·9). Cette solution est alors solution (faible : au sens des distributions) du probleme donné (car $a(u,v)$ a justement été choisie dans ce but)

Se pose alors un probleme de régularisation de la solution i.e. d'etablir des conditions assurant que la distribution solution est "reguliere." [etudiées par exemple dans [a] [j]; voir par ex [7])

Comme nous aurons, pour le probleme general (1·6) des applications tout à fait semblables, il n'est peut etre pas inutile de donner (voir Annexe) un exemple type, repris de [3] de "résolution" d'un probleme aux limites (elliptique) par la methode variationnelle.

5. Donnons, pour terminer cette introduction le résumé des principaux resultats etablis dans l'article de référence [1], que nous allons maintenant examiner.

Section 2. Nouvelle démonstration du fait que si $a(u,v)$ est coercitive, il y a une solution unique.

Section 3. Si a est seulement non négative, l'ensemble X (eventuellement vide) des solutions est un sous ensemble convexe, fermé de K. Si $X \neq \emptyset$ on sait construire une suite convergeant vers un point de X

Section 4. Existence de solutions : si a est non négative et K borné, il y a des solutions; si K n'est pas borné, on donne une condition suffisante d'existence de solutions.

Section 5. Cas de formes semi-coercitives

Section 6. Application des resultats précedents à des problèmes différentiels de type elliptique.

Section 7. Etude d'un probleme d'evolution de type parabolique.

2- Cas où la forme bilinéaire est coercitive.

On suppose donc exister $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u \in V \qquad a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$$

le principal résultat est le

Théorème 2-1 Si a est coercitive, il existe, pour tout f pris dans V' un u unique dans K tel que

$$\forall v \in K \qquad a(u, v-u) \geq (f, v-u) \qquad (1)$$

et l'application $f \longrightarrow u$ est continue de V' dans V

* Unicité et continuité Si u_1 est solution pour f_1 et u_2 pour f_2, on a donc, puisque u_1 et u_2 sont dans K

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f_1, u_2 - u_1)$$
$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f_2, u_1 - u_2)$$

En additionnant et en utilisant la coercitivité de a, il vient

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|$$

D'où le résultat

l'application $f \rightarrow u$ est non seulement continue, mais lipschitzienne.

** Existence

1) dans le cas où $a(u,v) = ((u,v))$ $\quad [a(u,u) = \|u\|^2]$

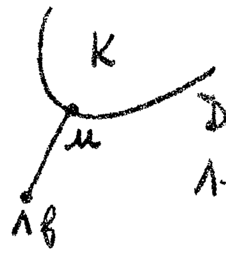
Dire que u $(\in K)$ est solution de (1) c'est dire que

$$\forall v \in K \qquad ((u - \Lambda f, v-u)) \geq 0 \qquad (2)$$

condition équivalente (c'est géométriquement "évident")

à $$\forall v \in K \qquad \|u - \Lambda f\| \leq \|v - \Lambda f\| \qquad (3)$$

(cf Introduction, Exemple 2-3)



D'où la solution (unique) $u = P_K \Lambda f$ projection de Λf sur K.

2) <u>dans le cas general</u>. Pour u pris dans V on applique le resultat précedent, où l'on remplace f par la fonctionnelle lineaire continue sur V, notée ϕ_u, ainsi définie :

$$\forall v \in V \quad (\phi_u , v) \underset{df}{=} ((u,v)) - \rho\, a(u,v) + \rho\,(f,v)$$

où ρ est pris tel que $\qquad 0 < \rho \leq \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2} \qquad (4)$

[on rappelle que $A \in \mathcal{L}(V,V')$ est defini par $(Au,v) = a(u,v)$; $u, v \in V$; A admet d'ailleurs un inverse continu puisque (Lax. Milgram) a est coercitive]

D'où $\quad P_K \Lambda \phi_u \underset{df}{=} Tu$ la projection de $\Lambda\phi_u$ sur K.

T est une application de V dans K et l'on peut montrer [grâce, en particulier, à la coercitivité de a, qui intervient ici] que l'on a :

$$\forall u_1, u_2 \in V \qquad \|Tu_1 - Tu_2\| \leq \theta\, \|u_1 - u_2\|$$

$$\text{avec} \qquad \theta^2 = 1 + \|A\|^2\rho^2 - 2\alpha\rho$$

le choix de ρ (4) rend T contractant $\ (\theta < 1)$

T admet donc un point fixe. Il existe u <u>dans K</u> tel que

$$\begin{cases} u = Tu \\ \forall v \in K \quad ((u, v-u)) \geq (\phi_u, v-u) \end{cases}$$

Developpant cette dernière inégalité, il vient

$$\forall v \in K \quad ((u, v-u)) \geq ((u, v-u)) - \rho\, a(u, v-u) + \rho\,(f, v-u)$$

Ce qui montre $(\rho > 0)$ que u est en fait solution du problème (1).

<u>Remarques.</u> 1- Le théorème 2-1 est donné, avec une démonstration différente, dans [6], sous l'énoncé suivant (rappelé dans [7])

Soit V un espace de Hilbert réel, K un convexe fermé de V, $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue sur $V \times V$ et coercitive sur V. Pour $u \in K$ on désigne par K_u le cone convexe qui projette, de l'origine de V, l'ensemble convexe $K-u$ (translaté de K par u) :

$$K_u = \{v \in V : \exists \lambda > 0 \quad u + \lambda v \in K\}$$

Alors, pour tout f pris dans V', il existe u unique dans K tel que

$$\forall v \in K_u \qquad a(u,v) \geq (f,v)$$

2- Y. HAUGAZEAU complète le théorème 2-1 de la façon <u>suivante</u> [10] :

Soient K et K^* deux convexes fermés de V, d'où, pour f donné dans V, les solutions u et u^* correspondantes (cf Th 2-1)

Si ω et ω^* sont respectivement des éléments de K et K^* tels que $\begin{cases} \omega + \omega^* = u + u^* \\ a(u^* - \omega^*, u - \omega) = 0 \end{cases}$ alors nécessairement

$$u^* = \omega^* \quad ; \quad u = \omega ;$$

et donne de ce dernier résultat une application répétée dans le cadre suivant : Prenant $V = H^1(\Omega)$ il pose

$$\mathrm{Sup}\,(u, u^*) \underset{df}{=} \omega \qquad [\forall x \in \Omega \quad \omega(x) = \mathrm{Max}\,(u(x), u^*(x))]$$

$$\mathrm{Inf}\,(u, u^*) \underset{df}{=} \omega^*$$

les conditions $\omega + \omega^* = u + u^*$; $a(u^* - \omega^*, u - \omega) = 0$ sont effectivement vérifiées et [sous réserve que $\omega \in K$ et $\omega^* \in K^*$, ce qui est effectivement le cas dans les exemples qu'il donne] on a donc $u = \omega$; $u^* = \omega^*$, autrement dit

$$u \geq u^*$$

<u>dans le sens suivant</u> : $u(x) \geq u^*(x)$ presque partout sur Ω (cf [10])

le Théorème 2-1 peut être étendu de la façon suivante :

Théorème 2.1' Si a est coercitive, et si $v \to F(v)$ est une application de V dans $\tilde{\mathbb{R}}$ vérifiant l'hypothèse H :

$$H \begin{cases} \forall \lambda > 0 \text{ et pour toute fonction numérique, notée } L, \\ \text{linéaire et continue sur } V, \text{ il existe } u \text{ (nécessairement} \\ \text{unique) dans } V \text{ tel que, } \forall v \in V \\ ((u,u)) + \lambda F(u) + L(u) \leq ((u,v)) + \lambda F(v) + L(v) \end{cases}$$

alors il existe u unique dans V tel que

$$\forall v \in V \quad a(u,u) + F(u) \leq a(u,v) + F(v)$$

* l'unicité se démontre comme précédemment
* l'existence de façon analogue par un théorème de point fixe.

Conditions assurant que H est vérifiée :

Théorème 2-2. Si F applique V dans $\tilde{\mathbb{R}}$ avec

1) F convexe
2) $\mathrm{Im}(F) \subset]-\infty \ +\infty]$
3) F semi continue inférieurement
4) $F \not\equiv +\infty$

alors H est vérifiée.

Remarque 1 Posant

$$F(v) = \begin{cases} -(f, v) & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{si } v \notin K \end{cases}$$

F vérifie les hypothèses du théorème 2-2. Donc H est vérifiée, et le théorème 2-1' redonne alors le théorème 2-1

Remarque 2. Dans un article [35] donnant un cas où la somme de deux applications (multivoques) monotones maximales(*), évidemment monotone, est encore maximale, C. LESCARRET étend la version donnée par G. STAMPACCHIA [6] du théorème 2.1 en un énoncé équivalent à ce que donne l'enchaînement des théorèmes 2.2 et 2-1' ci dessus: Il note, avec J.J. Moreau [E], $\Gamma_0(V)$ l'ensemble des fonctions numériques, définis sur un espace de Hilbert V, et vérifiant les hypothèses du théorème 2.2. Par exemple, la fonction F_K indicatrice d'une partie K de V:

$$F_K(v) = 0 \text{ si } v \in K \qquad F_K(v) = +\infty \text{ si } v \notin K$$

appartient à $\Gamma_0(V)$ si et seulement si K est convexe, fermé, non vide. Se donnant alors une forme a, bilinéaire et continue sur $V \times V$, coercitive sur V, il démontre (de façon différente qu'en 2-1') la proposition:

Pour tout $F \in \Gamma_0(V)$ il existe u unique dans V tel que

$$\forall v \in V \qquad a(u, v-u) \geq F(u) - F(v)$$

Il fait remarquer que, puisque $F \not\equiv +\infty$, l'inéquation précédente implique que $F(u)$ est fini ; et que l'on obtient le théorème de STAMPACCHIA (ici le théorème 2-1) en prenant pour fonction F qui appartient bien à $\Gamma_0(V)$:

$$F = F_K - (f, \ )$$

où F_K est l'indicatrice de K.

Voir aussi [20] une note récente de H. BREZIS en rapport avec cette question.

(*) Soit V un espace de Hilbert réel et ϕ une application multivoque de V dans lui même (i.e. une application (au sens habituel) de V dans $\mathcal{P}(V)$). ϕ est dite monotone, d'après [11], si:

$$\forall x, y \in V \qquad \forall x' \in \phi(x), \forall y' \in \phi(y) \qquad ((x'-y', x-y)) \geq 0$$

ϕ est dite alors monotone maximale si elle n'admet pas de prolongement strict qui soit encore monotone. Autrement dit, l'inclusion $\phi(x) \subset \phi_1(x)$, $\forall x \in V$, avec ϕ_1 monotone, implique que $\phi_1 = \phi$.

3- Propriétés des éventuelles solutions si a est seulement non-négative

On suppose ici que a est seulement non-négative :

$$\forall u \in V \quad a(u,u) \geq 0 .$$

Théorème 3-1 Si $\left|\begin{array}{l} a \text{ est non-négative} \\ \text{l'ensemble } X \text{ des solutions est non vide} \end{array}\right.$

alors X est convexe et fermé.

Démonstration simple. On donnera dans la section suivante des conditions suffisantes d'existence de solutions pour a non négative, dont la principale est : K borné.

· Approche de solutions Supposant toujours X non vide, on se donne sur V une forme bilinéaire $\beta(u,v)$ continue et coercitive, et $g \in V'$ [par exemple $\beta(u,v) = ((u,v))$ et $g=0$]

$$\left\{\begin{array}{l} X \text{ étant convexe et fermé} \\ \beta(u,v) \text{ étant coercitive} \end{array}\right.$$

il existe (th 2-1) un u_0 unique dans X tel que

$$(1) \qquad \forall v \in X \quad \beta(u_0, v-u_0) \geq (g, v-u_0)$$

On considère alors la forme bilinéaire continue et coercitive sur V [régularisation elliptique de a] :

$$(2) \qquad a_\varepsilon(u,v) \underset{df}{=} a(u,v) + \varepsilon\, \beta(u,v) \qquad (\varepsilon > 0)$$

K est convexe, fermé : Il existe (Th 2-1) u_ε unique dans K tel que :

$$(3) \qquad \forall v \in K \qquad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geq (f+\varepsilon g, v-u_\varepsilon)$$

Soit : (4) $\forall v \in V \quad a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) + \varepsilon\beta(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geq (f+\varepsilon g, v-u_\varepsilon)$

Théorème 3-2. Si | a est non négative
| X non vide

alors | $u_\varepsilon \xrightarrow[\text{fort}]{} u_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$
| $(\in K)$ $\quad$ $(\in X)$

Tout d'abord on montre que les $\|u_\varepsilon\|$ sont bornés. On peut donc extraire des u_ε une suite convergent faiblement dans K (fermé). Soit $\omega (\in K)$ la limite de cette suite.

Utilisant le

lemme Si $\gamma(u,v)$ est une forme bilinéaire continue et non négative sur V alors l'application $v \to \gamma(v,v)$ est faiblement continue inférieurement,

on montre que $\beta(u_0-\omega, u_0-\omega) = 0$;
D'où $\omega = u_0$ (β coercitive), et la convergence faible de u_ε vers u_0
Montrant alors que

$$\beta(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0)$$

tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, on conclut, puisque β est coercitive, que u_ε converge fortement vers u_0.

Théorème 3-3. Soit $a(u,v)$ non négative
On choisit $\beta(u,v)$ continue et coercitive d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, la régularisation elliptique de a et l'élément $u_\varepsilon \in K$ défini comme précédemment.
Dire que X est non vide, c'est dire que les $\|u_\varepsilon\|$ sont bornés :

$$\exists L : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \|u_\varepsilon\| \leq L$$

* $X \neq \emptyset \Rightarrow \|u_\varepsilon\|$ bornés a été démontré en 3-2

* si les $\|u_\varepsilon\|$ sont bornés, on peut extraire, comme précédemment, de l'ensemble des u_ε, une suite convergeant faiblement vers $w \in K$

le lemme précédent permet de montrer que w est solution du problème : $X \neq \emptyset$

<u>Formulation plus générale des résultats de cette section</u> :

Soit W un espace de Hilbert, de norme $|||.|||$, contenu et dense dans V. On suppose que, $\forall v \in W \quad \|v\| \leq k\,|||v|||$. Soit $\theta(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercitive sur W [pour la norme $|||.|||$, donc aussi pour $\|.\|$] On suppose encore non vide l'ensemble, noté M des $w \in K \cap W$ tels que

$$\forall v \in K \qquad a(w, v-w) \geq (f, v-w)$$

On montre encore que M est convexe, fermé dans W. D'où l'existence d'un u_0 unique dans M tel que

$$\forall v \in M \qquad \theta(u_0, v-u_0) \geq (g, v-u_0)$$

où g est donné dans W'

Pour $\varepsilon > 0$, soit u_ε l'élément (unique) de $W \cap K$ tel que

$$\forall v \in W \cap K \qquad a(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) + \varepsilon\,\theta(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) \geq (f+\varepsilon g, v-u_\varepsilon)$$

<u>Il est encore vrai que</u> : * Pour que M soit non vide, il faut et il suffit que les $|||u_\varepsilon|||$ soient bornés

* Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$, u_ε tend fortement dans W vers u_0

<u>4- Existence de solutions</u>

<u>Théorème 4-1.</u> Si a est non-négative, et K <u>borné</u> dans V, il existe au moins une solution au problème [2 (1)]

Conséquence immédiate de 3-3, puisque, $\forall \varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in K$.

On envisage maintenant le cas où K n'est pas borné. S_R désignant dans V la boule fermée centrée à l'origine et de rayon R, on définit(*)

$$K_R = K \cap S_R$$

K_R est non vide pour R superieur à un certain R_0 (K non borné). K_R evidemment convexe, fermé, borné dans V, d'où X_R l'ensemble (non vide : théoreme précedent) des solutions <u>relatives à K_R</u> :

* $X_R = \{ w \in K_R \ / \ \forall v \in K_R \quad a(w, v-w) \geq (f, v-w) \} \neq \emptyset$
* $X_R \subset K_R$ donc $w \in X_R \Rightarrow \|w\| \leq R$
* si $R_1 \geq R_2$ $\quad X_{R_1} \subset X_{R_2}$: X_R peut "devenir vide" lorsque R croît.

<u>Théoreme 4.2</u> Si $\left| \begin{array}{l} a \text{ est non-négative} \\ u \in X_R \quad \text{et} \quad \|u\| < R \end{array} \right.$

<u>alors</u> u est solution du problème : X est non vide

En effet, soit $v \in K$. On peut alors, pour ε assez petit mais positif, mettre dans K_R l'element

$$w \underset{df}{=} u + \varepsilon(v-u) \qquad [\text{parce que } \|u\| < R]$$

Or u est solution rélativement à K_R et $w \in K_R$; d'où

$$a(u, \varepsilon(v-u)) \geq (f, \varepsilon(v-u))$$

Soit ($\varepsilon > 0$)

$$a(u, \ v-u) \geq (f, v-u)$$

et cette inégalité, vraie pour tout v dans K, montre que u est bien solution du problème :

(*) construction assez naturelle déjà utilisée dans [8]

Corollaire si | a est non-négative
| X_R contient plus d'un point pour un certain R
il y a une solution au problème.

X_R est convexe et contenu dans la sphère S_R. Contenant u_1 et $u_2 \neq u_1$, il contient le segment $[u_1, u_2]$. Sur ce segment existe nécessairement des points de norme strictement inférieure à R ; d'après le théorème précédent ces points sont tous solutions du problème.

5- Formes semi-coercitives

On suppose la norme $\|\cdot\|$ dans V équivalente à

$$p_0 + p_1 \quad \text{où}$$

* p_0 est une norme sur V faisant de V un préhilbertien
* p_1 est une semi norme sur V dont le noyau Y est de dimension finie
* $\exists\, c > 0$: $\quad \inf_{y \in Y} p_0(v - y) \leq c_1\, p_1(v) \qquad \forall v \in V$

On suppose maintenant la forme a bilinéaire, continue et semi-coercitive : [donc en particulier, non négative]

$$\exists\, c_2 > 0 \quad \forall v \in V \quad a(v, v) \geq c_2 [p_1(v)]^2$$

Théorème 5-1 Soit K un convexe fermé de V contenant l'origine. Soit $f_0, f_1 \in V'$ et $f = f_0 + f_1$
si $Y \cap K \neq \{0\}$ on suppose que l'on a

$$(f_0, y) < 0 \quad \text{pour } y \in Y \cap K \;;\; y \neq 0$$

$$|(f_1, y)| < c_3\, p_1(y) \quad \forall y \in V$$

alors il existe au moins une solution au problème.(*)

(*) Sous les mêmes hypothèses, on trouve dans [5] une conclusion un peu plus générale.

* si K est borné, il y a (Th 4-1) une solution

Si K non borné :

On désigne encore par K_R l'ensemble $K \cap S_R$. D'où, pour tout R, u_R solution du problème

$$\forall v \in K_R \qquad a(u_R, v-u_R) \geq (f, v-u_R)$$

* s'il existe R et u_R tel que $\|u_R\| < R$ alors (Th 4-2) u_R est solution.

* si l'hypothèse précédente est fausse, on a alors, pour tout R

$$\|u_R\| = R \qquad (\text{puisque } u_R \in X_R \subset K_R \subset S_R)$$

montrons que cela n'est pas possible :

On pose $\omega_R = \dfrac{u_R}{R} \underline{\in K}$ (puisque K, convexe, contient 0 et u_R)

La semi-coercitivité de a entraîne alors que

$$p_1(\omega_R) = O(1/\sqrt{R})$$

Il existe donc une suite extraite des ω_R convergeant faiblement, quand R tend vers l'infini, vers un élément ω satisfaisant nécessairement à :

$$\omega \in K \; ; \quad \|\omega\| = 1 \; ; \quad p_1(\omega) = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega \in K \cap S_1 \cap Y$$

Désignant par P la projection de V sur Y, relativement à la norme p_0 (Y, de dimension finie, est fermé) on montre exister $c_4 > 0$ tel que

$$p_0(P\omega_R) \geq c_4 > 0$$

D'où

$$p_0(P\omega) \geq c_4 > 0$$

mais $p_1(\omega) = 0$: $\omega \in Y$ et en conséquence $\omega = P\omega$

D'où

$$p_0(\omega) \geq c_4 > 0 \Rightarrow \omega \neq 0$$

- si $Y \cap K = \{0\}$ on a d'ores et déjà contradiction puisque on vient de montrer que $0 \neq \omega \in Y \cap K$

- si $Y \cap K \neq \{0\}$: $(f_0, \omega) < 0$ par hypothèse. Il existe $\beta > 0$ et R_β tel que

$$\forall R > R_\beta \qquad (f_0 \; \omega_R) \leq -\beta$$

l'utilisation des hypothèses permet de prouver, par un calcul, qu'il existe une constante c telle que

$$\forall R > R_\beta \qquad \beta\sqrt{R} < c$$ ce qui est absurde.

6. Applications aux problèmes aux limites.

V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ [donc espace de Hilbert lui même pour la norme induite] contenant $H^1_0(\Omega)$:

$$H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$$

Soit L l'opérateur différentiel du second ordre sur V :

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + a_0(x)$$

où les fonctions a_{ij} et a_0 sont mesurables et bornées sur Ω. On associe à L la forme bilinéaire

$$a(u,v) \underset{\text{df}}{=} \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega a_0\, u\, v\, dx$$

continue sur V puisque les fonctions a_{ij} et a_0 sont bornées sur Ω.

Soit f pris dans V' et K un convexe fermé de V :

le Théorème 2-1 s'énonce alors ainsi

Théorème Si $a(u, v)$ est coercitive sur V, il existe u, unique dans K tel que

(1) $\forall v \in K, \quad a(u, v-u) \geq (f, v-u)$

Remarques * Un cas classique où $a(u, v)$ est coercitive est celui où l'opérateur L est elliptique [cf. Annexe]

* Si l'on prend $K = V$, on a vu [cf Introduction, remarque 2] que l'inégalité (1) devient

$$\forall v \in V \qquad a(u, v) = (f, v)$$

D'où, pour tout v pris dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (contenu dans V), en utilisant les dérivées-distributions :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \int_\Omega Lu \, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

soit (au sens des distributions) :

$$Lu = f$$

On retrouve donc, pour $K = V$, la théorie variationnelle pour les problèmes aux limites (cf Annexe) relatifs à des opérateurs du second ordre [ou plus généralement, pour des opérateurs d'ordre pair, en utilisant $H^m(\Omega)$]

Les 3 exemples suivants ne rentrent pas dans ce cadre et peuvent néanmoins être traités grâce aux résultats des sections précédentes.

Exemple 1 On notera $\|v\|_2 = \left[\int_\Omega v^2 dx\right]^{1/2}$ la norme de $L^2(\Omega)$.

V est ici l'espace $H^1_0(\Omega)$ muni de la norme (*)

$$\|v_x\|_2 \underset{df}{=} \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2 \sim \left[\sum_i \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]^{1/2} = \left[\sum_i \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2^2\right]^{1/2}$$

Soit L l'operateur du second ordre sur $H^1_0(\Omega)$

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

On suppose les a_{ij} mesurables et bornés ($\in L^\infty(\Omega)$), et L elliptique :

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_r \xi_r^2$$

On se donne $f_1 \ldots f_n$ dans $L^2(\Omega)$ et l'on considère sur $H^1_0(\Omega)$ la fonctionnelle lineaire :

$$v \in H^1_0(\Omega) \longrightarrow (f, v) \underset{df}{=} \int_\Omega \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Cette fonctionnelle est continue sur V : (**)

$$|(f,v)| \leq \sum_i \|f_i\|_2 \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2 \leq \underset{i}{\mathrm{Max}} \|f_i\|_2 \,.\, \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2 = K\|v_x\|_2$$

Soit a la forme bilineaire sur $H^1_0(\Omega)$ associée à L

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

coercitive dans V grace à l'ellipticité de L

$$\forall v \in V \quad a(v,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx \geq \alpha \sum_i \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

soit :

$$a(v,v) \geq \alpha \sum_i \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2^2 \geq \alpha' \left[\sum_i \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2\right]^2 = \alpha' \|v_x\|_2^2$$

De plus, a est continue sur $V \times V$ puisque les $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

**) réciproquement (cf [7] p 198), tout $f \in [H^1_0(\Omega)]' \underset{df}{=} H^{-1}(\Omega)$ est de cette forme. $H^{-1}(\Omega)$ est isomorphe à l'espace des distributions dérivées premieres de fonctions de $L^2(\Omega)$ ([7] p 195)

*) equivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$. Ceci est une conséquence de inégalité dite de Poincarré : $\exists c > 0 \ \forall v \in H^1_0(\Omega) \quad \|v\|_2 \leq c\|v_x\|_2$ (cf Exemple 2) [voir par exemple [7] p 196]

On définit alors le convexe fermé K de $H_0^1(\Omega)$ de la façon suivante : soit E une partie compacte de Ω, et $\psi \in H^1(\Omega)$

$$K \underset{df}{=} \{ v \in H_0^1(\Omega) \quad v \geqslant \psi \text{ sur } E \} \quad (*)$$

les hypothèses du théorème 2-1 sont vérifiées. Donc :

Il existe u unique dans $H_0^1(\Omega)$, vérifiant $u \geqslant \psi$ sur E, tel que

$$\forall v \in K \qquad a(u, v-u) \geqslant (f, v-u) \qquad (1)$$

soit :

$$\forall v \in K \quad \sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (v-u)}{\partial x_j} dx \geqslant \sum_i \int_\Omega f_i \frac{\partial (v-u)}{\partial x_i} dx$$

(*) <u>Remarque importante (cf [7] p 195)</u> Soit E une partie de $\bar\Omega$.
On dira que $u \in H^1(\Omega)$ satisfait à l'inégalité $u \geqslant 0$ sur E <u>au sens de $H^1(\Omega)$</u> s'il existe une suite (de Cauchy) dans $C^1(\bar\Omega)$, que nous notons u_n, telle que :

$$\begin{cases} u_n \text{ converge (dans } H^1(\Omega)) \text{ vers } u. \\ u_n \geqslant 0 \text{ sur } E \quad (\text{au sens classique} : \forall x \in E \ \ u_n(x) \geqslant 0) \end{cases}$$

Ceci, parce que $H^1(\Omega)$ est défini comme le complété de $C^1(\bar\Omega)$.
On peut alors, pour u et v pris dans $H^1(\Omega)$, donner un sens aux expressions

$$u \leqslant v \text{ sur } E \qquad (v - u \geqslant 0 \text{ sur } E)$$
$$u = v \text{ sur } E \qquad (u \leqslant v \text{ sur } E \text{ et } v \leqslant u \text{ sur } E)$$

En général, cette définition de $u \geqslant 0$ sur E <u>ne coïncide pas</u> avec la notion de fonction presque partout non négative. (Néanmoins, si E est une boule dans Ω alors une fonction u presque partout non négative sur E est aussi $\geqslant 0$ sur E au sens de $H^1(\Omega)$)

En particulier, prenant pour E une partie $\partial_1\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$ de Ω, et u dans $H^1(\Omega)$, ce qui précède donne leur sens aux expressions $u \geqslant 0$ sur $\partial_1(\Omega)$; $u = 0$ sur $\partial_1\Omega$ [ce qu'on note $u_{|\partial_1\Omega} = 0$.]

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \geq 0$ sur E. Alors $v \underset{df}{=} u + \varepsilon w \geq \psi$ sur E $(\varepsilon > 0)$

Donc $v \in K$ et

$$a(u, w) \geq (f, w) \quad (2)$$

Ceci est vrai en particulier si w est ≥ 0 sur Ω. Il existe donc une mesure μ, positive sur $\bar{\Omega}$ telle que :

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u, \varphi) - (f, \varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu \quad (3)$$

Autrement dit, au sens des distributions (i.e. prenant φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$)

$$Lu + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \mu \quad (4)$$

Soit I la partie (fermée) de E ou $u = \psi$. Montrons que la mesure μ a son support dans I, autrement dit que μ est nulle sur $\Omega - I$. Pour cela, on etablit le

<u>lemme</u>. Si z, (fonction de $H_0^1(\Omega)$) $= u - \psi$ sur E on a

$$a(u, z) = (f, z) \quad (5)$$

En effet : $\quad$ * $u - \psi$, donc z, est ≥ 0 sur E. Il resulte donc de (2) que

$$a(u, z) \geq (f, z) \quad (6)$$

* d'autre part $v \underset{df}{=} u - z$ appartient à $H_0^1(\Omega)$, egale $u - (u - \psi) = \psi$ sur E, donc $v \in K$ et l'on a, grace à (1)

$$a(u, -z) \geq (f, -z) \quad (7)$$

De (6) et (7) résulte bien (5). En particulier, <u>si $\psi \in H_0^1(\Omega)$</u>,

$$a(u, u - \psi) = (f, u - \psi) \quad (8)$$

(3) s'écrit alors, lorsque z ($\in H^1_0(\Omega)$) egale $u-\psi$ sur E

$$\int_\Omega z\, d\mu = 0$$

Soit encore, puisque z est nulle sur I

$$\int_{\Omega - I} z\, d\mu = 0 \quad (9)$$

Prenant alors z dans $H^1_0(\Omega)$, egal à $u-\psi$ sur E et positive(*) sur $\Omega - I$, (9) implique que μ est nulle sur $\Omega - I$

On en deduit, pour la solution u, les propriétés suivantes

* $u \geq \psi$ sur E ; $u \in H^1_0(\Omega)$
* $a(u, \omega) \geq (f, \omega) \qquad \forall \omega \in H^1_0(\Omega) \qquad \omega \geq 0$ sur Ω
* $a(u, \omega) = (f, \omega) \qquad \forall \omega \in H^1_0(\Omega) \qquad \omega = 0$ sur I

Autrement dit au sens des distributions

* $u \geq \psi$ sur E
* $Lu + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$ sur Ω
* $Lu + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sur $\Omega - I$

__Remarque.__ On suppose ψ prolongée de E à $\bar{\Omega}$ de sorte que

$$L\psi \geq 0 \text{ sur } \Omega$$
$$\psi \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et soit encore u la solution précedente pour des f_i nuls. ($f=0$)
Alors $u \leq \psi$ sur Ω (d'où $I = E$)

En effet, supposons (par l'absurde) exister S partie de mesure >0 de Ω avec $u - \psi > 0$ sur S (*).

(*) Une fonction $v \in H^1(\Omega)$ sera dite positive sur une partie G de Ω ($v > 0$ sur G) si elle l'est - dans le sens suivant - en tout point x_0 de G

Il existe $\rho > 0$ et $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ tels que

$\alpha(x) = 0$ pour $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \geq \rho$; $\alpha(x) > 0$ pour $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \rho$ et

$v - \alpha \geq 0$ sur G (au sens de $H^1(\Omega)$)

Posons $\rho = \inf(u, \psi)$ (*) $[\rho = \psi$ là où $u \geq \psi$; $\rho = u$ là où $\psi \geq u]$

$u - \rho = u - \psi$ sur E. D'où par application de (5)

$$a(u, u-\rho) = 0 \quad (10)$$

D'autre part, puisque $L\psi \geq 0$ et $\rho - u \leq 0$ il vient

$$a(\psi, \rho - u) \leq 0 \quad (11)$$

Or, en prenant S "maximal" :

$$\rho = \psi \text{ sur } S \quad ; \quad \rho = u \text{ sur } \Omega - S$$

(10) s'écrit alors

$$\int_S \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u-\psi)}{\partial x_j} dx = 0 \quad (12)$$

et (11) :

$$\int_S \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial (\psi - u)}{\partial x_j} dx \leq 0 \quad (13)$$

On tire, de (12) et (13) :

$$\int_S \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial (\psi-u)}{\partial x_i} \frac{\partial (\psi-u)}{\partial x_j} dx \leq 0 \quad (14)$$

or

$$\rho - u \begin{cases} = \psi - u \text{ sur } S \\ = 0 \text{ sur } \Omega - S \end{cases}$$

(14) s'écrit donc : $\quad a(\rho - u, \rho - u) \leq 0$

Il en résulte, puisque a est coercitive, que $\rho = u$ sur Ω, ce qui contredit "S de mesure > 0". On a donc sur tout Ω

$$u \leq \psi$$

Donc $\quad u = \psi$ sur E et $I = E$ (**)

(*) l'hypothèse "$\psi \geq 0$ sur $\partial\Omega$" intervient ici pour assurer que ρ est nulle sur $\partial\Omega$, i.e $\rho \in H_0^1(\Omega)$.

(**) le cas particulier $\psi = 1$, $f = 0$ est traité dans [7] p 210. On a donc $u = 1$ sur E.

Le nombre $\mu(E) \underset{df}{=} \int_\Omega d\mu$ est la <u>capacité</u> de E par rapport à l'opérateur L et u est le <u>potentiel capacitaire</u> de E. On a : $cap(E) = \int_\Omega d\mu = \int_\Omega u\, d\mu = a(u, u)$

<u>Exemple 2.</u> On considère toujours l'opérateur $L = -\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ supposé "elliptique" : $\sum_{ij} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2 \quad (\alpha > 0)$, les fonctions $a_{ij}(x)$ étant mesurables et bornées sur l'ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, supposé suffisamment régulier. V sera le sous espace [fermé, donc espace de Hilbert lui même pour la norme induite] de $H^1(\Omega)$, formé des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur une partie donnée $\partial_1\Omega$ de Ω [$H^1_0(\Omega) \underset{1}{\subseteq} V \underset{2}{\subseteq} H^1(\Omega)$; égalité en 1 si $\partial_1\Omega = \partial\Omega$; égalité en 2 si $\partial_1\Omega = \emptyset$.]

<u>Lemme</u> S'il existe une constante C telle que

$$\forall v \in V \qquad \|v\|_2 \leq C\,\|v_x\|_2 \qquad (1)$$

alors, sur V, $\|v_x\|_2$ est une <u>norme équivalente</u> à $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

En effet :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega v^2 dx\right]^{1/2} \geq \left[\int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]^{1/2} \sim \sum_i \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2 \underset{df}{=} \|v_x\|_2$$

Il existe donc $C_1 > 0$ tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \geq C_1\,\|v_x\|_2 \qquad (2)$$

D'autre part $\qquad \|v\|_{H^1(\Omega)} \sim \|v\|_2 + \|v_x\|_2 \leq (C+1)\|v_x\|_2$

d'après (1)

Il existe donc $C_2 > 0$ tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2\,\|v_x\|_2 \qquad (3)$$

et le résultat découle de (2) et (3)

On supposera dans la suite $\partial_1\Omega$ suffisamment grande pour que (1) soit vérifiée. [cas limite : $\partial_1\Omega = \partial\Omega$. Alors $V = H^1_0(\Omega)$ et l'inégalité (1) est celle de Poincarré (cf exemple 1)]

Alors, la forme bilinéaire sur V

$$a(u,v) \underset{df}{=} \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx ,$$

coercitive relativement à $\|\nabla_x\|_2$ (cf Exemple 1) est coercitive sur V relativement à $\|V\|_{H^1(\Omega)}$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ d'où la fonctionnelle linéaire

$$v \in V \longrightarrow \int_\Omega f v \, dx \quad \text{continue sur } V$$

et K le convexe fermé composé des fonctions de $V \geq 0$ sur $\partial_2\Omega$ ($\partial_2\Omega \underset{df}{=} \Omega - \partial_1\Omega$). D'où par application du théorème 2-1

Il existe u unique dans V, $u \geq 0$ sur $\partial_2\Omega$, tel que

$$\forall v \in K \quad a(u, v-u) \geq \int_\Omega f(v-u)\,dx \quad (4)$$

Soit φ quelconque dans $\mathcal{D}(\Omega)$

* $v \underset{df}{=} \varphi + u \in K$ et l'on a

$$a(u, \varphi) \geq \int_\Omega f\varphi \, dx$$

* $v = -\varphi + u \in K$ et l'on a

$$a(u, -\varphi) \geq -\int_\Omega f\varphi \, dx$$

On a donc, pour tout φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx^{(*)} \quad \text{soit}$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

(*) en faisant $v = 0 \in K$ et $v = 2u \in K$ dans (4), on montre que $a(u,u) = \int_\Omega f u \, dx$

soit encore, en utilisant les dérivées distributions

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega -\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx$$

c'est à dire, au sens des distributions :

$$* \quad Lu = f.$$

D'autre part $\qquad * \quad u_{|\partial_1\Omega} = 0 \qquad$ par définition de V

$$* \quad u_{|\partial_2\Omega} \geq 0 \qquad \text{par définition de } K \ni u$$

Soit alors ν la normale à $\partial\Omega$. $\frac{\partial u}{\partial \nu_L}$ désigne la dérivée conormale de u selon L (voir Annexe) :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L} = [\mathrm{grad}\, u]^t \cdot \nu_L = \sum_{ij} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, e_i)$$

Alors la formule de Green

$$\int_\Omega L\omega . v\, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial \nu_L} v\, d\sigma + a(\omega, v)$$

permet de montrer ($v = \omega = u$) que

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu_L} d\sigma = 0$$

soit, puisque u est nulle sur $\partial_1\Omega$

$$\int_{\partial_2\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu_L} d\sigma = 0 \qquad (5)$$

Maintenant, prenant φ dans V, $\varphi > 0$ sur $\partial_2\Omega$, $v \underset{\text{df}}{=} u + \varphi$ est dans K et (4) permet d'écrire

$$a(u, \varphi) \geq \int_\Omega f\varphi\, dx$$

Or (Green) $\quad a(u,\varphi) = \int_\Omega Lu\,\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_L}\varphi\, d\sigma \geq \int_\Omega f\varphi\, dx$

D'où
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \varphi \, d\sigma \geq 0$$

soit (φ nulle sur $\partial_1 \Omega$)

$\forall \varphi \in V$, $\varphi > 0$ sur $\partial_2 \Omega$ $\displaystyle\int_{\partial_2\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \varphi \, d\sigma \geq 0$ (6)

D'où $\quad * \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} \geq 0 \quad$ sur $\partial_2 \Omega$.

(5) entraine alors que $\quad * \quad u \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} = 0 \quad$ sur $\partial_2 \Omega$

[ceci reste formel, les hypothèses de regularité de $\partial\Omega$ n'étant pas précisées]

Une justification théorique peut être donnée, lorsque les coefficients de L sont suffisamment réguliers, par l'utilisation des espaces $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

cf LIONS et MAGENES

Ann. Inst. Fourier Vol II, p 137-178 (1961)

<u>Exemple 3.</u> Meme exemple que precedemment, mais en prenant $\partial_1\Omega = \phi$. Alors V coincide avec $H^1(\Omega)$ et l'inégalité

$$\|v\|_2 \leq C\|v_x\|_2$$

n'est plus vraie sur $H^1(\Omega)$

La forme bilineaire $a(u,v)$, coercitive relativement à $\|v_x\|_2$ ne l'est plus pour la norme de $H^1(\Omega)$: on ne peut plus appliquer le théoreme 2-1. Mais on peut utiliser le théoreme 5-1 : En effet, la norme sur $H^1(\Omega)$ est equivalente à

$$\|v\|_2 + \|v_x\|_2$$

Posant

$$p_0(v) = \|v\|_2$$
$$p_1(v) = \|v_x\|_2$$

* p_0 est une norme sur $H^1(\Omega)$ relativement à laquelle $H^1(\Omega)$ est prehilbertien (produit scalaire $\int_\Omega uv\,dx$)
* p_1 est une semi-norme dont le noyau est formé des fonctions constantes (dimension 1)
* l'inégalité

$$\inf_{y=\text{cte}} \|v-y\|_2 \leq C_1\|v_x\|_2$$

est celle de Poincaré, et $a(u,v)$, coercitive relativement à p_1, est semi coercitive sur $H^1(\Omega)$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et on definit la fonctionnelle continue sur $H^1(\Omega)$:

$$v \in H^1(\Omega) \longrightarrow \int_\Omega f v\,dx$$

K est le convexe fermé constitué des fonctions de $H^1(\Omega) \geq 0$ sur $\partial_2\Omega = \partial\Omega$. Par conséquent (Th 5-1) :

Si l'on a $$\int_{\Omega} f(x)\,dx < 0$$

Il existe u (non nécessairement unique) dans $H^1(\Omega)$, $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$, tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ v \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega : \quad \int_{\Omega} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (v-u)}{\partial x_j}\,dx \geq \int_{\Omega} f(v-u)\,dx$$

On montre comme précédemment que l'on a

$$Lu = f$$

avec, sur $\partial\Omega$, les conditions aux limites :

$$u_{|\partial\Omega} \geq 0 \ ; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \geq 0 \quad ; \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu_L} = 0$$

7. Inéquations d'Evolution.

Dans les problèmes d'évolution, où le temps intervient, la solution cherchée est une fonction u:

$$(x,t) \in \Omega \times [0 + \infty[\longrightarrow u(x,t) \in \mathbb{R}$$

Si X est un espace de Hilbert, on note $L^2(X)$ l'espace des fonctions mesurables de $[0 + \infty]$ dans X telles que

$$\int_0^\infty \|f(t)\|_X^2 \, dt \underset{df}{=} \|f\|^2_{L^2(X)} < +\infty$$

On utilisera en particulier $L^2(L^2(\Omega))$, $L^2(H^1(\Omega))$ etc...
Par exemple, si $u \in L^2(L^2(\Omega))$, $u(t)$ appartient, pour tout $t \geq 0$, à $L^2(\Omega)$. Par abus de langage, on désignera par $u(x,t)$ la valeur en x $(\in \Omega)$ de $u(t)$, et l'on a:

$$\|u\|_{L^2(L^2(\Omega))} = \left(\int_0^\infty \left[\int_\Omega u^2(x,t)\,dx\right] dt\right)^{1/2}$$

norme issue du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(L^2(\Omega))} = \int_0^\infty (u(t), v(t))_{L^2(\Omega)} \, dt = \int_0^\infty \left[\int_\Omega u(x,t)\,v(x,t)\,dx\right] dt$$

En fait, on restreindra la solution u cherchée à être dans un sous espace de $L^2(L^2(\Omega))$, par exemple $L^2(H^1(\Omega))$ [$\forall t \geq 0$, $u(t)$ doit appartenir à $H^1(\Omega)$. Autrement dit, $\forall t \geq 0$, $u(x,t)$ et tous les $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$ (au sens des distributions) doivent être dans $L^2(\Omega)$] $L^2(H^1(\Omega))$ est muni du produit scalaire:

$$(u, v)_{L^2(H^1(\Omega))} = \int_0^\infty (u(t), v(t))_{H^1(\Omega)} \, dt = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega u v\,dx\right] dt$$

d'où résulte la norme :

$$\|u\|_{L^2(H^1(\Omega))} = \left(\int_0^\infty \left[\sum_i \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega u^2 dx\right] dt\right)^{1/2}$$

équivalente d'ailleurs à $\displaystyle \sum_i \left(\int_0^\infty \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right] dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^\infty \left[\int_\Omega u^2 dx\right] dt\right)^{1/2}$

<u>Remarques.</u> Soit $u \in L^2(L^2(\Omega))$. Alors l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0\ +\infty[) \longrightarrow \int_0^\infty \left[\int_\Omega u(x,t)\, \varphi(x,t)\, dx\right] dt$$

définit une distribution (notée encore u). Alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la distribution telle que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0\ +\infty[), \quad \int_0^\infty \left[\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \varphi(x,t)\, dx\right] dt \underset{df}{=} -\int_0^\infty \left[\int_\Omega u(x,t) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x_i} dx\right] dt$$

(distributions "classiques") Cependant que l'application (<u>de $\mathcal{D}([0\ +\infty[)$ dans $L^2(\Omega)$</u>) suivante :

$$\varphi \in \mathcal{D}([0\ +\infty[) \longrightarrow g \in L^2(\Omega)$$

avec $\quad \forall x \in \Omega \quad g(x) \underset{df}{=} \displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\, \varphi(t)\, dt$

(distribution à valeur dans $L^2(\Omega)$) permet de définir la distribution dérivée $\dfrac{du}{dt}$ (à valeur dans $L^2(\Omega)$, également), de la façon suivante :

$$\varphi \in \mathcal{D}([0+\infty[), \quad \int_0^\infty \frac{du(x,t)}{dt} \varphi(t)\, dt \underset{df}{=} -\int_0^\infty u(x,t) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

On définit alors :(*)

$$V = \{ v \in L^2(H^1(\Omega)) \,/\, v' \in L^2(H^{-1}(\Omega)),\ v(0) = 0 \in L^2(\Omega) \}$$

Normé par $\left(\|v\|^2_{L^2(H^1(\Omega))} + \|v'\|^2_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \right)^{1/2}$, V est un espace de Hilbert

On définit aussi

$$\Phi = \{ \varphi \in L^2(H^1(\Omega)) \,/\, \varphi' \in L^2(L^2(\Omega)),\ \varphi(0) = 0 \in L^2(\Omega) \}$$

Normé par $\left(\|\varphi\|^2_{L^2(H^1(\Omega))} + \|\varphi'\|^2_{L^2(L^2(\Omega))} \right)^{1/2}$ Φ est un espace de Hilbert, et $\Phi \subset V$ strictement.

Soit $\Sigma = \partial\Omega \times [0 + \infty[$ la frontière latérale du cylindre $\Omega \times [0 + \infty[$; si $v \in V$, on définit $v_{|\Sigma}$. On pose alors

$$K \underset{df}{=} \{ v \in V \quad v_{|\Sigma} \geq 0 \text{ (presque partout)} \}$$

On se donne alors b_0 et b_{ij} $(i, j = 1, 2 \ldots n)$ des fonctions de $L^\infty(\Omega \times [0 + \infty[)$, telles que

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \\ b_0(x,t) \geq \beta \end{cases} \qquad (\beta > 0 \text{ ; "ellipticité"})$$

Posons, pour $u, v \in L^2(H^1(\Omega))$

$$b(u,v) \underset{df}{=} \int_0^\infty \left[\int_\Omega \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega b_0 u v\, dx \right] dt$$

(*) $H^{-1}(\Omega)$ désigne le dual de $H^1_0(\Omega)$. Il est isomorphe à l'espace des distributions dérivées premières de fonctions de $L^2(\Omega)$ (cf [7] p 195)

$b(u,v)$ est une forme bilinéaire continue sur $[L^2(H^1(\Omega))]^2$ [puisque les b_{ij} et b_0 sont dans $L^\infty(\Omega\times[0+\infty[)$] donc sur $V\times V$: en effet la norme sur V est equivalente à $\|V\|_{L^2(H^1(\Omega))}+\|\dot V\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \geq \|V\|_{L^2(H^1(\Omega))}$

Grâce à l'ellipticité, $b(u,v)$ est coercitive sur $L^2(H^1(\Omega))$:

$$\forall v\in L^2(H^1(\Omega)) \quad , \quad b(v,v) \geq \beta \,\|v\|^2_{L^2(H^1(\Omega))} \qquad (1)$$

D'où la forme bilineaire sur $V\times\Phi$

$$v\in V\ ,\ \varphi\in\Phi \qquad a(v,\varphi) = b(v,\varphi) - (v,\varphi')_{L^2(L^2(\Omega))}$$

Théorème Soit $f\in L^2(L^2(\Omega))$. Il existe alors u unique dans K tel que

$$\forall\,\varphi\in K\cap\Phi \qquad b(u,\varphi-u) - (u,\varphi')_{L^2(L^2(\Omega))} \geq (f,\varphi-u)_{L^2(L^2(\Omega))}$$

Avant de passer à la démonstration, notons la

Remarque : le premier membre de l'inéquation n'est pas $a(u,\varphi-u)$: cette dernière écriture n'a pas de sens, puisque $a(u,u)$ n'est pas défini – $(u,u')_{L^2(L^2(\Omega))}$ ne l'était pas – pour u pris (dans V) en dehors de Φ. Pour $u\in\Phi$, $(u,u')_{L^2(L^2(\Omega))}=0$ [cf ci-dessous]

* Existence On utilise encore une régularisation elliptique de a

Pour $\varepsilon>0$ on définit

$$a_\varepsilon(v,\varphi) \underset{df}{=} a(v,\varphi)+\varepsilon(v',\varphi') = b(v,\varphi)-(v,\varphi')+\varepsilon\,(v'\,\varphi')$$

pour $v,\varphi\in\Phi$. les produits scalaires sont tous dans $L^2(L^2(\Omega))$

- a_ε est une forme bilinéaire, continue sur $\Phi\times\Phi$ grâce aux 3 points suivants :

1) $b(v,\varphi)$ est continue sur $\left[L^2(H^1(\Omega))\right]^2$, donc sur $\phi\times\phi$: En effet, la norme sur ϕ est equivalente à $\|\varphi\|_{L^2(H^1(\Omega))}+\|\varphi'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\geq \|\varphi\|_{L^2(H^1(\Omega))}$

2) $$(v,\varphi')\leq \|v\|_{L^2(L^2(\Omega))}\cdot\|\varphi'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\leq\left[\|v\|_{L^2(H^1(\Omega))}+\|v'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\right]\left[\|\varphi\|_{L^2(H^1(\Omega))}+\|\varphi'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\right]$$
$$\leq C\,\|v\|_\phi\,\|\varphi\|_\phi$$

3) $$(v',\varphi')\leq \|v'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\cdot\|\varphi'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\leq\left[\|v\|_{L^2(H^1(\Omega))}+\|v'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\right]\left[\|\varphi\|_{L^2(H^1(\Omega))}+\|\varphi'\|_{L^2(L^2(\Omega))}\right]$$
$$\leq C\,\|v\|_\phi\,\|\varphi\|_\phi$$

- a_ε est coercitive sur ϕ :

$\varphi\in\phi$: $\quad a_\varepsilon(\varphi,\varphi)=b(\varphi,\varphi)-(\varphi,\varphi')+\varepsilon(\varphi',\varphi')$

Or, pour $\varphi\in\phi$: $\quad * \ (\varphi,\varphi')=\displaystyle\int_0^\infty\Big[\int_\Omega\varphi(t)\frac{d\varphi}{dt}\,dx\Big]dt=-\int_0^\infty\Big[\int_\Omega\frac{d\varphi}{dt}\,\varphi\,dx\Big]dt=0$

$* \ b(\varphi,\varphi)\geq\beta\,\|\varphi\|^2_{L^2(H^1(\Omega))}$ $\quad$ [d'après (1) ; $\phi\subset L^2(H^1(\Omega))$]

$* \ (\varphi',\varphi')=\|\varphi'\|^2_{L^2(L^2(\Omega))}$

D'où
$$a_\varepsilon(\varphi,\varphi)\geq \mathrm{Min}(\beta,\varepsilon)\cdot\left[\|\varphi\|^2_{L^2(H^1(\Omega))}+\|\varphi'\|^2_{L^2(L^2(\Omega))}\right]=\mathrm{Min}(\beta,\varepsilon)\cdot\|\varphi\|^2_\phi$$

Comme $K\cap\phi$ est convexe, fermé dans ϕ, et a_ε continue et coercitive, il existe u_ε unique dans $K\cap\phi$ tel que [Th 2-1] :
$$\forall\varphi\in K\cap\phi\qquad a_\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi-u_\varepsilon)\geq(f,\varphi-u_\varepsilon)_{L^2(L^2(\Omega))}\quad(2)$$

En effet, puisque $f\in L^2(L^2(\Omega))$ l'application $\varphi\in\phi\longrightarrow(f,\varphi)_{L^2(L^2(\Omega))}$ lineaire et continue [/ $L^2(L^2(\Omega))$] l'est à fortiori sur ϕ : cette application est dans ϕ'

Montrons que $\underline{\forall \varepsilon > 0 \qquad \|u_\varepsilon\|_{L^2(H^1(\Omega))} \leq K}$

Pour cela on prend $\varphi = 0$ dans (2) [licite puisque $0 \in K$].

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq (f, u_\varepsilon)$$

ce qui s'écrit :

$$b(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon(u'_\varepsilon, u'_\varepsilon) \leq (f, u_\varepsilon) \qquad [(u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = 0]$$

d'où

$$b(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq (f, u_\varepsilon)$$

d'où encore

$$\beta \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(H^1(\Omega))} \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^2(L^2(\Omega))} \leq C \|u_\varepsilon\|_{L^2(H^1(\Omega))}$$

d'où le resultat

Montrons que $\underline{\forall \varepsilon > 0 \qquad \|u'_\varepsilon\|_{L^2(H^1(\Omega))} \leq K}$

Soit $\psi \in \mathcal{D}[\Omega \times]0 + \infty[]$.

Posons $\varphi_1 = u_\varepsilon + \psi \qquad \varphi_1 \in \Phi \cap K \quad [u_{\varepsilon|\Sigma} \geq 0 ; \quad \psi_{|\Sigma} = 0]$

On tire donc de (2)

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon \ \psi) \geq (f, \psi) \qquad (3)$$

Posons $\varphi_2 = u_\varepsilon - \psi \qquad \varphi_2 \in \Phi \cap K$ [mêmes raisons]

D'où, de (2)

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon \ \psi) \leq (f, \psi) \qquad (4)$$

Il résulte de (3) et (4) que $a_\varepsilon(u_\varepsilon \ \psi) = (f, \psi)$, pour tout ψ dans $\mathcal{D}[\Omega \times [0 + \infty[]$, soit

$$\forall \psi \in \mathcal{D}[\Omega \times [0 + \infty[] : b(u_\varepsilon, \psi) - (u_\varepsilon, \psi') + \varepsilon(u'_\varepsilon, \psi') = (f, \psi)$$

soit, encore, au sens des distributions

$$B u_\varepsilon + u'_\varepsilon - \varepsilon u''_\varepsilon = f \qquad (5)$$

où B désigne l'opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire $b(u,v)$:

$$B = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + b_0 \qquad (6)$$

Or $\|u_\varepsilon\|_{L^2(H^1(\Omega))} \leq K$. Donc $B u_\varepsilon$, et de même $B u_\varepsilon - f$ est, $\forall \varepsilon > 0$, dans un borné de $L^2(H^{-1}(\Omega))$: on peut reécrire (5) :

$$u'_\varepsilon - \varepsilon u''_\varepsilon = g_\varepsilon \qquad \text{où} \quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \leq K'$$

Cette equation différentielle a pour solution, puisque $u'_\varepsilon \in L^2(L^2(\Omega))$:

$$u'_\varepsilon = \int_t^\infty E_\varepsilon(t-\sigma)\, g_\varepsilon(\sigma)\, d\sigma \qquad \text{avec } E_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} e^{t/\varepsilon} \ (t<0)$$
$$= 0 \quad (t \geq 0)$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} |E_\varepsilon(t)|\, dt = 1$, Il resulte que $\|u'_\varepsilon\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))}$ est borné.

Ainsi $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \|u_\varepsilon\|_{L^2(H^1(\Omega))}$ borné

$\|u'_\varepsilon\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))}$ borné

cela entraine que $\|u_\varepsilon\|_{L^2(H^1(\Omega))} + \|u'_\varepsilon\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \sim \|u_\varepsilon\|_V$ est, pour tout $\varepsilon > 0$ inferieur à une constante. On peut donc extraire de l'ensemble des u_ε une suite faiblement convergente dans V. Soit $u \in V$ cette limite, nous allons montrer que u est solution. Tout d'abord $u \in K$ puisque $u_\varepsilon \in K$, faiblement fermé dans V. Ensuite (2) s'écrit

$$\forall \varphi \in K \cap \Phi \qquad a(u_\varepsilon, \varphi) + \varepsilon(u'_\varepsilon, \varphi) - b(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geqslant -\underbrace{(u_\varepsilon, u'_\varepsilon)}_{0} + \varepsilon\underbrace{(u'_\varepsilon, u'_\varepsilon)}_{\geqslant 0} + (f, \varphi - u_\varepsilon)$$

D'où, lorsque $\varepsilon \to 0$

$$\forall \varphi \in K \cap \Phi \qquad a(u, \varphi) - b(u, u) \geqslant (f, \varphi - u) \qquad (7)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \varphi \in K \cap \Phi \qquad b(u, \varphi - u) - (u, \varphi') \geqslant (f, \varphi - u) \qquad (8)$$

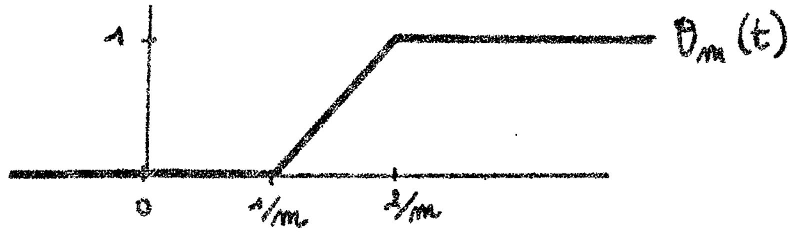
u est donc bien solution du problème.

<u>* Unicité de la solution u</u>

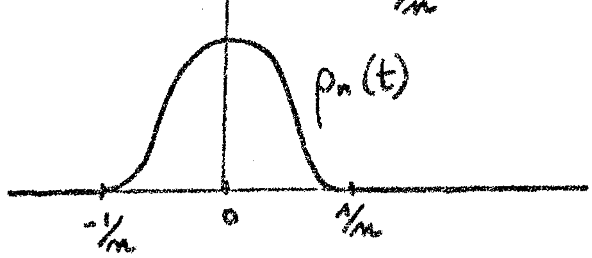
Soient u_1 et u_2 deux solutions de (8). On a donc

$$\forall \varphi \in K \cap \Phi \qquad \begin{cases} b(u_1, \varphi - u_1) - (u_1, \varphi') \geqslant (f, \varphi - u_1) & (9a) \\ b(u_2, \varphi - u_2) - (u_2, \varphi') \geqslant (f, \varphi - u_2) & (9b) \end{cases}$$

. On ne peut, comme précédemment, prendre $\varphi = u_2$ en 9a, $\varphi = u_1$ en 9b et ajouter : les solutions u_1 et u_2 appartiennent bien à K mais pas nécessairement à Φ. On utilise alors(*) deux suites de fonctions, θ_m et ρ_n, ainsi définies :



ρ_n fonction paire, indéfiniment dérivable, à support dans $[-1/n, 1/n]$ et telle que $\int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t)\,dt = 1$; $\rho_n(t) \geqslant 0$.



(*) procédé qu'on retrouve (avec variantes) dans [9], [3], LIONS, Cours Peccot (1959), PRODI Seminario Analyse Pise (1959).

Pour $v \in V$, on pose alors $T_n^m v \underset{df}{=} \theta_m((\theta_m v) * \rho_n * \rho_n)$

On montre que si $v \in K$ $T_n^m v$ aussi et qu'alors $(T_n^m v)' \in L^2(L^2(\Omega))$

Autrement dit $T_n^m v \in K \cap \Phi$ dès que $v \in K$.

On peut donc prendre $\varphi = T_n^m u_2$ dans $\mathcal{G}_a$

$\varphi = T_n^m u_1$ dans $\mathcal{G}_b$

et ajouter.

Faisant tendre n vers l'infini, puis m, dans l'inégalité obtenue, on obtient, grâce aux produits de convolution introduits :

$$b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

Ce qui entraîne que $u_1 = u_2$, puisque b est coercitive sur $L^2(H^1(\Omega))$.

Propriétés de la solution u (*)

u est donc, d'après le théorème ci-dessus l'unique élément de K tel que

$$\forall \varphi \in K \cap \Phi \quad b(u, \varphi - u) - (u, \varphi') \geq (f, \varphi - u) \quad (10)$$

Refaisons le raisonnement habituel : soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, +\infty[)$

Alors $\varphi_1 = u + \psi \in K$

$\varphi_2 = u - \psi \in K$ $\quad [u_{|\Sigma} \geq 0 ; \psi_{|\Sigma} = 0]$

et $T_n^m \varphi_1$, $T_n^m \varphi_2 \in K \cap \Phi$: reporter cela dans (10) et faire le passage à la limite justifie le remplacement formel de φ par $u + \psi$, puis $u - \psi$ dans (10). (u, u') est formellement égal à 0 et il vient

(*) les auteurs [1] (1966, paru en 1967) signalent que le problème de la régularisation de u reste ouvert. Dans une note au CRAS [14] (Avril 67) H. BREZIS donne un résultat de régularité dont il indique l'application comme régularisation de la solution u ici obtenue.

$$b(u, \psi) - (u \; \psi') \geq (f, \psi)$$
$$b(u \; \psi) - (u \; \psi') \leq (f, \psi) \qquad \text{d'où}$$

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times]0 + \infty[) \qquad b(u, \psi) - (u \; \psi') = (f, \psi)$$

Soit, au sens des distributions, et en utilisant l'operateur B défini en (6)

$$Bu + \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad (11)$$

u est donc solution de l'equation parabolique (11)

<u>Conditions aux limites:</u>

u est dans K. On a donc, par définition

$$* \; u(x, 0) = 0 \qquad ; \qquad * \; u_{|\Sigma} \geq 0$$

D'autre part en faisant formellement $\varphi = 0$ (licite : $0 \in K \cap \Phi$) puis $\varphi = 2u$ (illicite, puisque u n'est pas nécessairement dans Φ, mais justifiable en introduisant de nouveau T_m^n et en passant à la limite) dans (10) il vient

$$b(u, u) \leq (f, u)$$
et
$$b(u, u) \geq (f, u) \qquad \text{[le terme } (u, u') \text{ est formellement egal a 0]}$$

D'où

$$b(u, u) = (f, u) \quad (12)$$

On introduit, comme dans l'exemple 2 la derivée conormale

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_B} = \sum_{i,j} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, e_i)$$

[ν, normale à $\partial\Omega$]

Alors, la formule de Green

$$b(\omega, v) = \int_0^\infty \left[\int_\Omega B\omega v\, dx\right] dt + \int_\Sigma \frac{\partial \omega}{\partial \nu_B} v\, d\sigma dt$$

permet de montrer que (11) et (12) entraînent que

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_B} u\, d\sigma dt = 0 \qquad (13)$$

Mais, en prenant $\psi > 0$ sur Σ et $\varphi = u + \psi$, on tire de (10)

$$b(u, \psi) - (u, \psi') \geqslant (f, \psi)$$

d'où, en utilisant à nouveau la formule de Green

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_B} \psi\, d\sigma dt \geqslant 0$$

et par conséquent $\quad * \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu_B} \geqslant 0 \quad$ sur Σ

(13) entraîne alors que $\quad * \quad u \dfrac{\partial u}{\partial \nu_B} = 0 \quad$ sur Σ

[comme pour l'exemple 2. ces conditions aux limites restent formelles, les hypothèses de regularité de Σ n'étant pas précisées](*)

(*) Les resultats obtenus pour ce problème d'évolution sont cités dans LIONS et STAMPACCHIA [5], pour l'operateur $B = -\Delta_x$. Dans ce cas la derivée conormale $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_B}$ coïncide avec la derivée normale $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$.

Annexe: Méthode variationnelle de résolution de problèmes elliptiques

(exemple type)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $H^1(\Omega)$ le complété de $C^1(\bar{\Omega})$ pour la norme:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big[\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \Big]^{1/2}$$

Ω est supposé suffisamment régulier, en sorte que $H^1(\Omega)$ est aussi l'espace des fonctions réelles, définies sur $\bar{\Omega}$, qui appartiennent, ainsi que leurs dérivées partielles premières (au sens des distributions) à $L^2(\Omega)$. Muni du produit scalaire:

$$((u,v)) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega u v \, dx$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

L'espace $H^1_0(\Omega)$ des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω (*) constitue un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. $H^1_0(\Omega)$ est d'ailleurs la fermeture dans $H^1(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

V désignera ici le sous espace (fermé) des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur une partie $\partial_1\Omega$ donnée de $\partial\Omega$. Muni de la norme induite, V est donc bien espace de Hilbert, et l'on a

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset C^1_0(\Omega) \subset H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$. L'application $v \in V \to \int_\Omega f v \, dx$ est une fonctionnelle linéaire continue sur V puisque

$$\Big|\int_\Omega f v \, dx\Big| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Considérons alors l'opérateur différentiel du second ordre sur V

$$L = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) + a_0(x)$$

où les fonctions a_{ij} et a_0 sont mesurables et bornées sur Ω.

On cherche u dans V tel que

$$Lu = f \qquad \text{(équation aux dérivées partielles)}$$

(*) "nulles sur $\partial\Omega$" s'entend ainsi: $H^1_0(\Omega)$ est le complété pour la norme de $H^1(\Omega)$, de l'ensemble $C^1_0(\Omega)$ des fonctions de $C^1(\Omega)$ à support <u>compact</u> dans Ω.

Pour cela on considère la forme bilinéaire sur V associée à L

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0(x) u v dx$$

Cette forme est continue sur $V \times V$ puisque les a_{ij} et a_0 appartiennent à $L^\infty(\Omega)$. Supposons L elliptique.

$$\begin{cases} \sum_{ij} a_{ij}(x) x_i x_j \geq \alpha \sum_i x_i^2 \\ a_0(x) \geq \alpha' \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \alpha' \text{ réels } > 0 \\ \text{indépendants de} \\ x = (x_1 \cdots x_n) \end{pmatrix}$$

Il résulte de l'ellipticité de L que la forme $a(u,v)$ est coercitive sur V :

$$a(u,u) = \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0(x) u v dx \geq \underbrace{\mathrm{Min}(\alpha, \alpha')}_{\beta > 0} \left\{ \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \right\} = \beta \|u\|_V^2$$

Il existe donc u_0 unique dans V tel que

$$\forall v \in V \quad a(u_0, v) = \int_\Omega f v dx \qquad \text{soit}$$

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0 u_0 v dx = \int_\Omega f v dx$$

ce qui s'écrit, lorsque v parcourt $\mathcal{D}(\Omega)$ (contenu dans V), en utilisant les dérivées distributions :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega - \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) v dx + \int_\Omega a_0 u_0 v dx = \int_\Omega f v dx$$

soit, au sens des distributions :

$$* \quad L u_0 = f$$

Ainsi u_0 est solution du problème différentiel. Comme $u_0 \in V$, u_0 est nul sur $\partial_1 \Omega$:

$$** \quad u_0|_{\partial_1 \Omega} = 0$$

Soit ν la normale à $\partial\Omega$. Ses cosinus directeurs sont $\cos(\nu, e_i)$.
La conormale ν_L relative à l'opérateur L a pour composantes

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij} \cos(\nu, e_i) \quad (j = 1, 2 \ldots n)$$

et si $u \in V$ la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \nu_L}$ de u selon ν_L (dérivée conormale) a pour expression

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L} = [\operatorname{grad} u]^t \nu_L = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, e_i)$$

Alors, la formule de Green

$$\int_\Omega L u v \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_L} v \, d\sigma + a(u, v)$$

montre que :

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega L u_0 v \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_L} v \, d\sigma + a(u_0, v)$$

d'où

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_L} v \, d\sigma = 0$$

Soit encore, puisque les éléments de V sont des fonctions nulles sur $\partial_1\Omega$ (et en posant $\partial_2\Omega = \Omega - \partial_1\Omega$)

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial_2\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_L} v \, d\sigma = 0$$

d'où

$$*** \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu_L} = 0 \quad \text{sur } \partial_2\Omega .$$

Article de référence :

[1] J.L. LIONS, G. STAMPACCHIA Variational Inequalities
CPAM Vol XX 493-519 (1967)

Autres références (en rapport direct avec [1])

[2] J.L. JOLY Notes prises au Congrès de l'OTAN sur la théorie et les applications des opérateurs monotones Venise. 17-30 Juin 1968

[3] J.L. LIONS Cours de 3^e cycle Institut Blaise Pascal

[4] J.L. LIONS Equations différentielles opérationnelles Springer Verlag 1961

[5] J.L. LIONS, G. STAMPACCHIA Inéquations variationnelles non coercives
CRAS t 261 (1965) 25-27.

[6] G. STAMPACCHIA Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes CRAS t 258 (1964) 4413-4416

[7] G. STAMPACCHIA Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus
Ann. Inst. Fourier 15-1 (1965) 189-258

[8] P. HARTMAN, G. STAMPACCHIA On some non linear elliptic differential functional equations
Acta Math Vol 115 - (1966) 271-310.

[9] J.L. LIONS, G PRODI Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2.
CRAS t 248 (1959) 3519-3521.

[10] Y. HAUGAZEAU Sur des inéquations variationnelles
CRAS t 265 (1967) 95-98.

Sur les operateurs monotones :

[11] G. J. MINTY Monotone Non linear operators in Hilbert spaces
Duke Math Journal 29 (1962) 341-346

[12] F. E BROWDER Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces Bull Am Math Soc 71 (1965) 780-785

[13] H. BREZIS Une generalisation des operateurs monotones
CRAS t 264 (1967) 683-686.

[14] H. BREZIS Inéquations d'evolution abstraits
CRAS t 264 (1967) 732-735

[15] C. LESCARRET Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert
CRAS t 261 (1965) 1160-1163

[16] F. E BROWDER Multivalued monotone non. linear mappings and duality mappings in Banach spaces
Trans Amer Math Soc 118 (1965) 338-351

Autres references (récentes)

[17] J.L. LIONS Sur l'approximation de la solution d'inéquations d'evolution
CRAS t 263 (1966) 55-57
(Stabilité et Convergence de l'approximation de la solution d'inéquations d'evolution)

[18] J.L. LIONS, R TEMAM Une methode d'éclatement des operateurs et des contraintes en calcul des variations
CRAS t 263 (1966) 563-565.
(Approximation de la solution d'inéquations variationnelles) ...

[19] Y. HAUGAZEAU Sur la minimisation de formes quadratiques avec contraintes
CRAS t 263 (1966) 606-608
CRAS t 264 (1967) 322-324
(Un algorithme constructif)

[20] H. BREZIS Fonctions duales relativement à une forme bilinéaire CRAS t 264 (1967) 284-286

[21] H. BREZIS, J.L. LIONS Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques CRAS t 264 (1967) 928-931

D'autres indications bibliographiques [en rapport plus lointain avec [1]] : 4[e]

[a] E. DE GIORGI Sulla Differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari
Mem Ac Sc. Torino 3 (1957) 25-43

[b] G. STAMPACCHIA On some regular multiple integral problems in the calculus of variations Comm. Pur. App. Math 16 (1963) 383-421

[c] J. LERAY J.L. LIONS Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder
Bull Soc Math France 93 (1965) 97-107

[d] J.J. MOREAU Proximité et dualité dans les espaces Hilbertiens
Bull Math Soc Fr. (93) 1965

[e] J.J MOREAU
CRAS t 256 (1963) p. 5047

[f] J.J MOREAU
CRAS t 257 (1963) p. 4117

[g] G.J. MINTY On a "monotonicity" method for the solutions of non linear equations in Banach spaces
Proc Nat Ac Sci USA 50 (1963) 1038-1041

[h] F.E. BROWDER Non linear elliptic boundary value problems
Bull Am Math Soc (1963) 862-874.

[j] G. STAMPACCHIA Regularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues
Inter Symp on Lin. Spaces Jerusalem (1960) 399-405

[k] F.E BROWDER Problèmes non linéaires Université de Montréal (1966)

[l] F.E. BROWDER Proc. Nat. Ac. Sc. USA 56 (1966) 419-425 et 1080-1086.

[m] N.P. CHAU Remarques sur deux théorèmes de G.J. Minty et F.E. Browder
CRAS t 265 (1967) 337-339