

## AVANT-PROPOS

Avec beaucoup d'enthousiasme et de bienveillance, le professeur Sergey Gavrilyuk a guidé ma recherche. Il m'a donné de son temps sans compter et ses conseils furent des plus précieux. Qu'il soit assuré de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier Henri Gouin, directeur du L.M.M.T., pour la sympathie avec laquelle il a considéré mon travail et pour avoir mis à ma disposition tous les moyens dont j'avais besoin.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à l'équipe du L.M.M.T. pour m'avoir accueilli si chaleureusement: Ricardo Barros, Emil Ersnt, Henri-Hugues Fliche, Michel Garajeu, Françoise Gouin et Jean-Pierre Pulicani.

Tous mes remerciements à François Charru et à Yves Elskens pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je tiens également à remercier Paul Calvin, Thierry Dauxois et Richard Saurel d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Un grand merci à mes parents, Saïd et Louiza Chikhi, pour leurs encouragements permanents et leur soutien. Ils m'ont énormément donné et surtout ils m'ont appris le sens du travail.

Qu'il me soit permis d'avoir une pensée pour mes proches: ma famille, Amar, Miloud, Nasser, Céline et Antoine.



## RÉSUMÉ

Deux problèmes concernant les milieux diphasiques du type liquide à bulles sont résolus.

Le premier traite de la stabilité des écoulements cisailés dans un canal. Nous établissons, en particulier, la stabilité linéaire de l'écoulement plan de Couette dans l'approximation des ondes longues de la manière suivante: en utilisant le modèle de Iordanski, Kogargko et Van Wijngaarden pour décrire le milieu, nous étudions le comportement asymptotique de faibles perturbations; nous montrons alors que les perturbations se décomposent en une somme discrète et une somme continue d'ondes monochromatiques. Les vitesses de phase associées forment respectivement le spectre discret et le spectre continu, que nous déterminons par la méthode des modes normaux. La résolution du problème aux valeurs initiales permet d'obtenir l'expression de la composante normale de la vitesse du fluide. En utilisant les propriétés de la transformation de Laplace, nous montrons que la vitesse est bornée et ainsi que l'écoulement est stable.

Le deuxième problème est consacré à l'étude des interactions hydrodynamiques entre  $N$  bulles dans un écoulement potentiel de liquide incompressible et non visqueux. Nous définissons une matrice masse-virtuelle qui dépend des positions et des rayons des bulles. Elle permet d'écrire l'énergie du milieu sous une forme quadratique des vitesses et des pulsations des bulles. L'énergie est en fait l'hamiltonien du système à partir duquel nous construisons une fonction de partition dans l'ensemble canonique. Nous en déduisons une température effective du liquide à bulles due à l'agitation relative des bulles dans le liquide. Nous déterminons les potentiels effectifs d'interaction dans deux cas limites. On se place d'abord dans la limite des sphères rigides. Nous montrons alors que les interactions hydrodynamiques sont décrites par deux potentiels. Le premier, qui domine aux hautes températures, est répulsif à courte portée tandis que le second est attractif et provoque le rassemblement de bulles en paquets dans un plan perpendiculaire à la direction du mouvement collectif. On considère ensuite le cas des sphères oscillantes immobiles. Le potentiel d'interaction est alors répulsif à longue portée.

**Mots clefs:** milieux diphasiques, stabilité des écoulements cisailés, interaction hydrodynamique.



## ABSTRACT

Two problems about the multiphase flows have been investigated.

The first problem deals with the shear flow stability in bubbly fluids. In particular, the linear stability of the plane Couette flow has been proved in the long wave approximation. By using the model of Iordanski, Kogarko and Van Wijngaarden, the asymptotic behaviour (in time) of small perturbations has been studied. It has been proved that perturbations can be decomposed on the discrete and continuous spectra. The discrete spectrum has been found by using the normal mode method. The continuous spectrum has been obtained by solving the initial value problem. An expression for the normal component of the velocity has also been derived. It has been proved that the perturbations are bounded, using the Laplace transformation properties, which implies that the flow is stable.

In the second problem, the hydrodynamic interaction between  $N$  bubbles in an irrotational, incompressible and inviscid fluid has been studied. A virtual-mass matrix that depends on the bubble positions and radii has been introduced. It allows us to write the energy of the system as a quadratic form of the velocities. The energy which is actually the hamiltonian of the system has been used to construct a canonical ensemble partition function. An effective temperature for bubbly fluids has been derived. Two limit cases have been investigated. In the limit of “rigid spheres”, the bubble interaction is described by two effective potentials. The first, which dominates at high temperatures, is a short range repulsive potential while the other one is attractive and responsible for the bubble clustering. In the limit of “immobile oscillating spheres”, we get a long range repulsive potential.

**Keywords:** multiphase flows, stability of shear flows, hydrodynamic interaction.



## INTRODUCTION GÉNÉRALE



Beaucoup de domaines de la physique ou d'applications industrielles mettent en jeu les milieux diphasiques: l'océanographie, la météorologie, l'industrie alimentaire, l'industrie pétrolière... On comprend alors tout l'intérêt d'étudier le comportement de tels milieux et, en particulier, de connaître leurs propriétés physiques.

Notre travail a porté sur les liquides à bulles. On connaît aujourd'hui assez bien les milieux monophasiques (liquide et gaz) qui les composent. Les liquides sont souvent peu compressibles et à forte densité alors que les gaz sont, au contraire, extrêmement compressibles et de faible densité. Néanmoins, il ne suffit pas de faire une moyenne entre les comportements des liquides et des gaz pour avoir le comportement du liquide à bulles. Prenons l'exemple de la vitesse du son. Un résultat établi par Wood [18], et vérifié expérimentalement, montre que la vitesse du son dans un liquide à bulles est à la fois inférieure aux vitesses du son dans le liquide et dans l'air.

Relier la physique microscopique à la physique macroscopique constitue l'enjeu de la modélisation du liquide à bulles. En effet, à grande échelle, le milieu semble continu. Des champs uniques pour la densité, la pression et la vitesse suffisent pour décrire le liquide à bulles. Mais, il faut garder à l'esprit que chaque grandeur, définie en tout point, est en réalité une valeur moyenne calculée sur un petit volume de taille  $l^3$ . On choisit  $l$  de manière à ce que le volume en question contienne un grand nombre de bulles. D'un autre côté, la longueur  $l$  doit être petite devant la dimension caractéristique du problème considéré. La modélisation dépend donc principalement de l'échelle d'observation. Si l'on s'intéresse à ce qui se passe au niveau microscopique, il faut considérer séparément les grandeurs relatives au liquide et au gaz et écrire les conditions limites à la frontière entre les phases.

Nous avons traité deux problèmes de stabilité dans les liquides à bulles. Le premier est l'étude de la stabilité de l'écoulement plan de Couette dans les liquides à bulles. Pour le traiter, nous avons adopté une modélisation macroscopique. La stabilité des écoulements cisailés dans les milieux diphasiques et, en particulier, dans les liquides à bulles est un domaine peu exploré de la physique fondamentale. Il existe très peu de résultats théoriques sur le sujet. Au contraire, les premiers travaux sur la stabilité hydrodynamique dans les fluides monophasiques parfaits datent du 19<sup>ème</sup> siècle et l'on connaît beaucoup de résultats et de méthodes dans ce domaine.

L'écoulement plan de Couette est un écoulement cisailé dans un canal de largeur  $h$  avec un profil de vitesse linéaire. Nous savons qu'il est stable dans les fluides parfaits non visqueux [2] et visqueux [23]. Peut-on généraliser le résultat au liquide à bulles? Nous allons répondre à cette question dans la partie II.

La deuxième étude que nous avons menée concerne le mouvement de  $N$  bulles de gaz en écoulement incompressible et non visqueux (partie III). Il s'agit donc ici d'une approche micro-

scopique du liquide à bulles. Les bulles interagissent “hydrodynamiquement” via le liquide. Les déplacements et les pulsations d’une bulle créent, en effet, un mouvement du liquide. Le mouvement du liquide perturbe alors le mouvement d’autres bulles: les bulles interagissent donc. L’étude du mouvement des  $N$  bulles est analytiquement très compliquée du fait du nombre élevé de paramètres nécessaires à la description du problème. Pour connaître la nature des interactions hydrodynamiques entre les bulles, nous avons alors choisi d’employer les méthodes de la physique statistique. Cette démarche nous a permis de déterminer des “potentiels effectifs” capables de décrire les interactions. Nous en avons alors déduit quelles étaient les configurations de bulles les plus stables.

Première partie

STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT DE COUETTE DANS LES  
LIQUIDES À BULLES



## 1. INTRODUCTION

L'étude de la stabilité hydrodynamique est un problème central de la mécanique des fluides. La transition d'un écoulement laminaire vers un autre écoulement laminaire ou bien même vers un écoulement turbulent sont des phénomènes qui soulèvent plusieurs questions. Principalement: comment et pourquoi? L'intérêt pour ces questions est évident vu le nombre d'applications: ingénierie, météorologie, océanographie, astrophysique, géologie... Les premiers pas ont été effectués au 19ème siècle notamment par Helmholtz, Kelvin, Rayleigh et Reynolds. Un résultat fameux est l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (FIG. 1.1): lorsque deux couches de fluides incompressibles se déplacent l'une sur l'autre, l'intensité de la vorticité à l'interface augmente exponentiellement, changeant ainsi de manière fondamentale la topologie de l'écoulement.

Le problème qui nous intéresse est celui de la stabilité des écoulements cisailés dans les liquides à

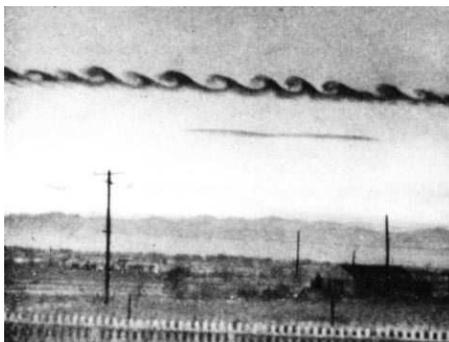


FIG. 1.1 – *Instabilité de Kelvin-Helmholtz.*

bulles et, en particulier, de l'écoulement plan de Couette. Plus précisément, nous porterons attention à la stabilité linéaire des écoulements. Cela consiste à perturber faiblement le milieu, de sorte que l'on puisse obtenir un système d'équations linéarisées pour les perturbations des grandeurs physiques. Nous en déduisons le comportement de ces perturbations. On définit alors la stabilité de la manière suivante: si la perturbation est bornée, alors l'écoulement est dit stable.

Situons maintenant le cadre de notre étude: on considère l'écoulement bidimensionnel d'un liquide à bulles dans un canal de largeur  $h$ . L'écoulement de base est l'écoulement de Couette (FIG. 1.2) caractérisé par des champs de pression et de densité constants, et un profil de vitesse

linéaire

$$P = P_0 = \text{constante},$$

$$\rho = \rho_0 = \text{constante},$$

$$\mathbf{u}_0 = u_0(y)\mathbf{e}_x,$$

où  $u_0$  est une fonction linéaire.

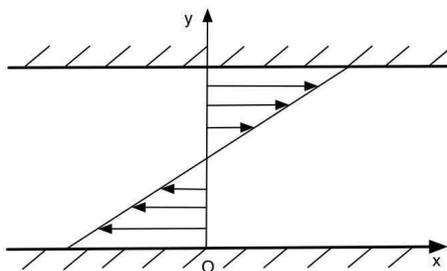


FIG. 1.2 – Écoulement de Couette

La stabilité des écoulements dans les milieux diphasiques est un domaine très peu exploré. En revanche, beaucoup de résultats existent concernant les fluides monophasiques. Il faut donc chercher les méthodes pour explorer la stabilité des écoulements cisailés dans les travaux sur les fluides monophasiques parfaits. Le premier grand résultat dans ce domaine a été obtenu par Rayleigh en 1880 [22]. Le critère (qui porte son nom) indique que si le profil de vitesse ne contient pas de point d'inflexion (profil convexe), alors l'écoulement est stable. Pour le prouver, il a utilisé la méthode dite des “modes normaux”, obtenant ainsi la célèbre équation de Rayleigh. Il s'agit d'écrire chaque grandeur perturbée  $f$  sous la forme d'onde

$$f(x,y,t) = F(y)e^{ik(x-ct)},$$

où  $k$  est le nombre d'onde que l'on suppose réel;  $c$  est la vitesse de phase, a priori complexe, compatible avec ce nombre d'onde, avec le système d'équations linéarisées et avec les conditions aux bords en  $y = 0$  et  $y = h$ . L'ensemble des valeurs  $c$  qui conviennent est appelé “spectre discret”. La perturbation est bornée (i.e. l'écoulement est stable) si toutes les valeurs du spectre  $c = c_r + ic_i$  ont une partie imaginaire négative  $c_i \leq 0$ .

La méthode des modes normaux est très performante. Longtemps, ce fut l'unique manière d'approcher le problème de stabilité hydrodynamique. Le critère de Fjórtoft qui est une version améliorée du critère de Rayleigh (1950), ainsi que le théorème de Squire qui relie la stabilité des écoulements bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D) ont été prouvés de cette façon (cf [4] et [26]). Pourtant, la méthode a ses limites.

En 1960, Case a étudié la stabilité de l'écoulement de Couette pour un liquide incompressible et non visqueux [2]. La méthode des modes normaux ne lui permit pas de conclure puisque le spectre discret est vide dans ce cas. Il choisit de revenir à la base en résolvant le problème aux valeurs initiales. Alors que l'on pensait que n'importe quelle perturbation pouvait se décomposer en somme discrète de modes normaux, il montra que la perturbation se décomposait en général sur le spectre discret mais également sur un continuum de valeurs  $c$  appelé "spectre continu" (à fortiori si le spectre discret est vide). Il établit ainsi la stabilité de l'écoulement de Couette. Les mérites de la méthode des modes normaux et de la résolution du problème aux valeurs initiales ont été comparés par Lin [14]. Pour un écoulement monophasique visqueux, la stabilité des écoulements passe par l'étude de la célèbre équation d'Orr-Summerfeld. A partir de cette analyse, Lin prouva que les perturbations étaient uniquement "portées" par le spectre discret. En revanche, pour les milieux monophasiques non visqueux, l'équation d'Orr-Summerfeld devient l'équation de Rayleigh. Il faut alors étudier à la fois le spectre discret et le spectre continu.

Au travers de l'histoire de la stabilité hydrodynamique des fluides monophasiques, on s'aperçoit du rôle important joué par l'étude de l'écoulement de Couette où chaque point du profil est un point d'inflexion. Comme on l'a dit auparavant, l'étude de la stabilité des écoulements diphasiques en est à ses balbutiements. Il est donc légitime de porter une attention particulière à l'écoulement plan de Couette.

La principale difficulté posée par l'étude de la stabilité des écoulements cisailés dans les liquides à bulles réside principalement dans le choix du modèle de liquide à bulles. On dit souvent qu'il existe autant de modèles que de chercheurs sur le sujet. Le premier paramètre à prendre en compte est la concentration gazeuse. Si elle est grande, alors on observe un écoulement contenant de grandes poches d'air (écoulement poche-bouchon). En revanche, si elle est faible, on observe un écoulement type milieu continu. La topologie des écoulements est donc très variable suivant la valeur de la concentration gazeuse.

Pour notre étude, on suppose que le gaz est en faible concentration ( $< 5\%$ ) et réparti de façon homogène, de sorte que le liquide à bulles puisse être assimilé à un milieu continu.

Il existe plusieurs modèles possibles dans cette situation. A priori, il suffit de prendre le meilleur, c'est-à-dire celui capable de rendre compte de la viscosité, de la tension superficielle, des échanges de chaleur entre phases, du glissement entre les bulles et le liquide... Le problème est que plus le modèle est bon d'un point de vue physique, plus il est compliqué à manier d'un point de vue mathématique. Le modèle de Kogarko, Iordanski et Van Wijngaarden offre un bon compromis entre réalité physique et "maniabilité mathématique".

Quelques résultats analytiques concernant les écoulements diphasiques ont été obtenus par Gavriilyuk et Teshukov à l'aide de ce modèle. Ainsi, on peut trouver dans leur article [7] une extension

du théorème de Squire, du théorème de Howard et une extension du critère de Rayleigh pour les liquides à bulles. Pour les prouver, la méthode des modes normaux a été employée. Les résultats de Gavriluk et Teshukov donnent donc de précieuses informations sur la stabilité des perturbations portées par le spectre discret (modes normaux). Par contre, ils ne répondent pas à la question: est-ce que les perturbations sont uniquement transportées par le spectre discret ou bien à la fois par le spectre discret et le spectre continu?

Notre but est de savoir si l'écoulement de Couette dans les liquides à bulles est stable. Il convient donc, dans le même temps, de répondre à la question posée plus haut.

Notre démarche est la suivante. Dans un premier temps (II.2), nous présentons quelques résultats sur la stabilité des écoulements cisailés dans les fluides parfaits, notamment les critères de Rayleigh et Fjørtoft et les théorèmes de Squire et de Howard. Cela nous permet de nous familiariser avec la méthode des modes normaux qui permet d'accéder au spectre discret. Ensuite, nous portons attention au cas de l'écoulement de Couette pour un fluide parfait non visqueux (II.3). Nous verrons notamment pourquoi la méthode de modes normaux ne permet pas d'aboutir et comment Case a résolu le problème aux valeurs initiales, mettant ainsi en évidence le spectre continu. Dans le chapitre II.4, le modèle de Kogarko [12], Iordanski [9] et Van Wijngaarden [30] pour les liquides à bulles est présenté et commenté. Nous montrons ensuite (II.5) comment Gavriluk et Teshukov l'utilisent pour étudier la stabilité des écoulements cisailés par la méthode des modes normaux. Enfin, l'étude de la stabilité de l'écoulement de Couette pour les liquides à bulles que nous avons menée est présentée (II.6). Nous appliquons d'abord la méthode des modes normaux pour obtenir le spectre discret. Est-il vide comme dans le cas monophasique? Nous résolvons par la suite le problème aux valeurs initiales pour savoir comment se décomposent les perturbations: uniquement sur le spectre discret ou alors faut-il également considérer le spectre continu? Nous répondrons à ces questions pour savoir si l'écoulement est stable.

## 2. ÉCOULEMENTS CISAILLÉS DANS LES FLUIDES PARFAITS

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats célèbres concernant la stabilité des écoulements cisailés pour les fluides parfaits: les critères de Rayleigh et de Fjørtoft et les théorèmes de Squire et Howard. Ces résultats sont obtenus en utilisant la méthode des modes normaux sur laquelle sont basés les premiers travaux concernant la stabilité hydrodynamique. On peut les trouver dans les livres de Drazin et Reid [4], et de Schmid et Henningson [26].

### 2.1 Critère de Rayleigh

Rayleigh fut l'un des premiers physiciens à s'intéresser au problème de stabilité hydrodynamique. En 1880, il publie son célèbre critère de stabilité [22]. Nous en proposons ici une démonstration afin de comprendre la méthode employée et ainsi de l'utiliser au mieux pour le problème qui nous intéresse.

Considérons un écoulement bidimensionnel de fluide parfait, incompressible et non visqueux, dans un canal de largeur  $h$ . Les équations d'Euler et de continuité sont alors

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla P &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}$$

où  $P$  désigne le champ de pression dans le fluide et  $\rho$  la densité (constante pour un fluide incompressible).

On s'intéresse à la stabilité de l'écoulement caractérisé par le profil de vitesse  $\mathbf{u} = (u_0(y), 0)$  et la pression constante  $P = p_0$ . Plus précisément, on va étudier la stabilité linéaire, c'est-à-dire la réponse de l'écoulement à une perturbation très faible. Notons  $u$ ,  $v$  et  $p$  les perturbations relatives aux vitesses tangentielle et normale du fluide et à la pression:

$$\mathbf{u} = (u_0(y) + u)\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y,$$

$$P = p_0 + p.$$

Les équations linéarisées pour les perturbations sont obtenues en considérant  $u$  et  $v$  comme des infiniment petits du premier ordre devant  $u_0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{du_0}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

A ce système, il faut ajouter les conditions limites aux interfaces fluide/solide en  $y = 0$  et  $y = h$ :

$$v(x,0,t) = v(x,h,t) = 0. \quad (2.4)$$

Si on élimine  $u$  et  $p$ , on obtient la célèbre équation de Rayleigh:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 v - u_0'' \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

où  $u_0''$  est la dérivée seconde de  $u_0$  par rapport à  $y$ .

Nous considérons maintenant que la perturbation a la forme suivante:

$$v(x,y,t) = v(y)e^{ik(x-ct)}.$$

Le nombre d'onde  $k$  est supposé réel et la vitesse de phase  $c = c_r + ic_i$  est a priori complexe.

Nous allons donc chercher les valeurs de  $c$  compatibles avec les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4).

Ces valeurs forment ce qu'on appelle le spectre discret. L'écoulement est stable si les perturbations sont bornées donc si pour toutes les valeurs du spectre discret, on a  $c_i \leq 0$ . Compte tenu de la forme imposée à  $v$ , l'équation de Rayleigh devient:

$$(u_0 - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) v - u_0'' v = 0.$$

**Théorème 1 (Critère du point d'inflexion de Rayleigh):** Si il existe une perturbation telle que  $c_i > 0$  (mode instable), alors  $u_0''(y)$  doit s'annuler sur l'intervalle  $[0,h]$ ; i.e. l'écoulement est stable si le profil de vitesse est convexe.

On démontre ce théorème en multipliant l'équation de Rayleigh par le complexe conjugué de la composante normale de la vitesse  $v$ , puis en l'intégrant entre 0 et  $h$ . En effectuant une intégration par partie et tenant compte des conditions de bord, on obtient:

$$\int_0^h \left| \frac{dv}{dy} \right|^2 + k^2 |v|^2 + \frac{u_0''}{u_0 - c} |v|^2 dy = 0. \quad (2.6)$$

La partie imaginaire de cette intégrale est:

$$\int_0^h c_i \frac{u_0''}{|u_0 - c|^2} |v|^2 dy = 0. \quad (2.7)$$

Sachant que  $|v|^2$  et  $|u_0 - c|^2$  sont positifs, si  $c_i > 0$ , alors  $u_0''$  doit changer de signe pour que l'intégrale soit nulle. Notons que ce théorème donne une condition suffisante pour avoir la stabilité.

## 2.2 Théorème de Squire

Nous avons commencé par présenter le critère de Rayleigh dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel (2D). On peut dès lors s'interroger sur ce qu'il advient lorsque l'on s'intéresse aux écoulements tridimensionnels (3D). La réponse fut donnée en 1933 par Squire [28] qui proposa une transformation (portant son nom) qui permet de relier la stabilité des écoulements 3D aux écoulements 2D.

**Théorème 2 (Théorème de Squire):** A chaque perturbation instable tri-dimensionnelle correspond une perturbation instable bidimensionnelle; i.e. si l'écoulement bi-dimensionnel est stable alors l'écoulement tridimensionnel l'est aussi.

Pour démontrer ce théorème, il convient d'introduire les notations suivantes  $\mathbf{u} = (u_0(y) + u, v, w)$  où  $w$  est la perturbation de la vitesse selon l'axe  $z$  (FIG. 2.1). Si l'on écrit chaque perturbation  $f$

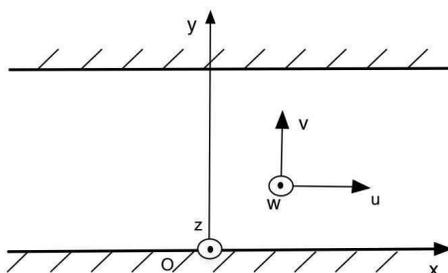


FIG. 2.1 – Notations 3D

sous la forme

$$f(x, y, z, t) = f(y)e^{ik(x-ct)+ilz},$$

on obtient alors le système d'équations linéarisées couplé aux conditions de bord:

$$ik(u_0 - c)u + u_0'v = -\frac{ikp}{\rho},$$

$$ik(u_0 - c)v = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy},$$

$$ik(u_0 - c)w = -\frac{ilp}{\rho},$$

$$iku + \frac{dv}{dy} + ilw = 0,$$

$$v(0) = v(h) = 0.$$

Pour trouver les valeurs  $c$  compatibles avec ce système, on est amené à résoudre une équation du type "relation de dispersion"  $\mathcal{F}(k, l, c) = 0$  où  $k$  et  $l$  sont supposés réels. Or, si l'on effectue le changement de variables suivant (on l'appelle transformation de Squire)

$$k_* = \sqrt{k^2 + l^2}, \quad k_* u_* = ku + lw, \quad \frac{p_*}{k_*} = \frac{p}{k}, \quad v_* = v, \quad c_* = c,$$

le système pour les variables “étoiles” est:

$$\begin{aligned} ik_*(u_0 - c_*)u_* + u'_0 v_* &= -\frac{ik_* p_*}{\rho}, \\ ik_*(u_0 - c_*)v_* &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp_*}{dy}, \\ ik_* u_* + \frac{dv_*}{dy} &= 0, \\ v_*(0) = v_*(h) &= 0. \end{aligned}$$

Ce système est équivalent à celui que l'on obtient dans le cas 2D. Aussi, si  $c = \mathcal{F}(k)$  est solution du problème 2D, i.e. pour  $w = l = 0$ , alors  $c_* = \mathcal{F}(k_*)$  est solution du problème équivalent 2D et donc par transformation de Squire  $c = \mathcal{F}(\sqrt{k^2 + l^2})$  est solution du problème 3D. On conclut donc que pour chaque mode instable 3D croissant à la vitesse  $e^{k_* c_i}$ , il correspond un mode instable 2D qui croît à la vitesse  $e^{k_* c_i}$  (le mode 2D étant plus instable car  $k_* > k$ ).

Ce théorème est important car il nous apprend que si l'on a un critère qui donne une condition suffisante de stabilité pour le problème 2D, ce critère est toujours valable dans le cas 3D. Ceci vaut pour le critère de Rayleigh que l'on a démontré précédemment comme pour le critère de Fjortoft qui suit.

### 2.3 Critère de Fjortoft

Une extension du critère de Rayleigh due à Fjortoft (1950, [5]) donne une condition suffisante améliorée pour garantir la stabilité de l'écoulement, notamment lorsqu'il y a un point d'inflexion dans le profil de vitesse.

**Théorème 3 (Critère de Fjortoft):** Une condition nécessaire pour avoir une instabilité est que la condition suivante soit satisfaite:  $u_0''(u_0 - u_0(y_s)) \leq 0$  sur l'intervalle  $[0, h]$ .  $y_s$  est défini par  $u_0''(y_s) = 0$ . Autrement dit, si le point d'inflexion est un maximum pour  $u'_0$ , l'écoulement est stable.

Pour démontrer ce critère, on prend la partie réelle de l'équation (2.6). On a alors:

$$\int_0^h \frac{u_0''(u_0 - c_r)}{|u_0 - c|^2} |v|^2 dy = - \int_0^h \left| \frac{dv}{dy} \right|^2 + k^2 |v|^2 dy.$$

Ajoutons au membre gauche de cette équation la quantité suivante:

$$(c_r - u(y_s)) \int_0^h \frac{u_0''}{|u_0 - c|^2} |v|^2 dy.$$

Cette quantité est nulle (voir équation (2.7)) si  $c_i > 0$ , i.e. si l'écoulement est instable. On en déduit que

$$\int_0^h \frac{u_0''(u_0 - u(y_s))}{|u_0 - c|^2} |v|^2 dy = - \int_0^h \left| \frac{dv}{dy} \right|^2 + k^2 |v|^2 dy.$$

Le membre droit de l'équation est clairement négatif. Pour que le membre de gauche le soit, il suffit que la fonction  $u_0''(u_0 - u(y_s))$  soit négative ce qui achève la démonstration du théorème de Fjøltoft.

Quelques applications des critères de Rayleigh et Fjøltoft sont présentées ci-après (FIG. 2.2, 2.3, 2.4).

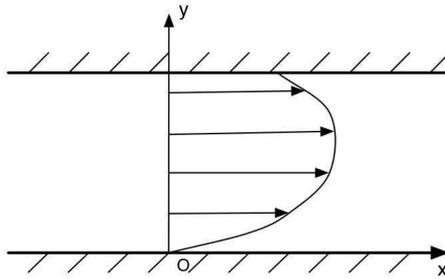


FIG. 2.2 – Écoulement stable d'après le critère de Rayleigh.

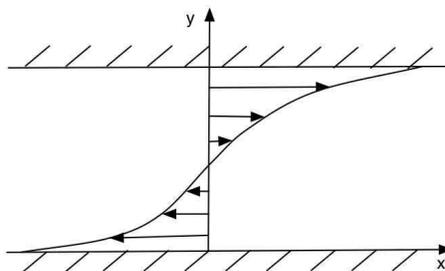


FIG. 2.3 – Écoulement stable d'après le critère de Fjøltoft.

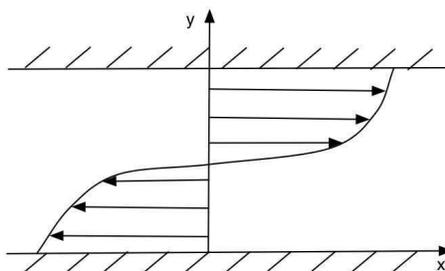


FIG. 2.4 – Écoulement peut-être instable d'après le critère de Fjøltoft (résultat confirmé, cf 26).

### 2.4 Théorème du demi-cercle de Howard

Dans cette section, nous allons présenter un dernier résultat concernant la stabilité des écoulements cisailés dans les fluides parfaits. Il s'agit du théorème du demi-cercle de Howard (1961, [8]).

Théorème 4 (Théorème du demi cercle de Howard): Les valeurs propres  $c$  instables, i.e. telles que  $c_i > 0$  appartiennent au demi-cercle d'équation:

$$\left(c_r - \frac{1}{2}(u_0^{max} + u_0^{min})\right)^2 + c_i^2 \leq \left(\frac{1}{2}(u_0^{max} - u_0^{min})\right)^2,$$

avec  $u_0^{min} = \text{Min}(u_0(y); y \in [0, h])$  et  $u_0^{max} = \text{Max}(u_0(y); y \in [0, h])$ .

Pour démontrer le théorème, on introduit la nouvelle variable  $V = \frac{v}{u_0 - c}$ . L'équation de Rayleigh se réécrit:

$$\frac{d}{dy} \left( (u_0 - c)^2 \frac{dV}{dy} \right) - k^2 (u_0 - c)^2 V = 0.$$

On multiplie maintenant cette équation par le complexe conjugué de  $V$  et on intègre entre 0 et  $h$ . Après une intégration par partie, en tenant compte des conditions de bord, on obtient

$$\int_0^h (u_0 - c)^2 \left( \left| \frac{dV}{dy} \right|^2 + k^2 |V|^2 \right) dy = 0. \quad (2.8)$$

On pose  $Q = \left| \frac{dV}{dy} \right|^2 + k^2 |V|^2 \geq 0$ . Les parties réelles et imaginaires de l'équation (2.8) ont pour expression

$$\int_0^h ((u_0 - c_r)^2 - c_i^2) Q dy = 0 \quad (2.9)$$

et

$$2c_i \int_0^h (u_0 - c_r) Q dy = 0.$$

Une conséquence immédiate de cette dernière expression est que  $u_0 - c_r$  doit changer de signe sur l'intervalle  $[0, h]$  donc  $c_r$  est borné par le minimum et le maximum de  $u_0$ :  $u_0^{min} < c_r < u_0^{max}$ . Une autre conséquence est que:

$$\int_0^h u_0 Q dy = \int_0^h c_r Q dy.$$

Si on introduit l'équation ci-dessus dans l'équation (2.9), on a alors:

$$\int_0^h u_0^2 Q dy = \int_0^h (c_r^2 + c_i^2) Q dy.$$

Il s'en suit:

$$0 \geq \int_0^h (u_0 - u_0^{min})(u_0 - u_0^{max}) Q dy,$$

$$0 \geq \int_0^h ((c_r^2 + c_i^2) - (u_0^{min} + u_0^{max})c_r + u_0^{min}u_0^{max}) Q dy.$$

Ceci termine la démonstration du théorème. Les valeurs du spectre discret telles que  $c_i > 0$  sont contenues dans le demi disque de rayon  $\frac{1}{2}(u_0^{max} - u_0^{min})$  et de centre  $c_r = \frac{1}{2}(u_0^{max} + u_0^{min})$ :

$$(c_r^2 + c_i^2) - (u_0^{min} + u_0^{max})c_r + u_0^{min}u_0^{max} \leq 0.$$

La figure 2.5 illustre le théorème.

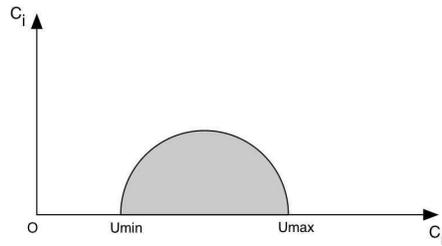


FIG. 2.5 – Localisation des modes instables.



### 3. ÉCOULEMENT DE COUETTE DANS LES FLUIDES PARFAITS

Nous avons vu, au travers des trois théorèmes et de leurs démonstrations, l'intérêt d'utiliser la méthode des modes normaux. L'étude du spectre discret a permis de conclure sur l'évolution (bornée ou non) des perturbations recherchées sous forme modale. Néanmoins, plusieurs questions se posent. Est-ce que toutes les perturbations se décomposent sur les modes normaux? Si il en existe d'autres, sont-elles bornées? En clair, on peut se demander si la méthode des modes normaux est complète et si elle permet systématiquement de résoudre le problème de stabilité. La réponse est non.

En 1960, Case publie une étude sur la stabilité de l'écoulement de Couette (profil de vitesse linéaire) très importante [2]. Cet écoulement est très singulier car tous les points de l'écoulement sont des points d'inflexions ( $u_0'' \equiv 0$ ). On sait donc déjà que les critères de Rayleigh et de Fjørtoft ne répondent pas à la question.

Nous allons voir que l'approche spectrale ne permet pas de conclure puisque, dans ce cas, le spectre discret est vide (II.3.1). Ensuite, on résout le problème aux valeurs initiales ce qui permet de prouver la stabilité de l'écoulement de Couette. Enfin, on s'intéresse à un écoulement avec un profil de vitesse quelconque. On montre alors que les perturbations sont transportées à la fois par le spectre discret et par le spectre continu que l'on définira.

#### 3.1 Méthode des modes normaux pour l'écoulement de Couette

On considère l'écoulement de Couette 2D entre deux murs d'équations  $y = 0$  et  $y = h$ , caractérisé par une pression constante et un profil de vitesse linéaire  $u_0(y) = y$ . Les équations linéarisées pour les perturbations et les conditions limites s'écrivent:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + y \frac{\partial u}{\partial x} + v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + y \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

$$v(x,0,t) = v(x,h,t) = 0. \quad (3.4)$$

Appliquons maintenant la méthode des modes normaux en posant  $v(x,y,t) = v(y)e^{ik(x-ct)}$ . L'équation de Rayleigh s'écrit alors:

$$(y-c) \left( \frac{d^2 v}{dy^2} - k^2 v \right) = 0.$$

Les valeurs du spectre discret  $c$  sont déterminées en trouvant les solutions de

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - k^2 v = 0. \quad (3.5)$$

avec  $v(0) = v(h) = 0$ . Or il n'y a pas de solution non nulle à l'équation (3.5) qui vérifie ces conditions limites. Le spectre discret est donc vide. On ne peut pas conclure quant à la stabilité de l'écoulement de Couette.

### 3.2 Résolution du problème aux valeurs initiales

Pour comprendre ce qui se passe, il est préférable de revenir aux principes de base. On suppose qu'on perturbe initialement l'écoulement. A  $t = 0$ , on a  $u = u_i$  et  $v = v_i$ . Nous allons maintenant résoudre les équations linéarisées pour ces conditions initiales. Si les perturbations augmentent, on aura instabilité. Au contraire, si elles sont bornées, alors l'écoulement sera dit stable.

Pour résoudre (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4), on effectue pour chaque variable une transformée de Fourier en espace par rapport à la coordonnée  $x$ , et une transformation de Laplace en temps par rapport à la coordonnée  $t$ :

$$\tilde{v}(k,y,s) = \int_0^\infty \left( \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,y,t) e^{-ikx} dx \right) e^{-st} dt.$$

On obtient alors, pour les nouvelles variables, en posant  $s = -ikc$ , le système suivant où l'on notera la présence des valeurs initiales:

$$ik(y-c)\tilde{u} + \tilde{v} - \tilde{u}_i = -i \frac{k}{\rho} \tilde{p},$$

$$ik(y-c)\tilde{v} - \tilde{v}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{p}}{dy},$$

$$ik\tilde{u} + \frac{d\tilde{v}}{dy} = 0.$$

En éliminant  $\tilde{u}$  et  $\tilde{p}$ , on obtient une équation analogue à l'équation de Rayleigh qui prend en compte les données initiales:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \tilde{v} = \frac{1}{ik(y-c)} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \tilde{v}_i. \quad (3.6)$$

Inversons la transformation de Laplace. Sachant que

$$\hat{v}(k,y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{+i\infty+\gamma} \tilde{v}(k,y,c) e^{st} ds,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{+i\infty+\gamma} \frac{1}{s + ik y} e^{st} ds = e^{-iky t},$$

où  $\gamma$  est choisi de manière à ce que tous les pôles se trouvent à gauche de la droite d'intégration (FIG. 3.1), l'équation (3.6) devient

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{v} = e^{-iky t} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{v}_i. \quad (3.7)$$

Nous avons vu précédemment que l'équation homogène n'admettait pas de solution non nulle

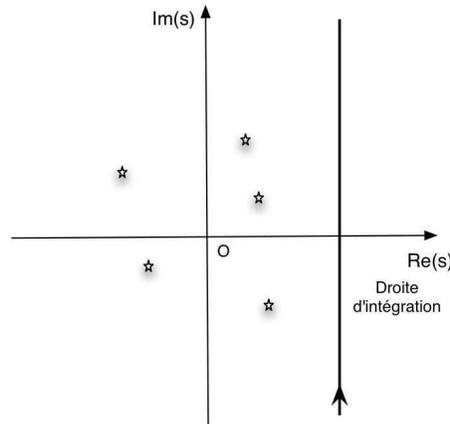


FIG. 3.1 – Inversion de la transformation de Laplace.

satisfaisant les conditions de bord. Considérons alors la fonction de Green  $G$  qui vérifie l'équation

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) G(y,c) = \delta(y - c)$$

et telle que  $G(y,c) = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = h$ . On peut alors aisément vérifier que la solution de l'équation (3.7) (cf [2]) est

$$\hat{v}(k,y,t) = \int_0^h G(y,c) e^{-ikct} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{v}(k,c,0) dc,$$

où  $\hat{v}(k,y,0) = \hat{v}_i$ , avec

$$G(y,c) = -\frac{1}{k \operatorname{sh}(kh)} (\operatorname{sh}(ky_-) \operatorname{sh} k(h - y_+)), \quad (3.8)$$

$$y_- = \operatorname{Min}(y; c), \quad y_+ = \operatorname{Max}(y; c).$$

Si on connaît la fonction initiale  $\hat{v}_i$ , on peut étudier le comportement asymptotique en temps de la composante normale de la vitesse.

Pour une fonction suffisamment régulière que l'on peut décomposer en série de Fourier

$$\hat{v}(k,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(k) \sin(n\pi y),$$

Case a montré que le comportement asymptotique en temps était donné par l'expression

$$\hat{v}(k,y,t) = \frac{n^2\pi^2 + k^2}{-ikt} C_n(k) (\sin(n\pi y) \operatorname{sh}(ky) \operatorname{sh} k(h-y)).$$

On en déduit que la composante normale de la vitesse varie de la façon suivante  $v(x,y,t) \sim \frac{1}{t}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

On a ainsi démontré que pour des conditions initiales suffisamment régulières, l'écoulement de Couette est stable.

### 3.3 Synthèse

Lors de l'étude de l'écoulement de Couette, on a vu que l'approche spectrale classique était insuffisante pour résoudre le problème de stabilité tandis que la résolution du problème aux valeurs initiales permettait, en revanche, non seulement de trouver la solution mais également d'obtenir le comportement asymptotique en temps de la perturbation.

En fait, lorsque l'on souhaite résoudre l'équation de Rayleigh pour une perturbation de type "modes normaux"

$$ik(y-c) \left( \frac{d^2v}{dy^2} - k^2v \right) = 0,$$

deux types de solutions existent.

Tout d'abord les solutions "discrètes" qui vérifient

$$\left( \frac{d^2v}{dy^2} - k^2v \right) = 0,$$

ainsi que les conditions de bord. Dans le cas de Couette, il n'y en a pas. Le spectre discret est vide.

Ensuite, il y a les solutions de l'équation

$$\left( \frac{d^2v}{dy^2} - k^2v \right) = \delta(y-c)$$

qui sont de la forme  $G(y,c)$  donnée précédemment (3.8) et qui vérifient les conditions limites. Ces solutions donnent naissance à un continuum de modes normaux pour  $c$  allant de 0 à  $h$ . On peut donc bien rechercher les perturbations sous la forme de modes normaux à condition de ne pas omettre le spectre continu. Ceci est encore plus vrai dans le cas de l'écoulement de Couette où le spectre discret est vide.

### 3.4 Retour au cas général

On considère à nouveau un écoulement quelconque  $u_0(y)$ . Nous allons voir comment on procède de manière générale pour étudier la stabilité linéaire d'un écoulement. Commençons par rappeler

l'équation de Rayleigh dans le cas général:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) \tilde{v} - \frac{u_0''}{u_0 - c} \tilde{v} = f_0, \quad (3.9)$$

où  $f_0$  est une fonction qui dépend des conditions initiales. La solution de cette équation vérifiant les conditions limites s'écrit à l'aide d'une fonction de Green (cf Case [2], Schmid et Henningson [26]):

$$\tilde{v} = \int_0^h G(y, y') f_0 dy'$$

avec

$$G(y, y') = \frac{\tilde{v}_1(y_-) \tilde{v}_2(y_+)}{ik(u_0(y') - c)W(c)}$$

où  $y_- = \text{Min}(y, y')$  et  $y_+ = \text{Max}(y, y')$ .  $\tilde{v}_1$  et  $\tilde{v}_2$  sont les solutions de l'équation homogène (sans second membre) associée à (3.9) telles que  $\tilde{v}_1(0) = 0$  et  $\tilde{v}_2(h) = 0$  et  $W(c) = \tilde{v}_1 \frac{d\tilde{v}_2}{dy} - \tilde{v}_2 \frac{d\tilde{v}_1}{dy}$  est le Wronskien correspondant.

Comme on l'a vu dans la section précédente, pour obtenir le comportement asymptotique en temps des perturbations, il faut inverser la transformation de Laplace:

$$\hat{v}(k, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{+i\infty+\gamma} \tilde{v}(k, y, c) e^{-ikc} dc.$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue en utilisant la méthode des résidus. Ce sont donc les pôles de la fonction  $\tilde{v}$  qui vont contribuer à déterminer l'intégrale et par conséquent les pôles de la fonction de Green. On en distingue deux types. Il y a d'abord les zéros du Wronskien qui correspondent aux solutions discrètes de l'équation de Rayleigh puisque, dans ce cas, les fonctions  $\tilde{v}_1$  et  $\tilde{v}_2$  ne sont plus linéairement indépendantes (théorème de Cauchy). Ensuite, il y a les pôles  $c$  qui vérifient  $u_0(y') = c$  et qui constituent le spectre continu. L'étude de la nature de ces pôles (simple, double, logarithme...) permet de connaître le comportement asymptotique en temps de la perturbation et par là même de conclure quant à la stabilité de l'écoulement envisagé.



## 4. MODÉLISATION DU LIQUIDE À BULLES

### 4.1 Modèle mathématique

Dans cette section, on décrit le modèle mathématique de liquide à bulles de Kogarko [12], Iordanski [9] et Van Wijngaarden [30]. On considère un liquide incompressible, non visqueux contenant des petites bulles sphériques de gaz parfait. La concentration gazeuse est supposée très faible. La tension de surface et la gravité sont négligées. Concernant le comportement des bulles, on considère qu'il n'y a pas d'interaction entre les bulles et que leur nombre est donc conservé. De plus, elles se déplacent avec le fluide les entourant. Il n'y a pas de glissement entre les bulles et le fluide: on considère un modèle avec un seul champ de vitesse. La pression à l'intérieur d'une bulle est supposée uniforme.

Ce modèle nous permet de traiter le milieu diphasique comme un milieu continu. L'état macroscopique du liquide à bulles est décrit par une densité moyenne  $\rho(t, \mathbf{x})$ , une pression moyenne  $p(t, \mathbf{x})$ , une vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ , le nombre de bulles par unité de volume  $N(t, \mathbf{x})$  et le rayon des bulles  $R(t)$ . Les équations du mouvement sont:

$$\rho = \left(1 - \frac{4}{3}\pi R^3 N\right)\rho_l + \frac{4}{3}\pi R^3 N\rho_g, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0, \quad (4.3)$$

$$c_g = \frac{4\pi N R^3 \rho_g}{3\rho} = \text{constant}, \quad n = \frac{N}{\rho} = \text{constant}, \quad (4.4)$$

$$p_g(R) = p_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}, \quad (4.5)$$

$$p_g - p = \rho_l \left( R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right), \quad (4.6)$$

où  $\rho_l$  est la densité du liquide,  $\rho_g$  la densité du gaz,  $p_g$  la pression du gaz,  $p_0$  la pression à l'équilibre,  $\gamma > 1$  l'exposant polytropique et  $c_g$  la concentration massique du gaz.

Ces équations ont été proposées par Kogarko, Iordanski et Van Wijngaarden. Caffisch *et al* [1] ont justifié ces équations sous certaines conditions. Pour cela, ils ont introduit trois échelles de longueurs: l'échelle microscopique caractérisée par le rayon des bulles  $R$ , l'échelle mésoscopique

par la distance moyenne  $d$  entre les bulles et l'échelle macroscopique par une longueur  $\lambda$  devant laquelle le fluide semble homogène (FIG. 4.1). On peut alors définir les paramètres sans dimension suivants:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{d}{\lambda}, \\ \delta &= \frac{R}{\lambda}, \\ \beta &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{d}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^3,\end{aligned}$$

où on reconnaît la concentration gazeuse  $\beta$ . Le principal résultat de Caflisch *et al* est que les équations (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) sont valables si:

$$\epsilon \ll 1, \quad \delta = \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (4.7)$$

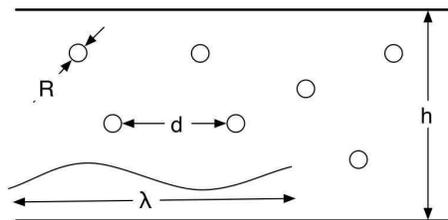


FIG. 4.1 – Échelles du problème.

## 4.2 Discussion du modèle

L'étude de la stabilité des écoulements cisailés dans les milieux diphasiques est un domaine très peu exploré. Les résultats sont rares et il n'y a pas de théorie des écoulements cisailés dans les liquides à bulles à proprement parler. La première difficulté est de trouver un modèle qui rend parfaitement compte de la réalité physique (compressibilité des bulles et du liquide, viscosité, tension superficielle, glissement entre les bulles et le liquide...) mais aussi des différentes topologies d'écoulements qui dépendent fortement de la concentration gazeuse (écoulement type poche-bouchon pour les grandes concentrations, écoulement classique pour de très faibles concentrations). Aujourd'hui, ce problème de modélisation n'est toujours pas résolu même si on peut citer le modèle de Zhang et Prosperetti [32] qui est plus récent et plus performant. La deuxième difficulté est de trouver un modèle assez simple d'un point de vue mathématique pour autoriser une étude théorique analytique approfondie. De ce point de vue, le modèle que l'on a choisi présente un bon compromis.

Les conditions proposées (4.7) impliquent que la concentration gazeuse est très faible. On a, en effet,

$$\beta = \mathcal{O}(\epsilon^6)$$

et comme  $\epsilon \ll 1$ , il est clair que la concentration de bulles de gaz est très faible. Ceci est cohérent avec la vision que l'on se fait du liquide à bulles dans notre modèle, à savoir celle d'un milieu continu.

Les bulles sont considérées sphériques alors que la tension superficielle a été négligée. Cela peut paraître paradoxal. En fait, Miksis et Ting [16] ont montré qu'il existe deux modes dominants d'oscillations pour des bulles de gaz, donc compressibles dans un liquide parfait incompressible: un mode d'oscillation asymétrique à volume constant, un mode d'oscillation radiale à volume non constant. Pour des petites bulles en petite concentration, c'est ce dernier mode qui domine et les sphères sont maintenues sphériques plus par ces oscillations que par la tension superficielle. Le paradoxe est donc levé.

Les effets de la viscosité dans le liquide à bulles sont discutés dans l'article de Miksis et Ting [17]. Ils montrent qu'ils sont négligeables devant les effets inertiels pour des bulles de petites tailles. De plus, ils ajoutent que si les bulles sont très petites, le glissement entre les bulles et le liquide est négligeable. On peut donc décrire le milieu avec un seul champ de vitesse comme pour un milieu continu.

Les effets de transferts thermiques entre phases sont, en général, assez importants. On a pourtant considéré une évolution adiabatique, notamment de la part du gaz dans la bulle puisque pour l'équation donnant la pression à l'intérieur du gaz (4.5), on a pris l'équation de Laplace pour une évolution isentropique  $PV^\gamma = \text{constante}$ . La validité de cette hypothèse a été discutée par Prosperetti [21]. Le comportement est adiabatique si la longueur caractéristique de pénétration thermique est petite devant le rayon de la bulle  $l_{th} \ll R$ . C'est le cas lorsque  $\frac{K}{T} = \text{constante}$  ( $K$  est la conductivité thermique du gaz,  $T$  est la température, cf Miksis et Ting [18], Keller et Miksis [11]). Les oscillations sont si rapides que les échanges n'ont pas le temps de se faire.

Nous supposons que les fréquences des perturbations seront dans un intervalle éloigné de la fréquence de résonance des bulles. En effet, comme on n'a pas considéré d'effets dissipatifs dans notre modèle, alors la réponse en amplitude serait infinie dans le cas contraire.

### 4.3 Approche variationnelle

Les équations du mouvement peuvent être obtenues par une approche variationnelle. Gavriluk et Teshukov [6] ont montré que le système diphasique admet pour lagrangien

$$L = \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + 2\pi n \rho_l R^3 \dot{R}^2 - c_g \epsilon_g (\rho_g) \right),$$

où  $\epsilon_g$  est l'énergie interne spécifique du gaz parfait contenu dans les bulles, et  $n = \frac{N}{\rho}$ . La définition de la densité moyenne s'écrit

$$\frac{4}{3}\pi R^3 n = \frac{1}{\rho} - \frac{1 - c_g}{\rho_l}.$$

Le lagrangien appartient donc à une classe qui a la forme générique

$$L(\mathbf{u}, \rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 - W(\rho, \dot{\rho}).$$

$W$  est invariant par transformation de Galilée et s'interprète comme l'énergie potentielle volumique.

Les équations du mouvement sont maintenant obtenues en dérivant les équations d'Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p, \\ P &= \rho \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{\rho}} \right) - \operatorname{div} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{\rho}} \mathbf{u} \right) \right) - W, \\ W &= W(\rho, \dot{\rho}), \end{aligned}$$

où  $\dot{(\ )} = \frac{\partial}{\partial t}(\ ) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\ )$  est la dérivée temporelle particulaire.

Si on note  $P$  et  $\rho$  la pression et la densité à l'équilibre,  $p$  et  $\rho'$  leur perturbation respective, alors on montre que (cf [7]):

$$p = a^2 \rho' + b^2 D^2 \rho' \quad (4.8)$$

avec  $D = \frac{\partial}{\partial t} + u_0(y) \frac{\partial}{\partial x}$  et les constantes  $a$  et  $b$  définies par

$$a^2 = -\frac{dp_g}{d\tau} \frac{1}{\rho_l N} = \frac{\gamma p_0}{\beta \rho_l}, \quad (4.9)$$

$$b^2 = \frac{1}{4\pi N R_0} = \frac{R_0}{A_i}. \quad (4.10)$$

$a$  est la vitesse du son dans le liquide à bulles. Cette expression est cohérente avec celle proposée par Van Wijngaarden  $a^2 = \frac{\gamma p_0}{\beta(1-\beta)\rho_l}$  pour  $\beta \ll 1$ .  $b$  est une longueur caractéristique liée à un paramètre classique en physique des milieux diphasiques:  $A_i = 4\pi R_0^2 N$ , la densité d'aire interfaciale par unité de volume.

## 5. ÉCOULEMENTS CISAILLÉS DANS LES LIQUIDES À BULLES

L'étude théorique de la stabilité des écoulements cisailés dans les liquides à bulles est un domaine très peu exploré. La principale raison réside dans la difficulté d'avoir un modèle qui, à la fois, rende compte de la physique des milieux diphasiques et, dans le même temps, permette une étude mathématique analytique. Récemment, de très nettes avancées ont été faites par Gavriluk et Teshukov [7] en utilisant le modèle présenté dans la section précédente. Ils ont notamment généralisé les théorèmes de Squire et de Howard, ainsi que le critère de Rayleigh. On se propose de présenter et de démontrer ces résultats. La méthode employée est semblable à celle utilisée pour les fluides parfaits. On s'intéresse à la stabilité linéaire. On va donc dans un premier temps dériver les équations linéarisées pour les perturbations. Ensuite, on appliquera la méthode des modes normaux.

### 5.1 Équations linéarisées

On considère l'écoulement d'un liquide à bulles semblable à celui décrit dans le chapitre précédent dans un canal de largeur  $h$ . L'écoulement de base est donné par

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \mathbf{u} = (u_0(y), 0)$$

et est solution des équations du mouvement:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.3)$$

$$p_g - p = \rho_l \left( R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right). \quad (5.4)$$

On note respectivement  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  les perturbations relatives à la pression, à la densité et aux vitesses tangentielle et normale. En tenant compte de l'équation (4.8), on obtient le système d'équations linéarisées suivant:

$$D\rho + \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.5)$$

$$\rho_0(Du + u'_0v) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.6)$$

$$\rho_0Dv = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.7)$$

$$p = a^2\rho + b^2D^2\rho, \quad (5.8)$$

$$v(0) = v(h) = 0.$$

Rappelons que  $D = \frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x}$ , ainsi que les définitions de  $a$  et  $b$  qui sont respectivement la vitesse du son dans le liquide à bulles et une longueur caractéristique relative à l'inertie du milieu ( $A_i$  est la densité d'aire interfaciale):

$$a^2 = -\frac{dp_g}{d\tau} \frac{1}{\rho_l N} = \frac{\gamma p_0}{\beta \rho_l},$$

$$b^2 = \frac{1}{4\pi N R_0} = \frac{R_0}{A_i}.$$

## 5.2 Modes normaux. Approximation des ondes longues

Considérons les modes normaux associés au problème linéaire (5.5), (5.6), (5.7) et (5.8):

$$\rho(x,y,t) = R(y)e^{ik(x-ct)},$$

$$p(x,y,t) = P(y)e^{ik(x-ct)},$$

$$u(x,y,t) = U(y)e^{ik(x-ct)},$$

$$v(x,y,t) = ikV(y)e^{ik(x-ct)}.$$

On peut noter que pour la vitesse normale, on a ajouté le facteur  $ik$ . Cela ne change rien physiquement mais les calculs sont ainsi facilités. Les valeurs du spectre  $c$  sont celles compatibles avec les solutions non nulles du système suivant:

$$(u_0 - c)R + \rho_0 \left( U + \frac{dV}{dy} \right) = 0, \quad (5.9)$$

$$\rho((u_0 - c)U + u'_0(y)V) + P = 0, \quad (5.10)$$

$$k^2\rho_0(u_0 - c)V = \frac{dP}{dy}, \quad (5.11)$$

$$P - (a^2 - b^2k^2(u_0 - c)^2)R = 0, \quad (5.12)$$

$$V(0) = V(h) = 0. \quad (5.13)$$

La résolution du système se fait en exprimant  $R$ ,  $U$ ,  $P$  et  $\frac{dP}{dy}$  en fonction de  $V$ :

$$R = \frac{\rho_0(u_0 - c)^2 \frac{d}{dy} \left( \frac{V}{u_0 - c} \right)}{a^2 - (1 + b^2k^2)(u_0 - c)^2},$$

$$U = -\frac{dV}{dy} - \frac{(u_0 - c)^3 \frac{d}{dy} \left( \frac{V}{u_0 - c} \right)}{a^2 - (1 + b^2 k^2)(u_0 - c)^2},$$

$$P = \rho_0 \frac{(u_0 - c)^2 (a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2) \frac{d}{dy} \left( \frac{V}{u_0 - c} \right)}{a^2 - (1 + b^2 k^2)(u_0 - c)^2},$$

$$\frac{dP}{dy} = \rho_0 k^2 (u_0 - c) V.$$

On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre pour la composante normale de la vitesse

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{(u_0 - c)^2 (a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2) \frac{d}{dy} \left( \frac{V}{u_0 - c} \right)}{a^2 - (1 + b^2 k^2)(u_0 - c)^2} \right) - k^2 (u_0 - c) V = 0,$$

avec les conditions limites:  $V(0) = V(h) = 0$ . De façon analogue, on peut dériver une équation différentielle pour la pression  $P$ :

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{1}{k^2 (u_0 - c)^2} \frac{dP}{dy} \right) - \left( \frac{1}{(u_0 - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2} \right) P = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{dP}{dy}(0) = \frac{dP}{dy}(h) = 0. \quad (5.15)$$

Nous allons faire une approximation supplémentaire: l'approximation des ondes longues. Cela consiste à supposer que les longueurs d'ondes des perturbations sont très grandes devant la largeur du canal  $h$ :

$$h \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Cela implique que les variations des grandeurs physiques sont plus importantes dans la direction de propagation de l'onde  $Ox$  que dans la direction transverse  $Oy$ . On peut rendre compte de cet effet en effectuant le changement de variable:

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \mu y, \quad t \rightarrow t, \quad u \rightarrow u, \quad v \rightarrow \mu v,$$

où  $\mu = \frac{h}{\lambda}$ . Le système (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4) est alors transformé en

$$D\rho + \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.16)$$

$$\rho_0 (Du + u'_0 v) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.17)$$

$$\mu^2 \rho_0 Dv = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (5.18)$$

$$p = a^2 \rho + b^2 D^2 \rho. \quad (5.19)$$

Dans la limite des ondes longues, appelée également "couches minces", i.e. pour  $\mu \rightarrow 0$ , l'équation (5.18) devient

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (5.20)$$

Dans l'approximation des ondes longues, l'équation (5.11) est remplacée par

$$\frac{dP}{dy} = 0.$$

L'intégration de l'équation couplée aux conditions limites aboutit à une relation de dispersion entre la vitesse de phase  $c$  et le nombre d'onde  $k$

$$\chi(c) = \int_0^h \left( \frac{1}{(u_0 - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2} \right) dy = 0.$$

Cette relation est très importante car l'étude de la fonction  $\chi$ , pour un profil  $u_0$  quelconque, donne accès à la fois au spectre discret qui est l'ensemble des zéros de la fonction  $\chi$ , et au spectre continu qui est l'ensemble des pôles de la fonction intégrée.

Remarquons que si  $c$  est solution, alors le complexe conjugué  $c^*$  est aussi solution. Le critère de stabilité  $c_i \leq 0$  devient donc  $c_i = 0$ .

### 5.3 Théorème de Squire pour les liquides à bulles

Le théorème de Squire présenté dans le deuxième chapitre pour les fluides parfaits montre comment, via la transformation de Squire, on peut relier les instabilités 2D et 3D. En 2004, il a été généralisé par Gavriluyk et Teshukov. En utilisant une transformation analogue à celle de Squire, on peut transformer le problème 3D en un problème 2D équivalent. Si on note  $w$  la composante de la vitesse selon l'axe  $z$ , les équations linéarisées sont:

$$D\rho + \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\rho_0(Du + u'_0 v) = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho_0 Dv = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\rho_0 Dw = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$p = a^2 \rho + b^2 D^2 \rho.$$

Pour les perturbations de la forme  $e^{ik(x-ct)+ilz}$ , avec toujours les mêmes notations ( $P$  pour la pression,  $R$  pour la densité et  $U$ ,  $V$  et  $W$  pour les composantes de la vitesse du fluide), on a:

$$\rho_0((u_0 - c)U + \frac{du_0}{dy}V) + P = 0, \quad (5.21)$$

$$-\rho k^2(u_0 - c)V + \frac{dP}{dy} = 0, \quad (5.22)$$

$$\rho_0(u_0 - c)kW + lP = 0, \quad (5.23)$$

$$(u_0 - c)kR + \rho_0(kU + lW + k\frac{dV}{dy}) = 0, \quad (5.24)$$

$$P = (a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2) R. \quad (5.25)$$

On peut maintenant énoncer le théorème de Squire étendu aux liquides à bulles et le démontrer aisément.

**Théorème 5 (Extension du théorème de Squire):** A chaque perturbation instable tri-dimensionnelle solution du système (5.21), (5.22), (5.23), (5.24), (5.25) correspond une perturbation instable bidimensionnelle; i.e. si l'écoulement bidimensionnel est stable alors l'écoulement tridimensionnel l'est aussi.

Effectuons la transformation suivante:

$$k_* = \sqrt{k^2 + l^2}, \quad k_* U_* = kU + lW, \quad \frac{P_*}{k_*} = \frac{P}{k}, \quad k_* V_* = kV, \quad c_* = c, \quad \frac{a_*^2}{k_*} = \frac{a^2}{k^2}, \quad b_*^2 = b^2, \quad R_* = R.$$

Le système pour les variables étoilées est:

$$\begin{aligned} \rho_0(u_0 - c)U_* + \frac{du_0}{dy}V_* + P_* &= 0, \\ -\rho_0^2 k^2 (u_0 - c)V_* + \frac{dP_*}{dy} &= 0, \\ -k_*(u_0 - c)R_* + \rho_0 \left( k_* U_* + k_* \frac{dV_*}{dy} \right) &= 0, \\ P_* &= (a_*^2 - b_*^2 k_*^2 (u_0 - c)^2) R_*, \\ \rho_0(u_0 - c)k_* W + lP_* &= 0. \end{aligned}$$

Les quatre premières équations sont équivalentes aux équations (5.9), (5.10), (5.11), (5.12). Donc pour chaque mode instable du problème 3D, on arrive à construire un mode instable du problème 2D équivalent. Cela conclut la preuve du théorème.

Ce théorème est toujours vrai que l'on soit dans l'approximation des ondes longues ou non. C'est également le cas pour l'extension du théorème de Howard que l'on va présenter dans la section suivante.

#### 5.4 Théorème de Howard pour les liquides à bulles

Le théorème de Howard donne une localisation des éventuels modes instables. Plus précisément, il montre que les modes instables sont contenus dans un demi-cercle du plan complexe.

**Théorème 6 (Extension du théorème du demi-cercle de Howard):** Les modes instables ( $c = c_r + ic_i$ ) du système (5.9), (5.10), (5.11), (5.12) appartiennent au demi-disque de frontière:

$$\left( c_r - \frac{u_0^{max} + u_0^{min}}{2} \right)^2 + c_i^2 \leq \left( \frac{u_0^{max} - u_0^{min}}{2} \right)^2.$$

La preuve de ce théorème ressemble beaucoup à la preuve du théorème original. On multiplie l'équation (5.14) par le complexe conjugué de  $P$  et on intègre entre 0 et  $h$ , en tenant compte des conditions (5.15). On a alors:

$$\int_0^h \left( \frac{1}{k^2(u_0 - c)^2} \left| \frac{dP}{dy} \right|^2 + \left( \frac{1}{(u_0 - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2} \right) |P|^2 \right) dy = 0.$$

La partie imaginaire de cette équation est nulle donc pour un mode instable ( $c_i > 0$ ), on a la relation suivante

$$\int_0^h (u_0 - c_r) Q_0(y) dy = 0, \quad (5.26)$$

avec la fonction positive  $Q_0 \geq 0$  définie par

$$Q_0(y) = \frac{1}{k^2 |u_0 - c|^4} \left| \frac{dP}{dy} \right|^2 + \left( \frac{1}{|u_0 - c|^4} + \frac{b^2 k^2}{|a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2|^2} \right) |P|^2.$$

La partie réelle est également nulle et donc

$$\int_0^h ((u_0 - c_r)^2 - c_i^2) Q_0(y) dy = \int_0^h a^2 Q_1(y) dy, \quad (5.27)$$

avec là encore une fonction positive  $Q_1 \geq 0$

$$Q_1(y) = \frac{1}{|a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2|^2} |P|^2.$$

En utilisant les formules (5.26), (5.27) et la positivité des fonctions  $Q_0$  et  $Q_1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^h (u_0 - u_0^{\min})(u_0 - u_0^{\max}) Q_0(y) dy &\leq 0, \\ \int_0^h (c_r^2 - c_r(u_0^{\max} + u_0^{\min} + u_0^{\max} u_0^{\min})) Q_0(y) + a^2 Q_1(y) dy &\leq 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_0^h (c_r^2 - c_r(u_0^{\max} + u_0^{\min}) + u_0^{\max} u_0^{\min}) Q_0(y) dy \leq 0. \quad (5.28)$$

On peut réécrire l'équation (5.28) sous la forme

$$\left( \left( c_r - \frac{u_0^{\max} + u_0^{\min}}{2} \right)^2 + c_i^2 - \left( \frac{u_0^{\max} - u_0^{\min}}{2} \right)^2 \right) \int_0^h Q_0(y) dy \leq 0,$$

ce qui achève la preuve.

Évidemment ce résultat est toujours vrai dans l'approximation des ondes longues. Néanmoins, un meilleur résultat peut être obtenu dans ce cas. Nous allons l'énoncer sans le démontrer.

**Théorème 7** (Extension du théorème de Howard dans l'approximation des ondes longues): Les modes instables appartiennent au domaine défini par

$$\left( c_r - \frac{u_0^{\max} + u_0^{\min}}{2} \right)^2 + c_i^2 + \frac{a^2 c_i^2}{b^2 k^2 c_i^2 + (a^2 + b^2 k^2 c_i^2)^2} \leq \left( \frac{u_0^{\max} - u_0^{\min}}{2} \right)^2.$$

### 5.5 Critère de Rayleigh pour les liquides à bulles

Nous venons de voir que l'on pouvait étendre les théorèmes de Squire et de Howard au liquide à bulles. Pour le critère de Rayleigh, il n'existe pas encore de généralisation. Néanmoins, dans l'approximation des ondes longues, un critère analogue a été proposé par Gavriljuk et Teshukov. L'étude de la stabilité d'un profil  $u_0$  est basée sur l'étude de la relation de dispersion valable uniquement dans l'approximation des ondes longues:

$$\chi(c) = \int_0^h \left( \frac{1}{(u_0 - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 (u_0 - c)^2} \right) dy.$$

La démonstration ne sera pas présentée parce qu'elle est très complexe.

**Théorème 8** (Extension du critère de Rayleigh dans l'approximation des ondes longues): La relation de dispersion  $\chi(c) = 0$  n'a pas de racine complexe, i.e. l'écoulement est stable si l'une des conditions A ou B est satisfaite

$$\begin{aligned} A : u_0'(y) > 0, \quad u_0''(y) > 0, \quad y \in (0, h) \\ u_0''(y) > (u_0'(y))^3 \text{Max} \left( \frac{u_0^{\text{max}} - u_0(y)}{2a^2 u_0'(y_m)}, \frac{u_0^{\text{max}} - u_0^{\text{min}}}{4a^2 u_0'(y)} \right), \quad y \in (0, y_m). \\ B : u_0'(y) > 0, \quad u_0''(y) > 0, \quad y \in (0, h) \\ u_0''(y) > (u_0'(y))^3 \text{Max} \left( \frac{u_0^{\text{max}} - u_0(y)}{2a^2 u_0'(y_m)}, \frac{u_0^{\text{max}} - u_0^{\text{min}}}{4a^2 u_0'(y)} \right), \quad y \in (0, y_m). \end{aligned}$$



## 6. ÉCOULEMENT DE COUETTE DANS LES LIQUIDES À BULLES

L'étude de la stabilité de l'écoulement de Couette dans les liquides à bulles est présentée dans ce chapitre.

### 6.1 Position du problème

Un liquide à bulles occupe l'espace 2D compris entre deux murs d'équations  $y = 0$  et  $y = h$ . On perturbe l'écoulement de base qui est l'écoulement de Couette:

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_0,$$

$$\mathbf{u}_0 = u_0(y)\mathbf{e}_x.$$

avec  $u_0(y) = \alpha \left( y - \frac{h}{2} \right)$ . On utilise l'axe de symétrie du problème  $y = \frac{h}{2}$ . Ici,  $\alpha h/2$  est la vitesse maximale du fluide. On a vu précédemment que les équations linéarisées pour les perturbations étaient données par les équations (5.5), (5.6), (5.7) et (5.8). Si on remplace  $u_0$  par son expression (et tout en rappelant que le profil intervient dans la définition de  $D = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x}$ ), on obtient

$$D\rho + \rho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\rho_0(Du + \alpha v) = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho_0 Dv = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{6.1}$$

$$p = a^2 \rho + b^2 D^2 \rho,$$

$$v(0) = v(h) = 0.$$

Dans l'approximation des ondes longues, l'équation (6.1) devient avec  $\mu = \frac{h}{\lambda} \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

## 6.2 Approche spectrale: spectre discret

Pour obtenir le spectre discret, on sait que l'on doit étudier la fonction  $\chi$  en remplaçant  $u_0$  par son expression pour l'écoulement de Couette:

$$\chi(c) = \int_0^h \left( \frac{1}{\left(\alpha \left(y - \frac{h}{2}\right) - c\right)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 \left(\alpha \left(y - \frac{h}{2}\right) - c\right)^2} \right) dy = 0.$$

Dans le cas de l'écoulement de Couette, on peut exactement calculer cette fonction. Pour cela, on va introduire plusieurs paramètres sans dimension:

$$H = \frac{\alpha h d}{a} = M d, \quad d = \frac{1}{b k}, \quad c' = \frac{d}{a} c.$$

On a alors

$$\chi(c') = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left( \frac{1}{(y - c')^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d^2 - (y - c')} + \frac{1}{d^2 + (y - c')} \right) \right) dy = 0$$

et le calcul direct de l'intégrale donne:

$$\chi(c') = \frac{H}{c'^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{c'^2 - \left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2}{c'^2 - \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2} \right).$$

**Théorème 9:** La fonction  $\chi(c')$  n'a pas de racine complexe telle que  $c'_i \neq 0$ , i.e. dans l'approximation des ondes longues, le spectre discret est réel et les perturbations de l'écoulement de Couette transportées par les modes normaux sont bornées.

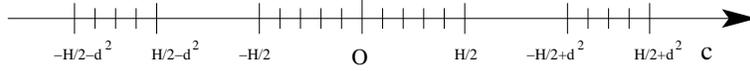
La démonstration du théorème se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on va étudier la fonction  $\chi$  pour  $c'$  réel. On va ainsi montrer qu'il existe deux racines réelles. Dans un second temps, on déterminera le nombre de zéros de la fonction  $\chi$  pour  $c'$  complexe en utilisant le principe d'argument. On va prouver qu'il existe deux zéros. Or, comme on sait déjà qu'il y a deux racines réelles, cela prouvera que ce sont les seuls zéros et donc qu'il n'y a pas de racine complexe telle que  $c'_i \neq 0$ .

**Étape 1:** Par souci de simplicité, on omet les primes  $c' \rightarrow c$ .  $c$  est supposé réel. Il est alors évident que la fonction  $\chi$  l'est aussi. Il existe trois intervalles interdits pour  $c$  si  $H < d^2$  (FIG. 6.1):

$$\left[ -\left(\frac{H}{2} + d^2\right), \left(\frac{H}{2} - d^2\right) \right], \quad \left[ -\frac{H}{2}, \frac{H}{2} \right], \quad \left[ \left(-\frac{H}{2} + d^2\right), \left(\frac{H}{2} + d^2\right) \right].$$

Remarquons maintenant que  $\chi$  est une fonction de  $c^2$ . On a donc  $\chi(c) = \chi(-c)$ . On peut donc poser  $s = c^2$  et étudier la fonction:

$$\chi(s) = \frac{H}{s - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s - \left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2}{s - \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2} \right).$$

FIG. 6.1 – Domaine de définition de la fonction  $\chi$  pour  $c$  réel

L'ensemble de définition de la fonction  $\chi(s)$  est alors  $\left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2, \left( \frac{H}{2} - d^2 \right)^2 \right]$  et  $\left[ \left( \frac{H}{2} + d^2 \right)^2, +\infty \right]$ .

Calculons la dérivée de  $\chi(s)$  pour avoir son comportement:

$$\frac{d\chi}{ds} = -\frac{H}{\left(s - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - \left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2} - \frac{1}{s - \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2} \right).$$

On peut réécrire cette expression sous la forme:

$$\frac{d\chi}{ds} = -\frac{H}{\left(s - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2 - \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2}{\left(s - \left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2\right)\left(s - \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2\right)} \right) < 0.$$

La fonction  $\chi(s)$  est donc décroissante. De plus, les calculs de limites au bord de l'ensemble de définition donnent:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \left(\frac{H}{2}\right)^2} \chi(s) &= +\infty \\ \lim_{s \rightarrow \left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2} \chi(s) &= -\infty, \\ \lim_{s \rightarrow \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2} \chi(s) &= +\infty, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \chi(s) &= 0. \end{aligned}$$

L'allure de la fonction est donnée sur la figure (FIG. 6.2). On conclut qu'il existe une racine unique  $s_0$  dans l'intervalle  $\left[\left(\frac{H}{2}\right)^2, \left(-\frac{H}{2} + d^2\right)^2\right]$ . Cela implique que la fonction  $\chi(c)$  admet deux racines réelles  $c_{\pm} = \pm\sqrt{s_0}$  opposées.

Étape 2: Nous allons déterminer le nombre de zéros de la fonction  $\chi(s)$  en utilisant le principe d'argument. Nous avons la relation:

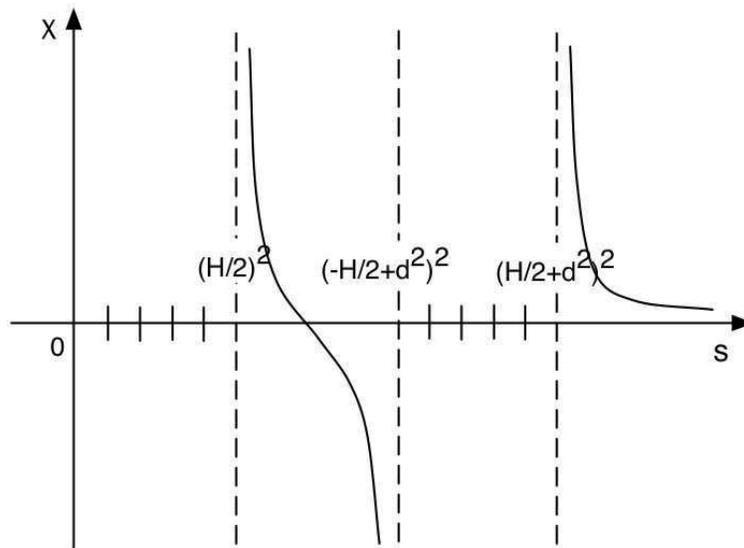
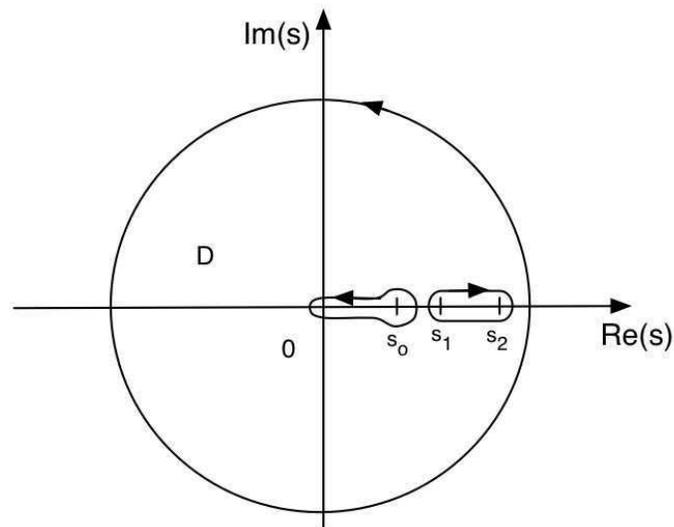
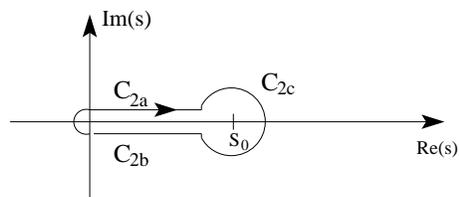
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} ds = Z - P,$$

où  $Z$  est le nombre de zéros et  $P$  le nombre de pôles. On sait que  $P = 0$  car la fonction  $\chi$  est analytique dans le domaine  $D$  (FIG. 6.3).

L'intégration sur le contour  $C_1$  donne:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} -idt = -1.$$

L'intégration sur le contour  $C_2$  est partagée sur trois contours  $C_{2a}$ ,  $C_{2b}$  et  $C_{2c}$  (FIG. 6.4). Les intégrations sur  $C_{2a}$  et  $C_{2b}$  sont égales en valeur absolue mais de signes opposés. Il reste donc à

FIG. 6.2 – Allure de la fonction  $\chi(s)$ FIG. 6.3 – Contours d'intégration  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ FIG. 6.4 – Contours d'intégration  $C_{2a}$ ,  $C_{2b}$  et  $C_{2c}$

évaluer l'intégrale sur le contour  $C_{2c}$  autour du pôle  $s_0 = \left(\frac{H}{2}\right)^2$ . Si on pose  $s = s_0 + \epsilon e^{it}$  avec  $\epsilon$  qui tend vers zéro, on a :

$$\begin{aligned}\frac{d\chi}{ds}(s) &\approx -\frac{H}{\epsilon^2 e^{i2t}}, \\ \chi(s) &\approx \frac{H}{\epsilon e^{it}}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2c}} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} ds &= 1.\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale sur le contour  $C_3$ , on introduit  $s_1 = \left(-\frac{H}{2} + d^2\right)^2$  et  $s_2 = \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2$ . Remarquons que l'on peut réécrire la fonction  $\chi(s)$  sous la forme

$$\chi(s) = \frac{H}{s - s_0} + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{dy}{s - y}.$$

Le premier terme ne présente aucune singularité à l'intérieur du domaine délimité par le contour  $C_3$  et donc sa variation d'argument est nulle. Le second terme est une intégrale du type de Cauchy et on a la relation:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{dy}{s - y} = \ln \left| \frac{s - s_1}{s - s_2} \right| + i\delta\pi,$$

avec  $\delta = -1$  si  $s$  appartient au demi plan complexe supérieur défini  $\mathcal{I}m(s) > 0$ , et  $\delta = 1$  si  $s$  appartient au demi plan inférieur  $\mathcal{I}m(s) < 0$ . Nous allons maintenant introduire deux fonctions  $\chi^+$  et  $\chi^-$ :

$$\begin{aligned}\chi^+ &= \frac{H}{s - s_0} + \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{s - s_1}{s - s_2} \right| - i\pi \right), \\ \chi^- &= \frac{H}{s - s_0} + \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{s - s_1}{s - s_2} \right| + i\pi \right).\end{aligned}$$

On sait d'après le principe d'argument que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_3} \chi,$$

où  $\Delta_{C_3}$  désigne la variation d'argument sur le contour  $C_3$ . On peut voir sur la figure 6.5:

$$\arg(\chi^+(s_1)) = -\pi,$$

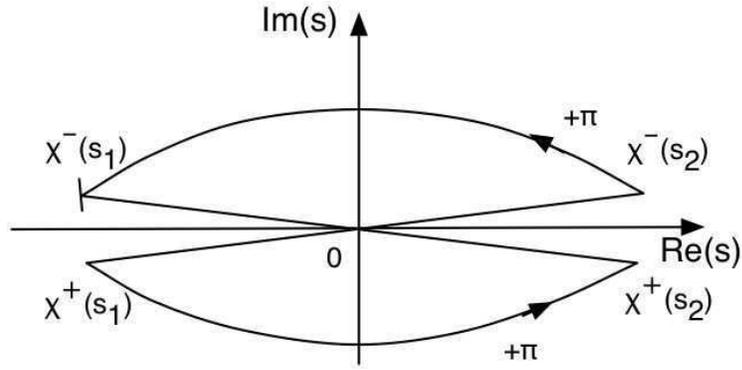
$$\arg(\chi^+(s_2)) = 0,$$

$$\arg(\chi^-(s_1)) = \pi,$$

$$\arg(\chi^-(s_2)) = 0.$$

Cela nous permet de montrer que la variation d'argument de  $\chi$  sur le contour  $C_3$  vaut  $2\pi$  et donc on a :

$$\begin{aligned}\Delta_{C_3} \chi &= 2\pi, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} ds &= 1.\end{aligned}$$

FIG. 6.5 – Arguments de la fonction  $\chi$ 

En conclusion, on vient de prouver que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1UC_2UC_3} \frac{\chi'(s)}{\chi(s)} ds = Z = 1,$$

ce qui veut dire que le nombre de zéros de la fonction  $\chi(s)$  est égal à 1. Or, on a démontré lors de la première étape qu'il existait une racine réelle. C'est donc l'unique racine. Ce qui achève la démonstration.

Il convient néanmoins de rappeler que l'on a supposé  $H < d^2$ . Si l'on revient aux premières notations, cette condition se réécrit:

$$2\pi b \frac{\alpha h}{a} = 2\pi Mb < \lambda.$$

Cette condition n'est pas une restriction dans l'approximation des ondes longues ( $M$  est le nombre de Mach).

### 6.3 Problème aux valeurs initiales: spectre continu

La résolution du problème aux valeurs initiales est importante comme l'a montré Case dans le cas d'un écoulement de fluide parfait. Cette étude nous a permis de montrer le théorème suivant.

**Théorème 10:** Dans l'approximation des ondes longues, pour des conditions initiales lisses (au moins dérivables deux fois), les perturbations de l'écoulement de Couette ( $u_0(y) = y$ ) dans un liquide à bulles sont transportées par le spectre discret ( $c = \pm\sqrt{s_0}$ ) et par le spectre continu défini par l'ensemble

$$-\frac{a}{bk} < c < h - \frac{a}{bk}, \quad 0 < c < h, \quad \frac{a}{bk} < c < h + \frac{a}{bk}.$$

Les perturbations sont bornées et donc l'écoulement est stable.

On déduit de ce théorème un théorème plus général pour tous les écoulements.

Théorème 11: Pour un écoulement général de profil  $u_0$  dans un liquide à bulles, les perturbations se décomposent en une somme discrète et une somme continue d'ondes monochromatiques.

Pour démontrer le premier théorème, nous nous sommes inspirés de la méthode employée par Case. Nous allons appliquer une transformation de Laplace par rapport à la coordonnée de temps  $t$  et de Fourier par rapport à la coordonnée d'espace  $x$ . Ceci nous permettra d'obtenir une expression littérale de la composante normale de la vitesse. On pose donc

$$(\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v})(k, y, s) = \int_0^\infty \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (p, \rho, u, ikv)(x, y, t) e^{-ikx} dx \right) e^{-st} dt.$$

En posant  $s = -ikc$ , les équations du mouvement s'écrivent

$$ik \left( (u_0 - c)\tilde{\rho} + \tilde{u} + \frac{d\tilde{v}}{dy} \right) = \rho(k, y, t = 0) \equiv \rho_i,$$

$$ik((u_0 - c)\tilde{u} + \alpha\tilde{v} + \tilde{p}) = u(k, y, t = 0) \equiv u_i,$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dy} = 0,$$

$$\tilde{p} - (a^2 + b^2k^2(u_0 - c)^2)\tilde{\rho} = ik(c - 2u_0)\rho(k, y, t = 0) - \frac{\partial\rho}{\partial t}(k, y, t = 0) \equiv f_i.$$

où  $\rho_i$ ,  $u_i$  et  $f_i$  sont les conditions initiales. En éliminant  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\rho}$ , on obtient une équation différentielle du second ordre pour la composante normale de la vitesse  $\tilde{v}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \left( \frac{(u_0 - c)^2(a^2 - b^2k^2(u_0 - c)^2)}{a^2 - (1 + b^2k^2)(u_0 - c)^2} \frac{d}{dy} \left( \frac{\tilde{v}}{u_0 - c} \right) \right) = \\ & \frac{d}{dy} \left( \left( \frac{a^2 - b^2k^2(u_0 - c)^2}{a^2 - (1 + b^2k^2)(u_0 - c)^2} \right) \left( \frac{(u_0 - c)\rho_i}{ik} - \frac{u_i}{ik} + \frac{(u_0 - c)^2 b^2 f_i}{a^2 - b^2k^2(u_0 - c)^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.2)$$

avec les conditions limites  $\tilde{v}(y = 0) = \tilde{v}(y = h) = 0$ . La résolution de l'équation (6.2) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}(k, y, c)}{u_0 - c} &= \int_0^y \left( \frac{f_i}{a^2 - b^2k^2(u_0(y') - c)^2} + \frac{\rho_i}{ik(u_0(y') - c)} - \frac{u_i}{ik(u_0(y') - c)^2} \right) dy' \\ &+ C \int_0^y \left( \frac{1}{(u_0(y') - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2k^2(u_0(y') - c)^2} \right) dy', \end{aligned} \quad (6.3)$$

avec

$$C = - \frac{\int_0^h \left( \frac{f_i}{a^2 - b^2k^2(u_0(y') - c)^2} + \frac{\rho_i}{ik(u_0(y') - c)} - \frac{u_i}{ik(u_0(y') - c)^2} \right) dy'}{\int_0^h \left( \frac{1}{(u_0(y') - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2k^2(u_0(y') - c)^2} \right) dy'}. \quad (6.4)$$

Nous sommes intéressés par le comportement asymptotique en temps de la perturbation  $v$ , puisque l'on veut savoir si elle est bornée. Or, comme on l'a déjà dit dans le chapitre 3, on sait que le comportement asymptotique en temps d'une fonction est directement lié aux singularités de sa transformation de Laplace. Rappelons à ce propos quelques résultats classiques d'analyse complexe (on note  $TL^{-1}$  l'inversion de la transformation de Laplace):

$$TL^{-1} \left( \ln \left( \frac{s + \alpha}{s + \beta} \right) \right) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{t}, \quad (6.5)$$

$$TL^{-1} \left( \frac{1}{(s + \alpha)^n} \right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}. \quad (6.6)$$

On observe donc que si  $\tilde{v}$  comporte un logarithme alors  $v$  s'atténue en  $\frac{1}{t}$  (pour  $\alpha$  et  $\beta$  imaginaires pures) tandis que si  $\tilde{v}$  comporte un pôle simple alors  $v$  est bornée.

Pour savoir si la perturbation est bornée, on va donc étudier la nature des singularités de  $\tilde{v}$ . On pose  $u_0(y) = y$ . On a alors

$$\tilde{v} = (y - c) \left( I_1 - \frac{I_2}{I_3} I_4 \right),$$

avec les intégrales  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$  définies par:

$$I_1 = \int_0^y \left( \frac{f_i}{a^2 - b^2 k^2 (y' - c)^2} + \frac{\rho_i}{ik(y' - c)} - \frac{u_i}{ik(y' - c)^2} \right) dy',$$

$$I_2 = \int_0^h \left( \frac{f_i}{a^2 - b^2 k^2 (y' - c)^2} + \frac{\rho_i}{ik(y' - c)} - \frac{u_i}{ik(y' - c)^2} \right) dy',$$

$$I_3 = \int_0^h \left( \frac{1}{(y' - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 (y' - c)^2} \right) dy',$$

$$I_4 = \int_0^y \left( \frac{1}{(y' - c)^2} - \frac{1}{a^2 - b^2 k^2 (y' - c)^2} \right) dy'.$$

La transformation de Laplace est linéaire et on peut donc étudier séparément les singularités de  $I_1$  et  $\frac{I_2}{I_3} I_4$ .

Singularités de  $I_1$ : Tout d'abord, on peut écrire

$$\frac{f_i}{a^2 - b^2 k^2 (y' - c)^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{f_i}{a - bk(y' - c)} + \frac{f_i}{a + bk(y' - c)} \right),$$

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{f_i(y')}{a - bk(y' - c)} dy' &= \int_0^y \frac{f_i(y') - f_i(c + \frac{a}{bk})}{a - bk(y' - c)} dy' \\ &+ f_i(c + \frac{a}{bk}) \int_0^y \frac{1}{a - bk(y' - c)} dy'. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est une fonction de  $c$  régulière si  $f_i$  est une fonction continue. Son intégrale ne comporte donc pas de singularité. Le second terme peut être calculé

explicitement: on obtient alors une fonction de  $c$  logarithmique.

De la même manière, on va étudier l'intégrale:

$$\int_0^y \frac{f_i(y')}{a + bk(y' - c)} dy'.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la quantité

$$\begin{aligned} \int_0^y \left( \frac{\rho_i(y')}{ik(y' - c)} \right) dy' &= \int_0^y \left( \frac{\rho_i(y') - \rho_i(c)}{ik(y' - c)} \right) dy' \\ &+ \rho_i(c) \int_0^y \left( \frac{1}{ik(y' - c)} \right) dy'. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (6.7) est une fonction régulière de  $c$  (pas de singularité) si  $\rho_i$  est une fonction continue. Le second terme peut être facilement calculé et donne une fonction logarithmique de  $c$ .

Le dernier terme de  $I_1$  donne par intégration par partie:

$$\int_0^y \left( \frac{u_i(y')}{ik(y' - c)^2} \right) dy' = \left[ -\frac{u_i}{ik(y' - c)} \right]_0^y + \int_0^y \left( \frac{\frac{du_i}{dy}}{ik(y' - c)^2} \right) dy'.$$

Le terme entre crochets donne deux pôles réels par rapport à la variable  $c$ . Ce sont donc deux pôles purement imaginaires par rapport à  $s = -ikc$ .

On montre facilement comme on l'a fait plus haut que le second terme donne une fonction logarithmique de  $c$  si  $\frac{du_i}{dy}$  est une fonction continue.

En conclusion, on a montré que les singularités de  $I_1$  sont des logarithmes et des pôles simples. D'après les relations (6.5) et (6.6), cela prouve que la transformation inverse de  $I_1(c)$  est une fonction bornée.

De la même manière, on peut étudier les singularités de  $\frac{I_2}{I_3}$  et on montre qu'elles sont de la même nature que celle de  $I_1$ . On remarque que le spectre discret intervient puisque  $I_3$  n'est rien d'autre que la fonction  $\chi(c)$ . Ainsi les zéros de  $\chi$  sont des pôles de  $\tilde{v}$ . On s'aperçoit donc qu'en plus de la contribution donnée par le spectre discret, il faut tenir compte des autres singularités de  $\tilde{v}$  qui forment le spectre continu. Ces valeurs sont données par:

$$-\frac{a}{bk} < c < h - \frac{a}{bk}, \quad 0 < c < h, \quad \frac{a}{bk} < c < h + \frac{a}{bk}.$$

On a donc montré que la perturbation est bornée et donc que l'écoulement est stable.



## 7. DISCUSSION ET CONCLUSIONS

La stabilité linéaire de l'écoulement plan de Couette dans les liquides à bulles a été établie dans l'approximation des ondes longues. En effet, nous avons montré que si l'on perturbe faiblement le milieu, alors les perturbations sont bornées.

Nous pouvions nous attendre à un tel résultat. L'écoulement de Couette est stable pour les fluides parfaits incompressibles. Lorsque nous ajoutons des bulles de gaz dans ces fluides, nous ajoutons de la compressibilité, ce qui a un effet stabilisant. Les bulles peuvent osciller. Aussi, l'énergie d'une éventuelle perturbation peut être en partie absorbée et transformée par les bulles en énergie de pulsation.

Des différences sont tout de même à noter entre les fluides monophasiques et diphasiques. Pour démontrer la stabilité de l'écoulement de Couette, nous avons dans un premier temps appliqué la méthode des modes normaux afin de connaître le comportement des perturbations portées par le spectre discret. Dans le cas des fluides parfaits incompressibles et non visqueux, Case avait montré que le spectre discret était vide. Pour les liquides à bulles, nous avons prouvé que les valeurs du spectre discret étaient solutions de l'équation:

$$\chi(c) = \frac{H}{c^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{c^2 - \left(\frac{H}{2} - d^2\right)^2}{c^2 - \left(\frac{H}{2} + d^2\right)^2} \right) = 0$$

L'étude de la fonction  $\chi$  a permis d'établir qu'il existait deux racines réelles à cette équation. Cela prouve la stabilité des modes normaux puisque pour une vitesse de phase réelle, les perturbations sont bornées.

L'étude de l'écoulement de Couette nous a permis de répondre à une question plus générale concernant la stabilité des écoulements cisailés: le spectre discret est-il complet? Autrement dit, est-ce que toutes les perturbations se décomposent uniquement sur les modes discrets? Est-ce que la méthode des modes normaux est suffisante pour conclure quant à la stabilité comme c'est le cas pour les écoulements visqueux, ou existe-t-il un spectre continu à considérer comme c'est le cas pour les écoulements monophasiques non visqueux?

La résolution du problème aux valeurs initiales nous a permis de répondre. Pour l'écoulement de

Couette dans les liquides à bulles, les perturbations se développent à la fois sur le spectre discret et sur le spectre continu que l'on a déterminé:

$$-\frac{a}{bk} < c < h - \frac{a}{bk}, \quad 0 < c < h, \quad \frac{a}{bk} < c < h + \frac{a}{bk}.$$

Nous avons montré que les perturbations portées par le spectre continu avaient un comportement asymptotique en  $\frac{1}{t}$  si les conditions initiales étaient régulières, i.e. étant dérivables deux fois. Cela nous a permis de conclure que l'écoulement était stable.

Nous en déduisons un résultat important. Pour l'étude des écoulements cisailés dans les liquides à bulles (pour notre modèle de liquide à bulles), il faut à la fois considérer le spectre discret et le spectre continu. La méthode des modes normaux seule ne permet donc pas de conclure. Dans le cas général, il faut donc étudier le comportement du spectre continu.

Résoudre le problème aux valeurs initiales dans le cas d'un profil de vitesse  $u_0$  quelconque est un prolongement possible du travail présenté ici. Nous avons déjà une expression de la transformée de Laplace de la composante normale de la vitesse (6.3)-(6.4). Néanmoins, l'étude des singularités de cette fonction, permettant de connaître le comportement asymptotique de la composante normale de la vitesse, s'annonce difficile.

Deuxième partie

PHYSIQUE STATISTIQUE POUR LES LIQUIDES À BULLES



## 1. INTRODUCTION

L'histoire de la physique statistique commence avec les travaux de Boltzmann, Maxwell et plus récemment Onsager [10]. A cette époque, l' "hypothèse atomique" annonçait le retrait de la physique macroscopique au profit de la physique microscopique. La physique statistique fut développée dans le but de relier le microscopique au macroscopique. Lorsque l'on comprit que l'atome n'était pas simplement un outil mais une réalité physique, il fallut s'intéresser aux propriétés individuelles et collectives de ces atomes. Seule la statistique pouvait répondre à l'immensité du nombre d'Avogadro ( $N_A = 6.02 * 10^{23}$  est le nombre d'atome de carbone dans 12g).

La naissance et l'essor de la mécanique quantique devaient beaucoup à la physique statistique. Avec la mécanique quantique, les notions de position et de trajectoire disparurent au profit d'une approche probabiliste. De plus, la structure hamiltonienne du problème s'adapte particulièrement bien aux techniques statistiques.

A partir du début du 20ème siècle, les applications de la physique statistique commencèrent à toucher tous les domaines de la physique. Parmi les grands succès, nous pouvons citer sans hésiter la théorie cinétique des gaz, mais également le ferromagnétisme et l'étude du corps pur (chaleur spécifique du solide) et des transitions de phase. On peut retrouver ces résultats dans le livre de Diu *et al* qui fait référence [3].

En mécanique des fluides, le problème de  $N$  vortex ponctuels en deux dimensions fut traité par Lundgren et Pointin [15] (voir également P.K. Newton [19]) à l'aide de la distribution de probabilité microcanonique. Ils calculèrent ainsi une fonction de distribution à une particule et des quantités thermodynamiques telle l'entropie.

Notre but dans cette partie est d'utiliser les méthodes de la physique statistique pour étudier le problème de  $N$  bulles de gaz dans un liquide parfait infini, incompressible et non visqueux. En particulier, on s'intéresse aux interactions hydrodynamiques entre les bulles et à la stabilité de leurs configurations.

Smereka est l'un des premiers à avoir étudié le problème de  $N$  bulles de gaz dans un fluide. Dans un article de 1993 [27], il propose d'assimiler les bulles de gaz à des sphères rigides sans masse dans l'écoulement irrotationnel d'un liquide infini, incompressible et non visqueux. En prenant comme

paramètres les positions et les vitesses des bulles, il détermine l'énergie cinétique du fluide ainsi que les équations du mouvement. Il considère la stabilité de certaines configurations de bulles par la méthode de Lyapunov. Il en résulte que la stabilité augmente lorsque les bulles se concentrent dans des plans perpendiculaires à la gravité. Les simulations numériques qu'il mène confirment ce phénomène.

A la même époque, Sangani et Didwania publient des travaux numériques concernant les écoulements de liquide à bulles qui corroborent les résultats de Smereka [25]. Ils montrent que la configuration aléatoire des bulles est instable et que les bulles tendent à se rapprocher dans des plans perpendiculaires au mouvement moyen des bulles.

D'un point de vue physique, ces résultats sont discutables, surtout concernant la rigidité des bulles. Les expériences de Kok sur le comportement des bulles d'air dans l'eau nous apportent un éclairage à ce propos [13]. En particulier, deux phénomènes peuvent se produire lorsque deux bulles se rapprochent l'une de l'autre du fait de leur interaction hydrodynamique mutuelle. Si l'eau est pure, en général, il y a coalescence. En revanche, si l'on ajoute une quantité de surfactant (agent tensio-actif), alors les bulles se repoussent instantanément. Le surfactant diminue la tension superficielle à l'interface air-liquide et donc la rigidité des bulles. La répulsion résulte certainement de la nature chimique des agents tensio-actifs. L'utilisation du modèle des sphères rigides est donc un premier pas théorique important mais néanmoins limité en applications expérimentales.

En 1996, Russo et Smereka reprennent le problème et présentent une théorie cinétique pour les liquides à bulles contenant une faible concentration gazeuse [24]. A partir de l'équation de Liouville, ils dérivent une fonction de distribution à une particule (ici les particules sont les bulles). Ils montrent que le phénomène de regroupement des bulles dans des plans est inhibé si la variance des vitesses initiales est trop grande.

L'idée d'approcher le liquide à bulles par la mécanique statistique fut soufflée par Smereka, mais les principaux travaux sur ce sujet sont dus à Yurkovetsky et Brady [31]. Ils ont étudié la dynamique des bulles, toujours assimilées à des sphères rigides sans masse, dans un écoulement irrotationnel, incompressible et non visqueux. Pour cela, ils considèrent les bulles dans le fluide comme un gaz de "particules" en interaction hydrodynamique. Les équations du mouvement des bulles sont calculées en introduisant une matrice masse-virtuelle (virtuelle puisque l'on considère des particules sans masse!). Cette matrice, qui dépend uniquement des positions des bulles, permet également d'écrire l'énergie du fluide sous forme quadratique des vitesses des bulles. L'énergie s'avère être l'hamiltonien du système et sert ainsi à construire une fonction de partition dans l'ensemble canonique. Ils en déduisent une "température effective" du liquide à bulles, analogue à la température cinétique des gaz, qui traduit l'agitation relative des bulles par rapport au mouvement collectif. De plus, ils mettent en évidence deux "potentiels d'interaction" entre les bulles. Le

premier, qui domine aux hautes températures, est répulsif et à courte portée  $\left(\frac{1}{r^6}\right)$ . Le second est indépendant de la température et a pour action de regrouper les bulles dans des plans perpendiculaires à la vitesse moyenne des bulles. Des simulations numériques leur ont permis de confirmer l'existence des potentiels.

Récemment, Teshukov et Gavrilyuk ont proposé une théorie cinétique pour le problème de  $N$  bulles de gaz compressibles en écoulement irrotationnel, incompressible et non visqueux. Dans leur article [29], ils déterminent les équations du mouvement des bulles ainsi que l'énergie cinétique du liquide en fonction des paramètres qui sont les positions et les vitesses de translations des bulles mais également leurs rayons et leurs vitesses de pulsation. Ils obtiennent également une équation du type Vlasov pour la fonction de distribution à une particule.

En revanche, on ne trouve pas de résultat concernant la stabilité des configurations des bulles. On peut légitimement se demander quel est l'effet de l'ajout de compressibilité (Teshukov et Gavrilyuk ont considéré des bulles de gaz compressibles) sur le phénomène de regroupement observé pour les sphères rigides. Les potentiels d'interaction mis en évidence par Yurkovetsky et Brady opèrent-ils toujours? Ou alors comment se transforment-ils?

Pour répondre à ces questions, nous allons appliquer les méthodes de la physique statistique au problème des  $N$  bulles de gaz compressibles dans un écoulement irrotationnel, incompressible et non visqueux. Nous traiterons les bulles comme un gaz de particules pour déterminer les potentiels d'interaction hydrodynamique.

Notre démarche est la suivante. Nous rappelons les équations du mouvement pour les sphères rigides obtenues par Smereka (III.2). Dans le chapitre 3, nous présentons l'approche statistique de Yurkovetsky et Brady pour comprendre, notamment, comment construire la fonction de partition et les potentiels effectifs. Ensuite, les équations du mouvement pour des bulles compressibles obtenues par Teshukov et Gavrilyuk sont démontrées (III.4). Nous réécrivons alors ces équations sous forme lagrangienne et hamiltonienne en définissant une matrice masse-virtuelle généralisée qui dépend des positions et des rayons des bulles (III.5). Nous nous intéressons ensuite à deux cas limites. Tout d'abord, nous nous plaçons dans la limite des sphères rigides. Nous obtenons alors deux potentiels d'interaction hydrodynamique que nous comparons à ceux trouvés par Yurkovetsky et Brady. Le deuxième cas que nous abordons est la limite des sphères oscillantes immobiles. Ce cas est original et va nous permettre d'évaluer l'effet de la compressibilité sur la nature des interactions hydrodynamiques.



## 2. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT POUR N SPHÈRES RIGIDES DANS UN LIQUIDE PARFAIT

Dans son article de 1993, Smereka propose une étude analytique du problème l'écoulement d'un fluide parfait contenant N sphères rigides sans masse. Il calcule l'énergie cinétique du liquide en prenant comme paramètres du problème les positions et les vitesses des bulles. Il dérive les équations du mouvement des bulles en écrivant les équations d'Euler-Lagrange. Il développe également l'idée d'associer aux bulles une quantité de mouvement, alors qu'on les a supposées sans masse. Pour cela, il fait correspondre à une bulle l'impulsion du fluide déplacé par son mouvement. Il étudie également la stabilité de certaines configurations de bulles et montre notamment que les bulles tendent à se rapprocher les unes des autres dans des plans perpendiculaires à la gravité. Il effectue des simulations numériques pour confirmer ses prédictions.

Nous relatons, ici, son travail. Cela nous amène à introduire des notations et un vocabulaire qui sera utile dans la suite de notre étude.

### 2.1 Position du problème

On considère N sphères rigides sans masse dans un liquide de densité  $\rho_l$  occupant un domaine infini. Le liquide est supposé parfait, incompressible et non visqueux. Les positions et les vitesses des sphères sont notées  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{v}_i$  pour  $i$  allant de 1 à N. L'écoulement entre les sphères est irrotationnel. Le champ de vitesse du liquide dérive donc d'un potentiel  $\varphi(t, \mathbf{r})$ . Ce potentiel satisfait l'équation de Laplace:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega = R^3 \setminus \bigcup_i B_i,$$

où  $B_i$  est le volume occupé par la  $i$ -ième sphère.

Le liquide est supposé au repos à l'infini. A la surface des bulles, il y a non-pénétration du liquide dans la sphère. Les conditions limites s'écrivent alors:

$$\nabla\varphi(t, \mathbf{r}) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty,$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} \right|_{\Gamma_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i.$$

$\Gamma_i$  est la surface de la  $i$ -ième sphère et  $\mathbf{n}_i$  le vecteur unitaire normal à cette surface et dirigé vers le fluide (FIG. 2.1). Le problème étant linéaire, on décompose le potentiel en introduisant N fonctions

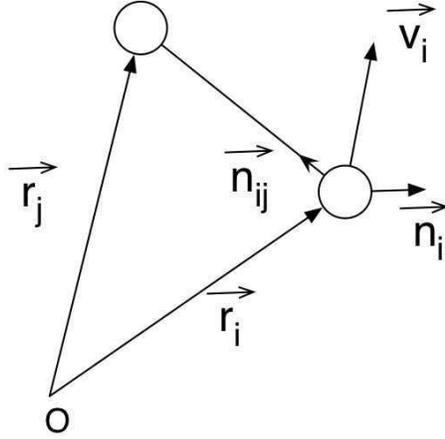


FIG. 2.1 – Position du problème.

vectérielles harmoniques  $\psi_i$

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \psi_i$$

qui vérifient les conditions

$$\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \right|_{\Gamma_k} = \delta_{ik} \mathbf{n}_i$$

et dont les gradients s'annulent à l'infini.

## 2.2 Énergie cinétique

Pour calculer l'énergie cinétique du liquide, partons simplement de la définition

$$T = \frac{\rho_l}{2} \iiint_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega = \frac{\rho_l}{2} \iiint_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 d\Omega.$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky et les conditions de bord à la surface des sphères et à l'infini, on a:

$$T = -\frac{\rho_l}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{\Gamma_i} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = -\frac{\rho_l}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{\Gamma_i} \varphi (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) d\Gamma.$$

On remplace maintenant le potentiel par sa décomposition:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_j \cdot A_{ji} \mathbf{v}_i).$$

L'énergie cinétique est inchangée si l'on intervertit deux vitesses  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_j$ . La matrice  $A$  est donc symétrique  $A_{ij} = A_{ji}$ . Elle est définie par

$$A_{ji} = -\rho_l \iint_{\Gamma_i} \psi_j \otimes \mathbf{n}_i d\Gamma$$

et dépend uniquement des positions des bulles.

On remarque que l'énergie cinétique est une fonction quadratique des vitesses des bulles.

### 2.3 Équations du mouvement

Maintenant que l'on a exprimé l'énergie cinétique, on peut déterminer les équations du mouvement sous la forme lagrangienne. Les coordonnées généralisées sont les positions  $\mathbf{r}_i$  et les vitesses  $\mathbf{v}_i$  des bulles. Le lagrangien s'écrit alors

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_j \cdot A_{ji} \mathbf{v}_i), \quad (2.1)$$

avec  $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$  et  $A_{ij} = A_{ij}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Les équations d'Euler-Lagrange sont alors données pour  $k = 1, \dots, N$  par:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0.$$

Si on exprime le résultat en fonction des matrices  $A_{ij}$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^N A_{ki} \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{v}_i^T \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial A_{kj}}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \mathbf{v}_j. \quad (2.2)$$

### 2.4 Quantités conservées

L'expression du lagrangien (2.1) montre qu'il ne dépend pas explicitement du temps. On en conclut que l'énergie cinétique est constante. Ce résultat est facile à interpréter puisqu'aucun phénomène dissipatif n'a été considéré.

Remarquons qu'il y a invariance du problème si toutes les sphères sont translatées d'un vecteur quelconque  $\mathbf{d}$ . Autrement dit:

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = L(\mathbf{r}_1 + \mathbf{d}, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{d}). \quad (2.3)$$

Si l'on effectue un développement de Taylor au membre droit de l'équation (2.3), alors on montre que

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0. \quad (2.4)$$

Pour comprendre le sens de l'équation (2.4), il faut revenir aux équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = 0.$$

La quantité suivante est donc conservée:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ki} \mathbf{v}_i = \text{constante}.$$

On peut vérifier que cette quantité est, en fait, la quantité de mouvement totale du liquide (cf Smereka [27]):

$$\mathbf{P}_t = \iiint_{\Omega} \rho_l \mathbf{u} \, d\Omega = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N A_{ki} \mathbf{v}_i = \text{constante}.$$

Le moment cinétique total du liquide est également conservé. On peut supposer qu'il est nul si l'on prend des conditions initiales convenables.

## 2.5 Analyse numérique

Des simulations numériques ont été menées par Smereka [27], mais aussi par Sangani et Didwania [25], en se basant sur la modélisation que l'on vient de présenter. Elles montrent que, partant d'une configuration aléatoire des sphères, on tend vers une configuration ordonnée où les bulles forment des agrégats dans des plans perpendiculaires à la direction du mouvement collectif des sphères.

Les figures 2.2 et 2.3 extraites de l'article de Smereka [27] illustrent les résultats des expériences numériques. Smereka montre néanmoins que ce phénomène est conditionné par la distribution des vitesses initiales des sphères. Si la variance des vitesses initiales est trop faible, alors le phénomène d'attraction des sphères est inhibé.

Si la gravité est prise en compte dans la modélisation, alors on se rend compte que les agrégats se forment dans des plans perpendiculaires à la direction du champ de pesanteur. Ceci confirme le résultat énoncé plus tôt car la vitesse moyenne des bulles est évidemment colinéaire à la gravité.

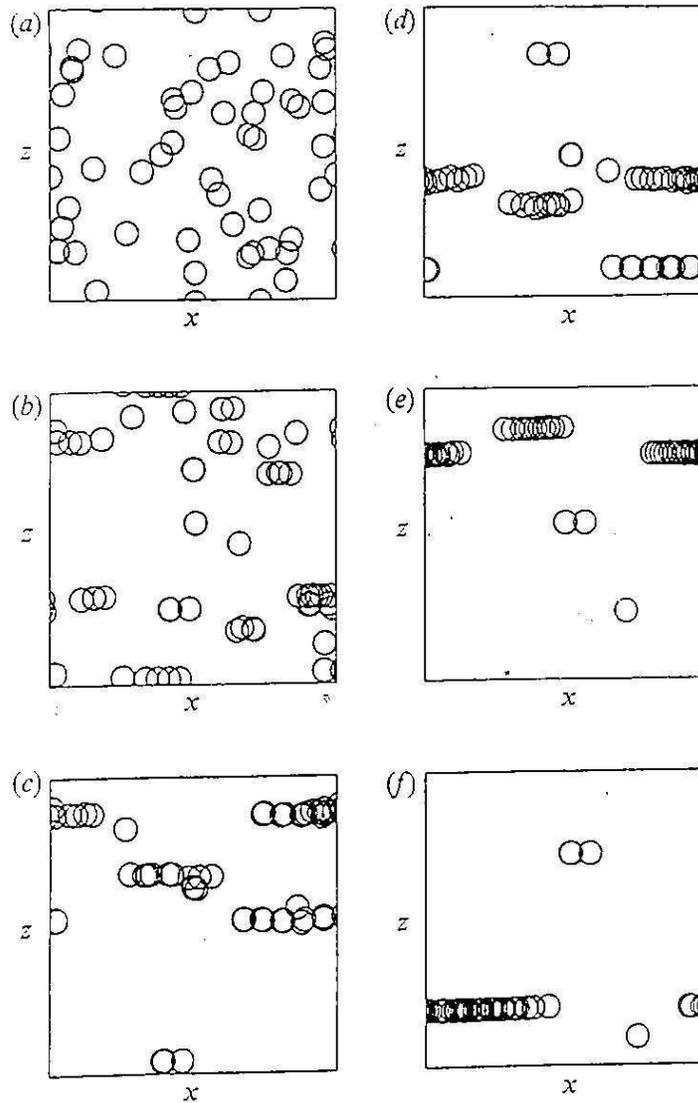
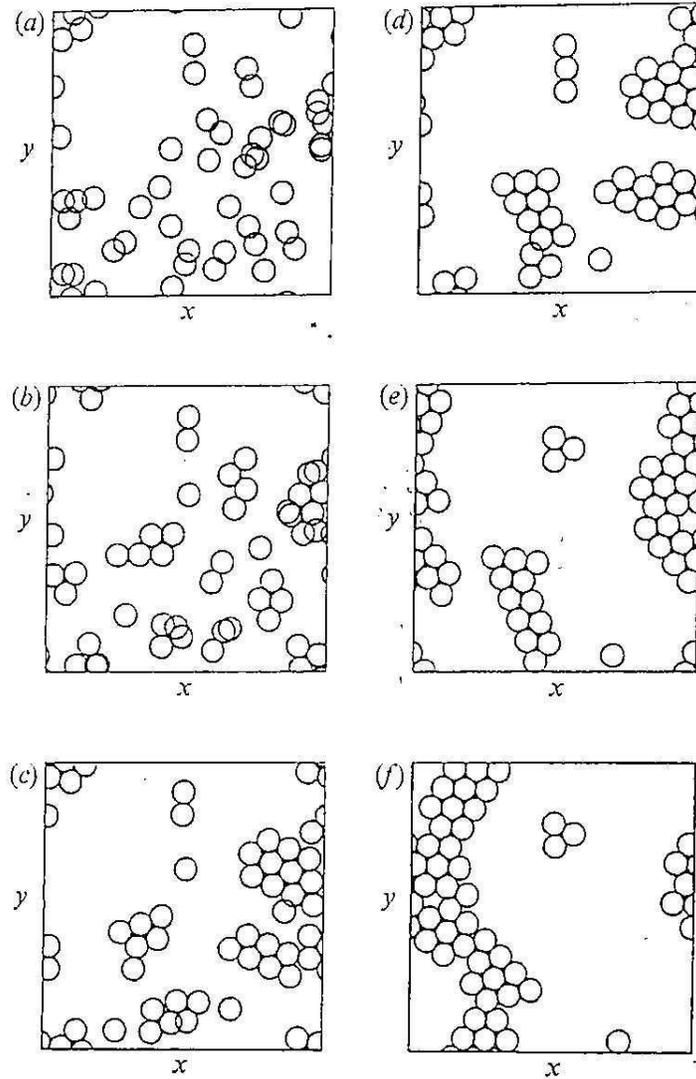


FIG. 2.2 – Evolution de la configuration des bulles en fonction du temps. Cette figure présente la projection dans le plan  $(x,z)$ . Les images (a), (b), (c), (d), (e), (f) correspondent aux instants  $t= 0, 50, 100, 150, 800, 1600$ .

FIG. 2.3 – Figure identique en projection dans le plan  $(x, y)$

### 3. PREMIÈRE APPROCHE STATISTIQUE

La première approche statistique du problème de  $N$  sphères rigides en écoulement incompressible et non visqueux a été réalisée par Yurkovetsky et Brady en 1996 [31]. Pour cela, ils ont traité les bulles comme un gaz de particules en interaction. En effet, le mouvement d'une bulle provoque une réaction du liquide qui a une incidence sur le mouvement d'une autre bulle: on peut donc dire que les bulles sont en interaction. De la même manière qu'on peut le faire pour un gaz de particules, ils ont alors construit une fonction de partition associée aux "gaz de bulles" dans l'ensemble canonique. Cette construction a été grandement facilitée par l'introduction d'un nouvel outil: la matrice masse-virtuelle. La matrice permet d'écrire très simplement l'énergie sous une forme quadratique des vitesses ainsi que les équations du mouvement sous forme hamiltonienne. Ils ont prouvé l'existence de deux potentiels d'interaction hydrodynamique. Là encore, la matrice masse-virtuelle a permis d'exprimer simplement les potentiels.

La méthode que nous appliquerons plus tard pour étudier le même problème pour des sphères compressibles est semblable à celle utilisée par Yurkovetsky et Brady. Voilà pourquoi nous présentons ici leurs principaux résultats.

#### 3.1 Matrice masse-virtuelle

Dans leur article, Yurkovetsky et Brady introduisent un nouveau formalisme pour décrire le problème. Ils définissent un vecteur position généralisé et une matrice masse virtuelle  $M$  (matrice carrée de taille  $3N$ ) de la manière suivante:

$$\mathcal{R} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

$$M_{ij} = A_{ij}.$$

Le vecteur vitesse est alors

$$\mathcal{V} = \dot{\mathcal{R}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N).$$

L'énergie cinétique s'écrit en fonction de ces nouvelles variables:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{V} \cdot M \mathcal{V}.$$

On voit que la matrice  $M$  joue le rôle de masse du système alors que l'on considère un système de particules sans masse d'où le nom de matrice masse-virtuelle. De la même manière que les

particules n'ont pas de masse, elles n'ont pas a priori de quantité de mouvement mais on peut leur associer la quantité de mouvement du liquide qu'elles déplacent. Pour la  $i$ -ième sphère, on définit:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} \mathbf{v}_j.$$

On remarque que la quantité de mouvement totale du liquide est égale à la somme des quantités de mouvements virtuelles associées aux sphères:

$$\mathbf{P}_t = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

### 3.2 Forme hamiltonienne des équations du mouvement

Les équations du mouvement peuvent être obtenues en écrivant les équations d'Hamilton. L'hamiltonien du système est l'énergie cinétique, et les coordonnées généralisées sont:

$$\mathcal{R} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

$$\mathcal{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N).$$

On vérifie que

$$\mathcal{P} = M\mathcal{V}.$$

Cette relation est en accord avec la relation intuitive que l'on a entre la quantité de mouvement et la vitesse via la masse.

Les équations du mouvement données précédemment en terme des matrices  $A_{ij}$  (2.2) se déduisent aussi des équations d'Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}}, \\ \dot{\mathcal{P}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathcal{R}}, \end{aligned}$$

avec

$$H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot M^{-1} \mathcal{P}.$$

### 3.3 Fonction de partition de l'ensemble canonique

Nous avons vu que les constantes du mouvement sont l'énergie (donc l'hamiltonien), la quantité de mouvement totale  $\mathbf{P}_t$  ainsi que le moment cinétique total. Nous supposons que ce dernier est nul. Définissons maintenant la fonction de partition canonique associée à notre système:

$$Q = \int e^{-\beta H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) - \gamma \cdot \mathbf{P}_t} d\mathcal{R} d\mathcal{P}.$$

Dans leur article [31], Yurkovetsky et Brady donnent une estimation et une interprétation des multiplicateurs de Lagrange  $\beta$  et  $\gamma$ .  $\beta$  est l'inverse de la "température" du liquide à bulles.

Cette température mesure l'agitation relative des sphères par rapport au mouvement d'ensemble. On peut la comparer à la température cinétique du gaz parfait (nous posons la constante de Boltzmann  $k_B$  égale à 1) :

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

L'autre multiplicateur  $\gamma$  est à un coefficient près la vitesse moyenne des sphères:

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta \mathbf{u}_m, \\ \mathbf{u}_m &= \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \right\rangle,\end{aligned}$$

les crochets indiquent une moyenne sur l'ensemble canonique. Rappelons-en la définition:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Q} \int f(\mathcal{R}, \mathcal{P}) e^{-\beta H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) - \gamma \cdot \mathbf{P}_t} d\mathcal{R} d\mathcal{P}.$$

### 3.4 Gaz réel de Van der Waals

Considérons un gaz composé de  $N$  particules ponctuelles de masse  $m$  en interaction. On suppose que le système des  $N$  particules est conservatif. L'énergie du système se décompose ainsi:

$$E = E_c + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

où  $E_c = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m}$  est l'énergie cinétique et  $U$  est le potentiel d'interaction entre les particules.

La fonction de partition, dans ce cas, s'écrit:

$$Q(\beta) = \int e^{-\beta E} d\mathcal{R} d\mathcal{P}$$

L'intégration sur l'espace des impulsions donne alors:

$$Q(\beta) = \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \int e^{-\beta U} d\mathcal{R} d\mathcal{P}$$

On s'aperçoit donc que la fonction de partition est le produit de deux termes. Le premier est la fonction de partition du gaz idéal (sans interaction). Le second contient justement les informations sur les interaction.

### 3.5 Potentiels effectifs

En effectuant l'intégration de la fonction de partition sur l'espace des impulsions  $\mathcal{P}$ , on obtient l'expression suivante ,

$$Q = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \int (\det M)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\Gamma \cdot M \Gamma}{2\beta}} d\mathcal{R},$$

que l'on peut réécrire

$$Q = \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \int (\det M_*)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\Gamma \cdot M\Gamma}{2\beta}} d\mathcal{R},$$

où  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_l$  est la masse d'une sphère remplie de liquide,  $\Gamma = (\gamma, \dots, \gamma)$  est un vecteur de taille  $3N$ , et la matrice  $M_* = \frac{1}{m}M$ .

On reconnaît le facteur

$$Q_{id} = \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

qui n'est autre que la fonction de partition classique d'un gaz idéal (d'où la notation  $Q_{id}$ ) de particules sans interaction. L'autre terme contient donc les informations sur les interactions hydrodynamiques et peut se réécrire (SR = sphères rigides):

$$Q_{hyd} = \int e^{-\beta(U_1^{SR} + U_2^{SR})} d\mathcal{R},$$

avec

$$\begin{aligned} \beta U_1^{SR} &= -\frac{1}{2} \ln(\det M_*), \\ U_2^{SR} &= -\frac{\Gamma \cdot M\Gamma}{2\beta^2} = -\sum_{i,j} \frac{\mathbf{u}_m \cdot M_{ij} \mathbf{u}_m}{2}. \end{aligned}$$

Les quantités  $U_1^{SR}$  et  $U_2^{SR}$  s'interprètent comme des potentiels effectifs d'interactions entre les bulles. Lorsque la configuration des bulles minimise  $U_1^{SR} + U_2^{SR}$  alors elle maximise la fonction de partition  $Q$  et par conséquent l'entropie. Autrement dit, cette configuration est statistiquement la plus probable donc la plus stable.

Le potentiel  $U_1^{SR}$  est un potentiel répulsif à courte portée qui domine aux hautes températures. Son comportement a été estimé [31]:

$$U_1^{SR} = \frac{9}{4\beta} \frac{1}{r^6}$$

Le potentiel  $U_2^{SR}$  est un potentiel attractif, indépendant de la température, responsable de la formation d'agrégats dans les plans perpendiculaires au mouvement collectif. Mais aucune expression analytique de ce potentiel n'existe.

On s'attend donc, aux hautes températures, à un mouvement chaotique dû à la prédominance du potentiel  $U_1^{SR}$ . Aux basses températures, le potentiel  $U_2^{SR}$  domine et donc la formation de paquets de bulles est prévisible.

### 3.6 Simulations numériques

Les simulations menées par Yurkovetsky et Brady ont confirmé leurs prédictions. Elles ont notamment permis de mettre en évidence l'existence des deux potentiels. De plus, elles montrent

---

que la température effective du liquide à bulles est un paramètre pertinent pour savoir si la formation d'agrégats de sphères aura lieu.

La figure 3.1 extraite de l'article [31] illustre les résultats des expériences numériques.

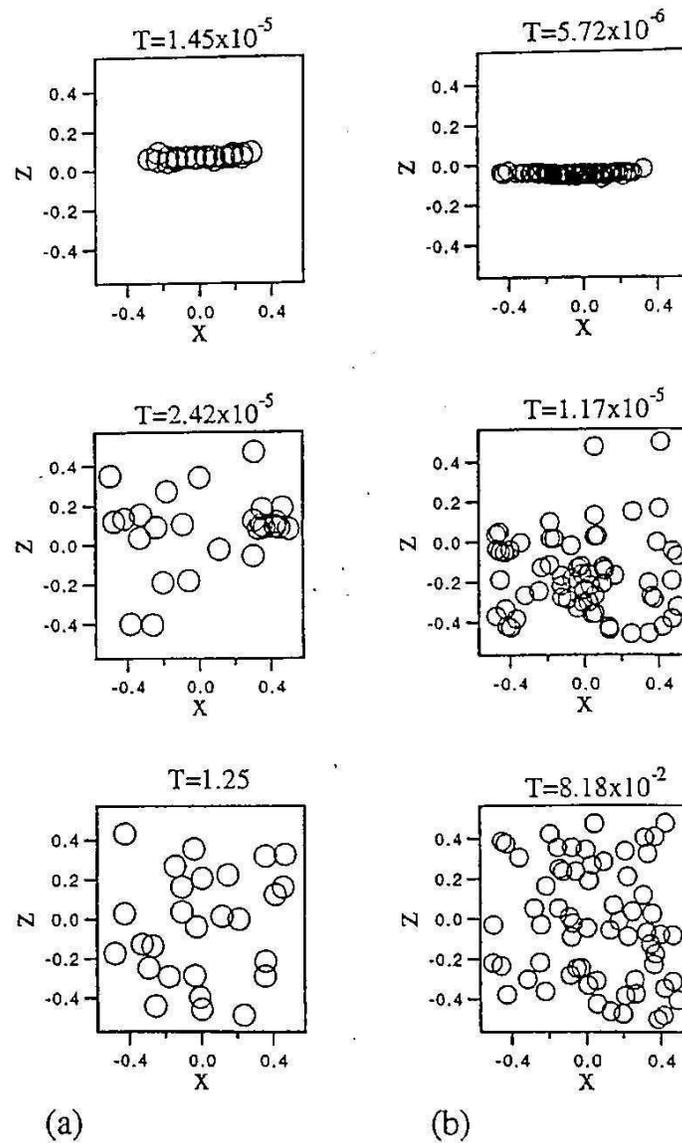


FIG. 3.1 – Evolution des configurations d'équilibre de 27 (a) et 64 (b) bulles en fonction de la température en projection dans le plan  $(x,z)$ .

## 4. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT POUR N BULLES DANS UN LIQUIDE PARFAIT

Les écoulements contenant des bulles compressibles, donc des bulles dont le rayon varie avec le temps ont été l'objet de beaucoup d'études expérimentales. Quelques études théoriques ont également été menées mais souvent d'un point de vue macroscopique. Récemment [29], Teshukov et Gavriluyuk ont proposé une théorie cinétique pour les liquides à bulles. Ils ont étudié les mouvements de  $N$  bulles compressibles dans un écoulement potentiel. Ils ont calculé l'énergie cinétique du fluide dans l'approximation des bulles ponctuelles, i.e. lorsque le rayon des bulles est faible devant la distance moyenne entre les bulles. Ils en ont déduit les équations du mouvement des  $N$  bulles. Nous présentons ici le calcul de l'énergie cinétique. Les équations du mouvement seront précisées dans le chapitre suivant car nous les exprimerons en fonction de nouvelles variables généralisées.

### 4.1 Position du problème

On considère à présent  $N$  bulles de gaz parfait, donc compressibles, dans un liquide infini, incompressible, non visqueux. Les rayons des bulles deviennent donc des paramètres du problème (FIG. 4.1). On les note  $b_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $N$ . L'écoulement est supposé potentiel et donc le potentiel de vitesse vérifie l'équation de Laplace:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_i B_i. \quad (4.1)$$

Le liquide est supposé au repos à l'infini. La condition de non-pénétrabilité est satisfaite à la surface de la bulle. On a donc

$$\nabla\varphi(t, \mathbf{r}) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} \right|_{\Gamma_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i + s_i, \quad (4.3)$$

où l'on introduit la vitesse associée à la pulsation des bulles  $s_i = \dot{b}_i$ . Le système (4.1), (4.2), (4.3) a été résolu par Teshukov et Gavriluyuk dans l'approximation des bulles ponctuelles. Cette approximation consiste à considérer que la distance moyenne  $d$  entre les bulles est très grande devant le rayon moyen des bulles  $b$ , i.e.  $\beta = \frac{b}{d} \ll 1$ . Ils ont obtenu l'expression du potentiel avec une précision de l'ordre  $\beta^3$ . Comme le système (4.1), (4.2), (4.3) est linéaire, on peut décomposer

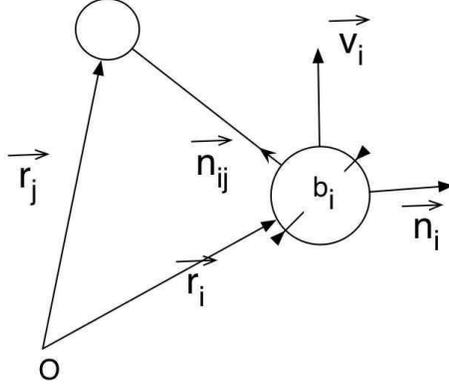


FIG. 4.1 – Position du problème.

le potentiel de la façon suivante:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_i + s_i \varphi_i),$$

où les fonctions harmoniques  $\boldsymbol{\psi}_i(t, \mathbf{r})$  et  $\varphi_i(t, \mathbf{r})$  vérifient les conditions

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial n} \right|_{\Gamma_k} = \delta_{ik} \mathbf{n}_i, \quad \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right|_{\Gamma_k} = \delta_{ik},$$

et leurs gradients s'annulent à l'infini.  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker.

## 4.2 Énergie cinétique

Le calcul de l'énergie cinétique se fait de manière analogue au cas des sphères rigides:

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega.$$

Si on utilise le théorème de Green-Ostrogradsky couplé aux conditions limites, on obtient:

$$T = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{\Gamma_i} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma$$

et

$$T = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{\Gamma_i} \varphi (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i + s_i) d\Gamma.$$

On peut alors transformer cette expression en une forme quadratique des vitesses de translations  $\mathbf{v}_i$  et de pulsations  $s_i$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_j \cdot A_{ji} \mathbf{v}_i + s_j \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{c}_{ij} s_i + s_j e_{ij} s_i).$$

Les matrices  $A_{ij}$ , les vecteurs  $\mathbf{d}_{ij}$  et  $\mathbf{c}_{ij}$  qui sont égaux par symétrie, et les scalaires  $e_{ij}$  dépendent des positions et des rayons des bulles. Leurs expressions sont données par:

$$A_{ji} = \rho \iint_{\Gamma_i} \psi_j \otimes \mathbf{n}_i d\Gamma,$$

$$\mathbf{d}_{ij} = \rho \iint_{\Gamma_i} \varphi_j \mathbf{n}_i d\Gamma,$$

$$\mathbf{c}_{ij} = \rho \iint_{\Gamma_i} \psi_j d\Gamma,$$

$$e_{ij} = \rho \iint_{\Gamma_i} \varphi_j d\Gamma.$$

### 4.3 Approximation des bulles ponctuelles

Teshukov et Gavrilyuk ont calculé les coefficients  $A_{ij}$ ,  $\mathbf{c}_{ij}$  et  $e_{ij}$  dans l'approximation des bulles ponctuelles à l'ordre 3 en  $\beta$ . Voici les expressions obtenues (pour la démonstration cf [29]):

$$A_{ii} = \rho \frac{\tau_i}{2} I_3, \text{ avec } \tau_i = \frac{4}{3} \pi b_i^3, \quad (4.4)$$

$$A_{ij} = \pi \rho \frac{b_j^3 b_i^3}{r_{ij}^3} (I - 3\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}), \quad i \neq j, \quad (4.5)$$

où  $I_3$  est la matrice unité dans  $R^3$ ,  $\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}}$  et  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ ,

$$\mathbf{c}_{ii} = 0, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{c}_{ij} = 2\pi \rho \frac{b_i^2 b_j^3}{r_{ij}^2} \mathbf{n}_{ij}, \quad i \neq j, \quad (4.7)$$

$$e_{ii} = 4\pi \rho b_i^3, \quad (4.8)$$

$$e_{ij} = 4\pi \rho \frac{b_i^2 b_j^2}{r_{ij}}, \quad i \neq j. \quad (4.9)$$

L'énergie cinétique vaut alors:

$$T = \frac{\rho}{2} \left( \sum_{i=1}^N b_i^3 \left( \frac{2}{3} \pi |\mathbf{v}_i|^2 + 4\pi s_i^2 \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \left( 4\pi b_i^2 b_j \frac{b_j}{r_{ij}} s_i s_j + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\pi b_i^3 \left( \frac{b_j}{r_{ij}} \right)^2 s_j (\mathbf{n}_{ji} \cdot \mathbf{v}_i) + 2\pi b_j^3 \left( \frac{b_i}{r_{ij}} \right)^2 s_i (\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{v}_j) + \pi b_i^3 \left( \frac{b_j}{r_{ij}} \right)^3 (\mathbf{v}_j \cdot B_{ij} \mathbf{v}_i) \right) \right),$$

avec  $\mathbf{n}_{ij}$  qui est le vecteur unitaire qui lie la bulle  $i$  à la bulle  $j$ , et  $B_{ij} = I - 3\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}$ .



## 5. FORMALISME LAGRANGIEN ET HAMILTONIEN

Lors de l'étude du mouvement des sphères rigides, nous nous sommes rendus compte de l'importance du rôle joué par la matrice masse-virtuelle. Nous avons rencontré beaucoup de difficulté pour étudier, d'un point de vue statistique, le problème pour des sphères compressibles. Les difficultés se sont atténuées lorsque nous avons défini une matrice masse-virtuelle généralisée pour ce cas plus complexe. Nous avons alors défini d'autres variables tels que le vecteur position généralisé, le vecteur vitesse généralisé ainsi que le vecteur impulsion généralisé. Ces nouvelles variables nous ont permis d'écrire de façon réduite les équations du mouvement sous la forme lagrangienne et sous la forme hamiltonienne. Même si l'on ne peut pas considérer ces définitions comme un résultat en soi, elles ont joué un rôle déterminant dans notre recherche.

### 5.1 Matrice masse-virtuelle

En s'inspirant librement de la méthode employée par Yurkovetsky et Brady, nous avons introduit un nouveau formalisme permettant ainsi une meilleure interprétation physique des équations. En premier lieu, on définit le vecteur position et le vecteur vitesse généralisés:

$$\mathcal{R} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, b_1, \dots, b_N),$$

$$\mathcal{V} = \dot{\mathcal{R}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, s_1, \dots, s_N).$$

Nous avons introduit ensuite une matrice masse généralisée:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} & \mathbf{c}_{11} & \dots & \mathbf{c}_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} & \mathbf{c}_{N1} & \dots & \mathbf{c}_{NN} \\ \mathbf{c}_{11}^T & \dots & \mathbf{c}_{N1}^T & e_{11} & \dots & e_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_{N1}^T & \dots & \mathbf{c}_{NN}^T & e_{N1} & \dots & e_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & E \end{bmatrix}.$$

On s'aperçoit que l'énergie cinétique s'écrit alors:

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{V} \cdot M \mathcal{V}.$$

## 5.2 Équations d'Euler-Lagrange

On note  $L$  le lagrangien du système que l'on définit:

$$L = T - U.$$

Dans notre problème, l'énergie potentielle se résume à l'énergie interne du gaz contenu dans les bulles. On formule l'hypothèse, vérifiée par ailleurs dans de nombreux cas, que l'énergie interne de chaque bulle dépend uniquement de son rayon, i.e.

$$U(b_1, \dots, b_N) = \sum_{i=1}^N \epsilon(b_i),$$

avec  $\epsilon$  qui est l'énergie interne du gaz parfait. Les équations du mouvement sont obtenues à partir des équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{R}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathcal{R}} = 0.$$

Rappelons l'expression du lagrangien en fonction de ses variables naturelles:

$$L = \frac{1}{2} \mathcal{V} \cdot M \mathcal{V} - U(\mathcal{R}).$$

Si on note  $\mathcal{R}_k$  et  $\mathcal{V}_k$  les  $k$ -ièmes composantes de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{V}$ , on a

$$\frac{\partial L}{\partial \mathcal{R}_k} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}_k} \left( \frac{1}{2} \mathcal{V}_i M_{ij}(\mathcal{R}_k) \mathcal{V}_j \right) - \frac{\partial U}{\partial \mathcal{R}_k},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}_k} = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_i M_{ik} + M_{kj} \mathcal{V}_j) = M_{kj} \mathcal{V}_j.$$

La matrice masse est symétrique et donc  $M_{ij} = M_{ji}$ . De plus, nous avons les égalités suivantes:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathcal{V}_k} \right) = \dot{M}_{kj} \mathcal{V}_j + M_{kj} \dot{\mathcal{V}}_j,$$

$$\dot{M}_{kj} = \frac{\partial M_{kj}}{\partial \mathcal{R}_q} \mathcal{V}_q.$$

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$M_{kj} \dot{\mathcal{V}}_j = \frac{1}{2} \mathcal{V}_i \frac{\partial M_{ij}}{\partial \mathcal{R}_k} \mathcal{V}_j - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \mathcal{R}_q} \mathcal{V}_q \mathcal{V}_j - \frac{\partial U}{\partial \mathcal{R}_k}.$$

On a une équation de la forme "masse\*accélération=force". Elle montre deux choses. Premièrement, la matrice  $M$  agit bien comme la masse du système. Deuxièmement, les mouvements des bulles sont couplés ce qui était, bien sûr, attendu. Cette formule généralise celle obtenue par Yurkovetsky et Brady dans le cas des sphères rigides [31]. L'analyse de ces équations est complexe surtout lorsque le nombre de bulles augmente. Une voie pour explorer le problème serait d'effectuer des simulations numériques basées sur cette équation. L'autre voie que nous avons choisie est d'utiliser la physique statistique.

### 5.3 Quantités conservées

Dans cette section, on se propose de déterminer les intégrales premières du mouvement. Pour cela, nous allons écrire les équations du mouvement sous forme hamiltonienne.

L'énergie totale joue le rôle d'hamiltonien du système:

$$H = T + U.$$

Introduisons le vecteur impulsion  $\mathcal{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, q_1, \dots, q_N)$  où

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_i},$$

$$q_i = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{s}_i}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\mathcal{P} = M\mathcal{V}$$

et donc l'hamiltonien en fonction de ses variables naturelles est:

$$H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot M^{-1}(\mathcal{R}) \mathcal{P} + U(\mathcal{R}).$$

Les équations d'hamilton peuvent être alors déduites:

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}}, \quad \dot{\mathcal{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathcal{R}}.$$

La première quantité conservée est l'hamiltonien lui-même puisqu'il ne dépend pas explicitement du temps  $H = \text{constante}$ . La deuxième est la quantité de mouvement totale. Pour le montrer, notons que le problème est invariant par translation:

$$H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, b_1, \dots, b_N, \mathcal{P}) = H(\mathbf{r}_1 + \mathbf{d}, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{d}, b_1, \dots, b_N, \mathcal{P})$$

pour tout vecteur  $\mathbf{d}$ . Effectuons maintenant un développement de Taylor du membre droit de l'équation:

$$H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, b_1, \dots, b_N, \mathcal{P}) = H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, b_1, \dots, b_N, \mathcal{P}) + \mathbf{d} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathcal{O}(d^2).$$

Ce développement étant vrai pour tout  $\mathbf{d}$ , on en déduit que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

En considérant les équations d'Hamilton, on achève la démonstration:

$$\mathbf{P}_t = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \text{constante}.$$

Comme Yurkovetsky et Brady l'ont fait dans le cas des sphères rigides, nous supposons que le moment cinétique total, qui est également une constante du mouvement, est nul.



## 6. CAS DES SPHÈRES RIGIDES

Le premier cas limite qui nous intéresse est celui des sphères rigides. Les rayons des sphères sont constants. Nous allons d'abord réécrire le problème en tenant compte de cette contrainte. Nous construirons alors une fonction de partition et en déduirons le ou les potentiels décrivant les interactions entre les bulles.

Nous avons dérivé deux potentiels, l'un étant répulsif et l'autre attractif. Nous avons déterminé le comportement du potentiel attractif  $\frac{1}{r^6}$  ce qui est en accord avec les résultats de Yurkovetsky *et al* [31]. Et surtout, nous avons calculé une expression analytique du potentiel attractif responsable de la formation d'agrégats dans un plan perpendiculaire à la direction du mouvement collectif. Ce résultat a pu être obtenu en utilisant les expressions des coefficients de la matrice masse-virtuelle déterminées par Teshukov *et al* [29] dans l'approximation des sphères ponctuelles. Ce résultat est très satisfaisant car il permet d'interpréter simplement les résultats des simulations numériques de Smereka, Yurkovetsky et Brady.

### 6.1 Formalisme réduit et fonction de partition

Dans ce chapitre, on considère que les sphères sont rigides. Leurs rayons sont constants et ne sont donc plus des paramètres du problème. Les vitesses de pulsations sont nulles ( $s_i = 0$ ). Les vecteurs position, vitesse et impulsion réduits sont alors  $\mathcal{R}_R = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ,  $\mathcal{V}_R = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  et  $\mathcal{P}_R = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ . L'hamiltonien s'écrit alors:

$$H(\mathcal{R}_R, \mathcal{P}_R) = \frac{1}{2} \mathcal{V}_R \cdot A \mathcal{V}_R + U(b_1, \dots, b_N).$$

Comme les rayons des bulles sont constants, alors l'énergie interne l'est aussi. Elle n'a donc aucun sens physique et ne sera donc pas considérée par la suite.

Les constantes du mouvement sont l'hamiltonien  $H$  (i.e. l'énergie) et la quantité de mouvement totale  $\mathbf{P}_t$ . On définit donc la fonction de partition de l'ensemble canonique en introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\beta$  et  $\gamma$  (R= Rigide):

$$Q(\beta, \gamma, b_1, \dots, b_N) = \int e^{-\beta H(\mathcal{R}_R, \mathcal{P}_R) - \gamma \cdot \mathbf{P}_t(\mathcal{R}_R, \mathcal{P}_R)} d\mathcal{R}_R d\mathcal{P}_R.$$

Pour la suite, on supposera les rayons égaux  $b_1 = b_2 = \dots = b_N = b_C$ .

## 6.2 Potentiels effectifs

Pour obtenir les potentiels effectifs d'interactions hydrodynamiques entre les sphères, nous intégrons la fonction de partition sur l'espace des impulsions  $\mathcal{P}_R$ . La principale difficulté vient de l'hamiltonien qui est connu en fonction des vitesses et non en fonction des impulsions. Il faudrait donc inverser la relation

$$\mathcal{P}_R = A\mathcal{V}_R$$

mais le calcul de  $A^{-1}$  est loin d'être aisé. Pour contourner ce problème, nous avons eu l'idée d'effectuer un changement de variable dans l'intégrale:

$$\mathcal{P}_R \rightarrow \mathcal{V}_R.$$

Cela donne:

$$Q(\beta, \gamma, b_1, \dots, b_N) = \int e^{-\beta H(\mathcal{R}_R, \mathcal{V}_R) - \gamma \cdot \mathbf{P}_t(\mathcal{R}_R, \mathcal{V}_R)} \det A d\mathcal{V}_R d\mathcal{R}_R.$$

Pour le premier terme dans l'exponentielle, on a

$$H(\mathcal{R}_R, \mathcal{V}_R) = \frac{1}{2} \mathcal{V}_R \cdot A \mathcal{V}_R.$$

Pour exprimer le second terme en fonction des vitesses, on introduit le vecteur de taille  $3N$   $\Gamma = (\gamma, \dots, \gamma)$ :

$$\gamma \cdot \mathbf{P}_t = \gamma \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N \gamma \cdot \mathbf{p}_i = \Gamma \cdot \mathcal{P}_R = \Gamma \cdot A \mathcal{V}_R.$$

L'intégration sur l'espace des vitesses  $\mathcal{V}_R$  donne:

$$Q(\beta, \gamma, b_1, \dots, b_N) = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} \int \sqrt{\det A} e^{\frac{\Gamma \cdot A \Gamma}{2\beta}} d\mathcal{R}_R.$$

Posons  $m = \frac{4}{3}\pi b_C^3 \rho_l$ , la masse d'une sphère remplie de liquide,  $V$  le volume occupé par le liquide à bulles et  $A_* = \frac{1}{m} A$ . La fonction de partition devient alors:

$$Q = \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N \cdot \frac{1}{V^N} \int \sqrt{\det A_*} e^{\frac{\Gamma \cdot A_* \Gamma}{2\beta}} d\mathcal{R}_R.$$

Le premier facteur est la classique fonction de partition pour un gaz idéal de particules de masse  $m$  sans interaction. Le second facteur caractérise les interactions hydrodynamiques:

$$Q_{hyd} = \frac{1}{V^N} \int e^{-\beta(U_1 + U_2)} d\mathcal{R}_R$$

avec

$$U_1(\mathcal{R}_R) = -\frac{1}{2\beta} \ln |\det A_*|,$$

$$U_2(\mathcal{R}_R) = \frac{\Gamma \cdot A \Gamma}{2\beta^2}.$$

Le maximum de  $Q$  est atteint lorsque la quantité  $U_1 + U_2$  est minimum. Cette quantité dépend uniquement des positions des bulles et agit donc comme un potentiel. C'est pourquoi on l'appelle "potentiel effectif". Interprétons maintenant les comportements induits par  $U_1$  et  $U_2$ .

Potentiel  $U_1$ : Pour comprendre le comportement de ce potentiel, considérons que seulement deux bulles sont suffisamment proches l'une de l'autre pour interagir. Sans perte de généralité, on supposera qu'il s'agit des bulles notées par les indices 1 et 2. Le vecteur liant ces bulles est  $\mathbf{r}_{12} = (r, 0, 0)$ . Si on néglige les interactions entre les bulles à l'exception de celle entre les bulles 1 et 2, la matrice  $A$  se réduit alors à:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Dans l'approximation des bulles ponctuelles, si on utilise les formules (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), calculées par Teshukov et Gavriluk, on a:

$$A_* = \frac{1}{m}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \left(\frac{b_c}{r}\right)^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \left(\frac{b_c}{r}\right)^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \left(\frac{b_c}{r}\right)^3 \\ -\frac{3}{2} \left(\frac{b_c}{r}\right)^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \left(\frac{b_c}{r}\right)^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \left(\frac{b_c}{r}\right)^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nous avons calculé le déterminant de  $A_*$  dans l'approximation des bulles ponctuelles:

$$\det A_* = \frac{1}{2^6} \left( 1 - \frac{27}{2} \left(\frac{b_c}{r}\right)^6 \right) + \mathcal{O} \left( \left(\frac{b_c}{r}\right)^{12} \right).$$

Le comportement de  $U_1$  s'en déduit immédiatement:

$$U_1 \sim \frac{27}{4\beta} \left(\frac{b_c}{r}\right)^6.$$

Le comportement de  $U_1$  est donc répulsif à courte portée. Si l'on compare le résultat que l'on a obtenu au résultat de Yurkovetsy et Brady  $U_1^{SR} = \frac{9}{4\beta} \frac{1}{r^6}$ , le comportement global du potentiel est identique en  $\frac{1}{r^6}$ . Nous apportons toutefois une correction puisque le préfacteur est  $\frac{27}{4\beta}$ .

Potentiel  $U_2$ : Yurkovetsy et Brady ont montré numériquement qu'il existait un potentiel attractif. Nous avons réussi à obtenir une expression analytique de ce potentiel dans l'approximation des bulles ponctuelles. Pour y arriver, souvenons-nous de la définition de  $\gamma = \beta \mathbf{u}_m$ . On a alors:

$$U_2(\mathcal{R}_R) = \frac{\Gamma \cdot A\Gamma}{2\beta^2} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m \cdot A \mathbf{u}_m. \quad (6.1)$$

D'après la relation (6.1), on remarque que le potentiel  $U_2$  ne dépend pas de la température. Développons cette relation en termes des matrices  $A_{ij}$ :

$$U_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_m \cdot A_{ij} \mathbf{u}_m.$$

En introduisant les relations dérivées par Teshukov et Gavrilyuk, on a:

$$U_2 = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \mathbf{u}_m \cdot \pi \rho_l \frac{b_c^6}{r_{ij}^3} (I - 3\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{u}_m - \frac{2}{3} \pi b_c^3 \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_m \cdot \rho_l I_3 \mathbf{u}_m.$$

Si on définit  $\theta_{ij} = (\mathbf{u}_m, \mathbf{n}_{ij})$ , alors:

$$\mathbf{u}_m \cdot (\mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{u}_m = |\mathbf{u}_m|^2 \cos^2 \theta_{ij}.$$

L'expression du potentiel  $U_2$  devient:

$$U_2 = -\frac{1}{2} N m |\mathbf{u}_m|^2 + \frac{3}{4} m |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N (3 \cos^2 \theta_{ij} - 1) \left( \frac{b_c}{r_{ij}} \right)^3.$$

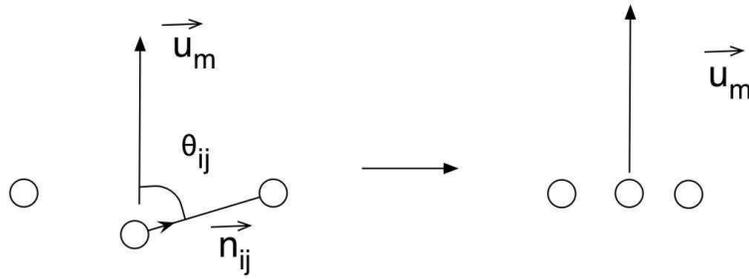
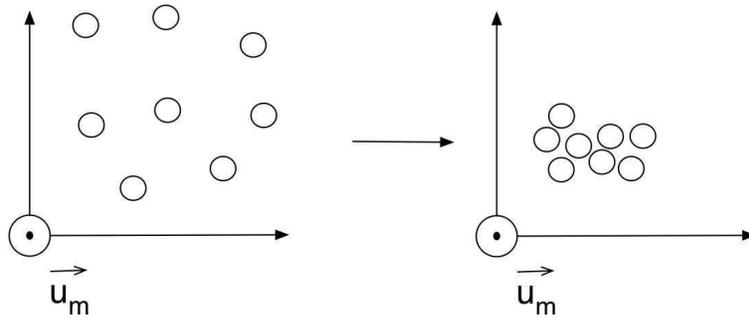
Le premier terme est constant et n'a donc pas de signification physique. On décompose le second terme en deux parties:

$$U_{2a} = \frac{3}{4} m |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N 3 \cos^2 \theta_{ij} \left( \frac{b_c}{r_{ij}} \right)^3,$$

$$U_{2b} = -\frac{3}{4} m |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \left( \frac{b_c}{r_{ij}} \right)^3.$$

Si une configuration minimise en même temps  $U_{2a}$  et  $U_{2b}$ , alors elle minimisera automatiquement  $U_2$ . Analysons préalablement les deux parties séparément. Le potentiel  $U_{2a}$  est positif. Lorsque les bulles s'éloignent les unes des autres, alors  $r_{ij} \rightarrow +\infty$  et donc  $U_{2a} \rightarrow 0$ . D'autre part, si les bulles se situent dans un plan perpendiculaire à la vitesse moyenne des bulles  $\mathbf{u}_m$ , alors on a  $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$  et donc le potentiel  $U_{2a}$  s'annule. Il y a donc deux configurations qui minimisent  $U_{2a}$ .

Le potentiel  $U_{2b}$  est négatif (donc purement attractif). Lorsque les bulles se rapprochent,  $r_{ij} \rightarrow 0$  et le potentiel  $U_{2b} \rightarrow -\infty$ .

FIG. 6.1 – Action du potentiel  $U_{2a}$ .FIG. 6.2 – Action du potentiel  $U_{2b}$ .

On s'aperçoit que si les bulles se rapprochent les unes des autres tout en restant dans un plan perpendiculaire à  $\mathbf{u}_m$  alors le potentiel  $U_2$  est minimum. Cette configuration est donc la plus stable.



## 7. CAS DES SPHÈRES IMMOBILES OSCILLANTES

Le cas des sphères immobiles oscillantes est un cas original. Nous avons eu l'idée de l'étudier car nous avons pensé qu'il s'agissait d'une bonne méthode pour mesurer l'influence des oscillations des bulles sur leurs interactions mutuelles. En effet, dans le chapitre précédent concernant les sphères rigides, on a pu voir les conséquences des déplacements des bulles. Si on considère les sphères immobiles, il n'y a pas de risque d'interférence entre les effets dus aux translations et aux pulsations.

Ce cas présente un intérêt réel. En effet, considérons que les bulles soient transportées par le liquide comme dans le modèle que nous avons utilisé pour les écoulements cisailés (modèle à une vitesse). Alors dans le référentiel qui suit le mouvement des bulles, les bulles semblent immobiles et peuvent osciller à cause d'une onde de pression par exemple.

Nous avons obtenu le comportement du potentiel décrivant les interactions entre les bulles dans ce cas. On s'aperçoit que le potentiel est de longue portée.

### 7.1 Formalisme réduit

Dans cette section, on suppose que les bulles sont immobiles. Les positions des bulles étant fixées, les vecteurs position, vitesse et impulsion généralisés sont réduits respectivement à  $\mathcal{R}_I = (b_1, \dots, b_N)$ ,  $\mathcal{V}_I = (s_1, \dots, s_N)$  and  $\mathcal{P}_I = (q_1, \dots, q_N)$  ( $I$  indique que les bulles sont immobiles). L'hamiltonien s'écrit alors:

$$H(\mathcal{R}_I, \mathcal{P}_I) = \frac{1}{2} \mathcal{V}_I \cdot E \mathcal{V}_I + U(b_1, \dots, b_N).$$

La partie E de la matrice M contient donc les informations concernant l'effet des pulsations sur les comportements individuels et collectifs des bulles. L'énergie interne  $U(b_1, \dots, b_N)$  n'est plus constante. Néanmoins, elle ne joue pas de rôle majeur au niveau des potentiels effectifs que l'on recherche. En effet, rappelons son expression:

$$U(b_1, \dots, b_N) = \sum_{i=1}^N \epsilon(b_i).$$

Il n'y a pas de terme de couplage entre les bulles.

## 7.2 Fonction de partition

Dans le cas limite des bulles immobiles, il ne reste qu'une constante du mouvement qui est l'énergie. En effet la quantité de mouvement totale est nulle dans ce cas:

$$H = \text{constante.}$$

De la même manière que dans le cas précédent, on définit alors la fonction de partition en introduisant le multiplicateur de Lagrange  $\beta$ :

$$Q = \int e^{-\beta H(\mathcal{R}_I, \mathcal{P}_I)} d\mathcal{R}_I d\mathcal{P}_I.$$

A partir de la fonction de partition, nous déterminerons une fois encore les potentiels effectifs qui opèrent dans le liquide.

## 7.3 Potentiel effectif

Nous allons maintenant intégrer la fonction de partition sur l'espace des impulsions  $\mathcal{P}_I$  pour faire apparaître le potentiel effectif d'interaction hydrodynamique. On effectue le changement de variable  $\mathcal{P}_I \rightarrow \mathcal{V}_I$  via la relation  $\mathcal{P}_I = E\mathcal{V}_I$  ce qui donne

$$Q = \int e^{-\beta H(\mathcal{R}_I, \mathcal{V}_I)} \det E d\mathcal{R}_I d\mathcal{V}_I$$

avec

$$H(\mathcal{R}_I, \mathcal{V}_I) = \frac{1}{2} \mathcal{V}_I \cdot E \mathcal{V}_I + U(b_1, \dots, b_N).$$

L'intégration sur l'espace des vitesses est effectuée:

$$Q(\beta, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}} \int \sqrt{\det E} e^{-\beta U(\mathcal{R}_I)} d\mathcal{R}_I,$$

$$Q(\beta, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \int \prod_{i=1}^N \left( \frac{2\pi m_i}{\beta} \right)^{\frac{N}{2}} e^{-\beta(U_3 + U(\mathcal{R}_I))} d\mathcal{R}_I$$

avec

$$U_3 = -\frac{1}{\beta} \ln |\det E|.$$

Le calcul du déterminant de E dans l'approximation des bulles ponctuelles donne:

$$\det E = \prod_{i=1}^N m_i \left( 1 - \sum_{i=1, j=1, i>j}^N \left( \frac{b_i b_j}{r_{ij}^2} \right) \right) + \mathcal{O} \left( \frac{b_c}{r} \right)^4,$$

avec  $m_i = 4\pi\rho b_i^3$ . On effectue ce calcul en raisonnant par récurrence sur le nombre de bulles. L'idée du résultat peut être donnée en utilisant un logiciel de calcul (Mathematica, par exemple).

Le potentiel vaut alors

$$U_3 = -\frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - \sum_{i=1, j=1, i>j}^N \left( \frac{b_i b_j}{r_{ij}^2} \right) \right)$$

et donc (comme  $\frac{b}{r} \ll 1$ )

$$U_3 \simeq \frac{1}{\beta} \sum_{i=1, j=1, i>j}^N \left( \frac{b_i b_j}{r_{ij}^2} \right).$$

Ce potentiel est répulsif et à longue portée  $\left( \frac{1}{r^2} \right)$ . Les bulles s'éloignent donc les unes des autres. Si le volume occupé par le liquide à bulles est fini, alors le potentiel sera minimum lorsque la configuration des bulles tendra à devenir homogène.

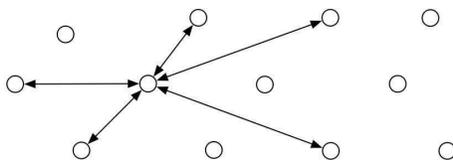


FIG. 7.1 – Action du potentiel  $U_3$ .



## 8. DISCUSSION ET CONCLUSIONS

La matrice masse-virtuelle a été introduite pour la première fois par Yurkovetsky et Brady pour l'étude du mouvement des sphères rigides dans un liquide. La forme généralisée que nous proposons dans le cas de bulles compressibles est le premier résultat important de la deuxième partie. En effet, l'utilisation de la matrice et des vecteurs position et vitesse généralisés a grandement facilité les calculs et l'interprétation des résultats. Par exemple, nous avons vu que l'impulsion du liquide due aux déplacements et aux pulsations des bulles s'écrit simplement:

$$\mathcal{P} = M\mathcal{V}$$

Ainsi, nous avons pu écrire les équations du mouvement des bulles sous la forme hamiltonienne. Nous avons obtenu les potentiels d'interaction entre les bulles dans les cas limites des sphères rigides et des sphères oscillantes. Dans tous les cas, les potentiels s'exprimaient simplement en fonction de la matrice masse-virtuelle. Cela signifie que les informations concernant les interactions entre les bulles sont contenues dans la matrice qui joue donc un rôle fondamental.

La matrice peut s'écrire sous la forme:

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & E \end{bmatrix}.$$

La "sous-matrice" A décrit l'effet des mouvements de translation des bulles sur les interactions entre les bulles, alors que la "sous-matrice" E traduit l'effet de la pulsation des bulles. La partie C de la matrice donne l'effet du couplage entre vitesse de translation et vitesse de pulsation.

A partir de l'énergie du fluide, qui est en réalité l'hamiltonien du système, nous avons construit une fonction de partition dans l'ensemble canonique pour le système. Cela nous a permis de définir une température effective pour le liquide à bulles. Cette température est une mesure de l'agitation relative des bulles par rapport au mouvement ambiant. En intégrant la fonction de partition sur l'espace des impulsions, nous avons mis en évidence l'existence de potentiels décrivant l'interaction entre les bulles dans deux cas limites: pour les sphères rigides en mouvement et pour les sphères immobiles oscillantes.

La limite des sphères rigides consiste donc à considérer uniquement les translations des bulles et donc à réduire la matrice M à la matrice A. Dans ce cas, nous avons montré que les interactions

entre les bulles étaient décrites par deux potentiels semblables à ceux proposés par Yurkovetsky et Brady.

Nous avons dérivé un premier potentiel  $U_1$  dont l'influence augmente avec la température. Nous avons déterminé le comportement de ce potentiel:

$$U_1(\mathcal{R}_R) = -\frac{1}{2\beta} \ln |\det A_*| \sim \frac{27}{4\beta} \left(\frac{b_c}{r}\right)^6$$

Ce résultat est en accord avec celui de Yurkovetsky et Brady. Néanmoins, nous apportons une correction au préfacteur ( $\frac{27}{4\beta}$  au lieu de  $\frac{9}{4\beta}$ ).

Le deuxième potentiel  $U_2$  est un potentiel indépendant de la température. Il dominera  $U_1$  aux basses températures. Nous avons réussi à obtenir une expression analytique de ce potentiel, expression qui n'existait pas à notre connaissance:

$$U_2 = -\frac{1}{2}Nm|\mathbf{u}_m|^2 + \frac{3}{4}m|\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N (3\cos^2\theta_{ij} - 1) \left(\frac{b_c}{r_{ij}}\right)^3.$$

Cette formule nous a permis d'interpréter le phénomène de rassemblement de bulles dans les plans perpendiculaires à la vitesse moyenne des bulles (que l'on observe dans les simulations numériques de Smereka, Sangani et Didwania, Yurkovetsky et Brady).

L'étude du cas des sphères oscillantes immobiles est un problème original que nous avons proposé afin de comprendre l'influence de la compressibilité, et donc des pulsations des bulles, sur le comportement collectif. Ce cas se présente lorsque les bulles sont transportées avec le liquide. En effet, si l'on se place dans le référentiel lié au mouvement d'ensemble, les bulles sont immobiles et oscillent. Nous avons alors prouvé qu'il n'y avait qu'un potentiel  $U_3$  qui augmente avec la température. Nous avons obtenu son expression approchée dans la limite des sphères ponctuelles:

$$U_3 = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1, j=1, i > j}^N \left(\frac{b_i b_j}{r_{ij}^2}\right)$$

qui est un potentiel répulsif à longue portée. Nous avons conclu que ce potentiel favorisait une distribution homogène des bulles.

Si l'on compare les résultats dans les deux cas limites, on s'aperçoit d'abord que le potentiel répulsif, qui était à courte portée pour les sphères rigides, passe à longue portée lorsque les bulles oscillent. Le potentiel attractif disparaît dans le cas des sphères immobiles car la vitesse moyenne des bulles est nulle:

$$U_2(\mathcal{R}_R) = \frac{\Gamma \cdot A\Gamma}{2\beta^2} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m \cdot A \mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Le fait que le potentiel soit à grande portée lorsque les bulles oscillent alors qu'il est à courte portée pour des sphères rigides en mouvement peut s'expliquer de la manière suivante. Une sphère qui

oscille provoque un déplacement radial de liquide susceptible de rencontrer plusieurs bulles. Dans ce cas, la bulle “voit” beaucoup de voisins. Lorsque la bulle est rigide, son déplacement crée un déplacement unidirectionnel dans le sens de son mouvement. La bulle voit alors moins de voisins. De plus, expérimentalement, la vitesse de pulsation des bulles est bien plus grande que la vitesse de translation. L’intensité des interactions due aux oscillations doit donc être bien plus grande. Ce résultat confirme les faits expérimentaux. Lorsque l’on observe un écoulement de liquide à bulles, on constate que les bulles forment, en général, des nuages homogènes et non des agrégats.

Un approfondissement du travail consisterait à étudier le cas général où les bulles oscillent et se déplacent en même temps. Le potentiel attractif a la même expression que dans le cas des sphères rigides. En revanche, le potentiel “répulsif” est difficile à estimer puisqu’il conviendrait d’évaluer le déterminant de la matrice  $M$ , ce que l’on n’a pas encore réussi à faire. Ce calcul nous permettrait de connaître l’effet du couplage entre les pulsations et les mouvements de translation des bulles. Il serait également intéressant de mener des simulations numériques dans le cas original des sphères oscillantes immobiles. On pourrait alors vérifier si la distribution homogène de bulles est bien la plus stable.



## CONCLUSION GÉNÉRALE



Deux problèmes théoriques concernant les liquides à bulles ont été traités. Nous avons démontré, dans un premier temps, la stabilité de l'écoulement plan de Couette dans les liquides à bulles. Pour modéliser le milieu, nous avons utilisé le modèle de Kogarko, Iordanski et Van Wijngaarden. Ce modèle est assez simple puisqu'il prend en compte essentiellement les effets d'inertie et de la compressibilité des bulles. La viscosité du liquide, la tension superficielle et les transferts thermiques entre phases sont négligés. Néanmoins, nous avons pu mener jusqu'au bout une étude analytique de la stabilité des écoulements cisailés dans les liquides à bulles.

La stabilité linéaire de l'écoulement de Couette a été établie en appliquant la méthode des modes normaux et en résolvant le problème aux valeurs initiales. La méthode des modes normaux nous a permis de déterminer le spectre discret. La résolution du problème aux valeurs initiales a débouché sur une expression de la composante normale de la vitesse. A partir de cette expression, nous avons prouvé que les perturbations se décomposaient non seulement sur le spectre discret (S.D.) mais également sur un continuum de valeurs de la vitesse de phase appelé spectre continu (S.C.):

$$v(x,y,t) = \sum_{c \in S.D.} v_k e^{-ik(x-ct)} + \int_{c \in S.C.} v_k e^{-ik(x-ct)} dc.$$

Le comportement asymptotique en temps de la vitesse normale dépend donc du spectre discret et du spectre continu. La méthode des modes normaux est donc insuffisante pour conclure quant à la stabilité des écoulements cisailés dans les liquides à bulles, et en particulier, pour l'écoulement de Couette.

Le deuxième problème qui nous a intéressé est celui des interactions hydrodynamiques entre les phases gazeuses et liquides. Ce problème est important, si l'on veut améliorer les modèles de liquides à bulles existants sans passer par des formules empiriques ou se limiter aux analyses dimensionnelles: il faut comprendre ce qui se passe au niveau microscopique.

L'emploi de la physique statistique nous a été d'une grande aide dans ce but. Concernant le problème des sphères rigides, nous avons déterminé deux potentiels effectifs qui décrivent les interactions entre les bulles. Plusieurs expériences numériques effectuées par Smereka, Sangani et Didwania, Yurkovetsky et Brady, s'accordaient sur le fait que, selon les conditions initiales, une configuration aléatoire des sphères n'était pas stable. En effet, elles montrent que les sphères tendent à former des paquets dans des plans perpendiculaires au mouvement moyen des bulles. Nous avons calculé une expression analytique d'un potentiel attractif qui permet d'interpréter très précisément ces observations.

Nous avons également étudié le cas original des sphères oscillantes immobiles pour connaître l'influence de la compressibilité des bulles. Nous avons alors trouvé que le potentiel effectif d'interaction entre les bulles était répulsif à longue portée. Ce résultat appelle à de nouvelles simulations numériques afin d'être confirmé. Il est toutefois très satisfaisant dans le sens où l'on n'observe

pas de paquets de bulles expérimentalement. La répulsion due à la compressibilité est donc une explication possible à ce constat.

Il est important de noter que les résultats que nous avons obtenus grâce à notre étude statistique sont valables à l'équilibre. Notamment, nous avons déterminé les configurations de bulles les plus stables lorsque le milieu est à l'équilibre. Il serait maintenant très intéressant de voir comment les résultats évoluent lorsque le milieu est hors équilibre.

Troisième partie

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Caffisch, R. E., Miksis, M. J., Papanicolaou, G. C., Ting, L.:** Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. Fluid Mech.*, vol. 153, pp 259-273 (1985)
- [2] **Case, K. M.:** Stability of Inviscid Plane Couette Flow. *Phys. Fluids*, vol. 3, pp 143-148 (1960)
- [3] **Diu, B., Guthmann, C., Lederer, D., Roulet, B.:** Physique statistique. *Hermann* (1989)
- [4] **Drazin, P.G., Reid, W.H.:** Hydrodynamic stability. *Cambridge University Press* (1981)
- [5] **Fjørtoft, R.:** Application of integral theorems in deriving criteria for instability for laminar flows and the baroclinic circular vortex. *Geofys. Publ. Oslo*, vol. 17 (6), pp 1-56 (1950)
- [6] **Gavrilyuk, S. L., Teshukov, V.M.:** Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations. *Continuum Mech. Thermodyn.*, vol. 13, pp 365-382 (2001)
- [7] **Gavrilyuk, S. L., Teshukov, V. M.:** Linear stability of parallel inviscid flows of shallow water and bubbly fluid. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 113, issue 1, pp 1-29 (2004)
- [8] **Howard, L.:** Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.*, vol. 10, pp 509-512 (1961)
- [9] **Iordanski, S. V.:** On the equations of motion of the liquid containing gas bubbles. *Zhurnal Prikladnoj Mekhaniki Tekhnicheskoy Fiziki*, N3, pp 102-111 (1960, en russe)
- [10] **Kaufman, B., Onsager, L.:** Crystal Statistics III Short-Range Order in a Binary Ising Lattice. *Phys. Rev.*, vol. 76, pp 1244 (1949)
- [11] **Keller, J. B., Miksis, M. J.:** Bubble oscillations of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol.68, pp 628-633 (1980)

- [12] **Kogarko, B. S.:** On the model of cavitating liquid. *Dokl. AN SSSR*, vol.137, pp 1331-1333 (1961, en russe)
- [13] **Kok, J.B.:** Dynamics of gas bubbles moving through liquid. Part II. Experiment. *Eur. J. Mech. B Fluids*, vol.12 No 4, p541 (1993)
- [14] **Lin, C. C.:** Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows. *J. Fluid Mech.*, vol. 10, 430-438 (1961)
- [15] **Lundgren, T.S, Pointin, Y.B.:** Statistical mechanics of two-dimensional vortices. *Journal of statistical physics*, vol. 17, No 5, p323 (1977)
- [16] **Miksis, M. J., Ting, L.:** Nonlinear radial oscillations of a gas bubble including thermal effects. *J. Acoust. Soc. Am* **76**, pp 897-905 (1984)
- [17] **Miksis, M. J., Ting, L.:** Viscous effects on wave propagation in a bubbly liquid. *Phys. Fluids*, vol. 30, pp 1683-1686 (1987)
- [18] **Miksis, M. J., Ting, L.:** Effective equations for multiphase flows-waves in a bubbly liquid. *Adv. Appl. Mech.*, vol. 28, pp 141-260 (1992)
- [19] **Newton, P.K.:** The N-vortex problem. Analytical techniques. *Springer* (2000)
- [20] **Plesset, M. S., Prosperetti, A.:** Bubbles dynamics and cavitation. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 9, pp 145-185 (1977)
- [21] **Prosperetti, A.:** The thermal behavior of oscillating gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, vol. 222, pp 587-616 (1991)
- [22] **Lord Rayleigh:** On the stability, or instability, of certain fluid motion. *Proc. London Math. Soc.*, vol.11, pp 57-70 (1880)
- [23] **Romanov, V. A.:** Stability of plane-parallel Couette flow. *Functional Anal. Its Applic.*, vol. 7, pp 137-146 (1973)

- 
- [24] **Russo, G., Smereka, P.:** Kinetic theory for bubbly flows I: Collisionless case. *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 56, pp 327-357 (1996)
- [25] **Sangani, A.S., Didwania, A.K.:** Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, vol. 250, pp 307-337 (1993)
- [26] **Schmid, P.J., Henningson, D.S:** Stability and transition in shear flows. *Springer* (2000)
- [27] **Smereka, P.:** On the motion of bubbles in a periodic box. *J. Fluid Mech.*, vol. 254, pp 79-112 (1993)
- [28] **Squire, H.B.:** On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid between parallel walls. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, vol. 142, pp 621-628 (1933)
- [29] **Teshukov, V.M., Gavriluyk, S.L.:** Kinetic model for the motion of compressible bubbles in a perfect fluid. *Eur. J. Mech. B Fluids*, vol. 21, pp 469-491 (2002)
- [30] **Van Wijngaarden, L.:** One dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, vol. 4, pp 369-396 (1972)
- [31] **Yurkovetsky, Y., Brady, J.F.:** Statistical mechanics of bubbly liquids. *Phys. Fluids*, vol. 8 (4), pp 881-895 (1996)
- [32] **Zhang, D. Z., Prosperetti, A.:** Ensemble average equations for bubbly flows. *Phys. Fluids*, vol. 6 (9), pp 2956-2970 (1994)



## TABLE DES MATIÈRES

<i>Première partie I Stabilité de l'écoulement de Couette dans les liquides à bulles</i>	11
1. <i>Introduction</i> . . . . .	13
2. <i>Écoulements cisailés dans les fluides parfaits</i> . . . . .	17
2.1 Critère de Rayleigh . . . . .	17
2.2 Théorème de Squire . . . . .	19
2.3 Critère de Fjørtoft . . . . .	20
2.4 Théorème du demi-cercle de Howard . . . . .	22
3. <i>Écoulement de Couette dans les fluides parfaits</i> . . . . .	25
3.1 Méthode des modes normaux pour l'écoulement de Couette . . . . .	25
3.2 Résolution du problème aux valeurs initiales . . . . .	26
3.3 Synthèse . . . . .	28
3.4 Retour au cas général . . . . .	28
4. <i>Modélisation du liquide à bulles</i> . . . . .	31
4.1 Modèle mathématique . . . . .	31
4.2 Discussion du modèle . . . . .	32
4.3 Approche variationnelle . . . . .	33
5. <i>Écoulements cisailés dans les liquides à bulles</i> . . . . .	35
5.1 Équations linéarisées . . . . .	35
5.2 Modes normaux. Approximation des ondes longues . . . . .	36
5.3 Théorème de Squire pour les liquides à bulles . . . . .	38
5.4 Théorème de Howard pour les liquides à bulles . . . . .	39
5.5 Critère de Rayleigh pour les liquides à bulles . . . . .	41
6. <i>Écoulement de Couette dans les liquides à bulles</i> . . . . .	43
6.1 Position du problème . . . . .	43
6.2 Approche spectrale: spectre discret . . . . .	44
6.3 Problème aux valeurs initiales: spectre continu . . . . .	48

---

7. <i>Discussion et conclusions</i> . . . . .	53
<i>Deuxième partie II Physique statistique pour les liquides à bulles</i>	55
1. <i>Introduction</i> . . . . .	57
2. <i>Équations du mouvement pour <math>N</math> sphères rigides dans un liquide parfait</i> . . . . .	61
2.1 Position du problème . . . . .	61
2.2 Énergie cinétique . . . . .	62
2.3 Équations du mouvement . . . . .	63
2.4 Quantités conservées . . . . .	63
2.5 Analyse numérique . . . . .	64
3. <i>Première approche statistique</i> . . . . .	67
3.1 Matrice masse-virtuelle . . . . .	67
3.2 Forme hamiltonienne des équations du mouvement . . . . .	68
3.3 Fonction de partition de l'ensemble canonique . . . . .	68
3.4 Gaz réel de Van der Waals . . . . .	69
3.5 Potentiels effectifs . . . . .	69
3.6 Simulations numériques . . . . .	70
4. <i>Équations du mouvement pour <math>N</math> bulles dans un liquide parfait</i> . . . . .	73
4.1 Position du problème . . . . .	73
4.2 Énergie cinétique . . . . .	74
4.3 Approximation des bulles ponctuelles . . . . .	75
5. <i>Formalisme lagrangien et hamiltonien</i> . . . . .	77
5.1 Matrice masse-virtuelle . . . . .	77
5.2 Équations d'Euler-Lagrange . . . . .	78
5.3 Quantités conservées . . . . .	79
6. <i>Cas des sphères rigides</i> . . . . .	81
6.1 Formalisme réduit et fonction de partition . . . . .	81
6.2 Potentiels effectifs . . . . .	82
7. <i>Cas des sphères immobiles oscillantes</i> . . . . .	87
7.1 Formalisme réduit . . . . .	87
7.2 Fonction de partition . . . . .	88
7.3 Potentiel effectif . . . . .	88

---

8. <i>Discussion et conclusions</i> . . . . .	91
<i>Troisième partie III Références bibliographiques</i>	99