Paramétrisation de l'ensemble des solutions d'un système de contrôle

Soutenance de thèse

8 juin 2005

Plan

Présentation du système

Soit n et $m \leq n$ deux entiers.

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$.
- U ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$.
- f, analytique réelle, $U \to \mathbb{R}^n$.

Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ un m-uplet d'entiers positifs.

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(h)) \qquad (2)$$

avec $j_\mu(h)(t) = (h_1, \dot{h}_1, \ldots, h_1^{(\mu_1)}, h_2, \ldots, h_m^{(\mu_m)})$.

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad (1)$$

Définition

ϕ est une paramétrisation d'ordre μ de (1) si

- *Pour tout $h = (h_1, \ldots, h_m)$ fonctions arbitraires du temps, $t \mapsto \phi(j_\mu(h)(t))$ est solution de (1).*

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ un m-uplet d'entiers positifs.

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(h)) \qquad (2)$$

avec $j_\mu(h)(t) = (h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(\mu_1)}, h_2, \dots, h_m^{(\mu_m)})$.

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad (1)$$

Définition

ϕ est une paramétrisation d'ordre μ de (1) si

- *Pour tout $h = (h_1, \dots, h_m)$ fonctions arbitraires du temps, $t \mapsto \phi(j_\mu(h)(t))$ est solution de (1).*
- *Pour toute solution $(\bar{x}, \bar{u})$ de (1), il existe $\bar{h} = (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)$ telle que*
$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(\bar{h})).$$

Exemple trivial

Exemple

Le système trivial $\dot{x} = u$ avec $m = n$ est paramétrable.
En effet, $x = h$ et $u = \dot{h}$

Exemple

Le système

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = u \end{array}\right. \iff \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0 \tag{3}$$

est paramétrable.
En effet,

$$\left\{\begin{array}{l} x = h_1 \\ y = h_2 \\ \theta = \arctan\frac{\dot{h}_2}{\dot{h}_1} \end{array}\right. \tag{4}$$

Une condition nécessaire

La paramétrisation $\phi = (\varphi, \psi)$ d'ordre μ vérifie l'équation du sytème $\dot{x} = f(x, u)$:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{\mu_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial h_k^{(i)}}(j_\mu(h)).h_k^{(i+1)} = f_j(\varphi(j_\mu(h)), \psi(j_\mu(h))) \qquad (5)$$

Une condition nécessaire

La paramétrisation $\phi = (\varphi, \psi)$ d'ordre μ vérifie l'équation du sytème $\dot{x} = f(x, u)$:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{\mu_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial h_k^{(i)}}(j_\mu(h)).h_k^{(i+1)} = f_j(\varphi(j_\mu(h)), \psi(j_\mu(h))) \tag{5}$$

Système d'EDP avec $\sum(\mu_i + 1)$ variables indépendantes et $n + m$ variables dépendantes.

- Si $\dot{x} = f(x, u)$ admet une paramétrisation, ce système d'EDP est intégrable.

- Si $\dot{x} = f(x, u)$ admet une paramétrisation, ce système d'EDP est intégrable.
- Il reste à exprimer que toute solution de $\dot{x} = f(x, u)$ a un antécédant $j_\mu(h)$ par ϕ.

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(h))$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(h))$$

- Pour $(\bar{x}, \bar{u})$ donnés, c'est un système d'équations différentielles ordinaires en la variable h...

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(h))$$

- Pour $(\bar{x}, \bar{u})$ donnés, c'est un système d'équations différentielles ordinaires en la variable h...
- ... mais sous forme non résolue.

Théorème

Le système

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \phi(j_\mu(h)) \tag{6}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} S(x, u, \dot{x}, \dot{u}, \dots, x^{(L)}, u^{(L)}) = 0 \\ h^0 = H^0(h^1, \dots, h^N, x, u, \dots, x^{(L)}, u^{(L)}) \\ \dot{h}^1 = H^1(h, \dot{h}^2, \dots, \dot{h}^N, x, u, \dots, x^{(L)}, u^{(L)}) \\ \vdots \\ h^{N(N)} = H^N(h, \dot{h}, \dots, h^{(N-1)}, x, u, \dots, x^{(L)}, u^{(L)}) \end{cases} \tag{7}$$

où $h^i = (h_{d_0+\dots+d_{i-1}+1}, \dots, h_{d_0+\dots+d_i})$,
N *et* $d_0, \dots, d_N$ *sont des entiers positifs ou nuls,*
et les $N+1$ *fonctions* $H^0, \dots, H^N$ *sont analytiques réelles.*

Si $N = 0$, le système est dit plat (pas de constante) et H^0 est une sortie plate.

$$h = H^0(x, u, \ldots, x^{(L)}, u^{(L)}) = \tilde{H}^0(x, u, \ldots, u^{(L)}).$$

Système plat

Exemple

Le système

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= u \end{aligned}\right. \tag{8}$$

est plat et $(h_1, h_2) = (x, y)$ est une sortie plate.

Question centrale

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système $\dot{x} = f(x, u)$ admette une paramétrisation d'ordre μ ou soit plat ?

Bibliographie

Problème de Monge

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).
- Lien avec les EDP, généralisation du problème de Monge (Goursat, 1930).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).
- Lien avec les EDP, généralisation du problème de Monge (Goursat, 1930).
- Synthèse de résultats (Zervos, 1932).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).
- Lien avec les EDP, généralisation du problème de Monge (Goursat, 1930).
- Synthèse de résultats (Zervos, 1932).

En automatique

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).
- Lien avec les EDP, généralisation du problème de Monge (Goursat, 1930).
- Synthèse de résultats (Zervos, 1932).

En automatique

- Linéarisation statique (Jakubczyk-Respondek, 1980) et dynamique (Isidori-Moog-De Luca, 1986, Charlet-Lévine-Marino, 1989).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).
- Lien avec les EDP, généralisation du problème de Monge (Goursat, 1930).
- Synthèse de résultats (Zervos, 1932).

En automatique

- Linéarisation statique (Jakubczyk-Respondek, 1980) et dynamique (Isidori-Moog-De Luca, 1986, Charlet-Lévine-Marino, 1989).
- Concept de systèmes plats (Fliess-Lévine-Martin-Rouchon, 1992).

Bibliographie

Problème de Monge

- Paramétrisation dans un cas spécifique (Monge, 1784).
- Pas de paramétrisation de $\dot{z} = (\ddot{y})^2$ (Hilbert, 1912).
- Classification des systèmes affines à deux entrées sans dérive (Cartan, 1915).
- Lien avec les EDP, généralisation du problème de Monge (Goursat, 1930).
- Synthèse de résultats (Zervos, 1932).

En automatique

- Linéarisation statique (Jakubczyk-Respondek, 1980) et dynamique (Isidori-Moog-De Luca, 1986, Charlet-Lévine-Marino, 1989).
- Concept de systèmes plats (Fliess-Lévine-Martin-Rouchon, 1992).
- Résultats partiels (Fliess, Martin, Rouchon, Pomet, 199-, 200-).

Etude de la paramétrisation des systèmes de contrôle à trois états et deux contrôles

Système à trois états et deux entrées

On considère $n = 3$ et $m = 2$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2)$$

Système à trois états et deux entrées

On considère $n = 3$ et $m = 2$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2)$$

Conditions nécessaires :

- Accessibilité forte ou contrôlabilité du linéarisé presque partout (Lobry, 1970, Jurdjevic-Sussmann, 1972).
- Système réglé (Rouchon, 1994).

$$\dot{x} = X_0(x, u_1) + u_2 X_1(x, u_1)$$

Les systèmes non traités se ramènent à (forme normale de Engel) :

$$\begin{cases} \dot{x} = w_1 \\ \dot{y} = \gamma(x, y, z, w_2) + z w_1 \\ \dot{z} = \delta(x, y, z, w_2) + w_2 w_1 \end{cases} \tag{9}$$

où γ et δ sont analytiques réelles et $\frac{\partial \gamma}{\partial w_2} \neq 0$.

Les systèmes non traités se ramènent à (forme normale de Engel) :

$$\begin{cases} \dot{x} = w_1 \\ \dot{y} = \gamma(x, y, z, w_2) + z w_1 \\ \dot{z} = \delta(x, y, z, w_2) + w_2 w_1 \end{cases} \tag{9}$$

où γ et δ sont analytiques réelles et $\frac{\partial \gamma}{\partial w_2} \neq 0$.

- De façon équivalente (par inversion locale) :

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x}, \tag{10}$$

  avec $g_4 \neq 0$ identiquement.
- L'équation (10) est scalaire, les fonctions d et g sont analytiques réelles.

Il est très difficile de conclure à l'inexistence d'une paramétrisation sans préjuger de l'ordre.

Il est très difficile de conclure à l'inexistence d'une paramétrisation sans préjuger de l'ordre.

Exemple

On ne sait pas si l'équation

$$\dot{z} = (\dot{y} - z\dot{x})^2 \dot{x} \tag{11}$$

est paramétrable. Mais il n'admet pas de paramétrisation pour $\mu_1 < 3$ ou $\mu_2 < 4$.

Notations

On recherche des paramétrisations d'ordre (k, ℓ) avec des fonctions arbitraires du temps u et v (au lieu de h_1 et h_2). Quitte à inverser ces fonctions, on considère $k \leq \ell$.

Notations

On recherche des paramétrisations d'ordre (k, ℓ) avec des fonctions arbitraires du temps u et v (au lieu de h_1 et h_2). Quitte à inverser ces fonctions, on considère $k \leq \ell$.
On considère trois fonctions définies par les relations entre les dérivées partielles de g et d suivantes

$$
\begin{aligned}
S &= 2g_4 g_{444} - 3g_{44}^2 \\
T &= 2g_4 d_{444} - 3g_{44} d_{44} \\
J &= \cdots
\end{aligned}
$$

Théorème

Si le système $\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x}$ *admet une paramétrisation d'ordre* (k, ℓ) *sur un certain jet, alors*

- *soit* $S = T = J = 0$ *et on peut choisir* $(k, \ell) = (1, 2)$,
- *soit* $k \geq 3$ *et* $\ell \geq 4$.

Un système d'équations aux dérivées partielles ($\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta}$) à

- $k+\ell+1$ variables indépendantes
  $u, \dot{u}, \ldots, u^{(k-1)}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\ell-1)}, x$
- et une variable dépendante p.

Un système d'équations aux dérivées partielles ($\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta}$) à

- $k+\ell+1$ variables indépendantes $u, \dot{u}, \ldots, u^{(k-1)}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\ell-1)}, x$
- et une variable dépendante p.

$$\begin{cases} p_{u^{(k-1)}}\left(Fp_x - \delta(x,p,p_x,p_{xx})\right) - p_{xu^{(k-1)}}\left(Fp - \gamma(x,p,p_x,p_{xx})\right) = 0 \\ p_{u^{(k-1)}}\, p_{xv^{(\ell-1)}} - p_{xu^{(k-1)}}\, p_{v^{(\ell-1)}} = 0 \\ p_{u^{(k-1)}} \neq 0 \\ p_{v^{(\ell-1)}} \neq 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2\, p_x + \gamma_3\, p_{xx} + \gamma_4\, p_{xxx} - \delta \neq 0 \end{cases}$$

$$F = \sum_{i=0}^{k-2} u^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} + \sum_{i=0}^{\ell-2} v^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial v^{(i)}}$$

Solutions K-régulières

Pour p satisfaisant ces équations et inéquations, définissons

$$\sigma = -\frac{p_{v^{(\ell-1)}}}{p_{u^{(k-1)}}}\,, \quad \tau = \frac{-Fp + \gamma(x, p, p_x, p_{xx})}{p_{u^{(k-1)}}}\,,$$

Solutions K-régulières

Pour p satisfaisant ces équations et inéquations, définissons

$$\sigma = -\frac{p_{v^{(\ell-1)}}}{p_{u^{(k-1)}}}\,, \quad \tau = \frac{-Fp + \gamma(x, p, p_x, p_{xx})}{p_{u^{(k-1)}}}\,,$$

$$E = \sigma\frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \frac{\partial}{\partial v^{(\ell-1)}}\,, \quad D = F + \tau\frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \sum_{i=0}^{k+\ell-2} x^{(i+1)}\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\,.$$

Solutions K-régulières

Pour p satisfaisant ces équations et inéquations, définissons

$$\sigma = -\frac{p_{v^{(\ell-1)}}}{p_{u^{(k-1)}}} , \quad \tau = \frac{-Fp + \gamma(x, p, p_x, p_{xx})}{p_{u^{(k-1)}}} ,$$

$$E = \sigma \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \frac{\partial}{\partial v^{(\ell-1)}} , \quad D = F + \tau \frac{\partial}{\partial u^{(k-1)}} + \sum_{i=0}^{k+\ell-2} x^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} .$$

Définition

Soit $K \in \mathbb{N}$. p est une solution K-régulière de $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ si

$$\begin{aligned} &ED^K p \neq 0 \\ &\forall 0 \leq i \leq K-1, \quad ED^i p = 0. \end{aligned}$$

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

Théorème

1. *Si* $(S, T, J) = (0, 0, 0)$ *identiquement, alors (10) admet une paramétrisation d'ordre* $(1, 2)$ *en presque tout point.*
2. *Si* $(S, T) \neq (0, 0)$*, alors (10) admet une paramétrisation d'ordre* (k, ℓ) *presque en tout point si et seulement si* $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ *admet une solution* K*-régulière pour un certain* $K \leq k + \ell - 2$.
3. *Si* $(S, T) = (0, 0)$ *et* $J \neq 0$*, alors (10) admet une paramétrisation d'ordre* (k, ℓ) *presque en tout point si et seulement si* $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\bar{\gamma},\bar{\delta}})$ *ou* $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\hat{\gamma},\hat{\delta}})$ *admet une solution* K*-régulière pour un certain* $K \leq k + \ell - 2$.

Commentaires

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

- Lorsque $K = k + \ell - 2$, le système (10) est plat.

Commentaires

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

- Lorsque $K = k + \ell - 2$, le système (10) est plat.
- Le théorème, en exprimant des conditions nécessaires et suffisantes permet à la fois de déterminer l'impossibilité de paramétrer (10) si $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ n'a pas de solution K-régulière pour $K \leq k + \ell - 2$ et donne une paramétrisation du système dans le cas contraire.

Idée de preuve

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

- On considère le système d'EDP vérifié par une paramétrisation.

Idée de preuve

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

- On considère le système d'EDP vérifié par une paramétrisation.
- On inverse localement x et $u^{(k)}$, i.e. on écrit $u^{(k)}$ en fonction de x (Hilbert).

Idée de preuve

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

- On considère le système d'EDP vérifié par une paramétrisation.
- On inverse localement x et $u^{(k)}$, i.e. on écrit $u^{(k)}$ en fonction de x (Hilbert).
- Les relations obtenues permettent d'écrire un système d'EDP en une seule variable p vérifié par toute paramétrisation de (10).

Idée de preuve

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

- On considère le système d'EDP vérifié par une paramétrisation.
- On inverse localement x et $u^{(k)}$, i.e. on écrit $u^{(k)}$ en fonction de x (Hilbert).
- Les relations obtenues permettent d'écrire un système d'EDP en une seule variable p vérifié par toute paramétrisation de (10).
- On écrit (7). On montre que l'équation $S = 0$ est équivalente à l'équation du système (10) si et seulement si p est K-régulière.

$$\dot{z} = d(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x}) + g(x, y, z, \dot{y} - z\dot{x})\dot{x} \qquad (10)$$

Conjecture

Le système $(\mathfrak{E}_{k,\ell}^{\gamma,\delta})$ *n'admet pas de solution* K*-régulière pour* $K \leq k + \ell - 2$*. En d'autres termes, le système (10) n'admet de paramétrisation que lorsque* $S = T = J = 0$*.*

Etude de la platitude des systèmes de contrôle, point de vue local algébrique

On considère n et $m \leq n$ quelconques. Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est plat si il est paramétrable et si il existe une fonction H^0 telle que

$$h = H^0(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(L)}).$$

On considère n et $m \leq n$ quelconques. Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est plat si il est paramétrable et si il existe une fonction H^0 telle que

$$h = H^0(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(L)}).$$

- Soit $(\mathcal{A}, +, \times)$ l'anneau différentiel des séries entières en x, u et un nombre fini des dérivées temporelles de u considérées comme des variables indépendantes.

On considère n et $m \leq n$ quelconques. Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est plat si il est paramétrable et si il existe une fonction H^0 telle que

$$h = H^0(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(L)}).$$

- Soit $(\mathcal{A}, +, \times)$ l'anneau différentiel des séries entières en x, u et un nombre fini des dérivées temporelles de u considérées comme des variables indépendantes.
- La dérivation $\frac{d}{dt}$ est celle donnée par $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$.

On considère n et $m \leq n$ quelconques. Le système $\dot{x} = f(x,u)$ est plat si il est paramétrable et si il existe une fonction H^0 telle que

$$h = H^0(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(L)}).$$

- Soit $(\mathcal{A}, +, \times)$ l'anneau différentiel des séries entières en x, u et un nombre fini des dérivées temporelles de u considérées comme des variables indépendantes.
- La dérivation $\frac{d}{dt}$ est celle donnée par $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$.
- Soit $(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}], +, \wedge)$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{A}$. La loi multiplicative $\wedge$ vérifie $\frac{d}{dt} \wedge t = 1 + t \wedge \frac{d}{dt}$.

On considère n et $m \leq n$ quelconques. Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est plat si il est paramétrable et si il existe une fonction H^0 telle que

$$h = H^0(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(L)}).$$

- Soit $(\mathcal{A}, +, \times)$ l'anneau différentiel des séries entières en x, u et un nombre fini des dérivées temporelles de u considérées comme des variables indépendantes.
- La dérivation $\frac{d}{dt}$ est celle donnée par $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$.
- Soit $(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}], +, \wedge)$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{A}$. La loi multiplicative $\wedge$ vérifie $\frac{d}{dt} \wedge t = 1 + t \wedge \frac{d}{dt}$.
- Soit $\Lambda^1(\mathcal{A})$ le $\mathcal{A}$-module des différentielles de $\mathcal{A}$ constitué de 1-formes (en dx, du, $d\dot{u}$, ...) à coefficients dans $\mathcal{A}$.

Proposition

Le système $\dot{x} = f(x,u)$ *est plat si et seulement si il existe des éléments* $H_1^0, \ldots, H_m^0$ *de* $\mathcal{A}$ *tels que* $\{dH_1^0, \ldots, dH_m^0\}$ *soit une base de* $\Lambda^1(\mathcal{A})$*, en tant que* $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$*-module.*

Réécriture

Pour $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ et $h \in \mathcal{A}$, on note $p \bullet h = \sum a_k h^{(k)} \in \mathcal{A}$ l'élément obtenu en appliquant l'opérateur p à h.
Ceci définit une multiplication externe $\bullet\ : \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que l'on étend aux matrices.

Proposition

Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est plat si et seulement si il existe $P \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m\times m}$ inversible dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m\times m}$ et tel que

$$\mathrm{d}(P \bullet \Omega) = 0\ . \tag{12}$$

(Frobenius local)

Proposition

Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. Le système $\dot{x} = f(x,u)$ est plat si et seulement si il existe $\Pi \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ qui

1. *satisfasse les équations suivantes :*

$$\mathrm{d}\Omega - \Pi \bullet \Omega = 0 \,, \tag{13}$$

$$\mathrm{d}\Pi - \Pi \wedge \Pi = 0 \,, \tag{14}$$

et

2. *soit telle qu'il existe $P \in \left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ inversible dans $\left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ et vérifiant $\mathrm{d}P + P \wedge \Pi = 0$.*

Valuation

Soit $\eta \in \Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ la base considérée de $\Lambda^1(\mathcal{A})$.

$$\eta = \sum_{\substack{\lambda,k \in \mathbb{N}, \\ j \in \{1,\ldots,m\}}} a_{\lambda,j,k} \omega_j^{(k)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\lambda} \tag{15}$$

Filtration

- On munit $\mathcal{P} = \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ d'une filtration

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots$$

Filtration

- On munit $\mathcal{P} = \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ d'une filtration

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots$$

- Soit $\mathcal{Q}_k = \mathcal{P}/\mathcal{P}_{k+1}$. $\mathcal{Q}_k$ est de dimension finie.

Filtration

- On munit $\mathcal{P} = \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ d'une filtration

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots$$

- Soit $\mathcal{Q}_k = \mathcal{P}/\mathcal{P}_{k+1}$. $\mathcal{Q}_k$ est de dimension finie.
- En pratique, on résoud les équations dans $\mathcal{Q}_k$, on obtient Π_k qui vérifie les équations tronquées à l'ordre k. Les équations traitées à l'ordre $k+1$ ne contiennent pas des équations d'ordre k (intégrabilité formelle).

Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $\Pi_k \in \mathcal{Q}_k$ *vérifiant*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega \; - \; \Pi_k \bullet \Omega \quad &\in \quad \mathcal{P}_{k+2} \; , \\ \mathrm{d}\Pi_k \; - \; \Pi_k \wedge \Pi_k \quad &\in \quad \mathcal{P}_{k+1} . \end{aligned}$$

Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\Pi_k \in \mathcal{Q}_k$ vérifiant

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega \;-\; \Pi_k \bullet \Omega \quad &\in \quad \mathcal{P}_{k+2}\,, \\ \mathrm{d}\Pi_k \;-\; \Pi_k \wedge \Pi_k \quad &\in \quad \mathcal{P}_{k+1}. \end{aligned}$$

- Π est d'ordre infini a priori.

Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}$*, il existe* $\Pi_k \in \mathcal{Q}_k$ *vérifiant*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega \; - \; \Pi_k \bullet \Omega \;\; &\in \;\; \mathcal{P}_{k+2} \, , \\ \mathrm{d}\Pi_k \; - \; \Pi_k \wedge \Pi_k \;\; &\in \;\; \mathcal{P}_{k+1} . \end{aligned}$$

- Π est d'ordre infini a priori.
- On ne teste pas ici l'inversibilité de l'opérateur P. Etude en cours basée sur les travaux de V. Chetverikov (2002).

Synthèse

- On rattache l'existence d'une paramétrisation à l'intégrabilité d'un système d'EDP.

Synthèse

- On rattache l'existence d'une paramétrisation à l'intégrabilité d'un système d'EDP.
- Pour $n = 3$ et $m = 2$, un système d'EDP en une variable écrit à tout ordre.

Synthèse

- On rattache l'existence d'une paramétrisation à l'intégrabilité d'un système d'EDP.
- Pour $n = 3$ et $m = 2$, un système d'EDP en une variable écrit à tout ordre.
- Pour $n = 3$ et $m = 2$, on montre que $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$ sauf pour les cas déjà existants.

Synthèse

- On rattache l'existence d'une paramétrisation à l'intégrabilité d'un système d'EDP.
- Pour $n = 3$ et $m = 2$, un système d'EDP en une variable écrit à tout ordre.
- Pour $n = 3$ et $m = 2$, on montre que $k \geq 3$ et $\ell \geq 4$ sauf pour les cas déjà existants.
- Pour l'aproche algébrique avec filtration : intégrabilité "très formelle".

Perspectives

- Pour $n = 3$ et $m = 2$, montrer la conjecture.

Perspectives

- Pour $n = 3$ et $m = 2$, montrer la conjecture.
- Généralisation de la forme de Engel aux formes de Goursat généralisées avec dérives.

Perspectives

- Pour $n = 3$ et $m = 2$, montrer la conjecture.
- Généralisation de la forme de Engel aux formes de Goursat généralisées avec dérives.
- Pour l'approche algébrique, exprimer les conditions d'inversibilité de l'opérateur P pour obtenir des contraintes sur les équations de Π.