



HAL
open science

Génération, stockage et manipulation d'états non classiques pour des ensembles atomiques et des champs électromagnétiques

Aurélien Dantan

► **To cite this version:**

Aurélien Dantan. Génération, stockage et manipulation d'états non classiques pour des ensembles atomiques et des champs électromagnétiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT: . tel-00011004

HAL Id: tel-00011004

<https://theses.hal.science/tel-00011004>

Submitted on 16 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE KASTLER BROSSSEL



THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : *Physique quantique*

Présentée par

Aurélien Dantan

Pour obtenir le grade de
docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Génération, stockage et manipulation d'états non classiques pour des ensembles atomiques et des champs électromagnétiques

Soutenue le 26 septembre 2005 devant le jury composé de :

M. Paul BERMAN	Examineur
M. Jean-Marc FRIGERIO	Président
Mme Elisabeth GIACOBINO	Directeur de thèse
M. Philippe GRANGIER	Rapporteur
M. Jean-Louis LE GOUET	Rapporteur
M. Michel PINARD	Directeur de thèse

Résumé

Résumé : Nous étudions la génération, le stockage et la manipulation d'états non classiques de la lumière et des atomes grâce à l'interaction entre un nuage d'atomes froids et de champs optiques en cavité.

Après avoir généré expérimentalement des états comprimés et intriqués du champ lorsque les atomes se comportent comme un milieu Kerr, nous étudions théoriquement la possibilité de générer de tels états dans des systèmes à trois niveaux, ainsi que la réduction des fluctuations quantiques atomiques sous le bruit quantique standard.

Nous présentons ensuite plusieurs schémas pour transférer et stocker les fluctuations d'états non classiques du champ au spin collectif d'un ensemble atomique afin de réaliser une mémoire quantique à atomes froids.

Comme applications pour l'information quantique nous étudions l'intrication et la téléportation d'ensemble atomique, la réalisation de mémoires quantiques de longue durée de vie avec des spins nucléaires d' ^3He et l'intrication d'oscillateurs mécaniques.

Mots clés : fluctuations quantiques, intrication, réduction du bruit quantique atomique, mémoire quantique, atomes froids, téléportation.

Abstract : We study the generation, storage and manipulation of optical and atomic non classical states using the interaction between cold atoms and optical fields in cavity.

After experimentally generating squeezed and entangled light states when the atoms behave as a Kerr medium, we theoretically study the possibility to produce such states in three-level systems, as well as to reduce the atomic quantum fluctuations below the standard quantum limit.

We then present several schemes to transfer and store non classical states into an atomic ensemble collective spin in order to realize a cold atom quantum memory.

As applications to quantum information, we study the entanglement and teleportation of atomic ensembles, the realization of long-lived quantum memories with ^3He

nuclear spins and the entanglement of mechanical oscillators.

Key words : quantum noise, entanglement, spin squeezing, quantum memory, cold atoms, teleportation.

Remerciements

Je tiens naturellement à remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse : Elisabeth Giacobino, pour m'avoir accueilli dans un groupe dynamique et sympathique ainsi que pour son soutien constant malgré ses fonctions prenantes, et Michel Pinard avec qui j'ai pu partager les joies et les peines du travail de recherche. Tout au long de ces trois années, j'ai effectivement eu la chance de pouvoir bénéficier quotidiennement de sa grande expérience de physicien. Le travail présenté dans ce manuscrit doit énormément à sa grande rigueur scientifique, sa patience et son opiniâtreté communicative. Je lui suis infiniment reconnaissant pour son encadrement ainsi que pour la confiance qu'il m'a manifestée dès le premier jour.

Je remercie également chaleureusement Alberto Bramati pour son soutien, son éternelle bonne humeur et les fromages italiens. Un grand merci à Vincent Josse qui m'a pris sous son aile dès mon arrivée dans le groupe, qui m'a formé sur la manip et avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler et appris énormément. A la fin de ma deuxième année ont commencé leur thèse Jean Cviklinski et Fabrizio Villa, dont j'ai pu apprécier les qualités scientifiques et la gentillesse. Je leur souhaite de tout coeur une excellente continuation. Merci également à la composante "microcavités" du groupe - Marco Romanelli, Charles Leyder, Augustin Baas et Jean-Philippe Karr - pour les discussions polaritoniques et leur tolérance pour mes goûts musicaux (toutes mes excuses à Sylvain Gigan et Laurent Lopez pour avoir dû supporter du RnB avant le déménagement).

Lors de mon stage de DEA, puis tout au long de ma thèse, j'ai eu l'opportunité de travailler avec Paul Berman. Je tiens à le remercier chaleureusement pour cette collaboration fructueuse, ses invitations à Ann Arbor et pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Merci également à Claudiu Genes pour les longues discussions de physique et de basket.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Jean-Louis Le Gouët et Philippe Grangier pour avoir rapporté ce manuscrit ainsi qu'à Jean-Marc Frigerio pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie aussi toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de pouvoir travailler

sur différents sujets : Alice Sinatra, Gaël Reinaudi et Franck Laloë pour le travail extrêmement enrichissant sur l'hélium polarisé et les collisions d'échange de métastabilité. Un grand merci à Nicolas Treps pour son aide précise sur la téléportation et pour avoir bien voulu répondre à mes nombreuses questions. Merci encore à l'équipe "Mesures et bruits fondamentaux" pour m'avoir initié au monde des miroirs mobiles. Je tiens aussi à remercier Hans Bachor, Ping Koy Lam, Magnus Hsu et le groupe de Canberra pour le travail que nous avons effectué en commun sur les vapeurs atomiques (ainsi que pour nous avoir prêté une cellule). Je remercie également Paulo Nussenzweig et tout son groupe pour nous avoir accueillis à São Paulo.

Je suis également reconnaissant à tous les membres du laboratoire dont l'aide m'a souvent été précieuse, François Nez pour les dépannages TiSa et toute l'équipe "Métrologie" pour ses nombreux prêts de matériel, Florence Thibout pour ses cellules, Pascal Travers et Christophe Rafaillac pour la mécanique, Jean-Pierre Opkitz pour tous les dépannages électroniques, Monique Bonnamy et Laetitia Morel pour leur patience avec mes commandes, Serge Begon pour les pannes informatiques, etc. De manière générale, merci à l'ensemble des membres du LKB Jussieu pour la bonne ambiance qui règne dans le laboratoire, en particulier merci à la mafia italienne pour leur bonne humeur et les spécialités transalpines, et merci aux thésards pour l'atmosphère d'entraide et d'amitié qui existe au labo.

Enfin, un immense merci à Clotilde, ma famille, mes amis et tous ceux qui m'ont soutenu pendant ces trois ans.

Table des matières

Introduction	1
1 Fluctuations quantiques en variables continues	9
A Bruit quantique du champ électromagnétique	10
A.1 Fluctuations quantiques d'un champ libre monomode	10
A.1.1 Représentation de Fresnel	10
A.1.2 Etat cohérent et état comprimé	12
A.2 Fluctuations quantiques d'un champ multimode	13
A.2.1 Décomposition en modes d'un champ libre	14
A.2.2 Relations de commutation	15
A.2.3 Spectres de bruit et matrices de variances	15
A.2.4 Lien avec les variances	17
B Bruit quantique d'un ensemble d'atomes	18
B.1 Bruit de projection quantique	18
B.2 Opérateurs collectifs de spin	18
B.2.1 Spin équivalent pour un atome à deux niveaux	18
B.2.2 Spin équivalent pour N atomes	19
B.3 Etat cohérent atomique	20
B.4 Bruit quantique standard atomique	21
B.5 Etat comprimé atomique	22
B.6 Sensibilité des mesures d'interférométrie atomique et critères de "spin squeezing"	23
B.7 Limite de Heisenberg	25
B.8 Autres applications des états comprimés atomiques : magnéto- métrie et communication quantique	25
C Intrication quantique en variables continues	26
C.1 Le paradoxe EPR	26

C.2	Critères d'intrication pour des états gaussiens	27
C.3	Extension aux variables atomiques	31
C.4	Critère d'inséparabilité généralisé	31
2	Génération d'états non classiques de la lumière	33
A	Etats non classiques avec des atomes froids	33
A.1	Réduction du bruit quantique d'un mode du champ	34
A.1.1	Réduction de bruit par un milieu Kerr passif	34
A.1.2	Réduction de bruit avec des atomes froids	35
A.2	Réduction de bruit de deux modes et faisceaux EPR	38
A.2.1	Bascule de polarisation	39
A.2.2	Réduction de bruit pour deux modes du champ	41
A.2.3	Faisceaux intriqués	42
A.3	Génération de vide comprimé dans des vapeurs atomiques à température ambiante ?	44
B	Génération d'états non classiques et effets de cohérence atomique	45
B.1	Théorie entrée-sortie pour l'interaction atomes-champs en cavité	45
B.1.1	Champ quantique dans une cavité vide	46
B.1.2	Equations d'évolution du système atomes-champs	48
B.1.3	Etat stationnaire	51
B.1.4	Linéarisation et stabilité du point de fonctionnement	52
B.1.5	Fluctuations des champs réfléchis par la cavité	54
B.2	Transparence Electromagnétiquement Induite classique : effets sur les valeurs moyennes	56
B.2.1	Absorption et dispersion en EIT	57
B.2.2	EIT en cavité	58
B.2.3	Piégeage Cohérent de Population	61
B.3	Echange de fluctuations quantiques en CPT	63
B.4	Réduction de bruit et intrication via des effets de cohérence	68
B.4.1	Etat stationnaire	69
B.4.2	Multistabilité	71
B.4.3	Spectres de bruit des champs sortants	74
B.4.4	Génération d'états intriqués	74
B.5	Conclusion	78
3	Génération d'états comprimés atomiques	81
A	Introduction	81
A.1	Réduction du bruit quantique atomique	81
A.2	Réduction du bruit quantique avec des atomes froids en cavité	83

B	Réduction du bruit atomique dans un système en Λ	84
B.1	Calcul de la matrice de variance atomique	84
B.1.1	Linéarisation et matrice de variance	85
B.1.2	Passage dans la base du spin moyen	85
B.2	Interaction Raman et système équivalent	87
B.2.1	Etat stationnaire et bistabilité	88
B.2.2	Spectres atomiques	89
B.2.3	Spectres atomiques et réduction de bruit	91
B.2.4	Interprétation physique de la réduction de bruit atomique	94
B.2.5	Spectres du champ sortant	96
C	Réduction de bruit par effet Raman assistée par EIT	97
C.1	Système considéré et équations	98
C.2	Système à deux niveaux effectif	99
C.3	Spectre et variance atomiques dans le cas $\langle A_2 \rangle = 0$	100
C.4	Evolution en fonction de la coopérativité	102
C.5	Spectres de bruit atomique	104
D	Récapitulatif	105
4	Mémoire quantique atomique	107
A	Introduction	107
B	Mémoire quantique avec des atomes froids en cavité	109
B.1	Interaction avec un vide comprimé	109
B.2	Transfert quantique en EIT	110
B.2.1	Approximation adiabatique	110
B.2.2	Interprétation en termes de vecteur de Stokes	113
B.2.3	Calcul complet	115
B.3	Transfert quantique en Raman	118
B.4	Calcul pour un désaccord arbitraire	121
B.5	Cas d'un champ de valeur moyenne non nulle	122
B.6	Conditions de fonctionnement, sensibilité par rapport aux paramètres	123
B.6.1	Désaccord à deux photons	123
B.6.2	Spectres du champ sortant	125
B.7	Stockage et lecture	125
B.7.1	Etude dynamique	125
B.7.2	Détection homodyne classique	129
B.7.3	Matching temporel de l'émission atomique	130
B.7.4	Mémoire quantique et non-clonage	131
B.8	Discussion	132

C	Mémoire quantique : cavité ou simple passage	135
C.1	Interaction atomes-champ en simple passage	135
C.2	Transfert quantique en EIT	137
C.2.1	Spectre du champ sortant	138
C.2.2	Spectre et variance atomique	141
C.3	Transfert quantique en Raman	144
C.4	Interprétation et comparaison avec le schéma en cavité	146
D	Conclusion	152
5	Information quantique avec des ensembles atomiques	155
A	Stockage d'intrication dans des ensembles atomiques	156
A.1	Transfert d'intrication	158
A.2	Lecture	161
A.3	Discussion	163
B	Pseudo-répéteur quantique	164
C	Téléportation de l'état quantique d'un ensemble atomique	166
C.1	Téléportation en variables discrètes et variables continues	166
C.1.1	Principe de la téléportation quantique en variables dis- crètes	167
C.1.2	Protocole pour les champs	168
C.2	Téléportation atomique	169
C.2.1	Préparation	169
C.2.2	Mesures jointes	171
C.2.3	Reconstruction	173
C.2.4	Discussion	176
6	Mémoires quantiques dans d'autres systèmes	179
A	Mémoire quantique avec des spins nucléaires	180
A.1	Collisions d'échange de métastabilité	182
A.2	Transfert des fluctuations quantiques	183
A.2.1	Système et équations d'évolution	183
A.2.2	Hypothèse adiabatique	184
A.2.3	Spectres et variances	185
A.2.4	Interprétation	189
A.3	Discussion et faisabilité expérimentale	191
A.4	Conclusion	195
B	Transfert quantique entre champs et oscillateurs mécaniques	196
B.1	Introduction	196
B.2	Système considéré	197

B.3	Etat stationnaire et linéarisation	201
B.4	Spectres et variances	202
B.5	Lecture optique de l'état des miroirs	205
B.6	Conclusion	208
	Conclusion	209
	Annexe	213
A	Calcul des coefficients de diffusion	213
B	Opérateurs continus pour l'interaction atomes-champs en simple passage	215
C	Collisions d'échange de métastabilité et fluctuations quantiques	217
D	Publications jointes	218
	Bibliographie	249

Introduction

Depuis une vingtaine d'années, un nouveau domaine de recherche en physique quantique s'est développé : l'*information quantique*. Elle se fonde sur les lois et les propriétés de la mécanique quantique pour élaborer un nouveau type de traitement de l'information.

Une branche de ce domaine concerne les algorithmes quantiques, qui exploitent les ressources de la physique quantique pour effectuer du *calcul quantique* [DiVincenzo95, Nielsen00]. Il est en effet possible d'exploiter les principes fondamentaux de la mécanique quantique - comme le principe de superposition - pour manipuler de façon parallèle un grand nombre d'états et réaliser des opérations de manière plus rapide qu'avec des systèmes classiques. On peut citer par exemple l'algorithme de Shor qui permet de trouver la décomposition d'un nombre en facteurs premiers en un temps exponentiellement plus rapide que les algorithmes classiques existants.

Une autre branche traite de la communication d'information et d'états quantiques. En effet, il est connu depuis quasiment ses débuts, que la mécanique quantique prédit l'existence d'états présentant des corrélations non locales qui défient l'intuition de la physique classique. Ces états, dits *intriqués*, décrivent un système composé de deux parties séparables dont la fonction d'onde ne peut s'écrire comme le produit tensoriel des états de chaque sous-système. En raison de son lien intime avec la non localité, l'intrication est considérée comme l'une des manifestations les plus spectaculaires du caractère définitivement non classique de la mécanique quantique. Cela fut mis en évidence pour la première fois par Einstein, Podolsky et Rosen, avec la formulation du paradoxe EPR [Einstein35]. Les trois auteurs, qui se basent sur l'hypothèse de réalisme local et refusent l'existence d'actions à distance, suggèrent que la description du monde par la mécanique quantique est incomplète. Le débat autour de cette question fondamentale s'est longtemps limité au domaine des spéculations philosophiques jusqu'à l'apparition des travaux de Bell et la formulation de ses célèbres inégalités [Bell64], que tout système physique se conformant à l'hypothèse de réalisme local se doit de vérifier. Les expériences d'Orsay [Aspect81] ont ensuite montré que les photons émis

par cascade radiative dans le calcium violent ces inégalités, prouvant ainsi le caractère intrinsèquement non local de la mécanique quantique. Actuellement, l'intrication et les états "non classiques" soulèvent un grand intérêt car ils peuvent être utilisés dans des protocoles d'information ou de communication quantiques pour transmettre et coder de l'information. Si la plupart des protocoles ont été initialement formulés pour des variables discrètes (états de polarisation du photon, spin individuel, électron, ion ou photon uniques, etc.), un grand nombre d'entre eux ont été étendus aux variables continues (quadratures du champ électromagnétique, composantes du spin collectif d'un ensemble d'atomes, etc.). On peut citer en particulier le protocole de téléportation quantique en variables continues [Vaidman94, Braunstein98a], dont la première réalisation expérimentale en 1998 avec des faisceaux optiques dans le groupe de Kimble à Caltech [Furusawa98] a stimulé le domaine de l'information quantique en variables continues. Un autre exemple de protocole est celui de la cryptographie quantique [Bennett84], qui a été implémenté avec succès en variables discrètes [Gisin02] et en variables continues [Grosshans03].

Les variables continues présentent un certains nombres d'avantages. Comme l'espace de Hilbert qui les représente est de dimension infinie, elles peuvent véhiculer plus d'information qu'un qubit à deux niveaux pour lequel l'espace de Hilbert est bidimensionnel. Elles sont plus faciles à produire et à manipuler, et leur détection par des photodiodes commerciales est plus aisée que dans le cas d'objets quantiques individuels, pour lesquels les détecteurs sont moins efficaces et plus coûteux. Cependant, un inconvénient important est leur plus grande fragilité vis à vis des pertes. Il existe toutefois des codes correcteurs d'erreurs pour variables continues [Braunstein98b] qui, de manière surprenante, sont en principe plus faciles à implémenter que dans le cas des variables discrètes [Lloyd99]. Cependant, la dégradation de la non classicité des états au cours de leur transmission pose un problème expérimental majeur. Par exemple, malgré les nombreux progrès dans ce domaine, les taux de perte dans les fibres de télécommunication actuelles ne permettent des transmissions d'états quantiques fiables et utilisables pour des protocoles de cryptographie quantique que sur des distances de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres [Gisin02].

On pourrait penser amplifier ces états quantiques pour les transmettre sur des distances plus grandes. Cependant, en vertu du théorème de non clonage [Wootters82], il n'est pas possible de générer deux copies parfaites d'un état quantique. On ne peut donc pas amplifier un signal quantique comme on le ferait pour un signal classique, sans ajouter du bruit et le détériorer. Les *répéteurs quantiques* offrent une solution à ce problème [Briegel98] pour alléger les contraintes expérimentales. Un répéteur quantique permet de mémoriser un état quantique en un point A pour le téléporter à la demande

en un point B. Duan *et al.* ont proposé de réaliser de tels répéteurs en utilisant l'interaction de champs optiques avec des ensembles atomiques [Duan01]. Si les photons sont naturellement d'excellents objets quantiques pour véhiculer l'information, un problème essentiel est de stocker de manière fiable leur état pendant des temps suffisamment longs. En raison de sa longue durée de vie, le spin associé à un ensemble d'atomes dans leur niveau fondamental constitue donc un très bon candidat pour mémoriser des états quantiques du champ électromagnétique [Lukin03]. On peut alors envisager d'implémenter des réseaux quantiques dont les noeuds sont constitués par des ensembles atomiques connectés optiquement [Cirac97, Enk98].

La possibilité d'utiliser comme variable quantique le spin collectif associé à un ensemble atomique a stimulé un certain nombre d'expériences récentes [Kuzmich03, vanderWal03, Matsukevitch04]. D'une part, les expériences de "lumière ralentie ou arrêtée", basées sur les propriétés de transparence induite électromagnétiquement (EIT) [Harris97], ont permis de ralentir et de stocker des pulses lumineux de manière contrôlée dans des atomes froids [Hau99, Phillips01, Liu01], des vapeurs atomiques [Kash99, Budker99] ou des solides [Turukhin02, Bigelow03, Longdell05]. D'autre part, les expériences menées dans le groupe de Polzik au Danemark, ont démontré qu'il était possible d'imprimer des états quantiques de la polarisation de la lumière sur les composantes d'un spin atomique macroscopique [Hald99, Julsgaard01, Schori02, Julsgaard04].

La réalisation d'une mémoire quantique est donc actuellement un enjeu important en vue de la réalisation de protocoles d'information ou de communication quantiques à l'interface atomes/champs. De plus, grâce aux progrès en matière de génération d'états non classiques du champ, il est maintenant à la fois prometteur d'un point de vue des applications et intéressant d'un point de vue fondamental d'étudier l'interaction de tels états avec les atomes, et de coupler les sources de lumière non classique dont on dispose en laboratoire à des ensembles atomiques.

Contexte dans le groupe d'Optique Quantique

L'équipe Atomes Froids du groupe d'Optique Quantique s'intéresse depuis une quinzaine d'années aux fluctuations quantiques de champs optiques interagissant avec un nuage d'atomes froids en cavité. La réduction des fluctuations quantiques du champ sous la limite quantique standard à l'aide d'atomes froids a été observée pour la première fois lors de la thèse d'Astrid Lambrecht [Lambrecht96]. Ensuite, la réduction des fluctuations quantiques de polarisation, ainsi que l'intrication de deux modes du champs ont été mis en évidence pendant la thèse de Vincent Josse [Josse03a, Josse04a].

D'autre part, l'étude théorique des possibilités de réduction des fluctuations quantiques atomiques sous le bruit quantique standard a débuté dans le groupe pendant la thèse de Laurent Vernac, motivée par les applications potentielles dans le domaine des horloges atomiques [Vernac00].

La première partie de mon travail de thèse s'inscrit dans la continuité de ces thématiques, et concerne la génération théorique et expérimentale d'états non classiques de champ en utilisant l'interaction champs/atomes froids en cavité. Nous nous intéressons également à l'étude de nouveaux systèmes pour générer des états comprimés atomiques. La partie centrale du manuscrit porte sur la manipulation de tels états à des fins d'information quantique en variables continues. Nous nous sommes intéressés plus précisément au transfert et au stockage des fluctuations quantiques du champ à des variables atomiques. Nous avons développé un schéma pour réaliser une mémoire quantique atomique. Comme applications de ces idées, nous avons ensuite étudié l'intrication et la téléportation quantique d'ensembles atomiques. Enfin, ce manuscrit présente également une étude théorique d'autres systèmes physiques pouvant servir de mémoire quantique : les spins nucléaires d' ^3He et les miroirs "mobiles".

De manière plus détaillée, nous commençons par présenter dans le premier chapitre les notions de bruit quantique et d'intrication en variables continues, tout d'abord pour le champ électromagnétique, et ensuite pour les ensembles atomiques, notions que nous utiliserons tout au long du manuscrit.

Le chapitre 2 concerne la génération d'états non classiques - comprimés ou intriqués - du champ. Après avoir rappelé le principe des premières expériences de réduction des fluctuations quantiques d'un mode du champ avec des atomes froids [Lambrecht95], nous détaillons brièvement les expériences de réduction du bruit quantique de deux modes du champ et de génération d'états intriqués. Dans ces expériences, qui ont fait l'objet de la thèse de Vincent Josse [Josse03c], un champ polarisé linéairement interagit en cavité avec un nuage d'atomes froids de césium. Outre des instabilités de polarisation dû à des effets de rotation auto-induite [Rochester01], nous avons observé à la sortie de la cavité de la réduction de bruit sur deux modes du champs simultanément : le mode correspondant à la polarisation linéaire moyenne et le mode vide orthogonal. Le phénomène physique responsable de la réduction de bruit sur le champ moyen est l'effet Kerr *direct* induit par la saturation de la transition optique, alors que la réduction de bruit observée sur le mode orthogonal est due à un effet Kerr *croisé* induit par le champ moyen. Ces expériences montrent que l'on peut générer du vide comprimé avec des atomes froids, cette réduction de bruit sur le mode vide orthogonal s'interprétant comme de la réduction du bruit quantique de polarisation. En outre, le fait que le

Le système génère de la réduction de bruit sur deux modes de polarisation orthogonale indique que des corrélations quantiques existent entre deux modes orthogonaux du champ à la sortie de la cavité. On montre en effet que les modes polarisés à 45° sont intriqués au sens du critère d'inséparabilité [Duan00a, Simon00]. Ces résultats ayant été présentés de manière exhaustive dans la thèse de Vincent Josse, nous n'en rappelons que les grands principes et résultats.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, après avoir présenté la théorie utilisée dans ce manuscrit pour étudier l'interaction atomes-champs en cavité, nous proposons un autre schéma pour générer de tels états, basé sur des effets de cohérence atomique et de transparence électromagnétiquement induite. Dans ce schéma deux modes du champ interagissent en cavité avec un nuage d'atomes froids à trois niveaux en Λ . Lorsque les champs sont proches de résonance à un et deux photons, il est possible d'obtenir dans le milieu atomique, conjointement à une faible absorption, une forte dispersion, et donc une forte non linéarité. Les simulations numériques prédisent alors des réductions de bruit et de l'intrication comparativement plus importantes que dans le cas des systèmes étudiés précédemment. Nous discutons également de la possibilité de réaliser un échangeur quantique optique basé sur les propriétés de la transparence induite électromagnétiquement.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la possibilité de générer des états comprimés atomiques cette fois, toujours par le biais de l'interaction atomes/champs en cavité. Nous montrons d'abord qu'en faisant interagir un champ pompe intense et un champ sonde faible dans une configuration Raman, il est possible de réduire d'environ 30% sous le bruit quantique standard les fluctuations atomiques du spin de longue durée de vie associé aux sous niveaux fondamentaux. Si cette réduction de bruit se produit pour des paramètres expérimentaux accessibles, augmenter l'interaction non linéaire ne permet pas d'obtenir des réductions de bruit plus importantes. Nous proposons donc dans la deuxième partie un schéma en "double- Λ ", qui permet d'améliorer considérablement ces résultats, et d'obtenir en principe des réductions de bruit arbitrairement élevées lorsqu'on augmente le nombre d'atomes. Ces travaux sur la réduction du bruit quantique atomique sont le fruit d'une collaboration avec le professeur Paul Berman de l'université du Michigan aux Etats-Unis.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude théorique d'une mémoire quantique à atomes froids. Nous étudions les interactions et les conditions optimales qui permettent de transférer les fluctuations d'un champ dans un état non classique - un vide comprimé - aux composantes d'un spin atomique dans le fondamental. Nous montrons qu'à l'aide d'un champ de contrôle cohérent on peut transférer efficacement les fluctuations d'un vide comprimé aux composantes de la cohérence atomique dans le fondamental. Pour

que ce transfert s'effectue avec une efficacité proche de l'unité, les champs doivent être, d'une part, résonnants à deux photons, et d'autre part, soit fortement désaccordés à un photon (configuration Raman), soit résonnants à un photon (EIT). Nous proposons ensuite une méthode de lecture de l'état du champ stocké dans les atomes après un temps de stockage variable. Puis, nous comparons l'efficacité du transfert des fluctuations quantiques dans le cas d'une interaction en simple passage et d'une interaction en cavité. Bien que le schéma en cavité se révèle intrinsèquement plus efficace, les calculs montrent qu'il est également possible de réaliser une mémoire quantique sans cavité pour des paramètres expérimentaux réalistes. Les calculs de ce chapitre font écho aux schémas étudiés actuellement dans différents groupes (interaction résonnante de type EIT ou non résonnante de type Raman) et justifient de manière rigoureuse la conservation des grandeurs quantiques lors de tels processus.

Nous étudions ensuite les applications de ces idées au cas d'états intriqués du champ et nous montrons dans le chapitre 5 que des champs corrélés quantiquement - tels ceux générés dans le chapitre 2 - peuvent servir à intriquer deux ensembles atomiques. Outre le fait que l'on peut ainsi obtenir des états EPR avec des ensembles atomiques macroscopiques, ce schéma permet également de réaliser une mémoire pour l'intrication. Enfin, nous montrons que les états quantiques manipulés par ces techniques sont effectivement utilisables pour réaliser un protocole de téléportation atomique. Si un pas important dans ce domaine a été franchi en 2004 avec la téléportation quantique d'un ion unique [Riebe04] et d'un atome unique [Barrett04], la téléportation de l'état quantique d'objets macroscopiques reste encore à démontrer. Dans l'optique des réseaux atomes-champs évoqués précédemment, nous proposons un protocole de téléportation quantique d'un ensemble atomique, très similaire sur le plan des principes aux protocoles utilisés pour les champs optiques.

Enfin, dans le chapitre 6, nous étudions d'autres systèmes pouvant être utilisés comme mémoire quantique pour les variables de champ. Nous commençons par proposer un schéma de transfert des fluctuations quantiques du champ au spin nucléaire d' ^3He dans son état fondamental, l'intérêt étant que celui-ci possède un temps de vie extrêmement long (plusieurs heures). Nous proposons d'abord un modèle simplifié dans lequel un ensemble d'atomes d' ^3He dans leur état fondamental est indirectement couplé à des champs optiques par l'intermédiaire de collisions d'échange de métastabilité entre les atomes dans l'état fondamental et les atomes dans l'état métastable. En jouant sur les constantes de temps du problème, nous montrons qu'il est possible de comprimer efficacement soit le spin collectif associé au métastable, soit le spin associé au fondamental. Nous discutons ensuite un schéma plus réaliste développé en collaboration avec Alice Sinatra, Gaël Reinaudi et Franck Laloë de l'équipe "Hélium polarisé et fluides

quantiques” du LKB.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous étudions le transfert de fluctuations en cavité entre des champs et des miroirs mobiles. En utilisant une double cavité avec deux miroirs mobiles, nous montrons que l’on peut transférer la réduction de bruit de deux champs comprimés à la position relative et l’impulsion du centre de masse des deux miroirs, ce qui constitue en principe une réalisation du paradoxe EPR [[Einstein35](#)] pour des oscillateurs mécaniques macroscopiques. Ce travail a été effectué en collaboration avec l’équipe “Mesures et bruits fondamentaux” du LKB, ainsi qu’avec David Vitali de l’université de Camerino en Italie.

Fluctuations quantiques en variables continues

Sommaire

A	Bruit quantique du champ électromagnétique	10
A.1	Fluctuations quantiques d'un champ libre monomode	10
A.2	Fluctuations quantiques d'un champ multimode	13
B	Bruit quantique d'un ensemble d'atomes	18
B.1	Bruit de projection quantique	18
B.2	Opérateurs collectifs de spin	18
B.3	Etat cohérent atomique	20
B.4	Bruit quantique standard atomique	21
B.5	Etat comprimé atomique	22
B.6	Sensibilité des mesures d'interférométrie atomique et critères de "spin squeezing"	23
B.7	Limite de Heisenberg	25
B.8	Autres applications des états comprimés atomiques : magnéto- tométrie et communication quantique	25
C	Intrication quantique en variables continues	26
C.1	Le paradoxe EPR	26
C.2	Critères d'intrication pour des états gaussiens	27
C.3	Extension aux variables atomiques	31
C.4	Critère d'inséparabilité généralisé	31

A Bruit quantique du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique possède des fluctuations quantiques intrinsèques, qui constituent une limite fondamentale pour de nombreuses expériences mettant en jeu des mesures optiques [Caves81]. Nous commençons par rappeler d'où proviennent ces fluctuations sur l'exemple d'un champ monomode. Nous introduisons les notions d'état cohérent et d'état comprimé du rayonnement avant de passer à la description d'un champ multimode, description que nous utiliserons dans toute la suite du manuscrit pour étudier l'interaction de champs optiques avec des ensembles atomiques. Nous nous intéressons ensuite aux fluctuations quantiques de ces ensembles atomiques. De manière très similaire au champ électromagnétique, nous précisons les notions de bruit quantique standard atomique, d'état cohérent et d'état comprimé atomiques. Enfin, nous introduisons la notion d'états corrélés quantiquement pour des variables continues, et précisons les critères d'intrication utilisés dans ce manuscrit.

A.1 Fluctuations quantiques d'un champ libre monomode

A.1.1 Représentation de Fresnel

La quantification d'un mode du champ électromagnétique de fréquence ω dans une boîte de volume V conduit à exprimer le champ en un point donné de l'espace en fonction des opérateurs de création et d'annihilation d'un photon à la fréquence ω

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0(\hat{a}_\omega e^{-i\omega t} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega t}) = \mathcal{E}_0 \left(\hat{X} \cos \omega t + \hat{Y} \sin \omega t \right) \quad (1.1)$$

Dans la relation précédente, on a introduit les opérateurs de *quadrature* du champ

$$\hat{X} = \hat{a}_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger, \quad \hat{Y} = i(\hat{a}_\omega^\dagger - \hat{a}_\omega) \quad (1.2)$$

et \mathcal{E}_0 représente le champ électrique d'un photon de fréquence ω

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \quad (1.3)$$

Cette définition des opérateurs de quadrature est identique à celles des opérateurs de position et d'impulsion d'un oscillateur mécanique quantique. Les quadratures du champ électromagnétique constituent un couple d'*opérateurs conjugués*, au même titre que la position et l'impulsion d'une particule. La non-commutation des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation associés - $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_\omega^\dagger] = 1$ - entraîne celle des opérateurs de quadrature du champ

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i \quad (1.4)$$

Cette non-commutation implique que l'on ne peut pas mesurer simultanément avec une précision infinie ces deux quadratures. Ceci se traduit par une inégalité d'Heisenberg pour le produit des incertitudes sur les opérateurs de quadrature. Les dispersions des résultats de mesure de \hat{X} et \hat{Y} , caractérisées par les variances $\Delta\hat{X}^2 = \langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2$ et $\Delta\hat{Y}^2 = \langle\hat{Y}^2\rangle - \langle\hat{Y}\rangle^2$, obéissent à l'inégalité d'Heisenberg

$$\Delta\hat{X}^2 \Delta\hat{Y}^2 \geq 1 \quad (1.5)$$

On peut comme pour un champ classique utiliser le repère de Fresnel pour représenter un champ quantique. Classiquement, les quadratures X et Y sont des nombres réels qui correspondent aux coordonnées de l'amplitude complexe du champ $E_0 e^{i\phi}$ [voir Fig. 1.1(a)]

$$E(t) = |E_0| \cos(\omega t + \phi) = X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) \quad (1.6)$$

Quantiquement, il existe des incertitudes sur la mesure des quadratures, incertitudes qui sont liées par la relation d'Heisenberg (1.5). C'est pour cette raison que nous représentons l'état quantique d'un champ dans le repère de Fresnel en associant au vecteur donnant la valeur moyenne du champ, une aire de fluctuations. Cette aire traduit l'incertitude quantique sur la position de l'extrémité de ce vecteur dans le plan de Fresnel. Les variances sont reliées à la largeur de la distribution de probabilité du champ.

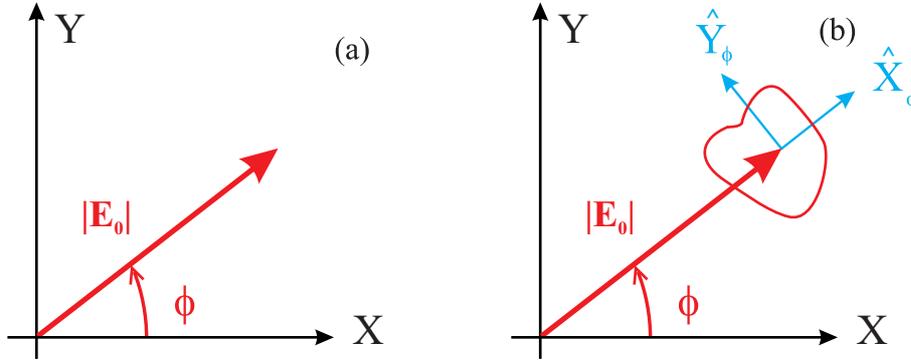


FIG. 1.1 – (a) Représentation classique du champ dans le repère de Fresnel. (b) Représentation d'un état quantique : \hat{X}_ϕ et \hat{Y}_ϕ sont les quadratures d'amplitude et de phase, respectivement.

De manière générale, on définit le couple de quadratures $(\hat{X}_\theta, \hat{Y}_\theta)$ obtenu à partir de (\hat{X}, \hat{Y}) par une rotation d'angle θ dans le plan de Fresnel

$$\hat{X}_\theta = \hat{a}_\omega e^{-i\theta} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\theta} \quad (1.7)$$

$$\hat{Y}_\theta = i(\hat{a}_\omega^\dagger e^{i\theta} - \hat{a}_\omega e^{-i\theta}) \quad (1.8)$$

Ce couple vérifie également la relation de commutation (1.4) et les variances de \hat{X}_θ et \hat{Y}_θ satisfont à l'inégalité (1.5). La définition des quadratures est parfaitement arbitraire ; elle correspond à un choix de phase dans le repère de Fresnel. Toutefois, parmi tous les couples de quadratures, on définit habituellement les quadratures d'*amplitude* et de *phase* [voir Fig. 1.1(b)] en prenant comme référence la phase du champ moyen $\langle \hat{a}_\omega \rangle = \alpha e^{i\phi}$, de telle sorte que les fluctuations du nombre de photons soient proportionnelles aux fluctuations de la quadrature d'amplitude, et celles de phase aux fluctuations de la quadrature de phase (pour des champs suffisamment intenses $\alpha^2 \gg 1$)

$$\delta \hat{N} = \delta (\hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_\omega) \simeq \alpha \delta \hat{X}_\phi \quad (1.9)$$

$$\delta \phi \simeq \frac{\delta \hat{Y}_\phi}{2\alpha} \quad (1.10)$$

On déduit des deux relations précédentes l'inégalité d'Heisenberg reliant l'incertitude sur la mesure du nombre de photons et la phase du champ

$$\Delta \hat{N} \Delta \phi \geq 1/2 \quad (1.11)$$

A.1.2 Etat cohérent et état comprimé

Si le champ est dans l'état vide, il n'y a pas de direction privilégiée pour les fluctuations, et toutes les quadratures ont une variance unité :

$$\Delta \hat{X}_\theta = 1 \quad \forall \theta \quad (1.12)$$

Le vide définit alors une référence pour les fluctuations quantiques, appelée *limite (ou bruit) quantique standard*.

Un état de référence naturel est l'*état cohérent* (ou quasi-classique). Un état cohérent $|\alpha\rangle$ est un état propre de l'opérateur d'annihilation \hat{a}_ω , avec la valeur propre α . Il possède les mêmes fluctuations que le vide. Dans le repère de Fresnel, pour représenter l'état cohérent $|\alpha\rangle$, on superpose le disque de fluctuations de rayon unité au vecteur de coordonnées α [voir figure 1.2]. Le vide est l'état cohérent d'amplitude nulle ($\alpha = 0$). Comme le vide, un état cohérent est un *état minimal* pour Heisenberg, c'est-à-dire que, quel que soit θ le produit des variances des variables conjuguées est égal à la valeur minimale autorisée par Heisenberg (1.5)

$$\Delta X_\theta^2 \Delta Y_\theta^2 = 1 \quad (1.13)$$

De tels états peuvent être produits par exemple par un laser fonctionnant très au-dessus du seuil. Comme leurs fluctuations sont les mêmes que celles du vide, ce sont les états les plus proches des états classiques, d'où le fait que ces états soient parfois

qualifiés de quasi-classiques. Dans la pratique, un faisceau laser dans un état cohérent possède un bruit d'intensité qui est proportionnel à l'intensité. En effet, si l'on mesure la statistique des photons émis, celle-ci est poissonnienne et la variance du nombre de photons est proportionnelle au nombre moyen de photons

$$\Delta \hat{N}^2 = \langle \hat{N} \rangle \quad (1.14)$$

d'où le terme "bruit de grenaille" (*shot-noise* en anglais) employé communément pour désigner le bruit quantique standard. Il existe cependant des états dont les fluctuations

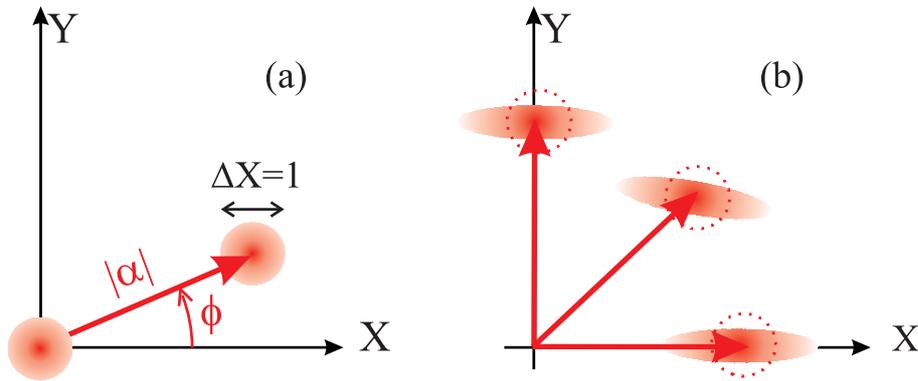


FIG. 1.2 – (a) État cohérent du rayonnement dans le repère de Fresnel. On a également représenté le vide, qui est l'état cohérent d'amplitude nulle. (b) États comprimés pour différentes quadratures.

pour une certaine quadrature peuvent être inférieures au bruit quantique standard : les *états comprimés*. Pour de tels états, il existe une quadrature θ vérifiant

$$\Delta \hat{X}_\theta^2 < 1 \quad (1.15)$$

Bien entendu, l'inégalité de Heisenberg étant toujours respectée, les fluctuations de la quadrature conjuguée sont quant à elles supérieures au bruit quantique standard

$$\Delta \hat{Y}_\theta^2 > 1 \quad (1.16)$$

Parmi cette classe d'états comprimés, on peut considérer la classe des états minimaux, tels que

$$\Delta \hat{X}_\theta^2 \Delta \hat{Y}_\theta^2 = 1 \quad \forall \theta \quad (1.17)$$

A.2 Fluctuations quantiques d'un champ multimode

Nous avons considéré jusqu'ici le cas idéal d'un champ purement monomode. Cependant, le champ produit par un laser possède une valeur moyenne non nulle sur

une bande étroite de fréquence, mais également des fluctuations à toutes les autres fréquences, puisque chaque mode possède au moins les fluctuations associées à l'état vide de ce mode. Une description complète de l'état quantique du champ nécessite *a priori* de prendre en compte les modes du champ à toutes les fréquences. En pratique, on modélise le champ comme la superposition d'un champ moyen de fréquence ω_L et de modes latéraux situés dans une bande étroite de fréquences autour de ω_L .

A.2.1 Décomposition en modes d'un champ libre

D'un point de vue spatial, la structure d'un faisceau laser est gaussienne et il faudrait prendre en compte cette structure transverse pour modéliser correctement le faisceau [Fabre96]. Afin de simplifier le problème, on considère une onde d'extension finie sur une section S , dont on néglige les variations d'amplitude dans le plan transverse.

D'un point de vue temporel, le champ s'écrit comme la superposition d'un mode central à la fréquence ω_L et de modes latéraux avec des fluctuations dont les fréquences sont contenues dans une bande de fréquence de largeur $\Delta\omega$ faible devant ω_L ¹

$$\hat{E}(t) = \int_{\omega_L - \Delta\omega/2}^{\omega_L + \Delta\omega/2} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 S c}} (\hat{a}_\omega e^{-i\omega t} + \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega t}) \quad (1.18)$$

Comme $\Delta\omega \ll \omega_L$, le champ vaut

$$\hat{E}(t) \simeq \mathcal{E}_0 \left(\int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \frac{d\Omega}{2\pi} \hat{a}_{\omega_L + \Omega} e^{-i\Omega t} \right) e^{-i\omega_L t} + h.c. \quad (1.19)$$

avec

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 S c}} \quad (1.20)$$

La relation (1.19) fait apparaître un opérateur $\hat{A}(t)$, défini par

$$\hat{A}(t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \frac{d\Omega}{2\pi} \hat{a}_{\omega_L + \Omega} e^{-i\Omega t} \quad (1.21)$$

Cet opérateur est l'enveloppe lentement variable du champ électrique de fréquence centrale ω_L . Le champ se met finalement sous la forme très similaire à celle d'un champ monomode (1.1)

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(\hat{A}(t) e^{-i\omega_L t} + \hat{A}^\dagger(t) e^{i\omega_L t} \right) \quad (1.22)$$

¹On utilisera les conventions suivantes pour la transformée de Fourier de f et sa transformée inverse

$$f(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} f(\omega)$$

Avec cette convention pour \mathcal{E}_0 , $\langle \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t) \rangle$ s'interprète comme le flux de photons à travers la section S considérée. $A(t)$ est dans ce cas homogène à la racine carrée d'une fréquence².

Comme dans le cas du champ monomode, les opérateurs de quadrature se définissent à partir de la relation

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(\hat{X}(t) \cos \omega_L t + \hat{Y}(t) \sin \omega_L t \right) \quad (1.23)$$

$$\text{avec} \quad \hat{X}(t) = \hat{A}(t) + \hat{A}^\dagger(t) \quad (1.24)$$

$$\hat{Y}(t) = i(\hat{A}^\dagger(t) - \hat{A}(t)) \quad (1.25)$$

Les fluctuations quantiques des modes latéraux traduisent l'existence de fluctuations quantiques intrinsèques des opérateurs de quadrature, et sont à l'origine de leur non-commutation, comme nous allons le voir.

A.2.2 Relations de commutation

Nous avons restreint l'étude à un champ de largeur spectrale $\Delta\omega$, c'est-à-dire un champ dont la fonction d'autocorrélation n'est non nulle que pour des temps inférieurs à $1/\Delta\omega$. Dans la pratique, on ne considèrera que des fréquences d'analyse petites devant $\Delta\omega$, auquel cas il est raisonnable d'approximer la fonction d'autocorrélation du champ par une distribution de Dirac. Le commutateur entre les opérateurs enveloppe prend alors la forme [Fabre96]

$$\left[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t') \right] = \delta(t - t') \quad (1.26)$$

ou encore, étant données les définitions (1.24-1.25),

$$\left[\hat{X}(t), \hat{Y}(t') \right] = 2i \delta(t - t') \quad (1.27)$$

A.2.3 Spectres de bruit et matrices de variances

Comme nous le verrons dans le chapitre 2, les fluctuations d'un champ sont mesurées par homodyne avec un champ cohérent. Cette détection homodyne donne accès aux fluctuations d'une quadrature quelconque \hat{X}_θ de l'enveloppe $\hat{A}(t)$

$$\hat{X}_\theta(t) = \hat{A}(t)e^{-i\theta} + \hat{A}^\dagger(t)e^{i\theta} \quad (1.28)$$

²Avec la quantification usuelle dans un volume V , que nous utiliserons dans le chapitre 4, $A(t)$ est homogène à une fréquence.

les fluctuations d'un opérateur \hat{A} étant égales à $\delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$. Comme seul le mode central possède une valeur moyenne non nulle, on a que $\langle\hat{A}(\Omega)\rangle = 0$ dès que $\Omega \neq 0$. La fonction d'autocorrélation de la quadrature \hat{X}_θ s'écrit alors

$$\begin{aligned} \langle\delta\hat{X}_\theta(\Omega)\delta\hat{X}_\theta(\Omega')\rangle &= \langle\delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(\Omega')\rangle + \langle\delta\hat{A}^\dagger(\Omega)\delta\hat{A}(\Omega')\rangle \\ &\quad + e^{-2i\theta}\langle\delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}(\Omega')\rangle + e^{2i\theta}\langle\delta\hat{A}^\dagger(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(\Omega')\rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

Or, la relation (1.26) implique que

$$[\hat{A}(\Omega), \hat{A}^\dagger(\Omega')] = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') \quad (1.30)$$

Les quatre fonctions d'autocorrélation de (1.29) sont donc δ -corrélées en fréquence. Il est commode de les regrouper sous la forme d'une matrice 2×2 , la *matrice de variance* du champ. En dénotant $|\hat{A}(\Omega)\rangle$ le vecteur représentant le champ, et $[\hat{A}(\Omega)|$ son adjoint,

$$|\hat{A}(\Omega)\rangle = \begin{bmatrix} \hat{A}(\Omega) \\ \hat{A}^\dagger(\Omega) \end{bmatrix}, \quad [\hat{A}(\Omega)| = [\hat{A}^\dagger(-\Omega), \hat{A}(-\Omega)| \quad (1.31)$$

la matrice de variance du champ est définie par la relation

$$\langle|\delta\hat{A}(\Omega)\rangle[\delta\hat{A}(\Omega')| \rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega') [V(\Omega)] \quad (1.32)$$

En utilisant (1.29) et (1.32) on montre aisément que la fonction d'autocorrélation de $\delta\hat{X}_\theta(\Omega)$ est égale à

$$\langle\delta\hat{X}_\theta(\Omega)\delta\hat{X}_\theta(\Omega')\rangle = \{[V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} + 2\text{Re}[e^{-2i\theta}[V(\Omega)]_{1,2}]\} 2\pi \delta(\Omega + \Omega')$$

Or, pour une fonction aléatoire stationnaire $f(t)$, de transformée de Fourier $f(\Omega)$ et de spectre de bruit $S_f(\Omega)$, la fonction d'autocorrélation dans l'espace de Fourier est reliée au spectre de bruit par la relation

$$\langle f(\Omega)f(\Omega') \rangle = 2\pi S_f(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (1.33)$$

Le spectre de bruit de la quadrature \hat{X}_θ vaut par conséquent

$$S_{\hat{X}_\theta}(\Omega) = [V(\Omega)]_{1,1} + [V(\Omega)]_{2,2} + 2\text{Re}([V(\Omega)]_{1,2}e^{-2i\theta}) \quad (1.34)$$

Pour un champ cohérent, seul $\langle\delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(\Omega')\rangle$ est non nul³. La matrice de variance s'écrit alors

$$[V(\Omega)]_{\text{cohérent}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

³Ce terme correspond à la création puis la destruction d'un photon à partir du vide.

Pour un champ comprimé multimode, comprimé à toutes les fréquences par le même facteur r , cette matrice vaut

$$[V(\Omega)]_{\text{comprimé}} = \begin{pmatrix} \cosh^2 r & e^{2i\phi} \sinh(2r)/2 \\ e^{-2i\phi} \sinh(2r)/2 & \sinh^2 r \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

la composante comprimée étant $\hat{X}_{\phi/2+\pi/2} : S_{\hat{X}_{\phi/2+\pi/2}}(\Omega) = e^{-2r}$ et $S_{\hat{X}_{\phi/2}}(\Omega) = e^{2r}$.

Pour un champ multimode quelconque, la condition de réduction de bruit sous le bruit quantique standard à une fréquence d'analyse Ω est donc qu'il existe un angle θ tel que la densité spectrale de bruit de la quadrature \hat{X}_θ soit inférieure à 1 :

$$S_{\hat{X}_\theta}(\Omega) < 1 \quad (1.37)$$

A.2.4 Lien avec les variances

De la relation (1.27), on obtient le commutateur entre deux quadratures orthogonales en Fourier

$$[\hat{X}(\Omega), \hat{Y}(\Omega')] = 4\pi i \delta(\Omega + \Omega') \quad (1.38)$$

On peut alors montrer que l'inégalité d'Heisenberg (1.5) sur le produit des variances de \hat{X} et \hat{Y} se généralise aux densités spectrales de bruit [Fabre96]

$$S_{\hat{X}}(\Omega) S_{\hat{Y}}(\Omega) \geq 1 \quad (1.39)$$

En pratique, on mesure les fluctuations d'une quadrature \hat{X}_θ à l'aide d'un analyseur de spectre fonctionnant à une fréquence d'analyse donnée $\Omega/2\pi$ et de résolution en fréquence δf , petite devant la fréquence caractéristique de variation de la densité spectrale de bruit. Le signal de sortie de l'analyseur de spectre est alors proportionnel à la variance de la quantité $\hat{X}_{\theta F}$ obtenue à partir de \hat{X}_θ par filtrage

$$\Delta \hat{X}_{\theta F}^2 = 2\delta f S_{\hat{X}_\theta}(\Omega) \quad (1.40)$$

Dans ce cas, l'inégalité d'Heisenberg (1.39) s'écrit

$$\Delta \hat{X}_\theta^2 \Delta \hat{Y}_\theta^2 \geq 4(\delta f)^2 \quad (1.41)$$

Mesuré par cette méthode, le bruit quantique standard, dont le spectre est blanc, augmente avec la bande passante de la mesure. On voit que raisonner sur les variances pour le champ est équivalent à raisonner en termes de densités spectrales de bruit, ce que nous ferons dans la suite du manuscrit pour le champ.

B Bruit quantique d'un ensemble d'atomes

B.1 Bruit de projection quantique

On peut interpréter le bruit quantique du champ d'une autre manière, en utilisant la théorie de la mesure en mécanique quantique. En effet, une mesure sur un état quantique qui n'est pas état propre de l'observable mesurée conduit à une dispersion des résultats de mesures réalisées sur un grand nombre d'objets quantiques dans le même état. Par exemple, un état cohérent, qui est un état propre de l'opérateur d'annihilation \hat{a} , n'est pas un état propre de l'opérateur nombre de photons $\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Par conséquent, une mesure de l'intensité d'un faisceau dans un état cohérent présente un bruit de projection quantique.

Une autre manifestation importante du bruit de projection quantique concerne les mesures effectuées sur des atomes. Prenons par exemple un atome dans une superposition à poids égaux de l'état fondamental $|g\rangle$ et de l'état excité $|e\rangle$

$$|\Psi\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2} \quad (1.42)$$

Une mesure de l'état interne de l'atome dans l'état $|\Psi\rangle$ aura pour résultat $|g\rangle$ une fois sur deux et $|e\rangle$ une fois sur deux. L'incertitude sur l'état interne de l'atome est totale. Si l'on considère maintenant un grand nombre d'atomes $N \gg 1$, on peut montrer que la dispersion des mesures augmente comme \sqrt{N} , l'incertitude relative diminuant alors comme $1/\sqrt{N}$. En effet, pour N atomes incorrélés qui sont tous dans le même état quantique, avec une probabilité p_e d'être dans l'état $|e\rangle$ et une probabilité $p_g = 1 - p_e$ d'être dans l'état $|g\rangle$, la probabilité de trouver lors d'une mesure n atomes dans l'état $|e\rangle$ est donnée par une loi binomiale

$$P_n = C_N^n p_e^n p_g^{N-n} \quad (1.43)$$

Le nombre moyen d'atomes dans l'état $|e\rangle$ est $\bar{n} = Np_e$ avec une variance $\Delta n^2 = Np_e p_g$. Bien que la loi ne soit pas poissonnienne, le rapport $\Delta n/\bar{n}$ évolue en $1/\sqrt{N}$. De plus, pour l'état symétrique $p_e = p_g = 1/2$, l'incertitude est maximale. En revanche, l'incertitude est nulle si tous les atomes sont dans l'état $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, puisque les atomes sont dans un état propre de l'observable mesurée, ici la population d'un des états.

B.2 Opérateurs collectifs de spin

B.2.1 Spin équivalent pour un atome à deux niveaux

Il est bien connu qu'un atome à deux niveaux peut être décrit par des observables de spin. Les observables atomiques associées traditionnellement à un atome à deux

niveaux, $|g\rangle$ et $|e\rangle$, sont

- les *cohérences optiques*, qui sont proportionnelles aux composantes de l'opérateur dipolaire atomique,

$$\sigma_- = |g\rangle\langle e| \quad \text{et} \quad \sigma_+ = |e\rangle\langle g| \quad (1.44)$$

- les *populations* dans l'état excité et dans l'état fondamental

$$\pi_e = |e\rangle\langle e| \quad \text{et} \quad \pi_g = |g\rangle\langle g| \quad (1.45)$$

Ces observables permettent de définir trois opérateurs de spin, qui s'assimilent aux composantes d'un spin 1/2 fictif

$$\sigma_x = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2i}, \quad \sigma_z = \frac{\pi_e - \pi_g}{2} \quad (1.46)$$

Il est clair que ces opérateurs satisfont aux relations de commutation circulaires habituelles d'un spin 1/2

$$[\sigma_x, \sigma_y] = i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = i\sigma_y \quad (1.47)$$

De manière évidente, on a les relations

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \frac{\pi_e + \pi_g}{4} = \frac{\mathbb{1}}{4} \quad (1.48)$$

$$\text{et} \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \frac{3}{4} \mathbb{1} \quad (1.49)$$

où $\mathbb{1}$ désigne l'opérateur identité. On peut donc associer formellement à tout atome à deux niveaux un spin 1/2 équivalent.

B.2.2 Spin équivalent pour N atomes

L'état quantique d'une assemblée de N atomes à deux niveaux peut être décrit par des opérateurs collectifs de spin, qui sont définis comme la somme des opérateurs monoatomiques

$$J_x = \sum_{i=1}^N \sigma_x^{(i)}, \quad J_y = \sum_{i=1}^N \sigma_y^{(i)}, \quad J_z = \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)} \quad (1.50)$$

Ces opérateurs collectifs satisfont également aux relations de commutation d'un moment cinétique (1.47)

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y \quad (1.51)$$

Par contre, les opérateurs J_x^2 , J_y^2 et J_z^2 ne sont plus proportionnels à l'opérateur identité. Ceci n'est vrai que lorsqu'il n'existe aucune corrélation entre les différents atomes, comme on peut le voir à l'aide de la relation suivante

$$J_x^2 = \sum_{i=1}^N (\sigma_x^{(i)})^2 + \sum_{i \neq j} \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} = \frac{N}{4} \mathbb{1} + \text{corrélations} \quad (1.52)$$

La norme du spin collectif est maximale et vaut $N/2$ pour un état pur, mais est inférieure pour un mélange statistique

$$|\langle \vec{J} \rangle| = \sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2 + \langle J_z \rangle^2} \leq \frac{N}{2} \quad (1.53)$$

Cette description en terme de spin fictif est non seulement commode pour interpréter des expériences, comme celles de spectroscopie atomique de type Ramsey, mais permet également une interprétation simple des interactions atomes-champs, notamment en raison de l'analogie avec le formalisme des opérateurs de Stokes décrivant l'état de polarisation de la lumière, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

B.3 Etat cohérent atomique

Comme le champ électromagnétique, un ensemble atomique possède des fluctuations quantiques intrinsèques, associées à des observables qui ne commutent pas entre elles et qui sont donc reliées par des inégalités de Heisenberg. Pour définir un bruit quantique standard atomique, on peut partir comme nous l'avons fait pour le champ des relations de commutation de grandeurs conjuguées. Commençons par le cas le plus simple dans lequel les N spins sont isolés, c'est-à-dire que tous les atomes sont dans leur état fondamental, sans interaction avec un champ ou un réservoir, et sans aucune corrélation entre les spins individuels. Le spin moyen est au pôle sud de la sphère de Bloch : $\langle J_z \rangle = -N/2$. Les composantes orthogonales J_x et J_y satisfont à

$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{|\langle J_z \rangle|}{2} \quad (1.54)$$

En l'absence de corrélations, il est clair d'après (1.52) que la variance d'une composante quelconque J_θ dans le plan (Oxy)

$$J_\theta = J_x \cos \theta + J_y \sin \theta \quad (1.55)$$

est égale à

$$\Delta J_\theta^2 = \frac{N}{4} = \frac{|\langle \vec{J} \rangle|}{2} \quad (1.56)$$

Le “shot-noise” atomique vaut alors $N/4$ et augmente linéairement avec le nombre d'atomes. Les fluctuations relatives décroissent elles comme $1/\sqrt{N}$. On définit ainsi un état de référence : l'*état cohérent atomique*, qui est un état pur, minimal pour la relation d'Heisenberg (1.54). L'ensemble des états cohérents atomiques s'obtient par rotation sur la sphère de Bloch [Arecchi72]. On peut remarquer l'analogie formelle avec le champ électromagnétique dans ce cas ; en effet, la valeur de J_z étant parfaitement déterminée, les fluctuations quantiques du spin collectif sont alors caractérisées par les deux composantes J_x et J_y dans le plan perpendiculaire au spin moyen, qui jouent le même rôle que les quadratures du champ électromagnétique.

B.4 Bruit quantique standard atomique

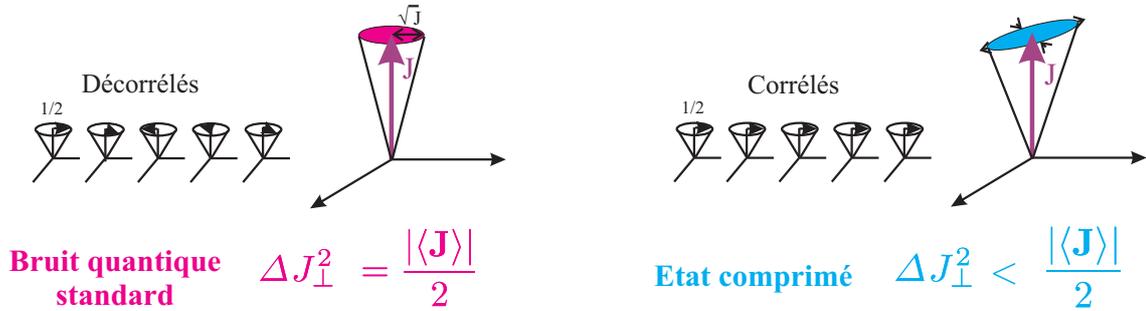


FIG. 1.3 – (a) *Etat cohérent atomique dont le spin moyen est aligné selon z : les spins individuels sont incorrélés entre eux.* (b) *Etat comprimé atomique : des corrélations existent entre les spins individuels et autorisent la réduction sous le bruit quantique standard des fluctuations d'une composante dans le plan transverse.*

Lorsque le spin moyen n'est pas dans un état pur ($|\langle \vec{J} \rangle| = J < N/2$), on définit le bruit quantique standard atomique en fixant comme direction de référence la direction du spin moyen. Supposons par exemple que le spin moyen soit orienté selon z : $\langle \vec{J} \rangle = J \vec{z}$ ($J \neq 0$). On définit le bruit quantique standard atomique à partir de (1.54) : la variance de n'importe quelle composante dans le plan orthogonal vaut $\Delta J_\theta^2 = J/2$ (Fig. 1.3). De manière générale, pour chaque direction de l'espace \vec{u} , on peut ainsi définir un bruit quantique de référence pour les fluctuations atomiques dans une direction orthogonale à \vec{u} . Ce bruit est égal à la moitié de la valeur moyenne du spin dans cette direction, ce qui se traduit mathématiquement par l'égalité

$$\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v})^2 = \frac{|\langle \vec{J} \cdot \vec{u} \rangle|}{2} \quad \text{pour tout } \vec{v} \perp \vec{u} \quad (1.57)$$

B.5 Etat comprimé atomique

Dans tout ce manuscrit, nous utiliserons la définition suivante : un *état comprimé atomique* est un état qui présente des fluctuations réduites sous le bruit quantique standard pour une certaine composante J_θ dans le plan orthogonal au spin moyen [Kitagawa93]

$$\Delta J_\theta^2 < \frac{|\langle \vec{J} \rangle|}{2} \quad (1.58)$$

Comme pour le champ, la composante conjuguée $J_{\theta+\pi/2}$ possède des fluctuations amplifiées au dessus du bruit quantique standard (Fig. 1.3). Cette définition est intrinsèquement liée aux corrélations quantiques entre les spins individuels [Kitagawa93]. On peut donner une représentation commode de l'état quantique d'un spin collectif dans la sphère de Bloch en superposant au vecteur de Bloch un ellipsoïde de fluctuations (Fig. 1.4).

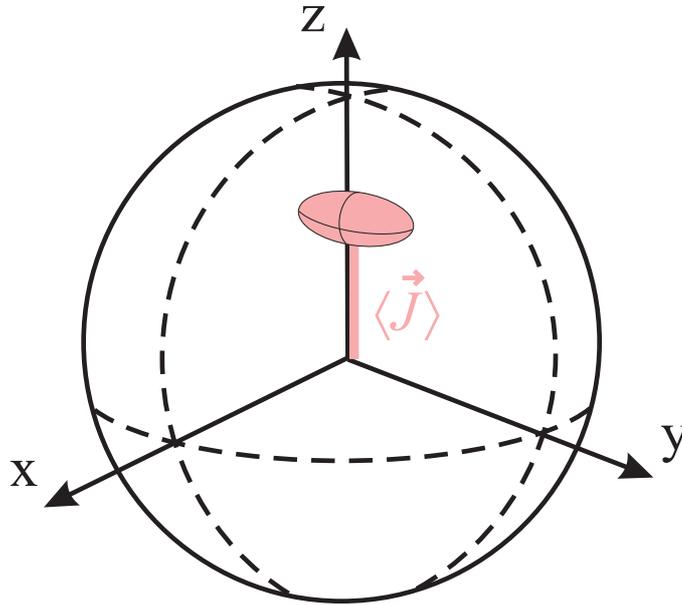


FIG. 1.4 – Représentation de l'état quantique d'un spin collectif dans la sphère de Bloch. On associe au vecteur représentant le spin moyen (orientés selon z ici) un ellipsoïde de fluctuations.

B.6 Sensibilité des mesures d'interférométrie atomique et critères de “spin squeezing”

Si les états comprimés atomiques ont été originellement introduits par *Arecchi et al.* en 1972 [[Arecchi72](#)], la compression du bruit atomique a été plus récemment motivée par l'amélioration de la sensibilité des mesures d'interférométrie atomique [[Wineland92](#)]. *Wineland et al.* ont montré qu'il était possible d'augmenter la précision de la mesure de la fréquence de résonance ω_0 des horloges atomiques en utilisant des états atomiques comprimés [[Itano93](#), [Wineland94](#), [Meyer01](#)]. En effet, la limitation ultime de la précision des horloges atomiques provient du bruit de projection quantique lors des séquences de spectroscopie atomique [[Santarelli99](#)]. Dans une séquence de spectroscopie atomique de type Ramsey, des atomes à deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ interagissent de manière quasi-résonnante avec un champ radiofréquence de fréquence ω . Une séquence Ramsey est constituée de deux pulses $\pi/2$ séparés par un temps d'évolution libre T . Si les atomes sont initialement dans l'état fondamental (spin aligné selon $-Oz$, voir [Fig. 1.5](#)), la première impulsion $\pi/2$ les portent dans la superposition $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$; le spin s'aligne selon Ox . Si le champ est résonnant avec la transition atomique, le spin ne bouge pas lors de l'évolution libre et la deuxième impulsion amène les atomes dans l'état excité (spin selon Oz). En revanche, si le champ est désaccordé par rapport à la transition atomique, le spin précesse dans le plan (Oxy) et la seconde impulsion $\pi/2$ ne porte qu'une certaine partie des atomes dans l'état excité. On peut montrer qu'au voisinage de la résonance la proportion d'atomes dans l'état excité à la fin de la mesure est une fonction sinusoïdale du déphasage $(\omega - \omega_0)T$ acquis par les atomes pendant l'évolution libre [[Itano93](#)].

Pour repérer la fréquence de résonance dans une horloge atomique, on procède à deux séquences Ramsey effectuées pour des fréquences très proches, $\omega \pm \Delta\omega/2$, et on compare les mesures des populations excitées finales. Il n'y a égalité que si le champ est parfaitement résonnant avec la transition atomique ($\omega = \omega_0$). La précision de cette mesure est donnée par la pente des oscillations Ramsey et dépend de $\Delta\omega$. Pour avoir une précision optimale on doit choisir $\Delta\omega = \pi/(2T)$, ce qui correspond à une mesure de la composante selon z du spin aligné selon Oy . La précision est alors limitée par les fluctuations de J_z , et on voit sur la [figure 1.5](#) que l'on améliore la sensibilité de la mesure si on utilise des états comprimés selon z . Dans le cas particulier de la spectroscopie de type Ramsey utilisée dans les horloges, le paramètre pertinent pour déterminer l'effet de la compression de bruit atomique sur la sensibilité de la mesure est le paramètre ξ_R [[Itano93](#)], égal à

$$\xi_R = \frac{\sqrt{N}\Delta J_\perp}{|\langle \vec{J} \rangle|} \quad (1.59)$$

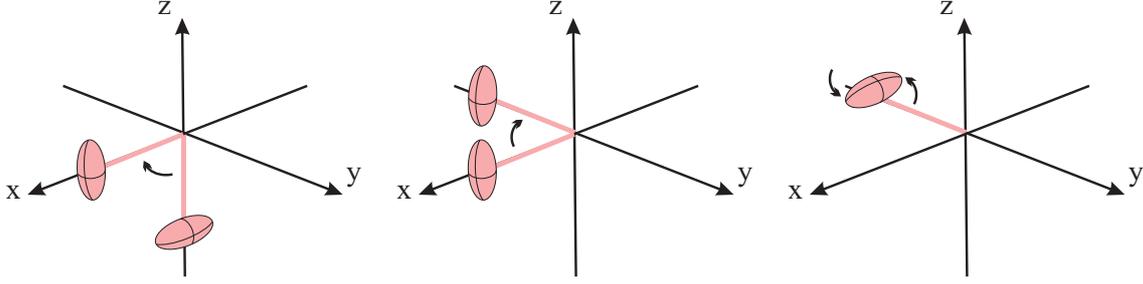


FIG. 1.5 – Séquence de Ramsey pour un spin comprimé : le spin, initialement aligné selon $-Oz$ et comprimé selon Oy , s’aligne selon Ox avec le premier pulse $\pi/2$. Pendant l’évolution libre, il effectue une rotation de $\pi/2$ dans le plan (Oxy) . La seconde impulsion $\pi/2$ fait tourner l’ellipse de fluctuations autour de l’axe Oy . La précision de la mesure finale de la population dans l’état excité est limitée par les fluctuations de J_z , qui sont comprimées.

Ce paramètre doit être inférieur à 1 pour obtenir une amélioration de la sensibilité. Cette condition est plus stricte que notre condition de “spin squeezing” (1.58). Les deux conditions sont toutefois équivalentes pour des ensembles totalement polarisés ($|\langle \vec{J} \rangle| \simeq N/2$).

La condition de compression de bruit atomique (1.58) est la plus naturelle d’un point de vue formel, puisqu’elle est basée sur les relations de commutations [Kitagawa93]. De la même façon que la condition de réduction de bruit quantique du champ sous le bruit quantique standard traduit l’existence de corrélations entre photons d’un faisceau lumineux, la relation (1.58) exprime le degré de corrélations existant entre les spins individuels de l’ensemble. En effet, la relation (1.52) montre qu’un état atomique est comprimé dès lors que des (anti)-corrélations quantiques existent entre les différents spins. Pour un ensemble de $N \geq 2$ atomes polarisés selon Oz , on peut réécrire cette relation à l’aide de la fonction de corrélation à deux spins

$$\Delta J_x^2 = \frac{N}{4} + N(N-1) \overline{\langle \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} \rangle} \quad (1.60)$$

$$\text{avec} \quad \overline{\langle \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} \rangle} \equiv \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \langle \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} \rangle \quad (1.61)$$

Plus ces corrélations sont grandes en valeur absolue, plus le spin collectif aura des fluctuations comprimées (ou amplifiées). Il est par ailleurs clair que pour générer un état atomique comprimé des corrélations doivent exister et il faut au minimum deux atomes⁴.

⁴On peut aussi remarquer que, pour un seul atome, les variances de chacune des composantes de

B.7 Limite de Heisenberg

La fonction de corrélation à deux spins est bornée en valeur absolue par $1/4N$, ce qui impose une limite ultime à la réduction de bruit atomique, appelée *limite de Heisenberg*. En effet, supposons le spin moyen égal à $J = N/2$ et aligné selon Oz . On a les inégalités suivantes

$$\frac{\Delta J_x^2}{|\langle J_z \rangle|/2} \geq \frac{|\langle J_z \rangle|/2}{\Delta J_y^2} \geq \frac{|\langle J_z \rangle|}{2J^2} = \frac{1}{2J} = \frac{1}{N} \quad (1.62)$$

On a utilisé l'inégalité de Heisenberg $\Delta J_x \geq (|\langle J_z \rangle|/2)/\Delta J_y$, ainsi que $\Delta J_y \leq J$. Cette dernière inégalité vient du fait que, si l'on prend comme axe de quantification y , les états ayant la plus grande variance sont ceux de la forme

$$|\Psi\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|J, J\rangle_y + e^{i\phi}|J, -J\rangle_y) \quad (1.63)$$

qui vérifie trivialement $\Delta J_y^2 = J^2$. On ne peut donc réduire le bruit quantique d'un ensemble atomique sous cette limite. Ceci correspond à donner une valeur maximale (en valeur absolue) à la fonction de corrélation à deux spins

$$\overline{\langle \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)} \rangle} = -\frac{1}{4N} \quad (1.64)$$

Nous reviendrons plus en détail sur ces corrélations dans les chapitres 5 et 6 lorsque nous étudierons la répartition des corrélations quantiques entre deux ensembles de spins.

B.8 Autres applications des états comprimés atomiques : magnéto-métrie et communication quantique

Un autre intérêt des états comprimés atomiques réside dans l'amélioration potentielle des limites de sensibilité des magnétomètres ultra-sensibles. Les méthodes les plus performantes pour mesurer un champ magnétique faible sont d'observer son effet sur un spin atomique polarisé, la technique standard consistant à partir d'un ensemble atomique polarisé - selon x , par exemple - soumis à un faible champ magnétique B selon y [Dupont-Roc69, Kim98, Budker02, Geremia05]. Ce champ fait précesser le spin dans le plan (Oxz) avec une fréquence de Larmor $\omega_L = \gamma B$, γ étant le rapport gyromagnétique. Le champ magnétique peut alors être déduit de la mesure de la composante J_z du spin. En pratique, dans les magnétomètres atomiques, on pompe optiquement de manière continue le spin selon x , ce qui repolarise les atomes qui précessent sous l'influence de B . A l'état stationnaire, et dans la limite des faibles champs, le spin, quasiment

spin sont maximales et valent chacune $1/4$: $\Delta J_\alpha^2 = 1/4$

polarisé selon x , acquiert toutefois une faible valeur moyenne selon z : $\langle J_z \rangle \propto \gamma B J$. L'incertitude sur la mesure de J_z est donc donnée par le bruit de projection quantique et les fluctuations de J_z . L'utilisation d'états comprimés atomiques permet de réduire cette incertitude et d'augmenter ainsi la précision du magnétomètre.

Outre l'amélioration de la sensibilité de mesure, les états comprimés atomiques peuvent être utilisés afin de réaliser des protocoles d'information ou de communication quantiques. Nous allons voir dans le prochain paragraphe comment, à partir d'états comprimés, on peut obtenir des états corrélés quantiquement ou *intriqués*, l'intrication quantique étant à la base de nombreux protocoles d'information quantique. Nous donnerons dans le chapitre 5 un exemple d'utilisation d'états atomiques intriqués pour réaliser la téléportation de l'état quantique d'un ensemble atomique.

C Intrication quantique en variables continues

C.1 Le paradoxe EPR

En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen énoncent dans leur célèbre paradoxe que, si l'on doit croire les lois de la physique quantique, alors il existe des états, dits *intriqués*, qui sont corrélés quelle que soit la distance qui les sépare [Einstein35]. L'exemple qu'ils donnent est celui de deux particules identiques a et b , dont les observables conjuguées de position x_i et d'impulsion p_i présentent des corrélations ou des anticorrélations parfaites. On peut de manière équivalente considérer le cas d'autres oscillateurs harmoniques [Reid89], par exemple deux modes orthogonaux du champ électromagnétique, A_a et A_b , que l'on décrit par leurs quadratures $X_\alpha = A_\alpha + A_\alpha^\dagger$ et $Y_\alpha = i(A_\alpha^\dagger - A_\alpha)$ ($\alpha = a, b$). Nous avons vu que ces quadratures orthogonales sont des opérateurs conjugués, qui jouent le même rôle que la position et l'impulsion des particules précédentes, et qui ne commutent pas

$$[X_\alpha, Y_\beta] = 2i \delta_{\alpha\beta} \quad (1.65)$$

Par contre, les opérateurs, dits EPR, $X_a - X_b$ et $Y_a + Y_b$, commutent

$$[X_a - X_b, Y_a + Y_b] = 0 \quad (1.66)$$

Rien ne s'oppose en principe en mécanique quantique à ce que l'on puisse générer des champs parfaitement corrélés en amplitude et anticorrélés en phase. En termes de fluctuations, cela signifie que les variances des opérateurs EPR peuvent être rendues arbitrairement petites

$$\Delta(X_a - X_b)^2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta(Y_a + Y_b)^2 \rightarrow 0 \quad (1.67)$$

Autrement dit, une mesure effectuée sur l'un des champs renseigne de manière parfaite sur l'état de l'autre champ (voir Fig. 1.6). Par exemple, une mesure de la quadrature X_a donne avec certitude la valeur de la quadrature X_b . Pour les auteurs du paradoxe EPR, qui supposent qu'il ne peut y avoir d'action à distance, ceci correspond à une mesure de X_b qui ne perturbe pas le système a , à laquelle on doit associer un élément de réalité, donc une valeur prédéterminée pour X_b . Dans ce cas, on pourrait aussi associer une valeur prédéterminée à Y_b en mesurant Y_a . Or, ceci est en contradiction avec les postulats de la mécanique quantique, qui interdisent que le champ b puisse avoir simultanément une valeur parfaitement déterminée pour deux quadratures orthogonales. Les mesures de X_a et Y_a ne pouvant être effectuées simultanément, on doit admettre pour lever le paradoxe l'existence d'actions non locales en mécanique quantique. C'est en se basant sur cette notion de "réalisme local" que John Bell établit en 1964 ses célèbres inégalités auxquelles doit satisfaire toute théorie locale et que la mécanique quantique viole. Ce caractère non local de la mécanique quantique a été mis en évidence pour la première fois expérimentalement au début des années 80, lors des expériences d'Orsay, au moyen de photons corrélés émis par cascade radiative dans le calcium [Aspect81]. Le fait que de telles corrélations puissent exister entre deux systèmes a été depuis vérifié à de nombreuses reprises dans différents systèmes physiques.

C.2 Critères d'intrication pour des états gaussiens

Les expériences d'Orsay concernaient des variables discrètes, à savoir les états de polarisation du photon. En ce qui concerne les variables continues, une première formulation du paradoxe EPR a été donnée par Reid [Reid89] pour les états gaussiens du champ électromagnétique (c'est-à-dire des états dont la distribution de Wigner est gaussienne). Dans le paragraphe précédent, on a présenté la situation idéale de corrélations parfaites. Dans la pratique, les corrélations entre deux faisceaux ne sont jamais parfaites et plusieurs critères existent pour les quantifier. Une manière de quantifier les corrélations entre deux modes du champ consiste à mesurer les variances conditionnelles. En effet, si les faisceaux a et b sont partiellement corrélés, on peut à partir de la mesure des fluctuations de a inférer celles de b , ce qui permet de réduire les variances des quadratures de b à l'aide de gains ajustables g_x, g_y

$$\Delta X_{b g_x}^2 = \Delta(X_b - g_x X_a)^2 \quad \text{et} \quad \Delta Y_{b g_y}^2 = \Delta(Y_b + g_y Y_a)^2 \quad (1.68)$$

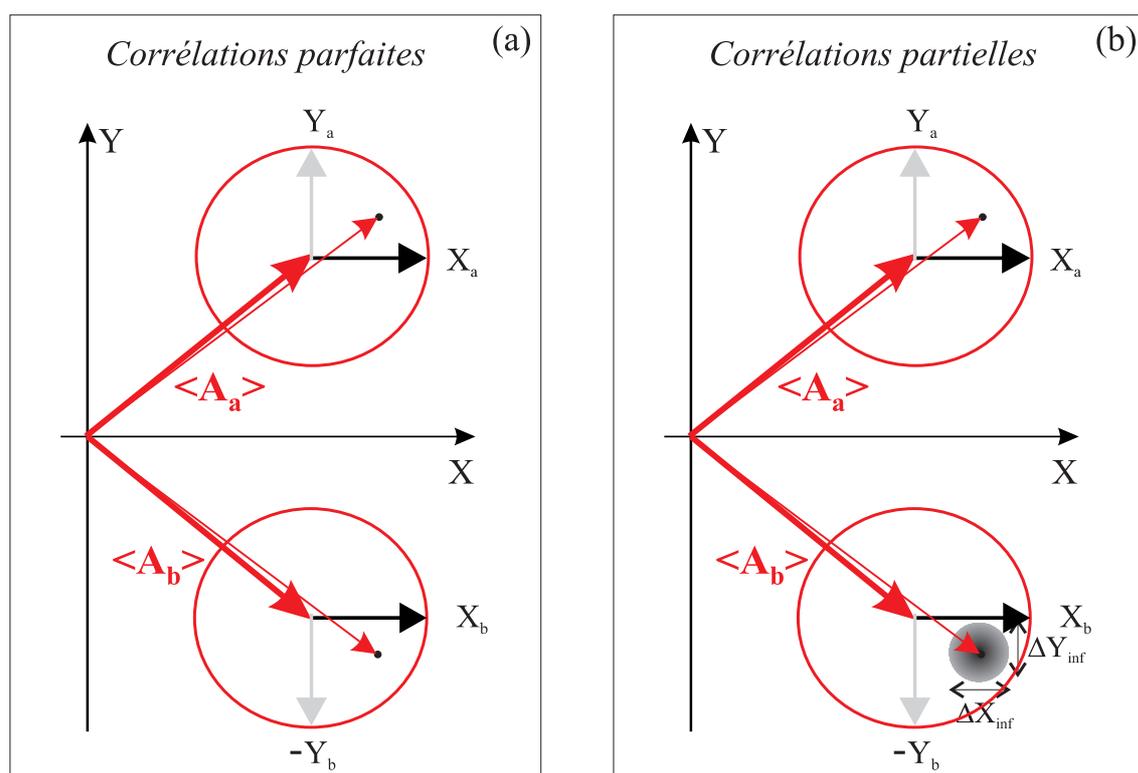


FIG. 1.6 – (a) Faisceaux EPR : la mesure de l'une des quadratures du faisceau a donne avec certitude la valeur de la quadrature correspondante du faisceau b . (b) Si les corrélations ne sont pas parfaites, la mesure de X_a donne la valeur de X_b à $\Delta X_{b\ inf}$ près.

Le choix optimal des gains g_x et g_y donne la meilleure information qu'il est possible d'obtenir sur b connaissant a , c'est-à-dire les variances conditionnelles de b sachant a

$$\Delta X_{b \text{ inf}}^2 = \min_{g_x} \Delta (X_b - g_x X_a)^2 = \Delta X_b^2 - \frac{\langle \delta X_b \delta X_a \rangle}{\Delta X_a^2} \quad (1.69)$$

$$\Delta Y_{b \text{ inf}}^2 = \min_{g_y} \Delta (Y_b + g_y Y_a)^2 = \Delta Y_b^2 - \frac{\langle \delta Y_b \delta Y_a \rangle}{\Delta Y_a^2} \quad (1.70)$$

On dit alors que l'état est EPR si les corrélations entre a et b sont suffisantes pour que l'on ait une violation apparente de l'inégalité de Heisenberg sur les quadratures de b , soit :

$$\Delta X_{b \text{ inf}}^2 \Delta Y_{b \text{ inf}}^2 < 1 \quad (1.71)$$

Le paradoxe EPR en variables continues a été démontré expérimentalement pour la première fois en 1992 à l'aide des faisceaux signal et complémentaire d'un Oscillateur Paramétrique Optique fonctionnant en mode non dégénéré [Ou92]. Le critère EPR sert également dans de nombreux protocoles en variables continues, comme la cryptographie quantique [Bennett84, Gisin02], la téléportation [Vaidman94, Braunstein98a], le codage dense [Braustein00, Li02], etc.

Il est toutefois possible que deux états gaussiens présentent des corrélations de type EPR et soient donc non séparables sans pour autant que soit satisfaite la relation (1.71). Un critère récent dû à Duan *et al.* et Simon [Duan00a, Simon00] établit une condition nécessaire et suffisante pour que deux états gaussiens soient intriqués quantiquement. Par définition, un état de deux modes a et b est *séparable* si et seulement si on peut écrire sa matrice densité ρ sous la forme

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{ia} \otimes \rho_{ib} \quad (1.72)$$

où ρ_{ia} et ρ_{ib} sont des états des modes a et b pondérés par des probabilités $p_i \geq 0$ telles que $\sum_i p_i = 1$.

Nous avons vu qu'un état maximalelement intriqué en variables continues peut être exprimé comme un état propre des opérateurs EPR $X_a - X_b$ et $Y_a + Y_b$ introduits précédemment, et que leurs variances tendent vers 0. Pour des états séparables, il existe une limite inférieure à la demi-somme des variances EPR

$$\mathcal{I}_{a,b} = \frac{1}{2} [\Delta (X_a - X_b)^2 + \Delta (Y_a + Y_b)^2] \geq 2 \quad (1.73)$$

L'égalité est vérifiée par deux états cohérents par exemple. Un état dont la demi-somme des variances EPR est inférieure à 2 est donc non séparable. Cette condition

suffisante pour tout système bipartite est même nécessaire pour les états gaussiens [Duan00a, Simon00]. De plus, pour des états gaussiens *symétriques*, Giedke *et al.* ont montré que la quantité $\mathcal{I}_{a,b}$ est reliée bijectivement à l'intrication de formation et constitue par conséquent une bonne mesure de l'intrication entre les modes a et b [Giedke03]. Nous nous limiterons dans ce manuscrit à des états gaussiens et c'est ce critère d'inséparabilité que nous utiliserons de préférence pour quantifier les corrélations quantiques existant entre deux modes du champ.

Un moyen commode de représenter les corrélations entre deux modes orthogonaux du champ consiste là encore à se placer dans le repère de Fresnel (Fig. 1.6). Lorsqu'ils sont considérés séparément, deux modes a et b corrélés quantiquement possèdent des fluctuations supérieures au bruit quantique standard. Toutefois, à la différence de modes incorrélés, on peut inférer les fluctuations du mode b à partir de celles du mode a , ce qui correspond à la réduction des variances EPR vues précédemment.

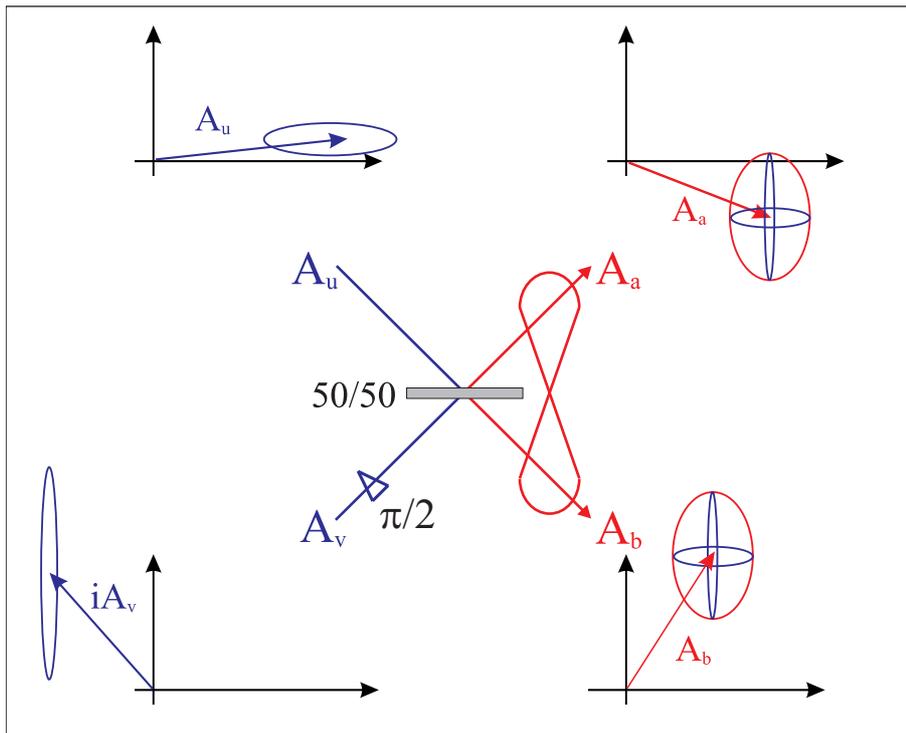


FIG. 1.7 – Génération d'états intriqués à partir d'états comprimés : deux champs comprimés u et v sont mélangés sur une lame séparatrice (l'un d'eux ayant été déphasé de $\pi/2$) pour donner deux champs intriqués a et b .

Une manière “simple” pour générer des faisceaux intriqués consiste à mélanger

deux faisceaux comprimés (convenablement déphasés) sur une lame séparatrice, comme l'illustre la figure 1.7. Mais pour générer des états comprimés ou intriqués à partir d'états cohérents, une interaction non linéaire est nécessaire. A titre d'exemple, des faisceaux intriqués ont récemment été produits dans plusieurs milieux non linéaires

- de type $\chi^{(2)}$: en mélangeant les champs comprimés issus de deux Amplificateurs Paramétriques Optiques (OPA) [Bowen02, Bowen03a] ou dans un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) de type II [Laurat04]
- de type $\chi^{(3)}$: dans les fibres optiques [Silberhorn01, Glockl03] ou les atomes froids [Josse04a]⁵

C.3 Extension aux variables atomiques

On peut étendre ces notions d'intrication aux variables de spin vues dans la partie B. En effet, considérons deux ensembles atomiques de N atomes à deux niveaux, dont les spins sont parallèles et polarisés selon z : $\langle J_{z1} \rangle = \langle J_{z2} \rangle = J/2$ ($0 \leq J \leq N/2$). Les analogues des opérateurs EPR introduits dans la partie précédente sont $J_{x1} - J_{x2}$ et $J_{y1} + J_{y2}$, qui satisfont à

$$\langle [J_{x1} - J_{x2}, J_{y1} + J_{y2}] \rangle = i \langle J_{z1} - J_{z2} \rangle = 0 \quad (1.74)$$

la différence étant que le commutateur entre deux opérateurs de spins n'est plus un nombre mais un opérateur. L'égalité (1.74) n'est donc vraie qu'en valeur moyenne. Toutefois, on peut montrer que la violation du critère suivant

$$\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2 + \Delta(J_{y1} + J_{y2})^2 < |\langle J_{z1} \rangle| + |\langle J_{z2} \rangle| \quad (1.75)$$

reste une condition nécessaire pour que les spins 1 et 2 soient intriqués. Les composantes transverses jouent le même rôle que les quadratures du champ. Physiquement, dire que deux ensembles atomiques sont intriqués au sens du critère d'inséparabilité (1.75) revient à dire que l'on a établi des corrélations entre les spins des différents ensembles ainsi qu'à l'intérieur de chaque ensemble. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le chapitre 5 lors de l'étude du stockage d'intrication dans des ensembles atomiques.

C.4 Critère d'inséparabilité généralisé

On trouve dans la littérature différentes formes du critère d'inséparabilité (1.73). Notons qu'en raison de l'inégalité $ab \leq (a^2 + b^2)/2$, le critère d'inséparabilité sous la

⁵Pour une revue des états non classiques générés dans des milieux $\chi^{(3)}$, on pourra se reporter à la référence [Josse05].

forme *somme* (1.73) peut s'exprimer sous une forme produit [Giovannetti03]

$$\Delta(X_a - X_b)^2 \Delta(Y_a + Y_b)^2 < 4 \quad (1.76)$$

Ce critère produit, s'il est plus facile à satisfaire que le critère somme, met moins clairement en évidence le lien avec la réduction de bruit et le caractère bimodal de l'intrication. En effet, la valeur du produit (1.76) peut être rendue arbitrairement petite en réduisant une seule des deux variances EPR (par exemple avec un champ comprimé et un champ cohérent), alors que la valeur du critère somme restera dans ce cas bornée par 1 (par rapport à 2). C'est pourquoi nous utiliserons préférentiellement cette forme du critère d'inséparabilité dans le manuscrit.

D'autre part, il est possible d'écrire une condition suffisante d'inséparabilité pour un système à deux modes même lorsque les commutateurs des opérateurs ne sont pas égaux. En effet, supposons que a et b désignent les deux parties d'un système composite telles que

$$[\hat{A}_j, \hat{B}_j] = i\hat{C}_j \quad (j = a, b) \quad (1.77)$$

\hat{C}_j pouvant être un opérateur. Si l'on définit

$$\hat{u} = a_1\hat{A}_1 + a_2\hat{A}_2 \quad (1.78)$$

$$\hat{v} = b_1\hat{B}_1 + b_2\hat{B}_2 \quad (1.79)$$

les a_j et b_j étant des réels, alors tout état séparable satisfait à [Giovannetti03]

$$\Delta u^2 + \Delta v^2 \geq |a_1 b_1| |\langle \hat{C}_1 \rangle| + |a_2 b_2| |\langle \hat{C}_2 \rangle| \quad (1.80)$$

Par conséquent, un état ne satisfaisant pas à (1.80) est intriqué. Pour donner un exemple simple, considérons deux ensembles atomiques comportant respectivement N_1 et N_2 atomes. Si les deux ensembles sont polarisés selon z , le critère d'intrication pour les opérateurs $J_{x1} - J_{x2}$ et $J_{y1} + J_{y2}$ s'écrit

$$\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2 + \Delta(J_{y1} + J_{y2})^2 < \frac{N_1 + N_2}{2} \quad (1.81)$$

Nous étudierons principalement des états symétriques pour lesquels le critère (1.73) est valable, mais nous utiliserons dans le chapitre 6 la forme généralisée du critère d'inséparabilité.

Génération d'états non classiques de la lumière

Sommaire

A	Etats non classiques avec des atomes froids	33
A.1	Réduction du bruit quantique d'un mode du champ	34
A.2	Réduction de bruit de deux modes et faisceaux EPR	38
A.3	Génération de vide comprimé dans des vapeurs atomiques à température ambiante?	44
B	Génération d'états non classiques et effets de cohérence atomique	45
B.1	Théorie entrée-sortie pour l'interaction atomes-champs en cavité	45
B.2	Transparence Electromagnétiquement Induite classique : effets sur les valeurs moyennes	56
B.3	Echange de fluctuations quantiques en CPT	63
B.4	Réduction de bruit et intrication via des effets de cohérence	68
B.5	Conclusion	78

A Etats non classiques avec des atomes froids

L'étude de l'interaction entre un faisceau lumineux et des atomes froids placés dans une cavité optique a commencé dans le groupe lors du travail de thèse de Laurent Hilico [Hilico92a]. Pour une interaction quasi-résonnante, le nuage d'atomes froids de

césium présente de fortes non linéarités. Dans ces conditions l'interaction de la lumière avec le milieu modifie ses propriétés, ce qui a permis entre autres de générer des états non classiques à partir d'états cohérents ou quasi-classiques. La première réduction des fluctuations quantiques d'un mode du champ sous le bruit quantique standard a été observée par Astrid Lambrecht pendant sa thèse [Lambrecht96] en injectant dans la cavité un champ de polarisation *circulaire*. Nous rappelons le principe de la réduction de bruit avec des atomes froids dans le paragraphe A.1. Une réduction du bruit quantique a été ensuite observée sur deux modes du champ à la fin de la thèse de Laurent Vernac en injectant un champ de polarisation *linéaire* cette fois dans la cavité [Vernac01b]. Ces expériences ont été poursuivies et étudiées ensuite en détail par Vincent Josse pendant sa thèse soutenue en décembre 2003. J'ai donc participé au début de ma thèse à ces expériences qui ont conduit à une réduction de bruit simultanée sur deux modes du champ, à la génération d'états comprimés en polarisation et d'états intriqués, tels ceux décrits dans le paragraphe C du chapitre 1. L'ensemble de ces résultats ainsi que leur interprétation théorique ont été présentés de façon détaillée dans la thèse de Vincent Josse [Josse03c]; c'est pourquoi nous n'en rappelons que le principe et les résultats essentiels dans le paragraphe A.2, les publications relatives à ce travail étant jointes à la fin de ce manuscrit dans l'appendice D.

A.1 Réduction du bruit quantique d'un mode du champ

A.1.1 Réduction de bruit par un milieu Kerr passif

Il est bien connu qu'un milieu non linéaire en cavité peut modifier considérablement les fluctuations quantiques de la lumière qui le traverse [Reynaud89]. Si l'on considère un milieu Kerr passif de longueur L , l'indice de réfraction dépend de l'intensité I du faisceau qui le traverse

$$n = n_0 - n_2 I \quad (2.1)$$

n_0 représentant l'indice linéaire et n_2 l'indice non linéaire, dont le signe dépend du milieu. Si l'on considère une cavité sans perte à une seule entrée-sortie, dont le coefficient de transmission en intensité est $T \ll 1$, la relation entrée-sortie pour le champ s'écrit

$$A^{out} = \frac{T/2 - i\phi}{T/2 + i\phi} A^{in} = \frac{1 - i\psi}{1 + i\psi} A^{in} \quad (2.2)$$

où

$$\psi = \frac{2}{T}\phi \quad \text{et} \quad \phi = \phi_0 - \phi_{nl} \quad (2.3)$$

$$\text{avec} \quad \phi_0 = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda}, \quad \phi_{nl} = \frac{2\pi n_2 L}{\lambda} |A^{in}|^2 \quad (2.4)$$

Cette relation traduit le fait que le champ subit à chaque aller-retour dans la cavité un déphasage ϕ non linéaire qui dépend de l'intensité. Le déphasage total pour le champ réfléchi est amplifié par le facteur de surtension $2/T$ de la cavité. Les formules (2.2-2.4) montrent que le déphasage se traduit par une rotation dans le repère de Fresnel qui dépend de l'intensité. Si le champ incident est dans un état cohérent, le disque de fluctuations est transformé de manière anisotrope en une ellipse (Fig. 2.1). L'aire

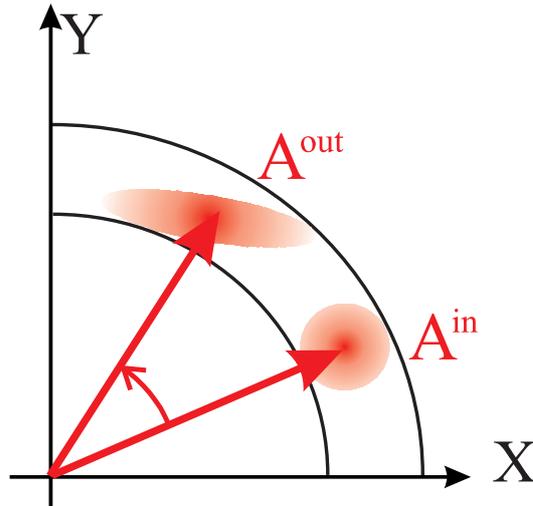


FIG. 2.1 – Réduction de bruit par un milieu Kerr idéal.

des fluctuations étant conservée en l'absence de pertes, le champ sortant est alors comprimé. La réduction de bruit est d'autant plus importante que la non linéarité du milieu ϕ_{nl} est grande. L'avantage d'utiliser une cavité est que la non linéarité du milieu est amplifiée par le facteur de surtension de la cavité. Toutefois, dans des milieux réels, les phénomènes d'absorption limitent nécessairement la réduction de bruit. Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'un milieu atomique excité proche de résonance peut se comporter comme un milieu Kerr.

A.1.2 Réduction de bruit avec des atomes froids

Si l'on considère l'interaction d'un champ de fréquence ω_L avec N atomes à deux niveaux, la transition atomique est caractérisée par une énergie ω_0 , un dipôle d et un taux de relaxation de la cohérence optique dû à l'émission spontanée γ . Le déphasage ϕ vu par le champ lors de la traversée du milieu s'écrit simplement [Cohen96a]

$$\phi = Ng^2 \frac{\Delta}{\Delta^2 + \gamma^2} \frac{1}{1 + s} \quad (2.5)$$

où $g = d\mathcal{E}_0/\hbar$ est la constante de couplage atomes-champ et s est la paramètre de saturation

$$s = \frac{I}{I_{sat}} \frac{1}{1 + (\Delta/\gamma)^2} \quad \text{et} \quad I_{sat} = \epsilon_0 c \frac{\gamma^2 \hbar^2}{d^2} \quad (2.6)$$

[$I_{sat} = 1.05 \text{ mW/cm}^2$ pour la transition du césium étudiée]. Dans la limite où la saturation est faible ($s \ll 1$), le milieu se comporte en première approximation comme un milieu Kerr

$$\phi \simeq \phi_0 - \phi_{nl} \quad (2.7)$$

avec

$$\phi_0 = Ng^2 \frac{\Delta}{\Delta^2 + \gamma^2} \quad \text{et} \quad \phi_{nl} = \phi_0 \times s \quad (2.8)$$

Cependant, on doit également tenir compte de l'absorption subie par le champ

$$A = Ng^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} \frac{1}{1 + s} \simeq Ng^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 + \Delta^2} \quad (2.9)$$

On voit que la non linéarité décroît très vite avec le désaccord ($\propto 1/\Delta^3$), alors que l'absorption varie comme $1/\Delta^2$. On doit faire un compromis entre l'absorption et la non linéarité. Or, ce compromis varie rapidement avec le désaccord et il est impossible à réaliser sur tout le profil Doppler dans une vapeur à température ambiante. Il est donc nécessaire de s'affranchir de l'élargissement inhomogène dû à l'effet Doppler. Pour éliminer cet effet, on peut soit utiliser des jets atomiques dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation du champ [Raizen87, Hope92], soit utiliser un gaz d'atomes froids comme cela a été fait dans le groupe d'optique quantique.

L'expérience réalisée dans le groupe est basée sur l'utilisation d'atomes froids de césium, piégés dans un piège magnéto-optique selon le modèle développé par Delphine Grison [Grison92], et placés dans une cavité optique de manière à augmenter l'interaction avec le champ. Les atomes étant refroidis à des températures de l'ordre du millikelvin, l'élargissement Doppler est négligeable devant la largeur homogène, et le temps d'interaction des atomes avec le faisceau est de quelques millisecondes, donc beaucoup plus long qu'avec un jet. Par rapport à une vapeur, on perd sur le nombre d'atomes (typiquement quelques millions), c'est pourquoi on utilise une cavité Fabry-Pérot afin de recycler la lumière et d'augmenter l'interaction avec les atomes.

Le césium possède deux niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ dans le fondamental, ce qui représente un système compliqué à 16 sous niveaux Zeeman et, en général,

le césium ne se comporte pas comme un atome à deux niveaux. Cependant, lorsque le champ incident est polarisé circulairement et proche de résonance avec la transition $6S_{1/2} F = 4 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 5$ de la raie D_2 à 852 nm, les atomes sont pompés dans le sous-niveau Zeeman $m_F = +4$. Dans ce cas, le champ n'interagit plus qu'avec la transition fermée $6S_{1/2} F = 4, m_F = +4 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 5, m'_F = +5$ (voir Fig. 2.2). On peut alors considérer le système atomique comme un milieu à deux niveaux, pour lequel une saturation de la transition produit un effet Kerr sur le champ. Le fait que l'interaction ait lieu en cavité conduit également à des phénomènes de type bistabilité; en effet, l'indice du milieu changeant, la longueur effective de la cavité change avec l'intensité du champ. Pour une intensité incidente et un nombre d'atomes suffisants, les pics de résonance de la cavité sont déformés et plusieurs valeurs de l'intensité intracavité sont possibles pour une même valeur de l'intensité incidente [Gibbs76]. Dans ces conditions, il a été prédit que de fortes réductions de bruit peuvent être ainsi obtenues au voisinage des points tournants de la courbe de bistabilité [Reid88, Reynaud89, Hilico92b]. Dans

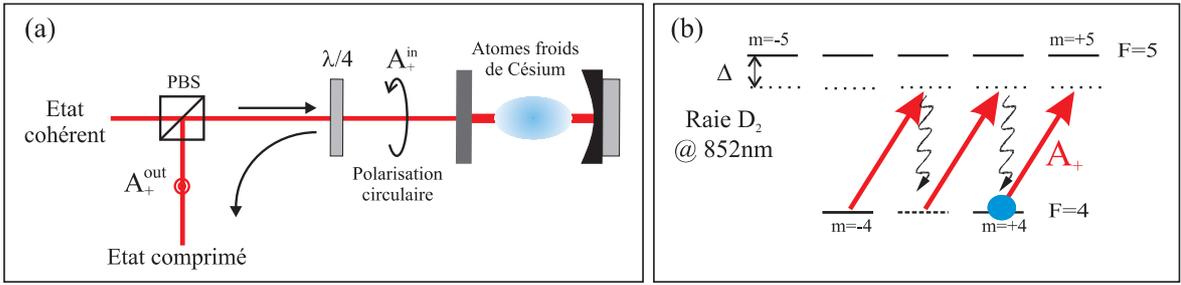


FIG. 2.2 – Principe de l'expérience de réduction du bruit quantique d'un mode de polarisation circulaire du champ avec des atomes froids de césium.

les expériences réalisées dans le groupe, la cavité utilisée possède un coefficient de transmission en intensité $T = 0.1$ et une longueur de 25 cm. Le waist du mode de la cavité est $w_0 = 260 \mu\text{m}$, ce qui donne une section transverse du faisceau $S = \pi w_0^2/2 = 0.1 \text{ mm}^2$. La constante de couplage atomes-champ vaut dans ces conditions

$$\frac{g^2}{2\pi} = \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \frac{\gamma}{2\pi} = 4.24 \text{ Hz} \quad \text{avec} \quad \gamma = (2\pi) 2.6 \text{ MHz} \quad (2.10)$$

Afin de faire un bon compromis entre absorption et non linéarité, le désaccord atomique valait $\Delta \simeq 45 \text{ MHz} \simeq 17 \gamma$ [Lambrecht96, Khoury98]. Le nombre d'atomes était de l'ordre de $10^6 - 10^7$. Les valeurs de l'absorption et des déphasages linéaire et non linéaire (normalisés à la demi-largeur de la cavité $T/2$) s'expriment en fonction de la coopérativité

$$C = \frac{g^2 N}{\gamma T} \quad (2.11)$$

et valent alors

$$\frac{2}{T}\phi_0 \simeq \frac{2g^2N}{T\Delta} = 2C\frac{\gamma}{\Delta}, \quad \frac{2}{T}\phi_{nl} \simeq 2C\left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^3 \frac{I}{I_{sat}} \quad \text{et} \quad A \simeq 2C\left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^2 \quad (2.12)$$

Pour $N = 5 \times 10^6$ atomes, une puissance incidente de l'ordre de $10 \mu\text{W}$ et une coopérativité $C \simeq 80$, un ordre de grandeur pour ces paramètres est $A \simeq 0.55$, $\frac{2}{T}\phi_0 \simeq 10$, $\frac{2}{T}\phi_{nl} \simeq 2$.

Une réduction de bruit d'environ 20% a été observée en régime continu à la sortie de la cavité, en présence des faisceaux pièges, et 40% en régime transitoire lorsqu'on supprime les faisceaux pièges. En effet, ceux-ci génèrent un excès de bruit en raison de la fluorescence émise dans le mode de la cavité [Lambrecht96, Khoury98]. Nous avons également remarqué une amélioration nette de la réduction de bruit dans les expériences que nous allons décrire dans le paragraphe suivant lorsque la mesure est effectuée en coupant les faisceaux pièges. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4 lors de la discussion sur l'implémentation d'une mémoire quantique dans le césium.

A.2 Réduction de bruit de deux modes et faisceaux EPR

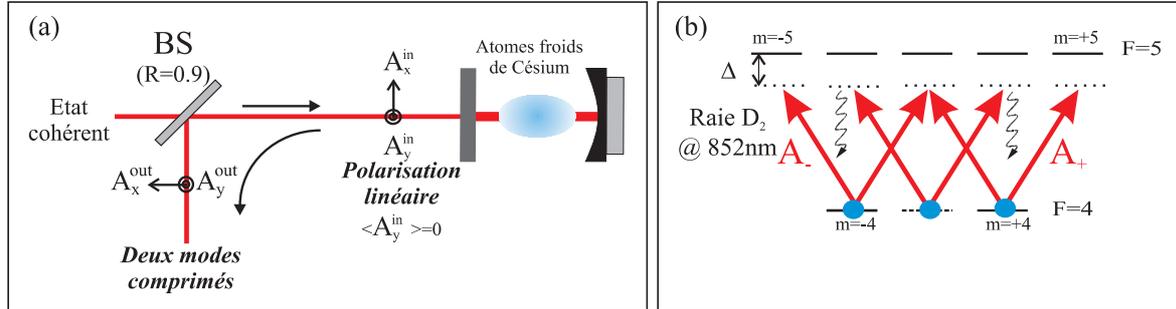


FIG. 2.3 – Principe de l'expérience avec une polarisation incidente linéaire : deux modes du champ interviennent dans l'interaction.

Laurent Vernac a étudié la situation dans laquelle le champ incident sur la cavité est polarisé linéairement (Fig. 2.3). Ce changement, mineur en apparence, change complètement la physique du système étudié. En effet, les atomes ne se comportent plus comme un système à deux niveaux ; à l'état stationnaire, tous les sous-niveaux Zeeman de la transition $F = 4 \rightarrow F' = 5$ sont peuplés et, chose essentielle, deux modes du champ sont impliqués. On observe alors des instabilités de polarisation lorsqu'on balaie la longueur de la cavité : la polarisation intracavité, de linéaire, peut devenir circulaire. La cause de ce phénomène de bascule de polarisation est la rotation auto-induite ou *self*

rotation induite par les atomes sur le champ qui le traverse. D'autre part, à la sortie de la cavité, on mesure une réduction de bruit sous le bruit quantique standard sur les deux modes de polarisations linéaires : le mode correspondant au champ moyen (x), et le mode vide de polarisation orthogonale (y). Vincent Josse a montré pendant sa thèse que la réduction de bruit sur le mode vide orthogonal s'interprète comme une réduction des fluctuations quantiques de polarisation du faisceau. D'autre part, cette compression de bruit simultanée sur deux modes de polarisation orthogonale est en fait équivalente à de l'intrication quantique entre deux modes orthogonaux du faisceau sortant de la cavité. En effet, nous avons montré que les modes de polarisation linéaire à $\pm 45^\circ$ des polarisations horizontale et verticale présentent des corrélations de type EPR à la sortie de la cavité.

A.2.1 Bascule de polarisation

On peut modéliser de manière satisfaisante l'interaction avec les atomes sur la transition $F = 4 \rightarrow F' = 5$ en décomposant le champ polarisé linéairement A_x en ses deux composantes A_+ et A_- polarisées circulairement, qui interagissent avec des atomes à quatre niveaux en X (Fig. 2.4). Dans le cadre de ce modèle simplifié, on peut

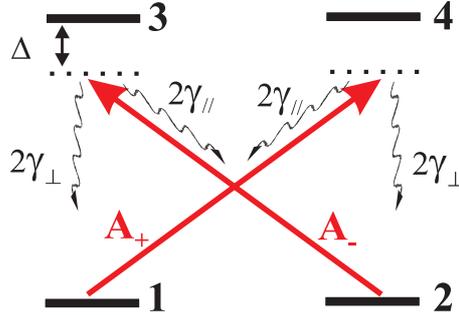


FIG. 2.4 – Modèle à quatre niveaux en X.

interpréter de manière simple les instabilités de la polarisation intracavité. Une bascule de polarisation, prédite depuis des années [Walls80, Kitano81, Savage82, Giacobino85] et observée pour la première fois dans des vapeurs de sodium [Cecchi82], est liée aux processus de pompage optique qui modifient la répartition des atomes dans les sous-niveaux du fondamental et induisent une biréfringence circulaire. Celle-ci entraîne une rotation de la polarisation du faisceau lorsqu'il traverse le milieu atomique, d'où le terme de *self-rotation* [Rochester01]. Si la polarisation est parfaitement linéaire, la rotation, qui est proportionnelle à J_z - la différence de populations entre les niveaux 1 et 2 - est nulle en moyenne, mais possède des fluctuations proportionnelles aux fluctuations du mode vide. Ces fluctuations de rotation se traduisent par un terme de gain pour les

fluctuations du mode vide orthogonal (Fig. 2.5). Lorsque ce phénomène a lieu dans une

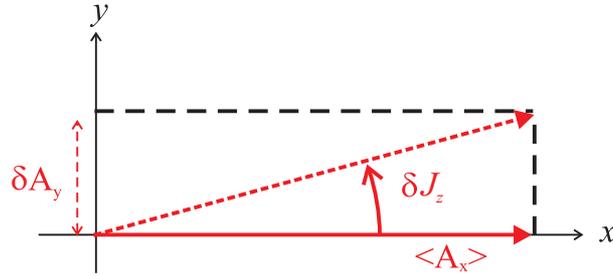


FIG. 2.5 – Self-rotation induite par les fluctuations de la différence de population dans le fondamental δJ_z .

cavité, on a un effet de seuil : dès que le gain induit par la biréfringence circulaire devient supérieur aux pertes pour le mode vide, celui-ci se met à osciller. La polarisation de linéaire, devient circulaire. Les figures 2.6(a) et (b) représentent les courbes de bascule de polarisation observées lorsqu'on balaie la cavité autour d'une de ses résonances. La courbe (a) correspond à une analyse en polarisation linéaire du faisceau transmis par la cavité, la courbe (b) à une analyse en polarisation circulaire. Lorsqu'on balaie la longueur de la cavité (Fig. 2.5(a)), l'intensité intracavité du mode x commence par augmenter, avant de chuter brusquement au point de bascule de polarisation A. Une intensité non nulle apparaît sur le mode y . La polarisation devient alors circulaire. En effet, comme on peut le voir sur la figure 2.6(b), lorsqu'on procède à une analyse en polarisation circulaire, les composantes σ_+ et σ_- possèdent approximativement la même intensité avant la bascule, alors que seule l'une d'elle est prédominante après. Une étude

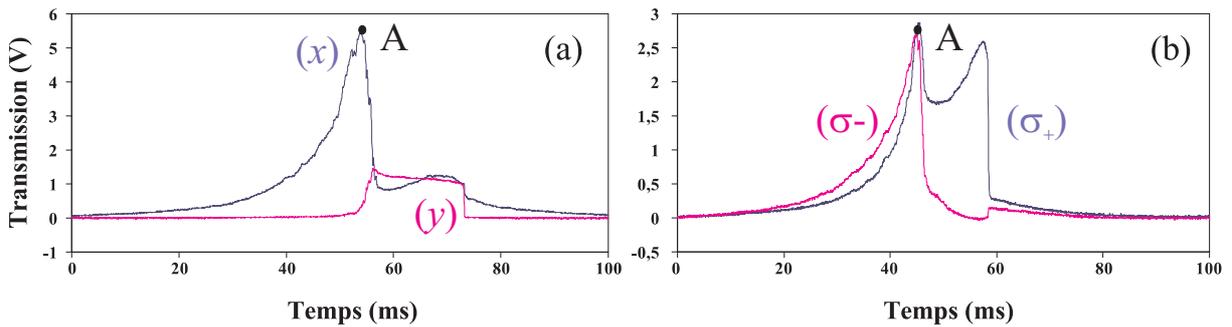


FIG. 2.6 – Bascule de polarisation : analyse en polarisation de la transmission de la cavité, lorsque on balaie sa longueur. (a) Analyse en polarisation linéaire (b) Analyse en polarisation circulaire.

détaillée de ces résultats et de leur interprétation théorique se trouve dans la thèse de

Vincent Josse [Josse03c]¹. Nous rencontrerons aussi un phénomène de multistabilité dans la section B, dans laquelle la rotation auto induite est due à un effet de cohérence atomique.

A.2.2 Réduction de bruit pour deux modes du champ

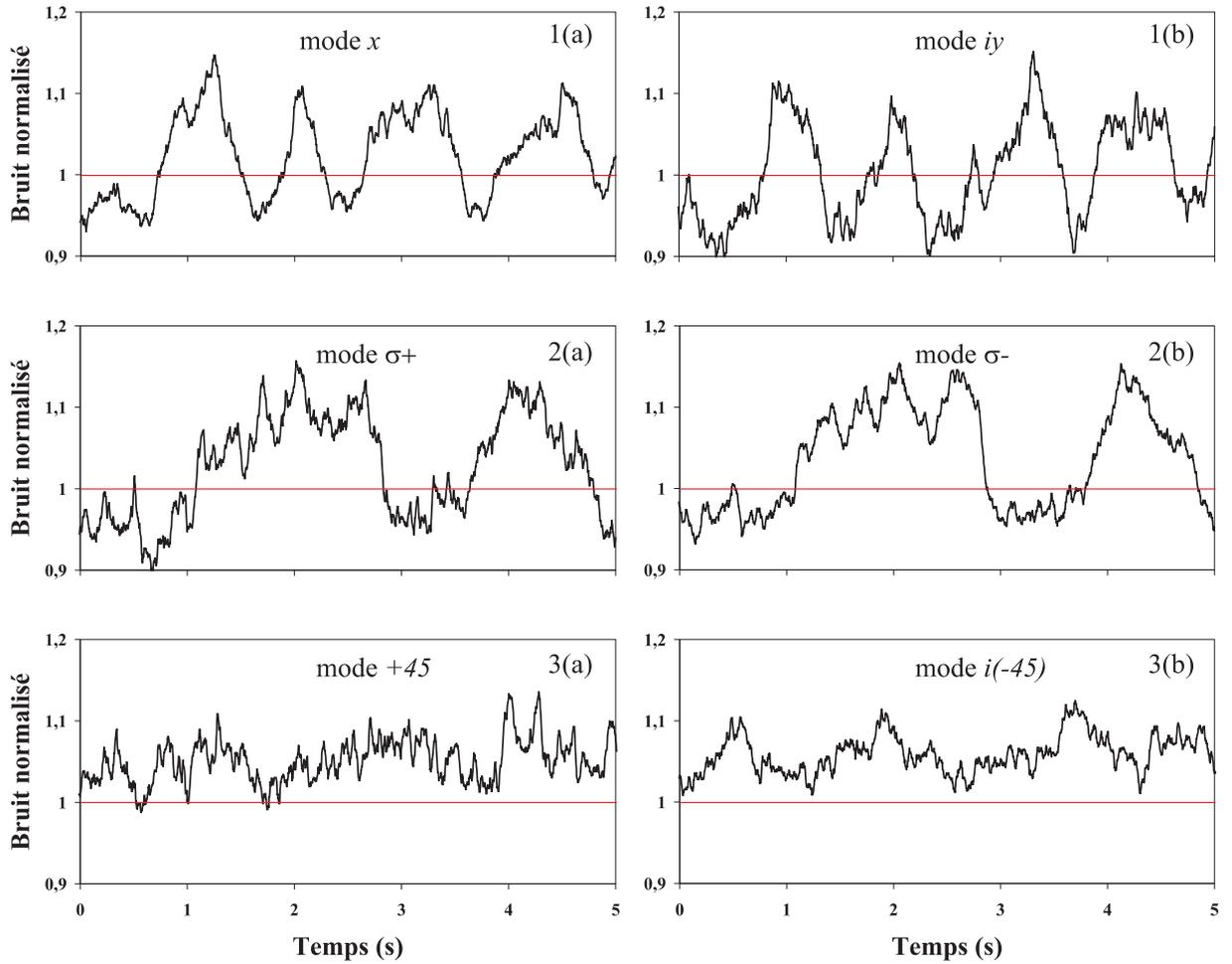


FIG. 2.7 – Bruit quantique à 5 MHz du champ moyen 1(a) et du mode vide orthogonal (déphasé de $\pi/2$) 1(b) en fonction de la phase de l'oscillateur local. On a également représenté le bruit quantique dans les mêmes conditions des modes σ_{\pm} [courbes 2(a), 2(b)] et des modes à $\pm 45^{\circ}$ [courbes 3(a), 3(b)]. Les modes à $\pm 45^{\circ}$, qui sont les modes intriqués, présentent un excès de bruit.

¹On pourra également se reporter aux références jointes dans l'appendice D.

Nous avons observé de la réduction de bruit sur les champs sortants de la cavité (à la fois sur le champ moyen et sur le mode vide orthogonal) pour certaines valeurs des paramètres d'interaction (désaccord de la cavité, fréquence d'analyse, intensité incidente, puissance des faisceaux pièges, etc.). On a représenté sur la figure 2.7 les spectres de bruit des champs sortants pour différentes polarisations et pour une fréquence d'analyse de 5 MHz. Lorsque la mesure est effectuée en coupant les faisceaux pièges, nous avons observé jusqu'à 15% de réduction sur le mode vide et environ 5% sur le champ moyen [Josse03a].

Pour cette valeur élevée de la fréquence d'analyse, l'origine physique de cette réduction de bruit est l'effet Kerr induit par saturation de la transition optique, effet Kerr *direct* sur le champ moyen, et effet Kerr *croisé* pour le mode vide orthogonal [Josse03a, Josse03b]. En effet, pour des fréquences d'analyse grandes devant le taux de relaxation du dipole optique, le système en X devient équivalent à deux systèmes à deux niveaux indépendants interagissant chacun avec une composante circulaire du champ (Fig. 2.8). Dans ce cas, saturer les deux transitions $1 \rightarrow 4$ et $2 \rightarrow 3$ permet de réduire les fluctuations quantiques des modes σ_+ et σ_- . C'est effectivement ce que l'on observe expérimentalement (voir courbes 2(a) et 2(b) de la figure 2.7). Cette réduction de bruit, qui se produit pour la même quadrature pour les ondes polarisées σ_+ et σ_- , conduit à une réduction de bruit pour des quadratures orthogonales des champs polarisés linéairement (voir courbes 1(a) et 1(b)).

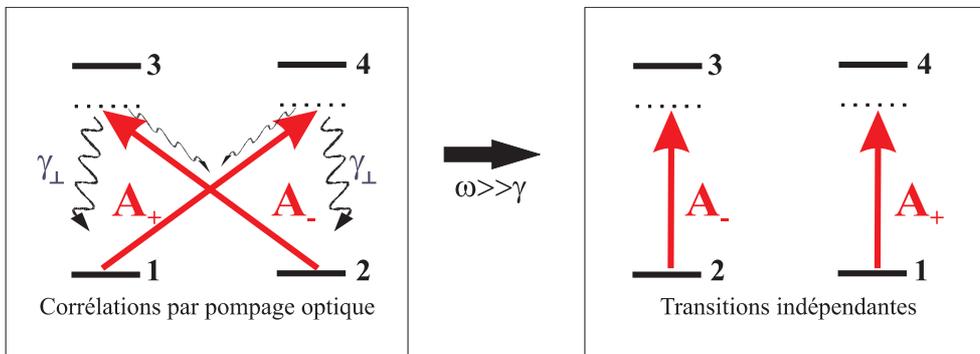


FIG. 2.8 – Système équivalent à “haute fréquence”.

A.2.3 Faisceaux intriqués

Comme nous l’avons mentionné dans l’introduction, générer de la réduction de bruit sur deux modes de polarisations orthogonales signifie que certains modes de polarisation sont intriqués au sens du critère d’inséparabilité (1.73). Physiquement, cela signifie qu’il existe des corrélations quantiques entre les quadratures de certains modes de

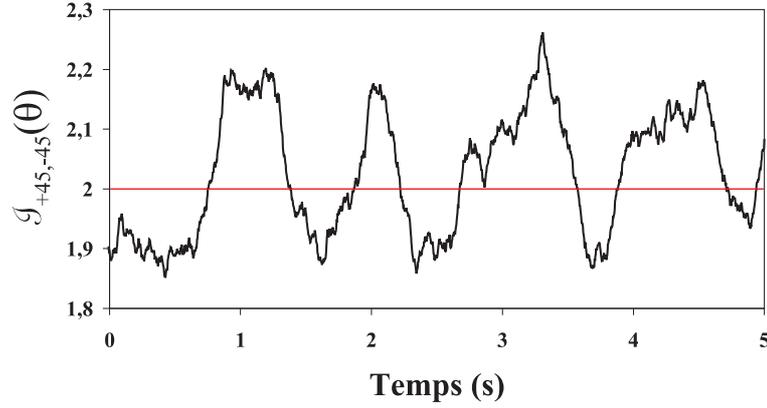


FIG. 2.9 – Valeur du critère d'intrication $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$ quand la phase θ est variée, dans les mêmes conditions que la figure 2.7 : les modes à $\pm 45^\circ$ sont intriqués lorsque $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta) < 2$.

polarisation orthogonale en sortie de la cavité. Une méthode générale pour trouver les modes intriqués a été développée par Vincent Josse pendant sa thèse [Josse04b]. Nous utiliserons cette méthode à différents endroits du manuscrit. L'idée principale est que, par analogie avec le mélange de faisceaux comprimés indépendants sur une lame séparatrice (voir la figure 1.7 du chapitre 1), les modes les plus intriqués par le système s'obtiennent comme combinaison linéaire de modes comprimés u et v "incorrélés" au sens de (1.73) [Josse04b]. Pour des fréquences d'analyses élevées, ces modes u et v peuvent s'assimiler aux modes polarisés circulairement A_+ et A_- , qui sont incorréls et comprimés sur la même quadrature. Les modes intriqués sont alors les combinaisons $(A_u \pm iA_v)/\sqrt{2} \propto (A_x \pm A_y)/\sqrt{2}$, c'est-à-dire les modes polarisés linéairement à $\pm 45^\circ$ des modes x et y . Leur degré d'intrication est précisément égal à la somme des réductions de bruit sur les modes x et y . En effet, pour ces modes

$$A_{\pm 45} = (A_x \pm A_y)/\sqrt{2} \quad (2.13)$$

le critère d'intrication s'écrit comme la somme des bruits de quadratures orthogonales des modes x et y

$$\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta) = \frac{1}{2} [\Delta^2(X_{+45} - X_{-45})(\theta) + \Delta^2(Y_{+45} + Y_{-45})(\theta)] \quad (2.14)$$

$$= \Delta X_x^2(\theta) + \Delta Y_y^2(\theta) \quad (2.15)$$

Dans ce cas, on a vérifié expérimentalement que les modes x et iy étaient comprimés pour la même quadrature θ_{sq} ; on a donc $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta_{sq}) < 2$: les modes à $\pm 45^\circ$ sont bien intriqués². Une courbe typique de l'intrication mesurée entre les modes à $\pm 45^\circ$ est

²On peut même montrer que ces modes sont les modes les plus intriqués, c'est-à-dire ceux pour lesquels la valeur du critère d'intrication est la plus faible [Josse03c].

représentée sur la figure 2.9.

On peut donc générer des états non classiques du champ (états comprimés, états comprimés en polarisation³, états intriqués, etc.) grâce à l'interaction avec des atomes froids en cavité.

A.3 Génération de vide comprimé dans des vapeurs atomiques à température ambiante ?

Les états de type “vide comprimé”, comme ceux générés dans les expériences précédentes, sont très intéressants pour l'information et la communication quantique. A partir d'un vide comprimé, on peut produire de manière contrôlée de nombreux états non classiques du champ (en mélangeant par exemple le vide comprimé avec un faisceau cohérent sur une lame séparatrice). Nous verrons également dans les chapitres 4, 5 et 6, que des vides comprimés peuvent être utilisés efficacement dans des processus de transfert quantique dans lesquels sont impliqués des champs. Pour cette raison, un grand intérêt concerne la production de vide comprimé. Si le processus le plus efficace actuellement est l'amplification paramétrique d'ordre deux (OPA ou OPO sous le seuil), d'autres méthodes sont possibles. En particulier, plusieurs réalisations se basent sur le phénomène de self rotation que nous avons rencontré au paragraphe précédent dans les atomes froids, pour générer du vide comprimé dans des fibres optiques [Boivin96, Margalit98, Silberhorn01, Glockl03]. L'effet Kerr croisé induit par le champ moyen dans les fibres optiques conduit à des réductions de bruit importantes (de l'ordre de 60% [Bergman91]). S'inspirant de cet effet, Mastsko *et al.* ont proposé d'utiliser la self rotation dans une vapeur atomique pour générer du vide comprimé [Matsko02, Novikova02]. Ries *et al.* ont récemment observé de la réduction de bruit sur le mode vide orthogonal d'un champ polarisé linéairement ayant traversé une cellule de rubidium [Ries03]. Les taux de réduction de bruit obtenus étant du même ordre de grandeur (environ 20%) que dans les atomes froids et le dispositif expérimental étant beaucoup plus simple, nous avons tenté de reproduire ces résultats, dans une vapeur de césium dans un premier temps, puis dans une vapeur de rubidium dans un second temps. Malgré une exploration d'une grande partie de l'espace des paramètres et des conditions voisines de [Ries03], nous n'avons observé aucune réduction de bruit sur le

³On peut également montrer que la réduction de bruit sur le mode vide orthogonal est équivalente à comprimer les fluctuations quantiques d'un des paramètres de Stokes qui décrivent l'état quantique de polarisation du faisceau. Nous avons montré lors de la thèse de Vincent Josse, que l'on pouvait mesurer et caractériser de tels états. Pour une discussion plus approfondie on pourra se reporter à l'appendice D. Nous reviendrons également sur l'utilité des états comprimés en polarisation et sur le formalisme des opérateurs de Stokes dans le chapitre 4 concernant les mémoires quantiques atomiques.

mode vide orthogonal, que ce soit dans le césium ou le rubidium. Des résultats analogues ont été obtenus de manière indépendante par le groupe de Ping Koy Lam à Canberra. Un phénomène important à prendre en compte dans les vapeurs est l'excès de bruit ajouté sur le mode vide orthogonal par les processus de pompage optique responsables de la self rotation, qui détruit la réduction de bruit que l'on pourrait espérer obtenir par effet Kerr croisé. Ces résultats "négatifs" feront l'objet d'une publication commune avec le groupe de Canberra [Hsu05].

B Génération d'états non classiques et effets de cohérence atomique

Dans cette section on s'intéresse à la génération d'états non classiques du rayonnement par l'intermédiaire d'effets de cohérence dans un milieu atomique en cavité. Dans la section B.1 nous commençons par développer le formalisme de l'étude du bruit quantique du champ dans un système atomes-champ en cavité. Cette théorie nous sera utile non seulement dans ce chapitre pour les variables de champ, mais également dans les chapitres suivants, dans lesquels l'accent sera plutôt mis sur les variables atomiques.

B.1 Théorie entrée-sortie pour l'interaction atomes-champs en cavité

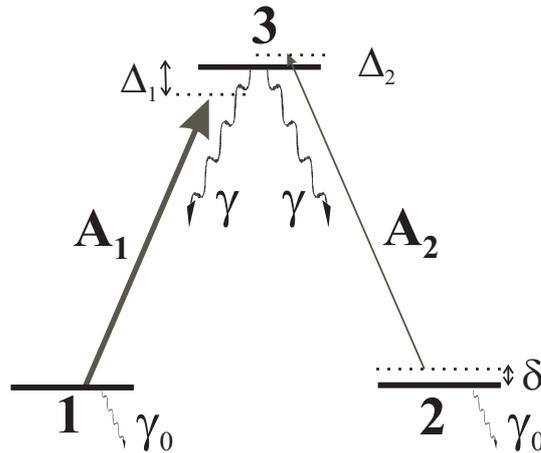


FIG. 2.10 – Structure des niveaux d'énergie dans un système en Λ .

Considérons un ensemble de N atomes à trois niveaux en " Λ " (Fig. 2.10). Ces atomes

interagissent dans une cavité en anneau à une seule entrée-sortie avec deux modes du champ, A_1 et A_2 . Chaque champ incident sur la cavité peut être considéré comme la superposition d'un champ moyen et de fluctuations. Les atomes interagissent principalement avec le mode de la cavité couplé au champ incident, mais également avec tous les autres modes, supposés vides et généralement appelés *modes latéraux*. Pour établir les équations d'évolution des observables du système atomes-champs, nous allons nous baser sur la théorie entrée-sortie développée dans la thèse de Laurent Hilico [Hilico92b]. Nous commençons par établir les équations d'évolution du champ intracavité dans le cas d'une cavité vide, puis en présence d'atomes. Nous linéarisons ensuite le système d'équations obtenu autour de l'état stationnaire afin d'en déduire les spectres de bruit des observables, en particulier celui des champs sortants.

B.1.1 Champ quantique dans une cavité vide

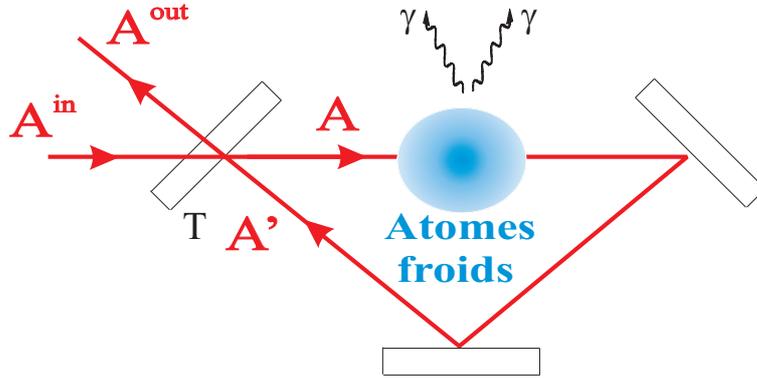


FIG. 2.11 – Cavité à une entrée-sortie.

Considérons pour commencer le cas où les atomes n'interagissent en cavité qu'avec un seul mode A , cas représenté sur la figure 2.11 : A^{in} et A^{out} sont respectivement les champs incident et sortant, A' représente la valeur du champ après un tour de cavité. Le miroir de couplage que l'on suppose sans pertes possède un coefficient de transmission en intensité $T = t^2 \ll 1$, de telle sorte que le coefficient de réflexion en amplitude $r = \sqrt{1 - T}$ vaut

$$r \simeq 1 - T/2 \quad (2.16)$$

En raison de la conservation de l'énergie au niveau du miroir, on peut écrire des relations unitaires entre les champs

$$A(t) = t A^{in}(t) + r A'(t) \quad (2.17)$$

$$A^{out}(t) = t A'(t) - r A^{in}(t) \quad (2.18)$$

La première relation signifie qu'à l'instant t , le champ intracavité est la somme du champ incident au même instant $A^{in}(t)$ et du champ intracavité qui a effectué un tour de cavité $A'(t)$. La seconde exprime le fait que le champ sortant résulte de l'interférence entre le champ incident et le champ intracavité transmis par le miroir. Si l'on note $\tau = L/c$ le temps de parcours de la cavité et $\phi = \omega_L \tau$ le déphasage subi par le champ sur un tour, l'égalité à tout instant entre le champ $E'(t)$ qui a effectué un tour dans la cavité et le champ $E(t - \tau)$ qui est entré à l'instant $t - \tau$ entraîne l'égalité suivante pour les opérateurs enveloppe

$$A'(t) = A(t - \tau)e^{i\phi} \quad (2.19)$$

On désigne par ω_c la fréquence propre de la cavité la plus proche de la fréquence du champ ω_L . Comme $\omega_c \tau$ est un multiple de 2π , on peut écrire que le déphasage ϕ du champ est égal au désaccord de la cavité avec le champ $\Delta_c = \omega_c - \omega_L$, multiplié par le temps de parcours de la cavité τ

$$\phi = (\omega_L - \omega_c)\tau = -\Delta_c \tau \quad (2.20)$$

Près de résonance ($|\phi| \ll 1$), les relations (2.16), (2.17) et (2.19) conduisent à

$$A(t) - A(t - \tau) = t A^{in}(t) + [(1 - T/2)(1 + i\phi) - 1] A(t - \tau) \quad (2.21)$$

Si l'on suppose faibles les variations de l'enveloppe pendant un temps τ , on obtient en ne gardant que les termes d'ordre 1 en ϕ et T

$$\frac{d}{dt}A(t) = -(\kappa + i\Delta_c)A(t) + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}A^{in}(t) \quad (2.22)$$

où le taux de décroissance du champ intracavité κ est égal à

$$\kappa = T/(2\tau) \quad (2.23)$$

Le champ sortant est alors relié au champ intracavité et au champ incident par

$$A^{out}(t) = \sqrt{T}A(t) - A^{in}(t) \quad (2.24)$$

On peut décomposer les champs comme la somme d'un champ moyen et de fluctuations

$$A(t) = \langle A(t) \rangle + \delta A(t) \quad (2.25)$$

$$A^{in}(t) = \langle A^{in}(t) \rangle + \delta A^{in}(t) \quad (2.26)$$

$$A^{out}(t) = \langle A^{out}(t) \rangle + \delta A^{out}(t) \quad (2.27)$$

D'après la relation (2.22) précédente, le champ moyen intracavité vaut

$$\langle A(t) \rangle = \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} \frac{1}{\kappa + i\Delta_c} \langle A^{in}(t) \rangle \quad (2.28)$$

Les fluctuations quantiques $\delta A(\omega)$ du champ intracavité dans l'espace des fréquences, obtenues par linéarisation de (2.22) et transformée de Fourier, sont égales à

$$\delta A(\omega) = \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} \frac{1}{\kappa + i\Delta_c - i\omega} \delta A^{in}(\omega) \quad (2.29)$$

Compte tenu du commutateur du champ incident (1.30), le commutateur du champ intracavité vaut

$$[\delta A(\omega), \delta A^\dagger(\omega')] = \frac{2\kappa}{\tau} \frac{2\pi \delta(\omega + \omega')}{(\kappa + i\Delta_c - i\omega)(\kappa - i\Delta_c + i\omega)} \quad (2.30)$$

Par transformée de Fourier inverse on obtient le commutateur en temps des opérateurs enveloppe $A(t)$ et $A^\dagger(t')$

$$[A(t), A^\dagger(t')] = \frac{2\kappa}{\tau} \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\kappa^2 + (\Delta_c - \omega)^2} = \frac{e^{-\kappa|t-t'|}}{\tau} \quad (2.31)$$

Remarquons que le commutateur à temps égaux vaut $1/\tau$, ce qui nous servira dans la suite pour établir l'équation d'évolution du champ intracavité en présence des atomes. Notons également que la matrice de variance du champ intracavité dans une cavité vide est proportionnelle à la matrice de variance du champ incident définie dans le paragraphe (1.32) du chapitre 1

$$[V(\omega)] = \frac{2\kappa}{\tau} \frac{1}{\kappa^2 + (\Delta_c - \omega)^2} [V^{in}(\omega)] \quad (2.32)$$

Cela signifie que le spectre de bruit des quadratures du champ intracavité se déduit du spectre de bruit du champ incident en multipliant celui-ci par une lorentzienne de demi-largeur κ et centrée en Δ_c . On voit que même si le champ incident est dans un état cohérent - ce qui correspond à un spectre de bruit blanc, le spectre de bruit du champ intracavité dépend de la fréquence d'analyse.

B.1.2 Equations d'évolution du système atomes-champs

Pour décrire l'interaction des champs avec notre ensemble d'atomes à trois niveaux, on utilise les opérateurs collectifs introduits dans le paragraphe B.2. Pour le système en Λ considéré, ceux-ci sont au nombre de neuf :

- les composantes des dipôles optiques dans le référentiel tournant à la fréquence du laser correspondant

$$P_1(t) = e^{i\omega_1 t} \sum_{i=1}^N |1\rangle_i \langle 3|_i, \quad P_1(t)^\dagger = e^{-i\omega_1 t} \sum_{i=1}^N |3\rangle_i \langle 1|_i \quad (2.33)$$

$$P_2(t) = e^{i\omega_2 t} \sum_{i=1}^N |2\rangle_i \langle 3|_i, \quad P_2(t)^\dagger = e^{-i\omega_2 t} \sum_{i=1}^N |3\rangle_i \langle 2|_i \quad (2.34)$$

- les composantes du dipôle associé à la cohérence entre les deux niveaux fondamentaux

$$P_r(t) = e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \sum_{i=1}^N |2\rangle_i \langle 1|_i, \quad P_r^\dagger(t) = e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \sum_{i=1}^N |1\rangle_i \langle 2|_i \quad (2.35)$$

- et enfin, les populations des trois niveaux

$$\Pi_1(t) = \sum_{i=1}^N |1\rangle_i \langle 1|_i \quad \Pi_2(t) = \sum_{i=1}^N |2\rangle_i \langle 2|_i \quad \Pi_3(t) = \sum_{i=1}^N |3\rangle_i \langle 3|_i \quad (2.36)$$

Les atomes sont couplés aux champs par un hamiltonien dipolaire électrique

$$H(t) = - \sum_{j=1,2} D_j(t) E_j(t) \quad (2.37)$$

avec

$$E_j(t) = \mathcal{E}_{0j} \left(A_j(t) e^{-i\omega_j t} + A_j^\dagger(t) e^{i\omega_j t} \right) \quad (2.38)$$

$$D_j(t) = d_j \left(e^{-i\omega_j t} P_j(t) + e^{i\omega_j t} P_j^\dagger(t) \right) \quad (2.39)$$

($j = 1, 2$), d_j étant donné par la valeur de l'élément de la matrice de l'hamiltonien dipolaire pour la transition considérée. En pratique, les champs sont quasiment résonnants avec les transitions atomiques. On peut alors faire l'approximation de l'onde tournante qui consiste à ne considérer dans le hamiltonien (2.37) que les termes évoluant lentement. Dans cette approximation, le hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H(t) = -\hbar \sum_{j=1,2} g_j \left(A_j(t) P_j^\dagger(t) + A_j^\dagger(t) P_j(t) \right) \quad (2.40)$$

où les constantes de couplage atomes-champs g_j ⁴ sont données par

$$g_j = \frac{d_j \mathcal{E}_{0j}}{\hbar} \quad (2.41)$$

On doit ajouter à ce couplage hamiltonien les termes de dissipation. Pour les variables atomiques, l'émission spontanée induit un taux de relaxation γ pour les dipôles optiques, 2γ pour les populations. On considère que la cavité modifie très peu le couplage avec les modes latéraux, de telle sorte que l'on peut prendre comme valeur pour le taux d'émission spontanée dans la cavité celle correspondant à des atomes dans l'espace libre. Pour des atomes froids, les effets de relaxation par collision sont en principe

⁴avec la définition (1.20) choisie pour \mathcal{E}_0 , la constante de couplage est homogène à la racine carrée d'une fréquence.

négligeables. Néanmoins, la cohérence dans le fondamental n'a pas une durée de vie infinie. En effet, les atomes ne sont pas parfaitement immobiles et ne restent qu'un temps fini dans la zone d'interaction avec le faisceau. On prend en compte ce processus en introduisant dans la théorie un taux de relaxation γ_0 pour les observables du fondamental. Dans une expérience typique avec des atomes froids, ce taux est de l'ordre du kHz. Les équations d'évolution atomiques s'obtiennent en ajoutant les différentes contributions, hamiltoniennes et non hamiltoniennes. L'évolution de l'ensemble du système atomes-champs est finalement régi par les équations d'Heisenberg-Langevin suivantes

$$\dot{\Pi}_1 = ig_1 A_1^\dagger P_1 - ig_1 A_1 P_1^\dagger + \gamma \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_1 + \Lambda_1 + F_{11} \quad (2.42)$$

$$\dot{\Pi}_2 = ig_2 A_2^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_2^\dagger + \gamma \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_2 + \Lambda_2 + F_{22} \quad (2.43)$$

$$\dot{\Pi}_3 = -(ig_1 A_1^\dagger P_1 - ig_1 A_1 P_1^\dagger) - (ig_2 A_2^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_2^\dagger) - 2\gamma \Pi_3 + F_{33} \quad (2.44)$$

$$\dot{P}_1 = -(\gamma + i\Delta_1)P_1 + ig_1 A_1(\Pi_1 - \Pi_3) + ig_2 A_2 P_r^\dagger + F_{13} \quad (2.45)$$

$$\dot{P}_2 = -(\gamma + i\Delta_2)P_2 + ig_2 A_2(\Pi_2 - \Pi_3) + ig_1 A_1 P_r + F_{23} \quad (2.46)$$

$$\dot{P}_r = -(\gamma_0 - i\delta)P_r + ig_1 A_1^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_1^\dagger + F_{21} \quad (2.47)$$

où

- γ_0 représente le taux de relaxation des observables du fondamental⁵,
- Λ_1 et Λ_2 sont des termes de repeuplement qui assurent que le nombre d'atomes en l'absence de champs soit constant⁶,
- $\Delta_i = \omega_{i3} - \omega_i$ ($i = 1, 2$) sont les désaccords à un photon,
- $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$ est le désaccord à deux photons
- les forces de Langevin sont des opérateurs de valeur moyenne nulle et dont les fonctions de corrélation temporelle sont assimilées à des distributions de Dirac. La valeur de ces fonctions peut être calculée à partir du théorème de régression quantique, et ne dépend que des valeurs stationnaires des observables à un corps et des taux de relaxation et de peuplement (voir appendice A).

En présence des atomes, les équations d'évolution des champs A_j sont modifiées car ceux-ci sont couplés aux dipôles optiques P_j par l'hamiltonien dipolaire électrique (2.37). En utilisant la valeur du commutateur $[A(t), A^\dagger(t)] = 1/\tau$ [voir (2.31)], on montre que l'effet du couplage se traduit par un terme en $\frac{ig_j}{\tau} P_j$ dans l'équation d'évo-

⁵On a négligé γ_0 devant γ dans le taux de relaxation des cohérences optiques.

⁶ce qui implique en particulier que $\Lambda_1 + \Lambda_2 = N\gamma_0$.

lution du champ intracavité

$$\dot{A}_1 = -(\kappa + i\Delta_{c1})A_1 + \frac{ig_1}{\tau}P_1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}A_1^{in} \quad (2.48)$$

$$\dot{A}_2 = -(\kappa + i\Delta_{c2})A_2 + \frac{ig_2}{\tau}P_2 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}A_2^{in} \quad (2.49)$$

où $\Delta_{cj} = \omega_j - \omega_c$ ($j = 1, 2$) sont les désaccords entre les fréquences des champs et la fréquence du mode de la cavité.

L'ensemble des équations (2.42-2.49) constitue un système d'équations différentielles non linéaires qui contient toute l'information sur le système atomes-champs. Ce système n'est en général pas soluble exactement. Pour étudier les fluctuations quantiques du système atomes-champs, on linéarise le système d'équations autour de son état stationnaire, ce qui est justifié lorsque les fluctuations sont petites devant les valeurs moyennes.

B.1.3 Etat stationnaire

On s'intéresse donc aux fluctuations des observables autour de leurs valeurs moyennes lorsque le système est dans son état stationnaire. Pour cela, on décompose une observable $\xi(t)$ comme la somme de sa valeur moyenne et d'un opérateur de fluctuations

$$\xi(t) = \langle \xi \rangle + \delta\xi(t) \quad (2.50)$$

Les valeurs moyennes atomiques dans l'état stationnaire s'obtiennent en résolvant le système suivant

$$0 = -(\gamma + i\Delta_1)\langle P_1 \rangle + ig_1\langle A_1 \rangle\langle \Pi_1 - \Pi_3 \rangle + ig_2\langle A_2 \rangle\langle P_r \rangle^* \quad (2.51)$$

$$0 = -(\gamma + i\Delta_2)\langle P_2 \rangle + ig_2\langle A_2 \rangle\langle \Pi_2 - \Pi_3 \rangle + ig_1\langle A_1 \rangle\langle P_r \rangle \quad (2.52)$$

$$0 = -(\gamma_0 - i\delta)\langle P_r \rangle + ig_1\langle A_1 \rangle^*\langle P_2 \rangle - ig_2\langle A_2 \rangle\langle P_1 \rangle^* \quad (2.53)$$

$$0 = ig_1\langle A_1 \rangle^*\langle P_1 \rangle - ig_1\langle A_1 \rangle\langle P_1 \rangle^* - \gamma_0\langle \Pi_1 \rangle + \gamma\langle \Pi_3 \rangle + \Lambda_1 \quad (2.54)$$

$$0 = ig_2\langle A_2 \rangle^*\langle P_2 \rangle - ig_2\langle A_2 \rangle\langle P_2 \rangle^* - \gamma_0\langle \Pi_2 \rangle + \gamma\langle \Pi_3 \rangle + \Lambda_2 \quad (2.55)$$

$$0 = ig_1\langle A_1 \rangle^*\langle P_1 \rangle - ig_1\langle A_1 \rangle\langle P_1 \rangle^* + ig_2\langle A_2 \rangle^*\langle P_2 \rangle - ig_2\langle A_2 \rangle\langle P_2 \rangle^* + 2\gamma\langle \Pi_3 \rangle \quad (2.56)$$

Les valeurs stationnaires atomiques dépendent donc des taux de relaxation, des termes de repeuplement, des désaccords et des valeurs moyennes des champs intracavités $\langle A_1 \rangle$ et $\langle A_2 \rangle$. Ces valeurs moyennes sont elles-mêmes reliées aux valeurs moyennes

des champs incidents par les relations

$$0 = -(\kappa + i\Delta_{c1})\langle A_1 \rangle + i\frac{g_1}{\tau}\langle P_1 \rangle + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\langle A_1^{in} \rangle \quad (2.57)$$

$$0 = -(\kappa + i\Delta_{c2})\langle A_2 \rangle + i\frac{g_2}{\tau}\langle P_2 \rangle + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\langle A_2^{in} \rangle \quad (2.58)$$

Pour calculer les valeurs stationnaires des variables atomiques à partir de (2.51-2.56), on considère les valeurs moyennes $\langle A_1 \rangle$, $\langle A_2 \rangle$ comme des paramètres ajustables au même titre que les divers désaccords, taux de relaxation et de repeuplement, etc.

B.1.4 Linéarisation et stabilité du point de fonctionnement

Les paramètres ajustables étant fixés, on calcule les valeurs stationnaires à l'aide des équations précédentes. Nous linéarisons les équations d'évolution (2.42-2.49) et étudions l'évolution de petits écarts autour du point de fonctionnement. On note $|\delta\xi(t)\rangle$ le vecteur des fluctuations du système

$$|\delta\xi(t)\rangle = |\delta A_1, \delta A_1^\dagger, \delta A_2, \delta A_2^\dagger, \delta P_1, \delta P_1^\dagger, \delta P_2, \delta P_2^\dagger, \delta P_r, \delta P_r^\dagger, \delta \Pi_1, \delta \Pi_2, \delta \Pi_3\rangle \quad (2.59)$$

qui obéit à l'équation matricielle suivante

$$\frac{d}{dt}|\delta\xi(t)\rangle = -[B_{13}]|\delta\xi(t)\rangle + |F_\xi(t)\rangle \quad (2.60)$$

où $[B_{13}]$ est la matrice d'évolution 13×13

$$[B_{13}] = \begin{pmatrix} [B_{ch/ch}] & [B_{ch/at}] \\ [B_{at/ch}] & [B_{at/at}] \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

composée de quatre blocs

$$[B_{ch/ch}] = \begin{pmatrix} \kappa + i\Delta_{c1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa - i\Delta_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa + i\Delta_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa - i\Delta_{c2} \end{pmatrix}$$

$$[B_{ch/at}] = \begin{pmatrix} -ig_1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ig_1/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ig_2/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ig_2/\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[B_{at/ch}] = \begin{pmatrix} -ig_1\langle\Pi_1 - \Pi_3\rangle & 0 & -ig_2\langle P_r\rangle^* & 0 \\ 0 & ig_1\langle\Pi_1 - \Pi_3\rangle & 0 & ig_2\langle P_r\rangle \\ -ig_2\langle\Pi_2 - \Pi_3\rangle & 0 & -ig_1\langle P_r\rangle & 0 \\ 0 & ig_2\langle\Pi_2 - \Pi_3\rangle & 0 & ig_1\langle P_r\rangle^* \\ 0 & -ig_1\langle P_2\rangle & ig_2\langle P_1\rangle^* & 0 \\ ig_1\langle P_2\rangle^* & 0 & 0 & -ig_2\langle P_1\rangle \\ ig_1\langle P_1\rangle^* & -ig_1\langle P_1\rangle^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ig_2\langle P_2\rangle^* & -ig_2\langle P_2\rangle \\ -ig_1\langle P_1\rangle^* & ig_1\langle P_1\rangle & -ig_2\langle P_2\rangle^* & ig_2\langle P_2\rangle \end{pmatrix}$$

et $[B_{at/at}]$, donné par

$$\begin{pmatrix} \gamma + i\Delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ig_2\langle A_2\rangle & -ig_1\langle A_1\rangle & 0 & ig_1\langle A_1\rangle \\ 0 & \gamma - i\Delta_1 & 0 & 0 & ig_2\langle A_2\rangle^* & 0 & ig_1\langle A_1\rangle^* & 0 & -ig_1\langle A_1\rangle^* \\ 0 & 0 & \gamma + i\Delta_2 & 0 & -ig_1\langle A_1\rangle & 0 & 0 & -ig_2\langle A_2\rangle & ig_2\langle A_2\rangle \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - i\Delta_2 & 0 & ig_1\langle A_1\rangle^* & 0 & ig_2\langle A_2\rangle^* & -ig_2\langle A_2\rangle^* \\ 0 & ig_2\langle A_2\rangle & -ig_1\langle A_1\rangle^* & 0 & \gamma_0 - i\delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ig_2\langle A_2\rangle & 0 & 0 & ig_1\langle A_1\rangle & 0 & \gamma_0 + i\delta & 0 & 0 & 0 \\ -ig_1\langle A_1\rangle^* & ig_1\langle A_1\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -ig_2\langle A_2\rangle^* & ig_2\langle A_2\rangle & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & -\gamma \\ ig_1\langle A_1\rangle^* & -ig_1\langle A_1\rangle & ig_2\langle A_2\rangle^* & ig_2\langle A_2\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma \end{pmatrix}$$

Le vecteur $|F_\xi(t)\rangle$ est constitué des forces de Langevin associées aux observables ordonnées comme dans (2.59)

$$|F_\xi(t)\rangle = |F_1^{in}, F_1^{in\dagger}, F_2^{in}, F_2^{in\dagger}, F_{13}, F_{31}, F_{23}, F_{32}, F_{21}, F_{12}, F_{11}, F_{22}, F_{33}\rangle \quad (2.62)$$

avec $F_j^{in} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_j^{in}$ ($j = 1, 2$).

La valeur de la matrice $[B_{13}]$ est entièrement déterminée si l'on fixe la valeur de tous les paramètres ajustables : nombre d'atomes, désaccords atomiques, désaccords des champs, taux de relaxation et de peuplement, ainsi que les amplitudes des champs intracavités.

Dans un premier temps, avant de résoudre l'équation (2.60), il faut s'assurer que le point de fonctionnement est stable ; pour cela, il faut étudier l'évolution des écarts "classiques"⁷ aux valeurs stationnaires ; $\Delta\xi(t) = \xi(t) - \langle\xi\rangle$, qui obéissent à

$$\frac{d}{dt}|\Delta\xi(t)\rangle = -[B_{13}]|\Delta\xi(t)\rangle \quad (2.63)$$

Les solutions de cette équation matricielle sont des combinaisons linéaires d'exponentielles $e^{-\lambda_i t}$, où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice d'évolution. Si ces valeurs propres possèdent toutes une partie réelle positive⁸, alors le point de fonctionnement

⁷que l'on désigne par $\Delta\xi$ par opposition aux *opérateurs* de fluctuations $\delta\xi$.

⁸Comme on a supposé la population totale constante, les 13 équations d'évolution ne sont pas indépendantes. $[B_{13}]$ possède toujours une valeur propre nulle, ce qui permet en fait de restreindre l'étude à un espace à douze dimensions.

considéré est stable et l'on peut passer à l'étape suivante : le calcul de la matrice de corrélation du système atomes-champs.

En effet, si l'on définit la matrice de corrélation $[G(t)]$

$$[G(t)] = \langle |\delta\xi(t)\rangle[\delta\xi(0)] \rangle \quad (2.64)$$

et la matrice de diffusion $[D]$

$$\langle |F_\xi(t)\rangle[F_\xi(t')] \rangle = [D] \delta(t - t') \quad (2.65)$$

on peut montrer que la matrice de corrélation $[G(0)]$ qui regroupe les corrélations atomes-champs à l'état stationnaire satisfait à l'équation matricielle [Gardiner85]

$$[B_{13}][G(0)] + [G(0)][B_{13}]^\dagger = [D] \quad (2.66)$$

Une méthode générale de résolution de cette équation matricielle a été développée pendant sa thèse par Laurent Vernac [Vernac01b]. Le point essentiel est que l'on peut extraire de cette matrice les corrélations à l'état stationnaire entre toutes les observables du système. Nous utiliserons cette méthode à plusieurs reprises dans les chapitres suivants. Dans les sections suivantes, nous nous intéressons plus particulièrement aux spectres de bruit des champs, donc aux fluctuations des champs dans l'espace de Fourier.

B.1.5 Fluctuations des champs réfléchis par la cavité

Si l'on passe dans l'espace de Fourier, le système d'équations différentielles pour les fluctuations devient un système d'équations linéaire. On peut extraire les fluctuations de n'importe quelle observable à une fréquence donnée en fonction des valeurs stationnaires et de la matrice de diffusion des forces de Langevin. En regroupant les fluctuations des champs dans un vecteur à quatre composantes

$$|\delta A(\omega)\rangle = |\delta A_1(\omega), \delta A_1^\dagger(\omega), \delta A_2(\omega), \delta A_2^\dagger(\omega)\rangle \quad (2.67)$$

les relations sur le coupleur de sortie se traduisent par

$$|\delta A^{out}(\omega)\rangle = \sqrt{T}|\delta A(\omega)\rangle - |\delta A^{in}(\omega)\rangle \quad (2.68)$$

Les fluctuations des champs intracavité sont données par

$$(\kappa + i\Delta_{c1} - i\omega)\delta A_1(\omega) = \frac{ig_1}{\tau}\delta P_1(\omega) + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_1^{in}(\omega) \quad (2.69)$$

$$(\kappa + i\Delta_{c2} - i\omega)\delta A_2(\omega) = \frac{ig_2}{\tau}\delta P_2(\omega) + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_2^{in}(\omega) \quad (2.70)$$

que l'on peut réécrire matriciellement

$$[M(\omega)]|\delta A(\omega)\rangle = \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}|\delta A^{in}(\omega)\rangle + [N]|\delta P(\omega)\rangle \quad (2.71)$$

en introduisant le vecteur des fluctuations des dipôles $|\delta P(\omega)\rangle$ et les matrices $[M]$ et $[N]$:

$$|\delta P(\omega)\rangle = |\delta P_1(\omega), \delta P_1^\dagger(\omega), \delta P_2(\omega), \delta P_2^\dagger(\omega)\rangle$$

$$[M] = \begin{pmatrix} \kappa + i\Delta_{c1} - i\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa - i\Delta_{c1} - i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa + i\Delta_{c2} - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa - i\Delta_{c2} - i\omega \end{pmatrix}$$

$$[N] = \begin{pmatrix} ig_1/\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ig_1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ig_2/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ig_2/\tau \end{pmatrix}$$

Les fluctuations des dipôles peuvent se décomposer comme la somme de deux contributions

$$|\delta P(\omega)\rangle = |\delta P(\omega)\rangle_c + |\delta P(\omega)\rangle_v \quad (2.72)$$

la première contribution étant la réponse linéaire des dipôles aux fluctuations des champs intracavités, la seconde étant due à toutes les autres sources de dissipation, qui comprennent entre autres l'interaction avec les modes vides latéraux. Le premier terme s'écrit donc

$$|\delta P(\omega)\rangle_c = [\chi_P(\omega)]|\delta A(\omega)\rangle \quad (2.73)$$

$[\chi_P(\omega)]$ désignant la restriction à l'espace sous tendu par les dipôles de la matrice de susceptibilité $[\chi(\omega)] = -([B_{at/at} - i\omega\mathbb{1}]^{-1}[B_{at/ch}], \mathbb{1}$ étant la matrice identité (9×9 ici) [Vernac01b]. On peut finalement écrire les fluctuations du champ intracavité comme la somme de fluctuations dues aux champs incidents et de fluctuations induites par les modes latéraux via les atomes

$$|\delta A(\omega)\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}[\mu(\omega)]|\delta A^{in}(\omega)\rangle + \frac{1}{2\kappa}[\mu(\omega)][N]|\delta P(\omega)\rangle_v \quad (2.74)$$

$[\mu(\omega)]$ est la matrice de transfert des fluctuations du champs incident aux champs intracavités qui traduit la dynamique du système atomes-champs. Elle est donnée par la relation

$$2\kappa[\mu(\omega)]^{-1} = [M] - [N][\chi_P(\omega)] \quad (2.75)$$

A l'aide de la relation (2.68), on obtient les fluctuations des champs réfléchis par la cavité

$$|\delta A^{out}(\omega)\rangle = ([\mu(\omega)] - \mathbb{1}) |\delta A^{in}(\omega)\rangle + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} [\mu(\omega)][N] |\delta P(\omega)\rangle_v \quad (2.76)$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice identité 4×4 . La matrice de variance introduite dans le chapitre 1, paragraphe A.2.3, se déduit alors de celle des champs incidents et de la restriction aux dipôles optiques de la matrice de diffusion atomique par la relation

$$[V^{out}(\omega)] = ([\mu(\omega)] - \mathbb{1}) [V^{in}(\omega)] ([\mu(\omega)] - \mathbb{1})^\dagger + [L(\omega)][\sigma_P(\omega)][L(\omega)]^\dagger \quad (2.77)$$

avec $[L(\omega)] = \sqrt{2\kappa/\tau} [\mu(\omega)][N]$. La matrice $[\sigma_P(\omega)]$ est la restriction aux cohérences optiques de la matrice $[\sigma(\omega)]$, qui s'obtient à partir de la matrice de diffusion et de la matrice d'évolution atomique (voir appendice A) par

$$[\sigma(\omega)] = ([B_{at/at}] - i\omega\mathbb{1})^{-1} [D_{at}] \left(([B_{at/at}] - i\omega\mathbb{1})^{-1} \right)^\dagger \quad (2.78)$$

La matrice de variance $[V^{out}]$ permet de calculer le spectre de n'importe quelle quadrature des champs sortants, ainsi que d'éventuelles corrélations entre ces champs. Nous allons nous intéresser aux propriétés de bruit de ces champs lorsqu'ils produisent dans le milieu atomique un processus de Transparence Induite Electromagnétiquement (EIT).

B.2 Transparence Electromagnétiquement Induite classique : effets sur les valeurs moyennes

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, lorsque les champs A_1 et A_2 sont résonnants à la fois à un et deux photons ($\delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$), il est possible de rendre le milieu atomique quasiment transparent pour les champs A_1 et A_2 [Alzetta76, Boller91, Harris97]. Nous commençons par étudier ce processus dans une configuration pompe/sonde dans laquelle la fréquence de Rabi $\Omega_1 = g_1 \langle A_1 \rangle$ du champ A_1 est beaucoup plus intense que celle du champ A_2 et les atomes sont quasiment tous dans le niveau 2. Dans la littérature, une telle situation correspond à de la *transparence induite électromagnétiquement*, en ce sens que la présence du champ de contrôle rend transparent pour le champ sonde un milieu qui est naturellement opaque.

Dans le paragraphe B.2.1, on étudie le processus d'EIT en simple passage, puis nous considérons le cas où le champ sonde interagit en cavité avec les atomes dans le paragraphe B.2.2. Dans le paragraphe B.2.3 nous nous intéressons à la transparence induite pour les champs lorsque ceux-ci possèdent des intensités comparables ; dans ce cas, il y a modification des populations atomiques et existence d'états non couplés (ou états noirs). Cette situation est appelée plus communément *piégeage cohérent de population* (Coherent Population Trapping ou CPT en anglais) [Scully97, Marangos98].

B.2.1 Absorption et dispersion en EIT

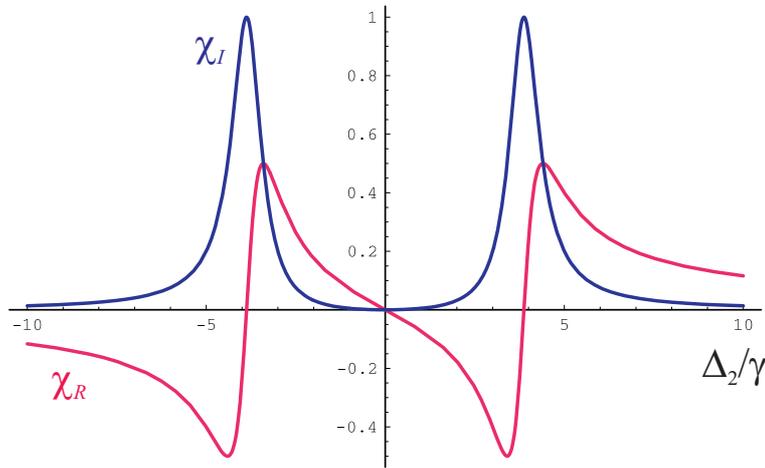


FIG. 2.12 – EIT : parties réelle et imaginaire de la susceptibilité, χ_R et χ_I (unités arbitraires), au premier ordre en Ω_2 , en fonction du désaccord du champ sonde Δ_2 (en unités de γ). Paramètres : $\gamma_0 = \gamma/1000$, $\Omega_1 = \sqrt{15}\gamma$.

Cette transparence peut s'étudier de manière simple en calculant par la méthode des équations de Bloch la valeur moyenne $\langle P_2 \rangle$ de la cohérence optique entre les niveaux 2 et 3. Comme le champ sonde est d'intensité faible devant l'intensité de saturation, on peut résoudre de manière perturbative les équations de Bloch. En supposant qu'en l'absence de champs, tous les atomes sont dans le niveau 2 (qui est le niveau absorbant pour le champ sonde), on montre [Scully97] que $\langle P_2 \rangle$ à l'ordre 1 en Ω_2 , est égal à

$$\langle P_2 \rangle = i\Omega_2 \frac{i(\gamma_0 + i\Delta_2)}{(\gamma_0 + i\Delta_2)(\gamma + i\Delta_2) + \Omega^2} \quad (2.79)$$

avec $\Omega_2 = g_2 \langle A_2 \rangle$ la pulsation de Rabi du champ sonde. On en déduit les expressions

des parties réelle et imaginaire de la susceptibilité⁹ $\chi = \chi_R + i\chi_I$

$$\chi_R = \frac{Nd_2^2}{\epsilon_0\hbar} \frac{\Delta_2\gamma_0(\gamma + \gamma_0) + \Delta_2(\Delta_2^2 - \gamma\gamma_0 - \Omega_1^2)}{(\Delta_2^2 - \gamma_0\gamma - \Omega_1^2)^2 + \Delta_2^2(\gamma + \gamma_0)^2} \quad (2.80)$$

$$\chi_I = \frac{Nd_2^2}{\epsilon_0\hbar} \frac{\Delta_2^2(\gamma + \gamma_0) - \gamma_0(\Delta_2^2 - \gamma\gamma_0 - \Omega_1^2)}{(\Delta_2^2 - \gamma_0\gamma - \Omega_1^2)^2 + \Delta_2^2(\gamma + \gamma_0)^2} \quad (2.81)$$

Ces dernières sont représentées sur la figure 2.12. La partie réelle de la susceptibilité, reliée à la dispersion, s'annule à résonance. La vitesse de groupe, qui est proportionnelle à la pente à résonance, peut être fortement réduite dans la zone de faible absorption [Harris92]. Cet effet a été illustré de manière spectaculaire par les expériences dites de "lumière ralentie ou arrêtée" [Hau99, Kash99, Budker99, Phillips01, Liu01]. La comparaison à résonance ($\Delta_2 = 0$) des parties imaginaires de la susceptibilité en l'absence et en présence du champ pompe montre que leur rapport vaut $\gamma_0\gamma/(\gamma\gamma_0 + \Omega_1^2)$. On voit donc que χ_I , et par conséquent l'absorption, est fortement diminuée par rapport à la valeur pour un système à deux niveaux lorsque $\Omega_1^2 \gg \gamma\gamma_0$, c'est-à-dire lorsque l'on sature la cohérence entre les niveaux 1 et 2. On voit que la largeur de la fenêtre de transparence pour les valeurs moyennes est égale à $2\Omega_1$ (lorsque $\gamma_0 \ll \gamma, \Omega_1$). Nous verrons dans la section suivante qu'une cavité affine considérablement cette fenêtre de transparence.

On peut également donner une interprétation de ce processus d'EIT en termes d'atome habillé [Dalibard87, Imamoglu89, Cohen01]. Supposons le champ pompe A_1 à résonance ($\Delta_1 = 0$) et beaucoup plus intense que le champ sonde A_2 . Dans la base des états habillés

$$|1'\rangle = (|1\rangle + |3\rangle)/\sqrt{2} \quad |3'\rangle = (|3\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (2.82)$$

on voit que l'absorption du champ sonde est donnée par l'interférence entre deux chemins (Fig. 2.13) : l'un où l'atome effectue une transition virtuelle dans le niveau $|1'\rangle$ et l'autre où il effectue une transition virtuelle dans le niveau $|3'\rangle$, car ces deux niveaux contiennent des proportions du niveau $|3\rangle$ (proportions égales lorsque $\Delta_1 = 0$). Lorsque le faisceau sonde est à résonance ($\Delta_2 = 0$), les amplitudes des deux chemins sont égales et opposées ; elles interfèrent destructivement, ce qui a pour conséquence de rendre le milieu transparent.

B.2.2 EIT en cavité

Supposons maintenant que le champ sonde interagisse avec les atomes en cavité. En faisant les mêmes hypothèses pour calculer la polarisation atomique, on montre que la

⁹définie par $D_2 = d_2P_2 = \epsilon_0\chi E_2$.

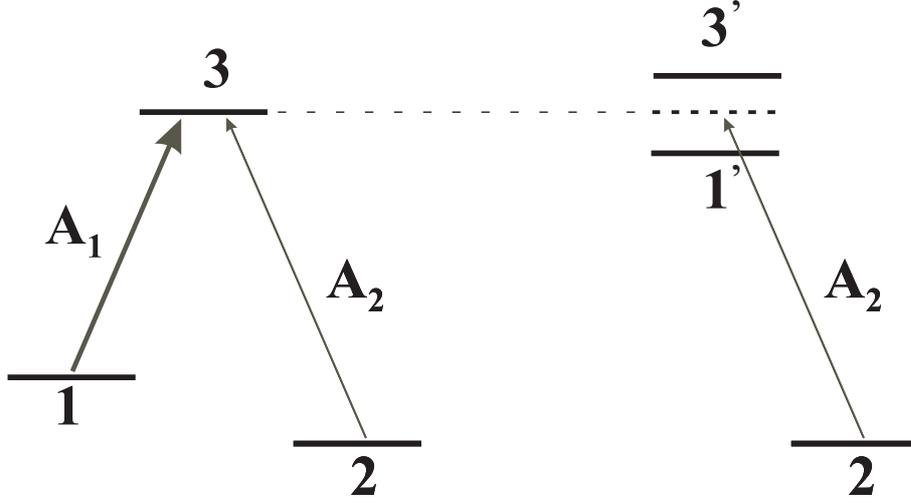


FIG. 2.13 – Interférence quantique conduisant à l'EIT dans la base des états habillés.

valeur moyenne du champ intracavité est à l'état stationnaire

$$(\kappa + \kappa' + i\Delta'_c)\langle A_2 \rangle = \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\langle A_2^{in} \rangle \quad (2.83)$$

où $\kappa + \kappa'$ et Δ'_c représentent respectivement le taux de relaxation du champ intracavité et le désaccord de la cavité en présence de l'onde pompe

$$\kappa' = \kappa 2C \frac{\Delta^2 \gamma (\gamma_0 + \gamma) - \gamma \gamma_0 (\Delta^2 - \gamma \gamma_0 - \Omega_1^2)}{(\Delta_2^2 - \gamma_0 \gamma - \Omega_1^2)^2 + \Delta_2^2 (\gamma + \gamma_0)^2} \quad (2.84)$$

$$\Delta'_c = \Delta_c - 2C\kappa \frac{\Delta \gamma \gamma_0 (\gamma_0 + \gamma) + \Delta \gamma (\Delta^2 - \gamma \gamma_0 - \Omega_1^2)}{(\Delta_2^2 - \gamma_0 \gamma - \Omega_1^2)^2 + \Delta_2^2 (\gamma + \gamma_0)^2} \quad (2.85)$$

Le coefficient de réflexion de la cavité vaut alors

$$r = \frac{\langle A_2^{out} \rangle}{\langle A_2^{in} \rangle} = \frac{\kappa - \kappa' - i\Delta'_c}{\kappa + \kappa' + i\Delta'_c} \quad (2.86)$$

La figure 2.14 représente les variations des parties réelle et imaginaire de r en fonction du désaccord de la sonde, en absence et en présence du champ pompe. En absence de champ pompe, le champ sonde est complètement absorbé dans ces conditions ; le champ intracavité est donc nul et le champ sortant égal au champ réfléchi ($r = -1$). En présence du champ pompe, on voit que le milieu est transparent exactement à résonance, mais sur une largeur très étroite en raison de la présence de la cavité. On peut montrer que la largeur de la fenêtre de transparence vaut $\Omega_1^2 / [\gamma(1 + 2C)] + \gamma_0$, lorsque $\gamma_0 \ll \gamma$. Nous verrons dans le chapitre 4 que cette largeur donne la fenêtre de transparence pour les fluctuations quantiques. La partie réelle de r présente la même variation rapide autour de la résonance en fonction du désaccord.

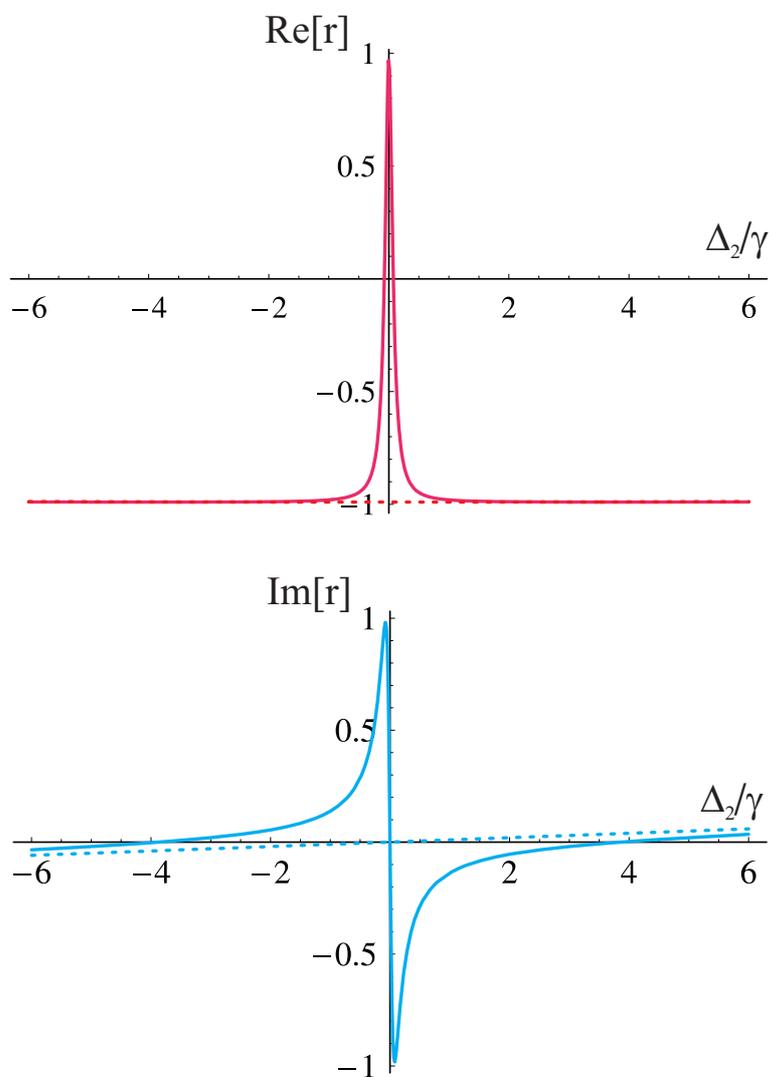


FIG. 2.14 – EIT : parties réelle (courbe bleue) et imaginaire (courbe rouge) du coefficient de réflexion de la cavité pour le champ sonde, en fonction du désaccord de la sonde Δ_2/γ , en absence de champ pompe (traits pleins) et en présence de champ pompe (pointillés). Paramètres : $C = 100$, $\Delta_{c2} = 0$, $\Omega_1 = \sqrt{15}\gamma$, $\gamma_0/\gamma = 10^{-3}$.

B.2.3 Piégeage Cohérent de Population

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré une situation d'EIT, dans laquelle l'un des champs est d'amplitude bien plus faible que l'autre. Dans le cas où les champs possèdent des fréquences de Rabi comparables ($\Omega_1 \sim \Omega_2$) et que leurs amplitudes suffisent à saturer la transition $1 \rightarrow 2$, on est dans une situation de piégeage cohérent de population (CPT) [Scully97]. Dans une telle situation, les atomes sont pompés dans un état qui est une superposition des niveaux 1 et 2. Cet état est appelé *état noir* ou état non couplé, car, lorsque les champs sont résonnants et que les niveaux fondamentaux ont une durée de vie infinie, cet état est n'est plus couplé aux champs. Les états *couplé* et *non couplé* sont définis par

$$|C\rangle = \frac{\Omega_1|1\rangle + \Omega_2|2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \quad \text{et} \quad |NC\rangle = \frac{\Omega_2|1\rangle - \Omega_1|2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \quad (2.87)$$

De manière très similaire à l'EIT, on peut expliquer ce processus en termes de cascades radiatives dans le diagramme de l'atome habillé dans lesquelles les atomes finissent dans l'état $|NC\rangle$ qui est parfaitement découplé du niveau excité [Dalibard87]. Le régime stationnaire dans une configuration CPT est donc atteint en un temps qui est de l'ordre de quelques durées de vie de l'état excité, tandis que le temps d'établissement du régime stationnaire en EIT est plus court (en $1/\Omega_1$). En fait, dans ce cas, les populations de atomes ne sont pas modifiées par le champ pompe, ce sont juste des fonctions d'onde et l'effet d'interférence ne nécessite que quelques oscillations de Rabi pour se produire. Comme précédemment, on peut procéder au calcul du coefficient de réflexion de la cavité dans le cas de deux champs de même amplitude $\Omega_1 = \Omega_2$. L'analyse est un peu plus complexe dans ce cas, car les intensités intracavités sont couplées de manière non linéaire et, lorsque les champs ne sont pas résonnants avec les atomes, on ne peut pas toujours trouver de point fonctionnement correspondant à des intensités intracavités égales¹⁰. On peut néanmoins calculer numériquement ce qui se produit lorsque les désaccords des deux champs sont égaux et opposés¹¹ : $\Delta_1 = -\Delta_2 = \delta/2$. On voit sur la figure 2.15 que le coefficient de réflexion des deux champs vaut 1 sur une plage très étroite de désaccord. Lorsque le désaccord dépasse une certaine valeur, le point de fonctionnement est instable (parties en pointillés). On peut toutefois définir une fenêtre de transparence, dont la demi-largeur vaut cette fois $(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)/(\gamma C)$. On constate le même affinement de la fenêtre en raison du comportement coopératif des atomes en cavité. La facteur 2 de différence par rapport à l'EIT correspond au fait que chaque champ "voit" $N/2$ atomes, donc que la coopérativité qui intervient dans la largeur de la fenêtre de transparence pour un champ est en fait $C/2$.

¹⁰Ce point sera détaillé dans la section B.4.

¹¹si les niveaux 1 et 2 sont des sous niveaux Zeeman et que l'on applique un champ magnétique longitudinal par exemple.

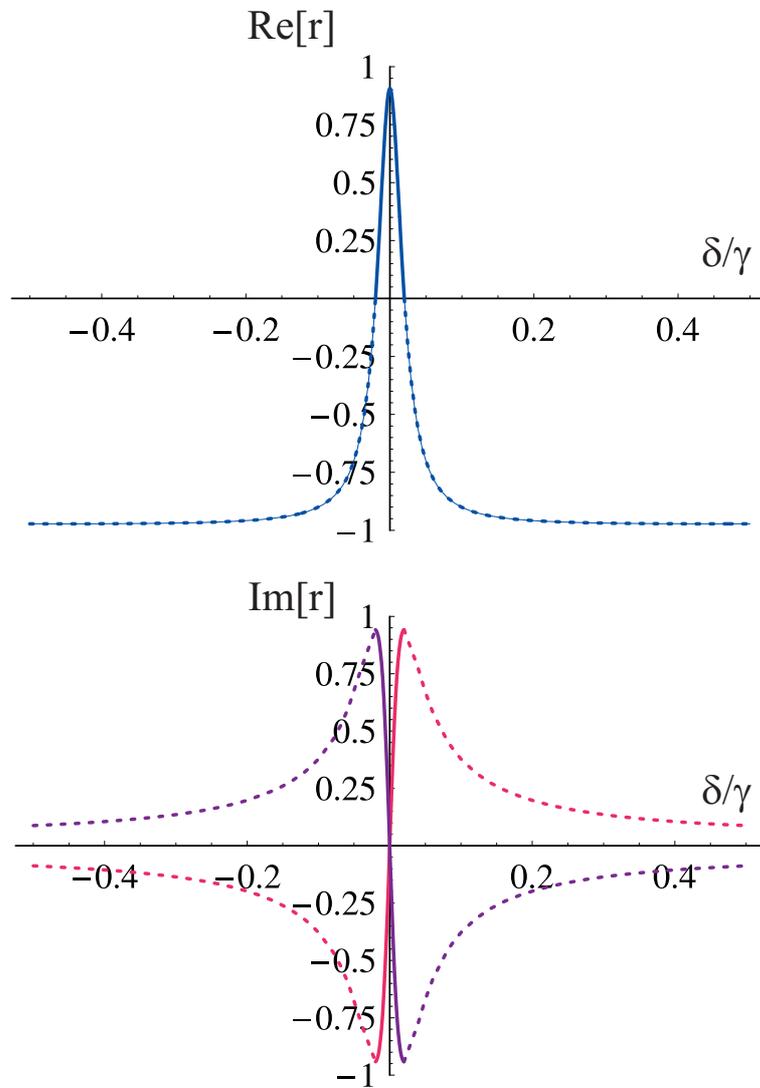


FIG. 2.15 – CPT : parties réelles et imaginaires du coefficient de réflexion de la cavité pour deux champs d'égale amplitude, en fonction du désaccord atomique δ . Paramètres : $C = 100$, $\Delta_{c1} = \Delta_{c2} = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \gamma$, $\gamma_0/\gamma = 10^{-3}$. Les traits pleins indiquent les zones stables, les parties en pointillés les zones instables. Les parties réelles sont égales et les parties imaginaires opposées.

Les conditions du schéma que nous allons étudier dans les sections B.3 et B.4 de ce chapitre s'apparentent plus à celles du piégeage cohérent de population qu'à de l'EIT. Nous reviendrons toutefois sur l'EIT au sujet des mémoires quantiques atomiques dans le chapitre 4.

B.3 Echange de fluctuations quantiques en CPT

Nous montrons dans cette section que deux champs interagissant dans des conditions de CPT dans une cavité optique contenant des atomes froids peuvent échanger leurs fluctuations dans une certaine bande de fréquences à l'intérieur de la bande passante de la cavité. En effet, considérons le cas symétrique où les champs A_1 et A_2 ont même amplitude et les constantes de couplage sont égales pour les deux transitions : $g_1 = g_2 = g$ et $g_1 \langle A_1 \rangle = g_2 \langle A_2 \rangle = \Omega$. Si l'on néglige dans un premier temps γ_0 , les atomes à l'état stationnaire sont pompés dans l'état superposition $(|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$. La cohérence créée dans le fondamental est alors maximale : $\langle P_r \rangle = -N/2$ et $\langle \Pi_1 \rangle = \langle \Pi_2 \rangle = N/2$, les valeurs moyennes des autres opérateurs atomiques étant nulles.

Sur la figure 2.16 on a tracé les spectres de bruit minimaux des champs à la sortie de la cavité dans le cas où le champ A_1^{in} est dans un état cohérent et le champ A_2^{in} est dans un état comprimé minimal¹². Il apparaît clairement que les champs échangent leurs fluctuations dans une fenêtre de fréquence que nous allons préciser, et sont identiques aux champs incidents en dehors de cette fenêtre.

Pour expliquer ces résultats de manière simple, on peut se placer dans la base état couplé/état non-couplé $\{|C\rangle, |NC\rangle, |3\rangle\}$, où l'état non couplé est $|NC\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ et l'état couplé $|C\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$. Dans cette nouvelle base, les atomes interagissent avec un champ "vide" A_{NC} , tel que $\langle A_{NC} \rangle = 0$ et un champ moyen A_C [voir figure 2.17] tel que $\Omega' = g \langle A_C \rangle = \Omega \sqrt{2}$

$$A_{NC} = \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{2}}, \quad A_C = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}} \quad (2.88)$$

La linéarisation des équations d'évolution conduisent dans l'espace de Fourier

$$(\kappa - i\omega)\delta A_{NC} = \frac{ig}{\tau}\delta P_{NC} + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_{NC}^{in} \quad (2.89)$$

$$(\gamma - i\omega)\delta P_{NC} = i\Omega'\delta Q_{NC} + igN\delta A_{NC} + F_{NC} \quad (2.90)$$

$$-i\omega\delta Q_{NC} = i\Omega'\delta P_{NC} \quad (2.91)$$

¹²Leurs matrices de variance sont données par (1.35) et (1.36), respectivement.

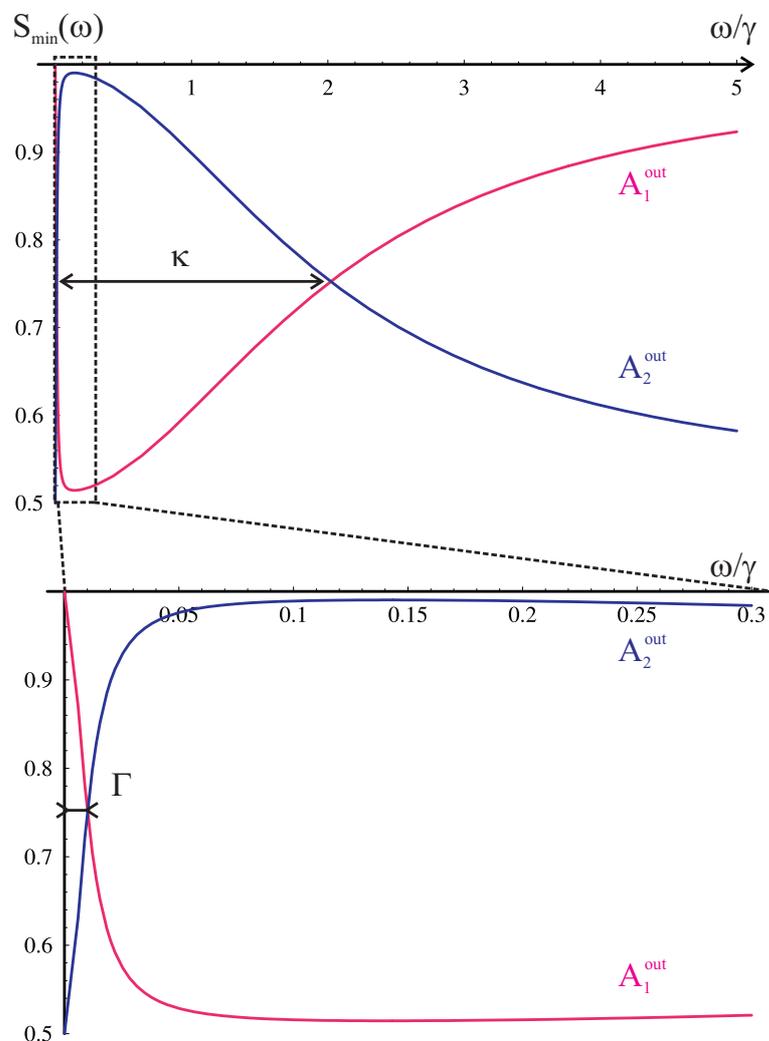


FIG. 2.16 – Spectres de bruit des quadratures d'amplitude des champs sortants A_1^{out} et A_2^{out} . Les paramètres d'interaction valent $C = 100$, $\kappa = 2\gamma$, $\Omega = \gamma$, $\gamma_0 = 0$. La figure du haut montre les comportements $\Gamma \ll \omega \ll \kappa$ ("échange") et $\omega \gg \kappa$ ("cavité réfléchissante"), celle du bas est un agrandissement de la partie basse fréquence ("transparence") qui met en évidence une étroite fenêtre de transparence pour les fluctuations de largeur Γ .

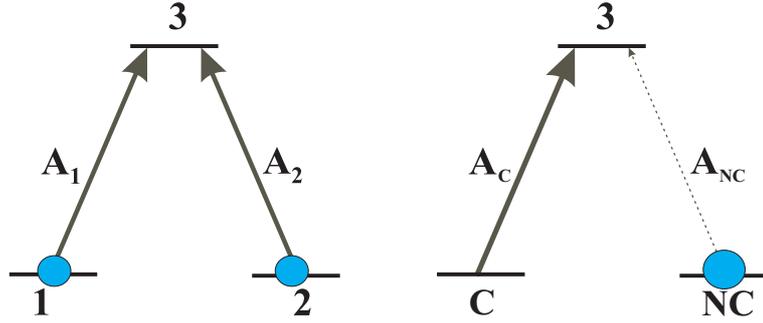


FIG. 2.17 – Passage dans la base des états couplé et non couplé.

avec $P_{NC} = \sum_i |NC\rangle_i \langle 3|_i$, $Q_{NC} = \sum_i |NC\rangle_i \langle C|_i$ et F_{NC} l'opérateur de Langevin associé. Ces équations permettent d'exprimer les fluctuations du mode vide non couplé à la sortie de la cavité :

$$\delta A_{NC}^{out}(\omega) = \frac{k + i\omega - \beta}{\kappa - i\omega + \beta} \delta A_{NC}^{in}(\omega) + BF_{NC}(\omega) \quad (2.92)$$

$$\text{avec} \quad \beta = 2C\kappa\gamma \frac{-i\omega}{-i\omega(\gamma - i\omega) + \Omega^2}$$

$$B = \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} \frac{g\omega}{(\kappa - i\omega)[-i\omega(\gamma - i\omega) + \Omega^2] - 2iC\kappa\gamma\omega}$$

D'autre part, le champ couplé ne voyant pas d'atomes, la relation entrée-sortie pour ses fluctuations est celle d'un champ dans une cavité vide

$$\delta A_C^{out}(\omega) = \frac{\kappa + i\omega}{\kappa - i\omega} \delta A_C^{in}(\omega) \quad (2.93)$$

Si l'on revient aux champs A_1 et A_2 en inversant (2.88), on trouve que les champs sortants sont reliés aux champs incidents par

$$\delta A_1^{out} = \frac{a + a'}{2} \delta A_1^{in} + \frac{a - a'}{2} \delta A_2^{in} + \text{noise} \quad (2.94)$$

$$\delta A_2^{out} = \frac{a - a'}{2} \delta A_1^{in} + \frac{a + a'}{2} \delta A_2^{in} + \text{noise} \quad (2.95)$$

$$\text{avec} \quad a = \frac{\kappa + i\omega - \beta}{\kappa - i\omega + \beta}, \quad a' = \frac{\kappa + i\omega}{\kappa - i\omega} \quad (2.96)$$

Nous n'avons pas détaillé la contribution de bruit atomique (*noise*), dont on peut montrer qu'elle est négligeable dans cette situation. Deux échelles de fréquence apparaissent : la première correspond à la largeur de la fenêtre de transparence CPT pour les fluctuations et les valeurs moyennes, $\Gamma = \Omega^2/2C\gamma$. Elle est proportionnelle au taux

de pompage et décroît avec la coopérativité. Une augmentation du nombre d'atomes conduit à un affinement de la fenêtre de transparence qui peut être bien plus étroite que la largeur naturelle. La seconde est donnée par la bande passante de la cavité κ . Pour de grandes valeurs de la coopérativité et une cavité de finesse moyennement élevée¹³, on a en général $\Gamma \ll \kappa$. On peut alors distinguer trois régimes selon la valeur de la fréquence d'analyse :

- pour de faibles valeurs de ω à l'intérieur de la fenêtre de transparence, $a' \sim 1$ et $a \sim 1$; les fluctuations des champs sortants sont alors celles des champs incidents, $\delta A_i^{out} \sim \delta A_i^{in}$ ($i = 1, 2$)
- pour $\Gamma \ll \omega \ll \kappa$, on a que $a' \sim 1$ et $a \sim -1$. Par conséquent, les fluctuations de A_1^{out} sont proportionnelles à celles de A_2^{in} et vice-versa : $\delta A_1^{out} \sim \delta A_2^{in}$, $\delta A_2^{out} \sim \delta A_1^{in}$, ce qui explique que le champ A_2 soit comprimé sur la figure 2.16
- enfin, pour des fréquences en dehors de la bande passante de la cavité $\omega \gg \kappa$, on a $a \sim a' \sim -1$ de telle sorte que les champs sont réfléchis par la cavité : $\delta A_1^{out} \sim -\delta A_1^{in}$, $\delta A_2^{out} \sim -\delta A_2^{in}$. Leur spectre de bruit est alors identique à celui des champs incidents.

Il se produit donc à l'intérieur de la bande passante de la cavité (et en dehors de la fenêtre de transparence) un échange de photons entre les champs par l'intermédiaire de la cohérence atomique dans le fondamental. En effet, pour une fréquence d'analyse en dehors de la fenêtre de transparence, mais à l'intérieur de la bande passante de la cavité ($\Gamma < \omega < \kappa$), les fluctuations du champ intracavité A_{NC} sont nulles car le milieu est complètement absorbant, la fréquence d'analyse jouant le même rôle que le désaccord atomique pour les valeurs moyennes. En effet, en négligeant les termes de bruit atomique dans (2.92), on voit que dans le régime d'échange, $\delta A_{NC}^{out} \simeq -\delta A_{NC}^{in}$, c'est-à-dire que les fluctuations du champ non couplé sont réfléchies par la cavité, ce bien que l'on soit dans la bande passante de la cavité. Cela signifie que les fluctuations du champ intracavité sont nulles car le champ rayonné A_{NC}^r par les atomes interfère destructivement avec le champ incident : $\delta A_{NC} = \delta A_{NC}^{in} + \delta A_{NC}^r \simeq 0$. Le champ couplé ne voit quant à lui pas d'atomes à l'état stationnaire : $\delta A_C^{out} = \delta A_C^{in}$. On a donc une redistribution des corrélations entre photons d'un champ à l'autre. Pour les champs A_1 et A_2 , cela se traduit par un échange de fluctuations. Notons que le fait que les deux champs aient des fréquences de Rabi égales assure que cet échange puisse être de l'ordre de 100%. Dans le cas de fréquences de Rabi différentes, les états couplé et non couplé

¹³ $C \sim 100$ et $\mathcal{F} \simeq 60$ dans la configuration expérimentale actuelle.

sont des combinaisons à poids différents des états 1 et 2 [voir (2.87)]; la redistribution des fluctuations se fait alors elle aussi dans des poids différents.

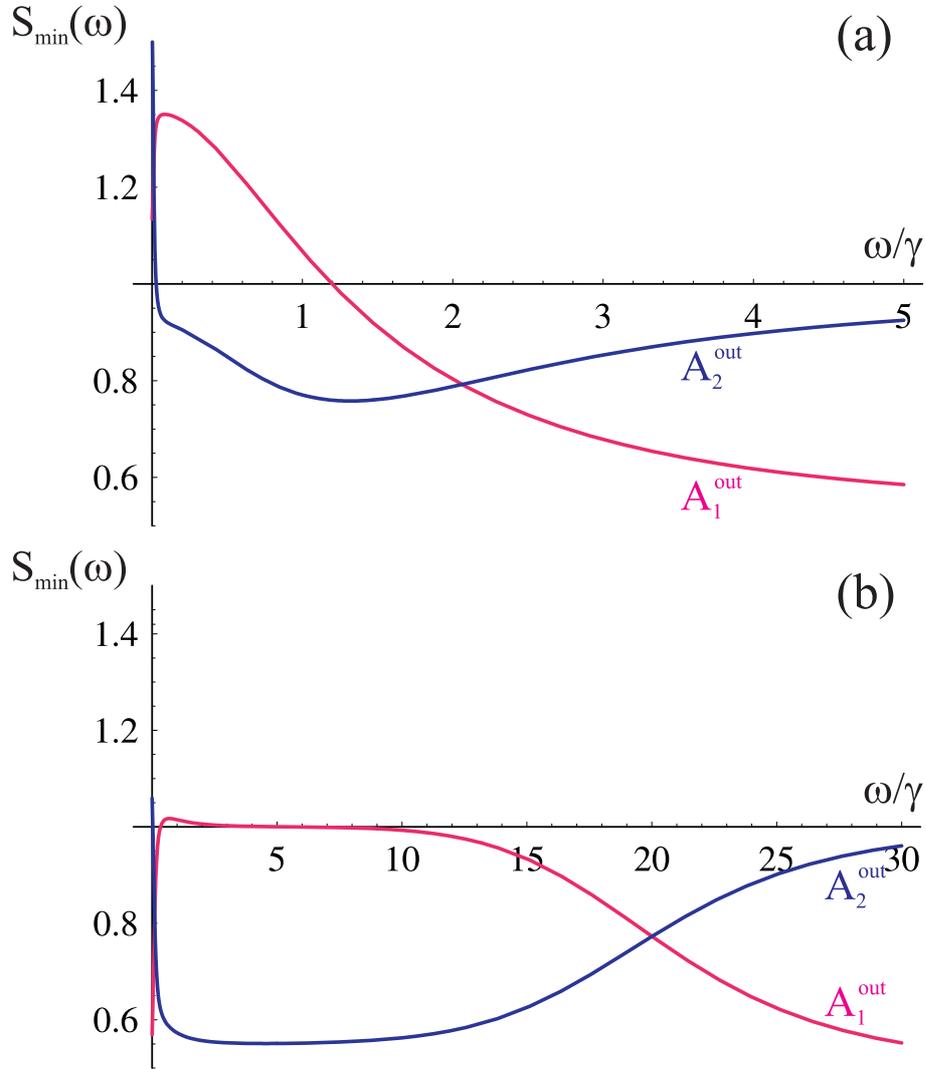


FIG. 2.18 – Spectres de bruit des quadratures d'amplitude des champs sortants, lorsque $\gamma_0 = 10^{-3}\gamma$. (a) $\kappa = 2\gamma$, $C = 100$, $\Omega = \gamma$ (b) Mauvaise cavité : $\kappa = 20\gamma$, $C = 10$, $\Omega = \gamma$.

Nous avons toutefois remarqué une grande sensibilité de cet “échangeur optique” au taux de relaxation dans le fondamental γ_0 . En effet, même lorsque ce taux est faible devant le taux d'émission spontanée ($\gamma_0/\gamma \sim 10^{-3}$), si la coopérativité est grande, on constate un fort excès de bruit à basse fréquence qui peut diminuer, voire détruire, le processus d'échange (Fig. 2.18(a)). Cet effet peut s'interpréter par le fait qu'un taux

de relaxation dans le fondamental couple l'état non couplé au champ couplé, ce qui se traduit par un fort excès de bruit à basse fréquence. On peut toutefois réduire cet excès de bruit en diminuant la coopérativité et en augmentant la bande passante de la cavité (Fig. 2.18(b)), ce qui permet de réaliser avec une efficacité correcte un échange de fluctuations quantiques sur une plage assez large en fréquence.

Pour résumer, il est donc possible d'utiliser la cohérence atomique générée dans un tel système pour réaliser un *échangeur quantique optique* et transférer des fluctuations d'un champ à un autre, ce qui peut être intéressant lorsque les longueurs d'onde des deux champs sont différentes.

B.4 Réduction de bruit et intrication via des effets de cohérence

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés à des processus d'échange d'états quantiques dans une situation de CPT résonnante. Nous allons maintenant étudier le cas de champs incidents cohérents. Si ces champs sont résonnants à un et deux photons, il est clair d'après le paragraphe précédent que les champs sortants sont au mieux dans un état cohérent. Cependant, si l'on s'écarte de la résonance à deux photons, nous allons voir qu'un comportement multistable pour les champs intracavité apparaît et que les champs sortants peuvent être comprimés ou corrélés quantiquement. Il a été souligné de nombreuses fois dans la littérature qu'un tel système à trois niveaux peut présenter de fortes non linéarités au voisinage de la résonance EIT [Fleischhauer92, Scully92, Schmidt96, Wang01a, Kang01].

Une première conséquence est l'apparition de multistabilité pour les champs intracavité [Kitano81, Savage82, Wang01b]. Dans le cas où le champ incident est un champ polarisé linéairement (somme de deux composantes circulaires), on peut donner une interprétation de ces instabilités en termes de *bascule de polarisation*, de manière très similaire à la bascule de polarisation observée dans les expériences décrites dans le paragraphe A.2.

En ce qui concerne les fluctuations quantiques, le mode vide de polarisation orthogonale au champ moyen peut être comprimé en sortie de la cavité. L'origine physique de cette réduction de bruit du mode vide n'est pas due à un effet Kerr croisé comme dans le cas des expériences de la thèse de Vincent Josse [Josse03a, Josse03b], mais à l'échange de photons entre les deux champs par l'intermédiaire de la cohérence atomique entre deux sous-niveaux fondamentaux.

Des corrélations de phase et de la réduction de bruit pour une combinaison de deux champs ayant interagi en simple passage avec un ensemble atomique dans des conditions voisines de l'EIT ont été prédites dans [Lukin99]. Dans [Barberis-Blostein04] des cor-

relations quantiques ont été prédites, soit en amplitude, soit en phase, pour les champs sortants de la cavité. Nous montrons ici qu'il est en fait possible de générer des faisceaux intriqués de type EPR au voisinage du seuil de bascule dans des conditions de CPT. L'effet non linéaire induit par cet effet de cohérence pourrait être notablement plus important que dans un système à deux niveaux traditionnel [Lambrecht96, Josse04a], ce qui pourrait permettre d'atteindre des valeurs plus fortes d'intrication pour des conditions expérimentales similaires.

B.4.1 Etat stationnaire

Pour simplifier la discussion et dresser un parallèle avec les phénomènes observés lors de l'interaction en cavité d'un faisceau de polarisation linéaire avec des atomes froids, nous allons considérer que les modes A_1 et A_2 sont des modes dégénérés en fréquence¹⁴, et que par conséquent, on peut assimiler le champ incident à un champ de polarisation linéaire, qui se décompose en deux composantes polarisées circulairement d'intensité égale. La lumière intracavité peut alors être décrite par un champ moyen polarisé selon y et un mode vide de polarisation selon x . Ces champs sont reliés aux modes A_1 et A_2 par

$$A_x = \frac{A_2 - A_1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad A_y = -i \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}} \quad (2.97)$$

Pour simplifier la discussion et présenter des résultats analytiques, on suppose également que $\gamma_0 = 0$. Les champs sont désaccordés de manière symétrique vis-à-vis de la résonance à un photon : $\Delta_2 = -\Delta_1 = \delta/2$. Ce désaccord atomique est obtenu par exemple en appliquant un champ magnétique longitudinal (selon z), qui lève la dégénérescence entre les niveaux 1 et 2.

¹⁴en toute rigueur, si les niveaux 1 et 2 sont des sous niveaux Zeeman, les modes A_1 et A_2 ont des fréquences légèrement différentes dès que $\delta = \omega_2 - \omega_1 \neq 0$.

Dans cette situation, les valeurs moyennes à l'état stationnaire valent

$$\langle \Pi_1 \rangle = \frac{N}{2} \frac{16\Omega^4 + 4\delta^2\gamma^2 + \delta^4}{16\Omega^4 + 4\delta^2\gamma^2 + 4\Omega^2\delta^2 + \delta^4} = \langle \Pi_2 \rangle \quad (2.98)$$

$$\langle \Pi_3 \rangle = N \frac{4\Omega^2\delta^2}{16\Omega^4 + 4\delta^2\gamma^2 + 4\Omega^2\delta^2 + \delta^4} \quad (2.99)$$

$$\langle P_1 \rangle = N \frac{\Omega\delta(-4\Omega^2 + \delta^2 + 2i\delta\gamma)}{16\Omega^4 + 4\delta^2\gamma^2 + 4\Omega^2\delta^2 + \delta^4} \quad (2.100)$$

$$\langle P_2 \rangle = N \frac{\Omega\delta(4\Omega^2 - \delta^2 + 2i\delta\gamma)}{16\Omega^4 + 4\delta^2\gamma^2 + 4\Omega^2\delta^2 + \delta^4} \quad (2.101)$$

$$\langle P_r \rangle = N \frac{2\Omega^2(-4\Omega^2 + \delta^2 + 2i\delta\gamma)}{16\Omega^4 + 4\delta^2\gamma^2 + 4\Omega^2\delta^2 + \delta^4} \quad (2.102)$$

Si les désaccords avec la cavité sont opposés $\Delta_{c1} = -\Delta_{c2} = \Delta_c$ et $\Omega_1^{in} = \Omega_2^{in} = \Omega^{in}$, les équations donnant les intensités des champs intracavités sont identiques et s'écrivent

$$\left[\left(1 + 2C \frac{2\bar{\delta}^2}{16I^2 + 4\bar{\delta}^2 + 4I^2\bar{\delta}^2 + \bar{\delta}^4} \right)^2 + \left(\delta_c + 2C \frac{\bar{\delta}(4I - \bar{\delta}^2)}{16I^2 + 4\bar{\delta}^2 + 4I\bar{\delta}^2 + \bar{\delta}^4} \right)^2 \right] I = I^{in} \quad (2.103)$$

avec $I = \Omega^2/\gamma^2$, $\bar{\delta} = \delta/\gamma$ et $\delta_c = \Delta_c/\kappa$. Lorsque $\Omega \gg \gamma, \delta$ et $C \gg 1$, il est intéressant de remarquer qu'au voisinage de la résonance EIT, l'absorption et le déphasage non linéaire sont donnés par

$$A \sim \frac{C\delta^2\gamma^2}{4\Omega^4} \quad \text{et} \quad \phi_{nl} \sim \frac{C\delta\gamma}{2\Omega^2} \quad (2.104)$$

Ce résultat est à comparer aux conditions des expériences effectuées dans la limite Kerr ($\Delta \gg \gamma, \Omega$), pour lesquelles l'absorption et le déphasage non linéaire valent typiquement

$$A \sim \frac{C\gamma^2}{2\Delta^2} \quad \text{et} \quad \phi_{nl} \sim \frac{C\gamma\Omega^2}{\Delta^3} \quad (2.105)$$

La figure de mérite pour obtenir de la réduction de bruit ou de l'intrication dans un milieu non linéaire s'obtient qualitativement en comparant l'amplitude de la non linéarité ϕ_{nl} à l'absorption A . On voit facilement à partir de (2.104) et (2.105) que cette figure de mérite peut atteindre des valeurs plus importantes dans un système à trois niveaux au voisinage de l'EIT que dans un système à deux niveaux où l'on ne peut pas s'approcher autant de résonance en raison de l'absorption

$$\left(\frac{\phi_{nl}}{A} \right)_{EIT} \sim \frac{\Omega^2}{\gamma\delta} \quad \text{à comparer à} \quad \left(\frac{\phi_{nl}}{A} \right)_{2niv} \sim \frac{\Omega^2}{\gamma\Delta} \quad (2.106)$$

Nous allons vérifier ces considérations qualitatives dans la suite. Toutefois, avant de procéder au calcul des fluctuations quantiques, il faut remarquer que l'interaction en cavité modifie de façon substantielle le comportement de la lumière intracavité. De la même façon que dans les expériences générant de la réduction de bruit sur un ou deux modes du champ, peuvent apparaître des instabilités de type bistabilité [Hilico92a, Lambrecht95] ou bascule de polarisation [Josse03a, Josse03b], nous allons voir qu'un comportement multistable est prédit également proche de la résonance EIT. Ce type de comportement a été récemment observé expérimentalement dans des vapeurs [Wang01b, Joshi03].

B.4.2 Multistabilité

On peut alors représenter les variations de l'intensité intracavité en fonction de l'intensité incidente, comme sur la figure 2.19. On met en évidence un comportement

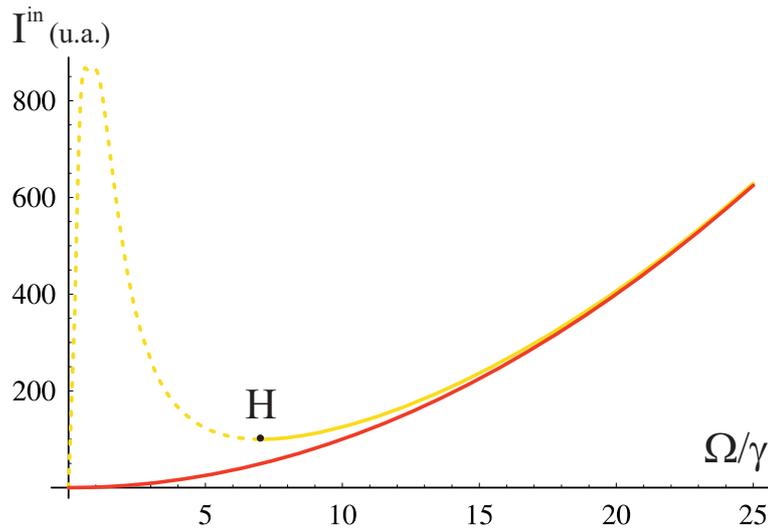


FIG. 2.19 – Multistabilité : intensité incidente I^{in} de l'une des composantes circulaire en fonction de la pulsation de Rabi intracavité Ω . Paramètres : $C = 100$, $\kappa = 2\gamma$, $\phi_c = 0$, $\bar{\delta} = 1$. L'abscisse du point "haut" H vaut $\Omega \simeq 7\gamma$. A titre de comparaison, on a également représenté la même courbe dans une situation d'EIT résonnante $\delta = 0$.

multistable pour les composantes de polarisation circulaire. Cependant, à la différence de ce qui se produit dans le cas d'une bistabilité "classique" induite par l'interaction avec des atomes à deux niveaux, l'analyse de stabilité présentée dans le paragraphe B.1.4 montre que seule la branche haute (haute intensité) est stable. Pour $C \gg 1$, on

trouve que l'intensité du champ intracavité doit être supérieure à¹⁵

$$\Omega^2 \geq \Omega_0^2 \simeq \frac{C\delta\gamma}{2\sqrt{1+\delta_c^2}} \quad (C \gg 1) \quad (2.107)$$

Ce résultat peut s'interpréter comme une bascule de polarisation analogue à celle que nous avons observée dans les expériences donnant lieu à une réduction du bruit quantique de polarisation [Josse03a]. Si le mécanisme physique responsable de cette bascule est la "self-rotation" induite sur la lumière par le milieu atomique, l'origine physique est toutefois très différente. Dans la section A.2, la rotation de polarisation provient du dichroïsme circulaire induit par les fluctuations de population δJ_z dans le fondamental [Rochester01] : un léger déséquilibre dans la différence de population crée de l'ellipticité pour le champ. La présence de la cavité amplifie le phénomène et conduit à un effet de seuil [Josse03b].

Ici, la différence est qu'au voisinage de la résonance EIT, la cohérence est maximale (le spin atomique est orienté selon $-Ox$ dans la sphère de Bloch); un désaccord à deux photons tend à déphaser différemment les polarisations circulaires [Novikova00, Sautenkov00]. Si on augmente le désaccord¹⁶, on favorise la précession du spin au détriment du pompage de la cohérence; le spin atomique finit par tourner dans le plan (Oxy) , "entraînant" avec lui le vecteur de Stokes initialement parallèle à x , et la polarisation bascule (Fig. 2.20).

En effet, le champ magnétique longitudinal a pour effet de faire précesser le spin associé au fondamental dans le plan (Oxy) , et par conséquent, de faire tourner la polarisation. Pour un taux de pompage $\Gamma_E = \Omega^2/\gamma$ élevé devant le désaccord δ et le taux de relaxation du dipôle optique γ , les polarisations associées aux composantes circulaires s'écrivent

$$\langle P_1 \rangle \simeq \frac{gN\delta}{4\Omega^2} \langle A_1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle P_2 \rangle \simeq -\frac{gN\delta}{4\Omega^2} \langle A_2 \rangle \quad (2.108)$$

La polarisation du champ, initialement linéaire selon y (axe $-Ox$ dans la sphère de Bloch), acquiert lors d'une traversée du milieu un azimuth α [Huard94] proportionnel à δ . On a donc une rotation de la polarisation dans le plan équatorial de la sphère de Poincaré¹⁷ (Fig. 2.20). La présence de la cavité conduit là aussi à des effets de seuil.

¹⁵On démontre ainsi l'assertion du paragraphe B.2.3 selon laquelle le point de fonctionnement $\Omega_1 = \Omega_2$ devient instable lorsque δ est supérieur à un certain seuil donné par la largeur de la fenêtre de transparence (voir Fig. 2.15).

¹⁶ou, de manière équivalente, si on diminue l'intensité

¹⁷Pour une définition des paramètres de Stokes, voir le chapitre 4 ou les publications jointes dans l'annexe D.

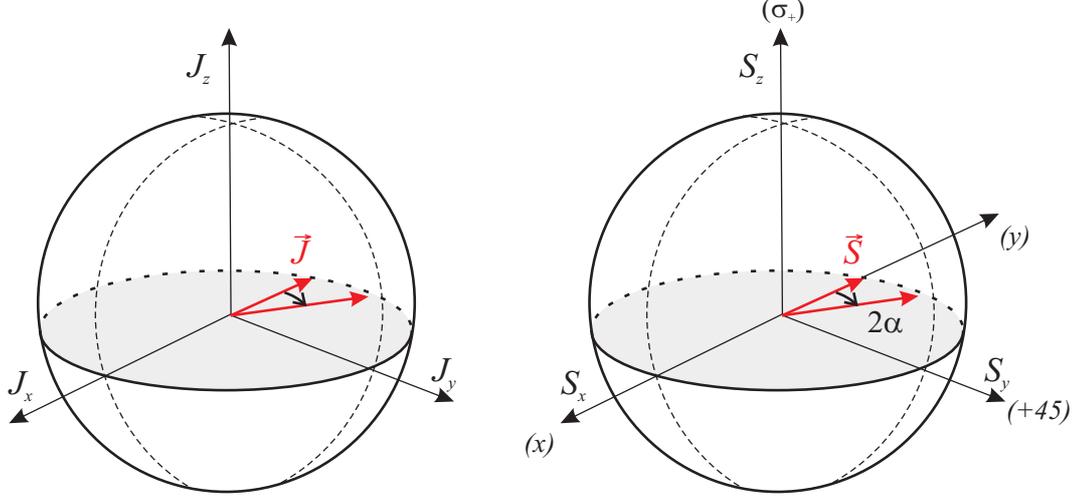


FIG. 2.20 – *Self-rotation au voisinage de la résonance CPT : un désaccord $\delta \neq 0$ fait tourner le spin moyen dans le plan équatorial de la sphère de Bloch (gauche), ce qui entraîne une rotation du vecteur de Stokes dans la sphère de Poincaré.*

En cavité, on procède à une analyse de stabilité à fréquence nulle pour les deux modes de polarisation circulaire. La linéarisation des équations (2.42-2.47) à fréquence nulle et dans les conditions $C \gg 1$ et $\Omega \gg \gamma, \delta$ conduit à

$$\delta P_1 \simeq \frac{gN\delta}{[|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2]^3} |\Omega_2|^2 \Omega_1^2 \delta A_1^\dagger = \frac{gN\delta}{4\Omega^2} \delta A_1^\dagger \quad (2.109)$$

$$\delta P_2 \simeq \frac{-gN\delta}{[|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2]^3} |\Omega_1|^2 \Omega_2^2 \delta A_2^\dagger = -\frac{gN\delta}{4\Omega^2} \delta A_2^\dagger \quad (2.110)$$

On a donc les équations suivantes pour les modes polarisés circulairement

$$\delta \dot{A}_1 = -(\kappa + i\Delta_c)\delta A_1 + i\zeta\delta A_1^\dagger + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_1^{in} \quad (2.111)$$

$$\delta \dot{A}_2 = -(\kappa - i\Delta_c)\delta A_2 - i\zeta\delta A_2^\dagger + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_2^{in} \quad (2.112)$$

avec $\zeta = C\kappa\gamma\delta/2\Omega^2$. Le terme en δA_1^\dagger correspond à un terme de gain. Lorsque ce gain est supérieur aux pertes : $|\zeta| \geq \sqrt{\kappa^2 + \Delta_c^2}$, la polarisation bascule. Comme prévu, ce gain fait intervenir le rapport du désaccord et du taux de pompage optique, ce qui confirme les conclusions qualitatives énoncées précédemment. D'autre part, on retrouve exactement la condition de bistabilité (2.107), à savoir que seule la branche haute est stable. Dans les conditions étudiées, ce seuil de bascule de polarisation correspond bien

au point tournant haut de la courbe de bistabilité. On peut remarquer finalement que ce comportement multistable n'est possible que si

$$\frac{2\Omega^2}{|\delta|\gamma} \leq C \quad (2.113)$$

B.4.3 Spectres de bruit des champs sortants

La forte non linéarité au voisinage de la résonance EIT permet également de générer des états comprimés et intriqués. En effet, lorsque les champs A_1 et A_2 sont résonnants à deux photons ($\delta = 0$), leurs fluctuations sont découplées et ils restent dans un état cohérent. Cependant, pour un désaccord faible - de l'ordre de la largeur de l'état excité : $\delta \sim \gamma$ - leurs fluctuations sont fortement modifiées par le déphasage non linéaire (2.104). On peut donc s'attendre à observer une réduction du bruit quantique de ces deux modes en sortie de la cavité. En effet, nous avons représenté sur la figure 2.21 les spectres de bruit minimum des modes A_1 et A_2 . La réduction de bruit est maximale à fréquence nulle et se produit sur une bande de fréquences de l'ordre de la bande passante de la cavité. En raison de la symétrie entre les composantes circulaires, les deux spectres sont bien entendu identiques. Sont également représentés les spectres de bruit des modes de polarisation linéaire, A_x et A_y . Ces deux modes peuvent être également comprimés, ce qui montre en particulier qu'il est possible de générer du vide comprimé par cette méthode. Pour des valeurs correspondants à des paramètres expérimentaux typiques, on obtient une réduction de bruit à fréquence nulle du champ moyen de l'ordre de 65%, et du bruit du mode vide de l'ordre de 45%. Les simulations numériques indiquent que la réduction de bruit pour les composantes circulaires est optimale à fréquence nulle, et relativement peu sensible aux désaccords et intensités choisis, alors que les modes de polarisation linéaire ne présentent de la réduction de bruit que sur des plages étroites de paramètres (en particulier du désaccord de la cavité). D'autre part, augmenter la coopérativité conduit à une augmentation de la réduction de bruit à basse fréquence mais plus étroite. La réduction de bruit des modes circulaires augmente lorsque l'on se rapproche du seuil de bascule, et sa largeur est proportionnelle au désaccord à deux photons (tant que celui-ci reste inférieur à la bande passante de la cavité).

B.4.4 Génération d'états intriqués

Comme nous l'avons déjà observé au début de ce chapitre, l'existence de réduction de bruit sur deux modes de polarisation orthogonale traduit la présence de corrélations quantiques dans ce système bimodal. On peut donc espérer observer de l'intrication

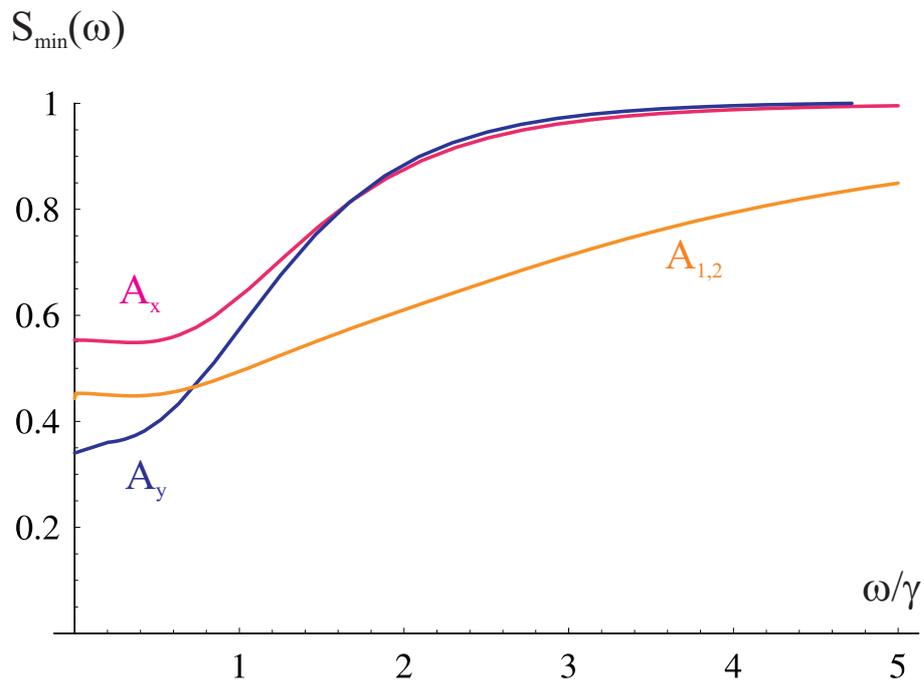


FIG. 2.21 – Spectres de bruit minimum des composantes de polarisations circulaires A_1 , A_2 et linéaires A_x , A_y . Paramètres : $C = 100$, $\kappa = 2\gamma$, $\delta = 2\gamma$, $\phi_c = 1$, $\Omega = 12\gamma$, $\gamma_0 = \gamma/1000$.

quantique entre certains modes en sortie de la cavité. Nous allons utiliser une méthode développée par Vincent Josse pendant sa thèse et que nous avons testée dans le cadre des expériences décrites dans le paragraphe A.2, pour calculer l'intrication générée à la sortie de la cavité. Connaissant les propriétés de bruit des modes sortant de la cavité, il est possible de déduire les corrélations quantiques éventuelles entre n'importe quels modes de polarisation orthogonale. Nous allons nous baser sur le critère d'inséparabilité (1.73) pour quantifier ces corrélations. Deux modes a et b polarisés orthogonalement sont intriqués si on peut réduire les variances EPR de couples de quadratures orthogonales ($X(\theta)$, $Y(\theta)$) sous le bruit quantique standard

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta) = \frac{1}{2} [\Delta^2(X_a - X_b)(\theta) + \Delta^2(Y_a + Y_b)(\theta)] < 2 \quad (2.114)$$

Pour trouver les modes qui présentent les corrélations optimales, on cherche deux modes "incorrélés" u et v tels que $\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0$ et dont le bruit est minimal pour la même quadrature (en amplitude par exemple). Nous avons montré que tels modes existent toujours dans un système à deux modes [Josse04b]. On peut alors montrer que, de tous les modes de polarisations orthogonales, ceux qui minimisent la quantité $\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$ sont les modes polarisés circulairement à partir des modes u et v

$$A_{a^*} = \frac{A_u - iA_v}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad A_{b^*} = \frac{A_u + iA_v}{\sqrt{2}} \quad (2.115)$$

La valeur minimale du critère d'inséparabilité pour ces modes a^* et b^* s'obtient simplement à partir de (2.114) comme la somme des bruits minimaux des modes u et v

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \min_{\theta} \mathcal{I}_{a^*,b^*}(\theta) = \Delta X_u^2 + \Delta X_v^2 \quad (2.116)$$

Si les modes u et v sont tous les deux comprimés, alors les modes a^* et b^* sont intriqués et leur intrication est directement donnée par la somme des réductions de bruit de u et v . En effet, la situation est dans ce cas équivalente à celle de deux modes comprimés indépendants (au sens du critère d'inséparabilité) que l'on peut mélanger sur une lame séparatrice¹⁸ pour créer ainsi des modes intriqués.

Toutefois, l'expression de la rotation de polarisation¹⁹ à effectuer à la sortie de la cavité pour se placer dans la base "intriquée" n'est pas simple dans le cas général [Josse03c]. On peut néanmoins la calculer de façon formelle connaissant la matrice de variance des champs sortants A_1^{out} et A_2^{out} . On peut aussi remarquer qu'en raison de la symétrie choisie ($\Delta_1 = -\Delta_2$), les modes circulaires A_1 et A_2 sont comprimés sur des

¹⁸après avoir déphasé l'un des modes de $\pi/2$ par rapport à l'autre (voir le paragraphe C.2) du chapitre 1.

¹⁹qui dépend de la fréquence d'analyse

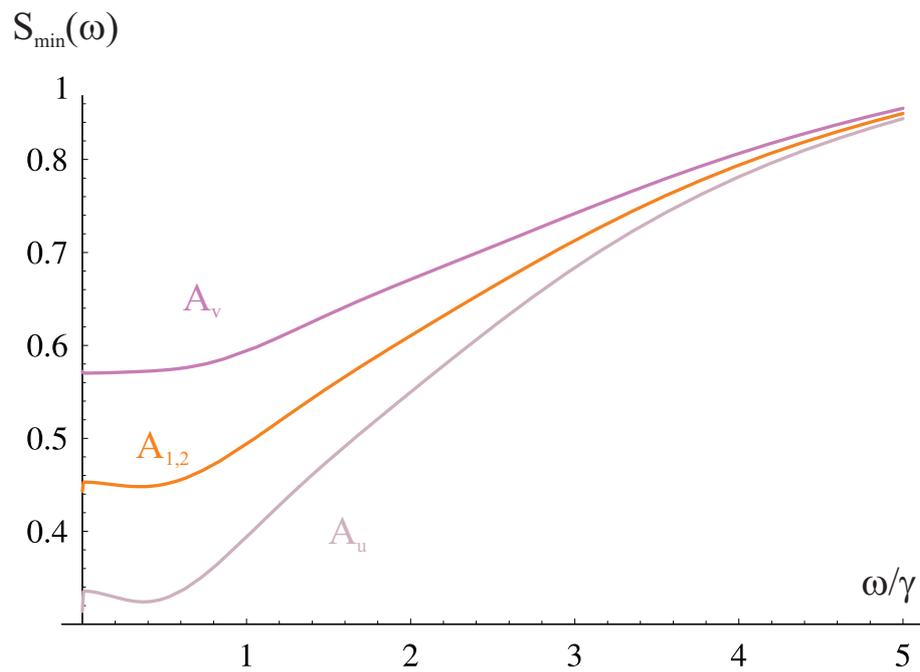


FIG. 2.22 – Spectres de bruit minimaux pour les modes “incorrélés” A_u et A_v , ainsi que pour les composantes circulaires A_1 et A_2 , dans les mêmes conditions que dans la figure 2.21. Le mode u est le mode qui présente la réduction de bruit maximale qu’il est possible d’extraire du système.

quadratures opposées ($\theta_{sq1} = -\theta_{sq2} = \theta_{sq}$), ce quelle que soit la fréquence d'analyse. Les modes de polarisation orthogonale

$$A_a = \frac{e^{-i\theta_{sq}} A_1 + iA_2 e^{i\theta_{sq}}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad A_b = \frac{e^{-i\theta_{sq}} A_1 - iA_2 e^{i\theta_{sq}}}{\sqrt{2}}, \quad (2.117)$$

obtenus en combinant les modes circulaires, sont alors intriqués. En effet, il est clair que le mode $(A_a + A_b)/\sqrt{2} = A_1 e^{-i\theta_{sq}}$ est comprimé en amplitude, alors que $(A_a - A_b)/\sqrt{2} = A_2 e^{i\theta_{sq}}$ est comprimé en phase. On peut exprimer l'intrication entre les modes a et b en utilisant le critère d'inséparabilité (1.73)

$$\mathcal{I}_{a,b} = \frac{1}{2} [\Delta(X_a - X_b)^2 + \Delta(Y_a + Y_b)^2] = \Delta X_1^2(\theta_{sq1}) + \Delta X_2^2(\theta_{sq2}) < 2$$

On retrouve le fait que l'intrication est donnée par la somme des réductions de bruits des modes circulaires. On peut se demander si l'intrication entre ces deux modes correspond à l'intrication maximale que l'on peut obtenir à la sortie de la cavité. En effet, bien qu'ils soient tous deux comprimés, les modes circulaires ne satisfont pas à la condition $\langle \delta A_1 \delta A_2 \rangle = 0$ et ne s'assimilent donc pas aux modes u, v ci-dessus. Toutefois, en appliquant les transformations données dans [Josse04b], on peut trouver ces modes incorrélés en fonction des modes circulaires; on montre alors que si le mode u est comprimé de façon maximale, le mode v est moins comprimé que les modes circulaires, de sorte que l'intrication maximale est bien donnée par la somme des réductions de bruit des modes circulaires (Fig. 2.23). Pour des paramètres dont les valeurs correspondent à des paramètres d'interaction typiques du dispositif actuel, on peut ainsi espérer obtenir plus de 3dB d'intrication. Notons que cette intrication augmente avec la coopérativité, et qu'augmenter le nombre d'atomes dans le piège pourrait améliorer la non linéarité du milieu. Des simulations numériques prédisent jusqu'à 10dB d'intrication si la coopérativité est de l'ordre de 1000.

B.5 Conclusion

Pour résumer, nous avons présenté deux applications des effets de cohérence atomique sur le bruit quantique du champ au voisinage d'une résonance EIT. Tout d'abord, nous avons montré que deux champs interagissant dans une situation de CPT résonnante avec des atomes froids en cavité peuvent échanger leurs fluctuations dans la bande passante de la cavité. Cela permet de réaliser un échangeur quantique optique, et de transférer par exemple de la réduction de bruit d'un champ à une certaine fréquence à un champ de fréquence différente.

Nous avons ensuite calculé les corrélations quantiques et l'intrication générées entre deux modes du champ par une interaction avec un nuage d'atomes froids au voisinage

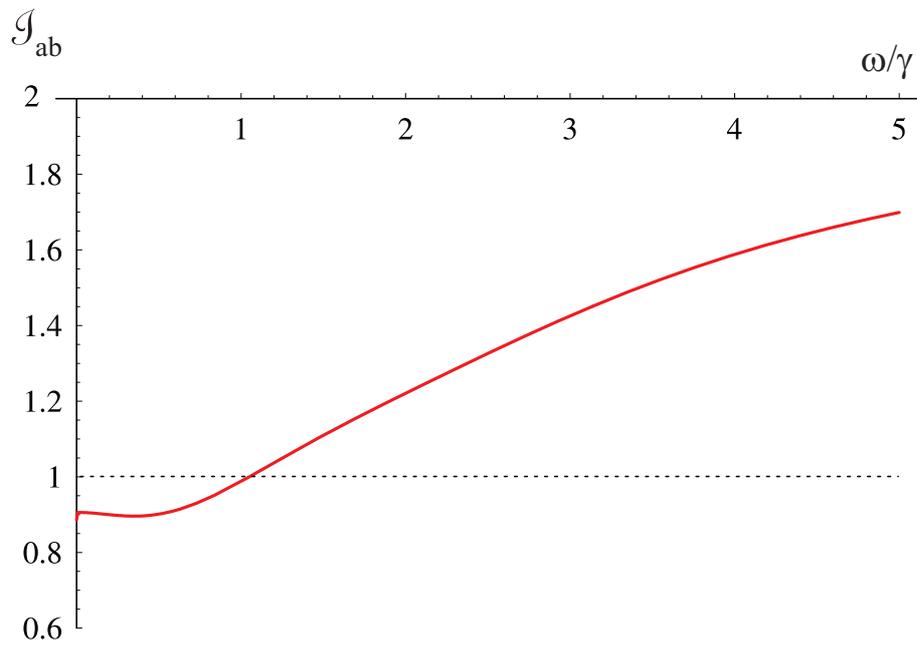


FIG. 2.23 – Intrication maximale $\mathcal{I}_{a,b}$ en fonction de la fréquence d'analyse. Pour chaque fréquence d'analyse, on effectue la rotation de polarisation qui permet d'obtenir les meilleures corrélations. Les paramètres sont les mêmes que dans la figure 2.21.

de la résonance EIT. La faible absorption et l'effet Kerr important produits par le milieu atomique proche de la résonance à deux photons pourraient permettre d'améliorer les résultats expérimentaux présentés dans la section [A.2](#). Notons que l'origine de la réduction des fluctuations quantique de la lumière est différente des situations étudiées jusqu'alors. Par opposition aux systèmes à deux niveaux, un tel milieu à trois niveaux permet de générer une cohérence maximale dans le fondamental, ce qui augmente sensiblement l'indice non linéaire du milieu. De plus, la réduction de l'absorption du fait de l'interférence quantique entre les champs permet de s'approcher plus près de résonance, sans que cela se traduise par une détérioration de l'intrication ou un excès de bruit atomique, comme cela a été mis en évidence dans les expériences.

Génération d'états comprimés atomiques

Sommaire

A	Introduction	81
A.1	Réduction du bruit quantique atomique	81
A.2	Réduction du bruit quantique avec des atomes froids en cavité	83
B	Réduction du bruit atomique dans un système en Λ	84
B.1	Calcul de la matrice de variance atomique	84
B.2	Interaction Raman et système équivalent	87
C	Réduction de bruit par effet Raman assistée par EIT	97
C.1	Système considéré et équations	98
C.2	Système à deux niveaux effectif	99
C.3	Spectre et variance atomiques dans le cas $\langle A_2 \rangle = 0$	100
C.4	Evolution en fonction de la coopérativité	102
C.5	Spectres de bruit atomique	104
D	Récapitulatif	105

A Introduction

A.1 Réduction du bruit quantique atomique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, l'état quantique d'un ensemble d'atomes peut être décrit à l'aide d'opérateurs collectifs de spin. Comme le champ électromagnétique quantifié, ces opérateurs possèdent des fluctuations quantiques intrinsèques,

qui définissent une *limite quantique standard atomique*. C'est ce bruit quantique qui limite la sensibilité des mesures de spectroscopie de population utilisées dans les horloges atomiques [Itano93, Santarelli99], et leur précision. L'utilisation d'états comprimés atomiques permet donc d'améliorer la sensibilité de ces horloges [Meyer01].

Pour générer des états comprimés atomiques il est nécessaire d'établir des corrélations entre les spins individuels de l'ensemble. Pour ce faire, on peut considérer plusieurs approches : la première consiste à faire interagir un champ électromagnétique avec un ensemble atomique, mesurer la modification des fluctuations induites par les atomes sur le champ et réaliser une mesure du bruit atomique. Plusieurs expériences de ce type ont été réalisées en utilisant l'effet Faraday [Kuzmich98, Kuzmich00a, Julsgaard01] : on fait interagir en simple passage un champ cohérent polarisé linéairement avec un ensemble atomique polarisé dans un état cohérent. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'effet Faraday modifie les fluctuations d'une quadrature du mode vide de polarisation orthogonale, de telle sorte que la mesure des fluctuations de cette quadrature renseigne sur l'état atomique. Il est alors possible de comprimer les fluctuations atomiques de manière conditionnée au résultat de mesure. Le groupe d'Eugene Polzik à l'université d'Aarhus au Danemark a ainsi pu intriquer deux cellules de césium par cette méthode [Julsgaard01].

On peut également utiliser cette modification des fluctuations du champ par les atomes pour effectuer une rétroaction sur les atomes. Cette méthode, initialement proposée par Wiseman *et al.* [Thomsen02], a été mise en oeuvre avec succès dans le groupe de Hideo Mabuchi à Caltech [Geremia04] : la mesure des fluctuations du champ permet de générer un champ magnétique haute fréquence au niveau du nuage atomique qui modifie à son tour les fluctuations atomiques. Une réduction de bruit conséquente - de l'ordre de 70% - a été ainsi obtenue.

Si l'on dispose d'états comprimés de la lumière, une seconde possibilité est de transférer la réduction de bruit du champ aux atomes, c'est-à-dire corrélérer les spins individuels par le biais de corrélations entre photons. Cette méthode fera l'objet d'une étude détaillée dans le chapitre suivant, ainsi que dans le chapitre 6.

Enfin, une troisième méthode consiste à utiliser l'interaction non-linéaire entre un ensemble d'atomes et un (ou plusieurs) modes du champ électromagnétique¹. C'est ce processus, dont l'étude a commencé dans le groupe lors de la thèse de Laurent Vernac, que nous étudions dans ce chapitre dans le cadre d'une interaction atomes-champs en cavité.

¹voir par exemple [Vernac00, Sørensen01a, Sørensen01b, Poulsen01b, Bouchoule02, Andre02a, Vernac02, Genes03].

A.2 Réduction du bruit quantique avec des atomes froids en cavité

En effet, nous avons vu que, près de résonance, en raison de la saturation de la transition, un nuage d'atomes froids à deux niveaux présente de fortes non linéarités, ce qui a pour conséquence pour le champ l'apparition de phénomènes de type bistabilité et, éventuellement, une réduction des fluctuations quantiques du champ sous le bruit quantique standard. Ces effets ont effectivement été observés dans le groupe lors des thèses de Laurent Hilico, Astrid Lambrecht et Thomas Coudreau. Au cours de sa thèse, Laurent Vernac a prédit que l'interaction non linéaire d'un ensemble d'atomes à deux niveaux e et g avec un champ en cavité pouvait également produire une réduction du bruit quantique atomique au voisinage des points tournants de bistabilité [Vernac01b]. La réduction de bruit atomique calculée était de l'ordre de 35% dans les conditions de son expérience [Vernac00]. Malheureusement, le spin atomique comprimé possède dans ce cas une durée de vie bien inférieure à la microseconde, ce qui rend sa détection difficile. Laurent Vernac a aussi étudié une autre configuration, mettant en jeu des atomes à trois niveaux en V : dans ce schéma, un champ pompe intense interagit avec les atomes sur une transition entre un niveau fondamental et un premier niveau excité 1, alors qu'un champ sonde interagit avec un autre niveau excité 2. Au voisinage des points tournants de bistabilité pour le champ pompe, il se produit une réduction de bruit du spin associé aux niveaux excités 1 et 2 d'environ 15% par rapport au bruit quantique standard [Vernac02]. Cependant, comme dans le système à deux niveaux, l'observation de cette réduction de bruit est rendue difficile, parce qu'elle se produit pendant un temps très court, donné par la durée de vie de cohérence entre les états excités 1 et 2.

Une solution à ce problème consiste à réduire les fluctuations quantiques de spins associés à des sous-niveaux (Zeeman ou hyperfins) de l'état fondamental. Dans ce cas, leur durée de vie, insensible à l'émission spontanée, peut être très longue (de l'ordre de plusieurs millisecondes pour des atomes refroidis dans un piège magnéto-optique). Nous avons étudié deux schémas qui permettent de réaliser cet objectif, le travail présenté dans ce chapitre étant le fruit d'une collaboration avec le professeur Paul Ber- man de l'université du Michigan à Ann Arbor. Dans la section **B** nous montrons que l'on peut réduire d'environ 30% les fluctuations quantiques d'un spin de longue durée de vie constitué par deux sous-niveaux fondamentaux dans une configuration Raman [Dantan03a].

Ensuite, dans la section **C**, nous présentons un schéma plus complexe - mais plus efficace - utilisant des atomes à quatre niveaux en "double Λ ", qui améliore notablement la réduction de bruit. On montre en particulier que, contrairement à la configuration

Raman, la réduction de bruit n'est plus limitée lorsqu'on augmente le nombre d'atomes, mais que la variance minimale atomique tend vers 0 comme $C^{-1/3}$ avec la coopérativité [Dantan03b].

B Réduction du bruit atomique dans un système en Λ

On considère un nuage d'atomes froids placé dans une cavité optique, interagissant avec deux champs : un champ pompe intense A_1 , qui traverse le milieu en simple passage hors de la cavité, interagit sur la transition $1 \rightarrow 3$ avec une fréquence de Rabi Ω , et un champ sonde quantique A_2 circulant dans la cavité et interagissant avec les atomes sur la transition $2 \rightarrow 3$ (Fig. 2.10).

Dans tout ce chapitre, nous nous placerons dans les conditions suivantes :

- le champ pompe est traité classiquement
- l'amplitude du champ sonde est supposée faible devant celle du champ pompe ($|g_2 \langle A_2 \rangle| \ll \Omega$)
- les désaccords à un photon sont grands devant le taux d'émission spontanée ($\Delta_{1,2} \gg \gamma$)
- on se place au voisinage de la résonance à deux photons : $\delta \ll \Delta = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$

Comme on l'a montré dans le chapitre précédent, l'évolution des observables du système est régie par les équations d'Heisenberg-Langevin suivantes

$$\dot{\Pi}_1 = i\Omega^* P_1 - i\Omega P_1^\dagger + \gamma \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_1 + \Lambda_1 + F_{11} \quad (3.1)$$

$$\dot{\Pi}_2 = ig_2 A_2^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_2^\dagger + \gamma \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_2 + \Lambda_2 + F_{22} \quad (3.2)$$

$$\dot{\Pi}_3 = -(i\Omega^* P_1 - i\Omega P_1^\dagger) - (ig_2 A_2^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_2^\dagger) - 2\gamma \Pi_3 + F_{33} \quad (3.3)$$

$$\dot{P}_1 = -(\gamma + i\Delta_1) P_1 + i\Omega(\Pi_1 - \Pi_3) + ig_2 A_2 P_r^\dagger + F_{13} \quad (3.4)$$

$$\dot{P}_2 = -(\gamma + i\Delta_2) P_2 + ig_2 A_2(\Pi_2 - \Pi_3) + i\Omega P_r + F_{23} \quad (3.5)$$

$$\dot{P}_r = -(\gamma_0 - i\delta) P_r + i\Omega^* P_2 - ig_2 A_2 P_1^\dagger + F_{21} \quad (3.6)$$

$$\dot{A}_2 = -(\kappa + i\Delta_{c2}) A_2 + \frac{ig_2}{\tau} P_2 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} A_2^{in} \quad (3.7)$$

avec les mêmes conventions que dans la section B.1.2 du chapitre 2.

B.1 Calcul de la matrice de variance atomique

De nouveau, nous sommes intéressés par les fluctuations des observables - atomiques, cette fois - autour d'un état stationnaire donné. La méthode de calcul de ces

fluctuations a été développée lors de la thèse de Laurent Vernac [Vernac01b]. Dans cette section nous l'appliquons au système en Λ étudié, ce qui permet d'obtenir numériquement les spectres et variances atomiques, étant données les valeurs des paramètres ajustables d'interaction. Dans la section B.2 nous établissons des résultats analytiques qui permettent d'expliquer de manière simple les calculs numériques et les phénomènes physiques mis en jeu.

B.1.1 Linéarisation et matrice de variance

Comme dans le chapitre 2, on obtient l'état stationnaire du système en se fixant la valeur des amplitudes des champs intracavité, des désaccords, des taux de relaxation et de repeuplement, ainsi que des constantes de couplage, et on linéarise autour de cet état, après avoir vérifié la stabilité du point de fonctionnement. On note $|\delta\xi(t)\rangle$ le vecteur des fluctuations du système

$$|\delta\xi(t)\rangle = |\delta A_2, \delta A_2^\dagger, \delta P_1, \delta P_1^\dagger, \delta P_2, \delta P_2^\dagger, \delta P_r, \delta P_r^\dagger, \delta \Pi_1, \delta \Pi_2, \delta \Pi_3\rangle \quad (3.8)$$

qui obéit à l'équation matricielle suivante

$$\frac{d}{dt}|\delta\xi\rangle = -[B_{11}]|\delta\xi\rangle + |F_\xi\rangle, \quad (3.9)$$

avec $[B_{11}]$ la matrice obtenue en linéarisant les équations (3.1-3.7) [voir aussi (2.61)]. La matrice de corrélation du système atomes-champ $[G(0)]$ se calcule de la même façon : dans le chapitre 2, nous en avons extrait la matrice de variance des champs intracavité pour en déduire celle des champs sortants. On peut extraire également de $[G(0)]$ la matrice de variance $[V_r]$ du spin équivalent associé aux observables du fondamental².

B.1.2 Passage dans la base du spin moyen

Considérons par exemple le cas du spin associé aux sous-niveaux fondamentaux. De $[G(0)]$, on extrait la matrice de variance, $[V_r]$, dans la base (J_x, J_y, J_z) . Or, on souhaite étudier les fluctuations du spin dans le plan orthogonal au spin moyen, orienté selon OZ (Fig. 3.1). Les nouveaux vecteurs unitaires $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ s'obtiennent à partir de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une rotation d'angle θ autour de \vec{j} et une rotation autour d'angle φ autour de Oz :

$$\vec{i}' = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \quad (3.10)$$

$$\vec{j}' = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}, \quad (3.11)$$

²On pourrait également calculer les propriétés de bruit des spins associés aux systèmes à deux niveaux $1 \rightarrow 3$ et $2 \rightarrow 3$ (voir [Vernac01b]).

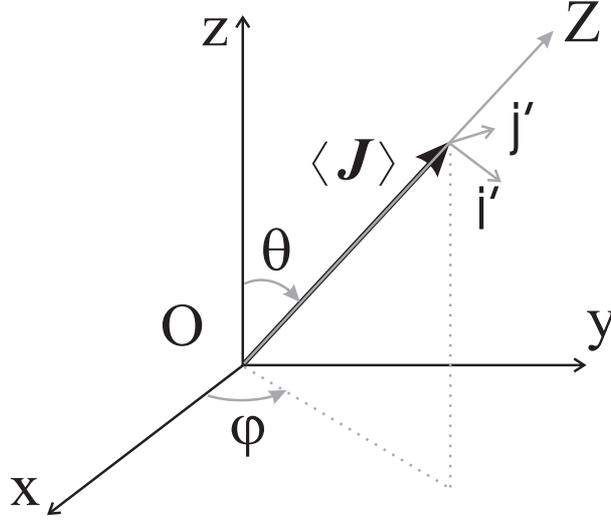


FIG. 3.1 – Passage dans la base du spin moyen : les fluctuations auxquelles on s'intéresse sont celles des composantes de spin dans le plan sous-tendu par \vec{i}' et \vec{j}' .

les angles θ et φ étant donnés par les valeurs moyennes du spin dans la base (J_x, J_y, J_z) :

$$\cos \theta = \frac{\langle J_z \rangle}{|\langle \vec{J} \rangle|}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}}{|\langle \vec{J} \rangle|} \quad (3.12)$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle J_x \rangle}{\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\langle J_y \rangle}{\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}} \quad (3.13)$$

On passe donc dans la base (J_X, J_Y) à l'aide de la matrice de changement de base $[R]$:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La matrice de variance $[\tilde{V}]$ dans le plan orthogonal est alors

$$[\tilde{V}] = [R][V_r][R]^\dagger \quad (3.15)$$

On étudie ensuite le bruit atomique dans ce plan ; une composante faisant un angle α avec OX s'écrit $J_\alpha = J_X \cos \alpha + J_Y \sin \alpha$. On en déduit que sa variance est donnée par l'expression :

$$\Delta J_\alpha^2 = \cos^2 \alpha \Delta J_X^2 + \sin^2 \alpha \Delta J_Y^2 + \sin(2\alpha) \Delta J_{XY}^2 \quad (3.16)$$

$$= \cos^2 \alpha [\tilde{V}]_{1,1} + \sin^2 \alpha [\tilde{V}]_{2,2} + \sin(2\alpha) \operatorname{Re}([\tilde{V}]_{1,2}) \quad (3.17)$$

En différenciant cette relation, on trouve que ΔJ_α^2 est minimale pour $\alpha = \alpha_0$ et maximale pour $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$, avec

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{2\Delta J_{XY}^2}{\Delta J_X^2 - \Delta J_Y^2} \quad (3.18)$$

Finalement, la composante de spin J_{α_0} est la composante qui possède la plus petite variance normalisée

$$\Delta J_{min}^2 = \frac{\Delta J_{\alpha_0}^2}{|\langle \vec{J} \rangle|/2} \quad (3.19)$$

Le spin est dans un état comprimé si la variance minimale associée est inférieure au bruit quantique standard atomique : $\Delta J_{min}^2 < 1$.

B.2 Interaction Raman et système équivalent

Il est bien connu que, dans une configuration ‘‘Raman’’, c’est-à-dire lorsque les champs sont fortement désaccordés par rapport à la résonance à un photon, mais proche de la résonance à deux photons, le problème se simplifie et se ramène au cas d’un système effectif à deux niveaux. On se place en régime de pompage optique, c’est-à-dire que l’on suppose que le taux de pompage Raman $\Gamma_R = \gamma\Omega^2/\Delta^2$ est petit devant le taux de relaxation de la population du niveau excité 2γ . Ceci est vérifié pour $\Omega \ll \Delta$. La population dans le niveau excité est alors négligeable. De plus, les dipôles optiques P_1 et P_2 évoluent rapidement par rapport aux observables dans le fondamental et on peut les éliminer adiabatiquement dans (3.4-3.5). A l’ordre 2 en $1/\Delta$, on obtient un système d’équations pour les variables de spin du fondamental $J_+ = P_r$, $J_- = P_r^\dagger$, $J_z = (\Pi_2 - \Pi_1)/2$ et le champ sonde A_2

$$\dot{J}_+ = -(\tilde{\gamma} - i\tilde{\delta})J_+ + 2i\tilde{g}A_2J_z + \tilde{F}_+ \quad (3.20)$$

$$\dot{J}_z = -\tilde{\gamma}J_z + \frac{\Delta\Lambda}{2} + i\tilde{g}(A_2^\dagger J_+ - A_2 J_-) + \tilde{F}_z \quad (3.21)$$

$$\dot{A}_2 = -(\kappa + i\tilde{\Delta}_c)A_2 + \frac{i\tilde{g}}{\tau}J_+ + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}A_2^{in} \quad (3.22)$$

où l’on a défini

- une constante de couplage effective $\tilde{g} = g\Omega/\Delta$ (Ω étant supposée réelle)
- un désaccord effectif à deux photons $\tilde{\delta} = \delta + \Omega^2/\Delta$, qui inclut le déplacement lumineux du niveau dû au champ pompe
- le taux de pompage optique ‘‘Raman’’ $\Gamma_R = \gamma\Omega^2/\Delta^2$, de telle sorte que le taux de relaxation total est $\tilde{\gamma} = \gamma_0 + \Gamma_R$,
- un désaccord effectif pour la cavité $\tilde{\Delta}_c = \Delta_c - 2g^2\langle \Pi_2 \rangle/\Delta\tau$, prenant en compte le déphasage linéaire du champ dû aux atomes³,

³En redéfinissant le déphasage avec la cavité, ce déphasage effectif qui dépend a priori de la population $\langle \Pi_2 \rangle$ à l’état stationnaire, peut être considéré comme un paramètre ajustable pour le système à deux niveaux effectif.

- un nouveau terme source $\Delta\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1 + N\Gamma_R$,
- ainsi que des nouvelles forces de Langevin $\tilde{F}_+ = F_{21} + \frac{\Omega}{\Delta}F_{23}$ et $\tilde{F}_z = F_z + \frac{\Omega}{2\Delta}F_{13} + \frac{\Omega}{2\Delta}F_{31}$ dont la matrice de diffusion est

$$[D] = N\tilde{\gamma} \begin{pmatrix} 3/2 + \langle J_z \rangle & 0 & -\langle J_+ \rangle \\ 0 & 1/2 - \langle J_z \rangle & 0 \\ -\langle J_- \rangle & 0 & 1/2 - \langle J_z \rangle \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

dans le cas où $\Lambda_2 = N\gamma_0$, $\Lambda_1 = 0$.

Ces équations sont celles d'un système à deux niveaux "ouvert" [Cohen96b], dans lequel le taux de relaxation de la cohérence est égal à celui des populations.

B.2.1 Etat stationnaire et bistabilité

On trouve pour les valeurs stationnaires les expressions usuelles d'un système à deux niveaux [Cohen96b]

$$\langle J_+ \rangle = i\alpha N \frac{1 + i\bar{\delta}}{1 + \bar{\delta}^2 + 4\alpha^2}, \quad \langle J_z \rangle = \frac{N}{2} \frac{1 + \bar{\delta}^2}{1 + \bar{\delta}^2 + 4\alpha^2} \quad (3.24)$$

où l'on a normalisé le désaccord et l'amplitude par le taux de relaxation total :

$$\bar{\delta} = \tilde{\delta}/\tilde{\gamma}, \quad \alpha = \tilde{g}\langle A_2 \rangle/\tilde{\gamma} \quad (3.25)$$

Quant au champ sonde, il satisfait à l'équation

$$I_2^{in} = I_2 \left[\left(1 + \frac{2\tilde{C}}{1 + \bar{\delta}^2 + 4I_2} \right)^2 + \left(\delta_c + \frac{2\tilde{C}\bar{\delta}}{1 + \bar{\delta}^2 + 4I_2} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

en notant $I_2 = |\alpha|^2$, $\delta_c = \tilde{\Delta}_c/\kappa$ et $\tilde{C} = \tilde{g}^2 N/T\tilde{\gamma}$. La coopérativité effective \tilde{C} est reliée à la coopérativité usuelle par

$$\tilde{C} = \frac{\tilde{g}^2 N}{T\tilde{\gamma}} = C \frac{\Gamma_R}{\gamma_0 + \Gamma_R} \quad (3.27)$$

Notons que lorsque $\gamma_0 = 0$, la coopérativité effective est strictement égale à la coopérativité classique. Un taux de relaxation non nul dans le fondamental tend naturellement à diminuer le comportement coopératif des atomes. Lorsque la coopérativité effective et l'intensité incidente sont assez grandes, le champ intracavité peut présenter un comportement bistable [Hilico92a]. On s'attend donc à pouvoir observer une réduction de bruit atomique pour certaines valeurs des paramètres d'interaction.

B.2.2 Spectres atomiques

La méthode présentée dans le paragraphe B.1 fournit directement les variances atomiques. Cependant, il est également intéressant de calculer les spectres de bruit. La méthode de calcul de ces spectres a été développée dans la thèse de Laurent Vernac. Le principe du calcul est de relier les fluctuations du spin aux fluctuations du champ incident et aux fluctuations dues au couplage avec les modes latéraux, ainsi que celles associées aux processus de relaxation et de repeuplement. En effet, comme on l'a représenté sur la figure 3.2, les fluctuations du champ incident se reflètent dans le champ intracavité. Les fluctuations du champ intracavité créent des fluctuations atomiques δJ_c , qui leur sont proportionnelles. Les fluctuations atomiques proviennent également des processus dissipatifs (couplage aux modes latéraux via l'émission spontanée, processus de relaxation de la cohérence et processus de repeuplement, etc.). La somme de ces fluctuations atomiques $\delta J = \delta J_c + \delta J_v$ crée à son tour une polarisation qui modifie les fluctuations du champ intracavité. Dans l'espace de Fourier, les fluctuations du spin

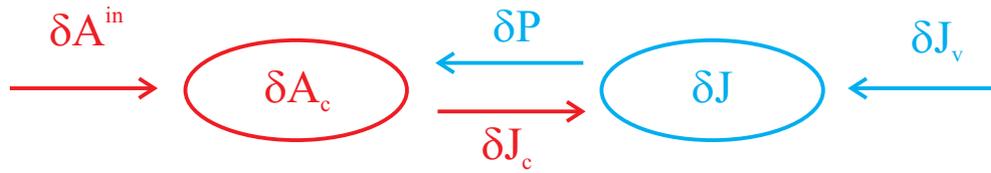


FIG. 3.2 – Couplage des fluctuations atomes-champs en cavité.

atomique $|\delta J(\omega)| = |\delta J_+(\omega), \delta J_-(\omega), \delta J_z(\omega)|$ sont la somme de deux contributions :

$$|\delta J(\omega)| = |\delta J(\omega)|_c + |\delta J(\omega)|_v \quad (3.28)$$

La première contribution est donnée par la réponse linéaire ; c'est la réponse des atomes à l'excitation par le champ intracavité. Elle s'exprime en fonction de la matrice de susceptibilité linéaire :

$$|\delta J(\omega)|_c = [\chi(\omega)]|\delta A_2(\omega)| \quad (3.29)$$

$[\chi(\omega)]$ étant la matrice des fluctuations atomiques définie par

$$[\chi(\omega)] = ([B_3] - i\omega\mathbb{1})^{-1}[C] \quad (3.30)$$

avec

$$[B_3] = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} - i\tilde{\delta} & 0 & -2i\tilde{g}\langle A_2 \rangle \\ 0 & \tilde{\gamma} + i\tilde{\delta} & 2i\tilde{g}\langle A_2 \rangle^* \\ -i\tilde{g}\langle A_2 \rangle^* & i\tilde{g}\langle A_2 \rangle & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} 2i\tilde{g}\langle J_z \rangle & 0 \\ 0 & -2i\tilde{g}\langle J_z \rangle \\ -i\tilde{g}\langle J_- \rangle & i\tilde{g}\langle J_+ \rangle \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

La seconde provient du couplage avec les modes latéraux, responsables de l'émission spontanée, ainsi que des processus de dépeuplement et repeuplement

$$|\delta J(\omega)\rangle_v = ([B_3] - i\omega\mathbb{1})^{-1}|\tilde{F}(\omega)\rangle \quad (3.32)$$

avec $|\tilde{F}(\omega)\rangle = |\tilde{F}_+(\omega), \tilde{F}_-(\omega), \tilde{F}_z(\omega)\rangle$. Dans le paragraphe B.1.5 du chapitre 2, on a montré que les fluctuations du champ intracavité s'expriment en fonction des fluctuations du champ incident et des fluctuations atomiques dues au couplage avec les modes latéraux

$$|\delta A_2(\omega)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\kappa\tau}}[\mu_2]|\delta A_2^{in}\rangle + \frac{1}{2\kappa}[\mu_2][N_2]|\delta P\rangle_v \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } |\delta P\rangle_v &= |\delta J_+, \delta J_-\rangle_v, & 2\kappa[\mu_2]^{-1} &= [M_2] - [N_2][\chi_P] \\ [M_2] &= \begin{pmatrix} \kappa + i\tilde{\Delta}_c - i\omega & 0 \\ 0 & \kappa - i\tilde{\Delta}_c - i\omega \end{pmatrix}, & [N_2] &= \begin{pmatrix} i\tilde{g}/\tau & 0 \\ 0 & -i\tilde{g}/\tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $[\chi_P]$ la restriction de la matrice de susceptibilité aux dipôles. On peut donc décomposer les fluctuations atomiques comme la somme de trois termes

$$|\delta J(\omega)\rangle = [J(\omega)]|\delta A_2^{in}(\omega)\rangle + |\delta J(\omega)\rangle_v + [K(\omega)]|\delta P(\omega)\rangle_v \quad (3.34)$$

où l'on a posé

$$[J(\omega)] = [\chi(\omega)][\mu_2(\omega)]/\sqrt{2\kappa\tau}, \quad [K(\omega)] = [\chi(\omega)][\mu_2(\omega)][N_2]/(2\kappa) \quad (3.35)$$

Les fluctuations du spin contiennent plusieurs contributions : le premier terme dû au champ entrant modifié par les atomes, les deux autres termes dûs aux processus de relaxation. Les deux derniers termes sont corrélés entre eux, mais pas avec le premier. En introduisant les corrélations entre ces deux termes, donnés par la matrice $[\sigma]^4$:

$$\langle |\delta P(\omega)\rangle_v |\delta J(\omega')\rangle_v \rangle = 2\pi N \delta(\omega - \omega') [\sigma_{23}(\omega)] \quad (3.36)$$

on obtient la matrice des corrélations atomiques $[V(\omega)]$

$$\begin{aligned} [V(\omega)] &= \{[J(\omega)][V_{in}(\omega)][J(\omega)]^\dagger\} + \{N[\sigma(\omega)] + N[K(\omega)][\sigma_{22}(\omega)][K(\omega)]^\dagger \\ &\quad + N([K(\omega)][\sigma_{23}(\omega)] + [\sigma_{32}(\omega)][K(\omega)]^\dagger)\} \\ &= [V_{ch}(\omega)] + [V_{at}(\omega)] \end{aligned}$$

La matrice des corrélations atomiques est donc la somme de deux matrices : une matrice de "champ" $[V_{ch}(\omega)] = [J(\omega)][V_{in}(\omega)][J(\omega)]^\dagger$ qui donne la contribution au spectre de bruit des fluctuations du champ incident, et une matrice "atomique" $[V_{at}(\omega)]$, qui

⁴voir l'appendice A pour l'expression de $[\sigma]$.

regroupe les contributions des différents processus de relaxation (émission spontanée, relaxation de la cohérence dans le fondamental, repeuplement). On peut ainsi calculer de manière rigoureuse les spectres de bruit et établir le poids des différentes contributions. La variance d'une composante dans le plan transverse peut s'écrire sous la forme

$$\Delta J_\alpha^2 = \Delta J_{ch}^2 + \Delta J_{at}^2 \quad (3.37)$$

Nous nous intéresserons particulièrement dans la suite aux poids respectifs de la contribution due aux fluctuations du champ incident (ΔJ_{ch}^2) et de la contribution des processus dissipatifs (ΔJ_{at}^2).

B.2.3 Spectres atomiques et réduction de bruit

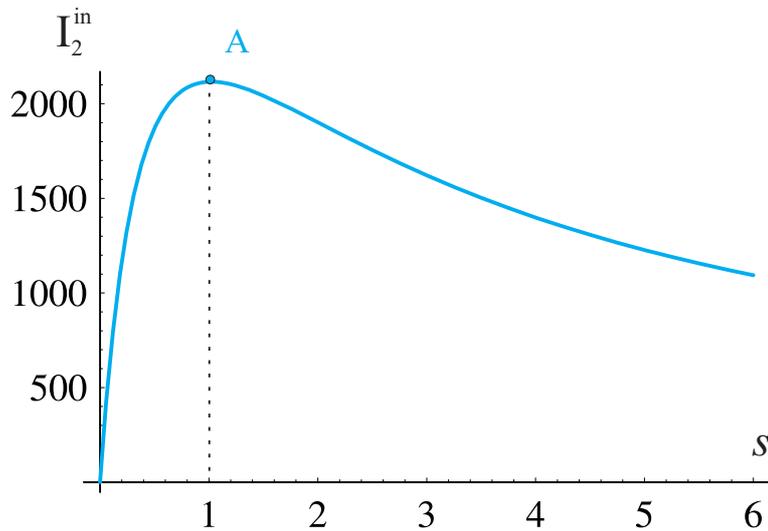


FIG. 3.3 – Courbe de bistabilité I_2^{in} en fonction de $s = 4I_2$ [$\bar{\delta} = 0$, $\tilde{\Delta}_c = 0$, $C = 100$, $\kappa = 2\gamma = 2000\gamma_0$, $\Gamma_R = \gamma/100$, $\Delta = 100\gamma$]. Le point tournant “haut” A correspond à $s \simeq 1$.

En appliquant les méthodes précédentes, on peut calculer les spectres de bruit des composantes de spin perpendiculaires au spin moyen, ainsi que leurs variances. On observe effectivement une réduction du bruit atomique lorsque l’on se place au voisinage du point bas de la courbe de bistabilité (voir Fig. 3.3). Un spectre de bruit typique est présenté sur la figure 3.4, ainsi que les contributions discutées précédemment. On remarque que le pic central de bruit possède une largeur bien plus grande que la largeur naturelle $\tilde{\gamma}$. Cet élargissement ($\propto 2\tilde{C}\tilde{\gamma}$) est dû à l’interaction avec le champ intracavité,

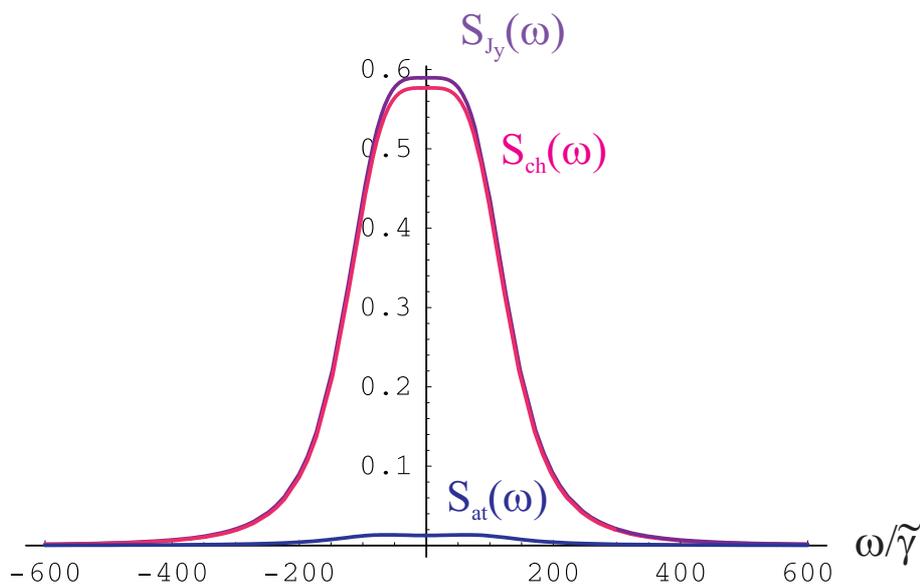


FIG. 3.4 – Spectre de bruit de la composante comprimée (J_y dans le cas présent) pour le point de fonctionnement A [$\bar{\delta} = 0$, $\tilde{\Delta}_c = 0$, $s = 1$, $C = 100$, $\kappa = 2\gamma = 2000\gamma_0$, $\Gamma_R = \gamma/100$, $\Delta = 100\gamma$]. $S_{ch}(\omega)$ et $S_{at}(\omega)$ donnent respectivement les spectres de bruit des contributions de “champ” et “atomique” au spectre total $S_{J_y}(\omega) = S_{ch}(\omega) + S_{at}(\omega)$. Leurs contributions à la variance atomiques sont données dans le tableau 3.1.

comme nous le verrons plus loin.

Les contributions aux variances des différents termes de bruit, définies dans la section B.2.2, sont données dans le tableau 3.1 : les termes de bruit ajouté par les processus dissipatifs sont négligeables ($\sim 3\%$) pour la composante la moins bruitée, les fluctuations du champ incident étant prédominantes. En revanche, un fort excès de bruit atomique est reporté sur la composante bruitée ; l'état atomique n'est donc pas minimal pour Heisenberg.

	ΔJ_α^2	ΔJ_{ch}^2	ΔJ_{at}^2	$\Delta J_{ch}^2/\Delta J_\alpha^2$
$\alpha = \pi/2$	0.718	0.695	0.023	97%
$\alpha = 0$	32.51	2.06	30.45	6%

TAB. 3.1 – Différentes contributions aux variances de la composante comprimée (ici J_y) et de la composante orthogonale, pour les paramètres correspondant au point A de la figure 3.4 ($s = 1$).

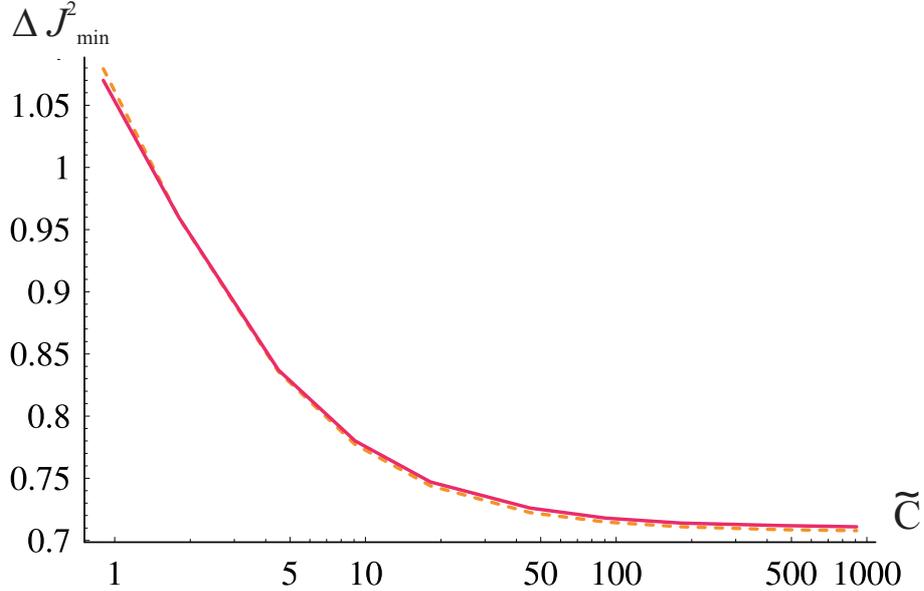


FIG. 3.5 – Variance minimale en fonction de la coopérativité effective \tilde{C} , pour le point de fonctionnement A de la figure 3.4. La courbe en traits pleins donne le résultat du calcul numérique exact, la courbe en pointillés le résultat du calcul analytique [Eq. (3.48)].

La figure 3.5 représente la variance minimale en fonction de la coopérativité effective,

pour un point de fonctionnement donné. Pour des valeurs suffisamment grandes de la coopérativité, on observe une réduction de bruit de l'ordre de 30%, ce quelque soit le point de fonctionnement choisi (fixé par $\bar{\delta}$, δ_c , \tilde{C} et I_2). Cette réduction de bruit sature lorsqu'on augmente l'interaction non-linéaire. Un comportement similaire a été également observé par Laurent Vernac dans ses calculs sur un système à deux niveaux [Vernac01b], la saturation avec C se produisant dans ce cas pour une réduction de bruit de l'ordre de 50%.

B.2.4 Interprétation physique de la réduction de bruit atomique

Dans la limite où la coopérativité est grande, les calculs numériques montrent que le point de fonctionnement qui optimise la réduction de bruit atomique est celui qui correspond à une cohérence atomique maximale à l'état stationnaire, c'est-à-dire $|\langle J_+ \rangle|$ maximal. Nous avons aussi vérifié numériquement que la réduction de bruit obtenue dépendait peu du désaccord $\tilde{\delta}$ ou du désaccord de la cavité $\tilde{\Delta}_c$.

Pour interpréter ces résultats, on peut donc étudier analytiquement la situation particulière correspondant au cas où le système présente de la bistabilité absorptive ($\tilde{\delta} = \tilde{\Delta}_c = 0$), et où le point de fonctionnement du système est proche du point tournant bas de la courbe de bistabilité (point A de la figure 3.3). On a alors

$$\langle J_z \rangle = \frac{N}{2} \frac{1}{1+s} \quad \text{et} \quad \langle J_+ \rangle = \frac{i\alpha N}{1+s} \quad \text{avec} \quad s = 4I_2 \quad (3.38)$$

Si l'on choisit α réel, il est facile de voir que le spin moyen est dans le plan (Oyz) , avec une longueur $|\langle \vec{J} \rangle| = \frac{N}{2} \frac{1}{\sqrt{1+s}}$.

La linéarisation de (3.20-3.21-3.22) conduit à

$$\delta \dot{J}_+ = -(\tilde{\gamma} - i\tilde{\delta})\delta J_+ + 2i\tilde{g}\langle A_2 \rangle \delta J_z + 2i\tilde{g}\langle J_z \rangle \delta A_2 + \tilde{F}_+ \quad (3.39)$$

$$\delta \dot{J}_z = -\tilde{\gamma}\delta J_z - i\tilde{g}[\langle J_- \rangle \delta A_2 - \langle J_+ \rangle \delta A_2^\dagger + \langle A_2 \rangle \delta J_- - \langle A_2 \rangle^* \delta J_+] + \tilde{F}_z \quad (3.40)$$

$$\delta \dot{A}_2 = -(\kappa + i\tilde{\Delta}_c)\delta A_2 + \frac{i\tilde{g}}{\tau}\delta J_+ + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_2^{in} \quad (3.41)$$

Si l'on se place dans des conditions de "mauvaise cavité" ($\kappa \gg \tilde{\gamma}$), le champ intracavité suit adiabatiquement l'évolution du spin atomique. On peut donc considérer qu'à tout instant

$$\delta A_2 = \frac{i\tilde{g}}{\tau(\kappa + i\tilde{\Delta}_c)}\delta J_+ + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} \frac{1}{\kappa + i\tilde{\Delta}_c} \delta A_2^{in} \quad (3.42)$$

En prenant la transformée de Fourier de (3.39-3.40-3.42) et en supposant $\tilde{\delta} = \tilde{\Delta}_c = 0$,

on obtient des équations réduites pour les fluctuations des variables atomiques

$$[\tilde{\gamma}(1 + 2\bar{C}) - i\omega] \delta J_x(\omega) = -\beta \delta Y_2^{in} + \tilde{F}_x \quad (3.43)$$

$$[\tilde{\gamma}(1 + 2\bar{C}) - i\omega] \delta J_y(\omega) = 2\alpha\tilde{\gamma}\delta J_z + \beta\delta X_2^{in} + \tilde{F}_y \quad (3.44)$$

$$(\tilde{\gamma} - i\omega)\delta J_z(\omega) = \tilde{\gamma}(4\bar{C} - 2\alpha)\delta J_y - 2\alpha\beta\delta X_2^{in} + \tilde{F}_z \quad (3.45)$$

avec $\bar{C} = \tilde{C}/(1 + s)$ et $\beta = \tilde{g}N/(1 + s)\sqrt{T}$. Les fluctuations de J_x sont découplées de celles de J_y et J_z . On voit que la largeur du spectre de la composante J_x , qui est toujours dans le plan transverse, est donnée par $\tilde{\gamma}(1 + 2\bar{C}) \gg \tilde{\gamma}$. On retrouve l'élargissement constaté dans la section précédente dû à l'effet coopératif des atomes (Fig. 3.4). On en déduit ensuite facilement le spectre, puis la variance de la composante J_x , qui est la composante dont le bruit est minimal dans ce cas particulier,

$$\Delta J_x^2 = \frac{N}{4} \frac{1}{1 + 2\bar{C}} \left[1 + \frac{2\bar{C}}{1 + s} \right] \simeq \frac{N}{4} \frac{1}{1 + s} \quad (\tilde{C} \gg 1), \quad (3.46)$$

que l'on doit normaliser par la longueur du spin moyen

$$\frac{|\langle \vec{J} \rangle|}{2} = \frac{N}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + s}} \quad (3.47)$$

La variance normalisée minimale vaut finalement

$$\Delta J_{min}^2 = \sqrt{1 + s} \frac{1 + s + \frac{2\tilde{C}}{1+s}}{1 + s + 2\tilde{C}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 + s}} \quad (\tilde{C} \gg (1 + s)^2) \quad (3.48)$$

Or, dans ce cas, le point bas de bistabilité correspond à $s = 1$ (lorsque $\tilde{C} \gg 1$)⁵. Les points tels que $s < 1$ sont donc stables. On trouve donc que la plus forte réduction de bruit, $\Delta J_{min}^2 = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$, est obtenue lorsque $s = 1$, ce qui correspond effectivement à la valeur maximale de la cohérence : $|\langle J_+ \rangle| = \langle J_z \rangle = N/4$. Nous avons vérifié que ces résultats, obtenus pour le point de fonctionnement particulier $\tilde{\delta} = \tilde{\Delta}_c = 0$, restent valable pour les autres paramètres.

La conclusion est que, bien que la longueur moyenne du spin décroisse avec l'intensité du champ (comme $1/\sqrt{1 + s}$), la contribution au bruit atomique dû aux fluctuations du champ incident décroît plus fortement (comme $1/(1 + s)$). Cette réduction des fluctuations atomiques peut se comprendre comme le résultat de l'interaction non linéaire entre le champ intracavité et les atomes. Les fluctuations atomiques entraînent une modification des fluctuations du champ intracavité, qui génère en retour des corrélations

⁵Les points haut et bas s'obtiennent en trouvant les points de tangente horizontale dans la figure 3.3. On trouve $s_{\pm} = \tilde{C} - 1 \pm \sqrt{\tilde{C}^2 - 4\tilde{C}}$, soit : $s_+ \simeq 2\tilde{C}$ et $s_- \simeq 1 + 2/\tilde{C}$ ($\tilde{C} \gg 1$).

entre les spins. L'interaction en cavité avec un champ cohérent permet de corrélérer entre eux les différents atomes du nuage et de réduire les fluctuations atomiques, d'où l'appellation *self-spin squeezing* utilisée dans le groupe pour qualifier ce type de réduction de bruit atomique [Vernac00]. Comme le terme provenant des fluctuations du champ incident est largement prédominant lorsque la coopérativité est grande, les fluctuations relatives - normalisées par la valeur moyenne du spin - décroissent avec l'intensité intracavité. La réduction de bruit que l'on peut obtenir est toutefois limitée par l'instabilité statique du système. Cette étude a montré que la plus grande réduction de bruit est obtenue lorsque le module de la valeur moyenne de la cohérence est maximum. Dans le cas du processus Raman étudié dans ce paragraphe, nous avons montré que le module de cette cohérence vaut au plus $N/4$, ce qui limite la réduction de bruit à $1/\sqrt{2}$. Pour augmenter la réduction de bruit, il faut donc ajouter au processus Raman, un autre processus qui permette de créer une cohérence dans l'état fondamental sans détruire les corrélations entre les atomes créées par l'effet Raman. Le processus le plus "naturel" pour générer une cohérence dans le fondamental est un processus en EIT. Nous étudions donc dans la section C la réduction de bruit par effet Raman, assistée par EIT.

B.2.5 Spectres du champ sortant

On peut également calculer les spectres de bruit du champ sortant de la cavité, comme nous l'avons fait dans le chapitre 2. Pour des points de fonctionnement correspondant à une réduction de bruit atomique, on peut observer une réduction de bruit dans le champ sortant, réduction de bruit qui se produit à basse fréquence (i.e. aux fréquences d'évolution des fluctuations du spin dans le fondamental). Toutefois, cette réduction de bruit n'est pas systématique et reste peu importante. Sur la figure 3.6, on a représenté deux spectres de bruit minimaux correspondant à deux points de fonctionnement, le premier dans un cas où la bistabilité est absorptive ($\bar{\delta} = 0$, point A), le second dans un cas où la bistabilité est dispersive ($\bar{\delta} = 10$). On constate qu'il faut s'écarter de la résonance à deux photons pour que atomes et champ sortant soient tous deux dans des états comprimés. Cela illustre le fait qu'une réduction de bruit dans le champ sortant n'est pas nécessairement le signe d'une réduction de bruit atomique, et inversement.

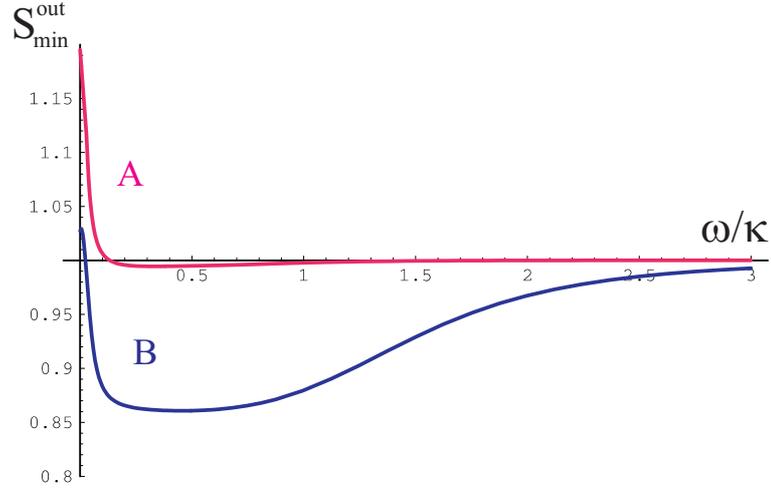


FIG. 3.6 – Spectres de bruit de la quadrature la moins bruyante du champ sortant, pour les deux points de fonctionnement : “bistabilité absorptive” [point A, Fig. 3.3] et “dispersive” [B : $\bar{\delta} = 10$, $\tilde{\Delta}_c = 0$, $I_2 = 25.2$, $C = 100$, $\kappa = 2\gamma$, $\Gamma_R = \gamma/100$, $\Delta = 100\gamma$].

C Réduction de bruit par effet Raman assistée par EIT

Un moyen simple pour augmenter la valeur moyenne de la cohérence à l’état stationnaire consiste à pomper de manière résonnante la cohérence à l’aide d’un niveau auxiliaire. On considère donc le modèle précédent auquel on ajoute deux champs supplémentaires qui interagissent à partir des sous-niveaux fondamentaux de manière résonnante avec un second niveau excité 4 (voir Fig. 3.7). Ces deux champs, de même amplitude et résonnants à un et deux photons comme dans le chapitre 2, peuvent créer une cohérence maximum, $\rho_{12} \simeq -1/2$, entre les deux sous-niveaux fondamentaux. A l’état stationnaire, ces champs ne sont quasiment pas absorbés, on retrouve une situation de transparence électromagnétiquement induite (ou de CPT). Le résultat majeur de cette section est que la réduction de bruit optimale obtenue par cette méthode est bien meilleure que dans le cas précédent - pour des paramètres expérimentaux raisonnables, elle atteint environ 8dB. De plus, la variance minimale tend vers 0 avec la coopérativité, comme $C^{-1/3}$, ce qui montre qu’il est possible d’obtenir un “self-spin squeezing” arbitrairement grand avec des atomes froids en cavité.

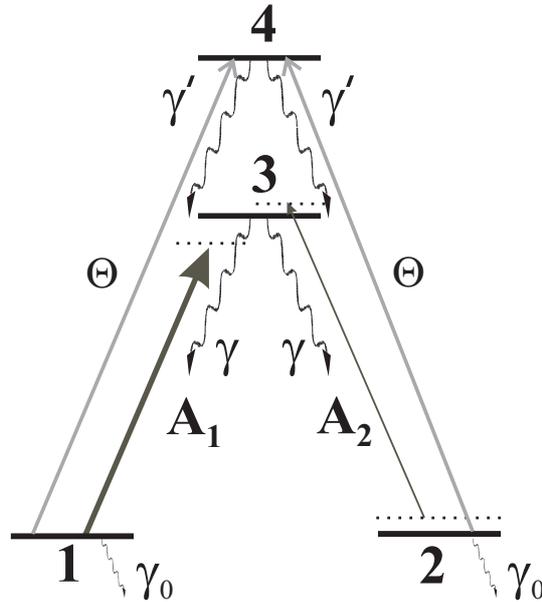


FIG. 3.7 – Structure atomique en double Λ .

C.1 Système considéré et équations

Comme indiqué sur la figure 3.7, on considère un ensemble d'atomes à 4 niveaux en double Λ , interagissant avec deux paires de champs : les mêmes champs Raman, A_1 et A_2 , que précédemment, sur les transitions $1 \rightarrow 3$ et $2 \rightarrow 3$, et deux modes d'un champ Θ en cavité. On dénote par le même symbole les deux modes, qui peuvent être dégénérés en polarisation ou bien en fréquence selon le schéma considéré. Ce champ a été pris en cavité pour assurer un traitement quantique complet, mais nous verrons que les fluctuations de ce champ n'ont pas d'influence sur les résultats dans le régime étudié. On pourrait, sans changer les conclusions, le traiter comme un champ classique se propageant en dehors de la cavité. Le système complet doit maintenant être décrit par 16 observables, et le système d'équations d'Heisenberg-Langevin régissant leur évolution

sont, avec les notations de la section précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi_1}{dt} &= i\Omega_1^* P_{13} - i\Omega_1 P_{13}^\dagger + ig'\Theta^\dagger P_{14} - ig'\Theta P_{14}^\dagger + \gamma\Pi_3 + \gamma'\Pi_4 - \gamma_0\Pi_1 + \Lambda_1 + F_{11} \\
\frac{d\Pi_2}{dt} &= igA_2^\dagger P_{23} - igA_2 P_{23}^\dagger + ig'\Theta^\dagger P_{24} - ig'\Theta P_{24}^\dagger + \gamma\Pi_3 + \gamma'\Pi_4 - \gamma_0\Pi_2 + \Lambda_2 + F_{22} \\
\frac{d\Pi_3}{dt} &= -(i\Omega_1^* P_{13} - i\Omega_1 P_{13}^\dagger) - (igA_2^\dagger P_{23} - igA_2 P_{23}^\dagger) - 2\gamma\Pi_3 + F_{33} \\
\frac{d\Pi_4}{dt} &= -(ig'\Theta^\dagger P_{14} - ig'\Theta P_{14}^\dagger) - (ig'\Theta^\dagger P_{24} - ig'\Theta P_{24}^\dagger) - 2\gamma'\Pi_4 + F_{44} \\
\frac{dP_{13}}{dt} &= -(\gamma + i\Delta_1)P_{13} + i\Omega_1(\Pi_1 - \Pi_3) + igA_2 P_r^\dagger + F_{13} \\
\frac{dP_{23}}{dt} &= -(\gamma + i\Delta_2)P_{23} + igA_2(\Pi_2 - \Pi_3) + i\Omega P_r + F_{23} \\
\frac{dP_{14}}{dt} &= -\gamma'P_{14} + ig'\Theta(\Pi_1 - \Pi_4) + ig'\Theta P_r^\dagger + F_{14} \\
\frac{dP_{24}}{dt} &= -\gamma'P_{24} + ig'\Theta(\Pi_2 - \Pi_4) + ig'\Theta P_r + F_{24} \\
\frac{dP_r}{dt} &= -(\gamma_0 - i\delta)P_r + i\Omega_1^* P_{23} - igA_2 P_{13}^\dagger + ig'\Theta^\dagger P_{24} - ig'\Theta P_{14}^\dagger + F_{21} \\
\frac{dA_2}{dt} &= -(\kappa + i\Delta_c)A_2 + \frac{ig}{\tau}P_{23} + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}A_2^{in} \\
\frac{d\Theta}{dt} &= -(\kappa' + i\Delta'_c)\Theta + \frac{ig'}{\tau'}(P_{14} + P_{24}) + \sqrt{\frac{2\kappa'}{\tau'}}\Theta^{in}
\end{aligned}$$

où g et g' sont supposés réels. Les taux de relaxation des dipôles P_{14} et P_{24} ont été pris égaux pour simplifier.

C.2 Système à deux niveaux effectif

Pour l'interaction en EIT dans le second système en Λ , on choisit un pompage optique $\Gamma_E = 2g'|\langle\Theta\rangle|^2/\gamma'$ faible devant γ' . Dans ces conditions, la population du niveau 4 est négligeable et les dipôles optiques P_{14} et P_{24} évoluent toujours rapidement par rapport aux observables dans le fondamental. On peut donc procéder à des éliminations adiabatiques similaires à celles effectuées dans la paragraphe B.2.3 pour les cohérences P_{13} et P_{23} . On obtient alors des équations ne mettant en jeu que les observables du fondamental et le champ sonde A_2 . On a donc de nouveau un système à deux niveaux

effectif :

$$\dot{J}_+ = -(\tilde{\gamma} - i\tilde{\delta})J_+ + \tilde{\Lambda}_{12} + 2i\tilde{g}A_2J_z + \tilde{F}_+ \quad (3.49)$$

$$\dot{J}_z = -\tilde{\gamma}J_z + \frac{\Delta\tilde{\Lambda}}{2} + i\tilde{g}(A_2^\dagger J_+ - J_- A_2) + \tilde{F}_z \quad (3.50)$$

$$\dot{A}_2 = -(\kappa + i\tilde{\Delta}_c)A_2 + i\frac{\tilde{g}}{\tau}J_+ + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}A_2^{in} \quad (3.51)$$

Si $\tilde{\delta}$ et \tilde{g} sont inchangés par rapport au schéma précédent⁶, le taux de relaxation et les termes sources sont modifiés :

$$\tilde{\gamma} = \gamma_0 + \Gamma_R + \Gamma_E \quad (3.52)$$

$$\Delta\tilde{\Lambda} = \Lambda_2 - \Lambda_1 + N\Gamma_R \quad (3.53)$$

$$\tilde{\Lambda}_{12} = -N\Gamma_E/2 \quad (3.54)$$

en supposant $\langle\Theta\rangle$ réel. Ce dernier terme source traduit le pompage dans l'état noir ($|1\rangle - |2\rangle$)/ $\sqrt{2}$. On suppose pour simplifier que le processus de repeuplement est symétrique : $\Lambda_1 = \Lambda_2 = N\gamma_0/2$. Les forces de Langevin sont également modifiées pour prendre en compte le bruit supplémentaire dû au pompage en EIT. En notant $\bar{J}_\alpha = \langle J_\alpha \rangle/N$, la matrice de diffusion atomique s'écrit

$$[D_{at}] = N \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} + \frac{\Gamma_R}{2} + \tilde{\gamma}\bar{J}_z + \Gamma_E\bar{J}_- & \Gamma_E\bar{J}_+ & \frac{\Gamma_E}{4} + \frac{\Gamma_E}{2}\bar{J}_z - (\tilde{\gamma} + \Gamma_R)\bar{J}_+ \\ \Gamma_E\bar{J}_- & \tilde{\gamma} - \frac{\Gamma_R}{2} - \tilde{\gamma}\bar{J}_z + \Gamma_E\bar{J}_+ & -\frac{\Gamma_E}{4} + \frac{\Gamma_E}{2}\bar{J}_z + (\tilde{\gamma} - \Gamma_R)\bar{J}_- \\ \frac{\Gamma_E}{4} + \frac{\Gamma_E}{2}\bar{J}_z - (\tilde{\gamma} + \Gamma_R)\bar{J}_- & -\frac{\Gamma_E}{4} + \frac{\Gamma_E}{2}\bar{J}_z + (\tilde{\gamma} - \Gamma_R)\bar{J}_+ & \frac{\tilde{\gamma}}{2} - \Gamma_R\bar{J}_z \end{pmatrix}$$

C.3 Spectre et variance atomiques dans le cas $\langle A_2 \rangle = 0$

On peut procéder aux mêmes calculs que dans le cas du simple Λ et dériver les spectres et variances atomiques en appliquant la même méthode de résolution numérique des équations. On constate que la meilleure réduction de bruit atomique est obtenue au voisinage de la résonance à deux photons ($\tilde{\delta} = 0$), pour un désaccord de la cavité nul ($\Delta_c = 0$) et lorsque le champ intracavité a une valeur moyenne nulle : $\langle A_2 \rangle = 0$. Pour la clarté de la discussion physique et pour donner quelques résultats analytiques, on va se placer dans cette situation. L'état stationnaire est alors trivial :

$$\langle J_+ \rangle = \langle J_- \rangle = -\frac{N}{2} \frac{\Gamma_E}{\gamma_0 + \Gamma_R + \Gamma_E}, \quad \langle J_z \rangle = \frac{N}{2} \frac{\Gamma_R}{\gamma_0 + \Gamma_R + \Gamma_E} \quad (3.55)$$

On voit clairement l'effet des champs sur le spin associé à la cohérence atomique dans le fondamental : le champ pompe Raman tend à augmenter la différence de population

⁶Les champs Θ ayant même amplitude, ils ne déplacent pas les niveaux.

en pompant les atomes dans le niveau 2, alors que le champ Θ tend au contraire à égaliser les populations et augmenter la cohérence. Les équations des fluctuations dans le système effectif prennent également une forme simple

$$\delta\dot{J}_x = -\tilde{\gamma}\delta J_x - \tilde{g}\langle J_z \rangle \delta Y_2 + \tilde{F}_x \quad (3.56)$$

$$\delta\dot{J}_y = -\tilde{\gamma}\delta J_y + \tilde{g}\langle J_z \rangle \delta X_2 + \tilde{F}_y \quad (3.57)$$

$$\delta\dot{J}_z = -\tilde{\gamma}\delta J_z - \tilde{g}\delta Y_2 + \tilde{F}_z \quad (3.58)$$

$$\delta\dot{X}_2 = -\kappa\delta X_2 - \frac{2\tilde{g}}{\tau}\delta J_y + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta X_2^{in} \quad (3.59)$$

$$\delta\dot{Y}_2 = -\kappa\delta Y_2 + \frac{2\tilde{g}}{\tau}\delta J_x + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta Y_2^{in} \quad (3.60)$$

On constate que δJ_y n'est couplé qu'à δX_2 , alors que δJ_x et δJ_y ne sont couplées qu'à δY_2 . Or, le spin moyen est dans le plan (Oxz) , d'après (3.55). On peut montrer en résolvant le système dans l'espace de Fourier que la composante de bruit minimal dans le plan orthogonal au spin moyen est J_y . Sa variance est donnée par :

$$\Delta J_y^2 = \frac{N}{4} \left[1 - \frac{2C}{1 + \tilde{\rho}} \frac{\Gamma_R^2(\gamma_0 + \Gamma_E)}{\tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}^2 + 2C\Gamma_R^2)} \right] \quad (3.61)$$

avec $\tilde{\rho} = \tilde{\gamma}/\kappa = \rho\tilde{\gamma}/\gamma_0$. Il est clair que, dans le cas d'une mauvaise cavité ($\kappa \gg \tilde{\gamma}$) et pour une coopérativité élevée ($C \gg 1$), les fluctuations sont réduites sous la valeur de $N/4$, qui correspond à la limite quantique standard pour un état atomique complètement polarisé. Toutefois, on doit comparer ces fluctuations à la moitié de la longueur du spin moyen, qui vaut

$$|\langle \vec{J} \rangle|/2 = \frac{N}{4} \frac{\sqrt{\Gamma_E^2 + \Gamma_R^2}}{\tilde{\gamma}} \quad (3.62)$$

La courbe épaisse de la figure 3.8 représente la variation de la variance minimale $\Delta J_{min}^2 = \Delta J_y^2 / (|\langle \vec{J} \rangle|/2)$ en fonction du taux de pompage EIT : la variance minimale (normalisée) peut être notablement inférieure à 1 et passe par un minimum lorsque $\gamma_0 \ll \Gamma_E \ll \gamma'$. Sur la figure 3.8, on a tracé également la variance (non normalisée) J_y , ainsi que la demi-longueur du spin moyen (normalisées par $N/4$). On constate que ces deux quantités passent également par des minima quand on augmente le taux de pompage de la cohérence. Cependant, ces minima sont distincts, et il existe un régime de pompage pour lequel le spin moyen voit sa longueur augmenter plus vite que les fluctuations, ce qui correspond bien à une réduction des fluctuations relatives, c'est-à-dire à de la compression de bruit atomique. En absence de création de cohérence par le processus d'EIT ($\Gamma_E = 0$) ou, au contraire, pour un pompage saturé ($\Gamma_E \gg \Gamma_R, \gamma_0$), les atomes sont dans un état cohérent. On peut remarquer également que si l'on supprime

l'interaction Raman ($\Gamma_R = 0$), alors la variance minimale est toujours supérieure à 1, ce qui montre qu'une configuration de transparence électromagnétiquement induite purement résonnante ne génère pas de réduction du bruit atomique.

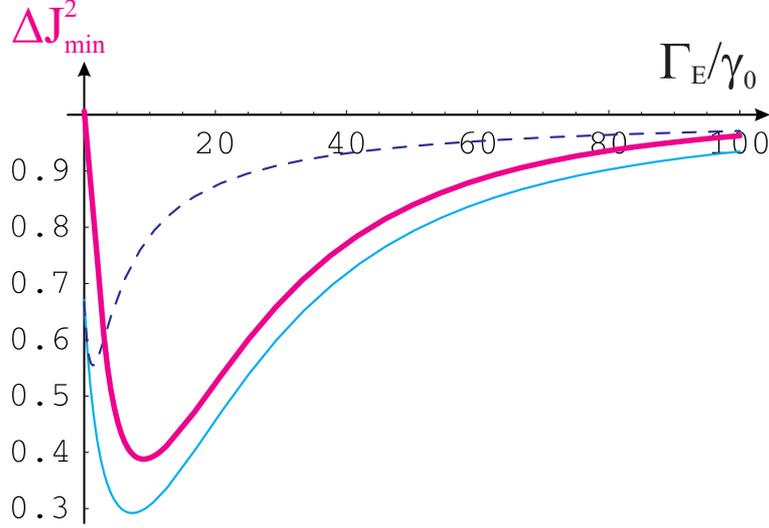


FIG. 3.8 – Variance minimale normalisée ΔJ_{\min}^2 (trait plein épais) en fonction du taux de pompage EIT Γ_E . La moitié du spin moyen $|\langle \vec{J} \rangle|/2$ (pointillés) et la variance ΔJ_y^2 (trait plein fin) sont aussi représentées (normalisées par $N/4$) pour les mêmes valeurs des paramètres : $C = 100$, $\rho = 1/2000$, $\Gamma_R = 2\gamma_0$.

La réduction de bruit optimale se produit lorsque l'écart entre la longueur du spin moyen et les fluctuations est maximal. On peut interpréter cette dépendance de la compression de bruit de la manière suivante : il faut d'abord un pompage en EIT suffisant pour augmenter la valeur de la cohérence ρ_{12} : $\Gamma_E \gg \Gamma_R, \gamma_0$, mais il est également nécessaire que les spins soient suffisamment corrélés par l'interaction Raman pour dominer le bruit ajouté par le pompage. D'après (3.61), ceci se traduit par la condition $C\Gamma_R^2/\tilde{\gamma}^2 = C\Gamma_R^2/(\gamma_0 + \Gamma_R + \Gamma_E)^2 \geq 1$. Cette condition est satisfaite pour des valeurs suffisamment grandes de Γ_E . Il faut également satisfaire à la condition habituelle, $\Gamma_E \ll \kappa$: les fréquences de réponse atomique ne doivent pas être trop grandes par rapport à la bande passante de la cavité, ce qui fixe une limite supérieure sur le pompage.

C.4 Evolution en fonction de la coopérativité

On peut optimiser la variance minimale en choisissant judicieusement les taux de pompage Raman et EIT pour une valeur de C donnée. Dans les conditions expérimentales habituelles, γ_0 est très inférieur à κ , ce qui implique $\rho \ll 1$. Sur la figure 3.9 on

a tracé l'évolution de la variance minimale en fonction du pompage EIT pour diverses valeurs du pompage Raman, la valeur de la coopérativité étant fixée à 100. On constate qu'il existe un point de fonctionnement optimal qui minimise la variance par rapport à ces deux paramètres. Dans le régime $C \gg 1$, avec toutefois $\rho C^{1/3} \ll \kappa$, on peut montrer que les taux de pompage qui optimisent la réduction de bruit sont donnés par :

$$\Gamma_R^* \simeq \sqrt{\frac{3}{2\rho C}} \gamma_0, \quad \Gamma_E^* \simeq \sqrt{\frac{3}{2\rho C^{1/3}}} \gamma_0 \quad (3.63)$$

ce qui conduit à une variance minimale optimale

$$\Delta J_{min}^{2*} \simeq \frac{3}{2C^{1/3}} \left(1 + \frac{1}{2C^{1/3}} + \frac{2}{3} \sqrt{6\rho C^{1/3}} \right) \quad (3.64)$$

Dans cette limite, le bruit atomique tend vers 0 comme $C^{-1/3}$, la contribution du dernier terme étant très faible pour des valeurs accessibles de la coopérativité. Nous avons représenté la compression de bruit optimale en dB sur la figure 3.10 en fonction de la coopérativité ; pour $C = 100$, la réduction de bruit vaut 63% (4.3 dB), et atteint 83% (7.7 dB) pour $C = 1000$. La présence du taux de relaxation dans le fondamental

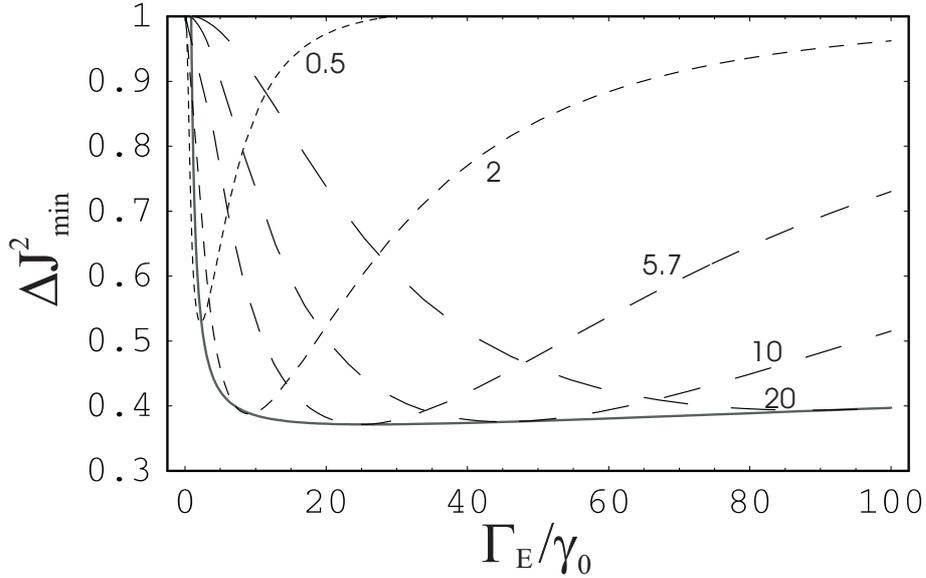


FIG. 3.9 – Variance minimale en fonction du taux de pompage EIT, pour différentes valeurs de pompage Raman $\Gamma_R/\gamma_0 = 0.5, 2, 5.7, 10, 20$. La courbe en traits pleins représente la variance minimale pour la valeur du taux de pompage Raman optimale (3.63) : $\Gamma_R = \Gamma_R^* = C^{-1/3}\Gamma_E$. Les taux de pompage minimisant la variance sont $\Gamma_E^* = 25\gamma_0$ et $\Gamma_R^* = 5.5\gamma_0$. Paramètres : $C = 100$, $\rho = 1/2000$.

fixe l'échelle de fréquence physique pour les taux de pompage optimaux ; on trouve que

ceux-ci doivent être de l'ordre de $\sqrt{\kappa\gamma_0}$. Pour une durée de vie infinie du fondamental, on pourrait en principe prendre des taux de pompage arbitrairement faibles, seul le rapport $\Gamma_E/\Gamma_R = C^{1/3}$ étant nécessaire pour obtenir (3.64). Le fait que l'inverse de la durée de vie du fondamental fixe une échelle basse fréquence est important pour les prochains chapitres, dans lesquels nous retrouverons des considérations analogues.

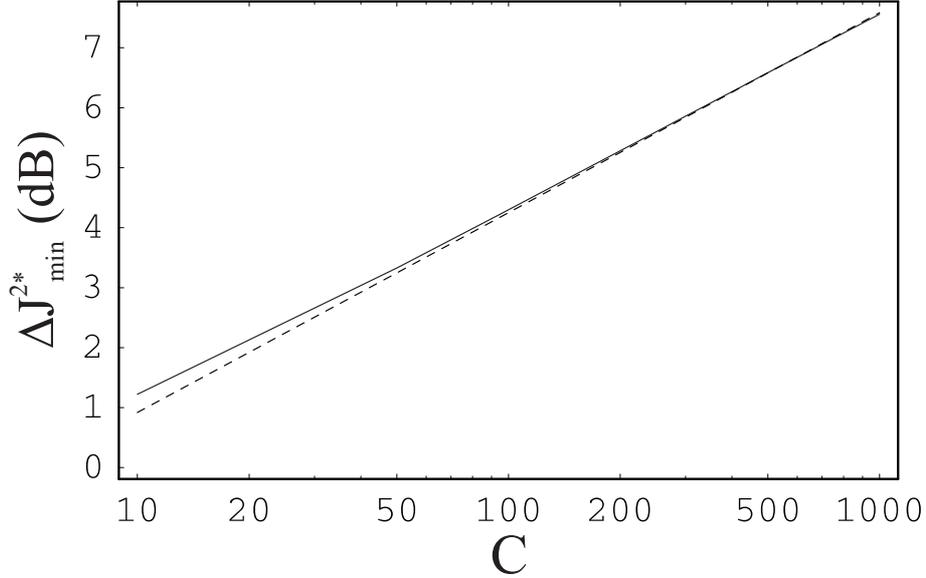


FIG. 3.10 – Variance minimale optimisée (en dB) en fonction de la coopérativité ($\rho = 1/2000$) en échelle log-log. La courbe plein donne le résultat exact et la courbe en pointillés un fit de la variance minimale en $C^{-1/3}$.

C.5 Spectres de bruit atomique

On peut, comme dans le cas du Λ simple, calculer les différentes contributions du spectre de bruit atomique. En particulier, on peut comparer les contributions des fluctuations du champ incident et du bruit atomique :

$$S_{ch} = \frac{N C \Gamma_R^3}{\kappa \tilde{\gamma}^2} \frac{1}{|D(\bar{\omega})|^2}, \quad S_{at} = \frac{N \tilde{\rho}}{2} \frac{1 + \bar{\omega}^2}{|D(\bar{\omega})|^2} \quad (3.65)$$

avec $\bar{\omega} = \omega/\kappa$ and $D(\bar{\omega}) = (1 - i\bar{\omega})(\tilde{\rho} - i\bar{\omega}) + 2\rho C \Gamma_R^2 / \gamma_0 \tilde{\gamma}$. Ces contributions sont représentées sur la figure 3.11, ainsi que le spectre de bruit atomique minimal. De nouveau, pour expliquer ces résultats, on peut se placer dans le cas d'une mauvaise cavité ($\kappa \gg \tilde{\gamma}$) : on élimine adiabatiquement le champ intracavité dans (3.59), on reporte dans l'équation de J_y et on obtient un taux de relaxation effectif pour les fluctuations du spin, $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} + 2C \Gamma_R^2 / \tilde{\gamma}$, qui donne la largeur du spectre de bruit. De

nouveau, on a un élargissement d'un facteur $2C$ par rapport à la largeur naturelle $\tilde{\gamma}$. En revanche, par rapport au processus Raman, la contribution du champ est égale à la contribution atomique dans ce cas, le pompage EIT contribuant de manière non négligeable au bruit atomique.

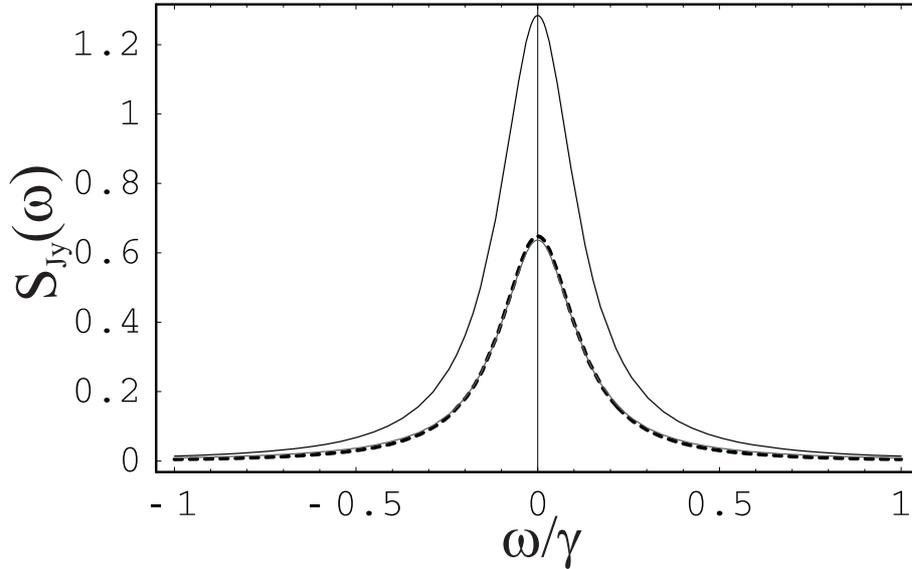


FIG. 3.11 – Contributions au spectre de bruit $S_{J_y}(\omega)$ de la composante de spin la moins bruyante : $S_{ch}(\omega)$ (tirets), $S_{at}(\omega)$ (trait plein). Paramètres : $C = 100$, $\kappa = 2\gamma$, $\rho = 1/2000$, $\Gamma_R^* = 5.5\gamma_0$, $\Gamma_E^* = 25\gamma_0$.

D Récapitulatif

Nous avons étudié dans ce chapitre deux schémas possibles pour réduire les fluctuations quantiques d'un spin dans le fondamental sous le bruit quantique standard. Outre sa longue durée de vie, l'avantage des schémas étudiés est que le spin dans le fondamental est peu sensible à l'émission spontanée. Dans le premier schéma "Raman", les fluctuations du champ intracavité peuvent être comprimées (ou amplifiées) en raison de l'interaction non linéaire atomes/champ en cavité, ce qui comprime (ou amplifie) à leur tour les fluctuations atomiques. A partir d'états cohérents du champ, on joue donc sur la non linéarité du milieu pour modifier ses propriétés, d'où l'appellation *self-spin squeezing* employée par Laurent Vernac pour qualifier ce type de réduction de bruit. Dans le second schéma, l'origine physique de la compression de bruit est un peu plus complexe, puisqu'elle repose à la fois sur l'interaction non linéaire avec le champ Raman, mais également sur la fait que la cohérence optique est augmentée par le pompage EIT. On

joue donc à la fois sur la réduction des fluctuations atomiques par self-spin squeezing et sur le pompage optique qui modifie les orientations, et donc la longueur du spin moyen.

Pour clore ce chapitre, nous avons représenté sur la figure 3.12 l'évolution des réductions de bruit atomique maximales que l'on peut obtenir lorsqu'on augmente la coopérativité. Si la réduction de bruit dans un système à deux niveaux sature à 50% [Vernac01b] et dans un système en Λ à 30%, elle peut être arbitrairement grande en principe pour le schéma en double- Λ .

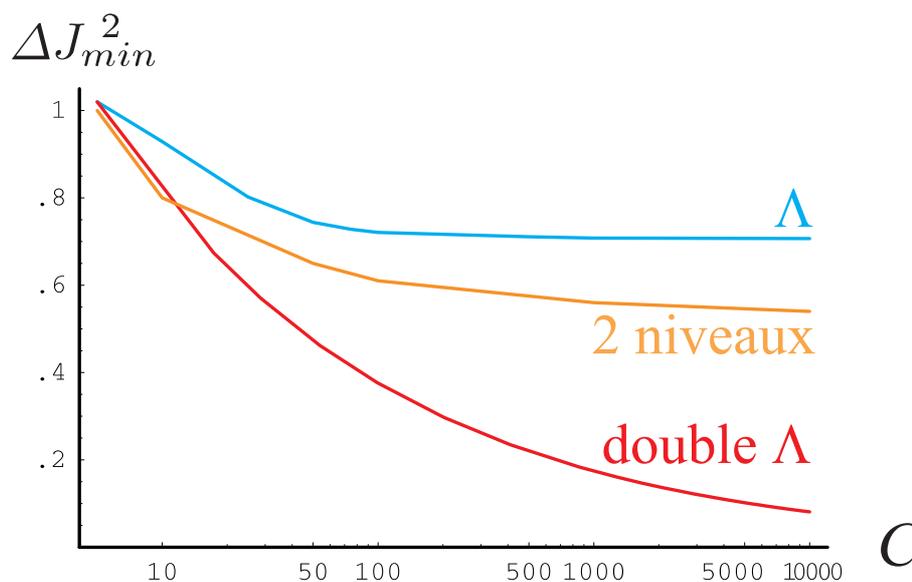


FIG. 3.12 – Récapitulatif des résultats des différents modèles concernant l'évolution de la réduction de bruit optimale avec la coopérativité. La courbe "2 niveaux" est obtenue à partir des résultats de [Vernac01b].

Mémoire quantique atomique

Sommaire

A	Introduction	107
B	Mémoire quantique avec des atomes froids en cavité	109
B.1	Interaction avec un vide comprimé	109
B.2	Transfert quantique en EIT	110
B.3	Transfert quantique en Raman	118
B.4	Calcul pour un désaccord arbitraire	121
B.5	Cas d'un champ de valeur moyenne non nulle	122
B.6	Conditions de fonctionnement, sensibilité par rapport aux paramètres	123
B.7	Stockage et lecture	125
B.8	Discussion	132
C	Mémoire quantique : cavité ou simple passage	135
C.1	Interaction atomes-champ en simple passage	135
C.2	Transfert quantique en EIT	137
C.3	Transfert quantique en Raman	144
C.4	Interprétation et comparaison avec le schéma en cavité	146
D	Conclusion	152

A Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il était possible de comprimer les fluctuations du spin collectif d'un ensemble atomique associé à deux sous-niveaux

Zeeman ou hyperfins en utilisant l'interaction entre des champs cohérents et un nuage d'atomes froids placé en cavité. Dans ce cas, les atomes jouent le rôle de milieu non-linéaire pour la lumière, dont ils modifient les fluctuations. En retour, les fluctuations atomiques sont également modifiées. Cependant, on peut aussi agir sur les fluctuations quantiques atomiques à l'aide de champs optiques dans des états non-classiques [Vernac01]. Plus précisément, nous allons voir dans ce chapitre que si l'on dispose d'états comprimés du rayonnement, il est possible de transférer la compression de bruit de la lumière aux atomes, ce de manière réversible et efficace, et à la “demande” [Dantan03a, Dantan04a, Dantan05a]. On peut ainsi réaliser des opérations de type *mémoire quantique*. Nous présentons dans le chapitre 5 des applications des mémoires quantiques pour l'information et la communication quantique.

Plusieurs systèmes physiques ont déjà permis de réaliser de telles opérations de mémoire dans le régime des variables discrètes. On peut citer par exemple les expériences réalisées au LKB dans le groupe d'Electrodynamique Quantique en Cavité [Maitre97], ou encore, très récemment avec des ions uniques piégés dans le groupe de Wineland à Boulder [Langer05]. Nous nous intéressons ici à des variables continues. La problématique sous-jacente est la même, i.e. l'étude du transfert d'états non-classiques entre oscillateurs harmoniques, mais nous allons considérer des états avec un très grand nombre de degrés de liberté. L'état ou “information” quantique est alors encodée dans le bruit quantique que nous avons introduit précédemment pour les champs ou les atomes. Plus précisément, nous avons vu que dans le cas d'un ensemble atomique complètement polarisé l'approximation gaussienne est valable : le spin collectif se comporte comme un oscillateur harmonique. On peut transférer les fluctuations quantiques d'un champ à un ensemble atomique et vice versa. Le transfert des fluctuations d'un vide comprimé aux composantes du spin collectif associé à deux niveaux excités a été démontré à l'université d'Aarhus dans le groupe de Polzik, avec une efficacité faible toutefois [Hald99]. De plus, la courte durée de vie du spin considéré ne permet pas de stocker ces fluctuations pendant un temps intéressant. Plus récemment, ce même groupe a démontré la possibilité de stocker des états cohérents dans des vapeurs atomiques pendant plusieurs millisecondes [Julsgaard04].

Dans la continuité de la démarche que nous avons suivie jusqu'à maintenant, nous allons nous intéresser au spin collectif constitué par deux sous-niveaux fondamentaux dans une structure en Λ analogue à celle étudiée dans les chapitres précédents. Le but de ce chapitre est d'étudier quelles peuvent être les interactions favorables à un transfert quantique efficace entre champs et atomes, afin de proposer un schéma expérimental réaliste.

B Mémoire quantique avec des atomes froids en cavité

Nous commençons par étudier le cas d'une interaction en cavité, avant de comparer les résultats obtenus dans cette section avec une interaction en simple passage dans la section C.

B.1 Interaction avec un vide comprimé

On considère un nuage d'atomes froids interagissant dans une cavité optique à une entrée-sortie avec deux champs. Comme dans le chapitre précédent deux sous-niveaux fondamentaux sont couplés à un niveau excité par deux modes du champ électromagnétique, A_1 et A_2 . Les équations d'évolution sont celles données dans le chapitre 2, section B.1.2

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}_1 &= ig_1 A_1^\dagger P_1 - ig_1 A_1 P_1^\dagger + \gamma \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_1 + \Lambda_1 + F_{11} \\
\dot{\Pi}_2 &= ig_2 A_2^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_2^\dagger + \gamma \Pi_3 - \gamma_0 \Pi_2 + \Lambda_2 + F_{22} \\
\dot{\Pi}_3 &= -(ig_1 A_1^\dagger P_1 - ig_1 A_1 P_1^\dagger) - (ig_2 A_2^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_2^\dagger) - 2\gamma \Pi_3 + F_{33} \\
\dot{P}_1 &= -(\gamma + i\Delta_1)P_1 + ig_1 A_1 (\Pi_1 - \Pi_3) + ig_2 A_2 P_r^\dagger + F_{13} \\
\dot{P}_2 &= -(\gamma + i\Delta_2)P_2 + ig_2 A_2 (\Pi_2 - \Pi_3) + ig_1 A_1 P_r + F_{23} \\
\dot{P}_r &= -(\gamma_0 - i\delta)P_r + ig_1 A_1^\dagger P_2 - ig_2 A_2 P_1^\dagger + f_r \\
\dot{A}_1 &= -(\kappa + i\Delta_{c1})A_1 + \frac{ig_1}{\tau} P_1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} A_1^{in} \\
\dot{A}_2 &= -(\kappa + i\Delta_{c2})A_2 + \frac{ig_2}{\tau} P_2 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} A_2^{in}
\end{aligned}$$

Lorsque la durée de vie du fondamental est infinie ($\gamma_0 = 0$), il existe toujours dans un tel système en Λ un état noir à l'état stationnaire, ce qui signifie qu'il existe une combinaison linéaire des champs A_1 et A_2 pour laquelle le milieu est complètement transparent, et qu'une certaine combinaison des niveaux 1 et 2 est peuplée. D'un point de vue purement formel, on peut toujours se ramener via une transformation unitaire globale (sur les atomes et les champs) à l'étude du cas où l'un des champs est de valeur moyenne nulle¹. On se place donc dans la situation où le champ de contrôle A_1 est dans un état cohérent et le champ incident A_2^{in} est dans un état vide, éventuellement

¹Nous reviendrons sur ce point dans la section B.5.

comprimé,

$$\langle A_2^{in} \rangle = 0, \quad [V_{in}] = \begin{pmatrix} \cosh^2 r & e^{2i\varphi} \sinh(2r)/2 \\ e^{-2i\varphi} \sinh(2r)/2 & \sinh^2 r \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Pour $\varphi = \pi/2$, on a une compression des fluctuations d'amplitude, et pour $\varphi = 0$, ce sont les fluctuations de phase qui sont comprimées. Pour tenir compte de la durée de vie finie du fondamental, on suppose que les termes de repeuplement affectent seulement le niveau 2, de telle sorte qu'à l'état stationnaire, tous les atomes sont dans le niveau 2 : $\langle \Pi_2 \rangle = N$. Le spin dans le fondamental est complètement polarisé, $\langle J_z \rangle = N/2$. Dans cet état, la valeur de J_z est parfaitement définie et est égale à sa valeur maximale $N/2$. Le spin atomique se comporte alors comme un oscillateur harmonique. Les composantes de la cohérence, qui jouent alors le même rôle que les quadratures du champ, satisfont à

$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{|\langle J_z \rangle|}{2} = \frac{N}{4} \quad (4.2)$$

Il se produit dans cette situation un découplage des équations pour les fluctuations, ce qui simplifie grandement la discussion sur les propriétés de bruit quantique ; les fluctuations de la cohérence dans le fondamental ne sont couplées qu'à celles du dipole optique P_2 et du champ intracavité A_2 . Les propriétés de bruit du spin dans le fondamental et du champ A_2 sont alors complètement découplées de l'état du champ de contrôle, qui n'intervient plus que par sa pulsation de Rabi $\Omega = g_1 \langle A_1 \rangle$. Considérer le champ de contrôle comme classique ne changerait pas les résultats dans ce cas particulier. Pour fixer une référence de phase, notamment par rapport au vide comprimé, on choisit par convention Ω réelle dans toute la suite. Les équations pour les fluctuations sont alors

$$\delta \dot{P}_r = -(\gamma_0 - i\delta)\delta P_r + i\Omega\delta P_2 + f_r \quad (4.3)$$

$$\delta \dot{P}_2 = -(\gamma + i\Delta_2)\delta P_2 + i\Omega\delta P_r + ig_2 N\delta A_2 + F_{23} \quad (4.4)$$

$$\delta \dot{A}_2 = -(\kappa + i\Delta_c)\delta A_2 + \frac{ig_2}{\tau}\delta P_2 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A_2^{in} \quad (4.5)$$

B.2 Transfert quantique en EIT

B.2.1 Approximation adiabatique

Une première situation intéressante, particulièrement étudiée dans le cadre de ralentissement et stockage de lumière [Hau99, Kash99, Budker99, Phillips01, Liu01], est celle de Transparence Electromagnétiquement Induite (EIT), rencontrée dans le chapitre 2, dans laquelle les champs sont résonnants à un et à deux photons : $\delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Pour assurer un transfert des fluctuations optimal, il est nécessaire que le désaccord de

la cavité soit nul (de telle sorte que le squeezing ne soit pas déphasé après chaque tour de cavité).

De plus, comme on l'a déjà fait dans les chapitres précédents, on considère une cavité dont la bande passante est très grande devant les fréquences de réponse atomique. En pratique, on s'intéresse à des conditions voisines de celles de l'expérience actuelle pour laquelle la bande passante de la cavité est à peu près égale à la largeur naturelle de la transition atomique considérée : $\kappa = 2\gamma = (2\pi) 5.2$ MHz, les fréquences de réponse atomique étant inférieures au MHz.

Le champ intracavité et le dipole suivent adiabatiquement la cohérence dans le fondamental, et on peut les éliminer dans (4.4-4.5). On obtient des équations réduites très simples qui relient les fluctuations des composantes de spin à celles des quadratures du champ incident

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta J_x(\omega) = -\beta_E \delta X_2^{in} + \tilde{f}_x \quad (4.6)$$

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta J_y(\omega) = -\beta_E \delta Y_2^{in} + \tilde{f}_y \quad (4.7)$$

avec

$$\beta_E = \frac{gN\Omega}{\gamma(1+2C)\sqrt{T}}, \quad \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 + \frac{\Gamma_E}{1+2C} \quad (4.8)$$

$$\tilde{f}_x = f_x - \frac{\Omega}{\gamma(1+2C)} F_y, \quad \tilde{f}_y = f_y + \frac{\Omega}{\gamma(1+2C)} F_x \quad (4.9)$$

Γ_E étant le taux de pompage optique dû au champ de contrôle à résonance. On a donc un couplage linéaire entre les composantes du spin et les quadratures du vide comprimé incident sur une plage de fréquence de largeur $\tilde{\gamma}_0$, qui représente l'inverse du temps caractéristique de réponse pour le bruit atomique. L'approximation adiabatique est donc vérifiée si

$$\tilde{\gamma}_0 \ll \kappa, \gamma \quad (4.10)$$

Si le champ incident est comprimé en amplitude, $S_{X_2^{in}}(\omega) = e^{-2r}$, la composante de spin comprimée est J_x , dont le spectre de bruit est

$$S_{J_x}(\omega) = \frac{1}{\tilde{\gamma}_0^2 + \omega^2} \left[\beta_E^2 S_{X_2^{in}}(\omega) + S_{\tilde{f}_x}(\omega) \right] \quad (4.11)$$

En utilisant le fait que $\langle f_x(\omega) f_x(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') N\gamma_0/2$ et $\langle F_y(\omega) F_y(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') N\gamma/2$, on obtient la variance de J_x après intégration sur le spectre

$$\begin{aligned} \Delta J_{min}^2 &= \frac{1}{|\langle J_z \rangle|/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int d\omega S_{J_x}(\omega) \right) \\ &= \frac{2C}{1+2C} \frac{\Gamma_E}{(1+2C)\tilde{\gamma}_0} e^{-2r} + \frac{\Gamma_E}{(1+2C)^2\tilde{\gamma}_0} + \frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma}_0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La variance atomique est la somme de trois termes de bruit qui s'interprètent facilement :

- le premier ($\propto e^{-2r}$) représente le terme de couplage avec le champ incident, que l'on veut rendre le plus grand possible
- le second ($\propto \Gamma_E$) donne la contribution de bruit du dipole optique et représente le bruit dû au pompage optique par le champ de contrôle
- enfin, le troisième terme ($\propto \gamma_0$) donne la contribution du bruit associé au processus de perte de cohérence dans le fondamental

Pour caractériser l'efficacité du transfert de compression de bruit on introduit l'*efficacité de transfert*, définie comme le rapport entre la réduction de bruit quantique atomique et celle du champ incident

$$\eta \equiv \frac{1 - \Delta J_{min}^2}{1 - e^{-2r}} \quad (4.13)$$

$\eta = 0$ correspond à un transfert nul, et $\eta = 1$ à un transfert parfait. Pour de fortes compressions de bruit du champ, notons que l'on peut avoir $\eta \simeq 1$, tout en ayant une réduction de bruit atomique bien inférieure à celle du champ. Il faut dans ce cas comparer directement ΔJ_{min}^2 à e^{-2r} . Néanmoins, pour les valeurs de compression de bruit accessibles expérimentalement actuellement, η est une mesure correcte et pratique qui permet une discussion simple de l'optimisation des paramètres. Ajoutons qu'en terme de mémoire quantique, il faudrait en toute rigueur comparer l'intégralité de l'ellipse de bruit atomique à celle du champ incident pour s'assurer de la fidélité du processus. Si l'on considère des champs dans des états minimaux, les processus de transfert sont symétriques pour la réduction et l'excès de bruit. η suffit dans ce cas à caractériser l'efficacité du transfert (voir (4.6-4.7)).

On trouve finalement, pour une configuration en EIT, une efficacité de transfert égale à

$$\eta_E = \frac{2C}{1 + 2C} \frac{\Gamma_E/(1 + 2C)}{\gamma_0 + \Gamma_E/(1 + 2C)} \quad (4.14)$$

Pour une situation de transparence parfaite ($\gamma_0 = 0$), l'efficacité est maximale

$$\eta_{max} = \frac{2C}{1 + 2C} \sim \frac{(\text{Couplage})}{[(\text{Couplage}) + (\text{Bruit Atomique})]} \quad (4.15)$$

Cette relation traduit l'efficacité du couplage atomes-champ en cavité : sur “ $2C + 1$ ” photons corrélés, “ $2C$ ” sont utilisés pour corréler les atomes, et génèrent de la réduction

de bruit atomique. Le taux d'erreur dans l'écriture d'une telle mémoire quantique est donc $1/(1+2C)$, qui est d'autant plus faible que C est grand. On a donc intérêt à disposer de beaucoup d'atomes. En terme de bruit quantique, cela signifie que le processus d'écriture ajoute peu de bruit, la sensibilité à l'émission spontanée étant en $1/(1+2C)$, par rapport au couplage en $2C/(1+2C)$. Si l'on prend en compte la durée de vie finie du fondamental, le transfert est quasi-parfait - $\eta \sim 1$ - pour une valeur élevée de la coopérativité ($C \gg 1$), et pour un taux de pompage effectif grand devant le taux de perte dans le fondamental [$\Gamma_E/(1+2C) \gg \gamma_0$]. La perte de cohérence est un processus dissipatif auquel est naturellement associé du bruit ajouté. On également remarquer que $\Gamma_E/(1+2C)$ s'interprète comme le taux de transfert des corrélations photoniques aux atomes; ce taux doit être grand devant le taux de perte de ces corrélations pour le transfert puisse avoir lieu.

B.2.2 Interprétation en termes de vecteur de Stokes

Si les niveaux 1 et 2 sont des sous-niveaux Zeeman, on peut là encore considérer que les champs A_1 et A_2 sont des modes de polarisation orthogonale - σ_+ et σ_- , par exemple. Il est alors commode de raisonner en termes de vecteur de Stokes et de fluctuations de polarisation [Dantan04a]. L'état quantique de polarisation d'un faisceau peut être

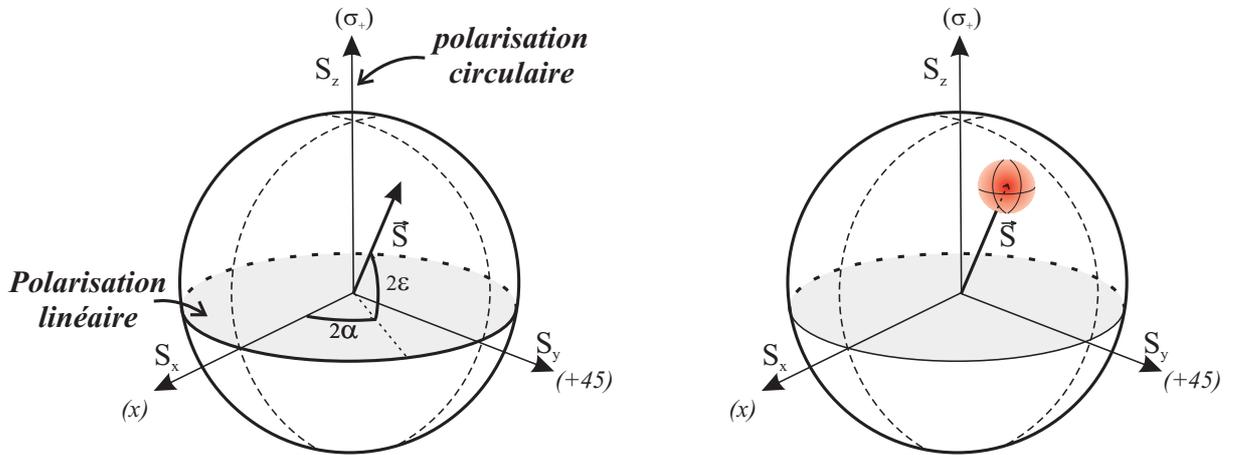


FIG. 4.1 – A gauche, représentation classique d'un état de polarisation dans la sphère de Poincaré. α et ε désignent l'azimut et l'ellipticité de la polarisation du faisceau [Huard94]. A droite, représentation de l'état quantique de référence : l'état cohérent de polarisation.

décrit par la donnée de quatre opérateurs, les paramètres de Stokes, définis à partir des

modes A_1 et A_2 par

$$S_0 = A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 \quad (4.16)$$

$$S_x = -(A_1^\dagger A_2 + A_2^\dagger A_1) \quad (4.17)$$

$$S_y = i(A_1^\dagger A_2 - A_2^\dagger A_1) \quad (4.18)$$

$$S_z = A_1^\dagger A_1 - A_2^\dagger A_2 \quad (4.19)$$

Les paramètres de Stokes “classiques” [Huard94] sont donnés par les valeurs moyennes de ces opérateurs, et une représentation usuelle d’un état de polarisation se fait à l’aide de la sphère de Poincaré [Fig. 4.1]. Pour un faisceau complètement polarisé, S_0 est redondant², et on peut se contenter des trois paramètres S_x , S_y , S_z , qui définissent un vecteur dans la sphère de Poincaré. Dans un formalisme quantique, les opérateurs de Stokes obéissent à des relations de commutation analogues à celles des composantes d’un moment cinétique [Korolkova02]

$$[S_i, S_j] = 2\epsilon_{ijk} S_k \quad (i = x, y, z) \quad (4.20)$$

Cette non-commutation est à l’origine de fluctuations intrinsèques de polarisation. De (4.20) découlent des inégalités de Heisenberg similaires à celles des spins

$$\Delta S_x \Delta S_y \geq |\langle S_z \rangle| \quad (4.21)$$

Comme pour le spin, les fluctuations quantiques de polarisation dépendent de la polarisation moyenne. L’état cohérent de polarisation est défini en supposant les modes A_1 et A_2 dans un état cohérent. On a alors $\Delta S_i^2 = \langle S_0 \rangle$ ($i = x, y, z$). Cependant, cet état n’est pas un état minimal. En effet, le fait que le bruit d’un paramètre de Stokes soit inférieur au bruit de l’état cohérent de polarisation n’entraîne pas nécessairement une violation apparente d’une inégalité de Heisenberg. De manière très similaire au spin atomique, pour définir un *état comprimé en polarisation*, il est nécessaire de se placer dans le plan orthogonal au vecteur de Stokes moyen [Korolkova02, Josse03c].

Dans la situation qui nous intéresse, le champ moyen incident est polarisé circulairement (σ_+). Le vecteur de Stokes incident est orienté au pôle nord de la sphère de Poincaré, comme le spin moyen dans la sphère de Bloch (Fig. 4.2) :

$$\langle S_x^{in} \rangle = \langle S_y^{in} \rangle = 0, \quad \langle S_z^{in} \rangle = \langle A_1^{in} \rangle^2 \quad (4.22)$$

On a ainsi une représentation très similaire de l’état quantique de polarisation et de l’état quantique du spin collectif. Comme pour le spin, la seule inégalité d’Heisenberg

² S_0 est alors égal au rayon de la sphère $S = \sqrt{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2}$.

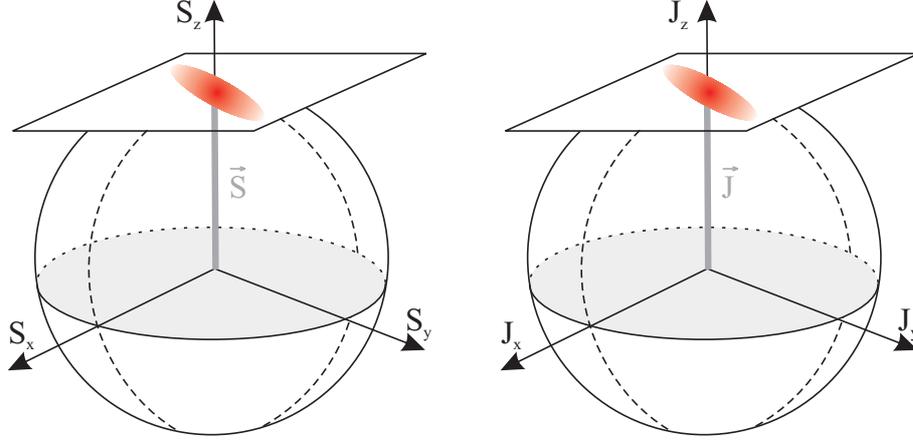


FIG. 4.2 – A gauche, état comprimé en polarisation du champ incident dans la sphère de Poincaré. A droite, état comprimé atomique dans la sphère de Bloch.

intéressante est celle qui relie les composantes x et y de Stokes : $\Delta S_x^{in} \Delta S_y^{in} \geq \langle A_1^{in} \rangle^2$. Comme $\delta S_x^{in} = -\langle A_1^{in} \rangle \delta X_2^{in}$ et $\delta S_y^{in} = -\langle A_1^{in} \rangle \delta Y_2^{in}$, le faisceau incident est comprimé en polarisation selon S_x .

On écrit donc sur le spin les fluctuations quantique de polarisation du faisceau. On remarque qu'à partir des équations (4.6-4.7) il est possible d'écrire un hamiltonien effectif pour l'interaction en EIT

$$H_E = -\hbar \frac{2g^2}{\gamma(1+2C)\sqrt{T}} [J_x S_y^{in} - J_y S_x^{in}] \quad (4.23)$$

qui décrit simplement le couplage linéaire entre deux oscillateurs harmoniques.

B.2.3 Calcul complet

Dans le calcul précédent, nous avons supposé que $\tilde{\gamma}_0 \ll \gamma, \kappa$, c'est-à-dire que le champ et le dipôle optique suivent adiabatiquement le spin dans le fondamental, approximation qui devient erronée si l'on considère des taux de pompage arbitrairement élevés. On néglige en particulier les contributions aux fréquences de couplage atomes-champs de la cavité. En effet, sans approximation, les transformées de Fourier de (4.3-4.4-4.5) conduisent à

$$\begin{aligned} [(\gamma_0 - i\omega)D(\omega) + \Omega^2(\kappa - i\omega)] \delta J_x(\omega) &= gN\Omega\sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta X_2^{in} + D(\omega)f_x - \Omega(\kappa - i\omega)F_y \\ \text{avec} \quad D(\omega) &= (\kappa - i\omega)(\gamma - i\omega) + \frac{g^2N}{\tau} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les fréquences de couplage sont données par les parties réelles des pôles du module du coefficient de $\delta J_x(\omega)$ dans (4.24). Lorsque C est grand, ces fréquences propres sont

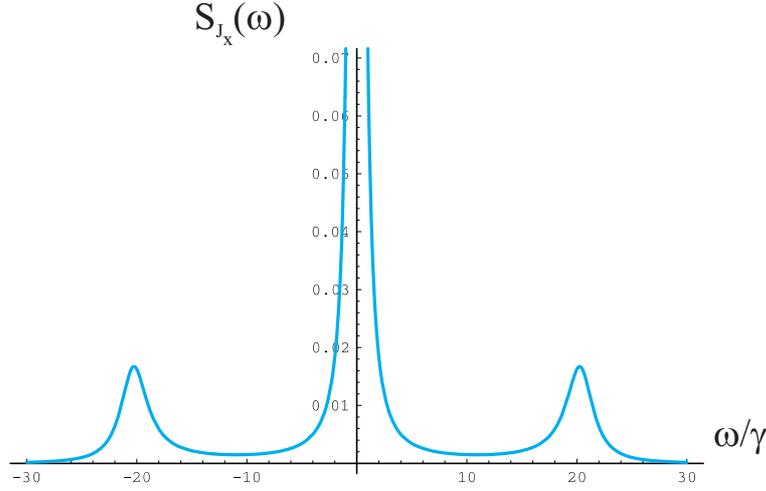


FIG. 4.3 – Spectre de bruit de la composante atomique comprimée en EIT, pour une compression de bruit du champ incident de 3 dB. Paramètres : $C = 100$, $\rho = 1/2$, $\sigma = 1/1000$, $\gamma_E = 15$, $e^{-2r} = 0.5$. L'échelle verticale est exagérément petite pour faire ressortir les pics latéraux, dont la hauteur est très faible devant le pic central dans les conditions choisies.

$\omega_0 = 0$ et $\omega_{\pm} \simeq \pm\sqrt{2C\gamma\kappa}$. Un spectre de bruit atomique correspondant à la composante atomique comprimée est tracé sur la figure 4.3 ; il s'assimile à une lorentzienne centrée en $\omega = 0$, de largeur $2\tilde{\gamma}_0$, et de deux pics de bruit aux fréquences de couplage ω_{\pm} . Si le pic central est réduit globalement d'un facteur e^{-2r} en présence de réduction de bruit, ce n'est pas le cas des pics latéraux, qui contribuent d'autant plus à la variance que le taux de pompage Γ_E est grand. Tous calculs faits, on obtient sans approximation pour l'efficacité de transfert

$$\eta_E = \frac{2C\gamma_E}{(1+2C)\sigma + \gamma_E} \frac{1 + \rho + \sigma\rho}{2C(1 + \rho) + (1 + \sigma)(1 + \rho + \sigma\rho + \sigma\rho^2 + \gamma_E\rho^2)} \quad (4.25)$$

où $\gamma_E = \Gamma_E/\gamma$, $\sigma = \gamma_0/\gamma$ et $\rho = \gamma/\kappa$. Alors que l'efficacité dans l'approximation adiabatique (4.14) est une fonction strictement croissante du taux de pompage, on voit apparaître sur la figure 4.4 un maximum de l'efficacité en fonction du pompage. On peut considérer trois régimes :

- le premier correspond à des valeurs du taux de pompage effectif faibles ou de l'ordre du taux de relaxation dans le fondamental : $\Gamma = \Gamma_E/(1+2C) \lesssim \gamma_0$. Dans cette région, l'efficacité augmente linéairement avec Γ .
- le second régime correspond à des valeurs intermédiaires de Γ , grandes devant γ_0 et petites devant γ et κ . Dans ce régime, lorsque Γ augmente, l'efficacité sature

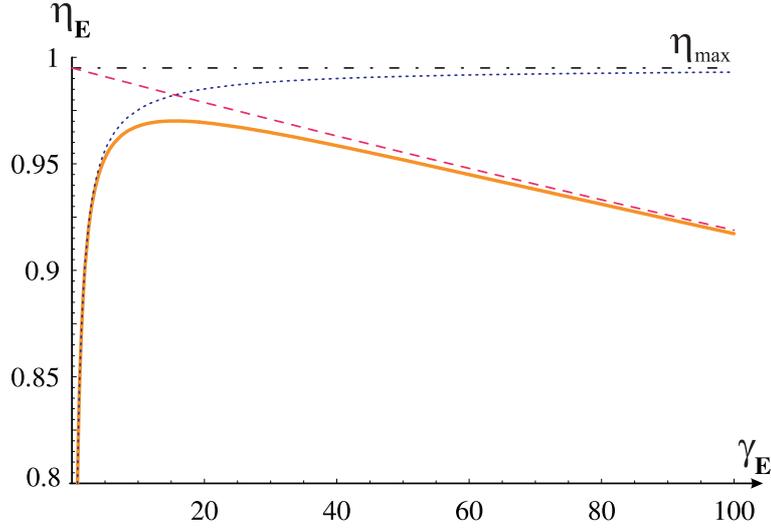


FIG. 4.4 – Efficacité de transfert en EIT, η_E , en fonction du taux de pompage EIT γ_E avec : en trait plein, le calcul exact (4.25), en pointillés, l’approximation adiabatique (4.14), en tirets, le système “fermé” [$\gamma_0 = 0$, Eq. (4.28)]. Paramètres : $C = 100$, $\sigma = 1/1000$, $\rho = 1/2$. La valeur optimale du pompage EIT est dans ce cas $\gamma_E^* \simeq 15$.

et atteint sa valeur maximale avant de décroître. Le taux de pompage optimal est donné par

$$\Gamma^*/\gamma = \frac{\gamma_E^*}{1 + 2C} \simeq \frac{\sqrt{1 + \rho}}{\rho} \sqrt{\sigma} \quad (C \gg 1, \sigma \ll 1) \quad (4.26)$$

On remarque qu’il est proportionnel à $\sqrt{(\kappa + \gamma)\gamma_0}$; on retrouve là une constatation effectuée dans la section C.4 du chapitre 3, à savoir que l’optimum de la réduction de bruit s’obtient pour un taux de pompage égal à la somme géométrique³ des fréquences de coupure qui limitent la réduction de bruit. La valeur optimale de l’efficacité est alors proche de la valeur maximale η_{max} lorsque $\gamma_0 \ll \gamma$:

$$\eta_E^* \simeq \eta_{max} \left(1 - \frac{\rho + 1/\rho}{\sqrt{1 + \rho}} \sqrt{\sigma} \right) \quad (C \gg 1, \sigma \ll 1) \quad (4.27)$$

- Le dernier régime correspond à $\Gamma \gtrsim \gamma, \kappa$. L’efficacité décroît en raison du couplage avec les modes matériaux induit par le pompage qui augmente plus que le couplage avec le champ, ce qui résulte en une détérioration du transfert. Sur la figure 4.4

³la moyenne géométrique de ω_1 et ω_2 est $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$, ou encore, sur une échelle logarithmique, $\frac{1}{2}[\ln \omega_1 + \ln \omega_2]$.

on voit que dans ce régime l'efficacité tend asymptotiquement vers celle d'un système "fermé" ($\gamma_0 = 0$), qui est une fonction décroissante de γ_E

$$\eta_E^0 = \frac{2C}{1 + 2C + \gamma_E \frac{\rho^2}{1+\rho}} \quad (4.28)$$

On voit que pour une durée de vie infinie du fondamental, on atteint la valeur maximale de l'efficacité lorsque le pompage tend vers 0. Physiquement, cela signifie que le transfert serait d'autant meilleur que le temps d'écriture serait long (infini idéalement). En pratique, la durée de vie finie du fondamental fixe une limite inférieure au pompage pour avoir un bon transfert.

Remarquons toutefois que l'efficacité reste proche de 1 sur une large plage de valeurs du pompage - telles que $\gamma_0 \ll \Gamma \ll \gamma, \kappa$, et l'expression (4.14) constitue alors une très bonne approximation de l'efficacité de transfert.

B.3 Transfert quantique en Raman

Une seconde situation intéressante pour le transfert de fluctuations quantiques est la configuration Raman étudiée dans le chapitre 3. Dans l'hypothèse $\Delta_{1,2} \gg \gamma, \Omega$, on se ramène à un système à deux niveaux effectif, et on peut, sous les mêmes hypothèses que précédemment, dériver des équations effectives simples pour la cohérence dans le fondamental [Dantan03a]

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta J_x(\omega) = -\beta_R \delta Y_2^{in} + \tilde{f}_x \quad (4.29)$$

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta J_y(\omega) = +\beta_R \delta X_2^{in} + \tilde{f}_y \quad (4.30)$$

avec

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 + (1 + 2C)\Gamma_R, \quad \beta_R = \frac{gN\Omega}{\Delta\sqrt{T}} \quad (4.31)$$

$$\tilde{f}_x = f_x + \frac{\Omega}{\Delta}F_x, \quad \tilde{f}_y = f_y + \frac{\Omega}{\Delta}F_y \quad (4.32)$$

Pour obtenir les équations (4.29-4.30) à partir de (3.39-3.41), on a supposé que

- le désaccord effectif à deux photons (corrigé du déplacement lumineux) est nul :

$$\tilde{\delta} = \delta + \Omega^2/\Delta = 0 \quad (4.33)$$

- le désaccord effectif de la cavité est nul, i.e. que le désaccord mécanique de la cavité compense exactement le désaccord dû à l'indice atomique linéaire :

$$\tilde{\Delta}_c = \Delta_c - \frac{g^2N}{\Delta\tau} = 0 \quad (4.34)$$

- le temps d'évolution du champ intracavité est très court devant le temps d'évolution des fluctuations atomiques, donné par l'inverse de $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 + (1 + 2C)\Gamma_R$, soit : $\tilde{\gamma}_0 \ll \kappa$.

On retrouve l'élargissement du spectre rencontré dans le chapitre 3 : le taux de relaxation effectif des fluctuations de la cohérence, $\tilde{\gamma}_0$, est proportionnel à $2C\Gamma_R$. En termes du vecteur de Stokes on peut, comme pour l'EIT, écrire un hamiltonien effectif Raman

$$H_R = \hbar \frac{2g^2}{\Delta\sqrt{T}} [J_x S_x^{in} + J_y S_y^{in}] \quad (4.35)$$

Si l'on suppose comme précédemment que le champ incident est comprimé en polarisation selon S_x , la composante comprimée est maintenant J_y , et l'efficacité du transfert vaut

$$\eta_R = \frac{2C}{1+2C} \frac{(1+2C)\Gamma_R}{\gamma_0 + (1+2C)\Gamma_R} \quad (4.36)$$

Si l'on compare (4.6-4.7-4.9), (4.14) et (4.23) avec (4.29-4.30-4.32), (4.36) et (4.35), les similarités entre les configurations EIT et Raman sont frappantes. Dans l'approximation adiabatique, les expressions obtenues dans les deux situations se déduisent les unes des autres par la substitution

$$(1+2C)\gamma \longleftrightarrow \Delta \quad (4.37)$$

Le résultat important est que l'on peut écrire de manière générale l'efficacité approchée sous la forme

$$\eta = \frac{2C}{1+2C} \frac{\Gamma}{\gamma_0 + \Gamma} \quad (4.38)$$

avec $\Gamma = \frac{\Gamma_E}{1+2C}$ (en EIT) ou $(1+2C)\Gamma_R$ (en Raman)

On peut rendre cette efficacité proche de 100% lorsque le taux de pompage effectif Γ est grand devant le taux de perte de cohérence dans le fondamental γ_0 , et lorsque la coopérativité est importante. Le fait qu'une situation dans laquelle on est complètement résonnant à un photon donne les mêmes résultats qu'une situation où l'on est au contraire très loin de la résonance à un photon peut sembler surprenant, mais il faut garder à l'esprit que dans les deux cas l'absorption est négligeable. Or, en termes de fluctuations quantiques et de compression de bruit, l'absorption est un processus de pertes qui se traduit par du bruit ajouté. Une absence d'absorption est donc favorable à des processus de transfert de fluctuations quantiques. Il n'en reste pas moins que les

processus physiques à l'origine de ces situations favorables au transfert des fluctuations sont fondamentalement différents, bien que les résultats sont très similaires en apparence. Nous reviendrons sur ce point à la fin de ce chapitre dans la section C.4.

Remarquons que les Hamiltoniens effectifs qui décrivent le couplage entre deux oscillateurs harmoniques sont formellement identiques, si l'on procède à la substitution (4.37), ainsi qu'à une rotation de la cohérence de $\pi/2$ dans le plan (x, y) . On retrouve un déphasage de $\pi/2$ auquel on s'attend lorsque l'on passe d'un couplage résonnant ($\Delta = 0$) à un couplage non résonnant ($\Delta \gg \gamma$).

Notons finalement que le transfert de compression de bruit entre un vide comprimé et le spin associé à des atomes à deux niveaux $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ a été étudié par Laurent Vernac pendant sa thèse. Dans les conditions optimales de transfert - $\langle A^{in} \rangle = 0$, $\Delta = \Delta_c = 0$ - le spin atomique se comporte comme un oscillateur harmonique placé dans une cavité, et l'efficacité se met sous la forme⁴ [Vernac01]

$$\eta_{2\text{ niv}} = \frac{2C}{1 + 2C} \frac{1}{1 + \rho} \quad (4.39)$$

où ρ est le rapport du taux de relaxation de la cohérence optique γ et de la bande passante de la cavité κ . On peut donc appliquer directement ce résultat dans notre système à deux niveaux effectif Raman, en effectuant la substitution $C \rightarrow \tilde{C} = C\Gamma_R/(\gamma_0 + \Gamma_R)$ et $\gamma \rightarrow \gamma_0 + \Gamma_R$. On obtient alors de manière exacte

$$\begin{aligned} \eta_R &= \frac{2\tilde{C}}{1 + 2\tilde{C}} \frac{1}{1 + \tilde{\rho}} = \frac{2C}{1 + 2C} \frac{(1 + 2C)\Gamma_R}{\gamma_0 + \Gamma_R + 2C\Gamma_R} \frac{1}{1 + \tilde{\rho}} \\ &= \eta_{max} \frac{\Gamma}{\gamma_0 + \Gamma} \frac{1}{1 + \tilde{\rho}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec $\tilde{\rho} = (\gamma_0 + \Gamma_R)/\kappa$. On retrouve la formule obtenue dans l'approximation adiabatique à un terme correctif en $1/(1 + \tilde{\rho})$ près. Comme $\tilde{\rho} \ll \rho$ [$\tilde{\rho} \sim 10^{-3}$, à comparer à $\rho = 1/2$ dans la configuration actuelle de l'expérience], ce terme est bien plus faible pour un spin entre deux sous-niveaux fondamentaux que pour un spin entre un fondamental et un niveau excité. Pour une grande coopérativité, la limite de compression de bruit atomique est $1/(1 + \tilde{\rho})$ dans le premier cas et $1/(1 + \rho)$ dans le second. Dans le cas de l'expérience actuelle, $\kappa = 2\gamma$, ce qui donnerait une efficacité maximale de $2/3$ si l'on comprimait le spin associé à une transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$. En plus des avantages liés à sa longue durée de vie, ceci montre que le transfert des fluctuations quantiques à un spin dans le fondamental est intrinsèquement beaucoup plus efficace.

⁴Ce résultat général concernant l'interaction d'un oscillateur mécanique avec un champ en cavité sera également utile dans le chapitre 6.

B.4 Calcul pour un désaccord arbitraire

Au vu des prédictions précédentes, on pourrait se poser la question de savoir si un transfert quantique efficace est possible pour toute valeur du désaccord à un photon, pourvu que soient remplies les conditions de transfert optimal : $\tilde{\delta} = \tilde{\Delta}_c = 0$. D'autre part, on a montré qu'en EIT la composante comprimée est J_x , alors qu'en Raman, J_y est comprimée ; on peut donc penser que la composante de spin de bruit minimale effectue une rotation de $\pi/2$ dans le plan (x, y) lorsqu'on augmente le désaccord à un photon. Nous allons voir que c'est effectivement ce qui se produit, mais que le transfert de compression de bruit se dégrade complètement lorsqu'on ne se place pas dans l'une des deux situations étudiées précédemment. Dans l'hypothèse adiabatique, l'équation d'évolution des fluctuations de cohérence pour un désaccord arbitraire est

$$\left[\gamma_0 - i\delta + \frac{\Omega^2(\kappa + i\Delta_c)}{d} - i\omega \right] \delta P_r(\omega) = -\frac{gN\Omega}{d} \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}} \delta A_2^{in} + \frac{i\Omega(\kappa + i\Delta_c)}{d} F_{23} + f_r$$

avec $d = (\kappa + i\Delta_c)(\gamma + i\Delta) + \frac{g^2 N}{\tau}$ (4.41)

Les conditions optimales de transfert sont données par

$$\tilde{\Delta}_c = \Delta_c - 2C\kappa \frac{\gamma\Delta}{\gamma^2 + \Delta^2} = 0 \quad (4.42)$$

$$\tilde{\delta} = \delta + \Gamma_E \frac{\gamma\Delta^3 + (1 - 2C)\gamma^3\Delta}{(\gamma^2 + \Delta^2)[(1 + 2C)\gamma^2 + \Delta^2]} = 0 \quad (4.43)$$

En EIT, (4.42) et (4.43) se résument bien à $\delta = \Delta_c = 0$, alors que dans une configuration Raman ($\Delta \gg \gamma$), on retrouve les conditions (4.33-4.34) de la section B.3.

Lorsque l'on impose les conditions (4.42-4.43), le calcul des fluctuations atomiques conduit à une variance minimale pour une composante de spin $J_{\theta_{sq}}$, avec $\theta_{sq} = \arctan \bar{\Delta}$, et à une efficacité de transfert égale à

$$\eta_\Delta = \frac{2C\gamma_E(1 + \bar{\Delta}^2)^2}{(1 + 2C + \bar{\Delta}^2) \sigma(1 + \bar{\Delta}^2)(1 + 2C + \bar{\Delta}^2) + \gamma_E(1 + (1 + 2C)\bar{\Delta}^2)} \quad (4.44)$$

avec $\bar{\Delta} = \Delta/\gamma$. On a représenté cette fonction sur la figure 4.5 en fonction de $\bar{\Delta}$, dans les deux cas $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_0 \neq 0$. Dans le premier cas, l'efficacité du transfert est optimale en EIT ($\bar{\Delta} = 0$, $\eta_\Delta = \eta_{max} = 2C/(1 + 2C)$), décroît jusqu'à son minimum en $\bar{\Delta} = 1$ ($\eta_\Delta \sim 2/C \ll 1$), avant de réaugmenter jusqu'à sa valeur maximale η_{max} lorsque $\bar{\Delta} \gg 1$. L'angle de la composante comprimée varie bien de $\pi/2$ quand $\bar{\Delta}$ varie de 0 à ∞ . Si l'efficacité est proche de l'unité en EIT et en Raman, ce n'est pas le cas pour des désaccords intermédiaires.

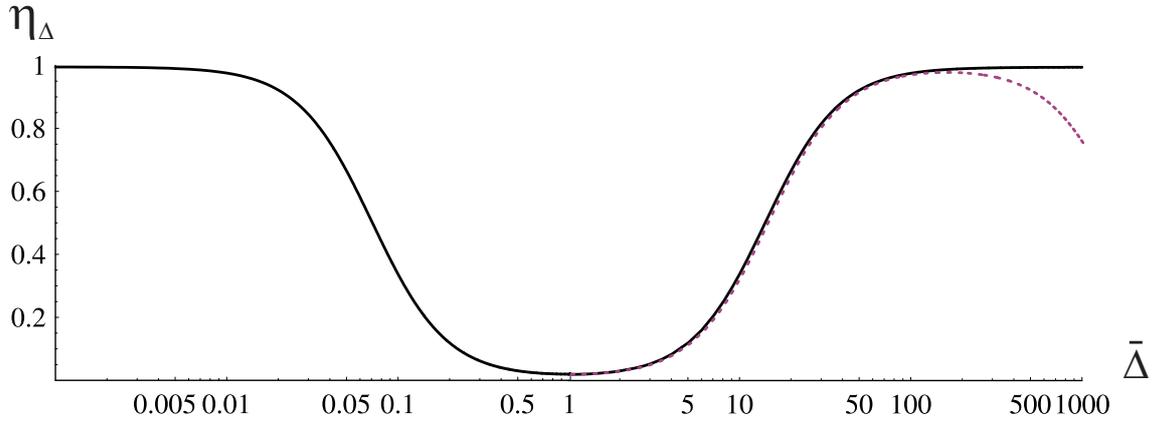


FIG. 4.5 – Dépendance de l'efficacité de transfert optimale η_Δ en fonction du désaccord à un photon normalisé $\bar{\Delta}$. La courbe en traits pleins donne le cas idéal $\gamma_0 = 0$ et celle en pointillés le cas $\gamma_0 = \gamma/1000$. Paramètres : $C = 100$, $\Omega = \sqrt{15}\gamma$.

Si l'on prend en compte la durée de vie finie dans le fondamental ($\gamma_0 \neq 0$), l'efficacité de transfert diminue pour des grandes valeurs de $\bar{\Delta}$, valeurs correspondant pourtant à la situation Raman ($\bar{\Delta} \gg 1$). Cela vient simplement du fait que la courbe de la figure 4.5 est tracée à Ω constant. Par conséquent, le taux de pompage optique Raman $\Gamma_R = \gamma\Omega^2/\Delta^2$ décroît lorsque l'on augmente Δ , de sorte que le taux de relaxation effectif $\Gamma = (1 + 2C)\Gamma_R$ finit par être inférieur à γ_0 , et le transfert diminue [Eq. (4.38)].

B.5 Cas d'un champ de valeur moyenne non nulle

Dans un tel système en Λ il est en fait possible de transférer n'importe quel état quantique de polarisation aux atomes. En effet, quelles que soient les amplitudes des champs A_1 et A_2 , on peut se ramener à une base de polarisation " $\langle A_2 \rangle = 0$ ". Le Hamiltonien dipolaire d'interaction en EIT s'écrit

$$H = \hbar[g_1 A_1^\dagger P_1 + g_2 A_2^\dagger P_2 + \text{h.c.}] \quad (4.45)$$

Si $\langle A_2 \rangle \neq 0$, on effectue une rotation R dans la sphère de Poincaré pour passer dans une base (A'_1, A'_2) telle que $\langle A'_2 \rangle = 0$. Le Hamiltonien reste invariant par la même rotation du spin dans le sphère de Bloch, de telle sorte que l'état noir est maintenant $|D\rangle = R|2\rangle$, et l'état de A'_2 s'imprime sur le spin atomique. Par exemple, supposons que A_1 et A_2 aient des pulsations de Rabi réelles $\Omega_i = g_i \langle A_i \rangle$. L'état noir est dans ce cas

$$|D\rangle = \frac{-\Omega_2|1\rangle + \Omega_1|2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \quad (4.46)$$

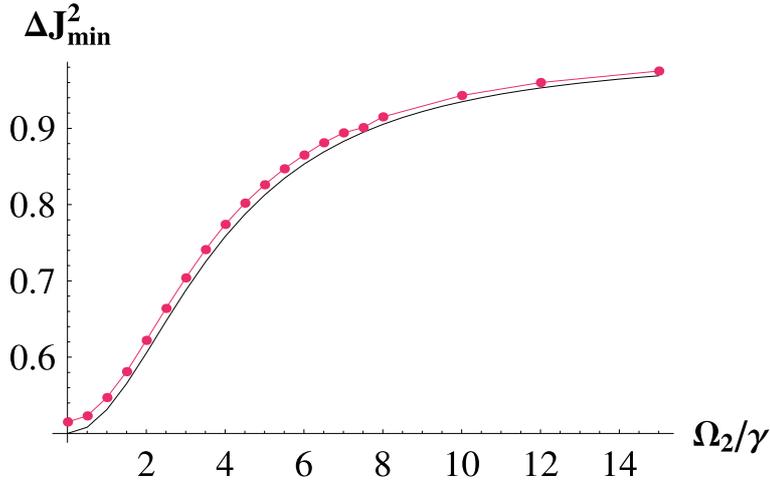


FIG. 4.6 – Dépendance de la variance minimale en fonction de l'amplitude du champ sonde $|\Omega_2|$ [points : calcul numérique en EIT, courbe pleine : le résultat approché (4.47) pour les paramètres $C = 100$, $\rho = 1/2$, $\sigma = 1/1000$ et $\Omega_1 = \sqrt{15}\gamma$].

S'ils sont comprimés sur la même quadrature et que leurs réductions de bruit valent e^{-2r_i} , la variance atomique minimale est une moyenne pondérée des réductions de bruit des deux champs

$$\Delta J_{min}^2 \simeq \frac{\Omega_2^2 e^{-2r_1} + \Omega_1^2 e^{-2r_2}}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \quad (4.47)$$

Remarquons que, de manière satisfaisante, on ne peut transférer plus que la réduction de bruit d'un mode. On voit aussi que le schéma reste efficace même si le champ A_2 incident n'est pas dans un état vide comprimé parfait. Un champ d'amplitude faible ne détériore la réduction de bruit que d'un facteur proportionnel au rapport des intensités Ω_2^2/Ω_1^2 . Sur la figure 4.6, sont tracées les variations de l'efficacité de transfert en EIT pour un champ A_2 comprimé en fonction de l'amplitude de celui-ci. Comme le champ de contrôle est dans un état cohérent, on transfère au spin une moyenne pondérée du shot-noise et de la compression de bruit du champ sonde, avec des poids dans le rapport inverse des intensités.

B.6 Conditions de fonctionnement, sensibilité par rapport aux paramètres

B.6.1 Désaccord à deux photons

Nous avons jusqu'à présent considéré des processus résonnants à deux photons. Un paramètre essentiel dans le processus de transfert de bruit quantique est le désaccord

effectif à deux photons $\tilde{\delta}$. La sensibilité du transfert à un désaccord par rapport à la résonance à deux photons est là encore donnée par le taux de relaxation effectif $\tilde{\gamma}_0$. En utilisant l'équation (4.41) d'évolution des fluctuations de la cohérence atomique dans l'approximation adiabatique, on peut obtenir une expression analytique de l'évolution de l'efficacité de transfert pour un désaccord à deux photons différent de zéro. Dans des conditions proches de l'EIT parfaite ($\Delta = \Delta_c = 0$), on peut montrer que l'efficacité décroît avec $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}/\tilde{\gamma}_0$ avec un profil donné par

$$\eta_{\tilde{\delta}} = \eta_E \left[1 - \frac{\sinh(2r)}{1 - e^{-2r}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\delta}^2}} \right) \right] \quad (4.48)$$

Cette dépendance est représentée sur la figure 4.7; on a une dégradation du transfert dès que le désaccord à deux photons devient de l'ordre du taux relaxation effectif

$$\tilde{\delta} \sim \tilde{\gamma}_0 \quad (4.49)$$

On peut montrer que cette sensibilité à $\tilde{\delta}$, qui dépend du taux de compression du champ, est la même pour une interaction Raman qu'en EIT.

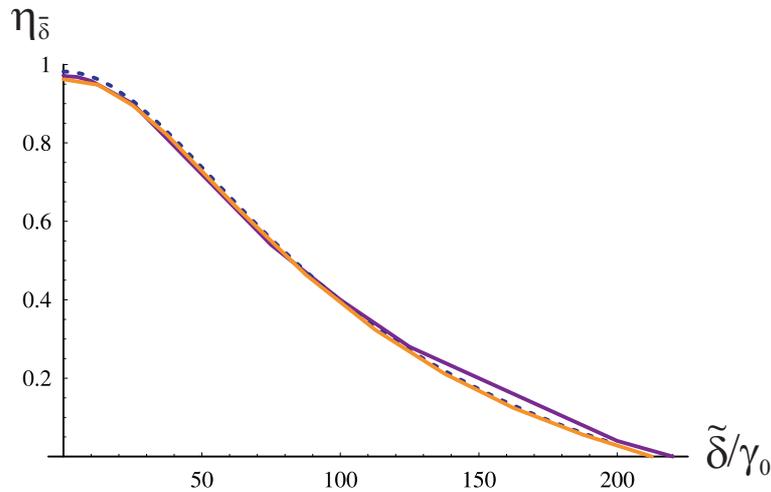


FIG. 4.7 – Variation de l'efficacité de transfert en fonction de l'écart à la résonance à deux photons $\tilde{\delta}$. La courbe en trait plein bleue correspond au résultat d'un calcul numérique en EIT, la courbe en pointillés au résultat approché (4.48) pour les mêmes paramètres $C = 100$, $\rho = 1/2$, $\sigma = 1/1000$ et $\tilde{\gamma}_0 = 75\gamma_0$. A titre de comparaison, on a représenté la même variation de $\eta_{\tilde{\delta}}$ pour une interaction Raman (courbe en trait plein jaune) en choisissant le taux de pompage Γ_R tel que $\tilde{\gamma}_0$ soit le même dans les deux situations.

B.6.2 Spectres du champ sortant

On peut se poser la question de savoir quel est en régime stationnaire l'état du champ sortant dans l'une ou l'autre des situations intéressantes. Le résultat est que, dans les deux cas, l'absorption étant négligeable, le champ sortant est quasiment autant comprimé que le champ incident, même aux fréquences de réponse atomique. Les spectres de bruit de la composante comprimée ont une expression simple dans l'approximation adiabatique; en considérant des fréquences d'analyse faibles devant la bande passante de la cavité $\omega \ll \kappa$, et en négligeant γ_0 , on trouve que le champ intracavité satisfait à

$$\begin{aligned} \text{EIT : } \delta X_2(\omega) &= \frac{2}{\sqrt{T}} \frac{1}{1+2C} \left[1 + \frac{2C\tilde{\gamma}_0}{\tilde{\gamma}_0 - i\omega} \right] \delta X_2^{in} + \frac{4g}{\gamma(1+2C)T} \frac{i\omega}{\tilde{\gamma}_0 - i\omega} F_y \\ \text{Raman : } \delta X_2(\omega) &= \frac{2}{\sqrt{T}} \frac{\Gamma_R - i\omega}{\tilde{\gamma}_0 - i\omega} \delta X_2^{in} - \frac{4g}{\gamma T} \frac{\Gamma_R}{\tilde{\gamma}_0 - i\omega} F_y \end{aligned} \quad (4.51)$$

Pour un champ incident comprimé en amplitude, les spectres de bruit minimal du champ sortant sont donnés par

$$\text{EIT : } S_{X_2^{out}}(\omega) = e^{-2r} + \frac{8C}{(1+2C)^2} \frac{\omega^2}{\tilde{\gamma}_0^2 + \omega^2} (1 - e^{-2r}) \quad (4.52)$$

$$\text{Raman : } S_{X_2^{out}}(\omega) = e^{-2r} + \frac{8C\Gamma_R^2}{\tilde{\gamma}_0^2 + \omega^2} (1 - e^{-2r}) \quad (4.53)$$

Dans les deux cas, lorsque la coopérativité est grande, la réduction de bruit du champ sortant est à peu près égale à celle du champ entrant, $S_{X_2^{out}} \simeq e^{-2r}$. Nous reviendrons sur l'interprétation de ces résultats lors de la discussion simple passage/cavité de la section C.4. Quoi qu'il en soit, à l'état stationnaire, on ne peut rien déduire de l'état atomique des fluctuations du champ sortant de la cavité, puisqu'une cavité vide donnerait quasiment le même résultat. Pour lire l'état atomique et prouver que la compression de bruit est effectivement inscrite dans les atomes, il nous faut recourir à une analyse dynamique.

B.7 Stockage et lecture

B.7.1 Etude dynamique

Les calculs précédents montrent comment réaliser la première phase d'une mémoire quantique, la phase d'*écriture*, au cours de laquelle les fluctuations quantiques du champ incident sont inscrites dans les atomes. On va montrer que, dans le cas d'une interaction de type EIT⁵, le temps d'écriture est donné par $\tau_e = \tilde{\gamma}_0^{-1}$. En effet, en faisant

⁵Ce résultat subsiste également pour une interaction Raman.

l'approximation adiabatique pour des conditions optimales de transfert, l'équation des fluctuations de la composante de spin J_x s'écrit

$$\delta\dot{J}_x(t) = -\tilde{\gamma}_0\delta J_x - \beta_E\delta X_2^{in} + \tilde{f}_x \quad (4.54)$$

On peut étudier la dynamique de la construction du squeezing atomique en calculant l'évolution temporelle de la variance de la composante atomique comprimée $\Delta J_x^2(t) = \langle \delta J_x(t)^2 \rangle$. Pour cela, on suppose qu'à l'instant $t = 0$, les atomes sont dans un état cohérent atomique et que l'on branche à cet instant de façon quasi-instantanée l'interaction avec les deux champs. En intégrant par rapport au temps l'équation précédente, on obtient les fluctuations de J_x à un instant t ultérieur

$$\delta J_x(t) = \delta J_x(0)e^{-\tilde{\gamma}_0 t} - \beta_E \int_0^t dt' e^{-\tilde{\gamma}_0(t-t')} \delta X_2^{in}(t') + \int_0^t dt' e^{-\tilde{\gamma}_0(t-t')} \tilde{f}_x(t') \quad (4.55)$$

On en déduit alors la variance à l'instant t

$$\Delta J_x^2(t) = \Delta J_x^2(0)e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} + \Delta J_x^2(\infty)(1 - e^{-2\tilde{\gamma}_0 t}) \quad (4.56)$$

en fonction de la variance initiale $\Delta J_x^2(0)$ et de la variance $\Delta J_x^2(\infty)$ à l'état stationnaire (4.12) calculée précédemment. On obtient finalement pour l'efficacité l'expression suivante

$$\eta(t) = \frac{1 - \Delta J_x^2(t)/(N/4)}{1 - e^{-2r}} = \eta_E(1 - e^{-2\tilde{\gamma}_0 t}) \quad (4.57)$$

L'efficacité tend bien vers la valeur stationnaire η_E trouvée en (4.14), avec une constante de temps $\tau_e/2$. On peut donc considérer qu'après quelques τ_e , la réduction de bruit de la cohérence atomique a atteint sa valeur maximale. La phase d'écriture est alors terminée, et on peut interrompre l'interaction avec les deux champs. Le spin atomique, initialement dans un état comprimé, évolue alors lentement vers l'état cohérent, dans un temps τ_s (qui peut être de l'ordre de quelques γ_0^{-1}). Les fluctuations du champ incident sont donc stockées dans les atomes pendant ce temps τ_s . Pour "lire" la mémoire, on interroge les atomes en appliquant de nouveau le champ de contrôle A_1 , l'état quantique du champ A_2^{in} étant le vide cohérent cette fois. La présence du champ de contrôle rétablit le couplage linéaire entre les deux oscillateurs harmoniques que sont le champ intracavité A_2 et la cohérence atomique P_r . S'opère alors le processus de transfert inverse de l'écriture : les atomes restituent la compression de bruit au champ intracavité. Cette réduction de bruit se reflète dans le champ sortant de la cavité, $A_2^{out} = \sqrt{T}A_2 - A_2^{in}$, qui devient comprimé à son tour. Elle peut alors être mesurée à l'aide d'une détection homodyne.

De manière plus quantitative, supposons qu'à $t = 0$, la cohérence atomique se trouve dans un état comprimé selon J_x et on allume brusquement (c'est-à-dire dans un temps court devant les temps d'évolution des variables du problème) le champ de contrôle dans une configuration EIT. L'évolution des fluctuations est alors donnée par les équations (4.3-4.4-4.5). On cherche à calculer l'évolution temporelle des fluctuations connaissant l'état "initial" de ces fluctuations à $t = 0$. Dans l'approximation adiabatique et dans les conditions optimales de transfert ($\Delta_c = \delta = 0$), les fluctuations du champ intracavité, et, par conséquent, celles du champ sortant, suivent adiabatiquement les fluctuations atomiques. Les fluctuations des atomes et du champ sont données par les équations

$$\delta X_2^{out}(t) = \frac{1 - 2C}{1 + 2C} \delta X_2^{in} - \frac{4g\Omega}{\gamma\sqrt{T}(1 + 2C)} \delta J_x - \frac{4g}{\gamma\sqrt{T}(1 + 2C)} F_y \quad (4.58)$$

$$\delta \dot{J}_x(t) = -\tilde{\gamma}_0 \delta J_x - \beta_E \delta X_2^{in} + \tilde{f}_x \quad (4.59)$$

Après intégration de (4.59), on obtient les fluctuations de la quadrature d'amplitude du champ sortant

$$\begin{aligned} \delta X_2^{out}(t) &= \frac{1 - 2C}{1 + 2C} \delta X_2^{in}(t) + \frac{4C\Gamma_E}{(1 + 2C)^2} \int_0^t dt' e^{-\tilde{\gamma}_0(t-t')} \delta X_2^{in}(t') \\ &\quad - \frac{4g}{\gamma\sqrt{T}(1 + 2C)} F_y(t) - \frac{4g\Omega}{\gamma\sqrt{T}(1 + 2C)} \int_0^t dt' e^{-\tilde{\gamma}_0(t-t')} \tilde{f}_x(t') \\ &\quad - \frac{4g\Omega}{\gamma\sqrt{T}(1 + 2C)} \delta J_x(0) e^{-\tilde{\gamma}_0 t} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Le dernier terme de l'équation précédente montre que les fluctuations du champ sortant dépendent des fluctuations atomiques à l'instant initial. La fonction de corrélation à deux temps du champ sortant prend une forme très simple dans le régime $\gamma_0 \ll \Gamma \ll \kappa$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t, t') &\equiv \langle \delta X_2^{out}(t) \delta X_2^{out}(t') \rangle \\ &= \delta(t - t') - 2\eta_{max} \tilde{\gamma}_0 \left[1 - \frac{\Delta J_x^2(0)}{N/4} \right] e^{-\tilde{\gamma}_0(t+t')} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Il apparaît clairement que le champ sortant est comprimé si la cohérence atomique l'est initialement. On peut montrer à partir de (4.59) que les atomes retournent à l'état cohérent atomique avec une constante de temps τ_e . Par conséquent, le champ sortant n'est comprimé que pendant ce temps. On peut également remarquer que, si les atomes sont initialement dans un état cohérent atomique, on retrouve bien la fonction de corrélation δ -corrélée d'un champ libre, ce qui correspond à un champ sortant dans un état vide. Sur la figure 4.8 on a représenté pour résumer une séquence temporelle avec les différentes phases de fonctionnement de la mémoire : écriture, stockage et lecture.

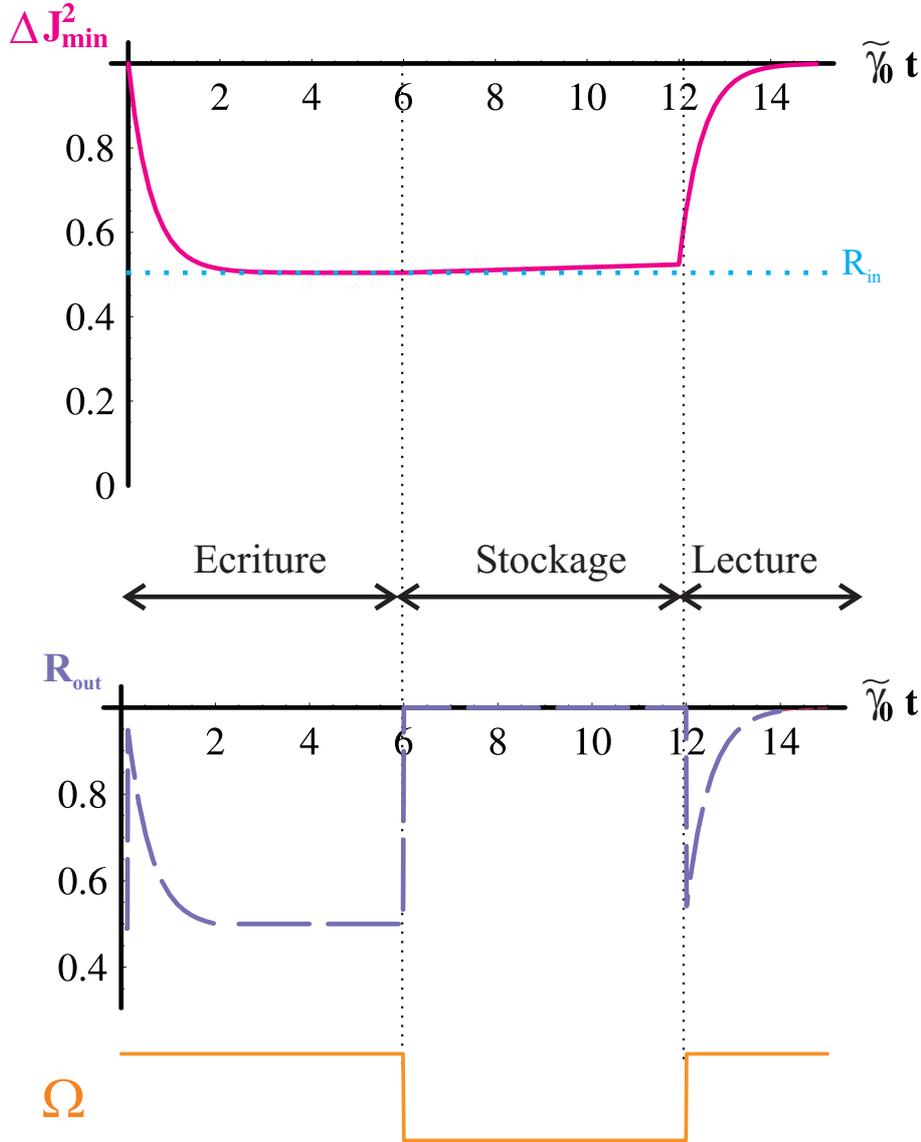


FIG. 4.8 – Séquence temporelle. Pendant la phase d'écriture le spin acquiert la compression de bruit du champ entrant, atteignant l'état stationnaire après quelques τ_e . R_{in} représente le niveau de bruit de la quadrature comprimée du champ incident. Au bout de $6\tau_e$, les champs sont brusquement coupés, laissant le spin dans un état comprimé, qui évoluent lentement vers l'état cohérent. Au temps $t = 12\tau_e$, on applique à nouveau le champ pompe avec la même intensité que pendant la phase d'écriture; le spin transfère sa compression de bruit au champ intracavité, le champ sortant de la cavité est comprimé pendant quelques τ_e . R_{out} est donnée par la détection homodyne matchée du paragraphe B.7.3. Paramètres : $C = 100$, $\sigma = 1/1000$, $\rho = 1/2$, $\tilde{\gamma}_0 = 0.075\gamma$.

B.7.2 Détection homodyne classique

La mesure de la réduction de bruit atomique initiale peut se faire par une mesure de réduction de bruit du champ sortant, à l'aide d'une détection homodyne. Supposons dans un premier temps que l'on procède à une mesure homodyne *classique* des fluctuations du champ sortant à l'aide d'un oscillateur local d'intensité *constante* dans le temps. La puissance de bruit mesurée à l'instant t par un analyseur de spectre intégrant pendant un temps d'intégration T_0 sur une bande passante $\Delta\omega$ autour de la fréquence nulle⁶ est la transformée de Fourier sur le temps T_0 de la fonction de corrélation du champ

$$P(t) = \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} \frac{d\omega}{T_0} \int_t^{t+T_0} d\tau \int_t^{t+T_0} d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \mathcal{C}(\tau, \tau') \quad (4.62)$$

Dénotant par $R_{at} = 1 - \Delta J_x^2(0)/(N/4)$ la compression de bruit atomique initiale, on obtient que le signal mesuré normalisé s'exprime sous la forme

$$\frac{1}{\Delta\omega} P(t) = 1 - \mathcal{S}(a, b) R_{at} e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} \quad (4.63)$$

où $\mathcal{S}(a, b)$ est une intégrale dépendant de deux paramètres sans dimension a et b , respectivement égaux au temps d'intégration et à la bande passante normalisés : $a = T_0 \tilde{\gamma}_0$ et $b = \Delta\omega / \tilde{\gamma}_0$,

$$\mathcal{S}(a, b) = 2\eta_{max} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\bar{\omega}}{ab} \frac{1 + e^{-2a} - 2e^{-a} \cos(\bar{\omega}a)}{1 + \bar{\omega}^2} \quad (4.64)$$

avec $\bar{\omega} = \omega / \tilde{\gamma}_0$ et $T_0 \Delta\omega \geq 2\pi$. Cette intégrale représente le rapport signal sur bruit de la mesure ; en effet, si l'on écrit que la réduction de bruit dans le champ mesuré vaut

$$R_{out}(t) = 1 - P(t) / \Delta\omega \quad (4.65)$$

on a que, pour des temps courts ($t \ll \tau_e$), le rapport des réductions de bruit est égal à $\mathcal{S}(a, b)$

$$\mathcal{S}(a, b) = R_{out}(0) / R_{at} \quad (4.66)$$

Optimiser la mesure des fluctuations atomiques revient à optimiser le signal sur bruit de cette mesure, donc à maximiser $\mathcal{S}(a, b)$ par rapport à a et b . On trouve que \mathcal{S} est maximale lorsque l'analyseur de spectre est Fourier-limité ($b = 2\pi/a$) et pour a environ égal à 1.3. Dans ces conditions et pour $\eta_{max} \sim 1$ ($C \gg 1$), la valeur de l'intégrale (4.64) est 0.64, ce qui signifie que l'on mesure au mieux environ les deux tiers de la réduction de bruit atomique initiale $R_{out} \simeq 0.64 R_{at}$.

⁶Nous reviendrons dans le paragraphe B.8 sur les techniques permettant de s'affranchir des bruits techniques à basse fréquence.

B.7.3 Matching temporel de l'émission atomique

L'imperfection de la mesure précédente vient de la forme particulière de l'émission atomique et provient du fait que notre homodynage avec un oscillateur local constant ne matche pas le profil temporel du champ émis par les atomes [Poulsen01a]. Une méthode pour résoudre ce problème consiste à procéder à un homodynage avec un oscillateur local dont le profil temporel correspond exactement à celui de l'émission atomique. On choisit donc un oscillateur local d'amplitude $E_{LO}(t) \propto e^{-\zeta\gamma_0 t}$, où ζ est un paramètre adimensionné ajustable. La puissance de bruit normalisée vue par l'analyseur de spectre vaut cette fois

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{I(t)} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{\Delta\omega}{2}} \frac{d\omega}{\Delta\omega T_0} \int_t^{t+T_0} d\tau \int_t^{t+T_0} d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} \times E_{LO}(\tau)E_{LO}(\tau')\mathcal{C}(\tau, \tau') \quad (4.67)$$

avec $I(t) = |E_{LO}(t)|^2$ l'intensité de l'oscillateur local. En utilisant (6.91), on obtient

$$\bar{P}(t) = \mathcal{N}(a, \zeta) - \mathcal{S}(a, b, \zeta)e^{-2\gamma_0 t} R_{at} \quad (4.68)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{N}(a, \zeta) = \frac{1 - e^{-2\zeta a}}{2\zeta a}$$

$$\mathcal{S}(a, b, \zeta) = \frac{2\eta_{max}}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} d\bar{\omega} \frac{1 + e^{-2a(1+\zeta)} - 2e^{-a(1+\zeta)} \cos(a\bar{\omega})}{(1 + \zeta)^2 + \bar{\omega}^2}$$

$\mathcal{N}(a, \zeta)$ donne le niveau de bruit en l'absence de réduction de bruit atomique ("shot-noise" de la mesure) et $\mathcal{S}(a, b, \zeta)$ représente l'amplitude du transfert de réduction de bruit des atomes au champ sortant (signal de la mesure). La réduction de bruit mesurée dans le champ peut être définie par l'écart relatif avec le shot noise de la mesure

$$R_{out}(t) \equiv 1 - \frac{\bar{P}(t)}{\mathcal{N}(a, \zeta)} = \frac{\mathcal{S}(a, b, \zeta)}{\mathcal{N}(a, \zeta)} e^{-2\gamma_0 t} R_{at} \quad (4.69)$$

Pour des temps courts, on retrouve que le rapport des réductions du bruit quantique du champ sortant et du bruit atomique est égal au rapport signal sur bruit de la mesure \mathcal{S}/\mathcal{N} . Ce rapport est optimal lorsque $b = 2\pi/a$ et pour un temps d'intégration long devant le temps d'émission (de manière à intégrer tout le signal utile) : $a \gg 1, \zeta$. On a dans ce cas : $\mathcal{N}(a, \zeta) \sim 1/(2a\zeta)$ et $\mathcal{S}(a, b, \zeta) \sim 2\eta_{max}/a(1 + \zeta)^2$, ce qui donne une efficacité de lecture μ

$$\mu \equiv R_{out}(0)/R_{at} \sim \eta_{max} \frac{4\zeta}{(1 + \zeta)^2} \quad (4.70)$$

L'efficacité de lecture est maximale et égale à η_{max} , lorsque $\zeta = 1$, ce qui correspond à un matching parfait entre l'oscillateur local et le signal atomique. On peut par cette

méthode mesurer l'intégralité de la réduction de bruit atomique. Cela correspond à une mesure "parfaite" de l'état atomique via le champ sortant. Nous verrons dans le chapitre 5 que l'information acquise par cette méthode est utilisable en pratique pour effectuer des protocoles d'information quantique, en particulier pour téléporter l'état quantique d'un ensemble atomique.

B.7.4 Mémoire quantique et non-clonage

Etant donné qu'en régime stationnaire, les atomes sont comprimés et le champ sortant de la cavité est autant comprimé que le champ incident, on pourrait penser que l'on dispose de deux copies - l'une atomique, l'autre de champ - d'un état comprimé. Si tel était le cas, on violerait le théorème de non-clonage [Wootters82]. Or, l'analyse dynamique du paragraphe précédent permet de montrer que lors de la phase d'écriture, le champ intracavité perd sa compression de bruit - ce qui se reflète dans le champ sortant. Les corrélations du champ sont bien transférées aux atomes pendant la phase d'écriture et ne sont donc jamais simultanément "dédoublées" dans les atomes et le champ.

En effet, supposons qu'à $t = 0$ commence la phase d'écriture en EIT, les atomes étant dans un état cohérent atomique et le champ incident comprimé en amplitude sur une large bande de fréquence

$$\Delta J_x^2 = N/4 \quad \text{et} \quad \langle \delta X_2^{in}(t) \delta X_2^{in}(t') \rangle = \delta(t - t') e^{-2r} \quad (4.71)$$

Les fluctuations du champ sortant sont toujours données par (4.60), mais la fonction de corrélation est différente :

$$\begin{aligned} \langle \delta X_2^{out}(t) \delta X_2^{out}(t') \rangle &= \delta(t - t') + (e^{-2r} - 1) \left[(1 - 2\eta_{max})^2 \delta(t - t') \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_{max}(1 - \eta_{max}) 2\tilde{\gamma}_0 e^{-\tilde{\gamma}_0|t-t'|} - \eta_{max} 2\tilde{\gamma}_0 e^{-\tilde{\gamma}_0(t+t')} \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

En effectuant une détection homodyne matchée comme celle de la lecture avec $\tilde{\gamma}_0 T_0 \gg 1$, le signal normalisé mesuré se met sous la forme⁷

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= [(1 - \eta_{max})^2 + \eta_{max}^2] e^{-2r} + 2\eta_{max}(1 - \eta_{max}) + \eta_{max}^2 (1 - e^{-2r}) e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} \\ &\simeq e^{-2r} + (1 - e^{-2r}) e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} \quad (\eta_{max} \sim 1) \end{aligned} \quad (4.73)$$

On voit que, si $\eta_{max} \sim 1$, le champ sortant commence par être au bruit quantique standard ($\bar{P}(0) \simeq 1$), puisque le champ intracavité perd sa compression de bruit durant la phase d'écriture des fluctuations dans les atomes. Il la recouvre ensuite une fois les atomes comprimés et le régime stationnaire atteint (Fig. 4.8).

⁷Pour le calcul exact de la contribution du terme en $e^{-\tilde{\gamma}_0|t-t'|}$, on pourra se reporter au chapitre 6, section B.5.

B.8 Discussion

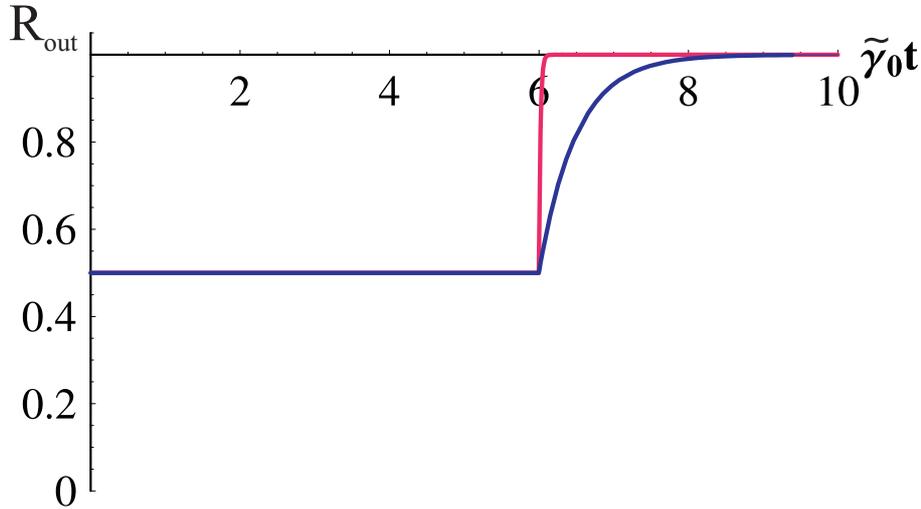


FIG. 4.9 – Lecture “directe” de l’état atomique en sortie de cavité. Lorsque l’état stationnaire est atteint, champ sortant et atomes sont dans un état comprimé. On éteint alors soudainement le vide comprimé incident, le retour au shot noise (courbe bleue) s’effectue dans un temps τ_e beaucoup plus long que le temps de coupure de la cavité $1/\kappa$ (courbe rouge). Ceci prouve de manière non ambiguë le stockage de compression de bruit dans le milieu atomique (sans bien sûr renseigner sur le temps de stockage). Paramètres : $C = 100$, $\sigma = 1/1000$, $\rho = 1/2$.

Un premier point, essentiel d’un point de vue pratique, concerne la possibilité de réaliser une mesure directe de l’état atomique après la phase d’écriture. En effet, si l’état du champ sortant de la cavité à l’état stationnaire ne renseigne pas sur l’état atomique, il est néanmoins possible de prouver que de la compression de bruit du champ incident est effectivement inscrite dans les atomes. Une fois la phase d’écriture achevée, le blocage dans un temps très court de l’arrivée du vide comprimé dans la cavité laisse le spin atomique en interaction avec seulement le champ de contrôle. Le spin atomique retourne donc dans un état cohérent en quelques τ_e , sa compression de bruit étant transférée au champ sortant. Le champ sortant est par conséquent comprimé de manière transitoire pendant quelques τ_e . La mesure de cette compression de bruit par la méthode développée précédemment permet donc de prouver de manière non ambiguë le stockage de compression de bruit dans les atomes. En effet, s’il n’y avait pas d’atomes dans la cavité, le retour au bruit quantique standard se ferait dans des temps de l’ordre de κ^{-1} , beaucoup plus courts que τ_e . En d’autres termes, cela signifie simplement que mesurer de la réduction de bruit du champ sortant longtemps après prouve effectivement que cette réduction de bruit était stockée dans la cavité.

A partir des prédictions théoriques précédentes, on peut proposer un schéma de réalisation expérimentale possible dans le césium. La structure des niveaux d'énergie du césium sur la raie D_2 est représentée sur la figure 4.10. La transition $F = 4 \rightarrow F' = 5$, utilisée jusqu'à maintenant, se révèle peu adaptée pour isoler une véritable structure en Λ . Il est préférable de travailler sur une transition $J \rightarrow J - 1$ ou $J \rightarrow J$. La transition $F = 3 \rightarrow F' = 2$ présente l'avantage d'être fermée (les atomes ne retombent pas dans $F = 4$) et l'utilisation de champs polarisés circulairement permet d'isoler un schéma en Λ proche du schéma théorique. Il est cependant nécessaire de changer la technique de piégeage. Une solution intéressante consiste à réaliser un piège sombre à l'aide d'un faisceau repompeur "troué" [Ketterle93]. Il est ainsi possible de garder la majorité des atomes dans le niveau $F = 3$. L'autre avantage d'une telle technique de piégeage est que l'on s'affranchit ainsi de la perturbation induite par les faisceaux piège. Ainsi que cela a été démontré lors des expériences de génération d'états comprimés ou intriqués [Lambrecht95, Josse03c], le fait que le faisceau sonde interagisse sur la même transition que les faisceaux piège résulte en une augmentation de bruit parasite sur les atomes et perturbe donc les faisceaux d'interaction, ce qui entraîne une diminution de la réduction de bruit du faisceau intracavité. Dans un piège sombre, les atomes ne voient plus que les faisceaux d'interaction et l'interaction est automatiquement plus "propre". D'autre part, on peut espérer augmenter les densités d'atomes refroidis de cette manière [Ketterle93]. Cette technique a été mise en oeuvre avec succès dans le groupe de Philippe Grangier à Orsay dans le cadre des mesures quantiques non destructives avec des atomes de rubidium [Roch97, Sinatra98].

Un troisième point important concerne la lecture et l'écriture basse fréquence de la compression de bruit sur les variables atomiques. La conclusion des calculs précédents est que, pour avoir un transfert quantique optimal, il est crucial de satisfaire à la condition de résonance à deux photons. Pour une interaction Raman avec des sous-niveaux Zeeman, cela implique que

$$\tilde{\delta} = \omega_2 - \omega_1 + \Omega^2/\Delta = 0 \quad (4.74)$$

On peut donc choisir l'intensité du champ de contrôle et le désaccord à un photon de telle sorte que la différence de fréquence entre les champs soit de l'ordre de quelques centaines de kHz. On excite ainsi de manière résonnante la cohérence dans le fondamental à une fréquence non nulle dans le référentiel du laboratoire. Les spectres de bruit que nous avons présentés dans ce chapitre sont alors centrés non plus autour de la fréquence nulle, mais autour de la différence de fréquence $|\omega_1 - \omega_2|$. De même, pour la mesure par détection homodyne, on effectue un battement entre une partie du faisceau qui fournit le champ de contrôle (de fréquence ω_1) avec le vide comprimé sortant. On

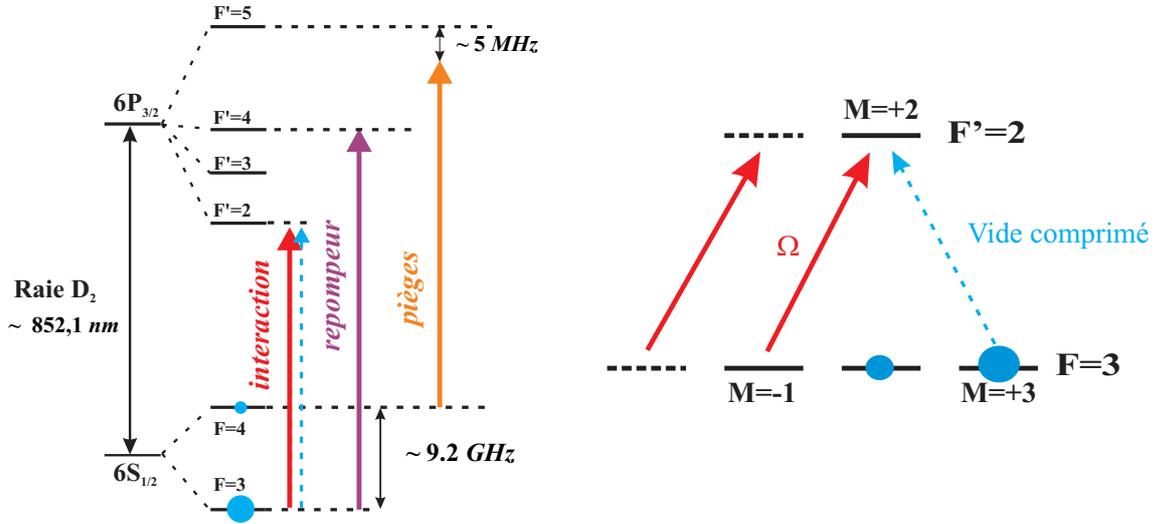


FIG. 4.10 – Schéma possible de réalisation sur la raie D_2 du césium : les atomes sont pompés majoritairement dans le niveau $F = 3$, $m_F = +3$, les champs sont polarisés circulairement.

regarde la réponse de l'analyseur de spectre à $|\omega_1 - \omega_2|$, ce qui permet de s'affranchir du bruit électronique basse fréquence.

Pour une interaction en EIT, la situation est un peu différente. En fait, l'absence de déplacement lumineux conduit à la condition de résonance à deux photons

$$\delta = \omega_2 - \omega_1 = 0 \quad (4.75)$$

On peut toutefois ajouter un champ magnétique longitudinal afin de lever la dégénérescence entre les sous niveaux fondamentaux. Un champ magnétique selon z induit un déplacement des niveaux $\omega_L = \gamma_m B$ de telle sorte que la condition de résonance s'écrit alors

$$\omega_L = \omega_1 - \omega_2 \quad (4.76)$$

On peut alors choisir l'amplitude du champ magnétique pour que la fréquence de Larmor soit de l'ordre de quelques centaines de kHz, et décaler la fréquence d'un champ par rapport à l'autre afin de satisfaire (4.76).

Dans tous les cas, il est nécessaire de disposer d'une source de vide comprimé efficace, stable, accordable et assez large bande (au minimum quelques MHz) à la longueur d'onde de 852 nm.

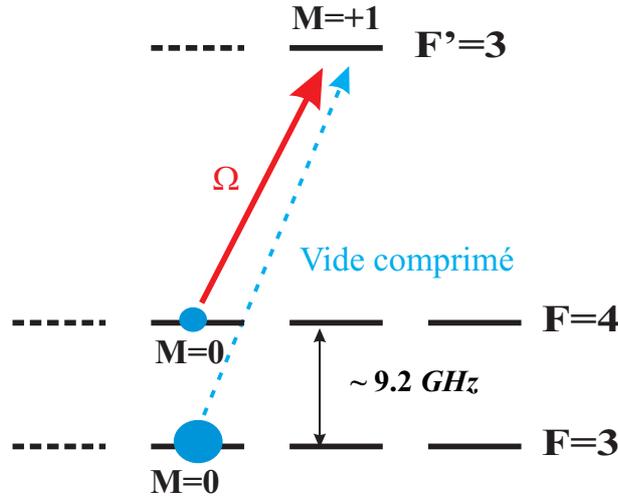


FIG. 4.11 – Schéma possible de réalisation sur la transition d’horloge du césium $F = 3, m_F = 0 \rightarrow F = 4, m_F = 0$.

Notons également qu’avec un tel piège et sur une source accordable sur toute la structure hyperfine, il serait également possible de comprimer les fluctuations quantiques associées à la cohérence hyperfine à 9.2 GHz des horloges atomiques (voir Fig. 4.11), et éventuellement améliorer la sensibilité des horloges [Santarelli99].

C Mémoire quantique : cavité ou simple passage

La plupart des prédictions théoriques existantes concernant le transfert des variables quantiques entre champ et atomes se basent sur des modèles en simple passage que ce soit dans le cadre des expériences de lumière ralentie [Fleischhauer00, Lukin00, Fleischhauer02a] ou d’interaction de type Raman [Kozhekin00]. Nous développons dans ce paragraphe le calcul de la modification des fluctuations quantiques atomes-champs lors d’une interaction en simple passage [Dantan05a], afin de comparer l’efficacité du transfert quantique avec celle calculée dans le paragraphe B, dans le cas d’une interaction en cavité.

C.1 Interaction atomes-champ en simple passage

Pour traiter l’échange des fluctuations quantiques entre un ensemble d’atomes et des champs en simple passage, il est nécessaire de quantifier le champ électromagnétique différemment. Nous considérons la propagation unidimensionnelle selon l’axe du milieu atomique z de deux champs E_j ($j = 1, 2$) copropageants, de fréquence ω_j et de vecteur d’onde k . Le nuage atomique est de longueur L , de section S , et contient N

atomes répartis de manière uniforme. Nous nous plaçons dans le cadre d'une théorie purement unidimensionnelle dans laquelle nous négligeons tous les effets transverses et de diffraction. Cela est bien justifié si le nombre de Fresnel du nuage atomique - $\mathcal{F} = S/\lambda L$ - est voisin de l'unité, et si $L \gg S^{1/2} \gg \lambda$. On suppose donc que la divergence angulaire du faisceau ($\sim \lambda/S^{1/2}$) est de l'ordre de l'angle géométrique sous-tendu par le nuage ($\sim S^{1/2}/L$). L'émission peut alors être considérée comme unidimensionnelle [Raymer81].

La composante de fréquence positive du champ peut s'écrire

$$E_j^{(+)}(z, t) = \mathcal{E}_{0j} A_j(z, t) e^{i(kz - \omega_j t)} \quad (4.77)$$

où $e^{i(kz - \omega_j t)}$ représente la porteuse de l'onde j , $\mathcal{E}_{0j} = \sqrt{\hbar\omega_j/2\epsilon_0 SL}$ et $A_j(z, t)$ est l'enveloppe lentement variable, dont les variations spatiotemporelles sont très lentes devant la longueur d'onde et la fréquence optique. L'équation de propagation s'obtient à partir des équations de Maxwell dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable. Dans le vide on a simplement

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) A_j(z, t) = 0 \quad (4.78)$$

dont la solution correspond à la propagation de l'enveloppe $A_j(z, t) = A_j(z - ct)$. On quantifie le champ en imposant à l'opérateur enveloppe les relations de commutation

$$[A_j(z, t), A_j^\dagger(z', t')] = \frac{L}{c} \delta[t - t' - (z - z')/c] \quad (4.79)$$

Une description du milieu adaptée au problème de l'interaction atomes-champs en simple passage consiste à utiliser des opérateurs atomiques continus. On découpe le milieu en tranches transversales de largeur Δz . La valeur d'un opérateur à la position z est obtenue en moyennant sur les opérateurs des atomes contenus dans la tranche centrée en z . On fait ensuite tendre la largeur vers zéro pour obtenir des opérateurs dépendant continûment de la position dans le nuage⁸

$$\sigma_{\mu\nu}(z, t) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{L}{N\Delta z} \sum_{z \leq z^j \leq z + \Delta z} \sigma_{\mu\nu}^j(t) \quad (4.80)$$

où $\sigma_{\mu\nu}^j(t)$ représente un opérateur atomique individuel (dans le référentiel tournant associé à l'onde correspondante) à la position z^j comprise entre z et $z + \Delta z$ à l'instant t . L'hamiltonien d'interaction s'écrit alors comme une somme continue sur ces opérateurs (voir également l'appendice B)

$$H = -\hbar \sum_{j=1,2} \int \frac{dz}{L} N [g_j A_j(z, t) \sigma_{3j}(z, t) + h.c.] \quad (4.81)$$

⁸Pour une démonstration rigoureuse de ces équations en opérateurs continus, voir l'appendice B.

avec de nouvelles constantes de couplage $g_j = d_j \mathcal{E}_{0j} / \hbar$. Avec notre nouvelle définition de \mathcal{E}_{0j} , la constante de couplage g_j est maintenant exprimée en unités de fréquence, et non en \sqrt{Hz} comme dans le formalisme en cavité. Les équations de propagation des champs dans le milieu atomique sont alors données par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) A_j(z, t) = ig_j N \sigma_{j3}(z, t) \quad (j = 1, 2) \quad (4.82)$$

et on a un nouveau système d'équations d'Heisenberg-Langevin pour les opérateurs continus atomiques

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{13}(z, t) = -(\gamma + i\Delta_1) \sigma_{13} + ig_1 A_1 (\sigma_{11} - \sigma_{33}) + ig_2 A_2 \sigma_{12} + f_{13} \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{23}(z, t) = -(\gamma + i\Delta_2) \sigma_{23} + ig_2 A_2 (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + ig_1 A_1 \sigma_{21} + f_{23} \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{21}(z, t) = -(\gamma_0 - i\delta) \sigma_{21} + ig_1 A_1^\dagger \sigma_{23} - ig_2 A_2 \sigma_{31} + f_{21} \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{11}(z, t) = -\gamma_0 \sigma_{11} + \gamma \sigma_{33} + \Lambda_1 + ig_1 A_1^\dagger \sigma_{13} - ig_1 A_1 \sigma_{31} + f_{11} \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{22}(z, t) = -\gamma_0 \sigma_{22} + \gamma \sigma_{33} + \Lambda_2 + ig_2 A_2^\dagger \sigma_{23} - ig_2 A_2 \sigma_{32} + f_{22} \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{33}(z, t) = -2\gamma \sigma_{33} - ig_1 (A_1^\dagger \sigma_{13} - A_1 \sigma_{31}) - ig_2 (A_2^\dagger \sigma_{23} - A_2 \sigma_{32}) + f_{33} \quad (4.88)$$

Les nouvelles forces de Langevin $f_{\mu\nu}(z, t)$ sont obtenues en sommant sur une tranche comme dans (4.80) et leurs fonctions de corrélation sont données par

$$\langle f_{\mu\nu}(z, t) f_{\rho\sigma}(z', t') \rangle = \frac{L}{N} D_{\mu\nu\rho\sigma} \delta(t - t') \delta(z - z') \quad (4.89)$$

les coefficients de diffusion $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ s'obtenant de la manière habituelle par le théorème de régression quantique [voir Appendice A].

Nous allons maintenant nous placer dans des conditions analogues aux schémas en cavité présentés précédemment, et calculer les propriétés de bruit quantique du système atomes-champs.

C.2 Transfert quantique en EIT

Dans des conditions de Transparence Electromagnétiquement Induite résonnante ($\Delta_1 = \Delta_2 = \delta = 0$), le milieu atomique est transparent pour les champs qui se propagent sans dissipation. Les expériences de "lumière lente" ont démontré la possibilité de stocker et manipuler des pulses lumineux, soit dans des atomes froids, soit dans des vapeurs. Ces expériences ont montré l'efficacité du processus pour les grandeurs classiques

(valeurs moyennes). Plusieurs modèles théoriques [Fleischhauer00, Fleischhauer02a, Andre02b], basés sur le concept de *polaritons*, prédisent que les fluctuations quantiques s'inscrivent également dans les variables atomiques. Les calculs se font dans le régime *pulsé*, traitent le champ de contrôle classiquement et supposent généralement le champ sonde d'amplitude faible.

Nous nous attachons dans cette section à développer un traitement quantique du transfert de fluctuations atomes-champs dans le cadre d'un régime de fonctionnement *continu*, ce qui nous permet de comparer de manière rigoureuse avec les résultats obtenus en cavité.

Comme précédemment, une situation intéressante en termes de mémoires et de transfert de fluctuations est d'étudier la propagation dans le nuage d'un vide comprimé en présence d'un champ de contrôle cohérent. Nous calculons dans cette section les spectres de bruit du champ à la sortie du nuage atomique et montrons qu'il reste comprimé dans une certaine fenêtre de transparence. Ce résultat a été démontré lors d'une expérience récente [Akamatsu03], qui a mis en évidence une conservation partielle en régime stationnaire de la compression de bruit à la sortie d'une vapeur de rubidium éclairée dans des conditions d'EIT par un champ incident dans un état vide comprimé. De plus, nous montrons ensuite, en calculant les spectres de bruit atomique, que les atomes sont également comprimés de manière efficace, comme dans le cas d'une interaction en cavité.

C.2.1 Spectre du champ sortant

Dans le cas $\Lambda_2 = N\gamma_0$, $\Lambda_1 = 0$, tous les atomes sont dans le niveau 2 en régime stationnaire. Comme dans le schéma en cavité, les fluctuations du champ A_2 sont effectivement découplées de celles du champ cohérent, et dépendent des fluctuations du dipole optique et de la cohérence dans le fondamental

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta X_2(z, t) = -2gN\delta\sigma_y(z, t) \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma_y(z, t) = -\gamma\delta\sigma_y + \Omega\delta j_x + \frac{g}{2}\delta X_2 + f_{\sigma_y} \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta j_x(z, t) = -\gamma_0\delta j_x - \Omega\delta\sigma_y + f_{j_x} \quad (4.92)$$

où $\delta X_2 = \delta A_2 + \delta A_2^\dagger$ représentent les fluctuations d'amplitude du vide comprimé, $\delta\sigma_y$ et δj_x sont respectivement les fluctuations de la partie imaginaire du dipôle optique et de la partie réelle de la cohérence dans l'état fondamental. Des équations similaires couplent les fluctuations de Y_2 , σ_x et j_y . La transformée de Fourier de ces équations

conduit à l'équation d'évolution spatiale de $\delta X_2(z, \omega)$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta X_2(z, \omega) = -\frac{\alpha}{L} \delta X_2(z, \omega) + F_{X_2}(z, \omega) \quad (4.93)$$

$$\text{avec} \quad \alpha(\omega) = -i\frac{\omega L}{c} + C \frac{\gamma(\gamma_0 - i\omega)}{D}, \quad D = (\gamma - i\omega)(\gamma_0 - i\omega) + \Omega^2$$

$$\text{et} \quad F_{X_2}(z, \omega) = -\frac{2gN}{D} [\Omega f_{j_x}(z, \omega) + (\gamma_0 - i\omega) f_{\sigma_y}(z, \omega)]$$

Le paramètre $C = \frac{g^2 N L}{\gamma c}$, que nous avons noté C par analogie avec la coopérativité dans un schéma en cavité, ne diffère de ce dernier⁹ que par l'absence du facteur de surtension $1/T$. Ce paramètre n'est autre que l'*épaisseur optique* du milieu $e = k\chi_I L$, où χ_I est la partie imaginaire de la susceptibilité pour la transition $2 \rightarrow 3$, $\chi_I = Nd_2^2/\hbar\epsilon_0\gamma SL$. En exprimant la largeur naturelle de la transition en fonction du dipole ($\gamma = \omega_2^3 d_2^2/6\pi\epsilon_0\hbar c^3$, [Cohen96b]), ce paramètre s'écrit également sous la forme très simple

$$e = C = N \frac{3}{2\pi} \frac{\lambda^2}{S} \quad (4.94)$$

et peut atteindre des valeurs de l'ordre de 100 pour des atomes de césium refroidis dans un MOT.

A partir de l'équation (4.93), on obtient aisément l'expression dans l'espace de Fourier des fluctuations du champ à la sortie du nuage $X_2^{out}(t) = X_2(z = L, t)$:

$$\delta X_2^{out}(\omega) = \delta X_2^{in}(\omega) e^{-\alpha} + \int_0^L dz F_{X_2}(z, \omega) e^{-\alpha(L-z)/L} \quad (4.95)$$

On déduit à partir de cette expression le spectre des fluctuations du champ sortant défini par la relation

$$\langle \delta X_2^{out}(\omega) \delta X_2^{out}(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') \frac{L}{c} S_{X_2^{out}}(\omega) \quad (4.96)$$

Pour un champ comprimé en amplitude sur une plage de fréquences large devant les fréquences caractéristiques d'évolution du système atomes-champs, on obtient finalement

$$\begin{aligned} S_{X_2^{out}}(\omega) &= 1 - \left[1 - S_{X_2^{in}}(\omega) \right] e^{-(\alpha + \alpha^*)} \\ &= 1 - (1 - e^{-2r}) e^{-(\alpha + \alpha^*)} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Le terme en $i\omega L/c$ dans (4.97) correspond au déphasage de la propagation libre. Nous retrouvons, que, dans des conditions d'EIT, la vitesse de propagation du champ sonde

⁹La constante de couplage étant différente, on a également $g_{\text{simple passage}}^2 = \frac{c}{L} g_{\text{cavité}}^2$.

est fortement modifiée par la présence du champ de contrôle. Un développement de $\alpha(\omega)$ autour de $\omega = 0$ donne le résultat bien connu des théories de ralentissement de la lumière basées sur la notion de polaritons

$$\alpha(\omega) = A - i\omega \frac{L}{v_g} + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.98)$$

$$\text{avec } A = C \frac{\gamma\gamma_0}{\gamma\gamma_0 + \Omega^2} \quad (4.99)$$

$$v_g = \frac{c}{1 + g^2 N \frac{\Omega^2 - \gamma_0}{(\Omega^2 + \gamma_0)^2}} \quad (4.100)$$

A représente l'absorption due à la perte de cohérence dans le fondamental, et v_g la vitesse de groupe en EIT, qui est considérablement réduite lorsque $\gamma_0 \ll \Gamma_E \ll g^2 N/\gamma$. Un spectre correspondant à ce régime est tracé dans la figure 4.12, pour une compression

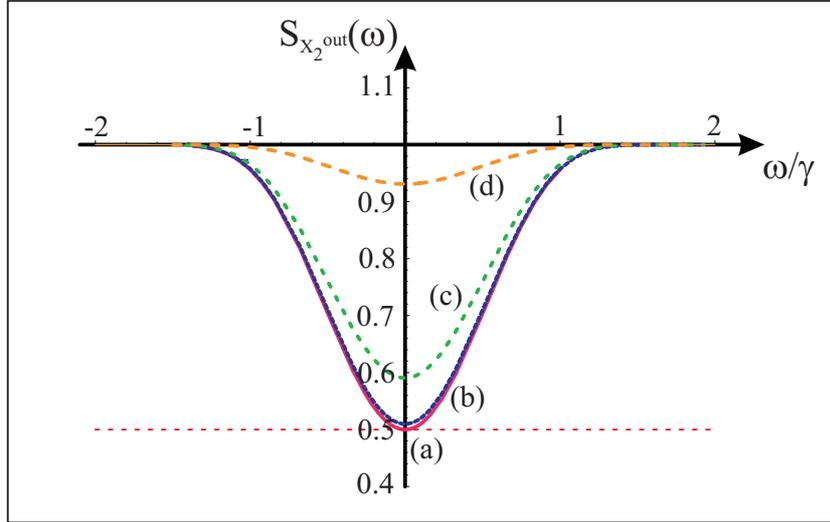


FIG. 4.12 – Spectre de bruit minimal du champ sortant en EIT, pour différentes valeurs de γ_0 : (a) 0, (b) $\gamma/1000$, (c) $\gamma/100$, (d) $\gamma/10$. Paramètres : $C = 100$, $\Gamma_E = 10\gamma$, $e^{-2r} = 0.5$.

de bruit du champ incident de 3 dB et pour différentes valeurs de γ_0 : le résultat intéressant est que le champ reste comprimé sur une plage de fréquence de largeur

$$\Delta\omega \simeq \Gamma_E \sqrt{\frac{\ln 2}{2C} \left(1 - \frac{C\gamma_0}{\Gamma_E}\right)} \quad (C \gg 1, \Gamma_E \gg \gamma_0) \quad (4.101)$$

Le terme en γ_0 , qui traduit l'imperfection de la transparence, est rapidement non négligeable pour de grandes valeurs de C . Pour que l'absorption à résonance soit faible,

il faut que $C\gamma_0/\Gamma_E \ll 1$. On remarque aussi que cette fenêtre de transparence pour les fluctuations se rétrécit lorsqu'on augmente la coopérativité (en particulier, le nombre d'atomes). En dehors de cette fenêtre, la compression de bruit est absorbée par les atomes et le champ est dans un état cohérent.

Pour expliquer ces résultats, on peut procéder comme dans le paragraphe B.2.2 du chapitre 2 en effectuant un calcul "classique" à l'ordre 1 en champ sonde. On obtient alors que

$$\langle A_2^{out} \rangle = \langle A_2^{in} \rangle e^{-\xi} \quad \text{avec} \quad \xi = C \frac{\gamma(\gamma_0 + i\Delta)}{(\gamma_0 + i\Delta)(\gamma + i\Delta) + \Omega^2} \quad (4.102)$$

La largeur par rapport au désaccord Δ de la transmission en intensité est alors donnée par (4.101).

C.2.2 Spectre et variance atomique

Pour caractériser l'efficacité du transfert des fluctuations, nous calculons les spectres et variances des composantes du spin collectif. Le spin collectif est défini naturellement à partir des opérateurs continus en sommant sur le nuage :

$$J_\mu(t) = N \int \frac{dz}{L} j_\mu(z, t) \quad (4.103)$$

Comme dans le schéma en cavité, on a $\langle J_z \rangle = N/2$, $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$, et $\Delta J_x^2 = \Delta J_y^2 = N/4$ pour un état cohérent atomique. Nous allons détailler la méthode générale de calcul du bruit quantique atomique que nous avons utilisée dans cette situation relativement simple, car elle est applicable dans tous les schémas de transfert atomes-champs en simple passage. L'idée pour résoudre le système d'équations différentielles spatio-temporelles couplées (4.90-4.91-4.92) est de se ramener à un système d'équations linéaire en procédant à une transformation de Fourier temporelle et une transformée de Laplace spatiale. On définit la transformée de Laplace de $f(z)$ par

$$f[s] = \int_0^\infty e^{-sz} f(z) dz \quad (4.104)$$

En utilisant le fait que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) [s] = sf[s] - f(0) \quad (4.105)$$

on obtient aisément

$$(-i\omega + cs)\delta X_2[s, \omega] = c\delta X_2(0, \omega) - 2gN\delta\sigma_y[s, \omega] \quad (4.106)$$

$$(\gamma - i\omega)\delta\sigma_y[s, \omega] = \Omega\delta j_x[s, \omega] + \frac{g}{2}\delta X_2[s, \omega] + f_{\sigma_y}[s, \omega] \quad (4.107)$$

$$(\gamma_0 - i\omega)\delta j_x[s, \omega] = -\Omega\delta\sigma_y[s, \omega] + f_{j_x}[s, \omega] \quad (4.108)$$

desquelles on déduit la valeur des fluctuations $\delta j_x[s, \omega]$:

$$\delta j_x[s, \omega] = \frac{B_1}{s + s_0} \delta X_2^{in}(\omega) + B_2 \frac{s - b_2}{s + s_0} f_{\sigma_y}[s, \omega] + B_3 \frac{s - b_3}{s + s_0} f_{j_x}[s, \omega] \quad (4.109)$$

avec $X_2^{in}(\omega) = X_2(0, \omega)$, $B_1 = -\frac{g\Omega/2}{D}$, $B_2 = \frac{-\Omega}{D}$, $B_3 = \frac{\gamma - i\omega}{D}$, $b_2 = i\omega/c$, $b_3 = i\omega/c - g^2 N / (\gamma - i\omega)c$, $D = (\gamma_0 - i\omega)(\gamma - i\omega) + \Omega^2$, and $s_0 = \alpha(\omega)/L$. En prenant la transformée de Laplace inverse on obtient les fluctuations de l'opérateur atomique continu à la position z

$$\begin{aligned} \delta j_x(z, \omega) = & B_1 e^{-s_0 z} \delta X_2^{in}(\omega) \\ & + B_2 \left[f_{\sigma_y}(z, \omega) - (s_0 + b_2) \int_0^z dz' e^{-s_0(z-z')} f_{\sigma_y}(z', \omega) \right] \\ & + B_3 \left[f_{j_x}(z, \omega) - (s_0 + b_3) \int_0^z dz' e^{-s_0(z-z')} f_{j_x}(z', \omega) \right] \end{aligned} \quad (4.110)$$

L'intégration sur z donne les fluctuations à la fréquence ω du spin collectif J_x

$$\begin{aligned} \delta J_x(\omega) = & B_1 N \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \delta X_2^{in}(\omega) \\ & + N B_2 \int_0^L \frac{dz}{L} \left[f_{\sigma_y}(z, \omega) - (s_0 + b_2) \int_0^z dz' e^{-s_0(z-z')} f_{\sigma_y}(z', \omega) \right] \\ & + N B_3 \int_0^L \frac{dz}{L} \left[f_{j_x}(z, \omega) - (s_0 + b_3) \int_0^z dz' e^{-s_0(z-z')} f_{j_x}(z', \omega) \right] \end{aligned} \quad (4.111)$$

Le spectre de bruit de J_x , défini par

$$\langle \delta J_x(\omega) \delta J_x(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') S_{J_x}(\omega) \quad (4.112)$$

s'obtient à l'aide des fonctions de corrélation du champ incident et des forces de Langevin atomiques. Il se met sous la forme

$$S_{J_x}(\omega) = \frac{N}{4} \left[B_f(\omega) S_{X_2^{in}}(\omega) + B_{coh}(\omega) + B_{spin}(\omega) \right] \quad (4.113)$$

Comme dans le schéma en cavité, ce spectre est la somme de trois contributions : le premier donne le couplage avec le champ incident (proportionnel à la compression de bruit), le second, la contribution du bruit atomique résultant de l'émission spontanée et le troisième, le bruit associé au processus de perte de cohérence dans le fondamental. Ce spectre est représenté sur la figure 4.13 pour un état cohérent du champ incident ($S_{X_2^{in}} = 1$) et pour un état comprimé de 3 dB ($S_{X_2^{in}} = 0.5$) dans les mêmes conditions de pompage. Bien qu'il ne soit plus lorentzien, ce spectre est très similaire à celui obtenu dans le cas d'une interaction en cavité, à ceci près que sa largeur à mi-hauteur

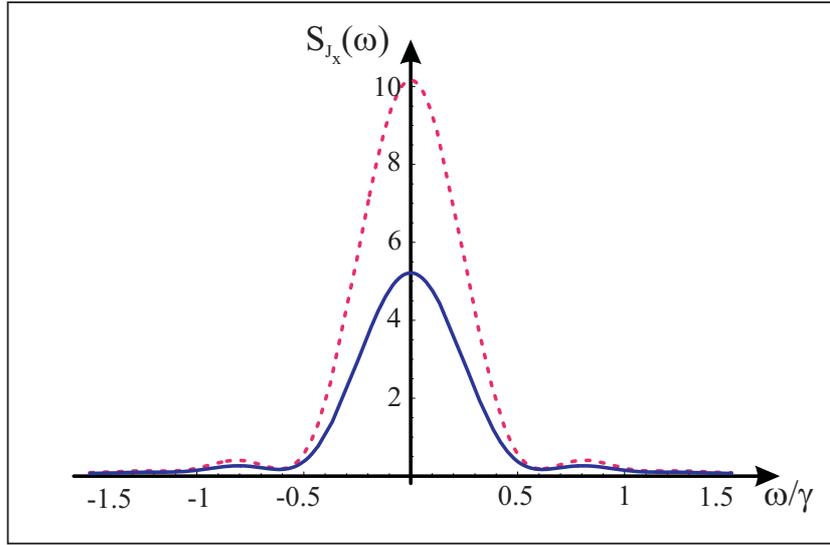


FIG. 4.13 – Spectre de bruit de J_x en EIT, pour un champ incident cohérent (pointillés) et comprimé de 3 dB (trait plein). Paramètres : $C = 100$, $\Gamma_E = 10\gamma$, $\gamma_0 = \gamma/1000$. L'efficacité du transfert vaut $\eta_E = 0.91$ dans le second cas.

est d'ordre $\Gamma_E/4\sqrt{C}$ ($C \gg 1$). La variance s'obtient de manière simple par intégration de ce spectre en remarquant que, pour un champ incident dans un état cohérent, les atomes sont dans un état cohérent atomique, ce qui implique que les B_i satisfassent

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} [B_f(\omega) + B_{coh}(\omega) + B_{spin}(\omega)] = 1 \quad (4.114)$$

On en déduit l'efficacité du transfert en EIT en simple passage

$$\eta_E = \int \frac{d\omega}{2\pi} B_f(\omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{C\Gamma_E\gamma^2}{|D|^2} \frac{|1 - e^{-\alpha}|^2}{|\alpha|^2} \quad (4.115)$$

avec $D = (\gamma_0 - i\omega)(\gamma - i\omega) + \Omega^2$. Cette expression donne la valeur exacte de l'efficacité de transfert. Cependant, comme on l'a fait pour le schéma en cavité, on peut considérer que le champ et le dipole optique évoluent rapidement devant les observables du fondamental. On peut alors simplifier (4.115) et on trouve alors une conclusion très similaire à l'interaction en cavité, à savoir que l'efficacité est maximale pour un taux de pompage tel que $\gamma_0 \ll \Gamma_E/4\sqrt{C} \ll c/L$. D'une part, l'intensité du champ de contrôle doit être suffisante pour que le taux de couplage effectif avec le champ comprimé domine par rapport à la relaxation du fondamental. Le couplage aux fluctuations du champ doit se faire assez rapidement devant le temps de perte de cohérence. D'autre part, cette intensité ne doit pas être trop grande, afin que le déphasage aux fréquences pour lesquelles les atomes sont comprimés soit négligeable (le produit de la largeur du spectre

$\Gamma_E/4\sqrt{C}$ par le temps de transit L/c doit être petit devant 1). Cette dernière condition est quasiment toujours vérifiée. De manière analytique, on trouve, pour de grandes valeurs de la coopérativité,

$$\eta_E \simeq 1 - \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{C}} - \frac{C\gamma_0}{\Gamma_E} \quad (C \gg 1, \gamma_0 \ll \gamma) \quad (4.116)$$

Le transfert peut donc être efficace lorsque C est grand, mais, comme pour le champ, il est nécessaire que la perte de cohérence dans le fondamental ne soit pas trop importante ($C\gamma_0 \ll \Gamma$).

C.3 Transfert quantique en Raman

Nous allons maintenant étudier la seconde situation que nous savons favorable au processus de transfert des grandeurs quantiques entre atomes et champs : la configuration Raman ($\Delta_i \gg \gamma, \Omega$). On montre¹⁰ que les équations simplifiées régissant les fluctuations des observables du système à deux niveaux effectif sont

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \delta X_2(z, t) = -2\tilde{g}N\delta j_y(z, t) \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta j_y(z, t) = -(\gamma_0 + \Gamma_R)\delta j_y + \frac{\tilde{g}}{2}\delta X_2 + f_{j_y} \quad (4.118)$$

où Γ_R est le taux de pompage Raman et \tilde{g} la constante de couplage effective introduits dans la section précédente.

En prenant la transformée de Fourier temporelle de ces équations, on obtient l'équation d'évolution de $\delta X_2(z, \omega)$, dont l'intégration permet de calculer les fluctuations du champ sortant et son spectre. Ce spectre est donné par une formule analogue à celle obtenue en EIT (4.97) et est égal à

$$S_{X_2^{out}}(\omega) = 1 - \left[1 - S_{X_2^{in}}(\omega) \right] e^{-(\alpha' + \alpha'^*)} \quad (4.119)$$

$$\text{avec} \quad \alpha'(\omega) = -i\frac{\omega L}{c} + \frac{C\Gamma_R}{\Gamma_R + \gamma_0 - i\omega} \quad (4.120)$$

L'allure du spectre est très différente du spectre obtenu dans des conditions d'EIT : la réduction de bruit disparaît à basse fréquence dans une fenêtre de largeur

$$\Delta\omega' \simeq \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} \sqrt{C\Gamma_R(\Gamma_R + \gamma_0)} \quad (C \gg 1) \quad (4.121)$$

¹⁰après linéarisation des équations du chapitre 3 dans le cas $\langle A_2 \rangle = 0$ et $\langle \Pi_2 \rangle = N$, et élimination adiabatique de la cohérence optique

Pour des fréquences en dehors de cette fenêtre, le champ sortant est identique au champ incident. Cette fenêtre d'absorption s'élargit lorsque l'on augmente le nombre d'atomes, en accord avec les conclusions de [Kozhokin00]. Remarquons là encore l'importance de la durée de vie du fondamental qui élargit considérablement la fenêtre d'absorption lorsque γ_0 augmente [voir figure 4.14].

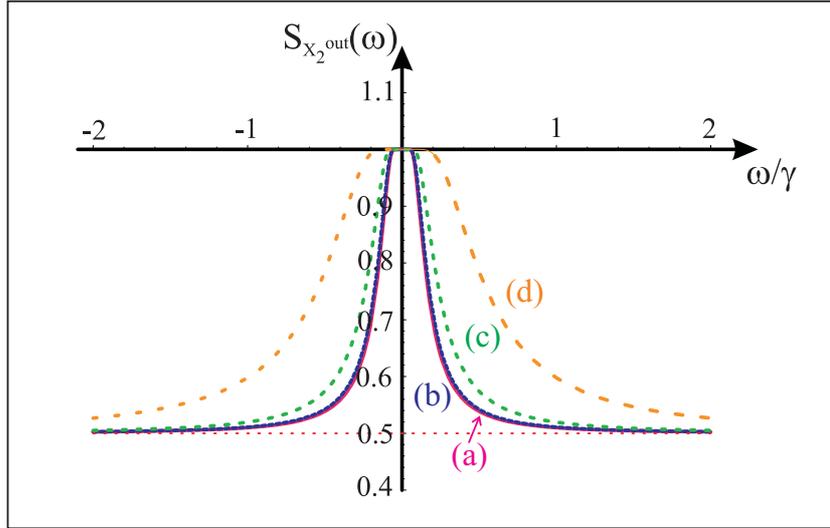


FIG. 4.14 – Spectre de bruit minimal du champ sortant en Raman, pour différentes valeurs de γ_0 : (a) 0, (b) $\gamma/1000$, (c) $\gamma/100$, (d) $\gamma/10$. Paramètres : $C = 100$, $\Gamma_R = \gamma/100$, $e^{-2r} = 0.5$.

En ce qui concerne le bruit atomique, la composante de spin couplée aux fluctuations comprimées du champ est J_y . Son spectre, calculé en utilisant la même méthode que dans le cas de l'interaction en EIT, est représenté sur la figure 4.15. Il est très différent de celui obtenu en EIT (voir Fig. 4.13) et présente en particulier des oscillations qui se produisent jusqu'à des fréquences élevées $\omega \sim \frac{\pi}{4} C \Gamma_R$ ($C \gg 1$). Par ailleurs, on retrouve la même différence qu'en cavité, à savoir que le spectre de bruit atomique est élargi par l'interaction collective en Raman, par opposition à un schéma en EIT où il est affiné. Après calcul de la variance atomique, on trouve que les atomes sont également comprimés. L'efficacité du transfert possède une forme très similaire à celle trouvée en EIT

$$\eta_R = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{C \Gamma_R}{(\Gamma_R + \gamma_0)^2 + \omega^2} \frac{|1 - e^{-\alpha'}|^2}{|\alpha'|^2} \quad (4.122)$$

Le régime dans lequel se placer pour effectuer un bon transfert est donc

$$\gamma_0 \ll C \Gamma_R \ll \Delta, c/L \quad (4.123)$$

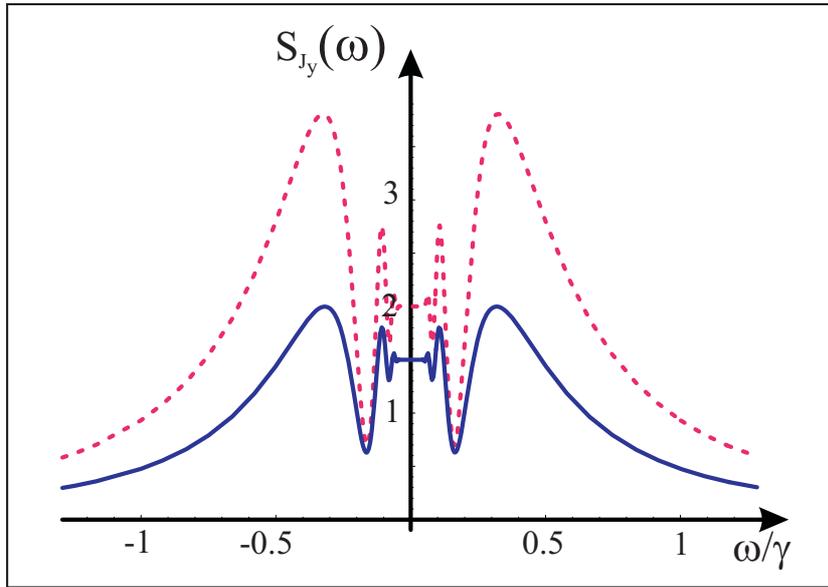


FIG. 4.15 – Spectre de bruit de la composante atomique comprimée en Raman, pour un champ incident cohérent (pointillés) et comprimé de 3 dB (traits pleins). Paramètres : $C = 100$, $\Gamma_R = \gamma/100$, $e^{-2r} = 0.5$.

Dans ce régime, l'efficacité croît vers 100% avec une dépendance en $C^{-1/2}$, mais avec une sensibilité différente vis-à-vis de la perte de cohérence dans le fondamental

$$\eta_R \simeq 1 - \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{C}} \sqrt{1 + \gamma_0/\Gamma_R} \quad (C \gg 1, \gamma_0 \ll \gamma) \quad (4.124)$$

C.4 Interprétation et comparaison avec le schéma en cavité

Pour résumer les résultats de ce chapitre, nous allons comparer les schémas de transfert en cavité et en simple passage, ce qui nous permettra de mettre en lumière les similitudes et les différences qui existent au niveau des processus physiques entre les configurations EIT et Raman.

Le premier point de comparaison porte sur la largeur des spectres du champ sortant : en EIT, les largeurs des spectres sont proportionnelles au taux de pompage à résonance Γ_E et sont considérablement *affinées* en ce qui concerne le bruit quantique, d'un facteur $(1 + 2C)$ en cavité, d'un facteur \sqrt{C} en simple passage. En Raman, les largeurs des spectres sont également gouvernées par le taux de pompage Raman Γ_R , mais elles sont *élargies* par l'interaction, de nouveau, d'un facteur $(1 + 2C)$ en cavité et d'un facteur \sqrt{C} en simple passage. On peut donc, dans tous les cas, distinguer

	Cavité	Simple passage
EIT	$\omega \lesssim \Delta\omega$: transparence $A_2^{out} \sim A_2^{in}$ $A_2^{out} \sim A_2^{in}$	
	$\omega \gtrsim \Delta\omega$: absorption $A_2^{out} \sim -A_2^{in}$ $A_2^{out} \sim \text{shot}$	
Raman	$\omega \lesssim \Delta\omega'$: absorption $A_2^{out} \sim -A_2^{in}$ $A_2^{out} \sim \text{shot}$	
	$\omega \gtrsim \Delta\omega'$: transparence $A_2^{out} \sim A_2^{in}$ $A_2^{out} \sim A_2^{in}$	

TAB. 4.1 – Fluctuations du champ sortant et incident en régime stationnaire dans les différentes situations considérées.

deux domaines de fréquences pour l’analyse du bruit : un domaine “basse fréquence” ($\omega \ll \Delta\omega$ ou $\Delta\omega'$), et un domaine “haute fréquence” ($\omega \gg \Delta\omega$ ou $\Delta\omega'$).

Le second point de comparaison concerne le champ comprimé. Dans un schéma en cavité, le champ sortant en régime stationnaire est presque aussi comprimé que le champ incident à toute fréquence, que ce soit en EIT ou en Raman [voir B.6.2]. On peut l’expliquer en examinant les fluctuations du champ intracavité dans les deux cas :

- en EIT, pour des fréquences d’analyses $\omega \ll \Delta\omega$, on montre que $\delta X_2 \sim 2/\sqrt{T}\delta X_2^{in}$, ce qui signifie que les fluctuations du champ sortant sont égales à celles du champ entrant, $\delta X_2^{out} \sim \delta X_2^{in}$. Le milieu atomique est transparent et il n’y a pas de champ rayonné par les atomes, le champ sortant est le même que le champ incident. Cela explique également ce qui se produit en simple passage pour des fréquences à l’intérieur de la fenêtre de transparence. On retrouve l’effet d’interférence en EIT rencontrée dans le chapitre 2.

Par contre, pour des fréquences $\omega \gg \Delta\omega$, les fluctuations du champ intracavité sont en $\mathcal{O}(1/C)$ et les fluctuations du champ sortant sont alors celles du champ réfléchi par la cavité : $\delta X_2^{out} \sim -\delta X_2^{in}$. En effet, en dehors de la fenêtre de transparence, les fluctuations du champ incident sont absorbées par les atomes, qui rayonnent un champ interagissant destructivement avec le champ incident, $\delta X_2^r \sim -\delta X_2^{in}$, de telle sorte que les fluctuations du champ intracavité sont nulles : $\delta X_2 \propto \delta X_2^r + \delta X_2^{in} = 0$. Pour une interaction en simple passage, il n’y a pas de champ réfléchi, ce qui explique l’absence de compression de bruit en dehors de la

fréquence de transparence.

- en Raman, la dépendance en fréquence est opposée. En cavité, les fluctuations “basse fréquence” du champ intracavité sont négligeables, $\delta X_2 \simeq 0$, les atomes absorbant le champ incident. Les fluctuations du champ sortant sont alors celles du champ réfléchi, $\delta X_2^{out} \sim -\delta X_2^{in}$.

En revanche, pour des fréquences $\omega \gg \delta\omega'$, $\delta X_2 \sim 2/\sqrt{T} \delta X_2^{in}$, et les fluctuations du champ sortant sont celles du champ incident, $\delta X_2^{out} \sim \delta X_2^{in}$. En simple passage, les atomes absorbent à “basse fréquence” et sont transparents dans le domaine “haute fréquence”, ce qui explique l’allure des spectres 4.14.

On peut vérifier ces considérations qualitatives en calculant dans les deux situations la fonction de corrélation entre le champ sortant et le champ incident, dans le cas d’une interaction en cavité,

$$C_{in,out} = \frac{\text{Re} [\langle \delta X_2^{in} \delta X_2^{out} \rangle]}{\sqrt{S_{X_2^{in}} S_{X_2^{out}}}} \quad (4.125)$$

Cette fonction, que l’on obtient aisément à partir de (4.50-4.51-4.52-4.53), est représentée sur la figure 4.16 dans le cas $\tilde{\gamma}_0 \ll \kappa$. On retrouve le comportement qualitatif présenté ci-dessus : en EIT, pour $\omega \ll \Delta\omega$, le milieu est transparent et les champs incident et sortant sont corrélés ($C_{in,out}=1$). En Raman, le champ rayonné par les atomes interfère destructivement avec le champ incident et $C_{in,out} = -1$. Pour les hautes fréquences, c’est le contraire se produit. Ces résultats quantitatifs sont donc en bon accord avec la discussion qualitative précédente.

Ces considérations nous amènent au dernier point de comparaison qui porte sur les grandeurs atomiques. Bien que l’allure des spectres atomiques EIT et Raman en simple passage soit très différente, les variances atomiques sont sensiblement égales et l’efficacité de transfert montre la même dépendance en $1 - \sqrt{2/\pi C}$ pour de grandes valeurs de C . En cavité, l’efficacité croît plus rapidement, le bruit “ajouté” du processus étant en $1/C$. Ceci met en évidence une différence quantitative notable entre les processus de transfert de bruit quantique en cavité et en simple passage. Le couplage en cavité ($\propto N$) est intrinsèquement plus efficace qu’une interaction sans cavité ($\propto \sqrt{N}$). En effet, même en égalant les coopérativités dans les deux cas, c’est-à-dire en considérant une interaction avec N atomes dans une cavité de transmission T ($C = g^2 N/T\gamma$) et une interaction dans les mêmes conditions avec N/T atomes en simple passage, la compression de bruit transférée aux atomes est meilleure en cavité. Ceci vient du fait que les fluctuations du champ incident comprimé sont recyclées par la cavité à chaque passage. On retrouve un résultat bien connu, à savoir que la sensibilité à l’émission

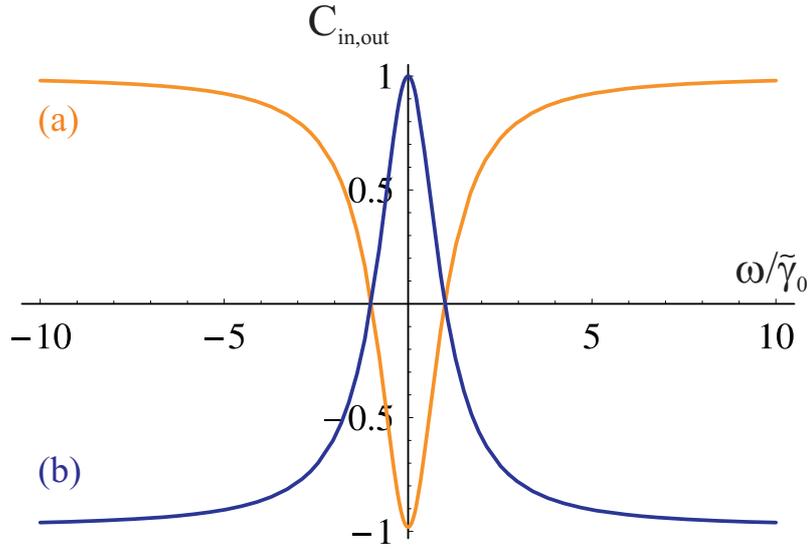


FIG. 4.16 – Corrélations entre le vide comprimé incident et le champ sortant de la cavité en EIT (a) et en Raman (b) [$C = 100$, $\gamma_0 = 0$, $e^{-2r} = 0.5$]. Les fréquences sont normalisées par la largeur de la fenêtre de transparence en cavité $\tilde{\gamma}_0$.

spontanée - i.e. le couplage aux autres modes du champ - est réduite par la présence de la cavité, et on peut quantifier la valeur de cette réduction (d'un facteur \sqrt{C}).

En revanche, si le bruit dû à l'émission spontanée est réduit par la présence de la cavité, ce n'est pas le cas du bruit dû à la perte de cohérence dans le fondamental. Pour une interaction EIT en cavité avec $C \gg 1$, $\Gamma_E \gg \gamma_0$, l'efficacité peut s'écrire

$$\eta_E = \frac{2C}{1+2C} \frac{\Gamma_E/(1+2C)}{\gamma_0 + \Gamma_E/(1+2C)} \simeq 1 - \frac{1}{1+2C} - \frac{(1+2C)\gamma_0}{\Gamma_E} \quad (4.126)$$

Comme en simple passage [voir (4.116)], le dernier terme, qui correspond à du bruit ajouté associé à la perte de cohérence dans le fondamental, croît linéairement avec le nombre d'atomes. Cette sensibilité est moindre pour une interaction Raman, la présence de γ_0 ayant seulement pour effet de changer la coopérativité usuelle en $C\Gamma_R/(\gamma_0 + \Gamma_R)$ [voir (4.36)]. En effet, l'allure des spectres montrent que la sensibilité des atomes aux fluctuations à fréquence nulle du champ est moindre pour une interaction Raman que pour une interaction en EIT, ce qui les protège plus des pertes de cohérence à très basses fréquences, en quelle que sorte.

Pour finir, on peut également calculer l'efficacité du transfert en fonction de la largeur en fréquence de la compression de bruit du champ incident. Nous avons jusqu'à maintenant supposé que la compression de bruit du vide comprimé était la même

sur une bande de fréquences large devant les autres fréquences du problème. On peut se demander ce qui se produit lorsque ceci n'est plus vérifié. Que se passe-t-il en particulier si l'on réduit la bande passante de la réduction du champ incident sur la cavité ?

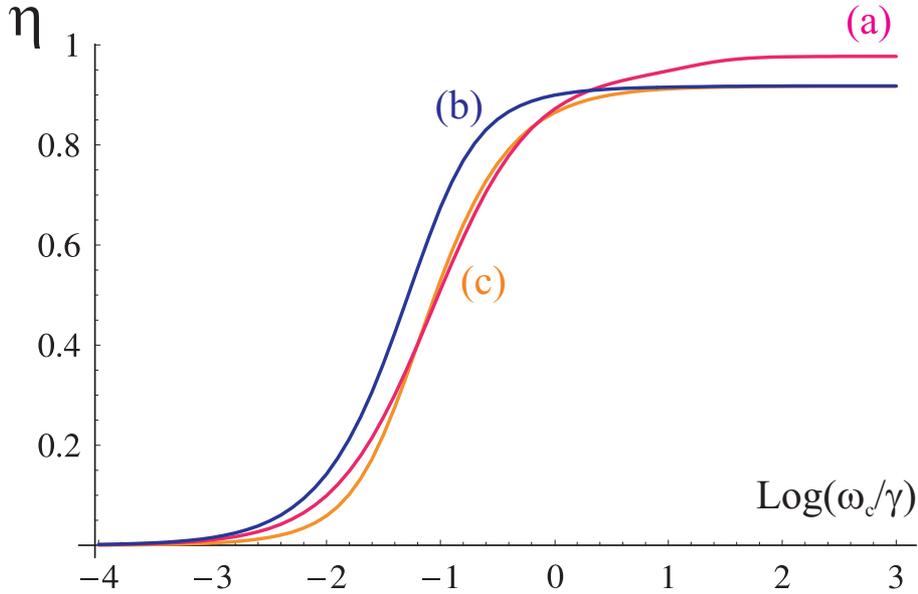


FIG. 4.17 – Evolution de l'efficacité de transfert en fonction de la largeur en fréquence de la compression de bruit incidente ω_c . La courbe (a) correspond à une interaction EIT (ou Raman) en cavité, les courbes (b)/(c) à une interaction en simple passage EIT/Raman. Paramètres : $C = 100$, $e^{-2r} = 0.5$, $\gamma_0/\gamma = 10^{-4}$, $\Gamma_R/\gamma = 1.3 \cdot 10^{-3}$, $\Gamma_E/\gamma = 3.68$ en simple passage, $\Gamma_E/\gamma = 21.1$ en cavité, de telle sorte que les demi-largeurs des spectres valent $\tilde{\gamma}_0 = \gamma/10$ dans chaque cas.

Pour répondre à cette question, nous allons supposer que le vide comprimé incident est produit par un oscillateur paramétrique optique fonctionnant sous le seuil. Le modèle standard pour l'interaction paramétrique d'ordre 2 en cavité prédit une réduction de bruit du champ sortant de l'OPO maximale à fréquence nulle et décroissant sur une plage ω_c donnée par la bande passante de la cavité de l'OPO. On peut écrire le spectre de bruit de la composante comprimée du champ incident sous la forme

$$S_{X_2^{in}}(\omega) = \frac{(1 - \tanh(r/2))^2 + (\omega/\omega_c)^2}{(1 + \tanh(r/2))^2 + (\omega/\omega_c)^2} \quad (4.127)$$

et utiliser (4.25), (4.115) et (4.122) pour calculer numériquement η_E et η_R . Les résultats des simulations numériques sont représentés sur la figure 4.17 en choisissant des conditions de pompage effectif équivalentes (i.e. telles que $\tilde{\gamma}_0 = \gamma/10$ dans tous les

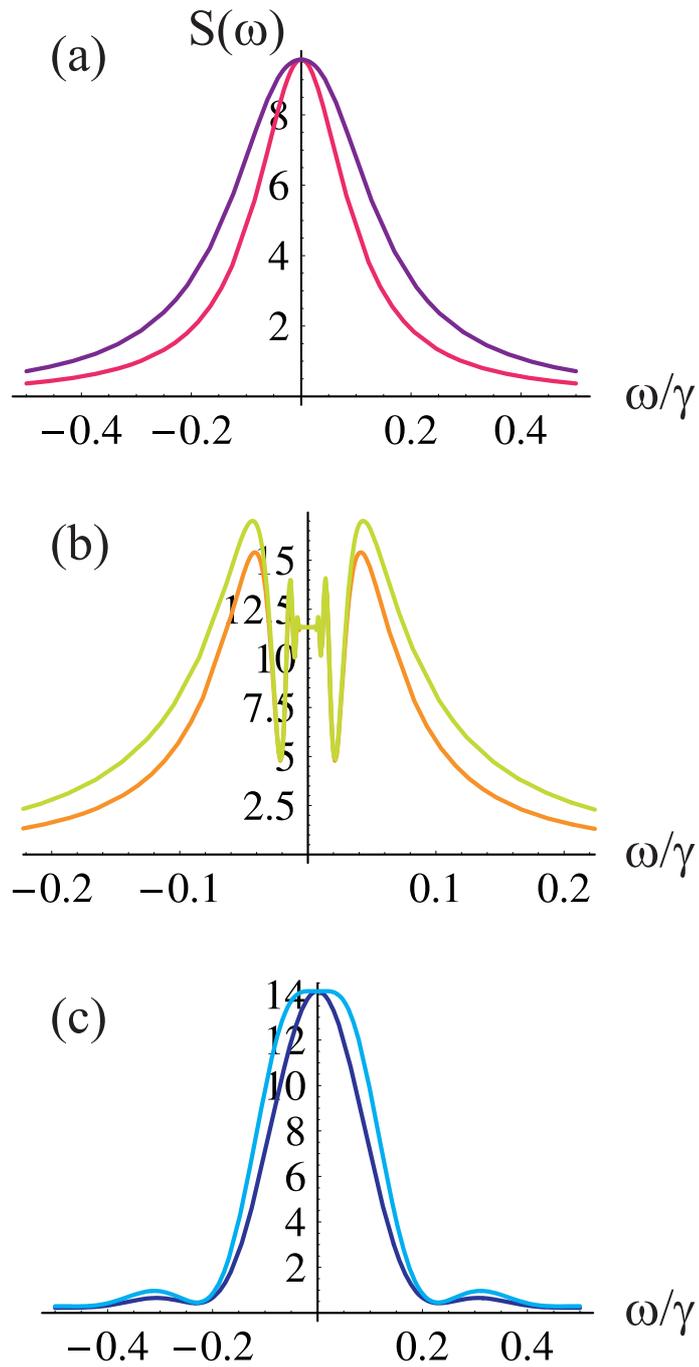


FIG. 4.18 – Spectres de bruit de la composante comprimée dans deux cas : vide comprimée bande large ($\omega_c \gg \tilde{\gamma}_0$) et vide comprimé de largeur $\omega_c = \tilde{\gamma}_0$ dans les trois situations : (a) EIT en cavité (b) Raman en simple passage (c) EIT en simple passage. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 4.17.

cas¹¹). Conformément à l'intuition, on trouve que la fréquence importante à comparer à ω_c est $\tilde{\gamma}_0$ dans tous les schémas : lorsque $\omega_c \sim \tilde{\gamma}_0$, l'efficacité est diminuée de moitié environ. Cependant, si la sensibilité à la largeur de la compression de bruit incidente est à peu près égale pour une interaction en cavité et une interaction Raman sans cavité, une interaction de type EIT se révèle être moins fragile vis-à-vis de la largeur du vide comprimé incident. En effet, si l'on compare les spectres de bruit atomique obtenus dans le cas d'une interaction avec un vide comprimé large bande et un vide comprimé de largeur $\omega_c = \tilde{\gamma}_0$ (Fig. 4.18), on s'aperçoit qu'en EIT le spectre est plus piqué autour de zéro et que par conséquent la réduction de bruit à des fréquences élevées est moins cruciale dans ce schéma.

D Conclusion

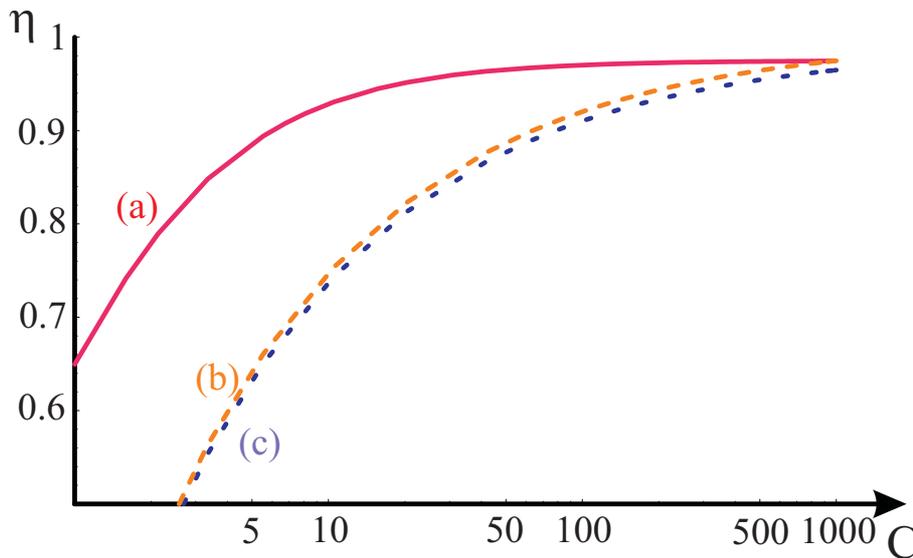


FIG. 4.19 – Efficacité de transfert quantique pour une interaction en cavité [EIT ou Raman, (a)] et pour une interaction en simple passage [Raman (b), EIT (c)]. Les courbes sont tracées pour $\gamma_0 = \gamma/1000$ en prenant un nombre effectif d'atomes égal (en égalisant les coopérativités) dans chaque schéma.

Pour finir, nous montrons les variations de l'efficacité avec la coopérativité sur la

¹¹Si la définition d'une largeur de spectre $\tilde{\gamma}_0$ ne pose pas de problème particulier en cavité ($\tilde{\gamma}_0 = \Gamma_E/(1+2C)$ ou $(1+2C)\Gamma_R$) et en simple passage en EIT ($\tilde{\gamma}_0 \simeq \Gamma_E/4\sqrt{C}$), l'allure du spectre atomique pour une interaction Raman en simple passage rend une telle définition quelque peu délicate. Nous avons choisi comme définition pour la demi-largeur du spectre la fréquence pour laquelle le bruit de la "dernière" oscillation est égal à la moitié du bruit à fréquence nulle ($\tilde{\gamma}_0 \simeq \frac{\pi}{4}C\Gamma_R$).

figure 4.19 dans les différents schémas étudiés. Nous avons vu qu'il était possible de réaliser des processus de transfert efficaces de fluctuations quantiques entre atomes et champs en choisissant des interactions pour lesquelles la dissipation est faible. Le résultat majeur de ce chapitre est que les configurations EIT et Raman permettent un transfert quantique efficace entre le champ et les atomes, bien que ces processus soient de nature très différente ; en Raman, le champ est absorbé (couplage absorptif), alors qu'en EIT le transfert résulte d'un effet d'interférence quantique (couplage dispersif).

De plus, un schéma en cavité, s'il améliore l'efficacité du transfert par rapport à une interaction en simple passage, n'est pas absolument nécessaire. Néanmoins, il faut préciser que sont totalement absentes de l'analyse en simple passage les effets transverses et de diffraction qui peuvent jouer un rôle non négligeable pour des nuage atomiques dont le nombre de Fresnel est très différent de l'unité [Muller04]. De plus, nous avons traité le champ comme une onde plane et le nuage atomique comme un ensemble dans lequel les atomes sont uniformément répartis. Or, un problème crucial pour les propriétés quantiques de ce type d'interaction quantique atomes-champ provient du matching du mode du champ avec l'ensemble atomique [Duan02]. Des efforts sont actuellement menés dans plusieurs groupes pour développer une théorie quantique tridimensionnelle complète. Le modèle présenté reste toutefois valable dans un grand nombre de situations, et peut être considéré comme un point de départ simple pour l'étude des propriétés de bruit quantique.

Information quantique avec des ensembles atomiques

Sommaire

A	Stockage d'intrication dans des ensembles atomiques . . .	156
A.1	Transfert d'intrication	158
A.2	Lecture	161
A.3	Discussion	163
B	Pseudo-répéteur quantique	164
C	Téléportation de l'état quantique d'un ensemble atomique	166
C.1	Téléportation en variables discrètes et variables continues . .	166
C.2	Téléportation atomique	169

De nombreuses propositions pour réaliser des protocoles d'information quantique se basent sur l'utilisation d'une interface atomes-champs [Lukin03, Duan00b]. En effet, si les photons sont d'excellents objets quantiques pour véhiculer l'information, les atomes peuvent jouer le rôle d'unités de traitement et de stockage de cette information, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Toutefois, les pertes, qui augmentent exponentiellement avec la distance, réduisent en pratique les distances de communication potentielles des états quantiques. Dans le domaine des communications classiques, on utilise des amplificateurs pour compenser l'atténuation du signal le long de la ligne de transmission. En revanche, toute opération d'amplification pour des états quantiques conduit à un ajout de bruit et une dégradation du signal. En effet, en vertu du théorème de non-clonage, il est impossible de générer à partir d'un état quantique deux copies parfaites de cet état [Wootters82]. Pour remédier à ce problème, Duan *et al.* ont intro-

duit le concept de *répéteur quantique* [Briegel98]. Le rôle d'un répéteur quantique est de détruire un état reçu en un point A pour émettre à la demande une copie de cet état en un autre endroit B. Il faut pour cela être capable de mémoriser un état donné, et ensuite de le restituer. Duan *et al.* ont montré qu'à l'aide de tels répéteurs, il est en principe possible de transmettre des états quantiques avec des pertes qui augmentent polynomialement, et non plus exponentiellement, avec la distance, ce qui réduit considérablement les contraintes expérimentales [Duan01]. La possibilité d'échanger, stocker et manipuler des états quantiques - en particulier, de les téléporter - constitue par conséquent un élément-clé pour une transmission efficace d'information quantique au sein d'un réseau.

Le principe d'une opération de mémorisation d'un état quantique du rayonnement à l'aide d'un ensemble atomique a été exposé au chapitre précédent. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'à l'aide des mêmes processus de transfert d'état quantique, il est possible d'intriquer quantiquement deux ensembles atomiques macroscopiques à partir de champs intriqués. Cette intrication peut alors être stockée et manipulée optiquement [Dantan04b]. Nous verrons ensuite que l'information inscrite dans les atomes est effectivement utilisable à des fins d'information quantique, et dans cette optique, nous présentons un protocole de téléportation quantique pour un spin atomique macroscopique dans la section C [Dantan05c]. Ce travail sur la téléportation a été réalisé en collaboration avec Nicolas Treps du groupe "Optique Quantique Paramétrique" du LKB.

A Stockage d'intrication dans des ensembles atomiques

Dans cette section, nous considérons deux ensembles de N atomes, identiques à celui du chapitre précédent. Chaque ensemble constitué d'atomes à trois niveaux en Λ interagit avec deux champs en cavité, un champ de contrôle Ω_i ($i = 1, 2$) et un champ A_i issu d'une paire de faisceaux intriqués, produites par une source EPR (Fig. 5.1). On suppose pour simplifier la discussion que les cavités sont identiques, et que les champs incidents sont des *vides intriqués*¹, c'est-à-dire qu'ils présentent des corrélations quantiques de type EPR - de manière similaire aux états décrits dans le chapitre 2 - que leur amplitude est nulle $\langle A_i \rangle = 0$ ($i = 1, 2$). Comme dans le chapitre précédent, ces corrélations sont supposées constantes sur une bande de fréquences grande devant l'inverse des temps effectifs de réponse atomique. On les suppose également symétriques, de telle

¹Ces champs peuvent être produits par exemple en mélangeant deux vides comprimés produits par des OPA ou encore par un OPO de type II fonctionnant sous le seuil [Bowen02, Laurat04]

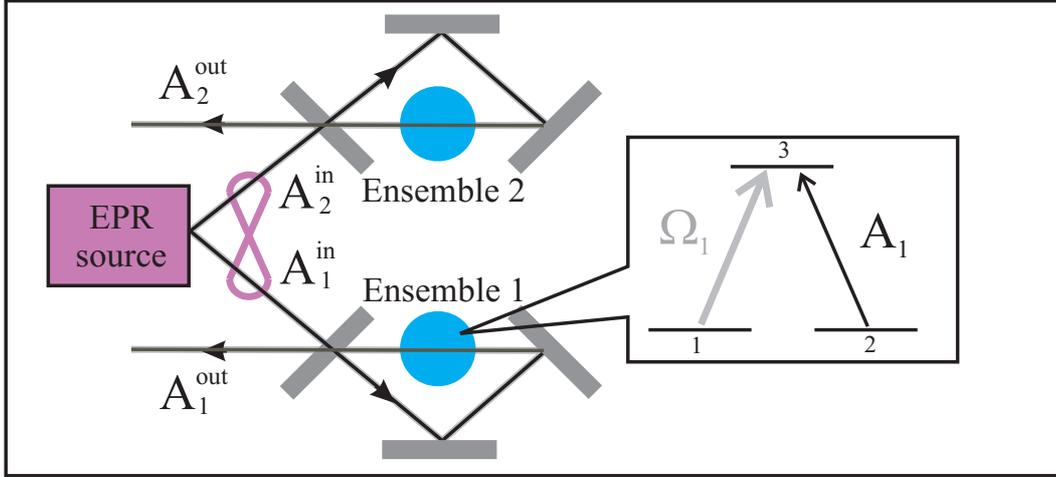


FIG. 5.1 – Schéma de principe pour l'intrication de deux ensembles atomiques.

sorte que la matrice de variance des champs incidents s'écrit pour toute fréquence

$$[V^{in}] = \begin{pmatrix} \cosh^2 r & 0 & 0 & \sinh(2r)/2 \\ 0 & \sinh^2 r & \sinh(2r)/2 & 0 \\ \sinh(2r)/2 & 0 & \cosh^2 r & 0 \\ 0 & \sinh(2r)/2 & 0 & \sinh^2 r \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

De tels faisceaux peuvent être générés par un OPO fonctionnant sous le seuil par exemple. Les champs présentent des corrélations d'amplitude et des anti-corrélations de phase. Autrement dit,

$$\Delta X_i^2 = \Delta Y_i^2 = \cosh(2r) \quad (i = 1, 2) \quad (5.2)$$

$$\langle \delta X_i \delta X_j \rangle = -\langle \delta Y_i \delta Y_j \rangle = \sinh(2r) \quad (i \neq j) \quad (5.3)$$

On peut quantifier ces corrélations EPR par la grandeur introduite dans le chapitre 1

$$\mathcal{I}_{ch} = \frac{1}{2} [\Delta(X_1^{in} - X_2^{in})^2 + \Delta(Y_1^{in} + Y_2^{in})^2] = 2e^{-2r} \quad (5.4)$$

qui vaut 2 lorsque les champs incidents sont incorrélés ($r = 0$), et qui tend vers 0 pour des champs parfaitement intriqués ($r = \infty$). Pour des modes gaussiens symétriques, cette quantité est une bonne mesure de l'intrication, Giedke *et al.* ayant montré qu'elle est reliée à l'entropie de formation de l'état considéré [Giedke03] : pour des états gaussiens symétriques², la quantité \mathcal{I}_α est reliée bijectivement à l'entropie de formation

²Le cas des états gaussiens non-symétriques est plus compliqué d'un point de vue théorique ; bien que le critère d'inséparabilité reste une condition nécessaire et suffisante d'intrication en variables

EoF par la formule

$$EoF(\mathcal{I}_\alpha) = c_+(\mathcal{I}_\alpha/2) \log_2[c_+(\mathcal{I}_\alpha/2)] - c_-(\mathcal{I}_\alpha/2) \log_2[c_-(\mathcal{I}_\alpha/2)] \quad (5.5)$$

avec $c_\pm(x) = (x^{1/2} \pm x^{-1/2})^2/4$.

A.1 Transfert d'intrication

Dans chaque ensemble les atomes sont pompés par le champ de contrôle dans le niveau 2; les spins moyens sont donc parallèles et égaux puisqu'on a supposé les ensembles identiques : $\langle J_{z1} \rangle = \langle J_{z2} \rangle = N/2$. Comme dans le chapitre 4, on peut se placer dans l'approximation gaussienne et caractériser l'état quantique de chaque ensemble par les fluctuations de la cohérence dans le fondamental. La généralisation du critère d'inséparabilité présenté dans le chapitre 1 fournit une condition nécessaire et suffisante d'intrication des ensembles 1 et 2, à savoir que les ensembles 1 et 2 sont intriqués si et seulement si

$$\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2 + \Delta(J_{y1} + J_{y2})^2 < |\langle J_{z1} \rangle| + |\langle J_{z2} \rangle| = N \quad (5.6)$$

Lorsque cette inégalité est satisfaite les ensembles atomiques présentent des corrélations de type EPR. En d'autres termes, cela signifie que les spins moyens associés aux deux ensembles sont parallèles à Oz , mais fluctuent de manière corrélée dans le plan (x, y) . Pour se ramener à une normalisation équivalente à celle des champs, on dénote par \mathcal{I}_{at} la quantité de corrélations EPR atomiques

$$\mathcal{I}_{at} = \frac{2}{N} [\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2 + \Delta(J_{y1} + J_{y2})^2] \quad (5.7)$$

les deux ensembles étant intriqués si $\mathcal{I}_{at} < 2$.

Si l'on considère une interaction EIT³ dans les conditions de transfert optimal ($\Delta = \delta = \Delta_c = 0$), les fluctuations de la cohérence du spin 1 sont, dans l'approximation adiabatique

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta J_{x1}(\omega) = -\beta_E \delta X_1^{in}(\omega) + \tilde{f}_{x1} \quad (5.8)$$

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta J_{y1}(\omega) = -\beta_E \delta Y_1^{in}(\omega) + \tilde{f}_{y1} \quad (5.9)$$

avec β_E , $\tilde{\gamma}_0$, \tilde{f}_x et \tilde{f}_y donnés par (4.8-4.9). Les équations pour le second spin s'obtiennent en changeant les indices 1 en 2. Il s'ensuit que les fluctuations des variables atomiques

continues, le lien avec des grandeurs telles que l'entropie de formation ou de distillation reste encore à trouver.

³Une interaction Raman donnerait des résultats similaires.

conjuguées $J_{x1} - J_{x2}$ et $J_{y1} + J_{y2}$ sont reliées à celles des champs incidents par

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta(J_{x1} - J_{x2})(\omega) = -\beta_E \delta(X_1^{in} - X_2^{in})(\omega) + \tilde{f}_{x1} - \tilde{f}_{x2} \quad (5.10)$$

$$(\tilde{\gamma}_0 - i\omega)\delta(J_{y1} + J_{y2})(\omega) = -\beta_E \delta(Y_1^{in} + Y_2^{in})(\omega) + \tilde{f}_{y1} + \tilde{f}_{y2} \quad (5.11)$$

dans la limite où $\gamma_0 \ll \tilde{\gamma}_0 \ll \gamma, \kappa$. Il est clair que les fluctuations des champs dans une bande de fréquences de largeur $\tilde{\gamma}_0$ s'impriment sur les fluctuations atomiques. Le degré d'intrication atomique, obtenu par intégration des spectres de bruit, est égal à

$$\mathcal{I}_{at} = \frac{2C}{1+2C} \frac{\Gamma_E}{(1+2C)\tilde{\gamma}_0} \mathcal{I}_{ch} + 2 \left[\frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma}_0} + \frac{\Gamma_E}{(1+2C)^2 \tilde{\gamma}_0} \right] = \eta_E \times \mathcal{I}_{ch} + 2(1 - \eta_E) \quad (5.12)$$

Etant donnée la linéarité du couplage, l'intrication - comme la compression de bruit - est conservée lorsque l'efficacité de transfert quantique η_E est proche de 1, ce qui est possible avec un grand nombre d'atomes ($C \gg 1$) et lorsque $\Gamma_E/(1+2C) \gg \gamma_0$. Un calcul complet montre que l'on a intérêt à choisir le taux de pompage optique de telle sorte que $\gamma_0 \ll \tilde{\gamma}_0 \ll \gamma, \kappa$, afin de faire un compromis entre les pertes par émission spontanée et celles dues à la relaxation de cohérence. Logiquement, l'intrication atomique est nulle ($\mathcal{I}_{at} = 2$) en l'absence de couplage ($\Gamma_E = 0$) ou d'intrication incidente ($\mathcal{I}_{ch} = 2$), les deux spins étant alors dans un état cohérent atomique. On a représenté sur la figure 5.2 l'intrication des atomes (5.7) et l'entropie de formation (5.5) en fonction du taux de corrélations EPR des champs incidents. Les résultats simplifiés de l'hypothèse adiabatique sont en bon accord avec les résultats du calcul complet. D'autre part, le rapport de l'intrication atomique générée sur l'intrication de départ tend vers 1 lorsque C augmente. Notons également que l'on peut faire les mêmes remarques pour le transfert d'intrication concernant la sensibilité vis-à-vis des différents paramètres (désaccords, taux de relaxation, etc.) que pour le transfert de compression de bruit.

On peut donc par cette technique intriquer deux ensembles atomiques macroscopiques. À partir de champs parfaitement corrélés, on obtiendrait en principe des états atomiques EPR. En termes de bruit quantique, cela signifie que les fluctuations dans le plan (x, y) du spin de chaque ensemble - considéré indépendamment - sont beaucoup plus importantes que celles d'un état cohérent. Toutefois, les deux spins fluctuent simultanément de manière parallèle (ou anti-parallèle). Comme on peut le voir sur la figure 5.3, la représentation de tels états intriqués atomiques est très similaire à celle des champs intriqués dans le plan de Fresnel exposée dans le chapitre 1.

Il est également possible de stocker cette intrication entre faisceaux jumeaux pendant un temps variable et la lire ensuite dans les champs sortants de la cavité, point que nous abordons dans la section suivante.

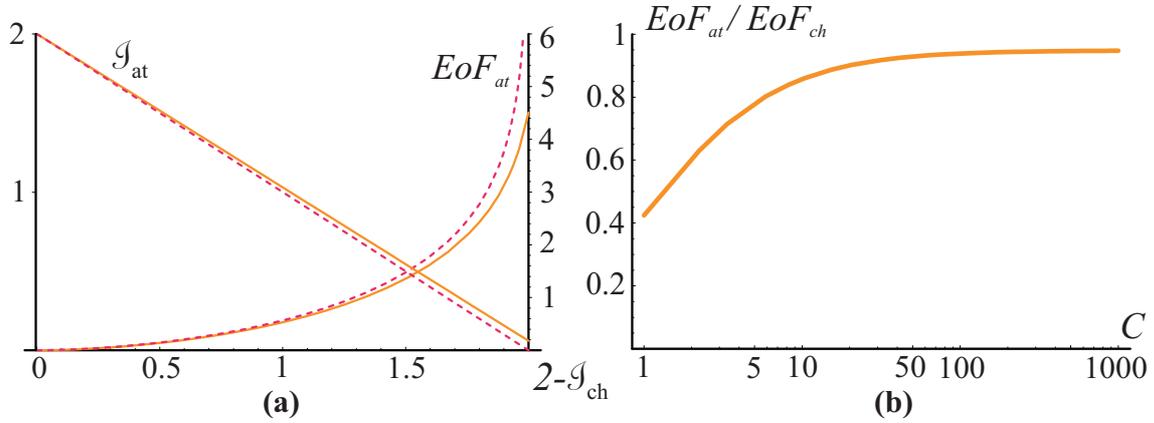


FIG. 5.2 – (a) Valeurs du critère d'inséparabilité atomique \mathcal{I}_{at} et de l'entropie de formation (EoF) en fonction du taux de corrélations EPR des champs incidents, $2 - \mathcal{I}_{ch}$. Paramètres : $C = 100$, $\rho = 1/2$, $\gamma_0 = \gamma/1000$, $\Gamma_E = 15\gamma$. Les courbes en pointillés indiquent les grandeurs relatives aux champs incidents. (b) Evolution du rapport entre l'entropie de formation atomique EoF_{at} et celle des champs incidents EoF_{ch} en fonction de la coopérativité pour un taux d'intrication de 50% ($\mathcal{I}_{ch} = 1$). Paramètres : $C = 100$, $\rho = 1/2$, $\gamma_0 = \gamma/1000$. Le taux de pompage est choisi afin d'optimiser le transfert pour chaque valeur de C .

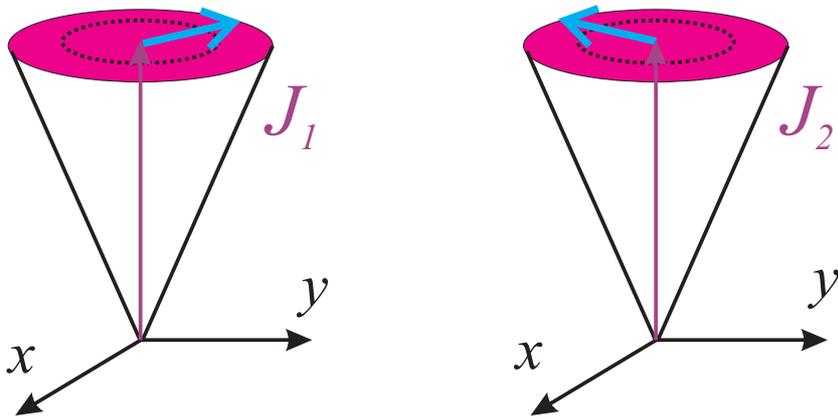


FIG. 5.3 – Représentation de deux spins présentant de corrélations de type EPR : les fluctuations dans le plan perpendiculaire au spin moyen sont plus grandes que celles de l'état cohérent (pointillés), mais elles sont corrélées à chaque instant entre chaque ensemble (corrélées selon x et anti-corrélées selon y dans le cas présent).

A.2 Lecture

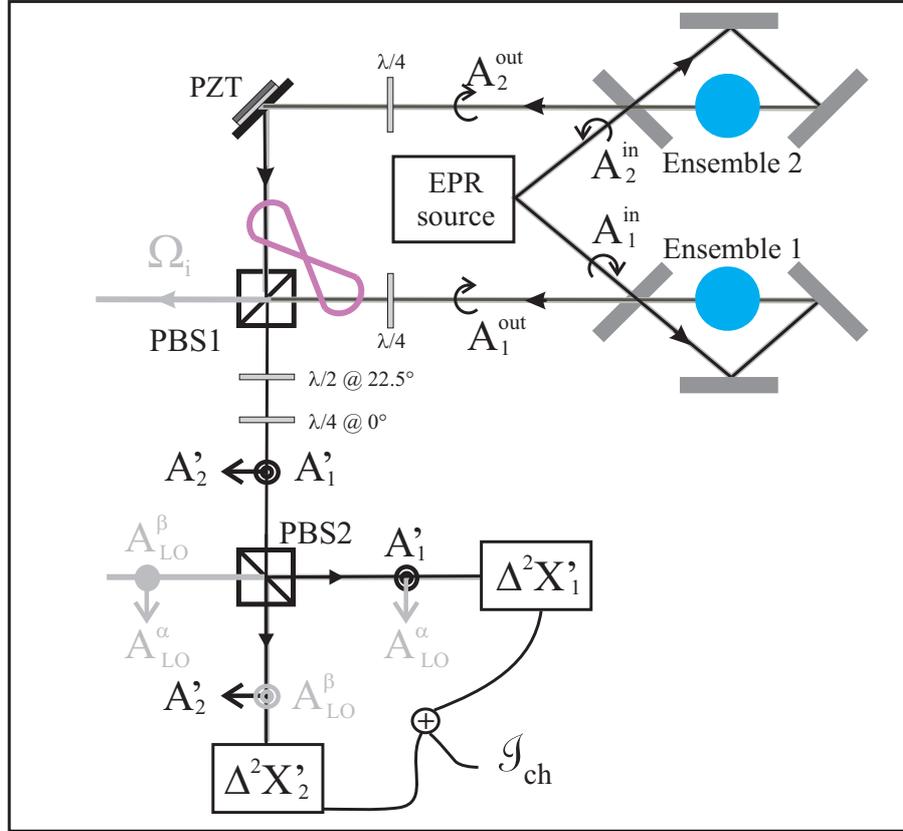


FIG. 5.4 – Schéma de lecture de l'intrication atomique par le biais des champs sortants de la cavité. Réappliquer les champs de contrôle dans les deux cavités provoque l'émission de champs intriqués à la sortie de la cavité. Leur intrication, et par conséquent l'intrication atomique, est donnée par la mesure homodyne des fluctuations de deux champs comprimés, A_1' et A_2' , obtenus à partir des vides intriqués à l'aide d'une lame quart d'onde et d'une lame demi-onde.

Une fois le régime stationnaire atteint et l'intrication des champs incidents inscrite dans les variables de spin des deux ensembles, l'arrêt brusque de tous les champs laisse les deux spins dans un état intriqué pendant un temps long, de l'ordre de la durée de vie de la cohérence. Le réallumage simultané des champs de contrôle dans chacune des cavités provoque le processus de transfert inverse de l'intrication, des atomes vers le champ. La figure 5.4 donne un schéma possible de lecture de cette intrication. Les champs sortants, A_1^{out} et A_2^{out} , qui transportent les fluctuations des spins corrélés pendant quelques τ_e , sont eux-mêmes corrélés de manière transitoire. A l'aide de lames quart d'onde, on peut recombinaison les vides sortants sur un cube polariseur,

de telle sorte que les modes de polarisation linéaire horizontale et verticale obtenus soient maintenant intriqués en quadrature⁴. Pour extraire deux modes indépendants et comprimés simultanément (i.e. sur la même quadrature) de ces modes intriqués en quadrature, on utilise alors une méthode développée par Vincent Josse pendant sa thèse [Josse03c, Josse04a] - méthode que nous avons utilisée dans le chapitre 2 pour mesurer l'intrication générée par un nuage d'atomes froids entre les modes de polarisation orthogonale d'un même faisceau. Une lame demi-onde tournée à 22.5° par rapport aux axes des polarisations horizontales et verticales permet d'obtenir les modes polarisés à $\pm 45^\circ$ des axes du cube, alors qu'une lame quart d'onde à 0° permet d'effectuer une rotation de l'ellipse de bruit d'un des modes de $\pi/2$ par rapport à l'autre. Les nouveaux modes polarisés horizontalement et verticalement,

$$A'_1 = (A_1^{out} - A_2^{out})/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad A'_2 = i(A_1^{out} + A_2^{out})/\sqrt{2} \quad (5.13)$$

sont alors mélangés sur un second cube polariseur avec un oscillateur local dont la polarisation est choisie linéaire à 45° des axes du cube. On peut alors procéder à deux détections homodynes équilibrées dont la somme des résultats donne

$$\Delta X_1'^2 + \Delta X_2'^2 = \frac{1}{2} [\Delta(X_1^{out} - X_2^{out})^2 + \Delta(Y_1^{out} + Y_2^{out})^2] \quad (5.14)$$

c'est-à-dire la valeur de l'intrication des champs sortants.

Cette intrication des champs sortants est directement reliée à l'intrication atomique. En effet, la fonction d'autocorrélation de X'_1 s'écrit dans le régime $\gamma_0 \ll \tilde{\gamma}_0 \ll \gamma, \kappa$

$$C'_1(t, t') \equiv \langle \delta X'_1(t) \delta X'_1(t') \rangle = \delta(t - t') - 2\eta_{max} \tilde{\gamma}_0 \left[1 - \frac{\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2(0)}{N/2} \right] e^{-\tilde{\gamma}_0(t+t')} \quad (5.15)$$

où $t = 0$ est l'instant de lecture et $\eta_{max} = 2C/(1 + 2C)$. Une expression identique s'obtient pour la fonction d'autocorrélation de X'_2 en remplaçant $J_{x1} - J_{x2}$ par sa variable conjuguée $J_{y1} + J_{y2}$. En choisissant un oscillateur local dont le profil temporel est matché avec le champ émis par les atomes - $E_{LO}(t) \propto e^{-\tilde{\gamma}_0 t}$ - on montre que le résultat des deux détections peut s'écrire sous la forme

$$P_1(t) = \mathcal{N} - \mathcal{S} \left[1 - \frac{\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2(0)}{N/2} \right] e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} \quad (5.16)$$

$$P_2(t) = \mathcal{N} - \mathcal{S} \left[1 - \frac{\Delta(J_{y1} + J_{y2})^2(0)}{N/2} \right] e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} \quad (5.17)$$

⁴Expérimentalement, les chemins optiques parcourus par les champs sortants doivent être égaux de façon à ce que ces champs fluctuent bien simultanément de manière corrélée; on peut utiliser l'autre sortie du cube et asservir le chemin optique grâce au signal d'interférence entre les deux champs de contrôle.

les fonctions \mathcal{N} et \mathcal{S} étant celles du chapitre 4, paragraphe B.7.3, qui représentent respectivement le shot-noise de la mesure et le signal à mesurer. Pour un temps d'intégration des analyseurs de spectre long devant τ_e , et pour de grandes valeurs de C , nous avons vu que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{N}$; le résultat final normalisé au shot-noise de la mesure est alors proportionnel à l'intrication stockée dans le milieu atomique

$$\frac{1}{\mathcal{N}}[P_1(0) + P_2(0)] \simeq \frac{2}{N}[\Delta(J_{x1} - J_{x2})^2(0) + \Delta(J_{y1} + J_{y2})^2(0)] = \mathcal{I}_{at}(0) \quad (5.18)$$

La mesure de l'intrication des champs sortants est bien équivalente par cette méthode à la mesure de l'intrication atomique, et peut s'effectuer en principe avec une efficacité proche de 100%. Nous reviendrons sur cette méthode lors de l'étude de l'intrication de deux miroirs mobiles dans le chapitre 6.

A.3 Discussion

On peut faire plusieurs remarques concernant ce transfert d'intrication. Premièrement, pour des champs incidents parfaitement corrélés ($\mathcal{I}_{ch} = 0$) et dans le cas idéal d'une cohérence de durée de vie infinie ($\gamma_0 = 0$), le critère d'intrication atomique \mathcal{I}_{at} tend vers $2/(1 + 2C)$, ce qui établit une limite théorique au degré d'intrication que l'on peut transférer aux atomes. Ce "bruit ajouté" intrinsèque tend vers 0 avec la coopérativité. En pratique, cette limite est bien inférieure aux réductions de bruit obtenues expérimentalement pour les champs.

Deuxièmement, l'interaction avec les champs établit des corrélations entre les spins individuels à l'intérieur de chaque ensemble et entre les spins des deux ensembles. On peut traduire cela à l'aide des fonctions de corrélation à deux spins introduites dans le chapitre 1. Pour des états symétriques dans l'approximation gaussienne et pour une efficacité de transfert de l'ordre de 1, on peut écrire pour les spins des relations analogues à (5.2-5.3), à savoir⁵

$$\Delta \bar{J}_{xi}^2 = \Delta \bar{J}_{yi}^2 \simeq \cosh(2r) \quad (i = 1, 2) \quad (5.19)$$

$$\Delta(\bar{J}_{xi}\bar{J}_{xj}) = -\Delta(\bar{J}_{yi}\bar{J}_{yj}) \simeq \sinh(2r) \quad (i \neq j) \quad (5.20)$$

On peut par ailleurs définir des fonctions de corrélation pour deux spins d'un même ensemble, ainsi que pour deux spins appartenant à un ensemble différent⁶

$$c^{(1)} = \overline{\langle \sigma_{x1}^{(i)} \sigma_{x1}^{(j)} \rangle}, \quad c^{(2)} = \overline{\langle \sigma_{x1}^{(i)} \sigma_{x2}^{(j)} \rangle} \quad (5.21)$$

⁵On dénote par $\Delta \bar{J}_\alpha^2$ la variance atomique normalisée au bruit quantique standard atomique $\Delta J_\alpha^2 = \Delta J_\alpha^2/(N/4)$.

⁶En raison de la symétrie des états choisis, on omet les indices correspondant aux ensembles 1 et 2.

Par symétrie, on trouve alors que

$$c^{(1)} = \frac{\cosh(2r) - 1}{4(N - 1)} \quad \text{et} \quad c^{(2)} = \frac{\sinh(2r)}{4N} \quad (5.22)$$

Pour une forte intrication, les atomes d'un ensemble sont en moyenne autant corrélés à l'intérieur de l'ensemble qu'avec les atomes de l'autre ensemble : $c^{(1)} \simeq c^{(2)} \sim e^{2r}/4N$. On retrouve l'analogie avec une paire de champs EPR pour lesquels les corrélations entre photons d'un même faisceau entraînent un excès de bruit pour toutes les quadratures, mais les corrélations entre photons des deux faisceaux conduisent à une réduction de bruit des grandeurs conjuguées. On peut remarquer que plus le nombre d'atomes est grand plus les corrélations atome par atome sont faibles, ce qui n'empêche pas une forte intrication collective.

Enfin, mentionnons que les résultats du chapitre précédent obtenus dans le cadre d'une interaction en simple passage s'appliquent également au transfert d'intrication.

B Pseudo-répéteur quantique

Si l'on considère un réseau de communication quantique utilisant des ensembles atomiques, une opération de base pour communiquer entre les noeuds du réseau consiste à transférer l'état quantique d'un ensemble atomique à un autre. L'idée la plus simple consiste, partant d'un ensemble atomique 1 dans un certain état quantique (comprimé par exemple), à effectuer une lecture optique de cet ensemble et d'utiliser le champ sortant comme champ d'écriture dans un second ensemble 2. Dans cette section nous montrons qu'un tel "pseudo-répéteur" quantique ne permet de transférer qu'environ la moitié des fluctuations quantiques du premier ensemble [Dantan05b].

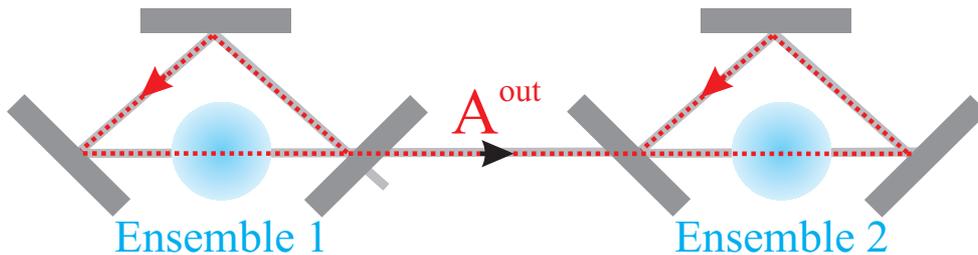


FIG. 5.5 – "Pseudo-répéteur" quantique.

Le schéma de principe est indiqué sur la figure 5.5 : un ensemble atomique 1 est préparé initialement dans une première cavité dans un état comprimé minimal, tel que

$$\langle J_{x1} \rangle = \langle J_{y1} \rangle = 0, \quad \langle J_{z1} \rangle = N/2, \quad \Delta \bar{J}_{x1}^2 = e^{-2r1}, \quad \Delta \bar{J}_{y1}^2 = e^{2r1} \quad (5.23)$$

Un deuxième ensemble, identique, est préparé dans un état cohérent atomique selon z :

$$\langle J_{x2} \rangle = \langle J_{y2} \rangle = 0, \quad \langle J_{z2} \rangle = N/2, \quad \Delta \bar{J}_{x2}^2 = \Delta \bar{J}_{y2}^2 = 1 \quad (5.24)$$

A l'instant $t = 0$, on allume le champ de contrôle dans la première cavité. Les fluctuations du spin 1 s'impriment sur celles du champ sortant de la cavité A^{out} , dont la fonction de corrélation est de la forme (6.91)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t, t') &= \langle \delta X^{out}(t) \delta X^{out}(t') \rangle \\ &= \delta(t - t') - 2\eta_{max} \tilde{\gamma}_0 [1 - \Delta \bar{J}_{x1}^2(0)] e^{-\tilde{\gamma}_0(t+t')} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pour fixer les idées, on a de nouveau supposé une interaction de type EIT et on s'est placé dans le régime optimal de transfert $\gamma_0 \ll \tilde{\gamma}_0 \ll \kappa, \gamma$. Si l'on néglige le temps de transit entre les deux cavités, l'évolution de la composante x du spin 2 en présence du champ de contrôle est donnée par

$$\delta \dot{J}_{x2} = -\tilde{\gamma}_0 \delta J_{x2} - \beta_E \delta X^{out} + \tilde{f}_{x2} \quad (5.26)$$

Après intégration et en tenant compte de (5.25), on obtient la variance de J_{x2} à l'instant t

$$\Delta \bar{J}_{x2}^2(t) = 1 - \eta_{max}^2 (2\tilde{\gamma}_0 t)^2 e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} [1 - \Delta \bar{J}_{x1}^2(0)] \quad (5.27)$$

Cette variance, représentée sur la figure 5.6, est minimale lorsque $\tilde{\gamma}_0 t = 1$, et vaut alors

$$\Delta \bar{J}_{x2}^2_{min} = 1 - \eta_{max}^2 \frac{4}{e^2} [1 - e^{-2r1}] \quad (5.28)$$

Comme $4/e^2 \simeq 0.54$, on voit que l'on ne transfère au mieux qu'un peu plus de la moitié de la compression de bruit initiale du spin 1. Un calcul analogue pour la composante conjuguée montre que le transfert de son excès de bruit se fait avec le même facteur temporel, facteur au maximum égal à $4/e^2$ pour $\tilde{\gamma}_0 t = 1$

$$\Delta \bar{J}_{y2}^2(t) = 1 + \eta_{max}^2 (2\tilde{\gamma}_0 t)^2 e^{-2\tilde{\gamma}_0 t} [e^{2r1} - 1] \quad (5.29)$$

On peut effectuer un parallèle entre cette situation et une configuration dans laquelle on illuminerait en continu l'ensemble 2 par un champ comprimé sur une bande de fréquence de largeur $2\tilde{\gamma}_0$; les fréquences de réponse des atomes se trouvant également dans cette bande de fréquence, la contribution de la réduction de bruit s'obtient comme l'intégrale du produit de deux lorentziennes de même largeur. Cette contribution vaut la moitié de celle d'un champ comprimé sur une large bande devant $\tilde{\gamma}_0$.

Utiliser un champ de contrôle d'intensité différente dans la seconde cavité et changer ainsi le temps de réponse du spin 2 n'améliore pas le résultat⁷. Cette méthode directe

⁷On peut montrer que les conditions présentées sont déjà optimales pour le transfert des fluctuations.

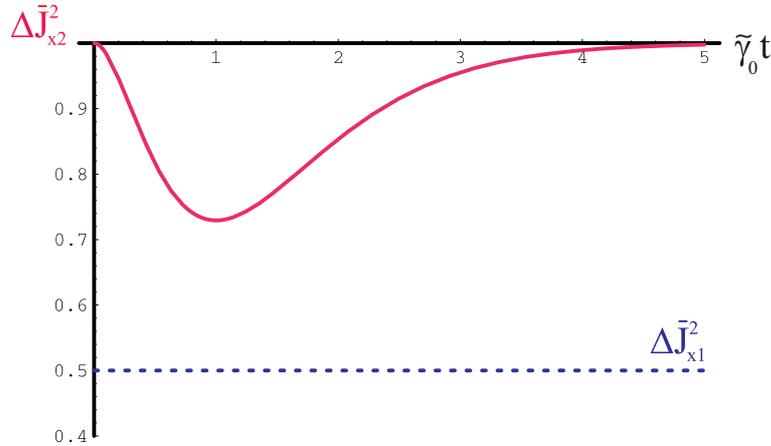


FIG. 5.6 – Evolution temporelle du bruit quantique de la composante comprimée du spin 2. Le spin 1 est initialement comprimé de 3 dB.

ne permet donc pas un transfert quantique parfait d'un ensemble atomique à un autre. Il est nécessaire d'avoir recours à un protocole plus évolué : la téléportation quantique. Nous allons donc voir dans la prochaine section un protocole de téléportation quantique en variables continues appliqué à des ensembles atomiques et utilisant les méthodes développées précédemment. En particulier, ce protocole nécessite de posséder des états intriqués du type de ceux présentés dans la première partie de ce chapitre.

C Téléportation de l'état quantique d'un ensemble atomique

C.1 Téléportation en variables discrètes et variables continues

La téléportation quantique est une illustration parfaite du concept de non-localité en mécanique quantique. L'existence de corrélations à longue distance de type EPR peut être utilisée pour transmettre de l'information. On entend par téléportation quantique le transport désincarné d'un état quantique d'un objet A à un objet B sans que ces objets, situés à une distance arbitraire, n'interagissent entre eux, et sans que l'état initial soit connu de l'émetteur ni du récepteur. Nous commençons par rappeler le principe de la téléportation quantique telle qu'elle est exposée dans la proposition originelle de Bennett *et al.* pour des variables discrètes [Bennett93], avant de passer au protocole standard de téléportation en variables continues pour les champs. Nous présentons ensuite un schéma de téléportation d'un spin atomique macroscopique basé sur les idées développées précédemment.

C.1.1 Principe de la téléportation quantique en variables discrètes

Supposons qu'un émetteur, traditionnellement appelé Alice, dispose d'une particule (photon ou spin-1/2) dans un état quantique $|\phi\rangle$ inconnu, état qu'elle souhaite communiquer à un récepteur Bob. Si Alice et Bob se partagent une paire de particules EPR, Alice peut dissocier l'information sur l'état $|\phi\rangle$ en deux parties, l'une purement classique et l'autre purement quantique. Elle peut alors utiliser deux canaux différents, l'un classique et l'autre quantique, pour envoyer cette information à Bob, qui reconstitue l'information initiale, c'est-à-dire une réplique de $|\phi\rangle$. Bien entendu, l'état initial $|\phi\rangle$ d'Alice est détruit dans le processus. On respecte ainsi le théorème de non clonage qui interdit de créer deux copies identiques d'un état quantique [Wootters82]. On peut remarquer que la téléportation quantique ne permet pas de communiquer de l'information à une vitesse supérieure à celle de la lumière, puisqu'un canal de communication classique est nécessaire à Alice et Bob pour pouvoir reconstituer l'état initial.

De manière plus précise, supposons que l'état que se partagent Alice et Bob soit un état singulet de deux spins 1/2

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle) \quad (5.30)$$

Alice dispose de la particule 1 dans l'état $|\phi\rangle$ et de la particule 2, alors que Bob dispose de la particule 3. Si l'on écrit l'état initial de la première particule sous la forme

$$|\phi\rangle = a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle \quad (5.31)$$

l'état complet du système avant la mesure d'Alice s'exprime en fonction des quatre états de Bell

$$|\Psi_{12}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle) \quad (5.32)$$

$$|\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle) \quad (5.33)$$

par

$$|\Psi\rangle = [|\Psi_{12}^{-}\rangle(-a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle) + |\Psi_{12}^{+}\rangle(-a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle) + |\Phi_{12}^{-}\rangle(a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle) + |\Phi_{12}^{+}\rangle(a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle)]/2 \quad (5.34)$$

Une mesure sur la base des états de Bell projette alors l'état de la particule 3 dans l'un des quatre états purs. Grâce au résultat de mesure d'Alice, Bob sait quelle rotation il doit opérer pour retrouver $|\phi\rangle$. La téléportation en variables discrètes a d'abord été réalisée pour des états de polarisation du photon en 1997 [Bouwmeester97] avant d'être implémentée dans d'autres systèmes. En 2004, les groupes de Wineland et de Blatt ont téléporté respectivement l'état quantique d'un atome et d'un ion individuel [Barrett04, Riebe04].

C.1.2 Protocole pour les champs

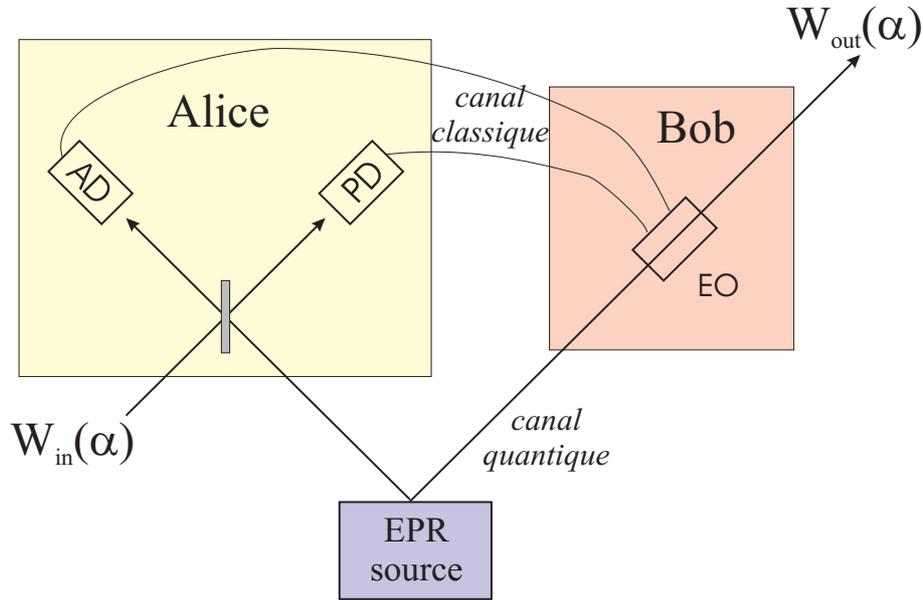


FIG. 5.7 – Schéma de principe de la téléportation en variables continues [Braunstein98a] : le champ à téléporter, caractérisé par sa fonction de Wigner $W_{in}(\alpha)$, est mélangé sur une lame 50 :50 par Alice avec l'un des faisceaux EPR. Alice mesure l'amplitude d'un des champs obtenus (AD) et la phase de l'autre (PD), et transmet à Bob par un canal classique ces résultats. En fonction de ces résultats, Bob module l'amplitude et la phase du second faisceau EPR à l'aide d'un modulateur électro-optique (EO). Pour caractériser la téléportation, on compare la fonction de Wigner $W_{out}(\alpha)$ du faisceau téléporté à la fonction de Wigner du champ incident $W_{in}(\alpha)$.

L'extension aux variables continues a été proposée par Vaidman [Vaidman94], Braunstein et Kimble [Braunstein98a], et implémentée pour la première fois dans le groupe de Kimble pour des états cohérents optiques [Furusawa98]. L'espace de Hilbert décrivant l'état du champ étant de dimension infinie, l'objet à téléporter est sa fonction de Wigner $W(\alpha)$. Si l'on se restreint par exemple à des états gaussiens, on doit téléporter à la fois l'amplitude et la phase du champ, ainsi que les variances. Dans ce cas, l'état singulet est remplacé par une paire de champs EPR (voir Fig. 5.7). Alice mélange le champ à téléporter sur une lame séparatrice avec l'un des champs EPR et mesure deux quadratures orthogonales des champs résultants. Ces résultats sont alors communiqués via un canal classique à Bob. Celui-ci rétroagit sur son champ EPR à l'aide de modulateurs d'amplitude et de phase, et reconstruit le champ initial. Un avantage de ce schéma en variables continues est qu'il permet une téléportation *a priori*, par opposi-

tion aux réalisations en variables discrètes, pour lesquelles la téléportation n'est réussie qu'*a posteriori* avec une probabilité de succès assez faible expérimentalement. On caractérise généralement la qualité de la téléportation à l'aide de la fidélité, c'est-à-dire le recouvrement pour une certaine classe d'états entre l'état initial et l'état final. Depuis la première implémentation en 1998, l'amélioration des sources de champs intriqués ont permis d'augmenter l'efficacité de ces schémas [Bowen03c, Zhang03a], et très récemment, le groupe de Furusawa est parvenu à réaliser une téléportation d'états cohérents avec une fidélité supérieure à $2/3$, ce qui est suffisant pour préserver la non classicalité des états téléportés [Takei05]. Toutefois, les expériences de téléportation en variables continues n'ont concerné jusqu'à maintenant que les variables optiques. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, un enjeu important pour la communication quantique est d'étendre ces protocoles à d'autres objets, en particulier, les variables atomiques.

C.2 Téléportation atomique

Un premier schéma de téléportation de l'état quantique d'un ensemble atomique macroscopique a été proposé par Kuzmich et Polzik [Kuzmich00b]. Leur proposition utilise l'effet Faraday produit par un milieu atomique sur la lumière qui le traverse : le champ sortant possède en plus des fluctuations du champ sortant des fluctuations proportionnelles aux fluctuations atomiques. Dans ce protocole, Alice et Bob disposent chacun d'un ensemble atomique. Après plusieurs interactions "Faraday" avec des champs intriqués suivis de mesures, communications des résultats et rotations sur les spins, il est ainsi possible de téléporter l'état quantique d'un ensemble complètement polarisé à un autre. Dans le même régime - celui des ensembles atomiques polarisés - nous avons choisi une autre méthode, basée sur une lecture optique et une reconstruction magnétique. L'avantage de ce protocole est qu'il ne requiert pas plusieurs interactions et échanges d'information successifs entre Alice et Bob ; en ce sens, il se rapproche plus des protocoles de téléportation des champs en variables continues et pourrait être intégré plus simplement dans un réseau atomes-champ. Comme dans les protocoles pour les champs optiques, la téléportation s'effectue en trois étapes : une phase de *préparation* effectuée par Victor, une phase de *mesure* effectuée par Alice et une phase de *reconstruction* effectuée par Bob.

C.2.1 Préparation

On suppose que l'on dispose de trois ensembles identiques de N atomes à trois niveaux en Λ , qui interagissent en cavité chacun avec un champ de contrôle Ω_i et

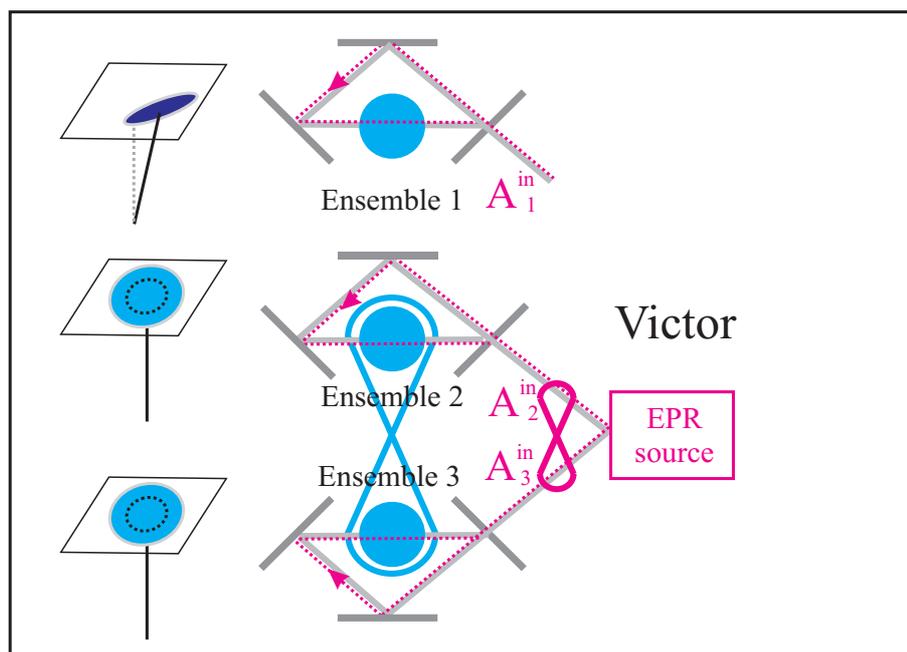


FIG. 5.8 – Préparation : Victor prépare un état à téléporter quasiment polarisé selon z , ainsi qu'une paire d'ensembles intriqués à l'aide de champs EPR. À gauche, on a représenté les états des trois ensembles à la fin de la phase de préparation. Les cercles en pointillés correspondent aux fluctuations de l'état cohérent atomique pour les spins 2 et 3.

un champ A_i ($i = 1 - 3$)⁸. On cherche à téléporter l'état du premier ensemble vers le troisième. Victor, le préparateur, commence par polariser les trois ensembles dans un état cohérent atomique par pompage optique ; les trois spins sont parallèles à z : $\langle J_{zi} \rangle = N/2$. A l'aide d'une interaction en EIT⁹, Victor prépare l'état du spin 1 en imprimant l'état du champ A_1^{in} sur la cohérence du fondamental. L'état atomique de l'ensemble 1 est caractérisé par la donnée des valeurs moyennes et des fluctuations des opérateurs J_{x1} et J_{y1} dans le plan orthogonal au spin moyen. Pour que notre traitement reste valide, on se limite par conséquent à des états du spin autour de l'axe z tels que $\langle J_{x1} \rangle, \langle J_{y1} \rangle = \mathcal{O}(\sqrt{N})$, approximation d'autant plus valable que le nombre d'atomes est grand¹⁰. En choisissant l'amplitude du champ A_1 et la phase relative entre Ω_1 et A_1 , Victor peut préparer le spin 1 dans un état quelconque. Victor utilise ensuite la technique développée dans le paragraphe précédent pour intriquer les ensembles 2 et 3 au moyen de champs EPR (Fig. 5.8). Les spins 2 et 3 étant parallèles et identiques, $J_{x2} - J_{x3}$ et $J_{y2} + J_{y3}$ jouent le rôle des opérateurs EPR usuels et satisfont à

$$\langle [J_{x2} - J_{x3}, J_{y2} + J_{y3}] \rangle = i \langle J_{z2} - J_{z3} \rangle = 0 \quad (5.35)$$

En toute généralité, on peut supposer qu'à l'issue de la préparation, J_{x2} et J_{x3} sont corrélés et J_{y2} et J_{y3} sont anti-corrélés. Leur intrication est alors donnée par (5.7)

$$\mathcal{I}_{2,3} = \frac{2}{N} [\Delta(J_{x2} - J_{x3})^2 + \Delta(J_{y2} + J_{y3})^2] \quad (5.36)$$

A la fin de la phase de préparation¹¹, tous les champs sont éteints. Alice dispose donc de l'ensemble 1, dont elle ignore l'état, et de l'un des deux ensembles EPR (2). Bob dispose du deuxième ensemble EPR (3).

C.2.2 Mesures jointes

Alice procède ensuite à une mesure jointe de l'état des spins 1 et 2 en réappliquant les champs de contrôle dans les cavités. Les deux spins transfèrent leur état quantique aux champs sortants A_1^{out} et A_2^{out} . Après mélange de ces champs sur une lame séparatrice 50 : 50 (Fig. 5.9), Alice mesure deux quadratures orthogonales des combinaisons obtenues,

⁸Tous les résultats sont également valables dans le cas d'interactions en simple passage sans cavité en utilisant le formalisme du chapitre 4, mais pour plus de clarté nous présentons les résultats en cavité.

⁹On suppose de nouveau pour simplifier un processus d'écriture résonnant de type EIT avec des atomes immobiles, bien que des résultats similaires s'obtiendraient avec une interaction Raman et des vapeurs atomiques.

¹⁰Nous reviendrons sur ce point dans la discussion C.2.4.

¹¹La méthode de préparation n'est bien entendu pas unique, toute autre méthode conduirait au même résultat, pourvu que l'on se fixe la direction commune des spins moyens.

par exemple

$$X_- = \frac{X_1^{\text{out}} - X_2^{\text{out}}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad Y_+ = \frac{Y_1^{\text{out}} + Y_2^{\text{out}}}{\sqrt{2}} \quad (5.37)$$

Cette mesure correspond exactement à la mesure jointe mentionnée dans l'introduction de ce chapitre et contient l'information sur l'état des spins 1 et 2. Alice peut alors envoyer les résultats des détections homodynes à Bob, qui est en principe capable de reconstruire sur son ensemble l'état initial du spin 1.

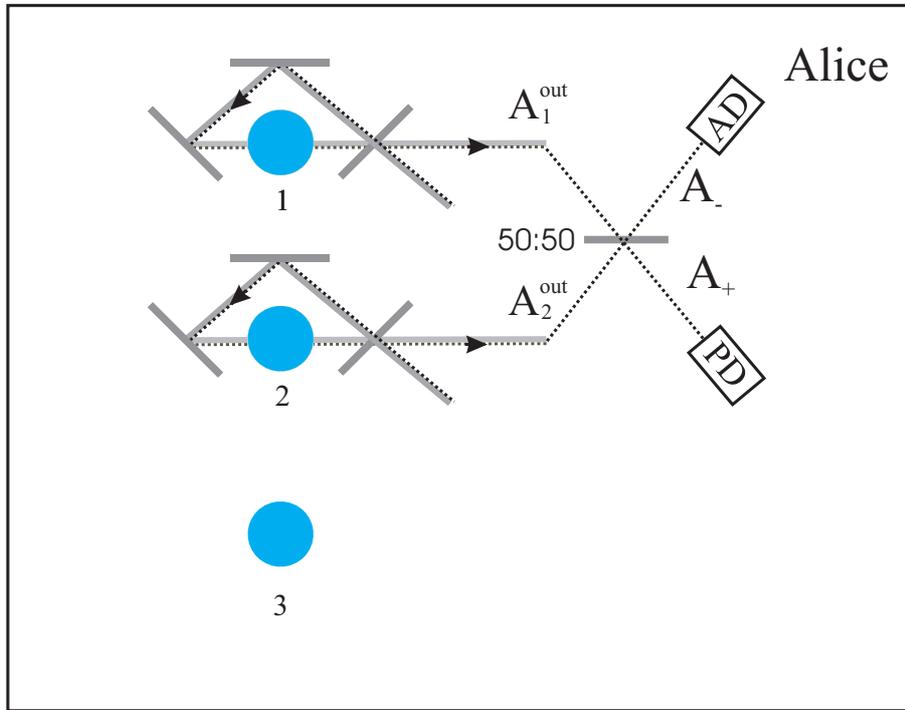


FIG. 5.9 – *Mesure jointe* : Alice procède à la lecture de l'état atomique des ensembles 1 et 2 en allumant les champs de contrôle. Elle mélange alors les deux champs obtenus et mesure deux quadratures orthogonales X_- et Y_+ .

De manière quantitative, lorsqu'Alice allume les champs de contrôle dans les cavités 1 et 2 à $t = 0$, les champs sortants s'expriment en fonction des champs incidents, des forces de Langevin ainsi que des opérateurs de spins à l'instant initial (voir Sec. B.7 du

chapitre 4)

$$\begin{aligned}
X_i^{out}(t) &= X_i^{in}(t) - \alpha J_{xi}(0) e^{-\tilde{\gamma}_0 t} \\
&\quad - 2\eta_{max} [X_i^{in}(t) - \tilde{\gamma}_0 \int_0^t e^{-\tilde{\gamma}_0(t-s)} X_i^{in}(s) ds] \\
&\quad + \beta [X_{vi}(t) - \tilde{\gamma}_0 \int_0^t e^{-\tilde{\gamma}_0(t-s)} X_{vi}(s) ds],
\end{aligned} \tag{5.38}$$

($i = 1, 2$), où η_{max} est l'efficacité de transfert optimale ($\eta_{max} = 2C/(1 + 2C)$), $\alpha = \sqrt{8\eta_{max}\tilde{\gamma}_0/N}$, $\beta = 2/\sqrt{\eta_{max}/(1 + 2C)}$, et où l'on a normalisé les forces de Langevin pour avoir des opérateurs de bruit avec un spectre blanc et valant 1. Une équation analogue décrit l'évolution des quadratures de phase. Le terme proportionnel à $J_{xi}(0)$ reflète l'état initial du spin, alors que les termes proportionnels à X_i^{in} et à X_{vi} correspondent au bruit quantique intrinsèque du champ - fluctuations du vide - et au bruit ajouté par l'émission spontanée dû au couplage avec les modes vides. Les photocourants mesurés par Alice sont alors la somme de "bruit" et des états atomiques initiaux

$$i_- \propto X_- \sim \text{bruit} + [J_{x1}(0) - J_{x2}(0)] e^{-\tilde{\gamma}_0 t}, \tag{5.39}$$

$$i_+ \propto Y_+ \sim \text{bruit} + [J_{y1}(0) + J_{y2}(0)] e^{-\tilde{\gamma}_0 t} \tag{5.40}$$

De la même manière que dans le chapitre 4, pour maximiser l'information concernant l'état atomique, on avait choisi un oscillateur local matché temporellement avec l'émission transitoire mesurée, l'information utile à la reconstruction peut être optimisée ici par un choix judicieux du gain lors de la phase de reconstruction.

C.2.3 Reconstruction

Disposant de la seconde moitié de la paire EPR et des résultats de mesure d'Alice, Bob dispose en principe de toute l'information nécessaire pour reconstruire l'état initial. Si l'on avait affaire à des champs, on pourrait utiliser des modulateurs d'amplitude et de phase pour rétroagir sur le faisceau. La difficulté avec les variables atomiques consiste à trouver une interaction qui effectue une transformation unitaire sur le spin, dépendante des résultats de mesures effectuées par Alice et applicable à un ensemble atomique. Dans la proposition [Kuzmich00b], la reconstruction s'effectue de manière optique en plusieurs étapes. Une méthode plus directe consiste à utiliser une rétroaction magnétique pour faire précesser le spin de manière contrôlée. Ce type de rétroaction, initialement proposée pour comprimer les fluctuations quantiques atomiques [Thomsen02], a été implémentée avec succès dans le groupe de Mabuchi à Caltech dans lequel des réductions du bruit quantique atomique de l'ordre de 70% ont été atteintes [Geremia04]. Une méthode de rétroaction magnétique a été également utilisée récemment pour stocker des états cohérents dans des ensembles atomiques dans le groupe de

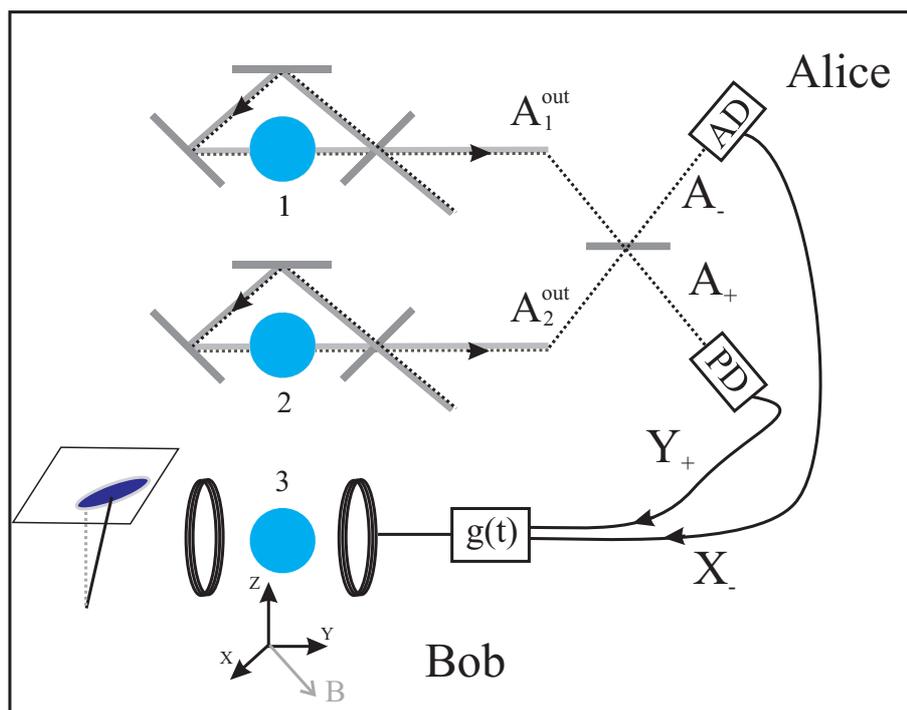


FIG. 5.10 – *Reconstruction* : Bob génère un champ magnétique transverse au niveau de l'ensemble 3, les composantes de ce champ étant proportionnelles aux résultats de mesure d'Alice (pour plus de clarté, on n'a représenté qu'une seule paire de bobines Helmholtz). Pour un choix optimal du gain $g(t)$, l'état final du spin 3 (à gauche) après reconstruction est l'état initial du spin 1, ce qui termine la téléportation. Notons que l'état initial du spin 1 a bien été "détruit" dans le processus.

Polzik [Julsgaard04].

Dans notre cas, Bob génère à l'aide de deux paires de bobines radiofréquence en configuration Helmholtz un champ magnétique transverse au niveau de l'ensemble 3. Les composantes du champ magnétique, B_x et B_y , sont choisies proportionnelles aux résultats de mesure $-i_+$ et i_- d'Alice, de telle sorte que J_{x3} soit couplé à i_- (et donc à $J_{x1} - J_{x2}$), alors que J_{y3} est couplé à i_+ (et donc à $J_{y1} + J_{y2}$). Le hamiltonien de couplage est simplement un hamiltonien $\vec{J} \cdot \vec{B}$

$$H_B = -g_J \mu_B [B_x(t) J_{x3} + B_y(t) J_{y3}] \quad (5.41)$$

avec g_J le rapport gyromagnétique de la transition considérée. L'évolution des composantes transverses du spin 3 est donnée par

$$\dot{J}_{x3}(t) = G(t) X_-(t), \quad \dot{J}_{y3}(t) = G(t) Y_+(t), \quad (5.42)$$

où $G(t)$ est le gain électronique de la reconstruction, dont le profil temporel peut être choisi par Bob de manière à optimiser la fidélité de la reconstruction. Optimiser le gain électronique est en fait équivalent à choisir le meilleur profil temporel pour l'oscillateur local dans les mesures d'Alice. On choisit donc pour le gain un profil $G(t) = G e^{-\tilde{\gamma} t}$ qui maximise l'information reçue par Bob¹². L'évolution de J_{x3} et J_{y3} s'obtient par intégration de (5.42) en tenant compte de (5.38). Pour $t \gg 1/\tilde{\gamma}_0$, l'état final du spin 3 est alors donné par

$$J_{x3}^{out} = g J_{x1}(0) + J_{x3}(0) - g J_{x2}(0) + J_x^{noise} \quad (5.43)$$

$$J_{y3}^{out} = g J_{y1}(0) + J_{y3}(0) + g J_{y2}(0) + J_y^{noise} \quad (5.44)$$

dans laquelle $g = -G \sqrt{\eta_{max}/N\tilde{\gamma}_0}$ est le gain normalisé de la téléportation et $J_{x,y}^{noise}$ des opérateurs de bruit atomiques prenant en compte les bruits ajoutés dans le processus. Ces opérateurs - qui s'expriment en fonction des X_i et X_{vi} à partir de (5.38) - satisfont à

$$\langle J_x^{noise} \rangle = \langle J_y^{noise} \rangle = 0 \quad (5.45)$$

$$\Delta^2 J_x^{noise} = \Delta^2 J_y^{noise} = (N/2) g^2 \frac{1 - \eta_{max}}{\eta_{max}} \quad (5.46)$$

Pour des corrélations initiales parfaites, $J_{x2}(0) \sim J_{x3}(0)$, $J_{y2}(0) \sim -J_{y3}(0)$, et un gain unité $g = 1$, le spin 3 est bien dans l'état initial du spin 1, à des termes de bruit ajouté près

$$J_{x3}^{out} \sim J_{x1}(0) + J_x^{noise} \quad \text{et} \quad J_{y3}^{out} \sim J_{y1}(0) + J_y^{noise} \quad (5.47)$$

¹²Avec un gain constant par exemple, on retrouverait les résultats du chapitre 4, paragraphe B.7.2, c'est-à-dire qu'on ne "reconstruirait" au mieux que les deux-tiers environ de l'état initial.

Si les termes de bruit ajouté sont négligeables, on a téléporté l'état de l'ensemble atomique 1 sur l'ensemble 3 avec une fidélité de 1.

Si l'on suppose que les ensembles EPR préparés par Victor possèdent des fluctuations isotropiques et sont corrélés symétriquement (Fig. 5.8), la matrice de variance associée est donnée par (5.19-5.20), la valeur du critère d'inséparabilité (5.7) étant $\mathcal{I}_{at} = 2e^{-2r}$. Les variances normalisées du spin 3 après reconstruction s'écrivent alors¹³

$$V_{x3}^{out} = g^2 V_{x1} + 2g^2 \frac{1 - \eta_{max}}{\eta_{max}} + (1 + g^2) \cosh(2r) - 2g \sinh(2r) \quad (5.48)$$

$$V_{y3}^{out} = g^2 V_{y1} + 2g^2 \frac{1 - \eta_{max}}{\eta_{max}} + (1 + g^2) \cosh(2r) - 2g \sinh(2r) \quad (5.49)$$

De manière cohérente, si le gain de la téléportation est nul, les fluctuations du spin 3 ne sont pas modifiées : $V_{x3}^{out} = \cosh(2r) = V_{x3}$ et $V_{y3}^{out} = \cosh(2r) = V_{y3}$. Si l'on choisit un gain unité ($g = 1$) de manière à assurer une conservation des valeurs moyennes, $\langle J_{x3}^{out} \rangle = \langle J_{x1}(0) \rangle$ et $\langle J_{y3}^{out} \rangle = \langle J_{y1}(0) \rangle$, on peut caractériser la fidélité de la téléportation par les *bruits équivalents ajoutés* [Grosshans01, Bowen03b] :

$$N_{\alpha}^{out} \equiv V_{\alpha 3}^{out} - g^2 V_{\alpha 1} \quad (\alpha = x, y) \quad (5.50)$$

Ces quantités, qui traduisent l'excès de bruit ajouté lors de la téléportation, s'expriment finalement en fonction des ressources (l'intrication initiale entre les ensembles EPR) et des pertes (bruits atomiques ajoutés¹⁴)

$$N_{x,y}^{out} = 2e^{-2r} + 2 \frac{1 - \eta_{max}}{\eta_{max}} \quad (5.51)$$

Pour une forte intrication ($r \gg 1$) et de faibles pertes ($\eta_{max} \sim 1$), les bruits équivalents ajoutés tendent vers 0, comme on l'espère pour un téléporteur parfait.

C.2.4 Discussion

On remarque une grande similarité avec les résultats obtenus pour les protocoles de téléportation pour les champs [Furusawa98, Braunstein98a, Ralph98, vanLoock00, Grosshans01, Bowen03b] : pour des pertes nulles ($\eta_{max} = 1$), les variances des bruits équivalents ajoutés tendent vers 0 pour une intrication parfaite ($r = \infty$). En absence d'intrication ($r = 0$), $N_x^{out} = N_y^{out} = 2$, on ajoute deux fois le bruit du vide pour la

¹³Pour souligner l'analogie avec les protocoles pour les champs, on a adopté les notations en usage dans la littérature pour les variances initiales et finales. V_{x3}^{out} est égal à $(\Delta J_{x3}^{out})^2 / (N/4)$ par exemple.

¹⁴Nous n'avons gardé dans ces termes de bruit atomique que les bruits correspondant aux processus d'interaction EIT ou Raman, mais on peut sans difficulté inclure dans ces termes d'autres sources de bruit ajouté comme l'imperfection des détecteurs, les pertes optiques, etc.

mesure et la reconstruction. En effet, si l'on choisit le gain de telle sorte que les valeurs moyennes soient conservées lors du processus, les fluctuations quantiques sont en revanche nécessairement augmentées lorsqu'on ne dispose pas d'intrication. Pour caractériser la qualité de la téléportation on peut utiliser le produit des variances équivalentes ajoutées $V_q \equiv \sqrt{N_x^{out} N_y^{out}}$ [Bowen03b]. En l'absence de pertes, la limite classique de 2 est battue dès que l'intrication initiale est non nulle. Les variances équivalentes ajoutées étant indépendantes de l'état initial, notre protocole de téléportation est inconditionnel et les différents critères d'évaluation de la qualité de la téléportation pour la lumière sont utilisables [Furusawa98, Braunstein98a, vanLoock00, Grosshans01, Bowen03b]. Notons toutefois que ceci n'est vrai que dans l'approximation des faibles cohérences $\langle J_{x1} \rangle, \langle J_{y1} \rangle \sim \mathcal{O}(\sqrt{N})$. Cependant, on peut toujours téléporter des cohérences atomiques plus grandes en augmentant le nombre d'atomes. De plus, nous nous sommes placés dans cette approximation qui permet d'effectuer des calculs analytiques et de retrouver le formalisme bien connu de la téléportation des champs. Pour un grand nombre d'atomes, il est néanmoins possible de réduire les contraintes sur le module de la cohérence qui caractérise l'état atomique à téléporter, ce au prix d'une faible diminution de la fidélité du processus. En effet, la cohérence créée dans le fondamental par un champ sonde d'amplitude non nulle Ω_2 est proportionnelle au premier ordre au rapport des amplitudes entre le champ sonde et le champ de contrôle Ω_2/Ω_1 , alors que la modification de l'orientation longitudinale et les variances dans le plan transverse varient comme le rapport des intensités [voir (4.47)]

$$\langle J_{x1} \rangle, \langle J_{y1} \rangle \sim \frac{N \Omega_2}{2 \Omega_1}, \quad \langle J_{z1} \rangle \sim \frac{N}{2} \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \right) \quad (5.52)$$

On peut donc, moyennant un champ de contrôle assez intense, créer des cohérences telles que $\sqrt{N} \ll \langle J_{x1} \rangle, \langle J_{y1} \rangle \ll N$ tout en gardant une téléportation efficace.

D'autre part, nous avons négligé le temps de mesure et le temps de transmission dans le canal classique. Cette approximation est raisonnable pour des spins associés à des sous-niveaux fondamentaux, dont les durées de vie sont supérieures à la milliseconde.

Troisièmement, le bruit ajouté intrinsèque est faible (en $1/C$) pour de grandes valeurs de la coopérativité, sans qu'il soit nécessaire d'être en régime de couplage fort et d'avoir des cavités de très grande finesse [Davidovich94]. Une cavité de faible finesse, voire pas de cavité du tout, est même préférable puisqu'il est plus alors facile de se placer dans un régime dans lequel les atomes évoluent lentement devant les champs, ce qui constituent le régime optimal pour la conservation des grandeurs quantiques. Dans le dispositif expérimental actuel le nombre d'atomes de césium dans le nuage et

la bande passante de la cavité permettent d'atteindre des valeurs de l'ordre de 100 pour la coopérativité ce qui permettrait de réaliser en principe une téléportation atomique avec un taux d'erreur de l'ordre du pour cent en quelques microsecondes.

On peut également donner une interprétation physique simple de la condition de gain unité pour le processus de reconstruction. En effet, durant la reconstruction le spin 3 précesse pendant un temps $\tau_e = 1/(2\tilde{\gamma}_0)$ d'un angle $\theta = \omega_L/2\tilde{\gamma}_0$. Imposer $g = 1$ revient à imposer que cet angle soit égal aux fluctuations relatives du spin : $\theta = 1/\sqrt{N}$. On peut donner une ordre de grandeur de l'amplitude du champ magnétique RF nécessaire ; pour la raie D_2 du césium, avec un rapport gyromagnétique de 450 kHz/G, une constante effective $\tilde{\gamma}_0 = (2\pi) 225$ kHz conduit à une amplitude de 1 mG pour téléporter 10^6 atomes. Un excellent contrôle du champ magnétique est donc indispensable, tant au niveau de l'homogénéité que des fluctuations. En outre, plus le nombre d'atomes est élevé, plus l'amplitude du champ exercé diminue de manière à compenser des fluctuations plus faibles en valeurs relatives. Les contraintes expérimentales augmentent naturellement en difficulté avec la taille macroscopique de l'objet à téléporter.

Finalement, afin de vérifier que la téléportation a effectivement réussi, Victor peut réaliser une lecture optique de l'état 3 et comparer avec l'état préparé initialement. Une variante peut consister pour Bob à ne pas effectuer de reconstruction magnétique sur l'ensemble 3, mais à le lire optiquement et utiliser les résultats de mesure d'Alice pour reconstituer l'état initial. Dans ce cas, l'état 3 n'est jamais reconstruit au niveau de l'ensemble 3. Cela permet toutefois de réaliser une téléportation quantique d'un ensemble atomique vers un champ.

De plus, il est clair que l'on peut par cette méthode téléporter également de l'intrication (*entanglement swapping*) [Enk98] ; si l'ensemble 1 est initialement corrélé quantiquement avec un ensemble 0, alors, à la fin de la téléportation, les ensembles 0 et 3 sont corrélés quantiquement. On a alors téléporté de l'intrication quantique, ce qui permet de réaliser un répéteur quantique afin de transmettre des états quantiques à des distances arbitraires. Ce protocole, de par sa similarité avec les protocoles existants pour les variables atomiques pourrait être intégré de manière efficace dans un réseau atomes-champ.

Mémoires quantiques dans d'autres systèmes

Sommaire

A	Mémoire quantique avec des spins nucléaires	180
A.1	Collisions d'échange de métastabilité	182
A.2	Transfert des fluctuations quantiques	183
A.3	Discussion et faisabilité expérimentale	191
A.4	Conclusion	195
B	Transfert quantique entre champs et oscillateurs mécaniques	196
B.1	Introduction	196
B.2	Système considéré	197
B.3	Etat stationnaire et linéarisation	201
B.4	Spectres et variances	202
B.5	Lecture optique de l'état des miroirs	205
B.6	Conclusion	208

Dans les chapitres précédents nous avons présenté plusieurs schémas permettant de transférer et stocker des états non classiques du champ dans les variables du spin collectif associé à deux sous-niveaux fondamentaux d'un ensemble d'atomes. Pour des alcalins, l'ordre de grandeur des temps de stockage est donné par la durée de vie du fondamental - limitée en pratique par les collisions dans les vapeurs, par les inhomogénéités de champ magnétique ou le temps de transit dans le nuage. On peut espérer typiquement des temps de stockage de l'ordre de la milliseconde [Julsgaard01]. En utilisant des gaz tampons dans des vapeurs, on peut éventuellement penser atteindre des temps de l'ordre de la seconde. Nous proposons dans la première partie de ce chapitre d'encoder l'information quantique non plus dans les variables électroniques atomiques,

mais dans un spin nucléaire. L'avantage est que celui-ci est extrêmement peu couplé à l'environnement et, en particulier, très robuste vis-à-vis des collisions. Pour ^3He par exemple, il est ainsi possible d'obtenir des temps de vie de l'orientation nucléaire dans le fondamental qui peuvent atteindre plusieurs heures [Colegrove63]. Les méthodes développées dans plusieurs laboratoires, en particulier dans l'équipe "Hélium polarisé et fluides quantiques" du LKB, ont permis d'utiliser l'hélium polarisé dans des applications d'imagerie médicale [Darrasse97, Becker98, Moller02]. Cette durée de vie extrêmement longue ainsi que les forts taux d'orientation nucléaire obtenus dans plusieurs équipes font qu'un ensemble d'atomes d' ^3He dans leur état fondamental semble être un bon candidat pour stocker des variables quantiques du champ électromagnétique [Dantan05d].

Enfin, nous terminons ce chapitre par l'étude d'un autre système physique susceptible de servir de mémoire pour des variables quantiques et qui présente de fortes analogies avec les ensembles atomiques : les oscillateurs mécaniques. Nous allons voir qu'il est en effet possible d'appliquer les concepts développés dans ce manuscrit à des miroirs mobiles interagissant dans une cavité avec des champs optiques. Outre le grand intérêt que présente le fait de réduire les fluctuations quantiques des miroirs pour améliorer la sensibilité des mesures interférométriques, on peut également envisager d'utiliser des miroirs mobiles comme registre quantique pour des variables optiques à des fins de traitement de l'information quantique. Si les difficultés techniques à surmonter pour mettre un miroir dans son état fondamental quantique sont grandes, les progrès réalisés en laboratoire ces dernières années, notamment dans l'équipe "Mesures et bruits fondamentaux" du LKB [Cohadon99, Pinard00], ainsi que l'apparition de structures de taille micrométrique (MEMS) laissent présager l'utilisation de tels systèmes pour l'information quantique dans un avenir pas trop éloigné [Marshall03, Cohadon05]. Nous proposons donc dans la partie B d'intriquer deux miroirs mobiles au moyen de champs comprimés et d'une double cavité [Pinard05].

A Mémoire quantique avec des spins nucléaires

La difficulté pour manipuler optiquement le spin nucléaire d' ^3He dans le fondamental est que le niveau fondamental se trouve à 20 eV de l'état excité le plus proche et qu'il est, par conséquent impossible d'interagir directement avec un champ optique. Pour modifier l'état du spin nucléaire dans le fondamental, il a été proposé d'utiliser les collisions d'échange de métastabilité entre le métastable 2^3S_1 et le fondamental [Colegrove63]. En effet, au cours d'une collision d'échange de métastabilité, un atome dans l'état métastable et un atome dans l'état fondamental échangent leurs orientations nucléaires. L'avantage est que l'on peut interagir cette fois directement avec les

métastables à l'aide de champs optiques. En pratique, on utilise une décharge radiofréquence dans la cellule pour maintenir en régime stationnaire une proportion d'atomes ($\sim 10^{-6}$) dans l'état métastable. On peut interagir avec les métastables sur la transition C_9 à $1.08 \mu\text{m}$ entre le triplet 2^3S_1 et le triplet 2^3P_0 pour orienter les atomes dans le niveau métastable par pompage optique. Les collisions d'échange de métastabilité sont alors utilisées pour polariser les fondamentaux. Ce processus est très efficace [Dupont-Roc73, Nacher85, Courtade02, Nacher02], car ces collisions d'échange de métastabilité conservent les variables du spin nucléaire et du spin électronique de métastable. On peut alors à partir d'une orientation dans le métastable créer une orientation dans le fondamental. Nous allons montrer que ces collisions d'échange préservent également les corrélations quantiques, et que, partant d'un champ comprimé, il est possible de transférer la réduction de bruit au spin dans le niveau fondamental. Nous nous limitons dans ce manuscrit à un modèle "simplifié" dans lequel les spins dans le fondamental et le métastable sont des spins nucléaires $1/2$ (voir figure 6.1). Le métastable est couplé à un niveau excité par deux champs : un champ de contrôle cohérent Ω et un champ dans un état vide comprimé A . Ce modèle, qui ne correspond pas à la situation réelle, présente l'avantage, outre sa simplicité, d'établir un lien évident avec les schémas présentés dans les chapitres précédents et nous allons voir qu'il contient en fait l'essentiel de la physique du problème. Un modèle réaliste prenant en compte l'intégralité de la structure de la transition C_9 et le spin électronique du métastable (Fig. 6.4) a été développé par Alice Sinatra et Gaël Reinaudi. Il donne des résultats en excellent accord avec celui que nous présentons dans ce manuscrit. Nous y revenons dans le paragraphe A.3.

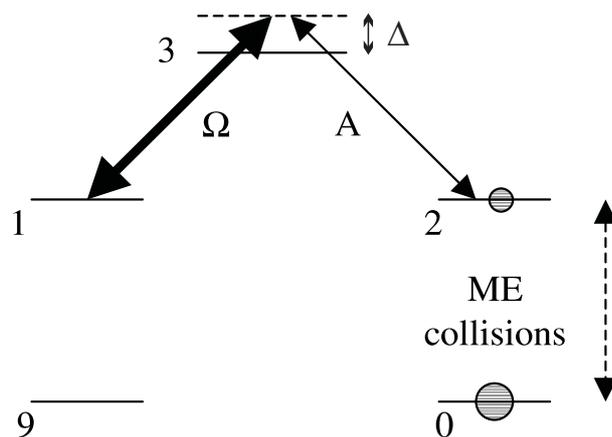


FIG. 6.1 – *Modèle simple : les niveaux 1 et 2 sont métastables, couplés au niveau excité 3 par les champs Ω et A , et aux niveaux fondamentaux 9 et 0 par les collisions d'échange de métastabilité.*

A.1 Collisions d'échange de métastabilité

Nous commençons par présenter le modèle utilisé pour traiter les fluctuations quantiques lors des collisions d'échange de métastabilité dans le cadre du modèle simple. Lors d'une telle collision, un atome dans l'état fondamental (de matrice densité ρ_f) et un atome dans l'état métastable (de matrice densité ρ_m) échangent leur excitation. On peut résumer cet échange par les équations [Partridge66, Dupont-Roc72]

$$\dot{\rho}_f = \gamma_f(-\rho_f + \rho_m) \quad (6.1)$$

$$\dot{\rho}_m = \gamma_m(-\rho_m + \rho_f) \quad (6.2)$$

γ_f et γ_m sont les taux de collisions d'échange dans le fondamental et le métastable, respectivement. Chaque taux est proportionnel à la population dans l'autre niveau : cela signifie que $\gamma_f \propto n$ et $\gamma_m \propto N$, où N désigne le nombre d'atomes dans l'état fondamental et n le nombre d'atomes dans l'état métastable ($n/N \sim 10^{-6}$, typiquement). Dans le cadre de ce modèle simple (pas de variable électronique pour le métastable) on voit que l'atome dans l'état fondamental et l'atome dans l'état métastable échangent simplement leur spin nucléaire.

En absence de champs, les équations d'échange de métastabilité pour les opérateurs collectifs du métastable $S_{kl} = \sum_{i=1}^n |k\rangle_i \langle l|_i$ ($i, j = 1, 2$) et du fondamental $I_{kl} = \sum_{i=1}^N |k\rangle_i \langle l|_i$ ($k, l = 9, 0$), s'écrivent sous la forme

$$\dot{I}_\alpha = -\gamma_f I_\alpha + \gamma_m S_\alpha + f_{I_\alpha} \quad (6.3)$$

$$\dot{S}_\alpha = -\gamma_m S_\alpha + \gamma_f I_\alpha + f_{S_\alpha} \quad (6.4)$$

($\alpha = x, y, z$). Les opérateurs de Langevin f_{I_α} et f_{S_α} assurent la cohérence du calcul en opérateurs. En effet, l'échange de métastabilité est un processus aléatoire qui se produit sur un temps très court ($\sim 10^{-12}$ s) devant les autres temps du problème. On peut donc assimiler les fonctions de corrélation à des distributions de Dirac : $\langle f_\alpha(t) f_\beta(t') \rangle = D_{\alpha,\beta} \delta(t - t')$, les coefficients de diffusion se calculant à partir du théorème de régression quantique appliqué à des atomes incorrélés : $D_{90,09} = 2N\gamma_f$, $D_{21,12} = 2n\gamma_m$, $D_{21,09} = D_{90,12} = -2n\gamma_m$ (voir Appendice C). Comme le moment cinétique total est conservé dans ces collisions, les forces de Langevin ne sont pas indépendantes ; on a à tout instant

$$\dot{I}_\alpha + \dot{S}_\alpha = f_{I_\alpha} + f_{S_\alpha} = 0 \quad (6.5)$$

Cela assure en particulier qu'un état cohérent atomique reste cohérent sous l'effet des collisions d'échange. En effet, supposons que les deux spins soient préparés dans un état cohérent atomique selon z :

$$\langle I_z \rangle = N/2, \quad \langle I_{x,y} \rangle = 0, \quad \text{et} \quad \Delta I_{x,y}^2 = N/4 \quad (6.6)$$

$$\langle S_z \rangle = n/2, \quad \langle S_{x,y} \rangle = 0, \quad \text{et} \quad \Delta S_{x,y}^2 = n/4 \quad (6.7)$$

L'allumage de la décharge couple les deux spins entre eux, mais ne crée pas de corrélations entre les spins individuels dans le métastable ou dans le fondamental. Avec les coefficients de diffusion donnés précédemment et à partir des équations (6.3-6.4), on peut montrer¹ que les variances des composantes transverses $\Delta I_{x,y}^2$ et $\Delta S_{x,y}^2$ restent constamment égales à $N/4$ et $n/4$, respectivement. De manière satisfaisante, les atomes échantent des spins incorrélés et restent donc dans un état cohérent atomique.

A.2 Transfert des fluctuations quantiques

A.2.1 Système et équations d'évolution

On considère une interaction Raman en cavité pour le métastable : les atomes interagissent sur la transition $1 \rightarrow 3$ avec un champ cohérent Ω que l'on traite classiquement, et sur la transition $2 \rightarrow 3$ avec un champ quantique A en cavité (Fig. 6.1). L'hamiltonien d'interaction atomes métastables/champs s'écrit

$$H = -\hbar \{ \Omega S_{31} e^{-i\omega_1 t} + g A S_{32} + \text{h.c.} \} \quad (6.8)$$

où Ω représente la pulsation de Rabi du champ de contrôle et g la constante de couplage du champ A avec les atomes.

Comme dans le chapitre 4, on considère une situation dans laquelle le système est préparé dans un état totalement polarisé : $\langle \Pi_2 \rangle = n$ et $\langle \Pi_0 \rangle = N$. Nous allons donc supposer que $\langle A \rangle = 0$ et nous intéresser aux fluctuations des composantes transverses (selon x et y) des spins associés aux niveaux métastables et fondamentaux. Sous l'effet du champ de contrôle et des collisions d'échange, les orientations des deux spins sont longitudinales : $\langle S_z \rangle = n/2$ et $\langle I_z \rangle = N/2$. Les équations régissant les fluctuations du champ A , du dipole S_{23} et des cohérences dans le métastable et le fondamental constituent un système fermé, que l'on obtient en ajoutant aux équations d'Heisenberg-Langevin habituelles (2.42-2.47) les termes correspondants à l'échange de métastabilité

$$\delta \dot{S}_{21} = -(\gamma_m - i\delta)\delta S_{21} + \gamma_f \delta I_{09} + i\Omega \delta S_{23} + f_{21} \quad (6.9)$$

$$\delta \dot{S}_{23} = -(\gamma + i\Delta)\delta S_{23} + i\Omega \delta S_{21} + ign\delta A + F_{23} \quad (6.10)$$

$$\delta \dot{I}_{09} = -(\gamma_f - i\delta_I)\delta I_{09} + \gamma_m \delta S_{21} + f_{09} \quad (6.11)$$

$$\delta \dot{A} = -(\kappa + i\Delta_c)\delta A + i\frac{g}{\tau}\delta S_{23} + \sqrt{\frac{2\kappa}{\tau}}\delta A^{in} \quad (6.12)$$

où

¹voir appendice C.

- $\delta = \omega_S - \delta_{las}$ est le désaccord à deux photons dans le métastable, $\omega_S = (E_2 - E_1)/\hbar$ étant la différence d'énergie entre les niveaux 1 et 2 et $\delta_{las} = \omega_1 - \omega_2$ la différence de fréquence des deux lasers
- $\delta_I = \omega_I - \delta_{las}$ est le désaccord dans le fondamental, $\omega_I = (E_0 - E_9)/\hbar$ étant la différence d'énergie entre les sous niveaux fondamentaux
- $\Delta = (E_3 - E_2)/\hbar - \omega_2$ est le désaccord à un photon
- $\Delta_c = \omega_c - \omega_2$ est le désaccord de la cavité.

Nous nous sommes placé dans le référentiel tournant associé aux lasers, de telle sorte que la cohérence dans le métastable évolue avec une fréquence $\omega_1 - \omega_2$ dans le référentiel du laboratoire.

A.2.2 Hypothèse adiabatique

Si l'on considère une interaction de type Raman ($\Delta \gg \gamma, \kappa$), on peut obtenir des équations simplifiées pour les observables du métastable en éliminant adiabatiquement les dipôles optiques et en négligeant la population de l'état excité. En outre, si l'on se place dans la limite d'une mauvaise cavité ($\kappa > \gamma$), le champ intracavité suit adiabatiquement les observables du métastable et du fondamental. En éliminant successivement le dipôle optique, puis le champ intracavité dans (6.9-6.11), on obtient²

$$\delta \dot{S}_{21} = -(\gamma_m + \Gamma - i\tilde{\delta})\delta S_{21} + \gamma_f \delta I_{09} + i \frac{2gn\Omega}{\Delta\sqrt{T}} \delta A^{in} + f_{21} - \frac{\Omega}{\Delta} F_{23} \quad (6.13)$$

où le taux de relaxation effectif pour le métastable est égal à

$$\Gamma = (1 + 2C)\Gamma_R \quad (6.14)$$

et $\tilde{\delta}$, le désaccord effectif pour la cohérence du métastable - qui prend en compte le déplacement lumineux induit par le champ de contrôle - vaut

$$\tilde{\delta} = \delta + \Omega^2/\Delta \quad (6.15)$$

Les fluctuations du métastable sont couplées à celles du champ incident via le champ de contrôle et à celles du fondamental via les collisions d'échange. Pour que les fluctuations quantiques se transfèrent efficacement du champ aux cohérences, il est nécessaire que les deux cohérences, dans le métastable et dans le fondamental, soient excitées de manière résonnante et à la même fréquence. On suppose que la fréquence propre ω_S du métastable est uniquement due à la présence d'un champ magnétique longitudinal B .

²Cette équation a été obtenue en supposant que le désaccord de la cavité compense exactement le déphasage dû aux atomes : $\Delta_c = 2C\kappa\gamma/\Delta$ et que $C\gamma/\Delta \ll 1$.

Cette fréquence $\omega_S(B)$ est donc proportionnelle à B . La condition de transfert optimal des fluctuations du champ aux métastables est $\tilde{\delta} = 0$, ce qui s'écrit

$$\omega_S(B) + \Omega^2/\Delta = \omega_1 - \omega_2 \quad (6.16)$$

Cette relation traduit simplement que l'on excite dans le référentiel du laboratoire une cohérence à la fréquence $\omega_1 - \omega_2$. L'excitation est résonnante lorsque cette fréquence est égale à la fréquence propre d'évolution du métastable, qui est égale à la somme de la fréquence de Larmor et du déplacement lumineux du niveau 1. Le champ magnétique permet alors de contrôler la valeur de la fréquence de Larmor et, par conséquent, de choisir la valeur de la fréquence du couplage résonnant. Pour un couplage optimal entre le métastable et le fondamental, la seconde condition de résonance est que $\delta_I = 0$, soit

$$\omega_I(B) = \omega_1 - \omega_2 \quad (6.17)$$

Là encore, il est nécessaire que les deux oscillateurs harmoniques évoluent de manière synchronisée pour que les fluctuations s'échangent efficacement. Comme on l'a vu dans le chapitre 4, on peut transférer de la réduction de bruit à une fréquence $\omega_1 - \omega_2$ non nulle. Pour le fondamental, cela implique que $\omega_I(B)$ soit non nulle, et par conséquent que le champ magnétique soit non nul également. Cependant, un champ non nul fait précesser les spins dans le fondamental et le métastable à des vitesses de rotation très différentes. En effet, pour la transition de ^3He considérée, les rapports gyromagnétiques, définis par $\hbar\omega_\alpha = \mu_\alpha B$ (en champ faible), valent respectivement $\mu_S/h = 1.87$ MHz/G et $\mu_I/h = 3.24$ kHz/G. L'intérêt du schéma considéré est que l'on peut choisir le déplacement lumineux de telle sorte que soient simultanément satisfaites (6.16) et (6.17) pour une valeur non nulle du champ magnétique, en imposant

$$\omega_S(B) + \Omega^2/\Delta = \omega_I(B) \quad (6.18)$$

Nous allons donc supposer ces deux conditions vérifiées pour calculer les variances atomiques.

A.2.3 Spectres et variances

La transformée de Fourier des équations (6.11) et (6.13) dans les conditions $\tilde{\delta} = \delta_I = 0$ conduit aux équations

$$d(\omega)\delta S_y = (\gamma_f - i\omega)\beta\delta X^{in} - i\omega f_{S_y} - (\gamma_f - i\omega)\frac{\Omega}{\Delta}F_y \quad (6.19)$$

$$d(\omega)\delta I_y = \gamma_m\beta\delta X^{in} + (\Gamma - i\omega)f_{I_y} - \gamma_m\frac{\Omega}{\Delta}F_y \quad (6.20)$$

$$\text{avec} \quad d(\omega) = (\gamma_m + \Gamma - i\omega)(\gamma_f - i\omega) - \gamma_m\gamma_f$$

une constante de couplage $\beta = gn\Omega/\Delta\sqrt{T}$ et des forces de Langevin $F_y = (F_{23} - F_{32})/2i$, $f_{S_y} = (f_{21} - f_{12})/2i$, $f_{I_y} = (f_{09} - f_{90})/2i$. Les quatre pôles de $d(\omega)$ sont solutions de

$$\omega^4 + [(\gamma_f + \gamma_m + \Gamma)^2 - 2\gamma_f\gamma_m]\omega^2 + (\gamma_f\Gamma)^2 = 0 \quad (6.21)$$

Ces pôles sont de la forme $\pm i\omega_{\pm}$ avec $\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{\lambda \pm \mu}{2}}$, où

$$\lambda = (\gamma_m + \gamma_f + \Gamma)^2 - 2\gamma_f\Gamma \quad (6.22)$$

$$\mu = \sqrt{(\gamma_f + \gamma_m + \Gamma)^4 - 4\gamma_f\Gamma(\gamma_f + \gamma_m + \Gamma)^2} \quad (6.23)$$

L'application du théorème des résidus conduit aux résultats suivants pour les variances des composantes S_y et I_y

$$\Delta S_y^2 = \frac{n}{4} \left[\left(\frac{2C}{1+2C} \Delta^2 X^{in} + \frac{1}{1+2C} \right) (2\Gamma\gamma_f^2 R_1 + 2\Gamma R_2) + 2\gamma_m R_2 \right] \quad (6.24)$$

$$\Delta I_y^2 = \frac{N}{4} \left[\left(\frac{2C}{1+2C} \Delta^2 X^{in} + \frac{1}{1+2C} \right) (2\gamma_f\Gamma\gamma_m R_1) + 2\gamma_f\Gamma^2 R_1 + 2\gamma_f R_2 \right] \quad (6.25)$$

avec les résidus

$$R_1 = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{\omega_-} - \frac{1}{\omega_+} \right] \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\mu} \quad (6.26)$$

L'intérêt de ce calcul est que les expressions (6.24) et (6.25) sont valables quelles que soient les valeurs de Γ , γ_m et γ_f et ne supposent rien sur les valeurs respectives de n et N . En particulier, on vérifie bien que, si le champ incident A^{in} est dans un état cohérent ($\Delta^2 X^{in} = 1$), alors, quelles que soient les valeurs de Γ , γ_f et γ_m , les deux spins sont dans un état cohérent atomique : $\Delta S_y^2 = n/4$ et $\Delta I_y^2 = N/4$.

Avant de présenter les résultats pour un champ comprimé, on peut grandement simplifier les expressions (6.24-6.25) en utilisant le fait que, dans les conditions habituelles de pompage dans l' ^3He , on a $n \ll N$, i.e. $\gamma_f \ll \gamma_m$. Les observables dans le fondamental évoluent donc extrêmement lentement par rapport à celles du métastable. En effet, les taux de collisions d'échange de métastabilité étant proportionnels aux populations, un atome dans l'état métastable effectue une collision toutes les microsecondes en moyenne, alors qu'un atome dans le fondamental n'effectue une collision qu'une fois par seconde en moyenne. Il est alors parfaitement justifié de considérer que le spin dans le métastable suit à chaque instant le spin dans le fondamental. Dans la limite $\gamma_f \ll \Gamma, \gamma_m$, on élimine adiabatiquement S_{21} dans (6.13)

$$\delta S_y = \frac{\gamma_f}{\gamma_m + \Gamma} \delta I_y + \frac{\beta}{\gamma_m + \Gamma} \delta X^{in} + \frac{f_{S_y}}{\gamma_m + \Gamma} - \frac{\Omega}{\Delta} \frac{F_y}{\gamma_m + \Gamma} \quad (6.27)$$

ce qui donne ensuite pour les fluctuations de la composante y du fondamental

$$\left[\frac{\gamma_f \Gamma}{\gamma_m + \Gamma} - i\omega \right] \delta I_y(\omega) = \frac{\gamma_m \beta}{\gamma_m + \Gamma} \delta X^{in} + \frac{\Gamma}{\gamma_m + \Gamma} f_{I_y} - \frac{\gamma_m}{\gamma_m + \Gamma} \frac{\Omega}{\Delta} F_y \quad (6.28)$$

On trouve un résultat très similaire à celui du chapitre 4, à savoir que dans une bande de fréquences de largeur donnée par $\Gamma_I = \gamma_f \Gamma / (\gamma_m + \Gamma)$, les fluctuations du spin dans le fondamental sont la somme des fluctuations du champ incident et de bruit ajouté dû, d'une part, à l'échange de métastabilité et, d'autre part, à l'émission spontanée qui modifie les fluctuations de S_y et est ramenée par échange dans le fondamental. On obtient dans cette approximation des expressions très simples pour les variances des deux spins

$$\Delta I_y^2 = \frac{N}{4} \left\{ 1 - \frac{\gamma_m}{\Gamma + \gamma_m} \frac{2C}{1 + 2C} (1 - e^{-2r}) \right\} \quad (6.29)$$

$$\Delta S_y^2 = \frac{n}{4} \left\{ 1 - \frac{\Gamma}{\Gamma + \gamma_m} \frac{2C}{1 + 2C} (1 - e^{-2r}) \right\} \quad (6.30)$$

en supposant que le champ incident est comprimé en amplitude $\Delta^2 X^{in} = e^{-2r}$ sur une large bande de fréquence. On peut noter que, quelles que soient les valeurs respectives de Γ et γ_m , la réduction de bruit du champ incident se répartit dans les deux ensembles

$$\Delta I_{min}^2 + \Delta S_{min}^2 = 2 - \frac{2C}{1 + 2C} (1 - e^{-2r}) \simeq 1 + e^{-2r} \quad (C \gg 1) \quad (6.31)$$

Les réductions de bruit obtenues sont représentées sur la figure 6.2. On peut alors distinguer deux régimes (en supposant $C \gg 1$) :

- si le taux de pompage optique effectif Γ est grand devant le taux de collisions d'échange vu du métastable γ_m , alors la réduction de bruit du champ est transférée aux métastables, les fondamentaux restant dans un état cohérent

$$\Delta S_{min}^2 \simeq e^{-2r} \quad \text{et} \quad \Delta I_{min}^2 \simeq 1$$

- si au contraire $\Gamma \ll \gamma_m$, la réduction de bruit est transférée entièrement aux fondamentaux, les métastables étant cette fois dans un état cohérent

$$\Delta S_{min}^2 \simeq 1 \quad \text{et} \quad \Delta I_{min}^2 \simeq e^{-2r}$$

On a tracé sur la figure 6.2 ces variances normalisées en fonction du paramètre de pompage effectif Γ , pour des valeurs typiques des paramètres d'interaction (voir paragraphe suivant). On constate en particulier que lorsque l'on a égalité entre le taux de pompage effectif Γ et le taux de collisions d'échange vu du métastable γ_m , alors la réduction de

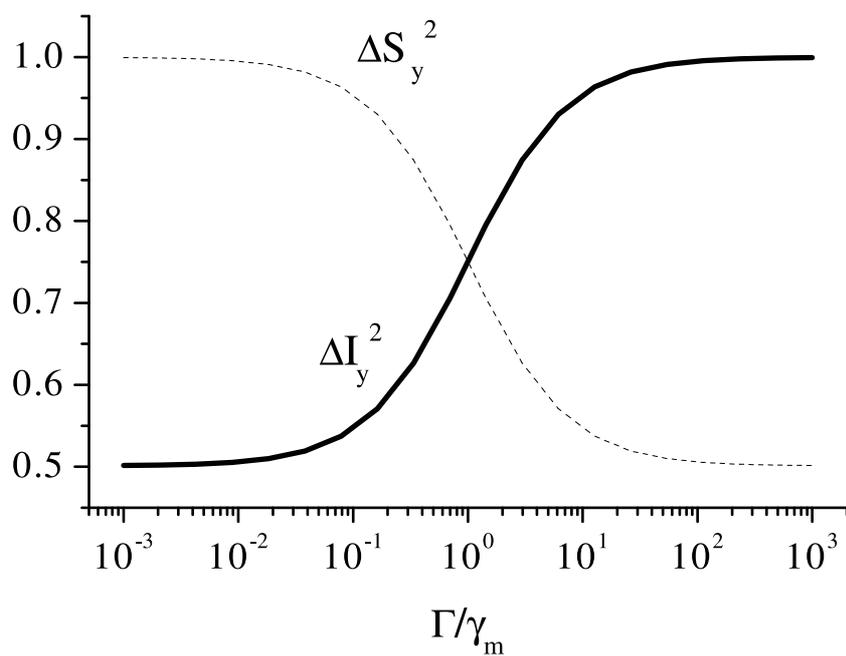


FIG. 6.2 – Variances (normalisées) des composantes comprimées dans le fondamental et dans le métastable en fonction du taux de pompage optique effectif Γ/γ_m . Paramètres : $C = 250$, $\kappa = 100\gamma$, $\Delta = -2000\gamma$, $\gamma = 2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_m = 5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. Le champ incident est comprimé de 3dB : $e^{-2r} = 0.5$.

bruit est transférée pour moitié aux métastables et pour moitié aux fondamentaux. En effet, les corrélations entre photons sont transférées aux métastables en un temps Γ^{-1} en moyenne. Ces corrélations dans le métastable sont elles-mêmes transférées dans le fondamental dans un temps γ_m^{-1} . Le processus d'échange se comprend alors aisément : quand le taux de pompage optique effectif est grand devant le taux de collisions γ_m , les photons transfèrent leurs corrélations aux métastables et ces corrélations entre les métastables sont renouvelées trop rapidement pour pouvoir être transférées aux fondamentaux, qui restent incorrélés. En revanche, quand le taux de pompage optique effectif est faible devant le taux de collisions vu du métastable, les corrélations entre les photons transitent par le métastable dans le fondamental. De manière similaire au cas des atomes froids on peut définir des efficacités de transfert pour le fondamental et pour le métastable

$$\eta_I = \frac{2C}{1+2C} \frac{\gamma_m}{\gamma_m + \Gamma} \quad \text{et} \quad \eta_S = \frac{2C}{1+2C} \frac{\Gamma}{\gamma_m + \Gamma} \quad (6.32)$$

et on retrouve les conclusions énoncées ci-dessus.

A.2.4 Interprétation

Le résultat final peut paraître surprenant à première vue dans le régime pour lequel le fondamental est comprimé : en effet, on parvient à comprimer les fluctuations d'un grand nombre de spins (les fondamentaux) à partir d'un ensemble qui compte un million de fois moins de spins (les métastables). On peut donner une interprétation de ce transfert en analysant ce qui se produit pour les fonctions de corrélations à deux spins dans chaque ensemble. Dans les expériences de pompage optique habituelles, les collisions d'échange conservent les observables à un corps. En effet, comme elles conservent les spins nucléaires, le fait d'orienter le niveau métastable crée dans le niveau fondamental une orientation qui serait identique à celle du métastable en l'absence de tout processus de relaxation.

La situation est différente dans notre cas, en ce sens qu'une réduction de bruit d'un spin collectif correspond à donner une valeur négative à la fonction de corrélation à deux spins. Les collisions d'échange ont pour effet, non pas d'égaliser les compressions de bruit dans les deux ensembles, mais d'égaliser les valeurs des fonctions de corrélation à deux spins. On peut montrer à l'aide des expressions exactes (6.24-6.25) que, dans la limite $\Gamma \leq \gamma_f$, l'échange de métastabilité est le processus dominant et c'est le fondamental qui est comprimé. Les fonctions de corrélation sont égales à

$$\overline{\langle I_y^{(i)} I_y^{(j)} \rangle} \simeq -\frac{1 - e^{-2r}}{4(N+n)} \simeq \overline{\langle S_y^{(i)} S_y^{(j)} \rangle} \quad (6.33)$$

Si $e^{-2r} \ll 1$, La fonction de corrélation du fondamental c_f est proche de sa valeur maximale (en valeur absolue) $|c_f| \simeq 1/4N$; le fondamental est alors parfaitement comprimé.

Par contre, pour le métastable, la valeur de la fonction de corrélation est la même, donc bien inférieure à la valeur nécessaire ($\sim 1/4n$) pour que des corrélations existent entre les spins individuels.

Une autre manière de démontrer ce résultat est de considérer une situation dans laquelle il n'y a pas de couplage avec les champs mais il existe initialement des corrélations maximales entre les spins du fondamental : $c_f \simeq -1/4N$. En présence de collisions d'échange, on peut montrer à l'aide de (6.24) avec $\Gamma = 0$, que la fonction de corrélation à deux spins dans le métastable vaut également $c_m \simeq -1/4N$. Les métastables sont donc très peu comprimés.

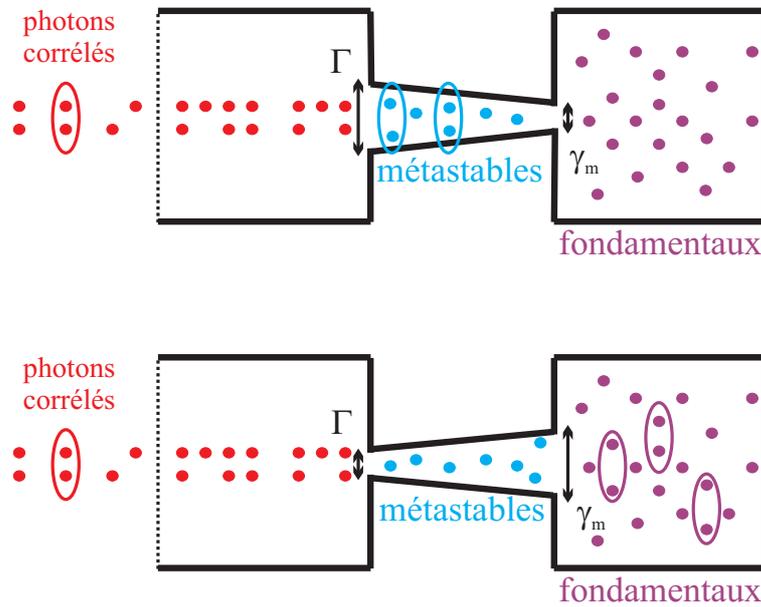


FIG. 6.3 – Représentation imagée en termes de “réservoirs” : un flux continu de photons corrélés arrive dans la cavité optique, où ils transfèrent leurs corrélations aux métastables, corrélations qui sont ensuite échangées avec les fondamentaux. Les taux Γ et γ_m jouent le rôle de “robinets”.

La contrainte sur la fonction de corrélation pour générer de la réduction de bruit est effectivement plus faible pour un ensemble avec un grand nombre de spins. Dans le cas où les collisions d'échange pour le fondamental dominant ($\Gamma \leq \gamma_f$), il est naturel que les corrélations soient égales dans le fondamental et dans le métastable. Bien que les corrélations “transitent” en permanence par les métastables, il n'y a pas de réduction de bruit dans le métastable dans ce régime (Fig. 6.3). Toutefois, on peut remarquer que le prix à payer est que le temps nécessaire pour établir des corrélations entre les spins dans le fondamental est augmenté dans le rapport du nombre de spins dans chaque ensemble.

En effet, si l'on se place dans le régime dans lequel on comprime les fluctuations du spin dans le fondamental, le temps d'écriture de la mémoire est donné par l'inverse de la largeur du spectre Γ_I . Pour $\Gamma \sim 0.1\gamma_m$, ce temps vaut environ $\Gamma_I^{-1} \sim \frac{N}{n}\Gamma^{-1} \simeq 2s$.

A.3 Discussion et faisabilité expérimentale

Pour comparer les résultats de ce modèle simple avec un schéma expérimental réaliste pour l' ^3He , un modèle plus détaillé a été développé dans l'équipe "Hélium polarisé et fluides quantiques" par Alice Sinatra et Gaël Reinaudi [Dantan05d]. La transition utilisée pour comprimer les fluctuations atomiques est la transition C_9 à $1.08 \mu\text{m}$, qui couple le triplet métastable 2^3S_1 à l'état excité 2^3P_0 qui est le niveau de plus grande énergie de la multiplicité 2^3P . Comme on l'a représenté sur la figure 6.4, le métastable possède deux niveaux hyperfins $F = 1/2$ et $F = 3/2$. Le système est initialement préparé par pompage optique dans un état totalement polarisé $\langle I_{00} \rangle = N$, $\langle S_{44} \rangle = n$, et il n'y a aucun atome dans le sous-niveau hyperfin $F = 1/2$. On prépare donc les spins du fondamental et du niveau métastable $F = 3/2$ dans un état cohérent selon z . Pour comprimer les fluctuations de la cohérence $\rho_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$, on interagit alors avec deux champs copropageant : un champ de contrôle Ω de polarisation π et un vide comprimé A de polarisation σ . Seule la composante σ_- intervient en fait dans cette interaction, et on peut ignorer l'autre composante. La situation est alors très similaire à celle étudiée dans le modèle simple. On peut alors coupler les fluctuations comprimées du champ à celles de la cohérence dans le métastable, elles-mêmes couplées à celles de la cohérence dans le fondamental. En choisissant le champ magnétique B et la différence de fréquence $\omega_1 - \omega_2$ de façon à satisfaire les conditions de résonance (6.16) et (6.17) énoncées dans la première partie, le modèle exact donne, en faisant les mêmes approximations adiabatiques, des expressions ne différant de celles obtenues dans le modèle simple (6.29-6.30), que par un facteur algébrique pour le taux de pompage optique effectif, qui est égal à

$$\Gamma = 3(1 + 2C)\Gamma_R \quad (6.34)$$

Sur la figure 6.5, sont représentés les résultats analytiques du modèle simple et les résultats numériques du modèle complet, qui tient compte de la durée de vie finie des métastables et ne fait pas d'approximation adiabatique. Nous avons pris comme paramètres d'interaction une pression de 1 torr dans une cellule de 50 cm^3 à 300K, ce qui correspond à une densité de métastables de 3.2×10^{10} atomes par cm^3 et à un rapport $n/N = 10^{-6}$ ($N = 1.6 \times 10^{18}$ et $n = 1.6 \times 10^{12}$). Dans ces conditions, le taux de relaxation de la cohérence optique est élargi par les collisions avec les fondamentaux de 5 MHz à 20 MHz ($\gamma = 2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$). Le taux de collisions d'échange de métastabilité

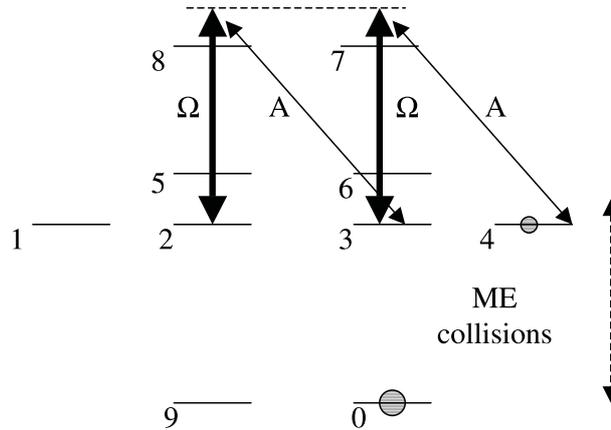


FIG. 6.4 – *Modèle réaliste pour la transition C_9 à $1.08 \mu\text{m}$: le métastable possède une structure hyperfine $F = 1/2$ et $F = 3/2$, le champ de contrôle possède une polarisation π , le vide comprimé une polarisation σ (seule la composante σ_- joue un rôle ici).*

vu du métastable vaut alors $\gamma_m = 5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. La durée de vie finie des métastables vient du fait que ceux-ci heurtent les parois de la cellule et retombent dans leur état fondamental. Ce processus qui supprime le métastable relaxe donc la cohérence du métastable avec un taux γ_0 , inversement proportionnel à la pression dans la cellule (phénomène de diffusion), et vaut environ $\gamma_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}$ à 1 torr.

On constate globalement un excellent accord entre les deux modèles. Il existe néanmoins deux différences entre le modèle simple et le modèle complet qui prend en compte la durée de vie finie du métastable. La première, qui se produit pour de forts taux de pompage ($\Gamma \gg \gamma_m$), est due au fait que l'élimination adiabatique du champ et de la cohérence optique n'est plus valable. On a alors comme dans le cas d'une mémoire à atomes froids un excès de bruit dû à l'émission spontanée.

On observe une seconde différence qui se produit pour des valeurs de $\Gamma \sim \gamma_0$. Cette déviation est due à la durée de vie finie du métastable. Cet effet, prédit pour les atomes froids, se produit lorsque le taux de pompage effectif est de l'ordre ou inférieur à la durée de vie, le transfert de la compression de bruit ne s'effectuant alors plus entre le champ et le métastable. La réduction de bruit dans le fondamental est optimale pour un taux de pompage $\gamma_0 \ll \Gamma \ll \gamma_m$. On peut même, en incluant dans le modèle simple un taux de relaxation γ_0 dans le métastable, montrer que le transfert est optimal lorsque le taux de pompage effectif est égal à la moyenne géométrique des taux de relaxation et d'échange : $\Gamma \sim \sqrt{\gamma_0 \gamma_m}$. En effet, l'équation pour les fluctuations de la composante

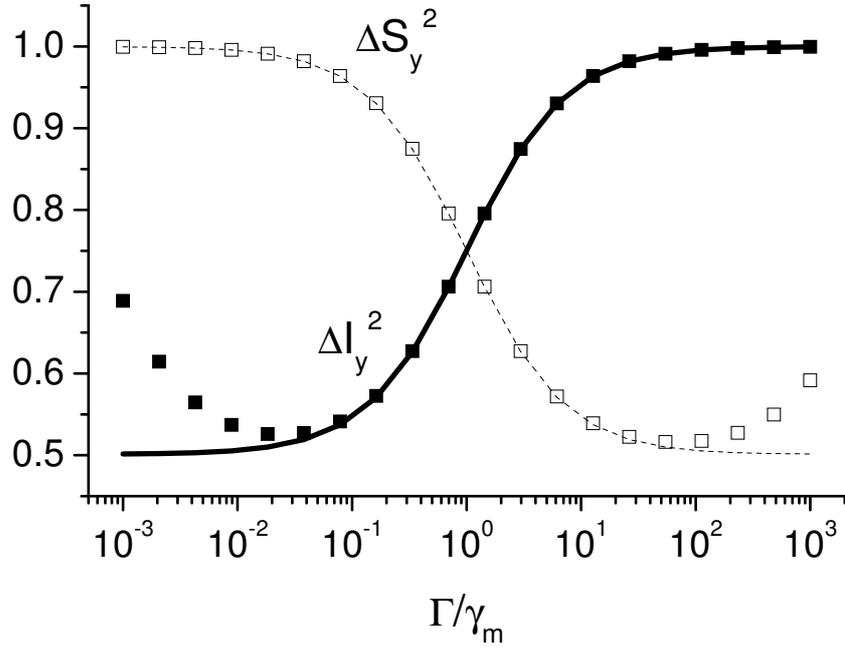


FIG. 6.5 – Variances (normalisées) des composantes comprimées dans le fondamental et dans le métastable en fonction du taux de pompage optique effectif Γ/γ_m . Les traits plein et pointillé indiquent les résultats du modèle analytique, alors que les carrés donnent les résultats du modèle complet. Paramètres : $e^{-2r} = 0.5$, $C = 250$, $\kappa = 100\gamma$, $\Delta = -2000\gamma$, $\gamma = 2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_m = 5 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}$.

I_y en Fourier devient

$$\left[\frac{\gamma_f(\Gamma + \gamma_0)}{\gamma_m + \Gamma + \gamma_0} - i\omega \right] \delta I_y(\omega) = -\frac{\gamma_m \beta}{\gamma_m + \Gamma + \gamma_0} \delta X^{in} + \frac{\gamma_m}{\gamma_m + \Gamma + \gamma_0} f_{y0} + \frac{\Gamma + \gamma_0}{\gamma_m + \Gamma + \gamma_0} f_{I_y} + \frac{\gamma_m}{\gamma_m + \Gamma + \gamma_0} \frac{\Omega}{\Delta} F_y \quad (6.35)$$

où f_{y0} est la force de Langevin associée à la relaxation dans le métastable. Le spectre de bruit est naturellement élargi, sa largeur valant $\Gamma_I = \gamma_f(\gamma_0 + \Gamma)/(\gamma_f + \Gamma + \gamma_0)$. La réduction de bruit est transférée dans le fondamental avec une efficacité égale à

$$\eta_I = \frac{2C}{1 + 2C} \frac{\gamma_m}{\gamma_m + \Gamma + \gamma_0} \frac{\Gamma}{\Gamma + \gamma_0} \quad (6.36)$$

Lorsque $\gamma_0 \ll \Gamma \ll \gamma_m$, on retrouve (6.32). Dans les conditions ci-dessus, cela donne une efficacité de transfert quantique d'environ 90%.

D'un point de vue expérimental, les conditions sur les désaccords sont très strictes : en effet, on sait d'après le chapitre 4 que la condition de résonance dans le métastable implique que le transfert se dégrade dès lors que $\tilde{\delta} \sim \Gamma$. Cette condition peut être satisfaite relativement aisément. La condition dans le fondamental est par contre beaucoup plus stricte, puisque le transfert se dégrade pour $\delta_I \sim \Gamma_I$. Dans les conditions étudiées, cela implique que le temps de cohérence des lasers soit de l'ordre de la seconde. Physiquement, il est clair que la phase du champ de contrôle par exemple doit être stable pendant toute la phase d'écriture, puisque la quadrature comprimée dépend directement de la phase du champ de contrôle³.

De même, la champ magnétique doit être contrôlé très précisément afin de d'éviter toute variation dans les vitesses de rotation des deux spins. En effet, pour que le transfert des fluctuations s'effectuent efficacement, les deux oscillateurs harmoniques, dont les fréquences propres dépendent du champ magnétique et qui sont excités à la fréquence $\omega_1 - \omega_2$ dans le référentiel du laboratoire, doivent rester en phase. Si les inhomogénéités du champ magnétique sont telles qu'un déphasage se produit, une quadrature du fondamental verra tour à tour des quadratures différentes du métastable, la moyenne résultant en un excès de bruit. Les simulations numériques effectuées par Alice Sinatra et Gaël Reinaudi montrent qu'une homogénéité de 100 ppm est suffisante pour assurer un transfert efficace [Dantan05d]. A titre d'exemple, pour un taux de pompage effectif $\Gamma = 0.1\gamma_m$, un champ magnétique longitudinal de 57 mG fait précesser le fondamental à $\omega_I = 184$ Hz et correspond à un temps d'écriture de 2 secondes.

³En effet, β dépend de Ω [Eq. (6.13)]. On a supposé Ω réelle, de sorte que si A^{in} est comprimé en amplitude, les composantes comprimées sont S_y et J_y .

Pour diminuer les contraintes expérimentales, on peut penser à augmenter le champ magnétique directeur, auquel cas on s'éloigne de la zone très basse fréquence et on diminue les conditions sur l'inhomogénéité. Toutefois, si on augmente trop le champ magnétique directeur, la cohérence dans le métastable finit par évoluer à une fréquence trop rapide pour que le transfert s'effectue efficacement. Une autre solution consisterait à augmenter la proportion de métastables de telle sorte que les fondamentaux effectuent plus de collisions d'échange, ce qui raccourcirait le temps d'écriture. Toutefois, si on augmente l'intensité de la décharge, la densité de métastables créés finit par saturer en raison des collisions de Penning⁴.

Enfin, un dernier point concerne la possibilité de lire la réduction de bruit inscrite dans le fondamental. Il est possible là encore d'utiliser les techniques développées pour les atomes froids. En effet, l'arrêt soudain des champs et de la décharge laisse les fondamentaux comprimés. Etant donnée la robustesse du spin nucléaire, les corrélations créées entre les atomes survivent pendant un temps très long, de l'ordre de quelques heures. On peut alors lire l'état du spin dans le fondamental en réappliquant la décharge à un instant ultérieur (qui recrée très rapidement des métastables) et le champ de contrôle. Pendant cette phase de lecture les fondamentaux transfèrent lentement leurs corrélations aux métastables par échange de métastabilité, corrélations qui sont ensuite transmises au champ intracavité en présence du champ de contrôle. Ces corrélations se reflètent alors dans le champ sortant de la cavité. En appliquant la même méthode que dans le paragraphe B.7 du chapitre 4, on peut exprimer la fonction de corrélation à deux temps du champ sortant sous une forme analogue à (6.91)

$$\mathcal{C}(t, t') = \langle \delta X^{out}(t) \delta X^{out}(t') \rangle = \delta(t - t') - 2\Gamma_I \eta_I [1 - \Delta I_y^2 / (N/4)] e^{-2\Gamma_I(t+t')} \quad (6.37)$$

La constante de temps intervenant dans cette expression étant Γ_I^{-1} , cela implique que le temps de lecture est le même que le temps d'écriture (pour un champ de contrôle possédant la même intensité à la lecture qu'à l'écriture).

A.4 Conclusion

Nous avons donc montré qu'il est en principe possible d'utiliser les collisions d'échange de métastabilité dans l'³He pour transférer des fluctuations quantiques entre des champs et un spin nucléaire macroscopique. Les temps de stockage potentiels liés à la robustesse du spin nucléaire fait de l'³He un excellent candidat pour réaliser une mémoire quantique. Les calculs effectués dans le cadre d'un schéma réaliste, basé sur la transition à 1.08 μm déjà utilisée au laboratoire pour polariser l'³He, semblent montrer qu'une implémentation expérimentale serait possible avec les techniques existantes. Cependant,

⁴Lors d'une telle collision deux métastables donnent un ion et un fondamental (plus un électron).

en raison de la faible densité relative d'atomes métastables par rapport aux fondamentaux principalement, les contraintes expérimentales (stabilité et jitter des lasers, environnement magnétique, vide comprimé basse fréquence, etc.) à satisfaire sont assez sévères. Le développement de sources d'états comprimés à très basses fréquences pour les interféromètres est cependant prometteur [McKenzie04]. On peut remarquer qu'avec un temps d'accès τ_e de l'ordre de la seconde (pour les densités de métastables atteintes actuellement) et un temps de stockage τ_s de l'ordre de l'heure, la figure de mérite ($\tau_e/\tau_s \sim 10^{-3}$) d'une telle mémoire est comparable à ce que prédisent les calculs pour une mémoire quantique à atomes froids ($\tau_e \sim 10^{-6}$ s, $\tau_s \sim 10^{-3}$ s).

Au delà de l'aspect information quantique, la possibilité de stocker des états non classiques pendant des temps aussi longs est intéressante d'un point de vue fondamentale. De plus, l'utilisation de techniques de résonance magnétique nucléaire pourrait ouvrir de nouvelles possibilités de manipulation ou de mesure des états stockés. Signalons pour finir que l'utilisation de spins nucléaires pour réaliser des mémoires quantiques avec un long temps de stockage a été récemment proposée par Taylor *et al.*, mais dans un régime très différent de celui présenté dans ce chapitre : une cohérence d'un spin électronique mésoscopique est transférée au noyau par des techniques de résonance magnétique nucléaire [Taylor03].

B Transfert quantique entre champs et oscillateurs mécaniques

B.1 Introduction

L'étude des bruits thermique et quantique dans les miroirs, commencée dans les années 90, a été en grande part motivée par l'amélioration de la sensibilité des interféromètres gravitationnels [Saulson90, Abramovici92, Braginsky93]. En effet, un miroir mobile placé dans une cavité optique se comporte comme un résonateur mécanique que l'on peut coupler à la lumière lorsque l'on se place au voisinage d'une fréquence de résonance. Le but de cette section n'est bien entendu pas de détailler l'étude de tous les bruits intervenant lors de l'interaction entre des champs et des miroirs mobiles. Nous nous intéressons aux fluctuations quantiques des miroirs lorsqu'ils interagissent en cavité avec des champs comprimés, l'objectif de cette section étant de souligner le parallèle qui existe avec les atomes et d'étudier l'application des idées de transfert de fluctuations quantiques développées pour les ensembles atomiques. Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit d'un travail effectué en collaboration avec David Vitali de l'université de Camerino en Italie et avec l'équipe "Mesure et bruits fondamentaux" du laboratoire Kastler Brossel. Nous montrons qu'il est possible de transférer

les fluctuations quantiques de champs comprimés à la position relative et à l'impulsion du centre de masse de deux miroirs mobiles dans une double-cavité, ce qui constitue une réalisation du paradoxe EPR pour des oscillateurs mécaniques [Pinard05].

B.2 Système considéré

Dans cette section, nous montrons comment, à l'aide de deux champs comprimés, il est possible d'intriquer quantiquement deux miroirs mobiles formant une double cavité (voir Fig. 6.6). Nous allons appliquer les idées développées dans le cadre du transfert d'états quantiques entre la lumière et les atomes au cas d'oscillateurs mécaniques, en supposant que ceux-ci sont déjà proches de leur état fondamental. Le système considéré

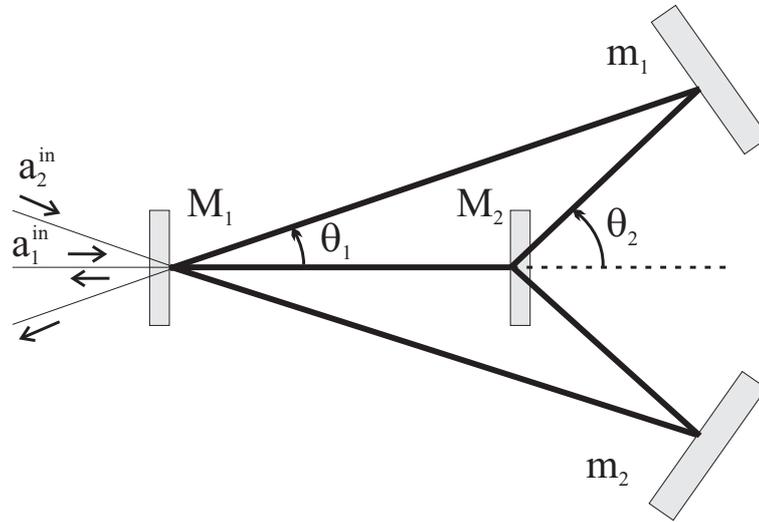


FIG. 6.6 – Double cavité : une cavité linéaire est composée des deux miroirs mobiles M_1 et M_2 , dans laquelle on injecte le champ a_1^{in} . Une seconde cavité, repliée, est constituée par les deux miroirs mobiles et deux miroirs fixes m_1 , m_2 - qui ne possèdent pas de résonance dans la plage de fréquence considérée. On injecte dans cette cavité repliée le champ a_2^{in} .

est le suivant : les deux miroirs M_1 et M_2 , s'apparentent à deux oscillateurs mécaniques de fréquences de résonance Ω_i , de masses M_i et de facteurs de qualité Q_i ($i = 1, 2$). Le mouvement d'un miroir correspond généralement à la superposition de nombreux modes vibrationnels acoustiques. On s'attache ici à la description du mouvement du miroir au voisinage d'une résonance, ce qui permet de se restreindre à un seul mode de vibration. Les deux miroirs mobiles constituent une première cavité linéaire dans laquelle est injecté un champ a_1^{in} , et une cavité repliée, formée des miroirs M_1 , M_2 , m_1 et m_2 dans laquelle on injecte un champ a_2^{in} . Chacun des champs résulte de la super-

position d'un champ moyen cohérent et d'un vide comprimé. Le miroir M_1 possède un coefficient de transmission en intensité T , les miroirs M_2 , m_1 et m_2 sont parfaitement réfléchissants. Nous allons voir que l'avantage de cette double cavité est que l'on peut agir grâce à la pression de radiation à la fois sur le mouvement relatif des miroirs et sur leur mouvement absolu.

L'hamiltonien du système miroirs/champs est la somme de quatre termes : l'énergie mécanique des miroirs, l'hamiltonien des champs et les hamiltoniens de couplage des miroirs avec les champs dans les deux cavités

$$H = H_m + H_{ch} + H_1 + H_2 \quad (6.38)$$

L'énergie mécanique du système est donnée par la somme des énergies cinétique et potentielle de chaque miroir

$$H_m = \frac{P_1^2}{2M_1} + \frac{P_2^2}{2M_2} + \frac{1}{2}M_1\Omega_1^2Q_1^2 + \frac{1}{2}M_2\Omega_2^2Q_2^2 \quad (6.39)$$

On introduit les variables Q_{cm} , P_{cm} décrivant le mouvement dans le centre de masse et les variables Q_r , P_r associées au mouvement relatif des miroirs

$$Q_{cm} = \frac{M_1}{M_T}Q_1 + \frac{M_2}{M_T}Q_2 \quad P_{cm} = P_1 + P_2 \quad (6.40)$$

$$Q_r = Q_1 - Q_2 \quad \frac{P_r}{\mu} = \frac{P_1}{M_1} - \frac{P_2}{M_2} \quad (6.41)$$

où M_T et μ sont respectivement la masse totale et la masse réduite du système

$$M_T = M_1 + M_2 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} \quad (6.42)$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$H = \frac{P_{cm}^2}{2M_T} + \frac{P_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}M_T\Omega_{cm}^2Q_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\Omega_r^2Q_r^2 + \mu(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)Q_{cm}Q_r \quad (6.43)$$

où Ω_{cm} et Ω_r sont les fréquences propres du mouvement du centre de masse et du mouvement relatif

$$\Omega_{cm}^2 = \frac{M_1}{M_T}\Omega_1^2 + \frac{M_2}{M_T}\Omega_2^2 \quad \text{et} \quad \Omega_r^2 = \frac{M_2}{M_T}\Omega_1^2 + \frac{M_1}{M_T}\Omega_2^2 \quad (6.44)$$

On voit que, lorsque les fréquences de résonance des deux miroirs soient égales ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$), les mouvements relatif Q_r et du centre de masse Q_{cm} sont découplés et correspondent à ceux d'oscillateurs harmoniques de fréquences propres Ω_{cm} et Ω_r égales

$$\Omega_{cm} = \Omega_r = \Omega \quad (6.45)$$

Nous supposons cette condition satisfaite dans toute la suite. D'autre part, l'hamiltonien des champs s'écrit

$$H_{ch} = \hbar\omega_{c1}(a_1^\dagger a_1 + 1/2) + \hbar\omega_{c2}(a_2^\dagger a_2 + 1/2) + i\hbar\sqrt{2}(a_1^{in}e^{-i\omega_1 t} + a_2^{in}e^{-i\omega_2 t} + h.c.) \quad (6.46)$$

où ω_{c1} et ω_{c2} désignent les fréquences du mode de la cavité, ω_1 et ω_2 les fréquences laser. Les hamiltoniens de couplage champs/miroirs pour les cavités 1 et 2 sont égaux à

$$H_1 = \frac{\hbar\omega_{c1}}{L_1} a_1^\dagger a_1 (Q_1 - Q_2) \quad (6.47)$$

$$H_2 = \frac{\hbar\omega_{c2}}{L_2} a_2^\dagger a_2 (Q_1 \cos \theta_1 + Q_2 \cos \theta_2) \quad (6.48)$$

où les angles θ_1 et θ_2 sont définis sur la figure 6.6 et L_j est la longueur à l'équilibre de la cavité j . Les forces exercées par la pression de radiation du champ a_1 sur les miroirs M_1 et M_2 ont des signes opposés : H_1 décrit donc le couplage entre le champ a_1 et $Q_1 - Q_2$, qui est relié à l'opérateur quantique position relative $x_r = (b_r + b_r^\dagger)/\sqrt{2}$ par

$$Q_r = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\Omega_r}} x_r \quad \text{avec} \quad b_r = \frac{\mu\Omega_r Q_r + iP_r}{\sqrt{2\hbar\mu\Omega_r}} = \frac{x_r + ip_r}{\sqrt{2}} \quad (6.49)$$

On peut réécrire H_1 sous la forme

$$H_1 = \frac{\hbar\omega_{c1}}{L_1} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\Omega_r}} a_1^\dagger a_1 (b_r + b_r^\dagger) \quad (6.50)$$

Les opérateurs b_r et b_r^\dagger satisfont à $[b_r, b_r^\dagger] = 1$, et, par conséquent, $[x_r, p_r] = i$. En ce qui concerne la seconde cavité, il est possible en choisissant convenablement les masses des miroirs de ne faire intervenir dans H_2 que le mouvement absolu des miroirs. En utilisant le fait que $Q_1 = Q_{cm} + \frac{M_2}{M_T} Q_r$ et $Q_2 = Q_{cm} - \frac{M_1}{M_T} Q_r$, on peut réécrire H_2 sous la forme

$$H_2 = \frac{\hbar\omega_{c2}}{L_2} a_2^\dagger a_2 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) Q_{cm} + \frac{\hbar\omega_{c2}}{L_2} a_2^\dagger a_2 \left(-\frac{M_1}{M_T} \cos \theta_2 + \frac{M_2}{M_T} \cos \theta_1 \right) Q_r \quad (6.51)$$

Les forces de pression de radiation dues au champ a_2 ont cette fois le même signe. Dans le cas général, H_2 couple à la fois le mouvement relatif et le mouvement du centre de masse. Toutefois, si l'on impose que les masses des miroirs vérifient la condition

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \quad (6.52)$$

alors le dernier terme disparaît du second membre de (6.51) : le champ a_2 n'est couplé qu'au mouvement du centre de masse des miroirs. En définissant $x_{cm} = (b_{cm} + b_{cm}^\dagger)/\sqrt{2}$ par

$$Q_{cm} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M_T\Omega_{cm}}}x_{cm} \quad \text{avec} \quad b_{cm} = \frac{M_T\Omega_{cm}Q_{cm} + iP_{cm}}{\sqrt{2\hbar M_T\Omega_{cm}}} = \frac{x_{cm} + ip_{cm}}{\sqrt{2}} \quad (6.53)$$

on obtient que H_2 s'écrit simplement sous la forme

$$H_2 = \frac{\hbar\omega_{c2}}{L_2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M_T\Omega_{cm}}} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) a_2^\dagger a_2 (b_{cm} + b_{cm}^\dagger) \quad (6.54)$$

En introduisant les constantes de couplage optomécanique

$$G_1 = \frac{\hbar\omega_{c1}}{L_1} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\Omega_r}} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{\hbar\omega_{c2}}{L_2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M_T\Omega_{cm}}} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad (6.55)$$

les hamiltoniens d'interaction s'écrivent finalement

$$H_1 + H_2 = \hbar G_1 a_1^\dagger a_1 (b_r + b_r^\dagger) + \hbar G_2 a_2^\dagger a_2 (b_{cm} + b_{cm}^\dagger) \quad (6.56)$$

En se plaçant dans le référentiel tournant associé à la fréquence des lasers, l'évolution des observables est alors donnée par les équations d'Heisenberg-Langevin suivantes

$$\dot{a}_1 = -(\kappa_1 + i\Delta_1)a_1 - iG_1 a_1 (b_r + b_r^\dagger) + \sqrt{2\kappa_1} a_1^{in} \quad (6.57)$$

$$\dot{a}_2 = -(\kappa_2 + i\Delta_2)a_2 - iG_2 a_2 (b_{cm} + b_{cm}^\dagger) + \sqrt{2\kappa_2} a_2^{in} \quad (6.58)$$

$$\dot{b}_r = -(\Gamma/2 + i\Omega)b_r + (\Gamma/2)b_r^\dagger - iG_1 a_1^\dagger a_1 + \xi_r \quad (6.59)$$

$$\dot{b}_{cm} = -(\Gamma/2 + i\Omega)b_{cm} + (\Gamma/2)b_{cm}^\dagger - iG_2 a_2^\dagger a_2 + \xi_{cm} \quad (6.60)$$

les κ_j désignant les bandes passantes des cavités, les $\Delta_j = \omega_{cj} - \omega_j$ les désaccords de la cavité, Γ le taux de relaxation des deux miroirs. De nouveau, afin de simplifier le problème, on a supposé égaux les taux de relaxation des deux miroirs (c'est-à-dire qu'ils possèdent le même facteur de qualité $Q = \Omega/\Gamma$). Si ce n'est pas le cas, les mouvements relatif et absolu peuvent être couplés par les processus de dissipation⁵. Les forces de Langevin ξ_r et ξ_{cm} sont associées au mouvement brownien des miroirs. Elles sont de

⁵La vitesse du miroir i est freinée avec un taux d'amortissement Γ_i : $\dot{P}_i = -\Gamma_i P_i$. Lorsque $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, les taux de relaxation pour l'impulsion du centre de masse et du mouvement relatif sont également égaux à Γ : $\Gamma_r = \Gamma_{cm} = \Gamma$.

valeur moyenne nulle et δ -corrélées⁶

$$\langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = \langle \xi_i^\dagger(t) \xi_i^\dagger(t') \rangle = 0 \quad (6.61)$$

$$\langle \xi_i^\dagger(t) \xi_i(t') \rangle = \Gamma n_T \delta(t - t') \quad (6.62)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_i^\dagger(t') \rangle = \Gamma(1 + n_T) \delta(t - t') \quad (6.63)$$

où $n_T = 1/(e^{\hbar\Omega/k_B T} - 1)$ est le nombre moyen de phonons thermiques à la température T . L'interprétation physique de (6.57-6.60) est alors claire : le mode a_1 est couplé au mouvement relatif des deux miroirs, alors que M_2 est couplé au mouvement du centre de masse. Cette simplification permet un parallèle intéressant avec le chapitre 5 et l'intrication d'ensembles atomiques identiques : on dispose d'un couplage linéaire entre deux champs en cavité et deux oscillateurs harmoniques qui permet le transfert des fluctuations quantiques des champs aux oscillateurs.

B.3 Etat stationnaire et linéarisation

Les valeurs moyennes à l'état stationnaire sont données par

$$E_1 = \langle a_1 \rangle = \frac{\sqrt{2\kappa} E_1^{in}}{\kappa + i\Delta'_1}, \quad \Delta'_1 = \Delta_1 + G_1 \langle b_r + b_r^\dagger \rangle, \quad \langle b_r \rangle = \frac{-G_1 |E_1|^2}{\Omega} \quad (6.64)$$

$$E_2 = \langle a_2 \rangle = \frac{\sqrt{2\kappa} E_2^{in}}{\kappa + i\Delta'_2}, \quad \Delta'_2 = \Delta_2 + G_2 \langle b_{cm} + b_{cm}^\dagger \rangle, \quad \langle b_{cm} \rangle = \frac{-G_2 |E_2|^2}{\Omega} \quad (6.65)$$

La linéarisation du système autour cet état stationnaire donne

$$\delta \dot{a}_1 = -(\kappa_1 + i\Delta'_1) \delta a_1 - iG_1 E_1 (\delta b_r + \delta b_r^\dagger) + \sqrt{2\kappa} \delta a_1^{in} \quad (6.66)$$

$$\delta \dot{a}_2 = -(\kappa_2 + i\Delta'_2) \delta a_2 - iG_2 E_2 (\delta b_{cm} + \delta b_{cm}^\dagger) + \sqrt{2\kappa} \delta a_2^{in} \quad (6.67)$$

$$\delta \dot{b}_r = -(\Gamma/2 + i\Omega) \delta b_r + (\Gamma/2) b_r^\dagger - iG_1 (E_1^* \delta a_1 + E_1 \delta a_1^\dagger) + \xi_r \quad (6.68)$$

$$\delta \dot{b}_{cm} = -(\Gamma/2 + i\Omega) \delta b_{cm} + (\Gamma/2) b_{cm}^\dagger - iG_2 (E_2^* \delta a_2 + E_2 \delta a_2^\dagger) + \xi_{cm} \quad (6.69)$$

Il est toujours possible de choisir les paramètres de telle sorte que les désaccords effectifs vus par les deux champs soient égaux à la fréquence de résonance des miroirs

$$\Delta'_1 = \Delta'_2 = \Omega \quad (6.70)$$

Nous nous plaçons dans cette situation pour simplifier la discussion. On peut montrer que l'on est alors dans une situation de transfert optimal pour les variables quantiques.

⁶Ce résultat n'est en toute rigueur pas valable à température nulle, l'hypothèse markovienne n'étant plus vérifiée. On suppose donc que le nombre de phonons thermiques est non négligeable à la température considérée [Giovannetti01, Zhang03b]. D'un point de vue pratique, le formalisme est alors très proche que nous avons utilisé pour les atomes, ce qui facilite la comparaison.

En effet, la condition de “résonance” (6.70) s’interprète de manière très simple à la lumière des résultats précédents pour des oscillateurs harmoniques atomiques : afin que le transfert quantique s’effectue bien entre les oscillateurs mécaniques et les champs, il faut que les fluctuations de tous les oscillateurs harmoniques évoluent à la même vitesse Ω .

Nous allons également choisir cette fréquence commune grande devant la bande passante de la cavité ($\Omega \gg \kappa_j$). On peut alors se placer dans le référentiel tournant associé à Ω et négliger les termes oscillant rapidement. On obtient alors

$$\delta\dot{\tilde{a}}_1 = -\kappa_1\delta\tilde{a}_1 - G_1|E_1|\delta\tilde{b}_r + \sqrt{2\kappa}\delta\tilde{a}_1^{in} \quad (6.71)$$

$$\delta\dot{\tilde{a}}_2 = -\kappa_2\delta\tilde{a}_2 - G_2|E_2|\delta\tilde{b}_{cm} + \sqrt{2\kappa}\delta\tilde{a}_2^{in} \quad (6.72)$$

$$\delta\dot{\tilde{b}}_r = -(\Gamma/2)\delta\tilde{b}_r + G_1|E_1|\delta\tilde{a}_1 + \tilde{\xi}_r \quad (6.73)$$

$$\delta\dot{\tilde{b}}_{cm} = -(\Gamma/2)\delta\tilde{b}_{cm} + G_2|E_2|\delta\tilde{a}_2 + \tilde{\xi}_{cm} \quad (6.74)$$

où les grandeurs dans le référentiel tournant sont définies par $o(t) = \tilde{o}(t)e^{-i\Omega t}$ et où l’on a choisi les phases des champs incidents réelles (de telle sorte que $E_j = -i|E_j|$). Il est clair que les fluctuations du champ \tilde{a}_1 sont couplées de manière résonnante à celles associées au mouvement relatif \tilde{b}_r , alors que celles du second champ sont couplées au mouvement du centre de masse \tilde{b}_{cm} . De plus, pour des miroirs avec un grand facteur de qualité, le taux de relaxation est généralement très inférieur au taux de relaxation du champ intracavité. Le champ suit alors de manière adiabatique le mouvement des miroirs et on peut écrire des équations simplifiées pour les mouvements relatif et absolu

$$\delta\dot{\tilde{b}}_r = -\frac{\Gamma + \Gamma_{c1}}{2}\delta\tilde{b}_r + \sqrt{\Gamma_{c1}}\delta\tilde{a}_1^{in} + \tilde{\xi}_r \quad (6.75)$$

$$\delta\dot{\tilde{b}}_{cm} = -\frac{\Gamma + \Gamma_{c2}}{2}\delta\tilde{b}_{cm} + \sqrt{\Gamma_{c2}}\delta\tilde{a}_2^{in} + \tilde{\xi}_{cm} \quad (6.76)$$

où $\Gamma_{cj} = 2G_j^2|E_j|^2/\kappa_j$ ($j = 1, 2$) représentent les taux de relaxation effectifs des miroirs en présence des champs. Ces taux de relaxation s’interprètent comme un taux de refroidissement des miroirs sous l’effet de la pression de radiation. En effet, l’interaction du champ moyen avec les miroirs élargit le spectre de réponse des miroirs, qui passe de la largeur naturelle Γ à Γ_{cj} . C’est ce terme qui est responsable de la réduction du bruit thermique [Braginsky02, Metzger04]. Nous allons voir que ce terme joue également un rôle important dans le transfert des fluctuations quantiques.

B.4 Spectres et variances

Les analogues des opérateurs EPR que nous avons introduits pour les champs dans le chapitre 1 sont la distance relative entre les miroirs et l’impulsion du centre de masse.

En effet,

$$[Q_r, P_{cm}] = [Q_1 - Q_2, P_1 + P_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\tilde{x}_r, \tilde{p}_{cm}] = 0 \quad (6.77)$$

Nous allons donc calculer les variances de ces deux opérateurs et en déduire l'intrication à l'état stationnaire entre les miroirs en utilisant le critère généralisé (1.80) du chapitre 1. En utilisant le fait que

$$x_r = \sqrt{\frac{M_2}{M_T}}x_1 - \sqrt{\frac{M_1}{M_T}}x_2, \quad p_{cm} = \sqrt{\frac{M_1}{M_T}}p_1 + \sqrt{\frac{M_2}{M_T}}p_2 \quad (6.78)$$

l'application de (1.80) avec $a_1 = b_2 = \sqrt{M_2/M_T}$, $a_2 = -b_1 = -\sqrt{M_1/M_T}$ donne une condition nécessaire d'intrication du mouvement relatif et du mouvement du centre de masse

$$\Delta x_r^2 + \Delta p_{cm}^2 < 2\sqrt{\frac{\mu}{M_T}} \quad (6.79)$$

Il est clair que cette condition est plus facile à satisfaire pour des miroirs de masse sensiblement égales, car on a toujours $\mu/M_T \leq 1/4$, la valeur maximale de $1/4$ étant atteinte lorsque $M_1 = M_2$. Pour $M_1 \simeq M_2$ (situation que nous considérerons pour les applications numériques), les miroirs sont dans un état intriqué si

$$\Delta x_r^2 + \Delta p_{cm}^2 < 1 \quad (6.80)$$

Si l'on suppose pour simplifier que $\Gamma_{c1} = \Gamma_{c2} = \Gamma_c$, on obtient que les fluctuations des opérateurs \tilde{b}_r et \tilde{b}_{cm} sont données par

$$\delta\tilde{b}_r(\omega) = \frac{\sqrt{\Gamma_c}\delta\tilde{a}_1^{in}(\omega) + \tilde{\xi}_r(\omega)}{(\Gamma + \Gamma_c)/2 - i\omega} \quad (6.81)$$

$$\delta\tilde{b}_{cm}(\omega) = \frac{\sqrt{\Gamma_c}\delta\tilde{a}_2^{in}(\omega) + \tilde{\xi}_{cm}(\omega)}{(\Gamma + \Gamma_c)/2 - i\omega} \quad (6.82)$$

Il est clair d'après ces expressions que les largeurs des spectres de bruit sont élargies de Γ à $\Gamma + \Gamma_c$ par la pression de radiation. Par conséquent, le mouvement brownien des miroirs caractérisé par les opérateurs $\tilde{\xi}_r$ et $\tilde{\xi}_{cm}$ est réduit par un effet de *self-cooling* lorsque cet élargissement est grand devant la largeur naturelle ($\Gamma_c \gg \Gamma$). D'autre part, dans ce régime, les fluctuations quantiques de a_1^{in} et de a_2^{in} s'impriment sur celles de b_r et de b_{cm} dans une bande de fréquences de largeur $\Gamma + \Gamma_c$ autour de Ω . Si les champs incidents sont comprimés respectivement en amplitude et en phase autour de Ω sur une largeur grande devant $\Gamma + \Gamma_c$: $\Delta^2\tilde{X}_1^{in} = e^{-2r_1}$, $\Delta^2\tilde{Y}_2^{in} = e^{-2r_2}$, on trouve que les variances des variables EPR des deux miroirs sont données par

$$\Delta x_r^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma_c}{\Gamma + \Gamma_c} e^{-2r_1} + \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma_c} (1 + 2n_T) \right] \quad (6.83)$$

$$\Delta p_{cm}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma_c}{\Gamma + \Gamma_c} e^{-2r_2} + \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma_c} (1 + 2n_T) \right] \quad (6.84)$$

Ces équations sont très similaires à celles obtenues pour les variances des variables atomiques dans le chapitre 5. Elles mettent en évidence les processus physiques conduisant à l'intrication des miroirs en régime stationnaire : tout d'abord, le bruit thermique des miroirs est réduit par le processus de *self-cooling* (voir Fig. 6.7) lorsque $\Gamma_c \gg 2\Gamma n_T$. Deuxièmement, les fluctuations quantiques des champs incidents sont transférées de manière optimale au mouvement relatif et au mouvement du centre de masse, puisque nous avons imposé la condition de résonance $\Delta'_1 = \Delta'_2 = \Omega$. Si, de manière similaire aux atomes, l'interaction avec un champ en cavité élargit le spectre de réponse de l'oscillateur, la différence par rapport aux atomes est que, grâce à l'action conjuguée de la pression de radiation à l'intérieur de la cavité et des fluctuations comprimées des champs incidents, on "refroidit" les miroirs à la fois classiquement - élargissement du spectre et diminution du bruit ajouté par les photons thermiques - et quantiquement - transfert des fluctuations comprimées autour de la fréquence de résonance des miroirs (voir Fig. 6.7). Un tel schéma de refroidissement permet donc en principe de geler complètement le mouvement quantique des miroirs.

Pour des champs dans un état cohérent ($r_1 = r_2 = 0$), il apparaît clairement que

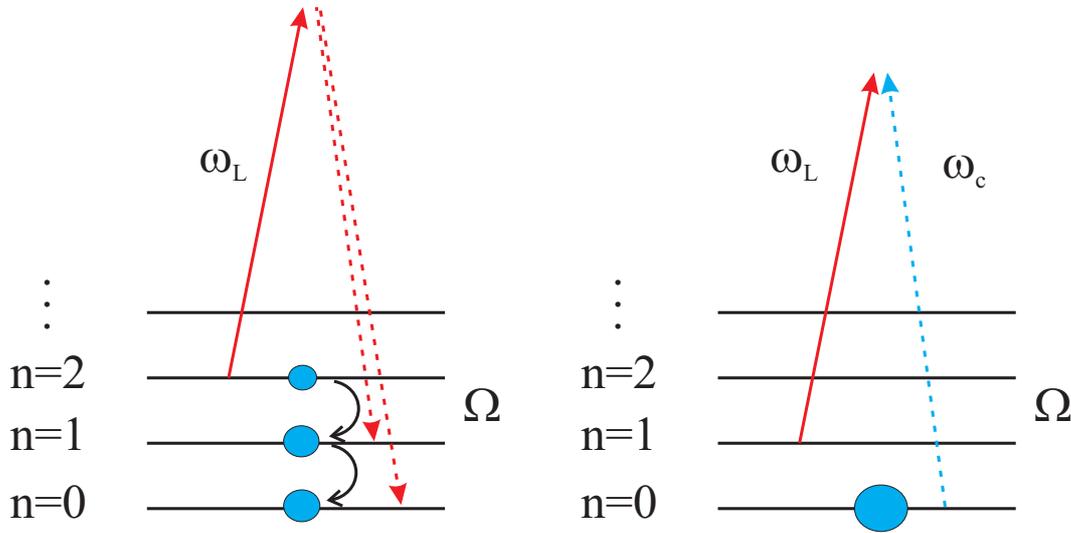


FIG. 6.7 – *Processus de refroidissement des miroirs : l'action conjuguée du champ moyen désaccordé dans le rouge avec la cavité et du vide comprimé résonnant avec la cavité amène l'oscillateur dans son état fondamental (self-cooling) et comprime ses fluctuations (transfert quantique).*

le bruit thermique des miroirs peut être réduit, mais que les miroirs ne sont jamais

intriqués :

$$\Delta x_r^2 = \Delta p_{cm}^2 = \frac{1}{2} + \frac{\Gamma n_T}{\Gamma_c + \Gamma} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (\Gamma_c \gg 2\Gamma n_T, \Gamma) \quad (6.85)$$

Si le nombre de phonons thermiques est faible ($n_T \ll 1$), on trouve que les oscillateurs mécaniques sont dans leur état fondamental⁷ : $\Delta x_r^2 = \Delta p_{cm}^2 = 1/2$. D'autre part, on voit que si les champs incidents sont comprimés, alors les fluctuations des miroirs reproduisent les fluctuations comprimées des champs incidents lorsque $\Gamma_c \gg 2\Gamma n_T, \Gamma$. Pour une température donnée, cette condition peut toujours être satisfaite pour des intensités incidentes suffisamment élevées. Pour des miroirs de masses sensiblement égales ($M_1 \simeq M_2$), les deux miroirs sont dans un état intriqué

$$\Delta x_r^2 + \Delta p_{cm}^2 \simeq \frac{e^{-2r_1} + e^{-2r_2}}{2} < 1 \quad (6.86)$$

Pour des champs incidents parfaitement comprimés, cela consitue une réalisation du paradoxe EPR originel pour les miroirs. Les deux oscillateurs mécaniques sont alors parfaitement corrélés en position et anticorrélés en impulsion :

$$\Delta(Q_1 - Q_2)^2 \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta(P_1 + P_2)^2 \longrightarrow 0 \quad (6.87)$$

Pour donner quelques chiffres, on a représenté sur la figure 6.8 l'intrication obtenue $\Delta x_r^2 + \Delta p_{cm}^2$ pour des miroirs refroidis à températures cryogéniques. La courbe en traits pleins décrit le cas de deux miroirs identiques de masses $M_1 \simeq M_2 = 1$ mg, de fréquence de résonance $\Omega/2\pi = 1$ MHz avec $\Gamma = 1$ Hz et des cavités de finesse $\sim 10^5$. Pour des longueurs $L_1 = 3$ cm et $L_2 = 9$ cm, les puissances incidentes nécessaires pour avoir $\Gamma_c/\Gamma = 10^3$ valent respectivement $P_1^{in} = 30$ mW et $P_2^{in} = 1.2$ W. La seconde courbe représente le cas de deux MEMS (micro-electro mechanical mirrors) de masse $1 \mu\text{g}$. On peut alors avoir un self-cooling beaucoup plus efficace ($\Gamma_c/\Gamma = 10^4$) avec des puissances incidentes plus faibles. On peut alors se placer à des températures plus élevées (Fig. 6.8).

B.5 Lecture optique de l'état des miroirs

Pour mesurer le bruit d'un miroir dans une cavité, on mesure généralement les fluctuations du champ sortant de la cavité. En effet, un déplacement δx d'un miroir

⁷Avec notre définition des opérateurs b et b^\dagger , le commutateur position/impulsion vaut $[x, p] = i$, ce qui implique un facteur 4 dans l'inégalité de Heisenberg par rapport à celle pour les champs utilisée dans ce manuscrit : $\Delta x^2 \Delta p^2 \geq 1/4$. Nous avons adopté la convention usuelle [Cohen73] qui conduit à une variance pour un oscillateur harmonique de fréquence Ω et de masse μ , dans son état fondamental : $\Delta Q^2 = \frac{\hbar}{2\mu\Omega_r}$.

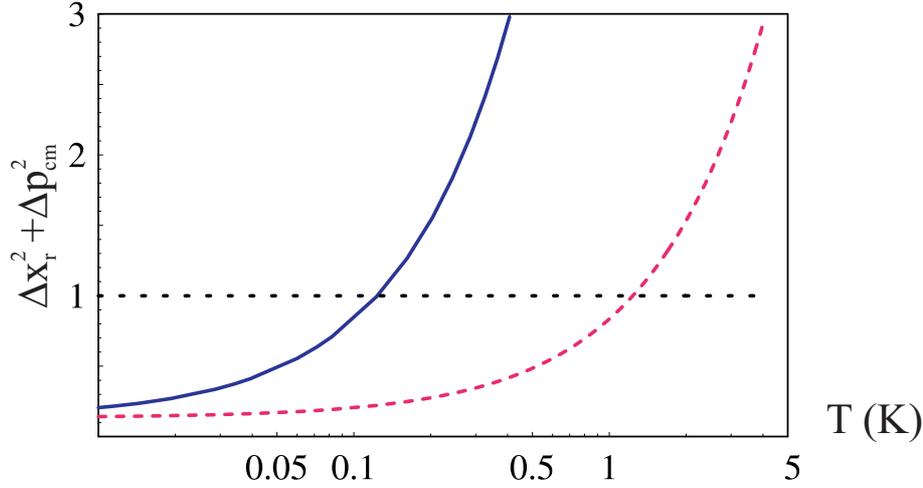


FIG. 6.8 – Intrication des miroirs à l'état stationnaire en fonction de la température (échelle log) : (a) Miroirs de masse 1 mg [$\Omega/2\pi = 1$ MHz, $\Gamma = 1$ Hz, $\mathcal{F} = 10^5$, $L_1 = 3$ cm, $L_2 = 9$ cm, $r_1 = r_2 = 2$, $P_1^{in} = 30$ mW, $P_2^{in} = 1.2$ W] (b) MEMS de masse 1 μ g, $P_1^{in} = 0.3$ mW, $P_2^{in} = 12$ mW. Des corrélations de type EPR existent entre les miroirs lorsque $\Delta x_r^2 + \Delta p_{cm}^2 < 1$.

mobile interagissant de manière résonante avec un faisceau dans une cavité de finesse \mathcal{F} induit un déphasage du champ $\delta\varphi_x \simeq \frac{8\mathcal{F}}{\lambda}\delta x$, qui se superpose au bruit de phase du faisceau incident. Si l'on se place dans un régime dans lequel ce bruit quantique est négligeable, alors les fluctuations de position du miroir sont détectables par une mesure des fluctuations de phase du champ sortant [Hadjjar99, Cohadon99, Giovannetti01].

Pour lire les fluctuations des deux miroirs mobiles (et en particulier leurs fluctuations quantiques), nous adoptons une méthode différente en suivant un protocole similaire à celui utilisé pour les atomes dans le chapitre 4. Le transfert de fluctuations entre les champs et les deux miroirs s'effectue pendant quelques Γ_c^{-1} . Une fois le régime stationnaire atteint et les deux miroirs intriqués, on supprime l'interaction des miroirs avec les vides comprimés. Les miroirs retransfèrent alors leurs fluctuations aux champs intracavités. Ces fluctuations sont reflétées par les champs sortants. Considérons le cas du premier champ. Avec les mêmes conventions de phase que précédemment et en supposant que le champ suit adiabatiquement le mouvement des miroirs, les équations d'évolution du mouvement relatif et du champ a_1 s'écrivent

$$\delta\dot{\tilde{b}}_r(t) = -\frac{\Gamma + \Gamma_c}{2}\delta\tilde{b}_r(t) + \sqrt{\Gamma_c}\delta\tilde{a}_1^{in}(t) + \tilde{\xi}_r(t) \quad (6.88)$$

$$\delta\tilde{a}_1^{out}(t) = \delta\tilde{a}_1^{in}(t) - \sqrt{\Gamma_c}\delta\tilde{b}_r(t) \quad (6.89)$$

avec $\tilde{\gamma} = (\Gamma + \Gamma_c)/2$ desquelles on déduit les fluctuations $\delta\tilde{a}_1^{out}$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{a}_1^{out}(t) &= \delta\tilde{a}_1^{in}(t) - \Gamma_c \int_0^t dt' e^{-\tilde{\Gamma}(t-t')} \delta\tilde{a}_1^{in}(t') \\ &\quad - \sqrt{\Gamma_c} \delta\tilde{b}_r(0) e^{-\tilde{\Gamma}t} - \sqrt{\Gamma_c} \int_0^t dt' e^{-\tilde{\Gamma}(t-t')} \tilde{\xi}_r(t') \end{aligned} \quad (6.90)$$

Le terme en $\delta\tilde{b}_r(0)$ correspond à l'information que l'on veut mesurer. Pour mesurer les fluctuations de x_r , on calcule la fonction de corrélation à deux temps de la quadrature d'amplitude du champ sortant. On obtient

$$\langle \delta\tilde{X}_1^{out}(t) \delta\tilde{X}_1^{out}(t') \rangle = \delta(t-t') + \frac{n_T \Gamma \Gamma_c}{\tilde{\gamma}} e^{-\tilde{\gamma}|t-t'|} + 2\Gamma_c \left[\Delta x_r^2(0) - \frac{\Gamma_c + \Gamma(1 + 2n_T)}{2(\Gamma + \Gamma_c)} \right] e^{-\tilde{\gamma}(t+t')}. \quad (6.91)$$

En raison de la présence de phonons thermiques, la fonction de corrélation possède un terme supplémentaire par rapport à (6.91). Toutefois, si l'on mesure les fluctuations du champ sortant en utilisant un oscillateur local adapté, la contribution de ce terme additionnel devient négligeable lorsque le taux de relaxation effectif est suffisamment grand ($\Gamma_c \gg 2n_T\Gamma$). On peut alors mesurer la variance de la position relative avec un rapport signal à bruit proche de 1. Quantitativement, on procède à une détection homodyne matchée⁸. On commence la mesure au temps t en intégrant sur un temps t_m que l'on suppose grand devant $\tilde{\gamma}^{-1}$. On intègre le spectre de bruit autour de Ω dans une bande passante $\Delta\omega = 2\pi/t_m$:

$$P_1(t) = \frac{1}{I(t)} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \frac{d\omega}{2\pi} \int_t^{t+t_m} d\tau \int_t^{t+t_m} d\tau' E(\tau) E^*(\tau') e^{-i\omega(\tau-\tau')} \langle \delta\tilde{X}_1^{out}(\tau) \delta\tilde{X}_1^{out}(\tau') \rangle \quad (6.92)$$

avec $I(t) = E(t)E^*(t)$. Le résultat s'exprime comme la somme de deux termes de bruit constants et d'un terme de signal dépendant du temps :

$$P_1(t) = \mathcal{N}(t_m) + \mathcal{N}_T(t_m) + \mathcal{S}(t_m) [\Delta x_r^2(0) - \Delta x_r^2(\infty)] e^{-2\tilde{\gamma}t} \quad (6.93)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{N}(t_m) = \frac{1 - e^{-2\tilde{\gamma}t_m}}{2\tilde{\gamma}t_m}$$

$$\mathcal{N}_T(t_m) = \frac{\Gamma_c \Gamma n_T}{\tilde{\gamma}} \int_0^{\pi/t_m} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 - e^{-(2\tilde{\gamma}-i\omega)t_m}}{2\tilde{\gamma} - i\omega} \left[\frac{1 - e^{-2\tilde{\gamma}t_m}}{2\tilde{\gamma}} + \frac{1}{i\omega} \right] + c.c.$$

$$\mathcal{S}(t_m) = 2\Gamma_c \int_{-\pi/t_m}^{\pi/t_m} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1 + e^{-4\tilde{\gamma}t_m} - 2e^{-2\tilde{\gamma}t_m} \cos(\omega t_m)}{4\tilde{\gamma}^2 + \omega^2}$$

⁸avec un oscillateur local dont le profil temporel est donné par $E(t) \propto e^{-\tilde{\gamma}t}$, comme dans les chapitres 4 et 5.

$\Delta x_r^2(0)$ et $\Delta x_r^2(\infty)$ désignent respectivement les variances initiale et à l'état d'équilibre thermodynamique. Dans le régime $\tilde{\gamma}t_m \gg 1$, ce résultat prend la forme simple

$$P_1(t) = \frac{1}{2\tilde{\gamma}t_m} \left[1 + \frac{\Gamma_c \Gamma}{\tilde{\gamma}^2} n_T + \frac{2\Gamma_c}{\Gamma + \Gamma_c} [\Delta x_r^2(0) - \Delta x_r^2(\infty)] e^{-2\tilde{\gamma}t} \right] \quad (6.94)$$

Les deux premiers termes constants correspondent au shot-noise du champ incident et à la contribution du bruit thermique des miroirs. Le signal est proportionnel à la différence entre la variance initialement comprimée des miroirs et la variance à l'équilibre thermodynamique. Lorsque le self-cooling est suffisamment important pour réduire le bruit thermique ($\Gamma_c/\Gamma \gg 1, 2n_T$), les termes de bruit valent 1 et $\Delta x_r^2(\infty) = 1/2$; on mesure donc effectivement dans le champ la compression de bruit initiale des miroirs ($1/2 - \Delta x_r^2(0)$), qui s'échappe de la cavité dans un temps $\tilde{\gamma}^{-1}$.

On trouve un résultat parfaitement équivalent à la sortie de l'autre cavité. De même que pour les atomes froids, on dispose ainsi d'une preuve expérimentale du stockage d'intrication; en effet, si l'on utilisait des miroirs fixes par exemple, la compression de bruit disparaîtrait en un temps κ^{-1} , beaucoup plus court que $\tilde{\gamma}^{-1}$. L'avantage de cette méthode de lecture est qu'elle ne nécessite pas de cavités auxiliaires pour mesurer les mouvements des miroirs M_1 et M_2 [Mancini02]. En outre, si la température est suffisamment basse, on peut imaginer stocker les fluctuations des champs dans les miroirs et utiliser ceux-ci comme registres quantiques.

B.6 Conclusion

Nous avons présenté une méthode pour coupler les fluctuations de champs comprimés aux mouvements relatif et absolu d'une paire de miroirs, et montré comment l'intrication des miroirs peut être lue de manière similaire à l'intrication stockée dans des ensembles atomiques. Outre l'intérêt fondamental qu'il peut y avoir à contrôler les fluctuations quantiques d'un oscillateur mécanique macroscopique, les applications de ce type d'idées sont nombreuses. Tout d'abord, modifier les bruits quantique et thermique des miroirs est essentiel pour les interféromètres gravitationnel, l'utilisation de sources comprimées pour des interféromètres progressant rapidement [McKenzie02, McKenzie04]. D'autre part, les grandes similarités entre les spins atomiques et les oscillateurs mécaniques pour ces processus de transfert quantique sont prometteuses pour l'information quantique avec des champs optiques. Avec l'avènement des micromiroirs (MEMS) de taille réduite et contrôlable électroniquement, surgiront certainement des possibilités intéressantes pour améliorer l'étude du bruit dans les oscillateurs mécaniques [Cohadon05].

Conclusion

Dans la continuité des expériences menées dans le groupe d'Optique Quantique, j'ai participé avec Vincent Josse, qui terminait sa thèse, à des expériences de génération d'états non classiques en utilisant l'interaction en cavité d'un nuage d'atomes froids de césium avec un champ polarisé linéairement. Nous avons ainsi montré que cette interaction permet de comprimer simultanément les fluctuations du champ moyen, mais aussi celles du mode vide de polarisation orthogonale. On génère ainsi des états comprimés en polarisation et des états intriqués quantiquement.

Nous avons ensuite présenté des résultats théoriques basés sur des effets de cohérence dans des systèmes à trois niveaux en Λ , constitués de deux sous niveaux fondamentaux et un état excité. Nous avons étudié l'interaction de deux champs d'égale intensité et désaccordés de manière symétrique par rapport à la résonance à un photon. Dans ces conditions, on peut aussi générer des états comprimés et intriqués. Ces effets reposant sur les grandes non linéarités des systèmes à trois niveaux, ils ouvrent une nouvelle voie pour étudier les propriétés non linéaires d'un gaz d'atomes froids en cavité.

D'autre part, dans la suite des travaux menés par Laurent Vernac pendant sa thèse [Vernac01b], nous nous sommes intéressés d'un point de vue théorique à la génération d'états comprimés atomiques. Nos calculs sur les systèmes en Λ , dans lesquels le spin collectif associé aux sous niveaux fondamentaux possède une longue durée de vie, ouvrent des perspectives du point de vue de la réduction du bruit quantique atomique et de son observation expérimentale. Dans le cas d'un nuage d'atomes froids de césium, nos processus de réduction du bruit quantique atomique appliqué à la cohérence hyperfine $F = 3, m_F = 0 \rightarrow F = 4, m_F = 0$, utilisée dans les horloges atomiques, pourraient conduire à une amélioration de leur sensibilité, limitée par le bruit de projection quantique.

Un grand nombre des résultats de cette thèse concernent l'échange et le stockage des fluctuations quantiques de la lumière dans divers systèmes physiques. Dans le but

de réaliser une mémoire quantique à atomes froids, nous avons étudié plusieurs schémas possibles d'implémentation. Nous avons montré tout d'abord que dans une situation de transparence induite électromagnétiquement, les fluctuations d'un vide comprimé peuvent être transférées aux composantes transverses du spin dans le fondamental. Nous avons ensuite étudié une configuration Raman, dans laquelle les champs sont très désaccordés à un photon. Les pertes étant faibles dans les deux cas, l'efficacité du transfert quantique peut être proche de 100%. Notons que le principe des schémas étudiés dans cette thèse est très différent des processus en régime pulsé basés sur l'effet Faraday, utilisés actuellement dans plusieurs groupes [[Julsgaard04](#), [deEchaniz05](#)].

Au sein du groupe, nous avons commencé à construire une expérience de mémoire quantique dans un nuage d'atomes froids de césium, basée sur les idées développées au cours de ma thèse. Afin de minimiser les perturbations du système atomique par les faisceaux pièges, nous utilisons un piège sombre. Par ailleurs, une source de vide comprimé à 852 nm (OPO) est en cours de réalisation.

Nous avons ensuite étendu ces idées à des états intriqués du champ et à leur stockage dans des ensembles atomiques, et proposé un protocole de téléportation atomique, qui, de par sa similarité intrinsèque avec les protocoles existants pour les champs optiques, pourrait être intégré dans un réseau atomes-champs pour communiquer des états quantiques sur de longues distances.

Si les résultats exposés dans ce manuscrit concernent en grande partie les atomes froids et leur implémentation avec le dispositif expérimental du groupe, ils restent suffisamment généraux pour pouvoir être appliqués à d'autres systèmes physiques, comme les spins nucléaires d' ^3He et les miroirs mobiles. En ce qui concerne l' ^3He , nous avons montré que les collisions d'échange de métastabilité utilisées couramment pour polariser nucléairement l'hélium dans son état fondamental conservent également les fonctions de corrélation à deux spins. Il est donc en principe possible de transférer la réduction de bruit d'un champ comprimé aux spins nucléaires de l' ^3He dans son état fondamental en utilisant les collisions d'échange de métastabilité. Le spin nucléaire étant très peu couplé à l'environnement, cette réduction de bruit est alors stockée pendant des temps extrêmement longs.

Enfin, nous avons montré théoriquement qu'il est possible de d'intriquer deux miroirs par pression de radiation. Le schéma étudié utilise deux cavités (linéaire et repliée) ayant en commun deux miroirs. Dans chaque cavité circule un champ cohérent fortement désaccordé et un vide comprimé résonant. L'action conjuguée de ces champs permet de comprimer les fluctuations de la position relative et de l'impulsion du centre

de masse, ce qui fournit une réalisation possible du paradoxe EPR avec des oscillateurs mécaniques. L'ensemble de ces idées laisse entrevoir à terme d'intéressantes perspectives pour la manipulation d'états non classiques du rayonnement.

Outre les systèmes étudiés dans ce manuscript, ces idées peuvent avoir d'autres applications, en particulier être implémentées dans des milieux solides. Les expériences récentes de ralentissement de la lumière dans différents matériaux - des temps de stockage d'une impulsion lumineuse supérieurs à la seconde ont été reportés dans le praséodyme [[Longdell05](#)] - laissent également présager des développements prometteurs dans cette direction [[Turukhin02](#), [Bigelow03](#), [deSeze05](#), [Baldit05](#)].

Annexe

A Calcul des coefficients de diffusion

Le calcul des fonctions de corrélations des forces de Langevin s'effectue à l'aide des relations d'Einstein généralisées [Cohen96c]. On regroupe celles-ci dans une matrice dite de diffusion, qui se présente sous la forme d'une matrice diagonale constituée de deux blocs, car les fluctuations des champs entrants et les forces de Langevin des opérateurs atomiques sont incorréllées :

$$[D] = \begin{pmatrix} [D_{ch}] & 0 \\ 0 & [D_{at}] \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

Pour un seul mode A^{in} , $[D_{ch}]$ est donnée par

$$\frac{2\kappa}{\tau} \begin{pmatrix} \langle \delta A_{in}(t) \delta A_{in}^\dagger(t') \rangle & \langle \delta A_{in}(t) \delta A_{in}(t') \rangle \\ \langle \delta A_{in}^\dagger(t) \delta A_{in}^\dagger(t') \rangle & \langle \delta A_{in}^\dagger(t) \delta A_{in}(t') \rangle \end{pmatrix} = [D_{ch}] \delta(t-t') \quad (\text{A-2})$$

Le champ incident étant δ -corrélé, la matrice $[D_{ch}]$ est proportionnelle à $[V_{in}]$ définie dans le premier chapitre. On a alors l'égalité :

$$\frac{2\kappa}{\tau} [V_{in}] = [D_{ch}] \quad (\text{A-3})$$

Pour deux champs incorréllés, la matrice $[D_{ch}]$ est formée de deux blocs diagonaux, $[D_{ch1}]$ et $[D_{ch2}]$, proportionnels respectivement à $[V_{in1}]$ et $[V_{in2}]$.

Pour calculer $[D_{at}]$, on utilise les relations d'Einstein généralisées qui relient les corrélations entre les différentes forces de Langevin atomiques. En notant $D_{ij} = [D_{at}]_{i,j}$, la référence [Cohen96c] donne les relations d'Einstein généralisées :

$$D_{ij} = \langle \mathcal{D}(S_{at i} S_{at j}^\dagger) \rangle - \langle \mathcal{D}(S_{at i}) S_{at j}^\dagger \rangle - \langle S_{at i} \mathcal{D}(S_{at j}^\dagger) \rangle \quad (\text{A-4})$$

où \mathcal{D} est l'opérateur d'évolution des valeurs moyennes atomiques, déduit des équations d'Heisenberg sans les forces de Langevin :

$$\frac{d\langle S_{at i} \rangle}{dt} = -\gamma [B_9]_{ij} \langle S_{at j} \rangle + \gamma [V_{s9}]_i = \mathcal{D}(\langle S_{at i} \rangle) \quad (\text{A-5})$$

Or, comme on calcule $[D_{at}]$ dans un état stationnaire, le premier terme $\langle \mathcal{D}(S_{at} i S_{at}^\dagger j) \rangle$ correspond au terme d'évolution d'un opérateur atomique, qui est nul dans un état stationnaire. En introduisant la matrice $[M]$ définie par

$$[M]_{ij} = \langle S_{at} i S_{at}^\dagger j \rangle \quad (\text{A-6})$$

on montre que :

$$[D_{at}] = \gamma([B_{9\ stat}][M] + [M][B_{9\ stat}]_{hc} - |V_{s9}\rangle[S_{stat}] - |S_{stat}\rangle[V_{s9}]) \quad (\text{A-7})$$

Cette relation matricielle permet d'éviter le calcul terme à terme des 81 termes de la matrice de diffusion atomique. On utilise la matrice $[M]$ définie par les valeurs stationnaires atomiques (A-6) et on obtient finalement la matrice de diffusion atomique $[D_{at}]$:

$$[D_{at}] = \gamma \begin{pmatrix} 2\pi_1 + \pi_3 & 0 & p_r^* & 0 & 0 & 0 & -p_1 & -p_1 & 2p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sigma p_2^* & 0 & 0 & -p_2 & -p_2 & 2p_2 \\ 3p_r & 0 & 2\pi_2 + \pi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma p_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma p_2 & 0 & 0 & 2\sigma\pi_2 + \pi_3 & 0 & (\sigma - 1)p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2 + \sigma)p_1 & 0 & 2\sigma\pi_1 + \pi_3 & 0 & (\sigma - 1)p_r^* & 0 \\ -p_1^* & 2p_1 & -p_2^* & 0 & (\sigma - 1)p_r^* & 0 & \pi_3 & 0 & -\pi_3 \\ -p_1^* & 0 & -p_2^* & 2p_2 & 0 & (\sigma - 1)p_r & 0 & \pi_3 & -\pi_3 \\ 2p_1^* & 0 & 2p_2^* & 0 & 0 & 0 & -\pi_3 & -\pi_3 & 2\pi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-8})$$

avec $\sigma = \gamma_0/\gamma$. Notons que l'on peut également appliquer la relation (A-4) en ne gardant dans la matrice d'évolution que les termes de relaxation. En effet, les termes d'évolution hamiltonienne n'interviennent pas dans l'application du théorème fluctuations-dissipation. On écrit alors matriciellement l'évolution linéaire avec la matrice $[B]_{dis}$:

$$[B]_{dis} = -\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A-9})$$

et on utilise les valeurs stationnaires données par les termes hamiltoniens (dans ce cas, le premier terme dans (A-4) est non nul).

Pour calculer la contribution du bruit atomique ajouté sur les champs, on a besoin de la matrice $[\sigma_P]$ introduite dans le chapitre 2, paragraphe B.1.5. Cette matrice s'obtient à partir de la restriction aux dipôles optiques de la matrice $[\sigma]$ [Vernac00], définie par

$$[\sigma] = ([B_{at/at}] - i\omega\mathbb{1})^{-1} [D_{at}] \left(([B_{at/at}] - i\omega\mathbb{1})^{-1} \right)^\dagger \quad (\text{A-10})$$

où $[B_{at/at}]$ est la matrice d'évolution atomique et $\mathbb{1}$ la matrice identité 9×9 .

B Opérateurs continus pour l'interaction atomes-champs en simple passage

Dans le cadre de la théorie unidimensionnelle développée dans le chapitre 4, paragraphe C.1, on se base sur le formalisme des opérateurs atomiques continus (voir par exemple [Raymer81, Deutsch91, Fleischhauer95]). On découpe le nuage atomique allongé selon z en $2M + 1$ tranches de longueur $\Delta z = L/(2M + 1)$, centrées en $z_l = lL/(2M + 1)$. Si l'on suppose que le nombre d'atomes par tranches est grand ($N\Delta z/L \gg 1$), on peut définir des opérateurs atomiques en z_l sommant sur la tranche

$$\sigma_l = \sum_{z_l \leq z^\mu < z_l + \Delta z} \sigma(z^\mu) \quad (\text{B-1})$$

L'hamiltonien d'interaction avec un champ s'écrit

$$H_{int} = -\hbar g \sum_{l,n} c_n^\dagger e^{-ik_n z_l} \sigma_l e^{ik z_l} + h.c. \quad (\text{B-2})$$

où l'on a remplacé le dipôle atomique par son enveloppe lentement variable dans le référentiel tournant $\sigma_l \rightarrow \sigma_l e^{ik z_l}$. Si l'on pose

$$b_l = a \sum_{n=-M'}^{M'} c_n e^{i \frac{2\pi l n}{2M+1}} \quad (\text{B-3})$$

on obtient, en utilisant $[c_n, c_{n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}$, que

$$[b_l, b_l^\dagger] = a^2 \sum_{n,n'} [c_n, c_{n'}^\dagger] e^{i \frac{2\pi l(n-n')}{2M+1}} \quad (\text{B-4})$$

$$= a^2 (2M' + 1) \quad (\text{B-5})$$

$$= 1 \quad \text{seulement si} \quad a^2 = \frac{1}{2M' + 1} \quad (\text{B-6})$$

Un calcul similaire montre que

$$[b_l, b_{l'}^\dagger] = \delta_{l,l'} \quad \text{seulement si} \quad M = M' \quad (\text{B-7})$$

On définit donc les opérateurs de champ en z_l par

$$b_l = \frac{1}{\sqrt{2M+1}} \sum_{n=-M}^M c_n e^{i \frac{2\pi n l}{2M+1}} \quad (\text{B-8})$$

ce qui signifie que l'on associe à chaque tranche un mode du champ à cette position [Silberfarb03].

L'hamiltonien d'interaction devient

$$H_{int} = -\hbar g \sum_{l=-M}^M \sqrt{2M+1} b_l^\dagger \sigma_l + h.c. \quad (\text{B-9})$$

le hamiltonien total étant la somme du hamiltonien atomique, de celui du champ et du hamiltonien d'interaction précédent

$$H = H_{at} + \sum_n \hbar \omega_n c_n^\dagger c_n + H_{int} \quad (\text{B-10})$$

En inversant (B-8)

$$c_n = \frac{1}{2M+1} \sum_{l=-M}^M b_l e^{-i \frac{2\pi n l}{2M+1}} \quad (\text{B-11})$$

et en prenant en compte le fait que $\hbar \omega_n = \hbar \omega + \hbar c \frac{2\pi n}{L}$, l'hamiltonien du champ peut se réexprimer sous la forme

$$\sum_n \hbar \omega_n c_n^\dagger c_n = \hbar \omega \sum_n c_n^\dagger c_n + \hbar \frac{2\pi c}{L} \sum_n n c_n^\dagger c_n \quad (\text{B-12})$$

$$= \hbar \omega \sum_l b_l^\dagger b_l + \sum_{l,l'} \hbar \omega_{l,l'} b_l^\dagger b_{l'} \quad (\text{B-13})$$

$$\text{avec} \quad \omega_{l,l'} = \sum_{n=-M}^M \frac{2\pi c}{L} \frac{n}{2M+1} e^{i \frac{2\pi n(l-l')}{2M+1}} \quad (\text{B-14})$$

On déduit alors de (B-10) et (B-13) l'équation d'évolution de b_l

$$\dot{b}_l = -i \sum_{l'} \omega_{l,l'} b_{l'} + ig \sqrt{2M+1} \sigma_l \quad (\text{B-15})$$

On passe à la limite continue $M \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{2M+1} \dot{b}_l \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} a(z, t) \quad (\text{B-16})$$

$$ig \sqrt{2M+1} \sigma_l \rightarrow ig N \sigma(z, t) \quad (\text{B-17})$$

De plus,

$$\begin{aligned}
-i \sum_{l'} \omega_{l,l'} b_{l'} \sqrt{2M+1} &= -i \sum_{n,l'} \frac{2\pi n c}{(2M+1)L} e^{i \frac{2\pi n(l-l')}{2M+1}} b_{l'} \sqrt{2M+1} \\
&= -\frac{c}{L} \frac{\partial}{\partial l} \sum_{n,l'} e^{i \frac{2\pi n(l-l')}{2M+1}} b_{l'} \sqrt{2M+1} \\
&= -\frac{c}{L} \frac{\partial}{\partial l} \sum_{l'} (2M+1) \delta_{l,l'} 2M+1 b_{l'} \sqrt{2M+1} \\
&= -\frac{c}{L} (2M+1) \frac{\partial}{\partial l} b_l \sqrt{2M+1} \\
&\rightarrow -c \frac{\partial}{\partial z} a(z, t)
\end{aligned}$$

ce qui redonne bien l'équation d'évolution (4.82). L'hamiltonien d'interaction pour un mode se réécrit alors en fonction des opérateurs continus

$$H_{int} = -\hbar g \sum_l b_l^\dagger \sigma_l + h.c. \rightarrow N \int \frac{dz}{L} a^\dagger(z, t) \sigma(z, t) \quad (\text{B-18})$$

et on obtient ainsi l'expression (4.81).

C Collisions d'échange de métastabilité et fluctuations quantiques

Dans le chapitre 6, nous avons étendu les équations régissant l'évolution des opérateurs collectifs associés aux spins dans le métastable et dans le fondamental en présence de collisions d'échange de métastabilité

$$\dot{I}_\alpha = -\gamma_f I_\alpha + \gamma_m S_\alpha + f_{I_\alpha} \quad (\text{C-1})$$

$$\dot{S}_\alpha = -\gamma_m S_\alpha + \gamma_f I_\alpha + f_{S_\alpha} \quad (\alpha = x, y, z) \quad (\text{C-2})$$

la conservation du moment cinétique total $F = I + S$ impliquant qu'à chaque instant $f_{S_\alpha} + f_{I_\alpha} = 0$. Nous allons montrer que sous l'effet des collisions d'échange de métastabilité les spins préparés dans un état cohérent restent dans un état cohérent. Supposons que les deux spins sont polarisés selon z : $\langle I_z \rangle = N/2$ et $\langle S_z \rangle = n/2$. Les fluctuations des composantes transverses selon x satisfont à

$$\delta \dot{I}_x = -\gamma_f \delta I_x + \gamma_m \delta S_x + f_{I_x} \quad (\text{C-3})$$

$$\delta \dot{S}_x = -\gamma_m \delta S_x + \gamma_f \delta I_x + f_{S_x} \quad (\text{C-4})$$

En introduisant les opérateurs du moment cinétique total $F_x = I_x + S_x$ selon x et la différence $G = I_x - S_x$, on obtient

$$\delta\dot{F}_x = 0 \quad \text{et} \quad \delta\dot{G}_x = -(\gamma_m + \gamma_f)\delta G_x + (\gamma_m - \gamma_f)\delta F_x + f_{I_x} - f_{S_x} \quad (\text{C-5})$$

En passant en Fourier on obtient

$$\delta F_x(\omega) = F_x \delta(\omega) \quad \text{et} \quad \delta G_x(\omega) = \frac{\gamma_m - \gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f} F_x \delta(\omega) + \frac{f_{I_x} - f_{S_x}}{\gamma_m + \gamma_f - i\omega} \quad (\text{C-6})$$

F_x étant un opérateur constant. En revenant aux composantes initiales on a que

$$\delta I_x(\omega) = \frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f} F_x \delta(\omega) + \frac{f_{I_x}}{\gamma_m + \gamma_f - i\omega} \quad (\text{C-7})$$

$$\delta S_x(\omega) = \frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f} F_x \delta(\omega) + \frac{f_{S_x}}{\gamma_m + \gamma_f - i\omega} \quad (\text{C-8})$$

desquelles on déduit les spectres

$$\langle \delta I_x(\omega) \delta I_x(-\omega) \rangle = \frac{N^2}{4(N+n)} \delta(\omega) + \frac{\gamma_e N n}{\gamma_e^2 (N+n)^2 + \omega^2} \quad (\text{C-9})$$

$$\langle \delta S_x(\omega) \delta S_x(-\omega) \rangle = \frac{n^2}{4(N+n)} \delta(\omega) + \frac{\gamma_e N n}{\gamma_e^2 (N+n)^2 + \omega^2} \quad (\text{C-10})$$

$$\langle \delta I_x(\omega) \delta S_x(-\omega) \rangle = \frac{N^2}{4(N+n)} \delta(\omega) - \frac{\gamma_e N n}{\gamma_e^2 (N+n)^2 + \omega^2} \quad (\text{C-11})$$

$$\langle \delta S_x(\omega) \delta I_x(-\omega) \rangle = \frac{N^2}{4(N+n)} \delta(\omega) - \frac{\gamma_e N n}{\gamma_e^2 (N+n)^2 + \omega^2} \quad (\text{C-12})$$

Nous avons utilisé le fait que $D_{I_x, I_x} = \gamma_f N/2$, $D_{S_x, S_x} = \gamma_m n/2$ et $D_{I_x, S_x} = D_{S_x, I_x} = -\gamma_e n N/2$ avec $\gamma_f = \gamma_e n$ et $\gamma_m = \gamma_e N$. On vérifie aisément à l'aide de ces relations qu'à l'état stationnaire les variances sont celles d'un spin dans un état cohérent : $\Delta I_x^2 = N/4$ et $\Delta S_x^2 = n/4$, et que les deux spins sont incorréllés : $\Delta(I_x S_x) = \Delta(S_x I_x) = 0$.

D Publications jointes

Les publications qui suivent se rapportent aux expériences décrites brièvement dans le chapitre 2. Elles sont également détaillées dans la thèse de Vincent Josse [[Josse03c](#)].

Polarization Squeezing with Cold Atoms

V. Josse, A. Dantan, L. Vernac, A. Bramati, M. Pinard, and E. Giacobino

*Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Ecole Normale Supérieure et CNRS, Case 74,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

(Received 12 May 2003; published 2 September 2003)

We study the interaction of a nearly resonant linearly polarized laser beam with a cloud of cold cesium atoms in a high finesse optical cavity. We show theoretically and experimentally that the cross-Kerr effect due to the saturation of the optical transition produces quadrature squeezing on both the mean field and the orthogonally polarized vacuum mode. An interpretation of this vacuum squeezing as *polarization squeezing* is given and a method for measuring quantum Stokes parameters for weak beams via a local oscillator is developed.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.103601

PACS numbers: 42.50.Dv, 03.67.Hk, 42.50.Lc

In connection with quantum information technology, a growing interest has been given to quantum networks constituted by atomic ensembles and intense light fields [1]. In particular, the mapping of a quantum polarization state of light onto an atomic ensemble [2] has motivated extensive studies of the quantum features of the polarization of light. Several theoretical schemes to produce polarization squeezing using Kerr-like media have been proposed [3] and realized using optical fibers [4]. Other experimental realizations achieve polarization squeezing by mixing squeezed vacuum (generated by an optical parametric oscillator) with a strong coherent beam on a polarizing beam splitter [2,5] or mixing two independent quadrature squeezed beams (generated by an optical parametric amplifier) on a polarizing beam splitter [6]. Very recently, it has been proposed to propagate a linearly polarized light beam through an atomic medium exhibiting self-rotation to generate squeezed vacuum in the orthogonal polarization [7], which is equivalent to achieving polarization squeezing.

In previous works [8] the interaction between a cloud of cold cesium atoms placed in a high finesse optical cavity and a *circularly* polarized laser beam nearly resonant with an atomic transition has been studied. Because of optical pumping, the atomic medium is conveniently modeled by an ensemble of two-level atoms. The saturation of the optical transition gives rise to an intensity-dependent refraction index. It is well known that the interaction of the light with a Kerr-like medium produces bistable behavior of the light transmitted by the cavity and that, at the turning point of the bistability curve, the quantum fluctuations of the light can be strongly modified and generate quadrature squeezing [9]. A noise reduction of 40% has thus been observed in our group [8].

In this Letter, we focus on the theoretical and experimental investigation of polarization squeezing via the interaction of a *linearly* polarized laser beam with cold cesium atoms. In this configuration, the two-level atom model is no longer applicable and the situation much more complicated. We describe the interaction between light

and the atomic medium by means of an X-like four-level quantum model based on the linear input-output method. Our theoretical analysis shows clearly that competitive optical pumping may result in polarization switching, and polarization squeezing is predicted by the model [10]. In agreement with the model we observe quadrature squeezing in the probe laser mode *and* in the orthogonal vacuum mode. Experimentally, we obtain a polarization squeezing of 13% and we show for the first time that the quantum Stokes parameters for very weak beams can be measured together with their phases using a local oscillator (LO). In our case squeezing is due to cross-Kerr effect induced by the mean field rather than to the polarization self-rotation responsible for polarization switching.

The configuration used in the experiment is described in detail in [8]. In Fig. 1 we present the main features of the setup. The cesium atoms are cooled in a standard magneto-optical trap which operates with three orthogonal circularly polarized trapping beam generated by a Ti:sapphire laser and an inhomogeneous magnetic field.

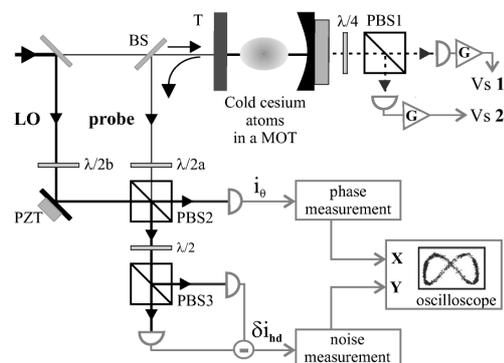


FIG. 1. Experimental setup: PBS: polarizing beam splitter; BS: 10/90 beam splitter; $\lambda/2$: half-wave plate; PZT: piezoelectric ceramic.

The trapping Ti:sapphire laser is detuned by 3 times the linewidth of the upper state on the low frequency side of the $6S_{1/2}, F = 4$ to $6P_{3/2}, F = 5$ transition. To prevent atoms from being optically pumped to the $6S_{1/2}, F = 3$ state, we superimpose a diode laser tuned to the $6S_{1/2}, F = 3$ to $6P_{3/2}, F = 4$ transition to the trapping beams. We use a 25 cm long linear cavity built around the cell. The cavity is close to the hemifocal configuration with a waist of 260 μm . The coupling mirror has a transmission coefficient T of 10%; the rear mirror is highly reflecting. Hence, the cavity is close to the bad cavity limit for which the cavity linewidth ($\kappa = 5$ MHz) is larger than the atomic linewidth ($\gamma = 2.6$ MHz). We probe the atoms with a linearly polarized laser beam detuned by about 50 MHz in the red of the $6S_{1/2}, F = 4$ to $6P_{3/2}, F = 5$ transition. The optical power of the probe beam ranges from 5 to 15 μW . Under these conditions, the number of atoms interacting with the light beam is about 10^6 – 10^7 . The polarization of the light transmitted by the cavity is analyzed with a quarter-wave plate and a polarizing beamsplitter (PBS1), so that the signals Vs1 and Vs2 detected by the photodiodes at the output of the cavity (see Fig. 1) give the amount of, respectively, left-handed (I_+) and right-handed (I_-) circular light.

A typical recording of the transmitted intensities I_{\pm} as a function of the cavity length is shown in Fig. 2: starting from the left up to point A, the polarization remains linear (nearly equal amount of circular polarized light on both photodiodes), then it becomes circular. This polarization switching was known to occur in Fabry-Perot cavities containing atomic vapors with degenerate sublevels in the ground state [11,12]. In the experiment the probe beam is nearly resonant with the $6S_{1/2}, F = 4$ to $6P_{3/2}, F = 5$ transition: in principle, all of the 20 Zeeman sublevels are involved in the interaction. In order to get a qualitative physical insight into this problem, avoiding too heavy calculations, we model the atomic medium as an X-like four-level system [see Fig. 3].

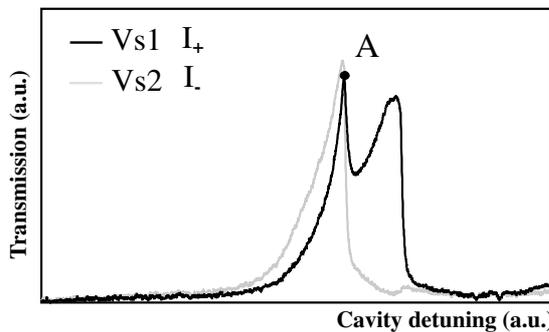


FIG. 2. Analysis of the circular polarization content of the light transmitted by the cavity and detected by the photodiodes shown in Fig. 1. Polarization switching occurs at point A. The power of the incident light is 7 μW .

The competitive optical pumping between the circular component σ_{\pm} of light makes the linear polarization unstable inside the cavity above some intensity threshold. The optical pumping is responsible for polarization switching and the general shape of the cavity resonance curve [see Fig. 2] is well understood within this theoretical frame [10–12]. Alternatively, the polarization switching threshold may be interpreted as a laser oscillation threshold for the mode orthogonal to the main polarization mode [10]. Here we are interested in the quantum fluctuations of the light, which can be strongly modified via the interaction with the atoms. When the polarization of the light is circular, the situation is analogous to the previous experimental scheme when the incoming field was circularly polarized [8]. We therefore focus in the following on the case for which the polarization remains linear along the x axis. The saturation of the σ_{\pm} components of light causes the medium to behave as a Kerr-like medium for the mean field \hat{A}_x . In addition, the vacuum orthogonal \hat{A}_y mode experiences a nonlinear dephasing via cross-Kerr effect [4,10]. This system is then expected to generate quadrature squeezing for both modes; in the large detuning limit [$\Delta \gg \gamma$], the equation for the vacuum mode fluctuations reads [10]

$$\frac{d\delta\hat{A}_y}{dt} = -[\kappa + i(\Delta_c - \Delta_0)]\delta\hat{A}_y - i\Delta_0 \frac{s_x}{2} \left[2\delta\hat{A}_y - \frac{\langle\hat{A}_x\rangle^2}{|\langle\hat{A}_x\rangle|^2} \delta\hat{A}_y^\dagger \right] + \frac{2\kappa}{\sqrt{T}} \delta\hat{A}_y^{\text{in}}, \quad (1)$$

with Δ_c the cavity detuning, $\Delta_0 = 2Ng^2\kappa/\Delta T$ the linear dephasing (N is the number of atoms and g the coupling constant), $s_x = 2g^2|\langle\hat{A}_x\rangle|^2/\Delta^2$ the saturation parameter, and $\delta\hat{A}_y^{\text{in}}$ the incident field fluctuations. The cross-Kerr induced term has two contributions: a dephasing ($\propto |\langle\hat{A}_x\rangle|^2\delta\hat{A}_y$) and the term in $\langle\hat{A}_x\rangle^2\delta\hat{A}_y^\dagger$, responsible for the squeezing of this mode. A similar equation can be

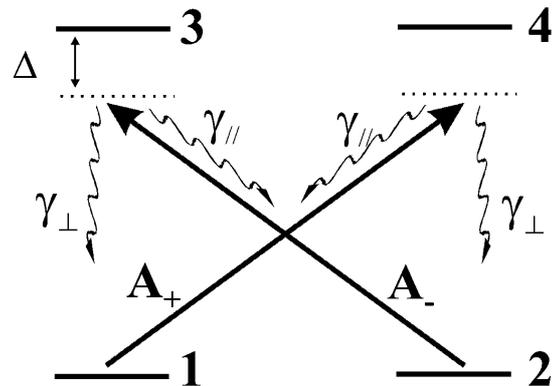


FIG. 3. Schematic energy level diagram for the X-like four-level system: $\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel} = \gamma$ is the optical dipole decay rate; Δ is the (large) detuning from resonance.

derived for the mean field \hat{A}_x , for which the squeezing is then generated via the usual Kerr term ($\propto \langle \hat{A}_x \rangle^2 \delta \hat{A}_x^\dagger$). These equations are valid when the large excess noise due to optical pumping can be neglected, that is, for times smaller than the optical pumping time, in contrast with Ref. [7]. Squeezing is then predicted for noise frequencies higher than the inverse optical pumping time.

Using the experimental setup described in Fig. 1, we have measured the quadrature noise of both modes. The signal recorded at the output of the cavity (see Fig. 2) is used to lock the cavity length on the regime where the polarization remains linear. After interacting with the atoms, both fields are mainly reflected by the beam splitter (BS) and then mixed on PBS2 with a 10 mW LO beam. Using the half-wave plate $\lambda/2a$, we are able to send either the mean field mode or the orthogonal vacuum mode to PBS3 and perform the usual homodyne detection. By varying the relative phase of the LO with respect to the probe beam, we can detect the noise features of all the quadratures of the field. In agreement with the theoretical predictions, we observe quadrature squeezing on both the main mode and the orthogonal mode. The results are 5% (7% after correction for optical losses, mainly due to BS) of noise reduction for the main polarization mode at 6 MHz and 13% (18% after correction) for the squeezed vacuum state at 3 MHz, as shown in Fig. 4. This system is then able to produce simultaneously two squeezed modes, for which the relative phases are intrinsically fixed. Let us note that these

two squeezed modes can be used to generate a pair of entangled beams, which will be presented in a forthcoming publication [13].

In the following, we focus on the study of the noise of the mode with orthogonal polarization with respect to the main mode, commonly referred to as *polarization noise*. The characterization of the quantum features of the polarization state relies on the measurement of the quantum Stokes parameters [14]. They are defined from their classical counterparts

$$\begin{aligned}\hat{S}_0 &= \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x + \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y, & \hat{S}_1 &= \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x - \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y, \\ \hat{S}_2 &= \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_y + \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_x, & \hat{S}_3 &= i(\hat{A}_y^\dagger \hat{A}_x - \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_y).\end{aligned}$$

These operators obey the commutation relations $[\hat{S}_0, \hat{S}_i] = 0$ and $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \epsilon_{ijk} 2i\hat{S}_k$ ($i = 1, 2, 3$). Their spectral noise densities satisfy uncertainty relations $V_{\hat{S}_i}(\omega)V_{\hat{S}_j}(\omega) \geq |\epsilon_{ijk}\langle \hat{S}_k \rangle|^2$. In our case the light is linearly polarized along the x axis, then $\langle \hat{S}_0 \rangle = \langle \hat{S}_1 \rangle = \alpha_x^2$ and $\langle \hat{S}_2 \rangle = \langle \hat{S}_3 \rangle = 0$, where $\langle \hat{A}_x \rangle = \alpha_x$ is chosen real. Then the only nontrivial Heisenberg inequality is $V_{\hat{S}_2}(\omega)V_{\hat{S}_3}(\omega) \geq \alpha_x^4$. *Polarization squeezing* is then achieved if $V_{\hat{S}_2}$ or $V_{\hat{S}_3}$ is below the coherent state value α_x^2 . The fluctuations of \hat{S}_2 and \hat{S}_3 are related to the fluctuations of the quadratures of the vacuum orthogonal mode

$$\delta \hat{S}_2 = \alpha_x(\delta \hat{A}_y^\dagger + \delta \hat{A}_y), \quad \delta \hat{S}_3 = i\alpha_x(\delta \hat{A}_y^\dagger - \delta \hat{A}_y). \quad (2)$$

The physical meaning of the Stokes parameter fluctuations is the following: the $\delta \hat{S}_2$ fluctuations lead to a geometric jitter of the polarization axis, whereas the $\delta \hat{S}_3$ fluctuations are linked to ellipticity fluctuations. It can be seen from Eq. (2) that these fluctuations are related to the amplitude and phase fluctuations of \hat{A}_y . Therefore, polarization squeezing is equivalent to vacuum squeezing on the orthogonal mode.

The measurement of the Stokes parameters can be carried out directly by means of two balanced photodiodes and suitable combinations of half-wave and quarter-wave plates [14]. In our setup, however, the power of the probe beam interacting with the atoms ($\sim 10 \mu\text{W}$) is not sufficient, so that we need a LO for the detection. The fluctuations of the vacuum mode \hat{A}_y are measured using the homodyne detection described above. Following Eq. (2) the photocurrent can be expressed in terms of the fluctuations of \hat{S}_2 and \hat{S}_3 :

$$\delta i_{hd} \propto \cos \theta_{hd} \delta \hat{S}_2 + \sin \theta_{hd} \delta \hat{S}_3 \equiv \delta \hat{S}_{\theta_{hd}}, \quad (3)$$

where θ_{hd} is the relative phase between the LO and the mean field. As θ_{hd} is varied in time, we correspondingly detect the fluctuations of the Stokes parameter $\hat{S}_{\theta_{hd}}$. For instance, $\theta_{hd} = 0$ (respectively, $\pi/2$) corresponds to the detection of the fluctuations of \hat{S}_2 (respectively, of \hat{S}_3). Hence, in the experiment we can get the

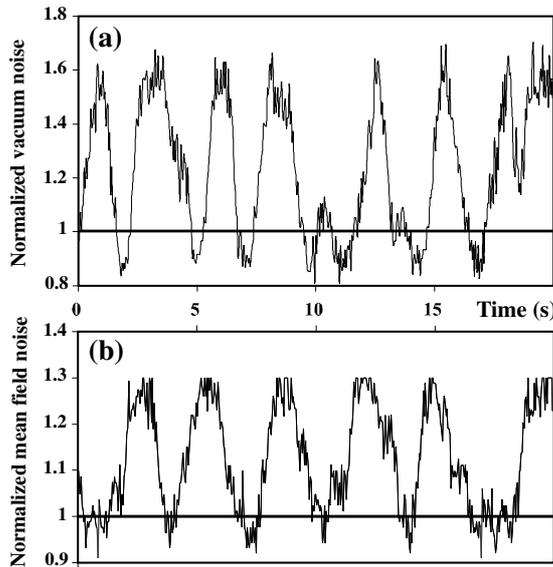


FIG. 4. Normalized quadrature noise (a) for the vacuum field mode at 3 MHz and (b) for the mean field mode at 6 MHz. The best squeezing is 13% for the vacuum mode and 5% for the mean field mode.

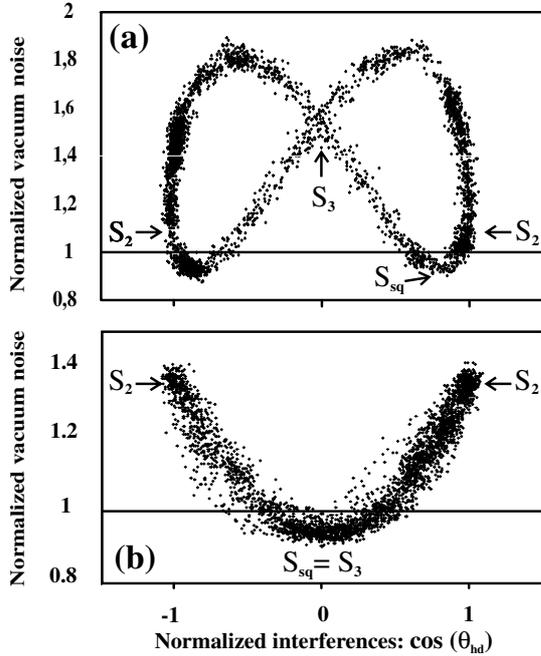


FIG. 5. Normalized quadrature noise at 3 MHz for the vacuum mode \hat{A}_y vs the normalized interference signal: $\cos\theta_{hd}$. The general case is shown in curve (a): polarization squeezing is achieved when $\theta_{hd} = \theta_{sq} = \pm 30^\circ$: a linear combination of \hat{S}_2 and \hat{S}_3 is squeezed. In curve (b), \hat{S}_3 is squeezed ($\theta_{sq} = \pm \pi/2$).

Stokes parameters simply by simultaneously measuring the relative phase θ_{hd} and the quadrature noise of the vacuum mode. This measurement is readily performed by setting the half-wave plate before PBS2 in such a way that the \hat{A}_y mode is sent to the homodyne detection; the mean field \hat{A}_x goes through the other port of the beam splitter and is detected together with a portion of the LO by a photodiode (see Fig. 1). The phase is determined via the interference signal between LO and \hat{A}_x ($i_\theta \propto \cos\theta_{hd}$). The two signals i_θ and δi_{hd} are sent to the XY channel of the oscilloscope, giving the characteristic curves reported below.

In Fig. 5 the normalized quadrature noise of \hat{A}_y , obtained at a noise frequency of 3 MHz, is plotted as a function of the relative phase between the mean field and the LO. In agreement with Eq. (3), it can be seen that the noise of \hat{S}_2 is given by the extreme points $\theta_{hd} = 0, \pm\pi$ on the diagram and that of \hat{S}_3 by the center point $\theta_{hd} = \pm\pi/2$. In general, for an arbitrary squeezed quadrature, a linear combination of \hat{S}_2 and \hat{S}_3 is squeezed [Fig. 5(a)]. We find that the polarization squeezing strongly depends on the operating point and on the noise frequency. For instance, in Fig. 5(b), we see that \hat{S}_3 is squeezed.

To conclude, we have demonstrated that the nearly resonant interaction of a linearly polarized laser beam with a cloud of cold atoms in an optical cavity can produce quadrature squeezing on the mean field mode *and* on the orthogonally polarized vacuum mode. We have shown that these results can be interpreted as polarization squeezing and developed a method to measure the quantum Stokes parameters for weak beams, using a local oscillator and a standard homodyne detection.

This work was supported by the QIPC European Project No. IST-1999-13071 (QUICOV).

- [1] A. Furosawa, J. Sørensen, S. Braunstein, C. Fuchs, H. Kimble, and E. S. Polzik, *Science* **282**, 706 (1998); B. Julsgaard, A. Koshekin, and E. S. Polzik, *Nature (London)* **413**, 400 (2001).
- [2] J. Hald, J. L. Sørensen, C. Schori, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1319 (1999); J. Hald and E. S. Polzik, *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.* **3**, 83 (2001).
- [3] A. S. Chirkin, A. A. Orlov, and D. Yu. Paraschuk, *Quantum Electron.* **23**, 870 (1993); A. P. Alodjants, A. M. Arakelian, and A. S. Chirkin, *J. Eng. Phys. Thermophys.* **108**, 63 (1995); N. V. Korolkova and A. S. Chirkin, *J. Mod. Opt.* **43**, 869 (1996).
- [4] L. Boivin and H. A. Haus, *Opt. Lett.* **21**, 146 (1996); J. Heersink, T. Gaber, S. Lorenz, O. Glöckl, N. Korolkova, and G. Leuchs, *quant-ph/0302100*.
- [5] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yürke, and A. LaPorta, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2153 (1987).
- [6] W. P. Bowen, R. Schnabel, H. A. Bachor, and P. K. Lam, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093601 (2002).
- [7] A. B. Matsko, I. Novikova, G. R. Welch, D. Budker, D. F. Kimball, and S. M. Rochester, *Phys. Rev. A* **66**, 043815 (2002); I. Novikova, A. B. Matsko, and G. R. Welch (private communication).
- [8] A. Lambrecht, E. Giacobino, and J. M. Courty, *Opt. Commun.* **115**, 199 (1995); A. Lambrecht, T. Coudreau, A. M. Steimberg, and E. Giacobino, *Europhys. Lett.* **36**, 93 (1996); A. Z. Khoury, T. Coudreau, C. Fabre, and E. Giacobino, *Phys. Rev. A* **57**, 4770 (1998).
- [9] L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud, and E. Giacobino, *Phys. Rev. A* **46**, 4397 (1992).
- [10] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, and E. Giacobino, *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.* **5**, S1 (2003).
- [11] E. Giacobino, *Opt. Commun.* **56**, 249 (1985).
- [12] S. Cecchi, G. Giusfredi, E. Petriella, and P. Salieri, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1928 (1982); M. W. Hamilton, W. J. Sandle, J. T. Chilwell, J. S. Satchell, and D. M. Warrington, *Opt. Commun.* **48**, 190 (1983).
- [13] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, and E. Giacobino, *quant-ph/0306152*.
- [14] N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T. C. Ralph, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. A* **65**, 052306 (2002); N. Korolkova, Ch. Silberhorn, O. Glöckl, S. Lorenz, Ch. Marquardt, and G. Leuchs, *Eur. Phys. J. D* **18**, 229 (2002).

Polarization squeezing in a four-level system

V Josse¹, A Dantan, A Bramati, M Pinard and E Giacobino

Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, F75252 Paris Cedex 05, France

E-mail: josse@spectro.jussieu.fr

Received 18 February 2002, accepted for publication 15 May 2003

Published 6 August 2003

Online at stacks.iop.org/JOptB/5/S513

Abstract

We present a theoretical study of an ensemble of X-like four-level atoms placed in an optical cavity driven by a linearly polarized field. We show that the self-rotation (SR) process leads to polarization switching (PS). Below the PS threshold, both the mean field mode and the orthogonal vacuum mode are squeezed. We provide a simple analysis of the phenomena responsible for the squeezing and trace the origin of vacuum squeezing not to SR, but to a crossed Kerr effect induced by the mean field. Last, we show that this vacuum squeezing can be interpreted as *polarization squeezing*.

Keywords: Polarization switching, polarization squeezing, cold atoms

1. Introduction

The principal limit in high precision measurements and optics communication is given by the quantum fluctuations of light. For several years, in order to beat the standard quantum limit, a number of methods consisting in generating squeezed states of light have been developed [1]. In connection with quantum information technology the quantum features of the polarization of light have raised a lot of attention. The generation of polarization squeezing has been achieved experimentally by mixing an OPO-produced squeezed vacuum with a coherent field [2, 3], or more recently by mixing two independent OPA-originated squeezed beams on a polarizing beamsplitter [4]. Several schemes using Kerr-like media have also been proposed [5] and realized [6, 7], and very recently, Matsko *et al* [8] proposed to propagate a linearly polarized field through a self-rotative atomic medium to produce vacuum squeezing on the orthogonal polarization. The Kerr-like interaction between cold caesium atoms placed in a high finesse optical cavity and a circularly polarized field has been studied in our group and a field noise reduction of 40% has been obtained [9, 10]. We recently observed experimental evidence of polarization squeezing for a similar set-up but with a *linear* incoming polarization [11]. While the interaction with a circular polarized field straightforwardly leads to a two-level model for the atoms and interpretations in terms

of optical bistability and saturation-induced squeezing, the situation is more complicated when the polarization of the incoming field is linear and requires a more refined model. In this paper, we present a theoretical investigation of polarization squeezing generated by an ensemble of X-like four-level atoms illuminated by a linearly polarized field. To be as realistic as possible, the experimental parameter values of [9–11] are taken as references. In the first part of the paper, we give a detailed study of the steady state and show that self-rotation (SR) is responsible for polarization switching (PS) and saturation leads to tristability. We derive simple analytical criteria for the existence of elliptically polarized solutions and the stability of the linearly polarized solution. This steady state study is essential to work out the interesting working points for squeezing. In the second part, we focus on the case in which the polarization remains linear (below the PS threshold) and study the occurrence of squeezing in the system: we show that both the linearly polarized field mode and the orthogonal vacuum mode are squeezed. Analytical spectra are derived in the low saturation limit and enable a clear discussion of the physical effects responsible for polarization squeezing; in particular, we demonstrate that SR is associated with strong atomic noise terms preventing vacuum squeezing at low frequency. On the other hand, saturation accounts for the squeezing on the mean field and the crossed Kerr effect enables us to retrieve vacuum squeezing at high frequency. The analytical results are compared with a full quantum calculation. Finally, we derive the Stokes parameters [12] and relate their fluctuations

¹ Author to whom any correspondence should be addressed.

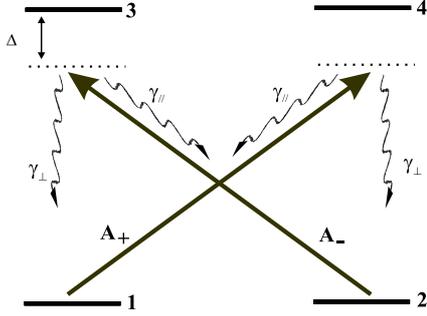
V Josse *et al*

Figure 1. X-like four-level atomic configuration.

to those of the vacuum field. The vacuum squeezing obtained is then shown to be equivalent to the squeezing of one Stokes parameter, thus achieving *polarization squeezing* [13].

2. The model

The system considered in this paper is a set of N four-level cold atoms interacting in an optical cavity driven by a linearly polarized field as represented in figure 1. We denote by A_{\pm} the slowly varying envelope operators associated with the σ_{\pm} components of the light [14]. They are defined from the standard linear polarization components

$$A_+ = -\frac{A_x - iA_y}{\sqrt{2}}, \quad A_- = \frac{A_x + iA_y}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

The atomic frequencies are both equal to $\omega_{at} = \omega_{13} = \omega_{24}$. The field frequency is ω and the detunings from atomic resonance are equal on both transitions to $\Delta = \omega_{at} - \omega$. The four-level system is described using collective operators for the N atoms of the ensemble, the optical dipoles being defined in the rotating frame associated with the laser frequency (e.g. $\sigma_{14} = \sum_{i=1}^N e^{i\omega t} |1\rangle_i \langle 4|_i$). The coupling constant between the atoms and the field is defined by $g = \mathcal{E}_0 d / \hbar$, where d is the atomic dipole and $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0 S c}$. With this definition, the mean square value of the field is expressed as a number of photons per second. As in figure 1, the population of level 3 decays with rate $2\gamma_{\perp}$ to level 1 and with rate $2\gamma_{\parallel}$ to level 2, the dipole decay rate being $\gamma = \gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp}$. We consider the case of saturated optical pumping and neglect the relaxation rate of the ground state populations. This approximation is well verified for alkali cold atoms [15]. With these conventions, the atom-field Hamiltonian is

$$H = \hbar g [A_+ \sigma_{41} + A_+^{\dagger} \sigma_{14} + A_- \sigma_{32} + A_-^{\dagger} \sigma_{23}]. \quad (2)$$

The atomic evolution is then governed by a set of quantum Heisenberg-Langevin equations

$$\frac{d\sigma_{14}}{dt} = -(\gamma + i\Delta)\sigma_{14} - igA_+(\sigma_{11} - \sigma_{44}) + F_{14}, \quad (3)$$

$$\frac{d\sigma_{23}}{dt} = -(\gamma + i\Delta)\sigma_{23} - igA_-(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + F_{23}, \quad (4)$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = 2\gamma_{\perp}\sigma_{33} + 2\gamma_{\parallel}\sigma_{44} - ig(A_+^{\dagger}\sigma_{14} - A_+\sigma_{41}) + F_{11}, \quad (5)$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = 2\gamma_{\parallel}\sigma_{33} + 2\gamma_{\perp}\sigma_{44} - ig(A_-^{\dagger}\sigma_{23} - A_-\sigma_{32}) + F_{22}, \quad (6)$$

$$\frac{d\sigma_{33}}{dt} = -2\gamma\sigma_{33} + ig(A_+^{\dagger}\sigma_{23} - A_-\sigma_{32}) + F_{33}, \quad (7)$$

$$\frac{d\sigma_{44}}{dt} = -2\gamma\sigma_{44} + ig(A_+^{\dagger}\sigma_{14} - A_+\sigma_{41}) + F_{44}. \quad (8)$$

Note that we have not reproduced all the atomic equations, but only those of interest for the following. The Langevin operators $F_{\mu\nu}$ are δ -correlated and their correlation functions are calculated via the quantum regression theorem [16]. We consider a ring cavity with T the transmission of the cavity coupling mirror, ω_c the cavity resonance frequency closest to ω and τ the cavity round-trip time. The cavity dephasing is $\Phi_c = (\omega - \omega_c)\tau$. The incoming quantum fields are A_{\pm}^{in} and the field equations read

$$\tau \frac{dA_+}{dt} = -(T/2 + i\Phi_c)A_+ - ig\sigma_{14} + \sqrt{T}A_+^{in}, \quad (9)$$

$$\tau \frac{dA_-}{dt} = -(T/2 + i\Phi_c)A_- - ig\sigma_{23} + \sqrt{T}A_-^{in}. \quad (10)$$

3. Steady state

3.1. Atomic steady state

The atomic steady state is readily obtained by setting the time derivatives to zero and using the fact that a Langevin operator mean value is zero. Defining saturation parameters s_{\pm} for both polarizations,

$$s_{\pm} = \frac{2g^2 | \langle A_{\pm} \rangle |^2}{\Delta^2 + \gamma^2} = \frac{\Omega_{\pm}^2/2}{\Delta^2 + \gamma^2}, \quad (11)$$

the atomic steady state is given by

$$\langle \sigma_{14} \rangle = \frac{-igN \langle A_+ \rangle}{\gamma + i\Delta} \frac{s_-}{s_+ + s_-} \frac{1}{1+S}, \quad (12)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = \frac{-igN \langle A_- \rangle}{\gamma + i\Delta} \frac{s_+}{s_+ + s_-} \frac{1}{1+S}$$

$$\langle \sigma_{11} \rangle = N \frac{s_-}{s_+ + s_-} \frac{1 + s_+/2}{1+S}, \quad (13)$$

$$\langle \sigma_{22} \rangle = N \frac{s_+}{s_+ + s_-} \frac{1 + s_-/2}{1+S}$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{44} \rangle = \frac{N}{4} \frac{S}{1+S} \quad \text{with: } S = \frac{2s_+s_-}{s_+ + s_-}. \quad (14)$$

Ω_{\pm} are the Rabi frequencies and S is the coupling saturation parameter which plays a symmetrical role with respect to both polarization components. For an x -polarized field, $S = s_+ = s_- = s_x/2$ is directly related to the intracavity field intensity.

3.2. Polarization switching

It is well known that such a coupled system may exhibit PS when driven by a linearly polarized field [17, 18]. In fact, the intracavity field intensities depend on the atomic dephasings Φ_{\pm} and absorptions a_{\pm}

$$\Phi_{\pm} = 2\Phi_0 \frac{s_{\mp}}{s_+ + s_-} \frac{1}{1+S}, \quad a_{\pm} = 2a_0 \frac{s_{\mp}}{s_+ + s_-} \frac{1}{1+S} \quad (15)$$

$$\Phi_0 = \frac{Ng^2\Delta}{2(\Delta^2 + \gamma^2)}, \quad a_0 = \frac{Ng^2\gamma}{2(\Delta^2 + \gamma^2)}, \quad (16)$$

with Φ_0 and a_0 the linear dephasing and absorption in the absence of saturation. These quantities depend in turn on the intensities to yield a complex coupled system. In order to derive analytical criteria for PS, we follow the method given in [18] and decompose dephasings and losses into their linear and non-linear parts,

$$\Phi_{\pm} = \Phi_l \pm \Phi_{SR} \quad \text{with } \Phi_l = \frac{\Phi_0}{1+S}, \quad \Phi_{SR} = \Phi_{l,SR}, \quad (17)$$

$$a_{\pm} = a_l \pm a_{SR} \quad \text{with } a_l = \frac{a_0}{1+S}, \quad a_{SR} = a_{l,SR}, \quad (18)$$

where Φ_{SR} and a_{SR} are the non-linear circular birefringence and dichroism, related to the ellipticity ϵ [19]

$$x_{SR} = \frac{s_- - s_+}{s_+ + s_-} = -\sin 2\epsilon. \quad (19)$$

Thus, as pointed out in the literature [20, 21], the optical pumping induces non-linear SR of elliptically polarized light. It will be shown in the next section that this effect is responsible for PS in a cavity configuration. Let us first focus on the solution for the σ_{\pm} components. Normalizing all the dephasings and absorptions by $T/2$ ($\delta_j = 2\Phi_j/T$ and $\alpha_j = 2a_j/T$), equations (9) and (10) read in steady state

$$s_{\pm} = \frac{s_{max}}{(1 + \alpha_l \pm \alpha_{SR})^2 + (\delta_l \pm \delta_{SR} - \delta_c)^2}, \quad (20)$$

with $s_{max} = 2/Ts_v^{in}$ the maximal intracavity intensity in the absence of absorption. Replacing (20) in (19), we derive the equation for x_{SR} : non-zero solutions correspond to elliptically polarized states. After straightforward calculations, we obtain

$$x_{SR} = 0 \quad \text{or} \quad (\alpha_l^2 + \delta_l^2)x_{SR}^2 = \delta_l^2 + \alpha_l^2 - \delta_c^2 - 1. \quad (21)$$

The first trivial solution corresponds to the linearly polarized field. It follows from the second equation and (17) and (18) that elliptically polarized states may exist as soon as the existence criterion C_{ex} is satisfied

$$C_{ex} = \frac{\delta_0^2 + \alpha_0^2}{(1+S)^2} - \delta_c^2 - 1 \geq 0 \quad (s_+ \neq s_-). \quad (22)$$

Note that the absorption brings a positive contribution to the existence of asymmetrical solutions: this is due to the fact that non-linear circular dichroism produces ‘self-elliptization’ of the field. However, this criterion gives no information on the stability of the solutions. In order to get some physical insight into this complicated problem it is useful to look at the evolution of the linearly polarized solution.

3.3. Interpretation of polarization switching

In this section, we give a simple interpretation of PS as the threshold for laser oscillations. Let us consider the linearly polarized solution along the x axis. The adiabatic elimination of the atomic variables leads to

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} \frac{dA_y}{dt} &= -(1 + i\delta_c)A_y + (i\delta_l - \alpha_l)A_y \\ &\quad - (\delta_{SR} + i\alpha_{SR})A_x + \frac{2}{\sqrt{T}}A_y^{in}, \end{aligned} \quad (23)$$

where $\kappa = T/2\tau$ is the intracavity field decay rate. In (23) all terms have zero mean value and are of order 1 in fluctuations ($\langle A_x \rangle \neq 0$). Using $x_{SR}A_x = i(A_y - A_x^2/|A_x|^2 A_y^{\dagger})$, one obtains

$$\kappa^{-1} \frac{dA_y}{dt} = -(1 + i\delta_c)A_y + (i\delta_l - \alpha_l) \frac{A_x^2}{|A_x|^2} A_y^{\dagger} + \frac{2}{\sqrt{T}} A_y^{in}. \quad (24)$$

Owing to SR the fluctuations of the orthogonal mode undergo a phase dependent gain. A similar equation has already been derived in previous theoretical works in a single-pass scheme [8]. In our configuration the presence of the cavity will lead to oscillations of this mode as soon as the phase sensitive gain is larger than the losses. This condition may be expressed as follows:

$$C_{PS} = \frac{\delta_0^2 + \alpha_0^2}{(1 + s_x/2)^2} - \delta_c^2 - 1 \geq 0. \quad (25)$$

Obviously, the linearly polarized solution is not stable when $C_{PS} \geq 0$. However, the adiabatic elimination of the atomic variables does not *a priori* take all causes for instability into account. Yet, we checked that this threshold analysis was consistent with a numerical calculation of the atom-field stability matrix. In the following we use C_{PS} as a stability criterion for the linearly polarized solution. Nevertheless, it does not yield information on the stability of the elliptically polarized solutions, which has to be evaluated numerically.

Besides, the ability of a system to produce squeezing being closely related to its static properties, the fluctuations of the vacuum field are expected to be strongly modified in the vicinity of the PS threshold. Since equation (24) is similar to that of a degenerate optical parametric oscillator (OPO) below the threshold [22], perfect squeezing could be obtained via SR. However, the atomic noise is not included in (24) and is to be carefully evaluated.

3.4. Optical pumping regime

PS is caused by a competition between the two σ_{\pm} optical pumping processes. We can understand the main features of this effect by restraining ourselves to the case where absorption and saturation are negligible: $\Delta \gg \gamma$ and $s_x \ll 1$. Neglecting the excited state populations, the optical pumping equations for the ground state populations are

$$\left(\frac{d\sigma_{11}}{dt} \right)_{pumping} = -\gamma_{\perp s_+} \sigma_{11} + \gamma_{\perp s_-} \sigma_{22}, \quad (26)$$

$$\left(\frac{d\sigma_{22}}{dt} \right)_{pumping} = -\gamma_{\perp s_-} \sigma_{22} + \gamma_{\perp s_+} \sigma_{11}, \quad (27)$$

so that the σ_+ component tends to pump the atoms into level 2, the σ_- into 1, and, in steady state, $\sigma_{11} \propto s_-$ and $\sigma_{22} \propto s_+$. The circular birefringence δ_{SR} is proportional to the ground state population difference, and, consequently, to the intensity difference $s_+ - s_-$ (see (19)). This simple analysis allows relation of SR to competitive optical pumping and will help us interpret the resonance curves.

Under the previous conditions both criteria (22)–(25) are equivalent, and it follows that the linearly polarized solution

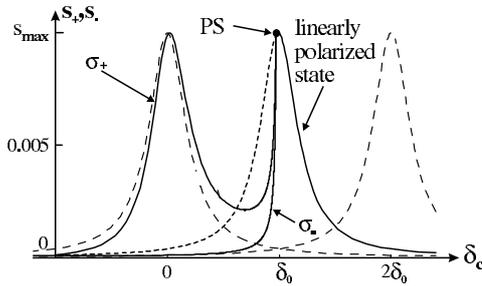
V Josse *et al*

Figure 2. Resonance curves in the optical pumping regime. The parameters are $\delta_0 = 5$ and $s_{max} = 0.01$. The cavity dephasing corresponding to PS is $\delta_{PS} = 4.85$, close to δ_0 as given by the PS criterion. When the cavity detuning is scanned from the right, the linear solution is stable until $\delta_c = \delta_{PS}$ and unstable afterwards. Then the elliptically polarized solutions, s_+ and s_- , become stable for $|\delta_c| \leq \delta_{PS}$. We also plot the resonance peaks (dashed curve) for the cavity with zero or N atoms, in the absence of the SR phenomenon.

bifurcates into an elliptically polarized state for $|\delta_c| \leq \delta_{PS} = \sqrt{\delta_0^2 - 1}$. Consequently, PS is observed as soon as the linear dephasing is greater than half the cavity bandwidth ($\delta_0 \geq 1$). This represents an easily accessible condition from an experimental point of view: in our caesium experiment using a magneto-optical trap [9, 10], the number of atoms interacting with the light is $N \simeq 7 \times 10^6$. To find realistic experimental parameters, we assimilate each one of our X-model transitions to the transition $6S_{1/2}(F=4) \rightarrow 6P_{3/2}(F=5)$ of the D_2 line of ^{133}Cs , for which $\gamma/2\pi = 2.6$ MHz. The square of the coupling constant g is proportional to the ratio of the diffusion section at resonance to the transversal surface $S = 0.1 \text{ mm}^2$ of the beam, $g^2 = 3\gamma\lambda^2/4\pi S = 4.24 \text{ Hz}$. The cavity transmission is 10%. To obtain a sufficiently high non-linearity, keeping the absorption low, a good detuning is $\Delta \simeq 20\gamma$, so that an approximate value for the linear detuning is $\delta_0 \simeq 5$. Note that the saturation parameters of (11) are simply

$$s_{\pm} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta^2} \frac{I_{\pm}}{I_{sat}}. \quad (28)$$

The saturation intensity being $I_{sat} = \epsilon_0 c \gamma^2 \hbar^2 / d^2 = 1.05 \text{ mW cm}^{-2}$ [9], typical values for s_{\pm} are 0.1–1.

In figure 2 the admissible intensities for the σ_+ and σ_- components are represented versus the cavity detuning for typical experimental values of the parameters. The peak centred on $\delta_c = \delta_0$ corresponds to the symmetrical solution. When the cavity is scanned from right to left, the linearly polarized field ($s_+ = s_-$) intensity increases until the PS threshold is reached ($\delta_c = \delta_{PS} \simeq \delta_0$). Then one elliptically polarized state becomes stable. The predominant circular component, say σ_+ , creates, via the optical pumping process (26), (27), a positive orientation of the medium $\sigma_{11} \simeq 0$, $\sigma_{22} \simeq N$. Since the atomic dephasing decreases to zero for the σ_+ component ($\delta_+ \simeq 0$), as if it were propagating in an empty cavity, the solution draws close to the zero-dephasing peak, that is, close to resonance in the range $|\delta_c| \leq \delta_{PS}$. On the other hand the σ_- component ‘sees’ all the atoms ($\delta_- \simeq 2\delta_0$) and breaks down to fit the peak centred on $\delta_c = 2\delta_0$, which is far from resonance. In order to illustrate this interpretation of the resonance curves, the two Airy peaks centred on $\delta_c = 0$ and $2\delta_0$

are represented in figure 2. As the cavity detuning is decreased both asymmetrical solutions reunite when the criterion (25) is no longer satisfied and the linear solution becomes stable again. These simple interpretations will help us understand the much more complex general case, when absorption and saturation come into play.

As discussed in [18], taking into account the ground state relaxation rate γ_0 yields tristability in the unsaturated optical pumping regime ($\gamma_{\perp} s_{\pm} \ll \gamma_0$). We will now show that the optical saturation also leads to tristability.

3.5. Tristability

It is well known that saturation may induce multistability for the linearly polarized field [23] in our configuration and substantially modify the steady state. When the non-linearity is sufficient, there may be three possible values for the x -polarized field intensity. Therefore, saturation is an additional cause of instability for the symmetrical solution. In figure 3, we plotted the same curves as in figure 2, but for higher values of s_{max} and δ_0 . As expected, the linearly polarized state solution is distorted as a consequence of the non-linear effect. The effect of absorption is also clear: whereas the symmetrical peak height is reduced, the σ_+ dominant peak height is not. Indeed, the σ_+ component ‘sees’ no atoms after the switching.

Besides, the system now exhibits tristability for a certain range of the cavity detuning. As mentioned previously, the existence of asymmetrical solutions is related to the positivity of C_{ex} , whereas the stability of the symmetrical solution is given by C_{PS} . For instance, in figure 3, $C_{ex} = 0$ for $\delta_c = \delta_{ex} = 5.6$ and the threshold $C_{PS} = 0$ is reached for a dephasing $\delta_c = \delta_{PS} = 2.6$. Thus, in the range $\delta_{PS} \leq \delta_c \leq \delta_{ex}$, two different sets of asymmetrical solutions exist, in addition to the linear polarization state. This phenomenon is due to the saturation experienced by the σ_+ and σ_- components. As expected, we checked that only the lower branch of each asymmetrical curve is stable, leading to tristability for the polarization state: linear, σ_+ -dominant or σ_- -dominant. The system switches for a different value of the cavity detuning if the cavity is scanned from left to right, or from right to left (see figure 3). Hence, unlike the unsaturated case, saturation induces a multistable behaviour and a hysteresis cycle now appears in the resonance curve.

This brief study of the resonance curve for typical parameters leads to an essential observation: the lower branch of the bistability curve for the linear polarized field is not stable. We may wonder whether there is a domain of the parameter space for which it is not the case. Since the quantum fluctuations are expected to be most reduced in the vicinity of the lower turning point [24, 25], the answer is of crucial importance for squeezing and will be treated in the next section.

3.6. Competition between SR and saturation

To complete the analysis of the steady state, we would like to emphasize that, when the cavity is scanned, PS always happens before reaching the higher turning point of the bistability curve. In order to get some insight into this complicated problem, it is worth looking at figure 4. We plotted the typical S-shaped variation of the linearly polarized field intensity s_x versus the incoming intensity s_{max} , for a fixed value of the

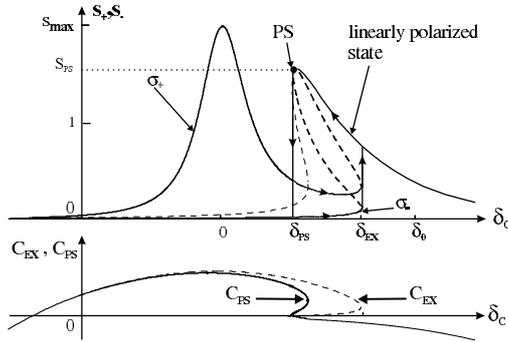


Figure 3. Upper plot: resonance curves for $\delta_0 = 7$, $\Delta = 20\gamma$ and $s_{max} = 2$. The linear absorption is $\alpha_0 = 0.35$. Dashed parts indicate unstable solutions. The switching occurs for $\delta_{PS} = 2.6$ and $S_{PS} = 1.5$. $C_{ex} = 0$ for $\delta_{ex} = 5.6$, so that the tristability range is $2.6 \leq \delta_c \leq 5.6$. The arrows on the hysteresis cycle correspond to increasing and decreasing cavity detuning scan. Below are plotted the two criteria: C_{PS} giving the stability of the linear solution (plain) and C_{ex} giving the existence of asymmetrical solutions (dashed).

cavity detuning δ_c . We choose the parameters so that there is bistability for this state of polarization and report the position of the lower (LT) and the higher (HT) turning points. In the absence of the PS phenomenon, the solutions between HT and LT are unstable (like 2 in figure 4), whereas solutions on the lower (1) and higher (3) branches are stable. However, the stability of the linear polarization is modified by the PS effects. To a fixed value of the dephasing corresponds the PS intensity S_{PS} cancelling C_{PS} in (25); if $S = s_x/2 \leq S_{PS}(\delta_c)$, then the linear polarization is unstable. Hence, if $S_{PS}(\delta_c) \geq S_{HT}$ is satisfied in the whole parameter space, then PS occurs before reaching HT, and, consequently, the lower branch is never stable. This general feature is shown in figure 5, in which we represent different bistability curves as in figure 4. The upper branch of AB is the HT curve (the ensemble of the higher turning points when δ_c is varied); the lower branch is the LT curve. The dashed curve shows the ensemble of the intensities S_{PS} for which the polarization switches. This curve is always above the HT curve, confirming that the linear polarization always becomes unstable on account of PS first. What is more, we see that PS is closer to HT for low values of s_x . We thus expect this situation to be the most favourable to achieve squeezing via optical bistability. We checked that varying the parameters δ_0 and Δ does not change the conclusion.

To conclude this section, we would like to point out that bistability, as well as PS, may disappear when the saturation is too high, as can be seen from figure 4. However, we will focus on the low saturation case in the large detuning limit, which is the most favourable case for squeezing, and provides analytical results, as well as a clear physical understanding.

4. Mean field fluctuations

Since we are interested in the quantum fluctuations, we linearize the quantum operators around their steady state values following the standard linear input-output method [24]. The elliptically polarized solutions are not of great interest for squeezing since the predominant circular component sees no

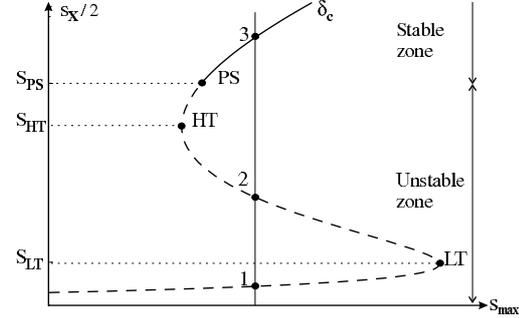


Figure 4. Bistability curve: linearly polarized field intensity $S = s_x/2$ as a function of s_{max} . PS is the switching threshold and HT and LT the higher and lower turning points. For certain incident intensities s_{max} three solutions (1, 2, 3) exist for the intracavity intensity $s_x/2$, of which only one (3) is stable, instead of the usual two (1, 3) in the absence of the PS phenomenon.

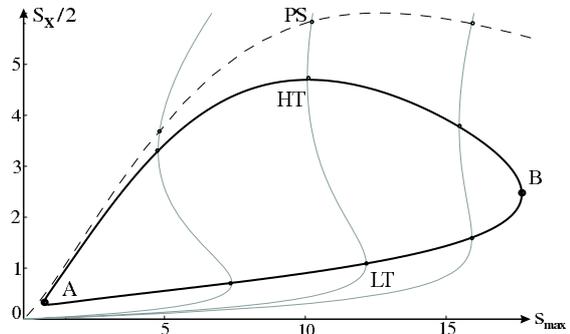


Figure 5. Bistability curves $S = s_x/2$ as a function of s_{max} for field A_x . The three S-shaped curves correspond to different values of the cavity dephasing ($\delta_c = -0.25, 0.3$ and 1.1 from left to right), δ_0 and Δ having the same values as in figure 3. The AB segments represent the HT (higher) and LT (lower) curves. The dashed curve is the ensemble of the intensities S_{PS} for which PS occurs. The system exhibits bistability for $s_A \leq s_{max} \leq s_B$.

atom and the other has negligible intensity. Therefore, in all the following, we focus on the linearly polarized state and study how both the mean field A_x and the orthogonal vacuum field A_y may be squeezed. We have calculated the outgoing field noise spectra via a full quantum treatment (see e.g. [25]) involving the four-level system. The outgoing fields are defined in a standard way from the input-output relation [24]:

$$A_{x,y}^{out} = \sqrt{T} A_{x,y} - A_{x,y}^{in}. \quad (29)$$

Yet, to provide clear interpretations as well as analytical results, we derive simplified equations, first for the mean field mode A_x , then for the vacuum mode A_y . A similar equation to (23) can be derived for the field A_x with a term arising from SR in $\delta_{SR} A_y$. In the linearization, this product of zero-mean-value operators vanishes, so that we only have to take saturation into account to derive the spectra of A_x . Field squeezing owing to optical bistability has been widely studied [25–27] and is known to occur in a frequency range given by the cavity bandwidth κ . The most favourable configuration is the bad cavity limit: κ is greater than γ (in our experiment, $\kappa \simeq 2\gamma$).

V Josse *et al*

In the large detuning limit, $\Delta \gg g|A_x| \gg \gamma$, the equation for A_x reads at order 3 in γ/Δ

$$\kappa^{-1} \frac{d}{dt} \delta A_x = -(1 + i\delta_c - i\delta_0) \delta A_x + i\delta_0 \frac{s_x}{2} \left[2\delta A_x + \frac{A_x^2}{|A_x|^2} \delta A_x^\dagger \right] + \frac{2}{\sqrt{T}} A_x^{\text{in}}, \quad (30)$$

where A_x is short for $\langle A_x \rangle$. This simplified equation yields the classical Kerr terms in $A_x^2 \delta A_x^\dagger$ producing squeezing. Note that absorption, dispersion and the associated atomic noise are not included in (30). The spectra taking absorption and dispersion into account can be easily derived and are shown in figure 7. The associated susceptibility and correlation matrices of the linear input–output theory, $[\chi]_{\text{Kerr}}$ and $[\sigma]_{\text{Kerr}}$, are reproduced in the appendix, and the comparison with a Kerr medium is discussed in [25]. The situation is more complex for the orthogonal mode on account of SR.

5. Vacuum fluctuations

As mentioned in section 3.3, SR seems to be a very promising candidate for generating vacuum squeezing. However, a careful analysis of the atomic noise, which cannot be neglected, is necessary in the squeezing calculations. In the optical pumping regime the circular birefringence, $\delta_{SR} = -2\delta_0 J_z / N$, is proportional to the ground state population difference $J_z = (\sigma_{22} - \sigma_{11})/2$ (see section 3.4). The SR effect is thus closely related to the fluctuations of J_z , and consequently to the fluctuations of A_y via the coupling term in $A_x \delta_{SR}$ (equation (23)). Therefore, we derive general equations for δA_y and δJ_z in the Fourier domain, and examine their low and high frequency limits. For the sake of simplicity, absorption and linear dispersion, again, are not shown; however, the additional terms are included in the appendix. As previously, we place ourselves in the large detuning limit with $s_x \ll 1$ and obtain, discarding terms of order greater than $(\gamma/\Delta)^3$,

$$-i(\omega/\kappa) \delta A_y = -(1 + i\delta_c - i\delta_0) \delta A_y - i\delta_0 \frac{s_x}{4} \left[3\delta A_y - \frac{A_x^2}{|A_x|^2} \delta A_y^\dagger \right] + \beta(\omega) \frac{2\delta_0}{N} A_x \delta J_z + \frac{2}{\sqrt{T}} \delta A_y^{\text{in}} + F_{A_y}, \quad (31)$$

$$-i\omega \delta J_z = -\gamma_p \alpha(\omega) \left[\delta J_z - \lambda(\omega) \left(1 - \frac{s_x}{2} \right) \frac{N}{2} \frac{\delta S_z}{|A_x|^2} \right] + F_z, \quad (32)$$

where $S_z = i(A_x A_y^\dagger - A_x^* A_y)$ is the usual Stokes parameter (see section 6) and

$$\alpha(\omega) = \left[1 - \frac{i\omega}{4\gamma_\perp} \right] \frac{\beta(\omega)}{\lambda(\omega)}, \quad \beta(\omega) = 1 - \frac{s_x}{4\lambda(\omega)}, \quad (33)$$

$$\lambda(\omega) = \frac{2\gamma - i\omega}{2(\gamma - i\omega)},$$

with F_{A_y} and F_z the Langevin operators associated with A_y and J_z after the adiabatical eliminations and $\gamma_p = \gamma_\perp s_x$ the optical pumping rate. In (31), the last term of the first line is a crossed Kerr term and clearly contributes to squeezing. We also see that the coupling with J_z is strongly frequency dependent and requires a careful investigation. In the next sections, we

discuss the low and high frequency limits to further simplify the previous equations and give simple interpretations for the squeezing.

5.1. Low frequency: SR effect

Again, to stress the effects on the fluctuations only due to SR, we neglect the terms in s_x responsible for the Kerr effect, which will be studied in the next section, and place ourselves in the optical pumping regime, keeping only terms of order unity in γ/Δ . Note that this approximation consists in adiabatically eliminating the optical dipoles and neglecting the excited state populations and thus limits the analysis to the range of frequencies $\omega \ll \gamma, \gamma_\perp$. Under these conditions, one has $\alpha(\omega) \simeq 1$, $\beta(\omega) \simeq 1$ and $\lambda(\omega) \simeq 1$ and equation (32) reduces to the linearized optical pumping equation

$$-i\omega \delta J_z = -\gamma_p \left[\delta J_z - \frac{N}{2} \frac{\delta S_z}{|A_x|^2} \right] + F_z. \quad (34)$$

It is clear that the fluctuations of J_z are governed by the time constant γ_p , consistently with the optical pumping approximation $\gamma_p \ll \gamma$. SR is effective only at low frequency. Plugging (34) back into (31), one gets

$$(1 + i\delta_c - i\omega/\kappa) \delta A_y = i\delta_0 \left[1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega} \right] \delta A_y + i\delta_0 \frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega} \frac{A_x^2}{|A_x|^2} \delta A_y^\dagger + \frac{2}{\sqrt{T}} \delta A_y^{\text{in}} + \tilde{F}_{A_y}. \quad (35)$$

The SR term comes with an amplitude δ_0 ($\propto \gamma/\Delta$) around zero frequency, which is much greater than the usual third order saturation non-linearity. Very good squeezing could be expected if it were not for the noise coming from the atoms \tilde{F}_{A_y} , which we now study. The fluctuation operator arising from atomic and field fluctuations reads

$$\tilde{F}_{A_y} = \frac{2\delta_0 A_x}{N} \frac{F_z}{\gamma_p - i\omega} + F_{A_y}. \quad (36)$$

The second term F_{A_y} is responsible for the noise due to absorption. The first term includes the optical pumping noise. One calculates the correlation function of F_z via the quantum regression theorem [16]

$$\langle F_z(\omega) F_z(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') N \gamma_p / 2, \quad (37)$$

so that

$$\langle \tilde{F}_{A_y}(\omega) \tilde{F}_{A_y}^\dagger(\omega') \rangle \simeq \frac{4\delta_0^2 A_x^2}{N^2} \frac{1}{\gamma_p^2 + \omega^2} \langle F_z(\omega) F_z(\omega') \rangle \quad (38)$$

$$= 2\pi \delta(\omega + \omega') \frac{C}{4} \frac{\gamma}{\gamma_\perp} \frac{\gamma_p^2}{\gamma_p^2 + \omega^2}, \quad (39)$$

in which we introduced $C = g^2 N / T \gamma$, the cooperativity parameter quantifying the strength of the atom–field coupling via the cavity ($C \sim 100$ in our Cs experiment). For $\omega \ll \gamma_p$ the noise is thus much more important than the losses due to absorption and therefore has a dramatic influence on the squeezing that could have been produced by the SR term. Following the method given in [25], we derive the susceptibility and correlation matrices which are given in the appendix. We can then calculate the outgoing vacuum

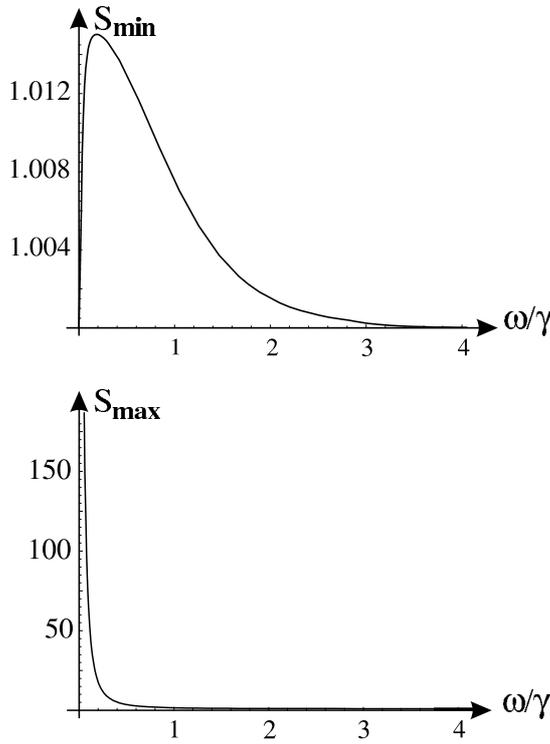


Figure 6. Minimal (left) and maximal (right) outgoing field spectra obtained by considering only SR effects. Parameters: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 40\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_x = 0.1$ and $\delta_c = 3$.

field spectrum for all the quadratures. Minimal and maximal spectra are plotted in figure 6 in the ‘close-to-bad’ cavity limit ($\kappa = 2\gamma$) corresponding to our experimental configuration. Whereas the first is close to the shot-noise level, the second is extremely noisy. In the good cavity limit, the noise is even more important. The conclusion is that the optical pumping process adds too much noise at zero frequency for SR to generate vacuum squeezing. However, this low frequency noise does not prevent squeezing at higher frequencies.

5.2. High frequency limit: crossed Kerr effect

If one repeats the previous calculation keeping the first order saturation terms in s_x and considers frequencies $\omega \gg \gamma$, one finds

$$\delta J_z(\omega) = \frac{N s_x \delta S_z(\omega)}{2 \cdot 4 |A_x|^2}. \quad (40)$$

This is not surprising, since the evolution times considered are small with respect to the atomic relaxation time. The system behaves as if σ_+ and σ_- were independent. In fact, let us consider two independent two-level systems, 1–4 and 2–3, each with $N/2$ atoms. In the large detuning limit, one has $\sigma_{44} = \sigma_{11}s_+/2$ and $\sigma_{33} = \sigma_{22}s_-/2$, and the atomic fluctuations follow the field fluctuations [25] (still at order 3 in (γ/Δ))

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{11}(\omega) = -\delta\sigma_{44}(\omega) &= -\frac{N}{2} \frac{\delta s_+}{2}, \\ \delta\sigma_{22}(\omega) = -\delta\sigma_{33}(\omega) &= -\frac{N}{2} \frac{\delta s_-}{2}, \end{aligned} \quad (41)$$

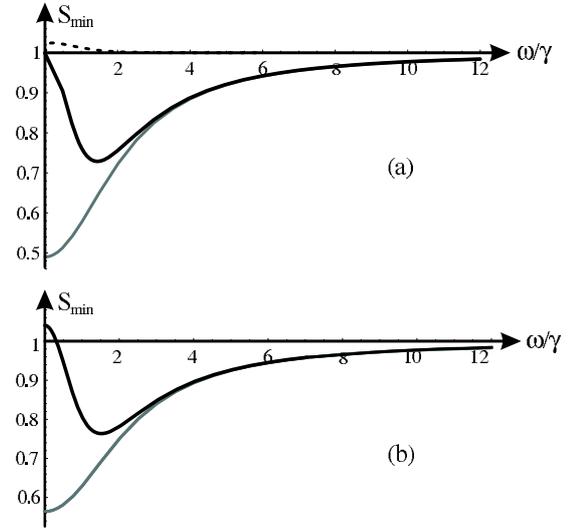


Figure 7. (a) Analytical minimal spectra for A_y^{out} given by the SR effect (dashed), by the Kerr effect (light) and by both effects (dark). (b) Exact spectra for the mean field mode A_x^{out} (light) and the orthogonal vacuum mode A_y^{out} (dark). Parameter values: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\gamma/\gamma_\perp = 3$, $\kappa = 2\gamma$, $s_{max} = 0.1$ and $\delta_c = 4.6$.

so that, using $|A_x|^2 \delta(s_+ - s_-) = s_x \delta S_z$, we retrieve (40). This equation shows that the fluctuations of J_z are only caused by saturation and their contribution adds to the crossed Kerr terms already mentioned in (31) to retrieve a similar ‘Kerr’ equation for A_y to that of A_x at high frequency,

$$\begin{aligned} -i(\omega/\kappa)\delta A_y &= -(1 + i\delta_c - i\delta_0)\delta A_y \\ &- i\delta_0 \frac{s_x}{2} \left[2\delta A_y - \frac{A_x^2}{|A_x|^2} \delta A_y^\dagger \right] + \frac{2}{\sqrt{T}} \delta A_y^{in} + F_{A_y}. \end{aligned} \quad (42)$$

This high frequency behaviour is thus characterized by the same Kerr-induced optimal squeezing on both polarization modes, consistent with the previous analysis for two independent two-level systems. More precisely, the optimal squeezing spectra are the same for each mode, but involve orthogonal quadratures (because of the sign difference in the Kerr terms between (30) and (42)). We now plot the outgoing field $A_{x,y}^{out}$ squeezing spectra and discuss the squeezing optimization.

5.3. Squeezing spectra

To derive spectra for the whole frequency range, we combine both effects by adding the matrices obtained in the two asymptotical regimes studied previously. We write the complete susceptibility and correlation matrix under the form $[\chi(\omega)]_y = [\chi(\omega)]_{Kerr} + [\chi(\omega)]_{SR}$ and $[\sigma(\omega)]_y = [\sigma(\omega)]_{Kerr} + [\sigma(\omega)]_{SR}$, where the Kerr matrices are those obtained in the high frequency limit, and the SR matrices those obtained at low frequency (see appendix for analytical expressions). This approximation is good since the Kerr effect is negligible at low frequency compared to SR, while SR breaks down at high frequency. In figure 7, typical spectra for a working point close to the PS threshold are represented. The parameters are chosen to be as close to the experimental situation as possible [11]. We compared these approximate spectra (a)

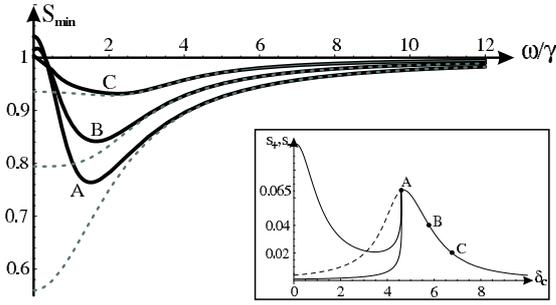
V Josse *et al*

Figure 8. Minimal spectra for the vacuum field (plain) and the mean field (dashed) for different working points. $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$, $\kappa = 2\gamma = 6\gamma_{\perp}$ and $s_{max} = 0.1$. The working point coordinates are A, ($\delta_c = \delta_{SR} = 4.6$, $s_x/2 = 0.065$); B, ($\delta_c = 5.78$, $s_x/2 = 0.04$); C, ($\delta_c = 6.79$, $s_x/2 = 0.02$). The inset shows the working point positions on the resonance curve.

with those obtained with a full four-level calculation based on the linear input–output theory (b). The analytical spectra combining Kerr and SR effects indeed show an excellent agreement with the exact calculations, as long as the saturation is low. As shown previously, the SR spectrum is close to the shot-noise level. The Kerr spectrum is accurate for A_y only for $\omega \gg \gamma$ and extends over a range of several κ as expected [25]. The combined spectrum (a) confirms that SR destroys completely the squeezing at low frequency and reproduces well the exact behaviour (b). The best squeezing for A_y , obtained at intermediate frequencies, is about 25%. Note that the Kerr spectrum in (a) is also valid for field A_x for all frequencies and 45% of squeezing is obtained at zero frequency. The situation for the mean field A_x is identical to that of a circularly polarized field with intensity $s_x/2$ interacting with $N/2$ two-level atoms as in [25], for which the Kerr spectrum shows good agreement with the exact spectrum.

As mentioned in section 3.6, we expect squeezing to improve in the vicinity of the PS threshold. We verified this behaviour by plotting in figure 8 the evolution of the spectra when the cavity is scanned while keeping the incident intensity ($\propto s_{max}$) constant. It appears clearly that the best squeezing is obtained at the peak of the resonance curve, right before the switching. This is due to the fact that, in the low saturation regime, the PS threshold is close to the point where saturation process is the most efficient.

We then study the effect of saturation and plot in figure 9 various spectra corresponding to working points close to PS with increasing saturation. The conclusion is that, for given values of the detuning Δ and linear dephasing δ_0 , there is an optimal value of s_x for squeezing. This is due to the fact that the range for which SR adds noise increases with the saturation and eventually destroys Kerr-induced squeezing. The optimal saturation value thus corresponds to a compromise between added noise and Kerr squeezing in the intermediate frequency range. Therefore, a bad cavity is preferable ($\kappa \gg \gamma$), since Kerr-induced squeezing occurs on a frequency range given by κ and SR destroys squeezing for frequencies smaller than γ . Spectra for different cavities are represented in figure 10. The case $\kappa = 2\gamma$ corresponds to the experimental situation, ‘close-to-bad cavity’, the other curves to increasingly bad cavities. Since SR is effective on a range smaller and smaller compared

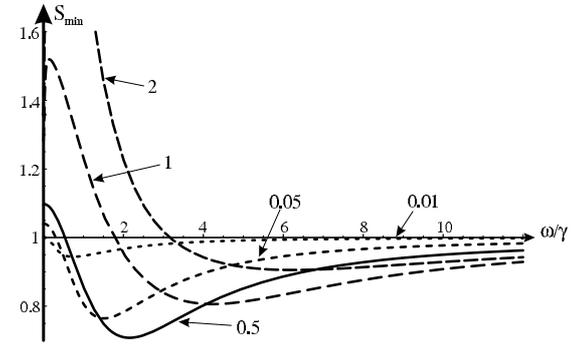


Figure 9. Minimal spectra for the vacuum field for different saturation values s_{max} . For each value of s_{max} , the working point is chosen close to PS. Parameters: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$ and $\kappa = 2\gamma = 6\gamma_{\perp}$.

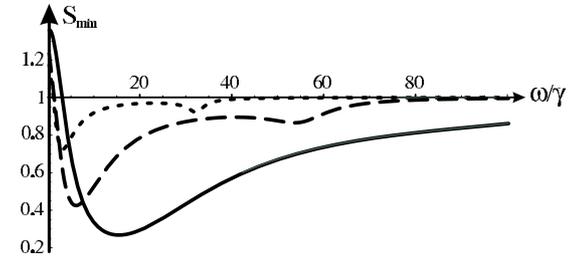


Figure 10. Minimal spectra for the vacuum for different $\rho = \kappa/\gamma$ (short dash, $\rho = 2$; long dash, $\rho = 10$; plain, $\rho = 50$). For each value of ρ , the saturation is optimized. Parameters: $\delta_0 = 5$, $\Delta = 20\gamma$ and $\gamma/\gamma_{\perp} = 3$.

to the cavity bandwidth, its effect becomes negligible, and 75% squeezing can be obtained.

The conclusion is that very interesting squeezing values can be reached in the bad cavity limit for both the mean field mode and the orthogonal field mode. In the next section, we establish the link between polarization squeezing and the vacuum squeezing obtained in our system.

6. Polarization squeezing

The noise of the mode with orthogonal polarization with respect to the mean field is commonly referred to as polarization noise. However, the study of the polarization state fluctuations requires the introduction of the quantum Stokes operators [12, 13, 28]

$$S_0(t) = A_x^\dagger A_x + A_y^\dagger A_y, \quad S_x(t) = A_x^\dagger A_x - A_y^\dagger A_y, \quad (43)$$

$$S_y(t) = A_x^\dagger A_y + A_y^\dagger A_x, \quad S_z(t) = i(A_y^\dagger A_x - A_x^\dagger A_y). \quad (44)$$

To be consistent with the definition of our slowly varying envelope operators A_x and A_y , these Stokes operators are time dependent and expressed as numbers of photons per second [14]. They obey the following commutation relationships:

$$\begin{aligned} [S_0(t), S_i(t')] &= 0 & \text{and} \\ [S_i(t), S_j(t')] &= 2i\epsilon_{ijk} S_k \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (45)$$

with $i, j, k = x, y, z$. The spectral noise densities of these operators, defined by $\langle S_i(\omega)S_j(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega')V_{S_i}(\omega)$, then satisfy Heisenberg uncertainty relations

$$V_{S_i}(\omega)V_{S_j}(\omega) \geq \epsilon_{ijk}|\langle S_k \rangle|^2. \quad (46)$$

The coherent polarization state corresponds to the case where both modes A_x and A_y are coherent states. Then the noise densities of the Stokes parameters are constant and all equal to $V_{S_i}(\omega) = \langle S_0 \rangle = |\langle A_x \rangle|^2 + |\langle A_y \rangle|^2$ for $i = 0, x, y, z$. The so-called polarization squeezing is achieved if one or more of these quantities (except V_{S_0}) is reduced below the coherent state value

$$V_{S_i}(\omega) \leq \langle S_0 \rangle \quad (i = x, y, z). \quad (47)$$

If the mean field is x -polarized, we have $\langle S_0 \rangle = \langle S_x \rangle = |\langle A_x \rangle|^2$ and $\langle S_y \rangle = \langle S_z \rangle = 0$. At first order in noise fluctuations, δS_y and δS_z read

$$\delta S_y = |\langle A_x \rangle|(\delta A_y^\dagger e^{i\theta_x} + \delta A_y e^{-i\theta_x}) = |\langle A_x \rangle|\delta X_{A_y}(\theta_x), \quad (48)$$

$$\delta S_z = i|\langle A_x \rangle|(\delta A_y^\dagger e^{i\theta_x} - \delta A_y e^{-i\theta_x}) = |\langle A_x \rangle|\delta X_{A_y}(\theta_x + \pi/2), \quad (49)$$

where θ_x is the phase of the mean field and $X_{A_y}(\theta) = A_y^\dagger e^{i\theta} + A_y e^{-i\theta}$ is the quadrature with angle θ of the orthogonal mode. Therefore the fluctuations of these two Stokes parameters are proportional to the quadrature noise of A_y and the polarization squeezing of S_y and S_z is simply related to the vacuum squeezing that we have studied in the previous sections. The physical meaning of this result is clear: let us choose $\theta_x = 0$, then geometric jitter on the polarization is due to the intensity fluctuations of A_y ($\propto \delta S_y$), whereas the fluctuations of the ellipticity are caused by the phase fluctuations ($\propto \delta S_z$). In the general case, the squeezed and antisqueezed Stokes parameters are found to be

$$S_{sq} = \cos(\theta_x - \theta_{sq})S_y + \sin(\theta_x - \theta_{sq})S_z, \quad (50)$$

$$S_{antisq} = \sin(\theta_x - \theta_{sq})S_y - \cos(\theta_x - \theta_{sq})S_z. \quad (51)$$

Note that, unlike [2–4, 7], there is no need to lock the phase-shift difference $\theta_x - \theta_{sq}$, since it is automatically done in this system; this property appears clearly in equation (42) where $\langle A_x^2 \rangle / |\langle A_x \rangle|^2 = e^{2i\theta_x}$. Since the new set of the Stokes parameters S_0 , S_x , S_{sq} and S_{antisq} still satisfy the relationships (46), we obtain polarization squeezing in our system as soon as any quadrature of the vacuum field A_y is squeezed, and the results of the previous sections can be applied to the squeezed Stokes component.

7. Conclusion

We have presented a study of PS in an X-like four-level atom ensemble illuminated by a linearly polarized light in an optical cavity. PS has been traced to SR and simple criteria allow for a clear understanding of the switching effects and the multistable behaviour of the system. The steady state analysis enables one to work out the interesting working points for squeezing.

In terms of squeezing, the respective contributions of SR and saturation have been investigated and compared to a full quantum calculation. Since the propensity for squeezing

of SR is cancelled by atomic noise at low frequency, the squeezing originates from the Kerr effect. The mean field mode is squeezed via the usual saturation effects, whereas the vacuum mode squeezing is induced by the mean field via the crossed Kerr effect. Both SR and crossed Kerr effects can be dissociated in a bad cavity configuration, thus allowing for high squeezing values. Last, this vacuum squeezing is shown to be equivalent to squeezing one Stokes operator.

Appendix

Using the input–output theory notations [24, 25], we give here the expressions of the susceptibility matrix $[\chi(\omega)]$ and the correlation matrix $[\sigma(\omega)]$ for field A_y . In the high frequency limit, they return to those derived in [25] in the large detuning limit

$$[\chi(\omega)]_{Kerr} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\Delta^2} \begin{pmatrix} i\gamma + \omega & 0 \\ 0 & -i\gamma - \omega \end{pmatrix} - \frac{g^2}{2\Delta^3} \begin{pmatrix} 2|A_x|^2 & \epsilon A_x^2 \\ \epsilon A_x^{*2} & 2|A_x|^2 \end{pmatrix}. \quad (A.1)$$

$\epsilon = -1$ yields the susceptibility matrix for the vacuum mode. To retrieve the matrix for A_x , ϵ should be taken equal to $+1$. This matrix corresponds to approximating the atom ensemble with a Kerr medium: the term of order unity in $1/\Delta$ is the linear dephasing, the second order matrix represents dispersion and absorption and the third order term is the non-linear dephasing corresponding to the Kerr effect. The associated correlation matrix is

$$[\sigma(\omega)]_{Kerr} = \frac{\gamma}{\Delta^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (A.2)$$

In the Kerr limit, the atomic noise comes only from the frequency-independent linear losses of the Kerr medium, which acts as a beamsplitter for the field. Similar matrices can be derived for field A_x in agreement with (30). At low frequency for A_y , the previous matrices have to be complemented by

$$[\chi(\omega)]_{SR} = -\frac{1}{2\Delta} \frac{\gamma_p}{\gamma_p - i\omega} \begin{pmatrix} 1 & -A_x^2/|A_x|^2 \\ -A_x^{*2}/|A_x|^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

$$[\sigma(\omega)]_{SR} = \frac{\gamma_p^2}{4\gamma_\perp(\gamma_p^2 + \omega^2)} \begin{pmatrix} 1 & -A_x^2/|A_x|^2 \\ -A_x^{*2}/|A_x|^2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\gamma_p}{2\Delta(\gamma_p^2 + \omega^2)} \begin{pmatrix} -2\omega & \omega + i\gamma_p \\ \omega - i\gamma_p & 0 \end{pmatrix}. \quad (A.4)$$

For $\omega \ll \gamma_p$, the vacuum correlation matrix is equivalent to

$$[\sigma(\omega)]_{SR} \sim \frac{\gamma_p^2}{4\gamma_\perp(\gamma_p^2 + \omega^2)} \begin{pmatrix} 1 & -A_x^2/|A_x|^2 \\ -A_x^{*2}/|A_x|^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

so that a lot of noise is reported on all the quadratures of A_y for frequencies of the order of γ_p , as pointed out in section 5.1. For frequencies $\omega \gg \gamma$, however, the SR noise terms vanish, allowing the crossed Kerr effect to produce squeezing.

V Josse *et al*

References

- [1] Davidovich L 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 127 and references therein
- [2] Grangier P, Slusher R E, Yurke B and LaPorta A 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2153
- [3] Hald J, Sorensen J L, Shori C and Polzik E S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1319
- [4] Bowen W P, Schnabel R, Bachor H A and Lam P K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 093601
Bowen W P, Treps N, Schnabel R and Lam P K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 253601
- [5] Alodjants A P, Arakelian A M and Chirkin A S 1995 *JETP* **108** 63
Korolkova N V and Chirkin A S 1996 *J. Mod. Opt.* **43** 869
- [6] Boivin L and Haus H A 1996 *Opt. Lett.* **21** 146
- [7] Heersink J, Gaber T, Lorenz S, Glöckl O, Korolkova N and Leuchs G 2003 *Preprint* quant-ph/0302100
- [8] Matsko A B, Novikova I, Welsch G R, Ducker D, Kimball D F and Rochester S M 2002 *Phys. Rev. A* **66** 043815/1
- [9] Lambrecht A, Giacobino E and Courty J M 1995 *Opt. Commun.* **115** 199
- [10] Lambrecht A, Coudreau T, Steimberg A M and Giacobino E 1996 *Europhys. Lett.* **36** 93
- [11] Josse V, Dantan A, Vernac L, Bramati A, Pinard M and Giacobino E 2003 *Preprint* quant-ph/0304022
- [12] Chirkin A S, Orlov A A and Paraschuk D Yu 1993 *Kvantovaya Elektron. Elektron.* **20** 999 (Engl. transl. 1993 *Quantum Electron.* **23** 870)
- [13] Korolkova N, Leuchs G, Loudon R, Ralph T C and Silberhorn C 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052306
- [14] Fabre C 1996 *Quantum Fluctuations in Light Beams, Les Houches Session LXIII*
- [15] Davidson N, Lee H J, Adams C S, Kasevich M and Chu S 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1311
- [16] Cohen-Tannoudji C, Dupont-Roc J and Grynberg G 1996 *Processus d'interaction entre photons et atomes*
- [17] Walls D F and Zoller P 1980 *Opt. Commun.* **34** 260
Kitano M, Yabuzaki T and Ogawa T 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 926
Savage C M, Carmichael H J and Walls D F 1982 *Opt. Commun.* **42** 211
- [18] Giacobino E 1985 *Opt. Commun.* **56** 249
- [19] Huard S 1997 *Polarization of Light* (New York: Wiley) p 26
- [20] Maker P D, Terhune R W and Savage C M 1964 *Phys. Rev. Lett.* **12** 507
- [21] Rochester S M, Hsiung D S, Bucker D, Chiao R Y, Kimball D F and Yashchuk V V 2001 *Phys. Rev. A* **63** 043814
- [22] Milburn G and Walls D F 1981 *Opt. Commun.* **39** 401
Collet M J and Gardiner C W 1984 *Phys. Rev. A* **30** 1386
Collet M J and Walls D F 1985 *Phys. Rev. A* **32** 2887
- [23] Gibbs H M 1985 *Optical Bistability: Controlling Light with Light* (Orlando, FL: Academic)
- [24] Reynaud S, Fabre C, Giacobino E and Heidmann A 1989 *Phys. Rev. A* **40** 1440
- [25] Hilico L, Fabre C, Reynaud S and Giacobino E 1992 *Phys. Rev. A* **46** 4397
- [26] Lugiato L A and Strini G 1982 *Opt. Commun.* **41** 67
- [27] Reid M D 1988 *Phys. Rev. A* **37** 4792
- [28] Korolkova N, Silberhorn Ch, Glöckl O, Lorentz S, Marquardt Ch and Leuchs G 2002 *Eur. Phys. J. D* **18** 229

Continuous Variable Entanglement using Cold Atoms

V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, and E. Giacobino

Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Case 74, 4 place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France

(Received 10 September 2003; published 22 March 2004)

We present an experimental demonstration of both *quadrature* and *polarization entanglement* generated via the interaction between a coherent linearly polarized field and cold atoms in a high finesse optical cavity. The nonlinear atom-field interaction produces two squeezed modes with orthogonal polarizations which are used to generate a pair of nonseparable beams, the entanglement of which is demonstrated by checking the inseparability criterion for continuous variables recently derived by Duan *et al.* [Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000)] and calculating the *entanglement of formation* [Giedke *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 107901 (2003)].

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.123601

PACS numbers: 42.50.Dv, 03.67.Mn, 42.50.Ct

Entanglement in the continuous variable regime has attracted a lot of attention in the quantum optics and quantum information fields in connection with quantum teleportation, cryptography, quantum computing, and dense coding [1]. Since the first realization of quadrature entangled beams by Ou *et al.* [2], various methods, such as the $\chi^{(2)}$ process in optical parametric amplifier (OPA) [3] or the Kerr effect in optical fibers [4], have been used to generate nonseparable beams. Recently, the concept of *polarization entanglement*, i.e., entanglement of Stokes operators between two beams, has been investigated by Korolkova *et al.* [5], and first demonstrated experimentally by Bowen *et al.* [6] by mixing two squeezed beams issued from independent OPAs. The Kerr nonlinearity of fibers was also exploited by Glöckl *et al.* to generate a pulsed source of polarization entanglement [7].

In this Letter, we show evidence for continuous variable entanglement generated using the interaction between a linearly polarized coherent field and a cloud of cold cesium atoms placed in a high finesse optical cavity. We demonstrate the entanglement using the inseparability criterion proposed by Duan *et al.* and Simon [8]. We generate two kinds of entanglement with the same system, quadrature entanglement and polarization entanglement. For this, we use the recently reported generation of polarization squeezing [9] in the field that has interacted with cold atoms; both the mean field mode and the vacuum mode with orthogonal polarization exiting the cavity can be squeezed. First, we show how a direct measurement of the quadrature entanglement of the beam exiting the cavity can be achieved using two balanced homodyne detections. We then give the form of the covariance matrix and the associated *entanglement of formation* (EOF), which, for Gaussian symmetric states, is directly related to the inseparability criterion value [10]. Last, we produce two nonseparable beams by mixing two parts of the previous outgoing beam with a strong field and achieve polarization entanglement by locking the relative phases between the strong field and the weak field exiting the cavity.

First, let us consider two orthogonally polarized modes A_a and A_b of the electromagnetic field satisfying the usual bosonic commutation rules $[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$. If $X_\alpha(\theta) = (A_\alpha^\dagger e^{i\theta} + A_\alpha e^{-i\theta})$ and $Y_\alpha(\theta) = X_\alpha(\theta + \pi/2)$ are the usual quadrature operators (rotated in the Fresnel diagram by angle θ), $X_a + X_b$ and $Y_a - Y_b$ are the continuous variable analogues of the EPR-type operators first introduced by Einstein, Podolsky, and Rosen [11]. The criterion of [8] sets a limit for inseparability on the sum of the operator variances

$$I_{a,b}(\theta) = \frac{1}{2}[\Delta^2(X_a + X_b)(\theta) + \Delta^2(Y_a - Y_b)(\theta)] < 2. \quad (1)$$

For states with Gaussian statistics, $I_{a,b} < 2$ is a sufficient condition for entanglement and has already been used in several experiments to demonstrate continuous variable entanglement [5–7]. Moreover, Giedke *et al.* recently calculated the EOF of Gaussian symmetric states [10] and showed it to be directly related to the amount of EPR-type correlations given by (1).

In our system, an x -polarized beam interacts with a cloud of cold cesium atoms in an optical cavity. The experimental setup [9] is shown in Fig. 1. We probe the atoms with a linearly polarized laser beam detuned by about 50 MHz in the red of the $6S_{1/2}$, $F = 4$ to $6P_{3/2}$, $F = 5$ transition. The optical power of the probe beam ranges from 5 to 15 μ W. After exiting the cavity, both the mean field mode A_x and the orthogonally polarized vacuum mode A_y are squeezed for frequencies ranging between 3 and 12 MHz. An interpretation of these results can be provided by modeling the complicated $6S_{1/2}$, $F = 4$ to $6P_{3/2}$, $F = 5$ transition by an X -like four-level atomic structure [12]. When the optical transitions are saturated, the atoms behave as a Kerr-like medium for the mean field mode A_x , which can be squeezed. Furthermore, the orthogonally polarized vacuum mode A_y is also squeezed on account of cross-Kerr effect, but for an *orthogonal* quadrature [9,12].

Our goal is to retrieve the two modes with orthogonal polarizations which exhibit maximal EPR-type correlations according to the inseparability criterion (1). We

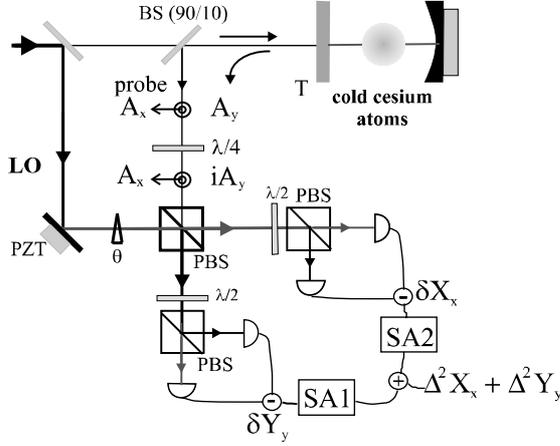


FIG. 1. Experimental setup: PBS, polarizing beam splitter; $\lambda/2$, half-wave plate; PZT, piezoelectric ceramic; SA, spectrum analyzer. $T = 0.1$ is the transmission of the cavity coupling mirror.

therefore minimize the quantity $I_{a,b}(\theta)$ with respect to a , b and θ . Expanding (1) yields

$$I_{a,b}(\theta) = \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b \delta A_b^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b \rangle + 2[e^{-2i\theta} \langle \delta A_a \delta A_b \rangle + e^{2i\theta} \langle \delta A_a^\dagger \delta A_b^\dagger \rangle]. \quad (2)$$

The right-hand side of the first line in (2) is independent of the polarization basis, while the second line can be written as $4 \cos(2\theta - 2\phi) |\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$, where 2ϕ is the phase angle of $\langle \delta A_a \delta A_b \rangle$. Minimizing $I_{a,b}(\theta)$ corresponds to maximizing $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$ with respect to a , b . In order to find the optimal field components a , b , we introduce another polarization basis u , v , such that $\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0$. It can be shown that there always exists such a polarization basis and that the u and v mode quadrature variances are minimal for the same value of θ [13]. The optimal correlations produced in the system are directly related to the quantum noise properties of these modes u , v . Indeed, the maximally correlated modes a^* , b^* are

$$A_{a^*} = (A_u + iA_v)/\sqrt{2}, \quad A_{b^*} = (A_u - iA_v)/\sqrt{2}, \quad (3)$$

and the minimum value of $I_{a,b}$ is then given by the sum of the u , v mode minimal noises

$$I_{a^*,b^*} = \min_{a,b,\theta} I_{a,b}(\theta) = \min_{\theta} [\Delta^2 X_u(\theta) + \Delta^2 X_v(\theta)]. \quad (4)$$

Consequently, if one or two of the u , v modes are squeezed, the value I_{a^*,b^*} corresponding to maximal correlations is equal to the sum of their squeezing. Experimentally, one has to look for the u - and v -type modes, a signature of which being that $I_{u,v}(\theta)$ does not depend on θ [see (2)], and measure their squeezing (if any). The maximally correlated modes are then given by (3) and the amount of their EPR-type correlations by (4).

Let us note that modes u , v are not *stricto sensu* uncorrelated, since $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$ can be nonzero. However, one can think of the correlation properties of modes a^* , b^* as being created by the mixing of the u and v modes, as it is usually produced by mixing two independent squeezed beams [2,4,6]. Let us stress that this analysis provides a general framework for finding out the maximal correlations produced in a two-mode system exhibiting quantum properties. This method is of interest for a class of systems such as the optical parametric oscillator in which the correlations are not produced by mixing independent beams [14].

Coming back to our system, which is symmetrical with respect to the circularly polarized modes A_\pm , it is easy to see that $\langle \delta A_x \delta A_y \rangle = 0$ because A_x and A_y are combinations with equal weights of A_\pm . Since they are squeezed for orthogonal quadratures, one can set $A_u = A_x$ and $A_v = iA_y$, which are now squeezed for the same quadrature. Then, using (3), the maximally entangled modes are the $\pm 45^\circ$ modes to the x , y basis. This gives us the relevant quantity, $I_{+45,-45}(\theta)$, which is to be measured. Using $A_{\pm 45} = (A_x \pm A_y)/\sqrt{2}$, the inseparability criterion for the $\pm 45^\circ$ modes can be expressed directly in terms of the x , y mode variances with $X_u(\theta) = X_x(\theta)$ and $X_v(\theta) = Y_y(\theta)$:

$$I_{+45,-45}(\theta) = \Delta^2 X_x(\theta) + \Delta^2 Y_y(\theta) < 2. \quad (5)$$

When θ corresponds to the angle θ_{sq} of the squeezed quadrature of A_x , both variances are below unity, and $I_{+45,-45}(\theta_{sq}) < 2$.

In order to experimentally check the inseparability criterion (5), we need to simultaneously measure the fluctuations of A_x and iA_y . After the output of the cavity, we insert a quarter-wave plate that rotates the noise ellipsoid of vacuum mode A_y by $\pi/2$, the beam is mixed on a beam splitter with a local oscillator (LO), and the two resulting beams are sent into two balanced homodyne detections [Fig. 1]. Thus, we simultaneously measure the quadrature noise of each beam for the same quadrature. The sum of these two signals directly gives the sought quantity $I_{+45,-45}(\theta)$. In Fig. 2(b), we plot a typical measurement of $I_{+45,-45}$ as a function of θ , for an analysis frequency of 5 MHz. Its minimal value is about 1.9 [1.86 corrected from losses] and corresponds to a case for which A_x and iA_y are both squeezed by about 5% [Fig. 2(a)]. *Quadrature entanglement* is thus achieved in a frequency range given by the cavity bandwidth (3 to 12 MHz).

Consistently with the general method described above, we also checked that modes A_x and iA_y correspond indeed to u , v -type modes. We therefore measured the quantity $I_{x,y}$ in a similar manner as $I_{+45,-45}$, and verified that it is independent of θ [Fig. 2(c)], thus proving that modes A_{+45} and A_{-45} exhibit maximal EPR-type correlations.

Moreover, we note that our measurement not only demonstrates entanglement, but also quantifies it via the

entanglement of formation. Following Giedke *et al.* [10], we introduce the covariance matrix (CM) γ for the $\pm 45^\circ$ polarized modes:

$$\gamma_{i,j} = \langle \delta R_i \delta R_j + \delta R_i \delta R_j \rangle / 2,$$

where $\{R_i, i = 1, \dots, 4\} = \{X_{+45}, Y_{+45}, X_{-45}, Y_{-45}\}$. Using the fact that A_x and iA_y are uncorrelated and symmetrical [see Figs. 2(b) and 2(c)], it is straightforward to show that the $\pm 45^\circ$ modes have isotropic fluctuations. Choosing $\theta = \theta_{sq}$, the covariance matrix can be expressed in the standard form given in Ref. [10]:

$$\gamma = \begin{pmatrix} n & 0 & k & 0 \\ 0 & n & 0 & -k \\ k & 0 & n & 0 \\ 0 & -k & 0 & n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

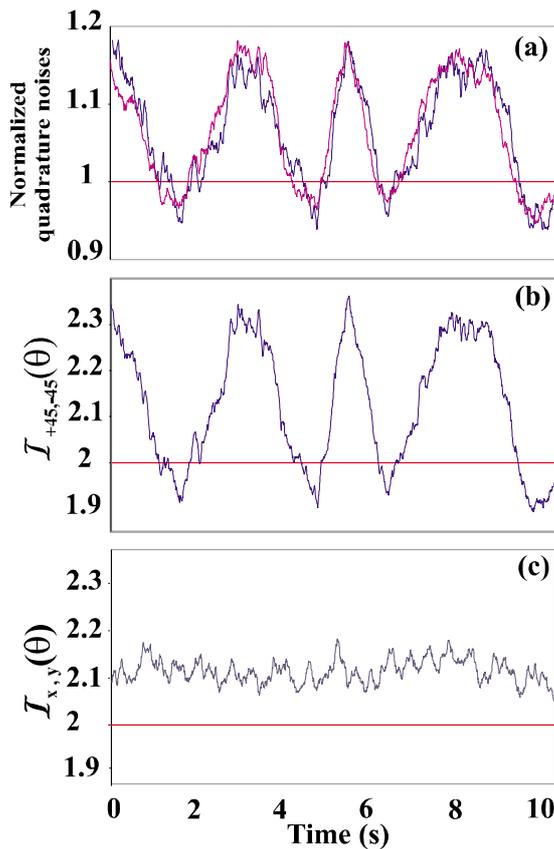


FIG. 2 (color online). (a) Quadrature noise spectra of A_x and iA_y , at a frequency of 5 MHz, when the relative phase θ between the LO and the mean field mode is varied in time. (b) Direct measurement of $I_{+45,-45}(\theta)$. (c) Corresponding measurement of $I_{x,y}(\theta)$.

with $n = \Delta^2 X_{\pm 45} = \Delta^2 Y_{\pm 45}$ and $k = \langle \delta X_{+45} \delta Y_{-45} \rangle = \langle \delta X_{-45} \delta Y_{+45} \rangle$ [15]. As calculated by Giedke *et al.*, the EOF \mathcal{E} , representing the amount of pure state entanglement needed to prepare our entangled state [16], is then directly related to the inseparability criterion value by [10]

$$\mathcal{E} = f(n - k) = f[I_{+45,-45}(\theta_{sq})/2], \quad (7)$$

with $f(x) = c_+(x) \log_2[c_+(x)] - c_-(x) \log_2[c_-(x)]$ and $c_{\pm}(x) = (x^{-1/2} \pm x^{1/2})^2/4$. For $I_{+45,-45} = 1.86 \pm 0.02$, the EOF is $\mathcal{E} = 0.014 \pm 0.003$.

Last, we show that this quadrature entangled beam allows to generate *polarization entanglement*. Polarization entanglement for two beams α and β [5] is achieved when

$$I_{\alpha,\beta}^S = \frac{1}{2} [\Delta^2 (S_2^\alpha + S_2^\beta) + \Delta^2 (S_3^\alpha + S_3^\beta)] < |\langle S_1^\alpha \rangle| + |\langle S_1^\beta \rangle|,$$

where the $S_i^{\alpha,\beta}$ are the standard quantum Stokes operators. For this, we produce new modes by mixing the $A_{\pm 45}$ modes studied previously with additional strong fields. The $A_{\pm 45}$ modes are obtained from the x, y modes by passing the beam through a half-wave plate with axes at 22.5° . The fields along the x and y directions are now the A_{+45} and A_{-45} fields, which we will denote by A'_x and A'_y [see Fig. 3]. The A'_x and A'_y are then spatially separated with a polarizing beam splitter. In the other input of the beam splitter, we send a strong field B with a polarization at 45° from the beam splitter axes, yielding the output fields B_y and B_x . The strong field B is similar to the local oscillator in the previous experiment, except that its phase θ_B is locked to that of one of the A fields by a servo loop, as shown in Fig. 3. At the two outputs of the beam splitter, we have two beams α, β which are the superposition of, respectively, A'_x and B_y , and A'_y and B_x . The Stokes operators S_i^α for one of the outputs are then

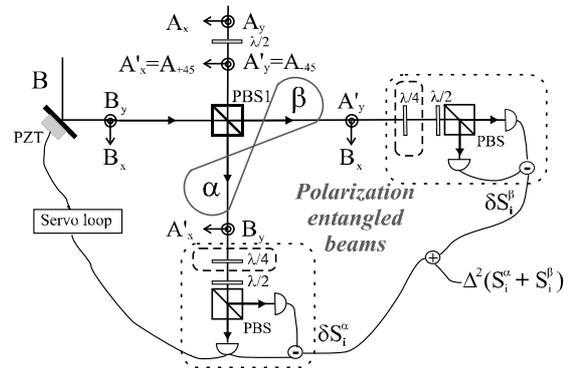


FIG. 3. Setup for nonseparable beam generation. Inserting the quarter-wave plates (or not) allows for measuring the fluctuations of $S_3^\alpha + S_3^\beta$ (or $S_2^\alpha + S_2^\beta$). The servo loop is used to lock the B field phase to the squeezed quadrature angle.

$$S_0^\alpha = A_x^\dagger A_x' + B_y^\dagger B_y, \quad S_1^\alpha = A_x^\dagger A_x' - B_y^\dagger B_y, \quad S_2^\alpha = A_x^\dagger B_y + B_y^\dagger A_x', \quad S_3^\alpha = i(B_y^\dagger A_x' - A_x^\dagger B_y).$$

The Stokes operators S_i^β for the other output are obtained by exchanging A' and B in the previous expression. Since the B field is much stronger than the A field, one has $|\alpha_B| \gg |\alpha_{A'}|$, with α_B the amplitude of B_x and B_y and $\alpha_{A'}$ the amplitude of A_x' and A_y' . Then $\langle S_1^\alpha \rangle = -\langle S_1^\beta \rangle \approx -|\alpha_B|^2$ and the inseparability condition reads

$$I_{\alpha,\beta}^S < 2|\alpha_B|^2. \quad (8)$$

In this case, the Stokes parameter fluctuations are related to those of the initial $\pm 45^\circ$ modes (now denoted A_x', A_y')

$$\delta S_2^\alpha = \alpha_B \delta X_x'(\theta_B), \quad \delta S_2^\beta = \alpha_B \delta X_y'(\theta_B), \quad (9)$$

$$\delta S_3^\alpha = -\alpha_B \delta Y_x'(\theta_B), \quad \delta S_3^\beta = \alpha_B \delta Y_y'(\theta_B), \quad (10)$$

which straightforwardly lead to

$$I_{\alpha,\beta}^S = |\alpha_B|^2 I_{A_x', A_y'}(\theta_B) \equiv |\alpha_B|^2 I_{+45, -45}(\theta_B).$$

The polarization entanglement condition (8) is thus equivalent to the inseparability criterion (5) for the $\pm 45^\circ$ modes when $\theta_B = \theta_{sq}$. Therefore, quadrature entanglement can be mapped into a polarization basis and lead to polarization entanglement [6]. Experimentally, we use the setup shown in Fig. 3 and lock the phase of the B

field with the squeezed quadrature angle. We then successively measure the S_2 and S_3 Stokes operator noises using the appropriate combination [5] of plates and polarizing beam splitter (PBS). In Fig. 4, we present the normalized quadrature noises of $S_2^\alpha + S_2^\beta$ and $S_3^\alpha + S_3^\beta$ for an analysis frequency of 5 MHz. This entanglement between the beams corresponds to a reduction by approximately 5% in the noise of each variable: $I_{\alpha,\beta}^S/|\alpha_B|^2 = 1.9$, consistently with the quadrature entanglement measurement. From (9) and (10), it is also clear that the CM has the same form as (6).

In conclusion, we have reported the generation of continuous variable entanglement via the interaction with cold atoms in cavity. First, we have developed a method to directly measure the inseparability criterion [8] and demonstrated quadrature entanglement between two orthogonally polarized modes. The entanglement was quantified using the entanglement of formation calculated in Ref. [10]. Second, we achieve polarization entanglement after mapping the quadrature entanglement onto two spatially separated beams.

This work was supported by the QIPC European Project No. IST-1999-13071 (QUICOV).

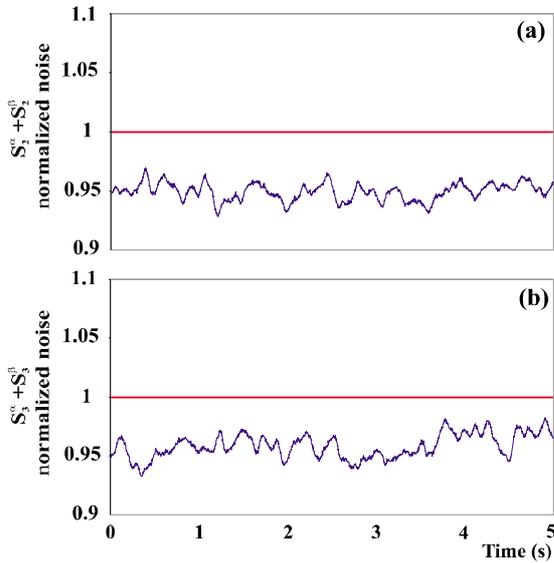


FIG. 4 (color online). Normalized noises at 5 MHz of $S_2^\alpha + S_2^\beta$ (a) and $S_3^\alpha + S_3^\beta$ (b), the phase θ_B being locked with the value of the squeezed quadrature angle θ_{sq} .

- [1] C. H. Bennett *et al.*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993); S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. A **61**, 042302 (2000); D. P. DiVincenzo, Science **270**, 255 (1995); B. Julsgaard *et al.*, Nature (London) **413**, 400 (2001).
- [2] Z. Y. Ou *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3663 (1992).
- [3] Y. Zhang *et al.*, Phys. Rev. A **62**, 023813 (2000).
- [4] C. Silberhorn *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4267 (2001).
- [5] N. Korolkova *et al.*, Phys. Rev. A, **65**, 052306 (2002); N. Korolkova *et al.*, Eur. Phys. J. D **18**, 229 (2002).
- [6] W. P. Bowen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 253601 (2002); W. P. Bowen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 043601 (2003).
- [7] O. Glöckl *et al.*, J. Opt. B **5**, S492 (2003); O. Glöckl *et al.*, Phys. Rev. A **68**, 012319 (2003).
- [8] L. M. Duan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000); R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [9] V. Josse *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 103601 (2003).
- [10] G. Giedke *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 107901 (2003).
- [11] A. Einstein *et al.*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [12] V. Josse *et al.*, J. Opt. B **5**, S513 (2003).
- [13] V. Josse *et al.* (to be published).
- [14] L. Longchambon *et al.*, quant-ph/0311123; H. Adamyan and G. Kryuchkyan, quant-ph/0309203; S. Feng and O. Pfister, quant-ph/0310002.
- [15] The factor 1/2 in our definition for the CM comes from our definition of the quadrature operators.
- [16] C. H. Bennett *et al.*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

Entanglement and squeezing in a two-mode system: theory and experiment

V Josse, A Dantan, A Bramati and E Giacobino

Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, F75252 Paris Cedex 05, France

Received 21 October 2003, accepted for publication 1 December 2003

Published 28 May 2004

Online at stacks.iop.org/JOptB/6/S532

DOI: 10.1088/1464-4266/6/6/011

Abstract

We report on the generation of non-separable beams produced via the interaction of a linearly polarized beam with a cloud of cold caesium atoms placed in an optical cavity. We convert the squeezing of the two linear polarization modes into *quadrature entanglement* and show how to find the best entanglement generated in a two-mode system using the inseparability criterion for continuous variables (Duan *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722). We verify this method experimentally with a direct measurement of the inseparability using two homodyne detectors. We then map this entanglement into a polarization basis and achieve *polarization entanglement*.

Keywords: cold atoms, squeezing, entanglement, polarization entanglement

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

1. Introduction

With the recent progress in the quantum information field, there has been a lot of interest in entanglement in the continuous variable (CV) regime. Criteria to demonstrate and quantify CV entanglement have been developed [1–3] and experimentally tested [4–9]. In particular, the possibility of mapping a quantum polarization state of light onto an atomic ensemble [10] has stirred up a great deal of attention to the quantum features of polarized bright beams. The notion of polarization entanglement, i.e. entanglement between Stokes parameters of two spatially separated beams, has been investigated by Korolkova *et al* [11] and was first demonstrated by Bowen *et al* [8] by mixing two independent squeezed beams produced by OPAs. Polarization entanglement was also achieved via the Kerr non-linearity of optical fibres [12] and cold atoms [9]. These experiments are important steps in connection with quantum teleportation [13], quantum dense coding [14], entanglement swapping [15] and, more generally, characterizing entanglement in the CV regime [3, 16].

In this paper, we report on the generation of non-separable beams via the interaction of a linearly polarized light beam with a cloud of cold caesium atoms placed in an optical cavity [9]. In previous works [17, 18], we have shown that,

after the non-linear interaction with the atoms, two modes of the light exiting the cavity were squeezed: the mean field mode, but also the orthogonally polarized vacuum. We develop here a general method to find the best entanglement—as measured with the inseparability criterion [2]—produced in a two-mode system, and characterize the correlation properties of the system in the Poincaré sphere. The main result is that the maximal entanglement corresponds to the sum of the minimum noises of two ‘uncorrelated’ modes. The maximally entangled modes are then circularly polarized with respect to these modes. We stress the similarity with the usual entanglement experiments, which mix independent squeezed beams on a beamsplitter [8, 12]. Moreover, we show that this mixing of two independent beams is equivalent to rotating the polarization basis of a single beam exhibiting correlations between polarization modes. This intuitive approach could be of interest for the study of systems in which quantum correlations exist between polarization modes, and allows one to think in terms of independent beams mixing.

We then apply these results to our experiments [9] and show experimental evidence of both quadrature entanglement and polarization entanglement. In section 3 quadrature entanglement is demonstrated by finding the maximally entangled modes and checking the inseparability criterion

between these modes in a direct detection scheme. In section 4 we map the entanglement into a polarization basis via the mixing of our quadrature entangled modes with an intense coherent beam, the phase of which is locked to that of the first beam. We therefore measure directly the Stokes parameters fluctuations of the two spatially separated beams, thus demonstrating polarization entanglement.

2. Looking for maximal entanglement

2.1. General method

In this section we develop a general method to find the maximal entanglement in a two-mode system. We start with a ‘black box’—in our case the atomic medium in the cavity—out of which comes a light beam with unknown quantum properties. Let us stress that the goal of this section is to develop a method to characterize quantum properties, such as entanglement and squeezing, which have been previously created between some polarization modes by some interaction. Let us denote by A_a and A_b two orthogonally polarized modes of this beam. They satisfy the standard bosonic commutation relations $[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$. The usual quadrature operators, with angle θ in the Fresnel representation,

$$X_\alpha(\theta) = A_\alpha e^{-i\theta} + A_\alpha^\dagger e^{i\theta}, \\ Y_\alpha(\theta) = X_\alpha(\theta + \pi/2) \quad (\alpha = a, b)$$

are the continuous variable analogues of the EPR-type operators as introduced by Einstein *et al* [19]. The criterion derived by Duan *et al* and Simon [2] sets a limit for inseparability on the sum of these EPR-type operator variances

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta) = \frac{1}{2} [\delta(X_a + X_b)^2(\theta) + \delta(Y_a - Y_b)^2(\theta)] < 2. \quad (1)$$

For Gaussian states, $\mathcal{I}_{a,b}(\theta) < 2$ is a sufficient condition for entanglement and has already been used several times to demonstrate continuous variable entanglement [9, 11–13]. In this section we look for the best entanglement produced in the system: using unitary transformations we therefore seek to minimize $\mathcal{I}_{a,b}$ with respect to a , b and θ . Expanding (1), one gets

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta) = \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle \\ + 4|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| \cos[2(\theta - \theta_{a,b})] \quad (2)$$

where $\theta_{a,b}$ is the phase of $\langle \delta A_a \delta A_b \rangle$. The minimum value is reached for $\theta = \theta_{a,b} \pm \pi/2$:

$$\mathcal{I}_{a,b} = \min_\theta \mathcal{I}_{a,b}(\theta) \\ = \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle - 4|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| \quad (3)$$

$\mathcal{I}_{a,b}$ does not depend on local unitary operations performed separately on a and b . It thus provides a good measurement of the entanglement between modes a and b and will be used throughout this paper. Consequently, one has to look for the polarization basis (a^* , b^*) of the ‘maximally entangled modes’ which minimizes $\mathcal{I}_{a,b}$. It is easy to see that the first term in (3) is independent of the polarization basis, since it is the trace of the correlation matrix of modes a and b . The entanglement between a and b is therefore completely determined by the correlation term $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$.

In order to find the strongest correlations we turn to a particular basis for the fluctuations (we are only interested here in what happens to the ‘noise ellipsoid’, regardless of the mean field): as shown in appendix A, there always exists two orthogonally polarized modes A_u and A_v such that $\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0$. The u and v modes are ‘uncorrelated’ in the sense of the inseparability criterion and satisfy $\mathcal{I}_{u,v} = \max_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} \geq 2$. Note that these modes are not uncorrelated *stricto sensu*, since $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$ can be non-zero. Moreover, our choice is not unique, since any $A'_u = e^{i\theta_u} A_u$ and $A'_v = e^{i\theta_v} A_v$ also satisfy the same property. To unambiguously determine the ‘uncorrelated’ basis we choose modes u and v such that $\langle \delta A_u^2 \rangle$ and $\langle \delta A_v^2 \rangle$ are positive numbers. Physically, this means that we choose u and v such that their noise is minimum for the same quadrature Y .

Two orthogonally polarized modes a and b decompose on such a basis

$$A_a = \beta A_u - \alpha e^{i\phi} A_v \quad (4)$$

$$A_b = \alpha A_u + \beta e^{i\phi} A_v \quad (5)$$

with α and β positive real numbers such that $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. The correlation term reads

$$|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|^2 = \alpha^2 \beta^2 [\langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \langle \delta A_v^2 \rangle^2 - 2\langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi] \quad (6)$$

and is maximal for $\phi = \pi/2$ [π] and $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. The maximally entangled modes are then the circularly polarized modes with respect to modes u , v :

$$A_{a^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u - iA_v) \quad (7)$$

$$A_{b^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u + iA_v) \quad (8)$$

which satisfy

$$|\langle \delta A_{a^*} \delta A_{b^*} \rangle| = \max_{a,b} |\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| = \frac{1}{2} [\langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle].$$

Plugging this result in (3) and using (7) and (8), we obtain the maximal entanglement value as the sum of the minimal noise of the ‘uncorrelated’ modes

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} \equiv \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min}. \quad (9)$$

This is the main result of this section: *the best entanglement in the system is found between the circularly polarized modes in the (u , v) basis, and it is equal to the sum of the u , v mode minimal noises.* This result stresses the link between entanglement and squeezing, associating with each polarization basis (a , b) the sum of the minimal noises

$$\Sigma_{a,b} \equiv \langle \delta X_a^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_b^2 \rangle_{\min} \\ = \langle \delta A_a^\dagger \delta A_a + \delta A_a \delta A_a^\dagger + \delta A_b^\dagger \delta A_b + \delta A_b \delta A_b^\dagger \rangle \\ - 2[|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|]. \quad (10)$$

Equation (9) clearly shows that looking for maximal entanglement is equivalent to looking for maximal squeezing produced by the system

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \min_{a,b} [\langle \delta X_a^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_b^2 \rangle_{\min}] \equiv \Sigma_{\min}. \quad (11)$$

V Josse *et al*

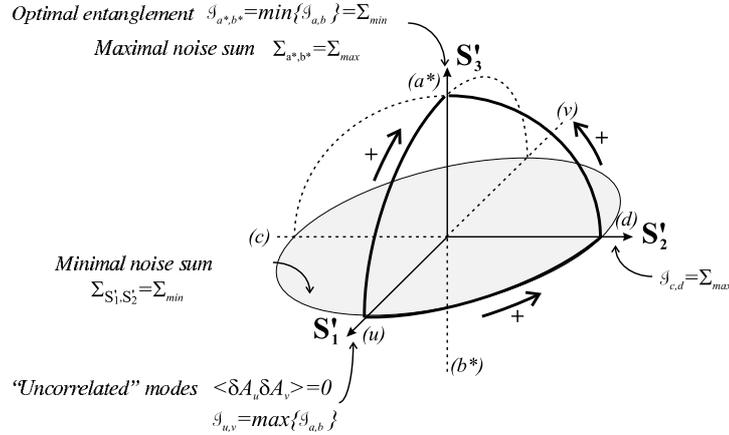


Figure 1. Quantum properties of the beam in the Poincaré sphere. The arrows with sign ‘+’ correspond to increasing correlations.

2.2. Correlations in the Poincaré sphere

A standard representation for the polarization state of light is provided by the Poincaré sphere [11], which relies on the Stokes parameters [20]. Given the special role played by the ‘uncorrelated’ basis, we define the Stokes parameters from the u and v modes

$$\begin{aligned} S'_0 &= A_u^* A_u + A_v^* A_v & S'_1 &= A_u^* A_u - A_v^* A_v \\ S'_2 &= A_u^* A_v + A_v^* A_u & S'_3 &= i(A_v^* A_u - A_u^* A_v) \end{aligned}$$

and we study the evolution of entanglement and squeezing when the polarization basis is rotated, that is, when the polarization state vector moves along the Poincaré sphere. In the general case the correlation properties of the system can be summarized as follows (see appendix B for the demonstration of these results):

- (i) Along the ‘uncorrelated’ modes axis S'_1 , $\mathcal{I}_{a,b}$ is maximal by construction ($\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0$) and these modes are never entangled

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{u,v} &= \max_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} \\ &= \langle \delta A_u^\dagger \delta A_u + \delta A_u \delta A_u^\dagger + \delta A_v^\dagger \delta A_v + \delta A_v \delta A_v^\dagger \rangle \\ &= \langle \delta X_u^2 \rangle + \langle \delta Y_u^2 \rangle + \langle \delta X_v^2 \rangle + \langle \delta Y_v^2 \rangle \geq 2. \end{aligned}$$

These modes are characterized by the fact that $\mathcal{I}_{u,v}(\theta)$ is independent of θ . The least noisy quadratures are the same and the noise reduction is maximal

$$\Sigma_{u,v} = \Sigma_{\min} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min}.$$

- (ii) In the equatorial plane (S'_1, S'_2), corresponding to the linearly polarized modes with respect to u, v , the noise reduction is also maximal and equal to Σ_{\min} . However, the entanglement is not constant: the best entanglement is obtained along the S'_2 axis (modes at 45° to the u and v modes) and its value is equal to the weakest noise reduction Σ_{\max}

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{c,d} &= \Sigma_{\max} \\ &= \min[\langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\max}, \langle \delta X_u^2 \rangle_{\max} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min}]. \end{aligned}$$

- (iii) Along the S'_3 axis are the maximally entangled modes a^*, b^* , for which the entanglement is maximal (and equal to the best noise reduction value)

$$\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \Sigma_{\min} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min}$$

and for which the excess noise is the largest

$$\Sigma_{a^*,b^*} = \langle \delta X_{a^*}^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_{b^*}^2 \rangle_{\min} = \Sigma_{\max}.$$

A graphical representation of these results is given in figure 1: at the poles there is maximal entanglement ($\mathcal{I}_{a^*,b^*} = \Sigma_{\min}$) and the worst noise reduction ($\Sigma_{a^*,b^*} = \Sigma_{\max}$). In the equatorial plane the noise reduction is optimal ($\Sigma_{S'_1,S'_2} = \Sigma_{\min}$). Note that the c and d modes at $\pm 45^\circ$ may be entangled while having optimal noise reduction.

2.3. Interpretation

An interpretation of the previous results can be given in connection with typical experiments in which entanglement is obtained by having independent beams interfere with each other [8, 12]. Indeed, going from the (u, v) to the (a, b) basis with parameters α, β and ϕ (equations (4) and (5)) is equivalent to combining the u and v modes on a beamsplitter with transmission $T = \beta^2$, the v mode being dephased by ϕ (see figure 2(a)). Although, again, the u and v modes are not completely uncorrelated, we can interpret the general results enunciated above as the result of interference between two independent beams. This configuration is the one typically used to generate entangled beams: two squeezed beams on the same quadrature are produced separately—for instance with two OPAs [8, 16], or by using the Kerr-type non-linearity of optical fibres [12]—and then combined on a beamsplitter.

The u and v modes are squeezed for the same quadrature Y , so that, in the case of a zero dephasing before the beamsplitter, the squeezed and noisy quadratures do not mix and the noise reduction sum is conserved (figure 2(b)). The outgoing beams are linearly polarized with respect to the incoming ones ($\phi = 0$) and we retrieve property (ii)

$$\Sigma_{S'_1,S'_2} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} = \Sigma_{\min}.$$

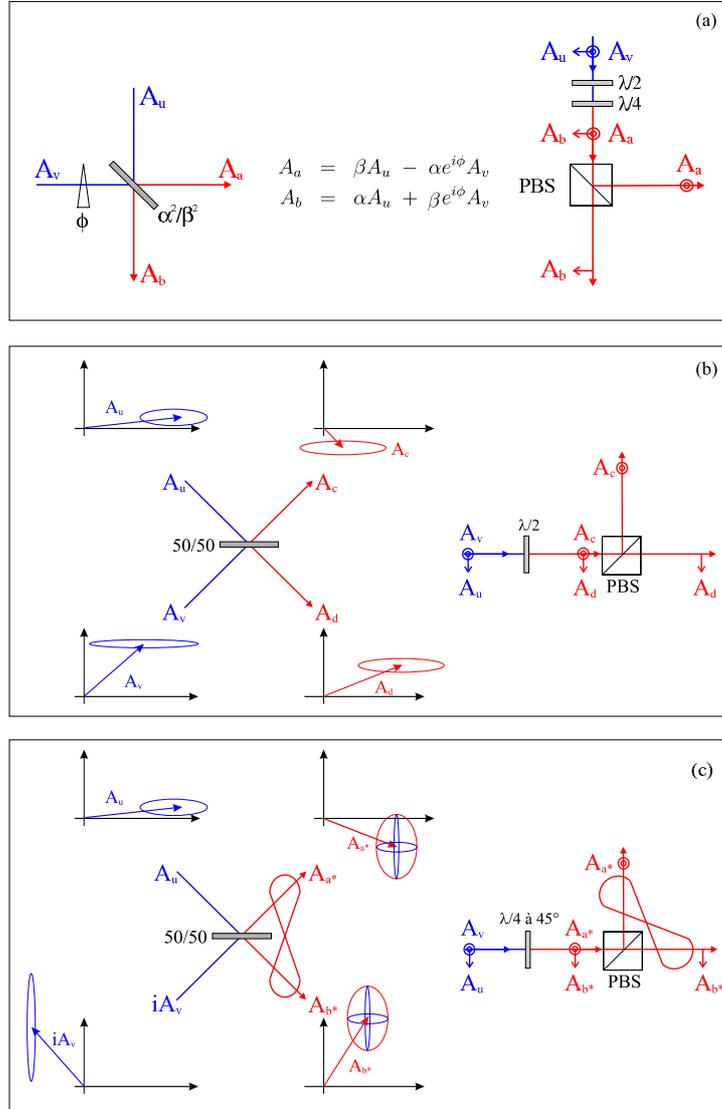


Figure 2. Interpretation of the correlations. (a) Equivalence between the transformations corresponding to the transmission by a beamsplitter (left) and a polarization basis rotation (right). (b) Squeezing conservation for the linearly polarized modes when there is no dephasing between the squeezed quadratures. (c) Generation of entangled modes via the interference of two modes squeezed for orthogonal quadratures.

If the dephasing before mixing is now equal to $\pi/2$, the outgoing beams have excess noise on both quadratures (see figure 2(c)). However, these noises are correlated and, obviously, all the more so for a 50/50 beamsplitter, since it maximally mixes the u and v modes. This transformation is equivalent to going from the linearly polarized basis (u, v) to the circularly polarized basis (a^*, b^*) , which is naturally the correlated basis

$$\frac{1}{2} \langle \delta(X_{a^*} + X_{b^*})^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_u^2(\theta) \rangle < 1 \quad \text{for } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} \langle \delta(Y_{a^*} - Y_{b^*})^2(\theta) \rangle = \langle \delta X_v^2(\theta) \rangle < 1 \quad \text{for } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Thus $\mathcal{I}_{a^*, b^*} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} < 2$.

When the u and v modes are symmetrical (same noise properties), it can be shown that they are completely independent (see section 3 for an example). The a^*, b^* modes fluctuations are then the same for all quadratures.

Before applying these results to our experiment, we would like to emphasize that this analogy between the quantum properties of any system and those produced via the mixing of two independent beams provides us with a simple interpretation of the main results. This analysis is of particular interest to the study of systems for which the correlations are simultaneously produced inside a ‘black box’. One has to find the ‘uncorrelated’ modes u, v , an experimental signature being that the entanglement value $\mathcal{I}_{u,v}(\theta)$ does not depend on θ . Once this basis is obtained, one can apply the previous formalism or, equivalently, think in terms of independent beam combination.

V Josse *et al*

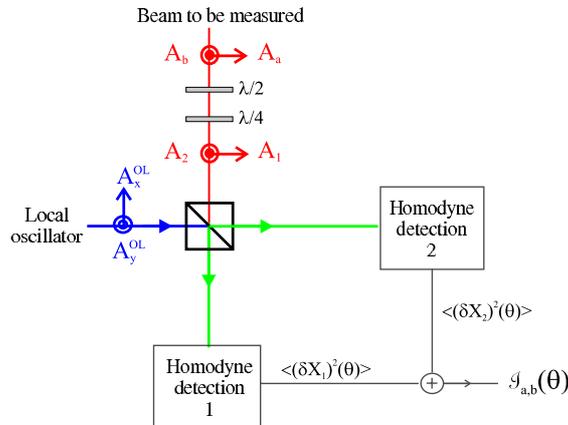


Figure 3. Schematic diagram of the a, b mode entanglement measurement.

This method allows us, for instance, to determine the maximal correlations produced by an OPO inside which are inserted birefringent elements [21].

3. Quadrature entanglement

In our experiment [18], the black box consists of an optical cavity containing a cloud of cold caesium atoms into which is sent an off-resonant light beam. The tomography of the squeezed state generated via the interaction with cold atoms was performed in a previous experiment and showed that these states were Gaussian [22]. Consequently, we can apply the results of the previous section. In this section we first present the principle of a detection scheme allowing for a direct measurement of the quadrature entanglement given by (1).

We then study the entanglement generated in the case of a linear incident polarization, which is qualitatively different from the circular polarization case.

3.1. Entanglement measurement principle

In order to measure the entanglement given by (1) between two orthogonally polarized modes a and b , we can re-express $\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$ as the sum of the noises of circularly polarized modes 1 and 2 with respect to a and b

$$\mathcal{I}_{a,b}(\theta) = \langle \delta X_1^2(\theta) \rangle + \langle \delta X_2^2(\theta) \rangle$$

with

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_a + A_b)$$

$$A_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(A_a - A_b).$$

As represented in figure 3, modes 1 and 2 are straightforwardly obtained from the given a and b modes with a half-wave and a quarter-wave plate. They are then mixed with a strong coherent local oscillator (LO) on a polarizing beamsplitter and sent to two balanced homodyne detectors. We thus simultaneously measure the spectral noise densities $\langle \delta X_1^2(\theta) \rangle$ and $\langle \delta X_2^2(\theta) \rangle$ at a given analysis frequency, the sum of which directly gives $\mathcal{I}_{a,b}(\theta)$. This value oscillates when the LO phase is varied in time. Note that, unlike usual detection schemes [8] involving two successive measurements, this method is based on one simultaneous measurement.

3.2. Case of a linear incident polarization

In the system considered in [9], an x -polarized beam interacts with a cloud of cold caesium atoms in an optical cavity. The experimental set-up is shown in figure 4. The cavity coupling

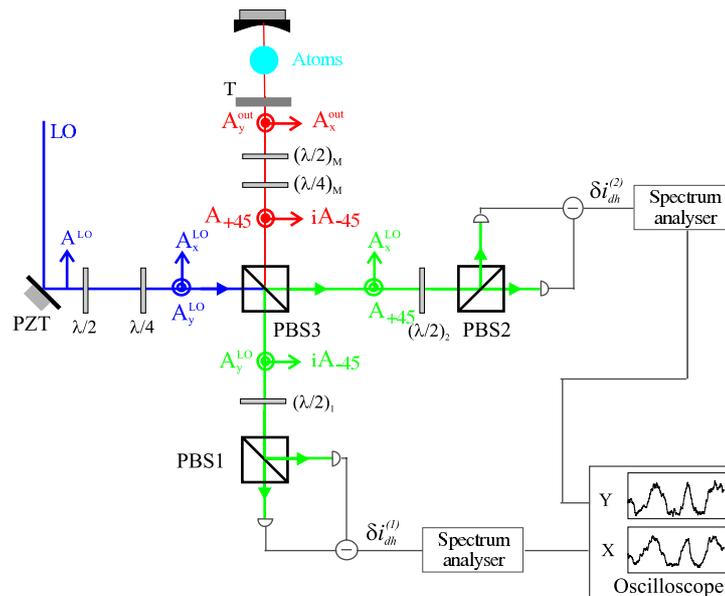


Figure 4. Experimental set-up.

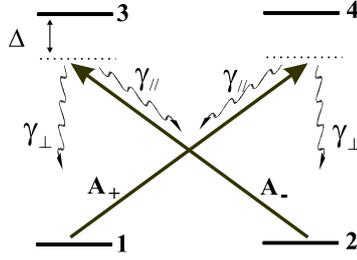


Figure 5. Atomic level structure considered: X-like configuration.

mirror has a transmission coefficient of 10%; the rear mirror is highly reflecting. We probe the atoms with a linearly polarized laser beam detuned by about 50 MHz in the red of the $6S_{1/2}$, $F = 4-6P_{3/2}$, $F = 5$ transition. The optical power of the probe beam ranges from 5 to 15 μ W. After exiting the cavity, both the mean field mode A_x and the orthogonally polarized vacuum mode A_y are squeezed for frequencies ranging between 3 and 12 MHz. An interpretation of these results [17] can be provided by modelling the complicated $6S_{1/2}$, $F = 4-6P_{3/2}$, $F = 5$ transition by an X-like four-level atomic structure (figure 5).

When the two transitions are symmetrically saturated, the atoms behave as a Kerr-like medium for the circular components

$$A_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x \mp iA_y) \quad (12)$$

both of which are squeezed [17]. Because of the symmetry of the system, they are obviously squeezed for the same quadrature. From the viewpoint of linear polarizations the x and y modes are also squeezed due to the cross-Kerr effect, but for *orthogonal* quadratures [17, 18].

Indeed, from (12), one derives the following expressions:

$$\langle \delta A_x \delta A_y \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (\langle \delta A_+^2 \rangle - \langle \delta A_-^2 \rangle) + \langle \delta A_+ \delta A_-^\dagger \rangle - \langle \delta A_+^\dagger \delta A_- \rangle = 0 \quad (13)$$

$$\langle \delta A_x \delta A_y^\dagger \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\langle \delta A_+ \delta A_+^\dagger \rangle - \langle \delta A_- \delta A_-^\dagger \rangle) + \langle \delta A_+ \delta A_-^\dagger \rangle - \langle \delta A_+^\dagger \delta A_- \rangle = 0 \quad (14)$$

$$\langle \delta A_x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \delta A_+^2 \rangle + \langle \delta A_-^2 \rangle - 2\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle) \quad (15)$$

$$\langle \delta A_y^2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \delta A_+^2 \rangle + \langle \delta A_-^2 \rangle + 2\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle). \quad (16)$$

Equations (13) and (14) show that the x and y modes are completely independent. We then measure $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$ following the previous procedure: A_{+45} and iA_{-45} are sent to the homodyne detectors (figure 4), yielding the quantity

$$\mathcal{I}_{x,y}(\theta) = \langle \delta X_{+45}^2(\theta) \rangle + \langle \delta X_{i(-45)}^2(\theta) \rangle \quad (17)$$

with

$$A_{+45} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + A_y) \\ iA_{-45} = \frac{i}{\sqrt{2}}(A_x - A_y).$$

We verify in figure 6 that this quantity is effectively independent of θ , ensuring that the x and y modes are ‘uncorrelated’ in the sense of the inseparability criterion.

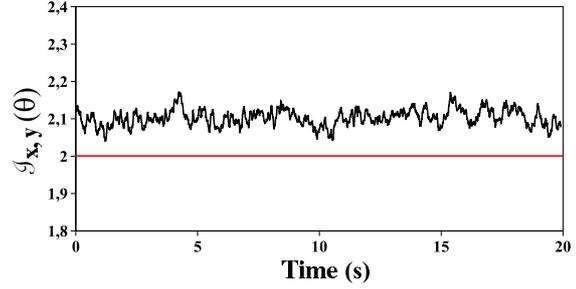


Figure 6. $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$ when θ is varied in time, at 5 MHz.

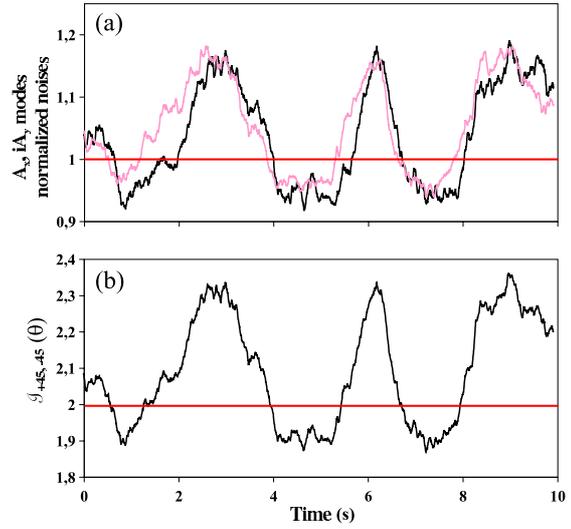


Figure 7. (a) Noise spectra of A_x and iA_y when the LO phase is varied in time. The analysis frequency is 5 MHz. (b) Corresponding value of $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$.

Bearing in mind that the u, v mode noises must be minimal for the same quadrature, we look at (15) and (16) to find the relative orientation of the minimal quadratures of the x and y modes. These minimal quadratures are *a priori* different and depend on the correlation term $\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle$ between the circularly polarized modes. Physically, these modes are correlated by optical pumping processes between Zeeman sublevels. However, we place ourselves in the ‘high frequency’ limit for which the analysis frequency (a few MHz) is much higher than the optical pumping rate (a few hundreds of kHz). The modes A_{\pm} are then uncorrelated ($\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle \simeq 0$), and squeezed for the same quadratures. Using (15), (16) and the fact that

$$\langle \delta X_{\alpha}^2 \rangle = \langle \delta A_{\alpha} \delta A_{\alpha}^\dagger + \delta A_{\alpha}^\dagger \delta A_{\alpha} \rangle + 2\langle \delta A_{\alpha}^2 \rangle \cos 2\theta, \quad (\alpha = u, v)$$

we deduce that the x and y modes are squeezed for *orthogonal* quadratures. These properties have been verified both theoretically [17] and experimentally [18] (see also figure 7(a)). In the high frequency limit, one has thus to dephase one mode by $\pi/2$; we choose for the ‘uncorrelated’ basis $A_u = A_x$ and $A_v = iA_y$.

The maximally entangled modes are then the modes at 45° to the x, y basis

V Josse *et al*

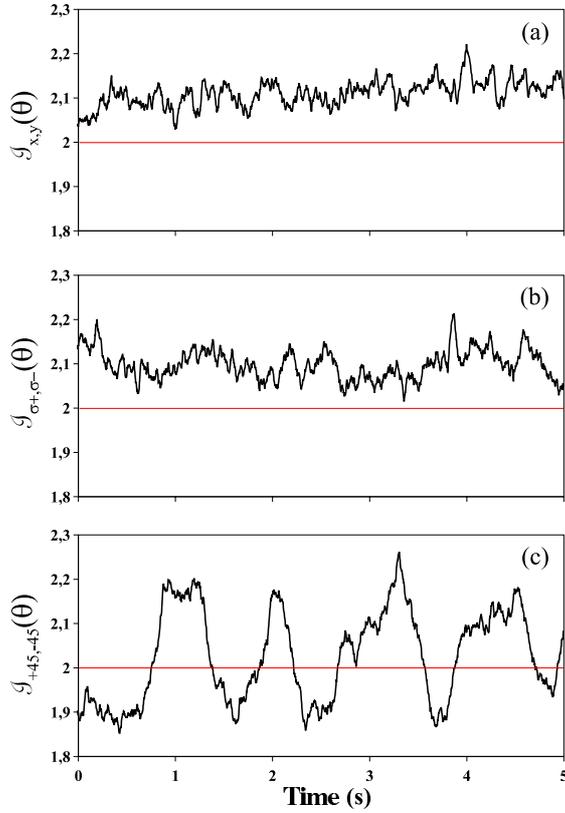


Figure 8. Entanglement for the canonical polarization basis: (x, y) (a), (σ_+, σ_-) (b), $(+45, -45)$ (c), for an analysis frequency of 5 MHz.

$$A_{a^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u - iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + A_y) \equiv A_{+45} \quad (18)$$

$$A_{b^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u + iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - A_y) \equiv A_{-45} \quad (19)$$

and their entanglement is measured by summing the minimal noises of A_x and iA_y

$$\mathcal{I}_{+45,-45} = \langle \delta X_x^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_{iy}^2 \rangle_{\min} \simeq 1.9. \quad (20)$$

The results are reproduced in figure 7; for an analysis frequency of 5 MHz: the two modes indeed have the same spectrum, and, when summed, the minimal value of $\mathcal{I}_{+45,-45}(\theta)$ is below two, demonstrating entanglement. Equivalently, one could have set $A_u = A_+$ and $A_v = A_-$, since these modes are uncorrelated and symmetrical. To obtain the entangled modes, one has to dephase them by $\pi/2$ and combine them on a beamsplitter, yielding again the $A_{\pm 45}$ modes

$$A_{+45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + A_y) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_+ + iA_-)$$

$$A_{-45} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - A_y) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(A_+ - iA_-).$$

Let us now represent these results in the Poincaré sphere. In contrast with the previous section, we define the Stokes parameters in a more usual fashion from the linearly polarized mode (x, y) basis

$$S_0 = A_x^* A_x + A_y^* A_y \quad S_1 = A_x^* A_x - A_y^* A_y$$

$$S_2 = A_x^* A_y + A_y^* A_x \quad S_3 = i(A_y^* A_x - A_x^* A_y).$$

With the relations $A_u = A_x$, $A_v = iA_y$, it is easy to see that the new Poincaré sphere is obtained from the previous one via a rotation by $\pi/2$ around the S_1 axis. If we measure the entanglement in the (σ_+, σ_-) basis

$$\mathcal{I}_{\sigma_+, \sigma_-}(\theta) = \langle \delta X_x^2(\theta) \rangle + \langle \delta X_y^2(\theta) \rangle$$

and represent the results in figure 8, one sees that the bases in the (S_1, S_3) plane are uncorrelated, as expected, whereas maximal entanglement is found for the $\pm 45^\circ$ modes.

We also measured the noise spectra of each mode in the three bases and checked that the squeezing is maximal and identical for all modes in the (S_1, S_3) plane

$$\langle \delta X_x^2 \rangle_{\min} = \langle \delta X_y^2 \rangle_{\min} = \langle \delta X_{\sigma_+}^2 \rangle_{\min} = \langle \delta X_{\sigma_-}^2 \rangle_{\min} \simeq 0.95$$

and that the entangled modes $A_{\pm 45}$ have almost isotropic fluctuations in the Fresnel diagram, as well as identical spectra because of the independence of the x and y modes. One can summarize these results in the Poincaré sphere represented in figure 9.

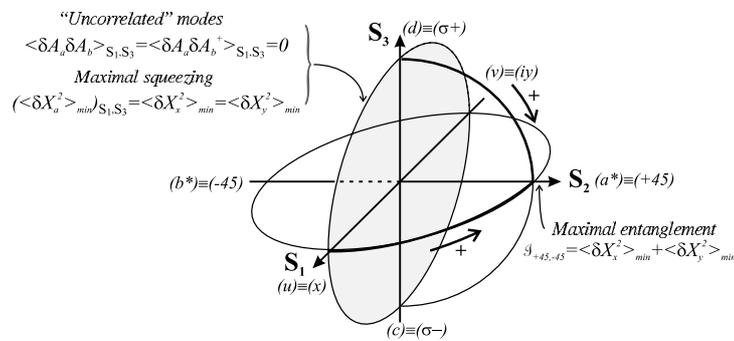


Figure 9. Quantum properties of the beam in the Poincaré sphere at high frequency, in the linear polarization case.

3.3. Case of a circular incident polarization

In this section, we illustrate the differences between a *two-squeezed-mode* system and a *single-squeezed-mode* system. We show that the entanglement produced in the latter is qualitatively different from the former, even if the amount of correlation is the same. Whereas the two-squeezed-mode situation corresponds to the case of a linear polarization, the single-squeezed-mode situation appears when the polarization is circular. Indeed, our system may exhibit *polarization switching*: the intracavity polarization may become circular under some conditions [17]. In this case, the atoms only interact with one mode—say σ_+ , which may also be squeezed because of the Kerr effect. Yet, the situation is very different from the previous one. One can set $A_u = A_+$ and $A_v = A_-$, the former being squeezed, the latter being a coherent vacuum. The vacuum fluctuations are isotropic and, therefore, the properties of the (u, v) basis must remain unchanged when the v mode is dephased. In other words, the Poincaré sphere must be invariant under rotations around S_1 . Moreover, since $\langle \delta A_v^2 \rangle = 0$, the minimal noise sum is uniform on the whole sphere

$$\Sigma_{\min} = \Sigma_{\max} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + 1.$$

The entanglement is maximal and constant in the (S_2, S_3) plane

$$\mathcal{I}_{S_2, S_3} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + 1.$$

In this plane all modes have identical noise

$$\langle \delta X_a^2(\theta) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle \delta X_u^2(\theta) \rangle). \quad (21)$$

This result is easily understandable if compared to the transmission of a squeezed beam by a beamsplitter. It is well known that part of the incident beam squeezing is lost to the reflected beam and leaks into the environment.

We measured the noise spectra for all bases. We observed squeezing in the σ_+ component, the σ_- component being at the shot noise level. We checked that the spectra of the $x, iy, +45, i(-45)$ modes were all identical and squeezed by half the amount of the σ_+ component squeezing, consistently with (21).

Although the x and y modes are both squeezed for orthogonal quadratures, the difference from the previous case is that they are now correlated. We verified this by measuring the entanglement in each basis. The results, displayed in figure 10, show that the circular components are indeed uncorrelated, while the x and y modes are entangled, as well as the ± 45 modes.

4. Polarization entanglement

Up to now, we have determined the correlation properties of the beam and shown that non-separable states, namely the ± 45 modes in the high frequency limit, were produced in our system. We show in this section that the quadrature entanglement demonstrated previously can be mapped into a polarization basis, thus achieving *polarization entanglement*.

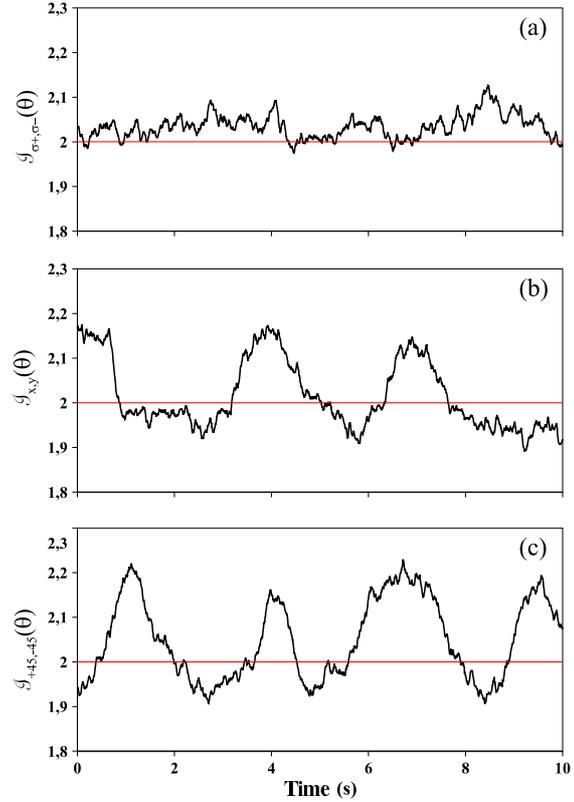


Figure 10. Entanglement in different polarization bases, in the circular polarization case: (a) $\mathcal{I}_{\sigma_+, \sigma_-}(\theta)$, (b) $\mathcal{I}_{x,y}(\theta)$, (c) $\mathcal{I}_{+45, -45}(\theta)$.

4.1. Definition and scheme

Let us consider two spatially separated polarization modes α and β . With each one we associate a set of Stokes parameters. One can extend the inseparability criterion for two modes to a pair of these operators [9, 11, 8]. *Polarization entanglement* is achieved when

$$\mathcal{I}_{\alpha, \beta}^S = \frac{1}{2} [\langle \delta(S_2^\alpha + S_2^\beta)^2 \rangle + \langle \delta(S_3^\alpha + S_3^\beta)^2 \rangle] < [|\langle S_2^\alpha, S_3^\alpha \rangle| + |\langle S_2^\beta, S_3^\beta \rangle|]. \quad (22)$$

Because of the cyclical commutation relations between the Stokes operators, the criterion now depends on the polarization state of the beams (here, $\langle S_1^\alpha \rangle$ and $\langle S_1^\beta \rangle$). In our case, we use two quadrature entangled modes a and b and mix them on a polarizing beamsplitter with an intense coherent beam B , polarized at 45° (figure 11). The resulting beams, α and β , are composed with modes A_a and B_y , and A_b and B_x respectively. The Stokes parameters are

$$\begin{aligned} S_1^\alpha &= A_a^\dagger A_a - B_y^\dagger B_y & S_1^\beta &= B_x^\dagger B_x - A_b^\dagger A_b \\ S_2^\alpha &= A_a B_y^\dagger + A_a^\dagger B_y & S_2^\beta &= A_b^\dagger B_x + A_b B_x^\dagger \\ S_3^\alpha &= i(A_a B_y^\dagger - A_a^\dagger B_y) & S_3^\beta &= i(A_b^\dagger B_x - A_b B_x^\dagger). \end{aligned}$$

Denoting by $\alpha_B, \alpha_a, \alpha_b$ and θ_B the field amplitudes and the B -field phase, and assuming that the B -field is much

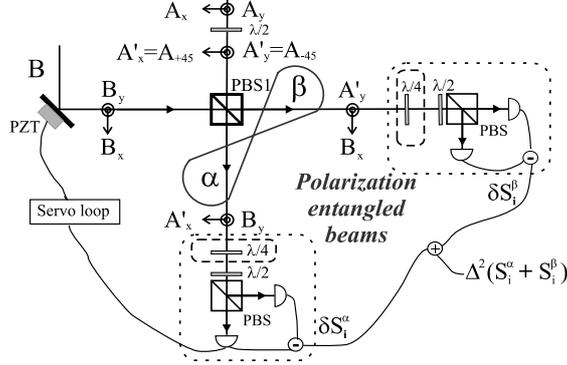
V Josse *et al*

Figure 11. Polarization-entangled beam generation set-up. Using the quarter-wave plates or not allows for measuring either S_{S_2} or S_{S_3} .

more intense than the A -field ($\alpha_B \gg \alpha_a, \alpha_b$), the two beams are orthogonally polarized: $\langle S_1^\alpha \rangle = -\langle S_1^\beta \rangle = -\alpha_B^2$. The polarization entanglement condition (22) then reads

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}^S < 2\alpha_B^2. \quad (23)$$

On the other hand, the Stokes parameters fluctuations are proportional to the a and b mode quadratures

$$\begin{aligned} \delta S_2^\alpha &= \alpha_B \delta X_a(\theta_B), & \delta S_2^\beta &= \alpha_B \delta X_b(\theta_B) \\ \delta S_3^\alpha &= -\alpha_B \delta Y_a(\theta_B), & \delta S_3^\beta &= \alpha_B \delta Y_b(\theta_B). \end{aligned}$$

The inseparability criterion is thus directly related to the entanglement between the a and b modes

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta}^S = \alpha_B^2 \mathcal{I}_{a,b}(\theta_B). \quad (24)$$

If one locks the phase θ_B in order to obtain $\mathcal{I}_{a,b}(\theta_B) = \min_\theta \mathcal{I}_{a,b}(\theta) \equiv \mathcal{I}_{a,b} < 2$, the beams are then polarization entangled. The S_2 and S_3 Stokes parameters can be measured using the right combination of plates and beamsplitter [11].

4.2. Experimental results

We have shown that the maximally entangled modes were the ± 45 modes at the output of the cavity. We thus insert after the cavity a half-wave plate to set $A_a = A_{+45}$ and $A_b = A_{-45}$. We then lock the phase θ_B and measure

$$S_{S_2} = \langle (\delta X_x(\theta_B))^2 \rangle, \quad S_{S_3} = \langle (\delta Y_y(\theta_B))^2 \rangle. \quad (25)$$

The results are shown in figure 12 and we observe

$$\begin{aligned} S_{S_2} &\equiv \frac{1}{2\alpha_B^2} \langle \delta(S_2^\alpha + S_2^\beta)^2 \rangle \simeq 0.96 < 1 \\ S_{S_3} &\equiv \frac{1}{2\alpha_B^2} \langle \delta(S_3^\alpha + S_3^\beta)^2 \rangle \simeq 0.96 < 1 \end{aligned}$$

so that

$$\frac{\mathcal{I}_{\alpha,\beta}^S}{\alpha_B^2} = S_{S_2} + S_{S_3} = \mathcal{I}_{+45,i(-45)} \simeq 1.92 < 2.$$

This value is consistent with the quadrature entanglement measurement (20).

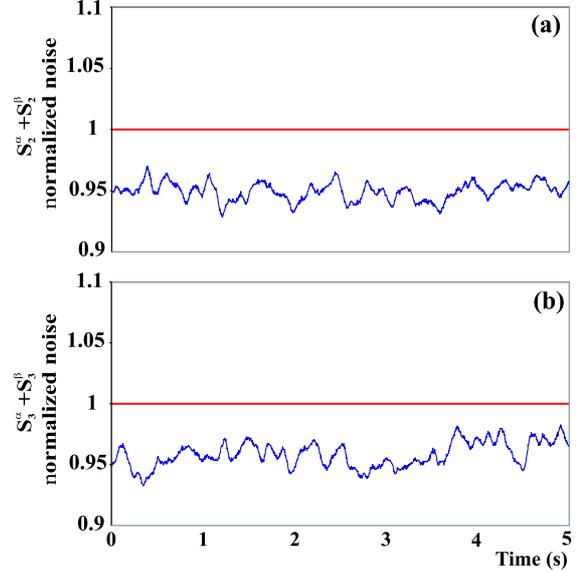


Figure 12. Normalized noise of $S_2^\alpha + S_2^\beta$ (a) and $S_3^\alpha + S_3^\beta$ (b), when the phase θ_B is locked.

5. Conclusion

Using the non-linearity of cold atoms, we have generated a quadrature entangled beam. The maximally entangled polarization modes have been found following a general method to characterize entanglement in a two-mode system. We have stressed the equivalence between our scheme and other continuous variable entanglement experiments in which the correlations are created via the mixing of independent beams. Moreover, a simple interpretation of the quantum properties of such a system has been given in the Poincaré sphere. To demonstrate the entanglement we have performed a direct measurement of the inseparability criterion [2] using two homodyne detections. We have then achieved polarization entanglement by mixing our quadrature entangled beam with an intense coherent field. Experimental evidence of this entanglement was given by the direct measurement of the Stokes operator noise for each beam.

Appendix A. Uncorrelated basis existence

Starting from a ‘correlated’ polarization basis (a, b) ($\langle \delta A_a \delta A_b \rangle \neq 0$), we prove the existence of the ‘uncorrelated’ basis (u, v) , such that

$$\langle \delta A_u \delta A_v \rangle = 0. \quad (\text{A.1})$$

Using the decomposition

$$A_u = \cos \Phi A_a - \sin \Phi e^{i\omega} A_b$$

$$A_v = \sin \Phi A_a + \cos \Phi e^{i\omega} A_b$$

with

$$e^{i\omega} = \frac{\mathcal{M}}{|\mathcal{M}|}, \quad \cos 2\Phi = \frac{|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 - |\langle \delta A_b^2 \rangle|^2}{\mathcal{N}},$$

$$\sin 2\Phi = \frac{-2|\mathcal{M}|}{\mathcal{N}}$$

where

$$\mathcal{M} = \langle \delta A_a^2 \rangle \langle \delta A_a \delta A_b \rangle^* + \langle \delta A_b^2 \rangle^* \langle \delta A_a \delta A_b \rangle$$

and

$$\mathcal{N} = \sqrt{4|\mathcal{M}|^2 + [|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 - |\langle \delta A_b^2 \rangle|^2]^2}.$$

it is straightforward to see that the u and v modes thus defined satisfy (A.1).

Appendix B. Correlations in the Poincaré sphere

We give a brief demonstration of the general properties of the Poincaré sphere enunciated in section 2.2. Given the Poincaré sphere defined from the uncorrelated basis (u, v), we calculate the entanglement and squeezing in different bases. We recall that the entanglement $\mathcal{I}_{a,b}$ between modes a and b only depends on the correlation term $|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle|$, whereas the noise sum $\Sigma_{a,b}$ depends on the quantity $|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 + |\langle \delta A_b^2 \rangle|^2$. For a given polarization basis (4), (5), one has

$$|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2 = \beta^4 \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \alpha^4 \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2\alpha^2 \beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi \quad (\text{B.1})$$

$$|\langle \delta A_b^2 \rangle|^2 = \alpha^4 \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \beta^4 \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2\alpha^2 \beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos 2\phi. \quad (\text{B.2})$$

For α and β fixed, $|\langle \delta A_a^2 \rangle|$ and $|\langle \delta A_b^2 \rangle|$ are maximal for $\phi = 0$ [π]

$$|\langle \delta A_a^2 \rangle|_{\max} = \beta^2 \langle \delta A_u^2 \rangle + \alpha^2 \langle \delta A_v^2 \rangle$$

and

$$\begin{aligned} |\langle \delta A_b^2 \rangle|_{\max} &= \alpha^2 \langle \delta A_u^2 \rangle + \beta^2 \langle \delta A_v^2 \rangle \\ &\Rightarrow (|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|)_{\phi=0} = \max_{a,b} [|\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle|] \\ &= \langle \delta A_u^2 \rangle + \langle \delta A_v^2 \rangle. \end{aligned}$$

The noise sum is thus minimal for all the linearly polarized modes with respect to u, v , i.e. in the plane (S'_1, S'_2)

$$\Sigma_{S'_1, S'_2} = \min_{a,b} \Sigma_{a,b} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} \equiv \Sigma_{\min}.$$

If the ellipticity increases ($\phi \neq 0$), the noise sum increases, as can be seen from (B.1) and (B.2). In the meridional plane (S'_2, S'_3) the a and b modes satisfy ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$)

$$\begin{aligned} (|\langle \delta A_a^2 \rangle|^2)_{S'_2, S'_3} &= (|\langle \delta A_b^2 \rangle|^2)_{S'_2, S'_3} \\ &= \frac{1}{4} \{ \langle \delta A_u^2 \rangle^2 + \langle \delta A_v^2 \rangle^2 + 2 \langle \delta A_u^2 \rangle \langle \delta A_v^2 \rangle \cos(2\Phi) \}. \end{aligned}$$

This quantity is minimal for the circularly polarized modes a^*, b^* ($\phi = \pi/2$):

$$|\langle \delta A_{a^*}^2 \rangle| + |\langle \delta A_{b^*}^2 \rangle| = |\langle \delta A_u^2 \rangle - \langle \delta A_v^2 \rangle| = \min_{a,b} \{ |\langle \delta A_a^2 \rangle| + |\langle \delta A_b^2 \rangle| \}.$$

The noise sum then equals its maximal value Σ_{\max} . Assuming $\langle \delta A_u^2 \rangle \geq \langle \delta A_v^2 \rangle$, this value reads

$$\Sigma_{a^*, b^*} = \langle \delta X_{a^*}^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_{b^*}^2 \rangle_{\min} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} \equiv \Sigma_{\max}.$$

More generally, one has

$$\Sigma_{\max} = \min \{ \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\max}, \langle \delta X_u^2 \rangle_{\max} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} \}.$$

Let us now consider the entanglement. Optimal entanglement is obtained by construction for modes a^* and b^*

$$\mathcal{I}_{a^*, b^*} = \min_{a,b} \mathcal{I}_{a,b} = \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} = \Sigma_{\min}.$$

The entanglement decreases with the ellipticity. For the linearly polarized modes ($\phi = 0$), equation (6) yields

$$|\langle \delta A_a \delta A_b \rangle| = \alpha\beta |\langle \delta A_u^2 \rangle - \langle \delta A_v^2 \rangle|$$

$\mathcal{I}_{a,b}$ reaches its maximal value for the u and v modes

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{u,v} &= \frac{1}{2} \{ \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_u^2 \rangle_{\max} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\max} \} \\ &\equiv \max_{a,b} \mathcal{I}_{a,b}. \end{aligned}$$

However, $\mathcal{I}_{a,b}$ is not constant in the equatorial plane; it is minimal ($\mathcal{I}_{c,d} = \Sigma_{\max}$) for the 45°-polarized modes ($\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$), denoted by c, d .

Last, we would like to point out that optimizing the squeezing sum of two modes is not equivalent to optimizing the squeezing for one mode only. Finding the maximally squeezed mode is not trivial, since the u and v modes are not *a priori* independent. No condition holds on $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$. The noise of one quadrature of mode a is given by

$$\begin{aligned} \langle \delta X_a^2(\theta) \rangle &= \beta^2 \langle \delta X_u^2(\theta) \rangle + \alpha^2 \langle \delta X_v^2(\theta - \phi) \rangle \\ &\quad - 2\alpha\beta \langle \delta X_u(\theta) \delta X_v(\theta - \phi) \rangle. \end{aligned}$$

The correlation term can be written as

$$\begin{aligned} \langle \delta X_u(\theta) \delta X_v(\theta - \phi) \rangle &= \langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle e^{-i\phi} + \langle \delta A_u^\dagger \delta A_v \rangle e^{+i\phi} \\ &= 2 \cos(\phi_C - \phi) |\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle| \end{aligned}$$

with ϕ_C the phase of $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$. The complex general solution takes a simple form if we assume that $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle$ is a real positive number ($\phi_C = 0$). The optimal value is then reached for $\phi = 0$ and one finally gets

$$\begin{aligned} \min_a \{ \langle \delta X_a^2 \rangle_{\min} \} &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(\langle \delta X_u^2 \rangle_{\min} - \langle \delta X_v^2 \rangle_{\min})^2 + 16 \langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle^2} \right\}. \end{aligned}$$

It is therefore possible to obtain a better squeezing on one mode than that of u, v . Note that, if $\langle \delta A_u \delta A_v^\dagger \rangle = 0$, the u and v modes are independent and, as in our experiments, the best squeezing is that of one of the u and v modes.

Appendix C. Frequency dependence of the entanglement

In this appendix we detail what happens to the squeezing and entanglement at lower frequencies when the incoming polarization is linear (section 3.2). The situation is a little bit more complicated than at high frequency, since the correlations between the circularly polarized components must be taken into account for frequencies lower than the optical pumping rate. The σ_{\pm} modes are still symmetrical and the x and y modes still uncorrelated. However, the minimal noise quadratures are rotated (equations (15) and (16)) and the x and

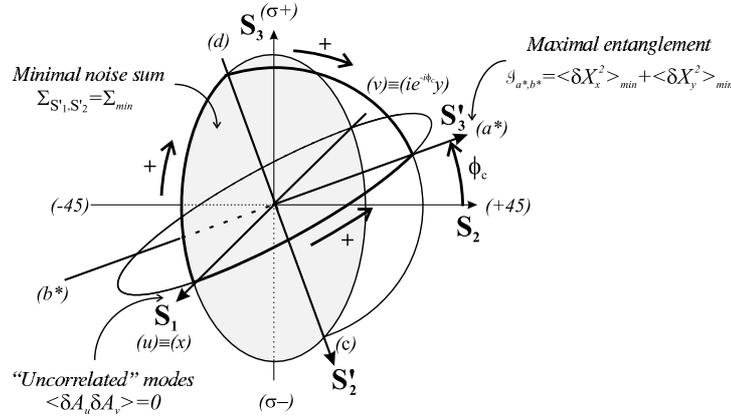
V Josse *et al*

Figure C.1. Quantum properties of the beam in the Poincaré sphere *at lower frequency*, in the linear polarization case.

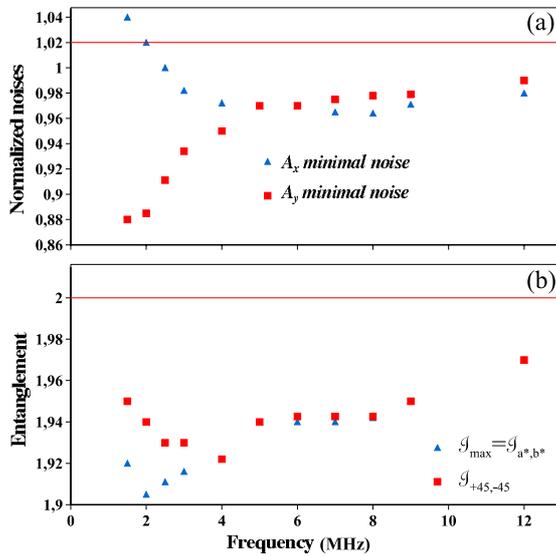


Figure C.2. (a) x and y mode minimum noises versus frequency. (b) Entanglement for the $\pm 45^\circ$ polarized modes ($\mathcal{I}_{+45, -45}$) compared to the maximal entanglement (\mathcal{I}_{a^*, b^*}).

y modes are no longer squeezed for orthogonal quadratures. To retrieve the ‘uncorrelated’ basis, one mode must be dephased, say y :

$$A_u = A_x \quad \text{and} \quad A_v = ie^{-i\phi_c} A_y$$

where

$$\tan \phi_c = \frac{2|\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle| \sin(\phi_2 - \phi_1)}{\langle \delta A_+^2 \rangle + \langle \delta A_-^2 \rangle + 2|\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle| \cos(\phi_1 - \phi_2)}.$$

In the high frequency limit, $|\langle \delta A_+ \delta A_- \rangle| \rightarrow 0$ and, therefore $\phi_c \rightarrow 0$: we retrieve the previous (u, v) basis. This dephasing for the y mode is equivalent to a rotation of the Poincaré sphere by an angle ϕ_c around the S_1 axis (figure C.1). The maximally entangled modes are then

$$A_{a^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u - iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + e^{-i\phi_c} A_y) \quad (\text{C.1})$$

$$A_{b^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_u + iA_v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - e^{-i\phi_c} A_y) \quad (\text{C.2})$$

and their entanglement is still given by (20)

$$\mathcal{I}_{a^*, b^*} = \langle \delta X_x^2 \rangle_{\min} + \langle \delta X_y^2 \rangle_{\min}.$$

In figure C.2 are plotted the x and y mode squeezing versus frequency, as well as $\mathcal{I}_{+45, -45}$ and the optimal entanglement \mathcal{I}_{a^*, b^*} . At low frequency the squeezing improves for the vacuum mode A_y , but degrades for the mean field mode x , so that the entanglement actually decreases at low frequency. In figure C.2 we also report the value of $\mathcal{I}_{+45, -45}$. One sees that it equals the optimal entanglement in the high frequency limit, but, for lower frequencies, the two values differ, confirming that the maximally entangled modes are no longer $A_{\pm 45}$, but given by (C.1)–(C.2).

References

- [1] Reid M D 1988 *Phys. Rev. A* **37** 4792
- [2] Duan L M, Giedke G, Cirac J I and Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722
Simon R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726
- [3] Mancini S, Giovanetti V, Vitali D and Tombesi P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 120401
Giovanetti V, Mancini S, Vitali D and Tombesi P 2003 *Phys. Rev. A* **67** 022320
- [4] Furusawa A, Sorensen J, Braunstein S, Fuchs C, Kimble H J and Polzik E S 1998 *Science* **282** 706
- [5] Hald J, Sorensen J L, Schori C and Polzik E S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1319
- [6] Zhang Y, Wang H, Li X, Jing J, Xie C and Peng K 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023813
- [7] Silberhorn C, Lam P K, Weiß O, König F, Korolkova N and Leuchs G 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4267
- [8] Bowen W P, Treps N, Schnabel R and Lam P K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 253601
Bowen W P, Treps N, Schnabel R, Ralph T C and Lam P K 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5** S467
- [9] Josse V, Dantan A, Bramati A, Pinard M and Giacobino E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 123601 (quant-ph/0306147)
- [10] Julsgaard B, Koshekin A and Polzik E S 2001 *Nature* **413** 400
- [11] Korolkova N, Leuchs G, Loudon R, Ralph T C and Silberhorn C 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052306
Korolkova N, Silberhorn Ch, Glöckl O, Lorentz S, Marquardt Ch and Leuchs G 2002 *Eur. Phys. J. D.* **18** 229

Entanglement and squeezing in a two-mode system

- [12] Glöckl O, Heersink J, Korolkova N, Leuchs G and Lorenz S 2003 *Preprint* quant-ph/0302083
- [13] Bowen W P, Treps N, Buchler B C, Schnabel R, Ralph T C, Bachor H A, Symul T and Lam P K 2003 *Phys. Rev. A* **67** 032302
- [14] Li X, Pan Q, Jing J, Zhang J, Xie C and Peng K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 047904
- [15] Glöckl O, Lorenz S, Marquardt C, Heersink J, Brownnutt M, Silberhorn C, Pan Q, van Loock P, Korolkova N and Leuchs G 2003 *Phys. Rev. A* **68** 012319
- [16] Bowen W P, Schnabel R, Lam P K and Ralph T C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 043601
- [17] Josse V, Dantan A, Bramati A, Pinard M and Giacobino E 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5** S523
- [18] Josse V, Dantan A, Vernac L, Bramati A, Pinard M and Giacobino E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 103601
- [19] Einstein A, Podolsky B and Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [20] Huard S 1997 *Polarization of Light* (New York: Wiley) p 26
- [21] Longchambon L, Laurat J, Coudreau T and Fabre C 2003 *Preprint* quant-ph/0311123
- [22] Coudreau T, Vernac L, Khoury A Z, Breitenbach G and Giacobino E 1999 *Europhys. Lett.* **46** 722

Bibliographie

- [Abramovici92] A. Abramovici, M.A. Breuer, A.D. Friedman, “Digital systems testing and testable design”, *Science* **256**, 325 (1992) cité p. [196](#)
- [Akamatsu03] D. Akamatsu, K. Akiba, M. Kozuma, “Electromagnetically Induced Transparency with squeezed vacuum”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 203602 (2004) cité p. [138](#)
- [Alzetta76] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, G. Orriols, *Nuovo Cimento* **36B**, 5 (1976) ; E. Arimondo, G. Orriols, *Nuovo Cimento Lett.* **7**, 333 (1976) cité p. [56](#)
- [Andre02a] A. André, M.D. Lukin, “Atom correlations and spin squeezing near the Heisenberg limit : Finite-size effect and decoherence”, *Phys. Rev. A* **65**, 053819 (2002) cité p. [82](#)
- [Andre02b] A. André, L.M. Duan, M.D. Lukin, “Coherent atom interactions mediated by dark-state polaritons”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 243602 (2002) cité p. [138](#)
- [Arecchi72] F.T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, “Atomic coherent states in quantum optics”, *Phys. Rev. A* **6**, 2211 (1972) cité p. [21](#), [23](#)
- [Aspect81] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, “Experimental tests of realistic local theories via Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981) ; A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : a new violation of Bell’s inequalities”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982) ; A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, “Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982) cité p. [1](#), [27](#)
- [Baldit05] E. Baldit, K. Bencheikh, P. Monnier, J.A. Levenson, V. Rouget, “Ultraslow light propagation in an inhomogeneously broadened rare-earth ion-doped crystal”, [quant-ph/0503060](#) cité p. [211](#)
- [Barberis-Blostein04] P. Barberis-Blostein, N. Zagury, “Field correlations in electromagnetically induced transparency”, *Phys. Rev. A* **70**, 053827 (2004) cité p. [68](#)

- [Barrett04] M.D. Barrett, J. Schiaverini, T. Schaez, J. Britton, W.M. Itano, J.D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Liebfried, R. Ozeri, D.J. Wineland, “Deterministic quantum teleportation of atomic qubits”, *Nature* (London) **429**, 737 (2004) cité p. **6**, **167**
- [Becker98] J. Becker, J. Bermuth, M. Ebert, T. Grossmann, W. Heil, D. Hofmann, H. Humblot, M. Leduc, E.W. Otten, D. Robe, R. Surkau, “Interdisciplinary experiments with polarized ^3He ”, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **402**, 327 (1998) cité p. **180**
- [Bell64] J.S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, *Physics* **1**, 195 (1964) cité p. **1**
- [Bennett84] C.H. Bennett, G. Brassard, “Quantum cryptography : public-key distribution and coin tossing”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, 175 (1984) cité p. **2**, **29**
- [Bennett93] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993) cité p. **166**
- [Bergman91] K. Bergman, H.A. Haus, “Squeezing in fibers with optical pulses”, *Opt. Lett.* **16**, 663 (1991) cité p. **44**
- [Bigelow03] M.S. Bigelow, N.N. Lepeshkin, R.W. Boyd, “Superluminal and slow light propagation in a room-temperature solid”, *Science* **301**, 200 (2003) cité p. **3**, **211**
- [Boivin96] L. Boivin, H.A. Haus, “ $\chi^{(3)}$ squeezed vacuum generation without a Sagnac loop interferometer”, *Opt. Lett.* **21**, 146 (1996) cité p. **44**
- [Boller91] K.-J. Boller, A. Imamoglu, S.E. Harris, “Observation of Electromagnetically Induced Transparency”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2593 (1991) ; J.E. Field, K.H. Hahn, S.E. Harris, “Observation of Electromagnetically Induced Transparency in collisionally broadened lead vapor”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3062 (1991) cité p. **56**
- [Bouchoule02] I. Bouchoule, K. Mølmer, “Spin squeezing of atoms by the dipole interaction in virtually excited Rydberg states”, *Phys. Rev. A* **65**, 041803 (2002) cité p. **82**
- [Bouwmeester97] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature* (London) **390**, 575 (1997) cité p. **167**
- [Bowen02] W.P. Bowen, N. Treps, R. Schnabel, P.K. Lam, “Experimental demonstration of continuous variable polarization entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 253601 (2002) cité p. **31**, **156**

- [Bowen03a] W.P. Bowen, R. Schnabel, P.K. Lam, T.C. Ralph, “Experimental investigation of criteria for continuous variable entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 043601 (2003) cité p. [31](#)
- [Bowen03b] W.P. Bowen, N. Treps, B.C. Buchler, R. Schnabel, T.C. Ralph, T. Symul, P.K. Lam, “Unity gain and nonunity gain quantum teleportation”, *IEEE Journal of Selected topics in Quantum Electronics* **9**, 1519 (2003) cité p. [176](#), [177](#)
- [Bowen03c] W.P. Bowen, N. Treps, B.C. Buchler, R. Schnabel, T.C. Ralph, H.-A. Bachor, T. Symul, P.K. Lam, “Experimental investigation of continuous-variable quantum teleportation”, *Phys. Rev. A* **67**, 032302 (2003) cité p. [169](#)
- [Braginsky93] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky, V.S. Ilchenko, S.P. Vyatchanin, “On the ultimate sensitivity in coordinate measurements”, *Phys. Lett. A* **179**, 244 (1993) cité p. [196](#)
- [Braginsky02] V.B. Braginsky, S.P. Vyatchanin, *Phys. Lett. A* **293**, 228 (2002) cité p. [202](#)
- [Braunstein98a] S.L. Braunstein, H.J. Kimble, “Teleportation of continuous quantum variables”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998) cité p. [2](#), [29](#), [168](#), [176](#), [177](#)
- [Braunstein98b] S.L. Braunstein, “Quantum error correction for communication with linear optics”, *Nature (London)* **394**, 47 (1998) cité p. [2](#)
- [Braustein00] S.L. Braunstein, H.J. Kimble, “Dense coding with continuous variables”, *Phys. Rev. A* **61**, 042302 (2000) cité p. [29](#)
- [Briegel98] H.-J. Briegel, W. Dür, J.I. Cirac, P. Zoller, “Quantum repeaters : the role of imperfect local operations in quantum communication” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5932 (1998) cité p. [2](#), [156](#)
- [Budker99] D. Budker, D.F. Kimball, S.M. Rochester, V.V. Yashchuk, “Nonlinear magneto-optics and reduced group velocity of light in atomic vapor with slow ground state relaxation”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1767 (1999) cité p. [3](#), [58](#), [110](#)
- [Budker02] D. Budker, W. Gawlik, D.F. Kimball, S.M. Rochester, V.V. Yashchuk, A. Weis, “Resonant nonlinear magneto-optical effects in atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **94**, 1153 (2002) cité p. [25](#)
- [Caves81] C.M. Caves, “Quantum-mechanical noise in an interferometer”, *Phys. Rev. D* **23**, 1693 (1981) cité p. [10](#)
- [Cecchi82] S. Cecchi, G. Giusfredi, E. Petriella, P. Salieri, “Observation of optical tristability in sodium vapors”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1929 (1982) cité p. [39](#)
- [Cirac97] J.I. Cirac, P. Zoller, H.J. Kimble, H. Mabuchi, “Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997) cité p. [3](#)

- [Cohadon99] P.F. Cohadon, A. Heidmann, M. Pinard, “Cooling of a mirror by radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3174 (1999) cité p. [180](#), [206](#)
- [Cohadon05] P.F. Cohadon, O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann, M. Pinard, “Optical monitoring and cooling of a micro-mechanical oscillator to the quantum limit”, *Symposium on Fluctuations and Noise, SPIE Proc.* **5846**, 124 (2005) cité p. [180](#), [208](#)
- [Cohen73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique : Tome I*, chapitre V, p. 504 (1973) cité p. [205](#)
- [Cohen96a] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d’interaction entre photons et atomes*, Editions du CNRS, chapitre V, p. 340 (1996) cité p. [35](#)
- [Cohen96b] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d’interaction entre photons et atomes*, InterEditions/Editions du CNRS, p. 493 (1996) cité p. [88](#), [139](#)
- [Cohen96c] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d’interaction entre photons et atomes*, InterEditions/Editions du CNRS, chapitre V (1996) cité p. [213](#)
- [Cohen01] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d’interaction entre photons et atomes*, CNRS éditions, chapitre VI.E (2001) cité p. [58](#)
- [Colegrove63] F.D. Colegrove, L.D. Shearer, G.K. Walters, “Polarization of ^3He gas by optical pumping”, *Phys. Rev.* **132**, 2561 (1963) cité p. [180](#)
- [Courtade02] E. Courtade, F. Marion, P.-J. Nacher, G. Tastevin, K. Kiersnowski, T. Dohnalik, “Magnetic field effects on the 1083 nm atomic line of helium”, *Eur. Phys. J. D* **21**, 25 (2002) cité p. [181](#)
- [Dalibard87] J. Dalibard, S. Reynaud, C. Cohen-Tannoudji, *Interaction of Radiation with Matter, A Volume in honor of Adriano Gozzini*, Scuola Normale Superiore, Pisa, p. 29 (1987) cité p. [58](#), [61](#)
- [Dantan03a] A. Dantan, M. Pinard, V. Josse, S. Nayak, P.R. Berman, “Atomic spin squeezing in a Λ system”, *Phys. Rev. A* **67**, 045801 (2003) cité p. [83](#), [108](#), [118](#)
- [Dantan03b] A. Dantan, M. Pinard, P.R. Berman, “EIT-assisted atomic squeezing”, *Eur. Phys. J. D* **27**, 193 (2003) cité p. [84](#)
- [Dantan04a] A. Dantan, M. Pinard, “Quantum state transfer between fields and atoms in Electromagnetically Induced Transparency”, *Phys. Rev. A* **69**, 043810 (2004) cité p. [108](#), [113](#)
- [Dantan04b] A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, “Entanglement storage in atomic ensembles”, *Europhys. Lett.* **67**, 881 (2004) cité p. [156](#)

- [Dantan05a] A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, “Atomic quantum memory : cavity versus single pass schemes”, *Phys. Rev. A* **71**, 043801 (2005) cité p. [108](#), [135](#)
- [Dantan05b] A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, “Manipulation and storage of optical-field and atomic-ensemble quantum states”, *Laser Phys.* **15**, 170 (2005) cité p. [164](#)
- [Dantan05c] A. Dantan, N. Treps, A. Bramati, M. Pinard, “Teleportation of an atomic ensemble quantum state”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 050520 (2005) cité p. [156](#)
- [Dantan05d] A. Dantan, G. Reinaudi, A. Sinatra, F. Laloë, E. Giacobino, M. Pinard, “Long-lived quantum memory with nuclear atomic spins”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 123002 (2005) cité p. [180](#), [191](#), [194](#)
- [Darrasse97] L. Darrasse, G. Guillot, P.-J. Nacher, G. Tastevin, *C. R. Acad. Sci. Paris* **324**, 691-700 (1997) cité p. [180](#)
- [Davidovich94] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J.M. Raymond, S. Haroche, “Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields”, *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994) cité p. [177](#)
- [deEchaniz05] S.R. de Echaniz, M.W. Mitchell, M. Kubasik, M. Koschorreck, H. Crepaz, J. Eschner, E.S. Polzik, “Conditions for spin squeezing in a cold ^{87}Rb ensemble”, quant-ph/0506084 cité p. [210](#)
- [deSeze05] F. de Seze, F. Dahes, V. Crozatier, I. Lorgéré, F. Bretenacker, J.-L. Le Gouët, “Coherent driving of $\text{Tm}^{3+}:\text{YAG}$ ions using a complex hyperbolic secant optical field”, *Eur. Phys. J. D* **33**, 343 (2005) cité p. [211](#)
- [Deutsch91] I.H. Deutsch, J.C. Garrison, “Paraxial quantum propagation”, *Phys. Rev. A* **43**, 2498 (1991) cité p. [215](#)
- [DiVincenzo95] D. DiVincenzo, “Quantum computation”, *Science* **270**, 255 (1995) cité p. [1](#)
- [Duan00a] L.M. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac, P. Zoller, “Inseparability criterion for continuous variable systems”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000) cité p. [5](#), [29](#), [30](#)
- [Duan00b] L.M. Duan, J.I. Cirac, P. Zoller, E.S. Polzik, “Quantum communication between atomic ensembles using coherent light”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5643 (2000) cité p. [155](#)
- [Duan01] L.M. Duan, J.I. Cirac, M.D. Lukin, P. Zoller, “Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics”, *Nature (London)* **414**, 413, (2001) cité p. [3](#), [156](#)
- [Duan02] L.M. Duan, J.I. Cirac, P. Zoller, “Three-dimensional theory for interaction between atomic ensembles and free-space light” *Phys. Rev. A*, **66**, 023818 (2002) cité p. [153](#)

- [Dupont-Roc69] J. Dupont-Roc, S. Haroche, C. Cohen-Tannoudji, "Detection of very weak magnetic fields (10^{-9} gauss) by ^{87}Rb zero-field level crossing resonances", *Phys. Lett. A* **28**, 638 (1969) cité p. **25**
- [Dupont-Roc72] J. Dupont-Roc, *Thèse*, Paris (1972) cité p. **182**
- [Dupont-Roc73] J. Dupont-Roc, M. Leduc, F. Laloë, "Contribution à l'étude de l'échange de métastabilité dans l'Hélium", *J. Phys. France* **34**, 961 et 977 (1973) cité p. **181**
- [Einstein35] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935) cité p. **1, 7, 26**
- [Enk98] S.J. Enk, J.I. Cirac, P. Zoller, "Photonic channels for quantum communication", *Science* **279**, 205 (1998) cité p. **3, 178**
- [Fabre96] C. Fabre, *Quantum fluctuations in light beams*, Les Houches, Session LXIII (1995), Elsevier Science Publishers B.V. (1996) cité p. **14, 15, 17**
- [Fleischhauer92] M. Fleischhauer, C.H. Keitel, M.O. Scully, C. Su, B.T. Ulrich, S.-Y. Zhu, "Resonantly enhanced refractive index without absorption via atomic coherence", *Phys. Rev. A* **46**, 1468 (1992) cité p. **68**
- [Fleischhauer95] M. Fleischhauer, T. Richter, "Pulse matching and correlation of phase fluctuations in Λ systems", *Phys. Rev. A* **51**, 2430 (1995) cité p. **215**
- [Fleischhauer00] M. Fleischhauer, M.D. Lukin, "Dark-state polaritons in Electromagnetically Induced Transparency", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5094 (2000) cité p. **135, 138**
- [Fleischhauer02a] M. Fleischhauer, M.D. Lukin, "Quantum memory for photons : Dark-state polaritons", *Phys. Rev. A* **65**, 022314 (2002) cité p. **135, 138**
- [Furusawa98] A. Furusawa, J.L. Sørensen, S.L. Braunstein, C.A. Fuchs, H.J. Kimble, E.S. Polzik, "Unconditional quantum teleportation", *Science* **282**, 706 (1998) cité p. **2, 168, 176, 177**
- [Gardiner85] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer-Verlag, second edition, paragraphe 4.4.5 (1985) cité p. **54**
- [Genes03] C. Genes, P.R. Berman, A.G. Rojo, "Spin squeezing via atom-cavity field coupling", *Phys. Rev. A* **68**, 43809 (2003) cité p. **82**
- [Geremia04] J.M. Geremia, J.K. Stockton, H. Mabuchi, "Real-time quantum feedback control of atomic spin-squeezing", *Science* **304**, 270 (2004) cité p. **82, 173**
- [Geremia05] J.M. Geremia, J.K. Stockton, H. Mabuchi, "Suppression of spin projection noise in broadband atomic magnetometry", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 203002 (2005) cité p. **25**

- [Gibbs76] H.M. Gibbs, S.L. McCall, T.N.C. Venkatesan, “Differential gain and bistability using a sodium-filled Fabry-Perot interferometer”, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1135 (1976) cité p. [37](#)
- [Giacobino85] E. Giacobino, “Tristability and bifurcations in sodium vapor”, *Opt. Comm.* **56**, 249 (1985) cité p. [39](#)
- [Giedke03] G. Giedke, M.M. Wolf, O. Krüger, R.F. Werner, J.I. Cirac, “Entanglement of formation for symmetric gaussian states”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 107901 (2003) cité p. [30](#), [157](#)
- [Giovannetti01] V. Giovannetti, D. Vitali, “Phase-noise measurement in a cavity with a movable mirror undergoing quantum Brownian motion”, *Phys. Rev. A* **63**, 023812 (2001) cité p. [201](#), [206](#)
- [Giovannetti03] V. Giovannetti, S. Mancini, D. Vitali, P. Tombesi, “Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems”, *Phys. Rev. A* **67**, 022320 (2003) cité p. [32](#)
- [Gisin02] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden, “Quantum cryptography”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 145 (2002) cité p. [2](#), [29](#)
- [Glockl03] O. Glöckl, S. Lorenz, C. Marquardt, J. Heersink, M. Brownnutt, C. Silberhorn, Q. Pan, P. van Loock, N. Korolkova, G. Leuchs, “Experiment towards continuous-variable entanglement swapping : Highly correlated four-partite quantum state”, *Phys. Rev. A* **68**, 012319 (2003) cité p. [31](#), [44](#)
- [Grison92] D. Grison, *Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie* (1992) cité p. [36](#)
- [Grosshans01] F. Grosshans, P. Grangier, “Quantum cloning and teleportation criteria for continuous quantum variables”, *Phys. Rev. A* **64**, 010301 (2001) cité p. [176](#), [177](#)
- [Grosshans03] F. Grosshans, G. Van Assche, J. Wenger, R. Brouri, N.J. Cerf, P. Grangier, “Quantum key distribution using Gaussian-modulated coherent states”, *Nature* **421**, 238 (2003) cité p. [2](#)
- [Hadjjar99] Y. Hadjar, P.F. Cohadon, C.G. Aminoff, M. Pinard, A. Heidmann, “High-sensitivity optical measurement of mechanical Brownian motion”, *Europhys. Lett.* **47**, 545 (1999) cité p. [206](#)
- [Hald99] J. Hald, J.L. Sørensen, C. Schori, E.S. Polzik, “Spin squeezed atoms : A macroscopic entangled ensemble created by light”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1319 (1999) cité p. [3](#), [108](#)
- [Harris92] S.E. Harris, J.E. Field, A. Kasapi, “Dispersive properties in Electromagnetically Induced Transparency”, *Phys. Rev. A*, **46**, R29 (1992) cité p. [58](#)

- [Harris97] S.E. Harris, “Electromagnetically Induced Transparency”, *Phys. Today* **50**, 36 (1997) cité p. [3](#), [56](#)
- [Hau99] L.V. Hau, S.E. Harris, Z. Dutton, C.H. Behroozi, “Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas”, *Nature (London)* **397**, 594 (1999) cité p. [3](#), [58](#), [110](#)
- [Hilico92a] L. Hilico, *Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie* (1992) cité p. [33](#), [71](#), [88](#)
- [Hilico92b] L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud, E. Giacobino, “Linear input-output method for quantum fluctuations in optical bistability with two-level atoms”, *Phys. Rev. A* **46**, 4397 (1992) cité p. [37](#), [46](#)
- [Hope92] D.M. Hope, H.-A. Bachor, P.J. Manson, D.E. McClelland, P.T.H. Fisk, “Observation of quadrature squeezing in a cavity-atom system”, *Phys. Rev. A* **46**, R1181 (1992) cité p. [36](#)
- [Huard94] S. Huard, *Polarisation de la lumière*, Masson (1994) cité p. [72](#), [113](#), [114](#)
- [Hsu05] M.T.L. Hsu, G. Hétet, A. Peng, C.H. Harb, H.-A. Bachor, M. Johnsson, J.J. Hope, P.K. Lam, A. Dantan, J. Cviklinski, A. Bramati, M. Pinard, “Can optical squeezing be generated via polarization self-rotation in a thermal vapour cell?”, soumis à *Phys. Rev. A* (2005), quant-ph/0510165 cité p. [45](#)
- [Imamoğlu89] A. Imamoğlu, S.E. Harris, “Lasers without inversion : Interference of dressed lifetime-broadened state”, *Opt. Lett.* **14**, 1344 (1989) cité p. [58](#)
- [Itano93] W.M. Itano, J.C. Bergquist, J.J. Bollinger, J.M. Gilligan, D.J. Heinzen, F.L. Moore, M.G. Raizen, D.J. Wineland, “Quantum projection noise : Population fluctuations in two-level systems”, *Phys. Rev. A* **47**, 3554 (1993) cité p. [23](#), [82](#)
- [Joshi03] A. Joshi, M. Xiao, “Optical multistability in three-level atoms inside an optical ring cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 143904 (2003) cité p. [71](#)
- [Josse03a] V. Josse, A. Dantan, L. Vernac, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, “Polarization squeezing with cold atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 103601 (2003) cité p. [3](#), [42](#), [68](#), [71](#), [72](#)
- [Josse03b] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, “Polarization squeezing in a four-level system”, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 513 (2003) cité p. [42](#), [68](#), [71](#), [72](#)
- [Josse03c] V. Josse, *Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie* (2003) cité p. [4](#), [34](#), [41](#), [43](#), [76](#), [114](#), [133](#), [162](#), [218](#)
- [Josse04a] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, “Continuous variable entanglement using cold atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123601 (2004) cité p. [3](#), [31](#), [69](#), [162](#)

- [Josse04b] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, E. Giacobino, “Entanglement and squeezing in a two-mode system : theory and experiment”, *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **6**, 532 (2004) cité p. [43](#), [76](#), [78](#)
- [Josse05] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, M. Pinard, E. Giacobino, J. Heersink, U.L. Andersen, O. Glöckl, G. Leuchs, “Experimental polarization squeezing and continuous variable entanglement via the optical Kerr effect”, WSCP (2005) cité p. [31](#)
- [Julsgaard01] B. Julsgaard, A. Kozhekin, E.S Polzik, “Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects”, *Nature* **413**, 400 (2001) cité p. [3](#), [82](#), [179](#)
- [Julsgaard04] B. Julsgaard, J. Sherson, J.I Cirac, J. Fiurášek, E.S. Polzik, “Experimental demonstration of quantum memory for light”, *Nature (London)* **432**, 482 (2004) cité p. [3](#), [108](#), [175](#), [210](#)
- [Kang01] H. Kang, Z. Yu, “Observation of large Kerr nonlinearity at low light intensities”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 093601 (2001) cité p. [68](#)
- [Kash99] M.M. Kash, V.A. Sautenkov, A.S. Zibrov, L. Hollberg, G.R. Welch, M.D. Lukin, Y. Rostovtsev, E.S. Fry, M.O. Scully, “Ultraslow group velocity and enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic gas”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5229 (1999) cité p. [3](#), [58](#), [110](#)
- [Ketterle93] W. Ketterle, K. Davis, M. Joffe, A. Martin, D. Pritchard, “High density of cold atoms in a *dark* spontaneous-force optical trap”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993) cité p. [133](#)
- [Khoury98] A.Z. Khoury, T. Coudreau, C. Fabre, E. Giacobino, “Three-level approach to squeezing with cold atoms”, *Phys. Rev. A* **57**, 4770 (1998) cité p. [37](#), [38](#)
- [Kim98] C.G. Kim, H.S. Lee, “Optical pumping magnetic resonance in Cs atoms for use in precise low-field magnetometry”, *Rev. Sci. Instrum.* **69**, 4152 (1998) cité p. [25](#)
- [Kitano81] M. Kitano, T. Yabuzaki, T. Ogawa, “Optical tristability”, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 926 (1981) cité p. [39](#), [68](#)
- [Kitagawa93] M. Kitagawa, M. Ueda, “Squeezed spin states”, *Phys. Rev. A* **47**, 5138 (1993) cité p. [22](#), [24](#)
- [Korolkova02] N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T.C. Ralph, C. Silberhorn, “Polarization squeezing and continuous-variable polarization entanglement”, *Phys. Rev. A*, **65**, 052306 (2002) cité p. [114](#)
- [Kozhekin00] A.E. Kozhekin, K. Mølmer, E.S. Polzik, “Quantum memory for light”, *Phys. Rev. A* **62**, 033809 (2000) cité p. [135](#), [145](#)

- [Kuzmich98] A. Kuzmich, N.P. Bigelow, L. Mandel, “Atomic quantum non-demolition measurements and squeezing”, *Europhys. Lett.* **42**, 481 (1998) cité p. [82](#)
- [Kuzmich00a] A. Kuzmich, L. Mandel, N.P. Bigelow, “Generation of spin squeezing via continuous quantum nondemolition measurement”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1594 (2000) cité p. [82](#)
- [Kuzmich00b] A. Kuzmich, E.S. Polzik, “Atomic quantum state teleportation and swapping”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5639 (2000) cité p. [169](#), [173](#)
- [Kuzmich03] A. Kuzmich, W.P. Bowen, A.D. Boozer, A. Boca, C.W. Chou, L.-M. Duan, H.J. Kimble, “Generation of non-classical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles”, *Nature (London)* **423**, 731 (2003) cité p. [3](#)
- [Lambrecht95] A. Lambrecht, *Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie* (1995) cité p. [4](#), [71](#), [133](#)
- [Lambrecht96] A. Lambrecht, T. Coudreau, A.M. Steimberg, E. Giacobino, “Squeezing with cold atoms”, *Europhys. Lett.* **36**, 93 (1996) cité p. [3](#), [34](#), [37](#), [38](#), [69](#)
- [Langer05] C. Langer, R. Ozeri, J.D. Jost, J. Chiaverini, B. DeMarco, A. Ben-Kish, R.B. Blakestad, J. Britton, D.B. Hume, W.M. Itano, D. Liebfried, R. Reichle, T. Rosenband, T. Schaetz, P.O. Schmidt, D.J. Wineland, “Long-lived qubit memory using atomic ions”, [quant-ph/0504076](#) cité p. [108](#)
- [Laurat04] J. Laurat, T. Coudreau, G. Keller, N. Treps, C. Fabre, “Compact source of Einstein-Podolsky-Rosen entanglement and squeezing at very low noise frequencies”, *Phys. Rev. A* **70**, 042315 (2004) cité p. [31](#), [156](#)
- [Li02] X. Li, Q. Pan, J. Jing, J. Zhang, C. Xie, K. Peng, “Quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 047904 (2002) cité p. [29](#)
- [Liu01] C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, L.V. Hau, “Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses”, *Nature (London)* **409**, 490 (2001) cité p. [3](#), [58](#), [110](#)
- [Llyod99] S. Llyod, S.L. Braunstein, “Quantum computation over continuous variables”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1784 (1999) cité p. [2](#)
- [Longdell05] J.J. Longdell, E. Fraval, M.J. Sellars, N.B. Manson, “Stopped light with storage times greater than one second using EIT in a solid”, [quant-ph/0506233](#) cité p. [3](#), [211](#)
- [Lukin99] M.D. Lukin, A.B. Matsko, M. Fleischhauer, M.O. Scully, “Quantum noise and correlations in resonantly enhanced wave mixing based on atomic coherence”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1847 (1999) cité p. [68](#)

- [Lukin00] M.D. Lukin, S.F. Yelin, M. Fleischhauer, “Entanglement of atomic ensembles by trapping correlated photon states”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4232 (2000) cité p. **135**
- [Lukin03] M.D. Lukin, “Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles”, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 457 (2003) cité p. **3, 155**
- [McKenzie02] K. McKenzie, D.A. Shaddock, D.E. McClelland, B.C. Buchler, P.K. Lam, “Experimental demonstration of a squeezing-enhanced power-recycled Michelson interferometer for gravitational wave detection”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 231102 (2002) cité p. **208**
- [McKenzie04] K. McKenzie, N. Grosse, W.P. Bowen, S.E. Whitcomb, M.B. Gray, D.E. McClelland, P.K. Lam, “Squeezing in the audio gravitational-wave detection band”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 161105 (2004) cité p. **196, 208**
- [Maitre97] X. Maître, E. Hagley, G. Nogues, C. Wunderlich, P. Goy, M. Brune, J.M. Raymond, S. Haroche, “Quantum memory with a single photon in a cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 769 (1997) cité p. **108**
- [Mancini02] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, P. Tombesi, “Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120401 (2002) cité p. **208**
- [Marangos98] J.P. Marangos, “Topical review Electromagnetically Induced Transparency”, *J. Mod. Opt.* **45**, 471 (1998) cité p. **57**
- [Margalit98] M. Margalit, C.X. Yu, E.P. Ippen, H.A. Haus, “Cross phase modulation squeezing in optical fibers” *Opt. Express* **2**, 72 (1998) cité p. **44**
- [Marshall03] W. Marshall, C. Simon, R. Penrose, D. Bouwmeester, “Towards quantum superpositions of a mirror”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 130401 (2003) cité p. **180**
- [Matsko02] A.B. Matsko, I. Novikova, G.R. Welsch, D. Bucker, D.F. Kimball, S.M. Rochester, “Vacuum squeezing in atomic media via self-rotation”, *Phys. Rev. A* **66**, 043815 (2002) cité p. **44**
- [Matsukevitch04] D.N. Matsukevich, A. Kuzmich, “Quantum state transfer between matter and light”, *Science* **306**, 663 (2004) cité p. **3**
- [Metzger04] C.H. Metzger, K. Karrai, *Nature (London)* **432**, 1002 (2004) cité p. **202**
- [Meyer01] V. Meyer, M.A. Rowe, D. Kielpinski, C.A. Sackett, W.M. Itano, C. Monroe, D.J. Wineland, “Experimental demonstration of entanglement-enhanced rotation angle estimation using trapped ions”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5870 (2001) cité p. **23, 82**
- [Moller02] H. Möller, X.J. Chen, B. Saam, K.D. Hagspiel, G.A. Johnson, T.A. Altes, E.E. de Lange, H.-U. Kauczor, “MRI of the lungs using hyperpolarized noble gases”, *Magn. Reson. Med.* **47**, 1029 (2002) cité p. **180**

- [Muller04] J.H. Müller, P. Petrov, D. Oblak, C.L. Garrido-Alzar, S.R. de Echaniz, E.S. Polzik, “Diffraction effects on light-atomic ensemble quantum interface”, *Phys. Rev. A* **71**, 033803 (2005) cité p. **153**
- [Nacher85] P.-J. Nacher, M. Leduc, “Optical pumping in ^3He with a laser”, *J. Physique* **46**, 2057 (1985) cité p. **181**
- [Nacher02] P.-J. Nacher, E. Courtade, M. Abboud, A. Sinatra, G. Tastevin, T. Dohnalik, “Optical pumping of helium-3 at high pressure and magnetic field”, *Acta Phys. Polon. B* **33**, 2225 (2002) cité p. **181**
- [Nielsen00] M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, (2000) cité p. **1**
- [Novikova00] I. Novikova, A.B. Matsko, V.A. Sautenkov, V.L. Velichansky, G.R. Welsch, M.O. Scully, “Ac-Stark shifts in the nonlinear Faraday effect”, *Opt. Lett.* **25**, 1651 (2000) cité p. **72**
- [Novikova02] I. Novikova, A.B. Matsko, G.R. Welsch, “Large polarization self-rotation in rubidium vapour : application for squeezing of electromagnetic vacuum”, *J. Mod. Opt.* **49**, 2565 (2002) cité p. **44**
- [Ou92] Z.Y. Ou, S.F. Pereira, H.J. Kimble, K. Peng, “Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables”, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663 (1992) cité p. **29**
- [Partridge66] R.B. Partridge, G.W. Series, “The transfer of coherence by collisions of ^3He atoms”, *Proc. Phys. Soc.* **88**, 983 (1966) cité p. **182**
- [Phillips01] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, M. D. Lukin, “Storage of light in atomic vapor”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 783 (2001) cité p. **3**, **58**, **110**
- [Pinard00] M. Pinard, P.F. Cohadon, T. Briant, A. Heidmann, “Full mechanical characterization of a cold damped mirror”, *Phys. Rev. A* **63**, 013808 (2000) cité p. **180**
- [Pinard05] M. Pinard, A. Dantan, D. Vitali, O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann, “Entangling movable mirrors in a double cavity system”, à paraître dans *Europhys. Lett.* (2005), quant-ph/0507275 cité p. **180**, **197**
- [Poulsen01a] U.V. Poulsen, K. Mølmer, “Squeezed light from spin squeezed atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 123601 (2001) cité p. **130**
- [Poulsen01b] U.V. Poulsen, K. Mølmer, “Positive-P simulations of spin squeezing in a two-component Bose condensate”, *Phys. Rev. A* **64**, 013616 (2001) cité p. **82**
- [Raizen87] M.G. Raizen, L.A. Orozco, M. Xiao, T.L. Boyd, H.J. Kimble, “Squeezed state generation by the normal modes of a coupled system”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 198 (1987) cité p. **36**

- [Ralph98] T.C. Ralph, P.K. Lam, “Teleportation with bright squeezed light”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5668 (1998) cité p. [176](#)
- [Raymer81] M.G. Raymer, J. Mostowski, “Stimulated Raman scattering : Unified treatment of spontaneous initiation and spatial propagation”, *Phys. Rev. A* **24**, 1980 (1981) cité p. [136](#), [215](#)
- [Reid88] M. Reid, “Quantum theory of optical bistability without adiabatic elimination”, *Phys. Rev. A* **37**, 4792 (1988) cité p. [37](#)
- [Reid89] M. Reid, “Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using non-degenerate parametric amplification”, *Phys. Rev. A*, **40**, 913 (1989) cité p. [26](#), [27](#)
- [Reynaud89] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, “Photon noise reduction by passive optical bistable system”, *Phys. Rev. A* **40**, 1440 (1989) cité p. [34](#), [37](#)
- [Riebe04] M. Riebe, H. Haffner, C.F. Roos, W. Hansel, J. Benhelm, G.P. Lancaster, T.W. Korber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D.F. James, R. Blatt, “Deterministic quantum teleportation with atoms”, *Nature (London)* **429**, 734 (2004) cité p. [6](#), [167](#)
- [Ries03] J. Ries, B. Brezger, A.I. Lvovsky, “Experimental vacuum squeezing in rubidium vapor via self-rotation”, *Phys. Rev. A* **68**, 025801 (2003) cité p. [44](#)
- [Roch97] J.-F. Roch, K. Vigneron, P. Grelu, A. Sinatra, J.-P. Poizat, P. Grangier, “Quantum-nondemolition measurements using cold trapped atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 634 (1997) cité p. [133](#)
- [Rochester01] S.M. Rochester, D.S. Hsiung, D. Bucker, R.Y. Chiao, D.F. Kimball, V.V. Yashchuk, “Self-rotation of resonant elliptically polarized light in collision-free rubidium vapor”, *Phys. Rev. A* **63**, 043814 (2001) cité p. [4](#), [39](#), [72](#)
- [Santarelli99] G. Santarelli, P. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A.G. Mann, S. Chang, A.N. Luiten, C. Salomon, “Quantum projection noise in an atomic fountain : A high stability cesium frequency standard”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4619 (1999) cité p. [23](#), [82](#), [135](#)
- [Saulson90] P.R. Saulson, “Thermal noise in mechanical experiments”, *Phys. Rev. D* **42**, 2437 (1990) cité p. [196](#)
- [Sautenkov00] V.A. Sautenkov, M.D. Lukin, C.J. Bednar, I. Novikova, E. Mikhailov, M. Fleischhauer, V.L. Velichansky, G.R. Welch, M.O. Scully, “Enhancement of magneto-optic effects via large atomic coherence in optically dense media”, *Phys. Rev. A* **62**, 023810 (2000) cité p. [72](#)
- [Savage82] C.M. Savage, H.J. Carmichael, D.F. Walls, “Optical multistability and self oscillations in three level systems”, *Opt. Comm.* **42**, 211 (1982) cité p. [39](#), [68](#)

- [Schmidt96] H. Schmidt, A. Imamoglu, “Giant Kerr nonlinearities obtained by Electromagnetically Induced Transparency”, *Opt. Lett.* **21**, 1936 (1996) cité p. **68**
- [Schori02] C. Schori, B. Julsgaard, J.L. Sørensen, E.S. Polzik, “Recording quantum properties of light in a long-lived atomic spin state : Towards quantum memory”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 057903 (2002) cité p. **3**
- [Scully92] M.O. Scully, M. Fleischhauer, “High-sensitivity magnetometer based on index-enhanced media”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1360 (1992) cité p. **68**
- [Scully97] M.O. Scully, M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, chap. VII (1997) cité p. **57, 61**
- [Silberfarb03] A. Silberfarb, I.H. Deutsch, “Continuous measurement with traveling-wave probes”, *Phys. Rev. A* **68**, 013817 (2003) cité p. **215**
- [Silberhorn01] C. Silberhorn, P.K. Lam, O. Weiß, F. König, N. Korolkova, G. Leuchs, “Generation of continuous variable Einstein-Podolsky-Rosen entanglement via the Kerr nonlinearity in an optical fiber”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4267 (2001) cité p. **31, 44**
- [Simon00] R. Simon, “Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000) cité p. **5, 29, 30**
- [Sinatra98] A. Sinatra, J.-F. Roch, K. Vigneron, P. Grelu, J.-P. Poizat, K. Wang, P. Grangier, “Quantum-nondemolition measurements using cold trapped atoms : Comparison between theory and experiment”, *Phys. Rev. A* **57**, 2980 (1998) cité p. **133**
- [Sørensen01a] A.S. Sørensen, K. Mølmer, “Entanglement and extreme spin squeezing”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4431 (2001) cité p. **82**
- [Sørensen01b] A.S. Sørensen, L.M. Duan, J.I. Cirac, P. Zoller, “Many-particle entanglement with Bose-Einstein condensates”, *Nature* (London) **409**, 63 (2001) cité p. **82**
- [Takei05] N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki, A. Furusawa, “High-fidelity teleportation beyond the no-cloning limit and entanglement swapping for continuous variables”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220502 (2005) cité p. **169**
- [Taylor03] J.M. Taylor, C.M. Marcus, M.D. Lukin, “Long-lived memory for mesoscopic quantum bits”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 206803 (2003) cité p. **196**
- [Thomsen02] L.K. Thomsen, S. Mancini, H.M. Wiseman, “Spin squeezing via quantum feedback”, *Phys. Rev. A* **65**, 061801 (2002) cité p. **82, 173**
- [Turukhin02] A.V. Turukhin, V.S. Sudarshanam, M.S. Shariar, J.A. Musser, B.S. Ham, P.R. Hemmer, “Observation of ultraslow and stored light pulses in a solid”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 023602 (2002) cité p. **3, 211**

- [Vaidman94] L. Vaidman, “Teleportation of quantum states”, *Phys. Rev. A* **49**, 1473 (1994) cité p. [2](#), [29](#), [168](#)
- [vanLoock00] P. van Loock, S.L. Braunstein, H.J Kimble, “Broadband teleportation”, *Phys. Rev. A* **62**, 022309 (2000); P. van Loock, S.L. Braunstein, “Unconditional teleportation of continuous-variable entanglement”, *Phys. Rev. A* **61**, 010302 (2000) cité p. [176](#), [177](#)
- [vanderWal03] C.H. van der Wal, M.D. Eisaman, A. André, R.L. Walsworth, D.F. Phillips, A.S. Zibrov, M.D. Lukin, “Atomic memory for correlated photon states”, *Science* **301**, 196 (2003) cité p. [3](#)
- [Vernac00] L. Vernac, M. Pinard, E. Giacobino, “Spin squeezing in two-level systems”, *Phys. Rev. A* **62**, 063812 (2000) cité p. [4](#), [82](#), [83](#), [96](#), [214](#)
- [Vernac01] L. Vernac, M. Pinard, E. Giacobino, “Quantum state transfer from light beams to atomic ensembles”, *Eur. Phys. J. D* **17**, 125 (2001) cité p. [108](#), [120](#)
- [Vernac01b] L. Vernac, *Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie* (2001) cité p. [34](#), [54](#), [55](#), [83](#), [85](#), [94](#), [106](#), [209](#)
- [Vernac02] L. Vernac, M. Pinard, V. Josse, E. Giacobino, “Collective atomic spin squeezing and control”, *Eur. Phys. J. D* **18**, 129 (2001) cité p. [82](#), [83](#)
- [Walls80] D.F. Walls, P. Zoller, “A coherent nonlinear mechanism for optical bistability from three level atoms”, *Opt. Comm.* **34**, 260 (1980) cité p. [39](#)
- [Wang01a] H. Wang, D. Goorskey, M. Xiao, “Enhanced Kerr nonlinearity via atomic coherence in a three-level atomic system”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 073601 (2001) cité p. [68](#)
- [Wang01b] H. Wang, D. Goorskey, M. Xiao, “Bistability and instability of three-level atoms inside an optical cavity”, *Phys. Rev. A* **65**, 11801 (2001) cité p. [68](#), [71](#)
- [Wineland92] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W.M. Itano, F.L. Moore, “Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **46**, 6797 (1992) cité p. [23](#)
- [Wineland94] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W.M. Itano, D.J. Heinzen, “Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **50**, 67 (1994) cité p. [23](#)
- [Wootters82] W.K. Wootters, W.H. Zurek, “A single quantum cannot be cloned”, *Nature* (London) **299**, 802 (1982) cité p. [2](#), [131](#), [155](#), [167](#)
- [Zhang03a] T.C. Zhang, K.W. Goh, C.W. Chou, P. Lodahl, H.J. Kimble, “Quantum teleportation of light beams”, *Phys. Rev. A* **67**, 033802 (2003) cité p. [169](#)
- [Zhang03b] J. Zhang, K. Peng, S.L. Braunstein, “Quantum-state transfer from light to macroscopic oscillators”, *Phys. Rev. A* **68**, 013808 (2003) cité p. [201](#)