Exemples de schémas de Hilbert invariants et de schémas quot invariants

Sébastien Jansou

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF

EXEMPLES DE SCHÉMAS DE HILBERT INVARIANTS ET DE SCHÉMAS QUOT INVARIANTS

Sébastien JANSOU

Soutenue à Grenoble le 24 octobre 2005 devant le jury :

José BERTIN (Université de Grenoble I), Président du jury
Michel BRION (CNRS, Université de Grenoble I), Directeur
Thierry LEVASSEUR (Université de Brest)
Laurent MANIVEL (CNRS, Université de Grenoble I)
Dimitri MARKOUCHEVITCH (Université de Lille)

Au vu des rapports de Thierry LEVASSEUR *et* Christoph SORGER

à mes grands-parents Jeanne et Fernand LACHAUD

Remerciements

Je souhaite avant tout exprimer ma très vive reconnaissance envers mon directeur de thèse Michel Brion. Son talent de mathématicien, mais aussi ses qualités humaines et sa disponibilité en font un immense pédagogue, et j'ai été très heureux de travailler sous sa direction. Merci Michel pour m'avoir donné un sujet aussi nouveau et enthousiasmant, pour avoir su obtenir de moi plus que ce dont je me sentais capable, et enfin pour ta patience quand d'autres auraient sans doute baissé les bras.

Je suis aussi très reconnaissant envers les rapporteurs de s'être intéressés si minutieusement à ma thèse, et envers les membres du jury de me faire l'honneur d'être présents aujourd'hui.

Je souhaite aussi remercier tout le personnel de l'institut Fourier, notamment, pour ne citer que quelques thésards, Hà Minh Lam, Boris Pasquier, Nicolas Roy, Vincent Despiegel, Adrien Dubouloz, Pierre-Emmanuel Chaput, David Bourqui... Merci aussi à Stéphanie Cupit-Foutou et Paolo Bravi de m'avoir fait partager leur approche du schéma de Hilbert invariant lors de mon séjour à Wuppertal.

J'ai également une pensée pour mes parents et mon frère, qui arrivent si patiemment à me supporter tel que je suis...

Enfin, un gigantesque MERCI du fond du coeur à mon très cher ami Pierre Navarre !

Introduction

Le schéma de Hilbert et le schéma Quot ont été construits par Grothendieck dans [Grot] au début des années soixante. Ce sont des objets fondamentaux en géométrie projective. Le schéma de Hilbert paramètre les sous-schémas fermés d'un espace projectif qui admettent un polynôme de Hilbert fixé, c'est-à-dire, algébriquement, les idéaux homogènes saturés d'une algèbre de polynômes (munie de la graduation usuelle) qui admettent un polynôme de Hilbert fixé. Le schéma Quot en est une généralisation immédiate : il paramètre les quotients d'un faisceau cohérent fixé sur un espace projectif qui admettent un polynôme de Hilbert fixé, c'est-à-dire les quotients d'un module gradué sur une algèbre de polynômes par un sous-module homogène saturé qui admettent un polynôme de Hilbert fixé.

Haiman et Sturmfels ont obtenu recemment dans [HaSt] une généralisation de ces deux schémas, par des constructions d'algèbre commutative : le *schéma de Hilbert multigradué* et le *schéma Quot multigradué*. Cette fois, on munit une algèbre de polynômes S sur un anneau commutatif k d'une "multigraduation", c'est-à-dire d'une graduation par un groupe abélien A, en associant à chacune des variables un multidegré à valeurs dans le groupe A. Le schéma de Hilbert multigradué paramètre alors les idéaux homogènes I de S de "fonction de Hilbert" fixée, c'est-à-dire tels que pour tout multidegré a, le k-module S_a/I_a est localement libre de rang fini donné. Le schéma Quot multigradué paramètre les sous-modules homogènes d'un S-module gradué de type fini qui admettent une fonction de Hilbert fixée. Ces deux schémas sont quasi-projectifs.

Dans ce contexte, la donnée du polynôme de Hilbert a été remplacée par celle d'une fonction de Hilbert. Néammoins, Haiman et Sturmfels remarquent ([HaSt] §4) que l'on retrouve bien le schéma de Hilbert classique en prenant comme groupe abélien A le groupe des entiers, en attribuant à chaque variable le degré 1 et en remplaçant le polynôme de Hilbert par une certaine fonction de Hilbert. Ceci repose sur un travail antérieur de Gotzmann ([Go]).

Le schéma de Hilbert multigradué est aussi lié à d'autres versions plus récentes du schéma de Hilbert. Etant donné un groupe fini G qui opère linéairement sur un espace affine, Nakamura a construit ([Na] §2.1) un schéma de Hilbert qui paramètre les orbites régulières de G. Dans le cas particulier où le groupe fini G est *abélien*, on retrouve ce schéma à l'aide du schéma de Hilbert multigradué en prenant comme groupe abélien A le groupe dual de G et comme fonction de Hilbert la fonction identiquement égale à 1.

Lorsque le groupe A est libre de rang fini et la fonction de Hilbert prend comme valeurs 0 et 1, le schéma de Hilbert multigradué donne une généralisation du *schéma de Hilbert torique* de Peeva et Stillman ([PeSt]). Géométriquement, on a une action du tore dont le groupe des caractères est A sur l'espace affine dont l'algèbre des fonctions régulières est S ; le schéma de Hilbert torique paramètre les adhérences des orbites générales pour cette action et leurs dégénérescences.

Le schéma de Hilbert torique est le premier exemple d'espace classifiant de schémas affines munis de l'action d'un groupe, en l'occurence un tore. Alexeev et Brion ont construit dans [AlBr], pour tout groupe réductif complexe G agissant sur une variété affine X, le *schéma de Hilbert invariant*. Celui-ci paramètre les sous-schémas fermés de X stables sous l'action de G et dont l'algèbre affine est somme directe de G-modules simples avec des multiplicités finies fixées. Leur construction repose sur le schéma de Hilbert multigradué, qui correspond au cas où le groupe réductif G est un tore.

Cette thèse est divisée en deux parties indépendantes. Comme le schéma de Hilbert invariant est un objet récent et encore peu exploré, on en détermine une classe naturelle d'exemples dans la première partie (§1). La situation choisie est la plus simple possible : le groupe réductif G est supposé connexe ; l'espace affine ambiant est le G-module simple de plus grand poids λ :

$$V = V(\lambda).$$

On note λ^* le plus grand poids du G-module simple dual de $V(\lambda)$. On s'intéresse au schéma de Hilbert invariant H_λ des sous-schémas fermés G-stables de $V(\lambda)$ dont l'algèbre affine admet la décomposition en somme directe de modules simples

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} V(m\lambda^*).$$

Un exemple important de tels sous-schémas est le cône C_λ des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$ (réunion de l'orbite des vecteurs de plus grand poids, et de l'origine). C'est le plus petit cône fermé G-stable de $V(\lambda)$; autrement dit, c'est le cône affine sur l'unique orbite fermée de G dans le projectivisé de $V(\lambda)$ (et les cônes de vecteurs primitifs sont exactement les cônes affines sur les variétés de drapeaux G/P). Tous les points fermés de H_λ, en tant que sous-schémas fermés de $V(\lambda)$, dégénèrent en C_λ.

On montre que pour la plupart des poids λ, le schéma de Hilbert invariant H_λ ne contient que le point correspondant à C_λ. Dans les autres cas, H_λ est la droite affine (Théorème 1.1). On obtient ainsi la classification des G-modules simples "exceptionnels" dont le cône des vecteurs primitifs admet une déformation G-invariante.

Une telle déformation, lorsqu'elle existe, peut toujours être obtenue à l'aide d'une algèbre de Jordan simple : son espace total est le cône des éléments de rang 1 de l'algèbre de Jordan, muni de l'action d'un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'algèbre. Cet espace total peut également être obtenu comme un cône affine au dessus d'une variété projective lisse dont les orbites sous l'action d'un groupe algébrique affine connexe sont un diviseur ample et son complémentaire. Ces variétés ont été classifiées par Akhiezer dans [Ak1].

On obtient ainsi une correspondance entre trois types d'objets de natures très différentes : les modules simples dont le cône des vecteurs primitifs admet une déformation invariante, les algèbres de Jordan simples, et certaines variétés à deux orbites. Une partie de cette correspondance repose sur les classifications respectives de ces trois types d'objets : étant donné un cône de vecteurs primitifs admettant une déformation G-invariante, on ne sait pas construire directement l'algèbre de Jordan correspondante, ni la variété à deux orbites correspondante.

Pour compléter cette étude, on détermine les déformations infinitésimales (non nécessairement G-invariantes) du cône C_λ. On montre que pour la plupart des poids λ, le cône C_λ est en fait rigide. De plus, lorsque C_λ admet une déformation G-invariante, le schéma de Hilbert invariant donne une composante irréductible de la déformation verselle de C_λ.

Enfin, on montre (dans l'Appendice) que l'utilisation du schéma de Hilbert classique paramétrant les sous-schémas fermés de $\mathbb{P}(V(\lambda))$ en vue d'obtenir des déformations du cône C_λ ne donne rien de concluant : on obtient seulement les déformations fournies par l'action du groupe des automorphismes de l'espace projectif $V(\lambda)$.

Dans la seconde partie, on construit le *schéma Quot invariant* : étant donnée une variété affine X sur laquelle agit un groupe réductif G et munie d'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ cohérent et G-linéarisé, le schéma Quot invariant paramètre les quotients $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ (où $\mathcal{N}$ est un sous-module de $\mathcal{M}$ stable par G) dont l'espace des sections globales est somme directe de G-modules simples avec des multiplicités finies fixées. Cette généralisation naturelle du schéma de Hilbert invariant (que l'on retrouve lorsque $\mathcal{M}$ est le faisceau structural de X) ne présente aucune difficulté particulière.

On a ensuite déterminé le schéma Quot invariant dans la situation simple suivante : la variété X est le cône C_λ des vecteurs primitifs du module simple $V(\lambda)$. Le module $\mathcal{M}$ est le module libre engendré par le G-module simple $V(\mu^*)$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_{C_\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu^*).$$

On note $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ le schéma Quot invariant des quotients de $\mathcal{M}$ dont l'espace des sections globales admet la décomposition

$$\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} V(m\lambda^* + \mu^*).$$

Ce sont les plus petits quotients G-linéarisés de $\mathcal{M}$.

On montre, par des méthodes d'analyse combinatoire sur les systèmes de racines et de théorie des représentations, que le schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ est tantôt un point réduit tantôt isomorphe au point épaissi $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t]/\langle t^2\rangle$ (théorème 5.2). Les seuls cas où le schéma Quot invariant n'est pas réduit sont obtenus quand le module $V(\lambda)$ est le $\mathrm{Spin}(V)$-module V, où V est un espace vectoriel quadratique de dimension (finie) impaire.

L'étape suivante serait de déterminer le schéma Quot invariant défini de façon analogue, en remplaçant la G-variété affine $X = C_\lambda \subseteq V(\lambda)$ par l'espace affine $V(\lambda)$ tout entier. Ce dernier schéma Quot invariant généralise le schéma de Hilbert invariant étudié au §1. Le schéma

$\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ est naturellement un sous-schéma fermé du schéma Quot invariant de $V(\lambda)$: sa détermination est donc un résultat intermédiaire à celle de ce plus grand schéma Quot invariant.

Déformations invariantes
des cônes de vecteurs primitifs

Introduction

Soit G un groupe réductif connexe complexe, et V un G-module rationnel de dimension finie. On dit qu'un sous-schéma fermé G-stable $X \subseteq V$ est *à multiplicités finies* si son algèbre affine est somme directe de modules simples avec des multiplicités finies.

Alexeev et Brion ont montré récemment dans [AlBr] que les sous-schémas X ayant des multiplicités finies fixées sont paramétrés par un schéma quasi-projectif : *le schéma de Hilbert invariant*. Leur travail est basé sur celui de Haiman et Sturmfels ([HaSt]), qui correspond au cas particulier où le groupe réductif G est un tore.

On se propose ici de déterminer le schéma de Hilbert invariant dans le cas "le plus simple". L'espace ambiant est le G-module simple de plus grand poids λ :

$$V = V(\lambda).$$

On cherche à paramétrer les plus petits sous-schémas fermés G-stables de V de dimension positive : on va donc choisir les multiplicités les plus petites possibles. Pour cela, on remarque que l'algèbre affine d'un tel schéma X contient le dual de $V(\lambda)$; on note λ^* son plus grand poids. Notons f un vecteur de plus grand poids de $V(\lambda^*)$. Les puissances de f sont non nulles dans l'algèbre affine de X, donc celle-ci contient tous les modules simples $V(d\lambda^*)$, où d est un entier positif.

Ainsi, on va prendre pour multiplicité 1 pour les modules simples $V(d\lambda^*)$, et 0 pour les autres modules simples. Un point particulier du schéma de Hilbert invariant correspondant H_λ est alors donné par le cône des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$ (réunion de l'orbite des vecteurs de plus grand poids, et de l'origine). Ces cônes ne sont autres que les cônes affines sur les variétés de drapeaux plongées par un système linéaire complet.

On montrera que pour la plupart des poids λ, le schéma H_λ est en fait réduit à ce point. Dans les autres cas, H_λ est la droite affine. On obtient ainsi une classification des G-modules simples dont le cône des vecteurs primitifs admet une déformation invariante.

Cette classification rappelle celle (obtenue par Akhiezer dans [Ak1]) des variétés projectives lisses dont les orbites sous l'action d'un groupe algébrique affine connexe sont un diviseur ample et son complémentaire. On décrira comment relier ces deux classifications et on les reliera aussi à celle des algèbres de Jordan simples. Cette dernière se trouve être plus “petite”, mais on verra que lorsqu'un cône de vecteurs primitifs admet une déformation invariante dans $V(\lambda)$, cette déformation provient d'une algèbre de Jordan simple.

On montrera enfin que pour la plupart des poids λ, le cône des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$ est en fait rigide : les seuls cônes de vecteurs primitifs admettant des déformations infinitésimales non triviales sont, outre ceux qui admettent une déformation invariante, le cône affine au dessus de la courbe rationnelle normale de degré n dans $\mathbb{P}^n$ (les déformations de ce cône ont été étudiées dans [Pi]), et le cône affine au dessus de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ dans le plongement de bidegré $(d, 1)$ avec $d \geq 2$.

1 Une classe de schémas de Hilbert invariants

1.1 Notations et résultat principal

On considère des schémas et des groupes algébriques sur $\mathbb{C}$. Les références utilisées sont [Ha] pour la théorie des schémas et [PoVi] pour celle des groupes algébriques de transformations.

Soit G un groupe réductif connexe. On en choisit un sous-groupe de Borel B, et un tore maximal T inclus dans B. On considère le radical unipotent U de B : on a : $B = TU$. Les algèbres de Lie respectives de G, B, T et U sont notées : $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}$, et $\mathfrak{u}$. Le système de racines de G relativement à T est noté R. Le choix de B nous en fournit une base S, et on a : $R = R_+ \amalg R_-$ où R_+ est l'ensemble des racines positives, et R_- celui des racines négatives.

On note Λ le groupe des caractères de T. On a un ordre partiel sur Λ : $\mu \leq \lambda$ si et seulement si $\lambda - \mu$ est une somme de racines positives. On note Λ^+ l'ensemble des éléments de Λ qui sont des poids dominants (relativement à la base S du système de racines R). On sait que Λ^+ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-modules rationnels simples. Si λ est un élément de Λ^+, on notera $V(\lambda)$ un G-module simple correspondant, c'est-à-dire de plus grand poids λ, et v_λ un vecteur de $V(\lambda)$ de poids λ. Si λ est un poids qui n'est pas dominant, on pose $V(\lambda) = 0$.

Les G-modules simples peuvent être construits de la façon suivante : soit λ un poids dominant, et P un sous-groupe parabolique de G contenant B tel que λ se prolonge en un caractère de P. Notons $\pi : G \to G/P$ la surjection canonique, et $\mathcal{L}_\lambda$ le faisceau inversible sur G/P qui associe à un ouvert $\Omega \subseteq G/P$:

$$\mathcal{L}_\lambda(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(\Omega)) \mid \forall g \in G,\, \forall p \in P,\; f(gp) = \lambda(p)f(g)\}.$$

Le faisceau $\mathcal{L}_\lambda$ est alors G-linéarisé (via l'action de G sur ses fonctions régulières par translation à gauche), et l'espace des sections globales de $\mathcal{L}_\lambda$ est un G-module simple :

$$\Gamma(G/P, \mathcal{L}_\lambda) \simeq V(\lambda)^*.$$

Si V est un T-module rationnel (éventuellement de dimension infinie), on note $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ sa décomposition en sous-espaces propres. Par exemple, l'algèbre de Lie de G admet la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où chaque $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1. On choisit pour tout $\alpha \in R$ un générateur e_α de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Si V est un G-module rationnel, on note $V_{(\lambda)}$ sa composante isotypique de type λ, c'est-à-dire le sous-module de V somme des sous-modules isomorphes à $V(\lambda)$. On a alors la décomposition $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} V_{(\lambda)}$.

Soit V un G-module rationnel de dimension finie, et $h : \Lambda^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. On appelle *famille de sous-schémas fermés G-stables de V* un sous-schéma fermé G-stable de $\mathfrak{X} \subseteq S \times V$, où S est un schéma avec action triviale de G. On note $\pi : \mathfrak{X} \to S$ le morphisme induit par la projection $S \times V \to S$, et $\pi_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ l'image directe par π du faisceau structural de $\mathfrak{X}$. La famille $\mathfrak{X}$ est dite *de fonction de Hilbert h* si on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$- G-modules

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} \mathcal{F}_\lambda \otimes V(\lambda),$$

où chaque $\mathcal{F}_\lambda$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang $h(\lambda)$. (Le morphisme π est alors plat.)

Le foncteur contravariant : (Schémas)$^\circ \longrightarrow$ (Ensembles) qui associe à tout schéma S l'ensemble des familles $\mathfrak{X} \subseteq S \times V$ de fonction de Hilbert h est représenté par un schéma quasi-projectif noté $Hilb_h^G(V)$. (On renvoie à [AlBr]§1.2 pour plus de détails.)

On fixe désormais un poids dominant λ. On note λ^* le plus grand poids du G-module $V(\lambda)^*$ dual de $V(\lambda)$. Soit $h_\lambda : \Lambda^+ \to \mathbb{N}$ la fonction valant 1 sur $\mathbb{N}\lambda^*$ et 0 ailleurs. On note dans la suite

$$H_\lambda := Hilb_{h_\lambda}^G(V(\lambda))$$

le schéma de Hilbert invariant associé à ce choix.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathbb{P}(E)$ l'espace de ses droites. On a une action régulière de G sur l'espace $\mathbb{P}(V(\lambda))$. Notons $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V(\lambda))$ la droite engendrée par v_λ et

$$P_\lambda := G_{[v_\lambda]}$$

son stabilisateur dans G : c'est le plus grand sous-groupe parabolique de G qui contient B et tel que λ se prolonge en un caractère de P_λ. L'orbite de $[v_\lambda]$ est la seule orbite fermée de $\mathbb{P}(V(\lambda))$ (donc l'unique orbite de plus petite dimension). L'espace homogène projectif G/P_λ se plonge ainsi dans $\mathbb{P}(V(\lambda))$, et le faisceau inversible très ample associé à ce plongement est en fait $\mathcal{L}_\lambda$. Le cône affine au dessus de G/P_λ dans $V(\lambda)$ est le cône

$$C_\lambda := G.v_\lambda \cup \{0\} = \overline{G.v_\lambda}$$

des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$. C'est une variété normale (*cf.* [Kr], III.3.5). La variété $G/P_\lambda \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda))$ est donc projectivement normale, et l'algèbre affine graduée du cône C_λ est

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Gamma(G/P_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} V(d\lambda^*).$$

On peut donc voir C_λ comme un point fermé de H_λ.

L'objet de cette partie est de montrer le théorème suivant, énoncé avec les notations de [Bo1] :

Théorème 1.1. *Le schéma de Hilbert invariant H_λ est un point réduit, sauf dans les cas suivants où H_λ est la droite affine :*

(H1) G est simple de type A_1, et $\lambda = 2\omega_1$ ou $4\omega_1$.

(H2) G est simple de type A_n, $n \geq 2$ et $\lambda = \omega_1 + \omega_n$.

(H3) G est simple de type B_3 et $\lambda = \omega_3$ ou $2\omega_3$.

(H4) G est simple de type B_n, $n \geq 2$ et $\lambda = \omega_1$ ou $2\omega_1$.

(H5) G est simple de type C_n, $n \geq 3$ et $\lambda = \omega_2$.

(H6) G est simple de type D_n, $n \geq 3$ et $\lambda = \omega_1$ ou $2\omega_1$.

(H7) G est simple de type F_4 et $\lambda = \omega_4$.

(H8) G est simple de type G_2 et $\lambda = \omega_1$ ou $2\omega_1$.

(H9) G est semi-simple de type $A_1 \times A_1$ et $\lambda = (\omega_1, \omega_1)$ ou $(2\omega_1, 2\omega_1)$.

et dans les cas $(G, V(\lambda))$ obtenus à partir d'un cas (G_0, V_0) parmi les précédents par factorisation : $G \to G_0 \to GL(V_0)$.

Remarque 1.2.

– Le cas (H6) avec $n = 3$ revient à un groupe G simple de type A_3, avec $\lambda = \omega_2$ ou $2\omega_2$.

– On pourrait voir le cas (H9) comme étant le cas (H6) avec $n = 2$.

1.2 Action du groupe multiplicatif sur le schéma de Hilbert invariant

On a une opération naturelle du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur le schéma de Hilbert invariant H_λ : elle provient de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $V(\lambda)$ par homothéties (qui commute avec l'action de G).

Dans cette partie, on montre que cette action admet pour unique point fixe le cône C_λ des vecteurs primitifs. On montre aussi que C_λ est dans l'adhérence de toutes les orbites de $\mathbb{G}_m$, et on en déduit que le schéma de Hilbert invariant est affine. Ces propriétés peuvent être déduites de ce qui est fait dans [AlBr], §2.1 à 2.3 ; on a préféré donner ici des preuves directes.

Proposition 1.3. *(a) Le cône C_λ est l'unique point fermé de H_λ fixé par $\mathbb{G}_m$.*
(b) Soit X un point fermé de H_λ. Le morphisme : $\mathbb{G}_m \longrightarrow H_\lambda$, $t \longmapsto t.X$ se prolonge en un morphisme $\mathbb{A}^1 \longrightarrow H_\lambda$, $0 \longmapsto C_\lambda$.

Preuve. (a) On note $S^eV(\lambda)^*$ la puissance symétrique d'ordre e de $V(\lambda)^*$. On identifie l'algèbre des fonctions régulières sur $V(\lambda)$ à l'algèbre symétrique de $V(\lambda)^*$:

$$\operatorname{Sym} V(\lambda)^* := \bigoplus_{e \in \mathbb{N}} S^e V(\lambda)^*.$$

Les points fermés fixés par $\mathbb{G}_m$ correspondent aux idéaux homogènes

$$I = \bigoplus_{e \in \mathbb{N}} I_e \subseteq \operatorname{Sym} V(\lambda)^* = \bigoplus_{e \in \mathbb{N}} S^e V(\lambda)^*$$

qui sont stables par G et de fonction de Hilbert h.

On sait que $S^eV(\lambda)^*$ contient un unique sous-G-module isomorphe à $V(e\lambda)^*$, et que ses autres composantes isotypiques non nulles sont de type inférieur à $e\lambda^*$:

$$S^eV(\lambda)^* \simeq V(e\lambda)^* \oplus \bigoplus_{\mu<e\lambda^*} [S^eV(\lambda)^*]_{(\mu)}. \tag{1}$$

On va montrer par récurrence sur $e \in \mathbb{N}$, qu'un tel idéal I vérifie :

$$I_e = \bigoplus_{\mu<e\lambda^*} [S^eV(\lambda)^*]_{(\mu)}. \tag{2}$$

En effet, comme I ne contient pas les constantes, on a $I_0 = 0$. Puis, si (2) est satisfait pour tout $d < e$, il faut que :

$$\bigoplus_{\mu<e\lambda^*} [S^eV(\lambda)^*]_{(\mu)} \subseteq I_e$$

pour que la fonction de Hilbert de I soit h_λ. Cette dernière inclusion est en fait une égalité, car sinon on aurait $I_d = S^dV(\lambda)^*$ pour tout $d \geq e$.

Il n'y a donc pas d'autre point fermé fixé par $\mathbb{G}_m$ que C_λ.

(b) Pour mieux comprendre l'action de $\mathbb{G}_m$ sur H_λ, on reprend la construction du schéma de Hilbert invariant (voir [HaSt], §1,2,3 et [AlBr], §1.2).

Considérons l'action naturelle de $\mathbb{G}_m$ sur l'algèbre symétrique de $V(\lambda)^*$, où $\mathbb{G}_m$ opère sur la composante $S^eV(\lambda)^*$ avec le poids $-e$, de sorte que $\operatorname{Sym} V(\lambda)^*$ est une $G\times\mathbb{G}_m$-algèbre rationnelle.

La sous-algèbre $[\operatorname{Sym} V(\lambda)^*]^U$ des invariants par U est alors une $T \times \mathbb{G}_m$- algèbre rationnelle de type fini, selon [Gros],Thm 9.4.

On en choisit un système fini de générateurs $f_1, ...f_n$ formé de $T \times \mathbb{G}_m$-vecteurs propres, et on note $S = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ l'algèbre de polynômes correspondante. L'algèbre S est naturellement une $T \times \mathbb{G}_m$- algèbre rationnelle, et on a un morphisme surjectif de $T \times \mathbb{G}_m$- algèbres rationnelles :

$$\pi : S \longrightarrow (\operatorname{Sym} V(\lambda)^*)^U.$$

L'action de T sur S fournit une graduation de S par le groupe abélien Λ.

On peut alors identifier H_λ à un sous-schéma localement fermé d'un produit de Grassmanniennes, donc d'un produit d'espaces projectifs. Plus précisément, on sait ([HaSt]) qu'il existe une partie finie D de Λ, et pour tout $\mu \in D$, un sous-espace vectoriel de dimension finie N_μ de S_μ que l'on peut choisir stable par $\mathbb{G}_m$, tels que l'on ait un plongement :

$$H_\lambda \hookrightarrow \prod_{\mu\in D} \mathbb{P}(\bigwedge^{r_\mu} N_\mu) \tag{3}$$

où $r_\mu := \dim N_\mu - h_\lambda(\mu)$. Décrivons l'image d'un point fermé par ce plongement : si I est l'idéal d'un sous-schéma fermé de $V(\lambda)$ correspondant à un point fermé de H_λ, on lui associe pour tout $\mu \in D$:

$$J_\mu := \pi^{-1}(I^U) \cap N_\mu.$$

Les N_μ sont des modules rationnels pour l'action de $\mathbb{G}_m$, donc les $\mathbb{P}(\wedge^{r_\mu} N_\mu)$ sont munis d'une action régulière de $\mathbb{G}_m$, pour laquelle le plongement (3) est équivariant.

On peut maintenant vérifier le point (b) de la proposition :

Soit $\mu \in D$. Si $\mu \notin \mathbb{N}\lambda^*$, alors $r_\mu = \dim N_\mu$, et $\mathbb{P}(\wedge^{r_\mu} N_\mu)$ est réduit à un point. Sinon, écrivons $\mu = e\lambda^*$. On a $\mathbb{P}(\wedge^{r_\mu} N_\mu) \cong \mathbb{P}(N_\mu^*)$. Notons $K := N_\mu \cap \ker \pi$ et L un supplémentaire $\mathbb{G}_m$-stable de K dans N_μ :

$$N_\mu = K \oplus L.$$

Selon la décomposition (1) (considérée à tous les ordres), le plus grand poids de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur L est $-e$:

$$L = L_{-e} \oplus \bigoplus_{c>e} L_{-c}.$$

L'espace vectoriel J_μ est un hyperplan de $K \oplus L$ qui contient K (par définition de J_μ et K) mais qui ne contient pas L_{-e} selon le lemme qui suit.

Montrons alors que le morphisme $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{P}(N_\mu^*)$, $t \longmapsto t.J_\mu$ se prolonge en un morphisme $f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(N_\mu^*)$ en posant $f(0) := K \oplus \bigoplus_{c>e} L_{-c}$. Choisissons une base de N_μ^* compatible avec la décomposition $N_\mu = K \oplus L_{-e} \oplus \bigoplus_{c>e} L_{-c}$. Notons d la dimension de L. Les coordonnées homogènes de J_μ dans $\mathbb{P}(N_\mu^*)$ sont $[\underbrace{0 : ... : 0}_{\dim(K) \text{ fois}} : x_1 : x_2 : ... : x_d]$ et on a $x_1 \neq 0$. Celles de $t.J_\mu$ sont donc $[0 : ... : 0 : t^e x_1 : t^{c_2} x_2 : ... : t^{c_d} x_d]$, où les c_j sont des entiers strictement supérieurs à e. D'où l'assertion.

Comme $f(0)$ ne dépend pas de l'idéal I considéré, il s'agit de $\pi^{-1}(I_0^U) \cap N_\mu$ où I_0 est l'idéal du cône C_λ, d'où (b). □

Lemme 1.4. *Soit X un sous-schéma fermé de $V(\lambda)$ de fonction de Hilbert h_λ, et $I \subseteq \operatorname{Sym} V(\lambda)^*$ son idéal.*
Alors pour tout $e \in \mathbb{N}$, le sous-G-module de $S^e V(\lambda)^*$ isomorphe à $V(e\lambda)^*$ n'est pas inclus dans I.

Preuve. Notons f un vecteur de plus grand poids de $V(\lambda)^*$.

Le G-module $[S^e V(\lambda)^*]_{(e\lambda^*)}$ est simple, et f^e en est un vecteur de plus grand poids. Supposons par l'absurde : $f^e \in I$. Alors f appartient à l'idéal du sous-schéma réduit X_{red} associé à X. Le sous-espace vectoriel de $V(\lambda)$ engendré par X_{red} est un sous-G-module de $V(\lambda)$ inclus dans l'hyperplan défini par f : il est donc réduit à $\{0\}$, et l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ est de dimension finie : une contradiction. □

Corollaire 1.5. *Le schéma H_λ est affine. Son algèbre affine A est graduée par l'action du groupe multiplicatif sur H_λ, en degrés négatifs : $A = \bigoplus_{d \in -\mathbb{N}} A_d$, et l'anneau A_0 est local.*

Preuve. On rappelle que H_λ s'identifie à un sous-schéma localement fermé $\mathbb{G}_m$-stable de $\mathbb{P}(M)$, où M est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel de dimension finie. Le sous-schéma réduit $\bar{H}_\lambda \setminus H_\lambda$ est donc aussi $\mathbb{G}_m$-stable, et son idéal homogène aussi. Il existe donc un élément homogène $f \in \operatorname{Sym}(M^*)$, $\mathbb{G}_m$-vecteur propre, définissant un ouvert U contenant C_λ. Cet ouvert U est $\mathbb{G}_m$-stable, et contient donc H_λ, selon le point (b) de la proposition précédente. Ainsi, H_λ est fermé dans U, et U est un ouvert affine : H_λ est affine.

Montrons maintenant que $A_e = 0$ pour tout $e \geq 0$. Par l'absurde, soit $f \in A \setminus \{0\}$ de degré $e > 0$. Soit X un point de H_λ tel que $f(X) \neq 0$. La fonction $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto f(tX) = t^{-e} f(X)$ se prolonge en une fonction régulière sur $\mathbb{A}^1$: une contradiction.

Enfin, montrons que $A_0 = A^{\mathbb{G}_m}$ n'a qu'un seul idéal maximal. On sait ([Kr], II.3.2) que le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A^{\mathbb{G}_m})$ est surjectif. Donc si $A^{\mathbb{G}_m}$ avait deux points fermés distincts, H_λ aurait deux fermés $\mathbb{G}_m$-stables disjoints : une contradiction avec le point (b) de la proposition précédente. □

1.3 Calcul de l'espace tangent au point fixe

L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Proposition 1.6. *L'espace tangent $T_{C_\lambda} H_\lambda$ est nul, sauf dans les cas (H1) à (H9) du théorème 1.1 où il est de dimension 1.*

Notons G_{v_λ} le stabilisateur de v_λ dans G. L'espace tangent en v_λ à $C_\lambda = G.v_\lambda \cup \{0\}$ est $\mathfrak{g}.v_\lambda \subseteq V(\lambda)$. Il est stabilisé par l'action de G_{v_λ}. On note enfin $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}}$ l'espace des invariants du quotient par G_{v_λ}.

Le point de départ de la démonstration est l'isomorphisme canonique :

$$T_{C_\lambda} H_\lambda \cong [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}}.$$

Cet isomorphisme découle de la proposition 1.5 (iii) de [AlBr]. En effet on peut supposer que l'espace vectoriel $V(\lambda)$ n'est pas une droite : la variété C_λ est alors de dimension supérieure ou égale à 2, et normale. La codimension de $C_\lambda \backslash G.v_\lambda = \{0\}$ est donc supérieure ou égale à 2, et la proposition s'applique.

Lemme 1.7. *On a $G_{v_\lambda} = T_{v_\lambda}.G^\circ_{v_\lambda}$, en notant T_{v_λ} le stabilisateur de v_λ dans T (on a $T_{v_\lambda} = \ker(\lambda)$ et $G^\circ_{v_\lambda}$ la composante neutre de G_{v_λ}.*

Preuve. Considèrons la décomposition de Lévi de $P_\lambda = G_{[v_\lambda]}$ relative à T :

$$P_\lambda = L_\lambda.U_\lambda.$$

Comme T est un tore maximal du groupe réductif L_λ, on a $L_\lambda = T.[L_\lambda, L_\lambda]$. D'où $P_\lambda = T.[L_\lambda, L_\lambda].U_\lambda$ et $G_{v_\lambda} = T_{v_\lambda}.[L_\lambda, L_\lambda].U_\lambda$ (car $[L_\lambda, L_\lambda]$ et U_λ stabilisent v_λ), d'où le résultat, car $[L_\lambda, L_\lambda]$ et U_λ sont connexes. □

Proposition 1.8. *On a une action du tore T sur l'espace $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}}$. Sa décomposition en sous-espaces propres est :*

$$[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}} = [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^U_0 \oplus [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^U_{-\lambda}$$

Preuve. On observe que les poids de $V(\lambda)$ qui sont des multiples de λ sont λ et éventuellement 0 et $-\lambda$.

Comme P_λ stabilise $\mathfrak{g}.v_\lambda$, il agit sur $V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda$ et sur $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}}$ et $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G^\circ_{v_\lambda}}$ (puisque G_{v_λ} et $G^\circ_{v_\lambda}$ sont des sous-groupes distingués de P_λ).

On a donc une action du tore T sur $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}}$, et ses poids sont des poids de $V(\lambda)$ qui sont multiples de λ, car la restriction de l'action à T_{v_λ} est triviale :

$$[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}} = [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_0^{G_{v_\lambda}} \oplus [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_{-\lambda}^{G_{v_\lambda}}$$

(le poids λ n'apparaît pas car $V(\lambda)_\lambda$ est inclus dans $\mathfrak{g}.v_\lambda$). D'où, selon le lemme précédent

$$[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}} = [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_0^{G^\circ_{v_\lambda}} \oplus [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_{-\lambda}^{G^\circ_{v_\lambda}}$$

car T_{v_λ} agit trivialement sur le membre de droite.

Ainsi, on a $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}} = [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_0^{\mathfrak{g}_{v_\lambda}} \oplus [V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_{-\lambda}^{\mathfrak{g}_{v_\lambda}}$

On en déduit alors la proposition. En effet, on a :

$$\mathfrak{g}_{v_\lambda} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{t}_{v_\lambda} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_+,\ \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

Tout vecteur de poids $-\lambda$ est invariant par les algèbres de Lie $\mathfrak{t}_{v_\lambda}$ et $\bigoplus_{\alpha \in R_+,\ \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, et tout vecteur de poids 0 aussi s'il est invariant par $\mathfrak{u}$. $\square$

On obtient maintenant une condition nécessaire pour que l'espace tangent soit non nul :

Proposition 1.9.
Si $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_0^U \neq 0$*, alors* λ *s'écrit* $\lambda = \alpha + \beta$ *où* $\alpha \in S$ *et* $\beta \in R_+$*.*
Si $[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_{-\lambda}^U \neq 0$*, alors* λ *s'écrit* $\lambda = \frac{\alpha+\beta}{2}$ *où* $\alpha \in S$ *et* $\beta \in R_+$*.*

Preuve. Soit $v \in V(\lambda)_0$ dont la classe dans $V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda$ est un U-invariant non nul. On exprime cela à l'aide de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ de U :

$$\mathfrak{u}v \subseteq \mathfrak{g}v_\lambda \text{ et } v \notin \mathfrak{g}v_\lambda.$$

Comme $v \notin V(\lambda)^U$, il existe une racine simple α telle que $e_\alpha v \neq 0$. Donc $e_\alpha v$ est un T-vecteur propre de $\mathfrak{g}.v_\lambda$. Si $e_\alpha v$ était proportionnel à v_λ, alors $v \in V(\lambda)_{\lambda-\alpha} = \mathfrak{g}_{-\alpha}.v_\lambda$: une contradiction. Donc il existe une racine positive β, telle que $e_\alpha v$ est proportionnel à $e_{-\beta}v_\lambda$. En considérant les poids, on obtient : $\alpha = -\beta + \lambda$.

On vérifie de même la seconde implication. $\square$

Proposition 1.10. *Supposons l'espace tangent à* H_λ *en* C_λ *non nul, et* G *semi-simple. Alors l'image de* G *dans* $\mathrm{GL}(V(\lambda))$ *est simple ou de type* $A_1 \times A_1$*.*

Preuve.
L'algèbre de Lie de G est un produit d'algèbres de Lie simples : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times ... \times \mathfrak{g}_r$, avec $r \geq 1$. Celle de U s'écrit : $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \times ... \times \mathfrak{u}_r$, avec $\mathfrak{u}_j \subseteq \mathfrak{g}_j$.

La donnée du poids dominant λ de $\mathfrak{g}$ revient à celle d'un poids dominant λ_i de $\mathfrak{g}_i$ pour tout i, et

$$V(\lambda) = V(\lambda_1) \otimes_{\mathbb{C}} ... \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda_r).$$

On peut supposer que tous les λ_i sont non nuls.

D'apres la proposition précédente, λ est somme ou demi-somme de deux racines, on peut donc se limiter au cas où $r = 1$ ou 2. Le cas $r = 1$ correspond au cas où G est simple ; supposons donc que $r = 2$, et que l'espace tangent en C_λ est non nul.

Selon la proposition 1.8, il existe un vecteur non nul v appartenant à $V(\lambda)_0$ ou $V(\lambda)_{-\lambda}$ qui est U-invariant modulo $\mathfrak{g}.v_\lambda$.

Le vecteur v n'est invariant ni par $\mathfrak{u}_1$, ni par $\mathfrak{u}_2$. Donc il existe une racine simple α_1 de $\mathfrak{g}_1$ (resp. α_2 de $\mathfrak{g}_2$) telle que : $e_{\alpha_1}.v \neq 0$ (resp. $e_{\alpha_2}.v \neq 0$). Comme $e_{\alpha_1}.v$ (resp. $e_{\alpha_2}.v$) est dans $\mathfrak{g}.v_\lambda$, il existe une racine β_1 telle que $e_{\alpha_1}.v$ est proportionnel à $e_{-\beta_1}.v_\lambda$ (resp. une racine β_2 telle que $e_{\alpha_2}.v$ est proportionnel à $e_{-\beta_2}.v_\lambda$).

Supposons que v appartient à $V(\lambda)_0$. En considérant les poids, on a

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \lambda,$$

donc β_1 est en fait une racine de $\mathfrak{g}_2$, et β_2 une racine de $\mathfrak{g}_1$. On a donc, avec des notations évidentes

$$(\alpha_1, 0) + (0, \beta_1) = (\lambda_1, \lambda_2) \text{ et } (0, \alpha_2) + (\beta_2, 0) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Donc

$$\lambda_1 = \alpha_1 \text{ et } \lambda_2 = \alpha_2.$$

Lorsque v appartient à $V(\lambda)_{-\lambda}$ on en déduit de même

$$\lambda_1 = \alpha_1/2 \text{ et } \lambda_2 = \alpha_2/2.$$

Dans les deux cas, les algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ admettent une racine simple qui est un poids dominant : elles sont donc de type A_1. □

1.3.1 Cas restant à étudier

Selon la proposition 1.9, pour que l'espace tangent en C_λ soit non nul, il faut que λ soit somme ou demi-somme d'une racine simple et d'une racine positive. On dresse ci-dessous la liste des cas où l'espace tangent peut être non nul, obtenue en calculant toutes les sommes et demi-sommes d'une racine simple et d'une racine positive, puis en ne gardant que celles qui sont des poids dominants.

Les notations sont celles de [Bo1].

On donne λ sous la forme d'une somme de poids fondamentaux, et sous la forme de somme ou demi-somme d'une racine simple et d'une racine positive de toutes les façons possibles.

(C1) G est simple de type A_1,
$\lambda = 2\omega_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_1)$

(C2) G est simple de type A_1,
$\lambda = 4\omega_1 = \alpha_1 + \alpha_1$

(C3) G est simple de type A_2,
$\lambda = 3\omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)$

(C4) G est simple de type A_2,
$\lambda = 3\omega_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)$

(C5) G est simple de type A_3,
$\lambda = \omega_2 = \frac{1}{2}[\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)]$

(C6) G est simple de type A_3,
$\lambda = 2\omega_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

(C7) G est simple de type A_n, $n \geq 2$,
$\lambda = \omega_1 + \omega_n = \alpha_1 + (\alpha_2 + ... + \alpha_n) = \alpha_n + (\alpha_1 + ... + \alpha_{n-1})$

(C8) G est simple de type B_2,
$\lambda = \omega_2 = \frac{1}{2}[\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)]$

(C9) G est simple de type B_2,
$\lambda = 2\omega_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)$

(C10) G est simple de type B_3,
$\lambda = \omega_3 = \frac{1}{2}[\alpha_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)]$

(C11) G est simple de type B_3,
$\lambda = 2\omega_3 = \alpha_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)$

(C12) G est simple de type B_n, $n \geq 3$,
$\lambda = \omega_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2(\alpha_3 + ... + \alpha_n))$

(C13) G est simple de type B_n, $n \geq 2$,
$\lambda = \omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_2 + ... + \alpha_n) = \alpha_n + (\alpha_1 + ... + \alpha_{n-1})$
$= \frac{1}{2}[\alpha_1 + (\alpha_1 + 2(\alpha_2 + ... + \alpha_n))]$

(C14) G est simple de type B_n, $n \geq 2$,
$\lambda = 2\omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + 2(\alpha_2 + ... + \alpha_n))$

(C15) G est simple de type C_n, $n \geq 3$,
$\lambda = \omega_1 = \frac{1}{2}[\alpha_1 + (\alpha_1 + 2(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}) + \alpha_n)]$

(C16) G est simple de type C_n, $n \geq 3$,
$\lambda = 2\omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + 2(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}) + \alpha_n)$

(C17) G est simple de type C_n, $n \geq 3$,
$\lambda = \omega_2 = \alpha_1 + (2(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}) + \alpha_n)$
$= \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2(\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}) + \alpha_n)$

(C18) G est simple de type D_4,
$\lambda = \omega_3 = \frac{1}{2}[\alpha_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)]$

(C19) G est simple de type D_4,
$\lambda = \omega_4 = \frac{1}{2}[\alpha_4 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)]$

(C20) G est simple de type D_4,
$\lambda = 2\omega_3 = \alpha_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$

(C21) G est simple de type D_4,
$\lambda = 2\omega_4 = \alpha_4 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$

(C22) G est simple de type D_n, $n \geq 4$,
$\lambda = \omega_1 = \frac{1}{2}[\alpha_1 + (\alpha_1 + 2(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-2}) + \alpha_{n-1} + \alpha_n)]$

(C23) G est simple de type D_n, $n \geq 4$,
$\lambda = 2\omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + 2(\alpha_2 + ... + \alpha_{n-2}) + \alpha_{n-1} + \alpha_n)$

(C24) G est simple de type D_n, $n \geq 4$,
$\lambda = \omega_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2(\alpha_3 + ... + \alpha_{n-2}) + \alpha_{n-1} + \alpha_n)$

(C25) G est simple de type E_6,
$\lambda = \omega_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6)$

(C26) G est simple de type E_7,
$\lambda = \omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7)$

(C27) G est simple de type E_8,
$\lambda = \omega_8 = \alpha_8 + (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + \alpha_8)$

(C28) G est simple de type F_4,
$\lambda = \omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4)$

(C29) G est simple de type F_4,
$\lambda = \omega_4 = \alpha_3 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4) = \alpha_4 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4)$

(C30) G est simple de type G_2,
$\lambda = \omega_1 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2}[\alpha_1 + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)]$

(C31) G est simple de type G_2,
$\lambda = 2\omega_1 = \alpha_1 + (3\alpha_1 + 2\alpha_2)$

(C32) G est simple de type G_2,
$\lambda = \omega_2 = \alpha_2 + (3\alpha_1 + \alpha_2)$

(C33) G est semi-simple de type $A_1 \times A_1$,
$\lambda = (\omega_1, \omega_1) = \frac{1}{2}[(\alpha_1, 0) + (0, \alpha_1)]$

(C34) G est semi-simple de type $A_1 \times A_1$,
$\lambda = (2\omega_1, 2\omega_1) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_1)$

Tous les cas se traitent de la même manière : selon la proposition 1.8, il s'agit de calculer

$$\dim[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_0^U \text{ et } \dim[V(\lambda)/\mathfrak{g}.v_\lambda]_{-\lambda}^U.$$

Des connaissances élémentaires sur les modules irréductibles (pour lesquelles on renvoit à [Serr]) permettent de mener à bien le calcul. A titre d'exemples, on traite quelques cas représentatifs dans les sections 1.3.2 à 1.3.4.

1.3.2 Cas de la représentation adjointe d'un groupe simple

Il s'agit des cas (C1), (C7), (C9), (C12), (C16), (C25), (C26), (C27), (C28) et (C32).

On a $V(\lambda) \cong \mathfrak{g}$ et λ est la plus grande racine.

1) Le cas (C1) où G est de type A_1 se traite à part : $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre de Lie des matrices 2×2 de trace nulle. On pose :

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice x est un vecteur de plus grand poids : l'espace tangent est isomorphe à

$$[\mathfrak{g}/\mathfrak{g}.x]_{-\lambda}^U = [\mathfrak{g}/(\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}h)]_{-\lambda}^U \cong \mathbb{C}y.$$

Il est donc de dimension 1.

2) Dans les autres cas, λ n'est pas demi-somme d'une racine simple et d'une racine positive. L'espace tangent est donc isomorphe à $[\mathfrak{g}/\mathfrak{g}.v_\lambda]_0^U$.

Posons

$$E := \{\gamma \in R \mid \exists \delta \in R, \gamma + \delta = \lambda\}.$$

On a alors, en notant h_λ l'élément de $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}]$ tel que $\lambda(h_\lambda) = 2$:

$$\mathfrak{g}v_\lambda = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_\lambda] = \mathfrak{g}_\lambda \oplus \mathbb{C}h_\lambda \oplus \bigoplus_{\gamma \in E} \mathfrak{g}_\gamma.$$

Le sous-espace de poids nul de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}.v_\lambda$ est isomorphe à $\mathfrak{t}/\mathbb{C}h_\lambda$, et l'espace tangent est isomorphe à

$$\{t \in \mathfrak{t} \mid \forall \alpha \in S, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{t}] \subseteq \mathfrak{g}v_\lambda\}/\mathbb{C}h_\lambda,$$

donc à

$$\{t \in \mathfrak{t} \mid \forall \alpha \in S \setminus E, \alpha(t) = 0\}/\mathbb{C}h_\lambda.$$

Il est donc de dimension $\dim \mathfrak{t} - \operatorname{card}(S \setminus E) - 1$. Or $\dim \mathfrak{t} = \operatorname{card} S$. La dimension de l'espace tangent est donc $\operatorname{card}(S \cap E) - 1$.

Comme $\operatorname{card}(S \cap E)$ est le nombre de façons d'écrire λ comme somme d'une racine simple et d'une racine positive, on conclut à l'aide de la liste 1.3.4 que l'espace tangent est de dimension 1 dans le cas où G est de type A_n, et 0 dans les autres cas.

1.3.3 Cas (C23)

Ici, $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2n)$ des matrices de taille $2n \times 2n$ antisymétriques par rapport à la seconde diagonale. On a une action naturelle de $\mathfrak{so}(2n)$ sur $\mathbb{C}^{2n}$, dont la base canonique est notée $(e_1, ..., e_n, e_{-n}, ..., e_{-1})$. Le module simple $V(2\omega_1)$ peut être vu comme un quotient du carré symétrique de $\mathbb{C}^{2n}$:

$$V(2\omega_1) = S^2\mathbb{C}^{2n}/\langle e_1e_{-1} + ... + e_ne_{-n}\rangle.$$

Il s'agit de calculer la dimension de $[V(2\omega_1)/\mathfrak{g}v_{2\omega_1}]_0^U$.

Notons $\pi : V(2\omega_1) \longrightarrow V(2\omega_1)/\mathfrak{g}v_{2\omega_1}$ la surjection canonique. On remarque que π induit des isomorphismes :

$$\pi(V(2\omega_1)_0) \cong V(2\omega_1)_0,\ \pi(V(2\omega_1)_{\alpha_2}) \cong V(2\omega_1)_{\alpha_2},\ \dots,\ \pi(V(2\omega_1)_{\alpha_n}) \cong V(2\omega_1)_{\alpha_n}.$$

Par contre, $\pi(V(2\omega_1)_{\alpha_1}) = 0$. On a donc, en notant $\langle A\rangle$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par une partie A de $\mathfrak{g}$:

$$[\pi(V(2\omega_1))]_0^U \cong V(2\omega_1)_0^{\langle e_{\alpha_2},\dots,e_{\alpha_n}\rangle} = V(2\omega_1)_0^{\langle e_{\alpha_2},\dots,e_{\alpha_{n-1}}\rangle}$$

car $e_{\alpha_{n-1}}$ et e_{α_n} stabilisent les mêmes éléments dans $V(2\omega_1)_0$.

Or on sait que $V(2\omega_1)_0$ est de dimension $n-1$, et $V(2\omega_1)_{\alpha_1}, \dots, V(2\omega_1)_{\alpha_{n-1}}$ sont de dimension 1.

Comme $V(2\omega_1)_0^{\langle e_{\alpha_1},\dots,e_{\alpha_{n-1}}\rangle} = V(2\omega_1)_0^U = \{0\}$, on en déduit que l'espace vectoriel $V(2\omega_1)_0^{\langle e_{\alpha_2},\dots,e_{\alpha_{n-1}}\rangle}$ est de dimension 1.

Donc l'espace tangent est de dimension 1.

1.3.4 Cas (C31)

Les poids de $V(2\omega_1)$ sont :

– 0 avec multiplicité 3

– α_1 et ses conjugués sous l'action du groupe de Weyl, chacun avec multiplicité 2

– α_2 et ses conjugués, chacun avec multiplicité 1

– $2\omega_1 = 4\alpha_1 + 2\alpha_2$ et ses conjugués, chacun avec multiplicité 1.

Comme $V(2\omega_1)_0^U = \{0\}$, l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \phi : V(2\omega_1)_0 & \rightarrow & V(2\omega_1)_{\alpha_1} \oplus V(2\omega_1)_{\alpha_2} \\ v & \mapsto & (e_{\alpha_1}v, e_{\alpha_2}v) \end{array}$$

est injective, donc bijective.

Notons $\pi : V(2\omega_1) \longrightarrow V(2\omega_1)/\mathfrak{g}.v_{2\omega_1}$ la surjection canonique. On remarque que π induit des isomorphismes

$$\pi(V(2\omega_1)_0) \cong V(2\omega_1)_0 \text{ et } \pi(V(2\omega_1)_{\alpha_2}) \cong V(2\omega_1)_{\alpha_2}.$$

Par contre, $\dim \pi(V(2\omega_1)_{\alpha_1}) = 1$.

On en déduit que l'application quotient

$$\bar{\phi} : \pi(V(2\omega_1)_0) \rightarrow \pi(V(2\omega_1)_{\alpha_1}) \oplus \pi(V(2\omega_1)_{\alpha_2})$$

a pour noyau $\pi(V(2\omega_1)_0)^U$, de dimension 1.

Donc l'espace tangent est de dimension 1.

1.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, on ramène la démonstration du théorème 1.1, à des résultats obtenus au §2.4 (de façon indépendante). On commence par énoncer sans démonstration une conséquence immédiate du lemme de Nakayama :

Lemme 1.11. *Soit $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ un anneau gradué par $\mathbb{N}$. On suppose l'anneau A_0 local d'idéal maximal $\mathcal{M}_0$. Notons $\mathcal{M}$ l'idéal maximal $\mathcal{M}_0 \oplus \bigoplus_{d=1}^{\infty} A_d$ de A. Soit $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ un A-module gradué de type fini. Si $\mathcal{M}.M = M$, alors $M = 0$.*

Le schéma H_λ est presque déterminé par le corollaire suivant du corollaire 1.5 et de la proposition 1.6 :

Corollaire 1.12. *Le schéma H_λ est soit une droite affine, soit un point épaissi* $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^N)$*, pour un entier N.*

Preuve. On garde les notations du corollaire 1.5. L'idéal $\mathcal{M}$ de A correspondant au point C_λ de H_λ est l'unique idéal maximal de A fixé par $\mathbb{G}_m$, donc on a

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \bigoplus_{d=1}^{\infty} A_d$$

où $\mathcal{M}_0$ est l'idéal maximal de A_0. Selon la proposition 1.6, l'espace vectoriel $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ est de dimension inférieure ou égale à 1. Il existe donc un élément homogène f de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = Af + \mathcal{M}^2$. Selon le lemme précédent, $\mathcal{M} = Af$. Or A s'écrit, comme espace vectoriel $A = \mathbb{C} \oplus \mathcal{M}$, donc on a $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}f^2 \oplus ... = \mathbb{C}[f]$. Ainsi, l'algèbre A est monogène, et comme son spectre est connexe (proposition 1.3), on en déduit le corollaire. □

Le théorème 1.1 est donc démontré dans les cas où l'espace tangent est nul. Dans les cas où il est de dimension 1, il reste à exclure les points épaissis. On va voir (§2.4) qu'à chaque fois que l'espace tangent à H_λ en C_λ est de dimension 1, il existe d'autres points fermés que C_λ dans H_λ, et celui-ci est donc une droite affine.

2 Algèbres de Jordan simples et familles universelles

On va maintenant relier la classification *(H)* du théorème 1.1 à deux classifications déjà connues :

- celle notée *(J)* des algèbres de Jordan simples (théorème 2.1)
- et une classification notée *(A)* de variétés projectives à deux orbites (théorème 2.2).

Pour cela, on va associer de façon naturelle

- aux objets de *(J)* des objets de *(A)* dans §2.3 (en considérant le cône des éléments de rang 1 des algèbres de Jordan simples)
- et aux objets de *(A)* des objets de *(H)* dans §2.4

On constatera alors que lors de ces deux opérations, tous les cas sont atteints. Ainsi, pour chacun des cas du théorème 1.1, on obtiendra à l'aide d'une algèbre de Jordan simple une déformation non triviale du cône C_λ dans $V(\lambda)$, qui sera en fait la famille universelle au dessus de H_λ (§2.5).

2.1 Classification des algèbres de Jordan simples

Pour plus de détails concernant les algèbres de Jordan, on renvoie à [Jac] ou [FaKo]. On appellera *algèbre de Jordan* (complexe) une $\mathbb{C}$-algèbre $(A,*)$ commutative unitaire de dimension finie (non nécessairemant associative) telle que

$$\forall a,b \in A,\ \ a^2*(a*b)=a*(a^2*b).$$

On peut montrer que A est associative relativement aux puissances (c'est-à-dire : toutes ses sous-algèbres monogènes sont associatives).

On peut alors définir le polynôme minimal d'un élément a de A : c'est le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{C}[X] \text{ tels que } P(a)=0\}$ de $\mathbb{C}[X]$. Un élément de A est dit *régulier* si le degré de son polynôme minimal est maximal. Les éléments réguliers forment un ouvert dense de A.

Il existe alors ([FaKo], prop II.2.1) des fonctions polynômiales $p_1,...,p_r$ sur A telles que si a est un élément régulier de A, son polynôme minimal est $X^r+p_1(a)X^{r-1}+...+p_r(a)$. Chaque p_i est alors homogène de degré i. On définit la trace et le déterminant sur A par :

$$\mathrm{tr} := -p_1 \text{ et } \det := (-1)^r p_r.$$

Dans la suite, on s'intéresse aux algèbres de Jordan *simples*, que l'on définit maintenant. Si a est un élément de A, on note $L(a): A \to A,\ b \mapsto a*b$ la multiplication par a. On note Tr la trace d'un endomorphisme $A \to A$. Une algèbre de Jordan A est *semi-simple* si la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} A\times A & \to & \mathbb{C} \\ (a,b) & \mapsto & \mathrm{Tr}\, L(a*b) \end{array}$$

est non dégénérée. Elle est dite *simple* si de plus elle n'admet pas d'idéaux non triviaux. (Dans ce cas, les formes linéaires $a \to \mathrm{Tr}\, L(a)$ et $a \to tr(a)$ sont en fait proportionnelles.)

Les matrices hermitiennes sur les complexifiées

$$R = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R},\ \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C},\ \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H},\ \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{O}$$

des algèbres de Hurwitz donnent des exemples d'algèbres de Jordan simples : on note $H_n(R)$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n\times n$ qui sont égales à la transposée de leur conjuguée. On munit $H_n(R)$ d'une structure d'algèbre en posant :

$$M_1 * M_2 = \frac{1}{2}(M_1M_2 + M_2M_1).$$

La classification des algèbres de Jordan simples est connue ([Jac], théorème 8 p 203) :

Théorème 2.1 (P.Jordan, J.von Neumann, E.Wigner). *Toute algèbre de Jordan simple est isomorphe à l'une des suivantes :*

(J1) $\mathbb{C}\oplus W$*, où* W *est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire non dégénérée* $\langle .,.\rangle$*. La loi de l'algèbre est donnée par la formule :* $(t_1,w_1)*(t_2,w_2)=(t_1t_2+\langle w_1,w_2\rangle, t_1w_2+t_2w_1)$.

(J2) $H_n(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R})$, $n\geq 3$
(J3) $H_n(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$, $n\geq 3$
(J4) $H_n(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H})$, $n\geq 3$
(J5) $H_3(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{O})$.

On définit enfin le *groupe de structure* d'une algèbre de Jordan simple A : c'est le groupe des automorphismes (d'espace vectoriel) de A qui conservent à un scalaire près le déterminant :

$$\mathrm{Str}(A) := \{g\in GL(A) \mid \exists u\in\mathbb{C}^*, \forall a\in A, \det(ga) = u\det(a)\}.$$

Il contient le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes d'algèbre de A. Les deux groupes $\mathrm{Aut}(A)$ et $\mathrm{Str}(A)$ sont des groupes algébriques réductifs (mais non connexes). En fait, $\mathrm{Aut}(A)^\circ$ est semi-simple, et $\mathrm{Str}(A)^\circ$ est de centre les homothéties.

2.2 Classification de variétés à deux orbites

Les espaces homogènes sous l'action d'un groupe réductif admettant une complétion équivariante par un diviseur homogène ont été classifiés par D. Akhiezer (voir [Ak1] ou [HuSn] ; la classification est retrouvée dans [Bri] par des méthodes algébriques). Dans le cas où le diviseur est ample, on a :

Théorème 2.2 (D.Akhiezer). *Soit Z une variété projective lisse. Soit D un diviseur ample de Z, et Ω son complémentaire. On suppose qu'il existe une action régulière d'un groupe algébrique affine connexe Γ sur Z sous laquelle Ω et D sont les orbites de Z.*

Soit G l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(Z)$, et H le stabilisateur d'un point de Ω. Alors, à revêtement fini de G près, on est dans un des cas suivants :

(A1) $G = SL(n+1), n\geq 1$, $H = GL(n)$ *et* $Z = \mathbb{P}^n\times(\mathbb{P}^n)^*$.
(A2) $G = SO(n), n\geq 3$, $H = SO(n-1)$ *et* $Z = Q(n-1)$.
(A3) $G = SO(n), n\geq 3$, $H = O(n-1)$ *et* $Z = \mathbb{P}^{n-1}$.
(A4) $G = Sp(2n), n\geq 2$, $H = Sp(2)\times Sp(2n-2)$ *et Z est la grassmanienne des 2-plans de* $\mathbb{C}^{2n}$.
(A5) $G = F_4$, $H = Spin(9)$ *et* $Z = E_6/P$ *en notant P le sous-groupe parabolique maximal de E_6 dont les racines simples sont $\alpha_2, ..., \alpha_n$ (notations de [Bo1]).*
(A6) $G = G_2$, $H = SL(3)$ *et* $Z = Q(6)$.
(A7) $G = G_2$, $H = N_G(SL(3))$ *et* $Z = \mathbb{P}^6$.
(A8) $G = Spin(7)$, $H = G_2$ *et* $Z = Q(7)$.
(A9) $G = SO(7)$, $H = G_2$ *et* $Z = \mathbb{P}^7$.

On a noté $Q(n)$ une quadrique projective lisse de dimension n.
Les actions de $SL(n+1)$, $SO(n)$ et $Sp(2n)$ sont les actions naturelles. Les actions de G_2, $Spin(7)$ et $SO(7)$ sont déduites des plongements $G_2\hookrightarrow SO(7)$ via la représentation de dimension 7 de G_2, et $Spin(7)\hookrightarrow SO(8)$ via la représentation spinorielle de $Spin(7)$.

2.3 Un lien entre les classifications (J) et (A)

Dans ce paragraphe, on rappelle une définition du cône des éléménts *de rang* 1 d'une algèbre de Jordan simple. La variété projective formée des droites de ce cône nous donne alors une variété à 2 orbites de la classification *(A)*; l'orbite ouverte de cette variété correspond aux éléments de trace non nulle.

On obtient au passage une bijection entre les classes d'isomorphisme des *algèbres de Jordan simples complexes* et les classes d'isomorphisme des *espaces symétriques de rang 1 complexes* (en effet, ceux-ci sont les quotients G/H, où G et H sont les groupes donnés dans les cas *(A1)* à *(A5)*).

La correspondance analogue dans le cas réel (entre les *algèbres de Jordan simples réelles* et les *espaces symétriques de rang 1 réels compacts*) est établie dans [Hi] ; dans ce cas, tout élément de rang 1 est de trace *non nulle*, c'est pourquoi l'espace symétrique des droites d'éléments de rang 1 (et de trace non nulle) est *compact*.

Soit A une algèbre de Jordan simple.

Notons Γ la composante neutre du groupe des automorphismes de A, et Γ' celle du groupe de structure de A :

$$\Gamma := \mathrm{Aut}(A)^\circ \subseteq \Gamma' := \mathrm{Str}(A)^\circ.$$

Notons $\mathbb{C}.1$ la droite engendrée par l'élément unité de A, et V le sous-espace vectoriel de A formé des éléments de trace nulle. Alors A est somme directe des deux sous-espaces vectoriels :

$$A = \mathbb{C}.1 \oplus V, \tag{4}$$

et cette décomposition est stable par Γ. On vérifie (grâce à la classification) que V est un Γ-module simple.

Notons D la Γ-orbite fermée dans $\mathbb{P}(V)$ et $\widetilde{D}$ le cône des vecteurs primitifs de V, c'est-à-dire le cône affine sur D.

On vérifie également que comme Γ'-module rationnel, A est simple ; notons Z la Γ'-orbite fermée dans $\mathbb{P}(A)$ et $\widetilde{Z}$ son cône des vecteurs primitifs de A. Les éléments (non nuls) de $\widetilde{Z}$ sont appelés *les éléments de rang* 1 de l'algèbre de Jordan A. Les éléments (non nuls) de $\widetilde{D}$ sont les éléments de rang 1 et de trace nulle.

On remarque que D est un diviseur ample de Z :

$$D = Z \cap \mathbb{P}(V) \subseteq Z \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}.1 \oplus V)$$

et on vérifie enfin que Γ agit transitivement sur D et sur $Z \setminus D$.

Ainsi, à toute algèbre de Jordan simple on fait correspondre un élément de la classification (A) en prenant comme groupe G le groupe Γ ; on peut aussi prendre comme groupe G un sous-groupe fermé de Γ pourvu qu'il agisse transitivement sur D et sur $Z \setminus D$.

Précisément :

- à partir de *(J1)*, on obtient le cas *(A2)* quand G est le groupe $\Gamma = SO(W)$, mais aussi, en considérant des sous-groupes stricts de Γ, le cas *(A6)* quand W est de dimension 7 et $G = G_2$ et le cas *(A8)* quand W est de dimension 8 et $G = \mathrm{Spin}(7)$.

– à partir de *(J2)*, on obtient le cas *(A3)* quand G est le groupe $\Gamma = SO(n)$, mais aussi, en considérant des sous-groupes stricts de Γ, les cas *(A7)* quand $n = 7$ et *(A9)* quand $n = 8$.
– à partir de *(J3)*, on obtient le cas *(A1)* avec $G = \Gamma = \mathrm{PGL}(n)$.
– à partir de *(J4)*, on obtient le cas *(A4)* avec $G = \Gamma = \mathrm{Sp}(2n)$.
– à partir de *(J5)*, on obtient le cas *(A5)* avec $G = \Gamma = F_4$.

On voit donc que tous les cas du théorème 2.2 peuvent être obtenus à partir des algèbres de Jordan simples.

2.4 Un lien entre les classifications (A) et (H)

Supposons que le groupe réductif connexe G agit sur une variété projective lisse Z, et que ses orbites sont un diviseur ample D et son complémentaire Ω (de sorte que l'on est dans la situation du théorème 2.2).

Alors D est en fait très ample, et si l'on plonge Z dans $\mathbb{P}(\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(D))^*)$ en associant à tout $z \in Z$ l'hyperplan des sections globales qui s'annulent en z, le cône affine au-dessus de Z dans $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(D))^*$ est normal (car selon le §2.3, c'est le cône des vecteurs primitifs d'un G-module simple). Ce cône affine est donc le spectre de l'algèbre graduée

$$R := \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(dD)),$$

où l'on note $\mathcal{O}_Z(dD)$ le faisceau inversible sur Z associé au diviseur dD, et $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z(dD)) =: R_d$ l'espace de ses sections globales. On note $\sigma_D \in R_1$ la section canonique de $\mathcal{O}_Z(D)$. L'algèbre R est naturellement munie d'une structure de G-algèbre rationnelle ; on munit $\widetilde{Z}$ de l'action de G correspondante (qui induit celle de G sur $Z = \operatorname{Proj} R$).

Proposition 2.3. *Il existe un poids dominant λ tel que R_1 se décompose comme G-module sous la forme*

$$R_1 = \mathbb{C}\sigma_D \oplus V(\lambda)^*.$$

Notons f l'immersion fermée correspondant au morphisme surjectif d'algèbres $\mathrm{Sym}(\mathbb{C}\sigma_D \oplus V(\lambda)^*) \longrightarrow R$ et π le morphisme donné par la fonction régulière σ_D : on a un diagramme commutatif de morphismes équivariants

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{A}^1 \times V(\lambda) \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \mathbb{A}^1 & \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{A}^1$ est muni de l'action triviale de G. De plus $\pi : \widetilde{Z} \longrightarrow \mathbb{A}^1$ est une famille de fonction de Hilbert h_λ et la fibre de π en $0 \in \mathbb{A}^1$ est le cône des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$. Les autres fibres $\pi^{-1}(t)$, $t \neq 0$ sont isomorphes à l'orbite ouverte Ω.

Preuve.

Comme D est complet et homogène sous l'action de G, il est isomorphe à un quotient G/P, où P est un sous-groupe parabolique de G contenant B. On a donc un plongement $i : G/P \hookrightarrow Z$. L'image réciproque de $\mathcal{O}_Z(D)$ par i est un faisceau inversible ample sur G/P : elle est donc isomorphe au faisceau $\mathcal{L}_\lambda$ pour un certain poids dominant λ.

On a une suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-D) \xrightarrow{\sigma_D} \mathcal{O}_Z \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{G/P} \longrightarrow 0.$$

On la tensorise par $\mathcal{O}_Z(dD)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z((d-1)D) \xrightarrow{\sigma_D} \mathcal{O}_Z(dD) \longrightarrow i_*\mathcal{L}_{d\lambda} \longrightarrow 0.$$

On a donc une suite exacte de G-modules de sections globales :

$$0 \longrightarrow R_{d-1} \xrightarrow{\sigma_D} R_d \xrightarrow{f_d} V(d\lambda^*). \tag{5}$$

Lorsque $d = 1$, la suite (5) est

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\sigma_D} R_1 \xrightarrow{f_1} V(\lambda^*).$$

Comme Z se plonge dans $\mathbb{P}(R_1^*)$, l'espace vectoriel R_1 n'est pas de dimension 1. De plus $V(\lambda)^*$ est un G-module simple, donc le morphisme f_1 est surjectif, et on en déduit le premier point de la proposition.

Montrons que le morphisme f_d est surjectif pour tout entier d. Comme R_1 contient un B-vecteur propre de poids λ^*, R_d contient un B-vecteur propre de poids $d\lambda^*$, et il contient donc un G-module simple isomorphe à $V(d\lambda^*)$. Or en considérant la suite exacte (5) pour tout $d' < d$, on remarque que R_{d-1} est un sous-G-module de $\bigoplus_{d=0}^{d-1} V(d\lambda^*)$, d'où l'assertion.

(On peut retrouver la surjectivité des f_d par un argument cohomologique. En effet, selon le §2.3, la variété Z est une variété de drapeaux pour l'action d'un groupe G' réductif connexe, que l'on peut supposer simplement connexe quitte à le remplacer par un revêtement fini. L'algèbre des fonctions régulières sur G' est alors factorielle, et le groupe de Picard de G' est nul. Selon [KnKrVu], prop 3.2 (i), tout faisceau inversible sur Z est donc linéarisable. On peut donc appliquer le théorème de Borel-Weil-Bott ([Ak2] p 113) au faisceau inversible $\mathcal{O}_Z((d-1)D)$. Comme celui-ci est ample, on obtient $H^1(Z, \mathcal{O}_Z((d-1)D)) = 0$, d'où le résultat.)

La fibre de π au dessus de 0 est le sous-cône de $\widetilde{Z}$ d'algèbre affine graduée $R/\sigma_D R$. D'après ce qui précède, on a un isomorphisme de G-modules

$$R/\sigma_D R \simeq \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} V(d\lambda^*).$$

La fibre au dessus de 0 est donc le cône des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$, selon la proposition 1.3(a).

La fibre au dessus de $t \neq 0$ est la section de Z par l'hyperplan affine $\{\sigma_D = t\}$, donc est isomorphe à l'ouvert Ω. Enfin le morphisme π est plat car R est un $\mathbb{C}[\sigma_D]$-module sans torsion : le morphisme π est donc bien une famille de fonction de Hilbert h_λ. $\square$

Remarque 2.4. La déformation π ainsi obtenue est toujours non triviale, car les fibres $\{\pi^{-1}(t), t \neq 0\}$ sont homogènes pour l'action de G, contrairement à $\pi^{-1}(0)$.

On associe ainsi à chaque objet de *(A)* un schéma de Hilbert invariant de la classification *(H)*, et on constate que l'on obtient ainsi toute cette classification :

– Le cas *(H2)* provient du cas *(A1)*, avec $n \geq 2$.
– Le cas *(H1)* (resp. *(H4)*, *(H6)*, *(H9)*) provient des cas *(A2)* et *(A3)*, avec $n = 3$ (resp. n impair supérieur à 5, n pair supérieur à 6, $n = 4$).
– Le cas *(H3)* provient des cas *(A8)* et *(A9)*.
– Le cas *(H5)* provient du cas *(A4)*, avec $n \geq 3$.
– Le cas *(H7)* provient du cas *(A5)*.
– Le cas *(H8)* provient des cas *(A6)* et *(A7)*.

En particulier, on en déduit dans chacun des cas l'existence d'un point de H_λ distinct de C_λ, comme annoncé au §1.4.

2.5 Construction des familles universelles

Plaçons-nous dans l'un des cas du théorème 1.1 : le schéma de Hilbert invariant H_λ est isomorphe à la droite affine. Il résulte des §2.3 et 2.4 qu'on obtient une déformation de C_λ à partir d'une (unique) algèbre de Jordan simple A, de la façon suivante. On note $\widetilde{Z}$ le cône des éléments de rang 1 de A, et i l'inclusion $\widetilde{Z} \subseteq A$. Le morphisme donné par la restriction de la trace de A à $\widetilde{Z}$ est noté π_λ. Le diagramme analogue à celui de la proposition 2.3 est alors :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Z} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\pi_\lambda"'] & & A \simeq \mathbb{A}^1 \times V(\lambda) \arrow[dl, "pr_1"] \\
& \mathbb{A}^1 &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.5. *Si A n'est pas de type (J1), la famille π_λ est la famille universelle au dessus de $H_\lambda \simeq \mathbb{A}^1$.*
Sinon on a $A = \mathbb{C} \oplus W$; la famille universelle est alors, avec des notations évidentes

$$\begin{tikzcd}
\{(t,w) \in \mathbb{A}^1 \times W \mid t = \langle w,w \rangle\} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathbb{A}^1 \times W \arrow[dl, "pr_1"] \\
& \mathbb{A}^1 &
\end{tikzcd}$$

Preuve. Les familles de la proposition sont les images inverses par un (unique) morphisme $f : \mathbb{A}^1 \to H_\lambda$ de la famille universelle (car ce sont bien des familles de fonction de Hilbert h_λ).

On va montrer que f est injectif ; comme H_λ est isomorphe à $\mathbb{A}^1$, on en conclura que f est un isomorphisme, et la proposition sera démontrée.

L'injectivité de f signifie que les fibres des familles de sous-schémas considérées sont deux à deux distinctes.

Cela est clair dans le cas où A est de type *(J1)* : la fibre de la famille au dessus de $t \in \mathbb{A}^1$ est la sous-variété $\{w \in W \mid t = \langle w, w \rangle \}$.

Dans le cas où A n'est pas de type *(J1)*, on vérifie que son élément unité n'est pas somme de deux éléments de rang 1.
Le module simple $V(\lambda)$ est l'espace V de la décomposition (2). La fibre de π_λ au dessus de $t \in \mathbb{A}^1$ est

$$\{a - t.1 \mid a \in \widetilde{Z} \text{ et } \operatorname{tr}(a) = t\} \subseteq V.$$

Supposons que les fibres de π_λ au dessus de t et t' soient égales : on peut alors écrire $a - t.1 = a' - t'.1$, donc $(t - t').1 = a' - a$, donc $t = t'$.

Le morphisme f est donc bien injectif. $\square$

Le second cas de la proposition correspond aux cas *(H1)*,*(H4)*,*(H6)*,*(H9)* où $G = \mathrm{SO}(W)$ et $V(\lambda) = W$, ainsi qu'au cas *(H8)* où $G = G_2$ et $V(\lambda) = W$ est de dimension 7, et au cas *(H3)* où $G = \mathrm{Spin}(7)$ et $V(\lambda) = W$ est de dimension 8.

3 Rigidité des cônes de vecteurs primitifs

On sait ([Ha], ex 9.8 p 267) que les déformations infinitésimales de C_λ sont classifiées par un $\mathbb{C}$-espace vectoriel noté $T^1(C_\lambda)$. Comme C_λ est une G-variété, l'espace vectoriel $T^1(C_\lambda)$ est un G-module rationnel ([Ri]) ; on le note dans la suite T^1_λ.

On voit facilement que l'espace des éléments G-invariants de T^1_λ est en fait l'espace tangent en C_λ au schéma de Hilbert invariant (proposition 3.4) ; il est donc déterminé par le théorème 1.1. Dans cette partie, on détermine complètement le G-module T^1_λ :

Théorème 3.1. *L'espace T^1_λ des déformations infinitésimales de C_λ est nul, sauf dans les cas suivants :*

- *Si l'on est dans les cas (H2) à (H9) du théorème 1.1, alors $T^1_\lambda = V(0)$.*
- *Si $G = \mathrm{SL}(2)$ et $m \geq 2$ est un entier, alors $T^1_m = V(m-2) \oplus V(m-4)$ (on indexe les poids de $\mathrm{SL}(2)$ par les entiers).*
- *Si le groupe s'écrit $G = \mathrm{SL}(2) \times H$ et le module simple $V(\lambda) = V_{\mathrm{SL}(2)}(m) \otimes W$, où $V_{\mathrm{SL}(2)}(m)$ est le $\mathrm{SL}(2)$-module simple de plus grand poids m, et $(H, W) = (\mathrm{SL}(V), V)$, $(\mathrm{SL}(V), V^*)$ ou $(\mathrm{Sp}(V), V)$ (dans ce dernier cas, V est un espace vectoriel de dimension paire supérieure ou égale à 2), alors $T^1_\lambda = V_{\mathrm{SL}(2)}(m-2) \otimes W$.*

et dans les cas obtenus à partir d'un cas parmi les précédents par factorisation.

Remarques 3.2. (1) On retrouve ainsi des faits déjà connus :

- Le cône affine sur le plongement de Segre de la variété $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ (dans $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$) est rigide quand $m + n \geq 3$ (voir par exemple [KlLa] thm 2.2.8).
- Pinkham a déterminé dans ([Pi]) l'espace T^1_m quand C_m est le cône affine sur la courbe rationnelle normale de degré m dans $\mathbb{P}^m$; en particulier, il a montré que $\dim(T^1_m) = 2m - 4$ (pour $m \geq 4$). Il a aussi montré que si $m \geq 5$, la déformation verselle est irréductible, de dimension $m - 1$, et lisse hors de l'origine. Si $m = 4$, elle a deux composantes de dimensions 3 et 1 qui se rencontrent transversalement à l'origine.

Le cône de vecteurs primitifs C_4 est exceptionnel, car c'est le seul dont l'espace des déformations infinitésimales admet à la fois une partie G-invariante et une partie non invariante : $T_4^1 = V(0) \oplus V(2)$. La direction G-invariante de l'espace T_4^1 correspond à la composante de dimension 1 de la déformation verselle.

Ainsi, on constate que dans tous les cas où le schéma de Hilbert invariant H_λ n'est pas réduit à un point, il donne une composante irréductible de la déformation verselle de C_λ.

- Svanes a montré dans [Sv1] et [Sv2] que les cônes affines sur les plus petits plongements des variétés de drapeaux de $\mathrm{SL}(n)$ (qui correspondent au cas où G est simple de type A_n et λ est une somme de poids fondamentaux) sont rigides, à l'exception des cas *(H2)* et, pour $n = 3$, *(H6)* du théorème 1.1.

(2) Les couples (H, W) du troisième cas du théorème peuvent être décrits géométriquement : ce sont ceux où le groupe H agit transitivement sur les droites du module W (cela résulte par exemple de [Ak2] thm2 p75).

La démonstration du théorème 3.1 occupe les parties 3.1 à 3.3. On rappelle d'abord quelques faits connus.

Notons $\mathcal{T}_{C_\lambda}$ et $\mathcal{T}_{V(\lambda)}$ les faisceaux tangents respectifs de C_λ et $V(\lambda)$, et $\mathcal{N}_{C_\lambda}$ le faisceau normal de C_λ dans $V(\lambda)$. On a $\mathcal{T}_{V(\lambda)} = \mathcal{O}_{V(\lambda)} \otimes V(\lambda)$. Comme C_λ est normal, $\mathcal{T}_{C_\lambda}$ et $\mathcal{N}_{C_\lambda}$ sont des faisceaux réflexifs.

Les déformations infinitésimales de C_λ se plongent en fait toutes dans $V(\lambda)$, et l'on a une suite exacte ([Ha], ex 9.8 p 267)

$$0 \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{T}_{C_\lambda}) \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{T}_{V(\lambda)}|_{C_\lambda}) \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{N}_{C_\lambda}) \longrightarrow T_\lambda^1 \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$0 \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{T}_{C_\lambda}) \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{O}_{C_\lambda}) \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{N}_{C_\lambda}) \longrightarrow T_\lambda^1 \longrightarrow 0. \tag{6}$$

On peut supposer C_λ de dimension supérieure ou égale à 2 ; on note $E_\lambda := C_\lambda \setminus \{0\}$ le cône épointé. La suite exacte ci-dessus s'identifie alors à la suivante (avec des notations analogues)

$$0 \longrightarrow H^0(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \longrightarrow H^0(E_\lambda, \mathcal{O}_{E_\lambda}) \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) \longrightarrow H^0(E_\lambda, \mathcal{N}_{E_\lambda}) \longrightarrow T_\lambda^1 \longrightarrow 0. \tag{7}$$

Or comme E_λ est lisse, on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{E_\lambda} \longrightarrow \mathcal{O}_{E_\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) \longrightarrow \mathcal{N}_{E_\lambda} \longrightarrow 0.$$

On en déduit la proposition suivante, due à Schlessinger ([Sc]) :

Proposition 3.3. *On a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow T_\lambda^1 \longrightarrow H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \longrightarrow H^1(E_\lambda, \mathcal{O}_{E_\lambda}) \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda).$$

3.1 Préliminaires

On commence par déterminer la partie invariante de l'espace T^1_λ :

Proposition 3.4. *On a un isomorphisme canonique*

$$(T^1_\lambda)^G \cong T_{C_\lambda} H_\lambda.$$

Ainsi, l'espace $(T^1_\lambda)^G$ est nul, sauf dans les cas (H1) à (H9) du théorème 1.1, où il est de dimension 1.

Preuve.
En prenant les G-invariants de (6), on obtient la suite exacte de G-modules de [AlBr], prop 1.13 :

$$0 \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{T}_{C_\lambda})^G \longrightarrow (H^0(C_\lambda, \mathcal{O}_{C_\lambda}) \otimes V(\lambda))^G \longrightarrow T_{C_\lambda} H_\lambda \longrightarrow (T^1_\lambda)^G \longrightarrow 0,$$

qui s'écrit dans notre cas ([AlBr], prop 1.15 (iii)) :

$$0 \longrightarrow [\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}} \longrightarrow V(\lambda)^{G_{v_\lambda}} \longrightarrow T_{C_\lambda} H_\lambda \longrightarrow (T^1_\lambda)^G \longrightarrow 0.$$

Comme ses deux premiers termes sont de dimension 1 :

$$[\mathfrak{g}.v_\lambda]^{G_{v_\lambda}} = V(\lambda)^{G_{v_\lambda}} = \mathbb{C} v_\lambda,$$

on en déduit le résultat. $\square$

Ainsi, on a montré que la partie G-invariante était bien celle annoncée dans le théorème 3.1. On va maintenant déterminer les autres composantes isotypiques de T^1_λ.

On note X_λ la variété de drapeaux G/P_λ, et $\pi : E_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ la surjection naturelle. On remarque que E_λ est l'espace total du faisceau $\mathcal{L}_\lambda$ privé de la section nulle, donc π est un morphisme affine lisse.

Proposition 3.5. *On a une suite exacte de faisceaux G-linéarisés sur X_λ :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_{d\lambda} \longrightarrow \pi_* \mathcal{T}_{E_\lambda} \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda} \longrightarrow 0,$$

donc une suite exacte de G-modules :

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda}) \to H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \to \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda}) \to \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^2(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda}). \tag{8}$$

Preuve.
Comme le morphisme π est lisse, on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_\pi \longrightarrow \mathcal{T}_{E_\lambda} \longrightarrow \pi^* \mathcal{T}_{X_\lambda} \longrightarrow 0.$$

On remarque que le faisceau $\mathcal{T}_\pi$ tangent à π est isomorphe à $\mathcal{O}_{E_\lambda}$. Puis, comme π est affine, on a

$$0 \longrightarrow \pi_*\mathcal{T}_\pi \longrightarrow \pi_*\mathcal{T}_{E_\lambda} \longrightarrow \pi_*\pi^*\mathcal{T}_{X_\lambda} \longrightarrow 0,$$

d'où la suite exacte de faisceaux annoncée, car $\pi_*\mathcal{T}_\pi \simeq \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{d\lambda}$, et, selon la formule de projection, $\pi_*\pi^*\mathcal{T}_{X_\lambda} \simeq \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda}$.

La suite exacte de G-modules donnée en découle aussi, car, comme π est affine, $H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \cong H^1(X_\lambda, \pi_*\mathcal{T}_{E_\lambda})$. □

La suite exacte (8) nous permettra de démontrer le théorème 3.1 dans certains cas, à l'aide du théorème de Borel-Weil-Bott ([Ak2], thm p113).

Notons Q_λ l'unique sous-groupe parabolique de G conjugué à P_λ et contenant le sous-groupe de Borel B^- opposé à B ; on voit naturellement Q_λ comme un point de $X_\lambda = G/P_\lambda$. Regardons, pour appliquer le théorème de Borel-Weil-Bott, quels sont les poids de l'action de T sur les fibres $\mathcal{L}_{d\lambda}|_{\{Q_\lambda\}}$ et $\mathcal{T}_{X_\lambda}|_{\{Q_\lambda\}} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{q}_\lambda$: le tore T agit sur le premier espace avec le poids $d\lambda^*$; les poids du second sont les racines positives de G qui ne sont pas des racines de Q_λ.

Si W est un Q_λ-module rationnel, on note $\mathcal{V}(W)$ le $\mathcal{O}_{X_\lambda}$-module G-linéarisé dont la fibre en Q_λ est W. On rappelle (voir [Gros] ou [Jan]) que l'espace des sections globales de $\mathcal{V}(W)$ est le G-module induit par le Q_λ-module W :

$$H^0(X_\lambda, \mathcal{V}(W)) = \mathrm{Ind}_{Q_\lambda}^G(W)$$

et les groupes de cohomologie de $\mathcal{V}(W)$ donnent les foncteurs dérivés à droite du foncteur $\mathrm{Ind}_{Q_\lambda}^G$:

$$H^j(X_\lambda, \mathcal{V}(W)) = R^j\,\mathrm{Ind}_{Q_\lambda}^G(W).$$

Dans toute la suite, on note simplement Ind le foncteur $\mathrm{Ind}_{Q_\lambda}^G$.
Si μ est un caractère de Q_λ, on définit le Q_λ-module

$$W[\mu] := \mathbb{C}_\mu \otimes_{\mathbb{C}} W,$$

où $\mathbb{C}_\mu$ est la droite où Q_λ opère avec le poids μ.

On note enfin $\star$ l'action tordue du groupe de Weyl sur Λ : si w est un élément du groupe de Weyl, et μ un poids, on pose $w \star \mu := w(\mu + \rho) - \rho$, où ρ est la demi-somme des racines positives.

Proposition 3.6. *Soit $d \in \mathbb{Z}$. Si l'espace $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda})$ est non nul, alors $V(\lambda)$ est en fait un* $\mathrm{SL}(2)$*-module, et l'action de G se factorise sous la forme $G \longrightarrow \mathrm{SL}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(V(\lambda))$.*

Preuve. Si $d \geq 0$, on sait que tous les groupes de cohomologie de $\mathcal{L}_{d\lambda}$ sont nuls sauf en degré 0.

Supposons $d < 0$. Selon le théorème de Borel-Weil-Bott, $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda})$ est nul ou irréductible, et on a $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda}) \simeq V(\mu)$ si et seulement si il existe une racine simple α et un poids dominant μ tels que

$$s_\alpha \star \mu = d\lambda^*,$$

en notant s_α la réflexion simple associée à α. On en déduit

$$\mu - d\lambda^* = (1 + \langle\alpha^\vee, \mu\rangle)\alpha.$$

La racine simple α est donc un poids dominant : c'est une racine simple de G isolée dans son diagramme de Dynkin. Notons $\omega_\alpha = \alpha/2$ le poids fondamental associé à α. Le poids $-d\lambda^*$ est proportionnel à ω_α, et $\lambda = \lambda^*$ aussi, d'où le résultat. □

Proposition 3.7. *Lorsque $d \geq 0$, on a $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda}) = 0$.*

Preuve. C'est une conséquence du fait suivant (*cf.* [Bro], thm2.2) : notons T^*X_λ le fibré cotangent de $X_\lambda = G/P_\lambda$, et $p : T^*X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$ la projection canonique. On a, pour tout $i \geq 1$,

$$H^i(T^*X_\lambda, p^*\mathcal{L}_{d\lambda}) = 0.$$

Selon la formule de projection,

$$f_*f^*\mathcal{L}_{d\lambda} = \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes f_*\mathcal{O}_{T^*X_\lambda} = \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathrm{Sym}(\mathcal{T}_{X_\lambda}),$$

où $\mathrm{Sym}(\mathcal{T}_{X_\lambda}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{S}^k\,\mathcal{T}_{X_\lambda}$ est l'algèbre symétrique du $\mathcal{O}_{X_\lambda}$-module $\mathcal{T}_{X_\lambda}$. Ainsi,

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^i(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathrm{S}^k\,\mathcal{T}_{X_\lambda}) = 0,$$

et la proposition en découle en prenant $i = k = 1$. □

3.2 Cas où le groupe G est simple

Dans ce paragraphe, on établit le théorème 3.1 dans le cas où G est un groupe simple.

Le §3.2.1 concerne le cas où $G = \mathrm{SL}(2)$. L'espace des déformations infinitésimales a alors été déterminé dans [Pi] ; on donne cependant une preuve simple de ce résultat, qui a l'avantage de fournir la structure de SL(2)-module de T^1_λ.

Le cas des autres groupes simples est traité dans le §3.2.2.

3.2.1 Cas où $G = \mathrm{SL}(2)$

On note H le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires inférieures $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$. On identifie le groupe des poids de SL(2) à $\mathbb{Z}$, de sorte que les poids dominants sont les éléments de $\mathbb{N}$. Le poids dominant λ est donc un entier, que l'on note ici m. On suppose $m \geq 1$; on a donc $Q_\lambda = B^-$.

Pour déterminer T^1_λ, on utilise la suite exacte (7). Comme π est affine, on a la suite exacte

$$0 \to H^0(X_\lambda, \pi_*\mathcal{T}_{E_\lambda}) \xrightarrow{f} H^0(X_\lambda, \pi_*\mathcal{O}_{E_\lambda}) \otimes V(\lambda) \xrightarrow{g} H^0(X_\lambda, \pi_*\mathcal{N}_{E_\lambda}) \to T^1_\lambda \to 0.$$

On remarque que les fibres respectives en Q_λ des faisceaux G-linéarisés $\pi_*\mathcal{T}_{E_\lambda}$, $\pi_*\mathcal{O}_{E_\lambda} \otimes V(\lambda)$ et $\pi_*\mathcal{N}_{E_\lambda}$ sont les Q_λ-modules gradués

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}v_{-\lambda}[md]\ ,\ \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} V(m)[md] \text{ et } \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} V(m)/\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md],$$

et que les morphismes f et g sont les images par le foncteur Ind des morphismes de modules gradués qui forment en chaque degré d une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}v_{-\lambda}[md] \longrightarrow V(m)[md] \longrightarrow V(m)/\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md] \longrightarrow 0.$$

Considérons la suite exacte longue associée à cette dernière

$$0 \to \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md]) \xrightarrow{f_d} \operatorname{Ind}(V(m)[md]) \xrightarrow{g_d} \operatorname{Ind}(V(m)/\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md]) \to R^1 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md]) \to ... \quad (9)$$

On a

$$T^1_\lambda \cong \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \operatorname{coker} g_d.$$

Pour connaître $\operatorname{coker} g_d$, on remarque qu'on a des isomorphismes de Q_λ-modules :

$$\mathfrak{g}v_{-\lambda} \simeq V(1)[-m+1] \text{ et } V(m)/\mathfrak{g}v_{-\lambda} \simeq V(m-2)[2],$$

donc

$$\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md] \simeq V(1)[m(d-1)+1]$$

et

$$V(m)/\mathfrak{g}v_{-\lambda}[md] \simeq V(m-2)[md+2].$$

La suite exacte longue (9) devient alors

$$0 \to V(1) \otimes V(m(d-1)+1) \xrightarrow{f_d} V(m) \otimes V(md) \xrightarrow{g_d} V(m-2) \otimes V(md+2)$$
$$\to R^1 \operatorname{Ind}(V(1)[(m(d-1)+1]) \to ...$$

On peut alors conclure :
Supposons $m \geq 3$:
- si $d < 0$, on a $V(m-2) \otimes V(md+2) = 0$, donc $\operatorname{coker} g_d = 0$.
- si $d \geq 1$, montrons que $R^1 \operatorname{Ind}(V(1)[m(d-1)+1]) = 0$: considérons la suite exacte de Q_λ-modules suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[m(d-1)] \longrightarrow V(1)[m(d-1)+1] \longrightarrow \mathbb{C}[m(d-1)+2] \longrightarrow 0.$$

  La suite exacte longue associée (relativement au foncteur Ind) s'écrit

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow R^1 \operatorname{Ind}(V(1)[m(d-1)+1]) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

  Ainsi le morphisme g_d est surjectif : $\operatorname{coker} g_d = 0$.
- si enfin $d = 0$, on remarque que $\operatorname{coker} g_0 = V(m-2) \oplus V(m-4)$.

Si $m = 2$, le conoyau de g_d est nul si $d \neq -1$, et on a $\operatorname{coker} g_{-1} = V(0)$. Donc on a toujours $T^1_\lambda = V(m-2) \oplus V(m-4)$.

3.2.2 Autres groupes simples

On suppose maintenant que G est un groupe simple de type autre que A_1, et il s'agit de montrer que les seules déformations infinitésimales de C_λ sont celles qui proviennent du théorème 1.1.

Selon la proposition 3.4, il ne reste qu'à montrer que le groupe G agit trivialement sur l'espace T^1_λ (*ie* tous les éléments de l'espace sont G-invariants).

En vertu de la proposition 3.6, la suite exacte (8) donne ici

$$H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \hookrightarrow \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda}).$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que pour tout d et pour tout poids dominant μ non nul, la composante isotypique $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda})_{(\mu)}$ est nulle.

Pour cela on va utiliser le lemme et la proposition suivants. Les notations sont celles de [Bo1].

Lemme 3.8. *Soit R un système de racines irréductible muni d'une base S. Soit α un élément de S. Alors il existe une racine positive longue γ telle que $\langle \gamma^\vee, \alpha\rangle = -1$, sauf dans les cas suivants :*

- *si R est de type A_1.*
- *si R est de type B_2 et $\alpha = \alpha_1$ est la racine simple longue.*
- *si R est de type C_n, avec $n \geq 3$ et $\alpha = \alpha_n$ est la racine simple longue.*

Lorsqu'une telle racine γ existe, elle n'est pas unique, sauf dans les cas suivants :

- *si R est de type A_2.*
- *si R est de type B_2 et $\alpha = \alpha_2$ est la racine simple courte : seule $\gamma = \alpha_1$ convient.*
- *si R est de type C_n, avec $n \geq 3$ et $\alpha = \alpha_i$, $i = 1...n-1$ est une racine simple courte : seule $\gamma = 2\alpha_{i+1} + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$ convient .*
- *si R est de type G_2 : pour $\alpha = \alpha_1$, seule $\gamma = \alpha_2$ convient ; pour $\alpha = \alpha_2$, seule $\gamma = 3\alpha_1 + \alpha_2$ convient.*

Preuve. Traitons d'abord le cas où toutes les racines de R sont de même longueur. Si R est de type A_1, il n'y a rien à prouver ; on suppose donc que R est de type A_n $(n \geq 2)$, D_n $(n \geq 4)$, E_6, E_7 ou E_8. L'existence de γ est claire : toute racine simple reliée à α dans le diagramme de Dynkin de R convient. Montrons que si R n'est pas de type A_2, γ n'est pas unique. Cela est clair si α est reliée à plusieurs racines simples dans le diagramme de Dynkin. Sinon, notons β la seule racine simple reliée à α. Le sous-système de racines R' de R de base $S' := S \setminus \{\alpha\}$ est un système de racines irréductible, de rang supérieur ou égal à 2. On sait qu'il admet plusieurs racines γ telles que β a pour coefficient 1 dans l'écriture de γ dans la base S' (voir par exemple [Ak2], prop 1 p 126). Toutes ces racines γ conviennent clairement.

Supposons maintenant que R est de type B_n, avec $n \geq 3$. Si α est une racine simple longue, on est ramené au premier cas, car les racines longues de R forment un système de racines de type A_3 si $n = 3$, et D_n sinon. Sinon, $\alpha = \alpha_n$, et la racine $\gamma = \alpha_i + ... + \alpha_{n-1}$ convient pour tout $i = 1...n-1$.

Supposons que R est de type F_4. Si α est une racine simple longue, on est ramené au premier cas, car les racines longues de R forment un système de racines de type D_4. Si $\alpha = \alpha_3 = \epsilon_4$, alors $\gamma = \epsilon_i - \epsilon_4$ convient pour tout $i = 1, 2, 3$. Si $\alpha = \alpha_4 = (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)/2$, alors $\gamma = \epsilon_i + \epsilon_j$ convient pour tout $2 \leq i < j \leq 4$.

Enfin, on vérifie aisément les assertions du lemme concernant B_2, C_n $(n \geq 3)$ et G_2. □

Proposition 3.9. *Soit R un système de racines irréductible muni d'une base. On suppose que R n'est pas de type A_1.*

Soient α une racine simple, β une racine positive, et $N \geq 2$ un entier, tels que $N\alpha + \beta$ est un poids dominant. Alors $N = 2$, et on est dans l'un des cas suivants :

– *si R est de type A_2, on a $2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\omega_1$ et $2\alpha_2 + \alpha_1 = 3\omega_2$.*
– *si R est de type B_2, on a $2\alpha_2 + \alpha_1 = 2\omega_2$.*
– *si R est de type C_n, on a $2\alpha_1 + (2\alpha_2 + 2\alpha_3 + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n) = 2\omega_1$.*
– *si R est de type G_2, on a $2\alpha_1 + \alpha_2 = 3\omega_1$.*

Preuve. Traitons d'abord le cas où il existe plusieurs racines positives longues γ telles que $\langle \gamma^\vee, \alpha \rangle = -1$. Soit γ une telle racine, que l'on suppose distincte de β. On a $\langle \gamma^\vee, N\alpha + \beta \rangle = -N + \langle \gamma^\vee, \beta \rangle \geq 0$. D'où $N \leq \langle \gamma^\vee, \beta \rangle \leq 1$, car γ est une racine longue distincte de β.

Pour conclure, on étudie un à un les cas du lemme précédent où il n'existe pas de racine γ, ainsi que ceux où il existe une unique racine γ (selon le premier point de la démonstration, on peut alors supposer $\beta = \gamma$). $\square$

Proposition 3.10. *Le groupe G agit trivialement sur $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda})$.*

Preuve. Selon la proposition 3.7, on peut supposer $d < 0$.

Afin d'appliquer le théorème de Borel-Weil-Bott, on considère une suite de Jordan-Hölder du Q_λ-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_\lambda$, c'est-à-dire une suite décroissante

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_\lambda = W_0 \supset W_1 \supset ... \supset W_r = 0$$

de Q_λ-modules telle que les quotients W_i/W_{i+1} sont des modules simples.

Soit μ un poids dominant non nul. On veut montrer que la composante isotypique

$$H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda})_{(\mu)} = R^1 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_\lambda[d\lambda^*])_{(\mu)}$$

est nulle.

Pour tout i, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W_{i+1}[d\lambda^*] \longrightarrow W_i[d\lambda^*] \longrightarrow (W_i/W_{i+1})[d\lambda^*] \longrightarrow 0,$$

donc une suite exacte sur les composantes isotypiques

$$R^1 \operatorname{Ind}(W_{i+1}[d\lambda^*])_{(\mu)} \to R^1 \operatorname{Ind}(W_i[d\lambda^*])_{(\mu)} \to R^1 \operatorname{Ind}((W_i/W_{i+1})[d\lambda^*])_{(\mu)}.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout i, on a

$$R^1 \operatorname{Ind}((W_i/W_{i+1})[d\lambda^*])_{(\mu)} = 0$$

et la proposition sera prouvée.

Supposons le contraire : selon le théorème de Borel-Weil-Bott, il existe une racine simple α telle que

$$s_\alpha \star \mu = d\lambda^* + \beta,$$

où β est le plus grand poids de W_i/W_{i+1} (c'est donc une racine de G qui n'est pas une racine de Q_λ). On en déduit

$$\mu - d\lambda^* = N\alpha + \beta,$$

en posant

$$N := 1 + \langle \alpha^\vee, \mu \rangle \geq 1$$

Comme $d < 0$, le poids $N\alpha + \beta$ est dominant : la racine simple α et la racine positive β sont donc données dans la liste du §1.3.1 (si $N = 1$) ou de la proposition 3.9 (si $N \geq 2$). Ici, on remarque de plus que :

– Le poids $N\alpha + \beta$ est la somme de deux poids dominants μ et $-d\lambda^*$ non nuls.

– On a $\langle \alpha^\vee, \mu \rangle = 0$ si et seulement si $N = 1$.

– On a $\langle \beta^\vee, \lambda^* \rangle \neq 0$ (car β n'est pas une racine de Q_λ).

En consultant les deux listes, on constate immédiatement que cela est impossible (si G n'est pas de type A_1). □

3.3 Cas où le groupe G n'est pas simple

On suppose dans cette partie que le groupe G est de la forme $G^1 \times G^2$. Le sous-groupe de Borel B de G s'écrit $B = B^1 \times B^2$; de même pour le tore maximal $T = T^1 \times T^2$. La représentation $V(\lambda)$ de G s'écrit $V(\lambda) = V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_2)$, où l'on suppose les poids dominants respectifs λ_1 et λ_2 de G^1 et G^2 tous les deux non nuls.

On note P_{λ_i} le stabilisateur dans G^i de la droite des vecteurs de plus grand poids de $V(\lambda_i)$. On a $P_\lambda = P_{\lambda_1} \times P_{\lambda_2}$.

Notre variété de drapeaux est donc un produit $X_\lambda = X_{\lambda_1} \times X_{\lambda_2}$, où l'on note X_{λ_i} la variété de drapeaux G^i/P_{λ_i}. On note $p_i : X_\lambda \longrightarrow X_{\lambda_i}$ les projections canoniques.

On a

$$\mathcal{L}_\lambda = p_1^* \mathcal{L}_{\lambda_1} \otimes p_2^* \mathcal{L}_{\lambda_2},$$

et

$$\mathcal{T}_{X_\lambda} = p_1^* \mathcal{T}_{X_{\lambda_1}} \oplus p_2^* \mathcal{T}_{X_{\lambda_2}}.$$

On remarque que selon la proposition 3.6

$$H^1(E_\lambda, \mathcal{O}_{E_\lambda}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda}) = 0.$$

La proposition 3.3 donne donc

$$T^1_\lambda \cong H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}).$$

Cet isomorphisme est aussi conséquence de [Sern] prop II.5.8 (ii). En effet, $\dim(C_\lambda) = \dim(X_{\lambda_1}) + \dim(X_{\lambda_2}) + 1 \geq 3$. Comme C_λ est Cohen-Macaulay [Ra], sa profondeur en 0 est supérieure ou égale à 3.

3.3.1 Cas où $G = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(2)$

On note encore H le groupe des matrices unipotentes triangulaires inférieures de taille 2×2.

On écrit le poids dominant de G sous la forme $\lambda = (m, n)$, où l'on peut supposer les entiers m et n tels que $m \geq n \geq 1$.

Pour calculer $H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \cong H^1(X_\lambda, \pi_* \mathcal{T}_{E_\lambda})$, on va utiliser une résolution du faisceau G-linéarisé $\pi_* \mathcal{T}_{E_\lambda}$. Sa fibre en Q_λ est le Q_λ-module

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{v_{-\lambda}}[md, nd].$$

D'où

$$H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R^1 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{v_{-\lambda}}[md, nd]).$$

Soit $d \in \mathbb{Z}$. On remarque que

$$\mathfrak{g}_{v_{-\lambda}} = (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{t}_{v_{-\lambda}},$$

où le stabilisateur $\mathfrak{t}_{v_{-\lambda}}$ de $v_{-\lambda}$ dans $\mathfrak{t}$ est une droite Q_λ-invariante.

On a donc une suite exacte de Q_λ-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[md, nd] \longrightarrow \mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})[md, nd] \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{v_{-\lambda}}[md, nd] \longrightarrow 0.$$

D'où une suite exacte longue

$$... \rightarrow R^1 \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[md, nd]) \rightarrow R^1 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})[md, nd]) \rightarrow R^1 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{v_{-\lambda}}[md, nd])$$

$$\rightarrow R^2 \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[md, nd]) \xrightarrow{h_d} R^2 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})[md, nd]) \rightarrow ...$$

Proposition 3.11. *(1) L'espace $R^1 \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[md, nd])$ est nul pour tout d.*

(2) L'espace $R^1 \operatorname{Ind}(\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})[md, nd])$ est nul sauf si $d = -1$ et $n = 1$. Dans ce cas il vaut $V(m-2, 1)$.

(3) Le noyau de h_d est nul, sauf si $d = -1$ et $(m, n) = (2, 2)$ et si $d = -2$ et $(m, n) = (1, 1)$. Dans ces deux cas (qui correspondent au cas (H9) du théorème 1.1) il vaut $V(0, 0)$.

Preuve.

(1) Cela découle immédiatement du théorème de Borel-Weil-Bott (ou simplement de la cohomologie des faisceaux inversibles sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$).

(2) On remarque qu'on a l'isomorphisme de Q_λ-modules

$$\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})[md, nd] \simeq V(0, 1)[md, nd+1] \oplus V(1, 0)[md+1, nd],$$

avec par exemple

$$R^1 \operatorname{Ind}(V(0, 1)[md, nd+1]) = V(0, 1) \otimes R^1 \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[md, nd+1]).$$

Selon le théorème de Borel-Weil-Bott, pour que l'espace $R^1 \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[md, nd+1])$ soit non nul, il faut que les entiers md et $nd+1$ soient l'un positif, l'autre strictement négatif. Comme md et

nd sont de même signe, on a nécessairement $md < 0$ et $nd + 1 \geq 0$ (donc $d = -1$ et $n = 1$). Dans ce cas,

$$R^1 \operatorname{Ind}(V(0,1)[md, nd+1]) = V(0,1) \otimes V(m-2,0) = V(m-2,1).$$

Il faut donc que l'on ait $m \geq 2$.

De la même façon, on obtient que $R^1 \operatorname{Ind}(V(1,0)[md+1, nd])$ est toujours nul, car on a supposé $m \geq n$.

(3) On va en fait déterminer le conoyau de l'application transposée ${}^t h_d$. Selon le théorème de dualité de Serre ([Ha] III.7), on a un isomorphisme fonctoriel

$$R^2 \operatorname{Ind}(W)^* \cong \operatorname{Ind}(W^*[-2,-2])$$

pour tout Q_λ-module W (car la fibre en Q_λ du faisceau anticanonique de X_λ est $\mathbb{C}[-2,-2]$).

Supposons que le conoyau de l'application

$$\operatorname{Ind}([\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})]^*[-md-2, -nd-2]) \xrightarrow{{}^t h_d} \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[-md-2, -nd-2]).$$

est non nul.

Pour que l'espace d'arrivée de ${}^t h_d$ soit non nul, il faut que $M := -md - 2$ et $N := -nd - 2$ soient positifs. Cet espace est alors le module simple $V(M,N)$, et il faut que l'application ${}^t h_d$ soit nulle.

Comme dans la démonstration de (2), on remarque que l'espace de départ de ${}^t h_d$ est une somme directe :

$$\operatorname{Ind}([\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})]^*[-md-2, -nd-2]) \simeq V(0,1)[M, N-1] \oplus V(1,0)[M-1, N].$$

Il faut donc que les deux composantes de ${}^t h_d$ soient nulles. La première composante est l'image par Ind du morphisme j de la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[M, N-2] \longrightarrow V(0,1)[M, N-1] \xrightarrow{j} \mathbb{C}[M,N] \longrightarrow 0.$$

Le conoyau de la première composante se plonge donc dans l'espace $R^1 \operatorname{Ind}(\mathbb{C}[M, N-2])$. Selon le théorème de Borel-Weil-Bott, pour que ce dernier espace soit non nul, il faut $N - 2 \leq -2$, donc $N = 0$. On montre de même, à l'aide de la seconde composante de ${}^t h_d$, que $M = 0$.

Enfin, dans le cas où $(M,N) = (0,0)$, le conoyau de $0 \xrightarrow{{}^t h_d} V(0)$ est bien $V(0)$. □

3.3.2 Autres cas

Lorsque les actions de G^1 et G^2 se factorisent par SL(2) :

$$G^i \longrightarrow \mathrm{SL}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(V(\lambda_i)),$$

on est dans la situation du §3.3.1 ; on suppose donc que l'action de G^2 ne se factorise pas par SL(2).

Proposition 3.12. *(1) L'espace $H^2(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda})$ est nul pour tout entier d.*
(2) On a donc un isomorphisme $T^1_\lambda \cong \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda})$.

Preuve.
(1) On rappelle que si $d \geq 0$, tous les groupes de cohomologie de $\mathcal{L}_{d\lambda}$ sont nuls sauf en degré 0, et si $d < 0$, le groupe de cohomologie de degré 0 est nul. On peut donc supposer $d < 0$, et on a, selon la formule de Künneth ([Da] p32)

$$H^2(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda}) = H^1(X_{\lambda_1}, \mathcal{L}_{d\lambda_1}) \otimes H^1(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2}).$$

Or selon la proposition 3.6 et l'hypothèse faite sur λ_2, on a $H^1(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2}) = 0$, d'où le résultat.
(2) Selon le point (1) et la proposition 3.6, la suite exacte (8) s'écrit

$$0 \longrightarrow H^1(E_\lambda, \mathcal{T}_{E_\lambda}) \longrightarrow \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda}) \longrightarrow 0,$$

d'où le résultat. □

La proposition suivante achève donc la démonstration du théorème 3.1 :

Proposition 3.13. *L'espace $H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda})$ est nul, sauf dans les cas suivants (à factorisation près) :*
- *Si $G = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(n)$ et $d = -1$ et $\lambda = (m, \omega_1)$, alors il vaut $V_{\mathrm{SL}(2)}(m-2) \otimes V(\omega_1)$.*
- *Si $G = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{SL}(n)$ et $d = -1$ et $\lambda = (m, \omega_n)$, alors il vaut $V_{\mathrm{SL}(2)}(m-2) \otimes V(\omega_n)$.*
- *Si $G = \mathrm{SL}(2) \times \mathrm{Sp}(2n)$ et $d = -1$ et $\lambda = (m, \omega_1)$, alors il vaut $V_{\mathrm{SL}(2)}(m-2) \otimes V(\omega_1)$.*

Preuve. Selon la proposition 3.7, on peut supposer $d < 0$. On a

$$\mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda} = (p_1^*(\mathcal{L}_{d\lambda_1} \otimes \mathcal{T}_{X_{\lambda_1}}) \otimes p_2^*(\mathcal{L}_{d\lambda_2})) \oplus (p_1^*(\mathcal{L}_{d\lambda_1}) \otimes p_2^*(\mathcal{L}_{d\lambda_2} \otimes \mathcal{T}_{X_{\lambda_2}})).$$

Donc, selon la formule de Künneth,

$$H^1(X_\lambda, \mathcal{L}_{d\lambda} \otimes \mathcal{T}_{X_\lambda}) = H^1(X_{\lambda_1}, \mathcal{L}_{d\lambda_1}) \otimes H^0(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2} \otimes \mathcal{T}_{X_{\lambda_2}}).$$

En effet, comme $d < 0$, on a

$$H^0(X_{\lambda_1}, \mathcal{L}_{d\lambda_1}) = H^0(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2}) = 0$$

et selon la proposition 3.6 (grâce à l'hypothèse faite sur λ_2), on a

$$H^1(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2}) = 0.$$

Si l'action de G^1 sur $V(\lambda_1)$ ne se factorise pas par $\mathrm{SL}(2)$, on aura également $H^1(X_{\lambda_1}, \mathcal{L}_{d\lambda_1}) = 0$. On peut donc supposer que $G^1 = \mathrm{SL}(2)$, de sorte que $H^1(X_{\lambda_1}, \mathcal{L}_{d\lambda_1})$ est non nul, et vaut $V(-d\lambda_1 - 2)$ (on considère désormais λ_1 comme un entier).

Il reste à calculer l'espace des sections globales $H^0(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2} \otimes \mathcal{T}_{X_{\lambda_2}})$.

Remarquons tout d'abord que sa partie G-invariante est nulle : en effet, selon l'isomorphisme (où $\mathbb{C}$ est la droite munie de l'action triviale de G)

$$\mathrm{Hom}^G(\mathbb{C}, \mathrm{Ind}(\mathfrak{g}^2/\mathfrak{q}_{\lambda_2}[d\lambda_2^*])) \cong \mathrm{Hom}^{Q_{\lambda_2}}(\mathbb{C}, \mathfrak{g}^2/\mathfrak{q}_{\lambda_2}[d\lambda_2^*]),$$

la partie G-invariante est isomorphe à l'espace des Q_{λ_2}-invariants suivant :

$$(\mathfrak{g}^2/\mathfrak{q}_{\lambda_2}[d\lambda_2^*])^{Q_{\lambda_2}}.$$

Supposons par l'absurde ce dernier espace non nul. Ses éléments sont en particulier de poids nul pour le tore T : ils admettent donc un représentant dans $\mathfrak{g}^2$ dont le poids est une racine positive β de $\mathfrak{g}^2$ telle que

$$\beta + d\lambda_2^* = 0.$$

On en déduit d'une part que l'on peut supposer que le groupe G^2 est simple (car son action sur $V(\lambda_2)$ se factorise par celle d'un groupe simple), et d'autre part que la racine positive β est une racine dominante. Or on sait qu'alors le sous-$\mathfrak{q}_{\lambda_2}$-module de $\mathfrak{g}^2$ engendré par $\mathfrak{g}^2_\beta$ contient $\mathfrak{g}^2_\alpha$ pour toute racine simple α de $\mathfrak{g}^2$.

Ainsi, toute racine simple de $\mathfrak{g}^2$ est une racine de $\mathfrak{q}_{\lambda_2}$, et $\mathfrak{q}_{\lambda_2} = \mathfrak{g}^2$: une contradiction.

Déterminons maintenant les autres composantes isotypiques de l'espace des sections globales : soit μ un poids dominant de G^2 non nul. Supposons que $H^0(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2} \otimes \mathcal{T}_{X_{\lambda_2}})_{(\mu)}$ est non nulle.

Comme dans la démonstration de la proposition 3.10, appliquons le théorème de Borel-Weil-Bott à l'aide d'une suite de Jordan-Hölder du Q_{λ_2}-module $\mathfrak{g}^2/\mathfrak{q}_{\lambda_2}$.

On obtient qu'il existe une racine positive β de G^2 telle que

$$\beta + d\lambda_2^* = \mu.$$

Comme $d < 0$, pour que $\beta + d\lambda_2^*$ soit dominant, il faut que l'action de G^2 sur $V(\lambda_2)$ se factorise par un groupe simple ; on suppose donc que G^2 est un groupe simple.

On remarque que $\beta = \mu - d\lambda_2^*$ est un poids dominant, non fondamental (car μ et $-d\lambda_2^*$ sont tous les deux non nuls).

Or les seules racines dominantes des systèmes de racines irréductibles qui ne sont pas des poids fondamentaux sont

– la plus grande racine $\omega_1 + \omega_n$ des systèmes de racines de type A_n ($n \geq 1$).

– la plus grande racine $2\omega_1$ des systèmes de racines de type C_n ($n \geq 2$).

On a donc $d = -1$, et l'on est dans l'une des deux situations suivantes (à revêtement fini de G^2 près) :

– On a $G^2 = \mathrm{SL}(n)$ ($n \geq 2$), et $\mu = \lambda_2 = \omega_1$ ou $\mu = \lambda_2 = \omega_n$.

– On a $G^2 = \mathrm{Sp}(2n)$ ($n \geq 2$), et $\mu = \lambda_2 = \omega_1$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que dans ces deux cas, l'espace T^1_λ est celui annoncé (la seule autre possibilité est qu'il soit nul).

En utilisant les notations analogues à celles de la démonstration de la proposition 3.10 (en remplaçant G par G^2), on a pour tout i une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ind}(W_{i+1}[d\lambda_2^*])_{(\mu)} \to \mathrm{Ind}(W_i[d\lambda_2^*])_{(\mu)} \to \mathrm{Ind}(W_i/W_{i+1}[d\lambda_2^*])_{(\mu)} \to R^1\,\mathrm{Ind}(W_{i+1}[d\lambda_2^*])_{(\mu)}.$$

Selon cette même démonstration, on a

$$R^1 \operatorname{Ind}(W_{i+1}[d\lambda_2^*])_{(\mu)} = 0$$

pour tout i. On en conclut facilement que

$$H^0(X_{\lambda_2}, \mathcal{L}_{d\lambda_2} \otimes \mathcal{T}_{X_{\lambda_2}}) = \operatorname{Ind}(W_0[d\lambda_2^*]) = V(\lambda_2)$$

dans les deux situations. □

Appendice

On note $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$ le schéma de Hilbert (construit dans [Grot]) des sous-schémas fermés de $\mathbb{P}(V(\lambda))$. Le sous-schéma $\operatorname{Hilb}^G(\mathbb{P}(V(\lambda)))$ des points fixes de G dans $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$ paramètre les sous-schémas fermés de $\mathbb{P}(V(\lambda))$ qui sont stables par G.

On répond dans cet appendice à la question naturelle suivante : quelles déformations locales du cône des vecteurs primitifs $C(\lambda)$ peut-on obtenir à l'aide de $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$?

Comme $C(\lambda)$ est le cône affine dans $V(\lambda)$ au dessus de la variété de drapeaux

$$X_\lambda := G/P_\lambda \subseteq \mathbb{P}(V(\lambda)),$$

on peut être tenté de déformer X_λ dans $\mathbb{P}(V(\lambda))$ à l'aide du schéma de Hilbert pour en déduire naturellement une déformation de $C(\lambda)$.

La proposition suivante montre que l'on n'obtient ainsi que des déformations triviales, c'est-à-dire provenant de l'action du groupe $\operatorname{GL}(V(\lambda))$ des automorphismes d'espace vectoriel de $V(\lambda)$.

On note z le point de $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$ correspondant à X_λ. Le groupe $\operatorname{GL}(V(\lambda))$ agit naturellement sur $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$.

Proposition 3.14. *L'orbite* $\operatorname{GL}(V(\lambda)) \cdot z$ *est ouverte dans* $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$.

Preuve.

Il suffit de montrer que l'espace tangent à l'orbite est égal à l'espace tangent au schéma de Hilbert :

$$T_z(\operatorname{GL}(V(\lambda)) \cdot z) = T_z \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda))),$$

c'est-à-dire que l'application

$$\mathfrak{gl}(V(\lambda)) \xrightarrow{\phi} T_z \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$$

obtenue en différentiant l'application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{GL}(V(\lambda)) & \longrightarrow & \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda))), \\ u & \longmapsto & u \cdot z \end{array}$$

est surjective.

Notons $\mathcal{N}_{X_\lambda}$ le faisceau normal à X_λ dans $\mathbb{P}(V(\lambda))$.

Il est donné par la suite exacte courte de $\mathcal{O}_{X_\lambda}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{X_\lambda} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(\lambda))}|_{X_\lambda} \longrightarrow \mathcal{N}_{X_\lambda} \longrightarrow 0. \tag{10}$$

L'espace tangent au schéma de Hilbert en z est canoniquement isomorphe à l'espace des sections globales de $\mathcal{N}_{X_\lambda}$:

$$T_z \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda))) \cong \mathrm{H}^0(X_\lambda, \mathcal{N}_{X_\lambda}).$$

On sait que l'espace

$$\mathrm{H}^1(X_\lambda, \mathcal{T}_{X_\lambda})$$

est nul (cela résulte par exemple de la proposition 3.7).

En utilisant la suite exacte courte (10), on en déduit que l'application canonique

$$\mathrm{H}^0(X_\lambda, \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(\lambda))}|_{X_\lambda}) \xrightarrow{\phi_1} \mathrm{H}^0(X_\lambda, \mathcal{N}_{X_\lambda})$$

est surjective.

On utilise ensuite la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V(\lambda))}$-modules ([Ha] Example II.8.20.1) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V(\lambda))} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V(\lambda))}(1) \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(\lambda))} \longrightarrow 0.$$

Comme les termes de cette suite sont des faisceaux localement libres, on obtient encore une suite exacte si on la restreint à X_λ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_\lambda} \longrightarrow \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(\lambda))}|_{X_\lambda} \longrightarrow 0.$$

L'application associée

$$V(\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) = \mathrm{H}^0(X_\lambda, \mathcal{L}_\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda) \xrightarrow{\phi_2} \mathrm{H}^0(X_\lambda, \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V(\lambda))}|_{X_\lambda})$$

est surjective, car l'espace $\mathrm{H}^1(X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda})$ est nul (cela découle par exemple du théorème de Borel-Weil-Bott).

On remarque enfin que l'application ϕ s'identifie à la composée $\phi_1 \circ \phi_2$: elle est donc surjective, d'où la proposition. $\square$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant, qui montre que l'on n'obtient aucune déformation G-invariante à l'aide de $\operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$.

Corollaire 3.15. *Le point z est un point isolé réduit de* $\operatorname{Hilb}^G(\mathbb{P}(V(\lambda)))$.

Preuve. Il suffit de montrer que l'espace tangent à $\operatorname{Hilb}^G(\mathbb{P}(V(\lambda)))$ en z est nul. On reprend les notations de la démonstration de la proposition précédente. On a vu que l'application

$$\mathfrak{gl}(V(\lambda)) \xrightarrow{\phi} T_z \operatorname{Hilb}(\mathbb{P}(V(\lambda)))$$

est surjective. Comme le groupe G est réductif, on en déduit une surjection sur les espaces des G-invariants :

$$\mathfrak{gl}(V(\lambda))^G \xrightarrow{\phi} T_z \operatorname{Hilb}^G(\mathbb{P}(V(\lambda))).$$

Or l'application ϕ est nulle sur l'espace $\mathfrak{gl}(V(\lambda))^G \cong \mathbb{C}$ (qui est le centre de $\mathfrak{gl}(V(\lambda))$), d'où le corollaire. $\square$

Pinkham utilise dans [Pi] §4-5 de manière plus concluante le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}(\overline{V(\lambda)})$ des sous-schémas fermés de l'espace projectif $\overline{V(\lambda)}$ obtenu en complétant $V(\lambda)$. Il étudie ainsi plus généralement les déformations des cônes affines sur les variétés projectives lisses, et montre sous certaines hypothèses (qui sont vérifiées dans notre situation) qu'on les obtient toutes en déformant à l'aide de $\mathrm{Hilb}(\overline{V(\lambda)})$ le complété du cône.

Le schéma Quot invariant

Introduction

Le schéma de Hilbert et le schéma Quot sont des objet fondamentaux en géométrie algébrique. Ils paramètrent respectivement les sous-schémas fermés d'un espace projectif qui admettent un polynôme de Hilbert fixé, et les quotients d'un faisceau cohérent fixé sur un espace projectif qui admettent un polynôme de Hilbert fixé.

Haiman et Sturmfels ont obtenu dans [HaSt] par des méthodes d'algèbre commutative des objets plus généraux : le *schéma de Hilbert multigradué*, qui paramètre les idéaux homogènes d'une algèbre de polynômes S multigraduée par un groupe abélien qui admettent une “fonction de Hilbert” fixée et le *schéma Quot multigradué*, qui paramètre les sous-modules homogènes d'un S-module gradué fini qui admettent une fonction de Hilbert fixée.

Alexeev et Brion ont construit, à partir du schéma de Hilbert multigradué, le *schéma de Hilbert invariant* : étant donnés un groupe réductif connexe complexe G et une variété X *affine* munie d'une action de G, le schéma de Hilbert invariant paramètre les sous-schémas fermés G-stables de X dont l'algèbre affine en tant que G-module est somme directe de modules simples avec des multiplicités finies fixées. La donnée de ces multiplicités est l'analogue dans cette situation à celle du polynôme de Hilbert.

Dans ce travail on vérifie que, comme dans le cas classique, la construction du schéma de Hilbert invariant se généralise à celle d'un *schéma Quot invariant*, qui paramètre les quotients d'un faisceau $\mathcal{M}$ cohérent G-linéarisé fixé sur X par un sous-faisceau G-stable tels que l'espace des sections globales du quotient, en tant que G-module, soit somme directe de modules simples avec des multiplicités finies fixées. On utilise pour cela le schéma Quot multigradué, qui correspond au cas où le groupe G est un tore.

On détermine ensuite une famille “simple” de schémas Quot invariants. Notons $V(\lambda)$ le G-module simple de plus grand poids λ. On prend comme G-variété X le cône C_λ des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$, réunion de l'orbite des vecteurs de plus grand poids et de l'origine. C'est le plus petit cône de $V(\lambda)$ stable par G. En d'autres termes, son algèbre est la plus petite algèbre graduée engendrée par le G-module simple dual de $V(\lambda)$ (on note λ^* son plus grand poids), et on a

$$\mathbb{C}[C_\lambda] = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} V(m\lambda^*).$$

On prend comme module $\mathcal{M}$ le module libre

$$\mathcal{O}_{C_\lambda} \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu^*)$$

engendré par un module simple $V(\mu^*)$: l'espace de ses sections globales est

$$M = \mathbb{C}[C_\lambda] \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu^*).$$

Les quotients G-linéarisés de $\mathcal{M}$ sont les faisceaux dont le module des sections globales est engendré par le module simple $V(\mu^*)$. On étudie le schéma Quot invariant $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ des quotients de M qui admettent la décomposition en modules simples

$$M/N = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} V(m\lambda^* + \mu^*).$$

Les multiplicités choisies sont minimales : en effet, si x est un élément primitif de M/N de poids μ^* et a un élément primitif de $\mathbb{C}[C_\lambda]$ de poids λ^*, alors l'élément $a^m x$ de M/N est primitif de poids $m\lambda^* + \mu^*$.

Comme le schéma de Hilbert invariant étudié au §1, ce schéma Quot invariant est muni d'une action naturelle du groupe multiplicatif (déduite de son action sur le cône C_λ), mais elle ne jouera aucun rôle dans notre étude. Un point particulier de $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ correspond à la structure de $\mathbb{C}[C_\lambda]$-module

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} V(m\lambda^*) \otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V(n\lambda^* + \mu^*) \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V(n\lambda^* + \mu^*)$$

donnée sur les composantes homogènes par le produit de Cartan

$$V(m\lambda^*) \otimes_{\mathbb{C}} V(n\lambda^* + \mu^*) \longrightarrow V((m+n)\lambda^* + \mu^*).$$

On montrera que le schéma Quot invariant n'admet pas d'autre point (Proposition 5.8). Le plus souvent, le schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ est un point réduit. Sinon, il est isomorphe au schéma

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/\langle t^2 \rangle).$$

Dans ce cas le module $V(\lambda)$ est le $\mathrm{Spin}(V)$-module V, où V est un espace vectoriel quadratique de dimension (finie) impaire (théorème 5.2).

4 Construction du schéma Quot invariant

4.1 Notations et définition du schéma Quot invariant

On commence par rappeler certaines notations de la première partie, et on en introduit de nouvelles.

On considère des schémas et des groupes algébriques sur $\mathbb{C}$. Les références utilisées sont [Ha] pour la théorie des schémas et [PoVi] pour celle des groupes algébriques de transformations.

Soit G un groupe réductif connexe. On en choisit un sous-groupe de Borel B, et un tore maximal T inclus dans B. On considère le radical unipotent U de B : on a : $B = TU$. Les algèbres de Lie respectives de G, T et U sont notées : $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$, et $\mathfrak{u}$. Le système de racines de G relativement à T est noté R. Le choix de B nous en fournit une base S, et on a : $R = R_+ \amalg R_-$ où R_+ est l'ensemble des racines positives, et R_- celui des racines négatives.

On note Λ le groupe des caractères de T. Si V est un T-module rationnel (éventuellement de dimension infinie), on note $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ sa décomposition en sous-espaces propres. Par exemple, l'algèbre de Lie de G admet la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où chaque $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1. On choisit pour tout $\alpha \in R$ un générateur e_α de $\mathfrak{g}_\alpha$.

On a un ordre partiel sur Λ : on a $\mu \leq \lambda$ si et seulement si $\lambda - \mu$ est une somme de racines positives. On note Λ^+ l'ensemble des éléments de Λ qui sont des poids dominants (relativement à la base S du système de racines R).

Si λ est un poids dominant, on note $V(\lambda)$ le G-module dual du G-module

$$\{f \in \mathbb{C}[G] \mid \forall g \in G,\ \forall b \in B,\ f(gb) = \lambda(b)f(g)\},$$

où G agit par translations à gauche. Le G-module $V(\lambda)$ est simple, et l'application $\lambda \longmapsto V(\lambda)$ donne une bijection entre les poids dominants de G et les classes d'isomorphisme de G-modules simples. Pour l'action de T, le poids λ est le plus grand poids de $V(\lambda)$. On note v_λ le vecteur de $V(\lambda)$ de poids λ donné par l'évaluation en l'élément neutre de G :

$$v_\lambda : f \longmapsto f(e).$$

L'algèbre affine du quotient catégorique $G//U$ s'identifie à l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[G]^U$. C'est une algèbre graduée par le monoïde des poids dominants :

$$\mathbb{C}[G//U] = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda^+} V(\lambda)^*.$$

Si λ est un poids dominant, on note λ^* le plus grand poids du module dual $V(\lambda)^*$. On a $\lambda^* = -w_0(\lambda)$, où w_0 est l'élément le plus long du groupe de Weyl de G relativement au tore maximal T.

Si V est un G-module rationnel, on note $V_{(\lambda)}$ sa composante isotypique de type λ, c'est-à-dire le sous-module de V somme des sous-modules isomorphes à $V(\lambda)$. On a alors la décomposition $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda^+} V_{(\lambda)}$. Dans toute décomposition de V en somme directe de modules simples, la multiplicité du module simple $V(\lambda)$ est la dimension de V_λ^U. Lorsque chacune de ces multiplicités est finie, on dit que le G-module V est *à multiplicités finies*.

On sait que les sous-groupes paraboliques de G qui contiennent B sont en bijection avec les parties de S. On note P_I le sous-groupe parabolique correspondant à $I \subseteq S$: les éléments de I sont les racines simples α telles que $-\alpha$ est une racine de P_I.

On note

$$P_I = L_I U_I$$

la décomposition de Lévi de P_I relativement au tore maximal T. Le groupe L_I est le sous-groupe réductif de G qui contient T et dont les racines sont les éléments de R qui sont combinaison linéaire des éléments de I. Le groupe U_I est le sous-groupe unipotent de G qui est normalisé par T et dont les racines sont les éléments de R_+ qui ne sont pas combinaison linéaire des éléments de I. Si λ est un poids dominant, comme le groupe L_I normalise U_I, il agit sur l'espace des invariants

$$V(\lambda)^{U_I},$$

qui est en fait un L_I-module simple de plus grand poids λ. Il est engendré par les T-vecteurs propres de $V(\lambda)$ dont le poids s'écrit $\lambda - \sum_{\alpha \in I} n_\alpha \alpha$, où les n_α sont des entiers (nécessairement positifs ou nuls).

Soit λ un poids dominant, et P un sous-groupe parabolique de G contenant B tel que λ se prolonge en un caractère de P (si $P = P_I$, cela signifie que les éléments de I sont orthogonaux à λ). On note $\pi : G \to G/P$ la surjection canonique, et $\mathcal{L}_\lambda$ le faisceau inversible G-linéarisé sur G/P qui associe à tout ouvert $\Omega \subseteq G/P$:

$$\mathcal{L}_\lambda(\Omega) := \{f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(\Omega)) \mid \forall g \in G, \forall p \in P, \ f(gp) = \lambda(p) f(g)\}.$$

L'espace des sections globales de $\mathcal{L}_\lambda$ est le dual du G-module $V(\lambda)$.

Un *G-schéma affine* est un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ de type fini, muni d'une action régulière de G. Algébriquement, cela signifie que A est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini sur laquelle G agit par des automorphismes d'algèbre et que pour cette action A est un G-module rationnel. On dit alors que A est une *G-algèbre*. Si V est un G-module rationnel de dimension finie, on identifie V au G-schéma affine $\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_\mathbb{C} V^*)$, où $\operatorname{Sym}_\mathbb{C} V^* = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathrm{S}^n V^*$ est l'algèbre symétrique de V^*.

On se fixe un G-schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$, et un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ cohérent et G-linéarisé. La donnée de $\mathcal{M}$ revient à celle de l'espace M de ses sections globales, muni de structures de A-module de type fini, et de G-module rationnel telles que

$$\forall g \in G, \forall a \in A, \forall m \in M, \ g(am) = (ga)(gm).$$

On dit alors que M est un *A-G-module*. On a un isomorphisme de A^G-G-modules

$$M \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} \operatorname{Hom}^G(V(\lambda), M) \otimes_\mathbb{C} V(\lambda),$$

en associant à $\sum_\lambda u_\lambda \otimes x_\lambda$ l'élément $\sum_\lambda u_\lambda(x_\lambda)$.

Soit $h : \Lambda^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. On va définir un foncteur contravariant

$$\mathcal{Q}uot_h^G(X, \mathcal{M}) : (\text{Schémas})^\circ \longrightarrow (\text{Ensembles}).$$

Soit S un schéma ; on le munit de l'action triviale du groupe G. Notons π et f les projections canoniques :

$$\begin{tikzcd}
S \times X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d] \\
S \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

L'image réciproque $f^*\mathcal{M}$ est un faisceau G-linéarisé sur $S \times X$. Le foncteur $\mathcal{Q}uot_h^G(X, \mathcal{M})$ associe au schéma S l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_{S\times X}$-modules $\mathcal{N}$ de $f^*\mathcal{M}$ qui sont G-stables et tels que l'on ait un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-G-modules :

$$\pi_*((f^*\mathcal{M})/\mathcal{N}) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} \mathcal{F}_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda),$$

où chaque $\mathcal{F}_\lambda$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang $h(\lambda)$. Le quotient $(f^*\mathcal{M})/\mathcal{N}$ est alors plat sur S.

L'objectif des paragraphes 4.2 et 4.3 est d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Le foncteur $\mathcal{Q}uot_h^G(X, \mathcal{M})$ est représenté par un schéma quasi-projectif* $\operatorname{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$.

Le schéma $\operatorname{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$ ainsi défini est appelé le *schéma Quot invariant* des quotients de $\mathcal{M}$ de fonction de Hilbert h.

Lorsque $\mathcal{M}$ est le faisceau structural de X, on retrouve le schéma de Hilbert invariant.

4.2 Le schéma Quot multigradué

Comme annoncé dans [HaSt] §6.2, les arguments de la construction du schéma de Hilbert multigradué faite dans cet article se généralisent facilement à la construction d'un *schéma Quot invariant*. On donne dans cette partie les principales étapes de cette construction. On commence par rappeler les notations de [HaSt]. Comme cette partie traite d'algèbre commutative, on a préféré considérer ici (comme dans [HaSt]) des foncteurs covariants de la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres commutatives vers la catégorie des ensembles. (Ce point de vue est équivalent à celui des foncteurs contravariants de la catégorie des schémas vers celle des ensembles.)

Notons $S := \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ l'algèbre des polynômes à n indéterminées sur $\mathbb{C}$, et $M := \bigoplus_{i=1}^r Se_i$ un S-module libre muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_r)$. Un *monôme de M* est un élément de M de la forme $x^\alpha e_i$ où x^α est un monôme de S et e_i un élément de $\mathcal{B}$.

Soit A un groupe abélien. Soit $\deg : \mathbb{N}^n \longrightarrow A$ un morphisme de monoïdes, et $b_1, ..., b_n$ des éléments de A. Le *degré* d'un monôme x^α de S (resp. $x^\alpha e_i$ de M) est par définition $\deg \alpha$ (resp. $b_i + \deg \alpha$). Si a est un élément du groupe A, on note S_a (resp. M_a) le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de S (resp. de M) engendré par les monômes de degré a. On obtient ainsi des *multigraduations* de la $\mathbb{C}$-algèbre S et du S-module M par le groupe A :

$$S = \bigoplus_{a \in A} S_a \quad \text{et} \quad M = \bigoplus_{a \in A} M_a.$$

Elles vérifient $S_a \cdot S_b \subseteq S_{a+b}$ et $S_a \cdot M_b \subseteq M_{a+b}$.

Le but de cette partie est de paramétrer, une fonction $h : A \longrightarrow \mathbb{N}$ étant donnée, les sous-S-modules homogènes

$$N = \bigoplus_{a \in A} N_a \subseteq \bigoplus_{a \in A} M_a$$

tels que la dimension de M_a/N_a est $h(a)$, pour tout $a \in A$.

Avant de formuler plus précisément le problème, on se place dans le cadre plus général des $\mathbb{C}$-*espaces vectoriels avec opérateurs.*

Un $\mathbb{C}$-*espace vectoriel avec opérateurs* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$T = \bigoplus_{a \in E} T_a$$

gradué par un ensemble E quelconque, et muni d'un ensemble de morphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$F = \bigcup_{a,b \in E} F_{ab}$$

avec $F_{ab} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_a, T_b)$. On suppose de plus que si a, b, c sont des éléments de E, on a $F_{bc} \circ F_{ab} \subseteq F_{ac}$ et que l'application identité sur T_a appartient à F_{aa}.
Si D est une partie de E, on note T_D le $\mathbb{C}$-espace vectoriel gradué

$$T_D := \bigoplus_{a \in D} T_a,$$

que l'on munit de l'ensemble d'opérateurs

$$F_D = \bigcup_{a,b \in D} F_{ab}.$$

Si T est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel gradué muni d'un ensemble F d'opérateurs, et R une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, on obtient un R-module gradué avec opérateurs par extension des scalaires : le R-module gradué est

$$R \otimes_{\mathbb{C}} T = \bigoplus_{a \in E} R \otimes_{\mathbb{C}} T_a,$$

et on le munit des ensembles d'opérateurs R-linéaires

$$\widehat{F}_{ab} : R \otimes_{\mathbb{C}} T_a \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{C}} T_b$$

déduits canoniquement des ensembles d'opérateurs linéaires $F_{ab} : T_a \longrightarrow T_b$.

Un *sous-F-module* de $R \otimes_{\mathbb{C}} T$ est un sous-R-module homogène

$$L = \bigoplus_{a \in E} L_a \subseteq \bigoplus_{a \in E} R \otimes_{\mathbb{C}} T_a$$

tel que si a, b sont des éléments de E, on a

$$\widehat{F}_{ab}(L_a) \subseteq L_b.$$

Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre R, on note $\mathcal{H}_T^h(R)$ l'ensemble des sous-F-modules $L \subseteq R \otimes_{\mathbb{C}} T$ tels que le R-module

$$(R \otimes_{\mathbb{C}} T_a)/L_a$$

est localement libre de rang $h(a)$, pour tout $a \in A$. Si de plus $R \xrightarrow{\phi} R'$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres, $R' \otimes_R L$ est un sous-module de $R' \otimes_R T$ (car $R \otimes_{\mathbb{C}} T/L$ est un R-module plat), qui est en fait un élément de $\mathcal{H}_T^h(R')$.

On obtient ainsi un foncteur covariant

$$\mathcal{H}_T^h : (\mathbb{C}\text{-algèbres}) \longrightarrow (\text{Ensembles}).$$

On peut maintenant formuler le problème. La multiplication par les monômes de S munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel gradué $M = \bigoplus_{a \in A} M_a$ d'opérateurs : les éléments de F_{ab} sont les applications

$$\begin{array}{ccc} M_a & \longrightarrow & M_b \\ m & \longmapsto & x^\alpha m \end{array}$$

pour tout monôme x^α de degré $b - a$. On remarque qu'ainsi, les sous-F-modules de M ne sont autres que les sous-S-modules homogènes de M. Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème suivant, qui définit le *schéma Quot multigradué* H_M^h :

Théorème 4.2. *Soit $h : A \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction.*
Le foncteur $\mathcal{H}_M^h$ est représenté par un schéma quasi-projectif H_M^h.

La démonstration se fait en deux étapes. On montre d'abord que pour toute partie finie D du groupe abélien A, le foncteur $\mathcal{H}_{M_D}^h$ est représentable par un schéma quasi-projectif $H_{M_D}^h$ (Proposition 4.6). On montre ensuite qu'il existe une partie finie D de A telle que le foncteur $\mathcal{H}_M^h$ est représenté par un sous-schéma fermé de $H_{M_D}^h$ (Lemme 4.7 et Proposition 4.8). On commence par montrer un lemme combinatoire, utilisé lors de chacune des deux étapes.

Un *sous-module monomial* de M est un sous-S-module de M engendré par des monômes de M. Les sous-modules monomiaux de M sont donc ceux de la forme $\bigoplus_{i=1}^r I_i e_i$, où $I_1, ..., I_r$ sont des idéaux monomiaux de S.

On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de sous-modules de M est une *antichaîne* si pour tout couple (N_1, N_2) d'éléments de $\mathcal{E}$, on a $N_1 \not\subseteq N_2$.

Maclagan a montré ([Ma]) que les antichaînes d'idéaux monomiaux d'une algèbre de polynômes sont finies. Le lemme suivant en est une généralisation immédiate :

Lemme 4.3. *Les antichaînes de sous-modules monomiaux de M sont finies.*

Preuve. Associons à tout sous-module monomial $N = \bigoplus_{i=1}^r I_i e_i$ de M l'idéal monomial

$$J_N := \sum_{i=1}^r I_i y_i + \sum_{i,j} y_i y_j \mathbb{C}[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_r]$$

de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x_1,...,x_n,y_1,...,y_r]$. Pour tous sous-modules monomiaux N_1, N_2 de M, on a $N_1 \subseteq N_2$ si et seulement si $J_{N_1} \subseteq J_{N_2}$. On associe ainsi à toute antichaîne de sous-modules monomiaux de M une antichaîne d'idéaux monomiaux de $\mathbb{C}[x_1,...,x_n,y_1,...,y_r]$, et on en déduit le lemme. □

Si N est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et r un entier tel que $0 \leq r \leq \dim N$, on note G_N^r la grassmannienne des quotients de N de dimension r. Si de plus l'espace vectoriel $N = \bigoplus_{a \in E} N_a$ est gradué par un ensemble fini E, et $h : E \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction, on note G_N^h la grassmannienne des quotients de N par un sous-espace vectoriel homogène N' tel que $\dim N_a/N'_a = h(a)$ pour tout $a \in A$. Ce schéma est donc un produit de grassmanniennes :

$$G_N^h = \prod_{a \in E} G_{N_a}^{h(a)}.$$

On définit enfin, si de plus M est un sous-espace vectoriel de N, la *grassmannienne relative* $G_{N \backslash M}^h$. Il s'agit de l'ouvert de G_N^h qui paramètre les quotients N/N' de N qui sont *engendrés par* M, c'est-à-dire tels que le morphisme canonique $M \longrightarrow N/N'$ soit surjectif (on renvoie à [HaSt] Proposition 2.11 pour plus de détails).

On rappelle ici les deux théorèmes suivants, établis dans [HaSt] (theorems 2.2, 2.3) :

Théorème 4.4. *Soit (T, F) un $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec opérateurs dont l'ensemble E des degrés est fini. Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. Soit $M \subseteq N \subseteq T$ deux sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels homogènes de T. Soit $G \subseteq F$ un sous-ensemble. Supposons*

(1) N est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

(2) N engendre le F-module T.

(3) Pour tout surcorps K de $\mathbb{C}$, et tout élément L de $\mathcal{H}_T^h(K)$, l'application naturelle $K \otimes_{\mathbb{C}} M \longrightarrow K \otimes_{\mathbb{C}} T/L$ est surjective.

(4) G engendre F comme catégorie, et $G.M \subseteq N$.

Alors le foncteur $\mathcal{H}_T^h$ est représenté par un sous-schéma fermé de la grassmannienne relative $G_{N \backslash M}^h$, donc par un schéma quasi-projectif.

Théorème 4.5. *Soit (T, F) un $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec opérateurs, et $h : E \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction. Soit D une partie de E telle que $\mathcal{H}_{T_D}^h$ est représenté par un schéma $H_{T_D}^h$. Supposons que pour tout $a \in E$:*

(1) Il existe une partie G finie de $\bigcup_{b \in D} F_{ba}$ telle que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $T_a / \sum_{b \in D} G_{ba}(T_b)$ est de dimension finie.

(2) Pour tout surcorps K de $\mathbb{C}$, et tout élément L_D de $\mathcal{H}_{T_D}^h(K)$, le sous-F-module L' de $K \otimes_{\mathbb{C}} T$ engendré par L_D vérifie

$$\dim_K (K \otimes_{\mathbb{C}} T_a / L'_a) \leq h(a).$$

Alors $\mathcal{H}_T^h$ est représenté par un sous-schéma fermé de $H_{T_D}^h$.

On obtient la proposition suivante en appliquant le théorème 4.4 à l'aide du lemme 4.3. La démonstration est analogue à la première partie de [HaSt] Proof of theorem 1.1, p 742.

Proposition 4.6. *Soit D une partie finie du groupe abélien A. Le foncteur $\mathcal{H}^h_{M_D}$ est représenté par un schéma quasi-projectif $H^h_{M_D}$.*

Si N est un sous-espace vectoriel homogène de M, on note $h_N(a)$ la dimension (éventuellement infinie) du quotient M_a/N_a, pour tout $a \in A$.

On déduit le lemme suivant du lemme 4.3. La démonstration est analogue à celle de [HaSt] Proposition 3.2.

Lemme 4.7. *Il existe une partie finie D de A telle que*

(1) Tous les sous-modules monomiaux N tels que $h_N = h$ sont engendrés par leurs éléments homogènes de degré appartenant à D.

(2) Si N est un sous-module monomial de M engendré par ses éléments homogènes de degré appartenant à D et tel que $h_N|_D = h|_D$, alors $h_N = h$.

On obtient enfin la proposition suivante en appliquant le théorème 4.5. La démonstration est analogue à la seconde partie de [HaSt] Proof of theorem 1.1, p 742.

Proposition 4.8. *Soit D une partie de A donnée par le lemme 4.7 (en particulier, D est finie). Alors le foncteur $\mathcal{H}^h_M$ est représenté par un sous-schéma fermé de $H^h_{M_D}$, donc par un schéma quasi-projectif.*

Le théorème 4.2 est donc démontré.

4.3 Fin de la construction

Dans cette partie, on donne la construction du schéma Quot invariant (à partir du schéma Quot multigradué), parfaitement analogue à celle du schéma de Hilbert invariant d' Alexeev-Brion. Comme elle ne présente aucune difficulté nouvelle, on s'est contenté de donner les principales étapes, sans preuves complètes.

Traitons d'abord le cas où le groupe G est un tore : on a $G = T$. Soit Y un T-schéma affine, et $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent T-linéarisé sur Y. On note M l'espace des sections globales de $\mathcal{M}$.

Soit E un T-module de dimension finie tel que Y s'identifie (en tant que T-schéma) à un sous-schéma fermé T-stable de E. Soit $(e_1, ..., e_r)$ un système de générateurs fini du A-module M formé de vecteurs propres pour l'action de T. On associe à ce système de générateurs une surjection de $\mathcal{O}_E$-modules T-linéarisés

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_E e_i \twoheadrightarrow \mathcal{M}.$$

Le théorème 4.2 nous donne que le foncteur $\mathcal{Q}uot^T_h(E, \widetilde{\mathcal{M}})$ est représenté par un schéma quasi-projectif $\mathrm{Quot}^T_h(E, \widetilde{\mathcal{M}})$. Le lemme suivant correspond au théorème 4.1 dans le cas où le groupe réductif G est un tore. Sa démonstration est analogue à celle de [AlBr] lemma 1.6.

Lemme 4.9. *Le foncteur $\mathcal{Q}uot^T_h(Y, \mathcal{M})$ est représenté par un sous-schéma fermé de $\mathrm{Quot}^T_h(E, \widetilde{\mathcal{M}})$, donc par un schéma quasi-projectif.*

Traitons maintenant le cas général. On garde les notations du théorème 4.1.

On note $X//U$ le quotient catégorique du G-schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ par le sous-groupe unipotent maximal U de G :

$$X//U := \operatorname{Spec} A^U.$$

(On rappelle que A^U est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, selon [Gros], Thm 9.4.)
Le schéma affine $X//U$ est muni d'une action du tore T.

Notons $\mathcal{M}^U$ le faisceau T-linéarisé sur $X//U$ des U-invariants du faisceau $\mathcal{M}$. C'est un faisceau cohérent (en effet, montrons que l'espace de ses sections globales M^U est un A^U-module de type fini. Comme M est un A-module de type fini, son algèbre symétrique $\operatorname{Sym}_A(M)$ est une A-algèbre graduée de type fini, donc une $\mathbb{C}$-algèbre graduée de type fini. L'algèbre de ses U-invariants

$$\operatorname{Sym}_A(M)^U = A^U \oplus M^U \oplus (\mathrm{S}^2\, M)^U \oplus ...$$

est donc aussi une $\mathbb{C}$-algèbre graduée de type fini : en particulier, sa composante homogène de degré 1 est un A^U-module de type fini.)

Le foncteur $\mathcal{Q}uot_h^G(X, \mathcal{M})$ peut être vu comme un sous-foncteur de $\mathcal{Q}uot_h^T(X//U, \mathcal{M}^U)$ (on prolonge la fonction h à Λ en posant $h = 0$ sur $\Lambda \setminus \Lambda^+$).

On a en effet un morphisme fonctoriel ϕ donné pour tout schéma S par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}uot_h^G(X, \mathcal{M})(S) & \xrightarrow{\phi(S)} & \mathcal{Q}uot_h^T(X//U, \mathcal{M}^U)(S) \\ \mathcal{N} & \longmapsto & \mathcal{N}^U \end{array}$$

et les $\phi(S)$ sont des injections car le seul antécédent de $\mathcal{N}^U$ possible est le G-module engendré par $\mathcal{N}^U$.

Selon le lemme 4.9, le foncteur $\mathcal{Q}uot_h^T(X//U, \mathcal{M}^U)$ est représenté par un schéma quasi-projectif $\operatorname{Quot}_h^T(X//U, \mathcal{M}^U)$.

Proposition 4.10. *Le sous-foncteur $\mathcal{Q}uot_h^G(X, \mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{Q}uot_h^T(X//U, \mathcal{M}^U)$ est représenté par un sous-schéma fermé de $\operatorname{Quot}_h^T(X//U, \mathcal{M}^U)$, donc par un schéma quasi-projectif.*

La démonstration est analogue à celle du Thm 1.7 de [AlBr].

Le théorème 4.1 est donc démontré.

4.4 Premières propriétés du schéma Quot invariant

Dans ce paragraphe, on note toujours X un G-schéma affine, $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent G-linéarisé sur X dont on note M l'espace des sections globales, et $h : \Lambda^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction.

La proposition suivante décrit l'espace tangent au schéma Quot invariant en un point fermé. On donne sa démonstration, analogue à celle de [AlBr] Proposition 1.13, pour expliciter l'isomorphisme canonique.

Proposition 4.11. *Soit z un point fermé du schéma $\operatorname{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$, c'est-à-dire un sous-module $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ stable par G et tel que, en notant N l'espace des sections globales de $\mathcal{N}$, on ait un isomorphisme de G-modules*

$$M/N \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+} h(\lambda) V(\lambda).$$

L'espace tangent de Zariski au schéma Quot invariant est canoniquement isomorphe à l'espace des morphismes de A-G-modules de N dans M/N :

$$T_z \operatorname{Quot}_h^G(X, \mathcal{M}) \cong \operatorname{Hom}_A^G(N, M/N).$$

Preuve.

Notons ϵ la classe de t dans l'algèbre $\mathbb{C}[t]/\langle t^2 \rangle$.

L'espace tangent en z est l'ensemble des morphismes de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]$ dans $\operatorname{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$ dont la restriction à $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ (vu comme un sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]$) correspond au point z.

En d'autres termes, c'est l'ensemble des sous-$A[\epsilon]$-G-modules

$$L \subseteq \mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M = M \oplus \epsilon M$$

tels qu'on ait l'identification

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[\epsilon]} L \cong N$$

et que le quotient

$$(\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M)/L$$

soit un $\mathbb{C}[\epsilon]$-module plat.

Soit un tel sous-module L.

Précisons d'abord la première condition. On rappelle qu'on a un plongement (grâce à la seconde condition)

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[\epsilon]} L \hookrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[\epsilon]} (\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M) \cong (M \oplus \epsilon M)/\epsilon M \cong M.$$

La première condition dit que l'image de ce plongement est N. Autrement dit, la projection de $L \subseteq M \oplus \epsilon M$ sur M est N, c'est-à-dire

$$(L + \epsilon M) \cap M = N. \tag{11}$$

Notons que l'on a donc (en multipliant (11) par ϵ) $\epsilon L = \epsilon N$.

On utilise maintenant la seconde condition. Notons v un élément de $\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M$, et $\overline{v}$ sa classe dans le quotient $(\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M)/L$.

La seconde condition signifie que si $\epsilon\overline{v} = 0$, alors $\overline{v}$ appartient à $\epsilon((\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M)/L)$.

Autrement dit, si ϵv appartient à L, alors v appartient à $\epsilon M + L$.

Donc si ϵv appartient à L, alors ϵv appartient à $\epsilon(\epsilon M + L) = \epsilon L = \epsilon N$.

D'où $L \cap \epsilon M \subseteq \epsilon N$, et comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a

$$L \cap \epsilon M = \epsilon N. \tag{12}$$

On peut maintenant conclure. Pour tout élément n de N, il existe un unique élément $\phi(n)$ de M/N (on voit cet élément comme une partie de M) tel que

$$n + \epsilon\phi(n) \subseteq L$$

(l'unicité découle de (12) et l'existence de (11)). On a alors

$$L = \bigcup_{n \in N} (n + \epsilon\phi(n)). \tag{13}$$

Comme L est un A-G-module, l'application ϕ est un morphisme de A-G-modules.

Réciproquement, tout morphisme de A-G-modules $\phi : N \longrightarrow M/N$ définit bien via l'expression (13) un morphisme de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\epsilon]$ dans $\mathrm{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$. $\square$

La proposition suivante est une généralisation de [HaSt] Corollary 1.2.

Proposition 4.12. *Supposons que le G-module M est à multiplicités finies. Alors le schéma $\mathrm{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$ est projectif.*

Preuve. Par construction, le schéma $\mathrm{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$ est quasi-projectif. Pour montrer qu'il est projectif, il suffit donc de montrer qu'il est propre sur $\mathbb{C}$. Pour cela, on utilise le critère valuatif de propreté (voir [Ha] Theorem II.4.7). Soit R un anneau de valuation discrète, et K son corps de fractions. Il s'agit de montrer que tout morphisme $\operatorname{Spec} K \xrightarrow{\phi} \mathrm{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$ se prolonge en un morphisme $\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathrm{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$.

Un tel morphisme ϕ revient à un sous-$K \otimes_{\mathbb{C}} A$-module G-stable

$$L \subseteq K \otimes_{\mathbb{C}} M$$

tel que pour tout poids dominant λ, le K-espace vectoriel $(K \otimes_{\mathbb{C}} M/L)_\lambda^U$ est de dimension $h(\lambda)$.

On considère $R \otimes_{\mathbb{C}} M$ comme un sous-$R \otimes_{\mathbb{C}} A$-module G-stable de $K \otimes_{\mathbb{C}} M$. L'espace

$$P := L \cap (R \otimes_{\mathbb{C}} M)$$

est un sous-$R \otimes_{\mathbb{C}} A$-module G-stable de $R \otimes_{\mathbb{C}} M$.

De plus, comme le K-espace vectoriel $K \otimes_{\mathbb{C}} M_\lambda^U$ est de dimension finie, le R-module

$$(R \otimes_{\mathbb{C}} M/P)_\lambda^U = R \otimes_{\mathbb{C}} M_\lambda^U / (L_\lambda^U \cap (R \otimes_{\mathbb{C}} M_\lambda^U))$$

est lui aussi libre de rang $h(\lambda)$.

Le sous-module $P \subseteq R \otimes_{\mathbb{C}} M$ correspond donc à un morphisme $\operatorname{Spec} R \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathrm{Quot}_h^G(X, \mathcal{M})$. Enfin, la restriction de $\widetilde{\phi}$ est bien ϕ, car on a $K \otimes_R P = L$ (en effet, par définition de P, on a $K \otimes_R P \subseteq L$, et tout élément de L est égal, à un scalaire appartenant à K près, à un élément de P). $\square$

Lorsque le groupe G est trivial, le seul poids de G est le poids nul, et la donnée d'une fonction de Hilbert revient donc à celle d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On note alors respectivement $\mathrm{Hilb}_n(X)$ et $\mathrm{Quot}_n(X, \mathcal{M})$ le schéma de Hilbert invariant et le schéma Quot invariant.

Le schéma de Hilbert invariant $\mathrm{Hilb}_n(X)$ n'est autre que le schéma de Hilbert des sous-schémas de longueur n de X (c'est-à-dire le schéma de Hilbert de n points sur X, qui est défini dès que X est un schéma quasi-projectif).

On a naturellement un morphisme fonctoriel

$$\mathcal{Q}uot_h^G(X,\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{Q}uot_{h(0)}(X//G,\mathcal{M}^G) :$$

avec les notations du §1.1, il associe à tout élément $\mathcal{N} \subseteq f^*\mathcal{M}$ de $\mathcal{Q}uot_h^G(X,\mathcal{M})(S)$ le sous-$\mathcal{O}_{X//G}$-module $\mathcal{N}^G$ de $(f^*\mathcal{M})^G$. On a donc un morphisme naturel de schémas

$$\gamma : \mathrm{Quot}_h^G(X,\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Quot}_{h(0)}(X//G,\mathcal{M}^G).$$

Dans le cas du schéma de Hilbert invariant, c'est-à-dire si $\mathcal{M}$ est le faisceau structural de X, ce morphisme associe à tout fermé G-stable $Y \subseteq X$ de fonction de Hilbert h le fermé $Y//G$ (qui est en fait fini) de $X//G$. Ce morphisme est donc un analogue au morphisme de Hilbert-Chow de Nakamura ([Na] §2.1). Signalons cependant qu'il ne généralise pas le "morphisme de Chow" défini par Haiman et Sturmfels pour le cas du schéma de Hilbert torique ([HaSt] §5).

Proposition 4.13. *Le morphisme* $\gamma : \mathrm{Hilb}_h^G(X) \longrightarrow \mathrm{Hilb}_{h(0)}(X//G)$ *est projectif.*

Preuve. Comme pour la proposition précédente, il suffit de montrer que ce morphisme est propre. On utilise à nouveau le critère valuatif de propreté : soit R un anneau de valuation discrète, et K son corps de fractions.

Soient deux morphismes ϕ et ψ tels qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Hilb}_h^G(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(R) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Hilb}_{h(0)}(X//G) \end{array}$$

Il faut montrer que le morphisme ϕ se prolonge en un morphisme $\mathrm{Spec}(R) \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathrm{Hilb}_h^G(X)$.

Le morphisme ϕ correspond à un idéal G-stable $I \subseteq K \otimes_{\mathbb{C}} A$ tel que pour tout poids dominant λ, le K-espace vectoriel $(K \otimes_{\mathbb{C}} A/I)_\lambda^U$ est de dimension $h(\lambda)$.

Le morphisme ψ correspond à un idéal G-stable $J \subseteq R \otimes_{\mathbb{C}} A^G$ tel que le R-module $(R \otimes_{\mathbb{C}} A^G)/J$ est de dimension $h(0)$.

Enfin, la commutativité du diagramme signifie que

$$K \otimes_R J = I^G.$$

Comme précédemment, on considère l'idéal

$$J' := I \cap (R \otimes_{\mathbb{C}} A)$$

de $R \otimes_{\mathbb{C}} A$. Il est stable par G.

Montrons que pour tout poids dominant λ, le R-module

$$(R \otimes_{\mathbb{C}} A/J')_\lambda^U$$

est libre de rang $h(\lambda)$.

On remarque que c'est un module sans torsion, donc plat (car R est principal). Montrons que c'est un module de type fini.

Pour cela, il suffit de montrer que

$$(R \otimes_{\mathbb{C}} A_\lambda^U)/(J \cdot (R \otimes_{\mathbb{C}} A_\lambda^U))$$

est un R-module de type fini, car $J \cdot (R \otimes_{\mathbb{C}} A_\lambda^U)$ est inclus dans ${J'}_\lambda^U$.

On sait (voir par exemple [AlBr] Lemma 1.2) que $R \otimes_{\mathbb{C}} A_\lambda^U$ est un $R \otimes_{\mathbb{C}} A^G$-module de type fini.

Donc le quotient $(R \otimes_{\mathbb{C}} A_\lambda^U)/(J \cdot (R \otimes_{\mathbb{C}} A_\lambda^U))$ est un $(R \otimes_{\mathbb{C}} A^G)/J$-module de type fini, donc un R-module de type fini (car $(R \otimes_{\mathbb{C}} A^G)/J$ est un R-module de type fini).

Ainsi, le R-module $(R \otimes_{\mathbb{C}} A/J')_\lambda^U$ est plat de type fini : il est donc libre (car R est local).

Enfin, on a (comme précédemment) $K \otimes_R J' = I$, donc le rang de $(R \otimes_{\mathbb{C}} A/J')_\lambda^U$ est $h(\lambda)$.

L'idéal J' correspond donc à un morphisme $\widetilde{\phi} : \operatorname{Spec}(R) \longrightarrow \operatorname{Hilb}_h^G(X)$, dont la restriction à $\operatorname{Spec} K$ est ϕ. □

Par contre, dans le cas du schéma Quot invariant, le morphisme γ n'est pas nécessairement projectif. Par exemple, supposons que G est le groupe multiplicatif, et que X est la droite affine $\mathbb{A}^1$ munie de l'action triviale de G. Notons $\mathbb{C}_1$ la droite vectorielle où G agit avec le poids 1, et h la fonction valant 1 sur le poids 1 et 0 ailleurs. Supposons enfin que $\mathcal{M} := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1$ est le faisceau libre sur X où G agit avec poids 1 sur les sections.

Le schéma $\operatorname{Quot}_h^G(\mathbb{A}^1, \mathcal{M})$ coïncide avec $\operatorname{Hilb}_1(\mathbb{A}^1) = \mathbb{A}^1$. Le schéma $\operatorname{Quot}_0(\mathbb{A}^1, \mathcal{M}^G)$ consiste en un point réduit (le faisceau $\mathcal{M}^G$ est nul). Donc le morphisme $\gamma : \mathbb{A}^1 = \operatorname{Quot}_h^G(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \operatorname{Quot}_{h(0)}(X//G, \mathcal{M}^G) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ n'est pas projectif.

5 Etude d'une classe de schémas Quot invariants

Soit λ un poids dominant.

On a une action régulière de G sur l'espace $\mathbb{P}(V(\lambda))$ des droites de $V(\lambda)$. Notons $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V(\lambda))$ la droite engendrée par v_λ et

$$P_\lambda := G_{[v_\lambda]}$$

son stabilisateur dans G : c'est le plus grand sous-groupe parabolique de G qui contient B et tel que λ se prolonge en un caractère de P_λ. On a donc $P_\lambda = P_I$, où I est l'ensemble des racines simples qui sont orthogonales à λ. On note

$$P_\lambda = L_\lambda U_\lambda$$

la décomposition de Lévi de P_λ relativement au tore maximal T. L'orbite de $[v_\lambda]$ est la seule orbite fermée de $\mathbb{P}(V(\lambda))$ (donc l'unique orbite de plus petite dimension). L'espace homogène projectif G/P_λ se plonge ainsi dans $\mathbb{P}(V(\lambda))$, et le faisceau inversible très ample associé à ce plongement est en fait $\mathcal{L}_\lambda$. Le cône affine au dessus de G/P_λ dans $V(\lambda)$ est le cône

$$C_\lambda := \overline{G \cdot v_\lambda} = G \cdot v_\lambda \cup \{0\}$$

des vecteurs primitifs de $V(\lambda)$.

On note $A(\lambda)$ l'algèbre affine de C_λ.

Comme le morphisme dominant

$$\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & C_\lambda \\ g & \longmapsto & g \cdot v_\lambda \end{array}$$

se factorise par $G//U$, l'algèbre $A(\lambda)$ s'identifie à la sous-algèbre de $\mathbb{C}[G//U]$ engendrée par $V(\lambda)^*$:

$$A(\lambda) \cong \bigoplus_{m=0}^{\infty} V(m\lambda)^*.$$

C'est une algèbre graduée par $\mathbb{N}$.

Soit μ un poids dominant. Notons $Q(\lambda, \mu)$ le sous-$A(\lambda)$-module G-stable de $\mathbb{C}[G//U]$:

$$Q(\lambda, \mu) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} V(m\lambda + \mu)^*.$$

C'est un $A(\lambda)$-module gradué par $\mathbb{N}$, engendré par sa composante homogène de degré nul $Q(\lambda, \mu)_0 = V(\mu)^*$.

On a donc une surjection de $A(\lambda)$-G-modules

$$M(\lambda, \mu) := A(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)^* \twoheadrightarrow Q(\lambda, \mu).$$

Notons $N(\lambda, \mu)$ son noyau. Les $A(\lambda)$-modules $M(\lambda, \mu)$ et $N(\lambda, \mu)$ sont gradués par $\mathbb{N}$: la composante homogène de degré m de $M(\lambda, \mu)$ est

$$M(\lambda, \mu)_m = V(m\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)^* \ ;$$

celle de $N(\lambda, \mu)$ est le noyau du produit de Cartan

$$V(m\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)^* \longrightarrow V(m\lambda + \mu)^*.$$

En particulier, les composantes isotypiques non nulles de $N(\lambda, \mu)_m$ sont toutes de type strictement inférieur à $m\lambda^* + \mu^*$.

On a une suite exacte de $A(\lambda)$-G-modules gradués

$$0 \longrightarrow N(\lambda, \mu) \longrightarrow M(\lambda, \mu) \longrightarrow Q(\lambda, \mu) \longrightarrow 0.$$

Notons $\mathcal{N}(\lambda, \mu)$, $\mathcal{M}(\lambda, \mu)$, $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$ les faisceaux cohérents G-linéarisés sur C_λ correspondant respectivement à $N(\lambda, \mu)$, $M(\lambda, \mu)$ et $Q(\lambda, \mu)$. On a donc une suite exacte de faiseaux G-linéarisés

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(\lambda, \mu) \longrightarrow \mathcal{M}(\lambda, \mu) \longrightarrow \mathcal{Q}(\lambda, \mu) \longrightarrow 0.$$

Notons $h_{\lambda,\mu} : \Lambda^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction valant 1 sur les poids de la forme $m\lambda^* + \mu^*$, et 0 ailleurs. On a vu que le quotient $\mathcal{M}(\lambda, \mu)/\mathcal{N}(\lambda, \mu) \cong \mathcal{Q}(\lambda, \mu)$ admet la fonction de Hilbert $h_{\lambda,\mu}$: il correspond donc à un point fermé du schéma Quot invariant

$$\mathrm{Quot}^G_{h_{\lambda,\mu}}(C_\lambda, \mathcal{M}(\lambda, \mu)).$$

On note désormais ce schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$.

Remarque 5.1. Selon la proposition 4.12, le schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ est projectif. En effet, comme l'algèbre $A(\lambda)$ est à multiplicités finies, le G-module $M(\lambda,\mu) := A(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)^*$ est à multiplicités finies.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant. Les notations utilisées concernant les systèmes de racines sont celles de Bourbaki ([Bo1]).

Théorème 5.2. *Le schéma Quot invariant* $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ *est un point réduit, sauf si on a (à revêtement fini de G près)* $G = \mathrm{Spin}(2n+1)\times H$ *pour un groupe réductif connexe* H *et* $V(\lambda) = \mathbb{C}^{2n+1}$ *et* $\mu = (\mu_1,\mu_2)$ *avec* $\langle \mu_1, \alpha_n^\vee\rangle \geq 1$. *On a alors un isomorphisme :*

$$\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t]/\langle t^2\rangle).$$

Remarque 5.3.
- Dans le cas où $n = 1$, on a $G = \mathrm{SL}(2)\times H$ et $\lambda = (2\omega_1, 0)$.
- Dans le cas où $n \geq 2$, on a $\lambda = (\omega_1, 0)$.

5.1 Le schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ n'a qu'un seul point

On sait déjà que $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ admet le point fermé z correspondant à $\mathcal{N}(\lambda,\mu)$. Dans ce paragraphe, on montre qu'il n'y en a pas d'autre. On commence par quelques rappels sur les algèbres et les modules "horosphériques".

Definition 5.4. Soient R une G-algèbre, et V un R-G-module. On dit que V est *horosphérique* si pour tout poids dominants λ_1, λ_2, on a

$$R_{(\lambda_1)}\cdot V_{(\lambda_2)} \subseteq V_{(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

On dit que la G-algèbre R est *horosphérique* si elle est horosphérique en tant que R-G-module.

Le théorème suivant découle de [KeRa] Theorem 3 p 356 :

Théorème 5.5. *Soit R une G-algèbre. Soit $E \subseteq R$ un sous-G-module qui engendre R en tant qu'algèbre. Alors l'algèbre R est horosphérique si et seulement si pour tout poids dominants λ_1, λ_2 on a*

$$E_{(\lambda_1)}\cdot E_{(\lambda_2)} \subseteq R_{(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Preuve. Comme R est la limite inductive de ses sous-algèbres de type fini G-stables, il suffit de montrer le théorème dans le cas où l'algèbre R est de type fini. On peut alors supposer que E est un G-module de dimension finie.

Notons $(\mathrm{Sym}\, E)/I$ le plus grand quotient horosphérique de la G-algèbre $\mathrm{Sym}\, E$. L'idéal I est homogène, engendré par les composantes isotypiques

$$[(\mathrm{S}^m\, E)_{(\lambda)}\cdot(\mathrm{S}^n\, E)_{(\mu)}]_{(\nu)},$$

où m, n sont des entiers, et λ, μ, ν des poids dominants tels que $\lambda+\mu \neq \nu$.

Selon [KeRa] Theorem 3 p 356, l'idéal I est en fait engendré par sa composante homogène de degré 2, notée I_2.

Ainsi, si on note J le noyau de la surjection canonique $\operatorname{Sym} E \longrightarrow R$, l'algèbre R est horosphérique si et seulement si $I_2 \subseteq J$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout poids dominants λ_1, λ_2 on a $E_{(\lambda_1)} \cdot E_{(\lambda_2)} \subseteq R_{(\lambda_1+\lambda_2)}$. □

Corollaire 5.6. *Soit R une G-algèbre horosphérique engendrée par un sous-G-module $E \subseteq R$. Soit V un R-G-module engendré par un sous-G-module $W \subseteq V$. Alors V est un R-G-module horosphérique si et seulement si pour tout poids dominants λ_1, λ_2 on a*

$$E_{(\lambda_1)} \cdot W_{(\lambda_2)} \subseteq W_{(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Preuve. Remarquons que le R-G-module V est horosphérique si et seulement si la G-algèbre $R \oplus \epsilon V$ (où on pose $\epsilon^2 = 0$) est horosphérique. En appliquant le théorème précédent à cette algèbre (engendrée par $E \oplus \epsilon W$), on obtient le corollaire. □

On établit le lemme suivant à l'aide du corollaire précédent :

Lemme 5.7. *Le $A(\lambda)$-module gradué $N(\lambda, \mu)$ est engendré par sa composante homogène de degré 1.*

Preuve. Notons $\langle N(\lambda, \mu)_1 \rangle$ le sous-$A(\lambda)$-module de $N(\lambda, \mu)$ engendré par la composante homogène de degré 1. Il s'agit de montrer que $\langle N(\lambda, \mu)_1 \rangle = N(\lambda, \mu)$.

On remarque que $A(\lambda)$ est une algèbre horosphérique engendrée par la composante homogène $A(\lambda)_1 = V(\lambda)^*$, et que

$$\overline{M(\lambda, \mu)} := M(\lambda, \mu)/\langle N(\lambda, \mu)_1 \rangle$$

est un $A(\lambda)$-module gradué engendré par sa composante homogène de degré 0 :

$$\overline{M(\lambda, \mu)}_0 \cong V(\mu)^*.$$

Enfin, on a un isomorphisme

$$A(\lambda)_1 \cdot \overline{M(\lambda, \mu)}_0 \cong V(\lambda + \mu)^*.$$

Le module $\overline{M(\lambda, \mu)}$ est donc horosphérique, selon le corollaire précédent.

Si m est un entier, les composantes isotypiques de $A(\lambda)_m \cdot \overline{M(\lambda, \mu)}_0$ de type différent de $m\lambda^* + \mu^*$ sont donc nulles. Autrement dit, on a pour tout m :

$$N(\lambda, \mu)_m \subseteq \langle N(\lambda, \mu)_1 \rangle,$$

ce qui montre le lemme. □

Proposition 5.8. *Le schéma $\operatorname{Quot}^G(\lambda, \mu)$ a un unique point fermé z.*

Preuve. Soit $P \subseteq M(\lambda, \mu)$ un sous-$A(\lambda)$-module G-stable tel qu'on ait un isomorphisme de G-modules

$$M(\lambda, \mu)/P \simeq \bigoplus_{m=0}^{\infty} V(m\lambda + \mu)^*.$$

Il s'agit de montrer que $P = N(\lambda, \mu)$.

Si p est un entier, on note $M(\lambda,\mu)_{\geq p}$ le sous-$A(\lambda)$-module gradué G-stable

$$M(\lambda,\mu)_{\geq p} := \bigoplus_{m=p}^{\infty} M(\lambda,\mu)_m \subseteq M(\lambda,\mu).$$

Montrons d'abord que $P \subseteq M(\lambda,\mu)_{\geq 1}$.

Par l'absurde, supposons le contraire : on a alors

$$M(\lambda,\mu) = P + M(\lambda,\mu)_{\geq 1}.$$

Montrons par une récurrence descendante que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$[M(\lambda,\mu)_{\geq m}]_{(\mu^*)} \subseteq P,$$

ce qui donnera une contradiction.

Si l'entier m est suffisament grand, on a

$$[M(\lambda,\mu)_{\geq m}]_{(\mu^*)} = 0,$$

car le G-module M est à multiplicités finies.

Soit m un entier tel que $[M(\lambda,\mu)_{\geq m+1}]_{(\mu^*)} \subseteq P$.

Comme

$$M(\lambda,\mu)_0 \subseteq P + M(\lambda,\mu)_{\geq 1},$$

on a, en appliquant $A(\lambda)_m$,

$$M(\lambda,\mu)_m = A(\lambda)_m \cdot M(\lambda,\mu)_0 \subseteq A(\lambda)_m \cdot P + M(\lambda,\mu)_{\geq m+1}.$$

Puis, en prenant la composante isotypique de type μ^* :

$$[M(\lambda,\mu)_m]_{(\mu^*)} \subseteq A(\lambda)_m \cdot P + [M(\lambda,\mu)_{\geq m+1}]_{(\mu^*)}.$$

D'où le résultat, par récurrence. Ainsi on a

$$P \subseteq M(\lambda,\mu)_{\geq 1}.$$

On veut maintenant montrer que $P = N(\lambda,\mu)$; il suffit pour cela de montrer que $N(\lambda,\mu)$ est inclus dans P. Selon le lemme précédent, il suffit de montrer que $N(\lambda,\mu)_1$ est inclus dans P.

On a vu que les composantes isotypiques non nulles de $N(\lambda,\mu)_1$ sont toutes de type strictement inférieur à $\lambda^* + \mu^*$. Donc leurs images dans

$$M(\lambda,\mu)_{\geq 1}/P \simeq \bigoplus_{m=1}^{\infty} V(m\lambda+\mu)^*$$

sont toutes nulles, et donc $N(\lambda,\mu)_1$ est inclus dans P, ce qui montre le lemme. $\square$

5.2 L'espace tangent au schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ en z

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.9. *L'espace tangent en z au schéma Quot invariant $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ est nul, sauf si on a (à revêtement fini de G près) $G = \mathrm{Spin}(2n+1)\times H$ pour un groupe réductif connexe H et $V(\lambda) = \mathbb{C}^{2n+1}$ et $\mu = (\mu_1,\mu_2)$ avec $\langle \mu_1, \alpha_n^\vee\rangle \geq 1$. L'espace tangent est alors de dimension 1.*

5.2.1 Une condition nécessaire pour que l'espace tangent soit non nul

Selon la proposition 4.11, on a un isomorphisme

$$\mathrm{T}_z \,\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu) \cong \mathrm{Hom}^G_{A(\lambda)}(N(\lambda,\mu), Q(\lambda,\mu)).$$

On sait qu'on a une équivalence de catégories abéliennes entre les faisceaux G-linéarisés sur l'espace homogène $G\cdot v_\lambda$ et les modules rationnels sur le groupe d'isotropie G_{v_λ}. Elle est donnée par le foncteur qui à un faisceau G-linéarisé $\mathcal{F}$ associe sa fibre $\mathcal{F}_{v_\lambda}$ en v_λ. Ainsi, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda} \longrightarrow \mathcal{Q}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda} \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(\lambda,\mu)_{v_\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}(\lambda,\mu)_{v_\lambda} \longrightarrow \mathcal{Q}(\lambda,\mu)_{v_\lambda} \longrightarrow 0. \tag{14}$$

De plus, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}^G_{\mathcal{O}_{C_\lambda}}(\mathcal{N}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda}, \mathcal{Q}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda}) \cong \mathrm{Hom}^{G_{v_\lambda}}(\mathcal{N}(\lambda,\mu)_{v_\lambda}, \mathcal{Q}(\lambda,\mu)_{v_\lambda}).$$

Lemme 5.10. *Le morphisme de restriction*
$\mathrm{Hom}^G(\mathcal{N}(\lambda,\mu),\mathcal{Q}(\lambda,\mu)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^G(\mathcal{N}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda}, \mathcal{Q}(\lambda,\mu)|_{G\cdot v_\lambda})$ *est injectif.*

Preuve. Soit ϕ un morphisme non nul de $\mathcal{N}(\lambda,\mu)$ vers $\mathcal{Q}(\lambda,\mu))$ au dessus du cône C_λ. Comme le cône est affine, il existe une section globale s de $\mathcal{N}(\lambda,\mu)$ telle que $\phi(s)\neq 0$. Puis, comme $Q(\lambda,\mu)$ est un $A(\lambda)$-module sans torsion, la restriction de $\phi(s)$ à tout ouvert non vide de C_λ est non nulle. En particulier, $\phi(s|_{G\cdot v_\lambda}) = \phi(s)|_{G\cdot v_\lambda}$ est non nulle. □

Proposition 5.11. *La suite exacte courte de G_{v_λ}-modules (14) s'identifie à la suivante :*

$$0 \longrightarrow (V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda}))^* \longrightarrow V(\mu)^* \longrightarrow (V(\mu)^{U_\lambda})^* \longrightarrow 0.$$

Preuve. La fibre du faisceau $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{C_\lambda}\otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)^*$ est $V(\mu)^*$. Déterminons la fibre de $\mathcal{Q}(\lambda,\mu)$ en v_λ.

On note f et π les projections naturelles :

$$\begin{tikzcd} & G/G_{v_\lambda} = G\cdot v_\lambda \arrow[d, "\pi"] \\ G/B \arrow[r, "f"] & G/P_\lambda = G\cdot[v_\lambda] \end{tikzcd}$$

On remarque que l'on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}[G//U] \cong \bigoplus_{\nu\in\Lambda^+} \mathrm{H}^0(G/B, \mathcal{L}_\nu),$$

où la multiplication de l'algèbre de droite est celle induite par les multiplications $\mathcal{L}_{\nu_1} \otimes \mathcal{L}_{\nu_2} \longrightarrow \mathcal{L}_{\nu_1+\nu_2}$.

On a donc un isomorphisme de modules

$$Q(\lambda, \mu) \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{H}^0(G/B, \mathcal{L}_{m\lambda+\mu}).$$

Donc

$$Q(\lambda, \mu) \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{H}^0(G/P_\lambda, \mathcal{L}_{m\lambda} \otimes f_*\mathcal{L}_\mu),$$

selon la formule de projection.

La restriction $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)|_{G\cdot v_\lambda}$ est donc l'image réciproque du faisceau $f_*\mathcal{L}_\mu$ sur G/P_λ :

$$\mathcal{Q}(\lambda, \mu)|_{G\cdot v_\lambda} \cong \pi^*(f_*\mathcal{L}_\mu).$$

On a donc un isomorphisme sur les fibres :

$$\mathcal{Q}(\lambda, \mu)_{v_\lambda} \cong (f_*\mathcal{L}_\mu)_{[v_\lambda]},$$

avec

$$(f_*\mathcal{L}_\mu)_{[v_\lambda]} \cong \mathrm{H}^0(P_\lambda/P_\lambda, f_*\mathcal{L}_\mu) \cong \mathrm{H}^0(P_\lambda/B, \mathcal{L}_\mu).$$

La variété de drapeaux P_λ/B est canoniquement isomorphe à $L_\lambda/(B\cap L_\lambda)$. La fibre $(f_*\mathcal{L}_\mu)_{[v_\lambda]}$ est donc isomorphe à l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{L}_\mu$ sur $L_\lambda/(B \cap L_\lambda)$, donc au L_λ-module simple de plus grand poids μ^* :

$$(f_*\mathcal{L}_\mu)_{[v_\lambda]} \cong (V(\mu)^{U_\lambda})^*.$$

Enfin, le premier terme de la suite exacte est donc bien le dual de $V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda})$. □

L'espace tangent au schéma Quot invariant se plonge donc dans

$$\mathrm{Hom}^{G_{v_\lambda}}((V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda}))^*, (V(\mu)^{U_\lambda})^*) \cong \mathrm{Hom}^{G_{v_\lambda}}(V(\mu)^{U_\lambda}, V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda})).$$

Proposition 5.12. *Si l'espace tangent à $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ en z est non nul, alors à revêtement fini de G près, on a un isomorphisme $G \simeq \mathrm{Spin}(V) \times H$ pour un groupe réductif connexe H, et on a $V(\lambda) = V$.*

Preuve. On vient de voir que l'espace tangent à $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ se plonge dans

$$E := \mathrm{Hom}^{G_{v_\lambda}}(V(\mu)^{U_\lambda}, V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda})).$$

On remarque que comme le tore T agit sur les espaces $V(\mu)^{U_\lambda}$ et $V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda})$, on a une action de T sur E : si ϕ est un élément de E et t un élément de T, alors

$$t \cdot \phi : v \longmapsto t \cdot \phi(t^{-1} \cdot v).$$

On suppose que l'espace E est non nul.

Soit ϕ un vecteur propre (non nul) de E sous l'action de T. La restriction de cette action au stabilisateur T_{v_λ} de v_λ dans T est triviale : le poids de ϕ est donc de la forme $d\lambda$, où d est un entier.

Le groupe $[L_\lambda, L_\lambda]$ dérivé de L_λ est contenu dans le groupe d'isotropie G_{v_λ}, donc le morphisme ϕ est $[L_\lambda, L_\lambda]$-équivariant. Comme $V(\mu)^{U_\lambda}$ est un $[L_\lambda, L_\lambda]$-module simple et comme ϕ est non nul, ϕ est injectif. On a donc $\phi(v_\mu) \neq 0$.

Notons v l'unique antécédent de $\phi(v_\mu)$ par la projection canonique $V(\mu) \to V(\mu)/(V(\mu)^{U_\lambda})$ qui soit un T-vecteur propre. Son poids est $\mu - d\lambda$.

Le sous-groupe unipotent maximal U de G est contenu dans G_{v_λ}, donc le morphisme ϕ est U-équivariant. Le vecteur $\phi(v_\mu)$ est donc invariant par U, et on a

$$\mathfrak{u} \cdot v \subseteq V(\mu)^{U_\lambda}.$$

Comme le vecteur v n'appartient pas à $V(\mu)^{U_\lambda}$, il existe une racine simple α telle que

$$e_\alpha \cdot v \neq 0.$$

On a alors $e_\alpha \cdot v \in V(\mu)^{U_\lambda}$.

Une telle racine α ne peut pas être une racine de L_λ, car sinon le poids de v serait la somme de μ et de racines de L_λ, et v appartiendrait à $V(\mu)^{U_\lambda}$.

On remarque donc (comme v est de poids $\mu - d\lambda$), que $d\lambda$ est somme de racines simples de L_λ et d'une seule racine simple de G qui n'est pas une racine de L_λ.

Soit α une racine positive telle que $e_\alpha \cdot v \neq 0$ et que l'on suppose maximale possible. Montrons que $e_\alpha \cdot v$ est proportionnel à v_μ.

Si ce n'est pas le cas, il existe une racine simple β de L_λ telle que

$$e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot v) \neq 0$$

(car $e_\alpha \cdot v$ appartient à $V(\mu)^{U_\lambda}$). Or

$$e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot v) = [e_\beta, e_\alpha] \cdot v + e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot v),$$

avec $[e_\beta, e_\alpha] \cdot v = 0$ (car on a supposé α maximale possible) et $e_\beta \cdot v = 0$ comme on l'a vu : une contradiction.

Les vecteurs $e_\alpha \cdot v$ et v_μ sont donc proportionnels. En considérant les poids, on obtient :

$$\alpha = d\lambda.$$

Ainsi, $d\lambda$ est une racine positive de G dont l'écriture comme somme de racine simples contient une seule racine simple (avec coefficient 1) qui n'est pas une racine de L_λ.

L'action de G sur $V(\lambda)$ se factorise donc par celle d'un groupe simple (car λ est proportionnel à une racine de G).

On vérifie facilement que les seuls systèmes de racines simples qui admettent une racine dominante α dont l'écriture comme somme de racine simples contient une seule racine simple (avec coefficient 1) qui n'est pas orthogonale à α sont ceux de type B_n, $n \geq 1$, avec $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ (c'est-à-dire ω_1 si $n \geq 2$ et $2\omega_1$ sinon).

Comme un multiple de λ doit être une telle racine α, il ne reste plus qu'à éliminer le cas où le système de racines est de type $B_1 = A_1$ et où $\lambda = \omega_1 = 1$.

Supposons donc que l'on a $G = \mathrm{SL}(2) \times H$ et $\lambda = (1,0)$. La composante homogène de degré 1 de $N(\lambda,\mu)$ est le noyau du produit de Cartan $V(1,0) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu_1,\mu_2) \longrightarrow V(\mu_1+1,\mu_2)$. Elle est donc isomorphe à $V(\mu_1-1,\mu_2)$ si $\mu_1 \neq 0$, nulle sinon.

Selon le lemme 5.7, l'espace $N(\lambda,\mu)_1$ engendre le $A(\lambda)$-module $N(\lambda,\mu)$. On a donc une inclusion

$$\mathrm{Hom}^G_{A(1)}(N(\lambda,\mu), Q(\lambda,\mu)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}^G(N(\lambda,\mu)_1, Q(\lambda,\mu)) = 0,$$

donc l'espace tangent est nul dans ce cas. □

5.2.2 Cas d'un groupe G simple de type B_n, $n \geq 1$

Dans ce paragraphe, on montre la proposition 5.9 dans le cas où $G = \mathrm{Spin}(2n+1)$ et $\lambda = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, c'est-à-dire ω_1 si $n \geq 2$ et $2\omega_1$ sinon.

Lemme 5.13. *La multiplicité de $V(\mu)$ dans la décomposition de $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ en somme directe de modules simples est 1 si $\langle \mu, \alpha_n^\vee \rangle \neq 0$, et 0 sinon.*

Preuve. On va utiliser la formule de Weyl ([Serr] Théorème VII.4), qui donne les poids et leurs multiplicités d'un module $V(\lambda)$ en fonction de λ.

On note $(e^\nu)_{\nu \in \Lambda}$ la base canonique de l'algèbre $\mathbb{Z}[\Lambda]$ du groupe Λ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Si V est un G-module de dimension finie, on note m_ν la multiplicité du poids ν dans V pour tout $\nu \in \Lambda$. Le *caractère* de V est alors

$$\mathrm{ch}(V) := \sum_{\nu \in \Lambda} m_\nu e^\nu.$$

On note ρ la demi-somme des racines positives de G. On note enfin W le groupe de Weyl de G relativement au tore maximal T, et pour tout élément w de W, on note $\epsilon(w)$ la signature de w.

Soit a_ν la multiplicité du module $V(\nu)$ dans la décomposition en somme directe de modules simples de $V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$: on a

$$V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} a_\nu V(\nu).$$

On a donc, en prenant les caractères :

$$\operatorname{ch}(V(\lambda))\operatorname{ch}(V(\mu)) = \sum_{\nu\in\Lambda^+} a_\nu \operatorname{ch}(V(\nu)).$$

Donc, selon la formule de Weyl :

$$\operatorname{ch}(V(\lambda)) \sum_{w\in W} \epsilon(w)e^{w(\rho+\mu)} = \sum_{\nu\in\Lambda^+}\sum_{w\in W} a_\nu \epsilon(w)e^{w(\rho+\nu)}.$$

On remarque que a_μ est le coefficient de $e^{\rho+\mu}$ dans chacun des deux membres.

Les poids du module $V(\lambda)$ sont les $\pm\epsilon_i$ où $i = 1, ..., n$ et le poids nul, chacun avec multiplicité 1. Le caractère de $V(\lambda)$ est donc

$$\operatorname{ch}(V(\lambda)) = e^{\epsilon_1} + ... + e^{\epsilon_n} + 1 + e^{-\epsilon_n} + ... + e^{-\epsilon_1}.$$

L'entier a_μ est donc le cefficient de $e^{\rho+\mu}$ dans l'expression

$$(e^{\epsilon_1} + ... + e^{\epsilon_n} + 1 + e^{-\epsilon_n} + ... + e^{-\epsilon_1}) \sum_{w\in W} \epsilon(w)e^{w(\rho+\mu)}.$$

On remarque que

$$\pm\epsilon_i + w(\rho+\mu)$$

n'est jamais égal à $\rho+\mu$, sauf si w est la réflexion simple associée à la racine α_n et $\pm\epsilon_i = \epsilon_n$, avec $\langle\mu, \alpha_n^\vee\rangle = 0$.

Le coefficient de $e^{\rho+\mu}$ est donc 1 si $\langle\mu, \alpha_n^\vee\rangle \neq 0$, et 0 sinon, d'où le lemme. □

Lemme 5.14. *Soit $m \geq 1$ un entier. Les poids dominants ν tels que $V(\nu)$ s'injecte dans $V(m\lambda)\otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ et qui sont supérieurs ou égaux à $(m-1)\lambda+\mu$ sont de la forme*

$$m\lambda + \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_i,$$

avec $i = 0, ..., n$.

Preuve. Soit ν un poids tel que

$$(m-1)\lambda + \mu \leq \nu \leq m\lambda + \mu.$$

Le poids s'écrit donc

$$\nu = m\lambda + \mu - \sum_{j\in J} \alpha_j,$$

où J est une partie de l'intervalle d'entiers $[1; n]$. On note r son cardinal.

Supposons que $V(m\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ contient un vecteur primitif de poids ν. On veut montrer que $J = [1; r]$.

Notons r_0 le plus grand entier tel que J contienne $[1; r_0]$. On veut montrer que $r_0 = r$. On va raisonner par l'absurde et supposer $r_0 < r$.

On rappelle ([Bo2] VIII.7 Exercice 18) que comme λ est colinéaire à ω_1, si $j_1, ..., j_s$ sont des entiers de $[1; n]$ distincts deux à deux tels que

$$e_{-\alpha_{j_s}} \cdot ... \cdot e_{-\alpha_{j_1}} \cdot v_{m\lambda}$$

est non nul, alors on a $j_i = i$ pour tout $i = 1, ..., s$.

On pose

$$v_s := e_{-\alpha_s} \cdot ... \cdot e_{-\alpha_1} \cdot v_{m\lambda}.$$

Soit v un vecteur primitif de $V(m\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$ de poids ν. Le vecteur v s'écrit

$$v = \sum_{s=1}^{r_0} v_s \otimes w_s,$$

où chaque w_s est un vecteur de $V(\mu)$ de poids

$$\mu - \sum_{j \in J \setminus [1;s]} \alpha_j.$$

Notons I l'intervalle d'entiers $[1; r_0]$, et $\mathfrak{u}_I$ l'algèbre de Lie du groupe unipotent U_I. En raison de leurs poids respectifs, les vecteurs v_s sont invariants par U_I, mais pas les vecteurs w_s (sauf ceux qui sont nuls). Soit un élément s_0 de $[1; r_0]$ tel que w_{s_0} est non nul. Soit un élément x de $\mathfrak{u}_I$ tel que $x \cdot w_{s_0}$ est non nul. On a

$$x \cdot v = \sum_{s=0}^{r_0} v_s \otimes (x \cdot w_s) \neq 0,$$

car $(v_0, ..., v_{r_0})$ est une famille libre de $V(m\lambda)$ et $x \cdot w_{s_0} \neq 0$. Le vecteur v n'est donc pas primitif : une contradiction. $\square$

Lemme 5.15. *Pour tout entier $m \geq 0$, on note $N'(\lambda, \mu)_m$ l'unique supplémentaire G-stable dans $N(\lambda, \mu)_m$ de la composante isotypique de type $(m-1)\lambda + \mu$. Alors*

$$N'(\lambda, \mu) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} N'(\lambda, \mu)_m$$

est un sous-$A(\lambda)$-module homogène de $N(\lambda, \mu)$.

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout entier m, on a

$$A(\lambda)_1 \cdot N'(\lambda, \mu)_m \subseteq N'(\lambda, \mu)_{m+1}.$$

Pour cela, on va montrer que la composante isotypique de

$$A(\lambda)_1 \otimes_{\mathbb{C}} N'(\lambda, \mu)_m$$

de type $m\lambda + \mu$ est nulle.

Soit ν un poids dominant tel que la composante isotypique de $N'(\lambda, \mu)_m$ de type ν soit non nulle. Montrons que la composante isotypique de

$$A(\lambda)_1 \otimes_{\mathbb{C}} V(\nu)$$

de type $m\lambda + \mu$ est nulle.

Si $(m-1)\lambda + \mu$ n'est pas inférieur ou égal à ν, alors $m\lambda + \mu$ n'est pas inférieur ou égal à $\lambda + \nu$, donc la composante isotypique de

$$A(\lambda)_1 \otimes_{\mathbb{C}} V(\nu)$$

de type $m\lambda + \mu$ est bien nulle.

Sinon, selon le lemme 5.14, on a

$$\nu = m\lambda + \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_r$$

pour un certain $r \in [1; n-1]$.

Selon [Bo2] VIII.7 Exercice 18, comme λ est colinéaire à ω_1, les composantes isotypiques non nulles de

$$V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(m\lambda + \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_r)$$

sont soit de type $(m+1)\lambda + \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_r$, soit de type inférieur ou égal à $(m+1)\lambda + \mu - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_r - \alpha_1$. Celle de type $m\lambda + \mu$ est donc nulle.

Ainsi, la composante isotypique de

$$A(\lambda)_1 \otimes_{\mathbb{C}} N'(\lambda, \mu)_m$$

de type $m\lambda + \mu$ est bien nulle, et lemme est démontré. □

Lemme 5.16. *On suppose $\alpha_n^\vee(\mu) \neq 0$. Pour tout $m \geq 1$, on a un isomorphisme*

$$N(\lambda, \mu)_m \simeq V((m-1)\lambda + \mu) \oplus N'(\lambda, \mu)_m.$$

Preuve. Notons W_m la composante isotypique de $N(\lambda, \mu)_m$ de type $(m-1)\lambda + \mu$.
On a

$$N(\lambda, \mu)_m = W_m \oplus N'(\lambda, \mu)_m.$$

Il s'agit de montrer que pour tout m, le G-module W_m est simple.

Selon le lemme 5.7, on a

$$N(\lambda, \mu)_m = A(\lambda)_{m-1} \cdot N(\lambda, \mu)_1.$$

Selon le lemme 5.15, on a

$$A(\lambda)_{m-1} \cdot N'(\lambda, \mu)_1 \subseteq N'(\lambda, \mu)_m.$$

On a donc une surjection de G-modules

$$A(\lambda)_{m-1} \otimes_{\mathbb{C}} W_1 \twoheadrightarrow W_m.$$

Les G-modules $A(\lambda)_{m-1}$ et W_1 sont isomorphes respectivement à $V((m-1)\lambda)$ et $V(\mu)$ (selon le lemme 5.13), donc W_m est soit nul soit isomorphe à $V((m-1)\lambda+\mu)$.

Le $A(\lambda)$-module $M(\lambda,\mu)$ est sans torsion (car libre). Dons si a est un vecteur primitif de $A(\lambda)_1$ et v un vecteur primitif de W_1, le vecteur av est un vecteur primitif (non nul) de $N(\lambda,\mu)_m$ de poids $(m-1)\lambda+\mu$, donc W_m est en fait isomorphe à $V((m-1)\lambda+\mu)$. $\square$

Vérifions maintenant que la proposition 5.9 est vraie dans notre situation.

Le $A(\lambda)$-module $N(\lambda,\mu)$ est engendré par sa composante homogène de degré 1. On a donc un plongement

$$\mathrm{Hom}^G_{A(\lambda)}(N(\lambda,\mu),Q(\lambda,\mu)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}^G(N(\lambda,\mu)_1,Q(\lambda,\mu)).$$

Selon le lemme 5.13, l'espace $\mathrm{Hom}^G(N(\lambda,\mu)_1,Q(\lambda,\mu))$ est de dimension 1 si $\alpha_n^\vee(\mu)\neq 0$, et nul sinon.

Le théorème est donc vérifié si $\alpha_n^\vee(\mu)=0$. Il reste à vérifier que l'espace tangent au schéma Quot invariant est non nul si $\alpha_n^\vee(\mu)\neq 0$.

Selon le lemme 5.16, le $A(\lambda)$-module $N(\lambda,\mu)/N'(\lambda,\mu)$ admet alors $h_{\lambda,\mu}$ comme fonction de Hilbert. De plus il engendré par sa composante homogène de degré 1 : c'est donc un quotient de $A(\lambda)\otimes V(\mu)=M(\lambda,\mu)$. Il est donc isomorphe à $Q(\lambda,\mu)$, selon la proposition 5.8.

Donc si $\alpha_n^\vee(\mu)$ est non nul, il existe un morphisme non nul de $N(\lambda,\mu)$ vers $Q(\lambda,\mu)$, et l'espace tangent est donc non nul : la proposition 5.9 est vraie dans notre situation.

5.2.3 Cas général

On va conclure à l'aide du fait général suivant :

Lemme 5.17. *Soient G_1 et G_2 deux groupes réductifs connexes, chacun muni d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel le contenant. On note Λ_i^+ l'ensemble des poids dominants de G_i.*

Soit X un G_1-schéma affine, $\mathcal{M}_1$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent et G_1-linéarisé, et h_1 une fonction sur Λ_1^+ à valeurs entières.

Soit μ_2 un poids dominant de G_2. On note $V_{G_2}(\mu_2)$ le G_2-module simple associé, et $\Lambda_1^+\times\Lambda_2^+\longrightarrow\mathbb{N}$ la fonction donnée par $h(\lambda_1,\lambda_2):=h_1(\lambda_1)$ si $\lambda_2=\mu_2$ et 0 sinon.

On a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Quot}_h^{G_1\times G_2}(X,\mathcal{M}_1\otimes_{\mathbb{C}}V_{G_2}(\mu_2))\cong\mathrm{Quot}_{h_1}^{G_1}(X,\mathcal{M}_1).$$

Preuve. On a un morphisme fonctoriel

$$\mathcal{Q}uot_h^{G_1\times G_2}(X,\mathcal{M}_1\otimes_{\mathbb{C}}V_{G_2}(\mu_2))\longrightarrow\mathcal{Q}uot_{h_1}^{G_1}(X,\mathcal{M}_1)$$

donné pour tout schéma S par l'application

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{Q}uot_h^{G_1\times G_2}(X,\mathcal{M}_1\otimes_{\mathbb{C}}V_{G_2}(\mu_2))(S) & \longrightarrow & \mathcal{Q}uot_{h_1}^{G_1}(X,\mathcal{M}_1)(S)\\ \mathcal{N}_1 & \longmapsto & \mathcal{N}_1\otimes_{\mathbb{C}}V_{G_2}(\mu_2)\end{array}$$

Cette application est bijective, car tout sous-$G_1 \times G_2$-module de $\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_{G_2}(\mu_2)$ est de la forme $\mathcal{N}_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_{G_2}(\mu_2)$, où $\mathcal{N}_1$ est un sous-G_1-module de $\mathcal{M}_1$. $\square$

Montrons maintenant la proposition 5.9.

Selon la proposition 5.12, on peut supposer que l'on a $G = \mathrm{Spin}(2n+1) \times H$, et λ est $(\omega_1, 0)$ si $n \geq 2$ et $(2\omega_1, 0)$ si $n = 1$.

On remarque que l'on a, en notant $V_H(\mu_2)$ le H-module simple de plus grand poids μ_2 :

$$M(\lambda, \mu) = M(\lambda, (\mu_1, 0)) \otimes_{\mathbb{C}} V_H(\mu_2).$$

L'action de H sur X est triviale. On conclut en appliquant le lemme précédent.

5.3 Détermination de $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$

On va maintenant établir le théorème 5.2. Selon les propositions 5.8 et 5.9, le schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ est soit un point réduit, soit isomorphe à $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[t]/\langle t^n \rangle$, pour un entier n supérieur ou égal à 2. Il ne reste plus qu'à montrer que cet entier n est toujours égal à 2.

Notons t une indéterminée, et ϵ (resp. δ) sa classe dans l'algèbre $\mathbb{C}[t]/\langle t^2 \rangle$ (resp. $\mathbb{C}[t]/\langle t^3 \rangle$). On identifie $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\epsilon]$ à un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\delta]$ à l'aide de la surjection canonique $\mathbb{C}[\delta] \longrightarrow \mathbb{C}[\epsilon]$.

Il suffit de montrer que la différentielle (entre les espaces tangents de Zariski) de tout morphisme

$$\Psi : \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\delta] \longrightarrow \mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$$

est nulle, c'est-à-dire que la restriction de Ψ à $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\epsilon]$ correspond au vecteur tangent nul en z.

Soit

$$\Phi : \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\epsilon] \longrightarrow \mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$$

un morphisme. La proposition suivante décrit l'ensemble des morphismes qui prolongent Φ à $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\delta]$. On reprend les notations de la proposition 4.11 et sa démonstration : le morphisme Φ correspond à un sous-module L de $\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}} M(\lambda, \mu)$, qui est donné par un morphisme noté $\phi : N(\lambda, \mu) \longrightarrow Q(\lambda, \mu)$ à l'aide de l'expression (13).

Proposition 5.18. *L'ensemble des morphismes* $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\delta] \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Quot}^G(\lambda, \mu)$ *dont la restriction à* $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\epsilon]$ *est* Φ *est en bijection avec l'ensemble des morphismes de* $A(\lambda)$*-*G*-modules*

$$\psi : L \longrightarrow Q(\lambda, \mu)$$

dont la restriction à $\epsilon L \cong N(\lambda, \mu)$ *coïncide avec* ϕ.

Preuve. Le raisonnement est analogue à celui de la preuve de la démonstration 4.11.

Un morphisme Φ comme dans l'énoncé correspond à un sous-$A(\lambda)[\delta]$-G-module

$$K \subseteq \mathbb{C}[\delta] \otimes_{\mathbb{C}} M(\lambda, \mu) = M(\lambda, \mu) \oplus \delta M(\lambda, \mu) \oplus \delta^2 M(\lambda, \mu)$$

tel qu'on ait l'identification

$$\mathbb{C}[\epsilon] \otimes_{\mathbb{C}[\delta]} K \cong L$$

et que le quotient

$$(\mathbb{C}[\delta] \otimes_{\mathbb{C}} M(\lambda, \mu))/K$$

soit un $\mathbb{C}[\delta]$-module plat.

Soit K un tel sous-module.

On note L' le sous-$A(\lambda)$-G-module (isomorphe à L) :

$$L' := \bigcup_{n \in N(\lambda,\mu)} (n + \delta\phi(n)) \subseteq M(\lambda, \mu) \oplus \delta M(\lambda, \mu).$$

Comme précédemment, la première condition donne

$$(K + \delta^2 M(\lambda, \mu)) \cap (M(\lambda, \mu) \oplus \delta M(\lambda, \mu)) = L'. \tag{15}$$

Notons que cette condition implique que $\delta^2 K = \delta^2 N(\lambda, \mu)$.

La seconde condition donne

$$K \cap \delta^2 M(\lambda, \mu) = \delta^2 N(\lambda, \mu) \tag{16}$$

(en utilisant cette fois le fait que dans un $\mathbb{C}[\delta]$-module plat, les éléments annulés par δ^2 sont ceux "multiples" de δ).

Donc pour tout élément l de L', il existe un unique élément $\psi(l)$ de $M(\lambda, \mu)/N(\lambda, \mu)$ (on voit cet élément comme une partie de $M(\lambda, \mu)$) tel que

$$l + \delta^2\psi(l) \subseteq K.$$

On a alors

$$K = \bigcup_{l \in L'} (l + \delta^2\psi(l)). \tag{17}$$

Comme K est un $A(\lambda)$-G-module, l'application ψ est un morphisme de $A(\lambda)$-G-modules.

Enfin, comme K est stable par multiplication par δ, il contient $\delta L'$. Cela signifie que l'application $\psi|_{\delta N}$ coïncide avec ϕ (c'est-à-dire que pour tout n, $\psi(\delta n) = \phi(n)$).

Réciproquement, un tel morphisme ψ définit bien via l'expression (17) un morphisme de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\delta]$ dans $\operatorname{Quot}^G(\lambda, \mu)$. □

Dans la suite, on montre que lorsque le morphisme ϕ est non nul, il n'existe pas de tel ψ.

5.3.1 Cas d'un groupe G simple de type B_n, $n \geq 1$

Dans ce paragraphe, on montre le théorème 5.2 dans le cas où $G = \mathrm{Spin}(2n+1)$ et $\lambda = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, c'est-à-dire ω_1 si $n \geq 2$ et $2\omega_1$ sinon.

On pose, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\mu_i := \langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle,$$

de sorte qu'on a $\mu = \mu_1\omega_1 + ... + \mu_n\omega_n$.

On se place dans la situation où le schéma $\mathrm{Quot}^G(\lambda,\mu)$ n'est pas un point réduit. On a donc $\mu_1 \geq 0$, ... , $\mu_{n-1} \geq 0$ et $\mu_n \geq 1$.

On note $r(\mu)$ le nombre de ces inégalités qui sont en fait des égalités.

Les deux lemmes suivants se démontrent à l'aide de la formule de Weyl exactement comme le lemme 5.13. On rappelle qu'on a la décomposition : $\mathrm{S}^2\, V(\lambda) = V(2\lambda) \oplus V(0)$, de sorte que le caractère de $V(2\lambda)$ est

$$\mathrm{ch}(V(2\lambda)) = n + \sum_i (e^{\epsilon_i} + e^{-\epsilon_i}) + \sum_{i\neq j} e^{\epsilon_i-\epsilon_j} + \sum_{i\leq j}(e^{\epsilon_i+\epsilon_j} + e^{-\epsilon_i-\epsilon_j}).$$

Lemme 5.19. *Soit ν un poids dominant, et i un entier tel que $1 \leq i \leq n$.*

On suppose que $\nu + \epsilon_i$ (resp. $\nu - \epsilon_i$) est un poids dominant.

Alors la multiplicité de $V(\nu + \epsilon_i)$ (resp. $V(\nu - \epsilon_i)$) dans la décomposition de $V(\lambda) \otimes V(\nu)$ en somme directe de modules simples est 1.

Lemme 5.20. *La multiplicité de $V(\mu)$ dans la décomposition de $V(2\lambda) \otimes V(\mu)$ en somme directe de modules simples est $n - r(\mu)$.*

On aura aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 5.21. *Soit ν un poids dominant. Soit σ une somme de racines positives telle que le G-module $V(\lambda) \otimes V(\nu)$ contienne un B-vecteur propre v de poids $\lambda + \nu - \sigma$.*

Soit une écriture du vecteur v de la forme

$$v = \sum_{\sigma_1+\sigma_2=\sigma} w_{\lambda-\sigma_1} \otimes w'_{\nu-\sigma_2}$$

où les σ_1 et les σ_2 sont des sommes de racines positives, et chaque vecteur $w_{\lambda-\sigma_1}$ (resp. $w'_{\nu-\sigma_2}$) est un vecteur de $V(\lambda)$ (resp. $V(\nu)$) de poids $\lambda - \sigma_1$ (resp. $\nu - \sigma_2$).

Alors le terme $w_{\lambda-\sigma} \otimes w'_\nu$ est non nul.

Preuve. Soit $\overline{\sigma_2}$ une somme de racines positives telle que le terme $w_{\lambda-\overline{\sigma_1}} \otimes w'_{\nu-\overline{\sigma_2}}$ soit non nul et minimale pour cette propriété (en posant $\overline{\sigma_1} := \sigma - \overline{\sigma_2}$).

On suppose par l'absurde que $\overline{\sigma_2}$ est non nulle.

Il existe alors une racine simple α telle $e_\alpha \cdot w'_{\nu-\overline{\sigma_2}}$ soit non nul.

Or $e_\alpha \cdot v$ est nul, donc on a

$$\sum_{\sigma_1+\sigma_2=\sigma} [(e_\alpha \cdot w_{\lambda-\sigma_1}) \otimes w'_{\nu-\sigma_2} + w_{\lambda-\sigma_1} \otimes (e_\alpha \cdot w'_{\nu-\sigma_2})] = 0.$$

Donc le terme $w_{\lambda-\overline{\sigma_1}} \otimes (e_\alpha \cdot w'_{\nu-\overline{\sigma_2}})$ est nul (d'après la décomposition en somme directe $V(\lambda) \otimes V(\nu) = \bigoplus_{\sigma_1,\ \sigma_2} V(\lambda)_{\sigma_1} \otimes V(\nu)_{\sigma_2}$) : une contradiction. $\square$

Proposition 5.22. *La composante isotypique de type μ de $M(\lambda,\mu)_2$ est incluse dans le $A(\lambda)$-module engendré par $N'(\lambda,\mu)_1$ (cette notation a été introduite dans le lemme 5.16).*

Preuve. Selon le lemme 5.20, il suffit de montrer que l'espace $A(\lambda)_1 \cdot N'(\lambda, \mu)_1$ contient $n - r(\mu)$ vecteurs propres de poids μ pour l'action de B qui sont linéairement indépendants.

On identifie $\mathfrak{g}$ à l'algèbre de Lie des matrices de taille $(2n+1) \times (2n+1)$ antisymétriques par rapport à la seconde diagonale. On identifie alors $V(\lambda)$ à l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{2n+1}$, dont la base canonique est notée $(e_1, ..., e_n, e_0, e_{-n}, ..., e_{-1})$.

On considère le module simple $V(2\lambda)$ comme le quotient de $V(\lambda) \otimes V(\lambda)$ par son sous-espace vectoriel W engendré par $e_1 \otimes e_{-1} + ... + e_n \otimes e_{-n} + \frac{1}{2} e_0 \otimes e_0$ et par la famille $(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)_{i,j}$:

$$V(2\lambda) = (V(\lambda) \otimes V(\lambda))/W.$$

Notons I l'ensemble des entiers i (avec $1 \leq i \leq n$) tels que $\mu - \epsilon_i$ soit un poids dominant. On remarque que

– Un entier i différent de n appartient à I si et seulement si $\mu_i \geq 1$.

– L'entier n appartient à I si et seulement si $\mu_n \geq 2$.

Le cardinal de I est donc :

$$\mathrm{card}(I) = n - r(\mu).$$

On va associer à tout élément de I un B-vecteur propre (que l'on notera $\overline{v'_i}$) de poids μ dans $M(\lambda, \mu)_2$.

Soit i un élément de I. Selon le lemme 5.19, il existe un B-vecteur propre v_i de poids $\mu - \epsilon_i$ dans $M(\lambda, \mu)_1 = V(\lambda) \otimes V(\mu)$ (donc en fait dans $N'(\lambda, \mu)_1$). Selon le lemme 5.21, celui-ci s'écrit (à un scalaire non nul près)

$$v_i = e_{-i} \otimes v_\mu + e_{-(i+1)} \otimes w^i_{-(i+1)} + ... + e_{-n} \otimes w^i_{-n} + e_0 \otimes w^i_0 + e_n \otimes w^i_n + ... + e_1 \otimes w^i_1 \quad (18)$$

où les w^i_j sont des T-vecteurs propres de $V(\mu)$ de poids strictement inférieurs à μ. (On rappelle que v_μ est un B-vecteur propre de $V(\mu)$.)

Posons $\nu := \mu - \epsilon_i$. Selon le lemme 5.19, le G-module $V(\mu)$ s'injecte dans $V(\lambda) \otimes V(\nu)$.

En appliquant à nouveau le lemme 5.21, on obtient un B-vecteur propre de poids μ dans $V(\lambda) \otimes V(\lambda) \otimes V(\mu)$ qui s'écrit

$$v'_i = e_i \otimes v_i + e_{i-1} \otimes (u^i_{-\alpha_{i-1}} v_i) + ... + e_1 \otimes (u^i_{-\alpha_1 - ... - \alpha_{i-1}} v_i) \quad (19)$$

où chaque $u^i_{\nu'}$ est un vecteur propre de poids ν' pour l'action de T dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{u}^- := \bigoplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

On note $\overline{v'_i}$ la classe de v'_i modulo $W \otimes V(\mu)$: on voit donc $\overline{v'_i}$ comme un élément de $M(\lambda, \mu)_2 = V(2\lambda) \otimes V(\mu)$.

On remarque que, par construction, le vecteur $\overline{v'_i}$ est un B-vecteur propre de poids μ et appartient à $A(\lambda)_1 \cdot N'(\lambda, \mu)_1$.

Il ne reste plus qu'à montrer que la famille $(\overline{v'_i})_{i \in I}$ ainsi construite est libre.

Pour cela, montrons que les v_i sont en fait linéairement indépendants modulo le sous-espace

$$W' := W \otimes V(\mu) + V(\lambda) \otimes V(\lambda) \otimes (V(\mu)_{<\mu}),$$

où $V(\mu)_{<\mu}$ est le sous-espace vectoriel de $V(\mu)$ engendré par ses T-vecteurs propres de poids strictement inférieurs à μ.

En remplaçant v_i dans (19) par son expression (18), on obtient que v'_i est congru modulo W' à

$$e_i \otimes e_{-i} \otimes v_\mu + x_{i-1} e_{i-1} \otimes e_{-(i-1)} \otimes v_\mu + \dots + x_1 e_1 \otimes e_{-1} \otimes v_\mu,$$

où les x_j sont des scalaires.

D'où le résultat. $\square$

On peut maintenant montrer que le théorème 5.2 est vérifié dans notre situation. Pour cela, avec les notations de la proposition 5.18, on se donne un morphisme ϕ non nul, et on montre qu'il n'existe aucun morphisme ψ tel que dans la proposition.

Soient $a_1, \dots, a_s$ des éléments de $A(\lambda)_1 = V(\lambda)$ et $v_1, \dots, v_s$ des éléments de la composante isotypique de $M(\lambda, \mu)_1$ de type μ tels que le vecteur

$$\sum_j a_j \otimes v_j$$

soit un B-vecteur propre de poids μ (selon le lemme 5.13, de tels éléments existent, car μ_n est non nul).

Pour tout j, on note v'_j l'unique représentant dans $M(\lambda, \mu)_0$ de $\phi(v_j)$, et on pose

$$l_j := v_j + \epsilon v'_j.$$

C'est un élément de L. On pose enfin

$$l := \sum_j a_j \cdot l_j.$$

Le vecteur l appartient à $A(\lambda)_1 \cdot L$, et est soit nul, soit un B-vecteur propre de poids μ (par construction).

Son image par ψ appartient donc à $A(\lambda)_1 \cdot Q(\lambda, \mu)$, et est donc nulle (car ce dernier espace ne contient pas de B-vecteur propre de poids μ).

Le vecteur l se décompose sous la forme

$$l = l' + l'',$$

en posant

$$l' := \sum_j a_j \cdot v_j$$

et

$$l'' := \epsilon \sum_j a_j \cdot v'_j.$$

Le vecteur l' appartient à $M(\lambda, \mu)_2$, et est soit nul, soit un B-vecteur propre de poids μ. Selon la proposition 5.22, il appartient donc à $A(\lambda)_1 \cdot L$ (car $N'(\lambda, \mu)$ est inclus dans L), et son image par ψ est donc nulle (de même que celle de l).

Le vecteur l'' appartient donc lui aussi à L. En fait, c'est un B-vecteur propre de poids μ (non nul, car le morphisme naturel $A(\lambda)_1 \otimes M(\lambda, \mu)_0 \longrightarrow A(\lambda)_1 \cdot M(\lambda, \mu)_0$ est en fait un isomorphisme) appartenant à $\epsilon N(\lambda, \mu)_1$.

Son image par ψ est donc non nulle (car la restriction de ψ à $\epsilon N(\lambda, \mu)$ coïncide avec ϕ).

On obtient ainsi une contradiction avec

$$\psi(l'') = \psi(l) - \psi(l') = 0.$$

Il n'existe donc pas de tel ψ, et le théorème est vérifié.

5.3.2 Conclusion

On en déduit le théorème à l'aide du lemme 5.17, comme dans le §5.2.3.

Références

[Ak1] D. Akhiezer
Equivariant completion of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors, Ann. Glob. Analysis and Geometry, **1** p 49-78, 1983.

[Ak2] D. Akhiezer
Lie group actions in complex analysis, Aspects of Mathematics, 1995.

[AlBr] V. Alexeev and M. Brion
Moduli of affine schemes with reductive group action, J. Algebraic Geom. **14**, p 83-117, 2005.

[Bo1] N. Bourbaki
Groupes et algèbres de Lie, Chap.4,5,6, Masson, 1981.

[Bo2] N. Bourbaki
Groupes et algèbres de Lie, Chap.7,8, Hermann, 1975.

[Bri] M. Brion
On spherical varieties of rank one, CMS Conf. Proc. **10**, p 31-41, 1989.

[Bro] B. Broer
Normality of some nilpotent varieties and cohomology of line bundles on the cotangent bundle of the flag variety, Lie theory and geometry, In honor of Bertram Kostant (eds. J.-L. Brylinski, et al.), Birkhauser, Boston, p 1-19, 1994.

[Da] V. I. Danilov
Cohomology of algebraic varieties. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 35, p 1-125, Springer Verlag, 1996.

[FaKo] J. Farault et A. Koranyi
Analysis on symmetric cones, Oxford mathematical monographs, Oxford science publication, 1994.

[Go] G. Gotzmann
Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes, Math. Z. **158** no. 1, 61-70, 1978.

[Gros] F. Grosshans
Algebraic homogeneous spaces and invariant theory, LNM 1673, Springer Verlag, 1997.

[Grot] A. Grothendieck
Les schémas de Hilbert, Fondements de la Géométrie Algébrique, Séminaire Bourbaki, no. 221, 1961.

[HaSt] M. Haiman and B. Sturmfels
Multigraded Hilbert Schemes, J. Algebraic Geom. **13**, p 725-769, 2004.

[Ha] R. Hartshorne
Algebraic geometry, GTM 52, Springer Verlag, 1977.

[Hi] U. Hirzebruch
Über Jordan-Algebren und kompakte Riemannsche symmetrische Räume vom Rang 1, Math. Z., **90**, p 339-354, 1965.

[HuSn] A. Huckleberry and D. Snow
Almost-homogeneous Kähler manifolds with hypersurface orbits, Osaka J. of Math., **19**, p 763-780, 1982.

[Jac] N. Jacobson
Structure and Representations of Jordan Algebras, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol 39, 1968.

[Jan] J. C. Jantzen
Representation of algebraic groups, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 107, 2nd edition, 2003.

[KeRa] G. Kempf, A. Ramanathan
Multicones over Schubert varieties, Invent. Math. **87**, no. 2, p 353-363, 1987.

[KlLa] S. L. Kleiman and J. Landolfi
Geometry and deformation of special Schubert varieties, Compositio Math. **23**, p 407-434, 1971.

[KnKrVu] F. Knop, H. Kraft and T. Vust
The Picard Group of a G-variety, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Seminar, Vol. 13, Birkhauser, 1989.

[Kr] H. Kraft
Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Aspects of Mathematics, 1985.

[Ma] D. Maclagan
Antichains of monomial ideals are finite, Proc. Amer. Math. Soc. **129**, no. 6, p 1609-1615, 2001.

[Na] I. Nakamura
Hilbert schemes of abelian group orbits, J. Algebraic Geom. **10** p 757-779, 2001.

[PeSt] I. Peeva and M. Stillman
Toric Hilbert schemes, Duke Math. J. **111** no. 3, p 419-449, 2002.

[Pi] H. C. Pinkham
Deformations of algebraic varieties with $\mathbb{G}_m$-action, Astérisque 20, SMF, 1974.

[PoVi] V. Popov and E. Vinberg
Invariant Theory. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 55, p 123-278, Springer Verlag 1994.

[Ra] A. Ramanathan
Schubert varieties are arithmetically Cohen-Macaulay, Invent. Math. **80**, no.2, p 283-294, 1985.

[Ri] D. S. Rim
Equivariant G-structure on versal deformations, Trans. Amer. Math. Soc. **257**, no. 1, p 217-226, 1980.

[Sc] M. Schlessinger
On Rigid Singularities, Rice University Studies, vol 59, no. 1, 1973.

[Sern] E. Sernesi
Deformations of schemes,
http ://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/defsch.html, *à paraître.*

[Serr] J.-P. Serre
Algèbres de Lie semi-simples complexes, W. A. Benjamin, New York-Amsterdam, 1966.

[Sv1] T. Svanes
Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications, Advances Math., **14**, p 369-453, 1974.

[Sv2] T. Svanes
Some criteria of rigidity of noetherian rings, Math. Z. **144**, no. 2, p 135-145, 1975.