



HAL
open science

Modélisation numérique du comportement thermomécanique de réseaux de galeries souterraines pour le stockage des déchets radioactifs : Approche par homogénéisation

Pierre Zokimila

► **To cite this version:**

Pierre Zokimila. Modélisation numérique du comportement thermomécanique de réseaux de galeries souterraines pour le stockage des déchets radioactifs : Approche par homogénéisation. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT : . tel-00010925

HAL Id: tel-00010925

<https://theses.hal.science/tel-00010925>

Submitted on 8 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Pierre Niainarivony ZOKIMILA

pour obtenir le titre de DOCTEUR de

L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE I

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Mécanique

**Modélisation numérique du comportement
thermomécanique de réseaux de galeries souterraines pour
le stockage des déchets radioactifs :
Approche par homogénéisation**

Date de soutenance : 7 octobre 2005

Composition du jury

Président	Benjamin Loret	Institut National Polytechnique de Grenoble
Directeur de thèse	Frédéric Pellet	Université Joseph Fourier - Grenoble I
Rapporteurs	Denis Fabre	Conservatoire National des Arts et Métiers - Paris
	Albert Giraud	Université Paul Verlaine de Metz
Examineurs	Frédéric Deleruyelle	Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire - Fontenay-aux-Roses
	Mehdi Ghoreychi	Institut National de l'Environnement industriel et des Risques - Verneuil-en-Halatte
Invité	Henry Wong	Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat - Lyon

Thèse préparée au sein du Laboratoire Sols, Solides, Structures
UMR 5521 : UJF – INPG – CNRS

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé à l'accomplissement de cette thèse.

Tout d'abord, je veux remercier Monsieur **Frédéric Pellet**, Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire 3S et d'avoir accepté l'encadrement de ce travail. La confiance et la rigueur qu'il m'a témoignées m'ont permis de mener à bien toutes ces recherches malgré les conditions pas toujours évidentes.

Je remercie sincèrement Monsieur **Benjamin Loret**, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui me fait l'honneur de présider le jury de ma thèse. Je lui exprime mon profond respect.

Je remercie vivement Monsieur **Denis Fabre**, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, ainsi que Monsieur **Albert Giraud**, Professeur à l'Université Paul Verlaine de Metz, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de ce travail et en acceptant d'en être les rapporteurs.

Je veux adresser tous mes remerciements à Monsieur **Frédéric Deleruyelle**, Ingénieur à l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire à Fontenay-aux-Roses, qui a suivi inlassablement l'évolution de mon travail. Il a considérablement participé à l'orientation de mes recherches grâce ses remarques toujours pertinentes. Je remercie également Monsieur **Mehdi Ghoreychi**, Directeur des Risques Sol et Sous-Sol de l'INERIS à Verneuil-en-Halatte, d'avoir accepté d'examiner mon travail et de participer dans son Jury.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur **Henry Wong**, Directeur de Recherche CNRS à l'ENTPE de Lyon, qui a accepté d'être membre de mon jury, et avec qui j'ai pu établir des échanges fructueux.

J'exprime toute mon amitié à tous mes collègues et amis de longue date du laboratoire qui se reconnaîtront ici. Je leur exprime ma profonde sympathie et leur souhaite beaucoup de bien.

Je terminerai en remerciant mes parents, **Clémentine Ravonimalala** et **Kida**, ainsi que mes frères et sœurs, pour leurs encouragements, leur estime et leur patience dont ils ont fait preuve pendant toutes ces longues années et ce malgré l'éloignement géographique.

Résumé

Le stockage en formation géologique profonde est l'une des solutions possibles pour la gestion à très long terme des déchets radioactifs de Haute Activité et à Vie Longue (HAVL). Son étude nécessite d'acquérir une bonne connaissance du comportement et des propriétés des formations géologiques potentielles ainsi que de leur évolution au cours du temps sous l'effet des sollicitations induites par une éventuelle installation de stockage.

La formation géologique hôte sera soumise à des chargements mécanique et thermique dus respectivement au creusement des ouvrages de stockage et au dégagement de chaleur des colis de déchets stockés. Ces chargements thermomécaniques vont engendrer une modification de la distribution des contraintes dans la couche hôte et les déformations des ouvrages ainsi que l'extension des zones endommagées (EDZ) pourraient provoquer des instabilités locales et globales.

Les objectifs de ce travail consistent en l'élaboration de techniques de calculs pour optimiser la modélisation numérique du comportement thermoélastique des ouvrages à grande échelle et en l'évaluation de la perturbation thermomécanique induite par le stockage sur la formation géologique hôte. Dans cette optique, après une présentation de l'état des connaissances sur les aspects thermomécaniques des roches liés au stockage souterrain, des modélisations numériques 2D et 3D du comportement thermoélastique d'ouvrage individuel et d'un réseau de galeries ont été réalisées par une approche discrète. Toutefois, cette approche classique est pénalisante pour l'étude du comportement global d'installations de stockage. Pour pallier à cela, une approche de modélisation numérique, basée sur la technique d'homogénéisation des milieux périodiques, a été proposée. Des formulations ainsi que des procédures numériques ont été élaborées pour déterminer le comportement thermoélastique effectif d'une structure hétérogène équivalente. Le modèle, obtenu par cette méthode, a été validé avec des méthodes d'homogénéisation existantes telles que le modèle auto-cohérent, ainsi que les bornes de Hashin-Shtrikman. La comparaison du comportement thermoélastique effectif avec le comportement thermoélastique réel de référence a montré une bonne cohérence des résultats. Pour une application au stockage profond, les coefficients thermoélastiques effectifs d'un réseau de galeries circulaires ont pu être déterminés en 2D pour différentes dimensions de l'entraxe des galeries.

Mot clés :

Stockage profond, galerie souterraine, roches argileuses, comportement thermomécanique, coefficients thermoélastiques, modélisation numérique, méthode d'homogénéisation des milieux périodiques, comportement microscopique et macroscopique.

Abstract

Deep geological disposal is one of the privileged options for the storage of High Level radioactive waste. A good knowledge of the behavior and properties of the potential geological formations as well as their evolution in time under the effect of the stress change induced by a possible installation of storage is required.

The geological formation host will be subjected to mechanical and thermal solicitations due respectively to the excavation of the disposal tunnels and the release of heat of the canisters of radioactive waste. These thermomechanical solicitations will generate a stress relief in the host layer and disposal tunnels deformations as well as the extension of the damaged zones (EDZ) could cause local and global instabilities.

This work aims to develop calculation methods to optimize numerical modeling of the thermoelastic behavior of the disposal at a large scale and to evaluate thermomechanical disturbance induced by storage on the geological formation host. Accordingly, after a presentation of the state of knowledge on the thermomechanical aspects of the rocks related to deep storage, of numerical modelings 2D and 3D of the thermoelastic behavior of individual disposal tunnel and a network of tunnels were carried out by a discrete approach. However, this classical approach is penalizing to study the global behavior of disposal storage. To mitigate that, an approach of numerical modeling, based on homogenization of periodic structures, was proposed. Formulations as numerical procedures were worked out to calculate the effective thermoelastic behavior of an equivalent heterogeneous structure. The model, obtained by this method, was validated with existing methods of homogenization such as the self-consistent model, as well as the Hashin-Shtrikman bounds. The comparison between the effective thermoelastic behavior and current thermoelastic behavior of reference showed a good coherence of the results. For an application to deep geological storage, the effective thermoelastic properties of a network of circular tunnels could be given in 2D for various dimensions of the distance between galleries.

Key words:

Deep storage, underground tunnel, argillaceous rocks, thermomechanical behavior, thermoelastic properties, numerical modeling, homogenization of periodic structure method, microscopic and macroscopic behavior

Table des matières

NOMENCLATURE	11
CHAPITRE 1	
INTRODUCTION GENERALE	15
1.1 CONCEPTS ET ARCHITECTURE SOUTERRAINE DE STOCKAGE	17
1.2 PROBLEMATIQUE ET OBJECTIFS DE LA RECHERCHE	18
CHAPITRE 2	
ÉTAT DES CONNAISSANCES SUR LES ASPECTS THERMOMECAINIQUES DES ROCHES LIEES AU STOCKAGE SOUTERRAIN	21
2.1 RAPPELS DES NOTIONS DE BASE DU TRANSFERT THERMIQUE DANS LES SOLIDES ET DE LA THERMOELASTICITE DES ROCHES	23
2.1.1 Loi de Fourier	23
2.1.2 Equation de la chaleur	23
2.1.3 Position du problème thermique	25
2.1.4 Régime permanent	26
2.1.5 Méthode de résolution de l'équation de la chaleur	26
2.1.6 Notions de base de la thermoélasticité	27
2.1.7 Conclusions	28
2.2 PROBLEMES THERMIQUES LIES AU STOCKAGE DES DECHETS RADIOACTIFS	29
2.2.1 Caractéristiques des déchets exothermiques de haute activité	29
2.2.2 Notions de charge thermique admissible	31
2.2.3 Analyse thermique du champ proche des galeries de stockage	32
2.2.4 Analyse thermique de la zone de stockage	39
2.2.5 Conclusions	42
2.3 PRINCIPAUX PROBLEMES THERMOMECAINIQUES ASSOCIES AU STOCKAGE SOUTERRAIN	43
2.3.1 Effets de l'augmentation de température sur les propriétés et le comportement thermomécaniques des roches argileuses	43
2.3.2 Calcul thermomécanique du champ proche	54
2.3.3 Comportement global d'installations de stockage et leurs influences sur la stabilité de la formation hôte	56
2.1.6 Conclusions	61
2.4 SYNTHESE ET CONCLUSIONS	62

CHAPITRE 3	
MODELISATIONS NUMERIQUES DISCRETES DU COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE D'OUVRAGES DE STOCKAGE	65
3.1 INTRODUCTION	67
3.2 COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE D'UNE ALVEOLE SOUS CHARGEMENT THERMIQUE	67
3.2.1 Modélisation numérique 2D du comportement thermoélastique d'une alvéole en section courante	68
3.2.2 Modélisation numérique 2D du comportement élastique d'une alvéole en section longitudinale	80
3.3 COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE D'UN RESEAU DE GALERIES	86
3.3.1 Modélisation numérique 2D du comportement thermoélastique d'un réseau de galeries de stockage souterrain	86
3.3.2 Modélisation numérique 2D du comportement élastique d'un réseau de galeries	94
3.4 SYNTHESE ET CONCLUSIONS	102
CHAPITRE 4	
MODELISATION NUMERIQUE PAR HOMOGENEISATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE D'OUVRAGES SOUTERRAINS DE STOCKAGE A GRANDE ECHELLE	105
4.1 RAPPELS SUR LA TECHNIQUE D'HOMOGENEISATION	107
4.1.1 Motivation et généralités de l'homogénéisation	107
4.1.2 Méthodologie de l'homogénéisation	107
4.1.3 Différentes méthodes d'homogénéisation	110
4.2 FORMULATION DU COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE EFFECTIF D'UN MATERIAU A STRUCTURE PERIODIQUE	116
4.2.1 Représentation du VER	116
4.2.2 Homogénéisation du coefficient de conductivité thermique du VER	117
4.2.3 Homogénéisation des propriétés élastiques du VER	121
4.2.4 Homogénéisation du coefficient de dilatation thermique du VER	126
4.3 MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE ET VALIDATION DU MODELE DE COMPORTEMENT HOMOGENE	133
4.3.1 Comparaison avec d'autres approches d'homogénéisation	133
4.3.2 Comparaison avec le modèle auto-cohérent et les bornes de Hashin-Shtrikman	136
4.3.3 Comparaison du comportement thermoélastique des structures homogénéisées à celui des structures hétérogènes de référence	144
4.3.4 Remarques	167
4.4 APPLICATIONS SUR UN RESEAU DE GALERIES DE STOCKAGE PROFOND	167
4.4.1 Représentation du modèle de référence hétérogène	167
4.4.2 Comportement thermoélastique homogène équivalent	169
4.5 CONCLUSIONS	173

CHAPITRE 5	
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	175
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	177
ANNEXE I	183
ANNEXE I : COMPARAISON DES DISTRIBUTIONS DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS DANS LA SECTION COURANTE DE L'ALVEOLE CALCULES EN 2D ET EN 3D	185
ANNEXE II : DISTRIBUTION DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS A L'ENTREE ET AU BOUT DE L'ALVEOLE DE STOCKAGE (SECTIONS DD ET EE)	191

Nomenclature

On a adopté le système de notations présenté ci-dessous au cours de ce travail :

Variables :

s, S, σ, Σ	Scalaire (lettres de l'alphabet latin et grec, minuscules et majuscules, en caractère simple)
\vec{v}	Vecteur (lettres minuscules de l'alphabet latin, en caractère gras avec flèche)
$\vec{v}_i \quad (i = 1,2,3)$	Vecteurs propres définissant les directions principales d'un tenseur
$x_i \quad (i = 1,2,3)$	Valeurs propres d'un vecteur ou d'un tenseur
x_0	Valeur initiale ou instantanée
$\bar{\mathbf{x}}$	Champ moyen ou champ linéaire
\mathbf{x}'	Champ fluctuant
$\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{H}}$	Tenseurs effectifs ou homogénéisés
\tilde{x}	Valeur effective
$\mathbf{S}, \boldsymbol{\sigma}$	Tenseur d'ordre deux (lettres majuscules de l'alphabet latin et lettres minuscules de l'alphabet grec, en caractère gras)

Opérateurs :

$\text{div}(\cdot)$	Divergence d'un champ de vecteur
$\text{grad}(\cdot)$	Gradient d'un scalaire
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne apparente d'un tenseur ou d'un vecteur sur un volume
\mathbf{A}^T	Transposée du tenseur \mathbf{A} définie telle que : $A_{ij}^T = A_{ji}$
\mathbf{A}^{-1}	Inverse du tenseur \mathbf{A} définie telle que : $A_{ij} \cdot A_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$, avec δ_{ij} symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$)
$\det(\mathbf{A})$	Déterminant du tenseur \mathbf{A}
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Trace du tenseur \mathbf{A} définie telle que : $\text{tr}(\mathbf{A}_{ij}) = A_{ii}$
$\mathbf{A} + \mathbf{B}$	Somme des tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} définie telle que : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

$\mathbf{A} - \mathbf{B}$	Différence des tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} définie telle que : $\mathbf{A} - \mathbf{B} = A_{ij} - B_{ij} = C_{ij}$
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Produit contracté du tenseur \mathbf{A} par le tenseur \mathbf{B} défini tel que : $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} = c$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Produit du tenseur \mathbf{A} par le tenseur \mathbf{B} défini tel que : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik} B_{kj} = C_{ij}$
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Produit tensoriel du tenseur \mathbf{A} par le tenseur \mathbf{B} défini tel que : $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} = C_{ijkl}$
$\ \mathbf{A}\ $	Norme euclidienne du tenseur \mathbf{A} définie telle que : $\ \mathbf{A}\ = \sqrt{A_{ij} A_{ij}} = c$

Symboles :

σ	Tenseur du deuxième ordre symétrique des contraintes
$\varepsilon(\mathbf{u})$	Tenseur du deuxième ordre symétrique des déformations locales (dû au champ des déplacements \mathbf{u})
\mathbf{C}	Tenseur de rigidité
C	Chaleur spécifique massique
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
λ	Constante de Lamé
μ	Module de cisaillement
\mathbf{S}	Tenseur de souplesse
S	Section courante
\dot{W}	Puissance par unité de volume
Q	Quantité de chaleur
\dot{Q}	Puissance thermique réduite par unité de volume
a	Coefficient de diffusivité thermique
\mathbf{q}	Vecteur densité de flux de chaleur ou thermique
\mathbf{T}	Champ des températures local
t	Variable temps
dt	Intervalle de temps
\mathbf{k}	Tenseur de conductivité thermique
ΔT	Variation de température
α	Tenseur de dilatation thermique.
κ	Tenseur thermique
ρ	Masse volumique
W	Quantité de chaleur décroissante
W_0	Puissance thermique initiale
ω	Constante de décroissance thermique
ϑ	Demi-vie de la source de chaleur

φ	Flux de chaleur appliqué par le colis de déchets
σ_{∞}	Contraintes isostatiques
σ_h	Contraintes horizontales mineures
σ_H	Contraintes horizontales majeures
σ_V	Contraintes verticales
σ_r^E	Contrainte radiale élastique
σ_{θ}^E	Contrainte orthoradiale élastique
σ_r^T	Contrainte radiale d'origine thermique
σ_{θ}^T	Contrainte orthoradiale d'origine thermique
$\sigma^{\text{éq}}$	Contraintes équivalentes aux champs des contraintes

Abréviations :

T.C	Tunnel Court
HAVL	Haute Activité à Vie Longue
UOX ou/et MOX	Combustibles usés
VER	Volume Élémentaire Représentatif
QUA8	Élément fini massif de type quadrangle à 8 noeuds
CUB8	Élément fini massif de type cubique à 8 noeuds

Chapitre 1

Introduction générale

Avant-propos : *Le stockage en formation géologique profonde est l'une des solutions possibles pour la gestion à très long terme des déchets radioactifs de Haute Activité et à Vie Longue (HAVL). Son étude nécessite d'acquérir une bonne connaissance du comportement et des propriétés des formations géologiques potentielles ainsi que de leur évolution au cours du temps sous l'effet des sollicitations induites par un éventuel stockage. Suite à la promulgation de la loi Bataille en 1991, le gouvernement a autorisé en 1999 la création d'un laboratoire de recherche souterrain dans un site argileux à Bure, en Meuse/Haute-Marne. Les recherches qui y sont menées concernent la géologie, l'hydrogéologie, la géochimie et la géomécanique. Ce dernier thème conjugue trois approches fondamentales : l'investigation expérimentale, l'approche rhéologique et la modélisation numérique, toutes réalisées à l'échelle d'échantillons de roches extraits des sites concernés et à l'échelle des massifs.*

1.1 Concepts et architecture souterraine de stockage

Tel qu'on le présente sur la *Figure 1.1*, en France comme dans la plupart des autres pays concernés par la gestion de déchets radioactifs de Haute Activité et à Vie Longue (HAVL), le concept de stockage profond repose généralement sur le principe de barrières multiples et sur un enfouissement dans des formations géologiques adéquates. Le stockage est aménagé dans un sous-sol stable et profond, loin de toutes activités humaines, dans un environnement dépourvu de processus géologiques défavorables. La formation d'argilite du Callovo-Oxfordien de l'Est de la France est particulièrement étudiée par l'Andra pour sa faible perméabilité, ses propriétés de confinement favorables et sa facilité d'excavation (*Andra 1998 ; [1]* et *2001 ; [7]*).

Grâce à ces caractéristiques, elle pourrait constituer une barrière efficace à la migration des radionucléides et protéger les barrières ouvragées contre les influences de l'environnement. Pour combler l'espace entre les déchets et la roche et pour remblayer ou sceller les galeries, des barrières ouvragées (B.O) composées de bentonite ou de matériau argileux, qui sont des matériaux potentiellement efficaces contre le transport des substances radioactives, pourraient être mises en place. Les déchets radioactifs HAVL sont mis en place dans des colis métalliques censés garantir un confinement des déchets sur une longue période.

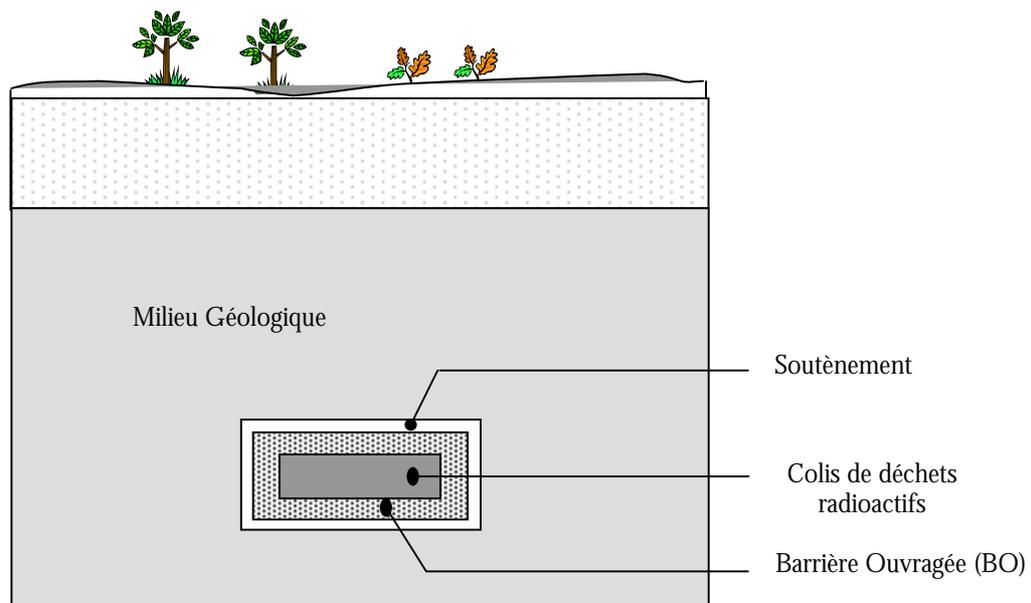


Figure 1.1 : Stockage en formations géologiques profondes : concept de barrières multiples

Sur le plan technologique, plusieurs concepts sont proposés dans le rapport de synthèse des options initiales de conception de l'Andra (*1998 ; [1]*). Toutefois, l'étude des pistes réalisée récemment (*Andra, [10]*) a privilégié l'option en Tunnel Court (T.C). La *Figure 1.2* montre un schéma de ce concept en Tunnel Court pour des déchets vitrifiés. Selon l'Andra, la géométrie horizontale de ce concept T.C permettrait une meilleure utilisation de l'emprise. Aussi, sa construction et son exploitation apparaissent plus pratiques et avantageuses du point de vue technico-économique. La *Figure 1.3* présente le schéma d'une éventuelle installation de stockage au concept T.C. Elle montre les principaux composants du stockage. Une installation de stockage est constituée généralement par un ensemble de modules de stockage. Chaque module comprend des alvéoles placées de part et d'autre d'une galerie de manutention.

Les colis de déchets sont acheminés dans les alvéoles de stockages par la galerie de roulage et la galerie de manutention en commençant par les alvéoles les plus éloignées des puits d'accès. Lorsque la fermeture définitive d'un module est décidée, un bouchon de scellement est réalisé afin de l'isoler du reste des installations. Il est envisagé que la construction d'un nouveau module s'effectue pendant l'exploitation du module précédent et ainsi de suite. Ce processus permet, à la fois, de répartir les investissements sur l'ensemble de la durée d'exploitation du stockage et de préserver la possibilité d'adapter les nouveaux modules aux évolutions de la production et du conditionnement des déchets ainsi qu'aux évolutions des connaissances acquises sur les aspects géomécaniques. On estime que la totalité des activités de construction et d'exploitation se dérouleront sur une période de l'ordre de 100 ans.

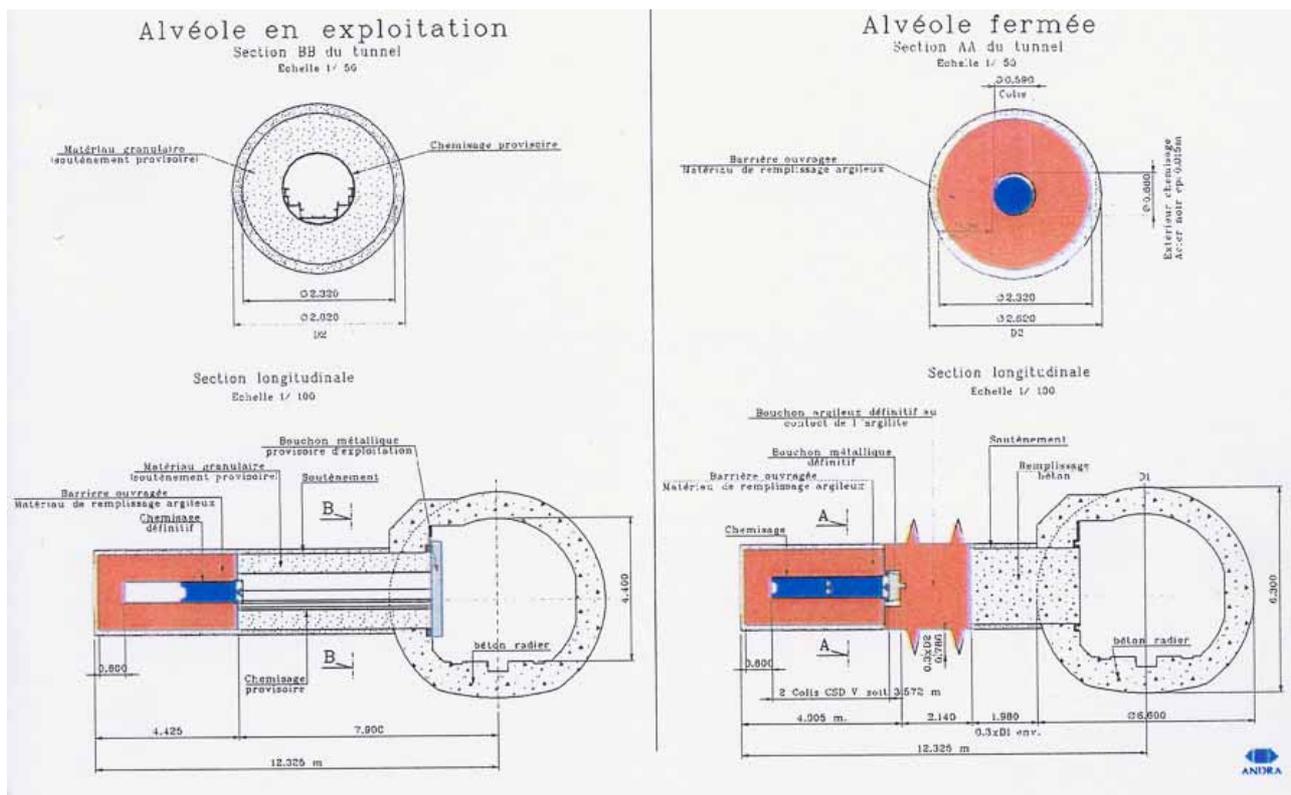


Figure 1.2 : Concept Tunnel Court (T.C), option optimisée, (Andra 2002 ; [10])

1.2 Problématique et objectifs de la recherche

L'architecture souterraine d'ensemble présentée sur la *Figure 1.3* montre qu'une installation de stockage est constituée d'un réseaux de galeries réparties de manière quasiment périodique dans un massif rocheux. On estime que le creusement de ces galeries induit un déconfinement en relation avec le volume de roche excavée qui peut être important. Par conséquent, la distribution des contraintes dans le massif rocheux va être perturbée et les déformations des ouvrages pourraient engendrer des risques d'instabilités locales et globales. Par ailleurs, le dégagement de chaleur des colis de déchets stockés dans ces galeries va engendrer une élévation de température dans la couche hôte notamment dans le champ proche. Cette variation de température va entraîner des effets mécaniques aussi bien à l'échelle de chaque galerie qu'à l'échelle de l'ensemble de l'installation de stockage.

La plupart des travaux réalisés à ce jour concernent essentiellement le comportement local des ouvrages de stockages. Une thèse 2003 (*Hajdu 2003* ; [62]) et des publications récentes (*Pellet 2004* ; [84] - *Pellet et al. 2005* ; [85] et [86]), ont porté sur la modélisation numérique du comportement viscoplastique endommageable des roches. L'objectif de ces travaux étant d'étudier l'évolution dans le temps de l'extension de la zone endommagée (EDZ) pour un ouvrage individuel. Les résultats et les enseignements tirés de ces travaux sont par ailleurs assez concluants. Aujourd'hui, faute de technique appropriée, le comportement global d'une installation de stockage demeure encore mal connu.

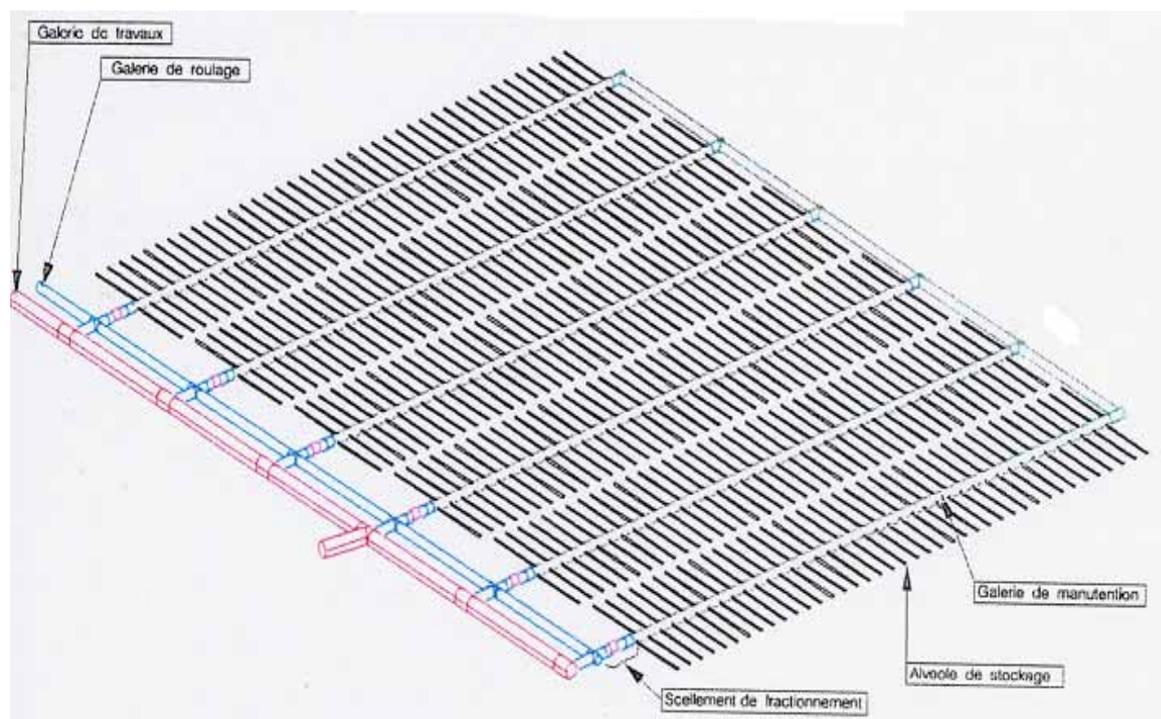


Figure 1.3 : Schéma d'une installation de stockage au concept T.C. (*Andra 2002* ; [10])

Le but de ce travail de recherche est d'évaluer l'impact à grande échelle des ouvrages de stockage sur la stabilité des formations géologiques hôtes. Dans cette perspective, le travail consiste dans un premier temps à étendre la modélisation du comportement thermomécanique d'une alvéole à celle d'un module composé d'une galerie principale et d'un ensemble d'alvéoles de stockage. Pour cela, le comportement thermomécanique d'une alvéole individuelle et celui d'un module de stockage seront analysés par l'approche de modélisation numérique discrète. Ensuite, il s'agit d'élaborer une méthode permettant la modélisation numérique du comportement thermomécanique global d'une éventuelle installation de stockage. Ainsi, relativement à la périodicité de la structure d'un module ainsi que de l'installation d'ensemble, l'approche par homogénéisation des milieux périodiques sera retenue pour déduire de l'analyse du milieu hétérogène réel un milieu homogène au comportement thermomécanique équivalent avec lequel on pourra effectuer des calculs optimisés.

Ce mémoire comprend trois parties principales. Le **chapitre 2** présente un état des connaissances sur la thermomécanique des roches lié au stockage souterrain. Tout d'abord, des rappels des notions de base du transfert thermique dans les solides et de la thermoélasticité seront présentés. Ensuite, les problèmes thermiques liés au stockage souterrain des déchets radioactifs seront

examinés. Après la description des caractéristiques des déchets exothermique de haute activité ainsi que de la notion de charge thermique admissible du concept français de stockage souterrain, des travaux de référence sur l'analyse thermique d'une installation de stockage seront présentés. La fin de ce chapitre sera dédiée à la revue des principaux problèmes thermomécaniques associés au stockage souterrain. Des résultats d'essais de laboratoire sur l'analyse des effets de l'augmentation de température sur le comportement thermomécanique des roches argileuses seront décrits et analysés. Puis, des exemples types de méthodes d'analyse du comportement thermomécanique du champ proche des déchets et de la zone de stockage seront présentés.

Les modélisations numériques du comportement thermoélastique d'ouvrages de stockage feront l'objet du **chapitre 3**. Le cas d'une alvéole individuelle sous chargement thermique sera traité, en première partie. Puis, le comportement d'un réseau de galeries sera étudié en considérant que le modèle de référence se réduit par le volume élémentaire représentatif du réseau de galeries. Ces études seront réalisées en 2D et en 3D par une approche discrète.

Au cours du **chapitre 4**, des rappels sur la technique d'homogénéisation seront présentés. La motivation et la méthodologie de l'homogénéisation seront présentées ainsi que les principales méthodes d'homogénéisation existantes. La seconde partie sera consacrée aux modélisations numériques par homogénéisation. Il s'agit, dans un premier temps, de formuler et de mettre en œuvre numériquement une approche d'homogénéisation du comportement thermoélastique pour des structures périodiques. Le modèle de comportement thermoélastique homogène équivalent proposé sera ensuite validé avec des modèles existants. Ce chapitre sera conclu par une application de la méthode au cas d'un réseau de galeries de stockage souterrain.

Le **chapitre 5** sera consacré aux conclusions générales et aux perspectives de recherche sur la modélisation numérique par homogénéisation ainsi qu'à son application dans le contexte du stockage profond.

Chapitre 2

Etat des connaissances sur les aspects thermomécaniques des roches liés au stockage souterrain

Avant-propos : *Ce chapitre fait la synthèse de l'état des connaissances sur les problèmes thermiques liés au stockage des déchets exothermiques en formations géologiques profondes ainsi que leurs effets thermomécaniques associés. En seconde partie de ce chapitre, la notion de charge thermique admissible sera évoquée avant la présentation des aspects thermiques liés au stockage. Un accent particulier sera mis sur l'analyse thermique du champ proche, l'analyse à l'échelle d'une installation de stockage et de la formation hôte ainsi que l'étude des phénomènes thermiques à long terme. En dernière partie, les principaux phénomènes thermomécaniques associés seront décrits et analysés. Pour cela, on adoptera une démarche correspondant à une approche chronologique, en examinant successivement les effets de l'échauffement sur les échantillons de roches argileuses, l'intégrité mécanique du champ proche des déchets par rapport aux sollicitations thermiques dues à l'échauffement et ce en tenant compte des matériaux constituant les barrières ouvragées, le comportement global d'un stockage hôte ainsi que son influence sur les milieux environnant. Toutefois, la première partie sera consacrée aux rappels des notions du transfert thermique dans les solides et à la thermomécanique des roches.*

2.1 Rappels des notions de base du transfert thermique dans les solides et de la thermoélasticité

Les sources de chaleur dans le manteau terrestre sont fournies en particulier par la radioactivité naturelle ou/et par des sources artificielles. Le massif rocheux est caractérisé en tout point par sa chaleur spécifique et un coefficient de conduction ainsi que par des flux d'énergie thermique qui vont déterminer sa distribution de température. Les transferts thermiques s'y opèrent principalement par conduction. Elle est régie par la loi de Fourier.

2.1.1 Loi de Fourier

Joseph Fourier (1768-1830) publia la loi fondamentale de la conduction portant ainsi son nom (*Gisclon 1998* ; [55]). La loi de Fourier, de nature expérimentale, estime que chaque corps solide est caractérisé par un paramètre physique, le coefficient de conductivité thermique \mathbf{k} tel que :

$$(2.1) \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)$$

avec \mathbf{q} le vecteur densité flux de chaleur [W m^{-2}] et T le champ de température.

Le signe moins (-) traduit le fait que les échanges tendent à uniformiser la température et que spontanément les transferts thermiques se produisent du corps chaud vers le corps froid.

La quantité de chaleur traversant dans l'unité de temps une surface S orientée par une normale \mathbf{n} en chaque point du milieu est :

$$(2.2) \quad Q = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Pour un solide thermiquement isotrope, \mathbf{k} est un coefficient scalaire. Pour un solide anisotrope, \mathbf{k} est un tenseur symétrique d'ordre 2. La conductivité thermique peut dépendre de la composition chimique du milieu considéré, de l'état physique, de la température, de l'état des contraintes, etc.

2.1.2 Equation de la chaleur

L'évolution de la température dans un milieu conducteur est régie par l'équation de la chaleur. Considérons un cylindre homogène délimité par les abscisses x et $x+dx$ (*Figure 2.1*). Son coefficient de conductivité thermique k , indépendant de la température, assure une homogénéité latérale du point de vue thermique. On suppose que la température dépend de l'abscisse x le long du cylindre et du temps t .

Pour décrire l'équation de la chaleur, on écrit le bilan des échanges thermiques sur une section courante S du cylindre (*Figure 2.1*).

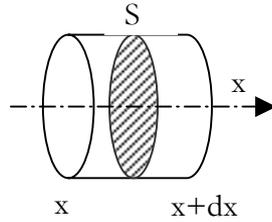


Figure 2.1 : Conducteur cylindrique de section S

La quantité de chaleur, entrant par la section hachurée S pendant un intervalle de temps dt , est définie par :

$$(2.3) \quad Q = -kS \left\{ \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx, t) \right\} dt$$

D'un autre côté, si ρ est la masse volumique et C la chaleur spécifique massique du conducteur, la même quantité totale de chaleur entrant est égale à :

$$(2.4) \quad Q = \rho CS \{ T(x, t + dt) - T(x, t) \} dx$$

tel que : $T(x, t + dt) - T(x, t)$ est la variation de température.

Comme dx est petit, la relation (2.4) peut s'écrire comme suit :

$$(2.5) \quad Q = \rho CS dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

L'équation de la chaleur est obtenue en écrivant l'égalité des deux termes (2.3) et (2.5), en divisant par $(S dt dx)$ et en faisant tendre dx vers zéro :

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans le cas d'un milieu solide qui contient des sources de chaleur réparties suivant la densité $\dot{W} dv$ (\dot{W} est une puissance par unité de volume), on doit tenir compte de cette puissance dans le bilan (2.6) :

$$(2.7) \quad k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{W} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans la plupart des cas, k , ρ et C peuvent être supposés constants, il est plus pratique de poser :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \dot{W} = \rho C \dot{Q} \\ k = a \rho C \end{cases}$$

avec \dot{Q} est la puissance réduite par unité de volume et a est le coefficient de diffusivité thermique

L'équation de la chaleur dans un milieu solide contenant des sources réparties par unité de volume s'écrit finalement :

$$(2.9) \quad a \Delta T + \dot{Q} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

tel que : $\Delta = \nabla^2$ désigne l'opérateur laplacien.

L'équation de la chaleur est donc une équation aux dérivées partielles par rapport aux variables d'espace \mathbf{x} et de temps t .

S'il n'y a aucune source de chaleur dans le milieu solide, elle prend la forme suivante :

$$(2.10) \quad a \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation de la chaleur est une équation parabolique. Une modification locale de la température dans un milieu infini a donc des effets immédiats à toute distance du lieu de la modification.

L'équation de la chaleur est une équation linéaire. Par conséquent, la superposition des solutions de problèmes différents est encore une solution. Par exemple, si une source de chaleur est enfouie sous la surface du sol, la température de la surface du sol ne sera pas modifiée par l'existence de la source. La solution de ce problème sera donc la somme des solutions des trois problèmes suivant (Bérest et al. 1988 ; [18]) :

- Température de surface variable donnée ;
- Flux géothermique constant, température de surface nulle ;
- Source de chaleur, température de surface nulle.

2.1.3 Résolution de l'équation de la chaleur

La résolution de l'équation de la chaleur (2.10), dans un cas particulier, nécessite la connaissance d'une condition initiale et des conditions aux limites. De plus, une grandeur telle que la température ou le flux de chaleur ou encore la combinaison entre ces grandeurs, à tout instant postérieur à l'instant initial doit être connue et cela en tout point du pourtour du corps considéré.

L'écriture des conditions aux limites n'est pas définie de manière unique. Elle est dictée par le choix de la description des phénomènes physiques étudiés. Cette tâche est délicate pour la résolution numérique, notamment pour la méthode des éléments finis, puisqu'on ne peut pas mailler un domaine infini ; le modèle (ou le maillage) est donc limité par des contours arbitraires sur lesquels on imposera les conditions non moins arbitraires.

2.1.4 Régime permanent

Le régime est permanent lorsque la distribution des températures ne dépend que des variables d'espace x c'est à dire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. L'équation de la chaleur se réduit donc à :

$$(2.11) \quad \text{div}(\mathbf{k} \cdot \text{grad}(\mathbf{T})) = 0$$

Si le milieu est thermiquement isotrope (\mathbf{k} uniforme), elle s'écrit :

$$(2.12) \quad \Delta T = 0$$

Les caractéristiques thermiques n'interviennent donc, éventuellement, que par les conditions aux limites. Dans ce cas là, la solution de l'équation de la chaleur (2.12) prend une forme simple. Elle serait du type $T = Ax + B$ en coordonnées rectangulaires, du type $T = A \text{Log}(r) + B$ en coordonnées cylindriques et du type $T = \frac{A}{r} + B$ en coordonnées sphériques.

Par ailleurs, il est possible de résoudre analytiquement en coordonnées sphériques le problème : T_0 imposée sur la paroi de la galerie sphérique profonde et température nulle à l'infini. En coordonnées cylindriques, le problème analogue n'a pas de solution analytique simple (*Bérest et al. 1988 ; [18]*).

2.1.5 Méthodes de résolution de l'équation de la chaleur

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour la résolution de l'équation de la chaleur comme c'est le cas de toutes les équations différentielles. L'utilisation de méthodes numériques est nécessaire. On peut citer trois principales méthodes de résolution de l'équation de chaleur :

- *Transformation de Laplace – Analyse de Fourier* : deux méthodes relativement similaires qui consistent à remplacer une fonction unique, mais difficile à décrire mathématiquement, par une série de fonctions sinus ou cosinus plus maniable, dont la somme reconstitue la fonction initiale (*Hadamard 1964 ; [61]– Zaenen 1989 ; [103]*).
- *Méthode de la séparation des variables* : elle permet d'obtenir la solution sous la forme d'une série infinie dont, un temps assez court après l'instant initial, seuls les premiers termes ou même le premier terme ont une importance pratique. (*Schwartz 1965 ; [93] – Raviart 1988 ; [87]*)
- *Méthode des puits et source* : très utile dans le cas de distributions de sources de chaleur placées dans un volume dont le pourtour vérifie des conditions à la limite homogènes.

Carlslaw et Jaeger (1959 ; [28]) ainsi que *Bérest et al. (1988 ; [18])*. ont proposé de nombreux exemples sur l'application de ces méthodes.

2.1.6 Notions de base de la thermoélasticité

Les variations naturelles ou induites de la distribution de température dans les massifs rocheux provoquent des effets mécaniques immédiats et parfois irréversibles. On peut classer ces effets en deux catégories. D'une part, la variation de température entraîne une dilatation dans le cas d'un échauffement ou une contraction dans le cas d'un refroidissement. Ces variations de volume engendreront une variation des contraintes. D'autre part, la variation de température modifie le comportement rhéologique des massifs en agissant sur les caractéristiques mécaniques. Dans la réalité, ces deux effets se produisent simultanément.

Considérons un matériau solide élastique dilatable, de tenseur des modules élastiques \mathbf{C} et de tenseur des coefficients de dilatation thermique $\boldsymbol{\alpha}$. On suppose que les déplacements sont petits et que la température ne modifie pas les caractéristiques mécaniques. Sous l'effet d'une variation de température uniforme T , le solide, libre de toute liaison, subit une déformation uniforme équivalente à :

$$(2.13) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha} T$$

Lorsque le solide n'est plus libre de tout mouvement et/ou que la variation de température n'est plus uniforme, des contraintes d'origine thermique peuvent apparaître dans le milieu. Par exemple, si les déplacements du matériau sont bloqués et qu'il est soumis à une variation de température uniforme T . Par la condition de liaison, on doit ajouter à la dilatation thermique une déformation opposée ($\boldsymbol{\varepsilon}' = -\boldsymbol{\alpha} T$) de manière à ce que la déformation totale soit nulle.

L'application de la loi de l'élasticité sur la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}'$ permet d'écrire :

$$(2.14) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}' = -(\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}) T = -\boldsymbol{\kappa} T$$

avec $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}$ appelée tenseur des coefficients thermiques

Le solide est alors soumis à un état de contrainte puisque l'équation d'équilibre à la limite prescrit :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} = -(\boldsymbol{\kappa} T) \cdot \mathbf{n}$$

On en déduit que les réactions de liaison sont équivalentes à une pression (ou traction) normale égale à :

$$(2.15) \quad -\boldsymbol{\kappa} T$$

La loi de comportement thermoélastique est donc obtenue en ajoutant à l'équation de l'élasticité linéaire cet effet de la variation de température T :

$$(2.16) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\kappa} T$$

soit

$$(2.17) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} T$$

avec \mathbf{S} le tenseur des modules de souplesse.

Lorsque le matériau est isotrope, la thermoélasticité linéaire est caractérisée par les deux modules d'élasticité de Lamé (λ la constante de Lamé et μ le module de cisaillement) ou par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν et par le coefficient de dilatation thermique linéaire α ou par le coefficient thermique κ du solide :

$$(2.18) \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - \kappa T \mathbf{1}$$

avec $\mathbf{1}$ le tenseur unité.

soit

$$(2.19) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \alpha T \mathbf{1}$$

avec :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} E &= \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \kappa &= \frac{E\alpha}{1-2\nu} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\kappa}{3\lambda + 2\mu} \end{aligned}$$

2.1.7 Conclusions

Le mode de transfert de chaleur dans les massifs rocheux s'effectue essentiellement par conduction régie par la loi de Fourier. Pour décrire l'évolution de la température dans un massif, il faut établir l'équation de la chaleur en écrivant le bilan des échanges thermiques sur une section donnée de ce massif. L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles aux variables d'espace et de temps. Compte tenu de sa forme parabolique, la variation de température dans un milieu a des effets immédiats en tout point de celui-ci. Sa propriété de linéarité laisse supposer que la superposition des solutions des problèmes différents est aussi une solution. La résolution de l'équation de la chaleur, dans un cas particulier, nécessite la connaissance des conditions initiales et aux limites ainsi que des variables d'état en fonction du temps et de l'espace. Sa résolution est plus simple en régime permanent pour lequel il est possible, dans certains cas simples, d'obtenir des solutions analytiques. En effet, il existe des méthodes analytiques permettant de résoudre l'équation de la chaleur. Toutefois, le recours à des méthodes numériques sur ordinateur demeure le moyen le plus judicieux.

La variation de température naturelle ou induite, dans un massif, agit de deux manières sur celui-ci. Il va, d'une part, engendrer une variation de volume qui pourrait être à l'origine d'une variation de contrainte dans le massif. D'une autre, elle peut modifier le comportement du massif en agissant sur les propriétés mécaniques. En thermoélasticité, un solide libre soumis à une variation de température se dilate sans qu'aucune contrainte ne s'y développe. Lorsque le solide a une liaison, sa variation de volume, si les conditions aux limites le permettent, engendre des contraintes. Par ailleurs, il est possible qu'un solide ayant de liaisons et subissant une variation de température développe des contraintes sans variation de volume.

2.2 Problèmes thermiques liés au stockage des déchets radioactifs

La distribution de chaleur géothermique est caractérisée par le gradient géothermique dont la valeur moyenne est évaluée à 3°C par 100 m de profondeur (*CFMR 2000 et 2004* ; [31] – [32]). Toutefois, cette distribution naturelle peut être perturbée lorsqu'elle rencontre des structures géologiques particulières ou surtout lorsque des sources de chaleur artificielles sont présentes dans le massif rocheux. C'est le cas justement du stockage des déchets exothermiques de haute activité. Le projet d'un stockage réversible de ces déchets en formation géologique profonde a incité les ingénieurs et les chercheurs à étudier l'influence de la température sur le comportement mécanique des massifs rocheux. Ainsi, les initiatives de recherches, compte tenu de l'importance des enjeux, ont abouti à des travaux scientifiques dont les résultats constituent désormais un apport tout à fait original à la mécanique des roches ainsi qu'à la géotechnique en général.

Un projet de stockage des déchets radioactifs exothermiques en formations géologiques profondes suscite un certain nombre de questions spécifiques de nature thermique. Elles peuvent être traitées en préalable à l'analyse des effets thermomécaniques associés et indépendamment de ceux-ci. Autrement dit, le couplage des effets thermomécaniques est négligeable dans le sens mécanique vers la thermique et très fort dans le sens thermique vers la mécanique (*Géostock et SGN 1982* ; [54]). Aussi, compte tenu de la faible perméabilité des milieux géologiques retenus pour le stockage profond, l'écoulement des fluides n'aura pratiquement aucune influence sur les transferts thermiques dans la couche hôte. Le problème thermique lié au stockage en milieux géologiques profonds peut donc être découplé de la mécanique et de l'hydraulique.

2.2.1 Caractéristiques des déchets exothermiques de haute activité

Dans le concept de colisage envisagé (*Andra 2002* ; [9]), tel que présenté à la *Figure 2.2*, les assemblages UOX ou MOX (des déchets généralement issus des produits de retraitement des combustibles de réacteurs à eau légère) sont placés dans un étui en acier, individuel ou collectif, puis introduits dans un conteneur en acier peu allié de quelques dizaines de centimètres d'épaisseur. Les dimensions caractéristiques des colis sont de l'ordre de 50 centimètres à 1 mètre de diamètre et de 1 à 6 mètres de hauteur. Afin de respecter les critères thermiques de dimensionnement du stockage, reposant sur la charge thermique admissible, chaque colis doit contenir un nombre limité d'assemblages UOX ou MOX.

Suite à la décroissance radioactive, les déchets dégagent une certaine quantité de chaleur qui va entraîner l'augmentation de la température dans les composants du stockage (*Andra 2000* ; [4]). La *Figure 2.3* montre un exemple de l'évolution de la puissance thermique d'un colis de déchets radioactifs en fonction du temps, 4 ans après décharge du réacteur jusqu'à 10 millions d'années. Les colis de type CU1, CU2, S4U renferment tous des combustibles usés mais leur distinction relève seulement des assemblages des déchets du genre 4 UOX2 ou 1 MOX (*Figure 2.2*).

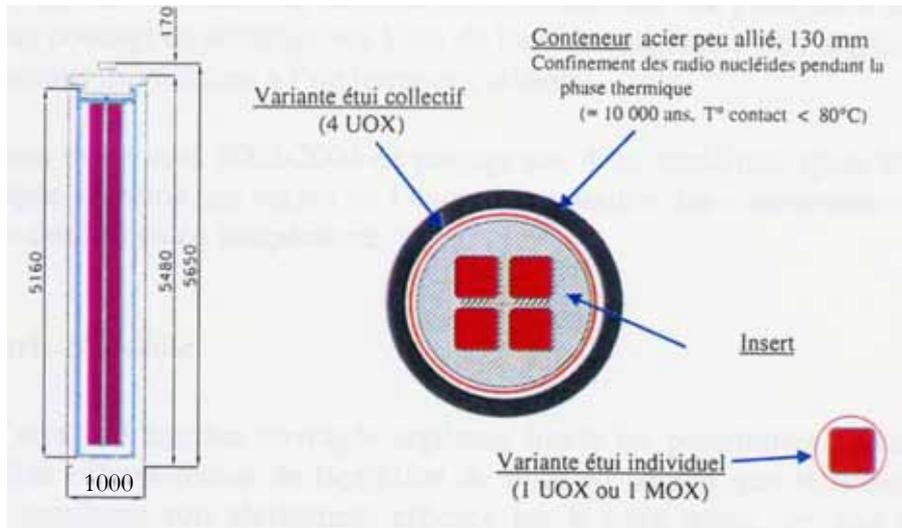


Figure 2.2 : Concept de colisage des combustibles usés UOX et MOX- Côtes en millimètre, (Andra 2002 ; [9])

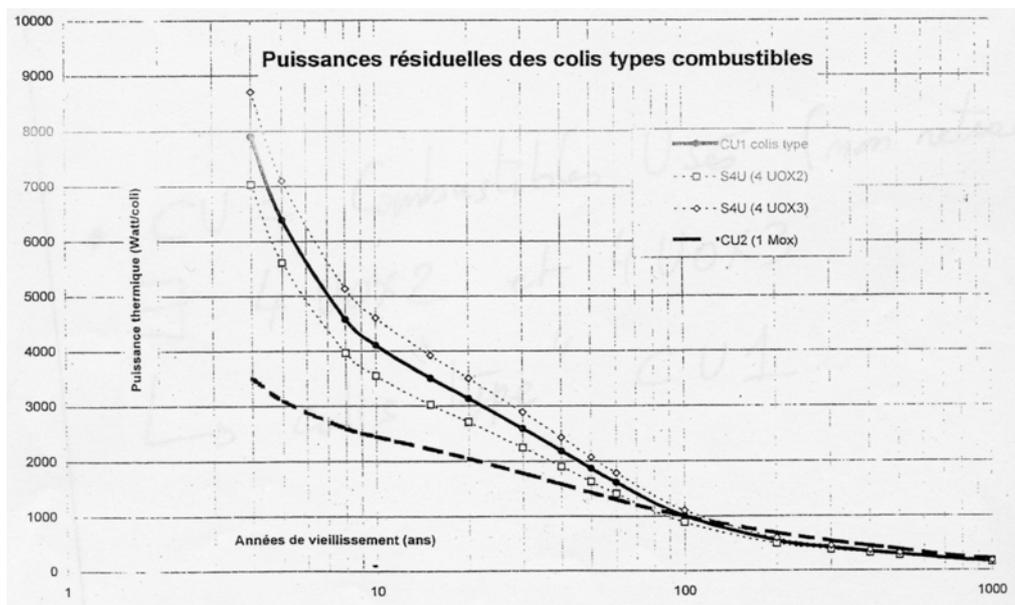


Figure 2.3 : Evolution de la puissance thermique en fonction du temps de déchets radioactifs HAVL, (Andra 2000 ; [4])

2.2.2 Notion de charge thermique admissible

La notion de charge thermique admissible est liée, aussi bien, à la capacité de la formation hôte à encaisser la quantité de chaleur dégagée en fonction de la puissance thermique relâchée par les déchets qu'à l'amplitude des effets thermomécaniques induits (*Côme 1984*; [38]). L'illustration suivante donne une idée sur l'importance de la détermination de la charge thermique admissible.

a) Evaluation de l'augmentation de la chaleur

Supposons que la quantité totale de chaleur libérée par un colis de déchets est de l'ordre de 2.10^{12} J. Cette chaleur va se propager dans la formation hôte constituée d'une roche de densité 2,5 et de chaleur massique $850 \text{ Jkg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. On suppose que chaque colis est environné d'un certain volume de roche. Si on veut que la température de ce volume de roche reste, par exemple, inférieur à 100°C , ce qui correspond à un échauffement de 85°C par rapport à une température initiale de 15°C à 1000 m de profondeur, il faut que chaque colis soit entouré de 10000 à 15000 m^3 de roche soit un cube de 25 m de côté environ.

Une installation de stockage peut contenir plusieurs dizaines de milliers de colis. Le volume total de roche affecté par l'échauffement pourra, par conséquent, atteindre plusieurs centaines de millions de m^3 correspondant à un diamètre moyen du dépôt de l'ordre de plusieurs hectomètres voire kilomètres.

b) Evaluation des effets thermomécaniques associés

Il est possible d'évaluer l'ordre de grandeur des déplacements induits par l'expansion thermique d'un tel volume de roche par un calcul simple. En conditions non-confinées, le déplacement u d'un point situé à la limite de la zone chauffée est donné approximativement par :

$$(2.21) \quad u = R \alpha \Delta T$$

où R est le rayon équivalent du volume chauffé, α le coefficient de dilatation du massif rocheux et ΔT l'échauffement.

Pour $R = 0,5 \text{ km}$, $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ et $\Delta T = 85^\circ\text{C}$, on obtient $u = 42,5 \text{ cm}$: la limite extérieure de la zone chauffée se voit donc déplacée d'environ 42 cm. Cette valeur est certes surestimée mais elle est représentative de la réalité.

Les terrains avoisinant la zone chauffée doivent s'opposer à la libre expansion thermique du dépôt de stockage, les contraintes engendrées par le confinement de ces déplacements, en thermoélasticité, sont donc de l'ordre de :

$$(2.22) \quad \sigma = E \alpha \Delta T$$

où E est le module d'Young du massif rocheux.

Pour une formation argileuse dont les propriétés thermoélastiques sont $E = 4000 \text{ MPa}$ et $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, la variation de température engendre ainsi des contraintes de l'ordre de 0,04 MPa par degré d'échauffement, ceci dans toute la zone affectée par le dépôt.

Le stockage des déchets exothermiques de haute activité engendre donc des contraintes et déplacements non négligeables proportionnels à l'échauffement et affectant un volume très important de roche. Il convient, par conséquent, de limiter ces effets thermomécaniques à des valeurs compatibles avec l'intégrité mécanique des barrières ouvragées ainsi que de la formation hôte agissant comme barrière géologique. Ceci passe par le contrôle de l'échauffement induit, donc celui de la densité de puissance thermique relâchée par les déchets dans la roche : d'où l'introduction du terme de « charge thermique admissible » (Côme 1984 ; [38]).

2.2.3 Analyse thermique du champ proche des galeries de stockage

Dans l'analyse des problèmes associés au stockage en milieux géologiques profonds, il est nécessaire de distinguer le champ proche du champ lointain. Le champ proche peut être défini comme zone voisine des déchets radioactifs. Il inclut les barrières ouvragées et la partie de la roche hôte à proximité immédiate du dépôt de stockage. Le champ lointain s'étend de l'extrémité du champ proche à la surface au sol. Il concerne l'installation de stockage ainsi que la formation géologique hôte. Dans les concepts de stockage en formations géologiques profondes actuellement étudiés en France, la température maximale dans la barrière ouvragée est limitée à 100°C (Andra 2002 ; [9]). L'analyse thermique de champ proche a pour but de sélectionner le ou les paramètres ainsi que les dispositions qui sont conformes à ce critère. On peut traiter ce problème de manière rigoureuse avec les codes de calcul résolvant la loi de conduction de chaleur. Toutefois, on peut réaliser des calculs analytiques approchés en régime permanent sur des géométries simplifiées de façon à évaluer facilement le rôle relatif des paramètres mis en jeu.

a) Méthode analytique

Considérons une coupe transversale d'un champ proche présenté par la *Figure 2.4*. Il est constitué, en symétrie de révolution, du centre vers l'extérieur par :

- Le colis de déchets vitrifiés, source de chaleur (S), de conductivité thermique k_1 , émettant une puissance thermique par unité de volume q constante, de rayon r_1 ;
- Le suremballage métallique éventuel (M), entre r_1 et r_m , de conductivité thermique k_m ;
- La barrière ouvragée concentrique extérieure (B), de conductivité thermique k_2 , insérée entre le suremballage et la paroi de la galerie de stockage de rayon r_2 .
- Une couronne de roche autour de la galerie de stockage (R), dont la conductivité thermique est k_3 . Elle est limitée par le rayon r_3 où on peut estimer que la température initiale du massif T_0 n'est pas modifiée.

Ce système permet de décrire le comportement thermique en champ proche d'un ensemble de colis unique peu de temps après l'enfouissement de ces colis de déchets (Géostock et SGN 1982 ; [54]). En supposant que les conductivités thermiques du système ne varient pas avec la température, on peut écrire et en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , dans chacune de ces quatre zones (*Figure 2.4*) l'équation de la conduction de la chaleur en régime permanent. Soit pour la $i^{\text{ème}}$ zone :

$$(2.23) \quad \frac{k_i}{r} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot \frac{dT}{dr}) + q_i = 0$$

où k_i et q_i représentent respectivement le coefficient de conductivité thermique et la puissance thermique volumique de chaque zone.

Dans le colis de déchets, on a : $q_i = q$ et par conséquent

$$(2.24) \quad T = \frac{-qr^2}{4k_1} + A$$

Dans les autres zones, $q_i = 0$ on obtient alors :

$$(2.25) \quad T_i = B_i \cdot \text{Log}(r) + C_i$$

Il est possible de déterminer les constantes A, B_i, C_i en écrivant la continuité des températures et des flux de chaleur aux interfaces.

On suppose par ailleurs que les contacts sont parfaits. Soient T_{BR}, T_{MB}, T_{SM} les températures aux interfaces respectives barrière ouvragée-roche, métal-barrière ouvragée, source-métal et T_C la température au centre du colis de déchets.

Après calculs, on obtient :

$$(2.26) \quad T_{BR} = T_o + \frac{q \cdot r_1^2}{2k_3} \text{Log}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$

$$(2.27) \quad T_{MB} = T_{BR} + \frac{q \cdot r_1^2}{2k_2} \text{Log}\left(\frac{r_2}{r_m}\right)$$

$$(2.28) \quad T_{SM} = T_{MB} + \frac{q \cdot r_1^2}{2k_m} \text{Log}\left(\frac{r_m}{r_1}\right)$$

$$(2.29) \quad T_C = T_{SM} + \frac{q \cdot r_1^2}{4k_1}$$

Ces expressions analytiques simplifiées permettent d'apprécier le rôle des différents paramètres du système dans le but d'optimiser le comportement thermique du champ proche. La *Figure 2.5* présente une distribution typique calculée avec ce modèle analytique. On remarque sur la *Figure 2.5* qu'un grand rayon de galeries de dépôt r_2 permet d'abaisser la température appliquée sur la roche mais augmente la température dans la barrière ouvragée et dans les déchets. On admet que la conductivité du suremballage (de l'ordre de $35 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) est bien plus élevée que celle des autres matériaux : il est donc pratiquement à température constante. Toutes les températures sont proportionnelles à l'énergie thermique q de la source (voir relations (2.26) et (2.29)) qui apparaît ainsi comme le paramètre clé de la distribution des températures. Pour étudier le cas d'un échauffement excessif de la barrière ouvragée, on peut supposer qu'elle peut perdre une partie de son humidité par séchage d'où une chute, au moins temporairement, de sa conductivité thermique. Le modèle d'analyse thermique du champ proche peut être limité à deux milieux :

- La source chaude ou le colis de déchets (S), de conductivité thermique k_1 , émettant une puissance thermique par unité de volume q constante, de rayon r_1 ;
- La barrière ouvragée (B), de conductivité thermique k_2 , limitée par la paroi de la galerie de stockage de rayon r_2 où la température T_L est supposée constante.

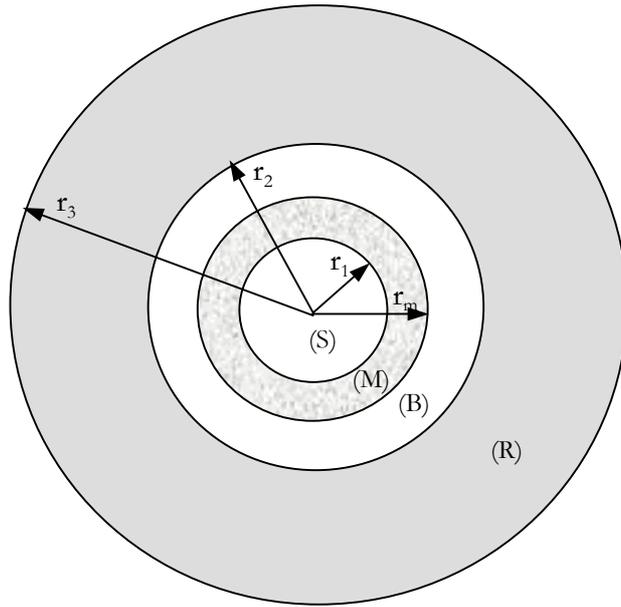


Figure 2.4 : Schéma de la coupe transversale d'un empilage de colis de déchets en symétrie de révolution

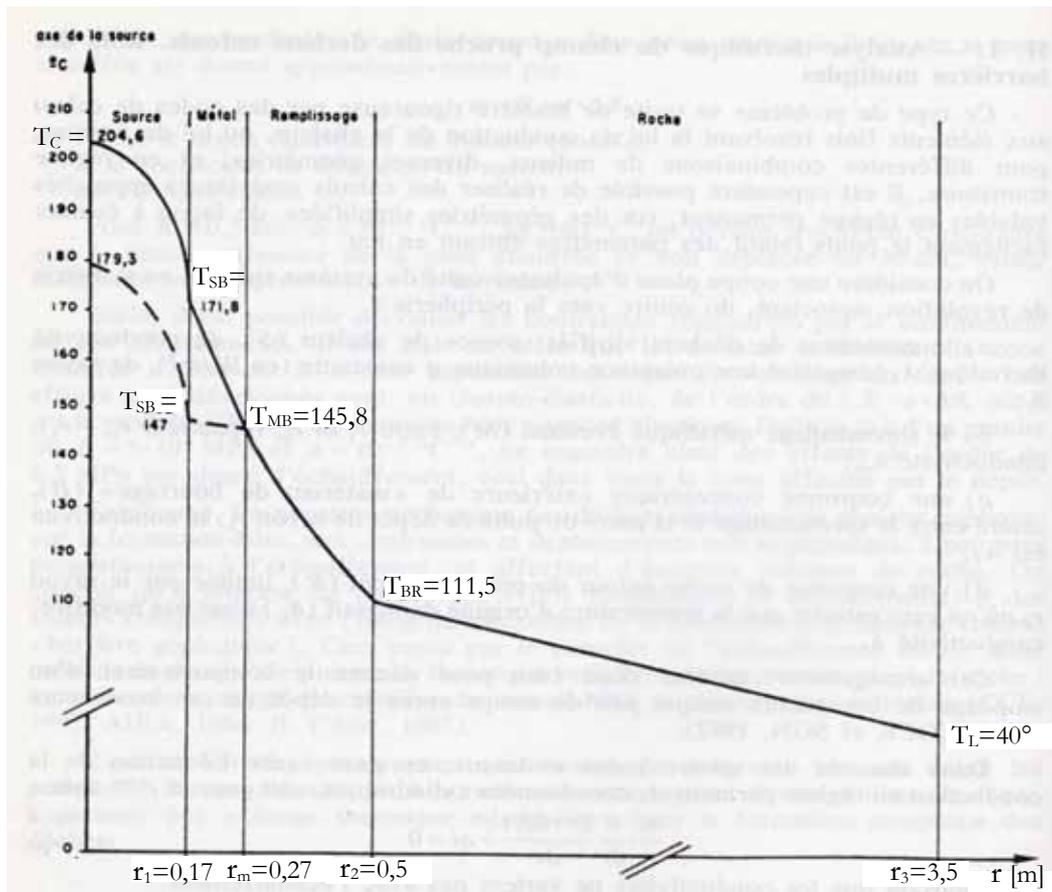


Figure 2.5 : Distribution typique de température autour d'un empilage de colis de déchets.
 Trait plein : sans suremballage - Trait interrompu : avec suremballage, (Géostock et SGN 1982 ; [54])

En ce qui concerne la barrière ouvragée, on peut considérer deux cas :

1^{er} cas : sa conductivité est constante et égale à k_B^0

2^{ème} cas : sa conductivité chute sous l'effet de l'intensité de l'échauffement. On adopte ainsi une loi théorique d'évolution simplifiée pour sa conductivité telle que :

$$(2.30) \quad k_B = k_B^0 \left(\frac{T_L}{T} \right)$$

avec T variable température.

On obtient aisément la valeur de la température maximale de la barrière ouvragée notamment à l'interface source-barrière ouvragée selon la méthode exposée plus haut.

Posons $R = \frac{r_2}{r_1}$, $K = \frac{q r_1^2}{2k_B^0 T_L}$ et soit T_{SB} la température à l'interface source-barrière ouvragée :

1^{er} cas : pour $k_B = \text{constante}$, on obtient $\frac{T_{SB}}{T_L} = 1 + K \text{Log}(R)$;

2^{ème} cas : pour $k_B = k_B^0 \left(\frac{T_L}{T} \right)$, on obtient $\frac{T_{SB}}{T_L} = R^K$.

On remarque que les deux situations sont équivalentes lorsque K et/ou R sont petits. En effet, $R^K = e^{K \text{Log}(R)} \approx 1 + K \text{Log}(R)$.

A titre d'exemple, pour $R = 2$ (cas d'un colis de déchets exothermiques de 43 cm de diamètre enfoui dans une galerie de 1 m environ de diamètre sans suremballage), $k_B^0 = 1,8 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$ et $T_L = 50^\circ\text{C}$.

Le *Tableau 2.1* présente le rapport $\frac{T_{SB}}{T_L}$ en fonction de K variant de 0,01 et 10 pour les deux hypothèses. Il met en évidence l'évolution sensible de l'échauffement pour de fortes valeurs de K, donc essentiellement de la puissance thermique q dégagée par le colis de déchets. Il convient donc de maintenir K, donc q, à une valeur admissible. L'exemple du *Tableau 2.1* montre que ce risque est exclu en prenant $K < 1$.

		K	0,01	0,1	1	5	10
$\frac{T_{SB}}{T_L}$	1 ^{er} cas		1,007	1,07	1,7	4,5	8
	2 ^{ème} cas		1,007	1,07	2	32	103

Tableau 2.1 : Evolution de l'échauffement en fonction de la puissance calorifique de la source, (Géostock et SGN 1982 ; [54])

b) Méthode numérique

L'utilisation des codes de calculs, utilisant la méthode des éléments finis ou des différences finies, dans les analyses thermiques de champ proche permet d'ajuster de manière plus judicieuse les paramètres et les dispositions adéquates aux limites de températures admissibles. Le travail réalisé par *Gens et Olivella* [52] sur l'analyse thermo-hydro-mécanique du champ proche d'un projet de stockage de déchets radioactifs constitue une référence d'analyses réalisées avec des codes de calculs. Il s'agit de l'étude détaillée d'une éventuelle installation de stockage de déchets vitrifiés envisagé dans une couche d'argilite de l'Est de la France.

Pour la réalisation de cette étude, le logiciel CODE_BRIGTH (un programme 3D aux éléments finis conçu pour l'analyse thermo-hydro-mécanique en milieu géologique) développé à l'UPC Barcelone a été utilisé. Le concept de stockage envisagé dans ce site est basé sur un concept en T.C. (Chapitre 1). En effet, des galeries parallèles principales de 6 m de diamètre et espacées de 70 m sont creusées à une profondeur d'environ 490 m. Des tunnels horizontaux seront creusés tous les 18 m des côtés opposés de chaque galerie principale avec une longueur de 19 m (*Figure 2.8*). Huit colis métalliques contenant des déchets vitrifiés sont mis en place dans chacun des tunnels.

La *Figure 2.6* présente la coupe longitudinale d'un tunnel de stockage et ses dimensions caractéristiques. Un serrement en béton sépare le dépôt de stockage du tunnel d'accès. L'espace entre les revêtements métalliques et la roche hôte est remplie par de la bentonite pour constituer une barrière ouvragée. La puissance thermique par colis de déchets, après 30 ans de retraitement, est de 650 W. La *Figure 2.7* montre l'évolution de la puissance thermique d'un colis de déchets en fonction du temps, elle est du type exponentiel. Les chaleurs spécifiques des matériaux constitutifs sont respectivement $C = 700 \text{ J m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $C_{\text{BO}} = 1100 \text{ J m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour la roche hôte et pour la bentonite.

La *Figure 2.8* montre le schéma du modèle, ces dimensions géométriques et les conditions aux limites thermiques. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la structure est modélisée. Les conditions aux limites et les conditions initiales thermiques sont supposées égales à 28°C dans toute la formation hôte (*Gens et Olivella 2001 ; [52]*). Sur les plans de symétrie, les flux de chaleur sont supposés nuls. Les phases de simulation comprennent :

1. Une phase isotherme sans colis de déchets est d'abord observée pendant les cinq premières années. La galerie a été creusée et le revêtement métallique et la bentonite ont été installés.
2. Après 5 ans, les colis de déchets ont été introduits dans la galerie mais la galerie d'accès n'est pas encore fermée. On suppose que la paroi de la galerie d'accès reste à une température constante grâce à la ventilation. Cela augmente la dissipation thermique.
3. Enfin, la galerie d'accès est remblayée au bout de 35 ans et elle n'est donc plus ventilée.

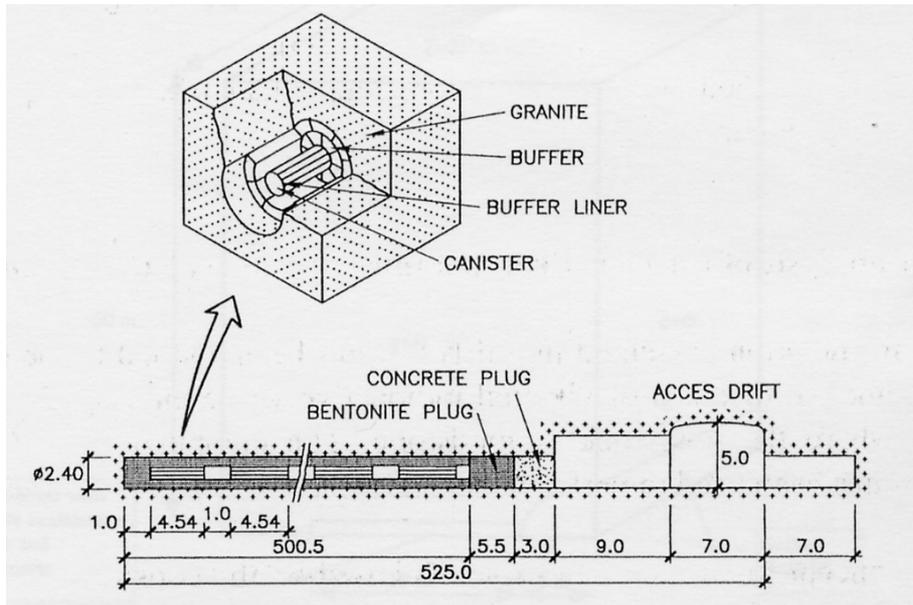


Figure 2.6 : Schéma typique d'une alvéole de stockage, (Gens et Olivella 2001 ; [52])

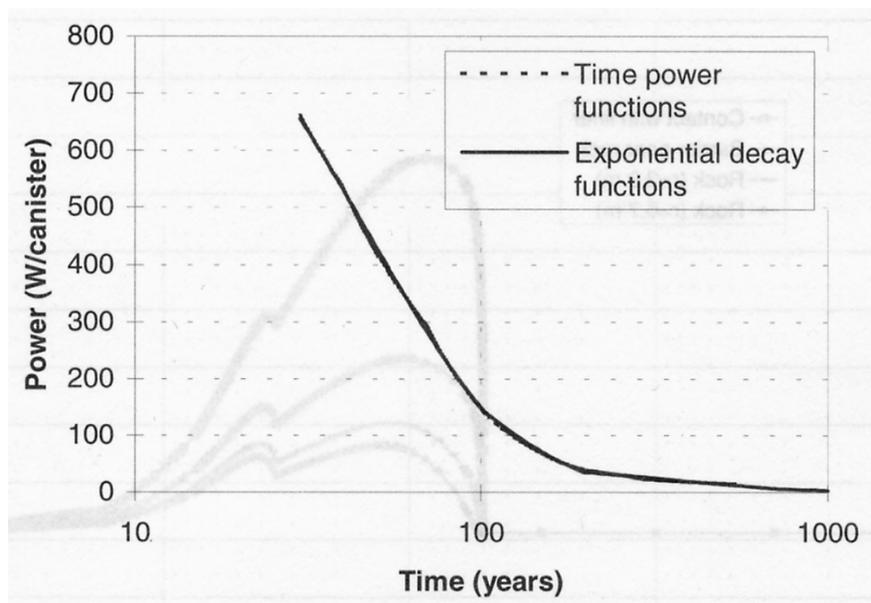


Figure 2.7 : Evolution de la puissance thermique d'un colis en fonction du temps, (Gens et Olivella 2001 ; [52])

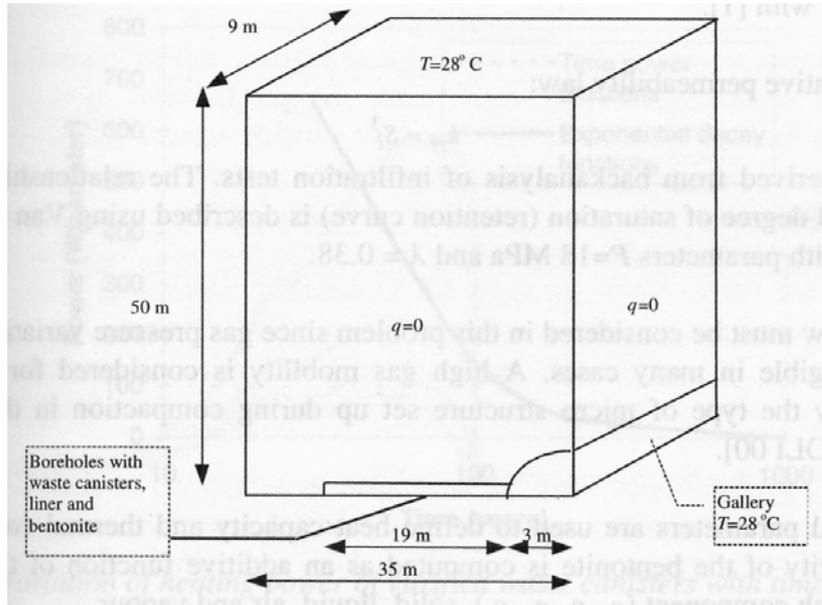


Figure 2.8 : Géométrie et dimensions caractéristiques du modèle, (Gens et Olivella 2001 ; [52])

La Figure 2.9 présente la variation de la température avec le temps en trois points représentatifs de la barrière ouvragée. On remarque qu'après cinq années de phase isotherme les températures augmentent brusquement lorsque les colis sont placés dans la galerie de stockage. La température maximale (190,4°C) est atteinte au contact avec l'emballage métallique enveloppant le colis de déchets 3,6 ans après la mise en place des colis de déchets. Les autres points du domaine atteignent leurs pics de températures à des durées de plus en plus longues à mesure que la distance avec le colis de déchets augmente.

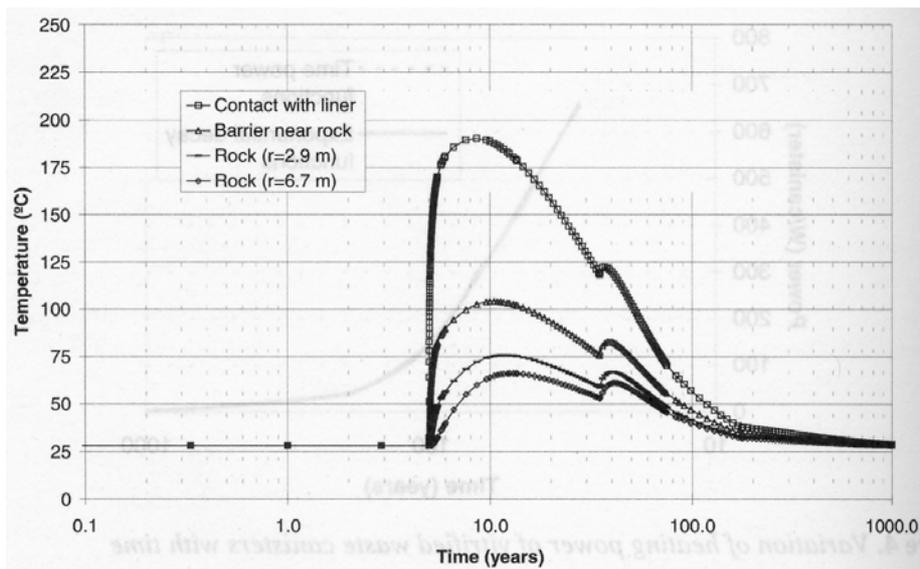


Figure 2.9 : Evolution des températures en fonction du temps dans le champ proche, (Gens et Olivella 2001 ; [52])

On constate aussi que plus on s'éloigne du revêtement métallique plus le pic de température atteint diminue. Lorsque la galerie d'accès est remblayée (35 ans), il y a un changement du régime thermique mais son influence est faible. Après 1000 ans, les températures sont pratiquement revenues à leurs valeurs initiales.

2.2.4 Analyse thermique de la zone de stockage (Comportement global)

Pour l'analyse de la sûreté d'un projet de stockage profond, on ne doit pas se limiter au champ proche. Il convient d'élaborer des supports scientifiques qui permettent d'estimer, à l'échelle de la formation hôte, la distribution et l'évolution de la température au cours de l'exploitation d'un éventuel site de stockage et pendant une longue période après sa fermeture définitive. L'utilisation des codes de calculs numériques est le moyen le plus performant qui permet de faire une résolution complète des problèmes. Toutefois, il existe des approches analytiques détaillées pour des géométries simplifiées.

La *Figure 2.10a* présente un modèle analytique pour lequel le stockage est assimilé à une plaque chauffante émettant de la chaleur dans deux demi-massifs infinis (*Géostock et SGN 1982 ; [54]*). Cette hypothèse est acceptable quand la dimension verticale du stockage est faible par rapport à ses dimensions latérales. Le problème étant ainsi monodimensionnel puisque la température en un point ne dépend que de la distance à cette plaque soit de la cote z . Comme l'indique le schéma de la *Figure 2.10*, la distribution des sources de chaleur est supposée uniforme dans la zone du stockage laquelle est remplie instantanément à $t = 0$, origine du calcul. Pour des raisons de symétrie, le modèle peut être simplifié en ne considérant qu'un demi-massif (*Figure 2.10b*). Chaque colis de déchets émet, à l'instant t , une quantité de chaleur décroissante en fonction du temps selon l'expression suivante :

$$(2.31) \quad W = W_0 \exp(-\omega t)$$

avec W_0 la puissance thermique initiale au moment de la mise en place des déchets radioactifs et ω la constante de décroissance thermique telle que $\omega = \frac{\text{Log } 2}{\mathfrak{D}}$ où \mathfrak{D} la demi-vie de la source de chaleur.

Le flux appliqué par ce colis sur le demi-massif supérieur (ou inférieur) dans une maille de côtés X et Y est :

$$(2.32) \quad \varphi = \varphi_0 \exp(-\omega t)$$

avec $\varphi_0 = \frac{W_0}{2XY}$.

Si on considère n colis identiques selon la verticale dans le stockage, le flux thermique est à multiplier par n . Le problème revient à résoudre l'équation de la chaleur en régime transitoire dans le demi-massif supérieur (ou inférieur), soit :

$$(2.33) \quad k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec k le coefficient de conductivité thermique du massif semi-infini, T la variable de température, ρ la masse volumique du massif semi-infini et C sa chaleur spécifique massique.

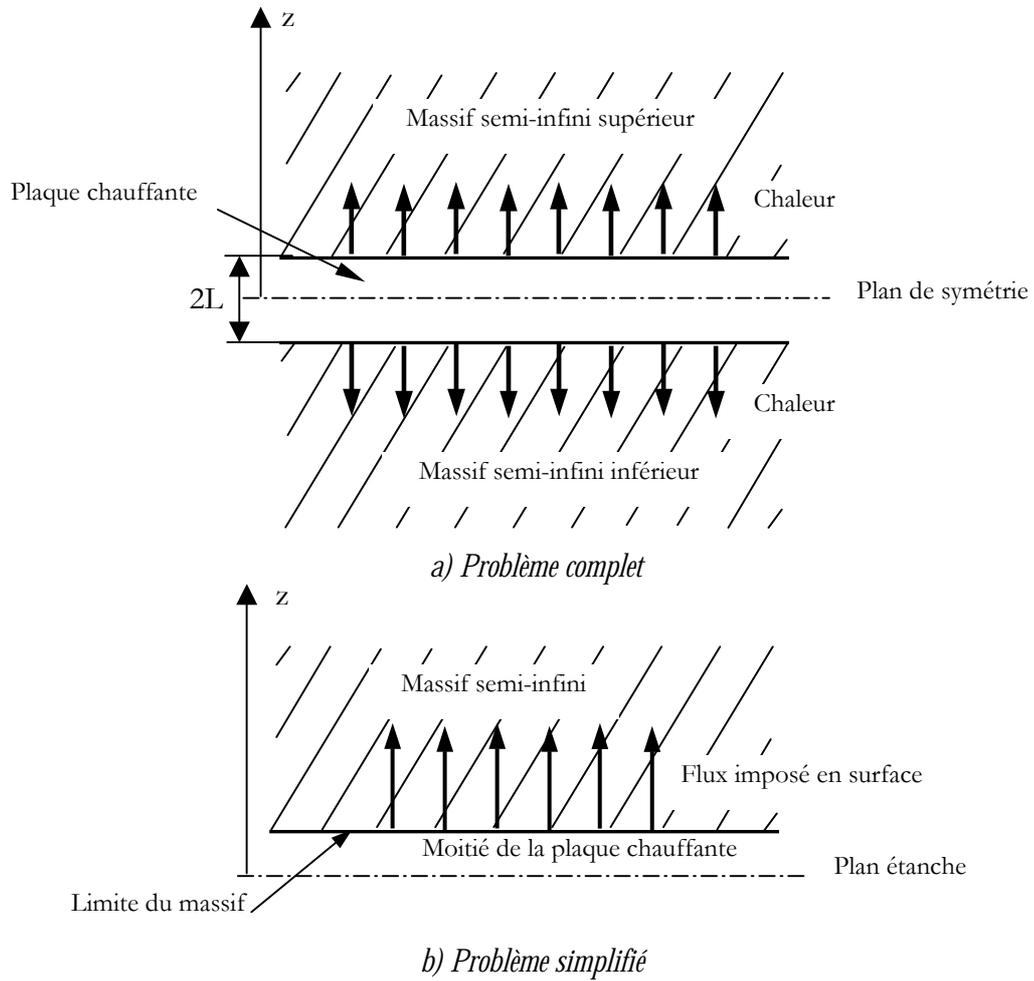


Figure 2.10 : Coupe transversale d'une plaque chauffante émettant de la chaleur dans deux demi-massifs semi-infinis (Géostock et SGN 1982 ; [54])

Les conditions initiales et aux limites sont les suivantes :

- Initialement, la température est uniforme et est égale à zéro ($T = 0$) partout
- La température est égale à zéro aux limites du massif semi-infini ($T \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \infty$) et sur le plan moyen de la plaque chauffante ($z = 0$) le flux de chaleur s'écrit :

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-\omega t) = -k_0 \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0}$$

Après calcul, on obtient les expressions analytiques suivantes :

a. dans le stockage, la température est donnée par :

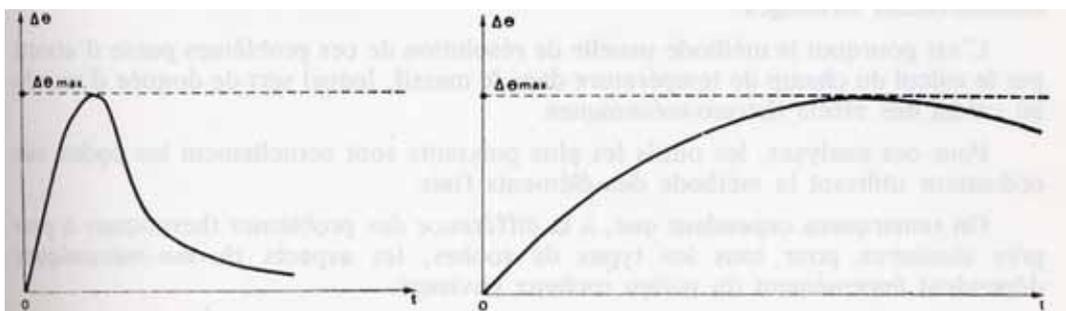
$$(2.34) \quad T = \frac{2\varphi_0}{\sqrt{\pi k_0 C}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp(-\omega \tau) \int_0^{\sqrt{\omega \tau}} \exp(u^2) du$$

b. en un point quelconque de cote z :

$$(2.35) \quad T = \frac{2\varphi_0}{\sqrt{\pi k \rho C}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp(-\omega t) \int_0^{\sqrt{\omega t}} \exp\left(u^2 - \frac{\omega \rho C z^2}{4k u^2}\right) du$$

Il est donc possible de déterminer la part respective des divers paramètres dans l'échauffement global de la formation hôte avec les expressions analytiques explicitées ci-dessus :

- L'augmentation de température est proportionnelle à φ_0 , donc à W_0 , si la maille est fixée. Une maille de dépôt large (X et Y grands) pour une puissance initiale W_0 donnée diminue φ_0 , donc l'échauffement ;
- Plus l'effusivité thermique ($\sqrt{k\rho C}$) du massif est grande, plus l'échauffement global est faible. (L'effusivité thermique caractérise la capacité des matériaux à réagir plus ou moins rapidement à un apport de chaleur intérieur de son volume, que cet apport soit le fait d'une source interne ou du rayonnement solaire) ;
- Le déchet influence l'échauffement à la fois par son émission thermique initiale W_0 et par sa demi-vie ; on peut donc avoir des échauffements comparables en enfouissant des déchets chauds où dominent les produits de fission à vie courte (Θ petit, ω grand et W_0 élevé) dans une maille (X, Y) large, ou bien en enfouissant des déchets refroidis où dominent les actinides à vie longue (Θ grand, ω petit et W_0 faible) dans une maille (X, Y) resserrée, car T dépend du quotient $\varphi_0/\sqrt{\omega}$ et non de φ_0 seul ;
- La chronologie de l'élévation de la température et du retour à la température initiale sont entièrement différentes selon qu'on enfouit des déchets chauds où dominent les produits de fission (ω grand) ou bien des déchets refroidis où dominent les actinides (ω petit), puisqu'elle est fonction de $\sqrt{\omega t}$ et non seulement du temps. La Figure 2.11 permet de comparer ces évolutions dans les deux cas pour un échauffement global maximal identique.



(a) Enfouissement rapide (ω grand).
Echauffement maximal atteint rapidement et refroidissement rapide

(b) Enfouissement retardé (ω petit).
Echauffement maximal atteint lentement et refroidissement lent

Figure 2.11 : Influence de l'âge des déchets sur l'historique de l'échauffement dans la zone du dépôt (Echauffement maximal supposé identique), (Côme 1984 ; [37])

Considérons un flux initial vers le haut de $\varphi_0 = 3 \text{ W/m}^2$ environ. Pour le massif : $k = 2,5 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\rho = 2650 \text{ kg m}^{-3}$ et $C = 835 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. L'échauffement global maximal 65 ans après enfouissement, supposé instantanément, de tous les colis de déchets atteint 22°C . La température totale dans le dépôt est donc de 62°C environ.

La *Figure 2.3* montre que l'émission thermique d'un colis ne tombe pas à zéro après 1000 ans mais se maintient entre 100 000 et un million d'années, à une valeur certes faible mais non négligeable, d'environ $0,1 \text{ W}$. Il convient donc de se poser la question si cette phase de longue durée peut jouer un rôle thermique notable. A ce propos, on peut faire un calcul simple d'ordre de grandeur pour fixer les idées.

Supposons cette fois qu'il existe un régime permanent entre la zone chaude du dépôt et la surface du sol : la couverture de roche est assimilée à un mur de 1000 m d'épaisseur. On a alors :

$$(2.36) \quad \varphi = k \frac{\Delta T}{e}$$

avec ΔT la différence de température entre la zone chaude et la surface, e l'épaisseur du mur et k la conductivité thermique de la roche.

Avec le mêmes paramètres que précédemment et entre 10^5 et 10^6 ans, chaque colis émet environ $0,1 \text{ W}$ soit en gros 10^{-4} fois l'émission initiale. Le flux à considérer est donc

$$\varphi = 3 \cdot 10^{-4} \text{ W m}^{-2}. \text{ Ceci correspond donc à un échauffement } \Delta T = \frac{0,3}{2,5} \approx 0,1^\circ \text{ à } 0,2^\circ\text{C à long}$$

terme. Vu la proportionnalité entre le pic d'échauffement à court terme et cet échauffement résiduel à long terme, on peut estimer à 1% environ l'ordre de grandeur de ce dernier par rapport au premier. Il est donc admis de le négliger dans les études thermomécaniques subséquentes, comme cela est généralement fait, bien que la justification ne soit pas toujours donnée.

2.2.5 Conclusions

Au cours de ce paragraphe, on a passé en revue l'ensemble des problèmes thermiques liés au stockage des déchets radioactifs. Ces déchets de haute activité et à vie longue continuent d'émettre de la chaleur dans les alvéoles de stockage et aussi dans la couche hôte durant une longue période correspondant à leur décroissance thermique. La notion de charge thermique permet de déterminer la quantité de chaleur en fonction de la puissance thermique de chaque colis de déchets que pourrait encaisser la formation hôte afin que l'amplitude thermomécanique qu'elle induit ne nuise pas à l'intégrité mécanique de l'installation d'ensemble et notamment celle des barrières ouvragées. Le concept de stockage en France impose une température maximale de 100°C dans les barrières ouvragées. Une analyse thermique du champ proche des déchets radioactifs est donc nécessaire afin de faire respecter cette norme. Pour cela, on peut faire une analyse paramétrique simplifiée de la barrière ouvragée avec des modèles analytiques. Toutefois, l'utilisation des codes de calculs numériques est plus judicieuse pour ce genre d'étude. Il en est de même pour l'analyse thermique de l'installation d'ensemble. Nous avons présenté un exemple de méthodes analytiques permettant cette étude mais l'approche numérique est la meilleure démarche pour une analyse rigoureuse relative à des cas particuliers.

2.3 Principaux problèmes thermomécaniques associés au stockage souterrain

Comme expliqué plus haut, c'est l'échauffement qui détermine directement les effets thermomécaniques dans le massif rocheux. C'est la raison pour laquelle la méthode usuelle de résolution de problèmes passe d'abord par le calcul du champ de température, dans le massif, lequel sert de donnée d'entrée au calcul des effets thermomécaniques. Les codes de calculs sur ordinateur sont actuellement les outils les plus répandus pour ces analyses. Si les problèmes thermiques sont à peu près similaires pour tous les types de roches, les aspects thermomécaniques, quant à eux, dépendent principalement de la roche considérée. Dans ce paragraphe, on s'intéresse essentiellement aux roches argileuses. L'analyse des effets thermomécaniques liés au stockage des déchets exothermiques est basée sur une approche à peu près chronologique qui suit l'extension de l'échauffement depuis le champ proche vers l'ensemble du massif rocheux. Pour cela, le plan suivant sera adopté :

- L'effet de l'échauffement sur les propriétés et le comportement thermomécaniques des roches argileuses, notamment, l'argilite de l'Est ;
- Le calcul du champ proche des galeries de stockage ;
- Le comportement global d'un stockage et son influence sur les milieux environnants.

Notons, toutefois, que ce découpage séquentiel est plutôt arbitraire et que de multiples interactions existent entre ces divers composants isolés simplement par commodité.

2.3.1 Effets de l'augmentation de température sur les propriétés et le comportement thermomécaniques des roches argileuses

Dans le passé, plusieurs auteurs ont étudié le comportement thermique des roches argileuses d'un point de vue théorique aussi bien qu'au moyen des essais en laboratoire. Les études effectuées jusqu'ici peuvent être divisées en deux groupes principaux : les études dans la période de 1960 à 1970, réalisées la plupart du temps aux Etats-Unis, et les études effectuées en Europe depuis 1980. *Campanella et Mitchell (1968 ; [26])* ont mesuré en laboratoire le volume et les variations de pression d'eau interstitielle sur l'illite en conditions drainées et non drainées, pour des températures variant de 20°C à 60°C. Ils ont constaté que les coefficients de dilatation thermique sont différents pour le squelette minéral, l'eau et l'échantillon entier. Ils ont trouvé des valeurs négatives pour ce dernier et cela a été aussi vérifié dans les études de l'*Istituto Sperimentale Modelli e Strutture (ISMES)*, pour des échantillons d'argile de Boom, environ 15 ans après. *Noble et Demirel (1969 ; [82])* ont étudié l'influence de l'augmentation de la température (au-delà de 60°C) sur les résistances au cisaillement d'une argile et d'un silt. Comme la densité et la viscosité de l'eau changent à ce niveau de températures, la résistance au cisaillement est influencée. Par ailleurs, une diminution de la résistance au cisaillement a été observée expérimentalement.

Laguros (1969 ; [69]) a étudié le comportement de l'argile au-delà de 40°C. Il a remarqué une augmentation de la densité volumique avec la température et, par conséquent, une augmentation de la résistance à la compression uniaxiale. D'autre part, la limite de liquidité et l'indice de plasticité ont diminué avec la température. *Muramaya (1969 ; [81])* a constaté que le module d'Young diminue avec la température pour les échantillons examinés testés au-delà de 40°C.

Divers projets d'investigation de laboratoire sur des échantillons d'argile de Boom ont été menés dans le passé à l'initiative de la Commission des programmes de R&D de la Communauté Européenne (CCE). Entre autres, les études réalisées par *Baldi et al. (1987 ; [13])* et *(1991 ; [14])* à l'ISMES ont permis d'observer la réponse de l'argile sous différents chargements à température ambiante et à températures élevées. L'ISMES a constaté, expérimentalement, que la température affecte les propriétés mécaniques de plusieurs argiles et a essayé de caler un modèle mathématique sur ce comportement. *Borsetto et al. (1984 ; [21])* ont mentionné la dépendance possible à la température de la frontière d'état critique et de la surface de rupture. *Hueckel et Pellegrini (1989 ; [67])* ont observé une diminution de 1,0 à 0,8 du paramètre M du modèle de Cam-Clay pour des échantillons d'argile de Boom, quand la température augmente de 20°C à 80°C. Au moyen d'une cellule triaxiale qui est équipée d'un dispositif permettant la variation de température, *De Bruyn et Thimus (1996 ; [41])* ont trouvé que la résistance mécanique de l'argile de Boom diminue lorsque la température augmente.

On trouve également des références récentes dont les conclusions diffèrent des résultats décrits ci-dessus. Elles concernent l'argilite de l'Est mais aussi d'autres roches argileuses. En effet, dans le cadre du programme de recherche de l'ANDRA sur le stockage en formations géologiques profondes, la connaissance de l'influence de la température sur le comportement thermomécanique de l'argilite de l'Est est un enjeu important pour déterminer l'aptitude du site de Bure au confinement géologique des déchets hautement radioactifs.

Belanteur et al. (1997 ; [15]) ont étudié l'influence de la température sur le comportement thermomécanique des matériaux argileux gonflants et non gonflants fortement compactés. Pour ce faire, ils ont réalisé des essais isothermes sur des chemins œdométriques et sur des chemins triaxiaux non drainés d'une part et d'autre part des cycles thermiques sous chargement mécanique constant à l'état normalement consolidé et surconsolidé sur des chemins œdométriques. Ces essais ont été menés sur quatre matériaux argileux différents de par leur nature. Il s'agit de la kaolinite, de la smectite, de l'argilite de l'Est (argile du bassin parisien selon le terme de *Belanteur et al. 1997 ; [15])* et de l'argile de Boom. Le *Tableau 2.2* résume les principales caractéristiques physiques de ces matériaux..

Caractéristiques physiques	<i>Argilite de l'Est</i>	<i>Kaolinite</i>	<i>Smectite</i>	<i>Argile de Boom</i>
<i>Masse volumique des grains</i> ρ_s [g cm^{-3}]	2,68	2,5	2,75	2,67
<i>Surface spécifique</i> BET [$\text{m}^2 \text{g}^{-1}$]	33,5	10,3	426	53 - 117
<i>Capacité d'échange de base</i> [méc]	46	-	64	20 - 40
<i>Limite de liquidité</i> w_L [%]	52,5	40	112	59 - 76
<i>Limite de plasticité</i> w_p [%]	22,5	20	50	22 - 26
<i>Indice de plasticité</i> IP = $w_L - w_p$	30	20	62	37 - 50
Type d'argile	Non gonflante	Non gonflante	Gonflante	Peu gonflante

Tableau 2.2 : Caractéristiques physiques des argiles étudiées, (Belanteur et al. 1997 ; [15])

Les essais œdométriques en température ont été réalisés sur une cellule œdométrique à haute pression. L'échantillon d'argile, à l'état de boue, est mis en place dans la cellule après avoir saturé la pierre poreuse disposée sur le piston. Puis, celle-ci est renfermée par son embase supérieure et est raccordée au circuit de saturation avant d'être introduite à l'intérieur d'une étuve autorégulée. L'échauffement de l'échantillon intervient, selon le type d'essai à réaliser, avant ou après l'application de tout chargement mécanique. Dans le cas de l'argilite de l'Est, l'échantillon a été porté préalablement à la température de déroulement de l'essai pendant 24 heures avant l'application de tout chargement mécanique. Les résultats de ces essais sont présentés à la *Figure 2.12*. Dans le cas de la smectite et de la kaolinite, les échantillons sont préconsolidés à 1,5 MPa. L'échauffement de l'échantillon s'effectue à partir du palier de chargement correspondant à 0,5 MPa (*Figure 2.13a et b*).

Les essais œdométriques isothermes réalisés sur l'argilite de l'Est (*Figure 2.12*), ont permis de tirer les enseignements suivants : La température n'affecte pas la compressibilité de l'argilite remaniée à une pression donnée. En effet, les courbes tracées dans le plan indice de vide v/s logarithme de la pression de consolidation $(e, \log p)$ sont linéaires et quasiment parallèles en charge et en décharge pour les trois essais. La température imposée pour la réalisation de l'essai est à l'origine des variations de l'indice des vides à 0,2 MPa, premier incrément de charge. La différence des indices des vides, à tous les niveaux de pression de chargement et de déchargement mécanique est le résultat de l'échauffement initial du matériau. La variation de l'indice des vides, en fonction de la température est la conséquence de la densification du squelette solide avec l'augmentation de température pour supporter la contrainte effective. L'indice des vides diminue, pour une pression de consolidation donnée, avec l'augmentation de la température.

En ce qui concerne la smectite et la kaolinite, les essais œdométriques isothermes réalisés ont mis en évidence un changement de pente dans le plan $(e, \log p)$, en raison de la pression de préconsolidation des matériaux égale à 1,5 MPa. Ceci se produit à une pression légèrement inférieure à cette pression de consolidation (*Figure 2.13*) pour des essais réalisés à 60°C. Cela signifie que l'échauffement initial du matériau a réduit son domaine élastique.

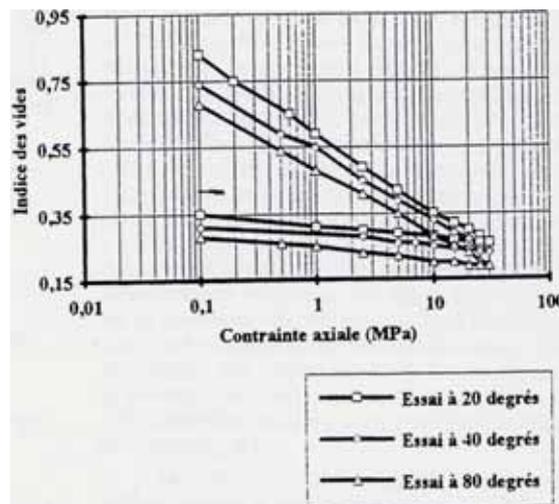


Figure 2.12 : Essais œdométriques isothermes, sur l'argilite de l'Est, réalisés à différentes températures (Belanteur et al. 1997 ; [15])

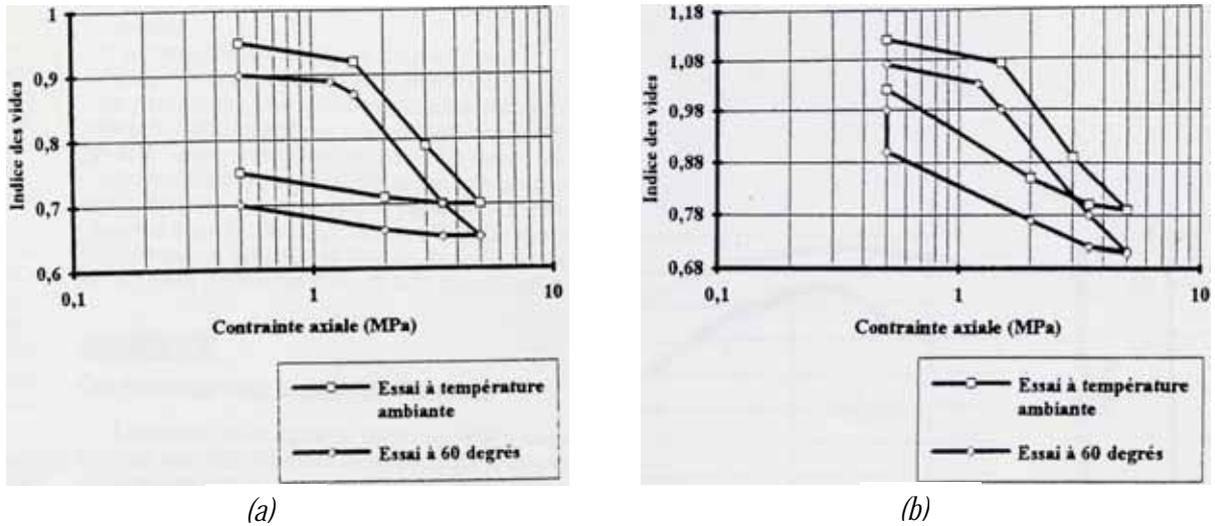


Figure 2.13 : Essais œdométriques isothermes sur une (a) kaolinite et (b) une smectite préconsolidées à 1,5 MPa (Belanteur et al. 1997 ; [15])

Les essais triaxiaux en isotherme concernent uniquement la kaolinite. Ces essais ont été réalisés à l'aide d'une cellule triaxiale à haute pression (Figure 2.14). La vitesse de cisaillement choisie pour les essais triaxiaux a été de $6,67 \cdot 10^{-5}$ [mm/s]. Dans sa mise en œuvre, l'essai triaxial isotherme est analogue à un essai à température ambiante sauf que, dans ce cas, l'échauffement de l'échantillon est effectué à la fin de la consolidation isotrope. En effet, l'échantillon d'argile passe par deux étapes de consolidation isotrope et une étape de cisaillement. La première phase de consolidation isotrope est effectuée à basse pression 0,5 [MPa], dans une cellule triaxial classique modifiée à cet effet. Elle est associée avec l'étape de fabrication des échantillons. Sa durée dépend de la nature du matériau en consolidation telle que présentée à la Figure 2.15.

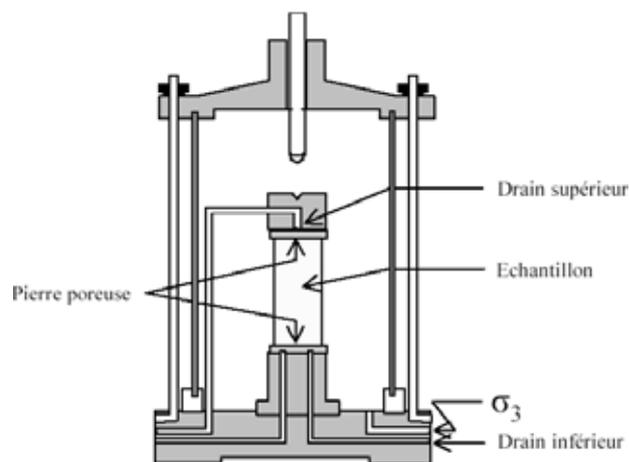


Figure 2.14 : Schéma de la coupe d'une cellule triaxiale pour des essais triaxiaux réalisés avec des cycles thermiques

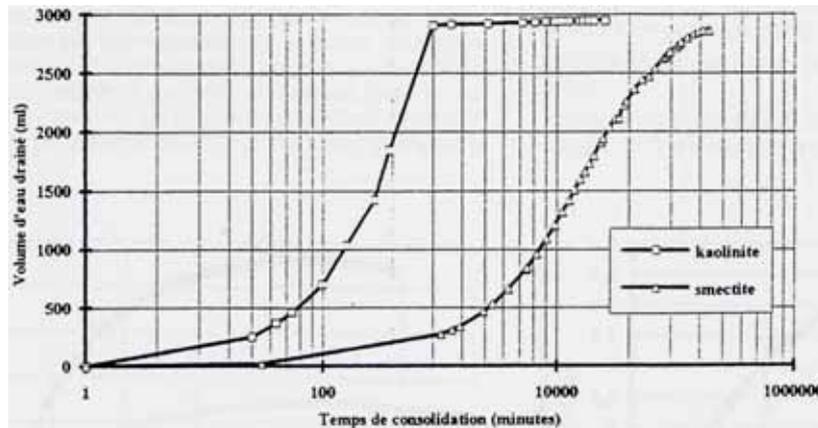
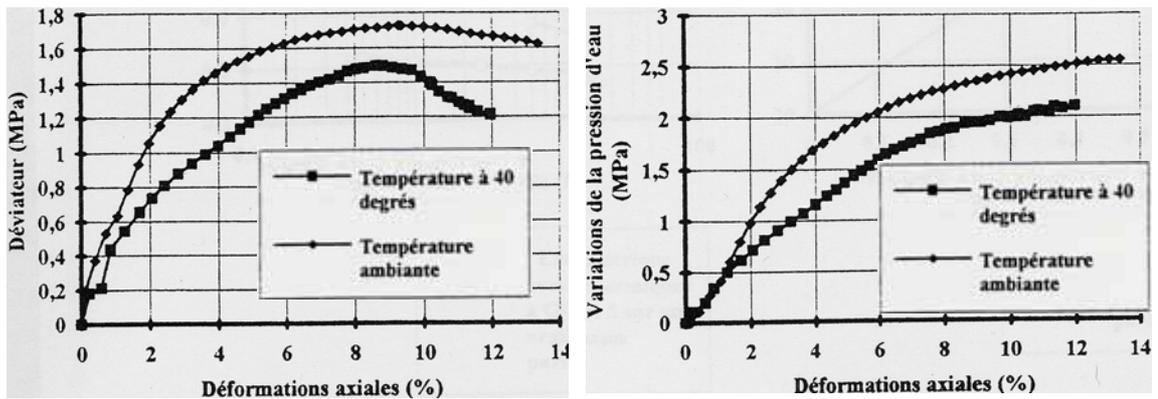


Figure 2.15 : Courbe de consolidation isotrope à basse pression de boues argileuse, (Belanteur et al. 1997 ; [15])

A la fin de l'étape précédente, l'échantillon qui servira pour l'essai triaxial est taillé à l'aide d'un tour manuel de manière à obtenir un élanement de 1 (65 mm de diamètre et 65 mm de hauteur). Une fois l'échantillon mis en place dans la cellule, on commence la deuxième étape de consolidation. La pression de confinement à laquelle doit se dérouler le cisaillement est atteinte après un certain nombre de paliers de chargement. A la fin de la consolidation et après la mise en contact du piston d'écrasement avec l'embase drainante supérieure, les conduits de drainage sont fermés et le cisaillement peut commencer. Cette phase se poursuit jusqu'à la rupture de l'échantillon. Les résultats de l'essai triaxial isotrope non drainé sur une kaolinite remaniée, saturée et normalement consolidée à 5 MPa, réalisé à une température de 40°C et à température ambiante sont présentés sur la Figure 2.16. On remarque, sur la Figure 2.16a, une plus grande déformabilité du matériau à 40°C comparativement à l'essai à température ambiante. La rupture pour les essais à 40°C et à température ambiante se produit pour environ la même valeur de déformation axiale mais pour un déviateur de contrainte plus faible dans le cas de l'essai à 40°C. La phase de la post-rupture se caractérise, pour l'essai à température ambiante, par une légère chute du déviateur et sa stabilisation à partir de 12% de déformation axiale. En revanche, pour l'essai à 40°C, on remarque, une chute significative du déviateur. Le pic observé pour l'essai à 40°C indique que la rupture s'est faite avec l'apparition de plans de cisaillement plus marqués que dans le cas de l'essai à température ambiante). La Figure 2.16b montre que la pression interstitielle augmente malgré la rupture de l'échantillon. L'essai triaxial a montré que la pente $M=q/p'$ diminue pour le matériau chauffé à 40°C (Figure 2.16c).

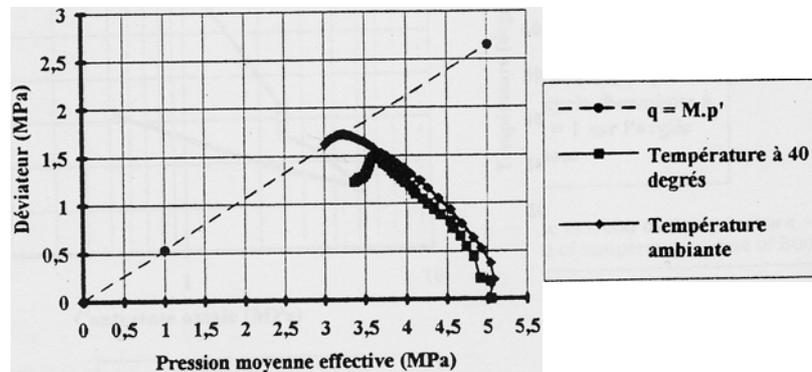
Les observations, faites ci-dessus, sur les argiles non gonflantes remaniées, saturées et normalement consolidées se résument aux conclusions suivantes :

- La température augmente la ductilité du matériau ;
- Elle diminue la résistance du matériau ;
- La température engendre une surconsolidation du matériau qui se manifeste notamment par une chute brutale de la résistance du matériau après sa rupture
- Elle affaiblit les caractéristiques mécaniques du matériau.



(a) Evolution du déviateur des contraintes en fonction de la déformation axiale

(b) Evolution de pression interstitielle en fonction de la déformation axiale



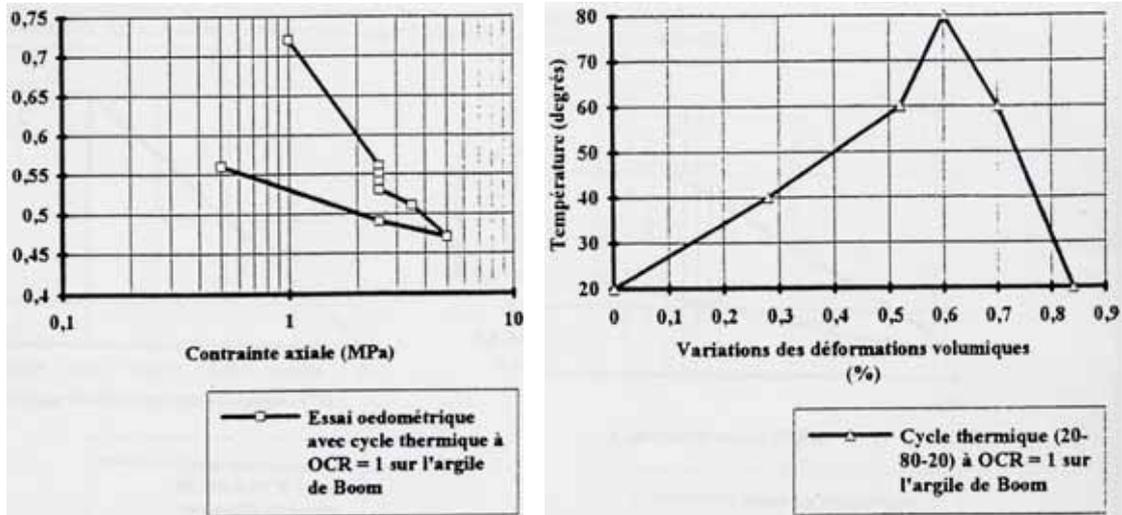
(c) Evolution du déviateur des contraintes en fonction du chargement

Figure 2.16 : Essais triaxiaux isothermes non drainés sur une kaolinite normalement consolidée (Belanteur et al. 1997 ; [15])

Les essais avec cycles thermiques ont été réalisés uniquement sur des chemins œdométriques. Ils permettent d'analyser la variation des déformations volumiques en fonction de la température du matériau, pour un chargement mécanique fixe, à l'état normalement consolidé et à l'état surconsolidé. La Figure 2.17 et la Figure 2.18 présentent les résultats des essais avec cycles thermiques (20–80–20°C) respectivement sur une argile normalement consolidée et sur une argile à l'état surconsolidée :

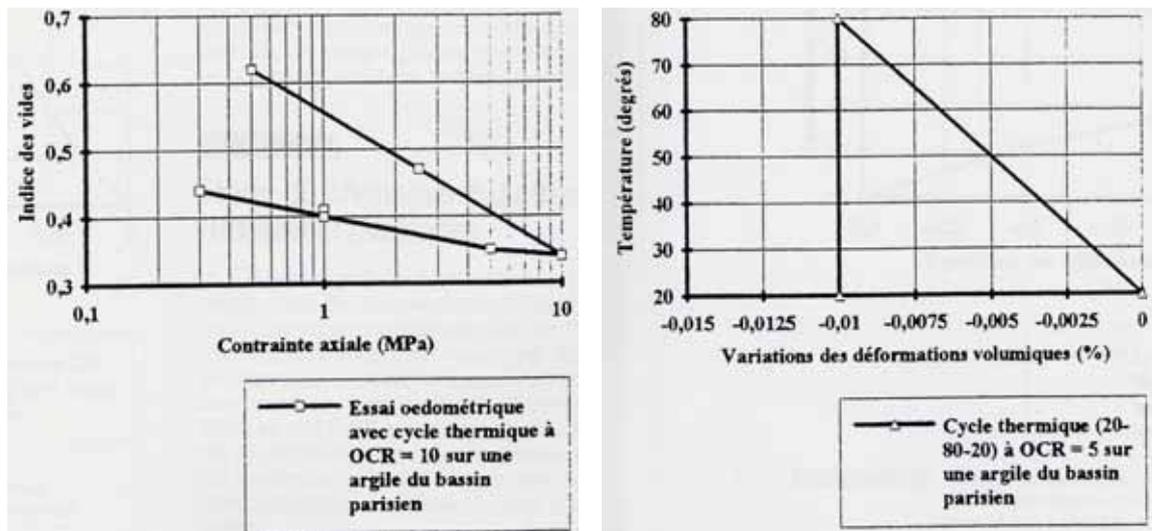
- A l'état *normalement consolidé*, on constate pour l'argile de Boom, l'argilite de l'Est et la smectite que le cycle de température engendre une surconsolidation qui se traduit par l'apparition d'un coude de préconsolidation. Il a aussi pour effet global d'engendrer un tassement irréversible des matériaux (Argile de Boom : Figure 2.17). En effet, à l'état normalement consolidé, l'échantillon d'argile doit réorganiser sa structure solide en la densifiant pour supporter le niveau de contrainte imposé qu'il subit pour la première fois suite à l'effet du cycle de température, d'où le tassement.
- Pour le cas de la smectite et de l'argilite de l'Est à l'état *surconsolidé*, le cycle thermique (20–80–20°C) a produit un gonflement irréversible des matériaux (argilite de l'Est : Figure 2.18). En effet, dans le cas d'un matériau surconsolidé, la division irréversible des

particules résultant du cycle de chauffage et de refroidissement de l'échantillon n'induit pas un réarrangement de sa structure afin de supporter la contrainte imposée car celui-ci a subi par le passé une contrainte supérieure à celle qui lui est imposée actuellement. D'où le gonflement observé, qui correspond à l'effet de la température seule. L'amplitude de ce gonflement est d'autant plus importante que le degré de surconsolidation est élevé.



(a) Evolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale (b) Variation des déformations volumiques en fonction de la température

Figure 2.17 : Essais œdométriques avec cycle de température – Cas de l'argile de Boom remaniée et saturée, (Belanteur et al., [13])



(a) Evolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale (b) Variation des déformations volumiques en fonction de la température

Figure 2.18 : Essais œdométriques avec cycle de température – Cas de l'argilite de l'Est remanié et saturé, (Belanteur et al., [13])

Wright *et al.*, (2000 ; [102]) ont analysé le processus d'altération et de rupture d'échantillons d'argilite lors de sollicitations thermomécaniques en conditions humides contrôlées. A l'aide d'un dispositif expérimental, appelé microcellule CGI (*Figure 2.19a*), ils ont réalisé des essais de fluage sur des échantillons d'argilite en faisant une description microtexturale des mécanismes à l'origine de leur endommagement et de leur rupture sous sollicitations thermomécaniques.

La microcellule CGI, développée au Centre de Géologie de l'Ingénieur depuis une dizaine d'années, comprend un système de génération et de contrôle de la pression permettant d'imposer sur les petites faces de la lame épaisse (échantillon d'argilite de dimensions 50×40×5 mm) une contrainte pouvant varier de 0 à 40 MPa (*Figure 2.19b*), un système de génération et de contrôle de la température et de l'humidité, un système d'observation et de prise de vue à l'échelle de l'échantillon tout entier et à l'échelle des éléments de sa texture, un système de mesure des déplacements axiaux de la plaque coulissante d'une précision de 1/50 mm et un système de traitement et d'analyse automatique d'images. L'échantillon étudié provient du forage dans l'Est du bassin de Paris. Il est issu d'un tronçon de carotte extrait à 480,7 m de profondeur au milieu de la formation du Callovo-Oxfordien. Les principales caractéristiques physiques et minéralogiques de l'échantillon sont résumées dans le *Tableau 2.3*.

Les chargements de l'échantillon, l'application de la contrainte axiale et de la température, s'effectuent selon des lois incrémentales afin d'éviter la rupture précoce due à une éventuelle microfissuration qui pourrait être développée au cours du prélèvement de la carotte ou de la préparation de la lame.

Echantillon	Densité humide	Teneur en eau pondérale	Porosité	Observations	
				Œil nu	Loupe binoculaire
Lame épaisse taillée dans le plan de litage et polie	2,37	7,2%	17%	Structure générale isotrope	Texture constituée par des fragments de minéraux ou de roche englobée dans une matrice argileuse

Tableau 2.3 : Caractéristiques physiques et minéralogiques de l'échantillon, (Wright *et al.* 2000 ; [102])

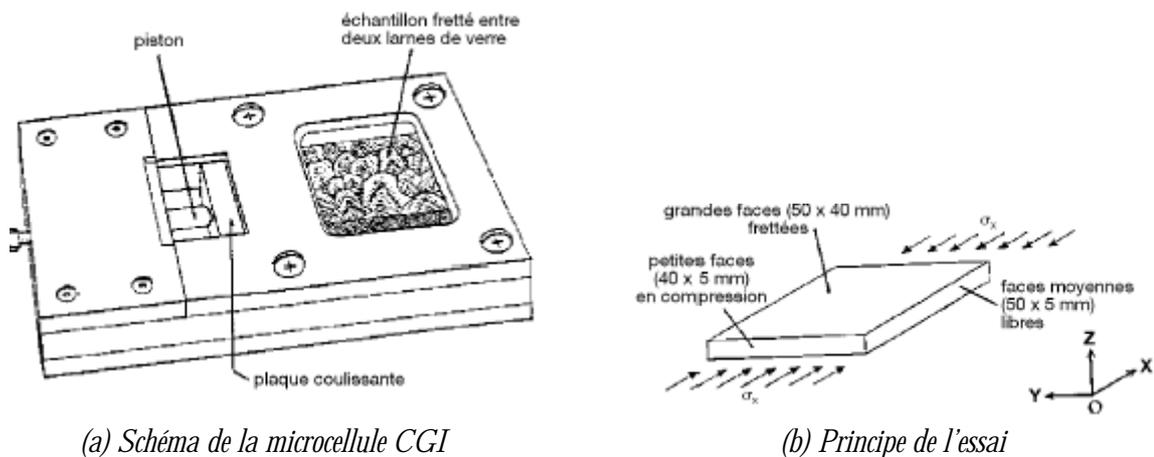


Figure 2.19 : Schéma de la microcellule CGI et principe de l'essai, (Wright *et al.* 2000 ; [102])

La *Figure 2.20* décrit les chargements auxquels une lame épaisse d'argilite a été soumise et la déformation axiale induite, le degré d'humidité relative ayant été maintenu tout au long de l'essai à une valeur supérieure à 90%. Entre le début de l'essai et le palier de contrainte de 12 MPa, la température est de 40°C, l'évolution de la déformation axiale est proportionnelle à l'augmentation de la contrainte. La déformation axiale atteint 0,44% au début de ce palier puis se stabilise les 4 jours suivants. On augmente ensuite la température de 5°C par jour jusqu'au palier 80°C. On mesure alors à nouveau un déplacement de la plaque coulissante. Au début du palier de température de 80°C, la déformation axiale de la lame atteint 0,76% puis se stabilise pendant 5 jours.

La rupture de l'échantillon survient après 43 jours d'essai alors que la contrainte de compression axiale est maintenue constante depuis 25 jours et la température depuis 10 jours. On fait correspondre arbitrairement le point de rupture à 1% de la déformation axiale (*Figure 2.20*), au raccourcissement final (supérieur à 2%) mesuré après la rupture étant en partie dû au mouvement relatif des morceaux de lame épaisse rompue (*Figure 2.21b* et c). Les fissures macroscopiques sont compatibles avec le champ de contraintes imposé et la cinématique de déformation possible.

La *Figure 2.21b* permet d'observer sur une grande face de la lame rompue : une fissure de traction qui est parallèle à la contrainte principale de compression ; un système de fissures de cisaillement dans un coin de la lame épaisse qui est dû aux concentrations de contraintes et une fissure de cisaillement. A la fin de l'essai, on remarque que cette dernière est oblique et qu'elle se développe en partie en suivant les plans de litage. Ceux-là indiquent que l'endommagement de l'échantillon d'argilite est lié à la texture de l'argilite. Il est localisé autour des hétérogénéités de plus grande taille.

Les deux fissures principales sont dues, en particulier, à la croissance de microfissures initiées chacune par les hétérogénéités constituées par deux grands bioclastes pyritisés altérés. Ces fissures se développent ainsi sous l'effet couplé de la contrainte de compression et du développement de l'altération de la pyrite. Notons enfin que l'augmentation et le maintien de température (*Figure 2.20*), conditions d'essais, ont eu pour effet d'accélérer l'altération de la pyrite et de la rendre irréversible par des processus d'oxydation.

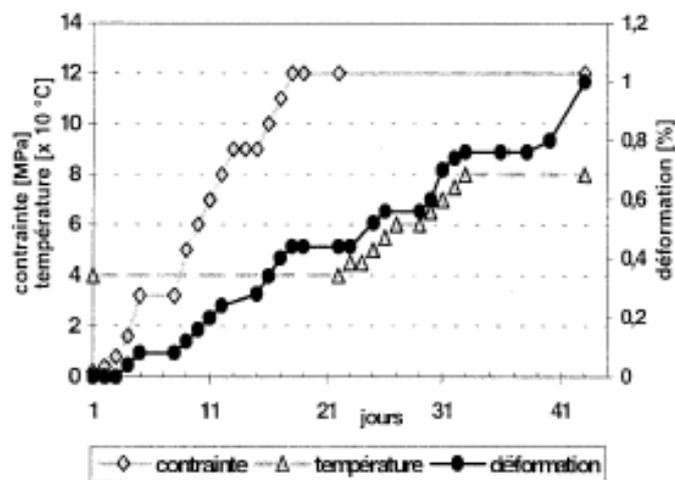


Figure 2.20 : Evolutions des chargements et de la déformation axiale de l'échantillon en fonction du temps, (Wright et al. 2000 ; [102])

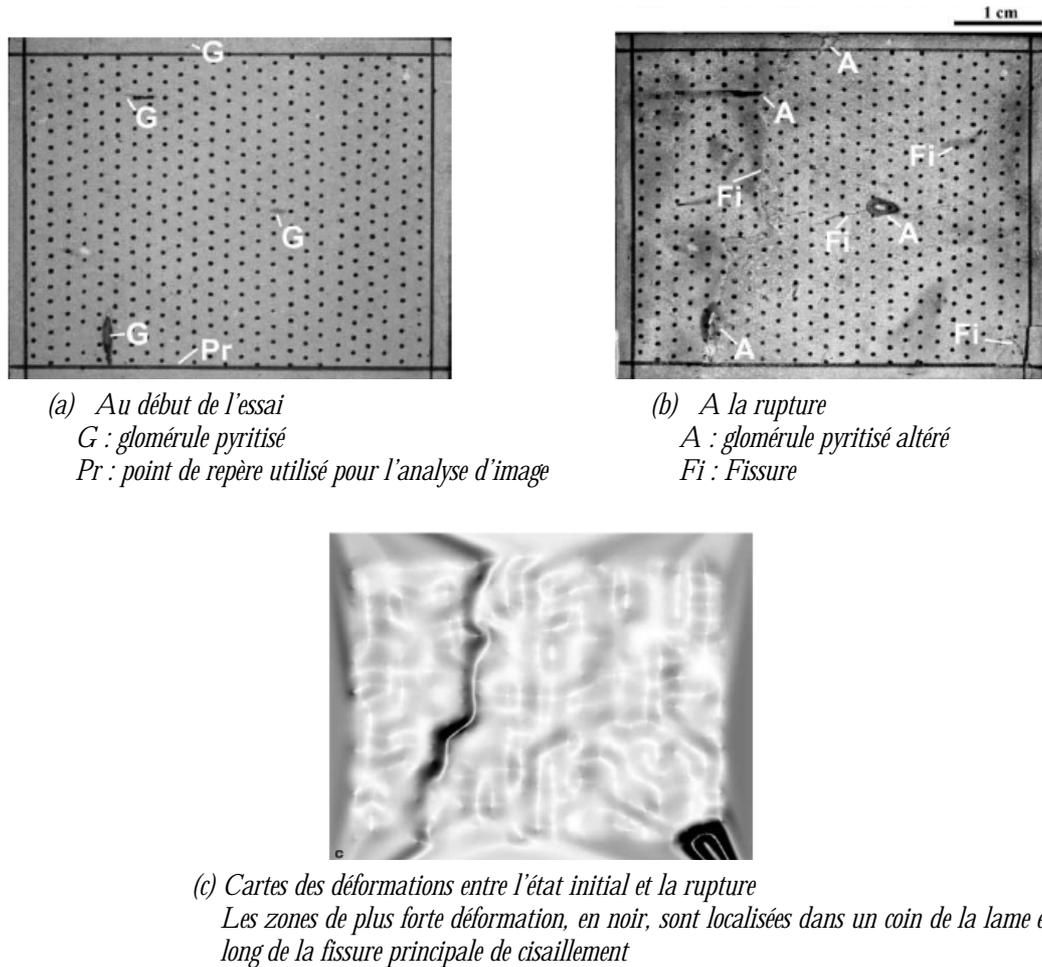


Figure 2.21 : Macrophotographies de la lame d'argilite, (Wright et al. 2000 ; [102])

Gasc-Barbier et al. (2004 ; [50]) ont étudié le comportement mécanique différencié de la roche argileuse de Bure (argilite de l'Est). A cet effet, ils ont réalisé des essais de fluage multi-paliers à court terme à température ambiante et à $T=80^{\circ}\text{C}$. Ces essais ont été réalisés sur un dispositif de compression triaxial. Ce système est doté d'une cellule triaxiale de fluage triaxial pour des échantillons cylindriques de 36 mm de diamètre et de 72 mm de hauteur. La force axiale est appliquée par une armature hydraulique dont la capacité est de 100 kN. La pression de confinement a été fixée à $12 \pm 0,05$ MPa pour tous les essais. Un système de chauffage recouvrant la cellule triaxiale et l'isolant de l'atmosphère extérieure permet de maintenir constante la température voulue pour chaque essai. Les déplacements relatifs entre la couverture supérieure fixe de la cellule et le piston qui applique la charge prescrite à l'extrémité inférieure de l'échantillon ont été mesurés. La Figure 2.22 résume la procédure expérimentale. La Figure 2.23 compare les déformations axiales obtenues à partir de deux échantillons provenant de la même couche (profondeur de 491.7-m). Un échantillon est testé à la température ambiante, l'autre à 80°C . On remarque que l'amplitude des déformations devient plus importante lorsque la température augmente.

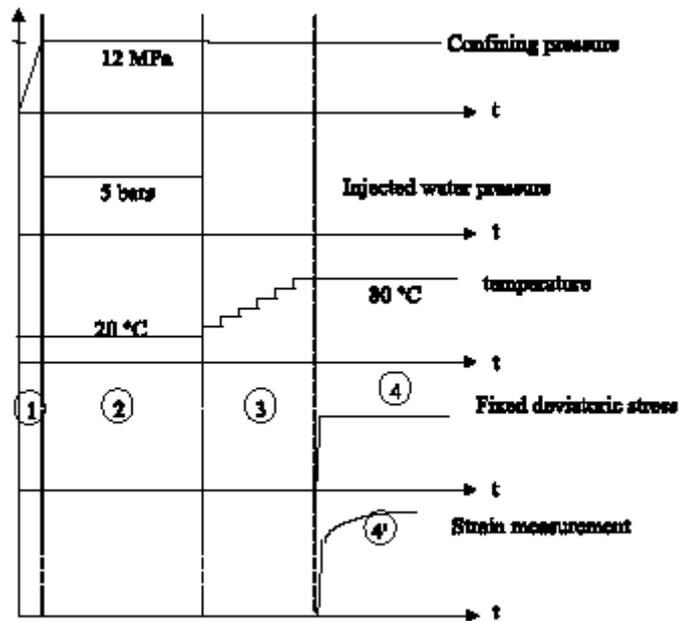


Figure 2.22 : Historique des chargements pour les essais, (Gasc-Barbier et al. 2004 ; [50])

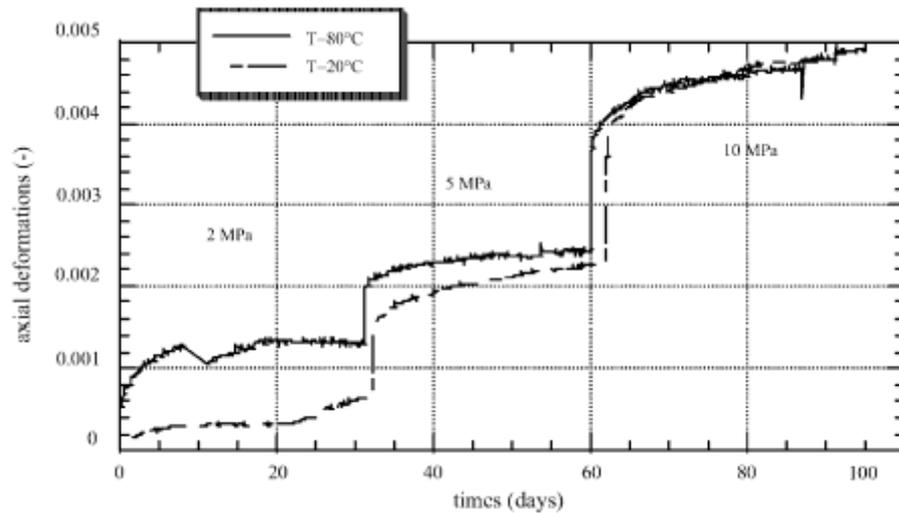


Figure 2.23 : Influence de la température sur le comportement mécanique différé de l'argile, (Gasc-Barbier et al. 2004 ; [50])

2.3.2 Calcul thermomécanique du champ proche

Le travail réalisé par *Gens et Olivella (2001 ; [52])*, sur l'analyse des processus thermo-hydro-mécaniques dans la barrière ouvragée d'une éventuelle installation de stockage dans la formation argileuse de l'Est de la France représente, une nouvelle fois ici, un exemple typique des références sur le calcul du champ proche. Par le moyen de la modélisation numérique, ils ont mis en évidence les effets thermomécaniques associés à la variation de température et à l'évolution de la teneur en eau dans le massif rocheux dans la barrière ouvragée.

On a présenté, dans le paragraphe 2.2.3b, la variation des températures dans le champ proche (*Figure 2.9*) au cours de l'exploitation du stockage. Les phases de simulations numériques ayant été présentées, dans la partie traitant de l'analyse thermique en champ proche (paragraphe 2.2.3b). La loi de comportement de la bentonite, matériau constitutif des barrières ouvragées, est du type thermo-élasto-plastique (*Gens et Olivella 1995 ; [51]*). Les paramètres du revêtement métallique et ceux de la roche hôte ont été choisis en cohérence avec la pression de gonflement de la bentonite. Le module d'Young de la roche hôte est de 3800 MPa .

Comme conditions initiales et aux limites mécaniques, ils ont considéré une contrainte initiale isotrope de 12,5 MPa qui correspond approximativement aux contraintes lithostatiques. Cette contrainte de compression a été imposée comme condition à $r = 9,5$ m. Les conditions hydrauliques correspondent à celles du site de l'Est, situé à une profondeur de 490 m environ. En effet, une valeur de pression de pore initiale de 4,5 MPa a été adoptée dans la roche hôte. La pression initiale de l'eau dans la bentonite est de -23 MPa , cela mène à un degré de saturation initial de 0,71 (*Gens et Olivella 2001 ; [53]*).

La *Figure 2.24* montre l'évolution du degré de saturation en trois points représentatifs de la barrière ouvragée. Les effets de transfert de vapeur à partir de l'intérieur vers l'extérieur de la barrière sont évidents. Il y a un séchage important de la bentonite près du revêtement métallique et le transfert de vapeur fait augmenter le degré de saturation des parties centrales et externes de la barrière. Par conséquent, la barrière proche de la roche s'hydrate rapidement bien qu'elle n'atteigne pas tout à fait la saturation. L'évolution du degré de saturation de la partie centrale de la barrière montre une petite crête qui correspond à un phénomène momentané de condensation et d'évaporation. En effet, lorsque la température diminue, les effets du transfert de vapeur se réduisent également et la barrière près du revêtement voit son degré de saturation augmenter.

Après 150 ans environ, le degré de saturation est pratiquement uniforme à travers la barrière, la température est déjà tout à fait basse et les effets de vapeur ne sont plus significatifs. L'étape finale de saturation de la barrière ouvragée progresse uniformément. C'est une indication claire du contrôle de la perméabilité de la roche et non celle de la bentonite sur le processus de l'hydratation.

En réponse à l'hydratation et à la variation de température dans le champ proche, des contraintes s'y développent. La *Figure 2.25* montre l'évolution des contraintes radiales en fonction du temps en trois points représentatifs de la barrière ouvragée. On remarque une première augmentation liée à l'augmentation de la température, elle demeure presque constante pendant une longue période. Cependant, quand la barrière se rapproche de la saturation, les contraintes ont tendance à augmenter plus rapidement. C'est une conséquence du fait que le modèle constitutif prévoit une augmentation de la contrainte lorsqu'on s'approche de la saturation et que la pression interstitielle augmente (*Gens et Olivella 2001 ; [53]*). Les contraintes effectives atteintes à la fin de l'analyse sont légèrement au-dessous de la valeur de la pression de gonflement. En effet, dans ce cas, la roche n'est pas très raide et ne fournit pas le confinement nécessaire. On peut également noter que les efforts radiaux sont tout à fait uniformes à travers la barrière.

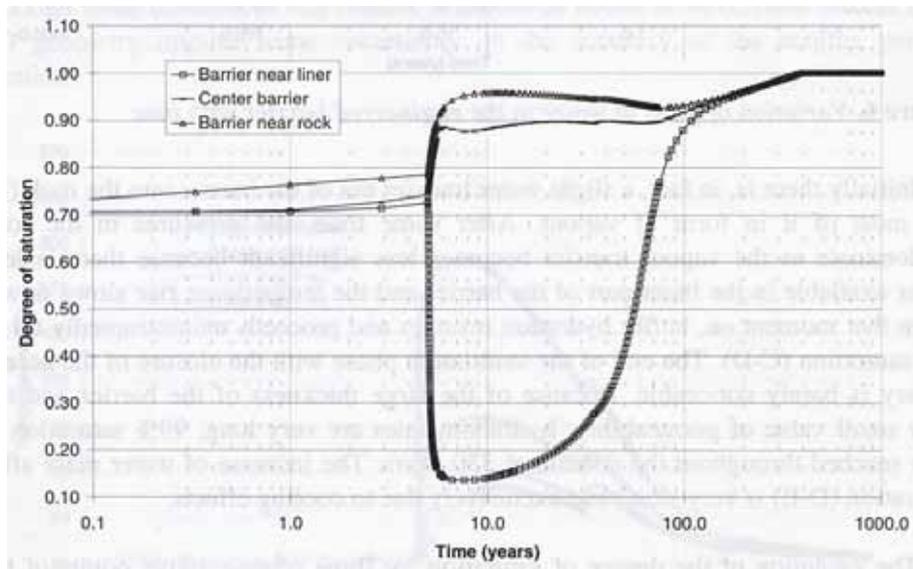


Figure 2.24 : Evolution du degré de saturation en fonction du temps dans le champ proche, (Gens et Olivella 2001 ; [52])

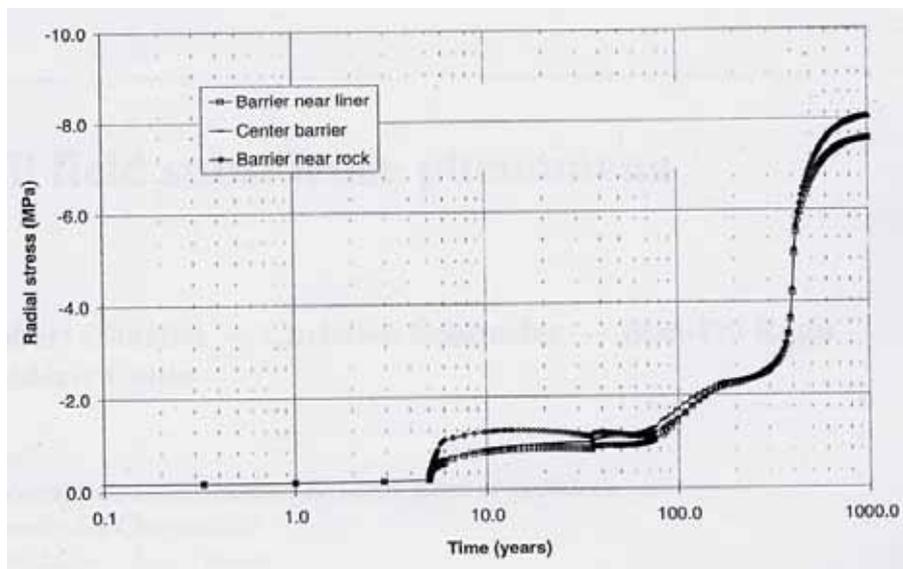


Figure 2.25 : Evolution de la contrainte radiale en fonction du temps dans le champ proche, (Gens et Olivella 2001 ; [52])

2.3.3 Comportement global d'installations de stockage et leurs influences sur la stabilité de la formation hôte

La connaissance du comportement global thermomécanique de la formation hôte et ses influences sur le milieu environnant sont aussi nécessaires que ceux du champ proche pour l'évaluation de la faisabilité d'un projet de stockage souterrain. Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.2.4, l'étude du comportement global de la formation hôte repose sur l'analyse complète de tous les composants de l'installation de stockage et de la couche hôte. L'échelle d'observation est assez étendue : c'est celle de la formation hôte. En terme de calcul par éléments finis, les développements sur ce sujet sont assez récents et sont en cours puisqu'ils nécessitent à la fois de grands moyens de calculs mais surtout une optimisation des techniques de calculs afin d'obtenir des modèles plus simples mais fiables. Néanmoins, des modèles analytiques, basés sur des hypothèses simplificatrices (*Hodgkinson et al. 1980* ; [66] et *Côme 1984* ; [37]), sont disponibles notamment en thermoélasticité.

a) Méthode analytique

La *Figure 2.26* montre un exemple typique où le stockage est grossièrement assimilé à une zone sphérique de rayon R , à la profondeur H dans un milieu élastique continu (*B. Côme*, [34]). Les expressions analytiques des contraintes thermomécaniques, engendrées par un échauffement global ΔT , ont été formulées en symétrie de révolution :

- La zone de stockage est soumise à une contrainte de compression supplémentaire équivalente à :

$$(2.37) \quad \sigma_0 \approx \frac{2 E \alpha \Delta T}{3 (1 - \nu)}$$

E et α sont respectivement le module d'Young et le coefficient de dilatation thermique du massif rocheux.

- La couverture entre le dépôt et la surface est soumise à des contraintes horizontales de traction σ_T qui ne s'annulent pas à la surface du sol (*Figure 2.26*). Leur expression (2.38) permet de constater qu'elles varient donc avec le volume du stockage et avec le cube de sa profondeur moyenne. Pour limiter leur valeur à des niveaux faibles, il faut donc enfouir les déchets profondément avec un échauffement global faible.

$$(2.38) \quad \sigma_T \approx \frac{4 E \alpha (1 + \nu)}{3 (1 - \nu)} \left(\frac{R}{H} \right)^3 \Delta T$$

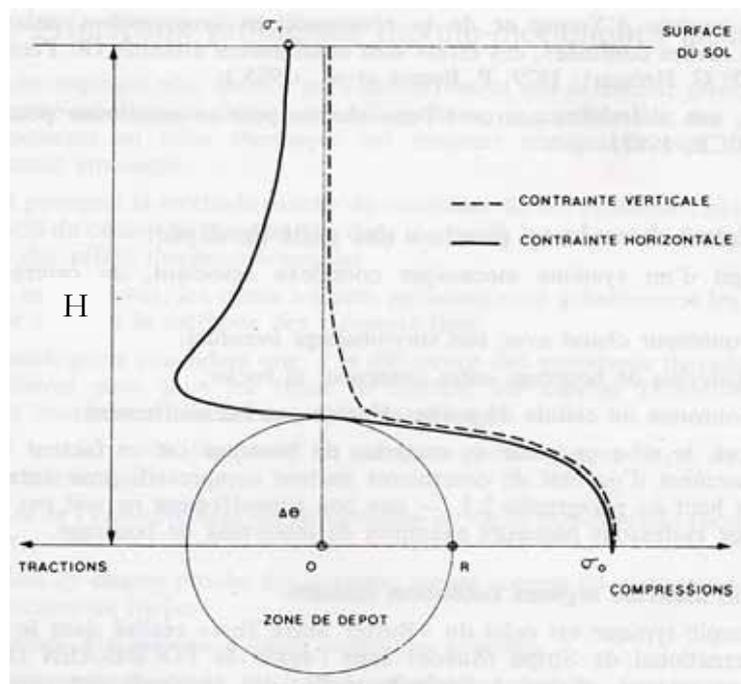


Figure 2.26 : Schéma d'un stockage assimilé globalement en une zone sphérique et distribution des contraintes verticale et horizontale engendrées par un échauffement global ΔT , (Côme 1984 ; [37])

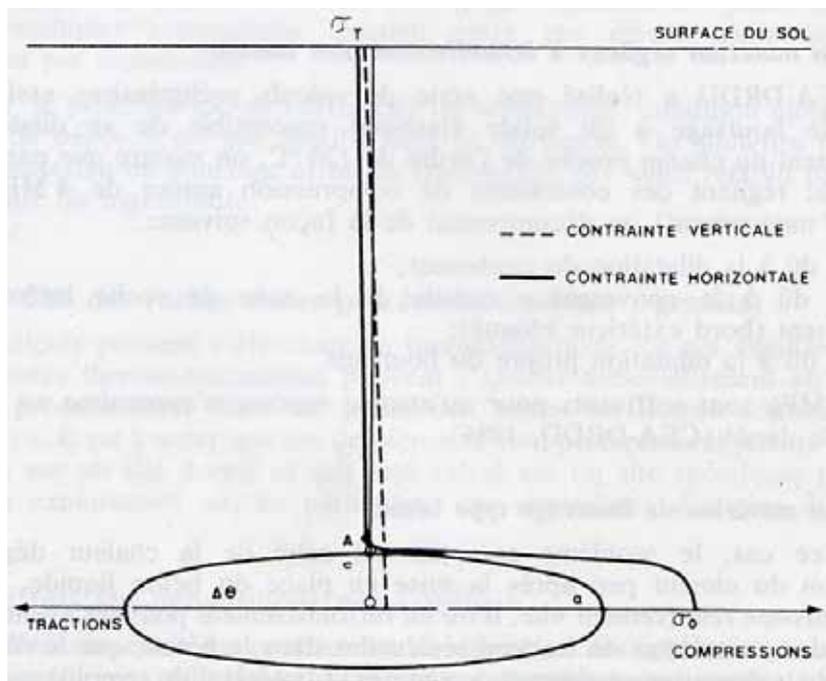


Figure 2.27 : Schéma d'un stockage assimilé globalement en une zone ellipsoïdale et distribution des contraintes verticale et horizontale engendrées par un échauffement global ΔT , (Côme 1984 ; [37])

Dans le cas où l'installation de stockage serait assimilée à une zone ellipsoïdale aplatie dont la demi-longueur du grand axe est a et la demi-longueur du petit axe est c (*Figure 2.27*), il a été montré (*CCE et OCDE-AEN 1984* ; [29]) que la distribution des contraintes thermomécaniques, associées à l'échauffement global ΔT , dépend notablement du rapport c/a :

- Cette fois, on trouve, au centre du stockage, une compression horizontale donnée par :

$$(2.39) \quad \sigma_0 \approx \frac{E \alpha \Delta T}{1 - \nu}$$

- Une contrainte de traction σ_T apparaît à l'extérieur du stockage telle que :

$$(2.40) \quad \sigma_T \approx \frac{4c}{\pi a} \sigma_0 \ll \sigma_0$$

si c/a est petit σ_T est encore inférieur à σ_0 en surface du sol.

Ces deux exemples de modèles analytiques permettent de déduire que la disposition du dépôt de stockage en configuration aplatie (du type ellipsoïdal par exemple) minimise donc les perturbations apportées à la couverture rocheuse constituant la barrière géologique, toutes choses égales par ailleurs. Remarquons, toutefois, que la contribution de ces modèles analytiques se limite essentiellement à des explications qualitatives des problèmes dans l'analyse du comportement global d'une installation de stockage. Le recours aux méthodes numériques est le seul moyen efficace pour quantifier le phénomène relatif à des problèmes spécifiques même si l'élaboration des modèles numériques ainsi que leurs interprétations sont parfois délicates comme on le montrera par la suite.

b) Méthode numérique

Le CEA (*Douat 1985* ; [42]) a analysé le comportement thermomécanique global d'un stockage, dans une formation granitique, à l'aide d'un modèle numérique aux éléments finis (*Figure 2.28*). Il s'agit d'une installation de stockage qui accueille dans une maille compacte des colis âgés de 150 ans ; la densité de puissance thermique est de l'ordre de $0,5 \text{ W/m}^3$. Cela engendre un échauffement global de 100°C environ 500 ans après la mise en place. Les propriétés thermoélastiques de la formation hôte sont : $E = 52 \text{ GPa}$, $\nu = 0,16$ et $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Les résultats de leur calcul ont montré qu'à la surface de la formation hôte, l'échauffement engendre un soulèvement qui atteint 21 cm pour $t = 500$ ans, correspondant au surcroît thermique. Les tractions horizontales ainsi calculées sont de 24 MPa. De tels efforts ne seraient pas supportés par le massif et il devrait se rompre. A noter qu'il s'agit de contraintes totales associant effets thermiques et poids des terres, dans l'hypothèse défavorable où le rapport entre les contraintes horizontales et les contraintes verticales vaut 0,2.

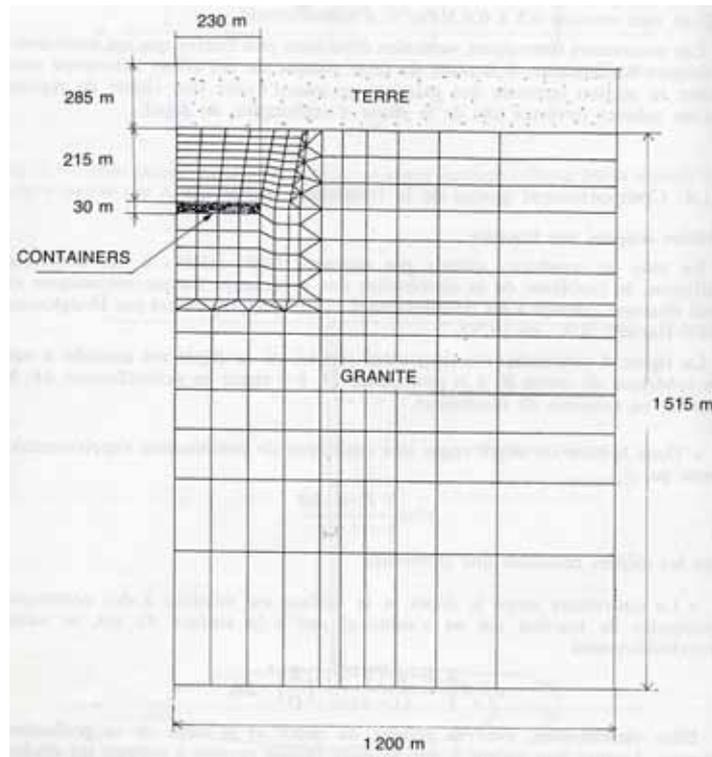


Figure 2.28 : Installation de stockage envisagée et étudiée par le CEA, (Douat 1985 ; [42])

Toutefois, on peut relever des points critiques sur ce modèle numérique (Figure 2.28). Par exemple, les modélisations (géométrie, matériau et comportement mécanique) de la zone de stockage (containers) sont assez approximatives. Ce problème relève des difficultés qu'impose la représentation de l'installation de stockage conformément au réel et dans son ensemble : géométrie complexe, milieu hétérogène et comportement mécanique anisotrope. Pour pouvoir modéliser judicieusement le comportement global d'un stockage, il faut donc des méthodes qui permettent de tenir compte de ces problèmes.

Ainsi, des méthodes mathématiques telles que les théories de l'homogénéisation ont trouvé, à cet effet, un champ d'application dans le domaine de la mécanique. Ces méthodes mathématiques sont caractérisées par leur capacité à décomposer des domaines quelconques et permettent ainsi de découper le problème en sous problèmes plus simples. Cette opération de découpage du problème est appelée séparation d'échelles. A partir de la description à l'échelle microscopique (colis de déchets et alvéole de stockage) du phénomène, elle vise à déterminer le comportement macroscopique équivalent au modèle macroscopique (module de stockage et milieu géologique). Pour le stockage profond, on dispose, à l'heure actuelle, de peu de références en thermomécanique, du moins en thermoélasticité, sur ce thème. De plus, les quelques études existantes sont en cours de développement.

Bourgeat et al. (2004 ; [23]) ont élaboré une méthode basée sur le développement asymptotique afin d'analyser le comportement global d'un stockage, portant sur le transport de polluant. Dans un premier temps, ils ont élaboré un modèle mathématique décrivant le comportement global d'un site de stockage de déchets radioactifs à partir du comportement donné des modules. Ensuite, ils se sont intéressés à l'étude théorique du comportement global d'un module à partir de la

description du comportement des galeries et des alvéoles de stockage ; ceci, dans les cas sans endommagement et avec endommagement de la couche hôte au voisinage des galeries.

Pour le passage modules-site, une analyse asymptotique permet d'obtenir le comportement du modèle global à long terme du site (d'ordre 0), $C^0(x,t)$, en supposant que l'on connaisse la production d'un module et que le nombre de modules soit assez important. Le modèle tient compte, aussi, du fait que la couche hôte est fine, par rapport aux dimensions de la zone de stockage entière (*Figure 2.29*), d'ordre ε qui est le rapport entre la largeur d'un module et la largeur de la zone de stockage complète. Pour analyser les perturbations à court terme, ils ont effectué un développement asymptotique d'ordre 1, avec couches limites, de la forme :

$$(2.41) \quad C(x,t) = C_\varepsilon^0(x,t) + \varepsilon \left(\Phi(t) M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) t \right) + C^1\left(x,t, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où Φ est le flux associée à une source, $M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une fonction auxiliaire périodique stationnaire qui prend en compte la variation spatiale du flux autour d'une source prise individuellement, et $C^1\left(x,t, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une combinaison linéaire de $C^0, \nabla C^0$ et de fonctions auxiliaires ne dépendant que de $\frac{x}{\varepsilon}$ qui tiennent compte de la répartition spatiale périodique de l'ensemble des sources. Ainsi, il ont montré que la solution du problème, $C(x,t)$, décrivant le comportement du site tout entier à court terme, peut être décomposée en la combinaison de la solution d'un problème global non stationnaire, $C^0(x,t)$, prenant en compte les conditions aux limites du domaine, et des solutions de problèmes auxiliaires périodiques stationnaires associées à une seule cellule.

Dans une seconde partie, ils se sont intéressés à la modélisation d'un module de stockage en le supposant composé d'un grand nombre de galeries de manutention, avec ses alvéoles (*Figure 2.30a*) ; les galeries de manutention étant de plus reliées par une galerie de travaux. Un petit paramètre ε , représentant dans ce cas l'inverse du nombre de galeries de manutention (*Figure 2.30b*). Ils supposent que l'endommagement éventuel se traduit par un accroissement des vitesses de convection et du coefficient de diffusion dans le réseau de galeries. L'asymptotique d'ordre 0, avec $C^0(x,t)$ associée au cas « endommagé » fait alors apparaître trois comportements différents selon la valeur du nombre de Péclet, noté β , dans la direction des galeries :

- Si β est faible, on retrouve un modèle global de transport avec diffusion-convection où les galeries n'ont pas de contribution particulière.
- Si β vaut la valeur critique 1, il y a couplage entre le transport diffusif-convectif dans les galeries et celui extérieur aux galeries.
- Si β est supérieur à cette valeur critique, le modèle global tient uniquement compte de ce qui se passe dans les galeries.

Néanmoins, la partie numérique associée à cette expansion asymptotique est en cours de développement. On ne dispose pas, pour l'instant, de résultats auxquels on pourrait se référer sur ce travail.

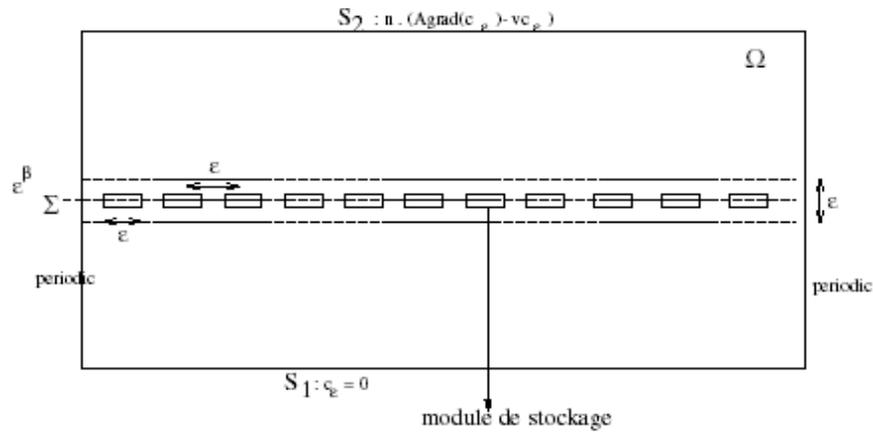


Figure 2.29 : Schéma d'une éventuelle zone de stockage, (Bougeat et al. 2004 ; [23])

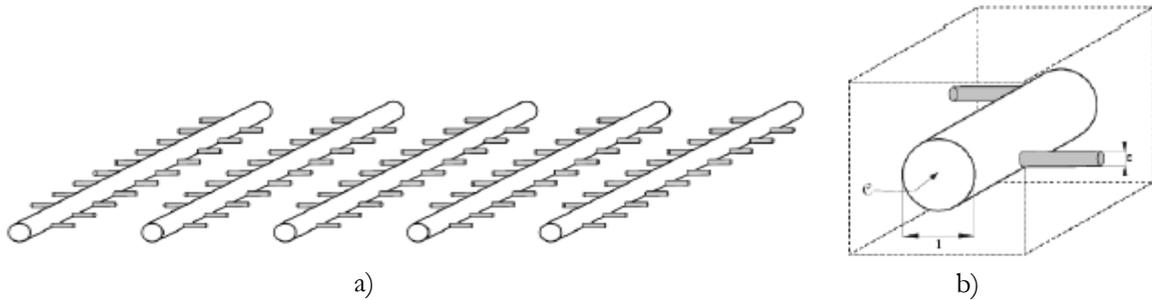


Figure 2.30 : a) Une partie d'un module d'un site de stockage, avec 5 rangées d'alvéoles de conteneurs réparties autour des galeries de manutention
 b) Cellule de périodique Y comprenant une partie « galerie endommagée » $S =] - 1/2; 1/2[X C$ et un groupe d'alvéoles de conteneurs P^ε

2.3.4 Conclusions

Ce paragraphe a été consacré à la présentation des principaux problèmes thermomécaniques liés au stockage souterrain de déchets radioactifs. Une revue assez complète des travaux portant sur les effets de la température sur le comportement mécanique des roches argileuses a été réalisée. L'échauffement peut dégrader les caractéristiques mécaniques des roches argileuses. Ses effets pourraient se manifester aussi sur le comportement à long terme de ces matériaux. Il convient donc de prévoir l'amplitude des effets thermomécaniques que pourraient engendrer la température sur une éventuelle installation de stockage. Des analyses thermomécaniques du champ proche des déchets et de la zone de stockage sont donc nécessaires. Des exemples références de méthodes analytiques et numériques sur ces thèmes ont été présentés et analysés. L'approche numérique utilisant des codes de calculs reste la méthode plus performante.

2.4 Synthèse et conclusions

La sûreté d'une éventuelle installation de stockage repose sur la stabilité de la formation hôte laquelle, sous l'effet du creusement de réseaux de galeries souterraines, pourrait être perturbée. De plus, les déchets de haute activité, confinés dans ces galeries, continuent d'émettre de la chaleur pendant une longue période suivant leur enfouissement. Le transfert de cette chaleur dans le stockage modifiera la distribution de température dans la couche hôte et engendrera, par conséquent, des effets thermomécaniques qui pourraient affecter l'intégrité mécanique de la zone de stockage. Toutes ces situations devront donc être maîtrisées ; il convient donc de faire le bilan de l'état des connaissances sur les aspects thermomécaniques des roches liées au stockage profond.

On a rappelé au cours de ce chapitre que le transfert thermique dans les roches s'opère généralement par la conduction. Ce mode de transfert de la chaleur est régi par la loi de Fourier. L'équation de la chaleur décrit, de manière générale, les échanges thermiques dans un massif. Pour déterminer la distribution des températures pour un cas particulier, il faut résoudre l'équation de la chaleur avec des conditions initiales et aux limites données. La position du problème est décrite en fonction des phénomènes que l'on veut étudier. En régime permanent, la distribution des températures n'est fonction que de la variable spatiale, la solution de l'équation de la chaleur prend ainsi une forme analytique plus simple. Toutefois, les solutions analytiques ne suffisent pas pour la résolution de l'équation de chaleur. Dans la plupart des cas, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques dont les plus connues sont : la transformation de Laplace, la méthode de séparation des variables et la méthode des puits et source.

D'après les notions de base de la thermoélasticité, un solide élastique dilatable, sans liaison, soumise à un échauffement ou un refroidissement uniforme subit respectivement une dilatation ou une contractance. Des contraintes d'origines thermiques apparaîtront lorsque le solide n'est plus libre de toute liaison et/ou la variation de température n'est plus uniforme.

Pour un projet de stockage profond, il est important de définir la charge thermique admissible. Elle dépend et de l'emprise de la chaleur sur le massif (le rapport quantité de chaleur libérée par le colis de déchets et le volume de terrain) et du choix du concept de stockage. La définition de la charge thermique admissible a pour but de limiter les effets thermomécaniques à des valeurs compatibles à résistance mécanique des barrières ouvragées (champ proche des déchets) mais aussi celle de la formation hôte. La température maximale dans le champ proche des déchets est limitée à 100°C. Pour répondre à cette norme, il est nécessaire de faire l'analyse thermique du champ proche. Les modèles analytiques permettent de faire une étude paramétrique simplifiée. Toutefois, l'analyse par les codes de calculs numériques permet de contrôler rigoureusement chaque paramètre et de choisir la conception adaptée au critère thermique.

A part l'analyse thermique du champ proche, l'analyse thermique de la zone de stockage est nécessaire. Elle consiste en l'étude du comportement thermique global de l'installation de stockage. Les modèles numériques sont les moyens efficaces pour cet exercice.

Les principaux problèmes thermomécaniques associés au stockage souterrain ont aussi été évoqués. Les principaux résultats des analyses expérimentales des effets de l'augmentation de température sur le comportement mécanique des roches argileuses ont été passés en revue. Puis, les travaux de références sur les calculs thermomécaniques de la stabilité d'installation de stockage profond ont été présentés.

L'analyse thermomécanique du stockage souterrain repose sur deux démarches. La première porte sur le calcul thermomécanique du champ proche et la seconde sur la modélisation du comportement thermomécanique global de l'installation de stockage. En ce qui concerne le calcul du champ proche, de nombreux exemples de références sont disponibles aujourd'hui, tandis

qu'un petit nombre de travaux a été consacré à l'analyse du comportement thermomécanique global. Les recherches en cours, sur le calcul du comportement thermomécanique global d'un stockage, sont au stade d'exploration. Ainsi, dans le chapitre suivant, nous proposerons une approche, basée sur la technique d'homogénéisation, pour optimiser la modélisation numérique du comportement thermomécanique d'installation de stockage à grande échelle.

Chapitre 3

Modélisations numériques discrètes du comportement thermoélastique d'ouvrages souterrains de stockage

Avant-propos : *Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement thermoélastique d'ouvrages souterrains de stockage en milieux géologiques profonds. L'excavation des ouvrages ainsi que toutes les activités liées à la construction de l'installation de stockage peuvent perturber la stabilité mécanique de la couche hôte. En outre, les déchets exothermiques confinés dans ces galeries dégagent des puissances thermiques non négligeables et malgré le système « conteneur - barrière ouvragée - chemisage », ce dégagement de chaleur induit une évolution des déplacements et de la distribution des contraintes dans le massif, notamment au voisinage des galeries. Le but de cette étude est d'évaluer ces évolutions afin d'assurer la bonne tenue mécanique de l'ouvrage au cours de son exploitation. Dans cette optique, la première étape consiste en la modélisation numérique du comportement thermoélastique d'une alvéole. Les effets instantanés de l'excavation et du chargement thermique de l'ouvrage seront traités. En seconde partie, le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries sera abordé sur la base de l'analyse des interactions entre deux galeries adjacentes. Les influences de la dimension de l'entraxe et du chargement thermique seront analysées. En troisième et dernière partie, on montrera les défauts et les limites des modélisations discrètes dans l'évaluation de la sûreté du stockage global.*

3.1 Introduction

Une installation de stockage souterrain en milieux géologiques profonds est caractérisée par des galeries principales d'accès, de manutention et des alvéoles de stockage. La Figure 3.1 présente la coupe d'une alvéole au concept Tunnel Court (T.C) en cours d'exploitation. Elle montre les différentes composantes du système d'alvéole ainsi que leurs dimensions caractéristiques. Les comparaisons des galeries d'accès et de manutention ainsi que l'alvéole à l'échelle humaine (Figure 3.1) montrent l'étendue d'un tel chantier. Le but de chapitre est de quantifier et d'analyser les effets du creusement des galeries ainsi que du dégagement thermique des colis de déchets lors de leur emplacement dans les alvéoles de stockage. Pour ce faire, on distinguera trois parties principales : la première consiste en l'étude du comportement thermoélastique d'une alvéole de stockage ; la seconde partie est consacrée à l'étude du comportement thermoélastique d'un réseau de galeries de stockage et la dernière partie est dédiée à l'étude du comportement élastique 3D d'un réseau de galeries de stockage souterrain.

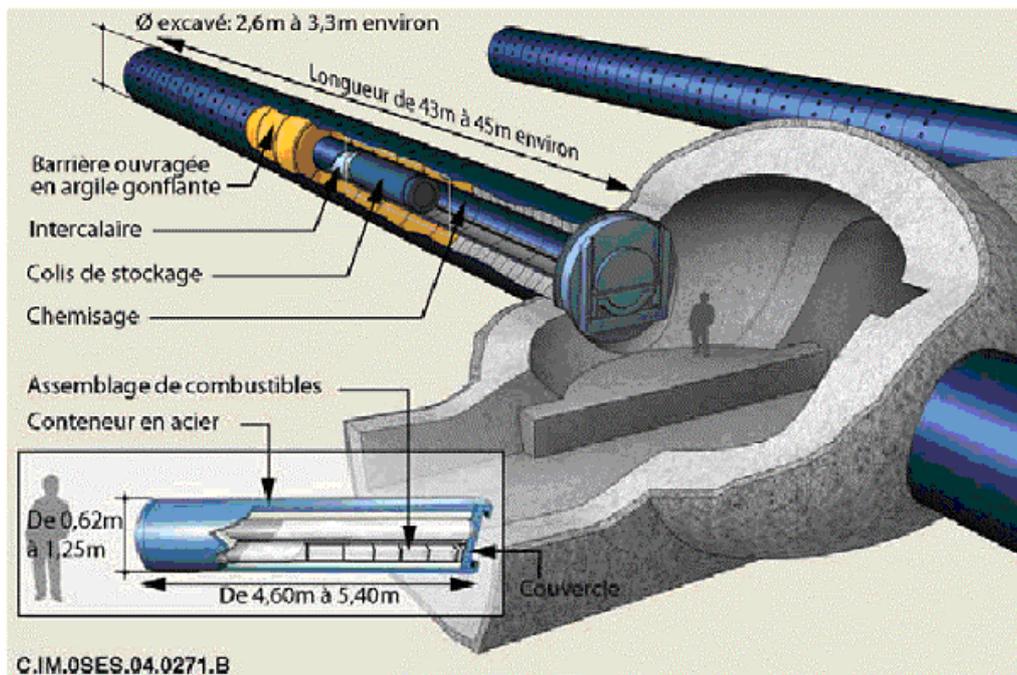


Figure 3.1 : Coupe d'une alvéole au concept T.C en cours d'exploitation (Andra.fr 2005 ; [105])

3.2 Comportement thermoélastique d'une alvéole sous chargement thermique

L'idée est de partir du calcul d'une alvéole et de l'étendre à celui d'un module de stockage. Ces calculs sont certes rudimentaires mais nécessaires pour comprendre le comportement d'une installation de stockage. Pour cela, on modélisera le comportement d'une alvéole au concept Tunnel Court (T.C). La Figure 3.2 présente le schéma et les dimensions caractéristiques d'une alvéole T.C. Deux sections caractéristiques ont été étudiées. Ces sections sont définies, respectivement, par la coupe transversale AA de la section courante de l'alvéole de stockage et par la coupe longitudinale BB de l'ouvrage.

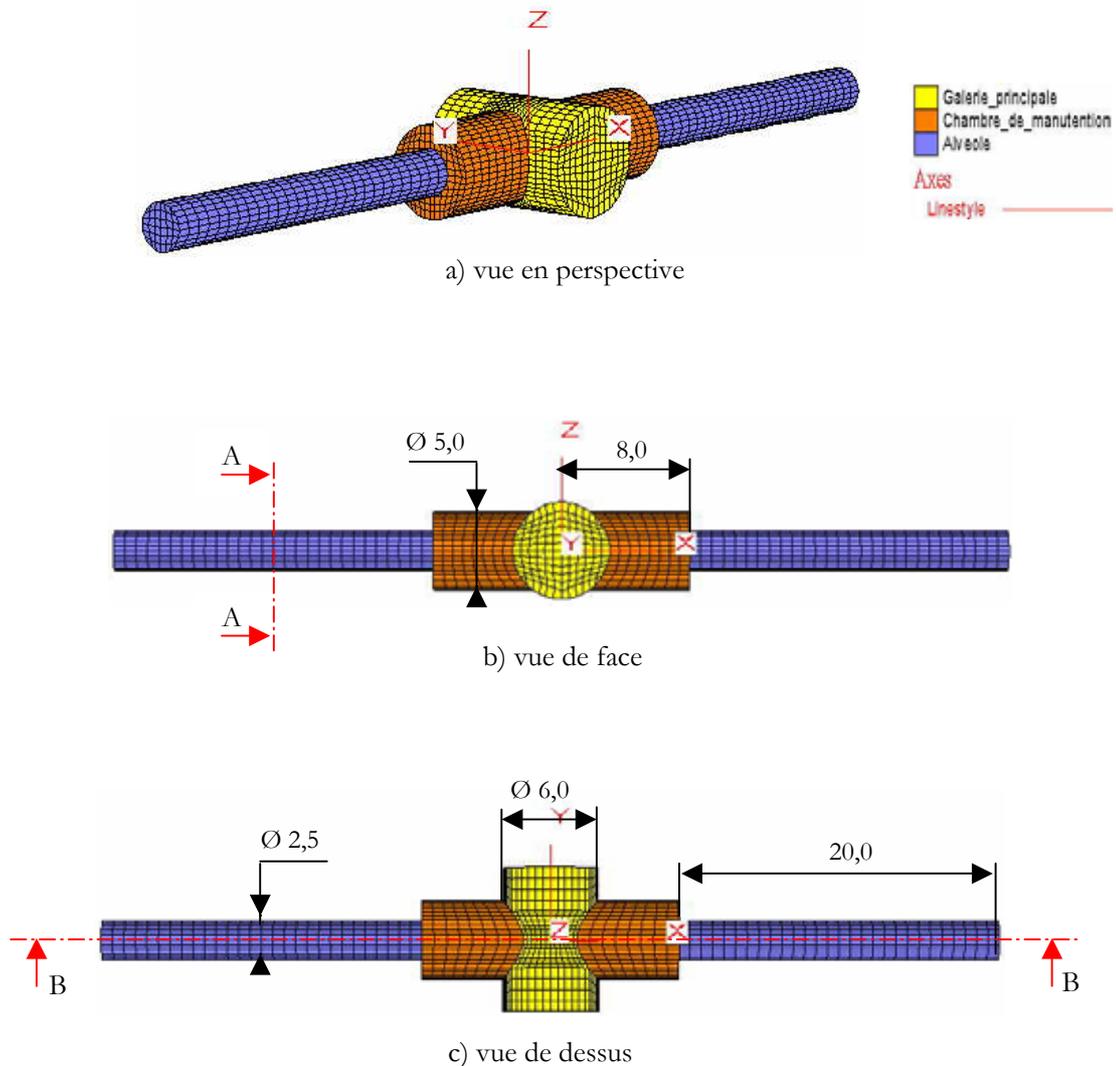


Figure 3.2 : Modèle d'un ouvrage (T.C.) et description des sections caractéristiques AA et BB (Cotation en m)

3.2.1 Modélisation numérique 2D du comportement thermoélastique d'une alvéole en section courante

On peut réaliser la modélisation de la section courante de l'alvéole en déformations planes puisque le diamètre de la galerie est suffisamment petit par rapport à sa longueur. Considérons donc la section AA (Figure 3.2) située dans un plan suffisamment éloigné des extrémités de l'alvéole de stockage.

3.2.1.1 Définition du modèle et des conditions aux limites

Le modèle de référence est une galerie de section cylindrique représentative d'un stockage de déchets. Elle est située à une profondeur moyenne de 500 m, dans la couche d'argilite du Callovo-Oxfordien (Figure 3.3). Pour des raisons de symétrie de la géométrie et du chargement, on modélise seulement le quart du modèle. La largeur du modèle est fixée à 5 fois le diamètre de la galerie afin de respecter les recommandations concernant le maillage des ouvrages en géotechnique préconisées par *Mestat et al. (2000 ; [76])*. La Figure 3.4 présente ainsi le maillage et les conditions aux limites du modèle. On suppose que l'état initial des contraintes géostatiques est homogène isotrope et égal à $\sigma_{\infty} = 12$ MPa. On applique ainsi une contrainte verticale $\sigma_v = \sigma_{\infty}$ et une contrainte horizontale $\sigma_H = \sigma_v$ aux limites du modèle. Les déplacements normaux aux plans de symétrie sont bloqués (Figure 3.4). Le logiciel Cast3M est utilisé pour la modélisation numérique 2D du comportement thermoélastique d'une alvéole en section courante. Le modèle est discrétisé en éléments de type quadrangle bidimensionnel à 8 nœuds massif (QUA8). Un maillage radial progressif est utilisé afin d'avoir des éléments beaucoup plus fins à proximité de la paroi de la galerie et des éléments plus gros aux environs des bords du modèle. Le modèle discrétisé est constitué de 1200 éléments et de 3741 nœuds. Les propriétés thermoélastiques du matériau constitutif sont données dans le Tableau 3.1.

Avant l'exploitation de l'alvéole de stockage, la distribution initiale des températures dans la roche hôte est supposée uniforme. Toutefois, lorsque des colis de déchets sont déposés dans la galerie, sa paroi va être soumise à un échauffement dû au dégagement thermique des déchets. Cela va entraîner une variation des températures dans le massif notamment au voisinage de la galerie et induire des contraintes d'origine thermique. La résolution du problème comporte ainsi deux étapes de chargement. La première est consécutive à l'excavation de la galerie. On considère qu'elle s'effectue instantanément. La seconde étape de chargement consiste à engendrer un champ de température. On adopte une distribution de température axisymétrique de la forme $T(r)$ dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) ; l'axe z coïncide avec l'axe de la galerie. On suppose aussi que le profil des températures est monotone décroissant.

Module de Young, E [MPa]	3620
Coefficient de Poisson, ν	0,3
Masse volumique, ρ [kg/m ³]	2450
Coefficient de conductivité thermique, k [Wm ⁻¹ °C ⁻¹]	1,89
Coefficient de dilatation thermique, α [°C ⁻¹]	10 ⁻⁵

Tableau 3.1 : Propriétés thermiques et mécaniques de la roche hôte (*Andra 2001 ; [7]*)

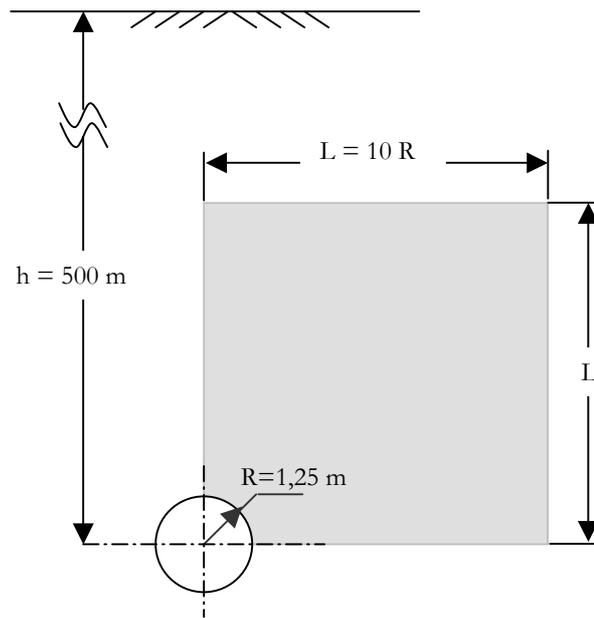


Figure 3.3 : Modèle de référence pour la section courante de l'alvéole

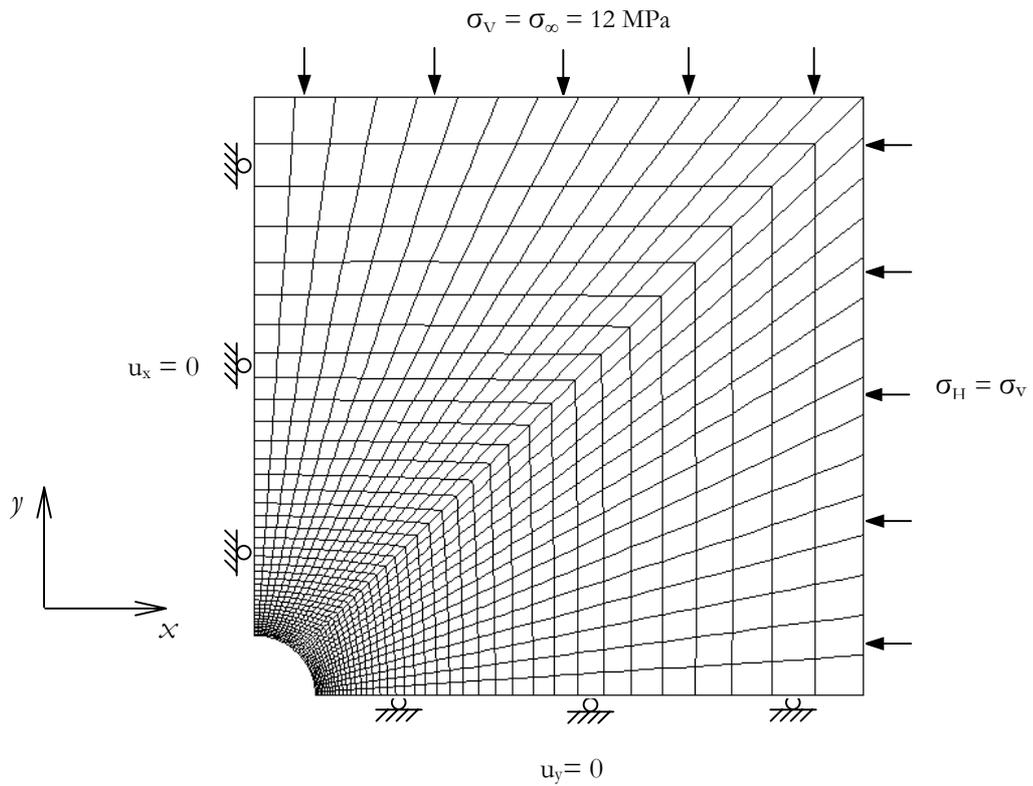


Figure 3.4 : Maillage et conditions aux limites du modèle

Avant de présenter le résultat de la modélisation numérique du comportement thermoélastique (superposition des chargements mécanique et thermique), il est intéressant d'étudier indépendamment les effets de l'excavation de la galerie et les effets de la variation des températures due au chargement thermique de la galerie. Par ailleurs, des solutions analytiques peuvent être établies dans les deux cas.

3.2.1.2 Effets de l'excavation de la galerie

Le comportement d'une galerie circulaire creusée en milieu élastique dont l'état des contraintes initiales est isotrope (σ_∞) est bien connu (Panet 1995 ; [83]). Les solutions analytiques des distributions des contraintes élastiques (σ_r^E , radiale et σ_θ^E orthoradiale) et du déplacement radial u_r^E en coordonnées cylindriques, à l'état de déformations planes, s'expriment par :

$$(3.1) \quad \sigma_r^E = \left\{ 1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right\} \sigma_\infty$$

$$(3.2) \quad \sigma_\theta^E = \left\{ 1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right\} \sigma_\infty$$

$$(3.3) \quad u_r^E = - \frac{1 + \nu}{E} \frac{R^2}{r} \sigma_\infty$$

Où R est le rayon de la galerie, r est la distance radiale du point considéré et ν et E sont respectivement le coefficient de poisson et le module de Young de la roche.

La Figure 3.5 montre la comparaison entre les solutions analytiques et numériques des distributions des contraintes radiales et orthoradiales, dues à l'excavation de la galerie, suivant la distance radiale à la paroi de la galerie. Leurs valeurs sont normalisées par la contrainte initiale (σ_∞). On remarque que le résultat de la modélisation numérique correspond parfaitement aux solutions analytiques. La contrainte radiale (σ_r^E) est nulle sur la paroi de la galerie avant de croître pour atteindre la valeur des contraintes initiales vers les frontières du modèle. La contrainte orthoradiale (σ_θ^E) vaut deux fois la valeur des contraintes initiales sur la paroi de la galerie puis elle décroît pour atteindre la valeur des contraintes initiales vers les limites du modèle. En ce qui concerne les déplacements radiaux à proximité de la paroi de la galerie, la Figure 3.6 montre que le résultat de la modélisation numérique correspond à la solution analytique.

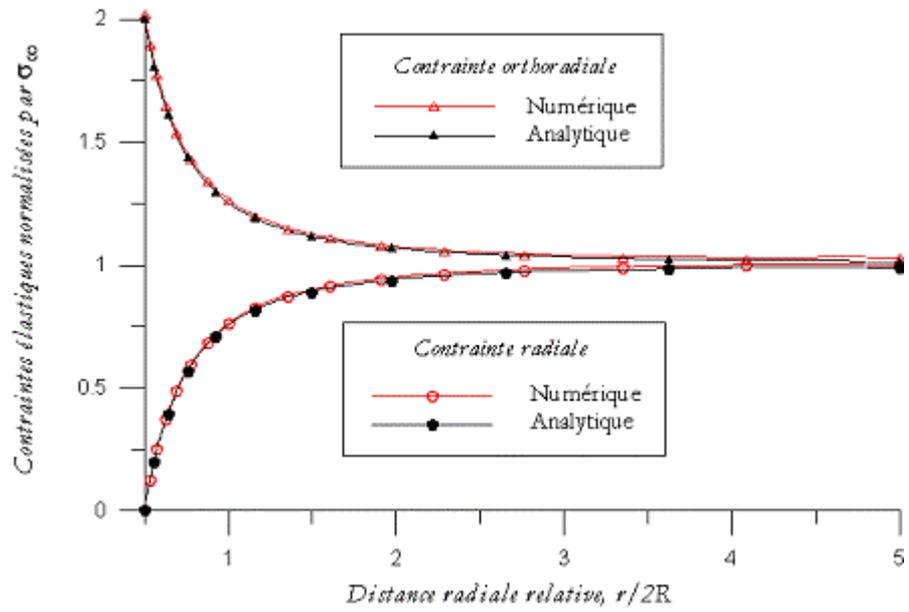


Figure 3.5 : Distributions des contraintes dues au creusement de la galerie suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

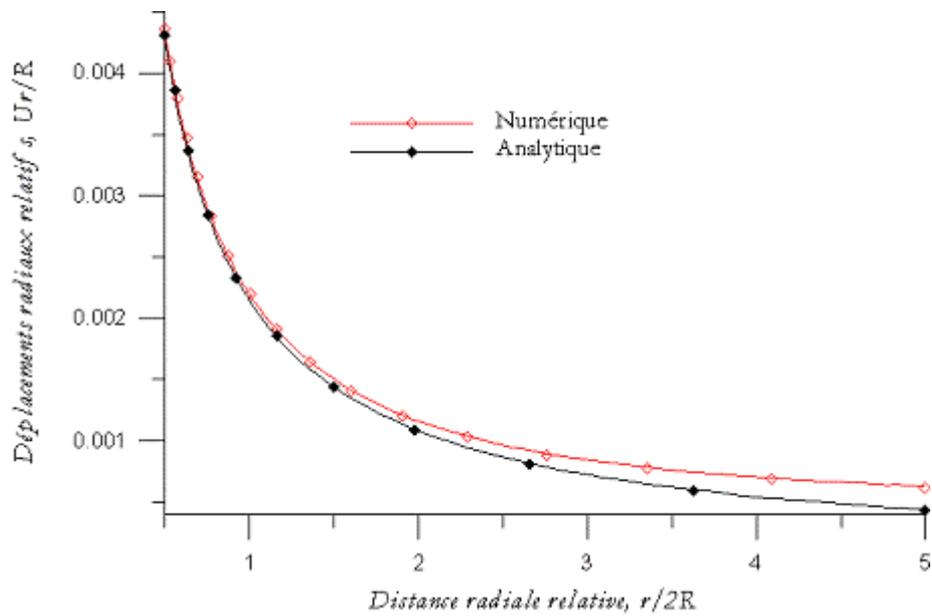


Figure 3.6 : Profil des déplacements radiaux dus au creusement de la galerie suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

3.2.1.3 Effets de la variation des températures

Pour une cavité cylindrique, de rayon R , dans un milieu infini soumis à une variation des températures, on dispose des relations analytiques permettant de calculer les variations de contraintes et le déplacement d'origine thermique en coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour un état de déformations planes (Bérest et al. 1988 ; [18]). Les composantes des contraintes engendrées par la variation des températures, suivant les directions radiale (σ_r^T), orthoradiale (σ_θ^T) et longitudinale (σ_z^T) ainsi que le déplacement radial (u_r^T) s'expriment par :

$$(3.4) \quad \sigma_r^T = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_R^r x T(x) dx$$

$$(3.5) \quad \sigma_\theta^T = +\frac{E\alpha}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{r^2} \int_R^r x T(x) dx - T(x) \right\}$$

$$(3.6) \quad \sigma_z^T = -\frac{E\alpha T(r)}{1-\nu}$$

$$(3.7) \quad u_r^T = -\frac{1+\nu}{E} r \sigma_r^T$$

Où E , α et ν sont respectivement le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et le coefficient de Poisson du massif rocheux tandis que x , R et $T(r)$ représentent respectivement la variable d'intégration sur la distance radiale r , le rayon de la galerie et le profil de variation des températures suivant la section de l'ouvrage.

Afin de pouvoir calculer explicitement les intégrales intervenant dans les expressions de σ_r^T et σ_θ^T et de confronter les résultats de la modélisation numérique aux solutions analytiques, on a considéré une répartition de température de la forme suivante :

$$(3.8) \quad T(r) = T_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

avec $T_0 = 100^\circ\text{C}$ la température à la paroi de la galerie

La Figure 3.7 montre la distribution des températures, correspondant au profil (3.8), modélisée avec Cast3M. La Figure 3.8 présente, quant à elle, la répartition des températures à proximité de la galerie suivant la distance radiale à la paroi de la galerie. Avec la relation (3.8), les solutions explicites des équations (3.4) et (3.5) s'écrivent finalement comme suit :

$$(3.9) \quad \sigma_r^T = -\frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \text{Log} \left(\frac{r}{R} \right)$$

$$(3.10) \quad \sigma_\theta^T = +\frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[\text{Log} \left(\frac{r}{R} \right) - 1 \right]$$

La Figure 3.9 présente la courbe de comparaison des distributions des contraintes, engendrées par la variation de thermique, calculées par la modélisation numérique et celles obtenues avec les solutions analytiques. Les valeurs des contraintes ont été normalisées par la quantité

$$-\frac{E\alpha T_0}{1-\nu} = -5,17 \text{ MPa}.$$

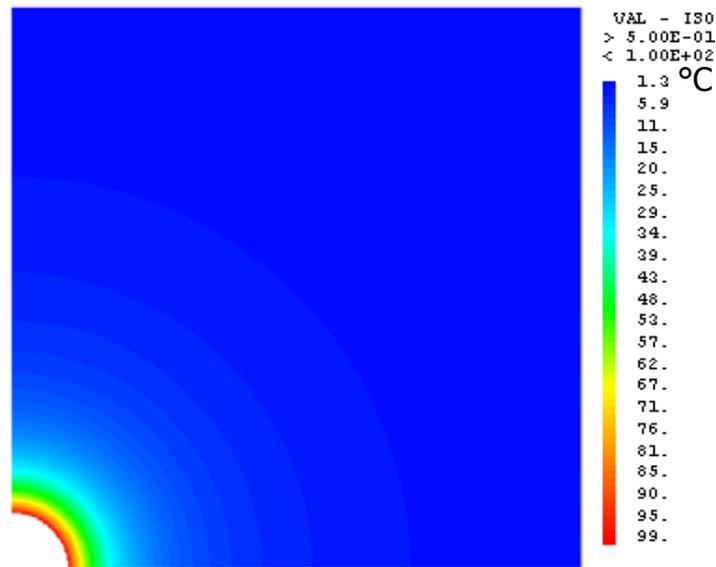


Figure 3.7 : Distribution des températures en degré Celcius

On remarque sur la Figure 3.9 que les résultats de la modélisation numérique correspondent parfaitement aux solutions analytiques. La contrainte radiale (σ_r^T) est nulle sur la paroi de la galerie avant de croître pour atteindre son maximum puis elle décroît vers les limites du modèle. On constate aussi que la contrainte radiale d'origine thermique est égale à la contrainte radiale ($\sigma_r^T = \sigma_\theta^T$) lorsqu'elle (σ_r^T) atteint son maximum. La contrainte orthoradiale (σ_θ^T) est égale à la contrainte longitudinale et vaut : $-\frac{E\alpha}{1-\nu}T(R)$ sur la paroi de la galerie (en effet, $T(R) = T_0$).

Puis, elle décroît avant de changer de signe. La contrainte longitudinale (σ_z^T) est égale à la somme de σ_r^T et σ_θ^T et est proportionnelle à la température en tout point. On remarque que σ_z^T a la valeur absolue la plus élevée jusqu'à ce que σ_θ^T change de signe par rapport à σ_r^T .

La Figure 3.10 présente les profils des déplacements radiaux analytiques et numériques dus à la variation des températures. Leurs valeurs ont été normalisées par le rayon de la galerie. On remarque que la courbe numérique correspond assez bien à la courbe analytique jusqu'à la distance radiale à la section équivalente au rayon de la galerie puis elle s'écarte progressivement de la solution analytique vers les frontières du modèle. Cela s'explique par le fait que le modèle numérique est de dimensions finies (la largeur et la hauteur du modèle sont 5 fois le diamètre de la galerie) tandis que les solutions analytiques sont valables pour un milieu infini. Il est possible de réduire cet écart en augmentant la taille du modèle de telle sorte que les frontières du modèle soient suffisamment éloignées de la galerie (Figure 3.11).

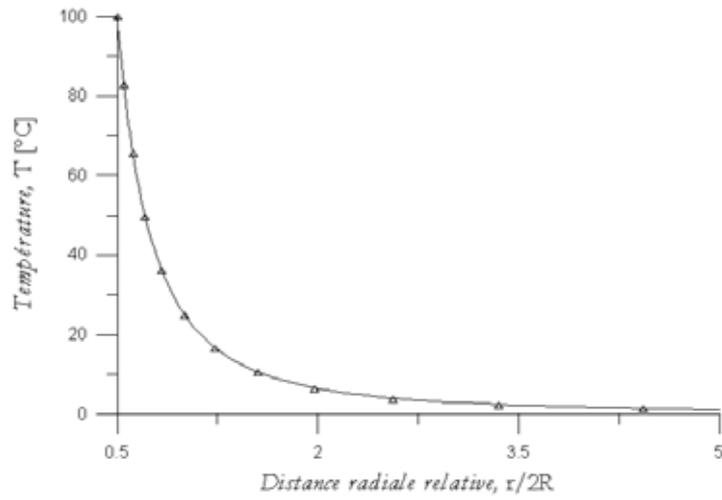


Figure 3.8 : Profil des températures suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

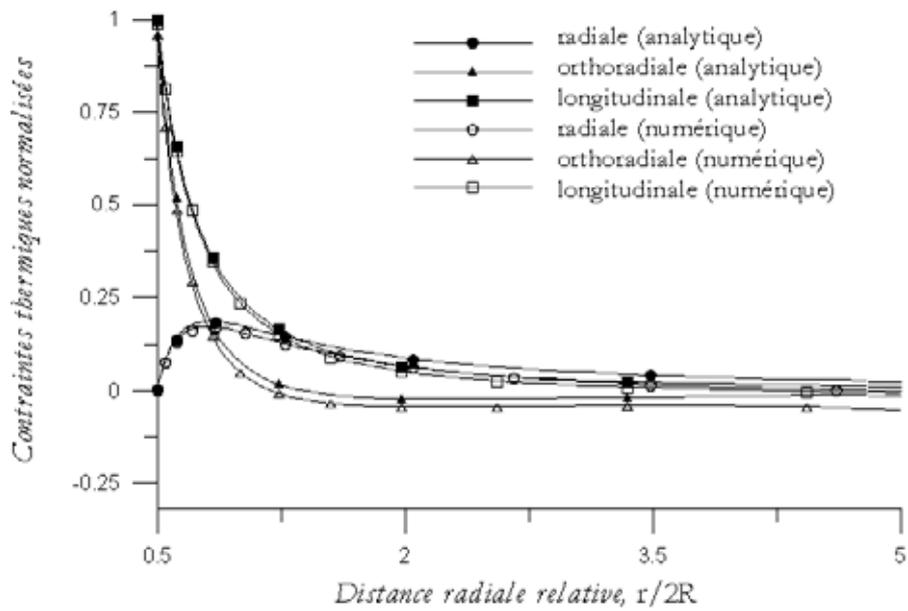


Figure 3.9 : Distributions des contraintes d'origine thermique suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

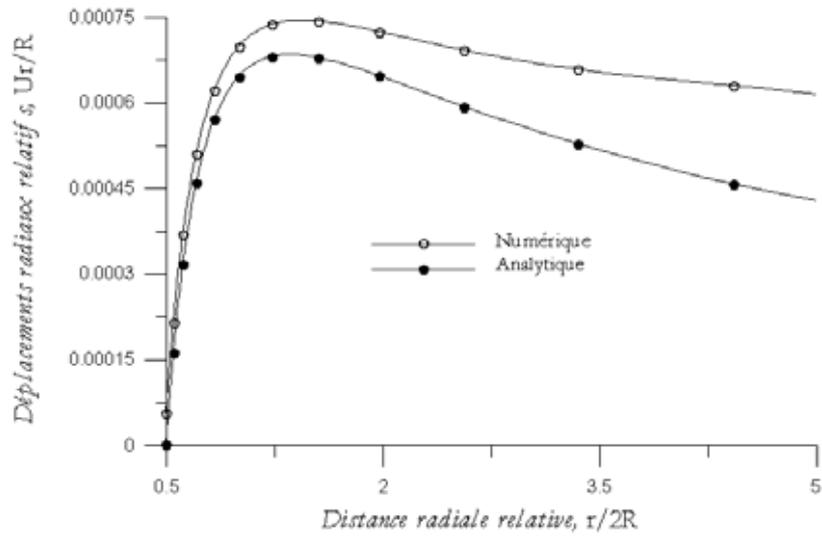


Figure 3.10 : Déplacements radiaux d'origine thermique suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

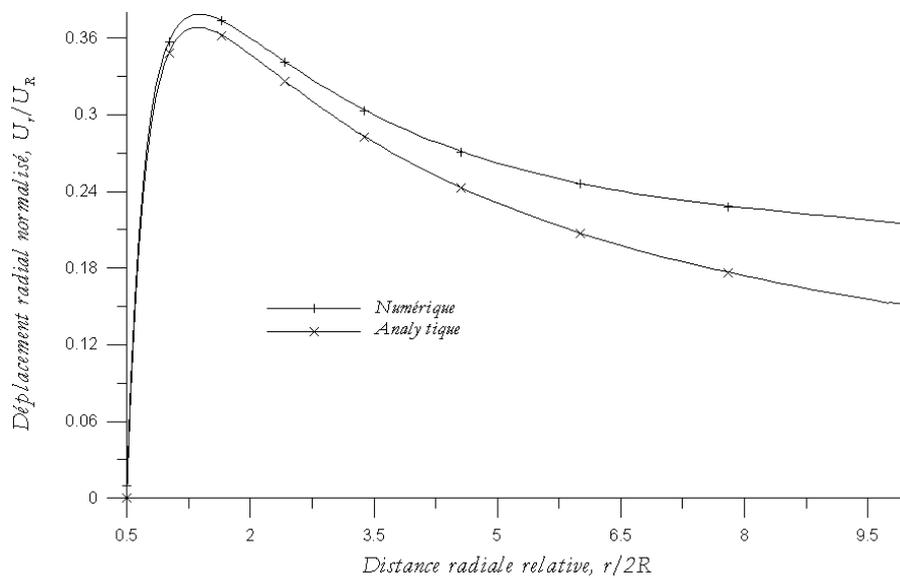


Figure 3.11 : Déplacements radiaux d'origine thermique suivant la distance radiale à la paroi de la galerie pour $L=20R$

3.2.1.4 Comportement thermoélastique d'une galerie sous chargement thermique

Les effets du creusement de l'ouvrage et de la variation des températures ont été abordés distinctement. Toutefois, la stabilité de l'ouvrage au cours de son exploitation est déterminée par la superposition des deux effets. On peut établir les expressions, en coordonnées cylindriques, des distributions des contraintes et du déplacement radial thermoélastiques à proximité d'une galerie profonde soumise à un chargement thermique en superposant les solutions analytiques de la section 3.1.2 et celles de la section 3.1.3 de sorte que :

$$(3.11) \quad \sigma_r = \sigma_r^E + \sigma_r^T$$

$$(3.12) \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^E + \sigma_\theta^T$$

$$(3.13) \quad u_r = u_r^E + u_r^T$$

Les Figure 3.12 et Figure 3.13 présentent respectivement les distributions des contraintes radiales et des contraintes radiales thermoélastiques, à proximité d'une galerie sous chargement thermique, comparées à celles d'une galerie sans chargement thermique. Les valeurs des contraintes ont été normalisées par la valeur des contraintes initiale (σ_∞). En ce qui concerne la contrainte radiale, la variation des températures a engendré un surcroît de contrainte de compression croissant depuis la paroi de la galerie puis décroissant vers les limites du modèle. Quant à la contrainte orthoradiale, la variation des températures a provoqué une augmentation des contraintes de compression sur la paroi de la galerie et à son voisinage et une légère décompression vers les frontières du modèle.

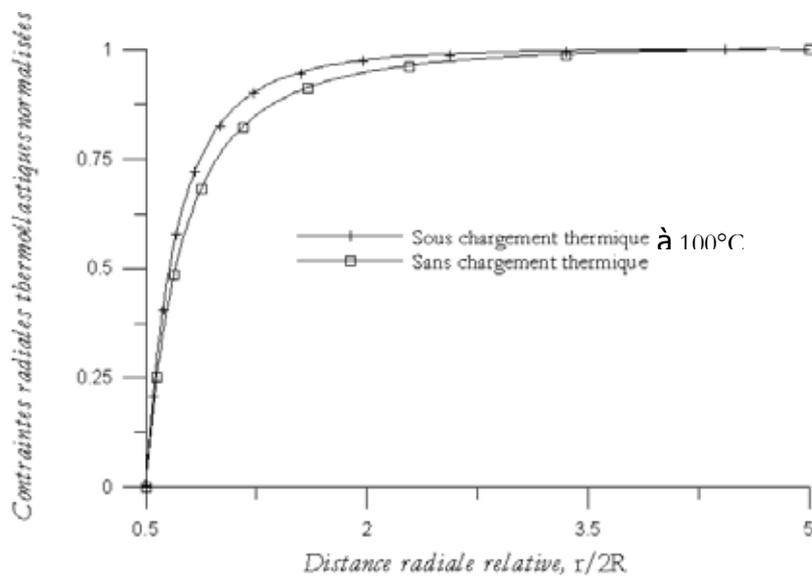


Figure 3.12 : Contraintes radiales thermoélastiques suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

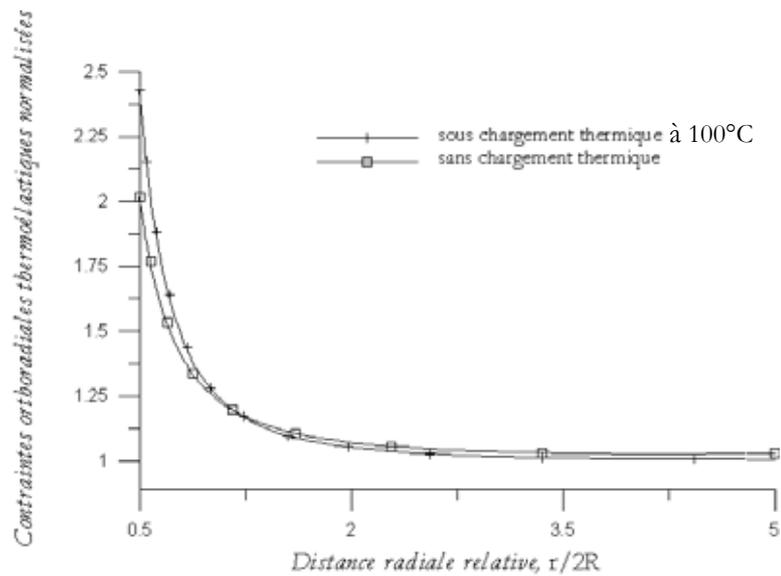


Figure 3.13 : Contraintes orthoradiales thermoélastiques suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

La Figure 3.14 compare les cartes des contraintes équivalentes (correspondant aux contraintes de Von Mises) au champ des contraintes du modèle à proximité de la galerie. On observe que le chargement thermique a engendré un surcroît en contraintes de 4 MPa (en valeur absolue) sur la paroi de la galerie puisque qu'à l'issue de l'excavation la valeur maximale de la contrainte de Von Mises est de 21 MPa sur la paroi de la galerie tandis qu'elle est égale à 25 MPa après chargement thermique de la galerie (Figure 3.14).

La Figure 3.15 présente les déplacements radiaux thermoélastiques suivant la distance radiale à la section. Les déplacements radiaux thermoélastiques sont orientés vers l'intérieur de la galerie. On remarque que lorsque les déplacements radiaux sont égaux sur la paroi de la galerie qu'elle soit sous chargement thermique ou pas. Néanmoins, les déplacements radiaux diminuent progressivement vers les frontières du modèle lorsque le chargement thermique est imposé. Cette diminution correspond aux déplacements radiaux d'origine thermique (Figure 3.10).

3.2.1.5 Conclusions

Le comportement thermoélastique d'une alvéole suivant une section courante a été modélisé. La comparaison avec les solutions analytiques a montré une cohérence des résultats notamment pour les contraintes radiales et orthoradiales thermoélastiques suivant la distance radiale à la paroi de la galerie. Toutefois, les déplacements radiaux, d'origine thermique, suivant la distance radiale à la paroi de la galerie, calculés par éléments finis, présentent des écarts progressifs suivant la distance radiale à la paroi de la galerie. Ces écarts sont minimaux à proximité de la paroi de la galerie et ils atteignent leurs valeurs maximales vers les frontières du modèle. Ces écarts sont des effets des conditions aux limites conjugués avec la taille du modèle utilisé pour la modélisation numérique. Pour réduire ces écarts entre les déplacements radiaux thermoélastiques analytiques et numériques à des valeurs admissibles, il convient de fixer les contours du modèle pour que le calcul aux éléments finis ait des dimensions plus grandes.

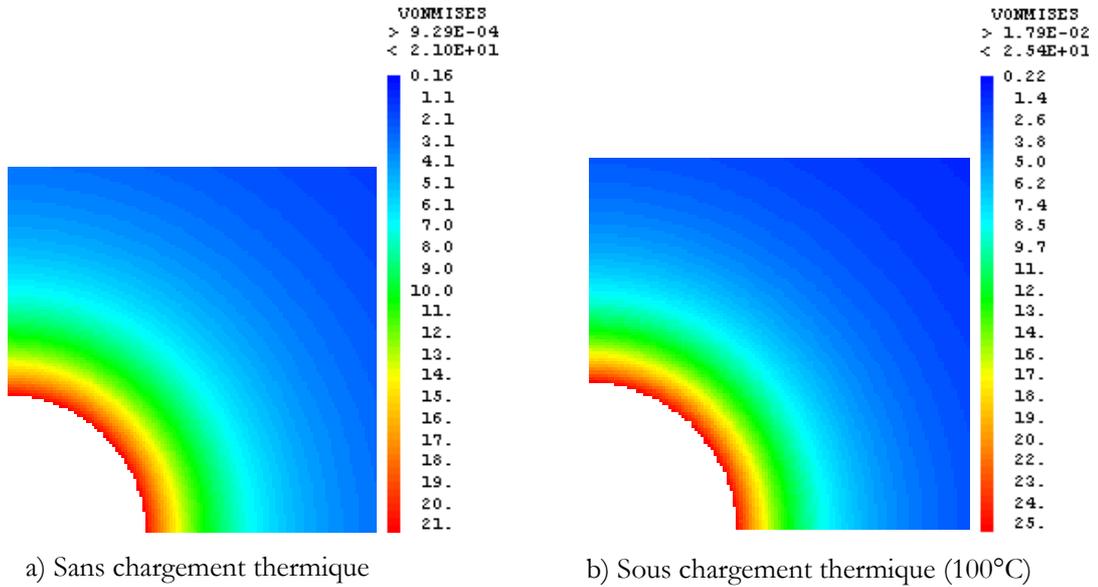


Figure 3.14 : Contraintes équivalentes aux champs des contraintes thermoélastiques au voisinage de la galerie

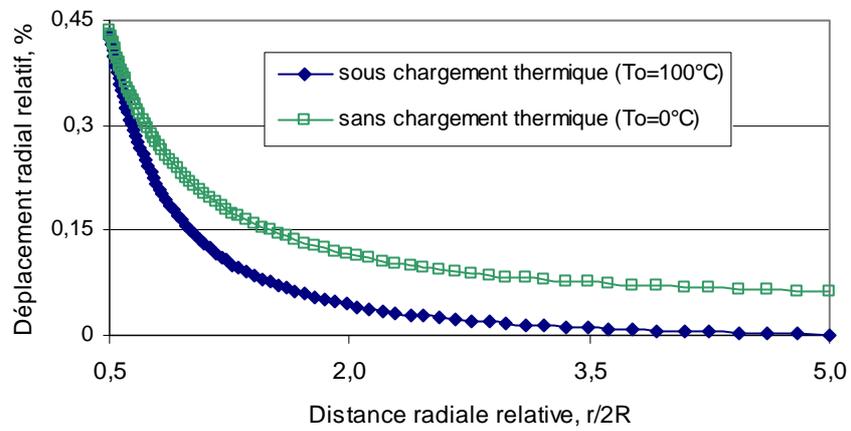


Figure 3.15 : Déplacement radial thermoélastique suivant la distance radiale à la paroi de la galerie

3.2.2 Modélisation numérique 2D du comportement élastique d'une alvéole en section longitudinale

3.2.2.1 Définition du modèle et des conditions aux limites

Le modèle de référence est constitué d'une galerie de géométrie complexe creusée à 500 m de profondeur dans un milieu élastique infini (Figure 3.16). Pour des raisons de symétrie du chargement, de la géométrie et des conditions aux limites, on modélise seulement le quart du modèle. Le maillage et les conditions aux limites du modèle définitif se réduit, ainsi, au système présenté par la Figure 3.17 en déformations planes. La géométrie du modèle, après excavation de l'alvéole, montre des angles vifs aux variations des rayons de l'ouvrage. La présence de ces singularités entraîne des concentrations de contraintes et peut induire des résultats non significatifs. En effet, Les valeurs des contraintes sont, théoriquement, infinies au sommet de ces singularités lorsque le comportement est élastique. Les valeurs des contraintes calculées ne sont pas significatives mais, à faible distance, la précision devient acceptable si le maillage est assez fin.

Cependant, dans la méthode des différences finies, l'existence de ces angles vifs ne suscite aucun problème de résolution numérique. En effet, la plupart des méthodes des différences finies utilisent, exclusivement, une discrétisation du milieu en mailles rectangulaires. Par ailleurs, l'approche adoptée par Itasca, basée sur la méthode de *Wilkins (1964 ; [100])* permet de formuler les équations des différences finies pour des éléments de forme quelconque. On peut donner, par conséquent, n'importe quelle forme aux limites comme on peut aussi faire varier les propriétés d'un élément à l'autre. Elle est donc aussi performante que la méthode des éléments finis sur ce point. Avant de présenter les résultats de la modélisation numérique de la section BB en élasticité, il est nécessaire d'étudier les effets des singularités, notamment des coins, sur la distribution des contraintes. Cela va permettre de définir la marge des valeurs des contraintes significative pour les modèles présentant de telles singularités.

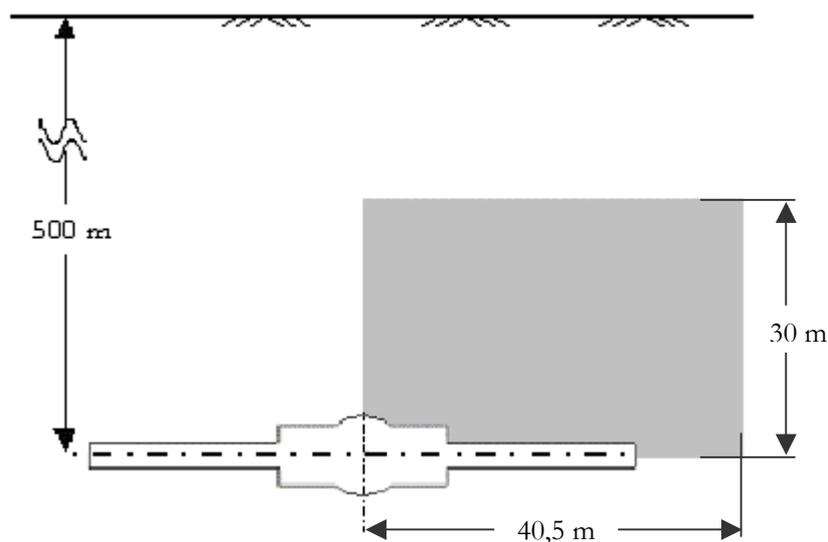


Figure 3.16 : Géométrie de la section longitudinale BB

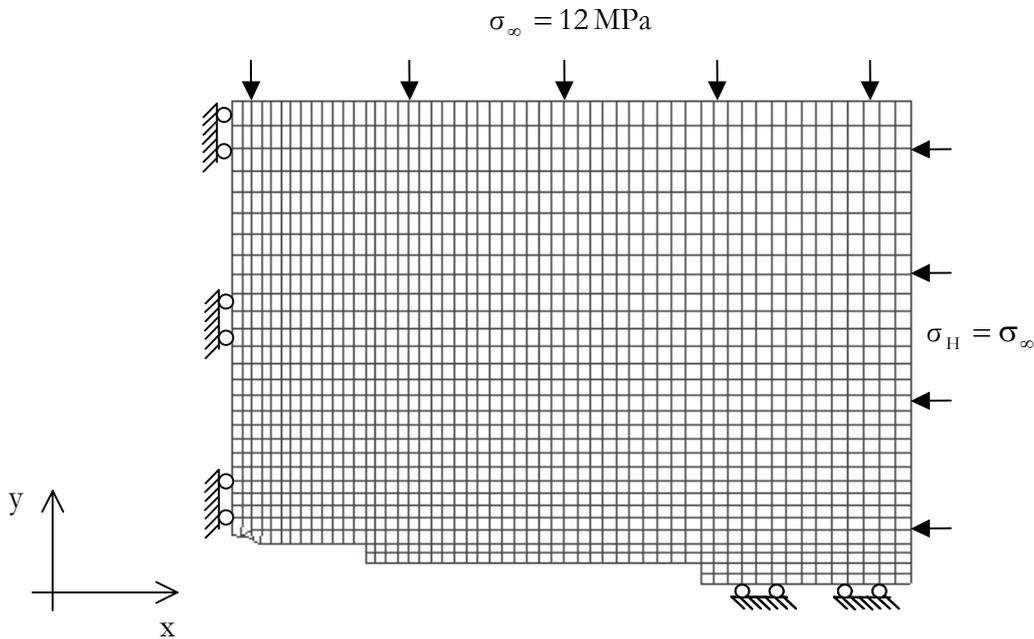


Figure 3.17 : Maillage et conditions aux limites du modèle de la section longitudinale BB

3.2.2.2 Effets des coins sur la distribution des contraintes

Jaeger et Cook (1979 ; [68]) ont étudié l'effet de ces singularités sur la répartition des contraintes. Pour ce faire, ils ont examiné un trou rectangulaire dans un milieu élastique infini sous chargement unidimensionnel, p , incliné d'un angle β par rapport à l'horizontal (Figure 3.18). Les coins du trou sont arrondis tels que présentés à la Figure 3.19. Ils ont proposé une expression analytique permettant de calculer la contrainte tangentielle sur la paroi de ce trou en fonction de la charge p , de son angle d'inclinaison de la charge et des coordonnées angulaires des points considérés, soit :

$$(3.14) \quad \sigma_t = \frac{P}{35(5 + 4 \cos 4\theta)} \{105 - 360 \cos 2\beta \cos 2\theta + 168 \sin 2\beta \sin 2\theta\}$$

Il est possible d'étendre cette expérience à notre étude à titre de vérification de l'ordre de grandeur des contraintes. Pour cela, nous avons considéré un trou rectangulaire dans un milieu élastique infini sous chargement bidimensionnel isotrope incliné d'un angle $\beta = 0$ (Figure 3.20). Les propriétés caractéristiques du matériau constitutif sont résumées au Tableau 3.1. L'expression de la contrainte tangentielle sur la paroi du trou s'exprime dans ce cas par :

$$(3.15) \quad \sigma_t = \frac{6p}{5 + 4 \cos 4\theta}$$

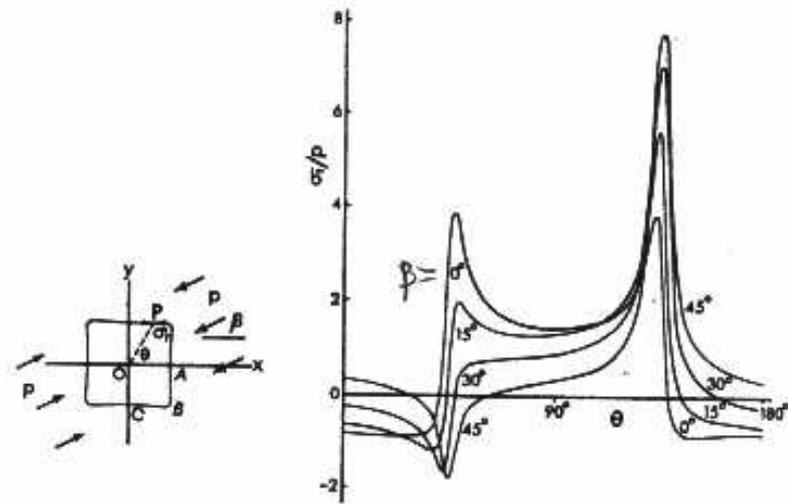


Figure 3.18 : Expérience de Jaeger et Cook (1979 ; [68])

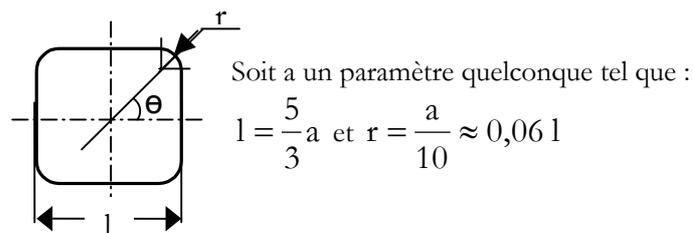


Figure 3.19 : Géométrie et dimensions caractéristiques du trou rectangulaire, d'après Jaeger et Cook (1979 ; [68])

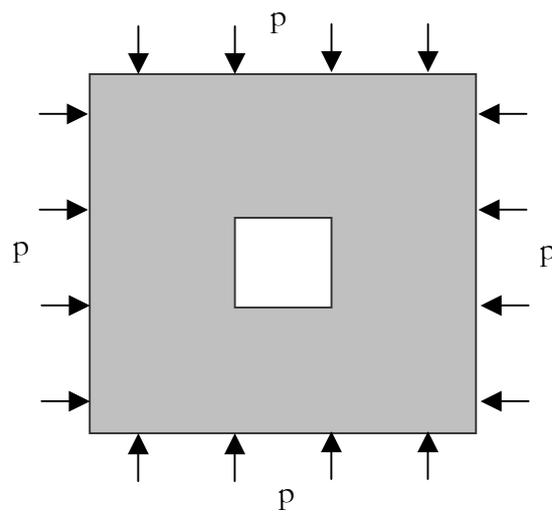


Figure 3.20 : Géométrie et chargement du modèle

Deux cas seront étudiés (Figure 3.21) : le premier concerne un trou rectangulaire à angles vifs et le second d'un trou rectangulaire à angles arrondis selon le critère de *Jaeger et Cook*. Les résultats des deux calculs seront ensuite confrontés à la solution analytique. La Figure 3.22 montre la comparaison des résultats des modélisations à celui du calcul analytique avec la formule théorique. On remarque qu'on peut obtenir d'aussi bons résultats avec le modèle au trou rectangulaire à angles arrondis puisqu'il a donné la même valeur de contrainte (à 45°) que la solution analytique au point singulier. La valeur absolue de la contrainte tangentielle vaut 6 fois la contrainte appliquée aux limites ($p = 12 \text{ MPa}$). Cependant, le modèle aux angles vifs ne donne pas de valeur significative à ce point singulier.

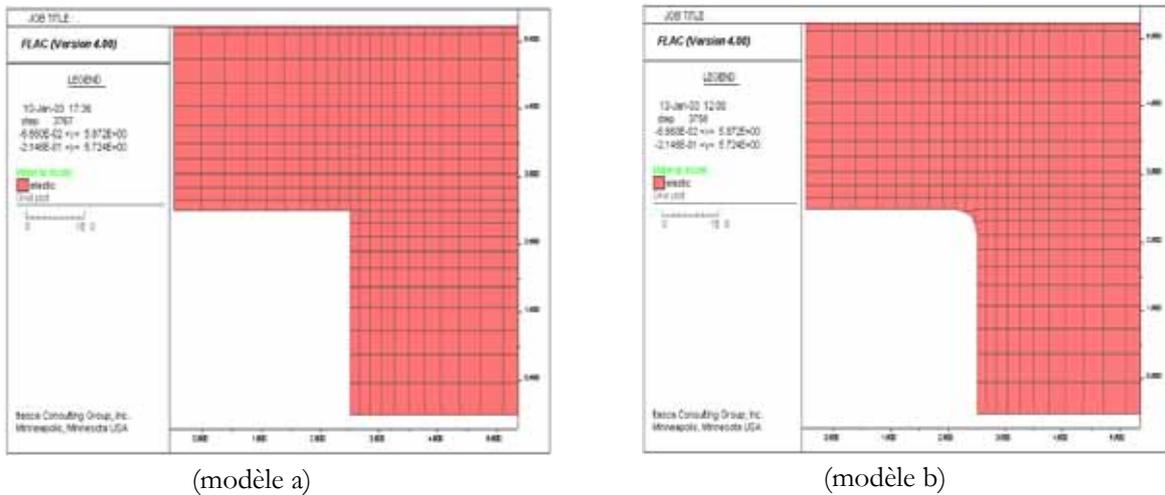


Figure 3.21 : Modélisations d'un trou rectangulaire à angle vif, (modèle a), et d'un trou rectangulaire à angle arrondi selon le critère de *Jaeger et Cook*, (modèle b), zooms aux coins

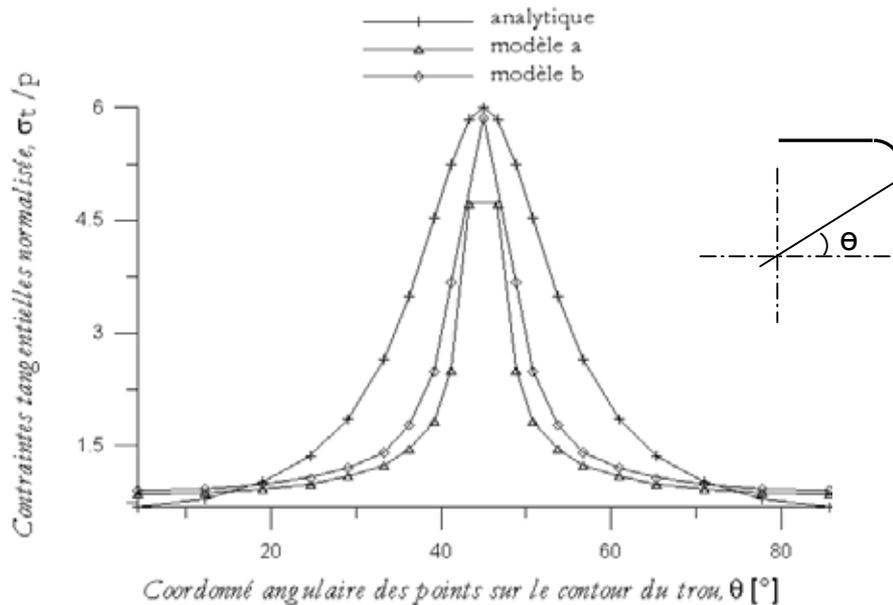


Figure 3.22 : Répartition des contraintes tangentielles normalisées sur la paroi d'une cavité rectangulaire pour un chargement bidimensionnel isotrope dont l'angle d'inclinaison $\beta = 0$

En effet, la formule analytique calcule la contrainte sur des points (repérées par l'angle θ) sur la paroi du trou, tous les points considérés sont, ainsi, représentatifs. Quant à FLAC, la discrétisation mixte qu'il adopte (Marti et Cundall 1982 ; [73]) laisse admettre que les contraintes sont calculées aux centres de gravité de chaque élément de différences finies. Il faut alors un maillage fin à proximité de la paroi du trou et notamment au point singulier pour que l'élément soit représentatif. Si l'on s'intéresse précisément à ce qui se passe au voisinage d'une singularité, il peut être avantageux d'arrondir les angles vifs dans le maillage (Figure 3.21 : modèle b). Cependant, la variation des contraintes au voisinage des coins est loin de la solution exacte (analytique) telle qu'on l'observe sur la Figure 3.22. Cette technique est pratiquement impossible à mettre en œuvre dans le cas de géométries complexes et de modélisations tridimensionnelles car trop pénalisante en terme de discrétisation du modèle.

3.2.2.3 Comportement élastique de la section longitudinale de l'ouvrage

La Figure 3.23 montre les magnitudes et les orientations des contraintes principales, après excavation de l'alvéole. On observe une large zone en tension à proximité de la paroi de l'alvéole. La contrainte maximale se situe au fond de l'alvéole, elle vaut à peu près 14 fois la contrainte appliquée aux limites du modèle (environ 176 MPa). Ce résultat est assez pessimiste même si on peut s'attendre à une concentration des contraintes puisqu'il dépasse largement l'ordre de grandeur estimé précédemment (section 3.2.2.2). En effet, cela est dû au fait que l'excavation est considérée comme une bande de longueur infinie.

On peut espérer un résultat optimal avec une valeur de contrainte significative, notamment au fond de l'alvéole en réalisant le calcul en modèle axisymétrique dans l'axe du tunnel de stockage. La Figure 3.24 montre alors les magnitudes et orientations des tenseurs des contraintes principales dans le modèle à l'issue de ce calcul réalisé en axisymétrie. La contrainte vaut 6 fois la contrainte appliquée aux limites du modèle au fond du tunnel de stockage. Ce résultat est acceptable selon la recommandation établie précédemment (section 3.2.2.2). Toutefois, à proximité de la galerie principale, les valeurs des contraintes ne sont pas significatives puisqu'en modèle axisymétrique, sa géométrie sera considérée comme sphérique.

3.2.2.4 Conclusions

La modélisation numérique 2D du comportement élastique de la section longitudinale de l'ouvrage a révélé les problématiques des calculs numériques faits sur des géométries présentant des singularités géométriques. Les effets des coins sur la distribution des contraintes ont été donc analysés. L'ordre des grandeurs des contraintes au voisinage des coins a été évalué par des calculs simples basés sur des solutions analytiques. Pour la modélisation 2D de la section longitudinale BB, l'analyse des résultats a permis de conclure que l'hypothèse en axisymétrie autour de l'axe de l'alvéole conduit à des solutions meilleures que celles obtenues avec l'hypothèse des déformations planes.

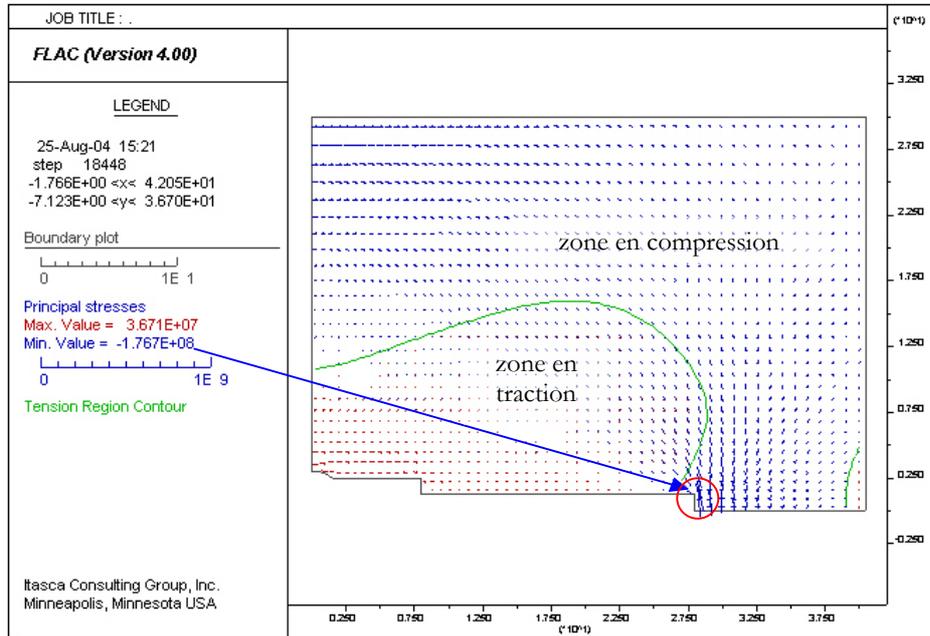


Figure 3.23 : Magnitudes et orientations des contraintes principales, en [Pa], dans la section longitudinale BB, Calcul réalisé en déformations planes

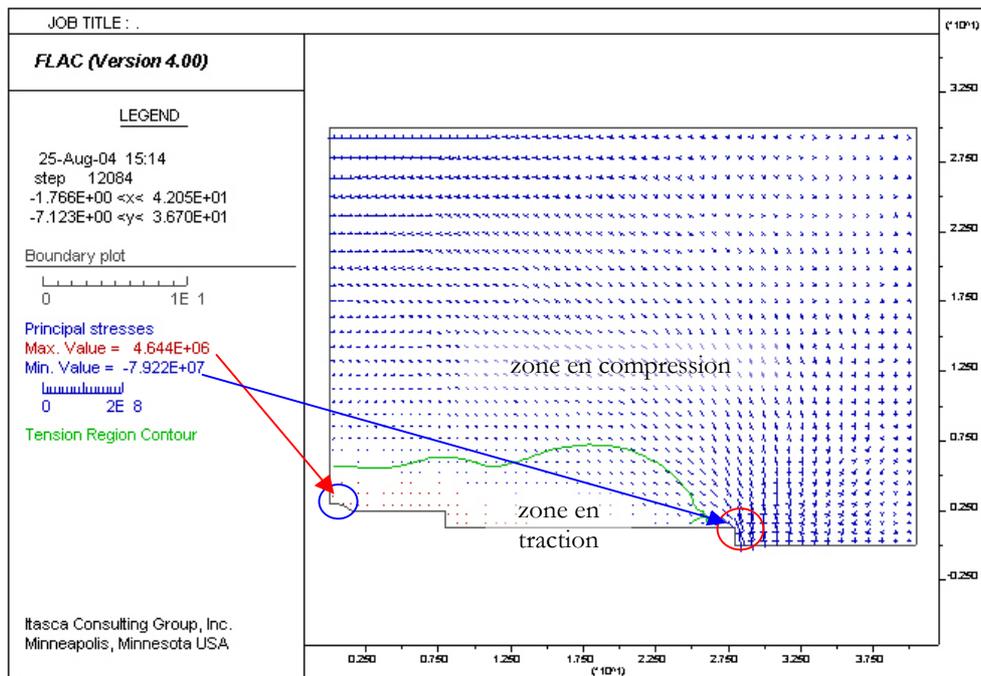


Figure 3.24 : Magnitudes et orientations des contraintes principales, en [Pa], dans la section longitudinale BB, Calcul réalisé en axisymétrie dans l'axe de l'alvéole

3.3 Comportement thermoélastique d'un réseau de galeries

Un module de stockage comporte un certain nombre de galeries creusées le long d'une galerie principale. La Figure 3.25 présente un module de stockage constitué de 8 alvéoles T.C. Compte tenu de la disposition des alvéoles et des modules dans une installation de stockage, les interactions de réseaux de galeries d'un module et les interactions du réseau d'un module avec ceux d'autres modules sont envisageables. Cette étude a pour but de mettre en évidence et d'évaluer les interactions du réseau de galeries d'un module. On a donc choisi une section caractéristique définie respectivement par la coupe transversale A'A' d'un réseau d'alvéole de stockage d'un module (Figure 3.25).

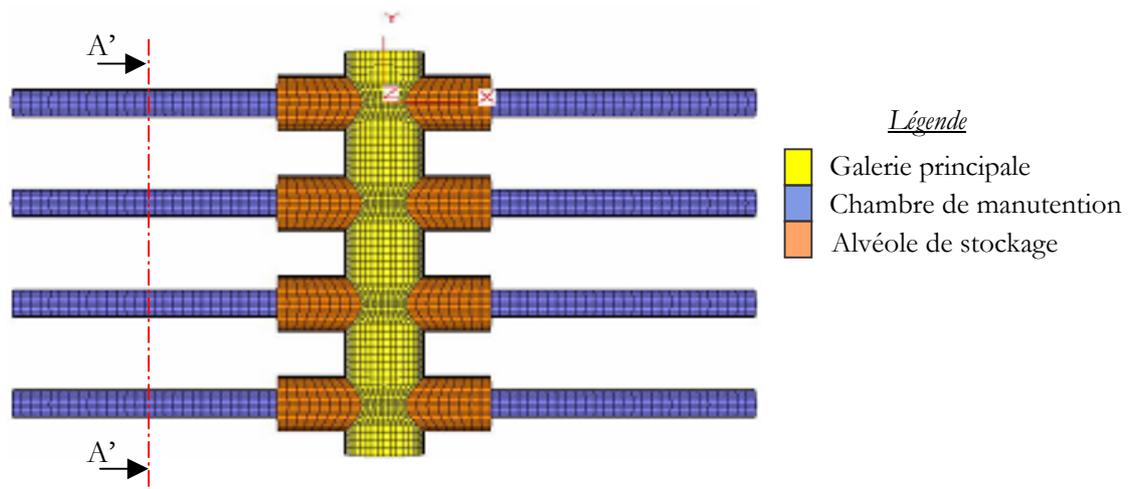


Figure 3.25 : Un module T.C, vue de dessus

3.3.1 Modélisation numérique 2D du comportement thermoélastique d'un réseau de galeries de stockage souterrain

Le modèle de référence de la section A'A' est présenté par la Figure 3.26. Il est constitué d'un réseau de cavités cylindriques de rayon uniforme R et d'entraxe variable d . Il se situe à une profondeur moyenne $h = 500$ m, dans une couche d'argilite du Callovo-Oxfordien dont les propriétés thermoélastiques sont résumées au Tableau 3.1. Le Tableau 3.2 présente les différentes valeurs de l'entraxe et le rapport diamètre de la galerie-entraxe correspondant. Ces valeurs sont issues des documents de synthèse des options initiales de l'*Andra (1998 ; [1])*.

Rapport $d/2R$	7,2	6	4	3,6	3
Entraxe d [m]	18	15	10	9	7,5

Tableau 3.2 : Valeurs choisies de l'entraxe entre deux alvéoles

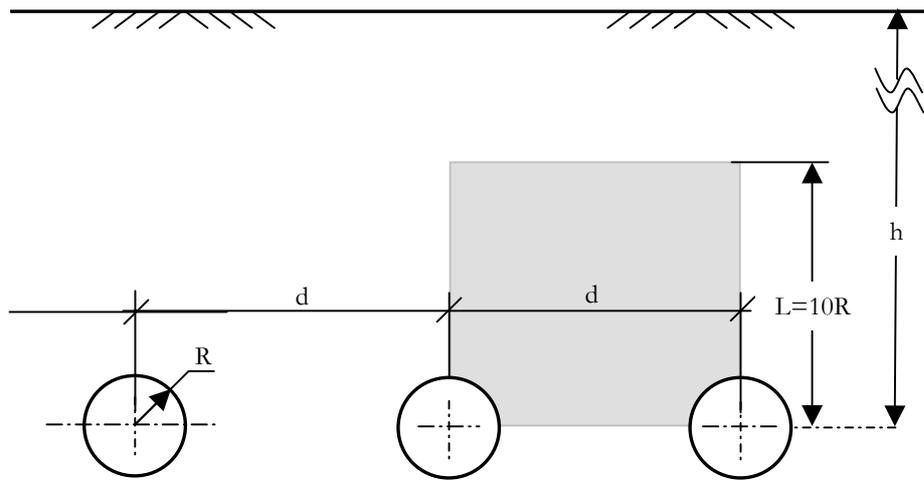


Figure 3.26 : Géométrie de la section A'A'

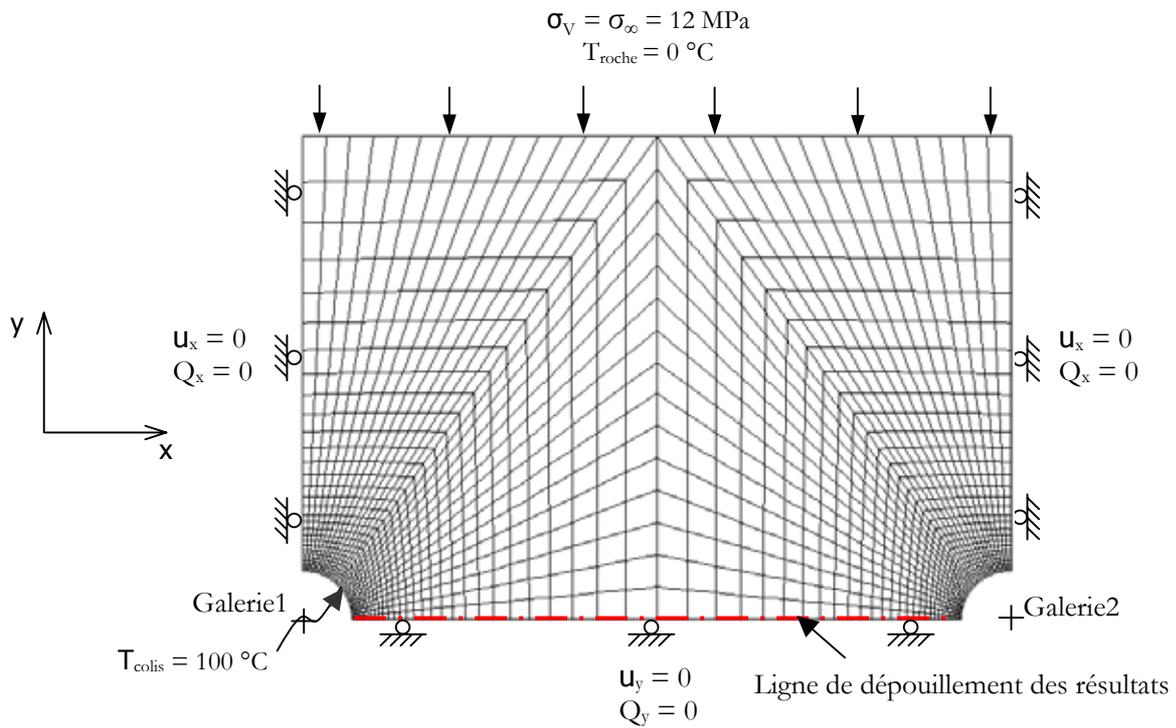


Figure 3.27 : Maillage et conditions aux limites du modèle

3.3.1.1 Définition du modèle et des conditions aux limites

La Figure 3.27 présente le maillage et les conditions aux limites du modèle. Le modèle est discrétisé avec des éléments finis de type quadrangle bidimensionnel à 8 nœuds massif (QUA8) et compte 3000 éléments avec 9271 nœuds. La limite supérieure du modèle est située à 5 fois le diamètre des galeries où une contrainte verticale $\sigma_{\infty} = 12$ MPa équivalente au poids du terrain et une température de 0°C (supposée température moyenne de la roche) sont imposées. L'état initial des contraintes géostatiques est supposé isotrope et homogène. Les déplacements perpendiculaires aux plans de symétrie sont bloqués et les flux susceptibles de passer à travers ces plans sont aussi empêchés. Une température, $T_{\text{colis}} = 100^{\circ}\text{C}$, sera imposée, ultérieurement, sur la paroi d'une des galeries afin de simuler le dégagement de chaleur des colis de déchets confinés. La ligne de l'entraxe est caractérisée pour analyser les résultats des calculs.

Le calcul est réalisé en thermoélasticité pour un état de déformations planes. Il comporte ainsi deux étapes. La première étape consiste à étudier les influences de la dimension de l'entraxe sur le comportement thermoélastique du réseau de galeries pour laquelle la distribution des températures sera maintenue homogène. La seconde étape du calcul est consacrée à l'étude des influences d'une galerie sous chargement thermique sur le comportement thermoélastique du réseau de galeries. Pour ce faire, l'une des deux galeries sera soumise à une température de 100°C (Figure 3.27). Les résultats obtenus seront comparés à ceux d'un modèle de référence ($d \gg 2R$) lequel a le comportement d'une galerie circulaire individuelle dans un milieu infiniment élastique (section 3.2.1.2). Ces comparaisons permettront d'appréhender les influences et de la variation de la dimension de l'entraxe et du chargement thermique d'une galerie sur le comportement du réseau de galeries.

3.3.1.2 Influences de la dimension de l'entraxe sur le comportement élastique du réseau de galeries

On considère que l'excavation des galeries n'engendre aucune variation des températures dans la couche hôte et qu'aucune source de chaleur n'intervient dans le système. Le comportement thermoélastique se réduit donc à un comportement purement élastique. L'évolution des distributions des contraintes et déplacements est due uniquement à l'excavation des galeries.

La Figure 3.28 présente les distributions des contraintes radiales élastiques suivant l'entraxe. Leurs valeurs ont été normalisées par la valeur absolue des contraintes initiales géostatiques. On remarque que les contraintes radiales à mi-distance des galeries diminuent lorsque la dimension de l'entraxe diminue. Cette diminution des contraintes radiales est maximale lorsque le rapport entraxe-diamètre galeries est de l'ordre de 3 ($d = 7,5$ m) et est minimale quand ce rapport est de l'ordre de 7 ($d = 15$ m et $d = 18$ m).

La Figure 3.29 présente les distributions des contraintes orthoradiales, normalisées par la valeur des contraintes initiales géostatiques pour les différentes dimensions de l'entraxe. Contrairement à la tendance des contraintes radiales, les contraintes orthoradiales à la paroi et suivant l'entraxe des galeries augmentent en valeur absolue lorsque la dimension de l'entraxe diminue. Cette augmentation des contraintes orthoradiales est maximale lorsque le rapport entraxe-galerie est de l'ordre de 3 ($d = 7,5$ m) et est minimale quand ce rapport est de l'ordre de 7 ($d = 15$ m et $d = 18$ m).

L'écart relatif en contrainte est défini par :

$$(3.16) \quad \frac{100(\sigma - \sigma^o)}{\sigma^o} [\%]$$

σ représente soit la contrainte radiale soit la contrainte orthoradiale numérique, calculée en un point, correspondant à une dimension d'entraxe donnée et σ^0 représente la contrainte radiale ou orthoradiale, calculée en un point, correspondant au modèle de référence ($d \gg 2R$).

Le Tableau 3.3 donne les écarts relatifs maximaux en contraintes, selon les dimensions de l'entraxe. On remarque que l'écart maximal est plus important, en valeur absolue, en contraintes radiales qu'en contraintes orthoradiales mais de signe négatif. Cette tendance s'accroît lorsque la dimension de l'entraxe diminue.

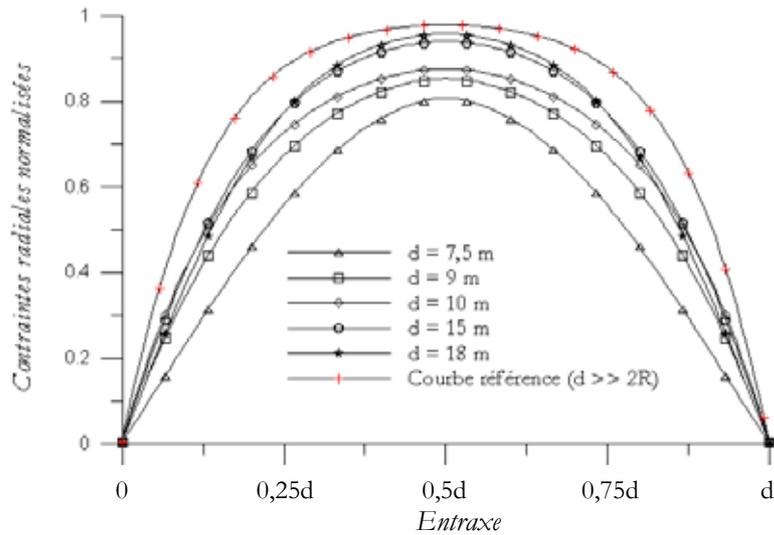


Figure 3.28 : Contraintes radiales élastiques suivant l'entraxe, sans variation des températures

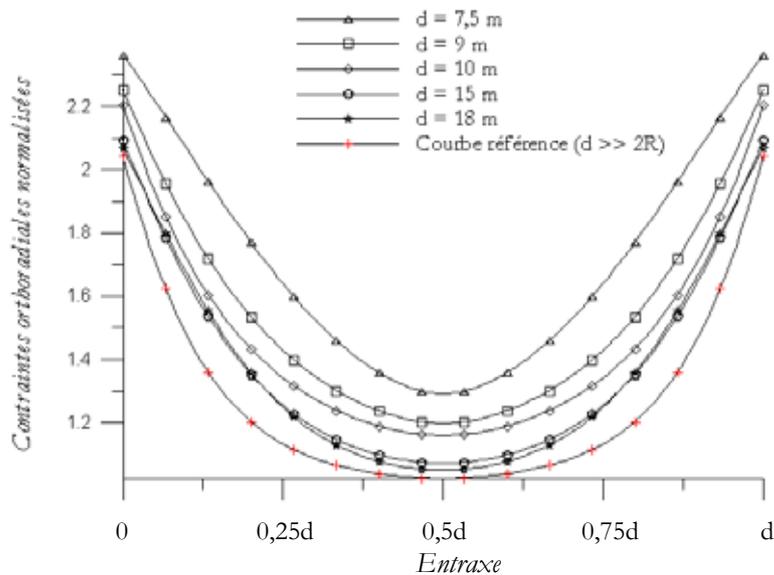


Figure 3.29 : Contraintes orthoradiales élastiques suivant l'entraxe, sans variation des températures

Rapport $d/2R$		7,2	6	4	3,6	3
Entraxe d [m]		25	18	15	9	7,5
Ecart relatif maximal [%]	σ_r	-28,9	-21,9	-20,6	-30,4	-47,9
	σ_θ	13,7	12,3	17,7	25,9	45,2

Tableau 3.3 : Ecarts maximaux en contraintes en fonction des dimensions de l'entraxe

Le Tableau 3.4 présente les valeurs minimales ($\sigma_{\min}^{\text{éq}}$) et maximales ($\sigma_{\max}^{\text{éq}}$) de contraintes équivalentes aux champs des contraintes élastiques (contraintes de Von Mises) dans le modèle en fonction des dimensions de l'entraxe. Notons que les valeurs maximales sont localisées essentiellement sur la paroi des galeries puis elles décroissent progressivement avant d'atteindre ses valeurs minimales vers les frontières du modèle. La comparaison avec le modèle de référence indique qu'il n'y a pas d'interaction des galeries lorsque l'entraxe vaut plus de 7 fois le diamètre des galeries. Puis, l'interaction commence à apparaître lorsque le rapport entraxe/diamètre galeries diminue. Enfin, elle atteint son niveau maximal lorsque l'entraxe vaut environ 3 fois le diamètre des galeries.

Rapport $d/2R$		10	7,2	6	4	3,6	3
Contraintes équivalentes de Von Mises [MPa]	$\sigma_{\max}^{\text{éq}}$	21	21	22	23	23	24
	$\sigma_{\min}^{\text{éq}}$	0,16	0,17	0,17	0,18	0,18	0,19

Tableau 3.4 : Contraintes équivalentes maximales et minimales aux champs des contraintes élastique

3.3.1.3 Influences d'une galerie sous chargement thermique sur le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries

On suppose, maintenant, que la paroi d'une des deux galeries est soumise à un chargement thermique (Figure 3.27). Ce chargement perturbera la distribution de température initiale dans le modèle et entraînera une variation des températures dans la couche hôte. La Figure 3.30 présente ainsi les nouvelles distributions de températures dans le modèle pour les différentes dimensions de l'entraxe après le chargement thermique. Elle montre l'influence d'une galerie sous chargement sur la distribution des températures dans le modèle notamment sur les galeries adjacentes. L'emprise de la température dans la couche hôte, particulièrement à proximité de la galerie sous chargement thermique, est de plus en plus grande lorsque le rapport entraxe/diamètre galeries est inférieur ou égal à 4. La Figure 3.31 présente les distributions des températures suivant l'entraxe pour les différentes valeurs de l'entraxe. Elle montre que la température à proximité des galeries proches de la galerie sous chargement thermique augmente sensiblement quelque soit la dimension de l'entraxe. Les Figure 3.32 et Figure 3.33 présentent respectivement les profils des contraintes radiales et orthoradiales thermoélastiques, normalisées par la valeur des contraintes initiales géostatiques ($\sigma_\infty = 12$ MPa), suivant l'entraxe pour les différentes valeurs de l'entraxe. On compare chaque courbe à la courbe référence élastique qui correspond au comportement d'une galerie circulaire individuelle dans un milieu infiniment élastique et soumise à un état des contraintes homogènes isotropes (3.2.1.2).

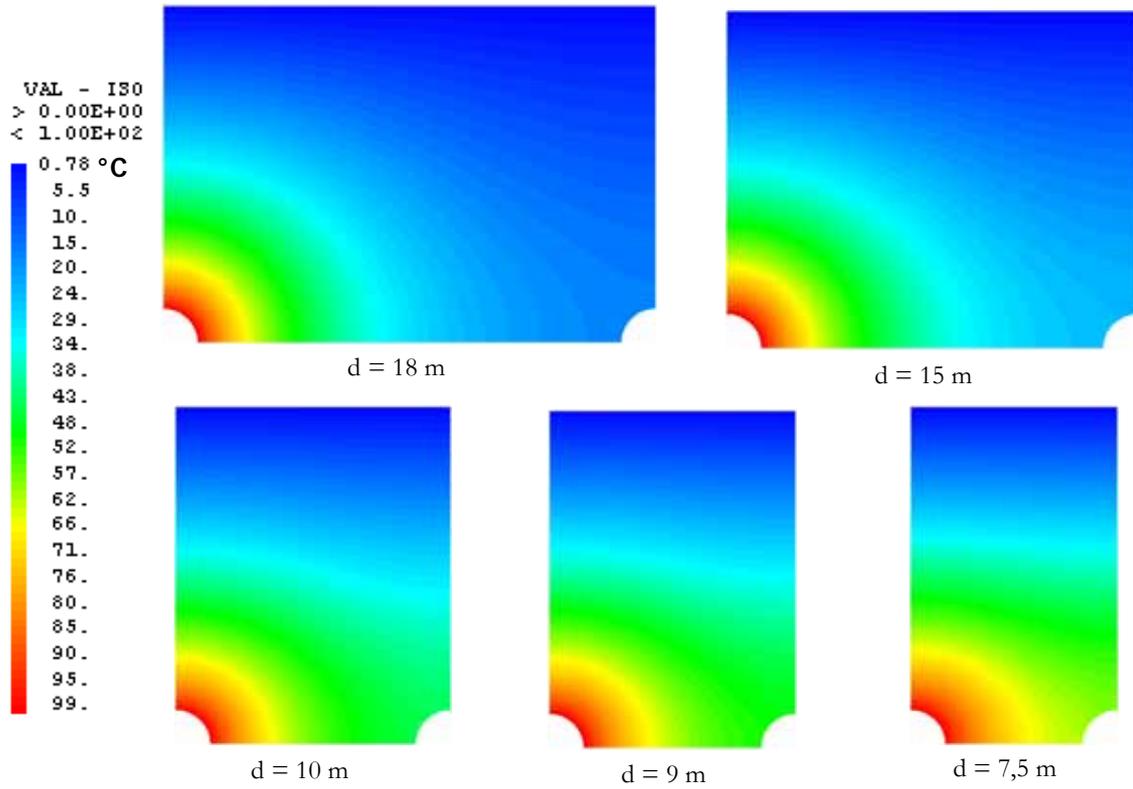


Figure 3.30 : Distributions des températures, en degré Celsius, dans le modèle pour les différentes dimensions de l'entraxe après chargement thermique d'une galerie (à 100°C)

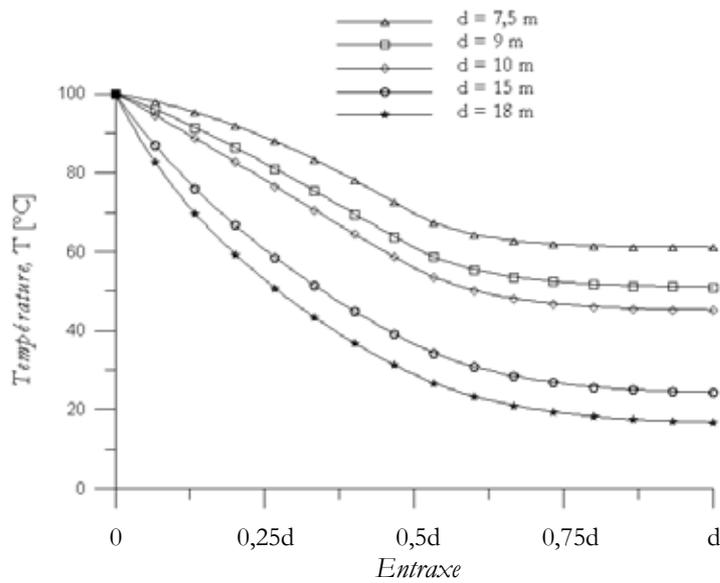


Figure 3.31 : Profils des températures suivant l'entraxe pour les différentes dimensions de l'entraxe après chargement thermique d'une galerie (à 100°C)

La Figure 3.32 montre que les contraintes radiales sont égales à zéro sur les parois des galeries, y compris sur celle de la galerie sous chargement thermique, puis elles baissent en intensité au milieu des deux galeries lorsque le rapport entraxe-diamètre galeries est de l'ordre de 3 ($d = 7,5 \text{ m} - 9 \text{ m} - 10 \text{ m}$) tandis qu'elles augmentent lorsque la dimension de l'entraxe vaut environ 7 fois le diamètre des galeries. La Figure 3.33 montre que les contraintes orthoradiales augmentent légèrement sur la paroi de la galerie sous chargement thermique et diminuent légèrement sur la paroi des galeries adjacentes. Puis cette tendance reste quasi-constante suivant la ligne de l'entraxe. Les profils des contraintes orthoradiales suivant l'entraxe sont proches de celui de la courbe référence élastique lorsque la dimension de l'entraxe vaut environ 7 fois le diamètre des galeries malgré les légères différences qui subsistent notamment sur les parois des galeries. Toutefois, les écarts avec la courbe référence élastique sont plus importants lorsque la dimension de l'entraxe vaut 3 fois le diamètre des galeries (Figure 3.33).

Le Tableau 3.5 récapitule les écarts maximaux en contraintes en fonction des dimensions de l'entraxe. Il illustre les constats évoqués plus haut. Le signe négatif (-) signifie que la tendance est à la baisse en intensité. Le Tableau 3.6 présente les valeurs maximales et minimales des contraintes équivalentes aux champs des contraintes thermoélastiques dans le modèle. On remarque que les valeurs maximales sont localisées sur la paroi de la galerie sous chargement thermique (galerie 1) et sont égales pour toutes les dimensions de l'entraxe. Ils sont liés aux conditions aux limites thermiques, plus précisément à la température imposée sur la paroi de cette galerie. Sur les galeries voisines immédiates (galerie 2), les valeurs des contraintes sont légèrement supérieures aux valeurs maximales calculées en élasticité (Tableau 3.4) il en est de même en ce qui concerne les contraintes équivalentes minimales. Cela confirme l'influence sous chargement thermique voisine de la galerie.

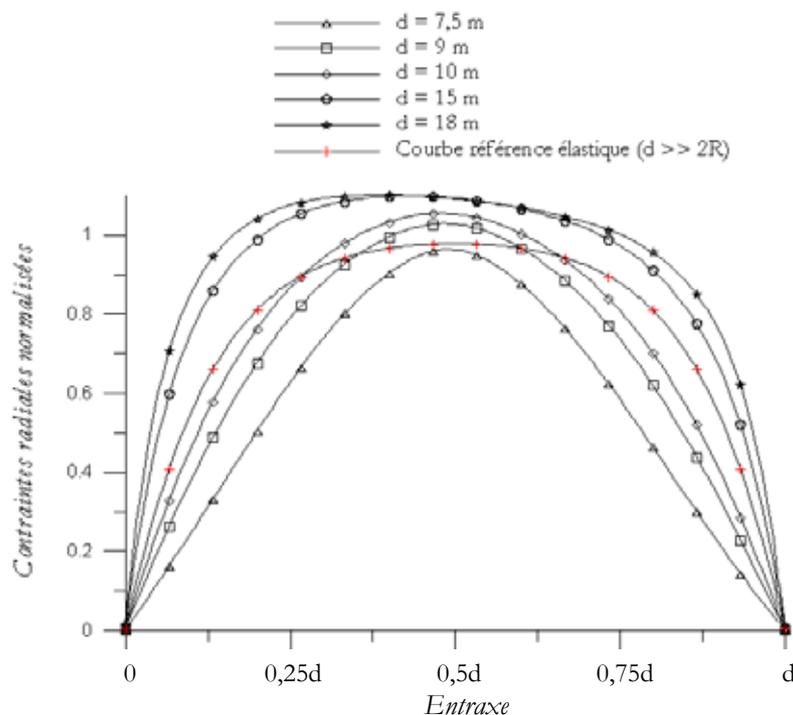


Figure 3.32 : Contraintes radiales thermoélastiques suivant l'entraxe lorsqu'une des galeries du réseau est soumise à un chargement thermique

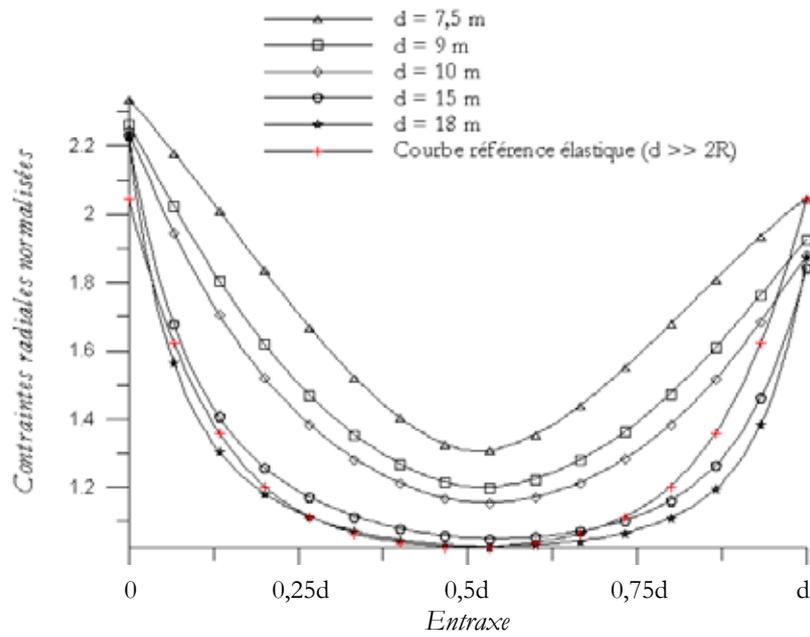


Figure 3.33 : Contraintes orthoradiales thermoélastiques suivant l'entraxe lorsqu'une des galeries du réseau est soumise à un chargement thermique

Rapport $d/2R$		7,2	6	4	3,6	3
Entraxe d [m]		18	15	10	9	7,5
Ecart relatif maximal [%]	σ_r	63,3	36,9	-23,5	-33,6	-51,8
	σ_θ	-14,2	-09,9	25,1	33,4	50,6

Tableau 3.5 : Ecarts maximaux en contraintes en fonction des dimensions de l'entraxe lorsqu'une des galeries du réseau est soumise à un chargement thermique

Rapport $d/2R$		10	7,2	6	4	3,6	3
Contraintes équivalentes de Von Mises [MPa]	$\sigma_{\max}^{\text{éq}}$	Galerie 1	27	27	27	27	26
		Galerie 2	22	22	22	24	24
	$\sigma_{\min}^{\text{éq}}$		0,23	0,23	0,22	0,22	0,21

Tableau 3.6 : Contraintes équivalentes maximales et minimales aux champs des contraintes thermoélastique lorsqu'une des galeries du réseau est soumise à un chargement thermique

3.3.1.4 Conclusions

La modélisation numérique 2D du comportement thermoélastique d'un réseau de galeries de stockage souterrain réalisée dans ce paragraphe permet de tirer des conclusions intéressantes. L'étude de l'influence de la dimension de l'entraxe sur le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries a montré que la perturbation de la distribution des contraintes de la couche hôte est minimale lorsque le rapport entraxe/galerie est supérieur à 4. Les interactions entre les galeries du réseau sont inexistantes lorsque la dimension de l'entraxe vaut 7 fois le diamètre de la galerie. Toutefois, la perturbation de la distribution des contraintes de la couche hôte augmente lorsque le rapport entraxe/galerie est inférieur à 4. Les interactions des galeries du réseau sont maximales lorsque la dimension de l'entraxe vaut 3 fois le diamètre de la galerie.

L'étude de l'influence d'une galerie sous chargement thermique sur le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries a montré que l'augmentation de température, dans la couche hôte et notamment à proximité de la galerie sous chargement thermique, est importante lorsque la dimension de l'entraxe est faible (rapport entraxe/dimension des galeries égal ou inférieur à 4). Cela entraîne une augmentation sensible de la température à proximité des galeries voisines. La variation des températures engendre ainsi des contraintes mécaniques qui vont perturber la distribution initiale des contraintes. Les contraintes maximales sont localisées au voisinage de la galerie sous chargement thermique. Leur intensité est de l'ordre de la température imposée au champ proche.

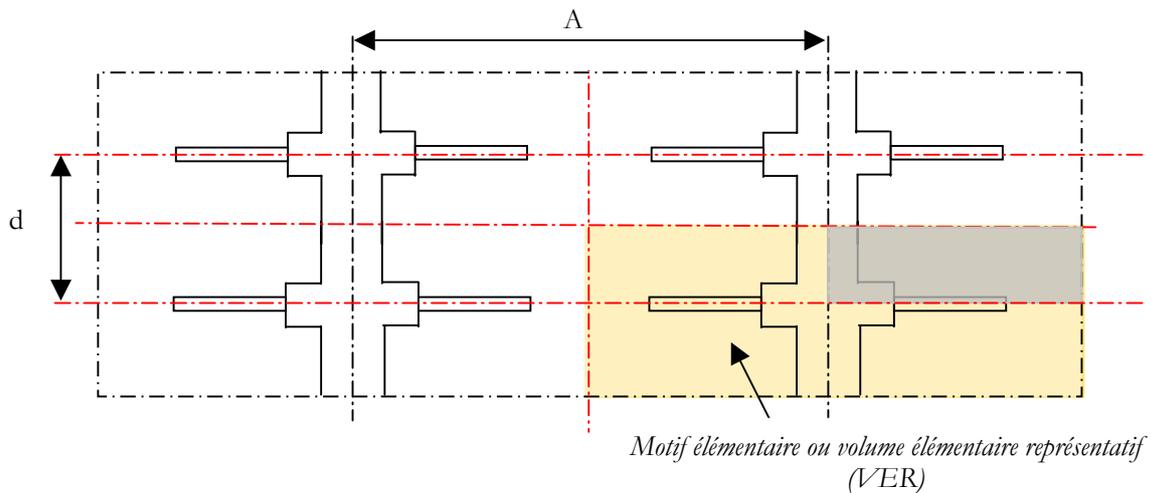
3.3.2 Modélisation 3D du comportement élastique d'un réseau de galeries

Il est possible de réaliser une analyse plus judicieuse des interactions des alvéoles d'un module de stockage par le biais de la modélisation numérique 3D. Toutefois, le calcul sera réalisé essentiellement en élasticité, faute d'option thermique, avec le logiciel FLAC 3D. On retient, dans ce calcul, le cas extrême où la dimension de l'entraxe des alvéoles est égale à 7,5 m.

3.3.2.1 Définition du modèle et des conditions aux limites

On suppose, à l'heure actuelle, un aménagement des modules de stockage sur un seul niveau pour préserver une épaisseur de garde maximale de part et d'autre de la formation géologique constituant cette couche. Elle peut atteindre une emprise horizontale de 3 à 8 km² environ (*Andra 2000* ; [3]). La Figure 3.34 présente en bidimensionnel le schéma d'une partie d'une installation de stockage au concept T.C., en vue de dessus. Le modèle de référence est une installation de stockage formée par la répétition spatiale d'un motif élémentaire constitué d'un ensemble galerie principale/alvéoles de stockage (Figure 3.34). Pour des raisons de symétrie, on modélise seulement un quart du VER (Volume élémentaire représentatif : Figure 3.34).

Afin que les conditions aux limites n'influent pas ou peu sur les champs de déplacements et de contraintes, les limites du modèle ont été placées suffisamment loin de l'ouvrage. On a adopté 5 diamètres de la galerie principale d'extension latérale suivant l'axe des z et 5 diamètres de l'alvéole plus la longueur de la chambre de manutention et le rayon de la galerie principale suivant l'axe des x. L'épaisseur du modèle vaut la moitié de l'entraxe d (entre deux alvéoles) considéré. Par conséquent, l'épaisseur du modèle mesure 3,75 mètres (moitié de l'entraxe d, Figure 3.35), sa largeur est de 40,5 m et sa hauteur est de 30 mètres (Figure 3.35). La Figure 3.35 présente la géométrie, le maillage et les dimensions caractéristiques du modèle réalisé avec FLAC 3D. Le modèle compte 13800 éléments (différences finies) et 16082 nœuds avant l'excavation (Discrétisation en différences finies : *Wilkins 1969* ; [100]). Les propriétés physiques du matériau constitutif sont présentées par le Tableau 3.1.



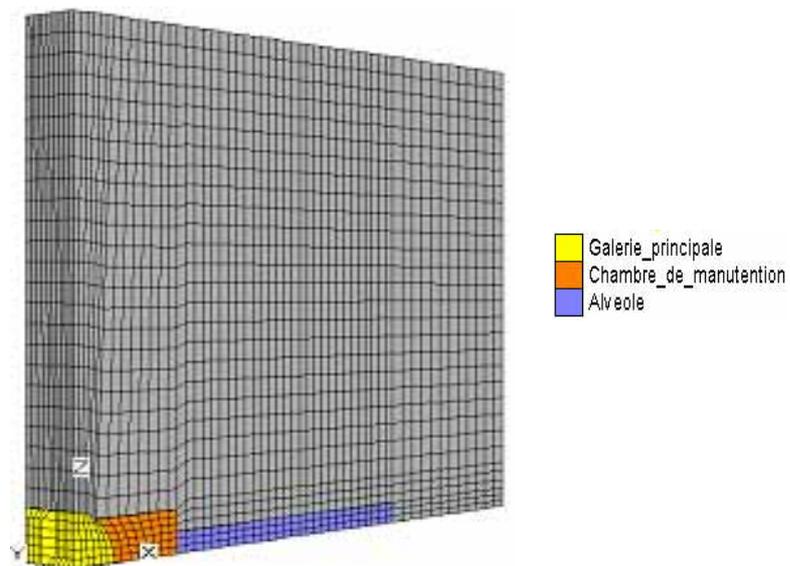
A : distance (entraxe) séparant deux galeries principales
 d : distance (entraxe) séparant deux tunnels de stockage (alvéoles)

Figure 3.34 : Schéma d'installation de stockage composé de deux modules T.C. (vue de dessus)

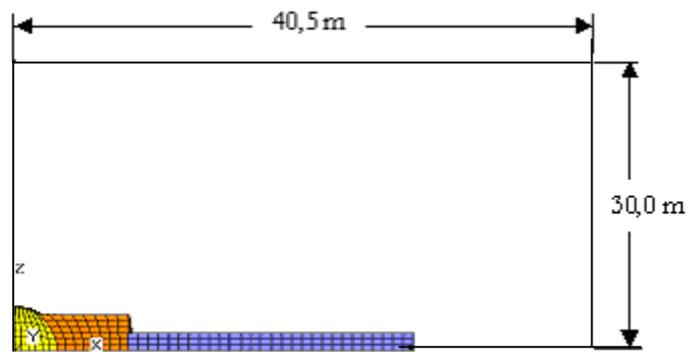
Les forages d'investigation préliminaire ont mis en évidence une anisotropie des contraintes horizontales selon le rapport émis par l'Andra (2001 ; [7]). Cependant, les contraintes initiales sont supposées isotropes, dans le cas des calculs analytiques selon les hypothèses des modélisations mécaniques, établies au cours de l'expérimentation. On adopte ainsi : $\sigma_h = \sigma_H = \sigma_v = \sigma_\infty \approx 12$ MPa avec σ_v la contrainte verticale, σ_h est la contrainte horizontale mineure et σ_H la contrainte horizontale majeure. Il faut, d'abord, établir cet état des contraintes isotrope avant le creusement de l'ouvrage. Pour ce faire, on adopte les conditions aux limites présentées par la Figure 3.36.

Avant l'excavation de l'ouvrage, la modélisation nécessite d'établir l'équilibre initial des forces sur l'ensemble du modèle. Le modèle est en équilibre lorsque la différence des forces nodales résiduelles à chaque nœud et les forces initiales dans le modèle tend vers zéro. Néanmoins, ce rapport des forces résiduelles n'atteindra jamais exactement zéro ; le modèle est considéré en équilibre quand l'incrément de force résiduelle maximale est plus petit que la valeur de tolérance choisie. La tolérance est fixée, ici, à 10^{-6} .

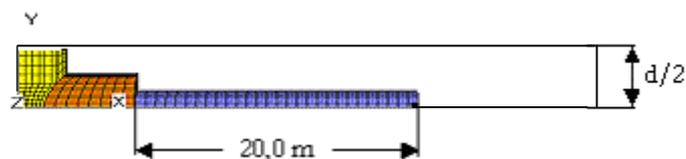
Il est possible, dans FLAC 3D, d'établir l'équilibre initial juste en appliquant les conditions aux limites et initiales dans le modèle, sans opérer le moindre pas de temps de calculs. Mais pour des modèles aux matériaux constitutifs fortement hétérogènes ou à géométries complexes comme c'est le cas ici, il est nécessaire d'opérer un nombre de pas de temps de calculs avant de procéder à l'excavation du modèle. Aussi, le modèle peut être en équilibre sans que l'état des contraintes initiales voulu ne soit établi. Cette question dépend plus des conditions initiales adoptées que des conditions aux limites. Cependant, pour s'assurer que l'état des contraintes initiales voulu serait établi, il est nécessaire de procéder de manière empirique. On va réaliser et comparer deux calculs, définis par le Tableau 3.7, avec deux conditions initiales en contraintes différentes.



a) vue en perspective



b) vue de face



c) vue de dessus

Figure 3.35 : Maillage et dimensions caractéristiques du modèle

	Calcul 1	Calcul 2
Conditions aux limites	Figure 3.36	Figure 3.36
Conditions initiales	$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$	$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\sigma_{\infty}$

Tableau 3.7 : Définition des calculs

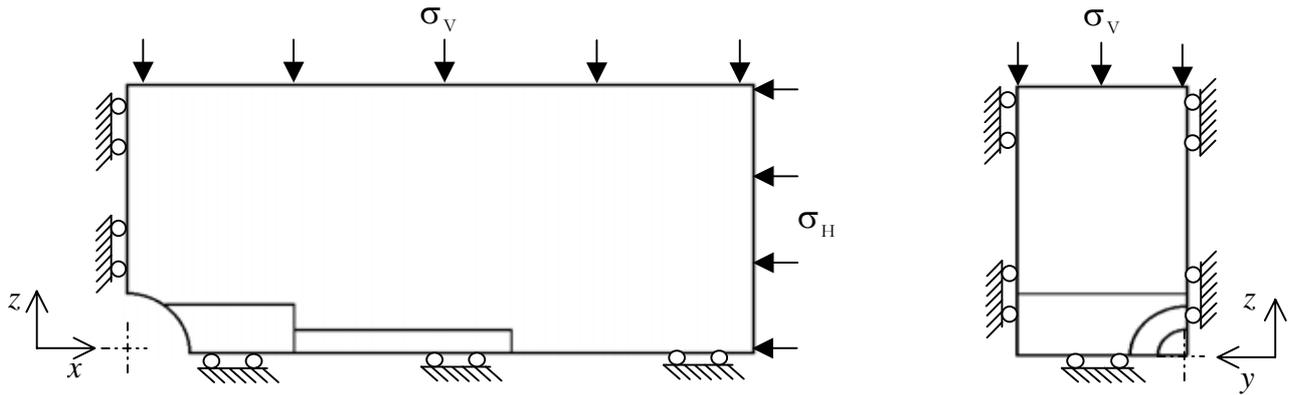


Figure 3.36 : Schéma des conditions aux limites

3.3.2.2 Etablissement de l'équilibre et des contraintes initiales

On rappelle que la loi de comportement du matériau est élastique avec les paramètres du Tableau 3.1. La Figure 3.37 montre l'évolution du rapport des forces résiduelles pour le calcul 1 et le calcul 2. On constate avant tout que l'équilibre des forces initiales est établi pour les deux calculs. Néanmoins, on s'aperçoit que le calcul 2 met beaucoup de temps pour atteindre l'équilibre par rapport au calcul 1 pour une tolérance de 10^{-6} . En effet, le calcul 2 compte environ 14910 pas de temps de calculs avant d'atteindre l'équilibre, alors que le calcul 1 n'en compte que 544.

Les courbes de la Figure 3.38 montrent l'établissement des contraintes initiales suivant les trois axes x , y et z au centre de gravité du modèle. Pour le calcul 2, on remarque que ces contraintes ne sont pas isotropes. En effet, suivant les axes x et z , elles sont égales à la contrainte initiale de 12 MPa, tandis que suivant l'axe y , elle est égale à peu près à 7,2 MPa en valeur absolue. Pour le calcul 1, on constate que les contraintes initiales sont isotropes, égales à 12 MPa, en valeur absolue, suivant les trois axes x , y et z .

D'après la loi de Hooke, la relation entre les contraintes et les déformations s'écrit :

$$(3.17) \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Tels que : $A = \frac{1}{E}$, $B = -\frac{\nu}{E}$ et $C = \frac{2(1+\nu)}{E}$.

Le modèle est en conditions œdométriques (Figure 3.36), à savoir : $\varepsilon_y = 0$ et $\sigma_x = \sigma_z = \sigma_\infty$.

De la relation (3.17), on obtient : $\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$

D'où on tire : $\sigma_y = 2\nu\sigma_\infty = 7,2 \text{ MPa}$

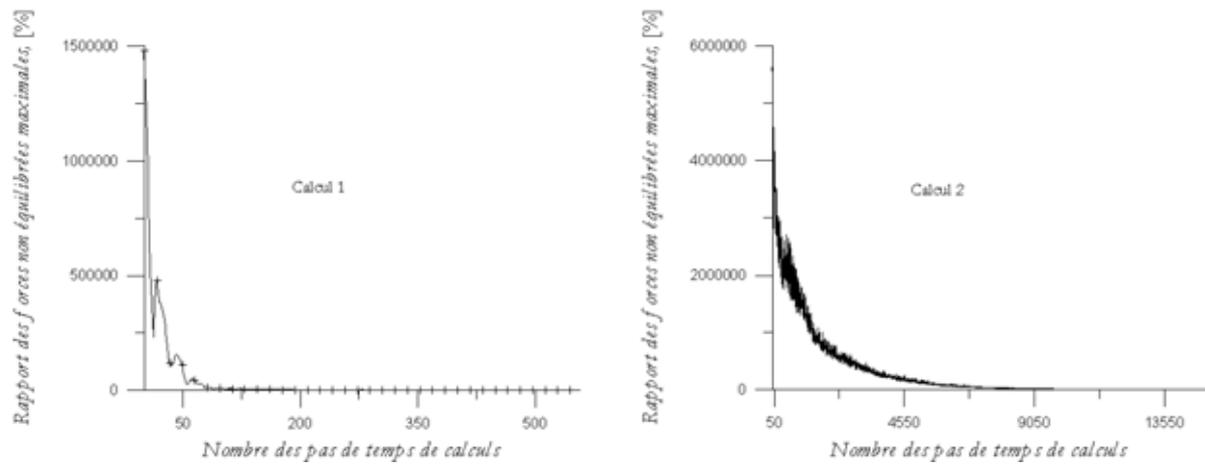


Figure 3.37 : Equilibre des forces résiduelles après l'établissement de l'équilibre et des contraintes initiales

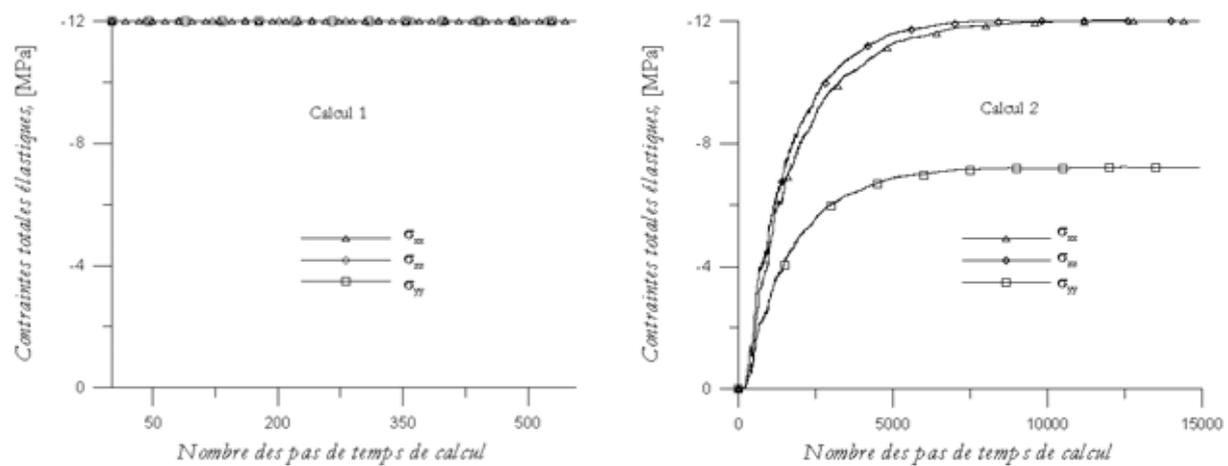


Figure 3.38 : Etablissement des contraintes initiales suivant les trois axes principaux (x, y, z) , au centre de gravité du modèle, en fonction du nombre pas de temps de calcul

Il est tout à fait logique que le résultat du calcul 2 soit conforme à celui du calcul analytique car il se base sur les conditions aux limites mais non pas sur les conditions initiales (en contraintes ici). Pour le calcul 1, les conditions aux limites en contraintes adoptées ont permis d'établir l'équilibre initial en un petit nombre de pas de temps de calculs et d'assurer l'état des contraintes initiales isotropes. Le calcul 1 justifie la nécessité d'avoir un état des contraintes initiales isotropes. Ainsi, on retient le modèle représenté par le calcul 1 pour la suite.

3.3.2.3 Excavation des galeries

On suppose que les déformations et les déplacements sont nuls à l'état initial. L'excavation des galeries est supposée instantanée. La Figure 3.39 présente la géométrie du modèle qui compte 12900 éléments et 8882 noeuds après excavation des galeries. Pour mieux représenter les résultats des calculs, les sections caractéristiques, présentées sur la Figure 3.40 et le Tableau 3.8, ont été choisies.

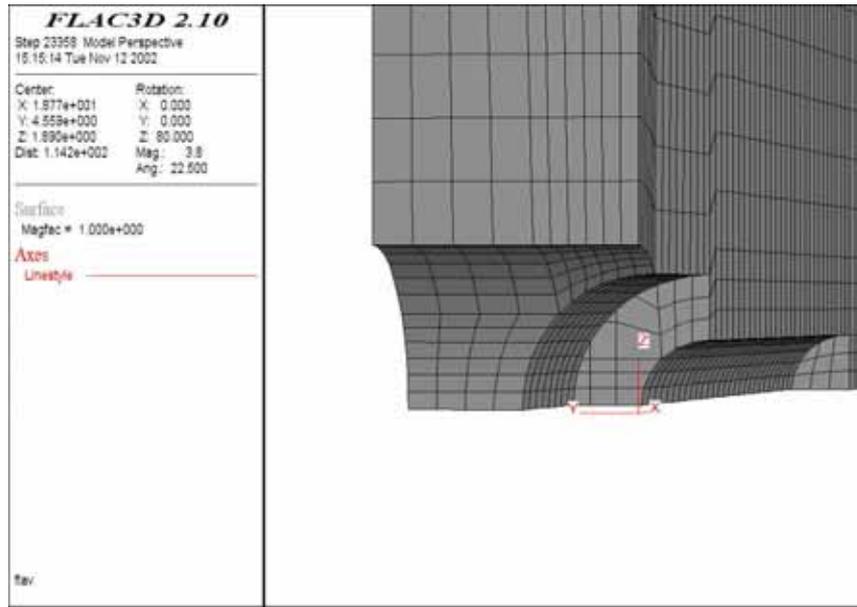


Figure 3.39 : Géométrie du modèle après excavation, vue en perspective

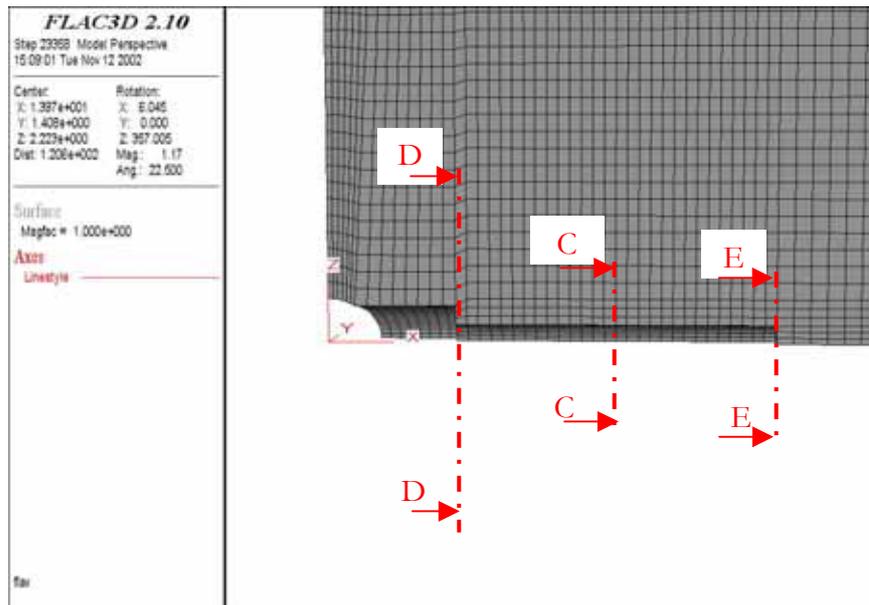


Figure 3.40 : Localisation des sections étudiées

Section	DD	CC	EE
Localisée à	x=8,01 m	x=18 m	x=27,99 m

Tableau 3.8 : Localisation des sections caractéristiques

La Figure 3.41 présente la carte des contraintes principales majeures après excavation des galeries. La valeur maximale vaut environ 6 fois la valeur des contraintes initiales. Elle est localisée sur les côtés des intersections des galeries principales avec les galeries de manutention. Cette zone est donc la plus sollicitée de l'installation de stockage. Les isovaleurs du second invariant du tenseur des déformations (Figure 3.42) confirment également ce constat. En effet, les déformations maximales se développent sur les parois des galeries notamment sur les cotés des intersections des galeries de manutention avec les galeries principales. La Figure 4.43 présente les vecteurs déplacements nodaux du modèle après excavation des galeries. Les convergences maximales sont ceux des voûtes des galeries principales et des galeries de manutention. La valeur maximale est de 2,971 cm (Figure 4.43).

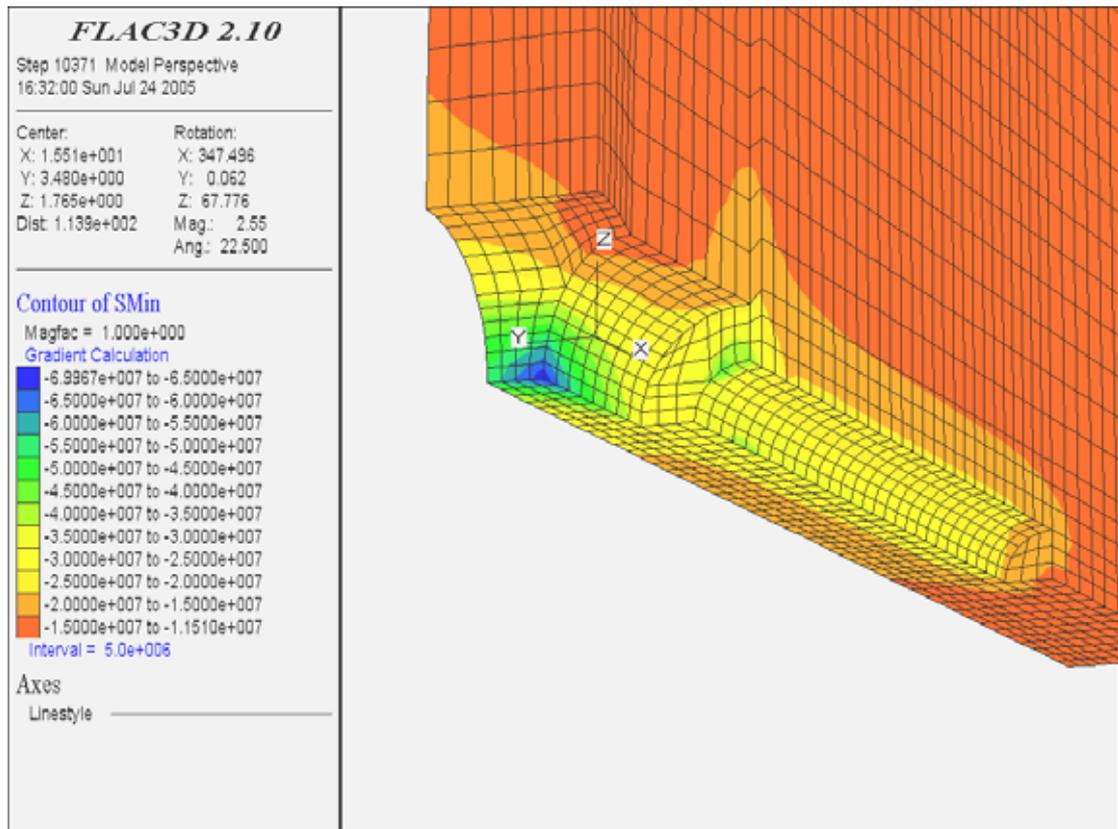


Figure 3.41 : Vue en 3D des contraintes principales majeures après excavation des galeries

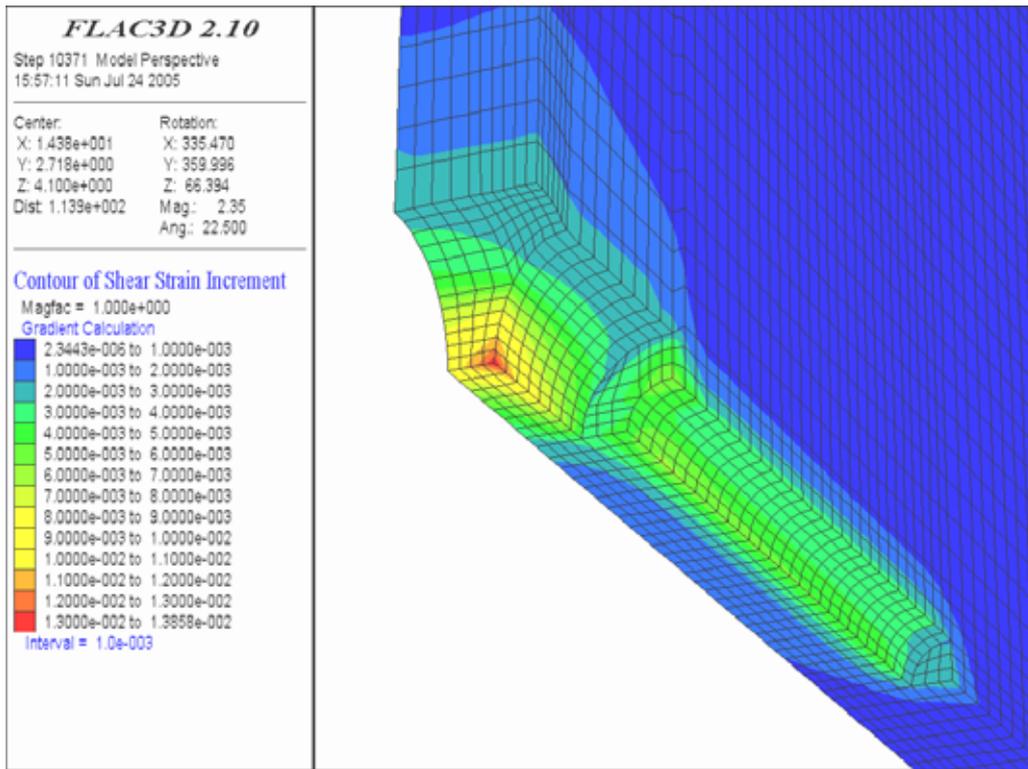


Figure 3.42 : Vue en 3D du second invariant du tenseur de déformations sur les paroi des galeries après excavation

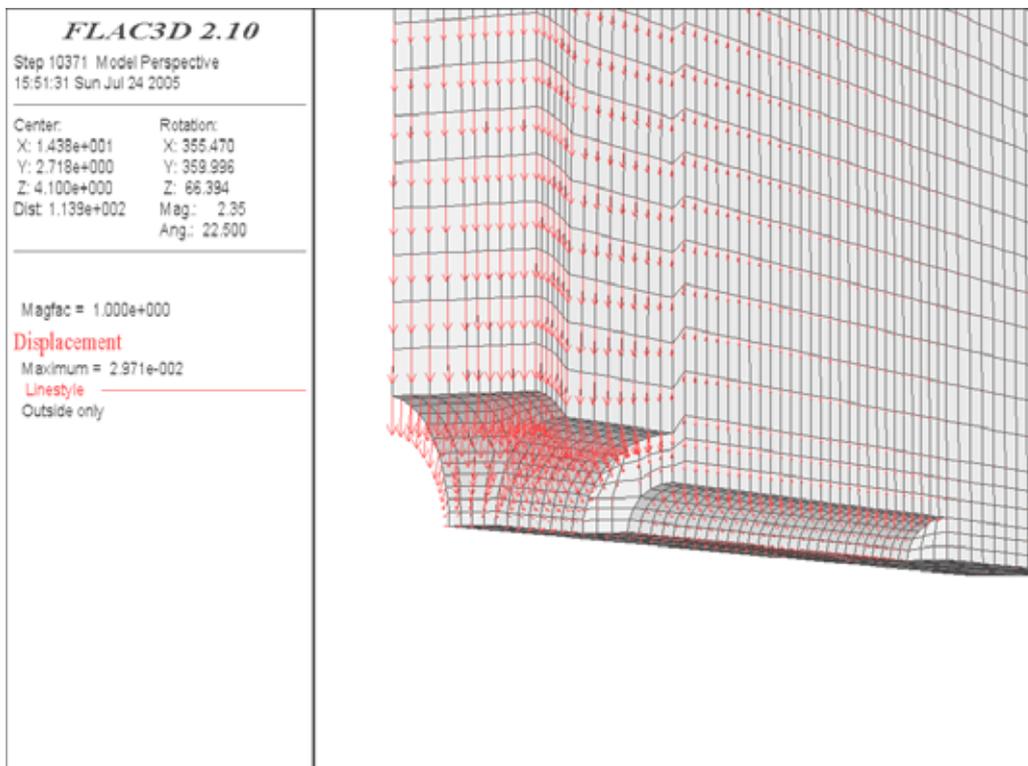


Figure 4.43 : Vue en 3D des vecteurs déplacements nodaux après excavation des galeries

Les figures de l'annexe I comparent les calculs 3D aux calculs 2D pour la section CC. On peut constater que les deux résultats sont cohérents. En effet, pour la modélisation 3D, la section CC est suffisamment éloignée des changements de diamètres, donc les valeurs de contraintes et de déplacements sont proches de celles calculées en déformations planes sur un modèle 2D.

Les figures de l'annexe II présentent les contours des contraintes pour les sections DD et EE des sections situées sur les extrémités de l'alvéole de stockage. Les répartitions des contraintes dans ces sections, contrairement à celles de la section CC, montrent les effets des singularités dues au changement de diamètres à la section DD et au bout du tunnel de stockage à la section EE.

3.3.2.4 Conclusions

La modélisation numérique 3D serait l'approche la plus rationnelle et efficace pour analyser le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries. Toutefois, elle n'a pas pu être réalisée ici qu'en élasticité puisque le code de calcul FLAC 3D ne nous permet pas de réaliser un couplage thermomécanique. Par conséquent, nous ne pouvons pas faire une comparaison et une synthèse complètes avec les résultats obtenus par la modélisation 2D. Néanmoins, le calcul 3D ainsi réalisé est intéressant puisqu'il a permis de modéliser le comportement élastique d'un réseau de galeries dans toute la complexité de la géométrie. Par ailleurs, il a permis de localiser les zones les plus perturbées des composantes de l'installation de stockage.

3.4 Synthèse et conclusions

Les calculs présentés dans ce chapitre ont été réalisés dans le but de rassembler des éléments qui pourraient permettre de quantifier l'impact à grande échelle d'une installation de stockage en thermomécanique. Dans cette optique, l'étude a été menée à partir des analyses du comportement thermoélastique d'un ouvrage individuel de stockage souterrain avant de traiter le cas d'un réseau de galeries en 2D et 3D. Dans la première partie, des modélisations numériques 2D du comportement thermoélastique d'une alvéole de stockage ont été donc réalisées suivant une section courante du tunnel de stockage et suivant une section longitudinale de l'alvéole.

L'étude du comportement thermoélastique d'une alvéole suivant une section courante a montré une bonne cohérence des résultats numériques avec les solutions analytiques concernant les champs des contraintes. En ce qui concerne les champs de déplacements, la comparaison des résultats des calculs aux éléments finis avec la solution analytique a montré un certain écart. Cet écart est une conséquence des effets des conditions aux limites par rapport à la taille du modèle pour le calcul aux éléments finis. Pour réduire cet écart, il est préférable de placer les contours du modèle le plus loin possible de la galerie.

La modélisation 2D du comportement de l'alvéole en section longitudinale n'a pu être réalisée qu'en élasticité faute d'option thermique avec le logiciel Cast3M. Néanmoins, elle a permis de tirer des enseignements nécessaires. Suivant cette section, la géométrie de l'alvéole présente des singularités, notamment des coins carrés. Or, ces singularités sont des concentrateurs des contraintes dans la plupart des cas. Une étude particulière a, d'abord, été réalisée afin d'analyser les effets de ces coins sur les comportements d'une structure élastique. Les calculs réalisés avec une plaque carrée présentant un trou carré au milieu a permis d'estimer à peu près l'ordre de grandeur des contraintes pour des modèles présentant de telles singularités. Ensuite, on a modélisé le comportement élastique de l'alvéole en section longitudinale en déformation plane mais les résultats obtenus sont très pessimistes par rapport à l'ordre de grandeur établie précédemment. Enfin, en réalisant la même modélisation numérique mais avec l'hypothèse de l'axisymétrie autour de l'axe de l'alvéole, on obtient des résultats assez admissibles notamment à proximité de l'alvéole de stockage.

Le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries de stockage a fait donc l'objet de la seconde partie de cette étude. Des modélisations numériques 2D du comportement thermoélastique d'un réseau de galeries ont été réalisées dans un premier temps. Elles étaient axées sur l'analyse des influences de la dimension de l'entraxe et d'une galerie sous chargement sur le comportement thermoélastique du réseau de galeries. Enfin, on a terminé l'étude avec une tentative de modélisation numérique 3D du comportement élastique d'une installation de stockage.

L'étude des influences de la dimension de l'entraxe a été réalisée sans variation de température. L'apparition des interactions entre les galeries est très marquée pour des dimensions de l'entraxe égales ou inférieures à 4 fois le diamètre des galeries. Tandis que, le comportement du réseau de galerie est proche de celui d'une galerie circulaire individuelle lorsque le rapport entraxe/diamètre des galeries est égal à 7.

L'analyse des influences d'une galerie sous chargement thermique sur le comportement d'un réseau de galeries a montré une augmentation de température importante dans la couche hôte notamment à proximité de la galerie sous chargement pour des dimensions d'entraxe égales ou inférieures à 4 fois le diamètre des galeries. La température augmente sensiblement à proximité des galeries proches de la galerie sous chargement thermique pour toutes les dimensions de l'entraxe. La distribution initiale des contraintes dans la couche géologique hôte est perturbée par l'apparition des contraintes supplémentaires correspondant à l'échauffement. Les contraintes maximales sont localisées à proximité de la galerie sous chargement thermique.

Enfin, une modélisation numérique 3D du comportement élastique d'une installation de stockage a été réalisée pour une dimension d'entraxe égal à 7,5 m. Le code de calcul utilisé pour ce calcul ne permet malheureusement pas le couplage thermomécanique. Toutefois, ce calcul a montré la complexité de modélisation 3D. Il y a des démarches à respecter pour partir d'un modèle à la fois en équilibre et en état des contraintes initiales correct. Ces points relèvent du code de calcul utilisé mais aussi de la démarche de simulation adoptée. Dans ce calcul, pour établir l'équilibre et les contraintes initiales avant l'excavation des ouvrages souterrain de stockage, il est nécessaire d'imposer les bonnes conditions aux limites, d'initialiser les champs de contraintes aux valeurs voulues et d'opérer quelques pas de temps de calculs jusqu'à ce que les forces résiduelles dans le modèle soient inférieures à une tolérance choisie. Les résultats de cette modélisation 3D sont satisfaisants puisque la comparaison des champs de déplacements et de contraintes suivants la section courante avec les résultats obtenus en modélisation 2D est cohérente. Ce calcul a permis de connaître les zones qui sont fortement sollicitées dans l'installation de stockage.

Le comportement thermoélastique d'un réseau de galeries circulaires a été modélisé par un système de deux alvéoles juxtaposées. Néanmoins, cela n'est plus valable lorsque le chargement mécanique ou thermique n'est ni simultané ni symétrique. Il en est de même lorsque l'installation comporte 2 ou plusieurs niveaux de réseau. Ainsi, il faudrait considérer toutes les galeries. Les méthodes de modélisations classiques sont pénalisantes pour traiter ce genre de problèmes. Ainsi, il est prévu, dans la suite de ce travail, de développer une méthode de modélisation numérique par homogénéisation du comportement thermoélastique d'ouvrages souterrains de stockage à grande échelle.

Chapitre 4

Modélisation numérique par homogénéisation du comportement thermomécanique d'ouvrages souterrains de stockage à grande échelle

Avant-propos : *Ce chapitre est consacré à la modélisation numérique du comportement thermomécanique d'un réseau de galeries en utilisant une technique d'homogénéisation. Dans cette optique, des approches d'homogénéisation périodique seront proposées au préalable concernant les propriétés élastiques et les propriétés thermiques effectives de structure périodique. Leurs mises en œuvre, au moyen d'un code de calcul aux éléments finis, permettront la détermination du comportement thermoélastique homogène équivalent. Le modèle ainsi obtenu sera validé avec différentes méthodes d'homogénéisation sur des ouvrages de stockage profond. Toutefois, il est nécessaire, dans un premier temps, de rappeler les notions fondamentales de la technique d'homogénéisation : quel est le but et quels sont les éléments de base à mettre en œuvre ? On présentera les différentes méthodes d'homogénéisation telles que la théorie des modules effectifs, les approximations de Voigt et Reuss et l'homogénéisation de milieux périodiques.*

4.1 Rappels sur la technique d'homogénéisation

Ce paragraphe est inspiré des ouvrages de Michel (2001 ; [78]) et de Zaoui (2001 ; [104]). Il porte sur la motivation et la méthodologie de la technique d'homogénéisation avant de présenter les différentes méthodes d'homogénéisation usuelles.

4.1.1 Motivation et généralités sur l'homogénéisation

Les calculs de structures constituées de matériaux homogènes sont assez commodes dans la mesure où les comportements ces matériaux sont bien connus. Cependant, nombreux matériaux ou structures sont caractérisés, en réalité, par une nature fondamentalement hétérogène. Par conséquent, la description de leurs comportements devient plus compliquée et les calculs de structures constituées de ces matériaux s'avèrent délicats voire impossibles malgré les moyens de calcul de plus en plus performants disponibles aujourd'hui. La technique d'homogénéisation vise, donc, à obtenir, par l'analyse de l'hétérogénéité du matériau de référence, des modèles de comportement homogène macroscopique équivalents au contenu physique ayant un pouvoir prédictif fiable et intégrables dans un calcul classique. L'efficacité de cette démarche repose et sur le choix de l'échelle pertinente pour représenter les propriétés physiques auxquelles on s'intéresse et sur la description, à cette échelle, des microstructures et des mécanismes actifs. On désigne ce passage d'une échelle d'appréhension des phénomènes et des propriétés à une autre par le vocable de « passage micro-macro ».

4.1.1.1 Séparation des échelles

La séparation des échelles consiste à définir l'échelle de description. Schématiquement, elle ne vise à décrire qu'un secteur limité de la structure. L'unique critère de choix, dans cette tâche, est dicté par la taille caractéristique des hétérogénéités structurales considérées. Cependant, tout dépend de l'objectif visé. Le choix de l'échelle de départ à adopter est guidé par deux préoccupations : ne pas descendre inutilement à un niveau plus fin qu'il n'est nécessaire pour rendre compte des propriétés que l'on veut analyser ; s'assurer que l'échelle retenue est encore justifiable par les éléments de la mécanique des milieux continus (Zaoui 2001 ; [104]).

Soit d la taille caractéristique des hétérogénéités prises en compte et l celle de l'ensemble à considérer fixée dans le but de pouvoir calculer les champs de contraintes et de déformations dans une structure macroscopique de géométrie donnée, constituée du matériau considéré. Cette structure a sa dimension caractéristique L (Figure 4.1). Par conséquent, l doit être proportionnée tant par rapport à d qu'à L , c'est à dire : $d \ll l \ll L$, de manière à respecter une double condition :

- $l \ll L$: pour pouvoir traiter la structure comme un milieu continu et y déterminer des champs continus de contraintes et de déformations ;
- $l \gg d$: pour pouvoir affecter aux points macroscopiques de la structure un comportement homogène si son matériau constitutif est considéré comme macroscopiquement homogène.

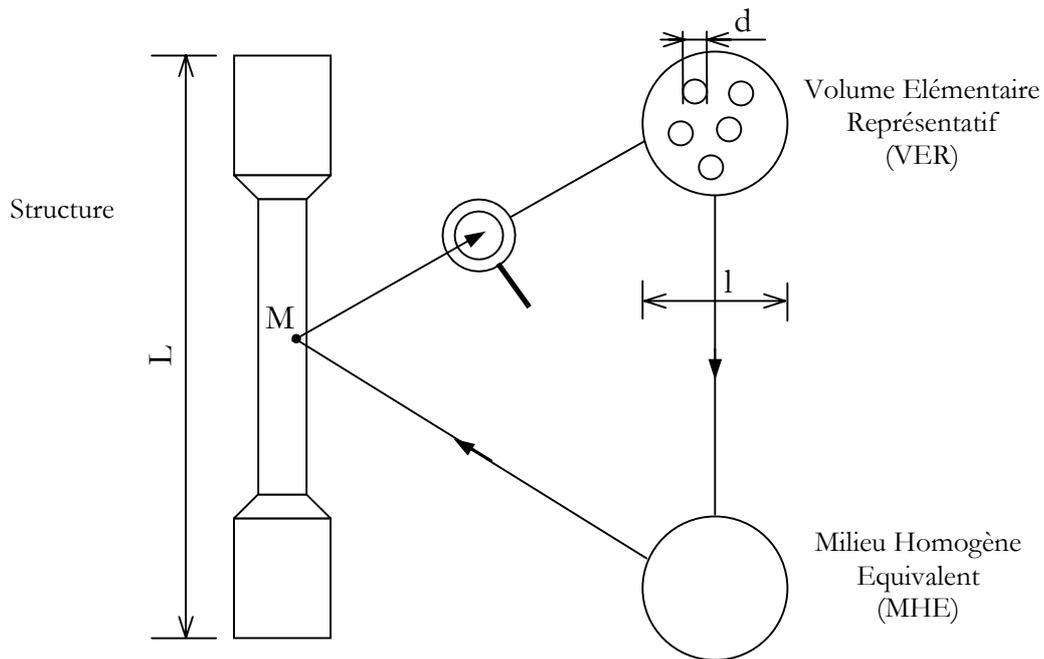


Figure 4.1 : Séparation des échelles ($d \ll l \ll L$)

4.1.1.2 Notion de « VER » et « macrohomogénéité »

Lorsque la séparation des échelles est possible, il est possible de définir un « Volume Élémentaire Représentatif » (VER) du matériau hétérogène considéré qui reste suffisamment petit par rapport aux dimensions caractéristiques des structures macroscopiques et dont le comportement mécanique global peut être affecté aux points de ces structures comme « comportement homogène équivalent » ou « comportement effectif ». Le milieu hétérogène réel pourra donc être remplacé par un « Milieu Homogène Effectif » (MHE) de telle sorte que le calcul de la structure constituée de ce matériau homogène fictif donne des champs de contraintes et de déformations macroscopiques qui soient les moyennes des champs locaux microscopiques, qui auraient pu être calculés sur la structure réelle.

4.1.2 Méthodologie de l'homogénéisation

L'objet d'étude est donc un VER du matériau hétérogène assemblage complexe de nombreux, au moins deux, éléments homogènes, de caractéristiques mécaniques et géométriques variables de l'un à l'autre. Le but est de définir un milieu homogène fictif de même géométrie externe que le VER, qui soumis aux mêmes sollicitations que lui, aurait une réponse globale identique. Cela nécessite trois séries d'opérations :

- L'étape de la « représentation » ;
- L'étape de la « localisation » ;
- L'étape de l'« homogénéisation ».

4.1.2.1 Représentation

Cette étape consiste en la description structurelle, géométrique et physique du VER. Pour cela, il faut définir la géométrie et l'échelle externe du VER et celles des ses constituants. Comment sont-ils arrangés ? De manière périodique ou aléatoire ? Aussi, il faut décrire, à ce stade, la loi de comportement ainsi que les propriétés caractéristiques de chaque élément constitutif du VER.

4.1.2.2 Localisation

Une fois le VER défini, l'étape de localisation consiste en la formulation du problème dont il fait l'objet. Dans cette démarche, pour pallier à l'absence des conditions aux limites nécessaires pour la résolution du problème, il est parfois nécessaire d'adopter des conditions en moyenne ou homogènes aux limites. Eventuellement, on pourrait adopter des hypothèses liées, à la périodicité de la structure analysée. L'étape de la localisation consiste finalement à établir les équations du problème à résoudre. On aurait pu donc obtenir de nombreuses formulations possibles selon le choix et de la modélisation du VER. Cependant, il faut respecter les limites du domaine des valeurs possibles pour les caractéristiques effectives. Ainsi, on cherche à établir des bornes ou un encadrement pour ces grandeurs relatives au comportement homogène équivalent.

4.1.2.3 Homogénéisation

L'étape d'homogénéisation consiste en l'expression du comportement effectif équivalent ainsi qu'à son estimation. L'utilisation du lemme de Hill que l'on va énoncer par la suite permet d'établir l'expression énergétique des caractéristiques effectives.

Rappel du Lemme de Hill (Hill 1963 ; [64]) :

Soient $\boldsymbol{\sigma}^*$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ deux champs respectivement de contraintes équilibrées ($\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ dans V) et de déformations compatibles ($\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{v})$) non nécessairement associés tel que \mathbf{v} est un champ de déplacement périodique. Alors, si $\boldsymbol{\sigma}^*$ vérifie des conditions de contraintes périodiques ou homogènes au contour ∂V ou si $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ vérifie des conditions de déformations périodiques ou homogènes sur ∂V , on a :

$$(4.1) \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{v}) \rangle$$

Où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne spatiale d'un tenseur ou d'un vecteur

Le lemme de Hill assure l'égalité du travail (ou la puissance) « macroscopique » et de la moyenne spatiale du travail (ou la puissance) « microscopique ». Il est alors quelquefois dénommé « condition de macrohomogénéité de Hill » ou « condition de Hill-Mandel ». Noter qu'il peut s'appliquer quel que soit le comportement. On verra ultérieurement que ce lemme joue un rôle central en homogénéisation.

4.1.2.4 Remarques

Dans la démarche présentée ci-dessus, on a considéré l'homogénéisation comme un objectif final. En réalité, certains comportements globaux sont particulièrement sensibles aux réponses locales du matériau hétérogène. Une fois les caractéristiques effectives du matériau déterminées et le calcul sur la structure homogénéisée réalisé, il faut revenir au problème de localisation, par une démarche inverse appelée « relocalisation », pour analyser les champs locaux. Dans ces circonstances, ainsi que dans celles où l'on envisage des transformations finies, il est nécessaire de réactualiser continûment la représentation de la microstructure, qui évolue elle-même avec la transformation globale.

4.1.3 Différentes méthodes d'homogénéisation

Les différentes méthodes d'homogénéisation se distinguent principalement au niveau de la localisation, ce qui est lié au choix du VER et à sa modélisation. En ce qui concerne les différentes méthodes présentées ci-dessous, on suppose que les constituants du VER sont élastiques linéaires et parfaitement collés. Aussi, on considère que les contraintes et déformations macroscopiques s'obtiennent en moyennant dans le volume du VER des contraintes et des déformations locales :

$$(4.2) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma} \, dV$$

$$(4.3) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

4.1.3.1 Théorie des modules effectifs

Considérons un VER de volume V , de contour ∂V et dont le point courant \mathbf{x} . La théorie des modules effectifs, parfois appelée méthode de Hill-Mandel (*Hill 1963*; [64]), consiste à imposer des conditions dites de contraintes homogènes et de déformations homogènes sur le contour ∂V et à déterminer les variables locales correspondantes dans V . Pour ce faire, on résout le système d'équations suivant :

$$(4.4) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{sur } V \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } V \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \text{ ou } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \\ \text{tel que } \bar{\boldsymbol{\sigma}} \text{ ou } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ est donnée} \end{cases}$$

On constate sur la formulation du problème l'absence des conditions aux limites locales au contour ∂V de V , ce qui n'assure pas l'unicité de la solution. Pour remédier à cela, tout en restant compatible avec les relations de moyenne, la théorie des modules effectifs adopte des conditions dites :

- condition de contraintes homogènes au contour laquelle impose :

$$(4.5) \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial V$$

- condition de déformations homogènes au contour laquelle impose :

$$(4.6) \quad \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial V$$

Avec ces conditions de contraintes homogènes ou de déformations homogènes, le problème local (4.4) est transformé en un problème avec conditions aux limites type forces imposées dont la solution est unique en contraintes et en déformations.

a) Tenseurs de localisation et de concentration

Les problèmes posés précédemment sont de nature linéaire. Il existe donc une correspondance linéaire entre la donnée (variable homogène macroscopique : $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ou $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$) et la solution de ces problèmes (variables locales microscopiques : \mathbf{u} ou $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ et $\boldsymbol{\sigma}$). Selon le cas où $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ou $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est donné (condition de déformations homogènes imposées ou condition de contraintes homogènes imposées), cette correspondance s'écrit respectivement :

$$(4.7) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$(4.8) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

\mathbf{A} et \mathbf{B} sont des tenseurs du quatrième ordre, appelés respectivement tenseur de localisation de déformation et tenseur de concentration des contraintes.

b) Tenseurs effectifs

En considérant les équations locales de comportement du VER et en substituant la relation de localisation des déformations (4.7), on obtient :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : \mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{or} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \\ \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \langle \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}$$

D'où on tire le tenseur des modules effectifs :

$$(4.10) \quad \tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle$$

Le tenseur des modules effectifs est donc égal à la moyenne dans V du tenseur des modules des constituants pondérée par le tenseur de localisation des déformations \mathbf{A} . De la même manière, considérant la relation de concentration des contraintes (4.8), on obtient une relation similaire pour le tenseur des souplesses effectives :

$$(4.11) \quad \tilde{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{S} : \mathbf{B} \rangle$$

c) Symétrie des tenseurs effectifs

L'utilisation du lemme de Hill permet de démontrer la symétrie des tenseurs effectifs $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{S}}$. Si on se place dans l'hypothèse de déformations homogènes au contour :

$$\begin{aligned}
 \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
 &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \langle (\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \mathbf{C} : (\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle \\
 (4.12) \quad &= \langle (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{A}^T) : \mathbf{C} : (\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \langle \mathbf{A}^T : \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}
 \end{aligned}$$

on obtient :

$$(4.13) \quad \tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{A}^T : \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle$$

Un raisonnement analogue sur le tenseur de concentration des contraintes conduit à :

$$(4.14) \quad \tilde{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{B}^T : \mathbf{S} : \mathbf{B} \rangle$$

Puisque \mathbf{C} et \mathbf{S} sont des tenseurs symétriques, on en déduit la propriété de symétrie des tenseurs effectifs, $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{S}}$.

d) Propriétés variationnelles

Soient $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{v} deux champs respectivement statiquement admissibles ($\text{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ dans V) et de déplacements cinématiquement admissibles ($\mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V), non nécessairement associés. Les principes de minimum en déplacements et en contraintes donnent respectivement les relations suivantes :

$$(4.15) \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle \leq \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle$$

$$(4.16) \quad \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\tau} \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Le tenseur des modules effectifs $\tilde{\mathbf{C}}$ peut être caractérisé de manière variationnelle par deux approches différentes mais équivalentes telles que :

- pour tout \mathbf{v} régulier dans V , tel que $\mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V :

$$(4.17) \quad \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \inf \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle$$

avec : $w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ représentant l'énergie élastique de déformations dans le déplacement \mathbf{v} .

- pour tout $\boldsymbol{\tau}$ symétrique et régulier dans V , tel que $\text{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ dans V :

$$(4.18) \quad \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = - \inf \left[\langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]$$

avec : $w^*(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\tau}$ correspondant à l'énergie élastique de contraintes $\boldsymbol{\tau}$.

Théoriquement, (4.17) et (4.18) permettent d'aboutir à des estimations par excès et par défaut de $\tilde{\mathbf{C}}$ dès lors que des champs admissibles sont connus.

En appliquant les mêmes propriétés sur le tenseur $\tilde{\mathbf{C}}^*$ (l'inverse de $\tilde{\mathbf{S}}$), on obtient :

- pour tout \mathbf{v} régulier dans V , tel que $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$(4.19) \quad \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}}^* : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \inf \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle$$

- Pour tout $\boldsymbol{\tau}$ symétrique et régulier tels que $\text{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ dans V et $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \cdot \mathbf{n}$ sur ∂V :

$$(4.20) \quad \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}}^* : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\inf \left[\langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]$$

Les propriétés (4.17) et (4.19) permettent de déduire que :

$$(4.21) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}}^* : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

pour tout $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ symétrique.

En raisonnant de manière analogue sur le tenseur des souplesses effectives $\tilde{\mathbf{S}}$ ainsi que son inverse $\tilde{\mathbf{S}}^*$ en sachant que la condition (4.17) est incluse dans (4.19), on peut déduire que :

$$(4.22) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{S}}^* : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \leq \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

pour tout $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ symétrique

Les inégalités (4.21) et (4.22) indiquent que les tenseurs des modules effectifs dépendent en toute rigueur de la condition homogène au contour choisie pour les obtenir. Le tenseur des modules (respectivement des souplesses) est plus raide (respectivement plus souple) pour l'approche en déformations homogènes que pour l'approche en contraintes homogènes.

4.1.3.2 Approximations de Voigt et Reuss

Les approximations de Voigt (respectivement Reuss) consistent à supposer que les déformations sont uniformes dans V (respectivement que les sont contraintes uniformes dans V). Il en résulte d'après la relation de localisation des déformations (4.7) (respectivement la relation de concentration des contraintes (4.8) $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (respectivement $\mathbf{B} = \mathbf{I}$), les tenseurs des modules effectifs seront donc approchés par :

$$(4.23) \quad \mathbf{C}^V = \langle \mathbf{C} \rangle \quad (\text{selon Voigt})$$

$$(4.24) \quad \mathbf{S}^R = \langle \mathbf{S} \rangle \quad (\text{selon Reuss})$$

En utilisant les propriétés variationnelles (4.18 et 2.19), on obtient les relations :

$$(4.25) \quad \boldsymbol{\Psi} : \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\Psi} \leq \boldsymbol{\Psi} : \mathbf{C}^V : \boldsymbol{\Psi} \quad (\text{selon Voigt})$$

$$(4.26) \quad \boldsymbol{\Psi} : \tilde{\mathbf{S}} : \boldsymbol{\Psi} \leq \boldsymbol{\Psi} : \mathbf{S}^R : \boldsymbol{\Psi} \quad (\text{selon Reuss})$$

Pour tout $\boldsymbol{\Psi}$ tenseur du 2nd ordre symétrique

Les relations (4.23) et (4.24) indiquent que le calcul des approximations de Voigt et Reuss ne nécessite que la connaissance des caractéristiques élastiques \mathbf{C} et \mathbf{S} de chaque phase du VER et de leur fraction volumique. Les relations (4.25) et (4.26) signifient que le tenseur des modules de Voigt (respectivement Reuss) est une estimation par excès du tenseur des modules effectifs (respectivement du tenseur des souplesses effectives).

4.1.3.3 Homogénéisation des milieux périodiques

Un milieu périodique est caractérisé par la périodicité de sa structure. Il y a trois principales raisons de s'intéresser à l'homogénéisation des milieux périodiques. La première étant qu'on rencontre fréquemment cette périodicité dans les matériaux artificiels et parfois dans certains matériaux naturels. La seconde est que les milieux périodiques se prêtent bien aux calculs numériques, sur un volume élémentaire fini du fait qu'ils admettent des conditions aux limites bien posées. (*Bendsoe et al. 1988* ; [16]), (*Bourgat 1977* ; [22]), (*Guedes et al. 1990* ; [58]), (*Marigo et al. 1987* ; [72]) donnent quelques points de repère sur ces approches numériques et de références de ces travaux. Grâce à l'avancé des moyens de calcul à l'heure actuelle, ces méthodes s'appliquent efficacement sur des structures ou des microstructures complexes (*Moulinec et al. 1995 et 1998* ; [79] - [80]) bien qu'elles aient été développées initialement sur des structures ou des microstructures simples. La troisième raison, importante sur le plan fondamental, est que l'homogénéisation périodique permet de définir rigoureusement la notion de comportement homogénéisé (*Bensoussan et al. 1978* ; [17], *Sanchez-Palencia 1974 et 1980*, [91] - [92] et *Tartar 1977* [97]). En effet, ces travaux considèrent que le rapport entre la dimension microscopique \mathbf{x} et la longueur macroscopique \mathbf{y} est un petit paramètre λ . Ainsi, on cherche classiquement des variables à double échelle $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sous la forme d'une série asymptotique :

$$(4.27) \quad \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\Phi}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda \boldsymbol{\Phi}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2 \boldsymbol{\Phi}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

où : $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ et chaque $\boldsymbol{\Phi}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est périodique par rapport à la variable macroscopique \mathbf{y} .

Les équations homogénéisées sont obtenues en faisant tendre le rapport λ vers zéro.

a) Cellule de base

Un milieu périodique est défini par une cellule de base, qui par translation le long de trois vecteurs spatiaux, reproduit toute la structure. La cellule de base n'est pas définie de manière unique. L'illustration de la *Figure 4.2* montre, par exemple, qu'elle peut être hexagonale, rectangulaire ou losangique. Sa détermination est souvent dictée par l'exploitation des conditions aux limites de périodicité.

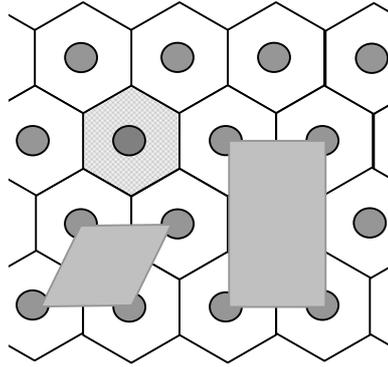


Figure 4.2 : Différents choix possibles pour la cellule de base. Fibres circulaires en réseau hexagonal, (Michel et al. 1999 ; [77])

b) Champs locaux périodiques

Dans un milieu hétérogène périodique, la géométrie du milieu est invariante par translation le long des vecteurs de périodicité, les variables locales $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ possèdent donc également cette propriété d'invariance : elles sont périodiques (Michel et al. 1999 ; [77]). $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ oscillent et fluctuent autour de leurs valeurs moyennes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. Le champ local de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ peut être décomposé en un champ moyen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ qui serait le champ de déformation si le milieu était homogène et une correction fluctuante $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')$ qui tient compte de la présence des hétérogénéités. Ce terme supplémentaire dérive d'un déplacement périodique \mathbf{u}' tandis que $\boldsymbol{\varepsilon}$ dérive de \mathbf{u} et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dérive du déplacement affine $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$. Les champs de déformations et de déplacements admettent donc la décomposition suivante :

$$(4.28) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') \\ \mathbf{u}' \text{ périodique} \end{cases}$$

La périodicité du champ de déplacement \mathbf{u}' signifie qu'il prend des valeurs identiques sur deux points, homologues par périodicité, du contour du VER (cellule hexagonale sur la Figure 4.2) telle que montre la figure 4.3.

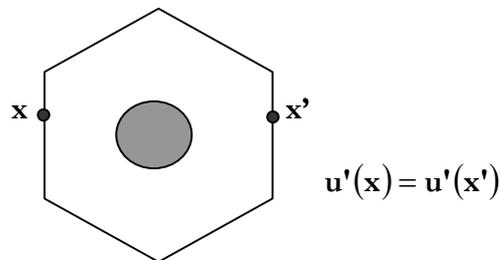


Figure 4.3 : Périodicité du champ de déplacement \mathbf{u}'

Conséquence de la périodicité de \mathbf{u}' , on note aussi les relations suivantes :

$$(4.29) \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle = \mathbf{0} \text{ et } \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

En plus d'être périodique, le champ de contraintes local $\boldsymbol{\sigma}$ est en équilibre dans tout le milieu. Il satisfait l'équilibre volumique dans V ainsi que l'équilibre d'une cellule avec les cellules voisines. La première condition se traduit par le fait que $\boldsymbol{\sigma}$ est à divergence nulle dans V . La deuxième condition indique que les vecteurs contrainte sont opposés ou anti-périodiques (*Figure 4.4*) sur des côtés opposés de ∂V soient :

$$(4.30) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \text{opposés ou anti-périodiques} \end{cases}$$

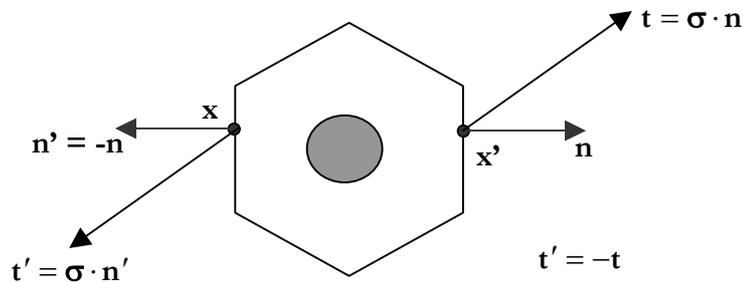


Figure 4.4 : Anti-périodicité du champ de contraintes local

4.2 Formulations du comportement thermoélastique effectif d'un matériau à structure périodique

Ce paragraphe est consacré aux formulations du comportement thermoélastique effectif d'une structure périodique. Pour ce faire, il est nécessaire de définir le VER avec lequel les démarches d'homogénéisation seront effectuées. Ensuite, les démarches d'homogénéisation des coefficients élastiques effectifs, des coefficients de conductivité thermique effectifs et des coefficients de dilatation thermique effectifs du VER seront successivement présentées.

4.2.1 Représentation du VER

Considérons un matériau biphase dont la structure est caractérisée par la répétition spatiale d'un motif élémentaire biphase comme la montre la *Figure 4.5*. On se limite à des représentations bidimensionnelles pour la clarté de l'exposé. Le VER choisi est le motif élémentaire rectangulaire de volume V , constitué par un domaine thermoélastique rectangulaire V_1 de contour ∂V_1 entourant un matériau thermoélastique V_2 . L'interface (ou le contour commun) entre les deux phases du VER est noté ∂V_2 (*Figure 4.6*). Notons que : $V = V_1 \cup V_2$.

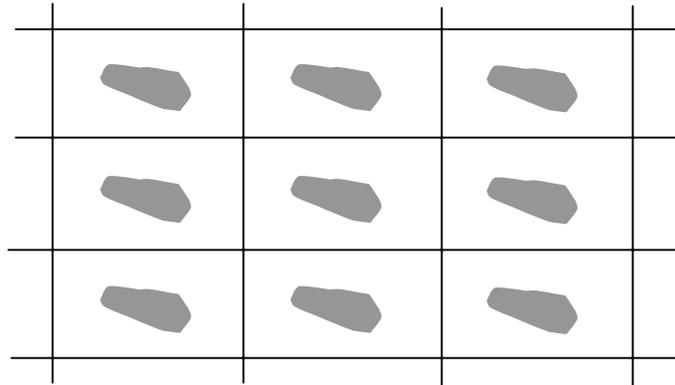


Figure 4.5 : Structure périodique d'un matériau biphasé

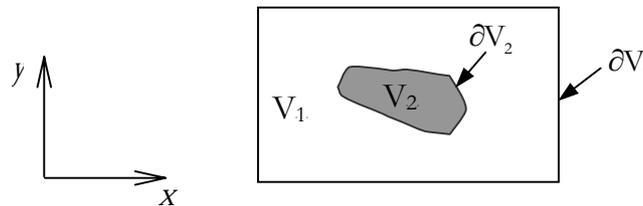


Figure 4.6 : Description du VER

4.2.2 Homogénéisation des coefficients de conductivité thermique du VER

4.2.2.1 Position du problème thermique

On considère que le transfert de chaleur s'effectue par conduction en régime permanent et qu'aucune source de chaleur volumétrique n'intervient dans V . L'équilibre thermique du VER s'exprime par les équations (4.31a et c). Comme le vecteur densité de flux de chaleur conductif \mathbf{q} est un champ périodique, les vecteurs densité de flux de chaleur sont, par conséquent, anti-périodiques sur son contour (4.31b). La conduction thermique des constituants du VER est régie par loi de Fourier (4.31d). Elle constitue la relation locale entre le vecteur densité de flux de chaleur, le gradient de température et le tenseur de conductivité thermique locale $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$. On suppose que le champ de température local, T , peut être décomposé en une partie linéaire \bar{T} , champ des températures du VER s'il était homogène, et une autre partie fluctuante périodique T' due à l'hétérogénéité (4.31e). T' appartient à l'espace fonctionnel :

$$\mathbf{D} = \left\{ \varphi(\mathbf{x}) / \varphi(\mathbf{x}) \text{ périodique sur } \partial V_1 ; \langle \varphi \rangle = 0 \text{ sur } V \right\}.$$

En résumé, le problème thermique à résoudre se présente donc sous la forme du système d'équations suivant :

$$(4.31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\mathbf{q}) = 0 & \text{sur } V \quad (a) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} & \text{sur } \partial V_1 \quad (b) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \text{ continu au travers} & \partial V_2 \quad (c) \\ \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \text{grad}(\mathbf{T}) & \text{dans } V \quad (d) \\ T = \bar{T} + T' = \bar{\chi} \cdot \mathbf{x} + T' & \text{avec } T' \in D \quad (e) \\ \bar{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{q} \rangle \text{ et } \overline{\text{grad}(T)} = \langle \text{grad}(T) \rangle & \quad (f) \end{array} \right.$$

Compte tenu de la macrohomogénéité du VER, la loi de conduction macroscopique homogénéisée peut être définie, d'après le lemme de Hill (4.1), par la relation entre la moyenne spatiale du vecteur flux de chaleur conductif et la moyenne spatiale du gradient de température :

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{q} \rangle &= -\tilde{\mathbf{k}} \cdot \langle \text{grad}(T) \rangle \\ \Leftrightarrow \bar{\mathbf{q}} &= -\tilde{\mathbf{k}} \cdot \overline{\text{grad}(T)} \end{aligned}$$

Aussi, l'application du lemme de Hill aux milieux périodiques autorise le « chargement en moyenne ou homogène ». La méthode proposée, ici, consiste à imposer au VER un gradient thermique homogène macroscopique tel que :

$$(4.33) \quad \overline{\text{grad}(T)} = \langle \text{grad}(T) \rangle = \bar{\chi}$$

4.2.2.2 Expression du tenseur de conductivité thermique effectif

En substituant l'expression de la loi de comportement (4.31d) des constituants du VER dans l'équation de conservation de la chaleur (4.31a), on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(4.34) \quad \begin{aligned} \text{div}\{-\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)\} &= \text{div}\{\mathbf{k} \cdot (\bar{\chi} + \text{grad}(T'))\} = 0 \\ \Leftrightarrow \text{div}\{\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T')\} &= -\bar{\chi} \cdot \text{div}(\mathbf{k}) \\ &\text{tel que } T' \text{ périodique} \end{aligned}$$

La relation (4.34) apparaît comme une équation sur T' , avec un terme source dépendant linéairement de $\bar{\chi}$ imposée. En admettant la décomposition en états élémentaires de $\bar{\chi}$ suivante :

$$(4.35) \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}_i \mathbf{e}_i$$

où : \mathbf{e}_i représente le vecteur de base dans la direction i

T' peut se mettre sous la forme :

$$(4.36) \quad T' = \bar{\chi}_i w_i$$

où : w_i est la solution de (4.34) lorsque : $\bar{\chi} = \mathbf{e}_i$

Or :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot (\bar{\chi} + \text{grad}(T'))$$

alors :

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{q}} &= -\langle \mathbf{k} \rangle \cdot \bar{\chi} - \langle \mathbf{k} \cdot \text{grad}(\bar{\chi}_i w_i) \rangle \\
 (4.37) \quad &= -\langle \mathbf{k} \rangle \cdot \bar{\chi} - \langle \mathbf{k} \cdot \text{grad}(w) \rangle \cdot \bar{\chi} \\
 &= -\langle \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{k} \cdot \text{grad}(w) \rangle \cdot \bar{\chi} = -\tilde{\mathbf{k}} \cdot \overline{\text{grad}(T)}
 \end{aligned}$$

d'où l'expression du tenseur de conductivité thermique homogène équivalent du VER :

$$(4.38) \quad \tilde{\mathbf{k}} = \langle \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{k} \cdot \text{grad}(w) \rangle$$

Le coefficient de conductivité thermique effectif est la somme de la moyenne sur le VER des coefficients de conductivité thermique de ses constituants et d'un terme correcteur lié à l'hétérogénéité de w . Il est possible donc de donner une estimation de la conductivité thermique homogène équivalente dès que w est connu.

4.2.2.3 Résolution du problème par la méthode des éléments finis

a) Formulation variationnelle en température

Soit τ' un champ de température périodique (thermiquement admissible), alors :

$$\begin{aligned}
 &\int_V \text{div}(\mathbf{q}) \cdot \tau' dV = 0 \\
 (4.39) \quad &\Leftrightarrow \int_V \text{div}(\mathbf{q} \cdot \tau') dV - \int_V \mathbf{q} \cdot \text{grad}(\tau') dV = 0
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de divergence et comme τ' doit prendre des valeurs identiques sur les faces opposées de ∂V tandis que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ y prend des valeurs opposées, le premier terme de la relation (4.39) s'annule, soit :

$$(4.40) \quad \int_V \text{div}(\mathbf{q} \cdot \tau') dV = \int_{\partial V} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \cdot \tau' dS = 0$$

Aussi, en tenant compte de la loi de conduction locale, la relation (4.39) devient donc :

$$\begin{aligned}
 &\int_V \{ -\mathbf{k} \cdot \text{grad}(T) \} \cdot \text{grad}(\tau') dV = 0 \\
 &\Leftrightarrow \int_V \{ \mathbf{k} \cdot (\bar{\chi} + \text{grad}(T')) \} \cdot \text{grad}(\tau') dV = 0 \\
 (4.41) \quad &\Leftrightarrow \int_V \mathbf{k} \cdot \text{grad}(T') \cdot \text{grad}(\tau') dV + \int_V \mathbf{k} \cdot \bar{\chi} \cdot \text{grad}(\tau') dV = 0
 \end{aligned}$$

Sous forme variationnelle, le problème s'écrit comme suit :

$$(4.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T' \text{ périodique tel que :} \\ \langle \text{grad}(\tau') \cdot \mathbf{k} \cdot \text{grad}(T') \rangle = -\langle \text{grad}(\tau') \cdot \mathbf{k} \cdot \bar{\chi} \rangle \text{ pour tout } \tau' \text{ périodique} \end{array} \right.$$

b) Discrétisation en éléments finis

Posons :

$$(4.43) \quad \begin{cases} T' = [\mathbf{N}]\{T'\} \\ \tau' = [\mathbf{N}]\{\tau'\} \end{cases}$$

où : $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions d'interpolation

et $\{T'\}$ et $\{\tau'\}$ sont les valeurs nodales discrètes respectives de T' et τ' .

Si $[\nabla]$ est la matrice opérateur différentiel, on pose :

$$(4.44) \quad [\mathbf{B}] = [\nabla][\mathbf{N}]$$

Après discrétisation, le problème équivalent s'écrit finalement :

$$(4.45) \quad \begin{cases} \text{Chercher } \{T'\} \text{ périodique tel que} \\ [\mathbf{A}]\{T'\} = \{\psi\} \end{cases}$$

$$\text{avec : } [\mathbf{A}] = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{B}] dV, \text{ la matrice de conductivité thermique}$$

$$\text{et } \{\psi\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{k}] dV \{\bar{\chi}\}, \text{ un vecteur flux nodal}$$

c) Pilotage en gradient de température homogène

En adoptant un pilotage en gradient des températures homogène, le second membre de l'équation (4.45) va se mettre sous la forme :

$$(4.46) \quad \{\psi\} = -[\bar{\mathbf{A}}]\{\bar{\chi}\}$$

$$\text{tel que : } [\bar{\mathbf{A}}] = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{k}] dV$$

La résolution de l'équation (4.45) peut être réalisée de manière classique. On préfère ainsi adopter cette approche qui est pratique avec un code de calcul aux éléments finis.

4.2.2.4 Procédure numérique

Le tenseur de conductivité thermique homogène effectif s'écrit sous la forme :

$$(4.47) \quad \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_1 \\ \bar{\chi}_2 \\ \bar{\chi}_3 \end{Bmatrix}$$

Note : Afin d'alléger les écritures, on adopte les correspondances suivantes pour les trois directions de l'espace : $\{x \leftrightarrow 1, y \leftrightarrow 2, z \leftrightarrow 3\}$.

L'algorithme ci-dessous présente la procédure numérique qui détermine les composantes \tilde{k}_{ij} du tenseur de conductivité homogénéisé $\tilde{\mathbf{k}}$:

- [1] Le VER est discrétisé en éléments finis.
- [2] On impose un gradient de température homogène : $\bar{\chi} = \bar{\chi}_i e_i$
 - On cherche $\{T'\}$ périodique solution de (4.45) tel que (4.46).
 - Une fois qu'on connaît $\{T'\}$, son gradient, la densité de flux de chaleur (4.31d) ainsi que la moyenne spatiale de la densité de flux de chaleur (4.31f) peuvent être calculés.
- [3] Maintenant, on a des informations sur les composantes du tenseur de conduction thermique homogénéisé \tilde{k}_{ij} :

$$(4.48) \quad \tilde{k}_{ij} = \bar{q}_i / \bar{\chi}_j$$

Cette procédure numérique a été mise en œuvre dans Cast3M.

4.2.3 Homogénéisation des propriétés élastiques du VER

4.2.3.1 Position du problème

Le VER est en équilibre volumique dans V et aussi avec les cellules voisines (4.49a, b et c). La loi de comportement de ses constituants est élastique linéaire dont la raideur est $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x})$ telle que \mathbf{x} représente le point courant dans son volume (4.49d). L'hypothèse liée à la périodicité de sa structure permet d'admettre que le champ de déplacement ou des déformations locales peut être décomposé en un champ homogène et un champ fluctuant périodique (4.49e). Par définition, le champ des contraintes et des déformations homogènes macroscopiques est égal, respectivement, à la moyenne spatiale du champ des contraintes et des déformations locales microscopiques (4.49f). La position du problème local se présente, ainsi, sous la forme du système d'équations suivant :

$$(4.49) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{sur } V & (a) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \text{continu sur } \partial V_2 & (b) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V_1 & (c) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } V & (d) \\ \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' & \text{avec } \mathbf{u}' \text{ x-périodique} & (e) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \text{ et } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle & & (f) \end{cases}$$

La loi de comportement macroscopique homogénéisée peut s'écrire en fonction du champ des contraintes macroscopiques et le champ des déformations macroscopiques :

$$(4.50) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

4.2.3.2 Expression du tenseur d'élasticité effectif

En substituant l'expression de la loi de comportement des constituants du VER (4.49d) dans l'équation d'équilibre volumique (4.49a), on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(4.51) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}\{\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\} &= \operatorname{div}\{\mathbf{C} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'))\} = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')\} &= -\operatorname{div}(\mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad \text{càd} \quad \frac{\partial}{\partial x_\beta} \{C_{\alpha\beta kl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}')\} = -\frac{\partial C_{\alpha\beta ij}}{\partial x_\beta} \bar{\varepsilon}_{kl} \\ &\text{avec } \mathbf{u}' \text{ périodique} \end{aligned}$$

La relation (4.51) apparaît comme une équation en \mathbf{u}' , avec un terme source dépendant linéairement de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ imposée. En admettant la décomposition en états élémentaires de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ telle que :

$$(4.52) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}_{ij} \mathbf{i}^{ij} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\bar{\varepsilon}_{31} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix}$$

alors, \mathbf{u}' peut se mettre sous la forme :

$$(4.53) \quad \mathbf{u}' = \bar{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{ij}$$

où : $\boldsymbol{\omega}^{ij}$ est le vecteur solution de (4.51) lorsque : $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{i}^{ij}$

Autrement dit, $\boldsymbol{\omega}$ est la solution de l'équation :

$$(4.54) \quad \Leftrightarrow \operatorname{div}\{\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega})\} = -\operatorname{div}(\mathbf{C}) \quad \text{càd} \quad \frac{\partial}{\partial x_\beta} \{C_{\alpha\beta kl} \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\omega}^{ij})\} = -\frac{\partial C_{\alpha\beta ij}}{\partial x_\beta}$$

On remarque que $\boldsymbol{\omega}$ ne dépend que la distribution spatiale de la raideur élastique \mathbf{C} . Les contraintes peuvent être calculées une fois qu'on a déterminé $\boldsymbol{\omega}$. Par la suite, le tenseur d'élasticité effectif est obtenu en appliquant le lemme de Hill.

En effet,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')]$$

alors :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \mathbf{C} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega}) \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \mathbf{C} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\omega}^{ij}) \rangle$$

$$(4.55) \quad \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \mathbf{C} \rangle + \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega}) \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

d'où, en identifiant, l'expression du tenseur d'élasticité homogénéisé :

$$(4.56) \quad \tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} \rangle + \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega}) \rangle \quad \text{càd} \quad \tilde{C}_{ijkl} = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijmn} \varepsilon_{mn}(\omega^{kl}) \rangle$$

La relation (4.56) montre que le tenseur d'élasticité effectif est la somme de la moyenne sur le VER des coefficients élastiques de ses constituants et d'un terme correcteur lié à l'hétérogénéité (représentée par le trou ici). L'estimation des coefficients élastiques dépend nécessairement de la connaissance de $\boldsymbol{\omega}$ paramètre du correcteur. Cependant, la détermination de $\boldsymbol{\omega}$ n'est toujours pas évidente. Il est possible d'obtenir une approximation de la solution par la méthode des éléments finis.

4.2.3.3 Résolution du problème par la méthode des éléments finis

La décomposition du champ de déplacement local conduit à résoudre le problème (4.49) en \mathbf{u}' en supposant fixée la partie homogène $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$. La formulation variationnelle suivante permet de démontrer l'existence et l'unicité l'inconnue \mathbf{u}' .

a) Formulation variationnelle en déplacement

En multipliant l'équation d'équilibre par un champ de déplacement périodique \mathbf{v}' , cinématiquement admissible, et en intégrant par parties sur le volume V du VER, on obtient la formulation faible du problème mécanique, également connue sous le nom de « Principe des Travaux Virtuels » :

$$(4.57) \quad \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{v}' dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}') dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

Le théorème de la divergence permet d'intégrer sur les contours du VER et comme \mathbf{v}' doit prendre des valeurs identiques sur les faces opposées de V tandis que $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ y prend des valeurs opposées, le premier terme de la relation (4.57) s'annule, soit :

$$(4.58) \quad \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}') dV = \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}' dS = 0$$

$$(4.59) \quad \Rightarrow \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

En substituant l'expression de la loi de comportement dans la relation (4.59), on obtient :

$$\int_V [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{C} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}' \text{ périodique}$$

Le problème mécanique à résoudre s'écrit sous la forme variationnelle suivante :

$$(4.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \mathbf{u}' \text{ périodique tel que :} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') \rangle = -\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \quad \forall \mathbf{v}' \text{ périodique} \end{array} \right.$$

b) Discrétisation en éléments finis

Posons :

$$(4.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}' = [\mathbf{N}]\{\mathbf{u}'\} \\ \mathbf{v}' = [\mathbf{N}]\{\mathbf{v}'\} \end{array} \right.$$

où : $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions d'interpolation et $\{\mathbf{u}'\}$ et $\{\mathbf{v}'\}$ sont les valeurs nodales discrètes respectives de \mathbf{u}' et \mathbf{v}' .

Le problème équivalent s'écrit donc finalement :

$$(4.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \{\mathbf{u}'\} \text{ périodique tel que} \\ [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{f}\} \end{array} \right.$$

avec : $[\mathbf{K}] = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{v}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] dV$

et $\{\mathbf{f}\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{v}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] dV \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$

c) Pilotage en déformations homogènes en chaque point du volume

Lorsque la déformation homogène macroscopique $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ est prescrite en chaque point du VER, le second membre de l'équation algébrique (4.62) prend la forme suivante :

$$(4.63) \quad \{\mathbf{f}\} = -[\bar{\mathbf{K}}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$$

tel que $[\bar{\mathbf{K}}] = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{v}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] dV$

Dans ce cas, l'équation algébrique (4.62) peut être résolue classiquement. La mise en œuvre de cette approche est pratique avec un code de calcul aux éléments finis formulés en déplacement.

4.2.3.4 Procédure numérique

Le comportement homogène équivalent s'écrit sous la forme :

$$(4.64) \quad \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1133} & \tilde{C}_{1123} & \tilde{C}_{1131} & \tilde{C}_{1112} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2233} & \tilde{C}_{2223} & \tilde{C}_{2231} & \tilde{C}_{2212} \\ \tilde{C}_{3311} & \tilde{C}_{3322} & \tilde{C}_{3333} & \tilde{C}_{3323} & \tilde{C}_{3331} & \tilde{C}_{3312} \\ \tilde{C}_{2311} & \tilde{C}_{2322} & \tilde{C}_{2333} & \tilde{C}_{2323} & \tilde{C}_{2331} & \tilde{C}_{2312} \\ \tilde{C}_{3111} & \tilde{C}_{3122} & \tilde{C}_{3133} & \tilde{C}_{3123} & \tilde{C}_{3131} & \tilde{C}_{3112} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1233} & \tilde{C}_{1223} & \tilde{C}_{1231} & \tilde{C}_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{31} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix}$$

L'algorithme suivant permet d'obtenir la matrice d'élasticité $\tilde{\mathbf{C}}$:

- [1] Le VER est discrétisé en éléments finis.
- [2] On impose des déformations homogènes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}_{ij} \cdot \mathbf{i}^i \mathbf{j}^j$ en chaque point du volume.
 - On cherche $\{\mathbf{u}'\}$ solution de (4.62) tel que (4.63).
 - Une fois qu'on connaît $\{\mathbf{u}'\}$, les champs locaux des déformations et des contraintes locaux (4.49d et e) peuvent être calculés. On en déduit par la suite la moyenne spatiale des contraintes selon (4.49f).
- [3] Enfin, on a des informations sur la composante du tenseur d'élasticité homogénéisé :

$$(4.65) \quad \tilde{C}_{ijkl} = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\bar{\varepsilon}_{kl}} & \text{si } k = l \quad (\text{a}) \\ \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{2\bar{\varepsilon}_{kl}} & \text{si } k \neq l \quad (\text{b}) \end{cases}$$

En résumé, les composantes de la matrice d'élasticité effective (4.64) sont donc déterminées numériquement en effectuant 3 essais d'extension simple (4.65a) et 3 essais de cisaillement simple (4.65b). La mise en œuvre de cette méthode est réalisée avec le code de calcul **Cast3M**.

Les expressions des composantes de la matrice des rigidités équivalentes en fonction des coefficients d'élasticité sont définies, d'une manière générale, par les relations suivantes (*Berggren et al.*, [18] ou *Gürdal et al.*, 1999 (in *Stegman et al.*, [95])) :

$$(4.66) \quad \begin{aligned} \tilde{C}_{1111} &= \frac{\tilde{E}_1(1 - \tilde{\nu}_{23}\tilde{\nu}_{32})}{\Delta} & \tilde{C}_{1122} &= \frac{\tilde{E}_1(\tilde{\nu}_{21} + \tilde{\nu}_{23}\tilde{\nu}_{31})}{\Delta} & \tilde{C}_{1133} &= \frac{\tilde{E}_1(\tilde{\nu}_{31} + \tilde{\nu}_{21}\tilde{\nu}_{32})}{\Delta} \\ \tilde{C}_{2211} &= \frac{\tilde{E}_2(\tilde{\nu}_{12} + \tilde{\nu}_{13}\tilde{\nu}_{32})}{\Delta} & \tilde{C}_{2222} &= \frac{\tilde{E}_2(1 - \tilde{\nu}_{13}\tilde{\nu}_{31})}{\Delta} & \tilde{C}_{2233} &= \frac{\tilde{E}_2(\tilde{\nu}_{32} + \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{31})}{\Delta} \\ \tilde{C}_{3311} &= \frac{\tilde{E}_3(\tilde{\nu}_{13} + \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{23})}{\Delta} & \tilde{C}_{3322} &= \frac{\tilde{E}_3(\tilde{\nu}_{23} + \tilde{\nu}_{13}\tilde{\nu}_{21})}{\Delta} & \tilde{C}_{3333} &= \frac{\tilde{E}_3(1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21})}{\Delta} \end{aligned}$$

avec : $\Delta = 1 - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{21} - \tilde{\nu}_{23}\tilde{\nu}_{32} - \tilde{\nu}_{31}\tilde{\nu}_{13} - \tilde{\nu}_{12}\tilde{\nu}_{23}\tilde{\nu}_{31} - \tilde{\nu}_{13}\tilde{\nu}_{21}\tilde{\nu}_{32}$

$$(4.67) \quad \begin{cases} \tilde{C}_{2323} = \tilde{G}_{23} \\ \tilde{C}_{3131} = \tilde{G}_{31} \\ \tilde{C}_{1212} = \tilde{G}_{12} \end{cases}$$

\tilde{G}_{ij} ($i \neq j$) sont les modules de cisaillement effectifs, \tilde{E}_i sont les modules d'Young effectifs et $\tilde{\nu}_{ij}$ sont les coefficients de Poisson effectifs tel que : $\tilde{E}_i \tilde{\nu}_{ji} = \tilde{E}_j \tilde{\nu}_{ij}$

Pour un matériau orthotrope, les modules de cisaillement effectifs sont directement identifiés par les relations (4.67) tandis que la détermination des modules d'Young effectifs et des coefficients de Poisson effectifs nécessite la résolution d'un système de 9 équations non linéaires (4.66) à 9 inconnues (3 modules d'Young et 6 coefficients de Poisson). La résolution de ce système est réalisée avec le logiciel **Mathematica** puisqu'il est impossible de la traiter analytiquement.

Pour un matériau isotrope, il y a deux coefficients élastiques indépendants E et ν tel que :

$$(4.68) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Pour un matériau isotrope transverse, si on prend dans un repère rectangulaire le plan défini par les directions 1 et 2 comme plan d'isotropie alors, il y a 5 coefficients indépendants pour décrire le comportement élastique : $(E_1, E_3, \nu_{21}, \nu_{23}, G_{31})$ tels que $E_1 = E_2$, $\nu_{12} = \nu_{21}$, $\nu_{13} = \nu_{23}$ et $G_{23} = G_{31}$ avec :

$$(4.69) \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \text{ et } G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$$

4.2.4 Homogénéisation des coefficients de dilatation thermique du VER

4.2.4.1 Formulation du problème local

Le tenseur des contraintes thermoélastiques, continu sur ∂V_2 , est en équilibre volumique sur lui-même et avec les cellules périodiques adjacentes (4.70a et b). Le vecteur densité de flux de chaleur est également continu à travers ∂V_2 et anti-périodique sur ∂V_1 (4.70c). La loi de comportement de ses constituants est thermoélastique linéaire dont la raideur est $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x})$ et le tenseur thermique est $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$ tels que \mathbf{x} représente le point courant dans son volume (4.70d). La décomposition du champ de déplacement thermoélastique ou du champ des déformations thermoélastiques local en un champ homogène et un champ fluctuant périodique (4.70e) est maintenue. La définition de la moyenne spatiale des champs des contraintes et des déformations reste valable (4.70f). La position du problème local se résume par le système d'équations suivant :

$$(4.70) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & \text{sur } V & (a) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & \text{continu sur } \partial V_2 \text{ et anti-périodique sur } \partial V_1 & (b) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} & \text{continu sur } \partial V_2 \text{ et anti-périodique sur } \partial V_1 & (c) \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\kappa} T & \text{dans } V & (d) \\ \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' & \text{avec } \mathbf{u}' \text{ x-périodique} & (e) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \text{ et } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle & & (f) \end{cases}$$

On considère que la loi de comportement thermoélastique homogénéisé est définie par la relation entre les variables d'état (champ des contraintes, champ de déformation et la variation spatiale de température) homogènes telle que :

$$(4.71) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \bar{T} \quad \text{ou} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \bar{T}$$

avec $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$: le tenseur de dilatation thermique effectif

et $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$: le tenseur thermique effectif

4.2.4.2 Expression du tenseur de dilatation thermique effectif

Pour déterminer le coefficient de dilatation thermique effectif, on impose simultanément au VER un champ de variation de température $T = \bar{T} = \text{cte}$ uniforme et un champ de déformations homogènes mécaniques $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ à chaque point de son volume.

On cherche \mathbf{u}' , un champ de déplacement thermoélastique périodique sur ∂V_1 , solution du problème (4.70) pour en déduire les paramètres macroscopiques effectifs.

Pour tout \mathbf{v}' périodique sur ∂V_1 , on a :

$$(4.72) \quad \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}') C_{ijmn} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}(\mathbf{u}') dV = - \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}') C_{ijmn} dV \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mn} + \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}') \boldsymbol{\kappa}_{ij} dV \bar{T}$$

dont la solution s'écrit :

$$(4.73) \quad \mathbf{u}' = \bar{\varepsilon}_{ij} \omega^{ij} + T \mathbf{v}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbf{u} = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j + \bar{\varepsilon}_{kl} \omega_i^{kl} + T v_i$$

Et le tenseur des déformations thermoélastiques correspondant s'écrit :

$$(4.74) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \bar{\varepsilon}_{kl} + \varepsilon_{mn}(\omega^{kl}) \bar{\varepsilon}_{kl} + T \varepsilon_{mn}(v)$$

On établit l'expression du tenseur de thermique effectif en raisonnant sur le tenseur de contrainte thermoélastique :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\bar{\varepsilon}_{kl} + \varepsilon_{mn}(\omega^{kl}) \bar{\varepsilon}_{kl} + T \varepsilon_{mn}(v) \right) - \kappa_{ij} T$$

dont la moyenne spatiale est :

$$(4.75) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \{ C_{ijkl} + C_{ijmn} \varepsilon_{mn}(\omega^{kl}) \} \bar{\varepsilon}_{kl} + (C_{ijkl} \varepsilon_{mn}(\mathbf{v}) - \chi_{ij}) \mathbf{T} \rangle \\ &= \langle C_{ijkl} + C_{ijmn} \bar{\varepsilon}_{mn}(\omega^{kl}) \rangle \bar{\varepsilon}_{kl} + \langle C_{ijkl} \varepsilon_{mn}(\mathbf{v}) - \chi_{ij} \rangle \mathbf{T} \end{aligned}$$

Or, la loi de comportement thermoélastique macroscopique est : $\bar{\sigma}_{ij} = \tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} - \mathbf{T} \tilde{\chi}_{ij}$

En identifiant, on obtient l'expression du tenseur thermique effectif :

$$(4.76) \quad \tilde{\chi}_{ij} = \langle \chi_{ij} \rangle - \langle C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) \rangle$$

On remarque que le tenseur thermique effectif est la somme de la moyenne sur la cellule périodique des coefficients thermiques de ses constituants et d'un terme correcteur lié à l'hétérogénéité \mathbf{v} .

Remarque : Lorsque le tenseur de dilatation thermique est uniforme, indépendant des coordonnées \mathbf{x} (cas où l'hétérogénéité est représentée par un ou des trou(s)), le tenseur thermique effectif peut être réécrit sous une autre forme.

Rappelons que le tenseur ω^{kl} est une réponse unitaire au chargement unitaire $i^{kl} = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$. Il vérifie donc :

$$(4.77) \quad \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\omega^{kl}) dV = - \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} dV : i^{kl}$$

Le champ vectoriel périodique \mathbf{v} vérifie :

$$(4.78) \quad \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV = \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\kappa} dV = - \int_{V_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} dV : (-\alpha_{kl} i^{kl})$$

Puisque $\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\alpha}$ est supposé uniforme.

Par superposition des deux dernière équations, on en déduit que :

$$(4.79) \quad \mathbf{v} = -\alpha_{kl} \omega^{kl}$$

La substitution dans l'expression générale du tenseur thermique effectif donne :

$$(4.80) \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\alpha}$$

La multiplication par $\tilde{\mathbf{S}}$ conduit à :

$$(4.81) \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}$$

Le coefficient de dilatation thermique effectif du VER est égal à celui du matériau constitutif lorsque celui-ci est homogène et isotrope.

4.2.4.3 Résolution du problème par la méthode des éléments finis

Le calcul du champ de déplacement thermoélastique périodique \mathbf{u}' s'apprête facilement avec la méthode des éléments finis, ce que nous allons montrer dans les deux sous paragraphes qui suivent.

a) Formulation variationnelle en déplacement

Soit \mathbf{v}' un champ de déplacement périodique (cinématiquement admissible), alors :

$$(4.82) \quad \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{v}' dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v}') dV - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad}(\mathbf{v}') dV = 0$$

Or :

$$\int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v}') dV = \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}' dS = 0$$

De la relation (4.82), il reste :

$$(4.83) \quad \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

En écrivant la contrainte d'origine thermique comme suit :

$$(4.84) \quad \boldsymbol{\sigma}_T = -\boldsymbol{\kappa} T$$

L'expression de la loi de comportement thermoélastique peut, donc, se mettre sous la forme :

$$(4.85) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}_T$$

La relation (4.83) peut, donc, s'écrire comme suit :

$$(4.86) \quad \int_V [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}_T] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

En appliquant l'hypothèse de décomposition du champ de déformation élastique local et en affectant l'indice M au terme des déformations macroscopiques homogènes (pour indiquer que celui ci est de nature mécanique), la relation (4.86) devient :

$$(4.87) \quad \int_V [\mathbf{C} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')) + \boldsymbol{\sigma}_T] : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}_T : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') dV = 0$$

Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$(4.88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}' \text{ périodique tel que :} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') \rangle = -\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') : \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_T : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \rangle \text{ pour tout } \mathbf{v}' \text{ périodique} \end{array} \right.$$

b) Discrétisation aux éléments finis

Après discrétisation par éléments finis, le problème équivalent s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \{\mathbf{u}'\} \text{ périodique tel que :} \\ \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] dV \{\mathbf{u}'\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] dV \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M\} - \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{T} \{\mathbf{v}'\}^T [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\sigma}_T\} dV \end{array} \right.$$

Soit :

$$(4.89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \{\mathbf{u}'\} \text{ périodique tel que :} \\ [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{f}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\} + \{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}_T}\} \end{array} \right.$$

avec : $\{\mathbf{f}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] dV \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M\}$ qui représente le vecteur force nodale correspondant au champ de déformation mécanique homogène imposé $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M$,

et $\{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}_T}\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_T\} dV$ est le vecteur force nodale correspondant au champ des contraintes thermiques $\boldsymbol{\sigma}_T$.

4.2.4.4 Procédure numérique

[1] Le VER est discrétisé en éléments finis.

[2] **Sollicitation thermique**

- On impose un champ de température uniforme T
- On en déduit les quantités suivantes :

$$(4.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_T = -\boldsymbol{\kappa} T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\alpha} T \end{array} \right. \text{ dans chaque élément du VER}$$

[3] **Sollicitation mécanique :**

Il y a deux résolutions à faire : la première consiste à calculer le champ des déplacements périodiques essentiellement de nature mécanique et la seconde consiste à calculer le champ des déplacements périodiques thermomécaniques.

- On impose des déformations homogènes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M$ en chaque point du volume :

1^{ère} résolution :

- ✓ On cherche $\{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{u}'_M\}$, **champ des déplacements périodiques élastiques**, solution de :

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{f}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\}, \text{ voir la relation (4.62)}$$

- ✓ Une fois qu'on connaît $\{\mathbf{u}'_M\}$, les champs des déformations et des contraintes élastiques locaux ainsi que leur moyenne peuvent être calculés :

$$(4.91) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_M) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'_M) \\ \boldsymbol{\sigma}_M = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_M) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M = \langle \boldsymbol{\sigma}_M \rangle \end{cases} \quad \text{dans chaque élément}$$

2^{ème} résolution :

- ✓ On cherche $\{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{u}'_{TM}\}$, **champ des déplacements périodiques thermoélastiques**, solution de :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{f}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\} + \{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}_T}\}, \text{ voir relation (4.89)}$$

$$\text{tel que : } \{\mathbf{f}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] dV \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M\}$$

$$\text{et } \{\mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}_T}\} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_T\} dV$$

- ✓ Une fois qu'on connaît $\{\mathbf{u}'_{TM}\}$, le champ des déformations thermoélastique local ainsi que sa moyenne peuvent être calculés :

$$(4.92) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{TM}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_T + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'_{TM}) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{TM} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{TM}) \rangle \end{cases} \quad \text{dans chaque élément}$$

Or le champ des déformations thermoélastiques est la somme du champ des déformations homogènes mécaniques imposées, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M$, avec le champ des déformations d'origine thermique, $\boldsymbol{\varepsilon}_T$, et le champ des déformations correspondant au champ des déplacements périodiques thermoélastiques, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'_{TM})$.

[4] Enfin, on a des renseignements sur le coefficient de dilatation thermique effectif :

$$(4.93) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}_{\text{élastique}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \bar{\mathbf{T}}}_{\text{Thermique}} \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{TM} = \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \bar{\mathbf{T}}$$

D'où on tire finalement :

$$(4.94) \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{T}}} \left\{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{TM} - \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M \right\}$$

Remarques :

Les calculs des champs mécaniques et thermiques sont indépendants. A la limite, on pourrait se contenter d'imposer un champ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = 0$, ce qui reviendrait à n'étudier que le problème thermique.

Autrement dit, le comportement dilatométrique homogène en absence de chargement mécanique (4.95) suffit à déterminer le coefficient de dilatation thermique effectif.

En effet,

$$(4.95) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \bar{T}$$

D'après la lemme de Hill, on peut écrire que :

$$(4.96) \quad \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \bar{T}) = \langle (\mathbf{B} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}) : \boldsymbol{\alpha} T \rangle$$

Où \mathbf{B} est le tenseur de localisation des contraintes.

D'où on identifie que :

$$(4.97) \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \langle \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{B} \rangle$$

La relation (4.97) montre que le tenseur de dilatation thermique effectif du VER est la moyenne spatiale des tenseurs de dilatation thermique, des constituants du VER, pondérés par le tenseur de localisation des contraintes.

Lorsque le VER est constitué par 2 phases isotropes et le solide homogénéisé est isotrope, on a :

$$(4.98) \quad \begin{cases} \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{I} = c_1 \mathbf{B}_1 + c_2 \mathbf{B}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = c_1 \boldsymbol{\alpha}_1 : \mathbf{B}_1 + c_2 \boldsymbol{\alpha}_2 : \mathbf{B}_2 \end{cases}$$

Tels que c_i , α_i et \mathbf{B}_i ($i= 1$ et 2) représentent respectivement la fraction volumique, le coefficient de dilatation thermique et le coefficient de localisation des contraintes respectifs des deux phases.

Après calculs, on trouve :

$$(4.99) \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \langle \boldsymbol{\alpha} \rangle + \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1/K_1 - 1/K_2} \right) \left(\frac{1}{\tilde{K}} - \left(\frac{c_1}{K_1} + \frac{c_2}{K_2} \right) \right)$$

Tels que K_i et \tilde{K} représentent respectivement les modules de compressibilité volumique des phases du VER et le module de compressibilité volumique effectif.

Lorsque l'une des deux phases constituant le VER est un vide (l'hétérogénéité du VER est représentée par un trou V_2), on en déduit que :

$$(4.100) \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}$$

Dans ce cas, la définition des grandeurs macroscopiques change et la barre $\bar{\quad}$ ne signifie plus une opération de moyenne spatiale mais simplement une notation pour désigner une grandeur ayant un certain rapport avec la grandeur macroscopique en question. On retient, par exemple, que pour :

Le gradient thermique :
$$\bar{\nabla T} \equiv \frac{1}{V} \int_{\partial V_1} T \cdot \mathbf{n} dS$$

Le flux thermique :
$$\bar{\mathbf{q}} \equiv \frac{1}{V} \int_{V_1} \mathbf{q} dV$$

4.3 Mise en œuvre de la méthode et validation du modèle de comportement thermoélastique homogène

Pour valider la méthode proposée ainsi que pour analyser sa portée, il convient de la comparer avec d'autres méthodes d'homogénéisation. Ainsi, on la comparera avec les approches qui découlent de la théorie des modules effectifs et avec les résultats des calculs d'homogénéisation périodique réalisés par *J-C. Michel (2001 ; [78])*. Ensuite, on la confrontera avec le modèle auto-cohérent et les bornes de Hashin-Shtrikman. Enfin, nous réaliserons des modélisations numériques du comportement thermoélastique de structures hétérogènes et de structures homogènes équivalentes afin de s'assurer de leur cohérence.

4.3.1 Comparaison avec d'autres approches d'homogénéisation

Premièrement, cette analyse permet d'illustrer la différence entre les deux approches de la théorie des modules effectifs à travers des calculs références. Ainsi, on mettra en évidence l'influence des conditions aux limites (notamment du mode de pilotage) adoptées par chacune de ces méthodes sur l'estimation des modules élastiques effectifs. Ensuite, elle permet de comparer les résultats des calculs réalisés dans le cadre de ce travail avec les résultats des calculs références, d'homogénéisation périodique existants, ainsi qu'avec les modules issus de la théorie des modules effectifs.

A ce propos, l'exemple de calculs réalisés par *J-C. Michel (2001 ; [78])* a été examiné : Il s'agit d'un composite à matrice d'aluminium homogène isotrope renforcée par des fibres longues unidirectionnelles de carbure de silicium également homogènes et isotropes. La fraction volumique est fixée à 38,5%. Les fibres sont de section circulaire régulièrement réparties en carré dans leur plan transverse (*Figure 4.7*). Les modules d'Young et les coefficients de Poisson sont $E_f = 420$ GPa et $\nu_f = 0,2$ pour les fibres et $E_m = 70$ GPa et $\nu_m = 0,3$ pour la matrice. Le composite est à symétrie quadratique compte tenu des symétries géométriques et matérielles présentes dans son arrangement. On admet que la direction z est confondue avec l'axe commun des fibres, la matrice d'élasticité peut donc s'écrire sous la forme (4.64).

Le but est de comparer les modules de cisaillement plan définis par (4.101) et les modules de compressibilité plane définis par (4.102). Pour ces calculs, cinq types de VER ont été considérés (*J-C. Michel (2001 ; [78])*). Le premier, noté V , correspond à la cellule unitaire contenant en son centre une fibre unique. Les quatre autres, notés V^n avec $n = 2, 4, 6$ et 8 , sont des multiples de cette cellule c'est à dire V^n contient $n \times n$ fibres réparties en carrée (*Figure 4.7*).

Les modules effectifs ont été calculés, par *J-C. Michel (2001 ; [78])*, par la théorie des modules effectifs en résolvant les problèmes (4.4) dans l'hypothèse de déformations planes avec la condition (4.5) pour l'approche « pilotage en contrainte homogène au contour du VER », nommée CH, et la condition (4.6) pour l'approche « pilotage en déformation homogène au contour du VER », nommée DH, ainsi qu'avec la méthode d'homogénéisation périodique, nommée JCM.

Pour la comparaison, nous avons donc calculé les modules de cisaillement plan et les modules de compressibilité plane, correspondant à trois types de VER (*Figure 4.8*: $n = 1, 2$ et 4), avec la méthode périodique, développée plus haut, qui utilise un pilotage en déformations homogènes en chaque point du volume du VER et nommée DHPV (section 4.2.3).

Soient l_1, l_2, l_3 et l_4 respectivement le contour gauche, la base, le contour droit et le sommet du VER considéré. Les calculs ont été réalisés avec l'hypothèse de déformations planes et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u_x(l_1 \text{ et } l_3) = 0 \\ u_y(l_2 \text{ et } l_4) = 0 \end{cases} \text{ pour déterminer } \tilde{K}_{12} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_x(l_2 \text{ et } l_4) = 0 \\ u_y(l_1 \text{ et } l_3) = 0 \end{cases} \text{ pour déterminer } \tilde{G}_{12}.$$

La *Figure 4.8* présente les maillages utilisés pour les calculs DHPV. Pour la discrétisation du VER, on utilise respectivement des éléments finis de type TRI3 (triangle à 3 nœuds massif) pour les fibres et des éléments finis de type QUA4 (quadrangle à 4 nœuds massif) pour la matrice. Les calculs DHPV sont réalisés dans des conditions quasi-identiques aux calculs DH, CH et HP. Les figures 4.7 et 4.8 présentent respectivement l'évolution des modules de cisaillement plan et l'évolution des modules de compressibilité plane en fonction du rapport $1/n$ pour les différentes approches.

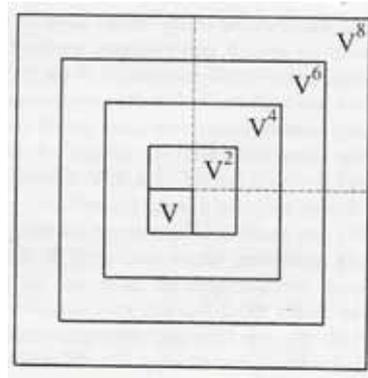


Figure 4.7 : Composite à fibres longues réparties en carrée (J-C. Michel 2001 ; [78])

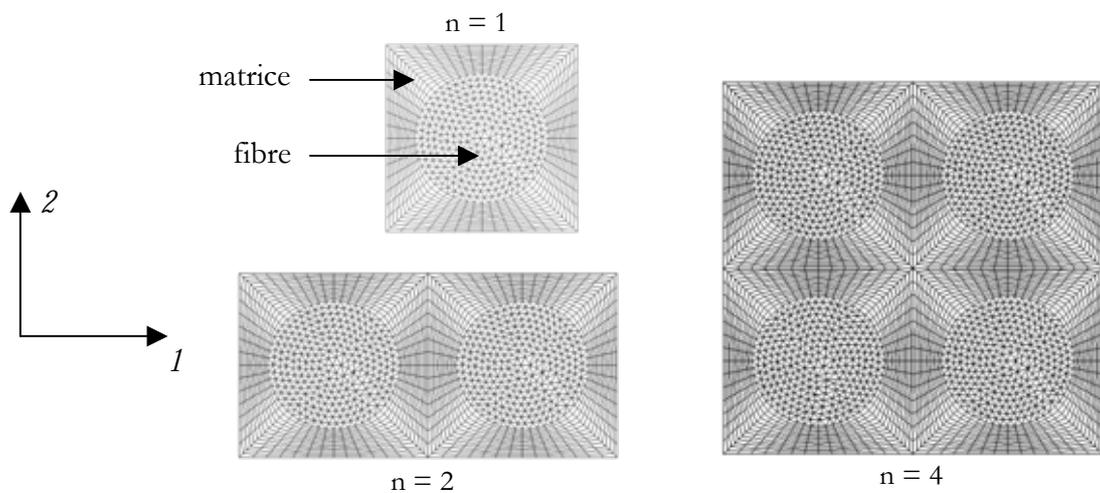


Figure 4.8 : Maillages utilisés pour le calcul des modules avec l'homogénéisation périodique (DHPV)

4.3.1.1 Comparaison avec l'homogénéisation périodique (JCM)

En premier, on remarque une tendance commune entre l'homogénéisation périodique (DHPV) et l'homogénéisation périodique (JCM). En effet, les modules donnés par les deux calculs ne dépendent pas de la taille du VER (figures 4.7 et 4.8) et les deux courbes (DHPV et JCM) sont très proches malgré de légères différences qu'elles montrent. En effet, l'écart entre les modules de cisaillement plan et l'écart entre les modules de compressibilité plane sont respectivement de l'ordre de 0,5% (Figure 4.9) et moins de 1% (Figure 4.10). Les deux méthodes (DHPV et JCM) sont identiques en terme de principes de bases. Toutefois, les procédures numériques, correspondant à chacune de ces deux approches, ne sont certainement pas identiques.

4.3.1.2 Comparaison de l'homogénéisation périodique par rapport à la théorie des modules effectifs

A première vue, les résultats (figures 4.7 et 4.8) montrent que les modules issus de l'homogénéisation périodique ne dépendent ni du nombre ni de la taille du VER. Aussi, en ce qui concerne la théorie des modules effectifs, l'inégalité (4.21) est bien vérifiée. Autrement dit, le module élastique effectif issu d'un calcul DH est plus grand que le module calculé en CH. Puis, on remarque qu'avec la théorie des modules effectifs l'approche DH surestime le module effectif tandis que l'approche CH le sous-estime par rapport à l'homogénéisation périodique (DHPV et JCM). Pour un VER constitué d'une cellule unitaire, l'écart entre les modules de cisaillement plan est supérieur à 10% tandis que l'écart est de l'ordre de 1,5% entre les modules de compressibilité plane. Toutefois, lorsque le nombre de cellules unitaires constituant le VER est plus important ($1/n = 0,125$), l'écart entre les modules de cisaillement plan n'est plus que de l'ordre de 1,5% et l'écart entre les modules de compressibilité plane est inférieur à 0,2%. La théorie des modules effectifs n'est fiable que lorsque la taille du VER est importante.

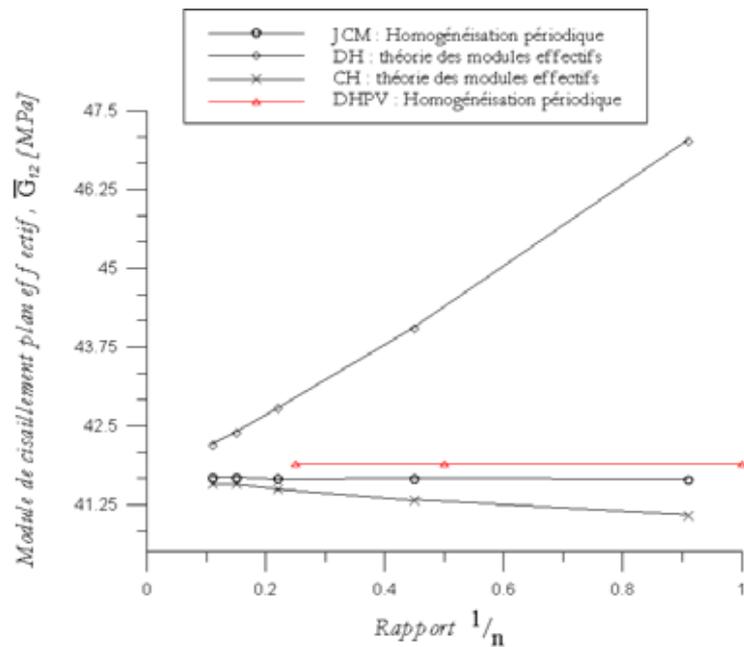


Figure 4.9 : Variation du module de cisaillement plan effectif en fonction du rapport $1/n$

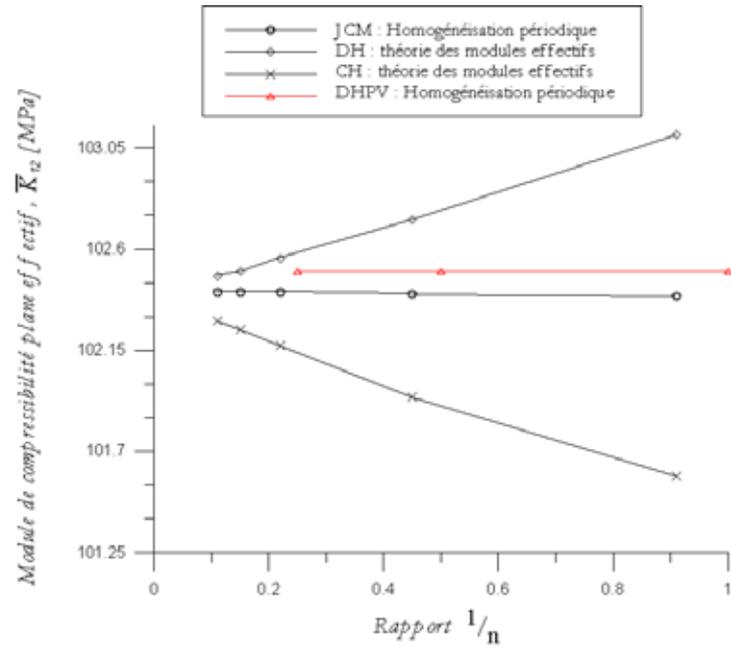


Figure 4.10 : Variation du module de compressibilité plane effectif en fonction du rapport $1/n$

4.3.2 Comparaison avec un modèle auto-cohérent et les bornes de Hashin-Shtrikman

4.3.2.1 Rappel des équations

Considérons un matériau transversalement isotrope (Figure 4.11). \tilde{C}_{ijkl} sont les composantes de la matrice d'élasticité et \tilde{k}_{ij} les composantes de la matrice de conductivité thermique dans les axes d'orthotropie.

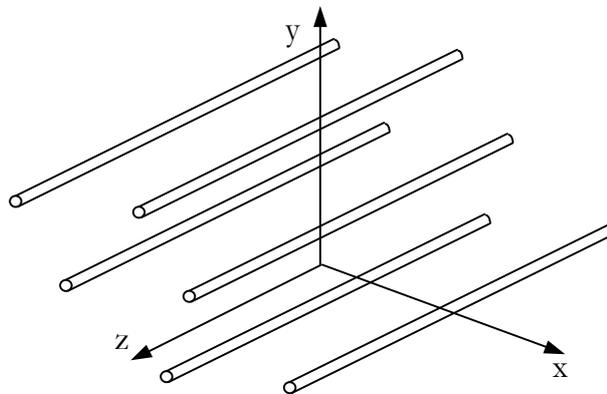


Figure 4.11 : Système de fibres cylindriques dans une matrice élastique

On admet (d'après *Christensen 1991* ; [34]) que :

$$(4.101) \quad \tilde{G}_{12} = \tilde{C}_{1212}$$

$$(4.102) \quad \tilde{K}_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{1122})$$

$$(4.103) \quad \tilde{E}_3 = \tilde{C}_{3333} - \frac{2\tilde{C}_{3311}^2}{\tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{1122}}$$

$$(4.104) \quad \tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 = \frac{4\tilde{G}_{12} \tilde{K}_{12}}{\tilde{K}_{12} + \tilde{G}_{12} + 4\tilde{\nu}_{31}^2 \tilde{G}_{12} \tilde{K}_{12} / \tilde{E}_3}$$

$$(4.105) \quad \tilde{G}_{23} = \tilde{G}_{13} = \tilde{C}_{2323} = \tilde{C}_{3131}$$

$$(4.106) \quad \tilde{\nu}_{31} = \tilde{\nu}_{32} = \frac{\tilde{C}_{3311}}{\tilde{C}_{1111} + \tilde{C}_{1122}} = \left(\left(-\tilde{\nu}_{12} - \frac{1}{4} \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{K}_{12}} + \frac{1}{4} \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{G}_{12}} \right) \frac{\tilde{E}_3}{\tilde{E}_1} \right)^{1/2}$$

$$(4.107) \quad \tilde{\nu}_{12} = \tilde{\nu}_{21} = \frac{\tilde{C}_{3333} \tilde{C}_{1122} - \tilde{C}_{3311}^2}{\tilde{C}_{3333} \tilde{C}_{1111} - \tilde{C}_{3311}^2} = \frac{\tilde{K}_{12} + \tilde{G}_{12} + 4\tilde{\nu}_{31}^2 \tilde{G}_{12} \tilde{K}_{12} / \tilde{E}_3}{\tilde{K}_{12} + \tilde{G}_{12} + 4\tilde{\nu}_{31}^2 \tilde{G}_{12} \tilde{K}_{12} / \tilde{E}_3}$$

$$(4.108) \quad \tilde{\nu}_{13} = \tilde{\nu}_{23} = \frac{\tilde{C}_{3311}(\tilde{C}_{1111} - \tilde{C}_{1122}^2)}{\tilde{C}_{3333} \tilde{C}_{1111} - \tilde{C}_{3311}^2} = \frac{4\tilde{\nu}_{31}^2 \tilde{G}_{12} \tilde{K}_{12}}{\tilde{E}_3 (\tilde{K}_{12} + \tilde{G}_{12}) + 4\tilde{\nu}_{31}^2 \tilde{G}_{12} \tilde{K}_{12}}$$

$$(4.109) \quad \tilde{k}_{11} = \tilde{k}_{22}$$

Il existe des modèles analytiques qui permettent d'évaluer les modules élastiques et coefficients thermiques effectifs. Le modèle dit modèle à trois phases ou modèle auto-cohérent, élaboré par *Christensen (Christensen et Lo 1979 ; [35])*, fait partie des méthodes les plus intéressantes. Il permet de donner une estimation analytique du module de cisaillement transverse effectif $\tilde{\mu}_{12}^{ac}$ (4.101) et du module de compressibilité plane effectif \tilde{K}_{12}^{ac} (4.102), pour un composite constitué par des inclusions cylindriques régulièrement réparties dans un milieu élastique (*Figure 4.11*), dont les axes communs sont parallèles à la direction z. Soient :

$$(4.110) \quad \tilde{\mu}_{12}^{ac} = \left(-B - \sqrt{B^2 - AC} \right) / A \mu_m$$

avec :

$$A = 3c(1-c)^2 \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right) \\ + \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \eta_i \eta_m - \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \eta_i \right) c^3 \right] \left[c \eta_m \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) - \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 B &= -3c(1-c)^2 \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) c + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right) - 2 \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) c^3 \right] \\
 &+ \frac{c}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) c^3 \right] \\
 C &= 3c(1-c)^2 \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i \right) \\
 &+ \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1 \right) c + 1 \right] \left[\frac{\mu_i}{\mu_m} + \eta_i + \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} \eta_m - \eta_i \right) c^3 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_i &= 3 - 4\nu_i \\
 \eta_m &= 3 - 4\nu_m
 \end{aligned}$$

μ_i et μ_m sont respectivement les modules de cisaillement de l'inclusion et de la matrice.

ν_i et ν_m sont respectivement les coefficients de Poisson de l'inclusion et de la matrice.

$c = \frac{V_i}{V_i + V_m} \in [0, 1]$ est la fraction volumique du VER (V_i et V_m représentent respectivement le volume de l'inclusion et le volume matrice constituants le VER).

$$(4.111) \quad \tilde{K}_{12}^{ac} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c}{1 / \left(k_i - k_m + \frac{1}{3} (\mu_i - \mu_m) \right) + (1-c) / \left(k_m + \frac{4}{3} \mu_m \right)}$$

k_m et k_i représentent respectivement les modules de compressibilité volumique de l'inclusion et de la matrice.

Des expressions analytiques du module uniaxial effectif \tilde{E}_3^{ac} , du coefficient de Poisson effectif $\tilde{\nu}_{23}^{ac}$, et le module de cisaillement effectif dans la direction perpendiculaire au plan d'isotropie $\tilde{\mu}_{23}^{ac}$ sont également établies (*Christensen 1991* ; [34]), soient respectivement :

$$(4.112) \quad \tilde{E}_3^{ac} = cE_i + (1-c)E_m + \frac{4c(1-c)(\nu_i - \nu_m)^2 \mu_m}{[(1-c)\mu_m / (k_i + \mu_i/3)] + [c\mu_m / (k_m + \mu_m/3)] + 1}$$

$$(4.113) \quad \tilde{\nu}_{23}^{ac} = c\nu_i + (1-c)\nu_m + \frac{c(1-c)(\nu_i - \nu_m) [\mu_m / (k_m + \mu_m/3) - \mu_m / (k_i + \mu_i/3)]}{[(1-c)\mu_m / (k_i + \mu_i/3)] + [c\mu_m / (k_m + \mu_m/3)] + 1}$$

$$(4.114) \quad \frac{\tilde{\mu}_{23}^{ac}}{\mu_m} = \frac{\mu_i (1+c) + \mu_m (1-c)}{\mu_i (1-c) + \mu_m (1+c)}$$

E_i et E_m sont respectivement les modules d'Young de l'inclusion et de la matrice.

Quant aux propriétés thermiques effectives (*Christensen 1991* ; [34]), le coefficient de conductivité thermique effectif dans la direction transverse s'exprime par :

$$(4.115) \quad \tilde{k}_{11}^{ac} = \lambda_m \left[1 + \frac{c}{\lambda_m / (\lambda_i - \lambda_m) + (1-c)/2} \right]$$

λ_i et λ_m sont respectivement les coefficients de conduction thermique de l'inclusion et de la matrice.

D'après les théories de Hashin-Shtrikman (*Hashin and Shtrikman 1963* ; [63]), le module de cisaillement transverse effectif \tilde{G}_{12} et le module de compressibilité plane effectif \tilde{K}_{12} , pour un matériau transversalement isotrope, satisfont respectivement à :

$$(4.116) \quad \mu_2 + \frac{c_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{c_2(K_2 + 2\mu_2)}{2\mu_2(K_2 + \mu_2)}} \leq \tilde{G}_{12} \leq \mu_1 + \frac{c_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{c_1(K_1 + 2\mu_1)}{2\mu_1(K_1 + \mu_1)}}$$

et

$$(4.117) \quad K_2 + \frac{c_1}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{c_2}{K_2 + \mu_2}} \leq \tilde{K}_{12} \leq K_1 + \frac{c_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{c_1}{K_1 + \mu_1}}$$

Lorsque le module de cisaillement μ_1 et le module de compression volumique K_1 du premier matériau sont plus grands que ceux du second matériau (μ_2 et K_2) constituant le composite, c'est à dire :

$$(4.118) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \text{ et } K_1 \geq K_2$$

c_1 et c_2 représentent respectivement les fractions volumiques du premier et du second matériau constituant le composite.

Rappelons qu'on définit le module de compressibilité plane par $K = k + \mu/3$ pour un matériau isotrope. k et μ représentent respectivement le module de compressibilité volumique et le module de cisaillement.

4.3.2.2 Applications

Pour les calculs aux éléments finis, on considère une plaque carrée de 25 m de largeur, présentant au centre une cavité de section circulaire de diamètre D variable (*Figure 4.12*). On suppose que l'axe de la cavité cylindrique est confondu avec la direction z (ou la direction 3). Le module d'Young et le coefficient de Poisson de la roche sont respectivement $E = 1000$ MPa et $\nu = 0,3$. Le *Tableau 4.1* présente les composantes de la matrice d'élasticité calculée par la méthode des éléments finis correspondant aux valeurs de fraction volumique choisies.

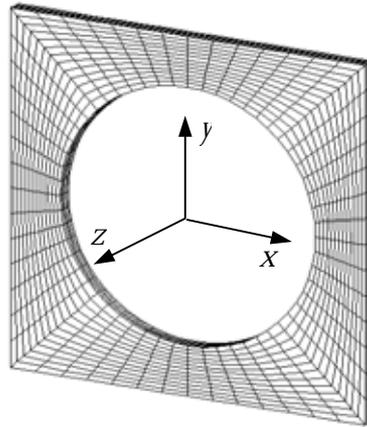


Figure 4.12 : Maillage du VER en éléments finis de type CUB8 (cubique à 8 nœuds)

c	\tilde{C}_{3333}	$\tilde{C}_{1111} = \tilde{C}_{2222}$	$\tilde{C}_{3311} = \tilde{C}_{3322}$	\tilde{C}_{1122}	\tilde{C}_{1212}	\tilde{C}_{3131}
0,007853982	1329,5	1314,2	562,2	559,84	376,94	375,66
0,125663706	1105,4	929,75	384,65	352,42	258,3	259,87
0,212371663	966,52	741,16	297,42	250,22	184,27	211,26
0,363168111	752,58	506,54	191,65	132,28	90,433	147,47
0,502654825	572,05	343,92	122,75	65,245	39,069	100,97
0,723822947	300,61	119,01	38,189	8,2901	4,7425	38,848

Tableau 4.1 : Composantes de la matrice d'élasticité effective, en [MPa], calculées par l'approche DHPV

En appliquant les bornes de Hashin-Shtrikman sur le cas d'une plaque carrée présentant au centre section circulaire (Figure 4.12) et tenant compte des conditions qui y sont souscrites (4.118), on obtient :

$$(4.119) \quad 0 \leq \tilde{G}_{12} \leq \mu_m + \frac{c_m}{c_m \left(k_m + \frac{7}{3} \mu_m \right) / \left[2\mu_m \left(K_m + \frac{4}{3} \mu_m \right) \right] - 1/\mu_m}$$

et

$$(4.120) \quad 0 \leq \tilde{K}_{12} \leq K_m + \frac{c_i}{c_m / \left(k_m + \frac{4}{3} \mu_m \right) - 1/(k_m + \mu_m / 3)}$$

tel que : $c_i = \frac{V_i}{V_i + V_m}$ et $c_m = 1 - c_i$ représentent respectivement les fractions volumiques de la cavité et de la roche. La borne inférieure de Hashin-Shtrikman, pour les deux cas, est la même et est égale à zéro.

La Figure 4.13 compare les modules de cisaillement transverse effectifs \tilde{G}_{12} issus de la méthode proposée par rapport à ceux obtenus avec la méthode auto-cohérente et les bornes de Hashin-Shtrikman en fonction de la fraction volumique. Elle montre que les résultats de la méthode proposée sont non seulement encadrés par les bornes de Hashin-Shtrikman mais aussi qu'ils sont très proches de ceux du modèle auto-cohérent.

La Figure 4.14 compare les modules de compressibilité plane effectifs \tilde{K}_{12} issus de la méthode proposée par rapport à ceux obtenus avec la méthode auto-cohérente et les bornes de Hashin-Shtrikman en fonction de la fraction volumique. On remarque que la prédiction du modèle auto-cohérent (4.111) correspond exactement à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman (4.120). On constate aussi que modèle proposé correspond aux deux modèles (Auto-cohérent et Hashin-Shtrikman) à quelques différences près.

Les comparaisons du module uniaxial effectif \tilde{E}_3 (Figure 4.15), du module de cisaillement effectif dans la direction perpendiculaire au plan d'isotropie \tilde{G}_{23} (Figure 4.16), du coefficient de Poisson effectif $\tilde{\nu}_{23}$ (Figure 4.17) ainsi que le coefficient de conductivité thermique effectif dans la direction transverse \tilde{k}_{11} (Figure 4.18) calculés par les approches d'homogénéisations par éléments, avec ceux calculés par la méthode auto-cohérente montrent, en général, une cohérence entre les deux modèles.

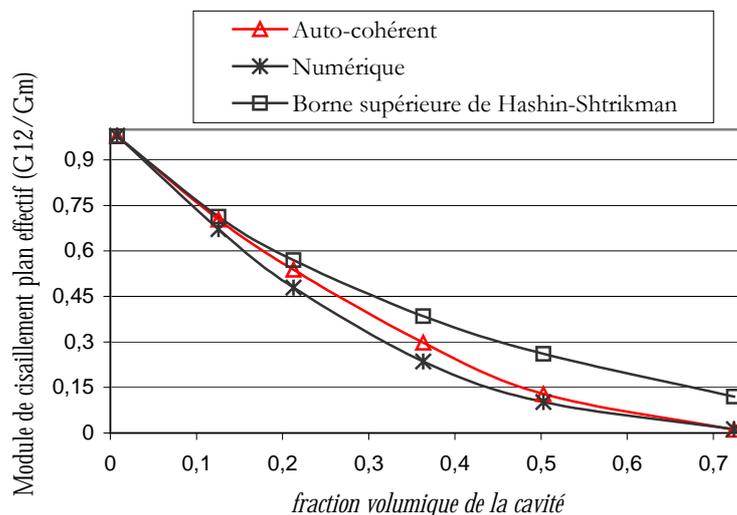


Figure 4.13 : Comparaison du modèle proposé au modèle auto-cohérent et aux bornes de Hashin-Shtrikman, module de cisaillement transverse effectif en fonction de la fraction volumique

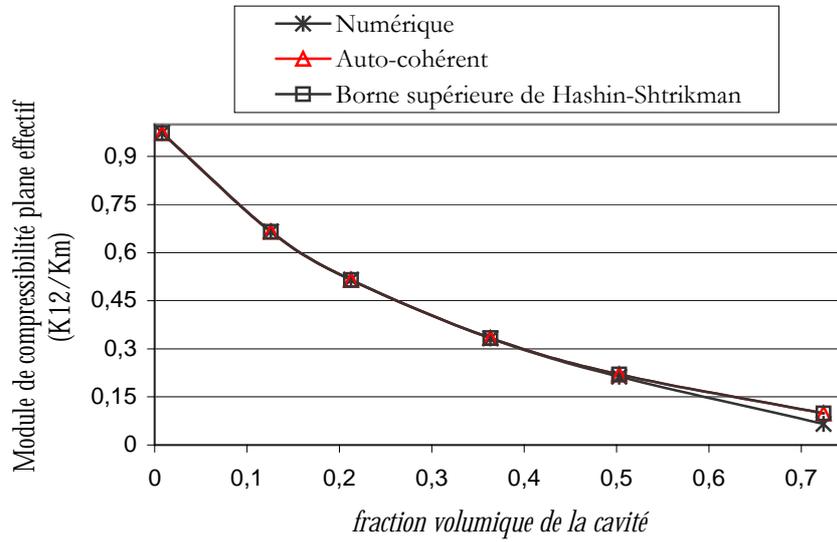


Figure 4.14 : Comparaison du modèle proposé au modèle auto-cohérent et aux bornes de Hashin-Shtrikman, module de compressibilité plane effectif en fonction de la fraction volumique

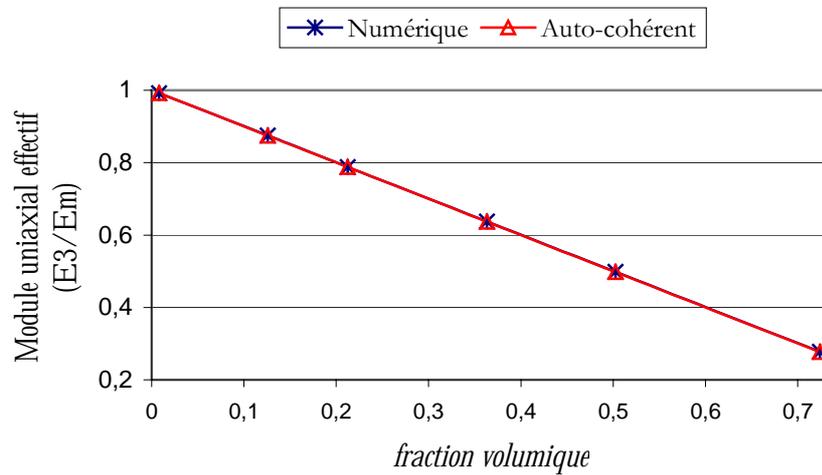


Figure 4.15 : Module uniaxial effectif \tilde{E}_3 en fonction de la fraction volumique

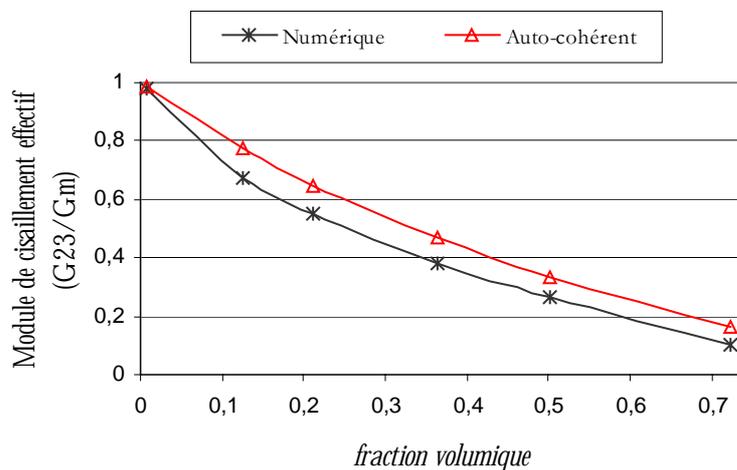


Figure 4.16 : Module de cisaillement effectif \tilde{G}_{23} en fonction de la fraction volumique

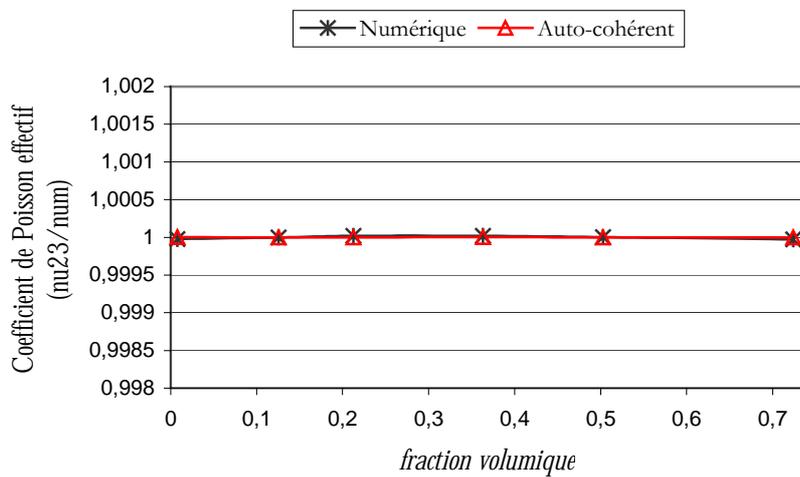


Figure 4.17 : Coefficient de Poisson effectif $\tilde{\nu}_{23}$ en fonction de la fraction volumique

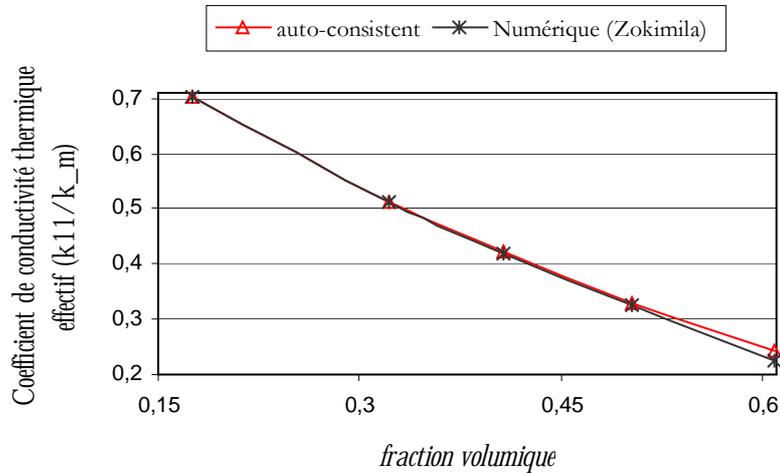


Figure 4.18 : Coefficient de conductivité thermique effectif \tilde{k}_{11} en fonction de la fraction volumique

4.3.3 Comparaison du comportement thermoélastique des structures homogénéisées à celui des structures hétérogènes de référence

4.3.3.1 Définitions des structures hétérogènes de référence

Considérons deux structures rectangulaires, présentant des cavités de section circulaire, réparties périodiquement suivant les axes des abscisses et des ordonnées (Figure 4.19). La première mesure 50 m de longueur et 20 m de hauteur tandis que la seconde structure mesure 70 m de longueur et 60 m de hauteur. Les deux structures se caractérisent par la répétition spatiale d'une plaque carrée de 10 m de largeur présentant un trou au milieu, respectivement, de 2,5 m et de 5 m de diamètre. La Figure 4.20 présente ainsi le VER ou motif élémentaire, correspondant à chacune des deux structures dont les propriétés thermoélastiques sont présentées au Tableau 4.2.

Module d'Young, E [MPa]	3620
Coefficient de Poisson, ν	0,3
Masse volumique, ρ [kg/m ³]	2450
Coefficient de conductivité thermique, k [Wm ⁻¹ °C ⁻¹]	1,89
Coefficient de dilatation thermique, α [°C ⁻¹]	10 ⁻⁵

Tableau 4.2 : Propriétés thermoélastiques du matériau constitutif des structures (Andra 2001 ; [7])

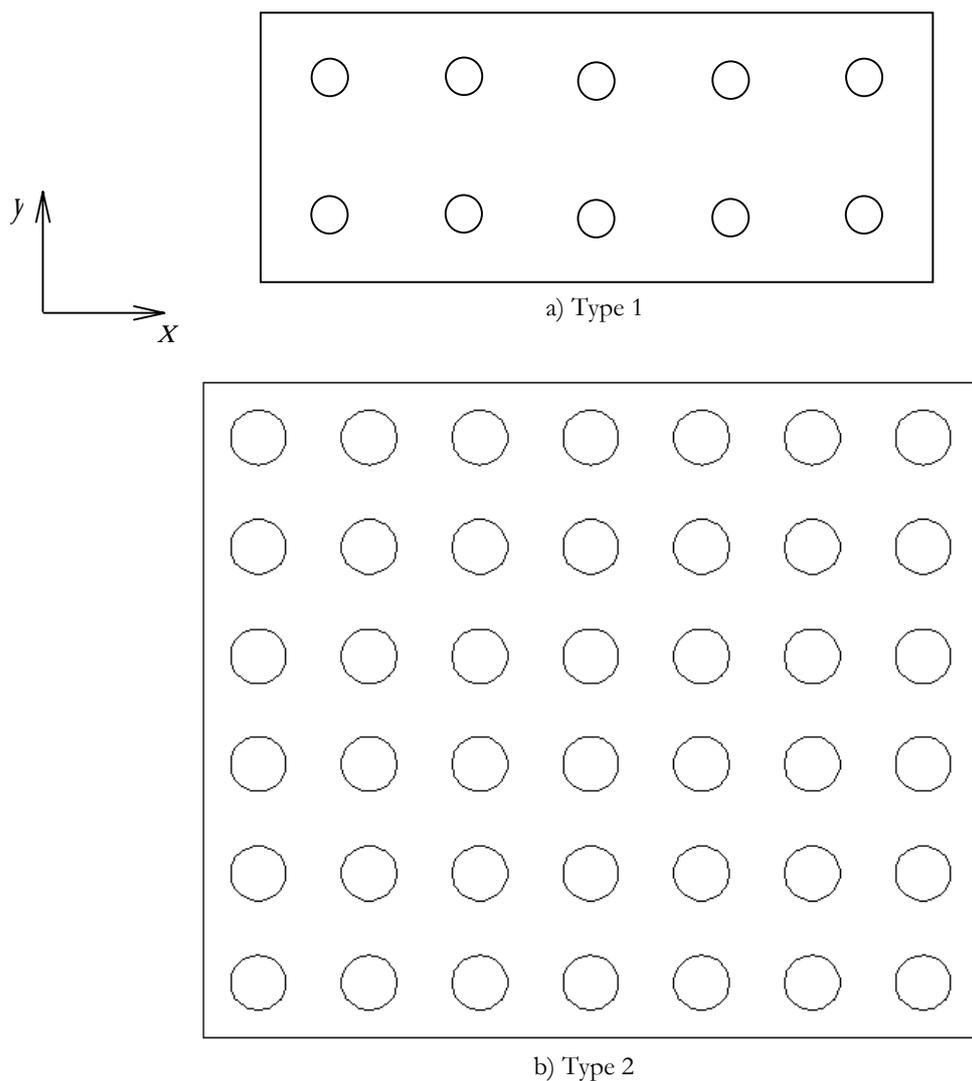


Figure 4.19 : Schéma des structures présentant des cavités périodiques

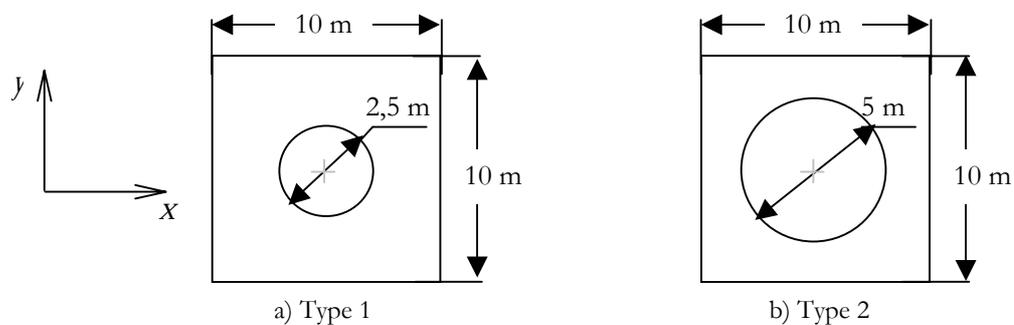


Figure 4.20 : Schéma du VER (motif élémentaire) des deux structures

Structure	$\tilde{C}_{1111} = \tilde{C}_{2222}$	\tilde{C}_{3333}	\tilde{C}_{1122}	$\tilde{C}_{3311} = \tilde{C}_{3322}$	\tilde{C}_{1212}	\tilde{C}_{3131}
Type 1	4185	4505	1722	1772	1209	1214
Type 2	2795	3587	965	1128	712	830

Tableau 4.3 : Composantes de la matrice d'élasticité effective en [MPa]

Structure	$\tilde{k}_{1111} = \tilde{k}_{2222}$	\tilde{k}_{3333}
Type 1	1,71	1,79
Type 2	1,27	1,51

Tableau 4.4 : Composantes de la matrice de conductivité thermique effective en [$\text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1}$]

		Type 1	Type 2
Modules d'Young [MPa]	E_1^*	3187	2288
	E_3^*	3442	2910
Coefficients de Poisson	ν_{12}^*	0,29	0,25
	ν_{13}^*	0,27	0,23
Modules de cisaillement [MPa]	G_{23}^*	1214	830
	G_{12}^*	1209	713
Coefficients de conductivité thermique [$\text{w m}^{-1} \text{°C}^{-1}$]	\tilde{k}_{11}	1,71	1,27
	\tilde{k}_{33}	1,79	1,51
Coefficient de dilatation thermique [°C^{-1}]	$\tilde{\alpha}$	10^{-5}	10^{-5}

Tableau 4.5 : Propriétés thermoélastiques effectives des structures homogénéisées

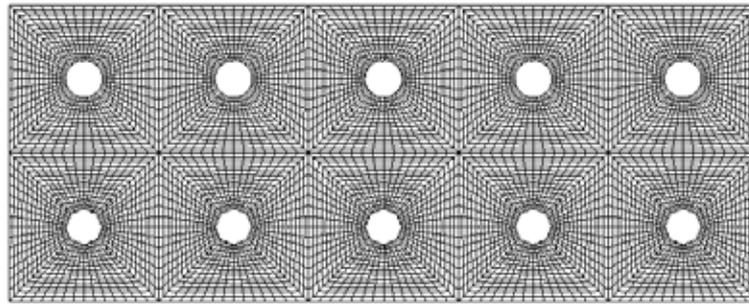
4.3.3.2 Détermination des propriétés thermoélastiques équivalentes

Les calculs des coefficients élastiques et thermiques effectifs, décrivant le comportement homogène équivalent aux structures réelles, sont réalisés selon les principes développés dans la section 4.2.2 à 4.2.4. Les tableaux 4.3 et 4.4 présentent respectivement les composantes de la matrice d'élasticité effective et de la matrice de conductivité thermique effective des structures tandis que les propriétés thermoélastiques effectives équivalentes sont résumées au *Tableau 4.5*.

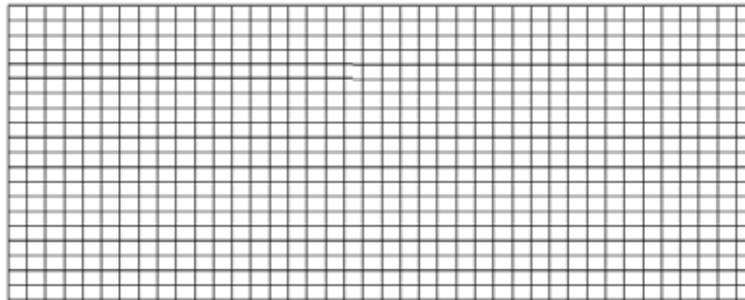
4.3.3.3 Définitions des calculs et analyse des résultats

Les maillages des deux structures perforées et de leurs structures homogénéisées associées sont présentés par la *Figure 4.21* et la *Figure 4.22*. Pour vérifier leurs cohérences, des modélisations numériques du comportement thermoélastique des structures perforées et homogénéisées associées, soumises à une variation de température, ont été réalisées avec trois types des conditions aux limites mécaniques. Les définitions des calculs sont présentées au *Tableau 4.6*.

A titre indicatif, les schémas des conditions aux limites sont décrits par la *Figure 4.23* avec la structure type 1. L_1 , L_2 , L_3 et L_4 représentent respectivement le contour gauche, la base, le contour droit et le sommet de chaque structure.

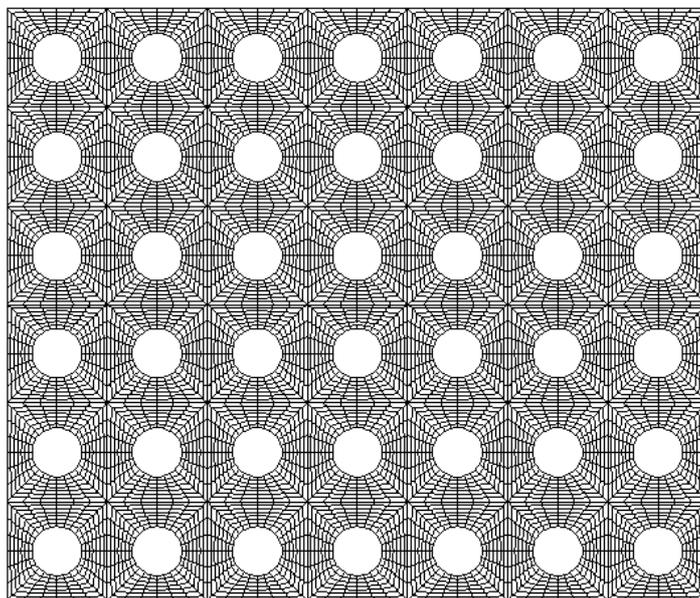


a) Structure perforée (7280 éléments et 22587 nœuds)

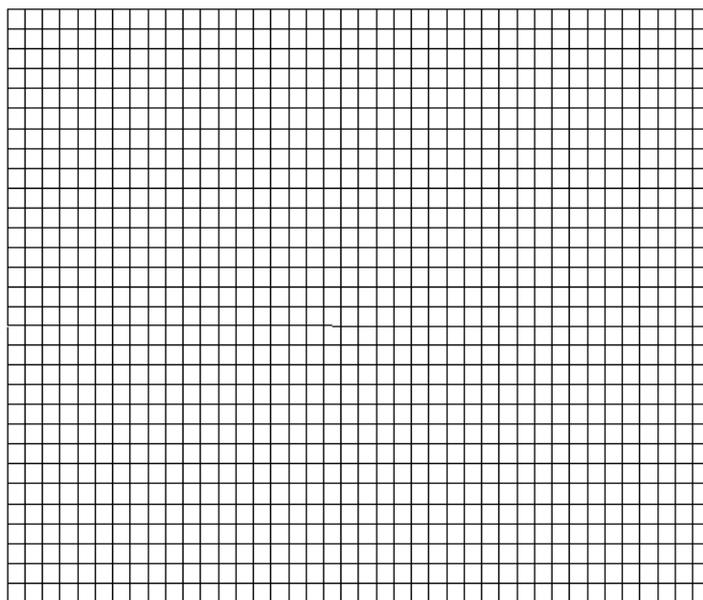


b) Structure homogène équivalente (800 éléments et 2521 nœuds)

Figure 4.21 : Maillages de la structure type 1 avec des éléments finis de type QUA8 (Dimensions 20 m X 50 m avec des trous de 2,5 m de diamètre)



a) Structure perforée (7056 éléments et 22291 nœuds)



b) Structure homogène équivalente (1200 éléments et 3741 nœuds)

Figure 4.22 : Maillages de la structure type 2 avec des éléments finis de type QUA8
(Dimensions : 60 m X 70 m avec des trous de 5 m de diamètre)

	Calculs 1	Calculs 2	Calculs 3
	Contraintes planes	Déformations planes	Déformations planes
Conditions aux limites mécaniques	$\begin{cases} u_x(L_1) \\ u_y(L_2) \end{cases}$ (Figure 4.23a)	$\begin{cases} u_x(L_1, L_3) = 0 \\ u_y(L_2, L_4) = 0 \end{cases}$ (Figure 4.23b)	$\begin{cases} u_x(L_1, L_2, L_4) = 0 \\ u_y(L_1, L_2, L_4) = 0 \end{cases}$ (Figure 4.23c)
Sollicitation thermique	$\Delta T = 25^\circ\text{C}$	$\Delta T = 25^\circ\text{C}$	$\Delta T = 25^\circ\text{C}$
Dépouillement	$\begin{cases} u_x(L_3) \\ u_y(L_4) \end{cases}$	$\begin{cases} \sigma_{xx}(L_1) \\ \sigma_{yy}(L_4) \end{cases}$	$\begin{cases} \sigma_{xx}(x = \text{cte}, y) \\ \sigma_{yy}(x, y = \text{cte}) \\ u_x(x = \text{cte}, y) \end{cases}$

Tableau 4.6 : Définitions des calculs

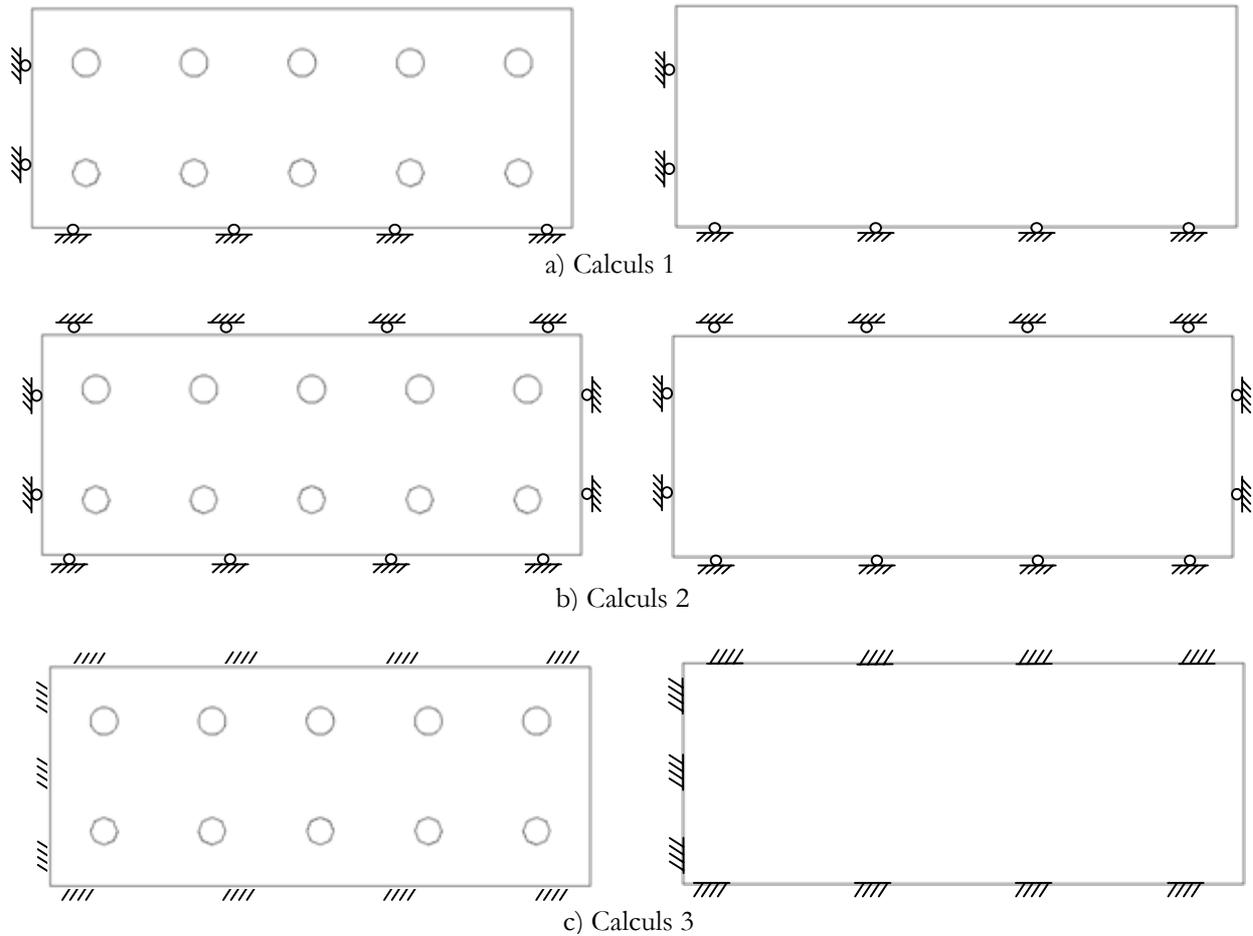


Figure 4.23 : Schéma des conditions aux limites mécaniques des calculs

a) **Calculs 1**

Les calculs sont réalisés en contraintes planes. La structure est soumise à une variation de température uniforme de 25°C, tandis que, les déplacements perpendiculaires au contour inférieur et au contour gauche sont bloqués (Tableau 4.6). Sous l'effet de variation de température, la structure se dilate la dilatation thermique de la structure se traduit par un allongement horizontal, vers la droite, et un autre vertical, dans la direction ascendante telle que montre la Figure 4.24, le contour supérieur et le contour droit étant libres. La comparaison des déplacements horizontaux du contour droit et des déplacements verticaux du contour supérieur des deux structures, présentés respectivement par la Figure 4.25 et la Figure 4.26, confirme cette tendance. Aussi, elles montrent que le comportement thermoélastique de la structure homogénéisée correspond parfaitement à celui de la structure réelle. Par ailleurs, les solutions analytiques sont vérifiées. La déformation de la structure s'effectue sans qu'aucune contrainte ne se développe puisqu'elle est libre de toute liaison. Les rotules bloquant les déplacements perpendiculaires au contour gauche et au contour inférieur apparaissent, tout simplement, comme des plans de symétrie. On a reporté respectivement sur les mêmes figures (Figure 4.25 et Figure 4.26) le déplacement horizontal du contour droit et le déplacement vertical du contour supérieur d'une structure rectangulaire intacte (ne présentant pas des trous), ayant les mêmes propriétés thermoélastiques et les mêmes dimensions que la structure perforée et qui est soumise aux mêmes conditions aux limites thermomécaniques. On constate qu'ils correspondent parfaitement à ceux des structures perforées et homogénéisées. Ceci vérifie bien que le coefficient de dilatation thermique équivalent d'une structure localement isotrope présentant du trou périodique est égal à celui du matériau constitutif (4.100).

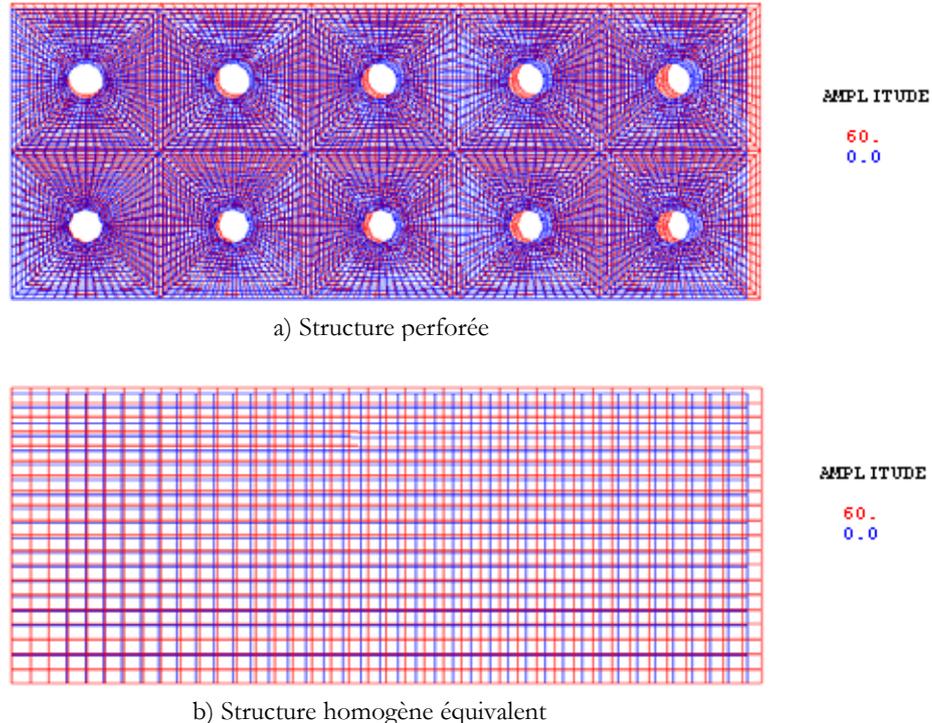


Figure 4.24 : Déformés des structures sous l'effet de la température uniforme (Illustration : structure type 1)
 Calculs 1 : structures soumises à une variation de température homogène et les déplacements normaux au contour gauche L_1 et au contour inférieur L_2 sont bloqués (Figure 4.23)

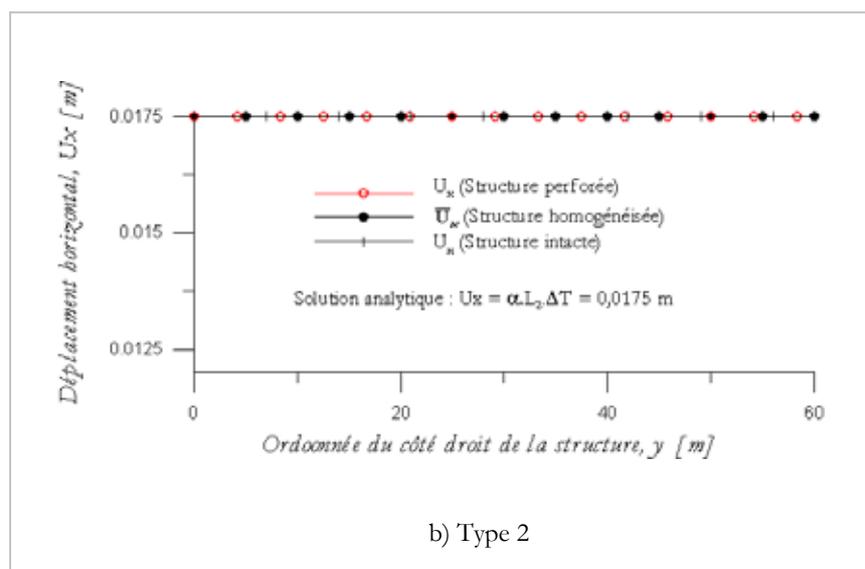
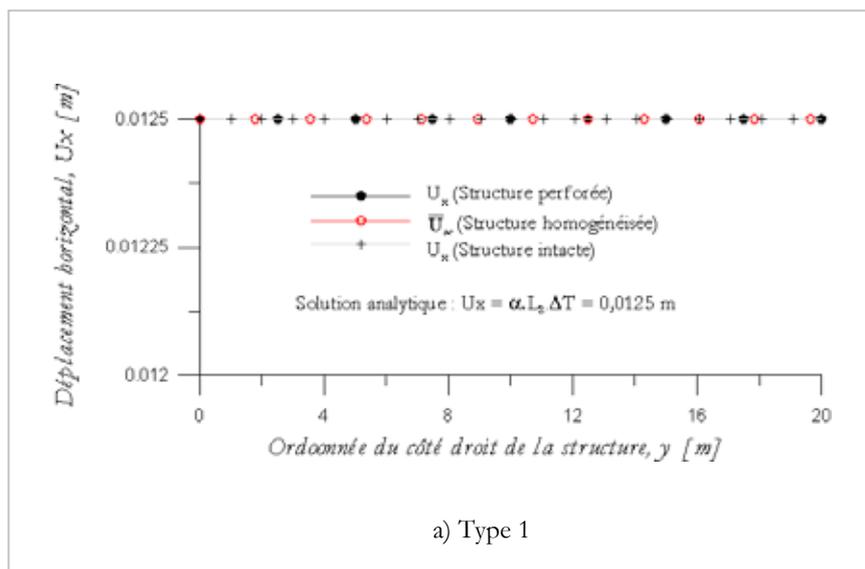


Figure 4.25 : Déplacement horizontal du contour droit des structures (types 1 et 2 & Perforées et homogènes)
 Calculs 1 : structures soumises à une variation de température homogène et les déplacements normaux au contour gauche L_1 et au contour inférieur L_2 sont bloqués (Figure 4.23)

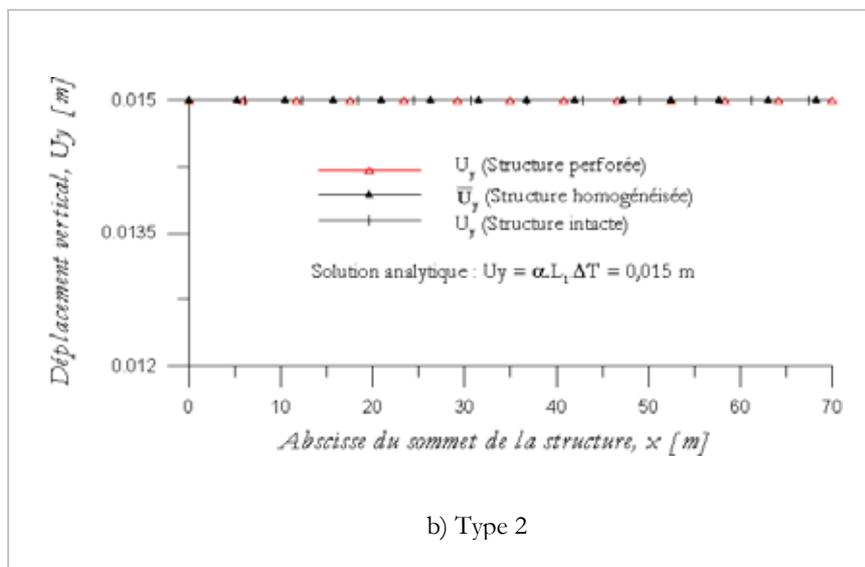
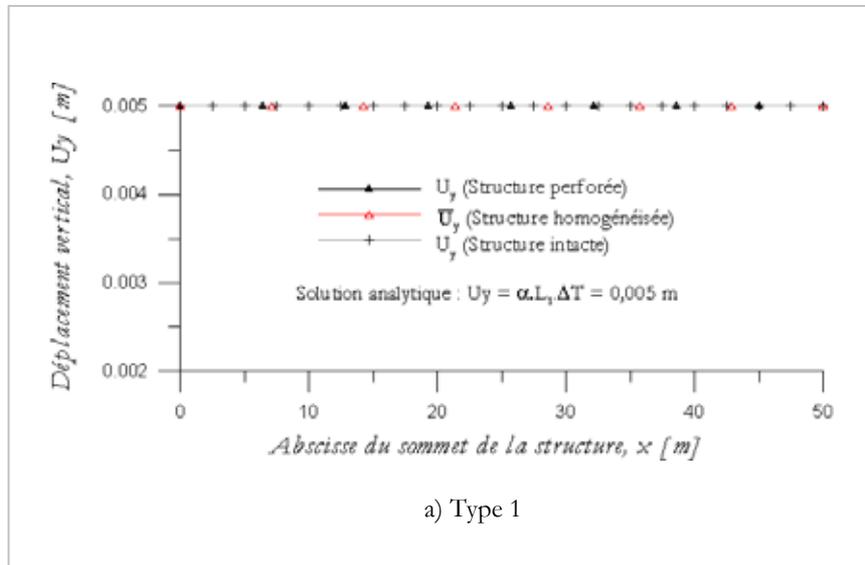


Figure 4.26 : Déplacement vertical du contour supérieur des structures (types 1 et 2 & Perforées et homogènes)
 Calculs 1 : structures soumises à une variation de température homogène et les déplacements normaux au contour gauche L_1 et au contour inférieur L_2 sont bloqués (Figure 4.23)

b) Calculs 2

Les calculs sont réalisés en déformations planes. Les déplacements perpendiculaires aux contours (L_1, L_2, L_3 et L_4) de la structure sont bloqués et elle est soumise à une variation de température uniforme de 25°C (Tableau 4.6). Sous l'effet de la variation de température, des contraintes d'origine apparaîtront dans la structure compte tenu des conditions aux limites mécaniques qui empêchent systématiquement la dilatation des ses contours.

Les Figure 4.27 et Figure 4.28 présentent respectivement les distributions des contraintes horizontales σ_{xx} suivant une facette verticale et des contraintes verticales σ_{yy} suivant une facette horizontale, calculées sur les structures perforées ainsi que leurs homologues homogénéisés. Les facettes concernées par ces deux figures ne traversent pas des trous. On remarque que les contraintes (macroscopiques) des structures homogènes équivalentes correspondent aux moyennes des contraintes (microscopiques) des structures perforées. Cette cohérence justifie les modules effectifs de compressibilité plane.

Lorsqu'on trace les champs des contraintes suivant des facettes traversant des trous (pour le cas de la structure perforée), les valeurs des contraintes microscopiques extraites des facettes traversant les trous (Figure 4.29) sont plus élevées que celles extraites sur les facettes ne traversant pas de trous (Figure 4.27 et Figure 4.28). Elles sont maximales sur les parois des trous. Cela met en évidence l'influence des hétérogénéités (trous circulaires) sur le comportement local microscopique. Les allures des contraintes microscopiques suivant des facettes passant par des trous (Figure 4.29) sont proches de la répartition des contraintes orthoradiales à proximité d'une galerie circulaire en milieu semi-infini élastique et soumis à un état de contraintes homogène isotrope. La Figure 4.29 montre aussi que les champs locaux microscopiques ne correspondent pas aux champs moyens macroscopiques. C'est une évidence puisque c'est sur les facettes entrecoupées de trous que la structure perforée compense les vides (trous). Toutefois, l'intégrale des contraintes suivant la facette entrecoupée de trous reste compatible avec celles ne traversant pas les trous. Ce constat suscite la nécessité de relocaliser les champs de contraintes et/ou de déformations à l'échelle de la géométrie réelle hétérogène une fois les champs moyens macroscopiques connus puisque les zones proches des singularités sont privilégiées par les concentrations de contraintes.

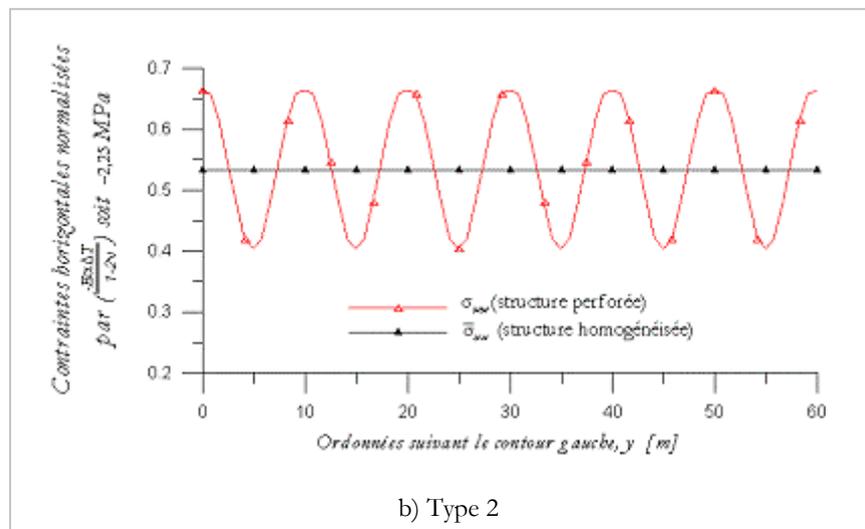
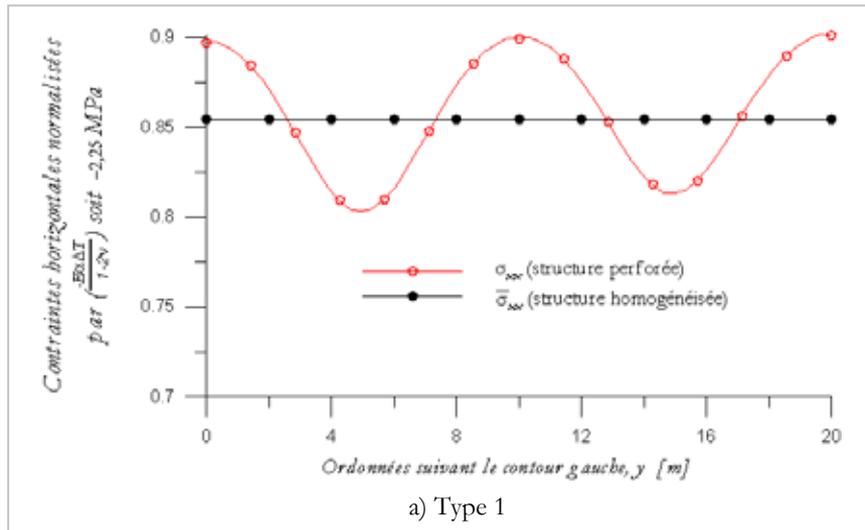


Figure 4.27 : Contraintes horizontales suivant le contour gauche des structures (types 1 et 2 & Perforées et homogènes)

Calculs 2 : structures soumises à une variation de température uniforme et les déplacements normaux aux contours sont bloqués (Figure 4.23)

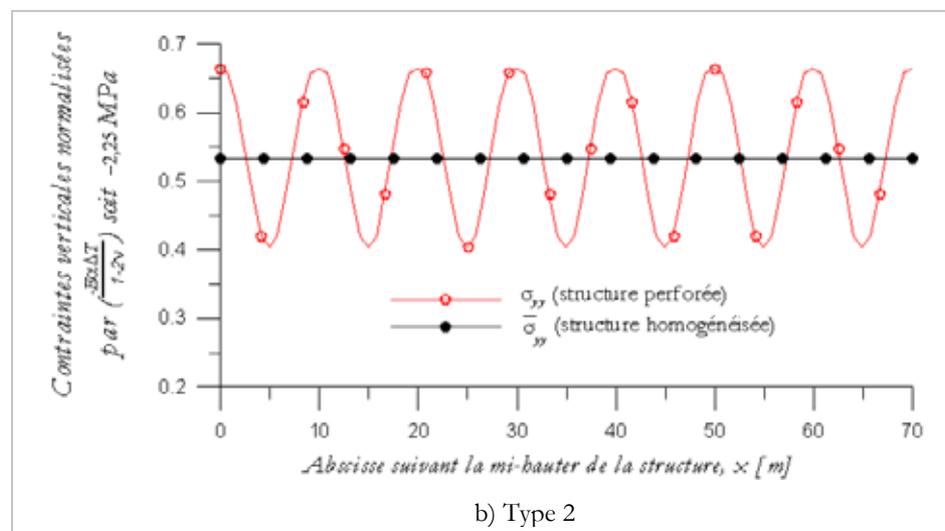
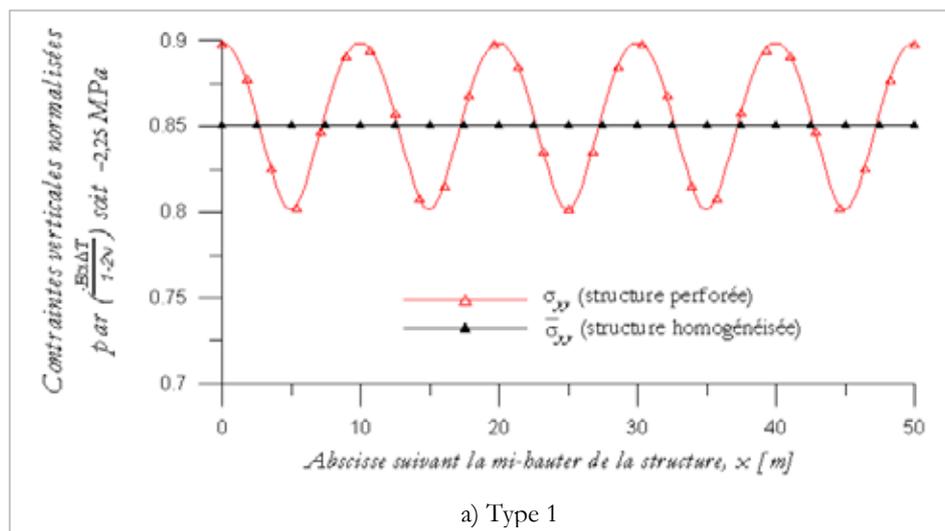


Figure 4.28 : Contraintes verticales suivant la mi-hauteur des structures (types 1 et 2 & Perforées et homogènes) (Calculs 2 : Figure 4.23)

Calculs 2 : structures soumises à une variation de température uniforme et les déplacements normaux aux contours sont bloqués (Figure 4.23)

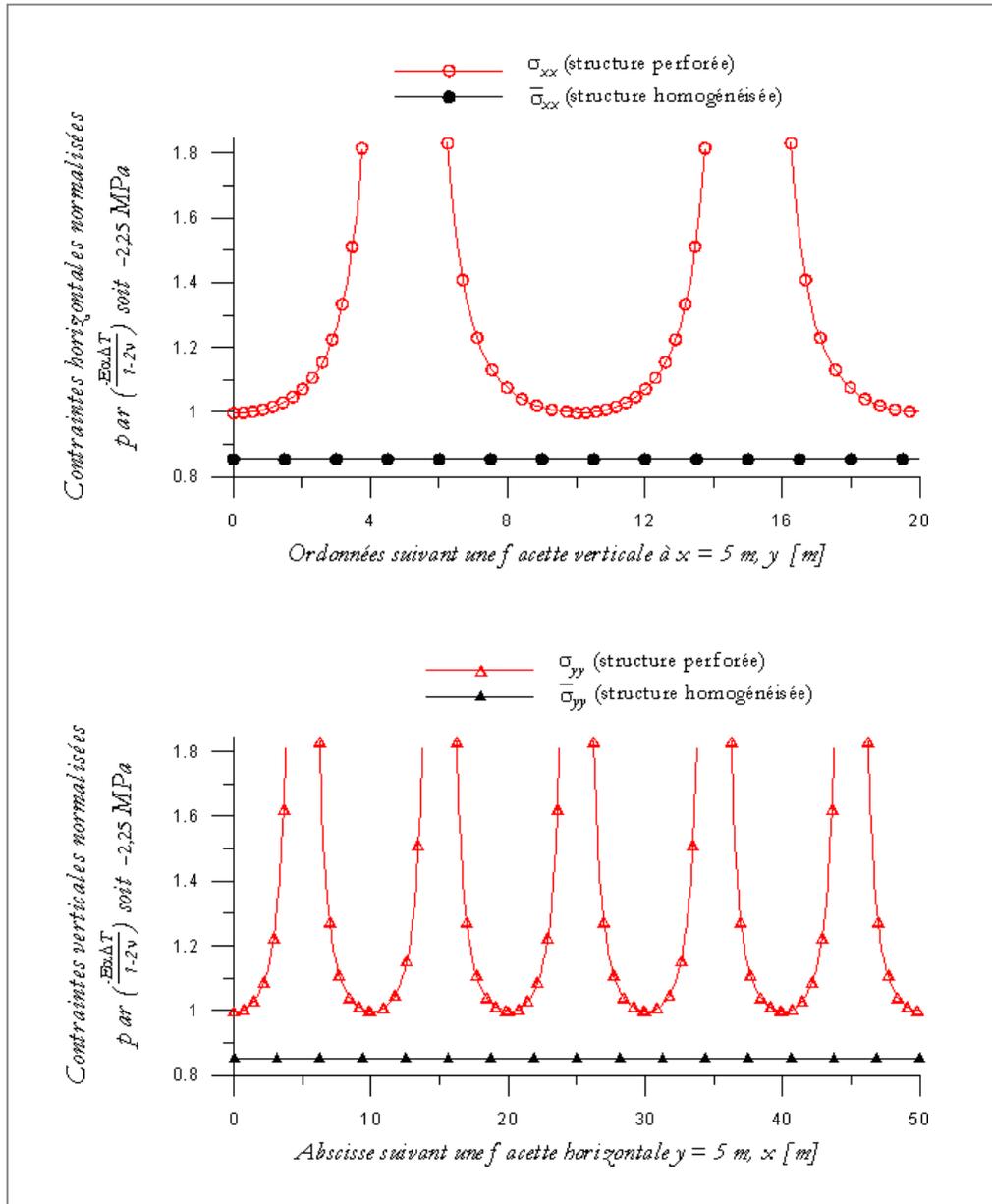
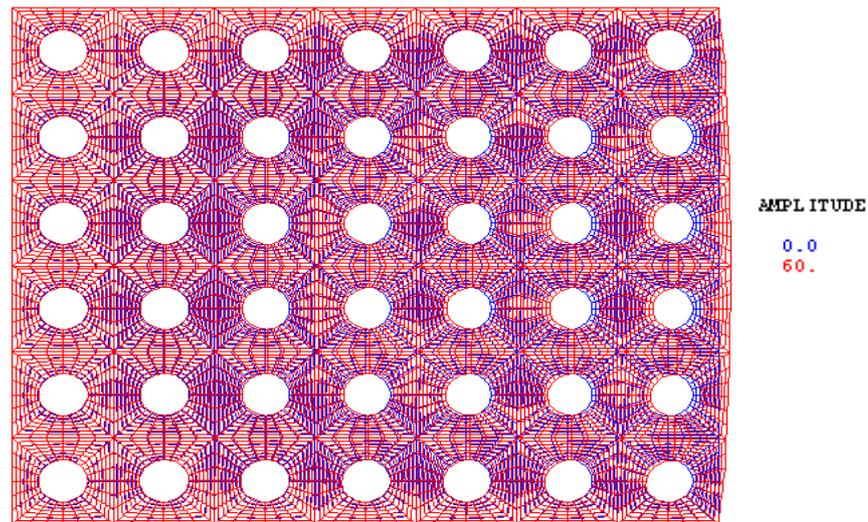


Figure 4.29 : Distributions des contraintes verticales suivant deux facettes (verticale et horizontale : illustration avec la structure types 1)

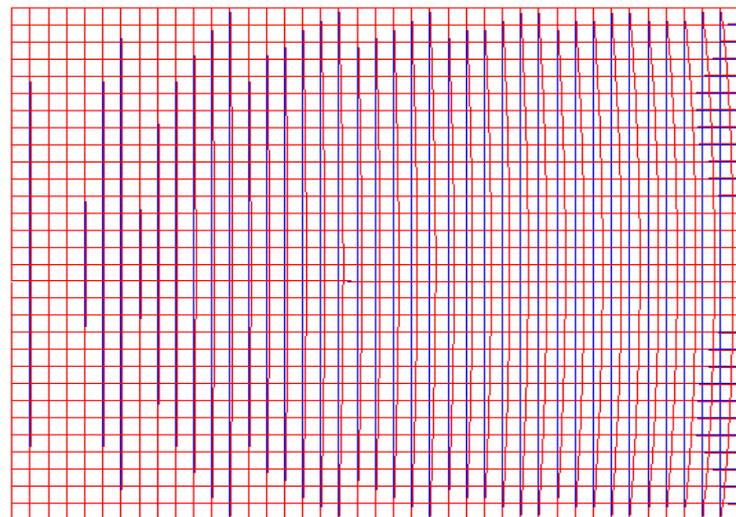
Calculs 2 : structures soumises à une variation de température uniforme et les déplacements normaux aux contours sont bloqués (Figure 4.23)

c) **Calculs 3**

Les calculs sont réalisés en déformations planes. Les contours supérieur, inférieur et gauche de la structure sont encastés tandis que le contour droit est laissé libre. Une variation de température uniforme de 25°C est imposée à la structure (Tableau 4.6). La Figure 4.30 présente les déformées de la structure type 1 et de la structure homogénéisée associée.



a) Structure perforée



b) Structure homogénéisée

Figure 4.30 : Déformés des structures (Illustration : structure type 2)
Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

La distribution des contraintes horizontales σ_{xx} suivant le contour gauche (*Figure 4.31*) laisse apparaître des oscillations très marquées sur les points situés sur les extrémités de ce contour et dont les amplitudes sont sensiblement identiques, pour les deux structures (type 1 et type 2). Ceci est la conséquence de l'équilibre par rapport aux sollicitations thermiques et les conditions aux limites mécaniques. Le modèle homogénéisé, quant à lui, donne des champs de contraintes uniformes et réguliers sur le contour gauche. La comparaison des comportements des deux structures (type 1 et type 2), sur la *Figure 4.31*, montre que les contraintes moyennes horizontales calculées avec la structure homogénéisée type 2 sont plus faibles que celles calculées avec la structure type 1. Ceci s'explique par le fait que les propriétés thermoélastiques effectives de la structure type 2 sont plus faibles que celles de la structures type 1 (*Tableau 4.5*). On remarque aussi qu'avec un plus grand nombre de rangées verticales (*Figure 4.31* : type 2), plus on s'éloigne des extrémités du contour gauche, plus l'amplitude des fluctuations des contraintes locales diminue. Toutefois, cet amortissement des fluctuations semble se compenser par l'augmentation de l'écart des contraintes locales avec les contraintes moyennes sur les extrémités de ce contour gauche.

La distribution des contraintes verticales σ_{yy} suivant la mi-hauteur des structures (*Figure 4.32*) montre une cohérence quasi-parfaite des champs moyens avec les champs locaux. La tendance des courbes est correcte dans la mesure où la valeur des contraintes verticales est minimale à proximité du contour droit (*Figure 4.33*).

Afin de mieux analyser les résultats, on a tracé, pour la structure type 2, les allures des contraintes horizontales (*Figure 4.34* et *Figure 4.35*) et des déplacements horizontaux (*Figure 4.38*) suivant des lignes verticales ainsi que celles des contraintes verticales (*Figure 4.36* et *Figure 4.37*) suivant des lignes horizontales. La *Figure 4.34* et *Figure 4.35* montrent que la valeur des contraintes horizontales macroscopiques $\bar{\sigma}_{xx}$ reste constante suivant le sommet et la base de la structure et varient très peu et lentement avec l'axe des abscisses x .

On remarque sur la *Figure 4.34* que les contraintes horizontales locales σ_{xx} sur des lignes verticales passant par des trous ($x = 5$ m et 30 m) sont plus élevées, en intensité, et ne s'accordent pas avec les contraintes macroscopiques homogènes sur les facettes correspondantes. On a évoqué, plus haut, que la présence des trous modifie la distribution des contraintes locales tandis que le modèle macroscopique donne, en principe, des champs moyens malgré une perturbation évidente à proximité du contour droit (*Figure 4.33*).

La *Figure 4.35* montre la distribution des contraintes horizontales sur des lignes verticales proches du contour droit. Elle affiche une certaine concordance entre les champs locaux avec les champs macroscopiques, et même, pour des lignes entrecoupées par des trous ($x = 65$ m). Cela met en évidence les effets du bord (côté droit libre) sur les lignes voisines. Néanmoins, les valeurs sont assez différentes pour les points situés sur le sommet et la base de la structure.

Les distributions des contraintes verticales suivant des lignes horizontales sont présentées par la *Figure 4.36* et la *Figure 4.37*. Les contraintes moyennes $\bar{\sigma}_{yy}$ sont constantes à quelques différences près suivant les abscisses avant qu'elles se dispersent à proximité du contour droit. Les valeurs maximale des $\bar{\sigma}_{yy}$ sont localisées au voisinage des points d'intersection des contours supérieurs et inférieurs avec le contour droit. La dispersion des valeurs au voisinage du contour droit est due aux effets de bord. On remarque, comme pour le cas de la *Figure 4.34*, que les contraintes verticales microscopiques σ_{yy} sont plus fortes en intensité sur les lignes traversant des trous ($y = 5$ m, 30 m et 55 m : figures 4.36 et 4.37).

La Figure 4.37 confirme que les lignes $y = 0$ m, 5 m et 10 m sont respectivement symétriques aux lignes $y = 60$ m, 55 m et 50 m par rapport à l'horizontale $y = 30$ m. La Figure 4.38 présente l'allure des déplacements horizontaux suivant des lignes verticales. La correspondance entre les champs de déplacements locaux et les champs macroscopiques est satisfaisante. La comparaison des isovaleurs des déplacements horizontaux sur la Figure 4.39 confirme la cohérence du champ local avec le champ moyen macroscopique.

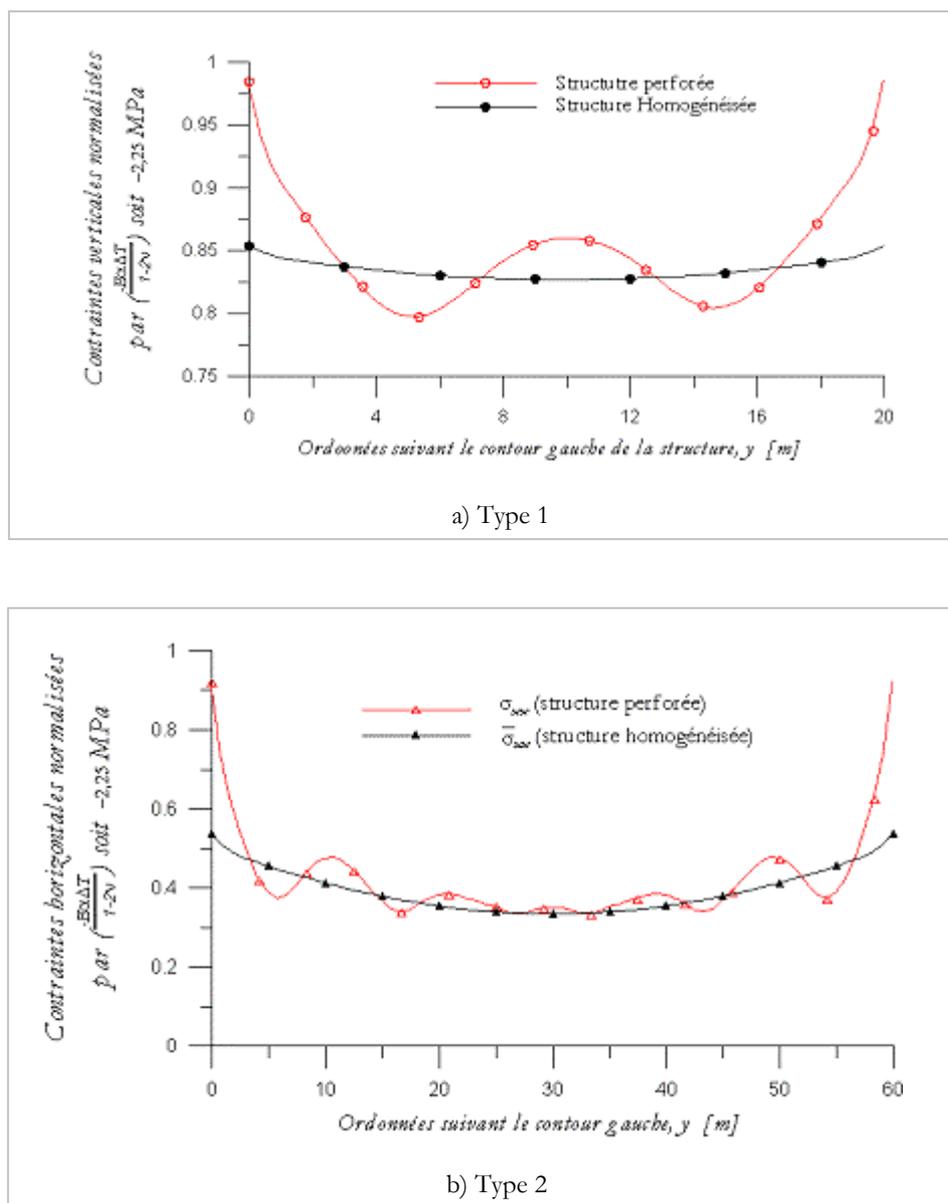


Figure 4.31 : Distributions des contraintes horizontales suivant le contour droit des structures (types 1 et 2 & Perforées et homogènes)

Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

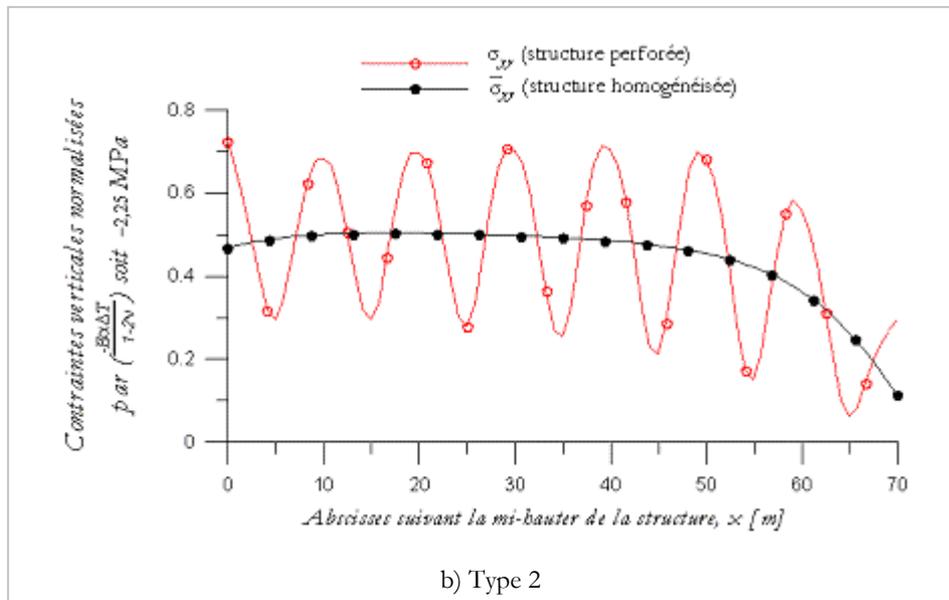
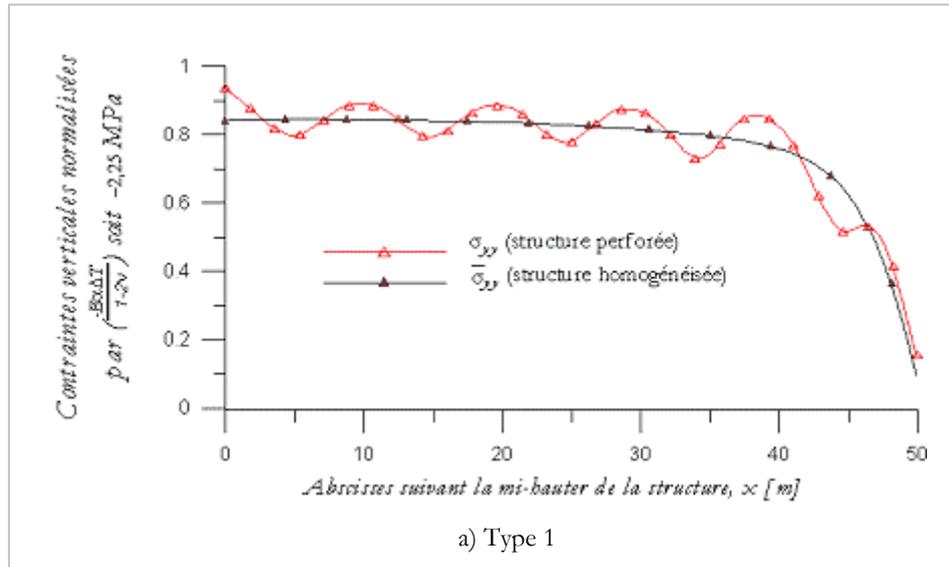
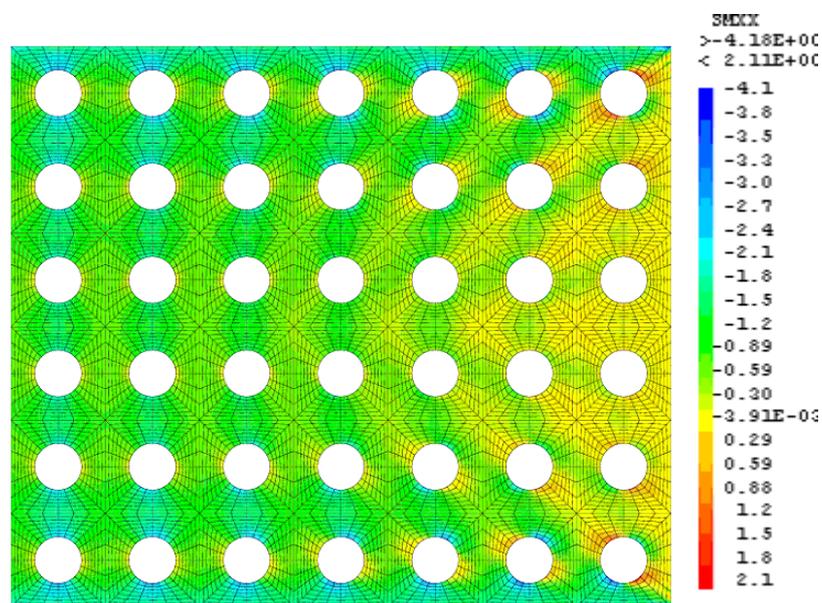
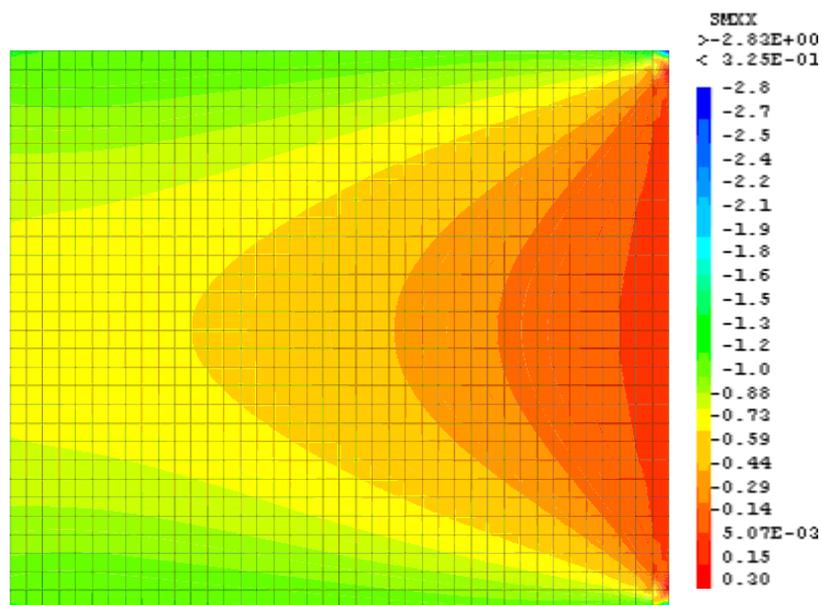


Figure 4.32 : Distributions des contraintes verticales suivant la mi-hauteur des structures (types 1 et 2 & Perforées et homogènes)
 Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)



a) Structure perforée



b) Structure homogénéisée

Figure 4.33 : Cartes des contraintes horizontales, en Pa, dans la structure type 2
Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

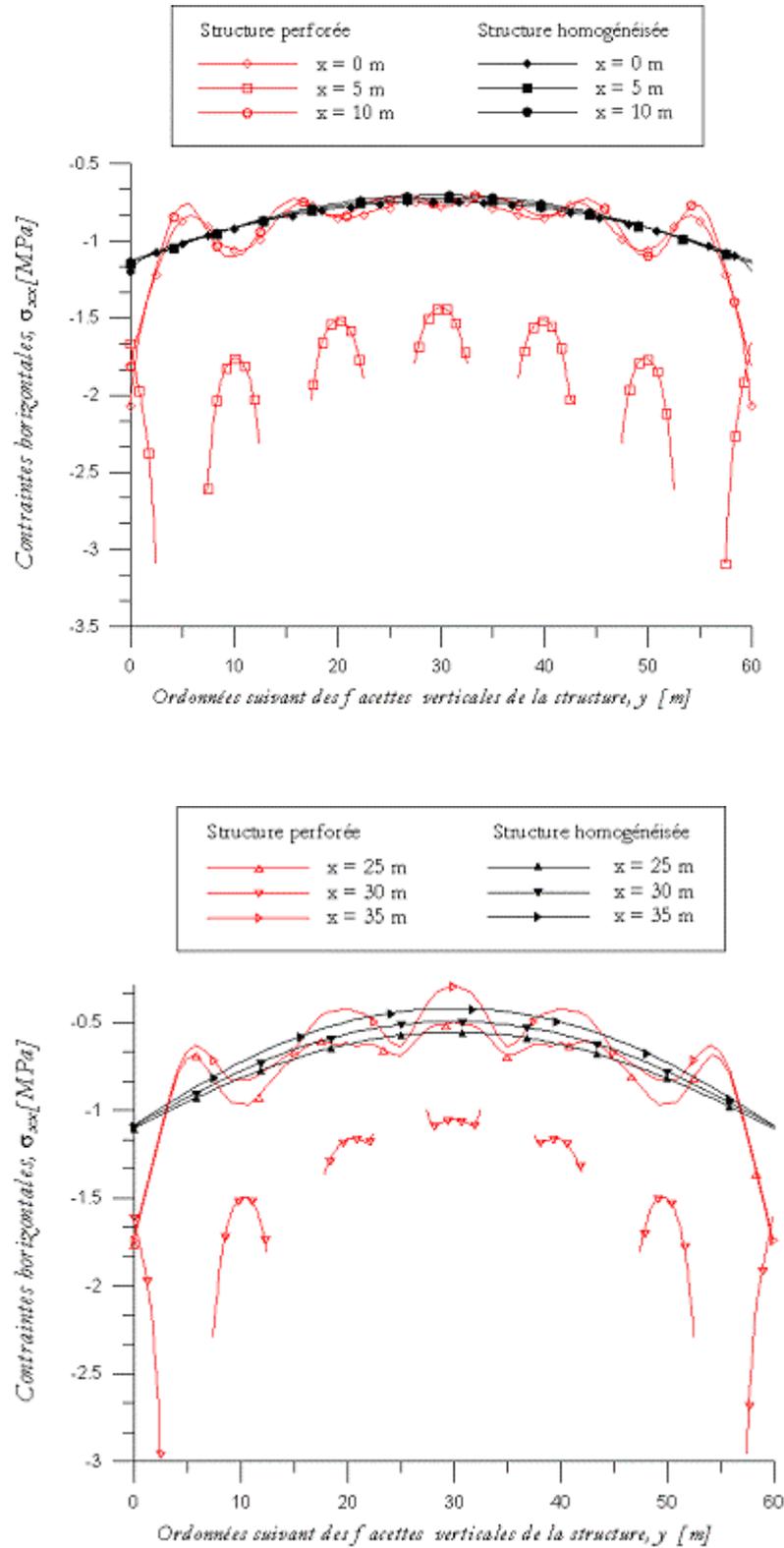


Figure 4.34 : Distributions des contraintes horizontales suivant des lignes verticales de la structure types 2
 Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

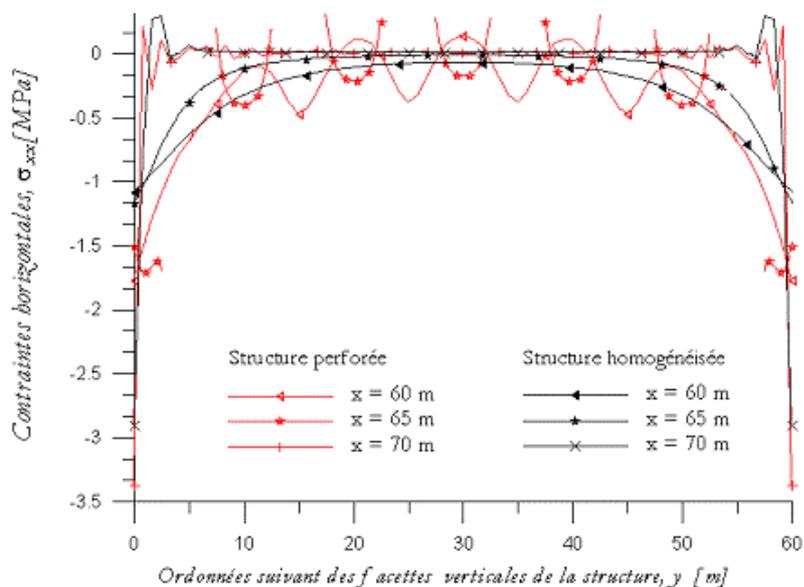


Figure 4.35 : Distributions des contraintes horizontales suivant des lignes verticales de la structure types 2

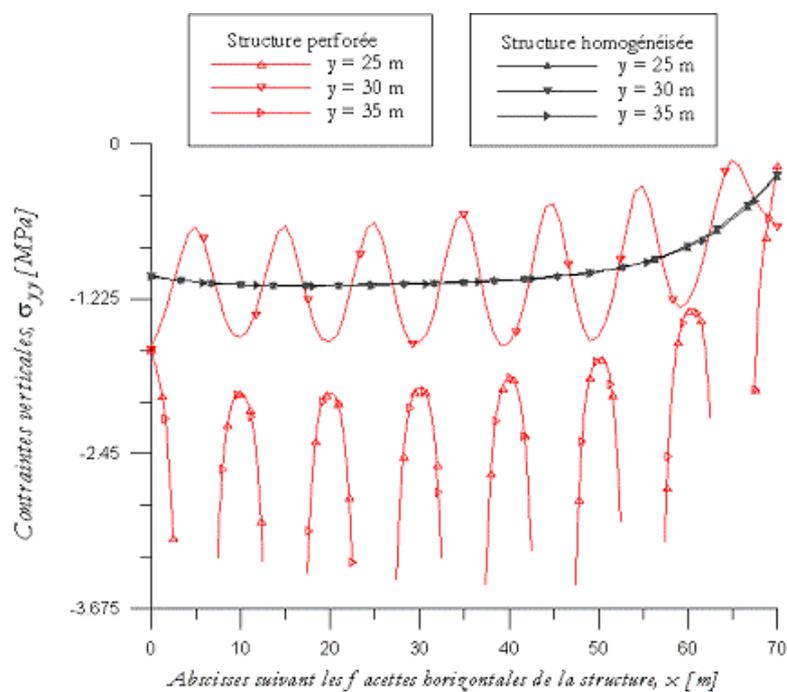


Figure 4.36 : Distributions des contraintes verticales suivant des lignes horizontales de la structure type 2
Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

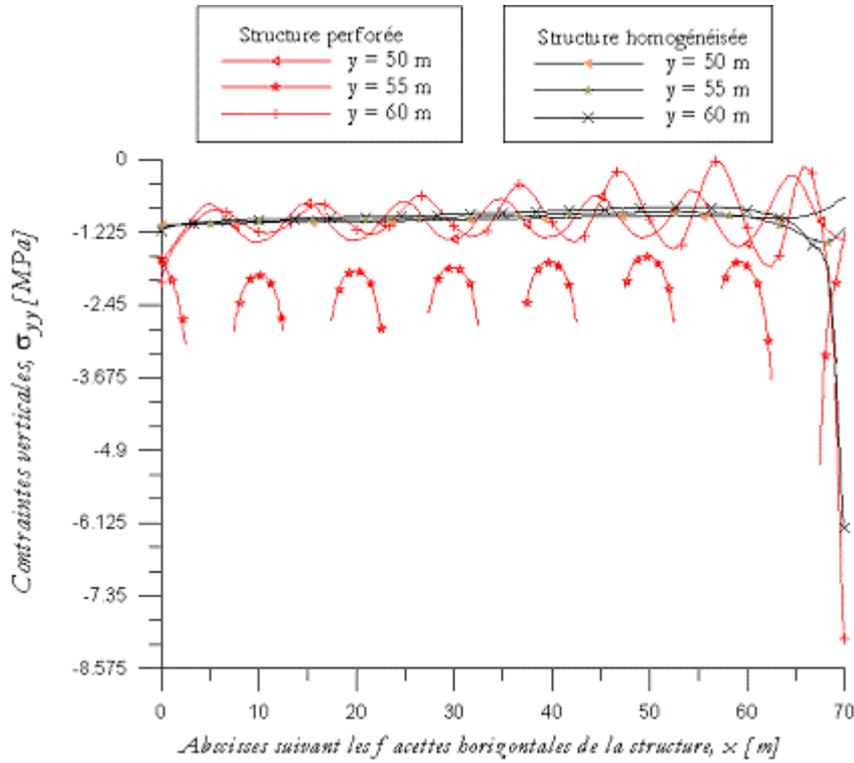
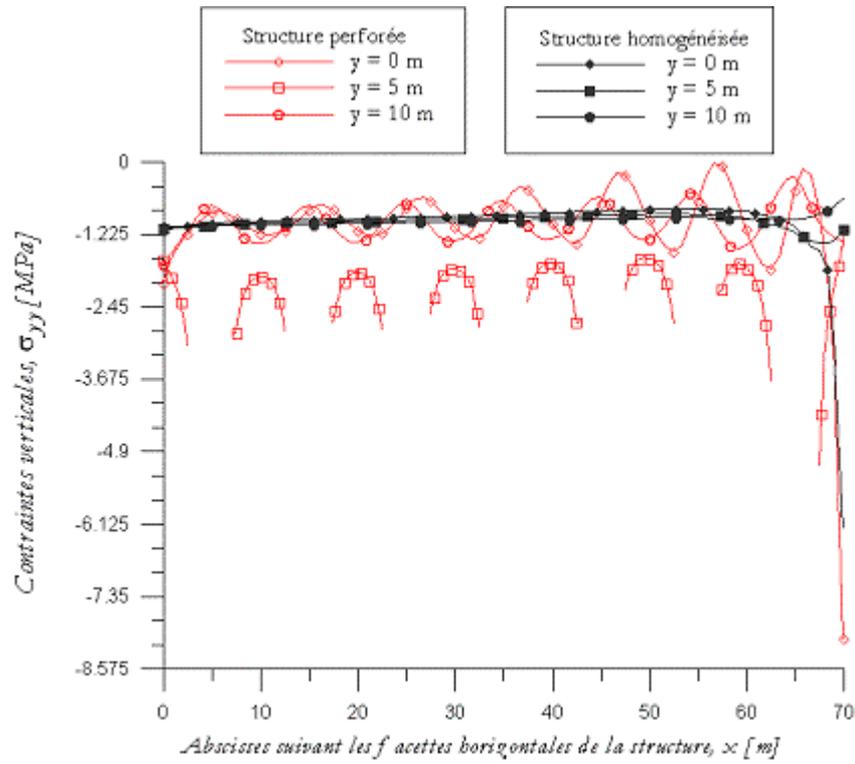


Figure 4.37 : Distributions des contraintes verticales suivant des lignes horizontales de la structure type 2
 Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

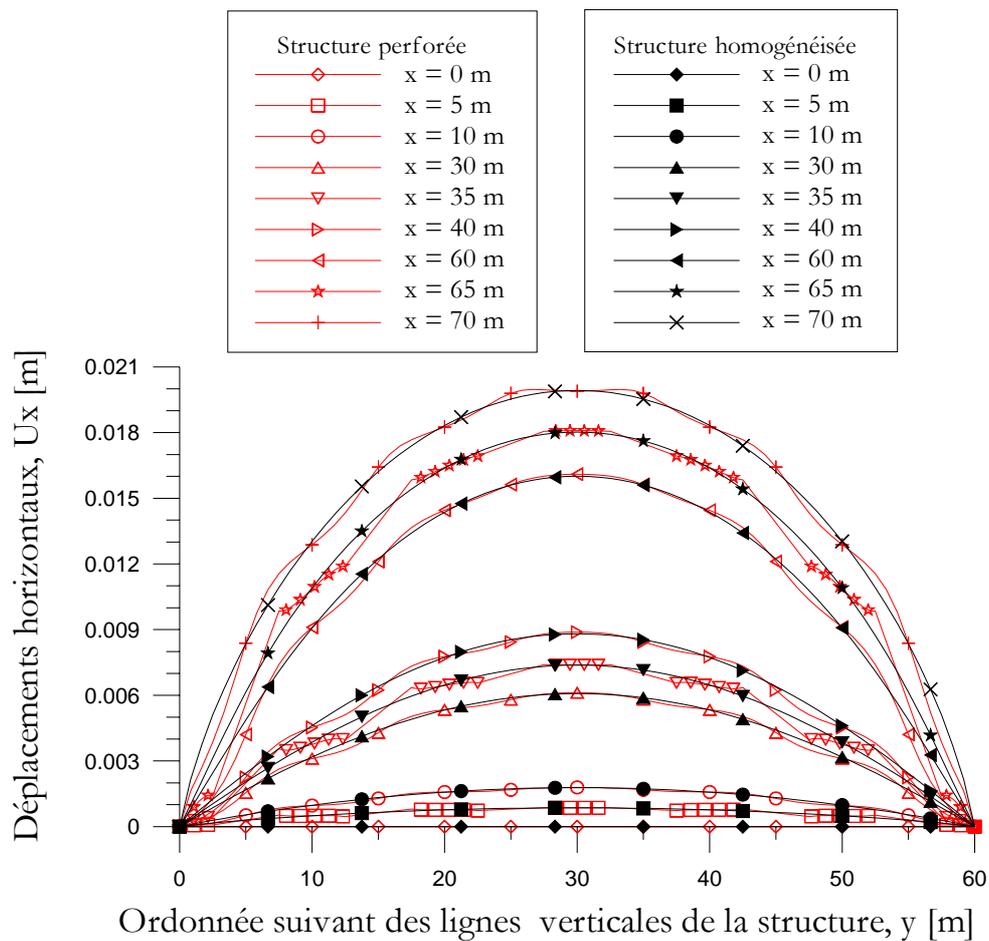
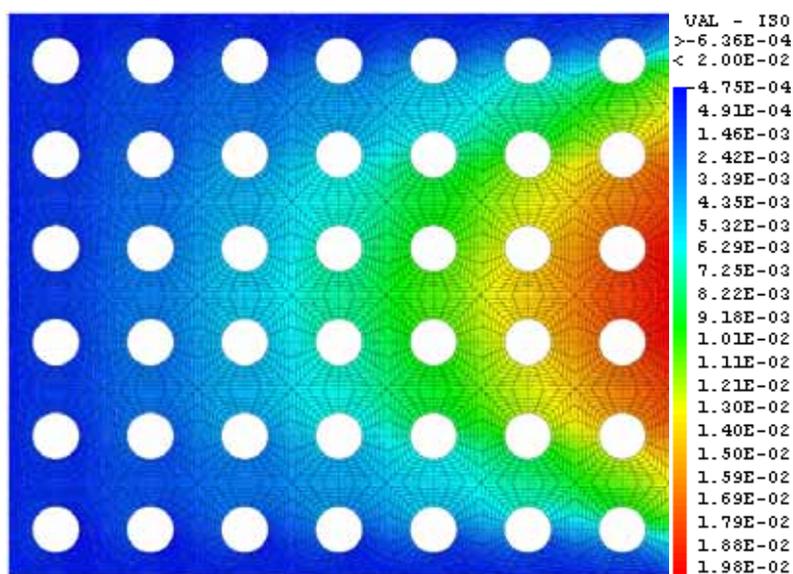
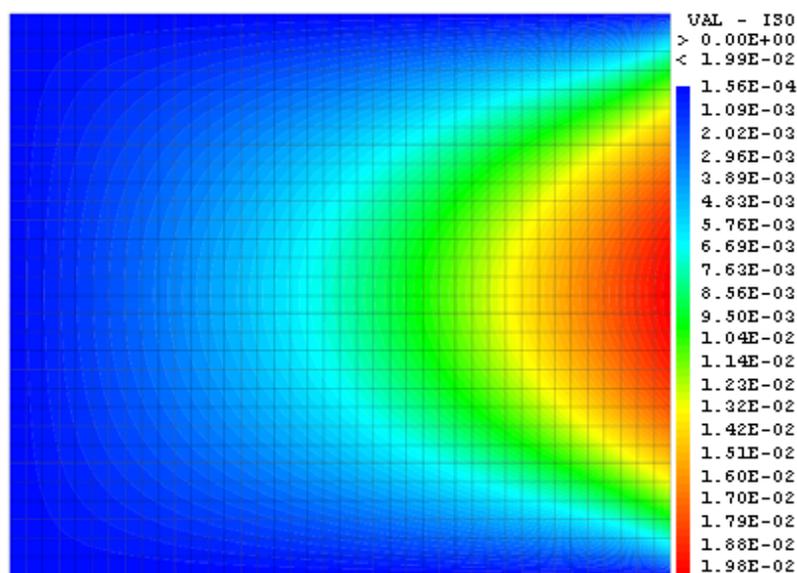


Figure 4.38 : Déplacements horizontaux suivant des lignes verticales de la structure type 2
 Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)



a) Structure perforée



b) Structure homogénéisée

Figure 4.39 : Cartes des déplacements horizontaux, en m, de la structure type 2
 Calculs 3 : structures soumises à une variation de température uniforme et les contours gauche, inférieur et supérieur sont encastés (Figure 4.23)

4.3.4 Remarques

La comparaison avec la théorie des modules effectifs et avec l'approche d'homogénéisation périodique (JCM) a montré que les modules élastiques effectifs issus de la méthode proposée ne dépendent pas de la taille du VER considéré. Dans des conditions similaires, elle donne des résultats très proches de ceux obtenus par *Michel et al. (2001 ; [78])*. Ces deux points sont importants puisqu'ils mettent en évidence la performance de la méthode de détermination des modules élastiques effectifs proposée. Par ailleurs, la comparaison avec la méthode auto-cohérente et avec les bornes de Hashin-Shtrikman a été satisfaisante. En effet, les résultats obtenus avec la méthode proposée sont non seulement encadrés par les bornes de Hashin-Shtrikman mais surtout proches de ceux donnés par le modèle auto-cohérent. Enfin, le comportement d'une structure perforée a été comparé avec celui de son homologue homogénéisé. Les résultats des modélisations numériques ont montré que le modèle homogénéisé représente parfaitement le comportement thermoélastique effectif équivalent à la structure hétérogène de référence.

4.4 Applications sur un réseau de galeries de stockage profond

On dispose maintenant d'une démarche d'homogénéisation qui permet de décrire le comportement thermoélastique effectif d'une structure hétérogène. On suppose que le caractère hétérogène de l'installation de stockage n'est pas dû au fait de l'existence de différentes phases dans la structure. En effet, on ne prend pas en compte le caractère biphasé à cette échelle. C'est tout simplement la présence de réseaux de galeries de stockage creusées dans le massif rocheux qui complique l'étude du comportement thermomécanique de l'installation de stockage.

4.4.1 Représentation du modèle de référence hétérogène

On considère la section d'une coupe transversale d'un module de stockage caractérisée par une structure périodique biphasée (*Figure 4.40*) : massif rocheux et cavité. Pour pouvoir définir le VER, on a adopté les hypothèses suivantes :

- l'hétérogénéité est la cavité,
- la périodicité du réseau se produit uniquement le long de la direction horizontale x ,
- la longueur des cavités est suffisamment longue par rapport à leur diamètre pour qu'on puisse considérer une épaisseur unité comme dimension perpendiculaire à sa section,
- les limites supérieures et inférieures du VER suivant la direction verticale seront fixées à 5 diamètres de la cavité puisque celle-ci se situe en milieu profond.

Par conséquent, le VER choisi est représenté par la cellule de base (*Figure 4.41*) d'épaisseur unité L , de volume V , constitué par un domaine V_1 de contour ∂V_1 et d'un vide cylindrique V_2 , de contour ∂V_2 . Sa largeur d correspond à l'entraxe du réseau des cavités de diamètre D . La hauteur du VER est fixée à $h = 5D$ afin de respecter les recommandations concernant le maillage des ouvrages en géotechnique selon *Mestat et al. (2000 ; [76])*. On considère que l'axe z du repère rectangulaire (x, y, z) est confondu avec l'axe de la cavité cylindrique. Notons que pour des raisons de symétries, le quart de ce VER adopté peut constituer un VER. Les caractéristiques géométriques et physiques du VER sont présentées dans le *Tableau 4.7*.

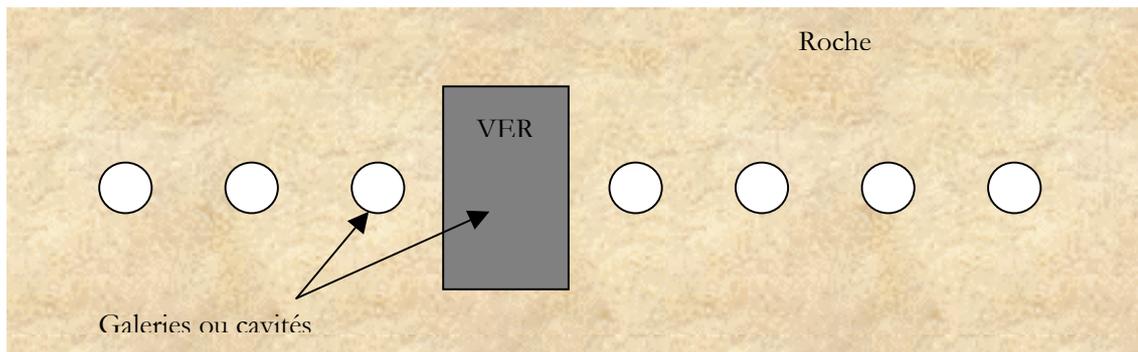


Figure 4.40 : Schéma du matériau présentant des cavités périodiques

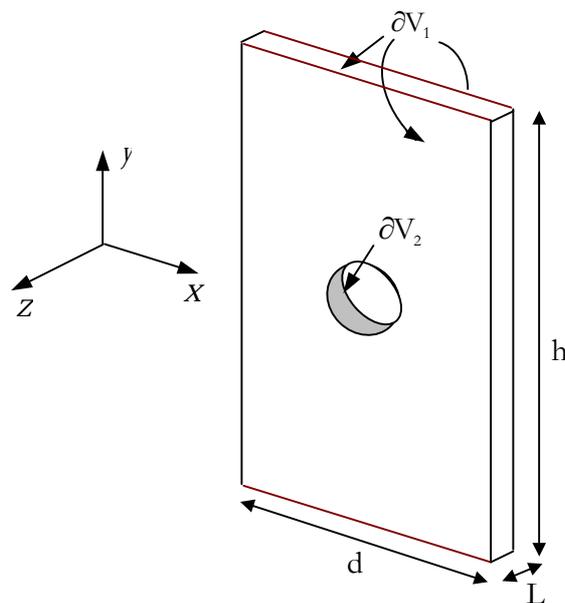


Figure 4.41 : Description du VER

Diamètre des cavités, D [m]	2,5
Hauteur, h [m]	25
Epaisseur, L [m]	1
Entraxe (largeur), d [m]	7,5 – 9 – 10 – 15 – 18
Module d'Young, E [MPa]	3620
Coefficient de Poisson, ν	0,3
Masse volumique, ρ [kg/m ³]	2450
Coefficient de conductivité thermique, k [Wm ⁻¹ °C ⁻¹]	1,89
Coefficient de dilatation thermique, α [°C ⁻¹]	10 ⁻⁵

Tableau 4.7 : Caractéristiques géométriques et thermoélastiques du VER

4.4.2 Comportement thermoélastique homogène équivalent

4.4.2.1 Coefficients d'élasticité effectifs

Conformément à la structure du VER, le comportement homogène équivalent est orthotrope et s'écrit sous la forme (4.64) avec (4.66) et (4.67). Le *Tableau 4.8* présente les composantes du tenseur d'élasticité effectif pour les différentes dimensions de l'entraxe.

Entraxe, d [m]	7,5	9	10	15	18
\tilde{C}_{1111} [MPa]	4537	4581	4605	4685	4715
\tilde{C}_{2211} [MPa]	1875	1912	1930	1984	2002
\tilde{C}_{3311} [MPa]	1924	1948	1961	2001	2015
\tilde{C}_{1122} [MPa]	1875	1912	1930	1984	2002
\tilde{C}_{2222} [MPa]	4467	4538	4572	4675	4709
\tilde{C}_{3322} [MPa]	1903	1935	1951	1998	2013
\tilde{C}_{1133} [MPa]	1924	1948	1961	2001	2015
\tilde{C}_{2233} [MPa]	1903	1935	1951	1998	2013
\tilde{C}_{3333} [MPa]	4673	4706	4723	4772	4789
\tilde{C}_{2323} [MPa]	1258	1300	1309	1337	1346
\tilde{C}_{1212} [MPa]	1292	1310	1319	1345	1353
\tilde{C}_{3131} [MPa]	1312	1320	1325	1342	1349

Tableau 4.8 : Composantes des matrices des matrices des rigidités équivalentes

Le *Tableau 4.9* présente les coefficients élastiques homogènes équivalents calculés pour les différentes dimensions de l'entraxe. On remarque que les valeurs des coefficients de Poisson effectifs ne varient que très peu de la valeur initiale du coefficient de Poisson local ν . Cela signifie que l'influence du trou sur les contractions du matériau homogène équivalent est négligeable. L'influence du trou est, par ailleurs, inexistante dans la contraction suivant la direction 3 puisque $\tilde{\nu}_{32} = \tilde{\nu}_{31} = 0,300 = \nu$ (*Tableau 4.9*) car l'axe du trou cylindrique coïncide avec la direction 3. Le comportement homogène équivalent est proche du comportement élastique isotrope transverse lorsque l'entraxe atteint sa dimension maximale. Le *Tableau 4.10* et la *Figure 4.42* présentent respectivement les pourcentages et l'allure des taux d'affaiblissement du module de Young du matériau homogène équivalent par rapport au module initial du massif rocheux suivant les trois directions (x, y et z) et en fonction du rapport cavité/entraxe. On remarque sur la *Figure 4.42* que l'orientation du trou suivant la direction 3 a la même influence suivant les directions 1 et 2 malgré la légère différence qui subsiste provenant de la forme rectangulaire du VER. En revanche, plus l'entraxe des cavités est grand, plus cette différence se réduit jusqu'à ce qu'elle n'apparaisse plus pour une dimension maximale de l'entraxe.

Entraxe, d [m]	7,5	9	10	15	18
\tilde{E}_1	3422	3445	3458	3504	3522
\tilde{E}_2	3374	3415	3435	3497	3518
\tilde{E}_3	3525	3541	3549	3572	3581
$\tilde{\nu}_{12}$	0,296	0,297	0,297	0,299	0,299
$\tilde{\nu}_{13}$	0,291	0,292	0,292	0,294	0,295
$\tilde{\nu}_{23}$	0,287	0,289	0,290	0,294	0,295
$\tilde{\nu}_{21}$	0,291	0,294	0,295	0,298	0,299
$\tilde{\nu}_{31}$	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
$\tilde{\nu}_{32}$	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
\tilde{G}_{23}	1258	1300	1309	1337	1346
\tilde{G}_{31}	1312	1320	1325	1342	1349
\tilde{G}_{12}	1292	1310	1319	1345	1353

Tableau 4.9 : Coefficients élastiques homogènes équivalents du réseau de galerie

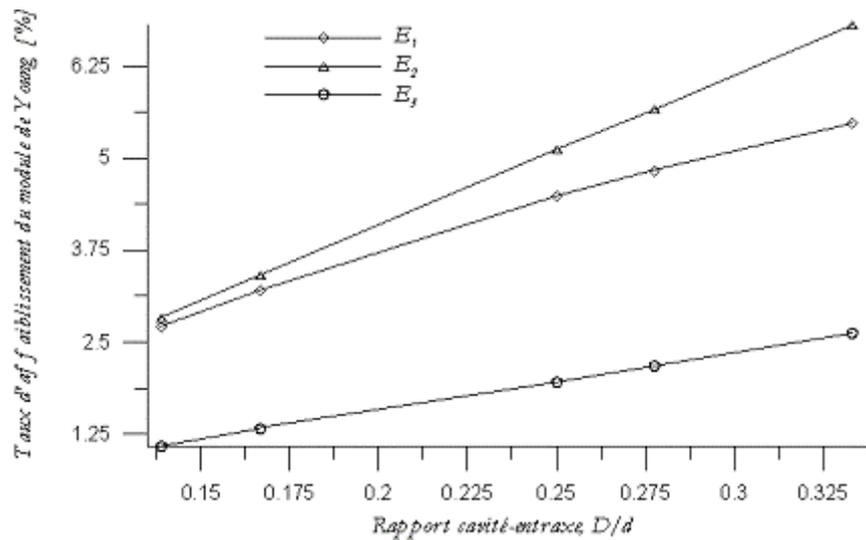


Figure 4.42 : Taux d'affaiblissement des modules de Young effectifs en fonction du rapport cavité/entraxe

Le module d'Young dans la direction 3 est égal au module initial de la roche corrigé de la cavité puisque son taux d'affaiblissement correspond parfaitement à la fraction volumique de la cavité (*Tableau 4.10*). Cela est dû au fait que l'axe du trou est confondu à la direction 3. On remarque que plus les cavités se rapprochent les unes des autres (c'est à dire : l'entraxe d est petit), plus le taux d'affaiblissement du module de Young est grand, qu'elle que soit la direction considérée.

Rapport cavité-entraxe D/d	Fraction volumique de la cavité [%]	Affaiblissement [%]		
		\tilde{E}_1	\tilde{E}_2	\tilde{E}_3
0,33	2,62	5,47	6,80	2,62
0,28	2,18	4,83	5,66	2,18
0,25	1,96	4,48	5,11	1,96
0,17	1,31	3,20	3,40	1,33
0,14	1,09	2,70	2,82	1,08

Tableau 4.10 : Taux d'affaiblissement du module de Young

4.4.2.2 Coefficients de conductivité thermique effectifs

Le transfert thermique s'effectue dans un milieu orthotrope. Le tenseur de conductivité thermique homogène effectif est une matrice symétrique écrite sous la forme :

$$(4.121) \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_{33} \end{bmatrix}$$

Le *Tableau 4.11* présente les résultats des calculs des composantes des tenseurs de conductivité thermique pour les différentes dimensions de l'entraxe. Le *Tableau 4.12* et la *Figure 4.43* présentent respectivement les pourcentages et l'allure des taux d'affaiblissement des coefficients de conductivité thermique effectifs du matériau homogène équivalent par rapport au coefficient de conductivité thermique initial du massif rocheux suivant les trois directions (x, y et z) et en fonction du rapport cavité/entraxe. Certaines constatations faites à propos des coefficients d'élasticité effectifs se révèlent également en ce qui concerne les coefficients de conductivité thermique effectifs. On remarque que l'orientation du trou suivant la direction 3 a la même influence suivant les directions 1 et 2 puisque $\tilde{k}_{11} \approx \tilde{k}_{22}$. La légère différence qui subsiste provient de la forme rectangulaire du VER. Le coefficient de conductivité thermique suivant la direction 3 est égal au coefficient de conductivité initial de la roche corrigé de la cavité puisque son taux d'affaiblissement correspond à la fraction volumique de la cavité (*Tableau 4.12*). On remarque que plus les cavités se rapprochent les unes des autres, plus l'affaiblissement du coefficient de conductivité thermique effectif augmente quelle que soit la direction considérée.

Entraxe, d [m]	7,5	9	10	15	18
\tilde{k}_{11} [Wm ⁻¹ °C ⁻¹]	1,80	1,81	1,82	1,84	1,85
\tilde{k}_{22} [Wm ⁻¹ °C ⁻¹]	1,79	1,81	1,82	1,84	1,85
\tilde{k}_{33} [Wm ⁻¹ °C ⁻¹]	1,84	1,85	1,85	1,86	1,87

Tableau 4.11 : Coefficients de conductivité thermique effectifs

Rapport cavité-entraxe D/d	Fraction volumique de la cavité [%]	Affaiblissement [%]		
		\tilde{k}_{11}	\tilde{k}_{22}	\tilde{k}_{33}
0,33	2,62	4,76	5,34	2,65
0,28	2,18	4,23	4,39	2,12
0,25	1,96	3,70	3,92	1,96
0,17	1,31	2,65	2,59	1,32
0,14	1,09	2,12	2,12	1,06

Tableau 4.12 : Taux d'affaiblissement des coefficients de conductivité thermique

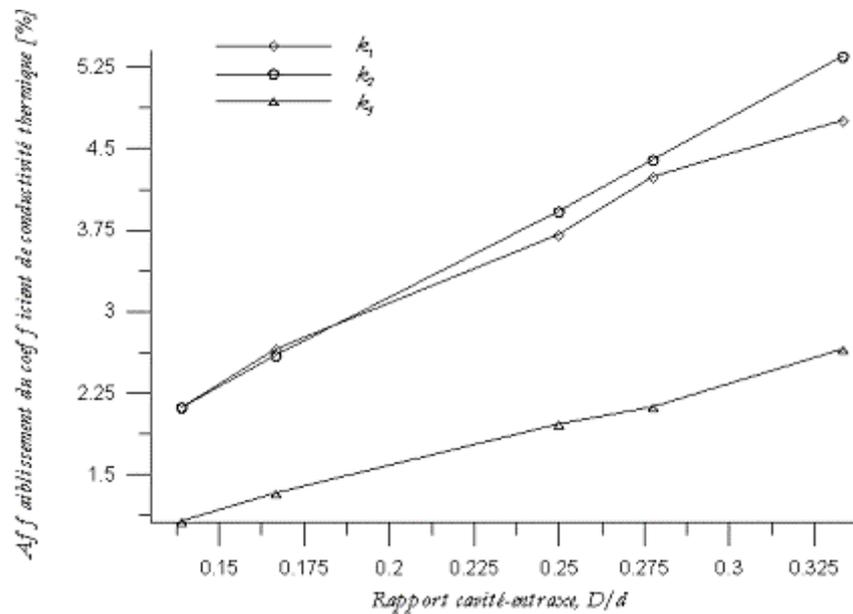


Figure 4.43 : Taux d'affaiblissement des coefficients de conductivité thermique effectifs en fonction du rapport cavité/entraxe

4.5 Conclusions

L'objectif principal de ce chapitre a été de modéliser le comportement thermomécanique d'ouvrages de stockage à grande échelle. Dans cette perspective, la méthode d'homogénéisation de milieux à structure périodique a été retenue pour décrire le comportement thermoélastique homogène équivalent du milieu hétérogène de référence.

Quelques rappels sur la technique d'homogénéisation sont présentés au début du chapitre. On précise, notamment, l'importance du choix de l'échelle de description de la microstructure, selon les phénomènes auxquels on s'intéresse, dans le passage micro-macro. Puis, on montre que la notion de macro homogénéité est un artifice important qui permet d'affecter à un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau hétérogène de référence un comportement homogène équivalent lequel est exprimé par des champs homogènes macroscopiques. Ensuite, les principales étapes de la méthodologie d'homogénéisation ont été passées en revue. Enfin, les principales méthodes d'homogénéisation telles que la théorie de module effective, les approximations de Voigt et Reuss ainsi que l'homogénéisation des milieux périodiques ont été résumées.

La théorie des modules effectifs consiste à imposer des conditions homogènes en contraintes ou en déformations sur le contour du VER et à déterminer les champs locaux correspondant à celui-ci. Les propriétés énergétiques liées à cette méthode ont montré que la condition homogène en déformations donne de modules plus grands que la condition en contraintes homogènes. Les approximations de Voigt et Reuss supposent que le module élastique effectif est égal à la moyenne spatiale des modules élastiques des constituants du VER ; ce qui revient à surestimer le module élastique effectif. L'homogénéisation des milieux périodiques est la méthode la plus fréquemment utilisée. De manière classique, elle cherche des variables à double échelle sous une forme asymptotique. En faisant tendre le rapport de l'échelle locale avec celle macroscopique vers zéro, on obtient les équations homogénéisées. Les termes d'ordre supérieur à 1 peuvent éventuellement être pris en compte.

Dans la section suivante, une formulation d'homogénéisation périodique a été proposée. Elle consiste à chercher des variables périodiques composées par une partie homogène et une partie fluctuante périodique liée à l'hétérogénéité. Cette approche a été donc mise en œuvre pour déterminer par la méthode des éléments finis le comportement thermoélastique effectif d'une structure périodique.

La validation du comportement thermoélastique homogène effectif a été satisfaisante puisqu'elle a permis de situer les résultats obtenus par rapport aux autres méthodes d'homogénéisation et à des résultats de référence. Cette méthode donne une estimation identique aux autres approches d'homogénéisation périodique. La comparaison avec la méthode auto-cohérente et les bornes de Hashin-Shtrikman ont montré une bonne cohérence des résultats. Enfin, la comparaison du comportement thermoélastique homogène équivalent avec celui de la structure hétérogène de référence, par des modélisations numériques, a montré que le modèle thermoélastique homogène équivalent reproduit bien le comportement thermoélastique de la structure hétérogène réelle. Toutefois, ces calculs ont montré la nécessité d'une démarche inverse complémentaire afin de recalculer les champs de contraintes et de déformations à l'échelle locale à partir des champs homogènes effectifs connus.

Chapitre 5

Conclusions générales et perspectives

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'évaluation de la sûreté des stockages de déchets radioactifs en formation géologique profonde. Elle fait partie des études supports nécessaires à l'analyse de la démonstration de faisabilité d'une éventuelle installation de stockage. Dans ce contexte, bon nombre d'études réalisées jusqu'à ce jour ont porté essentiellement sur des analyses soit à l'échelle des échantillons de roches soit à l'échelle des ouvrages individuels. A l'heure actuelle, il manque des moyens et des méthodes qui permettent d'analyser le comportement thermomécanique global de l'installation de stockage. Le but de ce travail de recherche est de proposer des approches théoriques et numériques qui permettent de modéliser le comportement thermoélastique des ouvrages souterrains de stockage à grande échelle.

Après une présentation d'un état des connaissances sur les aspects thermomécaniques liés au stockage souterrain des déchets radioactifs, des modélisations numériques du comportement thermoélastique d'une alvéole individuelle et d'un réseau de galerie en 2D et en 3D ont été réalisées par une approche discrète classique. Cette approche préliminaire a été nécessaire puisqu'elle a pu être confrontée avec des solutions analytiques connues d'une part, d'autre part, elle a permis d'analyser les mécanismes à l'échelle des galeries en fonction de la dimension et d'un éventuel chargement thermique. Les résultats obtenus ont été par ailleurs satisfaisants dans l'ensemble. Toutefois, la modélisation du comportement thermoélastique d'un réseau de galerie ou d'une installation de stockage par l'approche discrète demeure une analyse approximative dans la mesure où des hypothèses parfois très fortes. Sans ces hypothèses simplificatrices, l'approche discrète serait pénalisante et laborieuse pour modéliser le comportement global d'un stockage. Une méthode de modélisation numérique par homogénéisation a été proposée pour pallier à ce problème. Elle consiste à assimiler la zone de stockage à un milieu périodique. Puis par des formulations théoriques et des procédures numériques d'homogénéisation ainsi élaborées, on détermine le comportement thermoélastique homogène effectif du milieu périodique de référence sur son Volume Élémentaire représentatif. Une fois le comportement thermoélastique global connu, il suffit de l'introduire dans un calcul classique sur le modèle global avec l'avantage d'effacer les hétérogénéités géométriques ou matérielles. Ce calcul permet ainsi de déterminer les champs des contraintes et/ou des déplacements homogènes macroscopiques. Après cela, une démarche inverse est nécessaire pour connaître les champs des contraintes et/ou des déformations locaux.

L'approche proposée a été validée avant l'application aux ouvrages souterrains de stockage des déchets radioactifs. La validation a été satisfaisante puisqu'elle a permis de situer les résultats obtenus avec la méthode proposée par rapport aux autres méthodes d'homogénéisation et à des résultats de référence. On a constaté qu'elle donne des résultats conformes aux autres approches d'homogénéisation périodique. L'application sur un réseau de galeries de stockage souterrain permet seulement de déterminer son comportement thermoélastique homogène effectif. Toutefois, on n'a pas pu réaliser de modélisations numériques par homogénéisations complètes. Par ailleurs, cette approche nécessite d'une démarche inverse complémentaire afin de recalculer les champs de contraintes et de déformations à l'échelle locale à partir des champs homogènes effectifs connus.

On dispose maintenant d'un outil qui permet de modéliser le comportement thermoélastique d'une installation de stockage à grande échelle. En perspective, cet outil mérite une application complète sur un réseau de galerie avec des configurations de chargement particulières. Aussi, une extrapolation de cette approche dans le temps est nécessaire compte tenu de la longue vie des déchets radioactifs destinés au stockage souterrain. Autrement dit, il convient d'étendre la méthode d'homogénéisation proposée ici en thermoviscoplasticité.

Références bibliographiques

- [1] ANDRA (1998) : Synthèse des options initiales de conception d'un stockage de déchets de haute activité et à vie longue (HAVL). *Rapport de synthèse* C RP A HVL 98-003/B.
- [2] ANDRA (1999) : Analyse de la perturbation thermomécanique autour des ouvrages des sites Est et Gard, TGDB - GCV - TC - Galerie de manutention et de roulage, *Rapport de calcul* C NSY OCEB 98 115/B.
- [3] ANDRA (2000) : Choix des concepts préliminaires : synthèse justificative, *Rapport de synthèse* C NT AHVL 99-017/D.
- [4] ANDRA (2000) : Définition des caractéristiques radiologiques et thermique du colis type combustible du MIP version2 CU2(SM), *Rapport* C NT ASRE 00.082/C.
- [5] ANDRA (2000) : Définition des colis types des déchets C du MIP version2, *Rapport* C NT ASRE 00-89/C.
- [6] ANDRA (2000) : Description des concepts préliminaires de stockage, *Rapport* C NT AHVL 99.020/A.
- [7] ANDRA (2001) : Référentiel géologique du site de Meuse/Haute-Marne, Tome 5, *Etat d'avancement de la modélisation*, *Rapport* A RP ADS 99-005/B.
- [8] ANDRA (2002) : Projet HAVL Argile Site de Meuse/ Haute-Marne, remblaiement des galeries et des puits : Rôles, propriétés et solutions possibles. *Rapport* D RP AGEM 01.053, 12/08/2002.
- [9] ANDRA (2002) : Projet HAVL Argile, Orientations pour les concepts futurs. *Rapport* C NT AHVL 02.100, août.
- [10] ANDRA (2002) : Projet HAVL Argile, Principaux résultats de l'étude des pistes d'optimisation envisagées pour les concepts préliminaires. *Rapport* C NT AHVL 02.092, juillet.
- [11] ANDRA (2002) : Projet HAVL Argile, rôles des scellements de puits. *Rapport* C NT AHVL 01.040/B, 12/07/2002.
- [12] AURIAULT J.L. (2002) : Homogénéisation, Cours de l'Ecole Doctorale Mécanique et Energétique, 9^{ème} édition, UJF, INPG Grenoble.
- [13] BALDI G., BORSETTO M. and HUECKEL T. (1987) : Calibration of Mathematical Models for the Simulation of Thermal, Seepage and Mechanical Behaviour of Boom Clay. *CEC Publishers*, Luxembourg, EUR 10924 EN, 215 pp.
- [14] BALDI G., HUECKEL T., PEANO A. and PELLEGRINI R. (1991) : Developments in Modelling of Thermo-Hydro-Mechanical Behaviour of Boom Clay and Clay Based Buffer Materials. *CEC Publishers*, Luxembourg, EUR 13365 EN, 3 Vols., 134 pp.
- [15] BELANTEUR N., TACHERIFET S., PAKZAD M. (1997)^o : Etude des comportements mécanique, thermomécanique et hydromécanique des argiles gonflantes et non gonflantes fortement compactées. *Rév. Fr. Géotech.* Vol. 78, pp. 31-50.
- [16] BENDSOE M.P., KIKUCHI N. (1988) : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **71**:197-224.
- [17] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G. (1978) : *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland.
- [18] BEREST P., WEBER Ph. (1988) : La thermomécanique des roches : Manuels et Méthodes, BRGM Editions.
- [19] BERGGREN S.A., LUKKASSEN D., MEIDELL A., SIMULA L. (2003) : Some methods for calculating stiffness properties of periodic structures. *Appl. Mat.* **27**, 2:97-110.

- [20] BERGMAN D., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., MURAT F., TARTAR L., SANCHEZ-PALENCIA E. (2000) : Les méthodes de l'homogénéisation : Théorie et application en physique ; pp.133 - 214.
- [21] BORSETTO M., CRICCHI D. and HUECKEL T., (1984) : Coupled heat stress groundwater flow models for clay. In: B. Cfme (Editor), Technical Session Modelling of Stresses in Rock. Brussels, Dec. 1983. *CEC Publishers*, Luxembourg, EUR 9355 EN, pp. 173-202.
- [22] BOURGAT J.F. (1977) : Numerical experiments of homogenization method for operators with periodic coefficients. In R. GLOWINSKI & J.L. LIONS, eds, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Vol. 704 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 330-356. Springer, Berlin.
- [23] BOURGEAT A., GIPOULOUX O., MARUSIC-PALOKA E. (2004) : Modelling of an underground waste disposal site by upscaling. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 27, Issue 4, Pages: 381-403.
- [24] BURGHIGNOLI A., DESIDERI A., MILIZIANO S. (2000)^o: A laboratory study on the thermomechanical behaviour of clayey soils. *Can. J. Geotech./Rev. Can. Geotech.* 37(4) : 764-780
- [25] BYSTRÖM J. (2003) : Influence of the inclusions distribution on the effective properties of heterogeneous media. *Composites*, Part **B** : engineering.
- [26] CAMPANELLA R.G. and MITCHELL J.K. (1968) : Influence of temperature variations on soil behaviour. *J. ASCE Soil Mech. Found. Div.*, 94(SM3): 709-734.
- [27] CARDONA J.-M. (2000) : Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine, *Thèse de doctorat de l'ENS des Mines de Paris. Ecole des Mines de Paris.*
- [28] CARLSLAW H.S., JAEGER J.C. (1959) : Conduction of heat in solids. Oxford University Press, New York, 2nd Edition.
- [29] CCE et OCDE-AEN (1984) : Evacuation des déchets radioactifs en formations géologiques : panorama de l'état actuel des connaissances. Réf. CCE : EUR 9130. Publication OCDE, Paris.
- [30] Centre d'Etude Nucléaire (C.E.N./S.C.K.) Mol, Belgique (1982) : Programme de R&D relatif au rejet de déchets radioactifs en formations géologiques profondes. Etude d'une formation argileuse en Belgique. Rapport C.C.E. n°E.U.R. 7650, Luxembourg.
- [31] CFMR (2000) : Manuel de mécanique des roches. Tome 1 : Fondements. Coordonné par Homand F. et Duffaut P., *les presses de l'Ecole des Mines de Paris.*
- [32] CFMR (2004) : Manuel de mécanique des roches. Tome 2 : Les applications. Coordonné par Duffaut P., *les presses de l'Ecole des Mines de Paris.*
- [33] CHARLEZ P.A. (1991) : Rock Mechanics, Theoretical Fundamentals. Vol. 1, Edition TECHNIP.
- [34] CHRISTENSEN R. M. (1991)^o: Mechanics of Composite Materials. *Krieger Publishing* Florida.
- [35] CHRISTENSEN R. M., LO K. H. (1979)^o: Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, 315-330.
- [36] COME B. (1983)^o: Mécanique des roches et évacuation des déchets radioactifs en formations géologiques. *Revue Française de Géotechnique*, n°25, pp. 17-26.
- [37] COME B. (1984) : Conception de dépôts définitifs profonds pour déchets radioactifs : exigences, exemples actuels et idées nouvelles. *Annales de l'ITBTP*, n°430, décembre.
- [38] COME B. (1984)^o: Evaluation de la « charge thermique » admissible en formations géologiques pour l'évacuation de déchets radioactifs de haute activité. *Revue Française de Géotechnique*, n°27, pp. 51-65.

- [39] CTORI P. (1989) : The effects of temperature on the physical properties of cohesive soil. *Ground Engineering*, 1989-07, 22(5): 26-27.
- [40] DASGUPTA A., AGARWAL R.K. (1992) : Orthotropic Thermal Conductivity of Plane-Weave Fabric Composites Using a Homogenization Technique. *Journal of Composite Materials*, Vol. 26, n°18.
- [41] DE BRUYN D., THIMUS J.-F. (1996) : The influence of temperature on mechanical characteristics of Boom clay: the results of an initial laboratory programme. *Eng. Geol.* 41 (1- 4), pp. 117- 126.
- [42] DOUAT Ch. (1985) : Influence d'une faille majeure sur l'évolution thermomécanique d'un stockage de déchets radioactifs dans le granite. Rapport DEMA 85/347, Commissariat à l'énergie atomique - DEMA - LAMS, Saclay.
- [43] DUYSINX P. (février 1996) : Optimisation du milieu topologique : du milieu continu à la structure élastique, *Ph. D. Thesis, Université de Liège, Annexe A.*
- [44] EBERHARDT E. (2001) : Numerical modelling of three-dimension stress rotation ahead of an advancing tunnel face. *Int. J. Rock Mech. & Min. Sci.*, Vol. 38, pp.499-518.
- [45] EPHERRE J.-F., PESQUE J.-J. (1998) : Homogénéisation en thermique. *Revue scientifique et technique de la direction des applications militaires*. N°19, septembre.
- [46] ESHELBY J. D. (1957) : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Pro. R. Soc. Lond.*, vol. A241, 376.
- [47] FAVRE D. (1998) : Evaluation numérique des propriétés macroscopiques d'un milieu hétérogène par une approche d'homogénéisation, *Mémoire de DEA de l'ENTPE, Lyon.*
- [48] FELIX B., LEBON P., MIGUEZ R., PLAS F. (1996) : A review of the ANDRA's research programmes on the thermohydromechanical behaviour of clay in connection with the radioactive waste disposal project in deep geological formations
- [49] FURMANSKI P. (1997) : Heat conduction in composites : Homogenization and macroscopic behaviour. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 50, n°6/June.
- [50] GASC-BARBIER M., CHANCHOLE S., BEREST P. (2004)°: Creep behavior of Bure clayey rock. *Appl. Clay Sci.* Vol. 26, pp. 449-458.
- [51] GENS A., OLIVELLA S. (1995) : Constitutive laws, in *Modern issues in non-saturated soils* (Gens, Jouanna, Schrefler, eds.), Springer Verlag, Wien, p.129-158.
- [52] GENS A., OLIVELLA S. (2001) : Clay barriers in radioactive waste disposal. *Environmental Geomechanics*, Hermes Science Publications, Paris.
- [53] GENS A., OLIVELLA S. (2001) : THM phenomena in saturated and unsaturated porous media. Fundamentals and applications. *Environmental Geomechanics*, Hermes Science Publications, Paris, p.693-717.
- [54] GEOSTOCK, Paris et S.G.N., Saint-Quentin-en-Yvelines (1982) : Etude de conception générale d'une installation d'évacuation de déchets radioactifs en formation granitique. *Rapport C.C.E. n° E.U.R. 7620, Luxembourg.*
- [55] GISCLON M. (1998) : A propos de l'équation de la chaleur et de l'analyse de Fourier. *Le journal de maths des élèves*, Vol. 1, n°4, pp. 190-197.
- [56] GOGUEL J. (1975)°: La Géothermie. Editions Doin, Paris.
- [57] GU G.-Q., TAO R. (1988) : Effective thermal conductivity of a periodic composite with contact resistance. *J. Appl. Phys*, Vol. 64, n°6/September.
- [58] GUEDES J.M., KIKUCHI N. (1990) : Preprocessing and post-processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng* 16:213-234.
- [59] GUEGUEN Y., PALCIAUSKAS V. (1992) : Introduction à la physique des roches. *Hermann, éditeurs des sciences et des arts.*
- [60] GUVANASEN V., CHAN T. (2003)°: Upscaling the thermohydromechanical properties of a fractured rock mass using a modified crack tensor theory. In proceeding of

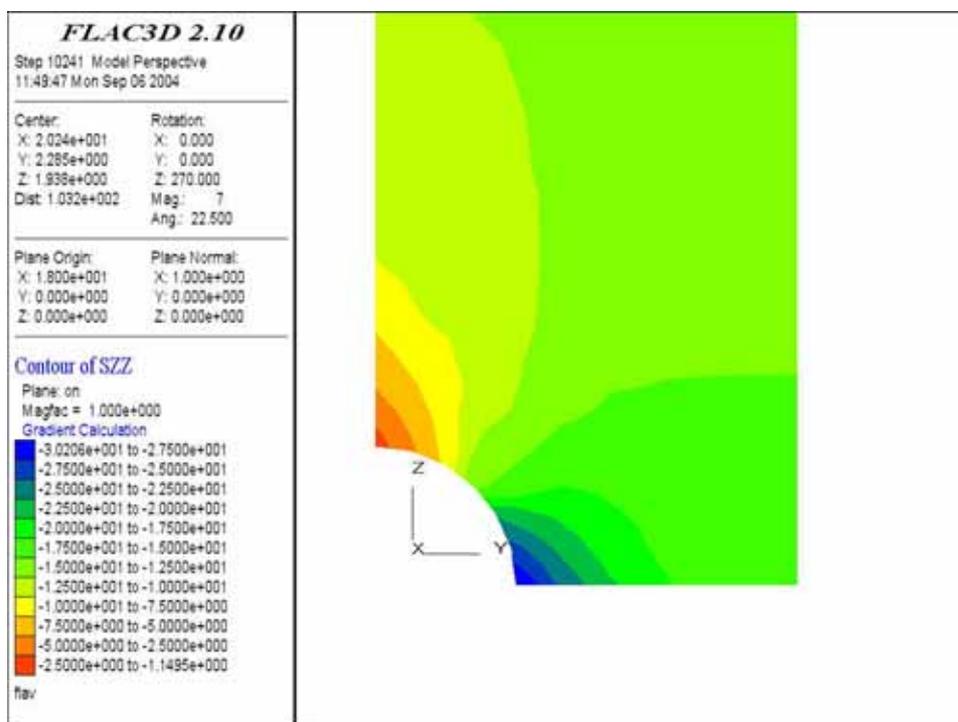
- International Conference on Coupled T-H-M-C Processes in Geo-systems: Fundamentals, Modelling, Experiments & Applications*, pp. 239-244. GeoProc 2003. Stockholm, Sweden.
- [61] HADAMARD J. (1964) : La théorie des équations aux dérivées partielles. Editions scientifiques.
- [62] HAJDU A. (2003) : Modélisation numérique du comportement viscoplastique endommageable des roches et application aux ouvrages souterrains de stockage. *Thèse de doctorat de l'UJF - Grenoble I*.
- [63] HASHIN Z., SHTRIKMAN S. (1963)^o: A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids* **11**, 127-140.
- [64] HILL R. (1963) : Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, **11**:357-372.
- [65] HILL R. (1967) : The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **15**:79-95.
- [66] HODGKINSON D. P., BOURKE P.J. (1980) : Initial assessment of the thermal stresses around a radioactive waste repository in hard rock. *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 7, pp. 541-552.
- [67] HUECKEL T. and PELLEGRINI R. (1989) : Modeling of thermal failure of saturated clays. In: G.N. Pande and S. Pietruszczak (Editors), Int. Conf. Numerical Models in Geomechanics NUMOG III. Niagara Falls, May 1989, *Elsevier Applied Science Publishers*, London, pp. 81-90.
- [68] JAEGER J.C., COOK N.G.W. (1979) : Fundamentals of Rock Mechanics, pages 282-285. *Chapman and Hall*, June. Third edition.
- [69] LAGUROS J.G. (1969) : Effect of temperature on some engineering properties of clay soils. *Int. Conf. Effects of Temperature and Heat on Engineering Behaviour of Soils. Highway Research Board Publishers*, Washington, D.C., Spec. Rep., 103: 186-193.
- [70] LENE F. (1984) : Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement. *Thèse d'Etat*, université Paris 6.
- [71] LUKKASSEN D. (1999) : A new reiterated structure with optimal macroscopic behavior, *Siam J. Appl. Math.*, Vol. 59, n°5, p. 1825-1842
- [72] MARIGO J.J., MIALON P., MICHEL J.C., SUQUET P. (1987) : Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d'une structure périodiquement hétérogène. *J. Méca. Théor. Appl.*, **6**:47-75.
- [73] MARTI J., CUNDALL P.A. (1982) : Mixed Discretisation Procedure for Accurate Solution of Plasticity Problems. *Int. J. Num. Methods & Analy. Methods in Geomech.*, Vol. **6**, pp.129-139.
- [74] MARTIN V. (2004) : Simulations multidomaines des écoulements en milieu poreux. *Thèse de doctorat de l'Université Paris IX Dauphine*.
- [75] MESTAT Ph. (1997) : Maillage d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique – Conseils et recommandations. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Vol. 212, pp.39-64.
- [76] MESTAT Ph., HUMBERT P., DUBOUCHET A. (2000) : Recommandations pour la vérification de modèles d'éléments finis en géotechnique. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Vol. 229, pp.33-51.
- [77] MICHEL J.C., MOULINEC H., SUQUET P. (1999) : Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*; **172**:109-143.
- [78] MICHEL J.C., MOULINEC H., SUQUET P. (2001) : Composites à microstructure périodique. In Bornert M., Bretheau T. et Gilormini P. (eds), Homogénéisation en Mécanique des Matériaux, Tome 1, *Hermes Science Publications* ; chap. 3, pp.57-94.

- [79] MOULINEC H., SUQUET P. (1995) : A FFT-based numerical method for computing the mechanical properties of composites from images of their microstructure. In R. PYRZ, ed, *Microstructure-Property Interactions in Composite Materials*, pages 235-246. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [80] MOULINEC H., SUQUET P. (1998) : A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*; **157**:69-94.
- [81] MURAMAYA S. (1969) : Effect of temperature on elasticity of clays. *Int. Conf. Effects of Temperature and Heat on Engineering Behaviour of Soils. Highway Research Board Publishers, Washington, D.C., Spec. Rep., 103*: 194-203.
- [82] NOBLE C.A. and DEMIREL T. (1969) : Effects of temperature on strength behaviour of cohesive soil. *Int. Conf. Effects of Temperature and Heat on Engineering Behaviour of Soils. Highway Res. Board Publ., Washington, D.C., Spec. Rep., 103*: 204-219.
- [83] PANET M. (1995) : Le calcul des tunnels par la méthode Convergence-Confinement. *Presse de l'ENPC, Paris*.
- [84] PELLET F. (2004) : Viscoplasticity and rock damage in modelling the long-term behaviour of underground excavations. MIR 2004 - X Ciclo di Conferenze di Meccanica e Ingegneria delle Rocce Torino 24-25-novembre 2004.
- [85] PELLET F., HADJU A., DELERUYELLE F., BESNUS F. (2005) : A viscoplastic model including anisotropic damage for the time dependent behaviour of rock. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, (in press). Published online in Wiley InterScience.
- [86] PELLET F., ZERFA F.Z. (2005) : Numerical Assessment of the Excavation Damaged Zone around Underground Openings Designed for Radioactive Wastes Repositories. 11th International Conference of the International Association of Computer Methods and Advances in Geomechanics, IACMAG, June 19-25, Torino, Italy,.
- [87] RAVIART P.A. (1988) : Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson.
- [88] ROUSSET G. (1990) : Le stockage de déchets radioactifs dans les argiles profondes. *Actes des journées d'étude organisées à Paris du 13 au 15 novembre 1990 par l'École nationale des Ponts et Chaussées*. Presses de l'École nationale des Ponts et Chaussées, Paris, p. 207-228.
- [89] RUSSEL W. B. (1973)^o: On the effective moduli of composite materials : effect of fiber length and geometry at dilute concentrations. *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 24, 581.
- [90] SALENCON J. (2000) : Mécanique des milieux continus. Tome II : Thermoélasticité. *Les éditions de l'École Polytechnique*.
- [91] SANCHEZ-PALENCIA E. (1974) : Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Engng Sci.* ; **12**:331-351, 1974.
- [92] SANCHEZ-PALENCIA E. (1980) : *Nonhomogeneous Media and Vibration theory*, Vol. 127 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin.
- [93] SCHWARTZ L. (1965) : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. *Hermann*.
- [94] SULTAN N., DELAGE P., CUI Y.J. (2002)^o: Temperature effects on the volume change behaviour of Boom clay. *Eng. Geol.* Vol. 64, pp. 135– 145.
- [95] SUQUET P. (1987) : Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In Sanchez-Palencia E. et Zaoui A. (eds), *Homogenization Techniques for Composite Media*, Vol. 272 of *Lecture Notes in Physics*, pp.193-278. Springer, Berlin.
- [96] TABEI A., TANOV R.R. (1998) : A local/global sandwich homogenization procedure for finite element simulation, *Symposium Of Recent Advances in Mechanics of Aerospace Structures and Materials*, AD-Vol. 56, p. 219-235, November 1998.

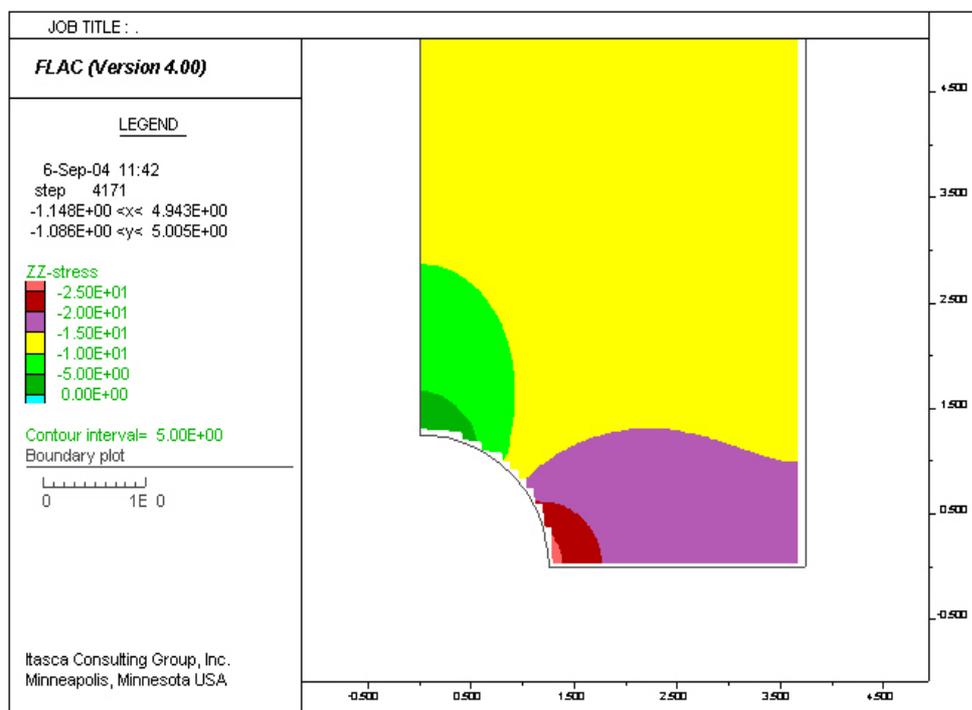
- [97] TARTAR L. (1977) : Estimations de coefficients homogénéisés. In GLOWINSKI R. & LIONS J.L., eds, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Vol. 704 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 330-356. Springer, Berlin.
- [98] TUCKER III C.L., LIANG E. (1999) : Stiffness Predictions for Unidirectional Short-Fiber Composites : Review and Evaluation. *Composites Science and Technology*, **59**, 655-671.
- [99] VILLAR M.V., LLORET A. (2004)^o: Influence of temperature on the hydro-mechanical behaviour of a compacted bentonite. *Appl. Clay Sci.* Vol. 26, pp. 337-350.
- [100] WILKINS M.L. (1964) : Fundamental Methods in Hydrodynamics, in *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, pp. 211-263. Alder et al., Eds. New York: Academic Press.
- [101] WONG H., ROUSSET G. (1994) : Tunnels profonds soumis à un chargement thermique. *Revue française de géotechnique*, n°**67**, pp.13-31.
- [102] WRIGHT H., LE CLEAC'H J.-M., DEVEUGHELE M. (2000) : Altération et rupture d'échantillons d'argilite lors de sollicitations thermomécaniques en conditions humides contrôlées. *Bull. Eng. Geol. Env.*, Vol. 60, pp.59-67. Springer-Verlag.
- [103] ZAAANEN A.C. (1989) : Continuity, Integration and Fourier theory. Springer Verlag.
- [104] ZAOUI A. (2001) : Changement d'échelle : motivation et méthodologie. In M. Bornert, T. Bretheau et P. Gilormini (eds), *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux*, Tome 1, *Hermes Science Publications* ; chap. 1, pp.19-39.
- [105] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R. (1967a)^o: The Finite Element Method. Vol. 1, McGraw-Hill Book Company.
- [106] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R. (1967b)^o: The Finite Element Method. Vol. 2, McGraw-Hill Book Company.
- [107] http://www.andra.fr/publication/produit/D05A_268_TAG.pdf

Annexe

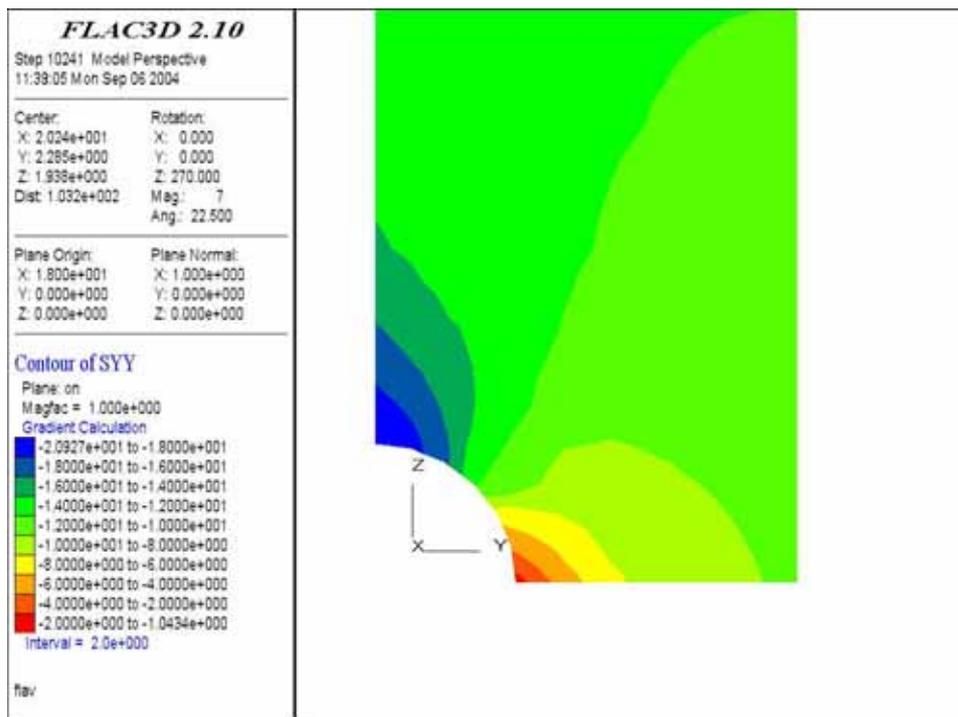
Annexe I : Comparaison des distributions des contraintes et déplacements dans la section courante de l'alvéole calculés en 2D et en 3D



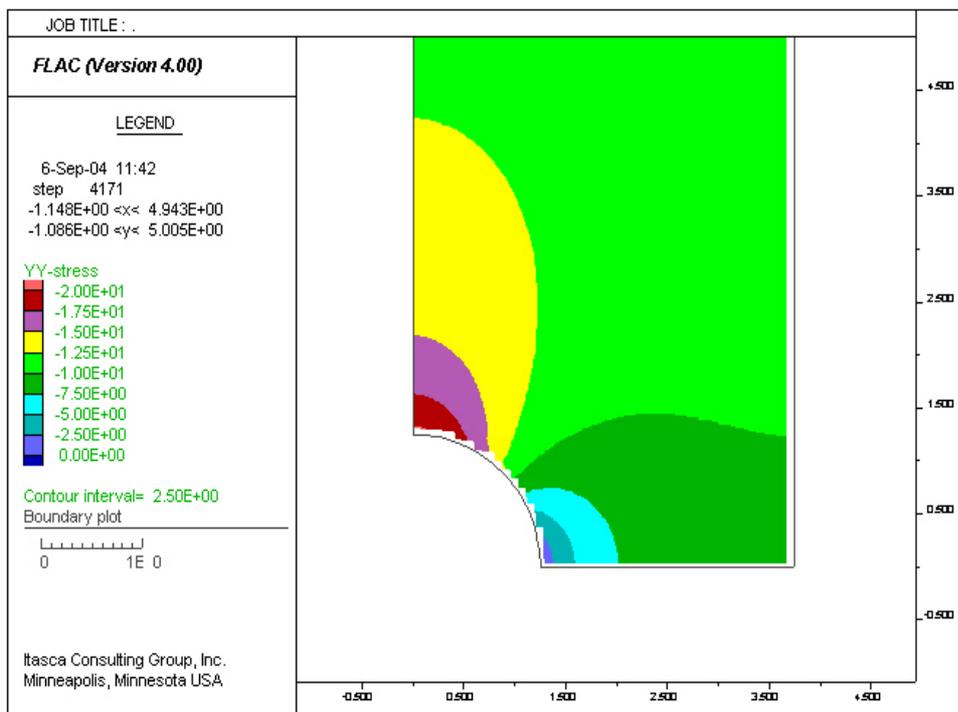
Annexe I.1 : Contraintes ZZ en [MPa] dans la section CC, calculées en 3D



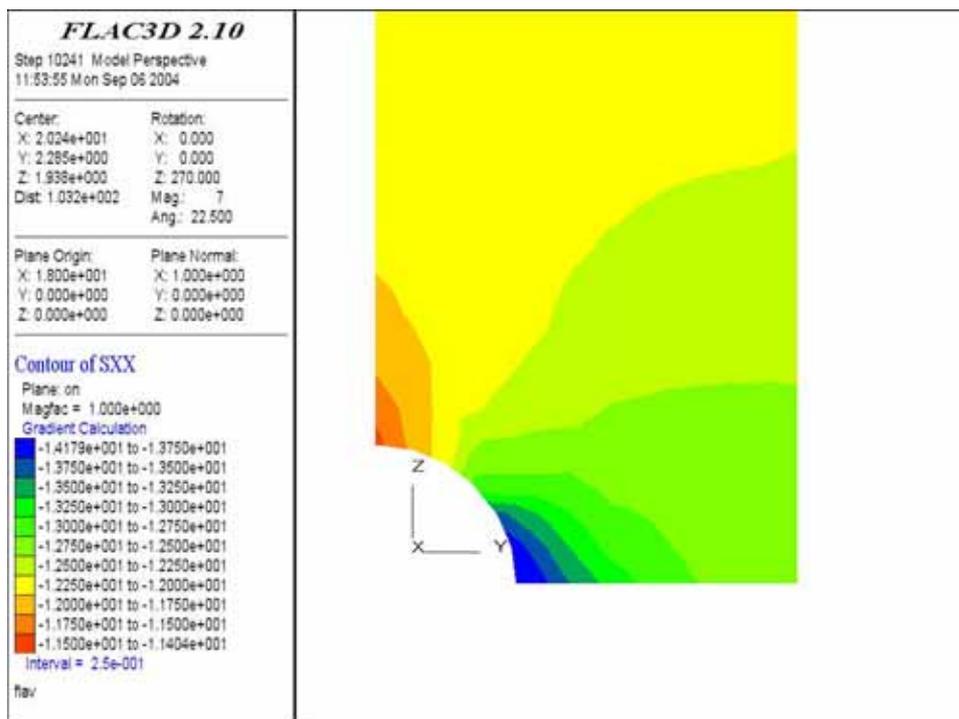
Annexe I.2 : Contraintes ZZ en [MPa] dans la section CC, calculées en 2D



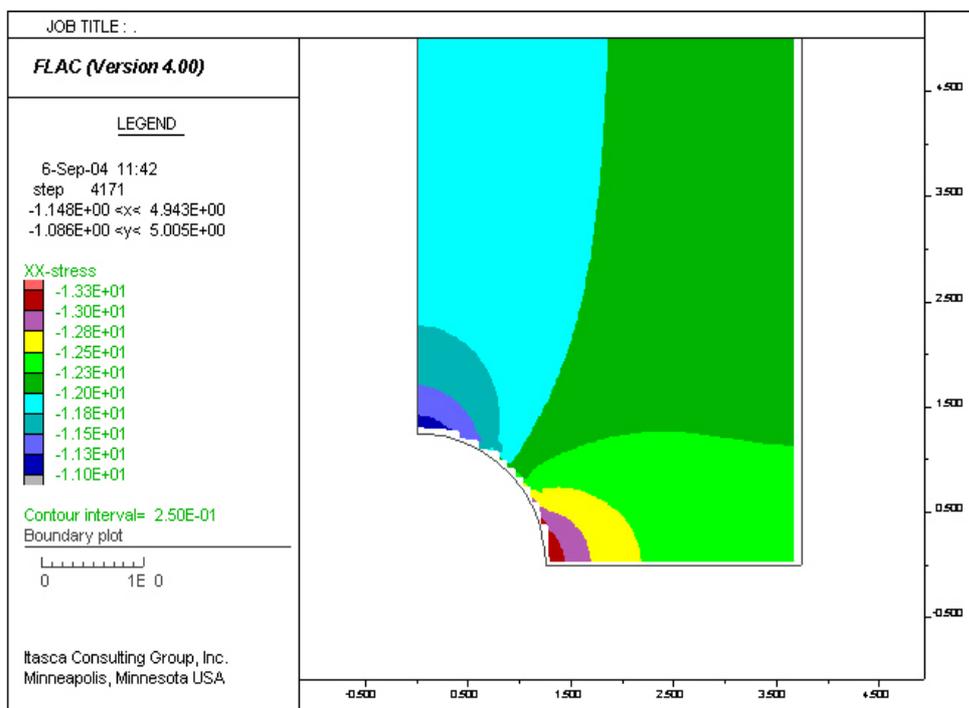
Annexe I.3 : Contraintes YY en [MPa] dans la section CC, calculées en 3D



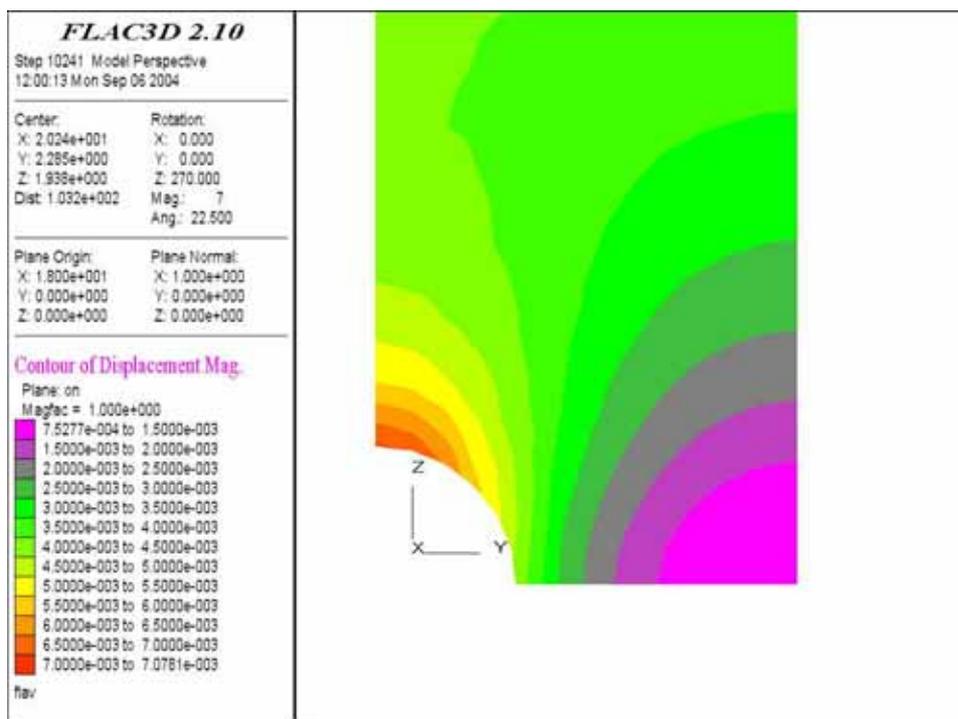
Annexe I.4 : Contraintes YY en [MPa] dans la section CC, calculées en 2D



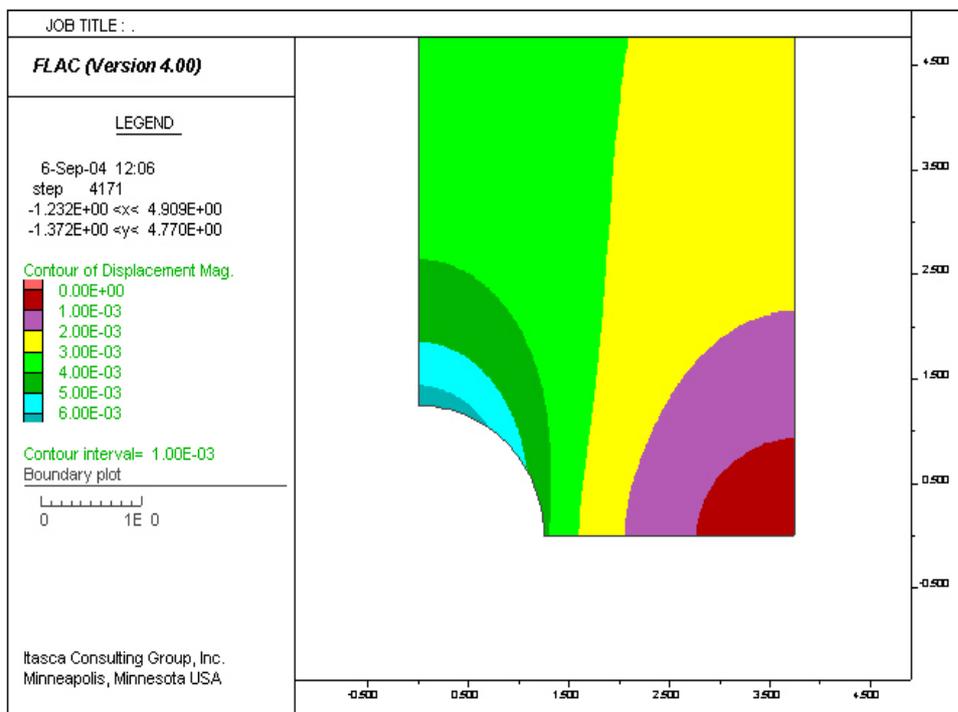
Annexe I.5 : Contraintes XX en [MPa] dans la section CC, calculées en 3D



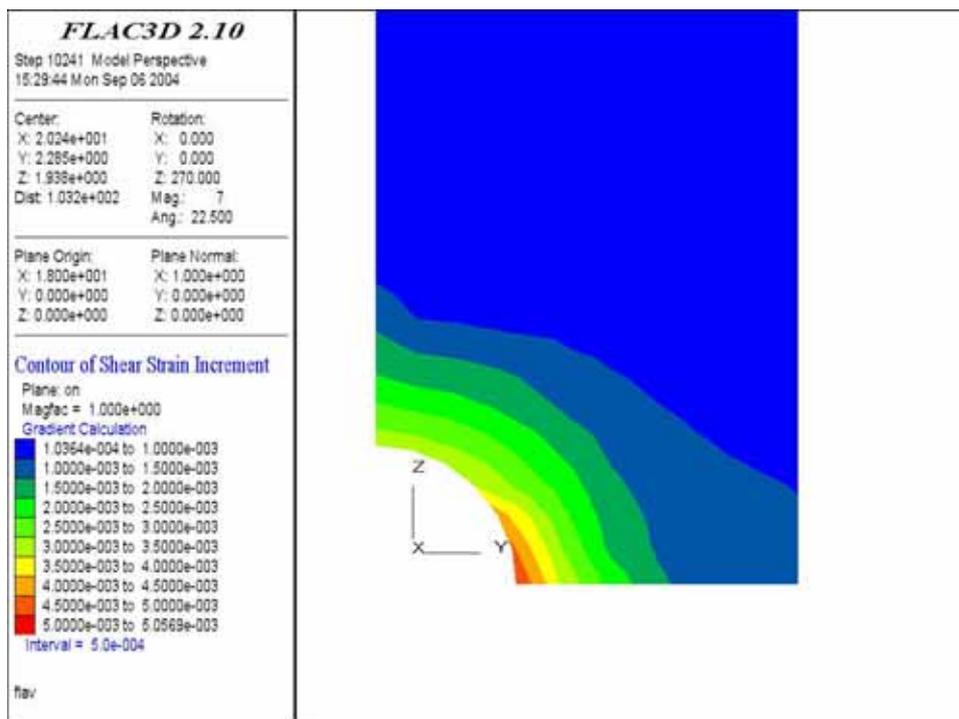
Annexe I.6 : Contraintes XX en [MPa] dans la section CC, calculées en 2D



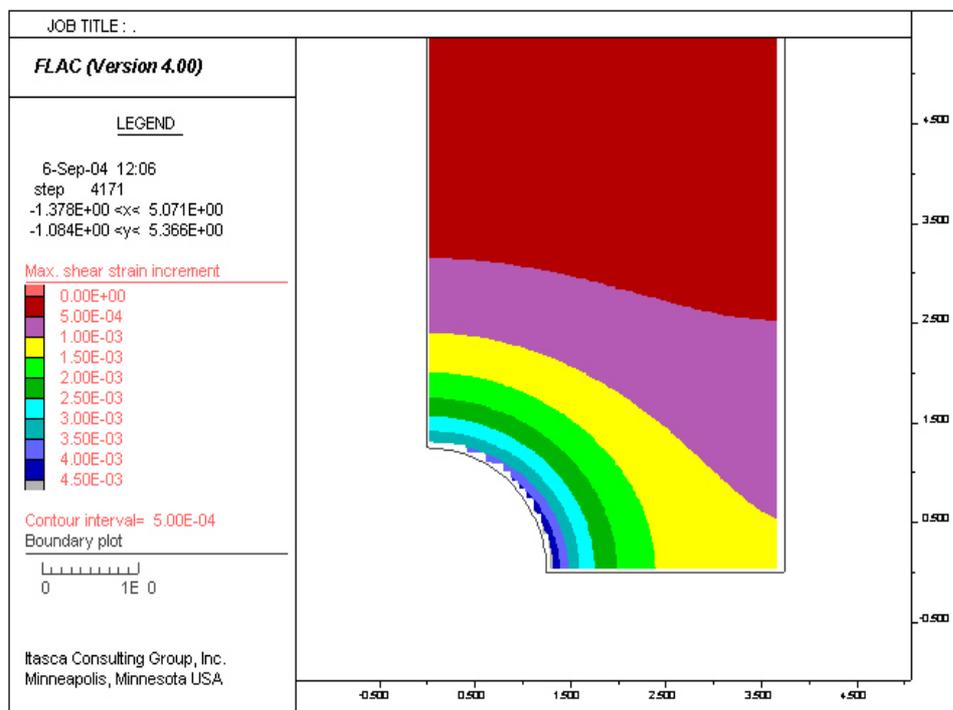
Annexe I.7 : Champ des déplacements en [m] dans la section CC, calculées en 3D



Annexe I.8 : Champ des déplacements en [m] dans la section CC, calculées en 2D

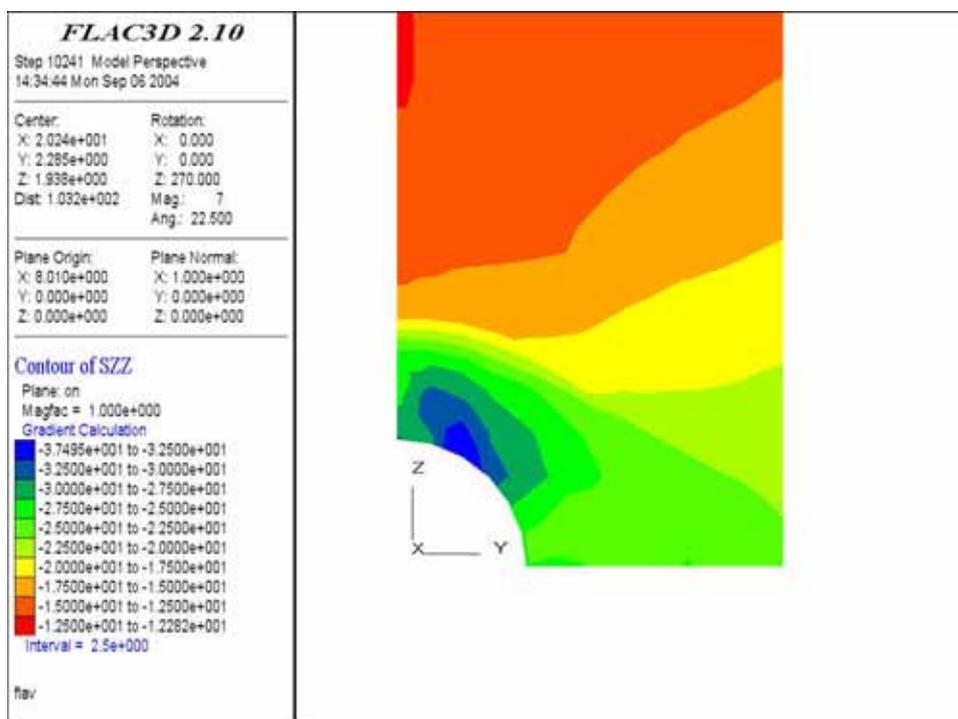


Annexe I.9 : Second invariant du tenseur des déformations dans la section CC, calculées en 3D

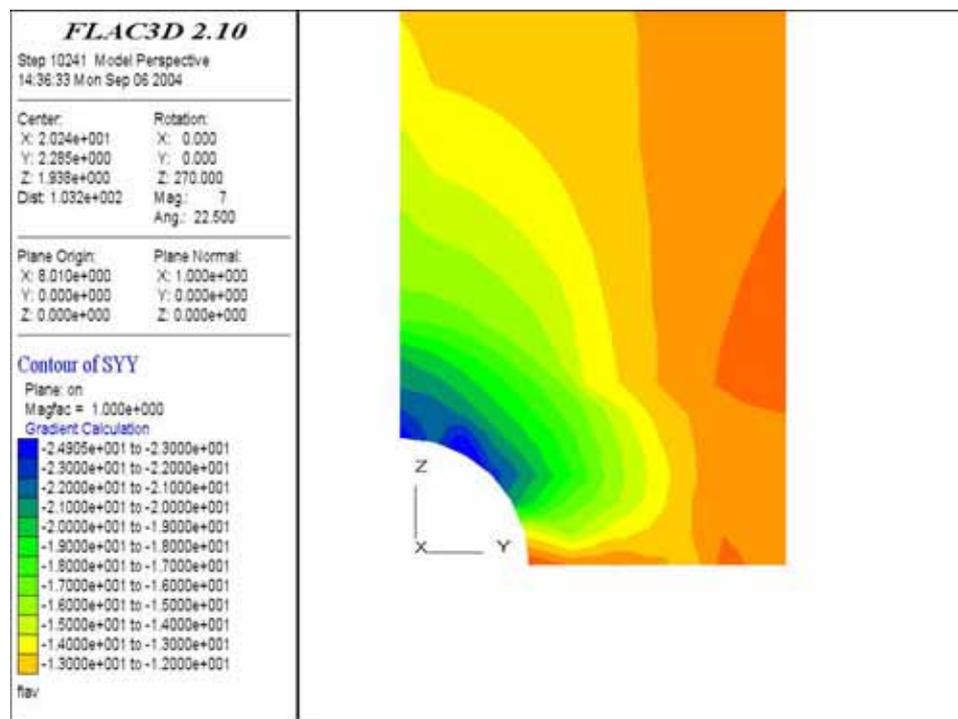


Annexe I.10 : Second invariant du tenseur des déformations la section CC, calculées en 2D

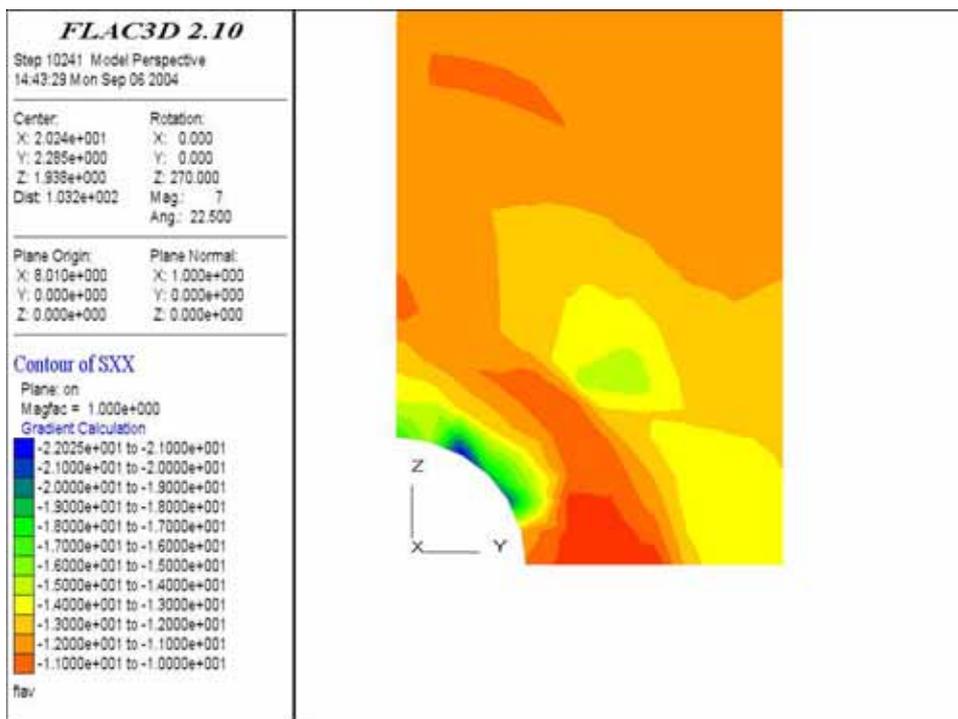
Annexe II : Distribution des contraintes et déplacements à l'entrée et au bout de l'alvéole de stockage (sections DD et EE)



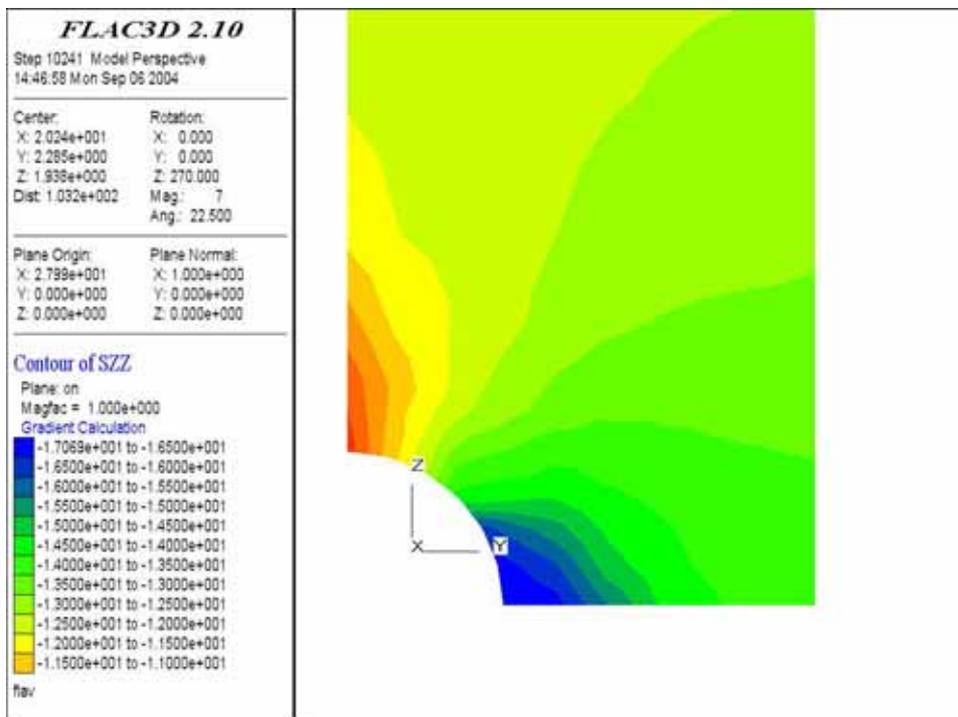
Annexe II.1 : Contraintes ZZ en [MPa] dans la section DD, calculées en 3D



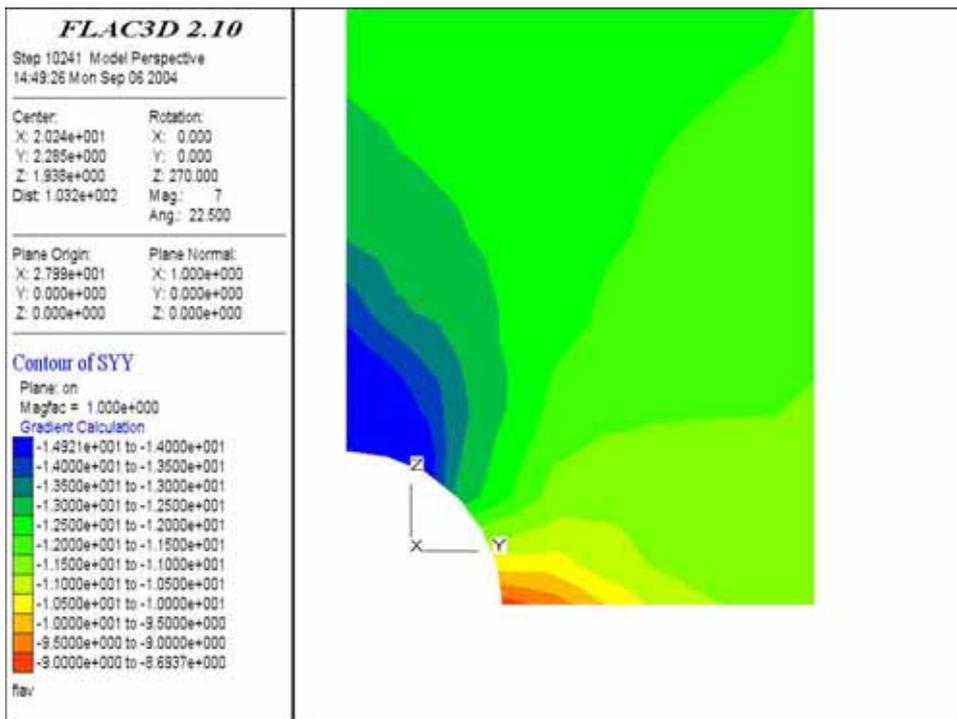
Annexe II.2 : Contraintes YY en [MPa] dans la section DD, calculées en 3D



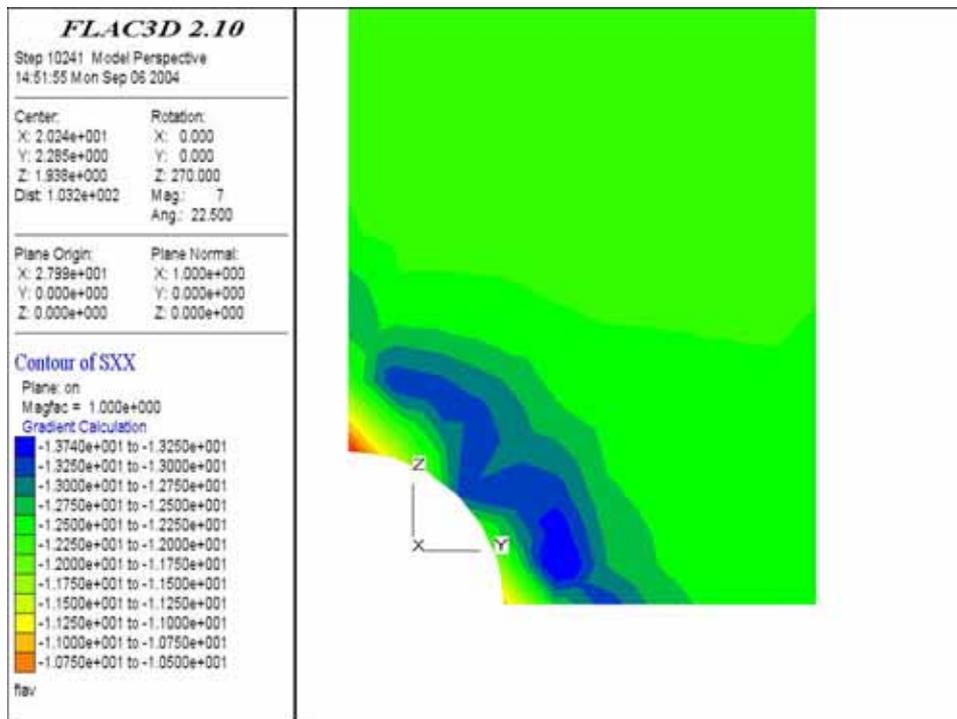
Annexe II.3 : Contraintes XX en [MPa] dans la section DD, calculées en 3D



Annexe II.4 : Contraintes ZZ en [MPa] dans la section EE, calculées en 3D



Annexe II.5 : Contraintes YY en [MPa] dans la section EE, calculées en 3D



Annexe II.6 : Contraintes XX en [MPa] dans la section EE, calculées en 3D

