Problème de décidabilité et d'effectivité en théorie de complexité

Georges Werner

Numéro d'ordre

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES APPLIQUEES MATHEMATIQUES

par

Georges WERNER

Docteur-Ingénieur

Master of Science

PROBLEMES DE DECIDABILITE ET D'EFFECTIVITE EN THEORIE DE COMPLEXITE

Soutenue le Septembre 1973 devant la Commission d'Examen

M.	J. KUNTZMANN	Président
MM.	C. BENZAKEN	Examinateurs
	B. JAULIN	
	L. NOLIN	
	B. VAUQUOIS	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
ARNAUD Paul	Chimie
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BEZES Henri	Chirurgie générale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BRAVARD Yves	Géographie
BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
CALAS François	Anatomie
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
CHATEAU Robert	Thérapeutique
CHENE Marcel	Chimie papetière
COEUR André	Pharmacie chimique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
CRAYA Antoine	Mécanique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
FELICI Noël	Electrostatique
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures

MM. GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M. VERAIN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. BULLEMER Bernhard	Physique
RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. AUBERT Guy	Physique
BEAUDOING André	Pédiatrie
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
BIARES Jean-Pierre	Mécanique
BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme BONNIER Jane	Chimie générale
MM. CARLIER Georges	Biologie végétale
COHEN Joseph	Electrotechnique
COUMES André	Radioélectricité
DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENAT René	Chimie organique
HACQUES Gérard	Calcul numérique
JANIN Bernard	Géographie
Mme KAHANE Josette	Physique
MM. MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
REVOL Michel	Urologie
REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
ROBERT André	Chimie papetière
SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SIBILLE Robert	Construction Mécanique
SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme SOUTIF Jeanne	Physique générale
M. VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. AMBLARD Pierre	Dermatologie
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
ARMAND Yves	Chimie
BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM. BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRIERE Georges	Physique expérimentale
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse

MM. CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
LUU DUC Cuong	Chimie Organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)
NEGRE Robert	Mécanique
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie
PELMONT Jean	Physiologie animale
PERRET Jean	Neurologie
PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle PIERY Yvette	Biologie animale
MM. RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RICHARD Lucien	Botanique
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie

MM. STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
VIALON Pierre	Géologie
VOOG Robert	Médecine interne
VROUSSOS Constantin	Radiologie
ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
CHEEKE John	Thermodynamique
GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MATIRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène	Physiologie
Mme RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 8 MARS 1972.

A ma femme

Ce travail a été effectué pendant le séjour de l'auteur à l'Université de Grenoble, Laboratoire d'Informatique.

Je remercie Monsieur J. Kuntzmann, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury.

Je suis très reconnaissant pour le soutien efficace et constant de Monsieur C. Benzaken, Professeur à l'IRMA, ainsi que pour l'intérêt qu'il m'a témoigné.

Il faut mentionner plus particulièrement l'influence qu'a exercée Monsieur B. Jaulin. Il a attiré mon attention sur le sujet de la théorie axiomatique de complexité et des nombreuses discussions avec lui m'ont souvent beaucoup aidé.

Je remercie Monsieur le Professeur P. Pouzet qui a largement facilité la réalisation de cette thèse.

Mes remerciements vont également aux autres membres du jury pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

C'est grâce à l'équipe du Département de Mathématiques de l'Université de Lille que la réalisation matérielle de ce travail a pu être faite et je lui en suis très reconnaissant.

*

*   *

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET RESUME

La classe des fonctions récursives partielles peut être définie comme la classe des fonctions partielles calculables par des machines de Turing. Plus généralement et en vertu de la thèse de Church, on pourra substituer aux machines de Turing toute classe de machines abstraites, dotées d'une mémoire externe non-limitée, qui leur est équivalente.

Etant donné une certaine classe de machines, on appelle programme ou algorithme la partie finie d'une machine individuelle. Cette partie finie définit une application de l'ensemble des configurations complètes de la machine dans lui-même. Tout programme définit donc une fonction de marche ou fonction de configuration qui donne, pour une configuration complète donnée, la configuration qui lui succède.

Le calcul d'une machine peut maintenant être défini comme la suite des configurations complètes telle qu'elle est déterminée par la fonction de marche. Une mesure de la complexité ou du coût d'un tel calcul est une fonction de la suite de configurations complètes correspondantes.

Des exemples bien connus de mesures de complexité sont la longueur d'un calcul, c'est-à-dire le nombre de configurations successives, le plus grand encombrement de la mémoire externe, etc...

Une telle notion de complexité est par sa définition même étroitement liée à une certaine classe de machines. Deux algorithmes pour la même fonction, intuitivement similaires, mais appartenant à des classes de machines différentes, peuvent avoir des complexités très différentes. Si l'on veut étendre la notion de complexité aux fonctions récursives partielles, alors il convient de rendre sa définition plus indépendante d'un modèle particulier de machine par une définition axiomatique de la complexité. Toute classe de machines équivalente à la classe des machines de Turing peut être considérée comme une numérotation de la classe des fonctions récursives partielles, satisfaisant à un théorème d'énumération et à un théorème s-m-n. Il est bien connu que de telles numérotations (i.e. des "gödelisations") sont récursivement équivalentes.

M. Blum a proposé deux axiomes pour la fonction de complexité d'un algorithme, axiomes qui sont vérifiés par un grand nombre de mesures de complexité "naturelles". De cette façon, à tout indice on associe à la fois une certaine fonction récursive partielle et une autre fonction récursive partielle, sa fonctio de complexité. Ainsi, une "classe de machines" du point de vue de la théorie de complexité axiomatique, est une énumération de couples de fonctions récursives partielles, satisfaisant à un théorème d'énumération, un théorème s-m-n et aux axiomes de Blum et toute mesure de complexité induit une telle énumération de couples de fonctions pour toute classe d'algorithmes donnée.

Si à tout indice correspond une certaine fonction (partielle) ainsi qu'une certaine fonction (partielle) de complexité bien définie, peut on inversement attribuer à toute fonction (partielle) une complexité minimale ou intrinsèque ?

M. Blum a montré que ceci n'est pas le cas. D'une manière plus générale, la motivation pour l'étude de la théorie axiomatique de complexité est double :

Il s'agit d'une part de donner des réponses à des problèmes tels que l'existence d'un algorithme optimal pour une certaine fonction et d'autre part de développer un outil pour l'étude et l'unification de théories de calculabilité plus restreintes que la calculabilité au sens de Turing.

M.O. Rabin a montré qu'étant donné une fonction récursive $t()$, on peut trouver une fonction récursive caractéristique $f()$, telle que tout système canonique de Post qui calcule $f()$ est plus complexe que $t(x)$ pour presque tout x, c'est-à-dire sauf sur un ensemble fini de points. Ce résultat suggère la définition des "degrés de difficulté" des fonctions récursives et par là des ensembles récursifs ; Rabin montre que ces degrés forment un ordre partiel. Des classes de fonctions récursives qui sont calculables en complexité bornée par une certaine fonction récursive presque partout sont une forme alternative, mais équivalente d'un degré de difficulté. Cette définition inclut toutes les hiérarchies sub-récursives ; elle peut être étendue à des classes de fonctions récursives partielles.

Des problèmes plus particuliers, mentionnés ci-dessus, celui de la complexité minimale d'une fonction, n'a pas de solution en général, car il existe des fonctions dont tout algorithme peut être remplacé par un autre algorithme moins complexe que le précédent presque partout.

D'autres problèmes liés à la complexité sont la structure de l'ordre des degrés de difficulté par rapport à l'inclusion pour différentes mesures de complexité, des propriétés d'énumérabilité des classes de fonctions récursives correspondantes, la structure de la classe des bornes de complexité d'un degré de difficulté donné, etc.

Il s'agit là de problèmes fondamentaux de la théorie des algorithmes, qui donnent souvent naissance à des problèmes de décision et d'effectivité dont un certain nombre sera considéré par la suite.

D'une manière plus générale, la théorie de la complexité et celle des degrés de difficulté, qu'elle engendre, peuvent être considérées comme un prolongement de la théorie des degrés d'indécidabilité. On a pu dire qu'elles constituent des prolégomènes à une future théorie des algorithmes dont elles feront nécessairement partie.

Le chapitre II de cette thèse réunit un certain nombre de résultats obtenus en théorie axiomatique de complexité dans la dernière décennie. Les axiomes pour les "degrés de difficulté" de Rabin et le théorème de Rabin sur l'existence d'un ordre partiel de ces degrés sont présentés en détail ainsi que les axiomes de M. Blum et la généralisation par Blum du théorème de Rabin ("compression"). Deux autres théorèmes fondamentaux de la théorie de complexité sont le théorème du gap (A. Borodin) et les théorèmes du speed-up (M. Blum). On présente ici une démonstration simplifiée de ce dernier théorème.

Deux autres résultats concernent les classes de complexité : leur énumérabilité récursive et les deux théorèmes de A.R. Meyer et E.M. McCreight l'un permet de prouver l'existence d'un ensemble mesuré de fonctions qui caractérise toute classe de fonctions de complexité bornée dans une certaine mesure, l'autre est le théorème de l'union à l'aide duquel on peut prouver que certaines classes de fonctions récursives sont des classes de complexité. Le reste du chapitre est consacré à la démonstration de théorèmes connus à l'aide de la théorie de complexite. Il s'agit ici d'un exposé d'un certain nombre de résultats invariants par rapport à un changement de la mesure qui seront utilisés fréquemment par la suite.

Résultats de cette thèse, extensions et applications possibles.

Le chapitre III présente des hiérarchies sub-récursives primitives et leurs relations avec les classes de complexité axiomatiques.

Ce sujet a été traité dans un grand nombre d'articles depuis les premiers travaux pionniers de R.W. Ritchie et de A. Cobham et tous les sujets traités ici ont déjà fait l'objet de divers travaux. Nous avons cependant essayé de présenter en détail un certain nombre de problèmes de décision et de les étendre et compléter. Le paragraphe 2 contient une formulation du problème de l'estimation de la complexité susceptible de trouver d'autres applications.

Les deux paragraphes suivants traitent des présentations de la hiérarchie $E(f_k)$ dont les propriétés servent à formuler les axiomes pour les classes de machines élémentaires. Les autres paragraphes présentent des relations entre les classes $E(f)$ et les classes de complexité, quelques résultats sur la structure des degrés récursifs élémentaires et sur l'invariance des classes de complexité correspondant

Il nous semble, que les sujets de ce chapitre offrent encore des nombreuses possibilités de recherche ; nous n'en citerons que deux ici : c'est d'une part la structure des degrés subrécursifs et d'autre part celle des problème d'effectivité (partial algorithm problems) qui ne semblent pas encore avoir été traités systématiquement et qui présentent un intérêt évident pour les application en informatique.

Le chapitre IV traite un certain nombre de problèmes d'indécidabilité et d'énumérabilité qui se rattachent aux classes de fonctions récursives totales de complexité bornée $R^{\Phi}_{t()}$.

La première section donne la classification du degré d'indécidabilité de ensembles d'indices dérivés de $R^{\Phi}_{t()}$; les résultats ne sont pas indépendants de l classe de machines considérées mais varient avec Φ et $t()$; des "anomalies" existent dans les "petites classes" de complexité de certaines mesures.

La seconde partie du chapitre présente une classification des mesures de Blum en fonction des propriétés d'énumérabilité des classes $R^{\Phi}_{t()}$. Elle utilise un certain nombre de résultats, dûs notamment à A. Borodin, F.D. Lewis et à E.L. Robertson, qu'elle étend. Cette section contient notamment la construction d'une mesure qui admet une classe $R^{\Phi}_{t()}$ récursivement énumérable dont toute présentation $t()$-calculable est immune.

La dernière section du chapitre IV contient la démonstration du fait que la classe de fonctions de mesure t-bornées n'est pas en général récursivement énumérable ainsi que le résultat principal de ce chapitre, qui est la non-énumérabilité récursive de la famille de toutes les sous-classes récursivement énumérables de $R^{\Phi}_{t()}$. Ce résultat implique qu'une sous-classe arbitraire de $R^{\Phi}_{t()}$ peut être arbitrairement difficile à énumérer ; il utilise un argument de priorité

Un sujet de recherche de ce chapitre est une définition axiomatique de mesure plus restrictive que celle de Blum qui aboutirait à une plus grande invariance des propriétés de $R^{\Phi}_{t()}$, comme cela a déjà été souligné dans [30] et [31]. Une autre possibilité, indiquée par les résultats de la dernière section, est de restreindre la classe des algorithmes Φ-t-calculables.

Le sujet de chapitre V est la construction de hiérarchies transfinies basées sur la complexité. Ce chapitre est largement inspiré par les idées de J.L. Bass et P.R. Young [16]. Les résultats de [16] sont toutefois complétés par les développements suivants : dans la première section du chapitre, on étudie en détail le problème de l'extension effective d'une classe $R^{\Phi}_{t()}$ et, dans la seconde partie, on compare l'incomplétude de ces hiérarchies, découverte par Bass et Young, à une autre hiérarchie basée sur la complexité, complète mais admettant un théorème de pathologie du type de Myhill-Routledge.

La dernière section présente des démonstrations constructives, à l'aide de la théorie de complexité, des irrégularités de ces hiérarchies, prouvées dans [16] à l'aide d'un théorème de Kreisel et Parikh.

Le dernier chapitre est concerné avec le problème de l'indexation des classes $R^{\Phi}_{t()}$, c'est-à-dire avec les propriétés de la classe R_t des bornes de complexité d'une classe $R^{\Phi}_{t()}$ fixée. On utilise d'abord une certaine classe d'ensembles récursifs introduite par Trahtenbrot et Constable [20] pour la démonstration que R_t contient des fonctions arbitrairement grandes et de ce fait n'est pas récursivement énumérable. Le paragraphe suivant contient une élaboration d'un résultat publié dans [51] relatif à l'invariance des classes $R^{\Phi}_{t()}$. Il est basé sur une formalisation d'une méthode de priorités qui est également employée au chapitre IV pour la démonstration d'un théorème de A. Borodin. Au paragraphe trois on montre que pour une borne $t() \in R_s$ qui possède un speed-up, on peut effectivement trouver une autre borne qui est beaucoup moins complexe que la précédente ; ce théorème utilise le théorème de [34] sur l'énumérabilité récursive des séquences de complexité d'une fonction avec speed-up et le pseudo-speed-up effectif de M. Blum [11].

Le dernier paragraphe est consacré à un problème de P. Young, c'est-à-dire essentiellement au problème de l'existence d'un algorithme permettant de "passer effectivement" d'un élément $t_1()$ de R_t à un autre élément $t_2()$ de R_t. On donne des raisons pour la conjecture suivante : pour tout $t()$, Φ, il existe $t_1(), t_2() \in R_t$ tels que pour toute fonction $s()$ récursive totale, si $\varphi_{t_1}() \in R_t$ implique $\varphi_{s(t_1)} \in R_t$, alors $t_1()$ et $t_2()$ sont incomparables par rapport à $s()$, i.e., $\varphi_{t_1} \neq \varphi_{s(t_2)}$ et $\varphi_{t_2} \neq \varphi_{s(t_1)}$.

Ceci mène au problème de l'existence d'une fonction dans R_t incomparabl avec toute fonction optimale dans R_t.

Il nous semble que ce dernier chapitre pose de nombreux problèmes quant à la structure des classes R_t et en particulier, soulève des problèmes (difficiles) d'existence d'algorithmes partiels [49] dont le problème de Young est un cas particulier, notamment pour la solution générale du problème de trouver une borne de complexité optimale.

DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Dans ce qui suit on réunit d'abord un certain nombre de définitions et de notations, pour la plupart standard dans la littérature, qui seront utilisées par la suite.

1.1. N est l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $A,B,\ldots,X,Y,\ldots$ sont des sous-ensembles de N, $\emptyset$ l'ensemble vide ; $\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ est un k-uplet ordonné d'éléments de N et $\psi^{(k-1)}()$ une fonction partielle de $k-1$ arguments lorsqu'il existe une relation k-aire R telle que

$\langle x_1,\ldots,x_{k-1},y\rangle \in R \;\&\; \langle x_1,\ldots,x_{k-1},z\rangle \in R \Rightarrow y = z$;

$$\operatorname{dom} \psi^{(k-1)} = \{\langle x_1,\ldots,x_{k-1}\rangle \mid (\exists y)\ \langle x_1,\ldots,x_{k-1},y\rangle \in R\} ;$$

$$\rho\, \psi^{(k-1)} = \{y \mid (\exists x_1)\ldots(\exists x_{k-1})\ \langle x_1,\ldots,x_{k-1},y\rangle \in R\} ;$$

$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ ... dénotent des classes de fonctions.

1.2. Soit M_i la machine de numéro i dans une liste de toutes les machines (ou programmes) d'un certain type M (machines de Turing, machines à registres, algorithmes de Markov, etc.), alors $\varphi_i^{(k)}$ est la fonction récursive partielle calculée par M_i : $M_i(x_1,\ldots,x_k)$ s'arrête avec $\varphi_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)$ dans sa mémoire externe ou $M_i(x_1,\ldots,x_k)$ ne s'arrête pas et $\varphi_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k)$ est indéfini (ou divergent).

On appelle i (le code pour) un algorithme ou indice de $\varphi_i^{(k)}()$; on distingue en général entre l'algorithme i ou φ_i et la fonction, notée $\varphi_i()$. $\{\varphi_i()\}_{i\in N}$ ou $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ est l'énumération standard.

On écrit $\varphi \simeq \psi$ si $\operatorname{dom} \varphi = \operatorname{dom} \psi$ et $(\forall x) x \in \operatorname{dom} \varphi \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x)$.

$\mathcal{P}$ est la classe des fonctions récursives partielles ; $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\ldots$ celles des fonctions récursives partielles à un, deux, ... arguments et similairement $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\ldots$ les classes des fonctions récursives totales.

Si $\varphi = \{\varphi_i\}$ est une énumération standard de $\mathcal{P}$, $\{W_i \mid W_i = \operatorname{dom} \varphi_i\}$ est une énumération standard de tous les ensembles récursivement énumérables ;

$f(), g(), h(), \ldots$ dénotent des fonctions récursives totales, $f, g, h, \ldots$ leur indice, i.e. : $\varphi_f() = f()$.

1.3.- $\tau(x,y) =_{\text{déf.}} \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+3x+y)$ est une fonction de Cantor (ou fonction du couple), qu'on écrit aussi $\langle x,y\rangle$. $\tau : N \times N \to N$ est une bijection et $\Pi_1 \times \Pi_2 : N \to N \times N$ est la bijection réciproque :

$$\tau(\Pi_1(z), \Pi_2(z)) = z \quad ; \quad \tau(x,y) \geq \max(x,y).$$

Les classes de fonctions P_2 et P_1 (R_2 et R_1, P_n et P_1 ; etc.) peuvent être identifiées à l'aide de la fonction de Cantor.

1.4.- Soit $\varphi = \{\varphi_i()\}_{i\varepsilon N}$ une gödelisation ou numérotation acceptable [10] de la classe des fonctions récursives partielles P_1, c'est-à-dire une énumération de fonctions récursives partielles qui satisfait à :

(a) $(\forall i)\varphi_i() \in P_1 \Rightarrow \varphi_i() \in \varphi$

(b) $\lambda ix[\varphi_i(x)] \in P_2$

(c) il existe une fonction récursive totale $g() \in R_2$ telle que pour tout i, x

$$\lambda y[\varphi_i(\tau(x,y))] \simeq \varphi_{g(i,x)}$$

(l'énumération standard de 1.2. est acceptable) et soit $\Phi = \{\Phi_i\}_{i\varepsilon N}$ une autre liste de fonctions récursives **partielles**, $\Phi \subsetneq P_1$ et telle que $\lambda ixy[\Phi_i(x)=y]$ est un prédicat récursif :

(d) $$\lambda ixy\ M(i,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_i(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{est récursif total ;}$$

la classe $\Phi = \{\Phi_i\}_{i\varepsilon N}$ est un ensemble mesuré de fonctions. Si l'ensemble mesuré Φ est tel que pour tout i,

(e) $\text{dom}\ \Phi_i = \text{dom}\ \varphi_i$

alors Φ est une mesure abstraite de complexité (ou de ressource) ou mesure de Blum.

La liste $\{<\psi_i, \Phi_i>\}_{i\varepsilon N}$ est une "classe de machines" (d'un certain type) ou une "classe de programmes" (pour un certain type de machines), si $\{\psi_i\}$ et $\{\Phi_i\}$ satisfont à (a),(b) et (d),(e) ci-dessus.

$\{<\psi_i, \Phi_i>\}_{i\varepsilon N}$ est une classe de machines acceptable si

(a) $\psi = \{\psi_i\}_{i\varepsilon N}$ est une numérotation acceptable de P_1 et

(b) $\Phi = \{\Phi_i\}_{i\varepsilon N}$ est une mesure de Blum.

Intuitivement, $\Phi_i(x)$ définit la mesure de complexité ou du coût du calcul de $\psi_i(x)$ par le programme $M_i(x)$. Il est facile de voir qu'il y a un algorithme pour décider, si le programme $M_i(x)$ s'arrête après avoir utilisé exactement ressource y ou non, d'où la condition

$$\lambda ixy[\Phi_i(x)=y] \text{ est un prédicat récursif.}$$

D'autre part, un grand nombre de mesures est tel que

$$\psi_i(x) \text{ indéfini} \Rightarrow \Phi_i(x) \text{ indéfini et}$$
$$\psi_i(x) \text{ défini} \Rightarrow \Phi_i(x) \text{ défini,}$$

d'où la condition $\text{dom } \psi_i = \text{dom } \Phi_i$.

(Pour certaines classes de machines cette dernière condition n'est pas remplie, on peut avoir $\psi_i(x)$ indéfini & $\Phi_i(x)$ défini. On a proposé un système d'axiomes approprié plus faibles que celui de Blum qui permet d'inclure de telles définitions de mesures. On ne poursuivra pas cette voie ici).

1.5.- Soit $\lambda x\, P(x)$ un prédicat à une variable, on définit "$P(x)$ presque partout" abrégé "$P(x)$ p.p." par $(\exists n)(\forall x)[x > n \Rightarrow P(x)]$ et de même "$P(x)$ pour un nombre infini d'arguments", abrégé "$P(x)$ i.a." par $(\forall n)(\exists x)[x > n \;\&\; P(x)]$.

On dira "$\forall t() \in R_1$ suffisamment grand $t()$ à la propriété P" lorsque $\exists s() \in R_1$ $\forall t() \in R_1$ $\forall x[t(x) > s(x) \Rightarrow t()$ a la propriété $P]$.

Si $t()$ est une fonction récursive totale, $t() \in R_1$ et Φ une mesure de Blum,

$$R^{\Phi}_{t()} = \{f() \mid f() \in R_1 \;\&\; (\exists i)[[\psi_i() = f()] \;\&\; [\Phi_i() \leq t() \text{ p.p.}]]\}$$

est la classe des fonctions récursives totales calculables en une quantité de ressource Φ bornée par $t()$ presque partout.

Des classes de fonctions récursives partielles de complexité bornée peuvent être définies similairement par :

$$R^{\Phi}_{\alpha()} = \{\varphi_n() | \varphi_n() \in P_1 \ \& \ (\exists i)[[\varphi_n() \simeq \varphi_i()] \ \& \ [\Phi_i() \leq \alpha() \text{ p.p.}]$$
$$\& \ [\text{dom } \alpha() \subseteq \text{dom } \varphi_n()]]\}.$$

Dans ce cas les classes $R^{\Phi}_{t()}$ de fonctions totales apparaissent comme le cas particulier de $R^{\Phi}_{\alpha()}$ avec $\alpha()$ total.

Ceci est encore vérifié si l'on définit, de façon moins restrictive,

$$R'^{\Phi}_{\alpha()} = \{\varphi_n() | \varphi_n() \in P_1 \ \& \ (\exists i)[(\forall x)[\alpha(x) \text{ défini} \Rightarrow \varphi_i(x) \text{ défini} \ \&$$
$$\varphi_n(x) = \varphi_i(x)] \ \& \ [\Phi_i() \leq \alpha() \text{ p.p.}]]\}.$$

1.6.- On dira que l'ensemble A est une présentation d'une classe de fonctions lorsque l'une des conditons équivalentes suivantes est satisfaite :

(a) $\mathcal{A} = \{\varphi_i() | i \in A\}$

(b) $f() \in \mathcal{A} \iff (\exists x)[x \in A \ \& \ \varphi_x() = f()]$.

Les présentations particulières suivantes d'une classe C sont intéressantes :

(a) θC, l'ensemble d'indices de C ou présentation complète :

$$\theta C = A = \{i | \varphi_i() = f() \ \& \ f() \in C\} \ ;$$

(b) l'ensemble des algorithmes dont la complexité est bornée presque partout par $t()$:

$$I^{\Phi}_{t()} = \{i | \varphi_i() \in R^{\Phi}_{t()} \ \& \ [\Phi_i() \leq t() \text{ p.p.}]\}$$

($I^{\Phi}_{t()}$ est donc une présentation de $R^{\Phi}_{t()}$) ;

(c) la présentation récursivement énumérable d'une classe C (lorsqu'ell existe) par l'ensemble A où A est tel que

$$(\exists x)[A = W_x] \ ;$$

où W_x désigne le $(x+1)^{\text{ième}}$ ensemble récursivement énumérable (r.é.) dans une énumération standard de tous les ensembles récursivement énumérables.

1.7.- Notations pour les ordinaux [10].

Un système de notation S pour les ordinaux comprend

- un ensemble $D_S \subseteq N$ dont les éléments sont des notations
- une application μ de D_S sur un segment initial des ordinaux.

x est appelé une notation pour l'ordinal $\mu(x)$.

Ce système de notation est constructible dans le sens suivant :

(i) il existe un algorithme qui décide si un ordinal de notation x et 0, est successeur ou limite :

il existe $\nu() = \nu_S() \in P_1$ tel que

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(x) = 0 \\ 1 & \text{si } \mu(x) \text{ est un ordinal successeur} \\ 2 & \text{si } \mu(x) \text{ est un ordinal limite} \end{cases}$$

(ii) il existe un algorithme qui donne pour tout x, si x est notation d'un ordinal successeur, la notation de son prédécesseur immédiat : il existe $\pi() = \pi_S() \in P_1$ tel que

$$\nu() = 1 \Rightarrow [\pi(x) \text{ est défini } \& \ \mu(x) = \mu(\pi(x))+1]$$

(iii) il existe un algorithme qui donne pour tout x, si x est notation d'un ordinal limite, l'indice d'une fonction récursive totale dont les valeurs sont les notations pour les éléments d'une séquence fondamentale qui tend vers cet ordinal :

il existe $\kappa() = \kappa_S() \in P_1$ tel que

$\nu(x) = 2 \Rightarrow [\kappa(x)$ est défini & $\varphi_{\kappa(x)}()$ est total & $\{\mu(\varphi_{\kappa(x)}(n))\}_{n\in N}$ est une séquence croissante ayant $\mu(x)$ comme limite$]$.

α est un ordinal récursif s'il existe une relation d'ordre récursive R telle que

(i) R est un bon ordre

(ii) le bon ordre déterminé par R est isomorphe à α

α est un ordinal constructif si l'on peut trouver un système de notation qui donne au moins une notation à α.

Les ordinaux récursifs et les ordinaux constructifs coïncident (Markwald) :

un ordinal est récursif si et seulement si il est constructif.

Un système de notation $\mathcal{S}$ est :

-maximal : si $D_{\mathcal{S}}$ contient une notation pour tout ordinal constructif

-universel : si pour tout système $\mathcal{S}'$ il existe une fonction récursive partielle $\Psi : D_{\mathcal{S}'} \to D_{\mathcal{S}}$ telle que

$$x \in D_{\mathcal{S}'} \Rightarrow \mu_{\mathcal{S}'}(x) \leqslant \mu_{\mathcal{S}}(\Psi(x)).$$

Le système $\mathcal{O}$ de Church-Kleene est un système maximal **et** universel qui est défini de la façon suivante :

Soit $\mu_{\mathcal{O}}() = |\;|$ et $<_{\mathcal{O}}$ une relation d'ordre partiel sur $D_{\mathcal{O}}$:

(i) 0 reçoit la notation 1,

(ii) supposons que tous les ordinaux $\beta < \alpha$ aient reçu leurs notations et que $<_{\mathcal{O}}$ soit défini sur ces notations, alors :

(a) si $\alpha = \beta + 1$ alors pour tout x tel que $|x| = \beta$, α reçoit la notation 2^x et on rajoute à $<_{\mathcal{O}}$ les couples $\langle u,2^x\rangle$ tels que $\langle u,x\rangle$ fait déjà partie de $<_{\mathcal{O}}$ ou tels que $u = x$

(b) si α est ordinal limite, alors pour tout y, si $\{\varphi_y(n)\}_{n\in N}$ sont des notations pour une séquence croissante d'ordinaux de limite α et telles que $(\forall i)(\forall j)[i < j \Rightarrow \langle\varphi_y(i),\varphi_y(j)\rangle \in <_{\mathcal{O}}]$, alors α reçoit la notation 3.5^y et tous les couples $\langle u,3.5^y\rangle$ tels que pour un certain n, $\langle u,\varphi_y(n)\rangle$ fait déjà partie de $<_{\mathcal{O}}$, sont rajoutés à $<_{\mathcal{O}}$.

1.8.- A est un ensemble productif s'il existe une fonction récursive partielle $\Psi() \in \mathcal{P}_1$ telle que

$(\forall x)[W_x \subset A \Rightarrow [\Psi(x)$ est défini & $\Psi(x) \in A - W_x]]$;

$\Psi()$ est une fonction productive pour A [10].

$\bar{K} = \{x | \varphi_x(x)$ est indéfini$\}$ est productif, la fonction identité $\lambda x[x]$ est une fonction productive pour $\bar{K}$.

Le complément d'un ensemble productif, lorsqu'il est récursivement énumérable, est appelé créatif.

$K = \{x | \varphi_x(x)$ est défini$\}$ est un ensemble créatif.

A est un ensemble immune si

(i) A est infini

(ii) $(\forall B) [[B$ récursivement énumérable$] \Rightarrow B \cap \bar{A} \neq \emptyset]$.

Ainsi, un ensemble immune ne possède aucun sous-ensemble récursivement énumérable infini.

Le complément d'un ensemble immune, lorsqu'il est récursivement énumérable, est appelé simple.

Dekker et Myhill [23] ont étendu ces définitions aux classes d'ensembles et aux classes de fonctions : soit $\mathcal{A}$ une classe de fonctions récursives et $\mathcal{F}_n = \{\varphi_i(x) | i \in W_n\}$, alors

$\mathcal{A}$ est une classe productive s'il existe une fonction récursive partielle $\Psi() \in \mathcal{P}_1$ telle que

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \begin{cases} 1) \ \Psi(n) \text{ est défini} \\ \\ 2) \ \varphi_{\Psi(n)}(x) \in \mathcal{A}-\mathcal{F}_n. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{F}$ la classe des fonctions partielles sur $\mathbb{N}$, $\{F_x\}_{x\in \mathbb{N}}$ une énumération de toutes les fonctions finies (i.e. définies sur un nombre fini d'arguments).

Un opérateur $\mathbb{F}$, aussi noté $\mathbb{F}[\ ]$, est appelé récursif partiel, si $\mathbb{F}$ définit une application d'une classe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ et s'il existe un ensemble récursivement énumérable W tel que si $f \in \mathcal{D}$, alors

$$\mathbb{F}[f](y) = z \iff \exists \langle x,y,z\rangle \in W \ [F_x \subseteq f] \ ;$$

où $\langle x, y, z\rangle =_{\text{def}} \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$.

Un opérateur $\mathbb{F} : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est récursif général si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ et s'il existe une extension $\mathbb{F}'$ de $\mathbb{F}$ telle que $\mathbb{F}'(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

CHAPITRE II

LA THEORIE AXIOMATIQUE DE COMPLEXITE DES FONCTIONS RECURSIVES

- RESULTATS ANTERIEURS -

Ce chapitre contient l'esquisse du développement de la théorie axiomatique de complexité et un certain nombre des principaux résultats de cette théorie ainsi que des théorèmes classiques de la théorie des fonctions récursives qui seront utilisés par la suite et qui peuvent être démontrés à l'aide de la théorie de complexité.

On présente d'abord les axiomes de complexité de M.O. RABIN [1].

Le but de Rabin était la définition de "degrés de difficulté" pour les ensembles récursifs (et les fonctions récursives). Il a remarqué que ces degrés étaient susceptibles de "prolonger" la classification des ensembles récursivement énumérables par les degrés de Turing. Le résultat principal de M.O. Rabin est son théorème sur l'existence de tels degrés.

M. Blum [2] a donné des axiomes différents, mieux adaptés à la notion de mesure de complexité du comportement des machines abstraites et il a prouvé une version généralisée du théorème de Rabin qui est valable pour toutes les fonctions récursives partielles ; ce théorème sera appelé théorème de Rabin-Blum. On montre également que les axiomes de Blum peuvent être développés dans le cadre de la théorie de Rabin.

Ensuite on présente deux versions du théorème du "speed-up" de Blum ainsi que le principe de sa démonstration.

Ce théorème est un des principaux "résultats négatifs" de cette théorie et s'avère comme un obstacle à une classification des fonctions récursives fondées sur leur degré de difficulté.

Des classes de fonctions récursives, calculables en complexité bornée par une fonction récursive totale t() presque partout, sont définies ensuite. De telles classes, appelées "classes de complexité" constituent certainement une classification des fonctions totales récursives ; mais un autre résultat négatif, le théorème de Borodin et une généralisation de ce théorème, due à Constable, indiquent que la classe des fonctions dans laquelle on choisit les bornes de complexité t() doit être sévèrement restreinte si de t() on veut tirer des conclusions sur la classe de complexité définie par t().

Ces classes de complexité ont cependant aussi certaines propriétés positives ; ainsi elles sont "presque toujours" des classes récursivement énumérables.

La même classe de complexité peut être définie par des bornes récursives très différentes. Le premier théorème de Meyer et Mc Creight, qui est une généralisation du "honesty-lemma" de J. Robbin [3], garantit que pour toute classe de machines il existe un ensemble mesuré de fonctions qui est suffisant pour caractériser toute classe de complexité qui peut être définie dans cette classe de machines. Le second théorème de Meyer et M. McCreight permet de prouver que la réunion de certaines classes de complexité, totalement ordonnées par l'inclusion, est de nouveau une classe de complexité. Ce théorème a un certain nombre de conséquences pour la construction de hiérarchies de fonctions récursives.

Dans la dernière section on utilise la définition axiomatiques de la complexité pour la démonstration et pour l'extension de quelques théorèmes classiques de la théorie des fonctions récursives.

2.1.- *Axiomes d'une théorie de la complexité.*-

2.1.1. Les degrés de difficulté des fonctions récursives et des ensembles récursifs (M.O.Rabin).

Dans [1], M.O. Rabin observe, que le calcul de la valeur y d'une certaine fonction $\lambda x\, f(x)$ pour un argument donné n peut être considéré comme la dérivation (ou déduction) formelle de la formule $f(n) = y$ dans un certain système formel S. Il était donc logique de choisir un type de systèmes formels suffisamment général et admettant une définition axiomatique de mesure (récursive) de la difficulté des dérivations formelles. Un type de systèmes formels ayant ces propriétés est constitué par les systèmes formels canoniques de Post, car

(a) les systèmes canoniques de Post sont universels

(b) ils admettent une fonction récursive de mesure de la difficulté de leurs dérivations formelles.

Considérons d'abord la classe des systèmes formels qui admettent une mesure de la difficulté de leurs dérivations formelles :

Soit $S = \langle A, F, \mathcal{A}, R, n\rangle$ un système formel sur un alphabet A, fini ou dénombrable, F un ensemble récursif de mots sur A -les formules bien formées, $\mathcal{A} \subset F$ l'ensemble des axiomes, R un nombre fini de règles de déduction et n une numérotation de A.

Une règle de déduction est une relation dans F, i.e., un sous-ensemble de F^{n+1}, $n > 0$. Une formule y est une conséquence immédiate des formules $\{x_1,\dots,x_n\}$ dans S s'il existe une règle de déduction R dans S telle que $R(x_1,\dots,x_n;y)$.

Une dérivation formelle ou déduction d'une formule y de $\{x_1,\dots,x_n\}$ dans S est une séquence finie de formules $z_1,\dots,z_m$ telle que

(i) $z_m = y$

(ii) pour tout z_p, $1 \leqslant p \leqslant m$, on ait

(a) $z_p \in A$ ou

(b) $z_p \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ ou

(c) z_p est conséquence immédiate d'un sous-ensemble de $A \cup \{x_1,\ldots,x_n\} \cup \{z_1,\ldots,z_k\}$, $k < p$.

Lorsque y est déductible de $\{x_1,\ldots,x_n\}$ dans S, on écrit $x_1,\ldots,x_n \vdash_S y$; on écrit $\vdash_S y$ si et seulement si $\emptyset \vdash_S y$. On suppose que l'ensemble des théorèmes (formels) de S, $\{y \mid \vdash_S y\}$, soit récursivement énumérable.

Soit $\{<P_i,T_i>\}_{i \in N}$ une énumération effective des dérivations formelles P_i et des théorèmes correspondants T_i de S ; à tout P_n on associe $p_n \in N$ la mesure de la $n^{\text{ième}}$ dérivation ; $p(T) = \min(p_n | T = T_n)$ est la difficulté ou complexité du théorème T dans S.

On postule encore l'existence d'une fonction récursive totale croissante $t()$ qui est telle que $n > t(m) \Rightarrow p_n > m$.

De cette manière, un système formel admettant une mesure de la difficulté de ses dérivations est défini par un quadruplet $L = <F,T,p,t>$.

Soit $g()$ une bijection récursive, i.e. $g()$ est totale et il existe $g^{-1}()$ récursive totale injective telle que $g^{-1}(g(a)) = a$ pour tout $a \in N$.

<u>*Définition*</u> *2.1*.- La fonction récursive partielle $\Psi()$ est réalisée (ou définie) par le système formel L si et seulement si il existe une bijection récursive $a : N \times N \to F_L$ telle que

$$\Psi_a(m) = \begin{cases} \mu\, n[a(m,n) = T_i] & \text{si } (\exists n)[a(m,n) = T_i] \\ \text{divergent} & \text{sinon} \end{cases}$$

On est maintenant préparé pour la définition axiomatique de la difficulté d'un système de Post :

(a) Universalité :

Un système de Post est un système formel qui a les propriétés suivantes :

(i) A est fini

(ii) Tout mot sur A (toute chaîne finie d'éléments de A) est une formule bien formée.

(iii) il y a un nombre fini d'axiomes (A peut être vide)

(iv) il y a un nombre fini de règles de déduction de la forme

$$\begin{array}{l} A_{10}X_{11}A_{11}X_{12}A_{12} \;\ldots\; X_{1n_1}\,A_{1n_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow B_0Y_1B_1 \;\ldots\; Y_kB_k \\ A_{m0}X_{m1}A_{m1}X_{m2}A_{m2} \;\ldots\; X_{mn_m}\,A_{mn_m} \end{array}$$

où les A_{ij} et les B_k désignent des mots fixés et les X_{ij} et les Y_k sont des variables qui prennent leurs valeurs dans F.

Un système de Post canonique est un système de Post dans lequel au moins un des mots $B_0,\ldots,B_k$ est différent du mot vide et tel que pour tout Y_i, $(1 \leq i \leq k)$ il existe un $X_{j\ell}$ $(1 \leq j \leq m$ et $1 \leq \ell \leq n_j)$ tel que $Y_i = X_{j\ell}$.

Un système formel S' est une extension équivalente d'un système formel S si

(i) $A \subseteq A'$

(ii) $F \subseteq F'$

(iii) $n'|A = n$

(iv) $T \subseteq T'$

(v) $T' \cap F = T$

Le fait suivant est fondamental dans la théorie de la récursion (universalité des systèmes canoniques de Post) : Pour tout système formel récursif S sur un alphabet fini A il existe un système formel canonique de Post S' qui est une extension équivalente de S.

Ainsi, pour tout système formel sur un alphabet fini qui définit une fonction récursive, il existe une extension équivalente qui est un système de Post.

Si, par exemple, le formalisme de Herbrand-Gödel-Kleene est traduit en forme de logique de Post $L, a(m,n) = a_{m,n}$ est de la forme $w\bar{m} = \bar{n}$ où w est un mot sur l'alphabet de L et $\bar{m},\bar{n}$ sont les notations unaires de m et de n ; $\Psi_w()$ est une fonction récursive partielle ; elle est totale si $(\forall m)(\exists n)\ [\vdash_L\ w\bar{m} = \bar{n}]$; i.e. si pour tout m il existe un n tel que $\Psi_w(m) = n$ peut être prouvé formellement dans L.

(b) Fonction récursive de mesure :

Soit L un système canonique de Post et P une dérivation formelle d'un théorème de L ; Rabin [1] définit une fonction récursive de mesure $m(L,P)$ des dérivations de L comme une fonction qui satisfait aux axiomes suivants :

axiome 1 : $m(L,P) = m_L(P)$ est une fonction récursive primitive,

axiome 2 : $(\forall L)(\forall n)\ \nu_L(n) =_{def} |\{P \mid m_L(P) \leq n\}|$ est fini,

axiome 3 : $\lambda n\ \nu_L(n)$ est une fonction récursive primitive.

Assertion : La fonction $m(L,P)$ induit une mesure récursive de la difficulté des dérivations formelles de L [3].

Soit $\{<P_i,T_i>\}_{i\varepsilon N}$ une énumération effective des dérivations formelles P_i et des théorèmes correspondants T_i d'un système canonique de Post L ; soit $p_n = m(L,P_n)$ et $p(T) = \min(p_n \mid T = T_n)$, la difficulté ou complexité de T dans L.

L'ensemble (fini) de dérivations $\mathcal{P} = \{P \mid m(L,P) = n\}$ peut être généré effectivement, soit $P_{h(n)}$ le plus grand indice d'une dérivation dans $\mathcal{P}$, $h()$

est récursif total et la fonction

$$h'(n) = \max_{1 \leq i \leq n} \{h(i)\} \quad \text{est récursive totale et croissante,}$$

$n > h'(m) \Rightarrow p_n > m$,

c'est-à-dire que $m = p(T) \Rightarrow (\exists n)[T = T_n \;\&\; n \leq h'(m)]$ ou $\min\{n | T = T_n\} \leq h'(p(T))$, donc $m(L,P)$ induit une relation récursive entre les (indices des) théorèmes et la fonction de mesure.

Soit maintenant $f() = f_{(L,a)}$ une fonction récursive réalisée par le système de Post L ; i.e. pour tout m, n

$$\vdash_{L} a\bar{n} = \bar{m} \Leftrightarrow f_a(m) = n.$$

Le but d'une théorie de complexité étant de formaliser la notion "f() est plus difficile à calculer que g()", Rabin définit la "fonction de complexité" de (L,a) par $F_{(L,a)} = \min_{P \varepsilon C} \{m(L,P)\}$, avec

$$C = \{P | P \text{ est dérivation de } a\bar{m} = \bar{n}\},$$

et prouve le théorème fondamental :

Théorème 2.1.1.- (Rabin) : Pour toute fonction calculable h() il existe une autre fonction calculable f(), $\rho f \subseteq \{0,1\}$, et récursive primitive en h(), telle que pour tout système L qui réalise f(), $h(n) < F_L(n)$ pour presque tout n.

On obtient ainsi la définition formelle d'un degré de difficulté (Rabin) :

Définition 2.2.- La fonction calculable f() est plus difficile à calculer (d'un degré de difficulté plus grand) que la fonction calculable

$g()$ $(g \prec f)$ s'il existe un système canonique de Post qui définit $g()$, L_g, tel que pour tout système L qui définit $f()$, L_f, il existe un enti er n pour lequel $(\forall x)\ [x > n \Longrightarrow F_{L_g}(x) < F_{L_f}(x)]$.

2.1.2.- *Les axiomes de M. Blum et le théorème de Rabin-Blum.*

La fonction de complexité $F_{(L,a)}$ de (L,a) définie par Rabin ne reflête pas exactement la complexité des calculs d'une machine abstraite, car on choisit pour tout argument n la plus petite mesure, autrement dit, on choisit éventuellement pour tout n un autre programme (une autre manière d'obtenir une dérivation formelle). Une légère modification de la définition de Rabin donne les axiomes de M. Blum [2] :

Soit $f() = f_a()$ défini par (L,a) et soit

$F() = F_{(L,a)}(n) = p(a(n,f(n)))$,

Définition 2.3.- Une collection de couples $\{(L_i, a_i)\}_{i \varepsilon N}$ est universelle si pour toute fonction récursive partielle $\varphi_i(\ ) \varepsilon P_1$ il existe (L_i, a_i) tel que $\varphi_i()$ est défini par (L_i, a_i).

Définition 2.4.- Une classe de machines (abstraites) dans le sens de M. Blum est une énumération récursive $\{<\varphi_i, \Phi_i>\}_{i\varepsilon N}$ de couples de fonctions récursives partielles qui satisfait à

(a) $\{<\varphi_i, \Phi_i>\}_{i\varepsilon N}$ est universel pour P_1

(b) $\{\Phi_i\}$ est une séquence de fonctions de mesure de $\{\varphi_i\}$, i.e.

(α) $\mathrm{dom}\ \varphi_n = \mathrm{dom}\ \Phi_n$

(β) tout Φ_n a un graphe récursif : il existe une fonction récursive totale $M() \varepsilon R_3$

$$M(i,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_i(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les axiomes de Blum (a) et (b) ci-dessus s'intègrent maintenant dans le cadre des définitions données en 2.1.1.

Théorème 2.1.2.- Si $\{(L_i,a_i)\}$ est universel et $f_m()$ la fonction définie par (L_m,a_m), alors $\{<f_m(),F_m()>\}$ est une classe de machines.

On vérifie (b) (α) par la définition de $F_{(L,a)}$:

$F_m()$ défini $<=>$ f_m défini et

(b)(β) $M(i,x,y)$ est récursif :

étant donné m,x et y on peut générer les premiers $h'_m(y)$ théorèmes de L_m et examiner ceux qui ont la forme $a_m(x,n)$ pour déterminer effectivement si $F_m(x) = y$ ou non.

Pour toute classe de machines qui est telle que $\{\varphi_i\}_{i\varepsilon N}$ satisfait à un théorème s-m-n, on a le théorème de Rabin-Blum :

Théorème 2.1.3.- ("compression") :

Pour toute mesure abstraite Φ et tout ensemble mesuré M de fonctions récursives partielles $M = \{f_i()\}_{i\varepsilon N}$ (i.e. $\lambda ix\ y[f_i(x) = y]$ est un prédicat récursif) on peut effectivement trouver des fonctions récursives totales $g() \varepsilon R_1$ et $h_M() \varepsilon R_1$ telles que pour tout i et j :

(a) $\text{dom}\ \varphi_{g(i)} = \text{dom}\ f_i$

(b) $\rho\ \varphi_{g(i)} \subseteq \{0,1\}$

(c) $[x\ \varepsilon\ \text{dom}\ f_i\ \&\ \Phi_j(x) \leq f_i(x)]$ i.a. $==> \varphi_j() \neq \varphi_{g(i)}()$

(d) $[x\ \varepsilon\ \text{dom}\ f_i ==> \Phi_{g(i)}(x) \leq h_M(\max\{f_i(x),x\})]$ p.p.

Si l'on applique ce théorème aux classes de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ définies au §.1.5. on a le corollaire immédiat :

Corollaire 2.1.4.- Pour tout Φ et toute classe récursivement énumérable de fonctions totales $M = \{f_i\}_{i \in N}$ il existe une fonction totale $h_M() \in R_1$ (la "fonction de saut" pour M) telle que pour tout $f_i() \in M$ suffisamment grand,

$$R^{\Phi}_{f_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_M(f_i())}$$

Commentaires :

(1) "compression" :

ad (b) : la fonction $\psi_{g(i)}()$ est plus complexe que toute fonction $\psi_j()$ avec $\Phi_j() \leq f_i()$ p.p. dans le sens qu'elle demande plus de ressource pour son calcul proprement dit et non pas seulement pour l'écriture d'un résultat encombrant.

ad (c) : tout algorithme pour $\psi_{g(i)}()$ est plus complexe qu'une certaine borne, il s'agit donc bien d'une propriété de la fonction.

ad (d) : ce point implique que la fonction $\psi_{g(i)}()$ possède un algorithme qui est "optimal" (par rapport à la mesure abstraite Φ) ou plus précisément que la complexité d'un tel programme optimal est comprise entre les bornes inférieures $f_i()$ et supérieures $h_M(f_i())$ respectivement - d'où le nom de théorème.

(2) Corollaire : Il est immédiat que toute classe récursivement énumérable de fonctions récursives totales est un ensemble mesuré.

2.2.- *Les phénomènes du speed-up*.-

2.2.1. Le théorème du speed-up de Blum.

Soit $\{<\varphi_i,\Phi_i>\}_{i\varepsilon N}$ une classe de machines admissible c'est-à-dire que $\{\varphi_i\}$ est universel et satisfait à un théorème s-m-n et Φ est une mesure de Blum.

Si l'on fixe la mesure Φ, on peut se demander si toute fonction récursive possède un "meilleur" programme par rapport à Φ. Que des telles fonctions existent, est démontré par le théorème de Rabin-Blum ; mais le théorème du speed-up (Blum [2]) montre l'existence de fonctions qui n'ont pas de programme optimal, quelque soit la mesure employée.

Ce théorème à comme conséquence immédiate, que les fonctions récursives ne peuvent pas être classifiées par la complexité de leur "meilleur" programme.

On présente ici une version simplifiée du principe de la démonstration de ce théorème [4].

Soit $\Phi = L$ la mesure qui consiste à compter le plus grand nombre de cellules utilisées dans le calcul d'une machine de Turing $M_i(x)$ et soit $\{<M_i,L_i>\}_{i\varepsilon N}$ la classe de machines correspondantes qui ne cyclent pas sur une bande finie : $M_i(x)$ indéfini $\Longleftrightarrow$ $L_i(x)$ indéfini. En outre, on suppose que $L_i(n)$ > longueur de la description de M_i et $|S_i|$, le nombre de symboles internes de M_i, est au moins égal à i.

On prouve d'abord une version du théorème du speed-up pour $\Phi = L$:

Théorème 2.2.1.- Pour toute fonction récursive totale $h() \varepsilon \mathcal{R}_1$ il existe une autre fonction $f() \varepsilon \mathcal{R}_1$ telle que si $\varphi_i() = f()$, alors il existe un indice j tel que

(a) $\varphi_j() = f()$

(b) $L_i(x) \geqslant h(L_j(x))$ p.p.

Principe de la démonstration.-

Soit $h() = L_k()$ pour un certain k (sinon on majore $h()$ par un L_k et on prend $h'() = L_k()$) et monotone croissant ; on pose

$$g(0) = 0$$
$$g(x+1) = h(g(x)) + 1 \ ;$$

par conséquent $g(x) > h(g(x-1))$ pour $x > 0$.

On construit une fonction $f()$ qui satisfait à (a) et (b) du théorème par un procédé de diagonalisation qui ne peut pas être effectué par une "petite" machine dans une certaine quantité de ressource mais qui peut être calculé par une machine d'indice suffisamment grand dans cette même borne de ressource $\lambda x\ f(x)$ est défini de façon que :

(a) $(\forall i)\ \varphi_i() = f() \Rightarrow L_i(x) > g(x-i)$ p.p. ,

(b) $(\forall k)(\exists j)[\varphi_j() = f()\ \&\ L_j(x) \leq g(x-k)$ p.p.$]$.

Si l'on choisit un j tel que $L_j(x) \leq g(x-i-1)$, alors on a

$$L_i(x) > g(x-i) > h(g(x-i-1)) > h(L_j(x)).$$

Il suffit donc de montrer qu'un tel $\varphi_j()$ existe ; on définit simultanément une séquence d'ensembles finis $S(x)$ et la fonction $f()$ par l'algorithme de diagonalisation suivant :

Initialisation : $S(-1) := \emptyset$

Pas x $(x \geq 0)$:

(a) $i := \mu_{j \leq x}\ j\ [L_j(x) < g(x-j)\ \&\ j \notin S(x-1)]$ si un tel j existe

$i := i_0$ (où $\varphi_{i_0}(x) = \lambda x[0]$ sinon

(b) $f(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) + 1 & \text{si } i \neq i_0 \\ \varphi_{i_0}(x) & \text{sinon} \end{cases}$

(c) $S(x) := S(x-1) \cup \{i\}$;

(d) aller au pas $x+1$

Par définition, $f(x) \neq \varphi_i(x)$ si $L_i(x) < g(x-i)$ p.p. . La démonstration de l'existence d'un algorithme φ_j pour $f()$, calculable en ressource $g(x-k)$, est basée sur la condition de diagonalisation (a) ci-dessus. En effet, $g(x-k)$ décroît rapidement lorsque k croît et ceci est suffisant pour que l'on puisse trouver une machine M_j qui calcule $f()$ en ressource $g(x-k)$. Le fonctionnement de la machine M_j est déterminé par l'observation suivante :

$$(\exists v)(\forall i \leq k)(\exists x)[i \in S(v) \Rightarrow i \in S(x) \ \& \ x < v].$$

Pour tout $x \leq v$, $M_j(x)$ contient les valeurs de $f(x)$ dans sa mémoire interne ; si $x > v$, $M_j(x)$ calcule $\mu i[i \notin S(x-1)]$ de la manière suivante :

(a) $M_j(x)$ marque la quantité de ressource $L_j(x) = g(x-k)$ sur sa bande de travail,

(b) M_j contient dans sa mémoire interne les indices i tels que $i \in S(x)$, $x \leq v$,

(c) pour tout i, $(k < i \leq x)$, $M_j(x)$ simule $M_i(n)$, $(v < n \leq x)$, détermine si $i \in S(n)$, $n < x$ et en particulier, détermine le plus petit i, $i \notin S(x-1)$, tel que $L_i(x) < g(x-i)$ et pose

$$f(x) := \begin{cases} \varphi_i(x) + 1 & \text{si un tel } i \text{ existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$M_j(x)$ travaille en ressource $L_j(x) \leq g(x-k)$, car les machines M_i ne sont simulées par M_j que lorsque $i > k$ et $L_i(x) \leq g(x-i)$ et pour $i > k$ cette simulation peut être effectuée en ressource $g(x-k)$.

On utilise maintenant une relation récursive entre mesures différentes pour prouver que la propriété d'une fonction de posséder un speed-up est indépendante de la mesure :

Lemme 2.2.2.- (Blum) : Si Φ et Φ' sont des mesures de Blum arbitraires, mais différentes, alors il existe une fonction récursive $g()$ telle que pour tout i

$$g(x,\Phi_i(x)) \geq \Phi'_i(x) \ \& \ g(x,\Phi'_i(x)) \geq \Phi_i(x) \quad \text{p.p.}$$

Ainsi, une fonction ne peut pas être arbitrairement plus difficile à calculer lorsque l'on change de mesure, au contraire, cette différence reste toujours bornée.

Une autre conséquence du lemme est que si une fonction possède un speed-up par rapport à une certaine mesure, elle possède un speed-up par rapport à toute mesure.

Théorème 2.2.3.- ("speed-up") : Pour tout $<\varphi,\Phi>$ et toute fonction récursive totale $h()$, il existe une fonction récursive $f()$, telle que pour tout indice i pour $f()$ il existe un autre indice j pour $f()$ pour lequel

$$\Phi_i(x) \geq h(\Phi_j(x)) \quad \text{p.p.}$$

Soit Φ une mesure de Blum arbitraire, alors la mesure L du théorème 2.2.1 et Φ satisfont au lemme 2.2.2., et si l'on choisit la fonction $h'()$ du théorème 2.2.1 suffisamment grande, i.e. $h'() = g(h(g(x)))$, $g()$ la fonction du lemme 2.2.2, on obtient une fonction $f()$ qui a un $h'()$-speed-up :

$$\varphi_i() = f() \ \& \ \varphi_j() = f() \ \& \ L_i \geq h'(L_j()) \quad \text{p.p.}$$

Par le lemme

$$g(h(\Phi_j())) \leq g(h(g(L_j()))) \leq L_i \leq g(\Phi_i()) \quad \text{p.p.}$$

donc $g(h(\Phi_j())) \leq g(\Phi_i())$ p.p. et avec $g()$ monotone croissant $h(\Phi_j()) \leq \Phi_i()$ p.p.

2.2.-2. Généralisations

Le théorème du speed-up (théorème 2.2.3.) admet une généralisation importante :

Définition 2.5.- Une fonction récursive totale $f()$ possède un speed-up par rapport à un opérateur récursif général $\mathbb{F}[\ ]$ et par rapport à $g() \in R_1$ (un $(g,\mathbb{F})$-speed-up) si pour tout indice i pour $f()$

(a) $\Phi_i() > g()$ p.p.

(b) il existe un autre indice j pour $f()$ tel que

$$\mathbb{F}[\Phi_j()] < \Phi_i \quad \text{p.p.}$$

Théorème 2.2.4.- [5] : Si $f()$ est une fonction avec $(g,\mathbb{F})$-speed-up, alors il existe une séquence récursivement énumérable de fonction $\lambda ix[p_i(x)]$ telle que

(a) $p_i() > g()$ p.p.

(b) $\varphi_j = f() \Longrightarrow (\exists i)\ \Phi_j(x) \geq p_i(x)$ p.p.

(c) $(\forall i)(\exists j)\ \varphi_j() = f()\ \&\ \Phi_j() \leq p_i()$ p.p.

(d) $(\forall i)\ p_i > \mathbb{F}[p_{i+1}()]$ p.p.

Ainsi les différentes fonctions de mesure $\Phi_j, (\varphi_j = f())$ le la fonction $f()$ peuvent être "intercalées" dans la séquence des $p_i()$.

Une conséquence des théorèmes 2.2.1, 2.2.3 et 2.2.4 est que les fonctions récursives ne peuvent pas être classifiées à l'aide de leur programme de complexité minimale ; et la définition des degrés de difficulté doit donc être modifiée de la façon suivante :

$f() \preccurlyeq g() \iff$ la fonction partielle $f() \in P_1$ n'est pas plus difficile à calculer que la fonction partielle $g() \in P_1$

$$\iff \forall g\ \exists f\ \exists y\ \forall x [y < x \ \&\ x \in \mathrm{dom}\ g() \implies \varphi_f(x)\ \text{def.}\ \&\ \Phi_f(x) \leq \Phi_g(x)]$$

où g et f sont des indices pour $g()$ et $f()$ respectivement.

2.3.- *Classes de complexité : le théorème de A. Borodin et ses généralisations.*-

Le théorème de Rabin-Blum assure que $R^{\Phi}_{f_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_M(f_i())}$ pour tout ensemble mesuré de fonctions $M = \{f_i()\}_{i\in N}$.

Lorsque l'on admet une borne de complexité $t()$ récursive totale, mais arbitraire, on est en présence d'un autre "phénomène de pathologie" de la classification des fonctions calculables par leur complexité :

Théorème 2.3.1.- ("gap", A. Borodin [6]) :

Pour tout Φ il existe une fonction récursive partielle $p() \in P_2$ telle que pour tout $\varphi_k() \in R_1$ et pour tout $\varphi_i()$

(a) $\varphi_{p(i,k)}(x)$ def. <=> $\varphi_i(x)$ def.

(b) $\varphi_i(x)$ def. ==> $\varphi_i(x) < \varphi_{p(i,k)}(x)$

(c) $\forall\Phi_j()$ $\varphi_{p(i,k)}(x)$ def ==>

$$[\Phi_j(x) < \varphi_{p(i,k)}(x) \vee \Phi_j(x) > \varphi_k(\varphi_{p(i,k)}(x))] \quad \text{p.p.}$$

Ce théorème signifie donc que pour toute fonction récursive totale $h()$ on peut trouver une borne de complexité $t()$ telle que

$$R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{h(t())} :$$

c'est-à-dire qu'il existe des fonctions arbitrairement différentes presque partout l'une de l'autre qui définissent la même classe de fonctions de complexité bornée.

La raison en est que l'on peut choisir $\varphi_{p(i,k)}$ de façon qu'aucune fonction de complexité ne satisfait à

$$\varphi_{p(i,k)}() \leq \Phi_j() \leq \varphi_k(\varphi_{p(i,k)}()) \quad \text{i.a.} \quad (\text{le "}\varphi_k()\text{-gap"})$$

Comme le montre la démonstration du théorème :

Soit $P(y,x,k) =_{def} (\forall_j \leq x)[\Phi_j(x) < y \vee \varphi_k(y) > \Phi_j(x)]$, P est récursif si $\varphi_k()$ est total, car $\lambda ixy[\Phi_i(x) < y]$ est récursif.

Si l'on définit $\varphi_{p(i,k)}(x) = \mu y[y > \varphi_i(x) \ \& \ P(y,x,k)]$,

$$\varphi_{p(i,k)}(x) \text{ déf } \Leftrightarrow \varphi_i(x) \text{ def : } \varphi_{p(i,k)} \in P_1.$$

Soit maintenant $\varphi_i(), \varphi_k() \in R_1$; alors on peut estimer la grandeur de $\varphi_{p(i,k)}$ par rapport à $\varphi_k()$ [6] :

$$\varphi_{p(i,k)}(x) \leq \varphi_k^{x+1}(\varphi_i(x)).$$

On peut ainsi construire un "gap" récursif élémentaire dans la classe E^4 de Grzegorczyk des fonctions récursives primitives.

Comme c'est le cas du théorème de speed-up de Blum, le théorème de Borodin peut être généralisé et une forme plus faible peut être prouvée pour tout opérateur récursif général.

Soit $\mathbb{F}(R_1) \subset R_1$, $\mathbb{F}[t()](x)$ la valeur de $\mathbb{F}[t()]$ à l'argument x.

Théorème 2.3.2.- (Constable [7]) : Pour tout Φ, et pour tout opérateur récursif général $\mathbb{F}[\ ]$ et pour tout $g() \in R_1$ il existe une fonction récursive totale croissante $t() \in R_1$ telle que

(a) $g() < t()$ p.p.

(b) $t() < \Phi_i() < \mathbb{F}[t()]()$ i.a. $\Longrightarrow$ $\mathbb{F}[t()]() < \Phi_i()$ i.a.

Corollaire 2.3.3.- Quelque soit la classe de machines $\langle\varphi,\Phi\rangle$, il n'y a pas d'opérateur récursif général $\mathbb{F}[\ ]$ tel que

$$\forall t() \in R_1 \qquad R^{\Phi}_{t()} \subsetneq R^{\Phi}_{\mathbb{F}[t()]()} .$$

2.4.- *Classes de complexité : résultats positifs.*

Le premier résultat concerne l'énumérabilité récursive des classes $R^{\Phi}_{t()}$. On prouve en effet à l'aide d'une méthode de Hartmanis et Stearns [8], que les classes $R^{\Phi}_{t()}$ sont "presque toujours" récursivement énumérables :

Théorème 2.4.1.- (Borodin [6]) : Pour toute classe de machines $<\varphi,\Phi>$ il existe une fonction récursive $g() \in R_1$ telle que pour tout $t() \in R_1$ $t() \geq g()$ p.p. $\Longrightarrow R^{\Phi}_{t()}$ récursivement énumérable.

On détermine $g()$ tel que $R^{\Phi}_{g()}$ contient toutes les fonctions totales qui sont nulles presque partout, et on définit :

$$\varphi_{h(i,m,n)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } [(\forall y)\ \ 0 \leq y \leq n \Rightarrow \Phi_i(y) \leq m] \,\& \\ & \phantom{\text{si }} [(\forall y)\ \ n < y \leq x \Rightarrow \Phi_i(y) \leq t(y)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie que $\{h(i,m,n) \mid i,m,n \in \mathbb{N}\}$ est une présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{t()}$.

Le second résultat provient du problème de l'extension uniforme des classes $R^{\Phi}_{t()}$. Le théorème de Rabin-Blum garantit que $R^{\Phi}_{\Phi_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_\Phi(\Phi_i())}$, mais on montre qu'en général, $\{\Phi_i\}_{i \in N}$ n'est pas suffisant pour caractériser toutes les classes $R^{\Phi}_{t()}$: $\neg[\forall t() \in R_1 \ \ \exists\ \Phi_i() \,[R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{\Phi_i()}]]$.

D'autre part, par le théorème de Borodin,
$\forall h() \in R_1\ \exists t() \in R_1\ \ R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{h(t())}$. Peut-on trouver un ensemble mesuré de fonctions M qui permet de caractériser toute classe $R^{\Phi}_{t()}$? Ce problème a été résolu par A. Meyer et E.M. McCreight [9] :

Définition 2.6.- Un ensemble mesuré M de fonctions récursives partielles est caractéristique dans $<\varphi,\Phi>$ si

(a) $\forall t() \in R_1 \ \exists f_i \in M \cap R_1 \quad R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{f_i()}$

(b) il existe une fonction $s() \in R_1$ telle que

$R^{\Phi}_{\varphi_{s(t)}()} = R^{\Phi}_{t()}$ & $\varphi_{s(t)} \in M$; i.e. la fonction $f_i()$ de (a) peut être trouvée effectivement étant donné un indice t pour $t()$.

Théorème 2.4.2.- ("naming" [9]) : Pour tout $\langle\varphi,\Phi\rangle$, il existe un ensemble mesuré M de fonctions récursives partielles qui est caractéristique dans $\langle\varphi,\Phi\rangle$

Un autre résultat de A. Meyer et E.M. McCreight permet d'identifier certaines classes de fonctions définies syntaxiquement avec des classes $R^{\Phi}_{t()}$; c'est-à-dire permet de déterminer, étant donné $\langle\varphi,\Phi\rangle$ un $t() \in R_1$ tel que, par exemple $R^{\Phi}_{t()} = E$, la classe des fonctions récursives élémentaires, $R^{\Phi}_{t'()} = F_{Rp}$ la classe des fonctions récursives primitives, etc..

Il est facile de vérifier que l'union de deux classes de complexité n'est pas en général une classe de complexité :

Théorème 2.4.3.- $\exists g() \ \forall h() \ \exists k() \ [g() \leq h() \text{ p.p.} \Rightarrow \forall t() \ R^{\Phi}_{t()} \neq R^{\Phi}_{h()} \cup R^{\Phi}_{k()}]$

(Pour la démonstration du théorème il faut construire $h()$ et $k()$ de façon que $h() > k()$ i.a. & $k() > h()$ i.a.).

Soit maintenant $F = \{f_i()\}_{i \in N}$ une famille récursivement énumérable de fonctions récursives totales telles que $(\forall i)(\forall x) \ f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$.

Théorème 2.4.4.- ("union" [9]) : Si $\lambda ix[f_i(x)]$ est récursif total et $(\forall i)(\forall x) \ f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$, alors il existe une fonction récursive totale $t()$ telle que $I^{\Phi}_{t()} = \bigcup_i I^{\Phi}_{f_i(x)}$.

Etant donné $<\varphi,\Phi>$ et C, classe de fonctions définies syntaxiquement

Définition 2.7.- On dit que C a la propriété de Ritchie-Cobham, s'il existe une famille récursivement énumérable de fonctions récursives $\lambda ix[f_i(x)]$ telle que $f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$ et

(a) $(\forall i)\ f_i() \in C$

(b) $\forall f() \in C\ \exists \varphi_i\ \exists f_j[\varphi_i() = f()\ \&\ \Phi_i() \leq f_j()$ p.p.$]$

(c) $(\forall i)(\forall j)[\Phi_i() \leq f_j()$ p.p. $\Rightarrow \varphi_i() \in C]$.

Corollaire 2.4.5.- Si C est une classe récursivement énumérable de fonctions récursives qui possède la propriété de Ritchie-Cobham, alors il existe $t() \in R_1$ avec $C = R^{\Phi}_{t()}$.

2.5.- *Extension de quelques théorèmes fondamentaux.*-

Il y a une propriété fondamentale de toute gödelisation acceptable de P_1 : toute fonction récursive partielle possède une infinité dénombrable (mais non récursivement énumérable) d'indices différents. Le premier lemme donne une version formelle du fait que toute fonction récursive partielle peut être calculée avec complexité arbitrairement grande :

Lemme 2.5.1.- (Blum) : Il existe une fonction récursive totale $g() \in R_1$ telle que

$$(\forall j)[\varphi_{g(j)} \simeq \varphi_j \ \& \ (\forall x)[x \in \text{dom } \varphi_j \implies \Phi_{g(j)}(x) > \varphi_j(x) + \Phi_j(x)]]$$

On pose

$$\varphi_{s(i,j)}(x) = \begin{cases} \varphi_j(x) & \text{si} \quad \Phi_i(x) > \varphi_j(x) + \Phi_j(x) \\ 1 + \varphi_i(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

par le théorème de récursion il existe $g() \in R_1$

$$(\forall j) \qquad \varphi_{g(j)}(x) \simeq \varphi_{s(g(j),j)}(x).$$

Assertion : (a) $\varphi_j(x)$ défini $\implies \varphi_{g(j)}(x) = \varphi_j(x) \ \& \ \Phi_{g(j)}(x) > \varphi_j(x) + \Phi_j(x)$.

(b) $\varphi_j(x)$ indéfini $\implies \varphi_{g(j)}(x)$ indéfini

Supposons que (a) soit faux, c'est-à-dire

$$\varphi_j(x) \text{ défini } \& [\varphi_{g(j)}(x) \neq \varphi_j(x) \vee \Phi_{g(j)}(x) < \varphi_j(x) + \Phi_j(x)].$$

Si $\varphi_j(x)$ est défini et $\varphi_{g(j)}(x)$ indéfini, on aurait

$\Phi_{g(j)}(x) > \varphi_j(x) + \Phi_j(x)$, donc $\varphi_{g(j)}(x) = \varphi_{s(g(j),j)}(x) = \varphi_j(x)$, une contradiction, donc $\varphi_{g(j)}(x)$ est défini :

$$\varphi_{g(j)}(x) = \varphi_{s(g(j),j)}(x) \neq 1 + \varphi_{g(j)}(x), \quad \text{donc}$$

$$\varphi_{g(j)}(x) = \varphi_j(x) \ \& \ \Phi_{g(j)}(x) > \varphi_j(x) + \Phi_j(x).$$

Supposons (b) faux : $\varphi_j(x)$ indéfini et $\varphi_{g(j)}(x)$ défini.
Dans ce cas, $[\Phi_{g(j)}(x) > \varphi_j(x) + \Phi_j(x)]$ serait défini et faux, d'où $\varphi_{g(j)}(x) = 1 + \varphi_{s(g(j),j)}(x) = 1 + \varphi_{g(j)}(x)$, une contradiction.

Une application immédiate du lemme 2.5.1. peut être trouvée dans le lemme de Rogers [10] qui dit que l'on peut effectivement trouver des indices arbitrairement grands pour la même fonction récursive partielle :

Lemme 2.5.2.- ("padding lemma") : Il existe une fonction récursive totale $h() \in R_1$, monotone croissante et telle que

$$(\forall j)[\varphi_{h(j)} \simeq \varphi_j \ \& \ h(j) > j \ \& \ (\forall x)[x \in \text{dom}\ \varphi_j \Longrightarrow \Phi_{h(j)}(x) > \Phi_j(x)]]$$

(a) Par le lemme précédent,

$$(\forall j)[\text{dom}\ \varphi_j \neq \emptyset \ \& \ m \neq n \Longrightarrow g^m(j) \neq g^n(j)]$$

où $g^{n+1}(j) = g(g^n(j))$, car pour un tel φ_j

$$(\forall m)(\forall n)(\forall x)[x \in \text{dom}\ \varphi_j \ \& \ m > n > 0 \Longrightarrow \Phi_{g^m(j)}(x) > \Phi_{g^n(j)}(x)].$$

(b) Il existe un indice $j = j_0$ tel que $\text{dom}\ \varphi_{j_0} = \emptyset$ et

$$(\forall m)(\forall n)[m \neq n \Longrightarrow g^m(j_0) \neq g^n(j_0)]$$

sinon l'ensemble d'indices

$$\{j \mid \text{dom}\ \varphi_j = \emptyset\} = \{j \mid (\exists m)(\exists n)\ g^m(j) = g^n(j)\}$$

serait récursivement énumérable, une contradiction.

Par conséquent $\{g(j_0), g^2(j_0), \ldots.\}$ contient des indices arbitrairement grands.

(c) On définit maintenant $h() \in R_1$ pour tout $j \geqslant 0$ par

$$h(j) = \begin{cases} \mu y[y > h(j-1) + j \ \& \ (\exists n > 0)\ y = g^n(j)] \quad \text{si} \\ (\forall n)(\forall m < n)[g^m(j) \neq g^n(j) \vee g^n(j) > h(j-1) + j] \\ \\ \mu y[y > h(j-1) + j \ \& \ (\exists n > 0)\ y = g^n(j_0)] \quad \text{si} \\ (\exists n)(\exists m < n)[g^m(j) = g^n(j) \ \& \ g^n(j) \leqslant h(j-1) + j] \end{cases}$$

et on vérifie que $h()$ est récursif total : en effet la suite $\{g(j), g^2(j), \ldots.\}$ contient des indices arbitrairement grands ou bien il existe $m, n, m \neq n$ tel que $g^m(j) = g^n(j)$. Mais dans ce dernier cas $\mathrm{dom}\ \varphi_j = \emptyset$ et l'on peut choisir un indice dans $\{g(j_0), g^2(j_0), \ldots\}$. Ainsi $h(.)$ est toujours défini et satisfait le lemme.

Un autre théorème fondamental de la théorie des fonctions récursives est le théorème suivant du point fixe :

$$\forall f() \in R_1 (\exists j)\ \varphi_j \simeq \varphi_{f(j)}.$$

Quelle est la forme de ce théorème si l'on considère une classe de machines acceptable $\{<\varphi_i, \Phi_i>\}_{i \in N}$?

L'extension suivante du théorème du point fixe est due à Blum [11] :

<u>*Théorème*</u> 2.5.3.- ("récursion") : Il existe des fonctions $g()$ et $h() \in R_2$ telles que $\forall i, e$

(a) $\varphi_{g(i,e)} \simeq \varphi_{\varphi_e}(i, g(i,e))$

(b) $[\Phi_{g(i,e)}(x) \leq h(x, \Phi_{\psi_e(i,g(i,e))}(x)]$

(c) $[(\forall x)\ \Phi_{g(i,e)}(x) > \Phi_{\psi_e(i,g(i,e))}(x)]$

Une démonstration formelle peut être trouvée dans [11].

CHAPITRE III

DES CLASSES NATURELLES DE FONCTIONS DE COMPLEXITE BORNEE : LES HIERARCHIES SUB-RECURSIVES.

D'après la thèse de Church l'on peut identifier l'idée intuitive de fonction calculable avec la notion mathématique de fonction récursive partielle. La définition de la classe des fonctions récursives partielles (existence d'un élément universel) à comme conséquence un certain nombre de résultats négatifs, en particulier celui du "problème de l'arrêt". Un autre résultat négatif, similaire, est le suivant : il n'y a pas de borne calculable pour la "durée" d'un algorithme. Autrement dit, il n'y a pas toujours une fonction récursive à deux arguments, qui, en fonction de l'argument et de l'indice d'un certain algorithme, donnerait une borne supérieure pour la "longueur" du calcul de l'algorithme pour cet argument.

Plus formellement, on peut énoncer le

Théorème 3.1.- [Rogers] : Il n'y a pas de fonction récursive (totale) $f^{(2)}(z,x)$ telle que

$(\forall z)(\forall x)[M_z(x)$ s'arrête $\iff M_z(x)$ s'arrête en moins de $f(z,x)$ pas$]$.

$$\text{Soit } S(z,x,y,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } M_z(x) = y \text{ en moins de } w \text{ pas} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $M_z(x)$ est la machine (l'algorithme) d'indice z avec l'argument x. $S(z,x,y,w)$ est une fonction récursive totale parfaitement bien définie par la thèse de Church ; supposons alors l'existence d'une fonction totale $f^{(2)}(z,x)$ telle que

$$S(z,x,y,f(z,x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } M_z(x) = y \text{ en moins de } f(z,x) \text{ pas} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } S(z,z,y,f(z,z)) = 0 \\ \text{div} & \text{si } S(z,z,y,f(z,z,)) = 1 \end{cases}$$

$\Psi(z)$ est une fonction récursive partielle $\varphi_{y_0}(z)$, alors

$\varphi_{y_0}(y_0)$ converge $\Leftrightarrow S(y_0,y_0,y,f(y_0,y_0)) = 0$ par définition de $\Psi(z)$ mais

$\varphi_{y_0}(y_0)$ diverge $\Leftrightarrow S(y_0,y_0,y,f(y_0,y_0)) = 0$ par définition de $f(z,x)$

c'est une contradiction et $f^{(2)}(z,x)$ ne peut exister.

Donc le problème mentionné n'a pas de solution pour la classe M_z de tous les algorithmes d'un certain type (programmes d'une machine de Turing, par exemple). La démonstration montre également, que l'on peut réduire le problème de l'arrêt à celui de l'existence d'une borne récursive $f(z,x)$, c'est-à-dire que l'existence d'un tel $f(z,x)$ entraînerait la solution du problème de l'arrêt.

Il est d'autre part évident que l'on peut former des classes de fonctions récursives pour lesquelles on peut trouver des algorithmes dont la longueur d'exécution peut être bornée uniformément ; la classe des fonctions récursives primitives en est un exemple.

Le problème de trouver de telles classes et plus généralement une famille de telles classes de fonctions récursives qui contiendrait toute fonction récursive a été appelé problème de classification des fonctions récursives. Il a occupé un certain nombre de logiciens depuis l'introduction de la calculabilité au sens de Herbrand et Gödel.

Ce problème de la classification des fonctions récursives s'insère maintenant dans la théorie axiomatique de complexité. On considère dans la première partie du chapitre des hiérarchies sub-récursives et plus particulièrement des hiérarchies basées sur la classe des fonctions récursives élémentaires (dans le sens de Csillag-Kálmar).

Ces hiérarchies, qui sont également des classes de complexité par rapport à un certain nombre de mesures abstraites "naturelles" possèdent des propriétés de clôture et des propriétés de décidabilité (indécidabilité) que les classes de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ arbitraires ne possèdent pas en général.

Elles possèdent en outre des "présentations canoniques" qui peuvent être traduites en (qui sont équivalents à) certains schémas d'algorithmes moins généraux que les différents schémas de Turing, Church ou Herbrand-Gödel. Ces schémas restreints peuvent être utilisés pour la construction de langages de programmation (langages algorithmiques) sub-récursifs qui permettent la solution effective de certains problèmes de classification, notamment l'estimation des bornes pour la complexité d'un algorithme d'une telle classe.

Ces principes seront d'abord développés à l'aide de la classe des fonctions récursives élémentaires et de la hiérarchie sub-récursive qu'elle engendre. On prouve d'abord l'indécidabilité d'un certain nombre de problèmes de base de la classification des fonctions récursives par des hiérarchies sub-récursives et on détermine leur degré par rapport à la réductibilité injective. Ensuite on considère certaines propriétés de clôture de ces classes. Celles-ci montrent que la classe des fonctions récursives élémentaires est une classe de complexité. On en tire également un certain nombre d'axiomes pour une classe de machines dites "élémentaires" qui permet la classification des fonctions récursives en "degrés récursifs élémentaires". Les autres paragraphes de ce chapitre concernent les relations entre degrés récursifs élémentaires et classes de complexité, la structure de ces degrés et l'invariance des classes de complexité qu'ils déterminent par rapport à un changement de mesure de complexité.

3.1.- *Problèmes de base et leur indécidabilité*.-

Pour la démonstration de l'indécidabilité d'un problème nous utiliserons en général la réductibilité de ce problème à un autre problème insoluble - d'un degré d'indécidabilité connu.

Ainsi on dira que le problème P_1 est réductible à un problème P_2, $P_1 \leqslant_r P_2$ si une méthode pour la solution du problème P_2 donne une méthode pour la solution de P_1. La relation de réductibilité sera le plus souvent celle de la réductibilité injective dénotée par $\leqslant_1$: $A \leqslant_1 B \iff \exists f()$ récursif injectif $x \in A \iff f(x) \in B$.

Un problème de base de toute théorie de classification des fonctions récursives est le suivant :

décider, si un algorithme donné calcule une fonction qui est bornée par celle calculée par un autre algorithme ; ce problème est évidemment indécidable pour la classe des fonctions récursives partielles $\{\varphi_i\}_{i \in N}$; ainsi les fonctions caractéristiques des ensembles

$$B = \{<x,y> | (\forall z)[z \in \text{dom } \varphi_x \cap \text{dom } \varphi_y \implies \varphi_x(z) \leqslant \varphi_y(z)]\}$$

et $$B' = \{<x,y> | (\exists u)(\forall v)[u < v \;\&\; v \in \text{dom } \varphi_x \cap \text{dom } \varphi_y \implies \varphi_x(v) \leqslant \varphi_y(v)]\}$$

ne sont pas récursives. En effet, ce n'est qu'un cas particulier d'un théorème de Rice [38] qui dit que toute propriété de fonctions qui définit une dichotomie non triviale de la classe des fonctions récursives partielles est indécidable.

La même chose est encore vraie pour $B_1 = \{<x,y_0>\}$ et $B_1' = \{<x,y_0>\}$ ou y_0 est l'indice d'une fonction fixée. Si B_1 (par exemple) était récursif, on aurait $B_1 \leqslant_m \bar{B}_1$: supposons donc qu'il existe $f()$ récursif tel que $x \in B_1 \iff f(x) \in \bar{B}_1$; mais par le second théorème de récursion

$$\forall f() \in R_1 \quad \exists n \quad \varphi_n = \varphi_{f(n)} ,$$

donc $\forall f \quad \exists x \quad x \in B_1 \;\&\; f(x) \in B_1$

ou $\quad x \in \overline{B_1} \;\&\; f(x) \in \overline{B_1}$, contradiction.

On remarque, que les ensembles $\bar{B}$ et $\overline{B_1}$ sont récursivement énumérables

$$\bar{B} = \{<x,y>|(\exists z)[(\exists u)\; T(x,z,u) \;\&\; (\exists v)\; T(y,z,v) \;\&\; \varphi_x(z) > \varphi_y(z)]\}$$

$\bar{B}$ est récursivement énumérable (ou semi-décidable) par le second théorème de projection ; $\bar{B}'$ et $\bar{B}_1'$ ne peuvent pas être semi-décidables.

On considère maintenant une relativisation du problème de décision pour B.

Si le "problème de la borne" B est indécidable pour la classe des fonctions récursives partielles, il est par contre possible de trouver des classes restreintes d'algorithmes pour lesquelles le problème suivant à une solution :

Soit A une classe d'algorithmes, existe-t-il une fonction récursive partielle Ψ telle que

$$(\forall x)[[x \in A \cap B \Rightarrow \Psi(x) = 1] \;\&\; [x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow \Psi(x) = 0]],$$

le problème B est alors décidable relativement à A.

Considérons les problèmes

$$B_1(t) = B_1 = \{x|(\forall z)\; \varphi_x(z) \leq \varphi_t(z)\}, \quad \varphi_t() \in R_1 \quad \text{fixé}$$

et

$$B_1'(t) = B_1' = \{x|\varphi_x(z) \leq \varphi_t(z) \text{ p.p.}\}$$

relativisés à

(α) $A = \{x|\varphi_x$ total$\}$ et à

(β) $A' = \{x| \exists t()$ récursif élémentaire $\Phi_x(y) \leq t(y)$ p.p.$\}$

où $\Phi_x(y)$ est la fonction de complexité de $\varphi_x(y)$.

Proposition 3.1.1.- Les problèmes B_1 et B_1' sont indécidables relativement à A.

Démonstration.-

$$B_1 : \text{Soit} \quad \Psi^{(1)}(y) = \varphi_{f(t,z)}(y) = \begin{cases} \varphi_t(y)+1 & \text{si } \varphi_z(z) \text{ converge en } y \text{ pas de } M_z \text{ au plus,} \\ & \text{i.e. } (\exists u \leq y)[T(z,z,u)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout z, $\varphi_{f(t,z)}(y)$ est une fonction totale qui peut être effectivement trouvé étant donné z : $f(t,z) \varepsilon A$.

On a en outre :

$$\varphi_{f(t,z)}(y) = \begin{cases} \varphi_t(y)+1 & \text{si } y \geq y_0 \text{ et } \varphi_z(z) \text{ converge en } y_0 \text{ pas} \\ 0 & \text{partout si } \varphi_z(z) \text{ ne converge pas} \end{cases}$$

Soit $g()$ la fonction récursive partielle qui décide du problème $B_1(t)$ relativement à A ; alors si g était récursive partielle :

$$g(f(t,x)) = 1 \iff (\forall z)\ \varphi_{f(t,x)}(z) = 0 \iff \varphi_x(x) \text{ diverge}$$

$$g(f(t,x)) = 0 \iff (\forall z \geq z_0)\ \varphi_{f(t,x)}(z) = 1 \iff \varphi_x(x) \text{ converge en } z_0 \text{ pas}$$

donc $g(f(t,x))$ permettrait de décider le problème de l'arrêt ce qui est impossible.

B'_1 : ce cas est prouvé similairement, mais en posant

$$\varphi_{f(t,z)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\exists u \leq y)[T(z,z,u)] \\ \varphi_t(y)+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(f(t,x)) = 1 \iff (\forall z \geq z_0)\ \varphi_{f(t,x)}(z) = 0 \iff \varphi_x(x) \text{ converge (en } z_0 \text{ pas)}$$

$$g(f(t,x)) = 0 \iff (\forall z)\ \varphi_{f(t,x)}(z) = 1 \iff \varphi_x(x) \text{ diverge.}$$

<u>*Proposition*</u> *3.1.2.-* Les problèmes B_1 et B'_1 sont indécidables relativement à A'.

On choisit $\varphi_t(z) = \lambda z[0]$; les démonstrations sont comme ci-dessus :

$$\varphi_{f(t,z)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists u \leq y)[T(z,z,u)] \\ 0 & \text{si } (\forall u \leq y)[\neg T(z,z,u)] \end{cases}$$

S'il existe une gödelisation de la classe de machines M telle que $T(z,y,u)$ est un prédicat récursif élémentaire, alors $\varphi_{f(t,z)}$ est une fonction récursive élémentaire, car la classe des prédicats récursifs élémentaires est close par rapport à la quantification bornée. La classe des fonctions récursives élémentaires possède la propriété de Ritchie-Cobham, c'est-à-dire que A' contient un indice pour toute fonction récursive élémentaire, donc

$$\varphi_{f(t,z)} \text{ récursive élémentaire} \Rightarrow \Phi_{f(t,z)}() \leq h() \text{ p.p.},$$
$$h() \text{ fonction récursive élémentaire.}$$

Remarque.- Si l'on choisit l'ensemble A' suffisamment petit (si $T(x,y,z)$ ne peut pas être gödelisé dans A') alors les démonstrations ci-dessus ne sont plus valables et les problèmes B à B_1' peuvent être décidables relativement à A'.

On montre maintenant que la restriction de A à une présentation particulière de la classe des fonctions récursives primitives (récursives élémentaires) ne change pas le caractère indécidable du problème.

Définition 3.1.- Deux classes de machines sont dites fortement équivalentes si elles déterminent et la même classe de fonctions récursives (partielles) et la même classe de suites de configurations de leur mémoire externe. On dira que M_x est récursif primitif ou $x \in P$ lorsque P est un ensemble récursif d'indices d'une classe de machines $\{M_i\}$ fortement équivalente à la classe des dérivations des fonctions récursives primitives F_{PR}, i.e. aux indices canoniques de F_{PR} (cf. [10] et Déf. 3.6.).

M_x récursif élémentaire ou $x \in E$ est défini de la même façon.

Définition 3.2.- Soit $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ une suite récursivement énumérable de fonctions récursives primitives telles que pour tout $k \geq 0$

(a) $(\forall x)[f_k^n(x) < f_{k+1}(x)]$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

(b) $(\forall k)$ $f_k()$ est monotone croissante est non bornée ; $(\forall x)$ $f_k(x+1) > f_k(x) > x$.

(c) toute fonction récursive primitive est majorée par un $f_k^n(x)$; i.e.,

$$\forall g() \in F_{PR} \; \exists n \; \exists k \; g(x_1, \ldots, x_n) < f(\max\{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Théorème 3.1.3.- L'ensemble d'indices $A_k = \{x | (\exists n)(\forall z)\varphi_x(z) \leq f_k^n(z)$ & $x \varepsilon P$ $(x \varepsilon E)\}$ n'est pas récursif. On utilise le

Lemme 3.1.4.- Soit $B = \{x | x \varepsilon P$ & φ_x non-décroissant et $\varphi_x(y+1) \leq \varphi_x(y) + 1\}$ alors les ensembles

$$C = \{x | x \varepsilon B \text{ \& } \varphi_x(N) \text{ est fini}\}$$

$$\text{et} \quad D = \{x | x \varepsilon B \text{ \& } \varphi_x(N) \text{ est infini}\}$$

ne sont pas récursivement énumérables.

Soit $\{W_i\}$ une énumération standard de tous les ensembles récursivement énumérables, on réduit

$$A_1' = \{x | W_x \text{ fini}\} \text{ à } C \text{ et } A_2' = \{x | W_x \text{ infini}\} \text{ à } D$$

par une certaine fonction récursive f ; donc $x \varepsilon A_1' \Leftrightarrow f(x) \varepsilon C$ et $x \varepsilon A_2' \Leftrightarrow f(x) \varepsilon D$.

Construction de f : soit

$$W_x = \text{dom } \varphi_x = \{y | \varphi_x(y) \text{ converge} \Leftrightarrow (\exists z)\ T(x,y,z)\} \text{ ; on pose}$$

$$\varphi_{f(x)}(0) = 0$$

$$\varphi_{f(x)}(z+1) = \begin{cases} \varphi_{f(x)}(z) & \text{si } (\forall y \leq z)[T(x,y,z+1) \Rightarrow (\exists n \leq z)T(x,y,n)] \\ \varphi_{f(x)}(z)+1 & \text{si } (\exists y \leq z)[T(x,y,z+1) \text{ \& } (\forall n \leq z)\neg T(x,y,n)] \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\varphi_{f(x)}(z+1) \neq \varphi_{f(x)}(z)$ si et seulement si l'on peut trouver un y tel que $\varphi_x(y)$ converge en $z+1$ pas.

Avec une gödelisation récursive élémentaire de M, $\varphi_{f(x)}$ est récursif élémentaire, donc

$$x \in A_1' \iff (\exists w)(\forall z)[w < z \Rightarrow \varphi_{f(x)}(z) = \varphi_{f(x)}(w)] \iff (\exists v)(\forall y)[v < y \Rightarrow (\forall u) \neg T(x,y,z)] \iff f(x) \in C$$

$$x \in A_2' \Rightarrow (\forall w)(\exists z)[w < z \;\&\; \varphi_{f(x)}(z) > \varphi_{f(x)}(w)] \iff (\forall v)(\exists y)[v < y \;\&\; (\exists u)T(x,y,u)] \iff f(x) \in D,$$

autrement dit, si, comme z croît, $T(x,y,z)$ est vrai pour un nouvel $y < z$ pour une infinité d'arguments, alors $\varphi_{f(x)}(z)$ est non-borné, sinon $\varphi_{f(x)}(z)$ est borné.

Notons, qu'avec la convention $T(x,y,z) \iff M_x(y)$ converge en z pas, $\{y \mid T(x,y,z)\}$ est fini pour un z donné.

Il est bien connu, que A_1' est un ensemble Σ_2-complet et A_2' un ensemble Π_2-complet, nous avons donc prouvé le lemme en déterminant le type d'isomorphisme récursif de C et de D.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Soit $h_k(x,0) = x$

$h_k(x,y+1) = f_k(h_k(x,y))$;

$h_k(x,y) = f_k^y(x)$,

pour tout k, $h_k(x,y)$ est une fonction récursive primitive. Soit, pour tout $z \in P$, $n(z) \in P$ un indice de $\lambda x h_k(x,\varphi_{f(z)}(x))$ avec la fonction $f()$ du lemme ; alors par définition

$$(\exists y)(\forall x)[\varphi_{n(z)}(x) \leqslant \lambda x f_k^y(x)] \iff \varphi_{f(z)} \text{ borné } \iff z \in A_k$$

$$(\forall y)(\exists x)[\varphi_{n(z)}(x) > \lambda x f_k^y(x)] \iff \varphi_{f(z)} \text{ non-borné } \iff z \in \bar{A}_k \;;$$

donc $\varphi_{n(z)}(x)$ est borné par $\lambda x\, f_k^y(x)$ si et seulement si $z \in A_k$ ce qui est du même degré d'indécidabilité que le problème W_z fini, à savoir si une machine de Turing s'arrête sur un nombre fini (ou infini) d'arguments.

Corollaire 3.1.5.- (a) L'ensemble d'indices A_k est du type Σ_2 ($\exists\forall$-définissable) et en fait est Σ_2-complet.

La démonstration du lemme 3.1.4. montre également que l'ensemble d'indices canoniques des classes de Grzegorczyk[1] $\mathcal{E}^n$ est Σ_2-complet pour tout n. On montrera par la suite que $\bigcup_n R^{\Phi}_{f_k^n} = \mathcal{E}(f_k) = \mathcal{E}^{k+1}$, $k \geq 2$ pour une certaine classe de fonctions $\{f_k\}$ qui satisfait à la définition 3.2. Il est évident que l'ensemble d'indices canoniques $\Theta\mathcal{E}(f_k) \cap P$ est proprement inclus dans A_k, car A_k contient des indices de fonctions caractéristiques qui sont récursives primitives, mais qui n'appartiennent pas à la classe de Grzegorczyk $\mathcal{E}^{k+1}$. La classe des fonctions $\{\varphi_{n(z)}\}$ par contre appartient à la classe $\mathcal{E}^{k+1}$ pour $k \geq 2$ car toutes les fonctions $\varphi_{f(z)}$ sont récursives élémentaires, c'est-à-dire dans $\mathcal{E}^3$.

On a ainsi le

Corollaire 3.1.5.- (b) L'ensemble d'indices canoniques des classes de Grzegorczyk $\mathcal{E}^{k+1} = \mathcal{E}(f_k)$ est Σ_2-complet.

Une autre application du lemme 3.1.4. concerne les ensembles d'indices canoniques des classes de fonctions récursives primitives dont la complexité est bornée par f_k :

$$\{x \mid (\exists y)(\forall z)[\varphi_x(z) = \varphi_y(z) \ \&\ \Phi_y(z) \leq f_k(z)]\}.$$

On sait qu'il existe des mesures de Blum Φ telles que [6]

(a) la classe de machines, dotées d'une sorte de contrôle fini, permet de minimiser la complexité d'une fonction sur un nombre fini d'arguments et

(b) les entrées et les sorties ne contribuent pas à la complexité des calculs.

On peut ainsi prouver le

1) cf. section 3.2.-

<u>*Théorème*</u> *3.1.6.*- Il existe des classes de machines $<\varphi,\Phi>$ telles que l'ensemble d'indices canoniques des fonctions qui sont Φ-$f_k()$-calculables est $\sum_2$-complet.

Soit $\{g_z\}_{z\in N}$ une énumération récursive de la classe des fonctions $\{\varphi_i()|i \in B\}$ du lemme 3.1.4.

Posons

$$\varphi_{h(z)}(x) = \begin{cases} f_{k-1}^{g_z(x)}(x) & \text{si } (\exists u < x)[g_z(u) = g_z(x)] \\ \\ t(x) & \text{si } (\forall u < x)[g_z(u) < g_z(x)] \end{cases}$$

où $t(x)$ est une fonction récursive primitive qui n'est pas Φ-$f_k()$-calculable. L'ensemble $\{z|g_z(u) = g_z(x) \text{ p.p.}\}$ est $\sum_2$-complet et on a

$$(\exists u)(\forall v)[u < v \Rightarrow g_z(u) = g_z(v)] \Rightarrow \varphi_{h(z)}(x) = f_{k-1}^{g_z(u)}(x) \text{ p.p.}$$

$$\Rightarrow (\exists n)\varphi_{h(z)}(x) \leq f_{k-1}^{n}(x) \text{ p.p.} \Rightarrow \varphi_{h(z)} \text{ est } \Phi\text{-}f_k\text{-}$$

calculable par (a) et (b) ;

$(\forall u)(\exists v)[u < v \;\&\; g_z(u) < g_z(v)] \Rightarrow \varphi_{h(z)}(x) = t(x) \text{ i.a.} \Rightarrow \varphi_{h(z)}$ n'est pas Φ-f_k-calculable.

On montre maintenant qu'un certain problème, que l'on appelera le problème de la difficulté intrinsèque des fonctions récursives et qui consiste essentiellement à trouver effectivement un algorithme de complexité minimale pour une fonction donnée, n'a pas de solution effective dans la classe des algorithmes P(E). On verra par la suite, qu'un autre problème, celui de l'estimation de la complexité, est soluble dans cette même classe d'algorithmes.

Notons d'abord que le problème $B = \{<x,y>|f_x < f_y\}$ est décidable relatif à la classe $\{f_k\}$ des fonctions de la définition 3.2., on écrira P_k pour la classe des fonctions $\{\varphi_i|i \in P \;\&\; (\forall x)\; \Phi_i(x) \leq f_k(x)\}$. Une application du théorème de Meyer et McCreight montre que $F_{PR} = \bigcup_k P_k$ est une classe de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ pour toute classe de machines $<\varphi,\Phi>$ ayant certaines propriétés et que P est une présentation de cette classe de complexité $R^{\Phi}_{t()} = F_{PR}$.

Définition 3.3.- Etant donnée une classe récursivement énumérable de fonctions récursives $\mathbb{C}$ avec présentation récursivement énumérable C et une propre sous-classe A de $\mathbb{C}$ définie par une borne sur **la** complexité f() :

$$(\forall x \in C)(\exists y \in C)(\forall z)\ \varphi_x \in A \iff \varphi_x \simeq \varphi_y \ \&\ \Phi_y(z) \leq f(z)$$

on dira que le problème de la difficulté intrinsèque A (défini par f()) est effectivement soluble pour $\mathbb{C}$ (par rapport à C) s'il existe une fonction récursive (partielle) $\Psi \in P_1$ telle que

$$(\forall x \in C)\varphi_x \in A \Rightarrow \Psi(x) \text{ défini } \ \&\ \varphi_{\Psi(x)} \simeq \varphi_x \ \&\ \Phi_{\Psi(x)}(z) \leq f(z).$$

Théorème 3.1.7.- Quelque soit k, le problème de la difficulté intrinsèque P_k (défini par $f_k()$) n'a pas de solution pour F_{PR} (par rapport à P).
On montre que la fonction Ψ de la définition 3.3. ne peut exister ; c'est une conséquence du théorème 3.1.6.
Considérons le prédicat :

$$\Psi(x) \text{ indéfini} \vee \varphi_{\Psi(x)} \neq \varphi_x \vee \Phi_{\Psi(x)} > f_k.$$

Si Ψ est récursif partiel, alors le prédicat $P(x) \iff \Psi(x)$ indéfini peut -etre décidé par une machine de Turing avec K-oracle, c'est-à-dire que le problème est du degré de Turing 0', le degré du problème de l'arrêt. Une telle machine peut aussi décider si $(\exists z)\varphi_{\Psi(x)}(z) \neq \varphi_x(z)$ et $(\exists v)\Phi_{\Psi(x)}(v) > f_k(v)$ pour tout $x, \Psi(x) \in C$.
Par conséquent, l'existence d'un tel $\Psi \in P_1$ classerait le problème de la difficulté intrinsèque dans les problèmes du degré de Turing 0'. Mais on a prouvé (théorème 3.1.6.) que $\varphi_i \in P_k$ est un prédicat $\sum_2$-complet, c'est-

à dire qu'il est du degré de Turing 0". L'existence d'une telle fonction récursive partielle est donc incompatible avec le degré de Turing du problème.

3.2.- *Les fonctions récursives élémentaires et une hiérarchie sub-récursive primitive.*-

Dans le paragraphe précédent on a trouvé que le problème $B = \{<x,y> | f_x \leqslant f_y \ (\forall z \ ; \ p.p.)\}$ relativisé à un ensemble d'algorithmes A, c'est-à-dire

$$(\forall x)\left[\left[x \in A \cap B \Rightarrow \Psi(x) = 1\right] \ \& \ \left[x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow \Psi(x) = 0\right]\right]$$

n'a pas de solution pour un certain nombre de classes importantes d'algorithmes A.

On a aussi montré que le problème de la "difficulté intrinsèque" d'une fonction ne peut pas avoir de solution dans ces classes.

On donne ici l'exemple de classes de fonctions récursives C dont la croissance va être est estimée dans un certain sens ; auparavant nous allons rappeler un certain nombre de faits concernant les fonctions récursives élémentaires.

Soit C une classe d'algorithmes, présentation d'une classe de fonctions récursives pour laquelle il existe une séquence récursivement énumérable de fonctions récursives $f_0(x), f_1(x), \ldots$ telle que

1) il existe i tel que $\lambda y \ \varphi_i(<x,y>) = \lambda y \ f_x(y)$ pour tout x

2) il existe une fonction récursive $a()$ qui énumère un ensemble d'indices (algorithmes) A, $(A \subset C)$, pour $\{f_x(y)\}$ tel que le problème $B = \{<x,y> | f_x \leqslant f_y\}$ est décidable relativement à A.

3) $(\forall i)[i \in C \Rightarrow (\exists k)(\exists x_0)(\forall x > x_0)[\varphi_i(x) \leqslant f_k(x)]]$;

où k peut être trouvé effectivement uniformément en i.

Définition 3.4.- Le problème de l'estimation (de la croissance de fonctions) est soluble pour la classe de fonctions $\mathbb{C}$ lorsqu'il existe une présentation C de $\mathbb{C}$ et une fonction $\lambda x \ y \ \varphi_i(<x,y>)$ avec les propriétés (1) à (3) ci-dessus ainsi qu'une fonction récursive (partielle) Ψ, $\Psi : C \to A$, telle que

$(\forall i)[i \in C \Rightarrow [\Psi(i)$ converge & $(\forall x > x_0)\varphi_i(x) \leqslant \varphi_{\Psi(i)}(x)]]$

Remarque.- On verra par la suite que pour des telles classes le problème de l'estimation de la complexité d'un algorithme est également soluble si l'on restreint quelque peu les classes de machines $<\psi,\Phi>$ considérées.

On montre d'abord que le problème de la définition 3.4. a une solution pour E, la classe de définitions des fonctions récursives élémentaires. En relativisant E à une classe de fonctions données $\{f_k\}$ on obtient une solution du problème pour la classe des fonctions récursives primitives F_{PR}.

Définition 3.5.- La classe des fonctions récursives élémentaires

$$E =_{def} \{\psi_i^{(n)}()\,|\,\forall\bar{x}[\exists y\; T_n(i,\bar{x},y)\;\&\;(\exists m)\;\Phi_i^{(n)}(\bar{x}) \leq g_k^m(\max\{\bar{x}\})]\},\; k > 1$$

où $g_k(x) = k^x$, $g_k^{m+1}(x) = g_k(g_k^m(x))$ et $\bar{x}$ abrège $x_1,\ldots,x_n$.

On utilise les indices récursifs élémentaires, similaires aux indices de Kleene [28], pour la caractérisation de la classe E des dérivations de fonctions récursives élémentaires.

Définition 3.6.- Soit E_1 la plus petite classe de dérivations de fonctions récursives primitives qui contient :

1) $U_i^n = \lambda x_1\ldots x_n[x_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ codifié $<1,i,n>$

$C_i^n = \lambda x_1\ldots x_n[i]$ $i,n \geq 0$ $<2,i,n>$

$f_1 = \lambda xy[x+y]$ $<3,2>$

$f_2 = \lambda xy[x \dot{-} y]$ $<4,2>$

2) et qui est close par rapport à la substitution simultanée

$$f^{(n)}(\bar{x}) = g^{(m)}(g_1^{(n)}(\bar{x}),\ldots,g_m^{(n)}(\bar{x})) \qquad <5,n,g,g_1,\ldots,g_m>$$

3) par rapport à la somme finie et par rapport au produit fini

$$f^{(n+1)}(\bar{x},y) = \sum_{i<y} g(\bar{x},i) \qquad <6,n+1,g>$$

$$f^{(n+1)}(\bar{x},y) = \prod_{i<y} g(\bar{x},i) \qquad <7,n+1,g>$$

où $g, g_1, \ldots, g_m$ sont des codes (indices canoniques) de fonctions récursives élémentaires introduites par un des schémas de définitions de (1),(2) ou (3).

Kálmar a défini la classe $\mathcal{E}$ par E_1 ; c'est une présentation de $\mathcal{E}$.

Lemme 3.2.1.- (Propriétés de clôture de la classe E_1) :

E_1 est close par rapport à :

(i) la minimisation bornée ;

(ii) la récursion primitive bornée ;

(iii) L'ensemble des relations $[f^{(n)}(\bar{x}) = 0]$ pour $f^{(n)} \in E_1$ est clos par rapport à la quantification bornée et par rapport aux opérations de la logique propositionnelle.

(i) Si $g^{(n+1)} \in E_1$ et

$$f^{(n+1)}(\bar{x},y) = \begin{cases} (\mu z < y)[g(\bar{x},z) = 0] & \text{si } (\exists z < y)[g(\bar{x},z) = 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $f^{(n+1)} \in E_1$, car $f(\bar{x},y) = \sum\limits_{t<y} \prod\limits_{z\leq t} sg(g(\bar{x},z))$; où $sg(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

(ii) soit $f^{(n+1)}(\bar{x},y)$ défini par

$f(\bar{x},0) = g(\bar{x})$ $\qquad g^{(n)}, h^{(n+2)}$ et $j^{(n+1)} \in E_1$

$f(\bar{x},y+1) = h(\bar{x},y,f(\bar{x},y))$

$f(\bar{x},y) \leq j(\bar{x},y)$

alors $f^{(n+1)} \in E_1$ car avec $k(\bar{x},y) = \langle j(\bar{x},0),\ldots,j(\bar{x},y)\rangle$ on a

$f(\bar{x},y) = ((\mu z \leq k(\bar{x},y))[(z)_0 = g(\bar{x}) \wedge (\forall i < y)[(z)_{i+1} = h(\bar{x},i,(z)_i)]])_y$

où $\lambda x_0 \ldots x_n \; \langle x_0,\ldots,x_n\rangle = z$ et $\lambda zy(z)_y$, $\langle (z)_0,\ldots,(z)_n\rangle = z$ sont des fonctions de codification des n-uplets qui peuvent être choisies dans $\mathcal{E}$;

(iii) $\neg[f(\bar{x}) = 0] \iff [[1 \dot{-} f(\bar{x})] = 0]$

$[(f(\bar{x}) = 0) \wedge (g(\bar{x}) = 0)] \iff [[f(\bar{x}) + g(\bar{x})] = 0]$

$(\forall y < z)[f(\bar{x},y) = 0] \iff \sum\limits_{y<z} f(\bar{x},y) = 0.$

Si l'on pose $\lambda xy[x.y] = \sum_{i<y} x$ et $\lambda xy[x^y] = \prod_{i<y} x$ on obtient une autre présentation E_2 de $\mathcal{E}$:

(i) fonctions initiales U_i^n, C_i^n, $\lambda x[x+1]$, $\lambda y[k^y]$ $(k > 1)$

(ii) close par rapport à la substitution simultanée et par rapport à la récursion primitive bornée.

On définit maintenant une suite de fonctions récursives par

$$f_0(x) = x+1$$
$$f_{n+1}(x) = f_n^x(x)$$

et une suite de présentations $E_2(f_n)$ de $\mathcal{E}(f_n)$;

(i) U_i^n, C_i^n, $\lambda x[x+1]$, $f_n(x)$

(ii) close par rapport à la substitution simultanée et par rapport à la récursion primitive bornée. A l'aide de ces présentations on prouve la

Proposition 3.2.2.- (a) $\bigcup_n \mathcal{E}(f_n) = F_{RP}$,

(b) $\mathcal{E}(f_n) \subseteq \mathcal{E}^{n+1}$, $n \geq 0$,

(c) $\mathcal{E}(f_n) = \mathcal{E}^{n+1}$, $n \geq 2$.

où $\mathcal{E}^n = E_2(g_n)$ sont les classes de Grzegorczyk [25], $g_n(x,y)$ étant défini par :

$g_0(x,y) = y+1$

$g_1(x,y) = x+y$

$g_2(x,y) = (x+1)(y+1)$

$g_{n+1}(0,y) = g_n(y+1,y+1)$

$g_{n+1}(x+1,y) = g_{n+1}(x,g_{n+1}(x,y))$, $n \geq 2$.

Si l'on pose, $g()$ étant donné

$h(0,y) = y$

$h(x+1,y) = g(h(x,y))$; alors $h(x,y) = g^x(y)$

On obtient avec $g(y) = f_0(y)$, $f_1(y)$,... etc,

$h_0(x,y) = f_0^x(y) = x+y,\quad h_0(x,x) = f_1(x) = 2x$

$h_1(x,y) = f_1^x(y) = 2^x.y,\ h_1(x,x) = f_2(x) = 2^x.x,$

etc. ;

(a) 1) toutes les fonctions $f_n(x)$ sont récursives primitives :

$$f_{n+1}(x) = f_n^x(x) \quad \text{et avec} \quad h_n(x,y) = f_n^x(y),$$

$$f_{n+1}(x) = h_n(U_1^2(x,y),\ U_1^2(x,y)) = h_n(x,x).$$

2) toute fonction récursive primitive est majorée par un $f_n^k(x)$ et

$f_{n+1}(x) > f_n^k(x)$ p.p. ;

(b) pour $n=0$ et $n=1$ l'inclusion est évidente par la définition des classes, car $\mathcal{E}(f_0) = \mathcal{E}^0$ et avec $g_2(x,x) = (x+1)^2$ on a $\mathcal{E}(f_1) \subseteq \mathcal{E}^2$. On montre le cas général par induction : $f_k^x(y) \leqslant \lambda y\ g_{k+2}(x,y)$; donc

$$f_0^x(y) \leqslant g_2(x,y).$$

Supposons que $(\forall x)(\forall y)\ \ f_k^x(y) \leqslant g_{k+2}(x,y)$; alors

1) $(\forall y)\ f_{k+1}^1(y) = f_k^y(y) \leqslant g_{k+2}(y,y)$

$$\leqslant g_{k+2}(y+1,y+1)$$

$$= g_{k+3}(0,y) < g_{k+3}(1,y).$$

Supposons $(\forall y)\ f_{k+1}^x(y) \leqslant g_{k+3}(x,y)$ alors

2) $f_{k+1}^{x+1}(y) \leqslant f_{k+1}^1(f_{k+1}^x(y))$

$$\leqslant f_{k+1}^1(g_{k+3}(x,y))$$

$$\leqslant g_{k+3}(0,g_{k+3}(x,y))$$

$$\leqslant g_{k+3}(x,g_{k+3}(x,y))$$

$$= g_{k+3}(x+1,y)$$

donc $f_k^x(y) \leqslant g_{k+2}(x,y)$ pour tout x, tout y et $\mathcal{E}(f_n) \subseteq \mathcal{E}^{n+1}$ pour tout n.

(c) $\mathcal{E}^{n+1} \subseteq \mathcal{E}(f_n)$, $n \geqslant 2$:

Soit $\bar{g}_k(x,y)$ la classe de fonction de R.W. Ritchie [39]:

$\bar{g}_0(x,y) = y+1$

$\bar{g}_1(x,y) = x+1$

$\bar{g}_2(x,y) = x.y$

$\bar{g}_{n+1}(0,y) = 1$

$\bar{g}_{n+1}(x+1,y) = g_n(g_{n+1}(x,y),y), \quad n \geq 2$

R.W. Ritchie montre [39] que $(\forall n)\ \mathcal{E}^n = \mathcal{E}(\bar{g}_n)$ et que toute fonction dans $\mathcal{E}^{k+1}$ est majorée par un $\lambda y\ \bar{g}_{k+2}(x,y)$.

Il suffit de prouver que $(\forall x)(\exists z)\ \lambda y\ \bar{g}_{k+2}(x,y) \leq f_k^z(y) = f_k^{z(x)}(y)$ avec un $z = z(x)$ qui est uniforme en x ; autrement dit il suffit de prouver que $\bar{g}_{k+1}(x,y)$ peut être défini par une récursion primitive, bornée par une fonction dans $\mathcal{E}(f_k)$, d'où $\mathcal{E}^{n+1} \subseteq \mathcal{E}(f_n)$, $n \geq 2$ et l'identité des classes est établie.

1) $k=2$: $\bar{g}_{k+2}(0,y) = 1 \leq f_2^0(y) = y$, supposons $(\forall x)(\forall y > 0)$ $g_{k+2}(x,y) \leq f_2^{2x}(y)$ alors $\bar{g}_{k+2}(x+1,y) = \bar{g}_{k+1}(\bar{g}_{k+2}(x,y),y)$

$$= y^{\bar{g}_{k+2}(x,y)}.$$

$$\leq 2^{y.\bar{g}_{k+2}(x,y)}$$

$$\leq 2^{y.f_2^{2x}(y)}$$

$$\leq 2^{f_2^{2x+1}(y)} = f_2^{2(x+1)}(y).$$

2) Supposons que pour k arbitraire

$$(\forall x)(\forall y > 0)\bar{g}_{k+1}(x,y) \leq f_{k-1}^{2x}(y)$$

alors (a) $(\forall y)\ \bar{g}_{k+2}(0,y) = 1 \leq f_k^0(y) = y$ et si

$$(\forall x)(\forall y > 0)\ \bar{g}_{k+2}(x,y) \leq f_k^{2x}(y)$$

alors (b) $\bar{g}_{k+2}(x+1,y) = \bar{g}_{k+1}(\bar{g}_{k+2}(x,y),y)$ par définition

$\leq \bar{g}_{k+1}(\bar{g}_{k+2}(x,y),\bar{g}_{k+2}(x,y))$ par monotonie

$\leq f^{2\bar{g}_{k+2}(x,y)}(\bar{g}_{k+2}(x,y))$ par hypothèse

$\leq f^{2\bar{g}_{k+2}(x,y)}(2\bar{g}_{k+2}(x,y))$

$\leq f_k(2\bar{g}_{k+2}(x,y))$ par définition

$\leq f_k(f_k(f_k^{2x}(y))) = f_k^{2(x+1)}(y)$.

La proposition 3.2.2 montre donc que l'on peut définir une hiérarchie sub-récursive primitive à l'aide de la classe de fonctions $\{f_k\}$ et que cette hiérarchie coïncide avec celle de Grzegorczyk pour $n \geq 2$. Les indices canoniques que l'on en déduit permettent la solution du problème de la définition 3.4.:

Proposition 3.2.3.- Le problème de **l**'estimation a une solution pour les classes $E_1(f_n)$ d'indices canoniques de définitions des fonctions récursives élémentaires en f_n, $n \geq 0$.

On prouve la proposition en montrant que $(\forall n)$ $\lambda y\, f_n^x(y)$, $x = 0,1,2,\ldots$ satisfait aux propriétés de la définition :

1) Pour tout n il existe une fonction $\varphi_{i_n}(\langle x,y\rangle)$ telle que $\lambda y\, \varphi_{i_n}(\langle x,y\rangle) = \lambda y\, h_n(x,y) = f_n^x(y) \in E(f_n)$ pour tout x, mais

$\lambda z\, \varphi_{i_n}(z) \in E(f_n) \Rightarrow \varphi_{i_n}(\langle x,y\rangle) + 1 \in E(f_n) \Rightarrow \varphi_{i_n}(\langle x,y\rangle) + 1 \leq \varphi_{i_n}(\langle y_0,y_0\rangle)$, pour un certain y_0, donc $\varphi_{i_n}(\langle y_0,y_0\rangle) + 1 \leq \varphi_{i_n}(\langle y_0,y_0\rangle)$, une contradiction et $\varphi_{i_n}(z) \notin E(f_n)$.

2) Construction de la fonction récursive $a_k(x)$ qui énumère un ensemble d'indices canoniques pour $\lambda y\, f_k^x(y)$ pour lequel le problème B est décidable.

(a) Soit j l'indice de $f_2(y) = 2^y.y$, alors la fonction

$$a(0) = <1,1,1>$$
$$a(n+1) = <5,1,j,a(n)>$$

énumère un ensemble d'indices canoniques pour $f_2^n(y)$.

(b) Pour k arbitraire, on utilise le théorème précédent, $\mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}(f_n)$, $n \geq 2$. Lorsque i est indice canonique, on écrit $g_i(x_1,\ldots,x_n)$ pour la fonction récursive élémentaire d'indice i, où $n = (i)_1$ par définition des indices canoniques. Toute classe $\mathcal{E}^n$ est énumérée par la fonction d'énumération de Kleene [28], $el^{E_n}(i,x)$, définie par

$$el(i,x) = \begin{cases} g_i((x)_0,(x)_1,\ldots,(x)_{(i)_1}) & \text{si } i \text{ est indice canonique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $E_0(i,x) = 0$

$$E_{n+1}(i,x) = el^{E_n}(i,x).$$

On dira que i est n-indice (canonique) de $f()$ ou $f()$ est récursive élémentaire en E_n avec indice i si $f(\bar{x}) = E_{n+1}(i,<\bar{x}>)$; E_n reçoit le n-indice canonique $<0,2,1>$.

On cherche donc, par induction, de définir un k-indice de f_k :

Soit i un n-indice de $\lambda y\, f_n(y)$, on construit d'abord un $(n+1)$-indice de $\lambda y\, f_{n+1}(y)$:

$$g(i,0) = <1,1,1>$$
$$g(i,x+1) = <5,1,i,g(i,x)>,$$

$g(i,x)$ est n-indice de $\lambda y\, f_n^x(y)$ et $f_{n+1}(x) = f_n^x(x) = E_{n+1}(g(i,x),<x>)$, donc $h(i) = <5,1,<0,2,1>, <5,1,\underline{g}, <2,1,i>, <1,1,1>>,<\underline{x}>>$ est n+1-indice de $f_{n+1}(x)$, où $\underline{g}$ est indice de $g(i,x)$ et $<\underline{x}>$ indice de $\lambda x<x>$.

Si i est indice canonique de $f_2(x) = 2^x.x$, alors $h^n(i)$ est $(n+2)$-indice de $f_{n+2}(x)$.

Donc $h^k(i) = a_{k+2}(i)$, $k \geq 1$, est la fonction recherchée.

3) Toute fonction de E^{n+1} peut être majorée par f_n^k ; i.e.

$$(\forall i)[i \in E(f_n) \Rightarrow (\exists n)(\forall \bar{x} \geq x_0)[f_i(\bar{x}) \leq f_n^k(\max(\bar{x}))]].$$

Cette propriété est facile à prouver par inductionsur la construction de la classe $E(f_n)$;

(i) i indice d'une fonction initiale : immédiat

(ii) substitution :

si $f(\bar{x}) \leq f_k^n(\max(\bar{x}))$ et $f_i(\bar{x}) \leq f_k^{n_i}(\max(\bar{x}))$, $1 \leq i \leq m$

$$(\forall x \geq x_0)\ f(f_1(\bar{x}),\ldots,f_m(\bar{x})) \leq f_k^n(\max(f_1,\ldots,f_m)) \leq$$

$$\leq f_k^{\,n + \max\limits_{1 \leq i \leq m}(n_i)}(\max(\bar{x}))$$

(iii) somme finie et produit fini : si $f(\bar{x},y) \leq f_k^n(\max(\bar{x},y))$,

$$(\forall x \geq x_0) \sum_{i<y} f(\bar{x},i) \leq \sum_{i<y} f_k^n(\max(\bar{x},i)) \leq y\ .\ f_k^n(\max(\bar{x},y))$$

$$\leq f_k^{n+1}(\max(\bar{x},y)) \quad \forall k \geq 2$$

$$(\forall x \geq x_0) \prod_{i<y} f(\bar{x},i) \leq \prod_{i<y} f_k^n(\max(\bar{x},i)) \leq (f_k^n(\max(\bar{x},y)))^y$$

$$\leq f_k^{n+2}(\max(\bar{x},y)) \quad \forall k \geq 2$$

Pour la démonstration de la proposition, il suffit maintenant de poser

$k(\underline{f}) = 0$	si $(\underline{f})_0 = 1,2,4$
$k(\underline{f}) = 1$	si $(\underline{f})_0 = 0,3$
$k(\underline{f}) = k(\underline{g}) + \max(k(\underline{g}_1),\ldots,k(\underline{g}_m))$	si $\underline{f} = <5,n,g,g_1,\ldots,g_m>$
$k(\underline{f}) = k(\underline{g}) + 1$	si $\underline{f} = <6,n+1,g>$
$k(\underline{f}) = k(\underline{g}) + 2$	si $\underline{f} = <7,n+1,g>$
$k(\underline{f}) =$ indéfini	si $\underline{f}$ n'est pas indice canonique et on

pose $\Psi(i) = a_n(k(i))$.

3.3.- *Classes de machines de complexité bornée et le problème de la complexité.*

On considère dans ce paragraphe une certaine classe de machines de Minsky [35] et une mesure de complexité fixée. On montre que le "problème de la complexité" insoluble en général, a une solution pour certains ensembles d'indices de cette classe de machines.

Définition 3.7.- La classe des machines de Minsky $\{M_i\}$ est une classe de machines à registres. Une telle machine utilise pendant son calcul un nombre fini, mais variable (et non borné) de registres qui peuvent chacun contenir tout entier. Ces registres sont adressables directement et indépendamment par le programme ("random access") ; on écrit $x,y,\ldots$ pour l'adresse d'un registre et $X,Y,\ldots$ pour son contenu.

(i) Une machine de Minsky de base peut avoir l'une des trois formes : Sx, Nx, Txy $(x,y \in N)$ qui correspondent aux opérations suivantes sur le contenu des registres : $X := X+1$, $X := 0$, $X := Y$.

(ii) La classe des machines de Minsky est la classe qui contient les machines de base et qui est close pour les deux opérations :

(a) enchaînement : si M_p et M_q sont des machines de la classe, alors la machine $M_p M_q$ qui effectue les opérations de M_p, puis celles de M_q, est une machine de la classe ;

(b) itération : Si M_p est une machine de la classe, alors la machine RxM_pF est une machine de la classe dont le travail consiste à itérer les opérations de M_p tant que le contenu X du registre x est différent de zéro.

Définition 3.8.- M_i calcule $\psi_i^{(n)}$ avec complexité $\Phi_i^{(n)}$ <=> $(\forall\bar{x})[M_i(\bar{x})$ s'arrête après exactement $\Phi_i^{(n)}(\bar{x})$ pas [1] avec $\bar{\psi}_i(\bar{x}) = <\bar{x},\psi_i^{(n)}(\bar{x})>$ dans les registres 0,1,...,n ou bien $M_i(\bar{x})$ ne s'arrête jamais et $\psi_i^{(n)}(\bar{x}) = \Phi_i^{(n)}(\bar{x})$ = indéfini]

---

1) une instruction élémentaire de M_i : Sx, Nx, Txy, Rx ou F est considérée comme un pas de calcul.

Il est bien connu [22] que cette classe de machines de Minsky calcule toutes les fonctions récursives partielles ; Φ est une mesure de Blum et $\{<\varphi_i,\Phi_i>\}$ est une classe de machines acceptable dans le sens de la définition 2.4.

On prouve par la suite que les indices des classes des machines de Minsky dont la complexité est bornée par une des fonctions $f_k()$ du lemme 3.2.1., $f_0(x) = x+1$, $f_{k+1}(x) = f_k^x(x)$, forment des ensembles $\sum_2$-complets (propositions 3.2.1. et 3.2.2.).

Le lemme 3.3.3. montre que ces classes sont closes par rapport aux schémas de définition des fonctions récursives élémentaires. Par conséquent, si l'on fait correspondre à tout indice canonique un indice d'une machine de Minsky qui définit la même fonction par le même calcul, c'est-à-dire si l'on choisit pour tout schéma de définition un "programme standard" dans la classe des machines de Minsky, alors on peut effectivement obtenir l'indice de la fonction de complexité.

Une application du procédé d'estimation de la proposition 3.2.3. permet alors de résoudre le problème de la complexité, c'est-à-dire de trouver une borne pour la complexité de tout programme (machine) dans cette classe de "programme standard".

Définition 3.9.- Soit $f_0(x) = x+1,\ldots,f_{k+1}(x) = f_k^x(x)$.

La classe de machines de Minsky de complexité bornée par $f_k^n(x)$ est

$$\bar{E}(f_k) =_{def}\{i|M_i \text{ calcule } \varphi_i^{(n)} \text{ avec complexité } \Phi_i^{(n)}$$

$$\& (\exists m)(\forall\bar{x})\Phi_i^{(n)}(\bar{x}) \leq f_k^m(\max(\bar{x}))\}$$

c'est-à-dire la classe de machines dont la complexité est majorée par un $f_k^m(\max(\bar{x}))$.

On a la

Proposition 3.3.1.- $(\forall k)\ \bar{E}(f_k)$ n'est pas récursivement énumérable.

$\bar{K}$ peut être réduit à $\bar{E}(f_k)$:

$$\varphi_{f(z)}(x) = \begin{cases} f_k^x(x) & \text{si} \quad (\exists n \leqslant x)\ T(z,z,n) \\ 0 & \text{si} \quad (\forall n \leqslant x) \neg T(z,z,n) \end{cases}$$

$$z \in K \iff (\exists x_0)(\forall x > x_0)\varphi_{f(z)}(x) = f_k^x(x) \iff (\forall n)(\exists x_0)(\forall x > x_0)\Phi_{f(z)}(x) >$$

$$> f_k^n(x) \iff f(z) \notin \bar{E}(f_k).$$

$$z \in \bar{K} \iff (\forall x)\varphi_{f(z)}(x) = 0 \iff (\exists n)(\forall x)\Phi_{f(z)}(x) \leqslant f_k^n(x) \iff f(z) \in \bar{E}(f_k).$$

Notons que la validité de la démonstration dépend encore de la complexité du prédicat $(\forall n \leqslant x) \neg T(z,z,n)$. On verra par la suite que $\{<M_i,\Phi_i>\}$ est une classe de machines élémentaires et que par conséquent la proposition est vraie pour $k \geqslant 2$; pour $k = 0$ et $k = 1$ on peut se baser sur l'indécidabilité des classes de Grzegorczyk : $E(f_0) \subsetneq \bar{E}(f_0)$ et $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}(f_0)$; mais $T(z,z,n) \in \mathcal{E}^0$.

Proposition 3.3.2.- $\bar{E}(f_k)$ est $\sum_2$-complet.

On définit une fonction récursive $g() \in \mathcal{R}_1$ telle que

$A =_{def} \{x \mid (\exists y)(\forall u)(\forall v)[y < u \Rightarrow \neg T(x,u,v)]\}$ et $g(z) \in \bar{E}(f_k) \iff z \in A$.

On calcule simultanément deux fonctions, $M_{g(z)}(x)$ qui simule $M_z(y)$, $y = 0,1,\ldots,x$ et $u_z(x)$ qui compte les arguments sur lesquels $M_z(y)$ est déjà défini ; $M_{g(z)}(x)$ simule $M_z(y)$ sur $f_k^{u_z(x-1)}(x)$ pas.

Au pas $x = 0$, on pose $u_z(0) = 0$

$$M_{g(z)}(0) = 0 \ ;$$

au pas x: on calcule

(i) $u_z(x) = |\{y | y \leqslant x \ \& \ \Phi_z(y) \leqslant f_k^{u_z(x-1)}(x)\}|$

(ii) si $u_z(x) = x$, i.e. $\forall y \leqslant x \quad \Phi_z(y) \leqslant f_k^{u_z(x-1)}(x)$ alors on pose

$\psi_{g(z)}(x) = f_k^{u_z(x)}(x)$, sinon $u_z(x) < x$;

alors si $u_z(x) > u_z(x-1)$ on pose $\psi_{g(z)}(x) = \psi_z(x)$

et si $u_z(x) = u_z(x-1)$ on pose $\psi_{g(z)}(x) = 0$

et on va au pas $x+1$.

On vérifie que

$$z \in A \Rightarrow (\exists u)(\forall v)[u < v \Rightarrow u_z(u) = u_z(v)] \Rightarrow \psi_{g(z)}(x) = 0 \text{ p.p. } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_z(x) \in \bar{E}(f_k) \Rightarrow \Phi_{g(z)}(x) \in \bar{E}(f_k) \Rightarrow g(z) \in \bar{E}(f_k)$$

$$z \in \bar{A} \Rightarrow [(\forall y \leqslant x)\Phi_z(y) \leqslant f_k^{u_z(x-1)}(x) \ \& \ \psi_{g(z)}(x) = f_k^x(x)] \vee [u_z(x) > u_z(x-1 \text{ i.a.}]$$
$$\Rightarrow [u_z(x) \in \bar{E}(f_k) \ \& \ \Phi_{g(z)}(x) \notin \bar{E}(f_k)] \vee [u_z(x) \notin \bar{E}(f_k)] \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi_{g(z)}(x) \notin \bar{E}(f_k) \Rightarrow g(z) \notin \bar{E}(f_k).$$

La classe des machines de Minsky $\bar{E}(f_k)$ et la classe correspondante de fonctions $\bar{\mathcal{E}}(f_k) = \{f() | (\exists i \in \bar{E}(f_k)) \ \psi_i \simeq f()\}$ est close par rapport aux schémas de définition de E, $\mathcal{S}_E$: $\mathcal{S}_E(\bar{E}(f_k)) \subseteq \bar{E}(f_k)$; et par conséquent on a $\mathcal{E}(f_k) \subseteq \bar{\mathcal{E}}(f_k)$.

Comme M peut être arithmétisé dans $\mathcal{E}$, c'est-à-dire dans $\mathcal{E}(f_2)$, on a également $\bar{\mathcal{E}}(f_k) \subseteq \mathcal{E}(f_k)$. $\bar{E}(f_k)$ est donc une présentation de $\mathcal{E}(f_k)$.

On remarque d'abord (et on prouve aisément par induction sur la définition des indices récursifs élémentaires) qu'il existe un procédé effectif qui, à tout indice récursif élémentaire donné, fait correspondre injectivement un indice d'une machine de Minsky fortement équivalente (voir aussi la définition 3.10. ci-dessous) ; soit $E^*(f_n)$ la classe de ces machines.

Les propriétés de clôture de $\bar{E}(f_k)$ permettent maintenant de construire, pour toute présentation récursivement énumérable $\bar{F}(f_k) \subset \bar{E}(f_k)$ de $\mathcal{E}(f_k)$ une fonction récursive $\sigma()$ telle que

$(\forall i \in \bar{F}(f_k)) \quad [\sigma(i) \in S_E(\bar{F}(f_k)) \ \& \ \Phi_i(x) = \psi_{\sigma(i)}(x)]$.

Si l'on pose $\bar{F}(f_k) = E^*(f_k)$, on voit que $\bar{E}(f_k) = E(f_k)$ possède la propriété de Ritchie-Cobham.

Lemme 3.3.3.- La classe $\bar{E}$ est close par rapport aux schémas de

(i) la composition des fonctions,

(ii) l'itération bornée,

(iii) la somme finie et le produit fini,

(iv) la minimisation bornée.

Il suffit de se borner qux fonctions singulières sans restriction de la généralité, car si $\lambda z f^{(1)}(z) = \lambda z g^{(n+1)}((z)_0, \ldots, (z)_n)$ on peut associer $\lambda x_0 \ldots x_n \, g^{(n+1)}(x_0, \ldots, x_n)$ à $\lambda x f^{(1)}(x) = f^{(1)}(<x_0, \ldots, x_n>)$ dans $\bar{E}$, car $\bar{E}$ contient une fonction de Cantor (des couples). Il suffit donc de prouver que si $f()$ et $g()$ sont calculables avec fonctions Φ_f, $\bar{\psi}_f$ et Φ_g, $\bar{\psi}_g$ respectivement, f et $g \in \bar{E}$, alors

(i) $h(x) = f\,g(x)$ est calculable avec

$$\bar{\psi}_h(x) = \bar{\psi}_j(\bar{\psi}_f(\bar{\psi}_g(x))) = \bar{\psi}_j(\bar{\psi}_f(<x,g(x)>)) =$$

$$= \bar{\psi}_j(<x,g(x),f\,g(x)>) = <x,f\,g(x)>$$

$\Phi_h(x) = \Phi_g(x) + \Phi_f(g(x)) + \Phi_j(f\,g(x))$, $\quad \bar{\psi}_j, \Phi_j \in \bar{E}$ donc $\Phi_h(x) = \psi_{\sigma(h)}(x)$ est récursif élémentaire en f, g, Φ_f et Φ_g ; il suit que $\sigma(h) \in \bar{E}$;

(ii) $h(x) = f^{(x)_1}(g((x)_0) \leqslant j(x)$ est calculable avec

$$\bar{\psi}_f^i(<(x)_0,0,g((x)_0,(x)_1>) = <(x)_0,i,h(<(x)_0,i>),(x)_1-i>$$

$$\Phi_h(x) = \Phi_g((x)_0) + \Phi_j(x) + \Phi_f^{(x)_1}(\psi_g((x)_0) =$$

$$= \Phi_g((x)_0) + \Phi_j(x) + \sum_{i \leqslant (x)_1} (\Phi_f(<(x)_0,i,h(<(x)_0,i>),(x)_1-i)+2)$$

$\Phi_h(x) = \psi_{\sigma(h)}(x)$ est élémentaire en f,g,j,Φ_f,Φ_g et Φ_j.

Notons que $\sigma(h) \in \bar{E} \iff (\forall x)[h(x) \leqslant j(x)]$; ce schéma est non-effectif car $(\forall x)[h(x) \leqslant j(x)]$ n'est pas décidable dans $\bar{E}$.

(iii) $f(x) = \sum_{i<x} g(i)$ est calculable avec

$$\Phi_f(x) = \sum_{i<x} \Phi_g(i) + \sum_{1\leqslant i\leqslant x} (j(g(i)) + 1) \quad , \quad j \in \bar{E}$$

et similairement pour $f(x) = \prod_{i<x} g(i)$;

(iv) ce schéma est équivalent à certains schémas précédents.

<u>*Lemme*</u> *3.3.4.*- $(\forall k) f_k(x)$ est calculable par une machine de Minsky avec complexité $\Phi_{f_k}(x) \leqslant \lambda x\, f_k^y(x)$.

Pour $k=0$, la machine Sx calcule $f_0(x) = x+1$ avec complexité $\Phi_{f_0}(x) \leqslant x+1 \leqslant f_0(x)$.

Soit k arbitraire et supposons que $\forall n \leqslant k\ f_n(x)$ est calculable avec complexité $\Phi_{f_n}(x) \leqslant f_n^y(x)$, alors $f_{k+1}(x) = h_k(x,x) = f_k^x(x)$ est calculable avec complexité

$$\Phi_{f_{k+1}}(x) \leqslant \Phi_j(x) + \sum_{i\leqslant x} (\Phi_{f_k}(<x,i,h_k(x,i),x\dot{-}i>) + 2)$$

et $\Phi_j(x)$, $\Phi_{f_k}(x)$ et $h_k(x,i) \in E(f_{k+1}) \Rightarrow \Phi_{f_{k+1}}(x) \in E(f_{k+1})$ par le lemme précédent.

Il est par contre évident, que $\Phi_{f_{k+1}}(x) \notin E(f_k)$, sinon $(\exists y)\Phi_{f_{k+1}}(x) \leqslant f_k^y(x)$, mais

$$(\forall x > y)\Phi_{f_{k+1}}(x) \geqslant \sum_{i\leqslant x} \Phi_{f_k}(<x,i,h_k(x,i),x\dot{-}i>) \geqslant h_k(x,x) > f_k^y(x)$$

<u>*Corollaire*</u> *3.3.5.*- $(\forall n)\ E(f_n)$ a la propriété de Ritchie-Cobham.

3.4.- *Machines de Minsky restreintes et une solution du problème de complexité.*

Dans ce paragraphe on traite en détail la solution du problème de complexité pour une certaine présentation récursive de $\bigcup_k \mathcal{E}(f_k)$. On définit une classe de machines de Minsky (c'est-à-dire un certain ensemble d'indices) qui est une présentation de la famille des classes $\mathcal{E}(f_k), k = 0,1,\ldots.$

On peut coder la structure de ces machines similairement aux indices canoniques de F_{pR} et utiliser ce code pour une estimation de la complexité des calculs qu'elles effectuent. Leurs propriétés sont donc les mêmes que celles des indices canoniques ; mais on peut ici définir les fonctions de complexité d'une manière plus naturelle.

Soit $\{L_k\}_{k\varepsilon N}$ la classe des machines de Minsky à instructions d'itération RxM_pF "statiques", c'est-à-dire que ces machines utilisent un registre spécial (un compteur) pour X, le contenu de x. Chaque instruction d'itération Rx transfère d'abord le contenu de x dans un compteur qui est par la suite inaccessible pour le programme M_p.

Définition 3.10.- On définit L_0 comme la plus petite classe de machines de Minsky contenant les machines de base et close par rapport à l'enchaînement des machines.

On définit L_{k+1} comme la plus petite classe contenant L_k, les itérées (statiques) des $M \varepsilon L_k$ et close par rapport à l'enchaînement.

Ainsi, L_k est l'ensemble des programmes (machines), qui ont au plus k instructions d'itération statique imbriquées.

R.W. Ritchie [39] a montré que $\mathcal{E}(f_n)$ est clos par rapport à la substitution et par rapport à l'itération bornée.

On veut montrer que $E^*(f_k) \subseteq L_k$. L_k étant un sous-ensemble de $\bar{E}(f_k)$, il suit que $\varphi_i \varepsilon L_k \Rightarrow \Phi_i \varepsilon \bar{E}(f_k)$. On montre d'abord, que l'on a aussi $\Phi_i \varepsilon L_k$.

Proposition 3.4.1.- $\psi_i \in L_k \Rightarrow \Phi_i \in L_k$.

Si ψ_i est un L_k-programme, alors on peut construire un autre L_k-programme ψ_i' tel que $\psi_i'() \simeq \Phi_i()$. Il suffit en effet d'introduire une nouvelle variable y et d'insérer après chaque instruction élémentaire de ψ_i une instruction Sy et de prendre la valeur finale de y, Y comme le résultat de $\psi_i'(x)$.

Une telle transformation n'insère pas d'instruction d'itération dans le programme ψ_i et de ce fait, ne change pas la classe L_k du programme ψ_i, i.e. $\psi_i \in L_k \Rightarrow \psi_i' \in L_k$. Donc $\psi_i'() \simeq \Phi_i()$ et $\Phi_i() \in L_k$.

Pour montrer que la classe des fonctions $\mathcal{L}_k$ calculées par L_k est exactement la classe $\mathcal{E}(f_k)$, $k \geq 2$, il suffit maintenant de prouver le

Théorème 3.4.2.- $\Phi_f() \in \mathcal{E}(f_k) \Rightarrow f() \in \mathcal{L}_k$, $k \geq 2$.

Autrement dit, L_k est présentation récursive de $\mathcal{E}(f_k)$ $k \geq 2$. La démonstration est basée sur la propriété des classes $\mathcal{L}_k$ d'être closes par rapport à l'itération simultanée bornée.

(a) $f_k(x) \in \mathcal{L}_k$:

$f_0(x)$ est calculé par $M_0(x) = Sx \in L_0$. $(\forall k)$ si $M_k(x)$ calcule $f_k(x)$, alors $f_{k+1}(x) = f_k^x(x)$ est calculé par $M_{k+1}(x) = Rx\ M_k(x) F$.

(b) $\forall k \geq 2 \quad \forall f \quad \exists g \quad \forall x \quad f() \in \mathcal{E}(f_k) \Rightarrow g() \in \mathcal{L}_k \ \&\ g(x) > f(x)$

Ceci est immédiat par la définition des classes $\mathcal{E}(f_k)$ et par (a) ci-dessus, car $f_k \in L_k$ et f_k^n est calculé par un programme en L_k qui consiste en n calculs de $f_k()$ avec des transferts appropriés des résultats intermédiaires : $Txy\ M_k(x)\ Txy\ M_k(x) \ldots . Txy\ M_k(x)$, n fois.

(c) Si $\Phi_f() \in \mathcal{E}(f_k)$, alors $\psi_f \in \bar{E}(f_k)$, c'est-à-dire qu'il existe une machine (non-restreinte) de Minsky $M_f(x)$ qui calcule $\psi_f()$ en complexité $\Phi_f() \leq f_k^n()$. Cette machine peut être simulée par une machine $\psi_{p(f,g)} \in L_k$, où p est une fonction récursive et l'indice d'une borne pour $\Phi_f()$ obtenue par (b) ci-dessus.

Ceci est équivalent à l'assertion suivante :

Il existe une machine $\vartheta_{p(f,g)}$ qui calcule la fonction $\vartheta_f()$ et qui appartient à L_k si $\Phi_f(x) \leq \vartheta_g(x)$ et $\vartheta_g \in L_k$.

On montre d'abord que L_k est clos par rapport à l'itération bornée :

soit $f_i^0(x) = g_i(x) \qquad 1 \leq i \leq n$

$$f_i^{y+1}(x) = h_i(f_1^y(x),\dots,f_n^y(x)) \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$f_i^y(x) \leq j_i(x,y) \qquad 1 \leq i \leq n$$

où g_i, h_i, $j_i \in L_k$.

Avec $\Pi_{ni}(\Pi_n(z_1,\dots,z_n)) = z_i \qquad 1 \leq i \leq n$

$$\Pi_n(z_1,\dots,z_n) \leq \Pi_n(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n) \quad \text{si} \quad z_1 \leq \bar{z}_1,\dots,z_n \leq \bar{z}_n$$

on a $f(x,y) = \Pi_n(f_1^y(x),\dots,f_n^y(x))$

et $f_i^y(x) = \Pi_{ni}(f(x,y))$, d'où

$$f(x,0) = \langle g_1(x),\dots,g_n(x)\rangle$$

$$f(x,y+1) = \langle h_1(\Pi_{n1}(f(x,y)),\dots\Pi_{nn}(f(x,y))), \dots$$
$$\dots, h_n(\Pi_{n1}(f(x,y)),\dots,\Pi_{nn}(f(x,y)))\rangle$$

et

$$\langle f_1^y(x),\dots,f_n^y(x)\rangle \leq \langle j_1(x,y),\dots,j_n(x,y)\rangle$$

Il est évident que $f(x,y)$ est calculé par un L_k-programme composé des programmes individuels pour

$$j_1(x,y),\dots,j_n(x,y),g_1(x),\dots,g_r(x) \quad \text{et} \quad h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_n(x_1,\dots,x_n).$$

La définition peut être facilement étendue aux fonctions $f_i^y(x_1,\dots,x_p)$.

Soit maintenant $\langle X_1,\dots,X_r\rangle$ le contenu des registres d'une machine de Minsky ; une configuration d'une telle machine est un $(r+1)$-uplets $\langle i,X_1,\dots,X_r\rangle$ où i le numéro d'une instruction de la machine M_f.

On définit $\langle F_0^y(\bar{x}), F_1^y(\bar{x}),\dots,F_r^y(\bar{x})\rangle$

par $F_i^0(\bar{x}) = x_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$

$F_i^0(\bar{x}) = 0 \qquad n < i \leqslant r$

et

$$F_i^{y+1}(\bar{x}) = \begin{cases} F_i^y(\bar{x}) + 1 & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de Si} \\ F_j^y(\bar{x}) & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de Tij} \\ 0 & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de Ni} \\ F_i^y(\bar{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_0^{y+1}(\bar{x}) = \begin{cases} F_0^y(\bar{x}) + 1 & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de Si, Tij, Ni} \\ F_0^y(\bar{x}) + 1 & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de Rx \& } F_x^y(\bar{x}) \neq 0. \\ F_0^y(\bar{x}) - k & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de F} \\ F_0^y(\bar{x}) + k+1 & \text{si } F_0^y(\bar{x}) \text{ est numéro de Rx et } F_x^y(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

où $k-1$ est la longueur du programme entre Rx et F.

Les fonctions $f(x,y) = x+y$

et $f(x,y) = x-y$

sont dans L_2 ainsi que la fonction définie par

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}) & \text{si } Q_1(\bar{x}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(\bar{x}) & \text{si } Q_n(\bar{x}) \end{cases}$$

où $g_1,\ldots,g_k$ et $Q_1,\ldots,Q_n \in L_2$.

Ainsi, $F_0^y(\bar{x}), F_1^y(\bar{x}),\ldots,F_r^y(\bar{x})$ ont tous des L_2-programmes. Par conséquent, la fonction $f^{(n)}(\bar{x}) = F_{n+1}(\bar{x},\vartheta_g(\bar{x}))$, $\vartheta_g \in L_k$ possède également un L_k-programme, qui peut être obtenu par composition d'un programme pour $\vartheta_g(\bar{x})$ avec le L_2-programme de simulation décrit ci-dessus.

On donne maintenant la solution du problème de l'estimation de la complexité pour la classe des programmes $\vartheta_k^{(n)} \in L_k$; c'est-à-dire on construit une fonction récursive partielle $n() \in P_1$ telle que $f_k^{n(z)}(\max(\bar{x}))$ est une majorante de $\Phi_z^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$, si z est un L_k-indice et $n(z)$ est indéfini si z n'est pas L_k-indice.

Théorème 3.4.3.- Il existe une fonction récursive partielle $n(z)$ telle que

$$(\forall z)[\psi_z^{(n)} \in L_k \Rightarrow \Phi_z^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) \leqslant f_k^{n(z)}(\max(x_1,\ldots,x_n))]$$

On procède par double induction sur le degré k de l'indice z et sur la longueur du L-programme notée $\ell(z)$

(i) Soit $k=0$; $\psi_i \in L_0$ avec L_0-indice z

(a) si $\ell(z) = 1$, alors $(z)_0 = 1,2$ ou 3 et

$$\Phi_i(x_1,\ldots,x_n) = 1 \leqslant f_0^{\ell(z)}(\max(\bar{x}))$$

(b) si $\ell(z) = n+1$ et la propriété vérifiée pour $\ell(z) \leqslant n$; alors la $(n+1)^{\text{ième}}$ intruction ne peut augmenter $\Phi_i(x_1,\ldots,x_n)$ que de 1 :

$$\Phi_i(x_1,\ldots,x_n) = n+1 \leqslant f_0^{\ell(z)}(0) \leqslant f_0^{\ell(z)}(\max(\bar{x})).$$

(ii) On suppose le résultat vérifié pour k, montrons qu'il l'est pour $k+1$:

(a) supposons $\psi_i^{(n)} \in L_{k+1}$ avec L_{k+1}-indice z et $\ell(z) = 2k+3$, c'est-à-dire $\psi_i^{(n)}$ est le plus court L_{k+1}-programme possible. Dans ce cas $M_i^{(n)}$ est de la forme Rx MF, où M est un L_k-programme. Si la complexité de M est bornée par $f_k^p(\max(\bar{x}))$, alors $\max(\bar{x}) = q_1 \leqslant f_k^p(q_0) + q_0 \leqslant f_k^{p+1}(q_0)$ après une exécution de M et la complexité de M est donc bornée par $f_k^p(f_k^{p+1}(q_0))$ à la seconde exécution de M.

A la troisième exécution on a

$$\begin{aligned}\max(\bar{x}) = q_2 &\leqslant f_k^p(f_k^{p+1}(q_0)) + f_k^{p+1}(q_0)\\ &\leqslant f_k^{2p+1}(q_0) + f_k^{2p+1}(q_0)\\ &\leqslant f_0^{f_k^{2p+1}(q_0)}(f_k^{2p+1}(q_0)) \leqslant f_1(f_k^{2p+1}(q_0)) \leqslant f_k^{2p+2}(q_0)\end{aligned}$$

et la complexité de M est donc bornée par $f_k^p(f_k^{2(p+1)}(q_0))$ à la troisième éxécution de M.

Par conséquent,

$$\Phi_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n) \leqslant 1 + 2q_0 + \sum_{n=1}^{q_0} f_k^{np+n-1}(q_0)$$

$$\leqslant 2(q_0+1) + q_0 \cdot f_k^{q_0p+q_0-1}(q_0) \leqslant$$

$$\leqslant f_1(q_0+1) + f_1^{q_0}(f_k^{q_0p+q_0-1}(q_0))$$

$$\leqslant f_k^{q_0(p+2)}(q_0)$$

$$\leqslant f_k^{q_0(p+1)}(f_k^{q_0}(q_0))$$

$$\leqslant f_k^{f_{k+1}(q_0)}(f_{k+1}(q_0)) \qquad k \geqslant 2$$

$$\leqslant f_{k+1}^2(q_0) \leqslant f_{k+1}^{\ell(z)}(\max(x_1,\dots,x_n)).$$

Il était donc suffisant de poser $p = \ell(z)$.

(b) Si $\ell(z) = n+1 > 2k+3$, supposons la propriété vérifiée pour $2k+3 \leqslant \ell(z) \leqslant n$, si $\psi_i^{(n)}$ a la forme Rx M F, la démonstration est celle de (a) ci-dessus et si $\psi_i^{(n)}$ a la forme $M_p\ M_q$ et la complexité de M_p est bornée par $f_{k+1}^p(\max(\bar{x}))$ et celle de M_q par $f_{k+1}^q(\max(\bar{x}))$, alors

$$\Phi_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n) \leqslant f_{k+1}^p(q_0) + f_{k+1}^q(q_0 + f_{k+1}^p(q_0))$$

$$\leqslant f_{k+1}^p(q_0) + f_{k+1}^{p+q+1}(q_0)$$

$$\leqslant f_{k+1}^{p+q+2}(q_0)$$

et il suffit de poser $p = \ell(M_p) + 1$, $q = \ell(M_q) + 1$, c'est-à-dire que $n(z) = \ell(z) + 1$.

3.5.- *Classes de machines élémentaires.*

Il résulte des sections précédentes que les classes $E(f_k)$ et $\bigcup_{k>0} E(f_k)$ sont des classes de Ritchie-Cobham qui possèdent des présentations canoniques pour lesquelles le problème de l'estimation de la complexité a une solution. Ce même problème n'a pas de solution pour la classe $\bar{E}(f_k)$ de toutes les machines dont la complexité est bornée par $f_k^n(x)$.

On utilise maintenant une méthode de gödelisation de M et le résultat sur les classes $E(f_k)$ pour caractériser des classes de machines (et de mesures de Blum) dites "élémentaires" par des axiomes. Cette méthode fournit également des fonctions d'énumération de classes de fonctions récursives élémentaires dans une fonction donnée $E(f)$. On établit la relation entre les classes $E(f)$ et les classes de complexité bornée $R^{\Phi}_{t()}$ et on trouve un certain degré d'invariance par rapport à un changement de mesure. Ensuite on étudie certains problèmes de la classification des fonctions récursives et la construction de hiérarchies.

Lemme 3.5.1.- Il existe une arithmétisation de M telle que la fonction

$$\lambda ixt\ U(i,x,t) = \begin{cases} \text{code de la configuration des registres de } M_i \text{ si} \\ t \geq \Phi_i(x) \\ 0 \qquad \text{si } t < \Phi_i(x) \end{cases}$$

est récursive élémentaire.

Rödding montre [44] pour une machine M différente, mais équivalente, qu'il existe une codification $\{p_i\}$ des machines $\{M_i\}$ telle que $U(i,x,t) \in E^2$, c'est-à-dire sub-élémentaire (la classe E^2 contient les fonctions initiales de E et est close par rapport à la substitution simultanée et par rapport à la somme finie ; toute fonction sub-élémentaire est bornée par un polynôme).

Etant donné un indice k d'une machine Minsky, on définit une k-configuration C_k par $<k,l,x_0,\dots,x_n>$ où l est le code d'une instruction de base de M_k, $(p_k)_1 = n$ et $x_0,\dots,x_n$ sont les contenus des registres. On prouve d'abord sans difficulté [44] que les prédicats $M(p_k) \iff p_k$ est le code de $M_k \in \{M_i\}$ et $Conf(p_k,y) \iff y$ est k-configuration, sont sub-élémentaires et que les codes p_k pour les machines M_k peuvent être énumérés en ordre croissant et sans répétition par une fonction récursive élémentaire. Par conséquent, la fonction successeur $\lambda y\ S(k,y)$ pour les k-configurations y :

$S(k,y)$ = configuration successeur de y, si une telle configuration existe

$S(k,y) = y$ si y est finale

est sub-élémentaire, et la fonction de configuration : $C(i,x,t)$ = "i-configuration C_i après t pas de M_i" peut être définie par une récursion bornée :

$$C(i,x,0) = \langle i,F(i),x\rangle$$

$$C(i,x,t+1) = S(i,C(i,x,t))$$

$$C(i,x,t) \leq j(i,x,t)$$

où $F(i)$ est la première instruction de base de M_i, avec $\langle i,F(i),x\rangle = \lambda x g(i,x)$ et $\lambda x\ S(i,x)$ sub-élémentaires, donc $\lambda ixt\ C(i,x,t)$ élémentaire (si l'on borne $(p_i)_1 = n \leq n_0$ on peut trouver un $\lambda xt\ j(i,x,t)$ sub-élémentaire).

Par définition de $S(i,y)$, $C(i,x,t+1) = C(i,x,t)$ lorsque $C(i,x,t) = \langle i,L(i),\psi_i(x)\rangle$ est une configuration finale, et $L(i)$ étant la dernière instruction de base de M_i :

$$\Phi_i(x) = \mu t[C(i,x,t) = C(i,x,t+1)] \quad \text{et}$$

$$\psi_i(x) = (C(i,x,\mu t[C(i,x,t) = C(i,x,t+1)]))_2.$$

Finalement, on pose

$$\lambda ixy\ U(i,x,y) = \begin{cases} (C(i,x,y))_2 & \text{si} \quad y \geq \Phi_i(x) \\ 0 & \text{si} \quad y < \Phi_i(x) \end{cases}$$

Définition 3.11.- $E[f()]$ est un opérateur élémentaire si $E[f()] \in E(f)$ pour tout $f() \in R_1$.

$E[f()](x)$ est la valeur de la fonction $E[f()]$ à l'argument x.

Fait : les opérateurs élémentaires sont récursivement énumérables.

On généralise maintenant les résultats obtenus pour la classe de machines $\{<M_i,\Phi_i>\}$ où M est la classe de machines de Minsky (sans restrictions) et Φ le nombre de pas (instructions de base) éxécutées par M. On obtient ainsi les axiomes pour les classes de machines élémentaires dans leur forme de Constable [21] :

(a) dans le paragraphe précédent on a essentiellement montré que

(i) $\forall g() \in R_1 \ [g() \in E \Rightarrow (\exists i)[\varphi_i = g() \ \& \ \Phi_i() \in E]]$

(ii) en relativisant par rapport à une fonction arbitraire $f() \in R_1$, on obtient immédiatement par le lemme 3.5.1. :

$$\forall g() \in R_1[g() \in E(f) \Rightarrow (\exists i)[\varphi_i = g() \ \& \ \Phi_i \in E(\Phi_f)]]$$

où f est un indice arbitraire pour f().

(iii) lorsque f() est calculable dans $E(f)$, i.e. $\exists f \ \Phi_f(x) \leq E[f()](x)$ pour un certain opérateur élémentaire $E[\ ]$, on a :

$$\forall g() \in R_1[g() \in E(f) \Rightarrow (\exists i)[\varphi_i = g() \ \& \ \Phi_i \in E(f)]] \ ;$$

(b) supposons que $\Phi_i(x) \leq g(x)$ pour un certain i et pour un $g() \in E(f)$; l'existence de la fonction $U(i,x,t)$ du lemme montre que

$\varphi_i(x) = U(i,x,\Phi_i(x)) \Longrightarrow$

$\varphi_i(x) = U(i,x,g(x))$ par définition de $U(i,x,t) \Longrightarrow$

$\varphi_i() \in E(f)$ car $U(i,x,t)$ est récursif élémentaire.

(c) Soit $\Phi_i(x) = \mu t[C(i,x,t+1) = C(i,x,t)]$ si un tel t existe

$\Phi_i(x) =$ indéfini sinon ;

il est facile de vérifier que

$$\Phi_i(x) \text{ défini} \Longrightarrow (\exists j)\varphi_j = \Phi_i \ \& \ \Phi_j(x) \leq E[\Phi_i()](x),$$

pour un certain opérateur élémentaire $E[\ ]$; car la fonction $f(x) \simeq \mu y[g(\bar{x},y) = 0]$, $g() \in \mathcal{E}$ est calculable en complexité $\Phi_f(x) \leq E[f()](x)$ sur une machine de Minsky.

Les points (a) à (c) peuvent être prouvés pour un grand nombre de classes $<\varphi,\Phi>$; on définit donc axiomatiquement les classes de machines suivantes :

Définition 3.12.- $<\varphi,\Phi>$ est une classe de machines élémentaires si

(i) $\{<\varphi_i,\Phi_i>\}$ est une classe de machine acceptable,

(ii) $\forall f(),g() \in \mathcal{R}_1[g() \in \mathcal{E}(f) \Longrightarrow$ existe $E[\ ]$et φ_j tels que $\varphi_j() = g()$ et $\Phi_j(x) \leq E[\Phi_f()](x)$ pour tout $x]$ où f est un indice arbitraire pour $f()$,

(iii) $\forall f(),\varphi_i() \in \mathcal{R}_1 \ \exists g() \in \mathcal{R}_1 \ \ \Phi_i(x) \leq g(x) \ \& \ g() \in \mathcal{E}(f) \Rightarrow \varphi_i() \in \mathcal{E}(f)$

(iv) $\exists\, h()\forall i \ \exists j \ \ [\varphi_j \simeq \Phi_i \ \& \ [\Phi_j(x) \text{ défini} \Rightarrow \Phi_j(x) \leq h(\Phi_i(x))]]$.

Définition 3.13.- $f() \in \mathcal{R}_1$ est $E[\ ]$-honnête $\Longleftrightarrow \exists f \ \ \varphi_f \simeq f \ \& \ \Phi_f(x) \leq E[f()](x)$ pour un certain opérateur élémentaire $E[\ ]$.

Définition 3.14.- soit $\lambda y\, f_k(y)$, $k=0,1,2,\ldots$ une suite de fonctions récursives telles que

(i) $\lambda y\, f_{k+1}(y) > E[f_k()](y)$ pour tout y et tout opérateur élémentaire

(ii) $(\forall k)$ $f_k()$ est $E[\ ]$-honnête.

Théorème 3.5.2.- (a) $U((i)_0,x,f_{(i)_1}(x))$ est universel pour les fonctions singulières de $\bigcup_{k>0} \mathcal{E}(f_k)$

(b) $(\forall k)$ $U((i)_0,x,E_{(i)_1}[f_k()](x))$ est universel pour les fonctions singulières de $\mathcal{E}(f_k)$.

$$U(i,x,f_k(x)) = \varphi_i(x) \quad \text{si} \quad \mu t[C(i,x,t) = C(i,x,t+1)] \leq f_k(x)$$

$$U(i,x,f_k(x)) = 0 \qquad \text{sinon}$$

donc si $f() \in \bigcup_k E(f_k)$ alors $\exists k \ \exists i$ avec $f() = \varphi_i()$ et $\Phi_i() \leq f_k()$

i.e. $\varphi_i(x) = f(x) = U(i,x,f_k(x))$ pour tout x ;

si $f() \notin \bigcup_k E(f_k)$ alors $f(x) \neq U(i,x,f_k(x))$ pour tout k et i, car

$$\lambda x\, U(i,x,f_k(x)) \in E(f_k).$$

Par s-m-n il existe une fonction récursive $s(e,i,k)$ telle que $\lambda x\, U(i,x,f_k(x)) = \lambda x\, \varphi_{s(e,i,k)}(x)$ où e est un indice pour U.

Donc, si $i \in \bigcup_k E(f_k)$ alors $(\exists k)\ U(i,x,f_k(x)) = \varphi_i(x)$, d'où

$$\bigcup_k E(f_k) \subseteq \{\varphi_{s(e,i,k)}() \mid i,k \in N\}.$$

Si $j = s(e,i,k)$ alors

a) $\varphi_{s(e,i,k)}() = \varphi_j()$ & $\Phi_i() \leq f_k()$ ou

b) $\varphi_{s(e,i,k)}() = 0$ p.p. & $\Phi_i() > f_k()$.

Dans tous les cas, $j \in \bigcup_k E(f_k)$. D'où $\{\varphi_{s(e,i,k)}() \mid i,k \in N\} \subseteq \bigcup_k E(f_k)$.

3.6. *Relations entre les classes* $E(f)$ *et* $R^{\Phi}_{t()}$.

On prouve maintenant un théorème qui relie les classes de fonctions récursives élémentaires en une fonction récursive $f()$ donnée et les classes de complexité bornée $R^{\Phi}_{t()}$. On constate que $E(f) = R^{\Phi}_{t()}$ pour un certain $t() = t_f()$ récursif total si et seulement si il existe un opérateur récursif élémentaire $E[\ ]$ et un indice tels que $\Phi_f(x) \leq E[f()](x)$ pour tout x ; i.e. $f()$ est $E[\ ]$- honnête.

Il est évident que la propriété $\exists t()\ E(f) = R^{\Phi}_{t()}$ est largement indépendante de la classe de machines choisie et en fait est vraie (ou fausse) pour toute classe élémentaire de machines $<\varphi,\Phi>$ [cf. définition 3.12.].

Théorème 3.6.1.- Soit $<\varphi,\Phi>$ élémentaire, alors

$$f()\ E[\ ]\text{-honnête} \iff \exists t_f()\ E(f) = R^{\Phi}_{t_f()}.$$

(a) ==> : On suppose que $\exists f\ \ \Phi_f(x) \leq E[f()](x)$ pour tout x.
Si $f()$ est $E[\ ]$-honnête, alors

$$\forall g()\ \forall h()\ g() \in E(f)\ \&\ h() \in R^{\Phi}_{g()} \Rightarrow h() \in E(f),$$

car $<\varphi,\Phi>$ est une classe de machines élémentaires.

On énumère $E(f)$ à l'aide de la fonction d'énumération de Kleene et on pose

$$f_i(x) = \max_{a\leq i}[\ell^{f()}(a,x)].$$

Par conséquent $f_{i+1}(x) \geq f_i(x)$ pour tout i,x et par le premier théorème de Meyer et McCreight il existe une fonction $t_f() \in R_1$ telle que $\bigcup_i R^{\Phi}_{f_i()} = R^{\Phi}_{t_f()}$.

Donc $g() \in E(f) \Rightarrow \exists f_i()\ \ g() \in R^{\Phi}_{f_i()}$ et $h(x) = U((i)_0,x,f_{(i)_1}(x))$ pour un certain i et en particulier $h(x) = U((i)_0,x,g(x))$ par définition de $h() \Rightarrow h(x) \in E(f)\ \&\ \Phi_h(x) \leq g(x)$ par définition de U et de $R^{\Phi}_{g()} \Rightarrow$
$h() \in E(f)$

D'ailleurs, Φ_h est élémentairement honnête et

$$\Phi_h(x) \leq g(x) \Rightarrow \Phi_h() \in E(g) \Rightarrow \Phi_h() \in E(f) \Rightarrow h() \in E(f).$$

(b) <= : On suppose $\exists t_f()\ E(f) = R^{\Phi}_{t_f()}$ pour prouver que $f()$ est $E[\ ]$-honnête. On montre que si $f()$ n'est pas $E[\ ]$-honnête, alors $\forall t()\ E(f) \neq R^{\Phi}_{t()}$. Soit donc $f()$ une fonction malhonnête, i.e. $(\forall f)\varphi_f() = f() \Rightarrow \Phi_f() >$ $> E[f()]()$ i.a. pour tout opérateur récursif élémentaire, donc $\Phi_f() \notin E(f)$. On suppose en outre que $f(x) \leq f_i(x)$ pour tout x et pour un certain $f_i() \in E$.

Considérons une fonction $g() \in E(f)$ et telle que $g() \notin E$.

Par le lemme 7.7.1. de Axt [15], comme $f(x) \leq f_i(x)$ pour tout x, il existe une fonction récursive $p()$ telle que $el^{f()}(a,x) \leq el^{f_i()}(p(a),x)$.

Mais $el^{f_i()}(a,x)$ énumère exactement la classe E, donc $g() \in E(f)$ implique $g()$ est borné par une fonction récursive élémentaire.

D'autre part,

$$\Phi_g(x) \leq \Phi_f(x)\ \&\ \Phi_g(x) \notin E(f).$$

Supposons maintenant que $\exists t_f()\ E(f) = R^{\Phi}_{t_f()}$.

Dans ce cas $R^{\Phi}_{t_f()}$ a la propriété de Ritchie-Cobham ; en particulier

$$\Phi_g() \leq \Phi_f() \Rightarrow \Phi_g() \in R^{\Phi}_{t_f()}\text{-contradiction.}$$

La propriété d'une classe de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ d'être identique à une classe de fonctions récursives de la forme $E(f)$ pour un certain $f()$ $E[\ ]$-honnête (et par conséquent de posséder une présentation $E(f)$) est évidemment assez exceptionnelle ; nous avons vu que ces classes ont nécessairement la propriété de Ritchie-Cobham. Il y a donc, pour toute classe de machines $<\varphi,\Phi>$, des classes $R^{\Phi}_{t()}$ qui sont différentes de toute classe $E(f)$; si par exemple $t()$ est une fonction malhonnête, alors il est possible qu'il n'y ait pas de fonction $t'()$ honnête telle que $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{t'()}$ et $t'() \leqslant h(t())$ p.p. ; avec $h() \in E$. On reviendra sur cette question dans un autre chapitre.

On peut pourtant prouver qu'il y a "beaucoup de classes $R^{\Phi}_{t()}$" qui ont une présentation $E(f)$:

<u>*Théorème*</u> *3.6.2.-* La famille des classes $E(f)$, $f()$ $E\ [\ ]$ - honnête, est dense pour l'ordre d'inclusion.

Autrement dit, si $E(f) \subsetneq E(g)$, $f()$ et $g()$ $E[\ ]$-honnêtes alors il existe $h()$ $E[\ ]$-honnête, tel que

$$E(f) \subsetneq E(h) \subsetneq E(g).$$

Soit $t_f()$ une borne de complexité pour la classe $R^{\Phi}_{t_f()} = E(f)$, obtenue par le théorème de Meyer-McCreight, $t_g()$ une borne pour $R^{\Phi}_{t_g()} = E(g)$ et $t_E()$ une borne pour $R^{\Phi}_{t()} = E$.

On construit $h()$ de façon que si $t() \in E(g)$ & $t() \notin E(f)$, donc $\Phi_t() > t_f()$ i.a. et si $S = \{x | \Phi_t(x) > t_f(x)\}$, alors $h(x) = \Phi_t(x)$ sur un sous-ensemble épars de S et $h(x)$ est une fonction $E[\ ]$-honnête et bornée par une fonction dans $E(f)$ ailleurs.

On démontre le théorème à l'aide de plusieurs lemmes :

<u>*Lemme*</u> *3.6.3.-* Si $f()$ est $E[\ ]$-honnête, $\Phi_f() > t_E()$ i.a. et $(\forall x)\ \Phi_f(x) \neq 0$, alors il existe un opérateur récursif élémentaire tel que $E(f) = E(E_1[f()])$;

$E_1[f()]$ est $E[\ ]$-honnête et monotone croisssant.

On pose $E_1[f()] = \sum_{y<x} f(y)$;

(a) $E_1[f()]$ est $E[\ ]$-honnête, car il est $E_2[E_1[f()]]$-calculable :

$$\Phi_{E_1[f()]}() = E_2[E_1[f()]] \ ;$$

(b) $\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}[E_1[f()]]$: il est évident que $\mathcal{E}(f) \subseteq \mathcal{E}(E_1[f()])$.

D'autre part, $(\forall i)\lambda x\, U((i)_0, x, E_1^{(i)_1}[f()](x)) \in \mathcal{E}(f)$ car $U() \in \mathcal{E}$ et $E_1^k[f()](x) \in \mathcal{E}(f)$ pour tout k.

Pour toute fonction $g() \in \mathcal{E}(f)$ il existe donc $\Phi_g()$ tel que $\Phi_g(\bar{x}) \leqslant E_1^k[f()]\,(\max(\bar{x}))$, comme on prouve par induction sur la construction de $\mathcal{E}(f)$. Donc $\mathcal{E}(E_1[f()]) \subseteq \mathcal{E}(f)$ et le lemme suit.

A l'aide de $E_1[\ ]$ on construit

$$E_1[f()]() = f'() \quad , \quad R^{\Phi}_{t_{f'}()} = \bigcup_{p>0} R^{\Phi}_{f'^p()} = R^{\Phi}_{t_f()}$$

et

$$E_1[g()]() = g'() \quad , \quad R^{\Phi}_{t_{g'}()} = \bigcup_{p>0} R^{\Phi}_{g'^p()} = R^{\Phi}_{t_g()}.$$

Lemme 3.6.4.- $\mathcal{E}(f) \subsetneq \mathcal{E}(g) \Rightarrow g(x) > f'^{s(x)}(x)$ i.a. & $f(x) \leqslant E[g()](x)$ p.p. avec une certaine fonction non-bornée $s(x) \in \mathcal{R}_1$ **et un certain opérateur** récursif élémentaire $E[\ ]$.

(i) $\mathcal{E}(f) \subseteq \mathcal{E}(g) \Longrightarrow f() \leqslant t_g()$ p.p.

$\Longrightarrow (\exists n)(\exists x)\ (\forall y)\ [y > x \Longrightarrow f(y) \leqslant g'^n(x)]$

$\Longrightarrow f() \in \mathcal{E}(g)$

$\Longrightarrow f() \leqslant E[g()]()$ p.p. ;

(ii) $\mathcal{E}(f) \neq \mathcal{E}(g) \Longrightarrow (\forall n)\ g() > f'^n()$ i.a.

$\Longrightarrow g() > t_f()$ i.a.

$\Longrightarrow \exists s() \in \mathcal{R}_1$ non-borné $g(x) > f'^{s(x)}(x)$ i.a.

Remarque.- la fonction $s()$ du lemme peut être obtenue à l'aide du théorème de Meyer-McCreight.

On analyse maintenant les conditions dans lesquelles $E(f) \subsetneq E(g)$:

Définition 3.15.- Soit $t(x)$ une fonction récursive monotone croissante et soit $c_s(x)$ la fonction caractéristique d'un ensemble récursif S.
On dira que S est $t()$-épars, lorsque

$$(\forall x[c_s(x) = 1 \Rightarrow (\forall y)(x < y \leq t(x) + x)c_s(y) = 0].$$

Lemme 3.6.5.- Soit $E \subsetneq E(f) \subsetneq E(g)$, alors on peut effectivement construire une fonction $E[\ ]$-honnête $k()$ telle que $k() \in E(g)$ & $k \notin E(f)$.
On définit $k()$ de façon que $k(x) \leq h(\Phi_g(x))$ p.p., avec $h() \in E$; c'est-à-dire que $k(x)$ est "très proche" de $\Phi_g(x)$.
Soit $\{\varphi_{n(i)}() | i \in N\}$ une énumération de $E(f)$, alors on définit

$$\varphi_{s(g)}(x) = \begin{cases} \varphi_{n(x)}(x) + 1 & \text{si} \quad \Phi_{n(x)}(x) \leq g(x) \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose $k(x) = \Phi_{s(g)}(x)$. Si l'on définit plus généralement

$$\Psi(g,x) = \begin{cases} \text{divergent} & \text{si } \varphi_g(x) \text{ diverge} \\ \varphi_x(x) + 1 & \text{si } \Phi_x(x) \leq \varphi_g(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors on prouve (voir chapitre V) que l'on peut trouver une fonction récursive (élémentaire) $r(x,y)$, monotone croissante en y, telle que

$$\text{si} \quad \varphi_{s(g)}(x) = \Psi(g,x), \quad \text{alors}$$

$$\Phi_{s(g)}(x) \leq r(x, \Phi_g(x)) \text{ p.p.}$$

Si l'on pose $k(x) = \Phi_{s(g)}(x)$, alors $k(x)$ est $E[\ ]$-honnête, $k(x) \notin E(f)$ et $k(x) \in E(g)$, car $k()$ est "très proche" de la fonction de complexité de $g()$, $\Phi_g()$.
On peut alors continuer la démonstration du théorème :

Si $S = \{x | \Phi_{s(g)}(x) > t_{f'}(x)\}$, on construit $h(x)$ de façon que

(a) $h(x)$ $E[\;]$-honnête,

(b) $h(x) > t_{f'}(x)$ i.a. sur un sous-ensemble suffisamment épars de S

(c) $\mathcal{E}(f) \subsetneq \mathcal{E}(h)$

(d) $\mathcal{E}(h) \subsetneq \mathcal{E}(g)$

En fait, si (a) et (b) sont satisfaits, (c) et (d) seront satisfaits automatiquement.

Soit $c_s(x) = \begin{cases} 1 & \Phi_{s(g)}(x) > t_{f'}(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ la fonction caractéristique

de S, alors

$$\psi_{u(g,f)}(0) = \mu x[\Phi_{s(g)}(x) > t_{f'}(x)]$$

$$\psi_{u(g,f)}(n+1) = \mu x[x > \psi_{u(g,f)}(n) \;\&\; \Phi_{s(g)}(x) > t_{f'}(x)]$$

énumère S en ordre croissant.

On pose $y_0(x) = \max y < x[h(y) > t_{f'}(y)]$, et

$$h(x) = \begin{cases} \Phi'_{s(g)}(x) & \text{si } x > y_0 + t(y_0) \;\&\; (\exists n \leqslant x)\psi_{u(g,f)}(n) = x \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est évident, que $\mathcal{E}(f) \subsetneq \mathcal{E}(h)$ pour tout $t()$, car $h(x) > t_f(x)$ i.a. D'autre part, $\mathcal{E}(h) \subseteq \mathcal{E}(y)$ par construction de $h()$, car $h(x) \leqslant E[g()](x)$ p.p.

Si l'on suppose que $h()$ est $E[\;]$-honnête et $t(x)$ suffisamment grand, i.e. $t(x) > f'^{x}(x)$, $S' = \{x | h(x) > t_{f'}(x)\}$ étant un sous-ensemble $t()$-épars de S, on a

$$h^x(x) = h(h^{x-1}(x)) \;;\; \text{et si } h(x) = f'(x),$$

alors $y = h^{x-1}(x) < x + t(x)$ i.a., par définition de $h(x)$; d'où $g'(x) > h^x(x)$ i.a., donc

$$g'(x) > t_h(x) \text{ i.a. et } \mathcal{E}(h) \subsetneq \mathcal{E}(g).$$

D'une manière générale et pour S arbitraire, il suffit donc de construire S' $f'^x(x)$-épars dans S. Dans ce cas $g()$ croît plus vite que $t_h()$ i.a. et $E(h) \subsetneq E(g)$.

Il reste à montrer que $h()$ est $E[h()]$-calculable.

Soit $y_0(x) = \max y < x[h(y) > f'(y)]$; il faut développer un algorithme h pour $h(x)$ qui est tel que $\Phi_h(x) \leq E[h()](x)$ p.p.

Au pas $x=0$ on pose $h(0) = f'(0)$.

Supposons $h()$ défini aux arguments $y = 0,1,\ldots,x-1$; on définit $h(x)$ à x : on calcule d'abord $y_0(x)$,

(a) $(\forall u \leq x)\ c_s(u) = 0 \Rightarrow (\forall u \leq x)\ h(u) = f'(u)$, donc $y_0(x)$ n'existe pas - ce prédicat est calculable en ressource $E_1[\Phi_{t_f}()] > E[f'()]$; donc $h(x) = f'(x)$, $\Phi_h(x) > E[h()](x)$.

Mais $c_s(x) = 1$ i.a., il s'agit donc là d'un nombre fini de points d'exception.

(b) $y_0(x)$ existe, $(\exists u < x)\ c_s(u) = 1$; pour x suffisamment grand, ceci est calculable en ressource $E_2[f'()]$. On commence à calculer le prédicat $x > y_0 + t(y_0)$ en ressource limitée par une fonction récursive élémentaire $e(x)$;

A) si $t(y_0) + y_0$ est calculable en complexité $\leq e(x)$, on peut évaluer ce prédicat et si $t()$ est $E[\ ]$-honnête, $x > y_0 + t(y_0)$ alors ce prédicat est $e()$-calculable.

Dans ce cas il faut calculer le prédicat $x \in S$:

(i) si $\Phi_{s(g)}(x) > t_{f'}(x)$, alors $h(x) := \Phi'_{s(g)}(x)$

et $\Phi_h(x) = E_3[h()](x) = E_3[\Phi_{s(g)}()](x)$

(ii) si $\Phi_{s(g)}(x) \leq t_{f'}(x)$, alors $h(x) := f'(x)$ et $\Phi_h(x) = E_4[t_{f'}()](x)$.

Par hypothèse, S n'est pas plus que $e_1()$-éparse, $e_1() \in E$. Il existe donc $y \leq f'^n(x)$, $y \in S$, $h(y) > f'(y)$. Par conséquent, $E_4[t_{f'}()](x) \leq E_4[h^n()](x)$; d'où $\Phi_h(x) \leq E_4[h()](x)$.

B) Si par contre $y_0 + t(y_0)$ peut être calculé en ressource $e(x)$, mais si $x \leq y_0 + t(y_0)$ ou bien si $t(y_0)$ ne s'arrête pas en complexité $e(x)$ - on est alors sûr que $x \leq y_0 + t(y_0)$ - alors $h(x) := f'(x)$ et $\Phi_h(x) = E_5[h()](x) = E_5[f'()](x)$.

On peut donc trouver un opérateur récursif élémentaire $E[\ ]$ tel que $\Phi_h(x) \leq E[h()](x)$ p.p. - il suffit de maximiser.

3.7.- *La structure des degrés* $E(f)$.

Dans le cas des hiérarchies sub-récursives, le théorème précédent peut être précisé de la manière suivante :

Théorème 3.7.1.- Toute hiérarchie de classes $E(f_n)$, $n \in N$, peut être plongée dans un système de classes $E(f)$, f $E[\ ]$-honnête, dense par rapport à l'inclusion des classes.

On prouve le théorème en particulier pour la hiérarchie de Ritchie :

$f_0(x) = 2^x$, $f_{n+1}(x) = f_n^x(x)$.

Supposons maintenant que $f()$ et $g()$ soient des fonctions monotones croissantes, $E[\ ]$-honnêtes et que $(\forall x)\ f^{s(x)}(x) \leq g(x)$ pour une certaine fonction $s(x)$ monotone non-décroissante, non-bornée et récursive élémentaire en $f()$. Pour la hiérarchie de Ritchie, $s(x) = x$, et en général $E(f) \subsetneq E(g)$, car $f^{s(x)}(x)$ n'est pas $E[f()]$-calculable , si $s(x)$ est non-borné.

On construit maintenant une fonction $h()$, telle que $E(f) \subsetneq E(h) \subsetneq E(g)$ de la façon suivante :

$r(0) = 0$

$$r(x+1) = \begin{cases} r(x) + 1 & \text{si} \quad (\exists k)\ f^k(1) = x+1 \ \&\ (r(x)+1)^2 \leq s(x+1) \\ r(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$h(x) = f^{r(x)}(x)$.

On a le

Lemme 3.7.2.- Soit $<\emptyset,\Phi>$ une classe de machines élémentaires, et soit $f(x) = \mu y[g(x,y) = 0]$; $\forall x$ $\exists y$ $g(x,y) = 0$. Alors $f(x)$ est calculable en ressource $\Phi_f(x)$ et $\Phi_f(x)$ est récursif élémentaire en $f(x)$, $g(x,y)$ et $\Phi_g()$.

Le calcul de $f(x)$ consiste à tester $g(x,i)$ pour tout $i < f(x)$, c'est-à-dire à calculer $g(x,i)$ avec complexité $\Phi_g(x,i)$, $i < f(x)$. Un tel programme peut être facilement écrit pour une machine de Minsky ; on omet ce détail.

On montre maintenant que

(a) $E(f) \subsetneq E(h)$ et

(b) $E(h) \subsetneq E(g)$.

(a) $r(x)$ est monotone non-décroissant et non-borné ; donc $f^{r(x)}(x)$ n'est pas dans $E(f)$. Mais $r(x)$ est défini par une récursion bornée à l'aide de fonctions dans $E(f)$, $r(x) \leq s(x)$; donc $r(x) \in E(f)$. $h(x)$ est une fonction $E[\ ]$-honnête :

$$h(x) = (\mu z)[(\exists y \leq x)\ z = f^y(x)\ \&\ y = r(x)]\ ;$$

$$h(x) = (\mu z)[g(x,z) = 0].$$

Par le lemme précédent, $\Phi_h()$ est récursif élémentaire en $g(x,z)$, $\Phi_g(x,z)$ et $f(x)$.

Par définition de $g(z,x)$, Φ_h est élémentaire en $f()$, $\Phi_f()$ et $h()$. Mais $\Phi_f() \leq E[f()]()$ p.p., et $h(x) > f(x)$; donc $\Phi_h(x) \leq E[h()](x)$;

c.q.f.d.

(b) Il suffit de montrer qu'il existe une fonction non-bornée $p(x)$, récursive élémentaire en $h(x)$ et telle que $h^{p(x)}(x) \leq g(x)$.

Soit $q(n)$ la fonction définie par

$$h^n(x) \leq f^{q(n).r(x)}(x) \qquad (q(0) = 0\ ,\ q(1) = 1)$$

alors avec $p(x) = (\mu y \leq r(x))[q(y) \leq r(x) < q(y+1)]$ on a

$$h^{p(x)}(x) \leq f^{(r(x))^2}(x) \leq f^{s(x)}(x) \leq g(x).$$

$p(x)$ est non-décroissant et récursif élémentaire en $r(x)$, donc aussi en $h(x)$.

On peut maintenant appliquer cette construction à deux classes de la hiérarchie de Ritchie, $E(f_n)$ et $E(f_{n+1})$; $s(x) = x$ dans ce cas, puis l'itérer. Une conséquence des deux théorèmes précédents est que l'on peut construire une hiérarchie de classes de complexité $E(f_\alpha)$, où α est un ordinal $< \aleph_0$, mais arbitraire, à l'intérieur d'une classe $E(f)$, $E \subsetneq E(f)$.

La structure de la famille des classes $E(f)$, $f()$ $E[\,]$-honnête, n'est pas entièrement décrite par les deux théorèmes précédents. On montre qu'il existe des classes $E(f)$ et $E(g)$ qui sont incomparables dans l'ordre des classes par inclusion. Les classes $E(f)$ sont donc partiellement ordonnées et denses, comme c'est le cas des classes $R^\Phi_{t()}$.

<u>*Théorème*</u> 3.7.3.- Il existe des classes $E(f)$ et $E(g)$, $f()$ et $g()$ $E[\,]$-honnêtes, telles que $E(f) \not\subseteq E(g)$ & $E(g) \not\subseteq E(f)$.

On veut construire deux fonctions récursives $f()$ et $g()$ telles que $f() > t_g()$ i.a. & $g() > t_f()$ i.a., où $E(f) = R^\Phi_{t_f}$.

On choisit un opérateur total et effectif $F[\,]$ qui préserve la relation $\leq$ p.p. entre fonctions, i.e. $f() \leq g()$ p.p. $\Rightarrow F[f()]() \leq F[g()]()$ p.p., et qui fait $F[f()]() > t_f()$ p.p.

L'opérateur $F[f()](x) =_{def} f'^{r(x)}(x)$, $f'(x) = \sum_{i<x} f(i)$, $r(x) \geq x$, $r(x) \in E(f)$, monotone non-décroissant et non-borné en est un exemple, mais un théorème de Meyer et Fischer [5] montre, qui si $G[\,]$ est l'opérateur $G[f()]() = t_f()$, alors on peut construire un opérateur $F[\,]$ qui préserve la relation $\leq$ p.p. entre fonctions et tel que $F[f()]() > G[(f)]()$ p.p. pour tout $f()$ total.

On construit maintenant $f()$ et $g()$ de manière que les points où $f(x) > t_g(x)$ soient suffisamment épars.

<u>*Lemme*</u> 3.7.4.- Il existe $f()$ et $g() \in R_1$, $f() > t_g()$ i.a. & $g() > t_f()$ i.a.

On construit $f()$ et $g()$ aux pas pairs et impairs respectivement d'un algorithme qui énumère les graphes de ces deux fonctions.

Soit $h(x)$ une fonction récursive $E[\ ]$-honnête arbitraire, $h(x) \geq 2^x$ et soit $F[\ ]$ un opérateur tel que $F[f()]() > t_f()$ i.a. comme défini ci-dessus et tel que le plus grand argument y de $f()$ qui intervient dans le calcul de $F[f()](x)$ est plus petit que $F[f()](x)$.

Au pas $n=0$, on calcule $F[h()](0)$ avec complexité $\Phi_{F[h]}(0)$

on pose $f(x) = \Phi_{F[h]}(0) \qquad 0 \leq x \leq \Phi_{F[h]}(0)$

$g(x) = h(x) \qquad 0 \leq x \leq \Phi_{F[h]}(0)$

Au pas $n=1$, on calcule $F[f()](f(0)+1)$ avec complexité $\Phi_{F[f]}(f(0)+1)$ avec $f(y) = f(0)$ pour $y > f(0)$;

on pose $f(x) = \Phi_{F[h]}(0) \qquad \Phi_{F[h]}(0) < x \leq \Phi_{F[f]}(f(0)+1)$

$g(x) = \Phi_{F[f]}(f(0)+1) \qquad \Phi_{F[h]}(0)+1 \leq x \leq \Phi_{F[f]}(f(0)+1)$

Au pas $2n$, si $f()$ et $g()$ sont définis jusqu'à $x = m$ au pas $2n-1$, on calcule $F[g()](m+1)$ avec complexité $\Phi_{F[g]}(m+1)$ et avec $g(y) = g(m)$ pour $y > m$;

on pose $f(x) = \Phi_{F[g]}(m+1) \qquad m+1 \leq x \leq \Phi_{F[g]}(m+1)$

$g(x) = g(m) \qquad m < x \leq \Phi_{F[g]}(m+1)$

Au pas $2n+1$ on calcule $F[g()](f(m+1)+1)$ avec complexité $\Phi_{F[f]}(f(m+1)+1)$ et avec $f(y) = f(m+1)$ pour $y > f(m+1)$;

on pose $f(x) = f(m+1) \qquad f(m+1) \leq x \leq \Phi_{F[f]}(f(m+1)+1)$

$g(x) = \Phi_{F[f]}(f(m+1)+1) \qquad f(m+1) \leq x \leq \Phi_{F[f]}(f(m+1)+1)$.

(a) soit $(\forall i)\Phi_i(x) \geq \varphi_i(x)$ p.p., alors par construction $f() > t_g()$ i.a. & $g() > t_f()$ i.a.

(b) si par contre il existe ψ_i tel que $\psi_i()$ est calculable en ressource $\Phi_i()$ et si $k_\Phi()$ est la fonction telle que $(\forall i)\psi_i(x) \leq k_\Phi(\Phi_i(x))$ p.p., alors on pose $\Phi'_i(x) = k_\Phi(\Phi_i(x))$ et on calcule $\Phi'_{F[\ ]}()$ par rapport à la nouvelle mesure Φ', ce qui nous ramène au cas (a) ci-dessus.

Lemme 3.7.5.- Les fonctions $f()$ et $g()$ sont $E[\ ]$-honnêtes.

On définit $b(n)$ par

$$b(0) = \Phi_{F[h]}(0)$$

$$b(1) = \Phi_{F[f]}(b(0)+1)$$

....

$$b(2n) = \Phi_{F[g]}(b(2n-1)+1)$$

$$b(2n+1) = \Phi_{F[f]}(b(2n)+1),$$

puis
$$\begin{array}{ll} f(x) = b(0) & 0 \leq x \leq b(0) \\ f(x) = b(0) & b(0) < x \leq b(1) \\ f(x) = b(2n) & b(2n-1) < x \leq b(2n+1) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} g(x) = h(x) & 0 \leq x \leq b(0) \\ g(x) = b(1) & b(0) \leq x \leq b(2) \\ g(x) = b(2n+1) & b(2n) \leq x \leq b(2n+2) \end{array}$$

Il suffit de prouver le cas général.

$$f(x) = \begin{cases} b(z) & \text{si } z = \mu g < x[x \leq b(y)] \text{ est pair} \\ b(z-1) & \text{si } z = \mu g < x[x \leq b(y)] \text{ est impair} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} b(z-1) & \text{si } z = \mu y < x[x \leq b(y)] \text{ est pair} \\ b(z) & \text{si } z = \mu y < x[x \leq b(y)] \text{ est impair ;} \end{cases}$$

soit $d(x) = \mu z < x[x \leq b(z)]$,

$$f(x) = \begin{cases} b(d(x)) & \text{si } d(x) - [\frac{d(x)}{2}] \cdot 2 = 0 \\ b(d(x)-1) & \text{si } d(x) - [\frac{d(x)}{2}] \cdot 2 \neq 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} b(d(x)-1) & \text{si } d(x) - [\frac{d(x)}{2}] \cdot 2 = 0 \\ b(d(x)) & \text{si } d(x) - [\frac{d(x)}{2}] \cdot 2 \neq 0 \end{cases}$$

Comme $b(z)$ est une fonction $E[\ ]$-honnête, $d(x)$ est récursif élémentaire et $b(d(x))$ est également $E[\ ]$-honnête ; donc $f(x)$ et $g(x)$ sont $E[\ ]$-honnêtes.

3.8.- *Invariance des classes* $E(f_k)$.

Il a été noté par différents auteurs que les classes $E(f_k)$ et $\bigcup_{k>0} E(f_k)$ où $\{f_k\}$ est une classe récursivement énumérable de fonctions $E[\ ]$-honnêtes, peuvent être des classes de complexité pour un grand nombre de classes de machines définies par des mesures abstraites "naturelles".

Ainsi J.W. Robbin [41] montre que

$$E = \bigcup_n R^{\Phi}_{g_k^n()} = \bigcup_n R^{\Phi'}_{g_k^n()}$$

où $<\varphi,\Phi> = <\varphi,T>$

et $<\varphi,\Phi'> = <\varphi,L>$

sont les classes de machines de Turing à une bande de travail, T la mesure du temps de calcul (nombre de pas) et L la mesure de la longueur de la bande de travail utilisée.

On inclut ici pour la complétude de l'exposé une brève discussion de l'invariance [19] des classes de complexité $R^{\Phi}_{t_E} = E$ par rapport à un changement de la mesure de complexité Φ.

Définition 3.16.- On appelle monoïde élémentaire S_e une classe de fonctions récursives élémentaires à deux variables, monotones croissants au second argument :

$$S_e = \{f^{(2)}() \mid f(x,y+1) > f(x,y) \ \&\ f(x,y) \in E\}$$

et close par rapport à une opération de composition : $g(), g'() \in E \Longrightarrow$ $\Longrightarrow g * g'(x,y) = g(x,g'(x,y)) \in E$, avec un élément identité $e(x,y) = y$.

Tout monoïde élémentaire induit un ordre des degrés de difficulté des fonctions dans P_1 (dans le sens de [1]) :

Définition 3.17.- f() n'est pas plus difficile que g() par rapport à la mesure Φ et au monoïde élémentaire S_e : $f() \leq_{\Phi,S_e} g()$ si

(a) $\mathrm{dom}\ g() \subseteq \mathrm{dom}\ f()$

(b) $(\forall i)\varphi_i() \simeq g() \Rightarrow (\exists j)\varphi_j() \simeq f()\ \&\ \exists a \in S_e$

$$a(x,\Phi_i()) \geq \Phi_j(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathrm{dom}\ g()$$

Il est immédiat que la relation $\leq_{\Phi,S_e}$ est reflexive et transitive car

(a) $e(x,y) \in S_e \Rightarrow e(x,\Phi_f(x)) \geq \Phi_f(x)$

et (b) $f(x,\Phi_i(x)) \geq \Phi_j(x)$ et

$f'(x,\Phi_j(x)) \geq \Phi_k(x)$ implique, avec $f'(x,f(x,y)) = f''(x,y) \in S_e$

que

$$f''(x,\Phi_i(x)) \geq \Phi_k(x).$$

Soit maintenant $\langle\varphi,\Phi\rangle$ une classe de machines élémentaires, on définit :

Définition 3.18.- $\langle\varphi,\Phi\rangle$ est élémentairement similaire à $\langle\varphi',\Phi'\rangle$ (par rapport à un monoïde élémentaire S_e) lorsque

(a) $(\forall j)(\exists i)(\exists g \in S_e)\ \varphi_i() \simeq \varphi'_j()\ \&\ g(x,\Phi'_j(x)) > \Phi_i(x)$ pour presque tout $x \in \mathrm{dom}\ \varphi'_j$;

nous abrégerons ce prédicat par $\langle\varphi,\Phi\rangle \leq_{S_e} \langle\varphi',\Phi'\rangle$.

(b) symétriquement $\langle\varphi',\Phi'\rangle \leq_{S_e} \langle\varphi,\Phi\rangle$.

Théorème 3.8.1.- Si $\langle\varphi,\Phi\rangle$ est une classe de machines élémentaires et si $\langle\varphi,\Phi\rangle$ est élémentairement similaire à $\langle\varphi',\Phi'\rangle$, alors $\langle\varphi',\Phi'\rangle$ est élémentaire si

$$(\exists h() \in E)(\forall i)(\exists j)\quad \Phi_i() \simeq \varphi_j()\ \&\ x \in \mathrm{dom}\ \varphi_i \Rightarrow \Phi_j(x) \leq h(\Phi_i(x))$$

On prouve que $<\psi',\Phi'>$ satisfait à (i),(ii) et (iii) de la définition d'une classe élémentaire :

(i) : par définition

(ii) : soit $f() \in E(g)$, $\psi_{i()} \simeq g()$ et soit $\psi_j() \simeq f()$ et tel que $\Phi_j(x) \leq E[\Phi_i()](x)$ pour tout x, alors par hypothèse il existe

$$\psi'_k() \simeq f() \text{ tel que } \Phi'_k(x) \leq g_1(x,\Phi_j(x))$$

et

$$\psi'_e() \simeq g() \text{ tel que } \Phi_i(x) \leq g_2(x,\Phi'_e(x))$$

donc $\Phi'_k(x) \leq g_1(x,\Phi_j(x)) \leq E'[\Phi_i()](x)$

$$\leq E'[g_2(.,\Phi'_e())](x) = E''[\Phi'_e()](x)$$

pour un certain opérateur récursif élémentaire $E''[\ ]$;

(iii) : soit $g() \in E(f)$ et $\psi_i()$ tel que $\Phi_i(x) \leq g(x)$, par hypothèse il existe $\psi'_j()$ tel que $\Phi'_j(x) \leq h(x,\Phi_i(x))$, donc $\Phi'_j(x) \leq h(x,g(x)) = E[g()](x) = g'(x)$, $g'() \in E(f)$; par conséquent il existe $\psi'_j(x) \simeq \psi_i(x)$ & $\Phi'_j(x) \leq g'(x)$, $g'(x) = h(x,g(x))$, d'où $\psi_i() \in E(f)$; le théorème suit.

D'autre part, deux classes de machines élémentaires ne sont pas nécessairement élémentairement similaires :

Théorème 3.8.2.- $<\psi,\Phi>$ et $<\psi',\Phi'>$ élémentaires $=\not=>$ $<\psi,\Phi>$ et $<\psi',\Phi'>$ élémentairement similaires.

Il suffit de poser $\Phi'_i(x) = g(\Phi_i(x))$ où $g(x)$ est une fonction honnête qui n'est pas récursive élémentaire.

Les classes des fonctions récursives $E(f_k)$ forment une hiérarchie de classes de complexité $R^{\Phi}_{t_k()}$ par rapport à certaines classes de machines $<\psi,\Phi>$. La classe des machines de Minsky M, avec comme mesure le temps T passé au calcul d'une fonction, <M,T>, en est un exemple. Un autre exemple est la classe de machines de Turing considérée dans la thèse de R.W. Ritchie [40].

Le théorème suivant permet maintenant de caractériser les classes de mesures (plus exactement les classes de machines) qui ont cette propriété.

Définition 3.19.- $<\psi,\Phi>$ et $<\psi'\Phi'>$ sont S_e-équivalents lorsque

$$\forall f(),\ g() \in P \quad f() \underset{\Phi,S_e}{\leq} g() \iff f() \underset{\Phi',S_e}{\leq} g().$$

C'est une relation d'équivalence ; $[<\psi,\Phi>]_{S_e}$ est une classe d'équivalence ; notons que la similarité élémentaire implique S_e-équivalence.

Soit $<\psi,\Phi>$ donné, et soit $\mathbb{C}$ un ensemble de fonctions récursives tel que $f() \in \mathbb{C} \iff \exists \psi_i()[\psi_i() \simeq f()\ \&\ \exists h() \in \mathbb{C}\ [\Phi_i() \leq h()\ \text{p.p.}]]$; on dira ici que $\mathbb{C}$ est Φ-honnête.

Théorème 3.8.3.- Soit $\mathbb{C}$ un ensemble Φ-honnête de fonctions récursives totales et S_e un monoïde élémentaire tel que $\forall g() \in S_e\ \forall h() \in \mathbb{C}\ \exists h'() \in \mathbb{C}$

$g(x,h(x)) \leq h'(x)$ p.p.

Dans ce cas, $g() \in \mathbb{C}\ \&\ f() \notin \mathbb{C} \implies f(x) \underset{\Phi,S_e}{\not\leq} g()$.

Supposons que $f() \underset{\Phi,S_e}{\leq} g()$, $<\psi,\Phi>$ une classe de machines élémentaire et S_e un monoïde de fonctions élémentaires.

Par définition, on a

$$(\forall i)\psi_i() \simeq g() \implies (\exists j)\psi_j() \simeq f()\ \&\ \exists h() \in S_e\ \ h(x,\Phi_i(x)) \geq \Phi_j(x)\ \ \text{p.p.}$$

donc $h(x,\Phi_i(x)) \leq h(x,k(x))$ par hypothèse pour un certain i car $\psi_i() \simeq g()\ \&\ g() \in \mathbb{C}$; $h(x,k(x)) \geq \Phi_j(x)$ p.p. $\implies k'(x) \geq \Phi_j(x)$ p.p. car

$h(x,k(x)) \leq k'(x)$ p.p., $k(), k'() \in \mathbb{C}$ mais $k'(x) < \Phi_j(x)$ i.a. par hypothèse, car $f() \simeq \psi_j()$ & $f() \notin \mathbb{C}$; contradiction.

Ainsi, si $<\psi\ \Phi>$ et $<\psi',\Phi'>$ sont S_e-équivalents, et si $E(f_k)$ est une classe Φ-honnête, alors $E(f_k)$ est aussi Φ'-honnête ; c'est-à-dire que la structure de complexité des classes $E(f_k)$ ($E(f_{k+1}) \setminus E(f_k)$ intrinsèquement plus complexe que $E(f_k)$) est indépendante des machines et des mesures à l'intérieur d'une classe d'équivalence $[<\psi,\Phi>]_{S_e}$.

CHAPITRE IV

PROBLEMES DE DECIDABILITE ET D'ENUMERABILITE.

Dans ce chapitre on répond à un certain nombre de questions concernant des problèmes de décision ainsi que l'énumérabilité récursive des classes $R_{t()}^{\Phi}$ et de certaines autres classes de fonctions dont la définition est liée à celle de $R_{t()}^{\Phi}$. Les propriétés des mesures Φ sont étudiées (en fonction des bornes de complexité $t()$) et une classification de ces mesures est obtenue à l'aide du degré d'indécidabilité des problèmes de décision et des propriétés d'énumérabilité des classes $R_{t()}^{\Phi}$ respectivement.

La généralité de la définition axiomatique d'une mesure de Blum Φ est telle que toute classe récursivement énumérable de fonctions récursives totales (et certaines classes non récursivement énumérables) peut être caractérisée en tant que classe de complexité $R_{t()}^{\Phi}$ pour un certain Φ et pour un certain $t()$. Ainsi, la plupart des propriétés de ces classes ne sont pas invariantes par rapport à un changement de la mesure. Il en est de même pour les propriétés d'énumérabilité. On trouve donc un grand nombre de mesures "pathologiques".

L'idée de restreindre les mesures de Blum par un système d'axiomes plus fort que celui de Blum afin d'éliminer les "mesures pathologiques" est due à A. Borodin [6], P. Young [54] et F.D. Lewis [31]. Le but principal de ce chapitre est donc de caractériser les propriétés "standard" de mesures abstraites et des classes de complexité correspondantes ainsi que les mesures exceptionnelles ou pathologiques.

On obtient quelques résultats nouveaux.

Le chapitre a trois sections. Dans la première on détermine les degrés d'indécidabilité de $\Theta R_{t()}^{\Phi}$ et de $I_{t()}^{\Phi}$ lorsque $t()$ varie. On utilise la formalisation d'une méthode de priorité [51] pour la construction d'un ensemble $I_{t()}^{\Phi}$ récursivement énumérable.

La seconde section présente une classification fine (au sens de Dekker et Myhill [23]) des mesures Φ et des classes $R^{\Phi}_{t()}$ et fournit des exemples pour cette classification. On construit une mesure et une borne de complexité $t()$ telles que $R^{\Phi}_{t()}$ est productif, en généralisant un résultat de [30] et de [31], ainsi qu'une mesure Φ qui admet une classe $R^{\Phi}_{t()}$ récursivement énumérable dont toute présentation t-bornée est immune.

Dans la dernière section on montre que la famille des sous-classes récursivement énumérables mais arbitraires de $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$ n'est pas récursivement énumérable et qu'il existe une sous-classe de $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$, dont toute énumération est arbitrairement difficile. Cette construction utilise également un argument de priorités.

4.1.- *Problèmes de décision qui se rattachent aux classes de complexité* $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$ *et leurs degrés d'indécidabilité.*

Dans [6], A. Borodin montre que la classe de fonctions récursives $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable si elle contient toute fonction totale qui est zéro presque partout ou bien si elle contient toutes les variantes finies ($f(x) = g(x)$ presque partout) d'une fonction de $R^{\Phi}_{t()}$.

Nous voulons d'abord obtenir le degré d'indécidabilité par rapport à la réductibilité injective de l'ensemble d'indices $\Theta R^{\Phi}_{t()}$ et celui de l'ensemble des algorithmes de complexité bornée $I^{\Phi}_{t()}$, c'est-à-dire déterminer leur type d'isomorphisme récursif.

On verra que celui-ci peut varier en fonction de Φ et de $t()$. Ainsi on obtient une autre caractérisation de classes $R^{\Phi}_{t()}$ qui possèdent une présentation récursivement énumérable.

La classification (moins fine) par leur degré de Turing montre que le degré de $I^{\Phi}_{t()}$ varie toujours avec Φ et $t()$, alors que $\Theta R^{\Phi}_{t()}$ appartient toujours au même degré.

On détermine également le degré minimal d'indécidabilité d'une présentation arbitraire de $R^{\Phi}_{t()}$ et de $P \setminus R^{\Phi}_{t()}$ respectivement [30] et on voit qu'il est invariant pour Φ et $t()$.

On obtient d'abord une borne supérieure pour le degré de $I^{\Phi}_{t()}$: $I^{\Phi}_{t()}$ est dans $\sum_2$:

Proposition 4.1.1.- $(\forall\Phi)(\forall t)\ \ I^{\Phi}_{t()} \leqslant_1 A$

où A est un ensemble $\sum_2$-complet (par rapport à la réductibilité injective).

On définit

$$P^{\Phi}_{t}(k,z) \text{ par } (\forall x)\big[[x \leqslant \Pi_1(k)\ \ \&(\exists y \leqslant \Pi_2(k)\ \Phi_z(x) = y] \vee$$

$$\vee\ [x > \Pi_1(k)\ \ \&(\exists y \leqslant t(x))\ \Phi_z(x) = y]\big]$$

$$\Longleftrightarrow\ (\forall x)\ P(k,z,x)$$

$P(k,z,x)$ est un prédicat récursif par sa définition et il est évident que

$$I^{\Phi}_{t()} = \{z \mid P^{\Phi}_{t}(z)\} = \{z \mid (\exists k)(\forall x)\ P(k,z,x)\} \in \Sigma_2 \ ;$$

soit $A = \{z \mid \varphi_z$ non-total$\}$ l'ensemble de référence Σ_2-complet,
$A = \{z \mid (\exists x)(\forall y) \neg T(z,x,y)\}$ et posons

$$\varphi_{f(z)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists x) \neg P(k,z,x) \\ \text{divergent} & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$P^{\Phi}_{t}(z) \Leftrightarrow (\exists k)(\forall x)\ P(k,z,x) \Leftrightarrow (\exists k)\ \varphi_{f(z)}(k) \text{ div} \Leftrightarrow \operatorname{dom} \varphi_{f(z)} \neq N$$
$$\Leftrightarrow f(z) \in A$$

$$\neg P^{\Phi}_{t}(z) \Leftrightarrow (\forall k)(\exists x) \neg P(k,z,x) \Leftrightarrow (\forall k)\ \varphi_{f(z)}(k) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{dom} \varphi_{f(z)} = N$$
$$\Leftrightarrow f(z) \in \bar{A}$$

donc $z \in I^{\Phi}_{t()} \Leftrightarrow f(z) \in A$

$z \notin I^{\Phi}_{t()} \Leftrightarrow f(z) \in \bar{A}$

Il convient de noter, que A est un cylindre (comme tout ensemble Σ_n-complet), $A \equiv_1 C \times N$, et dans ce cas m-réductibilité implique la réductibilité injective.

On a donc $I^{\Phi}_{t()} \leq_1 A$ et on serait tenté d'essayer de prouver $I^{\Phi}_{t()} \equiv_1 A$, mais ceci est faux en général pour Φ et $t()$ arbitraire.

Il existe au contraire des mesures Φ et des bornes $t()$ telles que $I^{\Phi}_{t()}$ est récursif (récursivement énumérable) :
Considérons le prédicat $P^{\Phi}_{t}(z) \Leftrightarrow z \in I^{\Phi}_{t()} \Leftrightarrow (\exists k)(\forall x)\ P(k,z,x)$, peut-on avoir $I^{\Phi}_{t()} \in \Sigma_0$ ou $I^{\Phi}_{t()} \in \Sigma_1$?

La proposition suivante est une conséquence immédiate d'un résultat bien connu dans la théorie des machines de Turing :

<u>*Proposition*</u> *4.1.2.a.*- Il existe une classe de machines $\{\{\psi_i,\Phi_i>\}$ et une borne de complexité $t()$ telle que $I^{\Phi}_{t()} \in \sum_0$.

Soit $\{<\psi_i,\Phi_i>\}$ une classe de machines de Turing où Φ est une mesure de "l'encombrement" de la mémoire externe de cette machine et telle que, si $t(x) = n =$ constant et $(\forall x)\Phi_i(x) \leq n$, alors M_i est équivalente à une machine d'états finis. Un exemple d'une telle classe est celle des machines de Turing on-line. Ces machines possèdent une bande d'entrées et une bande de sorties qui ne peuvent être déplacées que dans une seule direction et une bande de travail sur laquelle la machine peut lire et écrire pouvant être déplacée dans les deux sens. Si Φ est le nombre de cellules utilisées sur la bande de travail au cours d'un calcul, alors Φ n'est pas encore une mesure de Blum, car M_i peut cycler sur un nombre fini de cellules. Mais on peut énumérer les machines M_i telles que $\psi_i(x)$ est défini pour un certain x et $\Phi_i(x) = 0, 1, 2, \ldots$ et définir une mesure Φ' par

$$\Phi'_i(x) = \begin{cases} \Phi_i(x) \text{ si } (\exists n)\ \Phi_i(x) = n \ \ \& \ \ (\exists y)\ \psi_i(x) = y \\ \text{divergent si } \ \Phi_i(x) \text{ div.} \vee \psi_i(x) \text{ div.} \end{cases}$$

Φ' est une mesure de Blum.

En effet, si $\Phi_i(x) \leq n$ pour tout x, alors le nombre des configurations complètes distinctes de la machine est borné : à un alphabet interne de m symboles correspondent m^n configurations "permises" de la mémoire externe et si la machine M_i possède k états internes, alors M_i est équivalente à une machine d'états finis d'au plus $k.n.m^n$ états internes. Si, pour un certain x, $M_i(x)$ fait plus de $k.n.m^n$ pas sans changer de cellule sur la bande d'entrées, une configuration complète est répétée et la machine tombe dans une boucle infinie.

On peut donc effectivement énumérer les machines M_z

$$\{z \mid (\forall x)[\psi_z(x) \text{ défini } \ \& \ \Phi_z(x) \leq n\}.$$

Soit $P_t^\Phi(k,z) \iff (\forall x)\, P(k,z,x)$ défini comme dans la proposition 4.1.1. On veut montrer que le prédicat $(\exists k)P_t^\Phi(k,z)$, i.e. $(\exists k)(\forall x)P(k,z,x)$ est récursif pour $t() = n =$ constant, Φ étant la mesure de Blum définie ci-dessus.

Soit $k = k_0$ fixé, alors $P_t^\Phi(k_0,z)$ est décidable :

Soit $t = n$; on peut "marquer" les états internes de la machine d'états finis qui correspond à M_z travaillant sur une $(n+1)^{\text{ième}}$ cellule de la bande de travail et on peut décider si $\exists x > \pi_1(k_0)$ tel que cette machine d'états finis atteint un de ces "états interdits" (après avoir testé le nombre fini des points d'exception).

Mais on peut décider davantage : à savoir si la machine d'états finis équivalente à un M_z donné atteint un des états marqués pour une infinité d'arguments, autrement dit si $(\forall k)(\exists x) \neg P(k,z,x)$.

Or, ce prédicat est décidable pour une machine d'états finis. Pour s'en persuader, considérons le langage d'états finis généré (reconnu) par un certain automate d'états finis. Chaque état de l'automate correspond à une métavariable de ce langage et si l'on veut savoir si cet automate atteint un certain état i.a., alors il suffit de décider s'il existe une infinité de dérivations qui contiennent cette métavariable.

On peut donc énumérer les indices z tels que $(\exists k)P_t^\Phi(k,z)$ et les indices z tels que $(\forall k) \neg P_t^\Phi(k,z)$, par conséquent I_n^Φ est récursif.

L'existence d'une borne $t()$ avec $I_{t()}^\Phi$ récursivement énumérable et non-récursif est maintenant un corollaire de la proposition 4.1.2.a et du théorème de Borodin sur l'existence de "minimal growth rates" (ou taux de croissance minimale) pour toute classe de machine avec I_n^Φ récursif :

Proposition 4.1.2.b.- Soit $\{<\varphi_i,\Phi_i>\}$ une classe de machines pour laquelle I_n^Φ est récursif. Dans ce cas il existe une borne de complexité $t()$ telle que $I_{t()}^\Phi \in \Sigma_1 - \Sigma_0$.

Théorème 4.1.3.- [Borodin] : Il existe une classe de machines $\{<\varphi_i,\Phi_i>\}$ et une fonction récursive non-bornée et non-décroissante $t()$ telle que

(a) Φ_i non-borné et non-décroissant p.p. $\Longrightarrow \Phi_i(x) \geq t(x)$ p.p.

(b) Φ_i non-borné $\Longrightarrow \Phi_i(x) \geq t(x)$ i.a.

On utilise une simple variante d'une méthode de priorités introduite dans [9]. Cet algorithme calcule une fonction $t(x)$, qui satisfait aux conditions du théorème, argument par argument ; au pas x de l'algorithme on calcule $t(x)$. On emploie une liste unique P des entiers positifs ou nuls, arrangés en ordre croissant et une liste de marques mobiles $m_0, m_1, \ldots,$ chacune associée injectivement à un nombre de la liste P et portant éventuellement un caractère : + ou −. Si m_i reste associé à n à partir du pas x, m_i est appelé associée loyale à x, sinon déloyale. A chaque pas x un nombre fini d'entiers dans P ont chacun une associée ; le plus petit élément de P qui n'a pas d'associée est vacant.

A chaque pas x il existe deux liste finies disjointes d'entiers ; R et L. La liste R correspond aux indices de fonctions dont on n'a pas encore pu prouver que leur complexité est bornée ; on pose

$$R = \{i \mid m_i \text{ est associée et marquée } -\} ;$$
$$L = \{i \mid m_i \text{ est associée et marquée } +\}.$$

On peut avancer une marque par rapport à P et l'associer au nombre vacant, si cette marque porte le caractère −, celui-ci est transformé en +. Au pas x, si m_i est une marque associée à n, on écrit $P_i(x) = n$; on utilise aussi deux variables auxiliaires p et u.

L'algorithme :

Au pas 0, $R := L := \emptyset$, $p := u := 0$ et $t(0) := 0$.

Au pas x, $x > 0$; on effectue les quatre pas suivants (dont certains peuvent éventuellement être omis) :

1) On associe m_x avec le nombre vacant et on le marque + ;
$(\forall i)(0 \leqslant i < x)$ si m_i est marqué − et $\Phi_i(x) < t(x-1)$ on associe m_i avec le nombre vacant et le marque − ; si $p = 1$ on omet (2) et va à (3) ;

2) On détermine l'indice avec la plus grande priorité dont la complexité n'est pas bornée par $t(x-1)$:
$j = (\mu k)[m_k$ est marqué $+ \,\&\, (\exists y)(u \leqslant y \leqslant x-1)\ \Phi_k(y) < t(x-1)\ \&\, k \notin I^{\Phi}_{t(x-1)}]$
si un tel j existe, on enlève la marque + à m_j et pose $I := \{m_j\}$;
sinon on pose $I := \{\emptyset\}$; puis on pose $u := x$ et $p := 1$;
Si $I = \{\emptyset\}$ on omet le pas 3) et va à 4) ;

3) Si $\Phi_j(x) \leqslant t(x-1)$ on pose $t(x) := t(x-1)$ et on va au pas $x+1$;
sinon on marque m_j- ; pose $I := \{\emptyset\}$ et $p := 0$;

4) S'il existe m_i- , $0 \leqslant i \leqslant x$ $\Phi_i(x) = t(x-1)$ on pose $t(x) := t(x-1)$ et on va au pas $x+1$; sinon on pose $t(x) := t(x-1) + 1$;
on efface le caractère − de toute les marques m_i si
$i \in I^{\Phi}_{t(x-1)+1}\ \&\ i \notin I^{\Phi}_{t(x-1)}$ et on va au pas $x+1$.
Fin de l'algorithme pour $t(x)$.

On montre finalement que la fonction $t(x)$ ainsi construite satisfait au théorème :

1) Soit Φ_i non-borné et non-décroissant ;
assertion : $\Phi_i() \geqslant t()$ p.p.

a) i n'a jamais quitté $L \iff P_i(x)$ reste constant pour tout $x \geqslant i \ \&\ i \in L$

$\iff m_i+$ est loyal à i

$\iff (\forall x)[x > i \Rightarrow \Phi_i(x) \geqslant t(x)]$

ou (b) i a été sélectionné dans I, donc dans R.

i ne peut quitter R au pas 4) de l'algorithme, car $\Phi_i()$ est non-borné et au même pas on pose $t(x) < \Phi_i(x)$. Par conséquent i ne peut quitter R au pas 1), car $\Phi_i(x+1) \geq \Phi_i(x) \geq t(x)$, $\Phi_i()$ étant non-décroissant :

i n'a jamais quitté R <=> $(\exists x)\ P_i(x)$ constant $\forall y > x$ &$i \in R$

<=> m_i- est loyal à $x > i$

<=> $(\forall y)[y > x \Longrightarrow \Phi_i(y) \geq t(y)]$

2) Soit Φ_i non-borné ;

assertion : $\Phi_i() \geq t()$ i.a.

si $\Phi_i(y) < t(x-1)$, alors i est éventuellement sélectionné dans I, donc dans R :

a) $\Phi_i(y) < t(x-1)$ et i a la plus grande priorité, alors i sera sélectionné en I et i ne peut quitter I tant que $\Phi_j(x) \leq t(x-1)$; donc on construit $t(x) = t(x+1) = \ldots = t(y)$ et $\Phi_i(y) \geq t(y)$, car $\Phi_i()$ est non-borné.

b) $\Phi_i(y) < t(x-1)$ et i n'a pas la plus grande priorité, L étant fini, alors pour un certain $y > x$: ou bien m_i est loyal à y, et $\Phi_i() \geq t()$ p.p. par 1, b) ou bien i sera sélectionné dans I et on a le cas 2,a) ci-dessus.

En résumé :

i quitte L i.a. <=> i quitte I i.a. <=> $\Phi_i() \geq t()$ i.a.

<=> m_i déloyal.

3) Soit Φ_i borné par k ; k arbitraire,

assertion : $\Phi_i() < t()$ p.p. <=> $t()$-non borné

autrement dit $(\exists k)\ [i \in I_k^{\Phi}]$ <=> $\Phi_i() < t()$ p.p, car pour un k suffisamment grand, i ne peut pas être sélectionné dans I et par conséquent ne sera pas sélectionné pour R. Si i est déjà dans R, on l'élimine dans (4), donc Φ_i ne peut plus influencer la construction de $t(x)$.

Démonstration de la proposition 4.1.2.b.-

Soit $P^{\Phi}(z)$ déf $(\exists n)(\exists k)(\forall x)\ P_n^{\Phi}(k,z,x)$ et soit $t()$ la fonction du théorème de Borodin :

$I_{t()}^{\Phi} = \{z \mid P^{\Phi}(z)\}$ est récursivement énumérable.

Il reste à montrer que $I_{t()}^{\Phi}$ n'est pas récursif, c'est-à-dire que $\{z \mid \Phi_z(x) \geq t(x) \text{ i.a.}\}$ n'est pas récursivement énumérable.

Pour la classe de machines de la proposition 4.1.2.a. le prédicat $z \in I_{t()}^{\Phi}$ est du même degré d'indécidabilité que le problème de l'arrêt : soit $K = \{z \mid \exists u\ T(z,z,u)\}$, on pose

$$\varphi_{f(z)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall u < x \quad \Phi_z(z) \neq u \\ \mu u[\Phi_z(z) = u] & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\Phi_{f(z)}(x) \leq x \iff \neg\, \Phi_z(z) < x \text{ , i.e. } \Phi_{f(z)}() \text{ non-borné}$$

$$\Phi_{f(z)}(x) = n \iff \Phi_z(z) < x \text{ , i.e. } \Phi_{f(z)}() \text{ borné}$$

et par conséquent $P^{\Phi}(f(z)) \iff (\exists n)(\forall x)[x > n \Rightarrow \Phi_{f(z)}(x) \leq n] \iff z \in K$

$$\neg\, P^{\Phi}(f(z)) \iff (\forall n)(\exists x)[x > n \;\&\; \Phi_{f(z)}(x) > n] \iff z \in \bar{K},$$

donc $K \leq_m I_{t()}^{\Phi}$.

4.2.- *Une classification de certains ensembles d'indices dérivés de* $R^{\Phi}_{t()}$.

La dernière proposition pose le problème suivant :

Soit $\{<\varphi_i, \Phi_i>\}$ une classe de machines et $t()$ une borne de complexité telle que $I^{\Phi}_{t()} \in \sum_1 - \sum_0$; a-t-on nécessairement $K \equiv_m I^{\Phi}_{t()}$? On verra qu'en général $I^{\Phi}_{t()}$ peut être d'un m-degré arbitraire dans $\sum_1 \cup \Pi_1$.

Soit A l'ensemble de référence de la proposition 4.1.1.

On peut d'abord donner des conditions suffisantes pour que $A \leq_1 I^{\Phi}_{t()}$; ce théorème est similaire au théorème 3.4. de Dekker et Myhill [23] :

Théorème 4.2.1.- Soit a) $t(x) \geq x$ et

b) Φ tel que $\forall t(x) \geq x$ p.p. $R^{\Phi}_{t()}$ contient toute fonction totale qui est nulle presque partout ; dans ce cas $A \leq_1 I^{\Phi}_{t()} = \{z \mid P^{\Phi}_t(z)\}$ (et avec la proposition 4.1.1. $A \equiv_1 I^{\Phi}_{t()}$).

Principe de la démonstration.-

Si φ_z est non-total $(z \in A)$, il faut construire un algorithme $g(z)$ pour une fonction $\varphi_{g(z)}$ qui est zéro presque partout avec $\Phi_{g(z)}() \leq t()$ p.p. -(en fait $\Phi_{g(z)}(x) \leq x$ p.p.).

On construit donc une machine qui utilise une quantité de ressource bornée par y aux arguments $y \geq x$ tant que $\varphi_z(x)$ n'a pas encore convergé en ressource $\leq y$, mais qui utilise une quantité de ressource plus grande que $t(y)$ chaque fois que l'on trouve un x tel que $[\sum_{i \leq x} \Phi_z(i)] = y$.

Donc, si φ_z est total, $\Phi_{g(z)}(y) > t(y)$ i.a.

et si φ_z est non-total, $\Phi_{g(z)}(y) \leq t(y)$ p.p.

Au pas y de l'algorithme, on teste $\Phi_z(0)$, $\Phi_z(1)$, ... en ressource $\leq y$; c'est-à-dire on calcule $(\forall i < x)(\exists u < y)\ \Phi_z(i) = u$ tant que la complexite de ce prédicat, qui est une fonction $Q(x,y,z)$ reste inférieure à y ; soit alors x le plus petit argument v tel que $(\forall u \leq y - Q(v,y,z))$ $[\Phi_z(v) \neq u]$. Notons que $Q(x,y,z)$ reste constant tant que $\varphi_z(x)$ n'a pas encore convergé.

Dans ce cas on pose $\varphi_{g(z)}(y) = 0$ et on est assuré que $\Phi_{g(z)}(y) = y$; donc si $\varphi_z(x)$ est divergent, alors $(\forall y)[y > Q(x,y,z) \Longrightarrow \varphi_{g(z)}(y) = 0$ & $\Phi_{g(z)}(y) \leq y]$; si par contre il existe un $y' > y$ tel que $\Phi_z(x) = y' - Q(x,y',z)$, alors on calcule $t(y') = \varphi_t(y')$ avec complexité $\Phi_t(y') > t(y')$ et on pose

a) $\varphi_{g(z)}(y') = \varphi_t(y')$ si $\Phi_z(y') \leq t(y')$

b) $\varphi_{g(z)}(y') = \varphi_z(y')$ si $\Phi_z(y') > t(y')$

Il reste le cas dans lequel le prédicat $(\forall i \leq y)(\exists u < y)[\Phi_z(i) = u]$ est calculable en ressource $\leq y$, dans ce cas on procède comme sous (a) ci-dessus, donc

$$\varphi_{g(z)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\exists x \leq y)[(\forall i < x \leq y)(\exists u < y)\Phi_z(i) = u \\ & \quad \&(\forall u \leq y - Q(x,y,z))\,[\Phi_z(x) \neq u]] \\ \varphi_z(y) & \text{si } (\exists x < y)[(\forall i < x < y)(\exists u < y)\Phi_z(i) = u \;\&\; \Phi_z(x) \\ & \quad = y - Q(x,y,z)] \;\&\; \Phi_z(y) > t(y) \\ \varphi_t(y) & \text{si } (\exists x < y)[(\forall i < x < y)(\exists u < y)\Phi_z(i) = u \;\&\; \Phi_z(x) = y \\ & \quad - Q(x,y,z)] \;\&\; \Phi_z(y) \leq t(y) \\ \varphi_t(y) & \text{si } (\forall i \leq y)(\exists u < y)\Phi_z(i) = u \;\&\; Q(y+1,y,z) \leq y \end{cases}$$

On vérifie aisément [1)] que

$$z \in A \iff [\varphi_{g(z)}(x) = 0 \text{ p.p. } \& \; \Phi_{g(z)}(x) \leq x \text{ p.p.}] \iff g(z) \in I^{\Phi}_{t()}$$

---

1) On suppose que le prédicat $\Phi_z(x) \leq y - Q(x,y,z)$ peut être vérifié en ressource $\Phi_z(x)$ étant donné $Q(x,y,z)$; le cas général nécessite une modification triviale de la définition de $Q(x,y,z)$

$$z \notin A \iff [\varphi_{g(z)}(x) = \varphi_z(x) \text{ i.a.} \vee \varphi_{g(z)}(x) = \varphi_t(x) \text{ i.a. } \& \ \Phi_{g(z)}(x) >$$
$$> t(x) \text{ i.a.}] \iff g(z) \notin I^{\Phi}_{t()}.$$

On résout finalement le problème posé après les propositions 4.1.2.a. et b. :

<u>*Théorème*</u> *4.2.2.*- Pour tout $t()$ et tout m-degré A dans $\Sigma_1 \cup \Pi_1$ il existe une mesure Φ telle que $I^{\Phi}_{t()} \equiv_m A$.

On suppose que Φ satisfait à la condition du théorème 3.2.4. et que $R^{\Phi}_{t()}$ possède une présentation récursivement énumérable $W_{f(t)} \subset I^{\Phi}_{t()}$ pour tout $t(x) > x$ p.p.

Soit $t()$ donné ; on construit une nouvelle mesure Φ' telle que $I^{\Phi'}_{t()} \subset I^{\Phi}_{t()}$ et $I^{\Phi'}_{t()} \equiv_m A$, $A \in \Pi_1 \cup \Sigma_1$, arbitraire.

Soit A' une présentation récursive de $R^{\Phi}_{t()}$; une telle présentation peut être effectivement trouvée (par un lemme de Rogers [45]) étant donné une présentation $W_{f(t)}$ et $A' \subset I^{\Phi}_{t()}$ si $W_{f(t)} \subset I^{\Phi}_{t()}$ [cf. § 4] :

Soit w une fonction qui énumère $W_{f(t)}$, alors

$$a'_{n+1} = \begin{cases} w(n+1) & \text{si} \quad w(n+1) > a'_n \\ \mu\, y[\varphi_y = \varphi_{w(n+1)} \ \& \ \Phi_y() \leq \Phi_{w(n+1)}() \ \& \ y > a'_n] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition, il existe un prédicat récursif $P(x,n)$ tel que $A = \{n \mid (\forall x)\, P(x,n)\}$ ou $A = \{n \mid (\exists x)\, P(x,n)\}$ ($A \in \Sigma_1 \cap \Pi_1 \Rightarrow A$ récursif, ce cas a déjà été considéré).

On pose maintenant :

$$\Phi'_i(x) = \begin{cases} \Phi_i(x) & \text{si} \quad i = a'_n \in A' \ \& \ (Qy \leq x)\, P(y,n) \\ \\ \Phi_i(x) + t(x) + 1 & \text{si} \quad i \notin A' \vee [i = a'_n \ \& \ \neg (Qy \leq x)\, P(y,n)] \end{cases}$$

où Q est le quantificateur $\forall$ ou $\exists$ selon que $A \in \Pi_1$ ou $A \in \Sigma_1$.

Assertion :

(a) Φ' est une mesure bien définie :

(α) $\phi_i(x)$ défini $\Longleftrightarrow$ $\phi'_i(x)$ défini

(β) $\lambda ixy[\phi'_i(x) = y]$ est récursif

(b) $I^{\Phi'}_{t()} \equiv_m A$:

soit $A' = \rho\alpha'$; $I^{\Phi'}_{t()} = \{a'_n | n \in A\}$

α' réduit A à $I^{\Phi'}_{t()}$ et $\bar{A}$ à $\overline{I^{\Phi'}_{t()}}$:

$n \in A \Longleftrightarrow \alpha'(n) \in I^{\Phi'}_{t()}$

$n \notin A \Longleftrightarrow \alpha'(n) \notin I^{\Phi'}_{t()}$, donc $A \leqslant_m I^{\Phi'}_{t()}$

définissons $\beta(n) = \begin{cases} (\mu i)[n = a'_i] & \text{si un tel } i \text{ existe} \\ i_0 \in \bar{A} & \text{si un tel } i \text{ n'existe pas} \end{cases}$

$\beta(n)$ est une fonction récursive totale car $n \in A'$ est un prédicat récursif et $\beta(n)$ réduit $I^{\Phi'}_{t()}$ à A, il est évident que

$n \in I^{\Phi'}_{t()} \Longleftrightarrow \beta(n) \in A$

$n \notin I^{\Phi'}_{t()} \Longleftrightarrow \beta(n) \notin A$

donc $I^{\Phi'}_{t()} = \{a'_n | n \in A\} \leqslant_m A$ par $\beta()$, donc $I^{\Phi'}_{t()} \equiv_m A$.

On a en particulier le

<u>*Corollaire*</u> *4.2.3.*- Si $I^{\Phi}_{t()} \equiv_m \bar{B}$ et B est simple, alors $I^{\Phi}_{t()}$ ne contient pas de présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{t()}$.
(On dira que $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas $t()$-présentable).

Considérons maintenant la classification de l'ensemble d'indices $\Theta R^{\Phi}_{t()}$ d'une classe de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ suivant son type d'isomorphisme récursif. Celui-ci varie en général avec Φ et $t()$; mais on constate que les classes pour lesquelles il existe une méthode uniforme et effective d'obtenir un indice d'une présentation récursivement énumérable, ont des ensembles d'indices du même degré. Cette observation [31] est démontrée par le

Théorème 4.2.4.- Soit

(a) $t(x) \geq x$ p.p. et

(b) Φ tel que $R^{\Phi}_{t()}$ contient toutes les fonctions qui sont zéro presque partout ; dans ce cas $\Theta R^{\Phi}_{t()} \equiv_1 \in \overset{\infty}{P}$ où $\in \overset{\infty}{P} = \{z \mid \varphi_z$ non-total & dom φ_z infini$\} \in \Sigma_3 \cap \Pi_3$.

Proposition 4.2.5.- Soit $t()$ et Φ comme ci-dessus, alors $\in \overset{\infty}{P} \leq_1 \Theta R^{\Phi}_{t()}$.

On construit $\varphi_{g(z)}(x)$ de telle façon que

$$\text{dom } \varphi_z \text{ fini} \iff \varphi_{g(z)} \in P - R \quad \text{et}$$

$$\varphi_z \text{ total} \iff \varphi_{g(z)} \notin R^{\Phi}_{t()} \iff \exists h \ \varphi_{g(z)} > h(t()\ ) \text{ i.a.}$$

$$\varphi_i \in R^{\Phi}_{t()} \iff (\exists j)\ \varphi_j = \varphi_i \ \&\ \Phi_j() \leq t() \text{ p.p. et}$$

$$\varphi_i() \leq h(\Phi_i()) \ \&\ \varphi_i \in R^{\Phi}_{t()} \implies \varphi_i() \leq h(t()\ ) \text{ p.p. ;}$$

$$\varphi_i > h(t()\ ) \text{ i.a.} \implies \varphi_i() \notin R^{\Phi}_{t()}.$$

La construction est similaire à celle du théorème 4.2.1. sauf qu'il n'est pas nécessaire ici d'avoir $\Phi_{g(z)}() \leq t()$ p.p.

Construction de $\varphi_{g(z)}(x)$:

On utilise une liste d'arguments L ; soit L_n le dernier membre de L à la fin du pas n.

Pas 0 : $L = L_0 = \emptyset$

Pas n :

(1) si $(\exists x)[n < x \ \&(\exists u)\Phi_z(x) = u]$ alors $\psi_{g(z)}(n)$ est défini ; aller à (2) sinon $\psi_{g(z)}(n)$ divergent

(2) si $L_{n-1} = \emptyset$ ou $(\forall x \leq n)[\Phi_z(x) \leq n]$ ou $\Phi_z(L_{n-1}) = n$ on pose $\psi_{g(z)}(n) := h(t(n)) + 1$ sinon on pose

$$L_n = (\mu x \leq n) \neg [\Phi_z(x) \leq n] \ ;$$

$$L := L \cup \{L_n\} \quad \text{si} \quad L_{n-1} \neq L_n$$

$$L := L \qquad \text{si} \quad L_{n-1} = L_n$$

et $\psi_{g(z)}(n) := 0$;

et on va au pas $n+1$.

Notons que L est la liste des arguments $\{x \mid \neg \Phi_z(x) \leq n\}$; on vérifie aisément que $\epsilon \overset{\infty}{P} \leq_1 \Theta R^{\Phi}_{t()}$:

ψ_z total <=> L infini ou $(\forall x \leq n)[\Phi_z(x) \leq n]$ p.p. <=> $\psi_{g(z)}()$ $> h(t(\ ))$ i.a. <=> $\psi_{g(z)} \notin R^{\Phi}_{t()}$

ψ_z non-total & dom ψ_z fini <=> dom $\psi_{g(z)}$ fini <=> $\psi_{g(z)} \notin R^{\Phi}_{t()}$

ψ_z non-total & dom ψ_z infini <=> L fini & $L_n = (\mu x)(\forall u) \neg T(z,x,u)$ <=> <=> $\psi_{g(z)}(n) = 0$ p.p. <=> $\psi_{g(z)} \in R^{\Phi}_{t()}$;

donc $\epsilon \overset{\infty}{P} \leq_m \Theta R^{\Phi}_{t()}$, et comme tout ensemble d'indices est un cylindre, on a $\Theta \overset{\infty}{P} \leq_1 \Theta R^{\Phi}_{t()}$.

Pour la démonstration de l'inverse, c'est-à-dire pour montrer que $\Theta R^{\Phi}_{t()} \leq_1 \Theta \overset{\infty}{P}$ il suffit d'une condition plus faible :

<u>*Proposition*</u> *4.2.6.*- Soit $R^{\Phi}_{t()}$ une classe récursivement énumérable de fonctions récursives $R^{\Phi}_{t()} = \{\psi_i \mid i \in W_x\}$ - W_x est présentation de $R^{\Phi}_{t()}$, alors $\Theta R^{\Phi}_{t()} \leq_1 \Theta \overset{\infty}{P}$

On prouve qu'il existe une fonction récursive $g(z)$ telle que

$$\psi_{g(z)} \text{ est total} \iff \psi_z \text{ total } \& \ \psi_z \notin R^{\Phi}_{t()}$$

$$\text{dom } \psi_{g(z)} \text{ est fini} \iff \psi_z \text{ non-total}$$

$$\text{dom } \psi_{g(z)} \text{ infini et co-infini} \iff \psi_z \text{ total } \& \ \psi_z \in R^{\Phi}_{t()}.$$

Etant donné une présentation W_x de $R^{\Phi}_{t()}$,

$$\psi_i \in R^{\Phi}_{t()} \iff (\exists j \in W_x)(\forall y)[\psi_i(y) = \psi_j(y)].$$

Le prédicat $j \in W_x$ n'est pas en général récursif, mais on peut obtenir par le lemme de Rogers, un ensemble récursif R qui est une présentation récursive de $R^{\Phi}_{t()}$.

Construction de $\psi_{g(z)}$: on se donne une méthode d'énumération effective de tous les couples $<x,y>$; pas $n = <x,y>$:

(1) si $(\forall m \leq n)(\exists v)\ T(z,\Pi_2(m),v)$ alors $\psi_{g(z)}(<x,y>)$ est peut être défini pour certaines valeurs de x, aller à (2) ; sinon $(\exists m \leq n)(\forall v) \neg T(z,\Pi_2(m),v)$ alors $\psi_{g(z)}(<x,y>)$ est divergent

(2) si $[x \notin R \vee (\exists u)[\psi_z(u) \neq \psi_x(u)]]$ on pose $\psi_{g(z)}(<x,y>) := 1$

sinon $\psi_{g(z)}(<x,y>)$ divergent

$g()$ **réduit** $\Theta R^{\Phi}_{t()}$ à $\Theta \overset{\infty}{P}$:

(a) ψ_z total $\&\ \psi_z \in R^{\Phi}_{t()} \iff (\exists x)(\forall y)\psi_{g(z)}(<x,y>)$ div. $\&$
$\&\ (\exists x)(\forall y)\psi_{g(z)}(<x,y>) = 1 \iff$ dom $\psi_{g(z)}$ infini et co-infini

(b) ψ_z total $\&\ \psi_z \notin R^{\Phi}_{t()} \iff (\forall x)[x \notin R \vee (\exists u)[\psi_z(u) \neq \psi_x(u)]] \iff$
$\iff (\forall n)\psi_{g(z)}(n) := 1 \iff \psi_{g(z)}$ total

(c) ψ_z non-total $\iff (\exists m)(\forall n)[m < n \implies \psi_{g(z)}(n) \text{ div}] \iff$ dom $\psi_{g(z)}$ fini.

Propositions 4.2.5. et 6 impliquent le théorème.

4.3.- *Une classification des mesures* Φ *par les propriétés des énumérations des classes* $R^{\Phi}_{t()}$ *correspondantes.*

On montre [6] que la classe $R^{\Phi}_{t()}$, $t() \varepsilon R_1$ est récursivement énumérable uniformément en un indice pour $t()$ si elle contient toute fonction totale qui est zéro presque partout ou bien si elle contient toutes les variantes finies $f_i()$ $(f_i(x) = g(x)$ p.p.) d'une fonction $g()$ de $R^{\Phi}_{t()}$. Au chapitre précédent une condition suffisante pour l'énumérabilité récursive d'une classe $R^{\Phi}_{t()}$ a été obtenue à l'aide du type d'isomorphisme récursif des ensembles d'indices $\Theta R^{\Phi}_{t()}$ et $I^{\Phi}_{t()}$. Mais, d'une part, une classe de complexité peut être récursivement énumérable sans que l'on puisse effectivement déterminer un indice pour une présentation récursivement énumérable étant donné un indice pour $t()$.

D'autre part, même si un tel indice peut être déterminé uniformément en un indice pour $t()$, la présentation correspondante n'est pas nécessairement $t()$-bornée.

En observant que la classe complémentaire de $R^{\Phi}_{t()}$, $P \setminus R^{\Phi}_{t()}$ est toujours récursivement énumérable, on établit d'abord une classification des mesures Φ et des classes $R^{\Phi}_{t()}$ (en tant que classes semi-récursives dans le sens de Dekker et Myhill [23]).

Une classification équivalente est possible pour les classes partielles $R^{\Phi}_{\alpha()}$, mais il existe des mesures dans lesquelles $P \setminus R^{\Phi}_{\alpha()}$ n'est pas une classe récursivement énumérable.

On peut donc donner la classification suivante :

(a) Pour tout $t()$ récursif total (avec indice t), $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable et il existe une fonction récursive $f()$, telle que $W_{f(t)}$ est une présentation de $R^{\Phi}_{t()}$, en outre, tout algorithme dans $W_{f(t)}$ est $t()$-borné presque partout :

$$\Phi : \exists f() \varepsilon R_1 \ \forall t() \varepsilon R_1 [R^{\Phi}_{t()} = \{\varphi_i() | i \varepsilon W_{f(t)}\} \ \& \ W_{f(t)} \subset I^{\Phi}_{t()}]$$

c'est-à-dire que $R^{\Phi}_{t()}$ est $t()$-présentable et la présentation est uniforme en un indice pour $t()$.

(b) Pour tout $t() \in R_1$, $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable avec une présentation qui est uniforme en un indice pour $t()$, mais il existe des bornes $t()$ arbitrairement grandes telles que $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas $t()$-présentable :

$$\Phi : \exists f() \in R_1 [\forall t() \in R_1 \quad R^{\Phi}_{t()} = \{\varphi_i() | i \in W_{f(t)}\} \ \&$$

$$\forall t_1 \ \exists t_2 \quad t_2() > t_1() \text{ p.p. } \& \ W_{f(t_2)} \not\subset I^{\Phi}_{t_2()}].$$

(c) Pour tout $t() \in R_1$, $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable, mais il existe des bornes $t()$ telles qu'aucune présentation récursivement énumérable soit uniforme en t :

$$\Phi : \forall t() \in R_1 \ \exists k \ R^{\Phi}_{t()} = \{\varphi_i() | i \in W_k\} \ \& \ \exists t() \ \forall f() \in R_1 \ W_k \neq W_{f(t)}$$

(d) Il existe une borne de complexité $t()$ telle que $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas récursivement énumérable :

$$\Phi : \exists t() \in R_1 \quad R^{\Phi}_{t()} \text{ n'est par récursivement énumérable} \iff$$

$$\exists t() \in R_1 \quad P \setminus R^{\Phi}_{t()} \text{ n'est pas semi-récursif.}$$

On montre d'abord que des mesures du type (a) à (d) existent en construisant un exemple pour chaque type. On en déduit, que les propriétés de $I^{\Phi}_{t()}$ (l'ensemble des algorithmes $t()$-bornés) ne sont pas suffisamment liées à celles des classes $R^{\Phi}_{t()}$ et il faudrait trouver d'autres ensembles d'algorithmes pour $R^{\Phi}_{t()}$.

4.4.- *Construction d'une mesure* Φ *et d'une borne* $t()$ *telles que* $R^{\Phi}_{t()}$ *n'est pas récursivement énumérable.*

Comme on pouvait le prévoir après les théorèmes 4.2.2 et 4.2.4. sur les degrés d'isomorphisme de $\Theta R^{\Phi}_{t()}$, $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas nécessairement une classe récursivement énumérable ; la démonstration est similaire à celle du théorème d'existence d'ensembles $I^{\Phi}_{t()}$ de m-degrés arbitraires dans $\sum_1 \cup \prod_1$.

Il est par contre facile de montrer que dans toute mesure Φ il existe une fonction récursive $g()$ telle que

$$\forall t() \qquad [t() \geq g() \text{ p.p. } \Longrightarrow R^{\Phi}_{t()} \text{ récursivement énumérable}].$$

Ainsi, $R^{\Phi}_{t()}$ est "presque toujours" récursivement énumérable - sauf éventuellement pour certaines classes qui ont une borne de complexité "trop petite".

Les contre-exemples construits ici ont un certain caractère artificiel ; leur rôle est plutôt de guider l'intuition pour la définition d'axiomes de mesures abstraites plus restreintes que ceux de Blum.

Pour la construction d'une mesure Φ telle que $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas récursivement énumérable, il est donc d'abord nécessaire que $R^{\Phi}_{t()}$ ne contienne pas toutes les variantes finies d'un de ces éléments. D'autre part, la classe $R^{\Phi}_{t()}$ n'est certainement pas récursivement énumérable si elle est productive.

Etant donné $t()$ et Φ on construit donc une nouvelle mesure Φ', telle que $R^{\Phi'}_{t()}$ soit productif et ne contienne toutes les variantes finies d'aucune fonction de $R^{\Phi}_{t()}$:

Théorème 4.4.1.- $\forall t() \in R_1$ il existe une mesure Φ telle que $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas récursivement énumérable ($R^{\Phi}_{t()}$ est productif).

On suppose que Φ satisfait au théorème 4.2.1. et que $\{<\varphi_i,\Phi_i>\}$ est une classe de machines pour laquelle il existe une présentation $W_{f(t)}$ de $R^{\Phi}_{t()}$, uniforme en t et $t()$-bornée : $x \in W_{f(t)} \Rightarrow x \in I^{\Phi}_{t()}$. On construit d'abord une classe récursivement énumérable $A = \{\varphi_x() \mid x \in A\} \subsetneq R^{\Phi}_{t()}$ qui ne contient plus toutes les variantes finies de fonctions de $R^{\Phi}_{t()}$, puis on détermine une classe de fonctions B et une mesure Φ' de façon que $R^{\Phi'}_{t()} = A \cup B$ soit productif.

(A) Construction de Φ' :

Soit $A = \{\varphi_x() \mid x \in A\}$ un sous-ensemble récursif de $R^{\Phi}_{t()}$ (dans le sens de [37]) :

Soit $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ des familles d'ensembles finis canoniquement énumérables sans répétitions et effectivement séparables ; $[\alpha_i]$ et $[\varphi_i]$ désignent les indices canoniques de α_i et d'un segment initial de φ_i, respectivement. On définit la fonction récursive partielle

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in W_{f(t)} \ \& \ (\exists j)[\varphi_x] = [\alpha_j] \\ 1 & \text{si } x \in W_{f(t)} \ \& \ (\exists j)[\varphi_x] = [\beta_j] \\ \text{div} & \text{sinon} \end{cases}$$

les ensembles $A = \{x \mid \gamma(x) = 0\}$ et $B = \{x \mid \gamma(x) = 1\}$ sont récursivement énumérables.

Soit a une fonction récursive qui énumère A ; on construit un ensemble récursif A' qui est une présentation récursive pour $A = \{\varphi_x \mid x \in A\}$:

$$a'(0) = \mu y[y \in A]$$

$$a'(n+1) = \begin{cases} a(n+1) & \text{si } a(n+1) > a'(n) \\ \\ \mu y[\varphi_y = \varphi_{a(n+1)} \ \& \ \Phi_{a(n+1)} = \Phi_y \text{ p.p.. } \& \ y > a'(n)] & \text{sinon} \end{cases}$$

où $<\varphi_y,\Phi_y>$ est une machine équivalente à $<\varphi_{a(n+1)},\Phi_{a(n+1)}>$ construite par le lemme de Rogers.

De cette manière on a $A' \subset I^{\Phi}_{t()}$ et A' récursif.

Soit maintenant $f(x) = \begin{cases} \psi_{\Pi_1(x)}(x) + 1 & \text{si} \quad \Phi_{\Pi_1(x)}(x) \leq t(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$f(x)$ n'appartient pas à $R^{\Phi}_{t()}$ et par conséquent n'appartient pas à A, car $\Phi_f() \leq t()$ p.p. $\Longrightarrow \exists i \in A \quad \psi_i = f$; mais $(\forall x)(\exists y)[x < y \ \& \ f(y) \neq \psi_i(y)]$, ce qui est contradictoire.

On définit

$$B = \{\psi_{b_i} \mid b_i \in B\} \qquad \text{et}$$

$$\psi_{b_i}(x) = \begin{cases} i_x & x \leq n_i \\ f(x) & x > n_i \end{cases}$$

où n_i+1 et la cardinalité de β_i et i_x son $x+1^{\text{ième}}$ élément ; c'est-à-dire que B est une classe de variantes finies de f. On construit un ensemble récursif B' : $B = \{\psi_{b'_i} \mid b'_i \in B'\}$ comme pour la classe A et on pose

$$\Phi'_j(x) = \begin{cases} \Phi_j(x) & \text{si} \quad j = a'_i \in A' \\ g(x) & \text{si} \quad j = b'_i \in B' \ \& \ \Phi_i(i) > x \\ \Phi_j(x) + g(x) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $g(x)$ est une fonction honnête telle que $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{g()}$ - une telle fonction existe toujours d'après le théorème de Meyer-McCreight.

B) Vérification des propriétés de la classe $C = R^{\Phi'}_{t()} = \{\psi_i() \mid i \in C\}$:

(a) Φ' est une mesure bien définie :

(α) $\text{dom}\ \Phi_i = \text{dom}\ \Phi'_i$

(β)

$$M'(i,x,y) = \begin{cases} M(i,x,y) & \text{si} \quad i = a'_j \in A' \\ M(i,x,y-g(x)-1) & \text{si} \quad i \notin A' \vee i \notin B' \vee [i=b'_j \& \Phi_j(j) \leq x] \\ 1 & \text{si} \quad y = g(x) \;\&\; i = b'_j \;\&\; \Phi_j(j) > x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $M'(i,x,y)$ est un prédicat récursif si $M(i,x,y)$ l'est ;

(b) $R^{\Phi'}_{t()}$ ne contient toutes les variantes finies d'aucune fonction totale : immédiat.

(c) $R^{\Phi'}_{t()} = C$ est une classe productive de fonctions totales : on prouve que si C' présente C, alors $\bar{K} \leq_m C'$:

(α) Soit $C' \subseteq C$ un sous-ensemble de C qui présente C, il doit contenir les indices $\{b'_i \mid i \in \bar{K}\}$.

Soit $b'(i) = b'_i$, $b'()$ une fonction qui énumère B', alors $b'()$ réduit $\bar{K}$ à C' :

$$n \in \bar{K} \Rightarrow b'(n) = b'_n \in C'$$
$$n \in K \Rightarrow b'(n) = b'_n \in \bar{C} \Rightarrow b'_n \in \bar{C}'$$

car $b'_n \notin A'$, donc $\bar{K} \leq_m C'$ pour tout $C' \subseteq C$ qui présente C par $b'()$.

(β) Soit $C' \nsubseteq C$ une présentation arbitraire de C différente de C et de ses sous-ensembles ;

C' contient un ensemble d'indices pour $\{\psi_{b'_i} \mid i \in \bar{K}\}$, plus précisément :

Lemme 4.4.2.- Si B' et B'' sont deux présentations de B alors il existe une fonction récursive $g()$ qui réduit B' à B'' (en tant qu'énumération de B) :

$$(\forall n)\ \varphi_{b'(n)}() \cong \varphi_{b''(g(n))}()$$

Pour prouver le lemme, soit $b'()$ une énumération de B' et $b''()$ une énumération de B'', $h()$ une énumération des indices canoniques des β_i : $\beta_i = D_{h(i)}$; $[\beta_i] = h(i)$. On construit d'abord une fonction récursive totale par

$$f(j) = (\mu i)\left[h(i) = [\varphi_{b'_j}^{n_i}]\right]$$

où $[\varphi_{b'_j}^{n_i}]$ est l'indice canonique de $\varphi_{b'_j}$ restreint à $\{0,1,\dots,n_i\}$, puis on pose

$$g(i) = (\mu k)\left[h(f(i)) = [\varphi_{b''_k}^{n_{f(i)}}]\right] ;$$

on vérifie que

$$b'_i \in B' \Rightarrow b''_{g(i)} \in B'' \text{ et } \varphi_{b'(i)}() = \varphi_{b''(g(i))}().$$

Il est maintenant clair que

$\bar{K} \leq C'$ par $b''(g()\ )$:

$$n \in \bar{K} \Rightarrow b'(n) \in \{b'_i \mid i \in \bar{K}\} \subseteq C \Rightarrow b''(g(n)) \in C'$$

$$n \in K \Rightarrow b'(n) \in \{b'_i \mid i \in K\} \subseteq \bar{C} \Rightarrow b''(g(n)) \in \bar{C}'.$$

4.5.- *Construction d'une classe* $R^{\Phi}_{t()}$ *inaccessible*.

On construit d'abord une mesure Φ et une borne de complexité $t()$ telle que

(a) $I^{\Phi}_{t()}$ est immune,

(b) $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable.

Ceci montre que si $I^{\Phi}_{t()}$ est immune, $R^{\Phi}_{t()}$ peut très bien être récursivement énumérable, même si $R^{\Phi}_{t()}$ est une classe de fonctions isolées. Une conséquence d'une telle configuration est que toute présentation récursivement énumérable doit contenir des indices qui ne sont pas dans $I^{\Phi}_{t()}$.

On obtient par la suite une autre mesure Φ telle que $(\exists t)$ $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable, mais il n'y a pas de présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{t()}$ qui soit uniforme en t, un indice pour $t()$. Une telle classe de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ peut être appelée inaccessible.

Théorème 4.5.1.- Il existe une mesure Φ et une borne de complexité $t()$ telles que

(i) $(\exists x)$ $R^{\Phi}_{t()} = \{\varphi_{i()} \mid i \in W_x\}$, i.e. $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable ;

(ii) $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas Φ-t-présentable :

$$R^{\Phi}_{t()} = \{\varphi_{i()} \mid i \in W_x\} \Rightarrow W_x \not\subseteq I^{\Phi}_{t()}.$$

Soit $t()$ la "fonction de croissance minimale" ("minimal growth rate") de Borodin [6] et soit $<\varphi,\Phi>$ la classe des machines du théorème de Borodin ; $I^{\Phi}_{t()} = \{i \mid (\exists k)(\forall x)\Phi_i(x) \leq k\} = \{i \mid \Phi_i() \leq t() \text{ p.p.}\}$; $I^{\Phi}_{t()}$ est l'ensemble des algorithmes dont la complexité est bornée (par une constante) partout.

Par le théorème 4.1.2.b. on a $K \leq_m I^{\Phi}_{t()}$, et comme l'ensemble $I^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable, il est créatif.

On construit d'abord un sous-ensemble $A \subset I^{\Phi}_{t()}$ tel que $I^{\Phi}_{t()}-A$ contient au moins un indice pour toute fonction $\varphi_i()$, $i \varepsilon I^{\Phi}_{t()}$; puis on définit une nouvelle mesure Φ' telle que $I^{\Phi'}_{t()} = I^{\Phi}_{t()}-A$, A infini et récursivement énumérable, mais non-créatif, $I^{\Phi}_{t()}-A$ immune. On utilise un théorème de Yates [53] et son extension par Khutoretskii [27] sur l'existence d'ensembles qui sont d'un degré d'indécidabilité donné et simples dans un ensemble récursivement énumérable et infini donné ; ici on construit A simple dans $I^{\Phi}_{t()}$.

On obtient alors

$$R^{\Phi'}_{t()} = \{\varphi_i() \mid i \varepsilon I^{\Phi'}_{t()} = I^{\Phi}_{t()}-A\} = R^{\Phi}_{t()}$$

$I^{\Phi}_{t()}$ créatif et $I^{\Phi'}_{t()}$ immune.

Soit $\Theta\varphi_i$ l'ensemble d'indices de la fonction récursive partielle $\varphi_i() \varepsilon P_1$; on montre d'abord que si $B \subset I^{\Phi}_{t()}$ est immune et $A = I^{\Phi}_{t()}-B$ simple en $I^{\Phi}_{t()}$, alors B ne peut contenir $I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i$:

<u>*Lemme*</u> *4.5.2.-* Si $A \subset I^{\Phi}_{t()}$ est simple en $I^{\Phi}_{t()}$ et $B = I^{\Phi}_{t()}-A$ immune, alors $A \cap (I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i) \neq \emptyset$ si $I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i \neq \emptyset$, (cf. déf. 4.1.).

A montrer que $I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i \neq \emptyset \implies I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i$ possède un sous-ensemble récursivement énumérable infini.

Si A est simple en $I^{\Phi}_{t()}$, alors A rencontre tout sous-ensemble récursivement énumérable de $I^{\Phi}_{t()}$, d'où le lemme.

Or, la classe de machines que nous avons choisie admet un speed-up global $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{kt()}$ $\forall k \varepsilon N$, i.e :

$$\Phi_i() \leq t() \text{ p.p.} \implies (\exists j)\varphi_i() = \varphi_j() \ \& \ k \cdot \Phi_j() \leq \Phi_i() \leq t() \quad \text{p.p.}$$

On obtient un ensemble récursivement énumérable d'indices pour $\varphi_i()$ par une application itérée du speed-up global.

D'autre part, si $A \subset I^{\Phi}_{t()}$ n'est pas créatif, alors A ne peut contenir $I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i$ tout entier :

<u>*Lemme*</u> *4.5.3.*- A créatif <=> $\exists \varphi_i,\ i \in I^{\Phi}_{t()}$ & $g() \in R_1$

$$g(I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta\varphi_i) \subseteq A$$

$$g(\overline{I^{\Phi}_{t()}} \cap \Theta\varphi_i) \subseteq \bar{A}.$$

(a) => : Supposons A créatif, alors $I_{t()} \leqslant_m A$ par une certaine fonction récursive $g()$.

Soit φ_i, $i \in I^{\Phi}_{t()}$ arbitraire, alors

$$j \in \Theta\varphi_i \cap I^{\Phi}_{t()} \Rightarrow g(j) \in A$$

$$j \in \Theta\varphi_i \cap \overline{I^{\Phi}_{t()}} \Rightarrow g(j) \in \bar{A},$$

$g()$ la fonction du lemme - c'est une conséquence immédiate de la m-réductibilité de $I^{\Phi}_{t()}$ à A.

(b) <= : Supposons qu'il existe une fonction $g() \in R_1$ et une fonction fixée $\varphi_{i_0}(x)$ avec les propriétés requises par le lemme ; il faut montrer que A est créatif, donc $I^{\Phi}_{t()} \leqslant_m A$.

On définit une fonction $h() \in R_1$ de façon que

$$\varphi_{h(x)}(n) = \begin{cases} \varphi_{i_0}(n) & \text{si} \quad \Phi_x(n) \leqslant t(n) \\ \varphi_{i_1}(n) & \text{si} \quad \Phi_x(n) > t(n) \end{cases}$$

où $\varphi_{i_1}() = \varphi_{i_0}()$ & $\Phi_{i_1}() > t()$ i.a. :

si $x \in I^{\Phi}_{t()} \Rightarrow \Phi_{h(x)}(n) = \min\{\Phi_{i_0}(n), \Phi_x(n), \Phi_t(n)\} \leqslant t(n)$ p.p.

et $x \notin I^{\Phi}_{t()} \Rightarrow \Phi_{h(x)}(n) > \Phi_{i_1}(n) > t(n)$ i.a.

(L'énumération $\varphi_{h(x)}$ est très similaire à celle de $R^{\Phi}_{t()}$ en complexité $t()$, lorsque $\Phi_x() \leqslant t()$ p.p. - on supprime les détails).

Il en résulte que

$$x \in I^{\Phi}_{t()} \Rightarrow h(x) \in I^{\Phi}_{t()} \;\&\; \varphi_{h(x)}() = \varphi_{i_0}() \;\&\; \Phi_{h(x)}() \leq t() \quad \text{p.p.} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) \in (\Theta\varphi_{i_0} \cap I^{\Phi}_{t()}) \Rightarrow g(h(x)) \in A$$

$$x \notin I^{\Phi}_{t()} \Rightarrow h(x) \in \overline{I^{\Phi}_{t()}} \;\&\; \varphi_{h(x)}() = \varphi_{i_0}() \;\&\; \Phi_{h(x)}() > t() \quad \text{i.a.} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) \in (\Theta\varphi_{i_0} \cap \overline{I^{\Phi}_{t()}}) \Rightarrow g(h(x)) \in \bar{A}.$$

Donc $I^{\Phi}_{t()} \leq_m A$ par $f() = g(h())$.

Il suffit maintenant pour prouver le théorème de construire un ensemble récursivement énumérable A, simple en $I^{\Phi}_{t()}$ et non-créatif.

Définition 4.1.- Soient A et B infinis, l'ensemble récursivement énumérable A est dit simple en B si $A \subset B$ et si $B - A$ est immune.

Lemme 4.5.4.- Il existe un ensemble infini A, récursivement énumérable, simple en $I^{\Phi}_{t()}$ et non-créatif.

Soit $A_1 \subset I^{\Phi}_{t()}$ récursif infini et tel que $I^{\Phi}_{t()}-A_1$ est infini et récursivement énumérable.

Soit $f(N) = A_1$, $f()$ injectif $\in \mathcal{R}_1$ et soit C simple et de degré b (Yates [53] théorème 2) ; $f(C) \equiv_T C$ par la propriété de $f()$.

Si l'on pose $f(C) = B_1$, alors B_1 est simple en A_1 et du degré b.

On construit un ensemble B_2, simple en $I^{\Phi}_{t()}-A_1$ et de degré $\leq b$ et on pose $A = B_1 \cup B_2$.

A est récursivement énumérable et de degré b, A est aussi simple en $I^{\Phi}_{t()}$, car si $I^{\Phi}_{t()}-A$ contient un ensemble infini récursivement énumérable M, alors $M \cap (I^{\Phi}_{t}-A_1)$ est infini ou $M \cap A_1$ est infini, mais ceci est impossible, car B_1 est simple en A_1 et B_2 est simple en $I^{\Phi}_{t()}-A_1$.

Construction de B_2 :

Soit $a(n) \varepsilon \mathcal{R}_1$ une fonction injective qui énumère un ensemble du degré b et soit $\{R_e\}$ la famille de tous les sous-ensembles récursivement énumérables de $I^{\Phi}_{t()}-A_1$, R^n_e l'ensemble dans R_e après n pas du procédé d'énumération :

$$n_e = \mu\, n[(\exists x)(x > 2e \;\&\; x \geq a(n) \;\&\; x \in R^n_e)]$$

$$x_e = \mu\, x[x > 2e \;\&\; x \geq a(n_e) \;\&\; x \in R^{n_e}_e]$$

$B_2 = \{x_e\}$; B_2 rencontre tout sous-ensemble infini de $I^{\Phi}_{t()}-A_1$; donc B_2 est simple en $I^{\Phi}_{t()}-A_1$.

On démontre $I^{\Phi'}_{t()} = I^{\Phi}_{t()}-A$. Soit $f(N) = A$.

A récursivement énumérable <=> $\exists\, P^{(2)}$, prédicat récursif, tel que

$$i \in A \iff (\exists x)\, P(i,x)$$

$$i \in \overline{A} \iff (\forall x) \neg P(i,x).$$

Si l'on pose

$$\Phi'_i(x) = \begin{cases} \Phi_i(x) & \text{si } \forall u \leq x \neg P(i,u) \\ \\ \Phi_i(x) + t(x) + 1 & \text{si } \exists u \leq x \quad P(i,u) \end{cases}$$

$\Phi'_i(x)$ est obtenu de $\Phi_i(x)$ par une condition récursive ;

$$\Phi_i(x) \text{ défini} \iff \Phi'_i(x) \text{ défini}$$

$$\text{et } \Phi_i(x) = y \text{ récursif} \iff \Phi'_i(x) = y \text{ récursif.}$$

Ainsi Φ' est de nouveau une mesure bien définie et $R^{\Phi'}_{t()}$ remplit les conditions du théorème.

Notons que $R^{\Phi'}_{t()}$ possède une présentation récursivement énumérable $W_{f(t)}$, car $I^{\Phi'}_{t()}$ contient toutes les variantes finies de $f(x) = 0$, c'est-à-dire la classe des fonction $\{f_i() \mid f_i(x) = 0 \text{ p.p.}\}$

En outre, par les lemmes, $I^{\Phi'}_{t()}$ doit contenir un indice pour toute fonction dans $R^{\Phi}_{t()}$. Supposons le contraire; alors il existe un $\vartheta_i()$ tel que $h(\Theta\vartheta_i \cap I^{\Phi}_{t()}) \subseteq A$ et $h(\Theta\vartheta_i \cap \overline{I^{\Phi}_{t()}}) \subseteq \bar{A}$, où $h(x) = \lambda x[x]$, la fonction identité. Mais dans ce cas A doit être créatif, une contradiction.

On construit maintenant une mesure Φ'' telle que $I^{\Phi''}_{t()} \subset I^{\Phi'}_{t()}$, $I^{\Phi''}_{t()}$ immune, $R^{\Phi''}_{t()}$ récursivement énumérable, mais non uniformément en un indice t pour $t()$.

Définition 4.2.- Une classe $\mathbb{C}$ de fonctions récursives est effectivement discrète (ou encore classe de fonctions effectivement isolées) s'il existe une classe canoniquement énumérable d'ensembles finis $A = \{[\alpha_i]\}_{i\varepsilon N}$ telle que $\forall f \in \mathbb{C} \ \exists \alpha_i \in A \ [[\alpha_i] = [f^{n_i}]]$ &

$$\& \ \forall \alpha_i \in A \ \forall f \in \mathbb{C} \ \forall g \in \mathbb{C} \ [[\alpha_i] = [f^{n_i}] \ \& \ [\alpha_i] = [g^{n_i}] \Rightarrow f() \cong g()]$$

où $[f^{n_i}]$ est l'indice canonique de la restriction à $[0,1,\ldots,n_i]$ du graphe de $f()$ et $|\alpha_i| = n_i+1$.

Théorème 4.5.5.- Il existe une mesure Φ et une borne de complexité $t()$ telle que

(i) $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable

(ii) Aucune présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{t()}$ ne peut être obtenue effectivement à partir d'un indice t pour $t()$.

Soit $I^{\Phi''}_{t()} \subset I^{\Phi'}_{t()}$, $R^{\Phi''}_{t()} \subset R^{\Phi'}_{t()}$, $R^{\Phi''}_{t()}$ effectivement discret; $R^{\Phi''}_{t()} = C$, C donné

Une mesure adéquate Φ'' peut être définie par :

$$\Phi''_i(x) = \begin{cases} \Phi_i(x) & \text{si } \forall u \leqslant x \ \neg P(i,u) \ \& \ i \in B \\ \Phi_i(x) + t(x) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $P(i,x)$ est le prédicat du théorème 4.5.1. et B une présentation récursive de $R^{\Phi''}_{t()}$ telle que $(I^{\Phi}_{t()} \cap \Theta R^{\Phi''}_{t()}) \subset B$ (c.à.d. $P(i,x)$ et B sont donnés).

(i) Supposons qu'il existe $W_{f_1(t)} \subseteq \Theta R^{\Phi''}_{t()}$ et $\Psi_1(i,t)$ tel que $\Psi_1(N,t) = W_{f_1(t)}$. Alors $\Psi_1^{-1}(W_{f_1(t)}) = \{x | \Psi_1(x,t) \in W_{f_1(t)}\}$ serait récursivement énumérable. Mais si $A \subseteq I^{\Phi''}_{t()}$, alors A est immune et $A = \Psi_1^{-1}(W_{f_1(t)})$ est impossible.

(ii) Supposons qu'il existe une fonction récursive (partielle) $\Psi(i,n,t) = \Psi_t(i,n)$ telle que

$i \in I^{\Phi''}_{t()} \Longrightarrow \Psi_t(i,n)$ défini & $\varphi_{\Psi_t(i,n)}() = \varphi_i()$

$i \notin I^{\Phi''}_{t()} \Longrightarrow \Psi_t(i,n)$ indéfini $\vee \varphi_{\Psi_t(i,n)}() \in R^{\Phi''}_{t()}$.

Soit $W_{f_2(t)} = \{i | \Psi_t(i,n)$ défini$\}$ et $W_{f_2(t)} \not\subseteq \Theta R^{\Phi''}_{t()}$.

Soit $\varphi_i \in W_{f_2(t)} - \Theta R^{\Phi''}_{t()}$; $\varphi_{\Psi_t(i,n)}() \in R^{\Phi''}_{t()}$ pour tout n.

Si $\varphi_{\Psi_t(i,n)}(x) = \varphi_i(x)$ pour $x < n$, alors

$\varphi_{\Psi_t(i,n)}() \in R^{\Phi''}_{t()} \Longrightarrow \varphi_{\Psi_t(i,n)}(x) \neq \varphi_i(x)$, $x \geq n$, mais aussi

$\varphi_{\Psi_t(i,n)}() \in R^{\Phi''}_{t()} \Longrightarrow \exists \alpha_i\ [\alpha_i] = [\varphi^{n_i}_{\Psi_t(i,n)}]$.

Mais alors il existe $m > n$ tel que $\varphi_{\Psi_t(i,n)}() \neq \varphi_{\Psi_t(i,m)}()$ et $[\alpha_i] = [\varphi^{n_i}_{\Psi_t(i,m)}]$, donc $R^{\Phi''}_{t()}$ ne peut pas être une classe effectivement discrète, contradiction.

4.6.1.- *Enumérabilité uniforme de classes de complexité*.-

Le début de la section 4.4. a été consacré à la construction d'une mesure Φ et d'une Φ-t-classe de complexité qui n'est pas récursivement énumérable - $R^{\Phi}_{t()}$ ne possède pas de présentation récursivement énumérable. Par la suite on montre l'existence d'une mesure telle que toute classe $R^{\Phi}_{t()}$ a une présentation récursivement énumérable mais telle que celle-ci n'est pas uniformément effective en un indice pour $t()$. Il résulte de la classification des ensembles d'indices $\Theta R^{\Phi}_{t()}$, que pour tout Φ et tout $t()$ suffisamment grand, la classe correspondante est récursivement énumérable avec une présentation dont l'indice peut être trouvé uniformément en un indice pour $t()$. Le procédé de construction d'une telle présentation de $R^{\Phi}_{t()}$ est basé sur un principe dû à Hartmanis et Stearns [8] et à A. Borodin [6].

Il est d'ailleurs possible d'étendre cette construction aux classes partielles (classes de fonctions récursives partielles de complexité bornée par une fonction partielle $\varphi_k \in P_1$).

La construction s'applique alors en particulier à l'énumération récursive des classes totales dans le cas où la borne de complexité est une fonction récursive totale [42].

Théorème 4.6.1.- Soient Φ et $\varphi_k() \in P_1$ tels que $R^{\Phi}_{\varphi_k}$ contient toutes les fonctions qui sont zéro presque partout dans leur domaine de définition. Dans ce cas $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$ est récursivement énumérable et il existe une fonction récursive $g() \in R_1$ telle que $W_{g(k)}$ est une présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$.

Démonstration.-

Soit $P(i,n,x,k) \Longleftrightarrow (\forall u < x)[[u \leq \Pi_1(n) \;\&\; [\Phi_k(u) > x \vee \Phi_i(u) \leq \Pi_2(n)]]$
$$\vee [u > \Pi_1(n) \;\&\; [\Phi_k(u) > x \vee \Phi_i(u) \leq \varphi_k(u)]]]$$

et $Q(i,n,x,k) \iff [[x \leq \Pi_1(n) \; \& \; \Phi_i(x) \leq \Pi_2(n)]$

$[x > \Pi_1(n) \; \& \; [\Phi_i(x) \leq \varphi_k(x) \vee \Phi_i(x) \leq \Phi_k(x)]]]$;

P est un prédicat récursif (même si φ_k et φ_i sont indéfinis pour un certain argument $u < x$) ; la valeur de Q par contre est indéterminée si $x > \Pi_1(n)$ et $\varphi_i(x) = \varphi_k(x) =$ indéfini ;

On pose

$$\varphi_{f(i,n,k)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } P(i,n,x,k) \; \& \; Q(i,n,x,k) \; \& \; [\varphi_k(x) \text{ défini} \\ & \qquad \vee \; \varphi_i(x) \text{ défini}] \\ 0 & \text{si } \neg P(i,n,x,k) \vee \neg Q(i,n,x,k) \; \& \; [\varphi_k(x) \text{ défini} \\ & \qquad \vee \; \varphi_i(x) \text{ défini}] \\ \text{div} & \text{si } \varphi_k(x) \text{ divergent} \; \& \; \varphi_i(x) \text{ divergent} ; \end{cases}$$

Assertion : $\lambda in\, x\, \varphi_{f(i,n,k)}(x)$ énumère $R^{\Phi}_{\varphi_k}$ et il existe $g \in R_1$ tel que $\operatorname{dom} \varphi_{g(k)} = W_{g(k)} = \{f(i,n,k) \mid i,n \in \mathbb{N}\}$ est une présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{\varphi_k}$.

(a) $\Phi_i \leq \varphi_k$ presque partout et $\operatorname{dom} \varphi_k \subseteq \operatorname{dom} \varphi_i \Rightarrow (\exists n)$ $[\varphi_{f(i,n,k)} \simeq \varphi_i]$: on construit un n qui satisfait à cette condition :

$n = \langle \Pi_1(n), \Pi_2(n) \rangle$, $\Pi_1(n) = n_1 = \mu y[y < x \; \& \; \varphi_k(x) \text{ déf.} \Rightarrow \Phi_i(x) \leq \varphi_k(x)]$ et

et $\Pi_2(n) = n_2 = \max\{\Phi_i(x) \mid x \leq \Pi_1(n) \; \& \; \varphi_k(x) \text{ défini}\}$

(b) $\Phi_i > \varphi_k$ i.a. $\Longrightarrow (\forall n)(\exists u)(\forall v)[v \geq u \Rightarrow \neg P(i,n,v,k)]$

$\Longrightarrow (\forall n)[\varphi_{f(i,n,k)} = 0$ presque partout$]$

(c) $(\forall i)(\forall n)[\operatorname{dom} \varphi_k \subseteq \operatorname{dom} \varphi_{f(i,n,k)}]$;

Supposons $\varphi_k(x)$ défini ; P peut être évalué ; si P est faux : $\varphi_{f(i,n,k)}(x) = 0$, donc défini.

Si P est vrai, Q peut être évalué (car $\varphi_k(x)$ est défini) alors si Q est vrai $\Longrightarrow \varphi_i(x)$ est défini & $\varphi_{f(i,n,k)}(x) = \varphi_i(x)$.

si Q est faux $\Rightarrow \varphi_{f(i,n,k)}(x) = 0$;

donc $\psi_{f(i,n,k)}(x)$ est défini. Supposons $\psi_k(x)$ indéfini ; si $\psi_i(x)$ est défini => Q est toujours vrai et

$$\psi_{f(i,n,k)}(x) = \begin{cases} \psi_i(x) & \text{si P est vrai} \\ 0 & \text{si P est faux} \end{cases}$$

donc $\psi_{f(i,n,k)}(x)$ est défini ;

Si $\psi_i(x)$ est indéfini ==> Q indéfini => $\psi_{f(i,n,k)}(x) = \psi_i(x) =$ = indéfini et dom $\psi_k \subsetneq$ dom $\psi_{f(i,n,k)}$ et $\lambda i\ n\ x[\psi_{f(i,n,k)}(x)]$ énumère $R^{\Phi}_{\psi_k}$; soit $f(i,n,k) = \psi_{h(k)}(i,n)$ par s-m-n ;

$$\rho f = \rho\psi_{h(k)} = W_{g(k)} = \text{dom } \psi_{g(k)}.$$

Corollaire 4.6.1.- Soit Φ tel que $\psi_i() = 0$ p.p. ==> $\psi_i() \in R^{\Phi}_{\lambda x[0]}$; alors $\forall t()\ R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable avec une présentation r.é. uniforme en un indice pour $t()$.

4.6.2.- *Exemple d'une classe de machines telle que*

$$\forall t()\ R^{\Phi}_{t()} \text{ est } t()\text{-présentable} : W_{f(t)} \subset I^{\Phi}_{t()}.$$

On montre ici qu'il existe une classe de machines pour laquelle l'algorithme d'énumération du théorème 4.6.1. peut être effectué en ressource $t()$: il existe une présentation $t()$-bornée et uniforme en t.

Lorsque l'on calcule $f(i,x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } \Phi_i(x) \leq t(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $f(i,x) = \varphi_{s(i)}(x)$ et il existe une fonction récursive $r() \in \mathcal{R}_2$ telle que $\Phi_{s(i)}(x) \leq r(x,t(x))$ p.p. : en effet

on pose

$$h(i,x,y) = \begin{cases} \Phi_{s(i)}(x) & \text{si } \Phi_i(x) \leq y \vee \varphi_{s(i)}(x) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et avec $r(x,y) = \max\limits_{i \leq x}\{h(i,x,y)\}$ on a

$$\Phi_{s(i)}(x) \leq \max_{x \geq i} h(i,x,t(x))\}$$

Lorsqu'une classe de machine a la propriété de pouvoir calculer "en parallèle" sans perte de ressource :

$$\varphi_{s(i,j)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } \Phi_i(x) \leq \Phi_j(x) \\ \varphi_j(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\Phi_{s(i,j)}(x) = \min\{\Phi_i(x), \Phi_j(x)\}$; alors une analyse de l'algorithme de 4.6.1. montre que pour tout $t(x) \geq x$ il existe une présentation de $R^{\Phi}_{t()}$ avec $r(x,t(x)) = t(x)$:

Théorème 4.6.2.- Soit $<\varphi,\Phi>$ une classe de machines pouvant calculer en parallèle sans perte de ressource et soit $\Phi_i(x) \geq x$, alors $\forall t() \in R_1$ $R^{\Phi}_{t()}$ est t()-présentable.

Soit $<\varphi,\Phi>$ la classe des machines de Turing qui lit toujours complètement ses données et soit $\Phi =$ longueur utilisée de la bande de travail.

On montre [9] que pour cette classe de machines, l'énumération de $R^{\Phi}_{t()}$ du théorème 4.6.1. peut être effectuée en ressource $t()$, si $\varphi_{f(i,n,t)}(y)$ est calculé de la manière suivante :

1) $P(i,n,\Pi_1(n)+1,t)$ est évalué ;

si $\neg P(i,n,\Pi_1(n)+1,t)$ alors $\varphi_{f(i,n,t)}(y) := 0$

2) si $y \leq \Pi_1(n)$ alors $\varphi_{f(i,n,t)}(y) := \varphi_i(y)$

sinon $\Phi_{f(i,n,t)}(y) := y$

3) $(\forall x)\ \Pi_1(n) < x < y$ on évalue $P(i,n,y,t)$ de la manière suivante :

si $\Phi_t(x) < y$ on évalue $\varphi_i(x)$ avec complexité $\Phi_i(x) \leq \varphi_t(x)$;

si $\Phi_t(x) > y$ ou $\Phi_t(x) < y$ & $\Phi_i(x) > \varphi_t(x)$, c'est-à-dire

$\neg P(i,n,y,t)$ alors $\varphi_{f(i,n,t)}(y) := 0$

4) on évalue $Q(i,n,y,t)$ de la façon suivante :

$\varphi_i(y)$ est calculé en ressource $\Phi_i(y)$;

(a) si $\Phi_i(y) \leq \Phi_{f(i,n,t)}(y)$ alors $\varphi_{f(i,n,t)}(y) := \varphi_i(y)$

(b) si $\Phi_i(y) > \Phi_{f(i,n,t)}(y)$ alors <u>aller a</u> 5,

(c) si $\Phi_i(y) \leq \Phi_{f(i,n,t)}(y)$ et $\varphi_i(y)$ est indéfini $\Leftrightarrow$

une configuration de la machine est répétée : $\varphi_{f(i,n,t)}(y) := 0$

5) On continue de calculer $Q(i,n,y,t)$:

$t(y)$ est calculé en ressource $\Phi_t(y) \leq \Phi_{f(i,n,t)}(y)$:

(a) si $\Phi_t(y) \leq \Phi_{f(i,n,t)}(y)$, alors $\neg Q(i,n,y,t)$ et $\Phi_{f(i,n,t)}(y) := 0$

(b) si $\Phi_t(y) > \Phi_{f(i,n,t)}(y)$ alors on pose $\Phi_{f(i,n,t)}(y) := \Phi_{f(i,n,t)}(y)+1$

<u>aller a</u> 4).

<u>Assertion</u> : Cet algorithme termine avec $\Phi_{f(i,n,t)}(y) \leq t(y)$ p.p.

1) l'algorithme s'arrête en 1) ou en 2) : $\Phi_{f(i,n,t)}(y) = \text{constant} \leq y \leq t(y)$ pour un y suffisamment grand.

2) l'algorithme s'arrête en 3) : $\Phi_{f(i,n,t)}(y) = y$

3) sinon, (a) si $\Phi_t(y) \geq t(y) \geq \Phi_i(x)$, $\Phi_i(y)$ converge le premier,

$Q(i,n,y,t)$ et $\Phi_{f(i,n,t)}(y) = \Phi_i(y) \leq t(y)$

(b) si $\Phi_i(y) > \Phi_t(y) > t(y)$, $\neg Q(i,n,y,t)$

ou $\Phi_t(y) > \Phi_i(y) > t(y)$, $Q(i,n,y,t)$

et $\Phi_{f(i,n,t)}(y) > t(y)$, dans ce cas il existe $u > y$ tel que $\forall y' \geq u$ $\neg P(i,n,y',t)$ et l'algorithme s'arrête en 3), avec $\Phi_{f(i,n,t)}(y') = y'$.

4.7.- *La difficulté de l'énumération de classes de fonctions.*-

4.7.1.- *Les classes de fonctions* $S^{\Phi}_{t()} = \{\Phi_i() \ | i \in I^{\Phi}_{t()}\}$.

Nous avons vu que les classes de complexité $R^{\Phi}_{t()}$ sont toujours récursivement énumérables pour $t() \in R_1$ suffisamment grand et que, dans ce cas, $I^{\Phi}_{t()}$ est un ensemble productif.

On montre ici que les classes de fonctions de complexité correspondantes $S^{\Phi}_{t()} = \{\Phi_i() | i \in I^{\Phi}_{t()}\}$ ne sont pas, en général, récursivement énumérables. On considère donc le cas de bornes de complexité suffisamment grandes (pour $I^{\Phi}_{t()}$ récursivement énumérable, $S^{\Phi}_{t()}$ est évidemment récursivement énumérable).

Les propriétés de $S^{\Phi}_{t()}$ dépendent de la mesure, c'est-à-dire de la classes de machines choisie. On considère ici le cas $\Phi = L$, la longueur de la bande utilisée au cours du calcul par une machine de Turing T. On sait, que $\Phi = L$ est une mesure propre, c'est-à-dire que $\Phi_i() \in R^{\Phi}_{\Phi_i()}$ ou encore $\forall i \ \exists j \ \ \varphi_j() = \Phi_i() \ \& \ \Phi_j() \leq \Phi_i()$ p.p.

<u>*Théorème*</u> *4.7.1.*- Si $<\varphi,\Phi> = <T,L>$, alors il existe $g() \in R_1$ tel que pour tout $\Phi_i()$, $\Phi_i() \geq g()$ p.p., $S^L_{\Phi_i()}$ n'est pas récursivement énumérable.

Pour la démonstration, on utilise une propriété de densité de la classe de fonctions $\{L_i\} = \{\Phi_i\}$ par rapport à la relation d'ordre $\Phi_i() \leq \Phi_j()$ p.p.

Soit $g()$ tel que $\Phi_i() \geq g()$ p.p. ==> $I^L_{\Phi_i()}$ $\sum_2$-complet ; donc $R^L_{\Phi_i()}$ récursivement énumérable.

Soit W_n une présentation d'une classe (récursivement énumérable) $\mathbb{C}$ de fonctions de complexité, $\mathbb{C} \subseteq S^L_{\Phi_i()}$ et $W_n \subseteq I^L_{\Phi_i()}$. On construit une fonction de complexité $\Phi_k()$, uniformément en un indice pour Φ_i et en n et tel que $\Phi_k() \in S^L_{\Phi_i} - \mathbb{C}$.

Si $\mathbb{C}$ est vide $(W_n = \emptyset)$, soit $\Phi_k()$ une fonction de complexité pour $\varphi_k() \overset{\sim}{=} \Phi_i()$ qui est $\Phi_i()$-bornée ;

Si $W_n \neq \emptyset$, soit $n() \in R_1$ une fonction récursive qui énumère W_n sans répétition.

On choisit deux fonctions dans $\mathbb{C}$, $\Phi_{j_1}()$ et $\Phi_{j_2}()$, telles que $g() \leq \Phi_{j_1}() \leq \Phi_{j_2}() \leq \Phi_i()$ p.p. . Un tel choix est effectif, si l'on utilise une version du théorème de compression (Rabin - Blum). Il implique en outre que $\Phi_{j_1}()$ et $\Phi_{j_2}()$ sont non-bornés.

$\Phi_{j_1}()$ n'est pas nécessairement non-décroissant, mais les conditions imposées sur $\Phi_{j_1}()$ impliquent, qu'il existe une séquence infinie de points $\{b_i\}$ telle que $(\forall b_i)$

$$\Phi_{j_1}(b_i) \leq \Phi_{j_1}(b_{i+1})$$

$$\Phi_{j_1}(b_i) < \Phi_{j_2}(b_i).$$

On construit donc simultanément une séquence finie $\{b_1,..,b_r\}$ et la fonction $\Phi_k()$ de la manière suivante : Au pas x : On calcule $\varphi_{j_1}(x)$ avec complexité $\Phi_{j_1}(x)$;

1) si $\Phi_{j_2}(x) \leq \Phi_{j_1}(x)$, alors on pose $\Phi_k(x) = \Phi_{j_1}(x)$ (il y a éventuellement un nombre fini de tels arguments).

2) si $\Phi_{j_1}(x) < \Phi_{j_2}(x)$, alors on construit la séquence finie $\{b_1,\ldots, b_r\}$,

$$b_1 = \mu n\{\Phi_{j_1}(n) \leq \Phi_{j_1}(x) \ \&\ \Phi_{j_1}(n) < \Phi_{j_2}(n)\},$$
$$b_{i+1} = \mu n\{n > b_i \ \&\ \Phi_{j_1}(n) \leq \Phi_{j_1}(x) \ \&\ \Phi_{j_1}(n) < \Phi_{j_2}(n) \ \&\ \Phi_{j_1}(b_i) \leq \Phi_{j_1}(n)\},$$

$b_r = x.$

S'il existe $b_i \leq x$ tel que $\varphi_{n(\Pi_0(b_i))}(b_i)$ converge en ressource $\Phi_{j_1}(x)$ et tel que $\varphi_{n(\Pi_0(b_i))}(b_i)$ ne convergeait pas en ressource $\Phi_{j_1}(y)$, $y < x$, et si

$\Phi_{n(\Pi_0(b_i))}(b_i) \neq \Phi_{j_1}(b_i)$, alors on pose $\Phi_k(x) := \Phi_{j_1}(x)$

sinon on pose $\Phi_k(x) := \Phi_{j_2}(x)$;

en utilisant ressource $\Phi_{j_2}(x)$ pour la recherche d'un tel b_i.
Plus formellement, soit

$$L(0) := \emptyset$$

et au pas x :

$$b_0 = (\mu b_i \leq x)[\Phi_{n(\Pi_0(b_i))}(b_i) \leq \Phi_{j_1}(x) \;\&\; b_i \notin L(x)]$$

si un tel b_i existe ;

alors on pose

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \Phi_{j_1}(x) & \text{si } L(x) = \emptyset \\ \Phi_{j_1}(x) & \text{si } b_0 \text{ existe et si } \Phi_{n(\Pi_0(b_0))}(b_0) \neq \Phi_{j_1}(b_0) \\ \Phi_{j_2}(x) & \text{si } b_0 \text{ n'existe pas ou si } \Phi_{n(\Pi_0(b_0))}(b_0) = \Phi_{j_1}(b_0) \end{cases}$$

$L(x+1) := L(x)$ si b_0 n'existe pas

$L(x+1) := L(x) \cup \{b_0\}$ sinon

Par définition, $\Phi_k() \neq \Phi_j()$ i.a. pour tout $\Phi_j() \in \mathbb{C}$.
Comme cet algorithme peut être effectué en ressource $\Phi_{j_1}(x)$, si $\Phi_k(x) = \Phi_{j_1}(x)$ et en ressource $\Phi_{j_2}(x)$ sinon, on a

$$\Phi_{j_1}() \leq \Phi_k() \leq \Phi_{j_2}() \leq \Phi_i() \quad \text{p.p.}$$

<u>*Corollaire*</u> *4.7.-1.* : Si $\langle \vartheta, \Phi \rangle = \langle T, L \rangle$, alors il existe $g() \in \mathcal{R}_1$ tel que pour tout $t() > g()$ p.p. $S^L_{t()}$ n'est pas récursivement énumérable.

4.7.2.- *Sous-classes de* $R^{\Phi}_{t()}$.

Le sujet de ce paragraphe est la famille des sous-ensembles récursivement énumérables, mais arbitraires de $R^{\Phi}_{t()}$.

Les classes $R^{\Phi}_{t()}$ peuvent être énumérées en ressource $g(t())$ p.p. (pour tout $t()$ suffisamment grand), où $g() \varepsilon R_1$ dépend de Φ, mais non de $t()$ (voir aussi chapitre V) ; de plus il y a des mesures telles que $g(x) = x$, c'est-à-dire que $R^{\Phi}_{t()}$ est $t()$-énumérable. Ceci est aussi vrai pour les classes $R^{\Phi}_{t()}$ qui ont la propriété de Ritchie-Cobham (quelle que soit la mesure Φ).

On prouve ici que cette propriété n'est pas vérifiée pour toutes les sous-classes récursivement énumérables, mais arbitraires, de $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$. La démonstration est conçue pour $\varphi_k() \varepsilon P_1$; elle devient plus simple lorsque $\varphi_k() \varepsilon R_1$.

Quel que soit $\varphi_k() \varepsilon P_1$, on peut construire une classe de fonctions récursives partielles $\mathbb{C} \subsetneqq R^{\Phi}_{\varphi_k()}$ qui est telle que si $\varphi_z(i,x)$ est universel pour $\mathbb{C}$, alors

$$\lambda\ x\ \Phi_z(i,x) > h(\varphi_k(x)) \quad \text{i.a.}$$

dans dom φ_k pour un $h() \varepsilon R_1$ donné, mais pourtant :

$$(\forall i \varepsilon \Theta C)\ (\exists j \varepsilon \Theta C)\ \varphi_{g(z,i)}() \simeq \varphi_j()\ \&\ \Phi_j() \leq \varphi_k() \text{ p.p. dans dom } \varphi_k.$$

Il convient de noter que la seule existence d'un tel $\varphi_k()$ résulte du théorème du gap, mais qu'ici on prouve la propriété pour toute classe $R^{\Phi}_{\varphi_k()}$ avec dom φ_k infini.

La construction d'une telle classe $\mathbb{C}$ fournit les résultats suivants :

(i) Un théorème qui est similaire (pour les sous-classes de $R^{\Phi}_{\vartheta_k()}$) au théorème de Rabin-Blum : si ϑ_z est universel pour $\mathbb{C}$, alors $\Phi_z() > \Phi_i()$ i.a. pour toute fonction telle que $\Phi_i() \leq g(\vartheta_k())$ p.p. dans dom ϑ_k.

(ii) On construit une classe $\mathbb{C}$ dont tout élément est Φ-t()-calculable, par conséquent il existe une présentation de $\mathbb{C}$ qui ne contient que des indices t()-calculables, mais en vertu du point (i) elle n'est pas récursivement énumérable.

(iii) La famille des sous-classes récursivement énumérables de $R^{\Phi}_{t()}$ n'est pas énumérable pour un Σ^0_1-prédicat. Il reste à déterminer le degré minimal n d'un Σ^0_n-prédicat qui énumère cette famille.

Par une généralisation de la construction, on obtient une classe $\mathbb{C}$ dont toute présentation récursivement énumérable et uniforme en un indice k (de $\vartheta_k()$) est arbitrairement difficile. Ceci indique que la propriété d'une fonction isolée d'être Φ-$\vartheta_k()$-calculable n'a pas une très grande signification pratique. Il semblerait intéressant d'étudier des classes de fonctions dont la complexité est bornée de façon plus "effective" ou "démontrable".

Soit $C^{\Phi}_{\vartheta_k} \subset R^{\Phi}_{\vartheta_k}$ la classe des fonctions $\{f() | \rho f() \subseteq \{0,1\}$ & $f() \in R_{\vartheta_k}\}$; on restreint $\mathbb{C}$ à cette classe. Lorsque $\vartheta_k()$ est total, $C^{\Phi}_{\vartheta_k}$ est la classe des fonctions caractéristiques et Φ-$\vartheta_k()$-calculables. On dénotera par $F^{\Phi}_{\vartheta_k}$ la classe des ensembles $\{x | f(x) = 1$ & $f() \in C^{\Phi}_{\vartheta_k}\}$ et par $E^{\Phi}_{t()}$ la classe des ensembles $\{x | f(x) = 1$ & $f() \in C_{t()}$, t() total$\}$.

On a d'abord les résultats préliminaires suivants :

(a) Soit $t()$ total, l'ensemble des algorithmes (indices) $t()$-calculables de fonctions $\vartheta_i() \varepsilon R_2$ qui sont universelles pour une sous-classe de $C^{\Phi}_{t()}$ n'est pas récursivement énumérable.

Proposition 4.7.2.- L'ensemble $(*)$ $\{k|(\forall i)\ \vartheta_k(i,x) \varepsilon C^{\Phi}_{t()}\ \&\ \Phi_k(i,x) \leq t(x)$ p.p.$\}$ n'est pas récursivement énumérable.

Démonstration : Par un simple procédé de diagonalisation, supposons que $(*) = A = W_i$ soit récursivement énumérable, alors $C_{k,i} = \{x|\vartheta_{f(k,i)}(x) = 1\}$ serait une énumération des sous-classes C_i, $i = 0,1,2,\ldots$ $(C_i = \{C_{i,0},C_{i,1},\ldots\})$ de $E^{\Phi}_{t()}$.

La classe des fonctions $\{1 \dot{-} \vartheta_{f(k,i)}(x)|i \varepsilon N\}$ détermine une sous-classe de $C^{\Phi}_{t()}$, c'est la classe $\bar{C}_k$ des ensembles $\{\bar{C}_{k,i}|i \varepsilon N\}$; car, pour tout $t()$ suffisamment grand, $E^{\Phi}_{t()}$ est supposé clos par rapport aux compléments.

Donc, $(\forall i)(1 - \vartheta_{f(i,i)}(x)) \varepsilon C^{\Phi}_{t()}$ et par conséquent $C = \{1 \dot{-} \vartheta_{f(i,i)}(x)|i \varepsilon N\} = \{\vartheta_{f(k_0,i)}(x)|i \varepsilon N$ pour un certain k_0 ;

d'où $\vartheta_{f(k_0,k_0)}(x) = 1 \dot{-} \vartheta_{f(k_0,k_0)}(x)$, contradiction.

Remarque.- Soit $\vartheta_{g(k)}(x) = 1 \dot{-} \vartheta_{f(k,k)}(x)$.

La proposition précédente ne permet pas d'affirmer que $\{\vartheta_k(i,x)|k \varepsilon (*)\}$ n'est pas récursivement énumérable, il faudrait pour cela prouver que, pour tout sous-ensemble récursivement énumérable A de $(*)$ et pour toute sous-classe $C_{k,i}$ correspondante, on ait :

$$(\forall k)\ [(\exists x)(\forall y)\ \vartheta_{f(k,x)}(\ ) \neq \vartheta_{g(y)}() \vee (\exists y)(\forall x)\ \vartheta_{f(k,x)} \neq \vartheta_{g(y)}] .$$

(b) Le même procédé de diagonalisation sur les indices peut être appliqué lorsque $\vartheta_k()$ est récursif partiel ; on obtient la contradiction sur dom φ_k :

$$(\forall x)\ \varphi_k(x) \text{ défini} \implies \varphi_{f(i_0,i_0)}(x) = 1 \dot{-} \varphi_{f(i_0,i_0)}(x) .$$

(c) *Proposition 4.7.3.*- La classe des fonctions

$$(**)\quad \{\varphi_z(i,x) \mid \varphi_k(x) \text{ défini} \implies \varphi_z(i,x) \text{ défini } \& \ \Phi_z(i,x) \leq \varphi_k(x) \text{ p.p. dans dom } \varphi_k\}$$

est récursivement énumérable.

On procède de façon analogue que pour les fonctions à un argument ; soit $s(z,i) \in R_2$ la fonction obtenue par le théorème s-m-n, $\lambda\ x\ \varphi_z(i,x) = \varphi_{s(z,i)}(x)$, alors

$\varphi_{f(s(z,i),n,k)}(x) \in C^{\Phi}_{\varphi_k}$ et $\varphi_f \simeq \varphi_{s(t,i)}$ ou bien φ_f prend la valeur zéro presque partout dans dom φ_k.

On obtient ainsi une énumération de sous-classes

$$C_0 = C_{0,0}\ ,\ C_{0,1}\ ,\ C_{0,2},\ \ldots$$

$$C_1 = C_{1,0}\ ,\ C_{1,1}\ ,\ C_{1,2},\ \ldots$$

de $F^{\Phi}_{\varphi_k}$ $(E^{\Phi}_{\varphi_k})$ qui correspondent à la classe des fonctions (**) ; on veut montrer que les sous-classes de $C^{\Phi}_{\varphi_k}$ ne sont pas récursivement énumérables, si $\{\varphi_{f(n,i)}() \mid n,i \in N\}$ énumère une famille de sous-classes de $C^{\Phi}_{\varphi_k}$, alors il existe une classe récursivement énumérable $\{\varphi_{g(y)}() \mid y \in N\} \subseteq C^{\Phi}_{\varphi_k}$ telle que

$$(\forall k)\left[(\exists x)(\forall y)\ \varphi_{f(k,x)}() \neq \varphi_{g(y)}() \lor (\exists y)(\forall x)\ \varphi_{f(k,x)}() \neq \varphi_{g(y)}()\right] ,$$

autrement dit, $\{\varphi_{g(y)}()|y \in N\}$ est différent de toute sous-classe énumérée.

Discussion informelle de la construction :

Soit $R_i = \{x|\varphi_{g(i)}(x) = 1\}$; si l'on diagonalise sur les classes $C_{i,j}$ de la manière suivante :

$$\varphi_{g(0)}(0) = 1 \dot{-} \varphi_{f(0,0)}(0),$$

$$\varphi_{g(0)}(1) = 1 \dot{-} \varphi_{f(0,1)}(1),$$

$$\varphi_{g(i)}(x) = 1 \dot{-} \varphi_{f(i,x)}(x), \quad \text{etc...}$$

On a bien $(\forall k)(\exists i)(\forall j)\ R_i \neq C_{k,j}$, car $R_k \neq C_{k,j}$.

Mais on ne peut pas garantir que $R_i \in E^{\Phi}_{\varphi_k}$, car $\varphi_{f(i,x)}(x) \notin C^{\Phi}_{\varphi_k}$ en général.

D'autre part, il n'est pas suffisant d'avoir $R_0 \neq C_{0,0}$, $R_1 \neq C_{1,1}$, etc...

Il faut donc construire $\varphi_{g(i)}$ de façon que

$\varphi_{g(0)} \neq \varphi_{f(0,x_{00})}$ pour un certain x_{00}

$\forall\ n \geq 1 \quad \varphi_{g(n)} \neq \varphi_{f(0,x_{00})}$

$$\varphi_{g(n)} \neq \varphi_{f(n,x_{0n})} \neq \varphi_{f(n,x_{1n})} \neq \ldots \neq \varphi_{f(n,x_{nn})}$$

où les x_{ij} sont choisis de manière à garantir que $\varphi_{g(i)}() \in C^{\Phi}_{\varphi_k}$ pour tout i.

D'autre part, si R_i est l'ensemble déterminé par $\varphi_{g(i)}()$ et si la famille d'ensembles $C_{k,i}$ est déterminée par la famille des fonctions $\varphi_{f(k,i)}()$, alors $\{\varphi_{f(k,i)}|i \in N\}$ n'est pas une indexation de $\varphi_{g(i)}$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de fonction récursive $h() \in \mathcal{R}_1$ telle que $(\forall i)\ \vartheta_{f(k,h(i))} \simeq \vartheta_{g(i)}$, sinon $\{f(k,h(i)) | i \in N\}$ serait présentation $t()$-calculable de la classe $\{\vartheta_{g(i)} | i \in N\}$, ce qui est exclu par la construction de cette classe.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.7.4.- Soit $C^{\Phi}_{\vartheta_k}$ la classe des fonctions récursives partielles à valeurs dans $\{0,1\}$ et $\vartheta_k()$-calculables presque partout dans dom ϑ_k, $C^{\Phi}_{\vartheta_k} \subset \mathcal{R}^{\Phi}_{\vartheta_k}$, alors on peut construire une classe récursivement énumérable $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \ldots\}$ d'ensembles $\vartheta_k()$-calculables, $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}^{\Phi}_{\vartheta_k}$, telle que :

(i) $\mathcal{F}$ est différente de toutes les classes C_i dans une énumération des sous-classes récursivement énumérables C_i $\vartheta_k()$-calculables de $\mathcal{F}^{\Phi}_{\vartheta_k}$: $(\forall i)\ C_i \neq \mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{F}$ n'est pas $\vartheta_k()$-calculable et plus généralement aucune classe $\vartheta_k()$-calculable est une indexation de $\mathcal{F}$.

Démonstration du théorème : Soit $\{D_{f(x)} | x \geq 0\} = \{Q_x | x \geq 0\}$ une séquence canoniquement énumérable d'ensembles finis tels que $(\forall x)\ Q_x \subsetneq Q_{x+1}$ et $\bigcup_i Q_i = S$, S récursivement énumérable et $S \notin \mathcal{F}^{\Phi}_{\vartheta_k}$.

Une application du théorème de compression donne immédiatement un tel ensemble S qui n'est pas $\vartheta_k()$-calculable. On suppose en outre qu'il existe une séquence récursivement énumérable $\{A_x\}$ d'ensembles récursivement énumérables de $\mathcal{F}^{\Phi}_{\vartheta_k}$ tels que $(\forall x)\ Q_x \subsetneq A_x$. L'existence d'une telle séquence $\{A_x\}$ est immédiate pour la définition de $\mathcal{F}^{\Phi}_{\vartheta_k}$.

Pour satisfaire aux conditions du théorème, on considère une énumération des sous-classes $\vartheta_k()$-calculables de $C^{\Phi}_{\vartheta_k}$ à l'aide de la classe des fonctions

(**). Cette énumération sera dénotée par $\{\vartheta_{f(n,i)}(x) | n,i \in \mathbb{N}\}$ comme ci-dessus ; on sait qu'il existe une fonction $g_1() \in R_1$ telle que $\Phi_{f(n,i)}(x) \leq g_1(\vartheta_k(x))$ p.p. dans dom ϑ_k. On pose $C_{n,i} = \{x | \vartheta_{f(n,i)}(x) = 1\}$. Soit, d'autre part $\{\vartheta_{f_2(i)}(x)\ i \in \mathbb{N}\}$ une énumération $\vartheta_k()$-calculable de la classe des fonctions (partielles) qui déterminent $\{A_i\}$; $A_i = \{x | \vartheta_{f_2(i)}(x) = 1\}$.

On cherche à construire la classe F du théorème de façon que $F_i = \text{def}\{x | \vartheta_{g(i)}(x) = 1 \ \& \ (\exists n)\ \vartheta_{g(i)}() \simeq \vartheta_{f_2(n)}()\}$.

La classe F devra donc satisfaire à la double infinité des conditions suivantes :

$$F \neq C_0 \quad \& \quad F_0 \in F^{\Phi}_{\vartheta_k}$$

$$F \neq C_1 \quad \& \quad F_1 \in F^{\Phi}_{\vartheta_k} \quad ;$$

On procède à une diagonalisation pour satisfaire à la première condition : $F \neq C_i$ pour tout i. Simultanément, on satisfait à la seconde condition, si l'on peut faire $F_i = A_j$ pour un certain j.

Soit $C^x_{i,j} = \{y | \vartheta_{f(i,j)}(y) = 1 \ \& \ \Phi_{f(i,j)}(y) \leq x\}$, $C^x_{i,j}$ représente les valeurs de $C_{i,j}$ qui ont été identifiées en ressource x.

Si $C_{i,j} = A_k$, alors $C^x_{i,j} \subsetneq S$ et $(\exists y)\ C^x_{i,j} \subsetneq Q_y$, car $\bigcup_x Q_x = S$ et $Q_x \subsetneq Q_{x+1}$. Dans ce cas, il existe un plus grand y tel que $Q_y \subsetneq C^x_{i,j}$. On pose simplement $F_i = A_z$ pour un z tel que $Q_{y+1} \subsetneq A_z$. Au cours du calcul, on peut augmenter la valeur de y si cela s'avère nécessaire (si $x \in S$ - dom ϑ_k, alors $\Phi_{f_2(z)}(x)$ peut être arbitrairement grand).

Supposons que $C_{i,j} = A_p$ et que le plus grand y tel que $Q_y \subsetneq A_p$ soit $y(p)$, alors $Q_{y(p)+1} \subsetneq F_n \ \forall n \geq i$ et $C_{i,j} \neq F_n \ \forall n \geq i$.

Si, par contre, $(\forall x)\ C_{i,j} \neq A_x$, mais $C_{i,j} \subseteq S$, alors $(\exists y)\ Q_y \not\subseteq C_{i,j}$, sinon $C_{i,j} = S$; mais $S \notin F^{\Phi}_{\varphi_k}$, une contradiction. Donc $C_{i,j}$ ne peut pas être contenu dans S et contenir Q_y pour tout y.

Si l'on diagonalise de la façon suivante :

$$F_0 \supsetneq C_{0,0} \quad \& \quad F_i \supseteq F_0 \quad \forall\, i > 0, \quad \text{alors} \quad F \neq C_0$$

$$F_1 \supsetneq C_{1,0} \quad \& \quad F_i \supseteq F_1 \quad \forall\, i > 1, \quad \text{etc...}$$

on pourrait faire $F_i = S$ pour un certain i, c'est-à-dire $F_i \notin F^{\Phi}_{\varphi_k}$. On évite cette possibilité en cherchant le plus petit $C_{i,j}$ qui diffère de F_i de la façon suivante :

$n = 0$: soit x_0 le plus petit x tel que $C_{0,x} \subsetneq F_0$

$n = 1$: soient x_{11}, x_{12} les plus petits indices x et y tels que :

$$C_{1,x} \neq C_{1,y}, \quad C_{1,x} \subsetneq F_1 \quad \& \quad C_{1,y} \subsetneq F_1 \quad \text{etc...}$$

De cette manière, on a $F_0 \neq C_{1,x_{11}} \vee F_0 \neq C_{1,x_{12}}$ également.

L'ALGORITHME.

On se donne une énumération simultanée de $\{Q_x\}$, de $\{A_x\}$ et de $\{C_{i,j}\}$.

Soit $I_{i,j} = \text{def}\{x \mid (\exists y)(\exists z)(Q_x \subseteq C^y_{i,j} \subseteq Q_z)$ où $C^y_{i,j}$ est l'ensemble des points de $C_{i,j}$ qui ont pu être identifiés en ressource y.

On montre d'abord que les $I_{i,j}$ sont des ensembles finis.

En effet, $C_{i,j} \neq S$, car $S \notin F^{\Phi}_{\varphi_k}$:

(a) Si $S - C_{i,j} \neq \emptyset$ avec $\bigcup\limits_x Q_x = S$, on a :

$$(\exists x_0)(\forall x \geqslant x_0)\ Q_x \not\subseteq C_{i,j} \quad \text{et} \quad I_{i,j} \quad \text{est fini.}$$

(b) Si $C_{i,j} - S \neq \emptyset$, alors $(\exists x)\ C^x_{i,j} - S \neq \emptyset$, ainsi $(\exists x)(\forall y)\ C^x_{i,j} \not\subseteq Q_y$. Donc, si $u \in I_{i,j}$, alors $Q_u \subseteq C^{x_1}_{i,j} \subseteq Q_{y_1}$ avec $x_1 < x$. Ceci n'est possible que pour un nombre fini de u, donc $I_{i,j}$ est toujours fini.

Soit $I^x_{i,j} \subseteq I_{i,j}$ l'ensemble d'indices obtenu en ressource x. On énumère

$$I^x_{i,j_0},\ I^x_{i,j_1},\ \ldots,\ I^x_{i,j_i} \quad \text{où} \quad j_i = \mu_k[I_{i,j_0} \neq \ldots \neq I_{i,k} \neq \emptyset].$$

On se donne une infinité de marques, indicées par i, m_i, associées à une liste d'entiers de manière que, pour tout i, m_i ne change de position qu'un nombre fini de fois. A chaque "pas" (ressource) x, $m_i(x)$ est associé à un certain nombre de la liste.

On définit une fonction $\lambda ix\ a_i(x)$ de la façon suivante :

$a_i(0) = 0$ pour tout i

$a_i(x) = \max\limits_{0 \leq k \leq i} \{y \mid y \in \bigcup\limits_k I^x_{i,j_k}\}$ si j_i existe tel que

$$I^x_{i,j_0} \neq \ldots \neq I^x_{i,j_i} \neq \emptyset$$

$a_i(x) = 0$ sinon.

A l'aide de $a_i(x)$ on détermine le mouvement des marques $m_i(x+1)$:

$m_i(0)$ pour tout i,

et avec la convention $m_{-1}(x) = 0$ pour tout x ; pour tout $i \geq 0$ et pour tout $x > 0$:

$$m_i(x+1) := \begin{cases} m_i(x) & \text{si } \max\limits_{j\leq i} \{a_j(x+1)+1,\ m_{i-1}(x+1)+1\} \leq m_i(x) \\ \mu y\left[F_i^x \subseteq Q_y \ \& \ y \geq \max\limits_{j\leq i} \{a_j(x+1)+1,\ m_{i-1}(x+1)+1\}\right]. & \end{cases}$$

Ceci fixe la position des marques $m_i(x)$ au pas $0,1,\ldots,x+1,\ldots$

Soit $A_i^x = \mathrm{def}\{y \mid \varphi_{f_2(i)}(y) = 1 \ \& \ \Phi_{f_2(i)}(y) \leq x\}$; soit $\varphi^x_{f_2(i)}$ la restriction à $\{y \mid \Phi_{f_2(i)}(y) \leq x\}$ du graphe de la fonction récursive partielle $\varphi_{f_2(i)}(y)$; on construit le graphe d'une fonction récursive partielle $\Psi_i(y)$ par

$$\Psi_i^0 = \emptyset, \quad \Psi_i^{x+1} = \Psi_i^x \cup \varphi^{x+1}_{f_2(m_i(x+1))}$$

et on obtient ainsi le graphe $\bigcup\limits_x \Psi_i^x$ d'une fonction récursive partielle $\Psi_i(y) = \varphi_{g(i)}(y)$; on pose $F_i = \{y \mid \varphi_{g(i)}(y) = 1\}$.

Il reste à montrer que $\lim\limits_x m_i(x) = m_i$ existe, c'est-à-dire que $m_i(x) = m_i(x+1) = \ldots$ devient stable pour un certain x et, par conséquent $F_i = A_{m_i}$ pour tout i.

1) S'il existe $j_0,\ldots,j_i$ tel que $I_{i,j_0} \neq \ldots \neq I_{i,j_i} \neq \emptyset$, alors, pour tout x suffisamment grand (tel que $j \leq j_i \implies I^x_{i,j} = I_{i,j}$),

$$a_i(x) = \max\left[z \in \bigcup_{k=0}^{i} I_{i,j_k}\right].$$

Ainsi, $a_i(x)$ prend une valeur définitive après x pas.

2) Sinon $I_{i,j} \mid j \geq 0$ est fini (ou vide) ; alors $\bigcup\limits_j I_{i,j}$ possède un plus grand élément n et $a_i(x) \leq n$ pour tout x (ou $a_i(x) = 0$ pour tout x). Ainsi $m_i(x) = m_i$ est stationnaire à partir d'un certain x.

Il reste à montrer que les classes $\{F_i\}_{i\varepsilon N}$ et $\{C_{k,j}\}_{j\varepsilon N}$ sont différentes pour chaque k. Il suffit de considérer le cas où $(\forall j)$ $C_{i,j} \in \{A_x | x \geq 0\}$.

Dans ce cas $(\forall i)(\forall j)\ I_{i,j} = \{y | Q_y \subseteq C_{i,j}\}$.
Si $\{I_{i,j} | j \geq 0\}$ est fini, alors

$$\neg[(\exists y)(\exists k)\ Q_y \subsetneq C_{i,k}] \vee (\exists y)[(\exists k)\ Q_y \subseteq C_{i,k}\ \&\ (\forall z > y)$$
$$(\forall j) Q_z \nsubseteq C_{i,j}\ .$$

Par définition de $m_i(x)$, $m_{i+1} > m_i$ pour tout i, donc, pour tout y, il existe F_n qui contient Q_y. Ainsi $C_i \neq F$. Dans le cas où $a_i(x) = \max z[z \in \bigcup_{k=0}^{i} I_{i,j_k}] \neq 0$, si $n \geq i$ alors $m_n > \max(m_i(x)) \geq \max\{a_i(x)\}$, d'où $Q_{m_n} \nsubseteq C_{i,j_v}$ pour $0 \leq v \leq i$.

Donc $F_n \neq C_{i,j_0}, \neq \ldots, \neq C_{i,j_i}$ pour tout n tel que $n \geq i$, et par conséquent $C_i \neq F_i$.

Le théorème 4.7.4. peut être renforcé de la façon suivante :

<u>*Théorème*</u> *4.7.5.*- Soit $C^{\Phi}_{\vartheta_k}$ la classe des fonctions récursives partielles à valeurs dans $\{0,1\}$ et $\vartheta_k()$-calculables presque partout dans dom ϑ_k et soit $h(x) > x \in R_1$ arbitraire donné alors, on peut construire une classe récursivement énumérable F d'ensembles $\vartheta_k()$-calculables, $F \subseteq F^{\Phi}_{\vartheta_k}$ telle que

(i) F est différente de toutes les classe C_i, $C_i \subseteq F^{\Phi}_{h(\vartheta_k())}$

(ii) F n'est pas $h(\vartheta_k())$-calculable et aucune classe récursivement énumérable et $h(\vartheta_k())$-calculable est une indexation de F.

La démonstration est similaire à celle du théorème 4.7.4. .

Soit $\bigcup_x Q_x = S$ et S un ensemble qui n'est pas $h(\vartheta_k())$-calculable ; la famille des $C_{i,j}$ est cette fois obtenue par une énumération de toutes les fonctions qui sont $h(\vartheta_k())$-calculables. La classe $\{A_x\}$ par contre est $\vartheta_k()$-présentable : $(\forall x)\ A_x \in F^{\Phi}_{\vartheta_k}$. Le reste de la démonstration est parallèle à celle du théorème 4.7.4.

CHAPITRE V

HIERARCHIES TRANSFINIES DE CLASSES DE COMPLEXITE BORNEE ET LEURS PROPRIETES.

Nous considérons dans ce chapitre un certain nombre d'aspects du problème de la classification des fonctions récursives. Ce problème est traditionnellement défini comme la recherche de principes généraux permettant la caractérisation des fonctions récursives à l'aide de critères de leur complexité. Il semble donc naturel de baser de telles classifications sur une définition axiomatique de la mesure de complexité dans le sens de Rabin et Blum.

Cette définition s'applique d'abord aux algorithmes, mais elle induit aussi un ordre partiel dans la classe des fonctions calculables comme cela a été défini au § 2.2., les degrés de difficulté ou degrés de complexité. Les classes des fonctions récursives de complexité bornée $R^{\Phi}_{t()}$ peuvent être considérées comme la réunion d'un certain nombre de degrés de difficulté ; le théorème de Rabin-Blum permet d'obtenir effectivement, pour toute fonction récursive donnée $f()$, une autre fonction récursive $g()$, d'un degré de complexité supérieur à celui de $f()$.

Une autre classification des fonctions récursives est celle que l'on obtient par les différentes hiérarches sub-récursives. Etant donné une définition de certaines classes de fonctions, on impose une relation d'ordre entre ces classes et on classifie les fonctions suivant leur appartenance à telle ou telle classe. Si, en particulier, une famille de classes est ordonnée par l'inclusion, une fonction peut être caractérisée par la plus petite classe dont elle fait partie.

Ainsi, une hiérarchie de fonctions récursives primitives peut être construite en appliquant un certain nombre d'opérations de clôture aux fonctions initiales de chaque classe. Ces dernières comportent entre autres les niveaux successifs d'une "fonction hiérarchique". La hiérarchie de Grzegorczyk [25], par exemple, inclut les niveaux successifs $\lambda xy\ f_n(x,y)$ d'une fonction d'Ackermann $\lambda nxy\ f_n(x,y)$. L'existence d'une hiérarchie qui contient exactement les fonctions récursives primitives est la conséquence du fait que, d'une part, les $\lambda xy\ f_n(x,y)$ sont toutes récursives primitives, chaque classe $\mathcal{E}^n$ étant proprement incluse dans $\mathcal{E}^{n+1}$ et que d'autre part, toute fonction récursive primitive est majorée par un $f_n()$, n suffisamment grand.

A la place des fonctions $\lambda xy\ f_n(x,y)$ on peut utiliser une suite de fonctions singulières ; $g_o(x) = 2^x, \ldots, g_{n+1}(x+1) = g_n(g_{n+1}(x))$ - on démontre, que non seulement toutes les fonctions d'une classe sont majorées par une fonction $\lambda x\ f_{n+1}(k,x)$, mais aussi qu'il existe des mesures de Blum Φ par rapport auxquelles toute fonction de la même classe est calculable en ressource $g_n^k(x)$.

La relation qui existe entre hiérarchies et classes de complexité et que nous avons traitée en quelque détail au chapitre 3, a probablement été utilisée pour la première fois de façon systématique par R.W. Ritchie. Dans sa thèse [40], R.W. Ritchie a obtenu une hiérarchie de fonctions récursives élémentaires en prenant comme mesure de complexité la longueur occupée de la bande d'une machine de Turing (l'encombrement de la mémoire externe), cette longueur étant bornée pour toute fonction d'une classe par une fonction appartenant à la classe précédente ; la classe initiale est celle des fonctions calculables par des automates finis.

Ce procédé de construction de hiérarchies, basé sur une mesure de complexité, peut être considérablement généralisé : l'on peut le fonder sur une mesure de Blum arbitraire, définir une famille de classes $R^{\Phi}_{t_a}$, totalement ordonnée par l'inclusion et associer les ordinaux constructifs aux classes comme mesure de la difficulté des fonctions de cette classe.

Etant donné une classe initiale $R^{\Phi}_{t_o()}$ -exacte[1] ou non - on peut construire effectivement une extension $R^{\Phi}_{t_1()}$ de manière que l'existence d'une fonction $f() \varepsilon R^{\Phi}_{t_1()}$ & $f() \notin R^{\Phi}_{t_o()}$ soit garantie par le théorème de Rabin-Blum.

On verra, que suivant la méthode de l'extension des classes aux ordinaux limite , différentes "propriétés pathologiques" apparaîssent. Les "théorèmes de pathologie" des hiérarchies classiques [43] peuvent être évités, mais au prix d'une autre pathologie. En outre, ces hiérarchies basées sur la complexité ne sont pas uniques et on en déduit un certain nombre de conséquences pour la structure de la classe des fonctions récursives totales qui caractérisent une même classe de complexité. Cette propriété permet également une généralisation intéressante de certains théorèmes de la théorie de complexité.

1) On appelle la classe $R^{\Phi}_{t()}$ exacte lorsque $t() \varepsilon \{\Phi_i\}_{i \varepsilon N}$.

5.1.- *La génération de hiérarchies transfinies de classes de complexité.*

La définition des classes de complexité $R^{\Phi}_{t()}$, $t() \in R_1$, et le théorème de Rabin-Blum suggèrent la construction de plusieurs variantes de hiérarchies basées sur la complexité. On se donne un système de notation pour les ordinaux constructifs et on associe une notation (un ordinal) avec chaque classe de fonction de la hiérarchie.

La construction de hiérarchies sub-récursives consiste en deux opérations distinctes d'extension de classes ; une pour les classes indicées par (une notation pour) un ordinal successeur et l'autre pour les classes qui correspondent à des ordinaux limite . Dans le cas des hiérarchies de classes de complexité, le théorème de Rabin-Blum garantit l'existence d'une "fonction de saut" h_{Φ} telle que

$$R^{\Phi}_{\Phi_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_{\Phi}(x,\Phi_i(x))}$$

et plus généralement, il existe une fonction de saut $h_M(x,f_i(x))$ pour tout ensemble mesuré de fonctions $M = \{f_i(\ )\}_{i\in N}$ telle que

$$R^{\Phi}_{f_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_M(x,f_i(x))} .$$

La diagonalisation, utilisée dans les hiérarchies de Kleene et de Feferman [24] aux ordinaux limite , garantit que $\bigcup_{\alpha<\beta} F_{\alpha} \subsetneq F_{\beta}$; mais si l'ensemble des notations pour les ordinaux constructifs n'est pas limité, on obtient déjà toutes les fonctions récursives au premier ordinal transfini :

$\forall\, f() \in R_1\ \exists a$ tel que

1) $|a| = \omega$

2) $f() \in F_a$

(le théorème de Myhill-Routledge).

La théorie de complexité permet de construire effectivement une borne de complexité $t_{\alpha}()$ telle que $R^{\Phi}_{t_{\alpha}()} = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{\Phi}_{t_i()}$ si $t_i() \leq t_{i+1}()$, et de cette façon les classes $R^{\Phi}_{t_{\alpha}}$, $|\alpha|$ = ordinal limite, ne sont pas plus grandes que l'union des classes prédécesseurs (le second théorème de Meyer-McCreight, théorème 2.4.4.).

Cette propriété de clôture des classes $R^{\Phi}_{t()}$ garantit donc que les hiérarchies ainsi construites peuvent être prolongées pour tous les ordinaux constructifs ; mais il convient de noter que le théorème de Rabin-Blum ne s'applique qu'à une classe mesurée de fonctions ; il faut donc restreindre la classe des bornes $t_{\alpha}()$ à un ensemble mesuré M.

5.1.-1. Présentation et extension d'une classe $R^{\Phi}_{t()}$, $t() = \varphi_t() \in R_1$, arbitraire.

On prouve d'abord un certain nombre de résultats relatifs à l'extension des classes $R^{\Phi}_{t()}$, c'est-à-dire relatifs à la complexité minimale de fonctions $\varphi_i() \notin R^{\Phi}_{t()}$. Rappelons la définition de la présentation récursivement énumérable d'une classe $R^{\Phi}_{\varphi_t()}$.

Soit $\varphi_t() \in P_1$ et suffisamment grand. Dans ce cas, il existe une fonction récursive $f() \in R_1$ telle que $W_{f(t)}$ est présentation récursivement énumérable de $R^{\Phi}_{t()}$:

$$\varphi_{g(i,n,t)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } P \,\&\, Q \,\&\, (\Phi_t(x) < \infty \vee \Phi_i(x) < \infty) \\ 0 & \text{si } \neg P \vee \neg Q \,\&\, (\Phi_t(x) < \infty \vee \Phi_i(x) < \infty) \\ \text{div} & \text{si } \varphi_t(x) \text{ et } \varphi_i(x) \text{ divergent} \end{cases}$$

où $P = P(i,n,x,t) \iff (\forall u < x)\big[[u \leq \pi_1(n) \,\&\, [\Phi_t(u) > x \vee \Phi_i(u) \leq \pi_2(n)]]$

$\vee\, [u > \pi_1(n) \,\&\, [\Phi_t(u) > x \vee \Phi_i(u) \leq \varphi_t(u)]]\big]$

et $Q = Q(i,n,x,t) \iff [[x \leq \pi_1(n) \ \& \ \Phi_i(x) \leq \pi_2(n)]$

$\vee [x > \pi_1(n) \ \& \ [\Phi_i(x) \leq \varphi_t(x) \vee \Phi_i(x) \leq \Phi_t(x)]]]$,

donc $\lambda inx\, \varphi_{g(i,n,t)}(x)$ énumère $R^{\Phi}_{\varphi_t()}$ et il existe $f() \in R_1$ tel que $\mathrm{dom}\, \varphi_{f(t)} = W_{f(t)} = \{g(i,n,t) | i,n \in N\}$ est présentation de $R^{\Phi}_{\varphi_t()}$.

(Il convient de noter qu'en général on ne peut pas simplifier la définition de $\varphi_{g(i,n,t)}$ - au cas où $\varphi_t()$ serait total, car cette propriété n'est pas décidable, les fonctions récursives totales ne peuvent pas être effectivement distinguées des fonctions partielles).

La définition de $\varphi_{g(i,n,t)}$ semble indiquer que $\Phi_{g(i,n,t)}$ dépend de l'indice t de la borne $\varphi_t()$, c'est-à-dire de la fonction de complexité $\Phi_t(x)$. Ceci est vrai lorsque $\varphi_t()$ est une fonction partielle ; mais dans le cas où $\varphi_t()$ est total, la complexité de $\varphi_{g(i,n,t)}$ ne dépend en effet que de la fonction $\varphi_t()$ elle-même.

Afin de déterminer une borne supérieure pour la complexité de $\varphi_{g(i,n,t)}(x)$, on calcule cette fonction aux arguments x où $\varphi_i(x)$ ou $\varphi_t(x)$ convergent et on pose

$$p(i,n,t,x,y) = \begin{cases} \Phi_{g(i,n,t)}(x) & \text{si } \Phi_i(x) \leq y \vee \Phi_t(x) \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

mais $\Phi_i(x) \leq y \vee \Phi_t(x) \leq y \iff \min\{\Phi_i(x),\Phi_t(x)\} \leq y$;

donc, avec $h(t,x,y) = \max\limits_{i,n \leq x} \{p(i,n,t,x,y)\}$

$$h(t,x,\min[\Phi_i(x),\Phi_t(x)]) \geq \Phi_{g(i,n,t)}(x) \quad \text{p.p.}$$

Supposons maintenant $\varphi_t()$ total ; on a le

Théorème 5.1.1. : Soit $W_{f(t)}$ une présentation de $R^{\Phi}_{t()}$ et telle que $W_{f(t)} = \{g(i,n,t) | i,n \in N\}$ satisfait aux définitions données, alors il existe une fonction récursive totale $r() \in R_2$ telle que

$$\Phi_{g(i,n,t)}(x) \leq r(x,t(x)) \quad \text{p.p.}$$

$\varphi_t()$ total $\Longrightarrow$ $\varphi_{g(i,n,t)}()$ total ; on pose

$$q(i,n,t,x,y) = \begin{cases} \Phi_{g(i,n,t)}(x) & \text{si } \Phi_i(x) \leq y \quad \vee \neg P(i,n,x,t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $r(x,y) = \max\limits_{i,n,t \leq x} \{q(i,n,t,x,y)\}$,

donc $r(x,t(x)) = \max\limits_{i,n,t \leq x} \{q(i,n,t,x,t(x)\}$;

$q(i,n,t,x,t(x))$ est total et par conséquent aussi $r(x,y)$:

(a) si $(\forall x)\ x > n \Longrightarrow \Phi_i(x) \leq \varphi_t(x)$

alors $(\forall x)\ x > n \Longrightarrow q(i,n,t,x,t(x)) = \Phi_{g(i,n,t)}(x)$

(b) si $(\exists x)\ x > n \ \&\ \Phi_i(x) > \varphi_t(x)$

alors si $\Phi_i(x_o) > \varphi_t(x_o)$, il existe $x_1 > x_o$ tel que

$\neg P(i,n,x_1,t)$; donc $(\forall x)[x > x_1 \Longrightarrow q(i,n,t,x,t(x)) = \Phi_{g(i,n,t)}(x)$

et par conséquent $g(i,n,t) \in I^{\Phi}_{r(x,\varphi_t(x))}$.

Lors de la construction d'une hiérarchie $R^{\Phi}_{t_o()} \subsetneq R^{\Phi}_{t_1()} \subsetneq \cdots$ on cherche à étendre une classe $R^{\Phi}_{t()}$ pour $t() \in R_1$. Une fonction qui n'est pas dans $R^{\Phi}_{t()}$, mais qui est dans $R^{\Phi}_{s()}$, pour un certain $s() > t()$ p.p., peut être obtenue par diagonalisation par rapport à $R^{\Phi}_{t()}$ (on suppose que

$R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable). On peut de nouveau trouver une borne pour la complexité d'une telle fonction, mais cette borne dépend de $\Phi_t()$:

Théorème 5.1.2. : $\forall \Phi \ \exists\, r() \in R_2 \ \forall\, t() \in R_1 \quad R^{\Phi}_{t()} \subsetneqq R^{\Phi}_{r(x,\Phi_t(x))}$

Soit $\varphi_t() \in P_1$ arbitraire ;

avec $\pi(i,n) = \langle i,n\rangle = z$, on a

$$\varphi_{g(\pi_1(z),\pi_2(z),t)}(x) = \varphi_{h(t,z)}(x) \ ;$$

soit

$$\psi(t,x) = \begin{cases} \varphi_{h(t,x)}(x) + 1 & \text{si} \quad \varphi_t(x) \ \text{défini} \\ \text{div} & \text{si} \quad \varphi_t(x) \ \text{indéfini} \end{cases}$$

$\Psi(t,x) = \varphi_{s(t)}$ par s-m-n et on pose

$$p(t,x,u) = \begin{cases} \Phi_{s(t)}(x) & \text{si} \quad \Phi_t(x) \leq u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$r(x,u) = \max\limits_{x \geq t} \{p(t,x,u)\}$; donc

$r(x,\Phi_t(x)) \geq \Phi_{s(t)}(x)$ p.p.

Si $\varphi_t()$ est total, alors

$$\Psi(t,x) = \varphi_{s(t)}(x) = \varphi_{h(t,x)}(x) + 1$$

est une fonction totale qui n'est pas dans $R^{\Phi}_{t()}$.

D'autre part, avec $\varphi_t()$ total $\Longrightarrow \Phi_{h(t,x)}(x) \leq H(t,x,\min[\Phi_{\pi_1(x)}(x)\Phi_t(x)]$

et $\varphi_{s(t)}(x) = \varphi_{h(t,x)}(x) + 1 \Longrightarrow$

$$\Phi_{s(t)}(x) \leq H'(x,\Phi_t(x)) \text{ p.p. pour une certaine fonction } H' \in R_2.$$

Corollaire 5.1.3. : Quel que soit Φ, il n'y a pas de fonction récursive totale $s() \in R_2$ telle que

$$\forall\, t() \in R_1 \qquad R^{\Phi}_{t()} \subsetneq R^{\Phi}_{s(x,t(x))}$$

c'est-à-dire que pour des indices différents de $t()$, les classes $R^{\Phi}_{r(x,\Phi_t(x))} = R^{\Phi}_{t'()}$ sont différentes.

5.1.-2. La construction de fonctions de compression.

Le corollaire 5.1.3. n'est plus vérifié si l'on remplace "$\forall t() \in R_1$" par "$\forall f() \in M$", M ensemble mesuré de fonctions. C'est une conséquence du théorème de Rabin-Blum : $\forall\, \Phi\ \forall\, M\ \exists\, h_M \in R_2\ \forall\, f() \in M \quad R^{\Phi}_{f()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_M(x,f(x))}$.

On montre ici que le théorème de Rabin-Blum peut être également prouvé pour les classes de fonctions récursives partielles que l'on a appelées les "fonctions honnêtes" [9] et on précise les relations entre ces dernières et des classes mesurées M.

Définition 5.1. : Une classe non-triviale $C \subset P_1$ de fonctions récursives partielles est une classe de fonctions $r()$-honnêtes lorsque

$$\exists r() \in R_2 \forall f() \in C \quad \exists k \quad [\varphi_k() \cong f() \quad \&$$

$$(\exists u)(\forall x) \; [u < x \;\&\; x \in \text{dom } \varphi_k \implies \Phi_k(x) \leq r(x,\varphi_k(x))]].$$

L'indice k est alors appelé un indice $r()$-honnête pour $f()$.

Lemme 5.1.4. : Si C est un ensemble mesuré de fonctions récursives partielles, alors il existe une fonction récursive $h() \in R_2$ telle que $f() \in C \implies f()$

est h-honnête.

Soit $\lambda ixy[f_i(x) = y]$ un prédicat récursif ; définissons

$$g(i,x) = \varphi_z^{(2)}(i,x) = \begin{cases} \mu y[f_i(x) = y] & \text{si } (\exists y)[f_i(x) = y] \\ \text{div} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\lambda x\, \varphi_{b(i)}(x) = \lambda x\, \varphi_z^{(2)}(i,x) = f_i(x)$ par s-m-n,

on pose alors

$$p(i,x,y) = \begin{cases} \Phi_{b(i)}(x) & \text{si } \varphi_{b(i)}(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $h(x,y) = \max\limits_{i \leq x}\{p(i,x,y)\}$,

$$h(x,\varphi_{b(i)}(x)) \geq \Phi_{b(i)}(x) \quad \text{p.p.},$$

donc il existe $h() \in \mathcal{R}_2$ tel que $f() \in \mathcal{C} \implies f()$ est h-honnête.

Inversement, on prouve que la classe de toutes les fonctions récursives partielles et h-honnêtes est un ensemble mesuré de fonctions : il suffit pour cela d'énumérer effectivement toutes les fonctions h-honnêtes par un procédé analogue à celui du paragraphe 5.1.-1. ; on peut alors montrer que $\lambda ixy[\varphi_{s(i)}(x) = y]$ est un prédicat récursif pour la classe h-honnête $\{\varphi_{s(i)} | i \in N\} \subset \mathcal{P}_1$.

On obtient ainsi une légère généralisation du théorème de Rabin-Blum :

Théorème 5.1.5. : Si $\mathcal{H}$ est une classe de fonctions h-honnêtes alors il existe une fonction $h_{\mathcal{H}}() \in \mathcal{R}_2$, fonction de compression pour $\mathcal{H}$, telle que

$$\forall f() \quad f() \in \mathcal{H} \implies \mathcal{R}^{\Phi}_{f()} \subsetneq \mathcal{R}^{\Phi}_{h_{\mathcal{H}}(x,f(x))}.$$

Soit $f() \varepsilon H$ une fonction totale ; il existe un indice honnête pour $f()$: $\vartheta_k() = f()$ & $\Phi_k() \leq h(x,f(x))$ p.p.

Si l'on pose

$$\Psi(k,x) = \vartheta_{s(k)}(x) = \begin{cases} \max\limits_{i\leq x}\{\vartheta_i(x) \mid \Phi_i(x) \leq \vartheta_k(x)\} + 1 & \text{si} \quad (\exists\, j \leq x)[\Phi_j(x) \leq \vartheta_k(x)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\Phi_{s(k)}(x) \leq g(x,\Phi_k(x) \leq g(x,h(x,f(x)) = h'(x,f(x))$ par définition de $\Psi(k,x)$ et il suffit de poser $h_H(x,y) = h'(x,y)$.

5.1.-3. La construction de hiérarchies ω-uniques.

Soit $G \subset P_1$ une classe de fonctions honnêtes, caractéristique dans Φ(voir § 2.4.) et soit $s() \varepsilon R_1$ la fonction du premier théorème de Meyer-McCreight :

$$\vartheta_i() \text{ total} \implies \vartheta_{s(i)} \varepsilon G \cap R_1 \quad \& \quad I^{\Phi}_{\vartheta_i()} = I^{\Phi}_{\vartheta_{s(i)}} \; ;$$

et soit $h_G \varepsilon R_2$ une fonction de compression pour G.

On construit une hiérarchie de fonctions récursives à partir de t_o $t_o() \leq t_1() \leq t_2() \leq \ldots$ p.p. et une hiérarchie de classes de complexité correspondantes $R^{\Phi}_{t_o()} \subsetneq R^{\Phi}_{t_1()} \subsetneq R^{\Phi}_{t_2()} \subsetneq \ldots$ de manière que pour tout $t_i() \varepsilon G \cap R$, on détermine d'abord une fonction $t'_i()$ par une application de la fonction de compression h_G à $t_i()$, puis une autre fonction $t_{i+1} \varepsilon G \cap R_1$ par le théorème de Meyer-McCreight :

$$t_o() \to \lambda \times h_G(x,\vartheta_{t_o}(x)) = \vartheta_{t'_1}() \to \vartheta_{s(t'_1)}() = \vartheta_{t_1}() \;\varepsilon\; G \cap R_1 \quad \text{avec}$$

$$R^{\Phi}_{t_o()} \subsetneq R^{\Phi}_{h_G(x,\vartheta_{t_o}(x))} = R^{\Phi}_{t_1()} \; .$$

Une telle hiérarchie peut être prolongée pour tous les ordinaux constructifs si l'on utilise le théorème de compression et si l'on définit les classes aux ordinaux limite par une application du second théorème de Meyer-McCreight, suivie d'un passage dans l'ensemble mesuré caractéristique G. (De telles hiérarchies semblent avoir été définies simultanément par Bass et Young [16] et par R. Constable [21]).

Plus formellement, on définit :

Soit $\mathcal{O}$ le système universel de notation pour les ordinaux constructifs de Church-Kleene ; l'ensemble des notations $D_{\mathcal{O}}$ sera également désigné par $\mathcal{O}$.

Soient ν, π et κ les fonctions récursives partielles définies au § 1.7. A toute notation $a \in \mathcal{O}$ on fait correspondre une fonction récursive totale $t_a() \in G \cap R_1$ et une classe de complexité $R^{\Phi}_{t_a()}$ de la manière suivante :

(i) si $\nu(a) = 0$, $t_a() = \varphi_{s(t_o)}() \in G \cap R_1$:

si $R^{\Phi}_{t_o()}$, $t_o() \in R_1$, est la classe initiale et si 1 est la notation pour 0, alors $t_1() = \varphi_{s(t_o)}()$;

(ii) si $\nu(a) = 1$ et $\pi(a) = b$,

$$R^{\Phi}_{t_a} = R^{\Phi}_{h_G(x,t_b(x))} \quad \& \quad t_a() \in G :$$

si a est notation d'un ordinal successeur, $\alpha = \beta + 1$, $t_a()$ est obtenu de $t_b()$ par une application de la fonction de compression et passage dans G ;

(iii) si $\nu(a) = 2$, $(\forall n)\varphi_{\kappa(a)}(n) <_o \varphi_{\kappa(a)}(n+1) <_o a$,

$$R^{\Phi}_{t_a()} = \bigcup_n R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(a)}(n)}{}^{(1)} \quad \& \quad t_a() \in G :$$

si a est notation pour un ordinal limite α, alors on construit

---

(1) où $R^{\Phi}_{t_{\varphi_{\kappa(a)}(n)}()}$ est noté $R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(a)}(n)}$

$t_a()$ par le second théorème de Meyer-McCreight appliqué aux classes qui correspondent à une séquence fondamentale pour α et par passage dans G.

On vérifie immédiatement que la hiérarchie ainsi définie est non-dégénérée :

Théorème 5.1.6 : $a, b \in O$ et $a <_O b \implies R^{\Phi}_{t_a()} \subsetneqq R^{\Phi}_{t_b()}$.

Démonstration par induction :

$\nu(b) = 1$: (a) soit $\Pi(b) = a$

$$I^{\Phi}_{t_b()} = I^{\Phi}_{h_G(x,t_a(x))} \quad \text{et} \quad t_a() \in G \implies R^{\Phi}_{t_a()} \subsetneqq R^{\Phi}_{h_G(x,t_a(x))}$$

(b) soit $\Pi(b) \neq a$

avec $a <_O b$ et par l'hypothèse d'induction

$$R^{\Phi}_{t_a()} \subsetneqq R^{\Phi}_{t_{\Pi(b)}} \subsetneqq R^{\Phi}_{t_b()}, \quad \text{donc} \quad R^{\Phi}_{t_a()} \subsetneqq R^{\Phi}_{t_b()} \;;$$

$\nu(b) = 2$: $(\exists n) a <_O \varphi_{\kappa(b)}(n) <_O b$,

par l'hypothèse d'induction

$$R^{\Phi}_{t_a()} \subsetneqq R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(b)}(n)} \quad \text{et par définition} \quad \bigcup_n R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(b)}(n)} = R^{\Phi}_{t_b()}$$

$$\text{donc} \quad R^{\Phi}_{t_a()} \subsetneqq R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(b)}(n)} \subsetneqq R^{\Phi}_{t_b()}.$$

Similairement, on peut prouver que si le théorème 2.4.4. est utilisé aux ordinaux limites, on obtient une hiérarchie α-unique pour $\alpha \lesssim \omega$:

Théorème 5.1.7. : Si $a, b \in O$, $|a| = |b| = \omega$, alors $I^{\Phi}_{t_a} = I^{\Phi}_{t_b}$.

Soit $\psi_{\kappa(a)}(n) <_o a$, $\psi_{\kappa(b)}(n) <_o b$ et $\kappa(a) \neq \kappa(b)$;

il existe m,n, tels que $|\psi_{\kappa(a)}(m)| < |\psi_{\kappa(b)}(n)|$;

d'où $\psi_{\kappa(a)}(m) <_o \psi_{\kappa(b)}(n) \implies I^{\Phi}_{t\psi_{\kappa(a)}(n)} \subsetneq I^{\Phi}_{t\psi_{\kappa(b)}(n)} \subsetneq I^{\Phi}_{t_b}$

car les notations sont uniques pour $\alpha < \omega$.

L'inclusion inverse peut être montrée de la même façon et le théorème suit.

5.2.- *Résultats négatifs : incomplétude et pathologie.*

5.2.-1. Incomplétude.

Le premier résultat négatif concerne les hiérarchies basées sur le second théorème de Meyer - McCreight aux ordinaux limite. Bass et Young ont prouvé [16] que leur hiérarchie ne peut pas être complète :

$$\neg[\forall\ f() \in R_1\ \exists\ a \in \mathcal{O}\quad f() \in R^{\Phi}_{t_a()}].$$

Cette incomplétude de hiérarchies de classes de complexité est une conséquence du théorème du "speed-up" de Blum (théorème 2.2.3.) ; elle se retrouve dans toutes les hiérarchies de classes de complexité dont les classes $R^{\Phi}_{t_a()}$, $|a|$ = ordinal limite, sont "trop petites".

Lorsque l'on essaie d'élargir ces mêmes classes, par exemple par une diagonalisation, on peut prouver un théorème de Myhill, c'est-à-dire l'on obtient toutes les fonctions récursives à $\alpha = \omega$, si l'ensemble des notations n'est pas restreinte, et à $\alpha = \omega^2$ dans le cas contraire.

Soit donc G donné, h_G sa fonction de compression et soit

$$R^{\Phi}_{t_a()} = \bigcup_n R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(a)}(n)} \quad , \qquad |a| = \text{ordinal limite.}$$

D'après le théorème du speed-up, il existe des fonctions récursives $f()$ qui ont un h_G-speed-up :

(1) si $\varphi_i() = f()$ alors $\quad (\exists j)\varphi_j() = f()\ \&\ h_G(x,\Phi_j(x)) \leq \Phi_i(x)$ p.p.

Les indices des fonctions qui satisfont à (1) ci-dessus forment une chaîne infinie descendante qui ne peut pas exister dans les ordinaux ; donc si

$f() \notin R^{\Phi}_{t_o()} \implies f() \notin \bigcup_{a \in \mathcal{O}} R^{\Phi}_{t_a()}$ (Bass, Young).

Comme il y a des fonctions avec h_G-speed-up qui sont arbitrairement grandes, il y a des fonctions avec h_G-speed-up qui ne sont pas dans $R^{\Phi}_{t_o()}$, quelque soit $t_o()$.

Ceci donne le

Théorème 5.2.1. : Si $f() \in R_1$ a h_G-speed-up et

$$f() \notin R^{\Phi}_{t_o()} \quad \text{alors} \quad f() \notin \bigcup_{a \in 0} R^{\Phi}_{t_a()} .$$

On suppose le contraire, i.e. $f() \notin R^{\Phi}_{t_o()}$ & $\exists\, a \in 0\ f() \in R^{\Phi}_{t_a()}$.

Dans ce cas, il existe un ordinal et un $b \in 0$ tel que

(i) $f() \in R^{\Phi}_{t_b()}$ et $|b| \leq |a|$

(ii) $f() \notin R^{\Phi}_{t_{b'}()}$ si $|b'| < |b|$.

Soit $\nu(b) = 1$ et $f() \in R^{\Phi}_{t_b()}$, i.e.,

$\exists \varphi_j()\quad \varphi_j() = f()$ & $\Phi_j() \leq t_b()$ p.p.,

$I^{\Phi}_{t_b()} = I^{\Phi}_{h_G(x,t_{\pi(b)}(x))}$, donc $\Phi_j() \leq h_G(x,t_{\pi(b)}(x))$ p.p.

Mais $f()$ possède h_G-speed-up :

$$\exists\ \varphi_k()\ \varphi_k(\ ) = f() \ \&\ h_G(x,\Phi_k(x)) \leq \Phi_j(x) \quad \text{p.p. ;}$$

par conséquent $h_G(x,\Phi_k(x)) \leq \Phi_j(x) \leq h_G(x,t_{\pi(b)}(x))$ p.p.

donc, par définition de $h_G()$, $\Phi_k(x) \leq t_{\pi(b)}(x)$ p.p.

Ceci implique $k \in I^{\Phi}_{t_{\pi(b)}}$ et $f() \in R^{\Phi}_{t_{\pi(b)}}$, contradiction.

Soit $\nu(b) = 2$, alors $f() \in R^{\Phi}_{t_b()} \implies f() \in \bigcup_n R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(b)}(n)}$

et ceci implique qu'il existe un n tel que $f() \in R^{\Phi}_{t\varphi_{\kappa(b)}(n)}$.

Mais $\varphi_{\kappa(b)}(n) <_o b$, contradiction.

Le théorème précédent souligne donc la nécessité d'étendre les classes $R^{\Phi}_{t_a()}$, où $|a|$ = ordinal limite, de manière à inclure dans un tel $R^{\Phi}_{t_a()}$ certaines fonctions qui ont un h_G-speed-up et qui ne sont pas dans $R^{\Phi}_{t_o()}$. Dans ce cas, si $f() \notin R^{\Phi}_{t_o()}$, $f()$ peut être dans $R^{\Phi}_{t_a()}$, $|a| = \omega$, mais il existe un b, $|b| < |a|$, tel que $f() \notin R^{\Phi}_{t_b()}$. Autrement dit, $R^{\Phi}_{t_a()}$ doit contenir toute la séquence de complexité pour $f()$ (chapitre 2). Malgré le fait, que les séquences de complexité de fonctions avec speed-up sont récursivement énumérables, il ne paraît pas clairement comment une telle extension des classes aux ordinaux limite peut être définie constructivement.

5.2.-2. Théorèmes de pathologie.

Les théorèmes 5.1.6. et 5.1.7. montrent, que la hiérarchie qui utilise le second théorème de Meyer et McCreight, constitue une progression récursive transfinie d'ensembles de fonctions récursives dans le sens de Parikh [36], et et ceci pour tout choix d'une fonction initiale $t_o()$ suffisamment grande.

Ces deux théorèmes ne sont par contre pas vérifiés pour une hiérarchie qui est définie par diagonalisation aux ordinaux limite (sans restriction de l'ensemble des notations). On prouve en effet un théorème de Myhill, c'est-à-dire une dégénérescence à $\alpha = \omega$ pour une telle hiérarchie.

Exemple : le théorème de Myhill-Routledge pour une extension de la hiérarchie de Grzegorczyk :

Pour tout $a \in \mathcal{O}$, on définit inductivement une fonction singulière $f_a()$ par :

(i) si $\nu(a) = 0$ $\quad f_a(x) = 2^x$;

(ii) si $\nu(a) = 1$ et $\pi(a) = b$

$$f_a(0) = 1$$
$$f_a(x+1) = f_b(f_a(x)) ;$$

(iii) si $\nu(a) = 2$ et $(\forall n)\psi_{\kappa(a)}(n) <_o \psi_{\kappa(a)}(n+1) <_o a$

$$f_a(x) = f_{\psi_{\kappa(a)}(x)}(x) .$$

Soit $E_a = E(f_a)$ l'ensemble de fonctions récursives élémentaires en $f_a()$. Si l'on fait correspondre à toute fonction récursive le plus petit ordinal $|a|$ tel que $f() \varepsilon E_a$, alors on peut énoncer le

Théorème 5.2.2. : Pour toute fonction récursive $f()$ il existe une notation a telle que

(i) $|a| = \omega$

(ii) $f() \varepsilon E_a$.

C'est-à-dire que sans restriction des notations à $|a| = \omega$ on obtient des classes E_ω arbitrairement grandes et la hiérarchie dégénère.

Pour la démonstration, on construit un bon ordre récursif R des entiers du type d'ordre ω et qui satisfait au théorème.

Soit $f() \varepsilon R_1$, arbitraire, donné par son indice f (ψ_f) avec fonction de complexité $\Phi_f()$.

La relation $\lambda xy[\Phi_f(x) = y]$ étant récursive, on définit R par

$<0,\Phi_f(0)> \; R \ldots R<0,1>R<0,0>R<1,\Phi_f(1)> \ldots R<1,0>R$

$<x,\Phi_f(x)> \; R \ldots R<x,1>R<x,0> \ldots R<0,0,1>$

et on définit

$$\psi_{\kappa(y)}(n) = \begin{cases} <n,0> & \text{si } y = <0,0,1> \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Notons, que de $a = <n,0>$ on atteint l'élément zéro $<0,\Phi_f(0)>$ en passant par $n + \sum_{i \leq n} \Phi_f(i)$ prédécesseurs.

Avec $f_a(x) \geq f_{\pi(a)}(x) + 1$, on a

$$f_\omega(x) = f_y(x) = f_{\psi_{\kappa(y)}(x)}(x)$$

$$\geq f_o(x) + x + \sum_{i \leq x} \Phi_f(i)$$

$$\geq \Phi_f(x) ;$$

donc $f() \in E_y$.

Considérons maintenant une hiérarchie de classes de complexité, la construction des classes étant inchangée aux ordinaux successeurs, aux ordinaux limite les classes sont construites par diagonalisation :

(iii) si $\nu(a) = 2$, $(\forall n)\psi_{\kappa(a)}(n) <_o \psi_{\kappa(a)}(n+1) <_o a$

$$R^\Phi_{t_a()} = R^\Phi_{\max\limits_{n \leq x}\{t_{\psi_{\kappa(a)}(n)}(x)\}} \quad \& \quad t_a() \in G \; ;$$

$\psi_{\kappa(a)}(n)$ désignant les membres d'une séquence fondamentale pour $|a| = \alpha$. Une telle hiérarchie admet un théorème de Myhill pour $\alpha = \omega$:

Théorème 5.2.3. : $\forall f() \in R_1 \; \exists a \in O$

(i) $|a| = \omega$

(ii) $f() \in R^\Phi_{t_a()}$.

Principe de la démonstration : Soit $f()$ donné et soit $M_f()$ une machine qui calcule $f()$ avec complexité $\Phi_f()$. On choisit une fonction monotone qui croit plus vite que $\Phi_f()$. Cette fonction monotone croissante "fournit" une notation pour ω qui est telle que lorsqu'on détermine la classe associée à cette notation, $f()$ est dans cette classe. Cette classe étant formée directement par diagonalisation par rapport aux classes plus petites (par rapport à la notation choisie), toute fonction, dont la complexité est inférieure à la fonction monotone croissante choisie, fait partie de la classe.

$$\text{Soit } U(i,x,t) = \text{déf} \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } \Phi_i(x) \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et soit f un indice fixé pour $f()$;

$$U(f,x,t) = U'(x,t) = f(x) \quad \text{pour } t \geq \Phi_f(x)$$
$$U'(x,t) = 0 \quad \text{pour } t < \Phi_f(x).$$

Soit $\mathcal{O}$ la notation de Church-Kleene pour les ordinaux constructifs ; par définition de $\mathcal{O}$ on a en particulier : $3.5^q \in \mathcal{O} \Rightarrow \varphi_q() \in R_1$, $\varphi_q(n) \in \mathcal{O}$ pour tout n et $\{|\varphi_q(n)|\}_{n=0,1,\ldots}$ est une séquence fondamentale pour $|3.5^q|$. On définit maintenant les fonctions $t_a()$ et les classes correspondantes $R^{\Phi}_{t_a()}$ pour tout $a \in \mathcal{O}$, $|a| < \omega$, comme précédemment et on choisit une fonction monotone croissante $r(x)$ telle que $(\forall x)\Phi_f(x) \leq r(x)$.

Soit $(n)_o$ la notation unique pour l'ordinal fini n et $\varphi_q(x) = \text{déf}$ la notation pour l'ordinal fini $r(x)$; on a $\varphi_q(x) = (r(x))_o$ et $|\varphi_q(x)| = r(x)$; si $a = 3.5^q \in \mathcal{O}$, alors a est une notation pour ω.

On suppose que $t_1(x) \geq x$ et $t_a(x) \geq t_b(x) + 1$ pour tout x si $\pi(a) = b$ sans restriction de la généralité (sinon on peut modifier les $t_a(x)$ sur un nombre fini d'arguments). Dans ce cas, on a $t_{(n)_o}(x) \geq x + (n)_o \geq (n)_o > n$ pour tout x ; donc aussi $t_{\varphi_q(n)}(x) \geq r(n)$ par définition de $\varphi_q(n)$.

$$\text{Soit } R^{\Phi}_{t_a()} = R^{\Phi}_{\max\limits_{n \leq x}\{t_{\varphi_q(n)}(x)\}} \text{ ; alors}$$

$$\max_{n \leq x}\{t_{\varphi_q(n)}(x)\} \geq r(x) \geq \Phi_f(x) \quad \text{pour tout } x.$$

D'où $f(x) = U'(x,t_a(x))$ et $f() \in R^{\Phi}_{t_a()}$ par définition de $U'(x,t)$.

5.3.- *Théorèmes de la théorie de complexité et leurs conséquences pour les hiérarchies de classes de complexité.*

Bass et Young [16] ont prouvé que les hiérarchies construites à l'aide du second théorème de Meyer et McCreight sont des progressions transfinies et récursives d'ensembles de fonctions récursives dans le sens de Kreisel [29] et Parikh [36]. Ces deux derniers auteurs ont prouvé que de telles progressions récursives ne peuvent pas être α-uniques pour des ordinaux $\alpha \geq \omega^2 + 2$ (Parikh) ; ceci est une conséquence du théorème de la hiérarchie arithmétique (ou de Post-Kleene-Mostowski). Bass et Young dérivent un certain nombre de conséquences de la non-unicité de ces hiérarchies ; on donnera par la suite des indications sur la méthode par laquelle de tels corollaires du théorème de Kreisel et Parikh peuvent être prouvés.

Les hiérarchies de classes de complexité sont construites à l'aide d'une classe de bornes de complexité appartenant à un ensemble mesuré caractéristique de fonctions récursives. Les conséquences du théorème de Kreisel et Parikh sont donc directement concernés avec la structure des ensembles mesurés caractéristiques. On montre que certains théorèmes de la théorie axiomatique de complexité sont et restent inchangés si l'on se restreint à un ensemble mesuré caractéristique de fonctions. Ces théorèmes, notamment celui du "gap" faible et ceux qui concernent la structure de la classe des bornes de complexité qui caractérisent une même classe $R^{\Phi}_{t()}$, apparaissent donc ici comme des versions constructives du théorème de Kreisel et Parikh. La situation est donc comparable à celle qui existe dans la théorie des degrés d'indécidabilité (de Turing) où l'on connaît des démonstrations non-constructives de l'existence de degrés incomparables d'une part et celle de Friedberg et Muchnik, qui consiste à construire effectivement deux ensembles récursivement énumérables, mais incomparables, d'autre part.

Donc, toutes les conséquences du théorème de Kreisel et Parikh possèdent des démonstrations constructives qui correspondent à des théorèmes de la théorie axiomatique de complexité.

Ainsi, si $g()$ est une fonction totale telle que

(i) $g() : \Theta G \to \Theta R_1$, G ensemble mesuré caractéristique

(ii) $R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{\varphi_j()} \Longrightarrow R^{\Phi}_{\varphi_{g(i)}()} = R^{\Phi}_{\varphi_{g(j)}()}$, $\varphi_i(), \varphi_j() \in G$

c'est-à-dire "$g()$ préserve la relation $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{s()}$" alors $g()$ n'est pas "comprimant" :

$$\neg[(\forall i)\ R^{\Phi}_{\varphi_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{\varphi_{g(i)}()}].$$

Ainsi, les classes $R^{\Phi}_{\varphi_i()}$, $\varphi_i() \in G$, ne peuvent pas être étendues uniformément. La version constructive de cette conséquence du théorème de Kreisel-Parikh consiste à construire effectivement un $\varphi_i() \in G$ pour lequel $R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{\varphi_{g(i)}()}$, c'est-à-dire de construire un "gap" faible pour les fonctions $g() \in R_1$ qui "conservent les classes".

On prouve [33, 51], que pour toute fonction $h() \in R_1$ croissante, il existe une fonction totale $t'()$ telle que $t'() > h(t())$ i.a. & $R^{\Phi}_{t'()} = R^{\Phi}_{t()}$; c'est-à-dire que la classe des bornes de complexité de $R^{\Phi}_{t()}$ contient des fonctions arbitrairement grandes i.a. Le théorème de Kreisel et Parikh a comme conséquence que le même phénomène existe dans un ensemble mesuré caractéristique. On peut donner différentes formes à une version constructive correspondante :

(a) Si M est un ensemble mesuré tel que $f() \in M$

& $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{f()} \Longrightarrow f()$ est borné

alors M n'est pas caractéristique.

De façon plus générale, le problème est équivalent à un problème d'existence d'un opérateur récursif :

(b) étant donné une "petite" fonction h() et une borne de complexité t() qui n'est pas h()-honnête, peut on effectivement trouver une borne supérieure honnête pour t() et peu différente de t(), si une telle borne existe ?

Une autre version constructive est la suivante :

(c) Soit $g() : \Theta G \to \Theta R_1$ tel que

$$R^{\Phi}_{\psi_i()} = R^{\Phi}_{\psi_{g(i)}()} \quad ; \text{ i.e. "g() laisse invariante les classes } R^{\Phi}_{t()}\text{"}.$$

Dans ce cas, il existe un $\psi_k() \in G$ tel que $\psi_{g(k)}()$ n'est pas moins complexe que $\psi_k()$, autrement dit, il n'est pas possible "d'optimiser" les indices des classes $R^{\Phi}_{\psi_i()}$.

5.3.-1. Propriétés des bornes de complexité appartenant à un ensemble mesuré caractéristique.

L'existence de fonctions récursives t() et t'() très différentes l'une de l'autre mais telles que $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{t'()}$ est une conséquence immédiate du phénomène du "gap" découvert par A. Borodin. Mais l'existence du "gap" ne suffit pas pour caractériser la classe des bornes récursives de complexité $R_t = \{f() | R^{\Phi}_{f()} = R^{\Phi}_{t()} \text{ \& } f() \in R_1\}$ d'une classe de complexité donnée. En effet, toute classe R_t contient des fonctions qui sont arbitrairement grandes i.a. ; c'est-à-dire que pour tout $h() \in R_2$ monotone croisssant, il existe $t_1()$ et $t_2 \in R_t$ tel que $t_2(x) > h(x,t_1(x))$ i.a. et une telle fonction $t_2()$ peut être trouvée uniformément en un indice de $t_1()$ et de $h()$.

Que devient cette propriété, si l'on restreint R_t à un ensemble mesuré M arbitraire ou à un ensemble mesuré caractéristique G ?

Soit d'abord $M = \Phi$, Φ mesure de Blum et telle que $\Phi_i() \in R^{\Phi}_{\Phi_i()}$ (une telle mesure a été appelée "mesure propre").

Pour une telle mesure, on a la

Proposition 5.3.1. : Pour toute mesure propre, il existe une fonction récursive totale $g()$ telle que

$$\forall\, t() \in \mathcal{R}_1\ \forall\, \Phi_i\ [\Phi_i() > g(t()) \quad \text{i.a.} \implies R^{\Phi}_{\Phi_i()} \not\subseteq R^{\Phi}_{t()}].$$

Donc, si la classe $\mathcal{R}_t$ est restreinte à Φ, mesure propre, alors $\mathcal{R}_t$ peut être majoré. D'autre part, on sait [9], qu'une mesure propre ne peut pas être caractéristique dans Φ, c'est-à-dire que $\exists\, t()\ \forall\, \Phi_i \quad R^{\Phi}_{t()} \neq R^{\Phi}_{\Phi_i()}$. Ce résultat peut être généralisé : si $\varphi_t(), \varphi_{t'()} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{R}_1$ et si la restriction de $\mathcal{R}_t$ à $\mathcal{M} \cap \mathcal{R}_1$ peut être majorée, alors $\mathcal{M}$ n'est pas caractéristique dans Φ.

Ceci est d'abord une conséquence du théorème de Kreisel et Parikh [29, 36] :

Définition 5.2. : Une progression récursive transfinie d'ensembles de fonctions est un prédicat $C(p,q,a,b)$ tel que

(a) $x \in \mathcal{O} \implies (\forall a)\ \{\langle p,q\rangle \mid C(p,q,a,x)\}$ est le graphe d'une fonction $f_{a,x}$;

(b) $x,y \in \mathcal{O}\ \&\ x <_o y \implies C_x \subsetneq C_y$

où $C_x = \{f() \mid (\exists a) \mid f() = f_{a,x}()\}$;

(c) $\exists\, S$ prédicat récursif, tel que

$C(p,q,a,x) \iff (\exists y)\ S(p,q,a,x,y)$

(C'est-à-dire $C(p,q,a,x)$ est récursivement énumérable).

On montre que les hiérarchies de classes de complexité sont des progressions récursives d'ensembles de fonctions :

Soit $M(a,i)$ l'indice pour la $a^{\text{ième}}$ fonction de $R^{\Phi}_{\varphi_i()}$, où $\varphi_i()$ est total et $R^{\Phi}_{\varphi_i()}$ est récursivement énumérable. On montre qu'il existe un fonction $s() \in R_1$ telle que $\varphi_{s(x)} = t_x$ si $x \in \mathcal{O}$ et par conséquent :

on définit $C(p,q,a,x)$ par $\varphi_{M(a,s(x))}(p) = q$, c'est un prédicat récursif et satisfait à la définition si $x \in \mathcal{O}$:

Soit $\varphi_{t(i)}(y,x) = t_o(x)$ si $\nu(y) = 0$, $y \in \mathcal{O}$

$\varphi_{t(i)}(y,x) = f(x) \in G$ si $\nu(y) = 1$, $y \in \mathcal{O}$ & $\pi(y) = z$

où $R^{\Phi}_{f()} = R^{\Phi}_{h_G(x,\varphi_i(\pi(y),x))}$ par le 1er théorème de Meyer-McCreight

et $\varphi_{t(i)}(y,x) = f(x) \in G$ si $\nu(y) = 2$, $y \in \mathcal{O}$

$R^{\Phi}_{f()} = \bigcup_n R^{\Phi}_{t\varphi_i(\kappa(y),n)}$ par le 2nd théorème de Meyer-McCreight.

Par le théorème de la récursion, il existe i_o tel que

$$\varphi_{i_o}() = \varphi_{t(i_o)} \ , \quad \varphi_{s(n)}(x) = \varphi_{i_o}(n,x) \quad \text{par s-m-n.}$$

Ainsi, la hiérarchie des classes de complexité est une progression récursive transfinie et par conséquent, admet le théorème de Kreisel-Parikh :

Théorème (Non-unicité) 5.3.2. : Il y a des notations

$a \in \mathcal{O}$, $b \in \mathcal{O}$, $|a| = |b|$, $|a|, |b| < \omega^2 + 2$ telles que $R^{\Phi}_{t_a()} \neq R^{\Phi}_{t_b()}$.

De ce théorème, il résulte deux conséquences principales pour les ensembles mesurés caractéristiques :

(a) la restriction de R_t à G n'est pas de complexité bornée :

Soit $s() \in R_1$ une fonction de compression, alors

Théorème (Bass, Young) 5.3.3. : Si $s() \in R_1$ est total récursif et tel que

$\forall \varphi_i ; \varphi_j \in G$

(i) $\psi_{s(i)}() \in G$

(ii) $R^{\Phi}_{\psi_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{\psi_{s(i)}()}$

(iii) $\psi_i() \leq \psi_j()$ p.p. $\Longrightarrow$ $\psi_{s(i)}() \leq \psi_{s(j)}()$ p.p.

alors il existe $\psi_i, \psi_j \in G \cap R_t$ tels que $\psi_{s(i)} < \psi_j$ i.a.

et (b) les classes $R^{\Phi}_{\psi_i()}$, $\psi_i() \in G$ ne peuvent pas être étendues uniformément :

Théorème (Bass, Young) 5.3.4. : Si $s() \in R_1$ est tel que

$$\forall\, \psi_i,\ \psi_j \in G\ [R^{\Phi}_{\psi_i()} = R^{\Phi}_{\psi_j()} \Longrightarrow R^{\Phi}_{\psi_{s(i)}()} = R^{\Phi}_{\psi_{s(j)}()}] \quad \text{alors}$$

$$\neg\, [\forall\, \psi_i() \in G \quad R^{\Phi}_{\psi_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{\psi_{s(i)}()}].$$

Si l'on suppose les deux théorèmes faux, alors on montre que dans les deux cas on peut construire une hiérarchie qui possède des classes α-uniques pour tout α tel que $|a| = \alpha$ et $a \in \mathcal{O}$. On obtient ainsi une contradiction avec le théorème de Kreisel-Parikh.

5.4.- *Versions constructives des théorèmes sur l'irrégularité des ensembles mesurés caractéristiques.*

Considérons maintenant des versions constructives des deux théorèmes précédents. On démontre d'abord la proposition 5.3.1., c'est-à-dire :

$$\Phi_i() > g(t()) \quad \text{i.a.} \quad \Rightarrow \quad R^{\Phi}_{\Phi_i()} \not\subseteq R_{t()}.$$

Soit Φ une mesure propre :

$$\forall\, \Phi_i \;\exists \varphi_k \;\; \varphi_k() = \Phi_i() \;\;\&\;\; \Phi_k(x) \leq \Phi_i(x) \quad \text{p.p.}$$

Dans toute mesure, on a en outre la relation suivante entre $\varphi_i()$ et $\Phi_i()$:

$$\forall\, \Phi \;\exists k_\Phi \in R_2 \quad \text{tel que} \quad k_\Phi(x,y+1) > k_\Phi(x,y)$$

$$\text{et} \quad \varphi_i(x) \leq k_\Phi(x,\Phi_i(x)) \;;$$

(c'est-à-dire que pour obtenir une sortie suffisamment grande, il faut une certaine quantité de ressource). Notons qu'on peut supposer k_Φ non-décroissant en x, sinon on le remplace par $k'_\Phi(x,y) = \max_{z \leq x}\{k_\Phi(z,y)\}$. Soit $g(x) \geq k_\Phi(x,x)$ et soit $\Phi_i(x) = \varphi_k(x)$, k indice honnête et propre pour $\Phi_i()$:

$$\Phi_i() \in R^{\Phi}_{\Phi_i} \iff \varphi_k() \notin R^{\Phi}_{t()}, \quad \text{mais} \quad \varphi_k() \notin R^{\Phi}_{t()}$$

si $\Phi_i() > g(t())$ i.a. car

$$g(t(x)) \underset{\text{i.a.}}{<} \Phi_i(x) = \varphi_k(x) \underset{\text{p.p.}}{<} k_\Phi(\Phi_k(x),\Phi_k(x))$$

$$k_\Phi(t(x),\, t(x)) \underset{\text{i.a.}}{<} \Phi_i(x) \underset{\text{p.p.}}{\leq} k_\Phi(\Phi_k(x),\Phi_k(x)) \quad \text{par la propriété de } g()$$

$t(x) < \Phi_k(x)$ i.a. par la monotonie de $k_\Phi()$.

Mais, d'autre part, si Φ est une mesure propre, alors Φ n'est pas caractéristique [9] :

Proposition 5.4.1. : Si Φ est une mesure propre, alors $\Phi = \{\Phi_o(),\Phi_1(),\ldots\}$ n'est pas caractéristique pour Φ.

Il faut construire une classe $R^{\Phi}_{t()}$ telle que $\forall\, \Phi_i() \in \Phi$, $R_{t()} \neq R^{\Phi}_{\Phi_i()}$.

Soit $h_\Phi()$ la fonction de compression pour Φ , i.e.

$R^\Phi_{\Phi_i()} \subsetneq R^\Phi_{h_\Phi(x,\Phi_i(x))}$.

Soit $\varphi_X()$ une fonction caractéristique pour un ensemble récursif X tel que $\varphi_X()$ soit $b()$-calculable, où $b() \in R_1$ est arbitraire :

$\Phi_X() \leq b()$ p.p.

On peut relativiser $h_\Phi()$ à X de façon que

$R^\Phi_{\Phi_i()} \subsetneq R^\Phi_{h^X_\Phi(\Phi_i(),\Phi_X())}$.

Posons $g(x) = \max\{k_\Phi(x,x),h^X_\Phi(x,x)\}$; on détermine une fonction $\varphi_k()$ avec $\Phi_k() \geq b()$ p.p. et on calcule un $g(g(x))$ - gap au dessus de Φ_k :

$$R^\Phi_{t()} = R^\Phi_{g(g(t()))}.$$

Alors en définissant

$$t_2(x) = g(g(t(x))) \quad \text{et}$$

$$t_1(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } x \in X \\ g(t(x)) & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

on a $R^\Phi_{t_1()} \subsetneq R^\Phi_{t_2()}$.

Supposons maintenant qu'il existe un $\Phi_i()$ tel que

$R^\Phi_{t_1()} \subsetneq R^\Phi_{\Phi_i()} \subsetneq R^\Phi_{t_2()}$.

Ceci est impossible : si $\varphi_j() = \Phi_i()$, alors $\Phi_j() \leq t()$ p.p. car $t()$ est la fonction du "gap" ; donc

$\Phi_i() = \varphi_j() \leq k_\Phi(x,\Phi_j(x)) \leq k_\Phi(x,t(x)) < t_2(x)$ p.p. par la définition de $t()$ et de $t_2()$, mais $R_{t_1()} \subsetneq R^\Phi_{\Phi_i()} \implies \Phi_i() > t_1()$ i.a., et par conséquent un tel Φ_i ne peut exister, car on peut aussitôt donner une fonction $f() \in R_{t_1()}$ tel que $\Phi_f() > \Phi_i()$ i.a. sur $\bar{X}$.

On est maintenant préparé pour la démonstration du théorème suivant, qui en est une généralisation et qui montre que si M est tel que la restriction de R_t à M peut être majorée, alors M n'est pas caractéristique :

Théorème 5.4.2. : $\forall \Phi \; \exists \; s() \in R_1 \; \forall \varphi_i, \varphi_j \in M$ (i) $\varphi_{s(i)}() \in M$

(ii) $[[R^{\Phi}_{\varphi_i()} \subseteq R^{\Phi}_{\varphi_j()}] \implies [\varphi_i() \leq \varphi_{s(j)}()$ p.p.$]]$

alors M n'est pas caractéristique pour Φ.

Il est d'abord évident que ce théorème implique le premier des deux théorèmes de Bass et Young, théorème 5.3.3. Il faut donc montrer, que si $R_t \cap M$ peut être majoré, alors on peut construire un $t() \in R_1$ tel que $\forall \varphi_i() \in M$, $R^{\Phi}_{t()} \neq R^{\Phi}_{\varphi_i()}$.

On montre d'abord qu'il existe un ensemble mesuré $M \neq \Phi$ et une fonction $s() \in R_1$ qui vérifient les prémisses (i) et (ii) du théorème.

Définition 5.3. : Une classe $\mathbb{C}$ de fonctions récursives partielles est complète pour $\Phi \iff \forall t() \in R_1 \; \exists \; t'() \in \mathbb{C} \cap R_1 \; R^{\Phi}_{t()} \subseteq R^{\Phi}_{t'()}$.

Ainsi, si $\mathbb{C}$ est complète, $R_1 = \bigcup_{t() \in \mathbb{C} \cap R_1} R^{\Phi}_{t()}$.

Lemme 5.4.3. : $\forall \Phi$ il existe un ensemble mesuré M et une fonction récursive $s() \in R_1$ tels que

(i) $\forall \varphi_i() \in M \quad \varphi_{s(i)}() \in M$

(ii) $\forall t() \in R_1 \quad \exists \; \varphi_i() \in M \quad t() \leq \varphi_i()$ p.p.

(iii) $M \neq \Phi$ et M est complet pour Φ.

(iv) M est clos par rapport à la composition de fonctions totales.

Définition 5.4. : Une fonction récursive $f()$ est dite réalisée par un compteur en temps réel (real-time countable") si elle est monotone croissante et s'il existe une machine de Turing à n bandes de travail qui calcule une fonction caractéristique de $\rho f()$ en temps $\lambda x[x]$ (un "real-time counter").

Soit $T \subseteq P_1$ l'ensemble des fonctions récursives réalisées par un compteur en temps réel. (Les fonctions partielles de T proviennent des "compteurs finis").

Montrons que T contient des fonctions arbitrairement grandes :

$$\forall\ \Phi_i() \ \exists\ \varphi_j() \in T \quad \varphi_j() > \Phi_i() > t() \quad \text{p.p.}$$

Etant donné $t() \in R_1$, on cherche $\Phi_i() > t()$ p.p., $\varphi_i() \in R_1$, puis $\varphi_j() \in T$ de la façon suivante :

On calcule $\varphi_i(0), \varphi_i(1), \varphi_i(2), \ldots, \varphi_i(m)$ après n pas, $n > m$, si $\varphi_i(m)$ converge, le compteur $Z_i(n) = 1$, sinon $Z_i(n) = 0$.

Donc, $Z_i(x) = 1$ pour
$$x = \Phi_i(0),$$
$$\Phi_i(0) + \Phi_i(1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{k=0}^{n} \Phi_i(k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et $\varphi_j() \in T$ est défini par

$$\varphi_j(0) = \mu x[Z_i(x) = 1]$$
$$\varphi_j(y+1) = \mu x[Z_i(x) = 1 \ \& \ \varphi_j(x) > \varphi_j(y)].$$

Il est évident, que T satisfait aux points (ii) et (iii) du lemme, car $\varphi_j(x+1) > \varphi_j(x)$ et $\varphi_j() > \Phi_i() > t()$ p.p.

En outre, $T \neq \Phi$ et T est complet pour Φ = nombre de pas ; notons que si T est complet pour Φ, alors T est complet pour tout Φ.

T satisfait aussi au point (iv), car T est clos par rapport à la composition des fonctions totales.

Soit maintenant $g() \in T$ une fonction telle que $g() > h_T()$ p.p. où h_T est la fonction de saut de T ; soit $g(\varphi_i()) = \varphi_{s(i)}()$, $s() \in R_1$ par s-m-n, et $M = \{\varphi_{s(i)} | \varphi_i() \in T\}$.

M est un ensemble mesuré avec fonction de saut $h_M() = h_T()$; M satisfait au lemme.

Supposons que pour une certaine fonction croissante $h() > g()$ p.p. on ait $\varphi_j() > h(t())$ i.a., $\varphi_j() \in M$, $t() \in R_1$, avec $S = \{x | \varphi_j(x) > h(t(x))\}$. Dans ce cas, il existe un $\varphi_i() \in M$ tel que

(i) $h_M(\varphi_i()) \leq \varphi_j()$ p.p. par définition de $s()$

(ii) $\varphi_{s(i)}(x) = \varphi_j(x)$ par définition de M

(iii) $t() \leq \varphi_i()$ sur S par (ii) et $h() > g()$.

Par conséquent, il existe un $\varphi_k() \in R^{\Phi}_{\varphi_j()}$ tel que $\varphi_k() \notin R^{\Phi}_{t()}$ et $\varphi_k() \notin R^{\Phi}_{\varphi_i()}$: car $R^{\Phi}_{\varphi_i()} \subsetneq R^{\Phi}_{\varphi_{s(i)}()} = R^{\Phi}_{\varphi_j()}$ et $\Phi_k() > t()$ sur S. Ainsi M satisfait à (i) et (ii) du théorème.

Il reste à montrer que ce M ne peut pas être caractéristique : étant donné $\varphi_i() \in M \cap R_1$, on construit $t() \in R_1$ tel que $R^{\Phi}_{\varphi_i()} \subseteq R^{\Phi}_{t()}$ & $(\forall \varphi_j() \in M) R^{\Phi}_{t()} \neq R^{\Phi}_{\varphi_j()}$.

Soit $\{\varphi_{f(i)}() | i \in N\}$ une énumération récursive de M ; on pose $t(x) = (\mu y > \varphi_i(x))(\forall i \leq x)[\Phi_{f(i)}(x) > y \vee \Phi_{s^2f(i)}(x) \leq y]$, où $s() \in R_1$ est défini comme ci-dessus.

Supposons qu'il existe $\varphi_j() \in M$ tel que $R^{\Phi}_{\varphi_{s(j)}()} = R^{\Phi}_{t()}$, $j \in \rho f(\ )$ ($\varphi_{s(j)} \in M$ par le lemme). Dans ce cas :

$$\varphi_j() \in R^{\Phi}_{\varphi_{s(j)}} \quad \text{car} \quad \Phi_j() \leq \varphi_{s(j)} \quad \text{p.p., donc} \quad \varphi_j() \in R^{\Phi}_{t()}.$$

$$\varphi_j() \in R^{\Phi}_{t()} \implies \Phi_j() \lesssim t() \text{ p.p., par définition de } R^{\Phi}_{t()}$$

$$\implies \Phi_{s^2(j)}() \lesssim t() \text{ p.p. par définition de } t()$$

$$\implies \varphi_{s^2(j)}() \in R^{\Phi}_{t()}.$$

Mais $\varphi_{s^2(j)}() \notin R^{\Phi}_{\varphi_{s(j)}}$ par définition de $s(j)$, contradiction.

Une autre généralisation du théorème du "gap".

Soit $s() \in R_1$ arbitraire et soit M un ensemble mesuré caractéristique pour Φ. Le second théorème de Bass et Young dit que les classes $R^{\Phi}_{\varphi_i()}$ ne peuvent être étendues uniformément, même si leurs indices sont pris dans M :

$$\forall \varphi_i, \varphi_j \in M \cap R_1 [[R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{\varphi_j()} \implies R^{\Phi}_{\varphi_{s(i)}} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(j)}}] \implies \neg [\forall \varphi_i \ R^{\Phi}_{\varphi_i()} \subsetneqq R^{\Phi}_{\varphi_{s(i)}}]]$$

Définition 5.5. : on dira

(a) "$s() \in R_1$ est comprimant" si $R^{\Phi}_{\varphi_i()} \subsetneqq R^{\Phi}_{\varphi_{s(i)}}$ $\forall \varphi_i() \in M$

(b) "$s() \in R_1$ préserve les classes" si $R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{\varphi_j()} \implies R^{\Phi}_{\varphi_{s(i)}} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(j)}}$

$\forall \varphi_i, \varphi_j \in M$.

On peut donc énoncer le théorème de Bass et Young ci-dessus dans la forme suivante :

(i) Si $s()$ préserve les classes, alors $s()$ n'est pas comprimant ;

(ii) Si $s()$ est comprimant, alors $s()$ ne préserve pas les classes.

Prouver (i) ci-dessus revient à prouver un théorème du "gap" faible, non plus pour un opérateur récursif général, mais pour une fonction qui préserve les classes.

Dans le théorème de Constable (théorème 2.3.2.) on prouve que

$\varphi_k() \in R_1$ & $\mathbb{F}[\,]$ récursif général $\Longrightarrow \neg(\forall\varphi_k)\ R^{\Phi}_{\varphi_k()} \subsetneq R^{\Phi}_{\mathbb{F}[\varphi_k()]}$

autrement dit, aucun opérateur récursif général est (uniformément) comprimant pour R_1. D'autre part, on a prouvé qu'il existe des fonctions qui sont comprimantes pour R_1 : $\exists s() \in R_1 \quad \forall\varphi_k() \in R_1 \quad R^{\Phi}_{\varphi_k()} \subsetneq R^{\Phi}_{\varphi_{s(k)}}$ (où $\varphi_{s(k)}$ est un indice pour $h(x,\Phi_k(x))$), mais $\varphi_i() \cong \varphi_j() \not\Longrightarrow \varphi_{s(i)}() \cong \varphi_{s(j)}()$ en général.

En somme, si l'on demande davantage de la fonction $s()$ ($s()$ "préserve les classes"), alors on peut prouver le théorème de Constable pour une classe de fonctions qui sont "plus régulières" que R_1.

A fin de pouvoir appliquer la méthode du théorème 2.3.2., on modifie légèrement l'énoncé du théorème de Bass et Young :

Théorème 5.4.4. : Si $s() \in R_1$ préserve les classes $R^{\Phi}_{t()}$,

(i.e., $t'() \in R_t \Longrightarrow \varphi_{s(t')}() \in R_{s(t)}$),

alors $s()$ n'est pas comprimant, c'est-à-dire :

$$\exists\varphi_t() \in R_1 \quad R^{\Phi}_{\varphi_t()} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(t)}()}.$$

Soit $s_1() \in R_1$, $s_1() : R_1 \to M$, tel que

$$\varphi_i() \in R_1 \Longrightarrow \varphi_{s_1(i)} \in M \ \&\ R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{\varphi_{s_1(i)}}.$$

Un tel $s_1()$ existe (pour un M arbitraire, mais caractéristique) par définition de M.

Si l'on pose $s() = s_2(s_1())$, $s_2() : M \to R_1$, alors $s()$ préserve les classes si et seulement si $s_2()$ préserve les classes. Par conséquent, si $s()$ comprimant et préservant les classes existait, alors un $s_2()$ ayant les mêmes propriétés existerait et inversement.

Il suffit donc, pour démontrer le théorème ainsi que celui de Bass et Young, de donner un algorithme, qui pour une fonction $s()$ arbitraire qui préserve les classes, produit une fonction $\varphi_t() \in R_1$ telle que $R^{\Phi}_{\varphi_t()} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(t)}()}$, c'est-à-dire telle que $[\varphi_t(), \varphi_{s(t)}()]$ est un Φ-gap faible.

On suppose que $s()$ est tel que $(\forall i)\varphi_{s(i)}() \in R_1$ et qu'il existe $m() \in R_2$ tel que $(\forall e)\ \varphi_{s(e)}(x) = y \implies F_{m(e,x)} \subseteq \varphi_e(x)$, où $\{F_i\}_{i\in N}$ est une énumération de toutes les fonctions finies. Autrement dit, $m(e,x)$ détermine les valeurs de $\varphi_e()$ nécessaires pour le calcul de $\varphi_{s(e)}(x)$. Si par exemple $\varphi_{s(e)}(x) = \text{déf}\ \varphi_e(\Phi_e(x))$ si $\Phi_e(x) \leq f(x)$, $\varphi_e(x)$, $\Phi_e(x) > x$, alors $\varphi_{s(e)}() \in R_1$ et le calcul de $\varphi_{s(e)}(x)$ demande la valeur de $\varphi_e(y), y > x$, qui devient fixée pour le calcul du "gap". Lorsqu'on définit $t()$, on pose $t(n+1) := t(n) + 1$, calcule $\varphi_{s(t)}(n+1)$ et teste si pour $i \leq n$ $t(n+1) < \Phi_i(n+1) < \varphi_{s(t)}(n+1)$. Si oui, on pose $t(n+1) := \Phi_i(n+1) + 1$ et on continue de tester avec l'intervalle $[t(n+1), \varphi_{s(t)}(n+1)]$. Ce procédé de définition de $\varphi_{s(t)}()$ peut donc fixer une valeur $\varphi_{s(t)}(m)$, $m > n+1$, et on peut trouver que $t(m) < \Phi_i(m) < \varphi_{s(t)}(m)$ pour un certain Φ_i, $i < n$. On permet donc que $\varphi_t(x) < \Phi_i(x) < \varphi_{s(t)}(x)$ tant que l'on peut s'arranger que $\varphi_{s(t)}(y) < \Phi_i(y)$ pour un certain $y > x$. De cette manière on a toujours $\varphi_t() < \Phi_i() < \varphi_{s(t)}()$ i.a. $\implies \varphi_{s(t)}() < \Phi_i()$ i.a. et par conséquent $R^{\Phi}_{\varphi_t()} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(t)}()}$.

Etant donné les fonctions récursives $\varphi_b() \in R_1$ et $s() \in R_1$, on détermine une fonction totale $\varphi_t() = \varphi_{t(b,s)}()$ telle que $R^{\Phi}_{\varphi_t()} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(t)}()}$ par l'algorithme [7] de Constable.

Définition 5.6.- Un segment initial (d'une fonction totale) est

$$f^n = \text{déf}\{<x,y>|x \leq n \;\&\; (x \leq n \Longrightarrow \exists y <x,y> \in f^n) \;\&\; (<x,y> \in f^n \;\&\; <x,y'> \in f^n \Longrightarrow y = y')\}.$$

On dénote par $[f^n]$ l'indice canonique de f^n.

Notons qu'il existe une fonction récursive, $g() \in R_1$, telle que

$$\varphi_{g(i)}(x) = \varphi_{g([f^n])}(x) = \tilde{f}^n = \text{déf} \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Définition 5.7.- L'extension minimale de t^n (monotone croissante, par rapport à $\varphi_b()$) est

$$t^{n+1} = t^n \cup \{<n+1, \max\{t(n) + 1, \varphi_b(n+1)\}>\}$$

Soit t^n extension minimale de t^x ; $(x < n)$

$\varphi_{s(t)}(x) = y \iff (\exists n)\ \varphi_{s(g([t^n]))}(x) = y$ et le calcul de $\varphi_{s(t)}(x)$ n'a besoin de valeurs de $t(z)$ que pour $z \leq n$.

On pose $n_0^x := (\mu n)[\varphi_{s(g([f^n]))}(x)$ est définissable$]$.

L'algorithme :

1) Initialisation.

Etant donné $\varphi_b() \in R_1$ on pose $t(0) = \varphi_b(0) + 1$ et on construit un "gap" à $t(0)$: $\Phi_0(0) < t(0) \vee \Phi_0(0) > \varphi_{s(g([t^n]))}(0)$.

Ceci détermine n_0^0 ; on appelle $n_0^0 + 1$ le prochain entier libre. Puis, on produit un Φ_0, Φ_1 - gap à $n_0^0 + 1$. on a

$E_0 = \{x|0 \leq x \leq n_0^0\}$, la première extension,

$E_1 = \{x|n_0^0 + 1 \leq x \leq n_1\}$, la seconde extension, etc,

où $n_1 = \max\{n_0^x|x \in E_0\}$.

2) Algorithme de priorités :

Pas n : on suppose que $t(y)$ est défini pour tout $y < x$,

x le prochain entier libre (chaque pas n définit un nombre fini de valeurs de $t()$).

(i) On détermine tous les $i < x$ tels que

a) $(\exists y < x)\ t(y) < \Phi_i(y) < \varphi_{s(g([t^x]))}(y)$
(si $\varphi_{s()}(y)$ est défini),

b) i n'a pas encore été trouvé par (a)

c) $i \notin L$ (L la liste de priorité)

et on pose $L := L \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$

où $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ sont les indices ainsi déterminés dans leur ordre naturel.

(ii) On calcule $\varphi_{s(g([t^n]))}(x)$; ceci détermine n_o^x.

(iii) Soit $j \in L$; soit $I_x = [t(x), \varphi_{s(g([t^{n_o^x}]))}(x)]$.

j est appelé sûr si $\Phi_j(x) < t(x)$;

j peut être attaqué si $\varphi_{s(g([t^{n_o^x}]))}(x) < \Phi_j(x)$.

(iv) On a les situations suivantes :

a) tous les $j \in L$ sont sûrs ;

b) l'indice de plus grande priorité qui n'est pas sûr est i et $\Phi_i(x) \in I_x$;

c) l'indice de plus grande priorité peut être attaqué.

(a) $t(x)$ est définitif. Pas n est terminé, le prochain entier libre est $x+1$. On va au point (ii).

(b) On pose $t(x) := \Phi_i(x) + 1$ où $\Phi_i(x) = \max_{j \in L_x}\{\Phi_j(x) \in I_x\}$; on calcule n_o^x et $\varphi_{s(g([t^{n_o^x}]))}(x)$ pour le nouveau segment t^x. On va au point (iii).

c) L'attaque de cet indice : suppose $L = \{j_o, j_1, \ldots, j_p\}$.

Si l'attaque porte sur j_o, alors on fixe $t^{n_o^x}$; pose $L := L - \{j_o\}$ et on va au point (i).

Sinon, soit j_e l'indice attaqué, $e > 0$.

A) On détermine l'extension minimale de $t()$ de façon que $\forall\, m \in E_n$ $\varphi_{s()}(m)$ puisse être calculé.

Soit $I_m = [t(), \varphi_{s()}(m)]$, $m \in E_n$.

On a les situations suivantes :

(α) Si $j_q \in L$ & $q > e$ alors j_q est sûr pour tout $m \in E_n$.

Dans ce cas on fixe $t(x)$ pour tout $x \in E_n$, pose $L := L - \{j_e\}$ et on va au point (i). Le prochain entier libre est $n_n + 1$.

(β) L'indice de plus grande priorité qui n'est pas sûr (pour I_m) est $j_q \in L$, $q > e$ et $\Phi_{j_q}(m) \in I_m$ pour un certain m.

On pose $t(m) := \Phi_{j_q}(m) + 1$, recalcule $\varphi_{s()}$ avec une nouvelle extension minimale et on va au point (iii) avec x.

(γ) L'indice de plus grande priorité est $j_{e'} \in L$, $e' > e$, et $j_{e'}$ peut être attaqué à I_m.

On continue une attaque à $j_{e'}$ au plus petit m où $j_{e'}$ peut être attaqué. Soit m cet argument.

On a : $E_n = \{x | n_{n-1} \leq x \leq n_n\}$ et

$$E_n^1 = \{x | n_n \leq x \leq n_n^1\},$$

où $n_n^1 = (\mu z)\varphi_{s(g([t^z]))}(m)$ est définissable $\forall\ m \varepsilon E_n$.

On détermine maintenant

$$E_n^2 = \{x | n_n^1 \leqslant x \leqslant n_n^2\}$$

où $n_n^2 = (\mu z)\varphi_{s(g([t^z]))}(m)$ est définissable $\forall\ m \varepsilon E_n \cup E_n^1$; et on va à (A) ci-dessus.

Ceci définit une procédure itérative que l'on quitte à (α) lorsque l'attaque d'un indice réussit.

Dans ce cas l'indice de plus grande priorité qui peut être attaqué quitte L et produit $n_n^m + 1$, le prochain entier libre.

B) Il n'y a qu'un nombre fini de j_i qui ont plus grande priorité que j_e. La procédure s'arrête donc après un nombre fini d'itérations et un certain indice j_i quitte L, ou bien t() est devenu si grand que tous les indices dans L sont sûrs à x.

Ceci détermine la fonction t() du théorème 5.4.4.

CHAPITRE VI

DE LA STRUCTURE DES CLASSES DE BORNES DE COMPLEXITE.

Si $R^{\Phi}_{t()}$ $(R^{\Phi}_{\varphi_{k()}})$ est une classe de complexité avec $t() \in R_1$ $(\varphi_{k()} \in P_1)$ suffisamment grand, alors $R^{\Phi}_{t()}$ est récursivement énumérable uniformément en un indice t pour $t()$:

$R^{\Phi}_{t()} = \{\varphi_{i()} \mid i \in W_k \ \& \ W_k = W_{f(t)}\}$. Nous appellerons k un indice de la classe $R^{\Phi}_{t()}$. Tout indice t d'une borne de complexité pour $R^{\Phi}_{t()}$ fournit donc un indice pour cette classe. Définissons la classe des fonctions récursives totales

$$R_t =_{\text{def}} \{\varphi_{i()} \mid R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{t()}\} ;$$

la structure de cette classe de fonctions paraît intéressante, surtout par rapport à certains problèmes d'effectivité.

Le théorème de Borodin ("gap") et ses généralisations montrent que pour tout $h() \in R_1$ (pour tout opérateur récursif général $\mathbb{F}$) il existe un $t()$ tel que

$$R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{h(t())} \quad (R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{\mathbb{F}[t()]}) .$$

On montre d'abord que l'existence de fonctions récursives $t_1()$ et $t_2()$, $t_1(), t_2() \in R_t$, très différentes l'une de l'autre n'est pas uniquement liée au phénomène du "gap".

Autrement dit, pour tout $t()$ R_t contient des éléments qui sont arbitrairement grands sur un nombre infini d'arguments, par conséquent R_t n'est pas une classe récursivement énumérable. On utilise les ensembles récursifs "t()-immunes" introduits par Trahtenbrot et Constable pour la démonstration (une autre démonstration, basée sur les ensembles épars, a été donnée dans [33]).

Les fonctions que l'on obtient ainsi ne sont jamais honnêtes et la procédé ne peut pas être itéré.

On utilise donc par la suite une version d'un algorithme de priorité de A.R. Meyer et E.M. McCreight [9] pour montrer que pour tout $t()$ donné on peut effectivement construire une autre fonction $t'() \in R_t$, telle que $t'()$ est arbitrairement grand i.a. (et donc aussi arbitrairement complexe i.a.).

Si l'on définit :

$t() \in R_{s()}$ est optimal pour R_s (mod $h()$)

si $\Phi_t(x) > h(x, \Phi_{t'}(x))$ i.a. $\Longrightarrow R^{\Phi}_{t()} \not\subseteq R^{\Phi}_{t'()}$,

alors les théorèmes de pathologie précédents suggèrent les problèmes suivants :

Etant donné $t_1()$ arbitraire, peut on effectivement trouver un $t_2() \in R_{t_1}$ optimal ?

Plus généralement, peut on (effectivement) trouver un élément $t_2()$ de R_{t_1} moins complexe que $t_1()$, si une telle fonction existe ?

On donne une réponse affirmative à cette dernière question au paragraphe 3 dans le cas d'une fonction $t_1()$ qui possède un speed-up. La démonstration repose sur l'effectivité du pseudo-speed-up de Blum [11].

Au paragraphe 4, on pose donc le problème suivant :
Soient $t()$ arbitraire, $t_1(), t_2() \in R_t$. Peut on toujours effectivement aller

de $t_1()$ à $t_2()$, c'est-à-dire existe-t-il toujours une fonction $s() \in \mathcal{R}_1$ telle que $\varphi_{s(t)} \in \mathcal{R}_t$ et $\varphi_{t_2}() = \varphi_{s(t_1)}()$?

Si $t_1()$ et $t_2()$ sont des fonctions récursives, alors il existe toujours une machine de Turing qui calcule de graphe de $t_2()$ si on lui donne le graphe de $t_1()$, mais cet algorithme n'est pas nécessairement tel que $\varphi_{s(t)}() \in \mathcal{R}_t$ pour tout $t()$. On montre au paragraphe 4 que pour tout t il existe $t_1()$ et $t_2() \in \mathcal{R}_t$ tels que pour tout

$$s() \in \mathcal{R}_1 \;,\; \varphi_{s(t)}() \in \mathcal{R}_t \Longrightarrow \varphi_{t_1}() \neq \varphi_{s(t_2)}() \;\&\; \varphi_{t_2}() \neq \varphi_{s(t_1)}() \;.$$

6.1. - *Les classes* R_t *ne sont pas récursivement énumérables.*

On montre dans ce paragraphe que pour tout $t() \in R_1$ la classe R_t est non-bornée. La non-énumérabilité de R_t en est alors un corollaire.

Le principe de la démonstration s'appuie sur l'existence d'ensembles récursifs infinis qui ne possèdent pas de sous-ensemble récursif infini facile à calculer [1] :

1 - Soit $r() \in R_1$ une fonction récursive totale. On construit un ensemble récursif infini A tel qu'aucun sous-ensemble infini de A soit Φ-r()-calculable :

Définition *6.1* : On dira que A, ensemble récursif infini, est r()-immune, si

$$(\forall B) \;\; B \text{ récursif infini } \;\&\; B \subseteq A \;\&\; c_B() \overset{\sim}{=} \varphi_Z() \implies \Phi_Z() > r() \;\; \text{i.a.}$$

où $c_B()$ est la fonction caractéristique de B.

Théorème *6.1.1.* : Pour toute classe de machines $\langle\varphi,\Phi\rangle$ et tout $r() \in R_1$ il existe un ensemble r()-immune.

Soit $R^{\Phi}_{t()}$ la classe des fonctions récursives Φ-r()-calculables et soit $S^{\Phi}_{r()}$ la classe des fonctions récursives caractéristiques Φ-r()-calculables ; si l'on suppose que r() soit suffisamment grand, alors $S^{\Phi}_{r()} \subset R^{\Phi}_{r()}$ (et $R^{\Phi}_{r()}$) sont des classes récursivement énumérables.

Soit $\{\varphi_{h(i)}() \mid i \in \mathbb{N}\} = S^{\Phi}_{r()}$ une présentation récursivement énumérable de $S^{\Phi}_{r()}$. On construit simultanément un ensemble A r()-immune et une liste d'indices L de sous-ensembles possibles de A par

---

[1] une telle classe d'ensembles récursifs a été construite par Trahtenbrot et par Constable [20].

diagonalisation sur $S^{\Phi}_{r()}$ de manière à ce que :

(i) $(\forall i)\ \varphi_{h(i)}() \neq c_A()$;

(ii) $(\forall i)\ R^i = \{x \mid \varphi_{h(i)}(x) = 1\}$ infini $\Longrightarrow R^i \not\subseteq A$.

On utilise la liste L et un pointeur p, au pas $x = 0$

on pose $L := 0$ et $p := 0$;

au pas x :

1) $(\exists i)\ i \in L\ \&\ \varphi_{h(i)}(x) = 1$

(a) $c_A(x) := 0$

(b) si $(\forall j)\ j \in L\ \&\ \varphi_{h(j)}(x) = 1$ alors $L := L - \{j\}$;

si $\varphi_{h(p)}(x) = 1$ alors $p := p+1$

si $\varphi_{h(p)}(x) = 0$ alors $p := p$; aller au pas $x + 1$

2) $(\forall i)\ i \in L \Longrightarrow \varphi_{h(i)}(x) = 0$;

(a) $c_A(x) := 1 \dot{-} \varphi_{h(p)}(x)$;

(b) si $\varphi_{h(p)}(x) = 0$ alors $L = L \cup \{p\}$;

$p := p + 1$; aller au pas $x + 1$

On montre que si $B = \{x \mid \varphi_{h(i)}(x) = 1\} = R^i$ est infini, alors $B \not\subseteq A$:

au pas n : si L contient i, alors $(\forall x < n) \neg [\varphi_{h(i)}(x) = 1\ \&\ c_A(x)=0]$, sinon i aurait quitté L à x ; il faut faire $R^i \not\subseteq A$; c'est-à-dire $x \in R^i\ \&\ x \notin A$.

Si $c_A(n) = 0$ et $n \in R^p$ alors $R^p \not\subseteq A$ et on passe à $p + 1$.

Si $c_A(n) = 0$ et $n \notin R^p$ alors il faut attendre une autre valeur

$m > n$ pour pouvoir faire $m \in R^p$ & $m \notin A$.

Si par contre pour tout $i \in L$, $n \notin R^i$, alors on fait $c_A(n) \neq R^p$ et si $\varphi_{h(p)}(n) = 0$, $c_A(n) = 1$, il faut attendre $m > n$ tel que $m \in R^p$ & $m \notin A$, par conséquent $L := L \cup \{p\}$.

Assertion (i) : $i \in L$ stable $\Longrightarrow R^i$ fini

supposons au contraire $i \in L$ & R^i infini, alors il existe y tel que $\varphi_{h(i)}(y) = 1$ et i quitte L au point 1) b) du pas y, contradiction.

Assertion (ii): $(\forall i)$ R^i infini $\Longrightarrow R^i \nsubseteq A$;

supposons au contraire $(\exists i)$ R^i infini & $R^i \subseteq A$.

(a) si $i = p$, alors on fait $R^p \neq A$ au point 2) ;

(b) si $i < p$, alors on fait $R^i \not\subset A$ au point 1) b) car il existe y tel que $\varphi_{h(i)}(y) = 1$; contradiction.

On généralise maintenant la construction du théorème précédent à la construction d'un ensemble récursif infini A qui est Φ-r()-immune et Φ-r()-co-immune :

Théorème 6.1.2. : Pour toute classe de machines $<\varphi,\Phi>$ et tout $r() \in \mathcal{R}_1$ il existe un ensemble r()-immune et r()-co-immune.

Il faut donc s'assurer que R^i infini $\Longrightarrow R^i \nsubseteq A$ & $R^i \nsubseteq \bar{A}$.

On utilise deux listes L_1 et L_2 qui contiennent des sous-ensembles éventuels de A et de $\bar{A}$ respectivement et le pointeur p.

On veut obtenir :

(a) $\varphi_{h(i)}(x) = 1$ & $c_A(x) = 0$ $(c_{\bar{A}}(x) = 1)$ pour un certain x

(b) $\varphi_{h(i)}(x) = 1$ & $c_{\bar{A}}(x) = 0$ $(c_A(x) = 1)$ pour un certain x

mais on ne peut satisfaire qu'une des deux conditions (a) et (b) au pas x ; on définit L_1 et L_2 de façon que :

si $i \in L_1$, on n'a jamais eu la situation (a) et

si $i \in L_2$, on n'a jamais eu la situation (b).

Initialement, $L_1 = L_2 = \emptyset$ et $p = 0$;

A) au pas x :

si $\exists\, i \in L_1 \;\; \varphi_{h(i)}(x) = 1$ on pose $c_A(x) = 0 : R^i \not\subset A$

$\forall\, j \in L_1$ si $\varphi_{h(j)}(x) = 1$ alors $L_1 := L_1 - \{j\} : R^j \not\subset A$

maintenant $c_A(x) = 0$ est fixé, $x \in A$

et $c_{\bar{A}}(x) = 1$, $x \in \bar{A}$

alors si $\varphi_{h(p)}(x) = 1$, $R^p \not\subseteq A$, mais peut-être $R^p \subseteq \bar{A}$,

si $\neg(\exists y < x)\, [\varphi_{h(p)}(y) = 1 \;\&\; c_{\bar{A}}(y) = 0]$ alors $L_2 = L_2 \cup \{p\}$;

$p := p + 1$; aller au pas $x + 1$

sinon si $\exists\, i \in L_2 \;\; \varphi_{h(i)}(x) = 1$ on pose $c_{\bar{A}}(x) := 0 : R^i \not\subset \bar{A}$

$\forall\, j \in L_2$ si $\varphi_{h(j)}(x) = 1$ alors $L_2 := L_2 - \{j\} : R^j \not\subset \bar{A}$

maintenant $c_{\bar{A}}(x) = 0$ est fixé, $x \notin \bar{A}$

et $c_A(x) = 1$, $x \in A$

alors si $\varphi_{h(p)}(x) = 1$, $R^p \not\subseteq \bar{A}$, mais peut-être $R^p \subseteq A$,

si $\neg \exists\, y < x\, [\varphi_{h(p)}(y) = 1 \;\&\; c_A(y) = 0]$ alors $L_1 = L_1 \cup \{p\}$;

$p := p + 1$; aller au pas $x + 1$

B) si $(\forall i)\ i \in L_1 \cup L_2\ \ \varphi_{h(i)}(x) = 0$ alors on pose $c_A(x) = 1 \dot{-} \varphi_{h(p)}(x)$;

si $\varphi_{h(p)}(x) = 0$ alors $L_1 := L_1 \cup \{p\}$

si $\varphi_{h(p)}(x) = 1$ alors $L_2 := L_2 \cup \{p\}$;

$p := p+1$; aller au pas $x + 1$.

La démonstration formelle que l'ensemble A ainsi construit est r()-immune et r()-co-immune suit celle du théorème précédent.

2 - On applique maintenant les ensembles récursifs r()-immunes à une première caractérisation des classes $\mathcal{R}_t = \{\varphi_i() \mid R^{\Phi}_{\varphi_i()} = R^{\Phi}_{t()}\}$. On prouve que $\mathcal{R}_t$ (t() récursif et total, mais arbitraire) n'est ni de complexité bornée, ni borné :

Théorème 6.1.3. : (a) $\forall r() \in \mathcal{R}_1\ \forall t() \in \mathcal{R}_1\ \exists\ \varphi_j() \in \mathcal{R}_t$

$(\forall k)\ \varphi_k() \stackrel{\sim}{=} \varphi_j() \Longrightarrow \Phi_k() > r()$ i.a.

(b) $\forall g() \in \mathcal{R}_1\ \forall t() \in \mathcal{R}_1\ \exists\ \varphi_j() \in \mathcal{R}_t$

$\varphi_j() > g(\varphi_t())$ i.a.

Soit $\mathbb{C}$ une classe récursivement énumérable de fonctions récursives totales, on prouve facilement :

$\mathbb{C}$ récursivement énumérable $\Longrightarrow \exists\ f() \in \mathcal{R}_1\ \forall g() \in \mathbb{C}\ \ g() \leqslant f()$ p.p ;

et par conséquent : $\forall f()\ \exists\ g() \in \mathbb{C}\ g() > f()$ i.a. $\Longrightarrow \mathbb{C}$ n'est pas récursivement énumérable.

Corollaire 6.1.4. : $\mathcal{R}_t$ n'est pas récursivement énumérable.

Pour la démonstration du théorème on construit une fonction $\varphi_j()$ ayant les propriétés requises par le théorème à l'aide d'un ensemble r()-immune.

On a d'abord le

Lemme 6.1.5. : $\forall\Phi\ \exists h(x,y,z) \in \mathcal{R}_3$ monotone croissante en x et y tel que si $\varphi_i()$, $\varphi_j() \in \mathcal{R}_1$

$$\text{et } \varphi_{f(i,j)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_i(x) < \varphi_j(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\Phi_{f(i,j}(x) < h(\Phi_i(x), \Phi_j(x),x)$ p.p.

La démonstration du lemme est similaire à celle des lemmes du début de chapïtre V.

Soit A un ensemble $r()$-immune avec

$$r(x) = h(\Phi_i(x), k_\Phi(\varphi_i(x) + t(x),x), x)$$

où $h() \in \mathcal{R}_3$ est la fonction du lemme ,

$k_\Phi() \in \mathcal{R}_2$ est la fonction qui exprime "l'honnêteté" de la mesure Φ : $(\forall i)\ \Phi_i(x) \leq k_\Phi(\varphi_i(x),x)$ p.p.,

$g() \in \mathcal{R}_1$ et $\varphi_i() \in \mathcal{R}_1$ sont des fonctions données et $t() \in \mathcal{R}_1$ est telle que $g(\varphi_i()) < \varphi_i() + t()$ i.a. ,

alors on pose

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) + t(x) & \text{si} \quad x \in A \\ \varphi_i(x) & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

et on montre que $\varphi_j()$ satisfait le théorème.

Assertion : $\varphi_j() \in \mathcal{R}_{\varphi_i}$.

Supposons que non : $\mathcal{R}^\Phi_{\varphi_i()} \subsetneq \mathcal{R}^\Phi_{\varphi_j()}$;

dans ce cas il existe : $\varphi_u() \in R^{\Phi}_{\varphi_j()} - R^{\Phi}_{\varphi_i()}$, donc

$(\exists k)\ \varphi_u() \cong \varphi_k()\ \&\ \varphi_i() \underset{\text{i.a.}}{<} \Phi_k() \underset{\text{p.p.}}{\leqslant} \varphi_j()$ par définition de $R^{\Phi}_{\varphi_i}$, $R^{\Phi}_{\varphi_j}$

$\Longrightarrow \varphi_i() < \Phi_k()$ i.a. sur A par définition de φ_j .

Soit $A^k \subseteq A$ le sous-ensemble infini de A sur lequel $\varphi_i() < \Phi_k()$ et soit

$$c_A k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_i(x) < \Phi_k(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sa fonction caractéristique.

Si $\Phi_k() = \varphi_m()$ et $c_A k() = \varphi_n()$, alors

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &< h(\Phi_i(x), \Phi_m(x), x) \quad \text{p.p. par le lemme} \\ &\leqslant h(\Phi_i(x), k_\Phi(\Phi_k(x),x),x) \quad \text{p.p. par définition de } k_\Phi() , \\ &\leqslant h(\Phi_i(x), k_\Phi(\varphi_j(x),x),x) \quad \text{p.p. par définition de } \Phi_k \text{ et } \varphi_j \\ &= r(x) \quad \text{sur } A. \end{aligned}$$

Mais $\Phi_n()$ est la complexité de $c_A k(x)$, c'est-à-dire de $A^k \subseteq A$ qui ne peut pas être plus petite que $r(x)$; contradiction.

Assertion : $\varphi_k() \cong \varphi_j() \Longrightarrow \Phi_k() > r()$ i.a.

Par définition de A, si $\varphi_u()$ est une fonction caractéristique pour A, alors $\Phi_u() > r()$ i.a., donc $\Phi_k() > r()$ i.a.

Notons, qu'on n'a pas nécessairement $\Phi_k() > r()$ p.p. si A n'est pas $r()$-co-immune.

On vérifie maintenant aisément que φ_j satisfait le théorème.

6.2. - *Invariance des classes* $R^{\Phi}_{t()}$.

On procède maintenant à la construction d'une famille de fonctions $t_i^!()$, $t_i^!() \in R_t$. Cette construction peut être itérée et $t_i^!()$ peut-être construit de manière à satisfaire à des conditions supplémentaires ($t_i^!() \in M$, ensemble mesuré, etc...).

Théorème 6.2.1. : Pour toute classe de machines $<\varphi,\Phi>$ et pour toutes les fonctions $t()$ et $h() \in R_1$ suffisamment grandes, on peut trouver une autre fonction $t'() \in R_1$, uniformément en t et h, telle que

(i) $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{t'()}$

(ii) $R^{\Phi}_{t()} \subsetneqq R^{\Phi}_{\varphi_{h(t)}()}$

(iii) $\varphi_{t'}() > \varphi_{h(t)}()$ i.a.

Discussion : On choisit $t()$ suffisamment grand pour que $R^{\Phi}_{t()}$ soit récursivement énumérable. Dans ce cas on peut diagonaliser sur $R^{\Phi}_{t()}$ et trouver une fonction récursive totale $f()$ telle que $\exists g() \in R_1$
$g() \notin R^{\Phi}_{t()}$ & $g() \in R^{\Phi}_{\varphi_{f(t)}()}$ (voir la construction d'une telle fonction $f()$ au chapitre V). L'existence de "Φ-gaps" fait que $f()$ ne peut pas être extensionnel mais doit par contre dépendre de l'indice (c'est-à-dire de la fonction de complexité) de $\varphi_t() = t()$.

En choisissant $\varphi_{h(t)}() > \varphi_{f(t)}()$ p.p. on satisfait à la condition (b) du théorème.

On veut construire $\varphi_{t'}()$ de manière que

(a) $[\forall\, \Phi_i\ [\Phi_i() > t()$ i.a. $\Longleftrightarrow \Phi_i() > t'()$ i.a.$]] \Longleftrightarrow R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{t'()}$

et (b) $[\exists\, \Phi_i\ [\varphi_{h(t)}() < \Phi_i()$ p.p. & $\Phi_i() \leq t'()$ i.a.$]] \Longrightarrow t'() > \varphi_{h(t)}()$ i.a.

Si $\psi_{t'}()$ satisfait à (a) et (b) ci-dessus, alors pour toute fonction de mesure $\Phi_i()$, si $\psi_t() < \Phi_i() \leq \psi_{h(t)}()$ p.p. alors $\psi_{t'} < \Phi_i()$ i.a.& $\Phi_i() \leq \psi_{t'}()$ i.a. Notre condition sur $h()$ garantit l'existence de telles fonctions $\Phi_i()$. Soit maintenant $k(t)$ une fonction qui détermine une borne supérieure de $\max\{\psi_{h(t)}(), \Phi_{h(t)}()\}$ et telle que $\exists\, \Phi_i\ [\psi_{h(t)}() < \Phi_i() \leq \psi_{k(t)}()]$ p.p. ; on construit $t'()$ de façon que pour un tel $\Phi_i()$,

$$\Phi_i() \leq t'() \text{ i.a. } \& \ t'() \underset{\text{i.a.}}{<} \Phi_i() \underset{\text{p.p.}}{\leq} \psi_{k(t)}() \Longrightarrow t'() > \psi_{h(t)}() \text{ i.a.}$$

Ainsi construit, $t'()$ satisfait à la condition (c) du théorème. On utilise une version d'un algorithme de priorités introduit dans [9], dont le principe est le suivant :

Cet algorithme énumère le graphe de $t'()$ simultanément avec celui de $t()$ et avec les graphes des $\Phi_i()$; au pas x de l'algorithme on détermine $t'(x)$.

A chaque pas x il existe une liste finie d'indices $L_1 = \{k \mid (\exists\, u < x)\ t(u) < \Phi_k(u) \leq \psi_{k(t)}(u)\}$ et (au même pas x) une ou plusieurs fonctions dont l'indice se trouve dans L_1, sont "satisfaites" dans le sens suivant : si $k \in L_1$ à $u < x$ et n'a pas cessé de l'être à x, on fait éventuellement $t'(x) < \Phi_k(x)$, sauf si cette valeur de $t'(x)$ entraînerait l'existence d'un $\Phi_j(x)$, $j \notin L_1$ et $t'(x) < \Phi_j(x)$.

Si $\Phi_k()$ est satisfait au pas x, k quitte L_1 et passe dans une autre liste finie L_2, sauf si $\Phi_k(y)$ n'a pas encore convergé pour un certain $y \leq x$ ou si $\Phi_k(x) > \psi_{k(t)}(x)$. Tout k satisfait à $x < y$ passe de nouveau dans L_1 à y si $t(y) < \Phi_k(y) \leq \psi_{k(t)}(y)$.

Si l'on peut s'assurer que pendant que $k \in L_1$, $\Phi_k(x) > \psi_{t'}(x)$ pour un nombre fini d'arguments x seulement, alors $t() < \Phi_k() \leq \psi_{k(t)}()$ i.a. $\Longrightarrow$ k entre en L_1 i.a. $\Longrightarrow$ k est satisfait i.a. $\Longrightarrow t'() < \Phi_k()$ i.a. $\Longrightarrow R^{\Phi}_{t'()} = R^{\Phi}_{t()}$ & $t'() \leqslant t()$ i.a. d'une part et $\psi_{h(t)}() < \Phi_k() \leqslant \psi_{k(t)}()$ p.p. $\Longrightarrow t'() < \Phi_k()$ i.a. & $\Phi_k() \leqslant t'()$ i.a.

$$\Longrightarrow t'() > \psi_{h(t)}() \text{ i.a.}$$

et les conditions du théorème sont satisfaites.

Ce problème est résolu par un schéma de priorités $P_k(x)$ (= la priorité de Φ_k au début du pas x) que l'on peut présenter plus formellement de la façon suivante :

On utilise une seule liste principale P de tous les entiers, positifs ou nuls, arrangés en ordre croissant et une liste de marques mobiles $m_o, m_1, m_2, \ldots$ chacune associée injectivement à un nombre de la liste P et portant éventuellement un caractère + ou − . Si m_i reste associé à n à partir du pas x, m_i est associée "loyale" à x, sinon "déloyale". A chaque pas x un nombre fini d'entiers dans P ont chacun une associée ; le plus petit élément de P qui n'a jamais eu d'associée est vacant. Au même pas il existe deux listes finies disjointes :

$L_1 = \{i \mid m_i$ est associée et est marquée $+\}$;

$L_2 = \{i \mid m_i$ est associée et est marquée $-\}$.

On peut avancer une marque par rapport à P et l'associer au nombre vacant (une marque qui avance perd son +) ; par ailleurs, un − peut être transformé en + . Nous utiliserons la notation $P_i(x) = n$ pour dire qu'au pas x, m_i est une marque associée à $n \in P$.

On effectue alors l'algorithme suivant :

Initialement, $L_1 = L_2 = \emptyset$ et 0 est vacant.

Au pas x :

1) On associe m_x avec le nombre vacant et on le marque − ;

2) On calcule $t(x)$ et tous les $\Phi_k(x)$, $k < x$ et $k \in L_1$:

(a) $L_1 = \emptyset$ ou $(\forall k)\ k \in L_1 \Longrightarrow \Phi_k(x) \leq t(x)$,

(b) sinon on pose $P_{k_o} = \min\limits_{k \in L_1} \{P_k(x) \mid \Phi_k(x) > t(x)\}$

et dans cette dernière éventualité, on a :

- soit (α) $\Phi_{k_o}(x) \leq \vartheta_{k(t)}(x)$,
- soit (β) $\Phi_{k_o}(x) > \vartheta_{k(t)}(x)$.

(a) si un tel k_o n'existe pas, alors on pose $t'(x) = \max\limits_{j \in L_2} \{\Phi_j(x)\}$

(b) si un tel k_o existe et si

$$(\exists\ k \in L_1)\ (\forall\ j \in L_2)\ [P_k(x) < P_{k_o}(x)\ \&\ P_j(x) < P_k(x) \Longrightarrow \Phi_j(x) < \Phi_k(x)]$$

on pose $t'(x) := \max\limits_{j \in L_2} \{\Phi_j(x) \mid P_j(x) < P_k(x)\}$

et on associe tous les m_k, $k \in L_1$, $P_k < P_{k_o}$ et $\Phi_k(x) > t'(x)$ avec des nombres vacants et on les marque − ;

mais si un tel k n'existe pas, alors on pose

$$t'(x) := \begin{cases} \Phi_{k_o}(x) - 1 & \text{dans le cas } (\alpha) \\ \vartheta_{k(t)}(x) & \text{dans le cas } (\beta) \end{cases}$$

et on associe m_{k_o} avec le nombre vacant.

3) Pour tout $k < x$,

si $k \notin L_1$ et $[t(x) < \Phi_k(x) \leq \vartheta_{k(t)}(x)]$

ou $k \notin L_1 \cup L_2$ et $[t'(x) < \Phi_k(x) \leq \vartheta_{k(t)}(x)]$

on marque + (ou on transforme un − en +) la marque mobile m_k correspondante, sauf si $(\exists u < x)\ \Phi_k(u) > \vartheta_{k(t)}(x)$ et on va au pas $x + 1$.

On vérifie, $\Phi_i()$ étant total (en utilisant un abus usuel de notation) :

(a) $\forall\ \Phi_i\ [t() < \Phi_i()$ i.a. $\Longleftrightarrow$ i entre en L_1 i.a. $\Longleftrightarrow$ i quitte L_1 i.a.

$\Longleftrightarrow m_i$ déloyal $\Longleftrightarrow t'() < \Phi_i()$ i.a.$]$

$\Longleftrightarrow R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{t'()}$

(b) $\exists\ \Phi_i\ [\vartheta_{h(t)} < \Phi_i() \leq \vartheta_{k(t)}()$ p.p. $\Longleftrightarrow i \in L_1$ p.p. $\Longrightarrow i{=}k_o$ i.a$] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow t'() > \vartheta_{h(t)}()$ i.a.

Démonstration du théorème :

Assertion 1 : $\vartheta_{t'}() > \vartheta_{h(t)}()$ i.a.

Par la condition (b) du théorème et par un lemme du chapitre V on peut choisir $h()$ tel que $R^{\Phi}_{\vartheta_t()} \subsetneq R^{\Phi}_{\vartheta_{h(t)}()}$; par la condition sur $k()$ il existe Φ_i tel que $\vartheta_{h(t)}() < \Phi_i() \leq \vartheta_{k(t)}()$ p.p. Dans ce cas il existe un $x > i$ tel que i entre en L_1. Mais m_i ne peut pas être loyal à $y > x$, car il n'y a qu'un nombre fini de $j \in L_1$ avec $P_j(x) < P_i(x)$ et à chaque pas $y > x$ un tel j au moins quitte L_1 au point 2) b) de l'algorithme. Ainsi, il existe $y' > x$ tel que

$$P_i(y') = P_{k_o}(y')\ \&\ (\forall k \in L_1)\ (\exists j \in L_2)\ [P_k(y') < P_{k_o}(y')\ \&\ P_j(y') < P_k(y')$$
$$\&\ \Phi_j(y') > \Phi_k(y')] \ ;$$

alors on pose $t'(y') > \vartheta_{h(t)}(y')$.

Il est évident, que i entre en L_1 i.a. et que $P_i() = P_{k_o}()$ i.a. , d'où $t'() > \vartheta_{h(t)}()$ i.a.

Assertion 2 : $R^{\Phi}_{t()} = R^{\Phi}_{t'()}$.

(i) $\Phi_k() > t()$ i.a. $\Longrightarrow \Phi_k() > t'()$ i.a.

Supposons le contraire :

$\Phi_k() > t()$ i.a. & $\Phi_k() \leq t'()$ p.p.

Si $\Phi_k() > t()$ i.a., alors k entre en L_1 i.a. et $\Phi_k() \leq t'()$ p.p. implique qu'il existe un x tel que $m_k +$ est loyal à x.

En effet, m_k ne peut pas être loyal, car $\Phi_k() \leq t'() \leq \vartheta_{k(t)}()$ p.p. ,

$m_k -$ ne peut pas être loyal, car $\Phi_k() > t()$ i.a.

et $m_k +$ doit être loyal à un certain x, car si k quitte L_1 i.a. alors $\Phi_k() > t'()$ i.a.

Donc, $m_k +$ doit être loyal à x.

On montre que ceci est impossible :

Il n'y a qu'un nombre fini de $j \in L_1$ tels que $P_j() < P_k()$; et à chaque pas un d'entre eux au moins quitte L_1. Donc, si à x suffisamment grand, k n'a pas encore quitté L_1 et $\Phi_k(x) > t(x)$, alors tous les Φ_j , $j \in L_1$ et $P_j(x) < P_k(x)$ auront quitté L_1 et par conséquent $k = k_o$ à x et k quitte L_1 à x au point 2) b) α) ou 2) b) β) de l'algorithme et ceci est en contradiction avec le fait que $m_k +$ doit être loyal.

(ii) $\Phi_k() > t'()$ i.a. $\Longrightarrow \Phi_k() > t()$ i.a.

Supposons le contraire :

$\Phi_k() > t'()$ i.a. & $\Phi_k() \leq t()$ p.p.

Comme $t'() > t()$ i.a., les seuls points où $\Phi_k() > t'()$ ne peuvent être que les arguments ou $t'(x) < t(x)$, c'est-à-dire où $t'()$ prend une "valeur minimale".

Supposons donc que $\Phi_k() \leq t()$ p.p. , alors

(a) $m_k +$ est loyal à y $(k \in L_1)$;

(b) $m_k -$ est loyal à y $(k \in L_2)$;

(c) m_k est loyal à y $(k \notin L_1 \cup L_2)$;

on montre que ces trois cas sont impossibles.

(a) Soit $k \varepsilon L_1$, $m_k +$ loyal à x et $P_k(x) < P_{k_o}(x)$, alors

α) il existe toujours un $j \varepsilon L_2$ avec $P_j() < P_k()$ & $\Phi_j() > \Phi_k()$; mais alors on a $\Phi_k() < \Phi_j() \leqslant t'()$ p.p. par définition de $t'()$, en contradiction avec l'hypothèse ci-dessus ;

ou β) $\Phi_k(y)$ est plus grand que tous les $\Phi_j(y)$, $j \varepsilon L_2$ avec $P_j(y) < P_k(y)$, mais alors k quitte L_1 à y et $m_k +$ n'est par loyal, contradiction.

(b) Si $m_k -$ est loyal $(k \varepsilon L_2)$, alors il existe x tel que $j \varepsilon L_1$ & $\Phi_j(x) > t'(x) \Longrightarrow P_j(x) > P_k(x)$. Pour tout $y > x$, s'il existe un $k' \varepsilon L_2$ tel que $P_{k'}(y) < P_k(y)$ & $\Phi_{k'}(y) > \Phi_k(y)$, alors $t'(y) \geqslant \Phi_{k'}(y) > \Phi_k(y)$, contradiction, si un tel $k' \varepsilon L_2$ n'existe pas, alors $t'(y) = \Phi_k(y)$, contradiction.

(c) Si m_k est loyal $(k \notin L_1 \cup L_2)$ à un certain x, alors ou $\Phi_k() > \emptyset_{k(t)}() > t()$ p.p. ce qui est contraire à l'hypothèse, ou bien $\Phi_k() \leqslant \min(t(), t'())$ p.p. en vertue du point 3) de l'algorithme, ce qui implique $\Phi_k() \leqslant t'()$ p.p. ; également en contradiction avec l'hypothèse.

6.3. - *Le problème du speed-up dans les classes* R_t.

Etant donné les résultats des paragraphes précédents, c'est-à-dire : R_t n'a pas de borne supérieure et des fonctions $t'() \varepsilon R_t$ arbitrairement grandes $(t'() > h(t()$ i.a.) peuvent être construites effectivement, on pose le problème de l'existence de procédés (uniformes et effectifs) d'optimisation dans R_t.

On dira qu'une fonction récursive totale $t() \varepsilon R_s$ est optimal pour R_s (modulo $h()$) si $\Phi_t(x) > h(x, \Phi_{t'}(x))$ i.a. entraîne $R^{\Phi}_{t()} \nsubseteq R^{\Phi}_{t'()}$; c'est-à-dire si $\varphi_{t'}$ est "nettement" moins complexe que φ_t" entraîne $\varphi_{t'}() \notin R_t$.

On considère dans ce paragraphe le cas d'une fonction $t()$ avec speed-up. Etant donné $t() \varepsilon R_s$, si $t()$ est une fonction avec speed-up, alors on prouve que l'on peut effectivement trouver une fonction $t'()$ qui est un pseudo-speed-up de $t()$. La raison en est que si $t()$ est une fonction avec speed-up, alors il existe une séquence de complexité pour $t()$ qui est récursivement énumérable. D'autre part, tout élément d'une telle séquence de complexité qui est presque partout identique à la fonction $t()$ donnée, peut être effectivement obtenu en tant que pseudo-speed-up de $t()$. Or, tout pseudo-speed-up de $t()$ est un élément de R_t, et c'est dans ce sens que l'on peut approcher un optimum dans R_t.

En résumé, si $t() \varepsilon R_s$ est une fonction avec speed-up, alors on peut effectivement trouver une fonction $t'() \varepsilon R_t$ qui est un pseudo-speed-up de $t()$ et ce procédé peut être itéré :

Définition 6.2. [Blum] : Soit $r() \varepsilon R_2$, $\varphi_i, \varphi_j \varepsilon R_1$

(a) φ_j est $r()$-pseudo-speed-up de φ_i si

$[\varphi_j(x) = \varphi_i(x)$ & $r(x, \Phi_j(x)) \leq \Phi_i(x)]$ p.p.

(b) Soit $f() \in R_1$. On dira que $f()$ a $r()$-pseudo-speed-up si $(\forall i)\ [\varphi_i \stackrel{\sim}{=} f() \Longrightarrow (\exists\ j)\ [\varphi_j$ est r-pseudo-speed-up de $\varphi_i]]$

Définition 6.3 [Meyer, Fischer] : Soit $\psi() \in P_1$ arbitraire ; alors une séquence de fonctions $p_o, p_1, \ldots$ est dite séquence de complexité pour $\psi()$ si

(i) $\forall\ p_i$ dom p_i = dom ψ

(ii) $\forall\ \varphi_i\ \ \varphi_i() \stackrel{\sim}{=} \psi() \Longrightarrow \exists\ j\ \Phi_i() \geq p_j()$ p.p.

(iii) $\forall\ p_i\ \ \exists\ k\ \varphi_k() \stackrel{\sim}{=} \psi()\ \&\ p_i() \geq \Phi_k()$ p.p.

Il convient de noter, que toute fonction $\varphi() \in P_1$ possède une séquence de complexité ; $\{\Phi_i \mid \varphi_i() \stackrel{\sim}{=} \varphi()\}$ est une telle séquence, mais en général, $\varphi() \in P_1$ ne possède pas nécessairement une séquence de complexité récursivement énumérable.

On a d'autre part un lemme sur la constructivité du pseudo-speed-up, dû à Blum [11] :

Lemme 6.3.1. : $\exists\ h(), s() \in R_2\ \ \forall e, i\ (\varphi_e(x,y) \geq y, \varphi_i \in R_1)$ si $\varphi_i()$ a un φ_e-pseudo-speed-up, alors il existe $\varphi_j()$, pseudo-speed-up de $\varphi_i()$, tel que

(i) $\varphi_{s(e,i)}() \in R_1$

(ii) $\varphi_{s(e,i)}(x) = \varphi_i(x)$ p.p.

(iii) $\Phi_{s(e,i)}(x) \leq h(x, \Phi_j(x))$ p.p.

c'est-à-dire que $\varphi_{s(e,i)}$ "n'est pas trop différent" (modulo h) d'un φ_e-pseudo-speed-up de $\varphi_i()$.

Soit $\mathbb{F}$ un opérateur effectif total et non décroissant, i.e., $f() \geq g()$ p.p. $\Longrightarrow \mathbb{F}[f()]\ () \geq \mathbb{F}[g()]\ ()$ p.p. pour tout $f()$ et $g() \in R_1$ et soit $t() \in R_1$ une fonction avec $\mathbb{F}[\ ]$-speed-up ; on a le

Théorème 6.3.2. : Il existe $h() \in R_2$ tel que si $\mathbb{F}$ est un opérateur effectif total non-décroissant qui satisfait à $\mathbb{F}[f()]\ (x) \geq h(x,f(x))$, $\forall f() \in R_1$, et $t() \in R_1$ est une fonction avec $\mathbb{F}$-speed-up, alors il existe une fonction $g() \in R_1$ strictement croissante telle que

(i) $(\forall i)\ \varphi_{g(i)}() = t()$ p.p. ,

(ii) $\Phi_{g(o)}, \Phi_{g(1)}, \Phi_{g(2)},\ldots$ est une séquence de complexité pour $t()$ qui est $\mathbb{F}$-décroissante, c'est-à-dire que

$$\Phi_{g(i)}() \geq \mathbb{F}[\Phi_{g(i+1)}()]\ () \quad \text{p.p.} ,$$

(iii) $\varphi_i() \overset{\sim}{=} t() \Longrightarrow \Phi_i() \geq \Phi_{g(i)}()$ p.p.

Principe de la démonstration : On construit une fonction $\varphi_{g(i)}(x) = t(x)$ p.p. pour tout i. Cette fonction $\varphi_{g(i)}()$ possède un $\mathbb{F}$-pseudo-speed-up, car $\varphi_{g(i)}() = t()$ p.p. et $t()$ possède $\mathbb{F}$-speed-up.

Ce pseudo-speed-up peut être trouvé effectivement par le lemme 6.3.1. Pour obtenir une séquence de complexité $\mathbb{F}$-décroissante,

$\Phi_{g(i)}() \geq \mathbb{F}[\Phi_{g(i+1)}()]\ ()$ p.p. , on répète l'opération du pseudo-speed-up effectif avec un $\mathbb{F}^2$-pseudo-speed-up.

A) On construit d'abord une fonction $\varphi_{a(t,i)}() = t()$ p.p. telle que si $\varphi_i() \overset{\sim}{=} \varphi_t()$ alors $h(x, \Phi_i(x)) \geq \Phi_{a(t,i)}()$ p.p. et telle que $\exists\ \varphi_k()\ \varphi_k() \overset{\sim}{=} \varphi_t()\ \&\ h(x, \Phi_{a(t,i)}(x)) \geq \Phi_k(x)$ p.p.

On pose $P(t,i,x) \iff (\forall y < x)\ [\Phi_t(y) \leq x\ \&\ \Phi_i(y) \leq x \Longrightarrow \varphi_t(y) = \varphi_i(y)]$

et

$$\varphi_{a(t,i)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } P(t,i,x)\ \&\ \Phi_i(x) < \Phi_t(x) \\ \varphi_t(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>*Assertion*</u> *a)* : $\varphi_{a(t,i)}(x) = \varphi_t(x)$ p.p.

Supposons au contraire $\varphi_{a(t,i)}(x) = \varphi_i(x) \neq \varphi_t(x)$ i.a.

Dans ce cas il faut que $[P(t,i,x)\ \&\ \Phi_i(x) < \Phi_t(x)]$ i.a.

Si $\varphi_i() \neq \varphi_t()$ i.a. alors il faut que $\Phi_t(y) > x \vee \Phi_i(y) > x$ i.a. si l'on veut que le prédicat $P(t,i,x)$ soit vrai.

Mais si $\varphi_i(), \varphi_t() \in \mathcal{R}_1$, alors pour $y \ll x$ on a $\neg P(t,i,x)$, donc $\varphi_i(x) \neq \varphi_t(x)$ i.a. $\Longrightarrow \neg P(t,i,x)$ p.p.

$$\Longrightarrow \quad \varphi_{a(t,i)}() = \varphi_t(x) \text{ p.p., contradiction.}$$

Si par contre $\varphi_i(x) = \varphi_t(x)$ p.p. alors $\varphi_{a(t,i)}(x) = \varphi_t(x)$ p.p. par définition, ce qui montre la validité de l'assertion a).

<u>*Assertion*</u> *b)* : $\varphi_i() \overset{\sim}{=} \varphi_t() \Longrightarrow h(x, \Phi_i(x)) \geq \Phi_{a(t,i)}(x)$ p.p.

Soit

$$h_1(t,i,x,z) = \begin{cases} \Phi_{a(t,i)}(x) & \text{si } P(t,i,x)\ \&\ \Phi_i(x) = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $P(t,i,x) \Longrightarrow h_1(t,i,x, \Phi_i(x)) = \Phi_{a(t,i)}(x)$

et si $\varphi_t() \overset{\sim}{=} \varphi_i()$, alors $(\forall x)\ P(t,i,x)$.

Avec $h(x,z) \geq \max\limits_{t,i \leq x} \{h_1(t,i,x,z)\}$, on a $h(x, \Phi_i(x)) \geq \Phi_{a(t,i)}(x)$.

Assertion c) : $(\exists k)\ \varphi_k() \overset{\sim}{=} \varphi_t()\ \&\ h(x, \Phi_{a(t,i)}(x)) \geq \Phi_k(x)$ p.p.

Soit $F_o, F_1, F_2, \ldots$ une énumération canonique de toutes les fonctions finies et soit

$$\varphi_{b(u,v)}(x) = \begin{cases} F_v(x) & \text{si} \quad x \in \text{dom } F_v \\ \varphi_u(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec

$$h_2(u,v,x,z) = \begin{cases} \Phi_{b(u,v)}(x) & \text{si} \quad \Phi_u(x) = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a $$h_2(u,v,x, \Phi_u(x)) = \Phi_{b(u,v)}(x)$$

et en posant $h(x,z) \geq \max\limits_{u,v \leq x} \{h_2(u,v,x,z)\}$, $h(x, \Phi_u(x)) \geq \Phi_{b(u,v)}(x)$

Par l'assertion a), $(\forall\ i)\ \varphi_{a(t,i)}(x) = \varphi_t(x)$ p.p.,

donc $(\forall\ x)\ \varphi_{b(a(t,i),v_i)}(x) = \varphi_t(x)$ pour un certain v_i.

Ainsi, $k = b(a(t,i),v_i) \Longrightarrow (\forall x)\ \varphi_k(x) \overset{\sim}{=} \varphi_t(x)$ et

$$h(x, \Phi_{a(t,i)}(x)) \geq \Phi_{b(a(t,i),v_i)}(x) = \Phi_k(x) \quad \text{p.p.}$$

B) Si $\varphi_{a(t,i)}(x) = \varphi_t(x)$ p.p. et si $\varphi_t(x)$ a $\mathbb{F}$-speed-up, alors $\varphi_{a(t,i)}(x)$ a $\mathbb{F}$-pseudo-speed-up et celui-ci peut être trouvé effectivement par une adaptation du lemme de Blum :

On peut trouver une fonction $s() \in R_1$ et une fonction $h'() \in R_2$ telles que si $\varphi_{a(t,i)}()$ a $\mathbb{F}$-pseudo-speed-up, alors il existe j, $\varphi_j()$ un $\mathbb{F}$-pseudo-speed-up de $\varphi_{a(t,i)}()$ tel que :

(i) $\varphi_{sa(t,i)}()$ est total,

(ii) $\varphi_{sa(t,i)}(x) = \varphi_{a(t,i)}(x)$ p.p.,

(iii) $\Phi_{sa(t,i)}(x) \leq h'(x, \Phi_j(x))$ p.p.

La démonstration est pratiquement identique à celle du lemme de Blum avec $\Phi_{a(t,i)}$ à la place de Φ_i.

On pose d'abord $\mathbb{F}[\Phi_u()]\ (m) = \varphi_{f(u)}(m)$.

Soit $s(i)$ l'algorithme défini par les instructions suivantes : (t et $\mathbb{F}$ étant fixés) :

Pour x donné, on pose $n := 0$;

aller au pas n ;

Pas n : $n = \langle u,v \rangle$;

Si $x \leqslant v$ ou $[x > v \ \&\ (\forall m)\ v \leqslant m < x\ \Phi_{a(t,i)}(m) > x]$ alors

$$\varphi_{sa(t,i)}(x) := \begin{cases} \varphi_u(x) & \text{si } \Phi_u(x) < \Phi_{a(t,i)}(x) \\ \varphi_{a(t,i)}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

sinon si $(\exists m)\ v \leqslant m < x \quad \Phi_{a(t,i)}(m) \leqslant x$

alors si $\Phi_u(m) > x$ alors aller au pas $n + 1$

sinon

si $[[\varphi_u(m) \neq \varphi_{a(t,i)}(m)] \vee [\varphi_{f(u)}(m) > \Phi_{a(t,i)}(m) \ \&\ \Phi_{f(u)}(m) \leqslant x]]$

alors aller au pas $n + 1$

sinon $\quad \varphi_{sa(t,i)}(x) := \begin{cases} \varphi_u(x) & \text{si } \Phi_u(x) < \Phi_{a(t,i)}(x) \\ \varphi_{a(t,i)}(x) & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $p(t,x,i,n,y) = \begin{cases} \Phi_{sa(t,i)}(x) & \text{si l'algorithme s'arrête à } n = \langle u,v \rangle \ \&\ \Phi_u(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$h'(x,y) = \max\{p(t,x,i,n,y) \mid \max(t,i,n) \leqslant x\}$

et soit $n = \langle j,v \rangle$ le plus petit n tel que

$\varphi_j(x) = \varphi_{a(t,i)}(x) \quad \forall\, x \geqslant v$ et $\mathbb{F}[\Phi_j()]\,(x) \leqslant \Phi_{a(t,i)}(x) \quad \forall\, x \geqslant v$;

(l'algorithme s'arrête au pas $n = \langle j,v \rangle$ pour tout x suffisamment grand); donc

$$h'(x,\, \Phi_j(x)) \geqslant \Phi_{sa(t,i)}(x) \text{ p.p.}$$

et d'autre part, $\varphi_{sa(t,i)}(x) = \varphi_j(x)$ p.p. par définition de $\varphi_j()$

et $\varphi_j(x) = \varphi_{a(t,i)}(x)$ p.p.

d'où $\varphi_{sa(t,i)}(x) = \varphi_{a(t,i)}(x)$ p.p.

Finalement, $\varphi_{sa(t,i)}() \in \mathcal{R}_1$ comme on vérifie facilement.

C) Soit $s'(a(t,i))$ défini similairement par un $\mathbb{F}^2$-pseudo-speed-up, un tel pseudo-speed-up existe car si $\varphi_t()$ a un $\mathbb{F}$-speed-up et si $\mathbb{F}$ satisfait les conditions du théorème, alors $\varphi_t()$ possède aussi un $\mathbb{F}^2$-speed-up.

On a $(\forall i)\ \varphi_{s'a(t,i)}() =_{\text{p.p.}} \varphi_{a(t,i)}() =_{\text{p.p.}} t()$

ainsi que $\Phi_{s'a(t,i)}() \leqslant h'(x,\, \Phi_{j_i}(x))$ p.p.

où $\varphi_{j_i}()$ est un $\mathbb{F}^2$-pseudo-speed-up de $\varphi_{a(t,i)}()$; c'est-à-dire $\Phi_{a(t,i)}() \geqslant \mathbb{F}^2[\Phi_{j_i}()]\,()$ p.p.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[\Phi_{s'a(t,i)}()]\,() &\leqslant \mathbb{F}[h'(x,\, \Phi_{j_i}(x))] \text{ p.p. par la monotonie de } \mathbb{F} \\ &\leqslant \mathbb{F}^2[\Phi_{j_i}()]\,() \text{ p.p. car } \mathbb{F}[\ ] > h'() \text{ et } \mathbb{F} \text{ est monotone} \\ &\leqslant \Phi_{a(t,i)}() \text{ p.p.} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} g(0) &= s'a(t,0) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g(i+1) &= s'a(g(i),i+1) \end{aligned}$$

où $\varphi_{s'a(t,i)}$ est $\mathbb{F}$-pseudo-speed-up de $\varphi_{a(t,i)}$ comme ci-dessus.

On détermine d'abord la complexité de $\varphi_{a(t,i)}()$ dans le cas général :

$$\varphi_{a(t,i)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } P(t,i,x) \;\&\; \Phi_i(x) < \Phi_t(x) \\ \varphi_t(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\neg\, P(t,i,x) \iff (\exists y \leqslant x)\,[\Phi_t(y) \leqslant x \;\&\; \Phi_i(y) \leqslant x \;\&\; \varphi_t(y) \neq \varphi_i(x)]\ ,$$

ceci est calculable en complexité $z \leqslant x$ par définition pour un x suffisamment grand, donc

$$\varphi_{a(t,i)}(x) = \varphi_t(x) \quad \text{p.p. et}$$

$$\Phi_{a(t,i)}(x) \leqslant h(x, \Phi_t(x)) \quad \text{p.p.}$$

$$P(t,i,x) \;\&\; \Phi_i(x) < \Phi_t(x) \Longrightarrow \Phi_{a(t,i)}(x) \leqslant h(x, \Phi_i(x)) \quad \text{par l'assertion b)}$$

$$\leqslant h(x, \Phi_t(x))$$

et $P(t,i,x) \;\&\; \Phi_i(x) \geqslant \Phi_t(x) \Longrightarrow \Phi_{a(t,i)}(x) \leqslant h(x, \Phi_t(x))$.

On prouve maintenant le théorème :

(i) Il est évident que $(\forall i)\ \varphi_{g(i)}() = t()$ p.p.

(ii) Soit $\varphi_{g(i)}()$ défini, $\varphi_{g(i)}() = \varphi_t()$ p.p. ,

$$\Phi_{a(g(i),i+1)}(x) \leqslant h(x, \Phi_{g(i)}(x)) \quad \text{p.p. .}$$

Soit $h_o(x,y) \geqslant h(x,y)$ une fonction monotone croissante en y et $h_o(x, h'(x,y))$ la fonction $h()$ du théorème, alors

$h_o(x,\mathbb{F}[\Phi_{g(i+1)}()](x)) \leqslant h_o(x,\mathbb{F}[\Phi_{s'a(g(i),i+1)}()](x))$ par définition

$\leqslant h_o(x,\mathbb{F}[h'(x,\Phi_{j_i}(x))](x))$ p.p. Φ_{j_i} un $\mathbb{F}^2$-pseudo-speed-up de $\Phi_{a(g(i),i+1)}$

$\leqslant \mathbb{F}[h_o(x,h'(x,\Phi_{j_i}(x)))]$ p.p. $\mathbb{F}[\ ] > h_o()$

$\leqslant \mathbb{F}^2[\Phi_{j_i}()](x)$ p.p. par la propriété de $\mathbb{F}$

$\leqslant \Phi_{a(g(i),i+1)}(x)$ p.p. par la définition de $\Phi_{j_i}()$

$\leqslant h_o(x, \Phi_{g(i)}(x))$ p.p. par définition de $\Phi_{a(g(i),i+1)}$

donc $\mathbb{F}[\Phi_{g(i+1)}()]\ () \leqslant \Phi_{g(i)}()$ par la monotonie de $h_o()$.

(iii) $\vartheta_i() \stackrel{\sim}{=} \vartheta_t() \implies \Phi_{a(g(i-1),i)}() \leqslant h_o(x, \Phi_i(x))$ p.p.

$\mathbb{F}[\Phi_{g(i)}()]\ () \leqslant \Phi_{a(g(i-1),i)}()$ p.p. par définition de $g()$

$\leqslant h_o(x, \Phi_i(x))$ p.p.

$\leqslant \mathbb{F}[\Phi_i()]\ ()$ p.p.

donc $\Phi_{g(i)}() \leqslant \Phi_i()$ p.p. par la monotonie de $\mathbb{F}$.

6.4. - *Eléments incomparables de* R_t.

Soit $t() \varepsilon R_1$ arbitraire donné ; t détermine la classe des bornes de complexité R_t. Les paragraphes précédents contiennent diverses méthodes de construction effective d'un certain élément $t_2()$ de R_t à partir d'un $t_1() \varepsilon R_t$ donné.

On pose ici le problème à savoir s'il est toujours possible "d'aller effectivement" de $t_1()$ à $t_2()$; $(t_1(), t_2() \varepsilon R_t)$ en particulier s'il est toujours possible de trouver effectivement un $t_2()$ optimal dans R_t [1].

Ce problème suggère la définition suivante :

Définition 6.4.- On dira que $t_2()$ est effectivement comparable à $t_1()$ $(t_1(), t_2() \varepsilon R_1)$, lorsque $t_1() \varepsilon R_s$ et $t_2() \varepsilon R_s$ pour un certain $s() \varepsilon R_1$ et lorsqu'il existe $\varphi_k() \varepsilon P_1$ et des indices t_1 et t_2 pour $t_1()$ et $t_2()$ respectivement, tels que

(i) $\forall t() \varepsilon R_1 \quad \varphi_k(t)$ est défini & $\varphi_k(t) \varepsilon \ \Theta R_t$

(ii) $t_2 = \varphi_k(t_1)$.

$t_1()$ et $t_2()$ sont dits (effectivement) comparables si et seulement si $t_1()$ est effectivement comparable à $t_2()$ ou $t_2()$ est effectivement comparable à $t_1()$.

Remarque : Si $t_2()$ est effectivement comparable à $t_1()$ au sens de la définition 6.4., alors il n'est pas nécessairement vrai qu'il existe un opérateur récursif général (effectif total) $\mathbb{F}$ tel que $\mathbb{F}[\varphi_i()] = \varphi_{\varphi_k(i)}$, car $\varphi_k()$ peut ne pas être extensionnel, i.e.,

$$\varphi_i \simeq \varphi_j \not\Rightarrow \varphi_{\varphi_k(i)} \simeq \varphi_{\varphi_k(j)} \quad ;$$

---

1) Les propositions de ce paragraphe ne sont pas démontrées de façon rigoureuse et ont par conséquent le caractère de conjectures.

(bien que nous n'excluons pas cette possibilité).

La construction du paragraphe 6.2. par exemple correspond à un opérateur effectif total ; ceci n'est pas le cas de la procédure du second théorème de Meyer-McCreight.

Pour tout $t() \in R_1$, on définit encore

$$S_i^t(n) = \text{déf}\{x \leq n | \Phi_i(x) > t(x)\};$$

$$\text{donc} \quad S_i^t = \lim_n S_i^t(n) \quad \text{existe} \iff i \in I_{t()}^{\Phi}.$$

On donne ci-après seulement le principe de démonstration de la

Proposition 6.4.1. - Pour tout Φ et tout $t() \in R_1$ il existe deux fonctions récursives $t_1() \in R_t$ et $t_2() \in R_t$ qui ne sont pas effectivement comparables.

La relation $I_{t_1()}^{\Phi} = I_{t_2()}^{\Phi}$ peut être décidé [31] par une machine de Turing avec 0"-oracle (c'est-à-dire par une machine de Turing qui peut décider de $\{x | W_x$ fini$\}$). D'autre part, étant donné $t_1()$ et $t_2() \in R_t$, il existe toujours une machine de Turing qui calcule le graphe de $t_2()$ étant donné le graphe de $t_1()$, car ces deux ensembles sont récursifs ; soit M_k cette machine. Mais alors $\varphi_k()$ n'est pas nécessairement tel que $(*)\ \forall t \in R_1 \quad \varphi_k(t)$ est défini & $\varphi_k(t) \in \theta R_t$ (i.e., tel que "φ_k laisse invariant $R_{t()}^{\Phi}$").

Il faut donc choisir $t_1()$ et $t_2()$ de façon que

$t_1 = \varphi_k(t_2) \vee t_2 = \varphi_k(t_1) \implies (\exists s)\varphi_k(s) \notin \theta R_s$; c'est-à-dire tels que $t_1()$ et $t_2()$ soient incomparables pour tout φ_k qui laisse invariant $R_{t()}^{\Phi}$.

On cherche donc à définir une condition nécessaire $P(k)$ pour que φ_k ait la propriété $(*)$; symboliquement $(*) \implies P(k)$. Par conséquent, $\neg P(k) \Rightarrow \neg(*)$ et il suffit de faire $\varphi_{t_1}() \neq \varphi_{\varphi_k(t_2)}()$ et $\varphi_{t_2}() \neq \varphi_{\varphi_k(t_1)}()$ pour tout φ_k tel que $P(k)$.

Définition d'une condition nécessaire $P(k)$:

Soit $t' = \varphi_k(t)$; si l'on veut garantir que S_i^t fini <==> $S_i^{t'}$ fini pour tout i, alors $S_i^t(n)$ et $S_i^{t'}(n)$ sont récursivement liés de la façon suivante :

il existe une fonction récursive $f()$ telle qu'à chaque argument u il existe un ensemble fini d'indices et un argument v, $u < v \leq f(u)$ avec

$$|S_\ell^t(v)| - |S_\ell^t(u)| \neq 0 \implies |S_\ell^{t'}(v)| - |S_\ell^t(u)| \neq 0$$

$$\text{et} \quad |S_\ell^t(v)| - |S_\ell^t(u)| = 0 \implies |S_\ell^{t'}(v)| - |S_\ell^t(n)| = 0.$$

Par conséquent, si pour une infinite d'arguments, on choisit t et t' de façon que pour un certain indice

$$|S_i^t(v)| - |S_i^t(u)| = 0 \;\;\&\;\; |S_i^{t'}(v)| - |S_i^{t'}(u)| \neq 0$$

avec $v \geq \max_{x,y \leq u} \{\varphi_x(y) \mid \varphi_x(y) \text{ défini}\}$,

alors pour toute fonction récursive $f()$ il existe un indice et un argument n tels que $S_i^t(n)$ et $S_i^{t'}(n)$ ne soient pas récursivement liés. Ainsi, il n'y a pas de φ_k avec la propriété (*) tel que $t' = \varphi_k(t)$.

Pour obtenir les deux fonctions $t_1()$ et $t_2()$ de la proposition, il suffit de trouver deux indices i et j tels que

$$|S_i^{t_1}(v)| - |S_i^{t_1}(u)| = 0 \;\;\&\;\; |S_i^{t_2}(v)| - |S_i^{t_2}(u)| \neq 0$$

$$\text{et} \quad |S_j^{t_1}(v)| - |S_j^{t_1}(u)| \neq 0 \;\;\&\;\; |S_j^{t_2}(v)| - |S_j^{t_2}(u)| = 0.$$

Bass et Young [15, 16] ont montré que si $R^{\Phi}_{\varphi_t()} = R^{\Phi}_{\varphi_{s(t)}()}$ et si $\varphi_{s(t)} \in G$, G un ensemble mesuré caractéristique, est obtenu par l'algorithme du théorème de Meyer-McCreight, alors $\varphi_{s(t)}()$ est presque aussi grand que $\Phi_t()$ i.a.

On considère ici un $t() \in R_1$ arbitraire et on suppose que $t()$ est donné par un indice t tel que

$\Phi_t(x) > h(x,\varphi_t(x))$ i.a. avec $h() \in R_2$; i.e., $\Phi_t()$ est beaucoup plus grand que $\varphi_t()$ i.a.

On montre ici, que s'il existe une fonction honnête $\varphi_i() \in R_t \cap G$ telle que $\Phi_i(x) \leqslant h(x,\varphi_t(x))$ p.p., alors on peut effectivement trouver une telle fonction :

La procédure de Meyer-McCreight utilise une borne supérieure honnête $\varphi_{q(t)}(x)$ de $\max\{\varphi_t(x),\Phi_t(x)\}$ et produit un $\varphi_{s(t)}$ tel que $\varphi_{s(t)}() \leqslant \varphi_{q(t)}()$ p.p.

Par conséquent, si l'on peut trouver une borne supérieure honnête $\varphi_{t'}()$ de $\varphi_t()$, $\varphi_t() \leqslant \varphi_{t'}() \leqslant g(x,\varphi_t(x))$ p.p. où $g(x,y) < h(x,y)$ pour tout x,y et telle que $\Phi_{t'}(x) \leqslant h(x,\varphi_{t'}(x))$ p.p., alors on peut remplacer $\varphi_{q(t)}(x)$ par $\varphi_{t'}(x)$ dans la procédure de Meyer-McCreight et on a $\varphi_{s(t)}(x) \leqslant h(x,\varphi_t(x))$ p.p.

Le problème est donc ramené à celui de trouver un tel $\varphi_{t'}$ effectivement, s'il existe (si $\varphi_t()$ est situé dans un "gap", alors un tel $\varphi_{t'}$ n'existe pas). La solution du problème est basée sur une variante du pseudo-speed-up effectif de Blum (cf. 6.3.) :

Proposition 6.4.2. - Soit $h() \in R_2$ une fonction récursive croissante ; il existe une fonction récursive $a() \in R_2$ et une fonction $h'() \in R_2$ telles que si $\varphi_t() \in R_1$ et $\Phi_t(x) > h'(x,\varphi_t(x))$ i.a., alors $\varphi_{a(h,t)}$ est une borne supérieure honnête pour $\varphi_t()$, i.e.

$$\varphi_t(x) \leqslant \varphi_{a(h,t)}(x) \leqslant h(x,\varphi_t(x)) \quad \text{p.p.}$$

telle que $\Phi_{a(h,t)}(x) \leqslant h'(x,\varphi_t(x))$, si une telle borne existe.

Soit $M = \text{déf}\{\varphi_i() | \varphi_i() \in R_1 \ \& \ \Phi_i(x) \leqslant g(x,\varphi_i(x)) \text{ p.p.}\}$.

Supposons qu'il existe $\varphi_j() \in M$ tel que

$\varphi_t(x) \leqslant \varphi_j(x) \leqslant h(x,\varphi_t(x))$ p.p., φ_j indice g-honnête d'une borne supérieure de $\varphi_t()$.

On cherche à construire $\varphi_{a(h,t)}$ de façon que

(i) $\varphi_{a(h,t)}(x) = \varphi_j(x)$ p.p.

(ii) $\varphi_t(x) \leq \varphi_{a(h,t)}(x) \leq h(x,\varphi_t(x))$ p.p.

(iii) $\Phi_{a(h,t)}(x) \leq h_1(x,\varphi_j(x))$ p.p.

$a(h,t)$ est défini par l'algorithme suivant :

Pas x : on pose $n := 0$; pour $n := \langle u,v\rangle$:

si $x \leq v$ $\quad \varphi_{a(h,t)}(x) := \begin{cases} \varphi_t(x) & \text{si } \Phi_t(x) < \Phi_u(x) \\ \varphi_u(x) & \text{sinon} \end{cases}$

si $x \geq v$: $(\forall m)$, $v \leq m \leq x$, on calcule $\varphi_t(m)$ avec complexité $\Phi_t(m) \leq x$ et pour tout m, si $\varphi_t(m)$ converge en ressource inférieure ou égale à x :

si (a) $\Phi_u(m) > x$

ou (b) $\varphi_u(m) < \varphi_t(m) \vee \varphi_u(m) > h(m,\varphi_t(m))$

ou (c) $\Phi_u(m) > g(m,\varphi_u(m))$ & $\Phi_g(m,\Phi_u(m)) \leq x$

alors on pose $n := n+1$ et on va à l'étape $n+1$.

Sinon on pose $\varphi_{a(h,t)}(x) := \begin{cases} \varphi_u(x) & \text{si } \Phi_u(x) < \Phi_t(x) \\ \varphi_t(x) & \text{sinon.} \end{cases}$

Avec $p(x,h,t,n,y) = \begin{cases} \varphi_{a(h,t)}(x) & \text{si } n = \langle u,v\rangle \text{ \& } \Phi_u(x) = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $h_2(x,y) = \max\limits_{h,t,n\leq x} \{p(x,h,t,n,y)\}$ on a pour tout x suffisamment grand, si $n = \langle j,v\rangle$,

$$h_2(x, \Phi_j(x)) \geq p(x,h,t,n, \Phi_j(x)) = \Phi_{a(h,t)}(x) \quad \text{p.p.}$$

Mais $\Phi_j(x) \leq g(x, \varphi_j(x))$; d'où $h_2(x,g(x,\varphi_j(x))) \geq \Phi_{a(h,t)}(x)$ p.p.

Avec $h_2(x,g(x,y)) = h_1(x,y)$ les conditions i) à iii) sont satisfaites.

Finalement, on pose $h'(x,y) = h_1(x,h(x,y)$ et on a

$$\Phi_{a(h,t)}(x) \leq h_1(x, \varphi_j(x)) \leq h'(x, \varphi_t(x)) \quad \text{p.p.}$$

et en outre $\varphi_{a(h,t)}$ est un indice $h_1()$-honnête.

La proposition 6.4.2. montre que l'on peut effectivement trouver un élément $t' \in \Theta R_t$, moins complexe qu'un certain φ_t donné, si un tel t' existe. Peut-on faire davantage, c'est-à-dire trouver un $t'()$ tel que $\varphi_{t'}(x) \leq g(x, \varphi_t(x))$ p.p. et $\varphi_t(x) > h(x, \varphi_{t'}(x))$ i.a., avec $\varphi_t()$, $\varphi_{t'}() \in R_s$ et $g(),h() \in R_2$?

En particulier, peut-on effectivement trouver un $t'()$ optimal dans R_s, i.e., tel que $\forall t() \in R_1 \;\; \Phi_{t'}(x) > h(x,\Phi_t(x))$ i.a. $\Rightarrow$ $t() \notin R_s$?

Nous pensons que les deux conjectures suivantes peuvent être démontrées mais nous n'avons pas de démonstration formelle :

(i) Pour tout $s() \in R_1$ il existe $t() \in R_s$ et $t'()$ optimal dans R_s tels que $t'()$ soit effectivement comparable à $t()$.

(Par exemple, si $t'() = t_1()$ est optimal dans R_s et $t() = t_2()$ est obtenu à partir de $t_1()$ par une procédure du type exposé un paragraphe 6.2.).

(ii) Pour tout $s() \in R_1$ il existe $t() \in R_s$ tel que tout $t'()$ optimal pour R_s soit incomparable à $t()$.

TABLE DES MATIERES

Pages

I. INTRODUCTION 1

I.1. Définitions et notations 8

II. LA THEORIE AXIOMATIQUE DE COMPLEXITE DES FONCTIONS RECURSIVES - RESULTATS ANTERIEURS. 16

II.1. Axiomes d'une théorie de la complexité 18

II.2. Les phénomènes du speed-up 26

II.3. Classes de complexité : le théorème de A. Borodin et ses généralisations 32

II.4. Classes de complexité : résultats positifs 34

II.5. Extension de quelques théorèmes fondamentaux 37

III. DES CLASSES NATURELLES DE FONCTIONS DE COMPLEXITE BORNEE : LES HIERARCHIES SUB-RECURSIVES. 41

III.1. Problèmes de base et leur indécidabilité 44

III.2. Les fonctions récursives élémentaires et une hiérarchie sub-récursive primitive 54

III.3. Classes de machines de complexité bornée et le problème de la complexité 63

III.4. Machines de Minsky restreintes et une solution du problème de complexité 69

III.5. Classes de machines élémentaires 75

III.6. Relations entre les classes $E(f)$ et $R^{\Phi}_{t()}$ 80

III.7. La structure des degrés $E(f)$ 88

III.8. Invariance des classes $E(f_k)$ 94

IV. PROBLEMES DE DECIDABILITE ET D'ENUMERABILITE. 99

IV.1. Problèmes de décision qui se rattachent aux classes de complexite $R^{\Phi}_{\vartheta_k()}$ et leurs degrés d'indécidabilité 101

IV.2. Une classification de certains ensembles d'indices dérivés de $R^{\Phi}_{t()}$ 109

IV.3. Une classification des mesures Φ par les propriétés des énumérations des classes $R^{\Phi}_{t()}$ correspondantes 116

IV.4. *Construction d'une mesure* Φ *et d'une borne* $t()$ *telles que* $R^{\Phi}_{t()}$ *n'est pas récursivement énumérable* 118

IV.5. *Construction d'une classe* $R^{\Phi}_{t()}$ *inaccessible* 123

IV.6. *Enumérabilité uniforme des classes de complexité* 130

IV.7. *Difficulté de l'énumération de classes de fonctions* 136

V. HIERARCHIES TRANSFINIES DE CLASSES DE COMPLEXITE BORNEE ET LEURS PROPRIETES. 151

V.1. *La génération de hiérarchies transfinies de classes de complexité* 154

V.2. *Résultats négatifs : incomplétude et pathologie* 165

V.3. *Théorèmes de la théorie de complexité et leurs conséquences pour les hiérarchies de classes de complexité* 171

V.4. *Versions constructives des théorèmes sur l'irrégularité des ensembles mesurés caractéristiques* 177

VI. DE LA STRUCTURE DES CLASSES DE BORNES DE COMPLEXITE. 189

VI.1. *Les classes* R_t *ne sont pas récursivement énumérables* 192

VI.2. *Invariance des classes* $R^{\Phi}_{t()}$ 199

VI.3. *Le problème du speed-up dans les classes* R_t 206

VI.4. *Eléments incomparables de* R_t 215

BIBLIOGRAPHIE.

BIBLIOGRAPHIE

A) Références du Chapitre II

[1] M.O. RABIN

Degrees of difficulty of computing a function and a partial ordering of recursive sets.
Technical Report Nr 2, Hebrew University, Jerusalem (1960)

[2] M. BLUM

A machine - independent theory of the complexity of recursive functions.
Journal A.C.M, vol 14, Nr 2 (1967), 322-336

[3] M.A. ARBIB

Speed-up theorems and incompleteness theorems. Dans: Automata Theory, E.R. Caianiello, ed. Academic Press 1966, 6-24.

[4] J. HARTMANIS, HOPOROFT J.E.

An overview of the theory of computational complexity
Technical Report Nr 70-59, University of Cornell, Department of Computer Sciences.

[5] A.R. MEYER, FISCHER P.C.
On computational speed-up
IEEE Conference Record 9th Ann. Symposium on Switching and Automata Theory (1968), 351-355.

[6] A. BORODIN

Complexity classes of recursive functions and the existence of complexity gaps.
Proceedings A.C.M Symposium on Theory of Computing (May,1969), 67-78

[7] R.L. CONSTABLE

The operator gap
IEEE Conference Record 10th Ann. Symposium Switching and Automata Theory (1969)

[8] *J. HARTMANIS, STEARNS R.E.*

On the computation complexity of algorithms.
Transactions A M S Vol 117 (1969), 285-306

[9] *A.R. MEYER, McCREIGHT, E.M.*

Classes of computable functions defined by bounds on computation
Proceedings A C M Symposium on Theory of Computing (1969), 79-88

[10] *H. ROGERS, Jr*

Gödel numberings of partial recursive functions
Journal of Symb. Logic Vol 23 (1958), 331-341.

[11] *M. BLUM.*

On effective procedures for speeding up algorithms
Proceedings A C M Symposium on Theory of Computing (1969), 43-53.

B) Bibliographie générale

[12] *G. AUSIELLO.*

On bounds on the number of steps to compute functions
Second Annual A C M Symp. on Theory of Computing, Northampton, Mass. 1970

[13] *G. AUSIELLO.*

Parallel universal computation
Fourth Annual Princeton Conf. on Inf. Sciences and Systems, Princeton N.J. 1970

[14] *P. AXT*

On a subrecursive hierarchy and primitive recursive degrees
Transactions Amer. Math. Soc. 92 (1959), 85-105.

[15] *J.L. BASS*

Hierarchies based on computational complexity and irregularities of class
determining measured sets
Purdue University, Ph. D. 1970.

[16] *J.L. BASS, YOUNG, P.R.*

Hierarchies based on computational complexity and irregularites of class determining measured sets
Second Annual A C M Symp. on Theory of Computing, Northampton, Mass. 1970,37-40.

[17] *S.K. BASU*

On the structure of subrecursive degres
Journal of Computer and System Sciences 4 (1970) 452-464.

[18] *M. BLUM*

On the size of machines
Information and Control 11 (1967), 257-265.

[19] *W.A. BURKHARD, KROON, F.W.*

Toward a weakly invariant complexity theory
IEEE Conference Record 1971 Symp. Switching and Automata Theory 24-32.

[20] *R.L. CONSTABLE*

Upward and downward diagonalisation over axiomatic complexity classes
Technical Report Nr 69-32 (1969), Dept. of Comp. Sciences, Cornell University

[21] *R.L. CONSTABLE*

On the size of programs in subrecursive formalisms
Second Annual A C M Symp. Theory of Computing, Northampton, Mass. 1970, 1-9.

[22] *R.L. CONSTABLE, BORODIN A*

On the efficiency of programs in subrecursive formalisms
IEEE Conf Record 1970 Switching and Automata Theory 60-67.

[23] *J.C.E. DEKKER, MYHILL, J.*

Some theorems on classes of recursively enumerable sets
Transactions Amer. Math. Soc. 89 (1958), 25-59.

[24] *S. FEFERMAN*

Classification of recursive functions by means of hierarchies
Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 101-122.

[25] A. GRZEGORCZYK

Some classes of recursive functions
Rozprawy Mat. IV, Warszawa 1953

[26] L. HAY

Isomorphism types of index sets of partial recursive functions
Proceedings Amer. Math. Soc. 17 (1966), 106-110

[27] A.B. KHUTORETSKII

On the reducibility of computable numerations
Algebra i Logika, Vol 8, Nr.2 (1969), 251-264

[28] S.C. KLEENE

Extension of an effectively generated class of functions by enumeration
Colloquium Math. Vol VI (1958), 67-78

[29] G. KREISEL

Non-uniqueness Results for Transfinite Progressions
Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences, série sci. math. astr. et phys.
Vol VIII, Nr.5 (1960) 287-290

[30] L.H. LANDWEBER, ROBERTSON, E.L.

On recursive properties of complexity classes
Second Annual A C M Symp. Theory of Computing, Northampton, Mass. 1970, 31-35.

[31] F.D. LEWIS

Unsolvability Considerations in computational complexity
Second Annual A C M Symp. Theory of Computing, Northampton, Mass.1970, 22-30.

[32] W. MARKWALD

Zur Eigenschaft primitiv - rekursiver Funktionen unendlich viele Werte anzunehmen
Fundamenta Math. (1955/56), 42-43.

[33] *A.R. MEYER, McCREIGHT, E.M.*

Properties of bounds on computation.
Third Annual Princeton Conf. on Inf. Sciences and Systems,
Princeton, N.J. (1969), 154-156.

[34] *A.R. MEYER, FISCHER, P.*

Computational speed-up by effective operators
Journal of Symbolic Logic, Vol 37, Nr.1 (1972), 55-68

[35] *A.R. MEYER, RITCHIE, D.M.*

Computational complexity and program structure
I B M Research Paper RC - 1817 (1967)

[36] *R. PARIKH.*

On nonuniqueness of transfinite progressions
Journal Indian Math. Soc 31 (1967), 23-32

[37] *E.A. POLJAKOV*

Recursive subsets of sets of recursive functions.
Soviet Math. Dokl 9 (1968), 1548-50.

[38] *H.G. RICE*

On completely recursively enumerable classes and their key arrays.
Journal of Symbolic Logic Vol 21, Nr 3 (1956), 304-309

[39] *R.W. RITCHIE*

Classes of recursive functions based on Ackermann's function
Pacific Journal of Math. Vol 15, Nr.3 (1965), 1027-1044

[40] *R.W. RITCHIE*

Classes of predictably computable functions
Transactions Amer. Math. Soc. 106 (1963), 139-173

[41] *J.W. ROBBIN*

Subrecursive Hierarchies
Ph. D. Thesis, Princeton University 1965

[42] *E.L. ROBERTSON*

Complexity classes of partial recursive functions
Third Annual A C M. Symp. Theory of Computing
Shaker Heights, Ohio (1971), 258-266

[43] *R.W. ROBINSON*

A dichotomy of the recursively enumerable sets
Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. Bd 14, Nr 4 (1968), 339-356.

[44] *D. RODDING*

Klassen rekursiver Funktionen
Lecture Notes in Math. 70, 1968, Springer-Verlag, Berlin, 159-222.

[45] *H. ROGERS Jr.*

Theory of Recursive Functions and Effective Computability
McGraw-Hill Book Company, New-York (1967)

[46] *H. SCHWICHTENBERG.*

Rekursionszahlen und die Grzegorczyk - Hierarchie
Arch. math. Logik (1969), 85-97

[47] *H. SCHWICHTENBERG*

Eine Klassifizierung der ε_0-rekursiven Funktionen
Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd 17, Nr 1 (1971), 61-74.

[48] *N. SHAPIRO*

Degrees of computability
Transactions Amer. Math. Soc 82 (1956), 281-299

[49] *J.S. ULLIAN*

Partial algorithm problems for context-free languages
Information and Control 11 (1967), 80-101.

[50] *G. WERNER*

Quelques remarques sur la complexité des algorithmes
R.I.R.O. 4ème année, R-2 (1970), 33-50

[51] *G. WERNER*

Propriété d'invariance des classes de fonctions de complexité bornée
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273 (1971), série A 133-136

[52] *G WERNER*

Sur certaines propriétés des classes de fonctions récursives calculables en complexité bornée
Exposé séminaire Univ. Paris VII, 1970, pp. 24.

[53] *C.E.M. YATES*

Three theorems on the degrees of recursively enumerable sets
Duke Math. Journal 32 (1965) 461-468.

[54] *P. YOUNG*

Towards a theory of enumeration
J. Assoc. Comput. Mach 16 (1969) 328-348.