INEGALITES DE MARKOV SINGULIERES ET APPROXIMATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE LA CLASSE M

Laurent Gendre

N° d'ordre :

THÈSE

présentée en vu de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

LAURENT GENDRE

INÉGALITÉS DE MARKOV SINGULIÈRES ET APPROXIMATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE LA CLASSE M

Soutenue le 2 juin 2005 devant le Jury composé de :

T.Bloom	Professeur, Université de Toronto	Rapporteur
A.Cumenge	Professeur, Université Toulouse III	Examinateur
T.V.Nguyen	Professeur, Université Toulouse III	Examinateur
W.Pleśniak	Professeur, Université de Cracovie	Rapporteur
V.Thilliez	Professeur, Université Lille I	Rapporteur
A.Zeriahi	Professeur, Université Toulouse III	Directeur

Laboratoire E.Picard,UMR 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier

118 route de Narbonne 31062 TOULOUSE CEDEX 04 FRANCE

À Anael, Laela et Isabelle

à ma mère.

Résumé

Dans la première partie, nous démontrons des inégalités de Markov pour les courbes algébriques singulières de $\mathbb{R}^N$. Nous donnons une signification géométrique à l'exposant de Markov en montrant qu'il est relié à la multiplicité de la singularité de la courbe complexifiée dans $\mathbb{C}^N$ via une paramétrisation de Puiseux en la singularité réelle de la courbe complexifiée.

Dans la deuxième partie, nous démontrons un théorème d'approximation de type Bernstein pour les classes de fonctions holomorphes de type Carleman intermédiaires entre les fonctions holomorphes et les fonctions indéfiniment différentiables sur des classes de compacts de $\mathbb{C}^N$ vérifiant une condition géométrique convenable liée à la fonction de Green. Pour démontrer ce résultat, nous donnons une représentation intégrale sur les compacts s-H convexes de $\mathbb{C}^N$ des fonctions de $\mathcal{A}^\infty(K)$ via un noyau adéquat, nous approchons ce noyau par les noyaux à poids de type Henkin-Ramirez introduits par Berndtsson Andersson.

Cette Thèse a été réalisée sous la direction du Professeur Ahmed Zeriahi, je le remercie chaleureusement pour l'intérêt qu'il a su constamment porter à mon travail ainsi que sa grande disponibilité, sa patience et ses encouragements. Je lui suis sincèrement reconnaissant pour toute la confiance qu'il m'a témoignée pendant ces années afin de me permettre d'achever ce travail.

Je suis vivement reconnaissant au Professeur Pleśniak d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je le remercie pour toutes les remarques qui ont permis d'éclaircir mes idées et pour les entretiens très instructifs qu'il m'a accordés.

Je remercie chaleureusement le Professeur Thilliez de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. J'ai été très sensible à ses remarques et à ses suggestions bibliographiques qui ont précisé la teneur de mes résultats et de mes idées sur ce sujet.

Je remercie le Professeur Bloom pour l'intérêt qu'il a porté à ma thèse et de son engagement à être rapporteur.

Les professeurs Anne Cumenge et Nguyen Than Van ont été mes enseignants, je les remercie d'avoir accepté d'être membre de mon Jury.

Je remercie le Professeur Belghiti pour son invitation à l'Université de Kenitra en juillet 2004 et pour toutes les discussions mathématiques et chaleureuses que nous avons eues lors de ce séjour.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans les articles de L.BOS, P.MILMAN, N.LEVENBERG et B.A. TAYLOR ([5]) et M. BARAN et W. PLESNIAK ([3]), il est montré que l'exposant de Markov est au moins égal à 1 sur les surfaces algébriques de $\mathbb{R}^n$, lisses $\mathcal{C}^\infty$, sans bord et compactes. Pour y parvenir, les auteurs utilisent essentiellement des outils de la théorie du pluripotentiel complexe. En revanche dans l'article R. C. FEFFERMAN et NARASIMHAN ([10]), il est démontré qu'il existe de telles inégalités avec un exposant de Markov valant 2 dans des compacts, ne contenant pas de points singuliers, inclus dans des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$, et ceci par des techniques non triviales de géométrie analytique. Bien sûr, on ne pourra pas citer toutes les parutions et les auteurs ayant contribué à l'essor de ce sujet vu la densité de résultats. Ceci dit, donnons une liste non exhaustive des résultats intéressants et fondamentaux de ce domaine qui permettra de cerner l'ensemble :([16]), ([17]), ([1]), ([2]), ([5]), ([7]), ([8]) et ([22]).

Nous démontrons l'existence d'inégalités de Markov locales tangentielles sur les courbes algébriques singulières de $\mathbb{R}^n$. Nous interprétons de l'exposant de Markov, en montrant qu'il est minoré par un invariant géométrique. Pour cela, nous utilisons des outils de géométrie analytique et des résultats de la théorie du pluripotentiel complexe, afin d'affaiblir la notion (HCP) pour la fonction de Green avec pôle à l'infini.

L'idée d'approximation quantitative des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathbb{K}$-analytiques ($\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes) dans les compacts de $\mathbb{K}^N$ par des polynômes est à l'origine illustrée par les travaux de BERNSTEIN. Plus précisément, ces derniers caractérisent les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques réelles définies dans les intervalles de $\mathbb{R}$ par leur distance aux polynômes. Ces théorèmes ont été généralisés par BAOUENDI et GOULAOUIC ([1]), dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathbb{R}$-analytiques sur des ouverts de $\mathbb{R}^N$ vérifiant certaines conditions géométriques. Dans le même esprit, les mêmes auteurs ont caractérisé les fonctions de la classe de Gevrey par la décroissance sous-exponentielle de leur distance aux polynômes. Il faut préciser que dans les résultats cités précédemment, les inégalités de Markov jouent un rôle essentiel dans les démonstrations. Un théorème de BERNSTEIN, pour les fonctions holomorphes dans les compacts polynômialement convexes et L-réguliers (régulier au sens de Leja) de $\mathbb{C}^N$, a été démontré par SICIAK ([15]), c'est la fonction extremale de SICIAK qui contrôle la croissance des polynômes. C'est en quelque sorte l'apparition de la théorie du pluripotentiel dans la résolution de ce genre de problèmes, bien que le lien entre la fonction extrémale de SICIAK et la fonction de Green avec pôle à l'infini sera mis en évidence un peu plus tard par ZAHARJUTA ([21]). Ce type de résultat d'approximation a été généralisé par ZERIAHI ([22]) pour des compacts L-réguliers dans les variétés algébriques affines d'intersection complète de $\mathbb{C}^N$. Dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, PAWŁUKI et PLEŚNIAK ([10]) vont introduire une nouvelle classe de compacts contenant les critères géométriques énoncés par BAOUENDI et GOULAOUIC, les compacts à pointes polynômiales appelés compacts (UPC). Ils prouvent un théorème d'approximation de type BERNSTEIN pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans les compacts (UPC), ceci à grand renfort de la fonction extrémale de SICIAK qui, dans les (UPC), vérifie une propriété de type Hölder, nommée la condition (HCP) par les auteurs. D'ailleurs les compacts (UPC) vérifient les inégalités de Markov, point crucial dans le cas $\mathcal{C}^\infty$, étant donnée que les estimations de Cauchy sur les dérivées ne sont pas toujours valides. Un théorème d'approximation pour les jets $\mathcal{C}^\infty$ de la classe de Carleman fortement non quasi-analytiques sur de compacts de $\mathbb{R}^N$ a été démontré par PLEŚNIAK dans ([12]).

Une question naturelle se pose : qu'en est-il pour les classes de fonctions intermédiaires situées entre les fonctions holomorphes et les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans les compacts de $\mathbb{C}^N$? Dans l'article ([23]) sur les inégalités de Markov et le développement en série de polynômes orthogonaux des fonctions $\mathcal{C}^\infty(K)$ et $\mathcal{A}^\infty(K)$, ZERIAHI introduit la propriété de BERNSTEIN-JACKSON, notée (BJ) pour l'espace $\mathcal{A}^\infty(K)$. Il donne quelques exemples de compacts sur lesquels cette propriété est valide. C'est SICIAK ([14]) qui va démontrer la propriété (BJ) dans des compacts de $\mathbb{C}$ déjà plus élaborés et généraux.

Dans notre travail, nous étendons la propriété (BJ) à certaines classes de compacts s-H convexes de $\mathbb{C}^N$, ceci dans le Théorème 5 page 80. Et par ailleurs, nous généralisons le théorème de BERNSTEIN à un grand nombre de classes intermédiaires dans le Théorème 7 page 96, telles que les classes de fonctions holomorphes Gevrey au bord, etc....
A notre connaissance, seuls les auteurs BAOUENDI et GOULAOUIC, pour le cas particulier des classes de Gevrey et PLEŚNIAK, pour la classe des jets de Carleman fortement non quasi-analytiques, tout ceci dans le cas réel, ont démontré un Théorème du type de notre Théorème 7.

Chapitre 1

Inégalités de Markov tangentielles locales sur les courbes algébriques singulières de $\mathbb{R}^n$

1.1 Énoncé du Théorème

Nous adopterons l'identification suivante $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est donc un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$. Par conséquent, nous considérons, canoniquement, $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ comme sous-espace de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ et a un point de $\overline{E}$, on dira que v est un vecteur tangent en a de E, s'il existe une suite $(a_i)_{j\in\mathbb{N}}$ de point de E et une suite de réels strictement positifs $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telles que $v = \lim_{j\to+\infty} \lambda_j(a-a_j)$. Nous appellerons l'ensemble des vecteurs tangents de E en a le cône tangent en de E en a et le noterons $C(E,a)$. Notons que pour tout $v \in C(E,a)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ on a $\lambda \cdot v \in C(E,a)$; les vecteurs tangents *unitaires* de $C(E,a)$ ont un sens.

Pour tout sous-ensemble $K \subset\subset \mathbb{C}^n$, nous noterons la norme uniforme sur K ainsi : $\|.\|_K$.

Nous appellerons *morceau de courbe algébrique* ou *courbe algébrique*, tout sous-ensemble analytique connexe et irréductible d'une courbe algébrique. Nous conviendrons de la notation suivante : $\mathbb{C}_i = \mathbb{C}^i \times \{0\}$ sous-espace de $\mathbb{C}^i \times \mathbb{C}^{n-i}$. Enfin pour tout sous-ensemble algébrique A de $\mathbb{R}^n$, nous noterons respectivement l'ensemble des points singuliers et réguliers de A par A_{sing} et A_{reg}.

Théorème 1 *Soit A un morceau de courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout x_0 dans A, il existe C_1, C_2 et ε_0 des constantes strictement positives, dépendant de x_0 et localement majorées telles que $(\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[)$, $(\forall p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n])$:*

1. *si $x_0 \in A_{sing}$,*

$$|D_v p(x_0)| \leqslant C_1 \left(\frac{C_2(\deg(p))^2}{\varepsilon} \right)^k \|p\|_{A\cap B(x_0,\varepsilon^k)},$$

   où k est la multiplicité complexe du point singulier x_0 dans $\tilde{A}$ et v un vecteur unitaire dans $C(A, x_0)$.

2. *si $x_0 \in A_{reg} \setminus \partial A$,*

$$|D_v p(x_0)| \leqslant C_1 \left(\frac{C_2 \deg(p)}{\varepsilon}\right) \|p\|_{A\cap B(x_0,\varepsilon)}\,,$$

où v est un vecteur unitaire de l'espace tangent $T_{x_0}A_{reg}$.

3. *si $x_0 \in \partial A \setminus A_{sing}$,*

$$|D_v p(x_0)| \leqslant C_1 \left(\frac{C_2 \deg(p)}{\varepsilon}\right)^2 \|p\|_{A\cap B(x_0,\varepsilon)}\,,$$

où v est un vecteur unitaire de l'espace tangent $T_{x_0}A_{reg}$.

Corollaire 1 *Soit A une courbe algébrique, compacte, localement irréductible et sans singularité au bord de $\mathbb{R}^n$, alors A admet des inégalités de Markov tangentielles locales. Il existe donc C_1, C_2 et ε_0 des constantes absolues strictement positives telles que : $\forall\varepsilon \in [0,\varepsilon_0[,\ \forall x_0 \in A,\ \forall p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$,*

$$|D_v p(x_0)| \leqslant C_1 \left(\frac{C_2 (\deg(p))^2}{\varepsilon}\right)^k \|p\|_{A\cap B(x_0,\varepsilon^k)},$$

où k est la multiplicité complexe du point x_0 et v un vecteur unitaire dans $C(A,x_0)$.

Dans l'assertion *2.* du Théorème 1, nous retrouvons le résultat énoncé par Fefferman et Narasimhan dans ([10]), pour le cas d'une courbe algébrique. Les hypothèses du Théorème 1 englobent, bien sûr, les courbes algébriques lisses sans bord. Nous en déduisons le Corollaire suivant qui est démontré dans un cadre plus général par Bos, Milman, Levenberg et Taylor ([5]).

Corollaire 2 *Soit A une courbe algébrique $\mathcal{C}^\infty$, compacte lisse et sans bord de $\mathbb{R}^n$, alors A admet des inégalités de Markov tangentielles locales d'exposant 1. Autrement dit, il existe C_1, C_2 et ε_0 des constantes positives absolues telles que : $(\forall\varepsilon \in [0,\varepsilon_0[),\ (\forall x_0 \in A),\ (\forall p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n])$,*

$$|D_v p(x_0)| \leqslant C_1 \left(\frac{C_2 \deg(p)}{\varepsilon}\right) \|p\|_{A\cap B(x_0,\varepsilon)},$$

où v est un vecteur unitaire de l'espace tangent $T_{x_0}A$.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Sous-ensembles algébriques de $\mathbb{R}^n$

Si S est une partie de $\mathbb{K}^n (n \geqslant 2)$ ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on notera que

$$I^{\mathbb{K}}(S) := \{p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : p|_S = 0\},$$

est un idéal de $\mathbb{K}^n$ ayant un nombre fini de générateur ($\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un anneau Noetherien). Si $\mathcal{P}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, on écrira

$$loc\, \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{K}^n : \forall p \in \mathcal{P},\ p(x) = 0\}$$

le locus de $\mathcal{P}$.

Les sous-ensembles algébriques de $\mathbb{K}^n$ sont les parties A de $\mathbb{K}^n$ telles que :

$$loc\, I^{\mathbb{K}}(A) = A.$$

En gardant l'identification $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, nous considérerons, pour tout sous-ensemble algébrique A de $\mathbb{R}^n$ le complexifié de A comme étant le plus petit sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^n$ contenant A. On le notera $\tilde{A}$, ainsi que, $\tilde{A}_{reg}$ et $\tilde{A}_{sing}$ les sous-ensembles, respectifs, singuliers et réguliers de $\tilde{A}$. On notera que :

$$I^{\mathbb{C}}(\tilde{A}) = I^{\mathbb{R}}(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

et $A = \tilde{A} \cap \mathbb{R}^n$. Pour plus de précisions, il faut se référer au livre de Narasimhan([15], Page 91).

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est une courbe algébrique, s'il existe des polynômes $p_1, \dots, p_s$ dans $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, ($s \in \mathbb{N}^\star$), tels que : $A = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = \cdots = p_s(x) = 0\}$ et $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$.

1.2.2 Critère d'algébricité

Le critère d'algébricité de Rudin sera utile dans la démonstration du Théorème 1 page 17. Une seule implication nous servira, on trouvera sa démonstration dans ([9], Théorème 3, Page 78), voici son énoncé :

Théorème 2 *Soit X un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^n (n \in \mathbb{N}^\star)$ de dimension pure p. Alors X est algébrique si et seulement s'il existe C et s deux constantes strictement positives et un changement de coordonnées unitaire tels que :*

$$(\forall z = (z', z'') \in X), \quad |z''| \leqslant C(1 + |z'|^s)$$

où

$$z' = (z_1, \ldots, z_p) \textit{ et } z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n)$$

Nous verrons dans le Lemme 2 page 27 que nous choisirons un changement de coordonnées unitaire bien spécifique et que ce choix est crucial dans l'obtention de nos estimations. En effet, nous aurons besoin que le sous-espace $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{C}^n$ soit stable par ce changement de coordonnées. En fait, choisir un cône, comme dans le Théorème ci-dessus, c'est trouver une projection projection propre globale. Ceci est énoncé par la Proposition ci-après.

Proposition 1 *Soit $\tilde{A}$ un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$ de dimension pure p. Si la projection $\pi : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est propre alors on a :*

$$\tilde{A} \subset \{(\xi', \xi'') \in \mathbb{C}^n : |\xi''| \leqslant C(1 + |\xi'|^s)\}.$$

Avec

$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \textit{ et } \xi'' = (\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n),$$

où C et s sont des constantes réelles strictement positives dépendant seulement de $\tilde{A}$.

Nous nous bornerons juste à énoncer la Proposition 1 dont la démonstration figure dans ([13], Proposition 1, Page 389).

1.2.3 Multiplicité d'un point dans les sous-ensembles analytiques

La multiplicité d'un point dans un sous-ensemble algébrique complexe de dimension pure p est donné par l'expression suivante :

$$\forall a \in \tilde{A}, \quad \mu_a(\tilde{A}) := \min \{\mu_a(\pi_L|_{\tilde{A}}) : L \in Gr_{\mathbb{C}}(n, n-p)\},$$

où $Gr_{\mathbb{C}}(n, n-p)$ est la Grassmanienne dans $\mathbb{C}^n$ et π_L est la projection orthogonale définie par $\pi_L : \mathbb{C}^n \simeq L \oplus L^\perp \longrightarrow L^\perp$. On a toujours $\mu_a(\tilde{A}) \geqslant 1$, pour tout $a \in \tilde{A}$. La multiplicité complexe $\mu_a(\tilde{A})$ n'est autre que le nombre de Lelong du courant $[\tilde{A}]$ en a ; c'est donc un invariant par biholomorphisme, cf ([9], Proposition 2, Page 120 et Page 190).

1.2.4 Paramétrisation de Puiseux pour une courbe analytique complexe

Construisons la paramétrisation de Puiseux pour les courbes analytiques de $\mathbb{C}^n$ en adaptant la démonstration de ([9], Page 67).

Dans cette partie A est un sous-ensemble analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension pure 1, localement irréductible et $\tilde{A}$ le sous-ensemble algébrique complexifié de A dans $\mathbb{C}^n$, tel que $0 \in A_{sing}$ (donc $0 \in \tilde{A}_{sing}$) ; la projection $\pi : \tilde{A} \cap U \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}_1$ ($U = U' \times U'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ un polydisque) est propre.

Pour toute fonction holomorphe f au voisinage d'un point a de $\mathbb{C}$, nous noterons $ord_a\, f$ l'ordre d'annulation de f en a : .

Pour toute suite d'entiers $0 \leqslant l_1 < \cdots < l_r \leqslant k-1$, où $k \in \mathbb{N}^\star$ et $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que $1 \leqslant r \leqslant k$, nous noterons l'ensemble :

$$\mathcal{R}^{<r>} = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant r} \left[0, e^{i\frac{2\pi l_j}{k}}\right].$$

Proposition 2 *Sous les hypothèses et les notations décrites ci-dessus, il existe une paramétrisation de Puiseux $\varphi : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \tilde{A} \cap U$ définie dans un voisinage ouvert du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ de $\mathbb{C}_1$ vérifiant les assertions ci-dessous.*

- • *$\varphi(z) = (cz^k, \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z))$, $(\forall z \in \overline{D(0,1)})$, où $k = \mu_0(\tilde{A})$, les ψ_j sont holomorphes dans $\overline{D(0,1)}$ avec $ord_0\, \psi_j > k$ et $c \in \mathbb{C}$ une constante dépendant de φ.*
- • *Il existe des entiers $0 \leqslant l_1 < \cdots < l_{r_A^+} \leqslant k-1$ (resp. $0 \leqslant l'_1 < \cdots < l'_{r_A^-} \leqslant k-1$), où r_A^+ (resp. r_A^-) est le nombre de branche(s) de la courbe réelle A dans*

U, ayant 0 comme extrémité, au-dessus de $[0,1] \subset \overline{D(0,1)}$ (resp. au dessus de $[-1,0] \subset \overline{D(0,1)}$), de sorte que $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^+>}}$ (resp. $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^->}}$) paramétrise

$$A \cap U \cap \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \Re e(z_1) \in [0,1]\}$$

$$(resp. \quad A \cap U \cap \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \Re e(z_1) \in [-1,0]\}).$$

-Preuve : $\tilde{A}$ est de dimension complexe 1, $\tilde{A}_{sing}$ est un ensemble discret. Donc il existe un polydisque $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\pi^{<-1>}(0) \cap \tilde{A} \cap U = \{0\}$, où π est la projection. Nous avons supposé que le sous-ensemble algébrique A est localement irréductible ; il s'ensuit donc que le complexifié $\tilde{A}$ est localement irréductible, ceci d'après ([15], Proposition 2, page 92). La projection $\pi|_U$ est supposée propre, d'après le Théorème de structure des sous-ensembles analytiques complexes $(\tilde{A} \cap U, \pi, U')$ est un l-revêtement holomorphe ramifié. Fixons un point $a \in A \cap U$ tel que $a_1 \in \mathbb{R}$ où $a_1 = \pi(a)$. Soit $\gamma : [0, r_1[\to \tilde{A}$ le relèvement du segment $[0, r_1[\subset \mathbb{C}_1$ passant par a dans A ($i.e$ $\exists t_0 \in [0, r_1[,\ \gamma(t_0) = a,\ \forall t \in [0, r_1[,\ \pi \circ \gamma(t) = t$). Ce relèvement existe car $(\tilde{A} \cap U, \pi, U')$ est un l-revêtement holomorphe ramifié. Comme $\tilde{A} \cap U$ est irréductible $\tilde{A} \cap U \setminus \{0\}$ est connexe. Ceci nous permet de dire que $\Gamma_r = \pi^{<-1>}(\{z \in \mathbb{C} : |z_1| = r\}) \cap \tilde{A},\ \forall r \in [0, r_1[$, est une courbe de Jordan fermée. Donc le triplet $(\Gamma_r, \pi, |z_1| = r)$ est un l-revêtement. On peut ainsi construire une unique paramétrisation $\gamma_r : [0, 2\pi[\to \Gamma_r$ telle que $\pi \circ \gamma_r(t) = re^{ikt}$, avec $\gamma_r(0) = \gamma(r)$. Définissons donc :

$$\zeta(z) := \left(\frac{\pi(z)}{r_1}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad \zeta(\gamma_r(t)) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{k}} e^{it}.$$

La fonction ζ est holomorphe et injective sur $(\tilde{A} \cap U) \setminus \{0\}$. Donc d'après le Théorème de prolongement de Riemann des fonctions holomorphes sur les singularités, la fonction $z : D(0,1) \to \tilde{A} \cap U$, telle que $\zeta \mapsto z(\zeta)$ est une injection holomorphe. Ainsi nous obtenons une paramétrisation de Puiseux pour $0 \in \tilde{A}_{sing}$. Comme le point a n'est pas dans $\pi(A_{sing})$, on a donc $\left\{a^0, \ldots, a^{k-1}\right\} = \pi^{<-1>}(\{a_1\}) \cap \tilde{A} \cap U$, en prenant par exemple $a = a^0$. D'après la construction de la fonction $z(\zeta)$, nous pouvons ordonner les points $(a^l)_{l \in \{0, \ldots, k-1\}}$, de sorte que $\zeta(a^l) \in [0, e^{i\frac{2i\pi l}{k}}],\ \forall l \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Définissons les ensembles ci-dessous :

$$\mathcal{E}^{<k>} := \bigcup_{0 \leqslant l \leqslant k-1} \left[0, e^{i\frac{2\pi l}{k}}\right].$$

et $\mathcal{R}^{<k>}$ la partie de $\mathcal{E}^{<k>}$ telle que

$$\mathcal{R}^{<r_A^+>} := \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant r_A^+} \left[0, e^{i\frac{2\pi l_j}{k}}\right], \tag{1.1}$$

où r_A^+ est le nombre de branches, ayant pour extrémité 0, dans $A \cap U$ et $[0, e^{i\frac{2\pi l_j}{k}}]$ est un segment paramétrisant une branche de $A \cap U$ au-dessus du segment $[0,1]$. Bien sûr, l'entier naturel r_A^+ ne peut dépasser k et est toujours plus grand que 1. Ainsi $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^+>}}$ paramétrise analytiquement la partie de la courbe réelle A au-dessus du segment $[0,1]$. Pour les branches de $A \cap U$ au-dessus de $[-1,0]$, on se ramène au cas des branches au-dessus de $[0,1]$ par une rotation d'angle π. ■

Si v est un vecteur tangent dans $C(A,0)$, toutes les branches d'extrémité 0 de la courbe $A \cap U$ sont paramétrisées localement en 0 par $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^+>}}$ ou $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^->}}$. Donc pour le vecteur tangent v, il correspondra une branche de $A \cap U$, à laquelle il est tangent, et donc un segment de $\mathcal{R}^{<r_A^+>}$ et $\mathcal{R}^{<r_A^->}$, du type $[0, e^{i\frac{2\pi l}{k}}]$ paramétrisant la dite branche par $\varphi|_{\left[0, e^{i\frac{2\pi l}{k}}\right]}$. Bien sûr, la géométrie de $\mathcal{R}^{<r_A^+>}$ et de $\mathcal{R}^{<r_A^->}$ dépendent de la nature de la singularité de la courbe algébrique réelle A.

Lemme 1 *Soit $\tilde{A}$ une courbe algébrique de $\mathbb{C}^n$ irréductible et $a \in \tilde{A}_{sing}$. Si k est l'exposant de la paramétrisation de Puiseux, alors k est aussi la multiplicité de la singularité complexe de $\tilde{A}$ en a.*

-Preuve :Définissons le produit scalaire usuel dans $\mathbb{C}^n$: $\forall (u,v) \in (\mathbb{C}^n)^2$ avec $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$

$$(u|v) := \sum_{j=1}^{j=n} u_j \overline{v}_j.$$

Soient $L \in Gr_{\mathbb{C}}(n-1,n)$, $u \in L^{\perp}$ et $v^2, \cdots, v^n \in L$ tel que $(u, v^2, \ldots, v^n)$ soit une base $\mathbb{C}$-orthonormée. On a bien :

$$\mathbb{C}u \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{2 \leqslant j \leqslant n}} \mathbb{C}v^j \right) = \mathbb{C}^n,$$

on en déduit donc que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, \quad \pi_L(z) = (z|u)u, \qquad \pi_L : L \oplus L^\perp \longrightarrow L^\perp.$$

On peut supposer, sans perdre de généralité, que $a = 0$. Soit la paramétrisation de Puiseux de $\tilde{A}$ en 0, $z(\xi) = (c\xi^k, \psi_2(\xi), \dots, \psi_n(\xi))$, où les ψ_j sont holomorphes dans $D(0,1)$ telles que $ord_0(\psi_j) > k, \ \ \forall j \in \{2, \dots, n\}$. Dans ([9], Lemme 1, Page 107), nous avons l'égalité suivante :

$$ord_0(\pi_L \circ z(\xi)) = \mu_0(\pi_L|_{\tilde{A}}).$$

En identifiant $\mathbb{C}u$ à $\mathbb{C}$, on a

$$\pi \circ z(\xi) = \left(c\xi^k u_1 + \sum_{j=2}^{j=n} \psi_j(\xi)\overline{u}_j \right) u, \quad \forall L \in Gr_{\mathbb{C}}(n-1, n).$$

On déduit trivialement que $\mu_0(\tilde{A}) = k$. ■

1.2.5 Fonction de Green avec pôle à l'infini, inégalité de Bernstein-Walsh et compact (HCP) de $\mathbb{C}^n$

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$, on notera la classe de Lelong, $L_E(\mathbb{C}^n)$, que l'on définira comme ci-dessous :

$$L_E(\mathbb{C}^n) := \left\{ u \in PSH(\mathbb{C}^n) : u|_E \leqslant 0, \ \exists c_u \in \mathbb{R}, \quad u \leqslant c_u + \log(1 + |z|) \right\},$$

où $|z| := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j|$, avec $z = (z_1, \dots, z_n)$.
La fonction de Green avec pôle la l'infini associée au compact E est définie ainsi :

$$V_E(z) := \sup \left\{ u(z) : u \in L_E(\mathbb{C}^n) \right\}, \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n).$$

Il est possible de réduire l'ensemble $L_E(\mathbb{C}^n)$ pour définir V_E, si l'on suppose que E est compact. En effet, si

$$L_E^+(\mathbb{C}^n) := \left\{ u \in PSH(\mathbb{C}^n) : \ u|_E = 0, \ \exists c_u \in \mathbb{R}, \quad u \leqslant c_u + \log(1 + |z|) \right\},$$

on a

$$V_E(z) := \sup\left\{u(z) : u \in L_E^+(\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)\right\}, \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n).$$

On appellera la régularisée supérieure de la fonction V_E la plus petite fonction semi-continue supérieurement majorant V_E. On la note $V_E^\star$ et on la définit comme ci-dessous :

$$V_E^\star(z) := \limsup_{\zeta \to z,\, \zeta \in \mathbb{C}^n} V_E(\zeta), \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n).$$

Si E est non pluripolaire ($i.e.$ $\forall u \in PSH(\mathbb{C}^n),\ E \not\subset u^{<-1>}(-\infty)$) la fonction $V_E^\star \in PSH(\mathbb{C}^n)$. Nous avons le théorème approximation de V_E dû à Siciak et Zaharjuta ([21]).

$$V_E = \log(\Phi_E) \tag{1.2}$$

où

$$\Phi_E(z) := \sup\left\{|p(z)|^{\frac{1}{\deg(p)}} : p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n],\ \|p\|_E \leqslant 1,\ \deg(p) \geqslant 1\right\}, \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n),$$

où $\|\cdot\|_E$ est la norme uniforme sur le compact E. A partir de l' égalité (1.2), nous déduisons trivialement l'inégalité de Bernstein-Walsh :

$$|p(z)| \leqslant \|p\|_E\, e^{(\deg(p)\, V_E(z))}, \quad \forall p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n],\ (\forall z \in \mathbb{C}^n). \tag{1.3}$$

On trouvera plus de précisions sur les démonstrations des propriétés de la fonction de Green avec pôle à l'infini dans ([12]).
Si E est un compact de $\mathbb{C}^n$, non pluripolaire, nous dirons que E vérifie la propriété (HCP) (Hölder Continuity Property), s'il existe $\delta_0,\ C,\ \alpha > 0$ des constantes ne dépendant que de E telles que :

$$(\forall \delta \in [0, \delta_0]),\ (\forall z \in \mathbb{C}^n,\ d(z, E) \leqslant \delta) \Longrightarrow V_E(z) \leqslant C\delta^\alpha \quad (d \text{ métrique Euclidienne}).$$

Si un compact vérifie la propriété (HCP), la fonction V_E est continue ; ceci implique que le compact E est L-régulier.
Nous dirons que E est localement (HCP), si pour tout $a \in E$, il existe $\varepsilon > 0$, tel

que $E \cap B(a, \varepsilon)$ vérifie la propriété (HCP). Nous écrirons plus simplement que E est (HCP) ou E est *localement* (HCP). Parfois, par abus de language, nous préciserons la valeur de la constante α en parlant (HCP) d'exposant ou d'ordre α, s'il n'y a pas de confusions possibles.
Il faut noter, qu'avec l'inégalité de Benstein-Walsh (1.3) et les inégalités de Cauchy, les compacts (HCP) admettent des Inégalités de Markov.
Cette notion (HCP) a été introduite par Pleśniak et Pawłucki dans l'article ([17]).

1.2.6 Critère de Sadullaev

Enonçons le théorème de Saduallaev qui est une caractérisation des sous-ensemble algébriques complexe de $\mathbb{C}^N$.

Théorème 3 (Critère de Sadullaev) *Si $\tilde{A}$ est un sous-ensemble analytique connexe de $\mathbb{C}^n$, alors la fonction de Green avec pôle à l'infinie V_K est localement bornée dans $\tilde{A}$ si et seulement si $\tilde{A}$ est algébrique.*

-Preuve : c.f. la démonstration de ([18], page 497, Théorème 2.2). ■

1.3 Continuité de Hölder de la fonction extrémale dans le sous-ensemble algébrique $\tilde{A}$

Dans cette partie, nous allons affaiblir la notion (HCP) pour les courbes algébriques de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ en la restreignant au sous-ensemble algébrique complexifié. Pour ce faire, nous introduirons la métrique des géodésiques dans la courbe complexifiée et nous verrons, modulo une certaine compatibilité pour cette métrique, que cette notion (HCP) impliquera encore l'existence d'inégalités de Markov tangentielles.
En définitive, il ne sera pas nécessaire de montrer la propriété (HCP) dans $\mathbb{C}^n$, mais seulement dans une partie de dimension complexe 1.

1.3.1 Prolongement de la paramétrisation de Puiseux pour les courbes algébriques complexes

Pour obtenir le prolongement de la paramétrisation de Puiseux construite dans la Proposition 2 page 21, il est nécessaire de construire une projection globale $\pi : \tilde{A} \to \mathbb{C}_1$ propre.

Proposition 3 *Soient $G = G' \times G''$, où G' et G'' sont deux sous-ensembles ouverts respectifs de $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^m$ $(m + p = n)$, et $\pi : (z', z'') \mapsto z'$ une projection. Soit $\tilde{A}$ un sous-ensemble analytique de G tel que $\pi : \tilde{A} \longrightarrow G'$ soit une application propre, alors $\tilde{A}' = \pi(\tilde{A})$ est un sous-ensemble analytique de G' et le nombre de pré-images $\pi^{-1}(\{z'\})$, $(z' \in G')$ est localement fini dans G'. Si, de plus, $G = \mathbb{C}^n$, $G' = \mathbb{C}^p$ et $\tilde{A}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$, alors $\tilde{A}' = \pi(\tilde{A})$ est aussi un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^p$.*

On trouvera la démonstration de la proposition 3 dans le livre de Chirka ([9], §3.2, page 29).

Lemme 2 *Soit A un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 et $\tilde{A}$ son complexifié dans $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \tilde{A} \cap \mathbb{R}^n$, alors il existe l une transformation unitaire de $\mathbb{C}^n$ telle que $l(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et $\pi : l(\tilde{A}) \longrightarrow \mathbb{C}_1$ soit propre.*

-Preuve : On injecte $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, H_0 sera l'hyperplan à l'infini identifié à $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, de sorte que $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \cup \mathbb{C}^n$. La courbe A est algébrique dans $\mathbb{R}^n$, donc il existe des polynômes $p_1, \ldots, p_s$ dans $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ $(s \in \mathbb{N}^\star)$, tels que :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = \cdots = p_s(x) = 0\}.$$

Si d_j est le degré du polynôme p_j, pour tout j dans $\{1, \ldots, s\}$, nous avons alors la décomposition suivante pour tous les polynômes p_j :

$$p_j(x) = h_j(x) + q_j(x), \quad (\forall j \in \{1, \ldots, s\}),$$

où les h_j sont des polynômes homogènes dans $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de degré d_j et les q_j sont des polynômes dans $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $\deg(q_j) < d_j$. Considérons le sous-ensemble algébrique projectif V, défini comme ci-dessous :

$$V := \{[z] \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) : h_1(z) = \cdots = h_s(z) = 0\},$$

où

$$V \subset H_0, \quad H_0 = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

Le sous-ensemble algébrique projectif V est bien défini puisque les h_j sont des polynômes homogènes et V est propre, car les h_j ne sont pas tous nuls. Maintenant identifions $Gr_{\mathbb{C}}(n,1)$ et $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Soit

$$\mathcal{L} := \left\{\tilde{L} \in Gr_{\mathbb{C}}(n,1) : \tilde{L} \subset \tilde{A}\right\},$$

il est évident de voir que $\mathcal{L}$ est un fermé d'intérieur vide dans $Gr_{\mathbb{C}}(n,1)$.
Posons :

$$\mathcal{M} := Gr_{\mathbb{C}}(n,1) \setminus \mathcal{L},$$

il s'ensuit que $\mathcal{M}$ est un ouvert partout dense dans $Gr_{\mathbb{C}}(n,1)$. Définissons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{B} := \left\{\tilde{L} \in Gr_{\mathbb{C}}(n,1) : \exists v_n \in \mathbb{R}^n,\ \|v_n\|_2 = 1,\ \tilde{L} = \mathbb{C}v_n,\ [v_n] \notin V\right\}.$$

De toute évidence $\mathcal{B} \neq \emptyset$, car $\deg(h_j) = \deg(p_j)$ implique que V est au plus une hypersurface. Supposons maintenant que $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{M}$. Donc il existe $\tilde{L}$ dans $\mathcal{B}$ tel que $\tilde{L} \notin \mathcal{M}$. Il s'ensuit que $\tilde{L} \subset \tilde{A}$. Choisissons v_n dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\tilde{L} = \mathbb{C}v_n$, puisque $\tilde{L}$ est dans $\mathcal{B}$, et posons $L = \mathbb{R}v_n$. Nous avons :

$$L \subset \tilde{L} \subset \tilde{A} \Longrightarrow L \subset A.$$

Donc

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}), \quad p_1(\lambda v_n) = \cdots = p_s(\lambda v_n) = 0,$$

soit encore

$$(\forall \lambda > 0), \quad \frac{1}{\lambda^{d_1}} p_1(\lambda v_n) = \cdots = \frac{1}{\lambda^{d_s}} p_s(\lambda v_n) = 0.$$

Si $\lambda \to \infty$, cela nous donne :

$$h_1(v_n) = \cdots = h_s(v_n) = 0,$$

ce qui veut dire que $[v_n]$ est dans V, or cette dernière assertion contredit l'hypothèse que $\tilde{L}$ est dans $\mathcal{B}$. En conclusion $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Soient, maintenant, les polynômes homogénéisés des p_j définis comme ci-dessous :

$$p_j^\star(z_0, \ldots, z_n) := z_0^{d_j} p_j \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0} \right), \quad (\forall j \in \{1, \ldots, s\}).$$

Les $p_j^\star$ sont des polynômes homogènes de $\mathbb{C}[z_0, \cdots, z_n]$. Considérons $\tilde{\tilde{A}}$ la variété projective de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ définie comme ci-dessous :

$$\tilde{\tilde{A}} := \{[z] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) : p_1^\star(z) = \cdots = p_s^\star(z) = 0\}.$$

Etant donné que pour tout j dans $\{1, \ldots, s\}$, on a $p_j = p_j^\star|_{\mathbb{C}^n}$, il s'ensuit que $\tilde{A} = \mathbb{C}^n \cap \tilde{\tilde{A}}$. Comme $\tilde{\tilde{A}}$ est fermée, nous en déduisons successivement les inclusions suivantes :

$$\overline{\tilde{A}} \subset \tilde{\tilde{A}} \text{ et } \overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A} \subset \tilde{\tilde{A}}.$$

De plus $\tilde{\tilde{A}} \cap H_0 = V$, par conséquent $\overline{\tilde{A}} \cap H_0 \subset V$, et $\tilde{A} \cap H_0 = \emptyset$. Avec l'inclusion ci-dessous :

$$\tilde{A} \subset \overline{\tilde{A}} \subset \tilde{\tilde{A}},$$

on a

$$\tilde{A} \subset \overline{\tilde{A}} \cap \mathbb{C}^n \subset \tilde{\tilde{A}} \cap \mathbb{C}^n = \tilde{A},$$

donc

$$\tilde{A} = \overline{\tilde{A}} \cap \mathbb{C}^n = \tilde{\tilde{A}} \cap \mathbb{C}^n.$$

Montrons que $\overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A} \subset V$. On a

$$\overline{\tilde{A}} = \overline{\tilde{A}} \cap (H_0 \cup \mathbb{C}^n) = \left(\overline{\tilde{A}} \cap H_0\right) \cup \left(\overline{\tilde{A}} \cap \mathbb{C}^n\right) = \left(\overline{\tilde{A}} \cap H_0\right) \cup \tilde{A},$$

comme $\overline{\tilde{A}} = \left(\overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A}\right) \cup \tilde{A}$, on déduit l'égalité ci-dessous :

$$\left(\overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A}\right) \cup \tilde{A} = \left(\overline{\tilde{A}} \cap H_0\right) \cup \tilde{A} \quad (\diamondsuit_1)$$

Choisissons $[z] \in \overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A}$, on a $[z] \notin \tilde{A}$. De l'égalité $(\diamond_1)$, on déduit que $[z] \in \overline{\tilde{A}} \cap H_0$, soit $\overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A} \subset \overline{\tilde{A}} \cap H_0$. L'inclusion voulue est démontrée, sachant que nous avons $\overline{\tilde{A}} \cap H_0 \subset V$, d'où :

$$\overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A} \subset V \subset H_0.$$

Choisissons maintenant $\tilde{L}$ dans $\mathcal{B}$. Nous avons $\tilde{L} \not\subset \tilde{A}$ et $L \not\subset A$. Il s'ensuit que $\tilde{L} \cap \tilde{A}$ est une sous-ensemble algébrique propre de $\tilde{L}$. Comme $\tilde{L}$ est de dimension complexe 1 et $\tilde{A}$ algébrique, $\tilde{L} \cap \tilde{A}$ est fini, donc $L \cap A$ aussi. Construisons maintenant la transformation unitaire l. Choisissons v_n dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\|v_n\|_2 = 1$ et $\mathbb{C}v_n = \tilde{L}$ ($\tilde{L}$ est dans $\mathcal{B}$). Rappelons que $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire ci-dessous :

$$(z|\zeta) := \sum_{j=1}^{j=n} z_j \overline{\zeta}_j, \quad (\forall z, \zeta \in \mathbb{C}^n),$$

où $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Construisons par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt une base $\mathbb{R}$-orthogonale dans $L^{\perp_{\mathbb{R}}}$. Nommons cette base $(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Le système $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est $\mathbb{C}$-libre. Nous avons donc

$$\dim_{\mathbb{C}} Vect_{\mathbb{C}}(v_1, \ldots, v_{n-1}) = n - 1.$$

Il s'ensuit que :

$$Vect_{\mathbb{C}}(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \tilde{L}^{\perp_{\mathbb{C}}} \text{ tel que } \tilde{L} \oplus \tilde{L}^{\perp_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}^n.$$

On a

$$\left(\overline{\tilde{A}} \setminus \tilde{A}\right) \cap \overline{\tilde{L}} \subset V \cap \overline{\left(a + \tilde{L}\right)} = \emptyset, \quad (\forall a \in \tilde{A}),$$

car V est un sous-ensemble de H_0 et $[v_n]$ n'appartient pas à V. Cette dernière assertion montre que la projection ci-dessous :

$$\pi_{\tilde{L}} \quad : \quad \tilde{A} \quad \longrightarrow \quad \tilde{L}^{\perp_{\mathbb{C}}} \quad (\diamond_2)$$

est propre.

D'après la construction de $\tilde{L}$ et $\tilde{L}^{\perp}$, il existe donc une unique transformation unitaire de $\mathbb{C}^n$ notée l_1 telle que :

$$(l_1(v_j)|e_k) = \delta_{j,k}, \quad (\forall j,\, k \in \{1, \ldots, n\}),$$

avec $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker, où

$$l_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n.$$

On déduit de ce qui précède, c'est-à-dire $(\diamond_2)$, que la projection :

$$\begin{array}{cccc} \pi^1 & : & l_1(\tilde{A}) & \longrightarrow & \mathbb{C}_{n-1} \\ & & (z', z_n) & \longmapsto & z' \end{array}$$

est propre. Notons maintenant $\tilde{A}_1 = \tilde{A}$. D'après la Proposition 3 page 27, $\pi^1(l(\tilde{A}_1))$ est algébrique dans $\mathbb{C}_{n-1}$. Construisons par récurrence descendante la suite $(\pi^i, l_i, \tilde{A}_i)$, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, telle que :

$$\pi^i : l_i(\tilde{A}_i) \longrightarrow \mathbb{C}_{n-i}, \quad \tilde{A}_i = \pi^{i-1}\left(l_{i-1}(\tilde{A}_{i-1})\right), \quad \forall i \in \{2, \ldots, n-1\},$$

où π^i est une projection propre telle que $\pi^i(\mathbb{R}^{n-i}) = \mathbb{R}^{n-i-1}$, $\tilde{A}_i$ est un sous-ensemble algébrique et l_i est dans $O(\mathbb{C}, n-i)$, l'ensemble des transformations unitaires de $\mathbb{C}^{n-i}$ et $l_i(\mathbb{R}^{n-i}) = \mathbb{R}^{n-i}$. Nous avons les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{cccc} j_i & : & O(\mathbb{C}, i) & \longrightarrow & O(\mathbb{C}, i+1) \\ & & l_{n-i+1} & \longmapsto & l_{n-i+1} \oplus id_{\mathbb{C}_{(i+1)}} \end{array}, \quad \forall i \in \{2, \ldots, n-1\},$$

où $\mathbb{C}_{(i)}$ est le sous-espace $\{0_{\mathbb{C}^{i-1}}\} \times \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}^n$. Il s'ensuit que si l'on pose $\tilde{l} = (l_{n-1} \oplus id_{\mathbb{C}_{(3)}}) \circ \cdots \circ (l_2 \oplus id_{\mathbb{C}_{(n)}}) \circ l_1$, $\tilde{l}$ est dans $O(\mathbb{C}, n)$, telle que $\tilde{l}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Si l'on pose $\pi = \pi^n \circ \cdots \circ \pi^1$, où $\pi^n : l_{n-1}(\tilde{A}_{n-1}) \longrightarrow \mathbb{C}_1$ est la projection propre choisie comme π^1 pour le sous-ensemble algébrique $\tilde{A}_{n-1}$. On a donc :

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & l(\tilde{A}) & \longrightarrow & \mathbb{C}_1 \\ & & (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & z_1 \end{array}$$

est propre car toutes les projections π^i le sont, donc π et l vérifient les conditions requises du lemme. $\blacksquare$

Proposition 4 *Supposons A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$, localement irréductible, telle que $0 \in \tilde{A}_{sing}$ et φ la paramétrisation de Puiseux de la Proposition 2 page*

21. Modulo un changement de coordonnées unitaire dans $\mathbb{C}^n$, laissant A dans $\mathbb{R}^n$, il existe Ψ une application holomorphe définie dans Ω' ouvert de $\mathbb{C}$ partout dense, avec $\overline{D(0,1)} \subset \Omega'$, telle que $\Psi|_{\overline{D(0,1)}} = \psi$ et

$$|\Psi(z)| \leqslant C(1+|z|^{sk}), \quad (\forall z \in \Omega'),$$

où Cet s sont des constantes réelles strictement positives ne dépendant que de $\tilde{A}$.

-Preuve : On peut donc choisir, d'après le Lemme 2 page 27, un changement de coordonnées unitaire et une projection $\pi : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}_1, \quad \pi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1$, propre telle que $\pi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Comme $\tilde{A}$ est algébrique, d'après la Proposition 1 page 20, il existe deux constantes réelles strictement positives C, s telles que :

$$(|\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(1+|\xi_1|^s). \tag{1.4}$$

La projection π est propre et $\tilde{A}$ est algébrique de dimension complexe 1, donc il existe $\sigma_1 \subset \mathbb{C}_1$ un sous-ensemble fini contenant 0 (car $0 \in \tilde{A}_{sing}$) de sorte que :

$$\pi : \tilde{A} \setminus \pi^{<-1>}(\sigma_1) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \sigma_1$$

soit un r-revêtement holomorphe ($r \in \mathbb{N}^\star$), avec

$$\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_1, \quad \text{card } \left(\pi^{<-1>}(z_1) \cap \tilde{A}\right) = r.$$

Donc pour tout $z_1 \in \mathbb{C}_1 \setminus \sigma_1$, il existe de $V_{z_1,j}$, $(\forall j \in \{1, \ldots, r\})$ des ouverts de $\tilde{A} \setminus \pi^{<-1>}(\sigma_1)$ et $W_{z_1} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}_1}(z_1)$ (voisinage ouvert de z_1 de $\mathbb{C}_1$) avec $\alpha_{z_1,j}$ des fonctions holomorphes dans W_{z_1}, $\quad (\forall j \in \{1, \ldots, r\})$.

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{z_1,j} : & W_{z_1} & \longrightarrow & V_{z_1,j} \\ & \xi & \longmapsto & (\xi, \alpha_{z_1,j}(\xi)). \end{array}$$

Posons $\Omega = \mathbb{C}_1 \setminus \Delta$, où Δ est un ensemble fini de demi-droites de $\mathbb{C}_1$ ayant pour origine tous les points de σ_1, contenant en particulier $[0, +\infty[$, rendant ainsi Ω simplement connexe[1]. En appliquant le Théorème de la monodromie, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des fonctions holomorphes dans Ω telles que :

$$(\forall z_1 \in \Omega), \ (\exists W_{z_1} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}_1}(z_1)), \ (\forall j \in \{1, \ldots, r\}), \quad \alpha_j|_{W_{z_1}} = \alpha_{z_1,j}.$$

[1]L'auteur remercie Julien Duval pour cette idée.

Comme la projection $\pi : \tilde{A} \to \mathbb{C}_1$ est propre, alors il existe U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$, où $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ tel que la projection :

$$\begin{array}{rccc} \pi|_U : & \tilde{A} \cap U & \longrightarrow & U' \\ & (\xi_1, \dots, \xi_n) & \longmapsto & \xi_1 \end{array}$$

soit une application propre et vérifie $\pi^{<-1>}(0) \cap \tilde{A} \cap U = \{0\}$, cette dernière assertion est possible car σ_1 est un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}_1$. Le sous-ensemble algébrique $\tilde{A} \cap U$ est irréductible, car la courbe algébrique réelle A est supposée localement irréductible cf. ([15], Proposition 2, Page 92). D'après le théorème de structure locale des sous-ensembles analytiques, il existe $\sigma_2 \subset \mathbb{C}_1$ ($\sigma_2 \subset \sigma_1$) fini tel que $\pi : (\tilde{A} \cap U) \setminus \pi^{<-1>}(\sigma_2) \longrightarrow \mathbb{C}_1 \setminus \sigma_2$ soit un k-revêtement holomorphe ramifié ($k \in \mathbb{N}^\star$). Construisons la paramétrisation de Puiseux associée à la singularité 0 de $\tilde{A}$ à partir de la projection $\pi|_U$ comme dans la Proposition 2 page 21. Notons cette paramétrisation :

$$\varphi(z) = (cz^k, \psi(z)), \quad (\forall z \in \overline{D(0,1)}),$$

Considérons les secteurs suivants :

$$\mathcal{S}_j := \left\{ z \in D'(0,1) : \frac{2\pi j}{k} < \arg(z) \leqslant \frac{2\pi(j+1)}{k} \right\}, \quad (\forall j \in \{0, \dots, k-1\}),$$

où $k = \mu_0(\tilde{A})$ et $\overline{D'(0,1)} = \overline{D(0,1)} \setminus \{0\}$.

Posons les changements de coordonnées locales suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \theta_j : & \overline{D'(0,1)} & \longrightarrow & \mathcal{S}_j \\ & \xi & \longmapsto & (\frac{\xi}{c})^{\frac{1}{k}} \end{array}.$$

Les fonctions θ_j sont holomorphes dans $\overline{D'(0,1)}$. Posons :

$$\mathcal{S}'_j = \mathcal{S}_j \setminus \Delta_j, \ \Delta_j := \theta_j(\Delta) \text{ et } \Omega_j := \theta_j(\Omega),$$

on a l'inclusion suivante $\Omega_j \subset \mathcal{S}'_j$ et d'après le Théorème de l'image ouverte, Ω_j est ouvert. Il est clair que $\mathcal{S}'_j$ paramétrise par θ_j dans $\overline{D(0,1)} \setminus \Delta \subset \overline{D'(0,1)}$. Donc la fonction $\varphi \circ \theta_j$ paramétrise un morceau d'une feuille au-dessus de $\overline{D(0,1)} \setminus \Delta \subset \mathbb{C}_1$.

On en déduit l'existence d'un α_{i_j}, tel que $\psi \circ \theta_j = \alpha_{i_j}$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \Delta$. Comme par construction la fonction α_{i_j} est holomorphe dans $\Omega \supset \overline{D(0,1)} \setminus \Delta$, donc la fonction ψ se prolonge sur l'ouvert Ω_j en une fonction ψ_j holomorphe dans Ω_j. De l'inégalité (1.4) on déduit que :

$$|\psi_j(z)| \leqslant c_j(1+|z|)^{sk}, \quad (\forall z \in \Omega_j),\ (\forall j \in \{0,\dots,k-1\}).$$

Comme les prolongées ψ_j coïncident sur $\Omega_j \cap \overline{D(0,1)}$ avec ψ, alors d'après le Théorème du prolongement analytique, ψ se prolonge sur l'ouvert Ω' défini par :

$$\Omega' = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k-1} \Omega_j.$$

Soit Ψ sa prolongée, elle vérifie donc :

$$\forall z \in \Omega', \quad |\Psi(z)| \leqslant c(1+|z|^{sk}),$$

avec $\overline{\Omega'} = \mathbb{C}_1$. ■

Dans le corollaire suivant, nous démontrons, une version globale du théorème des fonctions implicites.

Corollaire 3 *Soient A une courbe algébrique réelle de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible et x_0 dans $\tilde{A}_{reg}$ fixé. Modulo un changement de coordonnées unitaire laissant A dans $\mathbb{R}^n$, il existe une paramétrisation holomorphe $\varphi(z) = (cz, \psi(z))$, telle que $\varphi : \overline{D(0,1)} \to \tilde{A} \cap U$, où $U = \varphi(\overline{D(0,1)})$ et $\varphi([-1,1]) = A \cap U$. Cette paramétrisation se prolonge dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ partout dense, telle que :*

$$|\psi(z)| \leqslant c(1+|z|^s), \quad (\forall z \in \Omega),$$

où c et s sont des constantes réelles strictement positives dépendant uniquement de la courbe A.

Étant donné la forte similitude de cette démonstration avec celle de la Proposition 4 page 31, nous omettrons volontairement les détails.

-Preuve : D'après le Lemme 2 page 27, il existe un changement de coordonnées unitaire laissant A dans $\mathbb{R}^n$, tel que la projection,

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & \tilde{A} & \longrightarrow & \mathbb{C}_1 \\ & & (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto & z_1 , \end{array}$$

soit propre. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $x_0 = 0$ et $0 \in A_{reg}$. Il existe σ un sous-ensemble, formé de points isolés, inclus dans $\mathbb{C}$, tel que

$$\pi : \tilde{A} \setminus \pi^{<-1>}(\sigma) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \sigma,$$

soit un r-revêtement ramifié. En opérant de la même manière qu'à la Proposition 4 du page 31, il existe un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ partout dense et simplement connexe et des fonctions α_j $(j \in \{1, \dots, r\})$ holomorphes dans Ω telle que $\psi = \alpha_j|_{D(0,1)}$. Comme la projection π est propre et que la courbe $\tilde{A}$ est algébrique, on a, d'après la Proposition 1 page 20, on a l'estimation suivante :

$$|\psi(z)| \leqslant c(1 + |z|^s), \quad (\forall z \in \Omega),$$

d'où le Corollaire souhaité. ■

1.4 Estimation de la fonction extrémale

Nous allons estimer la fonction de Green avec pôle à l'infini sur un voisinage de la courbe algébrique réelle.

Nous conviendrons, dans ce qui suit, que les hypothèses sur la courbe algébrique A sont les mêmes que dans la Proposition 4 page 31 et que la paramétrisation de Puiseux φ construite identiquement à la Proposition 2 page 21, donc prolongeable comme dans la Proposition 4.

Proposition 5 *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible, modulo un changement de coordonnées unitaire laissant A dans $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes réelles c_1, c_2, ε_0 et ρ_1 strictement positives dépendant uniquement de φ, où $\varepsilon_0 < \rho_1$, telles que :* $(\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[)$, $(\forall z \in D(0, \rho_1))$,

$$V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}\circ\varphi(z)\leqslant c_2 V_{\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>}}(z),$$
$$\left(resp.\ V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}\circ\varphi(z)\leqslant c_2 V_{\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^->}}(z),\right) \tag{1.5}$$

avec

$$\mathcal{R}^{<r_A^+>}=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant r_A^+}\left[0,e^{\frac{2ik_j\pi}{k}}\right],\ \left(resp.\ \mathcal{R}^{<r_A^->}=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant r_A^-}\left[0,e^{\frac{2ik'_j\pi}{k}}\right],\right)$$

où $k=\mu_0(\tilde{A})$, r_A^+ *(resp.* r_A^-*) est le nombre de composantes connexes de* $A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)\cap\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\Re e(z_1)>0\}$ *(resp. le nombre de composantes connexes de* $A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)\cap\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n:\Re e(z_1)<0\}$ *). Les ensembles* $\mathcal{R}^{<r_A^+>}$ *et* $0\leqslant k_1<\dots<k_{r_A^+}\leqslant k$ *(resp.* $\mathcal{R}^{<r_A^->}$ *et* $0\leqslant k'_1<\dots<k'_{r_A^-}\leqslant k$*) sont construits comme dans la Proposition 2 page 21.*

-Preuve : Montrons l'estimation (1.5) pour $\mathcal{R}^{<r_A^+>}$ seulement, la démonstration est identique pour $\mathcal{R}^{<r_A^->}$. Notons la paramétrisation de Puiseux :

$$\varphi(z)=(cz^k,\psi_2(z)\dots,\psi_n(z)),\ (\forall z\in\overline{D(0,1)}),$$

comme dans la Proposition 2 page 21. Soit $\varepsilon_0\in]0,1[$, il existe une constante réelle $c_1>0$, dépendant de c et des ψ_l, telle que $\varphi(\overline{D(0,\varepsilon)})\subset B(0,c_1\varepsilon^k)$, pour tout ε dans $]0,\varepsilon_0[$.

Notons les inclusions suivantes : $(\forall\varepsilon\in]0,\varepsilon_0[)$,

$$\varphi(\mathcal{R}^{<r_A^+>})\subset A,\quad \varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>})\subset A\cap\varphi(\overline{D(0,\varepsilon)})\subset A\cap B(0,c_1\varepsilon^k). \tag{1.6}$$

Ce qui nous donne :

$$L_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n)\subset L_{A\cap\varphi(D(0,\varepsilon))}(\mathbb{C}^n)\subset L_{\varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>})}(\mathbb{C}^n).$$

Nous allons directement majorer la fonction $V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}$. D'après la Proposition 4 page 31, la fonction φ se prolonge holomorphiquement dans l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ partout dense, telle que :

$$\max_{2\leqslant j\leqslant n}|\psi_j(z)|\leqslant C\left(1+\left|z^k\right|^s\right),\quad(\forall z\in\Omega).\qquad(\diamond)$$

Montrons que $A \cap B(0, c_1\varepsilon^k)$ n'est pas pluripolaire dans $\tilde{A}$, pour cela étudions $\varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>})$. Soit le segment $L_{\alpha,\varepsilon} = e^{\frac{2i\theta\pi}{k}} \cdot [\alpha, \varepsilon]$ tel que $0 < \alpha < \varepsilon$ et $L_{\alpha,\varepsilon} \subset \varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>}$. Notons $D(0,1)' = D(0,1) \setminus \{0\}$, par définition de φ on a : $\varphi'(z) \neq 0$, $(\forall z \in D(0,1)')$. Quitte à prendre α plus proche de ε, d'après le Théorème des fonctions implicites, on peut supposer qu'il existe un ouvert $\tilde{U}$ de Ω tel que :

$$\varphi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V} \text{ soit un biholomorphisme, avec } L_{\alpha,\varepsilon} \subset \tilde{U} \subset D(0,1)',$$

où $\tilde{V} = \varphi(\tilde{U}) \subset \tilde{A}$. Supposons que $K_{\alpha,\varepsilon} = \varphi(L_{\alpha,\varepsilon})$ soit pluripolaire dans $\tilde{V}$, donc, il existe $u \in PSH(\tilde{V})$, telle que $u \not\equiv -\infty$ et $u|_{K_{\alpha,\varepsilon}} = -\infty$. Il s'ensuit que $u \circ \varphi$ est sousharmonique dans $\tilde{U}$ telle que $u \circ \varphi \not\equiv -\infty$ et $u \circ \varphi|_{L_{\alpha,\varepsilon}} = -\infty$. On conclut que $L_{\alpha,\varepsilon}$ est polaire, ce qui est une contradiction étant donné que $L_{\alpha,\varepsilon}$ est un continu de $\mathbb{C}$. Par conséquent, $\varphi(L_{\alpha,\varepsilon})$ n'est pas pluripolaire dans $\tilde{A}$. Comme $L_{\alpha,\varepsilon} \subset \varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>}$, on affirme que $\varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>})$ n'est pas pluripolaire dans $\tilde{A}$, donc $A \cap B(0, c_1\varepsilon^k)$ n'est pas pluripolaire dans $\tilde{A}$.

D'après le critère de Sadullaev, $V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}$ est dans $L^\infty_{loc}(\tilde{A})$, car $\tilde{A}$ est algébrique c.f. ([18], Page 497, Théorème 2.2) et donc d'après ([18],Page 501, Proposition 3.4) il existe une constante réelle $C_{A,\varepsilon} > 0$ telle que :

$$V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(z) \leqslant C_{A,\varepsilon} + \log(1 + |z|), \quad (\forall z \in \tilde{A}).$$

Soit $u \in L_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n))$:

$$u \circ \varphi(z) \leqslant C_{\varphi,A,\varepsilon} + ks \log(1 + |z|), \quad (\forall z \in \Omega), \qquad (\diamond\diamond)$$

où le réel ks est celui de l'estimation $(\diamond)$ ci-avant.

Soient ρ une constante réelle dans $]\varepsilon_0, 1[$ et H_ρ la fonction définie comme ci-dessous :

$$H_\rho(z) := ks \cdot \log^+\left(\frac{|z|}{\rho}\right), \quad (\forall z \in \mathbb{C}), \ (\forall \rho \in]\varepsilon_0, 1[),$$

où

$$x^+ := \max(0, x), \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

La fonction H_ρ est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$, $(\forall \rho > 0)$ et vérifie les propriétés ci-dessous :

1. $H_\rho(z) = 0, \quad \forall z \in D(0,\rho)\,, \; (\forall \rho \in \,]\varepsilon_0, 1[)$.
2. $H_\rho(z) \geqslant -ks \cdot \log \rho, \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0,1)),\; (\forall \rho \in \,]\varepsilon_0, 1[)$.
3. $H_\rho(z) \leqslant c_\rho + ks \cdot \log(1+|z|), \quad (\forall z \in \mathbb{C})$, où c_ρ est une constante réelle strictement positive.

Les assertions 1., 2. et 3. sont immédiates à montrer. Maintenant, nous allons prouver que l'on peut choisir ρ dans $]\varepsilon_0, 1[$ de sorte que :

$$H_\rho(z) \geqslant u \circ \varphi(z), \quad (\forall u \in L_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n)),\; (\forall z \in \Omega \setminus D(0,1)). \qquad (\diamond\diamond\diamond)$$

Pour cela minorons $\Delta_\rho(z) := H_\rho(z) - u\circ\varphi(z)$ dans $\Omega \setminus D(0,1)$, pour le moment ρ est fixé dans $]\varepsilon_0, 1[$. En réorganisant les termes et l'estimation $(\diamond\diamond)$, on a la minoration suivante :

$$\Delta_\rho(z) \geqslant -ks \cdot \log(\rho) - C_{\varphi,A,\varepsilon} - ks \cdot \log(2), \quad (\forall z \in \Omega \setminus D(0,1)).$$

Si $\rho < \frac{1}{2} e^{-\frac{C_{\varphi,A,\varepsilon}}{sk}}$, on a bien $\Delta_\rho(z) \geqslant 0,\; (\forall z \in \Omega \setminus D(0,1))$. Quitte à diminuer $\varepsilon_0 > 0$, on peut choisir ρ_1 dans $]\varepsilon_0, 1[\cap \left]0, \frac{1}{2} e^{-\frac{C_{\varphi,A,\varepsilon}}{sk}}\right[$, tel que $\Delta_{\rho_1}(z) \geqslant 0$ pour tout z dans $\Omega \setminus D(0,1)$.

Comme $\overline{D(0,1)}$ est dans l'ouvert Ω, ceci d'après la Proposition 4 page 31 et que l'estimation $(\diamond\diamond\diamond)$ est valide pour $\rho = \rho_1$, on a

$$\limsup_{\zeta \to z, \zeta \in \Omega} u \circ \varphi(\zeta) \leqslant H_{\rho_1}(z), \quad (\forall z \in \partial\Omega),$$

donc d'après ([12], Corollaire 2.9.14, page 69), la fonction :

$$W_{\rho_1}(z) = \begin{cases} \max(u\circ\varphi(z), H_{\rho_1}(z)), & z \in \Omega \\ H_{\rho_1}(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \end{cases}$$

est bien définie et sous-harmonique dans $\mathbb{C}$. De plus $\frac{1}{ks} W_{\rho_1} \in L_{\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>}}(\mathbb{C}^n)$ et $W_{\rho_1}|_{D(0,\rho_1)} = u \circ \varphi$, ceci d'après les propriétés de H_{ρ_1}, énoncées plus haut, 1. et 3..

Il s'ensuit que

$$u \circ \varphi(z) \leqslant W_{\rho_1}(z) \leqslant ks V_{\varepsilon\mathcal{R}^{<k>}}(z), \quad (\forall z \in D(0,\rho_1)).$$

Nous concluons donc

$$u \circ \varphi(z) \leqslant ksV_{\varepsilon\mathcal{R}^{<r_A^+>}}(z), \quad (\forall z \in D(0,\rho_1)),\ (\forall u \in L_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n)). \quad \blacksquare$$

Pour ne pas alourdir la démonstration de la Proposition 5, nous n'avons pas détaillé l'hypothèse où la multiplicité k prend la valeur 1. Rappelons que nous avons supposé que 0 est un point de A_{sing}, donc nécessairement la multiplicité k du point 0 est supérieur ou égal à 2. Ceci dit, l'obtention de l'estimation (1.5), pour les points non singuliers de A, ne diffère pas quant aux techniques de démonstration utilisées, il faut seulement substituer la Proposition 4 page 31 au Corollaire 3 page 34. C'est pourquoi, il ne nous semble pas nécessaire de démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 4 *Soit A une courbe algébrique localement irréductible de $\mathbb{R}^n$, telle que $0 \in A_{reg}$. Modulo un changement de coordonnées unitaires laissant A dans $\mathbb{R}^n$, ils existent des constantes ε_0, ρ, c_1 et c_2 réelles strictement positives dépendant de la paramétrisation $\varphi(z) = (cz, \psi(z))$ du Corollaire 3 page 34, telles que*

- *si $0 \in A_{reg} \setminus \partial A$,*

$$(\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[),\ (\forall z \in D(0,\rho)),\ V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon)} \circ \varphi(z) \leqslant c_2 V_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(z) \tag{1.7}$$

- *si $0 \in A_{reg} \cap \partial A$,*

$$(\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[),\ (\forall z \in D(0,\rho)),\ V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon)} \circ \varphi(z) \leqslant c_2 V_{[0,\varepsilon]}(z). \tag{1.8}$$

Lemme 3 *Soient b un nombre complexe appartenant à εI, $|b| \neq \varepsilon$ $\quad (I = [-1, 1] \subset \mathbb{C})$ et r strictement positif tel que $r < \varepsilon - |b|$. Alors :*

$$\sup_{D(b,r)} V_{\varepsilon I} \leqslant c \log(1 + r),$$

où $c = \max\left\{1, \frac{2}{dist(b,\varepsilon\partial I)}\right\}$.

-Preuve : Sans perdre de généralité, on peut supposer b strictement positif. Pour démontrer le lemme ci-dessus il suffit d'estimer $\sup_{D(0,r)} V_{I'}$ où $I' = [2b - \varepsilon, \varepsilon]$. On a :

$$\sup_{D(0,r)} V_{I'} = \log\left(\frac{ir}{\varepsilon - b} + \sqrt{\left(\frac{ir}{\varepsilon - b}\right)^2 - 1}\right).$$

Nous rappelons que la fonction de Green avec pôle a l'infini sur le segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$ est connue :

$$V_{[-1,1]}(z) = \log^+ \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|, \quad (\forall z \in \mathbb{C}). \quad \blacksquare$$

Lemme 4 *La fonction $V_{[-1,1]}$ vérifie la propriété de continuité de Hölder avec un exposant $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire :*

$$(\forall \delta \in [0,1])(\forall z \in \mathbb{C},\ dist([-1,1], z) \leqslant \delta) \Longrightarrow V_{[-1,1]}(z) \leqslant C\delta^{\frac{1}{2}} \quad (HCP)$$

où C est une constante réelle strictement positive.

-Preuve : Nous ne donnerons la démonstration qui pourra être trouvée dans ([16]) ou dans le livre de M.Klimek ([12]). $\blacksquare$

1.4.1 Métrique des géodésiques et continuité de Hölder dans le sous-ensemble algébrique $\tilde{A}$

Définissons la métrique des géodésiques dans $\tilde{A}$. Considérons l'ensemble $\left(\mathfrak{S}_{[0,1]}, \preccurlyeq\right)$ des subdivisions de l'intervalle $[0,1]$ muni de la relation d'ordre suivante :

$$(\forall \sigma,\ \tau \in \mathfrak{S}_{[0,1]}),\ (\sigma \preccurlyeq \tau) \Longleftrightarrow \text{ (la subdivision } \sigma \text{ est moins fine que } \tau).$$

Maintenant, si γ est une fonction de $[0,1]$ dans $\tilde{A}$ et σ est une subdivision dans $\mathfrak{S}_{[0,1]}$, nous définirons $V_\sigma(\gamma)$ de la sorte :

$$V_\sigma(\gamma) := \sum_{j=0}^{j=p-1} \left\| \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) \right\|_2, \quad \sigma = (t_0, \ldots, t_p), \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]}),$$

où $\|z\|_2 := (\sum_{j=1}^{j=n} |z_j|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n)$. Définissons le sous-ensemble des fonctions à variation bornée ci-dessous :

$$CVB^{(\xi_1,\xi_2)}([0,1], \tilde{A}) := \left\{ \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \tilde{A}) : \gamma(0) = \xi_1,\ \gamma(1) = \xi_2,\ \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]}} V_\sigma(\gamma) < +\infty \right\},$$

où $\mathcal{C}^0([0,1], \tilde{A})$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\tilde{A}$. On peut définir, désormais, une métrique dans $\tilde{A}$ de cette manière,

$$d(\xi_1, \xi_2) := \inf \left\{ V(\gamma) : \gamma \in CVB^{(\xi_1,\xi_2)}([0,1], \tilde{A}) \right\}, \quad (\forall \xi_1,\ \xi_2 \in \tilde{A}),$$

où

$$V(\gamma) := \sup\left\{V_\sigma(\gamma) : \sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]}\right\}.$$

Il est clair que $d(\cdot,\cdot)$ définit bien une métrique dans $\tilde{A}$.

Lemme 5 *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible et ξ_0 un point fixé dans A ; On considère l'espace métrique $(\tilde{A}, d)$, où $d(\cdot,\cdot)$ est la métrique des géodésiques dans $\tilde{A}$ et $\varphi(z) = (cz^k, \psi(z))$ la paramétrisation de Puiseux de la Proposition 2 page 21, telle que $\varphi : D(0,1) \to U$, $\varphi(0) = \xi_0$ et $U \subset \tilde{A}$ ouvert.*

- • *Si ξ_0 dans $\tilde{A}_{reg}$, il existe c_1 et c_2 des constantes réelles strictement positives ne dépendant que de φ telles que,*

$$c_1\,|\hat{z}_1 - \hat{z}_2| \leqslant d(\varphi(\hat{z}_1), \varphi(\hat{z}_2)) \leqslant c_2\,|\hat{z}_1 - \hat{z}_2|\,, \quad (\forall \hat{z}_1, \hat{z}_2 \in D(0,1)). \tag{1.9}$$

- • *Si ξ_0 est dans $\tilde{A}_{sing}$, on peut rétrécir le voisinage U de ξ_0 de sorte que $\tilde{A}_{sing} \cap U = \{\xi_0\}$ tel que,*

$$c_1\,|\hat{z}_1|^k \leqslant d(\varphi(0), \varphi(\hat{z}_1)) \leqslant c_2\,|\hat{z}_1|^k\,, \quad (\forall \hat{z}_1 \in D(0,1)), \tag{1.10}$$

où k est la multiplicité complexe du point singulier ξ_0 de $\tilde{A}$.

-Preuve : Commençons par démontrer (1.9). Soient $\xi_0 \in \tilde{A}_{reg}$ et $\varphi : D(0,1) \to U$ la paramétrisation de Puiseux. Fixons $\hat{z}_1$ et $\hat{z}_2$ dans $D(0,1)$. Choisissons γ dans $CVB^{(\varphi(\hat{z}_1),\varphi(\hat{z}_2))}([0,1],\tilde{A})$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]}$, telle que $\sigma = (t_0,\ldots,t_p)$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\xi_0 = 0$. Posons $\xi_k = \gamma(t_k)$, $\forall k \in \{0,\ldots,p\}$. Comme φ est surjective, il existe $z_0,\ldots,z_p$ dans $D(0,1)$ tels que $z_0 = \hat{z}_1$, $z_p = \hat{z}_2$ et $\xi_k = \varphi(z_k)$, $\forall k \in \{0,\ldots,p\}$. Nous avons l'égalité suivante :

$$\xi_{k+1} - \xi_k = \varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(tz_{k+1} + (1-t)z_k)dt.$$

D'où

$$\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|_2 = |z_{k+1} - z_k| \left\| \int_0^1 \varphi'(tz_{k+1} + (1-t)z_k)dt \right\|_2$$

et donc

$$\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|_2 = |z_{k+1} - z_k| \left(\sum_{j=1}^{j=n} \left| \int_0^1 \varphi_j'(tz_{k+1} + (1-t)z_k)dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où les φ_j sont les fonctions composantes de φ. Étant donné que ξ_0 n'est pas un point singulier, il existe une constante strictement positive c_1 dépendant de φ telle que :

$$\left(\sum_{j=1}^{j=n} \left| \int_0^1 \varphi_j'(tz_{k+1} + (1-t)z_k)dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant c_1.$$

Donc on a

$$V_\sigma(\gamma) \geqslant c_1 |z_p - z_0| = c_1 |\hat{z}_2 - \hat{z}_1|, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]},\ \forall \gamma \in CVB^{(\varphi(\hat{z}_1),\varphi(\hat{z}_2))}([0,1], \tilde{A}).$$

Il en résulte que

$$d(\varphi(\hat{z}_1), \varphi(\hat{z}_2)) \geqslant c_1 |\hat{z}_1 - \hat{z}_2|.$$

Pour l'autre inégalité , il suffit de voir que par définition de la métrique $d(\cdot,\cdot)$, on a

$$d(\varphi(\hat{z}_1), \varphi(\hat{z}_2)) \leqslant \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt}\varphi(t\hat{z}_1 + (1-t)\hat{z}_2) \right\|_2 dt \leqslant c_2 |\hat{z}_1 - \hat{z}_2|,$$

car ξ_0 est un point régulier de $\tilde{A}$, d'où l'inégalité (1.9).

Montrons maintenant l'estimation (1.10). Supposons que ξ_0 est dans $\tilde{A}_{sing}$. On peut prendre $\xi_0 = 0$ sans perdre en généralité. La paramétrisation de Puiseux s'écrit :

$$\varphi(z) = (cz^k, \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z)),$$

où les fonction ψ_l sont holomorphes dans $D(0,1)$ telles que $ord_0(\psi_l) > k$.Pour faciliter la lecture des calculs nous noterons $k_l(0)$ l'ordre de $ord_0(\psi_j)$. Rappelons que nous avons $U \cap \tilde{A}_{sing} = \{0\}$.

Nous allons commencer par montrer qu'il existe ρ dans $]0,1[$ tel que,

$$\|\varphi(z)\|_2 \geqslant c_\varphi |z|^k, \quad \forall z \in D(0,\rho),$$

Les fonctions composantes ψ_l sont holomorphes dans $D(0,1)$, on peut donc les développer en série :

$$\psi_l(z) = \sum_{j=k_l(0)}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j}\psi_l(0)z^k,$$

En factorisant par $z^{k_l(0)}$ et en appliquant les inégalités triangulaires, on obtient :

$$|\psi_l(z)| \geqslant \left|z^{k_l(0)}\right| \left(\frac{1}{k_l(0)!} \left| \frac{\partial^{k_l(0)}}{\partial z^{k_l(0)}} \psi_l(0) \right| - \left| \sum_{j=k_l(0)+1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(0) z^j \right| \right), \quad (\forall z \in D(0,1)). \qquad (\diamond)$$

Avec les inégalités de Cauchy :

$$\left| \sum_{j=k_l(0)+1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(0) z^j \right| \leqslant \sum_{j=k_l(0)+1}^{\infty} \rho^{j-k_l(0)} \left\|\psi_l\right\|_{D(0,1)}, \quad (\forall z \in D(0,\rho)),$$

où la constante ρ est dans l'intervalle $]0,1[$, on obtient l'estimation ci-dessous :

$$\left| \sum_{j=k_l(0)+1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(0) z^j \right| \leqslant \left\|\psi_l\right\|_{D(0,1)} \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Si maintenant, nous faisons tendre $\rho \to 0$ le membre de gauche tend à son tour vers 0, il existe donc $\rho_l \in]0,1[$, tel que

$$\left| \sum_{j=k_l(0)+1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(0) z^j \right| \leqslant \frac{1}{2k_l(0)!} \left| \frac{\partial^{k_l(0)}}{\partial z^{k_l(0)}} \psi_l(0) \right|, \quad (\forall z \in D(0,\rho_l)), \qquad (\diamond\diamond)$$

sachant $\frac{\partial^{k_l(0)}}{\partial z^{k_l(0)}} \psi_l(0) \neq 0$, car $k_l(0) = ord_0(\psi_l)$. En introduisant $(\diamond\diamond)$ dans $(\diamond)$, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|\psi_l(z)| \geqslant |z|^{k_l(0)} \frac{1}{2k_l(0)!} \left| \frac{\partial^{k_l(0)}}{\partial z^{k_l(0)}} \psi_l(0) \right|, \quad (\forall l \in \{1, \ldots, n\}), \ (\forall z \in D(0,\rho_l)),$$

Si l'on pose $\rho = \min_{1 \leqslant l \leqslant n}(\rho_l)$, il s'ensuit

$$\sqrt{\left|cz^k\right|^2 + |\psi_2(z)|^2 + \cdots + |\psi_n(z)|^2} \geqslant c\,|z|^k, \quad \forall z \in D(0,\rho). \qquad (1.11)$$

Fixons $\hat{z}_1$ dans $D(0,1)$, soit γ un chemin de $CVB^{(0,\varphi(\hat{z}_1))}([0,1], \tilde{A})$. Choisissons $\sigma = (t_0, \ldots, t_p)$ une subdivision dans $\mathfrak{S}_{[0,1]}$. D'après la construction de la paramétrisation de Puiseux, dans la proposition 2 page 21, il existe $z_0, \ldots, z_p$ dans $D(0,1)$, tels que $\varphi(z_j) = \gamma(t_j)$, pour tout j dans $\{0, \ldots, p\}$ avec $|z_j| < |z_{j+1}|$ et $z_p = \hat{z}_1$.

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{j=0}^{j=p-1} \left\|\varphi(z_{j+1}) - \varphi(z_j)\right\|_2.$$

On peut trouver une subdivision σ_0 de $\mathfrak{S}_{[0,1]}$ plus fine que σ de sorte que z_1 soit dans $D(0,\rho)$. Donc d'après l'estimation (1.11) on a

$$V_{\sigma_0}(\gamma) \geqslant c\,|z_1|^k + \sum_{j=1}^{j=p-1} \|\varphi(z_{j+1}) - \varphi(z_j)\|_2 \,, \tag{1.12}$$

repensant que $z_0 = 0$.

Il nous reste à minorer les termes de la somme (1.12). Nous avons,

$$\varphi(z_{j+1}) - \varphi(z_j) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(tz_{j+1} + (1-t)z_j)dt, \quad (\forall j \in \{1, \ldots, p-1\}),$$

d'où

$$\|\varphi(z_{j+1}) - \varphi(z_j)\|_2 = |z_{j+1} - z_j| \left(\sum_{l=1}^{l=n} \left| \int_0^1 \varphi_l'(tz_{j+1} + (1-t)z_j)dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où les φ_l sont les fonctions composantes de φ, donc

$$\|\varphi(z_{j+1}) - \varphi(z_j)\|_2 \geqslant |z_{j+1} - z_j| \left| \int_0^1 k(tz_{j+1} + (1-t)z_j)^{k-1}dt \right|.$$

En conclusion,

$$\|\varphi(z_{j+1}) - \varphi(z_j)\|_2 \geqslant \left|(z_{j+1})^k - (z_j)^k\right| \geqslant |z_{j+1}|^k - |z_j|^k, \quad \forall j \in \{1, \ldots, p-1\},$$

car $|z_j| < |z_{j+1}|,\ \forall j \in \{0, \ldots, p-1\}$. En reportant l'inégalité ci-dessus dans l'estimation (1.12), on obtient

$$V_{\sigma_0}(\gamma) \geqslant \min(c,1)\,|z_p|^k = \min(c,1)\,|\hat{z}_1|^k .$$

L'inégalité ci-dessus est encore vraie pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]},\ \sigma \succcurlyeq \sigma_0$; d'où

$$V(\gamma) \geqslant \min(c,1)\,|\hat{z}_1|^k .$$

Nous pouvons conclure

$$d(0, \varphi(\hat{z}_1)) \geqslant c_1\,|\hat{z}_1|^k, \quad c_1 = \min(c,1).$$

En ce qui concerne l'autre inégalité, il suffit de remarquer que nous avons,

$$d(0, \varphi(\hat{z}_1)) \leqslant \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt}\varphi(t\hat{z}_1) \right\|_2 dt,$$

et ceci par la construction même de la métrique d. Par un calcul similaire aux précédents, nous déduisons que

$$\int_0^1 \left\| \frac{d}{dt}\varphi(t\hat{z}_1) \right\|_2 dt \leqslant c_2 \left|\hat{z}_1\right|^k ,$$

où c_2 est une constante ne dépendant que de φ. ■

Nous allons démontrer maintenant que la fonction extrémale $V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon^k)}$ vérifie la propriété (HCP) dans $\tilde{A}$, muni de la métrique des géodésiques définie dans ce paragraphe.

Proposition 6 *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible muni de la métrique des géodésiques $d(\cdot,\cdot)$ dans $\tilde{A}$. Alors, la fonction extrémale vérifie la principe de continuité de Hölder locale dans $\tilde{A}$, pour la métrique $d(\cdot,\cdot)$. Plus précisément :*

$(\exists\varepsilon_0,\ \mu_0 \in]0,1[)$ dépendant de x_0, tels que $(\forall\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[)$, $(\forall\mu \in]0,\mu_0[)$:

- • *Si $x_0 \in A_{sing}$,*

$$V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon^k)}(\xi) \leqslant C(x_0)\mu^{\frac{1}{2k}}, \quad (\forall\xi \in B_{\tilde{A}}(x_0,\varepsilon^k\mu)), \tag{1.13}$$

où k est la multiplicité complexe du point singulier x_0 dans $\tilde{A}$.

- • *Si $x_0 \in A_{reg} \cap \partial A$,*

$$V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon)}(\xi) \leqslant C(x_0)\mu^{\frac{1}{2}}, \quad (\forall\xi \in B_{\tilde{A}}(x_0,\varepsilon\mu)). \tag{1.14}$$

- • *Si $x_0 \in A_{reg} \setminus \partial A$,*

$$V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon)}(\xi) \leqslant C(x_0)\mu, \quad (\forall\xi \in B_{\tilde{A}}(x_0,\varepsilon\mu)). \tag{1.15}$$

Avec $B_{\tilde{A}}(x_0,r) := \left\{\xi \in \tilde{A} : d(x_0,\xi) < r\right\}$, r est un réel strictement positif et $C(x_0)$ une constante strictement positive localement supérieurement majorée.

-Preuve : Commençons par démontrer (1.13). Comme nous l'avons fait dans les démonstrations précédentes, nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que

$x_0 = 0$. D'après la Proposition 5 page 35, modulo un changement de coordonnées unitaire, il existe des constantes ρ, ε_0 et c_1, réelles, strictement positives dépendant seulement de la paramétrisation de Puiseux φ construite dans la Proposition 2 page 21, avec $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \rho < 1$.

Soit ξ dans $B_{\tilde{A}}(x_0, \varepsilon^k \mu)$, d'après le (1.13) du Lemme 5 page 41, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$|\hat{z}|^k \leqslant \frac{\varepsilon^k \mu}{c_1}, \text{ où } \varphi(\hat{z}) = \xi.$$

D'après le (1.5) de la Proposition 5 page 35, on a :$(\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0])$, $(\forall \theta \in \left\{ \frac{2k_j^\sigma \pi}{k} : j \in \{1, \ldots, r_A^\sigma\} \right\})$,

$$V_{A \cap B(0, \tilde{c}_1 \varepsilon^k)} \circ \varphi(z) \leqslant \tilde{c}_2 V_{\varepsilon \mathcal{R}^{<r_A^\sigma>}}(z) \leqslant \tilde{c}_2 V_{\varepsilon I}(e^{-i\theta} z), \quad (\forall z \in D(0, \rho)) \qquad (\square_1),$$

où $\sigma \in \{+, -\}$ et $0 < \varepsilon_0 < \rho$.

Choisissons $0 < \mu_0 < c_1$ de sorte que :

$$(\forall \mu \in]0, \mu_0]) \Longrightarrow (\frac{\mu}{c_1} < \rho^k),$$

donc

$$\left(\frac{|\hat{z}|}{\varepsilon} \right)^k < \frac{\mu}{c_1} < \rho^k.$$

Avec l'inégalité $(\square_1)$ et le Lemme 3 page 39, car on a choisit μ_0 de sorte que $\frac{\mu_0}{c_1} < 1$, nous déduisons :

$$V_{A \cap B(0, \widetilde{c}_1 \varepsilon^k)}(\xi) \leqslant \widetilde{c}_2 V_I \left(e^{-i\theta} \frac{\hat{z}}{\varepsilon} \right) \leqslant C \mu^{\frac{1}{2k}}.$$

Pour démontrer (1.14) la technique de démonstration est identique, en effet soit $\xi \in B_{\tilde{A}}(0, \varepsilon\mu)$, donc il existe $\hat{z} \in D(0,1)$ tel que $\varphi(\hat{z}) = \xi$. D'après le (1.9) du Lemme 5 page 41, on a $d(0, \xi) \geqslant c_1 |\hat{z}|$, d'où $|\hat{z}| \leqslant \frac{\varepsilon\mu}{c_1}$. On conclut avec le Lemme 4 page 40, on a :

$$V_{A \cap B(0, \widetilde{c}_1 \varepsilon)}(\xi) \leqslant \widetilde{c}_2 V_{\varepsilon I}(\hat{z}) \leqslant C \mu^{\frac{1}{2}}.$$

L'estimation (1.15) est identique à démontrer. ∎

1.5 Démonstration du théorème 1

Avant de démontrer le Théorème 1 page 17, nous avons besoin de ce Lemme.

Lemme 6 *Soit $\varphi : D(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application holomorphe définie dans le disque ouvert $D(0,r)$ de $\mathbb{C}$ ($r > 0$) telle que $\varphi(0) = 0$. Notons $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $k = \min_{1 \leqslant j \leqslant n}(ord_0(\varphi_j))$. Alors il existe un réel strictement positif r_0 qui dépend uniquement de l'application φ, tel que :* $(\forall p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n])$, $(\forall r \in]0, r_0[)$, $(\forall z \in D(0, \frac{r_0}{2}))$,

$$\frac{\left|\frac{\partial}{\partial z}(p \circ \varphi)(z)\right|}{\sqrt{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|\varphi_j'(z)\right|^2}} \leqslant \frac{c}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left|z + \frac{r}{2}e^{i\theta}\right|^{k-1}} \times \frac{\|p \circ \varphi\|_{D(0,r_0)}}{r}. \tag{1.16}$$

-Preuve : Les fonctions composantes de φ se développent en série entière car φ est holomorphe, donc : $\forall l \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi_l(\xi) = \sum_{k_l \leqslant j} a_{l,j}\xi^j, \quad k_l = ord_0(\varphi_l),\ k_l \geqslant 1$$

Comme $a_{l,k_l} \neq 0$ pour z assez proche de 0, il existe $r_l \in]0, 1[$ tel que :

$$|\varphi_l(\xi)| \geqslant c_{\varphi,l} \left|\xi\right|^{k_l - 1}, \quad \forall \xi \in D(0, r_l),$$

d'où

$$\|\varphi'(\xi)\|_2 \geqslant c_\varphi \left|\xi\right|^{k-1}, \quad \forall \xi \in D(0, r_0), \quad r_0 = \min_{1 \leqslant l \leqslant n}(r_l), \quad k = \min_{1 \leqslant j \leqslant n}(k_l).$$

Majorons $\left|\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p \circ \ \varphi)\right|$. Il est aisé de voir que la singularité en 0 est artificielle. Donc $\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p \circ \varphi)$ est holomorphe dans $D(0, r_0)$. Nous pouvons appliquer successivement la formule intégrale de Cauchy à $\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p \circ \varphi)$, afin d'obtenir les inégalités voulues.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p \circ \ \varphi)(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z,\frac{r}{2})} \frac{1}{\zeta^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\zeta,\frac{r}{2})} \frac{p \circ \varphi(\xi)}{(\zeta - \xi)^2}d\xi \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} &\frac{1}{(z + \frac{r}{2}e^{i\theta_2})^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{p \circ \varphi(z + \frac{r}{2}e^{i\theta_2} + \frac{r}{2}e^{i\theta_1})}{\frac{r}{2}e^{i\theta_1}}d\theta_1 d\theta_2, \\ &\forall r \in]0, r_0[, \quad \forall z \in D(0, \frac{r}{2}). \end{aligned}$$

D'où

$$\left|\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}p \circ \varphi(z)\right| \leqslant \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left|z + \frac{r}{2}e^{i\theta}\right|^{k-1}} \frac{\|p \circ \varphi\|_{D(z,r_0)}}{r}d\theta,$$

$$\forall r \in]0, r_0[, \quad \forall z \in D(0, \frac{r}{2}).$$

D'où l'estimation (1.16). ■

Commençons par démontrer 1. du Théorème 1.

-Preuve : Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et que $0 \in A_{sing}$.

Soit p un polynôme dans $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ fixé. Si $v \in C(A, 0)$ est un vecteur tangent unitaire, alors la branche de A tangente à v est paramétrisée par $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^+>}}$ ou $\varphi|_{\mathcal{R}^{<r_A^->}}$ (φ paramétrisation de Puiseux), ceci d'après la Proposition 2 de la page 21. On peut donc choisir l un entier dans $\{0, \ldots, k-1\}$, tel que le segment $[0, e^{i\frac{2l\pi}{k}}] \subset \mathcal{R}^{<r_A^+>} \cup \mathcal{R}^{<r_A^->}$ et $\varphi|_{[0,e^{i\frac{2l\pi}{k}}]}$ paramétrise la branche de A à laquelle le vecteur v est tangent. Pour des commodités d'écriture et de calculs, nous ne changerons rien au résultat voulu, si nous transformons le segment $[0, e^{i\frac{2l\pi}{k}}]$ en $[0, 1]$, par une rotation dans $\mathbb{C}$ d'angle $-\frac{2l\pi}{k}$ (bien évidemment $\mathbb{C}$ est orienté dans le sens direct). L'ensemble $\mathcal{R}^{<r_A^+>} \cup \mathcal{R}^{<r_A^->}$ n'est en rien modifié par cette rotation.

D'après l'inégalité (1.16) du Lemme 6, on a :

$$|D_v p(0)| \leqslant \frac{c}{r^k} \|p \circ \varphi\|_{D(0,r)}, \quad (\forall r \in]0, r_0]), \tag{1.17}$$

la constante r_0 est réelle strictement positive ne dépendant que de φ. D'après le (1.13) de la Proposition 6 page 45, il existe $\mu_0, \varepsilon_0 > 0$ tels que : $(\forall \xi \in \tilde{A}),\ d(\xi, 0) \leqslant \varepsilon^k \mu$,

$$V_{A \cap B(x_0, c_1 \varepsilon^k)}(\xi) \leqslant C(x_0) \mu^{\frac{1}{2k}} \quad (\square_1)$$

Quitte à diminuer la valeur de μ_0, on peut donc écrire :

$$|D_v p(0)| \leqslant \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \|p \circ \varphi\|_{D(0,\varepsilon\mu)}, \quad (\forall \mu \in]0, \mu_0[),\ (\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[).$$

Estimons $\|p \circ \varphi\|_{D(0,\varepsilon\mu)}$, avec le (10) du Lemme 5 page 41 que nous obtenons l'estimation ci-dessous,

$$\|p \circ \varphi\|_{D(0,\varepsilon\mu)} \leqslant \|p\|_{B_{\tilde{A}}(0, c_2(\varepsilon\mu)^k)}, \quad (\forall \mu \in]0, \mu_0[),\ (\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[), \tag{1.18}$$

(car $\varphi(D(0,\varepsilon\mu)) \subset B_{\tilde{A}}(0, c_2(\varepsilon\mu)^k)$).

$$|D_v p(0)| \leqslant \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \, \|p\|_{B_{\tilde{A}}(0,c_2(\varepsilon\mu)^k)}, \quad (\forall \mu \in]0,\mu_0[), \ (\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[),$$

avec l'inégalité de Bernstein-Walsh :

$$|D_v p(0)| \leqslant \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \, \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \exp\left(\deg(p) \sup_{B_{\tilde{A}}(0,c_2(\varepsilon\mu)^k)} V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}\right).$$

En utilisant la propriété (HCP) de la fonction de Green $(\square_1)$, on obtient :
$(\forall \mu \in]0,\mu_0[), \ (\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[)$,

$$|D_v p(0)| \leqslant \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \, \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \exp\left(C_3 \deg(p) (\mu^k)^{\frac{1}{2k}}\right),$$

d'où

$$|D_v p(0)| \leqslant \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \, \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \exp\left(C_3 \deg(p) \mu^{\frac{1}{2}}\right).$$

En posant $\mu = \frac{\tilde{C}}{(\deg p)^2}$, avec $0 < \tilde{C} < \mu_0$

$$|D_v p(0)| \leqslant c \, e^{C_3 \cdot \sqrt{\tilde{C}}} \left(\frac{\tilde{C}(\deg(p))^2}{\varepsilon}\right)^k \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}.$$

Le *1.* du Théorème 1 page 17 est donc montré.

Pour démontrer *2.* et *3.* du Théorème 1, la démonstration est techniquement identique, seulement il faut utiliser le (1.14) et (1.15) de la Proposition 6, le (1.9) du Lemme 5 page 5 et le Lemme 4 page 40. ■

Un exemple intéressant a été démontré par Bos, Milman, Levenberg et Taylor ([7]) d'inégalités de Markov tangentielles sur certaines courbes algébriques de $\mathbb{R}^2$. Ils montrent que l'exposant k est optimum sur les courbes de type :

$$\Gamma = \{(t^p, t^q) : t \in [0,1]\},$$

où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux, tels que $p < q$. Pour des inégalités globales, ils montrent que k ne peut être plus petit que p. Or cet entier k est aussi la multiplicité complexe du point $(0,0)$ de la courbe algébrique complexifiée $\tilde{\Gamma}$ de Γ, sans oublier que tous les autres points de Γ sont des points réguliers, donc localement ont un exposant de Markov au moins égal à 1 ou p. Le Théorème 1 conforte l'idée que la multiplicité des points d'une courbe algébrique joue un rôle sur l'exposant de Markov, on peut même penser que les points singuliers d'une courbe algébrique réelle se comportent comme un bord, ce qui expliquerait l'apparition du $2k$ à l'exposant.

Bibliographie

[1] M. BARAN. Bernstein type theorem for compact sets in $\mathbb{R}^n$. *J.Approx.Theory*, 79(2) :190–198, 1994.

[2] M. BARAN. Markov inequalities with polynomial parametrization. *Ann.Polon.Math*, 60(1) :69–79, 1994.

[3] M. BARAN and W. PLEŚNIAK. Bernstein and van der Corput-Schaake type inequalities on semialgebraic curves *Studia Mathematica*,125 (1997), 83-96.

[4] M. BARAN and W. PLEŚNIAK. Polynomial inequalities on algebraic sets. *Studia Mathematica*, 141(3) :209–219, 2000.

[5] L. BOS N. LEVENBERG P. D. MILMAN and B. A. TAYLOR. Tangentiel Markov inequalities characterize submanifolds of $\mathbb{R}^n$. *Indiana.Univ.J.*, 44 :115–138, 1995.

[6] L. BOS and P. D. MILMAN. Sobolev-Gagliano-Nirenberg and Markov type inequalities on subanalytic domains. Preprint, 1995.

[7] L. BOS, N. LEVENBERG, P. D. MILMAN and B. A. TAYLOR. Tangential Markov inequalities on real algebraic varieties. *Indiana University Mathematical Journal*, 47(4) :1257–1272, 1998.

[8] A. BRUDNŶI. Bernstein-type inequality for algebraic functions. *Indiana University Mathematics Journal*, 46(1) :93–116, 1997.

[9] E. M. CHIRKA. *Complex analytic sets*, volume 46. Kluwer Academic Publishers Edition, 1985.

[10] R. NARASIMHAN and C. FEFFERMAN. A local inequality on real algebraic varieties. *Math.Z*, 223 :673–692, 1996.

[11] P. GOETGHELUCK. Inegalité de Markov sur les ensembles effilés. *J.Approx.Theory*, 30 :149–154, 1980.

[12] M. KLIMEK. *Pluripotential Theory*, volume 6 of *Monographies New Series.* London Mathematic Society, Oxford Science Puplications Edition, 1991.

[13] S. ŁOJASIEWICZ. *Introduction to complex analytic geometry.* Birkhäuser, 1991.

[14] LORENTZ. *Approximation of function.* Holt. Reinhart and Winston Edition, 1966.

[15] R. NARASIMAHN. *Introduction to theory of analytic space*, volume 25 of *Lecture note in matimatics.* Springer Verlag Edition, 1966.

[16] W. PAWŁUCKI and W. PLEŚNIAK. Markov's inequalities and $\mathcal{C}^\infty$ function on sets polynomial cusps. *Math. Ann*, 275 :467–211, 1986.

[17] W. PAWŁUCKI and W. PLEŚNIAK. Extension of $\mathcal{C}^\infty$ from sets with polynomial cusp. *Studia Math*, 88 :279–287, 1988.

[18] A. SADULLAEV. An estimate for polynomials on analytic sets. *Math. USSR. Izv*, 20 :175–211, 1983.

[19] J. SICIAK. Extremal plurisubharmonique function in $\mathbb{C}^n$. *Annales Polonici. Mathematici*, 39 :175–211.

[20] A. ZERIAHI. *Inégalités de Markov et développement en série de polynômes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathcal{A}^\infty$.* Proceding of special year of complex analysis of Mittag-Leffler institute. Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey Edition 1993, 1987-1988.

Chapitre 2

Approximation des fonctions holomorphes de la classe M

2.1 Définitions

2.1.1 L' espace des fonctions de Whitney $\mathcal{E}^\infty(K)$

Soit K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}^N$, considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2N}$ et $\mathcal{C}^0(K)$ l'espace des fonctions continues dans K. Définissons brièvement l'espace des jets $\mathcal{C}^\infty$ de Whitney comme ci-dessous :

$$\mathcal{E}^\infty(K) := \left\{ F = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}} : F^\alpha \in \mathcal{C}^0(K), (\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2N}), \quad \|F\|_K^k < +\infty, \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \right\},$$

où les $\|\cdot\|_K^k$ sont les semi-normes de Whitney définies comme ci-dessous :

$$\|F\|_K^k = |F|_K^k + \sup\left\{ \frac{(R_x^k F)^\alpha(y)}{|x-y|^{k-|\alpha|}} : x,\ y \in K,\ x \neq y,\ \alpha \in \mathbb{N}^{2N},\ |\alpha| \leqslant k \right\},$$

avec

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \quad \text{et} \quad (R_x^k F)^\alpha(y) = \sum_{|\beta|\leqslant k-|\alpha|} \frac{1}{\beta!} F^{\alpha+\beta}(x)(y-x)^\beta, \quad (\forall x, y \in K)$$

et

$$|F|_K^k = \sup\left\{ |F^\alpha(x)| : x \in K,\ \alpha \in \mathbb{N}^{2N},\ |\alpha| \leqslant k \right\},$$

Notons et définissons l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans le compact K ainsi :

$$\mathcal{C}^\infty(K) := \left\{ f|_K : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2N}) \right\}.$$

De manière triviale, si K est déterminant[1], alors $\mathcal{C}^\infty(K)$ s'injecte dans $\mathcal{E}^\infty(K)$ par l'opérateur linéaire $J(f) := (D^\alpha f)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$. Le théorème de Whitney c.f. ([20], Page 77, Théorème 3.1.) nous affirme qu'à tout jet $(F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$ dans $\mathcal{E}^\infty(K)$, il existe une fonction f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ telle que $J(f) = (F^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{2N}}$.

Dans la suite, nous noterons pour tout élément f de $\mathcal{E}^\infty(K)$ la α-ième composante $D^\alpha f$, pour α dans $\mathbb{N}^{2N}$. Tout élément de $\mathcal{E}^\infty(K)$ est aussi appelé fonction de Whitney de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous utiliserons couramment cette dernière terminologie.

[1] Si $f|_K = 0$ alors, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, $D^\alpha f = 0$ dans K.

2.1.2 L'espace des fonctions de $\mathcal{A}^\infty(K)$

Si K est un compact $\mathcal{C}^\infty$-déterminant de $\mathbb{C}^N$, nous définirons l'espace $\mathcal{A}^\infty(K)$ ainsi :

$$\mathcal{A}^\infty(K) := \left\{ f \in \mathcal{E}^\infty(K) : \bar{\partial} f|_K \text{ est } \textit{plat} \text{ sur } K \right\},$$

nous entendons par $\bar{\partial} f$ est *plat*,

$$D_z^\alpha D_{\bar{z}}^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f|_K = 0, \quad (\forall j \in \{1, \ldots, N\}),\ (\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^N),\ (\forall j \in \{1, \ldots, N\})$$

où

$$D_z^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial z_N^{\alpha_N}} \text{ et } D_{\bar{z}}^\beta := \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}_1^{\beta_1}, \ldots, \partial \bar{z}_N^{\beta_N}},$$
$$\text{où} \qquad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N .$$

2.1.3 Les classes de fonctions $\mathcal{H}_M(K)$

Soit $m(t)$ une fonction réelle à valeur réelle, vérifiant les assertions ci-dessous :

- • La fonction $m(t)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$.
- • Les fonctions $m(t)$, $m'(t)$ et $m''(t)$ sont strictement positives.
- • $\lim_{t\to\infty} m(t) = +\infty$.
- • Il existe $\delta > 0$ tel que $m''(t) \leqslant \delta$, pour tout $t \gg 0$.

Dans tout ce qui suit, nous adopterons la notation suivante :

$$M(t) = e^{m(t)}, \quad (\forall t \in \mathbb{R}^+).$$

Soit K un compact connexe de $\mathbb{C}^N$ tel que $\mathring{K} \neq \emptyset$, ainsi on définit la classe de fonctions suivantes :

$$\mathcal{H}_M(K) := \Bigg\{ f \in H(\mathring{K}) \cap \mathcal{E}^\infty(K) : \exists c > 0,\ \exists \rho > 0,$$
$$\sup_{z\in K} |D_z^\alpha f(z)| \leq c\rho^{|\alpha|} M(|\alpha|),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N \Bigg\},$$

où $H(\mathring{K})$ est l'espace des classes de fonctions holomorphes dans l'ouvert $\mathring{K}$ et $\mathcal{E}^\infty(K)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur K. Tout élément de $\mathcal{H}_M(K)$ est appelé élément de la classe M, nous utiliserons cette dernière terminologie. Soulignons que l'hypothèse $m''(t) > 0$ donne une structure d'algèbre à $\mathcal{H}_M(K)$. Nous expliciterons quelques exemples concrets d'espace $\mathcal{H}_M(K)$ à la page 60.

Remarque 1 *Aucune condition de non quasi-analyticité n'est imposée dans les hypothèses sur $M(t)$ et ceci dans toutes les étapes de notre papier.*

Remarque 2 *Remarquons que la classe $\mathcal{H}_M(K)$ ne change pas lorsque nous remplaçons $M(t)$ par $c\rho^t M(t)$, où c et ρ sont des constantes positives, autrement dit, lorsque nous remplaçons $m(t)$ par $m(t) + at + b$ avec a et b des nombres réels la classe analytique correspond à $M(t) = t^t$, soit encore $m(t) = t \log t$.*

On considérera, dans la suite, des classes de fonctions contenant strictement la classe analytique. On supposera donc que la fonction $m(t)$ est de la forme :

$$m(t) = t \log t + t\mu(t), \quad (\forall t \in \mathbb{R}^+),$$

où $\mu(t)$ est une fonction à valeurs réelles strictement croissante dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = +\infty.$$

On supposera aussi que $\mu(t)$ appartient à un corps de Hardy (c'est un corps de fonction à valeurs réelles fermé pour la dérivation), ce qui permet d'assurer la monotonie des fonctions au voisinage de l'infini.

Notons que $m''(t) \leqslant \delta$ entraîne qu'il existe $a > 0$, tel que $\mu(t) \leqslant at$, pour tout $t \gg 0$. Précisons que $\mu(t)$ est définie à une constante additionnelle près, car $m(t)$ est définie à une transformation affine près.

Remarque 3 *Il est bon de noter les inclusions entre les espaces ci-dessous :*

$$H(K) \subset \mathcal{H}_M(K) \subset \mathcal{A}^\infty(K).$$

2.1.4 Les poids associés à $M(t)$

Les poids $\Omega(s)$ et $\Gamma(s)$

On associe à $M(t)$ la fonction suivante :

$$\Omega(s) := \inf_{t \gg t_0} s^{-t} e^{t\mu(t)},\ t_0 > 0 \text{ fixé et } s \gg 0.$$

On a $\Omega(s) = s^{-t} e^{t\mu(t)}$ lorsque la condition $t\mu'(t) + \mu(t) = \log s$ est vérifiée.
Il exsite une unique valeur de t car $t\mu'(t) + \mu(t)$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Maintenant, si nous définissons la fonction $\omega(s)$ par la relation :

$$\Omega(s) = e^{-\omega(s)},$$

on a

$$(*) \begin{cases} s = e^{t\mu'(t)+\mu(t)} \\ \omega(s) = t^2\mu'(t) \end{cases}$$

ou encore

$$(**) \begin{cases} s = \frac{1}{te} e^{m'(t)} \\ \omega(s) = tm'(t) - m(t) - t \end{cases}$$

Comme $\mu'(t)$ est strictement positive, on a :

$$\omega(s) > 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \omega(s) = +\infty.$$

Il en résulte que $\Omega(s)$ est strictement décroissante et

$$\lim_{s \to +\infty} \Omega(s) = 0.$$

Les systèmes $(*)$ et $(**)$ s'inversent et donnent les systèmes d'équations suivants :

$$(*') \begin{cases} t = s\omega'(s) \\ m(t) = s\omega'(s) \log s - \omega(s) + s\omega'(s) \log(s\omega'(s)) \end{cases}$$

ou encore :

$$(*'*') \begin{cases} t = s\omega'(s) \\ \mu(t) = \log s - \frac{\omega(s)}{s\omega'(s)} \end{cases}$$

Il faut noter que $M(t)$ s'obtient à partir de $\Omega(s)$ par la relation suivante :

$$M(t) = t^t \sup_{s \gg s_0} s^t \Omega(s).$$

Posons donc :

$$\begin{cases} u = t^2 \mu'(t) \\ \gamma = t\mu'(t) + \mu(t) \\ \Gamma(u) = e^{-\gamma(u)} \end{cases}.$$

Etant donné que $\mu(t)$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, on a donc

$$\lim_{u \to +\infty} \gamma(u) = +\infty, \quad \text{d'où} \lim_{u \to +\infty} \Gamma(u) = 0.$$

Voici quelques Lemmes regroupant les propriétés immédiates des fonctions Γ, γ, Ω, ω.

Lemme 7 *Si l'on pose :*

$$\tilde{\Omega}(s) = \inf_{n \geq t_0} s^{-n} e^{n\mu(n)}$$

alors :

$$e^{\frac{\delta}{2}} \tilde{\Omega}(s) \leq \Omega(s) \leq \tilde{\Omega}(s), \quad (\forall s \gg 0).$$

-Preuve : Notons $\alpha(t) = t\mu(t) - t \log s$, il vient que $\Omega(s) = e^{\alpha(t_0)}$ et $\tilde{\Omega}(s) = e^{\alpha(t_1)}$ avec $|t_0 - t_1| < 1$.On a $t\mu''(t) + 2\mu'(t) = m''(t) - \frac{1}{t} \leq m''(t) \leq \delta$. La formule de Taylor donne alors : $\alpha(t_1) - \alpha(t_0) \leq e^{\frac{\delta}{2}}$. Il en résulte que $\tilde{\Omega}(s) \leq e^{\frac{\delta}{2}} \Omega(s)$. ■

Lemme 8 *Il existe $q_0 > 0$, tel que pour tout $s \gg 0$, on a :*

$$s\Omega(s) \leq \Omega(q_0 s).$$

Lemme 9 *La fonction ω est l'inverse pour la composition de la fonction $e^{\gamma(u)}$. Autrement dit, on a :*

$$\omega(s) = \gamma^{<-1>}(\log s).$$

Lemme 10 *La fonction $\Gamma^{<-1>}$ étant l'inverse pour la composition de la fonction Γ, on a :*

$$\Gamma^{<-1>}(s) = \omega(s).$$

Exemple 1 *Voici quelques exemples concrets d'espaces* $\mathcal{H}_M(K)$ *:*

- $\bullet\mu(t) = k^{-1}\log t$, $\quad k > 0$, *c'est la classe de Gevrey d'ordre* k, $\Omega(s) = e^{-s^k}$, $\Gamma(u) = \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{k}}$.
- $\bullet\mu(t) = \log\log t$, *c'est l'ordre infini,* $\Omega(s) = \exp(-\frac{e^s}{s})$, $\Gamma(u) = e^{-\log\log u}$.
- $\bullet\mu(t) = at \quad a > 0$ *classe d'ordre 0,* $\Omega(s) = \exp\left(-\frac{(\log s)^2}{4a}\right)$, $\Gamma(u) = e^{-2\sqrt{au}}$.
- $\bullet$*la classe d'ordre* k*, c 'est-à-dire si* $\lim_{t\to+\infty}\frac{\mu(t)}{\log(t)} = \frac{1}{k}$.

Les poids $\overline{\Omega}(s)$ et $\overline{\Gamma}(s)$

Introduisons, de la même manière que précédemment, les poids $\overline{\Omega}(s)$ et $\overline{\Gamma}(s)$. Nous définirons la fonction $\bar{\mu}$ comme ci-dessous :

$$\bar{\mu}(t) := \log(t) + \mu(t), \quad (\forall t > 0).$$

Donc, on a encore,

$$\overline{\Omega}(s) := \inf_{t \gg t_0} s^{-t} e^{t\bar{\mu}(t)}$$

et

$$\overline{\Omega}(s) := e^{-\bar{\omega}(s)}, \quad (\forall s > s_0).$$

Il est ainsi possible de définir et de construire les fonctions $\bar{\omega}$, $\bar{\gamma}$ et $\bar{\Gamma}$ jouissant respectivement des mêmes propriétés que les fonctions ω, γ et Γ. En particulier, nous avons :

$$\begin{cases} s = e^{t\bar{\mu}'(t)+\bar{\mu}(t)} \\ \bar{\omega}(s) = t^2\bar{\mu}'(t) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} t = s\bar{\omega}'(s) \\ \bar{\mu}(t) = \log s - \frac{\bar{\omega}(s)}{s\bar{\omega}'(s)} \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

$$u\overline{\Gamma}(u) = \Gamma(u) \quad \text{soit encore } \bar{\gamma}(u) - \log u = \gamma(u).$$

2.2 Théorème de prolongement lisse des fonctions de $\mathcal{H}_M(K)$

Dans cette partie, nous démontrons un théorème dit $\bar{\partial}$-*plat* de E.Dynkin ([6]) qui est une caractérisation géométrique et analytique des fonctions de $\mathcal{H}_M(K)$ par le Théorème 7, page 96.

Nous dirons que le compact K de $\mathbb{C}^N$ est Whitney 1-régulier, s'il est connexe par arcs rectifiables et qu'il existe une constante réelle positive $C > 0$ telle que,

$$\|x-y\| \geqslant C\delta(x,y), \quad (\forall x, y \in K),$$

où $\delta(\cdot,\cdot)$ est la métrique des géodésiques dans K et $\|\cdot\|$ est une norme dans $\mathbb{C}^N$.

Théorème 4 *Soient K un compact de $\mathbb{C}^N$ Whitney 1-régulier et f une fonction dans $\mathcal{H}_M(K)$, alors f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N)$ à support compact, vérifiant l'estimation :*

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\tilde{f}(z)\right| \leqslant C_1\Omega\left(\frac{1}{c_2 d(z,K)}\right), \quad (\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \forall z \in \mathbb{C}^N).$$

2.2.1 Démonstration du théorème 4

Nous ne perdrons en rien à la généralité de la démonstration si nous l'effectuons dans $\mathbb{C}$.

Si f est une fonction de $\mathcal{H}_M(K)$; associons le polynôme de Taylor de f en $\zeta \in K$:

$$T_\zeta^m f(z) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{D_\zeta^k f(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k, \quad (\forall z \in \mathbb{C}),\ (\forall \zeta \in K)$$

et son reste de Taylor

$$R_\zeta^m f(z) = f(z) - T_\zeta^m f(z), \quad (\forall z \in \mathbb{C}),\ (\forall \zeta \in K).$$

Lemme 11 *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ Whitney 1-régulier et m un entier naturel non nul, alors on a :*

$$\left|R_\zeta^m f(z)\right| \leqslant C\rho^{m+1}\frac{M(m+1)}{m!}\left|\zeta - z\right|^{m+1}, \quad (\forall z \in K),\ (\forall \zeta \in K), \quad (\diamond)$$

où ρ et C sont des constantes réelles strictement positives dépendant respectivement de la fonction f et du compact K.

-Preuve : Pour montrer le Lemme, considérons la fonction auxiliaire φ_m suivante, pour z dans K et m dans $\mathbb{N}$ fixés :

$$\varphi_m(\xi) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{D_\xi^k f(\xi)}{k!}(z-\xi)^k, \quad (\forall m \in \mathbb{N}),\ (\forall \xi \in K).$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à φ_m avec ζ dans K qui est Whitney 1-régulier,

$$\left|R_\zeta^m f(z)\right| = |\varphi_m(z) - \varphi_m(\zeta)| \leqslant \sup_{\xi \in \sigma_{z,\zeta}} |\varphi'_m(\xi)| \cdot \delta(z,\zeta) \quad (\diamond\diamond),$$

où $\sigma_{z,\zeta}$ est un arc rectifiable dans K. Un calcul élémentaire montre que :

$$|\varphi'_m(\xi)| \leqslant C\rho^{m+1}\frac{M(m+1)}{m!}\,|z-\xi|^{m+1}, \quad (\forall \xi \in K).$$

En introduisant cette dernière inégalité dans $(\diamond\diamond)$, on obtient $(\diamond)$. ■

Si z est dans $\mathbb{C}$ on pose :

$$d(z,K) = \inf_{\xi \in K} |z-\xi|, \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

et l'on note $\hat{z} \in K$ tel que $d(z,K) = |z-\hat{z}|$. Régularisons la distance à K, d via une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité de l'ouvert $\mathbb{C}\setminus K$, ce procédé est dû à E.M.Stein et peut être énoncé de la manière suivante :

Lemme 12 *Soit d une métrique dans $\mathbb{C}$ et K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$, alors il existe une fonction $d^\star(\cdot)$ définie dans $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et deux constantes réelles strictement positives A et $B > 1$ dépendant uniquement de K vérifiant les conditions suivantes :*

- • $Ad(z,K) \leqslant d^\star(z) \leqslant Bd(z,K), \quad (\forall z \in \mathbb{C})$.
- • $d^\star(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\setminus K)$, *tel que :* $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^2)$, $|D^\alpha d^\star(x)| \leqslant C_\alpha(d(x))^{1-|\alpha|}$, *où* $C_\alpha > 0$ *est une constante réelle dépend de K.*

-Preuve : Ce dernier Lemme est obtenu à partir d'une $\mathcal{C}^\infty$-partition de l'unité de l'ouvert $\mathbb{C}\setminus K$. Pour plus de détails nous renvoyons à la lecture de l'ouvrage d' E.M. Stein ([17], Page 171, Théorème 2). ■

Notons G la fonction de Dynkin définie de manière unique, comme ci-dessous :

$$G(\zeta) := T_{\hat{\zeta}}^{N(td^\star(\zeta))} f(\zeta) = \sum_{k=0}^{k=N(td^\star(\zeta))} \frac{D_{\hat{\zeta}}^k f(\hat{\zeta})}{k!}(\zeta - \hat{\zeta})^k, \quad (\forall \zeta \in \mathbb{C}),$$

où t est un réel tel que $t > 1$ et $N(td^\star(\zeta))$ est l'unique entier réalisant le minimum pour que :

$$\tilde{\Omega}\left(\frac{1}{\rho t d^\star(\zeta)}\right) = (\rho t d^\star(\zeta))^{N(\rho t d^\star(\zeta))} e^{N(\rho t d^\star(\zeta)) \cdot \mu(N(td^\star(\zeta)))},$$

en gardant à l'esprit que :

$$\tilde{\Omega}(s) := \inf_{n \in \mathbb{N}^\star} s^{-n} e^{n\mu(n)}.$$

Il faut noter que :

$$\left| N(\rho t d^\star(\zeta)) - \frac{1}{\rho t d^\star(\zeta)}\, \omega'\left(\frac{1}{\rho t d^\star(\zeta)}\right)\right| < 1,$$

ce qui nous permet d'affirmer que $N(td^\star(\cdot))$ est une fonction localement bornée. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \zeta & \longmapsto & d(\zeta, K) \end{array}$$

est Lipschitzienne, donc différentiable presque partout. Il en résulte que l'application $\zeta \mapsto \hat{\zeta}$ définie dans $\mathbb{C} \setminus K$ est continue presque partout, donc mesurable.

-Preuve du Théorème 3 : Soit θ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ à support compact telle que :

$$\int_{\mathbb{C}} \theta(\zeta) d\lambda_2(\zeta) = 1, \quad \text{supp}(\theta) \subset D(0,1) \ \text{ et } \ \theta(z) \geqslant 0, \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Nous supposerons de plus que la fonction θ est invariante par rotation, c'est-à-dire :

$$\theta(\sigma \cdot z) = \theta(z), \quad (\forall z \in \mathbb{C}), \ (\forall \sigma \in \mathbb{U})^2.$$

[2]On définit $\mathbb{U}$ ainsi $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Soit f fixée dans $\mathcal{H}_M(K)$, définissons le prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathbb{C}$, noté F, à la manière de Dynkin dans ([6]) comme ci-après :

$$F(z) = \begin{cases} f(z) \quad \text{si } z \in K \\ \\ \frac{1}{d^\star(z)^2} \int_{\mathbb{C}} \theta\left(\frac{z-\zeta}{d^\star(z)}\right) G(\zeta) d\lambda_2(\zeta) \quad \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus K, \end{cases}$$

où $d^\star(\cdot)$ est la distance à K régularisée de E.M.Stein décrite dans le Lemme 12 page 62. L'invariance par rotation de θ, nous donne pour tout P dans $\mathbb{C}[z]$:

$$\frac{1}{d^\star(z)^2} \int_{\mathbb{C}} P(\zeta)\theta\left(\frac{z-\zeta}{d^\star(z)}\right) d\lambda_2(\zeta) = P(z), \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Donc pour z dans $\mathbb{C}$, z_0 fixé dans K et n dans $\mathbb{N}^\star$, le prolongement F s'écrit encore :

$$F(z) = T^n_{z_0} f(z) + \frac{1}{d^\star(z)^2} \int_{\mathbb{C}} \theta\left(\frac{z-\zeta}{d^\star(z)}\right) \left(G(\zeta) - T^n_{z_0} f(\zeta)\right) d\lambda_2(\zeta),$$

où l'entier n sera précisé ultérieurement dans la démonstration.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{d^\star(z)^2}\theta\left(\frac{z-\zeta}{d^\star(z)}\right)\right) \left(G(\zeta) - T^n_{z_0} f(\zeta)\right) d\lambda_2(\zeta).$$

par un calcul immédiat, on a l'estimation suivante :

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{d^\star(z)^2}\theta\left(\frac{z-\zeta}{d^\star(z)}\right)\right)\right| \leqslant \frac{C}{d^\star(z)^3}, \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus K),$$

où $C > 0$ est une constante. Maintenant, prenons $z_0 = \hat{z}$ avec $\varepsilon > 1$, il s'ensuit que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z)\right| \leqslant \left(\int_{|\zeta - z| < \varepsilon d^\star(z)} \frac{1}{d^\star(z)^3} d\lambda_2(\zeta)\right) \times \sup_{|\zeta - z| < \varepsilon d^\star(z)} |G(\zeta) - T^n_{\hat{z}} f(\zeta)|$$

soit

$$\leqslant \frac{\pi C \varepsilon^2}{d^\star(z)} \sup_{|\zeta - z| < \varepsilon d^\star(z)} |G(\zeta) - T^n_{\hat{z}} f(\zeta)|, \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus K).$$

Avec l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z)\right| \leqslant \frac{\pi C}{\varepsilon^2 d^\star(z)} \left(\sup_{|\zeta - z| < \varepsilon d^\star(z)} \left|T^{N(td^\star(\zeta))}_{\hat{\zeta}} f(\zeta) - T^n_{\hat{\zeta}} f(\zeta)\right| + \sup_{|\zeta - z| < \varepsilon d^\star(z)} \left|T^n_{\hat{\zeta}} f(\zeta) - T^n_{\hat{z}} f(\zeta)\right|\right) \quad (\diamond)$$

Majorons le deuxième terme de la somme $(\diamond)$, pour z fixé dans $\mathbb{C}$ et ζ tels que $|z - \zeta| < \varepsilon d^\star(z)$,

$$\left|T^n_{\hat{\zeta}} f(\zeta) - T^n_{\hat{z}} f(\zeta)\right| \leqslant \left|T^n_{\hat{\zeta}} f(\zeta) - f(\zeta)\right| + |f(\zeta) - T^n_{\hat{z}} f(\zeta)|.$$

Avec le Lemme 11 page 61 on obtient,

$$\left|T^n_{\hat{\zeta}}f(\zeta)-T^n_{\hat{z}}f(\zeta)\right|\leqslant\left|R^n_{\hat{\zeta}}f(\zeta)\right|+|R^n_{\hat{z}}f(\zeta)|\leqslant C_1\rho^{n+1}\frac{M(n+1)}{n!}\left(\left|\hat{\zeta}-\zeta\right|^{n+1}+|\hat{z}-\zeta|^{n+1}\right),$$

où ρ est une constante réelle strictement positive ne dépendant que de f. Maintenant, la formule de Stirling nous donne :

$$\left|T^n_{\hat{\zeta}}f(\zeta)-T^n_{\hat{z}}f(\zeta)\right|\leqslant\widetilde{C}_1(e\rho)^{n+1}\frac{M(n+1)}{n^n}\left(\left|\hat{\zeta}-\zeta\right|+|\hat{z}-\zeta|\right)^{n+1}.$$

L'hypothèse $|\zeta-z|<\varepsilon d^\star(z)$ et le Lemme 12 page 62 nous donnent :

$$|\hat{z}-\zeta|\leqslant|\zeta-z|+|z-\hat{z}|\leqslant\varepsilon d^\star(z)+d^\star(z)\leqslant(1+\varepsilon)d^\star(z)\leqslant B(1+\varepsilon)d(z,K)$$

et

$$\left|\hat{\zeta}-\zeta\right|=d(\zeta,K)\leqslant d(z,K)+|z-\zeta|\leqslant d(z,K)+\varepsilon d^\star(z)\leqslant B(1+\varepsilon)d(z,K),$$

car $d(\cdot,K)$ est Lipchitzienne. Donc on a :

$$\left|T^n_{\hat{\zeta}}f(\zeta)-T^n_{\hat{z}}f(\zeta)\right|\leqslant\widetilde{C}_1(e\rho)^{n+1}e^{(n+1)\cdot\mu(n+1)}(B(1+\varepsilon)d(z,K))^{n+1},\quad(\forall n\in\mathbb{N}^\star).$$

A ce stade, nous pouvons choisir l'unique entier $\tilde{n}(z)$ de sorte que :

$$\tilde{\Omega}\left(\frac{1}{Be\rho(1+\varepsilon)d(z,K)}\right)=(Be\rho(1+\varepsilon)d(z,K))^{\tilde{n}(z)}e^{\tilde{n}(z)\cdot\mu(\tilde{n}(z))},$$

il faut noter que $\lim_{z\to\partial K}\tilde{n}(z)=+\infty$. De l'égalité précédente concluons :

$$\left|T^n_{\hat{\zeta}}f(\zeta)-T^n_{\hat{z}}f(\zeta)\right|\leqslant\tilde{\Omega}\left(\frac{1}{Be\rho(1+\varepsilon)d(z,K)}\right),\ (\forall z\in\mathbb{C}),\quad(\forall\zeta\in\mathbb{C},\ |z-\zeta|<\varepsilon d^\star(z)).\quad\textbf{(I)}$$

Estimons le deuxième terme de la somme $(\diamond)$; on va choisir $t>Be\rho(1+\varepsilon)$ et l'on suppose toujours que $|\zeta-z|<\varepsilon d^\star(z)$.

$$\left|T^{N(td^\star(\zeta))}_{\hat{\zeta}}f(\zeta)-T^{\tilde{n}(z)}_{\hat{\zeta}}f(\zeta)\right|\leqslant\sum_{k=\tilde{n}(z)+1}^{k=N(td^\star(\zeta))}\left|\frac{D^k_{\hat{\zeta}}f(\hat{\zeta})}{k!}(\zeta-\hat{\zeta})^k\right|,$$

d'où, avec la formule de Stirling, comme précédemment, on a

$$\left|T_{\hat{\zeta}}^{N(td^\star(\zeta))}f(\zeta) - T_{\hat{\zeta}}^{\tilde{n}(z)}f(\zeta)\right| \leqslant C \times \sum_{k=\tilde{n}(z)+1}^{k=N(tBd(\zeta,K))} e^{k\cdot\mu(k)}(e\rho t d(\zeta,K))^k \frac{1}{t^k}.$$

Etant donné que $d(\cdot, K)$ est Lipchitzienne, on écrit

$$\left|T_{\hat{\zeta}}^{N(td^\star(\zeta))}f(\zeta) - T_{\hat{\zeta}}^{\tilde{n}(z)}f(\zeta)\right| \leqslant C\times \sum_{k=\tilde{n}(z)+1}^{k=N(e\rho tB(1+\varepsilon)d(z,K))} e^{k\cdot\mu(k)}(e\rho tB(1+\varepsilon)d(z,K))^k \left(\frac{1}{Bt}\right)^k. \quad (\diamond\diamond)$$

Posons $p = \tilde{n}(z) + 1$ et $q = N(e\rho tB(1+\varepsilon)d(z,K))$ et définissons la fonction g, pour a réel et $a > 0$:

$$\begin{array}{rcccl} g & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & \tau & \longmapsto & e^{\tau\cdot\mu(\tau)+\tau\log a} \end{array}$$

La fonction g est convexe, en effet :

$$g''(\tau) = \left[(2\mu'(\tau) + \mu''(\tau) + \log a) + (\tau\mu'(\tau) + \mu(\tau) + \log a)^2\right] g(\tau), \quad (\forall \tau > 0).$$

Comme $m''(\tau) > 0$, $\forall \tau \gg 0$, en vertu des hypothèses sur m, on en déduit que :

$$2\mu'(\tau) + \tau\mu''(\tau) > \frac{-1}{\tau}, \quad (\forall \tau \gg 0).$$

Donc, on a

$$g''(\tau) > \left[\frac{-1}{\tau} + (\tau\mu'(\tau) + \mu(\tau) + \log a)^2\right] g(\tau), \quad (\forall \tau \gg 0),$$

étant donné que $\lim_{\tau\to+\infty} \tau\mu'(\tau) + \mu(\tau) = +\infty$, il s'ensuit que la fonction g est convexe à partir d'un certain rang. On va donc supposer que z soit suffisamment proche du compact K, de sorte que $\tilde{n}(z)$ soit grand pour bénéficier de la convexité de g, donc on a

$$e^{k\cdot\mu(k)}\left(tB(1+\varepsilon)d(z,K)\right)^k \leqslant \left(\frac{k-p}{q-p}\right) e^{p\cdot\mu(p)}\left(tB(1+\varepsilon)d(z,K)\right)^p +$$
$$\left(\frac{q-k}{q-p}\right) e^{q\cdot\mu(q)}\left(tB(1+\varepsilon)d(z,K)\right)^q, \quad (\forall k \in \{p,\ldots,q\}). \quad (\diamond\diamond\diamond)$$

En introduisant ($\diamond\diamond\diamond$) dans ($\diamond\diamond$), on a

$$\left|T_{\hat{\zeta}}^{N(td^\star(\zeta))}f(\zeta) - T_{\hat{\zeta}}^{\tilde{n}(z)}f(\zeta)\right|$$

$$\leqslant C\times\sum_{k=p}^{k=q}\left[\left(\frac{k-p}{q-p}\right)e^{p\cdot\mu(p)}\left(e\rho tB(1+\varepsilon)d(z,K)\right)^p + \left(\frac{q-k}{q-p}\right)e^{q\cdot\mu(q)}\left(tB(1+\varepsilon)d(z,K)\right)^q\right]\left(\frac{1}{Bt}\right)^k$$

$$C\times\sum_{k=p}^{k=\infty}\frac{1}{(Bt)^{k-p}}\tilde{\Omega}\left(\frac{1}{e\rho B(1+\varepsilon)d(z,K)}\right) + C\times\sum_{k=p}^{k=\infty}\left(\frac{1}{Bt}\right)^k\tilde{\Omega}\left(\frac{1}{e\rho tB(1+\varepsilon)d(z,K)}\right).$$

Donc on a l'estimation (**II**) :

$$\left|T_{\hat{\zeta}}^{N(td^\star(\zeta))}f(\zeta) - T_{\hat{\zeta}}^{\tilde{n}(z)}f(\zeta)\right| \leqslant C(t)\tilde{\Omega}\left(\frac{1}{e\rho tB(1+\varepsilon)d(z,K)}\right), \quad (\forall z,\, \zeta\in\mathbb{C},\ |z-\zeta|<\varepsilon d^\star(z)), \qquad \textbf{(II)}$$

où $C(t)$ est une constante réelle strictement positive ne dépendant que de t. Maintenant, en introduisant les inégalités **(I)** et **(II)** dans l'inégalité ($\diamond$) et le Lemme 8 page 59, notre théorème est démontré. $\blacksquare$

De cette démonstration nous pouvons déduire un corollaire immédiat énoncé ci-après.

Corollaire 5 *Soit K un compact Whitney 1-régulier de $\mathbb{C}^N$ et f une fonction de $\mathcal{A}^\infty(K)$, alors pour tout l dans $\mathbb{N}$, la fonction f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^N$ à support compact et il existe une constante réelle C_l strictement positive ne dépendant que de f et K, telles que :*

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(z)\right| \leqslant C_l\, d(z,K)^l, \quad (\forall z\in\mathbb{C}^N\setminus K).$$

-Preuve : Posons,

$$M_0 = 1 \text{ et } M_n := \frac{1}{n!}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\, |\alpha|\leqslant n,\, z\in K}|D^\alpha f(z)|, \quad (\forall n\in\mathbb{N}^\star),$$

d'une autre manière

$$e^{m_n} := M_n, \quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Soit $(m_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des régularisées de Young de chaque élément de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$m_n^\star = \sup_{k\in\mathbb{N}}(n\cdot k - m_k), \quad (\forall k\in\mathbb{N}).$$

La suite $(m_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe, donc la suite $(M_n^\star)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que

$$M_n^\star = e^{m_n^\star}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

est logarithmiquement convexe. Il existe donc deux constantes réelles positives C et ρ telles que :

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\, |\alpha|\leqslant n,\, z\in K} |D^\alpha f(z)| \leqslant C\rho^n M_n^\star, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Si l'on note :

$$\Omega_M^\star(s) := \inf_{n\in\mathbb{N}} s^{-n} M_n^\star.$$

Maintenant en utilisant les mêmes techniques que dans le théorème précédent ou que dans l'article de E.Dynkin ([6]), on montre l'existence de la fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N)$ à support compact prolongeant f à $\mathbb{C}^N$ et vérifiant :

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(z)\right| \leqslant C_1 \Omega_M^\star\left(\frac{1}{C_2 d(z,K)}\right).$$

La définition même de $\Omega_M^\star(s)$ nous donne notre corollaire. ■

2.3 Géométrie des compacts au sens du pluripotentiel

2.3.1 La fonction de Green avec pôle à l'infini

Donnons la définition et quelques propriétés de la fonction de Green avec pôle à l'infini. Considérons un compact K de $\mathbb{C}^N$, notons :

$$L_K(\mathbb{C}^N) := \left\{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : u|_K \leq 0, \quad (\exists c \in \mathbb{R}),\ (\forall z \in \mathbb{C}^N),\ u(z) \leqslant c + \log(1+|z|)\right\}.$$

La fonction de Green avec pôle à l'infini est définie ainsi :

$$V_K(z) := \sup\left\{u(z) : u \in L_K(\mathbb{C}^N)\right\}, \quad (\forall z \in \mathbb{C}^N).$$

On appellera la régularisée supérieure de la fonction V_K la plus petite fonction semi-continue supérieurement majorant V_K. On la note $V_K^\star$ et on la définit comme ci-dessous :

$$V_K^\star(z) := \limsup_{\zeta\to z,\, \zeta\in\mathbb{C}^n} V_K(\zeta).$$

Si E est non pluripolaire (*i.e.* $\forall u \in PSH(\mathbb{C}^n)$, $E \not\subset u^{<-1>}(-\infty)$) la fonction $V_E^\star \in PSH(\mathbb{C}^N)$. Dans ce cas, nous avons le théorème d'approximation de V_E dû à Zaharjuta dont une démonstration est donnée dans ([13], Théorème 4.12) :

$$V_K(z) = \log \Psi_K(z), \quad (\forall z \in \mathbb{C}^N),$$

où Ψ_K est la fonction de Siciak définie comme ci-dessous.

$$\Psi_K(z) := \sup\left\{ |p(z)|^{\frac{1}{\deg p}} : p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N],\ \deg p \geqslant 1,\ \|p\|_K \leqslant 1 \right\}, \quad (\forall z \in \mathbb{C}^N).$$

Un compact K de $\mathbb{C}^N$ est dit L-régulier si V_K est continue dans $\mathbb{C}^N$, ce qui est équivalent à dire que $V_K^\star = V_K$.

Remarque 4 *Si K est L-régulier, alors K n'est pas pluripolaire et V_K est dans $L_K(\mathbb{C}^N)$.*

Enonçons le Théorème de Bernstein-Whalsh-Siciak, qui est la version pour $H(K)$ du Théorème 5 page 80 et du Théorème 7 page 96 de notre papier.

Notons :

$$\mathbb{C}_n[z_1, \ldots, z_N] := \{p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N] : \deg p \leqslant n\}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Proposition 7 *Soit K un compact L-régulier de $\mathbb{C}^N$, $(N \in \mathbb{N}^\star)$ polynômialement convexe. Soit R un réel, $R > 1$, et soit*

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C}^N : V_K(z) < \log R \right\} .$$

Si f est holomorphe dans D on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\inf_{p\in\mathbb{C}_n[z_1,\ldots,z_N]} \|f-p\|_K \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Si, réciproquement, f est une fonction continue sur K telle que

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\inf_{p\in\mathbb{C}_n[z_1,\dots,z_N]}\|f-p\|_K\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{R},\quad (R>1),$$

alors f se prolonge holomorphiquement sur D.

-Preuve : La démonstration est dans le papier de ([13],Théorème 8.5). ■

2.3.2 Compacts vérifiant la propriété (HCP)

Définition 1 *Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, non pluripolaire, nous dirons que K vérifie la propriété (HCP) (Hölder Continuity Property), s'il existe δ_0, C, $\kappa>0$ des constantes ne dépendant que de K telles que :*

$$(\forall\delta\in[0,\delta_0]),\ (\forall z\in\mathbb{C}^n,\ d(z,K)\leqslant\delta)\implies V_K(z)\leqslant C\delta^\kappa \text{ (d métrique Euclidienne).}$$

Beaucoup d'exemples de compacts de $\mathbb{C}^N$ vérifient la propriété (HCP), tels que les ensembles convexes, les ensembles semi-analytiques d'intérieur non vide, les ensembles à pointes polynômiales, etc... Cette classe de compacts est abordée de manière géométrique par Pleśniak et Pawłucki dans ([10]). Son intérêt réside dans le fait que ces types de compacts admettent des inégalités de Markov.

Remarquons que si un compact est (HCP), la fonction V_E est continue ; ceci implique que le compact E est L-régulier.

2.3.3 Compacts de $\mathbb{C}^N$ vérifiant la condition (SL)

Cette propriété géométrique des compacts vérifiant la condition (SL) est utilisée sans être mentionnée explicitement et dans un cadre moins général par J.Siciak dans l'article ([14]) concernant l'approximation des éléments de $\mathcal{A}^\infty(K)$, lorsque K est un compact de $\mathbb{C}$.

Définition 2 *Nous dirons qu'un compact K de $\mathbb{C}^N$, non pluripolaire, vérifie la condition (SL) ou la condition de Siciak-Łojasiewicz,* ***s'il est polynômialement***

convexe *et s'il existe des constantes réelles $C > 0$ et $\beta \in]0,1]$ dépendant seulement de K telles que :*

$$\Psi_K(\zeta) - 1 \geqslant Cd(\zeta, K)^\beta, \quad (\forall \zeta \in \mathbb{C}^N).$$

Il n' y a pas beaucoup de compacts connus sur lesquels on sait calculer explicitement la fonction de Green avec pôle à l'infini. Énumérons quelques compacts vérifiant la condition (SL).

- • Les compacts K de $\mathbb{C}$ tels qu'il existe une application conforme $\phi : \mathbb{C} \setminus D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus K$, vérifiant $|\phi(u) - \phi(v)| \leqslant C\,|u-v|^\beta, \forall u, v \in \overline{D(0,2) \setminus D(0,1)}$, où $\beta > 0$ et $C > 0$ sont des constantes ne dépendant que du compact K c.f. J.Siciak([14]).
- • Le disque fermé de $\mathbb{C}$, les boules de $\mathbb{C}^N$ et de $\mathbb{R}^N$.
- • Le segment fermé $[-1,1]$ de $\mathbb{C}$, la croix $[-1,1] \cup [-i,i]$ et les cubes de $\mathbb{R}^N$.
- • Les compacts convexes de $\mathbb{R}^N$.
- • Les convexes de $\mathbb{C}^N$.
- • Les polyèdres polynômiaux de $\mathbb{C}^N$.

2.4 Approximation des fonctions de $H(K)$

Dans cette partie, nous cherchons essentiellement à montrer le Corollaire 6 page 79 qui nous donne une approximation satisfaisante des fonctions de $H(K)$.

2.4.1 Notations

On notera : $z = (z_1, \ldots, z_N)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{C}^N$, $(N \in \mathbb{N})$,

$$\langle z, \xi \rangle = \xi \cdot z := \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} z_j \xi_j\,,$$

$$|z| := \sqrt{\langle \bar{z}, z \rangle}$$

et

$$\|z\| := \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |z_j|\,.$$

La partie entière d'un nombre réel x est notée $[x]^{Ent}$.

Pour toute (p,q)-forme $f = \sum'_{|I|=p,|J|=q} f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$, on écrira

$$|f| := \max_{|I|=p,|J|=q} |f_{I,J}|\,.$$

L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{C}^N)$ désignera l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{C}^N$ et $H(K)$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinages du compact K de $\mathbb{C}^N$. Enfin, on notera le polydisque $\Delta(0,r)$, de multi-rayon $r = (r_1, \ldots, r_N)$. Si E est sous-ensemble de $\mathbb{C}^N$, on note $\|\cdot\|_E$ la norme uniforme sur E.

2.4.2 Noyau à poids d'Henkin-Ramirez dans $\mathbb{C}^{N+M}$

Nous utilisons les noyaux à poids construits par Berntdsson et Andersson ([3]). Notons Q la $(1,0)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ définie dans $\mathbb{C}^{N+M}$ par :

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^{j=N+M} \frac{\xi_j}{1+|\xi|^2}\, d\xi_j$$

Soient les noyaux $K_n(\xi,z)$ et $P_n(\xi,z)$ définis comme ci-dessous :
$\forall \xi,\, z \in \mathbb{C}^{N+M},\ \xi \neq z,\ \forall n > N+M,$

$$K_n(\xi,z) =$$

$$c_1 \sum_{k=0}^{k=\min(n,N+M-1)} \binom{n}{k} \left(\frac{1+\bar{\xi}\cdot z}{1+|\xi|^2}\right)^{n-k} \times \frac{\partial\,|\xi-z|^2 \wedge (\bar{\partial}\partial\,|\xi-z|^2)^{N+M-1-k} \wedge (\bar{\partial}Q)^k}{|\xi-z|^{2(N+M-k)}}\,,$$

$$P_n(\xi,z) = c_2 \left(\frac{1+\bar{\xi}\cdot z}{1+|\xi|^2}\right)^{n-(N+M)} \times (\bar{\partial}Q)^{N+M},$$

Si l'on pose pour tout $z \in \mathbb{C}^{N+M}$ fixé, $\forall \xi \in \mathbb{C}^{N+M},\ \xi \neq z,$

$$R_n(\xi,z) = c_3 \sum_{k=0}^{k=\min(n,N+M-1)} \frac{|1+\bar{\xi}\cdot z|^{n-k}}{(1+|\xi|^2)^n} \times \frac{1}{|\xi-z|^{2(N+M)-2k-1}}\,.$$

Les constantes c_1 c_2, $c_3 > 0$ sont des constantes absolues. Le Lemme suivant est une formule de Koppelman.

Lemme 13 *Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{C}^{N+M})$ telle que $z \in \mathbb{C}^{N+M}$,*

$$\int_{\mathbb{C}^{N+M}} \left|\bar{\partial} f(\xi)\right| R_n(\xi, z) d\lambda_{2(N+M)}(\xi) < +\infty \quad (\lambda_{2(N+M)} \text{ est la mesure de Lebesgue})$$

alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}^{N+M}, \quad f(z) = \int_{\mathbb{C}^{N+M}} \bar{\partial} f(\xi) \wedge K_n(\xi, z) + \int_{\mathbb{C}^{N+M}} f(\xi) P_n(\xi, z).$$

-Preuve : la démonstration est un cas particulier de ([3],Proposition 7). ∎

2.4.3 Polynômes de meilleure approximation sur un compact polynômialement convexe de $\mathbb{C}^N$

Dans cette partie nous améliorons la méthode développée par Zeriahi dans l'article ([22]) dans lequel il obtient un théorème de type Bernstein dans des compacts de sous-variétés algébriques affines d'intersection complète.

Approximation sur les polyèdres polynômiaux

Soit χ_θ ($\theta > 1$) une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, telle que $\operatorname{supp}(\chi_\theta) \subset [0, \theta^2]$, $\chi_\theta|_{[0,1]} = 1$ et $\chi_\theta \geqslant 0$. Posons

$$\chi_{\theta,r}(z) = \prod_{j=1}^{j=N+M} \chi_\theta\left(\left|\frac{z_j}{r}\right|^2\right), \quad z \in \mathbb{C}^{N+M}$$

et

$$U_r := \left\{z \in \mathbb{C}^{N+M} : \|z\| < r\right\}, \quad (r > 1).$$

Définissons, pour tout f dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{C}^{N+M})$, les opérateurs linéaires suivants :

$$S_{\theta,r,n}(f)(z) := \int_{\mathbb{C}^{N+M}} \chi_{\theta,r}(\xi) f(\xi) P_n(\xi, z)$$

et

$$T_{\theta,r,n}(f)(z) := \int_{\mathbb{C}^{N+M}} f(\xi) \bar{\partial}\chi_{\theta,r}(\xi) \wedge K_n(\xi, z)$$

Lemme 14 *Pour tout* r, $\theta > 1$, *pour toute fonction* f *dans* $\mathcal{C}^0(\mathbb{C}^N)$, *les opérateurs linéaires* $S_{\theta,r,n}$ *et* $T_{\theta,r,n}$ *sont bien définis et vérifient respectivement les estimations suivantes :*

$$|S_{\theta,r,n}(f)(z)| \leqslant C(N,M)\frac{(\theta r)^{2(N+M)}\left[(1+\sqrt{N+M}\theta r)(1+|z|)\right]^{n-(N+M)}}{(1+r^2)^n}\|f\|_{U_{\theta r}}, \ (\forall z \in \mathbb{C}^{N+M}), \tag{2.1}$$

où $S_{\theta,r,n}(f)$ *appartient à* $\mathbb{C}_{n-(N+M)}[z_1,\dots,z_{N+M}]$ *et* $C(N,M)$ *est une constante réelle positive.*

$$|T_{\theta,r,n}(f)(z)| \leqslant \widetilde{C}(N,M)(\theta r)^{2(N+M)}\left(\frac{1+(N+M)\,\theta r}{1+r^2}\right)^n \times \frac{(1+\theta r)}{(r-1)^{2(N+M)}}\|f\|_{U_{\theta r}}, \quad (\forall z \in \overline{U}_1), \tag{2.2}$$

où $\widetilde{C}(N,M)$ *est une constante réelle positive.*

-Preuve : Commençons par montrer (2.1). Fixons $\xi \in U_{\theta r}$, $z \in \mathbb{C}^{N+M}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n > N+M$.

$$|P_n(\xi,z)| \leqslant \left|\frac{1+\bar{\xi}\cdot z}{1+|\xi|^2}\right|^{n-(N+M)} \left|(\bar{\partial}Q(\xi))^{N+M}\right|,$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$\left|(\bar{\partial}Q(\xi))^k\right| \leqslant \frac{C_{N+M}}{(1+|\xi|^2)^k}, \quad \forall k \in \{1,\dots,N+M\}, \ \forall \xi \in \mathbb{C}^{N+M}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à $\left|\bar{\xi}\cdot z\right|$, on obtient :

$$|P_n(\xi,z)| \leqslant \left(\frac{(1+|\xi|)(1+|z|)}{1+r^2}\right)^{n-(M+N)} \times \frac{C_{N+M}}{(1+r^2)^{N+M}},$$

d'où

$$|P_n(\xi,z)| \leqslant C_{N+M} \frac{\left[(1+\sqrt{N+M}\theta r)(1+|z|)\right]^{n-(N+M)}}{(1+r^2)^n}.$$

Il s'ensuit

$$|S_{\theta,r,n}(f)(z)| \leqslant C_{N+M} \frac{\left[(1+\sqrt{N+M}\theta r)(1+|z|)\right]^{n-(N+M)}}{(1+r^2)^n} \|f\|_{U_{\theta r}} \times \int_{U_r} \chi_{\theta,r}(\xi) d\lambda_{2(N+M)}(\xi)$$

$$|S_{\theta,r,n}(f)(z)| \leqslant C(N,M) \frac{\left[(1+\sqrt{N+M}\theta r)(1+|z|)\right]^{n-(N+M)}}{(1+r^2)^n} \|f\|_{U_{\theta r}} \times (\theta r)^{2(N+M)}.$$

Avec le théorème de Liouville on déduit que $S_{\theta,r,n}(f)$ est un polynôme en z de degré inférieur à $n-(N+M)$.

Démontrons (2.2) en commençant par estimer chaque terme de $K_n(\xi,z)$. Fixons $\theta > 1,\ r \in]1,2[\,,\ \xi \in U_{\theta r} \setminus U_r$ et $z \in U_1$; estimons :

$$\left| \frac{\partial |\xi - z|^2 \wedge (\bar\partial\partial |\xi - z|^2)^{N+M-1-k} \wedge (\bar\partial Q)^k}{|\xi - z|^{2(N+M-k)}} \right| \leqslant C_{N+M} \frac{(1+\theta r)}{(1-r)^{2(N+M-k)}(1+r^2)^k},$$

car $\left|\partial |\xi - z|^2\right| \leqslant \|\xi - z\|$ et $\left|(\bar\partial\partial |\xi - z|^2)^{N+M-1-k}\right| \leqslant 1$.

Comme

$$\sup_{z\in U_1}\left|\bar{\xi}\cdot z\right| \leqslant \sqrt{N+M}\sup_{|z|<1}\left|\bar{\xi}\cdot z\right| = \sqrt{N+M}\left|\xi\right| \leqslant (N+M)\,\theta r, \quad (\forall \xi \in U_{\theta r}\setminus U_r).$$

Donc

$$\left|\frac{1+\bar{\xi}\cdot z}{1+|\xi|^2}\right|^{n-k} \leqslant \left[\frac{(1+(N+M)\,\theta r)}{(1+r^2)}\right]^{n-k}.$$

Ce qui mène à,

$$|K_n(\xi,z)| \leqslant c_1 C_{N+M}\sum_{k=0}^{k=\min(n,N+M-1)}\binom{n}{k}\left[\frac{(1+(N+M)\,\theta r)}{(1+r^2)}\right]^{n-k}\frac{(1+\theta r)}{(r-1)^{2(N+M-k)}(1+r^2)^k},$$

donc

$$|K_n(\xi,z)| \leqslant C(M,N)\left(\frac{1+(N+M)\,\theta r}{1+r^2}\right)^n \times \frac{(1+\theta r)}{(r-1)^{2(N+M)}}.$$

Pour achever ce calcul,

$$|T_{\theta,r,n}(f)(z)| \leqslant C_{M,N}\left(\frac{1+(N+M)\,\theta r}{1+r^2}\right)^n \times \frac{(1+\theta r)}{(r-1)^{2(N+M)}}\,\|f\|_{U_{\theta r}}\int_{U_{\theta r}\setminus U_r}\bar{\partial}\chi_{\theta,r}(\xi)d\lambda_{2(N+M)}(\xi).$$

Comme :

$$\sup_{\xi\in\mathbb{C}^{N+M}}\left|\bar{\partial}\chi_{\theta,r}(\xi)\right| \in \underset{r\to+\infty}{O}(\frac{1}{r^2}),$$

on conclut que :

$$|T_{\theta,r,n}(f)(z)| \leqslant C_{M,N}\left(\frac{1+(N+M)\,\theta r}{1+r^2}\right)^n \times \frac{(1+\theta r)}{(r-1)^{2(N+M)}}\,\|f\|_{U_{\theta r}}\times(\theta r)^{2(N+M)}. \quad \blacksquare$$

Si K est un compact de $\mathbb{C}^N$ et $\|\cdot\|_K$ la norme uniforme sur K. On définit la distance d'une fonction f définie sur K aux polynômes de degré inférieur ou égal à k par :

$$E_k(f) := \inf\{\|f-p\|_K : p \in \mathbb{C}_k[z_1,\dots,z_N]\},$$

où $\mathbb{C}_k[z_1,\dots,z_N] := \{p \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_N] : \deg p \leqslant k\}$. Si $d \in \mathbb{N}^\star$, on définira tout compact K de $\mathbb{C}^N$ qui soit un polyèdre polynômial ainsi :

$$K = \left\{z \in \mathbb{C}^N : \|z\| \leqslant 1 \text{ et } \|p(z)\| \leqslant 1\right\},$$

où $p_1,\dots,p_M \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_N]$, $p = (p_1,\dots,p_M)$. Notons

$$\tilde{V}_r := \left\{z \in \mathbb{C}^N : \|z\| < r^d \text{ et } \|p(z)\| < r^d\right\}, \quad (r > 1),$$

avec $d := \max_{1\leqslant j\leqslant M} \deg p_j$. La famille $(V_r)_{r>1}$ est constituée de voisinages ouverts de K.

Proposition 8 *Soit K un polyèdre polynomial compact de $\mathbb{C}^N$ et f une fonction holomorphe dans $\tilde{V}_{\theta r}$ $(r,\theta > 1)$. Alors il existe $d \in \mathbb{N}^\star$ dépendant de K tel que, $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N+M$,*

$$E_{nd}(f) \leqslant C_{M,N}(\theta r)^{2d(N+M)}\left(\frac{1+(N+M)(\theta r)^d}{1+r^{2d}}\right)^n \frac{(1+(\theta r)^d)}{(r^d-1)^{2(N+M)}}\|f\|_{\tilde{V}_{\theta r}}.$$

-Preuve : D'après le ([9], Théorème 2.7.6), il existe $F \in H(U_{\theta r})$ telle que :

$$f(z) = F \circ \mu(z), \quad (z \in \tilde{V}_{\theta r}),$$

où

$$U_{\theta r} := \left\{z \in \mathbb{C}^{N+M} : \|z\| < \theta r\right\}$$

et μ est l'application d'Oka,

$$\begin{array}{rccc} \mu & : & \tilde{V}_{\theta r} & \longrightarrow & U_{(\theta r)^d} \\ & & z & \longmapsto & (z, p(z)) \end{array}$$

D'après les (2.1) et (2.2) du Lemme 14, page 74, on a

$$\left|F(z) - S_{\theta^d,r^d,n}(F)(z)\right| = \left|T_{\theta^d,r^d,n}(F)(z)\right|, \quad (z \in \overline{U}_1)$$

d'où, $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N+M,\ \forall z \in \overline{U}_1$

$$\left|F(z) - S_{\theta^d, r^d, n}(F)(z)\right| \leqslant C_{M,N}(\theta r)^{2d(N+M)} \left(\frac{1+(N+M)(\theta r)^d}{1+r^{2d}}\right)^n \frac{(1+(\theta r)^d)}{(r^d-1)^{2(N+M)}} \|F\|_{U_{\theta r}}.$$

Sachant que $f(z) = F \circ \mu(z),\ \forall z \in \tilde{V}_{\theta r}$ et $\|F\|_{U_{\theta r}} = \|F \circ \mu\|_{\tilde{V}_{\theta r}}$, on déduit, $\forall z \in K$,

$$\left|f(z) - S_{\theta^d, r^d, n}(F)(\mu(z))\right| \leqslant C_{M,N}(\theta r)^{2d(N+M)} \left(\frac{1+(N+M)(\theta r)^d}{1+r^{2d}}\right)^n \frac{(1+(\theta r)^d)}{(r^d-1)^{2(N+M)}} \|f\|_{\tilde{V}_{\theta r}}.$$

On a donc

$$E_{nd}(f) \leqslant C_{M,N}(\theta r)^{2d(N+M)} \left(\frac{1+(N+M)(\theta r)^d}{1+r^{2d}}\right)^n \frac{(1+(\theta r)^d)}{(r^d-1)^{2(N+M)}} \|f\|_{\tilde{V}_{\theta r}}. \quad \blacksquare$$

Approximation sur les compacts L-réguliers

Le lemme ci-après a été démontré par Zeriahi ([22],Lemme 3.1) pour les compacts L-réguliers d'un sous-ensemble algébrique complexe affine d'intersection complète de $\mathbb{C}^{N+M}$ et s'adapte sans difficulté à notre contexte.

Soit une suite réelle $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante à termes strictement positifs, telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = +\infty$. Nous préciserons, ultérieurement, le choix de cette suite dans la partie 2.7 pour $\mathcal{A}^\infty(K)$ et de manière plus élaborée dans la partie 2.8.1 pour $\mathcal{H}_M(K)$.

Lemme 15 *Soit K un compact L-régulier de $\mathbb{C}^N$. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe un entier positif et non nul M, des suites polynômes $(p_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (p_M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$, k_0 un entier positif et non nul tels*

$$(1-\varepsilon)V_K(z) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant M} \frac{1}{d_n} \log\left|p_j^{(n)}(z)\right| \leqslant V_K(z) + \varepsilon, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^N),$$

où $d_n := [\delta_n]^{Ent} \cdot k_0$ et $\max_{1\leqslant j\leqslant M} \deg p_j^{(n)} = d_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
De plus, si $D_r^{(n)} := \left\{z \in \mathbb{C}^{N+M} : \max_{1\leqslant j\leqslant M} \left|p_j^{(n)}(z)\right| < r^{d_n}\right\}$

$$\mathcal{U}_K(r) \subset D_{re^\varepsilon}^{(n)} \text{ et } D_{r^{1-\varepsilon}}^{(n)} \subset \mathcal{U}_K(r), \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r > 1),$$

où

$$\mathcal{U}_K(r) := \left\{z \in \mathbb{C}^N : V_K(z) < \log r\right\}, \quad (\forall r > 1).$$

-Preuve :[3] Etant donné la forte similitude avec la démonstration de ([22],Lemme 3.1), nous convions le lecteur à faire la démarche par lui-même. ■

Nous obtenons donc la proposition suivante, conséquence direct des méthodes de ([22], Théorème 3.1 et Corollaire 3.1), pour les compacts L-réguliers et toute fonction holomorphe f dans un voisinage de $\overline{\mathcal{U}_K(\theta r)}$.

Proposition 9 *Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, soit K un compact L-régulier dans $\mathbb{C}^N$, alors pour tout $R > 1$ et tout α dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, pour tout f holomorphe dans $\overline{\mathcal{U}_K(R)}$, l'estimation suivante est vraie :*

$$E_{n \cdot d_n}(f) \leqslant C_{M,N} R^{2d_n(N+M)} \left(\frac{1 + (N+M) \cdot R^{d_n}}{1 + R^{2\alpha d_n}} \right)^n \times \frac{(1 + R^{d_n})}{(R^{2\alpha d_n} - 1)^{2(N+M)}} \|f\|_{\mathcal{U}_K(R)}, \ (\forall n \in \mathbb{N}).$$

-Preuve : Il suffit de poser $\theta = R^{1-\alpha}$ et $r = R^\alpha$, pour $R > 1$ et $\alpha \in]0, 1[$ et d'appliquer au polyèdre polynomial $D^{(n)}_{R^{1-\varepsilon}}$, $\quad (\varepsilon \in]0, 1[)$ la Proposition 8 et le Lemme 15 pour passer à $\mathcal{U}_K(R)$. ■

Corollaire 6 *Sous les mêmes hypothèses et notations que dans la proposition précédente, il existe un opérateur linéaire :*

$$\Lambda_n : H(K) \longrightarrow \mathbb{C}_n[z_1, \ldots, z_N], \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0)$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 \geqslant N + M$, tel que : $\forall R > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $f \in H(\overline{\mathcal{U}_K(R)})$,

$$\|f - \Lambda_{n \cdot d_n}(f)\|_K \leqslant C_{M,N} (n \cdot d_n)^N R^{2d_n(N+M)} \left(\frac{1 + (N+M) \cdot R^{d_n}}{1 + R^{2\alpha d_n}} \right)^n \frac{(1 + R^{d_n})}{(R^{2\alpha d_n} - 1)^{2(N+M)}} \|f\|_{\mathcal{U}_K(R)}.$$

[3] En fait dans la construction de ces polynômes pages 90-91, Zeriahi ne fait intervenir le d_θ qu'en exposant sur le polynômes $Q_{k_{\zeta_i}}$. C'est ici que l'on voit que le choix de d_θ importe peu, sous réserve qu'il soit plus supérieur ou égal à 1.

-Preuve : Si l'on pose :

$$\Lambda_n(f) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_n} f(t_j^{m_n}) L_j^{m_n}(z, T^{m_n}), \quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall z \in \mathbb{C}^N).$$

où $m_n := \binom{N+n}{n}$, $(n \in \mathbb{N})$ et $T^{m_n} = \left\{t_1^{m_n}, \ldots, t_{m_n}^{m_n}\right\}$ est un système de points de Feckete Leja du compact K et les $L_j^{m_n}(z, T^{m_n})$ sont les polynômes de Lagrange associés c.f. ([11]). Nous avons l'estimation suivante :

$$\|f - \Lambda_{n \cdot d_n}(f)\|_K \leqslant (1 + m_{n \cdot d_n}) E_{n \cdot d_n}(f), \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Il est facile de conclure avec la Proposition 9 et en remarquant que : $m_n \leqslant Cn^N$, $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$. ■

2.5 Approximation des fonctions de $\mathcal{A}^\infty(K)$

Théorème 5 *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ Whitney 1-régulier, vérifiant les conditions (HCP) et (SL). Alors pour toute fonction f dans $\mathcal{A}^\infty(K)$ et tout entier naturel non nul k, il existe une constante réelle $C(f,k)$ strictement positive dépendant seulement de f et k, vérifiant :*

$$\|f - P_n\|_K \leqslant C(f,k) n^{-k}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ telle que $\deg P_n \leqslant n$*, pour tout n dans $\mathbb{N}$.*

Avant de donner la preuve de ce théorème ; nous allons fournir une représentation intégrale des fonctions de $\mathcal{A}^\infty(K)$. Pour cela nous construisons un noyau de représentation intégrale en utilisant la notion de s-H convexité, pour les compacts de $\mathbb{C}^N$, cette dernière a été introduite par A.Dufresnoy ([5]) dans la résolution de l'équation du $\bar{\partial}$.

Définition 3 *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$, on dira que K est s-H convexe s'il existe des constantes réelles positives, s telle que $s \geqslant 1$ et $A > 0$, telles que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, il existe U_ε un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^N$ vérifiant :*

$$\left\{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < A\varepsilon^s)\right\} \subset U_\varepsilon \subset \left\{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \varepsilon\right\}$$

Remarque 5 *Les compacts convexes sont 1-H convexes, les compacts à frontières Lipschitziennes sont s-H convexes ; en fait la s-H convexité couvre un éventail important de domaines bien connus en analyse. Pour plus d'exemples voir ([8]).*

Lemme 16 *Les compacts de $\mathbb{C}^N$ vérifiant simultanément les conditions (HCP) et (SL) sont s-H convexes.*

-Preuve : Supposons K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant les conditions (HCP) et (SL). Les définitions 1 et 2 de la page 70 peuvent s'écrire ainsi, avec la fonction de Green avec pôle à l'infini :

$$C_1 d(z,K)^\alpha \leqslant V_K(z) \leqslant C_2 d(z,K)^\beta, \quad (\forall z \in \mathcal{V}(K)), \qquad \textbf{(I)}$$

où α et β sont des réels strictement positifs tels que $\alpha > \beta > 0$ et les constantes C_1 et C_2 sont des réelles strictement positives. Posons :

$$U_\varepsilon := \left\{ z \in \mathbb{C}^N : V_K(z) < C_1 \varepsilon^\alpha \right\},$$

comme le compact K vérifie la condition (HCP), il s'ensuit que V_K est plurisousharmonique, continue et de ce fait V_K est nulle sur K ; donc U_ε est un ouvert pseudoconvexe contenant le compact K. Il est élémentaire de voir que les inclusions sont vérifiés en appliquant directement les inégalités du **(I)** :

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}} \right\} \subset U_\varepsilon \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \varepsilon \right\}, \quad (\forall \varepsilon \in]0,1[).$$

Maintenant, écrivons

$$s = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad A = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

on a bien $s \geqslant 1$, d'après les hypothèses sur α et β ci-dessus. Notre démonstration est achevée. ■

Dans les deux sous-sections suivantes, nous utilisons une méthode simplifiée de J.Chaumat et A.M.Chollet ([8]).

Dans les parties suivantes 2.6.1 et 2.6.2 le compact K est dans $\mathbb{C}^N$ et s-H convexe.

2.5.1 Construction des sections de Cauchy-Leray

Proposition 10 (Théorème de Skoda) *Soient U un ouvert borné pseudoconvexe de $\mathbb{C}^N$, un réel $\rho > 0$ strictement positif et ζ dans $\mathbb{C}^N$ tel que $d(\zeta, U) < 1$, alors il existe une constante réelle A_2 strictement positive et des fonctions $h_i(z,\zeta)$, $i = 1, \dots, N$, holomorphes en z dans U telles que :*

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) = 1, \quad (\forall z \in U),$$

$$\left[\int_U \left\{\sum_{i=1}^{i=n} |h_i(z,\zeta)|^2\right\} d\lambda_{2n}(z)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant A_2 d(\zeta, U)^{-\rho}$$

A_2 ne dépend que du diamètre de U.

-Preuve : La démonstration de ce théorème est une application directe du Théorème 1, page 555 de l'article d'H.Skoda ([16]). ■

Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ s-H convexe. Soit $\mathcal{V}(K)$ le voisinage ouvert de K défini comme ci-dessous :

$$\mathcal{V}(K) := \left\{z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < 1\right\},$$

où A_1 est la constante figurant dans la définition de la s-H convexité de K ; soit A telle que $0 < A < A_1$. Notons :

$$O(A) := \left\{(z,\zeta) : \mathbb{C}^N \times (\mathcal{V}(K) \setminus K),\, d(z,K) < \frac{A}{2^s} d(\zeta,K)^s\right\}$$

et

$$O(A,\zeta) := \left\{z \in \mathbb{C}^N : (z,\zeta) \in O(A)\right\}, \quad (\forall \zeta \in \mathcal{V}(K)).$$

Lemme 17 *Il existe des constantes réelles A_3 et A_4, telles que $0 < A_3 < 1$ et $A_4 > 1$ et des fonctions $h_i(z,\zeta)$ $i = 1, \dots, N$ définies sur $O(A_3)$, holomorphes en z dans $O(A_3,\zeta)$ et vérifiant pour tout $(z,\zeta) \in O(A_3)$:*

$$\sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} |h_i(z,\zeta)| \leqslant A_4 d(\zeta,K)^{-Ns-\rho}$$

-Preuve : Soit $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$, posons $\varepsilon = \frac{d(\zeta,K)}{2}$, K est supposé s-H convexe. Donc il existe U_ε un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^N$ vérifiant :

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < A_1 \frac{1}{2^s} d(\zeta,K)^s \right\} \subset U_\varepsilon \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \frac{1}{2} d(\zeta,K) \right\}$$

La Proposition 10 page 82 entraîne l'existence d'une constante A_5 strictement positive et des fonctions $h_i(z,\zeta)$, $i = 1, \ldots, N$, holomorphes en z dans $O(\frac{A_1}{2^s}, \zeta)$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) = 1, \quad (\forall z \in O(\frac{A_1}{2^s}, \zeta))$$

et

$$\left[\int_{O(\frac{A_1}{2^s},\zeta)} \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} |h_i(z,\zeta)|^2 \right\} d\lambda_{2n}(z) \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant A_2 d(\zeta,\Omega)^{-\rho}, \quad (\forall \zeta \in \mathcal{V}(K)).$$

Par le procédé classique pour passer de la norme L^2 en norme sup, quitte à rétrécir les voisinages, avec la formule intégrale de Cauchy sur les polydisques, nous avons l'existence de la constante réelle A_6, strictement positive, telle que :

$$|h_i(z,\zeta)| \leqslant A_6 d(\zeta,K)^{-Ns-\rho}, \quad (\forall z \in O(\frac{A_1}{2^s}, \zeta)). \quad \blacksquare$$

Lemme 18 (Lemme de recouvrement) *Il existe des constantes réelles A_7, A_8, A_9 strictement positives ne dépendant que de N telles que A_7 soit dans $\mathbb{N}$ et $0 < A_8 < 1 < A_9$; de sorte que pour tout compact K de $\mathbb{C}^N$, pour tout réel t strictement positif, pour tout $L \geqslant 2$ et $r(\zeta) = L^{-1} d(\zeta,K)^t$, il existe une suite de boules $(B(\zeta^j, r(\zeta^j)))_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\mathcal{V}(K) \setminus K = \left\{ \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B(\zeta^j, r(\zeta^j)) \right\} \bigcap \mathcal{V}(K).$$

$$card \left\{ j \in \mathbb{N} : \zeta \in B(\zeta^j, r(\zeta^j)) \right\} \leqslant A_7, \quad (\forall \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K).$$

$$A_8 d(\zeta^j, K) \leqslant d(\zeta,K) \leqslant A_9 d(\zeta^j, K), \quad (\forall j \in \mathbb{N},\ \forall \zeta \in B(\zeta^j, r(\zeta^j))).$$

-Preuve : La preuve de ce Lemme est dans l'article de J.Chaumat et A.M.Chollet ([8]). ■

Proposition 11 *Il existe des constantes réelles A_{10} et A_{11} strictement positives avec $0 < A_{10} < 1 < A_{11}$ qui ne dépendent que du compact K, des réels ρ et s, et de l'entier N ; il existe des fonctions $w_i(z,\zeta)$, $i = 1,\dots,N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $O(A_{10})$ et holomorphes en z dans $O(A_{10},\zeta)$, telles que pour tout $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$ vérifiant pour tout $(z,\zeta) \in O(A_{10})$:*

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} w_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) \geqslant \frac{1}{2}, \qquad (\boldsymbol{I})$$

$(\forall l \in \mathbb{N}^{2N},\ |l| \leq 2,\ \forall k \in \mathbb{N}^{2N}),\ (\forall i \in \{1,\dots,N\})$, *on a :*

$$\left|D^l_\zeta D^k_z w_i(z,\zeta)\right| \leqslant |k|!A_{11}^{|k|+1} d(\zeta,K)^{-(1+|l|)(Ns+\rho)-|k|s}. \qquad (\boldsymbol{II})$$

-Preuve : si $\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K$ et si ζ vérifie :

$$|\zeta - \zeta'| < \frac{1}{2A_4} d(\zeta,K)^{Ns+\rho},$$

la constante A_4 est donnée par le Lemme 17, ainsi que l'exposant $Ns + \rho$. Donc :

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta')(z_i - \zeta_i) = \Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta')(z_i - \zeta'_i) + \Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta')(\zeta_i - \zeta'_i), \quad (\forall z \in O(A_3,\zeta')).$$

D'où

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta')(z_i - \zeta_i) \geqslant 1 - \Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta')(\zeta_i - \zeta'_i), \quad (\forall z \in O(A_3,\zeta')).$$

Finalement

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta')(z_i - \zeta_i) \geqslant 1 - A_4 d(\zeta,K)^{-Ns-\rho} \frac{1}{2A_4} d(\zeta,K)^{Ns+\rho} = \frac{1}{2}. \quad ■$$

Il manque la régularité des h_i en ζ. Pour remédier à cela nous allons appliquer le Lemme de recouvrement.

On choisit $L = 2A_4$ et $t = Ns + \rho \geq 1$. Soit $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité de $\mathcal{V}(K)\setminus K$ subordonnée au recouvrement du Lemme 18 page 83 vérifiant les propriétés ci-dessous :

- • $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N),\ \varphi_j \geq 0, \quad (\forall j \in \mathbb{N})$.
- • $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset B(\zeta^j, r(\zeta^j)), \quad (\forall j \in \mathbb{N})$.
- • $\sum_{j=0}^{j=\infty} \varphi_j(\zeta) = 1, \quad (\forall \zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K)$.
- • $\left|D^l\varphi_j(\zeta)\right| \leqslant A_{12} r(\zeta^j)^{-|l|}, \quad \forall l \in \mathbb{N}^{2N} : |l| \leqslant 2, \forall j \in \mathbb{N}, \forall \zeta \in B(\zeta^j, r(\zeta^j))$, où A_{12} est une constante ne dépendant que N.

Pour la démonstration, se référer à ([20]). Notons maintenant,

$$w_i(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{j=\infty} h_i(z,\zeta^j)\varphi_j(\zeta), \quad (\forall i \in \{1,\ldots,N\}).$$

Remarque 6 *Si ζ est dans $\mathcal{V}(K)\setminus K$, alors ζ est contenu au plus dans A_7 boules $B(\zeta^j, r(\zeta^j))$, donc la somme $\sum_{j=0}^{j=\infty} h_i(z,\zeta^j)\varphi_j(\zeta)$ est toujours finie et compte au plus A_7 termes c.f. (le Lemme 18 de recouvrement).*

Il existe donc A_{13} telle que $0 < A_{13} < 1$ et de sorte que les $w_i(z,\zeta)$, $\forall i \in \{1,\ldots,N\}$ soient définies et $\mathcal{C}^\infty$ dans $O(A_{13})$ et holomorphes en z dans $O(A_{13},\zeta)$, $\forall \zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K$. Maintenant

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} w_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) = \Re e \sum_{i=1}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=\infty} h_i(z,\zeta^j)\varphi_j(\zeta)(z_i-\zeta_i)$$

donc

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} w_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) = \sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\Re e \sum_{i=1}^{i=N} h_i(z,\zeta)(z_i-\zeta_i)\right)\varphi_j(\zeta)$$

D'après la Proposition 11, on a

$$\Re e \sum_{i=1}^{i=N} w_i(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=\infty}\varphi_j(\zeta) = \frac{1}{2}.$$

D'après le Lemme 17, on a

$$\sum_{i=1}^{i=N} |h_i(z,\zeta)| \leqslant A_4 d(\zeta,K)^{-Ns-\rho}.$$

Comme

$$w_i(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{j=\infty} h_i(z,\zeta^j)\varphi_j(\zeta), \quad (\forall i \in \{1,\dots,N\}),$$

on diminue A_{13} de la sorte que $A_{10} := \frac{1}{2}A_{13}$ et on applique la formule de Cauchy, on obtient ainsi l'estimation demandée en tenant compte de l'estimation : $\left|D^l\varphi_j\right| \leqslant A_{12}r(\zeta^j)^{-l}$.

2.5.2 Noyau représentant pour les fonctions de $\mathcal{A}^\infty(K)$

C'est par un raisonnement classique d'homotopie que nous élaborons notre démonstration. Tout d'abord, rappelons les notations classiques des formes différentielles intervenant dans la construction de notre noyau. Nous conviendrons de

$$\omega'(u) := \sum_{j=1}^{j=N} (-1)^{j-1} du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_j} \wedge \cdots \wedge du_N$$

et

$$\omega(v) := dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_N.$$

Posons

$$\Phi(z,\zeta) := \sum_{i=1}^{i=N} w_i(z,\zeta)\,(z_i-\zeta_i) = \langle w(z,\zeta), z-\zeta\rangle\,,$$

avec

$$\langle z,\zeta\rangle := \sum_{i=1}^{i=N} z_i\zeta_i\,.$$

Lemme 19 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$. Alors la forme différentielle suivante est fermée.*

$$\frac{\omega'(u)\wedge\omega(v)}{\langle z,\zeta\rangle^N}.$$

La démonstration de ce Lemme est triviale, il suffit d'appliquer la définition d'une forme fermée.

.

Théorème 6 *Soit K un compact Whitney 1-régulier et s-H convexe de $\mathbb{C}^N$ et f une fonction dans $\mathcal{A}^\infty(K)$ et $\tilde{f}$ le prolongement $\mathcal{C}^\infty$ de f à $\mathbb{C}^N$ construit dans le théorème 4 page 61 ; alors*

$$f(z) = \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N} \int_{\widetilde{D}} \frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}, \qquad (\forall z \in K),$$

où $\widetilde{D} = \mathcal{V}(K) \setminus K$ et $w(z,\zeta) = (w_1, \ldots, w_N)$, où les $w_i(z,\zeta)$ sont les sections construites dans la Proposition 11 page 84.

-Preuve : Nous allons effectuer un raisonnement par homotopie avec le noyau de Bochner-Martinelli. En effet posons :

$$\eta^w(z,\zeta,\lambda) := (1-\lambda)\frac{w(z,\zeta)}{\Phi(z,\zeta)} + \lambda\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta - z|^2}, \quad (\forall (z,\zeta) \in O(\frac{A}{2^s})),\ (\forall \lambda \in [0,1]).$$

$$\eta^w(z,\zeta,\lambda) = (\eta_1^w(z,\zeta,\lambda), \ldots, \eta_N^w(z,\zeta,\lambda))$$

et

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta) := \sum_{j=1}^{j=N} (-1)^{j-1} d_{\zeta,\lambda}\eta_1^w \wedge \cdots \wedge \widehat{d_{\zeta,\lambda}\eta_j^w} \wedge \cdots \wedge d_{\zeta,\lambda}\eta_N^w \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_N.$$

Comme

$$\left(d_{\zeta,\lambda}\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right) \wedge \omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta) = 0,$$

car la $(0,1)$-forme $\bar{\partial}\tilde{f}$ est $\bar{\partial}$-fermée et $\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta)$ est une $\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)}$-forme. De plus, avec le Lemme 19, on a

$$d_{\zeta,\lambda}\left(\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta)\right) = 0,$$

car

$$\sum_{i=1}^{i=N} \eta_i^w(z,\zeta,\lambda)\,(z_i - \zeta_i) = 1.$$

Donc

$$d_{\zeta,\lambda}\left(\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta)\right) = 0.$$

Soit $\widetilde{D}$ un ouvert à frontière $\mathcal{C}^\infty$ contenant le support de $\tilde{f}$ et contenu dans U_{ε_0}(c'est l'ouvert déterminé par la s-H convexité). La formule de Stockes nous donne :

$$\int_{\widetilde{D}\times[0,1]} d_{\zeta,\lambda}\left(\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta)\right) = \int_{\partial\left(\widetilde{D}\times[0,1]\right)} \bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda)) \wedge \omega(\zeta) = 0.$$

D'où :

$$\int_{\partial\widetilde{D}\times[0,1]} \bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)+\int_{\widetilde{D}\times\{0\}}\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge$$

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)-\int_{\widetilde{D}\times\{1\}}\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)=0.$$

D'autre part :

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,0))\wedge\omega(\zeta)=\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}$$

et

$$\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,1))\wedge\omega(\zeta)=\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2N}}.$$

Etant donné que $\tilde{f}$ est à support compact dans $\widetilde{D}$ il s'ensuit que :

$$\int_{\partial\widetilde{D}\times[0,1]}\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\omega'_{\zeta,\lambda}(\eta^w(z,\zeta,\lambda))\wedge\omega(\zeta)=0.$$

Donc, on peut conclure de ce qui précède et de la formule de Bochner-Martinelli :

$$f(z)=\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\int_{U_{\varepsilon_0}}\frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^{2N}}$$

$$=\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\int_{\widetilde{D}}\frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}. \quad \blacksquare$$

Notons que la représentation du Théorème 6 page 87 est valable pour toutes les fonctions de $\mathcal{H}_M(K)$. Rappelons que nous avons les inclusions suivantes :

$$H(K)\subset\mathcal{H}_M(K)\subset\mathcal{A}^\infty(K).$$

Cette représentation intégrale du Théorème 6 a été utilisée dans ([7]), pour représenter et caractériser les jets $\mathcal{C}^\infty$ et $\bar{\partial}$-plat appartenant à la classe de Carleman définis sur des compacts s-H convexes de $\mathbb{C}^N$.

2.5.3 La jauge $R(\zeta)$ de l'ensemble $O(\frac{A}{2^s},\zeta)$ pour les lignes de niveaux de V_K

Dans la partie précédente nous approchons par des polynômes les fonctions de $H(K)$. Par construction, le noyau $\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}$ est une $(N,N-1)$-forme à coefficients holomorphes dans les domaines $O(\frac{A}{2^s},\zeta)$ quand ζ est fixé dans $\mathcal{V}(K)$. Pour nous permettre d'utiliser le Corollaire 6 page 79, nous sommes conduits à introduire une fonction jauge des lignes de niveaux de la fonction de Green avec pôle à l'infini V_K dans $O(\frac{A}{2^s},\zeta)$.

Nommons cette fonction jauge $R(\zeta)$ que nous définissons dans $\mathcal{V}(K)\setminus K$ de la manière suivante :

$$R(\zeta) := \sup\left\{\lambda > 1 : \mathcal{U}_K(\lambda) \subset O\left(\frac{A_1}{2^s},\zeta\right)\right\}, \quad (\forall\zeta \in \mathcal{V}(K))$$

où

$$\mathcal{U}_K(\lambda) := \left\{z \in \mathbb{C}^N : V_K(z) < \log\lambda\right\}, \quad (\forall\lambda > 1).$$

C'est par le biais de la jauge $R(\zeta)$ que nous allons pouvoir utiliser dynamiquement les lignes de niveau de la fonction de Green avec pôle à l'infini V_K dans l'approximation du noyau $\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}$. Enonçons quelques propriétés élémentaires.

Lemme 20 *La fonction $R(\zeta)$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} \bullet\, \mathcal{U}_K(R(\zeta)) \subset O\left(\frac{A_1}{2^s},\zeta\right). \\ \\ \bullet\, R(\zeta) \quad \textit{est semi-continue inférieurement et } \lim_{\zeta\to\partial K} R(\zeta) = 1. \\ \\ \bullet\, R(\zeta) > 1, \quad \forall\zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K. \\ \\ \bullet\, \forall\zeta_0 \in \mathcal{V}(K)\setminus K, \quad (\forall\zeta \in \mathcal{V}(K)\setminus K,\ d(\zeta,K) = d(\zeta_0,K) \Rightarrow R(\zeta_0) = R(\zeta)). \end{cases}$$

-Preuve : La démonstration de ce lemme est triviale, c'est une conséquence directe de la définition de $R(\zeta)$. ■

Lemme 21 *Si K est un compact (HCP) de $\mathbb{C}^N$, alors il existe un réel $\kappa > 0$ et $C_1 > 0$ des constantes réelles ne dépendant que de K, telles que :*

$$R(\zeta) \leqslant 1 + C_1 d(\zeta,K)^\kappa, \quad (\forall\zeta \in \mathbb{C}^N).$$

Si K est un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant la condition (SL), alors il existe $\beta > 0$ et $C_2 > 0$ des constantes ne dépendant que de K telles que :

$$R(\zeta) \geqslant 1 + C_2 d(\zeta, K)^\beta, \quad (\forall \zeta \in \mathbb{C}^N).$$

-Preuve : C'est une conséquence immédiate de la définition d'un compact (HCP) et d'un compact vérifiant la condition (SL). ■

2.6 Démonstration du Théorème 5

Dans cette partie nous allons démontrer le Théorème 5 page 80, en utilisant tout l'arsenal mis en place pour l'approximation du Noyau $\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}$. Nous considérons dans cette partie les sous-ensembles de niveaux suivants :

$$L_{A,n} = \left\{\zeta \in \widetilde{D} : R(\zeta) \geqslant 1 + \frac{A}{d_n}\right\}, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall A > 0),$$

avec le choix de d_n suivant :

$$d_n = n \cdot k_0, \quad (\text{ici } \delta_n = n),$$

l'entier k_0 est celui donné dans le Lemme 15 page 78. Dans le Lemme 20 page 89, il est mentionné que la jauge $R(\zeta)$ est semi-continue inférieurement, donc l'ensemble $L_{A,n}$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Définissons les espaces ci-dessous :

$$(H \times \mathcal{C}^\infty)\left(O(\frac{A}{2^s})\right) := \left\{\psi \in \mathcal{C}^\infty(O(\frac{A}{2^s})) : (\forall z \in K),\ \psi(z,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}(K) \setminus K) \text{ et}\right.$$

$$\left.(\forall \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K),\ \psi(\cdot,\zeta) \in H(O(\frac{A}{2^s},\zeta))\right\}$$

L'espace $(H \times \mathcal{C}^\infty)\left(O(\frac{A}{2^s})\right)$ a une structure de $\mathbb{C}$-algèbre. Considérons l'espace de (p,q)-formes ci-dessous :

$$(H\times\mathcal{C}^\infty_{(p,q)})\left(O(\frac{A}{2^s})\right) := \left\{\psi = \sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \psi_{I,J}(z,\zeta)d\zeta^I \wedge d\bar{\zeta}^J : \psi_{I,J} \in (H \times \mathcal{C}^\infty)\left(O(\frac{A}{2^s})\right),\ (\forall I, J)\right\}.$$

Notons la forme $\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)$ dans sa base canonique ainsi :

$$\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}=\sum_{|J|=N-1}{}' \frac{\omega'_{\zeta,J}(w(z,\zeta))}{\Phi(z,\zeta)^N}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}^J,$$

où

$$d\zeta := d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_N,$$

D'après la Proposition 11 page 84, on a :

$$\omega'_{\zeta,J}(w(z,\cdot))\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}(K)),\quad (\forall z\in K),\ (\forall' J,\ |J|=N-1)$$

et

$$\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))\in H(O(\frac{A}{2^s},\zeta)),\quad (\forall\zeta\in\mathcal{V}(K)),\ (\forall' J,\ |J|=N-1),$$

donc

$$\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}\in\left(H\times\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)}\right)\left(O(\frac{A}{2^s})\right).$$

Définissons la suite d'opérateurs linéaires comme ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc}\Xi_n & : & \left(H\times\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)}\right)\left(O(\frac{A}{2^s})\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{C}_n[z_1,\dots,z_N]\times\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)}\right)\left(O(\frac{A}{2^s})\right) & ,\quad (\forall n\in\mathbb{N}),\\ & & \sum'_{|J|=N-1}\psi_J(z,\zeta)d\zeta\wedge d\bar{\zeta}^J & \longmapsto & \sum'_{|J|=N-1}\Lambda_n(\psi_J(\cdot,\zeta))d\zeta\wedge d\bar{\zeta}^J & \end{array}$$

où $\left(\mathbb{C}_n[z_1,\dots,z_N]\times\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)}\right)\left(O(\frac{A}{2^s})\right)$ est exactement construit comme $\left(H\times\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)}\right)\left(O(\frac{A}{2^s})\right)$, au lieu d'avoir les fonctions holomorphes comme dans la définition ci-avant, on a l'espace des polynômes $\mathbb{C}_n[z_1,\dots,z_N]$ de degré plus petit que n et bien sûr, $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite d'opérateurs linéaires définis dans le Corollaire 6 page 79.

-Preuve : Soit $f\in\mathcal{A}^\infty(K)$ fixée, d'après le Corollaire 5 page 67, pour tout entier l dans $\mathbb{N}$, il existe une constante $C_l>0$ et $\tilde{f}$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C}^N)$ telle que,

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right|\leqslant C_l d(\zeta,K)^l,\ (\forall\zeta\in\mathbb{C}^N)\quad \text{ et }\quad \tilde{f}|_K=f|_K.$$

Nous préciserons la valeur de l ultérieurement dans la démonstration. Comme $\bar{\partial}f$ est plat dans K, en particulier $\bar{\partial}\tilde{f}|_K=0$; il s'ensuit, d'après le Théorème 6 page 87 :

$$f(z)=\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\int_{\tilde{D}}\frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N},\quad (\forall z\in K).$$

Rappelons que les lignes de niveaux sont :

$$L_{A,n} := \left\{ \zeta \in \widetilde{D} : R(\zeta) \geqslant 1 + \frac{A}{d_n} \right\} \quad \text{où} \quad d_n = n \cdot k_0, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star),$$

et $A > 0$ est un réel que l'on précisera ultérieurement. Considérons le polynôme $P_{n \cdot d_n}$ donné par :

$$P_{n\cdot d_n}(z) := \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N} \int_{L_{A,n}} \bar\partial \tilde f(\zeta) \wedge \Xi_{n\cdot d_n} \left(\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N} \right)(z), \quad (\forall z \in \mathbb{C}^N).$$

Le polynôme $P_{n\cdot d_n}$ est bien défini par la construction même de la suite d'opérateurs linéaires $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc $\deg P_{n\cdot d_n} \leqslant n \cdot d_n$, pour tout n dans $\mathbb{N}$. Si $z \in K$,

$$|f(z) - P_{n\cdot d_n}(z)| \leqslant \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N} \left| \int_{L_{A,n}} \bar\partial \tilde f(\zeta) \wedge \left(\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N} - \Xi_{n\cdot d_n} \left(\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N} \right) \right) \right|$$

$$+ \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N} \left| \int_{\widetilde{D} \setminus L_{A,n}} \frac{\bar\partial \tilde f(\zeta) \wedge \omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N} \right|,$$

écrit de manière condensée :

$$|f(z) - P_{n\cdot d_n}(z)| \leqslant I_{1,n}(z) + I_{2,n}(z), \quad (\forall n \geqslant n_0,\ \forall z \in K). \quad (\diamond)$$

Commençons par estimer $\|I_{1,n}\|_K$, posons pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$ fixé :

$$E_{J,n}(\zeta) := \left\| \frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N} - \Lambda_{n\cdot d_n} \left(\frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N} \right) \right\|_K,$$

où J est un multi-indice de longueur $N-1$,

$$J = (j_1, \ldots, j_{N-1}), \quad 1 \leqslant j_1 < \cdots < J_{N-1} \leqslant N.$$

D'après le Corollaire 6 page 79, on a :$(\forall \zeta \in L_{A,n})$,

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant C_{M,N} (n \cdot d_n)^N R(\zeta)^{2d_n(N+M)} \left(\frac{1 + (N+M) \cdot R(\zeta)^{d_n}}{1 + R(\zeta)^{2\alpha d_n}} \right)^n \times$$

$$\frac{(1+R(\zeta)^{d_n})}{(R(\zeta)^{2\alpha d_n}-1)^{2(N+M)}}\left\|\frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right\|_{\mathcal{U}_K(R(\zeta))},$$

en choisissant α dans $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

$$E_{J,n}(\zeta)\leqslant\frac{2^N C_{N,M}(n\cdot d_n)^N}{R(\zeta)^{d_n[n(2\alpha-1)-2(N+M)-1]}}\left(\frac{1+N+M}{2}\right)^n\times\frac{1}{(R(\zeta)^{\alpha d_n}-1)^{2(N+M)}}\times\frac{1}{d(\zeta,K)^{N_J}},$$

où N_J est un entier dépendant de N et du s de la s-H convexité du compact K avec ζ dans $L_{A,n}$ fixé.

Le compact K vérifie (HCP), donc d'après le Lemme 21 page 89 on a :

$$E_{J,n}(\zeta)\leqslant\frac{\widetilde{C}\cdot(n\cdot d_n)^N}{R(\zeta)^{\frac{n\cdot d_n}{2}\left[(2\alpha-1)-\frac{2(N+M)+1}{n}\right]}}\left(\frac{1+N+M}{2R(\zeta)^{\frac{d_n}{2}\left[(2\alpha-1)-\frac{2(N+M)+1}{n}\right]}}\right)^n\times$$

$$\frac{1}{(R(\zeta)^{\alpha d_n}-1)^{2(N+M)}\times(R(\zeta)-1)^{\frac{N_J}{\kappa}}},$$

où $\kappa>0$ est la constante de la propriété de (HCP) du compact K. Donc, il existe $n_0\in\mathbb{N}^\star$, tel que pour tout $n\geqslant n_0$ et pour ζ dans $L_{A,n}$, on ait :

$$E_{J,n}(\zeta)\leqslant\frac{C(n\cdot d_n)^N}{\left(1+\frac{A}{d_n}\right)^{n\cdot d_n\cdot\frac{D}{2}}}\times\left(\frac{\rho}{\left(1+\frac{A}{d_n}\right)^{d_n\cdot\frac{D}{2}}}\right)^n\times\frac{1}{\left[\left(1+\frac{A}{d_n}\right)^{\alpha\cdot d_n}-1\right]^{2(N+M)}}\times\frac{(d_n)^{\frac{\tilde{N}}{\kappa}}}{A^{\frac{\tilde{N}}{\kappa}}},$$

où

$$\rho=\frac{N+M+1}{2}\text{ et }D=\frac{2\alpha-1}{4}$$

et $\tilde{N}=\max_{|J|=N-1}(N_J)$ est un entier dépendant de N et du s de la s-H convexité.

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{A}{d_n}\right)^{d_n\cdot\frac{D}{2}}=e^{A\frac{D}{2}},$$

donc il existe un entier $n_1\geqslant n_0$ dépendant de A, tel que :

$$\left(1+\frac{A}{d_n}\right)^{d_n\cdot\frac{D}{2}}\geqslant\frac{e^{A\frac{D}{2}}}{2},\quad(\forall n\geqslant n_1).$$

Donc on a,

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \left(\frac{n^{\frac{N}{n}}4\rho}{e^{D\cdot A}}\right)^n \times \frac{(d_n)^{N+\frac{\tilde{N}}{\kappa}}}{\left[\frac{e^{\alpha A}}{2}-1\right]^{2(N+M)}}, \quad (\forall n \geqslant n_1),\ (\forall \zeta \in L_{A,n}).$$

Etant donné que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{N}{n}} = 1,$$

il existe un entier $n_2 \geqslant n_1$ tel que :

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \left(\frac{8\rho}{e^{D\cdot A}}\right)^n \times \frac{(d_n)^{N+\frac{\tilde{N}}{\kappa}}}{\left[\frac{e^{\alpha A}}{2}-1\right]^{2(N+M)}}, \quad (\forall n \geqslant n_1),\ (\forall \zeta \in L_{A,n}).$$

On pose,

$$\theta(\kappa, \tilde{N}, N) = N + \frac{\tilde{N}}{\kappa} \quad \text{et} \quad C(\alpha, A, M, N) = \left[\frac{e^{\alpha A}}{2} - 1\right]^{2(N+M)}$$

L'estimation précédente peut s'écrire ainsi

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant C(\alpha, A, M, N)\left(\frac{8\rho}{e^{D\cdot A}}\right)^n (d_n)^{\theta(\kappa,\tilde{N},N)}, \quad (\forall \zeta \in L_{A,n}). \quad \textbf{(I)}$$

On va donc choisir $A > 0$ suffisamment grand de sorte que $8\rho < e^{D\cdot A}$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (n\cdot d_n)^k \left\|E_{J,n}\right\|_{L_{A,n}} = 0, \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

ce qui nous permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} (n\cdot d_n)^k \left\|I_{1,n}\right\|_K = 0, \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Estimons $\left\|I_{2,n}\right\|_K$; en effet, d'après la condition (SL), on a

$$\widetilde{D} \setminus L_{A,n} \subset U_n := \left\{\zeta \in \widetilde{D} : d(\zeta, K)^\beta < \frac{A}{d_n}\right\},$$

on a donc :

$$\left\|I_{2,n}\right\|_K \leqslant \lambda_{2N}(D \setminus L_{A,n}) \sup_{\zeta\in U_n} \left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| d(\zeta, K)^{-\tilde{N}}.$$

Rappelons que d'après le Corollaire 5 page 67, on a l dans $\mathbb{N}$ et $C_l > 0$ tels que :

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| \leqslant C_l\, d(\zeta, K)^l, \quad (\forall \zeta \in \mathbb{C}^N \setminus K).$$

Cette dernière nous permet d'affirmer que

$$\|I_{2,n}\|_K \leqslant C_{\tilde{D},l}\left(\frac{A}{d_n}\right)^{\frac{l-\tilde{N}}{\beta}}, \quad (\forall n \geqslant n_0).$$

Maintenant, si $k \in \mathbb{N}$, estimons $(n \cdot d_n)^k \|I_{2,n}\|_K$, en se souvenant que l'on a choisi $d_n = n \cdot k_0$.

$$(n \cdot d_n)^k \|I_{2,n}\|_K \leqslant A^{\frac{l-\tilde{N}}{\beta}} n^k \cdot (d_n)^{k-\frac{l-\tilde{N}}{\beta}} \leqslant A^{\frac{l-\tilde{N}}{\beta}} k_0^{k-\frac{l-\tilde{N}}{\beta}} n^{2k-\frac{l-\tilde{N}}{\beta}}. \quad \textbf{(II)}$$

Si l'on choisi l dans $\mathbb{N}$ tel que $l > 2\beta k + \tilde{N}$, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} (n \cdot d_n)^k \|I_{2,n}\|_K = 0.$$

Introduisant (**I**) et (**II**) dans ($\diamond$), on obtient bien que

$$\lim_{n\to+\infty} (n \cdot d_n)^k \|f - P_{n \cdot d_n}\|_K = 0$$

On peut passer à tout n, comme dans ([22], Page 93, Corollaire 3.3), étant donné que $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1$ et conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} n^k \cdot E_n(f) = 0, \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Ainsi s'achève notre démonstration. ■

Le Corollaire suivant est une conséquence directe de notre Théorème 5. Il est démontré par Siciak dans ([14]) pour une classe de compacts de $\mathbb{C}$ vérifiant des conditions fortes de type (HCP) et (SL).

Soit l'espace de fonction $s(K)$ défini de la manière suivante :

$$s(K) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(K) : \lim_{n\to+\infty} n^k E_n(f) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Corollaire 7 *Si K est un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant les conditions (HCP) et (SL), alors :*

$$\mathcal{A}^\infty(K) = s(K).$$

-Preuve : On a $s(K) \subset \mathcal{A}^\infty(K)$ car toute fonction de $s(K)$ est limite uniforme de polynômes de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ et que le compact K vérifie la condition (HCP) c.f. ([14], Théorème 1.6). L'inclusion réciproque est une conséquence immédiate du Théorème 5. ■

Remarque 7 *Notons que l'on peut définir ainsi les semi-normes de Zerner ([24]) dans $\mathcal{A}^\infty(K)$ avec $d_{-1}(f) := \|f\|_K$ et $d_0(f) := E_0(f)$*

$$d_k(f) := \sup_{n \in \mathbb{N}^\star} n^k E_n(f), \quad (\forall k \in \mathbb{N}^\star), \ (\forall f \in \mathcal{A}^\infty(K)).$$

2.7 Approximation des fonctions de $\mathcal{H}_M(K)$

Théorème 7 *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ Whitney 1-régulier vérifiant les conditions (HCP) et (SL). Pour toute fonction f dans $\mathcal{H}_M(K)$, il existe $C > 0$ et $B > 0$ deux constantes réelles ne dépendant que de f et de la fonction $\bar{\omega}(s)$, telles que :*

$$\|f - P_n\|_K \leqslant Ce^{-B\overline{\omega}(n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où $P_n \in \mathbb{C}_n[z_1, \ldots, z_N]$.
Réciproquement, si f est une fonction continue dans le compact K, si $B > 0$ et $C > 0$ sont deux constantes réelles et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$, où $\deg P_n \leqslant n$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\|f - P_n\|_K \leqslant Ce^{-B\,\bar{\omega}(n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

alors f est dans $\mathcal{H}_M(K)$.

2.7.1 Construction de la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Dans la partie précédente, le choix de la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bien que trivial, $(\delta_n = n)$ est la clé de voûte de la démonstration du Théorème 5 page 80. Dans le théorème 7 page 96, la construction même de la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va dépendre naturellement de la classe dans laquelle sera choisie la fonction f que l'on souhaite approcher par des polynômes.

Rappelons que d_n est définie ainsi :

$$d_n := [\delta_n]^{Ent} \cdot k_0, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où k_0 est un entier défini dans le Lemme 15 page 78.

Toute cette partie est donc consacrée à déterminer la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exhiber ses propriétés qui nous permettent d'obtenir un bon comportement asymptotique du terme en exposant n de la Corollaire 6 page 79 pour mener à bien la démonstration du Théorème 7. Commençons par montrer l'existence d'une telle suite

Lemme 22 *Soit g la fonction à valeurs réelles définie par :*

$$\begin{array}{cccc} g & : & [\tau_0, +\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & (s,x) & \longmapsto & \frac{\bar{\omega}(s\cdot x)}{s} \end{array},$$

alors, il existe $\tau_0 > 0$ tel que :

- • *Pour tout x fixé dans $[\tau_0, +\infty[$ la fonction partielle $g(\cdot, x)$ est strictement décroissante.*
- • *Pour tout s fixé dans $[\tau_0, +\infty[$ la fonction partielle $g(s, \cdot)$ est strictement croissante.*

-Preuve : Soit $\tau_0 > 0$ tel que $\bar{\omega}$ soit dans $\mathcal{C}^1([\tau_0, +\infty[)$ et $s \cdot x = e^{t\bar{\mu}'(t)+\bar{\mu}(t)}$, avec $t \gg t_0$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g(s,x) &= \frac{s\cdot x\, \bar{\omega}'(s\cdot x) - \bar{\omega}(s\cdot x)}{s^2} \\ &= \frac{x}{s}\bar{\omega}'(s\cdot x)\left[1 - \frac{\bar{\omega}(s\cdot x)}{s\cdot x\,\bar{\omega}'(s\cdot x)}\right] \end{aligned}$$

D'après le $(*'*')$ de la partie 2.2.4, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g(s,x) &= \frac{x}{s}\bar{\omega}'(s\cdot x)\,[1 + \bar{\mu}(t) - \log(s\cdot x)] \\ &= \frac{x}{s}\bar{\omega}'(s\cdot x)\,[1 + \bar{\mu}(t) - t\bar{\mu}'(t) - \bar{\mu}(t)] \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial s} g(s,x) = -\frac{x}{s}\bar{\omega}'(s\cdot x)\, t\mu'(t), \quad (\forall s,\, t \in [\tau_0, +\infty[). \quad (\diamond)$$

Etant donné que pour tout $t \gg t_0,\ \mu'(t) > 0$, on a $\frac{\partial}{\partial s} g(s,x) < 0,\ (\forall s,\ t \in [\tau_0, +\infty[)$, ceci d'après $(\diamond)$. ■

Lemme 23

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\bar{\omega}(s)}{s} = 0.$$

-Preuve : Pour tout $s \gg s_0$, il existe un unique $t \gg t_0$, tels que

$$\bar{\omega}(s) = t^2 \bar{\mu}'(t) \quad \text{et} \quad s = e^{t\bar{\mu}'(t) + \bar{\mu}(t)},$$

on a donc :

$$\frac{\bar{\omega}(s)}{s} = \frac{t^2 \bar{\mu}'(t)}{e^{t\bar{\mu}'(t)+\bar{\mu}(t)}} = \frac{t + t^2\mu'(t)}{te \cdot e^{t\mu'(t)+\mu(t)}} = \frac{e^{-t\mu'(t)-\mu(t)}}{e} + \frac{t\mu'(t)e^{-t\mu'(t)-\mu(t)}}{e}.$$

Avec les propriétés de μ et μ' on en déduit la limite voulue. ■

Lemme 24 *Il existe un entier positif n_0 et une suite réelle $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n} = 1 \qquad$ *i.e.* $\delta_n = \frac{e^{\bar{\gamma}(n)}}{n} = e^{\gamma(n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0)$.
2. $0 < \delta_n < \delta_{n+1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0)$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = +\infty$.
4. $\limsup_{n\to+\infty} (\delta_n)^{\frac{1}{n^\alpha}} < +\infty, \quad (\forall \alpha > \frac{1}{2})$.

-Preuve : Montrons *1.*, c'est une conséquence immédiate de la définition de $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des propriétés de la fonction $\gamma(u)$. En effet, si δ_n existe, on a

$$\bar{\omega}(n \cdot \delta_n) = n,$$

donc

$$\bar{\gamma}(\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)) = \log(n \cdot \delta_n) = \bar{\gamma}(n),$$

soit encore

$$\delta_n = e^{\gamma(n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

car $\bar{\gamma}(u) = \gamma(u) + \log(u)$, $(\forall u > 0)$. Donc définie ainsi, la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, d'après les propriétés de $\gamma(u)$, les assertions *2.* et *3.*.

Pour finir, démontrons *4.*, soit α un réel tel que $\alpha > \frac{1}{2}$, on a

$$(\delta_n)^{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{1}{n}e^{\bar{\gamma}(n)}\right)^{\frac{1}{n^\alpha}} = e^{\frac{\gamma(n)}{n^\alpha}}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star).$$

Etudions $\frac{\gamma(u)}{u^\alpha}$ quand u est au voisinage de l'infini ; on a par définition de γ.

$$\frac{\gamma(u)}{u^\alpha} = \frac{\log s}{\omega(s)^\alpha}, \quad (\forall u \gg 0).$$

Posons :

$$\vartheta_\alpha(s) = \frac{\log s}{\omega(s)^\alpha}, \quad (\forall s \gg 0),$$

la fonction $\vartheta_\alpha(s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$$\vartheta'_\alpha(s) = \frac{\frac{1}{s}\omega(s)^\alpha - \alpha\omega'(s)\omega(s)^{\alpha-1}\log s}{\omega(s)^{2\alpha}} = \frac{\omega'(s)}{\omega(s)^{\alpha+1}}\left[\frac{\omega(s)}{s\omega'(s)} - \alpha\log s\right], \quad (\forall s \gg 0).$$

Soit encore :

$$\vartheta'_\alpha(s) = \frac{\omega'(s)}{\omega(s)^{\alpha+1}}\left[-\alpha\mu(t) + (1-\alpha)t\mu'(t)\right],$$

pour le cas extrême $\mu(t) = at$, $(a > 0)$ on a $\vartheta'_\alpha(s) < 0$, pour tout $s \gg 0$, dès que $\alpha > \frac{1}{2}$. Donc c'est encore vrai pour toutes les fonctions $\mu(t)$ intermédiaires. La fonction $\vartheta_\alpha(s)$ est donc strictement décroissante, sachant que :

$$\frac{\gamma(u)}{u^\alpha} = \vartheta_\alpha(s), \quad (\forall s \gg 0),$$

donc il existe une constante réelle $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\frac{\gamma(u)}{u^\alpha} < C_\alpha, \quad (\forall u \gg 0), \text{ donc } \limsup_{u\to+\infty}\frac{\gamma(u)}{u^\alpha} < C_\alpha.$$

Le lemme est démontré. ■

La mise en oeuvre de cette construction de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les deux Lemmes suivants :

Lemme 25 (Lemme d'absorption) *Soient $\rho, \alpha > 0$ et $\rho' \in]0,1[$ des constantes réelles fixées. Alors, il existe un entier positif non nul n_0 et un réel $A > 0$, tel que :*

$$\frac{\rho}{[1 + A\Gamma(\bar{\omega}(n \cdot \delta_n))]^{\alpha\delta_n}} \leqslant \rho', \quad (\forall n \geqslant n_0).$$

-Preuve : Un calcul élémentaire montre que :

$$\left|\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right| \leqslant |x|^3, \quad (\forall x \geqslant 0). \quad (\diamond)$$

Tout d'abord, rappelons que $\Gamma(\bar{\omega}(s)) = \frac{\bar{\omega}(s)}{s}$. Donc nous avons :

$$\log\left(\frac{\rho}{[1 + A\Gamma(\bar{\omega}(n \cdot \delta_n))]^{\alpha\delta_n}}\right) = \log\rho - \alpha\delta_n \log\left(1 + A\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n \cdot \delta_n}\right).$$

Donc d'après $(\diamond)$, nous avons la minoration suivante :

$$\log\left(1 + A\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n \cdot \delta_n}\right) \geqslant A\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n \cdot \delta_n}\left[1 - \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n \cdot \delta_n}\right)\right],$$

en se souvenant que par construction de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\frac{\bar{\omega}(n\cdot\delta_n)}{n} = 1$, donc

$$\log\left(\frac{\rho}{[1 + A\Gamma(\bar{\omega}(n \cdot \delta_n))]^{\alpha\delta_n}}\right) \leqslant \log\rho - \alpha A\left[1 - \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n \cdot \delta_n}\right)\right].$$

On peut donc choisir un $n_0 \geqslant 1$ et $A > 0$ suffisamment grand de sorte que :

$$\log\rho - \alpha A\left[1 - \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\bar{\omega}(n \cdot \delta_n)}{n \cdot \delta_n}\right)\right] \leqslant \log\rho' < 0. \quad \blacksquare$$

Lemme 26 *Les limites ci-dessous sont vérifiées :*

1. $\lim_{n\to+\infty}(1 + A\Gamma(\bar{\omega}(n \cdot d_n)))^{\frac{1}{A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))}} = e, \quad (\forall A > 0)$.
2. $\limsup_{n\to+\infty} (n \cdot d_n)^{\frac{1}{n}} < +\infty$.
3. $\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{n\cdot d_n}{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1$.

Preuve : Seules les trois dernières assertions méritent d'être précisées, pour *2.* :

$$(n \cdot d_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant (k_0 n)^{\frac{1}{n}} (\delta_n)^{\frac{1}{n}},$$

on conclut par le Lemme 24 assertion *4.*.

Pour *3.*, en vertu du Lemme 22 et la croissance de $\bar{\omega}$, nous avons les estimations suivantes :

$$\frac{\bar{\omega}(n\cdot\delta_n)}{k_0\, n\cdot\delta_n} \leqslant \frac{\bar{\omega}(n\cdot k_0\,\delta_n)}{n\cdot k_0\,\delta_n} \leqslant \frac{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}{n\cdot d_n} \leqslant \frac{\bar{\omega}(n\cdot k_0\,(\delta_n-1))}{n\cdot k_0\,(\delta_n-1)} \leqslant \frac{\bar{\omega}(n\cdot\delta_n)}{n\cdot(\delta_n-1)}, \quad (\forall n \gg 0),$$

en gardant à l'esprit que $d_n = [\delta_n]^{Ent}\cdot k_0$. De la construction même de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit :

$$\frac{1}{(k_0\,\delta_n)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \left(\frac{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}{n\cdot d_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{(\delta_n-1)^{\frac{1}{n}}}, \quad (\forall n \gg 0),$$

d'après le Lemme 24, les assertions *3.* et *4.* nous donnent $\limsup_{n\to+\infty}(\delta_n)^{\frac{1}{n}} < +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = +\infty$, donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{n\cdot d_n}{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty}(\delta_n)^{\frac{1}{n}} < +\infty,$$

on a la limite voulue.

Pour finir montrons *4.*. On a, par définition de $d_n = [\delta_n]^{Ent}\cdot k_0$ et la stricte croissance de $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les inégalités suivantes :

$$1 \leqslant \frac{d_{n+1}}{d_n} \leqslant \frac{\delta_{n+1}}{(\delta_n-1)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = +\infty$, montrons que $\limsup_{n\to+\infty}\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 1$. D'après le *1.* du Lemme 24, on a

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = e^{\gamma(n+1)-\gamma(n)},$$

Commençons donc par majorer,

$$\gamma(\omega(s)+1) - \gamma(\omega(s)) = \int_0^1 \gamma'(\omega(s)+\tau)d\tau\,.$$

Avec le Lemme de Fatou, on obtient :

$$\limsup_{s\to+\infty}\int_0^1 \gamma'(\omega(s)+\tau)d\tau \leqslant \int_0^1 \limsup_{s\to+\infty}\gamma'(\omega(s)+\tau)d\tau\,,$$

d'où

$$\limsup_{s\to+\infty}[\gamma(\omega(s)+1)-\gamma(\omega(s))] \leqslant \int_0^1 \limsup_{s\to+\infty}\gamma'(\omega(s))d\tau = \limsup_{s\to+\infty}\gamma'(\omega(s)), \quad (\diamond)$$

en se souvenant que $\gamma(\omega(s)) = \log s$, on a donc en dérivant par rapport à s :

$$\gamma'(\omega(s)) = \frac{1}{s\omega'(s)}, \quad (\forall s \gg 0).$$

Comme $s\omega'(s) = t$, il s'ensuit que $\lim_{s\to+\infty} s\omega'(s) = +\infty$; donc en remplaçant dans ($\diamond$), on a

$$\limsup_{s\to+\infty} [\gamma(\omega(s)+1) - \gamma(\omega(s))] \leqslant 0.$$

La fonction γ est croissante et positive, ce qui nous permet de conclure :

$$\lim_{s\to+\infty} [\gamma(\omega(s)+1) - \gamma(\omega(s))] = 0,$$

en passant à l'exponentielle, ceci achève notre démonstration du Lemme. ■

2.7.2 Première approximation dans les lignes de niveaux $L_{A,n}$

Nous allons enfin utiliser tout l'arsenal mis en place pour l'approximation du noyau $\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta))\wedge\omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}$. Cette fois-ci, nous considérons les sous-ensembles de niveaux suivants :

$$L_{A,n} = \left\{\zeta \in \widetilde{D} : R(\zeta) \geqslant 1 + A\Gamma(\overline{\omega}(n\cdot d_n))\right\}, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall A > 0).$$

Dans le Lemme 20 page 89, il est mentionné que la jauge $R(\zeta)$ est semi-continue inférieurement. Donc l'ensemble $L_{A,n}$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Notons la forme $\omega'_\zeta(w(z,\zeta))$ dans sa base canonique ainsi :

$$\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta) = \sum_{|J|=N-1}{}' \omega'_{\zeta,J}(w(z,\zeta)) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}^J,$$

où $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_N$. Rappelons que $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite d'opérateurs linéaires définis dans le Corollaire 6 page 79.

Lemme 27 *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ qui est (HCP) et s-H convexe, alors il existe un entier positif n_0 et C, B deux constantes réelles strictement positives tels que pour tout multi-indices :*

$$J = (j_1, \ldots, j_{N-1}), \quad 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{N-1} \leqslant N,$$

on ait

$$\left\| \frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N} - \Lambda_{n\cdot d_n}\left(\frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right)\right\|_K \leqslant C\, e^{-B\bar{\omega}(n\cdot d_n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ \forall \zeta \in L_{A,n}).$$

-Preuve : Commençons par poser :

$$E_{J,n}(\zeta) := \left\| \frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N} - \Lambda_{n\cdot d_n}\left(\frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right)\right\|_K .$$

D'après le Corollaire 6, on a :($\forall \zeta \in L_{A,n}$),

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant C_{M,N}(n\cdot d_n)^N R(\zeta)^{2d_n(N+M)}\left(\frac{1+(N+M)\cdot R(\zeta)^{d_n}}{1+R(\zeta)^{2\alpha d_n}}\right)^n \times$$

$$\frac{(1+R(\zeta)^{d_n})}{(R(\zeta)^{2\alpha d_n}-1)^{2(N+M)}}\left\|\frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right\|_{\mathcal{U}_K(R(\zeta))},$$

avec le choix de α dans $\left]\frac{1}{2},1\right[$. En appliquant les majorations (**II**) de la Proposition 11 page 84 au facteur $\left\|\frac{\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta))}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right\|_{\mathcal{U}_K(R(\zeta))}$ ci-dessus, on obtient l'estimation suivante :

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \frac{2^N C_{N,M}(n\cdot d_n)^N}{R(\zeta)^{d_n[n(2\alpha-1)-2(N+M)-1]}}\left(\frac{1+N+M}{2}\right)^n \times \frac{1}{(R(\zeta)^{\alpha d_n}-1)^{2(N+M)}} \times \frac{1}{d(\zeta,K)^{N_J}},$$

où N_J est un entier dépendant de N et du s de la s-H convexité du compact K avec ζ dans $L_{A,n}$ fixé. Le compact K étant (HCP), le Lemme 21 page 89 permet de voir que :

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \frac{\widetilde{C}\cdot(n\cdot d_n)^N}{R(\zeta)^{\frac{n\cdot d_n}{2}\left[(2\alpha-1)-\frac{2(N+M)+1}{n}\right]}}\left(\frac{1+N+M}{2R(\zeta)^{\frac{d_n}{2}\left[(2\alpha-1)-\frac{2(N+M)+1}{n}\right]}}\right)^n \times$$

$$\frac{1}{(R(\zeta)^{\alpha d_n}-1)^{2(N+M)}\times(R(\zeta)-1)^{\frac{N_J}{\kappa}}}.$$

Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \frac{\widetilde{C}\cdot(n\cdot d_n)^N}{[1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))]^{n\cdot d_n\cdot D}}\left(\frac{\rho}{[1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))]^{d_n\cdot D}}\right)^n \times$$

$$\frac{1}{\left([1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))]^{\alpha d_n}-1\right)^{2(N+M)}}\left(\frac{n\cdot d_n}{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}\right)^{\frac{N_J}{\kappa}},$$

où

$$\rho=\frac{N+M+1}{2}\text{ et }D=\frac{2\alpha-1}{4}.$$

D'après le Lemme 26 page 100 assertion *1.*, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{\frac{1}{A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))}}=e,$$

donc il existe $n_1\geqslant n_0$, tel que pour tout $A>0$:

$$(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{\frac{1}{A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))}}\geqslant\frac{e}{2},\quad(\forall n\geqslant n_1),$$

ou encore,

$$(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{n\cdot d_n D}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{n\cdot d_n DA\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))}=\left(\frac{e}{2}\right)^{DA\bar{\omega}(n\cdot d_n)}\quad(\forall n\geqslant n_1).\quad(\diamondsuit_1)$$

Minorons le terme ci-dessous pour tout $n\geqslant n_1$,

$$(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{\alpha d_n}\geqslant(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{\frac{1}{A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))}A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))\alpha d_n}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{A\frac{n\cdot d_n\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))\alpha}{n}}$$

d'où

$$(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{A\alpha d_n}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{\alpha\frac{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}{n}}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{A\alpha\frac{\bar{\omega}(n\cdot k_0(\delta_n-1))}{n}}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{A\alpha\frac{\bar{\omega}(n\cdot\delta_n)}{n}},$$

la dernière estimation est valide pour $n\gg 0$ et $k_0\geqslant 2$. Dans la construction de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, remémorons-nous $\frac{\bar{\omega}(n\cdot\delta_n)}{n}=1$, d'ou

$$(1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n)))^{A\alpha d_n}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{\alpha\frac{\bar{\omega}(n\cdot\delta_n)}{n}}\geqslant\left(\frac{e}{2}\right)^{A\alpha},\quad(\forall n\geqslant n_1,\ \forall A>0).\quad(\diamondsuit_2)$$

Donc avec $(\diamondsuit_1)$ et $(\diamondsuit_2)$, on a l'estimation suivante :

$$E_{J,n}(\zeta)\leqslant\widetilde{C}\left(\frac{e}{2}\right)^{-DA\bar{\omega}(n\cdot d_n)}\times\frac{\left(\left(\frac{n\cdot d_n}{\bar{\omega}(n\cdot d_n)}\right)^{\frac{N_J}{\kappa\cdot n}}(n\cdot d_n)^{\frac{N}{n}}\right)^n}{\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{\alpha A}-1\right]^{2(N+M)}}\times\left(\frac{\rho}{[1+A\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))]^{d_n\cdot D}}\right)^n.$$

D'après les assertions *2.* et *3.* du Lemme 26 page 100, il existe $n_2 \geqslant n_1$ et $K > 1$ tel que :

$$\left(\frac{n \cdot d_n}{\bar{\omega}(n \cdot d_n)}\right)^{\frac{N_J}{\kappa \cdot n}} \leqslant K \quad \text{et} \quad (n \cdot d_n)^{\frac{N}{n}} \leqslant K, \quad (\forall n \geqslant n_2).$$

Donc,

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \widetilde{C}\left(\frac{e}{2}\right)^{-DA\bar{\omega}(n \cdot d_n)} \times \frac{K^n}{\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{\alpha A} - 1\right]^{2(N+M)}} \times \left(\frac{\rho}{[1 + A\Gamma(\bar{\omega}(n \cdot d_n))]^{d_n \cdot D}}\right)^n.$$

Avec le Lemme 25 page 100, on peut trouver $A > 0$ suffisamment grand et $n_3 \geqslant n_2$, tel que $\rho' = \frac{1}{K}$ et conclure que :

$$E_{J,n}(\zeta) \leqslant \frac{\widetilde{C}}{\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{\alpha A} - 1\right]^{2(N+M)}} \times \left(\frac{e}{2}\right)^{-DA\bar{\omega}(n \cdot d_n)}, \quad (\forall n \geqslant n_3,\ \forall \zeta \in L_{A,n}).$$

Le Lemme est démontré. ■

Lemme 28 *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$, Whitney 1-régulier, vérifiant la condition (SL) et s-H convexe; alors pour toute fonction f dans $\mathcal{H}_M(K)$, il existe deux constantes réelles strictement positives C_1 et C_1, dépendant uniquement de f, telles que*

$$\int_{\widetilde{D} \setminus L_{A,n}} \left|\frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_\zeta(w(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z, \zeta)^N}\right| \leqslant C_1 e^{-C_2 \bar{\omega}(n \cdot d_n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star),$$

où $\tilde{f}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\widetilde{D})$ à support compact prolongeant f c.f. Théorème 4 page 4.

-Preuve : Posons,

$$I_n := \int_{\widetilde{D} \setminus L_{A,n}} \left|\frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_\zeta(w(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z, \zeta)^N}\right|, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^\star)$$

et

$$U_n := \left\{\zeta \in \widetilde{D} : \tilde{C} d(\zeta, K)^\beta < A\Gamma(\bar{\omega}(n \cdot d_n))\right\}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Etant donné que le compact K vérifie la condition (SL), d'après le Lemme 21 page 89, on a $\beta \in]0, 1]$ et $\widetilde{D} \setminus L_{A,n} \subset U_n$. D'ou,

$$I_n \leqslant \lambda_{2N}(U_n) \sup_{\zeta \in U_n} \left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| d(\zeta, K)^{-\tilde{N}}, \qquad (\diamond)$$

où $\tilde{N} = \max_{|J|=N-1}(N_J)$. Rappelons que $\tilde{N}$ dépend du s de la s-H convexité de K.
On a d'après le Théorème 4 page 61, pour $\zeta \in U_n$ fixé :

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| d(\zeta,K)^{-\tilde{N}} \leqslant \Omega\left(\frac{1}{Cd(\zeta,K)}\right) d(\zeta,K)^{-\tilde{N}},$$

en utilisant le Lemme 8 page 59 par récurrence, on obtient :

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| d(\zeta,K)^{-\tilde{N}} \leqslant \Omega\left(\frac{1}{C(\tilde{N})\cdot d(\zeta,K)}\right),$$

où $C(\tilde{N})$ est une constante réelle strictement positive dépendant uniquement de la fonction f, du compact K et de l'entier $\tilde{N}$ (donc de s).
Comme $d(\zeta,K) < 1$ pour tout $\zeta \in \widetilde{D}$ et $\beta \in]0,1]$, on a donc :

$$d(\zeta,K) \leqslant (d(\zeta,K))^{\beta}, \quad (\forall \zeta \in \widetilde{D}).$$

$$\Omega\left(\frac{1}{C(\tilde{N})\cdot d(\zeta,K)}\right) \leqslant \Omega\left(\frac{1}{C(\tilde{N})\cdot d(\zeta,K)^{\beta}}\right)$$

Donc,

$$\left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| d(\zeta,K)^{-\tilde{N}} \leqslant \Omega\left(\frac{1}{C(\tilde{N})\cdot d(\zeta,K)^{\beta}}\right), \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \zeta \in U_n),$$

il s'ensuit,

$$\sup_{\zeta \in U_n}\left|\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta)\right| d(\zeta,K)^{-\tilde{N}} \leqslant \Omega\left(\frac{1}{\frac{C^{\beta}A}{\tilde{C}}\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))}\right),$$

d'où avec $(\diamond)$,

$$I_n \leqslant Ce^{-\Gamma^{<-1>}\left(\frac{C^{\beta}A}{\tilde{C}}\Gamma(\bar{\omega}(n\cdot d_n))\right)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Si l'on pose $B = \frac{C^{\beta}A}{\tilde{C}}$, on a

$$\Gamma^{<-1>}(B\Gamma(u)) - \Gamma^{<-1>}(\Gamma(u)) = \int_1^B \frac{d}{dt}\Gamma^{<-1>}(t\Gamma(u))dt = \int_1^B \Gamma(u)\times\Gamma^{<-1>\prime}(t\Gamma(u))dt,$$

comme $\lim_{u\to+\infty}\Gamma(u) = 0$, il existe $u_0 > 0$, tel que

$$t\Gamma(u) \in [0,1], \quad (\forall u > u_0,\ \forall t \in [1,B]).$$

Sachant que Γ est strictement décroissante, on a $\Gamma^{<-1>\prime} < 0$, donc il existe une constante réelle C strictement positive dépendant de B et Γ telle que :

$$\Gamma^{<-1>}(B\Gamma(u)) \geqslant \Gamma^{<-1>}(\Gamma(u)) - C, \quad (\forall u > u_0).$$

Par conséquent, il existe un entier $n_5 \geqslant n_4$ et une constante réelle $C_2 > 0$, tels que

$$I_n \leqslant Ce^{-C_2\bar{\omega}(n\cdot d_n)}, \quad (\forall n \geqslant n_5).$$

Le Lemme est démontré. ■

2.8 Démonstration du théorème 7

Rappelons que pour tout entier $n \geqslant n_5$:

$$\Xi_{n\cdot d_n}\left(\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right) := \sum_{|J|=N-1}{}' \Lambda_{n\cdot d_n}(\omega'_{\zeta,J}(w(\cdot,\zeta)))\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}^J,$$

où la forme $d\zeta$ est $d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$. Il est trivial de voir que

$$\Xi_{n\cdot d_n}\left(\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right) \in (\mathbb{C}_{n\cdot d_n}[z_1,\dots,z_N]\times\mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)})\left(O(\frac{A}{2^s})\right), \quad (\forall n \geqslant n_5,\ \forall \zeta \in \widetilde{D}).$$

L'espace $(\mathbb{C}_n[z_1,\dots,z_N] \times \mathcal{C}^\infty_{(N,N-1)})\left(O(\frac{A}{2^s})\right)$ est défini comme dans la partie 2.7.

-Preuve : Fixons une fonction f dans $\mathcal{H}_M(K)$ et définissons $P_{n\cdot d_n}(z)$ ainsi,

$$P_{n\cdot d_n}(z) := \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\int_{L_{A,n}} \bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \Xi_{n\cdot d_n}\left(\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right)(z),$$

il est immédiat de voir que $P_{n\cdot d_n}(z)$ est dans $\mathbb{C}_{n\cdot d_n}[z_1,\dots,z_N]$. D'après le Théorème 4 page 61 et le Théorème 6 page 87, on peut écrire l'estimation ci-dessous, pour z dans K :

$$|f(z) - P_{n\cdot d_n}(z)| \leqslant \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\left|\int_{L_{A,n}} \bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \left(\frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N} - \Xi_{n\cdot d_n}\left(\frac{\omega'_\zeta(w(\cdot,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(\cdot,\zeta)^N}\right)\right)\right|$$

$$+\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\left|\int_{D\setminus L_{A,n}} \frac{\bar{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\Phi(z,\zeta)^N}\right|,$$

écrivons plus simplement,

$$|f(z) - P_{n\cdot d_n}(z)| \leqslant I_{1,n}(z) + I_{2,n}(z), \quad (\forall n \geqslant n_5,\ \forall z \in K).$$

On a d'après le Lemme 27 page 102,

$$\|I_{1,n}\|_K \leqslant Ce^{-B\bar{\omega}(n\cdot d_n)}, \quad (\forall n \geqslant n_5).$$

Avec le Lemme 28 page 105, on estime,

$$\|I_{2,n}\|_K \leqslant C_1 e^{-C_2\bar{\omega}(n\cdot d_n)}, \quad (\forall n \geqslant n_5).$$

Pour passer à tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$P_n = P_{l\cdot d_l}, \quad \text{si} \quad l\cdot d_l \leqslant n < (l+1)\cdot d_{l+1}, \quad (l \in \mathbb{N}).$$

D'après le *4.* du Lemme 26 page 100, il existe $\widetilde{C} > 1$, une constante et un entier l_0 tels que :

$$\frac{(l+1)\cdot d_{l+1}}{l\cdot d_l} \leqslant \widetilde{C}, \quad (\forall l \geqslant l_0).$$

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand et $l \in \mathbb{N}$ tel que $l\cdot d_l \leqslant n < (l+1)\cdot d_{l+1}$,

$$\|f - P_n\|_K \leqslant C e^{-B\bar{\omega}(l\cdot d_l)} \leqslant C e^{-B\bar{\omega}(l\cdot d_l)} \leqslant C e^{-B\bar{\omega}\left(\frac{1}{\widetilde{C}}(l+1)\cdot d_{l+1}\right)} \leqslant C e^{-B\bar{\omega}\left(\frac{1}{\widetilde{C}}n\right)},$$

ceci en vertu de la croissance de $\bar{\omega}$.

Réciproquement[4], supposons f une fonction continue dans K et deux constantes réelles $B > 0$ et $C > 0$ telles que :

$$\|f - P_n\|_K \leqslant C e^{-B\,\bar{\omega}(n)}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ avec $\deg P_n \leqslant n$. Posons l'ensemble suivant :

$$K_n := \left\{ z \in \mathbb{C}^N : d(z,K) < \Gamma(n)^{\frac{1}{\kappa}} \right\}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où κ est l'exposant (HCP), et le sous-ensemble d'indices,

$$I_n := \left\{ k \in \mathbb{N} : n \leqslant \omega(\tilde{k}) < n+1 \right\}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où $\tilde{k}$ est défini avec $t > 0$ choisi de sorte que $e^{t\bar{\mu}'(t)+\bar{\mu}(t)} = k$, pour donner comme unique valeur à $\tilde{k} = e^{t\mu'(t)+\mu(t)}$, ceci d'après les hypothèses émises sur $\mu(t)$. Une relation immédiate lie $\tilde{k}$ à k par leur définition même ; en effet, on a

$$k = \tilde{k}\cdot e\cdot t. \quad (\diamond)$$

[4]L'auteur remercie Taïb Belghiti pour sa contribution dans l'élaboration de la réciproque.

Il faut noter que l'ensemble I_n est fini et que son cardinal est majoré par la valeur $\omega^{<-1>}(n+1) - \omega^{<-1>}(n)$ (ω est strictement croissante).

Fixons n dans $\mathbb{N}$ et k dans I_n puis introduisons le polynôme :

$$Q_k(z) := P_k(z) - P_{k-1}(z). \quad \text{On a bien} \quad \deg Q_k \leqslant k, \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Soit $z \in K_n$, en vertu de l'inégalité de Bernstein-Walsh :

$$|Q_k(z)| \leqslant \|Q_k\|_K \, e^{k \cdot V_K(z)},$$

$$\|Q_k\|_{K_n} \leqslant Ce^{-D\bar{\omega}(k-1)+k\cdot\Gamma(n+1)}.$$

Sachant que $\Gamma(u)$ est décroissante,

$$\|Q_k\|_{K_n} \leqslant Ce^{-D\cdot\bar{\omega}(k-1)+k\cdot\Gamma(\omega(\tilde{k}))}. \quad (\diamond\diamond)$$

En sous souvenant que $\Gamma(\omega(\tilde{k})) = \frac{1}{\tilde{k}}$ et en introduisant $t = k\bar{\omega}'(k)$ dans ($\diamond$), on a la relation suivante :

$$\frac{1}{\tilde{k}} = e\,\bar{\omega}'(k).$$

Maintenant revenons à ($\diamond\diamond$) pour obtenir :

$$\|Q_k\|_{K_n} \leqslant Ce^{-D\cdot\bar{\omega}(k-1)+e\cdot(k-1)\cdot\bar{\omega}'(k-1)}.$$

Il est facile d'obtenir :

$$\bar{\omega}(k) - k\,\bar{\omega}'(k) = \omega(\tilde{k}),$$

ceci par un calcul direct sur $\bar{\mu}(t)$ et $\mu(t)$ par exemple. Après il est donc possible d'écrire :

$$\|Q_k\|_{K_n} \leqslant \widetilde{C}e^{-D\omega(\tilde{k})} \leqslant \widetilde{C}e^{-D\,n}, \qquad \text{pour } n \text{ fixé dans } \mathbb{N} \text{ et } k \text{ choisi convenablement.}$$

Soit H_n le polynôme défini par :

$$H_n(z) = \sum_{k\in I_n} Q_k(z),$$

cette somme a un sens puisque I_n est de cardinal fini. Plus précisément, on a

$$\operatorname{card} I_n \leqslant Ce^{-n^\alpha}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

où $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, pour conclure que :

$$\|H_n\|_{K_n} \leqslant Ce^{-\widetilde{D}\cdot n}, \quad \textbf{(I)}$$

on a bien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} H_n(z), \quad (\forall z \in K). \quad \textbf{(II)}$$

Maintenant, nous utilisons une idée due à T.Belghiti dans ([2]). En effet, nous allons montrer que si (**I**) et (**II**) sont réalisés alors la fonction f est dans $\mathcal{H}_M(K)$.
Soient z dans K et le polydisque $\Delta(z, \frac{1}{2\sqrt{N}}\Gamma(n)^{\frac{1}{\kappa}})$, où $\kappa > 0$ est le coefficient de la (HCP) du compact K, on a alors :

$$\Delta\left(z, \frac{1}{2\sqrt{N}}\Gamma(n)^{\frac{1}{\kappa}}\right) \subset K_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Des estimations de Cauchy nous écrivons, pour tout α multi-indice dans $\mathbb{N}^N$,

$$\|D^\alpha H_n\|_K \leqslant C\alpha!\rho^n e^{\frac{|\alpha|}{r}\gamma(n)}.$$

Soit $\rho_1 \in]\rho, 1[$, alors

$$\|D^\alpha H_n\|_K \leqslant C\alpha!\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n e^{n\log(\rho_1)+\frac{|\alpha|}{\kappa}\gamma(n)}. \quad \textbf{(III)}$$

Considérons la fonction à valeurs réelles $h_{|\alpha|}$ définie,

$$h_{|\alpha|}(\tau) = \tau\log\rho_1 + \frac{|\alpha|}{\kappa}\gamma(\tau), \quad (\forall \tau > 0).$$

Notons que $\gamma(u)$ vérifie le système ci-dessous qui se montre par un calcul élémentaire :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \gamma'(u) & = & \frac{1}{t} \\ \\ \mu(t) & = & \gamma(u) - u\gamma'(u) \\ \\ u & = & t^2\mu'(t) \end{array}\right. \quad \textbf{(IV)}$$

Etant donné que $\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\gamma(\tau)}{\tau}=0$ et $\log\rho_1<0$, la fonction $h_{|\alpha|}$ admet un maximum en $\tau_{|\alpha|}>0$, tel que $h'_{|\alpha|}(\tau_{|\alpha|})=0$. En effet, au regard des équations que doit vérifier $\tau_{|\alpha|}$:

$$h'_{|\alpha|}(\tau_{|\alpha|})=\log\rho_1+\frac{|\alpha|}{\kappa}\gamma'(u)=0,$$

soit encore

$$\gamma'(\tau_{|\alpha|})=-\frac{\kappa}{|\alpha|}\log\rho_1;$$

l'existence de $\tau_{|\alpha|}$ a bien un sens puisque d'après le système (**IV**), la fonction $\gamma'(u)$ est strictement décroissante et $\rho_1<1$, donc à partir d'un certain rang r entier positif, on a pour tout α multi-indice, tel que $|\alpha|\geqslant r$ l'existence d'un unique $\tau_{|\alpha|}>0$ vérifiant :

$$\sup_{\tau>0}h_{|\alpha|}(\tau)=\frac{|\alpha|}{\kappa}\left[\gamma(\tau_{|\alpha|})-\tau_{|\alpha|}\gamma'(\tau_{|\alpha|})\right].$$

En revenant au système (**IV**), on a

$$\sup_{\tau>0}h_{|\alpha|}(\tau)=\frac{|\alpha|}{\kappa}\mu\left(\frac{|\alpha|}{-\kappa\cdot\log\rho_1}\right).$$

En introduisant la valeur de $\sup_{\tau>0}h_{|\alpha|}(\tau)$ dans (**III**) puis utilisant la formule de Stirling et en sommant, on trouve l'estimation ci-dessous :

$$\|D^\alpha f\|_K\leqslant Ce^n\,e^{|\alpha|\cdot\log|\alpha|+\frac{|\alpha|}{\kappa}\cdot\mu\left(\frac{|\alpha|}{-\kappa\cdot\log\rho_1}\right)}.$$

Comme $\mu(t)$ et $\mu\left(\frac{t}{-\kappa\cdot\log\rho_1}\right)$ définissent la même classe c.f. ([2]), on conclut que la fonction f est dans $\mathcal{H}_M(K)$. La démonstration de notre théorème s'achève. ■

Il faut noter que l'on a $\bar{\omega}(s)=s$, lorsque $\mu(t)=0$, ainsi on obtient le théorème de Bernstein. Evidement, dans ce cas, les calculs sur la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas lieu d'être, puisque l'on choisira cette suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nulle et constante.

Chaumat et Chollet ont montré dans ([7]) que tout jet appartenant à la classe de Carleman $\bar{\partial}$-plat était limite de fonctions holomorphes au voisinage de K dans $\mathcal{C}_K(M(p))$.

Remarque 8 *Notons que l'on peut définir les semi-normes dans $\mathcal{H}_M(K)$ ainsi :*

$$q_{M,\rho}(f):=\|f\|_K+\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho^{\bar{\omega}(n)}E_n(f),\quad(\forall f\in\mathcal{H}_M(K)),\ (\forall\rho\in\,]0,1[).$$

ces semi-normes sont analogues à celle de Zerner dans ([24]).

2.8.1 Corollaires

Enonçons quelques corollaires, qui sont des applications directes du Théorème 6. Considérons la familles d'espaces de suites $(h_{M,\rho}(\mathbb{N}))_{\rho\in]0,1[}$ définies comme ci-dessous :

$$h_{M,\rho}(\mathbb{N}) := \left\{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|\, \rho^{\bar{\omega}(k)} < +\infty\right\}, \quad (\forall\rho \in\,]0,1[).$$

L'espace $h_{M,\rho}(\mathbb{N})$ est un espace de Banach, muni de la norme naturelle :

$$\|a\|_{M,\rho} := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|\, \rho^{\bar{\omega}(k)}, \quad (\forall a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in h_{M,\rho}(\mathbb{N})).$$

Posons :

$$h_M(\mathbb{N}) := \bigcup_{\rho\in]0,1[} h_{M,\rho}(\mathbb{N})$$

les injections ci-dessous sont nucléaires, pour tout ρ_1 et ρ_2, tels $0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 < 1$:

$$j_{\rho_1,\rho_2} \quad : \quad h_{M,\rho_2}(\mathbb{N}) \quad \longrightarrow \quad h_{M,\rho_1}(\mathbb{N}),$$

donc $h_M(\mathbb{N})$ est un espace de Fréchet nucléaire.

Corollaire 8 *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ rectifiable par arc, vérifiant les conditions (HCP) et (SL) et $d\lambda_{2N}$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^N$, alors les polynômes orthogonaux, pour la mesure $d\lambda_{2N}$, forment une base de Schauder dans $\mathcal{H}_M(K)$. L'application qui à une fonction de $\mathcal{H}_M(K)$ associe la suite des coefficients de Fourier dans cette base, est un unique isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{H}_M(K)$ dans $h_M(\mathbb{N})$.*

-Preuve : La démonstration est la même que celle donnée par A.Zeriahi c.f. (Corollaire 5.2,[23]) dans le cas de $\mathcal{A}^\infty(K)$. ■

Suites à quelques remarques de V.Thilliez et les Théorèmes 18 et 20 de ([7]), on peu très certainement adapter les techniques de démonstration du Théorème 5 page 80 pour des jets $\mathcal{C}^\infty$ $\bar{\partial}$-plat avec une convergence pour les normes Whitney.

Bibliographie

[1] S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC. Approximation polynomiale de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques. *Annales de l'Institut Fourier*, tome 21(4) :149–173, 1971.

[2] T. BELGHITI. Holomorphic series expansion of functions of Carleman type. *Annales Plonici Mathematici*, 84 (2004), 219-224.

[3] B. BERNDTSSON and M. ANDERSSON. Henkin-Ramirez formulas with weight factors. *Annales de l'Institut Fourier*, tome 32(3) :91–110, 1982.

[4] J. BOCHNAK, M. COSTE et M-F. ROY . *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 of *A series of Modern Surveys in Mathematics.* Springer Verlag Edition, 1987.

[5] A. DUFRESNOY. Sur l'opérateur d'' et les fonctions differentiables au sens de Whitney. *Annales de l'Institut Fourier*, tome 29(1) :229–238, 1979.

[6] E. M. DYNKIN. The pseudo-analytic extension of smooth functions. The uniform scale. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2(115) :33–58, 1980.

[7] J. CHAUMAT et A-M. CHOLLET. Représation intégrale de certaines classes de jets de Whitney. *Contemporary Mathematics.*, Volume 137 :133–153, 1992

[8] J. CHAUMAT et A-M. CHOLLET. Noyau pour résoudre l'équation $\bar\partial$ dans des classes ultradifférentiables sur des compacts irreguliers de $\mathbb{C}^N$. *Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey Edition* , pages 205-226, 1993. Proceding of special year of complex analysis of Mittag-Leffler institute.

[9] L. HÖRMANDER. *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7. North-Holland Mathematical Library Edition, 1994.

[10] W. PAWŁUCKI and W. PLEŚNIAK. Markov's inequalities and $\mathcal{C}^\infty$ functions on sets with polynomial cusps. *Mathematische Annalen Springer-Verlag*, 275 :467–480, 1986.

[11] W. PLEŚNIAK. Markov inequality and the existence of an extension operator for $\mathcal{C}^\infty$ functions. *Journal of Approximation Theory*, 61 :106–117, 1990.

[12] W. PLEŚNIAK. Extension and polynomial approximation of ultradifferrentiable functions of $\mathbb{R}^N$. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, Volume 63 (5) :393–402 1994.

[13] J. SICIAK. Extremal plurisubharmonic function in $\mathbb{C}^n$. *Annales Plonici Mathematici*, XXXIX :175–211, 1981.

[14] J. SICIAK. Rapid polynomial approximation on compact sets in $\mathbb{C}^N$. *Universitat Iagellonicae Acta Mathematica*, XXX :145-154, 1993.

[15] J. SICIAK. On some extremal function and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables. *Trans. Amer. Math. Soc*, 105 (2) :322-357, 1962.

[16] H. SKODA. Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 5 :545–579, 1972.

[17] E.M. STEIN. *Singular Intergrals and Differentiability Properties of Functions*, volume 30 of *PRINCETON MATHEMATICAL SERIES*. Princeton University Press Edition, 1970.

[18] V. THILLIEZ. Prolongement dans les classes ultradifférentiables et propriétés de régularité des compacts de $\mathbb{R}^n$. *Annales Plonici Mathematici* LXIII.1 :71–88, 1996.

[19] J. C. TOUGERON. Classe de fonctions et développements asymptotiques (Communication personnelle).

[20] J. C. TOUGERON. *Idéaux de fonctions différentiables*, volume 71 of *Ergebnisse Der Mathematik*. Springer Verlag Edition, 1972.

[21] V. P. ZAHARJUTA. Extremal plurisubharmonic function, orthogonal polynomials and Bernstein-Walsh theorem for analytic functions of several complex variables. *Annales Plonici Mathematici*, tome 33 :137–148, 1976.

[22] A. ZERIAHI. Meilleure approximation polynomiale et croissance des fonctions entières sur certaines variétés algébriques affines. *Annales de l'Institut Fourier*, tome 37(2) :79–104, 1987.

[23] A. ZERIAHI. Inégalité de Markov et développement en série de polynômes orthogonaux des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathcal{A}^\infty$. *Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey Edition*, pages 1987–1988, 1993. Proceding of special year of complex analysis of Mittag-Leffler institute.

[24] M. ZERNER. Développement en séries de polynômes orthogonaux des fonctions indéfiniment différentiables. *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Sér. I*, 268 :218–220, 1969.