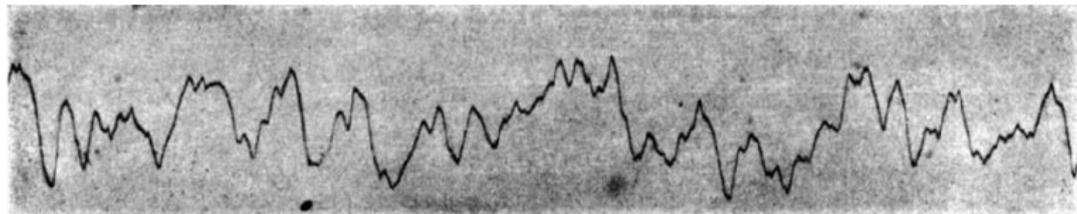


# Fluctuations du travail et de la chaleur dans des systèmes mécaniques hors d'équilibre

Frédéric Douarche

Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon – CNRS UMR 5672

30 Novembre 2005



# Plan de l'exposé

- 1 Contexte scientifique — Motivations
- 2 Fluctuations thermiques à l'équilibre
- 3 Système expérimental
- 4 Mesure de réponse
- 5 Relations de Jarzynski & Crooks
- 6 Relations de Gallavotti-Cohen & Cohen-van Zon

## Mécanique statistique d'équilibre

- *Signature de l'équilibre thermodynamique?*

## Mécanique statistique hors d'équilibre

- *Variation d'énergie libre  $\Delta F$  d'un système entre deux états d'équilibre lors d'une transformation quelconque (réversible / irréversible)?*
- *Chaleur dissipée par un système lors d'une transformation quelconque (régime transitoire / stationnaire)?*

## Motivations générales

- *Thermodynamique des systèmes mésoscopiques (travail, énergie libre, chaleur, température, ...)*
- *Dynamique hors d'équilibre (stochastique) de ces systèmes*
- *Fonctions de corrélation, théorèmes de fluctuation*

## Variation d'énergie libre $\Delta F$

- ÉGALITÉ DE JARZYNSKI

$$\Delta F = F_B - F_A = -\beta^{-1} \ln \left\langle e^{-\beta W} \right\rangle$$

- RELATION DE CROOKS

$$P(W) = P'(-W) e^{\beta(W - \Delta F)}$$

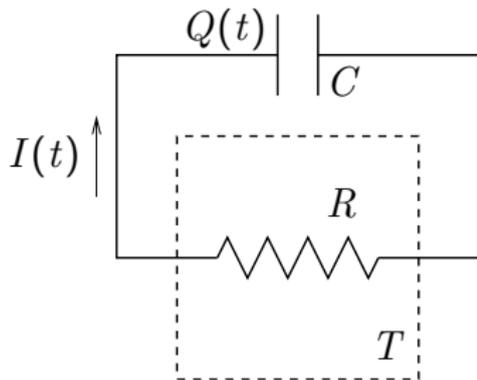
## Chaleur dissipée / puissance injectée : théorèmes de fluctuation

- THÉORÈME DE FLUCTUATION STATIONNAIRE

$$\frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} \sim e^{\tau[\sigma+p + O(1/\tau)]} \quad \text{pour } \tau \rightarrow \infty$$

- THÉORÈME DE FLUCTUATION TRANSITOIRE

$$\frac{\pi_\tau(p)}{\pi_\tau(-p)} = e^{\tau\sigma+p} \quad \text{quel que soit } \tau$$



Charge aux bornes du condensateur : loi de Kirchoff

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = 0$$

- *Constante de temps*  $\tau = 1/RC$
- *Pas de résonance (fréquence de coupure  $\omega_c = RC = \tau^{-1}$ )*
- *Solution exponentielle*  $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \xrightarrow{t \gg \tau} 0$

# Fluctuations thermiques à l'équilibre (1)

Bruit Johnson-Nyquist aux bornes d'une impédance

$$R \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{C} Q(t) + \zeta(t), \quad \langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \beta^2 \delta(t-t')$$

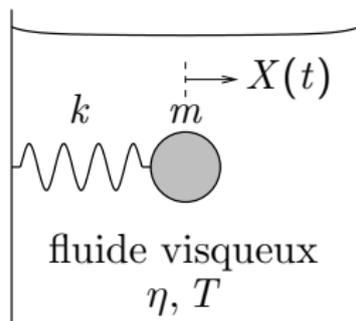
Variance du bruit (f.e.m. aléatoire) : théorème d'équipartition

$$\frac{1}{2C} \text{Var } Q(t) \xrightarrow{t \gg \tau} \frac{1}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = 2R k_B T$$

Théorème fluctuation-dissipation :  
filtrage linéaire de fonctions aléatoires

$$S_V(\omega) = |\hat{\chi}(\omega)|^2 \times S_\zeta(\omega) = \frac{4R k_B T}{1 + (RC\omega)^2} \sim 4R k_B T \quad \text{pour } \omega \ll \tau^{-1}$$

# Modèle : oscillateur harmonique amorti



## Position de l'oscillateur : équation de Newton

$$m \frac{dV(t)}{dt} = -k X(t) - \eta V(t)$$

- **Constante de temps**  $\tau_{\text{relax}} = 2m/\eta = \gamma^{-1}$
- **Résonance**  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$   $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
- **3 régimes** ( $\gamma \gtrless \omega_0$ ) : *oscillant amorti, aperiodique, — critique*  
 $X(t) = (X_0 \cos \omega'_0 t + \omega'_0{}^{-1} (\gamma X_0 + V_0) \sin \omega'_0 t) e^{-\gamma t} \xrightarrow{t \gg \tau_{\text{relax}}} 0$

# Fluctuations thermiques à l'équilibre

Equation de Langevin (processus d'Ornstein-Uhlenbeck)

$$m \frac{dV(t)}{dt} = -k X(t) - \eta V(t) + \zeta(t)$$
$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = \beta^2 \delta(t - t')$$

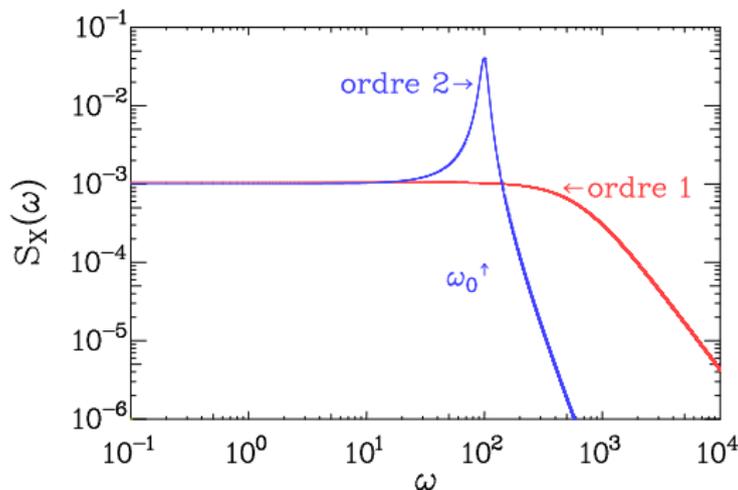
Variance du bruit (force aléatoire) : théorème d'équipartition

$$\frac{m}{2} \text{Var } V(t) \xrightarrow{t \gg \tau_{\text{relax}}} \frac{1}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = 2\eta k_B T$$

Théorème fluctuation-dissipation :  
filtrage linéaire de fonctions aléatoires

$$S_X(\omega) = |\hat{\chi}(\omega)|^2 \times S_\zeta(\omega) = \frac{4\eta k_B T}{(-m\omega^2 + k)^2 + (\eta\omega)^2}$$

# Filtre du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre



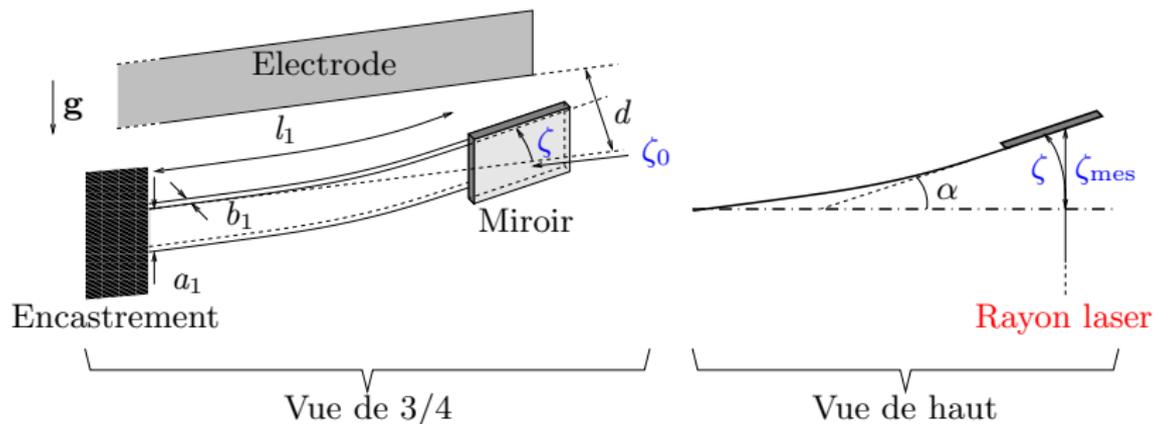
## Fonction réponse

$$S_\zeta(\omega) \longrightarrow \boxed{\hat{\chi}(\omega)} \longrightarrow S_X(\omega) = |\hat{\chi}(\omega)|^2 \times S_\zeta(\omega)$$

$$\hat{\chi}_1(\omega) = \frac{1}{1 - iRC\omega},$$

$$\hat{\chi}_2(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + k - i\eta\omega}$$

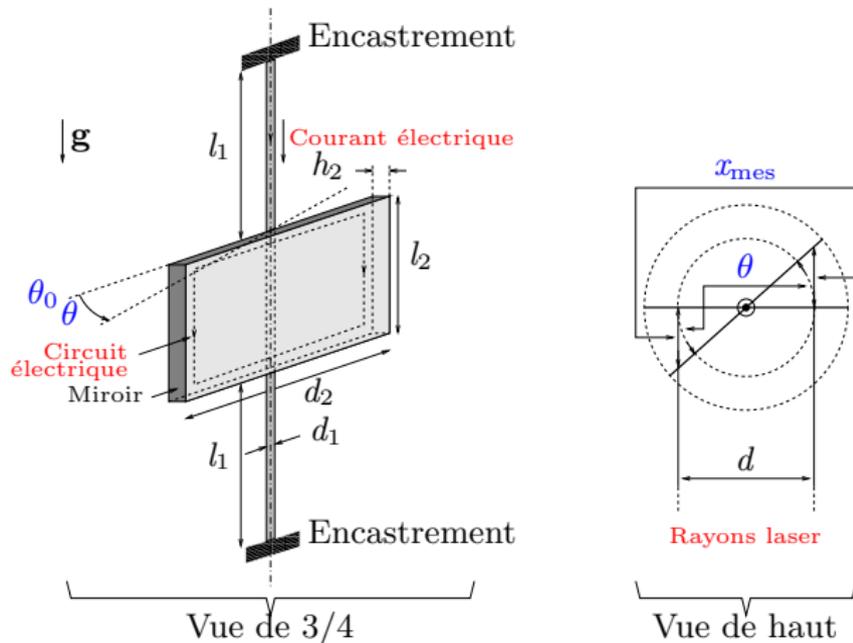
# Système expérimental (1) : oscillateur en flexion



**Dimensions :** en règle générale

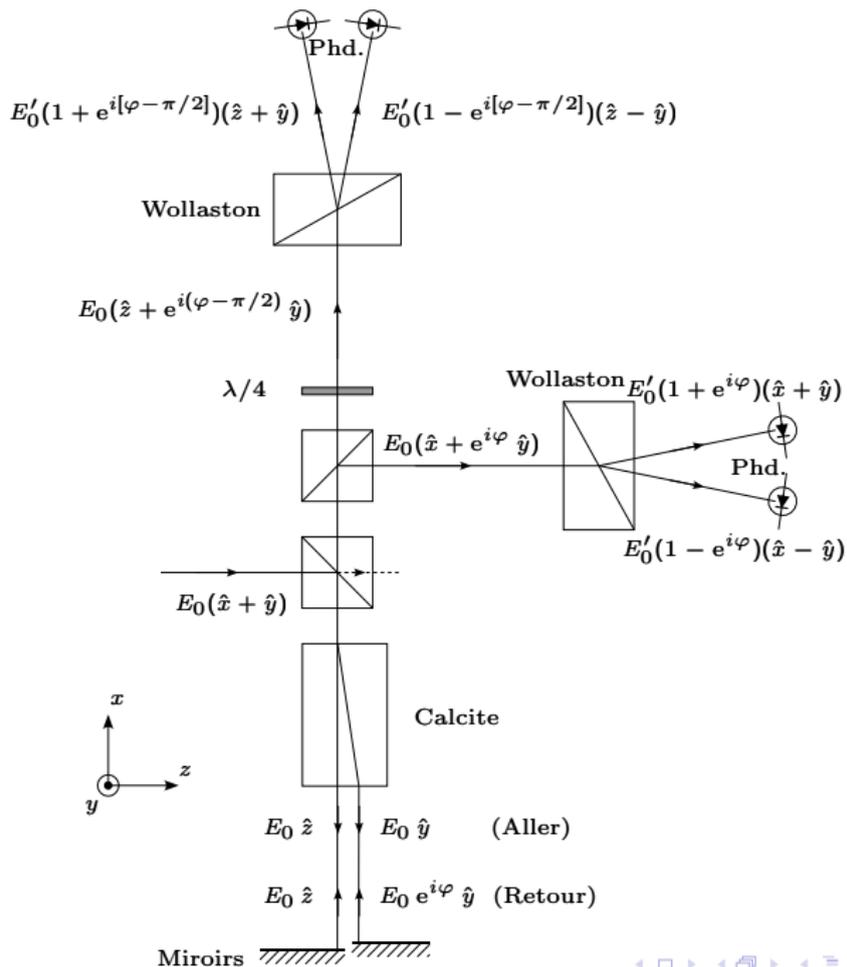
$$l_1 \simeq 10 \text{ mm}, \quad a_1 \simeq 1 \text{ mm}, \quad b_1 \simeq 100 \mu\text{m}$$
$$\Rightarrow m \lesssim 10^{-3} \text{ g}, \quad \nu_0 \sim 100 \text{ Hz dans l'air}$$

# Système expérimental (2) : oscillateur en torsion



**Dimensions** : en règle générale

$$\left. \begin{array}{l} l_1 \simeq 4 \text{ mm}, d_1 \simeq 0.5 \text{ mm}, h_1 \simeq 50 \text{ } \mu\text{m} \\ l_2 \simeq 2 \text{ mm}, d_2 \simeq 8 \text{ mm}, h_2 \simeq 1 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_m \lesssim 5 \times 10^{-2} \text{ g}, m_1 \lesssim 5 \times 10^{-2} \text{ g} \\ \nu_0 \sim 300 \text{ Hz dans l'air} \end{array} \right.$$



# Système de détection : interféromètre différentiel

Intensité mesurée par les 4 photodiodes (2 bras)

$$I_{i\pm} = I_0 [1 \pm \cos(\varphi + \psi_i)], \quad \delta = \frac{\lambda\varphi}{2\pi n}, \quad \psi_i = -\frac{\pi}{2} \delta_{i,2}$$

Mesure du contraste : électronique de conditionnement faible bruit

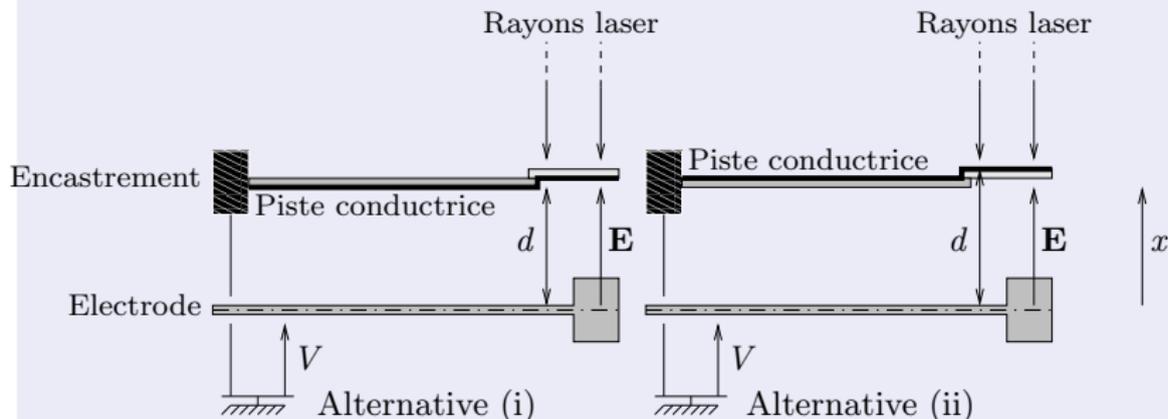
$$C_i = \frac{I_{i+} - I_{i-}}{I_{i+} + I_{i-}} = \cos(\varphi + \psi_i), \quad C = C_1 + iC_2 = e^{i\varphi}$$

- **2 bras** : sensibilité  $|\partial C / \partial \varphi|$  indépendante de  $\varphi$
- Inversion numérique  $\Rightarrow \delta$

# Mesure de réponse (1)

Mesurer la réponse  $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + k' - i(k'' + \eta\omega)}$

Force électrostatique :  $F \sim \frac{\epsilon_0 S}{2d^2} V^2$

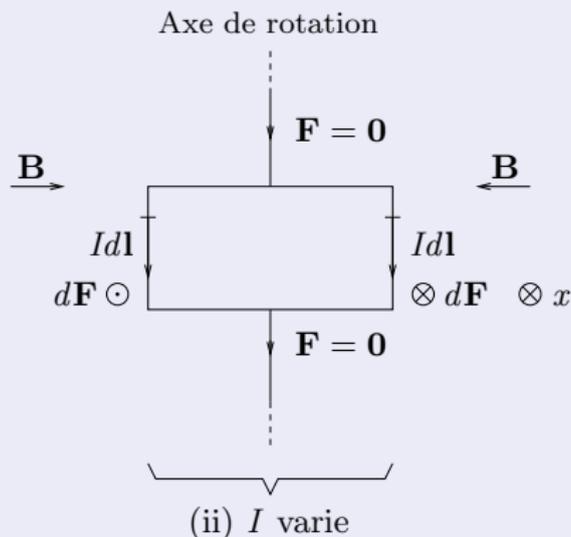
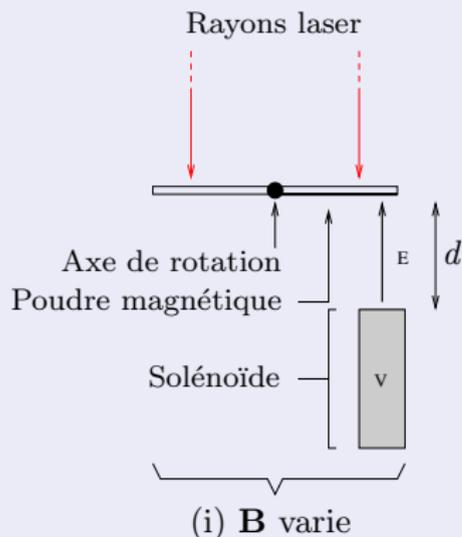


- Dans l'air : OK (attention à piézoélectricité)
- Dans un liquide : problème de la polarisabilité

## Mesure de réponse (2)

Mesurer la réponse  $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + k' - i(k'' + \eta\omega)}$

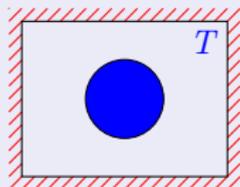
Force magnétique :  $F \sim \frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{(NS)^2 R^3}{d^7} I^2$        $F = 2l_2 B I$



- Air / liquide : OK (problème de la polarisabilité)

## Une preuve simple ?

### Théorie thermodynamique des perturbations (Peierls, Bogoliubov)



- **Energie** du “petit” système en contact avec le thermostat ( $T$ )

$$E(x) = E_0(x) + V(x), \quad x = (p, q)$$

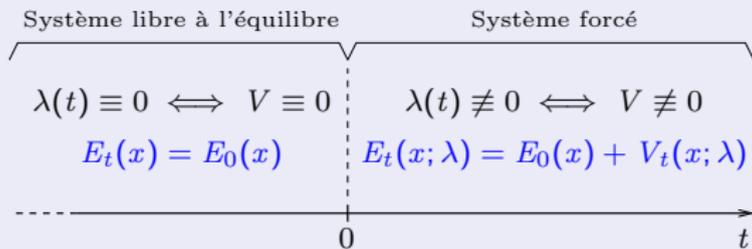
- **Fonction de partition**  $Z = \int e^{-\beta E(x)} dx$

$$Z = Z_0 \int \rho_0(x) e^{-\beta V(x)} dx = Z_0 \left\langle e^{-\beta V} \right\rangle_0, \quad \rho_0(x) = Z_0^{-1} e^{-\beta E_0(x)}$$

- **Energie libre**  $F = -\beta^{-1} \ln Z$

$$F = F_0 - \beta^{-1} \ln \left\langle e^{-\beta V} \right\rangle_0$$

## Approche dynamique : corps soumis à l'action d'une force extérieure $\lambda(t)$ variable dans le temps



- $E_t(x, \lambda)$  dépend explicitement du temps au moyen de  $\lambda(t)$

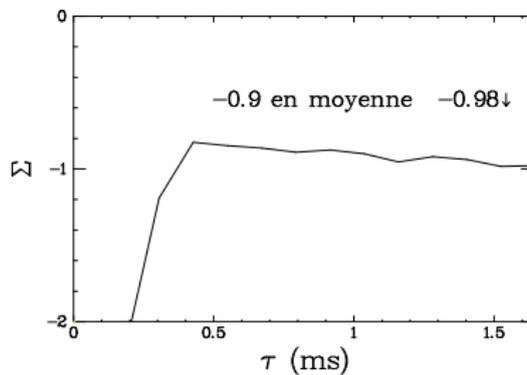
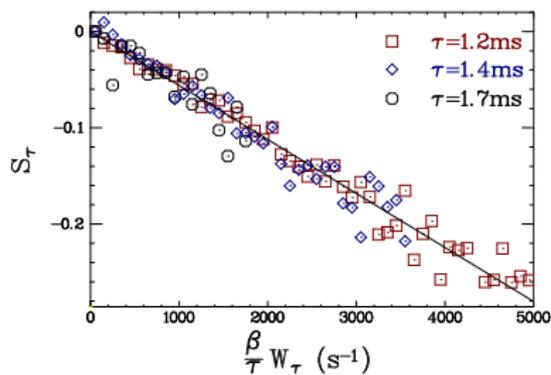
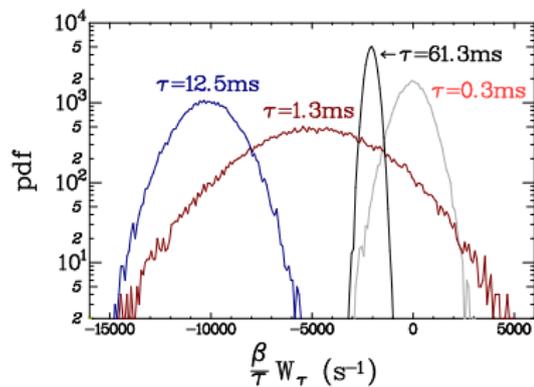
$$\frac{dE_t(x, \lambda)}{dt} = \frac{\partial E_t(x, \lambda)}{\partial t} = \frac{\partial E(x, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}$$

- Travail  $W_t$  fourni au corps dans l'intervalle de temps  $(0, t)$

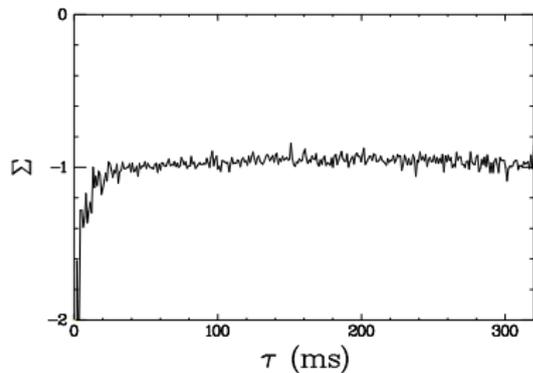
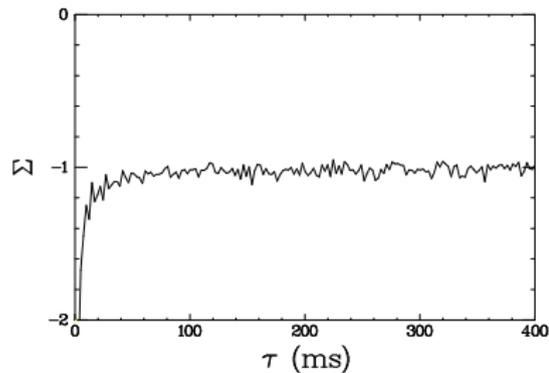
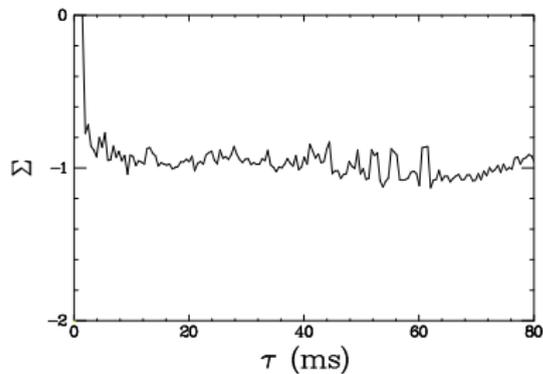
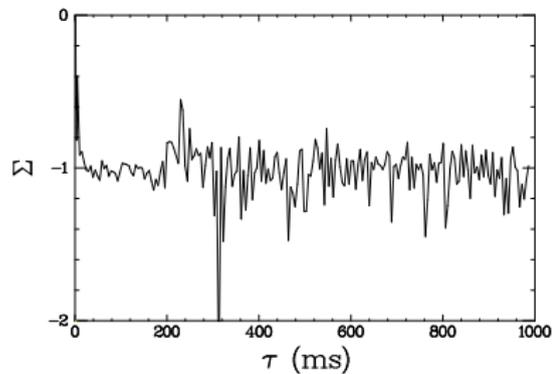
$$W_t = \int_0^t \frac{\partial E(x, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} ds = \int_0^t \frac{dE_s(x, \lambda)}{ds} ds = E_t - E_0 = V_t$$

$$F_t = F_0 - \beta^{-1} \ln \left\langle e^{-\beta W_t} \right\rangle_0$$

# Test du théorème de fluctuation transitoire (3)



# Test du théorème de fluctuation transitoire (4)



# Sensibilité de la statistique

