



HAL
open science

Caractérisation ultrasonore d'échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs

Victor Mamou

► **To cite this version:**

Victor Mamou. Caractérisation ultrasonore d'échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT: . tel-00010852

HAL Id: tel-00010852

<https://theses.hal.science/tel-00010852>

Submitted on 2 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR DE PHYSIQUE

Année 2005

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PARIS 7
Spécialité **Acoustique**

présentée et soutenue publiquement
par

Victor MAMOU

le 22 Septembre 2005

Caractérisation ultrasonore d'échantillons hétérogènes
multiplement diffuseurs

Directeur de Thèse :
Arnaud DERODE

JURY

MM. :	Michel	CAMPILLO	Rapporteurs
	Vincent	GIBIAT	
MM. :	Frédéric	COHEN TENOUDJI	Examineurs
	Mathias	FINK	
	Paul	JOHNSON	

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Ondes et Acoustique de l'Université Paris VII. Je remercie le directeur Mathias Fink de m'y avoir accueilli, soutenu pour mon orientation professionnelle future et fait l'honneur de participer à mon jury.

Lorsque, en amont de la thèse, j'étais en pleine réflexion sur mon avenir, je me suis naturellement orienté vers Vincent Gibiat. Après m'avoir enseigné l'acoustique avec passion, Vincent m'a fait découvrir le *LOA* et l'aventure de ces trois années n'aurait pu avoir lieu sans son aide précieuse. Je le remercie chaleureusement d'avoir en plus accepté de rapporter ce travail.

Pendant la durée de cette thèse, Arnaud Derode m'a guidé dans mon travail de recherche avec discernement et efficacité. Arnaud est quelqu'un d'une grande honnêteté intellectuelle, d'un esprit subtil dont j'ai vraiment apprécié la direction, je le remercie tout particulièrement pour l'ensemble de ces années et la confiance qu'il m'a accordé.

J'adresse de profonds remerciements à Michel Campillo qui a bien voulu s'intéresser à ce travail en tant que rapporteur.

Je tiens à remercier vivement MM. les professeurs Cohen-Tenoudji et Johnson de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Les discussions, de sciences physiques et de politique avec Arnaud Tourin ont toujours été d'un profond intérêt pour moi, qu'il en soit chaleureusement remercié. Merci aussi à Julien de Rosny, dont le sens physique et la source d'idées sont intarissables.

Je remercie également John Page, Matthew Hasselfield et Bart van Tiggelen pour leur participation à ce travail.

Mes nombreux déboires en informatiques ont souvent été résolus par François Van Der Biest, qui n'économise jamais son temps pour aider les autres, je l'en remercie amicalement. Merci à Patricia Daenens pour les nombreuses discussions et aides dont elle m'a gratifié, lorsque je coupais des tiges ou dégraissais mes échantillons notamment... Je remercie Arnaude Cariou pour son efficacité et sa vitalité au quotidien.

Enfin je remercie l'ensemble des membres et anciens du *LOA* pour leur disponibilité, gentillesse et la bonne ambiance générale, en particulier Julien Anfosso, François Vignon, Dominique Clorennec, Christophe Barrière, Daniel Royer, Guillemette Ribay, Samir Guerbaoui, Jean Gabriel Minonzio, Xavier Jacob, Claire Prada, Didier Cassereau, Christian Dorme, Michel Parise, Pierre Landais, Valentin Leroy, sans oublier François Wu.

Table des matières

Table des figures	v
1 Etude du champ cohérent	3
1.1 Introduction	3
1.2 Approche phénoménologique de l'onde cohérente	4
1.2.1 Cas d'un milieu homogène	4
1.2.2 Cas d'un milieu hétérogène	4
1.2.3 Les moyennes sur le désordre	5
1.3 Introduction à la théorie des milieux effectifs	7
1.3.1 Equations de propagation du champ ultrasonore	7
1.3.2 Equation intégrale	9
1.3.3 Nombre d'onde effectif	11
1.3.3.1 Fonction de Green d'un milieu homogène	11
1.3.3.2 Opérateur de masse d'un milieu statistiquement homogène	11
1.3.4 Onde cohérente et diffusion multiple	12
1.3.4.1 Cas d'un milieu sans absorption	13
1.3.4.2 Cas d'un milieu absorbant	14
1.4 Première Application expérimentale : détermination de la présence de diffusion multiple dans des échantillons d'acier	14
1.4.1 Approche qualitative	14
1.4.2 Approche quantitative	16
1.5 Théorie de la diffusion multiple	20
1.5.1 Hypothèses de travail	20
1.5.2 Diffuseur isolé	21
1.5.2.1 Expression implicite de la diffusion	21
1.5.2.2 Diagrammes pour un diffuseur	22
1.5.3 Cas de la diffusion par N diffuseurs	23
1.5.3.1 L'opérateur de diffusion \mathbf{S}	23
1.5.3.2 Expression explicite des moyennes sur le désordre	26
1.5.3.3 Opérateurs de diffusion et diagrammes moyennés	27

1.5.3.4	Cas des diffuseurs ponctuels	30
1.5.3.5	Equation de Dyson	31
1.6	Formule analytique du coefficient d’extinction au premier ordre : Independent Scattering Approximation (ISA)	33
1.6.1	Expression implicite de l’opérateur de masse	33
1.6.2	Diffusion élastique par un cylindre solide immergé dans l’eau	33
1.6.2.1	Amplitude de diffusion et section efficace	33
1.6.2.2	Calcul de la section efficace	36
1.6.3	Expression explicite du libre parcours moyen élastique l_e	42
1.7	Expériences de transmission cohérente : cas de diffuseurs identiques	45
1.7.1	Présentation des échantillons	45
1.7.2	Principe des expériences	46
1.7.3	Evaluation de l_e en régime quasi-impulsionnel	49
1.7.4	Evaluation de l_e en régime quasi-monochromatique	51
1.7.5	Comparaison à la théorie de l’ISA	54
1.7.6	Modélisation de l’absorption	55
1.8	Au-delà de l’ISA	60
1.8.1	Etude de la fonction de corrélation de paire	60
1.8.2	Prise en compte des corrélations de paire au premier ordre : <i>Interference Approximation</i>	61
1.8.3	Approche de Foldy	64
1.8.3.1	Présentation générale	64
1.8.3.2	Formule analytique au premier ordre	65
1.8.3.3	Approche de Waterman et Truell	66
1.8.3.4	Approche de Linton et Martin	66
1.9	Formule analytique du coefficient d’extinction au second ordre : approche diagrammatique de Keller	69
1.10	Expériences de transmission cohérente avec deux types de diffuseurs	73
1.10.1	Principe	73
1.10.2	Résultats	73
1.10.3	Vérification quantitative	74
1.11	Conclusion	75
2	Intensité multiplement diffusée en régime dynamique	77
2.1	Introduction	77
2.2	Approche diagrammatique	80
2.2.1	Equation de Bethe-Salpeter	80
2.2.2	Approximation des diffuseurs ponctuels	83
2.2.3	Approximation de “ladder”	84
2.2.4	Inclusion des diagrammes croisés	84

2.3	Théorie de la rétrodiffusion cohérente dynamique	86
2.3.1	Approche qualitative	86
2.3.2	Cône dynamique et mesure du coefficient de diffusion	92
2.3.3	Expression de l'intensité incohérente	93
2.3.4	Expression de l'intensité cohérente	96
2.3.5	Validité des approximations	99
2.3.5.1	Dépendance angulaire de l'intensité incohérente	100
2.3.5.2	Dépendance angulaire de l'intensité cohérente	101
2.3.6	Evolution de la largeur du cône dynamique	102
2.3.6.1	Première approche du calcul de D	102
2.3.6.2	Influence des paramètres l_e , l^* et L sur Γ	103
2.4	Expériences de rétrodiffusion cohérente dynamique	105
2.4.1	Principe	106
2.4.2	Influence des paramètres expérimentaux	106
2.4.2.1	Diffusion simple	106
2.4.2.2	Directivité des transducteurs	110
2.4.2.3	Effets de bord	114
2.4.2.4	Influence de l'absorption	115
2.4.3	Influence des corrélations entre diffuseurs	116
2.4.3.1	Diagrammes de ladder généralisés L_M : prise en compte des corrélations	117
2.4.4	Mesure de D sur des échantillons de diffuseurs identiques	120
2.4.4.1	Etude en régime quasi-impulsionnel	120
2.4.4.2	Mise en évidence de la dépendance fréquentielle de D	124
2.4.5	Mesure de D sur des échantillons de diffuseurs différents	126
2.4.5.1	Mise en évidence des réponses de chaque type de diffuseur	126
2.4.5.2	Imagerie par cône dynamique ?	128
2.4.6	Mesure de D dans l'huile	129
2.4.7	Mise en évidence de la diffusion multiple dans un échantillon "réel" : le cas de l'os trabéculaire	134
2.5	Théorie classique	138
2.5.1	De Bethe-Salpeter à l'ETR	140
2.5.2	Transferts radiatifs	141
2.5.3	Approximation de la diffusion	144
2.5.3.1	Première approche	144
2.5.3.2	Obtention de l'équation de la diffusion	145
2.5.3.3	Détermination des conditions aux limites	147
2.6	Etude de l'intensité transmise	148
2.6.1	Solution "exacte"	148

2.6.2	Approche de J.H. Page	151
2.6.3	Approche de B. Van Tiggelen	155
2.6.4	Influence des paramètres de transport sur la TOF	159
2.6.5	Influence de l'absorption	161
2.7	Obtention expérimentale de la courbe des temps de vol	163
2.7.1	Principe	163
2.7.2	Traitement des données	164
2.7.2.1	Influence de la nature de la source	164
2.7.2.2	Adaptation de la théorie à l'expérience	165
2.8	Mesure du libre parcours moyen d'absorption	167
2.8.1	Régime impulsionnel	167
2.8.2	Régime quasi-monochromatique	168
2.9	Mesure du coefficient de diffusion	171
3	Intensité multiplement diffusée en régime stationnaire	173
3.1	Intensité rétrodiffusée	173
3.1.1	Le cône stationnaire	174
3.1.2	Expression théorique	174
3.1.2.1	Validité des approximations	177
3.1.2.2	Allure du cône stationnaire	179
3.1.2.3	Lien entre la largeur du cône et l^*	179
3.1.2.4	Influence des paramètres l_e , l^* , L et l_a sur le cône stationnaire . . .	181
3.2	Expérience de rétrodiffusion en régime stationnaire	184
3.2.1	Principe	184
3.2.2	Influence des paramètres expérimentaux	185
3.2.2.1	Diffusion simple	185
3.2.2.2	Directivité	187
3.2.3	Influence du coefficient de diffusion simple x et de l^*	189
3.2.4	Comparaison des résultats entre échantillons de tiges	189
3.3	Transmission en régime stationnaire et retournement temporel	194
3.3.1	Retournement temporel et diffusion multiple	194
3.3.1.1	Principe	194
3.3.1.2	Limites du retournement temporel	196
4	Conclusion	201
A	Evaluation de la directivité	205
A.0.2	Protocole expérimental	205
A.0.3	Etude en régime quasi-impulsionnel	205
A.0.4	Etude en régime quasi-monochromatique	205

B	Modélisation de l'absorption	207
C	Evaluation des erreurs d'interpolation	209
	Bibliographie	211

Table des figures

1.1	Expérience de transmission	6
1.2	Signal transmis à travers un milieu de tiges pour une seule réalisation du désordre.	7
1.3	Signal transmis à travers le même milieu après moyenne sur le désordre.	7
1.4	Signal cohérent transmis à travers le même milieu que sur la figure 1.3 après recalage temporel et moyenne sur les voies de la barrette.	8
1.5	Signal transmis à travers l'eau.	8
1.6	Les deux échantillons métalliques étudiés.	15
1.7	Dispositif expérimental de rétrodiffusion.	15
1.8	Signal rétrodiffusé par l'échantillon G4S51-N1.	16
1.9	<i>Somme cohérente</i> des signaux rétrodiffusés par l'échantillon G4S51-N1.	17
1.10	Etude de l'échantillon <i>WASP51 – W0</i>	18
1.11	Signaux rétrodiffusés à la fréquence centrale 7.5 MHz	19
1.12	Comparaison des signaux reçus entre les échos d'interface pour les deux échantillons.	20
1.13	Représentation d'une séquence faisant intervenir 2 <i>diffuseurs entiers</i>	26
1.14	Développement diagrammatique de la fonction de Green moyenne.	31
1.15	Exemples de diagrammes irréductibles.	31
1.16	Diffusion par un cylindre d'acier immergé dans l'eau.	34
1.17	Diffusion par un cylindre solide immergé dans l'eau, notations utilisées.	37
1.18	Section efficace totale de diffusion d'un cylindre d'acier de 0.8 mm de diamètre immergé dans l'eau.	39
1.19	Section efficace totale de diffusion d'un cylindre d'acier pour une distribution gaussienne de rayons autour de 0 mm immergé dans l'eau.	41
1.20	Section efficace totale de diffusion d'un cylindre d'acier de 0.6 mm de diamètre immergé dans l'eau.	41
1.21	Section efficace différentielle de diffusion d'une tige d'acier de 0.6 mm de diamètre pour une fréquence de 2.5 MHz	42
1.22	section efficace différentielle de diffusion d'une tige d'acier de 0.8 mm de diamètre pour une fréquence de 3.5 MHz	42
1.23	Répartition aléatoire des tiges.	46
1.24	Echantillon de tiges de 80 mm d'épaisseur formé par la juxtaposition de tranches	46

1.25	Expérience de transmission cohérente.	47
1.26	Signal obtenu en transmission sur une réalisation du désordre.	48
1.27	Signal obtenu en transmission après moyenne sur une centaine de positions.	48
1.28	Signal obtenu après moyenne et compensation des temps de parcours.	48
1.29	Comparaison de signaux cohérents.	49
1.30	Comparaison de signaux cohérents.	49
1.31	Comparaison de signaux cohérents.	50
1.32	Comparaison de spectre de signaux transmis à travers l'eau et un milieu de tiges. . .	50
1.33	Détermination de l_e : différentes méthodes	51
1.34	Ajustement linéaire et détermination de l_e	52
1.35	Evaluation de l_e à la fréquence $2.8 MHz$, échantillon le plus dense	53
1.36	Evaluation de l_e à la fréquence $3.5 MHz$, échantillon le plus dense	53
1.37	Représentation de l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon le plus dense . . .	53
1.38	Evaluation de l_e pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.6 mm$, $f = 3.7 MHz$. . .	54
1.39	Evaluation de l_e pour l'échantillon de tiges le moins dense, $f = 2.7 MHz$	54
1.40	l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.6 mm$	55
1.41	l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon de tiges le moins dense	55
1.42	Comparaison ISA/expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.8 mm$ et de concentration $0.29 tige/mm^2$	56
1.43	Comparaison ISA/expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.6 mm$ et de concentration $0.18 tige/mm^2$	57
1.44	Comparaison ISA/expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.8 mm$ et de concentration $0.29 tige/mm^2$	57
1.45	Comparaison de la section efficace totale avec et sans viscosité : cas de l'eau.	59
1.46	Comparaison de la section efficace totale avec et sans viscosité : cas de l'huile.	59
1.47	Distribution radiale dans le cas de la <i>hole correction</i>	61
1.48	Distribution radiale issue de tirages aléatoires.	61
1.49	Théorie de l' <i>ITA</i> , cas de l'échantillon de tiges de diamètre $0.8 mm$ et de concentration $0.29 tige/mm^2$	62
1.50	Théorie de l' <i>ITA</i> , cas de l'échantillon de tiges de diamètre $0.6 mm$ et de concentration $0.18 tige/mm^2$	63
1.51	Théorie de l' <i>ITA</i> , cas de l'échantillon de tiges de diamètre $0.8 mm$ et de concentration $0.12 tige/mm^2$	63
1.52	Théories de <i>Waterman et Truell</i> et de <i>Linton et Martin</i> pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.8 mm$ et de concentration $0.29 tige/mm^2$	67
1.53	Théories de <i>Waterman et Truell</i> et de <i>Linton et Martin</i> pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.6 mm$ et de concentration $0.18 tige/mm^2$	68
1.54	Théories de <i>Waterman et Truell</i> et de <i>Linton et Martin</i> pour l'échantillon de tiges de diamètre $0.8 mm$ et de concentration $0.12 tige/mm^2$	68

1.55 Théories de <i>Keller</i> pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm ²	70
1.56 Théories de <i>Keller</i> pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm ²	71
1.57 Théories de <i>Keller</i> pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm ²	71
1.58 Echantillons hybrides utilisés en transmission cohérente	74
1.59 Opérateur de masse dans le cas de l'ISA avec deux types de diffuseurs.	74
1.60 Mesure de l_e avec un milieu hybride composé tiges de diamètre 0.8 mm et 0.6 mm et de concentration respective et 0.18 tige/mm ²	75
1.61 Comparaison de la mesure de l_e avec les prévisions théoriques pour l'échantillon hybride.	76
2.1 Chemins incohérents	78
2.2 Speckle et cône de rétrodiffusion cohérente	79
2.3 Chemins réciproques	86
2.4 Différence de phase pour des chemins réciproques	87
2.5 Cône dynamique avec l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm, de 40 mm d'épaisseur, à la fréquence centrale 3.2 MHz	89
2.6 Cône dynamique en code de couleur avec l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm, de 40 mm d'épaisseur, à la fréquence centrale 3.2 MHz	90
2.7 Evolution temporelle du facteur d'amplification	92
2.8 Configuration type de rétrodiffusion cohérente	93
2.9 Approximation angulaire pour l'intensité cohérente	98
2.10 Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 mm d'épaisseur.100	
2.11 Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur100	
2.12 Contribution cohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 mm d'épaisseur.101	
2.13 Contribution cohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur.101	
2.14 Validité de l'approximation $n^{\circ}3$ pour un échantillon de 40 mm d'épaisseur.	102
2.15 Validité de l'approximation $n^{\circ}3$ pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur.	102
2.16 Evolution temporelle de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ pour une épaisseur de 40 mm.	103
2.17 Evolution temporelle de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ pour une épaisseur de 80 mm.	103
2.18 Dépendance fréquentielle de Γ	105
2.19 Expérience de rétrodiffusion cohérente	107
2.20 Principe d'obtention du cône dynamique	107
2.21 Comparaison des facteurs d'amplification pour différents échantillons.	109
2.22 Influence de la directivité sur la largeur du cône dynamique.	110
2.23 Directivité des éléments de la barrette.	111
2.24 Effet de la directivité sur la dépendance fréquentielle de Γ	113

2.25	Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 <i>mm</i> d'épaisseur à la fréquence 3 <i>MHz</i>	113
2.26	Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 <i>mm</i> d'épaisseur à la fréquence 3 <i>MHz</i>	113
2.27	Influence des bords des échantillons sur le cône dynamique.	114
2.28	Diagrammes de chemins réciproques avec prise en compte des corrélations	119
2.29	Cône dynamique expérimental et théorique	120
2.30	Cône dynamique expérimental et théorique	121
2.31	Cône dynamique expérimental et évaluation de D en régime impulsionnel	122
2.32	Cône dynamique expérimental et évaluation de D en régime impulsionnel (2)	123
2.33	Cône dynamique expérimental et évaluation de D en régime fréquentiel (1)	124
2.34	Comportement fréquentiel de D	125
2.35	Evaluation de D en régime fréquentiel (2)	126
2.36	Expérience de rétrodiffusion cohérente sur un échantillon hybride	127
2.37	Bloc de ladder pour un échantillon hybride	127
2.38	Mesure de D sur un échantillon hybride	128
2.39	Echec de l'imagerie par cône dynamique	129
2.40	Expérience de rétrodiffusion dynamique dans l'huile	130
2.41	Allure des signaux rétrodiffusés dans l'huile et dans l'eau.	132
2.42	Evaluation du libre parcours moyen d'absorption dans l'huile	132
2.43	Evaluation de D dans l'huile et dans l'eau	133
2.44	Evolution temporelle de la moyenne de l'intensité rétrodiffusée dans l'huile et dans l'eau.	133
2.45	Evolution temporelle de la moyenne de l'intensité rétrodiffusée par les tiges dans l'huile et dans l'eau, échelle logarithmique	133
2.46	Structure d'un os trabéculaire	134
2.47	Cône dynamique obtenu	135
2.48	Cône dynamique obtenu	136
2.49	Evolution du facteur d'amplification en fonction du temps	136
2.50	Comparaison entre les intensités cohérentes et incohérentes	138
2.51	Effet de la moyenne sur l'intensité transmise	139
2.52	Grandeurs radiatives en 2D	142
2.53	Comparaison des intensités cohérente et diffuse	148
2.54	Solution exacte de l'équation de la diffusion	152
2.55	Approche exacte et simplifiée	153
2.56	Approche exacte et simplifiée	153
2.57	Approche exacte et simplifiée, effet des réflexions internes	154
2.58	Approche exacte et simplifiée, solution à l'intérieur du milieu	155
2.59	Solutions du <i>problème (3)</i> à différents temps et profondeurs	156

2.60	Comparaison des <i>solutions (2)</i> et <i>(3)</i> avec un échantillon de 80 mm d'épaisseur . . .	157
2.61	Influence des paramètres de transport sur la comparaison des <i>solutions (2)</i> et <i>(3)</i> . . .	158
2.62	<i>Problèmes (2)</i> et <i>(3)</i> : écart des pentes des <i>TOF</i> en fonction de l'épaisseur	158
2.63	<i>Problèmes (2)</i> et <i>(3)</i> : comparaison en présence de réflexions internes	159
2.64	Influence de l^* sur la <i>TOF</i>	160
2.65	Influence de D sur la <i>TOF</i>	160
2.66	Effet de l'absorption sur la <i>TOF</i>	161
2.67	Comparaison entre les intensités transmises selon les moyennes effectuées	163
2.68	Représentation bidimensionnelle de la <i>TOF</i> pour une source ponctuelle	164
2.69	Comparaison des solutions pour des sources planes et ponctuelles	165
2.70	Solution adaptée aux conditions expérimentales	166
2.71	Mesure de l_a en régime impulsionnel, échantillon de tige de 0.6 mm et 80 mm d'épaisseur	167
2.72	Mesure de l_a en régime impulsionnel, échantillon de tige de 0.6 mm et 40 mm d'épaisseur	168
2.73	Mesure de l_a en régime impulsionnel, échantillon de tige de diamètre 0.8 mm, de densité 0.29 tige/mm ² et 40 mm d'épaisseur	169
2.74	Mesure de l_a en régime impulsionnel, échantillon de tige de diamètre 0.8 mm, de densité 0.12 tige/mm ² et de 120 mm d'épaisseur	169
2.75	Ajustement fréquentiel de la <i>TOF</i> pour l'échantillon de tige de 0.6 mm et 80 mm d'épaisseur	170
2.76	Mesure de l_a en régime fréquentiel, échantillon de tige de 0.6 mm aux épaisseurs 40 mm et 80 mm.	171
2.77	Effet de la directivité sur la décroissance latérale de la <i>TOF</i>	172
3.1	Exemples de cônes dynamiques non normalisés.	178
3.2	Exemple de cône stationnaire.	180
3.3	Largeur du cône stationnaire à mi-hauteur, cas des diffuseurs modérément anisotropes.	182
3.4	Principe d'obtention du cône stationnaire.	185
3.5	Effet du palier exponentiel sur le cône stationnaire.	186
3.6	Cône stationnaire et diffusion simple.	188
3.7	Effet de la directivité sur le cône stationnaire	188
3.8	Evolution de l'écart en fonction du couple d'ajustement $\{x, l^*\}$	190
3.9	Ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales	191
3.10	Ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales	192
3.11	Ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales	192
3.12	Autocorrélation temporelle du signal transmis.	196
3.13	Signe de l'autocorrélation temporelle du signal transmis.	197
3.14	Signal moyen obtenu par retournement temporel.	197
3.15	Spectre du signal moyen obtenu par retournement temporel.	198
3.16	Signal moyen obtenu par retournement temporel.	199

3.17 Spectre du signal moyen obtenu par retournement temporel.	199
A.1 Directivité quasi-impulsionnelle.	206
A.2 Directivité fréquentielle	206

Introduction

La propagation d'ondes dans des milieux désordonnés intéresse de nombreux domaines de la physique. Ainsi, en physique du solide et en optique il est classique de caractériser le milieu de propagation à l'aide de grandeurs telles que le libre parcours moyen élastique l_e , le libre parcours moyen de transport l^* et la constante de diffusion du milieu D que nous définirons par la suite. La théorie de la diffusion multiple a été transposée en acoustique ultrasonore en adaptant les paramètres d'étude aux nouvelles possibilités offertes technologiquement et aux ordres de grandeurs de cette discipline. En optique le caractère aléatoire d'émission des ondes lumineuses avec des temps de cohérence très courts (de l'ordre de 10^{-9} s dans les meilleurs cas, pour les laser He-Ne [1]) rend illusoire l'enregistrement des phases des signaux. La théorie s'est donc intéressée à l'étude d'une grandeur moyennée dans le temps, l'intensité lumineuse. Classiquement, le problème est traité en utilisant l'équation de la diffusion, dans l'acceptation *diffusion de la chaleur*. Dans le domaine des ultrasons, on utilise des transducteurs piézoélectriques pour enregistrer les signaux, ce qui donne accès à l'évolution spatio-temporelle des champs de pression. Cette information est bien sûr plus riche que l'intensité moyenne. Le lien entre l'équation de propagation des ondes et l'équation de la diffusion permet de donner un fondement microscopique à cette dernière.

Nous utiliserons le formalisme diagrammatique pour exprimer les solutions du problème de diffusion multiple, dans une approche issue de la théorie quantique des champs. Le travail présenté est à caractère expérimental mais nous discuterons aussi du choix des théories choisies pour traiter les données. Nous utiliserons pour les expériences des milieux aléatoires prototypes, constitués de milliers de tiges d'acier aléatoirement réparties dans le plan et immergées dans l'eau. A l'étude de ces milieux confectionnés sur mesure au laboratoire, nous ajoutons celle de milieux réels concernés par la diffusion multiple, tels que des échantillons d'os trabéculaires ou des alliages métalliques utilisés dans l'industrie. Dans le premier cas, la diffusion multiple intervient dans la caractérisation acoustique des os en vue du contrôle de leur perte de masse due à l'ostéoporose. Dans le cas industriel, les métaux dont les grains sont de l'ordre de la longueur d'onde utilisée lors de leur inspection peuvent être très multidiffuseurs et se prêtent mal au contrôle non destructif. Nous étudions dans cette thèse différentes méthodes de détermination des paramètres de transport en diffusion multiple.

Dans le premier chapitre, nous réalisons des expériences de transmission cohérente pour déterminer le libre parcours moyen élastique l_e . Dans ce cadre, nous montrons qu'il est important de prendre en compte les corrélations entre diffuseurs même pour de faibles densités de ces derniers. Les pertes par absorptions sont modélisées et nous permettent de quantifier leur importance dans notre approche

expérimentale.

Dans le second chapitre, nous montrons que l'étude de la rétrodiffusion cohérente en régime dynamique permet, par l'intermédiaire du cône de rétrodiffusion, d'évaluer la constante de diffusion du milieu D de façon fiable, et semble-t-il indépendante de l'absorption intrinsèque. Dans le chapitre suivant nous montrons cependant que le cône stationnaire de rétrodiffusion ne permet pas de déterminer le libre parcours moyen de transport l^* dans nos conditions expérimentales, ce qui constitue un résultat original. Les grandeurs caractérisant l'absorption au sein du milieu sont évaluées par une technique de transmission développée en détail. Enfin nous discutons des limites de la focalisation par retournement temporel en présence de diffusion multiple.

Chapitre 1

Etude du champ cohérent

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les caractéristiques de l'amplitude multiple diffusée. Nous partons de l'équation de propagation en milieu hétérogène et introduisons la notion de *moyenne sur le désordre*. Nous montrons que l'amplitude du champ moyen obéit à une équation de *Dyson* dont la résolution n'est possible qu'après simplification drastique du problème. Les notions de *milieu effectif* et de *libre parcours moyen élastique* sont alors introduites. Pour illustrer l'intérêt de ce dernier paramètre, l'étude expérimentale du caractère multiple diffuseur d'échantillons métalliques est présentée.

Cette approche phénoménologique de la diffusion multiple est suivie d'une description plus détaillée à l'aide du formalisme diagrammatique. Des expériences réalisées sur des échantillons de tiges d'acier nous permettront alors de mettre en évidence le comportement individuel des diffuseurs dans la réponse du milieu. Nous comparons ensuite les prédictions de la théorie diagrammatique la plus simplifiée aux données expérimentales. Le rôle de l'absorption et des corrélations entre diffuseurs est alors étudié afin d'affiner les prédictions théoriques. Enfin des expériences sont menées dans le but de distinguer les réponses de deux types de diffuseurs au sein d'un même milieu.

1.2 Approche phénoménologique de l'onde cohérente

Dans cette partie, nous introduisons des outils (*moyenne sur le désordre*), paramètres (l_e, Σ, \dots) et concepts (*milieu effectif*) permettant d'étudier la diffusion multiple. Une illustration expérimentale simple de ces notions conclut cette approche phénoménologique.

1.2.1 Cas d'un milieu homogène

Dans ce qui suit, nous considérons sauf précision contraire un milieu bidimensionnel, tel que les grandeurs d'intérêt ne s'expriment spatialement qu'en fonction des variables z et x . La propagation d'un flux énergétique $I(z)$ associée à une onde plane, à travers un milieu homogène suit la loi bien connue de Beer-Lambert. Cette loi décrit la décroissance exponentielle de l'intensité du flux avec l'épaisseur z . On a classiquement

$$I(z) = I_0 \exp(-K_{ext}z) \quad (1.1)$$

avec I_0 l'intensité en $z = 0$ et K_{ext} le coefficient d'extinction du milieu considéré. La loi de Beer-Lambert est couramment utilisée en optique, où l'on s'intéresse à un flux collimaté dans la direction normale à l'échantillon. Remarquons tout d'abord que cette loi permet de lier un flux d'énergie dans une direction donnée, ici selon l'axe des z , à la profondeur explorée dans le milieu. Pour tester cette loi, il suffit de faire *une* expérience. Une des conditions d'application de cette loi très simple concerne l'homogénéité de l'échantillon. Dans ce cas, le coefficient d'extinction quantifie l'absorption du milieu. Que se passe-t-il dans un milieu hétérogène ?

1.2.2 Cas d'un milieu hétérogène

La présence d'hétérogénéités dans le milieu entraîne des interactions supplémentaires entre l'onde et son environnement : on parle de diffusion. L'acceptation de ce terme est celle du mot *scattering* en anglais, c'est-à-dire la redistribution de la direction de l'onde à chaque étape de sa propagation dans le milieu¹.

Soit les hétérogénéités peuvent être bien identifiées et on peut considérer le milieu comme une association de diffuseurs discrets, soit l'identification n'est pas possible auquel cas on a recours à une approche de type milieu continu où l'on modélise les hétérogénéités par les variations spatiales de grandeurs intensives caractérisant le milieu (indice en optique, vitesse de propagation en acoustique).

On distingue en général une partie *balistique* et une partie diffusée dans le champ transmis. La contribution balistique est composée de fronts d'ondes arrivant comme s'ils n'avaient pas interagi avec les diffuseurs.

La diffusion peut être *simple* ou *multiple*. Lorsque l'onde transmise est composée de chemins n'interagissant qu'une fois avec les diffuseurs, on est dans le cadre de la *diffusion simple*. Dans le cas

¹Nous verrons par la suite que la propagation de l'énergie peut être modélisée sous certaines conditions par une équation de diffusion, dans l'acceptation du terme *diffusion de la chaleur*, c'est-à-dire un régime où le transport d'une grandeur vérifie la loi de Fick.

de *diffusion multiple*, l'onde transmise est composée de chemins ayant expérimenté plusieurs événements de diffusion. Cela se traduit par un étalement temporel du signal transmis sur des temps plus longs qu'en diffusion simple. Une autre conséquence de la diffusion multiple est la diminution du front balistique, voire sa disparition dans le cas de milieux fortement diffusants.

La diffusion multiple peut se rencontrer dans des milieux réels ou synthétiques, comme ceux que nous avons fabriqués au laboratoire². Dans nos expériences, l'onde transmise peut s'étendre sur une durée plusieurs centaines de fois plus longue que l'impulsion initiale.

1.2.3 Les moyennes sur le désordre

En présence de diffusion multiple, les tentatives de description analytique de l'onde transmise sont inadaptées pour deux raisons principales.

- Tout d'abord, la multiplicité des chemins de diffusion mis en jeu rend de telles approches extrêmement complexes.
- D'autre part, le front d'onde transmis obtenu lors d'une *une expérience* ne caractérise que les séquences de diffusions spécifiques à cette expérience et non le milieu testé dans son ensemble. Par exemple dans le cas de diffusion dans des suspensions, les diffuseurs changent de configuration avec le temps : chaque expérience donne donc lieu à des ondes transmises différentes les unes des autres. Dans cette situation, comment caractériser un milieu multiplement diffuseur ?

Le recours à une approche statistique est couramment adopté pour traiter le problème de diffusion multiple. Cela permet de traiter non les grandeurs physiques exactes mais leurs *moyennes*. Un échantillon diffuseur donné est traité comme une réalisation particulière d'un processus aléatoire : on parlera de milieux aléatoires³. Rigoureusement, il est nécessaire de réaliser des moyennes d'ensemble. Dans le cadre de nos expériences, cela nécessite de réaliser un grand nombre de tirages de cartes de vitesses aléatoires obéissant aux mêmes lois statistiques et de moyenner les résultats obtenus sur les échantillons correspondants. Dans le cas de suspensions en présence d'écoulement, la moyenne est réalisée temporellement, ce qui conduit à une moyenne d'ensemble rigoureuse⁴. Dans cette thèse, nous utilisons des échantillons pour lesquels le désordre est fixé : pour mettre en jeu des séquences de diffusion différentes, nous insonifions plusieurs zones du milieu. En pratique, nous approchons donc la moyenne d'ensemble en translatant l'échantillon diffuseur.

Dans une approche statistique, on peut décomposer la célérité $c(\mathbf{r})$ des ultrasons dans le milieu selon la relation :

$$c(\mathbf{r}) = \langle c \rangle (\mathbf{r}) + \delta c(\mathbf{r})$$

avec $\langle c \rangle$ la célérité moyennée sur le désordre et δc la fluctuation de vitesse, qui varie d'une réalisation à l'autre. Le champ acoustique qui se propage dans le milieu hérite du caractère aléatoire de $c(\mathbf{r})$

²Une description précise des milieux prototypes sera faite en section 1.7.1 : il s'agit de répartitions aléatoires de milliers de tiges métalliques parallèles maintenues verticalement entre deux support d'époxy.

³ Un milieu est aléatoire lorsque ses caractéristiques sont décrites par des variables aléatoires.

⁴ Dans l'hypothèse ergodique.

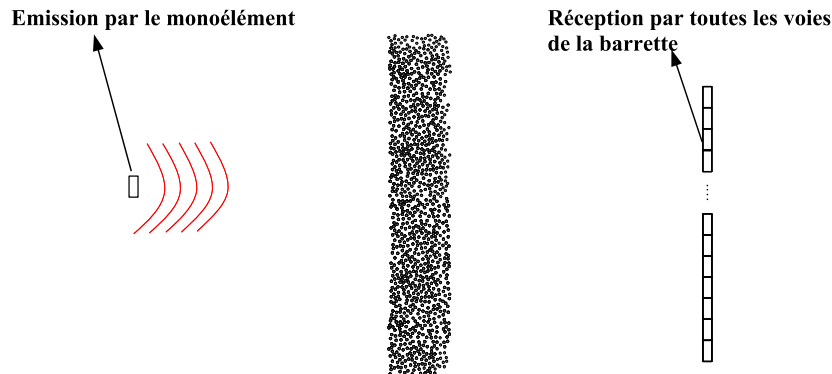


FIG. 1.1: Expérience de transmission à travers un échantillon de tiges d'acier. Le monoélément émet un signal réceptionné par les transducteurs de la barrette.

et peut se décomposer selon la même forme :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \langle \Psi \rangle (\mathbf{r}) + \delta\Psi(\mathbf{r})$$

L'intensité moyenne peut s'exprimer en fonction du champ moyen et du champ fluctuant selon

$$\langle I \rangle = |\langle \Psi \rangle|^2 + \langle |\delta\Psi|^2 \rangle \quad (1.2)$$

On peut définir les intensités cohérentes et incohérentes par :

$$I_{coh} = |\langle \Psi \rangle|^2$$

et

$$I_{incoh} = \langle |\delta\Psi|^2 \rangle$$

Quel est l'effet concret de la moyenne sur les données expérimentales ?

Le champ cohérent est par définition, le champ qui résiste à la moyenne sur le désordre. Considérons une expérience de transmission (cf. figure 1.1) à travers un milieu de tiges verticales aléatoirement réparties. Pour les résultats de cette section les tiges sont de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 (soit une fraction surfacique de 14.5 %) et l'échantillon a 20 mm d'épaisseur. Un transducteur ultrasonore émet une onde quasi-impulsionnelle de durée $1 \mu\text{s}$ à la fréquence centrale de 3.2 MHz (soit ≈ 3 périodes). L'onde transmise à travers l'échantillon de tiges est reçue sur une barrette de transducteurs comportant 128 récepteurs (ou "voies"). Sur la figure 1.2, on a représenté les signaux transmis sur chacune des voies de la barrette en utilisant un code de couleur. On observe un signal correspondant à une réalisation du désordre : il apparaît beaucoup plus long que l'impulsion source et permet à peine de distinguer un front cylindrique (balistique) dans les

premiers temps.

On répète l'expérience précédente sur une centaine de positions des sources et récepteurs et on moyenne les champs obtenus : on obtient une estimation expérimentale de l'onde cohérente. Celle-ci est représentée sur la figure 1.3 : on constate le renforcement très net du front balistique, qui débute au même temps que dans l'eau, comme si cette partie de l'onde n'avait pas interagi avec les diffuseurs. Derrière l'onde balistique, on observe une traînée dont l'amplitude diminue avec le temps : c'est la contribution des chemins de diffusion multiple de plus en plus longs dans le milieu. Ces chemins n'ont pas été complètement effacés par la moyenne. Si la moyenne pouvait être idéale, seul subsisterait un front cylindrique (éventuellement plus long que l'impulsion émise) spatialement cohérent comme dans un milieu homogène dit *milieu effectif*. Nous pouvons diminuer encore les fluctuations en recalant temporellement les signaux de la figure 1.3 et en moyennant les données sur les voies de la barrette. On obtient ainsi un signal cohérent (figure 1.4) que l'on peut comparer au signal transmis dans l'eau (figure 1.5). Que peut-on tirer de cet observable ? L'étude du milieu effectif va nous permettre de préciser les caractéristiques de l'onde cohérente et de répondre à cette question.

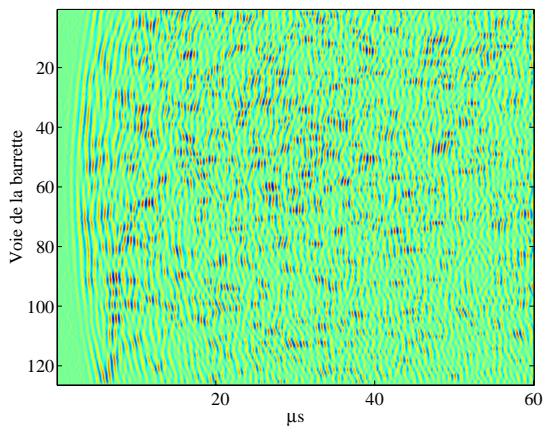


FIG. 1.2: Signal transmis à travers un milieu de tiges d'acier de 0.8 mm de diamètre, de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 20 mm pour une seule réalisation du désordre.

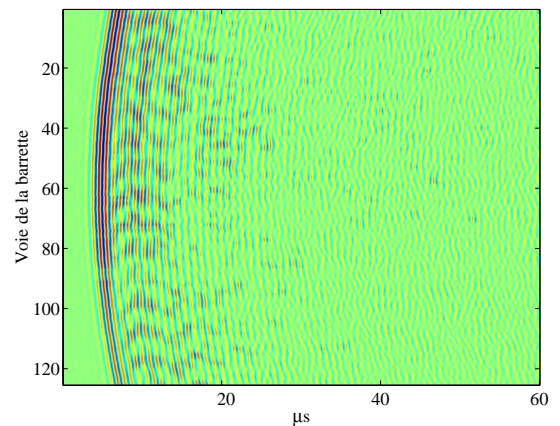


FIG. 1.3: Signaux obtenus sur le même échantillon qu'en 1.2 après moyenne sur une centaine de réalisations.

1.3 Introduction à la théorie des milieux effectifs

1.3.1 Equations de propagation du champ ultrasonore

Cas de la propagation dans un milieu homogène

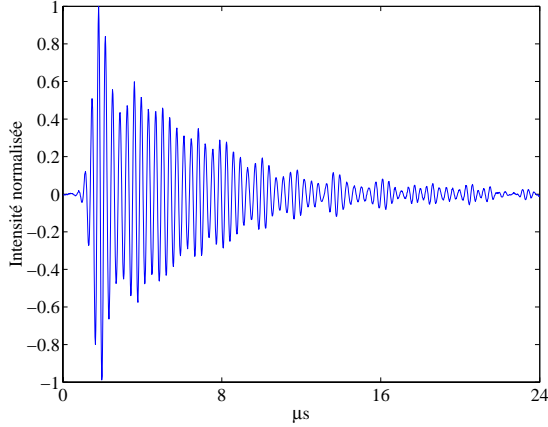


FIG. 1.4: Signal cohérent transmis à travers le même milieu que sur la figure 1.3 après recalage temporel et moyenne sur les voies de la barrette.

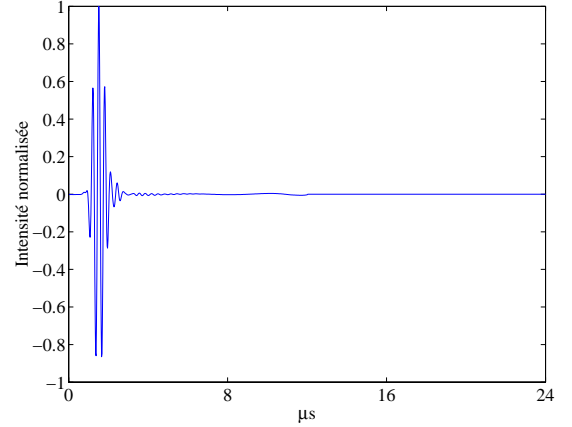


FIG. 1.5: Signal transmis à travers l'eau.

L'équation de propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu fluide idéal⁵. est :

$$\frac{\partial^2 \Psi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \Psi_0(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.3)$$

avec $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ la surpression instantanée au point \mathbf{r} et au temps t et c_0 la célérité des ondes dans le fluide. Dans le cas d'une onde monochromatique de pulsation w , l'équation précédente se réduit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \Psi_0(w, \mathbf{r}) + k_0^2 \Psi_0(w, \mathbf{r}) = 0 \quad (1.4)$$

avec k_0 le nombre d'onde défini par $k_0 = w/c$.

Cas de la propagation dans un milieu hétérogène

Dans un milieu où la célérité c dépend de la variable d'espace \mathbf{r} l'équation de propagation d'une onde monochromatique s'écrit

$$\Delta \Psi(w, \mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r}) \Psi(w, \mathbf{r}) = j_s(\mathbf{r}) \Psi(w, \mathbf{r}) \quad (1.5)$$

avec

$$k^2(\mathbf{r}) = \frac{w^2}{c(\mathbf{r})}$$

le nombre d'onde dans le milieu et $j_s(\mathbf{r})$ un terme source dû aux hétérogénéités du milieu [2].

On considère un milieu homogène de référence, pour lequel toutes les grandeurs physiques sont indicées par 0, le nombre d'onde étant par exemple k_0 . On peut exprimer k en fonction de k_0 selon

⁵Un fluide idéal est ici continu, homogène, isotrope, compressible, sans perte,[2].

la relation

$$k^2(r) = k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r})) \quad (1.6)$$

avec $\mu(\mathbf{r}) = 0$ en dehors des hétérogénéités.

On peut réécrire 1.5 sous la forme

$$\Delta\Psi(w, \mathbf{r}) + k_0^2\Psi(w, \mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})\Psi(w, \mathbf{r}) \quad (1.7)$$

avec $\epsilon(\mathbf{r}) = j_s(\mathbf{r}) - k_0^2\mu(\mathbf{r})$. Le terme ϵ se nomme le *potentiel de diffusion*, il contient toute l'information sur les événements de diffusion par rapport au milieu de référence.

On constate que les hétérogénéités du milieu agissent comme des sources de champ. Pour approcher la solution de l'équation 1.7, il est utile d'introduire le formalisme des fonctions de Green pour transformer l'équation différentielle en équation intégrale.

1.3.2 Equation intégrale

A l'équation de Helmholtz en milieu homogène correspond l'équation de Green suivante :

$$\Delta G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2 G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.8)$$

La fonction $G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ correspond à la solution du problème de la propagation d'ondes pour une source ponctuelle placée en \mathbf{r}' . Dans le cas d'une propagation bidimensionnelle, elle a pour expression

$$G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.9)$$

avec H_0^1 la fonction de Hankel de premier type d'ordre zéro.

On peut exprimer la solution de l'équation 1.7 en fonction de la fonction de Green dans le milieu de référence selon

$$\Psi(w, \mathbf{r}) = \Psi_0(w, \mathbf{r}) + \int G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') \Psi(w, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.10)$$

On a donc obtenu une relation intégrale pour le champ ultrasonore. On peut réécrire 1.10 de façon plus condensée en utilisant les opérateurs :

$$\tilde{\epsilon} : \Psi(w, \mathbf{r}) \longrightarrow \epsilon(\mathbf{r})\Psi(w, \mathbf{r}) \quad (1.11)$$

et

$$G_0 : \Psi(w, \mathbf{r}) \longrightarrow \int G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(w, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.12)$$

Ce qui permet d'écrire 1.10 sous la forme :

$$\Psi = \Psi_0 + G_0 \tilde{\epsilon} \Psi \quad (1.13)$$

Cette équation est dite *fermée* car on constate que le champ ultrasonore apparaît dans les deux membres.

La fonction de Green en milieu hétérogène, quant à elle, vérifie l'équation

$$\Delta G(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2 G(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \epsilon(\mathbf{r}) G(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.14)$$

On peut relier les fonctions de Green en milieu hétérogène et homogène de référence par une équation fermée du même type que 1.10 :

$$G(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \epsilon(\mathbf{r}_1) G(w, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 \quad (1.15)$$

Soit sous forme compacte

$$G = G_0 + G_0 \tilde{\epsilon} G \quad (1.16)$$

La relation 1.16 (respectivement 1.13) peut s'écrire sous forme développée en remplaçant G (resp. Ψ) par le membre de droite de l'équation. Ce développement peut être répété indéfiniment :

$$G = G_0 + G_0 \tilde{\epsilon} G = G_0 + G_0 \tilde{\epsilon} G_0 + G_0 \tilde{\epsilon} G_0 \tilde{\epsilon} G_0 + \dots \quad (1.17)$$

soit

$$G = G_0 + G_0 L G_0 \quad (1.18)$$

L'opérateur L prend en compte tout le processus de diffusion, il est défini par

$$L \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{\epsilon} G_0)^n \tilde{\epsilon}$$

Moyenne sur le désordre

Dans l'équation 1.18 les seuls termes sensibles à la moyenne sur le désordre sont l'opérateur L et la fonction de Green G :

$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 \langle L \rangle G_0 \quad (1.19)$$

Il est utile d'obtenir une équation fermée du type de 1.16 pour la fonction de Green moyenne G . Nous détaillerons en section 1.5.3.5 l'obtention d'une telle équation, initialement établie par Dyson. L'équation de Dyson a la forme suivante :

$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 \Sigma \langle G \rangle \quad (1.20)$$

Le terme Σ se nomme *l'opérateur de masse* et joue un rôle central dans la notion de milieu effectif. En effet, ce terme prend en compte tous les événements de diffusion dans le milieu moyen.

Dans cette section, nous ne détaillons pas la structure de Σ mais nous exposons son rôle vis à vis de la propagation du champ moyen⁶.

En effet, l'équation de Dyson permet de montrer que le champ ultrasonore moyen dans un milieu hétérogène peut satisfaire une équation de propagation dans un milieu homogène dit "effectif" caractérisé par l'opérateur de masse Σ .

1.3.3 Nombre d'onde effectif

1.3.3.1 Fonction de Green d'un milieu homogène

Lorsque le milieu de propagation est invariant par translation, la fonction de Green correspondante ne dépend plus des deux variables d'espaces \mathbf{r} et \mathbf{r}' mais seulement de leur différence :

$$G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Il est utile d'exprimer la transformée de Fourier (TF) spatiale d'une fonction de Green en milieu homogène :

$$G_0(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int G_0(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (1.21)$$

L'invariance de G_0 par translation dans l'espace réel annule les termes tels que $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, ce qui permet de simplifier 1.21 selon

$$G_0(w, \mathbf{k}) = \int G_0(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i(-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.22)$$

A partir de l'équation de propagation, on obtient ainsi par TF l'expression de la fonction de Green dans l'espace (w, \mathbf{k})

$$G_0(w, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2(w) - k^2} \quad (1.23)$$

Cette dernière écriture permet d'identifier le nombre d'onde dans l'espace réel au pôle de la fonction de Green dans l'espace de Fourier.

1.3.3.2 Opérateur de masse d'un milieu statistiquement homogène

Un milieu statistiquement homogène est invariant par translation *en moyenne*. Dans le cas général, l'opérateur de masse Σ dépend de w et de deux variables d'espace : on écrit $\Sigma(w, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Dans le cas d'un milieu statistiquement homogène, ce terme se réduit à $\Sigma(w, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Notons que la fonction de Green moyenne en milieu statistiquement homogène vérifie la même dépendance spatiale.

La TF spatiale de Σ dépend donc de w et du seul vecteur d'onde \mathbf{k} avec la relation

⁶L'étude d'expressions explicites de Σ fera l'objet de la section 1.6.3 et des suivantes.

$$\Sigma(w, \mathbf{k}) = \int \Sigma(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i(-\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))} d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.24)$$

Les dépendances de Σ et $\langle G \rangle$ spécifiques aux milieux statistiquement homogènes donnent à l'équation de Dyson 1.20 la forme intégrale suivante

$$\langle G(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle = G_0(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int G_0(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(w, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \langle G(w, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1.25)$$

Cette écriture fait apparaître un double produit de convolution spatiale. La *TF* de la relation 1.25 fait donc apparaître un simple produit algébrique dans l'espace des \mathbf{k} selon

$$\langle G(w, \mathbf{k}) \rangle = G_0(w, \mathbf{k}) + G_0(w, \mathbf{k}) \Sigma(w, \mathbf{k}) \langle G(w, \mathbf{k}) \rangle \quad (1.26)$$

En remplaçant $G_0(w, \mathbf{k})$ par son expression suivant 1.23 on obtient la relation essentielle suivante :

$$\langle G(w, \mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{k_0^2(w) - \Sigma(w, \mathbf{k}) - k^2} \quad (1.27)$$

En comparant 1.27 à 1.23 on constate que la différence entre la propagation en milieu homogène et la propagation moyenne en *milieu hétérogène à statistique homogène* se réduit à Σ . Dans le cas général, Σ dépend de \mathbf{k} , ce qui signifie que la relation de dispersion est modifiée de manière non triviale entre les deux types de milieu.

Dans le cas particulier où Σ ne dépend pas de \mathbf{k} , l'expression de la fonction de Green moyenne en milieu hétérogène est formellement identique à celle trouvée en milieu homogène : l'effet des hétérogénéités se réduit à une renormalisation du nombre d'onde. On peut alors considérer le milieu moyen comme un milieu homogène de nombre d'onde k_{eff} avec

$$k_{eff}^2(w) = k_0^2(w) - \Sigma(w) \quad (1.28)$$

On en déduit l'expression de la fonction de Green moyenne :

$$G_{eff}(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle G(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle = \frac{i}{4} H_0^1(k_{eff} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.29)$$

L'onde moyenne se propage donc avec une forme cylindrique, dans un milieu moyen dont la vitesse et l'atténuation ne sont pas tout à fait celles de l'eau, milieu de référence. Ce champ moyen sera désigné par les termes *champ cohérent* ou *onde cohérente*. Expérimentalement, il correspond au champ transmis exposé en figure 1.3.

1.3.4 Onde cohérente et diffusion multiple

Dans un milieu effectif, le champ cohérent Ψ_{eff} à une profondeur z s'exprime en fonction de sa valeur en $z = 0$, Ψ_0 selon

$$\Psi_{eff}(w, z) = \Psi_0 e^{ik_{eff}z} = \Psi_0 e^{-Im(k_{eff})z} e^{iRe(k_{eff})z} \quad (1.30)$$

La partie imaginaire du nombre d'onde effectif atténue le champ cohérent. L'atténuation résulte de deux phénomènes physiques distincts : l'absorption et la diffusion.

L'absorption résulte par exemple de perte par dissipation visco-thermique dans le milieu : l'énergie ultrasonore est convertie en chaleur. La diffusion, quant à elle, contribue à la diminution du champ moyen en redistribuant la direction de propagation à chaque événement de diffusion. On a

$$|\Psi_{eff}(w, z)|^2 = |\Psi_0|^2 e^{-2Im(k_{eff})z} \quad (1.31)$$

Pour quantifier l'atténuation du champ moyen, on utilise la longueur caractéristique d'extinction l_{ext} donnée par

$$l_{ext} = \frac{1}{2Im(k_{eff})} \quad (1.32)$$

En outre, la partie réelle du nombre d'onde effectif a un rôle sur la phase de l'onde cohérente et modifie la vitesse de propagation par rapport au milieu de référence. Cet effet est généralement du second ordre par rapport à celui de l'atténuation.

1.3.4.1 Cas d'un milieu sans absorption

On fait l'hypothèse d'une propagation dans un milieu sans perte intrinsèque dans un premier temps. Dans un tel milieu, l'onde cohérente est donc atténuée par la seule diffusion. Dans ce cas, la longueur caractéristique d'extinction l_{ext} est égale au *libre parcours moyen élastique* l_e qui quantifie l'atténuation du champ moyen par la diffusion. C'est un paramètre que nous chercherons à évaluer de manière précise dans les sections suivantes.

Nous avons vu que le champ cohérent est la partie de l'onde qui se propage comme si elle était en milieu homogène (pas forcément le milieu ambiant). Le reste de l'onde a été diffusé dans d'autres directions. D'où l'idée que l_e permet, en première approche, de quantifier l'importance de la diffusion multiple en régime stationnaire⁷. Pour un milieu non absorbant d'épaisseur L , si $l_e \ll L$, l'onde cohérente est éteinte sur une longueur de quelques l_e en alimentant les ordres de diffusion de plus en plus grand. Cette zone de conversion de l'énergie cohérente en énergie "diffuse"⁸, est négligeable par rapport au reste du milieu : l'essentiel de la propagation fait intervenir une onde diffusée plusieurs fois. La condition $l_e \ll L$ traduit donc la présence dominante de diffusion multiple dans les signaux transmis. Cette inégalité est nécessaire mais pas suffisante pour garantir la présence de diffusion multiple dans le cas général d'une diffusion dans un milieu absorbant.

⁷ En régime dynamique, la présence de diffusion multiple dépend du rapport entre le temps d'observation et le temps caractéristique de décroissance du champ cohérent $\tau_e = \frac{l_e}{c}$. Ainsi la diffusion multiple peut être présente même pour des milieux d'épaisseur faible devant l_e mais à des temps très longs.

⁸ Dans ce premier chapitre tout ce qui ne contribue pas à l'onde cohérente est "diffus". L'étude de l'onde en régime diffusif sera l'objet de la section 2.5.

Dans le cas où $L \leq l_e$ l'épaisseur du milieu n'est pas suffisante pour avoir statistiquement plusieurs diffusions pour un chemin donné : l'onde cohérente n'est pas complètement éteinte sur la traversée du milieu.

1.3.4.2 Cas d'un milieu absorbant

Dans le cas d'un milieu absorbant, on quantifie les pertes par absorption par le libre parcours moyen d'absorption l_a . La relation entre l_a , l_e et l_{ext} est :

$$\frac{1}{l_{ext}} = \frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_a} \quad (1.33)$$

On peut également lier les coefficients d'extinction K_{ext} , de diffusion K_{dif} et d'absorption K_a par

$$K_{ext} = K_{dif} + K_a \quad (1.34)$$

Dans ce cas, l'atténuation du champ cohérent ne permet pas de dissocier les pertes par absorption de celles causées par la diffusion. Néanmoins, l_{ext} étant toujours plus faible que l_e , si on mesure $l_{ext} \geq L$, on est sûr de ne pas être en présence de diffusion multiple prépondérante.

1.4 Première Application expérimentale : détermination de la présence de diffusion multiple dans des échantillons d'acier

On se propose d'appliquer la théorie des milieux effectifs à un premier cas expérimental très simple : l'évaluation de la présence de diffusion multiple dans des échantillons d'acier.

1.4.1 Approche qualitative

Nous avons étudié deux échantillons parallélépipédiques d'alliages métalliques, prêtés au laboratoire par le professeur R.B. Thompson de l'Iowa State University. Leurs dimensions sont de $20 \times 50 \times 50 \text{ mm}$ et nous les nommerons G4S51-N1 et WASP51-W0 (figure 1.6). L'objectif du travail mené sur ces échantillons est de déterminer leur caractère simplement ou multiples diffuseurs. Notre méthode consiste à réaliser des expériences de rétrodiffusion. Nous avons travaillé à deux fréquences centrales : 3.5 MHz et 7.5 MHz .

Le principe d'une expérience de rétrodiffusion est exposé en figure 1.7. On utilise pour cela une *barrette* à voies multiples, chaque voie étant constituée d'un transducteur piézoélectrique. En pratique, les barrettes utilisées disposent de 96 ou 128 voies. La distance entre la barrette et l'échantillon est de 7 cm et on tire un signal en créneau sur une durée de 5 demi-périodes à l'aide des 128 voies de la barrette, ce qui donne lieu à une onde quasi-plane. On enregistre ensuite les signaux réfléchis sur la barrette.

On s'intéresse à l'évolution temporelle des signaux réfléchis (ou "rétrodiffusés"). Les transducteurs piézoélectriques passent en mode récepteur. Les signaux rétrodiffusés sont visibles sur la figure

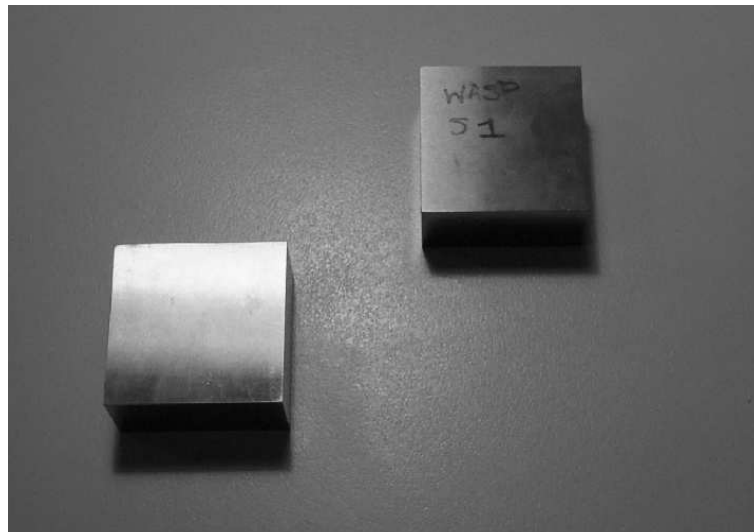


FIG. 1.6: Les deux échantillons étudiés.

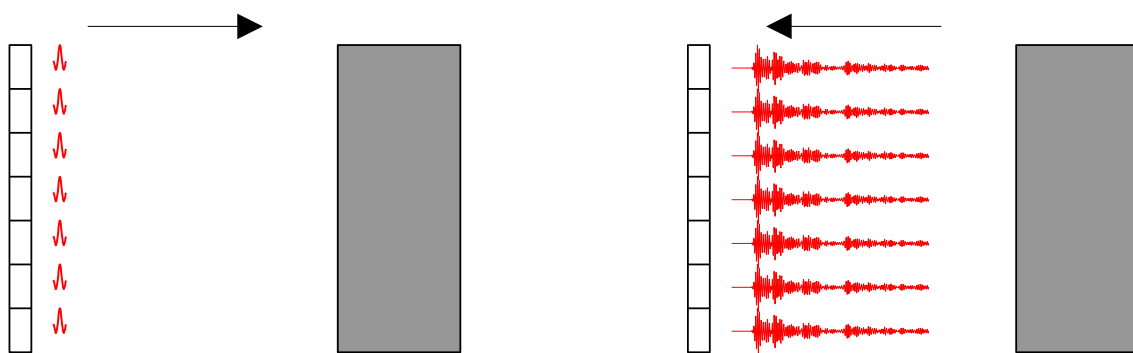


FIG. 1.7: Dispositif expérimental de rétrodiffusion. Sur la figure de gauche les voies de la barrette tirent un front d'onde plan vers l'échantillon. A droite les signaux rétrodiffusés sont enregistrés sur toutes les voies de la barrette devenue réceptrice.

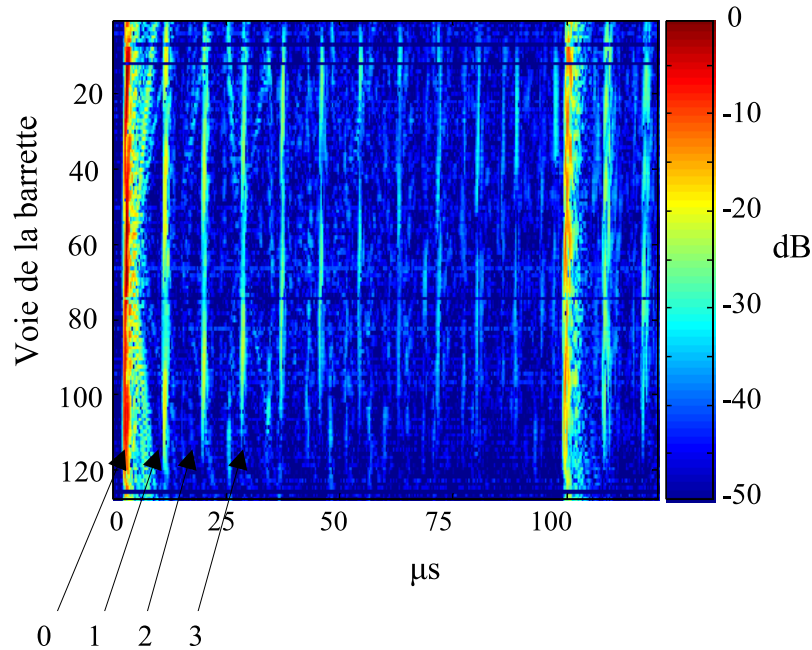


FIG. 1.8: Signal relatif à l'échantillon G4S51-N1 en rétrodiffusion à 3.5 MHz . La flèche 0 pointe l'écho de la face avant de l'échantillon, les flèches 1,2 et 3 désignent les échos de la face arrière après 1, 2 ou 3 allers-retours dans l'échantillon. L'échelle de couleur est logarithmique.

1.8 où les 128 voies de la barrette sont représentées en ordonnée, le temps étant en abscisse. Un code de couleur permet de quantifier l'amplitude des signaux.

On constate la présence d'échos visibles sous la forme de traces verticales espacées de $8.5 \mu\text{s}$, soit le temps de parcours d'un aller-retour entre les deux faces de l'échantillon d'épaisseur 25 mm à la vitesse de $5.9 \text{ mm}/\mu\text{s}$. Le front plan visible aux alentours de $100 \mu\text{s}$ correspond à un aller-retour de l'écho de la face avant entre la barrette et l'échantillon. La présence visible de ces échos témoigne de la domination de la partie balistique pour cette épaisseur et cette fréquence d'étude.

En effet, en présence de diffusion multiple dominante il est impossible de mettre en évidence de tels échos dans le signal rétrodiffusé car à un temps donné le signal réfléchi est composé de la contribution d'une multitude de chemins, ce qui noie l'écho d'interface.

L'absence de diffusion multiple peut être quantifiée en estimant le libre parcours moyen d'extinction l_{ext} . Dans notre cas, l_{ext} doit être supérieur à l'épaisseur de l'échantillon puisqu'on arrive à identifier clairement l'écho de la face arrière.

1.4.2 Approche quantitative

On peut tenter de trouver un ordre de grandeur de la longueur d'extinction du milieu en étudiant succinctement la décroissance de la valeur absolue de l'amplitude des fronts rétrodiffusés. Sur la

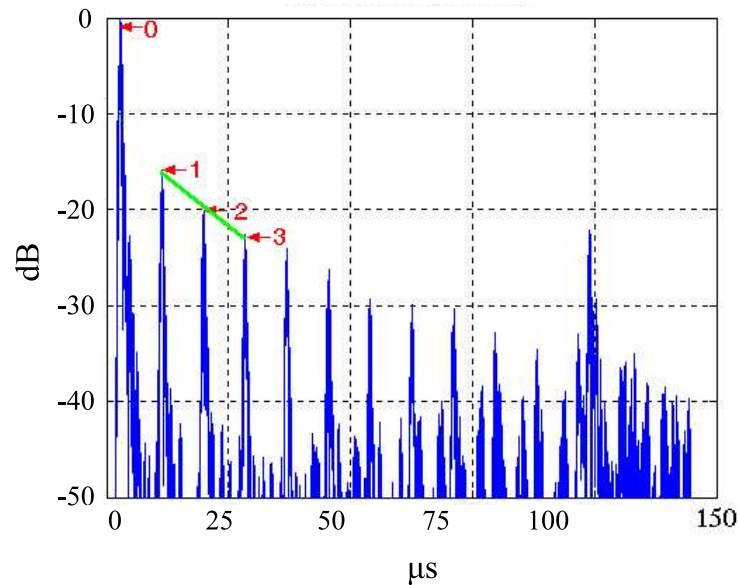


FIG. 1.9: *Somme cohérente* des signaux rétrodiffusés en échelle logarithmique pour G1S51-N1 à 3.5 MHz. Les flèches 1,2 et 3 désignent les échos de la face arrière après respectivement 1,2 et 3 allers-retours dans l'échantillon. Les amplitudes associées permettent d'évaluer $l_{ext} = 67 \text{ mm}$. Le pic de normalisation, désigné par la flèche 0 correspond à l'écho de la face avant.

figure 1.9 on a représenté en échelle logarithmique la valeur absolue de la somme des signaux reçus sur toutes les voies en fonction du temps. Plus précisément, on a représenté la somme des amplitudes recalées afin de compenser le léger défaut de parallélisme entre la barrette et l'échantillon, ce qui constitue la *somme cohérente* des signaux. L'amplitude est ensuite normalisée par le maximum du signal reçu pendant la durée d'acquisition. La somme sur les voies de la barrette constitue ici la moyenne sur le désordre spécifique à cette expérience.

En notant I_1 et I_3 les carrés des amplitudes respectives des deux pics n°1 et n°3 de la figure 1.9⁹, On obtient : $10 \log \left(\frac{I_3}{I_1} \right) = -6.5 \text{ dB}$.

Or on a

$$\frac{I_3}{I_1} = \exp \left(-\frac{4L}{l_{ext}} \right)$$

Avec L l'épaisseur du milieu.

L'épaisseur L valant 25 mm, on en déduit une valeur de l_{ext} égale à 67 mm. On note que l_{ext} étant nécessairement plus faible que l_e , cette dernière évaluation est une valeur minimale pour le libre parcours moyen élastique.

On confirme donc ne pas avoir une épaisseur suffisante à cette fréquence pour être en présence de

⁹ La faible décroissance des échos suivants est vraisemblablement due aux non linéarités du dispositif d'acquisition, non compensées à cette époque : les amplitudes inférieures à 25 dB sont surévaluées.

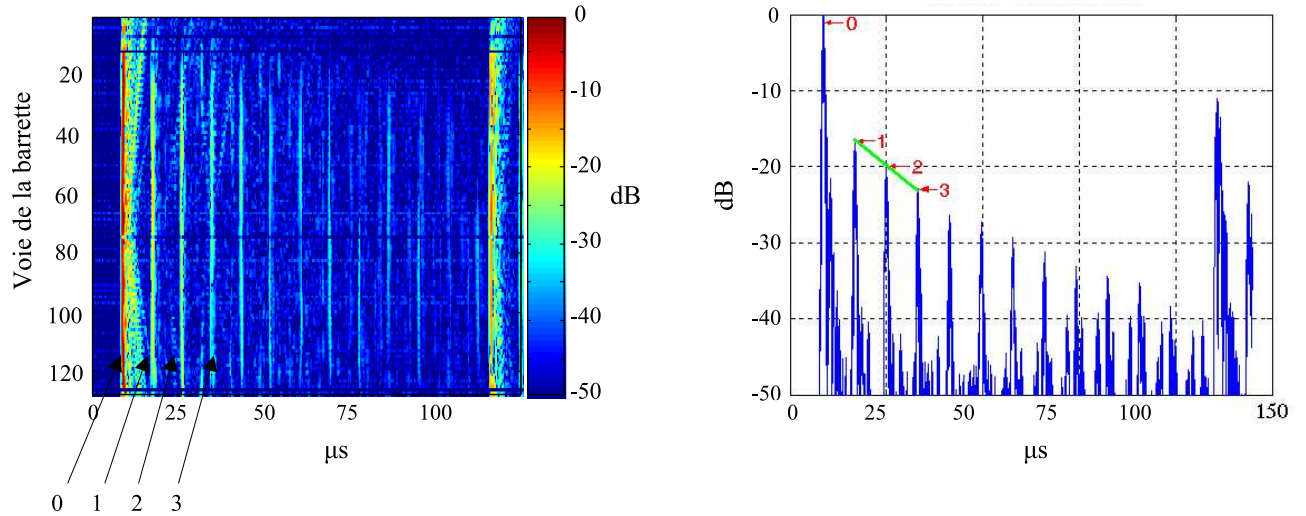


FIG. 1.10: A gauche, signal obtenu en rétrodiffusion à 3.5 MHz sur l'échantillon WASP51-W0. A droite, représentation de la *somme cohérente* des signaux rétrodiffusés permettant d'évaluer le libre parcours moyen d'extinction. On trouve $l_{ext} = 62\text{ mm}$

diffusion multiple.

La même expérience a été menée avec l'échantillon WASP51-W0. Les signaux obtenus sont visibles sur la figure 1.10 à gauche. On constate encore la présence d'échos d'allers-retours. La même technique d'évaluation de l_{ext} donne une valeur de 62 mm . Cette valeur est de 10% inférieure à celle obtenue pour l'échantillon précédent. La représentation de la valeur absolue de l'amplitude en échelle logarithmique est exposée en figure 1.10 à droite.

Pour compléter cette analyse, une étude semblable à plus haute fréquence a été effectuée.

Nous avons ainsi travaillé avec une barrette de fréquence centrale 7.5 MHz et effectué le même type d'expérience. Le signal tiré est un créneau de fréquence 8 MHz et sa longueur est de 6 demi-périodes. Les résultats obtenus sur les échantillons en rétrodiffusion sont présentés en figure 1.11.

On constate là encore la présence d'échos d'allers-retours. L'estimation de l_{ext} avec la même méthode donne respectivement 83 mm pour G4S51-N1 et 39 mm pour WASP51-W0. Ces résultats indiquent que l'échantillon WASP51-W0 est plus diffuseur que G4S51-N1 dans cette bande de fréquences, sans qu'on soit véritablement en régime de diffusion multiple puisque $L < l_{ext}$. On constate que les échos d'allers-retours sont moins facilement identifiables sur l'échantillon WASP51-W0, ce qui s'explique par l'extinction plus forte pour cet échantillon.

Afin de déterminer si la différence de valeur pour l_{ext} entre les deux échantillons est due à l'absorption, nous comparons les signaux rétrodiffusés entre les échos d'interface, le "bruit de structure". L'amplitude du signal reçu sur une voie de la barrette en fonction du temps est représentée en figure 1.12. En bleu est tracé le signal correspondant à l'échantillon G4S51-N1, en rouge celui issu de la réponse de WASP51-W0. L'origine des temps est choisie de telle sorte que le premier pic visible

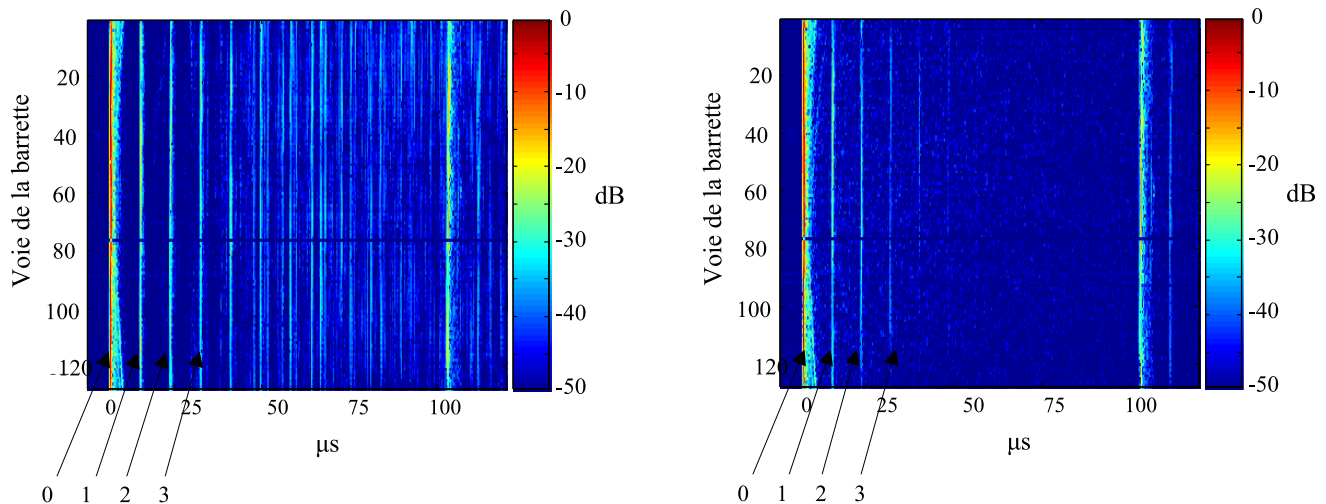


FIG. 1.11: Signaux rétrodiffusés à la fréquence centrale 7.5 MHz . A gauche pour l'échantillon G4S51-N1, à droite pour WASP51-W0. Ce dernier diffuse plus dans cette bande de fréquence : on distingue moins les échos d'allers-retours. L'évaluation de l_{ext} confirme ces résultats.

correspondre à l'écho désigné par la flèche n°1 respectivement dans les figures 1.11 de gauche et de droite. Les amplitudes sont normalisées par rapport à ce pic. On peut ainsi comparer le signal reçu entre les échos des interfaces.

On calcule l'énergie reçue sur la fenêtre temporelle comprise entre les traits verts. On remarque que l'énergie de WASP51-W0 est cinq fois plus importante que celle de G4S51-N1, ce qui confirme que les grains du matériau diffusent plus fortement pour WASP51-W0. On met donc en évidence que le comportement différent des deux échantillons résulte de leurs caractéristiques diffusives et non d'une différence d'absorption. En effet, dans ce dernier cas, l'échantillon WASP51-W0 aurait donné un signal plus faible que l'autre échantillon entre 2 échos, ce qui n'est pas le cas ici.

Ces expériences nous ont permis d'illustrer l'évaluation de l_{ext} sur un exemple simple et concret, et d'en discuter brièvement les implications sur le caractère prépondérant ou non de la diffusion multiple.

Dans cette introduction, nous avons présenté le lien entre le libre parcours moyen élastique l_e et le nombre d'onde effectif k_{eff} . Pour pouvoir lier l_e à la microstructure d'un échantillon, il est nécessaire d'obtenir une expression du libre parcours moyen élastique en fonction des paramètres caractérisant le milieu diffuseur et l'onde incidente. Cela implique d'en savoir plus sur l'opérateur de masse Σ . Ce terme prenant en compte tous les événements de diffusion dans le milieu, il nous faut aller plus loin dans la description théorique de la diffusion multiple.

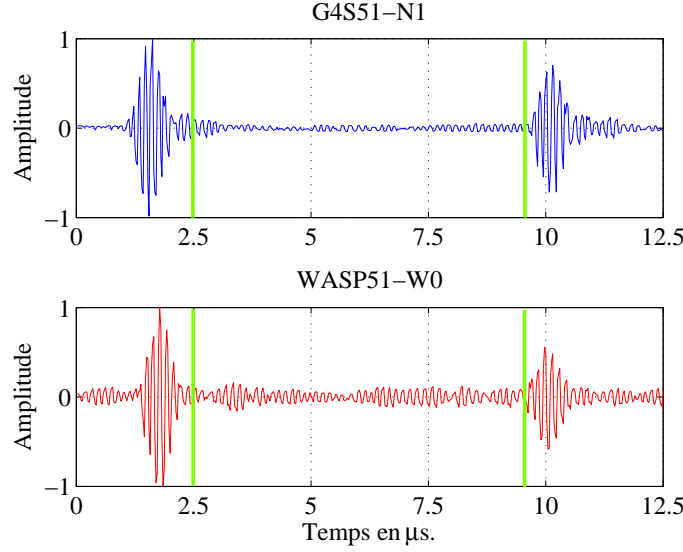


FIG. 1.12: Signal reçu sur une voie de la barrette avec les deux échantillons . On compare les énergies reçues sur la fenêtre temporelle comprise entre les traits verts.

1.5 Théorie de la diffusion multiple

Des diverses approches pour formaliser la diffusion multiple, nous retenons celle qui nous paraît la plus rigoureuse : l'approche diagrammatique. Celle-ci permet en effet de classer de manière judicieuse les événements de diffusion et d'alléger les écritures.

1.5.1 Hypothèses de travail

Les échantillons utilisés dans les expériences du reste de ce chapitre étant constitués de tiges verticales disposées aléatoirement dans deux dimensions, nous exposons le formalisme associé à des diffuseurs discrets bidimensionnels. On traitera le cas de diffuseurs identiques. Dans un premier temps, aucune hypothèse n'est faite sur la taille des diffuseurs ni sur leur concentration. La théorie prend en compte les éventuelles corrélations entre diffuseurs. Les travaux de Frisch [3] constituent notre base de travail ainsi que les références [2, 4, 5, 6].

Notre étude ne concerne pas directement les milieux continus multiplement diffuseurs. Néanmoins dans le cas limite de diffuseurs discrets ponctuels les deux approches sont équivalentes [3].

En section 1.3.2, nous avons obtenu les équations suivantes pour le champ Ψ et la fonction de Green associée G dans un milieu hétérogène caractérisé par un potentiel ϵ .

$$\Psi = \Psi_0 + G_0 \tilde{\epsilon} \Psi \quad (1.35)$$

$$G = G_0 + G_0 \tilde{\epsilon} G \quad (1.36)$$

$$(1.37)$$

Ces relations contiennent toutes les informations sur la diffusion dans le milieu. Elles constituent notre point de départ pour le développement du formalisme de la diffusion multiple et sont valables quelle que soit la nature des hétérogénéités dans le milieu.

Dans le cas des diffuseurs discrets, il est judicieux de faire intervenir la solution du problème de diffusion par un objet individuel, qui présente l'avantage d'être connue. On commence donc par exposer le cas de la diffusion par un diffuseur isolé, ce qui permet de définir l'*opérateur de diffusion* propre à une particule. Nous présentons ensuite la représentation des diffusions sous forme de diagrammes, avant de donner l'expression explicite de la diffusion par un cylindre d'acier dans l'eau.

1.5.2 Diffuseur isolé

On considère un diffuseur isolé nommé α , centré en l'origine du repère.

1.5.2.1 Expression implicite de la diffusion

Le potentiel ϵ introduit en section 1.3.1 est ici nommé ϵ_α , il est tel que :

$$\epsilon_\alpha(\mathbf{r}) = 0 \text{ en dehors du diffuseur et} \quad (1.38)$$

$$\epsilon_\alpha(\mathbf{r}) = \epsilon_\alpha \text{ dans le diffuseur} \quad (1.39)$$

L'équation de propagation pour G est ici

$$G = G_0 + G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G \quad (1.40)$$

Cette équation fermée peut se développer comme en 1.3.2, ce qui donne

$$G = G_0 + G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 + G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 + G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 + \dots \quad (1.41)$$

On définit l'*opérateur de diffusion* s_α du diffuseur α par la relation

$$G = G_0 + G_0 s_\alpha G_0 \quad (1.42)$$

ou sous forme intégrale

$$G(w, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int G_0(w, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) s_\alpha(r_1, r_2) G_0(w, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1.43)$$

La dernière fonction de Green apparaissant dans les deux dernières relations est G_0 , ce qui signifie que la connaissance de G n'est subordonnée qu'à celle de s_α . L'opérateur s_α prend en compte *tout* le processus de diffusion mettant en jeu α et il s'écrit en fonction de chaque événement de diffusion simple $\tilde{\epsilon}_\alpha$ selon

$$s_\alpha = \tilde{\epsilon}_\alpha + \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha + \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha G_0 \tilde{\epsilon}_\alpha + \dots \quad (1.44)$$

L'écriture intégrale de l'opérateur est (en omettant désormais la variable w) :

$$s_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \epsilon_\alpha(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \epsilon_\alpha(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\epsilon_\alpha(\mathbf{r}') + \int \epsilon_\alpha(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\epsilon_\alpha(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')\epsilon_\alpha(\mathbf{r}')d\mathbf{r}_1 + \dots \quad (1.45)$$

On peut détailler la fonction Green donnant la réponse en \mathbf{r} à une source placée en \mathbf{r}' selon

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &+ \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\epsilon_\alpha(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1 \\ &+ \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\epsilon_\alpha(\mathbf{r}_1)G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\epsilon_\alpha(\mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.46)$$

Le premier terme de ce développement correspond à l'onde qui va de \mathbf{r}' à \mathbf{r} sans être diffusée. Le deuxième terme décrit la propagation de \mathbf{r}' jusqu'au point \mathbf{r}_1 où l'onde diffuse (i.e. interagit avec le potentiel ϵ_α) et se propage jusqu'au point \mathbf{r} . On prend en compte tous les points du diffuseur en intégrant sur la surface de celui-ci selon la variable \mathbf{r}_1 .

Le troisième terme prend en compte tous les événements de diffusion double sur les centres diffuseurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 .

Précisons que le formalisme que nous utilisons implique de n'avoir des propagations que dans l'eau *même lorsque ce n'est physiquement pas le cas*. Par exemple dans le troisième terme du développement de G , la propagation de \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_2 fait intervenir G_0 alors que physiquement l'onde voyage dans le diffuseur et non dans l'eau. Cela résulte de notre choix du potentiel ϵ dès la section 1.3.1. Plus que la matrice entourant les diffuseurs, l'eau est un véritable milieu de référence dans cette théorie.

L'expression donnée pour un diffuseur étant déjà assez lourde, nous introduisons la représentation des événements de diffusion sous forme de diagrammes.

1.5.2.2 Diagrammes pour un diffuseur

On utilise un certain nombre de conventions pour représenter le processus de diffusion dans l'approche diagrammatique :

- un événement de diffusion simple est représenté par un disque noir \bullet surmonté du nom du diffuseur
- une ligne pleine horizontale¹⁰ correspond à la fonction de Green dans l'eau G_0

L'opérateur de diffusion se décompose selon

$$S_\alpha = \overset{\alpha}{\bullet} + \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} + \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} + \dots = \overset{\alpha}{\circ}$$

On peut aussi réécrire l'équation 1.46 sous la forme

¹⁰ On nommera cette ligne la *ligne centrale*.

$$G = \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\alpha}{\bullet} \overset{\alpha}{\bullet} \overset{\alpha}{\bullet} \text{---} + \dots$$

Le calcul explicite de l'opérateur s_α dans le cas d'un cylindre métallique immergé dans l'eau sera l'objet de la section 1.6.2.

1.5.3 Cas de la diffusion par N diffuseurs

Soit un milieu contenant N diffuseurs identiques, nommés α_i avec $i \in \{1 \dots N\}$ centrés en \mathbf{r}_{α_i} et dont les potentiels de diffusion sont notés ϵ_{α_i} .

1.5.3.1 L'opérateur de diffusion S

Par linéarité, l'équation de la diffusion multiple en présence de N diffuseurs s'écrit

$$G = G_0 + G_0 \sum_{i=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G \tag{1.47}$$

L'écriture développée de cette équation fermée est

$$G = G_0 + G_0 \sum_{i=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 + G_0 \sum_{i=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \sum_{j=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_j} G_0 + G_0 \sum_{i=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \sum_{j=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_j} G_0 \sum_{k=1}^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_k} G_0 + \dots \tag{1.48}$$

En terme de diagrammes, G s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} G = & \text{---} + \text{---} \overset{\alpha_1}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\alpha_2}{\bullet} \text{---} + \dots + \text{---} \overset{\alpha_i}{\bullet} \text{---} + \dots \\ & + \text{---} \overset{\alpha_1}{\bullet} \overset{\alpha_2}{\bullet} \text{---} + \dots + \text{---} \overset{\alpha_i}{\bullet} \overset{\alpha_j}{\bullet} \text{---} + \dots + \text{---} \overset{\alpha_i}{\bullet} \overset{\alpha_i}{\bullet} \text{---} + \dots \\ & + \text{---} \overset{\alpha_1}{\bullet} \overset{\alpha_2}{\bullet} \overset{\alpha_3}{\bullet} \text{---} + \dots + \text{---} \overset{\alpha_j}{\bullet} \overset{\alpha_i}{\bullet} \overset{\alpha_i}{\bullet} \text{---} + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

On remarque que dans ces développements on peut retrouver le même diffuseur dans une chaîne d'événements de diffusion multiple.

La première ligne du développement précédent contient N termes, la deuxième N^2 et la i^{me} ligne a N^i termes. On remarque que les symboles de diffusion simple par une même particule peuvent être juxtaposés dans cette représentation.

Précisons le lien entre les potentiels respectifs ϵ_{α_i} et ϵ du diffuseur α_i et de la section précédente. La différence ne concerne que le choix d'origine des diffuseurs, ce qui donne

$$\epsilon_{\alpha_i}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}) \tag{1.49}$$

Vis à vis de l'ensemble des diffuseurs, il est utile de définir un opérateur S prenant en compte tous les événements de diffusion dans le milieu. On pose

$$S = \sum_i^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} + \sum_i^N \sum_j^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \widetilde{\epsilon}_{\alpha_j} + \sum_i^N \sum_j^N \sum_k^N \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \widetilde{\epsilon}_{\alpha_j} G_0 \widetilde{\epsilon}_{\alpha_k} + \dots \quad (1.50)$$

Ce qui permet de relier G_0 à G par

$$G = G_0 + G_0 S G_0 \quad (1.51)$$

Nous allons arranger les termes du développement de manière à faire clairement intervenir la diffusion par une particule isolée. On peut regrouper les événements de diffusion relatifs aux mêmes diffuseurs en définissant les opérateurs s_{α_i} par

$$s_{\alpha_i} = \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} + \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} + \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} G_0 \widetilde{\epsilon}_{\alpha_i} + \dots \quad (1.52)$$

Sous forme diagrammatique on a par exemple :

Sous forme intégrale, le développement précédent correspond à

$$\begin{aligned} & \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \\ & \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \epsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 \\ & + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \epsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \epsilon(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ & + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \epsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \epsilon(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \epsilon(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \\ & + \dots \end{aligned}$$

On peut exprimer S en fonction des opérateurs s_{α_i} relatifs aux diffuseurs individuels.

$$S = \sum_i^N s_{\alpha_i} + \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N s_{\alpha_i} G_0 s_{\alpha_j} + \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j}^N s_{\alpha_i} G_0 s_{\alpha_j} G_0 s_{\alpha_k} + \dots \quad (1.53)$$

L'opérateur s_{α_i} prenant en compte tous les événements de diffusion simple par le diffuseur α_i , il n'est pas possible de trouver voisin deux opérateurs reliés au même diffuseur dans le développement précédent. Sous forme diagrammatique, on a :

$$\begin{aligned}
 S = & \quad \alpha_1 \quad + \quad \alpha_2 \quad + \dots \quad \alpha_i \quad + \dots \\
 & \quad \circ \quad + \quad \circ \quad + \dots \quad \circ \quad + \dots \\
 & + \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad + \dots \quad \alpha_i \quad \alpha_j \quad + \dots \quad \alpha_m \quad \alpha_k \quad + \dots \\
 & + \quad \circ \text{---} \circ \quad + \dots \quad \circ \text{---} \circ \quad + \dots \quad \circ \text{---} \circ \quad + \dots \\
 & + \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad + \dots \quad \alpha_i \quad \alpha_k \quad \alpha_i \quad + \dots \\
 & + \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad + \dots \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad + \dots \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

La première ligne compte ici N termes, la deuxième $N(N-1)$ et la i^{me} contient $N(N-1)\dots(N-i+1)$ contributions.

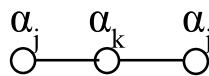
La somme sur tous les événements de diffusion simple concernant une seule particule ou (certains parlent de diffusion par un *diffuseur entier*) est conventionnellement représentée par un cercle blanc sans superposition d'indice de telle sorte que

$$\circ = \alpha_1 \quad + \quad \alpha_2 \quad + \dots \quad \alpha_i \quad + \dots$$

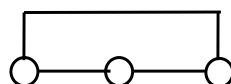
Remarquons que le développement de S n'interdit pas la répétition de diffuseurs à condition qu'ils ne se suivent pas directement. Par exemple, dans les termes de la troisième ligne, il est possible de commencer par un diffuseur α_i , de continuer par un autre diffuseur α_j et de terminer en repassant par α_i . Pour pouvoir distinguer les séquences de diffusion faisant intervenir des diffuseurs distincts des séquences mettant en jeu une répétition d'un ou plusieurs diffuseurs, on adopte les conventions suivantes

- Une répétition de diffuseurs est traduite diagrammatiquement par un lien en trait plein entre les opérateurs de diffusion concernés *en dehors de la ligne centrale*.
- Deux diffuseurs adjacents ne sont jamais liés par de tels traits pleins.

Par exemple le diagramme suivant



est pris en compte par l'écriture



Avec cette convention, S est représenté par

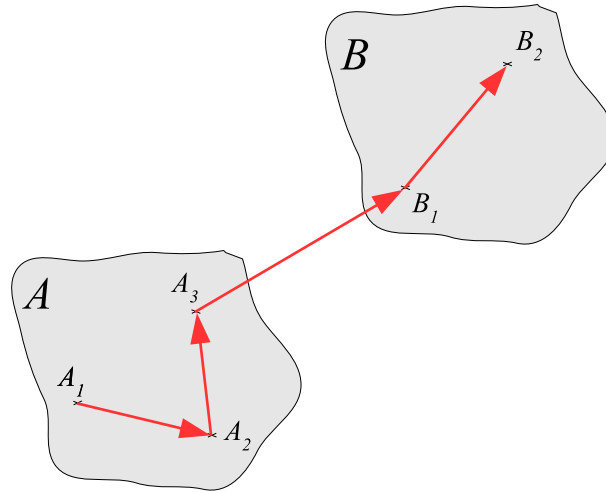


FIG. 1.13: Représentation d'une séquence faisant intervenir 5 diffusions simples et 2 *diffuseurs entiers*.

$$S = \bigcirc + \bigcirc - \bigcirc + \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Illustrons le contenu du deuxième terme du développement de S ci-dessus par un exemple.

Considérons deux diffuseurs notés A et B (figure 1.13). Soit un chemin commençant au point A_1 , premier événement de diffusion simple dans A . L'onde se propage ensuite jusqu'en A_2 où elle diffuse pour la deuxième fois dans A , ce qui la mène jusqu'en A_3 . Elle se propage ensuite jusqu'au diffuseur B où elle diffuse en B_1 et B_2 . Après cela, elle ne diffuse plus dans le milieu. L'onde a donc expérimenté 5 événements de diffusion simple mais le chemin associé est classé dans la classe de diffusion double pour les *diffuseurs entiers*.

Dans le cadre de l'approche statistique utilisée pour décrire la diffusion multiple, il faut représenter les événements de diffusion après moyenne sur le désordre.

Dans la section suivante, nous définissons la moyenne sur le désordre pour une assemblée de diffuseurs identiques.

1.5.3.2 Expression explicite des moyennes sur le désordre

Dans la section 1.2.3 on a introduit la notion de milieu aléatoire : c'est un milieu dont les caractéristiques sont décrites par des variables aléatoires. Dans le cas de diffuseurs identiques aléatoirement répartis, ce sont les positions de chaque diffuseur qui caractérisent une réalisation du désordre.

L'étude de la diffusion multiple dans de tels milieux fait intervenir des grandeurs moyennées sur le

désordre, ici sur les positions des diffuseurs.

Pour un milieu constitué de N diffuseurs identiques, on repère par \mathbf{r}_i avec $i \in \{1 \dots N\}$ la position de chacun d'entre eux pour une configuration donnée. On définit la densité de probabilité jointe à N diffuseurs par la grandeur $p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ telle que la probabilité d'obtenir une configuration des N diffuseurs avec le i^{me} situé dans un élément de surface $d\mathbf{r}_i$ autour du point \mathbf{r}_i pour chaque $i \in \{1 \dots N\}$ soit donnée par

$$p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n$$

La densité de probabilité p_N est normalisée selon

$$\int p_N d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N = 1 \quad (1.54)$$

La probabilité de trouver le diffuseur n° i dans la surface $d\mathbf{r}_i$ autour de \mathbf{r}_i sans se soucier des dispositions des autres diffuseurs est donnée par

$$p_1(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i = \int p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{i-1} d\mathbf{r}_{i+1} \dots d\mathbf{r}_N \quad (1.55)$$

D'une manière générale, les densités de probabilité jointes p_s pour un sous ensemble de s diffuseurs avec $s < N$ s'obtiennent en intégrant p_N sur les $N - s$ variables d'espace non concernées.

On définit les fonctions de corrélation g_m entre m diffuseurs à l'aide du développement des densités de probabilité jointes en fonction de p_1 . Ce développement a la forme suivante

$$p_1(\mathbf{r}_1) = g_1(\mathbf{r}_1)$$

$$p_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = p_1(\mathbf{r}_1) p_1(\mathbf{r}_2) (1 + g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))$$

$$p_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = p_1(\mathbf{r}_1) p_1(\mathbf{r}_2) p_1(\mathbf{r}_3) [1 + g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + g_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)]$$

Si on note $f(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M)$ une fonction quelconque du milieu estimée au point \mathbf{r} pour une configuration donnée $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M)$ avec $M \leq N$ des diffuseurs, la moyenne sur le désordre de f se calcule par¹¹

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int f(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M) p_M(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_M \quad (1.56)$$

1.5.3.3 Opérateurs de diffusion et diagrammes moyennés

Dans l'équation 1.51 la moyenne sur le désordre concerne l'opérateur de diffusion globale S .

$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 \langle S \rangle G_0 \quad (1.57)$$

¹¹ Notons que le symbole $|$ ne signifie pas *conditionnellement* à.

Notre objectif est de déterminer l'opérateur moyen $\langle S \rangle$. D'après 1.53 on peut exprimer $\langle S \rangle$ en fonction des moyennes des opérateurs des diffuseurs individuels $\langle s_{\alpha_i} \rangle$.

$$\langle S \rangle = \sum_i^N \langle s_{\alpha_i} \rangle + \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \langle s_{\alpha_i} G_0 s_{\alpha_j} \rangle + \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j}^N \langle s_{\alpha_i} G_0 s_{\alpha_j} G_0 s_{\alpha_k} \rangle + \dots \quad (1.58)$$

Revenons aux événements de diffusion par un diffuseur α_i . On définit l'opérateur s par

$$s_{\alpha_i}(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}) \quad (1.59)$$

Pour l'opérateur de diffusion individuel, seule la variable \mathbf{r}_{α_i} change à chaque nouvelle configuration du désordre, selon la formule 1.56 on a donc

$$\langle s_{\alpha_i} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_i}) p_1(\mathbf{r}_{\alpha_i}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} \quad (1.60)$$

Sous forme de diagrammes, nous adoptons¹² les conventions suivantes pour les moyennes sur le désordre :

- un cercle à fond blanc barré d'une croix symbolise un processus de diffusion par une particule entière moyenné sur le désordre
- les traits pointillés relient entre eux les diffuseurs corrélés
- les traits pleins en dehors de la ligne principale relient les opérateurs correspondant à un seul et même diffuseur
- un trait plein en caractère gras sur la ligne principale représente la fonction de Green moyenne $\langle G \rangle$

En notant \aleph la surface du milieu d'étude, la densité de probabilité p_1 est égale à $1/\aleph$ pour une répartition uniforme des diffuseurs, ce qui signifie que

$$\langle s_{\alpha_i} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\aleph} \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_i}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} \quad (1.61)$$

En notant n la concentration surfacique des diffuseurs définie par $n = N/\aleph$, on a

$$\sum_i^N \langle s_{\alpha_i} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_i}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} \quad (1.62)$$

Cette dernière somme, qui est la contribution des événements de diffusion simple par les particules entières se représente par

$$\sum_{i=1}^N \langle S_{\alpha_i} \rangle = \otimes$$

¹²Les conventions changent selon les auteurs, nous avons utilisé peu ou prou celles de la référence [3].

De la même manière, la moyenne sur le désordre du produit $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$ s'écrit

$$\langle s_{\alpha_i} s_{\alpha_j} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_j}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_j}) p_2(\mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_{\alpha_j}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} d\mathbf{r}_{\alpha_j} \quad (1.63)$$

Soit en décomposant p_2 selon

$$p_2(\mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_{\alpha_j}) = p_1(\mathbf{r}_{\alpha_i}) p_1(\mathbf{r}_{\alpha_j}) [1 + g_2(\mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_{\alpha_j})]$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \langle s_{\alpha_i} G_0 s_{\alpha_j} \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{N(N-1)}{S^2} \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_j}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_j}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} d\mathbf{r}_{\alpha_j} \\ &+ \frac{N(N-1)}{S^2} \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_j}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_j}) g_2(\mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_{\alpha_j}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} d\mathbf{r}_{\alpha_j} \end{aligned} \quad (1.64)$$

On constate donc que la moyenne sur le désordre du terme de diffusion double donne lieu à deux contributions. La première fait intervenir un produit de probabilités, comme si les diffuseurs étaient statistiquement indépendants, la seconde fait intervenir la fonction de corrélation de paire g_2 entre deux diffuseurs¹³.

On représente donc l'équation 1.64 selon

$$\langle \bigcirc - \bigcirc \rangle = \bigotimes - \bigotimes + \bigotimes - \bigotimes$$

Selon le même principe, les diffusions d'ordre 3 se moyennent à l'aide de la fonction densité de probabilité p_3 qui, en se décomposant, donne cinq contributions :

$$p_3(r'_1, r'_2, r'_3) = p_1(r'_1) p_1(r'_2) p_1(r'_3) [1 + g_2(r'_1, r'_2) + g_2(r'_2, r'_3) + g_2(r'_1, r'_3) + g_3(r'_1, r'_2, r'_3)]$$

Sous forme diagrammatique cela donne

$$\langle \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \rangle = \bigotimes - \bigotimes - \bigotimes + \bigotimes - \bigotimes - \bigotimes + \bigotimes - \bigotimes - \bigotimes + \bigotimes - \bigotimes - \bigotimes$$

¹³ Le second terme est nul si les diffuseurs sont effectivement indépendants. L'étude de la fonction de corrélations de paire sera menée en section 1.8.1.

Dans les diagrammes moyennés faisant intervenir m diffuseurs différents, le terme en facteur vaut

$$N(N-1)\dots(N-m+1)/N^m$$

On peut approcher $N(N-1)\dots(N-m+1)/N^m$ par n^m lorsque le nombre de diffuseurs est assez grand.

1.5.3.4 Cas des diffuseurs ponctuels

Dans le cas d'un diffuseur ponctuel α , le potentiel ϵ_α est nul partout sauf en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha$, et il en est de même pour l'opérateur s_α en vertu de la relation 1.44. On peut donc écrire :

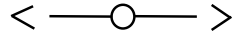
$$s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_i}) = s_{ponc} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_i}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}) \quad (1.65)$$

inséré dans l'équation 1.62, cela donne

$$\sum_i^N \langle s_{\alpha_i} \rangle(\mathbf{r}) = n s_{ponc} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}) \quad (1.66)$$

L'intérêt de l'approche ponctuelle est de permettre de déterminer des expressions analytiques des diagrammes. A ce stade, le terme s_{ponc} n'est pas explicité.

Pour illustrer l'effet de cette simplification, comparons l'expression de la moyenne du diagramme suivant dans le cas général et ponctuel :



Dans le cas de diffuseurs de taille quelconque ce diagramme a pour expression

$$\int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') p_1(\mathbf{r}_{\alpha_i}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1.67)$$

Cela signifie que l'intégration est faite sur toutes les positions des diffuseurs individuels, et sur tous les points d'entrée et de sortie \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 pour une position fixée du diffuseur.

Dans le cas ponctuel, l'expression se réduit à

$$s_{ponc} \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') p_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (1.68)$$

On constate donc que l'intégration n'a lieu que sur la position des diffuseurs individuels : pour une position fixée, le seul événement de diffusion possible se situe au centre du diffuseur.

Les diagrammes et opérateurs moyennés étant maintenant présentés, on redérive l'équation de Dyson dans la section suivante.

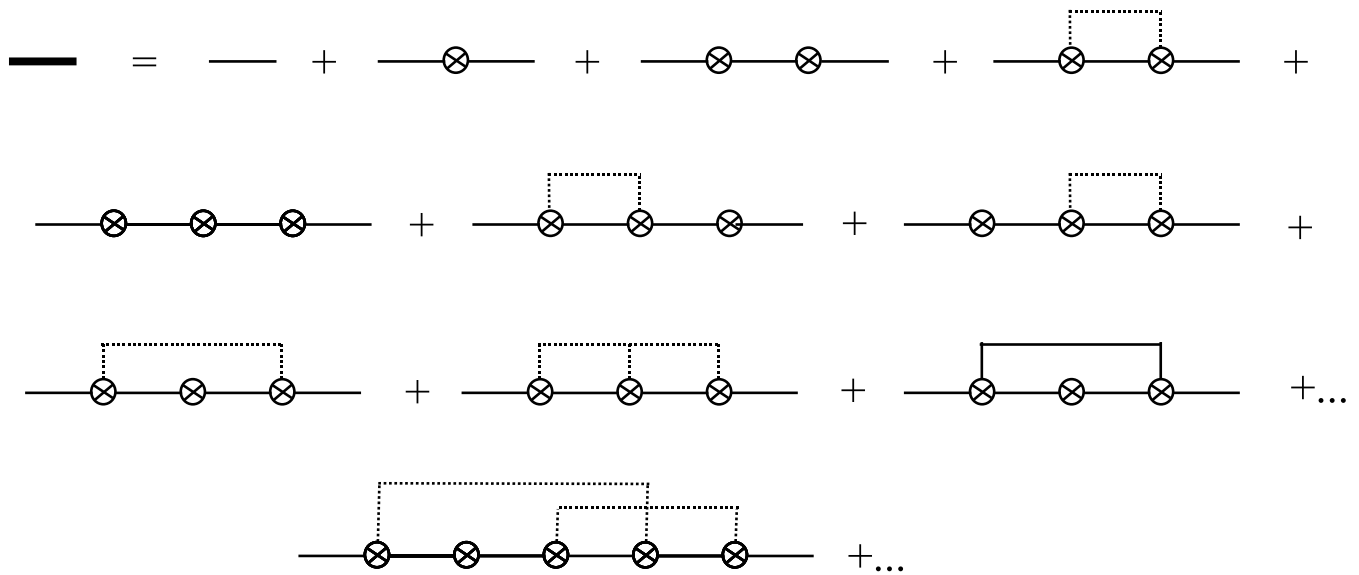


FIG. 1.14: Développement diagrammatique de la fonction de Green moyenne.

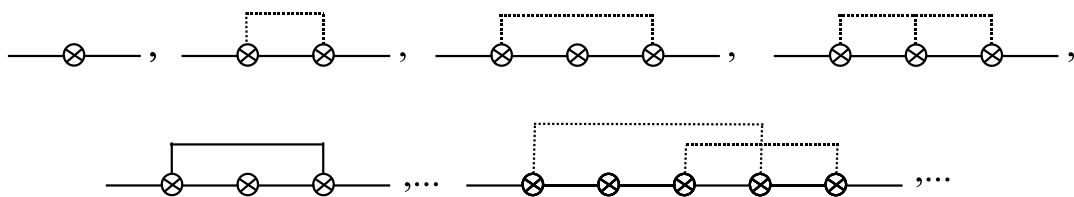


FIG. 1.15: Exemples de diagrammes irréductibles.

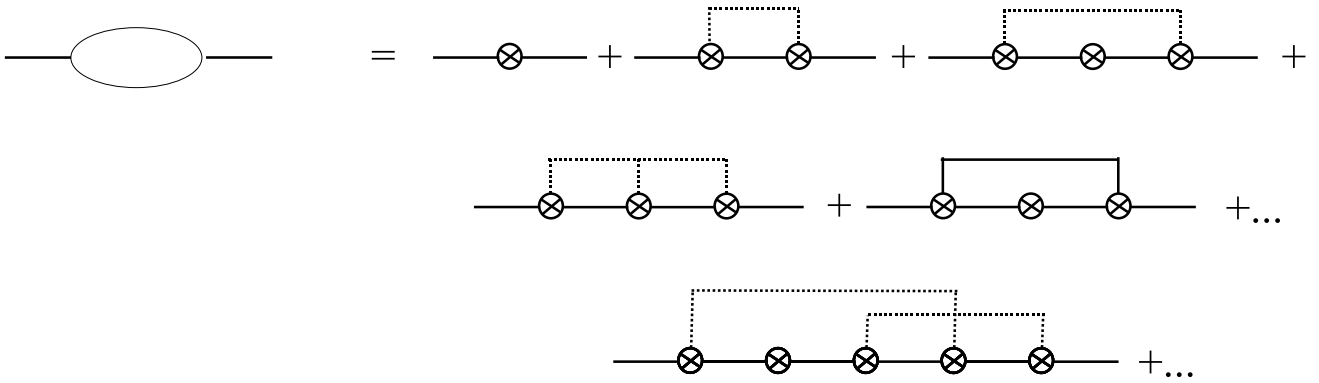
1.5.3.5 Equation de Dyson

En figure 1.14 on présente le développement diagrammatique de l'équation

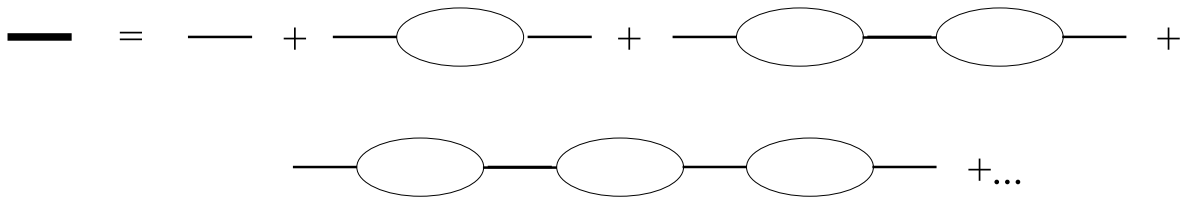
$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 \langle S \rangle G_0$$

On peut classer les diagrammes du développement précédent selon leur indice de connexité [2]. Un diagramme est dit fortement connecté (*DFC*) si on ne peut le décomposer en diagrammes plus simples sans couper une ligne pointillée ou un trait plein en dehors de la ligne principale. Les *DFC* sont donc composés de blocs irréductibles, on en donne quelques exemples en figure 1.15. Les autres diagrammes peuvent se décomposer pour donner des blocs irréductibles. Si un diagramme se décompose selon *i* *DFC*, il est de connexité *i*.

On peut regrouper l'ensemble des diagrammes fortement connectés en posant



Ce qui permet de réécrire le développement de la fonction de Green moyennée $\langle G \rangle$ sous la forme



A cette écriture développée correspond la relation fermée



soit sous forme compacte

$$\langle G \rangle = G_0 + G_0 \Sigma \langle G \rangle \tag{1.69}$$

On retrouve donc la relation de Dyson introduite en section 1.3.2. L'opérateur de masse Σ apparaît alors comme la somme des diagrammes irréductibles¹⁴ ; il contient toute l'information sur la diffusion multiple dans le milieu.

On a vu en 1.3.2 que l'onde moyenne (ou cohérente) se propage dans un *milieu effectif*, de nombre d'onde k_{eff} tel que

$$k_{eff}^2(w) = k_0^2(w) - \Sigma \tag{1.70}$$

La décroissance de l'amplitude de l'onde cohérente se fait sur une distance caractéristique l_{ext} telle que

$$l_{ext} = \frac{1}{2Im(k_{eff})} \tag{1.71}$$

Dans le cas où l'absorption est négligeable, on a vu que l_{ext} est égale au libre parcours moyen élastique l_e . Ce paramètre permet de quantifier la diffusion multiple dans le milieu et nous cherchons

¹⁴ On le nomme aussi *kernel du champ*.

à l'évaluer dans tout le reste de ce chapitre. Pour approcher l_e , il est nécessaire de connaître k_{eff} et donc Σ . Dans le cas général, Σ n'est pas calculable analytiquement du fait de l'infinité de termes qui le composent. On utilise des hypothèses simplificatrices pour pouvoir l'évaluer. Dans la section qui suit, nous exposons la très classique *Independent Scattering Approximation (ISA)*.

1.6 Formule analytique du coefficient d'extinction au premier ordre : Independent Scattering Approximation (ISA)

1.6.1 Expression implicite de l'opérateur de masse

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre de l'*Independent Scattering Approximation*, qui est l'hypothèse simplificatrice la plus forte que l'on puisse faire en diffusion multiple : il s'agit de ne garder que le premier terme du développement diagrammatique de l'opérateur de masse.

Sous cette approximation, on a donc

$$\Sigma = \text{Oval} = \otimes$$

Soit

$$\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_i}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} \quad (1.72)$$

Dans le cadre de cette approximation, Σ s'exprime de manière explicite en fonction de l'opérateur de diffusion par un *diffuseur entier* \mathbf{s} . Il reste à exprimer \mathbf{s} en fonction des caractéristiques géométriques et élastiques du diffuseur considéré. Dans le cadre de nos expériences, nous utilisons des diffuseurs cylindriques en acier immergés dans l'eau. Dans un premier temps, nous présentons la diffusion par un obstacle cylindrique dans l'eau, en introduisant les notions de *section efficace* et d'*amplitude de diffusion*. Dans un second temps nous relierons par l'intermédiaire du *théorème optique* l'opérateur \mathbf{s} à l'amplitude de diffusion d'un cylindre.

1.6.2 Diffusion élastique par un cylindre solide immergé dans l'eau

On considère le problème de la collision d'une onde plane avec un cylindre solide de rayon a immergé dans l'eau, dans un approche bi-dimensionnelle (figure 1.16).

1.6.2.1 Amplitude de diffusion et section efficace

Le cylindre agit comme un potentiel localisé ϵ et l'équation de propagation du problème est

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + k_0^2\Psi(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \quad (1.73)$$

avec la condition aux limites

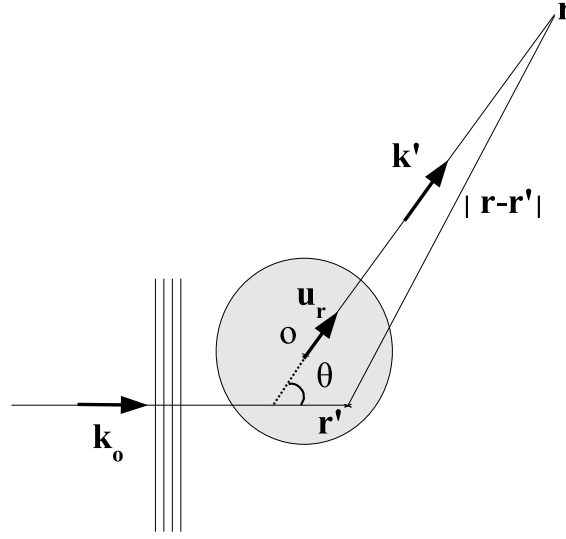


FIG. 1.16: Diffusion par un cylindre d'acier immergé dans l'eau.

$$\Psi(\mathbf{r}) \propto \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \quad \text{pour } r \rightarrow +\infty \quad (1.74)$$

La solution de l'équation 1.73 s'écrit en fonction de la fonction de Green dans l'eau G_0 selon

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \epsilon(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.75)$$

On utilise l'expression 1.9 de la fonction de Green en espace libre à deux dimensions

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1.76)$$

avec H_0^1 la fonction de Hankel de premier type d'ordre zéro.

L'expression du champ total est

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \int \frac{i}{4} H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \epsilon(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.77)$$

Le premier terme de 1.77 correspond à l'onde incidente sur le cylindre, le second à l'onde diffusé par ce dernier.

Amplitude de diffusion

La forme asymptotique de la solution s'obtient en écrivant les simplifications de champ lointain suivantes :

- Tout d'abord $k_0 |r - r'| \gg 1$ entraîne¹⁵

¹⁵ Cette condition n'est pas restrictive : l'erreur engendrée sur H_0^1 par cette approximation est de 2 % pour $k_0 |r - r'| = 1$ et de 0.05 % pour $k_0 |r - r'| = 10$.

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi k_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.78)$$

– D'autre part, pour $r \gg a$ on peut écrire

$$k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = k_0 r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}} \approx k_0 r - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' \quad (1.79)$$

avec \mathbf{k}' le vecteur d'onde diffusé, de norme k_0 et de direction exposée sur la figure 1.16.

Compte tenu de cette nouvelle hypothèse, on peut écrire

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi k_0} r} e^{ik_0 r - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \quad (1.80)$$

On peut donc écrire le champ sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}') \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \quad (1.81)$$

Cette dernière relation définit l'*amplitude de diffusion* $f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}')$ et revient à écrire le champ sous la forme d'une somme entre le champ incident et le champ diffusé. Sous les hypothèses $k_0 |r - r'| \gg 1$ et $r \gg a$, le champ diffusé décroît cylindriquement en $\frac{1}{\sqrt{r}}$, l'énergie diminuant en $\frac{1}{r}$

Vu la symétrie du problème, l'amplitude de diffusion ne dépend que de k_0 et de l'angle θ entre \mathbf{k}' et \mathbf{k}_0 , soit $f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}') = f(k_0, \theta)$.

Section efficace

On définit la *section efficace différentielle de diffusion* σ_d par

$$\sigma_d(k_0, \theta) = |f(k_0, \theta)|^2 \quad (1.82)$$

Cette grandeur quantifie le pouvoir diffusant dans une direction donnée, et dans le cas $2D$ elle est homogène à une longueur.

On définit la *section efficace totale de diffusion* σ_{td} par

$$\sigma_{td}(k_0) = \int_0^{2\pi} \sigma_d(k_0, \theta) d\theta \quad (1.83)$$

La section efficace totale de diffusion d'un diffuseur caractérise son pouvoir diffusant intégré dans toutes les directions.

Fonction de phase

On définit la fonction de phase p par la relation

$$p(k_0, \theta) = \frac{2\pi}{\sigma_t} \sigma_d(k_0, \theta) \quad (1.84)$$

Cette grandeur fait intervenir la *section efficace totale* σ_t qui prend en compte la diffusion et l'absorption par le diffuseur selon $\sigma_t = \sigma_{td} + \sigma_a$, en notant σ_a la *section efficace d'absorption*. La fonction de phase interviendra dans la partie consacrée à la moyenne des intensités transmises au deuxième chapitre.

Lien entre σ_{td} et s

Le diffuseur redistribue l'énergie incidente dans toutes les directions, avec une pondération donnée par sa section efficace différentielle. En raison de la conservation du flux total dans ce problème, l'énergie perdue vers l'avant est liée à l'énergie redistribuée dans toutes les directions, quantifiée par la section efficace totale de diffusion σ_{td} . On définit la transformée de Fourier spatiale de l'opérateur de diffusion d'une particule entière s par

$$s(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (1.85)$$

Le terme $s(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ correspond à la réponse du diffuseur dans la direction \mathbf{k}' pour une excitation dans la direction \mathbf{k} . On montre [6] que la section efficace totale de diffusion σ_{td} est reliée à l'opérateur s dans l'espace des k par la relation suivante, qui constitue le *théorème optique* :

$$\sigma_{td} = -\frac{1}{k_0} \text{Im} s(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \quad (1.86)$$

Lien entre σ_{td} et $f(k_0, 0)$

Dans le cas bi-dimensionnel, on peut relier σ_{td} et $f(k_0, 0)$ par la relation¹⁶

$$\sigma_{td} = \sqrt{\frac{8\pi}{k_0}} \text{Im} \left[f(k_0, 0) e^{-\frac{i\pi}{4}} \right] \quad (1.87)$$

Dans la section suivante, nous exposons les formules permettant de calculer explicitement l'amplitude et la section efficace totale de diffusion.

1.6.2.2 Calcul de la section efficace

Le calcul explicite de la diffusion par un cylindre élastique immergé dans un fluide sans perte ni viscosité a été présenté par Faran [7] en 1951. Les longues expressions de ce travail ont été reformulées sous forme matricielle [8] et constituent des résultats très classiques en diffusion acoustique. Nous exposons la méthode générale dans cette section sans entrer dans le détail des calculs, l'objectif étant de poser le problème dans ce cas très classique pour développer dans la section 1.7.6 le cas de la diffusion par un cylindre dans un fluide visqueux.

Notations utilisées

¹⁶ Cette relation se démontre facilement à partir du théorème optique et de la référence [2].

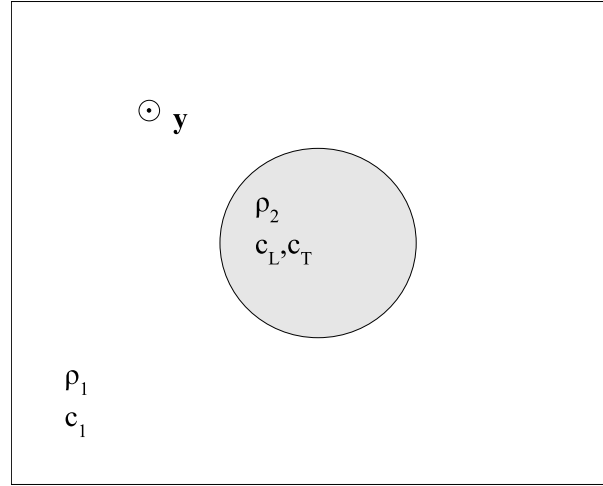


FIG. 1.17: Diffusion par un cylindre solide immergé dans l'eau, les données relatives à l'eau sont indicées par 1. On note c_L et c_T respectivement les vitesses des ondes longitudinales et transverses dans l'acier, dont la masse volumique est ρ_2 .

On considère un cylindre élastique, isotrope, de rayon a , de masse volumique ρ_2 immergé dans l'eau selon la figure 1.17. Les caractéristiques de l'eau sont indicées par le chiffre 1, on notera ρ_1 sa masse volumique et c_1 la vitesse du son dans ce milieu.

On insonifie le cylindre par une onde plane p_i monochromatique de pulsation w , ce qui donne naissance dans le milieu solide à une onde longitudinale de vitesse c_L et à une onde transverse de vitesse c_T . L'onde divergente diffusée dans l'eau est notée p_s . Les nombres d'ondes du problème sont définis par $k_i = w/c_i$ avec $i \in \{1, L, T\}$.

Dans le diffuseur, le vecteur déplacement \mathbf{u} se décompose selon les potentiels déplacement scalaire Φ_d et déplacement vecteur \mathbf{A}_d tels que

$$\mathbf{u} = -\nabla\Phi_d + \nabla \times \mathbf{A}_d$$

Le problème étant bi-dimensionnel, la seule composante non nulle du potentiel déplacement vecteur est A_{dy} selon l'axe des y exposé en figure 1.17.

Les équations du problème

Les inconnues $p = p_i + p_s$, Φ_d et A_{dy} vérifient les équations de Helmholtz suivantes :

$$\Delta p + k_1^2 p = 0 \tag{1.88}$$

$$\Delta\Phi_d + k_L^2\Phi_d = 0 \tag{1.89}$$

$$\Delta A_{dy} + k_T^2 A_{dy} = 0 \tag{1.90}$$

Pour exprimer les solutions de ces équations, on utilise les décompositions modales suivantes

$$p_s = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n b_n H_n^1(k_1 r) \cos n\theta \quad (1.91)$$

$$\Phi_d = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n c_n J_n(k_L r) \cos n\theta \quad (1.92)$$

$$A_{dy} = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n e_n J_n(k_T r) \sin n\theta \quad (1.93)$$

avec J_n et H_n^1 respectivement les fonctions de Bessel et de Hankel de premier type d'ordre n . On définit les facteurs de Neumann ϵ_n par $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_n = 2$ pour tout $n \geq 1$.

La pression incidente p_i se décompose selon

$$p_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n J_n(k_1 r) \cos n\theta \quad (1.94)$$

Système matriciel

On écrit les relations suivantes à l'interface entre le cylindre et l'eau pour $r = a$:

- la pression dans le fluide doit être égale à l'opposé de la contrainte normale dans le diffuseur
- le déplacement radial doit être continu
- la contrainte de cisaillement est nulle par continuité

Ces trois relations conduisent à un système matriciel pour chaque mode n , faisant intervenir les coefficients b_n , c_n et e_n des développements modaux. On utilise les notations de Doolittle¹⁷ [8]. On obtient le système suivant

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients α_{ij} et β_i suivantes sont définis par les relations

$$\alpha_{11} = a^2 H_n^1(k_1 a) \quad (1.96)$$

$$\alpha_{12} = \lambda(k_L a)^2 J_n(k_L a) - 2\mu(k_L a)^2 J_n''(k_L a) \quad (1.97)$$

$$\alpha_{14} = 2\mu n((k_T a) J_n'(k_T a) - J_n(k_T a)) \quad (1.98)$$

$$\alpha_{21} = -k_1 H_n'^1(k_1 a) \quad (1.99)$$

¹⁷ La référence [9] utilise une présentation du système matriciel différente mais qui conduit fort heureusement aux mêmes résultats numériques.

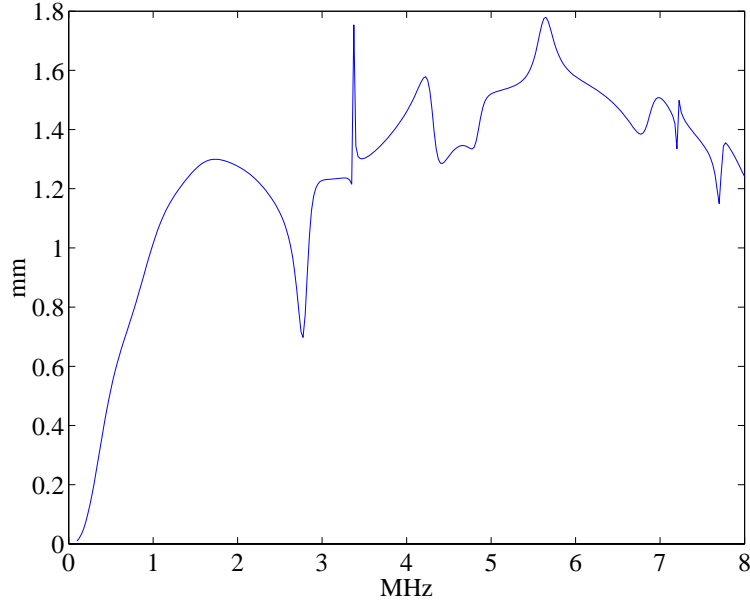


FIG. 1.18: Section efficace totale de diffusion σ_t d'un cylindre d'acier de 0.8 mm de diamètre immergé dans l'eau. En abscisse figure la fréquence.

$$\alpha_{22} = -\rho_1 w^2 k_L a J'_n(k_L a) \quad (1.100)$$

$$\alpha_{24} = n \rho_1 w^2 J_n(k_T a) \quad (1.101)$$

$$\alpha_{32} = 2n(k_L a J'_n(k_L a) - J_n(k_L a)) \quad (1.102)$$

$$\alpha_{34} = -(k_T a)^2 J''_n(k_T a) + k_T a J'_n(k_T a) - n^2 J_n(k_T a) \quad (1.103)$$

$$\beta_1 = a^2 J_n(k_1 a) \quad (1.104)$$

$$\beta_2 = k_1 a J'_n(k_1 a) \quad (1.105)$$

Expression de σ_{td}

Pour chaque mode, on résoud le système précédent pour le coefficient b_n , ce qui permet de calculer la section efficace totale de diffusion selon

$$\sigma_{td} = -\frac{4}{k_0} \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n b_n \quad (1.106)$$

Dans le cas de tiges d'acier de diamètre 0.8 mm, avec $\rho_2 = 7800 \text{ kg/m}^3$, $c_L = 5.7 \text{ mm}/\mu\text{s}$, $c_T = 3 \text{ mm}/\mu\text{s}$ et $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_1 = 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$, la représentation de σ_{td} en fonction de la fréquence est représentée en figure 1.18.

On constate que σ_{td} présente une dépendance fréquentielle marquée. Pour expliquer les valeurs de la figure 1.18, on peut décomposer l'amplitude de diffusion f selon deux contributions [10] : l'une rigide f_{rig} et l'autre élastique f_{ela} . La contribution rigide correspond à celle d'un objet parfaitement

dur. La contribution élastique met en évidence les résonances fluide/structure pour des fréquences données.

Vu la décomposition de l'amplitude, on peut décomposer la section efficace totale en trois termes :

$$\sigma_{td} = \sigma_{rig} + \sigma_{ela} + 2Re \int f_{rig}^*(\theta) f_{ela}(\theta) d\theta \quad (1.107)$$

Ils correspondent respectivement aux contributions rigides, élastiques et d'interférences entre ces deux dernières. La contribution du terme élastique σ_{ela} est très variable selon les fréquences. La tige est le siège d'ondes circonférentielles élastiques qui circulent à leur périphérie dans des sens de rotation opposés. Ces dernières se propagent en couple et rayonnent dans l'eau. Pour certaines fréquences, il existe un nombre entier de longueurs d'ondes sur la circonférence du cylindre : les ondes sont raccordées en phase. Il en résulte la formation d'une onde stationnaire sur la circonférence et la constitution d'une résonance, ce qui est le cas autour de 2.8 MHz . Le terme d'interférence s'explique par le couplage avec le fluide environnant : une onde de surface sur le diffuseur donne naissance à une onde de volume dans le fluide. Si la réponse rigide du diffuseur est en opposition de phase avec l'onde de volume, on observe un minimum pour la section efficace totale σ_{td} .

On observe aussi un pic de résonance très fin autour de 3.4 MHz . Plus les résonances sont fines, plus leur sensibilité à de très faibles variations de diamètre est importante. Expérimentalement, les tiges d'acier que nous utilisons n'ont pas toutes exactement le même diamètre et il est intéressant de tracer σ_{td} pour une distribution Gaussienne des rayons avec une moyenne de 0.4 mm et un écart type de $8 \mu\text{m}$. La section efficace totale correspondant à cette distribution de rayons est représentée en figure 1.19 : seule la résonance autour de 2.8 MHz reste présente.

En figure 1.20 on a représenté σ_{td} pour une distribution Gaussienne de rayon 0.3 mm et d'écart type $0.6 \mu\text{m}$, les autres paramètres restant les mêmes qu'au cas précédent.

Le changement de taille des tiges se traduit par un décalage de la fréquence de résonance. On constate ainsi que le minimum de σ_{td} se situe autour de la fréquence 3.7 MHz pour cette taille de tige. D'autre part, on remarque qu'en moyenne sur les fréquences représentées (et plus particulièrement dans la bande $[2 - 4] \text{ MHz}$ qui concerne nos expériences) les tiges diffusent d'autant plus que leur diamètre est grand, ce qui était attendu intuitivement.

Expression de l'amplitude de diffusion $f(k_0, \theta)$

En utilisant l'expression de la pression diffusée selon 1.91 exprimée avec les conditions de champ lointain 1.78 et 1.80, on exprime l'amplitude de diffusion par la relation

$$f(k_0, \theta) = \frac{1-i}{\sqrt{\pi k_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n b_n \cos(n\theta) \quad (1.108)$$

Dans le cas d'une tige de 0.8 mm de diamètre, la représentation polaire de la section efficace différentielle σ_d est donnée pour les fréquences 2 MHz et 3.5 MHz en figures 1.21 et 1.22.

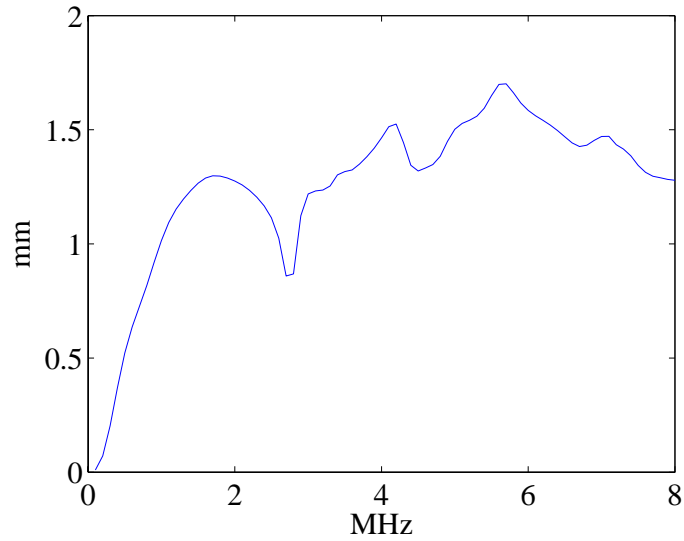


FIG. 1.19: Section efficace totale de diffusion σ_{td} d'un cylindre d'acier pour une distribution gaussienne de rayons autour de 0.4 mm avec un écart type de $8 \mu\text{m}$.

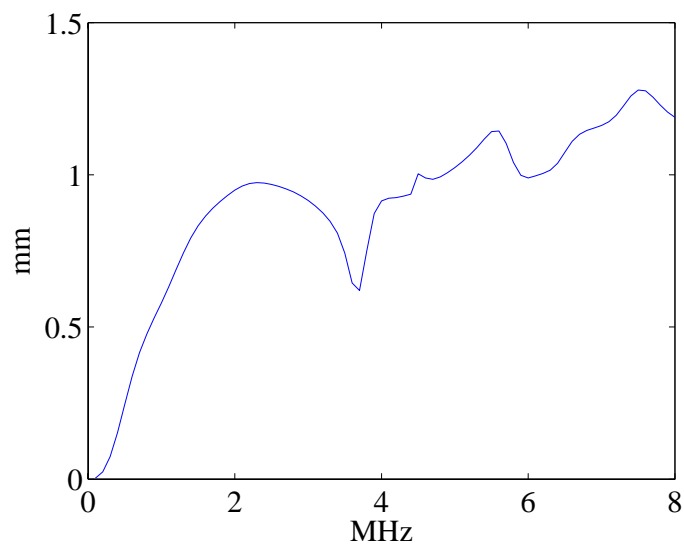


FIG. 1.20: Section efficace totale de diffusion σ_{td} d'un cylindre d'acier pour une distribution gaussienne de rayons autour de 0.3 mm avec un écart type de $6 \mu\text{m}$.

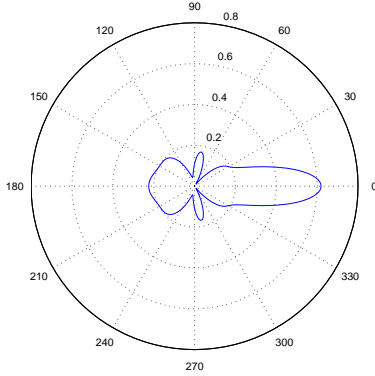


FIG. 1.21: Représentation polaire de la section efficace différentielle de diffusion d'une tige d'acier de 0.8 mm de diamètre pour une fréquence de 2.5 MHz, ce qui correspond à un $\overline{\cos} = 0.11$.

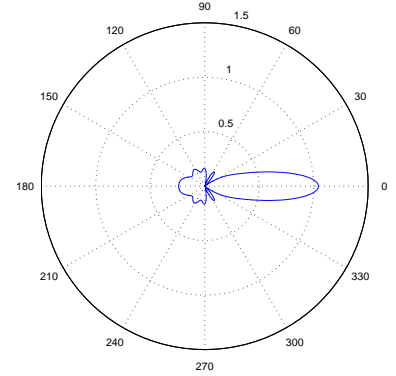


FIG. 1.22: Même représentation qu'en 1.21 mais pour une fréquence de 3.5 MHz. La diffusion est plus piquée vers l'avant qu'à 2.5 MHz, et on a $\overline{\cos} = 0.2$.

On retrouve que la diffusion est d'autant plus piquée vers l'avant (direction $\theta = 0$) que la fréquence est élevée. La répartition angulaire de la diffusion permet de définir un facteur d'anisotropie : le *cosinus moyen*.

Cosinus moyen

On peut quantifier l'anisotropie d'un diffuseur à l'aide du *cosinus moyen* de l'angle de diffusion défini par

$$\overline{\cos} = \frac{1}{\sigma_{td}} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sigma_d(\theta) d\theta \quad (1.109)$$

Dans le cas d'un diffuseur isotrope $\overline{\cos} = 0$, et plus la diffusion est piquée vers l'avant plus le $\overline{\cos}$ s'approche de 1.

On définit la section efficace de transport σ_{tr} par

$$\sigma_{tr} = \sigma_{td}(1 - \overline{\cos}) \quad (1.110)$$

Cette grandeur nous servira dans les deuxième et troisième chapitres.

1.6.3 Expression explicite du libre parcours moyen élastique l_e

Dans un milieu sans perte, on a vu que l_e s'exprimait selon 1.32

$$l_e = \frac{1}{2Im(k_{eff})} \quad (1.111)$$

Le nombre d'onde effectif k_{eff} est donné par la relation 1.28

$$k_{eff}^2(w) = k_0^2(w) - \Sigma \quad (1.112)$$

Lorsque l'on considère des diffuseurs ponctuels, ou au moins de taille très inférieure à la longueur d'onde, on peut simplifier l'expression de l'opérateur de diffusion simple s selon [11]

$$s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx s(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.113)$$

En utilisant l'équation 1.72, on peut lier de manière simple l'opérateur de masse Σ à l'opérateur de diffusion d'un diffuseur s dans le cadre de l'ISA par la relation

$$\Sigma = ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \quad (1.114)$$

On donc peut relier de manière explicite Σ aux caractéristiques élastiques et géométriques du diffuseur par l'intermédiaire du *théorème optique* 1.114 :

$$Im\Sigma = -nk_0\sigma_{td} \quad (1.115)$$

En décomposant l'opérateur de masse selon sa partie réelle Σ_R et imaginaire Σ_I , on peut écrire 1.112 sous la forme

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - \Sigma_R - i\Sigma_I \quad (1.116)$$

En décomposant k_{eff} de la même manière, on obtient le système

$$\begin{aligned} k_{effR}^2 - k_{effI}^2 &= k_0^2 - \Sigma_R \\ 2 k_{effR} k_{effI} &= -\Sigma_I = nk_0\sigma_{td} \end{aligned} \quad (1.117)$$

Ce système d'équation permet de déduire k_{effR} et k_{effI} . Souvent, il est possible d'écrire $k_{effR} \approx k_0$, ce qui traduit le fait que la vitesse de phase de l'onde cohérente est très proche de c_1 . On peut alors écrire

$$2k_{effI} = n\sigma_{td}$$

Ce qui permet d'obtenir, avec 1.32

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_{td}} \quad (1.119)$$

Logiquement, l_e diminue (ce qui signifie que la diffusion multiple est plus importante) lorsque les diffuseurs sont plus concentrés ou plus "forts". Pour une assemblée de diffuseurs identiques immergés dans un fluide supposé sans absorption, l'ISA fournit donc une évaluation du libre parcours moyen

élastique l_e . L'expression 1.119 est très largement employée dans la littérature traitant de diffusion multiple. Nous verrons pourtant qu'elle peut être fautive, même pour des milieux peu concentrés. Dans la section suivante, nous présentons les expériences de transmission cohérente permettant de mesurer l_e dans un milieu de tiges verticales aléatoirement réparties dans le plan. Ensuite nous comparons les résultats expérimentaux à la théorie de l'*ISA* et proposons des affinements à cette théorie en prenant en compte les corrélations entre diffuseurs.

1.7 Expériences de transmission cohérente : cas de diffuseurs identiques

Dans cette partie, nous présentons tout d'abord les milieux multiplement diffuseurs prototypes que nous utilisons dans les expériences. Ensuite nous exposons le principe d'une expérience de transmission cohérente. Pour des échantillons composés de diffuseurs de même type, nous présentons les résultats obtenus pour évaluer le libre parcours moyen élastique. Les cas des expériences en régime impulsionnel et monochromatique sont successivement traités. Nous évaluons l'effet de la force de diffusion et de la concentration en diffuseurs sur l_e . Enfin, nous mettons en évidence les résonances des tiges à partir du comportement fréquentiel de l_e . Nous concluons sur la comparaison des résultats expérimentaux à la théorie de l'ISA.

1.7.1 Présentation des échantillons

Nous avons fabriqué des échantillons prototypes composés de milliers de tiges d'acier insérées entre deux plaques d'époxy. On a construit trois types d'échantillons selon le diamètre des tiges et leur concentration.

Le premier échantillon est constitué de tiges de diamètre 0.8 mm , réparties avec une concentration $n = 0.29 \text{ tige/mm}^2$. Si on définit la concentration surfacique par $f_n = n\aleph_d$ avec \aleph_d la surface d'un diffuseur, on obtient $f_{0.29} = 14 \%$. C'est l'échantillon le plus dense que nous utilisons. Pour éviter que le tirage aléatoire ne donne des tiges qui soient en contact, on impose une distance d'exclusion entre les diffuseurs, ici $d_{exc} = 1.2 \text{ mm}$.

Le deuxième type d'échantillon utilise des tiges de diamètre 0.6 mm , avec une concentration $n = 0.12 \text{ tige/mm}^2$, soit $f_{0.18} = 5 \%$ et une distance d'exclusion de 1.5 mm .

Le dernier milieu est constitué de tiges de diamètre 0.8 mm , de concentration $n = 0.12 \text{ tige/mm}^2$, soit $f_{0.12} = 6 \%$ et de $d_{exc} = 1.87 \text{ mm}$.

Sur la figure 1.23 on a reporté le tirage aléatoire correspondant au milieu de tiges de diamètre 0.6 mm . Les points bleus représentent les tiges, les points rouges délimitent des tranches de 20 mm d'épaisseur. En juxtaposant ces dernières, on peut construire des échantillons d'épaisseur choisie, ce qui donne par exemple le milieu de la figure 1.24.

Pour chaque échantillon, la distance d'exclusion est choisie proportionnellement à la distance moyenne entre deux diffuseurs, de sorte que d_{exc} soit fixée par la concentration.

En pratique, la juxtaposition des tranches fait apparaître des jours aux interfaces, que nous atténuons par l'intermédiaire de pinces (cf figure 1.25).

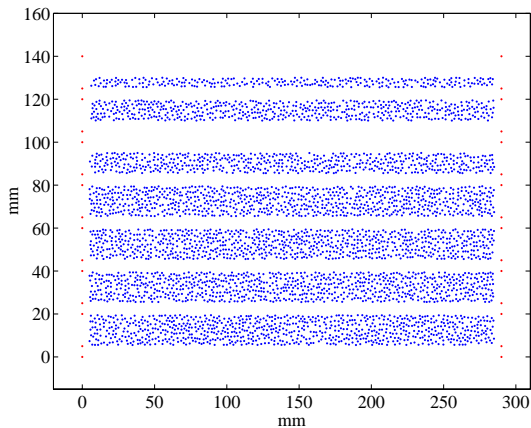


FIG. 1.23: Répartition aléatoire des tiges selon des bandes de 5, 10, 15 et 20 mm placées en contact pour former le milieu d'épaisseur désirée.



FIG. 1.24: Un échantillon de tiges de 80 mm d'épaisseur formé par la juxtaposition de tranches de la figure 1.23.

1.7.2 Principe des expériences

Principe général

Le principe d'une expérience de transmission cohérente est présenté en figure 1.25. On dispose deux capteurs se faisant face de part et d'autre de l'échantillon. On fait tirer l'un d'eux et on reçoit le signal transmis à travers l'échantillon sur l'autre capteur.

La source génératrice des signaux ultrasonores est un transducteur piézoélectrique que l'on nommera par la suite *monoélément*. Le capteur utilisé en réception est une *barrette* à voies multiples, chaque voie ou transducteur étant constituée d'un transducteur piézoélectrique. En pratique, les barrettes utilisées disposent de 96 ou 128 voies. Les éléments ont une hauteur de 10 mm , une largeur de 0.387 mm et sont disposés par pas de 0.417 mm .

La distance entre les transducteurs est de 260 mm . Le signal émis est une quasi-impulsion de durée 1 μs et de fréquence centrale 3.2 MHz , soit une longueur d'onde $\lambda = 0.47$ mm .

Pour évaluer le libre parcours moyen élastique l_e , il est nécessaire de faire des expériences sur différentes épaisseurs du milieu multiplement diffuseur. Pour une épaisseur donnée, on suit le protocole suivant :

- la source émet une impulsion
- les signaux transmis sont enregistrés sur la barrette
- on translate le monoélément et la barrette parallèlement à l'échantillon
- les acquisitions précédentes sont répétées sur une centaine de positions

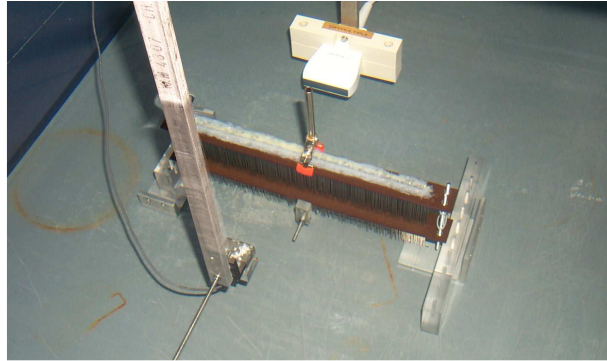


FIG. 1.25: Expérience de transmission cohérente.

Moyennes sur le désordre

Pour chaque épaisseur, et chaque position du couple monoélément/barrette, on dispose d'une matrice de signaux transmis (figure 1.26 pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration $n = 0.29 \text{ tige/mm}^2$). La moyenne sur le désordre consiste à moyennner les signaux reçus aux différentes positions, puis sur les différentes voies de réception après recalage et normalisation. En effet, afin de compenser les différences de sensibilité entre les voies de la barrette, on normalise le signal enregistré sur chaque voie par le maximum du signal équivalent enregistré dans l'eau.

Pour moyennner selon les positions, il est nécessaire de recalcr temporellement les signaux transmis aux différentes positions du couple monoélément/barrette. Ce recalage permet de compenser les défauts de parallélisme des axes de translation : on obtient le signal exposé en figure 1.27. Enfin, la moyenne selon les voies nécessite quant à elle de recalcr une dernière fois le signal afin de compenser les temps de parcours plus long pour les voies excentrées : on transforme ainsi le front cylindrique en front plan, ce qui donne lieu au signal de la figure 1.28.

Les sommes cohérentes des signaux transmis après moyenne sur le désordre et recalages sont représentés en figures 1.29, 1.30 et 1.31 pour différentes épaisseurs de l'échantillon présenté ci-dessus. Le signal transmis dans l'eau est exposé en figure 1.29. On constate que l'augmentation de l'épaisseur traversée entraîne deux conséquences :

- une diminution de l'intensité maximale transmise
- un allongement de la durée du signal

Lorsque l'épaisseur est faible (ici jusqu'à 10 mm) on distingue clairement une onde transmise de même forme que le signal émis dans l'eau : on parle de *signal balistique*[2]. Cette contribution balistique à l'onde cohérente n'est pas la seule : derrière la première arrivée apparaissent des ondes

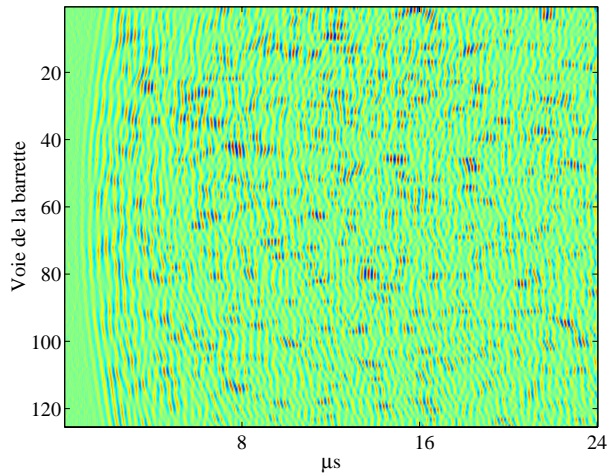


FIG. 1.26: Signal obtenu en transmission sur une réalisation du désordre pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 20 mm .

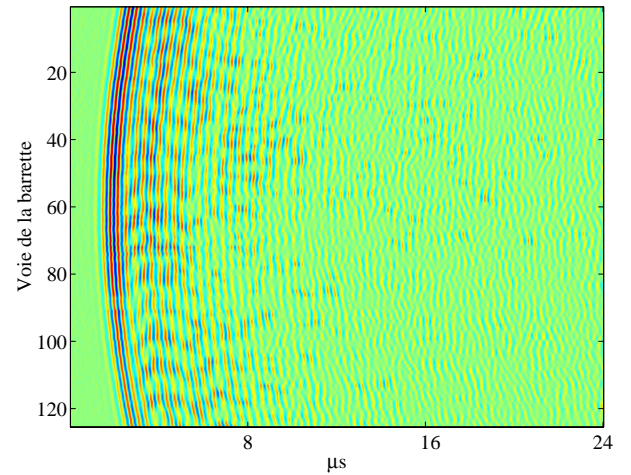


FIG. 1.27: Signal obtenu en transmission après moyenne sur une centaine de positions des signaux recalés pour le même échantillon qu'en 1.26.

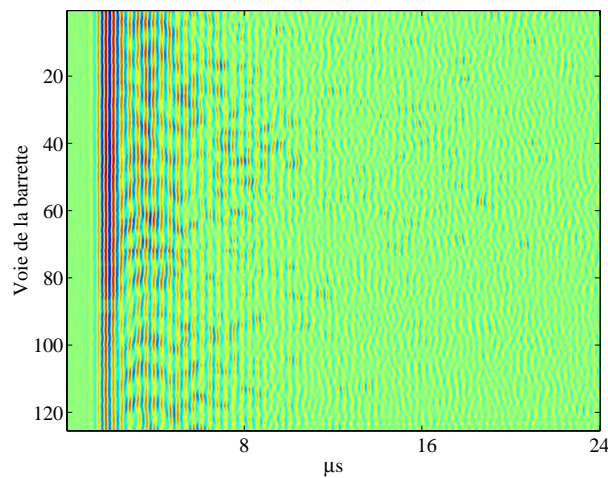


FIG. 1.28: Signal obtenu en transmission après moyenne sur une centaine de positions des signaux recalés et compensation des temps de parcours, pour le même échantillon qu'en 1.26.

secondaires ayant résisté à la moyenne sur le désordre et qui sont spatialement cohérentes comme en témoigne la figure 1.27. Ces traînées cohérentes proviennent des ondes circonférentielles à la surface des diffuseurs et sont une conséquence des résonances de ces derniers [10]. Pour une épaisseur de 25 mm ces contributions secondaires dominent le signal balistique.

Le contenu fréquentiel du signal cohérent varie sensiblement selon l'épaisseur traversée (figure 1.32). Ce comportement fréquentiel est lié aux résonances des diffuseurs individuels [12]. Lorsque des résonances sont présentes dans la bande de fréquence étudiée (ce qui est le cas entre 2.5 et 3.5 MHz comme on l'a vu en section 1.6.2.2) le milieu multiplement diffuseur agit sur l'onde transmise comme un filtre d'autant plus sélectif que l'épaisseur traversée est importante. L'étalement temporel du signal correspond à un regroupement fréquentiel autour de la fréquence de résonance, ce que confirme la figure 1.32 où l'on constate que la fréquence 2.7 MHz apparaît prépondérante pour une épaisseur de milieu de 20 mm alors qu'elle ne l'est pas dans l'eau.

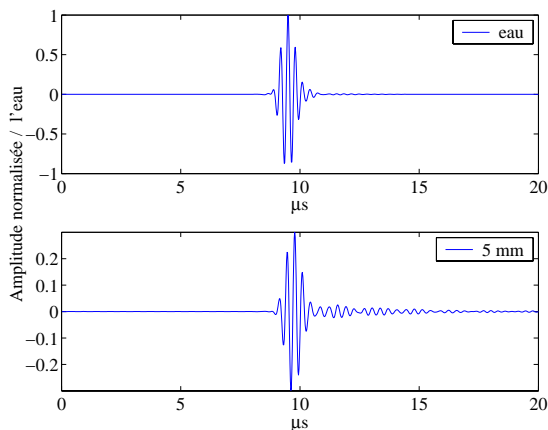


FIG. 1.29: Signaux cohérents dans l'eau et à l'épaisseur 5 mm.

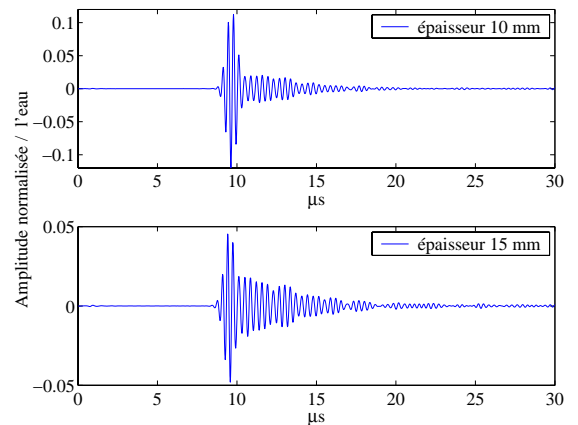


FIG. 1.30: Signaux cohérents aux épaisseurs 10 mm et 15 mm.

A partir de l'onde cohérente, on peut évaluer le libre parcours moyen élastique l_e .

1.7.3 Évaluation de l_e en régime quasi-impulsionnel

Pour calculer l'intensité cohérente, on doit pouvoir délimiter temporellement le signal cohérent. La fenêtre de début ne pose aucun problème après le recalage temporel puisque le front balistique est partie intégrante de l'onde cohérente. Pour déterminer la fenêtre de fin, on calcule le degré de corrélation moyen entre les voies et on s'arrête lorsque cette dernière est inférieure à 0.9^{18} , ce qui permet de ne sélectionner que la partie spatialement cohérente du front d'onde.

On dispose donc de l'intensité cohérente pour différentes épaisseurs de l'échantillon, ainsi que la valeur de l'intensité du signal transmis dans l'eau. On normalise les énergies par la valeur obtenue dans l'eau et on représente le logarithme de l'intensité transmise en fonction de l'épaisseur d'échantillon traversée. Selon la loi de Beer présentée au début du chapitre, la courbe obtenue doit être

¹⁸ Notons que ce seuil arbitraire (0.9) n'est pas critique.

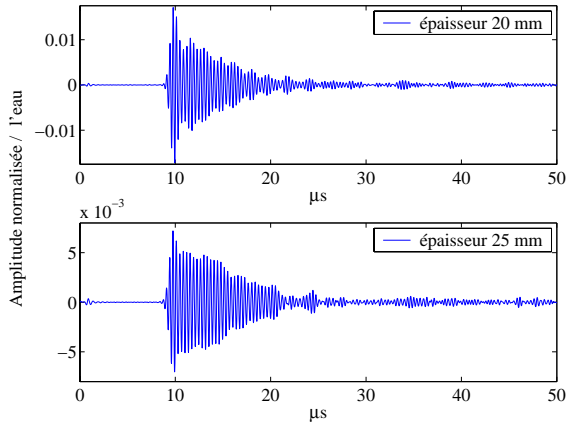


FIG. 1.31: Signaux cohérents aux épaisseurs 20 mm et 25 mm.

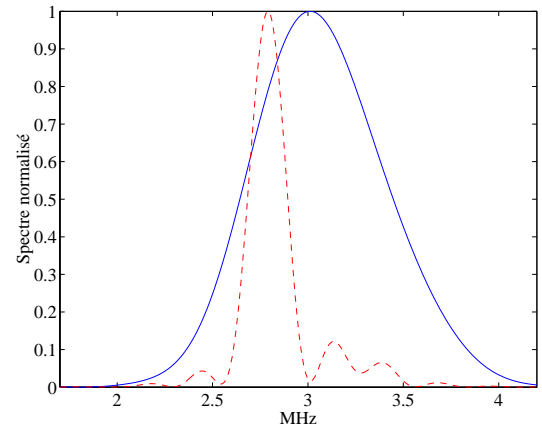


FIG. 1.32: Comparaison des spectres des signaux cohérents transmis dans l'eau (continu) et à travers l'échantillon d'épaisseur 20 mm (tirets).

une droite passant par l'origine, dont l'inverse de la pente vaut l_e .

Différentes méthodes d'évaluation de l_e

La première méthode pour évaluer l_e est de calculer l'inverse de la pente de la droite qui approche le mieux les points expérimentaux au sens des moindres carrés.

La seconde méthode consiste à forcer le passage de la droite par le point d'origine. Une troisième méthode pour obtenir l_e consiste à calculer la pente entre le point origine et chacune des épaisseurs. Les formules d'évaluation des erreurs statistiques pour les différentes méthodes sont reportées en annexe B.

Les propriétés de l'électronique d'acquisition sont fondamentales dans ce type d'expérience. En effet, il est nécessaire de disposer d'une dynamique large, ainsi que d'une linéarité sur toute la dynamique. Par exemple, le front cohérent pour des épaisseurs allant de $L = 0 \text{ mm}$ à $L = 5 l_e$ nécessite de traiter correctement les signaux jusqu'à -45 dB .

Echantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm²

Pour cet échantillon, les épaisseurs étudiées valent 5, 10, 15, 20 et 25 mm. On a représenté en figure 1.33 l'intensité transmise en fonction de l'épaisseur traversée. L'évaluation de la valeur du libre parcours moyen élastique par un fit linéaire libre donne 3 mm. L'erreur d'évaluation est faible malgré le nombre de points peu important : $\pm 6.5 \%$. Avec un fit forçant le passage par l'origine, on obtient $l_e = 2.85 \text{ mm}$ avec une erreur de $\pm 4 \%$. Enfin l'inverse de la moyenne des pentes des épaisseurs donne $l_e = 2.7 \text{ mm}$ avec une erreur de $\pm 6 \%$. Dans toute la suite, nous choisissons d'évaluer l_e en ajustant linéairement les points sans forcer le passage par l'origine. Cette méthode ne minimise pas l'erreur mais elle présente l'intérêt de ne privilégier aucune épaisseur, notamment

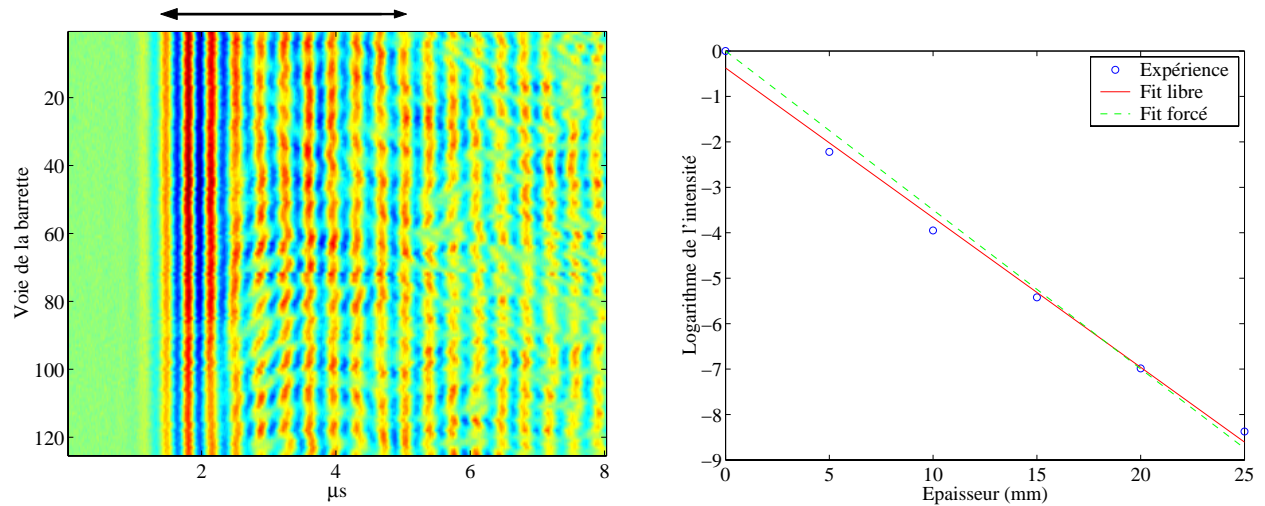


FIG. 1.33: A gauche : la fenêtre de calcul de l'énergie cohérente est limitée à la flèche noire pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 d'épaisseur 15 mm . Cela correspond à un coefficient de corrélation moyen entre les voies de 0.9 . A droite : tracé de l'intensité normalisée en échelle logarithmique en fonction de l'épaisseur traversée pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 . En rouge le fit linéaire "libre" permettant d'évaluer l_e à 3 mm . En pointillés vert, un fit passant par l'origine donne $l_e = 2.85 \text{ mm}$.

pas l'épaisseur "nulle".

Echantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm^2

Pour cet échantillon, le moins dense de notre étude, on utilise les épaisseurs $10, 20, 40, 60$ et 80 mm . L'évaluation de l_e donne ici 7.7 mm avec une erreur de l'ordre de 3% . L'effet de la concentration moindre des diffuseurs est donc naturellement de diminuer la diffusion multiple, ce qui se traduit par une augmentation du libre parcours moyen élastique par rapport au cas précédent.

Echantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration $0.18/\text{mm}^2$

Pour cet échantillon, les tiges ont un pouvoir diffusif plus faible du fait de leur plus petit diamètre¹⁹. On peut ainsi étudier l'onde cohérente sur des épaisseurs de $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ et 50 mm . On trouve une valeur de $l_e = 6.4 \text{ mm}$ avec une erreur de $\pm 3 \%$. La courbe et le fit correspondant sont représentés en figure 2.50. On constate donc une valeur de l_e proche de celle de l'échantillon le moins dense.

1.7.4 Évaluation de l_e en régime quasi-monochromatique

Les mesures précédentes étaient intégrées sur les fréquences, notre objectif est maintenant de mettre en évidence le comportement fréquentiel de l_e . Pour cela, on calcule l'énergie cohérente

¹⁹Quantitativement, on a comparé les sections efficaces de diffusion en section 1.6.2.2.

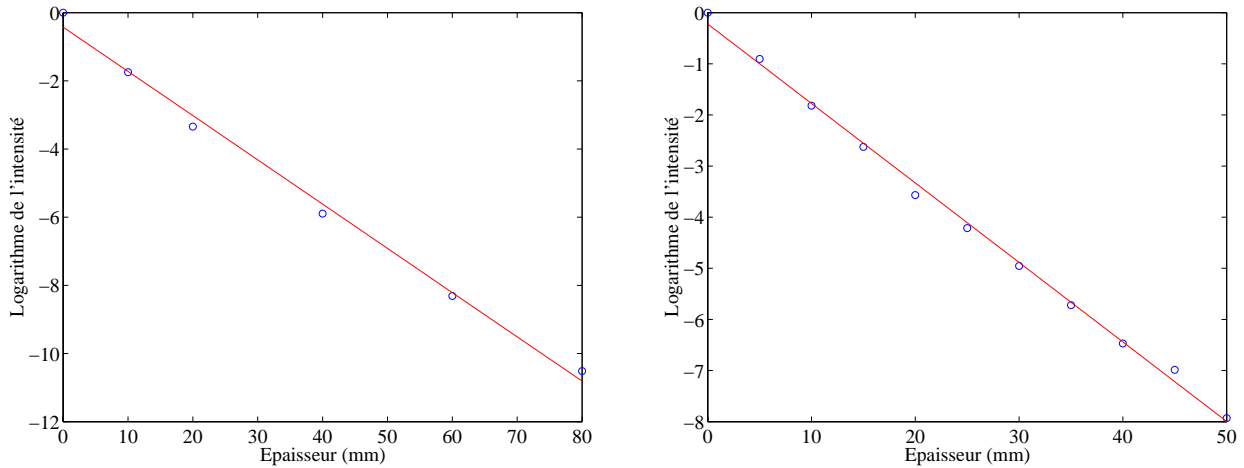


FIG. 1.34: Tracé de l'intensité normalisée en échelle logarithmique en fonction de l'épaisseur traversée. En rouge le fit linéaire permettant de déterminer l_e . Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm^2 (à gauche) : on trouve $7.7 \pm 0.25 \text{ mm}$. Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm^2 (à droite) : on trouve $6.4 \pm 0.2 \text{ mm}$.

transmise dans des bandes de fréquence de largeur 0.2 MHz , après filtrage numérique passe-bande des formes d'onde cohérentes.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 on a représenté en figures 1.35 et 1.36 l'intensité transmise en fonction de l'épaisseur traversée à deux fréquences : 2.8 MHz et 3.5 MHz . On constate que la droite d'interpolation à 2.8 MHz présente une pente moins prononcée qu'à 3.5 MHz . Quantitativement, cela conduit à des valeurs différentes du libre parcours moyen élastique : on mesure $l_{e2.8} = 3.6 \pm 0.2 \text{ mm}$ et $l_{e3.5} = 2.3 \pm 0.1 \text{ mm}$.

Il est utile de généraliser cette étude à d'autres fréquences, typiquement comprises entre 2 MHz et 4 MHz .

En figure 1.37 on a représenté les valeurs de l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon le plus dense, et les barres d'erreur associées (correspondant à \pm un écart-type). Le libre parcours moyen élastique présente un pic autour de 2.8 MHz , la fréquence de résonance individuelle d'une tige de diamètre 0.8 mm , dont on a vu qu'elle correspondait à un minimum de σ_{td} . Les erreurs d'évaluation de l_e sont comprises entre 2% et 9% selon les fréquences : le maximum à 2.8 MHz , supérieur de plus de 40% aux autres valeurs de l_e , est donc bien significatif.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , le tracé de l_e en fréquence permet là encore de retrouver la résonance individuelle des tiges de cette taille. En figure 1.40 on constate que le maximum du libre parcours moyen élastique est en effet obtenu autour de la fréquence 3.7 MHz . Les barres d'erreur sont plus petites que pour l'échantillon précédent, notamment grâce au plus grand nombre d'épaisseurs étudiées : l'erreur est comprise entre 0.5% et 3% selon les fréquences. Un exemple de courbe expérimentale est donné en figure 1.38 pour cet échantillon autour de la fréquence de résonance.

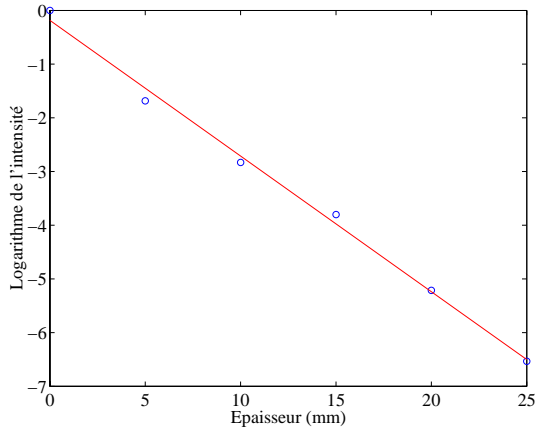


FIG. 1.35: Evaluation de l_e pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 à la fréquence 2.8 MHz : on trouve $3.6 \pm 0.2\text{ mm}$.

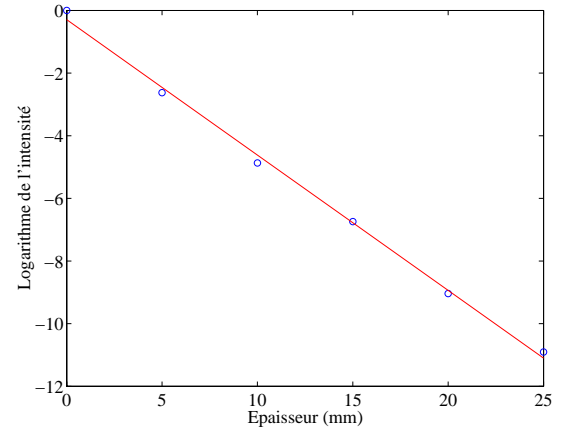


FIG. 1.36: Evaluation de l_e pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 à la fréquence 3.5 MHz : on trouve $2.1 \pm 0.1\text{ mm}$.

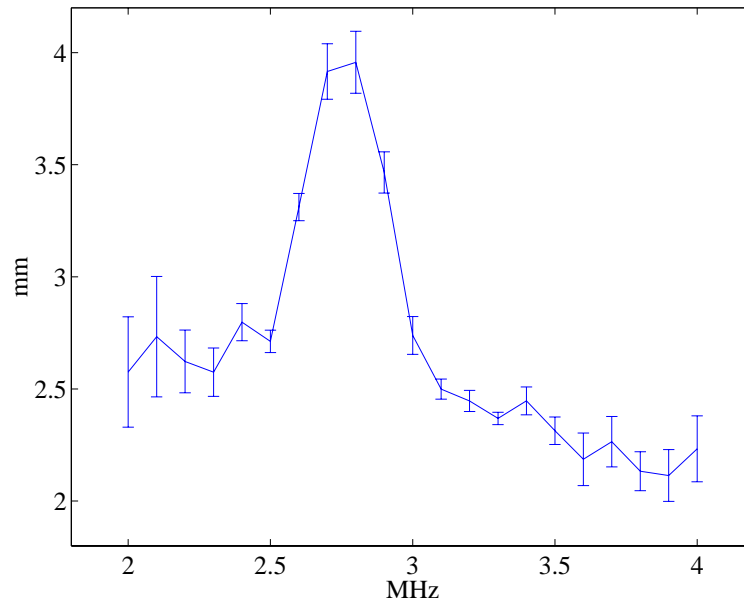


FIG. 1.37: Représentation de l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 .

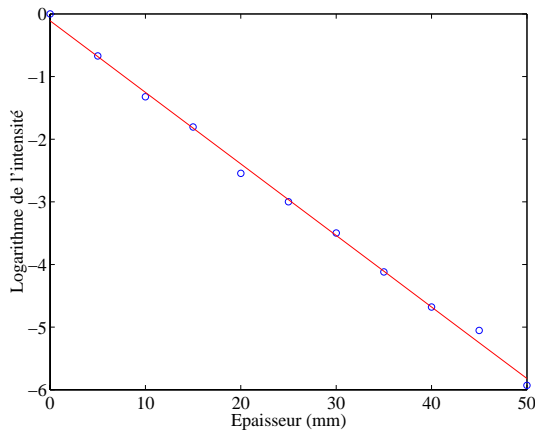


FIG. 1.38: Evaluation de l_e pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm^2 à la fréquence 3.7 MHz : on trouve $8.7 \pm 0.2 \text{ mm}$.

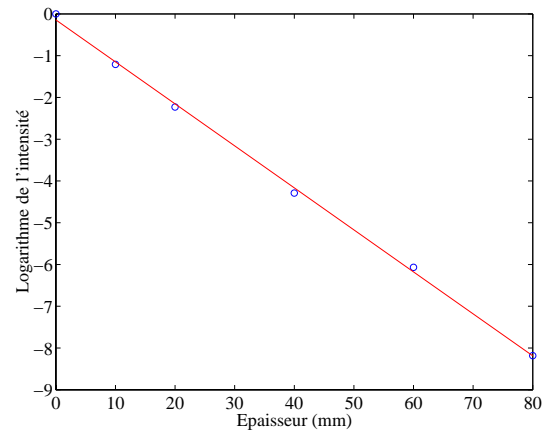


FIG. 1.39: Evaluation de l_e pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm^2 à la fréquence 2.7 MHz : on trouve $9.9 \pm 0.35 \text{ mm}$.

L'évaluation de l_e pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité 0.12 tige/mm^2 est reportée en figure 1.41. On retrouve le même comportement fréquentiel qu'avec l'échantillon le plus dense : le pic de l_e est toujours obtenu à 2.7 MHz . Néanmoins, la plus faible concentration en diffuseurs se traduit par une augmentation de la valeur du libre parcours moyen élastique à une fréquence donnée.

Ce comportement fréquentiel de l_e peut s'expliquer par le comportement individuel des diffuseurs. Lorsque l'onde traverse le milieu autour d'une fréquence de résonance (soit 2.8 MHz et 3.6 MHz respectivement pour les tiges de diamètre 0.8 mm et 0.6 mm), on a vu en section 1.6.2.2 que les sections efficaces des diffuseurs présentaient un minimum. Le milieu apparaît donc plus "transparent" autour des fréquences de résonance. La décroissance de l'onde cohérente du fait de la diffusion est donc plus faible lorsqu'il y a résonance des tiges : cela se traduit par une augmentation de l_e , longueur caractéristique de décroissance du champ cohérent.

De plus, on retrouve clairement dans les variations fréquentielles de l_e la signature des diffuseurs individuels.

Dans la section suivante, nous comparons les évaluations expérimentales de l_e aux résultats théoriques prédits par l'ISA.

1.7.5 Comparaison à la théorie de l'ISA

Pour l'échantillon de tiges le plus dense, on a tracé en figure 1.42 la représentation fréquentielle de l_e selon les données expérimentales et selon la théorie de l'*Independent Scattering Approximation*. On constate qu'en dehors de la zone de résonance, l'écart entre les données théoriques et expérimentales se situe hors des barres d'erreur. L'écart moyen est de 7.5% sur la bande $[2.5 - 3.5] \text{ MHz}$. On

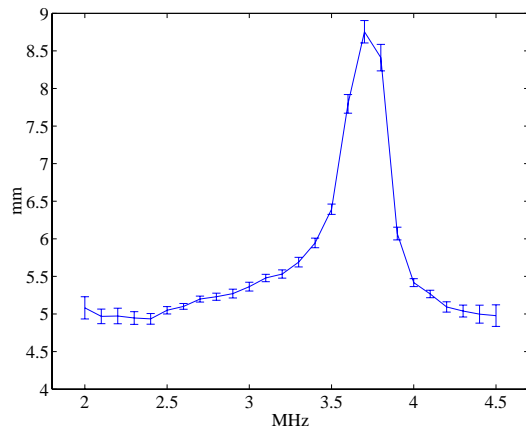


FIG. 1.40: Représentation de l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm^2 . La fréquence de résonance est ici autour de 3.7 MHz .

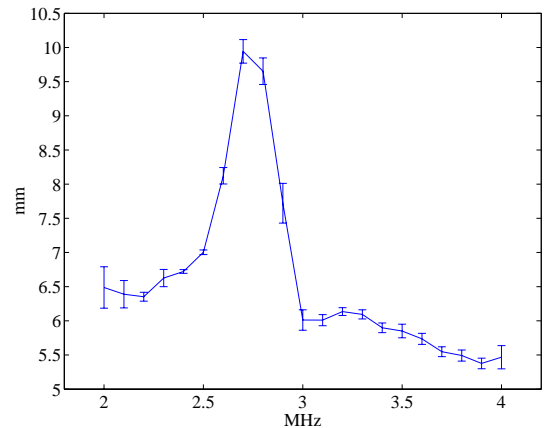


FIG. 1.41: Représentation de l_e en fonction de la fréquence pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm^2 . On remarque un comportement fréquentiel semblable à l'échantillon le plus dense.

retrouve des valeurs plus proches autour de la résonance des tiges avec un écart de 1 % à 2.8 MHz , alors qu'il s'élève à 13 % à 3.2 MHz .

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm l'écart entre la théorie et les valeurs expérimentales est plus élevé : entre 5 % et 15 % selon les fréquences. Là encore, les zones hors résonance donnent les différences les plus grandes entre les courbes.

Quant à l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm^2 , il présente un écart entre théorie et expérience comparable à l'échantillon le plus dense avec un différentiel de 6 % sur la bande $[2.5 - 3.5] \text{ MHz}$. On retrouve des valeurs plus proches autour de la résonance des tiges avec un écart pratiquement nul à 2.8 MHz , alors qu'il s'élève à 9.5 % à 3.2 MHz .

Pour tous les échantillons, moyennant en fréquence les valeurs obtenues, on observe que l'ISA sur-estime l_e de 6 % à 12 %. Dans les paragraphes suivants, nous cherchons à affiner les prédictions de l'ISA.

On s'intéresse tout d'abord à l'absorption dans le milieu. On mesure expérimentalement une longueur d'extinction. Comme la mesure est normalisée par les résultats obtenus dans l'eau, elle ne dépend pas de l'absorption intrinsèque dans ce milieu. Cependant, on pourrait penser qu'il y a des pertes supplémentaires visqueuses à l'interface entre les diffuseurs et l'eau, pertes qui pourraient expliquer l'écart avec l'ISA. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

1.7.6 Modélisation de l'absorption

Dans le cas des expériences avec nos échantillons prototypes, on a vu que le libre parcours moyen élastique l_e mesuré était plus faible que celui prédit par la théorie de l'ISA. Dans un milieu siège

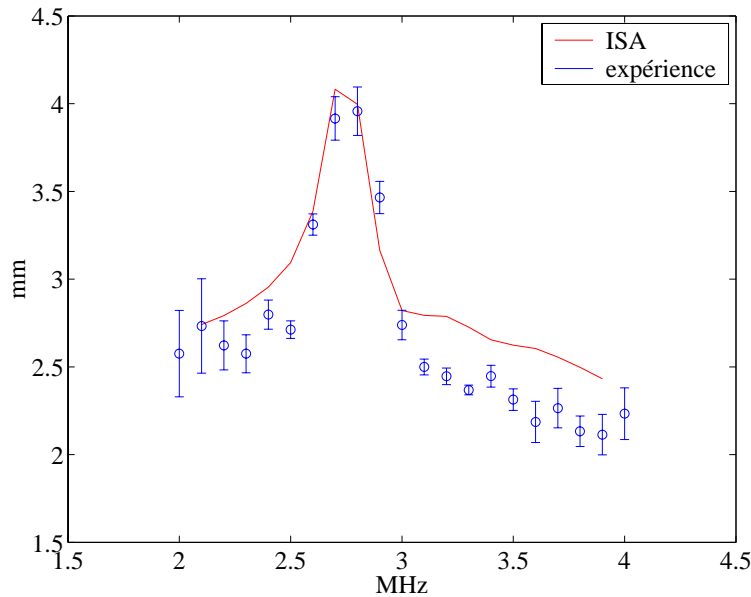


FIG. 1.42: Comparaison ISA/expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 .

d'absorption, la mesure de la décroissance du champ cohérent conduit à évaluer le libre parcours moyen d'extinction l_{ext} et non l_e . Dans cette section, nous modélisons l'absorption présente à l'interface entre les diffuseurs et l'eau²⁰.

Plus précisément, l'étude suivante se concentre sur le cas d'un diffuseur élastique et isotrope immergé dans un fluide visqueux. Nous traitons le cas d'un disque bidimensionnel. La plupart des études concernant l'atténuation acoustique reposent sur les travaux de Epstein et Carhart [15] qui ont traité le cas de particules fluides suspendues dans des fluides thermovisqueux. La généralisation à des solides immergés dans les liquides est due à Allegra et Hawley [16]. Le problème bi-dimensionnel est peu traité, Lin & Raptis [13] proposent des expressions qui ne nous ont pas permis de retrouver le cas sans viscosité traité au 1.6.2.2. Précisons que les équations nécessaires à la résolution du problème sont assez lourdes, et les articles précités ne sont pas exempts de fautes de frappe difficilement identifiables²¹. C'est pourquoi nous nous proposons de traiter le problème de manière à pouvoir comparer les expressions à celle du cas sans perte précédemment exposé en 1.6.2.2.

Les pertes peuvent être de nature thermique ou visqueuse. Les pertes thermiques sont dues aux différences d'amplitude et de phase des fluctuations de température dans le fluide et le diffuseur.

²⁰ La prise en compte des pertes propres à des diffuseurs métalliques donne des différences négligeables avec la théorie de Faran sans absorption [13],[14]. Les travaux précédents considèrent des diffuseurs en laiton et en aluminium. Dans le cas de l'acier, dont les caractéristiques thermiques sont très proches nous supposons les pertes négligeables également.

²¹ La référence [13] relève ainsi de nombreuses erreurs dans les travaux précédents, notamment sur les ordres de grandeur de certaines valeurs numériques. Précisons que nous avons aussi relevé des erreurs numériques dans cette même référence...

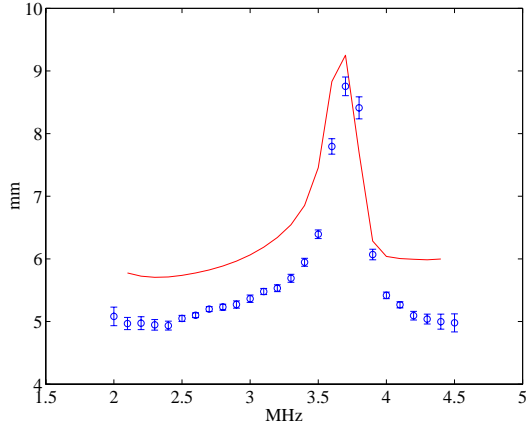


FIG. 1.43: Comparaison ISA/expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm².

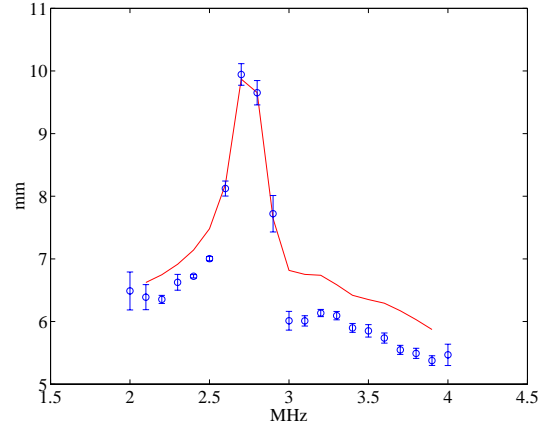


FIG. 1.44: Comparaison ISA/expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm².

L'absorption due à la viscosité résulte quant à elle des mouvements relatifs du fluide et du diffuseur. Ces deux effets dépendent d'un flux de chaleur dans un cas et de quantité de mouvement dans l'autre. L'importance de ces flux est liée aux gradients de températures et de vitesse qui sont principalement localisés à l'interface entre les deux milieux, dans les épaisseurs de peau thermique et visqueuses. L'étude du champ acoustique fait donc intervenir trois équations d'onde dans le fluide : de compression, visqueuse et thermique. Dans le solide on a trois types d'ondes : de compression, transverse et thermique.

Dans le cas de diffuseur de densité supérieure à celle de l'eau, l'épaisseur de peau thermique est négligeable, ainsi que les pertes associées [17], nous limitons donc notre étude à la modélisation des pertes visqueuses²².

Equations du problème

Dans le cas avec absorption, on utilise les potentiels vitesse pour le fluide et déplacement pour le solide.

On décompose la vitesse dans le fluide sous la forme

$$\mathbf{v}_f = -\nabla\Phi_v + \nabla \times \mathbf{A}_v \tag{1.120}$$

avec Φ_v le potentiel vitesse scalaire et \mathbf{A}_v le potentiel vitesse vecteur.

Comme dans la section 1.6.2.2 on écrit le déplacement \mathbf{u} selon

²² Pour des fréquences inférieures à 10 MHz, la densité minimale permettant de négliger les effets thermiques est de l'ordre de 1.5 g/cm³, ce qui est très en deçà de la densité de l'acier (7.6 g/cm³).

$$\mathbf{u} = -\nabla\Phi_d + \nabla \times \mathbf{A}_d \quad (1.121)$$

avec Φ_d et \mathbf{A}_d respectivement les potentiels déplacement scalaire et vecteur.

Les inconnues du problème Φ_v , A_{vy} , Φ_d et A_{dy} vérifient les équations

$$\Delta\Phi_v + k_1^2\Phi_v = 0 \quad (1.122)$$

$$\Delta A_{vy} + k_{fv}^2 A_{vy} = 0 \quad (1.123)$$

$$\Delta\Phi_d + k_L^2\Phi_d = 0 \quad (1.124)$$

$$\Delta A_{dy} + k_T^2 A_{dy} = 0 \quad (1.125)$$

avec $k_i = w/c_i$ avec $i \in \{1, L, T\}$ et $k_{fv} = \sqrt{\frac{iw\rho_0}{\mu_0}}$ Pour exprimer les solutions de ces équations, on utilise les décompositions modales suivantes

$$\Phi_v = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n b_n H_n^1(k_1 r) \cos n\theta \quad (1.126)$$

$$A_{fy} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n f_n H_n^1(k_{fv} r) \sin n\theta \quad (1.127)$$

$$\Phi_d = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n c_n J_n(k_L r) \cos n\theta \quad (1.128)$$

$$A_{dy} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n e_n J_n(k_T r) \sin n\theta \quad (1.129)$$

avec J_n et H_n^1 respectivement les fonctions de Bessel et de Hankel de premier type d'ordre n . On définit les facteurs de Neumann ϵ_n par $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_n = 2$ pour tout $n \geq 1$.

La pression incidente p_i se décompose selon

$$p_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n J_n(k_1 r) \cos n\theta \quad (1.130)$$

Système matriciel

On écrit les relations suivantes à l'interface entre le cylindre et l'eau pour $r = a$:

- Continuité de la vitesse radiale.
- Continuité de la vitesse orthoradiale.
- Continuité de la contrainte normale.
- Continuité de la contrainte de cisaillement.

Ces quatre relations conduisent à un système matriciel pour chaque mode n , faisant intervenir les coefficients b_n , c_n , e_n et f_n des développements modaux.

On obtient le système suivant

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

Les expressions des différents coefficients sont reportés en Annexe B. La résolution de ce système linéaire permet de déterminer la section efficace totale. On constate sur la figure 1.45 à gauche que la différence avec le cas sans viscosité est négligeable. On est donc assuré que les différences entre expérience et théorie ne proviennent pas des pertes par viscosité dans le milieu.

Pour voir l'effet de la viscosité dans le cas d'un fluide plus visqueux, on a tracé les sections efficaces d'une tige dans l'huile. Ce fluide a une viscosité de cisaillement supérieure à celle de l'eau d'un facteur 10 à 15. On constate un écart de l'ordre de 2 % entre les valeurs avec et sans viscosité. Les pertes par absorption tendent à augmenter la section efficace, ce qui entraîne une diminution du libre parcours moyen évalué.

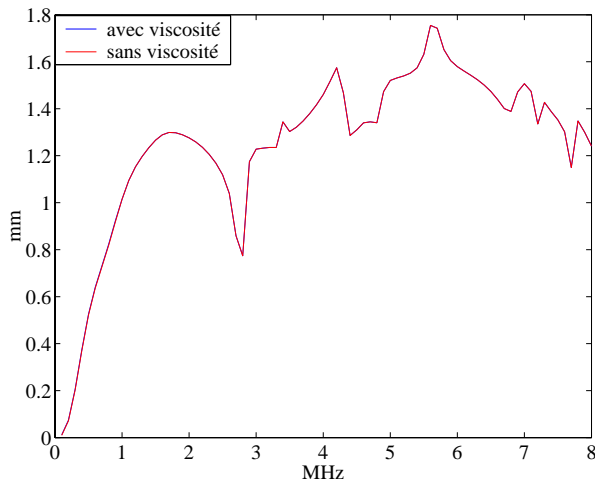


FIG. 1.45: Comparaison de la section efficace totale avec et sans viscosité : cas de l'eau.

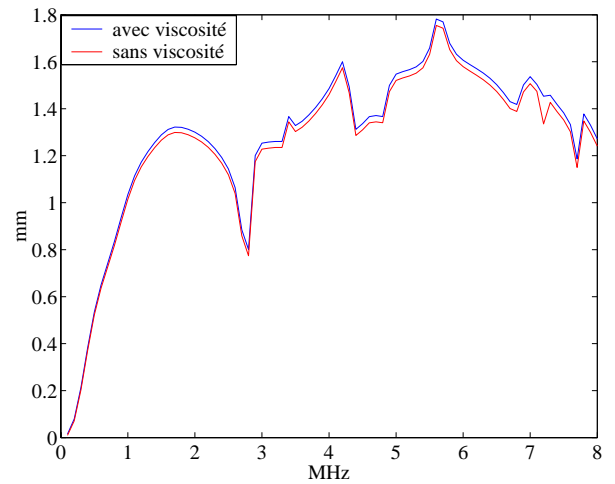


FIG. 1.46: Comparaison de la section efficace totale avec et sans viscosité : cas de l'huile.

On est donc assuré de mesurer le libre parcours moyen élastique l_e grâce aux expériences de transmission cohérente. On a vu que la théorie utilisée jusqu'ici, l'ISA permettait d'obtenir des résultats acceptables à 6 %-12 % près en comparaison aux valeurs expérimentales de l_e . Néanmoins, l'ISA est une théorie extrêmement simplifiée en diffusion multiple car elle ne prend en compte que les

chemins de diffusion sans corrélation et sans boucle. Par construction, nos échantillons prototypes présentent des corrélations entre leurs diffuseurs par le choix des distances d'exclusion présentées en section 1.7.1 et par le simple fait que les diffuseurs ne peuvent s'interpénétrer : il est donc naturel de s'intéresser au rôle des corrélations dans l'évaluation de l_e .

La littérature est riche à ce sujet et nous présentons dans les sections suivantes les méthodes les plus classiques pour introduire les corrélations dans la théorie de la diffusion multiple. Ce travail permettra de présenter l'approche de la diffusion multiple selon Foldy, et de la comparer à la théorie des diagrammes que nous utilisons dans cette thèse.

1.8 Au-delà de l'ISA

1.8.1 Etude de la fonction de corrélation de paire

Dans un milieu désordonné comme notre distribution de tiges cylindriques, la connaissance de la position d'un diffuseur ne permet pas de connaître celle de tous les autres. On peut néanmoins caractériser l'ordre du milieu grâce à la fonction de *distribution radiale* $g(r)$. Cette fonction est telle que $ng(r)$ représente la concentration moyenne de diffuseur à la distance r d'un diffuseur situé en $r = 0$.

Le modèle le plus simple pour représenter g est celui du gaz parfait : $g(r) = 1 \forall r$, ce qui traduit l'absence totale de corrélations dans ce cas. Dans notre cas, il y a nécessairement des corrélations à cause du diamètre fini des cylindres et de la distance d'exclusion : les diffuseurs ne peuvent s'interpénétrer (répulsion stérique). Le modèle de la "Hole Correction" est le plus simple dans ce cadre. Pour une d_{exc} fixée il suppose

$$g(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r < d_{exc} \quad (1.132)$$

$$g(r) = 1 \quad \text{pour} \quad r \geq d_{exc} \quad (1.133)$$

En figure 1.47 on a représenté g dans ce cas.

Dans un cadre plus réaliste, on peut approcher g à partir de tirages aléatoires de diffuseurs, la méthode consistant simplement à compter les diffuseurs en fonction de l'origine choisie arbitrairement au centre de l'un d'entre eux. La représentation de la distribution radiale pour des tirages aléatoires de 2000 diffuseurs est exposée en figure 1.48 : on observe une valeur nulle pour des distances inférieures à d_{exc} puis une série d'oscillations faisant tendre g vers 1 à l'infini. Le premier pic correspond au cercle de première coordination caractérisant les diffuseurs voisins du diffuseur centré en 0. Une telle représentation caractérise l'ordre à courte portée dans notre milieu. La figure 1.48 compare le résultat d'un tirage aléatoire (en bleu) avec une moyenne sur plusieurs milliers de tirage (en rouge). Un modèle analytique a été proposé dans le cadre d'approximations valables à faible densité (Percus-Yevick, [18]). Nous avons travaillé avec la fonction $g(r)$ estimée par moyenne sur les tirages aléatoires.

L'étude des diagrammes moyennés en section 1.5.3.3 a fait intervenir la *fonction de corrélation de paire* $g_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$. Cette fonction qui ne dépend que de la distance entre deux diffuseurs $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$,

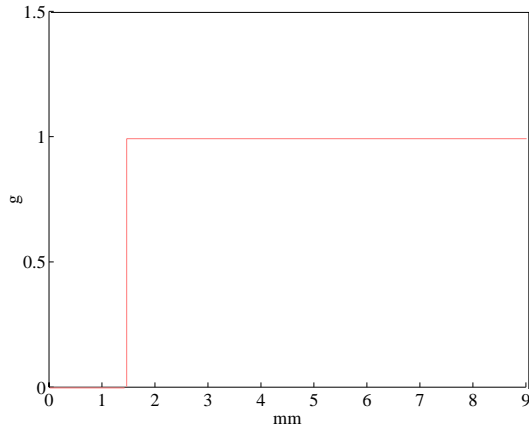


FIG. 1.47: Distribution radiale dans le cas de la *Hole Correction* pour une distance d'exclusion de 1.5 mm.

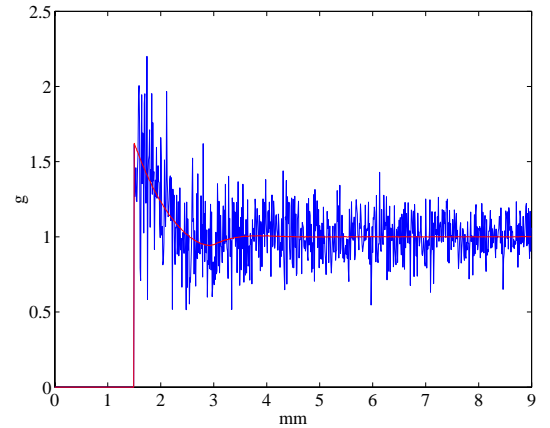


FIG. 1.48: Distribution radiale issue de la moyenne de 20000 tirages aléatoires de 2000 diffuseurs (en rouge) et d'un seul tirage (en bleu). Les paramètres sont les mêmes que précédemment.

peut s'exprimer en fonction de la *distribution radiale* $g(r)$ selon

$$g_2(r) = g(r) - 1 \quad (1.134)$$

Nous allons désormais étudier différentes méthodes pour faire intervenir ces fonctions de distribution radiale et de corrélation de paire en diffusion multiple.

1.8.2 Prise en compte des corrélations de paire au premier ordre : *Interference Approximation*

Certaines études [19, 20] font intervenir explicitement les fonctions de corrélation de paire dans l'expression de la section efficace de diffusion des diffuseurs. Cette approche porte le nom d'*Interference Approximation* (notée *ITA* par la suite) [21].

Considérons une onde plane dans la direction \mathbf{k}_i , donnant lieu à une onde diffusée dans la direction \mathbf{k}_d après diffusion par le milieu d'étude. Dans l'*ITA*, on exprime le libre parcours moyen élastique l_e d'une manière semblable à l'*ISA* mais en fonction d'une section efficace totale modifiée par les corrélations entre diffuseurs σ_m :

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_m} \quad (1.135)$$

En notant θ l'angle entre \mathbf{k}_d et \mathbf{k}_i , les sections efficaces avec et sans corrélation σ_m et σ_{td} sont liées par la relation suivante :

$$\sigma_m = \int \sigma_{td}(\theta) S(\theta) d\theta \quad (1.136)$$

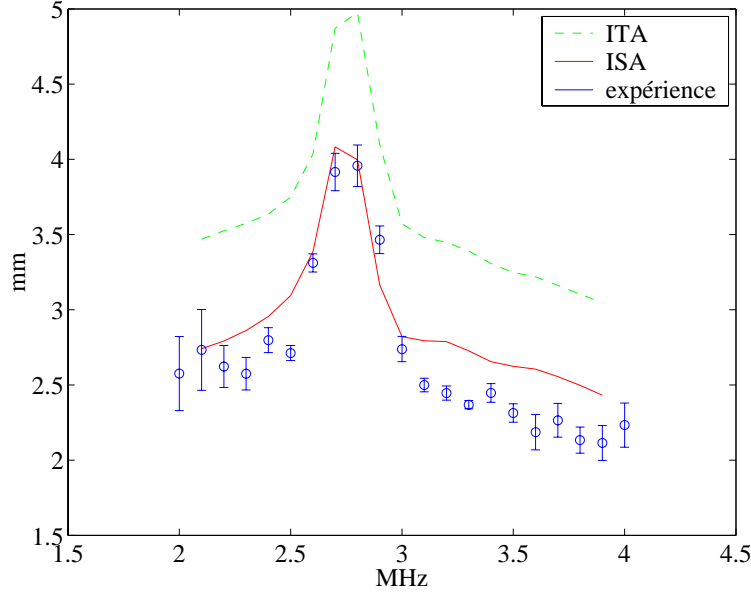


FIG. 1.49: Comparaison de l_e selon les théories de l'ITA, l'ISA et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 . L'écart théorie/expérience est quadruplée par rapport à l'ISA.

$S(\theta)$ est le *facteur de structure* de la distribution de diffuseurs, il s'exprime en fonction de la transformée de Fourier spatiale de la fonction de corrélation de paire g_2 . En notant \mathbf{q} le vecteur différence entre les vecteurs d'ondes diffusés et incidents, on a

$$q = 2 \frac{w}{c} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1.137)$$

et

$$S(q) = 1 + \int g_2(r) e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} d\mathbf{r} \quad (1.138)$$

Les l_e obtenus par cette théorie sont comparés aux résultats expérimentaux en figures 1.49, 1.50 et 1.51 pour les trois types d'échantillons. La fonction de corrélation de paire a été évaluée par moyenne sur des tirages aléatoires du même type qu'en figure 1.48.

L'écart entre l'expérience et la théorie est amplifié pour les trois milieux et à toutes les fréquences par rapport à l'ISA. Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le plus dense, l'écart moyen est quadruplé et s'approche de 30%.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , l'écart est doublé par rapport à la théorie sans corrélation, en passant à 10 % en moyenne sur la bande $[3.2 - 4.2] \text{ MHz}$.

Enfin pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le moins dense, l'écart passe de 6 % à 20 % sur la bande $[2.5 - 3.5] \text{ MHz}$.

La prise en compte des corrélations dans le cadre de l'ITA surestime le libre parcours moyen

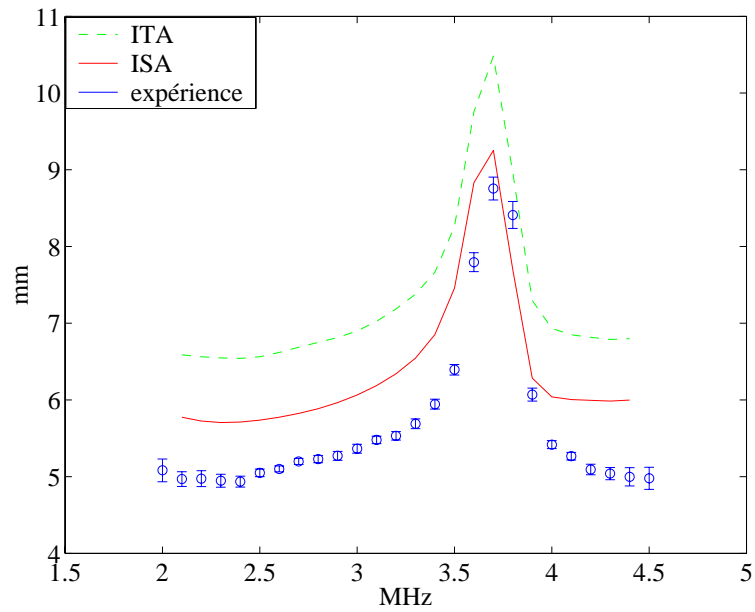


FIG. 1.50: Comparaison de l_e selon les théories de l'ITA, l'ISA et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm^2 . L'écart théorie/expérience est doublée par rapport à l'ISA.

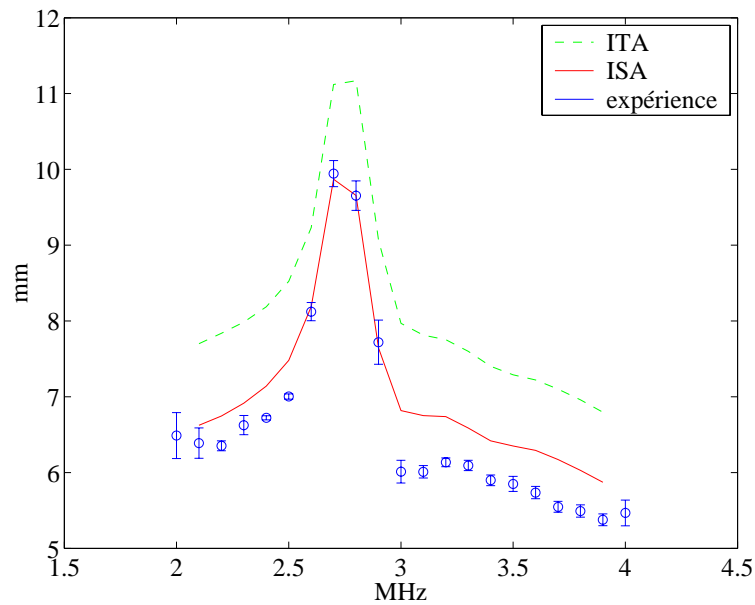


FIG. 1.51: Comparaison de l_e selon les théories de l'ITA, l'ISA et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm^2 . L'écart théorie/expérience est triplée par rapport à l'ISA.

élastique pour tous les échantillons et augmente l'écart de manière importante par rapport à l'*ISA*. On constate que l'erreur résultant de cette approche augmente avec la taille et la concentration des diffuseurs. L'effet de la concentration se manifeste dans la comparaison des résultats pour les échantillons de tiges de diamètre 0.8 mm qui présentent un écart comparable entre théorie et expérience dans le cadre de l'*ISA*. Dans l'approche de l'*ITA*, on constate une erreur supérieure de 50 % pour l'échantillon de concentration surfacique 14 % par rapport à celui de concentration 5 %. On remarque également que l'erreur est doublée dans le cas de tiges de diamètre 0.6 mm alors qu'elle est triplée pour des tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration plus faible. Ces résultats retrouvent qualitativement les conclusions de travaux effectués en optique sur des échantillons tridimensionnels [21]. Ces études, dans un cadre tridimensionnel, ont montré que la validité de l'*ITA* dépendait principalement du facteur de taille des diffuseurs défini par $x = \pi d/\lambda$ avec d le diamètre des diffuseurs²³ ainsi que de la concentration. Pour des valeurs de x inférieures à 3.5, l'*ITA* donne des résultats acceptables selon ces travaux, de plus quel que soit x , l'*ITA* est jugée fiable pour des concentrations inférieures à 10 %. Dans notre cas, on constate que selon les tailles des tiges et les fréquences explorées, le paramètre x est compris entre 2.5 et 7. Même pour les échantillons les moins denses de notre étude, nos résultats montrent que cette approche théorique est mise en défaut. Le domaine de validité de l'*ITA* apparaît donc plus restreint dans nos conditions expérimentales.

Dans la partie suivante, nous présentons l'approche de diffusion multiple de Foldy, qui est à l'origine de théories prenant en compte les corrélations entre diffuseurs dans une démarche sensiblement différente de l'approche diagrammatique.

1.8.3 Approche de Foldy

Cette section a pour objectif d'exposer de manière très succincte l' "autre" grande famille de théorie de la diffusion multiple. Initialement développée par Foldy [22], elle permet de retrouver l'*ISA* mais ne prend pas en compte les corrélations de la même manière. Des théories très utilisées comme la Quasi-Cristalline Approximation (QCA) [23] et l'approche de Waterman et Truell [24] sont des prolongements des travaux de Foldy.

1.8.3.1 Présentation générale

Après avoir travaillé sur la propagation du son dans l'eau en présence de bulles d'air [25], Foldy a généralisé son étude et posé les fondations de l'approche ondulatoire de la diffusion multiple. Les outils statistiques sont rigoureusement du même type que ceux que nous utilisons dans l'approche diagrammatique : densités de probabilité jointes et moyenne sur le désordre. En plus des grandeurs exposées en 1.5.3.2, on définit la densité de probabilité conditionnelle $p_N^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_N)$ comme la probabilité d'avoir une configuration donnée des N diffuseurs sachant que la position du i^{me} est fixée. La relation entre p_N^i et p_N est

²³Dans le cas de diffuseurs sphériques.

$$p_N^i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}{p_1(\mathbf{r}_i)} \quad (1.139)$$

Le champ complexe Ψ produit par diffusion multiple d'une onde incidente Ψ_0 pour une configuration donnée des diffuseurs s'exprime selon

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \sum_j g_j \Psi(\mathbf{r}_j) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \quad (1.140)$$

avec g_j une amplitude de diffusion en champ lointain, $\Psi^j(\mathbf{r}_j)$ le champ incident sur le diffuseur j en \mathbf{r}_j et $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ le terme de propagation de \mathbf{r}_j vers \mathbf{r} dans le milieu où sont immergés les diffuseurs. On exprime $\Psi(\mathbf{r}_j)$ selon

$$\Psi(\mathbf{r}_j) = \Psi_0(\mathbf{r}_j) + \sum_{k \neq j} g_k \Psi(\mathbf{r}_k) G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \quad (1.141)$$

1.8.3.2 Formule analytique au premier ordre

Le calcul des moyennes sur le désordre donne

$$\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_0(\mathbf{r}) + \int \sum_j g_j \Psi(\mathbf{r}_j) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) p_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \quad (1.142)$$

soit en exprimant le résultat en fonction de p_N^j il vient

$$\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_0(\mathbf{r}) + \int \sum_j g_j \Psi(\mathbf{r}_j) p_1(\mathbf{r}_j) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) p_N^j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{j-1}, \mathbf{r}_{j+1}, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{j-1} d\mathbf{r}_{j+1} \dots d\mathbf{r}_N \quad (1.143)$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\langle \Psi(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_0(\mathbf{r}) + \int \sum_j g_j p_1(\mathbf{r}_j) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \langle \Psi(\mathbf{r}_j) \rangle_j \quad (1.144)$$

avec $\langle \Psi(\mathbf{r}_j) \rangle_j$ la moyenne du champ incident sur le diffuseur j , lorsque ce dernier est fixé²⁴.

La simplification proposée par Foldy pour se sortir de ce système inextricable consiste à identifier les moyennes suivantes :

$$\langle \Psi(\mathbf{r}_j) \rangle_j \approx \langle \Psi(\mathbf{r}_j) \rangle \quad (1.145)$$

On égalise donc le champ incident sur le diffuseur j moyenné sur les positions de tous les diffuseurs sauf j avec le champ total moyenné sur les positions de tous les diffuseurs. Sous cette hypothèse, on montre [26, 22, 27] que le calcul du libre parcours moyen élastique l_e est identique à l'approche d'ISA que nous avons présenté en section 1.6.3.

²⁴ Il s'agit donc de la moyenne qui fait intervenir la densité de probabilité conditionnelle p_N^j .

Il existe d'autres approximations, notamment l'Approximation Quasi-Cristalline (*QCA*) très souvent utilisée en optique [23, 28, 29, 30]. L'approche de la *QCA* consiste à écrire :

$$\langle \Psi(\mathbf{r}_j) \rangle_{j,k} \approx \langle \Psi(\mathbf{r}_j) \rangle_j \quad (1.146)$$

Le premier terme représente la moyenne du champ incident sur le diffuseur j lorsque la position de ce dernier et d'un autre diffuseur k sont fixées. La *QCA* permet de faire intervenir l'anisotropie des diffuseurs mais les considère indépendants statistiquement et ponctuels.

1.8.3.3 Approche de Waterman et Truell

La théorie de Waterman et Truell (*WT*) [24] est une généralisation des travaux de Foldy. Tout d'abord, l'équation 1.145 est étendue à une relation plus générale permettant de retrouver l'*ISA* :

$$\Psi^E(\mathbf{r}|\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \approx \Psi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{j-1}, \mathbf{r}_{j+1}, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (1.147)$$

Le premier terme correspond ici au champ excitant le diffuseur j , évalué au point \mathbf{r} pour une configuration donnée des N diffuseurs. Le terme de droite correspond au champ total au point \mathbf{r} pour la même configuration à laquelle on a ôté le diffuseur j .

Ensuite et c'est le point qui nous concerne particulièrement, un formalisme prenant en compte les corrélations entre diffuseurs a été introduit avec une condition de non interpénétration des diffuseurs. Pour résoudre analytiquement les équations obtenues par cette approche, les auteurs ont poussé le formalisme jusqu'à l'obtention d'équations intégrales calculées dans le cas limite de diffuseurs non corrélés. Cette démarche permet d'obtenir une expression du nombre d'onde effectif à un ordre supérieur à l'*ISA*. Dans ce cadre, on a :

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) + \frac{4n^2}{k_0^2} [f_f(k_0, \pi)^2 - f_f(k_0, 0)^2] \quad (1.148)$$

avec f_f l'amplitude de diffusion définie par Foldy, qui s'exprime en fonction de l'amplitude f présentée en section 1.6.2.1 selon

$$f_f(k_0, \theta) = \sqrt{\frac{\pi k_0}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} f(k_0, \theta)$$

Connaissant l'amplitude de diffusion, la partie imaginaire de k_{eff} nous donne accès à l_e .

1.8.3.4 Approche de Linton et Martin

La formule de Waterman et Truell est utilisée fréquemment lorsqu'il s'agit de faire intervenir les termes de second ordre dans le nombre d'onde effectif. Néanmoins, Lloyd et Berry ont montré dès 1967 [31] que l'expression 1.148 était incorrecte. Dans cette section, nous proposons d'exposer les derniers résultats issus de cette théorie dans le cas bi-dimensionnel.

Les travaux de Linton et Martin (*LM*) [32] ont permis d'obtenir une expression du nombre d'onde effectif dans l'hypothèse de la Hole Correction, de la *QCA* et dans le cas limite de diffuseurs de petite taille par rapport à la longueur d'onde :

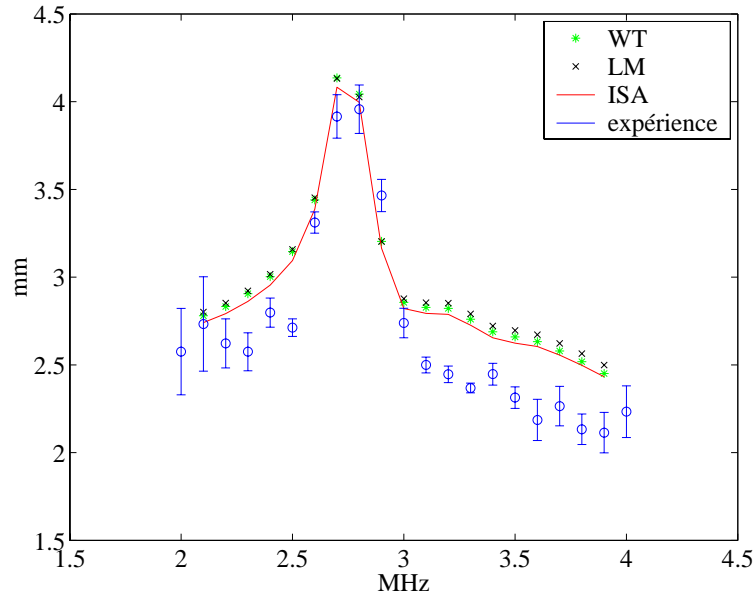


FIG. 1.52: Comparaison de l_e selon les théories de *Waterman et Truell (WT)*, de *Linton et Martin (LM)*, de l'*ISA* et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 .

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) + \frac{8n^2}{\pi k_0^2} \int_0^\pi \cot \frac{\theta}{2} \frac{d}{d\theta} [f_f(\theta)]^2 d\theta \quad (1.149)$$

Cette formule ne fait pas intervenir explicitement la distance d'exclusion, tout comme 1.148. Les l_e obtenus par cette théorie sont comparés aux résultats expérimentaux en figures 1.52, 1.53 et 1.54 pour les trois types d'échantillons de tiges.

Quel que soit le type d'échantillon, on constate que ces théories donnent lieu à des résultats très proches de ceux obtenus par l'*ISA*. La théorie de *WT* est toujours plus proche de l'*ISA* que celle de *LM*.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le plus dense on trouve des écarts moyens respectifs par rapport à l'*ISA* de 1.2 % et 2 % pour *WT* et *LM*. L'écart est moins prononcé dans la zone de résonance qu'aux fréquences extrêmes. Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le moins dense, l'écart moyen est de 0.5 % entre *WT* et l'*ISA*, et de 0.9 % entre *LM* et l'*ISA*. Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , l'écart moyen par rapport à l'*ISA* est respectivement de 0.8 % et 1.5 % pour *WT* et *LM*. Fréquemment on remarque que les courbes issues des deux théories sont plus éloignées de l'*ISA* autour de la fréquence de résonance des tiges pour le diamètre de 0.6 mm . Nous ne trouvons pas de justification physique à cette différence de comportement selon le diamètre des tiges.

La prise en compte des corrélations selon *WT* et *LM* tend donc à augmenter le libre parcours moyen élastique par rapport à l'évaluation de l'*ISA*, ce qui permet de retrouver *qualitativement* les mêmes effets des corrélations que dans la théorie de l'*ITA*. *Quantitativement*, les deux théories

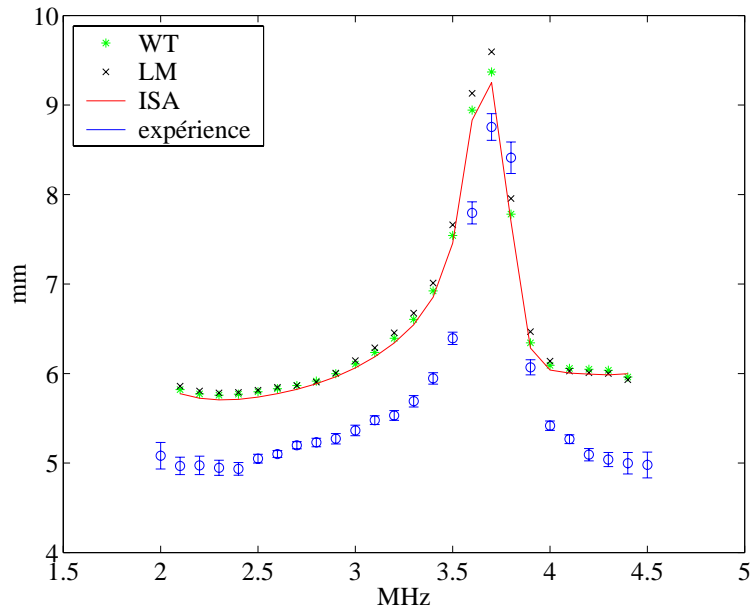


FIG. 1.53: Comparaison de l_e selon les théories de *Waterman et Truell* (WT), de *Linton et Martin* (LM), de l'ISA et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm².

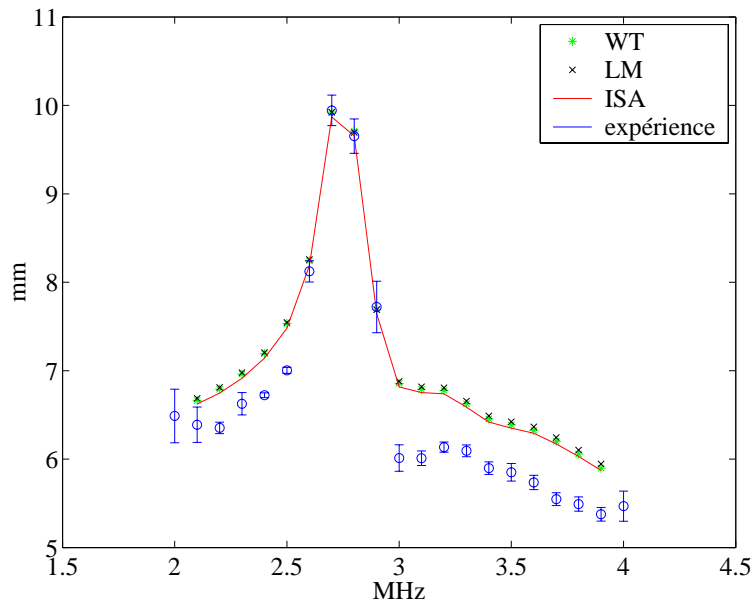


FIG. 1.54: Comparaison de l_e selon les théories de *Waterman et Truell* (WT), de *Linton et Martin* (LM), de l'ISA et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm².

WT et LM ne donnent néanmoins pas d'écarts théorie/expérience aussi grossiers que l' ITA . L'écart théorie/expérience est toutefois systématiquement amplifié par ces théories par rapport à l' ISA . Dans la section suivante, nous exposons la prise en compte des corrélations selon l'approche diagrammatique que nous avons adoptée dans ce travail.

1.9 Formule analytique du coefficient d'extinction au second ordre : approche diagrammatique de Keller

L'approche diagrammatique nous a permis d'exprimer l'opérateur de masse Σ comme la somme des diagrammes fortement connectés en section 1.5.3.5. L'approche de Keller [11] consiste à ne retenir que les deux premiers termes du développement, ce qui donne l'égalité suivante

$$\Sigma = \otimes + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \otimes \text{---} \otimes \end{array}$$

$$\text{Keller} = \text{ISA} + \text{ODDC}$$

Le premier terme donne lieu à la théorie de l' ISA et la correction que nous présentons se réduit à l'opérateur de diffusion double corrélé ($ODDC$) prenant en compte tous les événements de diffusion double entre diffuseurs corrélés. Le calcul de cet opérateur dans le cas bidimensionnel et pour des ondes scalaires est détaillé dans la référence [4]. L'expression de cet opérateur est

$$ODDC(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n^2 \int s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha_i}) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha_j}, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha_j}) g_2(\mathbf{r}_{\alpha_i}, \mathbf{r}_{\alpha_j}) d\mathbf{r}_{\alpha_i} d\mathbf{r}_{\alpha_j} \quad (1.150)$$

avec n le nombre de tiges par unité de surface, g_2 la fonction de corrélation de paire introduite en section 1.8.1. L'approche de Keller considère des diffuseurs de petite taille devant la longueur d'onde, ce qui simplifie l'expression de l'opérateur de diffusion s [4]

$$s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx s(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.151)$$

Cette simplification permet d'exprimer l' $ODDC$ selon

$$ODDC(k) = (ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0))^2 \int_0^\infty \frac{i\pi}{2} H_0^1(k_0 r) J_0(kr) r g_2(r) dr \quad (1.152)$$

On peut donc calculer l'indice effectif k_{eff} selon

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - \Sigma(k_{eff}) \quad (1.153)$$

ce qui donne la formule explicite suivante :

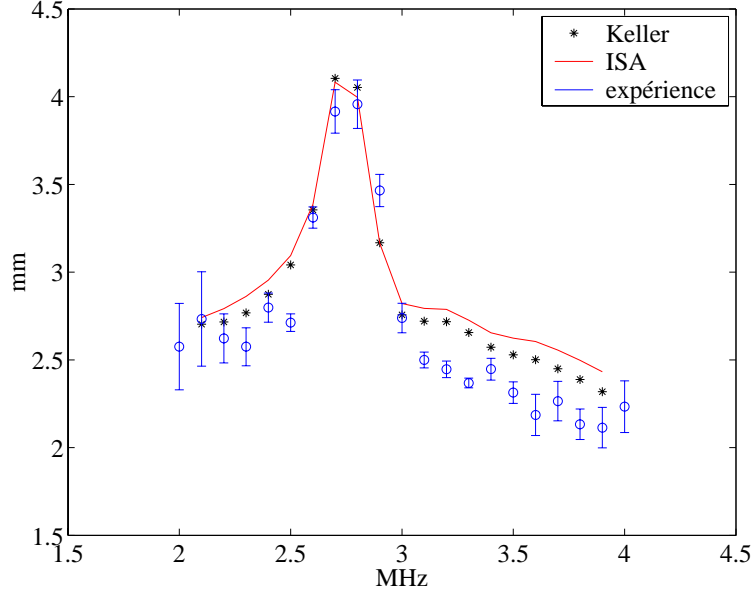


FIG. 1.55: Comparaison de l_e selon les théories de *Keller*, de l'*ISA* et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.29 tige/mm^2 .

$$k_{eff}^2 = k_0^2 - ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) + (ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0))^2 \int_0^\infty \frac{i\pi}{2} H_0^1(k_0 r) J_0(k_{eff} r) r g_2(r) dr \quad (1.154)$$

Pour comparer cette théorie à l'expérience, nous calculons k_{eff} par itération. On commence par calculer le nombre d'onde dans le cadre de l'*ISA*,

$$k_{eff,0}^2 = k_{ISA}^2 = k_0^2 - ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \quad (1.155)$$

On injecte ensuite $k_{eff,0}$ dans le second membre de l'équation 1.154, ce qui donne l'indice à l'ordre d'itération 1, $k_{eff,1}$ selon

$$k_{eff,1}^2 = k_{eff,0}^2 + (ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0))^2 \int_0^\infty \frac{i\pi}{2} H_0^1(k_0 r) J_0(k_{eff,0} r) r g_2(r) dr \quad (1.156)$$

Après N itérations, on obtient

$$k_{eff,N}^2 = k_{eff,0}^2 + (ns(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0))^2 \int_0^\infty \frac{i\pi}{2} H_0^1(k_0 r) J_0(k_{eff,N-1} r) r g_2(r) dr \quad (1.157)$$

On continue la procédure jusqu'à ce que $k_{eff,N} \approx k_{eff,N-1}$. En pratique, la convergence s'obtient pour moins de 10 itérations avec nos valeurs numériques.

La comparaison de cette théorie aux valeurs expérimentales est exposée en figure 1.55, 1.56 et 1.57 pour les trois types d'échantillon de tiges.

On constate que la prise en compte des corrélations par cette théorie réduit l'écart aux valeurs expérimentales par rapport à l'*ISA*. En particulier, pour l'échantillon le moins dense, la théorie de *Keller* décrit parfaitement les résultats expérimentaux. En effet, les corrélations diminuent le libre

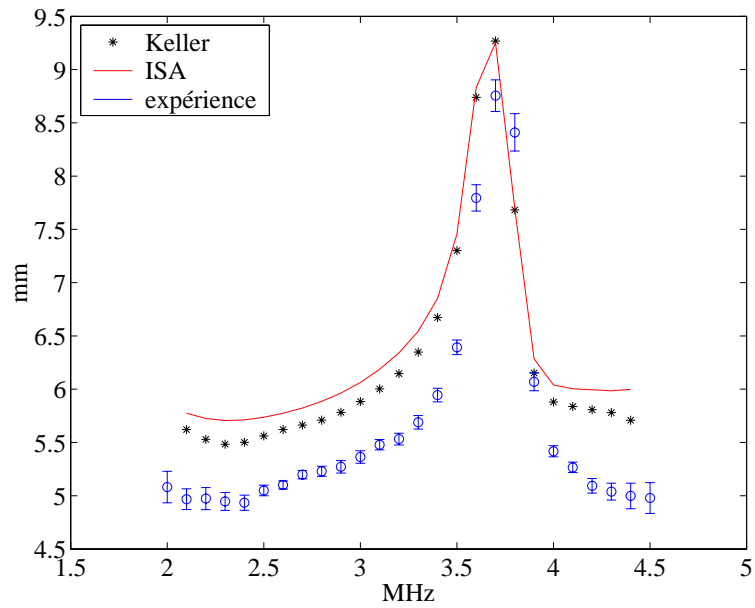


FIG. 1.56: Comparaison de l_e selon les théories de *Keller*, de l'*ISA* et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm².

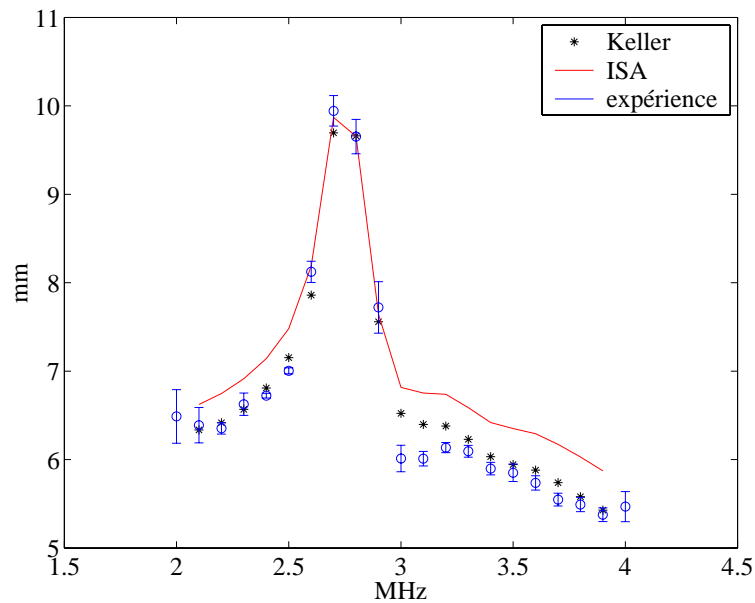


FIG. 1.57: Comparaison de l_e selon les théories de *Keller*, de l'*ISA* et l'expérience pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de concentration 0.12 tige/mm².

parcours moyen élastique : qualitativement on observe donc une prédiction différente de toutes les théories présentées jusqu'à présent.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le plus dense, l'écart moyen avec l'*ISA* est de 2.5% . On constate que fréquemment l'approche de Keller ne diffère sensiblement de l'*ISA* que dans les zones hors résonance : ainsi l'écart entre ces deux théories est de 0.1% à 2.8 MHz alors qu'il est pratiquement de 4% à 3.5 MHz . Ce résultat est intéressant dans la mesure où l'*ISA* donnait des résultats satisfaisant autour de la fréquence de résonance. L'approche de Keller permet donc de réduire l'écart entre théorie et expérience dans les plages fréquentielles où l'*ISA* surévalue l_e tout en conservant un faible écart autour des résonances. Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , l'écart moyen entre la théorie de Keller et l'*ISA* est de 2.7% avec le même type de comportement en fréquence : les deux approches sont voisines à la résonance.

Les résultats concernant l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le moins dense donnent lieu à une réduction spectaculaire de l'écart entre théorie et expérience : on passe de 6.5% à 1.5% . Dans ce cas en effet, l'écart entre l'approche de Keller et l'*ISA* est en moyenne de 5% , ce qui est double des autres types d'échantillons.

La comparaison des résultats obtenus pour les deux échantillons de tige de diamètre 0.8 mm montre que l'approche de Keller est d'autant plus vérifiée que la concentration des diffuseurs est faible. L'effet de la force des diffuseurs semble moins prépondérant que celui de la concentration puisque les données relatives aux tiges de diamètre 0.6 mm ne sont pas bien meilleures que celles de diamètre supérieur. Ce résultat est en contradiction avec l'analyse théorique de Frisch [3] qui prévoit une meilleure adéquation de l'approche de Keller dans le cas des diffuseurs faibles que des diffuseurs peu concentrés. Précisons néanmoins que l'expression de l'*ODDC* n'est valable que dans le cas de diffuseurs de très petite taille par rapport à la longueur d'onde, ce qui n'est évidemment pas le cas dans nos expériences. Les conclusions que nous apportons tendent donc à justifier empiriquement une extension de l'approche rigoureuse de Keller au cas de diffuseurs de taille comparable à la longueur d'onde.

L'intervention des corrélations à l'ordre le plus faible par l'approche diagrammatique de Keller permet d'améliorer l'accord entre théorie et expérience par rapport à l'*Independent Scattering Approximation*. Ce résultat n'est pas commun avec les autres approches testées : l'*Interference Scattering Approximation*, la théorie de *Waterman et Truell* et celle de *Linton et Martin*. Ces trois dernières théories ne donnent pas de résultats satisfaisants pour des raisons fondamentales : chacune à leur manière, elles ne permettent pas de hiérarchiser avec rigueur les événements de diffusion. Prenons le cas de l'*ITA* : cette théorie fait intervenir les corrélations en modifiant la section efficace de diffusion. Une telle procédure fait donc intervenir les corrélations à l'ordre 1 vis à vis de la concentration en diffuseurs. Or le développement diagrammatique exposé en section 1.5.3.5 montre clairement que les corrélations n'interviennent qu'à l'ordre 2 : il en résulte une surestimation grossière du libre parcours moyen élastique par la théorie de l'*ITA*. En ce qui concerne les autres théories précédemment exposées (*WT* et *LM*), elles découlent de l'approche de Foldy. Or une dif-

férence fondamentale entre cette dernière et la technique des diagrammes est l'ordre d'intervention des hypothèses simplificatrices. Dans l'approche diagrammatique, on montre [3] que le fait de négliger certains diagrammes plutôt que d'autres peut se justifier par analyse dimensionnelle. Dans l'approche de Foldy, les simplifications ne sont pas toujours justifiées de manière aussi rigoureuses et certaines simplifications s'avèrent injustifiées [3]. Si les deux approches coïncident à l'ordre le plus faible en donnant l'*ISA*, rien ne garantit une bonne adéquation en ajoutant l'intervention des corrélations, et c'est ce que nous observons dans ce chapitre. De plus on peut décrire physiquement les chemins de diffusion pris en compte dans une approche de type Keller, ce qui est bien plus difficile dans les théories dérivées de Foldy.

1.10 Expériences de transmission cohérente avec deux types de diffuseurs

Dans cette section on considère un milieu constitué de deux types de diffuseurs, que l'on nommera milieu hybride. Les échantillons mettant en jeu des diffuseurs de même nature seront nommés *monodisperses*.

1.10.1 Principe

Nous cherchons à déterminer si la technique expérimentale de transmission cohérente permet de distinguer des diffuseurs différents au sein du milieu d'étude. Nous utilisons pour cela un échantillon hybride, constitué de deux tranches de tiges de diamètre 0.6 mm et 0.8 mm (figure 1.58) de même épaisseur. On réalise les acquisitions sur chacune des faces de l'échantillon hybride et on se place dans les mêmes conditions expérimentales que pour les expériences présentées jusqu'ici. La théorie développée précédemment peut se généraliser facilement au cas de diffuseurs différents : au premier ordre par exemple, il suffit de remplacer l'opérateur de masse par celui de la figure 1.59 à droite. On choisit de ne pas reprendre le développement complet, notre approche étant ici expérimentale.

1.10.2 Résultats

La mesure de l_e intégrée sur la bande de fréquence $[2 - 4]\text{ MHz}$ donne une valeur de 3.5 mm avec une erreur d'interpolation de 3 %. Le libre parcours moyen élastique est donc compris entre les valeurs obtenues pour chaque type de tige étudiées séparément²⁵.

La représentation fréquentielle de l_e est exposée en figure 1.60. Pour tracer cette courbe on a intégré l'énergie rétrodiffusée sur des bandes de fréquences de largeur 0.2 MHz comme dans le cas des échantillons homogènes.

On distingue les résonances caractérisant chacun des diamètres de tige. Ainsi la valeur de l_e atteint un maximum à la fréquence 2.8 MHz et présente un maximum relatif autour de la fréquence 3.7 MHz . Autour de 2.7 MHz , les tiges les plus fortes en terme de diffusion sont dans une zone

²⁵ On avait évalué $l_{e08} = 3\text{ mm}$ et $l_{e06} = 6.4\text{ mm}$ en section 1.7.3.

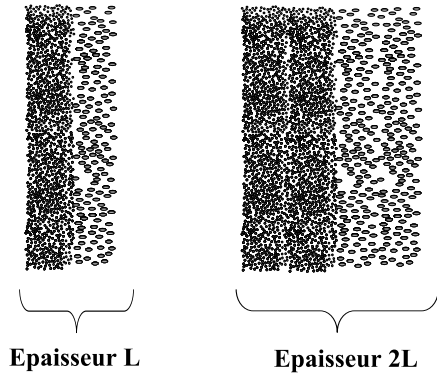


FIG. 1.58: Echantillons hybrides utilisés en transmission cohérente. Les tranches de tiges de diamètre 0.6 mm et 0.8 mm sont juxtaposées.

$$\Sigma = \otimes + \bullet$$

\otimes : diffuseur de type 1

\bullet : diffuseur de type 2

FIG. 1.59: Opérateur de masse dans le cas de l'ISA avec deux types de diffuseurs.

de résonance qui s'accompagne par une baisse de leur pouvoir diffusant, ce qui conduit à une plus grande transparence du milieu. Autour de 3.7 MHz le même phénomène de résonance se retrouve avec les tiges les plus faibles : dans ce domaine fréquentiel le milieu est plus transparent pour les tiges de 0.6 mm mais pas pour celles de diamètre 0.8 mm . Il en résulte une transparence globale moins forte autour de 3.7 MHz qu'autour de 2.7 MHz et un maximum seulement relatif pour l_e . Le libre parcours moyen hybride est plus proche de celui du milieu d'épaisseur optique la plus élevée.

1.10.3 Vérification quantitative

Lorsque l'onde cohérente traverse une épaisseur $2L$ du milieu hybride, elle est atténuée selon la loi classique

$$I(2L) = I_0 \exp\left(-\frac{2L}{l_e}\right) \quad (1.158)$$

avec l_e le libre parcours moyen élastique du milieu hybride et I_0 l'intensité transmise à travers l'eau.

On peut décomposer le terme de décroissance en faisant intervenir les libres parcours moyens élastiques des milieux homogènes de tiges de diamètre 0.8 mm et 0.6 mm , respectivement l_{e08} et l_{e06} :

$$\exp\left(-\frac{2L}{l_e}\right) = \exp\left(-\frac{L}{l_{e08}}\right) \exp\left(-\frac{L}{l_{e06}}\right)$$

Ce qui permet d'obtenir

$$l_e = 2 \left(\frac{l_{e08} l_{e06}}{l_{e08} + l_{e06}} \right) \quad (1.159)$$

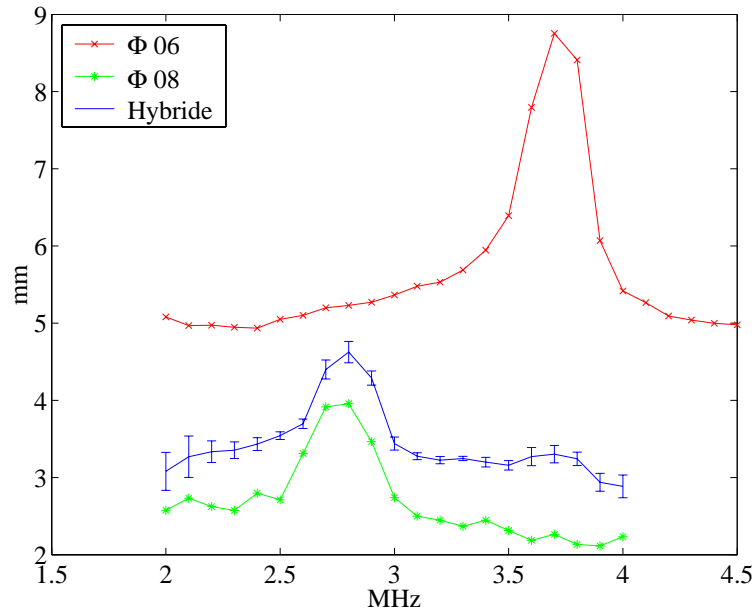


FIG. 1.60: Mesure de l_e avec un milieu hybride composé tiges de diamètre 0.8 mm et 0.6 mm et de concentration respective 0.29 tige/mm² et 0.18 tige/mm². On a reporté l'évaluation de l_e sur les milieux homogènes composés des tiges de même diamètre.

Le tracé fréquentiel de l_e selon la formule 1.159 est comparé à la valeur mesurée expérimentalement en figure 1.61. On constate des valeurs très proches avec un écart moyen de moins de 5 % entre les courbes.

1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'approche diagrammatique de la diffusion multiple et appliqué cette théorie à l'évaluation du libre parcours moyen élastique de milieux composés de tiges de diamètres et concentrations variables. Nous avons modélisé les pertes par absorption à l'interface entre l'eau et les diffuseurs, ce qui nous a permis de négliger l'absorption dans l'exploitation de nos expériences. Nous avons montré que la théorie de l'ISA pouvait être affinée de manière efficace en utilisant l'approximation de Keller faisant intervenir les corrélations entre diffuseurs. La comparaison de différentes techniques classiques pour prendre en compte les corrélations a montré que l'approche diagrammatique donnait les meilleurs résultats. A ce stade, on peut considérer qu'on dispose d'une méthodologie expérimentale fiable pour mesurer l_e , et les outils théoriques correspondants.

Dans le chapitre suivant, nous appliquons l'approche diagrammatique à l'étude de l'intensité multiple diffusée en régime dynamique.

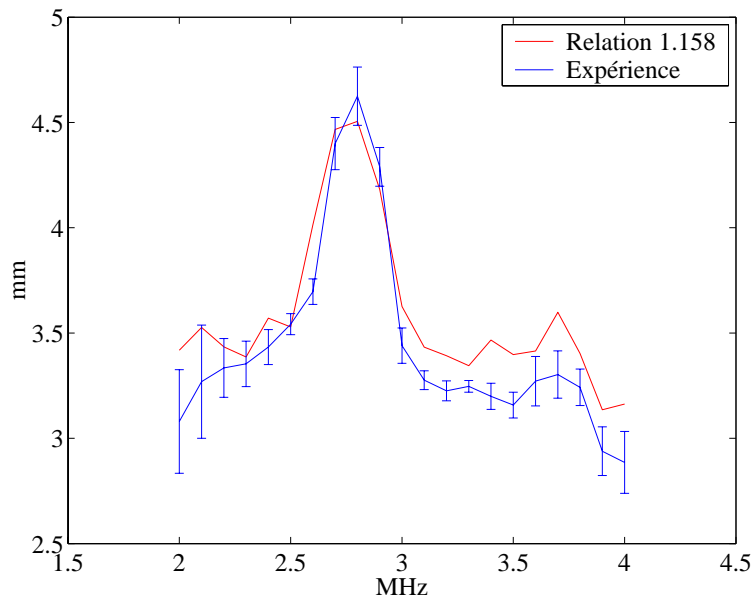


FIG. 1.61: Comparaison des valeurs de l_e en fréquence selon la relation 1.159 et l'expérience pour l'échantillon hybride. On constate un très bon accord entre la prévision et l'expérience. La seconde résonance, bien que visible, est étouffée dans cette configuration.

Chapitre 2

Intensité multiplement diffusée en régime dynamique

2.1 Introduction

L'étude approfondie du champ cohérent nous a permis de mesurer le libre parcours moyen élastique l_e . Ce chapitre, dédié à l'étude de l'intensité multiplement diffusée en régime dynamique va nous permettre de déterminer deux autres paramètres essentiels en diffusion multiple : la constante de diffusion D du milieu ainsi que le libre parcours moyen d'absorption l_a . Nous verrons notamment comment exploiter un phénomène de physique mésoscopique : la rétrodiffusion cohérente.

Le cadre général de notre étude met en jeu un milieu diffuseur insonifié par une onde et l'on s'intéresse au champ diffusé hors du milieu dans une direction quelconque. En notant $A_p(t)$ l'évolution temporelle de l'amplitude de l'onde partielle empruntant un chemin p donné, on peut écrire le champ C sous la forme :

$$C(t) = \sum_p A_p(t)$$

L'intensité diffusée est donc

$$I(t) = \left\| \sum_p A_p(t) \right\|^2$$

soit

$$I(t) = \sum_p \|A_p(t)\|^2 + \sum_p \sum_{p \neq q} A_p^*(t) A_q(t)$$

Le premier terme correspond à l'intensité "incohérente" au sens où la contribution de N chemins se réduit à la somme de leurs intensités individuelles. On parle parfois "d'interférence" entre chemins qui ont suivi la même séquence de diffuseurs (figure 2.1 à gauche).

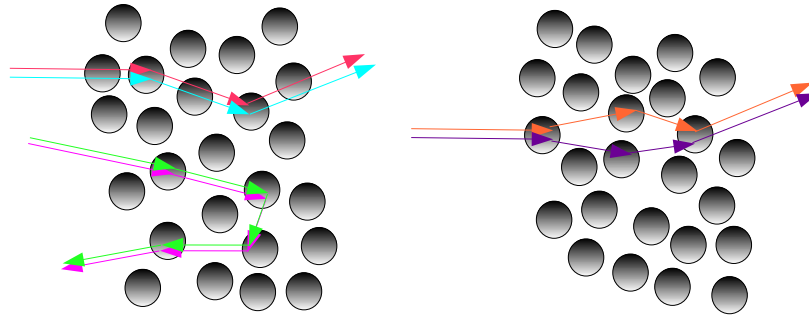


FIG. 2.1: Figure de gauche : représentation de chemins contribuant à la partie incohérente : les parcours sont confondus. Figure de droite : les chemins passant par au moins un diffuseur différent ne résistent pas à la moyenne.

Le deuxième terme correspond aux interférences entre les ondes partielles. Dans une première approche, on considère le cas où les phases de ces ondes partielles ne sont pas corrélées. Les différences de phase entre deux chemins de diffusion distincts sont donc des variables aléatoires sans corrélation (figure 2.1 à droite). La répartition angulaire de l'intensité diffusée correspond à une somme de fonctions aléatoires ne dépendant que de la répartition des diffuseurs et donnant lieu, pour une réalisation du désordre, à des fluctuations fortes selon la direction d'observation. Le signal fluctuant observé (figure 2.2 à gauche) est appelé *speckle ultrasonore*. Lorsque l'on réalise une autre expérience avec une répartition différente des diffuseurs, on observe une autre figure de speckle sans rapport avec la première : on conçoit donc qu'une moyenne sur le désordre devrait annuler les fluctuations erratiques pour donner lieu à l'observation de la seule intensité incohérente. Par définition, cette dernière ne dépend pas des différences de phases entre chemins et varie donc lentement avec la direction d'observation par rapport au *speckle*, selon la géométrie du milieu.

Dans le cas de l'intensité *transmise*, ce raisonnement intuitif permet de rendre compte des phénomènes physiques de manière précise. En effet si l'épaisseur du milieu diffuseur dépasse quelques l_e , l'onde cohérente donne lieu à une intensité transmise nulle et l'étude de l'intensité diffusée peut se réduire à celle de sa partie incohérente. Nous montrerons dans la section 2.4 que l'étude de l'intensité transmise peut se ramener à celle de l'intensité diffuse au sens de l'équation de diffusion de la chaleur. Précisons qu'une équation de diffusion, dans l'acception du terme *diffusion de la chaleur*, est un régime où le transport d'une grandeur vérifie la loi de Fick. Dans notre cas il s'agit de l'intensité diffusée dans le milieu. L'énergie s'étale dans le milieu selon un *halo diffusif*, dont l'évolution spatio-temporelle est quantifiée par le paramètre coefficient de diffusion D . Dans ce cas l'intensité se réduit à la somme des contributions individuelles des chemins de diffusion, ce qui constitue le cadre de "l'approche classique" de la diffusion. Cette approche consiste à négliger les interférences et conduit à traiter les ondes comme des particules classiques. Nous détaillerons comment extraire la longueur caractéristique d'absorption du milieu de l'étude de cette intensité transmise diffuse.

Néanmoins pour l'intensité *rétrodiffusée*, le raisonnement précédent s'écroule : une moyenne sur le désordre montre que toutes les directions ne donnent pas lieu à la distribution attendue de l'intensité en rétrodiffusion. En particulier l'expérience montre que l'énergie réfléchiée dans la direction

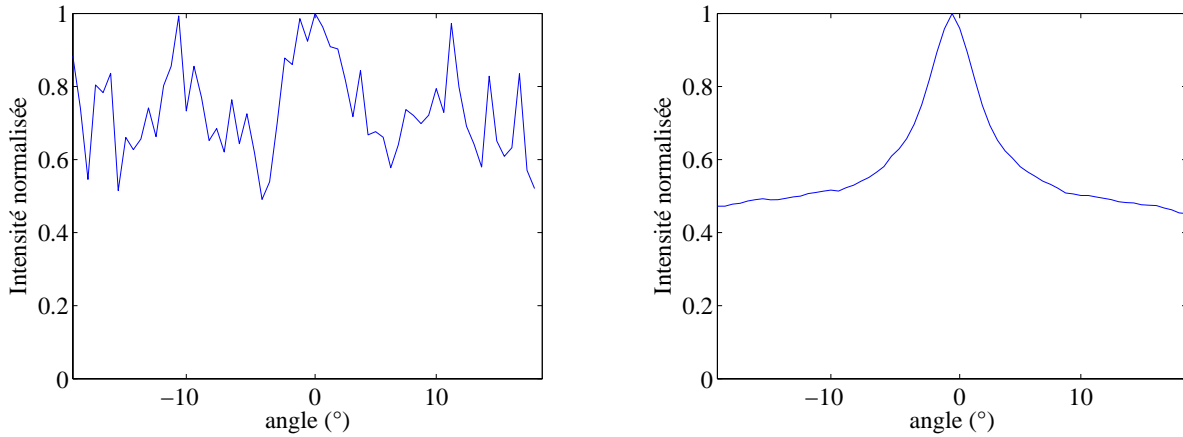


FIG. 2.2: Figure de gauche : speckle ultrasonore. Figure de droite : après moyenne la répartition angulaire de l'intensité rétrodiffusée présente une surintensité dans la direction d'angle nulle. Ce profil porte le nom de cône de rétrodiffusion cohérente. Ces données expérimentales sont obtenues sur un échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de concentration 0.29 tiges/mm^2 à la fréquence 3 MHz .

d'incidence est double de la seule contribution incohérente (figure 2.2 à droite). Ce phénomène physique est commun à tous les types d'ondes : électromagnétiques [33, 34], sismiques [35], électrons dans un solide [36, 37] et acoustiques [38]. Il se nomme “rétrodiffusion cohérente” et a pour origine le *principe de réciprocité*. L'étude de l'évolution temporelle de ce phénomène constitue l'objectif de cette section, on parlera de *rétrodiffusion cohérente dynamique*.

Historiquement la rétrodiffusion cohérente a intrigué les physiciens car elle montrait les limites de l'*approche classique* pour décrire la propagation d'une onde en milieu multiplement diffuseur. L'augmentation de la probabilité de retour de l'onde dans sa direction d'incidence se traduit par une diminution de la constante de diffusion D du milieu avec l'ordre de diffusion moyen et donc l'épaisseur d'un matériau donné. L'obtention d'un tel régime transforme ainsi la constante de diffusion en une grandeur extensive dont la théorie prédit même l'annulation dans le cadre de la localisation forte [39].

Nous cherchons à répondre à la question suivante : la rétrodiffusion cohérente est elle un simple phénomène de laboratoire ou bien peut-elle servir à caractériser un milieu multiplement diffuseur ? Dans un premier temps, nous rappelons le formalisme général prenant en compte ces phénomènes et permettant de comprendre les comportements si différents des ondes transmises et rétrodiffusées. Nous montrerons comment le phénomène de rétrodiffusion cohérente dynamique permet effectivement de mesurer le coefficient de diffusion D du milieu. Nous analyserons la validité des approximations effectuées, discuterons l'influence des paramètres expérimentaux sur la mesure de D et montrerons que notre mesure de ce coefficient est *indépendante de l'absorption intrinsèque* du milieu.

2.2 Approche diagrammatique

Nous avons déjà utilisé les diagrammes de diffusion dans le cadre de l'étude du champ multiplement diffusé. Nous avons vu que cette technique permettait de classer de manière rigoureuse les différents types de chemins de diffusion. Nous allons utiliser la même démarche pour décrire l'intensité multiplement diffusée. Dans un premier temps, nous exposons la relation self-consistante fondamentale pour l'intensité : l'équation de Bethe-Salpeter. Nous présentons ensuite l'approximation des diagrammes de Ladder qui permet de retrouver les expressions classiques de l'intensité diffusée sans prendre en compte les interférences. Enfin nous faisons intervenir les diagrammes croisés qui permettent de prendre en compte le phénomène de rétrodiffusion cohérente. Dans toute cette partie, nous utilisons les démarches et notations de [2, 3].

2.2.1 Equation de Bethe-Salpeter

On a vu au premier chapitre (section 1.5.3.5) que la fonction de Green non moyennée pouvait se développer en fonction des opérateurs de diffusion par un diffuseur isolé s selon

$$G = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

La fonction de Green conjuguée peut s'exprimer d'une manière semblable en adoptant la convention suivante

- Un trait horizontal barré d'un tiret vertical représente la fonction de Green conjuguée dans l'eau

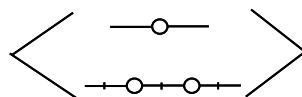
On peut alors représenter G^* selon

$$G^* = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

Afin de disposer de la fonction de corrélation des fonctions de Green des champs produits en \mathbf{r} et \mathbf{r}' par les sources \mathbf{r}_o et \mathbf{r}'_o soit $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_o) \rangle$ on multiplie les développements précédents et on moyenne sur le désordre le produit obtenu. Les diagrammes que nous présentons dans ce chapitre utilisent les conventions suivantes [3] :

- Comme au premier chapitre, les lignes pleines non horizontales relient les opérateurs de diffusion d'un même et seul diffuseurs.
- Les lignes pointillées relient les diffuseurs corrélés.

L'effet de la moyenne est de faire intervenir les densités de probabilité définies dans le premier chapitre (section 1.5.3.2). Considérons le terme suivant



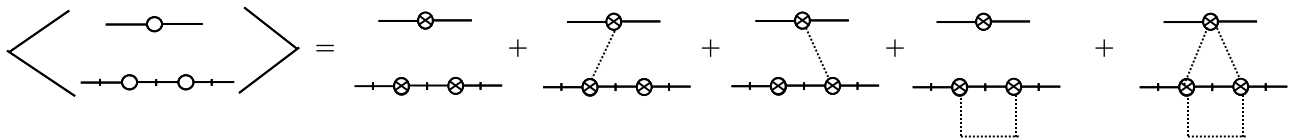
Il s'agit de moyennner le produit de l'ensemble des événements de diffusion simple par l'ensemble des événements de diffusion double. On note $\mathbf{r}'_{\alpha i}$ avec $i \in \{1; 2; 3\}$ les positions des centres des trois diffuseurs impliqués pour une configuration du désordre. On note \mathbf{r}_j avec $j \in \{1; 2; 3; 4\}$ les coordonnées des événements de diffusion dans une configuration donnée. Pour prendre en compte tous les événements de diffusion en moyennnant sur les positions des trois diffuseurs, il est nécessaire d'intégrer les contributions sur les variables \mathbf{r}_i et \mathbf{r}'_j . Ces dernières variables sont pondérées par les densités de probabilité à trois diffuseurs p_3 , ce qui permet d'obtenir

$$\int G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_0) G_0^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_3) s(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_{\alpha 2}) \times \\ G_0^*(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) s(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{\alpha 3}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_{\alpha 3}) G_0^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_0) p_3(\mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}'_{\alpha 2}, \mathbf{r}'_{\alpha 3}) d\mathbf{r}'_{\alpha 1} d\mathbf{r}'_{\alpha 2} d\mathbf{r}'_{\alpha 3} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j$$

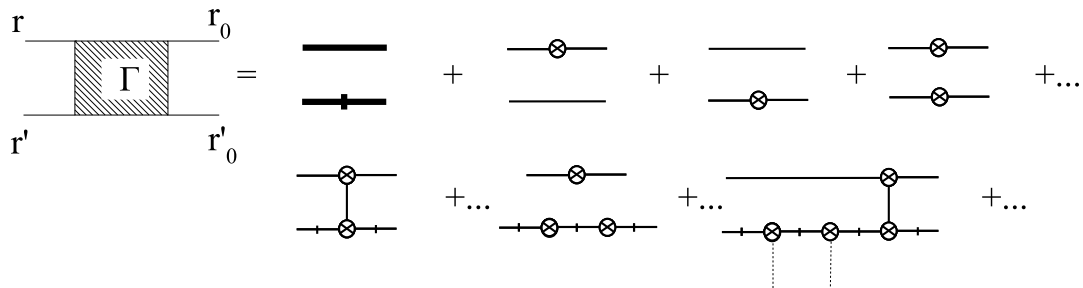
La densité p_3 se décompose selon

$$p_3(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3) = p_1(\mathbf{r}'_1) p_1(\mathbf{r}'_2) p_1(\mathbf{r}'_3) [1 + g_2(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) + g_2(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3) + g_2(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_3) + g_3(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3)]$$

Pour exprimer la moyenne sur le désordre de l'opérateur de diffusion simple, on utilise un cercle barré d'une croix, comme au premier chapitre. On peut donc écrire le diagramme précédent sous la forme

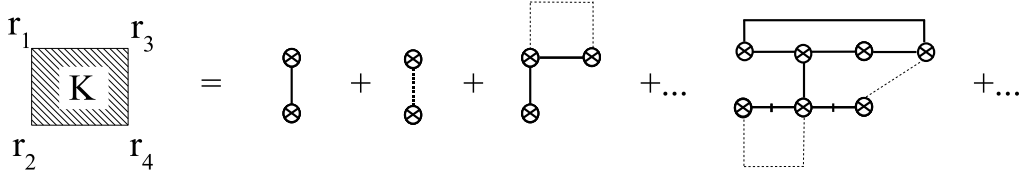


On note alors $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_o, \mathbf{r}'_o) = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_o) \rangle$ que l'on nommera Γ et dont le développement s'écrit :



On définit le kernel $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ comme étant la somme des diagrammes fortement connectés, c'est donc l'équivalent de l'opérateur de masse pour le champ. On le nomme également *vertex irréductible*.

Son développement est le suivant :



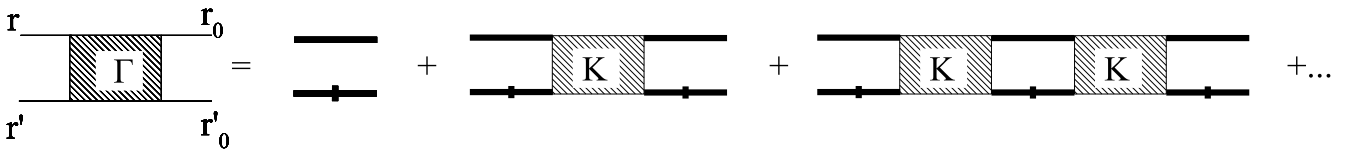
Comme au premier chapitre, il convient de revenir aux expressions intégrales des diagrammes dès que l'on souhaite calculer explicitement les contributions. Par exemple, l'expression sous forme intégrale des diagrammes précédents s'écrit :

$$\begin{aligned}
 K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = & n \int s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) d\mathbf{r}'_{\alpha 1} \\
 & + n^2 \int s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}) g_2(\mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}'_{\alpha 2}) d\mathbf{r}'_{\alpha 1} d\mathbf{r}'_{\alpha 2} \\
 & + n^3 \int s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) s(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{\alpha 3}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_{\alpha 3}) \\
 & \times s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}) g_2(\mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}'_{\alpha 3}) d\mathbf{r}'_{\alpha 1} d\mathbf{r}'_{\alpha 2} d\mathbf{r}'_{\alpha 3} d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j \\
 & + n^5 \int s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) s(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{\alpha 3}, \mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_{\alpha 3}) \\
 & \times G_0(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_l) s(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}'_{\alpha 5}, \mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_{\alpha 5}) G_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n) s(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) \\
 & \times s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}, \mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_{\alpha 2}) G_0^*(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) s(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}'_{\alpha 3}, \mathbf{r}_r - \mathbf{r}'_{\alpha 3}) G_0^*(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}_s) \\
 & \times s(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_{\alpha 6}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_{\alpha 6}) g_2(\mathbf{r}'_{\alpha 3}, \mathbf{r}'_{\alpha 4}) g_2(\mathbf{r}'_{\alpha 6}, \mathbf{r}'_{\alpha 1}) d\mathbf{r}'_{\alpha 1} \dots d\mathbf{r}'_{\alpha 6} d\mathbf{r}_i \dots d\mathbf{r}_s
 \end{aligned}$$

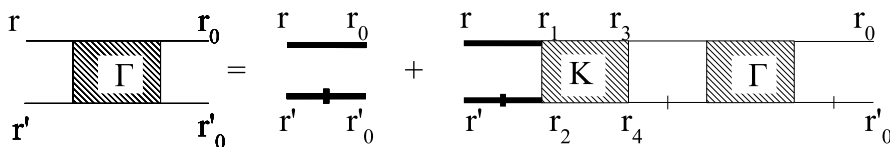
On définit le kernel réductible K_r par la relation suivante :



Le développement de Γ peut s'exprimer facilement à l'aide de K selon



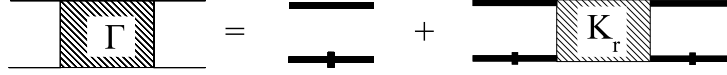
En arrangeant les termes pour faire apparaître Γ dans le second membre, on obtient une équation self-consistante analogue à la relation de Dyson pour la fonction de Green du champ : l'équation de Bethe-Salpeter (*EBS*).



L'écriture intégrale de cette équation est¹

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \overline{G}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) + \int \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \overline{G}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4 \quad (2.1)$$

On peut réécrire l'*EBS* sous une forme fermée :



Ce qui donne lieu à l'équation

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \overline{G}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) + \int \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \overline{G}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) K_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \overline{G}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \overline{G}^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_0) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4 \quad (2.2)$$

Cette équation contient toutes les informations sur l'intensité multiplement diffusée. Elle prend en compte les contributions de tous les chemins : ceux qui passent ou non par les mêmes diffuseurs, ceux dont les premier et dernier diffuseurs sont confondus (*chemins récurrents*), ainsi que les couples rencontrant les mêmes diffuseurs mais dans un ordre opposé (*chemins réciproques*). De plus, on note que les corrélations entre diffuseurs sont également prises en compte. Le problème est que la relation 2.2 est insoluble sous cette forme générale. Mais jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse restrictive sur les longueurs caractéristiques du problème. Dans la section suivante, nous exposons les simplifications les plus classiques pour rendre l'*EBS* utilisable en pratique.

2.2.2 Approximation des diffuseurs ponctuels

La théorie développée jusqu'ici pour l'intensité ne fait aucune hypothèse sur la taille des diffuseurs. Or l'opérateur s peut s'exprimer comme dans le premier chapitre dans le cas de diffuseurs ponctuels, ce qui revient à diminuer l'ordre d'intégration des différents diagrammes. Considérons par exemple le troisième terme du vertex irréductible dont l'expression dans le cas général est :

$$n^3 \int s(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_{\alpha 1}) G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) s(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_{\alpha 3}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_{\alpha 3}) s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_{\alpha 2}) g_2(\mathbf{r}'_{\alpha 1}, \mathbf{r}'_{\alpha 3}) d\mathbf{r}'_{\alpha 1} d\mathbf{r}'_{\alpha 2} d\mathbf{r}'_{\alpha 3} d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j$$

Dans l'hypothèse de diffuseurs ponctuels cette expression se réduit à

$$n^3 \int s(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) s(\mathbf{r}_3) s(\mathbf{r}_2) g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3$$

On notera que dans ce cadre, on confond les variables des kernels avec les centres des diffuseurs, puisque les points d'entrée et de sortie des diffuseurs sont confondus avec les centres de ces derniers, ce qui n'est pas le cas dans la théorie générale.

¹ Afin d'alléger les écritures, nous utilisons la notation $\overline{G} = \langle G \rangle$.

2.2.3 Approximation de “ladder”

Nous faisons l’hypothèse de diffuseurs non corrélés et considérons le cas où la distance moyenne entre deux diffuseurs est plus grande que la longueur d’onde. Les différences de phases aléatoires entre les chemins de diffusions distincts ne résistent pas à la moyenne : seuls les couples de chemins rencontrant les mêmes diffuseurs sont pris en compte. Cette approximation revient à réduire le kernel au premier terme apparaissant dans son développement diagrammatique :

$$\boxed{\text{K}} = \begin{array}{c} \otimes \\ | \\ \otimes \end{array}$$

L’*EBS* développée devient alors

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \boxed{\Gamma} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \otimes \\ | \\ \otimes \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \otimes \otimes \\ | \\ \otimes \otimes \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots$$

Sous forme intégrale, le vertex réductible s’écrit [2] :

$$K_{rL}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \quad (2.3)$$

Avec L le vertex réductible en approximation de ladder².

$$\boxed{\text{L}} = \begin{array}{c} \otimes \\ | \\ \otimes \end{array} + \begin{array}{c} \otimes \otimes \\ | \quad | \\ \otimes \otimes \end{array} + \begin{array}{c} \otimes \otimes \otimes \\ | \quad | \quad | \\ \otimes \otimes \otimes \end{array} + \begin{array}{c} \otimes \otimes \otimes \otimes \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \otimes \otimes \otimes \otimes \end{array} + \dots$$

Ce développement conduit donc à ne considérer que les contributions des ondes ayant parcouru le même chemin : l’intensité résultante se réduit à sa partie incohérente, ce qui revient à négliger les effets des interférences. Cette approximation a permis de donner une base microscopique aux théories du transport en considérant le cheminement d’une onde comme une marche au hasard à travers le milieu. Sous certaines hypothèses que nous détaillerons par la suite, on peut modéliser la propagation de l’intensité par une équation de diffusion du même type que celle gouvernant les transferts thermiques.

2.2.4 Inclusion des diagrammes croisés

Cependant, certains diagrammes ignorés par l’approximation de ladder ont une importance particulière dans le cadre de la rétrodiffusion cohérente que nous étudierons en 2.3.1. En effet, les couples de chemins *réciroques* mettent en jeu les mêmes diffuseurs dans des ordres de rencontre opposés. Un exemple de couple de chemins *réciroques* est donné en figure 2.2.1. Il est impératif de considérer ces chemins si l’on veut rendre compte de la rétrodiffusion cohérente.

² L’allure de l’*EBS* développée selon cette approximation ressemble à une succession d’échelle, d’où le nom *ladder* (échelle en anglais).

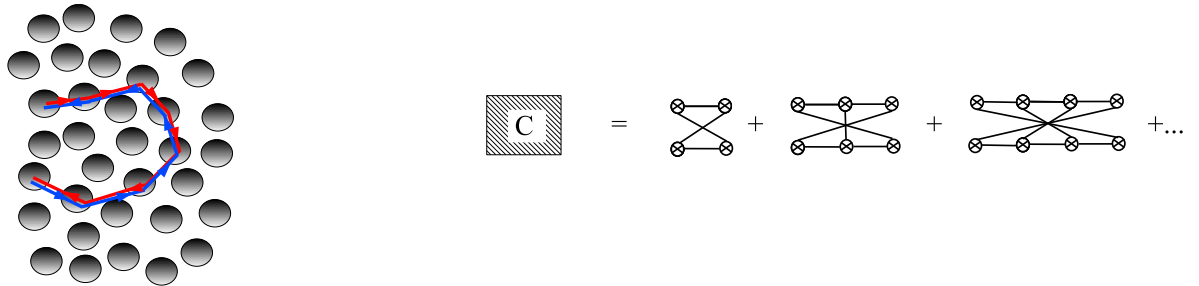


Fig 2.2.1 : A gauche : deux chemins réciproques sont représentés, à droite : l'opérateur C correspondant prend en compte les diagrammes croisés.

Sous forme intégrale, le vertex réductible s'écrit [2] :

$$K_{rC}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)\delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \quad (2.4)$$

Avec C le vertex réductible des diagrammes croisés dont le développement débute comme indiqué en figure 2.2.1.

La rétrodiffusion cohérente fait intervenir le vertex réductible total K_{rT} tel que

$$K_{rT} = K_{rL} + K_{rC} \quad (2.5)$$

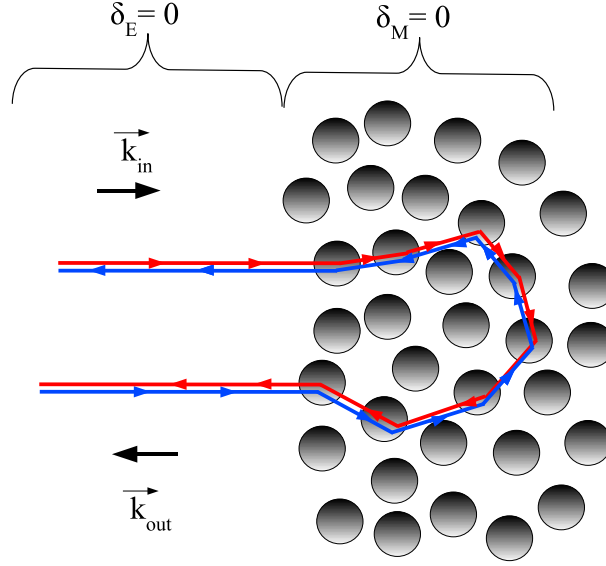


FIG. 2.3: On note δ_E et δ_M les différences de marche entre deux chemins respectivement dans l'eau et dans le milieu diffuseur. Le couple de chemin présenté donne lieu à une différence de marche nulle tant dans le milieu diffuseur que dans l'eau : il contribue donc à la moyenne des intensités reçues.

2.3 Théorie de la rétrodiffusion cohérente dynamique

2.3.1 Approche qualitative

Lorsque l'on observe l'intensité diffusée moyennée sur le désordre, on s'intéresse à la quantité :

$$\langle I(t) \rangle = \left\langle \sum_p \|A_p(t)\|^2 \right\rangle + \left\langle \sum_p \sum_{p \neq q} A_p^*(t) A_q(t) \right\rangle \quad (2.6)$$

Le premier terme traduit la sommation individuelle des intensités des chemins, on le notera I_I , l'indice I signifiant *incohérent*.

Le deuxième terme dans le membre de droite met en jeu les contributions des couples de chemins différents. Dans l'hypothèse de diffuseurs éloignés d'une distance supérieure à la longueur d'onde, deux chemins passant par des diffuseurs différents ne contribuent pas à l'intensité diffusée en moyenne. Dans le cadre de cette thèse, on étudie la rétrodiffusion cohérente en champ lointain³ : examinons les types de chemins qui résistent à la moyenne sur le désordre dans ces conditions expérimentales. Pour contribuer à l'intensité moyennée il faut que la différence de marche δ entre les deux couples de chemins soit nulle. On peut décomposer ce terme selon $\delta = \delta_M + \delta_E$ avec δ_M et δ_E respectivement la différence de marche dans le milieu diffuseur et dans l'eau.

- La nullité de δ_M implique la rencontre des mêmes diffuseurs.
- La nullité de δ_E implique l'observation des ondes dans la direction d'incidence.

On en conclut que pour résister à la moyenne sur le désordre, les couples de chemins distincts doivent mettre en jeu les mêmes diffuseurs dans un ordre de rencontre opposé et être observés dans

³ Cette notion sera précisée en section 2.3.2.

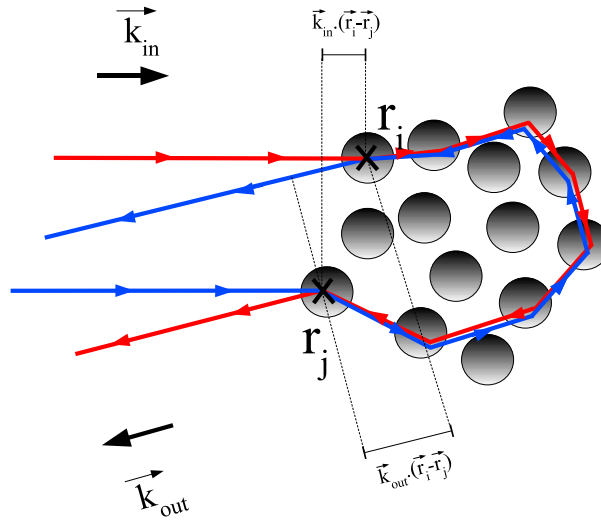


FIG. 2.4: La différence de phase à grande distance dans la direction \mathbf{k}_{out} vaut $(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$.

la direction d'incidence : ce sont les chemins réciproques présentés dans la section précédente. La figure 2.3 montre deux de ces chemins. La contribution des chemins réciproques à l'intensité est couramment nommée l'intensité cohérente I_C^4 . Elle traduit le rôle des interférences entre chemins réciproques qui subsistent même après de nombreuses diffusions dans le milieu. Remarquons dès à présent que la notion de chemins réciproques telle que nous la définissons dans cette section nécessite la rencontre d'au moins *deux événements* de diffusions, et **ne peut donc pas concerner la diffusion simple**.

Décomposition de l'intensité moyenne diffusée

Détaillons l'expression de 2.6 dans le cas d'une intensité observée dans la direction \mathbf{k}_{out} après émission d'une onde plane dans une direction \mathbf{k}_{in} : $I(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}, t)$. On remplace la somme sur les chemins par une énumération de la position des centres des premier et dernier diffuseurs rencontrés pour un chemin donné, respectivement \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j .

On note $A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)$ l'amplitude au temps t et au point \mathbf{r}_j pour un point source situé en \mathbf{r}_i . On a la relation suivante en champ lointain :

$$\langle I(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}, t) \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \|A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)\|^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i,j} A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t) A^*(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i, t) e^{i(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \right\rangle \quad (2.7)$$

Le second terme prend en compte les différences de phases entre les chemins réciproques dans la direction d'observation \mathbf{k}_{out} , de forme $\Delta\Phi_{i,j} = (\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. La différence de phase est

⁴ Cette dénomination est abusive car elle sous-entend que le reste des contributions à l'intensité ne fait pas intervenir d'interférences, ce qui est inexact comme nous le soulignons par la suite.

nulle dans la direction d'observation $\mathbf{k}_{out} = -\mathbf{k}_{in}$, c'est-à-dire à la rétrodiffusion. On constate en outre que tous les chemins tels que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ donnent lieu à des interférences constructives quelles que soient les directions d'observation : on parle de chemins récurrents. Vu que ces contributions n'ont pas de dépendance angulaire, ils interviennent dans le cône de rétrodiffusion à la manière de l'intensité incohérente. C'est pourquoi on classe l'intensité des chemins récurrents dans le terme I_I bien qu'ils résultent d'interférences résistant à la moyenne. De la même manière, on constate que les chemins de diffusion simple donnent lieu à des contributions égales dans toutes les directions et nous nommons leur contribution I_S . Notons $\theta = \widehat{(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})}$ l'angle d'observation par rapport à la direction d'incidence. On peut donc décomposer l'intensité moyennée I_M selon [40]

$$I_M(\theta, t) = \langle I(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}, t) \rangle = I_S(\theta, t) + I_I(\theta, t) + I_C(\theta, t)$$

Evolution temporelle de l'intensité cohérente

La différence de phase entre les chemins de diffusion réciproques est nulle dans la direction arrière quelle que soit la position des diffuseurs. En dehors de cette direction particulière, $\Delta\Phi_{i,j}$ est non nulle et dépend de la position des premier et dernier diffuseurs : la contribution des chemins réciproques ne résiste à la moyenne que dans la direction de rétrodiffusion. On peut évaluer le secteur angulaire $\Delta\theta$ dans lequel I_C est non nul par la condition $(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 1$. Le secteur angulaire $\Delta\theta$ est donc de l'ordre de

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

Comme nous le justifierons par la suite, on peut modéliser la diffusion multiple par une approche diffusive : au cours du temps le halo diffusif s'étend selon une loi caractéristique en \sqrt{Dt} , D étant la constante de diffusion du milieu. Un ordre de grandeur de la distance entre le premier et le dernier diffuseur à un temps t est donc donné par \sqrt{Dt} . L'évolution temporelle du secteur angulaire où I_C est non nul est donc du type :

$$\Delta\theta(t) \approx \frac{\lambda}{\sqrt{Dt}} \quad (2.8)$$

En régime dynamique, on s'attend donc à ce que le cône de rétrodiffusion cohérente s'affine au cours du temps (on parlera de cône dynamique), et on peut espérer accéder à la constante de diffusion en mesurant la largeur dudit cône. On a représenté un cône dynamique en figures 2.5 et 2.6. Dans ces représentations, chaque intensité est normalisée à un temps donné par son maximum. On remarque que la zone centrale de surintensité (pic de rétrodiffusion cohérente) s'affine bien avec le temps. D'autre part, pour des angles d'observation plus élevés, le cône donne lieu à un palier à peu près horizontal ("ailes" du cône) dont le niveau baisse avec le temps. Il est instructif de s'intéresser à la valeur du rapport entre le pic et les bords : le facteur d'amplification.

Facteur d'amplification

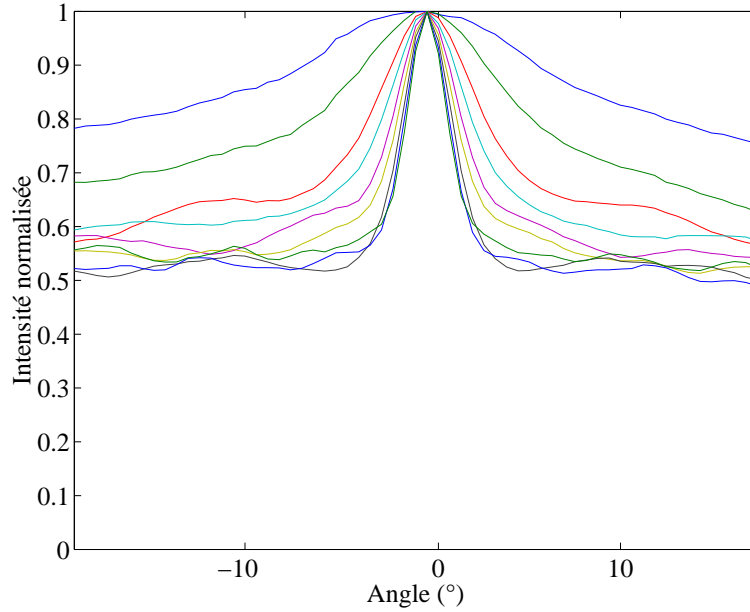


FIG. 2.5: Représentation de l'évolution temporelle du cône de rétrodiffusion cohérente avec l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 et de 40 mm d'épaisseur, à la fréquence centrale 3.2 MHz , pour des temps compris entre $5\text{ }\mu\text{s}$ et $50\text{ }\mu\text{s}$ par pas de $5\text{ }\mu\text{s}$. En abscisse est représenté l'angle d'observation, en ordonnée l'intensité normalisée par la valeur à la rétrodiffusion.

La zone de surintensité s'affine avec le temps.

On définit le facteur d'amplification $F(t)$ de l'intensité diffusée en rétrodiffusion par le rapport :

$$F(t) = \frac{I_M(0, t)}{I_M(\theta_{lim}, t)} \quad (2.9)$$

L'angle θ_{lim} est l'angle limite permettant de définir correctement le palier horizontal. On doit choisir $\theta_{lim} > \lambda\sqrt{Dt}$ afin d'assurer la nullité de $I_C(\theta_{lim}, t)$ mais nous verrons que la valeur de θ_{lim} ne peut être aussi grande que l'on veut en pratique du fait de la technique de construction des cônes et de la directivité des capteurs.

Dans une première approche, on considère qu'à l'échelle de θ_{lim} les termes $I_S(\theta, t)$ et $I_I(\theta, t)$ ne dépendent pas de l'angle d'observation θ :

$$I_S(\theta, t) \approx I_S(0, t) \quad (2.10)$$

$$I_I(\theta, t) \approx I_I(0, t) \quad (2.11)$$

Ainsi le facteur d'amplification ne dépend que du rapport entre $I_C(0, t)$ et $I_S(t) + I_I(t)$:

$$F(t) = 1 + \frac{I_C(0, t)}{I_S(t) + I_I(t)} \quad (2.12)$$

D'après l'équation 2.7, $I_C(0, t)$ est maximal lorsque les amplitudes des chemins réciproques sont égales.

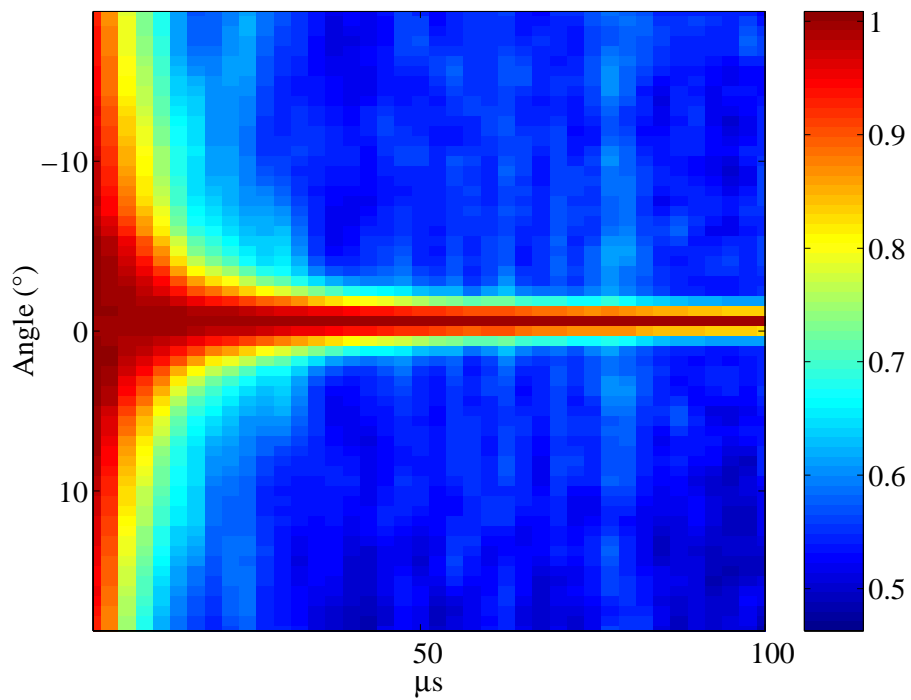


FIG. 2.6: Représentation de l'évolution temporelle du cône de rétrodiffusion cohérente avec une échelle de couleur pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 et de 40 mm d'épaisseur, à la fréquence centrale 3.2 MHz . En abscisse est représenté le temps, en ordonnée l'angle d'observation. On constate un affinement de la zone de surintensité avec le temps.

Le principe de réciprocité

Le principe de réciprocité est la clé du phénomène de rétrodiffusion cohérente. Initialement, il fut mis en évidence en physique quantique dans le cadre de la théorie des collisions élastiques [41]. Considérons le champ Ψ diffusé par un obstacle insonifié par une onde incidente plane de direction \mathbf{k}_{in} . Nous avons vu au premier chapitre que Ψ s'exprimait en champ lointain dans une direction \mathbf{k}_{out} en fonction de l'amplitude de diffusion $f(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$. Le principe de réciprocité s'exprime par l'égalité suivante :

$$f(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}) = f(-\mathbf{k}_{out}, -\mathbf{k}_{in}) \quad (2.13)$$

Il signifie que l'amplitude de diffusion reste la même lorsque l'on intervertit les directions de propagation de l'onde incidente et de l'onde diffusée. Cette relation se généralise au cas où le système présente des degrés de liberté internes, comme le nombre quantique magnétique pour la diffusion de photons par les atomes.

Dans notre étude, nous nous intéressons aux chemins de diffusion multiple mettant en jeu une succession de diffuseurs. Pour un échantillon diffuseur donné, on peut considérer que l'ordre des séquences de diffusion multiple est un degré de liberté interne de l'échantillon, ce qui permet de généraliser la relation précédente à l'ensemble T des amplitudes de diffusion commençant par le diffuseur \mathbf{r}_i et finissant par le diffuseur \mathbf{r}_j :

$$T(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}, t) = T(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i, -\mathbf{k}_{out}, -\mathbf{k}_{in}, t) \quad (2.14)$$

Le principe de réciprocité implique donc l'égalité des amplitudes de diffusion réciproques dans le seul cas où $\mathbf{k}_{in} = -\mathbf{k}_{out}$, c'est à dire dans la direction de rétrodiffusion. En faisant intervenir les amplitudes A , on peut écrire ce principe sous la forme suivante, valable pour tout couple de directions \mathbf{k}_{in} et \mathbf{k}_{out} :

$$A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t) = A(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i, t) \quad (2.15)$$

Remarquons que la relation 2.13 est la définition du principe de réciprocité : ce dernier est donc une *propriété de l'amplitude de diffusion* [42] alors que l'invariance par renversement du temps est une *propriété de l'évolution temporelle*. Le principe de réciprocité est plus général que l'invariance par retournement temporel. Par exemple cette dernière est brisée en présence d'absorption alors que le principe de réciprocité reste valide dans ce cas. La réciprocité peut être brisée en présence d'un champ extérieur. Ainsi le champ magnétique brise la réciprocité des ondes lumineuses [43] et la présence d'un écoulement fluide irrotationnel brise la réciprocité des ondes ultrasonores [44].

Effet du principe de réciprocité sur le facteur d'amplification

L'égalité entre les amplitudes de diffusion des chemins réciproques implique que $I_C(0, t) = I_I(t)$. Le facteur d'amplification peut donc finalement s'écrire :

$$F(t) = 1 + \frac{I_I(t)}{I_S(t) + I_I(t)} \quad (2.16)$$

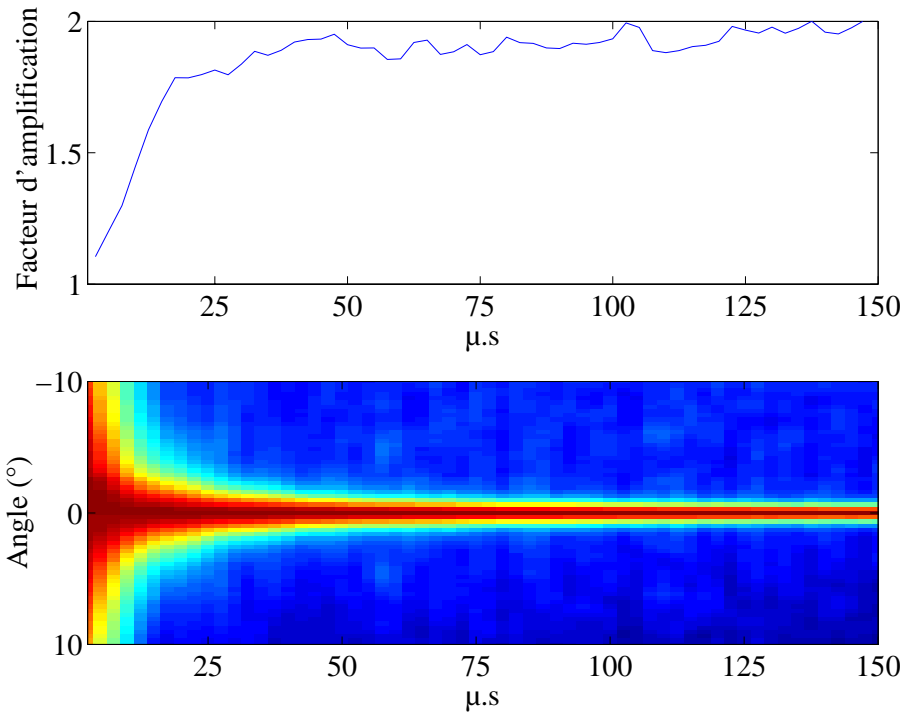


FIG. 2.7: Evolution temporelle du facteur d'amplification pour un échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm, de densité 0.29 tige/mm^2 et de 80 mm d'épaisseur. La fréquence centrale est de 3.2 MHz , la largeur de bande utile est d' 1 MHz . Après quelques dizaines de μs , la surintensité du pic est à peu près égale à 2 sur ces données expérimentales.

On constate que le rapport entre le “pic” et des “ailes” du cône ne dépend que de l'importance relative des diffusions simple et multiple. Au fil du temps, les chemins de diffusion simple sont de moins en moins nombreux et leur contribution devient négligeable devant l'intensité multiplement diffusée : $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 2$. La figure 2.7 montre l'évolution temporelle du facteur d'amplification obtenue expérimentalement sur un échantillon de tiges. On constate que le facteur augmente au fil du temps, jusqu'à atteindre la valeur 2.

L'affinement du pic de rétrodiffusion et l'augmentation du facteur d'amplification sont des moyens de vérifier la présence de diffusion multiple dans un matériau. Nous avons utilisé cette caractérisation pour démontrer que des échantillons d'os corticaux étaient multiplement diffuseurs (cf section 2.4.7). Après cette approche “intuitive” de la rétrodiffusion cohérente, nous présentons quantitativement la méthode de détermination de la constante de diffusion à l'aide du cône dynamique.

2.3.2 Cône dynamique et mesure du coefficient de diffusion

La première observation expérimentale du cône de rétrodiffusion cohérente dynamique a été effectuée dans le cadre de la thèse d'A. Tourin en 1997 [2, 38]. Afin d'extraire des données expérimentales la constante de diffusion D de manière rigoureuse, il est nécessaire d'étudier quantitativement la forme du cône dynamique. Nous reprenons dans cette partie le principe de calcul développé

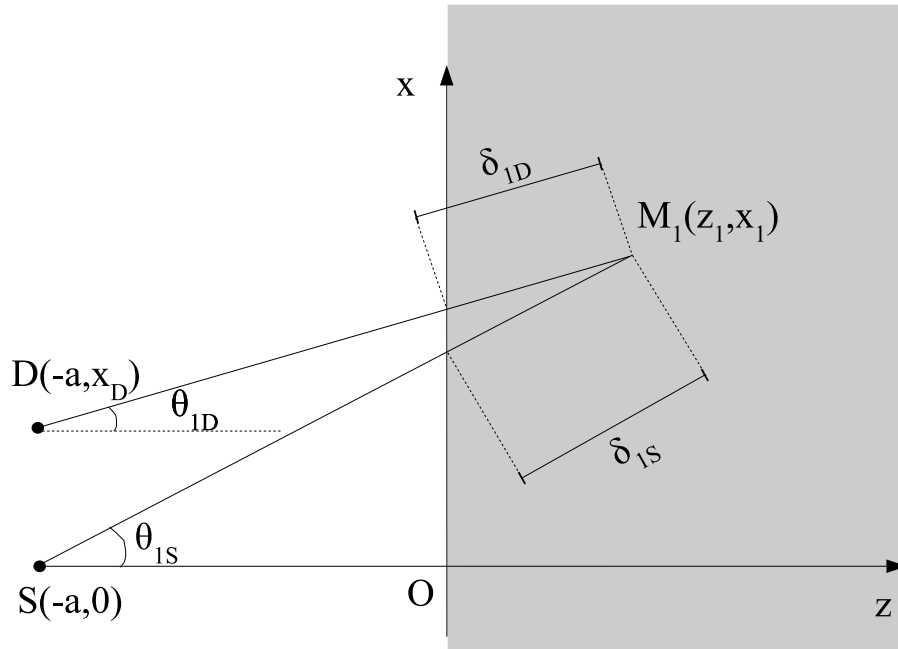


FIG. 2.8: Représentation d'une configuration typique pour le calcul analytique du cône de rétrodiffusion cohérente.

par B.A. Van Tiggelen pour les ondes scalaires [45, 38], sans faire l'hypothèse $l_e = l^*$. Pour être plus facilement exploitable, l'expression du cône dynamique présentée dans la référence précédente supposait certaines hypothèses simplificatrices pas toujours valables dans notre cas. Nous exposons le calcul analytique des intensités cohérente I_C , incohérente I_I avec et sans approximation. Nous discutons dans la section suivante de la validité des simplifications pour nos expériences.

On considère la configuration de la figure 2.8 pour laquelle la source S et le détecteur D sont disposés face à une tranche de milieu multiplement diffuseur. On a représenté la contribution issue d'un diffuseur M_1 quelconque, tel que $\mathbf{OM}_1 = \mathbf{r}_1$.

Après excitation par une source située en S , l'intensité multiplement diffusée moyenne reçue par le récepteur D s'exprime d'après l'équation 2.2 par

$$I(S, D, t) = \iiint \overline{G}(D, M_1) \overline{G}^*(D, M_2) K_r(M_1, M_2, M_3, M_4, t) \overline{G}(M_3, S) \overline{G}^*(M_4, S) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \quad (2.17)$$

2.3.3 Expression de l'intensité incohérente

La contribution incohérente que nous calculons ici se réduit à la somme des diagrammes de ladder. Dans le cas général, ce terme dépend de la position des points source (S) et de détection (D). En particulierisant la relation précédente avec le vertex réductible L présenté en 2.2.3 on a la relation suivante⁵.

⁵ Nous avons numéroté les diffuseurs génériques par les indices 1 et 2 au lieu de 3 et 1 dans 2.2.3 ce qui ne change rien au développement qui suit.

$$I_I(S, D, t) = \iint |\overline{G}(M_1, S)|^2 |\overline{G}(D, M_2)|^2 L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.18)$$

L'expression de $|\overline{G}|^2$ entre la source S et le point M_1 est à $2D$:

$$|\overline{G}(S, M_1)|^2 = \frac{e^{\frac{-z_1}{l_e \cos \theta_{1S}}}}{8\pi k |SM_1|}$$

Cette équation résulte des hypothèses suivantes :

- On néglige la réfraction à l'interface entre l'eau et le milieu multiplement diffuseur. On a vu dans le premier chapitre que cela était justifié : le milieu de tiges peut être considéré comme un milieu effectif de nombre d'onde k_{eff} avec $Re(k_{eff}) \approx k_0$. L'expression de $\overline{G}(S, M_1)$ ne fait donc pas intervenir de terme de phase dû à la réfraction. D'autre part, la décroissance exponentielle de l'onde est prise en compte sur toute la profondeur explorée dans le milieu de tiges.
- On se place en champ lointain au sens de $ka \gg 1$, a étant la distance source-échantillon. Cela permet d'approcher la fonction $|H_0^1(kr)|^2$ par $\frac{2}{\pi kr}$.

D'où l'expression

$$I_I(S, D, t) = \iint \frac{1}{64\pi k} \frac{1}{SM_1} \frac{1}{DM_2} e^{\frac{-z_1}{l_e \cos \theta_{1S}}} e^{\frac{-z_2}{l_e \cos \theta_{2D}}} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.19)$$

Le vertex L peut s'exprimer en fonction de la solution de l'équation de la diffusion dans une tranche [2]⁶.

$$L(x_1, z_1, x_2, z_2, t) \propto \frac{e^{-(x_1-x_2)^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi(z_1+z_0)}{B} \sin \frac{m\pi(z_2+z_0)}{B} e^{-m^2\pi^2 Dt/B^2} \quad (2.20)$$

avec

$z_0 = \pi l^*/4$ la distance d'extrapolation permettant de justifier rigoureusement l'expression précédente.

$B = L + 2z_0$ l'épaisseur effective du milieu.

On définit l' *épaisseur de peau* comme la zone d'épaisseur l_e commençant à l'interface eau/milieu diffuseur.

La décroissance exponentielle des propagateurs dans le milieu sur une longueur caractéristique de l'ordre de l_e permet de ne prendre en compte que les points situés dans l' *épaisseur de peau*.

Approximation n°1 : on se place en champ lointain au sens $a \gg l_e$

Posons

$$\mu_i = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x_i^2}}$$

⁶ Nous prouverons que l'expression que nous utilisons ci-après est adaptée à notre problème en section 2.6.3.

avec $i \in \{1; 2\}$.

On a

$$SM_1 = \sqrt{(a + z_1)^2 + x_1^2} \approx \frac{a}{\mu_1} \quad (2.21)$$

$$\exp\left(\frac{-z_1}{l_e \cos \theta_{1S}}\right) = \exp\left(\frac{-z_1}{l_e} \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{(z_1 + a)^2}}\right) \approx \exp\left(\frac{-z_1}{l_e \mu_1}\right) \quad (2.22)$$

Ces expressions permettent de séparer la dépendance en z_1 .

Pour le point M_2 , on pose

$$\mu'_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (x_2 - x_D)^2}}$$

Ce qui permet d'obtenir $DM_2 \approx \frac{a}{\mu'_2}$ et $\exp\left(\frac{-z_2}{l_e \cos \theta_{2D}}\right) \approx \exp\left(\frac{-z_2}{l_e \mu'_2}\right)$.

La contribution incohérente se réduit donc à :

$$I_I(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 a^2} \int \int e^{\frac{-z_1}{l_e \mu_1}} e^{\frac{-z_2}{l_e \mu'_2}} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.23)$$

Le calcul des intégrales selon les variables z_1 et z_2 permet d'obtenir l'expression de la contribution incohérente dynamique sous la seule approximation de champ lointain :

$$I_I(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 a^2 \sqrt{4\pi Dt}} \int \int \sum_m f_m(\mu_1) f_m(\mu'_2) \mu_1 \mu'_2 \times \exp\left(\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2}\right) \exp\left\{\frac{(x_1 - x_2)^2}{4Dt}\right\} dx_1 dx_2 \quad (2.24)$$

On effectue ensuite le changement de variable suivant, permettant de définir les angles θ_1 et θ_2 :

$$\begin{cases} x_1 = a \tan \theta_1 \\ x_2 = x_D + \tan \theta_2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$I_I(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 \sqrt{4\pi Dt}} \int \int \sum_m \frac{f_m(\mu_1)}{\mu_1} \frac{f_m(\mu'_2)}{\mu'_2} \times \exp\left(\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2}\right) \exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt} \left(\tan \theta_1 - \tan \theta_2 - \frac{x_D}{a}\right)\right\} d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.25)$$

avec

$$f_m(\mu) = \frac{B}{m\pi} \frac{-e^{-\alpha x} (\cos(x + \phi) + \alpha \sin(x + \phi)) + \cos \phi + \alpha \sin \phi}{1 + \alpha^2}$$

et avec

$$\phi = \frac{m\pi z_0}{B}, \quad \alpha = \frac{B}{m\pi l_e \mu} \quad \text{et} \quad x = \frac{m\pi L}{B}$$

Dans 2.25, l'intensité incohérente dépend de l'abscisse du détecteur x_D .

Approximation n°2

On suppose que S et D sont vus sous le même angle dans l'épaisseur de peau, ce qui conduit à écrire $\mu'_2 \approx \mu_2$. Dans ce cas, la contribution incohérente ne dépend pas de la position du détecteur, et 2.25 est remplacée par

$$I_I(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 \sqrt{4\pi Dt}} \int \int \sum_m \frac{f_m(\mu_1)}{\mu_1} \frac{f_m(\mu_2)}{\mu_2} \times \exp\left(\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2}\right) \exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt} (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)\right\} d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.26)$$

Nous étudierons l'effet de ces approximations en section 2.3.5.

2.3.4 Expression de l'intensité cohérente

On particularise 2.17 en utilisant la définition du vertex réductible C , ce qui conduit à⁷

$$I_C(S, D, t) = \int \int \overline{G}(M_1, S) \overline{G}^*(D, M_1) \overline{G}^*(M_2, S) \overline{G}(D, M_2) C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.27)$$

L'intensité cohérente fait apparaître des termes de phase. On utilise l'expression de la fonction de Green en milieu homogène et en champ lointain ($kr \gg 1$) :

$$G(r) = \frac{-e^{i\pi/4} e^{ikr}}{\sqrt{8\pi k} \sqrt{r}}$$

Ce qui permet d'obtenir (cf. figure 2.8)

$$\begin{aligned} G(M_1, S) G^*(D, M_1) &= \frac{-e^{i\pi/4} e^{ikSM_1}}{\sqrt{8\pi k} \sqrt{SM_1}} e^{-\delta_{1S}/2l_e} \frac{-e^{i\pi/4} e^{ikM_1D}}{\sqrt{8\pi k} \sqrt{M_1D}} e^{-\delta_{1D}/2l_e} \\ &= \frac{1}{8\pi k} \frac{e^{ik(SM_1 - M_1D)}}{\sqrt{SM_1} \sqrt{DM_1}} e^{-(\delta_{1D} + \delta_{1S})/2l_e} \end{aligned}$$

La contribution cohérente s'exprime donc par

$$I_C(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \int \int \exp\left\{\frac{-(\delta_{1S} + \delta_{1D} + \delta_{2S} + \delta_{2D})}{2l_e}\right\} \times \exp\left\{\frac{ik(SM_1 - DM_1 - SM_2 + DM_2)}{\sqrt{SM_1} \sqrt{DM_1} \sqrt{SM_2} \sqrt{DM_2}}\right\} K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.28)$$

⁷ Les indices 1 et 2 ont été permutés *in fine* par rapport à 3.2, ce qui permet d'utiliser les mêmes notations que pour l'intensité incohérente sans rien changer au problème.

Approximation n°1 : $a \gg l_e$

On peut approcher SM_1 par a/μ_1 et M_1D par a/μ'_1 avec μ et μ' définis dans la section précédente. La somme des parcours dans le milieu s'écrit

$$\delta_{1S} + \delta_{1D} \approx z_1 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu'_1} \right)$$

Comme pour le calcul de I_I , l'intégration selon les variables z_1 et z_2 et l'introduction des variables θ_1 et θ_2 conduit à

$$I_C(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 \sqrt{4\pi Dt}} \iint \frac{(\mu'_1 \mu_2)^{1/2}}{(\mu_1 \mu'_2)^{3/2}} \cos \left\{ ka \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) \right\} \times \\ \sum_m f_m(\nu_1) f_m(\nu_2) \exp \left(\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2} \right) \exp \left\{ \frac{-a^2}{4Dt} \left(\tan \theta_1 - \tan \theta_2 - \frac{x_D}{a} \right)^2 \right\} d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.29)$$

avec

$$\frac{2}{\eta} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'}$$

Approximation n°2

L'expression précédente se simplifie dans le cas où les points S et D sont vus sous le même angle par tout point de l'épaisseur de peau. Cette hypothèse conduit à

- l'égalité des termes μ , μ' et η
- écrire que le terme de déphasage $SM_1 - DM_1$ vaut $x_D \sin \theta_1$

Dans ce cadre, l'intensité cohérente s'écrit

$$I_C(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 \sqrt{4\pi Dt}} \iint \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \cos (kx_D (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)) \times \\ \sum_m f_m(\mu_1) f_m(\mu_2) \exp \left(\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2} \right) \exp \left\{ \frac{-a^2}{4Dt} (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2 \right\} d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.30)$$

Approximation n°3 : $\theta_1 \approx \theta_2$

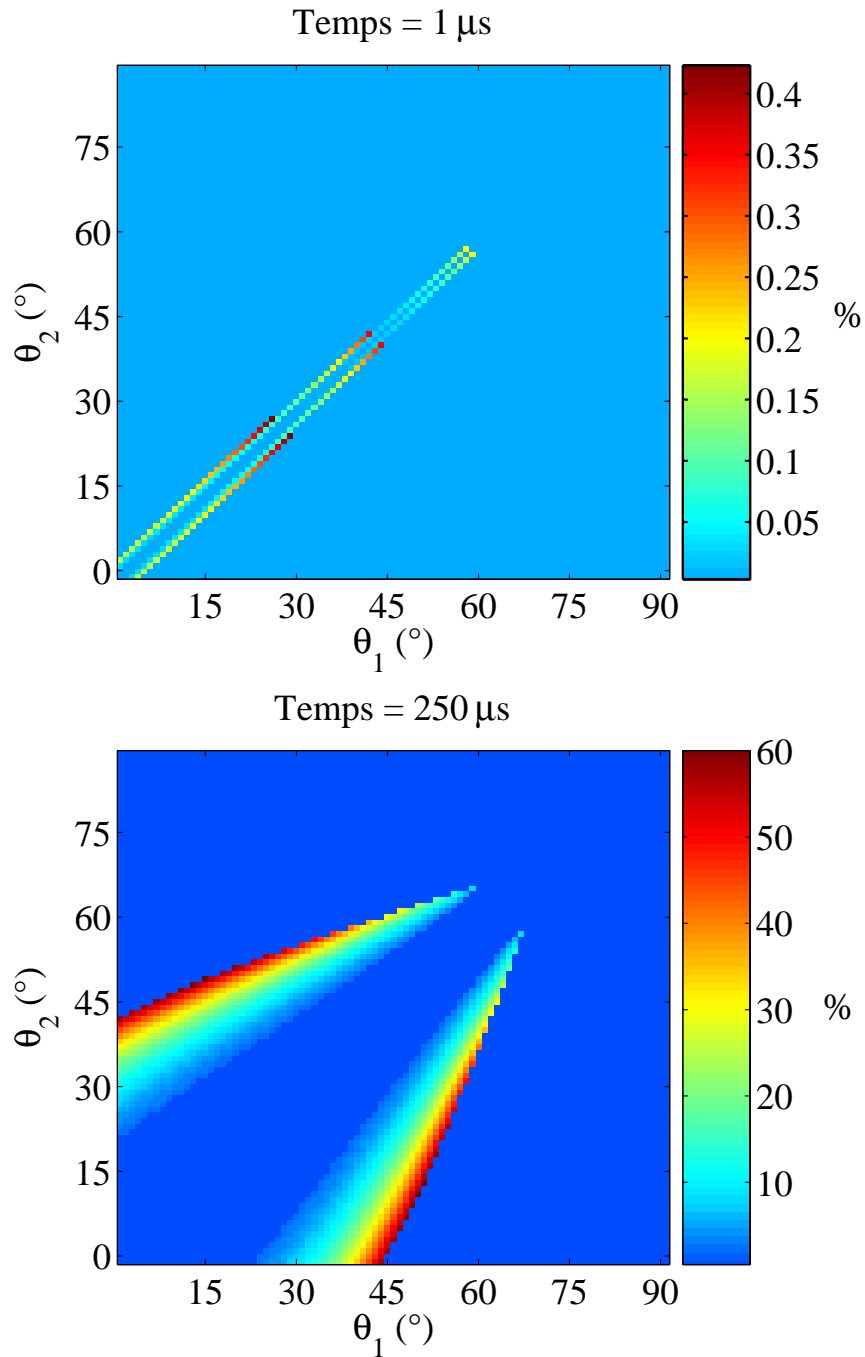


FIG. 2.9: Représentation en codes de couleurs de l'écart entre les termes $\exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt}(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2\right\}$ et $\exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt}(2\delta/\cos^2(\theta))^2\right\}$ aux temps $t = 1\mu s$ et $t = 250\mu s$, avec $D = 2mm^2/\mu s$ et $a = 100mm$. L'écart augmente avec le temps.

Dans l'expression 2.30, on constate que le terme $\exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt}(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2\right\}$ est proche de zéro dès que les angles θ_1 et θ_2 diffèrent significativement.

On pose

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2) \approx -2\delta \cos\theta \quad \text{et} \quad \tan(\theta_1) - \tan(\theta_2) \approx \frac{-2\delta}{\cos^2\theta}$$

En figure 2.9 on a représenté par des codes de couleur l'écart entre les termes $\exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt}(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2\right\}$ et $\exp\left\{\frac{-a^2}{4Dt}(2\delta/\cos^2(\theta))^2\right\}$ aux temps $t = 1\mu s$ et $t = 250\mu s$. Les paramètres choisis sont $D = 2mm^2/\mu s$ et $a = 100mm$. Physiquement, l'approximation est vérifiée lorsque la distance d'observation a est plus grande que l'étalement moyen \sqrt{Dt} d'une particule au temps t . On vérifie en première approche que cette approximation devient fautive aux temps longs. La validité de l'approximation n°3 pour le terme I_C sera discutée dans la section suivante.

Le calcul de l'intégrale sur la variable δ permet d'obtenir une expression de l'intensité cohérente ne mettant en jeu qu'une intégrale simple selon θ :

$$I_C(S, D, t) = \frac{1}{64\pi^2 k^2 \sqrt{4\pi Dt}} \int \sum_m f_m^2(\cos\theta) \exp\left(\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2}\right) \exp\left(\frac{-k^2 x_D^2 Dt}{a^2} \cos^6\theta\right) \quad (2.31)$$

Dans chacune des expressions présentées tant pour I_I que pour I_C , la dépendance temporelle s'exprime toujours pour un mode donné par un terme du type

$$\frac{t}{\tau_{Th}} \quad \text{avec} \quad \tau_{Th} = \frac{B^2}{\pi^2 D}$$

Le temps caractéristique τ_{Th} se nomme le *temps de Thouless*. Il représente le temps typique mis pour diffuser d'un bord à l'autre de l'échantillon : pour $t \ll \tau_{Th}$ l'onde ne ressent pas l'effet des bords, pour $t \gg \tau_{Th}$ tout le volume diffuseur a été exploré avec une probabilité uniforme.

2.3.5 Validité des approximations

Nous allons exposer les effets des approximations présentées dans la section précédente pour le calcul des intensités incohérentes et cohérentes.

Pour toutes les expériences, la distance entre les transducteurs et l'échantillon est de 160 mm. L'ordre de grandeur de l_e est de 5 mm pour nos échantillons. Au premier chapitre, on a vu que $l_e \in [2, 11]$ mm selon les fréquences et les échantillons étudiés. : l'hypothèse $a \gg l_e$ est donc clairement vérifiée. Nous nous intéressons donc aux hypothèses supplémentaires dans ce qui suit.

2.3.5.1 Dépendance angulaire de l'intensité incohérente

Nous traçons $I_I(S, D, t)$ selon l'expression 2.25 en fonction de l'abscisse du détecteur x_D , la source étant située à l'abscisse nulle. Les paramètres que nous utilisons sont typiques de nos expériences : $f_c = 3\text{MHz}$, $a = 160\text{ mm}$, $l_e = 5\text{ mm}$ et $l^* = 6\text{ mm}$. Les temps choisis sont 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.5, 1 et $2\tau_{Th}$.

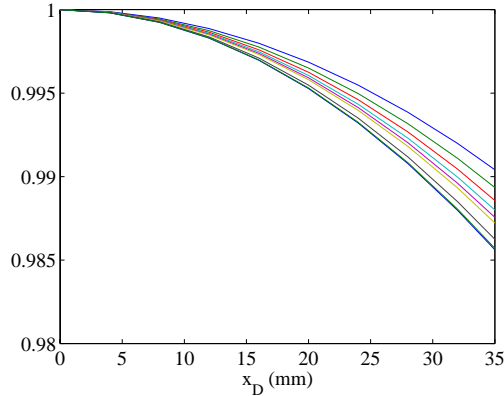


FIG. 2.10: Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 mm d'épaisseur.

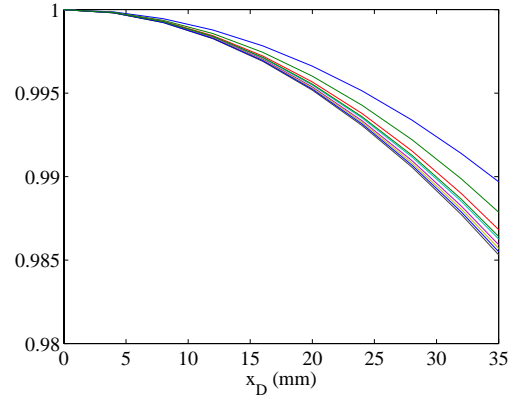


FIG. 2.11: Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur.

On a représenté en figures 2.10 et 2.11 le cas des épaisseurs $L = 40\text{ mm}$ et $L = 80\text{ mm}$. On constate que I_I varie de 1.5 % sur une distance de 35 mm à la source. Expérimentalement, nous traçons les cônes en enregistrant les signaux reçus sur les 30 voies de part et d'autre de la source, soit sur une plage de $\pm 27\text{ mm}$. On constate que dans cette configuration, la décroissance de l'intensité incohérente est de l'ordre de 1 % aux positions extrêmes d'enregistrement. On peut donc approcher I_I par l'expression 2.26 : l'approximation n°2 est valable pour nos expériences à 1 % près sur le niveau de base.

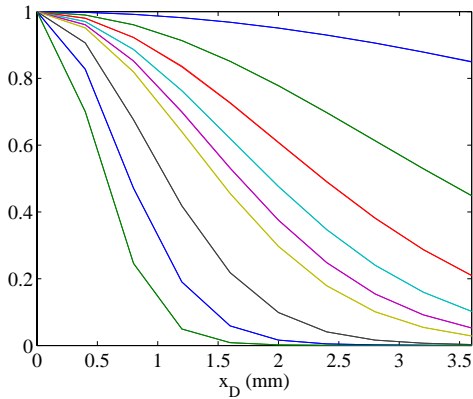


FIG. 2.12: Contribution cohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 mm d'épaisseur. L'écart entre les expressions 2.30 et 2.29 est négligeable.

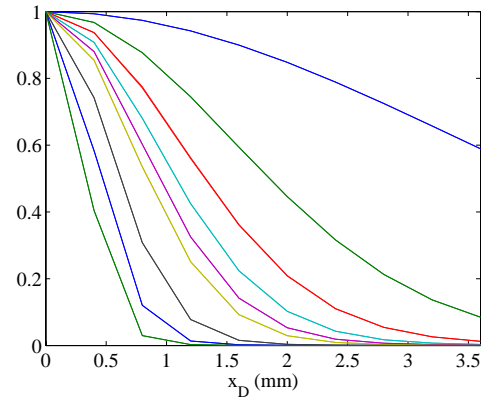


FIG. 2.13: Contribution cohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur : là encore l'écart est négligeable entre les expressions 2.30 et 2.29.

2.3.5.2 Dépendance angulaire de l'intensité cohérente

Validité de l'approximation n°2

Pour évaluer l'effet de cette approximation, nous traçons l'intensité cohérente soit en supposant que S et D sont vus sous le même angle soit sans cette hypothèse, selon les formules 2.30 et 2.29 respectivement. On utilise les mêmes paramètres que dans la sous-section précédente, les courbes sont superposées en figures 2.12 et 2.13. On constate qu'elles sont à peine discernables : elles présentent un écart moyen de 0.01 % pour l'épaisseur $L = 80$ mm et 0.02 % pour $L = 40$ mm. L'approximation n°2 est donc très largement valable pour nos expériences.

Validité de l'approximation n°3

La superposition des courbes correspondant aux expressions 2.29 et 2.31 montre un écart très faible pour une épaisseur $L = 40$ mm (figure 2.14). L'écart croît avec le temps mais reste limité à 3 % au maximum. Pour une épaisseur $L = 80$ mm (figure 2.15), on constate que l'écart croît plus vite en fonction du temps. Pour un temps $t = 2\tau_{Th}$ l'écart entre les courbes peut atteindre 13 % pour cette épaisseur. L'approximation n°3 est donc valable seulement aux temps courts et sera à manipuler avec précaution si on souhaite s'intéresser aux temps très longs.

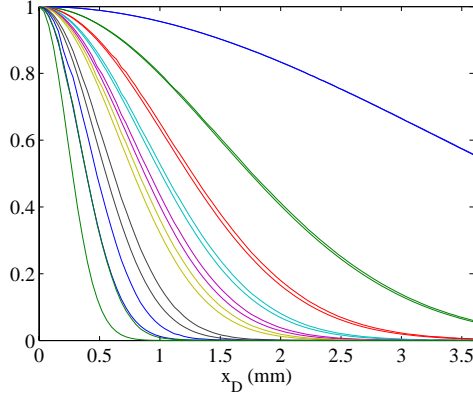


FIG. 2.14: Contribution cohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 *mm* d'épaisseur. L'écart entre les expressions 2.29 et 2.31 est très faible.

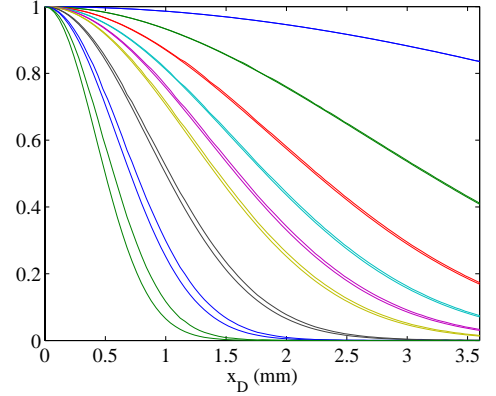


FIG. 2.15: Contribution cohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 *mm* d'épaisseur. La superposition des expressions 2.29 et 2.31 montre un écart croissant avec le temps.

2.3.6 Evolution de la largeur du cône dynamique

2.3.6.1 Première approche du calcul de D

On étudie la variation de la largeur à mi-hauteur en fonction du temps : $\Delta x_D(t)$. On trace sur les figures 2.16 et 2.17 l'évolution temporelle de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ selon les formules 2.29 et 2.31 pour des épaisseurs de 40 *mm* et 80 *mm*. Les paramètres sont les mêmes qu'aux sections précédentes. L'expression simplifiée 2.31 donne lieu à une évolution linéaire avec le temps : la largeur $\Delta x_D(t)$ est proportionnelle à \sqrt{Dt} . La formule 2.29 montre une saturation progressive à $\lambda/2\pi$. Dans ce dernier cas, aux temps longs, on se retrouve en effet en champ proche, au sens où $Dt > a^2$: on retrouve donc la limite de résolution de diffraction en champ proche. Aux temps les plus courts la variation présentée est à peu près linéaire.

Expérimentalement, nous nous placerons dans la zone où les courbes précédentes sont linéaires : on se limitera aux temps courts⁸.

Dans une telle fenêtre de temps, l'évaluation de la pente des courbes des expressions 2.29 et 2.31 pour l'épaisseur 80 *mm* donne une pente de 3.77 *mm*⁻², ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{\Delta x_D(t)^2} = 3.77 \frac{t}{\tau_{Th}} \quad [mm^{-2}]$$

On peut réécrire la relation précédente sous la forme suivante :

$$\Delta x_D(t) = \frac{\Gamma a}{k\sqrt{Dt}} \quad \text{avec } \Gamma \text{ une constante qui s'exprime ici par } \Gamma = \frac{2B}{a\lambda\sqrt{3.77}} \approx 1.15$$

⁸ On constatera dans la partie expérimentale que la fenêtre de temps utile pour l'exploitation du cône permet de se limiter à cette zone sans perte sensible de données.

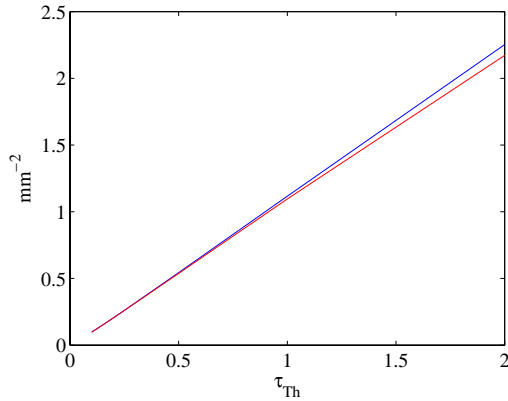


FIG. 2.16: Evolution temporelle de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ selon les formules 2.29 (en rouge) et 2.31 (en bleu) pour une épaisseur de 40 mm.

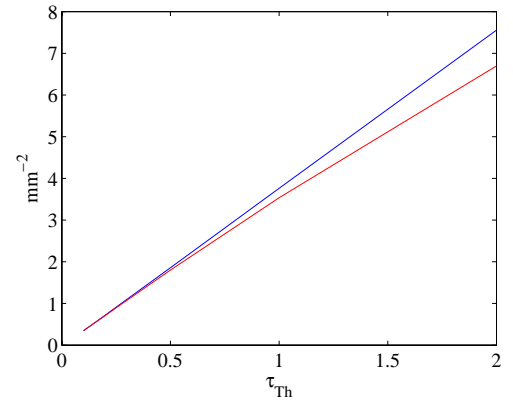


FIG. 2.17: Evolution temporelle de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ selon les formules 2.29 (en rouge) et 2.31 (en bleu) pour une épaisseur de 80 mm.

On conçoit donc une méthode expérimentale permettant d'extraire D du cône dynamique : la mesure de la pente de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ permet, par comparaison avec la valeur théorique $\frac{k^2 D}{1.15a}$ de déterminer D .

Rappelons que les références [2, 38, 45] estimaient $\Gamma = 1.12$ en ne retenant que la contribution du premier mode diffusif et sans prendre en compte l'épaisseur de l'échantillon.

La valeur précise de la constante Γ est essentielle à une bonne estimation du coefficient de diffusion. L'obtention de D nécessite aussi de connaître les paramètres l_e , l^* et L qui sont injectés dans les formules 2.29 et 2.31. Nous nous proposons d'étudier la dépendance de Γ vis à vis ces paramètres afin de déterminer si l'évolution de la largeur du cône dynamique peut suffire à déterminer D ou si les autres paramètres influent également.

2.3.6.2 Influence des paramètres l_e , l^* et L sur Γ

Influence de l^ et l_e*

Pour une épaisseur de 80 mm, on trace l'évolution de $\frac{1}{\Delta x_D(t)^2}$ et on évalue Γ selon le même principe qu'à la section précédente. Le tableau suivant regroupe les valeurs de Γ pour différents jeux de l^* et l_e . On constate que la sensibilité de Γ à une variation de l_e de 50 % est comprise entre 1 % et 2.2 %. L'influence de l_e sur la mesure de la pente est donc très faible.

La sensibilité de Γ à une variation de l^* de 50 % est comprise entre 1.5 % et 2 %, ce qui est très faible.

L (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Γ
80	5	6	1.148
80	5	3	1.124
80	5	9	1.165
80	2.5	6	1.174
80	7.5	6	1.136

Influence de l'épaisseur de l'échantillon

Pour une épaisseur $L = 40$ mm, le tableau suivant regroupe les valeurs de Γ pour les mêmes variations de l^* et l_e . On constate tout d'abord que la sensibilité de Γ à l'épaisseur est faible : quelles que soient les valeurs de l^* et l_e la différence entre les valeurs à 80 mm et 40 mm reste inférieure à 2 %. Cela conduit à un écart de 4 % sur la valeur de D . La largeur doit donc être prise en compte dans l'évaluation de Γ .

L (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Γ
40	5	6	1.159
40	5	3	1.133
40	5	9	1.175
40	2.5	6	1.175
40	7.5	6	1.161

La sensibilité de Γ en fonction de l_e est du même ordre de grandeur pour les deux épaisseurs. La sensibilité à l^* , tout en restant très faible, diminue très légèrement avec l'épaisseur. Cela est logique vu que l^* n'intervient dans le cône dynamique que par la distance d'extrapolation z_0 . Cette dernière affecte d'autant plus l'épaisseur effective B que l'épaisseur réelle est faible.

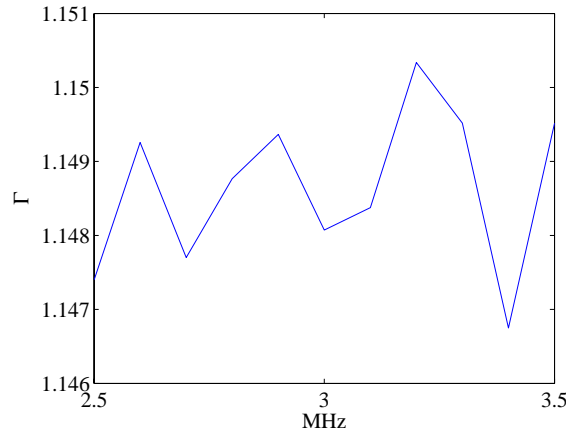
La largeur du cône dynamique semble donc essentiellement déterminée par la constante de diffusion D dans le cadre de notre approche théorique, la constante de proportionnalité Γ étant liée à L (facile à déterminer) et très peu sensible à l_e et l^* .

Influence de la fréquence

Dans les sections suivantes, nous déterminerons les variations de la constante de diffusion en fonction de la fréquence, il est donc nécessaire d'étudier la variation fréquentielle de Γ .

Pour la bande de fréquences [2.5, 3.5] MHz (cf. figure 2.18), on obtient un écart maximum de 0.3 % pour Γ , soit 0.6 % sur D .

Au total, d'un point de vue théorique, la faible influence des paramètres de l'échantillon (l_e , l^* ,

FIG. 2.18: Dépendance fréquentielle de Γ .

L) nous fait espérer qu'on puisse déduire D d'une relation valable en toute situation, du type

$$\Delta x_D(t) = \frac{\Gamma a}{k\sqrt{Dt}}$$

Il reste à établir l'influence de l'appareillage, notamment de la directivité des éléments dans un contexte expérimental.

2.4 Expériences de rétrodiffusion cohérente dynamique

Dans cette partie, nous présentons l'approche expérimentale de la rétrodiffusion cohérente en régime dynamique. Nous exposons tout d'abord le principe d'une expérience permettant d'obtenir un cône dynamique. Dans un second temps, nous analysons l'influence des paramètres expérimentaux sur la détermination de la constante de diffusion D . Nous évaluons successivement l'effet de la diffusion simple, de la directivité, des effets de bords et de l'absorption. Nous insisterons notamment sur l'influence prépondérante de la directivité des transducteurs sur la largeur du cône dynamique. Nous exposerons enfin l'effet des corrélations entre diffuseurs sur le tracé du cône dynamique.

Nous présentons ensuite nos mesures expérimentales du coefficient de diffusion sur les trois types d'échantillons de tiges utilisés dans l'étude du champ cohérent. Les résultats en régime impulsionnel et monochromatiques sont présentés. Dans ce dernier régime, nous mettons en évidence les résonances individuelles des tiges sur le comportement fréquentiel de D .

Nous exposons ensuite les évaluations de D sur des échantillons composés de deux types de diffuseurs différents et montrons que les comportements de chaque type de diffuseur peuvent être mis en évidence par le cône dynamique. Une tentative d'imagerie par cône dynamique est présentée pour tenter de distinguer deux milieux diffuseurs juxtaposés. Nous montrerons que la distinction entre les deux milieux n'est pas accessible expérimentalement.

Enfin, nous présentons les résultats de l'évaluation de D pour des échantillons de tiges plongées dans

l'huile et confirmons expérimentalement l'indépendance de nos mesures par rapport à l'absorption du milieu. Nous concluons par l'étude de la diffusion multiple dans un échantillon d'os trabéculaire.

2.4.1 Principe

Le principe d'une expérience de rétrodiffusion cohérente est présenté en figures 2.19 et 2.20. On dispose une barrette de transducteurs piézoélectriques face à l'échantillon étudié. Une voie de la barrette émet un signal qui donne lieu à un écho rétrodiffusé. L'amplitude de l'onde rétrodiffusée est enregistrée sur chacune des voies de la barrette passée en mode de réception. Pour étudier la dynamique du processus, on calcule l'énergie reçue sur des fenêtres temporelles glissantes pour chacune des voies, après recalage tenant compte des temps de parcours différents selon ces dernières. Lors de l'enregistrement, les voies sont repérées angulairement par rapport à la voie de tir, ce qui permet de disposer de la répartition angulaire de l'intensité rétrodiffusée à différents temps. Ce protocole est répété en faisant tirer chacune des voies de la barrette. On peut ainsi moyennner les répartitions angulaires d'intensité obtenues pour un temps donné. Pour augmenter l'efficacité de la moyenne, l'ensemble du processus précédent est répété en différentes positions de la barrette. Cette dernière se déplace par l'intermédiaire de moteurs sur un axe parallèle à la direction longitudinale de l'échantillon.

Les barrettes dont nous disposons permettent l'enregistrement des signaux sur 128 voies mais nous nous sommes limités en pratique à ne considérer que les 30 voies adjacentes à la voie centrale. Remarquons en effet que la première moyenne présentée grâce aux voies d'émission n'est pas uniforme angulairement : les angles extrêmes sont moins bien moyennés que les zones proches de la rétrodiffusion (angle nul). Le choix précédent permet de ne garder que les données bien moyennées et d'être en meilleur accord avec l'*approximation n°3*. Enfin on moyenne les résultats obtenus sur chacune des deux faces de l'échantillon.

2.4.2 Influence des paramètres expérimentaux

Nous étudions dans cette partie l'effet des conditions expérimentales sur la détermination de la constante de diffusion à partir de la largeur du cône dynamique.

2.4.2.1 Diffusion simple

Contrairement aux expériences de rétrodiffusion menées en optique [46, 47] il est impossible d'éliminer entièrement la contribution de la diffusion simple avec les ultrasons. On a vu en 2.3.1 que le terme d'intensité dû à la diffusion simple I_S intervient de manière indépendante de la direction d'observation : ce terme a donc le même effet que l'intensité incohérente, il relève le niveau du plateau. Notons néanmoins qu'à la différence cette dernière et par définition I_S ne fait pas intervenir de phénomène de diffusion multiple.

Dans le régime où la diffusion simple n'est pas négligeable notre approche théorique n'est pas adaptée. En effet, le développement du vertex que nous utilisons pour les kernel ladder et croisés découle

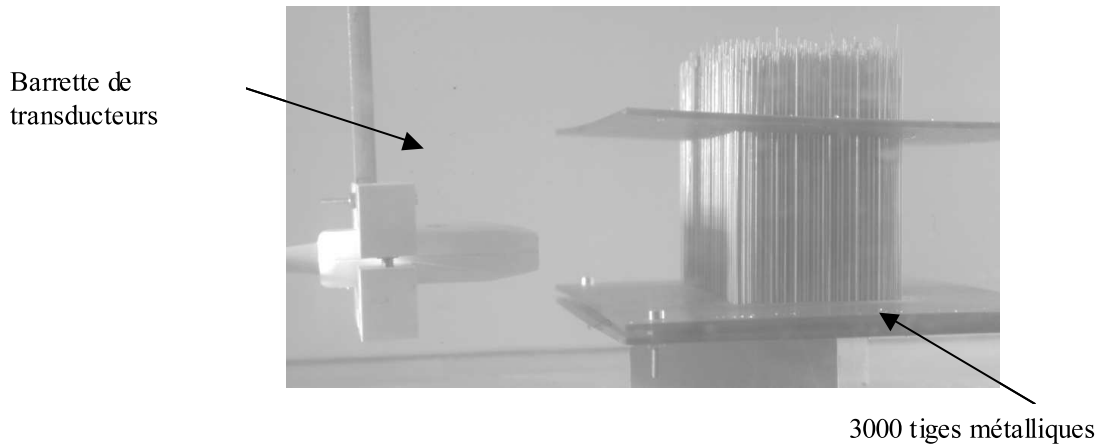


FIG. 2.19: Expérience de rétrodiffusion cohérente. Le transducteur fait face à l'échantillon diffuseur : il émet un signal qui donne lieu à un écho rétrodiffusé enregistré par chacune des voies de la barrette devenue réceptrice. On répète ce processus en déplaçant les transducteurs parallèlement à l'échantillon.

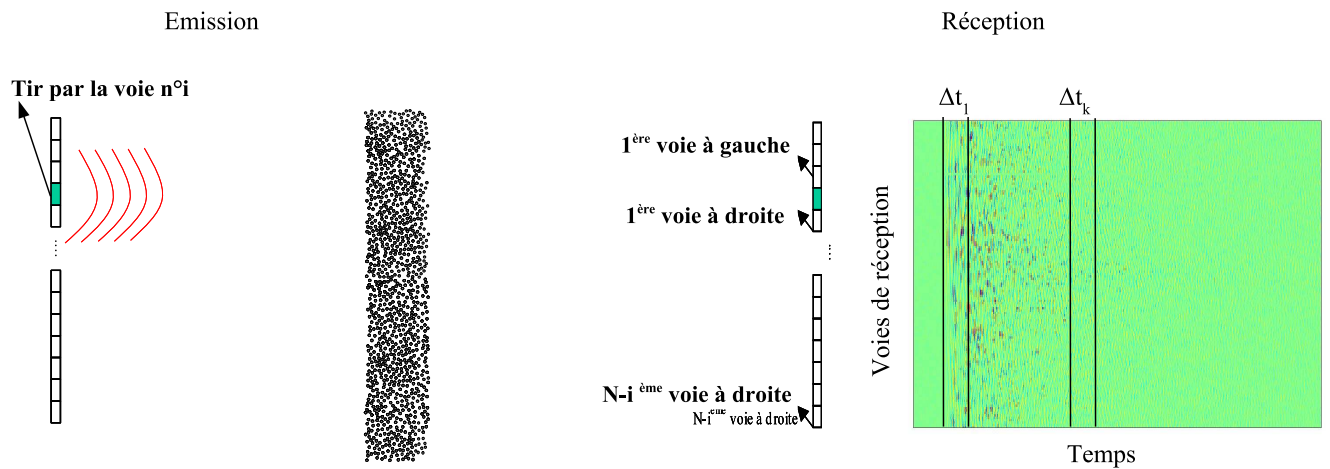


FIG. 2.20: Principe d'obtention du cône de rétrodiffusion dynamique. Dans la phase d'émission, un signal est tiré par la voie n°i. Les signaux rétrodiffusés sont ensuite enregistrés sur toutes les voies, repérées angulairement par rapport à la voie n°i. On recalc temporellement les signaux rétrodiffusés pour prendre en compte les temps de parcours différents selon les voies de réception et on intègre le carré de l'amplitude recallée sur des fenêtres temporelles Δt_k .

d'une approche diffusive. Or cette dernière n'est pas valable dans un régime où perdure la diffusion simple⁹. Pour exploiter les données expérimentales, nous devons donc établir un critère permettant de considérer que I_S est négligeable et n'utiliser notre formalisme que dans ce cadre.

Après quelques libres parcours moyens élastiques, l'onde a statistiquement diffusé plus d'une fois : on choisit de traiter les données correspondant à un temps de parcours supérieur à $3l_e/c$. Cette valeur résulte d'un compromis entre l'élimination de la diffusion simple et la perte de données inévitables lorsque l'on tronque le signal. En effet, les contributions de diffusion multiple existent même dans les premiers temps. Si on s'intéresse à l'intensité intégrée sur toute la durée du processus diffusif, le fait de se passer de ces premiers chemins de diffusion multiple peut poser des problèmes de fond, comme nous le verrons au chapitre III.

Dans le cas du cône dynamique la constante de diffusion est obtenue dans notre traitement par l'évaluation de la pente de décroissance de la largeur du cône. Plus le signal rétrodiffusé exploitable sera long, plus l'évaluation de D reposera sur un grand nombre de points de mesures, mais la troncature n'affectera pas les autres points exploitables. L'effet de la troncature n'est donc préjudiciable qu'en terme d'erreur sur D . C'est un avantage de la technique dynamique par rapport aux mesures stationnaires présentées dans le chapitre suivant.

Concrètement, nous employons les évaluations de l_e obtenues au premier chapitre et utilisons les valeurs spécifiques à chaque échantillon et à chaque bande de fréquence. Nous pouvons ainsi déterminer la première fenêtre temporelle exploitable du signal rétrodiffusé.

Evolution du facteur d'amplification et diffusion simple

Le cône dynamique permet de comparer l'évolution de la diffusion simple entre différents échantillons : il suffit de tracer leur facteur d'amplification. La figure 2.21 expose l'évolution temporelle du facteur d'amplification pour les deux échantillons de tiges de diamètre 0.8 mm de densité 0.29 tige/mm^2 et 0.12 tige/mm^2 . Lors des premières μs , les deux courbes sont nettement distinctes : les deux échantillons ne donnent pas lieu aux mêmes temps de montée du facteur d'amplification. L'échantillon le moins dense présente une valeur plus faible de F à un temps donné. Par exemple, la valeur $F = 1.5$ est obtenue aux temps $16.5 \mu s$ pour la densité 0.12 tige/mm^2 et $11 \mu s$ pour la densité 0.29 tige/mm^2 , soit un écart de temps de 50 %. Les valeurs des libres parcours moyens élastiques ont été obtenues au premier chapitre : $l_{e29} = 3 \text{ mm}$ et $l_{e12} = 7.7 \text{ mm}$. Cet écart sur les facteurs d'amplification exprime que la contribution de diffusion simple à l'ensemble de la diffusion est moins grande à un temps donné pour l'échantillon le plus dense, ce qui est en accord avec les valeurs des libres parcours moyens élastiques. Cependant, les temps caractéristiques ne sont pas dans le même rapport que les l_e .

Limites de la comparaison

⁹ La validité de l'équation de la diffusion sera discutée en 2.5.3.

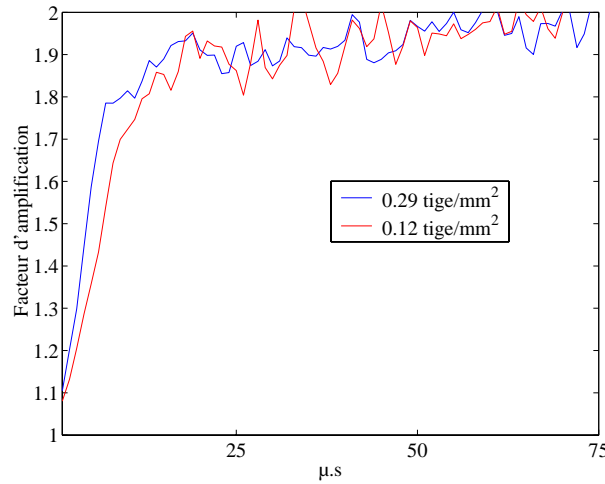


FIG. 2.21: Comparaison des facteurs d'amplification pour les échantillons de tiges de diamètre 0.8 mm de densité 0.29 tige/mm^2 et 0.12 tige/mm^2 . L'échantillon le moins dense présente un temps de montée plus lent, ce qui exprime une plus grande contribution de la diffusion simple dans cet échantillon pour les premiers temps.

Précisons néanmoins que l'on est dans un régime où diffusion simple et multiple coexistent, ce qui ne permet pas de comparer de manière simple l'écart temporel entre les deux courbes de la figure 2.21 aux longueurs caractéristiques du champ cohérent (comme l_e) ni à celles concernant le régime de diffusion d'ordre élevé (on a vu que D ne pouvait se déterminer aux temps courts, de même le libre parcours moyen de transport que nous utiliserons par la suite n'est pas prépondérant dans cette zone).

Par exemple, le temps d'obtention de la valeur 1.5 pour les deux facteurs d'amplification donne un différentiel de $5.5 \mu\text{s}$. Ce temps va dans le sens attendu vu les concentrations des échantillons : le temps de montée est plus court avec l'échantillon le plus dense. Néanmoins cette différence de temps correspond à une longueur parcourue de 8 mm et il est difficile de relier cette longueur aux libre parcours moyens. Le temps de montée du facteur d'amplification ne permet pas de déterminer rigoureusement le libre parcours moyen élastique¹⁰.

Enfin, au delà de la comparaison entre les paramètres de transport, l'essai d'obtention de la valeur d'un libre parcours moyen à partir d'une courbe du type de 2.21 est *a fortiori* vouée à l'échec. Le raisonnement consiste à fixer un seuil pour le facteur d'amplification et de considérer que le temps correspondant τ^* est caractéristique du phénomène de diffusion. Dans le cas de diffuseurs isotropes, on relie ce dernier au libre parcours moyen par $l = c\tau^*$ en notant c la célérité des ondes dans l'eau en première approche. Cette méthode ne peut aller au delà d'une évaluation grossière de l . En effet, il est nécessaire de faire un choix pour fixer le niveau seuil définissant τ^* , ce qui est affaire de compromis. De plus il faut choisir ce qui expérimentalement définit le niveau incohérent : à quel angle par rapport à la rétrodiffusion peut-on se considérer dans la contribution incohérente ? Ce

¹⁰Ni le libre parcours moyen de transport

deuxième point est plus critique dans les temps courts qui concernent directement cette méthode.

2.4.2.2 Directivité des transducteurs

Dans la théorie exposée jusqu'à présent, on a considéré que les sources d'émission des ultrasons étaient ponctuelles. En pratique nous utilisons des transducteurs dont les dimensions ne sont pas négligeables par rapport à la longueur d'onde d'émission. Cela signifie que l'hypothèse de source ponctuelle doit être étudiée avec attention.

Comment intervient la directivité ?

La directivité vient modifier l'intégrande de l'équation 2.31 en y ajoutant un terme en $a^4(\theta)$, avec $a(\theta)$ la directivité d'un élément en émission.

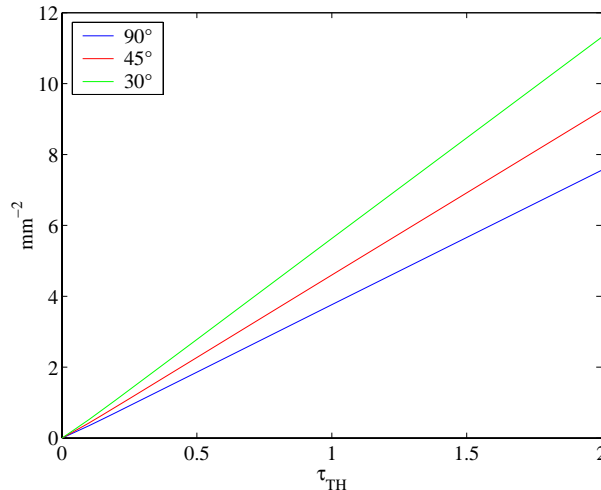


FIG. 2.22: Evolution temporelle de $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$ pour une épaisseur de 80 mm pour différentes directivités de transducteurs : $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$ et $\pm 90^\circ$. Les autres paramètres sont : $f_c = 3MHz$, $a = 160 mm$, $l_e = 5 mm$ et $l^* = 6 mm$.

L'approximation de linéarité du terme $\left(\frac{1}{\Delta x_D}\right)^2$ n'est pas remise en cause par la directivité mais la valeur de la constante Γ en est fortement affectée. Pour une directivité de forme rectangulaire limitée à une ouverture angulaire de $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$ et $\pm 90^\circ$ on mesure une valeur de Γ de respectivement 0.94, 1.04, 1.15, ce qui donne lieu à la figure 2.22 pour $\frac{1}{\Delta x_D^2(t)}$. L'examen de l'intégrande de l'équation 2.31 permet de comprendre ce résultat. Le cône dynamique est une somme de cônes de forme gaussienne en la variable x_D et dont l'inverse de la largeur au carré est proportionnelle à $Dt \cos^6 \theta$: les petits angles donnent lieu à des cônes moins larges et qui évoluent plus vite que les grands angles. La prise en compte de la directivité revient à accorder moins de poids aux grands angles, donc aux contributions variant lentement avec le temps. La prise en compte de la directivité augmente donc la valeur de la pente, ce qui entraîne une diminution de la constante Γ . Ces

variations ne peuvent être ignorées lors de notre exploitation des données en rétrodiffusion car elles conduisent à des écarts sur D de l'ordre de 20 à 40 % avec l'exemple précédent !

Il est donc fondamental de connaître la directivité des éléments piézoélectriques que nous utilisons dans nos expériences.

Détermination de la directivité des éléments de la barrette piézoélectrique

Le protocole de mesure des directivités ainsi que les résultats obtenus en bande de fréquence sont reportés en annexe I. Les mesures effectuées montrent que nos transducteurs ont une directivité correctement approchée en champ lointain par une fonction sinus cardinal :

$$a(\theta) = \frac{\sin(\pi \tan(\theta)b/\lambda)}{(\pi \tan(\theta)b/\lambda)} \quad (2.32)$$

avec $b = 0.55 \text{ mm}$.

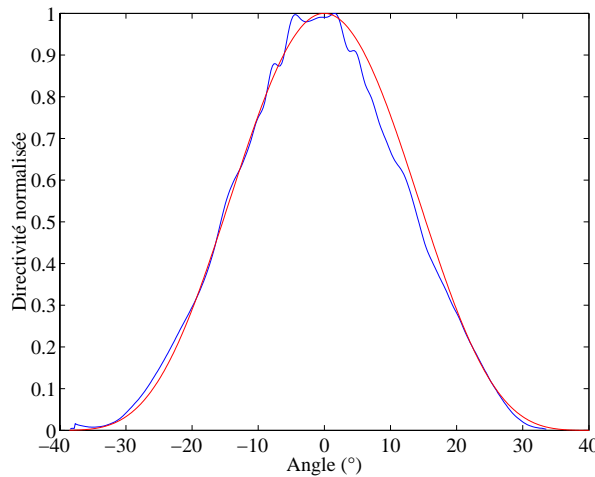


FIG. 2.23: La directivité des éléments de la barrette est mesurée selon la courbe bleue. On l'approche par le profil théorique tracé en rouge, correspondant à un sinus cardinal d'ouverture 0.55 mm . On a représenté la directivité en intensité pour un élément, soit $a(\theta)^2$. La fréquence d'étude est 3 MHz .

La figure 2.23 montre l'accord entre la mesure et la modélisation de la directivité à la fréquence 3 MHz . La largeur des transducteurs est de 0.387 mm , sensiblement moins que les 0.55 mm ; il est vraisemblable que le couplage interélément explique ces différences.

Conséquences sur la mesure de D

Avec les paramètres $f_c = 3 \text{ MHz}$, $a = 160 \text{ mm}$, $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$ et la directivité des transducteurs présentée ci-dessus, on obtient $\Gamma = 0.87$. Ce qui signifie une variation d'estimation de D de l'ordre de 50 % avec l'estimation du 2.3.6.1 sans prise en compte de la directivité ! Précisons que l'erreur sur l'évaluation de la directivité conduit à une erreur sur Γ de 4.5 %, soit une incertitude

L (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Γ
80	5	6	0.884
80	5	3	0.885
80	5	9	0.886
80	2.5	6	0.885
80	7.5	6	0.884

L (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Γ
40	5	6	0.885
40	5	3	0.884
40	5	9	0.886
40	2.5	6	0.886
40	7.5	6	0.886

de 9 % sur D en moyenne sur la bande de fréquence $[2.5, 3.5]$ MHz.

Enfin, la prise en compte de la directivité modifie l'influence des autres paramètres sur la constante de diffusion. On constate dans le tableau suivant que pour l'épaisseur $L = 80$ mm la constante Γ ne dépend pratiquement plus de l_e et l^* . En effet une variation de 50 % de ces paramètres n'entraîne plus qu'un écart de 0.2 % sur Γ , contre 2 % précédemment.

Les mêmes jeux de paramètres avec une épaisseur $L = 40$ mm donnent des résultats similaires.

On en conclut donc que la mesure de D avec prise en compte de la directivité est indépendante des autres paramètres de transport avec la technique du cône dynamique de rétrodiffusion et que la connaissance précise de $a(\theta)$ est fondamentale pour une détermination précise de D .

Variation de Γ avec la fréquence

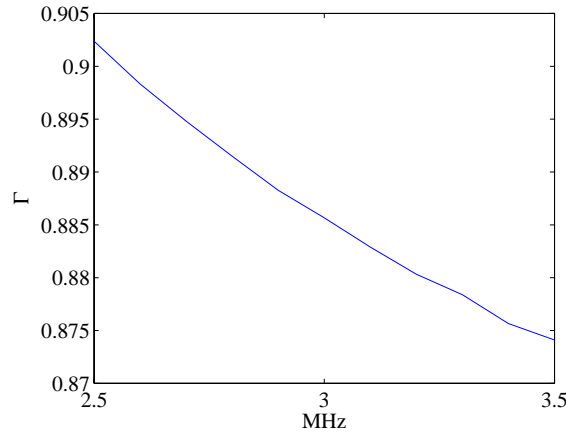
Pour la bande de fréquences $[2.5, 3.5]$ MHz (cf. figure 2.24), on obtient un écart maximum de 3 % pour Γ , soit 6% sur D .

La variation de Γ en fréquence doit donc être prise en compte pour la détermination fréquentielle de D en présence de sources et récepteurs directs.

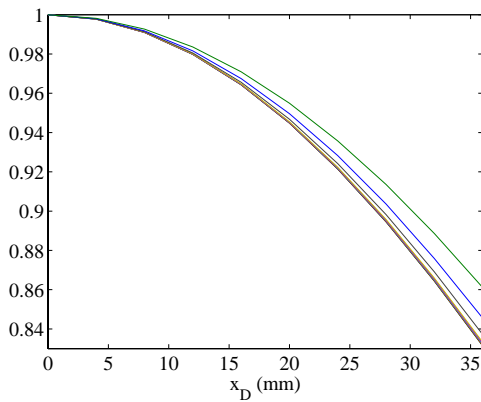
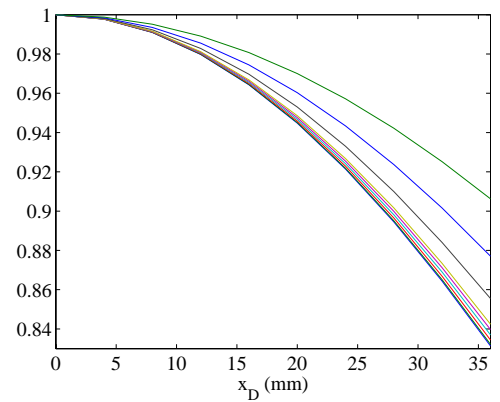
Il convient désormais de réexaminer l'effet de la directivité sur les approximations étudiées précédemment.

Influence de la directivité sur I_I

L'incohérent dynamique évalué selon l'expression 2.26 avec prise en compte de la directivité est

FIG. 2.24: Effet de la directivité sur la dépendance fréquentielle de Γ .

représenté en figure 2.25 pour une épaisseur de 40 mm et le même jeu de paramètres que ci-dessus : $f_c = 3\text{ MHz}$, $a = 160\text{ mm}$, $l_e = 5\text{ mm}$ et $l^* = 6\text{ mm}$. Les temps choisis sont $0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.5, 1$ et $2\tau_{Th}$.

FIG. 2.25: Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 40 mm d'épaisseur à la fréquence 3 MHz .FIG. 2.26: Contribution incohérente du cône dynamique pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur à la fréquence 3 MHz .

On constate que la dépendance angulaire de I_I est plus marquée dans ce cas. Cet effet est estompé au fil du temps, ce qui s'explique par l'homogénéisation du "nuage" diffusif avec le temps. A l'échelle d'un cône soit $\pm 27\text{ mm}$ de part et d'autre de la voie d'émission, l'incohérent vaut entre 0.9 et 0.95 selon les temps d'étude. Néanmoins, la détermination de D ne nécessite que la prise en compte de la largeur du cône à mi-hauteur soit des angles plus réduits pour lesquels on considèrera la contribution incohérente comme plate avec une très bonne approximation. Les résultats sont similaires avec une épaisseur d'échantillon 80 mm (figure 2.26).

Influence de la directivité sur l'approximation n°3

On a vu en 2.3.5.2 que la source et le détecteur pouvaient être considérés comme vus sous le même angle avec une très bonne approximation dans le cas d'une source ponctuelle. Le fait de prendre en compte la directivité conduit à ne pas intégrer l'équation 2.30 sur toutes les directions ce qui peut influencer sur la validité de l'approximation n°3.

La comparaison des formules 2.29 et 2.31 avec directivité donne toujours lieu à des écarts semblables à ceux obtenus en section 2.3.5.2.

2.4.2.3 Effets de bord

La théorie que nous avons présentée en 2.3.2 prend en compte une hypothèse de milieu semi-infini selon la direction longitudinale du fait de l'expression du vertex exposée en 2.20. Or les échantillons prototypes que nous étudions ont une longueur de 280 mm, ce qui implique d'étudier l'influence des effets de bord sur nos expériences

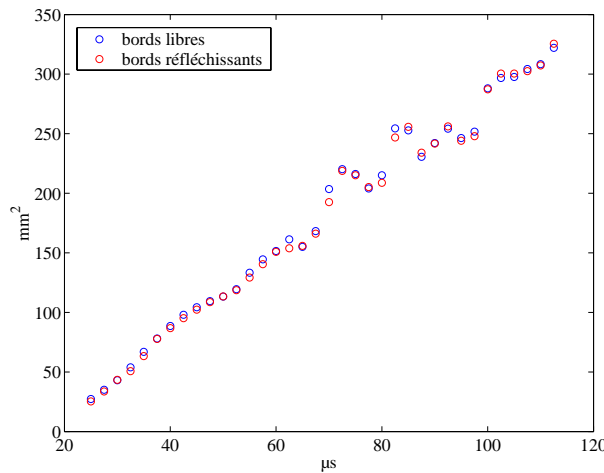


FIG. 2.27: Influence des bords de l'échantillon sur l'évolution temporelle de $\left(\frac{k}{a\Gamma\Delta x_D}\right)^2$. On considère l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité 0.12 tige/mm² à la fréquence centrale 3.2 MHz. On constate que les courbes correspondant aux bords libres et réfléchissants sont très proches : les effets de bord sont négligeables.

Dans le cadre de l'approche diffusive, on sait que l'intensité se propage dans la direction longitudinale selon la loi

$$\Delta(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2.33)$$

On adapte donc nos expériences de telle sorte que sur la durée exploitable du cône de rétrodiffusion les bords ne soient pas atteints. En pratique, cela revient à limiter la plage de translation de la barrette le long de l'échantillon. Connaissant la directivité et la distance émetteur/échantillon, on considère le point insonifié le plus excentré en entrée d'échantillon. Pour une durée utile de signal

de $150 \mu s$, cela correspond à un parcours longitudinal d'à peu près 3.5 cm . En pratique, on fait en sorte de ne pas insoner de points à moins de 3.5 cm des bords de l'échantillon.

Pour ce protocole, on a comparé expérimentalement les évolutions temporelles de $\left(\frac{1}{\Delta x_D}\right)^2$ pour deux configurations en figure 2.27. Pour la première les bords sont libres à l'interface entre le milieu de tige et l'eau. Pour la seconde on a placé des plaques d'acier aux extrémités de l'échantillon multidiffuseur, ce qui donne lieu à des bords réfléchissants.

Le dépouillement montre que les deux configurations donnent des courbes semblables, qui conduisent à une différence d'évaluation sur D de l'ordre de 2 %. Cela confirme que les bords de l'échantillon multidiffuseur n'interviennent pas dans nos expériences.

2.4.2.4 Influence de l'absorption

Notre objectif étant de déterminer le coefficient de diffusion, il est nécessaire de savoir si la mesure de D fait ou non intervenir l'absorption intrinsèque du milieu. D'une manière générale les expériences de rétrodiffusion cohérente font intervenir l'équation de la diffusion dans notre approche. Dans la section 2.6.5 dédiée à l'intensité transmise nous exposerons l'effet de l'absorption sur l'équation de la diffusion.

Contrairement à la méthodologie d'étude du champ cohérent qui ne fait intervenir l'absorption qu'aux interfaces entre les diffuseurs et le milieu ambiant, le cône de rétrodiffusion cohérente est *a priori* concerné par les pertes dans toute l'épaisseur du milieu multiplement diffuseur. Les chemins de diffusion les plus longs sont ainsi les plus absorbés.

Néanmoins nous verrons que le cône dynamique donne lieu à une évaluation de D indépendante de l'absorption. Pour comprendre cette indépendance, il convient de revenir à la procédure de construction d'un cône dynamique.

Par construction, le cône dynamique entraîne le choix de fenêtres temporelles sur lesquelles on calcule l'énergie rétrodiffusée. Cette énergie est ensuite normalisée sur chaque fenêtre de temps par la valeur correspondant à l'angle de rétrodiffusion : on compense ainsi les niveaux des contributions aux différents temps pour n'étudier que l'évolution angulaire de l'intensité rétrodiffusée normalisée. On comprend donc que la méthode n'est pas limitée par l'absorption.

En fait l'absorption intervient d'une autre manière dans nos expériences. En effet l'explication précédente est rigoureuse dans le cas limite de fenêtres temporelles ponctuelles, ce qui n'est pas le cas en pratique. On modélise l'absorption par un terme de décroissance exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

avec τ_a le temps caractéristique d'absorption du milieu. On définit également le libre parcours moyen d'absorption l_a par

$$l_a = \tau_a c$$

c'est la longueur caractéristique des pertes par absorption dans le milieu. Des mesures indépendantes réalisées en transmission permettent de donner un ordre de grandeur de l_a pour nos échantillons de

tiges immergées dans l'eau : on trouve une centaine de millimètres soit beaucoup plus que le libre parcours moyen élastique qui est compris entre 2 mm et 14 mm .

Pour une durée de signal rétrodiffusé utile fixée¹¹, la longueur des fenêtres résulte d'un compromis avec la dynamique du phénomène. En effet, la dynamique est mieux rendue par des fenêtres nombreuses mais chaque fenêtre doit durer assez longtemps pour donner des informations exploitables sur le phénomène de rétrodiffusion et disposer d'une résolution fréquentielle assez précise. La longueur des fenêtres que nous utilisons est de 5 μs (soit une résolution fréquentielle typique de 0.2 MHz), ce qui est très inférieur à τ_a : l'effet de l'absorption est de l'ordre de 3 % sur les intensités sur la durée d'une fenêtre. L'absorption n'intervient donc que dans ses effets à courte portée et non sur l'ordre de diffusion multiple. Nous vérifierons que cela ne change pas nos mesures de D en comparant les résultats obtenus avec deux longueurs de fenêtres : 5 μs et 10 μs .

Une autre confirmation expérimentale de l'indépendance de notre évaluation de D vis à vis de l'absorption sera présentée dans le cadre des expériences de rétrodiffusion menées dans l'huile en section 2.4.6.

Des discussions existent sur la validité de la définition des sections efficaces de diffusion dans les milieux très absorbants [4], pour lesquels les effets d'absorption à courte échelle sont à prendre en compte. Dans de tels cas, le cône dynamique ne devrait plus pouvoir mener à une mesure correcte de D , mais nous sommes très éloignés de ces conditions extrêmes où la diffusion est "tuée" par l'absorption.

2.4.3 Influence des corrélations entre diffuseurs

Le rôle des corrélations entre diffuseurs s'est avéré important dans l'étude du champ cohérent. Le développement diagrammatique exposé au premier chapitre a permis de déterminer rigoureusement l'ordre de grandeur des corrélations dans notre problème : une correction d'ordre 2 à la théorie classique d'*Independent Scattering Approximation*. Cette correction d'ordre 2 intervenait explicitement dans l'expression de l'opérateur de masse Σ . Rappelons que Σ est le kernel de l'équation de Dyson, la relation self-consistante pour le champ ultrasonore moyen.

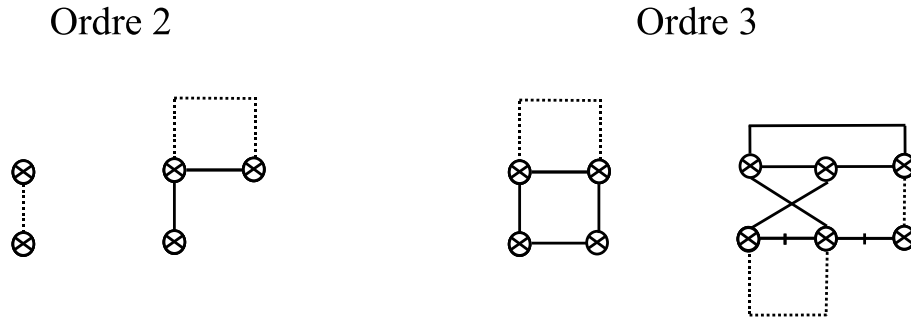
Vu qu'on s'intéresse ici au *monde probabiliste en intensité* [2] on pourrait penser que les corrélations n'interviennent ici qu'à l'ordre 4 pour corriger la théorie de diffusion sans corrélation. Examinons pourquoi les corrélations interviennent de manière plus subtile dans notre problème.

Pourquoi les corrélations n'interviennent-elles pas à l'ordre 4 en intensité ?

Le raisonnement consisterait en quelque sorte à multiplier les équations de Dyson des champs pour obtenir les relations fondamentales décrivant l'intensité. Ce faisant, on aboutirait à la description de l'intensité du champ moyen rétrodiffusé alors que nous étudions la moyenne des intensités rétrodiffusées. Ce point a été soulevé en section 2.2.1 où nous précisons que la moyenne sur le désordre

¹¹C'est-à-dire prenant en compte la résolution angulaire des capteurs, le niveau de bruit et la zone de décroissance du cône dynamique.

devait suivre et non précéder le produit des fonctions de Green. On constate ainsi que les corrélations interviennent pour l'intensité dès l'ordre 2. On donne ci-dessous des exemples de diagrammes faisant intervenir les corrélations à l'ordre 2 et 3.



Vu que le formalisme que nous avons présenté en section 2.2.1 est général, nous pouvons nous en servir sans ajout pour étudier le rôle des corrélations. Finalement nous avons restreint notre présentation de la théorie du cône à partir de la présentation des diagrammes de ladder et croisés : il nous faut donc seulement généraliser les expressions de ces contributions en prenant en compte les corrélations.

2.4.3.1 Diagrammes de ladder généralisés L_M : prise en compte des corrélations

Les diagrammes de ladder classiques sont construits en ne conservant que le premier bloc intervenant dans le développement en intensité, ce qui donne lieu au développement de la section 2.2.3, soit

$$\boxed{L} = \begin{array}{c} 1 \otimes 2 \\ | \\ 3 \otimes 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \otimes 2 \\ \text{---} \otimes \text{---} \\ | \quad | \\ 3 \otimes 4 \end{array} + \dots = F_{2D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)$$

avec

$$\begin{array}{c} 1 \otimes 2 \\ | \\ 3 \otimes 4 \end{array} = n \int S(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_1) S(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1$$

Lorsque les corrélations entre diffuseurs existent, il suffit d'ajouter au bloc constitutif précédent la première contribution mettant en jeu les corrélations en intensité, soit le terme d'ordre 2 :

$$\begin{array}{c} 1 \otimes 2 \\ \vdots \\ 3 \otimes 4 \end{array} = n^2 \int S(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_1) S(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_3, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_3) g_2(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_3) d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_3$$

Ainsi le nouveau bloc constitutif des diagrammes de ladder en présence de corrélation est

$$\begin{array}{c} \otimes \\ \vdots \\ \otimes \end{array} = \begin{array}{c} \otimes \\ | \\ \otimes \end{array} + \begin{array}{c} \otimes \\ \vdots \\ \otimes \end{array} = n \int S(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2) S(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'_3, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}'_4) [\delta(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) + n g_2(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_3)] d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_3$$

Modification de la contribution incohérente du cône dynamique

On note I_{IM} l'intensité incohérente modifiée par la prise en compte des corrélations. L'intensité I_I s'obtient par la somme des diagrammes de ladder classiques. Par analogie, on obtient I_{IM} par le même processus en faisant intervenir les diagrammes de ladder généralisés. La somme des blocs élémentaires de L_M donne lieu à un développement faisant intervenir des suites de bloc classiques et corrélés selon

$$\begin{array}{|c|} \hline L_M \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 1 \otimes 2 \\ \vdots \\ 3 \otimes 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \otimes 2 \\ \text{---} \text{---} \\ \vdots \quad \vdots \\ 3 \otimes 4 \end{array} + \dots$$

Ce qui donne pour l'intensité incohérente l'expression intégrale suivante

$$I_{IM}(S, D, t) = \iint |\overline{G}(M_1, S)|^2 |\overline{G}(D, M_2)|^2 L_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (2.34)$$

Cette intégrale n'est pas calculable dans le cas général. Certains auteurs [48] ont tenté de prendre en compte l'importance des corrélations de manière analytique. Avec un certain nombre de simplifications (*QCA*, modèle de Percus-Yevick, particule petite devant la longueur d'onde, corrélations de courte portée) la contribution incohérente prend exactement la même forme analytique que dans le cas classique à un facteur constant près. Les approximations utilisées par ces auteurs ne s'appliquent pas à nos situations. Le calcul présenté n'est valable que dans le cas de diffuseurs ayant des corrélations de très courte portée, ce qui n'est pas notre cas.

On constate ici une différence nette avec l'étude du champ cohérent. Pour ce dernier, l'étude des corrélations a conduit au calcul d'une contribution facilement identifiable dans l'opérateur de masse. Dans le cas du cône de rétrodiffusion, la prise en compte d'une somme infinie de diagrammes complique sérieusement l'estimation de l'effet des corrélations entre diffuseurs.

Modification de la contribution cohérente du cône dynamique

L'intensité cohérente contribuant au cône dans le cas de diffuseurs décorrélés met en jeu la somme des diagrammes croisés exposés en 2.2.4. Dans le développement de ces diagrammes, il n'y a pas de bloc élémentaire permettant de déduire les termes d'ordre de diffusion élevés à partir des précédents. Cela implique qu'il faut étudier spécifiquement chacun des termes inclus dans le développement diagrammatique pour évaluer l'effet des corrélations. A priori, le problème est intricable, mais le principe de réciprocité va nous permettre de déterminer la forme spécifique des diagrammes à prendre en compte.

Application du principe de réciprocité

Le principe de réciprocité nous permet d'associer aux termes du développement du kernel réductible L_M leur contribution réciproque. Considérons par exemple le diagramme sous forme développée à gauche de la figure 2.28 : on peut lui associer le diagramme de droite qui correspond au chemin réciproque du précédent.



FIG. 2.28: A chaque contribution de diffusion multiple de l'intensité incohérente généralisée (à gauche) correspond par réciprocité un diagramme croisé contribuant à l'intensité cohérente généralisée (à droite).

Ainsi le kernel réductible des diagrammes croisés est entièrement déterminé en présence de corrélation : il suffit d'associer à chaque terme de diffusion multiple intervenant dans L_M son diagramme réciproque.

L'intérêt de ce résultat est de montrer que les intensités cohérentes et incohérentes sont modifiées dans la *même mesure* par la prise en compte des corrélations. *En première approche, les corrélations ne modifient donc pas notre procédure d'exploitation du cône dynamique.*

Les courbes expérimentales que nous présentons en 2.4.4 montrent une évolution temporelle de $\left(\frac{1}{\Delta x_D}\right)^2$ suivant les prévisions de l'approche diffusive. Même si le calcul explicite des expressions généralisées n'est pas effectué, on fait donc l'hypothèse de retrouver à un coefficient près l'expression diffusive des kernels réductibles intervenant dans les expressions I_{IM} et I_{CM} . Cette hypothèse est justifiée rigoureusement lorsque des simplifications sont faites sur la fonction de corrélation de paire comme dans le cas des corrélations de très courte portée.

La réciprocité suffit-elle à compenser tous les termes ?

Le raisonnement précédent ne concernait que les diagrammes de diffusion multiple (c.à.d d'ordre strictement supérieur à 1). En effet, seuls les chemins correspondants peuvent être associés à leur chemin réciproque. Néanmoins le bloc du kernel des diagrammes de ladder avec corrélation est un terme de diffusion simple, il n'est donc pas compensé par une contribution croisée et constitue clairement un effet des corrélations que l'on ne peut éliminer. De plus, c'est par construction le terme d'ordre le plus faible mettant en jeu la fonction de corrélation de paire.

Comme dans le cas classique, ce terme supplémentaire de diffusion simple est introduit dans l'expression du cône sans être explicitement calculé : on applique à nouveau les simplifications étudiées précédemment permettant de considérer la contribution de diffusion simple comme étant constante

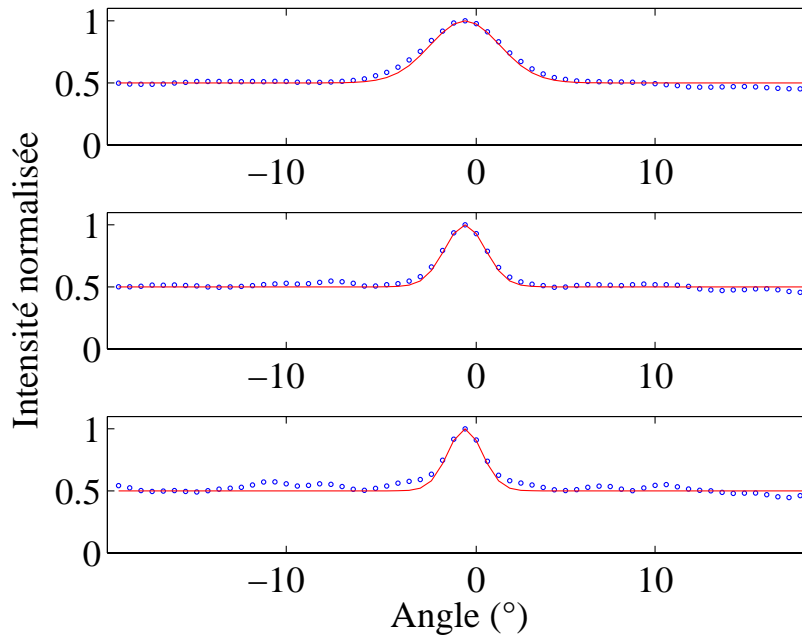


FIG. 2.29: Cône dynamique expérimental (cercles bleus) et théorique (en rouge) pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm de concentration 0.29 tige/mm^2 à la fréquence 2.8 MHz . Du haut vers le bas, les temps correspondants sont $40 \mu\text{s}$, $80 \mu\text{s}$ et $120 \mu\text{s}$. La valeur de D est ici de $2.2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

dans la fenêtre angulaire d'étude.

2.4.4 Mesure de D sur des échantillons de diffuseurs identiques

Nous présentons les résultats obtenus en testant les trois échantillons de tiges prototypes présentés dans le cadre de l'étude du champ cohérent.

Les figure 2.29 et 2.30 montrent l'accord entre le tracé des cônes dynamiques expérimentaux et théorique en utilisant l'approximation n^3 aux fréquences 2.8 MHz et 3.4 MHz respectivement (avec une largeur de bande de 0.2 MHz). Les courbes présentées correspondent au milieu de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité $0.29/\text{mm}^2$. On constate un très bon accord, notamment dans la zone de surintensité que nous utilisons pour déterminer D .

2.4.4.1 Etude en régime quasi-impulsionnel

Nous nous plaçons en régime quasi-impulsionnel en émettant un signal source d'une durée de quelques périodes (typiquement $1 \mu\text{s}$ à 3 MHz). De tels signaux n'étant pas très énergétiques, nous avons utilisé un signal en forme de *chirp* linéaire, beaucoup plus long (environ $100 \mu\text{s}$) et dont l'autoconvolution donne un signal quasi-impulsionnel. La largeur de la bande de fréquences est de 1 MHz et ses bornes sont adaptées aux diffuseurs¹². Le signal rétrodiffusé est fractionné en

¹²Le choix des fréquences extrêmes est réalisé dans le cadre de l'étude fréquentielle de la section suivante.

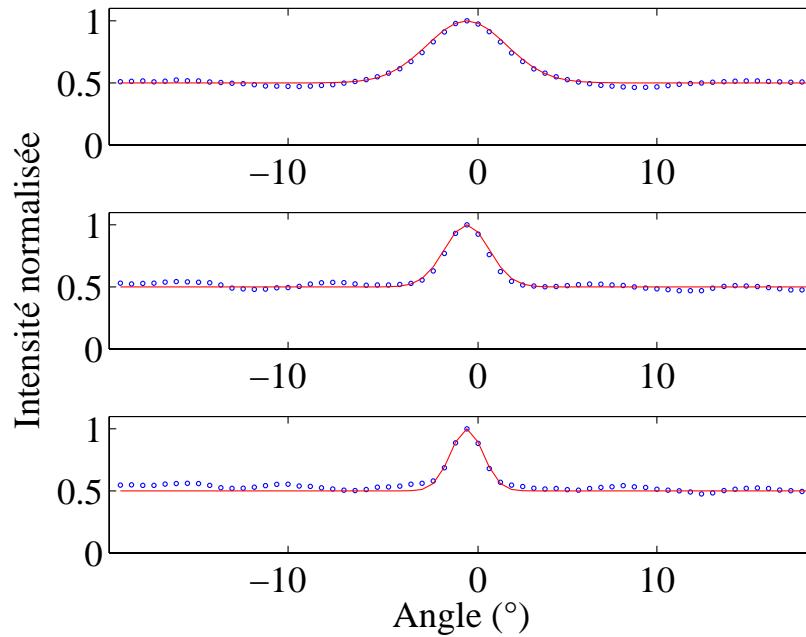


FIG. 2.30: Cône dynamique expérimental (cercles bleus) et théorique (en rouge) pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm de concentration 0.29 tige/mm^2 à la fréquence 3.4 MHz . Du haut vers le bas, les temps correspondants sont $40 \mu\text{s}$, $80 \mu\text{s}$ et $120 \mu\text{s}$. La valeur de D est ici de $1.4 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

fenêtres de longueurs $5 \mu\text{s}$, espacées de $2.5 \mu\text{s}$, ce qui donne une résolution fréquentielle typique de 0.2 MHz ¹³. En régime quasi-impulsionnel, on peut déterminer la valeur du coefficient de diffusion avec le maximum de précision. En effet, la formation du cône de rétrodiffusion résulte d'un effet statistique : la moyenne sur le désordre est nécessaire pour le faire apparaître. On a vu en 2.4.1 qu'une première moyenne était réalisée par construction sur les différentes voies de la barrette de transducteurs. Le deuxième type de moyenne est effectué en déplaçant les transducteurs le long de l'échantillon. Une autre moyenne est obtenue en utilisant les *grains d'information fréquentiels* [12], c'est-à-dire le nombre de contributions fréquentielles indépendantes N_{fi} sur la plage de fréquences utilisée Δw . Un ordre de grandeur de N_{fi} est obtenu simplement dans le cadre de l'approche diffusif : $N_{fi} = \frac{\Delta w}{\delta w_c}$ avec δw_c la longueur de corrélation fréquentielle. Ce terme est évalué par l'inverse du temps de Thouless τ_{Th} caractérisant l'étalement diffusif (cf. 2.3.4). Pour un échantillon de 80 mm d'épaisseur on obtient de l'ordre de 200 fréquences décorréliées dans la bande $[2.5 - 3.5] \text{ MHz}$. Cette moyenne spécifique aux expériences large bande permet d'obtenir des erreurs d'évaluation de D très faibles.

Par exemple, pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité 0.29 tige/mm^2 , les résultats des expériences en régime impulsionnel sont reportés en figure 2.31.

On a tracé le cône dynamique obtenu ainsi que les points expérimentaux correspondant à l'évo-

¹³ Nous avons également utilisé des fenêtres de $10 \mu\text{s}$ espacées de $2.5 \mu\text{s}$: les résultats sont très proches dans les deux cas.

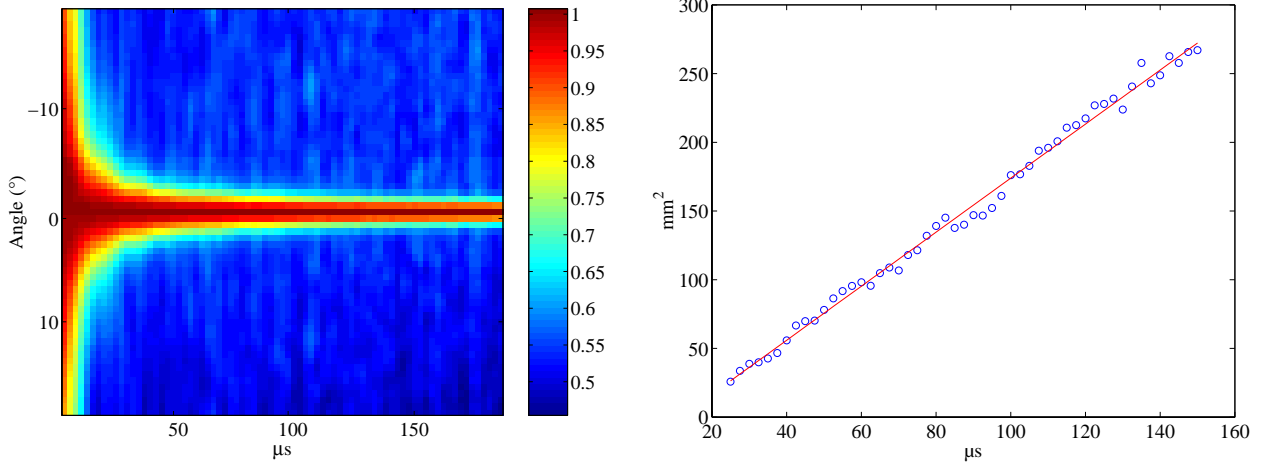


FIG. 2.31: Cône dynamique expérimental et évaluation de D en régime impulsionnel pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm de concentration 0.29 tige/mm^2 . Sur la figure de droite, la droite rouge est le fit linéaire optimal des mesures de $\left(\frac{k}{a\Gamma\Delta x_D}\right)^2$ en fonction du temps. On trouve $D = 2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$

lution temporelle de $\left(\frac{1}{\Delta x_D}\right)^2$ et la droite d'interpolation associée. Les bords du cône dynamique montrent nettement la décroissance en \sqrt{Dt} , et la figure de droite montre que les données expérimentales sont bien ajustées par un fit linéaire sur la fenêtre de temps représentée. Ceci est en accord avec les discussions théoriques précédentes (cf. 2.3.6.1). Pour la bande passante $[2.5 - 3.5] \text{ MHz}$, on évalue $D = 2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ avec une erreur de fit de 0.5% et une erreur globale de l'ordre de 9% . Pour l'épaisseur 40 mm on trouve $D = 2.1 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$, ce qui confirme le faible rôle de l'épaisseur. On obtient $D = 3.1 \pm 0.3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ pour l'échantillon de tiges de 0.8 mm de densité 0.12 tige/mm^2 , ce qui confirme l'augmentation de la constante de diffusion lorsque la diffusion multiple est moins forte. Les courbes expérimentales correspondant aux deux derniers échantillons sont exposées en figure 2.32.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de densité 0.18 tige/mm^2 on trouve une valeur de $D = 3.6 \pm 0.3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ pour l'épaisseur 80 mm et $D = 3.5 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ pour l'épaisseur 40 mm , dans la bande de fréquence $3.2 - 4.2 \text{ MHz}$. On constate donc que dans cet échantillon moins concentré et constitué de diffuseurs moins efficaces que le précédent, la constante de diffusion est plus grande. L'énergie s'étale plus efficacement dans l'échantillon car elle est moins "prisonnière" du milieu. A force de diffusion égale, on peut vérifier ce raisonnement en modifiant seulement la concentration du milieu.

On obtient $D = 3.1 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ pour l'échantillon de tiges de 0.8 mm de densité 0.12 tige/mm^2 , ce qui confirme l'augmentation de la constante de diffusion lorsque la diffusion multiple est moins forte. Les courbes expérimentales correspondant aux deux derniers échantillons sont exposées en figure 2.32.

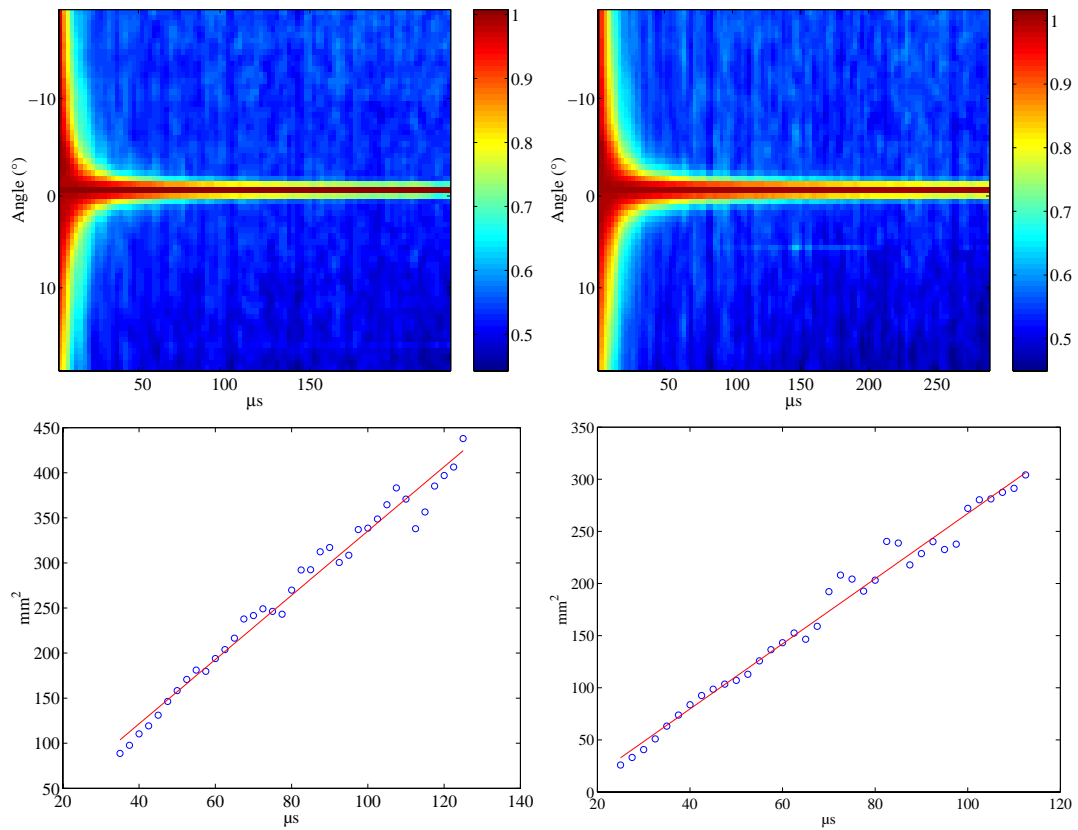


FIG. 2.32: Cône dynamique expérimental et évaluation de D en régime impulsionnel pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm de concentration 0.18 tige/mm^2 à gauche : on obtient $D = 3.6 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$. A droite les mêmes données extraites du milieu de tiges de diamètre 0.8 mm de concentration 0.12 tige/mm^2 . On obtient $D = 3.1 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

L'évaluation de la constante de diffusion en régime impulsionnel permet de comparer l'effet de la concentration et de la force des diffuseurs sur la propagation de l'énergie diffuse. La valeur de D obtenue permet de quantifier globalement la diffusion dynamique mais ne permet pas de mettre en évidence les résonances du milieu : cela nécessite une étude fréquentielle de la constante de diffusion.

2.4.4.2 Mise en évidence de la dépendance fréquentielle de D

Dans le premier chapitre, le traitement du champ cohérent en bandes de fréquences étroites a montré la résonance des diffuseurs dont la signature individuelle se manifeste dans la représentation fréquentielle du libre parcours moyen élastique. Pour construire le cône dynamique, le signal rétro-diffusé est fractionné par les mêmes fenêtres qu'à la section précédente, mais l'énergie est calculée sur des bandes fréquentielles de 0.2 MHz de largeur.

Ce choix résulte d'un compromis classique lorsqu'on mesure en fréquence une grandeur dynamique : par analyse de Fourier, une bonne résolution fréquentielle diminue la résolution temporelle, et inversement.

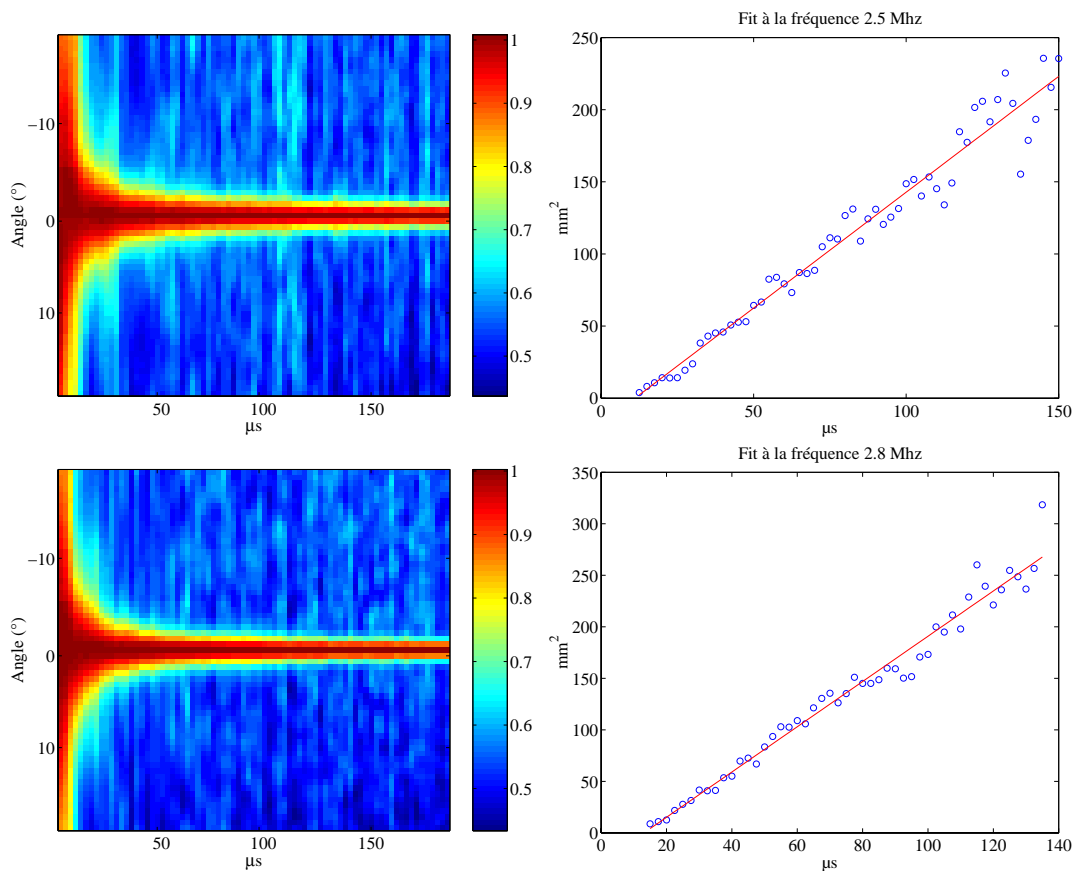


FIG. 2.33: Cône dynamique expérimental et évaluation de D en régime fréquentiel pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm de concentration 0.29 tige/mm^2 à la fréquence 2.5 MHz à gauche et 2.8 MHz à droite. La seconde fréquence donne un cône qui s'affine sensiblement plus vite et on obtient $D_{2.5} = 1.6 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ et $D_{2.8} = 2.2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

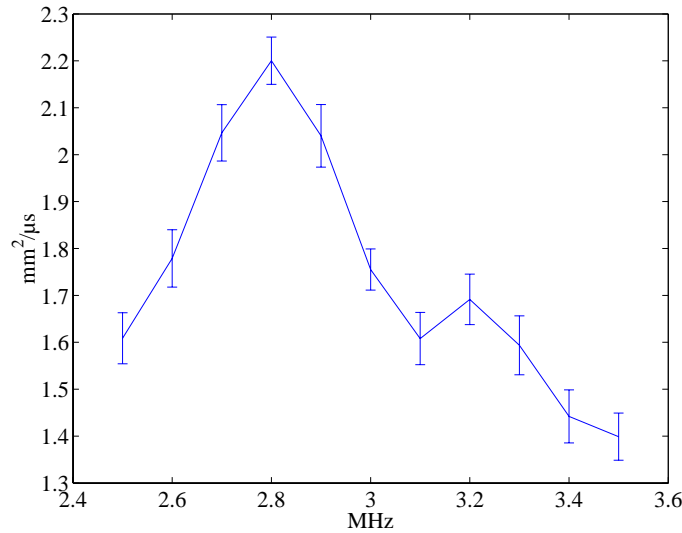


FIG. 2.34: Comportement fréquentiel de D pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité $0.29 \text{ tige}/\text{mm}^2$. La résonance des diffuseurs est mise en évidence par la valeur maximale de D à la fréquence 2.8 MHz . La barre d'erreur d'interpolation est représentée pour chaque fréquence. Ce comportement fréquentiel ne résulte pas de l'erreur d'estimation sur D , il est bien caractéristique de l'échantillon.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité $0.29 \text{ tige}/\text{mm}^2$ on a représenté en figure 2.33 les cônes dynamiques à deux fréquences : 2.5 MHz à gauche et 2.8 MHz à droite. On constate que le cône à 2.8 MHz s'affine légèrement plus vite que l'autre. Quantitativement, cela conduit à des valeurs différentes de la constante de diffusion à ces deux fréquences : on mesure $D_{2.5} = 1.6 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ et $D_{2.8} = 2.2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ soit un écart de plus de 30 %.

Il est instructif de généraliser cette étude à d'autres fréquences, typiquement comprises entre 2 MHz et 4 MHz . Les valeurs de D obtenues pour l'échantillon le plus dense sont représentées en figure 2.34 avec les barres d'erreur associées. La constante de diffusion présente un pic autour de 2.8 MHz soit la fréquence de résonance individuelle d'une tige de diamètre 0.8 mm . Vu les valeurs des erreurs d'interpolation, comprises entre 2.5 % et 5 % selon les fréquences, ce résultat est significatif.

Les données expérimentales sont naturellement moins bien moyennées qu'en régime quasi-impulsionnel, ce qui se traduit par une erreur d'interpolation plus élevée mais l'erreur globale sur D reste raisonnable pour cet échantillon. Nous mettons en évidence un comportement diffusif différent selon les fréquences, à rattacher à un effet individuel des tiges : la résonance.

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , le tracé de D en fréquence permet également de retrouver l'effet de la résonance individuelle des tiges. Comme dans le premier chapitre, c'est la fréquence 3.6 MHz qui correspond à un comportement singulier pour ce diamètre. L'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité $0.12 \text{ tige}/\text{mm}^2$ permet de retrouver la résonance caractérisant les tiges de cette taille. Dans le cas de ces deux derniers échantillons, l'erreur d'évaluation

de la constante de diffusion est plus élevée que pour le milieu le plus dense.

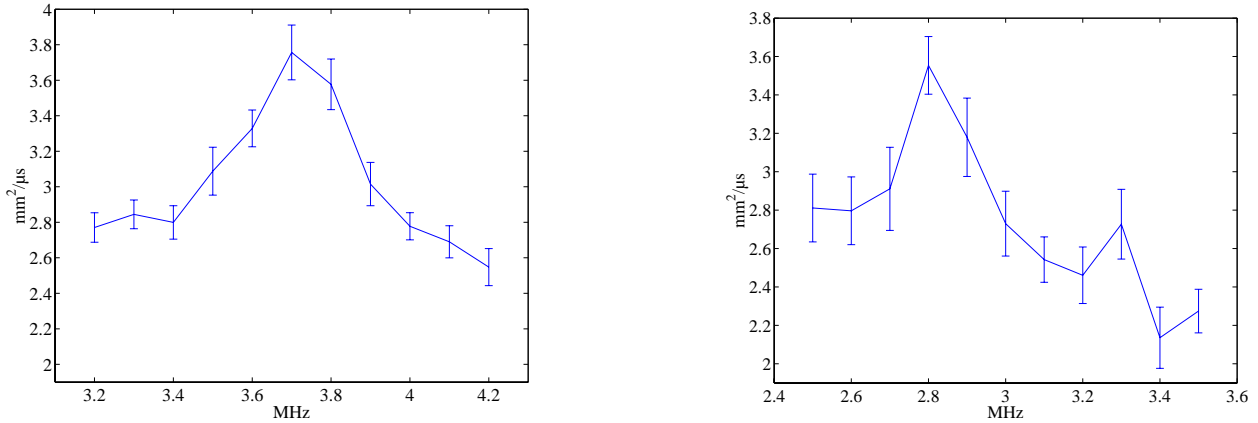


FIG. 2.35: Evaluation de D en fonction de la fréquence pour les échantillons de tiges de diamètre 0.6 mm à gauche et 0.8 mm et densité $0.12 \text{ tige}/\text{mm}^2$ à droite. Le comportement fréquentiel est nettement différencié, alors que la valeur quasi-impulsionnelle de D était proche.

Le comportement en fréquence des échantillons de tige de diamètre différents est donc nettement différencié, même lorsque la valeur de D intégrée sur les fréquences donne des valeurs comparables. Le comportement individuel des diffuseurs se manifeste donc dans un régime où la diffusion multiple est bien établie. Ce phénomène sort du cadre de l'étude du premier chapitre car le champ cohérent n'était concerné que par les ordres de diffusion les plus faibles, alors qu'ici le signal réfléchi est largement diffusé.

Le cône de rétrodiffusion cohérente s'avère donc un outil puissant et original pour déterminer la constante de diffusion d'un milieu composé de diffuseurs identiques et mettre en évidence la résonance individuelle des tiges. La section suivante traite le cas d'un échantillon constitué de diffuseurs différents.

2.4.5 Mesure de D sur des échantillons de diffuseurs différents

Dans cette section on considère un milieu constitué de deux types de diffuseurs ou milieu hybride. Comme en 1.10.1, les échantillons mettant en jeu des diffuseurs de même nature seront nommés *monodisperses*.

2.4.5.1 Mise en évidence des réponses de chaque type de diffuseur

Nous cherchons à déterminer si la technique expérimentale du cône de rétrodiffusion dynamique permet de distinguer des diffuseurs différents au sein du milieu d'étude. Nous utilisons pour cela un échantillon hybride, constitué de tranches alternées de tiges de diamètre 0.6 mm et 0.8 mm (figure

2.36)¹⁴. L'épaisseur de chaque tranche est de 15 mm et l'épaisseur totale est de 60 mm . On réalise les acquisitions sur chacune des faces de l'échantillon hybride et on se place dans les mêmes conditions expérimentales que pour les expériences présentées jusqu'ici. La théorie développée précédemment peut se généraliser facilement au cas de diffuseurs différents : il suffit de remplacer le bloc du vertex des diagrammes de ladder classiques par celui de la figure 2.37 à droite. On choisit de ne pas reprendre le développement complet, notre approche étant ici expérimentale.

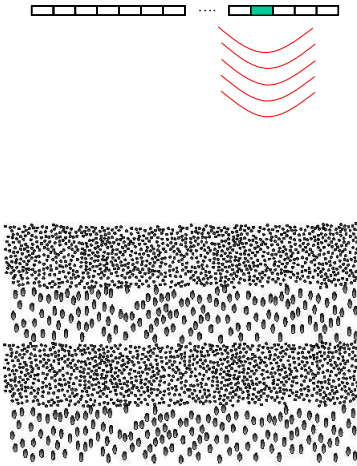


FIG. 2.36: Expérience de rétrodiffusion cohérente sur un échantillon hybride. Les tranches de tiges de diamètre 0.6 mm et 0.8 mm sont alternées.



⊗ : diffuseur de type 1
● : diffuseur de type 2

FIG. 2.37: Le bloc de ladder d'un échantillon de mêmes diffuseurs à gauche est remplacé par le bloc de droite faisant intervenir les deux types de diffuseurs distincts.

La mesure de D intégrée sur la bande de fréquence $[2.5 - 4.2]\text{ MHz}$ donne une valeur de $2.8\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ avec une erreur d'interpolation de 5% . Le coefficient de diffusion est donc compris entre les valeurs obtenues pour chaque type de tige étudiées séparément¹⁵.

La représentation fréquentielle du coefficient de diffusion est représentée en figure 2.38. Pour tracer cette courbe on a intégré l'énergie rétrodiffusée sur des bandes de fréquences de largeur 0.2 MHz comme dans le cas des échantillons homogènes.

On distingue des valeurs particulières qui correspondent aux résonances caractérisant chacun des diamètres de tige. Ainsi la valeur de D atteint un maximum à la fréquence 2.7 MHz et un maximum relatif autour de la fréquence 3.7 MHz . Autour de 2.7 MHz , les tiges les plus fortes en terme de diffusion sont dans une zone de résonance qui s'accompagne par une baisse de leur pouvoir diffusant, ce qui conduit à une plus grande transparence du milieu et donc à une propagation plus efficace de l'intensité diffuse. Autour de 3.7 MHz le même phénomène de résonance se retrouve avec les tiges

¹⁴Ce type d'échantillon est donc différent de ceux utilisés dans les expériences de transmission cohérente avec deux types de diffuseurs : dans ce dernier cas on juxtaposait deux tranches de milieux différents d'épaisseur variable, cf 1.10.1.

¹⁵Nous avons obtenu $D = 2\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et de densité $0.29\text{ tige}/\text{mm}^2$ et $D = 3.6\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de densité $0.18\text{ tige}/\text{mm}^2$.

les plus faibles : dans ce domaine fréquentiel le milieu est plus transparent pour les tiges de 0.6 mm mais pas pour celles de diamètre 0.8 mm . Il en résulte une transparence globale moins forte autour de 3.7 MHz qu' autour de 2.7 MHz et un maximum seulement relatif pour D .

Dans les zones de fréquences éloignées des deux résonances, par exemple dans la bande $[3-3.5] \text{ MHz}$ la constante de diffusion est plus faible car chaque type diffuseur contribue à la diffusion multiple de manière plus prononcée que dans les zones de résonance. L'onde diffuse est plus piégée dans le milieu dans cette bande de fréquences.

Notons que ces raisonnements qualitatifs sont justifiés car les constantes de diffusion des deux types de diffuseurs séparés présentent un profil pratiquement plat en dehors des zones de résonance. On peut donc expliquer les valeurs de D dans le cas hybride directement par les résonances des tiges.

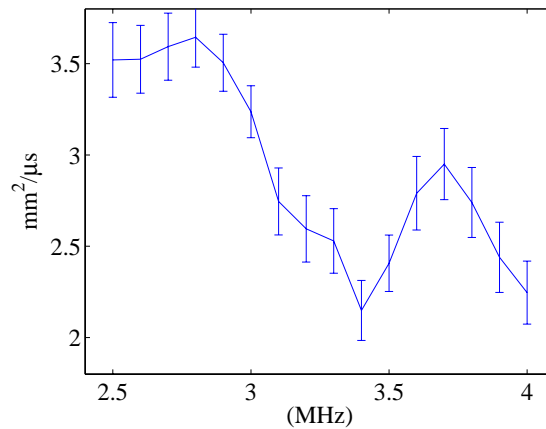


FIG. 2.38: Comportement fréquentiel de D pour l'échantillon hybride. On distingue les résonances caractéristiques des tiges de diamètre 0.8 mm et 0.6 mm respectivement autour de 2.7 MHz et 3.7 MHz .

2.4.5.2 Imagerie par cône dynamique ?

Les résultats de la section précédente montrent que le cône dynamique permet d'extraire les comportements spécifiques des différents diffuseurs composant un échantillon hybride. La détermination de D n'utilise cependant la dynamique du phénomène de rétrodiffusion que d'une manière globale. En effet, le coefficient de diffusion est obtenu par la mesure de la pente de l'inverse de la largeur au carré du cône sur toute la durée utile du signal.

Le problème posé ici est le suivant : peut-on séparer en temps des zones de diffusion distinctes dans le milieu ? On utilise deux échantillons différents. Le premier est homogène, constitué de tiges de diamètres 0.6 mm sur une épaisseur de 60 mm . Le deuxième échantillon est composé d'une partie de 30 mm d'épaisseur de tiges de 0.6 mm juxtaposée avec une partie de 30 mm d'épaisseur de tiges de 0.8 mm . L'objectif est de distinguer dynamiquement la réponse fréquentielle des tiges de 0.8 mm de diamètre.

Vu que la pente de l'évolution temporelle de $\left(\frac{1}{\Delta x_D}\right)^2$ caractérise la diffusion dans le milieu, on

s'attend à obtenir une valeur de D différente pour les deux échantillons d'après la section précédente. Peut-on aller plus loin et déterminer une variation de pente identifiable entre les deux échantillons précédents ? La courbe présentée en figure 2.39 montre les points expérimentaux correspondant aux deux échantillons pour la fréquence de résonance des tiges de diamètre 0.8 mm .

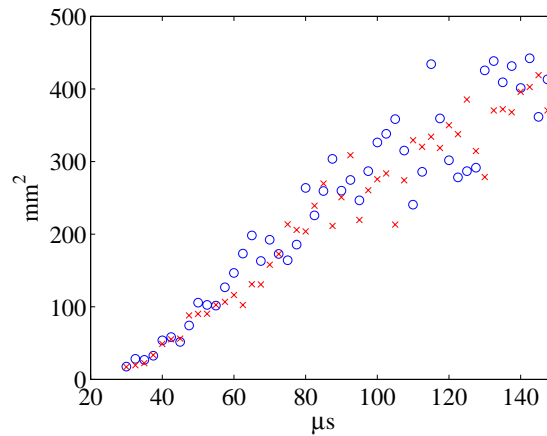


FIG. 2.39: Représentation de l'évolution temporelle de $\left(\frac{k}{a\Gamma\Delta x_D}\right)^2$ pour l'échantillon monodisperse (cercles bleus) et l'échantillon hybride (croix rouges). On ne distingue pas de zone de variation de pente franche.

Cette fréquence, qui est caractéristique du comportement des tiges que l'on cherche à identifier ne permet pas de détecter une variation temporelle franche de la pente. On ne peut donc pas repérer de manière précise la zone constituée des tiges de diamètre 0.8 mm .

Ce résultat montre clairement les limites de la caractérisation d'un milieu multiples diffuseur. En effet, lorsque l'onde diffuse a exploré la zone de tiges de 0.8 mm dans l'échantillon hybride, le signal rétrodiffusé correspondant est noyé par deux contributions :

- la réponse des tiges de 0.6 mm sur le trajet aller et retour
- la contribution des chemins ayant parcouru la même longueur mais exclusivement dans la zone de tige 0.6 mm

De plus, on s'est placé dans des conditions favorables car rappelons que les tiges de 0.6 mm , de pouvoir diffusif le plus faible, noient moins la réponse des tiges 0.8 mm que dans la configuration opposée.

2.4.6 Mesure de D dans l'huile

Nous avons montré dans la section 2.4.2.4 que la détermination de la constante de diffusion par la technique du cône de rétrodiffusion cohérente était indépendante de l'absorption. Nos arguments reposaient sur la normalisation intrinsèque au cône, ainsi que sur la longueur des fenêtres temporelles sur lesquelles l'énergie rétrodiffusée est intégrée.

Afin de confirmer l'indépendance de notre technique à l'absorption du milieu hôte, nous avons mené

des expériences de rétrodiffusion dans des milieux différents de l'eau pour pouvoir comparer *in fine* les évaluations de D dans les différents milieux ambiants.

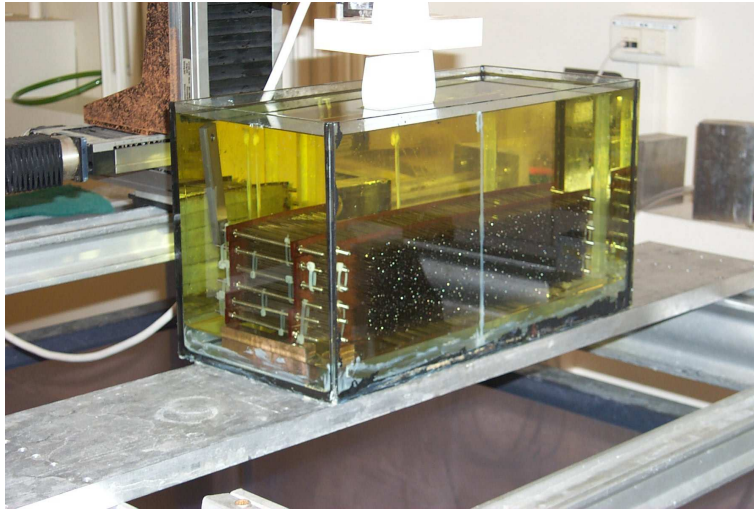


FIG. 2.40: Expérience de rétrodiffusion dynamique dans l'huile : montage expérimental.

Choix du milieu absorbant

L'objectif de nos expériences est de comparer la constante de diffusion D_{eau} mesurée dans l'eau à celle mesurée dans un milieu absorbant. Ce dernier doit en outre présenter des caractéristiques telles que la diffusion soit - à l'absorption près - très proche de celle dans l'eau. Dans le premier chapitre, nous avons montré que les paramètres du milieu ambiant qui gouvernent le processus de diffusion sont essentiellement la densité ρ et la célérité c des ondes ultrasonores. Ces contraintes expérimentales ont considérablement réduit notre choix de matériaux absorbants.

Nous avons tout d'abord travaillé sur des gels de gélatine de concentrations variées. Ces gels présentent des densités et célérités très proches de l'eau mais sont trop peu absorbants. Nous avons utilisé des gels de xanthane afin d'augmenter les pertes mais la valeur des longueurs caractéristiques d'absorption s'est avérée encore trop élevée. Une manière de "charger" le gel consiste à ajouter de l'agar mais cela ajoute des grains diffuseurs et modifie donc le processus de diffusion.

Finalement, le matériau le plus adapté à nos contraintes s'est avéré être l'huile de consommation courante. Nous avons adapté le montage expérimental selon la figure 2.40.

On a utilisé une petite cuve d'une trentaine de litres, remplie d'eau ou d'huile selon le cas. L'échantillon diffuseur est placé sur des cales, à 2 cm du fond de la cuve. La barrette de transducteurs est en vis à vis et mobile selon le même déplacement relatif à l'échantillon que dans les expériences présentées précédemment. Vu les dimensions du dispositif, il n'est pas possible de se placer à 16 cm de distance de l'échantillon : la distance est ici de 8 cm. Dans ce cadre, les approximations de champ lointain sont moins bien vérifiées mais nous montrerons qu'elles donnent lieu à des valeurs acceptables pour D . Ici, l'essentiel n'est pas d'obtenir des valeurs fiables de D mais de

comparer, toutes choses égales par ailleurs, l'influence de l'absorption intrinsèque sur la mesure.

Protocole expérimental

Le nerf de la guerre dans cette expérience, consiste à avoir la disposition la plus proche entre les mesures dans l'eau et dans l'huile. Pour ce faire, nous avons suivi le protocole suivant :

- On remplit la cuve d'eau et on insère l'échantillon.
- On attend entre 12 h et 24 h pour le dégazage de l'eau, permettant d'éliminer les bulles d'air dans la cuve.
- On acquiert les données dans l'eau.
- On vide l'eau à l'aide d'un siphon afin de ne pas déplacer l'échantillon.
- On sèche la cuve.
- On insère les 25 litres d'huile en prenant garde à ne pas déplacer le dispositif et à ne pas former de bulles dans l'échantillon.
- On acquiert les données dans l'huile.

Caractéristiques de l'huile et mesures préliminaires

La densité de l'huile utilisée est $d_h = 0.92$. De plus, la section efficace de diffusion d'une tige dans l'huile a été exposée en section 1.7.6, elle est pratiquement confondue avec celle dans l'eau. L'expérience de calibration consiste à comparer les signaux réfléchis par une plaque d'acier dans l'huile et dans l'eau. Les amplitudes des réflexions dans ces deux milieux sont tracées en figure 2.41. On constate tout d'abord que les signaux sont décalés. L'onde se déplace plus vite dans l'eau et la différence de vitesse est de l'ordre de 3 % avec $c_h = 1.45 \text{ mm}/\mu\text{s}$. On note en outre que le signal est plus faible dans l'huile, ce qui est dû à l'absorption de ce milieu.

On évalue l'absorption dans l'huile relativement à celle dans l'eau dans des bandes de fréquences de 0.2 MHz de large. Cela donne lieu à la figure 2.42 où on représente le libre parcours moyen d'absorption fréquentiel $l_a(f)$. La valeur de l_a intégrée sur la bande [2.5 – 3.5] MHz est de 100 mm.

Résultats des expériences de rétrodiffusion

Comme dans les expériences présentées précédemment, le signal source est un chirp mais de durée moitié pour éviter les échos d'aller retour entre la barrette et l'échantillon qui sont plus proches ici.

La valeur de D intégrée sur la bande [2.5, 3.5] MHz est de $1.96 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ dans l'eau et de $1.88 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ dans l'huile avec une erreur d'interpolation de l'ordre de 8 %. La différence d'évaluation impulsionnelle sur D entre l'huile et l'eau est donc de 4 %, soit un écart inclus dans la marge d'erreur d'interpolation. De plus, la valeur de D dans l'eau est celle trouvée dans les expériences précédentes pour cet échantillon, ce qui confirme que l'hypothèse de champ lointain est raisonnablement vérifiée malgré la plus faible distance entre capteurs et échantillon.

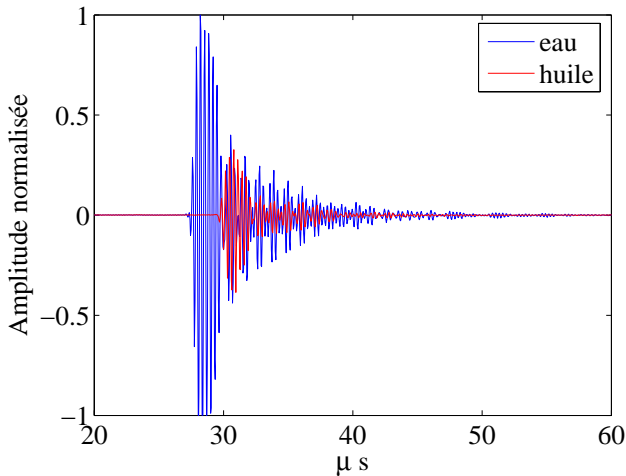


FIG. 2.41: Allure des signaux réfléchis par une plaque métallique dans l'huile et dans l'eau. Les signaux sont décalés, ce qui permet d'évaluer une différence de vitesse de propagation de 3 % entre les deux milieux.

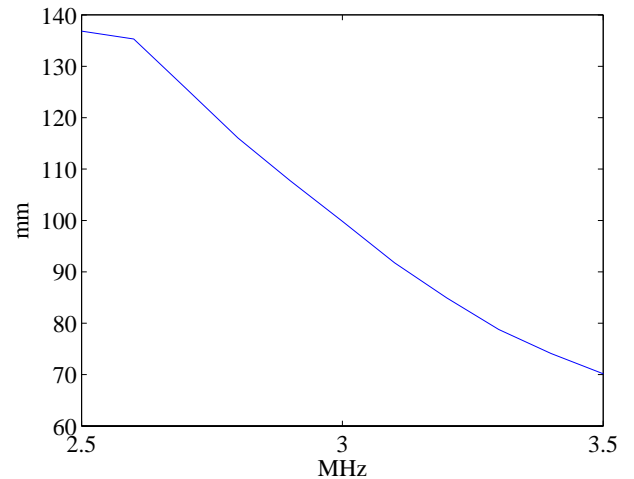


FIG. 2.42: Evaluation du libre parcours moyen d'absorption dans l'huile en fonction de la fréquence. Le temps caractéristique d'absorption τ_a est compris entre 45 et 90 μs selon les fréquences.

La figure 2.43 montre que l'évaluation fréquentielle de la constante de diffusion est très proche dans l'huile et dans l'eau : les valeurs obtenues sont comprises dans les barres d'erreur d'interpolation respectives.

L'indépendance vis à vis de l'absorption est bien spécifique aux cônes de rétrodiffusion en régime dynamique : les résultats obtenus ne découlent pas d'une absorption trop faible pour être prise en compte dans les phénomènes de diffusion. Si on représente la moyenne des intensités rétrodiffusées dans l'huile et dans l'eau, on observe en haut de la figure 2.44 que l'absorption joue un rôle important. En théorie du transport dite *classique*¹⁶ on s'intéresse aux évolutions temporelles des moyennes des intensités normalisées. Les courbes correspondantes sont représentées en bas de la figure 2.44. On constate que la normalisation permet de comparer la partie décroissante des courbes. Plus spécifiquement la représentation en échelle logarithmique (figure 2.45) permet de distinguer très nettement les décroissances des courbes correspondant à l'huile et à l'eau. Un fit linéaire de ces courbes conduit à des pentes allant pratiquement du simple au double : l'absorption intervient au delà de la différence d'amplitude entre les signaux, son rôle est intimement lié à celui de la diffusion élastique.

Ces expériences confirment donc que la technique de mesure du coefficient de diffusion par le cône de rétrodiffusion est bien indépendante de l'absorption du milieu, dans la mesure où la durée des fenêtres temporelles est plus faible que τ_a . Cela est bien en accord avec les arguments présentés en section 2.4.2.4.

¹⁶Nous définirons ce terme dans la section 2.5.

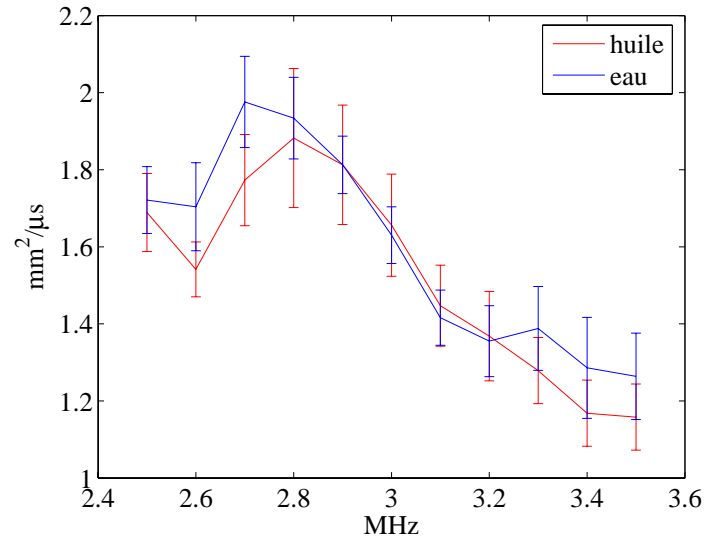


FIG. 2.43: Comparaison des évaluation fréquentielles de D dans l'huile et dans l'eau : les valeurs obtenues sont comprises dans les barres d'erreur d'interpolation.

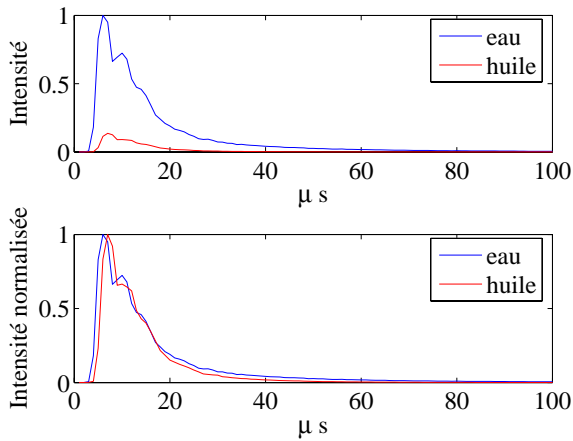


FIG. 2.44: Evolution temporelle de la moyenne de l'intensité rétrodiffusée par les tiges dans l'huile (en rouge) et dans l'eau (en bleu). Les courbes du haut sont normalisées par la valeur maximale obtenue dans l'eau, celles du bas sont normalisées par les maximum respectifs dans l'huile et dans l'eau.

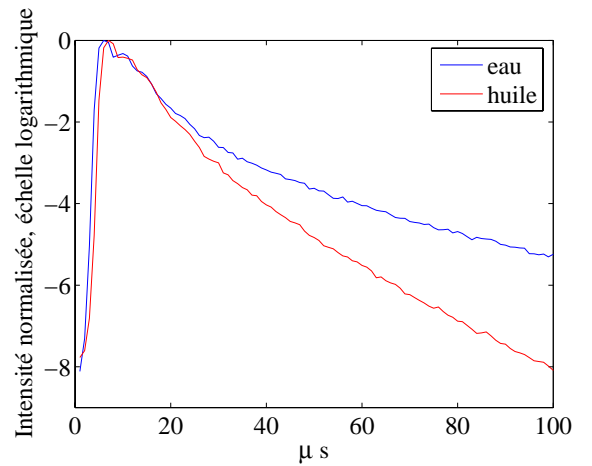


FIG. 2.45: Evolution temporelle de la moyenne de l'intensité rétrodiffusée dans l'huile et dans l'eau en échelle logarithmique. L'absorption plus forte dans l'huile conduit à une pente très différente des deux courbes.

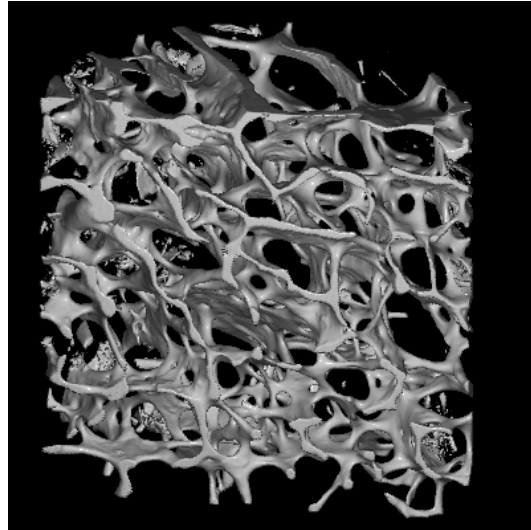


FIG. 2.46: Structure tridimensionnelle d'un os trabéculaire.

2.4.7 Mise en évidence de la diffusion multiple dans un échantillon “réel” : le cas de l'os trabéculaire

La technique de rétrodiffusion cohérente en régime dynamique a été appliquée au cas d'échantillons d'os trabéculaires dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire d'Imagerie Paramétrique de l'université Paris VI.

L'os trabéculaire (figure 2.46) est un milieu complexe composé de travées solides interconnectées ainsi que de moëlle *in vivo*.

La mesure de l'atténuation et de la vitesse des ultrasons dans les os trabéculaires est un moyen de caractérisation de l'état de ces derniers [49]. La diffusion par les travées a été observée par plusieurs auteurs [50, 51] et différents modèles théoriques ont été proposés pour interpréter ces expériences [52, 53, 54]. Néanmoins, le rôle des phénomènes de diffusion et d'absorption concernant les pertes d'énergie est sujet à controverses. De plus, la validité des modèles de diffusion simple utilisés jusqu'ici n'a pas été prouvée. Dans ce qui suit, nous exposons les expériences de rétrodiffusion cohérente menées pour la première fois sur un tel milieu. Nous montrons que la diffusion multiple est présente dans les os trabéculaires humains autour de 3 MHz , mais qu'elle n'est probablement pas le phénomène dominant les pertes énergétiques.

L'échantillon étudié est une tranche de 11 mm d'épaisseur d'os purement trabéculaire, issu d'une coupe de la partie supérieure d'un fémur humain. La tranche d'os a été préalablement dégraissée puis dégazée dans l'eau afin d'éliminer les bulles d'air présentes dans les porosités. Pour ce travail, nous avons utilisé le matériel présenté dans les manipulations avec les tiges. La distance entre la barrette et l'échantillon est de 80 mm et le signal émis est un chirp, équivalent par autoconvolution à une impulsion d'une période à la fréquence centrale 3 MHz .

Le cône est construit en calculant l'énergie du signal rétrodiffusé sur des fenêtres temporelles de longueur 2 μs avec un recouvrement de 1 μs . La petite taille de l'échantillon ne s'est pas prêtée à

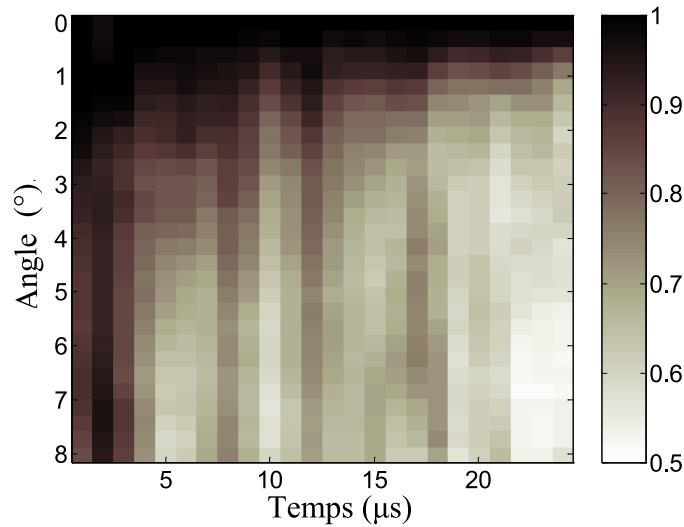


FIG. 2.47: Cône dynamique obtenu : on constate un affinement du cône avec le temps.

une moyenne spatiale par déplacement de la barrette.

Le cône obtenu est exposé en figures 2.47 et 2.48, on constate que la fenêtre angulaire est ici limitée à 8° . Comme en section 2.4.2.1, on s'intéresse au facteur d'amplification F pour quantifier l'importance de la diffusion multiple relativement à la diffusion simple.

Rappelons que lorsque $F = 1$, on peut négliger la diffusion multiple et le cône n'émerge pas. Au contraire, pour $F = 2$ la diffusion simple est négligeable. Les résultats expérimentaux (figure 2.49) montrent une transition progressive de 1 à presque 2, ce qui signifie que la diffusion simple domine au début, puis devient moins importante que la diffusion multiple qui croît avec le temps. Notons que ces phénomènes sont observés sur une échelle temporelle relativement courte, puisque $t < 24 \mu s$.

Ici, les temps sont trop courts pour employer l'approche diffusive et ajuster les courbes expérimentales. Aussi, pour obtenir un ordre de grandeur du libre parcours moyen, nous nous proposons de suivre l'évolution dynamique de F . Lorsque les contributions de diffusion simple et multiple à l'énergie rétrodiffusée sont égales, on obtient $F = 4/3$, ce qui est atteint ici au bout d'un *temps de transition* $\tau = 5 \mu s$.

Suivant des travaux récents en sismologie [55, 35], on peut évaluer en première approche le libre parcours moyen l à l'aide de τ en écrivant simplement

$$l = c\tau$$

avec $c = 1.6 \text{ mm}/\mu s$ la vitesse des ultrasons dans l'os immergé. On trouve ainsi $l = 8 \text{ mm}$. Ce résultat indique que les phénomènes de diffusion multiple doivent être pris en compte¹⁷ lorsque les distances de propagation à l'intérieur de l'os sont supérieures à 8 mm .

¹⁷Que ce soit pour modéliser ou imager autour de 3 MHz .

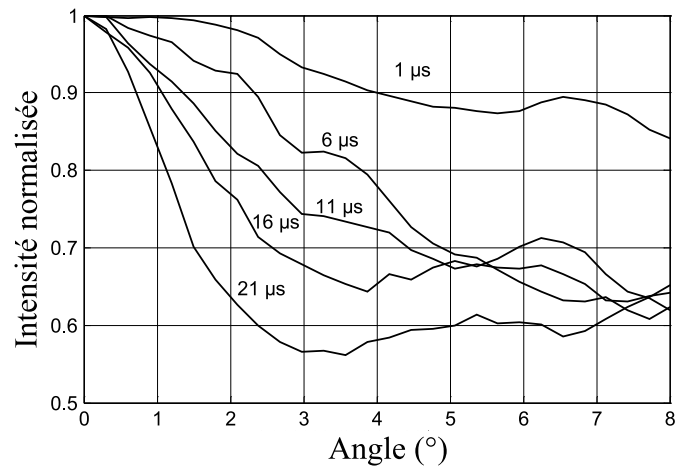


FIG. 2.48: Cône dynamique obtenu : l'évolution de l'intensité rétrodiffusée avec le temps donne lieu à une courbe de plus en plus piquée à l'angle nul.

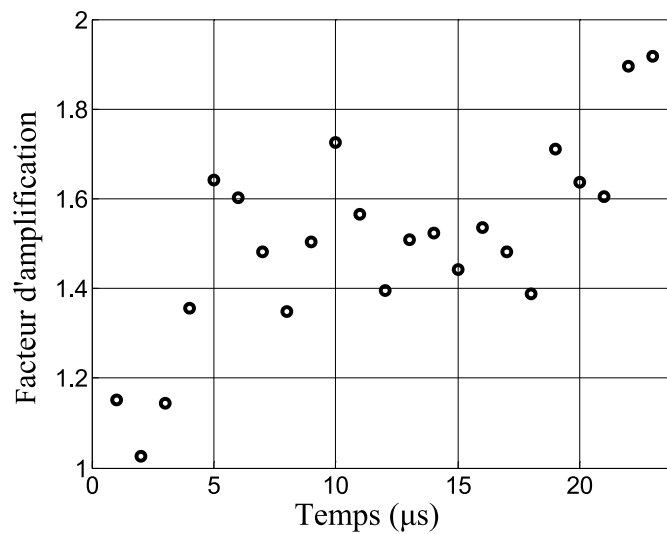


FIG. 2.49: Evolution du facteur d'amplification F en fonction du temps : la diffusion multiple domine progressivement la diffusion simple, ce qui entraîne une augmentation progressive de F de 1 à 2.

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, l'estimation de τ est indépendante de l'absorption intrinsèque dans l'os. Précisons que cette analyse n'est valable qu'à condition d'avoir un pic cohérent plus étroit que la fenêtre angulaire d'observation. Dans le cas contraire, le niveau de la base serait artificiellement surévalué, et les 8 *mm* calculés précédemment constituent la borne supérieure de l .

Afin de distinguer les phénomènes de diffusion et d'absorption, nous avons effectué des expériences de transmission cohérente. Ceci nous permet d'évaluer la longueur d'extinction l_{ext} , comme nous l'avons exposé au premier chapitre. Les signaux transmis sont moyennés sur 48 positions du couple émetteur/receveur, ce qui donne accès au champ cohérent. On obtient $l_{ext} = 2.3 \text{ mm}$, ce qui permet de déterminer le libre parcours moyen d'absorption l_a selon la formule

$$\frac{1}{l_{ext}} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_a} \quad (2.35)$$

On trouve donc $l_a > 3.2 \text{ mm}$ et $2.3 \text{ mm} < l < 8 \text{ mm}$. Ces résultats fixent la borne inférieure pour l et indiquent que l'absorption et la diffusion multiple jouent simultanément un rôle dans les pertes en transmission cohérente.

Cette étude a donc permis de donner un ordre de grandeur pour l dans un milieu bien réel, l'os trabéculaire, et de prouver que la diffusion multiple ne pouvait y être négligée lorsque les distances de propagation excèdent quelques *mm* autour de 3 *MHz*.

2.5 Théorie classique

A ce stade de notre étude, nous avons montré qu'il est possible de mesurer de façon fiable :

- l_e à partir du champ cohérent transmis
- D à partir de la rétrodiffusion cohérente dynamique

Nous nous intéressons à présent à la *transmission incohérente*, qui va notamment nous servir à déterminer l_a , la longueur caractéristique des pertes par absorption.

Dans une expérience en transmission, le champ peut se décomposer selon deux contributions, avec la relation 1.2 :

$$\langle I \rangle = I_{coh} + I_{incoh}$$

Le premier chapitre a largement étudié la contribution cohérente I_{coh} et l'on s'intéresse ici à l'intensité incohérente I_{incoh} . Cette étude rentre dans le cadre de la "théorie classique" au sens où les effets de cohérence ne sont pas pris en compte, comme si les ondes se propageaient à la manière de particules classiques.

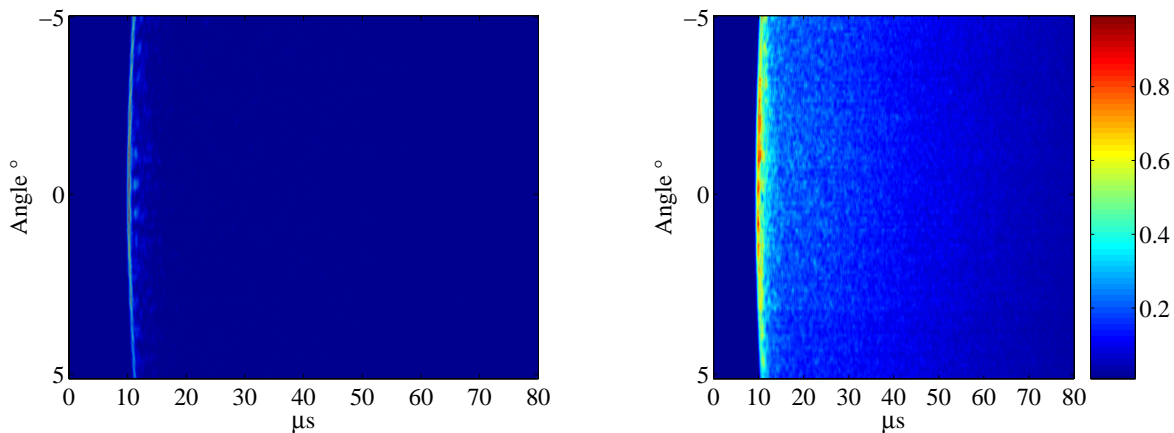


FIG. 2.50: Comparaison entre les intensités transmises cohérentes (à gauche) et incohérentes (à droite) pour un échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 , d'épaisseur 40 mm à la fréquence centrale 3.2 MHz .

Comment obtenir expérimentalement la contribution incohérente ?

En transmission, une méthode simple d'obtention de la contribution incohérente est de s'intéresser non pas à l'intensité de la moyenne du champ transmis mais à la moyenne des intensités transmises. On constate sur la figure 2.50 la différence induite par ces traitements avec un échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de 40 mm d'épaisseur pour lequel la valeur de l_e a été évaluée au premier chapitre à 5.5 mm . Pour un même signal transmis, on a représenté l'évolution temporelle des intensités cohérentes et incohérentes reçues en fonction de l'écart angulaire à la source : il apparaît

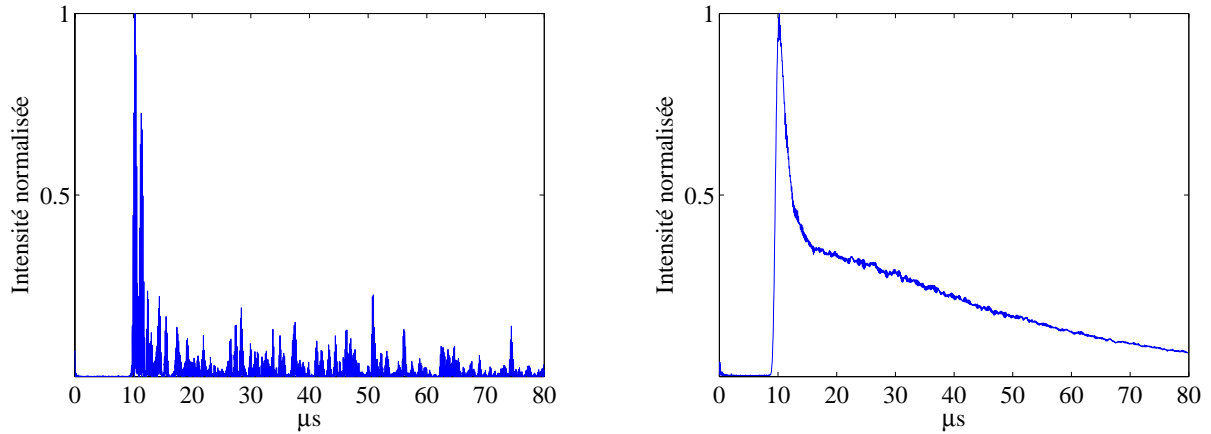


FIG. 2.51: Intensité transmise sur une réalisation (à gauche) et après moyenne sur une centaine configurations du désordre (à droite), avec le même échantillon qu'en figure 2.50.

que I_{incoh} s'étend sur une durée plus longue que I_{coh} . Ce comportement dynamique de l'intensité incohérente permet d'étudier l'évolution temporelle du signal transmis (alors que nous n'avons exploité l'énergie cohérente qu'en régime stationnaire au premier chapitre).

Quelle est l'allure du signal transmis pour une réalisation du désordre ?

Pour une expérience donnée on calcule le carré du champ transmis (figure 2.51 à gauche). On constate une allure erratique du signal avec des fluctuations importantes d'un instant à l'autre. On conçoit que le recours à des moyennes est ici encore nécessaire pour espérer exploiter le signal transmis. On moyenne donc l'intensité transmise en utilisant les 128 voies de la barrette échographique réceptrice pour un tir donné et en réalisant une centaine de tirs sur la longueur de l'échantillon. On obtient alors un signal lissé couramment appelé *courbe des temps de vol* et que nous noterons TOF ¹⁸.

La TOF va dépendre de la constante de diffusion D , mais aussi de τ_a . Un paramètre important sera le temps de décroissance de la queue de la courbe, τ_{tot} , dont on verra qu'il dépend de D et τ_a , mélangeant les effets de diffusion et d'absorption. La théorie classique permet, moyennant certaines approximations, d'obtenir une expression analytique de l'intensité incohérente.

Quels paramètres peut on mesurer à l'aide de la courbe des temps de vol ?

Le comportement dynamique de la TOF permet de faire intervenir les contributions de chemins très longs à l'échelle du libre parcours moyen. Or ces chemins sont les plus sensibles à l'absorption dans milieu hôte ainsi qu'aux pertes visco-thermiques répétées à chaque interaction avec un diffuseur. Notre démarche sera de supposer D , l_e et L connus et de mesurer le libre parcours moyen

¹⁸ *Time Of Flight en anglais.*

d'absorption du milieu l_a à partir de la *TOF*. Pour évaluer ce paramètre correctement, il va falloir être capable de modéliser au mieux l'intensité transmise. Pour cela, nous utilisons *in fine* l'équation de la diffusion avec l_a pour seul paramètre d'ajustement aux données expérimentales.

L'obtention de l'équation de la diffusion n'est pas immédiate à partir de l'équation d'onde moyennée : l'étape intermédiaire consiste à justifier l'obtention d'une équation de transport, l'équation des transferts radiatifs. Plus précisément, le choix raisonné des termes de source ainsi que des conditions aux limites conditionne la validité de l'approximation de la diffusion. De plus, il nous a semblé nécessaire de comparer les différentes approches diffusives utilisées dans la littérature car elles ne conduisent pas toutes aux mêmes estimations de l_a .

Notre point de départ pour étudier la théorie de la *TOF* est l'approche microscopique classique. Nous avons vu précédemment que le champ et l'intensité se développaient sous forme de diagrammes dans le cadre des équations de Dyson et Bethe-Salpeter. La *TOF* mettant en jeu l'intensité transmise, nous nous limiterons à cette dernière équation dont nous ne conserverons que les diagrammes de ladder présentés en 2.2.4 : cela constitue l'approche microscopique classique. Nous allons montrer que sous certaines hypothèses, la théorie ondulatoire classique permet de donner un fondement microscopique à la théorie phénoménologique du transport. Cette dernière a été initialement construite pour décrire la propagation de la lumière dans les couches turbulentes de l'atmosphère. Elle conduit à une équation linéaire permettant d'effectuer un bilan énergétique : l'équation des transferts radiatifs (notée *ETR* par la suite). L'*ETR* peut à son tour être simplifiée pour donner lieu à l'équation de la diffusion. Nous présentons les étapes nécessaires à cette transformation selon l'approche d'Ishimaru qui est la plus répandue et que nous adaptons au cas bidimensionnel. Le choix des conditions aux limites à appliquer à l'équation de la diffusion sera discuté en détail pour une tranche de milieu diffuseur et nous formulerons le problème exact tel qu'il apparaît dans ce raisonnement, ainsi que la solution associée. Nous synthétiserons ensuite les expressions les plus utilisées dans la littérature et dégagerons trois familles de solutions pour l'intensité diffusée. Enfin nous analyserons les effets des paramètres du milieu (épaisseur, réflexion aux interfaces...) ainsi que la nature de la source (ponctuelle, plane ou reproduisant nos conditions expérimentales) sur les différentes approches. Ces résultats seront ensuite appliqués pour évaluer l_a sur nos échantillons dans la section suivante.

2.5.1 De Bethe-Salpeter à l'ETR

En section 2.2.1, nous avons obtenu l'équation de Bethe-Salpeter (*EBS*) permettant de décrire la propagation de la fonction de corrélation du champ et en particulier de l'intensité.

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \overline{G}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) + \int \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \overline{G}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) d\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_4 \quad (2.36)$$

Cette relation, qui prend en compte tous les phénomènes de diffusion dans le milieu est trop complexe pour être directement exploitable. Pour aboutir à une relation utilisable en pratique, l'*EBS* doit être simplifiée, ce qui donne lieu à l'équation des transferts radiatifs (*ETR*). Cette dernière sera détaillée dans la section suivante, cette partie discutant seulement des étapes permettant

de passer de l'*EBS* à l'*ETR*.

Ce passage n'est pas trivial, et des auteurs se sont intéressés à la question tant dans le cas de milieux continus [5, 56] que de milieux composés de diffuseurs discrets [57, 45, 2]. Toutes ces approches adoptent une démarche semblable, consistant à transformer l'*EBS* après avoir gardé les seules contributions du vertex K et de l'opérateur de masse Σ calculables analytiquement. Par exemple, dans [58] c'est l'approximation des diagrammes de ladder qui est utilisée pour K . Les démonstrations sont assez calculatoires et nous ne les reproduisons pas ici.

Les opérateur Σ et K sont liés par une relation, l'*identité de Ward*, exprimant que la perte d'énergie de l'onde cohérente quantifiée par Σ sert à alimenter l'énergie diffuse décrite par K . On montre [2] que cette dernière est vérifiée lorsque Σ est calculé sous l'hypothèse d'*ISA* et K dans l'approximation de ladder. Dans cette thèse, nous avons été au delà de l'*ISA* pour Σ en utilisant notamment l'approximation de Keller. D'autre part, la rétrodiffusion cohérente nous a conduit à compléter les contributions de ladder par celles des chemins réciproques. En d'autres termes, il serait intéressant de pouvoir obtenir l'*ETR* sans utiliser de simplifications trop fortes sur le vertex irréductible.

L'approche de Henkel [59] permet justement d'aboutir à l'*ETR* dans un contexte plus général. Les étapes de sa démarche sont les suivantes :

- Le milieu de propagation est supposé statistiquement invariant par translation, ce qui entraîne pour tout \mathbf{R}

$$K(\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_4 + \mathbf{R}) = K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \quad (2.37)$$

- On définit la transformée de Wigner $W(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ d'une fonction m par

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \int \left\langle m\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{u}}{2}\right) m^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{u}}{2}\right) \right\rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}} d\mathbf{u} \quad (2.38)$$

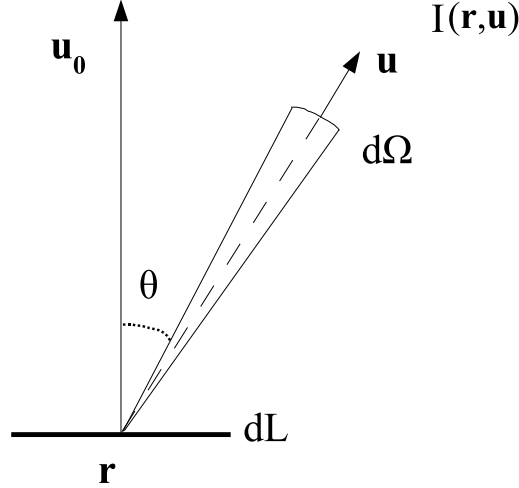
L'écriture de la transformée de Wigner de l'*EBS* permet d'aboutir, après quelques manipulations, à l'expression intégrale de l'*ETR* [60] :

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty \frac{ds}{l} e^{-s/l} \int p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') I(\mathbf{r} - s\mathbf{u}, \mathbf{u}') d\mathbf{u}' \quad (2.39)$$

- On suppose que le libre parcours moyen est grand devant la longueur d'onde et les longueurs de corrélation, Henkel aboutit à l'*ETR* écrite sous forme différentielle, que nous présentons dans la section suivante.

2.5.2 Transferts radiatifs

L'*ETR* traduit un bilan d'énergie dans une direction et dans un élément de volume de taille mésoscopique. Cela signifie que l'on s'intéresse aux variations spatiales du champ sur une échelle de l'ordre du libre parcours moyen. Les phénomènes de diffusion, d'absorption et d'émission peuvent être pris en compte. L'*ETR* a été initialement développée pour l'astrophysique [61, 60] ainsi que pour la neutronique [62]. Cette approche phénoménologique ne prend pas en compte les effets de cohérence.

FIG. 2.52: Définition de l'intensité spécifique $I(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ en 2D.

Afin de dériver l'*ETR* phénoménologiquement, nous présentons tout d'abord les paramètres énergétiques intervenant dans l'approche radiative. Nos expériences ayant été réalisées sur des échantillons bi-dimensionnels, nous travaillons en deux dimensions.

Considérons un segment infinitésimal dL centré en un point \mathbf{r} de l'espace, selon la direction normale \mathbf{u}_o (figure 2.52), la densité de flux d'énergie le long de dL dans la direction \mathbf{u} est l'*intensité spécifique* $I(\mathbf{r}, \mathbf{u})$. Cette grandeur scalaire est définie par unité de longueur, d'angle solide et de fréquence. C'est la grandeur fondamentale de l'*ETR*, car elle permet d'exprimer les grandeurs énergétiques suivantes :

- le flux d'intensité moyen dP [W] passant à travers dL dans l'angle solide $d\Omega$, dans la direction \mathbf{u} et l'intervalle de fréquences $d\nu$ est donné par

$$dP = I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_o dL d\Omega d\nu \quad (2.40)$$

- la densité de flux $F(\mathbf{r})$ rayonnée vers l'avant par le segment dL s'obtient en intégrant l'intensité spécifique sur l'angle solide

$$F(\mathbf{r}) = \int_{2\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_o d\Omega \quad (2.41)$$

- l'intensité moyenne $U(\mathbf{r})$ est définie par la moyenne de l'intensité spécifique selon les directions de rayonnement

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.42)$$

On suppose que le milieu multiplement diffuseur considéré est statistiquement homogène (le coefficient d'extinction K_{ext} et la fonction de phase $p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ définis en section 1.6.2.1 ne dépendent pas de \mathbf{r}) et isotrope (K_{ext} ne dépend pas de \mathbf{u} et $p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ ne dépend que de la différence $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$). Pour effectuer le bilan énergétique nous commençons par discrétiser le milieu à l'aide d'éléments de surfaces mésoscopiques. On considère ainsi un élément de surface moyen sous la forme d'un rectangle

de côtés dL et dL' . Le long de la direction \mathbf{u} , l'intensité spécifique décroît sous l'effet conjoint de l'absorption et de la diffusion selon

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_r I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -K_{ext} I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad (2.43)$$

A cette variation dans la direction \mathbf{u} s'ajoute la contribution de l'intensité spécifique reçue par l'élément de surface selon une direction \mathbf{u}' arbitraire et diffusée dans la direction \mathbf{u} soit

$$\frac{K_{ext} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}{2\pi}$$

La contribution totale selon toutes les directions \mathbf{u}' résulte de l'intégration du terme précédent sur tous les angles solides :

$$\int_{2\pi} K_{ext} \frac{p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}{2\pi} d\Omega' \quad (2.44)$$

Le bilan global conduit donc à l'expression de l'*ETR* suivante :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_r I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -K_{ext} I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) + \int_{2\pi} K_{ext} \frac{p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') I(\mathbf{r}, \mathbf{u}')}{2\pi} d\Omega' \quad (2.45)$$

L'intensité spécifique $I(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ peut se décomposer selon ses contributions cohérente $I_c(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ et incohérente ou diffuse $I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ pour donner lieu aux deux équations suivantes :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_r I_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -K_{ext} I_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad (2.46)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_r I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -K_{ext} I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) + \int_{2\pi} K_{ext} \frac{p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') I(\mathbf{r}, \mathbf{u}')}{2\pi} d\Omega' + \epsilon_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad (2.47)$$

avec

$$\epsilon_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{K_{ext}}{2\pi} \int_{2\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') I_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}') d\Omega'$$

De plus la condition aux limites vérifiée par l'intensité spécifique est telle que cette quantité ne soit générée qu'à l'intérieur du milieu diffuseur. En d'autres termes, on écrit que sur toute la surface séparant le milieu de l'extérieur on a $I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = 0$ pour tout vecteur \mathbf{u} dirigé vers l'intérieur du milieu.

La résolution de ces équations conduit à la connaissance de l'intensité intrinsèque en tout point du milieu et dans toutes les directions. Le lien entre cette grandeur énergétique et la mesure expérimentale de l'intensité diffusée résulte d'une double moyenne : tout d'abord une moyenne sur les "réalisations du désordre" du même type que celle présentée dans le premier chapitre, ensuite une moyenne sur la taille de l'échantillon mésoscopique élémentaire. L'intensité spécifique est donc l'intensité directionnelle moyenne obtenue sur un ensemble de réalisations expérimentales.

Les grandeurs radiatives peuvent être liées à celles issues du formalisme de diffusion multiple puisque l'*ETR* peut être obtenue par simplification de l'*EBS* selon la section précédente. Henkel obtient par exemple

$$K_{ext} = \frac{Im(k_{eff}^2)}{\sqrt{Re(k_{eff}^2)}} \quad (2.48)$$

et pour le coefficient de diffusion K_{dif}

$$K_{dif} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} K_F(\sqrt{Re(k_{eff}^2)}\mathbf{u}, \sqrt{Re(k_{eff}^2)}\mathbf{u}', \sqrt{Re(k_{eff}^2)}\mathbf{u}, \sqrt{Re(k_{eff}^2)}\mathbf{u}')d\Omega' \quad (2.49)$$

avec K_F la transformée de Fourier de l'opérateur K .

L'*ETR* est la description la plus précise des phénomènes physiques résultant de la propagation de l'onde à l'échelle mésoscopique. Lorsque l'épaisseur du milieu diffusant est "grande" devant le libre parcours moyen, l'*ETR* peut donner lieu à une *équation de diffusion*, faisant apparaître le coefficient de diffusion D que nous mesurons par la technique du cône de rétrodiffusion cohérente¹⁹. L'étude détaillée de la dérivation de l'*équation de la diffusion* à partir de l'*ETR* est essentielle pour justifier le choix de la forme des solutions que nous utilisons *in fine*.

2.5.3 Approximation de la diffusion

Lorsque l'on s'intéresse à la propagation de l'onde ultrasonore à des échelles de longueur et de temps grandes respectivement par rapport aux libres parcours moyens et aux temps caractéristiques du système, on peut simplifier l'*ETR* et utiliser l'approximation de la diffusion. Le régime où cette approximation est valable est le *régime diffusif*. Le mot *diffusion* est à prendre en compte ici dans la même acception que dans le terme *diffusion de la chaleur*. Cela signifie que l'énergie ultrasonore se propage dans le milieu de la même manière que la chaleur dans un solide. L'intérêt de cette approche est qu'elle réduit la description des interactions de l'onde avec le milieu multidiffuseur à un seul paramètre : le coefficient de diffusion D . Le problème à résoudre est ainsi plus simple mais ses solutions ne traduisent plus que les variations spatio-temporelles de l'énergie ultrasonore (et non les variations angulaires comme le permet l'*ETR*). L'approximation de la diffusion recèle certaines subtilités quant aux hypothèses nécessaires à son obtention ainsi qu'à la forme de la solution utilisée par les différents auteurs. Après avoir présenté de manière intuitive les paramètres de l'équation de la diffusion, nous détaillerons son obtention à partir de l'*ETR*.

2.5.3.1 Première approche

Considérons la propagation d'une onde ultrasonore à travers une tranche de milieu multiplement diffuseur de longueur infinie et d'épaisseur L . L'énergie de la partie cohérente de l'onde va décroître selon l'équation 2.46 lors de son exploration du milieu, de telle sorte qu'à une profondeur z on aura

$$I_c(z) = I_o \exp\left(-\frac{K_{ext}z}{\cos(\theta_o)}\right) \quad (2.50)$$

I_o et θ_o étant respectivement l'intensité initiale et l'angle d'incidence.

La décroissance de l'onde cohérente résulte d'une action conjuguée de l'absorption et de la diffusion : l'onde cohérente alimente l'onde diffuse. La transformation de l'intensité cohérente en intensité diffuse a lieu sur une épaisseur de l'ordre du libre parcours moyen : l'épaisseur de peau introduite en

¹⁹ Nous restons volontairement imprécis sur le domaine de validité de l'*équation de la diffusion*, ce point étant traité dans la partie suivante.

section 2.3.2. On suppose dans l'approche diffusif que l'onde incidente est partiellement réfléchi et convertie en onde diffuse dans l'épaisseur de peau. L'équation régissant la propagation de l'intensité diffuse étant

$$\frac{\partial I_d(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 I_d(\mathbf{r}, t) \quad (2.51)$$

De plus, on considère que les interactions entre l'onde et le milieu diffuseur sont décrites par une onde diffuse effective qui pénètre dans le milieu dans un plan situé à une distance z_o à l'extérieur du milieu. Cette distance est la *longueur d'extrapolation*, sa valeur est phénoménologique mais peut se justifier par une analyse précise de l'*ETR* dans un milieu semi-infini. La valeur fréquemment utilisée est $z_o = 0.7104 l^*$, elle est exacte pour les diffuseurs isotropes. En optique, les travaux de Van de Hulst [63] sur des diffuseurs de section efficaces variées ont montré un bon accord numérique avec cette valeur, et le cas des diffuseurs anisotropes piqués vers l'avant [64] conduit à un écart de l'ordre du pourcent sur z_o . Afin de justifier ce processus de transformation de l'onde cohérente en onde diffuse, il est nécessaire de revenir aux étapes principales permettant d'obtenir l'équation de la diffusion.

2.5.3.2 Obtention de l'équation de la diffusion

Différentes approches permettent d'obtenir l'équation de la diffusion à partir de l'*ETR* selon le choix des approximations effectuées. L'approche la plus couramment utilisée est celle d'Ishimaru [26], elle consiste à ne retenir que le premier ordre du développement de l'intensité intrinsèque en harmoniques sphériques. Nous adaptons cette démarche au cas bi-dimensionnel et discutons des limites de cette approche. Nous raisonnons en régime stationnaire afin d'alléger les écritures, ce qui ne réduit pas la généralité des calculs.

Lorsque l'on se place dans un régime diffusif de propagation, on suppose que l'onde, après la rencontre d'un grand nombre de diffuseurs, est diffusée dans toutes les directions. Cela conduit intuitivement à supposer que l'intensité spécifique est angulairement quasi-uniforme. On ne peut supposer une uniformité angulaire car cela conduirait à une annulation du vecteur densité de flux diffusé dans chaque direction.²⁰ L'approximation consiste à écrire que l'intensité intrinsèque peut se décomposer en un terme isotrope (intensité moyenne) et une contribution anisotrope (proportionnelle à la densité de flux) selon

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = U(\mathbf{r}) + c\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (2.53)$$

La valeur du coefficient c n'est pas arbitraire, elle résulte des définitions des termes de cette équation.

²⁰Rappelons que ce flux s'exprime par

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{2\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.52)$$

tion :

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_o &= \int_{2\pi} U(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_o d\Omega + \int_{2\pi} c(\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_o) d\Omega \\
&= 0 + \int_{2\pi} c(\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_o) d\Omega \\
&= cF(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \\
&= cF(\mathbf{r})\pi
\end{aligned}$$

On en déduit que $c = \frac{1}{\pi}$.

On intègre ensuite l'*ETR* selon toutes les directions, ce qui permet d'obtenir une relation reliant le vecteur densité de flux à l'intensité moyenne :

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -2\pi U(\mathbf{r}) - 2\pi U_c(\mathbf{r}) \quad (2.54)$$

avec $U_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} I_c(\mathbf{r}, \mathbf{u})$.

On insère 2.53 dans l'*ETR*, d'où

$$\mathbf{u} \cdot \nabla U + \frac{1}{\pi} \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) = -K_{ext}U - \frac{K_{ext}}{\pi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + K_{dif}U + \frac{K_{ext}}{\pi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} p_1 + \epsilon_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad (2.55)$$

avec $p_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' d\Omega$ qui représente la contribution diffusée vers l'avant. On multiplie 2.55 par \mathbf{u} et on intègre sur toutes les directions, ce qui donne l'expression du flux en fonction de l'intensité moyenne :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{K_{ext}(1-p_1)} \left(-\pi \nabla U + \int_{2\pi} \epsilon_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} d\Omega \right) \quad (2.56)$$

La dernière étape consiste à insérer la dernière expression dans 2.54, ce qui conduit à l'équation de la diffusion suivante

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) - \kappa^2 U(\mathbf{r}) = -2K_{dif}K_{tr}U_c(\mathbf{r}) + \frac{1}{\pi} \nabla \cdot \int_{2\pi} \epsilon_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} d\Omega \quad (2.57)$$

avec K_{tr} le *coefficient de transport* qui s'exprime par $K_{tr} = K_{ext}(1-p_1)$ et $\kappa^2 = 2K_{abs}K_{tr}$.

On obtient donc l'équation 2.57 régissant l'intensité moyenne U et l'on constate deux points importants. Tout d'abord, 2.57 est bien une équation de diffusion, ce qui était l'objectif de cette partie. Soulignons ensuite que son second membre n'est pas nul : l'équation de la diffusion obtenue comporte un terme source dépendant de l'intensité moyenne cohérente. On ne retrouve donc pas exactement la forme de 2.51, nous y reviendrons par la suite.

2.5.3.3 Détermination des conditions aux limites

Comme nous venons de le constater l'équation de la diffusion obtenue est un peu plus complexe que celle introduite au début de la section. L'étude de cette sous-section va montrer que la forme "exacte"²¹ des conditions aux limites fait intervenir des contributions souvent négligées dans la littérature. L'effet de ces contributions sera discuté à la partie suivante.

Reprenons la condition aux limites vérifiée par l'intensité spécifique dans le cadre de l'*ETR* en 2.5.2 : elle consistait à annuler I_d sur la surface lorsque la direction était rentrante vers le milieu diffuseur. Lors du raisonnement sur l'obtention de l'équation de la diffusion, l'expression 2.53 conduit à une approximation sur la condition aux limites précédente.

La condition couramment utilisée consiste à n'imposer que l'annulation du *flux total* diffusé vers l'intérieur du milieu :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = 0 \quad (2.58)$$

avec \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la surface de séparation, dirigé vers le milieu diffuseur.

Notre objectif est d'obtenir la condition aux limites vérifiée par l'intensité moyenne U . Nous décomposons le flux \mathbf{F} selon ses composantes normale F_n et tangente F_t à la surface, ce qui permet d'exprimer 2.58 selon

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(U \cos(\theta) + \frac{1}{\pi} F_n \cos(\theta) \right) d\theta = 0 \quad (2.59)$$

soit après un calcul sans difficulté

$$U + \frac{F_n}{4} = 0 \quad (2.60)$$

On exprime ensuite F_n en fonction de U , selon

$$F_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = -\frac{\pi}{K_{tr}} \mathbf{n} \cdot \nabla U + \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_c(\mathbf{r}) \quad (2.61)$$

avec

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{r}) = \frac{K_{ext}}{2\pi K_{tr}} \int_{2\pi} I_c(\mathbf{r}, \mathbf{u}') d\Omega' \int_{2\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u} d\Omega$$

soit dans 2.60

$$U(\mathbf{r}) - \frac{\pi}{4K_{tr}} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_c(\mathbf{r})}{4} = 0 \quad (2.62)$$

Dans le cas de diffuseurs isotropes, cette équation se réduit à

$$U(\mathbf{r}) - z_0 \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \quad (2.63)$$

avec $z_0 = \frac{\pi}{4} l^*$.

²¹ L'acceptation du terme *exacte* est relative à notre approche, qui est une approximation de l'*ETR*.

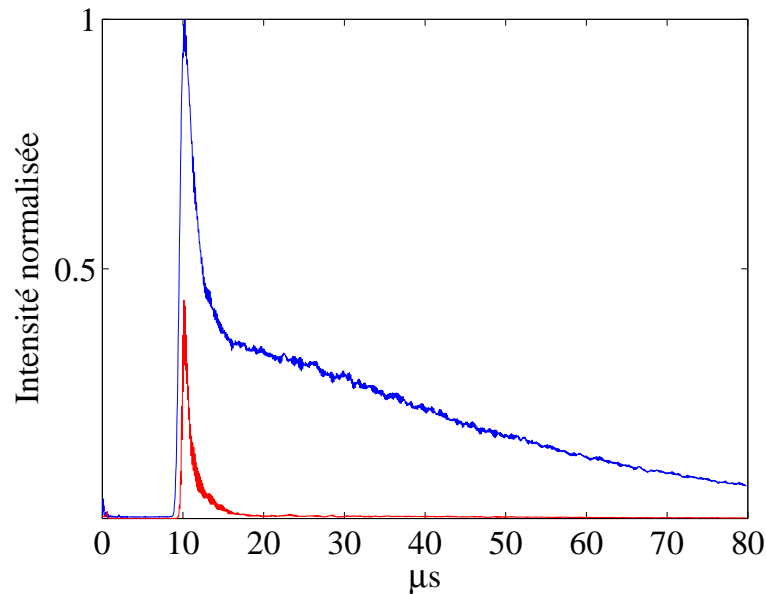


FIG. 2.53: Comparaison des intensités cohérente (en rouge) et totale (en bleu) pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 , de 40 mm d'épaisseur et de $l_e = 6.4 \text{ mm}$ d'après le premier chapitre. Le signal émis est un créneau de $1 \mu\text{s}$ à la fréquence centrale 3.2 MHz et la distance entre les capteurs est de 260 mm .

2.6 Etude de l'intensité transmise

2.6.1 Solution "exacte"

Les sections précédentes ont montré que le terme source ainsi que la condition aux limites en $z = 0$ faisaient explicitement intervenir les contributions cohérentes à l'intensité diffuse.

Quelle est l'importance relative de l'intensité cohérente par rapport à l'intensité diffuse ?

La figure 2.53 représente pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 et de 40 mm d'épaisseur l'évolution temporelle de l'intensité cohérente (en rouge) et totale (en bleu). D'un point de vue qualitatif on retrouve qu'aux temps longs le champ cohérent est négligeable devant le champ incohérent. Ainsi les solutions employées par divers auteurs [65, 66, 2] négligent tout effet du champ cohérent dans l'équation de la diffusion. Une étude rigoureuse de l'effet du champ cohérent sur la solution diffusive va nous permettre de déterminer la validité de ces approches et de comparer l'évaluation du libre parcours moyen d'absorption l_a qui en résulte. De plus, dans le cadre des raisonnements sur les cônes de rétrodiffusion cohérente, on s'intéresse à la solution de l'équation de la diffusion à différentes profondeurs à l'intérieur du milieu considéré, il convient là encore de déterminer les domaines de validité des expressions simplifiées couramment utilisées.

La solution générale d'une équation de diffusion à deux dimensions spatiales peut être obtenue

par séparation des variables en découplant les deux variables d'espace. Pour un échantillon donné, notons x et z respectivement les coordonnées selon les directions parallèles et normales à la face de l'échantillon. Dans le cadre de nos expériences, on considère l'échantillon infiniment long selon l'axe des x ce qui donne lieu à une expression de la solution très simple en fonction de x ²². Les différentes solutions que nous discuterons ne se distinguant que par leur expression selon la variable z , nous ne considérerons que le problème unidimensionnel selon cette variable afin d'alléger les écritures. L'équation de la diffusion telle qu'elle apparaît par dérivation de l'*ETR* est la relation 2.57. En écrivant cette dernière en régime dynamique, on obtient l'équation suivante dans un milieu sans absorption²³ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{D \partial t} = g(z, t) \quad (2.64)$$

avec

$$g(z, t) = -\frac{2}{l_e l^*} U_c(z, t) + \frac{1}{\pi} \nabla \cdot \int_{2\pi} \epsilon_c(z, u) \mathbf{u} d\Omega$$

Les conditions aux limites sont dans le cas d'une tranche d'épaisseur L ²⁴

$$-z_0 \frac{\partial}{\partial z} U + U = \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_c(0)}{4} \quad \text{en } z = 0 \quad (2.65)$$

et

$$z_0 \frac{\partial}{\partial z} U + U = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_c(L)}{4} \quad \text{en } z = L \quad (2.66)$$

Les relations 2.64, 2.65 et 2.66 seront dénommées *problème (1)* dans ce qui suit [67].

Explicitons la condition aux limites en $z = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}_c(0)}{4} &= -\frac{1}{4} \frac{l^*}{l_e} \int_{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_{2\pi} [p(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cos(\theta) d\theta] I_c(0, t) \delta(\mathbf{0} - \mathbf{u}') \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{l^*}{l_e} I_c(0, t) \overline{\cos} \\ &= -\frac{I_c(0, t)}{8\pi} \left(1 - \frac{l^*}{l_e}\right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

ainsi en $z = 0$ la condition aux limites est²⁵

²² La dépendance en x est donnée par $e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$, ce qui traduit simplement l'étalement diffusif en \sqrt{Dt} dans cette direction.

²³ Le rôle de l'absorption sera examiné en section 2.6.5.

²⁴ On applique la relation 2.62.

²⁵ On a la relation suivante entre I_c et U_c :

$$U_c(z, t) = \frac{I_c(z, t)}{2\pi}$$

$$-z_0 \frac{\partial U}{\partial z} + U = -\frac{U_c(0, t)}{4} \left(1 - \frac{l^*}{l_e}\right) \quad (2.68)$$

En $z = L$, on peut considérer que le second membre de la condition aux limites est nul vu qu'il ne dépend que de la contribution cohérente qui est négligeable pour les épaisseurs de notre étude²⁶.

Déterminons la valeur explicite de $U_c(z, t)$:

En régime stationnaire, l'intensité moyenne suit la loi de Beer-Lambert issue de l'équation

$$\frac{dU_c(z)}{dz} = -K_{ext}U_c(z) \quad (2.69)$$

En régime dynamique l'équation précédente devient

$$\frac{\partial U_c(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial U_c(z, t)}{c \partial t} = -KU_c(z, t) \quad (2.70)$$

avec c la vitesse de propagation de l'onde cohérente. La solution de 2.70 est

$$U_c(z, t) = U_0 \exp(-K_{ext}z) \exp(t/\tau_e)$$

avec $K = 2K_{ext}$ et τ_e le temps de décroissance caractéristique de l'onde cohérente. On vérifie que

$$\int_0^\infty U_c(z, t) dt \equiv U_0 \exp(-K_{ext}z)$$

La durée de l'onde cohérente est proche de la durée de l'impulsion source aux faibles épaisseurs, lorsque la contribution principale au champ cohérent se réduit à la partie balistique de l'onde. Lorsque l'épaisseur augmente, le temps de décroissance augmente avec les contributions multiplement diffusées mais parallèlement l'intensité résultante devient beaucoup plus faible. Les mesures d'intensité cohérente au premier chapitre ont ainsi montré un temps de décroissance τ_e compris entre 1 et 7 μs pour les échantillons étudiés. Nous considérerons ici que le temps de décroissance est égal à la durée de l'impulsion source, ce qui revient à négliger les effets de résonance et permet d'exprimer l'intensité cohérente moyenne pour une source impulsionnelle par

$$U_c(z, t) = U_0 \exp(-K_{ext}z) \delta(t)$$

Exprimons ensuite

$$A = \frac{1}{\pi} \nabla \cdot \int_{2\pi} \epsilon_c(z, u) \mathbf{u} d\Omega$$

on a successivement

$$A = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{2\pi} \frac{K_{ext}}{2\pi} \int_{2\pi} p(\mathbf{u} - \mathbf{u}') I_c(z, \mathbf{u}', t) \delta(\mathbf{0} - \mathbf{u}') d\theta' \cos(\theta) d\theta \quad (2.71)$$

d'où

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{2\pi} \frac{K_{ext}}{2\pi} p(\mathbf{u}) I_c(z, \mathbf{0}, t) \cos(\theta) d\theta \\ A &= \frac{K_{ext}}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{2\pi} p(\mathbf{u}) \cos(\theta) d\theta U_c(z, t) \\ A &= 2 \left(\frac{1}{l_e} - \frac{1}{l^*} \right) \frac{\partial}{\partial z} U_c(z, t) \end{aligned}$$

²⁶ Les épaisseurs sont supérieures à quatre libre parcours moyen.

ainsi on obtient finalement

$$g(z, t) = -\frac{2U_0}{l_e^2} \exp\left(-\frac{z}{l_e}\right) \delta(t) \quad (2.72)$$

On constate ainsi que même dans le cas d'une diffusion isotrope, $g(z, t) \neq 0$.

La solution du *problème (1)* que nous noterons *solution (1)* par la suite est ainsi, selon [67]

$$U(z, t) = U_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-D\beta_m^2 t} DK(\beta_m, z) \int_0^t e^{D\beta_m^2 t'} g(\beta_m, t') dt' + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-D\beta_m^2 t} DK(\beta_m, z) K(\beta_m, 0) \frac{U_0}{4z_0} \left(1 - \frac{l^*}{l_e}\right) \quad (2.73)$$

avec

$$K(\beta_m, z) = \sqrt{2} \frac{\beta_m \cos(\beta_m z) + \frac{1}{z_0} \sin(\beta_m z)}{\sqrt{(\beta_m^2 + H^2) \left(L + \frac{H}{\beta_m^2 + H^2}\right) + H}}$$

avec $H = 1/z_0$ et β_m solutions de l'équation implicite

$$\tan(\beta L) = \frac{\beta(2H)}{\beta^2 - H^2}$$

On constate que le premier terme à droite de 2.73 correspond à la contribution du second membre du *problème (1)*, le deuxième terme correspond à la contribution de la condition aux limites en $z = 0$.

Les figures 2.54 montrent l'allure des solutions pour des milieux diffuseurs d'épaisseur 20 mm, 40 mm et 80 mm. Les paramètres de transport sont les suivant : $l_e = 5$ mm, $l^* = 6$ mm, $D = 3$ mm²/μs.

On constate fort logiquement que l'intensité diffuse dure d'autant plus que l'épaisseur du milieu traversé est grande. Nous allons comparer ces résultats à des approches simplifiées d'usage courant.

2.6.2 Approche de J.H. Page

Les solutions utilisées dans la littérature pour modéliser l'intensité transmise à travers une tranche de milieu diffuseur apparaissent sous des formes différentes selon les auteurs [68, 65, 66]. Nous avons synthétisé les points communs entre ces approches et montré qu'elles étaient solution du *problème (2)* suivant :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{D \partial t} = \delta(t) \delta(z - z_0) \quad (2.74)$$

$$-z_0 \frac{\partial}{\partial z} U + U = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.75)$$

$$z_0 \frac{\partial}{\partial z} U + U = 0 \quad \text{en } z = L \quad (2.76)$$

Par rapport à la section précédente, on constate que le terme source est différent ainsi que la condition aux limites en $z = 0$.

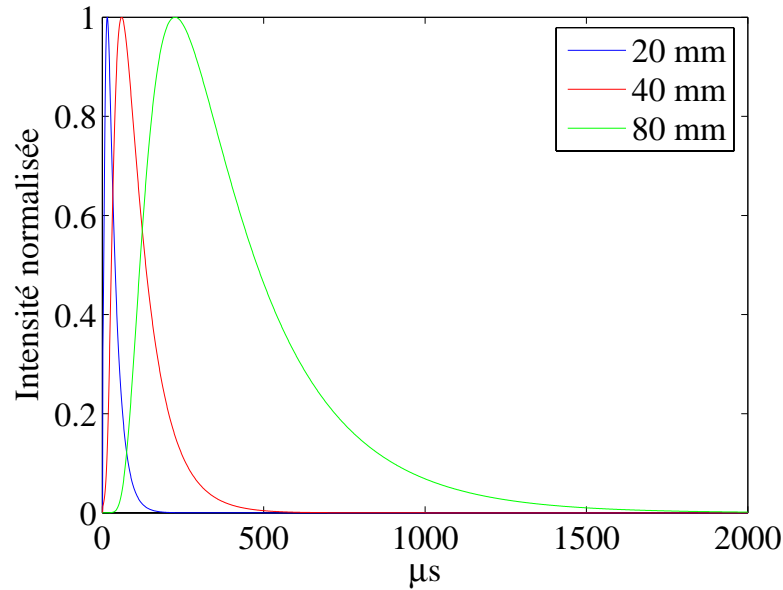


FIG. 2.54: Evolution temporelle de l'intensité transmise selon la solution exacte du *problème (1)* avec les paramètres $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$, $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$, pour une épaisseur de milieu de 20 mm , 40 mm et 80 mm .

La solution du *problème (2)* est [68]

$$U(z, t) = U_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-D\beta_m^2 t} DK(\beta_m, z)K(\beta_m, 0) \quad (2.77)$$

avec les mêmes notations qu'à la section précédente. La solution donnée par la référence [66] est une réécriture de 2.77 en utilisant les relations entre l'intensité moyenne et sa dérivée spatiale en $z = L$: elle n'est utilisable que pour évaluer la solution en sortie de l'échantillon. Vu que nous sommes intéressés par la solution pour tout z dans le milieu, nous avons choisi une expression plus générale.

Comparons les allures des solutions des *problèmes (1)* et *(2)* : on constate sur la figure 2.55 que les courbes sont très proches. Plus précisément, on remarque que sur la phase de croissance de la *TOF* la solution exacte donne lieu à une intensité légèrement plus grande que celle qui ignore le champ cohérent, ce qui est compréhensible vu que ce dernier "alimente" le champ diffus. Cette différence est d'autant plus marquée que le champ cohérent est important, ce que confirme la comparaison des courbes à 20 mm et 80 mm d'épaisseur : dans ce dernier cas les deux solutions sont plus proches sur le domaine de croissance de la *TOF*.

Dès que la *TOF* décroît, les deux solutions se confondent. Les figures 2.56 représentent les logarithmes²⁷ des solutions pour les deux épaisseurs sus-citées. Dans cette représentation les deux solutions donnent lieu à des droites décroissantes dont l'écart sur la pente est inférieur à 0.1 % pour

²⁷ Sauf précision contraire, il s'agit dans tout le reste de ce chapitre de logarithme népérien.

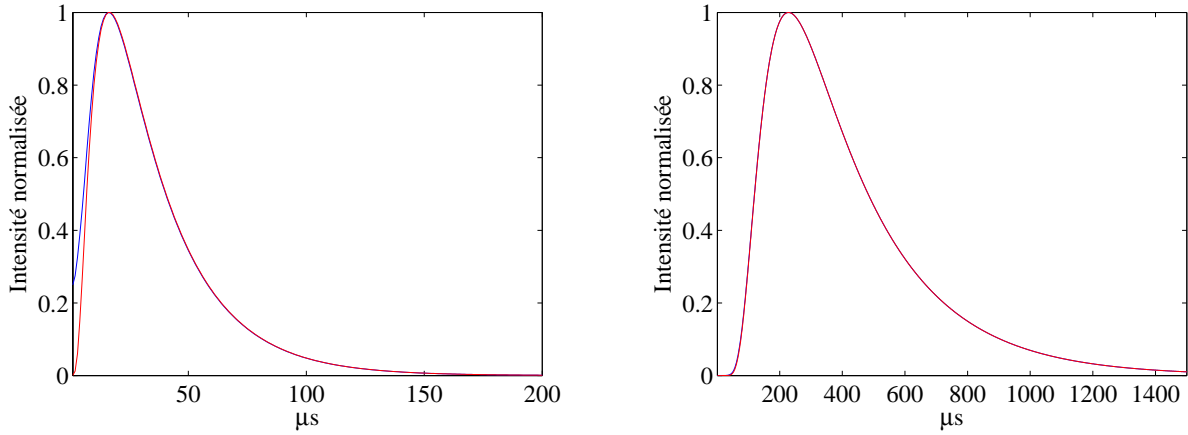


FIG. 2.55: Comparaison de l'évolution temporelle de l'intensité transmise avec les solutions du *problème (1)* en bleu et *(2)* en rouge, avec les paramètres $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$, $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$, pour une épaisseur de milieu de 20 mm (à gauche) et 80 mm (à droite).

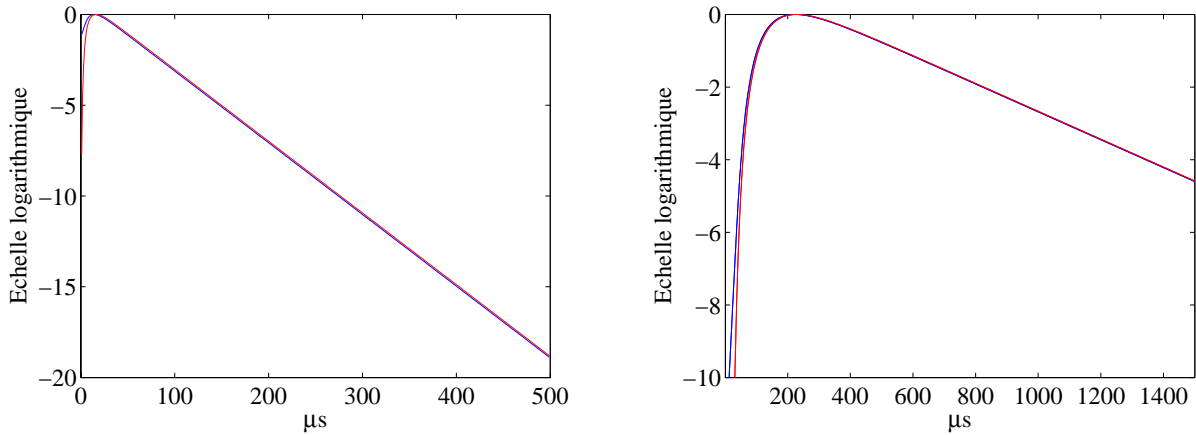


FIG. 2.56: Comparaison des solutions du *problème (1)* en bleu et *(2)* en rouge en échelle logarithmique, pour une épaisseur de milieu de 20 mm (à gauche) et 80 mm (à droite) avec les paramètres $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$, $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

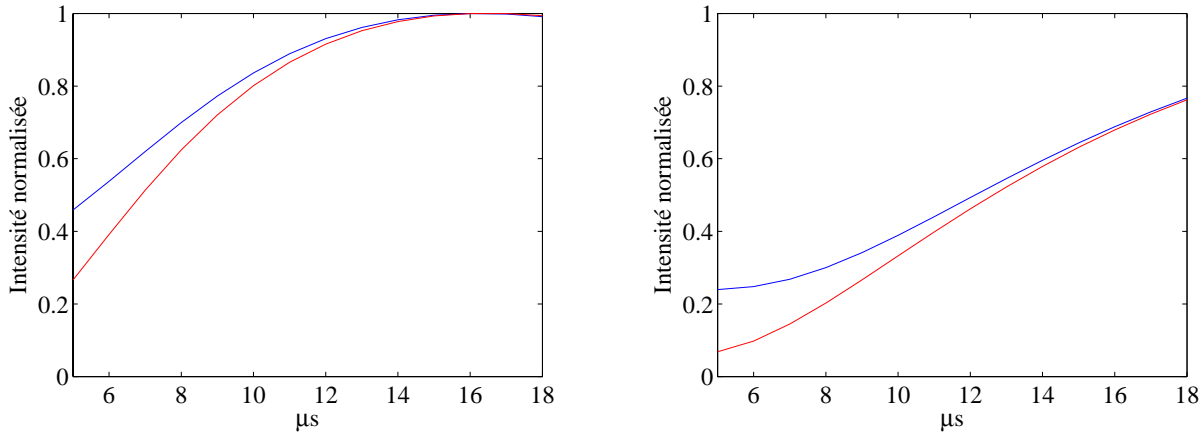


FIG. 2.57: Comparaison des solutions du *problème (1)* en bleu et *(2)* en rouge sur le domaine de croissance de la *TOF* pour une épaisseur de milieu de 20 mm avec $R = 0$ (à gauche) et $R = 0.75$ (à droite), avec les paramètres $l_e = 5$ mm, $l^* = 6$ mm, $D = 3$ mm²/μs.

toutes les épaisseurs.

On peut donc conclure que les deux solutions sont équivalentes dans les domaines de variation étudiés ici pour toute technique d'ajustement des données théoriques à la partie décroissante de la *TOF*.

Dans le cas des échantillons prototypes que nous avons utilisés, le coefficient de réflexion à l'interface entre le milieu diffusant et l'eau est nul, ce qui n'est pas le cas avec des échantillons réels pouvant présenter une interface réfléchissante. Dans ce cas, l'étude des réflexions internes montre [66, 65, 6] que le flux diffusif entrant n'est plus nul mais donne lieu à la condition aux limites suivante à l'interface

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e) d\Omega = R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_d(\mathbf{r}, \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s) d\Omega \quad (2.78)$$

avec \mathbf{n}_e et \mathbf{n}_s respectivement les vecteurs unitaires entrant et sortant par rapport au milieu et R un coefficient de réflexion interne moyenné sur les angles de réflexion [66].

Cela conduit à des conditions aux limites semblables à celles que nous avons utilisées jusqu'ici mais avec

$$z_0 = \frac{\pi}{4} \frac{1+R}{1-R} l^*$$

Pour des interfaces de plus en plus réfléchissantes, la solution de l'équation de la diffusion se rapproche de la solution exacte donnée par la théorie du transport [69, 64] : les interfaces agissent comme des miroirs plus ou moins performants. Ainsi même à proximité de $z = 0$ l'intensité a subi un grand nombre de diffusions, si bien que l'approximation de quasi-isotropie 2.53 se trouve vérifiée. Nous avons vérifié que les solutions des *problèmes (1)* et *(2)* pouvaient être encore confondues sur le domaine de décroissance de la *TOF* lorsque le coefficient de réflexion est non nul. L'effet de R sur la partie croissante de la *TOF* est visible sur la figure 2.57 : une augmentation du coefficient de

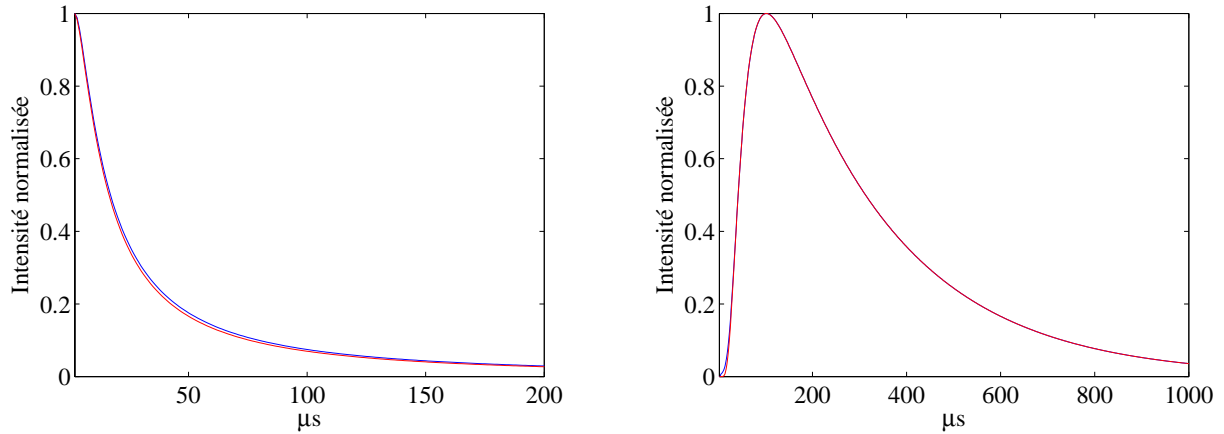


FIG. 2.58: Comparaison des solutions du *problème (1)* en bleu et *(2)* en rouge à une profondeur de 8 mm (à gauche) et 40 mm (à droite) pour un milieu de 80 mm d'épaisseur avec les mêmes paramètres qu'en figure 2.57.

réflexion interne entraîne un rapprochement entre les deux solutions. Cela indique que la contribution du champ cohérent à l'intensité totale devient moins importante suite aux réflexions internes qui contribuent à l'intensité diffuse.

Ces résultats montrent donc que la solution simplifiée du *problème (2)* est valable dans nos conditions expérimentales même en présence de réflexions internes.

D'autre part, pour un échantillon d'épaisseur donnée, assurons-nous que les deux approches donnent une solution semblable sur toute la profondeur de l'échantillon. Cet aspect est essentiel dans le calcul des cônes de rétrodiffusion cohérente qui utilisent les solutions de l'équation de la diffusion intégrées sur toute la profondeur du milieu exploré comme nous l'avons vu au début de ce chapitre.

La figure 2.58 représente les solutions (1) et (2) à une profondeur de 8 mm et 40 mm dans un milieu de 80 mm d'épaisseur. On constate que les courbes sont superposables dès 8 mm d'épaisseur et que l'écart pour la profondeur 40 mm est négligeable. Dans ce milieu, d'épaisseur 80 mm , l'intensité transmise à 40 mm de profondeur met en jeu des chemins de diffusions d'ordre plus élevé que pour un milieu de 40 mm d'épaisseur (imaginons par exemple des chemins réfléchis une première fois à $z > 40\text{ mm}$ vers l'interface $z = 0$ puis une seconde fois vers l'interface $z = L$ en traversant la frontière $z = 40\text{ mm}$) : les solutions sont donc encore plus rapprochées dans le milieu le plus épais.

2.6.3 Approche de B. Van Tiggelen

L'approche de la section précédente peut être encore simplifiée pour donner lieu à une solution ne nécessitant pas de résolution d'équation implicite. Le *problème (2)* est simplifié en linéarisant les dérivées spatiales de l'intensité moyenne apparaissant dans 2.75 et 2.76 et donne lieu au *problème (3)* suivant :

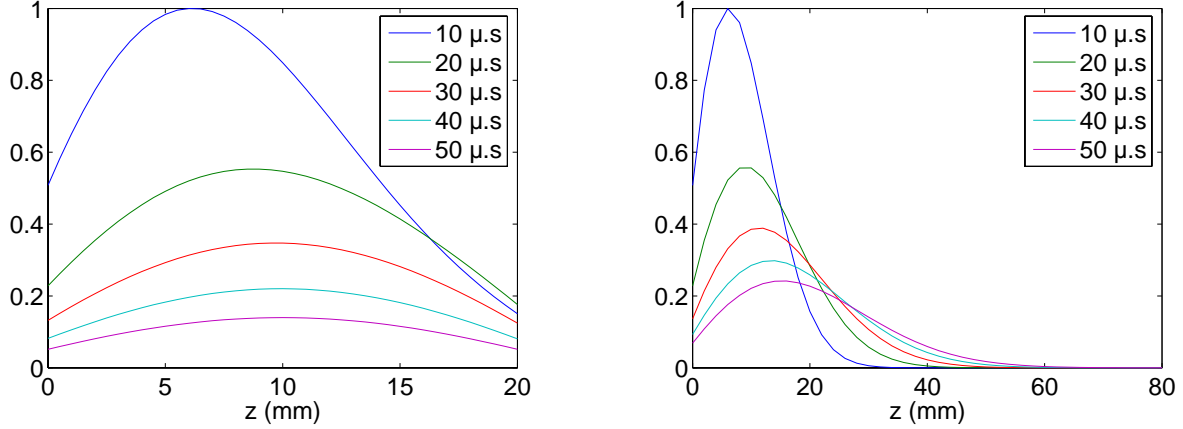


FIG. 2.59: Solution du problème (3) à différents temps et profondeurs pour un milieu de 20 mm d'épaisseur (à gauche) et 80 mm (à droite).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{D \partial t} = \delta(t) \delta(z - z_0) \quad (2.79)$$

$$U = 0 \text{ en } z = -z_0 \quad (2.80)$$

$$U = 0 \text{ en } z = L + z_0 \quad (2.81)$$

La solution du problème (3) est

$$U(z, t) = U_0 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-D\alpha_m^2 t} \sin\left(\frac{m\pi z_0}{B}\right) \sin\left(\frac{m\pi(z + z_0)}{B}\right) \quad (2.82)$$

avec $B = L + 2z_0$ et

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{B}$$

Aux temps longs, le premier mode diffusif est prépondérant, et la solution (3) est proportionnelle à $e^{-\frac{Dt\pi^2}{B^2}}$. Dans ce cadre, c'est principalement D qui détermine l'allure de la courbe, comme nous le précisons en section 2.6.4. La figure 2.59 représente la solution du problème (3) en fonction de la profondeur dans le milieu diffuseur à différents temps. On a traité le cas de milieux de 20 mm et 80 mm d'épaisseur avec un libre parcours moyen de transport l^* de 5 mm. On constate que dans les deux cas l'allure de l'intensité moyenne aux bords de l'échantillon n'est pas très éloignée de sa tangente, ce qui permet de justifier qualitativement la linéarisation des conditions aux limites à l'échelle de $\lambda \approx 0.5 \text{ mm}$ ou de l_e , soit quelques mm.

En plus de simplifier la forme de la solution, cette approche permet de donner un sens à la longueur d'extrapolation z_0 et de comparer dans un cas précis l'approximation de la diffusion à la solution exacte du problème des transferts radiatifs. En effet, dans le cas particulier d'un milieu semi-infini avec des diffuseurs isotropes, l'ETR se réduit à un problème dit de Milne qui peut être résolu de manière analytique. De plus citons Glasstone [70] :

Near the boundary between a diffusion medium and a vacuum, the flux varies in such a manner

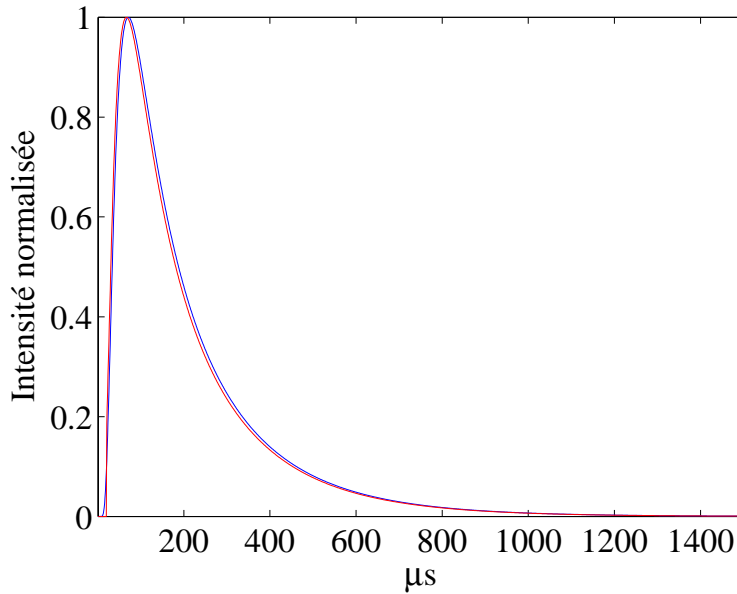


FIG. 2.60: Comparaison des solutions (2) en bleu et (3) en rouge avec un échantillon de 80 mm d'épaisseur avec $l^* = 5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

that linear extrapolation would require the flux to vanish at a definite distance beyond the boundary. La distance d'annulation du flux n'est autre que z_0 dont l'évaluation exacte dans le cas 3D donne une valeur très proche de celle prédite par l'approximation de la diffusion.²⁸

Comparons les solutions des *problèmes (2) et (3)* avec des paramètres typiques pour nos expériences : $L = 80 \text{ mm}$, $l^* = 5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$. On constate sur la figure 2.60 que ces courbes sont d'allures très proches. Comme dans la section précédente, le tracé de la *TOF* en échelle logarithmique permet de déterminer la pente de la partie décroissante de cette courbe. L'écart entre les pentes est négligeable (moins de 0.1 %) dans cette configuration.

Pour une épaisseur de 40 mm, l'écart entre les pentes s'élève à 1 %. On remarque que les solutions sont d'autant plus rapprochées que l'épaisseur des milieux diffuseurs est grande. L'augmentation d'épaisseur donne en effet lieu à des chemins de diffusion d'ordre plus élevés qui permettent de "lisser" l'intensité moyenne à proximité des bords, et justifient d'autant mieux sa linéarisation. Si on choisit les paramètres qui correspondent à un milieu plus diffuseur $l^* = 2.5 \text{ mm}$ et $D = 1.7 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ on constate que les solutions donnent un écart dix fois plus faible sur les pentes de décroissance pour une épaisseur de 40 mm (figure 2.61). Cela confirme à nouveau que l'approximation du *problème (3)* est d'autant meilleure que le milieu diffuse fortement.

Les figures 2.62 représentent l'écart entre les pentes des *solutions (2) et (3)* en fonction de l'épaisseur pour les deux jeux de paramètres l^* et D précédents.²⁹

²⁸ On a

$$z_0 = \frac{2l^*}{3}$$

pour l'approche diffusivo et $z_0 = 0.71l^*$ pour la solution exacte.

²⁹ De même que dans la section précédente, nous nous sommes assurés de la validité de la *solution (3)* dans toute

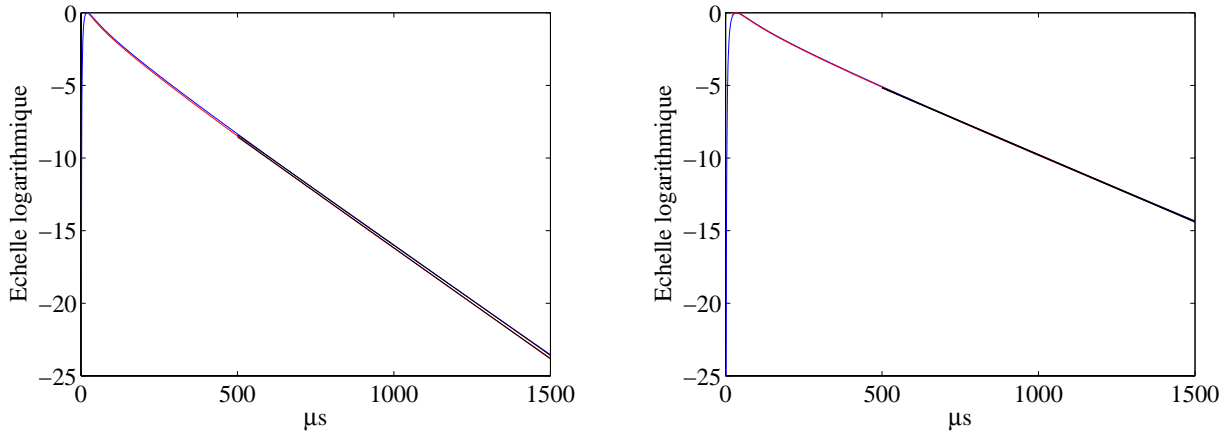


FIG. 2.61: Influence des paramètres de transport sur la comparaison des solutions des *problèmes (2)* et *(3)* : représentation des *TOF* en échelle logarithmique. Pour une même épaisseur (40 mm), un milieu de paramètres $l^* = 5\text{ mm}$ et $D = 3.4\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ (figure de gauche) donne lieu à des écarts dix fois plus importants sur la pente de la *TOF* qu'un milieu plus diffuseur pour lequel $l^* = 2.5\text{ mm}$ et $D = 1.7\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ (figure de droite)

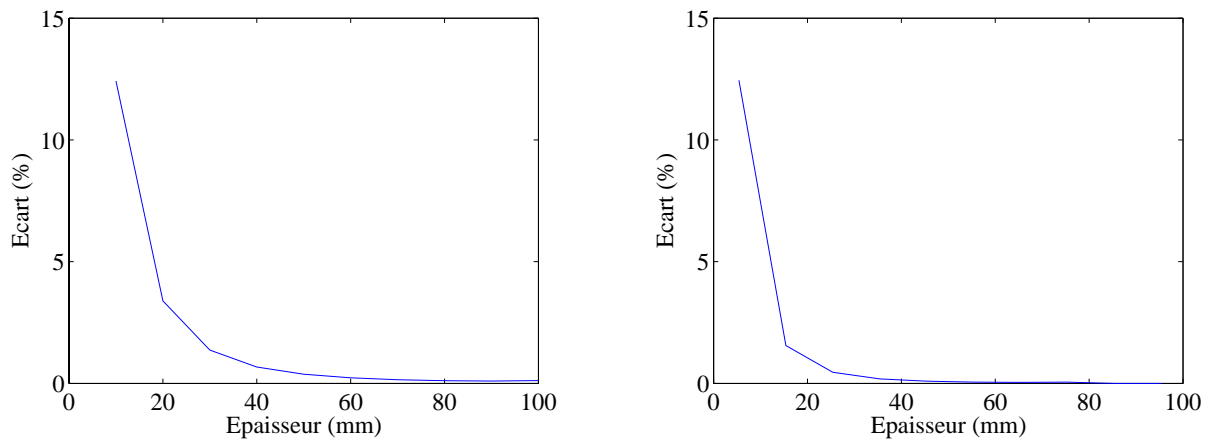


FIG. 2.62: Ecart entre les pentes de décroissance des *TOF* en échelle logarithmique par les solutions des *problèmes (2)* et *(3)* en fonction de l'épaisseur pour un milieu de paramètres $l^* = 5\text{ mm}$ et $D = 3.4\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ à gauche et $l^* = 2.5\text{ mm}$ et $D = 1.7\text{ mm}^2/\mu\text{s}$ à droite.

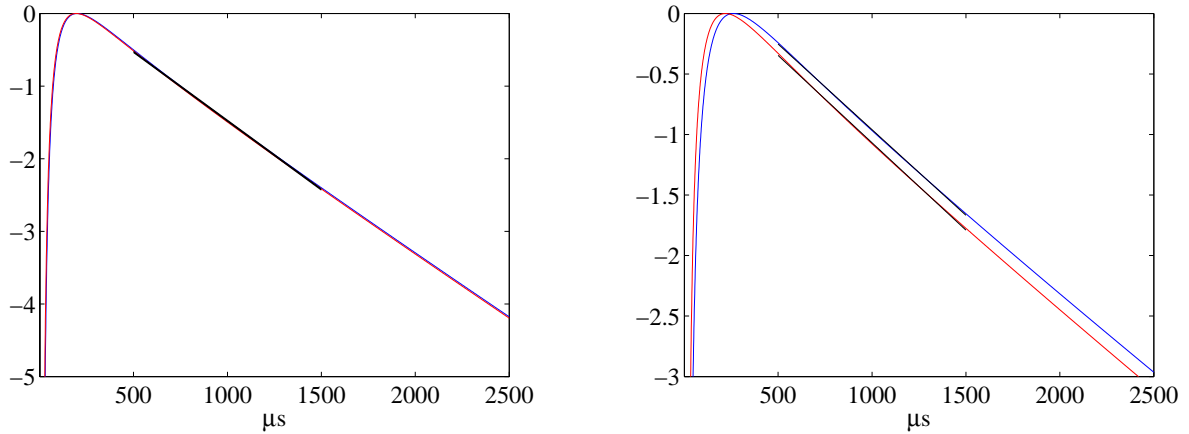


FIG. 2.63: Effet des réflexions internes sur l'évaluation de la pente de décroissance des TOF en échelle logarithmique par les solutions des problèmes (2) et (3) : $R = 0$ à gauche, $R = 0.5$ à droite avec les paramètres $l^* = 5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$. Les réflexions éloignent les deux solutions.

Dans le cas de milieux présentant un coefficient de réflexion interne R , on montre que les solutions (2) et (3) présentent un écart de pente d'autant plus important que R est grand. Ainsi la figure 2.63 compare l'écart entre les pentes pour des valeurs de $R = 0$ et $R = 0.5$ respectivement : l'écart passe de 0.1% à 2.2% avec les paramètres $l^* = 5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

La solution (3) doit donc être utilisée avec précaution dans les études d'échantillons "réels" présentant des différences d'impédance significative avec le milieu environnant.

2.6.4 Influence des paramètres de transport sur la TOF

Les paramètres de transport qui interviennent dans l'expression de la TOF dynamique sont, dans le cadre du problème (3), l^* , D et l_a . Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'influence de l^* et de D sur la détermination de la pente de la courbe des temps de vol.

Le libre parcours moyen de transport l^* intervient par l'intermédiaire de la longueur d'extrapolation z_0 . Cette dernière modifie l'épaisseur effective du milieu et l'on s'attend donc à ce que l'influence de l^* soit d'autant plus importante que l'épaisseur du milieu est faible. La figure 2.64 confirme cette influence de l^* et montre une relation linéaire entre l'écart sur l^* et l'écart sur les pentes. Pour une variation de ce paramètre de 1 %, la pente de la TOF varie respectivement de 0.33 %, 0.17 % et 0.14 % pour des épaisseurs de 40 mm, 80 mm et 120 mm.

On ne peut donc pas évaluer la pente de la courbe des temps de vol de manière précise en faisant l'hypothèse d'isotropie de nos diffuseurs (*i.e* en supposant $l^* = l_e$, l_e étant connu par la mesure du champ cohérent.). Nous avons vu en effet dans le premier chapitre que le cosinus moyen variait entre 0.1 et 0.2 pour les échantillons étudiés, ce qui conduit à un écart compris entre 10 % et 20 % entre les libres parcours moyens élastiques et de transport.

la profondeur d'un milieu donné, ce qui justifie son utilisation dans le calcul des cônes de rétrodiffusion.

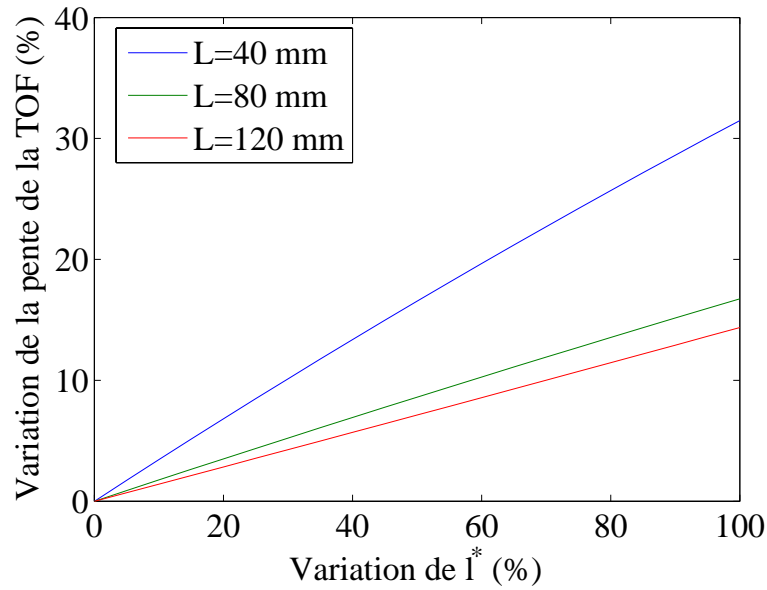


FIG. 2.64: Influence de l^* sur la pente de la partie décroissante de la TOF pour des milieux d'épaisseurs 40 mm, 80 mm et 120 mm. On a fixé $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ et la valeur de référence pour l^* est 5 mm.

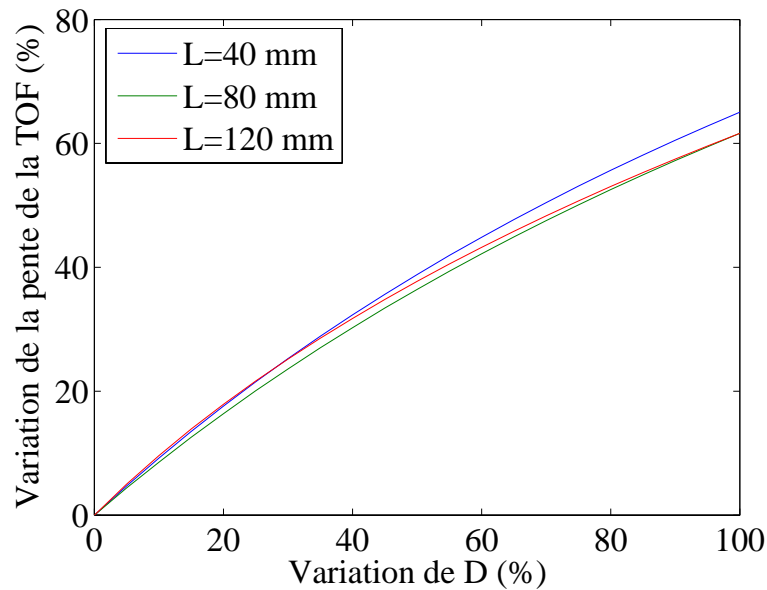


FIG. 2.65: Influence de D sur la pente de la partie décroissante de la TOF pour des milieux d'épaisseurs 40 mm, 80 mm et 120 mm. Les paramètres de transport sont les mêmes qu'en figure 2.64.

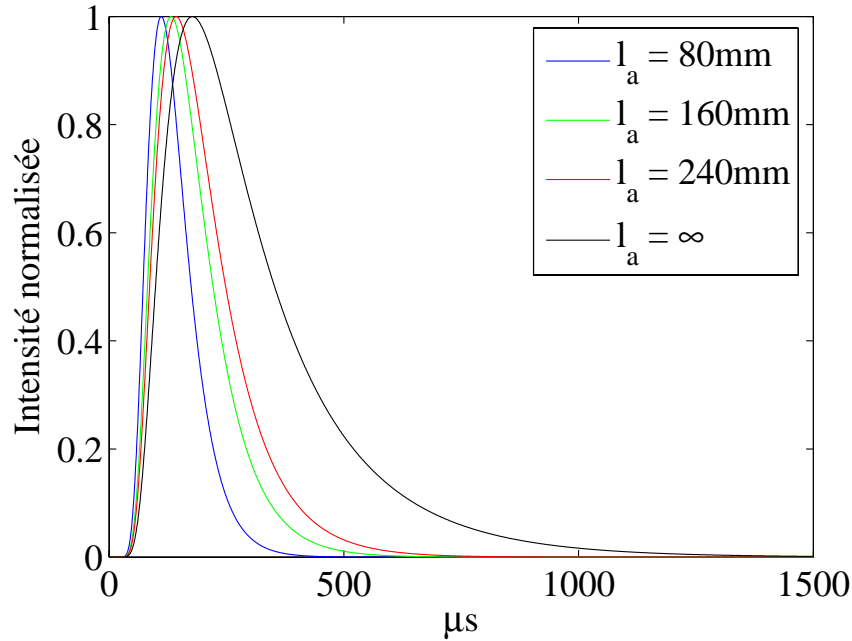


FIG. 2.66: Effet de l'absorption sur la *TOF* selon la *solution (3)* pour un milieu diffuseur de 80 mm d'épaisseur, avec $l^* = 5 \text{ mm}$ et $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$.

La constante de diffusion intervient dans les termes de dépendance temporelle et spatiale de la *TOF*. La figure 2.65 montre que la courbe des temps de vol est très sensible à D , et ce quelles que soient les épaisseurs des milieux considérés. Ce résultat était attendu vu qu'aux temps longs, la *solution (3)*, qui ne retient que le premier mode diffusif, est proportionnelle à $e^{-\frac{Dt\pi^2}{B^2}}$.

2.6.5 Influence de l'absorption

L'étude précédente concernait les milieux non absorbants. Dans les cas expérimentaux que nous étudions il convient de faire intervenir les longueurs et temps caractéristiques d'absorption du milieu : l_a et τ_a . Chacune des solutions étudiées précédemment est simplement multipliée par un facteur

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

L'effet de l'absorption est exposé sur la figure 2.66. Les chemins les plus longs étant éteints par l'absorption, l'intensité transmise donne lieu à une courbe moins étendue temporellement. D'autre part, la *solution (3)* donne une relation très simple aux temps longs permettant de relier τ_a aux temps caractéristique total τ_{tot} et de diffusion τ_D du milieu :

$$\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_D} \quad (2.83)$$

avec

$$\tau_D = \left(\frac{L + 2z_0}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D}$$

Cette relation sera notre point de départ pour l'ajustement de la TOF selon le libre parcours moyen d'absorption, comme nous le détaillerons dans les sections suivantes.

Quelle est l'erreur d'évaluation de l_a avec notre méthode ?

L'erreur sur l_a s'écrit

$$\frac{\Delta l_a}{l_a} = \frac{\Delta \tau_{tot}}{\tau_{tot}} + \frac{\Delta D}{D} + 2 \frac{\Delta B}{B} \quad (2.84)$$

en notant $B = L + 2z_0$ la longueur effective du milieu.

L'erreur sur l_a est donc la somme

- de l'erreur d'ajustement des données théoriques et expérimentales
- de l'erreur d'évaluation de D
- de l'erreur d'évaluation de L et l^*

Après ces développements théoriques, nous exposons notre approche expérimentale pour obtenir la courbe des temps de vol en régime dynamique.

2.7 Obtention expérimentale de la courbe des temps de vol

Dans cette section, nous exposons successivement le protocole expérimental utilisé, l'analyse des données et les résultats obtenus, en régime impulsionnel puis quasi-monochromatique.

2.7.1 Principe

Le dispositif expérimental est celui de la figure 2.19. Une barrette de transducteurs et un mono-élément piézoélectrique se font face de part et d'autre de l'échantillon que l'on souhaite caractériser. Le monoélément émet un signal de type créneau sur une durée de $1\mu s$ à la fréquence de 3.2 MHz . Le signal transmis est ensuite enregistré sur la barrette réceptrice, qui numérise le champ transmis. Afin d'améliorer le rapport signal sur bruit (S/B), chaque acquisition est moyennée sur dix tirs, ce qui nous permet d'obtenir un rapport S/B de 9 dB en fin de fenêtre d'acquisition temporelle. Pour une configuration donnée, on calcule l'intensité transmise sur chacune des voies de la barrette réceptrice et on moyenne le résultat sur l'ensemble des voies : on obtient l'intensité transmise en moyenne pour une configuration, ce qui donne lieu à la figure 2.67 à gauche.

Comme nous l'avons souligné dans la partie introductive, il est nécessaire de moyennner l'intensité sur les réalisations du désordre, ce que nous réalisons en pratique en déplaçant simultanément les transducteurs émetteurs et récepteurs le long de l'échantillon d'étude. On déplace le dispositif sur une centaine de positions, par pas de 1 mm . On obtient ainsi la TOF expérimentale, comme représenté sur la figure 2.67 à droite.

La distance entre les transducteurs est de 240 mm quelle que soit l'épaisseur de l'échantillon étudié, ce qui nous permet d'éviter les échos d'aller-retour entre l'échantillon et la barrette réceptrice.

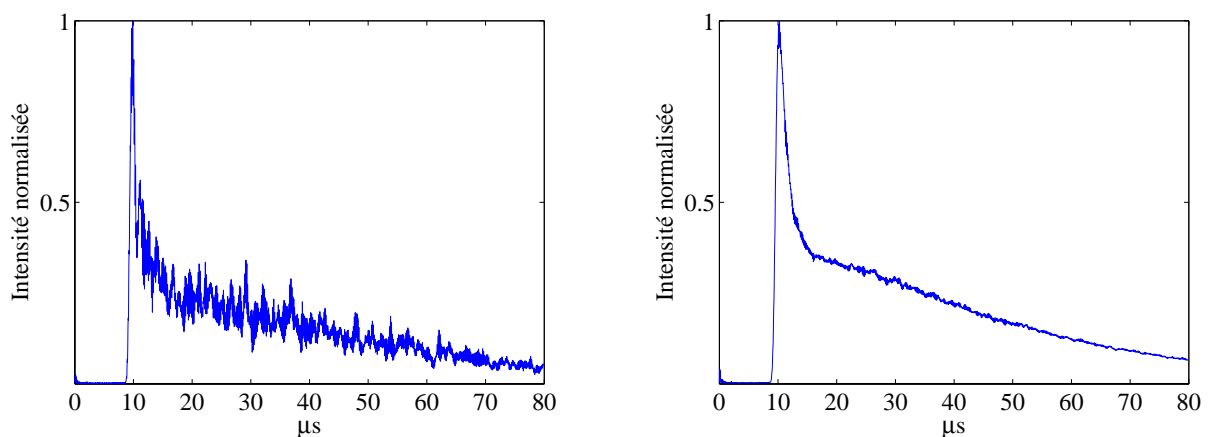


FIG. 2.67: Comparaison entre les intensités transmises en moyenne sur les voies sur une position (à gauche) et après moyenne sur une centaine de positions (à droite) pour un échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 , d'épaisseur 40 mm à la fréquence centrale 3.2 MHz .

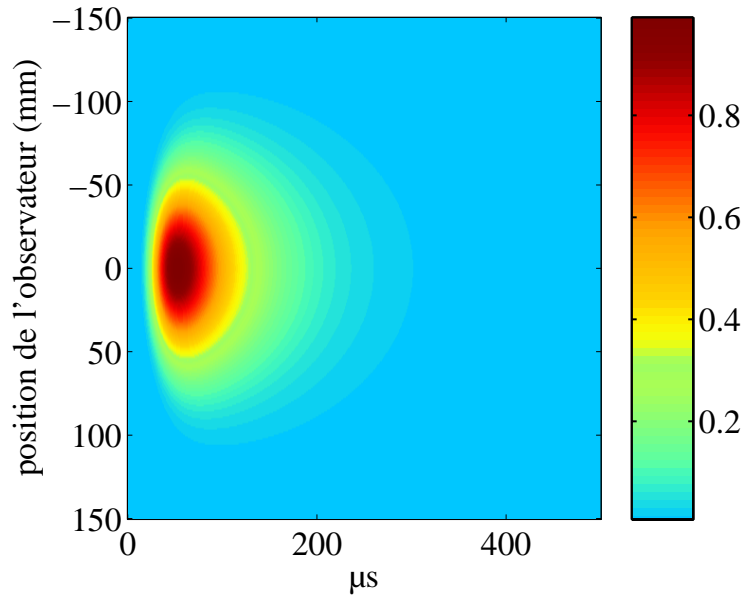


FIG. 2.68: Représentation bidimensionnelle de la *TOF* pour une source ponctuelle selon la *solution* (3) avec les paramètres $l^* = 5 \text{ mm}$, $D = 3 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ et $L = 40 \text{ mm}$. La source est placée en $x = 0$, l'intensité décroît exponentiellement avec le carré de la distance transversale à la source selon 2.85.

2.7.2 Traitement des données

Pour pouvoir extraire les données des courbes expérimentales obtenues, il est nécessaire d'adapter la théorie développée à la section 2.6. Dans ce qui suit, nous discutons de l'influence de la nature de la source sur les courbes des temps de vol prédites par la théorie, puis nous analysons l'effet de nos conditions expérimentales pour pouvoir, *in fine*, mesurer rigoureusement les paramètres d'absorption du milieu considéré.

2.7.2.1 Influence de la nature de la source

Dans la théorie présentée jusqu'ici, nous nous sommes limités à l'expression unidimensionnelle des intensités transmises. La solution bidimensionnelle du problème (i) avec $i \in \{1, 2, 3\}$ dans le cas d'une source ponctuelle est donnée par [2] :

$$U_{\text{ponctuelle},i}(x, z, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} U_i(z, t) \quad (2.85)$$

avec $U_i(z, t)$ la solution du problème (i) d'expression donnée par 2.73, 2.77 et 2.82.

Pour avoir les solutions correspondantes dans le cadre d'une source plane, il suffit d'intégrer 2.85 selon toute la droite des x . En utilisant le résultat classique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} dx = 1$$

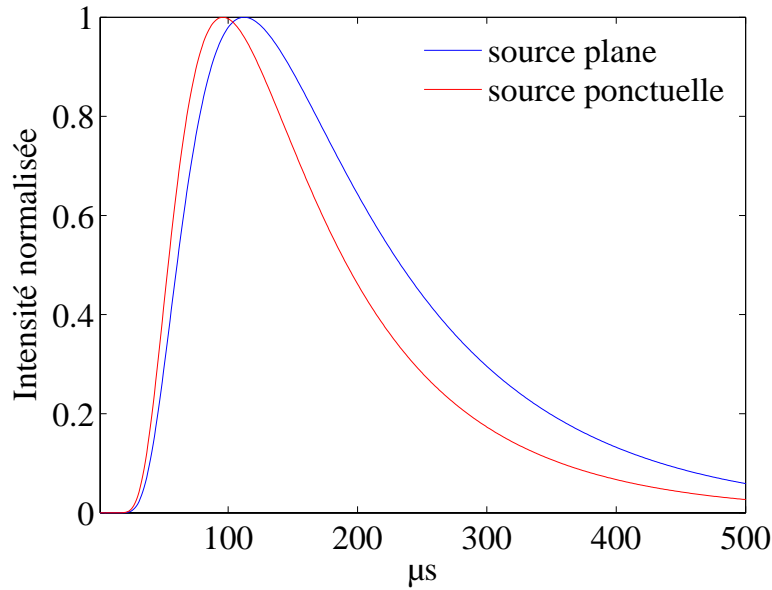


FIG. 2.69: Comparaison des solutions pour des sources planes et ponctuelles avec les paramètres $L = 40 \text{ mm}$, $l^* = 3.6 \text{ mm}$ et $D = 2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$: l'évaluation de la pente de décroissance montre un écart de 15% dans ce cas.

On en déduit que la solution plane bidimensionnelle ne dépend que de la variable z : on obtient la même expression après normalisation que dans les relations 2.73, 2.77 et 2.82 soit

$$U_{plane,i}(x, z, t) = U_i(z, t) \quad (2.86)$$

On constate donc les solutions ne sont pas les mêmes dans les cas de sources planes et ponctuelles, ce que représente la figure 2.69 pour un échantillon de paramètres $L = 40 \text{ mm}$, $l^* = 3.6 \text{ mm}$ et $D = 2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$. Plus précisément, l'évaluation de la pente de la partie décroissante donne un écart de l'ordre de 15% entre les deux solutions : une adaptation précise de la théorie à nos conditions expérimentales est donc nécessaire pour mesurer les paramètres d'absorption du milieu diffuseur.

2.7.2.2 Adaptation de la théorie à l'expérience

Les adaptations de la théorie concernent les hypothèses suivantes :

- Au niveau de la première interface entre l'eau et l'échantillon, nous devons considérer un ensemble de sources secondaires auxquelles s'applique une loi de retard dépendant de la distance entre l'émetteur et l'échantillon. La loi de retard cylindrique que nous appliquons est représentée en figure 2.70 (en bas à gauche).

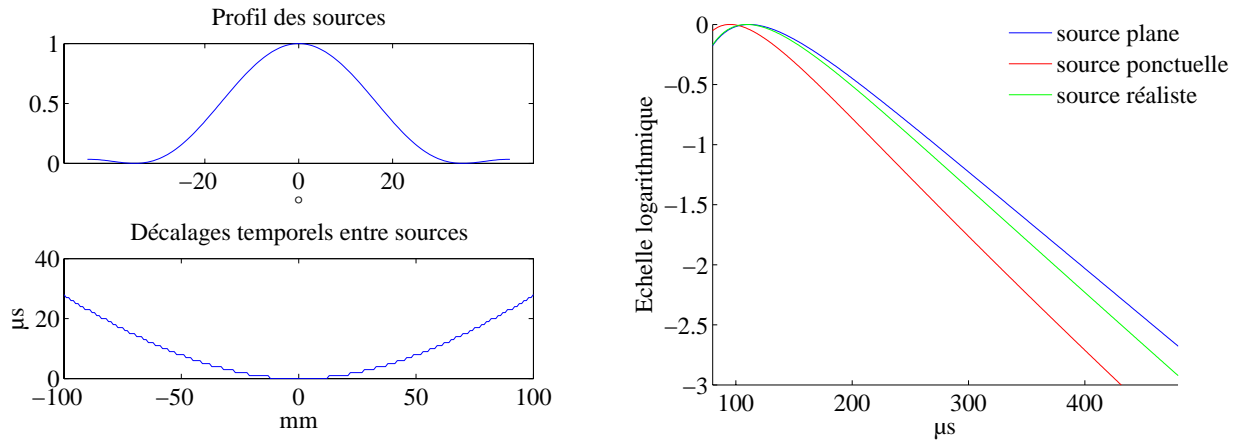


FIG. 2.70: En choisissant un profil de sources et une loi de retard selon la figure de gauche, on obtient une solution adaptée à nos conditions expérimentales, qui se situe entre les deux solutions planes et ponctuelles. Les paramètres sont les mêmes qu'à la figure 2.69.

- Les amplitudes associées à chacune de ces sources secondaires ne sont pas égales : elles dépendent de la directivité de l'émetteur qui doit donc être prise en compte³⁰. Nous avons modélisé la directivité par une fonction sinus cardinal comme en section 2.4.2.2 . Le profil des sources secondaires sur l'interface en regard de l'émetteur est exposé sur la figure 2.70 (en haut à gauche).
- L'intensité transmise en chaque point de sortie de de l'échantillon doit être propagée jusqu'aux récepteurs en faisant intervenir la directivité de ces derniers. L'intensité totale résulte ensuite d'une sommation incohérente des contributions de chaque point de l'interface de sortie.
- Enfin la théorie considérait que le signal source était une impulsion : nous devons donc prendre en compte la durée réelle du signal tiré. On convolue donc les solutions théoriques par l'enveloppe du signal expérimental émis.

On peut alors comparer la solution adaptée à nos conditions expérimentales à celles résultant de sources planes et ponctuelles. La figure 2.70 (à droite) montre que la solution adaptée se situe entre les deux courbes planes et ponctuelles. Les valeurs absolues des pentes *plane* et *réaliste* présentent respectivement 15% et 10% d'écart avec la valeur absolue de la pente *ponctuelle*. Cela indique bien que cette correction n'est pas négligeable : l'hypothèse source "plane pure" ou "ponctuelle pure" aurait été fausse.

³⁰ La décroissance géométrique, fonction de la distance à l'émetteur doit également être prise en compte, bien que son effet soit moins important que celui de la directivité.

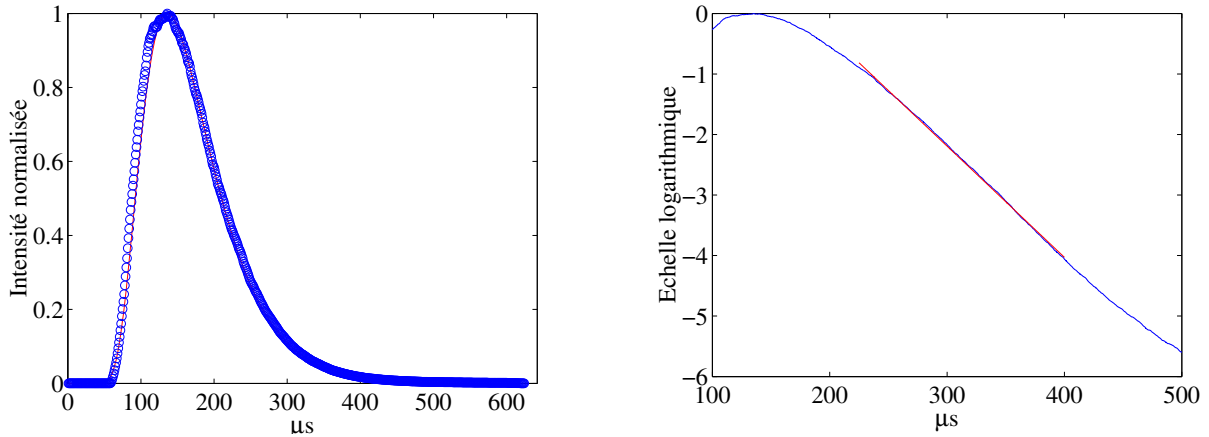


FIG. 2.71: Mesure de l_a en régime impulsionnel, échantillon de tige de 0.6 mm de diamètre, de densité 0.18 tige/mm^2 et 80 mm d'épaisseur : on trouve $l_a = 110 \text{ mm}$. L'ajustement est très précis, l'écart entre les pentes peut à peine se voir sur la figure de droite en échelle logarithmique de base

10.

2.8 Mesure du libre parcours moyen d'absorption

Les données expérimentales sont ajustées à l'aides de la solution théorique *adaptée* présentée dans la section précédente. Nous présentons les résultats obtenus en régime impulsionnel puis quasi-monochromatique.

2.8.1 Régime impulsionnel

Pour ce type d'expérience, le signal émis par la source est une forme créneau de fréquence centrale 3.2 MHz sur une durée de $1 \mu \text{ s}$. L'épaisseur de l'échantillon devant donner lieu à de la diffusion multiple d'ordre élevé, le signal reçu après transmission est amplifié de 20 dB par un amplificateur Sofranel. Les courbes théoriques n'ont qu'un paramètre d'ajustement : le libre parcours moyen d'absorption l_a . Les valeurs de D sont issues des mesures expérimentales du cône de rétrodiffusion dynamique. Les valeurs de l^* sont obtenues à partir des valeurs du libre parcours moyen élastique l_e mesurées au premier chapitre, et du cosinus moyen obtenu par la théorie pour un diffuseur cylindrique. La valeur de l_a obtenue pour l'échantillon de tiges de 0.6 mm de diamètre et de densité 0.18 tige/mm^2 est ainsi de 110 mm . L'erreur de fit est inférieure à 0.5% : dans nos expériences, l'erreur d'évaluation de l_a résulte principalement de celle sur D , évaluée autour de 10% dans la section 2.4.4, et de l'erreur sur l^* , qui est comprise entre 5% et 10% selon les échantillons et les fréquences³¹. Globalement, notre évaluation de l_a est entachée d'une incertitude de l'ordre de $\pm 15 \%$.

L'ajustement est présenté en figure 2.71 : on constate qu'il est très précis, avec une erreur d'ajustement inférieure à 0.5% .

³¹L'erreur sur l_e donne un ordre de grandeur de l'erreur sur l^* .

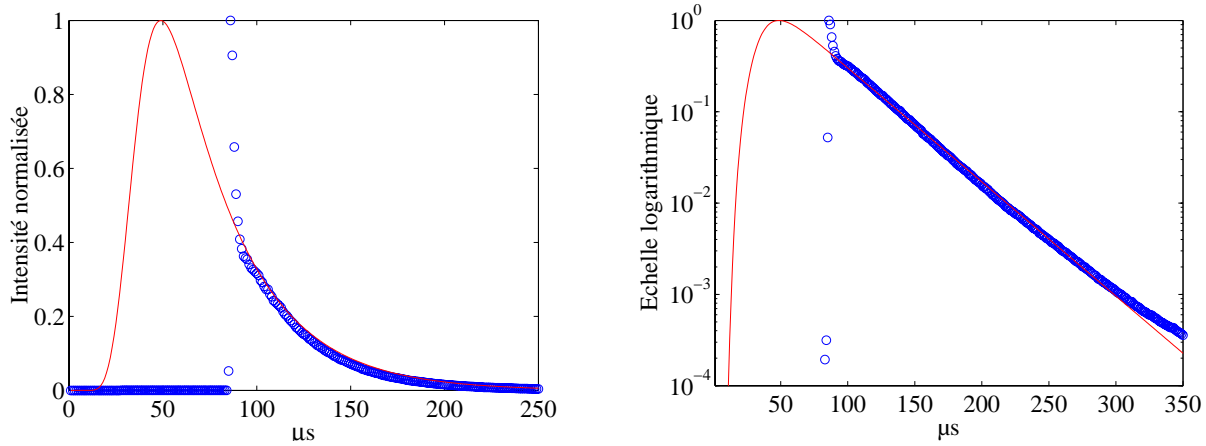


FIG. 2.72: Mesure de l_a en régime impulsif, échantillon de tige de 0.6 mm de diamètre, de densité 0.18 tige/mm^2 et 40 mm d'épaisseur. L'ajustement reste précis sur le domaine de décroissance de la *TOF*. On obtient $l_a = 95 \text{ mm}$.

L'allure de la *TOF* pour un échantillon de même caractéristiques mais d'épaisseur 40 mm donne lieu à une estimation de $l_a = 95 \text{ mm}$. Le caractère intensif de ce paramètre devrait entraîner une même valeur de l_a quelle que soit l'épaisseur. L'écart entre les valeurs s'explique par la différence d'estimation sur D selon les épaisseurs : l'imprécision sur D se reporte sur l_a . Les ajustements sont exposés en figure 2.72. On constate toujours un fit précis mais comme cela fut souligné dans la partie théorique, seul le domaine de décroissance de la courbe expérimentale est ajustable par notre approche diffusive.

Selon le type d'échantillon, l'épaisseur donnant lieu à des *TOF* ajustables par l'approximation de la diffusion varie : le paramètre déterminant est le rapport entre L et l_e (ou l^*). Ainsi avec l'échantillon de tiges de 0.8 mm de diamètre, de densité 0.29 tige/mm^2 , correspondant à un $l_e = 3 \text{ mm}$, on constate sur la figure 2.73 que dès l'épaisseur 40 mm la *TOF* expérimentale est bien ajustée par la théorie sur toute sa durée. La valeur de l_a obtenue est ici de 88 mm .

Pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm le moins dense, on mesure $l_a = 92 \text{ mm}$ (figure 2.74).

Les différents échantillons, bien que présentant des coefficients de diffusion et des libres parcours moyens de transport variables dans un rapport 1 à 2, donnent donc lieu à des libres parcours moyens d'absorption éloignés de moins de 20 %, sachant que l'erreur sur ces valeurs est de l'ordre de $\pm 15 \%$. L'échantillon le plus dense absorbe légèrement plus que les autres mais c'est l'absorption de l'eau qui est prépondérante.

2.8.2 Régime quasi-monochromatique

Le comportement fréquentiel des paramètres de transport étudiés jusqu'ici a montré des variations importantes de l^* et D , notamment autour de la fréquence de résonance des tiges. L'étude

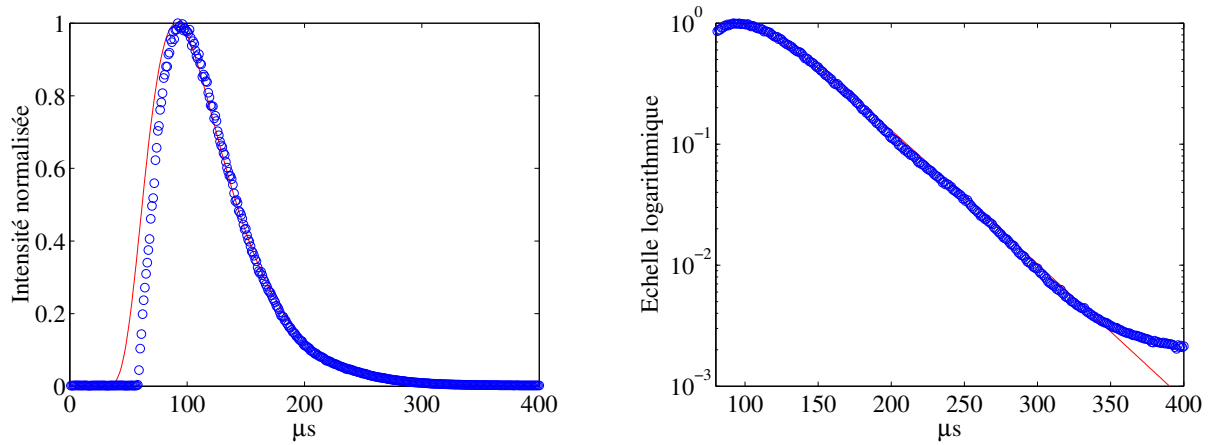


FIG. 2.73: Mesure de l_a en régime impulsionnel pour l'échantillon de tige de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et 40 mm d'épaisseur. On trouve $l_a = 88 \text{ mm}$.

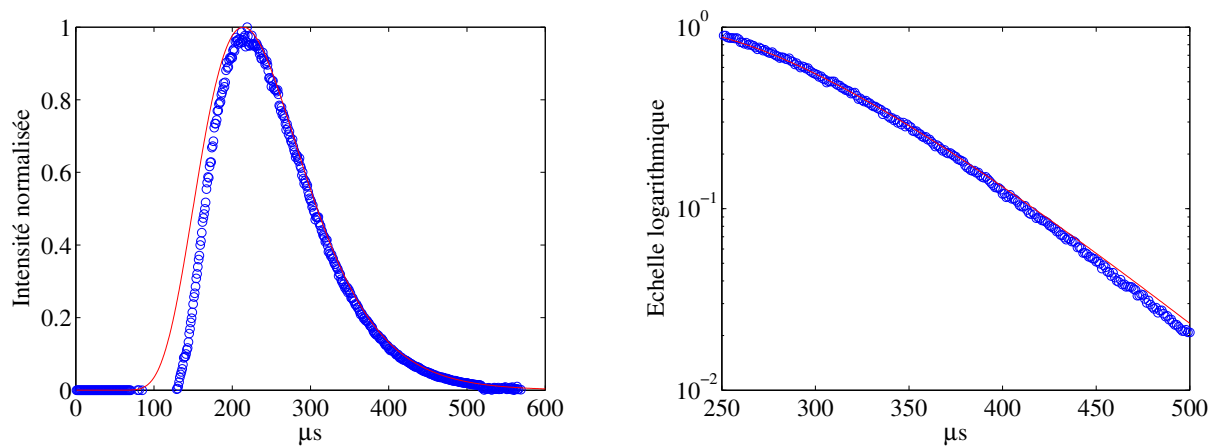


FIG. 2.74: Mesure de l_a en régime impulsionnel, échantillon de tige de diamètre 0.8 mm , de densité 0.12 tige/mm^2 et de 120 mm d'épaisseur : on trouve $l_a = 92 \text{ mm}$.

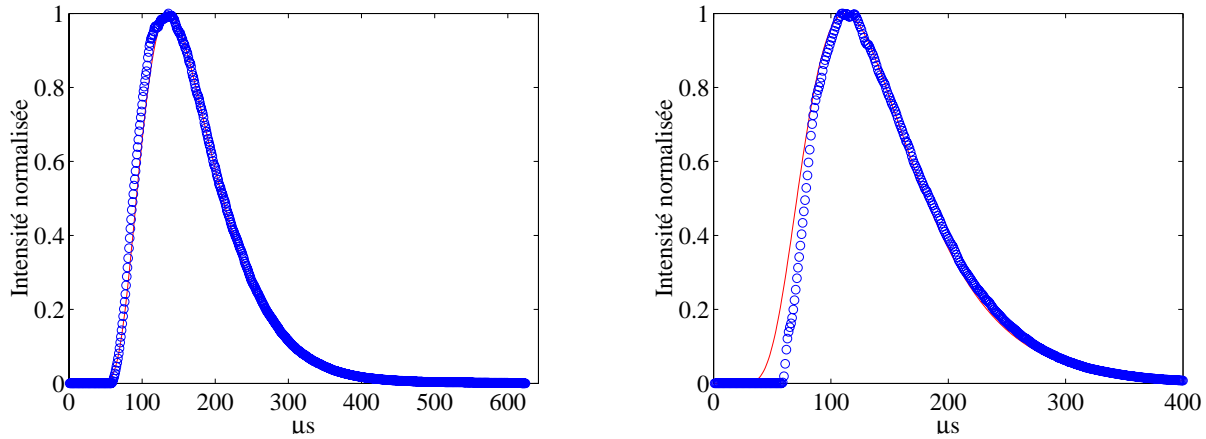


FIG. 2.75: Ajustement fréquentiel de la *TOF* pour l'échantillon de tige de 0.6 mm de diamètre, de densité 0.18 tige/mm^2 et 80 mm d'épaisseur. Le fit est représenté pour les fréquences 3 MHz (figure de gauche) et 3.6 MHz (figure de droite).

fréquentielle du libre parcours moyen d'absorption va nous permettre de savoir si ce paramètre est aussi sensible à la résonance des diffuseurs. La section précédente en régime impulsionnel nous a permis de conclure provisoirement que l'absorption dépend principalement du milieu hôte dans nos expériences : elle ne devrait donc pas être particulièrement sensible au comportement fréquentiel des diffuseurs.

Les *TOF* expérimentales étant obtenues par un signal source quasi-impulsionnel, nous en extrayons les données fréquentielles après filtrage dans des bandes de fréquences de largeur 0.2 MHz . Cela nous permet d'avoir la même précision en fréquence sur les courbes issues de l'expérience que sur les paramètres D et l^* injectés dans la solution théorique. On utilise ensuite le carré de l'enveloppe du signal filtré.

La figure 2.75 présente les ajustements des *TOF* pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 et d'épaisseur 80 mm à deux fréquences caractéristiques : 3 MHz et 3.6 MHz . On constate que les fits sont toujours fins malgré la perte de la moyenne fréquentielle.

Le libre parcours moyen d'absorption est ainsi estimé pour chaque fréquence, ce qui donne lieu aux courbes de la figure 2.76. La courbe rouge correspond à l'estimation issue de l'échantillon de 40 mm d'épaisseur, la bleue à celui de 80 mm d'épaisseur. Le faible écart entre les courbes confirme bien le caractère intensif de ce paramètre, à nos erreurs d'estimation près.

Ces résultats confirment les analyses de l'étude impulsionnelle : l_a n'est pas sensible à la résonance des tiges. L'absorption croît avec la fréquence, apparemment indépendamment des comportements des diffuseurs. Les résultats relatifs aux autres échantillons appellent les mêmes conclusions.

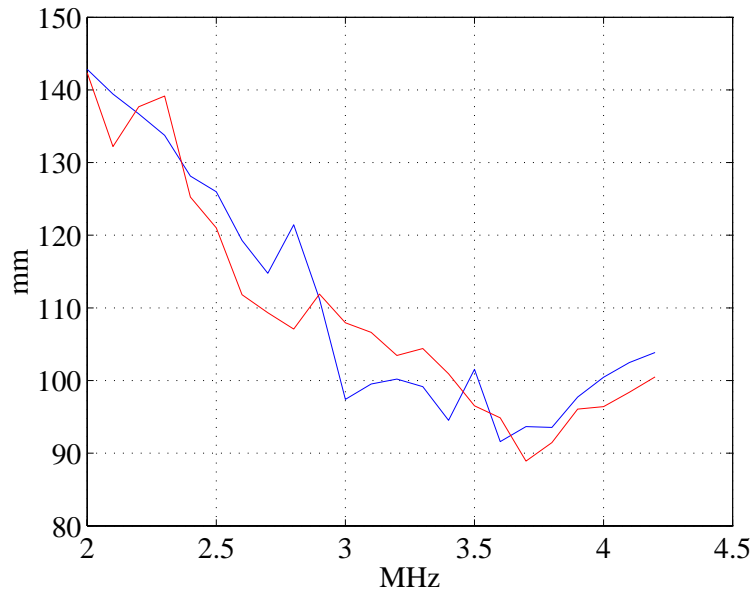


FIG. 2.76: Mesure de l_a en régime fréquentiel, pour l'échantillon de tige de 0.6 mm de diamètre, de densité 0.18 tige/mm^2 . Les données sont issues de l'échantillon de 40 mm d'épaisseur (courbe rouge) et 80 mm d'épaisseur (courbe bleue).

2.9 Mesure du coefficient de diffusion

La courbe des temps de vol dynamique faisant intervenir le coefficient de diffusion D , certains auteurs³² ont proposé une méthode permettant de mesurer ce coefficient indépendamment de l'absorption. Il s'agit d'utiliser la décroissance exponentielle $e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ selon la direction latérale. Le principe consiste donc à déduire la valeur de D de la comparaison entre deux TOF reçues par des récepteurs décalés latéralement. Ce type de mesure n'est néanmoins pas applicable à notre dispositif expérimental. En effet, nos récepteurs étant situés à une distance de l'ordre de 10 cm de l'interface de l'échantillon, les TOF enregistrées ne sont pas directement celles issues de la théorie. Dans la section précédente nous avons détaillé les adaptations nécessaires pour se placer dans nos conditions expérimentales. La décroissance exponentielle n'est directement exploitable qu'en sortie d'échantillon : l'intensité enregistrée par nos récepteurs étant la somme incohérente des intensités des sources secondaires sur l'interface, c'est avant tout la directivité des capteurs qui explique la différence entre les TOF reçues à différentes abscisses latérales.

La figure 2.77 représente les TOF calculées pour des positions latérales espacées de 5 cm , avec et sans directivité. Les courbes sont normalisées par le maximum de la TOF dans l'axe. On constate que l'écart dû à D est noyé par l'effet de la directivité. Notre dispositif expérimental ne permet donc pas de mesurer D en transmission selon cette technique.

³² notamment, J.H. Page [65].

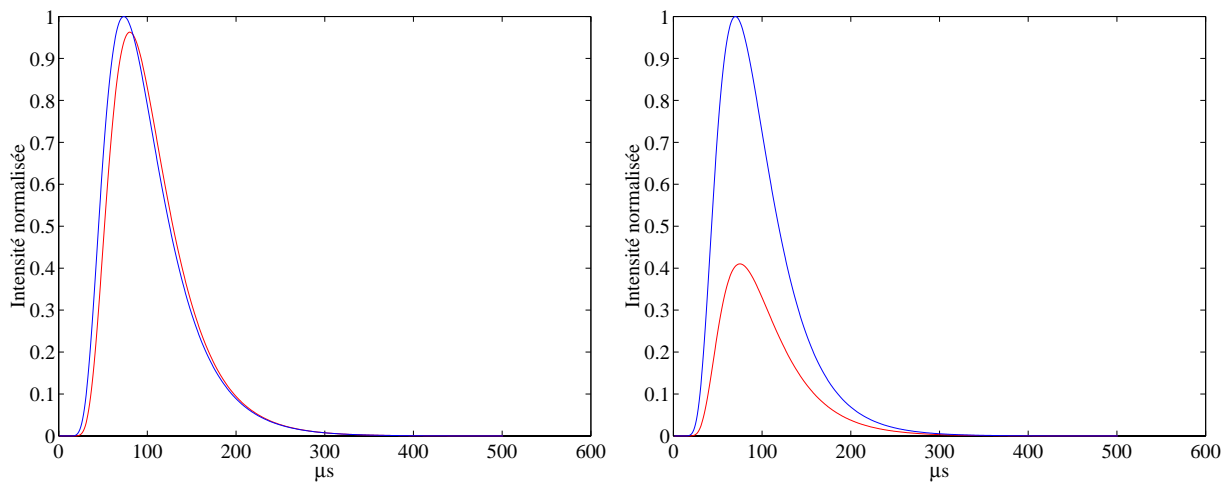


FIG. 2.77: Effet de la directivité sur la décroissance latérale de la *TOF*. Les paramètres sont ceux de l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité $0.29\text{ tige}/^2$ et d'épaisseur 40 mm . La courbe rouge correspond à un récepteur excentré de 5 cm , la courbe bleue correspond à un récepteur en face de l'émetteur. Sur la figure de gauche, on considère des transducteurs non directifs : on observe l'effet de D sur les données hors d'axe. Sur la figure de droite, on considère des transducteurs directs, comme dans nos expériences : l'effet de décroissance dû à la directivité noie celui que l'on cherche à observer.

Chapitre 3

Intensité multiplement diffusée en régime stationnaire

3.1 Intensité rétrodiffusée

Au chapitre précédent, nous avons exposé le phénomène de rétrodiffusion cohérente en régime dynamique. Nous avons montré que l'évolution temporelle du cône de rétrodiffusion permettait d'évaluer la constante de diffusion D du milieu, indépendamment de son absorption. Lorsque l'on s'intéresse à l'énergie rétrodiffusée intégrée sur toute la durée du signal utile, on se place en "régime stationnaire". Le principe de réciprocité est la pierre angulaire du cône en régime dynamique et le reste évidemment pour la surintensité en régime stationnaire et donne lieu à ce que nous nommerons désormais le *cône stationnaire*. Ainsi la différence avec le chapitre précédent concerne le traitement et l'exploitation des données, et notre objectif est de déterminer l'apport du cône stationnaire à la mesure des paramètres de transport du milieu. Plus précisément, nous nous concentrerons sur le libre parcours moyen de transport l^* : peut-il être mesuré à l'aide du cône stationnaire ?

Cet intérêt pour l^* s'explique par deux raisons principales. La première est d'ordre pratique : à ce stade, tous les paramètres de transport sont évalués à chaque fréquence par nos techniques expérimentales à l'exception de l^* . En effet, l'étude du champ cohérent nous permet d'évaluer le libre parcours moyen élastique l_e , le cône dynamique nous fournit une évaluation robuste de D et l'absorption du milieu quantifiée par l_a est évaluée en transmission incohérente dynamique. Or il est "connu" que le pic du cône stationnaire a une largeur inversement proportionnelle à l^* , ce qui permet de penser qu'il ferait un bon candidat pour évaluer simplement ce paramètre. La seconde raison est plus fondamentale : elle concerne l'effet de l'anisotropie de la section efficace différentielle sur la rétrodiffusion cohérente. Cet aspect n'a été que peu traité jusqu'à présent, la plupart des auteurs faisant l'hypothèse d'isotropie de la diffusion. La généralisation des résultats au cas anisotrope ne va pas sans difficultés comme nous l'expliciterons par la suite.

Après une brève présentation de l'état de l'art concernant le cône stationnaire, nous exposerons les étapes permettant d'obtenir des expressions théoriques du cône avec plusieurs degrés d'approxi-

mation. Nous étudierons ensuite l'influence des paramètres physiques sur la forme et la largeur du cône. Dans la partie suivante, nous décrirons le principe d'une expérience en régime stationnaire et évaluerons l'effet des paramètres expérimentaux. Nous montrerons alors ce qui constitue l'information principale de cette section : dans nos conditions expérimentales, le cône stationnaire ne *permet pas* de déterminer l^* .

3.1.1 Le cône stationnaire

La présentation détaillée de la rétrodiffusion cohérente a été faite au chapitre précédent et nous ne reprendrons ici que certains aspects spécifiques au régime stationnaire. Les notations ne changent pas par rapport à la section 2.3.1, il suffit juste d'intégrer sur le temps chacune des équations obtenues dans le cas dynamique. Les termes d'intensité moyennée I_M , cohérente I_C , incohérente I_I et de diffusion simple I_S sont liés par la relation

$$I_M(\theta) = \langle I(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}) \rangle = I_S(\theta) + I_I(\theta) + I_C(\theta)$$

Comme nous l'avons vu en section 2.3.1, le principe de réciprocité permet d'affirmer que le terme I_C est non nul dans un secteur angulaire de l'ordre de

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

avec \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j les centres des premiers et derniers diffuseurs rencontrés.

Dans le cadre de l'approche diffusive, à un temps t fixé, $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \approx \sqrt{Dt}$. Lorsque l'on intègre cette relation sur les temps, en considérant tous les chemins possibles, du plus court au plus long, pondérés par la *TOF*, un ordre de grandeur pour la distance entre le premier et le dernier diffuseur dans le milieu est donné par l^* . On peut donc écrire en première approche, selon [2, 6, 40] :

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{l^*} \quad (3.1)$$

La mesure de la largeur angulaire du cône semble donc être un moyen d'évaluer le libre parcours moyen de transport l^* dans le milieu. Dans ce qui suit, nous montrons que ce n'est pas le cas pour nos applications.

3.1.2 Expression théorique

Après excitation par une source ponctuelle S , l'intensité moyenne reçue par le récepteur D en régime stationnaire s'écrit

$$I(S, D) = \int_0^\infty \iiint \overline{G}(D, M_1) \overline{G}^*(D, M_2) K_r(M_1, M_2, M_3, M_4, t) \overline{G}(M_3, S) \overline{G}^*(M_4, S) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 dt \quad (3.2)$$

Au chapitre précédent, nous avons exposé des approximations successives permettant de simplifier les contributions cohérentes et incohérentes du cône dynamique. Nous reprenons la même

démarche dans ce qui suit.

Expression de l'intensité incohérente

L'intensité incohérente s'obtient en utilisant les diagrammes de ladder comme en section 2.3.3, ce qui donne

$$I_I(S, D) = \int_0^\infty \iint |\bar{G}(M_1, S)|^2 |\bar{G}(D, M_2)|^2 L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt \quad (3.3)$$

Comme dans le cas dynamique, on fait l'hypothèse de champ lointain $ka \gg 1$ avec a la distance capteur-échantillon pour les fonctions de Green moyennes, ce qui permet d'obtenir

$$I_I(S, D) = \int_0^\infty \iint \frac{1}{64\pi k} \frac{1}{SM_1} \frac{1}{DM_2} e^{\frac{-z_1}{l_e \cos \theta_{1S}}} e^{\frac{-z_2}{l_e \cos \theta_{2D}}} K_r(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dt \quad (3.4)$$

En présence d'absorption, on multiplie l'intégrande de 3.4 par $\exp(-t/\tau_a)$ avec τ_a le temps caractéristique d'absorption, lié au libre parcours moyen d'absorption l_a par $\tau_a = l_a/c$.

- Avec l'*approximation n°1* : $a \gg l_e$, qui exprime que la distance a entre barrette et échantillon est très grande devant l'épaisseur de peau, on obtient l'expression intégrée de la relation 2.25

$$I_I(S, D) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \sum_m \frac{1}{m} \int \int \frac{f_m(\mu_1)}{\mu_1} \frac{f_m(\mu'_2)}{\mu'_2} \exp \left\{ \frac{-m\pi a}{B} \left| \tan \theta_1 - \tan \theta_2 - \frac{x_D}{a} \right| \right\} d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.5)$$

En présence d'absorption, on a

$$I_I(S, D) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \sum_m \int \int \frac{f_m(\mu_1)}{\mu_1} \frac{f_m(\mu'_2)}{\mu'_2} \frac{1}{\sqrt{A}} \exp \left(-\sqrt{A} |R| \right) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.6)$$

avec

$$A = \frac{m^2 \pi^2}{B^2} + \frac{1}{\tau_a D} \quad \text{et} \quad |R| = a \left| \tan \theta_1 - \tan \theta_2 - \frac{x_D}{a} \right|$$

- Avec l'*approximation n°2* qui suppose que S et D sont vus sous le même angle dans l'épaisseur de peau on a $\mu'_2 \approx \mu_2$. Comme dans le cas dynamique, cela revient à considérer que I_I est

indépendante de la position du détecteur, *i.e.* la ligne de base du cône est plate, et on obtient l'expression intégrée de la relation 2.26

$$I_I(S, D) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \sum_m \frac{1}{m} \int \int \frac{f_m(\mu_1)}{\mu_1} \frac{f_m(\mu_2)}{\mu_2} \exp \left\{ \frac{-m\pi a}{B} |\tan \theta_1 - \tan \theta_2| \right\} d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.7)$$

Expression de l'intensité cohérente

– Avec l'hypothèse de champ lointain, $ka \gg 1$, et l'*approximation n°1* ($a \gg l_e$) on a, avec les mêmes notations qu'à la section 2.3.4

$$I_C(S, D) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \int \int \frac{(\mu'_1 \mu'_2)^{1/2}}{(\mu_1 \mu'_2)^{3/2}} \cos \left\{ ka \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) \right\} \times \\ \sum_m f_m(\nu_1) f_m(\nu_2) \frac{1}{m} \exp \left(-\frac{m\pi}{B} |R| \right) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.8)$$

et dans le cas avec absorption, on a

$$I_C(S, D) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \int \int \frac{(\mu'_1 \mu'_2)^{1/2}}{(\mu_1 \mu'_2)^{3/2}} \cos \left\{ ka \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} \right) \right\} \times \\ \sum_m f_m(\nu_1) f_m(\nu_2) \frac{1}{\sqrt{A}} \exp \left(-\sqrt{A} |R| \right) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.9)$$

– Si on utilise l'*approximation n°2* on obtient

$$I_C(S, D) = \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \int \int \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \cos kx_D (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \times \\ \sum_m f_m(\mu_1) f_m(\mu_2) \exp \left(\frac{-m\pi}{B} a |\tan \theta_1 - \tan \theta_2| \right) d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.10)$$

- Si on utilise l'*approximation n°3* qui réduit l'intégrale double précédente à la diagonale $\theta_1 \approx \theta_2$, ce qui est d'autant plus valable que $a \gg B$, l'expression de I_C se réduit à

$$I_C(S, D) \propto \frac{1}{64\pi^2 k^2} \frac{B}{2D\pi} \int \sum_m \frac{f_m^2(\theta)}{K} d\theta \quad (3.11)$$

avec

$$K = \left(\frac{m\pi}{B}\right)^2 + \left(\frac{kx_D \cos^3(\theta)}{a}\right)^2$$

L'équation 3.11 est l'intégration sur le temps de la relation 2.31.

- Si on suppose de plus que l'on a $L \gg l_e$ et $B \gg z_0$, ce qui constitue l'*approximation n°4* alors on peut d'une part simplifier les expressions des termes $f_m(\theta)$ selon

$$f_m(\theta) = \frac{B}{\pi m} \frac{\cos \Psi + \alpha \sin \Psi}{1 + \alpha^2}$$

avec $\Psi = \frac{m\pi z_0}{B}$ et $\alpha = \frac{B}{m\pi l_e \mu}$ et d'autre part remplacer la somme modale discrète par une intégrale.

Cela conduit à exprimer l'intensité cohérente selon

$$I_C(S, D) \propto \int \frac{\mu^2}{(1 + \mu Q)^2} \left[\frac{1 + \mu Q - \exp(-2\tau_0)}{Q} \right] d\theta \quad (3.12)$$

avec

$$Q = \frac{kx_D l_e \mu^3}{a} \quad \text{et} \quad \tau_0 = \frac{\pi l^*}{4l_e}$$

Dans le cas $l^* = l_e$, une version plus simple de cette expression a été établie par B.A. Van Tiggelen et A. Tourin [38], avec les approximations successives que nous avons évoquées.

3.1.2.1 Validité des approximations

Pour étudier la validité des approximations, nous utilisons les résultats obtenus pour le cône dynamique. En effet, le cône stationnaire intègre l'énergie rétrodiffusée sur toute la durée du signal utile. En d'autres termes, il correspond à une somme de cônes dynamiques non normalisés. Les chemins les plus longs étant les plus diffusés et éventuellement absorbés par le milieu, on comprend que le cône stationnaire leur accorde une importance moindre (figure 3.1).

Ceci étant précisé, nous passons en revue les différentes approximations.

Tout d'abord les hypothèses de champ lointain $ka \gg 1$ et $a \gg l_e$. Elles sont clairement vérifiées vu que pour une expérience typique a vaut 160 mm, la longueur d'onde est inférieure à 1 mm et l_e est compris entre 3 mm et 10 mm.

Concernant l'intensité incohérente, on a vu en 2.3.5.1 que sa variation angulaire était de

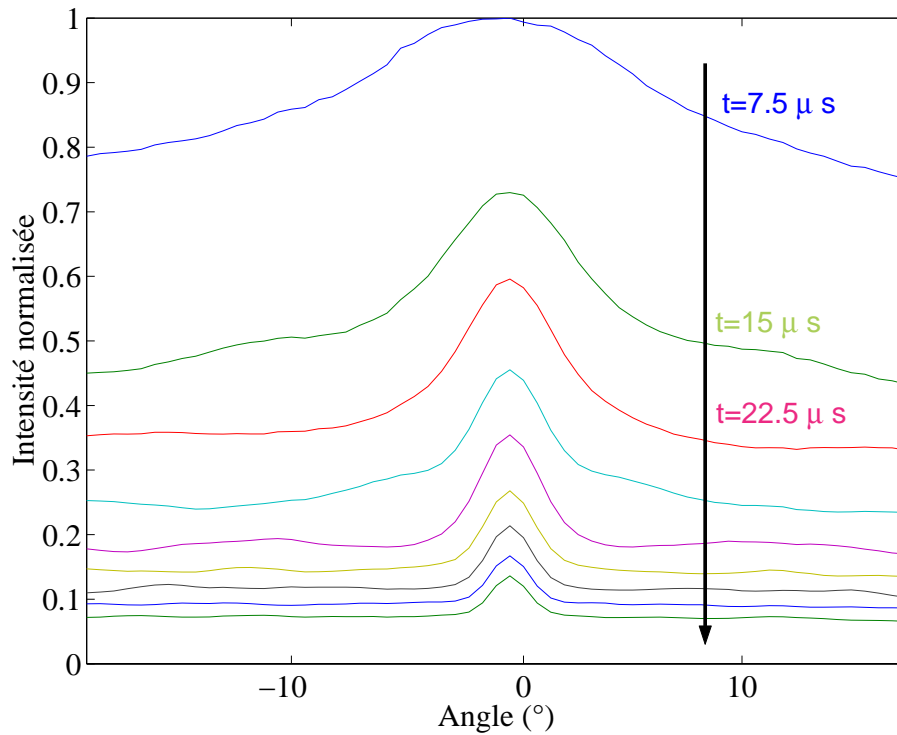


FIG. 3.1: Le cône stationnaire est une somme de cônes dynamiques non normalisés : on observe ici l'évolution de tels cônes pour des temps compris entre $7.5 \mu s$ et $75 \mu s$ par pas de $7.5 \mu s$, le temps augmentant dans le sens de la flèche noire. Les données sont relatives à l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm^2 et d'épaisseur $L = 40 \text{ mm}$, la fréquence centrale est 3.2 MHz . Sur ces courbes expérimentales, on constate que les premiers temps contribuent de manière prépondérante au cône stationnaire.

l'ordre de 1 % sur la longueur d'une barrette, pour des temps compris jusqu'à $2 \tau_{Th}$. La variation angulaire de la contribution incohérente au cône stationnaire est donc inférieure à 1 %, ce qui permet de valider l'*approximation n°2* pour ce terme : on pourra raisonnablement considérer qu'à l'échelle de ± 30 capteurs, le cône est assis sur un fond incohérent plat.

Pour I_C , l'*approximation n°2* présente une erreur moyenne de l'ordre de 0.01 % dans le cas dynamique, ce qui permet de la justifier ici.

L'*approximation n°3*, valable pour des temps $t \gg a^2/D$, donne lieu à des erreurs croissant avec le temps (section 2.3.5.2). Pour un échantillon d'épaisseur 80 mm l'erreur atteint par exemple 13 % à partir du temps $2\tau_{Th}$. Pour le cône stationnaire, les temps les plus longs ($> \tau_{Th}$) voyant leur poids décroître rapidement, l'écart moyen est négligeable.

Pour comparer théorie et expérience, nous utiliserons l'expression 3.11 car les hypothèses $L \gg l_e$ et $B \gg z_0$ (*approximation n°4*) ne sont pas toujours vérifiées pour nos conditions expérimentales. La formule 3.12 va néanmoins s'avérer utile pour se ramener aux études du cône menées antérieurement [2, 38, 71].

3.1.2.2 Allure du cône stationnaire

En figure 3.2, on a représenté le cône stationnaire mesuré expérimentalement avec l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm, de concentration 0.18 tige/mm² et d'épaisseur $L = 40$ mm à la fréquence centrale est 3.2 MHz. Le cône présente principalement deux zones :

- une zone centrale de surintensité dans l'intervalle $\pm 5^\circ$
- des paliers de variation plus douce pour l'intensité en dehors de la zone précédente : les *ailes* du cône

Le cône expérimental que nous traçons est normalisé par l'intensité rétrodiffusée à l'angle nul.

3.1.2.3 Lien entre la largeur du cône et l^*

L'objectif de cette section est d'obtenir une formule analytique de la largeur du cône en fonction des paramètres de transport et de comparer nos résultats à la littérature.

Cas des diffuseurs isotropes $l_e = l^$*

Dans ce cas, l'expression intégrale 3.12 évaluée numériquement donne pour la largeur du cône stationnaire à mi-hauteur :

$$\Delta x_D = \frac{1.08a}{kl^*} \quad (3.13)$$

Ce résultat a déjà été établi par A. Tourin et B.A. Van Tiggelen [2, 38, 71].

Pour des diffuseurs isotropes, la largeur du cône stationnaire est donc un moyen d'évaluation de l^* , dans le cadre des approximations nécessaires à l'utilisation de la formule 3.12¹.

¹ En plus des approximations 1 à 4, 3.12 ne prend pas en compte la directivité des capteurs, ni l'absorption du

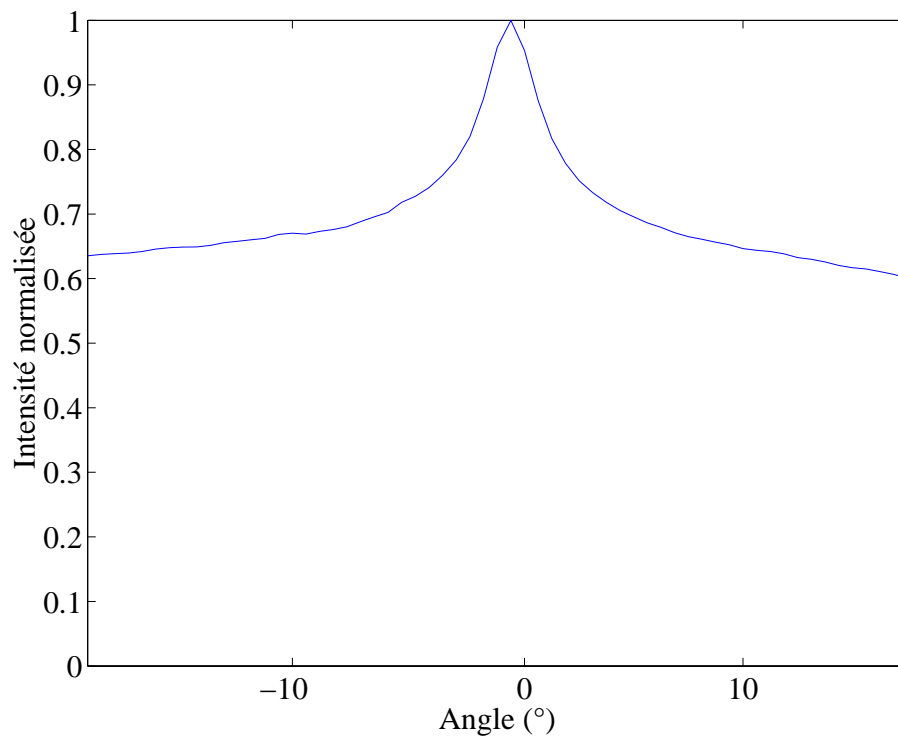


FIG. 3.2: Le cône stationnaire intègre l'énergie rétrodiffusée sur une fenêtre de temps égale à la durée utile du signal. Le cône présenté correspond à l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et de concentration 0.18 tige/mm^2 et d'épaisseur $L = 40 \text{ mm}$. La fréquence centrale est 3.2 MHz .

Cas des diffuseurs anisotropes $l_e \neq l^$*

On définit le rapport $R_\ell = \frac{l^*}{l_e} = \frac{1}{1 - \overline{c\cos\theta}}$.

Dans le cas limite de diffuseurs très anisotropes, $R_\ell \rightarrow \infty$. L'intégration numérique de 3.12 montre alors que la largeur du cône suit une loi semblable à la formule 3.13 à un coefficient près :

$$\Delta x_D = \frac{5}{3} \frac{a}{kl^*} \quad (3.14)$$

Pour de tels diffuseurs, le cône stationnaire reste donc un bon candidat à l'évaluation de l^* , avec toutefois les mêmes restrictions que dans le cas isotrope.

Dans nos conditions expérimentales, les deux libres parcours moyens l_e et l^* , s'ils ne sont pas égaux restent néanmoins du même ordre de grandeur. Si nous nous restreignons à un domaine de variation tel que $R_\ell \in [0.8 ; 5]$, le calcul numérique de 3.12 montre empiriquement que la largeur du cône à mi-hauteur vérifie une loi du type

$$\Delta x_D = \frac{a}{kl_{eq}} \quad (3.15)$$

avec $l_{eq} = \alpha l^* + \beta l_e$, un "libre parcours moyen hybride" mélangeant l^* et l_e .

Pour le domaine $R_\ell \in [0.8; 5]$ on obtient les valeurs $\alpha = 0.3$ et $\beta = 0.6$. La figure 3.3 représente le résultat du calcul numérique de $1/\Delta x_D$ en fonction de l^*/l_e (en bleu) et un ajustement linéaire de ce résultat (en rouge). On constate que α vaut plus du double de β : la largeur du cône stationnaire est donc deux fois plus sensible à une variation de l_e qu'à une variation de l^* . La formule 3.13 n'est donc pas applicable dans nos configurations expérimentales. Ce résultat est d'ores et déjà contrariant pour nous vu que le cône était a priori un bon candidat pour mesurer l^* selon la littérature. Dans la section suivante, nous étudions le cas plus général de la formule 3.11, qui, elle, s'applique à nos expériences.

3.1.2.4 Influence des paramètres l_e , l^* , L et l_a sur le cône stationnaire

Dans le tableau qui suit, nous utilisons la formule 3.11 pour étudier l'influence de l_e et l^* sur la largeur du cône stationnaire. L'épaisseur du milieu est de 80 mm.

On constate que la sensibilité de Δx_D à une variation de l^* de 50 % est de l'ordre de 15 % alors qu'une variation de l_e de 50 % entraîne à elle seule un écart de 20 % à 30 % : on retrouve ici encore que le cône stationnaire est plus sensible au libre parcours moyen élastique qu'au libre parcours moyen de transport.

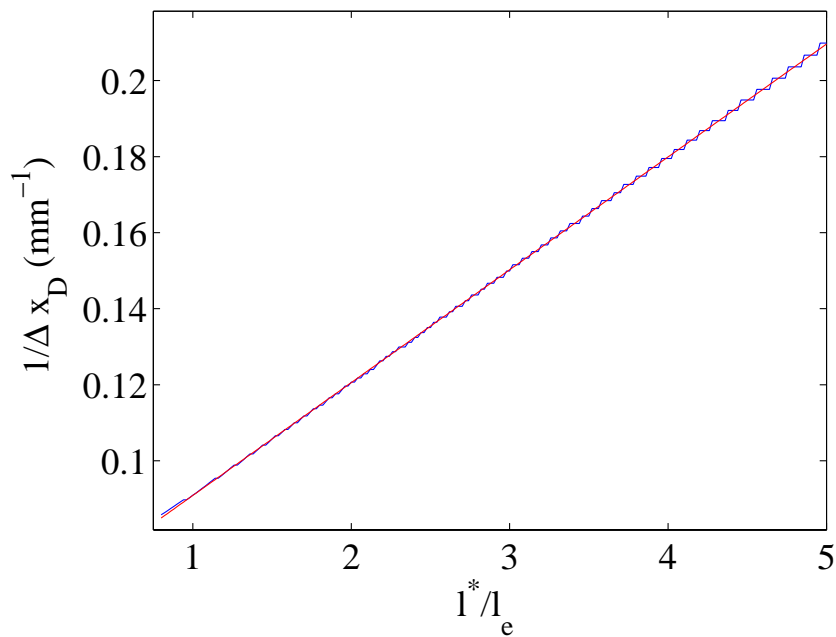


FIG. 3.3: Pour des diffuseurs dont l'anisotropie est telle que $R_\ell \in [0.8 ; 5]$, la largeur à mi-hauteur du cône stationnaire dépend à la fois de l^* et de l_e . La courbe bleue correspond au résultat du calcul numérique de $1/\Delta x_D$ en fonction de l^*/l_e , la courbe rouge est un ajustement linéaire de ce résultat. On trouve ici $1/\Delta x_D = k(0.3l^* + 0.6l_e)/a$ pour le jeu de paramètres $l_e = 5$ mm, $a = 160$ mm et la fréquence 2.8 MHz.

L (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Δx_D (mm)
80	5	6	3.27
80	5	3	3.86
80	5	9	2.85
80	2.5	6	4.44
80	7.5	6	2.67

Influence de l'épaisseur de l'échantillon

Pour une épaisseur $L = 40$ mm, le tableau suivant regroupe les valeurs de Δx_D pour les mêmes variations de l_e et l^* .

L (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Δx_D (mm)
40	5	6	3.92
40	5	3	4.63
40	5	9	3.38
40	2.5	6	5
40	7.5	6	3.4

Ce cas conduit à un cône plus large que le précédent. Selon les jeux de paramètres, cette diminution d'épaisseur de 50 % entraîne une augmentation de la largeur à mi-hauteur comprise entre 11 % et 25 %, ce qui n'est pas négligeable. L'épaisseur de l'échantillon doit donc impérativement être prise en compte, ce que ne fait pas la formule 3.13

La sensibilité à l^* reste semblable au cas de l'épaisseur 80 mm. Par contre, l'influence du libre parcours moyen élastique est plus faible ici : une variation de l_e de 50 % entraîne un écart sur Δx_D compris entre 15 % et 20 %. Cela signifie que le cône stationnaire est relativement plus sensible à l^* qu'à l_e aux faibles épaisseurs : c'est logique vu que le cône dépend de l^* par l'intermédiaire de la longueur d'extrapolation z_0 qui "compte" d'autant plus que l'épaisseur est faible.

Quid de l'absorption ?

On prend en compte les pertes avec un libre parcours moyen d'absorption l_a de 100 mm, soit l'ordre de grandeur typique dans nos expériences (cf. chapitre 2).

L (mm)	l_a (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Δx_D (mm)
80	100	5	6	5.21
80	100	5	3	6
80	100	5	9	4.6
80	100	2.5	6	6.4
80	100	7.5	6	4.59

Les contributions cohérentes et incohérentes du cône étant affectées dans les mêmes proportions par l'absorption, cette dernière ne modifie pas le rapport théorique de 2 entre le pic et la base. En revanche, l'absorption a pour effet d'augmenter la largeur du cône. En effet, les chemins les plus longs étant éteints du fait des pertes, le cône avec absorption accorde plus d'importance aux contributions de faible ordre de diffusion, ce qui se traduit par une plus grande largeur à mi-hauteur. Selon les jeux de paramètres l_e et l^* , Δx_D est augmentée de 36 % à 52 % par la présence d'absorption. Ne pas prendre en compte l'absorption dans nos expériences conduirait donc à une très mauvaise estimation de l^* .

D'autre part, l'influence de l_e et l^* n'est pratiquement pas modifiée par l'absorption avec nos ordres de grandeur. Il est clair à ce stade que Δx_D ne dépend pas seulement de l^* , mais de l_e , L , l_a et l^* , le rôle de ce dernier n'étant pas prépondérant.

Enfin nous n'avons pas encore étudié les effets de la directivité et de la diffusion simple, objets de la section suivante.

3.2 Expérience de rétrodiffusion en régime stationnaire

Dans cette partie, nous présentons l'approche expérimentale de la rétrodiffusion cohérente en régime stationnaire. Nous exposons tout d'abord le principe d'une expérience permettant d'obtenir un cône stationnaire puis analysons l'influence des paramètres expérimentaux sur le tracé du cône. Comme dans le cas dynamique, nous exposons successivement l'effet de la diffusion simple, de la directivité et des effets de bord. Nous présentons ensuite une comparaison des cônes théoriques et expérimentaux pour nos trois milieux de tiges.

3.2.1 Principe

Le principe d'une expérience de rétrodiffusion cohérente est présenté en figure 3.4. La démarche est exactement la même que dans le cas dynamique (section 2.4.1), à ceci près que l'on calcule l'énergie rétrodiffusée sur toute la durée du signal utile.

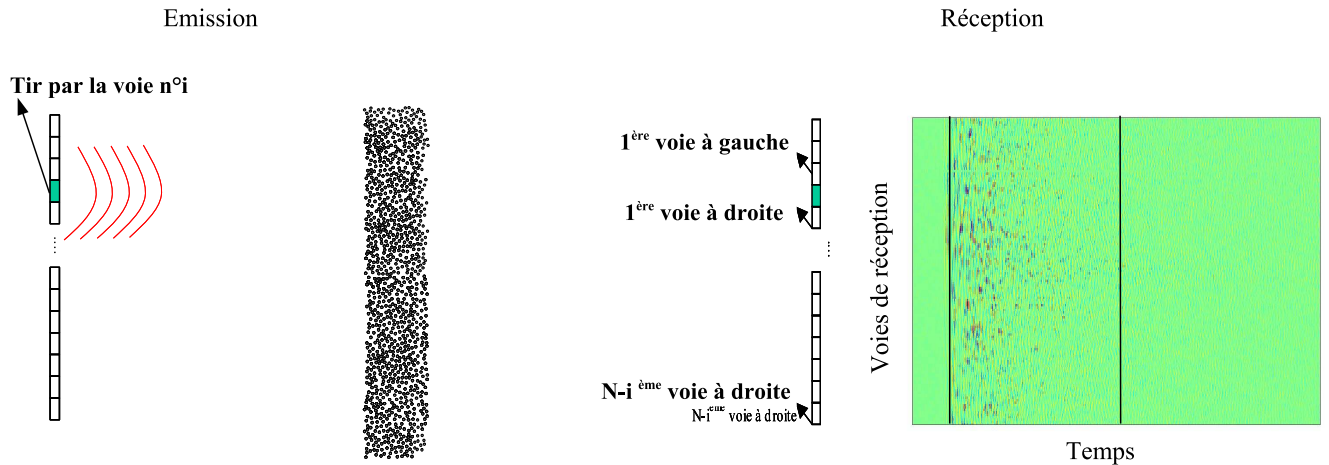


FIG. 3.4: Principe d'obtention du cône de rétrodiffusion stationnaire. Dans la phase d'émission, un signal est tiré par la voie n°i. Les signaux rétrodiffusés sont ensuite enregistrés sur toutes les voies, repérées angulairement par rapport à la voie n°i. On intègre le carré de l'amplitude reçue sur toute la durée du signal utile, *i.e.* avant que le signal ne soit noyé dans le bruit. Ce domaine est compris entre les deux traits noirs.

3.2.2 Influence des paramètres expérimentaux

3.2.2.1 Diffusion simple

Comme nous l'avons précisé en section 2.4.2.1, la diffusion simple ne peut être éliminée lors d'une expérience de rétrodiffusion acoustique. Dans le cas du cône dynamique, on a vu que la contribution de diffusion simple I_S impliquait de ne pas prendre en compte les premiers points de mesure.

Dans le cas du cône stationnaire, l'énergie rétrodiffusée est prise en compte sur toute la fenêtre de temps. Les contributions de diffusion simple sont donc expérimentalement prises en compte. Or la théorie que nous avons présentée ne fait pas intervenir de telles contributions puisque ses expressions découlent de l'approximation de la diffusion. Deux solutions s'offrent à nous pour traiter expérimentalement la diffusion simple.

Méthode du palier exponentiel

La première consiste à tenter de réduire l'influence de I_S sur les données expérimentales. Pour cela, on peut appliquer aux signaux rétrodiffusés une fenêtre exponentielle croissante $1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_s}\right)$, avec τ_s le temps caractéristique de décroissance de la diffusion simple. Au delà de quelques temps de décroissances (typiquement $3\tau_s$), on peut considérer que le signal rétrodiffusé est composé principalement de chemins de diffusion multiple. Dans l'intervalle compris entre 0 et $3\tau_s$, la fenêtre exponentielle permet de réduire l'importance des premières

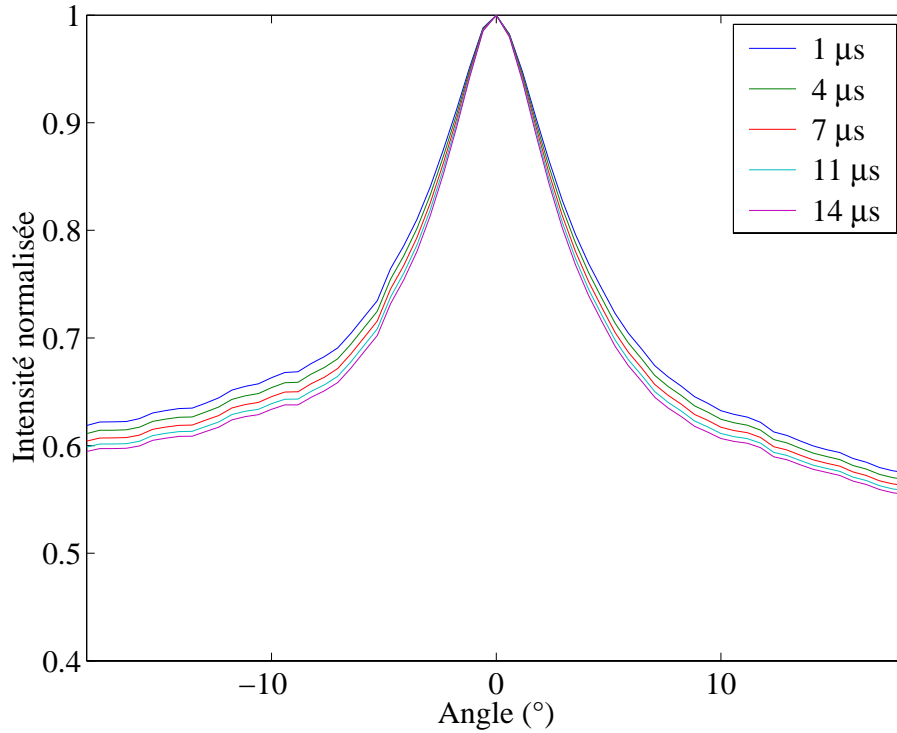


FIG. 3.5: Effet du palier exponentiel sur le cône stationnaire pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 80 mm à la fréquence 3.2 MHz . Le niveau du plateau diminue au fur et à mesure que τ_s augmente.

arrivées, sans pour autant les éliminer totalement.

Cette méthode présente un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, les signaux atténués par la fenêtre mêlent des contributions de diffusion simple et multiple, ainsi un tel traitement affecte l'intensité multiplement diffusée. De plus, il n'élimine pas l'effet de I_S mais l'atténue de manière qualitative.

L'effet de τ_s sur le cône expérimental est exposé en figure 1.78. On constate que le niveau du plateau diminue lorsque τ_s augmente, ce qui était attendu. Cependant, les comparaisons entre cônes stationnaires expérimentaux et théoriques (3.11) avec un double ajustement sur l^* et τ_S n'ont pas donné de résultats satisfaisants.

Méthode du coefficient de diffusion simple

La seconde méthode consiste à prendre en compte la diffusion simple dans la construction du cône théorique. Dans ce cas, le cône stationnaire $CS(\theta)$ est défini selon la formule

$$CS(\theta) = \frac{I_C(\theta) + I_I(\theta) + I_S(\theta)}{I_C(0) + I_I(0) + I_S(0)} \quad (3.16)$$

On choisit d'utiliser pour I_S les mêmes simplifications que pour l'intensité incohérente I_I : la contribution de diffusion simple est considérée constante angulairement : $I_S(\theta) = I_S(0)$. Dans ce cadre, la diffusion simple se traduit par le même effet que la contribution incohérente I_I : une élévation du niveau des ailes du cône. On quantifie donc I_S relativement à I_I par l'intermédiaire du *coefficient de diffusion simple* x , défini par

$$I_S = xI_I \quad (3.17)$$

x représente la proportion, dans le "plateau", d'énergie diffusée provenant d'événements de diffusion simple.

En insérant cette dernière relation dans 3.16, on obtient

$$CS(\theta) = \frac{I_C(\theta) + I_I(1+x)}{I_C(0) + I_I(1+x)} \quad (3.18)$$

Soit, en écrivant $I_C(0) = I_I$ et en normalisant I_I et I_C il vient

$$CS(\theta) = \frac{I_C(\theta) + 1 + x}{2 + x} \quad (3.19)$$

Sur la figure 3.6 on expose l'effet de la diffusion simple sur le tracé du cône stationnaire dans le cas d'un milieu de paramètres $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$ et $l_a = 100 \text{ mm}$ pour une épaisseur $L = 80 \text{ mm}$ et une fréquence de 3 MHz . Plus le coefficient x est élevé, plus le niveau de la base du cône remonte et s'éloigne de la valeur 0.5 issue de la théorie sans diffusion simple.

3.2.2.2 Directivité

Nous avons vu au chapitre II que la directivité des capteurs jouait un rôle important dans la largeur du pic. Pour le cône stationnaire, la directivité mesurée des transducteurs est insérée dans les expressions théoriques de la même manière que pour le cône dynamique. En figure 3.7 on a tracé les cônes stationnaires avec et sans prise en compte de la directivité dans le cas d'un milieu de paramètres $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$ et $l_a = 100 \text{ mm}$ pour une épaisseur $L = 80 \text{ mm}$ et une fréquence de 3 MHz . Le cône est calculé selon la formule 3.11. Rappelons que la directivité de nos transducteurs est modélisée par une fonction sinus cardinal correspondant à un capteur de 0.55 mm d'ouverture, comme dans le chapitre précédent.

La prise en compte de la directivité limitée de nos capteurs diminue la largeur à mi-hauteur de 40 %.

Effet de la directivité sur la dépendance du cône vis à vis des paramètres de transport

La largeur à mi-hauteur est évaluée en tenant compte de la directivité pour les mêmes jeux de paramètres que précédemment. On constate qu'une variation de l^* de 50 % entraîne un écart sur Δx_D compris entre 12 % et 16 %, ce qui est comparable aux valeurs obtenues sans

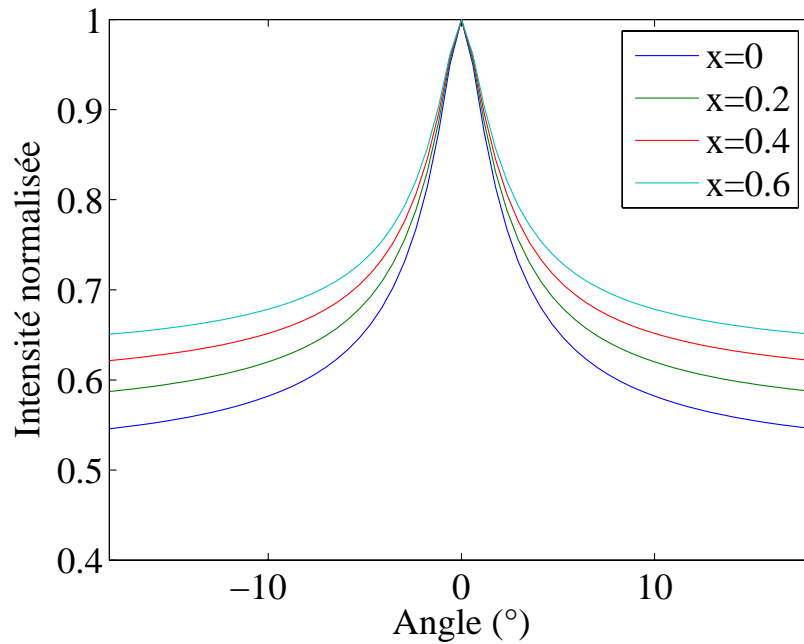


FIG. 3.6: Influence de la diffusion simple sur le cône stationnaire issu de l'expression 3.11 dans le cas d'un milieu de paramètres $l_e = 5 \text{ mm}$, $l^* = 6 \text{ mm}$ et $l_a = 100 \text{ mm}$ pour une épaisseur $L = 80 \text{ mm}$ et une fréquence de 3 MHz . La diffusion simple est quantifiée par le paramètre x . Plus x est élevé plus le niveau du palier s'éloigne de 0.5.

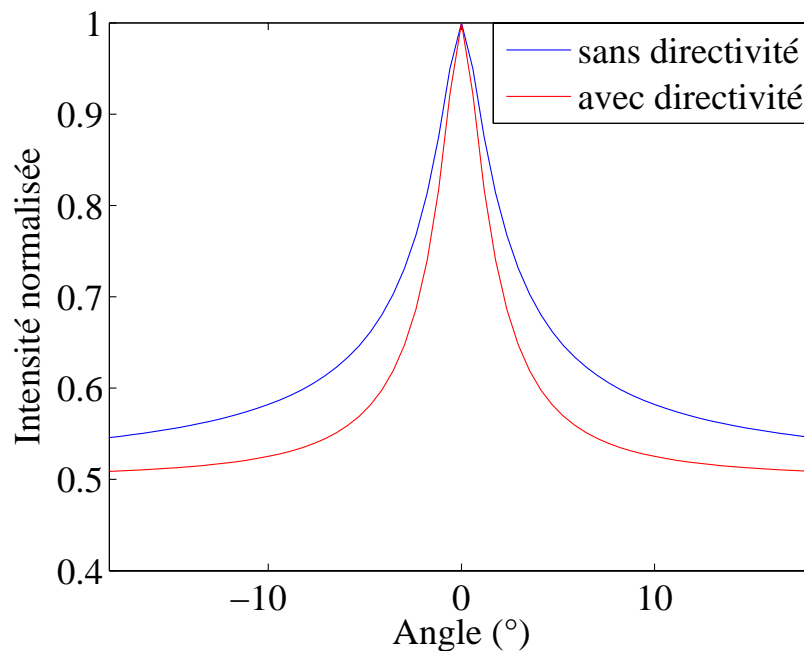


FIG. 3.7: Effet de la directivité sur le cône stationnaire, selon la formule 3.11 : les paramètres sont les mêmes qu'en figure 3.6. La directivité diminue la largeur à mi-hauteur de 40 % .

directivité. De même on constate que l'influence de l_e n'est pas modifiée en présence de directivité.

L (mm)	l_a (mm)	l_e (mm)	l^* (mm)	Δx_D (mm)
80	100	5	6	2.39
80	100	5	3	2.82
80	100	5	9	2.11
80	100	2.5	6	3.16
80	100	7.5	6	2

3.2.3 Influence du coefficient de diffusion simple x et de l^*

Dans le cas d'une tentative d'ajustement des cônes théoriques et expérimentaux à l'aide des deux paramètres x et l^* , il est instructif de comparer l'effet relatif de ces derniers sur l'écart entre théorie et expérience.

L'ajustement est réalisé en insérant dans la formule 3.11 les valeurs des paramètres mesurés jusqu'ici :

- l_e déterminé par l'étude du champ cohérent (premier chapitre)
- D évalué par le cône dynamique (second chapitre)
- τ_a mesuré par transmission incohérente (second chapitre)
- la directivité mesurée expérimentalement

On définit l'écart entre théorie et expérience par $\varphi = \sum |CS_{theo}(\theta) - CS_{exp}(\theta)|$. La somme est effectuée sur la plage angulaire de $\pm 10^\circ$ correspondant à la zone de mesure. Dans le cas de l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm, de concentration 0.29 tige/mm² et d'épaisseur 80 mm, nous exposons l'évolution de φ en fonction de $\{x, l^*\}$ en figure 3.8.

On constate que l'écart dépend principalement de x , une variation de l^* ne pouvant à elle seule minimiser φ . L'écart minimal est obtenue pour une valeur de x comprise entre 0.5 et 0.58. La zone dans laquelle le couple (x, l^*) donnent un ajustement correct est assez fine en x , mais large en l^* , ce qui confirme à nouveau que ce dernier paramètre ne peut être déterminé avec précision par la technique du cône stationnaire.

3.2.4 Comparaison des résultats entre échantillons de tiges

Initialement, le cône stationnaire était pressenti comme un outil permettant d'évaluer l^* par simple mesure de sa largeur à mi-hauteur. Cependant, notre étude a montré que la largeur du cône ne dépendait pas seulement de l^* : d'autres paramètres interviennent de manière directe et s'avèrent même bien plus influents que l^* . D'une manière plus générale, le cône stationnaire a la fâcheuse caractéristique de dépendre de tous les paramètres du problème : diffusion simple, absorption, directivité... et il s'avère illusoire de prétendre évaluer précisément l^* grâce à cet outil, en tout cas dans nos configurations expérimentales.

Nous nous proposons donc d'utiliser les données relatives au cône stationnaire avec un double

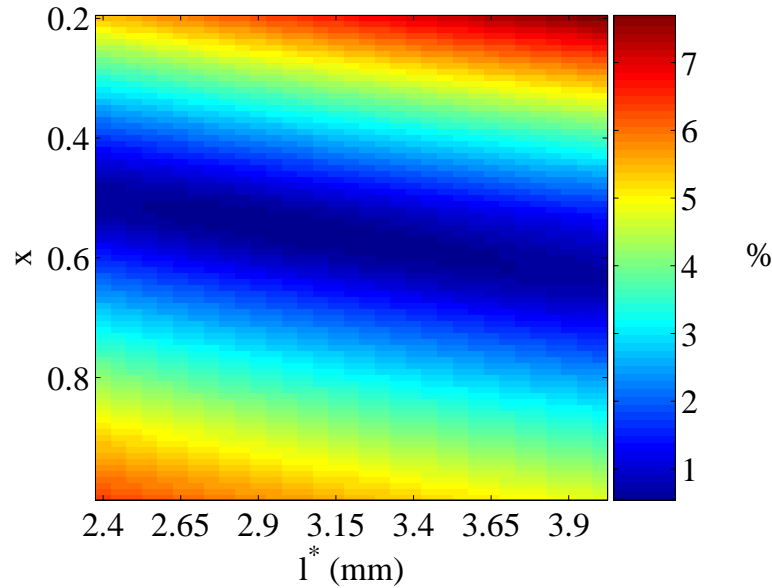


FIG. 3.8: Evolution de l'écart d'ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales en fonction du couple $\{x, l^*\}$, pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 80 mm . On constate que le paramètre x est prépondérant.

objectif moins ambitieux :

- vérifier la cohérence des valeurs expérimentales des autres paramètres de transport évalués jusqu'ici
- évaluer la contribution de la diffusion simple à l'aide du paramètre x

Pour ajuster le cône stationnaire théorique aux données expérimentales, nous utilisons les valeurs suivantes

- l_e déterminé par l'étude du champ cohérent (premier chapitre)
- D évalué par le cône dynamique (second chapitre)
- τ_a mesuré par transmission incohérente (second chapitre)
- l^* fixé à l'aide de l_e mesuré et du $\overline{c\omega s}$ calculé en section 1.6.2.2
- la directivité mesurée expérimentalement

Le paramètre d'ajustement est le coefficient de diffusion simple x .

Echantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et densité 0.29 tige/mm^2

Pour cet échantillon, on a reporté en figure 3.9 l'ajustement des données théoriques aux valeurs expérimentales pour les fréquences 2.8 MHz et 3.2 MHz . Pour la fréquence 2.8 MHz , le coefficient de diffusion simple x vaut 0.55 , ce qui signifie que I_S vaut plus de 50% de l'intensité incohérente I_I . La fréquence 3.2 MHz donne une valeur $x = 0.45$. La comparaison des valeurs de x à ces deux fréquences confirme les analyses faites dans les deux premiers cha-

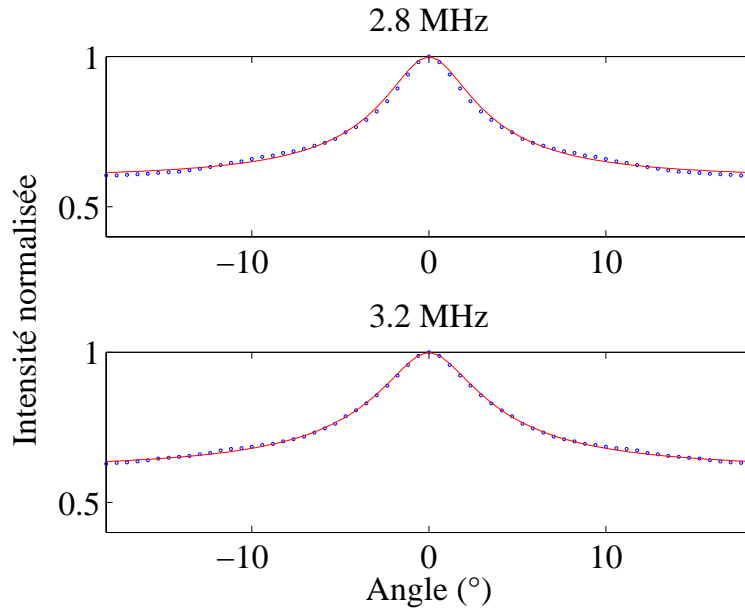


FIG. 3.9: Ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 80 mm . La courbe du haut correspond à la fréquence 2.8 MHz , l'ajustement obtenu permet de quantifier la diffusion simple :

$x = 0.55$. La courbe du bas correspond à 3.2 MHz , elle donne $x = 0.45$.

pitres : à la résonance, le milieu apparaît plus “transparent”, moins diffuseur, ce qui conduit à un coefficient x plus élevé qu'en dehors de la résonance.

D'autre part, on constate un très bon ajustement des courbes aux deux fréquences, ce qui permet de confirmer la cohérence des valeurs expérimentales obtenues jusqu'ici.

Echantillon de tiges de diamètre 0.8 mm et densité 0.12 tige/mm^2

Pour cet échantillon, on a reporté en figure 3.10 l'ajustement des données théoriques aux valeurs expérimentales pour les mêmes fréquences que l'échantillon précédent. Pour la fréquence 2.8 MHz , le coefficient de diffusion simple x vaut 0.85 , alors qu'on obtient $x = 0.62$ à 3.2 MHz . On retrouve que, relativement à la diffusion multiple, la diffusion simple est plus importante autour de la résonance des tiges. De plus, la comparaison des valeurs de x obtenues pour cet échantillon et le précédent montre que la diffusion simple est plus importante avec l'échantillon le moins dense, ce qui était attendu. On constate ici encore un très bon ajustement des courbes théoriques et expérimentales.

Echantillon de tiges de diamètre 0.6 mm et densité 0.18 tige/mm^2

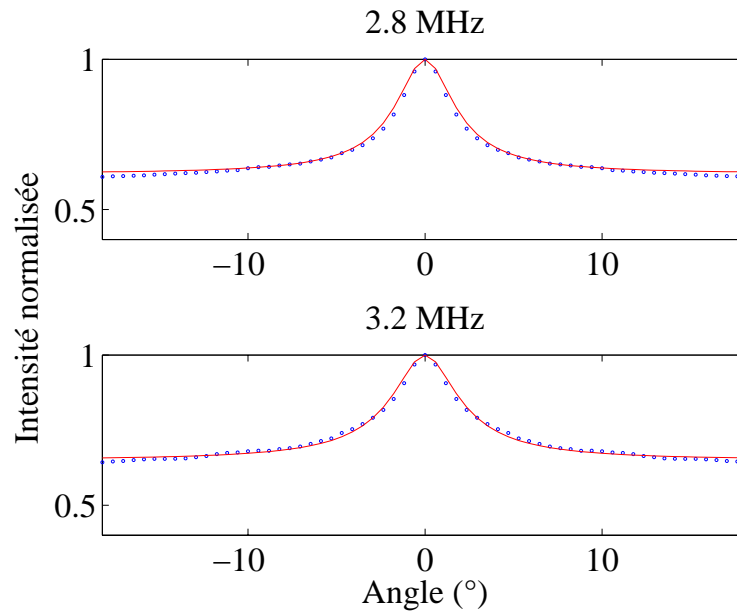


FIG. 3.10: Ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.12 tige/mm^2 et d'épaisseur 160 mm . La courbe du haut correspond à la fréquence 2.8 MHz , l'ajustement obtenu permet de quantifier la diffusion simple : $x = 0.85$. La courbe du bas correspond à 3.2 MHz , elle donne $x = 0.62$.

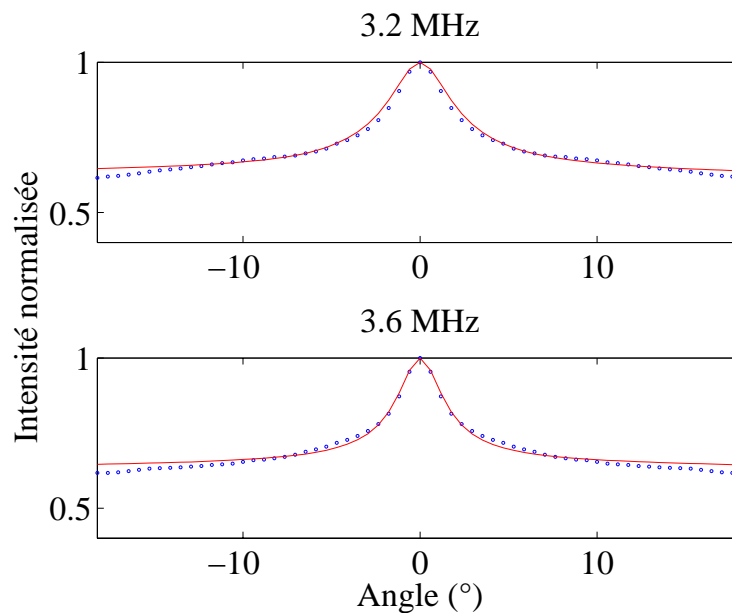


FIG. 3.11: Ajustement du cône stationnaire théorique aux valeurs expérimentales pour l'échantillon de tiges de diamètre 0.6 mm , de densité 0.18 tige/mm^2 et d'épaisseur 40 mm . La courbe du haut correspond à la fréquence 3.2 MHz , elle donne $x = 0.85$. La courbe du bas correspond à la fréquence 3.6 MHz , pour laquelle $x = 0.95$.

Pour cet échantillon, on a reporté en figure 3.11 l'ajustement des données théoriques aux valeurs expérimentales pour les fréquences 3.2 MHz et 3.6 MHz . Pour la fréquence 3.2 MHz , le coefficient de diffusion simple x vaut 0.85 , alors qu'on obtient $x = 0.95$ à 3.6 MHz , fréquence de résonance des tiges. Ici encore, la diffusion simple est plus importante autour de la résonance des tiges.

D'autre part cet échantillon donne lieu aux valeurs de diffusion simple les plus importantes relativement à la diffusion multiple, ce qui s'explique par le caractère moins diffuseur des tiges de ce diamètre.

3.3 Transmission en régime stationnaire et retournement temporel

La courbe des temps de vol a été étudiée au chapitre II. Elle peut être intégrée temporellement pour donner la valeur de l'énergie transmise.

En première approche, on peut lier le coefficient de transmission en énergie, T , à travers une épaisseur L au libre parcours moyen de transport l^* par une formule du type [2]

$$T(L) = \frac{l^*}{L} \quad (3.20)$$

Néanmoins, les relations liant T à l^* de manière si simple ne sont valables que dans des régimes où la diffusion est établie, et $L \gg l^*$. Cette formule peut être affinée en faisant intervenir la longueur d'extrapolation z_0 , le coefficient de réflexion d'interface, les pertes par absorption ainsi que l'onde cohérente [72].

$$T(L) = \frac{[1 + \frac{KL}{l^*}] - [1 + \frac{KL}{l^*} + \frac{L}{l^*}] e^{-L/l_e}}{[\frac{L}{l^*} + \frac{2KL}{l^*}]} g_1(\tau_a) \quad (3.21)$$

avec

$$g_1(\tau_a) = \frac{[\frac{L+2KL}{z_0+2KL}] [\sinh(z_0 T_a) + K L T_a \cosh(z_0 T_a)]}{[1 + K^2 L^2 T_a^2] \sinh(L T_a) + 2 K L T_a \cosh(L T_a)} \quad (3.22)$$

avec $T_a = \frac{1}{\sqrt{D\tau_a}}$ et $K = \frac{\pi l^*}{4L} \frac{1+R}{1-R}$, R étant le coefficient de réflexion à l'interface entre le milieu diffuseur et le milieu hôte.

Ce type de méthode présente plusieurs inconvénients pour déterminer l^* . Tout d'abord, il est nécessaire de disposer de points de mesure correspondant à des épaisseurs importantes pour être en régime diffusif. Or pour ces épaisseurs (typiquement au delà de $10 l^*$), l'amplitude du signal est faible et le bruit devient problématique et altère les mesures effectuées. Le nombre de points de mesures s'en trouve affecté, ainsi que la détermination de l^* .

Néanmoins, la dépendance fondamentale de l'intensité transmise en l^* et l_e , qui tous deux dépendent fortement de la fréquence, s'avère particulièrement importante pour le retournement temporel en milieu multiplement diffuseur.

3.3.1 Retournement temporel et diffusion multiple

3.3.1.1 Principe

Le principe général d'une expérience de retournement temporel est le suivant. Une impulsion est émise par un transducteur, traverse le milieu multiplement diffuseur. Le signal transmis est enregistré sur une barrette en mode réception. Sur chaque voie de cette dernière, on dispose d'une fonction temporelle $f(t)$. Le renversement temporel consiste simplement à considérer la fonction $f(-t)$. Les voies de la barrette émettent ce signal renversé $f(-t)$. En première approche, l'onde ainsi retournée temporellement vit à l'envers les événements de propagation dans le milieu et focalise sur la source initiale pour donner lieu à une impulsion semblable au

signal initialement émis.

Dans ce qui suit, nous reprenons la démarche de la référence [73].

Considérons une source qui émet un signal impulsionnel : la réponse de propagation du milieu est une onde aléatoire $h(t)$ et le signal recréé à sa source après retournement temporel, $s(t)$ peut être vu comme un estimateur de la fonction d'autocorrélation temporelle de $h(t)$ ² :

$$s(t) = h(t) \otimes h(-t) \quad (3.23)$$

en notant \otimes le produit de convolution.

Or on peut décomposer h selon

$$h(t) = \langle h(t) \rangle + n(t) \quad (3.24)$$

Le terme $\langle h(t) \rangle$ correspond à la réponse impulsionnelle cohérente et $n(t)$ est la contribution "incohérente" au signal. La moyenne de la relation 3.23 donne donc lieu à la relation

$$\langle s(t) \rangle = \langle h(t) \rangle \otimes \langle h(-t) \rangle + \langle n(t) \otimes n(-t) \rangle \quad (3.25)$$

Soit, dans le domaine de Fourier,

$$S(w) = |\langle H(w) \rangle|^2 + \langle |N(w)|^2 \rangle \quad (3.26)$$

Le premier terme correspond à l'énergie cohérente, dont la décroissance est exponentielle avec l'épaisseur traversée (cf. chapitre I). Le second terme, l'énergie incohérente, est prépondérant aux grandes épaisseurs et pour $L \gg l_e$, 3.25 devient

$$\langle s(t) \rangle = \langle n(t) \otimes n(-t) \rangle \quad (3.27)$$

soit

$$S(w) = \langle |N(w)|^2 \rangle = T \quad (3.28)$$

En prenant la transformée de Fourier de 3.27, on constate que le spectre de l'onde recréée par retournement temporel $S(w)$ est directement lié au coefficient de transmission de l'énergie diffuse. Or si celui-ci présente une dépendance fréquentielle marquée, le spectre du signal recréé par retournement temporel va être appauvri.

Or dans une expérience de retournement temporel, la richesse spectrale est *fondamentale* [10]. En effet, la qualité de focalisation temporelle augmente avec la quantité d'informations statistiquement indépendantes dans le signal transmis. L'indépendance statistique peut être spatiale (la multiplication de capteurs participant au retournement temporel améliorant la focalisation), ou de nature fréquentielle en mettant à profit la largeur de bande utilisée lors d'une expérience. La longueur de corrélation fréquentielle δw_c ³ diminuant comme $1/\tau_{Th}$, on pourrait croire qu'une augmentation de l'épaisseur de l'échantillon conduise irrémédiablement à

² Ce résultat découle du principe de réciprocité.

³ δw_c est l'écart en fréquence tel que le speckle transmis se décorele significativement.

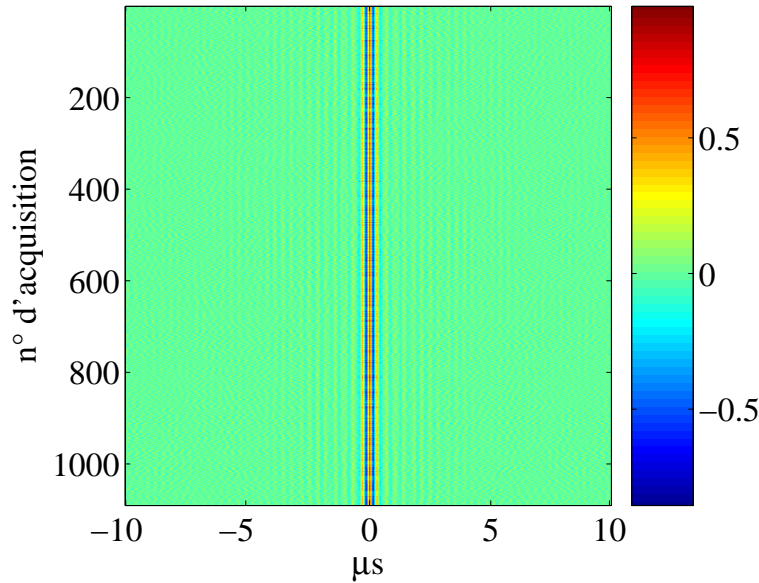


FIG. 3.12: Autocorrélations temporelles des signaux transmis à travers l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 25 mm . En ordonnée figure le n° de l'acquisition correspondante.

une amélioration de la focalisation. En réalité il n'en est rien, comme nous l'exposons par la suite.

3.3.1.2 Limites du retournement temporel

En présence de diffusion multiple résonante, le signal transmis est filtré fréquentiellement, ce qui conduit à un appauvrissement de la largeur de bande Δw . Si, dans un premier temps, l'augmentation de l'épaisseur conduit bien à une amélioration de la focalisation en $\sqrt{\Delta w/\delta w_c}$ [73], au delà d'une certaine limite, trop de diffusion finit par faire chuter Δw . Nous illustrons ce phénomène à l'aide de résultats expérimentaux.

Présentation de l'expérience

On dispose deux transducteurs piézoélectriques de part et d'autre de l'échantillon étudié, à une distance de 30 cm . L'un d'eux émet un signal de forme créneau sur une durée de 1.5 période à la fréquence centrale 3.2 MHz . L'autre enregistre le signal transmis. Selon les épaisseurs, le signal a été ou non amplifié en émission et réception. Le protocole est ensuite répété en translatant les deux transducteurs sur une 33×33 couples de positions.

Le traitement des données consiste à calculer l'autocorrélation de chaque signal transmis, ce qui est mathématiquement équivalent à un retournement temporel. En figure 3.12, on a représenté l'autocorrélation correspondant à chacune des acquisitions à travers l'échantillon

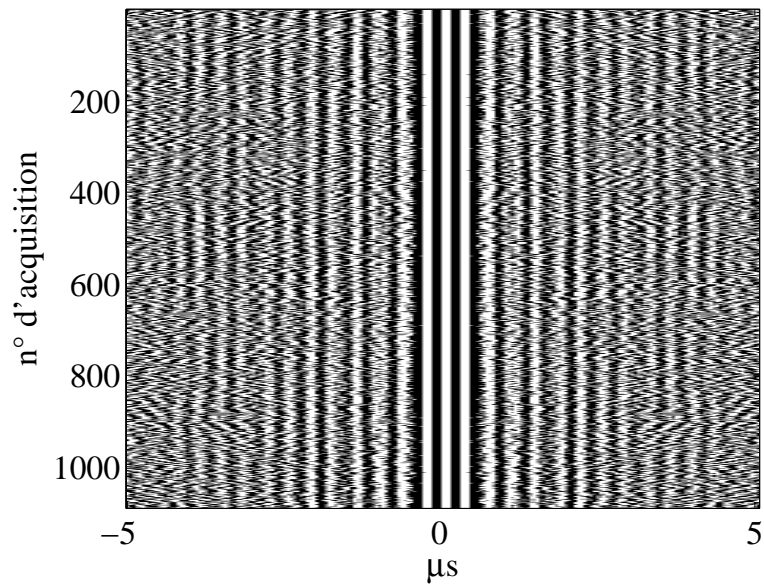


FIG. 3.13: Signe des autocorrélations temporelles des signaux transmis à travers le même échantillon qu'en figure 3.12, la couleur noire correspond au signe $-$, la blanche au signe $+$. Ce traitement permet de rendre plus visible les fronts secondaires.

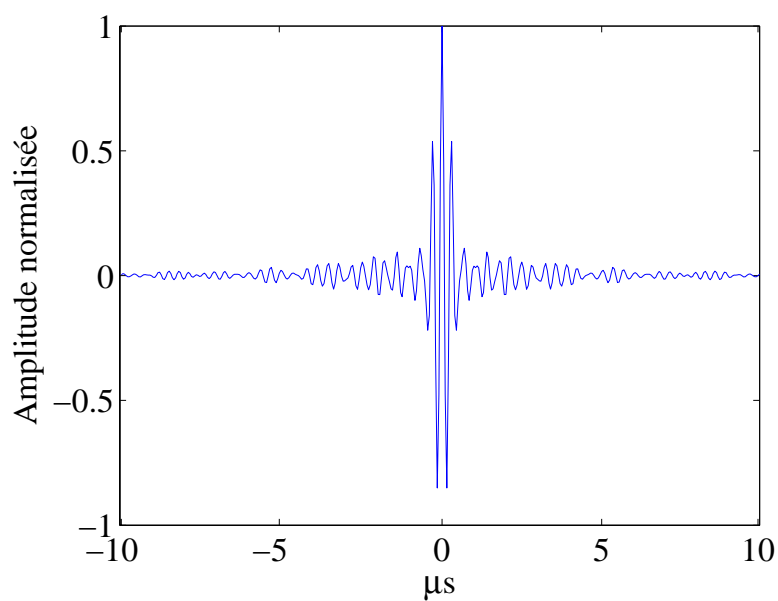


FIG. 3.14: Signal moyen obtenu par retournement temporel à travers l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 25 mm .

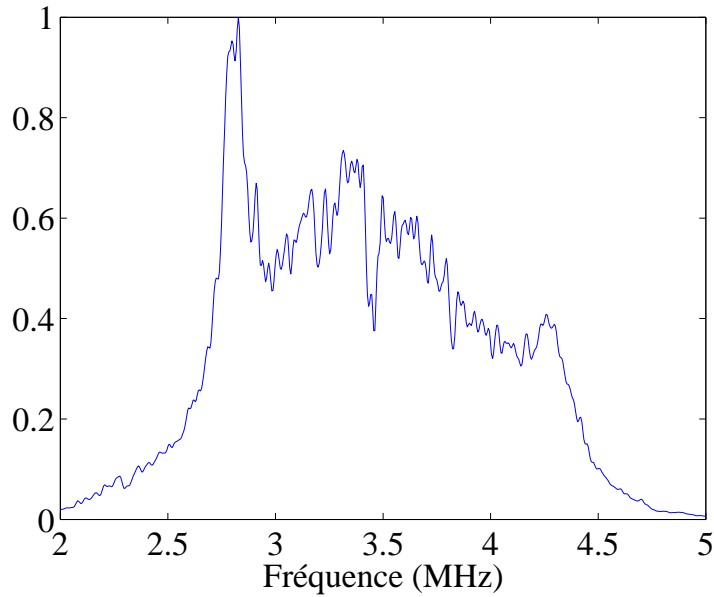


FIG. 3.15: Spectre du signal moyen obtenu par retournement temporel à travers l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 25 mm .

de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 25 mm (en figure 3.13, on a représenté le signe de cette fonction). Ces signaux sont ensuite moyennés sur le millier d'acquisitions effectuées, ce qui donne lieu à la figure 3.14. De part et d'autre du pic central, on remarque des pics secondaires qui limitent la qualité de focalisation temporelle. Dans le domaine fréquentiel (figure 3.15), la largeur de bande est de 2 MHz , et le spectre présente un maximum autour de 2.8 MHz , fréquence de résonance des diffuseurs.

Examinons les données relatives à un échantillon composé de diffuseurs du même type, avec la même densité mais dont l'épaisseur est triple : 75 mm . Le signal moyen recréé après retournement temporel est exposé en figure 3.16 : on constate que la focalisation temporelle est dégradée. Fréquentiellement (figure 3.17) on observe un filtrage important, avec un appauvrissement de la bande passante $\Delta\omega$ dont la contribution principale est réduite à la fréquence de résonance des tiges.

Outre l'effet de filtrage fréquentiel, un "excès" de diffusion multiple s'accompagne également d'une augmentation du rôle des corrélations entre chemins de diffusion. L'effet des corrélations est de diminuer l'indépendance statistique des contributions au signal retourné temporellement, ce qui affecte la qualité de focalisation temporelle et spatiale du retournement temporel. Ces conséquences de l'"ordre caché" dans le milieu ont été observées expérimentalement [73]. Dans le cas de nos échantillons à forte épaisseur, il semble que l'effet de filtrage résonant soit plus important : la seule fréquence qui prédomine provient de la résonance individuelle des tiges, non d'un facteur de structure collectif.

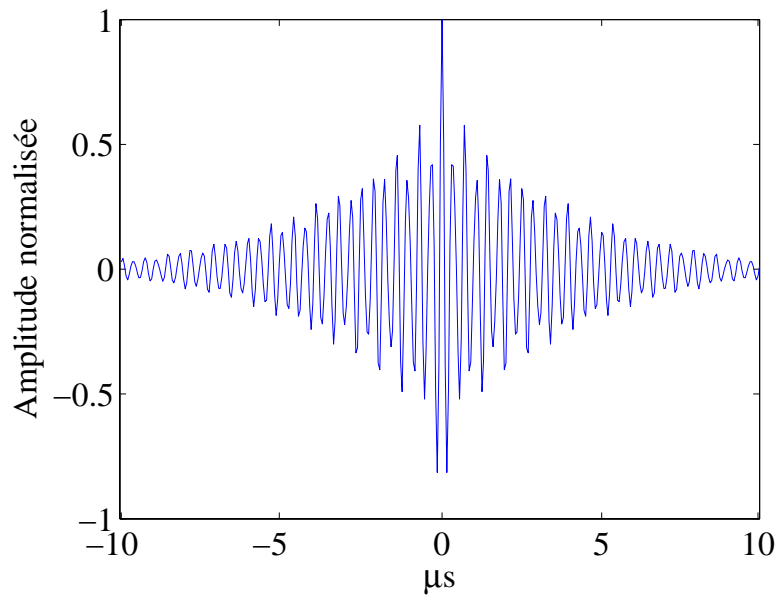


FIG. 3.16: Signal moyen obtenu par retournement temporel à travers l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 75 mm .

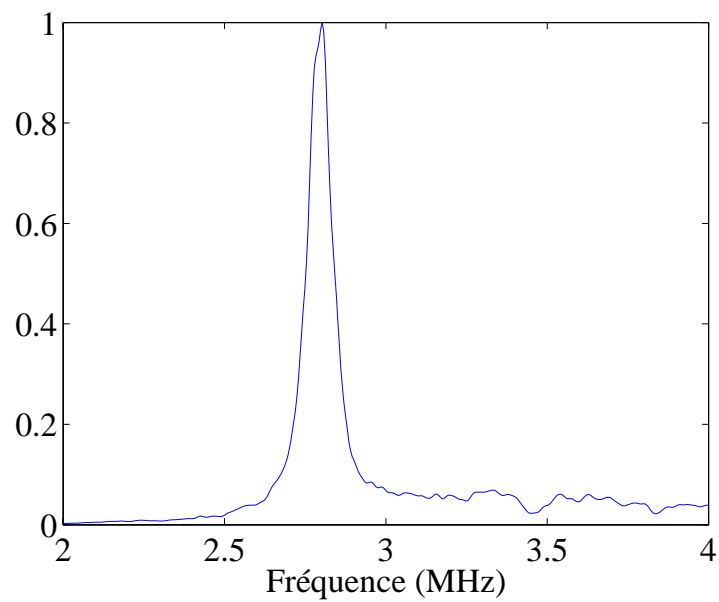


FIG. 3.17: Spectre du signal moyen obtenu par retournement temporel à travers l'échantillon de tiges de diamètre 0.8 mm , de densité 0.29 tige/mm^2 et d'épaisseur 75 mm .

Il est fondamental de maîtriser les effets de la diffusion multiple sur le retournement temporel, notamment dans les applications de cette technique aux sciences des télécommunications, qui tirent profit de la diffusion multiple pour obtenir de bonnes qualités de transmission d'informations numériques, comme l'ont montré notamment les recherches du *LOA* [74, 75, 76].

Chapitre 4

Conclusion

Lors de ce travail de thèse, nous avons étudié différentes techniques de détermination des paramètres de transport en diffusion multiple. Notre approche a consisté à traiter tant les aspects théoriques qu'expérimentaux afin de montrer les avantages et les limites de chaque technique.

Dans le premier chapitre, nous nous sommes intéressés au libre parcours moyen élastique l_e . Nous avons exposé comment ce paramètre pouvait prouver l'absence de diffusion multiple à l'aide d'expériences réalisées sur des échantillons d'alliages métalliques. Les expériences de transmission cohérente ont été menées sur trois types d'échantillons de tiges d'acier de caractéristiques différentes. Nous avons montré que le comportement individuel des tiges était à l'origine des valeurs distinctes de l_e selon les fréquences. A la fréquence de résonance d'une tige, le milieu tout entier apparaît moins diffusant.

Pour comparer les valeurs expérimentales à la théorie, nous avons utilisé dans un premier temps l'*ISA*. Cette théorie très simplifiée a donné lieu à un écart compris entre 1 % à 15 % selon les échantillons et les fréquences.

Le rôle de l'absorption à l'interface entre l'eau et les diffuseurs a été étudié, il s'est avéré négligeable.

Dans l'objectif d'affiner la théorie, nous avons comparé différents moyens pour prendre en compte les corrélations entre diffuseurs. Nous avons montré que seule la théorie de Keller, issue de l'approche diagrammatique, permettait de réduire sensiblement l'écart entre théorie et expérience.

La prise en compte de l'absorption et des corrélations entre diffuseurs est une contribution originale de ce travail de thèse à l'étude du champ cohérent.

Nous avons montré que les réponses de deux types de diffuseurs différents pouvaient être mises en évidence dans le cadre d'expériences sur des échantillons hybrides.

Dans le second chapitre, nous avons étudié la rétrodiffusion cohérente en régime dynamique. On ne peut faire d'imagerie au sens classique mais il est néanmoins essentiel de caractériser

les échantillons multiplement diffuseurs et de mettre au point des techniques fiables pour le faire. Le cône de rétrodiffusion cohérente, qui vient de la physique mésoscopique, apporte un outil original de ce point de vue. De premiers essais existaient [2] mais il restait à voir dans quelle mesure la rétrodiffusion cohérente pouvait être envisagée comme un véritable outil de caractérisation. Cette thèse apporte deux réponses, l'une dynamique, l'autre stationnaire.

Nous avons prouvé la robustesse de cette technique pour évaluer le coefficient de diffusion D du milieu en régime dynamique.

En effet, la détermination de D par cette technique n'est pas fondamentalement affectée par la diffusion simple et les corrélations entre diffuseurs.

L'insensibilité du cône dynamique à l'absorption intrinsèque du milieu a été vérifiée expérimentalement en comparant les résultats issus d'expériences dans l'huile et dans l'eau.

Nous avons insisté sur l'importance de la prise en compte des paramètres expérimentaux pour déterminer D car le cône s'avère très sensible à la directivité des transducteurs utilisés.

Nous avons pu déterminer les valeurs de D en fonction de la fréquence, et mettre en évidence une nouvelle fois le rôle des diffuseurs individuels. La présence de diffusion multiple a pu être mise en évidence pour la première fois sur un échantillon d'os trabéculaire grâce à l'utilisation conjointe des techniques de rétrodiffusion cohérente dynamique et de transmission cohérente.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la transmission incohérente en régime dynamique. L'étude de la partie décroissante de la courbe des temps de vol nous a permis de déterminer le libre parcours moyen d'absorption l_a du milieu.

Les étapes permettant de passer de l'équation de propagation à celle des transferts radiatifs puis à l'équation de la diffusion ont été exposées.

Dans un souci de clarté, nous avons comparé plusieurs approches théoriques pour résoudre l'équation de la diffusion. Les théories ont été adaptées à nos conditions expérimentales de champ lointain et nous avons obtenu des estimations de l_a avec des ajustements très précis des données expérimentales.

Le troisième chapitre, dédié principalement à la technique du cône de rétrodiffusion stationnaire, a montré que l'objectif de détermination du libre parcours moyen de transport l^* était hors d'atteinte dans nos conditions expérimentales. Nous avons tout d'abord montré que le cône stationnaire était plus sensible à l_e qu'à l^* . L'ajout des effets expérimentaux d'absorption, de diffusion simple et de directivité, conduit la technique du cône stationnaire à n'être qu'un moyen de quantifier la diffusion simple et de vérifier la cohérence des estimations de tous les paramètres de transport.

De la même manière, les données issues d'expérience de transmission incohérente stationnaire ne permettent pas de déterminer l^* .

Enfin, l'effet de la diffusion multiple sur le retournement temporel numérique a été étudiée. Nous avons montré qu'à mesure que le milieu diffuse plus, le filtrage résonant conduit à une perte de la qualité de focalisation. Les limites de la technique de retournement temporel ont

ainsi été mises en évidence dans ce cadre.

D'une manière générale, les résultats présentés dans cette thèse concernent toutes les applications des ultrasons pour lesquelles on cherche à caractériser un échantillon fortement diffusant. Cela peut concerner par exemple le contrôle non destructif des aciers à grains, des milieux granulaires, des mousses métalliques, la propagation dans les os, les milieux poreux et les suspensions denses ainsi que les télécommunications en milieux diffus etc...En spécifiant les limites des différentes techniques de caractérisation des milieux multiplement diffuseurs sur nos échantillons prototypes, nous avons pu par la même occasion orienter les prolongements futurs de ces travaux à des échantillons "réels" du même type que ceux cités ci-dessus. Nous avons par exemple montré qu'il serait vain d'estimer l^* sur de tels échantillons à partir du cône de rétrodiffusion cohérente stationnaire¹. Par contre, il serait intéressant, moyennant certaines adaptations, d'appliquer les techniques validées dans cette thèse (rétrodiffusion cohérente dynamique avec prise en compte de la directivité par exemple) pour caractériser ces milieux.

L'application systématique de notre approche à des échantillons "réels" nécessiterait notamment les adaptations suivantes :

- travailler avec un formalisme tridimensionnel, ce qui ne devrait pas entraîner de bouleversements théoriques mais alourdir les équations et les calculs numériques
- traiter les effets de bord éventuels à cause de la taille limitée des échantillons en pratique
- prendre en compte les réflexions spéculaires, dans le cadre de l'étude menée au chapitre II
- traiter les données en présence de forte absorption

Nos travaux sur les os ont montré, par l'étude du temps moyen de diffusion, qu'il était possible de quantifier la diffusion multiple dans un milieu "réel" par notre approche expérimentale. L'obtention d'un ordre de grandeur du libre parcours moyen et de l'importance respective entre diffusions simple et multiple est un résultat prometteur pour l'extension directe de nos travaux à des applications de caractérisations de milieux multiplement diffuseurs réels.

¹ Dont le tracé n'est par ailleurs pas nouveau sur de tels échantillons en acoustique, [2].

Annexe A

Evaluation de la directivité

A.0.2 Protocole expérimental

On utilise deux barrettes B_1 et B_2 de transducteurs piézoélectriques, de fréquence centrale 3.5 MHz , se faisant face à une distance de 10 cm . Les 64 premières voies de B_1 tirent successivement un signal enregistré par les 64 dernières voies de B_2 , les barrettes étant centrées par rapport à leurs voies actives. La barrette réceptrice se déplace par pas de 2 mm sur 12 cm de course, chaque position donnant lieu à une nouvelle séquence de tirs/réceptions par les deux barrettes.

Le signal tiré est un créneau, de fréquence centrale 3.2 MHz , sur 5 demi-périodes. Pour une voie de réception donnée, le dépouillement consiste à moyenner les directivités obtenues pour chaque voie de tir.

A.0.3 Etude en régime quasi-impulsionnel

Les données expérimentales sont approchées par une fonction sinus cardinal (figure A.1)

$$a(\theta) = \frac{\sin(\pi \tan(\theta)b/\lambda)}{(\pi \tan(\theta)b/\lambda)} \quad (\text{A.1})$$

avec $b = 0.55\text{ mm}$.

A.0.4 Etude en régime quasi-monochromatique

On travaille fréquemment sur des bandes de 0.2 MHz de large, comme dans les études fréquentielles réalisées dans cette thèse. Sur la figure A.2, on constate que l'ajustement est moins précis pour les fréquences extrêmes de la bande passante. L'écart moyen est de l'ordre de 7.5% entre les directivité expérimentale et théorique dans la bande $[2.5 - 3.5]\text{ MHz}$.

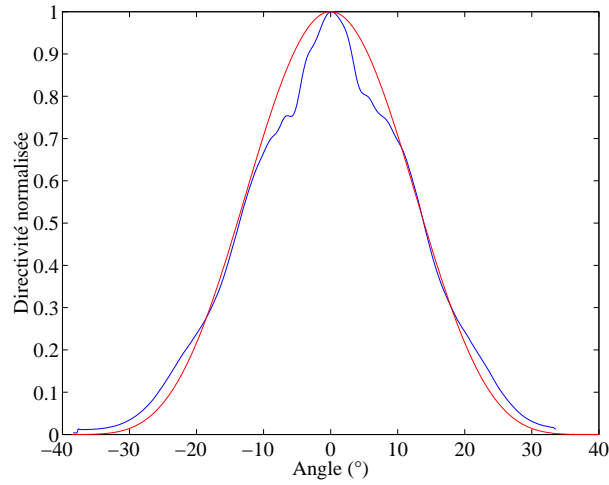


FIG. A.1: Directivité sur une expérience quasi-impulsionnelle à la fréquence centrale 3.2 MHz. Les données expérimentales sont approchées par $a^2(\theta)$ selon la formule A.1 une directivité théorique de type sinus cardinal.

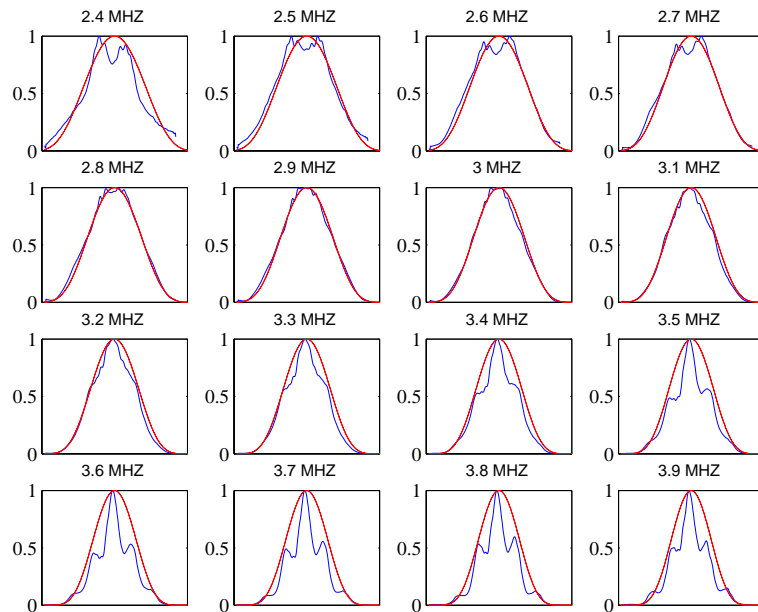


FIG. A.2: Directivité en régime fréquentiel. Les données expérimentales sont approchées par $a^2(\theta)$ selon la formule A.1 avec une directivité théorique de type sinus cardinal.

Annexe B

Modélisation de l'absorption

En section 1.7.6, on a vu que le système matriciel permettant de modéliser l'absorption est le suivant :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

avec

Les coefficients M_{ij} et B_i sont définis par les relations suivantes :

$$M_{11} = -k_1 a H_n^1(k_1 a) \quad (\text{B.2})$$

$$M_{12} = -1 w(k_L a) J_n(k_L a) \quad (\text{B.3})$$

$$M_{13} = i w n J_n(k_T a) \quad (\text{B.4})$$

$$M_{14} = n H_n^1(k_{fv} a) \quad (\text{B.5})$$

$$M_{21} = n H_n^1(k_1 a) \quad (\text{B.6})$$

$$M_{22} = i w n J_n(k_L a) \quad (\text{B.7})$$

$$M_{23} = -i w n k_T a J_n'(k_T a) \quad (\text{B.8})$$

$$M_{24} = -k_{fv} a H_n^1(k_{fv} a) \quad (\text{B.9})$$

$$M_{31} = (i w \rho_{eau} a^2 - 2 k_1^2 a^2 \mu_{eau}) H_n^1(k_1 a) - 2 \mu_{eau} k_1^2 a^2 H_n''(k_1 a) \quad (\text{B.10})$$

$$M_{32} = 2 \mu k_L^2 a^2 J_n''(k_L a) - (w^2 \rho a^2 - 2 \mu k_L^2 a^2) J_n(k_1 a) \quad (\text{B.11})$$

$$M_{33} = 2\mu n(J_n(k_T a) - k_T a J'_n(k_T a)) \quad (\text{B.12})$$

$$M_{34} = k_{fv} a H_n^{11}(k_{fv} a) - 2\mu_{eau} n H_n^1(k_{fv} a) \quad (\text{B.13})$$

$$M_{41} = 2\mu_{eau} n(k_1 a H_n^{11}(k_1 a) - H_n^1(k_1 a)) \quad (\text{B.14})$$

$$M_{42} = 2\mu(J_n(k_L a) - k_L a J'_n(k_L a)) \quad (\text{B.15})$$

$$M_{43} = \mu((k_T a)^2 J_n''(k_T a) - k_T a J'_n(k_T a) + n^2 J_n(k_T a)) \quad (\text{B.16})$$

$$M_{44} = -\mu_{eau}(k_{fv}^2 a^2 H_n^{11}(k_{fv} a) - k_{fv} a H_n^{11}(k_{fv} a) + n^2 H_n^1(k_{fv} a)) \quad (\text{B.17})$$

$$B_1 = k_1 a J'_n(k_1 a) \quad (\text{B.18})$$

$$B_2 = -n J_n(k_1 a) \quad (\text{B.19})$$

$$B_3 = 2\mu_{eau}(k_1 a)^2 J_n''(k_1 a) - (i\omega\rho_{eau} a^2 + 2k_1^2 a^2 \mu_{eau}) J_n(k_1 a) \quad (\text{B.20})$$

$$B_4 = 2\mu_{eau} n(J_n(k_1 a) - k_1 a J_n'(k_1 a)) \quad (\text{B.21})$$

La valeur du coefficient de viscosité de cisaillement dans l'eau est $\mu_{eau} = 10^{-3} \text{ kg/ms}$, dans l'huile ce terme est 15 fois plus élevé.

Les vitesses ont les valeurs suivantes : $c_L = 5.7 \text{ mm}/\mu\text{s}$, $c_T = 3 \text{ mm}/\mu\text{s}$, $c_1 = 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$.

Les masses volumiques de l'eau et de l'acier valent respectivement $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. Le second coefficient de Lamé de l'acier vaut $\mu = 7.02 \cdot 10^{10} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$. Les valeurs numériques sont issues de [16, 77]

Annexe C

Evaluation des erreurs d'interpolation

Dans le premier chapitre, nous avons évalué le libre parcours moyen d'extinction l_{ext} en utilisant une relation du type

$$\log \left(\frac{\langle \psi \rangle^2}{\langle \psi_0 \rangle^2} \right) = -\frac{L}{l_{ext}} \quad (C.1)$$

avec ψ et ψ_0 les champs transmis respectivement à travers une épaisseur L d'échantillon et dans l'eau.

Dans le deuxième chapitre, la constante de diffusion D a été déterminée par une formule du type

$$\left(\frac{k}{a\Gamma\Delta x_D} \right)^2 = Dt \quad (C.2)$$

De la même manière, l'évaluation du temps caractéristique d'absorption τ_a a nécessité de déterminer la pente τ_{tot} de la courbe des temps de vol en échelle logarithmique avec

$$\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_D} \quad (C.3)$$

Dans ces trois cas, l'évaluation de l'erreur sur le paramètre de transport mesuré se ramène à celle de la pente lors d'un ajustement linéaire. Dans ce qui suit, nous rappelons les principales étapes permettant de quantifier ces erreurs.

Considérons un ajustement linéaire, à deux paramètres β_0 et β_1 , permettant de lier les variables d'entrée X_i et de sortie Y_i d'une expérience indicée par i selon

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \quad (C.4)$$

Les variables X_i sont connues, elles représentent par exemple les épaisseurs dans le cas de l'estimation du libre parcours moyen élastique.

Les variables Y_i sont issues de l'expérience, ce sont des grandeurs aléatoires. Dans l'exemple précédent, elles représentent le logarithme du rapport entre l'énergie cohérente et celle transmise dans

l'eau.

Le terme ϵ_i est l'erreur relative à l'expérience i , supposée indépendante de celle correspondant à l'expérience j , lorsque $i \neq j$.

Ce cadre général étant posé, notre objectif est d'estimer la pente β_1 . Au sens des moindres carrés, le meilleur estimateur de cette quantité est $\hat{\beta}_1$ dont l'expression est

$$\hat{\beta}_1 = \sum_i \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{C.5})$$

et qui peut s'écrire

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + T \quad (\text{C.6})$$

avec T le terme d'erreur défini par

$$T = \sum_i \frac{(X_i - \bar{X})(\epsilon_i - \bar{\epsilon})}{(X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{C.7})$$

On a

$$\text{VAR}(\hat{\beta}_1) = \text{VAR}(T) \quad (\text{C.8})$$

On peut exprimer la variance de T selon

$$\text{VAR}(T) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} \quad (\text{C.9})$$

On note que la somme ne porte que sur les points de mesures indépendants résultant des expériences. Nous cherchons à estimer la variance de l'erreur σ_ϵ .

Pour cela, on utilise l'estimateur

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum_i (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \quad (\text{C.10})$$

Le dénominateur de l'expression C.9 se calcule simplement vu que la répartition des X_i est à pas constant dans nos expériences :

$$\sum_i (X_i - \bar{X})^2 = (\delta x)^2 \frac{n(n+1)(n-1)}{12} \quad (\text{C.11})$$

avec n le nombre d'abscisses indépendantes et δx l'écart entre deux abscisses indépendantes.

On peut ainsi évaluer l'écart type sur le paramètre de transport obtenu à l'issue d'un ajustement linéaire.

Précisons que dans le cas de l_e et τ_a , les abscisses X_i sont toujours indépendantes, ce qui n'est pas le cas pour D . Ces méthodes ont été appliquées pour déterminer les barres d'erreur associées à nos évaluations tout au long de ce manuscrit.

Bibliographie

- [1] J.P. Perez, rédacteur. *Optique, fondements et applications*. Masson, Paris, 1996.
- [2] Arnaud Tourin. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, Paris, 1999.
- [3] U. Frisch, rédacteur. *Wave Propagation In Random Media In Probabilistic Methods in Applied Mathematics, 1, 75-168*. A.T. Bharucha-Reid ed., Academic Press, New-York, 1968.
- [4] Stéphane Durant. *Propagation de la lumière en milieu aléatoire. Rôle de l'absorption, de la diffusion dépendante et du couplage surface-volume*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris - ECAM Paris, Paris, 2003.
- [5] Yu.A. Kravtsov S.M Rytov and V.I. Tatarskii, rédacteurs. *Principles Of Statistical Radiophysics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] E. Akkermans and G. Montambaux, rédacteurs. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. CNRS Editions, 2004.
- [7] J.J. Faran Jr. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 23(4), pp. 405, 1951.
- [8] R.D. Doolittle and H. Überall. Sound scattering by elastic cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 39(2), pp. 272, 1966.
- [9] N. Gespa. Acoustic scattering by elastic scatters with simple geometrical shape. *Cedocar, Paris*, 1987.
- [10] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Random multiple scattering of ultrasound. i. coherent and ballistic waves. *Physical Review E*, 64, pp. 036605–1–036605–7, 2001.
- [11] Keller J. Stochastic equation and wave propagation in random media. *Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering : Proc. Symposium Appl. Math., New-York*, pages 145–170, 1964.
- [12] Arnaud Derode. *Mémoire d'habilitation à diriger les recherches*. Habilitation à diriger les recherches, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 2001.
- [13] Wen H. Lin and A.C. Raptis. Thermoviscous effects on acoustic scattering by thermoelastic solid cylinders and spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(5), pp. 1542–1555, 1983.
- [14] G.C. Gaunaurd. High-frequency acoustic scattering from submerged cylindrical shells coated with viscoelastic absorbing layers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 502, pp. 503–512, 1977.

- [15] P.S. Epstein and R.R. Carhart. The absorption of sound in suspensions and emulsions i. water fog in air. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25, pp. 553–565, 1953.
- [16] J.R. Allegra and S.A. Hawley. Attenuation of sound in suspensions and emulsions : Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51, pp. 1545–1564, 1972.
- [17] A.E. Hay and R.W. Burling. On sound scattering and attenuation in suspensions with marine applications. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72, pp. 950–959, 1982.
- [18] J. K. Percus and G. J. Yevick. Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates. *Phys. Rev.*, 110, pp. 1–13, 1958.
- [19] S. Fraden and G. Maret. Multiple light scattering from concentrated, interacting suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 65, pp. 512–515, 1990.
- [20] P.M. Saulnier, M.P. Zinkin, and G.H. Watson. Scatterer correlation effects on photon transport in dense random media. *Phys. Rev. B*, 42(4), pp. 2621–2623, 1990.
- [21] V.P. Dick and A.P. Ivanov. Extinction of light in dispersive media with high particle concentrations : Applicability limits of the interference approximation. *J. Opt. Soc. Am.*, 16(5), pp. 1034–1039, 1999.
- [22] L. Foldy. The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.*, 67(3), pp. 107–119, 1945.
- [23] M. Lax. Multiple scattering of waves. ii. the effective field in dense systems. *Phys. Rev.*, 85, pp. 621–629, 1952.
- [24] P.C. Waterman and R. Truell. Multiple scattering of waves. *J. Math. Phys.*, 2(4), pp. 512–537, 1961.
- [25] L. Foldy. Propagation of sound through a liquid containing bubbles. *OSRD Report No.6.1-sr1130-1378*, 1944.
- [26] A. Ishimaru. Wave propagation and scattering in random media. *Academic Press, New-York*, 1978.
- [27] Sebastien Robert. *Propagation d'Ondes Cohérentes et Résonances dans des Milieux Elastiques Présentant des Inclusions Cylindriques Périodiquement ou aléatoirement Distribuées*. Thèse de doctorat, Université du Havre, Le Havre, 2004.
- [28] R. West, D. Gibbs, L. Tsang, and A.K. Fund. Comparaison of optical scattering experiment and the quasi-cristalline approximation for dense media. *J. Opt. Soc. Am*, A11, pp. 1854–1858, 1994.
- [29] V.N. Bringi and V.V. Varadan. Coherent wave attenuation by a random distribution of particles. *Radio Sci.*, 17, pp. 946–952, 1982.
- [30] A. Ishimaru and Y. Kuga. Attenuation constant of a coherent field in a dense distribution of particles. *J. Opt. Soc. Am*, 72, pp. 1317–1320, 1982.
- [31] P. Lloyd and M.V. Berry. Wave propagation through an assembly of spheres iv. relations between different multiple scattering theories. *Proc. Phys. Soc. London*, 91, pp. 678–688, 1967.

- [32] C.M. Linton and P.A. Martin. Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : second-order corrections for the effective wavenumber. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117, pp. 3413, 2005.
- [33] P.E. Wolf and G. Maret. *Phys. Rev. Lett.*, 55, pp. 2696, 1985.
- [34] M.P. Van Albada and A. Lagendijk. *Phys. Rev. Lett.*, 55(24), pp. 2692, 1985.
- [35] L. Margerin, M. Campillo, and B.A. Van Tiggelen. *Geophys. J. Int.*, 145, pp. 193, 2001.
- [36] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, and T.V. Ramakrishman. Scaling theory of localisation : absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 42, pp. 673, 1979.
- [37] P. Wölfle and R.N. Bhatt. Electron localization in anisotropic systems. *Phys. Rev. B*, 30, pp. 3452, 1984.
- [38] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B.A. Van Tiggelen, and M. Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 79, pp. 3637–3639, 1997.
- [39] P.W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 109, pp. 1492, 1958.
- [40] E. Akkermans and R. Maynard. Weak localization of waves. *J. Phys. Lett. (France)*, 46, pp. L-1045, 1985.
- [41] L.D Landau et E.M Lifshitz, rédacteur. *Quantum Mechanics*. Pergamon, Wien - New York, 1977.
- [42] B.A Van Tiggelen and R. Maynard, rédacteurs. *Reciprocity and coherent backscattering of light dans Wave propagation in complex media*. G. Papanicolaou ed., IMA, Springer, Paris, 1997.
- [43] A. Messiah, rédacteur. *Mécanique quantique, tome 2*. Dunod, Paris, 1995.
- [44] J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, P. Roux, and M. Fink. Weak localization and time reversal of ultrasound in a rotational flow. *Phys. Rev. Lett.*, 2005.
- [45] B.A. Van Tiggelen. Calcul du cône de rétrodiffusion cohérente en 2d. *Communication privée*, 1997.
- [46] L. Tsang and A. Ishimaru. Backscattering enhancement of random discrete scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, (A1), pp. 836, 1984.
- [47] L. Tsang and A. Ishimaru. Theory of backscattering enhancement of random discrete isotropic scatterers based on the summation of all ladder and cyclical diagrams. *J. Acoust. Soc. Am.*, (A2), pp. 1331, 1985.
- [48] L. Tsang and A. Ishimaru. Radiative wave and cyclical transfert equations for dense nontenuous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2(12), pp. 2187–2193, 1985.
- [49] D. Hans. *Lancet*, 348, pp. 9026, 1996.
- [50] K.A. Wear and D.W. Armstrong. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110, pp. 573, 2001.

- [51] C. Roux, V. Roberjot, R. Porcher, S. Kolta, M. Douganos, and P. Laugier. *J. Bone Miner Res.*, 16, pp. 1353, 2001.
- [52] K.A. Wear. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106, pp. 3659, 1999.
- [53] F. Padilla, F. Peyrin, and P. Laugier. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113, pp. 1122, 2003.
- [54] F. Jenson, F. Padilla, and P. Laugier. *Ultrasound Med Biol*, 29, pp. 455, 2003.
- [55] E. Larose, L. Margerin, B.A. Van Tiggelen, and M. Campillo. *Phys. Rev. Lett.*, 93(4), pp. 048501, 2001.
- [56] L. Tsang and J. Kong. Scattering of electromagnetic waves. *vol. III, Advanced Topics, Wiley Series*, 2001.
- [57] Finkel’berg. Wave propagation in a random medium. the correlation group method. *Soviet Physics JETP*, 26, pp. 268–277, 1968.
- [58] A. Lagendijk and B.A. van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Phys. Rep.*, 270(143), 1996.
- [59] C. Henkel. Transfert radiatif et transport d’atomes. *Stage post-doctoral, Ecole Centrale Paris, Laboratoire EM²C*, 1997.
- [60] Chandrasekhar S., rédacteur. *Radiative Transfer*. Dover, New-York, 1960.
- [61] Schwarzschild K. Über das gleichgewicht der sonnenatmosphäre. *Göttingen Nachrichten*, 41, pp. 1–24, 1906.
- [62] M. Case et P. Zweifel, rédacteur. *Linear transport theory*. Addison Wesley, New-York, 1967.
- [63] H.C. Van de Hulst. Light scattering by small particles. *Dover, New-York*, 1981.
- [64] E. Amic, J.M. Luck, and Th. Nieuwenhuizen. Anisotropic multiple scattering in diffusive media. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 29, pp. 4915–4955, 1996.
- [65] J.H. Page, H.P. Schriemer, A.E. Bailey, and D.A. Weitz. Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound. *Physical Review E*, 52(3), pp. 3106, 1995.
- [66] J.X. Zhu, D.J. Pine, and D.A. Weitz. Internal reflection of diffusive light in random media. *Physical Review A*, 44(6), pp. 3948, 1991.
- [67] M.N. Ozisik. Heat conduction. *2nd Ed., John Wiley and Sons*, 1993.
- [68] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger, rédacteurs. *Conduction of heat in solids*. Clarendon, Oxford, 1990.
- [69] Th. Nieuwenhuizen and J.M. Luck. Skin layer of diffusive media. *Physical Review E*, 48(1), pp. 569–587, 1993.
- [70] S. Glasstone and A. Sesonske, rédacteurs. *Nuclear Reactor Engineering, Vol. I, IV Edition*. Chapman Hill, Inc., 1994.
- [71] A. Tourin, A. Derode, A. Peyre, and M. Fink. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(2), pp. 503–512, 2000.

- [72] M.U Vera and D.J. Durian. Angular distribution of diffusely transmitted light. *Phys. Rev. E*, 53(1), pp. 3215–3224, 1996.
- [73] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Random multiple scattering of sound. ii. is time reversal a self-averaging process? *Phys. Rev. E*, 64(3), 2001.
- [74] A. Derode, A. Tourin, J. de Rosny, M. Tanter, S. Yon, and M. Fink. Taking advantage of multiple scattering to communicate with time-reversal antennas. *Phys. Rev. Lett.*, 90(1), 2003.
- [75] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, and M. Fink. Time-reversal of electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 2004.
- [76] G. Lerosey, G. Montaldo, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, and M. Fink. Ultra wide band time reversal applied to miso and miso-mu communications in multipath environments. *accepté à Radio Science*, 2005.
- [77] *Handbook of Chemistry and Physics, 77th edn.* CRC, New-York, 1996.

Résumé :

Dans cette thèse, nous avons étudié divers aspects de la diffusion multiple des ultrasons dans les milieux désordonnés. Expérimentalement, nous avons travaillé sur des milieux prototypes composés de milliers de tiges d'acier verticales aléatoirement réparties dans le plan, ainsi que sur des échantillons "réels" comme des os trabéculaires et des alliages métalliques utilisés dans l'industrie. Dans le premier chapitre, nous exposons la théorie des milieux effectifs et menons des expériences de transmission cohérente. La prise en compte de l'absorption et des corrélations entre diffuseurs est discutée en comparant plusieurs approches théoriques. *In fine*, nous obtenons une évaluation fréquentielle du libre parcours moyen élastique. Le second chapitre s'intéresse à l'intensité multiple diffusée en régime dynamique. Nous montrons tout d'abord que l'effet de rétrodiffusion cohérente permet de mesurer le coefficient de diffusion D de manière fiable et indépendante de l'absorption intrinsèque. Dans un second temps, l'étude de la courbe des temps de vol en transmission nous permet d'évaluer les pertes par absorption. Le troisième chapitre traite du régime stationnaire : nous montrons que dans ce régime, l'effet de rétrodiffusion cohérente ne permet pas d'évaluer le libre parcours moyen de transport dans nos conditions expérimentales. Enfin, les limites de la focalisation par retournement temporel en milieu multiplement diffuseur sont abordées.

Mots clés : diffusion multiple, ultrasons, milieux hétérogènes, milieu effectif, corrélations, approximation de la diffusion, rétrodiffusion cohérente.

Abstract :

In this thesis, we studied various aspects of ultrasonic multiple scattering in random media. Experimentally, we worked on prototype media made up of thousands vertical steel stems randomly distributed in the plane, as well as "real" samples like trabecular bones and metal alloys used in industry. In the first chapter, we present the effective media theory and undertake experiments of coherent transmission. The effect of absorption and correlations between scatterers is discussed by comparing several theoretical approaches. *In fine*, we obtain an evaluation of the elastic mean free path versus frequency. The second chapter deals with the time-resolved multiply scattered intensity. First of all, we show that the coherent backscattering effect allows to measure the diffusion coefficient D in a reliable way and independently from intrinsic absorption. Secondly, the time of flight distribution in transmission enables us to evaluate the absorption losses. The third chapter is devoted to the stationary regime : we show that the transport mean free path cannot be evaluated by the coherent backscattering effect under our experimental conditions. Lastly, the limits of time reversal focusing in resonant multiple scattering media is discussed.

Key words : multiple scattering, ultrasound, heterogeneous media, effective media, correlations, diffusion approximation, coherent backscattering.