Laboratoire Kastler Brossel

Thèse de Doctorat

Discipline
Physique

Pierre Cladé

Sujet : **Oscillations de Bloch d'atomes ultrafroids et mesure de la constante de structure fine**

Soutenue le 3 Octobre 2005

Jury : François Biraben, directeur des travaux,
Daniel Estève, président du jury,
Saïda Guellati-Khélifa, directrice des travaux,
Marc Himbert, directeur de thèse,
Christophe Salomon,
Jacques Vigué, rapporteur,
Christoph Westbrook rapporteur,

Remerciement

J'ai effectué ce travail au laboratoire Kastler-Brossel, et je remercie son directeur Frank Laloë de m'y avoir accueilli : je le remercie de tout ce qu'il a fait pour nous permettre de bénéficier de bonnes conditions de travail.

Je remercie beaucoup François Biraben qui m'a accueilli dans son équipe pour mon stage de DEA et a ensuite dirigé ma thèse. J'ai vraiment été impressionné par tout son savoir faire, tant expérimental que théorique. Je le remercie particulièrement pour la relecture de ce manuscrit qu'il a effectuée "cloué" au lit à cause de son dos. J'ai passé trois années formidables dans son équipe.

Je remercie Marc Himbert, qui a accepté de m'inscrire en thèse dans son laboratoire et d'assumer la direction administrative de ce travail. Je remercie Jacques Vigué et Chris Westbrook qui ont accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je remercie Christophe Salomon qui est à l'origine de cette expérience et Daniel Estève qui, bien que n'étant pas spécialiste de physique atomique, a porté attention à mon travail, et a accepté de présider le jury.

Je remercie tous les permanents de l'équipe avec qui j'ai travaillé. Je remercie Lucile Julien qui a toujours été là lorsque j'avais besoin de conseils. Je remercie François Nez, qui entre l'expérience de Suisse, celle de l'hydrogène et la rédaction de son HDR a pris le temps de me faire partager tout son savoir faire. Je remercie beaucoup Saïda Guellati qui m'a encadré tous les jours sur la manip. Je la remercie en particulier pour sa patience pendant toutes les discussions que l'on a eues – discussions parfois difficiles, mais qui nous ont toujours permis d'avancer dans la compréhension de l'expérience. Je remercie Catherine Schwob pour tous ses conseils, pour son aide et pour sa patience avec PUMA et autres demandes de marcher lors de toutes les commandes passées. Je tiens enfin à dire toute mon admiration à Saïda et Catherine qui conjuguent les trois métiers de chercheuse, enseignante et mère de famille.

Je remercie Rémy Battesti, qui m'a précédé sur l'expérience et qui fut le premier thésard à travailler dessus. Je le remercie beaucoup pour tout le travail qu'il a effectué et pour l'année et demi que l'on a passée ensemble, et au cours de laquelle il m'a appris tous les "secrets" de l'expérience. Je remercie Malo Cadoret avec qui j'ai travaillé la dernière année de ma thèse et qui va prendre la suite de ce travail. J'espère que, à mon tour, j'ai réussi à lui transmettre les clés du fonctionnement de la manip, et je lui souhaite de réussir à pousser encore plus loin l'expérience. Je remercie Estefania de Mirandés qui est venu 6 mois dans le cadre d'une thèse en cotutelle avec le LENS. Je la remercie pour toute son aide et pour le regard nouveau qu'elle a su apporter à notre expérience. Je remercie Olivier Arnoult qui a effectué sa thèse en même temps que moi sur la manip d'hydrogène et qui, de l'autre côté de la fibre optique qui relie nos deux salles de manip, m'a aidé dans ce travail.

Je remercie aussi tous ceux sans lesquels nous ne pourrions pas faire ces expériences : Pascal Travers, Christophe Rafaillac et Chris Lelong pour l'atelier de mécanique ; Jean-Pierre Okpisz et Mohammed Boujrad. pour l'atelier d'électronique ; Florence Thibout pour l'atelier de verrerie ; Serge Begon et Corinne Poisson pour le service informatique ; Monique Bonnamy et

Laëticia Morel pour la gestion du laboratoire ; Annick Metais grâce à laquelle nous travaillons dans des locaux propres et José Romer.

Je tiens enfin à remercier tous les autres membres du laboratoire qui créent la bonne ambiance dans laquelle j'ai pu travailler. Je remercie toute l'aide qu'ils ont pu m'apporter pour ce travail. Je tiens à remercier en particulier tous les enseignants qui de la licence au DEA mon fait découvrir la physique quantique et qui, pour la plus part, travaillent au LKB.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La constante de structure fine α a été introduite en 1916 par A. Sommerfeld afin de décrire la structure fine des raies de l'atome d'hydrogène. Elle s'écrit

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \tag{1.1}$$

où e est la charge électrique de l'électron, ϵ_0 la permittivité du vide, $\hbar$ la constante de Planck réduite et c la vitesse de la lumière. Dans le modèle de Bohr, cette constante correspond à la vitesse de l'électron dans la première orbite, rapportée à celle de la lumière. Elle apparaît donc naturellement dans les corrections relativistes de l'atome d'hydrogène que Sommerfeld ajoute pour expliquer la structure fine de l'hydrogène. La constante de structure fine n'apparaît pas seulement dans l'atome d'hydrogène. En effet elle représente essentiellement le couplage électromagnétique. A ce titre, elle apparaît de façon fondamentale dans l'électrodynamique quantique (QED). Elle est aussi présente dans les interactions entre électrons dans un solide.

Dans le rapport 2002 du CODATA[1][1], 6 mesures obtenues par différentes méthodes ont été retenues pour la meilleure estimation de α : l'anomalie du rapport gyromagnétique de l'électron, la structure hyperfine du muonium, l'effet Hall quantique (R_K), le rapport gyromagnétique du proton (γ_p), la mesure de h/m_{neutron} et la mesure de h/m_{Cs}.

Avant de présenter en détail ces méthodes, quelques remarques s'imposent. Tout d'abord ces mesures font intervenir des théories physiques aussi différentes que la QED, la physique du solide et la physique atomique. La comparaison de ces différentes mesures est donc un test de la cohérence de ces différentes théories.

Nous avons représenté figure 1.1 les différentes déterminations de α utilisées dans l'ajustement du type "moindres carrés" réalisé en 1998 par P. Mohr et B. Taylor [2]. La situation

[1]Le CODATA représente un groupe de chercheurs qui se réunissent régulièrement afin de regrouper les mesures de constantes fondamentales et d'en donner une meilleure estimation. Tous les quatre ans un rapport, présenté par P. Mohr et B. Taylor, publie ces meilleures estimations.

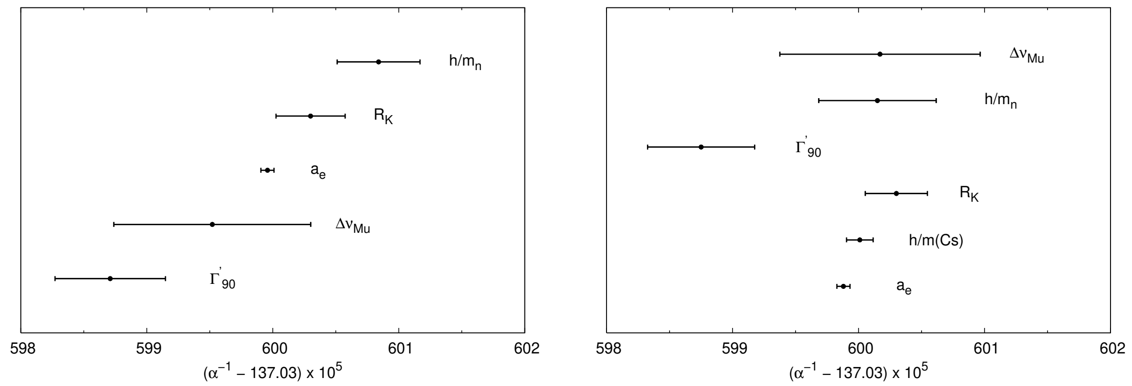


FIG. 1.1 – Différentes déterminations de α^{-1}. A gauche, celles rassemblées dans le rapport CODATA 1998 [2], triées par ordre croissants. A droite, celles du rapport CODATA 2002 [1], triées par ordre croissant d'incertitudes.

en 2002 a un peu évolué. D'une part, il y a maintenant une nouvelle détermination basée sur la mesure h/m_{cesium}. D'autre part, les valeurs de α déduites de certaines expériences ont été déplacées suite à des ré-évaluations de certaines expressions théoriques ou données expérimentales. Ainsi la dispersion des déterminations est meilleure. Cependant la valeur recommandée de α a bougé d'à peu près un écart type.

1.1 Les différentes mesures de α

Je vais décrire dans cette partie les différentes mesures de α qui ont étés retenues pour l'ajustement 2002 du CODATA.

1.1.1 Rapport gyromagnétique de l'électron

On associe au spin $\vec{S}$ d'une particule un moment magnétique $\vec{M} = \gamma\vec{S}$, où γ est le facteur gyromagnétique. L'hamiltonien d'interaction de ce spin avec un champ magnétique devient alors

$$H = -\vec{M}.\vec{B} = -\gamma\vec{S}.\vec{B} \tag{1.2}$$

Sous cette interaction, le spin a un mouvement de précession autour de $\vec{B}$ avec la vitesse angulaire $\omega_{\text{spin}} = |\gamma|B$.

Il est possible de mesurer précisément ce facteur gyromagnétique en comparant cette vitesse angulaire à la vitesse angulaire orbitale de l'électron soumis au champ magnétique

$$\omega_{\text{orb}} = \frac{eB}{m_e} \tag{1.3}$$

où m_e est la masse de l'électron.

On introduit alors le facteur de Landé g_e de l'électron défini par

$$g_e = 2\frac{\omega_{\text{spin}}}{\omega_{\text{orb}}} = \gamma_e \frac{2m}{e} \tag{1.4}$$

—Equation de Dirac— En 1928, P. Dirac est parvenu à écrire une équation d'onde pour des particules relativistes. Cette équation construite uniquement sur des arguments de symétrie a en particulier postulé l'existence des positons. Dirac a aussi décrit dans cette équation le couplage de la particule au champ électromagnétique. Parmi toutes les formes de couplage possibles, Dirac choisit la forme sans paramètre supplémentaire qui consiste à remplacer $\vec{P}$ par $\vec{P} - e\vec{A}(x)$ où e est la charge de la particule et $\vec{A}$ le potentiel vecteur[2]. Avec ce couplage, dit couplage minimal, dans la limite non relativiste la fonction d'onde de l'électron vérifie l'équation suivante :

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} |\phi\rangle = \frac{\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{P} - e\vec{A}\right)\right]^2}{2m} |\phi\rangle \tag{1.5}$$

où $\vec{\sigma}$ décrit les matrices de Pauli.

On peut constater que cet hamiltonien commute avec l'opérateur

$$\vec{\sigma}.\left(\vec{P} - e\vec{A}\right) \propto \vec{\sigma}.\vec{v} \tag{1.6}$$

Puisque, dans un champ magnétique, une particule conserve le module de sa vitesse, on obtient que l'angle entre la vitesse et le spin est constant. En conséquence de quoi, nous avons $\omega_{\text{orb}} = \omega_{\text{spin}}$. La théorie de Dirac prévoit donc $g_e = 2$.

—Anomalie du rapport gyromagnétique— La théorie de Dirac n'est qu'une approximation de l'électrodynamique quantique, et l'égalité entre les deux vitesses angulaires n'est plus vérifiée. On parle alors d'anomalie du rapport gyromagnétique :

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\omega_{\text{spin}}}{\omega_{\text{orb}}} - 1 \tag{1.7}$$

Dans cette théorie, l'interaction entre la particule et le champ magnétique est perturbée par la création de photons virtuels qui interagissent avec la particule. L'anomalie du rapport gyromagnétique se développe en puissance de α/π en sommant des diagrammes de Feynman. Le dernier terme calculé (numériquement) est celui d'ordre 4 en α/π. Il fait intervenir 891 diagrammes. A partir de ce développement, il est possible de remonter à une détermination de α à partir de la mesure de a_e.

---

[2]Nous ne considérons dans ce paragraphe que le cas où le champ électrique est nul.

—Mesure de a_e— L'expérience retenue par le rapport CODATA 2002 est menée à l'université de Washington [3]. Des électrons sont piégés dans un piège de Penning et soumis à un champ magnétique de l'ordre de 5 T où on peut mesurer la vitesse angulaire de rotation orbitale et la vitesse angulaire de précession du spin. Ces deux mesures sont des mesures de fréquences ; elles sont donc très précises.

La mesure de a_e obtenue possède un incertitude de $3{,}7 \cdot 10^{-9}$. Compte tenu de l'incertitude d'environ 10^{-9} sur le développement en puissance de α de a_e, la détermination de α qui résulte de cette mesure possède une incertitude de $3{,}8 \cdot 10^{-9}$. Il s'agit de la mesure de α la plus précise à ce jour.

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137{,}035\,998\,80(52) \tag{1.8}$$

Notons que lors d'une vérification indépendante des calculs de QED une erreur dans le programme employé pour calculer certains diagrammes a été découverte. Ainsi, entre l'ajustement de 1998 et celui de 2002, la valeur de α déduite de la même mesure de a_e a bougé de près de $5 \cdot 10^{-9}$ ($\simeq 1{,}3\ \sigma$ de la valeur de α, mais 5 fois l'incertitude sur la valeur théorique [4]).

Une mesure de la constante de structure fine par une méthode indépendante des calculs de QED permet de vérifier expérimentalement la validité de ces calculs.

1.1.2 Structure hyperfine du muonium

Le muonium est un atome d'hydrogène dans lequel le proton est remplacé par un muon μ^+. Des mesures de la structure hyperfine du muonium ont été réalisées depuis plusieurs années à Los Alamos [5]. L'expression théorique de la structure fine de muonium peut se mettre sous la forme [1] :

$$\Delta\nu_{Mu}(th) = \frac{16}{3} c R_\infty \alpha^2 \frac{m_e}{m_\mu} \left(1 + \frac{m_e}{m_\mu}\right)^{-3} \mathcal{F}(\alpha, m_e/m_\mu) \tag{1.9}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction qui représente les corrections dues à la QED, et qui dépend faiblement de α et m_e/m_μ.

Pour déduire α, il faut connaître aussi le rapport m_e/m_μ, qui peut être mesuré aussi sur une autre transition du muonium.

La valeur de α^{-1} déduite des mesures publiées en 1982 et 1999 est :

$$\alpha^{-1}(\Delta\nu_{Mu}) = 137{,}0360017(80) \quad [5{,}8 \cdot 10^{-8}] \tag{1.10}$$

On pourrait penser *a priori* utiliser une équation équivalente à l'équation (1.9) sur l'atome d'hydrogène (où le muon est remplacé par un proton). Cependant, le proton à la différence du muon, n'est pas une particule élémentaire : il possède un moment magnétique moins bien connu et il faut tenir compte de sa distribution de charge (rayon du proton) que l'on connaît mal. Il n'est donc pas possible de donner une valeur théorique aussi précise de la structure hyperfine de l'hydrogène.

1.1.3 Mesure du rapport gyromagnétique du proton et effet Josephson

La mesure que l'on présente ici est basée sur la mesure du facteur gyromagnétique du proton, à partir de la mesure de la fréquence de précession du spin :

$$\gamma_p = \frac{\omega_{\text{spin}}}{B} \tag{1.11}$$

Pour pouvoir obtenir une mesure de γ_p, il faut connaître le champ magnétique B. Dans l'expérience la plus précise, dite en champ faible, B est créé à partir d'un solénoïde

$$B = \mu_0 k_S I \tag{1.12}$$

où μ_0 est la permittivité du vide, k_S le paramètre du solénoïde (qui a la dimension inverse d'une longueur) et I le courant. Le courant est mesuré à partir d'un étalon de tension (effet Josephson) et de résistance (effet Hall quantique) :

$$I = f R_K K_J \tag{1.13}$$

où R_K est la constante de von Klitzing et K_J la constante de Josephson et f a la dimension d'une fréquence.

En regroupant les trois dernières équations, on obtient que la quantité mesurée est en fait :

$$\frac{\gamma_p}{R_K K_J} \tag{1.14}$$

L'expérience la plus précise à ce jour est effectuée au NIST, l'incertitude[3] sur la valeur obtenue est de $1{,}1 \times 10^{-8}$.

—Lien avec α— γ_p peut être mesuré précisément par rapport à γ_e, facteur gyromagnétique de l'électron, dont on connaît l'expression théorique :

$$\gamma_p = \frac{\mu_p}{\mu_e}\gamma_e = \frac{\mu_p}{\mu_e}\frac{g_e}{2}\frac{e}{m_e} \tag{1.15}$$

où $\frac{\mu_p}{\mu_e} = \frac{\gamma_p}{\gamma_e}$ est le rapport entre le rapport gyromagnétique du proton et celui de l'électron (rapport connu à 10^{-8}) et le facteur de Landé de l'électron g_e est connu à $4 \cdot 10^{-12}$ (cf. paragraphe sur l'anomalie du rapport gyromagnétique de l'électron).

En utilisant les relations $K_J = 2e/h$ et $R_K = h/e^2$, on obtient donc que

$$\frac{\gamma_p}{R_K K_J} = \frac{\mu_p}{\mu_e}\frac{g_e}{4}\frac{e^2}{h}\frac{h}{m_e} \tag{1.16}$$

$$= \frac{\mu_p}{\mu_e}\frac{g_e}{4}\frac{1}{\mu_0 R_\infty}\alpha^3 \tag{1.17}$$

[3] En fait la quantité mesurée n'est pas le rapport gyromagnétique du proton, mais le "shielded gyromagnetic ratio" γ_p'. Ceci ne change pas le résultat final, puisque c'est ce rapport qui est aussi comparé à celui de l'électron.

où nous avons utilisé les relations suivantes $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ et $\alpha^2 = (2R_\infty/c)(h/m_e)$. Il est donc possible de déduire α de la mesure de $\gamma_p/R_K K_J$.

La valeur de α obtenue à partir de la mesure du NIST est :

$$\alpha^{-1} = 137{,}035\,9875(43) \quad [3{,}1 \cdot 10^{-8}] \tag{1.18}$$

1.1.4 Mesure de la constante de von Klitzing (effet Hall quantique)

L'effet Hall quantique est caractérisé par la constante de von Klizing R_K. Cette constante s'exprime sous la forme

$$R_K = \frac{h}{e^2} = \frac{\mu_0 c}{2\alpha} \tag{1.19}$$

Une mesure de R_K dans le système d'unités internationales permet donc de déterminer α. Cette mesure se fait à l'aide d'une chaîne d'impédances qui a pour origine un condensateur calculable. La capacité de ce condensateur est déterminée par une mesure de longueur ; une source radio-fréquence (reliée à l'étalon de temps) permet de passer des impédances alternatives à celles continues. C'est cette mesure qui limite la résolution de la détermination de α que l'on peut faire à partir de l'équation (1.19).

Une moyenne de l'ensemble des mesures de R_K effectuées dans différents laboratoires conduit à la valeur suivante de α^{-1} :

$$\alpha^{-1}(R_K) = 137{,}036\,0030(25) \quad [1{,}8 \cdot 10^{-8}] \tag{1.20}$$

1.1.5 Lien entre h/m et α

Plusieurs déterminations de α se basent sur l'atome d'hydrogène, et utilisent en quelque sorte la définition originelle de Sommerfeld à partir de la vitesse de l'électron dans la première orbite de Bohr. Il n'y a plus de sens dans la mécanique quantique de parler de la vitesse de l'électron. Par contre, on peut mesurer son énergie cinétique qui est la même que dans le modèle de Bohr. Dans le cas où l'électron est dans l'état fondamental, cette énergie cinétique est égale à son énergie d'ionisation (constante de Rydberg). Nous avons donc la relation :

$$\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 = h R_\infty c \tag{1.21}$$

Il n'est pas possible de mesurer α directement avec le Rydberg puisqu'il faut aussi connaître le rapport h/m_e. Ce rapport peut être mesuré à partir d'une mesure du rapport entre h et la masse m_X d'une particule donnée, et la mesure du rapport de la masse de cette particule à celle de l'électron. On obtient alors que

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c} \frac{A_r(X)}{A_r(e)} \frac{h}{m_X} \tag{1.22}$$

où $A_r(X)$ et $A_r(e)$ désignent respectivement la masse en unité atomique de la particule X et de l'électron. Dans cette équation, l'incertitude sur le Rydberg est de 6×10^{-12} [6, 7], celle sur la masse en unité atomique de l'électron est de $4{,}4 \times 10^{-10}$ [1, 8] et celle sur la masse, par exemple du rubidium, en unité atomique de 2×10^{-10} [9], alors que la meilleure détermination directe de h/m (celle sur le césium) est de l'ordre de $1{,}4 \times 10^{-8}$ [10]. La quantité h/m est donc le principal facteur limitant dans cette équation.

1.1.6 Mesure de h/m_n

La méthode de mesure du rapport h/m_n entre la constante de Planck et la masse du neutron est basée sur la relation de de Broglie :

$$\frac{h}{m_n} = \lambda v \tag{1.23}$$

où v est la vitesse du neutron et λ sa longueur d'onde de de Broglie.

L'expérience est basée sur le fait que le faisceau de neutrons réfléchi à incidence normale par un cristal de silicium a une longueur d'onde de de Broglie très bien connue puisqu'il vérifie la condition de Bragg [11, 12]. Le rapport h/m_n est alors déterminé à partir de la mesure par temps de vol de la vitesse des neutrons.

La principale limitation de la mesure provient de la connaissance que l'on a de la distance entre deux plans réticulaires du cristal de silicium. Une réévaluation de cette distance ainsi que l'élimination de certaines mesures a été effectuée entre l'ajustement de 1998 et celui de 2002 [13], ce qui explique la différence entre les deux valeurs et incertitudes.

La valeur de α^{-1} prise pour l'ajustement de 2002 est

$$\alpha^{-1}(h/m_n) = 137{,}036\,0015(47) \quad [3{,}4 \cdot 10^{-8}] \tag{1.24}$$

Il semble cependant qu'une erreur soit intervenue dans une mesure de la distance entre plans réticulaires utilisée pour l'ajustement de 2002. A l'heure actuelle, il semble plutôt que la valeur qu'il faille prendre pour la mesure de h/m_n corresponde à celle de l'ajustement de 1998 [14], c'est-à-dire $\alpha^{-1} = 137{,}0360084$.

1.1.7 Mesure du rapport h/m_{Cs}

Cette expérience est la plus proche de la nôtre puisqu'elle consiste à mesurer le rapport entre h et la masse d'un alcalin [15, 16, 17, 18, 19, 10].

Elle est basée sur la mesure de l'énergie de recul d'un atome qui absorbe un photon :

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{1.25}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, k le vecteur d'onde du photon absorbé et m la masse de l'atome utilisé (ici le césium).

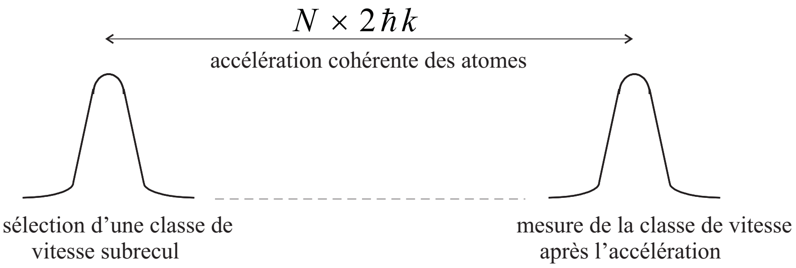


FIG. 1.2 – Principe de l'expérience. Une classe de vitesse est sélectionnée par une transition sélective en vitesse. Cette classe de vitesse est ensuite accélérée par quanta de $2v_r$. La distribution finale de vitesse est mesurée par une seconde transition sélective en vitesse.

En fait ce n'est pas l'énergie qui est mesurée, mais le déphasage de la fonction d'onde induit par ce changement d'énergie. Ce déphasage est mesuré en faisant interférer deux trajectoires différentes :

$$\Delta\phi(t) = \frac{E_r}{\hbar}t \tag{1.26}$$

où t est la durée d'interrogation totale (durée pendant laquelle l'atome est dans deux états différents).

La mesure de ce déphasage permet de déterminer $E_r/\hbar$ et, puisqu'il est possible de mesurer précisément les vecteurs d'onde k, le rapport h/m.

La détermination de α^{-1} qui résulte de la mesure de h/m_{Cs} est[1]

$$\alpha^{-1}(h/m_{Cs}) = 137{,}036\,0001\ (11) \quad [7{,}7 \times 10^{-9}] \tag{1.27}$$

1.2 Notre expérience

Notre expérience, tout comme l'expérience sur les neutrons et celle sur le césium, a pour but de mesurer le rapport h/m et d'utiliser l'équation (1.22) pour déterminer α. Le principe de base de notre expérience est la mesure de la vitesse de recul d'un atome de masse m qui absorbe (ou émet) un photon de vecteur d'onde k. Elle est reliée au rapport h/m de la façon suivante :

$$v_r = \frac{\hbar k}{m} \tag{1.28}$$

Dans le cas du rubidium elle vaut environ 6 mm.s^{-1}.

L'effet du recul a été observé pour la première fois sur le dédoublement des raies d'absorption saturée du CH_4 [20]. Depuis, il a aussi pu être observé à partir du déphasage induit par l'énergie cinétique du recul dans les interféromètres atomiques, comme dans la mesure de h/m_{Cs} [21, 15]. Notre expérience a pour but de mesurer cette vitesse de recul par effet Doppler (voir figure 1.2).

Pour réaliser une mesure précise de la vitesse de recul, il faut pouvoir transférer un très grand nombre de fois cette vitesse aux atomes, de façon cohérente, c'est-à-dire sans qu'il y ait d'émission spontanée. En mesurant la variation totale de vitesse, il est alors possible d'en déduire v_r. Nous utilisons pour cela la technique des oscillations de Bloch qui a été développée par le groupe de C. Salomon [22, 23]. Elle consiste à faire subir à l'atome un grand nombre de transitions Raman à deux photons contra-propageantes, sans changement de niveau interne : à chaque transition, l'atome absorbe un photon d'un premier laser et émet un photon stimulé par le second laser. Dans ce processus, l'atome acquiert exactement deux fois la vitesse de recul. Pour pouvoir effectuer plusieurs transitions, il faut continûment changer la fréquence des lasers afin de compenser l'effet Doppler et rester à résonance. L'utilisation des oscillations de Bloch permet de transférer un grand nombre de vitesses de recul, avec peu de pertes et dans un temps très court.

Dans notre expérience, ce qui nous intéresse précisément est la variation de vitesse due aux quanta de recul transmis à l'atome. Le protocole n'est valable que si on a suffisamment d'atomes de vitesse initiale très bien connue. Pour cela nous utilisons une première impulsion Raman contra-propageante qui sélectionne une classe de vitesse dans le nuage initial d'atomes froids [24]. Nous mesurons ensuite la vitesse en observant l'effet Doppler sur une autre transition Raman contra-propageante. Cette transition est sélective en vitesse c'est-à-dire que pour un désaccord fixé, seuls les atomes ayant une vitesse donnée effectuent la transition. On peut ainsi connaître la proportion d'atomes à une vitesse donnée. Pour obtenir la distribution de vitesse finale, il faut effectuer plusieurs transitions, à des fréquences différentes. Comme la mesure est destructive, il nous faut préparer plusieurs fois le nuage à l'identique.

Le protocole expérimental est donc le suivant :
- Préparation d'un nuage d'atomes froids
- Sélection d'une classe de vitesse par une transition Raman contra-propageante
- Accélération de cette classe de vitesse (N transitions à deux photons)
- Mesure de la distribution de vitesse par une autre transition Raman, résonnante avec une classe de vitesse donnée
- Mesure de la proportion d'atomes transférés par la dernière transition Raman

Cette séquence est reproduite un grand nombre de fois, en modifiant la classe de vitesse résonnante (fréquence de la deuxième transition Raman), afin de réaliser un spectre correspondant à la distribution finale de vitesse.

Il y a deux outils importants qui sont spécifiques à cette expérience pour la mesure de v_r : d'une part le dispositif qui nous permet de mesurer la variation de vitesse (senseur inertiel), et d'autre part le dispositif d'accélération des atomes basé sur les oscillations de Bloch. L'incertitude finale sur la mesure de v_r va dépendre directement de l'incertitude σ_v du senseur inertiel et du nombre N d'oscillations de Bloch que l'on est capable de faire :

$$\sigma_{v_r} = \frac{\sigma_v}{2N} \tag{1.29}$$

(le 2 provient du fait que l'on transmet deux fois la vitesse de recul aux atomes par oscillation de Bloch).

Notons que, à la différence de l'expérience de S. Chu, nous mesurons la vitesse de recul d'un atome qui absorbe un photon qui n'est pas résonnant avec la transition laser. Nous devons donc en plus réaliser nous même la mesure des longueurs d'onde optiques pour pouvoir déduire une valeur de h/m à partir de la mesure de v_r.

L'accélération et la mesure de la variation de vitesse ont lieu sur un seul axe qui est défini par la direction de propagation des faisceaux lasers utilisés. Il y a alors deux configurations possibles pour la direction des faisceaux : la configuration horizontale et la configuration verticale. Dans la configuration horizontale, la gravité n'intervient pas dans la variation de la vitesse des atomes, mais par contre elle limite le temps d'interaction entre les lasers et les atomes. Dans la configuration verticale, nous n'avons plus cette limite de temps, mais il faut tenir compte de la gravité. Il y a alors deux expériences possibles : soit on accélère les atomes en balayant la fréquence des lasers afin d'effectuer rapidement beaucoup de transitions. Dans ce cas, la gravité est compensée par une mesure différentielle entre une accélération des atomes vers le haut et une autre vers la bas. Soit on laisse la gravité compenser l'effet Doppler. Dans ce cas, la fréquence des lasers est fixe. Lorsque l'atome atteint la vitesse pour laquelle il est résonnant, il effectue la transition, prend deux fois la vitesse de recul et il n'est donc plus résonnant. Ensuite, soumis à la gravité, sa vitesse est modifiée jusqu'à ce qu'il redevienne résonnant. Dans cette configuration, l'atome oscille dans l'espace des vitesses mais aussi dans l'espace des positions[4]. La période des oscillations τ_B dépend alors de g et de v_r. En mesurant indépendamment g, il est alors possible de déterminer v_r :

$$\tau_B = 2\frac{v_r}{g} \tag{1.30}$$

Cette dernière configuration présente l'avantage de pouvoir effectuer la mesure de v_r avec des atomes qui oscillent sur place, ce qui limite les effets systématiques.

Mise en perspective des différentes expériences

Parmi toutes les expériences permettant de mesurer α, nous pouvons remarquer que certaines mesures font intervenir la caractérisation d'objets macroscopiques. En effet, dans la mesure de la constante de von Klitzing il faut pouvoir construire et caractériser un condensateur. Dans la mesure par le rapport gyromagnétique du proton et l'effet Josephson, il faut pouvoir caractériser un solénoïde. Il va être donc très difficile pour ces mesures d'améliorer leurs incertitudes au delà des résultats actuels.

D'autres mesures font intervenir de façon cruciale la QED : il y a la mesure basée sur l'anomalie du rapport gyromagnétique de l'électron, où les corrections de QED interviennent à l'ordre zéro dans la détermination de α. La mesure de la structure fine du muonium dépend

[4] C'est de là que vient le nom d'oscillation de Bloch.

aussi de calculs de QED, mais à un niveau plus faible. Cependant comme nous l'avons vu, ces deux valeurs ont été revues entre le rapport du CODATA de 1998 et celui de 2002, suite à une modification de résultats théoriques. D'une certaine façon, on peut dire que la mesure du Rydberg (et donc toute les mesures présentées de α, à l'exception du $g_e - 2$ et R_K) fait intervenir la QED, mais cette mesure résulte de la combinaison de plusieurs mesures différentes, et les calculs sont cohérents bien au delà de la précision dont on a besoin. Nous pouvons dans ce paragraphe ajouter qu'il existe une mesure de α basée sur le structure fine de l'hélium [25, 26]. Une autre expérience est en projet pour mesurer α à partir de la mesure du facteur de Landé d'un ion de calcium multichargé [27]. Cette mesure sera dépendante de la QED.

La mesure de h/m telle que l'équipe de S. Chu ou notre équipe l'envisageons ne présente aucun de ces faiblesses : les seules quantités qu'il faut mesurer étant des longueurs d'onde optiques et des fréquences micro-ondes – ce qui ne pose pas de difficulté à la précision que nous souhaitons obtenir. La QED intervient dans le Rydberg et la nouvelle mesure de $A_r(m_e)$ (déduite du facteur de Landé d'ions ${}^{12}C^{5+}$ et ${}^{16}O^{7+}$), mais de façon non-importante. La mesure de h/m pour déduire α est à l'heure actuelle la méthode indépendante de la QED la plus précise, et elle semble très prometteuse pour le rester.

1.3 Plan du manuscrit

Le corps de ce manuscrit se partage en deux parties : dans la première partie je décris en détail le senseur inertiel. Je décris en particulier les modifications que nous avons faites pour améliorer sa résolution, et je dresse un bilan des différentes sources de bruit qui le limitent.

Nous pouvons situer ce travail dans le déroulement de l'expérience. Au milieu de l'année 2002, Rémy Battesti, le premier doctorant à travailler sur l'expérience, a fini de mettre au point le piège magnéto-optique ainsi que la détection des atomes. Cette partie de l'expérience n'a pratiquement pas été modifiée depuis. Les premières mesures de vitesses avec le senseur inertiel ont été obtenues au printemps 2003. J'avais alors rejoint l'équipe pour mon stage de DEA depuis le début de l'année. Au cours de la première année de ma thèse (qui était la troisième de Rémy Battesti), le senseur intertiel étant mis au point, nous avons pu passer à la réalisation des oscillations de Bloch [28], et ainsi présenter une mesure préliminaire [29]. La résolution que nous avions alors sur le senseur était d'environ $2 \times 10^{-4} v_r$ pour un temps d'intégration de 10 minutes. C'est après cette première mesure que j'ai regardé en détail les facteurs limitant le senseur : en plus de la mise en évidence d'une limitation due au bruit sur la détection des atomes, j'ai développé un modèle montrant que les vibrations sont les principales sources de bruit de notre expérience [30].

La deuxième partie de mon manuscrit décrit les mesures que nous avons faites avec les oscillations de Bloch. Nous avons commencé à travailler en configuration horizontale. Ce travail, effectué la première année de ma thèse, a été décrit en détail par Rémy Battesti dans son manuscrit [31], j'en présente juste les principaux résultats. Au cours de la deuxième année de ma thèse, nous sommes passés en configuration verticale. Initialement, le projet de ma thèse était de travailler dans la configuration verticale stationnaire. Il est alors possible d'augmenter le nombre d'oscillations tout en limitant certains effets systématiques. Les résultats obtenus n'ont pas été à la hauteur des espérances, puisque dans cette configuration nous avons observé un bruit plus important (dû aux vibrations) et un signal plus faible (perte d'atomes par collisions avec des atomes chauds). Je présente ces résultats et aussi une idée d'application possible de cette expérience avec la balance du watt (en remplacement d'un gravimètre), qui pourrait permettre de relier une masse macroscopique à une masse microscopique (mesure du nombre d'Avogadro) [32].

Enfin, je présente le principal résultat que j'ai obtenu au cours de ma thèse : après une amélioration du dispositif expérimental, et notamment le passage en configuration verticale accélérée, je suis arrivé à multiplier par 10 le nombre d'oscillations, en comparaison des résultats que Rémy Battesti et moi avions obtenus la première année de ma thèse. Une partie de mon travail a aussi consisté à comprendre les effets systématiques : j'ai pu en réduire certains en améliorant le protocole expérimental ; les autres effets systématiques ont été évalués le plus précisément possible pour pouvoir corriger la valeur de la mesure [33].

Première partie

Développement et caractérisation d'un senseur inertiel

Chapitre 2

Mesurer la vitesse avec des transitions Raman

L'objectif de notre expérience est de déterminer la vitesse de recul en mesurant la variation de vitesse d'un atome qui absorbe un (ou plusieurs) photons. Pour mesurer cette variation de vitesse, nous avons développé un senseur inertiel basé sur des transitions Raman contra-propageantes.

Après avoir décrit le fonctionnement de ce senseur, j'exposerai sa mise en oeuvre expérimentale ainsi que les résultats obtenus. Nous étudierons dans un second chapitre les limites du senseur : elles sont liées d'une part au signal à bruit sur la détection des atomes et d'autre part au bruit de vibration, comme nous pourrons le montrer grâce à la méthode de Ramsey.

2.1 Principe des transitions Raman

Le principe du senseur inertiel est le suivant : à l'aide d'une transition sélective en vitesse, nous préparons un échantillon d'atomes dans une classe de vitesse bien déterminée. Ensuite, avec une autre transition sélective en vitesse, nous mesurons la distribution finale de vitesse pour connaître la variation de vitesse des atomes entre la sélection et la mesure. Les transitions sélectives en vitesse utilisées sont des transitions Raman contra-propageantes.

2.1.1 Transition Raman contra-propageante

Une transition Raman est un processus à deux photons dans lequel un atome absorbe un photon d'un premier faisceau laser et émet, de façon stimulée par un autre faisceau laser, un deuxième photon (figure 2.1).

La condition de résonance, dans le référentiel du laboratoire, pour un atome ayant une vitesse initiale $\vec{v_i}$ se déduit à partir de la condition de conservation de l'énergie et de l'impul-

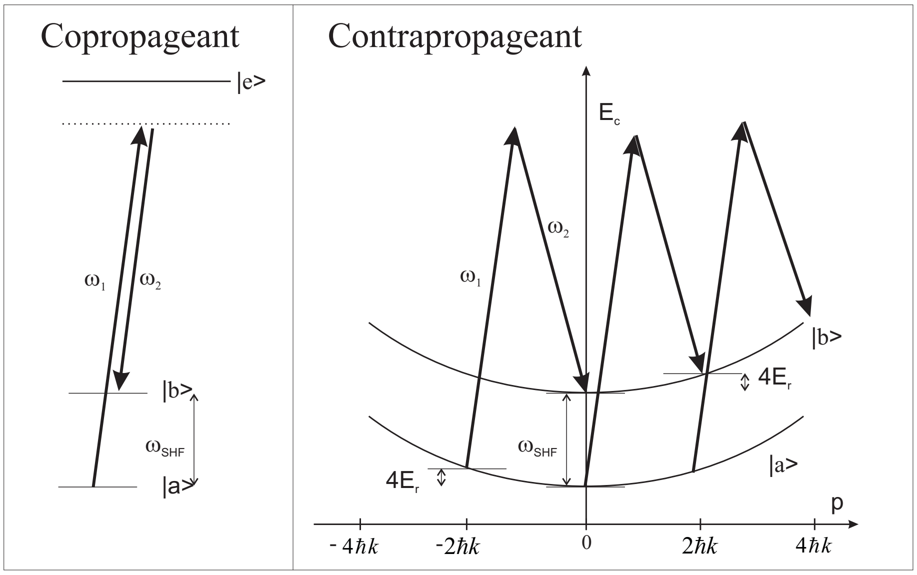


FIG. 2.1 – A gauche, transition Raman copropageante. A droite, transition Raman contrapropageante. Dans ce cas, on écrit la conservation de l'énergie et de l'impulsion : pour être à résonance, il faut compenser la variation de l'énergie cinétique due au recul de l'atome.

sion[1] :

$$E_a + \frac{1}{2}mv_i^2 + \hbar\omega_1 = E_b + \frac{1}{2}mv_f^2 + \hbar\omega_2 \quad (2.1)$$

$$m\vec{v_i} + \hbar\vec{k_1} = m\vec{v_f} + \hbar\vec{k_2} \quad (2.2)$$

où $\vec{v_f}$ désigne la vitesse finale, $\omega_{1,2}$ les pulsations des lasers et $\vec{k}_{1,2}$ leurs vecteurs d'onde.

Dans ce système, nous avons quatre inconnues : le désaccord de la transition co-propageante : $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{SHF}$ et les trois composantes de la vitesse finale. En négligeant la dépendance de $\vec{k_i}$ vis-à-vis du désaccord δ, nous obtenons finalement que :

$$\delta = \left(\vec{k_1} - \vec{k_2}\right) . \left(\vec{v_i} + \frac{\hbar}{2m}\left(\vec{k_1} - \vec{k_2}\right)\right) \quad (2.3)$$

Cette équation contient deux termes ; le premier correspond à l'effet Doppler et le second correspond à l'effet de recul. Comme on peut le voir schématiquement sur la figure 2.1, si on souhaite, par exemple, sélectionner des atomes ayant une vitesse nulle, il faut avoir un décalage par rapport à la transition co-propageante de $4E_r/\hbar$, où E_r est l'énergie de recul :

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.4)$$

[1]Notons que le changement de masse relativiste de l'atome entre les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$, de l'ordre de 10^{-16}, est négligeable.

L'utilisation de transitions Raman répond à un certain nombre de crières que nous allons détailler.

Utiliser l'effet Doppler pour être sensible à la vitesse

La méthode, *a priori*, la plus simple pour mesurer la vitesse d'un atome est l'observation de l'effet Doppler sur une transition atomique à un photon : considérons un atome soumis a une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ ($k = \omega/c$). Cet atome en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ va percevoir une onde ayant une autre pulsation $\omega' = \omega - \vec{k}.\vec{v}$. Ainsi, si le laser est à résonance avec la transition, seuls les atomes ayant une vitesse nulle seront résonnants. Réciproquement, si le laser est désaccordé par rapport à la résonance de δ, ce seront les atomes ayant la vitesse $\vec{v}$ telle que $\vec{v}.\vec{k} = \delta$ qui seront résonnants.

Cet effet est observé depuis longtemps. Il est responsable entre autre de l'élargissement des raies d'absorbtion d'une vapeur atomique. Prenons par exemple la raie D_2 du rubidium. A température ambiante, la vitesse moyenne des atomes est de l'ordre de 250 m.s^{-1}, ce qui se traduit par un élargissement Doppler d'environ 500 MHz. Cet effet est en général vu comme une limitation sur la mesure de la fréquence de la transition. Par contre, il est extrêmement performant pour sonder la distribution de vitesse de la vapeur, et ainsi remonter à une mesure de sa température (ou plutôt, à une mesure de précision de la constante Boltzmann [34]).

Cependant, cet outil n'est pas adapté pour mesurer des vitesses de l'ordre de la vitesse de recul (centimètre par seconde). En effet, la résolution en vitesse de la mesure est directement donnée par la résolution en fréquence de la transition. Si on appelle Γ la largeur naturelle de la transition, la sensibilité de la mesure sera de l'ordre de Δv avec :

$$\Delta v = \frac{\Gamma}{k} \tag{2.5}$$

Pour la transition D_2 du rubidium 87, dont la durée de vie de l'état excité est d'environ 23 ns, on a $\Gamma/2\pi \sim 6$ MHz, ce qui se traduit par une largeur en vitesse d'environ $\Delta v \sim 2$ m.s^{-1}.

Il n'est pas possible non plus d'utiliser une transition micro-onde qui, bien que n'étant pas limitée par la largeur naturelle, présente un recul trop faible pour pouvoir être mesuré. C'est pour cela que la solution retenue est une transition optique à deux photons, entre niveaux de durée de vie longue.

Effet Doppler dans une transition à deux photons

Il existe deux types de transitions à deux photons que nous avons représentées schématiquement sur la figure 2.2. Dans le premier cas, l'atome absorbe deux photons successivement (transition en échelle), dans le second cas, l'atome absorbe un premier photon, puis émet de façon stimulée un autre photon de fréquence différente, afin de retomber dans un autre sous-niveau (transition en Λ, ou transition Raman). Dans les deux cas la transition est rendue possible par l'intermédiaire d'un niveau relais situé suffisamment près de la résonance à un photon, mais suffisamment loin pour que l'émission spontanée soit négligeable.

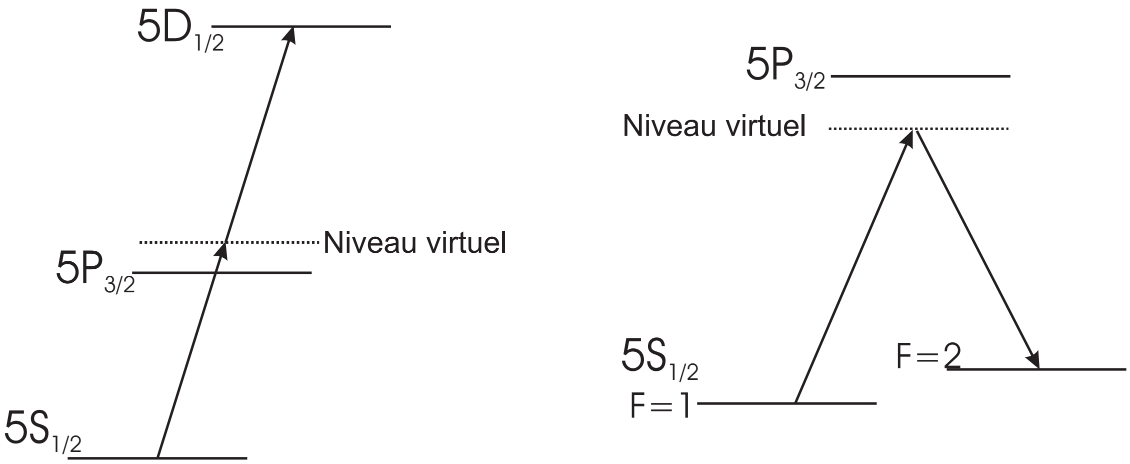


FIG. 2.2 – Transitons à deux photons (exemple du rubidium) : il existe deux types de transitions à deux photons. A gauche, l'atome absorbe consécutivement deux photons. A droite, transition en Λ, ou transition Raman : l'atome absorbe d'abord un photon d'un premier laser, puis émet de façon stimulée un deuxième photon.

Dans le cas d'une transition en échelle, la condition de résonance s'écrit sur la somme des fréquences des deux lasers, alors que dans le cas de la transition en Λ, la condition s'écrit sur la différence des fréquences.

Suivant l'orientation des faisceaux Raman (co-propageants ou contra-propageants), ces transitions vont être sensibles ou non à l'effet Doppler. Si les faisceaux se propagent dans la même direction, l'effet Doppler est identique. Il disparaît donc pour une transition Raman (qui est alors identique à une transition micro-onde), et il est présent pour une transition en échelle. Dans le cas où les faisceaux sont contra-propageants, c'est l'inverse qui se produit : l'effet Doppler est supprimé pour une transition en échelle (ce sont les transitions à deux photons sans effet Doppler utilisées en spectroscopie [35]) et il est présent pour une transition Raman. On pourrait donc imaginer pour notre expérience utiliser des transitions en échelle copropageantes. Dans ce cas, le contrôle de la vitesse se fait par le contrôle de la fréquence absolue des lasers, ce qui est techniquement beaucoup plus difficile que de contrôler la différence de fréquences entre les lasers utilisés dans une transition Raman contrapropageante.

Dans ce dernier cas, si l'atome bouge à la vitesse $\vec{v}$, les pulsations dans le nouveau référentiel valent :

$$\omega_i' = \omega_i - \vec{k_i}.\vec{v} \tag{2.6}$$

La pulsation équivalente pour la transition Raman vaut donc :

$$\omega_1' - \omega_2' = \omega_1 - \omega_2 - (\vec{k_1} - \vec{k_2}).\vec{v} \tag{2.7}$$

On retrouve donc le terme correspondant à la première partie de l'équation 2.3 obtenue à partir de la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

La transition Raman contra-propageante présente donc les trois caractéristiques suivantes :
- un effet Doppler optique,
- le contrôle de la différence de fréquence de deux lasers par micro-onde,
- pas (ou très peu) d'émission spontanée.

2.1.2 Calcul de la probabilité de transition Raman

Si l'équation (2.3) permet de décrire précisément l'effet Doppler sur une transition Raman, elle ne nous permet pas en revanche de connaître l'intensité de couplage entre les états hyperfins. Pour cela il nous faut écrire l'hamiltonien Raman.

Hamiltonien du système

Nous allons dériver l'hamiltonien de couplage effectif à deux photons à partir d'un développement perturbatif, en se plaçant dans l'approche de l'atome habillé.

Dans notre situation, le champ électromagnétique provient de deux lasers (notés $l = 1, 2$) :

$$\overrightarrow{E_l}(x,t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{E_l}e^{i(\pm k_l x - \omega_l t)} + c.c. \tag{2.8}$$

où ω_l est la pulsation du laser, et[2] $k_l = \omega_l / c$.

Considérons donc les états atomiques $|i,\vec{p},n_1,n_2\rangle$ où i désigne l'état interne de l'atome ($i = a,b$ pour les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental et e pour l'état excité), $\vec{p}$ l'impulsion de l'atome, et n_i le nombre de photons dans le laser i.

L'hamiltonien du système atome + champ sans interaction s'écrit :

$$H^{(0)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_{\mathrm{SHF}}|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_{ae}|e\rangle\langle e| + \hat{N}_1\hbar\omega_1 + \hat{N}_2\hbar\omega_2 \tag{2.9}$$

où $\hat{N}_1$ et $\hat{N}_2$ sont les opérateurs nombre de photons dans chaque mode et ω_{ae} désigne l'écart d'énergie entre les états $|a\rangle$ et $|e\rangle$.

Le couplage atome-laser s'écrit :

$$\hat{V} = -\vec{\hat{d}}.\vec{\hat{E}} \tag{2.10}$$

où $\hat{d}$ désigne l'opérateur dipôle, et $\hat{E}$ l'opérateur champ électrique.

On définit les pulsations de Rabi associées au couplage par

$$\frac{\Omega_1}{2} = \left\langle e,\vec{p},n_1,n_2 \left| \hat{V} \right| a,\vec{p} - \hbar\vec{k_1},n_1 + 1,n_2 \right\rangle \tag{2.11}$$

et de même pour les pulsations de Rabi Ω_2, Ω_1' et Ω_2' suivant le schéma figure 2.3.

[2] nous avons choisi comme notation $k_l = ||\vec{k_l}||$, qui est donc toujours positif.

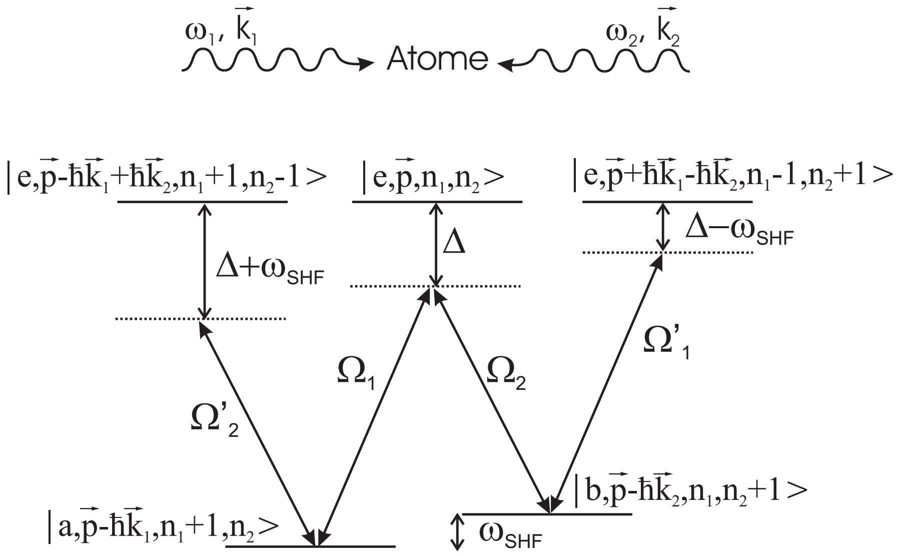


FIG. 2.3 – Schéma des niveaux habillés : nous avons représenté l'ensemble des états auxquels sont couplés par $\hat{V}$ les deux états $\left|a,\vec{p}-\hbar\vec{k_1},n_1+1,n_2\right\rangle$ et $\left|b,\vec{p}-\hbar\vec{k_2},n_1,n_2+1\right\rangle$, ainsi que les coefficients de couplage Ω_i et Ω'_i.

Dans la suite, nous désignerons sans ambiguïté les deux états $\left|a,\vec{p}-\hbar\vec{k_1},n_1+1,n_2\right\rangle$ et $\left|b,\vec{p}-\hbar\vec{k_2},n_1,n_2+1\right\rangle$ par $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

Dans cette base le hamiltonien libre (équation 2.9) est, à une énergie constante près, de la forme

$$H^{(0)} = \hbar \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

où

$$\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\mathrm{SHF}} \tag{2.13}$$

Hamiltonien décrivant la transition Raman

Pour passer du système à trois niveaux, à un système à deux niveaux, il faut faire un certain nombre d'approximations perturbatives. Le désaccord Raman δ, ainsi que l'énergie de recul, sont de l'ordre du kHz, le couplage dipolaire-électrique entre $|a\rangle$ ou $|b\rangle$ et $|e\rangle$ de l'ordre de 10 MHz, la structure hyperfine fine ω_{SHF} de l'ordre de 7 GHz et le désaccord Δ par rapport à la transition à 1 photon est de l'ordre de 100 GHz. Nous avons donc :

$$\delta, E_r \ll \Omega_i \ll \omega_{\mathrm{SHF}} \ll \Delta \tag{2.14}$$

On peut donc immédiatement considérer les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ comme étant quasi dégénérés vis-à-vis du couplage atome-laser. De plus, le couplage atome-laser étant lui même petit devant le désaccord entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et les états excités $|e\rangle$, on peut appliquer la théorie des perturbations. Considérant de plus qu'il n'y a pas de couplage direct entre les deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$, il faut tenir compte des ordres supérieurs du couplage atome-laser.

Si on désigne par les indices i et j deux états dans le doublet $|a\rangle$ et $|b\rangle$ alors l'hamiltonien au plus bas ordre en V qui permet de lever la dégénérescence entre les état $|a\rangle$ et $|b\rangle$ s'écrit[3]

$$H_{ij} = H_{ij}^{(0)} + \sum_{\alpha \in \{\text{états excités}\}} \frac{V_{i\alpha} V_{\alpha j}}{H_{ii}^{(0)} - H_{\alpha\alpha}^{(0)}} \tag{2.15}$$

où la somme sur α porte sur les états excités.

Finalement, on obtient dans la base $(|a\rangle,|b\rangle)$ l'hamiltonien suivant :

$$\hbar \begin{pmatrix} \delta + \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k_1})^2}{2m\hbar} - \frac{|\Omega_1|^2}{4\Delta} - \frac{|\Omega_2'|^2}{4(\Delta+\omega_{\text{SHF}})} & \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{4\Delta} \\ \frac{\Omega_1^*\Omega_2}{4\Delta} & \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k_2})^2}{2m\hbar} - \frac{|\Omega_2|^2}{4\Delta} - \frac{|\Omega_1'|^2}{4(\Delta-\omega_{\text{SHF}})} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

En introduisant les notations :

$$\delta_a = \frac{|\Omega_1|^2}{4\Delta} + \frac{|\Omega_2'|^2}{4(\Delta + \omega_{\text{SHF}})} \tag{2.17}$$

$$\delta_b = \frac{|\Omega_2|^2}{4\Delta} + \frac{|\Omega_1'|^2}{4(\Delta - \omega_{\text{SHF}})} \tag{2.18}$$

$$\Omega_{a\to b}^{\text{eff}} = \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{2\Delta} \tag{2.19}$$

$$\hbar\delta_{\text{Doppler}}(\vec{p}) = \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k_1})^2}{2m} - \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k_2})^2}{2m} = \hbar\left(\vec{k_2} - \vec{k_1}\right).\frac{\vec{p}}{m} \tag{2.20}$$

on obtient un hamiltonien de la forme :

$$\hbar \begin{pmatrix} \delta - \delta_a & \Omega_{a\to b}^{\text{eff}}/2 \\ \Omega_{a\to b}^{\text{eff}*}/2 & -\delta_b - \delta_{\text{Doppler}} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Ceci nous permet d'interpréter les différents termes : δ_a et δ_b sont les déplacements lumineux des niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$; $\Omega_{a\to b}^{\text{eff}}$ est le couplage effectif pour le système à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

Expression de la probabilité de transition

Il est alors très facile de résoudre le problème : l'évolution de la population des deux niveaux va suivre la formule de Rabi. Le désaccord $\delta^R(\vec{v})$ par rapport à résonance de l'atome vaut :

$$\delta^R(\vec{v}) = \delta - (\delta_a - \delta_b) + \delta_{\text{Doppler}}(\vec{v}) \tag{2.22}$$

[3] cf. Landau & Lifchitz [36], §38.

Partant à l'instant initial $t = 0$ de l'état $|a\rangle$, la probabilité d'être dans l'état $|b\rangle$ s'écrit :

$$P_{a\to b}(t,\delta^R(\vec{v})) = \frac{{\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b}}^2}{{\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b}}^2 + \delta^R(\vec{v})^2} \sin^2\left(\sqrt{{\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b}}^2 + \delta^R(\vec{v})^2}\,\frac{t}{2}\right) \tag{2.23}$$

Il faut remarquer que lorsque la durée τ de l'impulsion Raman vérifie la condition π définie par

$$\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b} \times \tau = \pi \tag{2.24}$$

alors la probabilité pour un atome à résonance d'effectuer la transition est égale à 1. Cette condition est facile à obtenir expérimentalement : pour un laser ayant une intensité de 100 mW.cm^{-2} et un désaccord de 100 GHz, la durée d'une impulsion π est d'environ 500 μs.

—Largeur de la sélection en vitesse— Lorsque la condition π est vérifiée, la largeur à mi-hauteur de la probabilité de transition vaut $\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b} \sim 1/\tau$.

Dans l'équation (2.23), il ne faut pas oublier que le désacccord à la transition δ^R dépend de la vitesse de l'atome. Concrètement, si on réalise une telle transition sur un nuage d'atomes, la distribution en vitesse des atomes effectuant la transition reflétera cette probabilité. Elle possédera une largeur à mi-hauteur proportionnelle à la largeur de la transition. Ainsi pour une impulsion π, cette largeur vaut :

$$\Delta v \sim \frac{\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b}}{k_1 + k_2} \sim \frac{1}{\tau(k_1 + k_2)} \tag{2.25}$$

En utilisant la vitesse de recul comme échelle de vitesse, on obtient que

$$\frac{\Delta v}{v_r} = \frac{\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b}}{4E_r/\hbar} \sim \frac{1}{\tau}\frac{1}{(k_1 + k_2)v_r} \tag{2.26}$$

Avec $(k_1 + k_2)v_r \simeq 15$ kHz, on obtient une sélection à environ $v_r/15$ pour une impulsion π de 1 ms.

La largeur de la transition peut être facilement modifiée en changeant le désaccord Δ entre les lasers et la transition à un photon. En particulier, il est très facile d'augmenter ce paramètre afin de réaliser des transitions aussi sélectives en vitesse que l'on souhaite.

—Déplacements lumineux— Les déplacements lumineux δ_a et δ_b apparaissent dans l'équation (2.23) sous la forme $\delta_a - \delta_b$: la transition Raman est en effet sensible uniquement aux déplacements lumineux différentiels entre les deux états. En supposant que les coefficients de couplage du même laser i sont égaux, on obtient au premier ordre en $\omega_{\mathrm{SHF}}/\Delta$:

$$\delta_a - \delta_b \simeq \frac{\Omega^2}{2\Delta}\frac{\omega_{\mathrm{SHF}}}{\Delta}. \tag{2.27}$$

Pour les paramètres typiques que nous utilisons, ces déplacements sont de l'ordre de 10 Hz, ce qui correspond à une vitesse d'environ $v_r/1000$. Ce décalage est beaucoup plus important que la sensibilité en vitesse souhaitée. Cependant nous allons voir dans la suite que cet effet n'apparaît pas directement dans notre mesure de la vitesse de recul : notre protocole expérimental étant basé sur une mesure différentielle, tout déplacement lumineux constant s'annule.

Règles de sélection

Nous avons basé tout notre calcul sur un modèle d'atome à trois niveaux. Pour être plus précis, il faut tenir compte à la fois des sous-niveaux Zeeman qui apparaissent dans les états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$, mais aussi de la structure hyperfine de l'état excité $5P_{3/2}$. L'approche perturbative reste identique. La seule différence apparaît dans le nombre de niveaux impliqués. Ainsi, dans l'équation (2.15), les indices i et j impliquent un sous-niveau $5S_{1/2}$ et l'indice α un sous-niveau de $5P_{3/2}$.

On obtient alors les expressions suivantes pour le couplage effectif et pour les déplacements lumineux :

$$\hbar\frac{\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b}}{2} = \sum_{F_e,m_{F_e}} \frac{\left\langle b\left|\vec{E}_2.\vec{D}\right|F_e,m_{F_e}\right\rangle\left\langle F_e,m_{F_e}\left|\vec{E}_1.\vec{D}\right|a\right\rangle}{\Delta} \tag{2.28}$$

$$\delta^i_a = \sum_{F_e,m_{F_e}} \frac{\left\langle a\left|\vec{E}_i.\vec{D}\right|F_e,m_{F_e}\right\rangle\left\langle F_e,m_{F_e}\left|\vec{E}_i.\vec{D}\right|a\right\rangle}{\hbar\Delta} \tag{2.29}$$

où l'indice i sur le calcul du déplacement lumineux indique le faisceau laser concerné (1 ou 2).

Le calcul complet[4] nous permet de trouver les règles de sélections pour une polarisation donnée des faisceaux Raman. Afin d'éviter des déplacements Zeeman au premier ordre, nous souhaitons effectuer la transition Raman entre les états $|F=1,m_F=0\rangle$ et $|F=2,m_F=0\rangle$ qui sont sensibles au champ magnétique uniquement à l'ordre 2. Nous avons alors choisi d'utiliser des faisceaux Raman polarisés linéairement, avec des polarisations perpendiculaires.

Enfin, ce calcul donne des facteurs numériques correctifs pour les formules donnant la constante de couplage effective, et les déplacements lumineux. Les formules que l'on obtient sont finalement les suivantes, valables lorsque Δ est grand devant la structure hyperfine de l'état excité :

$$\Omega^{\mathrm{eff}}_{a\to b} = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_S} \times \frac{\Gamma^2}{16\Delta} \tag{2.30}$$

$$\delta^i_{\mathrm{d.l.}} = \frac{I_i}{I_S} \times \frac{\Gamma^2}{8\Delta} \tag{2.31}$$

où I_i désigne l'intensité du faisceau i, et où I_S est l'intensité de saturation, sans tenir compte de la structure hyperfine, pour la transition à D_2 du rubidium (voir l'annexe C.1).

[4]Ce calcul est en annexe de la thèse de R. Battesti [31]. L'expression (2.28) peut se simplifier si on suppose que Δ est très grand devant la structure hyperfine de l'état $5P_{3/2}$.

2.1.3 Probabilité de transition dans le cas de deux impulsions Rabi

L'objectif de notre expérience est de mesurer la variation de vitesse d'un atome induite par l'absorption de plusieurs photons. Notre senseur inertiel ne doit donc pas mesurer la vitesse en valeur absolue, mais uniquement une variation de vitesse d'un échantillon d'atomes. Pour avoir une bonne résolution, on doit donc être capable de partir avec des atomes ayant une distribution en vitesse la plus étroite possible, et de mesurer avec une aussi bonne résolution la distribution finale de vitesse. Ces deux points peuvent être réalisés à l'aide de transitions Raman dont on a vu, dans la partie précédente, qu'elles mettaient en jeu uniquement des atomes dont la vitesse initiale et la vitesse finale sont bien connues.

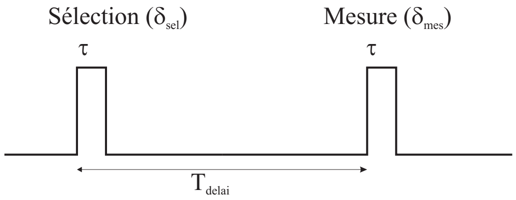


FIG. 2.4 – Séquence temporelle pour la sélection-mesure.

Notre protocole expérimental est donc le suivant (schéma figure 2.4) : une première transition Raman à la fréquence δ_{sel} sélectionne des atomes en les faisant passer de l'état $|a\rangle$ vers l'état $|b\rangle$; on peut alors éliminer les atomes qui n'ont pas effectué la transition. Les atomes sélectionnés subissent alors l'accélération. Dans l'espace des vitesses, ceci correspond à une translation. On effectue ensuite une deuxième transition Raman, avec un décalage Raman δ_{mes} donné.

Suivant la fréquence de la deuxième impulsion Raman, il y a un nombre plus ou moins important d'atomes qui sont transférés (voir figure 2.5) depuis l'état $|b\rangle$ vers l'état $|a\rangle$. En balayant cette deuxième fréquence, on va pouvoir remonter à la distribution finale de vitesse.

Calcul de la probabilité de transition

Si on appelle $\eta_{init}^{|a\rangle}(v)$ la distribution initiale de vitesse[5], alors, après la première impulsion Raman, la distribution en vitesse des atomes sélectionnés vaut

$$\eta_{sel}^{|b\rangle}(v + v_r) = \eta_{init}(v - v_r) P_{sel}(\delta_{sel}^R(v)) \tag{2.32}$$

où P_{sel} représente la fonction de Rabi (équation 2.23) pour les paramètres de la première impulsion (sélection).

Après l'accélération, la distribution de vitesse vaut $\eta_{sel}^{|b\rangle}(v - \Delta v)$. Après la seconde impulsion Raman, la distribution de vitesse des atomes ayant effectué la seconde transition vaut donc

[5]Dans l'expérience, les impulsions Raman sont effectuées avec des faisceaux qui sont toujours selon la même direction. Nous allons uniquement considérer la composante de la vitesse selon cet axe. On la notera v.

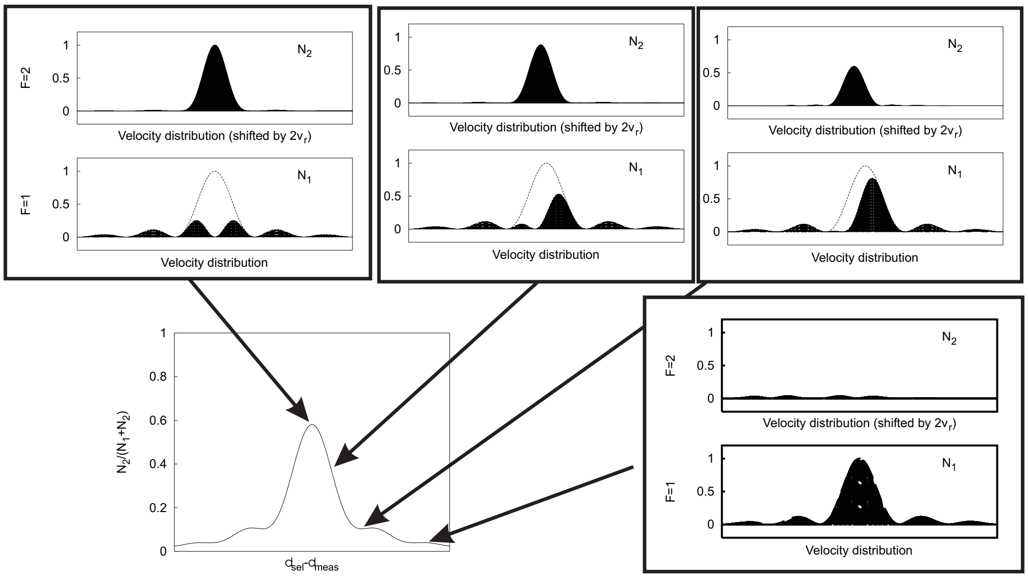


FIG. 2.5 – Distribution des états atomiques après deux impulsions π, en fonction de la différence de fréquence entre la sélection et la mesure. Pour chaque graphique satellite, la courbe pointillée correspond à la distribution après la sélection ($|F = 1\rangle$), qui est tout le temps la même, et les courbes pleines correspondent à la distribution dans chaque état $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$, après l'impulsion de mesure. Ces dernières courbes dépendent de la fréquence de l'impulsion de mesure. Le seul signal auquel on accède expérimentalement est le nombre d'atomes dans chaque état (surface des courbes pleines). L'expérience consiste à mesurer la proportion des atomes dans l'état $|F = 2\rangle$ en fonction du désaccord de la seconde transition Raman (courbe en bas à gauche).

(en appelant P_{mes} la fonction de Rabi (équation 2.23) pour les paramètres de la seconde impulsion) :

$$\eta_{final}^{|a\rangle}(v - v_r) = \eta_{init}(v - v_r - \Delta v)P_{sel}(\delta_{sel}^R(v - \Delta v))P_{mes}(\delta_{mes}^R(v)) \tag{2.33}$$

Après les deux impulsions Raman, nous mesurons le nombre d'atomes dans chaque sous-niveau. Nous en déduisons la fraction d'atomes qui ont été transférés vers le niveau hyperfin $|a\rangle$ par la seconde impulsion Raman.

$$\frac{N_a}{N_a + N_b} = \frac{\int \eta_{final}^{|a\rangle}(v)dv}{\int \eta_{sel}^{|b\rangle}(v)dv} \tag{2.34}$$

$$= \frac{\int \eta_{init}(v - v_r - \Delta v)P_{sel}(\delta_{sel}^R(v - \Delta v))P_{mes}(\delta_{mes}^R(v))dv}{\int \eta_{init}(v - v_r)P_{sel}(\delta_{sel}^R(v))dv} \tag{2.35}$$

Pour analyser les spectres obtenus, nous avons besoin d'ajuster la courbe expérimentale par la prédiction théorique (équation 2.35). Pour simplifier le calcul, nous faisons l'hypothèse suivante : la distribution de vitesse initiale est constante sur la largeur typique de la sélection en vitesse. Expérimentalement, nous avons une distribution initiale de vitesse possédant une largeur caractéristique de 3 à 4 v_r alors que la sélection se fait sur largeur typique inférieure à $v_r/10$.

Ainsi, dans l'expression (2.35), nous pouvons remplacer $\eta(v)$ par η_0, qui se simplifie entre le haut et le bas :

$$\frac{N_a}{N_a + N_b} = \mathcal{P}((\delta_{sel} - \delta_{mes}) - (\vec{k_1} - \vec{k_2}).\vec{\Delta v}) \tag{2.36}$$

où δ_{sel} (resp. δ_{mes}) correspond au désaccord Raman pour l'impulsion de sélection (resp. de mesure) et où la fonction $\mathcal{P}$ est définie par

$$\mathcal{P}(\delta) = \frac{\int P(z)P(\delta + z)dz}{\int P(z)dz} \tag{2.37}$$

Notons que la fonction $\mathcal{P}$ dépend implicitement des deux paramètres $\Omega_{a\to b}^{\text{eff}}$ et τ. Ces deux paramètres apparaissent donc dans l'ajustement du spectre par l'équation (2.36) permettant d'obtenir le paramètre $(\vec{k_1} - \vec{k_2}) \cdot \vec{\Delta v}$.

Transition Raman sélective en vitesse et mesure de la vitesse de recul

Dans l'expérience l'accélération des atomes a lieu sur le même axe que les faisceaux Raman. La variation de vitesse qui en résulte vaut :

$$\Delta v = 2N\frac{\hbar k_B}{m} \tag{2.38}$$

où $2\hbar k_B$ désigne l'impulsion des deux photons transmis au atomes à chaque transition et N le nombre de transitions.

A partir de la connaissance de δ_{sel} et de la détermination de δ_{mes} correspondant au centre de la distribution de vitesse, on peut ainsi retrouver le rapport h/m à partir de la formule suivante :

$$\frac{\hbar}{m} = \frac{\delta_{sel} - \delta_{mes}}{2Nk_B(k_1 + k_2)} \tag{2.39}$$

2.2 Dispositif expérimental

2.2.1 Description du dispositif

Le dispositif expérimental est constitué de plusieurs parties :
- production de la source d'atomes froids,
- sélection et mesure d'une classe de vitesse (transition Raman),
- accélération cohérente (seconde partie du manuscrit),
- mesure du nombre d'atomes par temps de vol.

Je vais brièvement décrire le système permettant de refroidir et détecter les atomes et qui a peu été changé depuis la thèse de Rémy Battesti [31]. Je présenterai en détail les principales modifications apportées au système Raman. Un schéma global de la cellule ultra-vide est présenté sur la figure 2.6.

Le piège magnéto-optique

Les faisceaux lasers utilisés pour refroidir les atomes sont issus de diodes laser. Les faisceaux sont acheminés jusqu'à l'enceinte par des fibres optiques. Des modulateurs acousto-optiques permettent de contrôler l'intensité et la fréquence des lasers. La séquence de refroidissement, tout comme le reste de l'expérience, est pilotée par l'ordinateur à l'aide du logiciel LabView.

La préparation du nuage atomique se fait en deux étapes : d'abord un piège magnéto-optique (PMO) permet de piéger et refroidir les atomes. Cette phase dure environ 1,5 s. Ce PMO est suivi d'une mélasse optique qui dure environ 20 ms, dans laquelle en ajustant précisément l'intensité et la fréquence des lasers nous pouvons réduire la température du nuage jusqu'à quelques μK.

—Caractérisation du piège par absorption— Nous avons caractérisé notre nuage d'atomes à la fin de la phase mélasse (voir figure 2.7). Nous utilisons pour cela un faisceau laser collimaté avec un diamètre d'environ 1 cm ayant une intensité de l'ordre du 70 μW et une impulsion d'une durée de 100 μs . Ce faisceau est accordé sur la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. L'absorption du laser par le nuage est directement imagée par une caméra CCD sans objectif. Nous avons effectué une image du piège juste après la fin de la phase mélasse, au moment où on effectue habituellement la sélection Raman.

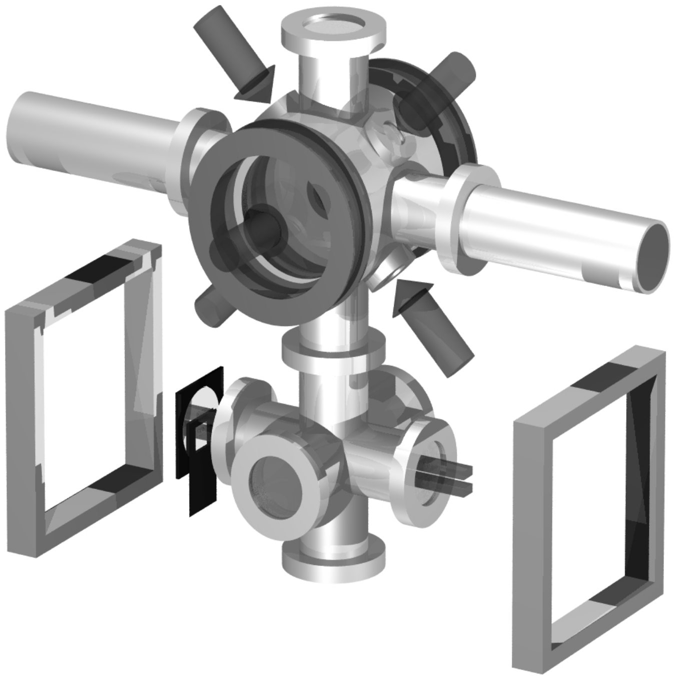


Fig. 2.6 – Plan de la cellule ultravide : dans la partie du haut se trouve le piège magnéto-optique. C'est là où l'on prépare le nuage atomique et l'on effectue la sélection-mesure. Les deux bobines en configuration anti-Helmotz créent un gradient de champ magnétique d'environ 18 $G.cm^{-1}$. Les six faisceaux du piège (2 horizontaux, et 4 à $\pm 45^{\circ}$) permettent de laisser libre un accès optique horizontal et un autre vertical. En bas, se trouve la zone de détection (dont on a un schéma figure 2.8). Deux faisceaux horizontaux permettent de mesurer par fluorescence les atomes. Nous avons représenté les deux bobines permettant de créer le champ magnétique directeur présent pour la détection.

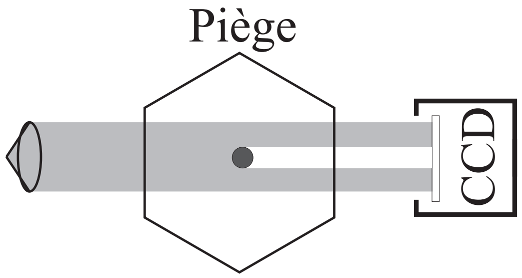


Fig. 2.7 – Schéma du système utilisé pour imager la phase mélasse par absorption : un faisceau laser résonnant est envoyé directement sur le capteur CCD de la caméra à travers le piège.

On va supposer que la distribution des atomes est gaussienne et isotrope. La densité du nuage s'écrit alors

$$n(x,y,z) = \frac{N_{at}}{(2\pi L^2)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2L^2}} \tag{2.40}$$

où N_{at} est le nombre total d'atomes et L le rayon du nuage.

A résonance, à faible saturation et pour la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, la section efficace d'absorption, en tenant compte de la force d'oscillateur (voir annexe C.3, page 197), vaut

$$\sigma = \frac{7}{10}\frac{2}{3}\frac{3\lambda^2}{2\pi} = \frac{7}{10}\frac{\lambda^2}{\pi} \tag{2.41}$$

où λ est la longueur d'onde du laser.

L'intensité sur la caméra est alors égale à :

$$I(x,y) = I_0(x,y) e^{-\sigma \int n(x,y,z) dz} \tag{2.42}$$

En calculant le logarithme du rapport entre deux images avec et sans nuage, on a accès à la densité colonne du milieu intégrée sur l'axe z. En intégrant cette densité sur x et y, on remonte au nombre d'atomes

$$N_{at} = \frac{1}{\sigma} \int \ln\left(\frac{I_0(x,y)}{I_S(x,y)}\right) dx dy \tag{2.43}$$

On calcule une valeur[6] de $N_{at} \simeq 3 \times 10^7$.

En ajustant le profil de coupe par une gaussienne, on peut retrouver la largeur du nuage. On obtient une valeur d'environ $L = 560\ \mu$m.

La densité d'atomes au centre du nuage vaut donc :

$$n_0 \simeq 1{,}1 \times 10^{10} \text{ at.cm}^{-3} \tag{2.44}$$

La détection

La détection finale du nombre d'atomes dans chacun des deux sous-niveaux hyperfins est, comme nous allons le voir dans la suite, un des points les plus importants de l'expérience. Le but du dispositif est le même que celui des horloges atomiques. Le principe que nous utilisons s'inspire de celui développé pour les fontaines par le SYRTE [37].

Pour détecter les atomes nous utilisons deux nappes de lumière de taille 10 mm $\times$ 5 mm. La première est constituée par un laser polarisé circulairement et rétroréfléchi par un miroir. Ce laser est accordé sur la transition cyclante ($F = 2 \rightarrow F' = 3$ pour le ^{87}Rb). Seuls les atomes dans l'état $F = 2$ sont résonnants. On détecte leur fluorescence sur une photodiode. Pour limiter le nombre d'atomes perdus vers l'état $F = 1$, nous appliquons un champ magnétique parallèle à l'axe des faisceaux sondes. A cause de la polarisation du laser, l'atome va

[6] Ce nombre est faible comparé à la plupart des PMO. Ceci est dû au petit diamètre des faisceaux lasers du piège, limité par la taille des hublots.

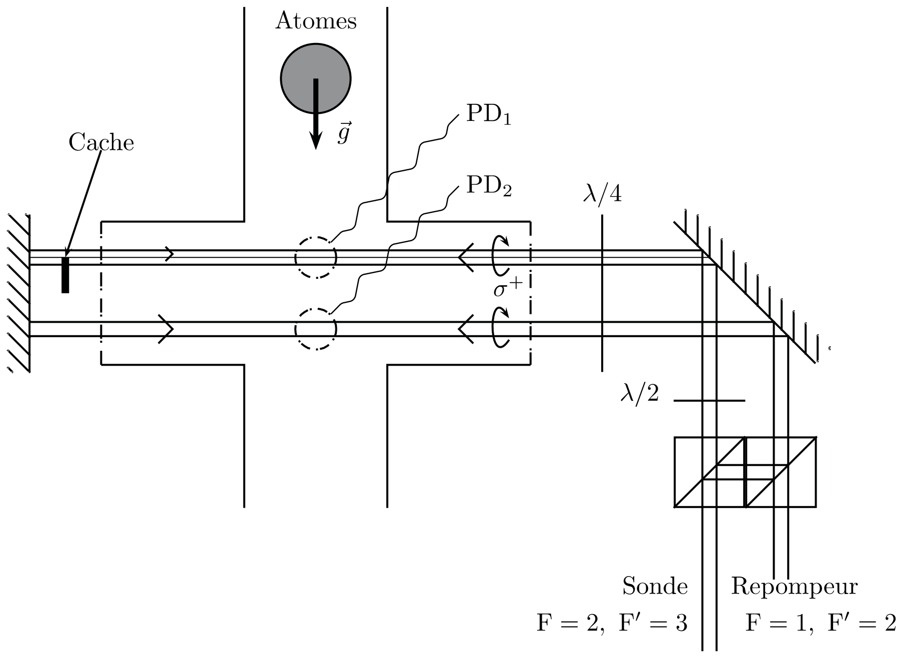


FIG. 2.8 – Schéma du dispositif de détection.

rapidement être pompé dans l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$. A partir de cet état, la transition vers un état excité $F' = 2$ ou $F' = 1$ est interdite avec un laser polarisé σ_+. L'atome ne pourra donc pas être pompé vers un état $F = 1$.

Un cache noir placé sur le miroir empêche la rétroréflection du bas du faisceau : le laser pousse alors les atomes préalablement détectés dans l'état $F = 2$ en dehors de la zone de détection. Il ne reste plus que les atomes dans l'état $F = 1$.

Le deuxième faisceau sonde est issu de la même source laser. On lui superpose un repompeur (faisceau résonnant $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$). Les atomes dans $F = 1$ sont alors repompés dans l'état $F = 2$ et détectés ensuite de la même façon que précédemment. Le réglage de l'intensité du repompeur est assez délicat, puisqu'il doit être suffisamment intense pour agir, mais pas trop intense, pour que la diffusion du faisceau dans le zone de détection ne vienne pas repomper les atomes lorsqu'ils sont encore dans la première nappe.

Les deux signaux sont digitalisés par une carte d'acquisition analogique (National instrument AT-MIO-16E2) et enregistrés sur l'ordinateur. Une analyse de l'amplitude du signal permet de retrouver le nombre d'atomes dans chaque état.

—Caractérisation de la détection— Le taux de fluorescence Γ_{fluo} des atomes est défini comme étant le nombre de photons émis par un atome, par unité de temps. Γ_{fluo} peut être

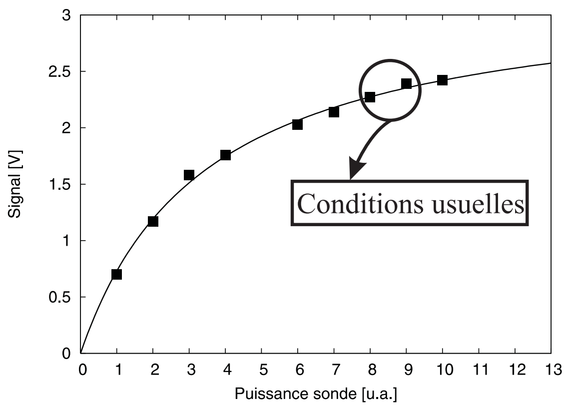


FIG. 2.9 – Mesure du paramètre de saturation de la détection : fluorescence détectée par les photodiodes en fonction de l'intensité. Dans les conditions usuelles de l'expérience, nous sommes à environ 2/3 du maximum de fluorescence. Donc $s = 2$.

calculé par la formule suivante :

$$\Gamma_{fluo} = \frac{\Gamma}{2}\frac{s}{1+s} \tag{2.45}$$

où Γ est l'inverse de la durée de vie de l'état excité, et s est le paramètre de saturation. Le paramètre de saturation dépend de l'intensité I et du désaccord à résonance δ des lasers par la formule

$$s = \frac{\Gamma^2}{4} \times \frac{I}{I_S} \times C^2 \times \frac{1}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \tag{2.46}$$

où I_S est l'intensité de saturation[7] et C est un paramètre qui dépend de la polarisation du laser ($C = \sqrt{3/2}$ dans notre situation, voir annexe C.3). Le plus simple pour évaluer s reste cependant de faire varier l'intensité du laser et de regarder la fluorescence (voir figure 2.9). On obtient alors pour notre système un paramètre $s \sim 2$. Notre taux de fluorescence est donc de $\Gamma_{fluo} = 1{,}3 \times 10^7$ ph.at^{-1}.s^{-1}.

Dans notre dispositif, l'angle solide de détection des photodiodes est d'environ $\frac{d\Omega}{4\pi} = 1{,}2\,.\,10^{-2}$. On s'attend donc à un signal d'environ 4×10^{-14} W.at^{-1}. Avec une résistance de charge de 1 GΩ sur une photodiode ayant un rendement de 0,5 A.W^{-1} (voir figure 3.3, page 51), nous obtenons 20 μV.at^{-1}.

—Caractérisation du nuage par temps de vol— A l'aide de ce dispositif de détection, nous pouvons caractériser notre piège en observant un temps de vol. A partir d'un tel signal, on obtient le nombre d'atomes (amplitude du signal) ainsi que sa distribution en vitesse sur l'axe vertical (largeur du signal). Le réglage de la phase mélasse a été fait en optimisant la densité (nombre d'atomes divisé par la largeur en vitesse).

La distribution finale de vitesse mesurée présente une demi largeur à mi-hauteur de 20 mm.s^{-1}, c'est-à-dire 3,5 fois la vitesse de recul, pour un nombre total d'atomes d'environ

[7] Dans tout ce document, nous notons I_S l'intensité de saturation de la transition $5S_{1/2} - 5P_{3/2}$ sans tenir compte de la structure hyperfine. I_S vaut environ 2,55 mW.cm^{-2}.

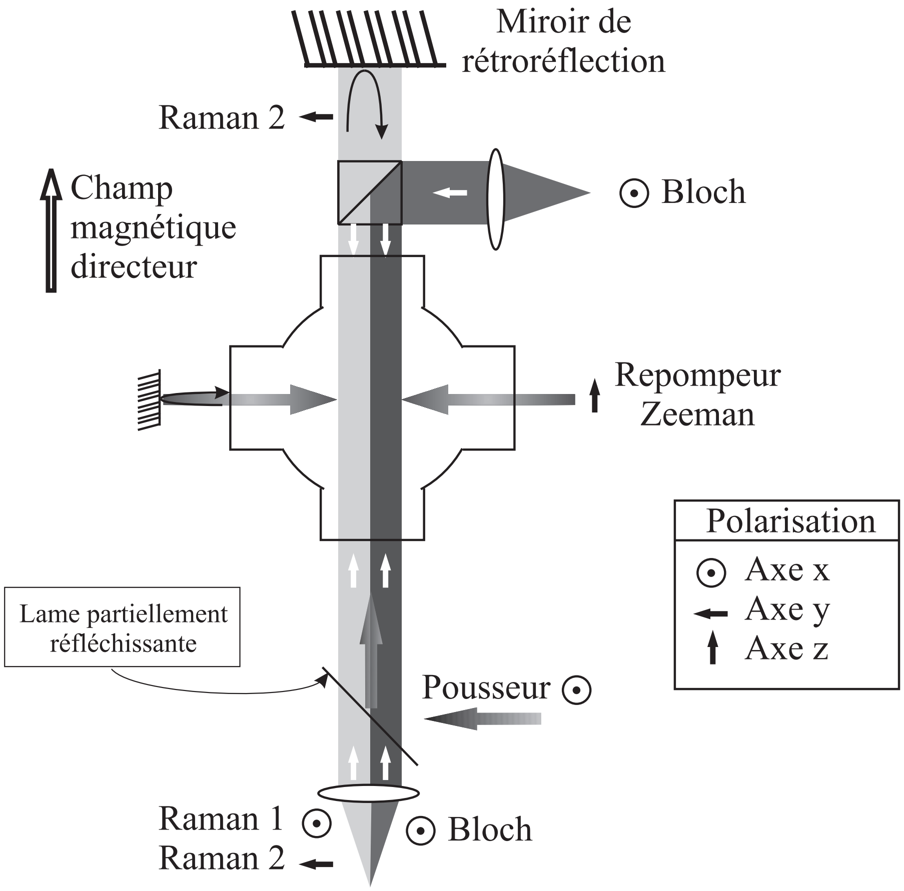


FIG. 2.10 – Configuration des faisceaux lasers utilisés après la phase mélasse : repompeur Zeeman, pousseur, Raman, et Bloch

3×10^7.

Si on fait l'hypothèse d'une distribution de vitesse $\eta(v)$ gaussienne, on a

$$\eta(v) = N_{tot}\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \tag{2.47}$$

Et donc on obtient que

$$\eta_0 = N_{tot}\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \tag{2.48}$$

où η_0 est la densité maximale dans l'espace des vitesses.

Nous obtenons donc un paramètre $\eta_0 \simeq 4 \times 10^6$ at.$\mathrm{v_r^{-1}}$.

Repompeur Zeeman

A la fin de la phase mélasse, les atomes sont tous dans un état $|F = 2\rangle$. Cependant, leur polarisation est aléatoire. On perdrait donc directement quatre cinquièmes de nos atomes lors de la sélection, puisque nous adressons uniquement les atomes dans l'état $m_F = 0$.

Pour augmenter le nombre d'atomes, nous repompons optiquement les atomes dans l'état $|F = 2, m_F = 0\rangle$. Pour cela, nous utilisons un faisceau laser polarisé linéairement, parallèle à l'axe de quantification, résonnant avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Pour un tel faisceau, l'état $|F = 2, m_F = 0\rangle$ est un état noir c'est-à-dire qu'il n'est couplé à aucun autre état (le coefficient de Clebsh-Gordon étant nul entre $|F = 2, m_F = 0\rangle$ et $|F' = 2, m_{F'} = 0\rangle$). En présence du faisceau repompeur du piège, les atomes vont effectuer des transitions en changeant aléatoirement, par émission spontanée, de sous-niveau Zeeman et ce jusqu'à arriver dans cet état noir où ils resteront.

Cependant, si on gagne *a priori* un facteur 5 en polarisant les atomes, on transfert aussi de l'impulsion aux atomes que l'on a repompés. Ainsi, expérimentalement, dans l'espace des vitesses la densité des atomes dans l'état $|F = 2, m_F = 0\rangle$ augmente d'environ 2.

Les paramètres de ce faisceau sont assez critiques à régler : en particulier la polarisation du faisceau doit être précisement parallèle au champ magnétique directeur, ce qui nécessite un réglage très précis du champ magnétique. De plus, un faisceau trop intense ou qui dure trop longtemps va détruire le nuage. Expérimentalement, nous avons obtenu un effet optimal pour une intensité d'environ 800 μW.cm^{-2} et une durée de l'impulsion de 50 μs.

Faisceau pousseur

Nous utilisons un faisceau laser résonnant avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ qui sert à éliminer les atomes non sélectionnés par la première transition Raman et qui sont restés dans l'état $|F = 2\rangle$. En effet un atome dans l'état $|F = 2\rangle$ va effectuer un grand nombre de cycles absorption–émission. Il va ainsi acquérir une vitesse qui va le sortir du nuage d'atomes froids.

—**Orientation du faisceau pousseur**— Le faisceau étant utilisé après la sélection en vitesse par une impulsion Raman, il faut faire attention à ce qu'il ne modifie pas la vitesse des atomes sélectionnés. En effet, le laser résonnant avec la transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$ est décalé d'environ 6 GHz par rapport à la transition partant du niveau $|F=1\rangle$. En conséquence de quoi, le laser peut exercer une force dipolaire sur les atomes.

On peut en calculer un ordre de grandeur : le déplacement lumineux est donné (voir équation (2.31), page 23) par

$$\delta_{\text{d.l.}} = \frac{1}{8}\frac{\Gamma^2}{\omega_{\text{SHF}}}\frac{I}{I_S} \tag{2.49}$$

où I représente l'intensité du laser, I_S l'intensité de saturation et ω_{SHF} l'écart de la structure hyperfine.

L'accélération dipolaire exercée est donc donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar k}{m}\frac{1}{8}\frac{\Gamma^2}{\omega_{\text{SHF}}}\frac{1}{k}\vec{\nabla}\left(\frac{I}{I_S}\right) \tag{2.50}$$

Pour un temps de l'ordre de la milliseconde, une intensité de l'ordre de I_S qui varie sur une distance de l'ordre de quelques millimètres, on obtient une variation de vitesse de l'ordre de $10^{-4}v_r$, ce qui à l'échelle de la précision que l'on souhaite obtenir est non négligeable.

C'est pour cela que l'on a décidé de positionner le faisceau pousseur parallèlement à l'axe des faisceaux Raman (voir schéma figure 2.10). Ainsi, le gradient de force est transverse, et l'effet est nul sur la composante longitudinale de la vitesse.

—**Polarisation du faisceau pousseur**— Le faisceau pousseur est parallèle au faisceau Raman. Sa puissance est de l'ordre de 50 μW.cm^{-2}. La durée de l'impulsion lumineuse est de 3 ms. Afin de réduire sensiblement le nombre d'atomes transférés dans $|F=1\rangle$, la polarisation du faisceau pousseur serait idéalement circulaire[8]. Cependant, dans le nouveau schema expérimental (cf. figure 2.10), le miroir de rétroréflection pour les faisceaus Raman, va partiellement rétroréfléchir le pousseur, ce qui diminue considérablement son efficacité. Nous utilisons donc un faisceau polarisé linéairement de telle sorte qu'il soit réfléchi par le cube en direction du collimateur du faisceau laser utilisé pour les oscillations de Bloch.

Génération des faisceaux Raman

Les faisceaux Raman sont produits par des diodes laser en cavité étendue. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, il est nécessaire de connaître précisément la différence de fréquence entre les deux faisceaux laser. Pour cela nous asservissons en phase une diode laser sur l'autre. La méthode décrite par les figures 2.11 et 2.12 consiste à mesurer le battement en fréquence entre les deux diodes laser, puis à asservir ce battement sur une référence de fréquence. La rétroaction se fait sur la diode laser en agissant directement sur son courant

[8] cf. le paragraphe sur la détection

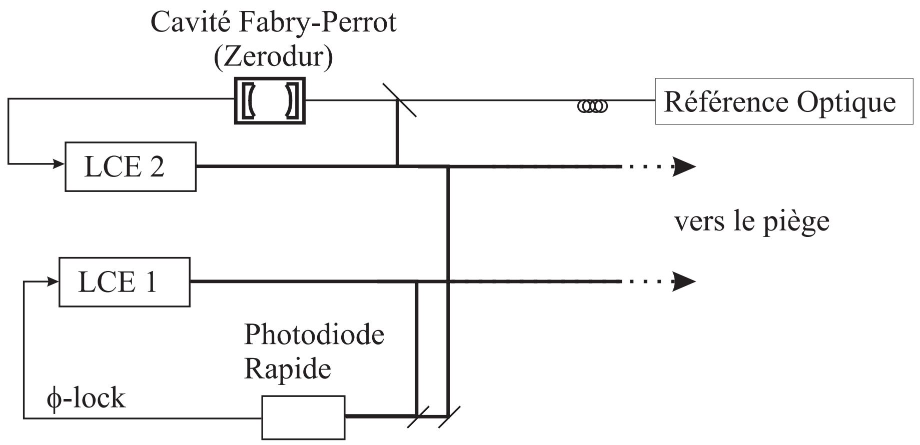


FIG. 2.11 – Schéma des lasers Raman : le premier laser est asservi en fréquence sur une cavité Fabry-Perot préalablement calibrée. On peut ainsi connaître précisément la longueur d'onde des lasers. Le deuxième laser est asservi en phase sur le premier. Un schéma plus détaillé de l'asservissement est donné figure 2.12 .

(réponse très rapide) et à plus basse fréquence sur le contrôleur de courant de la diode laser et l'amplificateur haute tension de la cale piézo-électrique de la cavité du laser.

—**Mesure des longueurs d'ondes**— L'incertitude relative de la mesure des longueurs d'onde limite l'incertitude relative de la mesure de la vitesse. Pour connaître précisément la longueur d'onde des lasers, on asservit en fréquence un des deux lasers Raman sur une cavité Fabry-Perot en Zerodur préalablement étalonnée. La connaissance du numéro du pic de la cavité sur lequel le laser est asservi nous permet de connaître sa longueur d'onde avec une grande précision (en mesurant en permanence la cavité par rapport à une référence optique, nous atteignons une précision inférieur à 100 kHz – voir partie 6.1.1, page 145).

—**Amplification des lasers**— Avant d'envoyer les faisceaux laser vers les atomes, nous les amplifions et les faisons passer par des modulateurs acousto-optiques, qui nous permettent de contrôler précisément la durée des impulsions Raman. Au cours de ma thèse, nous avons utilisé deux dispositifs différents pour produire les faisceaux Raman :

– Dans le premier dispositif, les faisceaux Raman étaient amplifiés dans des amplificateurs de type MOPA (*tapered amplifier*). Ensuite, ils étaient injectés dans des fibres optiques vers le piège magnéto-optique. Cependant, ces amplificateurs se sont détériorés après moins de 3 ans d'utilisation. Leur puissance était de l'ordre de 350 mW. Ils présentaient un fond d'émission spontanée résonnant avec les atomes, que nous avons pu supprimer en plaçant une cellule de rubidium chauffée sur le trajet du faisceau. De plus leur bruit de phase est très mauvais et ils présentent aussi des fluctuations d'intensité. Tous ces effets sont sans doute dus à l'usure

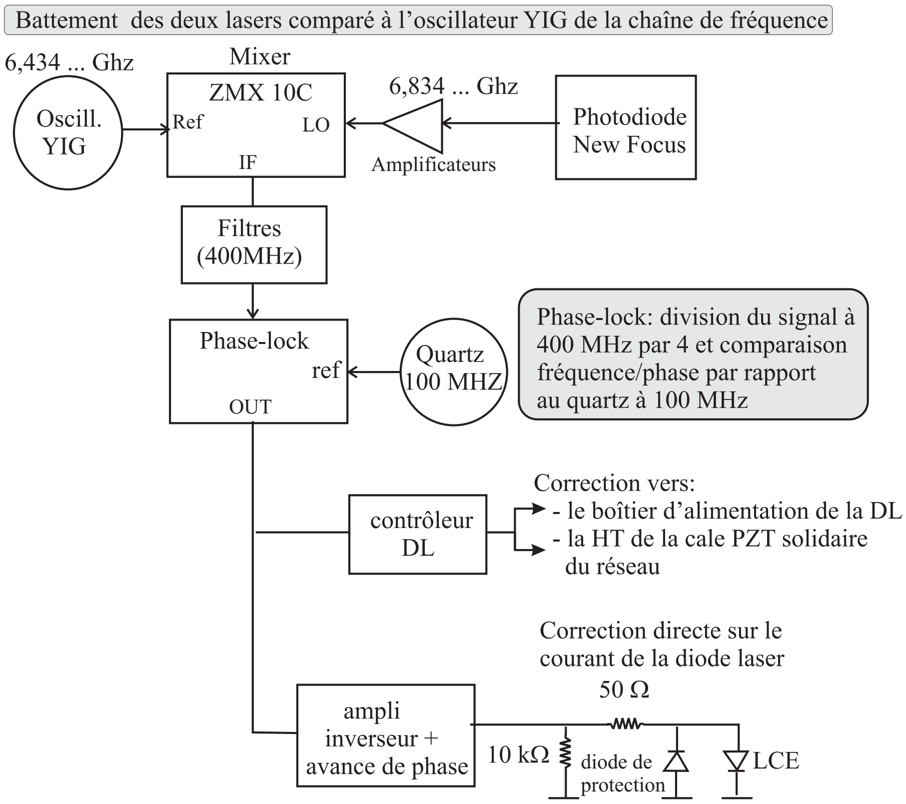


FIG. 2.12 – Schéma (simplifié) de l'asservissement de phase des faisceaux Raman. Le battement à 6,834... GHz entre les diodes Raman est hétérodyné avec un signal issu d'un synthétiseur HF décrit figure 2.13. Ce signal à 400 MHz est asservi à l'aide d'un comparateur phase-fréquence sur un signal provenant du quartz à 100 MHz. L'asservissement de la diode se fait, pour les corrections très rapides, par une modulation directe du courant puis, pour les corrections plus lentes, par le boîtier de contrôle du courant de la diode et par la cale piézo-électrique de la cavité du laser.

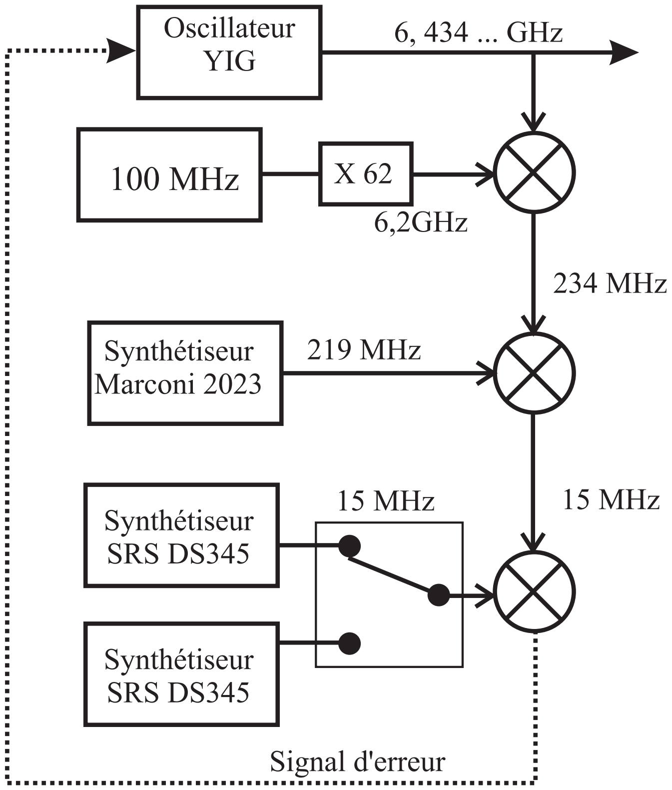


FIG. 2.13 – Schéma du principe de fonctionnement du synthétiseur HF. Un oscillateur YIG est comparé avec une référence de fréquence à 6,2 GHz, un synthétiseur RF à environ 219 MHz et un signal provenant d'un synthétiseur à environ 15 MHz. Le signal issu de cette comparaison est utilisé comme signal d'erreur pour asservir le YIG. En commutant deux synthétiseurs, il est possible de passer de la fréquence de sélection à celle de mesure.

des amplificateurs (MOPA).

– Dans un deuxième dispositif, nous avons remplacé ces amplificateurs par des diodes lasers injectées. On arrive à récupérer environ 20 mW par faisceau en sortie de fibre. Ceci est suffisant pour réaliser les transitions Raman : pour compenser la faible puissance, il faut se rapprocher de la résonance à un photon. Ceci a deux conséquences : on augmente le taux de diffusion du laser par les atomes et les déplacements lumineux. Ces effets ne semblent pas être pour l'instant déterminants pour la sensibilité ou l'exactitude de notre mesure.

—Caractérisation du piège avec des transitions Raman— Une méthode pour mesurer la densité dans l'espace des vitesses a été exposée dans la partie précédente. Une autre façon de procéder consiste à mesurer le nombre d'atomes sélectionnés par une impulsion Raman.

Ce nombre peut être évalué par la formule suivante :

$$N_{\text{detect}} = \int \eta(v) \frac{\Omega^2}{\delta(v)^2 + \Omega^2} \sin^2\left(\sqrt{\Omega^2 + \delta(v)^2}\frac{\tau}{2}\right) dv \tag{2.51}$$

Dans le cas d'une impulsion π, et en faisant l'hypothèse d'une distribution de vitesse uniforme à l'échelle de la largeur de la sélection, un calcul numérique donne

$$N_{\text{sel}} \simeq 2{,}1\, \eta_0 \frac{\Omega}{2k} \tag{2.52}$$

Les valeurs que nous avons sont typiquement les suivantes : pour une impulsion π de 1,7 ms, le nombre d'atomes détectés est de 4×10^4.

Sachant que l'on ne sélectionne qu'un atome sur cinq (la mesure est effectuée sans repompeur Zeeman), on obtient que $\eta_0 = 2{,}5 \times 10^6$ at.$\mathrm{v_r^{-1}}$, ce qui en accord correct avec le résultat obtenu par l'équation 2.48.

2.2.2 Performance du senseur inertiel

Nous avons maintenant décrit tous les éléments de l'expérience. Un exemple de séquence temporelle est décrit figure 2.14. La première étape, la préparation du nuage d'atomes dure environ 1,5 s. Ensuite, l'expérience à proprement parler dure moins de 20 ms. Les atomes ensuite tombent en environ 200 ms vers la zone de détection. L'ensemble de la synchronisation de la séquence est géré par des cartes informatiques, qui une fois programmées fonctionnent automatiquement. Le logiciel intervient à chaque séquence pour analyser le temps de vol et reprogrammer les synthétiseurs afin de prendre un nouveau point sur le spectre.

Nous avons représenté figure 2.15 un exemple de spectre Raman obtenu avec une impulsion π de 0,6 ms (désaccord $\Delta = 400$ GHz pour une puissance de 20 mW par faisceau de rayon 2 mm). On voit très bien la courbe caractéristique du produit de convolution de deux fonctions de Rabi (figure 2.5, page 25).

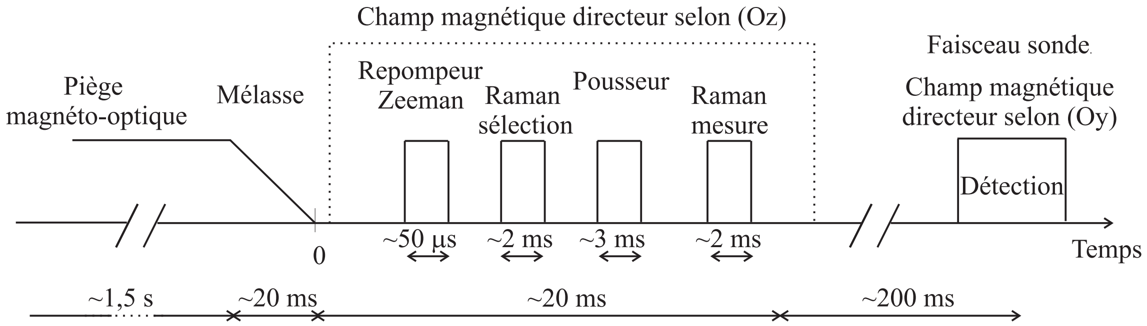


FIG. 2.14 – Séquence temporelle complète : 1) Préparation du nuage dans un piège magnéto-optique et dans une mélasse optique. 2) Séquence Raman sélection-mesure 3) Détection finale du nombre d'atomes.

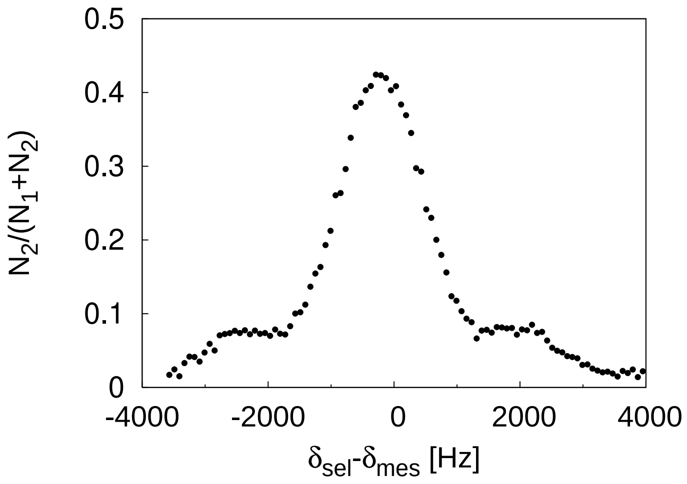


FIG. 2.15 – Exemple de spectre obtenu par une séquence de deux impulsions π. Axe horizontal : différence de fréquence entre la sélection et la mesure. Axe vertical : proportion d'atomes transférés par la seconde impulsion Raman dans $|F = 2\rangle$.

Sur la figure 2.16 se trouve un spectre avec les paramètres Raman optimisés. La durée de l'impulsion π est de 3,4 ms, pour une intensité Raman de 8 mW environ par faisceau. Le désaccord par rapport à la résonance est de 1 THz. De plus, contrairement à la figure 2.15, nous ne prenons des points que sur la partie centrale du spectre, afin de réduire le temps de mesure. Les 300 points que contient ce spectre ont été pris pendant environ 10 minutes. L'incertitude finale sur la mesure du centre de la raie est d'environ 1 Hz. Ceci correspond à une mesure de la vitesse du paquet d'atomes avec une incertitude d'environ $7.10^{-5}\,v_r$ soit 0,4 μm.s^{-1}. Il s'agit du spectre le plus précis que nous avons réalisé.

Nous allons dans les parties qui suivent essayer de comprendre ce qui limite la résolution de cette mesure de vitesse.

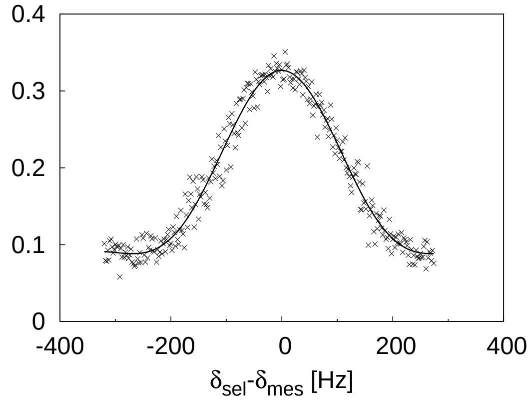


FIG. 2.16 – Spectre dans les conditions optimales. Pour réaliser une mesure, nous ne prenons des points qu'au centre du spectre (environ $\pm 2\Omega$). L'incertitude sur ce spectre contenant 300 points est d'environ 1 Hz. L'incertitude sur la mesure de vitesse est donc de $7.10^{-5} v_r$.

2.3 Particularité de la configuration Raman verticale

Il existe deux configurations différentes pour notre l'expérience : les faisceaux Raman (et Bloch) sont soit horizontaux, soit verticaux. Dans le premier cas, puisque notre senseur n'est sensible qu'aux variations longitudinales de la vitesse, la gravité ne joue aucun role. Par contre, les atomes quittent rapidement les faisceaux laser, et il n'est pas possible d'avoir un délai important entre la sélection et la mesure de la vitesse. Dans la configuration verticale, nous n'avons plus ce dernier problème, par contre, la gravité intervient au cours de l'impulsion Raman et entre les deux impulsions Raman.

La durée typique des impulsions Raman que nous utilisons est supérieure à 1 ms, ce qui nous permet d'avoir une sélection en vitesse inférieure à $10^{-1}\, v_r$. Or, on peut constater que la variation de vitesse due à la gravité pendant cette durée est d'environ 10 mm.s$^{-1} \simeq 2v_r$. Un atome résonnant au début de la transition ne l'est plus à la fin, et vice versa : les atomes sélectionnés ne forment plus une classe subrecul.

La condition de résonance pour un atome ayant la vitesse v s'écrit :

$$\delta = 2k(v + v_r) \tag{2.53}$$

Si l'atome est en chute libre, la vitesse v dépend du temps : $v(t) = v_0 - gt$. Pour continuer à être résonnant, il faut donc appliquer une rampe de fréquence sur les faisceaux Raman :

$$\delta(t) = \delta_0 - 2k\, gt \tag{2.54}$$

où g est l'accélération de la gravité (avec une valeur positive). Avec nos paramètres usuels, la pente de cette rampe vaut environ $2k\, g/(2\pi) = 25$ kHz/ms.

On peut retrouver ce résultat de la façon suivante : pour se ramener à un système où il n'y a pas de force, il faut effectuer un changement de référentiel non-galiléen, en se plaçant dans un référentiel en chute libre. Pour pouvoir sélectionner une classe subrecul dans ce référentiel, les lasers doivent avoir une fréquence fixe. Dans le référentiel du laboratoire, les lasers doivent donc avoir une fréquence qui varie linéairement : $\omega_i(t) = \omega_i(0)(1 \pm gt/c)$ (avec un signe + si le faisceau se dirige vers le bas, et un signe - sinon).

Pour pouvoir effectuer la seconde impulsion en résonance avec la classe de vitesse sélectionnée, il faut aussi décaler la fréquence de mesure de $2kgT_{\text{délai}}$ où $T_{\text{délai}}$ est le délai entre les deux impulsions Raman.

Mise en œuvre expérimentale

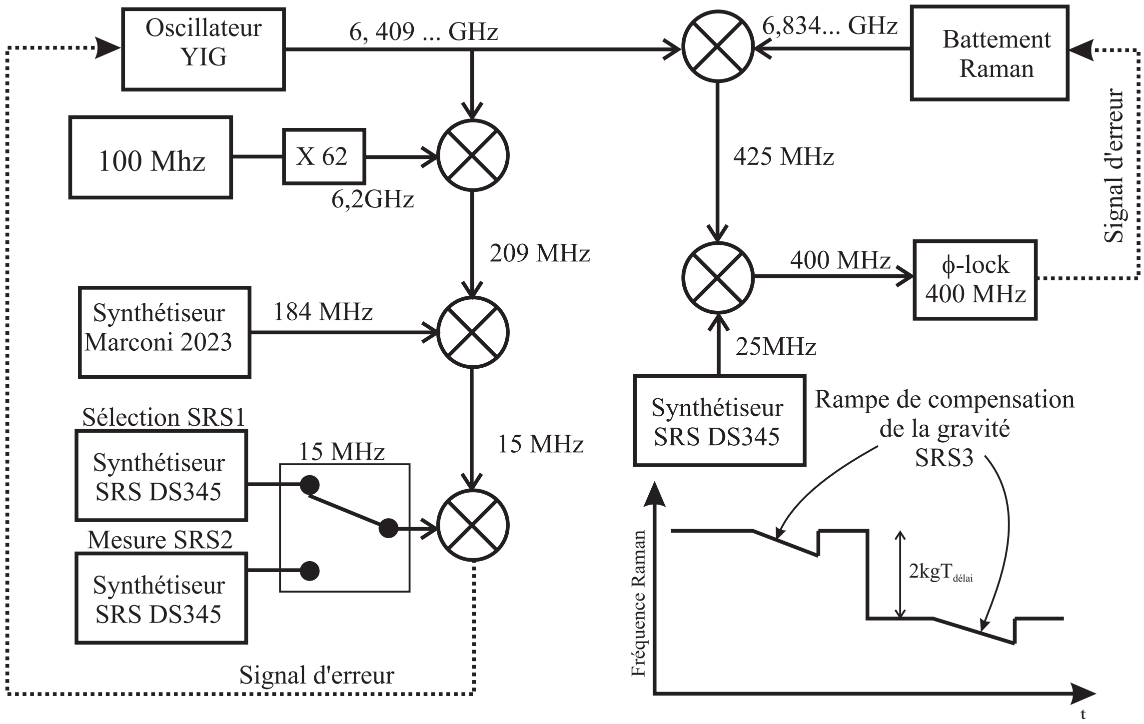


FIG. 2.17 – Schéma de l'asservissement des faisceaux Raman en vertical.

Pour pouvoir réaliser la rampe de fréquence pendant la sélection et la mesure, nous avons modifié le dispositif d'asservissement des lasers Raman (voir figure 2.17). Dans l'ancien schéma, nous hétérodynions le signal de battement des lasers avec la chaîne HF pour créer un signal à 400 MHz, utilisé par le comparateur phase-fréquence pour asservir la fréquence Raman. Dans le nouveau dispositif, ce signal à 425 MHz, est mixé avec un synthétiseur modulé (SRS3) autour de 25 MHz. Un filtre passe bande ajustable (K&L, 5BT 250/500) est utilisé pour ne conserver que le battement à 400 MHz qui est envoyé dans le comparateur phase-fréquence.

La fréquence finale du battement vérifie donc l'équation :

$$\delta_{\text{Raman}} = 6{,}6 \text{ GHz} + \nu_{\text{Marconi}} + \nu_{\text{SRS1/SRS2}} + \nu_{SRS3} \qquad (2.55)$$

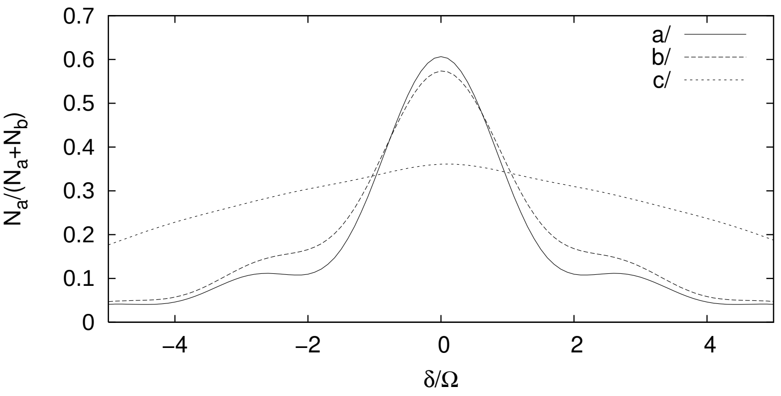


FIG. 2.18 – Simulation du spectre, pour différentes amplitudes de la rampe de fréquence, dans le référentiel en chute libre. a/ lorsqu'il n'y a pas de rampe. b/ la rampe de fréquence vaut 2Ω. c/ la rampe de fréquence vaut 10Ω.

Le synthétiseur utilisé est un SRS DS345. Il peut réaliser une rampe de fréquence déclenchée sur un signal extérieur. Avec ce dispositif, nous déclenchons deux fois la même rampe, pour la sélection et la mesure.

Précision de la rampe

On peut regarder en détail ce qui se passe si on se trompe de rampe. Il va y avoir deux effets : le premier est que la vitesse moyenne des atomes n'est pas bien connue ; le deuxième est que la distribution en vitesse des atomes sélectionnés est élargie.

Le premier effet va s'annuler entre la sélection et la mesure. Si on effectue une rampe linéaire de fréquence différente de la rampe exacte pour compenser g, alors dans le referentiel des atomes en chute libre la fréquence des lasers ne sera pas constante. Cependant, la sélection en vitesse restera toujours symétrique par rapport à la fréquence moyenne de la rampe, et donc lorsque l'on effectue une séquence de sélection-mesure, le spectre final sera centré sur la valeur correspondant à la chute libre des atomes $gT_{\text{délai}}$.

Sur la figure 2.18, nous avons simulé ce qui se passe si on utilise une rampe de fréquence délibérément fausse. Le paramètre qui entre en jeu est la variation de δ sur la durée de l'impulsion π par rapport à l'intensité Ω du couplage. Nous pouvons voir sur cette simulation que pour une variation de δ de 2Ω, la largeur du signal n'est pratiquement pas modifiée, alors que c'est la cas si cette variation est supérieure à 10Ω.

Dans notre expérience, avec une condition π pour $\tau = 4$ ms, nous avons $\Omega/2\pi = 125$ Hz. Contrôler les variations de δ à 2Ω sur 4 ms, revient donc à connaître l'accélération de la gravité g avec une précision relative de $2{,}5 \times 10^{-4}$, ce qui, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, ne pose pas de difficulté.

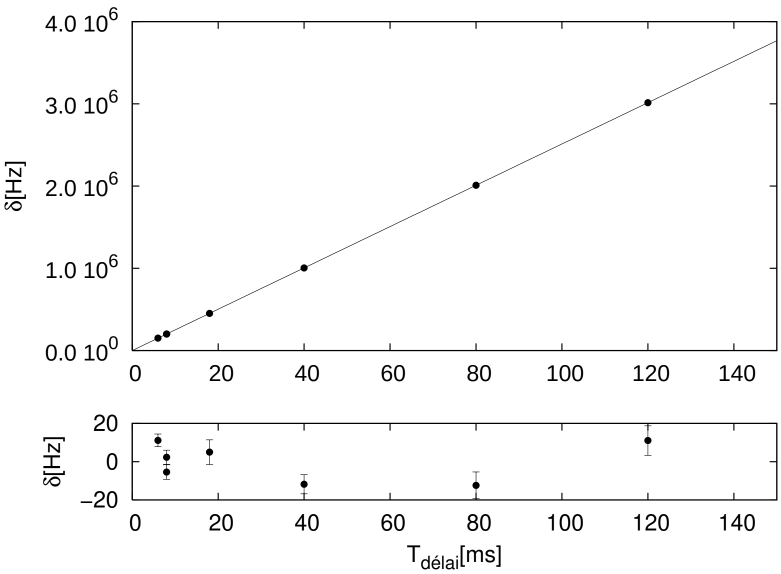


FIG. 2.19 – Mesure de la vitesse de chute des atomes. En bas, les résiduels par rapport à l'ajustement par une droite.

Mesure de g avec des atomes en chute libre

En configuration verticale, la première expérience que l'on peut faire est une mesure de l'accélération de la pesanteur.

Nous avons donc réalisé l'expérience suivante : on sélectionne les atomes, puis on mesure leur vitesse après avoir attendu un certain temps $T_{\text{délai}}$ que l'on peut faire varier.

Nous avons représenté figure 2.19 le résultat de telles mesures pour des valeurs de $T_{\text{délai}}$ allant jusqu'à 120 ms (le décalage Doppler vaut alors près de 3 MHz). Il y a deux limites importantes à cette mesure : lorsque l'on augmente le délai, on peut constater que l'incertitude sur la mesure de la vitesse augmente : on passe d'environ 3 Hz à plus de 6 Hz. Cet effet sera étudié en détail par la suite, il provient du bruit de vibration qui rajoute du bruit sur la vitesse des atomes (dans le référentiel attaché à l'expérience). Le deuxième effet, que l'on peut voir sur les résiduels, est que les points ne sont pas alignés. Ceci est certainement dû à une variation d'un déplacement de niveau avec le déplacement des atomes, qui fausse la mesure de vitesse par les transitions Raman. Dans notre situation, l'effet provient essentiellement du champ magnétique (effet Zeeman du second ordre)[9]. Nous exposerons dans la seconde partie (section 5.1, page 115) un méthode basée sur les oscillations de Bloch qui permet de limiter cet effet.

La mesure de g présentée sur la figure 2.19 présente au final une incertitude d'environ

$$\sigma_g = \frac{\sigma_v}{gt} \simeq \frac{6\ \text{Hz}}{3 \times 10^6\ \text{Hz}} \simeq 2 \times 10^{-6} \tag{2.56}$$

[9] Cet effet sera étudié en détail dans le dernier chapitre sur les effets systématiques. Notons aussi que la force Zeeman quadratique associée à ce déplacement est, pour un délai de 100 ms, près de deux ordres de grandeur plus faible que l'erreur dans la mesure de la vitesse avec les transitions Raman

Chapitre 3

Caractérisation du dispositif de mesure de vitesse

Dans la partie précédente, nous avons présenté les performances de notre senseur inertiel. Dans ce chapitre, je vais présenter les différents facteurs qui limitent sa sensibilité : les limites dues au signal à bruit sur la détection et celle dues aux bruits de phase et de vibration.

3.1 Le bruit de détection

3.1.1 Bruit sur le nombre d'atomes

Dans cette partie, nous allons étudier le bruit sur le spectre qui apparaît à cause de la détection du nombre d'atomes. Ce bruit a essentiellement deux sources différentes : le bruit quantique de projection lors de la mesure du nombre d'atomes dans chacun des deux états ($\sigma_{\mathcal{P}}|_{Quant}$) et le bruit électronique sur le comptage du nombre d'atomes, dû aux photodiodes ($\sigma_{\mathcal{P}}|_{PD}$).

On peut déjà donner un premier ordre de grandeur de ces bruits. Le bruit de projection quantique est un bruit sur le nombre d'atomes qui est proportionnel à la racine du nombre d'atomes détectés. On va donc avoir

$$\sigma_{\mathcal{P}}|_{Quant} \propto \frac{\sqrt{N}}{N} \tag{3.1}$$

Le bruit sur le comptage d'atomes dû aux photodiodes sera lui constant. On va donc avoir

$$\sigma_{\mathcal{P}}|_{PD} \propto \frac{C^{ste}}{N} \tag{3.2}$$

On peut donc déjà dire que si on sélectionne un nombre très faible d'atomes, alors le bruit de projection quantique va être négligeable par rapport au bruit des photodiodes.

Dans la partie qui suit, je vais décrire plus quantitativement ces deux bruits, et donner leurs contributions à l'erreur finale.

Bruit de projection quantique

Après l'impulsion Raman de mesure, les atomes sont dans une superposition quantique des deux états $|a\rangle = |F=1\rangle$ et $|b\rangle = |F=2\rangle$. Le système de mesure projette alors la superposition dans un des deux états. Ainsi, si l'état atomique s'écrit de façon générique $\sqrt{p}|a\rangle + \sqrt{1-p}|b\rangle$ avec $p \in [0,1]$ et que le système contient N_{sel} atomes, on va détecter en moyenne $N_a = pN_{sel}$ atomes dans l'état $|a\rangle$ avec des fluctuations quantiques

$$\Delta N_a^2 = N_{sel}\, p(1-p) \tag{3.3}$$

Ces fluctuations correspondent au bruit de projection quantique.

Dans notre situation, p va dépendre de la vitesse des atomes. Considérons une classe de vitesse dv. Le nombre initial d'atomes dans cette classe de vitesse est donc $\eta(v)dv$. Après la sélection, on a un nombre d'atomes $P_{sel}(v)\eta(v)dv$. Pour cette classe de vitesse, après la mesure, on est dans une superposition d'états avec une probabilité $p = P_{mes}(v)$. On obtient donc pour cette classe de vitesse un bruit de projection donné par :

$$d\sigma_{N_1^2} = P_{sel}(v)\eta(v)dv \times P_{mes}(v)(1 - P_{mes}(v)) \tag{3.4}$$

Finalement, on obtient un bruit sur la proportion d'atomes transférés donné par :

$$\sigma_{\mathcal{P}}^2 = \frac{\int P_{sel}(v)P_{mes}(v)(1 - P_{mes}(v))\eta(v)dv}{(\int P_{sel}(v)\eta(v)dv)^2} \tag{3.5}$$

On peut alors faire l'approximation que $\eta(v)$ est constante sur la largeur de la sélection. On obtient alors que pour des impulsions π, $\sigma_{\mathcal{P}}$ ne dépend que de $\delta_{sel} - \delta_{mes}$:

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}} \frac{\sqrt{\int P_{sel}(v)P_{mes}(v)(1 - P_{mes}(v))dv}}{(\int P_{sel}(v)dv)} \tag{3.6}$$

Nous avons représenté cette fonction sur la figure 3.1 pour le cas ou l'on effectue une impulsion π pour la sélection et la mesure. Le bruit est représenté pour un atome sélectionné. Par exemple, si on regarde à désaccord nul, le bruit par atome vaut 0,33. Ceci signifie que si on sélectionne par exemple 10^4 atomes, alors le bruit sera de l'ordre de 0,33%. On peut de plus remarquer que la fonction ne varie que très peu sur la partie du spectre ($-2\Omega \lesssim \delta \lesssim 2\Omega$) utilisé pour faire la mesure de vitesse et vaut environ 0,3. Concrètement, on peut donc prendre pour le bruit de projection quantique la formule suivante :

$$\sigma_{\mathcal{P}}|_{Quant} \approx \frac{0.3}{\sqrt{N_{sel}}} \tag{3.7}$$

où N_{sel} représente la nombre total d'atomes sélectionnés.

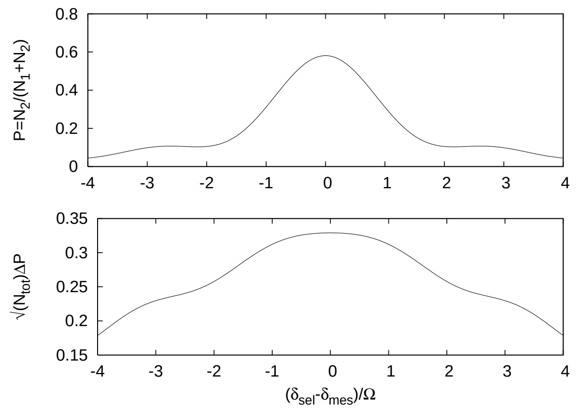


FIG. 3.1 – Bruit de projection quantique : en haut, la probabilité $\mathcal{P}$ pour un atome d'effectuer la deuxième transition, en fonction du désaccord Raman. En bas, variance de la mesure de la probabilité $\mathcal{P}$ en fonction du désaccord Raman.

Effet du bruit sur les photodiodes

Lors de la mesure du nombre d'atomes, on détecte sur deux photodiodes différentes le signal de fluorescence des atomes dans chacun des deux états atomiques. Les photodiodes présentent un bruit que nous étudierons en détail dans la suite. On peut déjà supposer qu'il va y avoir un bruit indépendant entre les deux photodiodes. On peut de plus supposer que ces bruits $\Delta N_a|_{PD}$ et $\Delta N_b|_{PD}$ sont identiques.

Partant de la formule donnant $\mathcal{P}$ en fonction des mesures de N_a et N_b :

$$\mathcal{P} = \frac{N_a}{N_a + N_b} \tag{3.8}$$

on obtient que

$$\sigma_{\mathcal{P}}^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathrm{N_a}}\right)^2 \Delta {N_a}^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathrm{N_b}}\right)^2 \Delta {N_b}^2 = \left[\mathcal{P}^2 + (1-\mathcal{P})^2\right] \left(\frac{\Delta N|_{PD}}{N_{sel}}\right)^2 \tag{3.9}$$

Cette formule nous indique que l'on s'attend à un bruit deux fois plus important au pied de la courbe que sur le sommet ($\mathcal{P} \sim 0{,}6$).

Sur la partie du spectre que l'on enregistre habituellement ($-2\Omega \lesssim \delta \lesssim 2\Omega$, et toujours en condition π), la valeur moyenne de $\left[\mathcal{P}^2 + (1-\mathcal{P})^2\right]$ vaut environ 0,62. On obtient donc la formule approchée :

$$\langle \sigma_{\mathcal{P}} \rangle \simeq 0{,}79 \left(\frac{\Delta N|_{PD}}{N_{sel}}\right) \tag{3.10}$$

3.1.2 Incertitude sur la position du centre du spectre

Afin de déterminer la variation de vitesse des atomes, nous devons ajuster les résultats expérimentaux par la formule 2.36. Dans cette formule il y a trois paramètres inconnus :

- $\delta_0 = \left(\vec{k_1} - \vec{k_2}\right) \cdot \vec{\Delta v}$

– $\Omega = \Omega^{\mathrm{eff}}_{a\rightarrow b}$
– $\theta = \Omega t$

De plus, on ajoute un offset a et une amplitude variable b, c'est-à-dire que finalement on ajuste nos mesures par la fonction

$$\mathcal{S} = a + b\mathcal{P}(\delta - \delta_0,\Omega, \theta)$$

Lors de la réalisation d'un spectre avec n points, on va mesurer la proportion $\mathcal{P}_i^{\mathrm{exp}}$ d'atomes effectuant la seconde transition, pour différentes valeurs δ_i du désaccord $\delta_{sel} - \delta_{mes}$. Ensuite, on ajuste les points par la fonction $\mathcal{S}$, c'est-à-dire que l'on cherche les paramètres $(\delta_0,\Omega,\theta,a,b)$ qui minimisent la fonction χ^2 définie par

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathcal{P}_i^{\mathrm{exp}} - \mathcal{S}(\delta_i,\delta_0,\Omega,\theta,a,b)\right)^2 \tag{3.11}$$

Si on appelle de façon générique α_k $(k = 1..5)$ les paramètres $(\delta_0,\Omega,\theta,a,b)$ de la fonction $\mathcal{S}$, α_k^0 les paramètres minimisant la fonction χ^2 et $\delta\alpha_k$ des petites variations des α_k autour des α_k^0, alors on peut écrire

$$\chi^2(\alpha) = \chi^2(\alpha^0) + \sum_{k,l} J_{k,l}\delta\alpha_k\delta\alpha_l \tag{3.12}$$

où $J_{k,l}$ est la forme bilinéaire

$$J_{k,l} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\alpha_{\mathrm{k}}}(\delta_i,\alpha^0)\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\alpha_l}(\delta_i,\alpha^0) \tag{3.13}$$

La matrice de covariance des paramètres de l'ajustement s'obtient à partir de l'inverse de la matrice J :

$$\mathrm{cov}(\alpha) = \frac{1}{n}\frac{\chi^2(\alpha^0)}{J} \tag{3.14}$$

Dans notre situation, nous voulons calculer l'incertitude sur δ_0. Nous pouvons remarquer que la fonction $\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\delta_0}$ est impaire par rapport à $\delta - \delta_0$, alors que les autres dérivées partielles sont paires. Si nous choisissons des valeurs de δ_i symétriques par rapport au centre du spectre alors la somme sur les δ_i donne zéro pour les termes non diagonaux de $\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\delta_0}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\alpha_{\mathrm{l}}}$. On peut donc facilement inverser J par rapport à la première variable. Nous obtenons donc pour la variance de δ_0

$$\sigma_{\delta_0}^2 = \frac{1}{n}\frac{\chi^2(\alpha^0)}{\sum_{\delta_i}\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\delta_0}\right)^2} \tag{3.15}$$

On peut donc maintenant faire une évaluation de la contribution de chaque bruit sur l'incertitude de la mesure finale du centre du spectre. Pour cela il faut connaître les valeurs des δ_i où la mesure est effectuée. En général, les valeurs des δ_i sont choisies uniformément réparties sur la bosse centrale du spectre (voir figure 3.1), c'est-à-dire que les valeurs sont choisies entre $\pm 2\Omega$. On va donc remplacer les sommes sur δ_i par une intégrale entre $\pm 2\Omega$.

On peut évaluer numériquement le dénominateur de l'équation (3.15), toujours en condition π, et pour $\delta \in [-2\Omega, 2\Omega]$, on obtient que

$$\frac{1}{\sqrt{\int_{-2\Omega}^{2\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta_0}\right)^2 \frac{d\delta}{4\Omega}}} \simeq 3{,}76\,\Omega \tag{3.16}$$

On obtient alors, en utilisant l'équation (3.6), pour le bruit de projection quantique (le calcul numérique est effectué en supposant que la condition π est vérifiée) :

$$n\ \sigma_{\delta_0}^2\big|_{Quant} = \frac{\int_{-2\Omega}^{2\Omega} \left(\sigma_{\mathcal{P}}(\delta)|_{Quant}\right)^2 d\delta}{\int_{-2\Omega}^{2\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta_0}\right)^2 d\delta} \tag{3.17}$$

$$\simeq 1{,}32 \frac{\Omega^2}{N_{sel}} \tag{3.18}$$

Pour le bruit de détection des photodiodes (équation 3.9), nous obtenons alors, toujours en supposant la condition π vérifiée :

$$n\ \sigma_{\delta_0}^2\big|_{PD} = \frac{\int_{-2\Omega}^{2\Omega} \left(\sigma_{\mathcal{P}}(\delta)|_{PD}\right)^2 d\delta}{\int_{-2\Omega}^{2\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta_0}\right)^2 d\delta} \tag{3.19}$$

$$\simeq 8{,}73\,\Omega^2 \left(\frac{\Delta N|_{PD}}{N_{sel}}\right)^2 \tag{3.20}$$

Il ne faut pas oublier que le nombre total N_{sel} d'atomes sélectionnés est proportionnel à Ω (cf. équation 2.52). Nous obtenons donc :

$$n\ \sigma_{\delta_0}^2\big|_{Quant} \simeq 0{,}62\ \Omega \frac{2k}{\eta_0} \tag{3.21}$$

$$n\ \sigma_{\delta_0}^2\big|_{PD} \simeq 1{,}96 \frac{2k}{\eta_0}\ \Delta N|_{PD}^2 \tag{3.22}$$

Il est intéressant de remarquer que le bruit de projection quantique peut être rendu négligeable par rapport au bruit des photodiodes, à condition de ne sélectionner que très peu d'atomes (Ω petit). Dans ce cas, ce sont les photodiodes qui vont déterminer la sensibilité de notre senseur inertiel. Il est intéressant d'étudier plus en détail quelles sont précisément les limites des photodiodes.

3.1.3 Détermination du bruit des photodiodes

Dans cette partie je vais décrire en détail comment calculer le bruit des photodiodes, en fonction des caractéristiques de notre système de détection.

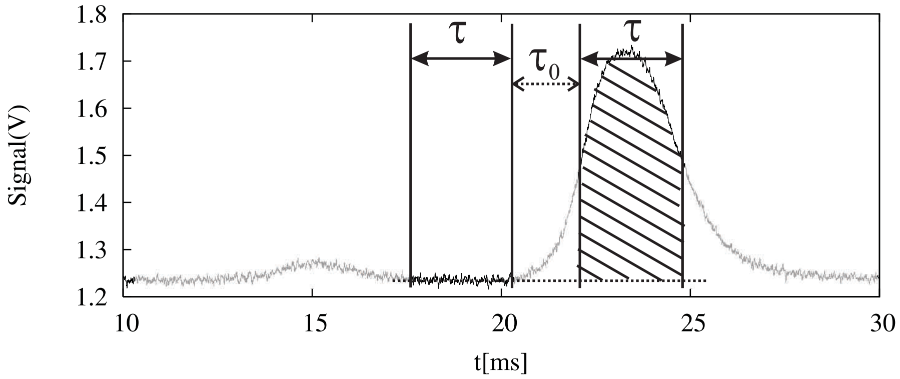


FIG. 3.2 – Schéma de l'analyse des temps de vols. On prend la moyenne pendant un temps τ, au sommet et à la base du signal de la photodiode. Le nombre d'atomes détectés est pris comme étant proportionnel à la différence des deux moyennes.

Dans notre système, nous mesurons le temps de vol en enregistrant le signal sur la carte d'acquisition de l'ordinateur. Ensuite, à partir de ce signal nous calculons une valeur qui correspond à l'intensité du signal de fluorescence. Cette valeur est calculée en considérant la différence entre la moyenne du signal de la photodiode pris sur la même durée τ, l'un au sommet, l'autre à la base (figure 3.2). L'objectif de cette partie est de calculer quel est le bruit sur le signal de fluorescence enregistré et ensuite comment est ce que ce bruit se traduit par un bruit sur le nombre d'atomes.

Dispositif de détection

Le détecteur utilisé pour capter la fluorescence des atomes est une photodiode de grande surface (10×10 mm^2). Nous utilisons une Hamamatsu S1337-1010BR, dont les caractéristiques sont présentées table 3.1.3. Les signaux que nous détectons sont de l'ordre de 100 pA et nous utilisons donc une résistance de charge $R_L = 1$ GΩ. Pour ne pas couper trop bas en fréquence, il faut un amplificateur avec un produit gain bande passante (GBP) très important. Nous utilisons pour cela un OPA637 (Burr-Brown). Cet amplificateur opérationnel, de type FET, possède un produit gain bande-passante de 80 MHz, tout en ayant un courant de fuite très faible (de l'ordre de 5 pA). Il convient donc parfaitement pour être utilisé avec une résitance de charge de 1 GΩ dans un amplificateur transimpédance (voir figure 3.3).

Le montage de l'amplificateur tel que présenté figure 3.3 présente une fréquence de coupure à 3dB donnée par [38, 39] :

$$f_{3dB\ max}[Hz] = \sqrt{\frac{\mathrm{GBP}}{2\pi R_L C_J}} \tag{3.23}$$

Cette fréquence correspond à la fréquence d'oscillation du circuit formé par l'amplificateur, la résistance de charge et le capacité de jonction de la photodiode. Dans notre circuit, elle vaut

Sensibilité	S	0,5 A/W
Résistance de shunt	R_s	0,2 GΩ
Capacité de jonction	C_J	1,1 nF
Courant d'obscurité	I_D	200 pA
Bruit équivalent	NEP	$1{,}5 \times 10^{-14}$ W/$\sqrt{\text{Hz}}$

TAB. 3.1 – Caractéristiques de la photodiode Hamamatsu S1337-1010BR.

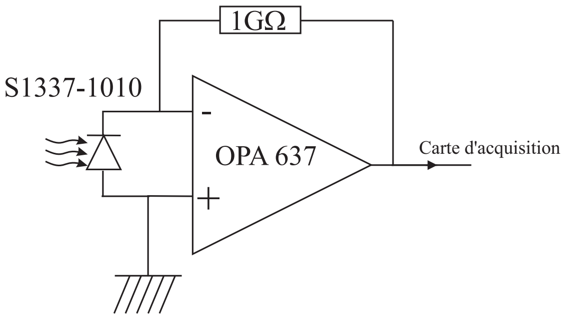


FIG. 3.3 – Schéma de l'amplificateur transimpédance utilisé pour la détection des atomes par temps de vol.

$f_{3dB\ max} = 3{,}4$ kHz. Normalement, dans les circuits d'amplification de photodiode, on utilise une capacité en parallèle à la résistance de charge, afin de couper le gain de l'amplificateur à cette fréquence, et ainsi supprimer les oscillations. Dans notre cas, compte tenu de la forte résistance de charge, il n'est pas nécessaire de la mettre : les capacités parasites entre les pistes du circuit suffisent à réduire le gain à cette fréquence. Sur la figure 3.4, nous avons mesuré la réponse du circuit et nous montrons que le circuit présente bien une fréquence de coupure vers environ $f_c \sim 3$ kHz.

Bruit des photodiodes

Il existe plusieurs sources de bruits sur notre montage. Le premier bruit provient de la photodiode elle même. Ce bruit correspond essentiellement au bruit de grenaille du courant de polarisation de la photodiode et au bruit de Johnson de la résistance de shunt de la photodiode. La somme de ces deux bruits est donné sous la forme de puissance de bruit équivalente (*noise equivalent power*, NEP). Elle vaut pour notre photodiode $1{,}5 \times 10^{-14}$ W/$\sqrt{\text{Hz}}$. On peut l'exprimer sous forme de bruit de courant. Il vaut alors $7{,}5 \times 10^{-15}$ A/$\sqrt{\text{Hz}}$

Un autre bruit provient du bruit de Johnson de la résistance de charge. Ce bruit, en courant, vaut

$$I_N \left[\frac{A}{\sqrt{Hz}}\right] = \sqrt{\frac{4k_BT}{R_L}} \tag{3.24}$$

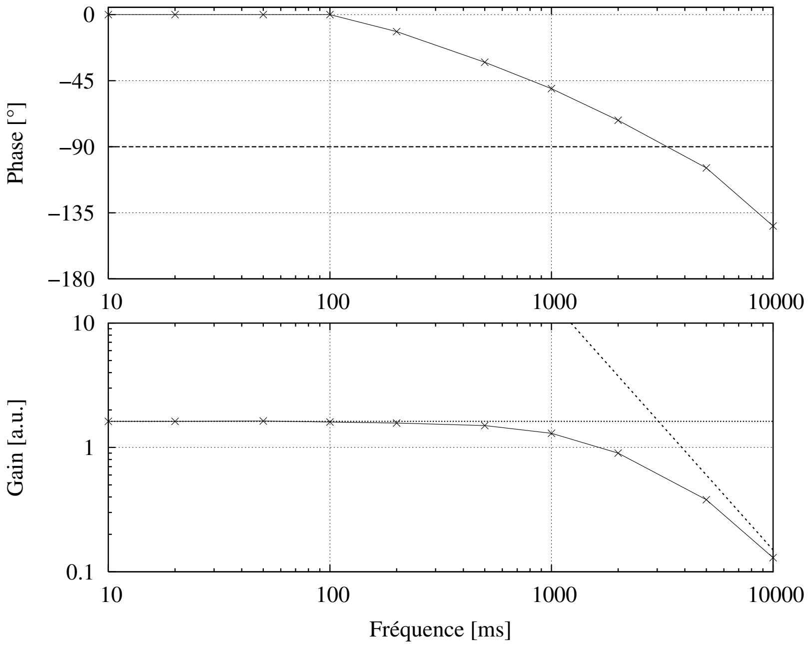


FIG. 3.4 – Réponse de la photodiode de détection. En haut, le déphasage et en bas le gain. Ces courbes ont été obtenues en illuminant les photodiodes avec un laser modulé en intensité à l'aide d'un modulateur acousto-optique. La fréquence de coupure du circuit se situe vers 3 kHz.

où k_B est la constante de Boltzmann. Le bruit que l'on calcule pour $R_L = 1$ GΩ est d'environ 4×10^{-15} A/$\sqrt{\text{Hz}}$.

Le principal bruit dans notre expérience provient d'un bruit de fond du laser de détection qui est diffusé. L'amplitude de l'intensité détectée est d'environ 1 V, c'est-à-dire 1 nA de courant sur la photodiode. Si on suppose que le bruit d'intensité du laser est à la limite quantique standard[1], alors le bruit qui en résulte vaut

$$I_L \left[\frac{A}{\sqrt{Hz}} \right] = \sqrt{2eI} \tag{3.25}$$

où e est la charge (prise positive) de l'électron. Dans notre situation, ce bruit vaut environ $I_L = 1{,}8 \times 10^{-14}$ A/$\sqrt{\text{Hz}}$. Il est donc supérieur aux autres bruits[2].

A partir de la densité spectrale de bruit en courant ($S_I(f)$), il est possible de remonter à la densité spectrale de bruit en tension à partir du gain de la photodiode ($S_U(f)$) :

$$S_U(f) = \frac{R_L^2 S_I(f)}{(1 + (f/f_c)^2)^2} \tag{3.26}$$

où R_L est la résistance de charge et f_c la fréquence de coupure de l'amplification.

Bruit sur le nombre d'atomes

Le programme informatique de traitement des temps de vol calcule le nombre N d'atomes à partir du signal $U(t)$ du temps vol de la façon suivante :

$$N = \frac{1}{\tau} \left(\int_{\tau+\tau_0}^{2\tau+\tau_0} U(t)dt - \int_0^{\tau} U(t)dt \right) \tag{3.27}$$

Il est possible de calculer les fluctuations du nombre N en fonction de la densité spectrale de bruit de $U(t)$. Le calcul, qui est en tout point analogue à ceux que l'on présentera en détail dans la partie suivante (section 3.3.4, page 67) donne

$$\Delta N|_{PD}^2 = \int_0^{\infty} S_U(f) h^2(f) df \tag{3.28}$$

où la fonction de transfert $h(f)$ vaut

$$h(f) = 2 \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \sin\left(\pi f (\tau + \tau_0)\right) \tag{3.29}$$

En prenant le bruit des photodiodes décrit dans la partie précédente, nous obtenons :

$$\Delta N|_{PD} \simeq 0{,}45 \text{ mV} \tag{3.30}$$

---

[1] Nous avons rajouté un asservissement en intensité en modulant l'intensité d'un modulateur acousto-optique . Nous sommes donc en fait probablement au-dessus de cette limite.

[2] On peut facilement remarquer à partir des équation 3.24 et 3.25 que si $R_L I > 2k_B T/e$, alors le bruit de Johnson de la résistance de charge est négligeable. Numériquement, cela donne $R_L I > 50$ mV.

Mesure directe du bruit

Il est possible de mesurer directement les fluctuations de N dues aux bruits des photodiodes. Pour cela, il suffit de faire un enregistrement sans atomes, ou de faire l'analyse du temps de vol en centrant la fenêtre de détection là où il n'y a pas d'atomes. Nous avons fait cette expérience. On obtient dans ce cas

$$\Delta N|_{PD} \simeq 1{,}4 \text{ mV} \tag{3.31}$$

Cette dernière mesure laisse penser que les sources de bruit considérées jusqu'à présent pour les photodiodes ne sont pas les seules. Il est probable qu'une autre source de bruit électronique que nous n'avons pas identifiée soit présente. Cette source de bruit n'est sans doute pas aussi fondamentale que celles que l'on a décrites jusqu'ici, ce qui peut laisser penser qu'elle est plus facile à réduire.

3.1.4 Conclusion sur le bruit de détection

Nous pouvons reprendre en détail le spectre de vitesse de la figure 2.16. Le signal mesuré est d'environ 200 mV. L'efficacité de détection que nous avions calculée est de 20 μV.at^{-1}. Nous détectons donc environ 10000 atomes.

Les valeurs que l'on obtient, *a priori*, pour le bruit de projection quantique et des photodiodes sont respectivement (équation 3.7 et 3.10) :

$$\sigma_{\mathcal{P}}|_{Quant} \simeq 0{,}27\% \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathcal{P}}|_{PD} \simeq 0{,}42\% \tag{3.32}$$

Cependant, si on calcule à partir des résiduels de l'ajustement du spectre (figure 2.16), la valeur moyenne de $\sigma_{\mathcal{P}}$, nous obtenons :

$$\sigma_{\mathcal{P}}|_{exp} \sim 1{,}6\% \tag{3.33}$$

Il y a donc ici un écart d'un facteur 3 entre le calcul fait *a priori* et la mesure expérimentale. Dans les parties qui suivent, nous étudierons d'autres sources de bruit qui pourront expliquer cet écart.

Il existe des limites techniques plus ou moins fondamentales qui déterminent l'incertitude avec laquelle on est capable de mesurer la vitesse des atomes. Ces limites portent d'une part sur la densité initiale des atomes dans l'espace des vitesses et d'autre part sur l'efficacité du processus de détection (bruit sur les photodiodes et angle solide de détection). Nous allons décrire dans la suite un protocole expérimental différent de celui de sélection - mesure avec des impulsion de Rabi π. Grâce à ce protocole, il est possible de passer outre ces limites et de bénéficier d'un système ayant une sensibilité beaucoup plus grande.

3.2 La méthode de Ramsey

Dans cette partie, je vais décrire un autre type de senseur inertiel, basé sur l'interférométrie de Ramsey. A l'aide de ce dispositif, nous avons pu mettre en évidence une autre limite de notre senseur inertiel qui est le bruit de phase du faisceau laser et le bruit de vibration.

3.2.1 Principe de l'interféromètre de Ramsey

L'idée de base de l'interféromètre de Ramsey est de remplacer les impulsions π de notre senseur inertiel, par deux impulsions $\pi/2$ séparées par un délai T_{Ramsey}. Ainsi, on remplace la sélection (et la mesure) d'un pic étroit par la sélection (et la mesure) de plusieurs pics étroits équidistants (figure de Ramsey). On va donc pouvoir augmenter le nombre d'atomes, tout en conservant la même résolution. Si on appelle τ la durée des impulsions Ramsey, alors le nombre d'atomes sélectionnés sera proportionnel à $1/\tau$, par contre la distance entre franges est proportionnel à $1/T_{\text{Ramsey}}$. Elle peut donc être diminuée sans perte d'atomes. On peut donc avec cette méthode avoir à la fois plus d'atomes et une meilleure résolution.

Ceci différencie l'expérience de Ramsey de l'expérience de Rabi, où lorsque l'on choisit d'augmenter la résolution en sélectionnant un classe d'atome plus étroite, alors on sélectionne moins d'atomes, et au final, on ne gagne pas sur la précision de la mesure.

Franges de Ramsey avec des faisceaux copropageants

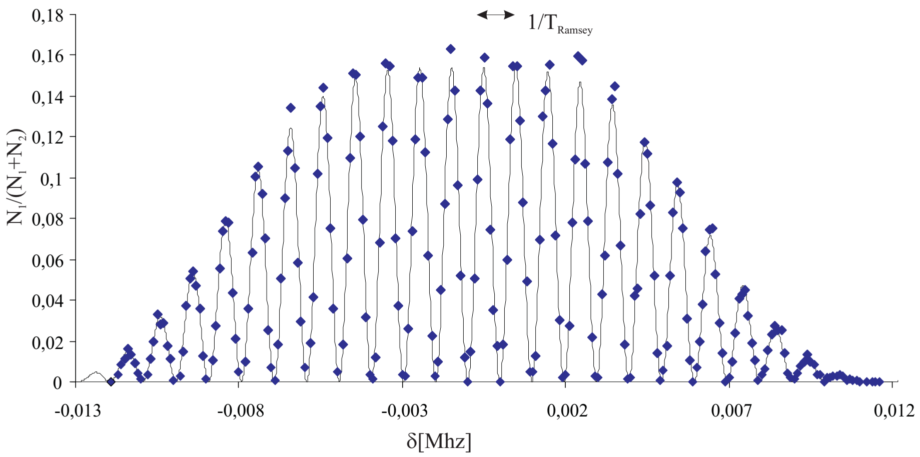


FIG. 3.5 – Franges de Ramsey observées avec des impulsions Raman copropageantes ; $\tau = 0{,}3$ ms et $T_{\text{Ramsey}} = 2{,}1$ ms.

Nous allons tout d'abord étudier la situation copropageante. Dans cette expérience, nous mesurons le nombre d'atomes transférés après deux impulsions Raman $\pi/2$, en fonction du désaccord δ de la résonance de la transition à deux photons. La figure 3.5 montre le résultat que l'on obtient. La largeur globale du spectre est proportionnelle, comme dans le cas d'une transition Raman π, à l'inverse de la durée des impulsions Raman. Les franges ont une largeur proportionnelle à $1/T_{\mathrm{Ramsey}}$.

La probabilité d'effectuer la transition est donnée par la formule de Ramsey [40] :

$$\begin{aligned} P^{Ramsey}(\delta) = 4&\frac{\Omega^2}{\delta^2+\Omega^2}\sin^2\left(\sqrt{\delta^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right) \\ &\left[\cos\left(\sqrt{\delta^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(\delta\frac{T_{\mathrm{Ramsey}}}{2}\right)-\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\Omega^2}}\sin\left(\sqrt{\delta^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right)\sin\left(\delta\frac{T_{\mathrm{Ramsey}}}{2}\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

On peut noter une différence entre la figure de Ramsey réalisée avec notre dispositif (figure 3.5) et les spectres de Ramsey micro-ondes réalisés dans une fontaine ou un jet atomique. Dans ces expériences, la durée entre les impulsions $\pi/2$ est déterminée par la vitesse de l'atome. Tous les atomes n'ayant pas la même vitesse, il y a une réduction du contraste pour $\delta \neq 0$. Nous n'observons pas de tel phénomène dans notre expérience.

Nous pouvons remarquer que la figure 3.5 n'est pas symétrique comme on pourrait le penser à partir de l'équation (3.34). Ceci est dû aux déplacements lumineux. Dans le cas d'une simple impulsion de Rabi π, les déplacements lumineux ($\delta_{\mathrm{d.l.}}$) se traduisent par une translation globale du spectre (on remplace δ par $\delta-\delta_{\mathrm{d.l.}}$). Ici il faut distinguer deux situations : l'évolution pendant les deux impulsions $\pi/2$, où les déplacements lumineux interviennent, et l'évolution dans le noir, entre les deux impulsions. On peut constater alors que grossièrement l'enveloppe est translatée, mais pas les franges. Ceci explique donc l'asymétrie du spectre.

Si on appelle $\delta' = \delta - \delta_{\mathrm{d.l.}}$ le désaccord en présence de déplacements lumineux, on obtient que

$$\begin{aligned} P^{Ramsey}(\delta) = 4&\frac{\Omega^2}{\delta'^2+\Omega^2}\sin^2\left(\sqrt{\delta'^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right) \\ &\left[\cos\left(\sqrt{\delta'^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(\delta\frac{T_{\mathrm{Ramsey}}}{2}\right)-\frac{\delta'}{\sqrt{\delta'^2+\Omega^2}}\sin\left(\sqrt{\delta'^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right)\sin\left(\delta\frac{T_{\mathrm{Ramsey}}}{2}\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

La partie entre crochets peut se ramener à un terme de la forme

$$A\cos\left(\frac{\delta T_{\mathrm{Ramsey}}}{2}+\theta\right) \tag{3.36}$$

où A est une amplitude qui dépend de δ comme $\delta\tau$, c'est-à-dire lentement à l'échelle des franges, et où θ est donné par

$$\tan\theta = \frac{\delta'}{\sqrt{\Omega^2+\delta'^2}}\tan\left(\sqrt{\delta'^2+\Omega^2}\frac{\tau}{2}\right) \tag{3.37}$$

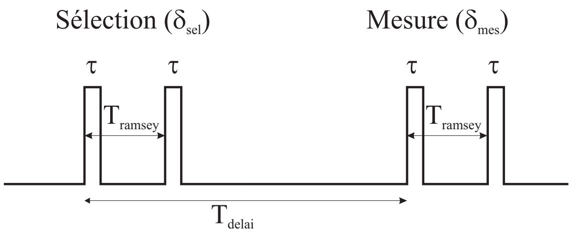


FIG. 3.6 – Délais entre les différentes impulsions Ramsey pour la réalisation du senseur inertiel.

θ dépend lui aussi lentement de δ.

La position de la frange centrale est donc donnée par

$$\frac{\delta T_{\text{Ramsey}}}{2} = -\theta \tag{3.38}$$

La frange centrale est décalée du centre par :

$$\delta_{\text{d.l.}}^{\text{Ramsey}} = \frac{2}{T_{\text{Ramsey}}} \frac{\delta_{\text{d.l.}}}{\Omega} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{T_{\text{Ramsey}}} \frac{\omega_{\text{SHF}}}{\Delta} \tag{3.39}$$

où nous avons utilisé l'équation (2.27), page 22, pour exprimer $\delta_{\text{d.l.}}$ en fonction des paramètres Ω, ω_{SHF} et du désaccord à un photon Δ.

A résolution égale ($T_{\text{Raman}} = T_{\text{Ramsey}}$), l'expérience de franges de Ramsey réalisée avec un Δ plus faible présente donc un déplacement lumineux plus important. A nombre d'atomes identique (même Δ), l'expérience de Ramsey présente un déplacement lumineux d'autant plus faible que T_{Ramsey} augmente.

Franges de Ramsey avec des faisceaux contrapropageants

Dans le cas ou l'on réalise une transition Raman contrapropageante, alors la distribution de vitesse des atomes sélectionnés va avoir la même allure que la figure en copropageant (figure 3.5) :

$$\eta_{|b\rangle}^{sel}(v + v_r) = \eta^0(v - v_r) P_{sel}^{Ramsey}(\delta - 2kv) \tag{3.40}$$

Notre senseur inertiel est basé sur une séquence de quatre impulsions $\pi/2$. On effectue deux impulsions $\pi/2$ à une fréquence δ_{sel} donnée, puis on pousse les atomes non sélectionnés, et on effectue une autre paire d'impulsions $\pi/2$ à une autre fréquence δ_{mes}, avec le même délai que lors de la sélection (voir figure 3.6).

Tout comme dans le cas Rabi π, on regarde la proportion d'atomes transférés par la seconde paire d'impulsions $\pi/2$. Cette proportion est la convolution de la distribution de vitesse par un spectre de Ramsey. Elle est donnée par la fonction $\mathcal{P}^{Ramsey}(\delta_{sel} - \delta_{mes} - 2k\Delta v)$ égale (dans le cas où on fait l'approximation de distribution initiale constante) à

$$\mathcal{P}^{Ramsey}(\delta) = \frac{\int P^{Ramsey}(\delta + z) P^{Ramsey}(z) dz}{\int P^{Ramsey}(z) dz} \tag{3.41}$$

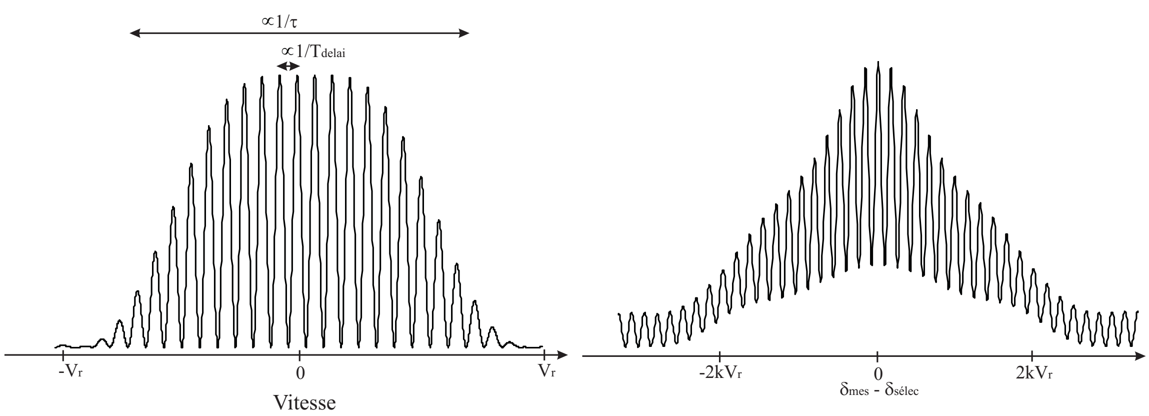


FIG. 3.7 – A gauche, distribution en vitesse après la sélection ; il s'agit d'un spectre de Ramsey. A droite, proportion d'atomes effectuant la transition, en fonction de la différence de fréquence entre la sélection et la mesure.

Nous avons représenté le calcul numérique de cette probabilité qui, comme dans le cas Rabi, n'a pas d'expression analytique simple.

Comme on peut s'y attendre, la fonction $\mathcal{P}^{Ramsey}(\delta)$ présente une envelope globale ayant une largeur proportionnelle à la largeur de la sélection Ramsey (et donc à $1/\tau$), et des franges distantes de $1/T_{\text{Ramsey}}$. C'est ce que nous pouvons observer sur la figure 3.8, où les paramètres sont $\tau \sim 0{,}3$ ms et $T_{\text{Ramsey}} \sim 2$ ms.

Pour réaliser une mesure de la variation de vitesse entre la sélection et la mesure, il suffit de regarder la frange centrale. Dans le cas où $\delta \ll \Omega$, on peut utiliser la formule simplifiée :

$$P^{Ramsey}(\delta) = \frac{4\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2\left(\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}\tau\right) \cos^2\left(\delta \frac{T_{\text{Ramsey}}}{2}\right) \tag{3.42}$$

On obtient pour les franges centrales, à la limite $\delta, 1/T_{\text{Ramsey}} \ll \Omega$;

$$\mathcal{P}^{Ramsey} \sim \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} + \cos^2\left(\delta \frac{T_{\text{Ramsey}}}{2}\right)\right\} \tag{3.43}$$

En balayant la fréquence de la deuxième paire d'impulsions $\pi/2$, on observe donc des franges sinusoïdales. La position de la frange centrale nous permet de remonter à la variation de vitesse Δv par la même formule que dans le cas Rabi :

$$\Delta v = \frac{\delta_0}{2k} \tag{3.44}$$

où δ_0 est la position du centre de la frange centrale.

Comme nous l'avons déjà souligné, l'intérêt principal de l'utilisation de l'interferomètre de Ramsey, est qu'il permet, tout en gardant le même nombre d'atomes, d'augmenter la résolution sur la mesure.

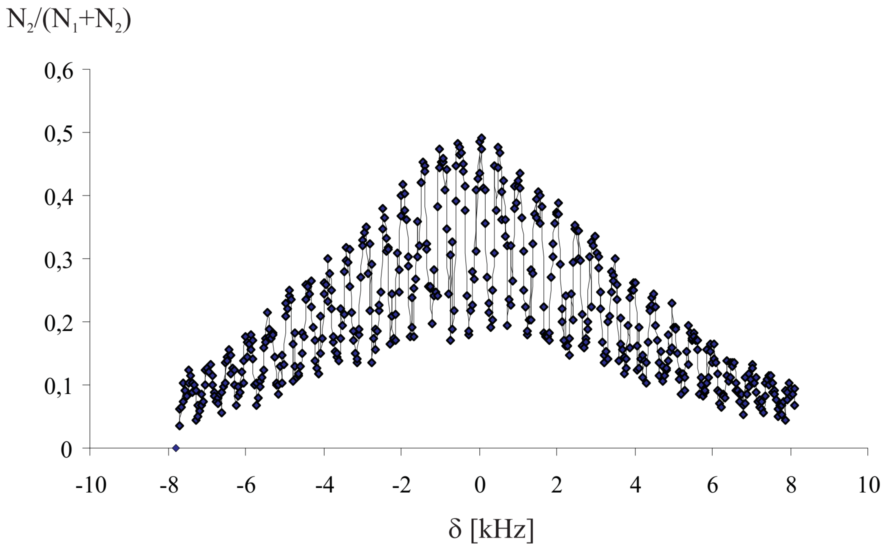


FIG. 3.8 – Proportion d'atomes transférés par la seconde paire d'impulsions $\pi/2$.

En effet, lorsque l'on augmente le délai T_{Ramsey} entre les paires d'impulsions $\pi/2$, le nombre d'atomes sélectionnés, proportionnel à $1/\tau$, reste constant. Le bruit au niveau de la détection $\sigma_{\mathcal{P}}$ ne varie donc pas. Par contre, lorsque l'on ajuste la frange centrale du spectre par une sinusoïde, l'incertitude sur le centre de la sinusoïde est proportionnel à la largeur de la frange divisée par le signal à bruit. Lorsque l'on augmente T_{Ramsey}, on va donc réduire l'incertitude sur δ_0 comme $1/T_{\mathrm{Ramsey}}$.

3.2.2 Résultats expérimentaux

Nous avons représenté figure 3.9 trois franges réalisées pour différentes valeurs de T_{Ramsey}. On peut voir que le bruit augmente considérablement lorsque l'on augmente T_{Ramsey}. Ceci est la signature d'un bruit autre que le bruit de détection considéré jusqu'à présent. Il s'agit du bruit de vibration. Entre la sélection et la mesure, les atomes ont une vitesse qui va fluctuer dans le référentiel rattaché au support de l'expérience. Ce sont ces fluctuations que l'on voit. Elles apparaissent beaucoup plus nettement dans le cas où T_{Ramsey} est important, car dans ce cas le dispositif est beaucoup plus sensible à la vitesse et donc aux fluctuations de vitesse.

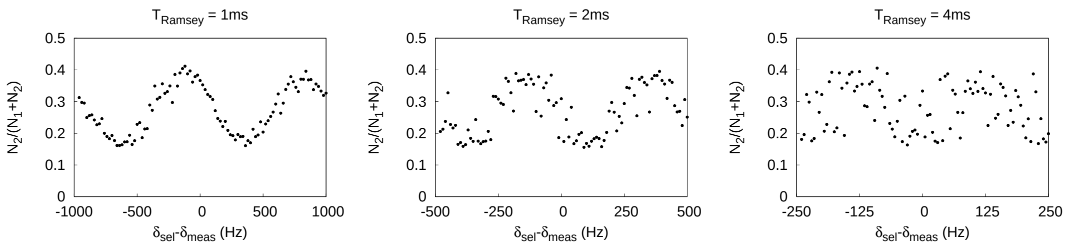


FIG. 3.9 – Franges de Ramsey réalisées pour différentes valeurs de T_{Ramsey} (noter que l'échelle horizontale change afin de prendre toujours le même nombre de franges). On voit très nettement que le signal à bruit se dégrade lorsque l'on augmente T_{Ramsey}. Ceci est une signature du bruit de phase/vibration.

3.3 Le bruit de vibration : limite du senseur inertiel

3.3.1 Origine du bruit de phase et de vibration

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, le bruit que l'on voit sur notre signal ne provient pas uniquement du bruit sur la détection, mais aussi du bruit de phase sur les lasers et du bruit de vibration.

Le couplage Raman entre les états $|a,p - \hbar k_2\rangle$ et $|b,p + \hbar k_1\rangle$, via l'état virtuel $|e,p\rangle$, peut être décrit par l'opérateur

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_1 V_2^\dagger}{\Delta} \tag{3.45}$$

où Δ désigne le désaccord à un photon ($\Delta = \omega_1 - \omega_{ae} \approx \omega_2 - \omega_{be}$) et les opérateur V_i désignent les couplages dipolaires électriques de chaque faisceau Raman :

$$V_i(\hat{x},t) = \overrightarrow{d}.\overrightarrow{E_i}(\hat{x},t)$$

Dans ce modèle nous ne tenons compte que des variations de phase des lasers, c'est-à-dire que nous supposons que l'amplitude et la polarisation du champ électrique sont constante :

$$\vec{E_i}(x,t) = \frac{1}{2}\vec{E_i}e^{\pm ik_ix - \omega_it + \phi_i(t)} + c.c. \tag{3.46}$$

Lorsque l'on décrit le couplage entre les états $|a,p - \hbar k_2\rangle$ et $|b,p + \hbar k_1\rangle$ par l'opérateur V_{eff}, on obtient la constante de couplage effective :

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{eff}}(t) &= 2\langle a,p - \hbar k_2 \,|V_{\text{eff}}(\hat{x},t)|\, b, p + \hbar k_1\rangle & (3.47)\\ &= \Omega_0 e^{i\phi(t)} & (3.48) \end{aligned}$$

où $\phi(t) = \phi_1 - \phi_2$ est la différence de phase entre les deux faisceaux et où Ω_0 décrit l'amplitude du couplage et vaut

$$\Omega_0 = 2 \left| \frac{\left\langle a \left| \vec{d}.\vec{E}_1 \right| e \right\rangle \left\langle e \left| \vec{d}.\vec{E}_2 \right| b \right\rangle}{\hbar \Delta} \right| \tag{3.49}$$

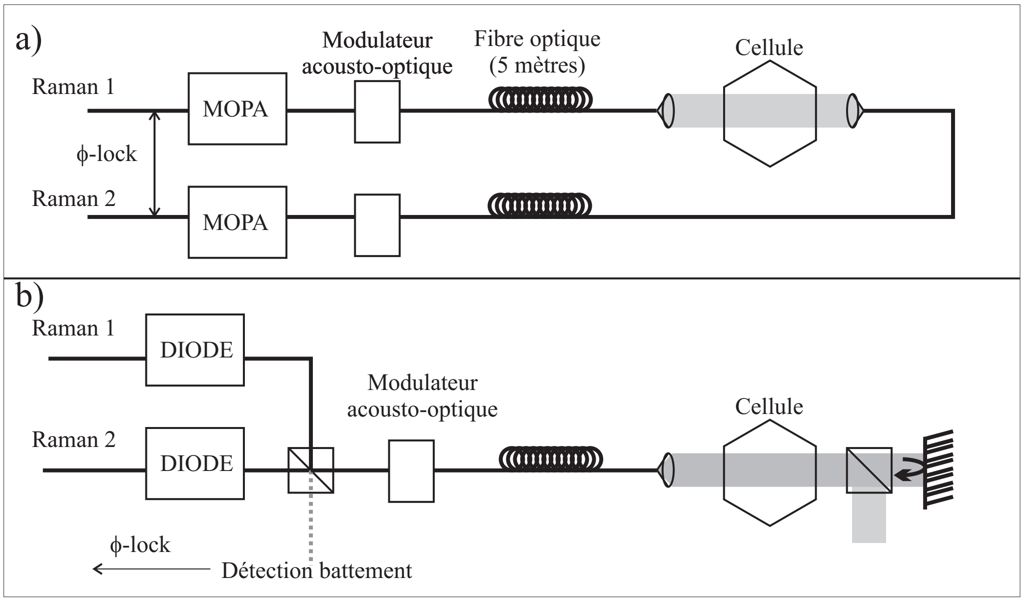


FIG. 3.10 – Deux configurations utilisées pour les faisceaux Raman. Dans la première (a), les faisceaux sont acheminés par deux fibres à maintien de polarisation. Dans cette configuration, nous utilisions deux MOPA pour amplifier le signal après l'asservissement en phase. Dans la nouvelle configuration (b), les faisceaux sont acheminés pas une seule fibre. De plus, le battement est détecté après amplification des lasers et recombinaison sur un cube polariseur. Les deux faisceaux passent par le même modulateur acousto-optique.

Le choix de la phase ϕ_i correspond à la fois au choix d'une origine des temps et de l'espace. Pour calculer la différence de phase entre les deux faisceaux il faut donc faire attention de prendre la même référence. Considérons le cas de deux faisceaux Raman contrapropageants créés à partir de deux faisceaux copropageants dont l'un est rétroréfléchi (figure 3.10b). Le déphasage temporel se définit simplement comme étant la différence de phase entre les deux faisceaux à la sortie de la fibre. Considérons un point fixe dans le référentiel du laboratoire. On obtient alors un déphasage pour le premier faisceau $\phi_1^x(t) = k_1 x_{fib}(t)$ où x_{fib} désigne la position de la sortie de la fibre par rapport au point de référence. Pour le second faisceau, il convient de tenir compte de la position $x_M(t)$ du miroir de rétroréflection par rapport à ce même point de référence. On obtient alors un déphasage $\phi_2^x(t) = k_2 x_{fib}(t) + 2k_2 x_M(t)$. On obtient donc trois termes dans l'expression de ϕ :

$$\phi(t) = \left(\phi_1^t(t) - \phi_2^t(t)\right) + (k_1 - k_2)x_{fib}(t) - 2k_2 x_M(t) \tag{3.50}$$

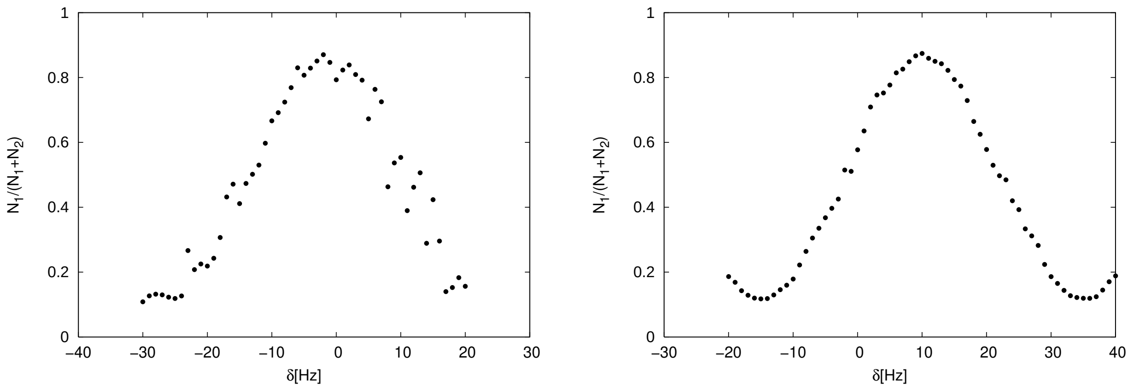


FIG. 3.11 – Comparaison du bruit de phase à l'aide de franges de Ramsey copropageantes. A gauche : ancien montage avec des amplificateurs MOPA situés après l'asservissement en phase. A droite : nouveau montage avec des diodes laser situées avant l'asservissement en phase (voir figure 3.10b). Dans les deux cas, les faisceaux sont recombinés dans une seule fibre.

Le premier correspond au bruit de phase entre les deux faisceaux accumulé sur le trajet (essentiellement dû à l'asservissement en phase et la fibre optique). Le second correspond au bruit de vibration du support de la fibre optique. Le troisième au bruit de vibration du miroir. Les deux premiers bruits sont aussi présents lorsque l'on effectue des transitions Raman copropageantes. En particulier le bruit de vibration de la fibre optique est totalement négligeable devant le bruit de vibration du miroir[3]. Nous avons aussi effectué des mesures du bruit de phase dans la cas de transition copropageante. Nous verrons que ce bruit est négligeable devant le bruit de vibration du miroir.

Un autre schéma expérimental (figure 3.10a) était utilisé précédemment dans la configuration horizontale de l'expérience[4] : les deux faisceaux Raman étaient acheminés par deux fibres différentes. Si on suppose que les deux fibres, attachées au même support, ont le même mouvement $x_{fib}(t)$, alors on obtient une expression de la phase ϕ :

$$\phi = \left(\phi_1^t(t) - \phi_2^t(t)\right) + (k_1 + k_2)x_{fib}(t) \tag{3.51}$$

où dans ce cas, $\phi_1^t(t)$ et $\phi_2^t(t)$ sont les phases à la sortie des deux fibres. Le terme $\phi_1^t(t) - \phi_2^t(t)$ présente donc des fluctuations beaucoup plus importantes que dans le cas où les deux faisceaux sont acheminés par la même fibre.

—Bruit de phase des amplificateurs MOPA— Nous avons pu comparer les deux situations expérimentales présentées figure 3.10 à l'aide de franges de Ramsey copropageantes. On peut voir sur la figure 3.11 que le bruit est nettement plus important avec les deux

[3]Pour du ^{87}Rb , on calcule $|k_1 - k_2|/(2k_2) \sim 10^{-5}$

[4]Thèse de Rémy Battesti [31]

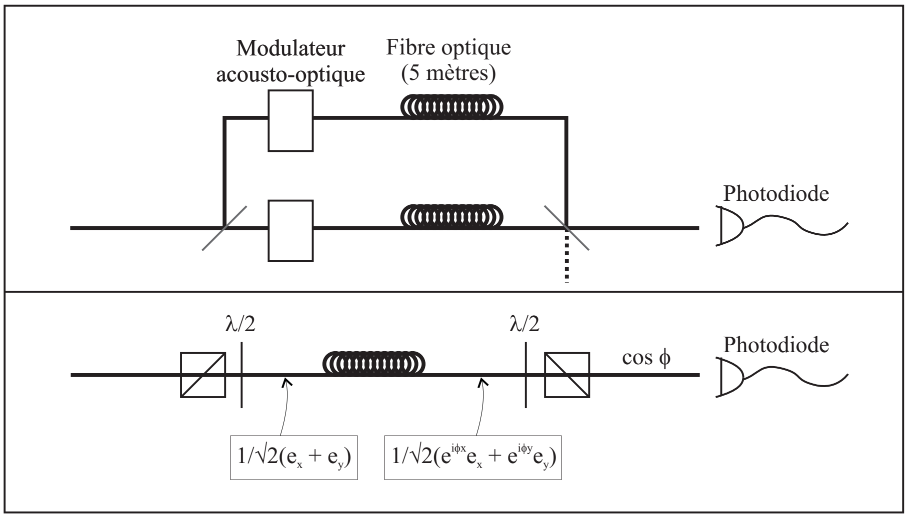


FIG. 3.12 – Dispositif permettant de mesurer le bruit de phase des fibres. En haut, mesure de la différence de bruit entre deux fibres ; en bas, bruit relatif entre les deux polarisations dans la même fibre.

amplificateurs MOPA et l'asservissement en phase situé avant les amplificateurs. Dans le nouveau dispositif qui présente moins de bruit, les deux faisceaux lasers sont recombinés sur un cube polariseur : une partie va servir à faire le battement pour l'asservissement en phase, l'autre sera utilisée pour effectuer les transitions. Dans cette configuration, le trajet des deux faisceaux laser est le même entre l'asservissement et les atomes, limitant ainsi le bruit de phase.

3.3.2 Bruit de phase des fibres optiques

Une source potentielle de bruit sur notre expérience est le bruit de phase des fibres optiques. Dans les premières expériences menées, les faisceaux Raman étaient acheminés par deux fibres différentes jusqu'aux atomes du piège. Le bruit de phase correspond donc à la somme des bruit de phase des deux fibres. Pour mesurer le bruit de phase de la fibre, nous pouvons réaliser un interféromètre avec dans chaque bras une fibre. Le signal de sortie nous renseignera sur les variations de phase des fibres (figure 3.12).

Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.13, ce dispositif présente un bruit de phase très important, puisque la phase parcourt 2π pendant près de 10 ms.

Nous avons ensuite utilisé un autre dispositif, où les faisceaux Raman sont acheminés par la même fibre, en utilisant deux polarisations différentes. Les fibres que nous utilisons sont des fibres à maintien de polarisation : ces fibres possèdent deux axes (que l'on va appeler x et y). Lorsque l'on rentre linéairement sur un des deux axes, la polarisation ressort linéaire sur le même axe. Par contre, l'indice optique de la fibre est fort différent entre les deux axes.

Ainsi, si l'on rentre sur une polarisation linéaire quelconque, la polarisation de sortie n'est pas forcément linéaire : on a en quelque sorte un système analogue à une lame fortement biréfringente, dont on ne connaît pas l'ordre. De plus, la différence d'indice entre les deux axes peut varier rapidement avec la température. La polarisation de sortie va donc changer rapidement.

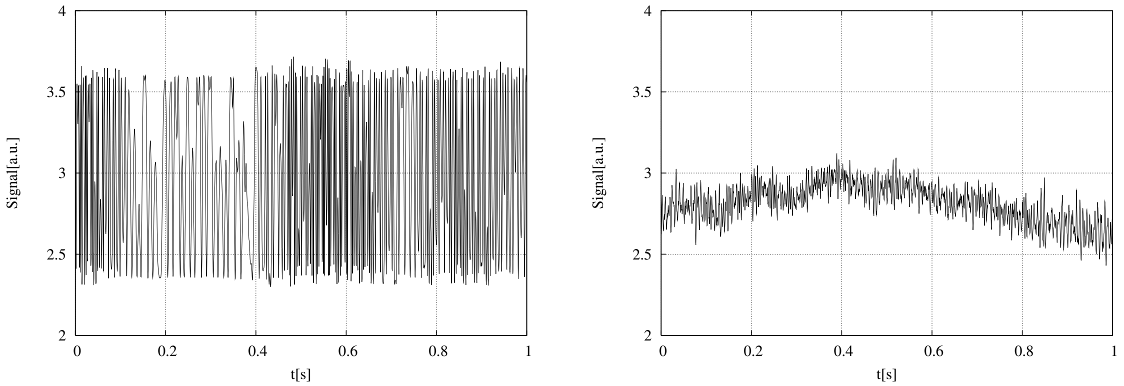


FIG. 3.13 – Comparaison du signal obtenu dans les deux configurations : à gauche, bruit de l'interféromètre à deux fibres ; à droite, lorsque l'on utilise une seule fibre.

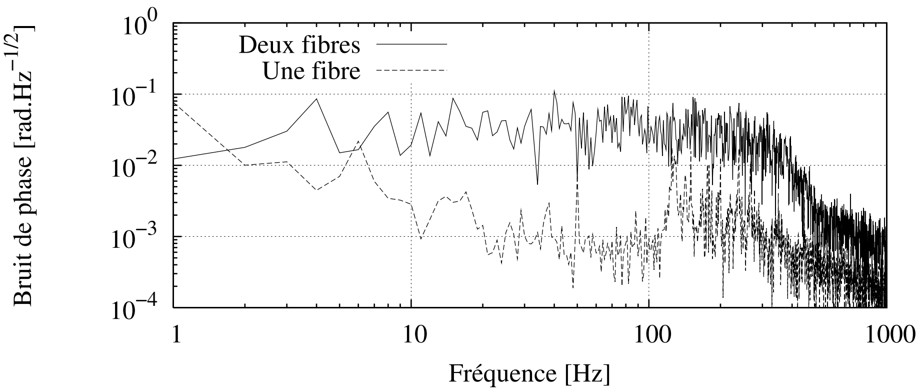


FIG. 3.14 – Puissance de bruit de phase pour les deux configurations : lorsque les faisceaux passent par deux fibres différentes, ou lorsqu'ils passent par la même fibre, avec deux polarisations différentes.

Pour aligner l'axe de la fibre avec la polarisation des lasers, nous mesurons la polarisation de sortie de la fibre. Lorsque celle-ci est linéaire et qu'elle ne fluctue pas, alors cela signifie que l'on est sur l'axe.

Pour mesurer le bruit de phase sur l'axe des deux fibres, nous réalisons l'interféromètre suivant : on prépare, à l'aide d'une lame $\lambda/2$, le faisceau dans une superposition des deux polarisations $(e_x + e_y)/\sqrt{2}$. Ensuite, on laisse se propager les deux polarisations dans la même fibre. Chaque chemin prend une phase différente, et à la sortie la polarisation vaut $(e^{i\phi_x}e_x + e^{\phi_y}e_y)/\sqrt{2}$. On les recombine à l'aide d'une lame $\lambda/2$ et d'un cube. L'intensité en sortie sera proportionnelle au carré de $\cos(\phi_x - \phi_y + \theta_{\lambda/2})$. On positionne ensuite la lame de telle sorte que l'intensité soit égale à la moitié de l'intensité maximale : c'est à cette position que l'on va être le plus sensible aux fluctuations.

Les résultats obtenus sont présentés figures 3.13 et 3.14. On peut se rendre compte que le bruit de phase est nettement plus important sur l'interféromètre à deux fibres que sur celui à une seule fibre [41]. Notons que nous avons utilisé la configuration à deux fibres pour le senseur inertiel en configuration horizontale. Nous somme passés à la configuration à une seule fibre avec rétroréflection au moment où on a remplacé le MOPA par les diodes lasers.

3.3.3 Analyse numérique du bruit

Bruit de phase et densité spectrale de bruit

Nous allons chercher à calculer dans la suite le bruit sur le nombre d'atomes dû au bruit de phase (et de vibration) $\phi(t)$. Avant d'effectuer ce calcul, nous allons essayer de comprendre comment on peut modéliser le bruit. En d'autres termes, on se pose la question : quelle est la "distribution" de probabilité pour la fonction $\phi(t)$? A partir de cette distribution, on pourra en effet trouver la distribution de probabilité de notre signal et en déduire l'incertitude sur le pointé du spectre.

Il existe plusieurs façons différentes d'analyser le bruit. Dans le cas d'un processus stationnaire, on définit la densité spectrale de bruit à la fréquence f comme

$$S_\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} < \phi(t+\tau)\phi(t) > e^{2i\pi f\tau} d\tau \tag{3.52}$$

Si l'on filtre le signal avec un filtre de bande passante très étroite Δf centré en f, alors la variance du signal filtré vaut

$$\Delta\phi_F(f) = 2\Delta f\, S_\phi(f) \tag{3.53}$$

Or, après un tel filtre, le signal est de la forme $A\cos(2\pi ft + \phi_f)$, où ϕ_f est une phase indéterminée[5]. D'après l'équation (3.53), l'amplitude A est donnée par

$$A = 2\sqrt{\Delta f\, S_\phi(f)} \tag{3.54}$$

On peut donc finalement écrire notre signal comme la somme de ses composantes pour chaque bande Δf :

$$\phi(t) = \sum_f \Phi^\phi(f) \cos(2\pi ft + \phi_f)\sqrt{\Delta f} \tag{3.55}$$

[5] Cette relation n'est valable que si l'on regarde le signal pendant un temps $T \sim 1/\Delta f$; dans ce cas, on est incapable de distinguer plusieurs composantes spectrales différentes dans le signal filtré.

où l'on a $\Phi^\phi(f) = 2\sqrt{S_\phi(f)}$. Dans cette équation, la fonction $\Phi^\phi(f)$ est une fonction connue, qui sert à caractériser le bruit. Par contre, les phases ϕ_f sont des phases aléatoires, uniformément réparties dans $[0{,}2\pi]$. Les phases ϕ_f sont indépendantes pour deux fréquences différentes.

L'équation (3.55) est une description mathématiquement peu rigoureuse du bruit (en particulier il n'y a pas de limite bien définie pour $\Delta f \to 0$). Cependant elle nous permet de bien comprendre ce que vaut réellement la phase $\phi(t)$, et nous allons utiliser la modélisation de $\phi(t)$ par l'équation (3.55).

On peut facilement montrer que si l'on évalue la densité spectrale de bruit (définie par l'équation (3.52)) de notre modèle, on retrouve bien $S_\phi(f) = \Phi^\phi(f)^2/4$, à la limite $\Delta f \to 0$.

Dans la situation contrapropageante où le bruit provient du déplacement et donc de l'accélération $a(t)$ du miroir de rétroréflexion, si on écrit

$$a(t) = \sum_f \Phi_f^a \cos(2\pi f t + \phi_f)\sqrt{\Delta f} \tag{3.56}$$

on a la relation suivante

$$\Phi_f^\phi = \frac{2k}{(2\pi f)^2}\Phi_f^a \tag{3.57}$$

Densité spectrale de bruit et transformée de Fourier

L'équation 3.55, écrite sans passer à la limite $\Delta f \to 0$, présente aussi l'avantage de relier directement $\Phi^\phi(f)$ à la transformée de Fourier discrète du signal $\phi(t)$.

Considérons donc un signal $x(t)$ numérisé à une fréquence $1/\Delta T$ pendant un temps T (il y a donc $N = T/\Delta T$ points). On pose $x_l = x(t_l) = x(l \times \Delta T)$.

La transformée de Fourier numérique du tableau x_l est

$$\tilde{x}_k = \sum_l e^{-\frac{2i\pi lk}{N}} x_l \tag{3.58}$$

La transformée de Fourier réciproque donne :

$$x_l = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N} e^{\frac{2i\pi lk}{N}} \tilde{x}_k \tag{3.59}$$

L'indice k correspond donc à une fréquence $f = k/T$ (et on pose $\Delta f = 1/T$). Mais ceci n'est valable que pour $k < N/2$, puisque l'indice $N-k$ correspond à la fréquence $-k$.

On réécrit donc :

$$x_l = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N/2} (e^{\frac{2i\pi lk}{N}} \tilde{x}_k + e^{-\frac{2i\pi lk}{N}} \tilde{x}_{N-k}) \tag{3.60}$$

Or, puisque les x_l sont réels, on a $\tilde{x}_k = \bar{\tilde{x}}_{N-k}$. Donc

$$x_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N/2} 2|\tilde{x}_k| \cos\left(\frac{2\pi lk}{N} + \phi_k\right) \tag{3.61}$$

où ϕ_k est l'argument du complexe $\tilde{x}_k$. Ainsi,

$$x(t) = \sum_{f=0}^{f=1/2\Delta T} 2|\tilde{x}_{fT}| \sqrt{\frac{\Delta T}{N}} \cos\left(2\pi f t + \phi_{fT}\right) \sqrt{\Delta f} \tag{3.62}$$

Cette relation nous permet à partir par exemple d'une mesure digitalisée de $x(t)$ d'obtenir la densité spectrale de bruit pour l'accélération et donc pour la phase :

$$\Phi_f^x = 2|\tilde{x}_{fT}| \sqrt{\frac{\Delta T}{N}} \tag{3.63}$$

3.3.4 Calcul du bruit dans la configuration Ramsey

Dans cette partie, nous allons supposer que l'on connaît la phase $\phi(t)$ entre les deux faisceaux Raman. On se pose alors la question de savoir quel en sera l'effet sur le signal détecté. Nous allons faire un premier calcul dans le cas "simple" de l'interféromètre de Ramsey [42, 41], avant de présenter le modèle que j'ai développé pour caractériser notre capteur inertiel constitué de deux impulsions π (configuration Rabi).

Rappelons que le senseur inertiel à base de franges de Ramsey est réalisé à l'aide de quatre impulsions $\pi/2$ où les deux premières réalisent la sélection et les deux secondes la mesure (figure 3.6).

Si l'on appelle t_i l'instant de la i^{eme} impulsion Raman, δ le désaccord de la transition, la probabilité d'effectuer la transition, dans le cas où l'on suppose que la durée de l'impulsion $\pi/2$ est infiniment brève (la phase $\phi(t)$ est alors prise constante pendant la durée du l'impulsion), vaut (cf. équation 3.42) :

$$P^{sel}(\delta) = \cos^2\left(\frac{\phi(t_1) - \phi(t_2) + \delta T_{\text{Ramsey}}}{2}\right) \tag{3.64}$$

Dans le cas de transition contrapropageante, δ dépend de la vitesse, si bien que l'on obtient une distribution en vitesse des atomes sélectionnés de la forme :

$$P^{sel}(v) = \cos^2\left(\frac{\phi(t_1) - \phi(t_2) + (\delta_{sel} + 2kv)T_{\text{Ramsey}}}{2}\right) \tag{3.65}$$

Pour le processus sélection - mesure (on suppose que la vitesse des atomes n'est pas modifiée entre la sélection et la mesure), on obtient pour un atome de vitesse v la probabilité d'effectuer la seconde transition :

$$P^{mes}(v) = \cos^2\left(\frac{\phi(t_3) - \phi(t_4) + (\delta_{mes} + 2kv)T_{\text{Ramsey}}}{2}\right) \tag{3.66}$$

On peut alors calculer la proportion d'atomes sélectionnés changeant d'état après la deuxième paire d'impulsions $\pi/2$:

$$\mathcal{P} = \frac{\int P^{sel}(v)P^{mes}(v)\eta(v)dv}{\int P^{sel}\eta(v)dv} \tag{3.67}$$

où $\eta(v)$ désigne la distribution initiale de vitesse. En faisant l'hypothèse que η est uniforme à l'échelle de l'interfrange, on peut alors évaluer cette intégrale, en considérant la moyenne de $\mathcal{P}$ sur une interfrange.

On obtient alors le résultat suivant :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}\left(\cos^2\left(\frac{\phi(t_1) - \phi(t_2) - \phi(t_3) + \phi(t_4) - \delta T_{\text{Ramsey}}}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) \tag{3.68}$$

En posant

$$\Phi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4 \tag{3.69}$$

on obtient un signal de la forme

$$\mathcal{P} = a + b\cos(\delta T_{\text{Ramsey}} - \Phi) \tag{3.70}$$

On peut donc constater que le bruit de phase va se traduire sur le signal atomique par un déplacement horizontal des franges. Ceci le distingue du bruit que l'on peut voir sur la détection du nombre d'atomes, qui lui sera plutôt sous la forme d'un déplacement vertical des franges.

Caractérisation des différents bruits

Nous avons mesuré le bruit de vibration à l'aide d'un accéléromètre commercial (IMI Sensors-626A). Cet appareil fourni en sortie un signal directement proportionnel à l'accélération. Ce signal est enregistré soit à l'aide d'un oscilloscope numérique, soit à l'aide d'une carte d'acquisition analogique directement reliée à l'ordinateur. On réalise alors la transformée de Fourier numérique du signal.

Nous avons représenté figure 3.15 la densité spectrale de bruit de l'accélération au niveau du support de la cellule. Cette mesure a été réalisée en décembre 2003, lorsque le laboratoire était encore situé au premier étage de Jussieu. Le pic au alentour de 20-30 Hz est sans doute dû à la fréquence de résonance de la table sur laquelle la cellule et l'accéléromètre étaient posés.

Variance de la phase

Pour connaître Φ, on utilise la formule 3.55 et la formule 3.69, et on obtient donc

$$\Phi = \sum_f \Phi_f^\phi \left(\cos(2\pi f t_1 + \phi_f) - \cos(2\pi f t_2 + \phi_f) - \cos(2\pi f t_3 + \phi_f) + \cos(2\pi f t_4 + \phi_f)\right)\sqrt{\Delta f} \tag{3.71}$$

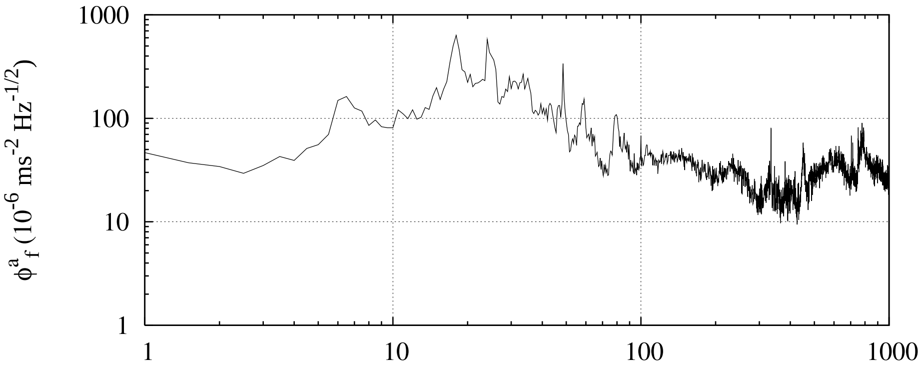


FIG. 3.15 – Densité spectrale de bruit de vibration au niveau de notre expérience.

Après simplification, et puisque $T_{\text{Ramsey}} = t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ et $T_{\text{délai}} = t_3 - t_1$:

$$\Phi = 4 \sum_f \Phi_f^\phi \sin(2\pi f T_{\text{Ramsey}}) \sin(2\pi f T_{\text{délai}}) \cos\left(\phi_f + 2\pi f \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}\right) \sqrt{\Delta f} \quad (3.72)$$

Φ est écrite comme la somme de termes indépendants de moyenne nulle, donc la moyenne de Φ est nulle, et sa variance vaut :

$$\sigma_\Phi^2 = 8 \sum_f {\Phi_f^\phi}^2 \sin^2(2\pi f T_{\text{Ramsey}}) \sin^2(2\pi f T_{\text{délai}}) \Delta f \quad (3.73)$$

Analyse des mesures

Le bruit résultant des fluctuations de phase Φ se traduit sur le signal par un déplacement horizontal des franges (figure 3.9). Si on regarde le contraste des franges comme étant l'amplitude crête-crête, alors il n'y a pas de réduction de contraste lié à ce bruit. Cependant, si on cherche à ajuster le signal par une sinusoïde (ou, ce qui revient au même, à moyenner longtemps le signal pour chaque fréquence), alors l'amplitude va être réduite lorsque σ_Φ augmente, jusqu'à devenir nulle pour $\sigma_\Phi \gtrsim 2\pi$.

Réciproquement, on peut obtenir assez facilement σ_Φ en regardant l'amplitude du sinus obtenu par un ajustement des moindres carrés.

Lorsque l'on effectue un spectre en balayant δ, pour chaque fréquence δ_i on mesure $\mathcal{P}_i^{exp}$. Par ailleurs on connaît la loi de $\mathcal{P}_i$ puisque $\mathcal{P}_i$ est de la forme $a + b\cos(\delta_i T - \Phi)$ où Φ est une variable aléatoire gaussienne centrée en zéro[6] (équation (3.70)).

On effectue alors un ajustement des moindres carrés, c'est-à-dire que l'on cherche α et β pour minimiser

$$\chi^2 = \sum_i (\mathcal{P}_i - (\alpha + \beta \cos(\delta_i T))^2$$

[6]On suppose pour ce calcul qu'il n'y a pas de changement de vitesse entre la sélection et la mesure

On trouve que le minimum est obtenu en moyenne pour $\alpha = a$ et pour $\beta = b\,\langle cos(\Phi)\rangle$; ce minimum vaut alors en moyenne

$$\chi^2 = \frac{b^2}{2}(1 - \langle cos(\Phi)\rangle^2) \tag{3.74}$$

On peut alors remarquer que, si Φ est une gaussienne centrée en zéro, alors

$$\langle cos\Phi\rangle = e^{-\frac{\sigma_\Phi^2}{2}} \tag{3.75}$$

$$\beta = be^{-\frac{\sigma_\Phi^2}{2}} \tag{3.76}$$

Donc, à partir des données de l'ajustement, on obtient σ_Φ par la formule :

$$\sigma_\Phi^2 = \ln\left(1 + \frac{2\chi^2}{\beta^2}\right) \tag{3.77}$$

Cette dernière équation nous permet de remonter à σ_Φ à partir d'une mesure expérimentale.

Validation expérimentale du bruit de vibration pour la configuration Ramsey

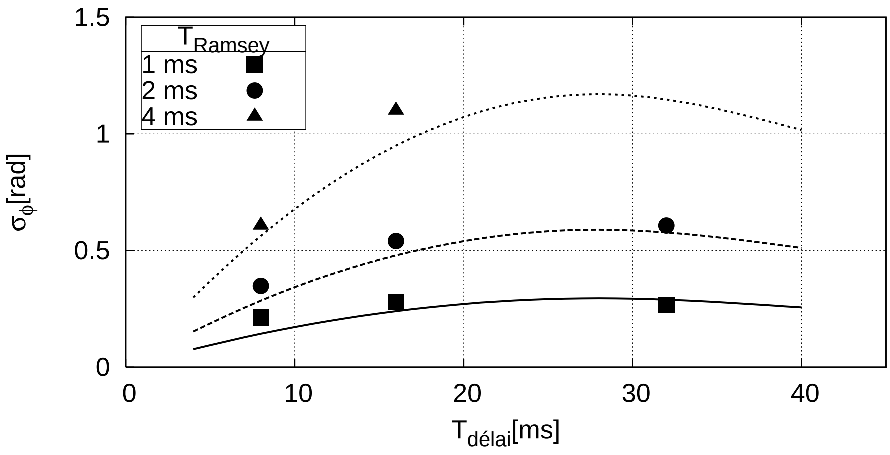


Fig. 3.16 – Bruit de phase mesuré pour différents délais T_{Ramsey} entre les impulsions. Les courbes sont obtenues à partir de notre modèle en prenant en compte uniquement le bruit de vibration, les points expérimentaux en utilisant l'équation 3.77.

Nous avons donc maintenant tous les outils pour confronter notre modèle à l'expérience. Nous avons représenté figure 3.16 le bruit σ_Φ pour différentes valeurs des délais T_{Ramsey} et $T_{\text{délai}}$. Les courbes théoriques sont obtenues en prenant en compte uniquement le bruit de vibration (figure 3.15). Il n'y a aucun paramètre ajusté. Le bon accord entre le modèle et le résultat expérimental est la preuve que le bruit de phase provient en grande partie des vibrations.

3.3.5 Calcul du bruit dans la configuration Rabi

Dans cette partie, je vais présenter le modèle développé pour évaluer la contribution du bruit de vibration à notre expérience en configuration Rabi. Ici, les calculs sont nettement plus compliqués que dans le cas Ramsey. En effet, il va falloir tenir compte de la variation de phase durant l'impulsion π : contrairement au cas Ramsey, nous ne pouvons plus la considérer comme constante.

Fixons (et rappelons) les notations. On a un système équivalent à un système à deux niveaux. Les deux niveaux sont séparés par une énergie δ (on se place dans le formalisme de l'atome habillé) et le couplage entre les deux niveaux est $\Omega(t) = \Omega_0 e^{i\phi(t)}$.

L'hamiltonien peut donc s'écrire sous la forme :

$$H(t) = \hbar \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & \frac{\Omega(t)}{2} \\ \frac{\Omega^*(t)}{2} & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

—Bruit de phase et bruit de fréquence— Il est possible de donner une interprétation plus physique de l'influence du bruit de phase sur les atomes. En effet, si on considère non plus $\phi(t)$, mais $\dot{\phi}(t)$, la dérivée de ϕ par rapport à t, on a un bruit de fréquence sur les lasers. On s'attend donc à remplacer δ par $\delta+\dot{\phi}(t)$. Dans le cas du bruit de vibration, ceci reviendrait à ajouter le terme $2k\dot{x}(t)$ à δ, c'est-à-dire, à ajouter un effet Doppler lié aux vibrations. Il est possible d'écrire l'hamiltonien sous cette forme, modulo un changement de représentation. En effet, si on change[7]

$$|\psi\rangle \to \left|\tilde{\psi}\right\rangle = e^{-i\frac{\phi(t)}{2}\sigma_z}|\psi\rangle \tag{3.79}$$

alors

$$H \to \tilde{H} = e^{-i\frac{\phi(t)}{2}\sigma_z} H e^{+i\frac{\phi(t)}{2}\sigma_z} + \frac{\dot{\phi}(t)}{2}\sigma_z \tag{3.80}$$

On obtient donc un hamiltonien de la forme

$$\tilde{H}(t) = \hbar \begin{bmatrix} \frac{\delta+\dot{\phi}(t)}{2} & \frac{\Omega_0}{2} \\ \frac{\Omega_0}{2} & -\frac{\delta+\dot{\phi}(t)}{2} \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

On voit sur cette équation que la contribution du bruit de phase va être de changer la fréquence apparente des lasers, et ainsi déplacer horizontalement le spectre.

—Développement perturbatif du hamiltonien— Reprenons le hamiltonien H de l'équation (3.78) et plaçons nous dans le cas perturbatif où les variations de la phase sont très faibles. Comme la phase n'est définie qu'à une constante près, cela revient à supposer que $\phi \ll 1$. Dans ce cas on peut écrire l'hamiltonien sous la forme

$$H(t) = H_0 + H_{pert}(t) \tag{3.82}$$

[7]Nous utilisons le formalisme des matrices de Pauli rappelé dans l'annexe B, page 193

où

$$H_0 = \hbar \left(\frac{\delta}{2}\sigma_z + \frac{\Omega_0}{2}\sigma_x \right) \tag{3.83}$$

et

$$H_{pert} = -\hbar \frac{\Omega_0}{2}\phi(t)\sigma_y \tag{3.84}$$

L'état du système à l'instant t_f peut être relié à l'état du système à l'instant t_i par l'opérateur d'évolution

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f;t_i)|\psi(t_i)\rangle \tag{3.85}$$

En utilisant la théorie des perturbations dépendantes du temps, au premier ordre, l'opérateur d'évolution U est donné par

$$U(t_f - t_i) = U_0(t_f - t_i) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t_f} U_0(t_f - t)H_{pert}(t)U_0(t - t_i)dt \tag{3.86}$$

où U_0 est l'opérateur d'évolution sans perturbation :

$$U_0 = e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \tag{3.87}$$

A l'aide du formalisme des matrices de Pauli, on peut rapidement calculer U_0. En effet on sait que de façon générale, si on désigne par $\vec{\sigma}$ le vecteur $(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$, $\vec{n}$ un vecteur unitaire, et α un réel, alors

$$e^{-i\alpha\vec{n}.\vec{\sigma}} = \cos\alpha - i\sin\alpha\,\vec{n}.\vec{\sigma} \tag{3.88}$$

Dans notre situation, $\vec{n} = (n_x,n_y,n_z) = \frac{1}{\Omega'}(\Omega_0,0,\delta)$ et $\alpha = \frac{1}{2}\Omega' t$ où nous avons utilisé la pulsation de Rabi généralisée $\Omega' = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$.

On obtient alors le résultat suivant[8] :

$$U_0 = \cos\left(\Omega'\frac{t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega'}\sin\left(\Omega'\frac{t}{2}\right)\sigma_z - i\frac{\Omega_0}{\Omega'}\sin\left(\Omega'\frac{t}{2}\right)\sigma_x \tag{3.89}$$

L'équation 3.86 devient donc :

$$\begin{aligned} U &= \cos\frac{\Omega'\tau}{2} - i\sin\frac{\Omega'\tau}{2}\vec{n}.\vec{\sigma} \\ &+i\frac{\Omega_0}{2}\int_{t_i}^{t_f}\phi(t)\left[\cos\frac{\Omega'(t_f-t)}{2} - i\sin\frac{\Omega'(t_f-t)}{2}\vec{n}.\vec{\sigma}\right]\sigma_y\left[\cos\frac{\Omega'(t-t_i)}{2} - i\sin\frac{\Omega'(t-t_i)}{2}\vec{n}.\vec{\sigma}\right]dt \end{aligned} \tag{3.90}$$

où $\tau = t_f - t_i$ est la durée de l'impulsion Raman.

[8] On notera que la partie non diagonale (proportionnelle à $sigma_x$) correspond à la formule de Rabi (équation 2.23, page 22)

—Calcul de la probabilité de transition— Plutôt que de chercher à calculer U, nous allons juste nous intéresser à la probabilité pour un atome de passer de l'état $|a\rangle$ à l'état $|b\rangle$. Cette probabilité est donnée par

$$P(\delta) = |\langle b\,|U|\,a\rangle|^2 \simeq P^0(\delta) + P^1(\delta) \tag{3.91}$$

où P^0 et P^1 correspondent aux termes à l'ordre 0 et 1 en ϕ.

On ne s'intéresse donc qu'au terme non diagonal de U, c'est-à-dire proportionnel à σ_x et σ_y. A l'ordre zéro, on a donc

$$P^0(\delta) = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega'}\right)^2 \sin^2 \frac{\Omega'(t_f - t_i)}{2} \tag{3.92}$$

$P^1(\delta)$ correspond aux termes à l'ordre 1 en ϕ. Lorsque l'on va développer le module au carré de l'équation (3.91), il ne faudra garder que les termes à l'ordre 0 multipliés par un terme à l'ordre 1. De plus, seules les variations ayant la même phase complexe que l'ordre 0 vont jouer un rôle à l'ordre 1. En clair, il ne faut garder de l'ordre 1 que les termes qui dans l'intégrale sont de la forme : reel $\times\, \sigma_x$ ou imaginaire $\times\, \sigma_y$.

Il reste finalement deux termes pertinents dans l'intégrale :

- Le premier, si on fait commuter σ_y avec $U_0(t-t_i)$. En utilisant le fait que $U_0(t_f - t)U_0(t-t_i) = U_0(t_f - t_i)$, on récupère un terme de la forme $\sin \frac{\Omega'(t_f-t_i)}{2} n_z\sigma_x$.
- Le deuxième terme provient du commutateur de σ_y avec $\vec{n}.\vec{\sigma}$ qui vaut $+2in_z\sigma_x$. Et il reste pour ce terme $-2n_z \cos\frac{\Omega'(t_f-t)}{2} \sin\frac{\Omega'(t-t_i)}{2}\sigma_x$

La composante intéressante de l'intégrale est donc de la forme :

$$\left(\sin\frac{\Omega'(t_f-t_i)}{2} - 2\cos\frac{\Omega'(t_f-t)}{2}\sin\frac{\Omega'(t-t_i)}{2}\right) n_z\sigma_x \tag{3.93}$$

que l'on peut simplifier :

$$n_z\sigma_x \sin\frac{\Omega'(2t-(t_f+t_i))}{2} \tag{3.94}$$

On obtient donc

$$P(\delta) = P^{(0)}(\delta) + P^{(1)}(\delta) \tag{3.95}$$

où

$$P^{(0)} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2}\sin^2\frac{\Omega'\tau}{2} \tag{3.96}$$

et

$$P^{(1)}(\delta) = -\delta\frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2}\sin\frac{\Omega'\tau}{2}\int_{t_t}^{t_f}\phi(t)\sin\Omega'\left(t - \frac{t_f+t_i}{2}\right)dt \tag{3.97}$$

—Détermination du bruit après deux impulsions Rabi— Notre objectif est de mesurer le bruit sur la proportion d'atomes transférés par la seconde impulsion π. Cette proportion est donnée par l'équation (2.37 , p.26) :

$$\mathcal{P}(\delta) = \frac{\int P_{sel}(x) P_{mes}(\delta + x) dx}{\int P_{sel}(x) dx} \tag{3.98}$$

Nous avons rajouté les indices *sel* et *mes* pour indiquer que ces probabilités sont différentes à la sélection et à la mesure car le bruit n'est pas le même.

En constatant que le bruit n'affecte pas le nombre d'atomes sélectionnés à l'ordre 1 (puisque $\int P^{(1)} = 0$), on obtient que la correction à l'ordre 1 en $\phi(t)$ de $\mathcal{P}$ s'écrit[9] :

$$\mathcal{P}^{(1)}(\delta) = \frac{\int P^{(0)}(x) P^{(1)}_{mes}(\delta + x) + P^{(1)}_{sel}(x) P^{(0)}(\delta + x) dx}{\int P^{(0)}(x) dx} \tag{3.99}$$

Après un changement de variable dans l'intégrale, et en utilisant le fait de $P^{(0)}(\delta)$ est paire par rapport à δ et que $P^{(1)}(\delta)$ est impaire, on obtient

$$\mathcal{P}^{(1)}(\delta) = \frac{\int P^{(0)}(x - \delta) \left(P^{(1)}_{mes}(x) - P^{(1)}_{sel}(x) \right) dx}{\int P^{(0)}_{sel}(x) dx} \tag{3.100}$$

— Calcul du bruit— A partir des équations 3.100 et 3.97 nous sommes capables de déterminer $\mathcal{P}^{(1)}$ en fonction ϕ. Maintenant en supposant que le bruit peut être modélisé par 3.55, on obtient que :

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\delta) = & -\delta \frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2} \sin \frac{\Omega'(t_f - t_i)}{2} \sum_f \Phi_f^\phi \sin(\pi f (t_f + t_i) + \phi_f) \\ & \times \left(\frac{\sin((2\pi f + \Omega')(t_f - t_i)/2)}{2\pi f + \Omega'} - \frac{\sin((2\pi f - \Omega')(t_f - t_i)/2)}{2\pi f - \Omega'} \right) \sqrt{\Delta f} \end{aligned} \tag{3.101}$$

Dans cette équation, si on regarde la différence entre la sélection et la mesure, le seul terme qui change est le $\sin(\pi f (t_f + t_i) + \phi_f)$, car $t_f - t_i = \tau$ est le même entre la sélection et la mesure. On obtient donc un coefficient de la forme :

$$\sin(\pi f (t_f^{sel} + t_i^{sel}) + \phi_f) - \sin(\pi f (t_f^{mes} + t_i^{mes}) + \phi_f) = 2 \cos(\phi'_f) \sin(\pi f T_{\text{délai}}) \tag{3.102}$$

où $\phi'_f = \phi_f + \pi f (t_f^{sel} + t_i^{sel} + t_f^{mes} + t_i^{mes})/2$

D'où

$$\mathcal{P}^{(1)}(\delta) = \sum_f \Phi_f^\phi h(f,\delta) \cos(\pi f (T_{\text{délai}} + \tau) + \phi_f) \sqrt{\Delta f} \tag{3.103}$$

[9] Les fonctions $P^{(0)}$ sont les mêmes pour la sélection et la mesure. Nous avons donc enlevé les indices *sel* et *mes*.

avec

$$h(f,\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} 2P^{(0)}(x-\delta)\delta \times \frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2} \sin\frac{\Omega'\tau}{2} \sin(\pi f T_{\text{délai}}) \times \\ \times \left(\frac{\sin((2\pi f - \Omega')\tau/2)}{2\pi f - \Omega'} - \frac{\sin((2\pi f + \Omega')\tau/2)}{2\pi f + \Omega'} \right) dx \quad (3.104)$$

où dans l'intégrale nous avons $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 + x^2}$.

Comme chaque ϕ'_f est une variable aléatoire répartie uniformément dans $[0,2\pi]$, on a alors

$$\left\langle \mathcal{P}^{(1)} \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle (\mathcal{P}^{(1)})^2 \right\rangle = \sum_f \frac{1}{2} \Phi_f^{\phi\,2} h^2(f,\delta) \Delta f \qquad (3.105)$$

Expérience

Dans la partie sur les expériences "Ramsey", nous avons mis en évidence de façon très nette la domination du bruit de phase par rapport au bruit sur le nombre d'atomes : le bruit de phase apparaît comme une translation horizontale et aléatoire du spectre et il devient très important lorsque l'on augmente le délai entre les impulsions $\pi/2$ de l'interféromètre de Ramsey. Nous avons représenté figure 3.17 un spectre dans le cas Rabi pris avant le déménagement de l'expérience[10], ainsi que les résiduels par rapport à l'ajustement. On peut s'apercevoir très nettement que le bruit dépend de δ ; il est beaucoup plus important sur les ailes du spectre que sur le sommet ou le bas de la courbe. Il s'agit là de la signature d'un bruit de phase et/ou de vibration.

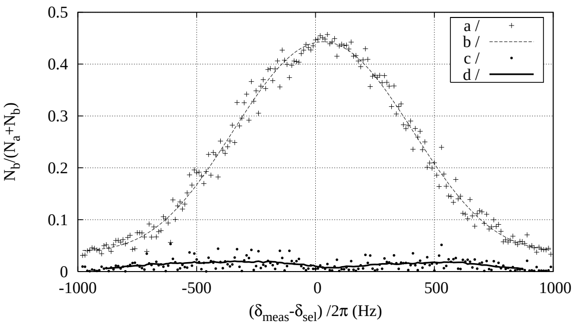


FIG. 3.17 – a/ Spectre obtenu après deux impulsions π de durée 1 ms séparées par un délai de 12 ms. b/ Courbe théorique ajustée c/ Différence entre l'ajustement et la mesure d/ Lissage de c/ obtenu par une fenêtre glissante.

—Bruit de phase laser et bruit de vibration— Dans l'équation 3.50, p. 61, nous avons écrit le bruit de phase comme étant la somme du bruit de vibration dû au miroir et du

[10]Sauf mention contraire, toute les figures dans cette partie ont été prises avant que l'on déménage l'expérience (automne 2004). Avant le déménagement, nous étions au premier étage et la cellule était posée sur une table en bois. Depuis l'automne 2004, nous sommes au res-de-chaussée, et le dispositif est posé sur le sol

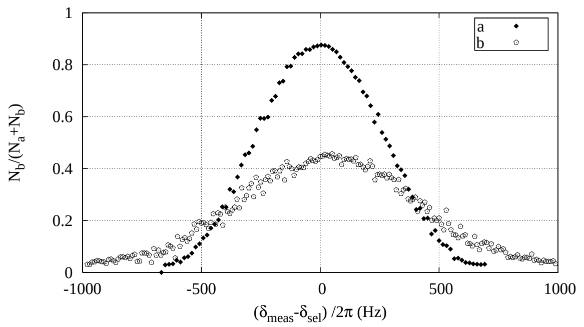


FIG. 3.18 – Fraction d'atomes transférés par une seconde impulsion Raman π. a) configuration copropageante ; b) configuration contrapropageante. Cette courbe montre que le bruit de phase est beaucoup plus important dans le second cas.

bruit de phase à la sortie de la fibre. Pour discriminer lequel des bruits est le plus important, nous avons réalisé une mesure avec des faisceaux Raman copropageants. Sur les deux spectres représentés figure 3.18, on se rend compte qu'il y a une grande différence entre le bruit en copropageant et le bruit en contrapropageant. Or, s'il y avait du bruit de phase dans la fibre, même avec plus d'atomes, en copropageant, on aurait un bruit similaire. Le bruit sur les courbes en contra-propageant provient donc d'un bruit de vibration.

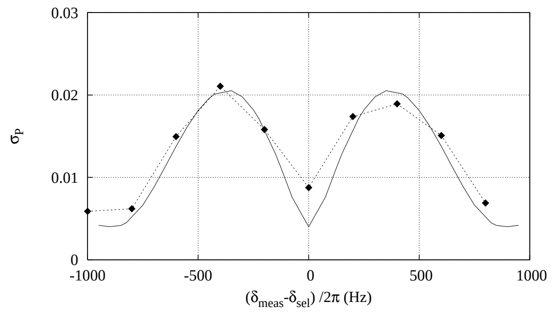


FIG. 3.19 – Écart-type du nombre d'atomes transférés par la seconde impulsion Raman. La ligne pointillée représente les points expérimentaux. La ligne continue représente la valeur calculée (sans paramètre ajusté).

—Bruit pour différentes valeurs de δ — L'équation (3.105) nous permet de calculer la variance de $\mathcal{P}$ pour différentes valeurs de δ. Expérimentalement, pour avoir une mesure de cette variance, nous enregistrons plusieurs points pour une même valeur de δ et calculons l'écart type des mesures. Nous avons représenté figure 3.19, ces mesures, ainsi que la valeur calculée du bruit de vibration auquel on ajoute un bruit constant sur le nombre d'atomes (voir la section 3.1.1, p. 45). Le bon accord entre les points et la courbe théorique (sans paramètre ajusté) montre que le bruit de vibration est une limite pour la sensibilité de notre expérience.

—Fréquences dominantes— A partir de ce modèle, nous pouvons essayer de comprendre quelles sont les fréquences du bruit qui interviennent le plus. Nous avons représenté figure 3.20 la fonction de sensibilité au bruit d'accélération de notre senseur inertiel, qui est donnée par $kh(f,\delta)/(2\pi f)^2$ (voir équation 3.57). Cette fonction nous montre que notre senseur inertiel

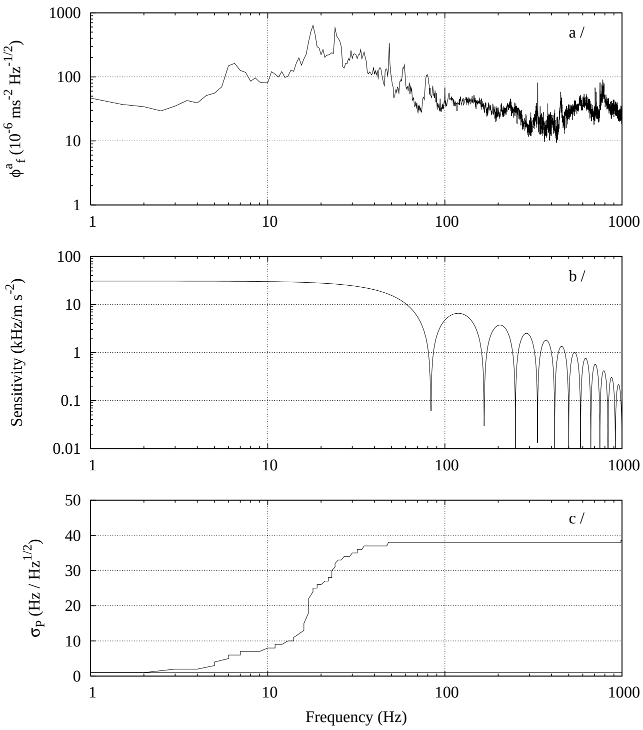


FIG. 3.20 – a/ densité spectrale du bruit de vibration obtenu à partir d'un accéléromètre. b/ Fonction de transfert calculée pour une impulsion π d'une durée $\tau = 1$ ms et pour un délai entre les impulsions Raman $T_{\text{délai}} = 12$ ms c/ Variance du nombre d'atomes transférés intégrée jusqu'à une certaine fréquence (équation 3.105). Cette dernière courbe nous permet de voir que l'essentiel du bruit provient de la bande des $10 - 40$ Hz.

agit comme un filtre passe bas, avec une fréquence de coupure vers 35 Hz. Ceci nous permet de voir que la plus grande partie de notre bruit provient des fréquences entre 10 et 30 Hz, en particulier parce que le bruit de vibration à cette fréquence est très important et qu'on ne le filtre pas.

—Bruit pour différentes valeurs de $T_{\text{délai}}$ **—** A partir de ce calcul de la variance de la proportion d'atomes transférés par la seconde impulsion Raman, nous pouvons en déduire une incertitude sur la mesure de la vitesse, en utilisant l'équation suivante (obtenue à partir de l'équation 3.15, p. 48) :

$$\sigma_{\delta_0} = \frac{1}{n} \frac{\sum_{\delta_i} \left\langle (\mathcal{P}^{(1)}(\delta_i))^2 \right\rangle}{\sum_{\delta_i} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \delta_0} \right)^2} \tag{3.106}$$

Cette incertitude va dépendre des deux paramètres que sont la durée τ de l'impulsion Raman et le délai $T_{\text{délai}}$ entre les deux impulsions. En faisant varier le délai, nous pouvons nous rendre compte que le bruit augmente lorque $T_{\text{délai}}$ augmente (figure 3.21), et ce jusqu'à un délai d'environ 25 ms. Au delà, en effet, le senseur inertiel commence à être moins sensible au pic de bruit présent vers les fréquences de 10–30 Hz.

Malheureusement, il n'est pas possible lors de la mesure de h/m de réduire infiniment ce délai. En effet on a besoin d'un certain temps entre les deux impulsions Raman pour pousser les atomes non sélectionnés et pour accélérer les autres. Concrètement, nous ne pouvons pas travailler en deçà de 10 à 12 ms. Nous sommes donc proches du maximum.

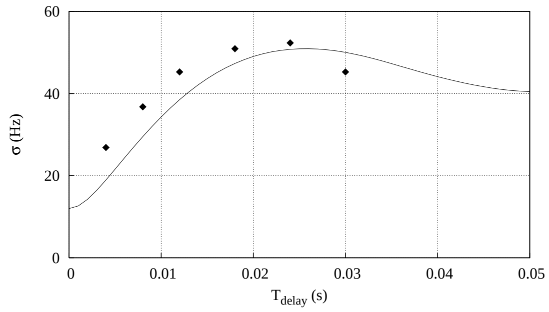


FIG. 3.21 – Incertitude de la mesure de la vitesse pour différentes valeurs de $T_{\text{délai}}$: valeurs prédites (ligne) et valeurs mesurées (points)

Cette modélisation du bruit que nous avons développée nous permet de prévoir quelle peut être la sensibilité de notre senseur, sans faire pour autant l'expérience. En enregistrant le bruit de vibration pendant plusieurs heures consécutives, nous avons pu voir que les vibrations diminuent de près d'un facteur 3 durant la nuit (figure 3.22).

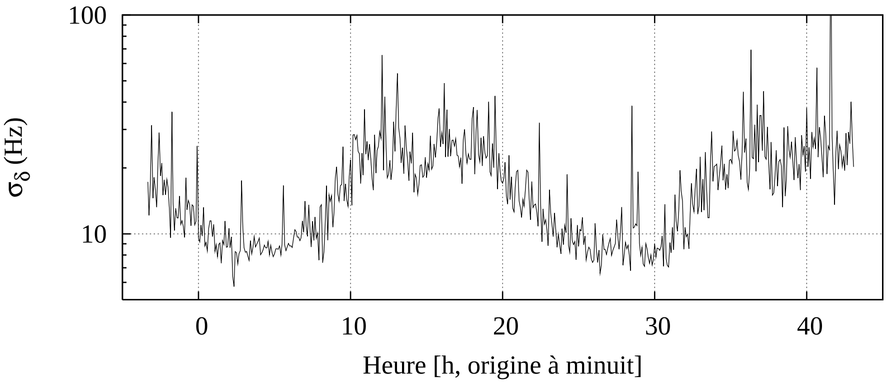


FIG. 3.22 – Calcul du bruit Raman à partir de données enregistrées par l'accéléromètre sur plusieurs heures. On voit que le bruit de vibration est réduit de près d'un facteur 3 pendant la nuit.

Nous avons surtout pu évaluer avant le déménagement le bruit que l'on aurait dans nos nouveaux locaux. Par chance, nous avons déménagé du premier étage (au dessus du niveau Jussieu) au rez-de-chaussée (au dessous du niveau Jussieu). Nous avons représenté figure 3.23 et 3.24 le bruit de vibration pour différents étages de Jussieu. Le premier étage correspond à nos ancien locaux, le rez-de-chaussée à nos nouveaux locaux. Au 5ème étage, on peut se rendre compte que le bruit est extrêmement important. Ceci est dû en particulier à la structure du bâtiment où la plaque de béton du plancher est retenue par des structures métalliques qui résonnent énormément. Sachant qu'il serait possible d'améliorer la sensibilité

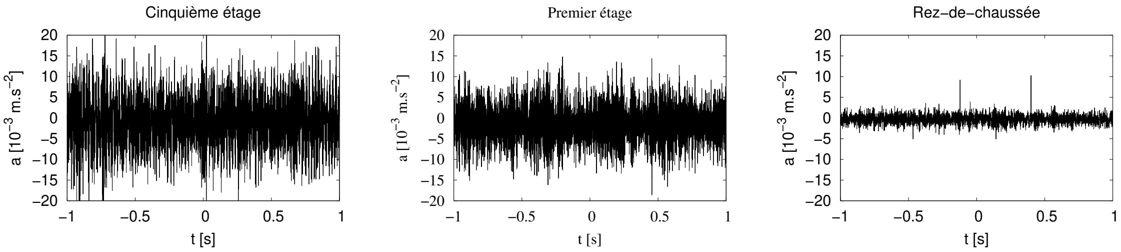


FIG. 3.23 – Accélération mesurée à trois étages différents

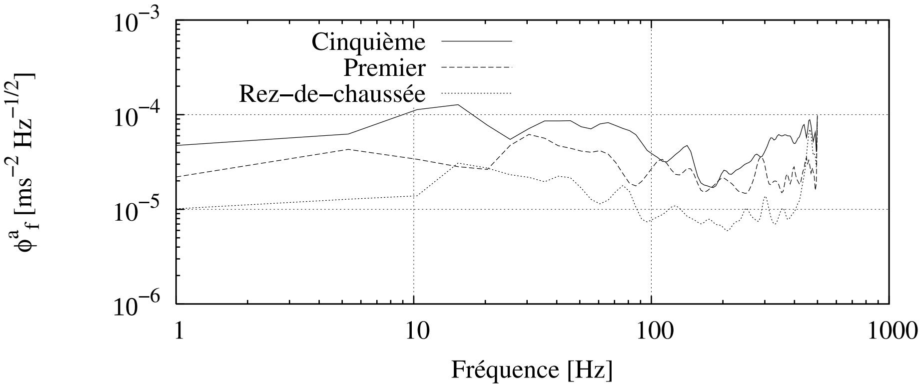


FIG. 3.24 – Bruits au niveau du sol à différents étages de Jussieu.

de notre expérience au sous-sol, nous avons ainsi décidé de la remonter telle quelle après le déménagement — plutôt que de nous lancer dans la nouvelle cellule. Une modification a tout de même été apportée : la cellule est fixé sur un marbre posé directement sur le sol, plutôt que sur une table en bois. En effet on peut voir sur la figure 3.24, que lorsque l'accéléromètre est posé au niveau du sol du premier étage, il n'y a pas les deux pics de bruits que l'on peut voir sur le spectre de la figure 3.15, avec l'accéléromètre posé sur la même table que la cellule.

—Choix d'une table antivibration— Parallèlement au déménagement nous avons acheté une table antivibration. On souhaite que la table coupe le mieux possible les vibrations pour des fréquences de l'ordre du Hz. Sur le marché, il existe trois types de tables anti-vibration :
- A coussin d'air
- Mécanique (ressort)
- Plateforme à isolation active

Les tables à coussin d'air utilisées couramment dans les laboratoires d'optique ne sont pas appropriées à notre situation : en effet leur fréquence de coupure se trouve plutôt vers 10 Hz et elles présentent une fréquence de résonance vers $1-2$ Hz. Nous avons mesuré le bruit sur une telle table, et nous avons calculé que le bruit est amplifié vers ces basses fréquences : le

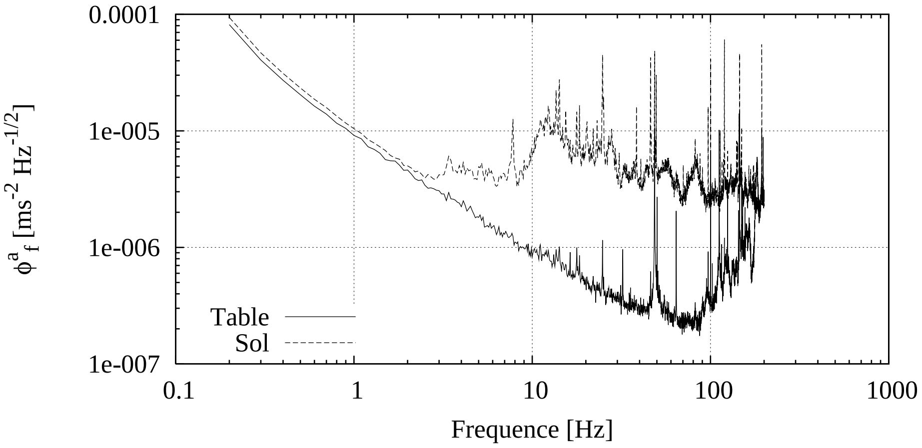


FIG. 3.25 – Comparaison du bruit mesuré avec et sans la table antivibration (mesures effectuées après le déménagement). Il est fort possible que le niveau de bruit sur la table soit limité par la sensibilité de l'accéleromètre utilisé pour les mesures.

bruit final n'est pas significativement réduit.

Les tables mécaniques ont des courbes de réponses très intéressantes vers les basse fréquences. Cependant, il semble difficile avec ce type de table de maintenir l'axe vertical constant. De plus le poids maximum quelles peuvent supporter n'est pas très élevé.

Nous avons acheté une plateforme à isolation active. Cette table peut supporter près de 600 kg. En mesurant[11] simultanément le bruit sur la table et au pied de la table (figure 3.25), nous pouvons voir la réduction de bruit sur la bande des 10–100 Hz. La fonction de transfert (figure 3.26) présente une coupure à 3 Hz, sans présenter de sur-oscillation. Le calcul du bruit auquel on s'attend sur le spectre (figure 3.27) nous montre l'efficacité de la table dans la bande des 10–100 Hz. Cependant, on peut voir que la fonction de transfert remonte après 100 Hz. Peut-être est-ce dû à la sensibilité de l'accéléromètre, ou bien à la coupure haute fréquence de l'asservissement de la table.

Conclusion sur le bruit et les limites du senseur

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle permettant d'évaluer la contribution du bruit de vibration sur le spectre. Notre modèle a pu être confronté à l'expérience avant que l'on ne déménage la cellule, et nous avons pu conclure que le bruit de vibration était un bruit dominant sur notre spectre. Dans la situation actuelle de l'expérience, après le déménagement, les vibrations sont beaucoup plus faibles qu'auparavant et le calcul indique que le bruit associé est inférieur à celui qui est mesuré. Nous pouvons en conclure que actuellement, la principale limite de notre senseur provient probablement du rapport signal à bruit de la détection des

[11]Ces mesures ont été effectuées après le déménagement, d'où un niveau initial de bruit plus faible de précédemment.

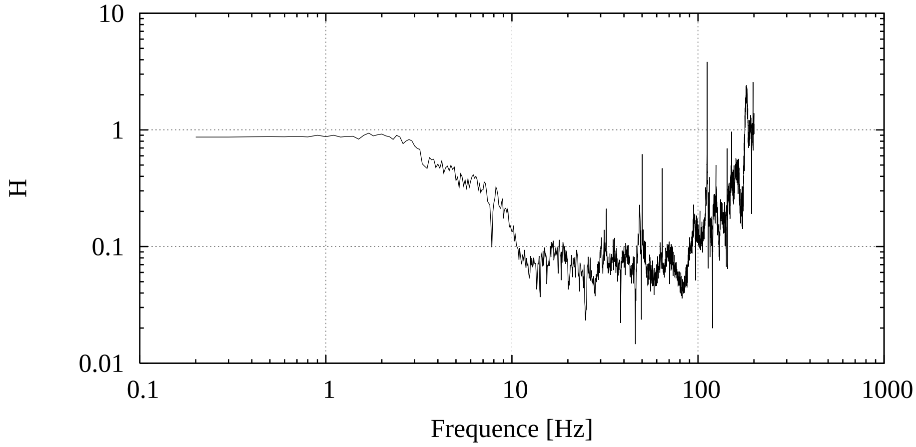


FIG. 3.26 – Mesure de la fonction de transfert de la table antivibration.

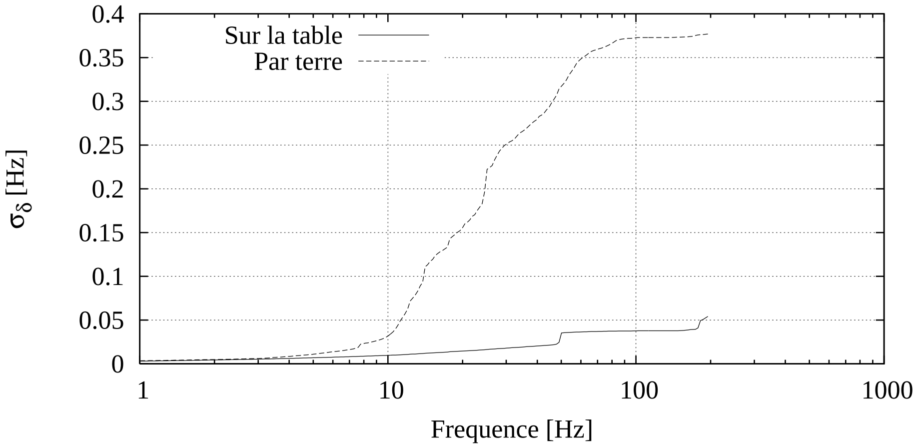


FIG. 3.27 – Evaluation de l'incertitude sur la mesure du centre de la distribution de vitesse : effet de la table antivibration.

atomes. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'effectuer les expériences (mesure en configuration Rabi et Ramsey pour différents délais) qui auraient permis de conclure précisément sur la situation actuelle.

Deuxième partie

Mesure de la vitesse de recul

Chapitre 4

Mesurer h/m avec des oscillations de Bloch

Dans ce chapitre, nous allons décrire le processus physique qui permet d'accélérer les atomes en leurs transférant un nombre bien déterminé d'impulsions de recul. Cette méthode a été pour la première fois mise en évidence sur les atomes froids par le groupe de C. Salomon en 1996 [23, 22, 43] et, en raison d'une analogie avec la physique du solide que nous présenterons par la suite, elle porte le nom d'oscillations de Bloch. Le principal atout que possède cette méthode par rapport à celle utilisée par exemple par S. Chu est qu'elle possède une efficacité très importante (nous démontrerons plus 99.97% d'efficacité par recul) et qu'elle est très rapide (on arrive à transférer près de 1000 reculs en 3 ms).

Principe des oscillations de Bloch

La méthode utilisée pour accélérer les atomes (oscillations de Bloch[1]) consiste à soumettre les atomes initialement immobiles à deux faisceaux lasers de même fréquence, puis à balayer la fréquence d'un des deux lasers. Les atomes sont alors accélérés par quantum de $2v_r$, où v_r est la vitesse de recul. Ce phénomène peut se comprendre de deux façons : soit comme une succession de transitions à deux photons, soit comme une diffraction des atomes par le réseau formé par l'interférence des deux lasers.

Succession de transitions à deux photons

Nous avons vu dans la première partie de ce manuscrit que lors d'une transition en Λ à deux photons contra-propageante, l'atome acquiert un recul de $2v_r$. L'idée ici consiste à répéter un grand nombre de fois une telle transition. A la différence des transitions décrites dans la première partie, on reste dans le même état d'énergie interne. Afin d'effecter plusieurs

[1]Nous verrons seulement par la suite le lien avec les oscillations de Bloch de la physique du solide

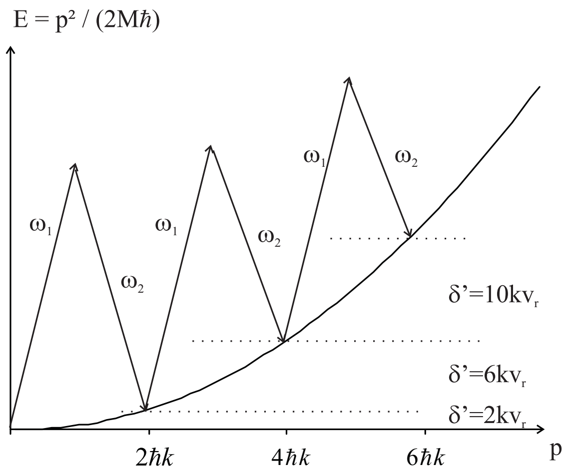


FIG. 4.1 – Parabole énergie impulsion. Afin de compenser l'effet Doppler induit par l'accélération, la différence de fréquence $\omega_1 - \omega_2$ varie linéairement.

transitions, nous devons continûment compenser l'effet Doppler en changeant la différence de fréquence entre les deux lasers (figure 4.1). Après N transitions, la vitesse des atomes est donc de $2Nv_r$.

Afin d'optimiser l'efficacité de ce processus, au lieu d'effectuer une succession d'impulsions π avec un changement de fréquence entre chaque impulsion, nous balayons continûment la fréquence des lasers. Les atomes effectuent alors une succession de passages adiabatiques rapides [22].

Diffraction par un réseau en mouvement

Un autre point de vue totalement différent permet de retrouver le même résultat. Il s'agit d'effectuer un raisonnement en terme de diffraction de l'onde atomique par le réseau lumineux formé par l'interférence des deux lasers.

Commençons par présenter le cas plus connu de la diffraction par un réseau matériel d'une onde lumineuse, et pour simplifier le calcul considérons le cas où l'onde incidente arrive perpendiculairement au réseau. Les vecteurs d'onde diffractés vérifient alors la relation suivante (c.f figure 4.2) :

$$k'_x = N\mathcal{K} \tag{4.1}$$

où $\mathcal{K}$ représente le vecteur du réseau réciproque : $\mathcal{K} = 2\pi/d$.

Dans le cas du réseau lumineux, la période du réseau optique est la moitié de la longueur d'onde λ des lasers :

$$d = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{K} = 2k = \frac{4\pi}{\lambda} \tag{4.2}$$

où k est le vecteur d'onde des deux lasers.

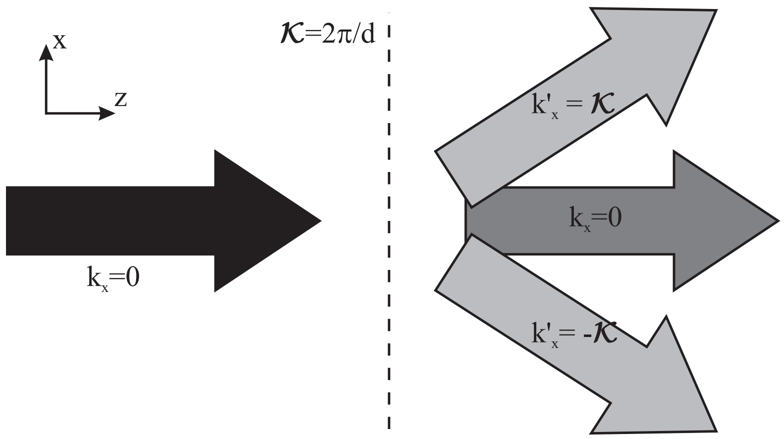


FIG. 4.2 – Diffraction de la lumière par un réseau. On note d le pas du réseau.

La diffraction peut se comprendre de la façon suivante : les atomes sont piégés dans les puits de potentiel. Lorsque l'on charge le réseau avec des atomes ayant une vitesse nulle, les atomes ont la même phase entre chaque site[2]. Dans l'espace des impulsions, tous les sites vont interférer constructivement dans des directions privilégiées qui correspondent à des impulsions vérifiant la relation

$$\frac{p_x}{\hbar} = N\,2k \tag{4.3}$$

Dans notre situation, nous voulons avoir un ordre de diffraction le plus élevé possible, pour transmettre le plus de reculs possible aux atomes. En optique, la méthode consiste à utiliser un réseau blazé. Avec un tel dispositif, la diffraction par le réseau est privilégiée dans la direction donnée par l'angle de blaze. Ainsi, il est possible d'orienter l'essentiel de la lumière vers un ordre de diffraction donné.

L'analogie pour le système atomique va être l'accélération du réseau. Dans ce cas chaque atome va à une vitesse moyenne v (qui correspond à la vitesse de réseau) et entre chaque site, ils ont toujours la même phase. Ainsi, les ordres de diffraction correspondant à $N\,2v_r \simeq v$ seront privilégiés. On va donc pouvoir détecter des atomes pour cet ordre (figure 4.3).

Limite liaisons faibles – liaisons fortes

Les deux interprétations des oscillations de Bloch que nous avons décrites sont bien adaptées dans deux limites différentes.

Dans la limite où le potentiel lumineux est faible, l'atome perçoit l'onde lumineuse comme une perturbation, sauf au moment où il y a résonance et où l'atome effectue une transition.

[2]Dans l'analogie avec la diffraction lumineuse, cette hypothèse correspond à celle d'une onde incidente perpendiculaire.

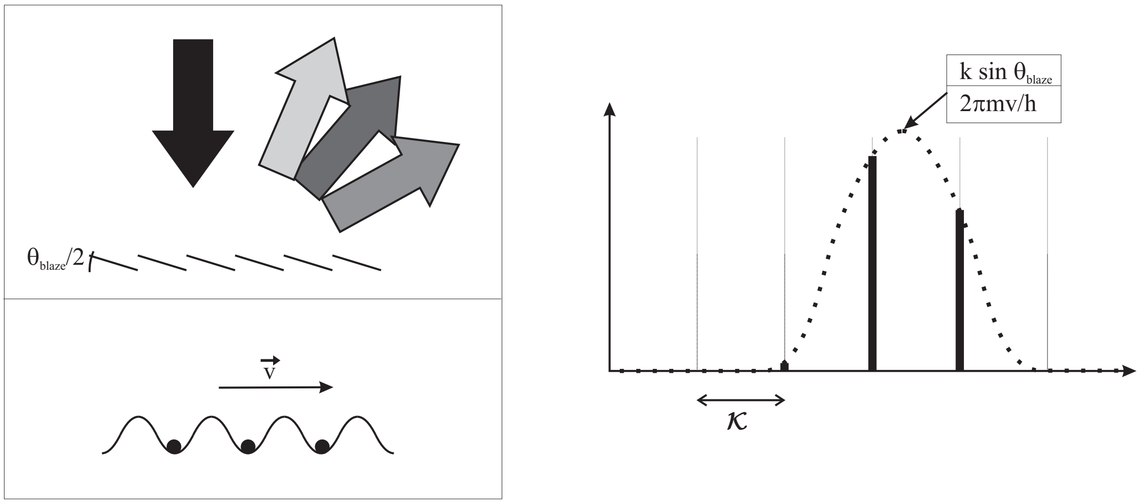


FIG. 4.3 – Diffraction en réflexion par un réseau blazé et diffraction d'un réseau d'atomes à vitesse constante. La diffraction de la lumière par un motif du réseau est centrée vers un angle θ_{blaze} ; seuls les ordres de diffraction proches de cet angle seront présents. Pour les atomes, l'analogie se fait avec la vitesse v du réseau. Seuls les ordres N tels que $2Nv_r \simeq v$ seront présents.

Dans la limite où le potentiel est très profond, la seconde interprétation où les atomes sont piégés au fond d'un puits de potentiel est beaucoup plus pertinente.

La distinction entre les deux régimes se fait de la façon suivante. Si une particule est localisée dans un puits du potentiel, alors son extension spatiale est plus petite que le pas $\lambda/2$ du réseau. Son impulsion est donc, par la relation de Heisenberg, supérieure à $2\hbar k$. En conséquence de quoi, son énergie cinétique est supérieure à $4E_r$ où E_r est l'énergie de recul ($E_r = \hbar^2 k^2/2m$). Il ne peut donc y avoir confinement de la particule que si le potentiel est plus profond que son énergie cinétique. C'est-à-dire si

$$U_0 \gg 4E_r \tag{4.4}$$

C'est cette limite que l'on appelle limite des liaisons fortes. La situation inverse s'appelle limite des liaisons faibles.

Le "magie" des oscillations de Bloch est de fonctionner dans les deux régimes. Nous allons dans la partie qui suit décrire plus précisément le processus d'accélération et ses limites.

4.1 Atome dans une onde stationnaire

Pour comprendre le principe des oscillations de Bloch, nous allons étudier tout d'abord le cas d'une particule dans une onde lumineuse stationnaire. Nous étudierons ensuite ce qui se passe lorsque l'on change la fréquence des lasers.

On considère donc un atome soumis à deux ondes lumineuses contrapropageantes d'intensité I. Il existe deux points de vues différents pour analyser ce problème. Une première approche consiste à décrire l'atome par sa fonction d'onde $\psi(x)$ et le laser par le champ électromagnétique classique $\vec{E}(x,t)$. Dans la seconde approche, on considère les états atomiques d'impulsion connue, et le laser par le nombre de photons dans chaque mode (approche de l'atome habillé). Ces deux approches complémentaires vont nous permettre de décrire avec deux points de vues différents l'accélération de nos atomes. Elles nous seront utiles lorsque l'on cherchera à rentrer dans les détails de l'expérience.

4.1.1 Particule dans un potentiel périodique

Soit un atome soumis à deux ondes progressives d'amplitude E_0 et de fréquence ω se propageant dans 2 directions opposées. Le champ qui résulte de l'interférence est modulé spatialement :

$$E(x) = 2E_0 \cos(kx) \tag{4.5}$$

où $k = \omega/c$. La principale action du laser sur l'atome, pourvu que l'on soit suffisamment loin de la résonance, est de déplacer ses niveaux d'énergie. Ce déplacement est proportionnel à l'intensité du champ électromagnétique, si bien que dans notre situation, il est modulé spatialement. L'atome voit donc un potentiel périodique

$$U(x) = U_0 \cos^2(kx) = U_0 \frac{1 + \cos(2kx)}{2} \tag{4.6}$$

L'amplitude de la modulation s'écrit en tenant compte du couplage de l'atome avec tous les états excités. Dans le cas d'un désaccord[3] Δ suffisamment grand devant la structure hyperfine de l'état excité, on obtient que

$$U_0 = \frac{1}{2} (\hbar\Gamma) \left(\frac{I}{I_s}\right) \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right) \tag{4.7}$$

où I est l'intensité de chaque faisceau laser.

Le hamiltonien est donc celui d'un potentiel périodique sinusoïdal de période spatiale $\lambda/2$

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{U_0}{2} \cos(2k\hat{x}) \tag{4.8}$$

(nous avons supprimé le terme constant $U_0/2$).

Cet hamiltonien est étudié dès les débuts de la mécanique quantique, en particulier parce qu'il modélise la situation idéale d'un électron soumis au potentiel périodique d'un réseau cristallin. En 1929, F. Bloch a publié un article dans lequel il décrit les états propres et les niveaux d'énergie d'un tel système [44]. La description de ces états repose sur ce que l'on appelle le théorème de Bloch[4]. Il y a depuis le développement des atomes froids piégés dans

[3] Δ représente le désaccord par rapport à la transition à un photon : $\Delta = \omega - \omega_{ae}$

[4] On pourra trouver différentes démonstrations de ce théorème dans le Ashcroft [45].

un réseau un regain d'intérêt pour ces études, car on peut réaliser un système proche du cas idéal [46, 23].

Le théorème de Bloch

Pour diagonaliser cet hamiltonien, il faut tout d'abord remarquer qu'il est invariant par translation dans l'espace des x d'une quantité multiple de la période $d = \lambda/2$. En d'autres termes, il commute avec l'opérateur de translation T_d défini par[5]

$$T_d = e^{i\frac{\hat{p}d}{\hbar}} \tag{4.9}$$

La conséquence de cette propriété, qui constitue le théorème de Bloch, est qu'il est possible de trouver une base de diagonalisation commune à T_d et à H.

Les valeurs propres de T_d sont l'ensemble des nombres complexes de module 1, que l'on peut décrire par e^{iqd}, où $q \in]-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}]$. Les états propres associés sont les fonctions d'ondes de la forme

$$\psi_q(x) = u_q(x)e^{iqx} \tag{4.10}$$

où $u(x)$ est une fonction de période d.

Il est assez difficile de donner une interprétation physique de ce bon nombre quantique q introduit. On peut faire une analogie avec le cas d'un système libre. Dans un tel système, invariant par toute translation, on introduit une quantité conservée qui est appelée impulsion. Lorsque l'on quantifie le système, on obtient un opérateur impulsion $\hat{p}$. Pour les états propres du hamiltonien libre qui sont des ondes planes, l'impulsion correspond au gradient de la phase (au $\hbar$ près). Dans le cas du hamiltonien, avec un potentiel périodique, l'impulsion n'est plus conservée, ce n'est plus un bon nombre quantique. Le bon nombre quantique q que l'on a introduit, que l'on appelle quasi-impulsion, correspond non plus au gradient de la phase, mais à la variation de la phase sur une période, divisée par cette période[6].

En injectant l'équation (4.10) dans le hamiltonien, on trouve une équation aux valeurs propres pour $u_q(x)$:

$$H_q u_q(x) = E(q)u_q(x) \qquad \text{avec} \qquad H_q = \frac{(\hat{p}+\hbar q)^2}{2m} + U(x) \tag{4.11}$$

Ce problème, qui est analogue à celui d'une particule dans une boîte avec conditions aux limites périodiques, admet un ensemble discret de solutions périodiques $u_{n,q}$ décrites par un entier $n > 0$ appelé indice de bande.

Un état de Bloch est donc décrit par deux nombres :

- un indice discret n
- une quasi-impulsion $q \in]-\frac{\pi}{d}, \frac{\pi}{d}]$

[5] T_d est défini avec un point de vue passif (le référentiel est translaté de a). Ainsi $\langle x | T_d | \psi \rangle = |\psi(x+d)\rangle$

[6] Avec nos notations, il y a aussi un facteur $\hbar$. q devrait plutôt s'appeler quasi-vecteur d'onde.

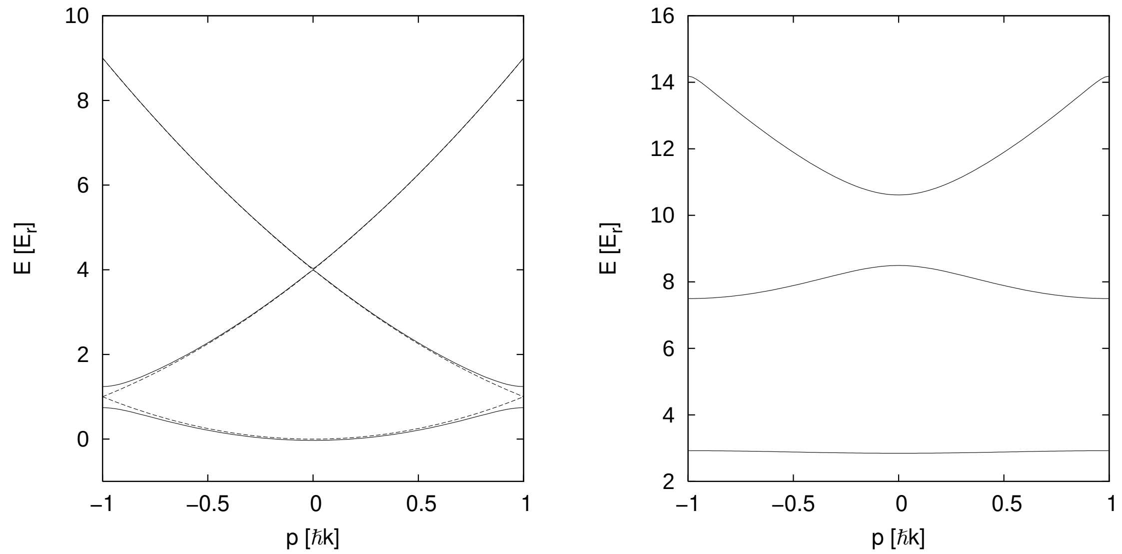


FIG. 4.4 – Niveaux d'énergie en fonction de la quasi-impulsion pour les 3 premières bandes. A gauche : limite des liaisons faibles ($U_0 = E_r$) : l'énergie est proche de celle d'une particule libre (trait pointillé), sauf en bord de zone, où il y a une ouverture de bande ; à droite : limite des liaisons fortes ($U_0 = 10E_r$). Dans ce cas, la première bande est quasiment plate.

Nous noterons $|n,q\rangle$ les états de Bloch correspondants (et $\psi_{n,q}(x)$ leur fonction d'onde), et $E_n(q)$ leur énergie. Nous verrons dans un chapitre suivant comment calculer les états de Bloch ainsi que leur énergie, pour différentes valeurs du potentiel. Le résultat essentiel est que pour chaque indice n, l'énergie $E_n(q)$ forme une bande continue, séparée des autres bandes d'énergie[7].

Interprétation quantique du théorème de Bloch

L'approche optique quantique nous permet de donner une interprétation et une démonstration plus intuitive du théorème de Bloch.

Dans cette approche, nous considérons les modes quantifiés du champ, et l'état atomique avec une impulsion bien déterminée. Les états que nous allons considérer sont donc les suivants : $|p,n_1,n_2\rangle$, où p désigne l'impulsion de l'atome, n_1 et n_2 le nombre de photons dans chacun des deux faisceaux lasers.

Le hamiltonien comporte alors :

– L'énergie cinétique de l'atome $p^2/2m$

[7]Remarquons que les solutions $u_{n,q}$ de l'équation 4.11 sont définies quelque soit q. Nous attirons l'attention sur le fait que la fonction $u_{n,q}(z)$ n'est pas périodique avec q, mais que seule la fonction $\psi_{n,q}(z) = u_{n,q}e^{iqz}$ l'est.

– L'énergie des photons : $n_1\hbar\omega_1 + n_2\hbar\omega_2$. Dans la suite, nous ne considérerons que des transitions à deux photons, c'est-à-dire l'échange d'un photon entre les deux faisceaux lasers. Cette énergie ne jouera aucun rôle dans le cas où $\omega_1 = \omega_2$.
– L'énergie d'interaction entre les photons et la matière. Nous nous plaçons directement dans le cas de la transition à deux photons, où nous avons[8] :

$$V_{\text{int}}|p,n_1,n_2\rangle = \frac{U_0}{4}\left[|p+2\hbar k,n_1-1,n_2+1\rangle + |p-2\hbar k,n_1+1,n_2-1\rangle\right] \tag{4.12}$$

L'hamiltonien de couplage décrit le processus d'une transition à deux photons, avec échange de deux quanta d'impulsion $\hbar k$ entre les atomes et le champ. Nous avons aussi fait l'approximation d'un champ cohérent intense, c'est-à-dire que l'on écrit que l'amplitude de transition U_0 ne dépend pas du nombre de photons.

Du point de vue de l'atome, cet hamiltonien ne couple que des états dont l'impulsion est séparée par un multiple de $2\hbar k$. Pour un q donné, l'espace engendré par les $|q+2lk\rangle$, $l \in \mathbb{Z}$ est donc stable sous l'effet de l'hamiltonien. C'est-à-dire que l'on peut écrire les états propres sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \sum_l \Phi^l |q+2lk\rangle \tag{4.13}$$

ce qui est équivalent au théorème de Bloch où $|\Psi\rangle$ est un état de quasi-impulsion q.

Dans cette approche, l'écart entre les bandes se comprend comme la résonance entre deux états couplés par V_{int}. Elle a lieu lorsque leur énergie cinétique est la même, c'est-à-dire en bord de la première zone de Brillouin.

Lorsque l'on regarde les états propres de Bloch, les amplitudes Φ^l vont dépendre de l'indice de bande et de q. On introduit alors la notation suivante pour les états de Bloch :

$$|n,q\rangle = \sum_l \Phi_n(q+2lk)|q+2lk\rangle \tag{4.14}$$

Nous démontrons en annexe que cette fonction Φ_n n'est autre que la fonction de Wannier [47] en représentation p.

4.1.2 Oscillations de Bloch

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe lorsque l'on balaye continûment la fréquence d'un des lasers, c'est-à-dire lorsque le potentiel bouge à une vitesse $v(t)$.

Le hamiltonien du système devient alors[9]

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U\left(x - \int^t v(t')dt'\right) \tag{4.15}$$

Les solutions serons notés $|\psi(t)\rangle$ ($\psi(x,t)$ en représentation x).

[8] Nous supposons que le faisceau 1 se propage dans le sens des p positifs et le second dans le sens opposé.
[9] Nous n'avons pas mis de borne inférieure à l'intégrale, ce qui reviendrait juste à choisir une phase.

En effectuant une translation sur les fonctions d'ondes d'une quantité de $\int^t v(t')dt'$ par l'opérateur unitaire

$$T_{\int^t v(t')dt'} = e^{i\frac{\hat{p}\int^t v(t')dt'}{\hbar}} \tag{4.16}$$

on obtient le hamiltonien suivant

$$H'(t) = \frac{(\hat{p} + mv(t))^2}{2m} - m\frac{v^2}{2} + U(x) \tag{4.17}$$

dont nous noterons $|\psi'(t)\rangle = T_{\int^t v(t')dt'}|\psi(t)\rangle$ les solutions.

Il s'agit d'un hamiltonien périodique. La quasi-impulsion q est donc conservée. Partant d'un état ayant une impulsion q_0 donnée ($\psi(x,t=0) = u(x,t=0)e^{iq_0x}$), il va donc rester sous la forme d'un état de même quasi-impulsion q_0 :

$$\psi'(x,t) = u(x,t)e^{iq_0x} \tag{4.18}$$

où $u(x,t)$ est une fonction périodique solution de l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien

$$H^{(u)}(t) = \frac{(\hat{p} - mv(t) + \hbar q_0)^2}{2m} - m\frac{v^2}{2} + U(x) \tag{4.19}$$

Pour pouvoir comprendre l'évolution de u, nous allons utiliser le théorème adiabatique. Nous diagonalisons donc cet hamiltonien qui admet un nombre discret de solutions périodiques à un instant t donné. Pour cela, il faudrait se ramener à un hamiltonien comme celui de l'équation (4.11). Appelons $q(t) = q_0 - mv(t)/\hbar$. Si $q(t) \in]-\frac{\pi}{d},\frac{\pi}{d}]$, alors il n'y a pas de problème. Sinon, il faut s'y ramener en changeant $u(x,t)$ en $v(x,t)e^{i2N(t)kx}$, où $N(t)$ est un entier tel que $q(t) + 2N(t)k$ soit compris entre $-\frac{\pi}{d}$ et $\frac{\pi}{d}$. Cette nouvelle fonction v est encore une fonction périodique, et elle est solution du hamiltonien

$$H^{(v)} = \frac{(\hat{p} + \hbar q_B(t))^2}{2m} - m\frac{v^2}{2} + U(x) \tag{4.20}$$

où $q_B(t) = q(t) + 2N(t)k$ appartient à la première zone de Brillouin (voir figure 4.5). Les états propres du hamiltonien (4.19) sont donc :

$$u_{n,q_B(t)}(x)e^{+i2N(t)kx} \tag{4.21}$$

Le théorème adiabatique nous dit que si la variation de H est suffisamment lente, et que l'on part d'un état propre de H d'indice n, alors le système restera dans l'état correspondant au même indice. Finalement :

$$\psi\left(x + \int^t v(t')dt'\right) = \psi'(x,t) \quad = \quad u_{n,q(t)+2N(t)k}(x) \times e^{i(q_0+2N(t)k)x} \tag{4.22}$$

$$= \quad u_{n,q_B(t)}e^{iq_B(t)x}(x) \times e^{+i\frac{mvx}{\hbar}} \tag{4.23}$$

Si on considère le cas où l'onde est accélérée continûment : $v(t) = at$, on peut alors définir le temps $\tau_B = \frac{2\hbar k}{ma}$. $N(t)$ augmente d'une unité chaque τ_B. La fonction d'onde de l'atome peut

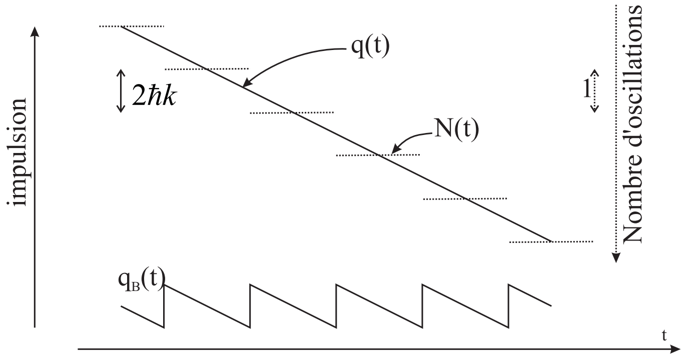


FIG. 4.5 – Quasi-impulsion dans le cas d'une accélération constante. $q(t)$ désigne la quasi-impulsion, $N(t)$ le nombre d'oscillations effectué et $q_B(t)$ est un représentant de $q(t)$ dans le première zone de Brillouin.

se décomposer alors en une partie périodique et une partie correspondant à une accélération qui suit le réseau (4.23). La présence de l'entier $N(t)$ dans l'équation pourrait laisser penser que le système effectue un saut brutal lorsque $N(t)$ change. Il n'en est rien : en effet, $N(t)$ augmente d'une unité lorsque $q(t)+2N(t)k = k$. On passe donc d'un état $u_{n,-k}e^{-ikx}$ à un état $u_{n,k}e^{ikx}$ qui sont deux états de Bloch de même indice de bande et de même quasi-impulsion, donc identiques.

La conclusion de cette étude est que lorsqu'un système atomique est soumis à un réseau et que l'on bouge ce réseau alors, à condition que le mouvement du réseau soit adiabatique, le système suit globalement le mouvement du réseau. Ce résultat, qui peut paraître comme une trivialité lorsque le réseau est très profond et que les atomes sont au fond d'un puits de potentiel, est valable quelle que soit la profondeur du réseau.

Description des oscillations dans l'espace des impulsions

On part d'un état ayant une quasi-impulsion q_0, c'est-à-dire que l'état atomique se décompose sur les ondes planes $|q_0 + 2lk\rangle$, $l \in \mathbb{Z}$ (équation 4.14). Lorsque l'on balaye la fréquence des lasers, l'atome va faire des transitions à deux photons. Il restera donc dans le même sous-espace des $|q_0 + 2lk\rangle$, sa quasi-impulsion est conservée.

Dans le cas où le balayage est effectué adiabatiquement, la fonction d'onde à l'instant t s'écrit (d'après l'équation 4.14 et 4.22) sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_l \Phi_n(q(t) + 2lk)|q_0 + 2lk\rangle \tag{4.24}$$

On peut alors avoir une image de l'évolution de la distribution en impulsion lors du balayage : dans cette équation, seule la fonction de Wannier dépend du temps. On a donc une enveloppe qui est translatée au cours du temps.

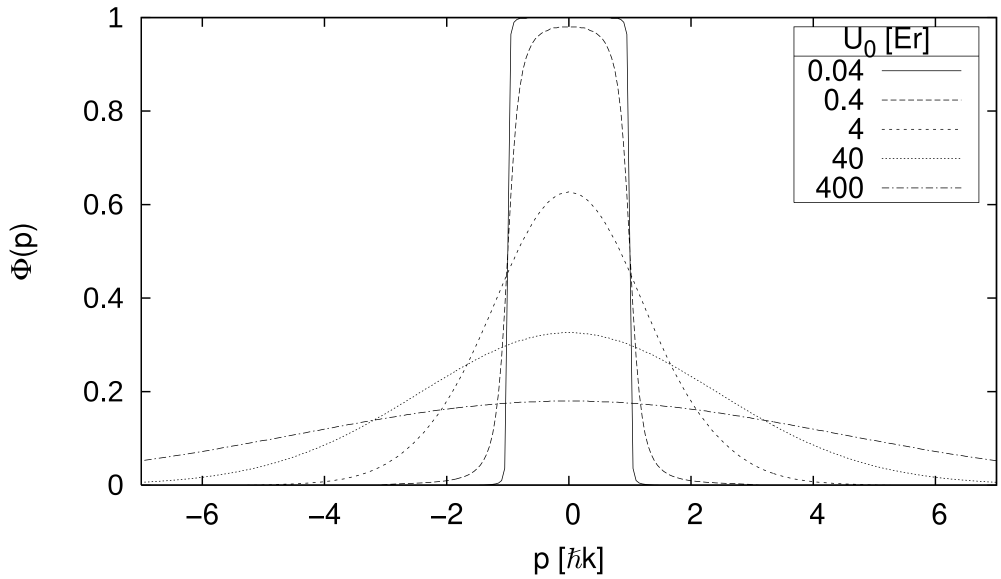


FIG. 4.6 – Fonction de Wannier en représentation p, pour différentes valeurs de la profondeur du potentiel.

Cette description en terme de fonction de Wannier est donc extrêmement utile. Pour un potentiel donné, il suffit de connaître une seule fonction pour représenter la distribution en impulsion de l'atome au cours du temps. La figure 4.6 montre un calcul numérique de cette fonction pour différentes valeurs de la profondeur du potentiel, des liaisons fortes aux liaisons faibles. Dans la suite, nous verrons l'importance de cette fonction pour comprendre certains effets systématiques dans notre expérience.

Nous avons représenté figure 4.7 l'évolution de la distribution en impulsion d'un état de Bloch dans la limite des liaisons faibles ($U_0 = 0{,}4E_r$) et dans la limite des liaisons fortes ($U_0 = 40E_r$). Dans la limite des liaisons faibles, nous pouvons voir que l'atome est presque toujours dans un état d'impulsion bien définie, sauf au moment où il effectue une transition (instant t_4 par exemple). L'impulsion de l'atome réalise vraiment un saut à chaque période de Bloch. Ceci correspond à l'image de l'atome effectuant une transition de Bragg à chaque fois qu'il est résonnant.

Dans la limite des liaisons fortes, la situation est différente, puisque l'atome est toujours dans une superposition d'états avec plusieurs impulsions différentes. Dans cette limite, l'atome ne réalise pas de saut à chaque période, mais a plutôt une évolution continue. Ceci correspond à l'image d'atomes piégés dans le réseau, et qui ont une vitesse moyenne qui suit celle du réseau. La distribution en impulsion n'étant que le résultat de l'interférence entre tous les sites occupés, qui, puisqu'ils gardent le même déphasage, va correspondre à la même quasi-impulsion.

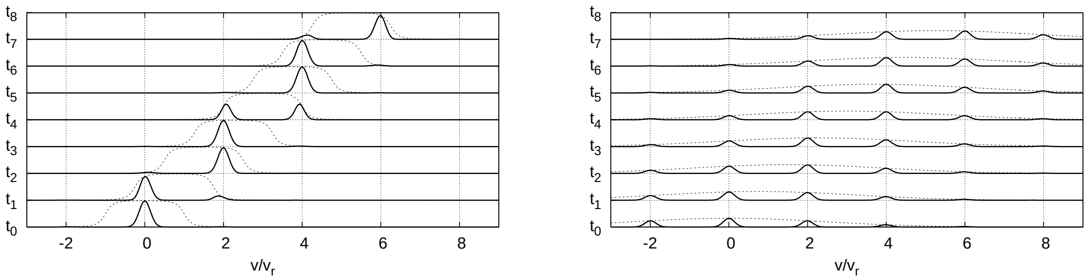


FIG. 4.7 – Evolution de la distribution d'impulsion. Axe horizontal : impulsion en unité de $\hbar k$. Ligne pointillée : fonction de Wannier, ligne pleine : distribution en impulsion. A gauche, $U_0 = 0{,}4E_r$ et à droite, $U_0 = 40E_r$

Interprétation en terme de force

Il est possible d'avoir une autre interprétation de l'équation (4.23). Dans cette équation, nous avons décrit le mouvement de l'atome, comme étant une partie allant à la vitesse du réseau modulo une partie périodique. Nous allons dans ce paragraphe étudier le problème en nous plaçant dans le référentiel où l'onde formée par l'interférence des deux faisceaux lasers reste stationnaire. Dans le cas où la vitesse de l'onde stationnaire n'est pas constante, le nouveau référentiel ne sera pas galiléen. Il faut donc ajouter une force d'inertie d'entraînement, qui vaut

$$F_{\mathrm{ie}} = -ma = -m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{dt}} \tag{4.25}$$

Dans le cas où la vitesse est balayée linéairement, F_{ie} est constante, et le problème que l'on considère est alors analogue à celui que se posait F. Bloch : quel est le comportement d'un électron soumis à la force constante d'un champ électrique - c'est-à-dire comment résoudre l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien suivant

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} - Fx + U(x) \tag{4.26}$$

Le résultat auquel est parvenu F. Bloch est que l'électron va avoir un mouvement périodique. Nous pouvons retrouver ce résultat de la façon suivante : tout d'abord, remarquons que le hamiltonien 4.26 ne vérifie pas, à cause du terme Fx, l'invariance par translation du réseau. En conséquence de quoi, la quasi-impulsion ne sera pas conservée. Pour écrire l'évolution de la quasi-impulsion, revenons à sa définition (page 90), comme étant liée à la valeur propre de l'opérateur T_d de translation par le pas d du réseau et écrivons l'équation d'évolution de T_d

en représentation de Heisenberg :

$$
\begin{aligned}
-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}T_d &= [H,T_d] && (4.27)\\
&= \left[-F\hat{x},e^{id\hat{p}/\hbar}\right] && (4.28)\\
&= Fde^{id\hat{p}/\hbar} = FdT_d && (4.29)\\
& && (4.30)
\end{aligned}
$$

En conséquence de quoi

$$T_d(t) = e^{iFdt/\hbar}T_d(0) \tag{4.31}$$

Donc, un état propre de T_d restera au cours du temps un état propre de T_d. La valeur propre de T_d va suivre l'équation 4.31. On obtient donc que la quasi-impulsion de l'état va varier suivant la relation :

$$q(t) = q(0) + Ft/\hbar \tag{4.32}$$

Et on peut donc écrire la fonction d'onde sous la forme

$$\psi(x,t) = e^{iq(t)x}u(x,t) \tag{4.33}$$

où la fonction $u(x,t)$ est périodique. Elle vérifie l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien suivant

$$\frac{(\hat{p}+\hbar q(t))^2}{2m} + \frac{U_0}{2}\cos(2kx) \tag{4.34}$$

On va suivre le même raisonnement que précédemment (équation 4.20), avec les mêmes notations. A un instant donné, les états propres de ce hamiltonien sont de la forme

$$u_{n,q_B(t)}(x) \times e^{i2N(t)kx} \tag{4.35}$$

Et en appliquant le théorème adiabatique, on obtient finalement

$$\psi(x,t) = u_{n,q_B(t)}(x) \times e^{iq_B(t)x} = \langle x \mid n,q_B(t)\rangle \tag{4.36}$$

Une particule plongée dans une potentiel périodique, soumise à une force constante $F = ma$, et à condition que la force soit suffisamment faible, va avoir une trajectoire périodique. La période de cette trajectoire, appelée période de Bloch, est donnée par

$$T_B = \frac{2\hbar k}{ma} \tag{4.37}$$

Nous pouvons remarquer que le $|\psi(t)\rangle$ de l'équation 4.36 et celui de l'équation 4.22 se déduisent l'un de l'autre par un transformation de changement de référentiel non galiléen dans l'équation de Schrödinger [48, 49].

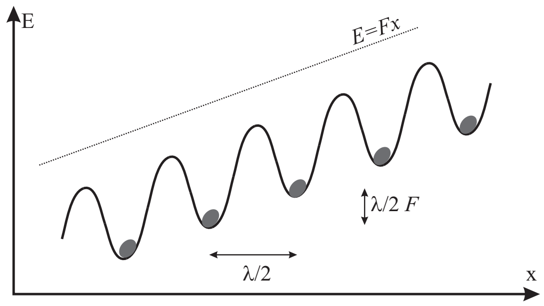


FIG. 4.8 – Oscillation de Bloch dans la limite des liaisons fortes. Dans cette limite, les atomes sont piégés dans le réseau. A cause du potentiel créé par la force, il y a un déphasage entre les différents sites qui devient un multiple de 2π périodiquement.

Interférence entre plusieurs sites

Les oscillations de Bloch dans la limite des liaisons fortes peuvent s'interpréter de la façon suivante. Les particules sont piégées dans une rangée de puits ; leur vitesse moyenne est constante. Par contre, à cause de la force constante, il va y avoir un déphasage (voir figure 4.8). En effet la force crée un potentiel de la forme

$$V(x,t) = -Fx \tag{4.38}$$

Le déphasage entre deux sites voisins est donc

$$\delta\phi(t) = \delta\phi(0) + \frac{\lambda}{2}\frac{Ft}{\hbar} \tag{4.39}$$

Modulo 2π, ce déphasage est périodique, avec une période qui correspond à la période T_B trouvée précédemment.

4.1.3 Limite du nombre d'oscillations

Il existe deux limites importantes au nombre d'oscillations que l'on peut faire : d'une part il est possible que des atomes fassent des transitions non-adiabatiques. Ceci signifie en fait qu'il ne sont pas accélérés. Il est aussi possible qu'ils diffusent de façon non cohérente un photon (émission spontanée). Ces deux limites fixent le nombre maximal d'oscillations.

Critère d'adiabaticité

Nous avons décrit en annexe les niveaux d'énergie en fonction de la profondeur du potentiel.

Lorsqu'on étudie une particule dans un potentiel périodique, on considère souvent deux limites : lorsque le potentiel est très faible (limite des liaisons faibles) et lorsque le potentiel est très grand (limite des liaisons fortes).

Dans le cas de la limite des liaisons fortes, qui correspond au cas où chaque particule est piégée au fond d'un puits, il semble certain que la particule va pouvoir suivre le potentiel accéléré. On peut alors fixer une limite à l'accélération du réseau, correspondant à l'accélération classique au delà de laquelle une particule ne peut pas rester dans le réseau. Le réseau exerce une force sur la particule qui dépend (classiquement) de la position de la particule. La particule n'est plus piégée si la force due à l'accélération est supérieure au maximum de la force exercée par le réseau sur la particule. Pour que la particule ne soit plus piégée, il faut donc que

$$a > \frac{k}{m} U_0 \tag{4.40}$$

Dans le cas de la limite des liaisons faibles, la particule est toujours délocalisée sur plusieurs pas du réseau. On ne peut donc certainement pas appliquer le raisonnement précédent. Il est possible de calculer précisément le critère de non transition adiabatique. Nous pouvons commencer par en donner un ordre de grandeur "à la main". Lorsque l'atome a une impulsion proche de $\hbar k$, il vérifie la condition de Bragg. Il peut donc être diffracté vers un état de même énergie et d'impulsion $-\hbar k$. Pour qu'il soit diffracté, il faut qu'il reste suffisamment longtemps à résonance. Le temps moyen pour effectuer une transition dépend de la profondeur du potentiel, il est proportionnel à l'inverse du couplage : $t \sim h/U_0$. La condition de Bragg est valable pour[10] $|q(t) - k|/k \lesssim U_0/E_r$ (voir figure 4.9). La condition est donc que $T_B U_0/E_r \gg h/U_0$, c'est-à-dire que

$$a \ll \frac{k}{\pi m} \frac{U_0^2}{E_r} = \frac{a_0}{2\pi} \frac{U_0^2}{E_r^2} \tag{4.41}$$

où $a_0 = \hbar^2 k^3 / m^2$ est homogène à une accélération.[11]

Si on applique le théorème d'adiabadicité, on obtient précisément les résultats suivants [43] :

– Limite des liaisons faibles :

$$a \ll \frac{a_0}{16} \left(\frac{U_0}{E_r} \right)^2 \tag{4.42}$$

– Limite des liaisons fortes :

$$a \ll \sqrt{2} a_0 \left(\frac{U_0}{E_r} \right)^{3/4} \tag{4.43}$$

Nous avons représenté sur la figure 4.10 l'accélération critique dans la limite des liaisons faibles et fortes, ainsi que l'accélération limite classique.

Formule de Landau-Zener

Dans la limite des liaisons faibles, il est possible de décrire la probabilité pour qu'un atome change de bande à partir de la formule de Landau-Zener. Cette formule décrit la probabilité

[10] On l'obtient en disant que les états d'impulsions $q(t)$ et $q(t) - 2k$ doivent avoir la même énergie au couplage U_0 près.

[11] a_0 est la grandeur homogène à une accélération que l'on peut former avec les paramètres géométriques du réseau. Elle correspond par exemple à l'accélération qu'il faut fournir à l'atome pour que son énergie augmente de E_r lorsqu'il parcourt le pas du réseau.

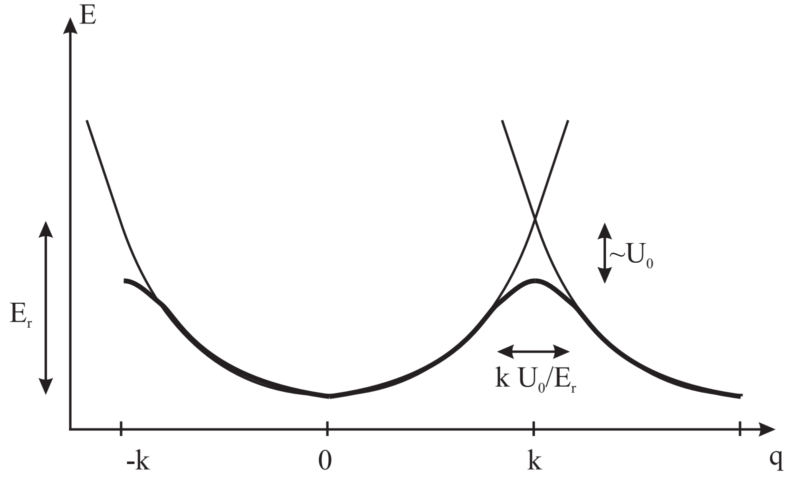


FIG. 4.9 – Critère d'adiabadicité, liaisons faibles. La condition de non transition adiabatique peut être obtenue en calculant sur une oscillation la durée pendant laquelle l'atome est en résonance. Dans la limite des liaisons faibles, cette condition est vérifiée pour $|q(t) - k|/k \lesssim U_0/E_r$, la durée pendant laquelle il est en résonance est donc de $\tau_{\mathrm{int}} \simeq T_B U_0/E_r$. Pour que l'atome n'effectue pas de transition non adiabatique, il faut vérifier $U_0\tau_{\mathrm{int}} \gg h$.

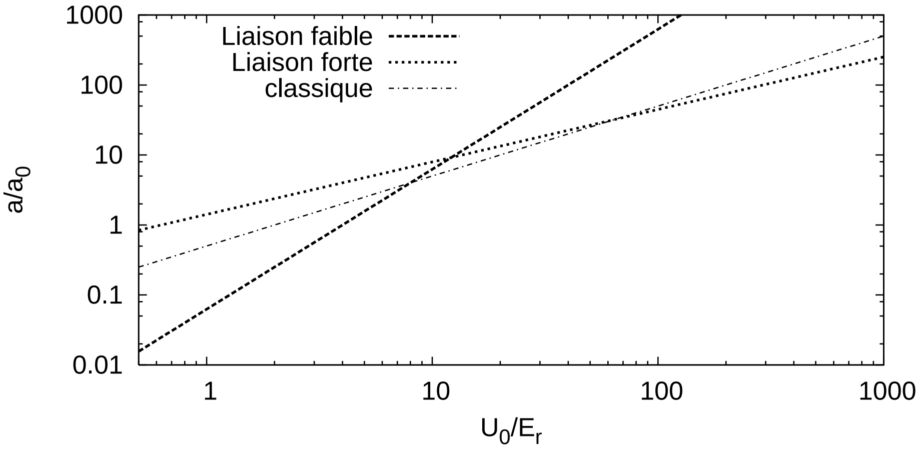


FIG. 4.10 – Accélération critique (en unité de a_0) en fonction de U_0 (exprimé en unité de E_r).

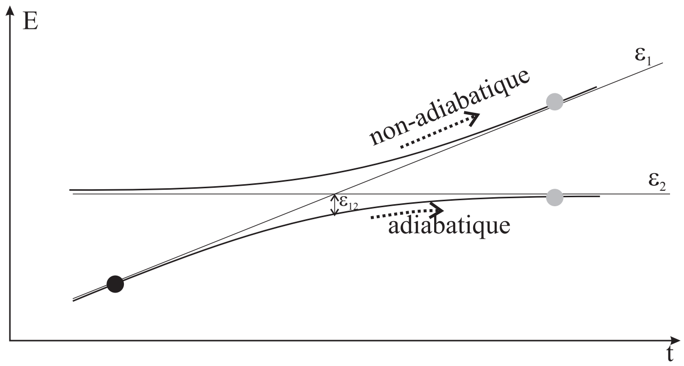


FIG. 4.11 – Formule de Landau-Zener : système à deux niveaux avec un couplage constant et une différence d'énergie qui dépend linéairement du temps.

pour que l'atome effectue une transition non-adiabatique au niveau d'un croisement de niveaux. La situation, idéale, dans laquelle la formule de Landau-Zener s'applique, est celle d'un système à deux niveaux, avec un couplage constant, et une différence d'énergie qui dépend linéairement du temps (voir figure 4.11[50] :

$$H(t) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon_{12} = C^{ste} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\epsilon_1 - \epsilon_2) = C^{ste} \end{cases} \tag{4.44}$$

La probabilité pour un atome partant de l'état 1 de rester dans cet état (et donc d'effectuer une transition non-adiabatique) vaut alors,

$$P = e^{-2\pi \frac{\epsilon_{12}^2}{\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\epsilon_1 - \epsilon_2)}} \tag{4.45}$$

Dans le cas des oscillations de Bloch, dans la limite des liaisons faibles (on ne garde que deux niveaux), à un croisement de niveaux ($q(t) \simeq k$), le hamiltonien vaut

$$H(t) = \begin{pmatrix} \hbar^2(q(t) - 2k)^2/2m & U_0/4 \\ U_0/4 & \hbar^2(q(t))^2/2m \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

avec $\hbar q(t) = mat$ où a est l'accélération du réseau.

Le résultat obtenu est alors que [43]

$$P = e^{-a_c/a} \quad \text{avec} \quad a_c = a_0 \frac{\pi}{64} \left(\frac{U_0}{E_r}\right)^2 \tag{4.47}$$

Ce nombre désigne la proportion d'atomes perdus par oscillation. Lorsque l'on effectue N oscillations, la proportion d'atomes ayant effectuée les N transitions vaut donc :

$$(1 - e^{-a_c/a})^N \tag{4.48}$$

Pertes par émission spontanée

Jusqu'à présent, nous avons décrit l'effet des lasers sur les atomes à partir du déplacement lumineux ou, ce qui revient au même, à partir de transition à deux photons (absorption - émission spontanée). Il y a cependant un autre processus qui peut intervenir : celui de l'absorption d'un photon suivi par l'émission spontanée d'un autre photon. Lorsqu'un atome effectue un tel processus, sa vitesse sur l'axe des faisceaux de mesure est alors quelconque. L'atome ne pourra pas être utilisé pour la mesure.

Nous allons dans un premier temps décrire la probabilité par unité de temps pour que l'atome effectue une émission spontanée lorsqu'il est soumis à un faisceau laser d'intensité constante. Nous pourrons ainsi donner une première conclusion sur le nombre maximal d'oscillations qu'il est possible de faire. Nous regarderons ensuite le cas d'un atome dans un potentiel périodique et dans un état de Bloch. Nous verrons dans ce cas qu'il y a une distinction importante à faire suivant que le potentiel est décalé dans le bleu ou dans le rouge.

Nous considérons ici un atome dans un champ laser d'intensité I. Le taux d'émission spontanée s'obtient alors en utilisant la même formule que celle donnant le taux de fluorescence d'un atome dans un laser (équations 2.45 et 2.46, page 31). Dans le cas où le désaccord Δ est grand devant la structure hyperfine, on obtient que le taux d'émission spontanée vaut :

$$P_{sp} = \frac{1}{8}\frac{\Gamma^3}{\Delta^2}\frac{I}{I_S} \tag{4.49}$$

Dans le cas des faisceaux de Bloch, il y a deux faisceaux d'intensité I. En négligeant les corrélations entre la figure d'interférence des lasers et la fonction d'onde atomique, le taux de pertes est multiplié par deux. On peut aussi exprimer ce taux en fonction de la profondeur U_0 du potentiel périodique (équation 4.7)

$$P_{sp} = \frac{1}{2}\frac{U_0}{\hbar}\frac{\Gamma}{\Delta} \tag{4.50}$$

On peut remarquer sur cette formule, que si on augmente I et Δ de telle sorte que la profondeur du potentiel reste constante, alors le taux d'émission spontanée diminue. Il y a donc un intérêt à utiliser un laser puissant.

A titre d'exemple, on peut donner une valeur des pertes par émission spontanée pour un atome dans une onde laser désaccordée de 50 GHz, et d'intensité $I = 500 I_S$. La valeur que l'on obtient est $P_{sp} = 67\ \mathrm{s}^{-1}$, ce qui signifie que, pour une durée totale de 10 ms, environ la moitié des atomes sera perdue.

Limite du nombre d'oscillations

Nous avons donc vu qu'il existe deux limites sur le nombre de vitesses de recul qu'il est possible de transmettre aux atomes par des oscillations de Bloch. Les pertes par transition interbandes nous conduisent à utiliser un potentiel très profond ce qui aura pour conséquence d'augmenter les pertes par émission spontanée.

Dans l'expérience, les seuls paramètres que l'on peut faire varier aisément sont la durée de T_{Bloch} de l'accélération et le désaccord Δ, l'intensité lumineuse restant toujours à la valeur maximale que nos moyens financiers nous permettent.

Supposons que l'on fasse N oscillations, l'accélération sera $a = 2Nv_r/T_{\text{Bloch}}$. D'après l'équation 4.48, les pertes par émission spontanée, dans la limite des liaisons faible, dépendent uniquement du paramètre a_c/a qui vaut :

$$\frac{a_c}{a} = \frac{\pi}{64}\left(\frac{U_0}{E_r}\right)^2 \frac{a_0 T_{\text{Bloch}}}{2Nv_r} \tag{4.51}$$

où la profondeur du potentiel U_0 est proportionnelle à $1/\Delta$. Donc, par rapport à Δ et T_{Bloch}, a_c/a peut s'écrire

$$\frac{a_c}{a} \propto \frac{T_{\text{Bloch}}}{\Delta^2} \tag{4.52}$$

Le taux total d'émission spontanée dépend lui aussi de Δ et T_{Bloch}. Il est proportionnel à

$$P_{sp}^{\text{tot}} = P_{sp} T_{\text{Bloch}} \propto \frac{T_{\text{Bloch}}}{\Delta^2} \tag{4.53}$$

Les pertes par emission spontanée augmente avec $\frac{T_{\text{Bloch}}}{\Delta^2}$, alors que les pertes par transition non-adiabatique diminue avec ce paramètre. Il existe dans un optimum pour ce paramètre. Par contre si on change T_{Bloch} et Δ de telle sorte que $T_{\text{Bloch}}/\Delta^2$ soit constant, alors les pertes totales seront constantes. Il n'y a donc pas de valeur critique pour Δ ou T_{Bloch}.

Dans l'expérience, il est important de ne pas prendre des valeurs de T_{Bloch} trop importantes : en effet plus on augmente T_{Bloch}, plus on augmente le délai entre les deux impulsions Raman, et plus le bruit de vibration devient important, comme nous avons pu le voir dans la première partie de ce mémoire. De plus, le déplacement des atomes augmente, rendant l'expérience plus sensible aux gradients de champs parasites.

On peut pousser un peu plus loin le calcul. En effet, il est possible de calculer comment varie la résolution que l'on va avoir sur la mesure de v_r, en fonction des paramètres Bloch. On rappelle la formule donnant l'incertitude sur la mesure de v_r :

$$\sigma_{v_r} = \frac{\sigma_v}{2N} \tag{4.54}$$

où σ_v est la résolution sur la mesure de la vitesse et N le nombre d'oscillations. Pour ce calcul, nous allons supposer que la résolution du senseur inertiel est proportionnelle au nombre d'atomes, ce qui signifie que l'on suppose qu'il n'y a plus de bruit de vibration, et que le bruit de projection quantique est négligeable face au bruit d'électronique (cf. section 3.1.1, page 45). On va donc chercher à maximiser le signal total qui est proportionnel au nombre d'oscillations multiplié par la fraction d'atomes restants :

$$S = N \times e^{-P_{sp} T_{\text{Bloch}}} \left(1 - e^{-T_{\text{Bloch}} a_c / 2N v_r}\right)^N \tag{4.55}$$

En appellant r, le taux de pertes par oscillation de la formule de Landau-Zener ($r = e^{-T_{\text{Bloch}} a_c/2Nv_r}$) et β le paramètre sans dimension $\beta = 2P_{sp}v_r/a_c$, on obtient que

$$\ln S = \ln N + \beta N \ln r + N \ln(1-r) \tag{4.56}$$

La maximisation par rapport à r donne $r_{\max}$ en fonction de β, indépendamment de N :

$$r_{\max} = \frac{\beta}{1+\beta} \tag{4.57}$$

On peut calculer le paramètre β en fonction des paramètres de l'onde stationnaire. Pour cela on utilise les équations suivantes : $P_{sp} = \frac{1}{2}\frac{U_0}{\hbar}\frac{\Gamma}{\Delta}$ (équation 4.50), $a_c = a_0 \frac{\pi}{64}\left(\frac{U_0}{E_r}\right)^2$ (équation 4.47) et $U_0 = \frac{1}{2}(\hbar\Gamma)\left(\frac{I}{I_s}\right)\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)$ (équation 4.7, page 89). On obtient alors que

$$\beta = \frac{1}{\frac{\pi}{64}\frac{\Gamma}{kv_r}\frac{I}{I_S}} \simeq \frac{1}{40 I/I_S} \tag{4.58}$$

On peut donc faire l'approximation que $\beta \ll 1$; on obtient donc que $r \simeq \beta$. Le nombre optimal d'oscillations est alors

$$N = \frac{1}{\beta(1-\ln\beta)} \tag{4.59}$$

On retrouve le résultat auquel on peut s'attendre : plus on augmente l'intensité (β diminue), plus le nombre d'oscillations que l'on peut faire augmente.

Si on prend par exemple $I/I_S \simeq 700$, ce qui correspond aux paramètres que l'on a utilisés pour la mesure effectuée la dernière année de ma thèse (section 5.3.2), on obtient que

$$N \simeq 2500 \tag{4.60}$$

Nous verrons que dans l'expérience, le nombre que l'on obtient est plutôt de 1000 oscillations[12]. On a donc un bon ordre de grandeur. Cependant, plusieurs remarques s'imposent : tout d'abord, l'efficacité totale de transfert dépend de façon critique de l'intensité des lasers. Si on se place dans le régime où on fait le plus d'oscillations possible, alors s'il y a une toute petite diminution de l'intensité du laser, l'efficacité diminue énormément et on perd pratiquement tout le signal. En général nous prenons une marge de sécurité, ce qui fait que l'on fait moins d'oscillations que prévu. D'autre part, on peut remarquer que, pour que cette formule soit valable, il faudrait être dans la limite des liaisons faibles (la formule de Landau Zener n'est valable que dans ce régime). Ceci dépend du paramètre Δ qui est libre. Mais une fois Δ fixé, la durée totale disponible est fixée par la relation (obtenue en revenant à la définition de r)

$$T_{\text{Bloch}} = 2\frac{v_r}{a_0}\frac{\ln\beta}{\beta(1-\ln\beta)}\frac{1}{\frac{\pi}{64}\left(\frac{U_0}{E_r}\right)^2} \tag{4.61}$$

[12] Ce nombre tient compte aussi de l'accélération préalable faite également avec des oscillations de Bloch.

L'application numérique donne $v_r/a_0 \sim 2 \times 10^{-5}$ s. Si on voulait rester dans le régime des liaisons faibles, en fixant par exemple $U_0 = 10E_r$, alors la durée totale pour l'optimum est de 200 ms. Le déplacement total des atomes serait alors de plusieurs mètres, ce qui n'est pas possible. Donc, dans l'expérience, nous utilisons un potentiel beaucoup plus profond. Nous ne sommes plus dans la limite des liaisons faibles. Dans ce cas, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.10, la limite de transition non adiabatique est plus forte. Le taux de pertes va donc être beaucoup plus important que celui calculé, et on effectue beaucoup moins d'oscillations.

Il y a une autre approximation qui est faite dans cette équation, mais qui, contrairement à la précédente, joue dans le bon sens. A la limite des liaisons fortes, le taux d'émission spontanée peut être fortement réduit par rapport à celui donné par l'équation 4.50. Pour cela, il faut décaler la fréquence des lasers dans le bleu. En effet, dans ce cas les atomes vont là où il n'y a pas de lumière. Le taux d'émission spontanée est alors fortement réduit. Comme nous allons le voir dans la partie suivante, le taux d'émission spontanée se calcule alors à partir de la fonction d'onde de l'atome dans le réseau optique.

4.1.4 Calcul de l'émission spontanée d'un atome dans un potentiel périodique

On considère une particule dans un potentiel périodique qui vaut

$$U(x) = U_0 \cos^2(kx) \tag{4.62}$$

avec

$$U_0 = \hbar \frac{\Gamma^2}{2\Delta} \frac{I}{I_S} \tag{4.63}$$

où I est l'intensité d'un faisceau. U_0 est l'amplitude crête-crête du signal.

Pour calculer le taux d'émission spontanée, on peut faire le calcul en ajoutant un terme imaginaire au hamlitonien :

$$\hbar \begin{pmatrix} \Delta + i\frac{\Gamma}{2} & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

L'état perturbé aura une énergie qui, au premier ordre en $\Omega/\Delta \ll 1$ vaut

$$\hbar \frac{\Omega^2}{4(\Delta + i\Gamma/2)} = \hbar \frac{\Omega^2}{4} \frac{\Delta - i\Gamma/2}{\Delta^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{4.65}$$

La partie réelle correspond aux déplacements lumineux (c'est l'équation 4.62), et la partie imaginaire à la moitié du taux d'émission spontanée. Nous avons donc la relation suivante :

$$P_{sp}(x) = \frac{U_0}{\hbar} \cos^2(kx) \frac{\Gamma}{\Delta} \tag{4.66}$$

Pour calculer la probabilité d'emission spontanée d'un état de Bloch, nous calculons la valeur moyenne (quantique) de $P_{sp}(x)$ sur l'état. Cette valeur va dépendre de q. Pour calculer le taux moyen de pertes pendant les oscillations, nous calculerons par la suite la valeur moyenne sur q.

Nous voulons donc calculer la moyenne de $\cos^2(kx)$ sur un état de Bloch. Cette moyenne, pour un état dans la première bande, ne va dépendre que de U_0 et de q. Dans le cas où on ne considère pas les interférences entre les faisceaux lasers, la moyenne de $\cos^2(kx)$ vaut 1/2, et on retrouve l'équation 4.50. On va donc calculer la moyenne de $\cos^2(kx)$ par rapport à 1/2, c'est-à-dire le coefficient correctif à l'équation 4.50.

$$c(U_0,q) = 2\left\langle \Psi_q(x) \,\middle|\, \cos^2(kx) \middle|\, \Psi_q(x) \right\rangle = 1 + \langle \Psi_q(x) \,|\, \cos(2kx) |\, \Psi_q(x)\rangle \tag{4.67}$$

Nous allons faire le calcul dans les deux limites des liaisons faibles et fortes. Ce coefficient est compris entre 0 et 2.

—Liaisons fortes— Dans la limite des liaisons fortes, les atomes se retrouvent piégés au fond des puits de potentiel. Dans le cas où U_0 est négatif, un paquet d'onde va être piégé en $x = 0$.

Le problème posé est donc de calculer la moyenne de $\cos(2kx) \simeq (1 - 2k^2x^2)$ pour l'état fondamental d'un potentiel harmonique :

$$V(x) = -U_0k^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{4.68}$$

où $\omega = 2\sqrt{|U_0|E_r}/\hbar$. Or on sait que l'énergie des états propres d'un potentiel harmonique se partagent en deux entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Donc

$$\langle -U_0k^2x^2\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{1}{2}\sqrt{E_r|U_0|} \tag{4.69}$$

Donc finalement

$$c(U_0) = 1 + \langle\cos(2kx)\rangle = 2 - \sqrt{\frac{E_r}{|U_0|}} \simeq 2 \tag{4.70}$$

Pour U_0 très important, et négatif, tous les atomes vont vers le centre, là où l'interférence des deux faisceaux lasers est constructive. Le taux d'émission spontanée est donc multiplié par 2.

Dans le cas où U_0 est positif, la calcul est identique, sauf que les puits sont déplacés de $\lambda/4$, là où le terme $\cos(2kx)$ vaut -1. On trouve alors un effet opposé :

$$c(U_0) = 1 + \langle\cos(2kx)\rangle = \sqrt{\frac{E_r}{|U_0|}} \tag{4.71}$$

Dans la limite des liaisons fortes, à même intensité et désaccord, le rapport entre le taux d'émission spontanée lorsque l'on est décalé dans le bleu et celui lorsque l'on est décalé dans le rouge vaut :

$$\frac{P^{\text{bleu}}}{P^{\text{rouge}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_r}{|U_0|}} \tag{4.72}$$

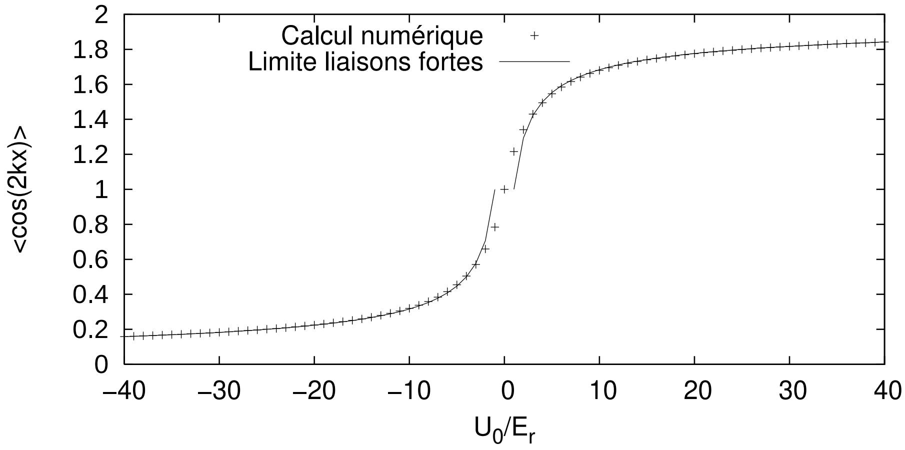


FIG. 4.12 – Comparaison entre le calcul à la limite des liaisons fortes et le calcul numérique.

Nous avons représenté sur la figure 4.12 le coefficient calculé dans la limite des liaisons fortes. Nous avons aussi comparé sa valeur à celle que l'on peut calculer numériquement (voir annexe D.2).

—Liaisons faibles— Il est possible d'effectuer le calcul dans la limite des liaisons faibles (voir annexe E)

On obtient alors que

$$c(U_0) = 1 - \frac{|U_0|}{16E_r}\text{arcsinh}\left(\frac{16E_r}{U_0}\right) \tag{4.73}$$

Nous avons représenté l'allure de cette fonction sur la figure 4.13.

Expérience

Nous avons vérifié expérimentalement que lorsque l'on est décalé dans le bleu le taux d'émission spontanée est réduit (figure 4.14).

Pour mesurer ce pourcentage, nous avons effectué l'expérience suivante sur les atomes : on branche le potentiel pendant un temps donné et on effectue les oscillations de Bloch avec les atomes dans $|F = 1\rangle$. Les pertes sont alors évaluées à partir de la proportion d'atomes ayant subi une émission spontanée vers l'état $|F = 2\rangle$. Ces mesures ont été effectuées avec une intensité laser de l'ordre de $I = 700I_S$. Ainsi, par exemple pour $\Delta = 40$ GHz, $U_0 \simeq 70E_r$.

Sur les donnés expérimentales, il semble très net que le comportement est différent suivant que l'on est décalé dans le bleu ou dans le rouge. Vers des décalages Δ de 30 à 40 GHz, il y a près d'un facteur 4.

Ceci confirme l'idée de départ. Cependant, le rapport mesuré diffère de celui que l'on a calculé. Ceci est sans doute dû à un mauvais équilibrage de l'intensité des deux faisceaux.

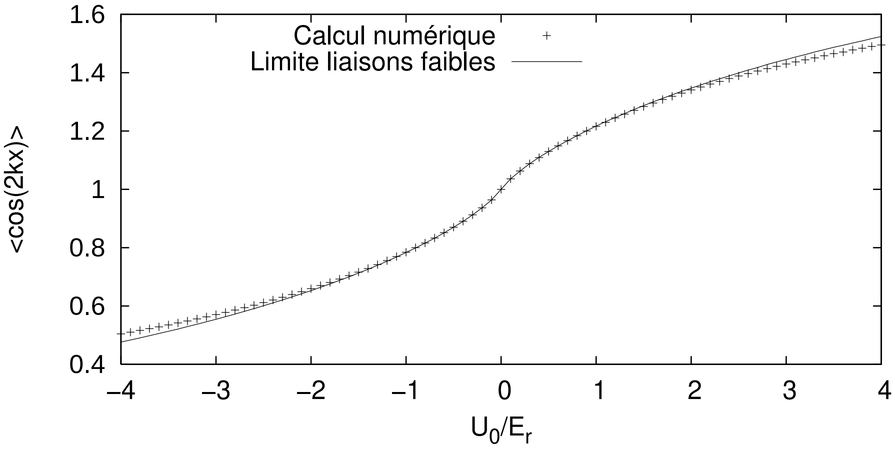


FIG. 4.13 – Comparaison entre le calcul à la limite des liaisons faibles et le calcul numérique.

En effet dans ce cas, l'intensité n'est pas nulle au niveau des noeuds d'interférence et il faut ajouter un terme constant. Il pourra être envisagé de mettre en place un dispositif de contrôle de l'intensité laser afin d'égaliser plus précisement l'intensité des deux faisceaux.

4.1.5 Force dipolaire

Jusqu'à présent, nous n'avons jamais tenu compte de la dynamique du mouvement transverse des atomes. Or à cause de la dimension finie des faisceaux lasers, il va y avoir une force dipolaire perpendiculaire à la propagation du laser.

Cette force est souvent utilisée dans les expériences de physique atomique pour réaliser un piège : lorsque le laser est décalé vers le rouge, les atomes voient un potentiel d'autant plus profond que l'intensité lumineuse est importante, et ainsi se concentrent au col du faisceau. Réciproquement, si le laser est décalé dans le bleu, les atomes sont poussés dans les régions où il y a le moins de lumière. Il est alors par exemple possible de réaliser un confinement par un laser présentant un trou dans sa distribution d'intensité [51].

Dans cette partie on va essayer de comprendre si, dans le cas d'un réseau formé par l'interférence de deux faisceaux gaussiens, cette force va jouer un rôle, et en particulier si elle va détruire notre nuage lorsque l'on est décalé dans le bleu.

Pour calculer un ordre de grandeur de cette force, nous allons évaluer l'énergie potentielle d'une particule dans le réseau en fonction de sa distance r par rapport à l'axe de propagation. Nous appliquerons un traitement classique sur la variable transverse r, alors que nous utiliserons le formalisme de Bloch pour l'axe de propagation x.

La potentiel vaut

$$U(r,x) = U_0 cos^2(kx) e^{-2r^2/w_0^2} \tag{4.74}$$

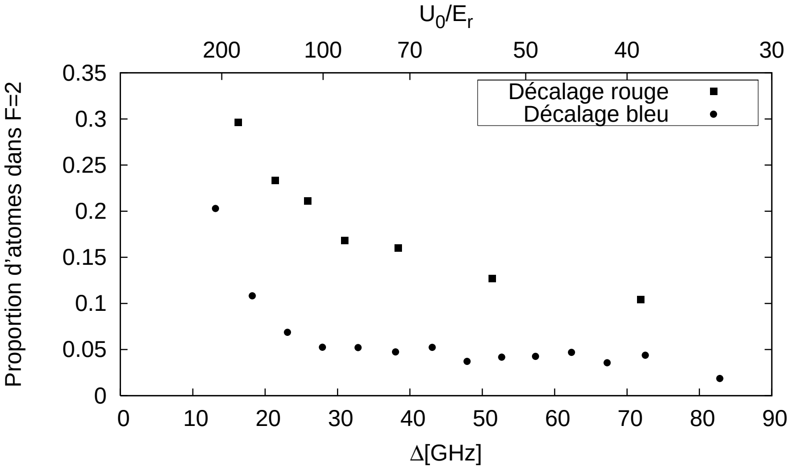


FIG. 4.14 – Mesure du taux de pertes dans le réseau en fonction du décalage Δ.

où w_0 est le rayon (waist) du faisceau lumineux utilisé pour créer le réseau.

L'énergie de la particule vaut donc :

$$E(r) = U_0 e^{-2r^2/w_0^2} \langle cos^2(kx) \rangle \tag{4.75}$$

où $\langle cos^2(kx) \rangle$ représente la valeur moyenne de $cos^2(kx)$ pour l'atome dans la première bande (moyenne quantique et moyenne sur q).

Le terme que nous devons calculer est donc le même que le coefficient $c(U_0)$ défini équation E-4. En particulier l'effet de la force dipolaire lorsque l'on est décalé dans le bleu, va être fortement réduit par rapport à la somme des forces créées par les deux faisceaux indépendants. Les atomes vont en effet vers les nœuds d'interférence, là où transversalement il n'y a pas de lumière, c'est-à-dire que le potentiel est plat.

Pour calculer la force, faisons comme pour l'émission spontanée : d'abord on la calcule comme s'il n'y avait pas d'interférence, c'est-à-dire en prenant $\langle cos^2(kx) \rangle = 1/2$, ensuite on ajoutera le même coefficient que celui calculé pour l'émission spontanée. La force dipolaire transverse vaut dans ce cas :

$$F_0 = \partial_r E(r) = \frac{4r}{w_0^2} \frac{U_0}{2} \, e^{-2r^2/w_0^2} = E_r \frac{2r}{w_0^2} \frac{U_0}{E_r} \, e^{-2r^2/w_0^2} \tag{4.76}$$

La situation qui nous intéresse est celle des liaisons fortes et avec un décalage dans le bleu. On multiplie donc le résultat précédent par $\sqrt{E_r/|U_0|}$ pour obtenir l'accélération transverse (à la limite $r \ll w_0$) :

$$a_\perp = \sqrt{\frac{E_r}{|U_0|}} \frac{F_0}{m} = \frac{E_r}{m} \frac{2r}{w_0^2} \sqrt{\frac{|U_0|}{E_r}} \tag{4.77}$$

Dans notre configuration, $w_0 \simeq 2$ mm, on obtient alors que, pour $r \simeq 500$ μm,

$$a_\perp[\text{mm.s}^{-2}] \simeq 4{,}3\sqrt{\frac{|U_0|}{E_r}} \tag{4.78}$$

Pour une durée d'allumage des faisceaux Bloch de l'ordre de 10 ms, et pour $U_0/E_r \simeq 100$, cette accélération produit un changement de vitesse qui vaut

$$\delta v_\perp \simeq 0{,}43 \text{ mm.s}^{-1} \simeq \frac{v_r}{10} \tag{4.79}$$

Ce qui est négligeable par rapport à la distribution initiale en vitesse. Nous n'avons donc pas d'éclatement du nuage.

Nous pouvons appliquer la même remarque que pour l'émission spontanée : ce calcul ne fonctionne que si les deux faisceaux lasers ont la même intensité. Dans le cas où l'un des faisceaux est plus intense, la force dipolaire augmente, puisque le potentiel présente une bosse même aux nœuds d'interférence. Même en tenant compte de cet effet, avec nos paramètres actuels, la variation de vitesse reste en dessous de quelques v_r, valeur pour laquelle l'expansion du nuage sera non négligeable au moment de la détection.

4.2 Dispositif expérimental

Les lasers Bloch

Pour réaliser les oscillations de Bloch, nous avons besoin de deux faisceaux lasers, dont la différence de fréquence peut être balayée sur une plage de quelques MHz, afin de créer un réseau en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire. Pour cela, un faisceau laser est partagé en deux ; en passant dans deux modulateurs acousto-optiques, on va pouvoir facilement contrôler la différence de fréquence entre les deux faisceaux ainsi que l'intensité des faisceaux.

Les deux faisceaux lasers Bloch doivent avoir la même polarisation (linéaire), alors que les faisceaux Raman sont de polarisations linéaires croisées. Il faut donc que dans un sens, les deux faisceaux Bloch et Raman aient la même polarisation, et dans l'autre sens, ils aient une polarisation orthogonale.

Au cours des trois années de ma thèse, nous avons utilisé différents montages. Dans un premier temps, le laser utilisé pour effectuer les oscillations de Bloch était aussi un des deux lasers utilisés pour les faisceaux Raman : ce laser est injecté dans une première fibre et dans la seconde fibre on superpose via un cube polariseur le deuxième Raman et l'autre faisceau Bloch. L'avantage de ce dispositif, décrit dans la thèse de Rémy Battesti [28], est qu'il ne nécessite aucun laser supplémentaire. Cependant, il ne nous a pas permis d'accélérer efficacement les atomes : en effet, dans ce dispositif, le désaccord Δ pour les faisceaux Raman et les faisceaux Bloch est le même. Or pour accélérer les atomes, on souhaite avoir une

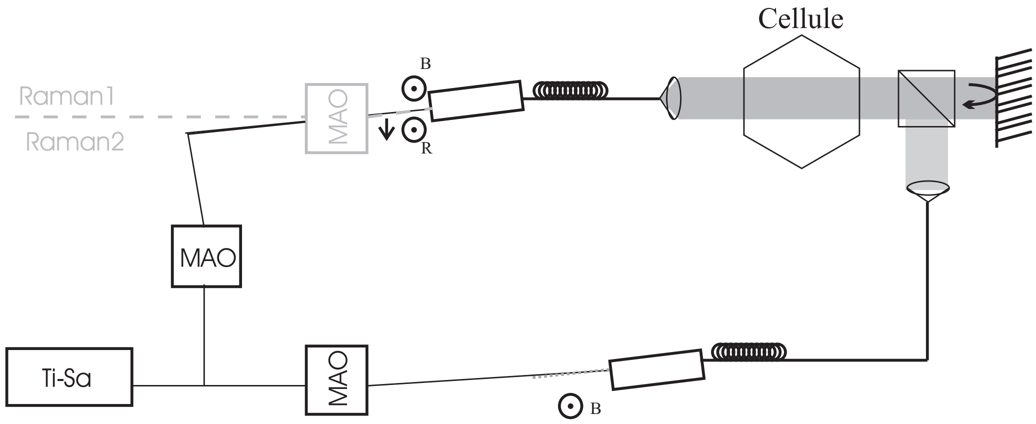


FIG. 4.15 – Schéma optique pour la production des faisceaux Raman et Bloch, dans la version où les faisceaux Raman sont rétroréfléchis. Dans l'une des deux fibres, on aligne le faisceau Bloch en passant par l'ordre zéro du modulateur acousto-optique utilisé comme interrupteur optique pour le faisceau Raman. Dans l'autre fibre, le faisceau Bloch passe seul.

profondeur de potentiel (U_0) de l'ordre de quelques énergies de recul, alors que le couplage Raman pour avoir une sélection subrecul doit être inférieur à l'énergie de recul. Le compromis a été trouvé en réduisant fortement l'intensité des faisceaux Raman. On se trouve alors limité par des problèmes tel que l'émission spontanée.

—**Le laser Ti-Sa**— Nous avons donc décidé d'utiliser un autre laser pour effectuer les oscillations de Bloch. Nous avons utilisé alors un laser Ti-Sa construit pour une ancienne expérience. Ce laser, pompé tout d'abord par un Néodyme-YAG doublé de 5 W à 532 nm (Verdi, Coherent), sort une puissance de 850 mW, accordable sur plusieurs nanomètres autour de 780 nm. Il est partagé en deux, et passe par deux modulateurs acousto-optiques . La première partie est injectée avec une polarisation perpendiculaire au faisceau Raman dans une fibre. Dans l'autre fibre, où le laser doit avoir la même polarisation que le faisceau Raman, nous utilisons l'astuce suivante (voir figure 4.15) : dans la séquence temporelle, les faisceaux Raman et les faisceaux Bloch ne sont jamais allumés simultanément. Le modulateur acousto-optique qui sert pour les faisceaux Raman est donc éteint lorsque l'on effectue les oscillations de Bloch. Le faisceau laser non diffracté qui en passant par le modulateur rentre dans la fibre est donc séparé spatialement du faisceau laser Raman, qui lui est aligné pour que ce soit la partie diffractée qui rentre dans la fibre. On peut donc aligner sans problème les deux faisceaux dans la même fibre.

—**Déménagement**— Nous avons profité du déménagement pour utiliser un nouveau laser de pompe : nous avons échangé le Verdi 5 W contre un laser de 10 W (Millenia, Spectra Physics), utilisé précédemment dans une expérience où une pompe de 5 W suffit.

La puissance à la sortie du Ti-Sa est maintenant de environ 1,9 W. Cependant, nous avons ajouté un isolateur optique à la sortie du laser car, comme on peut le voir sur le schéma de la figure 4.15, on renvoie le laser sur lui-même. Nous utilisons maintenant une fibre pour amener le faisceau du Ti-Sa sur la table où on recombine les faisceaux Raman et Bloch dans la même fibre.

Les pertes dans l'isolateur ainsi que les pertes de couplage dans la fibre font qu'au final pas plus de 900 mW n'arrivent avant la séparation du Ti-Sa en deux bras.

De plus, nous utilisons maintenant des modulateurs acousto-optiques en double passage. En effet, le balayage de la fréquence pour accélérer les atomes est suffisant pour désaligner la fibre si l'on est en simple passage.

Contrôle de la fréquence Bloch par des modulateurs acousto-optiques

Le processus d'accélération se passe en deux étapes : tout d'abord, on allume le potentiel périodique adiabatiquement, afin que le plus grand nombre d'atomes soit dans la première bande. Cette mise en place du potentiel dure typiquement 500 μs. Ensuite, nous accélérons les atomes en changeant la différence de fréquence des deux lasers à l'aide des deux modulateurs acousto-optiques. Nous avons utilisé deux dispositifs différents pour piloter les modulateurs acousto-optiques : le premier dispositif est basé sur des synthétiseurs SRS, le second sur un générateur arbitraire de fonctions.

—Chaîne de fréquence à base de SRS— Il existe des synthétiseurs de fréquence capable de générer des rampes de fréquence, que l'on peut déclencher sur un signal de trigger externe. Cependant, le modèle utilisé (SRS DS345) ne fonctionne que sur des fréquences inférieures à 30 MHz. Une chaîne de fréquences décrite figure 4.16 est alors utilisée pour ramener la fréquence de ce synthétiseur à la fréquence de 80 MHz utilisée pour les modulateurs acousto-optiques.

A l'aide de deux synthétiseurs (nommés SRS1 et SRS2), nous pouvons créer un onde quasi-stationnaire dont la vitesse est donnée par

$$2kv = \nu_{SRS1} - \nu_{SRS2} \tag{4.80}$$

Dans cette configuration, des atténuateurs RF sont utilisés pour contrôler l'intensité des faisceaux Bloch et réaliser ainsi le branchement adiabatique du potentiel ainsi que son extinction. Le problème de l'utilisation de cette chaîne est qu'il n'est pas possible de couper adiabatiquement le potentiel : en effet, à la fin de la rampe, le synthétiseur revient automatiquement à la fréquence initiale. Il faut donc couper le potentiel juste avant la fin de la rampe.

—Générateur de fonctions arbitraires— Nous utilisons maintenant un autre système. Dans cette chaîne de fréquences on utilise un générateur de fonctions arbitraires. Cet appareil,

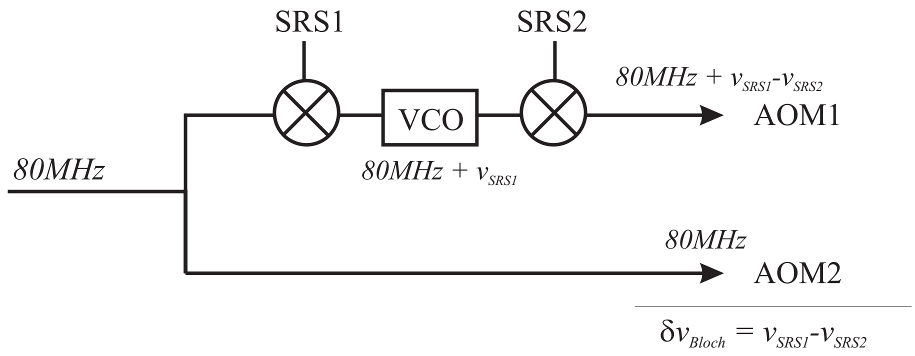


FIG. 4.16 – Schéma de la première chaine de fréquence utilisée pour piloter les modulateurs acousto-optiques : un oscillateur contrôle en tension (VCO) est asservi sur la somme d'un signal de 80 MHz et d'un premier synthétiseur. La différence de fréquence entre le signal du VCO et un autre synthétiseur, après filtrage, est amplifiée pour piloter le premier modulateur acousto-optique. L'autre modulateur est piloté directement avec une fréquence fixe à 80 MHz.

qui se présente sous la forme d'une carte PCI à insérer dans l'ordinateur, peut produire un signal arbitraire avec un taux d'échantillonnage de 40 millions de points par seconde (National Instrument NI5411) : c'est-à-dire que l'on va programmer dans une mémoire interne un tableau d'amplitudes a_i. La carte va lire une nouvelle valeur du tableau 40 millions de fois par seconde et va reporter la tension électrique correspondante à la sortie. La fréquence maximale spécifiée du signal est de 15 MHz. Les synthétiseurs SRS DS345 sont basés sur le même principe, sauf que c'est le microprocesseur de l'appareil qui calcule les points automatiquement et uniquement pour des rampes bien définies, alors qu'avec la carte NI5411 nous programmons nous-même la mémoire. Ceci va nous permettre de produire un signal présentant la modulation souhaitée en fréquence et en intensité.

Nous utilisons la carte avec une rampe de fréquence autour de 10 MHz :

$$\delta\nu_{\mathrm{NI5411}} = 10\ \mathrm{MHz} + \delta\nu(t) \tag{4.81}$$

Le signal produit par la carte est doublé en fréquence (voir annexe G.1, P.209). Nous le mélangeons ensuite à deux porteuses issues de deux synthétiseurs à 60 et 100 MHz pour obtenir des signaux qui pilotent les deux modulateurs acousto-optiques avec une rampe de fréquence opposée (figure 4.17) :

$$\delta\nu^{\pm}_{MAO} = 80\ \mathrm{MHz} \pm 2\delta\nu(t) \tag{4.82}$$

Enfin, les deux signaux sont aiguillés vers l'un ou l'autre des deux modulateurs acousto-optiques. Ceci nous permet de changer facilement le sens de propagation de l'onde, pour une même valeur de $\delta\nu$. En particulier, les deux filtres qui sont après les mélangeurs ne vont pas travailler sur la même gamme de fréquence (au-dessus ou au-dessous de 80 MHz).

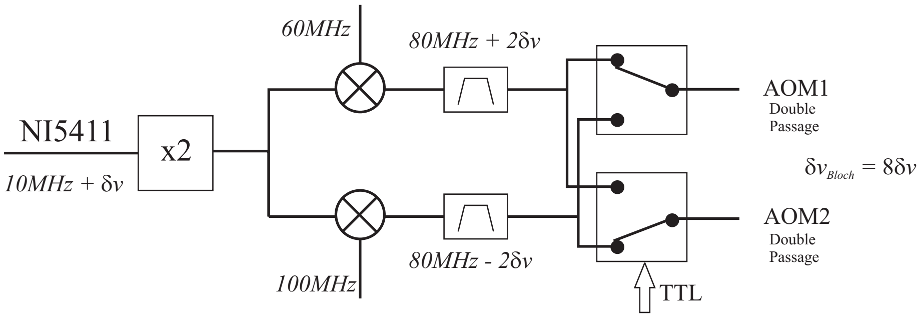


FIG. 4.17 – Dispositif pilotant les modulateurs acousto-optiques Bloch

Pour des modulateurs acousto-optiques en double passage, la vitesse de l'onde quasi-stationnaire est donc donnée par

$$v(t) = \pm 8 \frac{\delta\nu(t)}{(2k_{\mathrm{Ti-Sa}})} \tag{4.83}$$

où $k_{\mathrm{Ti-Sa}}$ correspond au vecteur d'onde Bloch pour $\delta\nu = 0$.

Notons enfin que puisque les deux balayages sont opposés en fréquence, le recul donné aux atomes est indépendant de $\delta\nu$ et vaut $2\hbar k_{\mathrm{Ti-Sa}}$.

Chapitre 5

Les résultats

Dans le chapitre introduisant les oscillations de Bloch, nous avons adopté deux points de vue : soit en termes d'accélération d'atomes par un réseau lumineux uniformément accéléré, soit en termes d'oscillations de Bloch d'un état atomique dans un potentiel périodique, sous l'effet d'une force constante. Cette force peut par exemple être une force d'inertie d'entraînement ou bien une force extérieur comme la gravité. Dans ce cas, les atomes vont osciller à la fréquence ν_B donnée par l'équation

$$\nu_B = \frac{mg}{2\hbar k} \tag{5.1}$$

Je vais commencer pas présenter dans ce chapitre la mesure de ν_B que nous avons effectuée. Cette mesure nous permettra d'avoir une determination de la constante ce gravité g. Je présenterai ensuite les mesures de h/m a proprement parler que nous avons réalisées, pour commencer en configuration horizontale, et ensuite en configuration verticale.

5.1 Configuration verticale stationnaire

5.1.1 Séquence temporelle

Le schéma expérimental se présente donc de la façon suivante (voir figure 5.1) : après avoir sélectionné les atomes à l'aide d'une impulsion Raman, suivie du faisceau pousseur, on met en place l'onde stationnaire pendant un temps T_{Bloch}, puis[1] on mesure la distribution finale de vitesse.

Notons tout de suite que, entre la fin de la phase mélasse et l'impulsion Raman de sélection, s'écoule un délai de quelques millisecondes, de même entre la sélection Raman et la mise en place des faisceaux Bloch. Les atomes, qui sont sélectionnés au centre de la distribution en vitesse de la mélasse, ont donc une vitesse non nulle au moment de la mise en place des faisceaux Bloch, vitesse qui correspond à plusieurs vitesses de recul. Afin de réaliser

[1] On peut aussi rallumer le pousseur après les oscillations de Bloch, afin d'éliminer d'éventuels atomes pompés dans le sous-niveau $|F=2\rangle$ par les lasers Bloch.

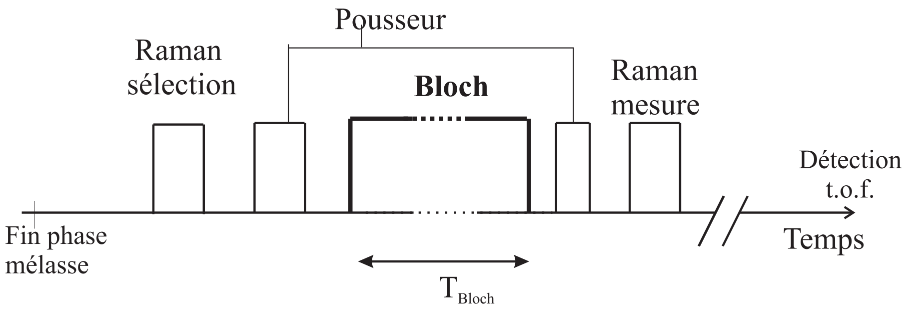


FIG. 5.1 – Séquence temporelle utilisée pour observer les oscillations de Bloch avec une stationnaire.

les oscillations dans la première bande, nous utilisons donc une onde quasi-stationnaire, qui avance à une vitesse correspondant à la vitesse des atomes au moment où elle est mise en place. Ceci ne change pas la fréquence de Bloch, puisque le référentiel lié à l'onde quasi-stationnaire est toujours inertiel.

Pour observer les oscillations de Bloch, nous faisons varier la durée T_{Bloch} pendant laquelle l'onde est allumée. La durée entre la sélection et le début de Bloch, tout comme le délai entre la fin de Bloch et la mesure, sont constants.

5.1.2 Expérience

La figure 5.2 présente l'évolution du centre de la distribution de vitesses pour différentes valeurs du délai T_{Bloch}. Dans cette expérience, on s'attend à ce que la quasi-impulsion augmente linéairement. En regardant la composante de la distribution de vitesses dans la première zone de Brillouin, on observe donc des oscillations dont l'amplitude vaut $2v_r$ (voir aussi figure 4.5, page 94).

Ajustement des données

La vitesse par rapport au réseau[2], après une durée T_{Bloch}, est donnée par

$$v(T_{\mathrm{Bloch}}) = 2v_r \left(\frac{T_{\mathrm{Bloch}}}{\tau_B} - \left[\frac{T_{\mathrm{Bloch}}}{\tau_B} \right] \right) \tag{5.2}$$

où $[x]$ désigne l'entier le plus proche de x et où τ_B est la période des oscillations et vaut :

$$\tau_B = \frac{2v_r}{g} = \frac{2\hbar k}{mg} \tag{5.3}$$

[2]Le vitesse mesurée diffère de cette vitesse par une vitesse constante correspondant à la chute libre des atomes avant et après Bloch

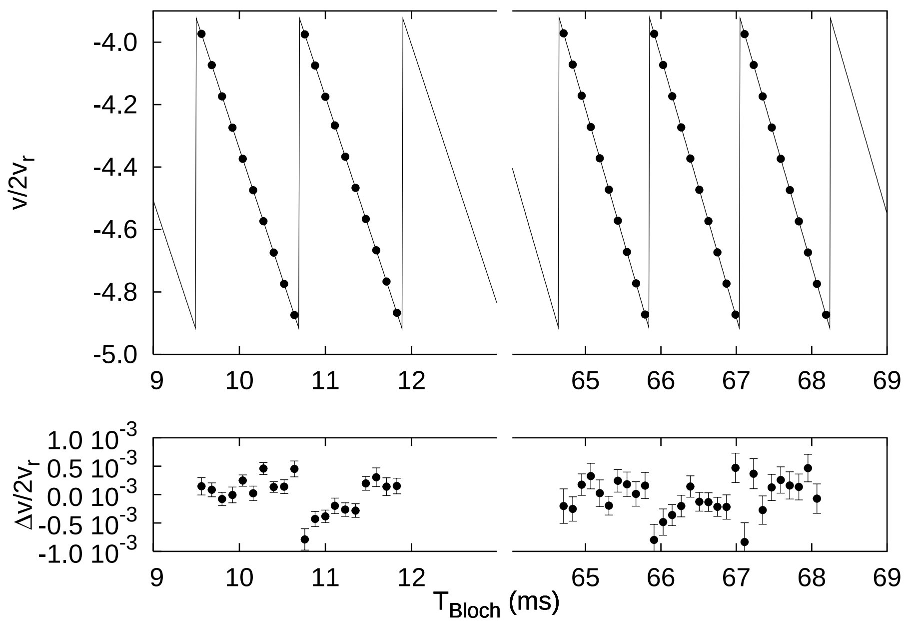


FIG. 5.2 – Oscillations de Bloch dans une onde à vitesse constante par rapport au référentiel du laboratoire. Points : expérience ; ligne : ajustement par l'équation 5.2. En bas : résiduels. L'expérience est réalisée pour $\Delta = 260$ GHz et $U_0 = 2{,}7\ E_r$.

Dans cette équation, il y a deux grandeurs qui, *a priori*, ne sont pas connues : v_r et τ_B. L'ajustement des données par (5.2), permet de remonter à ces valeurs. Mais la seule véritable mesure que l'on effectue est celle de τ_B. C'est ce que l'on peut remarquer figure 5.2 : v_r correspond à l'amplitude des dents de scie et τ_B à la période. L'amplitude et la période sont deux paramètres indépendants. L'amplitude ne dépend pas du nombre d'oscillations ; la résolution que l'on a sur sa mesure n'augmente pas si on augmente le nombre d'oscillations. Par contre, plus on augmente le nombre d'oscillations, plus la résolution sur τ_B augmente.

Ceci peut se montrer en calculant le jacobien de la la fonction définie par

$$\mathcal{S}(v_r,\tau_B) = 2v_r \left(\frac{T_{\text{Bloch}}}{\tau_B} - \left[\frac{T_{\text{Bloch}}}{\tau_B} \right] \right) \tag{5.4}$$

On va avoir

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathrm{v_r}} = 2 \left(\frac{T_{\text{Bloch}}}{\tau_B} - \left[\frac{T_{\text{Bloch}}}{\tau_B} \right] \right) \simeq 1 \tag{5.5}$$

donc

$$\sigma_{v_r} \simeq \sigma_v \tag{5.6}$$

Alors que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tau_{\mathrm{B}}} = 2v_r \frac{T_{\text{Bloch}}}{\tau_B^2} \tag{5.7}$$

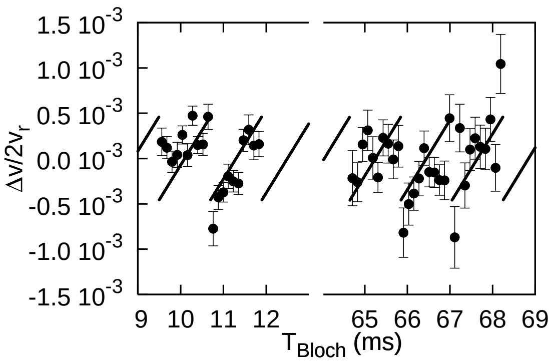


FIG. 5.3 – Résiduels de la courbe figure 5.2. Nous avons ajusté ces résiduels par une fonction "dents de scie" de période τ_B. Ceci nous montre clairement un effet systématique sur l'amplitude des oscillations.

d'où

$$\frac{\sigma_{\tau_B}}{\tau_B} \simeq \frac{1}{N}\frac{\sigma_{v_r}}{v_r} \tag{5.8}$$

où N est le nombre d'oscillations de Bloch.

Effet systématique

Si on effectue l'ajustement de la courbe en laissant v_r et τ_B comme paramètres libres, alors on obtient une valeur de v_r avec une incertitude d'environ 10^{-4}, mais qui est décalée d'environ 10^{-3} par rapport à la valeur à laquelle on s'attend. Ceci peut se voir en regardant les résiduels de la courbe de la figure 5.2 et de l'ajustement par 5.2 fait en fixant[3] v_r (ces résiduels sont repris figure 5.3).

Nous voyons assez clairement qu'il y a un effet systématique lié à la position des atomes dans la première zone de Brillouin : cet effet tend à réduire l'amplitude des oscillations. Nous allons discuter cet effet en détail par la suite (section 5.3.1, p.133). Il est lié au fait que la distribution en vitesse que nous mesurons dans la première zone de Brillouin ne réflète pas exactement la distribution en quasi-impulsion.

Cependant, ceci ne change pas le caractère périodique du système, et la période reste toujours la même.

5.1.3 Mesure de τ_B en deux points

Pour optimiser la mesure, nous pouvons effectuer la mesure de τ_B en utilisant seulement deux durées différentes t_1 et t_2 pour T_{Bloch}, qui pour compenser l'effet systématique mentionné précédemment doivent être séparées par un multiple de la période de Bloch (pour que la vitesse finale des atomes soit la même).

En notant v_i la vitesse et N_i le nombre d'oscillations pour une durée t_i, on obtient la

[3] v_r est connue à une précision bien meilleure que 10^{-4}.

période de Bloch :

$$\frac{1}{\tau_B} = \frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1} + \frac{v_2 - v_1}{2v_r(t_2 - t_1)} \tag{5.9}$$

Pour la mesure que nous présentons figure 5.4, la différence entre la vitesse mesurée pour les deux instants vaut environ $|v_2 - v_1| \simeq 2 \times 10^{-3} v_r$. Le terme de droite contribue donc, pour 50 oscillations, à hauteur de 2×10^{-5} de τ_B.

L'incertitude que l'on a sur v_r tout comme l'effet systématique qui change le v_r apparent de 10^{-3} doivent être multiplié par ce facteur de 2×10^{-5} pour calculer leur contribution à la mesure de τ_B. Ils n'ont donc aucune contribution dans l'incertitude sur la détermination de τ_B, à la précision de 10^{-6} à laquelle nous sommes[4].

Le paramètre critique à mesurer est, par contre, la durée T_{Bloch} (ou plutôt la variation de durée). Il faut aussi être conscient que ce n'est pas vraiment la durée de l'impulsion laser Bloch qui compte, mais le délai entre la sélection et la mesure, qui dans cette expérience varie comme T_{Bloch}.

Lors de la réalisation de ces expériences, nous ne mesurons pas en permanence ce délai, mais faisons confiance à la carte informatique qui génère ces délais. Nous présentons en annexe G.2, p.210, une mesure que nous avons faite de ces délais. La reproductibilité coup sur coup mesurée est de 20 ns, avec une variance d'Allan qui descend jusqu'à 2 ns sur la durée d'un spectre. Converti en vitesse, ce délai de 2 ns donne $3 \times 10^{-6} v_r$. Ce bruit ne contribue donc pas au bruit sur le spectre ($\sim 10^{-4} v_r$) ni à l'incertitude sur τ_B. Notons aussi que le quartz de la carte est décalé par rapport à notre référence de fréquence d'environ 5×10^{-6}.

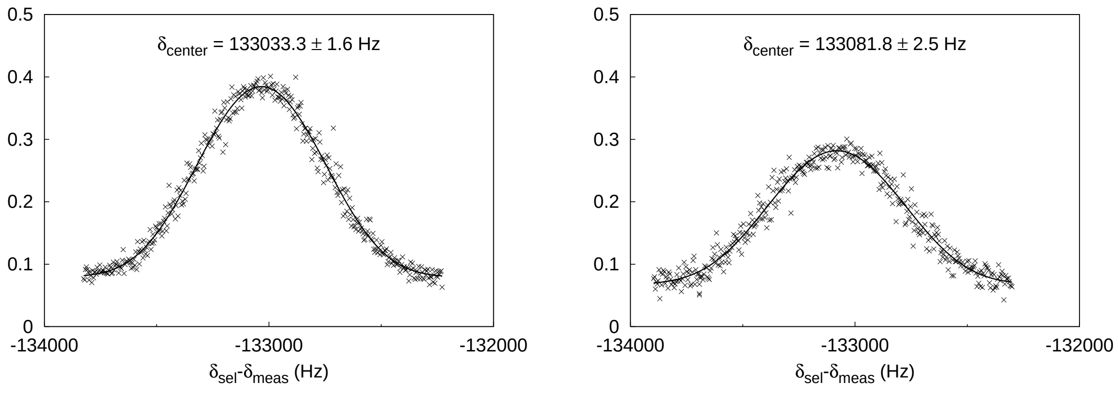


FIG. 5.4 – Spectres obtenus pour $N = 5$ et pour $N = 55$ oscillations. Ces deux spectres représentent 30 minutes d'intégration.

[4]Notons aussi que pour les mêmes raisons, la connaissance des longueurs d'onde des lasers Raman (utilisée pour convertir δ_1 et δ_2 en v_1 et v_2) intervient avec le même préfacteur de 2×10^{-5}.

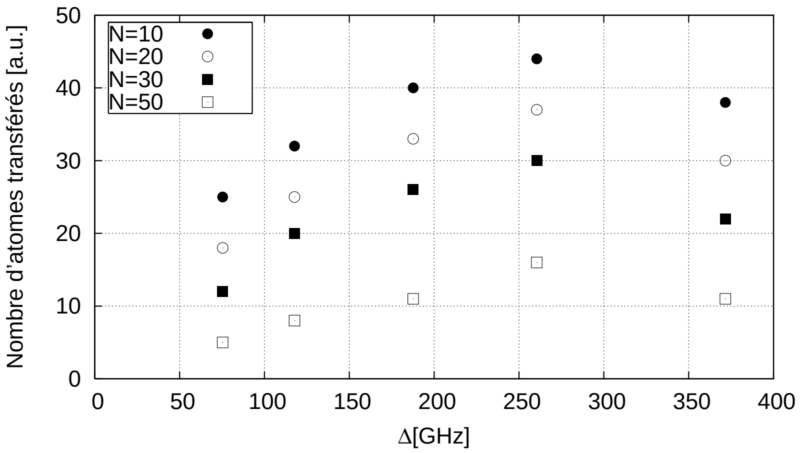


FIG. 5.5 – Nombre d'atomes transférés pour différents nombres N d'oscillations.

5.1.4 Limitation du nombre d'oscillations

Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.4, le spectre effectué avec 55 oscillations donne une mesure moins précise de la vitesse. Ceci est dû à deux facteurs : d'une part il y a plus de sensibilité aux vibrations quand le temps entre les deux impulsions Raman augmente, et d'autre part il y a une perte importante du signal lorsque la durée de Bloch augmente.

Lorsque l'on étudie les oscillations de Bloch, il y a deux origines possibles pour les pertes de signal dépendant du nombre d'oscillations : les transitions non-adiabatiques (dont la probabilité est donnée par la formule de Landau-Zener) et les pertes par émission spontanée. Les transitions non-adiabatiques sont importantes lorsqu'on est loin de la résonance à un photon et les pertes par émission spontanée le sont lorsque on est proche de la résonance. Ainsi, en balayant ce désaccord Δ de la transition à un photon, on va pouvoir discriminer dans quelle situation on est.

Nous avons mesuré les pertes pour différentes valeurs de Δ : pour cela nous regardons le nombre d'atomes que l'on est capable de transférer de l'état $|F=1\rangle$ vers l'état $|F=2\rangle$ lorsque la deuxième impulsion Raman est à résonance. Ce nombre nous indique le nombre d'atomes qui ont oscillé de façon cohérente[5]. Nous avons représenté figure 5.5 le nombre d'atomes transférés pour différents nombres d'oscillations en fonction du désaccord Δ. Sur ces courbes, il faut distinguer les pertes constantes et les pertes proportionnelles au nombre d'oscillations.

[5]Lorsque l'on est à faible désaccord, il est possible que des atomes fassent un cycle d'absorption émission spontanée et soient toujours dans la première bande où ils vont continuer à osciller. Parmi les atomes dans $|F=1\rangle$ arrivant au bon moment, il y aura donc des atomes ayant oscillé de façon cohérente ou pas. D'où une réduction de la proportion maximale d'atomes que l'on peut retransférer. A cause du pousseur que l'on rallume juste après Bloch, on ne voit pas les atomes ayant fait une émission spontanée vers $|F=2\rangle$.

En effet dans cette expérience, le potentiel périodique est coupé non adiabatiquement[6] ; à la fin des oscillations, il y a donc une partie des atomes qui sont dans les bandes latérales à $\pm 2\hbar k$. Il y a donc une réduction du signal, indépendant du nombre d'oscillations. Ce phénomène est d'autant plus important que le potentiel est profond : c'est ce que l'on voit sur la figure 5.5 lorsque on est à faible Δ.

Pour regarder les pertes par oscillation, nous comparons donc le nombre d'atomes transférés pour deux valeurs différentes du nombre d'oscillations. Nous avons représenté figure 5.6 les mesures de ces pertes. A partir des paramètres d'intensité du laser mesurée par un wattmètre et de Δ, nous avons calculé (ligne pointillée) les pertes attendues par la formule de Landau-Zener (équation 4.47 ; page 101) et par émission spontanée (équation 4.50 ; page 102).

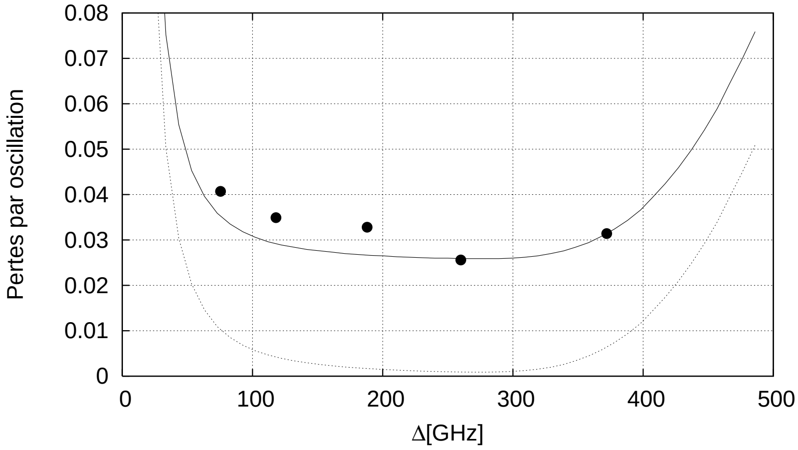


Fig. 5.6 – Pertes par oscillation en fonction du désaccord Δ. Points : données expérimentales ; ligne pointillée : modélisation par la formule de Landau-Zener et l'émission spontanée ; ligne pleine : modélisation incluant un taux de pertes constant supplémentaire.

Pertes par collision avec des atomes chauds

Nous pensons que l'important désaccord que l'on observe entre ce modèle (ligne pointillée de la figure 5.6) et l'expérience provient d'un amortissement supplémentaire dû aux collisions entre les atomes sélectionnés pour la mesure et les atomes de la vapeur de rubidium utilisée pour charger le piège magnéto-optique (atomes chauds).

Cette hypothèse se trouve confirmée par le fait que si on lance les atomes vers le haut avec environ 50 oscillations, le signal que l'on observe est fortement réduit, alors que ce n'est pas le cas si après avoir accéléré les atomes on les ramène vers le bas avec une autre série d'oscillations. Cette réduction du nombre d'atomes détectés semble donc dépendre du temps

[6] Nous n'avons pas eu le temps de réaliser l'expérience avec coupure adiabatique pour des raisons techniques.

passé par les atomes entre la fin de la mélasse et la détection, indépendamment de ce qui se passe pendant les oscillations de Bloch.

Le taux d'amortissement que l'on a mesuré à partir de la figure 5.6 correspond à une durée de vie de 70 ms.

5.1.5 Application de la mesure de la période de Bloch en configuration stationnaire

Mesure de h/m

A partir de la mesure de la période de Bloch, et d'une mesure de g, il est possible de remonter à une valeur de h/m. Il s'agit de la configuration qui constitue le projet initial avec lequel F. Biraben a commencé cette expérience. L'intérêt de cette méthode, par rapport à celle que nous présenterons dans la suite, est que la mesure se fait sans déplacement moyen des atomes. Les effets systématiques qui peuvent apparaître et qui dépendent de la position des atomes sont donc supprimés.

Un deuxième avantage est la possibilité d'utiliser une cavité de surtension afin d'avoir une onde stationnaire plus intense, et donc de pouvoir en théorie réaliser plus d'oscillations. Un autre avantage de l'utilisation d'une cavité de surtension est un meilleur contrôle du mode du champ élétromagnétique (col du faisceau et rayon de courbure), qui , comme nous allons le voir dans la suite, limite actuellement l'exactitude de notre mesure.

Cependant, un problème majeur reste la nécessité d'utiliser un autre appareil pour mesurer la gravité et aussi d'extrapoler la valeur de celle-ci à la position des atomes. Les meilleurs gravimètres à "coin de cube" ont actuellement un résolution de 2×10^{-9}, ce qui est suffisant pour obtenir un mesure de h/m d'intérêt métrologique.

Enfin, dans cette mesure, il ne faut pas oublier qu'en mesurant g, on "mesure" aussi les vibrations. Il faut donc trouver un moyen de les éliminer. Ceci est possible, mais représente un véritable travail.

Nous n'avons donc pas cherché au cours de cette thèse à améliorer le dispositif de mesure de τ_B au delà des résultats présentés dans cette partie.

Mesure de g

La résolution que nous avons obtenue sur τ_B est d'environ 2.10^{-6}. Puisque l'on connaît le rapport h/m avec une bien meilleure précision, notre expérience sert plutôt à mesurer l'accélération locale de la pesanteur g.

Nous représentons figure 5.7 un ensemble de telles mesures. Par rapport aux mesures de g directes présentées dans la première partie sur le senseur inertiel (section 2.3, page 43), la sensibilité, qui est limitée par les vibrations, est la même. Par contre, nous sommes moins sensibles aux gradients de champs magnétiques que nous avons mentionnés dans la mesure

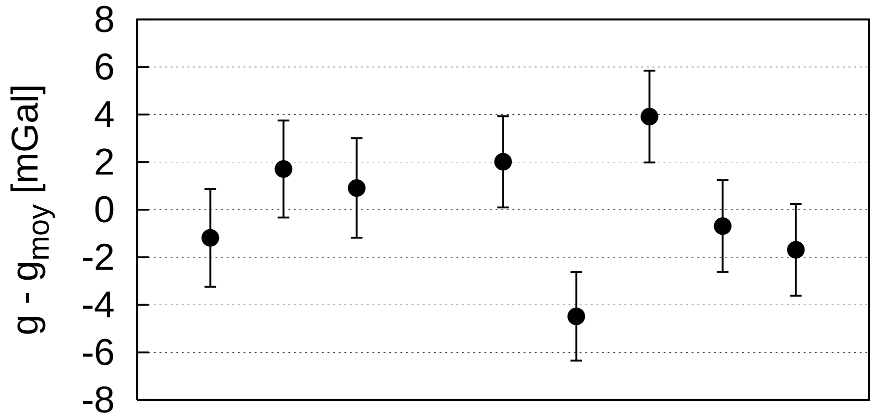


Fig. 5.7 – Mesure de g : chaque point représente 30 minutes d'intégration (800 points). Mesure différentielle entre 5 et 55 oscillations. L'unité utilisée en gravimétrie pour mesurer g est le Gal : 1 Gal=1 cm.s^{-2}.

directe, puisque les atomes ne bougent presque pas. En moyennant cette série de mesures, nous arrivons à une détermination de g avec une précision de 10^{-6}.

Mesure de force : expérience de Florence

Parallèlement à nos expériences à Paris, l'équipe de M. Inguscio à Florence a aussi réalisé une expérience d'oscillations de Bloch en configuration verticale [52]. Cette expérience est réalisée avec une méthode très différente de la nôtre : un gaz d'atomes dégénérés est piégé magnétiquement. L'onde stationnaire est alors allumée et le piège coupé. Les atomes vont subir des oscillations de Bloch dans le réseau optique, tout en étant piégés transversalement. Le réseau est ensuite coupé adiabatiquement et la vitesse des atomes mesurée par imagerie de temps de vol.

L'expérience de Florence a mis en évidence un comportement très différent entre des bosons condensés et des fermions dégénérés : avec le premier système, il n'est pas possible d'observer les oscillations en raison du fort taux de collisions, alors que dans le second cas, ils ont observé jusqu'à 110 oscillations.

La principale différence avec notre expérience est que le nuage d'atomes utilisé a des dimensions de l'ordre de 100 μm, alors que dans notre expérience, la taille du nuage après la phase mélasse est plutôt de l'ordre du millimètre. Profitant du fait qu'au cours des oscillations de Bloch les atomes ne vont pas se déplacer, il peut donc être possible avec ce type d'expérience de mesurer des forces à l'échelle submillimètrique [53]. Avec un tel dispositif il devrait être possible de mesurer les forces d'interaction entre un atome et une surface métallique. Sur une telle distance il devrait être possible de mesurer les forces de Casimir ainsi que de tester la force d'interaction gravitationnelle.

Un projet ayant le même but est en cours d'élaboration au SYRTE. Cette expérience utilisera aussi un réseau optique pour confiner les atomes près de la surface métallique. Par contre la méthode de détection sera basée sur la mesure précise des échelles de Wannier-Stark par spectroscopie [54], plutôt que sur la mesure de la période de Bloch.

Balance du watt

Nous venons de présenter des utilisations de la mesure de la fréquence de Bloch pour soit mesurer h/m soit mesurer une force, suivant que l'on considère que c'est l'un ou l'autre facteur qui limite la mesure. Nous suggérons d'utiliser directement la mesure de la fréquence de Bloch associée à une balance du watt.

La balance du watt est une expérience qui consiste à mesurer en termes électriques la puissance Mgv des forces de gravité exercées sur une masse macroscopique M (mesurée par rapport au kilogramme étalon) se déplaçant à la vitesse v.

Il est de plus possible de mesurer la puissance électrique en fonction de la constante R_K de von Klitzing (résistance de l'effet Hall quantique) et de la constante de K_J de Josephson (qui permet de mesurer une tension en terme de fréquence). Mesurer une puissance électrique, revient alors à mesurer deux fréquences F_J et F_J' et une fraction pure C :

$$Mgv = C\frac{F_J F_J'}{R_K K_J^2} \tag{5.10}$$

En utilisant les relations[7]

$$K_J = \frac{2e}{h} \qquad \text{et} \qquad R_K = \frac{h}{e^2} \tag{5.11}$$

on obtient que la balance du watt mesure

$$\frac{Mg}{h} = \frac{C}{4}\frac{F_J F_J'}{v} \tag{5.12}$$

On voit immédiatement que la mesure de fréquence $\nu_B = mg\lambda/2h$ des oscillations de Bloch d'un atome de masse m dans le même champ de gravité permet de mesurer le rapport entre une masse macroscopique et une masse atomique :

$$\frac{M}{m} = \frac{C}{8}\frac{F_J F_J'\lambda}{v\nu_B} \tag{5.13}$$

Cette expérience permet donc de mesurer de façon indirecte le nombre d'Avogadro [55]. L'utilisation des oscillations de Bloch par rapport à une mesure indépendante de g et h/m permet d'être sensible uniquement à la gravité sur une très petite zone (de l'ordre de la taille du nuage, c'est-à-dire du millimètre), ce qu'aucun autre gravimètre n'est capable de faire. L'exactitude de la mesure est potentiellement beaucoup plus importante.

[7] Notons que les auteurs du rapport 2002 du CODATA utilisent toujours le conditionnel ([1], p.31) : "if one assumes that the relations $K_J = 2e/h$ and $R_K = h/e^2$ are valid".

5.2 Les premiers résultats en configuration horizontale

Nous avons obtenu nos premiers résultats concernant les oscillations de Bloch pendant la première année de ma thèse. Ces résultats ont été présentés en détail dans la thèse de Rémy Battesti, qui était alors en troisième et dernière année. L'ensemble de ces expériences a été effectué en configuration horizontale, c'est-à-dire que l'on accélère les atomes horizontalement, et mesure leur vitesse sur le même axe. L'expérience est plus simple à réaliser dans cette configuration parce qu'il n'y a pas de changement de vitesse des atomes à cause de l'accélération de la pesanteur.

Dans cette partie, je vais présenter les principales avancées et les idées que nous avons eues pour la configuration horizontale et que nous utilisons toujours en configuration verticale. Dans ces deux configurations (configuration horizontale et verticale accélérée, par opposition à la configuration verticale stationnaire), les oscillations de Bloch (c'est-à-dire le passage périodique à la résonance de Bragg) sont obtenues en balayant la différence de fréquences des deux faisceaux Bloch, produisant ainsi une accélération des atomes par pas de $2v_r$.

5.2.1 Mesure différentielle

L'accélération cohérente des atomes peut se faire vers la gauche ou la droite. Pour effectuer une mesure de v_r, nous utilisons les deux sens, augmentant ainsi par un facteur deux le nombre d'oscillations disponible. En effectuant la différence entre deux mesures pour un nombre différent d'oscillations, on élimine aussi un certain nombre d'effets systématiques.

Le principal effet qui est éliminé est celui dû à la mauvaise horizontalité des faisceaux Raman. Si les faisceaux forment un angle θ par rapport à l'horizontale, alors un terme supplémentaire apparaît dans le changement de vitesse :

$$\Delta v = 2Nv_r + gT_{\text{Raman}} \sin\theta \tag{5.14}$$

où g est l'accélération de la pesanteur et T_{Raman} le délai entre les deux faisceaux Raman.

Pour obtenir une mesure de la vitesse de recul, nous effectuons deux mesures, en accélérant les atomes dans deux directions opposées.

$$\Delta v^{\pm} = \pm 2Nv_r + gT_{\text{Raman}} \sin\theta \tag{5.15}$$

Le délai T_{Raman} est le même dans les deux sens. Nous obtenons donc que

$$v_r = \frac{\Delta v^+ - \Delta v^-}{4N} \tag{5.16}$$

D'autre part, nous avons pu observer que l'effet dû à l'angle des faisceaux fluctue sur des échelles de temps de l'ordre de 10 minutes, sans doute à cause du changement de température dans la pièce ou au niveau du bâtiment. Pour éviter d'avoir un effet systématique lié aux dérives de température, il faut que les deux mesures Δv^+ et Δv^- soient effectuées en même temps. Or, pour obtenir une mesure de vitesse, il faut prendre des enregistrements pour différentes fréquences de mesure, c'est-à-dire qu'il faut réaliser la séquence "chargement du piège – sélection-accélération-mesure – détection" un grand nombre de fois (typiquement nous faisions des spectres de 400 points, soit 10 minutes). La solution que nous avons adoptée consiste à enregistrer alternativement des points sur les deux spectres[8].

En configuration verticale accélérée, l'effet dû à la gravité est évidement beaucoup plus important. Mais il peut être supprimé exactement de la même façon. Notons que dans ce cas, nous sommes beaucoup moins sensibles aux fluctuations de l'angle θ.

5.2.2 Double accélération

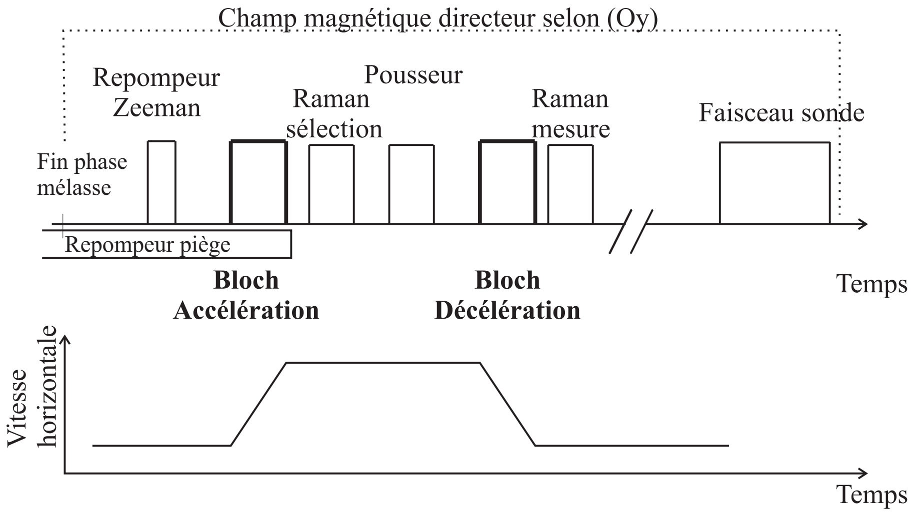


FIG. 5.8 – Séquence temporelle

Un problème survient rapidement en configuration horizontale : si l'on accélère trop les atomes, il ne vont plus arriver dans la zone de détection située 15 cm au-dessous du piège. Dans notre expérience, cette limitation apparaît dès 4 ou 5 oscillations (voir la figure 2.6, page 28, pour un schéma d'ensemble de la cellule).

Pour aller au-delà de cette limitation, nous avons mis en place un système de double accélération. A la fin de la phase mélasse, lorsque tous les atomes sont dans $|F=2\rangle$, nous effectuons une première accélération. Les atomes dans la première zone de Brillouin sont accélérés de $2N_A$ reculs[9]. On effectue alors la sélection sur les atomes accélérés. Le faisceau pousseur élimine les atomes non sélectionnés. On effectue alors une deuxième accélération

[8]En fait l'enregistrement est effectué dans un ordre pseudo-aléatoire : la succession des fréquences et de la trajectoire (trajectoire gauche ou droite) est enregistrée dans un tableau qui est mélangé avant de démarrer l'enregistrement.

de Bloch (N_R oscillations), mais dans l'autre sens, afin de décélérer les atomes sélectionnés jusqu'à une vitesse nulle. On effectue alors la seconde impulsion Raman de mesure, et les atomes tombent verticalement dans la zone de détection.

Notons, qu'il n'est pas possible de faire l'inverse, à savoir ralentir les atomes après avoir fait la mesure : en effet à ce moment là les atomes sont dans les deux états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$, avec une différence de vitesse de $2v_r$ entre chaque état. Il n'est donc pas possible de les charger tous les deux dans la première bande pour faire des oscillations de Bloch.

Avec un tel système, nous avons pu réaliser jusqu'à 50 oscillations. La principale limite à ce nombre provient sans doute du déplacement qui persiste lorsque l'on accélère et décélère les atomes et qui les empêche de retomber dans la zone de détection.

Il est intéressant de remarquer que cette idée de double accélération, que nous avons eue pour augmenter le nombre d'oscillations en configuration horizontale, va aussi pouvoir être utilisée en configuration verticale. Dans cette configuration, la trajectoire des atomes est toujours alignée avec la détection. Cependant si on effectue beaucoup d'oscillations, les atomes vont atteindre le haut de la cellule. Le schéma de double accélération permet de limiter le mouvement des atomes.

5.2.3 Comparaison des différents isotopes

L'un des intérêts de l'utilisation du rubidium comme atome pour mesurer le recul est qu'il possède deux isotopes présents en quantité abondante dans le nature : le rubidium 85 et le rubidium 87. Les mesures en configuration horizontale ont été effectuées avec les deux isotopes.

Les lasers pour le piège magnéto-optique ont été conçus de tel sorte qu'il est très facile de passer d'un isotope à l'autre. Le principal changement vient de la chaîne hyper-fréquence (voir figure 2.13, page 37) utilisée pour l'asservissement en phase des faisceaux Raman : en effet l'écart hyperfin ω_{SHF} de l'isotope 85 n'est plus de 6,8 GHz, mais de 3,8 GHz, et la plupart des composants utilisés (amplificateur et oscillateur YIG en particulier) ne peuvent pas fonctionner dans cette gamme de fréquence.

Les résultats que nous avons obtenus avec l'isotope 85 n'ont pas été aussi performants que ceux avec l'isotope 87. Nous expliquons ceci par un bruit beaucoup plus important sur les spectres dû à des atomes parasites qui ont été pompés par le pousseur dans le mauvais sous-niveau hyperfin. Cet effet est plus important pour l'isotope 85 qui possède une structure hyperfine de l'état excité plus faible. Les mesures prises avec l'isotope 85, dans les mêmes conditions que l'isotope 87, ont une incertitude presque 5 fois plus grande.

Nous avons donc décidé de poursuivre les expériences en vertical sur l'isotope 87. L'ensemble des résultats que je présente dans ce manuscrit ont été obtenus avec cet isotope.

[9] Pendant la première accélération, le repompeur du piège est toujours allumé afin de remettre dans $|F=2\rangle$ les atomes qui subissent une émission spontanée vers $|F=1\rangle$.

Les résultats de la configuration horizontale

Les résultats que nous avons obtenus en configuration horizontale sont présentés en détail dans la référence [29] (jointe en annexe A.2) et la thèse de Rémy Battesti [31].

Le nombre d'oscillations est de ± 50, avec pour les meilleurs spectres une résolution en vitesse de $2 \times 10^{-4} v_r$ pour 10 minutes d'enregistrement par spectre. La résolution sur h/m est donc de $1{,}5 \times 10^{-6}$ en 20 minutes. Cependant les résultats se moyennent avec un $\chi^2/n \simeq 2$, et la dispersion des mesures est de l'ordre de 10^{-5}. Il y a de plus un écart de $1{,}5\,\sigma$ entre la moyenne de nos mesures et la valeur attendue.

Pour pouvoir rechercher l'origine de cet écart, nous avons entrepris d'améliorer la sensibilité du dispositif afin de réduire le temps d'intégration à partir duquel cet effet systématique apparaît clairement. Pour ce faire, nous sommes passés en configuration verticale.

5.3 Configuration verticale accélérée

Le principal avantage de la configuration verticale est de pouvoir bénéficier d'un plus grand temps pendant lequel les atomes sont dans les faisceaux lasers. On peut ainsi espérer augmenter le nombre d'oscillations. En fait, plutôt que d'augmenter la durée disponible, cette configuration nous permet d'augmenter l'intensité des lasers en utilisant un faisceau de même puissance plus étroit, et ceci sans être limité par le temps. L'autre avantage est que, en configuration verticale, la trajectoire des atomes reste toujours alignée avec la zone de détection. Nous ne sommes donc plus contraints de finir la mesure avec des atomes à vitesse nulle. On peut en tirer deux avantages : en lançant les atomes vers la bas, il est possible de réduire la durée du temps de vol – et donc de réduire les pertes par collision avec des atomes de la vapeur (cf. la section 5.1.4, p.120, sur le vertical stationnaire). D'autre part, il y a maintenant une séparation temporelle que l'on peut effectuer dans l'analyse du temps de vol entre les atomes qui ont participé à la mesure, et les atomes "parasites" qui n'ont pas participé et constituent un fond.

5.3.1 Mise en évidence et étude d'effets systématiques

Nous allons dans cette partie décrire deux effets systématiques que nous avons pu mettre en évidence et que l'on peut annuler en changeant le protocole de mesure. De façon générale, nous noterons $\Delta\left(\frac{h}{m}\right)$ la valeur absolue d'un effet systématique.

Le champ magnétique

Les premières mesures en configuration verticale ont été effectuées avec environ ± 80 oscillations. La sensibilité du senseur inertiel (limitée alors par les photodiodes de détection très lentes) est d'environ 3 Hz ($2 \times 10^{-4} v_r$). Ceci nous a donc conduit à des mesures légèrement plus précises qu'en horizontal.

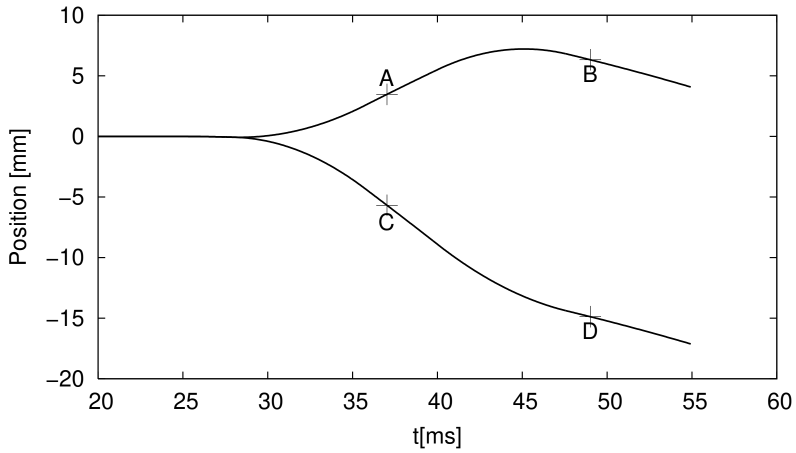


FIG. 5.9 – Simulation de la position des atomes au cours de la mesure. A et B (resp. C et D) désignent la position des atomes à la sélection et à la mesure pour la trajectoire du haut (resp. celle du bas). La non symétrie des deux trajectoires provient de la gravité et d'un nombre différent de reculs transmis pour la trajectoire du haut et la trajectoire du bas. La différence entre le nombre d'oscillations pour la trajectoire du haut et celle du bas est de 160.

Cependant, on a mesuré alors un effet systématique d'environ $2{,}5 \times 10^{-6}$ sur h/m, bien supérieur à celui observé en horizontal. Cet effet systématique s'explique en partie par des effets dus aux gradients de champ magnétique.

Nous travaillons avec des atomes dans l'état $m_F = 0$, c'est donc à l'effet Zeeman quadratique du second ordre que nous sommes sensibles. Pour la structure hyperfine du fondamental du rubidium 87, on a un effet qui vaut, pour un champ magnétique B, $K^{(2)}B^2$, avec $K^{(2)} \simeq 575$ Hz.G^{-2}. Ainsi il faut remplacer ω_{SHF} par $\omega_{\text{SHF}} + K^{(2)}B^2$ dans le calcul de l'effet Doppler.

En utilisant les notations définies sur la figure 5.9, on obtient, à partir de l'équation 2.39 (page 27), un effet systématique qui vaut en valeur relative

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right) = \frac{K^{(2)}}{4Nk_Bk_R}\left(B^2(B) + B^2(D) - B^2(A) - B^2(C)\right) \tag{5.17}$$

où k_B et k_R désignent les vecteurs d'onde Bloch et Raman. En développant B à l'ordre 1, on obtient que

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right) = \frac{K^{(2)}B_0\nabla_z B}{2Nk_Bk_R}\left(z_B + z_D - (z_A + z_C)\right) \tag{5.18}$$

où B_0 désigne le champ magnétique directeur appliqué pour polariser les atomes et $\nabla_z B$ le gradient de champ magnétique selon la direction z. On peut remarquer sur la figure 5.9 que les deux trajectoires ne sont pas symétriques. L'effet d'un gradient de champ magnétique constant n'est donc pas compensé.

—**Champ magnétique directeur**— A cause de la dépendance à l'ordre 2 du champ magnétique, les effets que l'on mesure sont proportionnels à l'intensité du champ magnétique directeur. Nous avons représenté figure 5.10 cet effet pour différentes valeurs du champ magnétique directeur. On obtient un effet systématique sur h/m, en valeur relative, d'environ 10^{-5} par Gauss. Les valeurs usuelles avec lesquelles nous travaillons sont de l'ordre de 150 mG. Cette valeur ne peut pas être réduite car, pour être efficace, le champ magnétique directeur doit être supérieur aux fluctuations du champ qui sont importantes dans notre cellule non blindée. L'effet de $2{,}5 \times 10^{-6}$ correspond donc au bon ordre de grandeur.

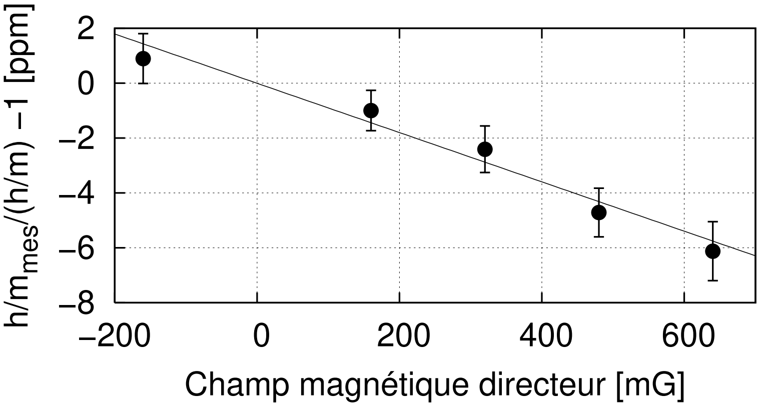


FIG. 5.10 – Effet systématique en fonction de l'intensité du champ magnétique directeur. La trajectoire des atomes correspond à celle décrite figure 5.9.

—**Mesure du champ magnétique**— En utilisant des transitions Raman copropageantes résonnantes avec la transition $|F = 2, m_F = 1\rangle \rightarrow |F = 1, m_F = 1\rangle$ il est possible de mesurer le champ magnétique précisément. Pour sonder la distribution du champ magnétique en différents endroits de la cellule, nous avons effectué la transition à différents instants, après la fin de la phase mélasse. La chute libre des atomes détermine alors la position à laquelle le champ est mesuré.

En fait, cette méthode ne fonctionne pas bien : en raison des fluctuations du champ, qui sont supérieures à la largeur de la transition, il n'est pas possible d'obtenir un spectre facile à ajuster. De plus, en raison du gradient de champ magnétique et de l'étalement des atomes (de l'ordre de 1 mm), pour une fréquence donnée seule une partie de atomes sera résonnante. En mesurant le temps d'arrivée de ces atomes, nous pouvons remonter à leur position à l'instant de l'impulsion Raman. Connaissant la fréquence Raman, on connaît alors la valeur du champ magnétique en un point donné.

La figure 5.11 illustre une mesure de ce type. Le gradient de champ magnétique que l'on en déduit vaut environ 50 mG.cm^{-1}.

Cette méthode présente l'inconvénient de ne pas séparer les variations temporelles des variations spatiales. On s'est rendu compte que la bobine ayant un support métallique utilisée

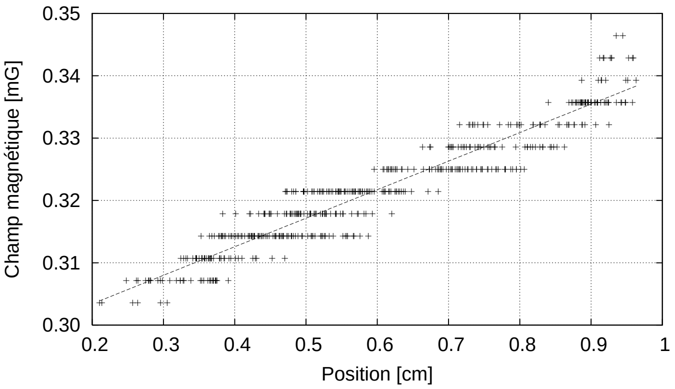


FIG. 5.11 – Champ magnétique en fonction de la position des atomes. Pour chaque temps de vol, et pour différentes valeurs du désaccord, on reporte la position des atomes ayant effectué la transition par une croix. L'ajustement par une droite (courbe en pointillé) donne un gradient de environ 50 mG.cm^{-1}.

pour créer le champ magnétique directeur pour les faisceaux Raman présente un temps de réponse très important[10] (courants de Foucault).

En utilisant la valeur mesurée de 50 mG.cm^{-1} dans l'équation (5.18), on obtient un effet systématique d'environ 2×10^{-6}. Ceci confirme l'origine de l'effet systématique observé.

Compensation de l'effet du champ magnétique par inversion du sens des faisceaux Raman

Il existe une technique pour compenser les effets systématiques liés à un déplacement des niveaux des atomes, tel l'effet Zeeman quadratique ou les déplacements lumineux.

Si l'on écrit de façon générique l'écart entre les niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ par

$$E_b - E_a = \hbar\left(\omega_{\mathrm{SHF}} + \Delta(z,t)\right) \tag{5.19}$$

alors le désaccord Raman pour un atome à la vitesse v est donné non plus par l'équation 2.3 (p.16) mais par

$$\delta = \Delta(z,t) - \epsilon_R\,(k_1 + k_2)\left(v_i + \epsilon_R \frac{\hbar}{2}\,(k_1 + k_2)\right) \tag{5.20}$$

où ϵ_R vaut ± 1 suivant le sens des faisceaux Raman (+ si le recul de la transition à la sélection est dirigé vers le haut).

En effectuant deux mesures de δ, l'une avec les faisceaux dans un sens (δ^I), l'autre avec les faisceaux Raman dans l'autre sens (δ^{II}), et en prenant la moitié de la différence des deux mesures, on obtient que

$$\frac{\delta^I - \delta^{II}}{2} = \frac{\Delta(z^I,t^I) - \Delta(z^{II},t^{II})}{2} + (k_1 + k_2)\,v_i \tag{5.21}$$

[10]Notons que ce n'est pas le cas de la bobine à support non métallique utilisée auparavant en configuration horizontale.

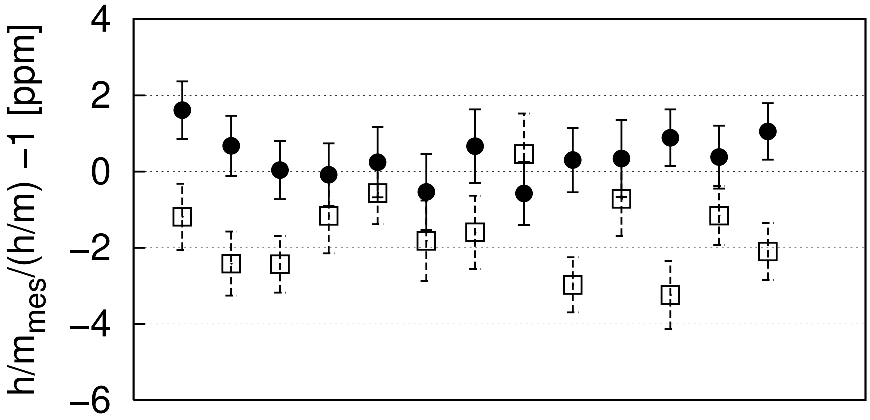


FIG. 5.12 – Mesures de h/m effectuées en inversant le sens des faisceaux Raman. Les carrés correspondent au sens utilisé précédement. La moyenne des mesures dans les deux sens est $-0{,}63\pm 0{,}17$ ppm. Le champ magnétique correspond à 150 mG.

Si on réalise les deux mesures au même endroit, et que l'on suppose que le champ magnétique dépend du temps t périodiquement avec la séquence[11], alors les deux effets se compensent et on peut déduire v de la mesure de δ^I et δ^{II} :

$$v = \frac{\delta^I - \delta^{II}}{2(k_1 + k_2)} \tag{5.22}$$

Dans la configuration où les faisceaux Raman sont produits par rétroréflexion d'une polarisation par un miroir, pour retourner les sens des faisceaux Raman, il suffit de faire tourner la polarisation de 90°. Ceci est effectué à l'aide d'une lame demi-onde. Dans un premier temps, nous avons effectué cette opération manuellement en changeant de polarisation entre les spectres. Nous avons ensuite installé une bascule pilotée par TTL permettant de placer ou d'enlever du trajet la lame demi-onde. Ceci permet alors de prendre les points sur le spectre en alternance.

Nous pouvons voir sur la figure 5.12 qu'il y a bien un effet lorsque l'on change le sens des faisceaux Raman. Cependant, la valeur moyenne mesurée est décalée de $0{,}63 \pm 0{,}17$ ppm par rapport à la valeur attendue de h/m.

Nous allons voir que cet effet est présent à cause d'un mauvaise programmation des fréquences des synthétiseurs utilisés pour générer la rampe de fréquence d'accélération de Bloch. Cependant il est intéressant d'étudier en détail ce qui se passe, d'autant que l'effet apparaît aussi en configuration verticale stationnaire.

[11]Le champ magnétique provenant des bobines du piège est périodique et nous synchronisons l'expériences sur le 50 Hz du secteur : ainsi le champ magnétique dépend essentiellement de l'instant par rapport au début de la séquence temporelle

Effet de la coupure non adiabatique

Dans les expériences que je viens de présenter, le potentiel lumineux était coupé brutalement à la fin des oscillations de Bloch (voir page112). Ce que nous mesurons donc est la distribution en impulsion de l'état atomique qui ici est un état propre de l'hamiltonien de Bloch ayant une quasi impulsion donnée. Calculons précisément ce qui se passe.

Nous nous plaçons dans le référentiel du laboratoire. Partant d'un état de quasi impulsion $q = 0$, dans la première bande d'énergie ($n = 0$), l'état atomique peut être décrit en projetant l'équation (4.24) sur l'espace de $|p\rangle$:

$$|\psi(p)|^2 = |\Phi_0(p - mv)|^2 \sum_l \delta(p - 2l\hbar k) \tag{5.23}$$

où $\Phi_0(p)$ est la fonction de Wannier (en représentation p).

Concrètement, on part plutôt d'un paquet d'onde avec une distribution initiale $\eta_{sel}(p)$ d'impulsion déterminée par la sélection Raman. La distribution initiale est centrée en 0 et possède une largeur caractéristique Δv inférieure à $v_r/10$. Cette distribution se retrouve comme distribution en quasi impulsion, si bien qu'à la fin on a une distribution en impulsion de l'état de la forme

$$\eta_{fin}(p) = |\Phi_0(p - mv)|^2 \sum_l \eta_{sel}(p - 2l\hbar k) \tag{5.24}$$

Regarder les atomes ayant acquis $2Nv_r$, revient dans cette équation à ne garder que le terme $l = N$ dans la somme. Pour qu'il y ait des atomes là où on regarde, on doit avoir v proche de $2Nv_r$. En écrivant que $v = 2Nv_r + \delta v$, on obtient que la distribution en impulsion autour de $2N\hbar k$ vaut :

$$\eta_{fin}(p + 2N\hbar k) = |\Phi_0(p - m\delta v)|^2 \eta_{sel}(p) \tag{5.25}$$

Il faut donc multiplier la distribution initiale d'impulsion par une fonction qui dépend de l'impulsion. Ceci aura pour conséquence de déplacer le centre de la transition. De plus ce déplacement dépendra de δv, vitesse du réseau par rapport à la vitesse des atomes. Dans le référentiel de l'onde, δv correspond à la position des atomes dans la première zone de Brillouin (voir figure 5.13).

En supposant que la largeur de la distribution initiale en impulsion est faible, on peut développer Φ_0^2 au premier ordre. On obtient alors que

$$\eta_{fin}(p + 2N\hbar k) = \left(\alpha(\delta v) + \beta(\delta v)\frac{p}{\hbar k}\right) \eta_{sel}(p) \tag{5.26}$$

où

$$\alpha(v) = |\Phi_0(mv)|^2 \qquad \text{et} \qquad \beta(v) = v_r \frac{\mathrm{d}\alpha(v)}{\mathrm{d}v} \tag{5.27}$$

Le terme $\alpha(\delta v)$ traduit une perte de contraste lorsque $v \neq 0$. Le terme $\beta(\delta v)$ va se traduire par un déplacement du centre de la distribution de vitesse (voir figure 4.6, page 95).

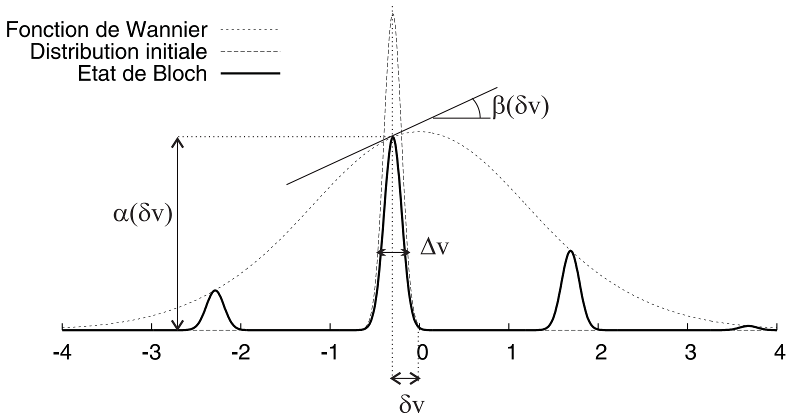


FIG. 5.13 – Fonction de Wannier. Δv représente la largeur de la distribution de vitesse, δv l'écart entre la vitesse des atomes et le centre de la première zone de Brillouin. On a noté $\alpha(\delta v)$ la valeur de la fonction de Wannier et $\beta(\delta v)$ sa dérivée normalisé à v_r.

On peut donner une estimation de cet effet : pour un spectre dont la largeur typique en vitesse vaut Δv, $|\Phi_0|^2$ va varier de $\beta(\delta v)\,\Delta v/v_r$. Le déplacement du spectre est proportionnel au produit de la variation relative de $|\Phi_0|^2$ par sa largeur. On obtient donc que

$$\Delta(v)/v_r \propto \frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\left(\frac{\Delta v}{v_r}\right)^2 \tag{5.28}$$

Nous présentons en annexe F comment calculer précisément l'effet systématique. On trouve une valeur approchée :

$$\frac{\epsilon_v}{v_r} \simeq 0{,}44\,\frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\left(\frac{\hbar\Omega}{4E_r}\right)^2 \tag{5.29}$$

où Ω est la pulsation de Rabi de la transition Raman sélective en vitesse.

Le coefficient $\beta(\delta v)$ peut être calculé analytiquement dans la limite des liaisons faibles ou des liaisons fortes. La fonction de Wannier étant paire, β est nul pour $\delta v = 0$. Il augmente lorsque δv augmente (pour $\delta v < v_r$). Nous avons représenté le résultat d'un calcul numérique sur la figure 5.14. Il est intéressant de remarquer que cet effet décroît vers 0, à la fois lorsque U_0 tend vers 0 et $+\infty$. L'effet est maximal pour un potentiel ayant une profondeur d'environ $10E_r$.

Dans les mesures présentées figure 5.12, le décalage δv est très important au moment où le laser est coupé. Ceci est dû à une erreur dans le calcul de la fréquence des synthétiseurs : le décalage vaut en effet $\delta v = v_r/3$. Avec $\tau = 1{,}2$ ms pour une impulsion π, et en prenant pour $\beta(v) \simeq 0{,}2$ ($U_0 \simeq 10E_r$), on obtient que l'effet systématique est de l'ordre de 6×10^{-7}, toujours pour un nombre d'oscillations de ± 80 (figure 5.15). Cet effet correspond donc bien à l'ordre de grandeur mesuré. De plus, on a pu vérifier qu'il change bien de signe lorsque l'on change le signe de δv.

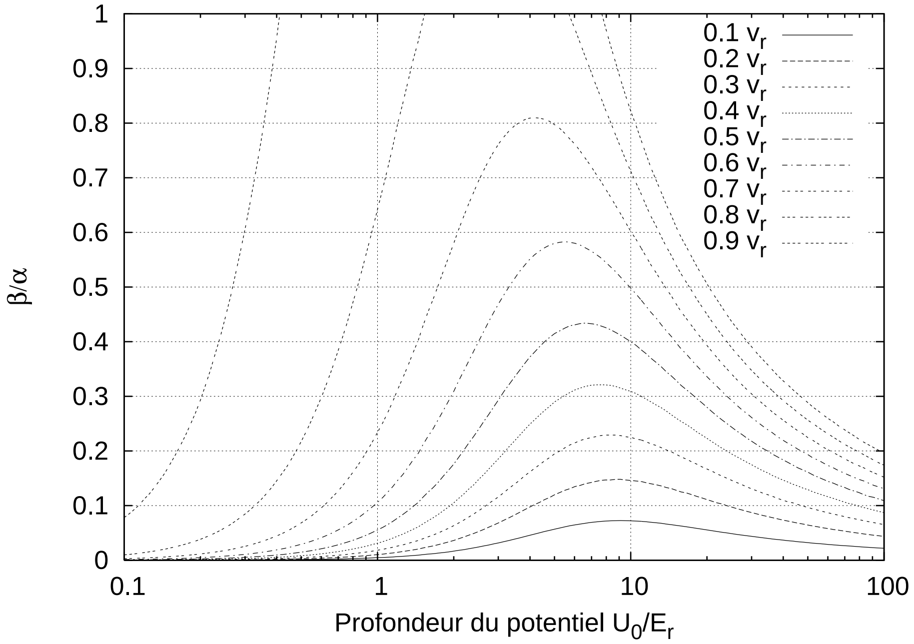


FIG. 5.14 – Courbure de la fonction de Wannier (coefficient β/α) en fonction de la profondeur du potentiel, et pour différentes positions de la distribution de vitesse par rapport à la première zone de Brillouin.

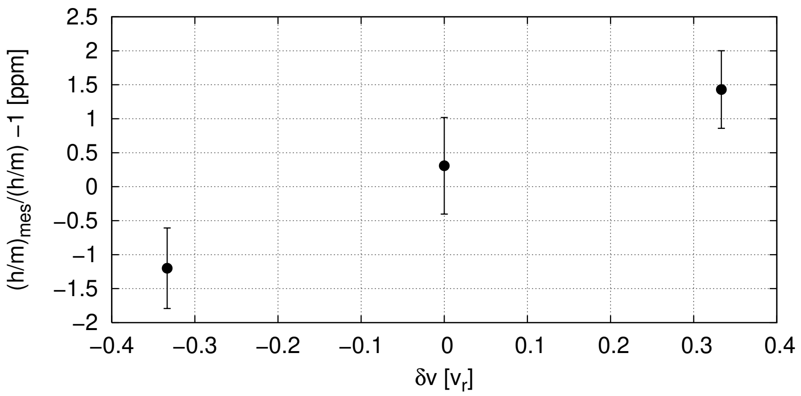


FIG. 5.15 – Effet systématique dépendant de la vitesse du réseau par rapport aux atomes.

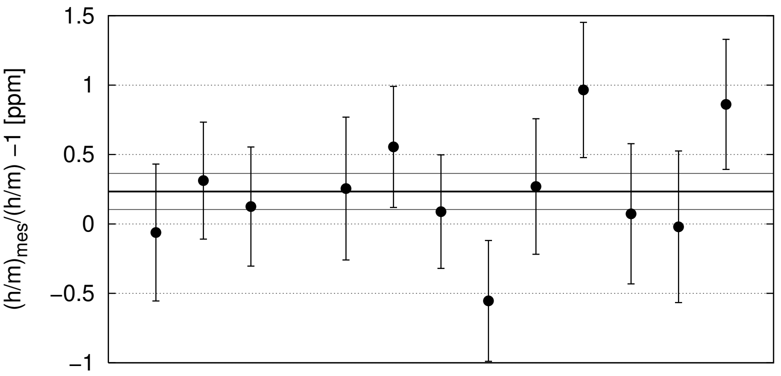


FIG. 5.16 – Mesures effectuées en Juin 2004, en essayant de couper les faisceaux Bloch de façon telle que la distribution finale de vitesse se situe au centre de la première zone de Brillouin ($\delta v \simeq 0$).

La figure 5.16 présente les résultats obtenus après avoir corrigé l'erreur dans le programme. Chaque point représente la moyenne de 4 spectres (deux pour chaque sens des faisceaux Raman et pour chaque côté de l'accélération). Chaque spectre correspond à un temps d'intégration de 10 minutes. La moyenne des résultats est décalée par rapport à la valeur attendue[12] de $2{,}3 \times 10^{-7}$, avec une incertitude finale de $1{,}3 \times 10^{-7}$ ($\chi^2/(n-1) \simeq 0{,}8$).

Dans cette expérience, on coupe les lasers Bloch brutalement, juste avant que le synthétiseur ait fini d'exécuter la rampe de fréquence. On ne sait donc pas exactement à quelle vitesse va le réseau au moment où le laser est coupé. Ceci peut éventuellement expliquer l'écart entre notre mesure et la valeur attendue.

—Coupure adiabatique— Il est possible de supprimer cet effet en coupant adiabatiquement le potentiel. Dans ce cas, la fonction de Wannier tend adiabatiquement vers la fonction de Wannier pour un potentiel très faible. Cette fonction est une fonction constante qui vaut 1 sur la première zone de Brillouin et 0 ailleurs (cf. figure 4.6, page 95). On gagne alors sur les deux tableaux : en ramenant tous les atomes dans première zone de Brillouin, on augmente le signal ($\alpha(\delta v) = 1$) et supprime l'effet systématique dû à la coupure soudaine.

La mise en place de la coupure adiabatique a nécessité des modifications importantes de la chaîne RF pilotant les modulateurs acousto-optiques des lasers Bloch. Nous avons en effet remplacé les synthétiseurs SRS DS345 par un générateur de fonction arbitraire(cf. section 4.2, p.112). Nous pouvons maintenant contrôler à la fois la fréquence et l'intensité des lasers Bloch comme on le souhaite. Cette modification a été effectuée après le déménagement.

[12]La valeur attendue est calculée avec la valeur de α du CODATA

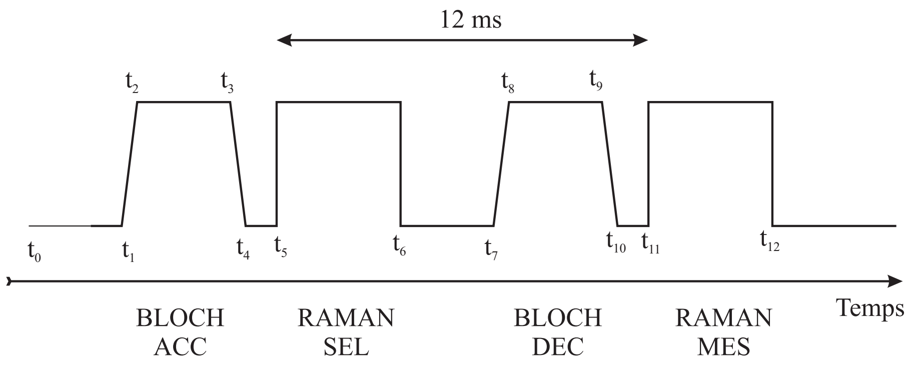


FIG. 5.17 – Séquence temporelle, à l'échelle, utilisée pour les mesures présentées dans la section 5.3.2.

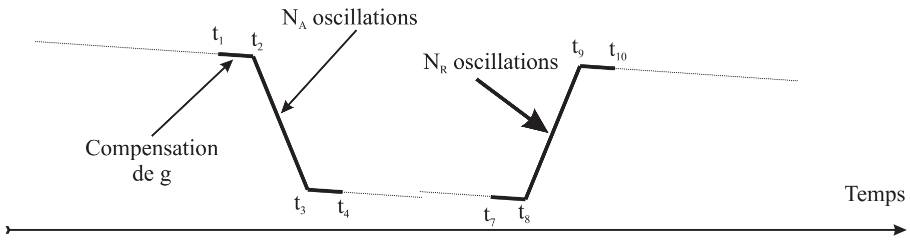


FIG. 5.18 – Fréquence appliquée aux modulateurs acousto-optiques Bloch en fonction du temps.

5.3.2 Nouvelle mesure avec coupure adiabatique

Programmation de la coupure adiabatique

Dans le nouveau dispositif expérimental, nous utilisons maintenant un générateur de fonctions arbitraires pour piloter les modulateurs acousto-optiques à travers une chaîne de fréquence (section 4.2). Il est possible de programmer précisément, à chaque instant, la fréquence ainsi que l'amplitude envoyée aux modulateurs acousto-optiques. Il va donc être possible d'effectuer une rampe pendant la mise en place et la coupure adiabatique du potentiel pour compenser la gravité. Le programme informatique calcule donc quelle va être le vitesse des atomes afin de les charger et les libérer au centre de la première zone de Brillouin.

La figure 5.17 schématise la séquence temporelle complète, et la table 5.1 donne les principales valeurs des délais. Le temps "mort" entre t_4 et t_5 correspond à la durée de la coupure du repompeur ; celui entre t_6 et t_7 correspond à la durée du pousseur. Pour pouvoir programmer correctement la carte, il faut connaître la vitesse des atomes à chaque instant de la séquence.

Partant à l'instant $t_0 = 0$ avec des atomes au repos, nous avons pour la première accélération :

– $t_1 \rightarrow t_2$: Montée adiabatique : $v = -gt$

Début de la première accélération		t_1	5 ms
Délai entre Raman	$T_{\text{délai}}$	$t_{11} - t_5$	12 ms
Délai entre les deux accélérations		$t_7 - t_1$	12 ms
Durée de l'impulsion Raman	τ	$t_6 - t_5$, $t_{12} - t_{11}$	3.4 ms
Durée totale Bloch		$t_4 - t_1$, $t_{10} - t_7$	4 ms
Durée accélération Bloch	T_{Bloch}	$t_3 - t_2$, $t_9 - t_8$	3 ms
Durée branchement adiabatique		$t_2 - t_1$, $t_8 - t_7$	500 μs
Durée coupure adiabatique		$t_4 - t_3$, $t_{10} - t_9$	500 μs

TAB. 5.1 – Valeurs des principaux délais de la séquence de mesure.

– $t_2 \rightarrow t_3$: Accélération de Bloch (N_A oscillations[13]) : $v = -gt + 2N_A v_r(t - t_2)/(t_3 - t_2)$
– $t_3 \rightarrow t_4$: Coupure adiabatique : $v = -gt + 2N_A v_r$

Entre l'accélération et la décélération, il ne faut pas oublier les $\pm 2v_r$ dus à la sélection Raman. Si on appelle ϵ_R le signe du recul Raman (qui dépend du sens des faisceaux Raman), alors on débute la décélération à la vitesse : $v = -gt + 2(N_A + \epsilon_R)v_r$

La deuxième impulsion Bloch se passe de la même façon que la première. Nous avons donc à la fin de la décélération : $v = -gt + 2(N_A + \epsilon_R + N_R)v_r$ où N_R désigne le nombre d'oscillations au retour.

La fréquence programmée par la carte se calcule à partir de la vitesse estimée en inversant l'équation (4.83) :

$$\nu(t) = \frac{1}{8} k v(t) \tag{5.30}$$

La fréquence des faisceaux Raman est calculée de la même façon. En tenant compte du sens des faisceaux, on obtient que

$$\nu_{sel} = -\epsilon_R(k_1 + k_2)(-gt_5 + 2N_A v_r + \epsilon_R v_r) \tag{5.31}$$

$$\nu_{mes} = -\epsilon_R(k_1 + k_2)(-gt_{11} + 2(N_A + N_R)v_r + \epsilon_R v_r) + \delta\nu \tag{5.32}$$

où $\delta\nu$ est balayée pour réaliser un spectre[14]. La table 5.2 montre les valeurs des fréquence des synthétiseurs que l'on a programmé pour chaque spectre. On ajoute aussi une rampe de fréquence sur le troisième synthétiseur débutant au début de chaque impulsion Raman (voir section 2.3) :

$$\nu_g(t) = \epsilon_R(k_1 + k_2)g(t - t_{5/11}) \tag{5.33}$$

[13] Le nombre d'oscillations est un entier relatif. Il est positif si l'accélération a lieu vers le haut.

[14] On a enlevé dans ces formules la fréquence correspondant à la structure hyperfine, qui n'intervient pas dans la suite puisque l'on effectue toujours des mesures différentielles. La fréquence de battement programmée est donc égale à $\nu_{\text{sél}/mes} + 6\,834\,682\,611$ Hz.

	1	2	3	4
N_A	-450	390	-450	390
N_R	460	-430	460	-430
ϵ_R	-1	-1	1	1
$\nu_{sel}[Hz]$	$-13\,956\,985$	$11\,455\,931$	$13\,926\,651$	$-11\,486\,265$
$\nu_{mes}[Hz]$	$-342\,932$	$-1\,855\,606$	$312\,598$	$1\,825\,272$

TAB. 5.2 – Tableau des différentes valeurs utilisées. Chaque colonne $(1,\ldots,4)$ correspond à un des 4 spectres possibles (côtés de la trajectoire (haut/bas) $\otimes$ sens des faisceaux Raman).

Raman	
Puissance	10 mW
Intensité	150 mW/cm^2
Longueur d'onde[15]	777,8 nm
Désaccord	1 THz
Durée d'une impulsion π	3,4 ms
Bloch	
Puissance	115 mW
Intensité	1800 mW/cm^2
Désaccord (dans le bleu)	40 GHz
Profondeur du potentiel (U_0)	70 E_r

TAB. 5.3 – Paramètres des faisceaux Raman et Bloch

Résultats

Après le déménagement nous avons effectué un certain nombre de modifications que je récapitule ici :
- réduction des vibrations (déménagement au sous-sol + cellule posée directement sur le sol),
- augmentation de la puissance du Ti-Sa (laser de pompe 5 W $\rightarrow$ 10 W) et mise en place d'un isolateur optique,
- modulateurs acousto-optiques Bloch en double passage,
- générateur de fonctions arbitraires pour brancher et débrancher adiabatiquement le réseau optique,
- système pour basculer le sens des faisceaux Raman automatiquement,
- changement du collimateur des fibres : w = 2 mm.

Les paramètres des faisceaux Raman et Bloch sont présentés dans la table 5.3.

[15]Cette valeur est fixée par la référence à deux photons avec laquelle la fréquence du faisceau Raman est comparée.

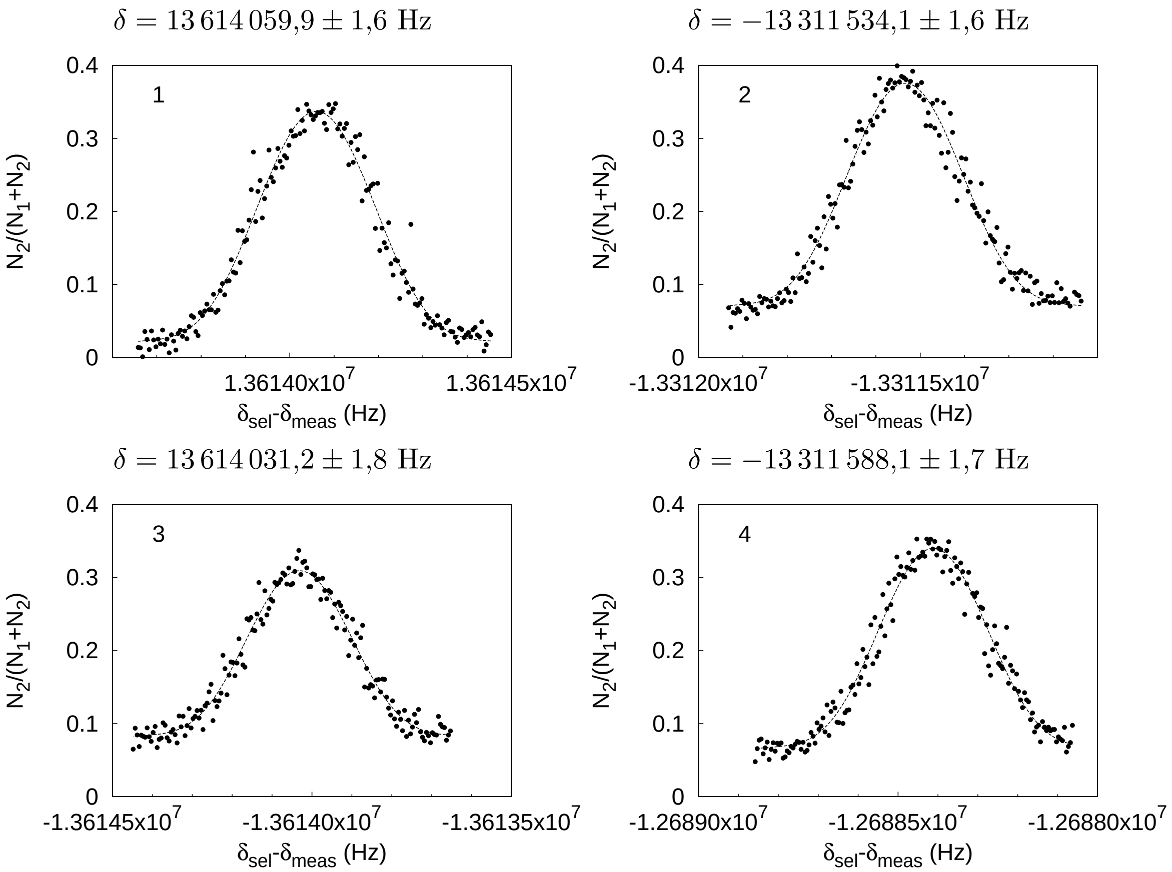


FIG. 5.19 – Spectres pris dans les deux sens Raman et les deux sens d'accélération. En abscisse figure la différence entre la fréquence Raman à la sélection et à la mesure ; en ordonnée se trouve la proportion d'atomes ayant effectué la seconde transition Raman. L'incertitude sur chaque spectre est d'environ 1,7 Hz. Le numéro des spectres correspond aux entrées dans la table 5.2. De ces quatre spectres on peut déduire une détermination de α avec une incertitude de $3{,}3 \times 10^{-8}$.

Nous avons alors pu obtenir environ 500 oscillations de Bloch, avec une efficacité globale supérieure à 50% (environ 99.97% par recul). Nous effectuons maintenant 4 spectres simultanément correspondant aux paramètres décrits table 5.2 (figure 5.19). Sur chaque spectre, il y a 160 points (5 minutes d'enregistrement). La résolution sur la détermination du centre d'un spectre est en moyenne de 1,7 Hz, c'est-à-dire $10^{-4}v_r$. Avec ces paramètres, on obtient en 20 minutes une valeur de h/m avec une incertitude d'environ $6{,}6 \times 10^{-8}$ et donc une valeur de α avec une incertitude d'environ $3{,}3 \times 10^{-8}$.

Nous avons pris des données pendant 4 jours. Les résultats des mesures sont présentés figure 5.20. Avec ces 73 mesures, nous avons un χ^2/n qui vaut 1,3. L'incertitude statistique relative finale sur la mesure de h/m est de $8{,}8 \times 10^{-9}$. Le résultat, sans correction, et avec

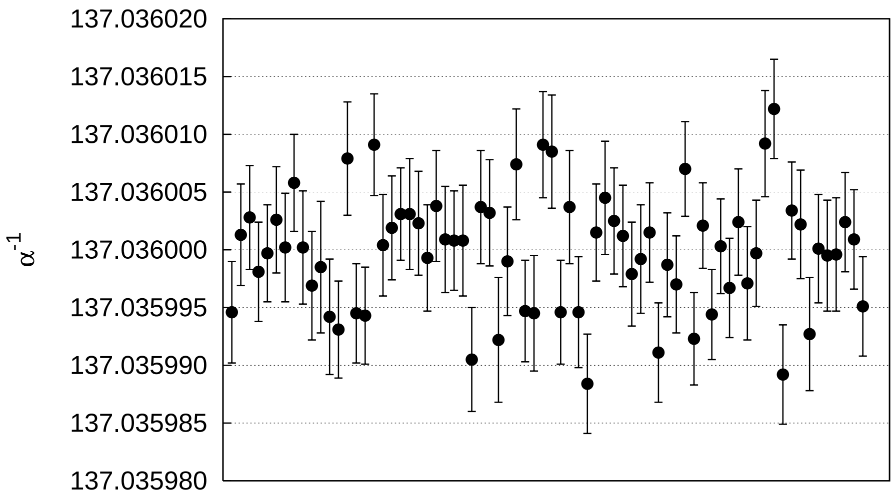


FIG. 5.20 – Ensemble des mesures prises. Chaque point correspond à 4 spectres (figure 5.19). On a $\chi^2/n \simeq 1{,}3$. L'incertitude statistique finale sur α vaut $4{,}4 \times 10^{-9}$.

uniquement l'incertitude statistique est :

$$\frac{h}{m_{^{87}Rb}} = 4{,}591\,359\,237\,(40) \times 10^{-9}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1} \quad [8{,}8 \times 10^{-9}] \tag{5.34}$$

La valeur que l'on déduit de α^{-1} est la suivante :

$$\alpha^{-1} = 137{,}035\,999\,59\,(60) \quad [4{,}4 \times 10^{-9}] \tag{5.35}$$

Traitement des données pour déterminer h/m

Avant de décrire les effets systématiques, je voudrais revenir sur ce que l'on mesure précisément.

On va désigner par ϵ_R le sens du recul lorsqu'un atome fait une transition Raman de $|F = 2\rangle$ vers $|F = 1\rangle$. On pose $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\mathrm{SHF}}$. Le signe de δ est choisi pour augmenter lorsque la fréquence de battement augmente. On appelle $k_{\text{sél}}$ (resp. k_{mes}) la norme moyenne du vecteur d'onde Raman à la sélection (resp. à la mesure).

Avec ces conventions de signes, on obtient que, après la première impulsion Raman, la vitesse des atomes sélectionnés vaut [16,17] :

$$v_{\text{sel}} = \epsilon_R \left(\frac{\hbar k_{\text{sél}}}{m} - \frac{\delta_{\text{sél}}}{2k_{\text{sél}}} \right) \tag{5.36}$$

Si l'on effectue N oscillations[18], alors la vitesse des atomes vaut, après un délai $T_{\text{délai}}$

$$v_{\text{sel}} + 2N\frac{\hbar k_B}{m} - gT_{\text{délai}} \tag{5.37}$$

où g est l'accélération de la gravité (prise positive).

La fréquence δ_{mes} du centre du spectre vérifie

$$v_{\text{sel}} + 2N\frac{\hbar k_B}{m} - gT_{\text{délai}} = \epsilon_R \left(\frac{\hbar k_{\text{mes}}}{m} - \frac{\delta_{\text{mes}}}{2k_{\text{mes}}} \right) \tag{5.38}$$

En combinant les équations (5.36) et (5.38) pour éliminer $v_{\text{sél}}$, on obtient que :

$$\frac{\delta_{\text{sél}}}{2k_{\text{sél}}} - \frac{\delta_{\text{mes}}}{2k_{\text{mes}}} + \epsilon_R g T_{\text{délai}} = \frac{\hbar}{m} \left(\epsilon_R 2N k_B + k_{\text{sél}} - k_{\text{mes}} \right) \tag{5.39}$$

Je rappelle que pour éliminer g, on effectue deux mesures en changeant le sens de l'accélération. On a deux trajectoires : celle du haut et celle du bas. On note par N^H (resp. N^B) le nombre d'oscillations pour la trajectoire du haut (resp. bas). Pour la trajectoire du haut (resp. bas), nous avons $N^H < 0$ (resp. $N^B > 0$).

$$\frac{\delta^H_{\text{sél}}}{2k^H_{\text{sél}}} - \frac{\delta^H_{\text{mes}}}{2k^H_{\text{mes}}} - \frac{\delta^B_{\text{sél}}}{2k^B_{\text{sél}}} + \frac{\delta^B_{\text{mes}}}{2k^B_{\text{mes}}} = \frac{\hbar}{m} \left(\epsilon_R 2(N^H - N^B) k_B + k^H_{\text{sél}} - k^H_{\text{mes}} - k^B_{\text{sél}} + k^B_{\text{mes}} \right) \tag{5.40}$$

En utilisant cette formule, on peut déduire $\frac{h}{m}$. Il est important de tenir compte des variations du vecteur d'onde des faisceaux Raman entre les différentes phases de l'expérience. Dans notre situation, on change la fréquence des faisceaux Raman de 13 MHz entre la sélection et la mesure. Le vecteur d'onde Raman moyen change donc de $1{,}6 \times 10^{-8}$. Dans le membre de droite, cet effet comparé aux $2(N^H - N^B) \simeq 2000$ reculs, est négligeable. Par contre dans le membre de gauche, et en particulier parce que l'on ne réalise pas un schéma symétrique, l'effet est non négligeable, il est d'environ 3×10^{-9} en prenant les valeurs de la table 5.2 (page 139).

Il nous reste cependant à regarder ce qui se passe lorsque l'on échange le sens des faisceaux Raman. Comme on garde exactement le même nombre d'oscillations, le décalage Doppler

[16] Pour retrouver rapidement les signes de cette équation, on peut raisonner sur un schéma comme celui de la figure 2.1, p.16. Pour amener les atomes à une vitesse nulle, en partant de $|F = 2\rangle$, il faut augmenter le battement entre les faisceaux Raman. Si $\delta = 0$ alors la vitesse des atomes sélectionnés vaut d'après la convention de signe $\epsilon_R v_r$.

[17] Notons que les correction relativistes à cette formule, qui sont à l'ordre 2 en v/c, sont négligeables pour des atomes allants à la vitesse de $1000 v_r \simeq 2 \times 10^{-8} c$.

[18] Nous ne parlons maintenant plus que de la deuxième impulsion Bloch, celle qui est utilisée pour la mesure. Pour alléger les notations, on remplace N_R par N.

change uniquement de signe. Par exemple le terme $\epsilon_R \delta^H_{\text{sél}}/2k^H_{\text{sél}}$ garde le même signe, mais le terme correctif à l'ordre 1 dû à la variation entre $k_{\text{sél}}$ et k_{mes} change de signe. Donc l'effet de 3×10^{-9} décrit dans le paragraphe précédent change de signe, et s'annule donc lorsque l'on fait la moyenne des mesures de h/m prises dans les deux sens.

En conséquence de quoi, on peut dans l'équation 5.40 remplacer tous les vecteurs d'onde Raman par :

$$k_R = 2\pi \frac{2\nu_1 + \nu_{\text{SHF}}}{2c} \tag{5.41}$$

où ν_1 est la fréquence du laser Raman qui est fixe (asservie sur le Fabry-Perot).

L'équation se simplifie alors :

$$\frac{\hbar}{m} = \epsilon_R \frac{\delta^H_{\text{sél}} - \delta^H_{\text{mes}} - \delta^B_{\text{sél}} + \delta^B_{\text{mes}}}{4(N^H - N^B) k_B k_R} \tag{5.42}$$

La valeur de $\hbar/m$ donnée précédemment a été obtenue en utilisant la formule ci-dessus, moyennée sur les deux sens Raman. On va l'appeler valeur brute, notée $\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{brut}}$. Dans le suite, nous noterons $\Delta\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{nom effet}}$ la correction qu'il faut apporter à la valeur brute pour se rapprocher de la grandeur que l'on veut mesurer, avec le signe suivant :

$$\frac{\hbar}{m} = \left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{brut}} + \sum_{\text{effets}} \Delta \left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{nom effet}} \tag{5.43}$$

L'incertitude associée à un effet systématique sera notée :

$$\sigma \left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{nom effet}} \tag{5.44}$$

Chapitre 6

Effets systématiques et incertitudes

Nous allons dans cette partie évaluer la valeur des différents effets systématiques, ainsi que les incertitudes associées. Ces calculs ont étés effectués pour la mesure présentée à la fin du chapitre précédent.

6.1 Les lasers

6.1.1 Mesure des longueurs d'onde des lasers

Nous avons besoin de mesurer précisément les longueurs d'onde des faisceaux Raman et des faisceaux Bloch. Pour cela nous asservissons le Ti-Sa et l'un des lasers Raman sur une cavité Fabry-Perot ultrastable (figure 6.1). Cette cavité possède un intervalle spectral libre de 3 GHz.

Pour calibrer la cavité, nous disposons d'un laser femto-seconde[1] asservi sur une référence de fréquence à 100 MHz fournie par le SYRTE auquel nous sommes reliés par une fibre optique. Il est possible avec un tel dispositif de mesurer la fréquence d'un laser sur une très large bande spectrale. En mesurant la fréquence du Ti-Sa asservi sur différents pics de la cavité, on peut rapidement remonter à son intervalle spectrale libre (ISL).

Cette cavité possède cependant une dérive thermique qui est non négligeable à notre précision puisque nous avons mesuré une variation d'environ 10^{-7} par degré (figure 6.2). Nous avons donc besoin de calibrer en permanence la cavité. Or l'utilisation du laser femto-seconde sur plusieurs heures complique les choses, d'autant qu'il est très difficile de l'utiliser simultanément pour notre expérience et l'expérience 1S-3S de l'hydrogène, pour lequel il a été construit.

Nous utilisons donc une autre référence optique pour calibrer notre laser : il s'agit de la transition à deux photons $5S_{1/2}(F = 3) - 5D_{1/2}(F = 5)$ du rubidium 85. Cette transition

[1] Une description détaillée du dispositif est présentée dans le mémoire de thèse d'Olivier Arnoult qui l'a construit.

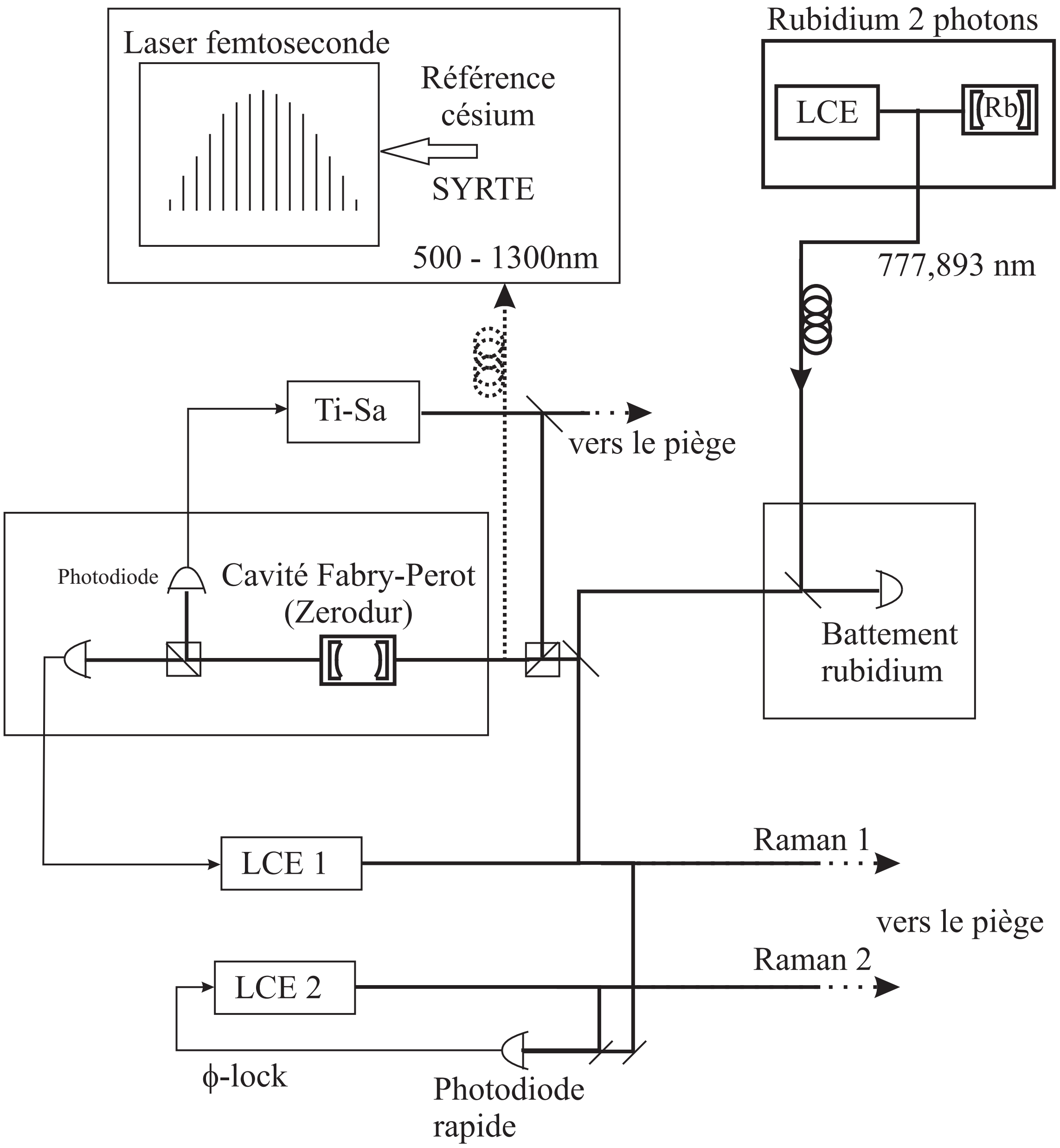


FIG. 6.1 – Dispositif permettant de mesurer les fréquences des lasers.

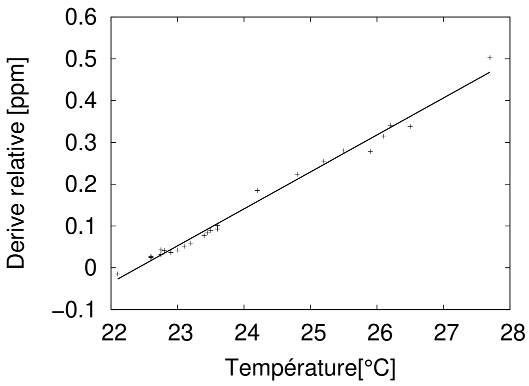


FIG. 6.2 – Dérive du Fabry-Perot en fonction de la température. L'ajustement par une droite donne une dérive de 8,8 10^{-8} par degré Celsius.

est à environ 778 nm. Il est possible d'avoir le laser des faisceaux Raman à cette longueur d'onde (le désaccord Δ vaut alors environ 1 THz). Puisque la longueur d'onde du laser est imposée de cette façon, nous avons divisé par deux l'intensité des lasers pour pouvoir faire une impulsion Raman π pendant 3,4 ms. En mesurant le battement $\nu_{\text{bat. Rb}}$ entre un des faisceaux Raman et la référence à deux photons, nous pouvons donc connaître la longueur d'onde des deux faisceaux Raman, l'ISL de la cavité, et donc la longueur d'onde du Ti-Sa utilisé pour créer le potentiel des oscillations de Bloch.

La fréquence de la transition par rapport à laquelle on effectue le battement est [56]

$$\nu_{2\text{ph}} = 385\,285\,142\,378\,(2)\ \text{kHz} \tag{6.1}$$

Il faut tenir compte d'un modulateur acousto-optique ($\text{MAO}_{2\text{ph}}$) utilisé en double passage dans la boucle d'asservissement du deux photons, d'un autre modulateur acousto-optique ($\text{MAO}_{\text{Raman}\to\text{ZFP}}$) utilisé pour l'asservissement du Raman sur la cavité Fabry-Perot, et du modulateur acousto-optique utilisé comme interrupteur Raman ($\text{MAO}_{\text{Raman}}$). La fréquence du premier laser Raman est donc

$$\nu_1 = \nu_{2\text{ph}} - 2\times\text{MAO}_{2\text{ph}} - \nu_{\text{bat. Rb}} + 2\times\text{MAO}_{\text{Raman}\to\text{ZFP}} - \text{MAO}_{\text{Raman}} \tag{6.2}$$

La fréquence de l'autre faisceau Raman se calcule directement à partir de cette fréquence et du battement programmé entre les lasers Raman :

$$\nu_2 = \nu_1 + \nu_{\text{SHF}} + \delta\nu_{\text{Raman}} \tag{6.3}$$

où $\delta\nu_{\text{Raman}}$ est connu à partir de la fréquence programmée dans les synthétiseurs de la chaîne hyperfréquence.

Pour le laser Ti-Sa utilisé pour les oscillations de Bloch, il faut tenir compte du nombre ΔN_{ZFPC} d'intervalles entre ordres du Fabry-Perot entre le laser Raman et le laser Bloch et du modulateur acousto-optique utilisé en double passage ($\text{MAO}_{\text{Bloch}}$) pour effectuer la rampe

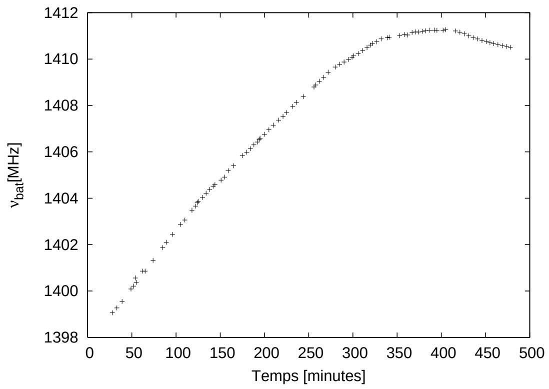


FIG. 6.3 – Dérive de la cavité Fabry-Perot au cours d'une journée d'enregistrement.

de fréquence d'accélération. Comme les deux modulateurs acousto-optiques ont une variation de fréquence opposée, la fréquence moyenne est indépendante du balayage.

$$\nu_{\mathrm{Bloch}} = \nu_{\mathrm{2ph}} - \nu_{\mathrm{bat.\ Rb}} - 2 \times \mathrm{MAO}_{\mathrm{2ph}} - \Delta N_{\mathrm{ZFPC}} \times \nu_{\mathrm{ISL}} + 2 \times \mathrm{MAO}_{\mathrm{Bloch}} \tag{6.4}$$

La figure (6.3) présente la dérive du Fabry-Perot au cours d'une journée d'enregistrement. Les variations sont de l'ordre de 1 MHz pour 20 minutes. Au cours d'un enregistrement, la fréquence du faisceau Raman est mesurée très précisément toutes les 5 minutes par rapport à la transition de référence. Dans l'analyse des données, on prend la valeur moyenne de la fréquence au cours d'un enregistrement. En tenant compte d'un éventuel décalage de l'asservissement, on peut estimer l'incertitude finale sur les longueurs d'onde à moins de 300 kHz, l'incertitude sur les autre mesures de fréquence (modulateurs acousto-optiques , battement) étant beaucoup plus faible.

Puisque les longueurs d'onde apparaissent à la fois dans le recul dù aux oscillations de Bloch et dans l'effet Doppler Raman, et que ces deux mesures sont corrélées, on en déduit une incertitude sur α de 0,8 ppb.

6.1.2 Parallélisme des faisceaux

On a estimé le parallélisme des faisceaux à partir de la réinjection d'un faisceau dans la fibre optique située en face (voir figure 2.10, page 32).

Pour les faisceaux Raman, on a mesuré une baisse de la réinjection dans la fibre d'un facteur 2 lorsque l'on incline le miroir de rétroréflexion d'un angle de 7×10^{-5} rad. Si on suppose que l'on est à mieux que 10% de l'optimum, cela correspond à un angle θ_R de $7 \times 10^{-5}/\sqrt{5} \simeq 3{,}1 \times 10^{-5}$ rad entre les faisceaux Raman.

Pour les faisceaux Bloch, nous avons regardé le couplage d'une fibre dans l'autre. Nous avons mesuré une diminution de 10% pour un angle θ_B de $1{,}6 \times 10^{-4}$ rad.

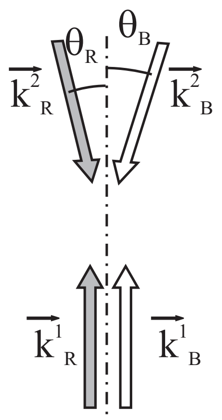


FIG. 6.4 – On note θ_R l'angle formé par les deux faisceaux Raman et θ_B l'angle formé par les deux faisceaux Bloch

On peut calculer l'effet systématique associé à ces angles (les notations sont définies sur la figure 6.4). L'effet provient du produit scalaire entre les vecteurs d'onde Raman et Bloch :

$$\frac{(h/m)_{\text{brut}}}{(h/m)} = \frac{\left(\vec{k_R^1} - \vec{k_R^2}\right) \cdot \left(\vec{k_B^1} - \vec{k_B^2}\right)}{4k_R k_B} \tag{6.5}$$

$$= \frac{1 + \cos\theta_R + \cos\theta_B + \cos(\theta_R - \theta_B)}{4} \tag{6.6}$$

$$= 1 - \frac{\theta_B^2 + \theta_R^2 - \theta_B\theta_R}{4} \tag{6.7}$$

Donc

$$\frac{m}{h}\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{align.}} = +\frac{\theta_B^2 + \theta_R^2 - \theta_B\theta_R}{4} \tag{6.8}$$

Dans le pire des cas, θ_B et θ_R sont de signes opposés. On obtient alors un effet compris entre 0 et 8×10^{-9} sur h/m. Pour α^{-1}, nous considérons donc un effet systématique qui vaut

$$\Delta(\alpha^{-1}) = -2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\alpha^{-1} \qquad \sigma(\alpha^{-1}) = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\alpha^{-1} \tag{6.9}$$

6.1.3 Courbure des faisceaux et phase de Gouy

Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que les faisceaux lasers étaient des ondes planes. Nous allons regarder en détail dans cette partie ce qui se passe lorsque l'on a un faisceau de diamètre fini.

On évoque usuellement deux effets : le premier est la courbure des fronts d'onde (les vecteurs d'onde ne sont pas parallèles à l'axe de propagation) et l'autre effet est celui de la phase de Gouy. La phase de Gouy est le déphasage (dépendant de la position) qui décrit le déphasage de π au foyer d'un faisceau convergent.

Pour un faisceau gaussien, la phase de Gouy vaut :

$$\Phi_G = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \tag{6.10}$$

où z_R est la longueur de Rayleigh qui pour un faisceau de rayon minimum w_0 vaut $z_R = \pi w_0^2/\lambda$. La correction au vecteur d'onde vaut donc :

$$k_G = \frac{\mathrm{d}\Phi_G}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z_R}\frac{1}{1+(z/z_R)^2} = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{w(z)^2} \tag{6.11}$$

où $w(z)^2 = w_0^2(1+(z/z_R)^2)$.

La phase de Gouy a une interprétation physique simple : elle est liée à la dispersion des vecteurs d'onde $\vec{k}$ qui constituent un faisceau gaussien. Le faisceau gaussien est une superposition d'ondes planes, où chaque onde plane a un vecteur d'onde $\vec{k}$ qui vérifie : $k^2 = \omega^2/c^2$. C'est-à-dire que l'on a :

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{k_\perp^2}{2k^2}\right) \tag{6.12}$$

A cause de cette dispersion, la moyenne de k_z sera inférieure à ω/c. Dans le cas d'un faisceau gaussien, on peut calculer un ordre de grandeur : au niveau du col, le faisceau a une taille transverse w_0, ce qui signifie que la dispersion en vecteur transverse vaut $1/w_0$. On trouve donc qu'en moyenne $k_x^2 + k_y^2$ vaut $1/w_0^2$. Il y a donc une correction de k_z de l'ordre de $1/k^2 w_0^2$. Nous retrouvons donc un terme comparable à celui trouvé avec l'équation 6.11.

Il faut prendre garde au raisonnement précédent : en effet, il faut tenir compte du déphasage entre les ondes planes, ce que nous ne faisons pas en prenant simplement une moyenne. La méthode la plus rigoureuse pour calculer l'effet consiste à écrire la phase du faisceau et ensuite à la dériver pour obtenir un k_z effectif.

Je présente en annexe H le calcul détaillé qui permet de retrouver la phase à partir de la somme d'ondes planes (on peut aussi trouver la formule directement dans [57]). Dans ce calcul, on trouve la phase du faisceau gaussien :

$$\phi(x,y,z) = kz - \Phi_G + k\frac{r^2}{2R} \tag{6.13}$$

où

$$R = z\left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right) \tag{6.14}$$

est le rayon de courbure et r la distance à l'axe.

En dérivant cette phase, on obtient :

$$k_z^{\mathrm{eff}} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z} = k - \frac{2}{kw(z)^2}\left(1 - \frac{r^2}{w(z)^2}\left(1-(z/z_R)^2\right)\right) \tag{6.15}$$

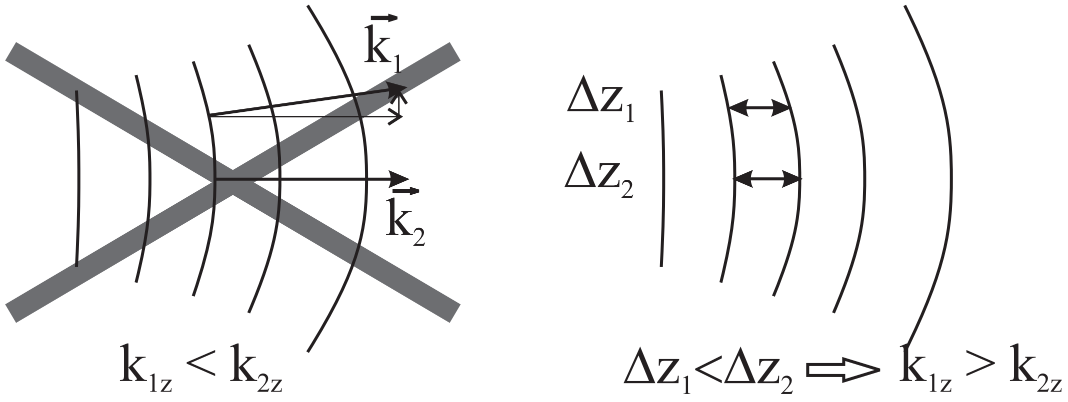


FIG. 6.5 – Schéma du front d'onde d'un faisceau gaussien. A gauche : il n'est pas possible de déterminer l'effet du rayon de courbure simplement en ajoutant le cosinus de l'angle par rapport à l'axe de propagation. A droite, raisonnement correct effectué à partir des fronts d'onde : entre deux fronts, le déphasage est le même, par contre la distance est différente. Ici par exemple, $\Delta z_1 < \Delta z_2$ donc $k_1^{\text{eff}} > k_2^{\text{eff}}$

L'effet du rayon de courbure est écrit ici comme une correction de la phase de Gouy. Il est intéressant de remarquer que le signe de l'effet change. Pour $z < z_R$, le rayon de courbure augmente le vecteur d'onde. Dans cette situation, il compense partiellement l'effet de la phase de Gouy.

Comme nous pouvons le voir sur le schéma de la figure 6.5, seule la variation du rayon de courbure compte. La variation de la phase entre deux fronts d'onde est constante, par contre il y a une variation de la distance entre les fronts. Si on écrit entre les deux fronts la relation :

$$k = \frac{\Delta\phi}{\Delta z} \tag{6.16}$$

alors, on voit que lorsque la courbure augmente, la distance Δz est plus importante au centre qu'à l'extérieur du faisceau (figure 6.5). Le vecteur d'onde effectif est donc plus important à l'extérieur.

Notons que, au point où la courbure est maximale ($z = z_R$), sa variation est nulle et il n'y a pas d'effet de "rayon de courbure" (l'effet étant entièrement dans la phase de Gouy). Pour $z \to \infty$, le deuxième terme vaut $-r^2/2R^2$, ce qui correspond au terme obtenu en prenant le cosinus de l'angle entre le vecteur d'onde (de norme ω/c) et l'axe du faisceau.

—Calcul de l'effet à partir du diamètre et du rayon de courbure— L'équation 6.15 donne l'effet de la phase de Gouy en fonction des paramètres d'un faisceau gaussien. Ces paramètres peuvent être calculés à partir de la mesure de la largeur du profil d'intensité ($w(z)$) et du rayon de courbure du faisceau en un point.

	Largeur ($w(z)$) [mm]	Rayon de courbure ($R(z)$) [m]	$k_{\text{eff}}/k-1$ [ppb]
Raman/Bloch	2,1	15,9	-7
Bloch	2,0	7,0	-14
Raman (retour)	2,4	31,6	-5

TAB. 6.1 – Mesures des fronts d'onde des faisceaux Raman et Bloch.

En combinant la valeur du rayon de courbure (eq 6.14) et la définition de la longueur de Rayleigh, on montre que :

$$\frac{z}{z_R} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{w(z)^2}{R(z)} \tag{6.17}$$

On peut donc savoir quelle va être la contribution de la courbure à partir de la mesure de $w(z)$ et $R(z)$.

Nous avons emprunté au SYRTE un analyseur de front d'onde de type Shack-Hartmann, avec lequel il est possible de mesurer ces deux paramètres. Malheureusement, nous n'avons pas effectué le réglage du collimateur de la fibre avec cet appareil. Nous n'avons donc pu effectuer qu'une mesure de ces paramètres *a posteriori*. Nous présentons dans la table 6.1 les mesures des fronts d'onde pour les quatre faisceaux lasers : les deux faisceaux qui montent (issus du même collimateur) ; le faisceau Raman qui descend, qui provient du même collimateur, mais après rétroréflexion sur un miroir ; le faisceau Bloch descendant, qui provient d'un deuxième collimateur (voir figure 2.10). Il se trouve que ce deuxième collimateur était nettement moins bien réglé que le précédent, puisque le rayon de courbure mesuré est de l'ordre de 7 m.

L'équation 6.15 dépend de la distance r par rapport à l'axe. Pour calculer l'effet, nous avons besoin de connaître la valeur moyenne de r^2. Nous avons mesuré le diamètre du nuage par imagerie d'absorption (voir p.28). Nous avons mesuré que $\langle r^2\rangle \simeq 800$ μm. Or il est possible que le nuage ne soit pas parfaitement centré sur l'axe des faisceaux. Dans ce cas, $\langle r^2\rangle$ est plus important. Le centrage du nuage sur le faisceau est effectué à l'aide de transitions Raman copropageantes. En estimant que nous sommes à mieux que 80% du maximum, on calcule que le décentrage est inférieur à 500 μm, conduisant à $\langle r^2\rangle \simeq 950$ μm.

On peut alors calculer la correction sur α^{-1}. En prenant les valeurs de la table, on obtient au total :

$$\Delta\big(\alpha^{-1}\big)_{\text{gaussien}} = -8{,}2 \text{ ppb} \tag{6.18}$$

Compte-tenu de l'incertitude avec laquelle on pense mesurer la valeur des rayons de courbure, on considère cette correction avec une incertitude de l'ordre de 50%.

$$\sigma\left(\alpha^{-1}\right)_{\text{gaussien}} = 4 \text{ ppb} \tag{6.19}$$

6.2 Champ magnétique

6.2.1 Déplacement Zeeman quadratique

Grâce à la mesure faite en échangeant le sens des faisceaux Raman, il est possible d'éliminer une grande partie des effets dus aux gradients de champ ainsi qu'à ces variations temporelles synchronisées avec la séquence temporelle (section 5.3.1, page 131). Cependant, cette élimination n'est possible que si les trajectoires sont identiques lorsque l'on change le sens des faisceaux Raman. Or, l'effet de recul change de signe lorsque l'on inverse le sens des faisceaux Raman. Il y a donc une différence de $4v_r$ entre les deux trajectoires. Après les 12 ms d'évolution entre les impulsions Raman, la différence de position est d'environ 300 μm.

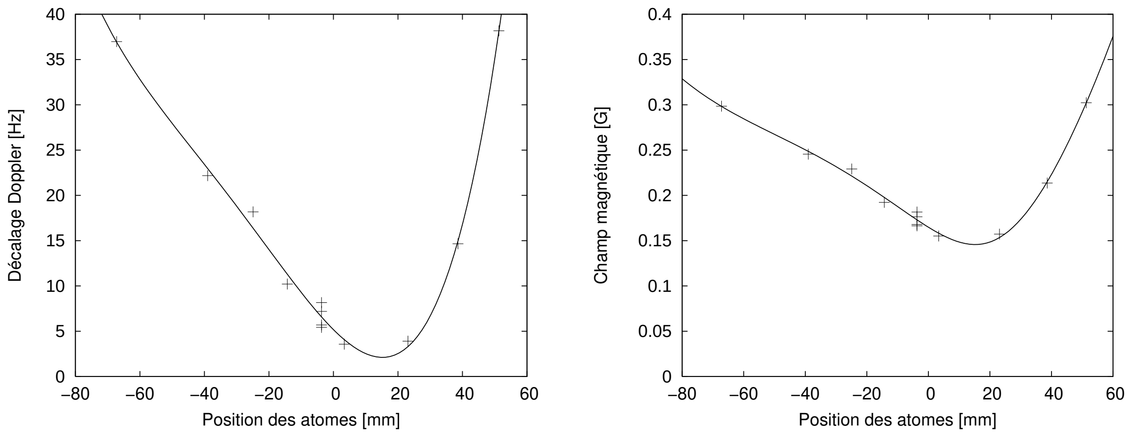


FIG. 6.6 – Mesure de champ magnétique. A gauche, mesure du centre de la position du spectre copropageant. A droite, valeur déduite du champ magnétique (en tenant compte du déplacement Doppler et du déplacement lumineux de la transition).

Pour calculer quelle va être la conséquence de la non coïncidence des trajectoires, nous avons mesuré le champ magnétique pour différentes positions des atomes. Pour cela, après avoir effectué une séquence accélération préalable – sélection – décélération, à la place de la mesure, on effectue une transition copropageante. La position absolue de la fréquence de la transition (comparée aux mesures micro-ondes de la transition référencée par rapport à l'horloge à césium) nous indique le déplacement du niveau. On peut s'apercevoir que le déplacement dépend grandement de la position de l'atome au moment de la mesure (figure 6.6, gauche).

Pour déduire le déplacement Zeeman de la mesure de la fréquence de la transition, il faut évaluer tous les autres déplacements. Les deux plus importants sont l'effet Doppler et les déplacements lumineux. L'effet Doppler est présent même pour une transition copropageante (il vaut environ 10^{-5} fois l'effet en contrapropageant). Nous avons pris garde d'effectuer le même nombre d'oscillations à l'aller et au retour. L'effet Doppler est donc uniquement dû à l'accélération de la gravité. Il vaut environ 5 Hz et ne dépend pas du nombre d'oscillations effectuées. Les déplacements lumineux sont *a priori* constants. On les évalue à 3,5 Hz. L'effet Zeeman quadratique contribue donc à la plus grande partie des déplacements.

Avec ces mesures, nous pouvons déduire le gradient d'effet Zeeman quadratique à l'endroit où on fait la mesure, pour la trajectoire du haut et celle du bas.

$$\partial_z \Delta_{\text{Zee}}^H = 1{,}85 \text{ Hz.mm}^{-1} \tag{6.20}$$

$$\partial_z \Delta_{\text{Zee}}^B = -0{,}52 \text{ Hz.mm}^{-1} \tag{6.21}$$

Dans l'équation 5.42 il faut remplacer les δ par $\delta - \Delta_{\text{Zee}}$.

On va donc avoir :

$$\Delta\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{Zeeman}} = -\sum_{\epsilon_R=\pm 1} \epsilon_r \frac{\Delta_{\text{Zee}}(z_{\text{sél}}^{H\ \epsilon_r}) - \Delta_{\text{Zee}}(z_{\text{mes}}^{H\ \epsilon_r}) - \Delta_{\text{Zee}}(z_{\text{sél}}^{B\ \epsilon_r}) + \Delta_{\text{Zee}}(z_{\text{mes}}^{B\ \epsilon_r})}{8(N^H - N^B)k_B k_R} \tag{6.22}$$

Dans cette équation, les termes à la sélection vont parfaitement s'éliminer car elle a lieu au même endroit pour les deux sens Raman. Pour les mesures, la différence des trajectoires vaut (c'est la même différence pour le haut et le bas, avec le même signe) :

$$z_{\text{mes}}^{H\ \epsilon_r=1} - z_{\text{mes}}^{H\ \epsilon_r=-1} = +\delta z \simeq 300\ \mu\text{m} \tag{6.23}$$

On obtient donc que :

$$\Delta\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{Zeeman}} = \frac{\partial_z \Delta_{\text{Zee}}^H - \partial_z \Delta_{\text{Zee}}^B}{8(N^H - N^B)k_B k_R}\delta z \tag{6.24}$$

Dans cette équation tout est positif sauf $N^H - N^B$. La correction que l'on obtient est donc

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{Zeeman}} = -1{,}32\,10^{-8}\,\frac{h}{m} \tag{6.25}$$

C'est-à-dire qu'il faut augmenter α^{-1} de $6{,}6 \times 10^{-9}$. Nous estimons à environ 30% la connaissance que l'on a du gradient de champ magnétique. L'incertitude sur α est donc de 2×10^{-9}.

6.2.2 Force magnétique quadratique

Dans la partie précédente, nous avons considéré l'effet du champ magnétique qui en déplaçant les niveaux entraîne une erreur sur la mesure de la vitesse. Mais le champ magnétique a un autre effet qui est d'induire une force sur les atomes. Cette force est proportionnelle aux gradients d'énergie.

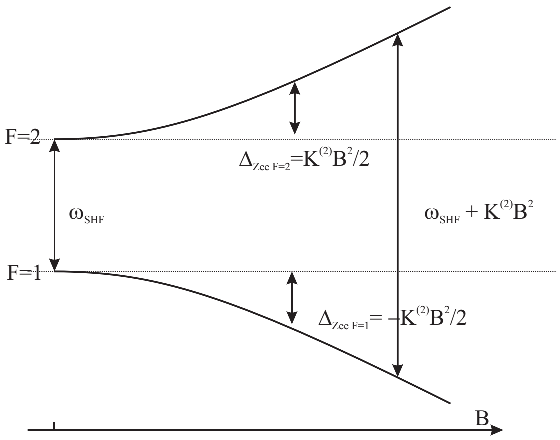


FIG. 6.7 – Déplacement des niveaux dû à l'effet Zeeman quadratique.

Entre la sélection et la mesure, les atomes sont dans l'état $|F = 1\rangle$. L'effet Zeeman quadratique abaisse l'énergie du niveau (voir figure 6.7) :

$$\Delta_{\mathrm{Zee},F=1} = -\frac{1}{2}K^{(2)}B^2 \tag{6.26}$$

D'après les mesures faites (cf. figure 6.6), le champ magnétique est minimal au centre du piège. L'effet va donc avoir tendance à pousser les atomes vers l'extérieur. La force s'oppose donc à la décélération du deuxième faisceau Bloch. La correction qu'il faut faire sur h/m est donc positive, elle est négative pour α^{-1}.

La variation de vitesse due à une variation d'énergie s'écrit

$$mv\Delta v = -h\Delta_{\mathrm{Zee},F=1} \quad \rightarrow \quad \Delta v = -h\frac{\Delta_{\mathrm{Zee},F=1}}{mv} \tag{6.27}$$

On obtient ainsi la correction sur h/m

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{Force quad.}} = \frac{h}{2(N^H - N^B)v_r}\left(\frac{\Delta^H_{\mathrm{Zee},F=1}}{mv^H_{sel}} - \frac{\Delta^B_{\mathrm{Zee},F=1}}{mv^B_{sel}}\right)\frac{h}{m} \tag{6.28}$$

où $\Delta^H_{\mathrm{Zee},F=1}$ (resp. $\Delta^B_{\mathrm{Zee},F=1}$) désigne la variation de l'effet Zeeman entre la sélection et la mesure pour la trajectoire du haut (resp. celle du bas).

En écrivant que $v_{\text{sél}} = \pm 2N_A v_r$, où N_A est le nombre d'oscillations pour l'accélération préalable, on obtient que

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{Force quad.}} = \frac{\Delta^H_{\mathrm{Zee},F=1} + \Delta^B_{\mathrm{Zee},F=1}}{8E_r(N^H - N^B)N_A}\frac{h}{m} \tag{6.29}$$

Pour un déplacement de la transition de 30 Hz, on trouve un effet relatif de 2,6 ppb pour h/m, donc de $-1{,}3$ ppb pour α^{-1}. On prend la même incertitude de 30% sur la connaissance du champ magnétique. On a donc une incertitude associée de 0,4 ppb.

6.3 Gradient de gravité

A cause du gradient de gravité, l'effet de la gravité ne se soustrait pas complètement entre la trajectoire du haut et celle du bas. La variation de vitesse due à la gravité vaut :

$$\int g(z(t))dt \simeq gT_{\text{délai}} + \int \partial_z g\, z(t)dt = gT_{\text{délai}} + \partial_z g\langle z\rangle T_{\text{délai}} \tag{6.30}$$

où $\partial_z g$ désigne le gradient de g selon la direction z et $\langle z\rangle$ la position moyenne du paquet d'atomes entre la sélection et la mesure.

En reprenant l'équation (5.39), on va pouvoir obtenir la correction relative sur h/m. Cette correction vaut

$$\frac{m}{h}\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{grad. grav.}} = \frac{\epsilon_R\partial_z g\, T_{\text{délai}}(\langle z\rangle^H - \langle z\rangle^B)}{2\epsilon_R v_r(N^H - N^B)} \tag{6.31}$$

Le gradient de g vaut

$$\partial_z g = \partial_z\left(\frac{GM_T}{(R_T+z)^2}\right) = -\frac{2g}{R_T} \simeq -3{,}1\times10^{-7}\ g.\text{m}^{-1} \tag{6.32}$$

où M_T désigne la masse de la terre et R_T son rayon.

Avec nos paramètres expérimentaux, on calcule que $\langle z\rangle^H - \langle z\rangle^B \simeq 10$ cm. Avec $T_{\text{délai}} =$ 12 ms, on trouve la correction[2] suivante sur h/m :

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{grad. grav.}} = +3{,}5\times10^{-10}\,\frac{h}{m} \tag{6.33}$$

Il faut donc diminuer α^{-1} de $1{,}8\times10^{-10}$. Cette correction est donc négligeable. On peut évaluer son incertitude à moins de $2\cdot10^{-10}$.

6.4 Déplacements lumineux

6.4.1 Déplacements lumineux à un photon

Les lasers Raman et Bloch sont tous les deux décalés dans le bleu. Les déplacements lumineux vont donc déplacer les niveaux $|F=2\rangle$ et $|F=1\rangle$ vers le haut. Comme ils décalent plus le niveau $|F=1\rangle$ que le niveau $|F=2\rangle$, les déplacements lumineux diminuent l'écart hyperfin (voir figure 6.8).

Le déplacement lumineux d'un niveau dû à un faisceau laser d'intensité I vaut :

$$\delta_{\text{d.l.}} = \frac{\Gamma^2}{8I_S}\frac{I}{\Delta} \tag{6.34}$$

où Δ est le désaccord à un photon.

[2]Sur la trajectoire du haut, la décélération de Bloch a lieu vers le bas. Comme la gravité est plus faible en haut, on a un effet qui s'oppose à la décélération de Bloch. Il faut donc augmenter h/m.

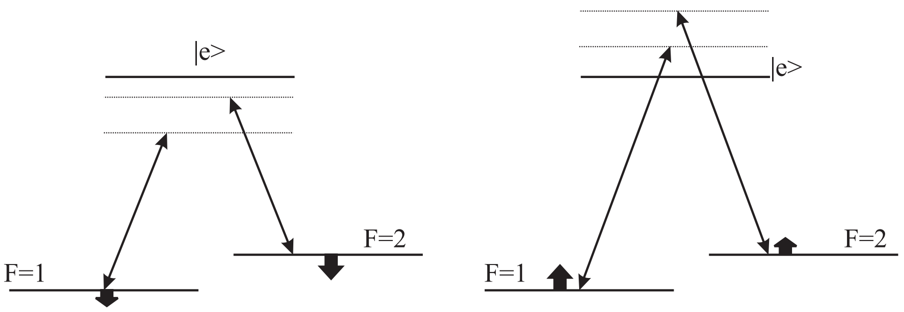


FIG. 6.8 – Déplacements lumineux différentiels. Quel que soit le désaccord, les déplacements lumineux tendent à réduire l'écart hyperfin.

Si on calcule le déplacement lumineux différentiel, on obtient :

$$\delta_{\text{d.l.}}^{|F=2\rangle} - \delta_{\text{d.l.}}^{|F=1\rangle} = -\frac{\Gamma^2 I}{8 I_S} \frac{\omega_{\text{SHF}}}{\Delta^2} \tag{6.35}$$

Cette équation est valable pour les trois faisceaux lasers Raman (deux à l'aller, et un rétroréfléchi). En supposant que les trois faisceaux ont la même intensité, on peut dans cette équation exprimer I en fonction de la pulsation Raman effective (équation 2.30).

$$\Omega_{a\to b}^{\text{eff}} = \frac{I}{I_S} \times \frac{\Gamma^2}{16\Delta} \tag{6.36}$$

On obtient donc

$$\delta_{\text{d.l.}}^{|F=2\rangle} - \delta_{\text{d.l.}}^{|F=1\rangle} = -\frac{6\pi}{\tau} \frac{\omega_{\text{SHF}}}{|\Delta|} \tag{6.37}$$

où τ est la durée d'une impulsion π pour le couplage $\Omega_{a\to b}^{\text{eff}}$.

A priori, dans notre expérience, les déplacements lumineux s'annulent entre la sélection et la mesure. Ceci n'est valable qu'à condition qu'ils soient identiques. Or à cause de l'étalement du nuage, et du profil gaussien des faisceaux lasers, l'intensité à la mesure sera en moyenne plus faible que l'intensité à la sélection.

Cependant, cette variation due à l'étalement du nuage va se compenser entre la trajectoire du haut et celle du bas, à condition qu'il n'y ait pas de variation le long de l'axe z de l'intensité des lasers (divergence des faisceaux). L'effet qui peut rester de cette variation va être compensé en grande partie en changeant le sens des faisceaux Raman, mais pas complètement parce que l'intensité des faisceaux n'est pas la même lorsque l'on change le sens de faisceaux Raman.

Appelons $\Delta_{\text{d.l.}}^0$ le déplacement lumineux à la sélection dans un sens Raman. Définissons ξ tel que, à cause de l'étalement du nuage, à la mesure le déplacement lumineux soit de $\Delta_{\text{d.l.}}^0(1-\xi)$ et appelons R une distance caractéristique de variation de l'intensité. Appelons β le coefficient d'atténuation du faisceau entre les deux sens Raman.

On obtient alors que, pour un sens Raman,

$$\Delta\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{d.l. 1ph}} = -\epsilon_R \frac{\left(\Delta_{\text{d.l.}}(z^H_{\text{sél}}) - \Delta_{\text{d.l.}}(z^B_{\text{sél}})\right) - \left(\Delta_{\text{d.l.}}(z^H_{\text{mes}}) - \Delta_{\text{d.l.}}(z^B_{\text{mes}})\right)}{4(N^H - N^B)k_R k_B} \tag{6.38}$$

$$\simeq -\epsilon_R \frac{\Delta^0_{\text{d.l.}} \frac{z^H_{\text{sél}} - z^B_{\text{sél}}}{R} - \Delta^0_{\text{d.l.}}(1-\xi)\frac{z^H_{\text{mes}} - z^B_{\text{mes}}}{R}}{4(N^H - N^B)k_R k_B} \tag{6.39}$$

$$\tag{6.40}$$

Lorsque l'on va échanger le sens des Raman, l'effet sera le même avec un changement de signe et un facteur $1 - \beta$.

Finalement, on obtient que

$$\Delta\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\text{d.l. 1ph}} \simeq \beta \frac{\Delta^0_{\text{d.l.}} \frac{z^H_{\text{sél}} - z^B_{\text{sél}}}{R} - \Delta^0_{\text{d.l.}}(1-\xi)\frac{z^H_{\text{mes}} - z^B_{\text{mes}}}{R}}{4(N^H - N^B)k_R k_B} \tag{6.41}$$

On ne peut pas calculer précisément cet effet, puisque l'on ne connaît pas bien R. On peut toutefois évaluer que $R > 10$ m. Comme nous ne connaissons pas son signe non plus, nous ne pourrons pas corriger l'effet. L'effet va donc donner uniquement une incertitude. Nous avons mesuré que β vaut au plus 10%.

On calcule alors une incertitude de l'ordre de

$$\sigma\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{d.l. 1ph}} \simeq 2 \times 10^{-10}\,\frac{h}{m} \tag{6.42}$$

6.4.2 Déplacements lumineux à deux photons

Dans notre montage, les faisceaux Raman sortent copropageant de la fibre et traversent la cellule. Une des deux polarisations est rétroréfléchie. L'expérience peut fonctionner parce que la transition copropageante n'est pas résonnante ; cependant, elle induit un déplacement des niveaux. L'écart à résonance pour cette transition dépend de la fréquence δ de la transition Raman : $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\text{SHF}}$. Cette fréquence est très bien connue, puisque c'est la fréquence que nous programmons pour sélectionner ou mesurer la vitesse des atomes. L'effet sera donc beaucoup plus important lors de la seconde impulsion Raman, puisqu'à ce moment là on est résonnant avec des atomes ayant une vitesse quasi nulle, et donc δ est plus faible.

Je rappelle l'écriture du hamiltonien dans le système à deux niveaux (cf. équation (2.21), page 21) :

$$\hbar \begin{pmatrix} \delta & \Omega^{\text{eff}}/2 \\ \Omega^{\text{eff}*}/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

où le couplage effectif à deux photons vaut

$$\Omega^{\text{eff}} = \frac{\pi}{\tau} \tag{6.44}$$

où $\tau = 3{,}4$ ms est la durée de l'impulsion π.

Dans le cas où $\delta > 0$, l'écart $E_2 - E_1$ va diminuer :

$$\frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega_{\mathrm{SHF}} - \frac{\left|\Omega^{\mathrm{eff}}\right|^2}{2\delta} \tag{6.45}$$

Dans l'équation (5.42), il faut donc remplacer les δ par des $\delta + \left|\Omega^{\mathrm{eff}}\right|^2 / 2\delta$.

On obtient donc (en ne regardant qu'un sens Raman).

$$\frac{m}{\hbar}\Delta\left(\frac{\hbar}{m}\right)_{\mathrm{d.l.2ph}} = \frac{\left|\Omega^{\mathrm{eff}}\right|^2}{2}\frac{{\delta^H_{\mathrm{sél}}}^{-1} - {\delta^H_{\mathrm{mes}}}^{-1} - {\delta^B_{\mathrm{sél}}}^{-1} + {\delta^B_{\mathrm{mes}}}^{-1}}{\delta^H_{\mathrm{sél}} - \delta^H_{\mathrm{mes}} - \delta^B_{\mathrm{sél}} + \delta^B_{\mathrm{mes}}} \tag{6.46}$$

En calculant l'effet avec les paramètres du problème (les valeurs de δ sont présentées table 5.2), on obtient (en moyennant sur les deux sens Raman) :

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\mathrm{d.l.\ 2ph}} = -1 \cdot 10^{-9}\frac{h}{m} \tag{6.47}$$

On obtient une correction sur α^{-1} qui vaut $0{,}5 \pm 0{,}2$ ppb (l'incertitude provient essentiellement de la mauvaise connaissance de Ω^{eff} que l'on a estimée à 20%).

6.5 Effet d'indice

Nous allons dans cette partie essayer de comprendre le rôle que peut jouer l'indice de réfraction dans le recul transmis aux atomes. Nous serons amenés à distinguer l'indice de réfraction du nuage d'atomes froids et l'indice de réfraction de la vapeur résiduelle des atomes "chauds".

6.5.1 Calcul de l'indice

Pour calculer l'indice n d'un milieu atomique, on peut partir de la formule donnant la susceptibilité :

$$\chi = \rho\frac{d^2}{\hbar\epsilon_0}\frac{\Delta + i\gamma}{\Delta^2 + \gamma^2} \tag{6.48}$$

où d est le dipole et $\gamma = \frac{\Gamma}{2}$.

On a alors $n = \sqrt{1+\chi}$, d'où $\delta n = n - 1 = \frac{\Re(\chi)}{2}$

En utilisant la relation

$$\Gamma = \frac{d^2\omega^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \tag{6.49}$$

on obtient finalement, pour $\Delta \gg \Gamma$:

$$n - 1 = f\frac{3\pi}{2}\rho\frac{\Gamma}{\Delta}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3 \tag{6.50}$$

où j'ai ajouté la force d'oscillateur f, qui vaut $\frac{2}{3}$ dans le cas de notre transition.

	Δ	ρ[at.cm^{-3}]	δn
Nuage d'atomes froids			
Raman sélection	1 THz	1×10^{10}	$-3{,}5 \times 10^{-10}$
Bloch	40 GHz	2×10^{8}	$-1{,}7 \times 10^{-10}$
Raman mesure	1 THz	2×10^{8}	-7×10^{-12}
Vapeur résiduelle			
Raman	1 THz	8×10^{8}	$-2{,}9 \times 10^{-11}$
Bloch	40 GHz	8×10^{8}	$-7{,}2 \times 10^{-10}$

TAB. 6.2 – Calcul de l'indice pour les différentes étapes de l'expérience

—Vapeur résiduelle— La densité de la vapeur résiduelle a aussi été mesurée par absorption. Un faisceau à résonance avec les atomes dans $|F = 2\rangle$ traversant la cellule de part en part ($L = 70$ cm) est absorbé de 20%. On obtient donc une densité d'atomes à résonance avec le laser qui vaut :

$$n_{\text{res}} = -\frac{\ln I/I_0}{\sigma L} \tag{6.51}$$

où σ est la section efficace d'absorption pour la transition considérée et vaut :

$$\sigma = \frac{2}{3}\frac{3\lambda^2}{2\pi} \tag{6.52}$$

On obtient donc une densité d'atomes à résonance qui vaut $1{,}1 \times 10^6$ at/cm^3. Or il faut tenir compte du fait que :

- Seuls 5/8$^{\text{e}}$ des atomes sont dans $|F = 2\rangle$
- A cause de l'effet Doppler, seule une faible proportion des atomes est à résonance. Cette proportion correspond au rapport entre la largeur Doppler (510 MHz) et la largeur naturelle (6 MHz).
- Il faut tenir compte de l'isotope 85, qui est 3 fois plus abondant que l'isotope 87 utilisé pour l'absorption.

Finalement la densité est d'environ 8×10^8 at/cm^3.

On obtient une valeur de l'indice pour la longueur d'onde Bloch d'environ $(n-1)_{vp\ \text{Bloch}} = -7{,}2 \times 10^{-10}$. Pour les faisceaux Raman, l'effet est beaucoup plus petit $(n-1)_{vp\ \text{Raman}} = -2{,}9 \times 10^{-11}$.

—Nuage d'atomes froids— Nous avons mesuré la densité du nuage par imagerie d'absorption (voir page 27), elle vaut environ 1×10^{10} at.cm^{-3}.

Nous avons calculé l'indice des atomes froids pour les différentes étapes de la mesure (table 6.2). Lors de la sélection Raman, nous partons avec tous les atomes, c'est-à-dire avec une densité de 1×10^{10} at.cm^{-3}. L'indice que l'on calcule vaut alors $(n-1)_{\text{sél}} = -3{,}5 \times 10^{-10}$.

Cette valeur est très faible parce que nous utilisons un laser fortement désaccordé (de près de 1 THz). Lors de l'accélération de Bloch, il ne faut pas oublier que la plupart des atomes ont été éliminés par la sélection. On peut largement considérer qu'il ne reste pas plus de 2% de la densité initiale. Dans ce cas, bien que le faisceau soit beaucoup plus proche de résonance que les faisceaux Raman (40 GHz environ pour les faisceaux Bloch), on obtient un indice qui vaut $(n-1)_{\mathrm{Bloch}} = -1{,}7\times10^{-10}$. Pour la seconde impulsion Raman, nous sommes à la fois très loin de la résonance, et il y a déjà eu la sélection. L'indice vaut environ $(n-1)_{\mathrm{mes}} = -7\times10^{-12}$

Dans notre expérience, nous pouvons voir que l'indice relatif dans toute les circonstances est inférieur à 5×10^{-10}. Il ne pourra donc pas jouer un rôle important dans notre mesure. Nous allons cependant regarder s'il y a un effet sur les atomes.

6.5.2 Calcul de l'effet d'indice pour les oscillations de Bloch

Y a t'il un effet ?

La question de l'impulsion d'un photon dans un milieu d'indice n est une question qui remonte à longtemps puisqu'elle peut être exprimée en terme classique, par rapport à l'impulsion d'un champ électromagnétique d'energie donnée. Cette question a donnée lieu à une polémique entre Abraham [58, 59] qui affirme que la quantité de mouvement d'une impulsion d'énergie E vaut E/nc où n est l'indice de réfraction du milieu, et Minkowski [60, 61], pour qui cette quantité de mouvement doit être En/c. Des travaux postérieurs dus à R. Peierls ont donné une valeurs différentes [62]. En calculant la force de radiation d'un impulsion lumineuse sur un miroir, J.P. Gordon [63] trouve que la quantité de mouvement transmise correspond à la formule de Minkowski. En quantifiant cette relation, on obtient que la quantité de mouvement dans un milieu d'indice n d'un photon de vecteur d'onde (dans le vide) $\vec{k}$ est $n\hbar\vec{k}$.

Récemment, une expérience a mis en évidence un effet dû à l'indice dans l'énergie de recul dans un condensat de Bose-Einstein [64]. Le principe de l'expérience consiste à mesurer la fréquence de recul en utilisant un interféromètre de Ramsey à deux impulsions. Les deux impulsions sont réalisées à l'aide d'ondes stationnaires séparées par une durée τ. Par imagerie de temps de vol, il est possible de mesurer l'interférence entre les atomes diffractés par la première impulsion et les atomes diffractés par la seconde. On accède ainsi à la différence de phase qui est égale à $\omega_{\mathrm{rec}}\tau$ où ω_{rec} est la fréquence de recul.

Le résultat essentiel de cette expérience est l'observation d'un effet d'indice sur l'énergie de recul : celle ci est proportionnelle au carré de l'indice, ce qui correspond à un transfert d'impulsion de $n\hbar k$.

Se posent alors deux questions : si l'on écrit la conservation de l'impulsion, d'où provient l'impulsion supplémentaire $(\delta n\hbar k)$? Et est-ce que dans le cas d'oscillations de Bloch, l'effet d'indice apparaît aussi ?

Le principe essentiel que l'on va essayer d'exploiter est la conservation de l'impulsion. Dans le cas des oscillations de Bloch, on sait que l'impulsion d'un photon juste avant qu'il entre dans le milieu vaut $\hbar k$. Si un atome subit une transition, alors le photon ressort par le côté où il est arrivé et son impulsion vaut $-\hbar k$. Le milieu atomique a donc reçu l'impulsion de $2\hbar k$. Ce raisonnement ne nous décrit pas exactement ce qui se passe dans le milieu, ni quelle est l'impulsion des atomes après une telle transition. Cependant, si l'on écrit qu'une oscillation complète correspond à autant de cycles absorption - émission de photons que d'atomes, l'impulsion finale transmise à chaque atome sera de $2\hbar k$ et il n'y a pas de raison de tenir compte de l'indice.

On peut cependant tenir le raisonnement suivant : dans un milieu d'indice n, le champ électrique se propage avec une phase qui varie en nkx. Lors de l'interaction entre les atomes et la lumière, cette phase va être ajoutée à la fonction d'onde atomique. Ceci signifie donc que l'impulsion de l'atome est augmentée (pour une transition à 1 photon) de $n\hbar k$. Ce résultat semble être en totale contradiction avec le précédent, puisqu'il indiquerait qu'il faut tenir compte de l'indice dans le recul d'un atome.

En fait, il est possible de concilier les deux raisonnements par un modèle qui permet de décrire le recul de l'atome avec un effet indice tout en assurant la conservation de l'impulsion. Ce modèle que je vais présenter n'est sans doute pas extrêmement rigoureux, mais il permet de mettre en évidence le fait qu'il n'y a pas de contradiction entre les deux points de vue.

Modélisation de l'interaction photon-atome dans un milieu dispersif

On se place dans le cas où le champ électromagnétique peut être traité classiquement. Quand on écrit un hamiltonien d'interaction atome-lumière dans ce cas, on considère souvent la situation où le champ électromagnétique n'est pas perturbé par les atomes. On calcule (avec les équations de Maxwell) le champ classique $\vec{E}(x,t)$ et ensuite on écrit l'hamiltonien de couplage

$$\hat{V} = \vec{E}(\hat{x},t).\hat{\vec{d}} \tag{6.53}$$

où $\hat{\vec{d}}$ est l'opérateur dipôle (qui agit sur les états interne) et où maintenant $\vec{E}(\hat{x},t)$ est un opérateur qui agit sur les degrés de liberté externes de la particule.

Dans le cas où on veut tenir compte de l'indice, le champ électrique va dépendre de la position de l'ensemble des particules, c'est-à-dire, qu'il est un opérateur par rapport à la position de l'ensemble des atomes.

Je vais calculer $\vec{E}(x,t)$ avec un modèle très simple. Supposons que l'on a N atomes (indexés dans la suite par la lettre l) répartis uniformément dans une boîte. L'indice va être constant et on l'écrit $n = 1+\delta n$. J'écris ici la propagation d'un champ classique dans un milieu d'indice n. Il s'agit d'une approximation non justifiée, et il faudrait en toute rigueur utiliser une équation de propagation quantique. Cependant, avec ce modèle semi-classique que je présente, nous allons pouvoir comprendre comment il est possible de concilier les deux points de vue.

Nous avons deux faisceaux lasers[3] indexés par j, qui dans le vide se propagent de la façon suivante :

$$E_j(x,t) = \frac{1}{2}E_0 e^{\pm ikx} e^{-i\omega t} + c.c. \tag{6.54}$$

où il y a un $+$ pour $j = 1$ et un $-$ pour $j = 2$.

A cause du nuage d'atomes, il va falloir rajouter un déphasage $\delta\phi_l(x)$ dû à l'indice. Entre deux points x et x', on va avoir :

$$\delta\phi_j(x) - \delta\phi_j(x') = \pm\delta nk(x - x') \tag{6.55}$$

Le point clef du raisonnement consiste à remarquer que le déphasage $\delta\phi_j$ va dépendre de la position du point par rapport aux autres atomes du nuage. Ce déphasage fait intervenir la longueur totale parcourue dans le milieu.

On peut alors remarquer qu'au milieu du nuage cette longueur est la même pour les deux faisceaux lasers. Les déphasages sont donc les mêmes pour les deux faisceaux. La position du milieu peut s'écrire $\langle x \rangle = \sum_i x_i/N$, où x_i désigne la position de chaque particule. On obtient alors le résultat suivant :

$$\delta\phi_1(\langle x \rangle) = \delta\phi_2(\langle x \rangle) \tag{6.56}$$

En combinant les équations 6.55 et 6.56 on obtient que :

$$\delta\phi_1(x) - \delta\phi_2(x) = 2\delta nk(x - \langle x \rangle) \tag{6.57}$$

Nous écrivons donc que la phase et donc le champ électromagnétique dépendent de la position des atomes. C'est-à-dire, que dans notre modèle, la champ électromagnétique $E(x,t)$, même pour une variable x non quantique est un opérateur sur l'ensemble des atomes qui constituent le milieu dispersif.

Nous pouvons revenir a l'hamiltonien. Nous voulons calculer un processus à deux photons, c'est-à-dire

$$\hat{V}_{\text{eff}} = \frac{\hat{V}_1\hat{V}_2}{\Delta} \tag{6.58}$$

où Δ désigne le désaccord à un photon. Dans l'opérateur $\hat{V}_{\text{eff}}$, la partie interne de l'atome ainsi que l'amplitude du champ se traitent de façon usuelle. Il reste la partie externe (phase). On obtient un déplacement lumineux qui vaut, pour l'atome numéro l :

$$\begin{aligned} \hat{U}_l &= \frac{U_0}{2} e^{i(2k\hat{x}_l + (\delta\phi_1(\hat{x}_l) - \delta\phi_2(\hat{x}_l)))} + c.c. && (6.59) \\ &= \frac{U_0}{2} e^{i\left(2nk\hat{x}_l - \sum_i \frac{2\delta nk}{N}\hat{x}_i\right)} + c.c. && (6.60) \end{aligned}$$

[3] On va supposer pour simplifier les notations que les deux faisceaux ont la même amplitude et la même fréquence.

Le hamiltonien final s'écrit donc :

$$\hat{H} = \sum_l \frac{\hat{p}_l^2}{2m} + \frac{U_0}{2}\left(e^{i2nk\hat{x}_l - \sum_i \frac{2\delta nk}{N}\hat{x}_i} + c.c.\right) \tag{6.61}$$

L'opérateur $\hat{U}_l$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\hat{U}_l = \frac{U_0}{2}\left(\mathcal{T}_l + \mathcal{T}_l^\dagger\right) \tag{6.62}$$

où $\mathcal{T}_l$ est l'opérateur unitaire défini par

$$\mathcal{T}_l = e^{i2nk\hat{x}_l - \sum_i \frac{2\delta nk}{N}\hat{x}_i} \tag{6.63}$$

$\mathcal{T}_l$ désigne le processus suivant : l'atome numéro l acquiert une quantité d'impulsion $2n\hbar k$ **et** tous les atomes acquièrent une impulsion $-2\delta n\hbar k/N$. Dans le cas où l'indice de réfraction vaut 1 ($\delta n = 0$), cet opérateur correspond à l'absorption et à l'emission stimulée d'un photon.

On a donc retrouvé le résultat auquel on pouvait s'attendre, et qui correspond à ce qui est suggéré dans [64] : le milieu absorbe la différence entre l'impulsion des photons entrants ($2\hbar k$) et l'impulsion acquise par l'atome ($2n\hbar k$). Ce résultat est compatible avec la diffraction par une onde de vecteur d'onde nk et la conservation totale de l'impulsion.

Oscillation de Bloch

Concernant notre problème d'oscillations de Bloch, si tous les atomes effectuent une transition, alors l'état final du système $|\psi_f\rangle$ partant de l'état initial $|\psi_0\rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \prod_l \mathcal{T}_l |\psi_0\rangle && (6.64)\\
&= e^{\sum_l\left(i2nk\hat{x}_l - \sum_i \frac{2\delta nk}{N}\hat{x}_i\right)}|\psi_0\rangle && (6.65)\\
&= \prod_l e^{i2k\hat{x}_l}|\psi_0\rangle && (6.66)
\end{aligned}$$

Une oscillation complète de tous les atomes correspond donc au transfert pour chaque atome de deux fois la vitesse de recul, sans effet d'indice.

Ce raisonnement n'est valable qu'à condition qu'il y ait un transfert de 100% des atomes. Si on écrit une efficacité de transfert $\eta = 1 - \epsilon$, alors on obtient, si on décide que ce sont les $(1-\epsilon)N$ premiers atomes qui sont transférés :

$$\begin{aligned}
|\psi_f\rangle &= \prod_{l=1}^{l=(1-\epsilon)N} \mathcal{T}_l |\psi_0\rangle && (6.67)\\
&= \prod_{l=1}^{l=(1-\epsilon)N} e^{i2k(1+\epsilon\delta n)\hat{x}_l} \prod_{l=(1-\epsilon)N+1}^{l=N} e^{i2k\delta n(1-\epsilon)\hat{x}_l}|\psi_0\rangle && (6.68)
\end{aligned}$$

Pour une transition avec une efficacité de transfert η, les atomes ayant effectué la transition ont une impulsion qui vaut $2(1 + (1 - \epsilon\delta n)\hbar k$, les atomes qui n'ont pas effectué de transition ont une impulsion qui vaut $-2\eta\delta n\hbar k$.

Sur N_{osc} oscillations, le recul acquis par les atomes ayant fait N_{osc} oscillations est donc :

$$2N_{\text{osc}}v_r + N_{\text{osc}}\epsilon\delta n v_r \tag{6.69}$$

L'effet systématique relatif dû à l'indice est donc $\epsilon\delta n$.

Dans notre expérience, nous avons $\epsilon < 5\,10^{-4}$. Partant d'un indice inférieur à 10^{-9}, l'effet semble donc totalement négligeable.

6.5.3 Indice pendant les impulsions Raman

La sélection en vitesse est effectuée sur un nuage d'atomes préalablement accélérés. On peut se poser la question de savoir si à cause de l'indice de réfraction les atomes sélectionnés pour un décalage Doppler δ ont une vitesse $v = \delta/2k$ ou $v = \delta/2nk$ où n est l'indice de réfraction.

Il faut distinguer suivant que l'indice provient de la vapeur résiduelle ou bien du nuage lui-même.

— **Effet d'indice du nuage** — On considère un nuage d'atomes se déplaçant à la vitesse v_0. On va effectuer une transition Raman avec deux faisceaux lasers de fréquences ν_1 et ν_2 dans le référentiel du laboratoire. La question que l'on se pose est de savoir quelle va être la différence de fréquence entre les deux lasers, à l'intérieur du nuage d'indice n, dans un référentiel qui se déplace à la vitesse v.

Dans le cas usuel où il n'y a pas d'indice, l'effet Doppler peut se calculer de la façon suivante : la phase d'un faisceau laser vaut

$$\phi(x,t) = kx - \omega t \tag{6.70}$$

Un observateur dans le nuage, qui se déplace à la vitesse v ($x(t) = x_0 + vt$), voit donc une phase qui évolue au cours du temps

$$\phi(x(t),t) = kx_0 - (\omega - kv)t \tag{6.71}$$

Il aperçoit donc une onde à la fréquence $\omega' = \omega - kv$.

Dans le cas où il y a un indice dans le milieu, il faut remplacer k par nk. On va donc obtenir que :

$$\omega \to \omega - nkv \tag{6.72}$$

Mais il y a un autre effet dont il faut tenir compte : lorsque le milieu bouge, même pour un observateur immobile, la fréquence du laser est différente (voir figure 6.9). En effet le

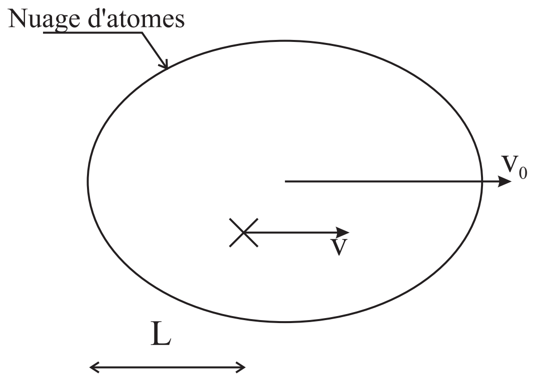


FIG. 6.9 – Effet d'indice pour une transition Raman. Si l'observateur et le nuage se déplacent à la même vitesse, alors la longueur optique L dans le nuage reste constante, et il n'y a pas d'effet. Dans le cas général, l'effet dépend de la différence $v - v_0$ de vitesse entre l'observateur et le nuage

déphasage dépend de la longueur optique qui dépend de la longueur parcourue dans le milieu réfractif. Pour un milieu d'indice $n = 1 + \delta n$ à la vitesse v_0, on obtient que

$$\omega \rightarrow \omega + \delta n k v_0 \tag{6.73}$$

Si on considère maintenant les deux effets on obtient que

$$\omega' = \omega - nkv + \delta n k v_0 = \omega - kv + \delta n k(v_0 - v) \tag{6.74}$$

En particulier, pour $v = v_0$, la formule du calcul de l'effet Doppler ne fait pas intervenir d'indice. Ce résultat peut se retrouver directement par un changement de référentiel entre la situation où l'observateur et le nuage sont immobiles et la situation où les deux vont à la vitesse v_0. Dans ce cas on utilise les formules de changement de référentiel : $\omega \rightarrow \omega(1 - \beta)$ où $\beta = v_0/c$. Si $v = v_0$, dans ce référentiel, à la fois le nuage et l'observateur sont immobiles et il n'y a pas d'effet supplémentaire de changement de fréquence.

Nous avons vu dans la première partie du manuscrit que pour calculer la vitesse des atomes résonnants avec la transition Raman, il faut à la fois tenir compte de l'effet Doppler et de l'effet de recul : la vitesse v qu'il faut considérer n'est pas la vitesse initiale, mais la vitesse moyenne entre l'état initial et l'état final : $v = (v_i + v_f)/2 = (\omega - \omega_{\mathrm{SHF}})/(2k)$ avec $v_i = v - v_r$ et $v_f = v + v_r$. Dans le cas où le milieu présente un indice, et que l'on a une différence de fréquence entre les deux faisceaux Raman à la fréquence qui vérifie

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_{\mathrm{SHF}} - kv_0 \tag{6.75}$$

alors dans le référentiel à la vitesse v_0 la différence de fréquence des lasers est égale à la structure hyperfine et on va sélectionner des atomes qui vérifient $(v_i + v_f)/2 = v_0$. Mais, puisqu'il y a un effet d'indice dans le recul, on a la vitesse initiale qui vaut $v_i = v_0 - nv_r$ et la vitesse finale qui vaut $v_f = v_0 + nv_r$.

—Calcul à partir de la conservation de l'énergie et de l'impulsion— On peut retrouver ce résultat en écrivant la conservation de l'énergie et de l'impulsion de l'ensemble des atomes.

Nous allons numéroter les atomes par l'exposant l, l'atome effectuant la transition portant l'exposant 0. Les atomes du milieu ont chacun une vitesse v_i^l qui en moyenne vaut v_0. Si on applique le résultat de la page 164 (équation 6.63, et son interprétation), les vitesses deviennent :

$$v_f^0 = v_i^0 + 2nv_r \qquad \text{et} \qquad v_f^l = v_i^l - \frac{2\delta n}{N} v_r \quad (l \neq 0) \tag{6.76}$$

où N est le nombre total d'atomes.

On peut alors écrire la conservation de l'énergie

$$\left(E_a + \frac{1}{2}mv_i^{0\,2} + \hbar\omega_1\right) + \sum_l \left(\frac{1}{2}mv_i^{l\,2}\right) = \left(E_b + \frac{1}{2}mv_f^{0\,2} + \hbar\omega_2\right) + \sum_l \left(\frac{1}{2}mv_f^{l\,2}\right) \tag{6.77}$$

Les deux équations (6.76) et (6.77) donnent finalement la relation suivante (au premier ordre en δn) :

$$\delta_R = \frac{E_a - E_b}{\hbar} + (\omega_1 - \omega_2) = 2k\left(\frac{v_i^0 + v_f^0}{2}\right) + 2\delta n k\left(\frac{v_i^0 + v_f^0}{2} - v_0\right) \tag{6.78}$$

L'indice intervient à deux endroits : d'une part dans l'effet de recul ($v_f^0 - v_i^0 = 2nv_r$), et d'autre part dans le cas où l'on sélectionne des atomes qui ont une vitesse différente de celle du nuage. Dans notre expérience, ces deux effets modifient la vitesse des atomes par une quantité de l'ordre de $\delta n v_r$, ce qui, dans le cas d'atomes allant à $2Nv_r$, donne un effet relatif de $\delta n/2N$.

Pour $\delta n \simeq 3 \cdot 10^{-10}$ et $N \simeq 500$, l'effet semble donc lui aussi totalement négligeable.

Effet d'indice de la vapeur résiduelle

Que ce soit pendant les transitions Raman, où pendant les oscillations de Bloch, l'indice de la vapeur résiduelle joue un rôle totalement différent de celui du nuage.

Ainsi, pour les transitions Raman, nous ne pouvons pas suivre le même raisonnement, puisque lorsque l'on se place dans le référentiel du nuage, la vapeur résiduelle va se déplacer. La situation est donc différente de celle d'un nuage immobile dans le référentiel lié à la vapeur. Nous avons vu en particulier que, lorsqu'un milieu dispersif a une vitesse par rapport à l'observateur, alors la fréquence du champ électromagnétique dépend de l'indice (figure 6.9).

Pour les oscillations de Bloch, on peut reprendre le raisonnement disant que les atomes qui ne sont pas accélérés donnent un effet d'indice. Dans le cas de la vapeur résiduelle, la plupart des atomes de la vapeur ne sont pas accélérés.

Dans la formule donnant h/m, il faut donc remplacer k_B par $n_{\text{v.r.}}^B.k_B$ et k_R par $n_{\text{v.r.}}^R.k_R$ où $n_{\text{v.r.}}^B$ (resp. $n_{\text{v.r.}}^R$) désigne l'indice de la vapeur résiduelle à la longueur d'onde des faisceaux Bloch (resp. Raman).

Nous avons donc :

$$\frac{(h/m)}{(h/m)_{\mathrm{brut}}} = \frac{k_B k_R}{n^B_{\mathrm{v.r.}} n^R_{\mathrm{v.r.}} k_B k_R} \tag{6.79}$$

C'est-à-dire que

$$\Delta\left(\frac{h}{m}\right)_{\text{indice v.r.}} = \left(-\delta n^B_{\mathrm{v.r.}} - \delta n^R_{\mathrm{v.r.}}\right)\frac{h}{m} \tag{6.80}$$

La principale contribution va provenir de l'indice durant l'accélération de Bloch. En prenant la valeur de la table 6.2, nous obtenons une correction sur α^{-1} de $-0{,}3$ ppb. Compte-tenu de la précision avec laquelle nous estimons la densité de la vapeur résiduelle (à un facteur 2 près), nous ajoutons une incertitude égale +0,3 ppb.

6.6 Bilan des incertitudes

TAB. 6.3 – Constantes utilisées pour déterminer α à partir de h/m.

	Valeur	Incertitude relative (ppb)
Constante de Rydberg [1]	10 973 731,568 525 (73) m^{-1}	0,0006
Masse du rubidium [9]	86,909 180 520 (15) amu	0,2
Masse de l'electron [1]	5,485 799 0945(24) 10^{-4} amu	0,44

TAB. 6.4 – Bilan des effets systématiques et des incertitudes associées.

Effet sur la mesure de α^{-1}	Correction (α^{-1}) (ppb)	Incertitude (α^{-1}) (ppb)
Longueur d'onde		0,8
Parallélisme des faisceaux	-2	2
Phase de Gouy et courbure du front d'onde	-8.2	4
Déplacement Zeeman quadratique	6,6	2
Force Zeeman quadratique	-1,3	0,4
Gradient de gravité	-0,18	0,02
Déplacement lumineux 1 photon		0,2
Déplacement lumineux 2 photons	-0,5	0,2
Indice de réfraction (nuage d'atomes)	<0,1	<0,1
Indice de réfraction (vapeur résiduelle)	-0,37	0,3
Total	-5,95	5,0

Nous présentons dans la table 6.3 les principales constantes que nous avons utilisées pour obtenir une détermination de α^{-1} à partir de nos mesures. Leurs incertitudes sont en fait négligeables. La table 6.4 récapitule l'ensemble des effets systématiques et leurs incertitudes dont nous avons tenu compte dans la détermination finale de α^{-1}.

La valeur de α^{-1} sans correction (équation 5.35) vaut

$$\alpha^{-1} = 137{,}035\,999\,59\,(60) \quad [4{,}4 \cdot 10^{-9}] \tag{6.81}$$

La valeur finale que nous avons obtenue, avec correction, est

$$\alpha^{-1}(Rb) = 137{,}035\,998\,78\,(91) \quad [6{,}7 \cdot 10^{-9}] \tag{6.82}$$

La figure 6.10 montre notre valeur parmi les autres valeurs présentées dans le rapport 2002 du CODATA. Notre valeur est cohérente avec les mesures de α^{-1} déduites de l'anomalie du rapport gyromagnétique de l'électron et de la valeur de $h/m(Cs)$.

	α^{-1}	Incertitude
a_e	137,035 99880(52)	$3{,}8 \times 10^{-9}$
$h/m(Rb)$	137,035 99878(91)	$6{,}7 \times 10^{-9}$
$h/m(Cs)$	137,036 0001(11)	$7{,}7 \times 10^{-9}$
R_K	137,036 0030(25)	$1{,}7 \times 10^{-8}$
Γ'_{90}	137,035 9875(43)	$3{,}1 \times 10^{-8}$
h/m_n	137,036 0015(47)	$3{,}4 \times 10^{-8}$
$\Delta\nu_{\mathrm{Mu}}$	137,036 0017(80)	$5{,}8 \times 10^{-8}$

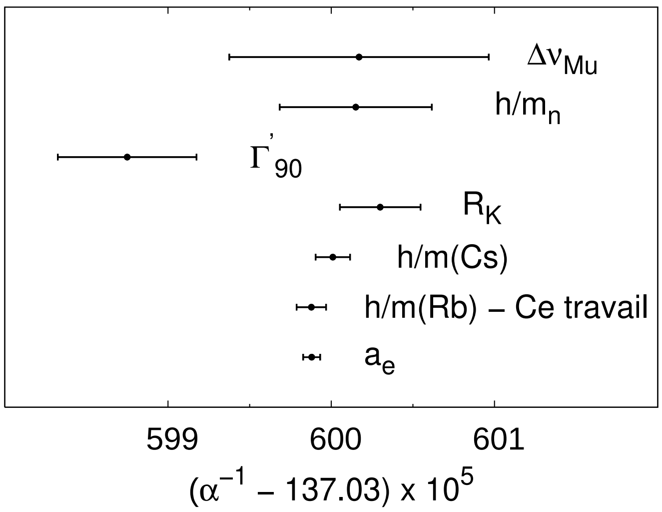


FIG. 6.10 – Comparaison de notre mesure ($h/m(Rb)$) avec les valeurs utilisées pour l'ajustement du CODATA 02.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Conclusion

7.1.1 Les différentes améliorations

Notre dispositif expérimental permet maintenant de mesurer une variation de vitesse avec une incertitude d'environ $10^{-4}v_r$ en 5 minutes d'enregistrement. Si on reporte l'incertitude par point de mesure, on obtient une valeur d'environ $1{,}3 \times 10^{-3}v_r$ par point. La principale réduction de cette valeur a été obtenue après une réduction des bruits de vibration, en particulier grâce au déménagement de l'expérience au rez-de-chaussée.

Concernant les oscillations de Bloch, après plusieurs modifications sur l'expérience, nous sommes maintenant capables d'effectuer près de 500 oscillations. Nous avions d'abord pu réaliser 50 oscillations en configuration horizontale, grâce à la technique de la double accélération qui permet de laisser les atomes à la fin de la mesure avec une vitesse quasi nulle. Cette technique, nous a ensuite permis de réaliser 80 oscillations en configuration verticale. Le chiffre de 500 oscillations a été obtenu notamment grâce à : l'augmentation de l'intensité des lasers (obtenue en réduisant la taille des faisceaux et en augmentant la puissance totale du laser) ; à l'utilisation d'un réseau optique décalé dans le bleu, afin de réduire l'émission spontanée ; et à la mise en place de la coupure adiabatique du potentiel, .

Nous avons ainsi pu obtenir une mesure de α avec une incertitude statistique de $4{,}4 \times 10^{-9}$. Cette incertitude va au delà de nos espérances initiales.

L'incertitude totale provenant des effets systématiques est actuellement de 5×10^{-9}. Nous avons cependant dû effectuer plusieurs corrections importantes de notre valeur. L'effet dominant provient de la courbure des fronts d'onde et de la phase de Gouy qui présentent un effet de l'ordre de 10^{-8}. Il a heureusement pu être mesuré. Une étude plus précise sur les collimateurs devrait permettre de le réduire.

Un autre effet dominant provient de la présence d'un champ magnétique parasite important. Nous avons pu éliminer une grande partie de l'effet en modifiant le protocole expérimental. Cependant il reste une contribution non négligeable que nous avons pu mesurer.

La valeur de α^{-1} que nous présentons dans ce travail est :

$$\alpha^{-1}(Rb) = 137{,}035\,998\,78\,(91) \quad [6{,}6 \cdot 10^{-9}] \tag{7.1}$$

7.1.2 Perspectives

La construction d'une nouvelle enceinte ultra-vide est en cours. Ce travail, qui à l'origine devait faire partie de mon travail de thèse, a été repoussé suite en particulier à une meilleure compréhension de l'expérience préliminaire et de ses limites.

Avec cette nouvelle cellule, il devrait être possible d'augmenter sensiblement le nombre initial d'atomes dans le piège magnéto-optique. Ceci devrait permettre d'augmenter le rapport signal à bruit sur la détection – ce rapport devenant la principale limite du senseur inertiel une fois les bruits de vibration supprimés. Enfin, grâce à la construction d'un piège magnéto-optique 2D pour charger les atomes dans un piège 3D, il devrait être possible de réduire le taux de collision avec la vapeur résiduelle. La mesure de la période de Bloch dans une onde stationnaire devrait ainsi être sensiblement améliorée.

Enfin, cette nouvelle cellule en titane sera protégée par un blindage magnétique. Il va alors être possible de réduire fortement les fluctuations de champ magnétique qui constituent actuellement notre seconde source d'effet systématique.

7.2 Notre expérience et l'interféromètrie atomique

7.2.1 Les différents interféromètres

Comme nous l'avons présenté dans l'introduction, il existe des expériences de mesure de la vitesse de recul basées sur l'interférométrie atomique. L'expérience qui a donné les meilleurs résultats est celle de S. Chu à Stanford utilisant l'atome de cesium. Il existe une autre expérience menée par D.E. Pritchard au MIT basée sur un condensat de sodium [65]. Nous avons aussi présenté dans ce manuscrit des expériences d'interférométrie atomique que nous avons réalisées avec notre dispositif.

Interféromètre de Ramsey à deux impulsions

L'interféromètre atomique le plus simple qui permet de mesurer la vitesse de recul est basé sur deux impulsions $\pi/2$ séparées par un délai T_{Ramsey} (voir figure 7.1). Il existe plusieurs méthodes pour réaliser ces impulsions suivant les expériences. Ce qui est commun à toutes ces méthodes est qu'il est possible de transférer l'atome entre deux états stables (que l'on notera $|a\rangle$ et $|b\rangle$) et de lui donner en même temps une quantité de mouvement bien définie. Cette quantité correspond, pour l'ensemble des expériences citées, au recul de 2 photons ($2\hbar k$).

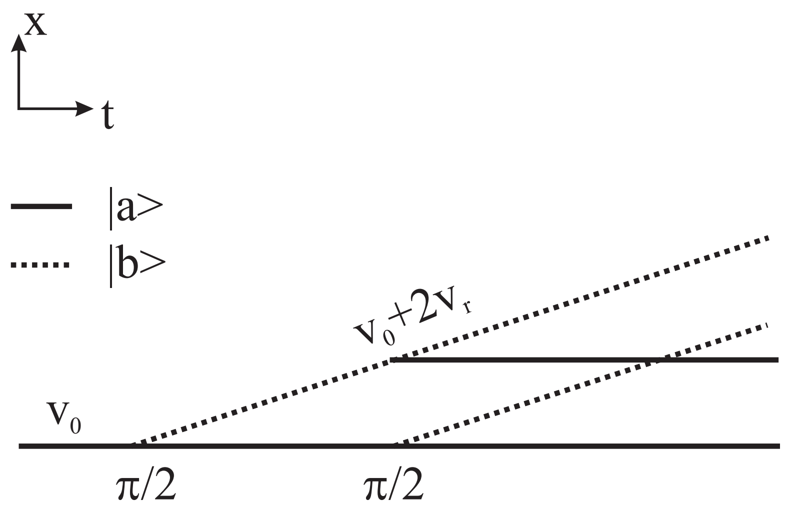


FIG. 7.1 – Schéma de principe de l'interféromètre de Ramsey à deux impulsions.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 7.1, il existe en tout quatres chemins possibles pour les atomes. Les chemins correspondants au même état final vont interférer à l'infini. Pour calculer la probabilité pour un atome d'être dans un état ou un autre, il faut calculer le déphasage entre les chemins.

Partant d'atomes initialement dans l'état $|a\rangle$, une première impulsion $\pi/2$ les transfère dans l'état $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$. Le déphasage entre les états provient de leur énergie cinétique E_c. Appelons v_0 la vitesse initiale de l'atome, l'atome dans l'état $|b\rangle$ a une vitesse qui vaut $v_0 + 2v_r$. Entre les deux impulsions $\pi/2$, la différence de phase accumulée due à l'énergie cinétique vaut donc :

$$\Delta\phi_c = \frac{T_{\text{Ramsey}}}{\hbar} \times (E_c^{|b\rangle} - E_c^{|a\rangle}) = 2kT_{\text{Ramsey}}(v_0 + v_r) \tag{7.2}$$

Il faut ajouter à ce déphasage le déphasage $\Delta\phi_{\text{laser}}$ du laser. Ce déphasage dépend de l'écart de fréquence δ entre le laser et la transition atomique :

$$\Delta\phi_{\text{laser}} = \delta T_{\text{Ramsey}} \tag{7.3}$$

En mesurant le déphasage total en fonction de δ, on peut remonter à une mesure de $2k(v_0 + v_r)$. C'est pratiquement ce qui est effectué dans l'expérience de D.E. Pritchard et W. Ketterle qui leur a permis de mesurer l'effet d'indice dans le recul atomique (voir section 6.5.2 et [64]). Partant d'un condensat, on peut supposer que $v_0 = 0$; ainsi, la valeur de δ correspondant au centre des franges vaut $4E_r/\hbar$.

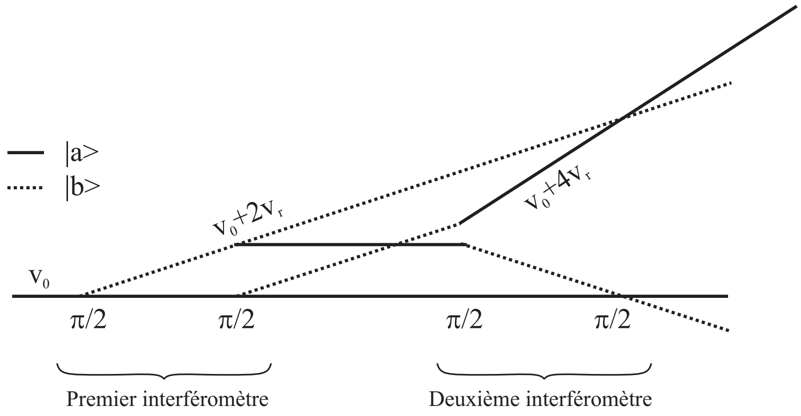


FIG. 7.2 – Schéma de l'interféromètre de Ramsey Bordé. Nous n'avons représenté que les chemins fermés qui interfèrent. Entre le premier et le second interféromètre, le sens du recul transféré aux atomes change.

Interféromètre de Ramsey-Bordé

Le principal défaut de l'expérience décrite précédemment est que le déphasage final entre les deux chemins qui interfèrent dépend de la vitesse initiale de l'atome. En couplant deux interféromètres à deux impulsions $\pi/2$, il est possible de supprimer cet effet (voir figure 7.2).

En effet, si on regarde les trajectoires du haut présentées sur la figure 7.2, le déphasage dû à l'énergie cinétique se calcule à partir de la différence d'énergie cinétique de chaque état pendant les deux interféromètres :

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_c &= \underbrace{\frac{T_{\text{Ramsey}}}{\hbar}\left(\frac{1}{2}m(v_0+2v_r)^2-\frac{1}{2}mv_0^2\right)}_{\text{Premier interféromètre}}+\underbrace{\frac{T_{\text{Ramsey}}}{\hbar}\left(\frac{1}{2}m(v_0+2v_r)^2-\frac{1}{2}m(v_0+4v_r)^2\right)}_{\text{Deuxième interféromètre}} \\
&= -4kT_{\text{Ramsey}}v_r = -8T_{\text{Ramsey}}\frac{E_r}{\hbar} \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Le déphasage ici ne dépend pas de la vitesse initiale, ce qui nous permet d'effectuer l'expérience avec des atomes ayant une distribution en vitesse plus importante que la vitesse de recul[1].

Nous pouvons retrouver l'équation 7.4 en remarquant que le déphasage qui est accumulé entre les deux impulsions $\pi/2$ d'un des deux interféromètres est proportionnel à la moyenne de la vitesse de l'atome entre les deux trajectoires :

$$\Delta\phi_c = 2kT_{\text{Ramsey}}\frac{(v_{|a\rangle}+v_{|b\rangle})}{2} \qquad (7.5)$$

[1]Il est facile de voir que le fait que le déphasage ne dépende pas de la vitesse initiale est équivalent à dire que les trajectoires sont fermées, c'est à dire que la position des atomes au moment de la dernière impulsion est la même pour les deux trajectoires.

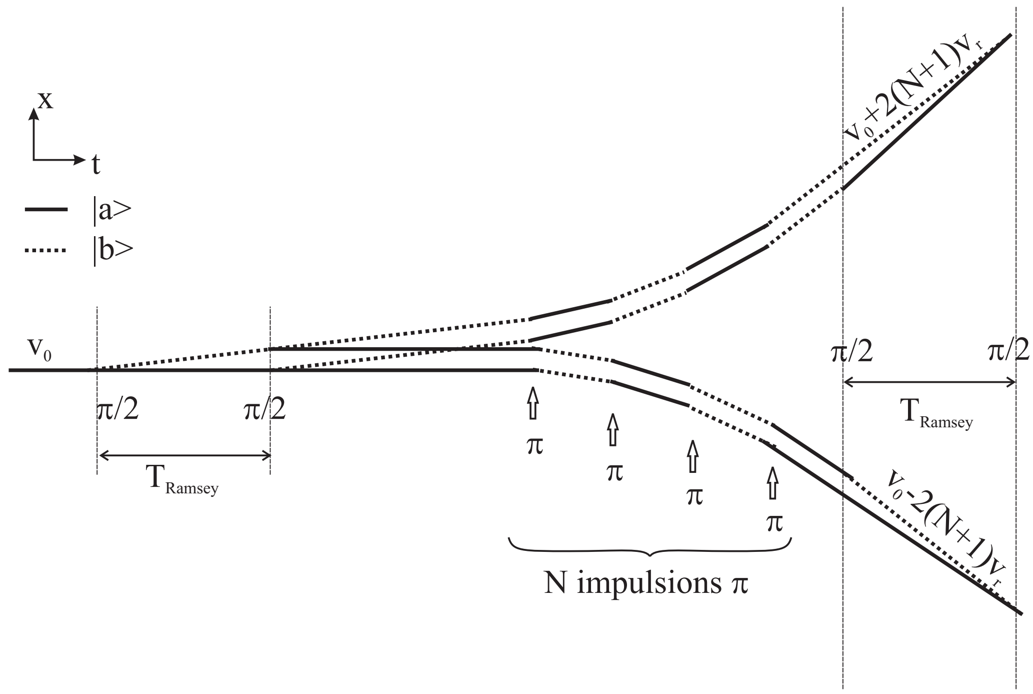


FIG. 7.3 – Schéma de l'interféromètre de S. Chu.

La séquence de deux impulsions $\pi/2$ constitue donc un système sensible à la vitesse.

Dans le double interféromètre de Ramsey-Bordé, c'est la différence entre la vitesse moyenne au moment du premier interféromètre et au moment du second qui est mesurée. Puisque la direction du recul transmis aux atomes change, cette différence vaut $2v_r$, d'où le résultat de l'équation 7.4.

L'interféromètre de Ramsey-Bordé mesure la variation de vitesse des atomes. Il est donc sensible à la gravité. Cet effet peut être supprimé en effectuant une mesure différentielle entre l'interférogramme obtenu à partir de la trajectoire du haut et celle du bas (voir figure 7.2).

L'expérience de S. Chu

L'interféromètre de Ramsey-Bordé décrit dans le paragraphe précédent est donc à la fois un système permettant une mesure de v_r mais aussi un senseur inertiel. En utilisant cette deuxième caractéristique, S. Chu peut augmenter considérablement la résolution de sa mesure : pour cela il accélère les atomes en leur transférant un grand nombre de vitesses de recul entre la première et la deuxième séquence d'impulsions Ramsey (voir figure 7.3).

La méthode utilisée dans cette expérience pour accélérer les atomes est différente de la nôtre : les atomes sont accélérés en utilisant un transfert adiabatique entre les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$, en changeant alternativement le sens des faisceaux afin d'accélérer les atomes toujours dans

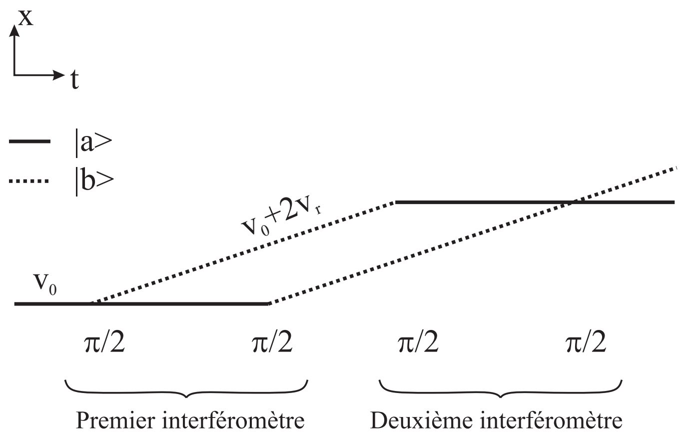


FIG. 7.4 – Schéma de notre interféromètre.

le même sens. Chaque transfert donne une impulsion de $2v_r$ aux atomes. Si on appelle N le nombre de transferts, alors la différence de vitesse moyenne entre la première et la deuxième séquence d'impulsions Ramsey vaut $2(N+1)v_r$. Le déphasage dû à l'énergie cinétique vaut donc :

$$\Delta\phi_c = 8(N+1)T_{\text{Ramsey}}\frac{E_r}{\hbar} \tag{7.6}$$

Version interférométrique de notre expérience

Nous avons décrit dans la première partie de ce manuscrit comment il était possible de construire un senseur intertiel à base interféromètrique avec notre montage, juste en changeant la séquence temporelle. Celui ci est composé, tout comme l'interféromètre de Ramsey-Bordé de 4 impulsions $\pi/2$. A la différence de ce dernier, nous ne changeons pas la direction des faisceaux Ramsey entre les deux paires d'impulsions $\pi/2$ (voir figure 7.4).

Comme nous pouvons le remarquer sur cette figure, la vitesse moyenne des atomes est la même pour la première partie et la seconde partie de l'interféromètre. Ce schéma ne nous permet donc pas de mesurer directement la vitesse de recul. Pour en avoir une mesure, il est donc indispensable d'accélérer les atomes entre cette première et seconde partie (voir figure 7.5). Si on transfère $2Nv_r$ aux atomes, le déphasage est identique à celui de l'équation 7.6, sauf qu'il faut remplacer $N+1$ par N.

Cette version interféromètrique de notre expérience est, sur le plan du principe, quasiment identique à celle de S. Chu. Il existe cependant quelques différences : nous pouvons remarquer que dans notre interféromètre, pour deux chemins qui interfèrent, la durée passée dans chaque état $|a\rangle$ ou $|b\rangle$ est la même. La conséquence de ceci est que la position de chaque interférogramme est indépendante de la connaissance exacte de la fréquence de la transition atomique et donc des déplacements de niveaux constants (déplacements lumineux ou effet

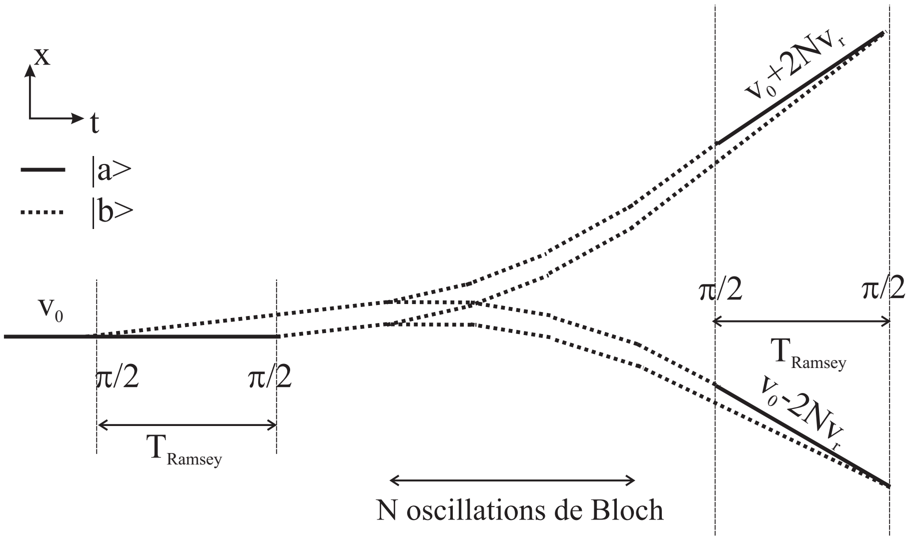


FIG. 7.5 – Schéma de la mesure de v_r par interférométrie. Nous avons représenté les trajectoires correspondantes à l'accélération vers le haut et l'accélération vers le bas.

Zeeman quadratique). Dans l'expérience de S. Chu, ces effets ne se compensent que lorsqu'on effectue une mesure différentielle entre deux interféromètres.

Une autre différence existe dans les deux expériences concernant la méthode d'accélération : en effet l'utilisation des oscillations de Bloch nécessite d'avoir une distribution initiale de vitesse subrecul, afin que tous les atomes puissent être adiabatiquement chargés dans la première bande. Ceci impose la réalisation d'une sélection en vitesse des atomes. Elle est effectuée en utilisant des impulsions $\pi/2$ d'une durée supérieure à l'inverse de la fréquence de recul, et en éliminant les atomes non sélectionnés par un faisceau pousseur. Ceci a deux conséquences : nous avons moins de signal que dans le cas d'un interféromètre où l'on utilise tous les atomes ; et nous ne pouvons pas utiliser le bras de l'interféromètre constitué par les atomes qui après les deux premières impulsions sont toujours dans l'état initial.

7.2.2 Comparaison de nos résultats avec l'expérience de S. Chu

La meilleure mesure interférométrique, publiée par l'équipe de S. Chu, présente une incertitude comparable à la notre. Cependant, beaucoup de différences demeurent entre les expériences. Notons tout d'abord que l'incertitude statistique de S. Chu vaut 2,5 ppb[2] alors que la notre vaut 4,4 ppb. D'un autre côté, S. Chu a évalué ses effets systématiques avec une incertitude de 7 ppb, alors que nous avons une incertitude de 5 ppb.

[2]Cette valeur provient de la référence [10]. Notons qu'une référence antérieure [18] annonce une mesure avec une incertitude statistique de 1,5 ppb ?

Incertitude statistique

Si on effectue une mesure de la phase avec une incertitude σ_Φ, alors l'équation (7.6) nous indique que l'incertitude relative sur la mesure de h/m vaut, dans l'expérience de S. Chu :

$$\frac{\sigma(h/m)}{(h/m)} = \frac{\sigma_\phi/T_{\mathrm{Ramsey}}}{2kv_r} \times \frac{1}{2(N+1)} \tag{7.7}$$

Cette expression est tout à fait similaire à celle décrivant notre incertitude (équation 1.29) : l'incertitude est égale à l'incertitude du senseur inertiel divisée par le nombre d'oscillations.

La mesure présentée par S. Chu est effectuée avec $N = 30$, alors que la notre est effectuée avec $N = 445$. La différence entre ces deux chiffres vient de la méthode utilisée pour l'accélération des atomes : S. Chu utilise des transferts par passage adiabatique résonnant, avec une efficacité de l'ordre de 97% par recul transmis aux atomes, alors que la méthode des oscillations de Bloch que nous utilisons permet un transfert avec une efficacité supérieure à 99,97%.

La mesure de S. Chu atteint une meilleure sensibilité que la nôtre, parce que son senseur inertiel est beaucoup plus sensible que le nôtre : à partir de la moyenne donnant une incertitude statistique de 2,5 ppb pour α, on peut en déduire une incertitude sur la mesure de la vitesse ($\sigma_v = \frac{\sigma_\phi/T_{\mathrm{Ramsey}}}{2k}$) de l'ordre de $3 \times 10^{-7} v_r$, alors que sur notre mesure, nous sommes à $8 \times 10^{-6} v_r$ [3]. Cette sensibilité de l'expérience de S. Chu vient en grande partie de l'expérience de l'équipe dans la réduction des vibrations pour la gravimètrie. Notons aussi que son expérience est effectuée sur une durée beaucoup plus importante que la nôtre : le délai entre les impulsions $\pi/2$ vaut 120 ms et la durée du processus d'accélération des atomes est du même ordre de grandeur. Ceci doit être comparé à la durée totale de notre expérience qui est d'environ 10 ms. Notre mesure est donc, *a priori*, beaucoup moins sensible aux vibrations que celle de S. Chu.

Effets systématiques

La principale contribution aux effets systématiques (7,7 ppb) dans l'expérience de S. Chu vient de l'effet de dispersion (effet d'indice) des atomes pour lequel aucune limite théorique n'est donnée. En faisant varier la densité atomique, une limite expérimentale a pu être trouvée : elle vaut 7 ppb. Il faut noter une différence importante entre cette expérience et la nôtre : l'accélération est effectuée avec un laser résonnant avec la transition. Il n'y a donc en théorie pas d'effet de dispersion. Cependant, les atomes qui manquent une transition peuvent peupler des sous niveaux Zeeman qui sont hors résonance. Dans ce cas l'indice devient très important, et un effet peut apparaître. La situation est différente chez nous, puisque nous utilisons des transitions à deux photons fortement désaccordées. Dans ce cas, l'indice est toujours très faible.

[3] Notons qu'il pourrait être plus significatif de comparer la sensibilité des senseurs inertiels sur une même durée d'enregistrement, mais cette information n'est pas disponible dans les expérience de S. Chu.

Un autre effet est beaucoup plus important dans l'expérience de S. Chu que dans la nôtre : il s'agit des effets liés à la gravité. En effet, dans l'expérience de S. Chu, l'accélération des atomes se fait en environ 10 fois plus de temps que chez nous, avec un nombre de reculs transmis environ 10 fois plus faible. La gravité intervient donc environ 100 fois plus dans sa mesure que dans la nôtre. Ceci a pour conséquence une plus grande sensibilité aux vibrations, mais aussi une plus grande dépendance par rapport au gradient de gravité. Ceci ne joue cependant pas un rôle très important dans l'incertitude, puisque cet effet est très bien connu.

Dans notre expérience, les deux principaux effets systématiques proviennent de la phase de Gouy/ courbure des fronts d'onde et des déplacements Zeeman quadratiques. L'effet des déplacements Zeeman quadratiques est un effet qui doit être divisé par le nombre de reculs transmis aux atomes. Il est *a priori* plus faible chez nous que chez S. Chu[4]. Cependant, nous avons actuellement un très mauvais contrôle de ce champ magnétique dans notre cellule qui n'est pas blindée magnétiquement. Dans le nouveau montage que nous envisageons, ce problème devrait être résolu. Pour l'effet de la phase de Gouy et de la courbure des fronts d'onde, l'effet que l'on a mesuré chez nous provient en grande partie des collimateurs qui n'avaient pas été très bien réglés. Cependant, dans l'expérience de S. Chu, l'intensité lumineuse requise est plus faible que dans notre expérience. Ceci lui permet d'utiliser des faisceaux avec un diamètre plus important ($w = 1$ cm chez S. Chu alors que nous avons $w = 2$ mm), pour lesquels il est plus facile de contrôler la courbure du front d'onde.

7.2.3 Configuration Ramsey et configuration Rabi de notre expérience

Nous pouvons nous demander, en conclusion, si on a intérêt pour notre expérience, à passer en configuration interférométrique. La réponse n'est pas évidente, et sans doute la meilleure solution serait d'effectuer l'expérience.

La sensibilité de l'interféromètre peut être écrite comme étant proportionnelle au rapport entre l'incertitude sur la mesure de la vitesse et le nombre d'oscillations. Dans le cas où le bruit limitant la mesure provient du bruit de vibration, l'incertitude sur la mesure de la vitesse est du même ordre de grandeur, que le senseur inertiel soit en configuration Rabi ou Ramsey[5]. Le travail sur la réduction des vibrations est donc indispensable dans les deux situations.

Dans l'hypothèse où le bruit de vibration est négligeable, il est préférable d'utiliser la formule suivante pour décrire la sensibilité de la mesure :

$$\frac{\sigma(h/m)}{(h/m)} = \frac{\sigma_\Phi}{2k \times 2N v_r T_{\mathrm{Ramsey}}} \tag{7.8}$$

[4]Nous accélérons les atomes 10 fois plus que S. Chu, mais la durée est 10 fois plus faible, le déplacement longitudinal des atomes est donc du même ordre de grandeur dans les deux expériences.

[5]Pour être plus précis, le capteur en configuration Ramsey sera plus sensible au bruit haute fréquence que celui en configuration Rabi. Par contre, au niveau des basses fréquences, qui sont celles les plus difficiles à réduire, la sensibilité ne dépend que du délai entre la sélection et la mesure et il n'y aura pas de différences notables entre les deux configurations.

Quand on peut négliger le bruit de vibration, alors le bruit de phase σ_Φ ne dépend que du rapport signal à bruit au niveau de la détection. Il ne dépend pas de T_{Ramsey}. En augmentant T_{Ramsey} on réduit *a priori* l'incertitude statistique sur la mesure. On va être limité alors par la taille de la cellule. Le déplacement total des atomes est en effet égal au produit de leur vitesse ($2Nv_r$) et de la durée pendant laquelle ils sont à cette vitesse. Cette durée correspond essentiellement à la durée de la sélection (T_{Ramsey}), à laquelle il faut ajouter la durée de l'accélération ($T_{\text{Bloch}} = 4$ ms, qui ne changera sans doute pas dans le futur, même si on arrive à réaliser plus d'oscillations) et la durée du faisceau pousseur (actuellement de 4 ms, mais qu'il est certainement possible de réduire). Dans la cellule actuelle, la distance entre le centre du piège et le hublot est de 7 cm, alors que le déplacement total des atomes est de 5 cm (pour une durée d'interrogation de 4 ms). Il n'est donc pas envisageable d'avoir un délai entre les deux impulsions $\pi/2$ dans la configuration Ramsey, très supérieur à la durée de l'impulsion π en configuration Rabi.

Dans la future cellule, l'espace sera plus important. Mais, on tirera sans doute profit d'une augmentation du nombre d'atomes pour affiner la sélection en vitesse et il ne me semble pas impossible d'optimiser le système laser pour augmenter le nombre d'oscillations. On risque fort d'être encore limité par la taille du système, même en configuration Rabi. Et finalement, la durée totale disponible pour Ramsey sera comparable à celle de la configuration Rabi.

Si on compare maintenant les deux expériences, avec un délai entre les deux impulsions Ramsey égale à la durée d'une impulsion π dans la configuration Rabi, alors la différence viendra uniquement dans la différence de rapport signal à bruit à la détection, c'est-à-dire au nombre d'atomes sélectionnés. Dans l'expérience Ramsey, le nombre d'atomes sélectionnés peut être augmenté sans changer la résolution, pour cela il faut augmenter le couplage à deux photons et réduire la durée des impulsions. L'expérience de Ramsey est alors avantageuse par rapport à l'expérience de Rabi. C'est ce que nous avions pu montrer en configuration horizontale (Thèse de Rémy Battesti), où l'incertitude statistique sur une mesure était réduite de près d'un facteur 2 entre les deux expériences.

Concernant les effets systématiques, nous pouvons voir que le seul effet qui va changer sera l'effet lié aux déplacements lumineux (proportionnel à l'intensité de la transition) qui sera plus important dans la configuration Ramsey. Enfin, et c'est sans doute la raison qui nous pousse à continuer à travailler en configuration Rabi, l'observation dans l'expérience de S. Chu d'un déphasage entre les deux impulsions $\pi/2$ de son interféromètre [10]. Cet effet nécessite la prise de mesures avec différents délais entre les impulsions $\pi/2$ pour pouvoir être compensé, et ce qui augmente la durée totale de la mesure.

Annexe

A Articles

A.1 Noise sensitivity of an atomic velocity sensor. Theoretical and experimental treatment

P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, et F. Biraben,
European Physical Journal D **33** (2005), 173.

A.2 Bloch oscillations of ultracold atoms : a tool for a metrological determination of h/m_{Rb}

R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, et F. Biraben,
Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 253001.

Eur. Phys. J. D **33**, 173–179 (2005)
DOI: 10.1140/epjd/e2005-00064-2

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

Noise sensitivity of an atomic velocity sensor

Theoretical and experimental treatment

P. Cladé[1], S. Guellati-Khélifa[2,a], C. Schwob[1], F. Nez[1], L. Julien[1], and F. Biraben[1]

[1] Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure, CNRS, UPMC, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
[2] CNAM-INM, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

Received 26 October 2004 / Received in final form 7 January 2005
Published online 3 May 2005 –

Abstract. We use Bloch oscillations to accelerate coherently rubidium atoms. The variation of the velocity induced by this acceleration is an integer number times the recoil velocity due to the absorption of one photon. The measurement of the velocity variation is achieved using two velocity selective Raman π-pulses: the first pulse transfers atoms from the hyperfine state $5S_{1/2}$, $|F=2, m_F=0\rangle$ to $5S_{1/2}$, $|F=1, m_F=0\rangle$ into a narrow velocity class. After the acceleration of this selected atomic slice, we apply the second Raman pulse to bring the resonant atoms back to the initial state $5S_{1/2}$, $|F=2, m_F=0\rangle$. The populations in ($F=1$ and $F=2$) are measured separately by using a one-dimensional time-of-flight technique. To plot the final velocity distribution we repeat this procedure by scanning the Raman beam frequency of the second pulse. This two π-pulses system constitutes then a velocity sensor. Any noise in the relative phase shift of the Raman beams induces an error in the measured velocity. In this paper we present a theoretical and an experimental analysis of this velocity sensor, which take into account the phase fluctuations during the Raman pulses.

PACS. 32.80.Pj Optical cooling of atoms; trapping – 06.30.Gv Velocity, acceleration and rotation

1 Introduction

The measurement of the recoil of an atom when it absorbs a photon provides a way to determine the fine structure constant α using atomic physics [1–4]. Since the first observation of the recoil-induced spectral doubling in the CH_4 saturated absorption peaks [5], only the development of atoms cooling techniques renewed interest in measurement of the recoil velocity v_r ($v_r = \hbar k/m$, where k is the wave vector of the photon absorbed by an atom of mass m) [2–4]. The basic scheme of the photon recoil, was previously proposed in reference [6] and a simple version is illustrated in Figure 1: an atom in state $|a\rangle$, at rest in the laboratory frame, absorbs a photon from rightward propagating laser beam with frequency ω. The atom recoils by $\hbar k/m$ and the process has the resonance condition deduced from energy conservation

$$\omega_{ab} - \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}. \tag{1}$$

The atom can be also de-excited from state $|b\rangle$ by a photon from a leftward propagating beam of frequency ω', the new resonance condition being

$$\omega_{ab} - \omega' = -\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{k}'}{m} - \frac{\hbar k'^2}{2m}. \tag{2}$$

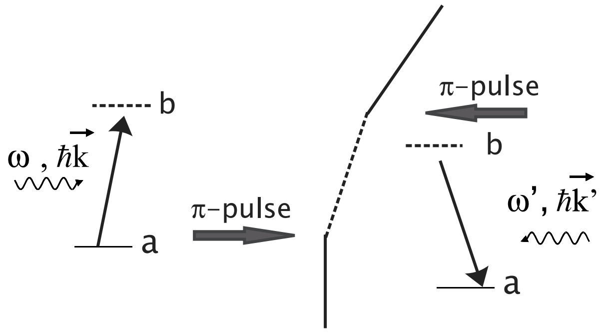


Fig. 1. Basic way to measure the photon recoil: the atom jumps from $|a\rangle$ to $|b\rangle$ by absorbing a rightward photon and acquires one recoil, and then it goes back into $|a\rangle$ by re-emitting a leftward photon.

Thus, the two resonances are shifted relative to each other by

$$\omega - \omega' = -\frac{\hbar\left(\vec{k} + \vec{k}'\right)^2}{2m}. \tag{3}$$

If we fix ω and scan ω' to find the maximum number of atoms that come back to state $|a\rangle$, we can measure this frequency difference and hence deduce the recoil shift. The ideal recoil measurement described above will be more realistic using velocity-selective Raman transitions [7].

[a] e-mail: guellati@spectro.jussieu.fr

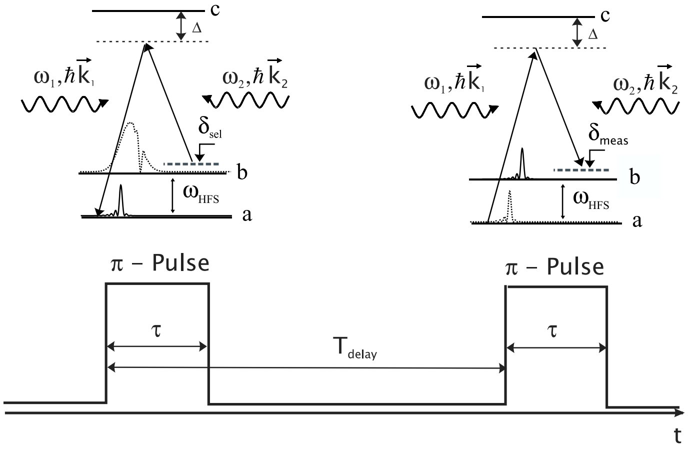


Fig. 2. Principle of the velocity sensor, the first π-pulse transfers a narrow velocity class from the level $|b\rangle$ to the level $|a\rangle$ (selection) and the second π-pulse transfers the accelerated atoms back to the level $|b\rangle$ (measurement).

Transitions of this kind have two relevant advantages: first the effective frequency is the hyperfine splitting which is a microwave frequency and the effective momentum kick is equal to that obtained with optical photons (large Doppler shift). Second, as these transitions involve ground state atomic levels, the linewidth of the stimulated transition, and thus the width of the velocity distribution, is limited only by the interaction time which is quite long when cold atoms are used.

Let us consider an atomic cold sample where, after a laser cooling process, the atoms, all in a well defined internal state $|b\rangle$, are illuminated successively by two velocity-selective Raman π-pulses. The Raman excitation is realized by two counter-propagating laser beams at frequencies ω_1 and ω_2, and wave vectors $\overrightarrow{k_1}$ and $\overrightarrow{k_2}$. When the resonance condition:

$$\delta_{sel} = \omega_2 - \omega_1 - \omega_{HFS} = \overrightarrow{v_i}(\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}) + \frac{\hbar(\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2})^2}{2m} \quad (4)$$

is fulfilled, the first π-pulse transfers the atoms, in narrow velocity class around the mean velocity v_i, from state $|b\rangle$ to $|a\rangle$ (see Fig. 2). Here δ_{sel} is the detuning of the co-propagating Raman transition.

After an acceleration which changes the mean velocity of the atomic velocity class from v_i to v_f, we apply a second π-pulse and we shift the detuning to δ_{meas} so as we satisfy the resonance condition (Eq. (4)) for the mean velocity v_f. By scanning the detuning δ_{meas} of the final Raman pulse to get maximum of atoms back into initial state $|b\rangle$, we determine the variation of velocity $\Delta\overrightarrow{v}$ by

$$\Delta\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}) = (\delta_{meas}^{max} - \delta_{sel}). \quad (5)$$

This system constitutes a velocity sensor. In our experiment the atoms are coherently accelerated using Bloch oscillations in a periodic optical potential [4,10,11]. In this case, the velocity variation of the center of mass is an integer times the recoil velocity v_r. In this paper we shall ignore this intermediate step and only focus on the study of the velocity sensor described above. In the following we investigate theoretically the number of atoms in the state $|b\rangle$ after the second π-pulse, starting by the determination of the Raman transition probability and taking into account the relative phase noise between the two counter-propagating beams. We then calculate the noise sensitivity of the velocity sensor and the ordinary variance of the measured atoms. Finally, we present the experimental set-up and discuss how the experimental compares with our theoretical model. We underline that previously other groups have studied the phase fluctuations of the Raman beams in atom interferometers [8,9]. The originality of this work is to take into account the effects of the phase fluctuations during the Raman pulses and not only between the pulses.

2 Theory

The theory of velocity-selective stimulated Raman transitions was been widely studied by [7,12]. In Section 2.1, we investigate the stimulated Raman transition probability considering the relative phase noise $\varphi(t)$ (time dependence) between the two beams. In Section 2.2, we consider the double π-pulse and we determine the fraction of atoms at a given detuning δ of the Raman beam frequency. We then deduce the sensitivity of the velocity sensor by expressing the ordinary variance as function of a power spectral density of the phase noise.

2.1 One pulse Raman transition

We consider an atom that has a level scheme shown in Figure 2. with a ground state hyperfine interval ω_{HFS}. This atom is irradiated, along the z axis, by two counter-propagating laser beams (ω_1, $\overrightarrow{k_1}$) and (ω_2, $\overrightarrow{k_2}$).

The states $|a, p - \hbar k_1\rangle$ and $|b, p + \hbar k_2\rangle$ are coupled to $|c, p\rangle$ respectively by the wave (ω_1, $\overrightarrow{k_1}$) and (ω_2, $\overrightarrow{k_2}$). The atomic system is then equivalent to a two-level system coupled by a two-photon transition with an effective Rabi frequency:

$$\Omega = \frac{\Omega_1^* \Omega_2}{2\Delta} \quad (6)$$

where $\Delta = \omega_1 - \omega_{ac} \approx \omega_2 - \omega_{bc}$ is the one photon detuning (see Fig. 2) and the Rabi frequencies Ω_1 and Ω_2 are defined by

$$\Omega_1 = -\frac{\langle a|\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{E_1}|c\rangle}{2\hbar}, \quad \Omega_2 = -\frac{\langle b|\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{E_2}|c\rangle}{2\hbar} \quad (7)$$

$\overrightarrow{E}_n$, $(n = 1, 2)$ is the electric field of the travelling wave n, $\overrightarrow{d}$ is the electric dipole operator.

To include the relative phase noise $\varphi(t)$ between the two Raman beams, we express the effective Rabi frequency as

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{i\varphi(t)}. \quad (8)$$

Assuming that $\varphi(t) \ll 1$, the Hamiltonian of this two-level system can be linearized as the sum of H_0 and H_{pert}, where in convenient Pauli matrix representation

$$H_0 = \hbar\left(\frac{\delta}{2}\sigma_z + \frac{\Omega_0}{2}\sigma_x\right) \quad (9)$$

δ is the detunning of $\omega_1 - \omega_2$ from the transition $|a, p - \hbar k_1\rangle \longrightarrow |b, p + \hbar k_2\rangle$.

The time dependent perturbative Hamiltonian in first order approximation is given by

$$H_{pert}(t) = i\hbar\frac{\Omega_0}{2}\varphi(t)\sigma_x. \quad (10)$$

The state of a quantum system at a final time t_f is related to its state at an earlier time t_i via the evolution operator U

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i)|\psi(t_i)\rangle \quad (11)$$

using the time dependent perturbation theory, in first order, the evolution operator U is given by

$$U(t_f - t_i) = U_0(t_f - t_i) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_i}^{t_f} U_0(t_f - t) \times H_{pert}(t)U_0(t - t_i)dt \quad (12)$$

where

$$U_0(t) = e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}. \quad (13)$$

The time dependent transition probability P from level $|a\rangle$ to level $|b\rangle$ is

$$P(\delta) = |\langle a|U|b\rangle|^2. \quad (14)$$

Substituting the relations (12) and (13) into equation (14) we show that the transition probability can be written as

$$P(\delta) = P^0(\delta) + P^1(\delta) \quad (15)$$

P^0 is given by the Rabi formula:

$$P^0(\delta) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2}\sin^2\frac{\Omega'(t_f - t_i)}{2} \quad (16)$$

and P^1, the time dependent transition probability to first order in the relative phase noise is given by

$$P^1(\delta) = -\delta\frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2}\sin\frac{\Omega'(t_f - t_i)}{2} \times \int_{t_i}^{t_f}\varphi(t)\sin\frac{\Omega'(2t - t_f - t_i)}{2}dt \quad (17)$$

where

$$\Omega' = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2} \quad (18)$$

is the generalized Rabi frequency.

2.2 Selection and measurement

We consider now an atom in internal state $|b\rangle$ with an initial velocity v_i along the beams axis. This atom is illuminated consecutively by two Raman π-pulses with the same duration τ and separated by the time interval T_{delay} (see Fig. 2). During the time interval between the two π-pulses, the atom is accelerated to change its velocity by Δv (the final velocity is then $v_f = v_i + \Delta v$). $P_{sel}(\delta_{sel} - 2kv_i)$ and $P_{meas}(\delta_{meas} - 2kv_f)$ are respectively the probability to make the first and the second Raman transition.

The experimental proceeding of the velocity sensor was described in the first section and illustrated in Figure 2. The atoms remaining in level $|b\rangle$ after the first π-pulse, are pushed away using a resonant laser beam. The distribution velocity of the selected velocity class is supposed constant along the width of the selection ($n(v) = n_0$) (in fact, the typical width of the initial distribution obtained with an optical molasses in a few recoils, whereas the first π-pulse selects atoms in a velocity class of about $v_r/30$). After the second pulse, we measure separately the number of atoms in state $|a\rangle$ and $|b\rangle$ using two parallel, horizontally propagating probe beams, placed 15 cm below the center of the trap and separated vertically by 1 cm. The number N_b of atoms transferred by the second pulse is equal to the contribution of all selected atoms weighted by the probability to make the second π-pulse Raman transition:

$$N_b(\delta_{meas} - \delta_{sel}) = \frac{n_0}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty} P_{sel}(\delta_{sel} + \eta) \times P_{meas}(\delta_{meas} - 2k\Delta v + \eta)d\eta \quad (19)$$

where $\eta = -2kv_i$.

The total number $N_a + N_b$ of atoms detected after the second pulse is nothing more than the number N_{sel} of atoms selected by the first π-pulse:

$$N_{sel}(\delta_{sel}) = n_0\int_{-\infty}^{\infty} P_{sel}(\delta_{sel} - 2kv_i)dv_i. \quad (20)$$

To eliminate the fluctuations of the initial number of atoms, we consider in the following the probability $\mathcal{P} = N_b/(N_a + N_b)$ which represents the velocity distribution of the measured atomic fraction. By inserting (15) in (19) and using the fact that P^1 is an even function, we finally obtain the correction of $\mathcal{P}$ to first order in $\varphi(t)$:

$$\mathcal{P}^1(\delta + 2k\Delta v) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P^0(\eta - \delta)(P^1_{sel}(\eta) - P^1_{meas}(\eta))d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} P^0(\eta)d\eta} \quad (21)$$

where in thus case δ is equal to $\delta_{meas} - 2k\Delta v - \delta_{sel}$.

2.3 Determination of the transfer function H(f, δ)

The best way to test the propagation of the phase fluctuation $\varphi(t)$ on the velocity sensor is to calculate the ordinary variance $\sigma_{\mathcal{P}}$ of the probability $\mathcal{P}$ to make the two Raman transitions

$$\sigma^2_{\mathcal{P}}(\delta) = \left\langle(\mathcal{P} - \langle\mathcal{P}\rangle)^2\right\rangle. \quad (22)$$

The probability $\mathcal{P}$ is a linear function of $\varphi(t)$ (inserting (17) in (21)). Assuming that φ is a stationary random variable, we can express $\sigma_{\mathcal{P}}$ as a function of the density of the noise Φ_f

$$\sigma_{\mathcal{P}}^2(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^2 \; H^2(f,\delta) df \tag{23}$$

where

$$\Phi_f^2 = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{2\pi i f \tau} \langle \varphi(t+\tau)\varphi(t)\rangle \tag{24}$$

and $H(f,\delta)$ represents the transfer function or the noise sensitivity of the velocity sensor. To easily calculate this last function using (21), we will assume that the phase fluctuation between the Raman beams can be expressed as

$$\varphi(t) = \sum_f \Phi_f \sqrt{\Delta f} \cos(2\pi f t + \varphi_f) \tag{25}$$

where φ_f are arbitrary phases at each frequency f (we assume that the phases φ_f between two different frequencies are independent). At the limit where the frequency band $\Delta f \to 0$, the two points of view in equations (24) and (25) give the same result for $H(f,\delta)$. In equation (25) the noise density Φ_f is expressed in (rad/$\sqrt{\text{Hz}}$).

First we calculate the one π-pulse transition using the expression of $\varphi(t)$ (25) in (17):

$$P^1(\delta) = -\delta \frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2} \sin \frac{\Omega'}{2}(t_f - t_i) \sum_f \Phi_f \sin(\pi f(t_f + t_i) + \varphi_f) \times \left(\frac{\sin((2\pi f + \Omega')\frac{(t_f - t_i)}{2})}{2\pi f + \Omega'} - \frac{\sin((2\pi f - \Omega')\frac{(t_f - t_i)}{2})}{2\pi f - \Omega'} \right) \times \sqrt{\Delta f}. \tag{26}$$

Second we calculate the two Raman transitions probability (for two π-pulses) substituting P^1 by (26) in (21)

$$\mathcal{P}^1(\delta + 2k\Delta v) = \sum_f \Phi_f \; h(f,\delta) \times \cos(\pi f(T_{delay} + \tau) + \varphi_f)\sqrt{\Delta f} \tag{27}$$

where

$$h(f,\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(\eta - \delta)\delta \frac{\Omega_0^2}{\Omega'^2} \sin \frac{\Omega'\tau}{2} \sin(\pi f T_{delay}) \times \left(\frac{\sin(2\pi f - \Omega')\frac{\tau}{2}}{2\pi f - \Omega'} - \frac{\sin(2\pi f + \Omega')\frac{\tau}{2}}{2\pi f + \Omega'} \right) d\eta \tag{28}$$

with $\tau = t_f - t_i$ and T_{delay} is the time interval between the two π-pulses. To simplify the presentation of the formula (28) the normalization factor in (21) is omitted.

Since for each frequency, φ_f is a random variable with an uniform distribution on $[0, 2\pi]$, then

$$\langle \mathcal{P}^1 \rangle = 0 \;\text{ and }\; \langle (\mathcal{P}^1)^2 \rangle = \sum \frac{1}{2} \Phi_f^2 \; h^2(f,\delta)\Delta f. \tag{29}$$

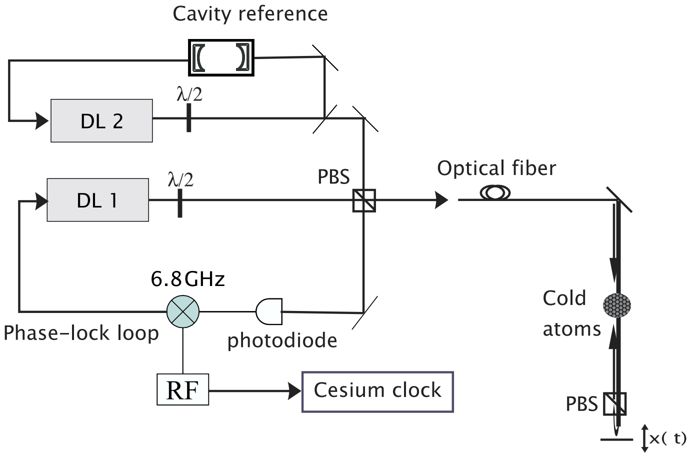


Fig. 3. Experimental set-up of the velocity sensor: the two laser diodes are phase locked using a tunable microwave chain. The two Raman beams with lin⊥lin polarizations are injected into the same optical fiber. After passing through the vacuum chamber only the beam k_2 is retroreflected by the horizontal mirror allowing a counter-propagating excitation.

Substituting (29) in the definition of the ordinary variance $\sigma_{\mathcal{P}}$, we deduce the expression of the transfer function $H(f,\delta)$

$$H(f,\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \; |h(f,\delta)|. \tag{30}$$

This function depends on the pulse interval on $\sin(\pi f T_{delay})$ (see (28)): for each T_{delay} there are certain frequencies at which the phase noise does not have any effect.

3 Experiment

An optical molasses loaded by a 3-D magneto-optical trap provides a cold ^{87}Rb atomic sample [4]. For the initial selection and the final measurement, the two Raman beams are generated by two laser diodes injected by two grating-stabilized extended-cavity laser diodes (ECLs). A fast photodiode and a tunable RF frequency chain are used to phase lock one ECL on the other one. The two beams have linear orthogonal polarizations. After passing through the vacuum cell, one beam is retroreflected by a horizontal mirror (see Fig. 3). A typical scan of final velocity distribution of rubidium atoms transferred by the second pulse from $5S_{1/2}$ $|F=1, m_F=0\rangle$ to $5S_{1/2}$ $|F=2, m_F=0\rangle$, is shown in Figure 4b. The noise level affecting a measured spectrum is not uniform: it is lightly greater on the slopes than on the top. A better illustration of the noise distribution affecting the spectrum can be achieved by plotting the difference between the theoretical fit and the experimental data (Fig. 4). Thus is a proof that the spectral noise is not yet dominated by the atomic shot noise (number of detected atoms) but by the Raman phase noise. This phase noise can arise from optical noise (laser noise, fiber noise, phase lock noise, ...) or the vibration noise of the retroreflection mirror (indeed , the velocity of the atoms is measured in the frame of this mirror).

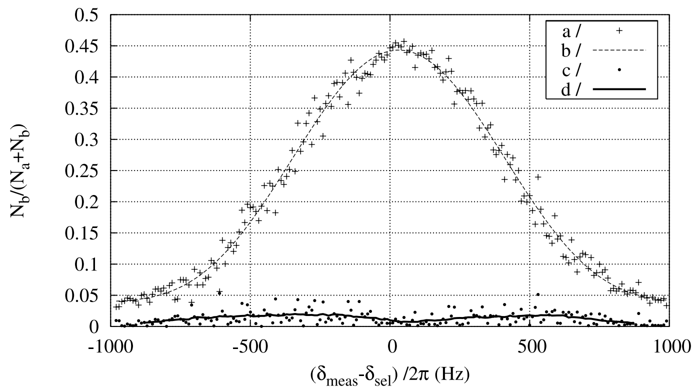


Fig. 4. (a) Final velocity distribution of atoms in hyperfine state $|F = 2, m_F = 0\rangle$ measured using two counter-propagating Raman beams and normalized to $N_{sel} = N_a + N_b$ the number of atoms selected by the first pulse (N_a and N_b are successively the number of atoms measured in the hyperfine states $|F = 1, m_F = 0\rangle$ and $|F = 2, m_F = 0\rangle$. (b) Theoretical fit. (c) Difference between the experimental data and the theoretical fit. (d) Smoothing curve of the last data using a fixed window. We note finally that in x-axis the velocity is expressed in terms of frequency.

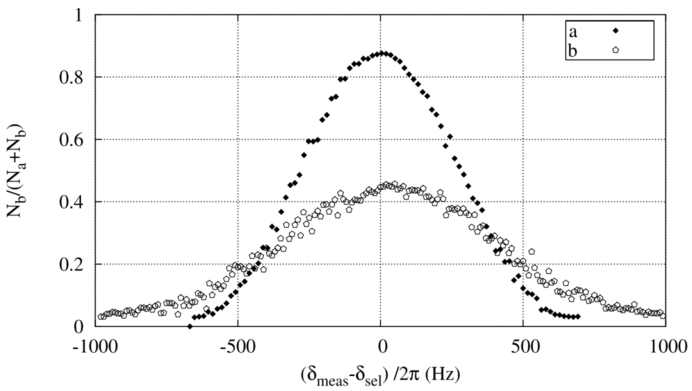


Fig. 5. The fraction of atoms transferred by the second Raman π-pulse: (a) co-propagating Raman beams configuration, (b) counter-propagating configuration. In this last case, the Doppler-sensitive Raman transition is performed only for a resonant velocity class. This explain the amplitude and the FWHM difference between the two spectra.

The resolution of our velocity sensor is then mainly limited by the Raman phase noise. In the next section we analyze the experimental results using the theoretical model developed above considering only the vibrational noise affecting the retroreflection mirror.

4 Analysis of the experimental results

The Raman beam phase noise includes different noise sources, it can be written essentially as a sum of two contributions:

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] - 2k_2 x(t) \tag{31}$$

where $\varphi_i(t)$ is the optical phase of the beam i, $x(t)$ characterizes the motion of the retroreflection mirror.

A straightforward way to distinguish between the vibration noise and other phase noises, is to compare the Doppler-insensitive Raman transition spectrum obtained using a co-propagating beams (unaffected by vibrations of the retroreflection mirror) (Fig. 5a) to the Doppler-sensitive Raman transition spectrum driven by the counter-propagating laser beams (Fig. 5b).

This illustration shows that the relative noise is more than one order of magnitude lower in Figure 5 than in the case of the Doppler-sensitive Raman transition. Given thus, the optical phase noise $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ is not a relevant noise in our experimental set-up. In order to test the theoretical model presented above, we only take into account in expression (31) the vibration term. The phase noise spectral density can be expressed [13] as

$$\Phi_f = \frac{2k}{(2\pi f)^2}\Phi_f^a \tag{32}$$

where Φ_f^a is the acceleration noise spectral density, deduced from the acceleration of the mirror which is measured by a low-noise, low-frequency accelerometer (IMI Sensors-626A). Figure 6a, shows the acceleration noise power spectrum (Φ_f^a) of the retroreflection mirror. It is determined using a numerical Fourier transform of the monitored accelerometer signal. The rms value of the vibrational phase noise integrated on the pulse duration is estimated to 0.1 rad, and remains in the validity range of the perturbative approach used in our theoretical model.

The vibration sensitivity of the velocity sensor $(2kH(f)/(2\pi f)^2)$ is plotted for a pulse duration of 1 ms and a time spacing pulse T_{delay} of 12 ms using the (Fig. 6b). This curve shows that the velocity sensor acts as a low-pass filter of vibrations, with a cut off frequency of about 35 Hz. The effect of the mechanical vibration on the uncertainty of the velocity measurement can be illustrated by plotting a predicted variance $\sigma_{\mathcal{P}}$ using the acceleration noise spectral density (Fig. 6a) and the vibration sensitivity (Fig. 6b). It appears that the main part of the vibration noise in our experimental set-up comes from frequencies between 10 and 30 Hz (Fig. 6c).

As predicted by the theoretical model and illustrated in the typical velocity distribution spectrum (Fig. 4), the noise of the velocity sensor depends on the Raman detuning δ. By making several measurements at the same detuning δ, we measure the statistical variance $\sigma_{\mathcal{P}}$ of the transition probability of the two Raman pulses (Fig. 7).

The good qualitative and quantitative agreements with the predicted variance, allow us to confirm that the theoretical model developed in this paper is a powerful tool for quantifying and hence controlling the different noises of the Raman beams.

The time interval T_{delay} is a critical parameter of the experiment, it determines the number of additional recoils transferred by the Bloch oscillations process and hence the resolution of the photon recoil measurement. It will be useful to understand how this parameter operates on

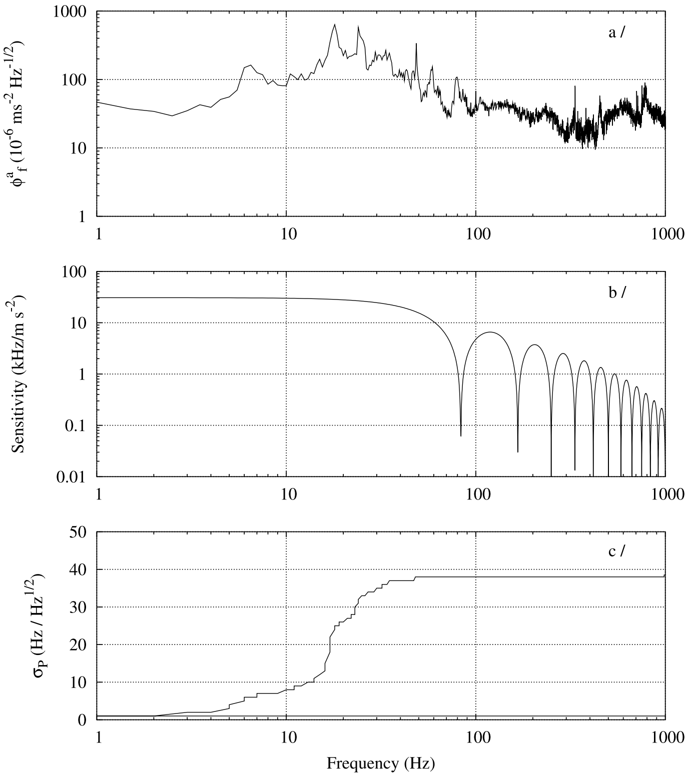


Fig. 6. (a) The acceleration noise spectral density deduced from the vibrational spectrum of the retroreflection mirror measured by an accelerometer. (b) The theoretical velocity sensor noise sensibility for pulse duration $\tau = 1$ ms and pulse interval $T_{delay} = 12$ ms. (c) Predicted variance of the atoms fraction transferred by the second pulse integrated up to a certain frequency calculated using in the formula (23) the measured phase noise spectral density.

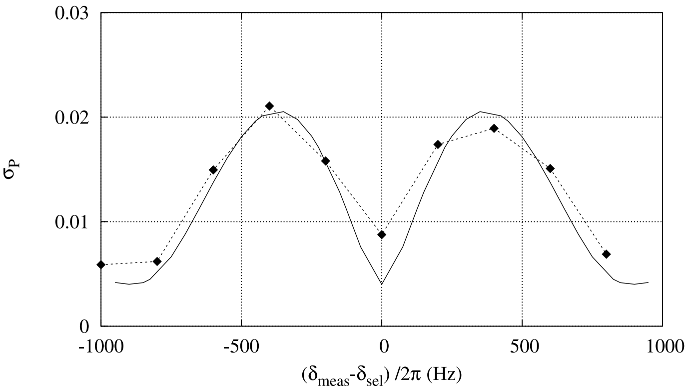


Fig. 7. Variance on the fraction of atoms transferred by the second π-pulse, dashed line experimental result, solid line predicted value.

the uncertainty. In Figure 8, the dots present the uncertainty on the measured velocity in term of frequency. This uncertainty is deduced from the least-square fit of the experimental data points of the final velocity distribution by the non-perturbative part of the two pulses transition probability $\mathcal{P}^0$. We remind that this probability is determined substituting in (19) P_{sel} and P_{meas} by the one pulse Raman non-perturbative transition probability P^0 defined in (16). To predict this uncertainty, denoted σ, using the previous model we use the following formula

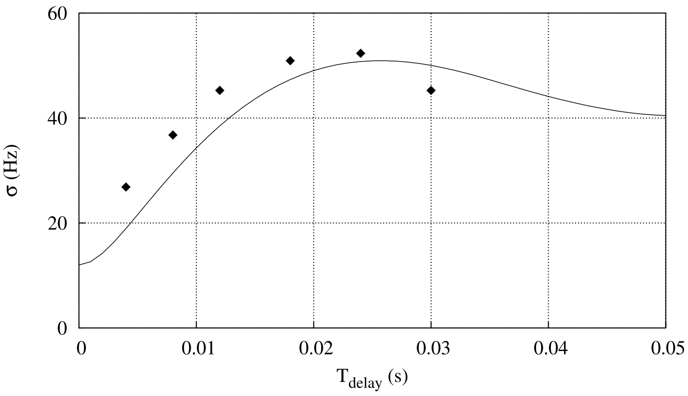


Fig. 8. The uncertainty of the measured velocity expressed in term of frequency, for different T_{delay}, predicted value (line) and experimental value (dot).

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \frac{\sum_\delta \sigma_{\mathcal{P}}^2}{\sum_\delta (\frac{\partial \mathcal{P}^0}{\partial \delta})^2} \tag{33}$$

where n is the number of the sample. This expression is obtained by substituting in the expression of the uncertainty given by a least square fit algorithm, the deviation of the numerical data from the theoretical function, by the theoretical mean uncertainty $\sigma_{\mathcal{P}}$. In this plot the noise increases with T_{delay} and reaches a maximum value, the noise decreases then, because the band pass of the velocity sensor varies as $1/T_{delay}$ and then it filters the high vibrational noise frequencies.

5 Conclusion

In this paper we have developed a simple theoretical tool, to characterize the noise of an atomic velocity sensor. We have focused on the phase fluctuations of the Raman beams during the pulse, such effects are very important in our non-interferometric velocity sensor where the resolution is inversely proportional to the Raman pulses duration. The experimental illustration was here limited to the vibrational noise, but the model can be used for any other phase noise at the limit of the validity of the perturbative approach. This tool allows us to understand how to implement the experimental improvements, essentially the vibration isolation.

We thank A. Clairon and co-workers for valuable discussions. This experiment is supported in part by the Bureau National de Métrologie (Contrats 993009 and 033006) and by the Région Ile de France (Contrat SESAME E1220).

References

1. B.N. Taylor, Metrologia **31**, 181 (1994)
2. A. Wicht, J.M. Hensley, E. Sarajlic, S. Chu, *Proceedings of the 6th Symposium on Frequency Standards and Metrology*, edited by P. Gill (World Scientific, Singapore, 2001), pp. 193-212
3. S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, D.E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **89**, 140401-1 (2002)
4. R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, Phys. Rev. Lett. **92**, 253001-1 (2004)
5. J.L. Hall, C.J. Bordé, K. Uehara, Phys. Rev. Lett. **37**, 1339 (1976)
6. D.S. Weiss, B.C. Young, S. Chu, Appl. Phys. B **59**, 217 (1994)
7. M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu, Phys. Rev. Lett. **66**, 2297 (1991)
8. A. Peters, K.Y. Chung, S. Chu, Metrologia **38**, 25 (2001)
9. F. Yver-Leduc, P. Cheinet, J. Fils, A. Clairon, N. Dimarq, D. Holleville, P. Bouyer, A. Landragin, J. Opt. B.: Quant. Semiclass. **5**, S136 (2003)
10. M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996)
11. E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, C. Salomon, Phys. Rev. A **55**, 2989 (1997)
12. K. Moler, D.S. Weiss, M. Kasevich, S. Chu, Phys. Rev. A. **45**, 342 (1992)
13. The phase noise induced by the vibration of the retroreflecting mirror is $\varphi(t) = 2k_2x(t)$ then the acceleration of this mirror $a(t)$ can be written as $a(t) = \sum((2\pi f)^2\Phi_f/2k)\sqrt{\Delta f}\cos(2\pi ft + \varphi_f)$

Bloch Oscillations of Ultracold Atoms: A Tool for a Metrological Determination of h/m_{Rb}

Rémy Battesti,[1] Pierre Cladé,[1] Saïda Guellati-Khélifa,[2] Catherine Schwob,[1] Benoît Grémaud,[1] François Nez,[1] Lucile Julien,[1] and François Biraben[1]

[1]*Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, CNRS-UMR 8552, UPMC, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*
[2]*BNM-INM, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris Cedex 03, France*
(Received 17 November 2003; published 22 June 2004)

We use Bloch oscillations in a horizontal moving standing wave to transfer a large number of photon recoils to atoms with a high efficiency (99.5% per cycle). By measuring the photon recoil of ^{87}Rb, using velocity-selective Raman transitions to select a subrecoil velocity class and to measure the final accelerated velocity class, we have determined h/m_{Rb} with a relative precision of 0.4 ppm. To exploit the high momentum transfer efficiency of our method, we are developing a vertical standing wave setup. This will allow us to measure h/m_{Rb} better than 10^{-8} and hence the fine structure constant α with an uncertainty close to the most accurate value coming from the $(g-2)$ determination.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.253001 PACS numbers: 32.80.Pj, 06.20.Jr, 32.80.Qk, 42.50.Vk

In the past 20 years, atom manipulation using laser light has led to the emergence of many powerful techniques [1]. In particular, it is now possible to observe and measure elementary processes between light and atoms, such as a coherent momentum transfer (absorption and emission of a single photon). Furthermore, by increasing the interrogation time, laser cooling leads to an improvement of more than 2 orders of magnitude in both stability and accuracy in many fields of high precision measurements [2,3]. These advances allow us to measure precisely the recoil velocity v_r of the atom absorbing or emitting a photon ($v_r = \hbar k/m$, where k is the wave vector of the photon absorbed by the atom of mass m). Such a measurement yields a determination of h/m which can be used to infer a value for the fine structure constant α via [4]

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty}{c}\frac{M}{M_e}\frac{h}{m}. \qquad (1)$$

M and m are, respectively, the mass of test particle in atomic and SI units. In this expression several terms are known with a very small uncertainty: 8×10^{-12} for the Rydberg constant R_∞ [5,6] and 7×10^{-10} for the electron mass M_e [7,8]. A recent measurement using Penning trap single ion spectrometry allows a determination of M_{Rb} with an uncertainty less than 2×10^{-10} [9]. In short, the determination of α using this formula is now limited by the uncertainty in the ratio h/m [4].

The fine structure constant can be deduced from experiments related to different branches of physics (QED, solid state physics,...) [10–15]. Many of these measurements lead to determinations of α with a relative uncertainty on the order of 10^{-8} but their total dispersion exceeds 10^{-7} [16]. In order to test the validity of these different measurements, a new accurate determination of α is highly desirable.

The recoil of an atom when it absorbs a photon was first observed in the recoil-induced spectral doubling of the CH_4 saturated absorption peaks [17]. Since then, almost all recent measurements of the recoil velocity have been based on atomic interferometry [18] using stimulated Raman transitions between two hyperfine ground state levels [19,21]. The precision of these experiments is increased by giving additional photon recoils to the different interferometer paths. In this process, the efficiency of the recoil transfer is a crucial parameter. Recently, the Chu group at Stanford, using a coherent adiabatic transfer technique [20] and high intensity Raman pulses, has achieved an efficiency of 94%, allowing a total momentum transfer of 120 recoils, and hence an absolute accuracy of 7.4 parts per 1×10^9 in α [21]. Pritchard and colleagues had developed another tool for a determination of h/m_{Na}, using a Bose-Einstein condensate as a bright subrecoil atom source in the "contrast interferometry" technique [22]. This experiment seems, presently, to be limited by the low momentum transfers.

In this Letter we investigate the phenomena of Bloch oscillations of atoms driven by a constant inertial force in a periodic optical potential [23]. This method is based on stimulated Raman transitions, induced by counterpropagating laser beams, involving only one hyperfine level in order to modify the atomic momentum, thus leaving the internal state unchanged. The atoms are coherently accelerated using a frequency-chirped standing wave. In order to compensate the Doppler effect, the frequency difference between the two beams is increased linearly. Consequently, the atoms are resonant with the beams periodically. This leads to a succession of rapid adiabatic passages between momentum states differing by $2\hbar k$ ($2v_r$ in terms of velocity). As explained above, the final accuracy is determined by the number of additional recoils, which strongly depends on the efficiency population transfer between momentum states. In our experiment, we achieve an efficiency of 99.5% per Bloch oscillation;

which may provide a great opportunity for high precision measurement of the recoil shift.

The details of the experiment have been described previously [24]. The setup for the laser cooling uses a magneto-optical trap (MOT) in a rubidium vapor cell. After a few seconds, the MOT is loaded and then the magnetic field is switched off, leaving the atoms to equilibrate in an optical molasses, at a temperature of about 3 μK. The sequence then involves three steps (see Fig. 1): first, we select a narrow subrecoil velocity class with a well-defined mean initial velocity using a Raman velocity-selective π pulse [25]. Next, we transfer $2N$ photon recoils by a coherent acceleration of atoms (Bloch oscillations). Finally, we measure the final velocity class, using another Raman velocity-selective π pulse.

For the initial selection and the final measurement, the two Raman beams are generated by two master oscillatory power amplifiers (MOPAs) injected by two grating-stabilized extended-cavity laser diodes (ECLs). One of the two diodes is frequency stabilized on a highly stable Zerodur Fabry-Perot cavity (ZFPC). This cavity was calibrated using different optical references, allowing a determination of the laser frequency with an accuracy better than 10 MHz (3×10^{-8}). A heterodyne signal and a frequency chain around the rubidium hyperfine splitting (6.8 GHz) are used to phase lock the second ECL to the first one. All auxiliary sources in the frequency chain are referenced to the same stable 10 MHz quartz oscillator. To

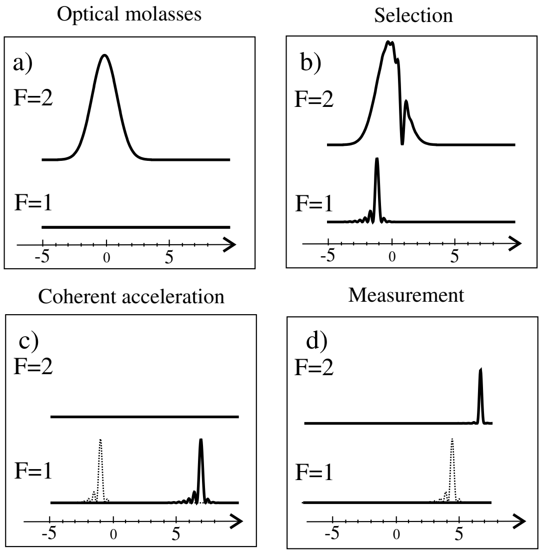


FIG. 1. Evolution of the velocity distribution (in v_r unit) during the experiment: (a) Initial velocity distribution; the atoms are in $5^2S_{1/2}$, $|F = 2, m_F = 0\rangle$ state. (b) Subrecoil selection; the atoms are transferred from $5^2S_{1/2}$, $|F = 2, m_F = 0\rangle$ to $5^2S_{1/2}$, $|F = 1, m_F = 0\rangle$. (c) Coherent acceleration for $N = 4$ Bloch oscillations; the atoms are in $5^2S_{1/2}$, $|F = 1, m_F = 0\rangle$. (d) Measurement of the final velocity class; the atoms are transferred from $5^2S_{1/2}$, $|F = 1, m_F = 0\rangle$ to $5^2S_{1/2}$, $|F = 2, m_F = 0\rangle$.

reduce spontaneous emission and light shift, the ECLs are detuned by about 340 GHz from the D2 line. The MOPA beams are sent through two 80 MHz acousto-optic modulators for timing and intensity control. Their radio frequencies are also referenced to the 10 MHz quartz oscillator. The two beams are coupled in an optical fiber; they have linear orthogonal polarizations, and their intensities are actively stabilized.

In order to perform the selection phase, we use a square Raman pulse with a frequency initially fixed at $\delta_{\rm select}$. For a detuning of 340 GHz and an intensity of 120 mW/cm^2, the π condition is achieved using a $T = 1.7$ ms pulse. Such a pulse transfers atoms from state $5^2S_{1/2}$, $|F = 2, m_F = 0\rangle$ to $5^2S_{1/2}$, $|F = 1, m_F = 0\rangle$, with a velocity dispersion of about $v_r/30$ centered around $(\lambda\delta_{\rm select}/2) - v_r$ where λ is the laser wavelength. In this horizontal geometry, the width of the transferred velocity class, which is proportional to $1/T$, is limited only by the fall of the atoms through the lasers beams. The value of T represents a good compromise between resolution (the width of the selected velocity distribution) and the signal-to-noise ratio (proportional to the number of selected atoms).

After the Raman selection process, a beam resonant with $5^2S_{1/2}$, $F = 2$ to $5^2P_{3/2}$, $F = 3$ cycling transition pushes away atoms remaining in the state $F = 2$. The selected atoms are then exposed to two counterpropagating beams generated by a Ti:sapphire laser whose frequency is also stabilized to the ZFPC. This laser beam is split in two, each beam passing through an acousto-optic modulator to control its frequency. In order to perform a coherent acceleration, we vary the frequency difference between the two Bloch beams linearly with time: $\Delta\nu(t) = 2at/\lambda$ where a is the effective acceleration. The two beams are superimposed onto the horizontal optical axis of the selection Raman beams using the same optical fibers. The two Bloch beams have the same linear polarization, equal intensity (160 mW for each beam), and are red detuned by 100 GHz from the $5^2S_{1/2}$ to $5^2P_{3/2}$ resonance line. The duration of the acceleration process is typically 4.4 ms. The optical potential is adiabatically turned on in about 300 μs.

In the case where the constant inertial force seen by the atoms is weak enough, all the selected atoms are accelerated. In a Bloch oscillation scheme, this is equivalent to avoiding interband transitions. This condition may be expressed in the weak binding limit [26] by

$$\pi\frac{d\Delta\nu(t)}{dt} \ll \left(\frac{U_0}{2\hbar}\right)^2, \tag{2}$$

where U_0 is the depth of the potential induced by the light shift due to the standing wave. In this limit, the interband transition rate per Bloch period is given by a Landau-Zener formula $R = e^{(-a_c/a)}$ where a_c is the critical acceleration, proportional to $(U_0/E_r)^2$ (E_r is the recoil energy) [23]. In our experiment U_0 is about $11E_r$ and atoms acceleration is 133 ms^{-2}, leading to a theoretical efficiency of 99.9% per oscillation.

After the acceleration process we perform the final velocity measurement using another Raman π pulse, whose frequency is $\delta_{measure}$. Population transfer from the hyperfine state $F = 1$ to the hyperfine state $F = 2$ due to the second Raman pulse is maximal when $2\pi(\delta_{select} - \delta_{measure}) = 2N(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{k}_{Bloch}\hbar/m_{Rb}$, where $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, and $\mathbf{k}_{Bloch}$ are, respectively, the wave vectors of the Raman and Bloch beams. The populations ($F = 1$ and $F = 2$) are measured separately by using the one-dimensional time of flight technique developed for atomic clocks and depicted in [27]. The detection zone is 15 cm below the center of the trap (Fig. 2). To avoid the horizontal motion of the atoms, and in order for the atoms to reach the detection zone, a symmetric acceleration-deceleration scheme is used: instead of selecting atoms at rest, we first accelerate them to $2Nv_r$, using N Bloch oscillations. We then make the three step sequence: selection, coherent deceleration (N Bloch oscillations), and measurement, according to Fig. 1.

Figure. 2(b) shows a typical time of flight signal for $F = 2$ (left peak) and $F = 1$ (right peak) when the second Raman frequency is centered at the top of the final velocity distribution. In this figure, we present the signal for $N = 0$ and for $N = 40$ Bloch oscillations. Comparing the number of atoms between the two situations, we demonstrate that the losses during the Bloch acceleration for $N = 40$ are less than 20%, corresponding to a transfer efficiency of about 99.5% per oscillation. These losses are not due to the spontaneous emission, which is evaluated to 0.1% per oscillation, but probably to the residual horizontal displacement of the atoms (about 5 mm) after the acceleration-deceleration process.

To reduce systematic errors, we perform an alternate and symmetric recoil transfer in both horizontal opposite directions. We determine the recoil frequency by a differential measurement of the center of the two final velocity distributions. Figure 3 shows a typical scan of final velocity distribution for $N = 50$ Bloch oscillations for both directions. Each of the 400 data points corresponds to a single cycle (cooling, selection, acceleration of $2Nv_r$, and measure). From a data analysis of 200 points (10 min) we can split the final velocity distribution with an uncertainty of $v_r/5000$. Hence, the relative uncertainty of the measurement of v_r is 1.5×10^{-6}.

Figure 4 shows, chronologically, 43 determinations of h/m_{Rb} using such measurements, compared to the expected value of h/m_{Rb}, using the CODATA 98 value of α. The mean value lies 6.1×10^{-7} above the expected value with a relative uncertainty of 4.2×10^{-7}.

We have estimated errors from wave front curvature (1.3 ppb), differential light shift (80 ppb), Zeeman effect (57 ppb), and laser frequencies (52 ppb). They are an order

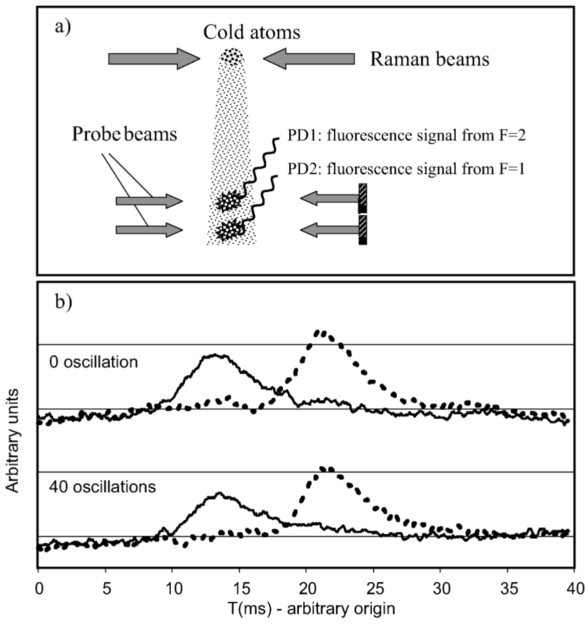


FIG. 2. (a) Experimental scheme. (b) Time of flight signal for $N = 0$ and $N = 40$ Bloch oscillations. The dashed line corresponds to the signal for the $F = 1$ atoms and the solid line for the $F = 2$ atoms, which are transferred from the hyperfine state $F = 1$ by the second Raman pulse. After 40 Bloch oscillations the time of flight signal remains almost unchanged, emphasizing thus the high efficiency transfer of our experiment. The analysis of these signals gives the number of atoms in each hyperfine state.

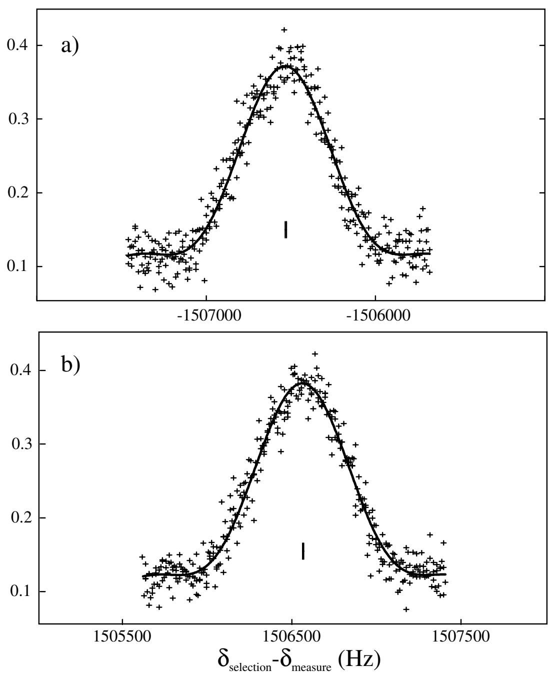


FIG. 3. Final velocity distribution for 50 Bloch oscillations, in both directions: (a) around $2Nv_r$ and (b) around $-2Nv_r$. The center of the final velocity distribution can be located with an uncertainty of 3 Hz. The photon recoil frequency deduced from these two measurements is 15066.690(23) Hz.

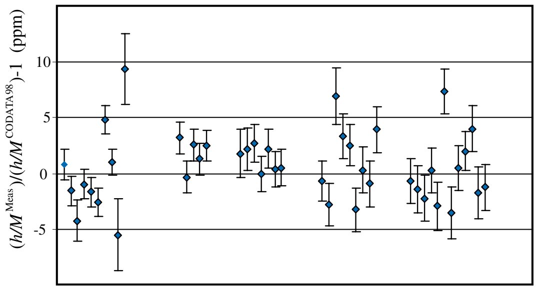


FIG. 4 (color online). Chronological display of the data taken for $N = 50$ Bloch oscillations in both directions. The mean deviation from the expected value is $6.1(4.2) \times 10^{-7}$, with $\chi^2 = 99$.

of magnitude lower compared to this disagreement. We believe that this disagreement and the dispersion of the results ($\chi^2 = 99$ for 43 measurements) can be explained by the systematic variations of the initial velocity distribution of the cold cloud and the phase fluctuation of the Raman beams. These effects have not yet been quantified.

In conclusion, we have demonstrated that coherent acceleration using Bloch oscillations is a powerful method to transfer a large number of additional photon recoils to atoms. In the horizontal scheme, the number of momentum recoil transfers is limited by the fall of atoms. In order to take advantage of the high transfer efficiency of the Bloch oscillation technique, we plan to build a setup with vertical Bloch and Raman beams. In this case, the number of additional recoils will be limited by the transverse motion, and we can increase the π pulse duration in order to select a narrower velocity class. Moreover, due to the gravitational acceleration g, the vertical motion is more complicated and this geometry provides scope for two different experiments: either the atoms are accelerated by a moving standing wave as in the horizontal scheme, or they are placed in a pure standing wave. In this case, the atoms oscillate around the same position at the frequency $mg/2\hbar k$ [24]. Furthermore, there is no significant displacement of the atom between the velocity selection and measurement, and, thus, several systematic effects are reduced. On the other hand, a precise determination of the local gravity field is required to fully exploit this technique. Finally, we expect to increase the number of transferred recoils up to $N = 500$, to obtain a determination of v_r with an uncertainty better than 10^{-8}, leading to a determination of α with an uncertainty of about 5 ppb, close to the more accurate value deduced from $(g - 2)$ [11,12,16]

We thank A. Clairon, C. Salomon, and J. Dalibard for valuable discussions. This experiment is supported in part by the Bureau National de Métrologie (Contract No. 993009) and by the Région Ile de France (Contract No. SESAME E1220).

[1] S. Chu, C. Cohen-Tannoudji, and W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. **70**, 685–741 (1998).
[2] G. Santarelli *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4619 (1999).
[3] C.W. Oates, K. R. Vogel, and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **76**, 2866 (1996).
[4] B. N. Taylor, Metrologia **31**, 181 (1994).
[5] C. Schwob, L. Jozefowski, B. de Beauvoir, L. Hilico, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, O. Acef, and A. Clairon, Phys. Rev. Lett. **82**, 4960 (1999).
[6] Th. Udem, A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz, and T.W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **79**, 2646 (1997).
[7] D. L. Farnham, R. S. Van Dyck, and P. B. Schwinberg, Phys. Rev. Lett. **75**, 3598 (1995).
[8] T. Beier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 011603 (2002).
[9] M. P. Bradley, J.V. Porto, S. Rainville, J. K. Thompson, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **83**, 4510 (1999).
[10] W. Liu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 711 (1999).
[11] T. Kinoshita, IEEE Trans. Instrum. Meas. **46**, 108 (1997).
[12] R. S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987).
[13] E. Krüger, W. Nistler, and W. Weirauch, Metrologia **36**, 147 (1999).
[14] J. Q. Shields, R. F. Dziuba, and H. P. Layer, IEEE Trans. Instrum. Meas. **38**, 249 (1989).
[15] A. M. Jeffery, R. E. Elmquist, L. H. Lee, J. Q. Shields, and R. F. Dziuba, IEEE Trans. Instrum. Meas. **46**, 264 (1997).
[16] P. Mohr and B. Taylor, CODATA recommended values of the fundamental constants: 1998, Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000).
[17] J. L. Hall, C. J. Bordé, and K. Uehara, Phys. Rev. Lett. **37**, 1339 (1976).
[18] C. J. Bordé, Phys. Lett. A **140**, 10 (1989).
[19] B. Young, M. Kasevich, and S. Chu, *Atom Interferometry*, edited by P. R. Berman (Academic, New York, 1997), p. 363.
[20] M. Weitz, B. C. Young, and S. Chu, Phys. Rev. Lett. **73**, 2563 (1994).
[21] A. Wicht, J. M. Hensley, E. Sarajlic, and S. Chu, in *Proceedings of the 6th Symposium on Frequency Standards and Metrology*, edited by P. Gill (World Scientific, Singapore, 2001), pp. 193–212.
[22] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **89**, 140401 (2002).
[23] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).
[24] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, J. Opt. B **5**, S178-S182 (2003).
[25] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, Phys. Rev. Lett. **66**, 2297 (1991).
[26] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon, Phys. Rev. A **55**, 2989 (1997).
[27] A. Clairon, P. Laurent, G. Santarelli, S. Ghezali, S. N. Lea, and M. Bahoura, IEEE Trans. Instrum. Meas. **44**, 128 (1995).

B Matrices de Pauli

On utilise les matrices de Pauli qui sont définies par (Landau & Lifchitz [36], §55) :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B-1}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{B-2}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B-3}$$

On désigne par $\vec{\sigma}$ le vecteur $(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$.

Nous utiliserons les relations suivantes :

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathrm{Id} \tag{B-4}$$

et

$$\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x \quad \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y \quad \sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \tag{B-5}$$

On peut déduire les relations de commutation :

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{B-6}$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique.

Un conséquence directe de cette formule est :

$$[\vec{a}.\vec{\sigma}, \vec{b}.\vec{\sigma}] = 2(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{\sigma} \tag{B-7}$$

Une autre relation souvent utilisée est la suivante : si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, alors

$$e^{-i\alpha\vec{n}.\vec{\sigma}} = \cos\alpha - i\sin\alpha\,\vec{n}.\vec{\sigma} \tag{B-8}$$

Cette formule se démontre en développant l'exponentielle et en remarquant que :

$$(\vec{n}.\vec{\sigma})^l = \mathrm{Id} \quad \text{si } l \text{ est pair} \tag{B-9}$$

$$(\vec{n}.\vec{\sigma})^l = \vec{n}.\vec{\sigma} \quad \text{si } l \text{ est impair.} \tag{B-10}$$

C Probabilité de transitions pour un système à plusieurs niveaux

C.1 Système à deux niveaux

Nous allons dans ce paragraphe considérer le cas d'une transition dipôlaire électrique pour un système à deux niveaux. Par exemple entre un état S et un état P. Cette transition est caractérisée par un dipole électrique d. Lorsque l'atome est soumis à un faisceau laser d'amplitude E_0, on définie alors la pulsation de Rabi par :

$$\Omega_R = -\frac{dE_0}{\hbar} \tag{C-1}$$

Cette pulsation correspond au temps caractéristique que met l'atome pour absorber un photon.

Il faut tenir compte aussi d'un autre phénomène qui est l'émission spontanée : un atome étant dans un état excité va émettre un photon dans un direction aléatoire (fluorescence) avec un taux (durée de vie) égal à :

$$\Gamma = \frac{\omega^3 d^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \tag{C-2}$$

où ω désigne la fréquence de la transition atomique.

Il y a deux régimes différents suivant que la fréquence de Rabi est supérieure où inférieur au taux d'émission spontanée. A faible intensité ($\Omega_R \ll \Gamma$), la fréquence Γ_{fluo} du cycle absorption-émission spontanée est proportionnelle à Ω_R^2, alors qu'à forte intensité, le taux devient constant (saturation) et vaut $\Gamma/2$. De façon générale, on a :

$$\Gamma_{\text{fluo}} = \frac{\Gamma}{2}\frac{s}{1+s} \tag{C-3}$$

où s est le paramètre de saturation définit par :

$$s = \frac{2\Omega_R^2}{\Gamma^2}\frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\Delta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{C-4}$$

où Δ désigne l'écart à résonance du laser.

Le paramètre de saturation s est proportionnel à l'intensité I du laser. On peut alors définir une intensité de saturation I_S par la formule :

$$\frac{2\Omega_R^2}{\Gamma^2} = \frac{I}{I_S} \tag{C-5}$$

A partir de cette équation, des équations (C-1), (C-2) et (C-4), on obtient que

$$I_S = \frac{\pi}{3}\frac{\hbar\omega\,\Gamma}{\lambda^2} \tag{C-6}$$

C'est, à un facteur numérique près, le flux correspondant au passage d'un photon pendant la durée de vie de l'état excité à travers une surface égale au carré de la longueur d'onde de la transition.

C.2 Structure fine

Si on tient compte de la structure fine, l'opérateur dipolaire électrique ne couple plus un état initial à un seul état propre. Dans le calcul du couplage entre deux états, il faut donc tenir compte du recouvrement entre les fonctions d'onde (coefficient de Clebsch-Gordan). Dans tout ce travail, nous n'avons utilisé que la transition D_2 du rubidium, c'est à dire la transition entre les états $5^2S_{1/2}$ ($J_g = 1/2$) et $5^2P_{3/2}$ ($J_e = 3/2$). A la différence de la situation précédente (où on part d'un niveau de moment cinétique nul), maintenant, pour une polarisation de la lumière donnée, le dipole va dépendre de la polarisation de l'atome. Si on regarde le taux de fluorescence moyen pour un échantillon d'atome non polarisé, il faut tenir compte de la moyenne des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan. Pour notre transition ce facteur vaut 2/3.

L'intensité de saturation est donc augmentée d'un facteur 3/2. La définition de l'intensité de saturation que nous utilisons dans tout ce document est donc la suivante :

$$I_S = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar\omega\,\Gamma}{\lambda^2} \tag{C-7}$$

Dans le cas de la transition D_2 du rubidium, avec notre définition, on obtient :

$$I_S \simeq 2{,}5 \text{ mW.cm}^{-2} \tag{C-8}$$

C.3 Structure hyperfine et sous-niveaux Zeeman

Pour un laser de polarisation $\vec{\epsilon_q}$, d'amplitude E_0, nous pouvons définir la pulsation de Rabi entre les états $\left|F_g,m_{F_g}\right\rangle$ et $\left|F_e,m_{F_e}\right\rangle$ par :

$$\Omega^q_{\left|F_g,m_{F_g}\right\rangle\to\left|F_e,m_{F_e}\right\rangle} = -\frac{\left\langle F_e,m_{F_e}\left|\vec{\epsilon_q}\cdot\vec{D}\right|F_g,m_{F_g}\right\rangle E_0}{\hbar} \tag{C-9}$$

où $\vec{D}$ désigne l'opérateur dipolaire électrique.

Cette pulsation de Rabi peut facilement s'exprimer en fonction de Γ, du paramètre de saturation et de coefficients numériques que l'on peut calculer avec le théorème de Wigner-Eckart en utilisant les symboles $3j$ et $6j$. En effet on peut écrire le dipôle sous la forme suivante[1] :

$$\left|\left\langle F_e,m_{F_e}\left|D^1_q\right|F_g,m_{F_g}\right\rangle\right| = \sqrt{(2F_e+1)(2F_g+1)} \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -m_{F_e} & q & m_F \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_e & 1 & J_g \\ F_g & I & F_e \end{Bmatrix} \left\langle J_e\left|\left|D^1\right|\right|J_g\right\rangle \tag{C-10}$$

[1]Le théorème de Wigner-Eckart ainsi que les définitions des coefficients $3j$ et $6j$ se trouvent entre autre dans le Landau & Lifchitz [36], chapitre XIV. Nous n'avons pas tenu compte ici du signe des coefficients qui ne va pas jouer de rôle

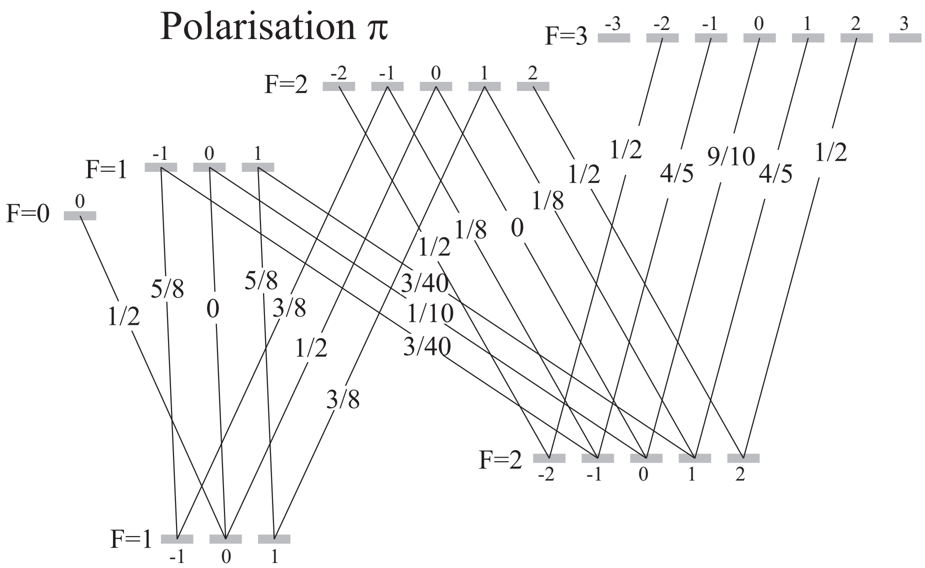


FIG. 8.1 – Intensité des différentes transitions pour la transition D_2 du rubidium 87, dans le cas d'une polarisation linéaire. Ces coefficients correspondent à la deuxième ligne de l'équation C-13.

Le coefficient $\langle J_e \| D^1 \| J_g \rangle$ peut se calculer en fonction de d en utilisant les symboles $6j$. On peut aussi écrire que la somme des carrés des pulsations de Rabi sur les états excités vaut $\frac{\Gamma^2}{2} \times \frac{I}{I_S}$. On obtient alors que

$$\langle J_e \| D^1 \| J_g \rangle = 2d \tag{C-11}$$

D'où

$$\frac{\left|\langle F_e, m_{F_e} \left| D_q^1 \right| F_g, m_{F_g} \rangle\right|}{d} = 2\sqrt{(2F_e+1)(2F_g+1)} \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -m_{F_e} & q & m_F \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_e & 1 & J_g \\ F_g & I & F_e \end{Bmatrix} \tag{C-12}$$

et

$$\left(\Omega^q_{|F_g,m_{F_g}\rangle \to |F_e,m_{F_e}\rangle}\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{2} \times \frac{I}{I_S} \times$$
$$\times\, 6(2F_e+1)(2F_g+1) \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -m_{F_e} & q & m_F \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} J_e & 1 & J_g \\ F_g & I & F_e \end{Bmatrix}^2 \tag{C-13}$$

Les coefficients sont représentés pour les deux polarisation de la lumière possible sur les figure 8.1 et 8.2. Notons que le logiciel *Mathematica* possède les tables des coefficients $3j$ et $6j$, ce qui rend cette formule facile à exploiter.

Déplacement lumineux dans le cas de Bloch

On veut calculer le déplacement lumineux produit par un faisceau laser de polarisation linéaire sur un sous-niveau hyperfin de l'état fondamental $5^2S_{1/2}$. Le déplacement lumineux

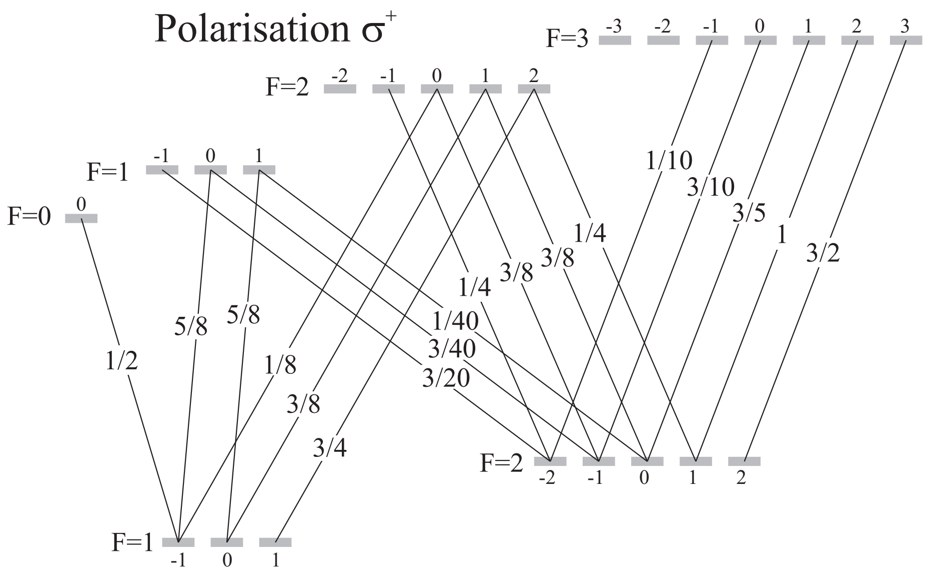


FIG. 8.2 – Intensité des différentes transitions pour la transition D_2 du rubidium 87, dans le cas d'une polarisation circulaire. Ces coefficients correspondent à la deuxième ligne de l'équation C-13.

correspond au couplage à l'ordre deux d'un état avec lui même. A partir de l'équation (C-5), on obtient qu'un champ laser d'intensité $I = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2}$ désaccordé de la résonance de Δ produit, dans le cas d'un système à deux niveaux, produite un déplacement égal à :

$$\delta_{d.l.} = \frac{\Omega_R^2}{4\Delta} = \frac{\Gamma^2}{8\Delta}\frac{I}{I_S} \qquad \text{(C-14)}$$

Dans notre situation, le désaccord étant grand devant la structure hyperfine, on peut ne considérer que que la structure fine. Le coefficient qui intervient vaut 2/3 et à déjà été pris en compte dans le définition de l'intensité de saturation. La formule C-14 reste donc valable.

Le déplacement lumineux produit par l'interférence de deux laser d'intensité I est donc égal à :

$$\delta_{d.l.}(x) = \frac{U(x)}{\hbar} = \frac{\Gamma^2}{2\Delta}\frac{I}{I_S}\cos^2(kx) \qquad \text{(C-15)}$$

Calcul de la section efficace d'absorption

La section efficace d'absorption se définit comme étant le rapport entre le taux de fluorescence Γ_{fluo} et le flux $I/(\hbar\omega)$ de photon incident :

$$\sigma = \frac{\Gamma_{\text{fluo}}\hbar\omega}{I} \qquad \text{(C-16)}$$

Dans le cas où l'intensité incidente est petite devant l'intensité de saturation, Γ_{fluo} est proportionnelle à I, est donc σ est indépendant de I.

En utilisant les relations (C-3) et (C-6), on obtient, pour un système à deux niveaux, à désaccord Δ nul, que :

$$\sigma = \frac{3}{2\pi}\lambda^2 \tag{C-17}$$

—Nuage d'atomes froids— Pour l'expérience de mesure de l'absorption du nuage on utilise un laser résonnant avec la transition $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$, et les atomes ont une polarisation quelconque par rapport au laser. Il faut donc effectuer la moyenne de Γ_{fluo} sur les état initiaux. D'après C-12, ce coefficient vaut :

$$\frac{1}{2F_g+1} \sum_{\substack{m_{F_g} = -F_g \dots Fg \\ m_{F_e} = m_{F_g} + q}} 4(2F_e+1)(2F_g+1) \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -m_{F_e} & q & m_{F_g} \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} J_e & 1 & J \\ F_g & I & F_e \end{Bmatrix}^2 \tag{C-18}$$

Un calcul donne pour nos paramètre 7/15. On obtient donc que :

$$\sigma = \frac{7}{10\pi}\lambda^2 \tag{C-19}$$

—Vapeur résiduelle— Pour la vapeur résiduelle, à cause de l'effet Doppler, le laser n'est pas résonnant uniquement avec le transition $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$, mais avec tous les niveaux F_e. La somme que l'on effectue sur les F_e revient alors à négliger la structure hyperfine. Il reste alors le coefficient de 2/3 correspondant à la structure fine :

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{\pi} \tag{C-20}$$

Taux de fluorescence pour la détection

Lors de la détection des atomes par la méthode du temps de vol, on utilise un laser polarisé circulairement, résonnant avec la transition $|F_g = 2\rangle \rightarrow |F_e = 3\rangle$, ceci à pour conséquence de pomper très rapidement les atomes dans l'état $\left|F_g = 2, m_{F_g} = 2\right\rangle$. Le taux de fluorescence se calcule donc entre l'état $\left|F_g = 2, m_{F_g} = 2\right\rangle$ et $|F_e = 3, m_{F_e} = 3\rangle$. En utilisant (C-13), on obtient que, à résonance :

$$s = C^2 \frac{I}{I_S} \quad \text{avec} \quad C^2 = \frac{3}{2} \tag{C-21}$$

D Calcul de la structure de bande

Cette annexe présente le calcul des niveaux d'énergie et des états de Bloch (hamiltonien 4.11, page 90), calcul qui peut être retrouvé dans tout livre de physique du solide [45]. Nous le rappelons rapidement ici, en particulier pour définir les notations et bien comprendre ce qui dans la suite nous sera utile.

Lorsque l'on étudie une particule dans un potentiel périodique, il existe deux limites perturbatives qui nous permettent de calculer la structure de bande. Ces limites apparaissent suivant la profondeur du potentiel. Pour un potentiel très profond, la particule va être localisée au fond de chaque puits. Dans cette limite, l'effet tunnel sera traité comme une perturbation au potentiel. Pour un potentiel peu profond, la fonction d'onde de la particule ne va pas être restreinte au fond du puits. Le potentiel périodique sera traité comme une perturbation des ondes planes. Nous verrons, enfin, dans une troisième partie comment il est possible de résoudre numériquement le problème, pour des potentiels entre les deux limites.

D.1 Limite des liaisons fortes

En physique du solide, le potentiel périodique provient du réseau cristallin (noyau des atomes et premières couches électroniques). C'est en écrivant la dynamique des électrons de la couche externe que l'on écrit un hamiltonien périodique. Dans ce problème là, la limite des liaisons fortes est introduite de la façon suivante : on résout le problème d'un électron lié à un noyau. On obtient alors des fonctions propres $\Phi_n(x)$, d'énergie E_n. Lorsque l'on a plusieurs noyaux qui forment un réseau, alors l'électron d'énergie E_n va par effet tunnel se délocaliser sur tous les sites. La fonction d'onde sera alors de la forme :

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i\phi_l}\Phi_n(x-ld) \tag{D-1}$$

où ϕ_l va être la phase de chaque site, d le pas du réseau et N le nombre de sites du réseau occupés par les particules. On pourrait, *a priori*, choisir des phases quelconques. Cependant, on souhaite mettre les solutions du hamiltonien sous la forme d'états ayant une quasi-impulsion q bien définie. Ceci sera le cas si le déphasage entre chaque site vaut qd. On doit donc avoir $\phi_l = qdl$. Finalement l'état va s'écrire sous la forme :

$$\psi_q(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{iqld}\Phi_n(x-ld) \tag{D-2}$$

Cet état n'est pas un état propre du hamiltonien mais en constitue une bonne approximation. On peut montrer que l'énergie de cet état est modifiée par effet tunnel :

$$\begin{aligned} E_n(q) &\simeq E_n + \delta E_n \cos(qd) \qquad \text{avec} && \text{(D-3)}\\ E_n &= \langle \Phi_n(x)\,|H|\,\Phi_n(z)\rangle && \text{(D-4)}\\ \delta E_n &= \langle \Phi_n(x)\,|H|\,\Phi_n(z-d)\rangle && \text{(D-5)} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un potentiel sinusoïdal très profond, on peut pour les premières bandes d'énergie supposer que l'atome est au fond d'un potentiel harmonique. Si on suppose que U_0 est négatif, le point $x = 0$ constitue un minimum, et pour $x \ll \lambda/2\pi$:

$$U(x) = \frac{U_0}{2}\cos(2kx) \simeq \frac{U_0}{2} - U_0 k^2 x^2 = \frac{U_0}{2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{D-6}$$

où $\omega = 2\sqrt{|U_0|E_r}/\hbar$ est la fréquence de l'oscillateur harmonique. Les énergies des premières bandes sont alors approximées par les niveaux de l'oscillateur harmonique :

$$E_n = \frac{U_0}{2} + 2(n + \frac{1}{2})\sqrt{|U_0|E_r} \tag{D-7}$$

On peut aussi calculer l'extension spatiale et impulsionnelle de l'état :

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{E_r}{U_0}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{D-8}$$

$$\Delta p = \sqrt{\hbar m\omega} = \hbar k\left(\frac{U_0}{E_r}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{D-9}$$

Fonction de Wannier

L'écriture de l'état propre sous forme de l'équation (D-2), que nous avons introduite "à la main", est en fait une forme équivalente du théorème de Bloch : pour tout hamiltonien périodique, il est possible d'écrire les états propres sous la forme :

$$\psi_{n,q}(x) = \langle x \mid n,q\rangle = d\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{iqld}\Phi_n(x - ld) \tag{D-10}$$

La fonction Φ_n est alors appelé fonction de Wannier de la bande n.[2]

Pour démontrer cette propriété, nous pouvons définir l'état de Wannier $|\Phi_n\rangle$ par :

$$|\Phi_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k} dq|n,q\rangle \tag{D-11}$$

[2] La condition de normalisation de $|n,q\rangle$ est la même que pour des ondes planes : $\langle n_1,q_1 \mid n_2,q_2\rangle = \delta_{n_1 n_2} \times 2\pi\delta(q_1 - q_2)$. Pour la fonction d'onde $|\Phi_n\rangle$, nous utilisons, pour des raisons de commodité, la condition suivante : $\langle \Phi_{n_1} \mid \Phi_{n_2}\rangle = \frac{1}{d}\delta_{n_1 n_2}$.

Calculons alors :

$$d\sum_{l=-N}^{N} e^{iq'ld}T_{-ld}|\Phi_n\rangle = \frac{d}{2\pi}\int_{-k}^{k} dq \sum_{l=-N}^{N} e^{iq'ld}(T_{-d})^l|n,q\rangle \tag{D-12}$$

$$= \frac{d}{2\pi}\int_{-k}^{k} dq \sum_{l=-N}^{N} e^{iq'ld}e^{-iqld}|n,q\rangle \tag{D-13}$$

$$= \frac{d}{2\pi}\int_{-k}^{k} dq 2k\delta(q-q')|n,q\rangle \tag{D-14}$$

$$= \big|n,q'\big\rangle \tag{D-15}$$

où nous avons introduit T_{-ld} l'opérateur de translation de la fonction d'onde par ld dans l'espace des x. Le point clef est l'utilisation entre les lignes D-12 et D-13 du fait que l'état de Bloch est un état de quasi-impulsion q, et donc que $T_d|n,q\rangle = e^{iqd}|n,q\rangle$. Entre la ligne D-13 et D-14, nous utilisons le fait que q et q' sont dans la première zone de Brillouin, et donc que $|q-q'| < 2k$. Ainsi, on a la propriété : $\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i(q'-q)ld} = 2k\delta(q-q')$.

Etat de Bloch en représentation p

L'équation (D-10) est l'écriture de (D-15) en représentation x. Il est possible d'écrire cette équation sur la base des ondes planes $|q'\rangle$. On obtient alors que :

$$\big\langle q' \mid n,q\big\rangle = d\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{iqld}e^{-q'ld}\big\langle q' \mid \Phi_n\big\rangle \tag{D-16}$$

La somme correspond à un peigne de fonction de Dirac. On obtient donc que

$$\big\langle q' \mid n,q\big\rangle = 2\pi\sum_{l}\delta(q'-q-2lk)\langle p \mid \Phi_n\rangle \tag{D-17}$$

que l'on peut mettre sous la forme, en utilisant la notation $\Phi_n(q) = \langle q \mid \Phi_n\rangle$,

$$|n,q\rangle = \sum_{l}\Phi_n(q+2lk)|q+2lk\rangle \tag{D-18}$$

Il est important de noter que la fonction de Wannier est définie quelque soit la profondeur du potentiel. La donnée d'une seule fonction permet de décrire entièrement tous les états de Bloch d'une bande donnée. Cette fonction est particulièrement utile en représentation p, car c'est elle qui permet de décrire les oscillations de Bloch avec le même formalisme pour les liaisons faibles et les liaisons fortes. Notons que les conditions de normalisation que nous avons choisies correspondents, à la limite de potentiel nul, à avoir $\Phi_0(q) = 1$ sur la première zone de Brillouin, et $\Phi_0(q) = 0$ ailleurs.

D.2 Calcul numérique des états de Bloch

Variable sans dimension

Il est possible d'utiliser des variables sans dimension pour décrire le hamiltonien Bloch. Pour cela, on va écrire les énergies et les impulsions en fonction de l'énergie de recul et de l'impulsion d'un photon :

$$\frac{H}{E_r} = \left(\frac{p}{\hbar k}\right)^2 + \frac{U_0}{4E_r}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \tag{D-19}$$

Dans cet hamiltonien, il n'y a plus qu'un seul paramètre :

$$\kappa = \frac{U_0}{4E_r} \tag{D-20}$$

Dans la suite, nous continuerons d'utiliser le même nom q pour désigner q/k, et noterons $|q\rangle$ l'onde plane de vecteur d'onde qk.

On est finalement amené à diagonaliser la matrice suivante (écrite dans la base des $|q+l\rangle$, où $l \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \kappa & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \kappa & q_{-l}^2 & \kappa & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \kappa & \ddots & \kappa & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \kappa & q_0^2 & \kappa & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \kappa & \ddots & \kappa & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \kappa & q_l^2 & \kappa \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \kappa & \ddots \end{bmatrix} \tag{D-21}$$

où $q_l = q + 2l$

Les calculs numériques sont effectués en tronquant cette matrice aux premiers états $|q+l\rangle$: nous ne gardons que les états $|l| \leq n$. L'approximation que l'on fait est donc perturbative puisque ceci revient à ne garder que les états couplés jusqu'à l'ordre n.

Nous avons vu dans la partie sur l'approximation des liaisons fortes que l'extension spatiale d'un état de la bande fondamentale vaut (équation D-9) :

$$\Delta p = \sqrt{\hbar m \omega} = \hbar k \left(\frac{U_0}{E_r}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{D-22}$$

L'approximation consistant à tronquer le hamiltonien à l'ordre n est donc justifiée si $\Delta p \ll n\hbar k$, c'est à dire si :

$$U_0 \ll n^4 E_r \tag{D-23}$$

Les calculs numériques présentés dans ce manuscrit ont été effectués avec $n = 10$. Ces calculs sont donc valables sans problème jusqu'à $U_0 \simeq 100 E_r$.

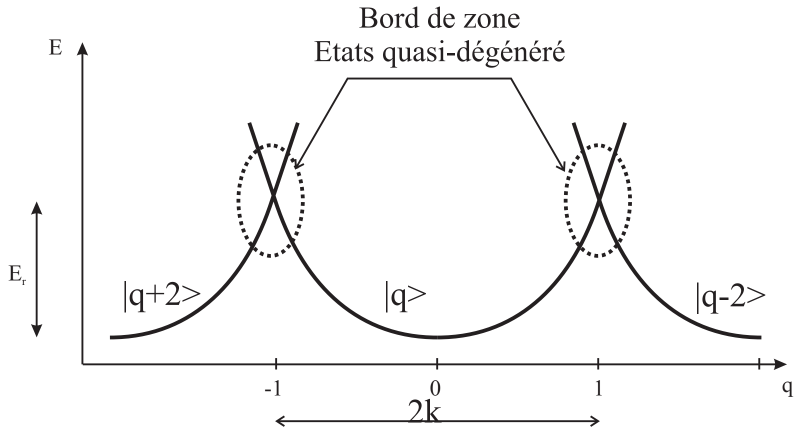


FIG. 8.3 – Schéma des niveaux d'énergie des états libres $|q\rangle$ et $|q \pm 2\rangle$.

D.3 Limite des liaisons faibles

La limite des liaisons faibles correspond à la limite où l'énergie potentielle peut être traitée en perturbation par rapport à l'énergie cinétique. Nous allons calculer les états de la première bande, c'est-à-dire les états issus des ondes planes $|q\rangle$, avec $q \in [-1,1]$. Les états auxquels ces états sont perturbativement couplés au premier ordre sont les ondes planes $|q \pm 2\rangle$ (d'énergie cinétique $(q \pm 2)^2$). Ils sont couplés avec la constante κ. Dans la limite des liaisons faibles, nous ne considérons donc que ces trois états.

Deux situations sont alors possibles suivant que les états sont dégénérés ou pas. Cette dégénérescence se produit lorsqu'il y a un croisement de niveau, qui dans notre cas à lieu en bord de zone (voir figure 8.3).

Lorsqu'on est en centre de zone, on applique la théorie de perturbation à l'ordre 1, et l'état propre de la première bande s'écrit

$$|0,q\rangle = |q\rangle - \frac{\kappa}{4}\left(|q+2\rangle + |q-2\rangle\right) \tag{D-24}$$

En bord de zone, la situation est différente. Considérons la situation $q \simeq -1$. Dans ce cas, on peut dans un premier temps ignorer l'autre bande. Le hamiltonien que l'on doit diagonaliser s'écrit dans la base $|q+2\rangle, |q\rangle$:

$$\begin{bmatrix} (q+2)^2 & \kappa \\ \kappa & q^2 \end{bmatrix} \tag{D-25}$$

Pour diagonaliser cette matrice, on introduit l'angle θ_+ défini par :

$$\tan\theta_+ = \frac{\kappa}{2(q+1)} \tag{D-26}$$

La matrice s'écrit alors sous la forme :

$$q^2 + 2q + 2 + \sqrt{\kappa^2 + 4(q+1)^2} \begin{bmatrix} \cos\theta_+ & \sin\theta_+ \\ \sin\theta_+ & -\cos\theta_+ \end{bmatrix} \tag{D-27}$$

L'état propre de moindre énergie est de la forme :

$$\cos\frac{\theta_+}{2}|q\rangle - \sin\frac{\theta_+}{2}|q+2\rangle \tag{D-28}$$

Cet état est couplé à l'état $|q-2\rangle$ par le coefficient $\frac{U_0}{4}\cos\frac{\theta_+}{2}$. L'état perturbé par ce couplage est donc :

$$|0,q\rangle = \cos\frac{\theta_+}{2}|q\rangle - \sin\frac{\theta_+}{2}|q+2\rangle - \cos\frac{\theta_+}{2}\frac{\kappa}{4(1-q)E_r}|q-2\rangle \tag{D-29}$$

Cette formule est valable en bord de zone, mais aussi partout où $\kappa \ll 4(1-q)$. C'est à dire, dans la limite des liaisons faible, au moins dans la zone où $q < 0$. On peut alors remarquer que sur toute cette zone, à l'ordre 1 en $\kappa/4$, $\frac{\kappa}{4(1-q)} \simeq \sin\frac{\theta_-}{2}$ et $\cos\frac{\theta_-}{2} \simeq 1$, où θ_- est défini par $\tan\theta_- = \frac{\kappa}{2(1-q)}$.

On obtient donc pour l'états de la bande fondamentale, et pour $-1 < q < 0$,

$$|0,q\rangle = \cos\frac{\theta_+}{2}\cos\frac{\theta_-}{2}|q\rangle - \sin\frac{\theta_+}{2}\cos\frac{\theta_-}{2}|q+2\rangle - \cos\frac{\theta_+}{2}\sin\frac{\theta_-}{2}|q-2\rangle \tag{D-30}$$

Cette formule à été écrite de façon symétrique, de telle sorte qu'elle est aussi valable pour $1 > q > 0$.

On peut calculer l'énergie de cet état : on obtient que

$$E(q) = q^2 + 2A_+\sin^2\frac{\theta_+}{2}\cos^2\frac{\theta_-}{2} + 2A_-\sin^2\frac{\theta_-}{2}\cos^2\frac{\theta_+}{2} \tag{D-31}$$

où

$$A_\pm = \sqrt{\kappa^2 + 4(1 \pm q)^2} \tag{D-32}$$

Notons que notre calcul est valable à l'ordre 1 en κ pour le Hamiltonien restreint au trois états $|q\rangle$ et $|q \pm 2\rangle$. Cependant, l'état propre n'est pas correct à l'ordre 1 pour le problème de Bloch en bord de zone : en effet, pour $q = -1$, par exemple, l'état $|q\rangle$ est couplé à l'ordre 1 en κ à l'état $|q+4\rangle$, via l'état $|q+2\rangle$ auquel il est couplé à l'ordre 0.

E Calcul du taux d'émission spontanée dans la limite des liaisons faibles

L'équation D-30 nous a permis d'exprimer dans la limite des liaisons faible l'état $|0,q\rangle$ sur la base $(|q+2\rangle,|q\rangle,|q-2\rangle)$. Nous voulons calculer le coefficient $c(\kappa,q)$ définie comme la moyenne de l'opérateur $1+\cos(2kx)$. Dans cette base, l'opérateur s'écrit

$$\mathrm{Id} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{E-1}$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$c(U_0,q) = 1 - \left(\sin\left(\frac{\theta_+}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_+}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta_-}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_-}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_-}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta_+}{2}\right)\right) \tag{E-2}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$c(U_0,q) = 1 - \frac{1}{2}\left(\sin\theta_+\cos^2\left(\frac{\theta_-}{2}\right) + \sin\theta_-\cos^2\left(\frac{\theta_+}{2}\right)\right) \tag{E-3}$$

On va maintenant calculer la moyenne sur q de $c(U_0,q)$.

$$c(U_0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} c(U_0,q)dq = 1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\langle 0,q\,|\cos(2kx)|\,0,q\rangle dq \tag{E-4}$$

D'après l'équation (E-3), le terme de droite dans l'intégrale est soit de l'ordre de 1 sur les bords de la première zone de Brillouin (sur une largeur proportionnelle à U_0/E_r), soit de l'ordre de U_0/E_r sur le reste. Il faut donc tenir compte dans la moyenne des deux situations, et le résultat final sera de l'ordre de U_0/E_r. On peut de plus remplacer les termes en $\cos^2$ par 1, car ils ne diffèrent de 1 que par un terme d'ordre 2 en U_0/E_r, sauf en bord de zone, sur une largeur de l'ordre de U_0/E_r, mais où ils sont multipliés par un terme en sinus, qui est d'ordre U_0/E_r.

On va donc calculer le terme suivant :

$$-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(\sin\theta_- + \sin\theta_+)dq = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\theta_+ dq \tag{E-5}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$x = 2\frac{1+q}{\kappa} = \cot\theta_+ \tag{E-6}$$

et en utilisant la relation, valable pour $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$:

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{sgn}\,(\theta)}{\sqrt{1+\cot\theta^2}} \tag{E-7}$$

où sgn (θ) désigne le signe de θ, on obtient l'intégrale suivante :

$$-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{4}{\kappa}}\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\kappa dx = -(\operatorname{sgn}(\kappa))\frac{\kappa}{4}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{4}{\kappa}\right) \quad \text{(E-8)}$$

$$= -\frac{|\kappa|}{4}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{4}{\kappa}\right) \quad \text{(E-9)}$$

D'où, en revenant aux notations usuelles :

$$c(U_0) = 1 - \frac{|U_0|}{16E_r}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{16E_r}{U_0}\right) \quad \text{(E-10)}$$

F Calcul de l'effet systématique lié à la coupure non-adiabatique

Nous voulons dans cette annexe calculer l'effet systématique qui apparaît lorsque l'on coupe non-adiabatiquement le réseau, alors que celui ci est en mouvement par rapport aux atomes (voir partie 5.3.1, page 133). Dans cette partie, nous avons écrit que la distribution de vitesse, après l'accélération de Bloch, devait être multipliée par la fonction de Wannier. Nous avons alors donné un grandeur de l'effet en fonction de l'amplitude $\alpha(\delta v)$ de la fonction de Wannier, et de sa dérivée $\beta(\delta v)$.

Dans une première partie nous allons calculer précisement cet effet en fonction $\alpha(\delta v)$ et de $\beta(\delta v)$, dans une seconde partie, nous allons calculer ces deux fonctions.

F.1 Effet sur le spectre

L'effet que nous voulons calculer apparaît à cause des variations de la fonction de Wannier sur la largeur du spectre qui modifie la distribution en vitesse des atomes. Nous pouvons calculer l'effet en linéarisant la fonction (équation (5.27), page 133). Le calcul donnant le forme théorique su spectre est identique à celui ayant permis d'obtenir l'équation (2.37), page 26, sauf que, entre la sélection et la mesure, il faut multiplier la distribution en impulsion par la fonction de Wannier. On obtient alors :

$$\frac{N_a}{N_a+N_b} = \alpha(\delta v)\left(\mathcal{P}(\delta) + \frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\delta\mathcal{P}(\delta)\right) \quad \text{(F-1)}$$

où

$$\delta\mathcal{P}(\delta) = \frac{\int \frac{v}{v_r}P(2kv)P(2kv+\delta)dv}{\int \eta(v)P(2kv)dv} \quad \text{(F-2)}$$

En utilisant les variables sans dimension :

- $z = \frac{2kv}{\Omega}$
- $x = \frac{\delta}{\Omega}$

on obtient :

$$\delta\mathcal{P}(x) = \frac{\hbar\Omega}{4E_r}\frac{\int zP(z)P(z+x)dz}{\int P(z)dz} \tag{F-3}$$

où dans l'intégrale, la fonction P dépend uniquement de $\Omega\tau$.

Appelons δ_i les valeurs de δ utilisées pour la mesure. D'après ce qui précède, le signal que l'on mesure va être proportionnel à[3] $\mathcal{P}(\delta_i) + \frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\delta\mathcal{P}(\delta_i)$. Cette fonction va être ajustée par la fonction $\mathcal{P}(\delta_i + \epsilon)$ par la méthode des moindres carrés. C'est-à-dire que l'on recherche ϵ minimisant :

$$\chi^2 = \sum_i \left(\mathcal{P}(\delta_i) + \frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\delta\mathcal{P}(\delta_i) - \mathcal{P}(\delta_i + \epsilon)\right)^2 \tag{F-4}$$

En linéarisant $\mathcal{P}(\delta_i + \epsilon)$ pour ϵ petit on retrouve l'équation suivante :

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\delta\mathcal{P}(\delta_i) - \epsilon\mathcal{P}'(\delta_i)\right)^2 \tag{F-5}$$

qui est minimale pour

$$\epsilon = \frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\frac{\sum_i \delta\mathcal{P}(\delta_i)\mathcal{P}'(\delta_i)}{\sum_i \mathcal{P}'(\delta_i)^2} \tag{F-6}$$

En utilisant les variables sans dimension introduites précédemment, on trouve que :

$$\epsilon = Cste \times \frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\frac{\hbar\Omega^2}{4E_r} \tag{F-7}$$

où la constante est une fonction uniquement du paramètre $\Omega\tau$ et des valeurs de δ prise sur le spectre. Pour des impulsions Raman π et des valeurs de δ prises uniformément entre $\pm 2\Omega$, on trouve une valeur numérique de 0,44.

Si on exprime l'effet systématique par rapport à la vitesse de recul, on obtient que :

$$\frac{\epsilon_v}{v_r} \simeq 0{,}44\,\frac{\beta(\delta v)}{\alpha(\delta v)}\left(\frac{\hbar\Omega}{4E_r}\right)^2 \tag{F-8}$$

F.2 Calcul de la fonction de Wannier

Pour calculer l'effet systématique lié à la coupure non adiabatique, il nous faut calculer la dérivée ($\beta(v)$) du module carré ($\alpha(v)$) de la fonction de Wannier en représentation p.

Calcul dans la limite des liaisons fortes

La fonction de Wannier est égale aux fonctions propres de l'oscillateur harmonique de pulsation $\omega = 2\sqrt{|U_0|E_r}/\hbar$. Pour la bande fondamentale, la fonction de Wannier s'écrit donc

$$\Phi_0(p) = \left(\frac{1}{\pi m\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} \tag{F-9}$$

[3] Pour simplifier, nous ne mettons pas dans cette formule le bruit sur le spectre qui ne contribue pas à l'effet systématique.

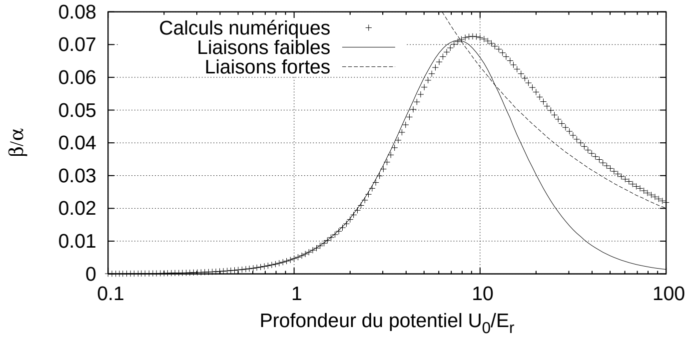


FIG. 8.4 – Dérivée de la fonction de Wannier pour différente valeur de la profondeur du potentiel, pour un position $\delta v = 0{,}1\ v_r$. Nous avons représenté à la fois le résultat du calcul numérique et celui que l'on obtient dans la limite des liaisons faibles et des liaisons fortes.

On obtient, en utilisant la définition de l'équation (5.27), que, pour $v \ll v_r$:

$$\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} = 2\frac{v}{v_r}\sqrt{\frac{E_r}{|U_0|}} \tag{F-10}$$

Limite des liaisons faibles

D'après l'équation D-30, nous avons

$$\alpha(v) = \cos^2\frac{\theta_+}{2}\cos^2\frac{\theta_-}{2} \tag{F-11}$$

où les $\theta_\pm$ sont définis par l'équation (D-26) avec $q = v/v_r$.

La dérivée de $\theta_\pm$ peut se calculer en dérivant l'équation (D-26). On obtient alors que

$$v_r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v} = \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 4(1 \pm q)^2} \tag{F-12}$$

D'où, en revenant aux notations usuelles :

$$\frac{\beta(v)}{\alpha(v)} = \frac{8U_0E_r\tan\frac{\theta_+}{2}}{U_0^2 + (4E_r(1+v/v_r))^2} - \frac{8U_0E_r\tan\frac{\theta_-}{2}}{U_0^2 + (4E_r(1-v/v_r))^2} \tag{F-13}$$

Calcul numérique

Le coefficient $\alpha(v)$ se calcule numériquement à partir des vecteurs propres de la matrice (D-21). La dérivée de $\alpha(v)$ est calculée numériquement à partir de la variation de $\alpha(v)$ pour deux valeurs différentes de v proches.

Nous avons représenté figure 8.4, le coefficient $\beta(v)/\alpha(v)$ en fonction de U_0/E_r, pour un valeur de $v = 0{,}1\,v_r$.

G Dispositif expérimental

G.1 Doubleur de fréquence

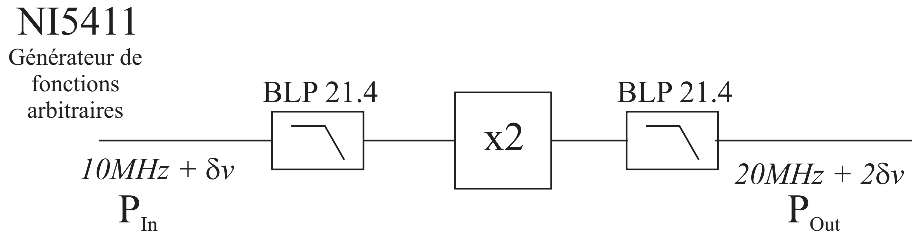


FIG. 8.5 – Dispositif permettant le doublage en fréquence du signal de la carte NI5411.

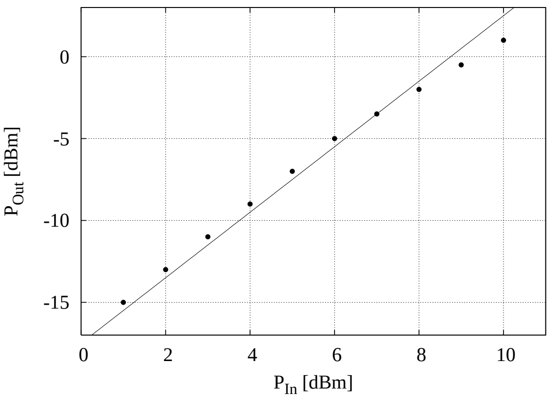


FIG. 8.6 – Puissance de sortie du doubleur (FD 25C) en fonction de la puissance d'entrée. Ligne : ajustement par une fonction du type $P_{out} \propto P_{in}^2$

Afin d'augmenter l'amplitude de balayage en fréquence de la carte, nous utilisons un doubleur de fréquence (FD 25C) placé à la sortie de la carte. Un filtre passe-bas de bande passante 21,4 MHz est placé à la sortie de la carte (figure 8.5) pour filtrer le bruit dû à la digitalisation du signal. Après le doubleur, on rajoute le même filtre pour éliminer les harmoniques d'ordres supérieurs.

Nous avons représenté figure 8.6 la puissance de sortie en fonction de la puissance d'entrée. La loi est quadratique.

L'ajustement par une droite de pente 2 donne :

$$P_{out}[\mathrm{dBm}] \simeq -17{,}5 + 2P_{in}[\mathrm{dBm}] \tag{G-1}$$

En utilisant la relation qui permet d'exprimer la puissance en dBm en fonction de la tension crête-crête :

$$P[\mathrm{dBm}] = 10\log\left(\frac{V^{cc}[\mathrm{V}]^2}{8 \times 50\ \Omega \times 1\ \mathrm{mW}}\right) \tag{G-2}$$

on obtient que :

$$V_{Out}^{cc}[V] \simeq 0{,}21 \times V_{In}^{cc}[V]^2 \tag{G-3}$$

Cette formule est utilisée dans le programme qui écrit le fichier de configuration de la carte. En particulier, pour effectuer une rampe d'intensité linéaire, il faut, à la sortie de la carte, une rampe d'intensité en fonction racine.

G.2 Mesure du délai des cartes compteurs

Lors de la réalisation des oscillations de Bloch en onde stationnaire, il est important de pouvoir mesurer le délai entre les deux impulsions Raman avec un grande précision. Pour tester la sortie de la carte, nous avons utilisé un compteur de fréquence (HP 53132A) pour mesurer le délai entre les deux impulsions.

Sur la figure 8.7, nous avons représenté la variance d'Allan d'un série de mesure de délai. Partant d'une valeur d'environ 20 ns, la variance descend jusqu'à 2 ns en moyennant sur 250 points. Nous ne savons cependant pas si ce bruit provient des cartes ou bien de l'instrument de mesure. Notons que 20 ns correspond, à cause de la chute gravitationelle, à une vitesse de environ $3 \times 10^{-5} v_r$. Ce bruit est pour l'instant négligeable devant les autres bruits. Nous n'effectuons donc pas de correction en temps réel sur les points. De plus, lorsque l'on réalise un spectre, on effectue un moyenne sur plusieurs points. Il faut alors prendre une valeur d'environ 2 ns, qui correspond à $3 \times 10^{-6} v_r$.

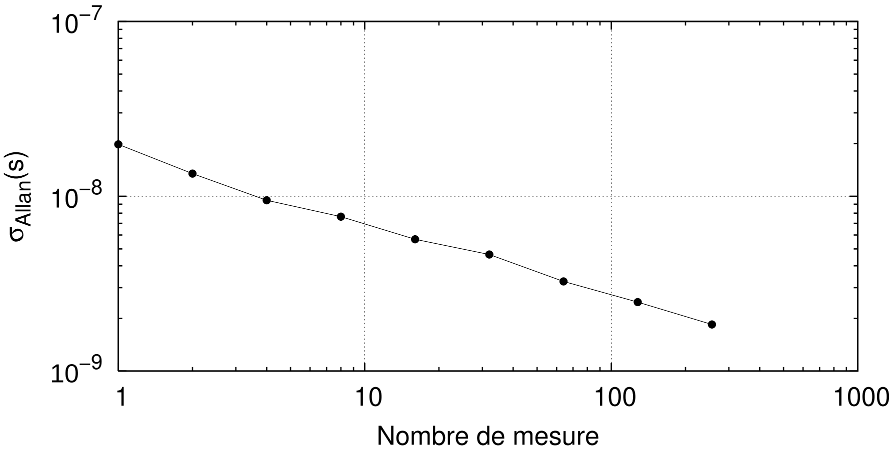


FIG. 8.7 – Variance d'Allan du délai entre les deux impulsions Raman.

Sur la figure 8.8 est représenté l'écart entre le délai demandé et le délai mesuré. Cet écart peut être ajusté par un droite affine. Le délai constant est sans doute dû à l'appareil de mesure (nous somme obligé d'utiliser un seuil de déclenchement différents pour la première impulsion et la seconde). Ce délai ne va pas intervenir dans le mesure, car nous effectuons systématiquement un mesure différentielle. La pente non-nulle de la droite traduit le fait que

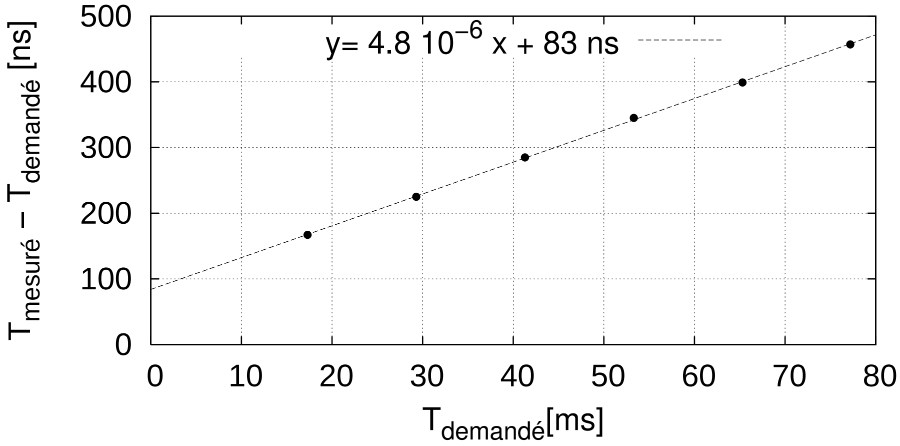
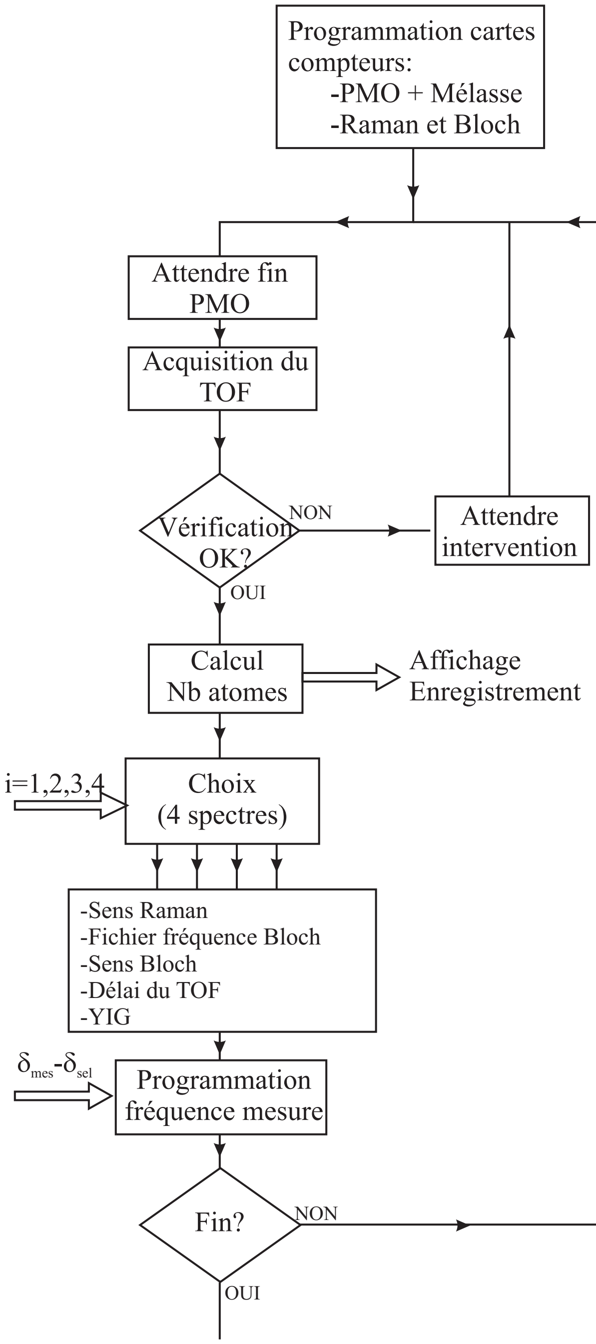


FIG. 8.8 – Mesure du délai entre les deux impulsions Raman, en fonction du délai demandé.

le quartz présent dans la carte compteur est décalé par rapport à notre référence de fréquence (relié au césium). Il faut donc corriger nos valeurs d'environ $4{,}8 \times 10^{-6}$.

G.3 Programme Labview



Nous avons représenté schématiquement le programme permettant de gérer la séquence temporelle. L'ensemble des délais de la séquence provient de cartes compteurs (*National Instrument*, PCI-6602). Ces cartes, une fois programmées, tournent toute seule, au sens où ce n'est plus le logiciel qui commande le déclenchement des sorties TTL : la séquence temporelle fonctionne de façon périodique, indépendamment du processeur de l'ordinateur. Dans une phase d'initialisation, le logiciel programme les cartes, afin de gérer la séquence de piégeage (piège magnéto-optique, suivi par une phase mélasse), mais aussi les délais des faisceaux Raman et Bloch de la séquence sélection–accélération–mesure.

Cependant, au cours de l'expérience, il faut que le logiciel intervienne pour effectuer l'acquisition du temps de vol (avec affichage et enregistrement des données sur le disque) mais aussi pour programmer les paramètres des synthétiseurs qui vont déterminer le point sur le spectre que l'on est en train de prendre. Une première boucle permet donc au logiciel de se synchroniser sur les cartes compteurs qui tournent automatiquement. Cette synchronisation à lieu juste au début de la phase mélasse. Le logiciel effectue l'enregistrement et l'analyse du temps de vol. On effectue alors une vérification du bon fonctionnement de l'expérience en vérifiant que le nombre d'atomes détectés est supérieur à un certain seuil (ce qui permet de vérifier à la fois le bon fonctionnement du piège - et donc les asservissements de toutes les diode-lasers du piège, mais aussi l'asservissement de la sonde et l'asservissement en phase des faisceaux Raman). On vérifie indépendamment l'asservissement des faisceaux Raman et Bloch sur la cavité Fabry-Perot en mesurant avec une photodiode l'intensité transmise par la cavité. Si un problème est détecté, le programme s'arrête et reprendra en se synchronisant sur le début de la phase mélasse.

Une fois le test effectué, on enregistre le temps de vol sur le disque dur, et on rajoute le point sur le spectre. Ensuite, suivant l'un des quatres spectres possibles, on effectue la reprogrammation des différents appareils, :

- la bascule qui détermine le sens des faisceaux Raman (section 5.3.1, page 131) ainsi que le sens de la rampe de fréquence utilisée pour compenser la chute des atomes (voir figure 2.17, page 41),
- le générateur arbitraire de fonction qui permet de générer la rampe de fréquence et d'intensité pour les faisceaux Bloch et le commutateur permettant de choisir le sens de l'accélération (voir figure 4.17, page 114),
- le délai pour la détection du temps de vol[4],
- la fréquence des synthétiseurs commandant la fréquence Raman pour la sélection et la mesure ainsi que la consigne que l'on donne à l'asservissement du YIG de la chaîne de fréquence Raman, afin que l'asservissement puisse tenir lors du saut de plusieurs MHz entre le sélection et la mesure (voir figure 2.13, page 37).

Une fois les appareils programmés, le programme revient au point où il attend la fin de la phase mélasse, jusqu'à ce que l'ensemble des spectres soient acquis.

[4]Le temps d'arrivée des atomes dépend de leur trajectoire et de leur vitesse finale. Le compteur qui génère ce délai est le seul qui est reprogrammé.

H Décomposition d'un faisceau gaussien en onde plane

Dans le calcul des effets systématiques, nous avons été amener à calculer précisément les effets qui apparaissent lorsque l'on utilise un faisceau Gaussien, à la place de l'onde plane idéale de notre modèle. Pour cela nous avons besoin de calculer le phase exacte du faisceau. Pour cela, nous allons considérer le faisceau comme une superposition d'onde planes.

On ne considère que des ondes planes de vecteurs d'onde $\vec{k} = (k_x,k_y,k_z)$, monochromatiques, c'est-à-dire que l'on a la relation suivante : $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (\omega/c)^2$.

On part d'une distribution gaussienne en amplitude de la forme :

$$e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{4}w_0^2}dk_xdk_y \tag{H-1}$$

où w_0 représente le waist du faisceaux.

Au point (0,0,0), toutes les ondes sont en phase. Si on fait la transformée de Fourier, on obtient une distribution en amplitude de la forme :

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \tag{H-2}$$

Dans cette approche, la distribution en ondes planes ne dépend pas de la position z. Ce qui fait que la largeur du faisceau change avec la position z, c'est que les différentes ondes planes ne sont plus en phase.

La formule générale donnant la distribution du champ électrique est la suivante :

$$E(x,y,z) = \int e^{i\vec{k}.\vec{r}}e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{4}w_0^2}dk_xdk_y \tag{H-3}$$

On fait alors l'approximation $k_x,k_y \ll k$ qui revient à dire que $w_0 \gg \lambda$. On a alors

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_z^2} = k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \tag{H-4}$$

D'où

$$E(x,y,z) = e^{ikz}\int e^{-i\frac{k_x^2+k_y^2}{2k}z}e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{4}w_0^2}e^{i(k_xx+k_yy)}dk_xdk_y \tag{H-5}$$

Dans cette équation, on voit donc apparaître un déphasage entre les différentes ondes planes qui dépend de la position z.

En utilisant le résultat général

$$\int e^{\frac{1}{2}a(x^2+y^2)+i(\alpha x+\beta y)}dxdy \propto \frac{1}{a}e^{-\frac{1}{2a^2}(\alpha^2+\beta^2)} \tag{H-6}$$

on obtient que

$$E(x,y,z) = e^{ikz}\frac{1}{\frac{w_0^2}{2} + \frac{iz}{k}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\frac{w_0^2}{2}+\frac{iz}{k}}} \tag{H-7}$$

Pour obtenir la phase du faisceau, il est important de mettre E sous la forme $Ae^{i\phi}$, avec A et ϕ réel :

$$\frac{1}{\frac{w_0^2}{2}+\frac{iz}{k}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{w_0^4}{4}+\left(\frac{z}{k}\right)^2}} e^{i\arctan\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)} \propto \frac{1}{w(z)} e^{-i\phi_G} \tag{H-8}$$

où $z_R = w_0^2 k/2$, $w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$, et $\phi_G = \arctan(z/z_R)$.

De même, on peut écrire que

$$-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\frac{w_0^2}{2}+\frac{iz}{k}} = -\frac{x^2+y^2}{w(z)^2} + i\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\frac{z}{z_R} \tag{H-9}$$

D'où la formule finale :

$$E(x,y,z) \propto \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}}}{w(z)} e^{i\left(kz-\phi_G+\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\frac{z}{z_R}\right)} \tag{H-10}$$

Ce qui nous intéresse, c'est la correction à k, c'est-à-dire la dérivée de la phase. On obtient que :

$$\frac{d\phi}{dz} = k - \frac{w_0^2}{z_R w(z)^2} + \frac{r^2}{z_R w(z)^2}\frac{1-(z/z_R)^2}{1+(z/z_R)^2} \tag{H-11}$$

Dans cette formule, figurent donc à la fois le déphasage de Gouy et la courbure des fronts d'ondes.

Bibliographie

[1] P.J. Mohr and B.N. Taylor, *Codata recommended values of the fundamental physical constants : 2002*, Rev. Mod. Phys. **77** (2005), 1. Cité p. 1, 2, 4, 7, 8, 124, 168

[2] P.J. Mohr and B.N. Taylor, *Codata recommended values of the fundamental physical constants : 1998*, Rev. Mod. Phys. **72** (2000), 351. Cité p. 1, 2

[3] R.S. Van Dyck, P.B. Schwinberg, and H.G. Dehmelt, *New high-precision comparison of electron and positron g factors*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987), 26. Cité p. 4

[4] M Nio and T Kinoshita, *Revised α^4 term of lepton g-2 form the Feynman diagrams containing an internal light-by-light scattering subdiagram*, Phys. Rev. Lett. **93** (2003). Cité p. 4

[5] W. Liu *et al.*, *High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 711. Cité p. 4

[6] C. Schwob, L. Jozefowski, B. de Beauvoir, L. Hilico, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, O. Acef, and A. Clairon, *Optical frequency measurement of the 2S-12D transitions in hydrogen and deuterium : Rydberg constant and lamb shift determinations*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 4960. Cité p. 6

[7] Th. Udem, A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz, and T.W. Hänsch, *Phase-coherent measurement of the hydrogen 1S-2S transition frequency with an optical frequency interval divider chain*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 2646. Cité p. 6

[8] H. Häffner, T. Beier, S. Djekic, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl1, J. Verdu, T. Valenzuele, , and G.Werth, *Double penning trap technique for precise g factor determinations in highly charged ions*, **22** (2003), 163. Cité p. 7

[9] M.P. Bradley, J.V. Porto, S. Rainville, J.K. Thompson, and D.E. Pritchard, *Penning trap measurements of the masses of ^{133}Cs, $^{87,85}Rb$, and ^{23}Na with uncertainties $\leq$l0.2 ppb*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 4510. Cité p. 7, 168

[10] A. Wicht, J.M. Hensley, E. Sarajlic, and S. Chu, *A preliminary measurement of the fine structure constant based on atom interferometry*, Physica Scripta **T102** (2002), 82. Cité p. 7, 177, 180

[11] E. Krüger, W. Nistler, and W. Weirauch, *Determination of the fine-structure constant by a precise measurement of h/m_n*, Metrologia **32** (1995), 117. Cité p. 7

[12] E. Krüger, W. Nistler, and W. Weirauch, *Re-evaluation of a precise measurement of h/m_n*, Metrologia **36** (1999), 147. Cité p. 7

[13] G. Cavagnero, H. Fujimoto, G. Mana, E. Massa, K. Nakayama, and G. Zosi, *Measurement repetitions of the Si(220) lattice spacing*, Metrologia **41** (2004), 56. Cité p. 7

[14] B. Taylor, Communication privée (2005). Cité p. 7

[15] D.S. Weiss, B.C. Young, and S. Chu, *Precision measurement of the photon recoil of an atom using atomic interferometry*, Phys. Rev. Lett. **70** (1992), 2706. Cité p. 7, 8

[16] D.S. Weiss, B.C. Young, and S. Chu, *Precision measurement of $\hbar/m_{\mathrm{Cs}}$ based on photon recoil using laser-cooled atoms and atomic interferometry*, Appl. Phys. B **59** (1994), 217–256. Cité p. 7

[17] B. Young, M. Kasevich, and S. Chu, *Atom interferometry*, p. 363, P.R Berman, Academic, New York, 1997. Cité p. 7

[18] Loel M. Hensley, Andreas Wicht, Brent C. Young, and Steven Chu, *Progress towards a measurement of $\hbar/M_{\mathrm{Cs}}$*, Atomic Physics **17**, 2001. Cité p. 7, 177

[19] A. Wicht, J.M. Hensley, E. Sarajlic, and S. Chu, *Proceedings of the 6th symposium on frequency standards and metrology*, pp. 193–212, World Scientific, Singapore, 2001. Cité p. 7

[20] J.L. Hall, C.J. Bordé, and K. Uehara, *Direct opical resolution of the recoil effect using saturated absorption spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976), 1339. Cité p. 8

[21] C.J. Bordé, *Atomic interferometry with internal state labelling*, Phys. Lett. A **140** (1989), 10. Cité p. 8

[22] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams*, Phys. Rev. A **55** (1997), 2989. Cité p. 9, 85, 86

[23] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 4508. Cité p. 9, 85, 90

[24] M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, *Atomic velocity selection using stimulated raman transitions*, Phys. Rev. Lett. (1991), 2297. Cité p. 9

[25] F. Minardi, G. Bianchini, P. C. Pastor, G. Giusfredi, F. S. Pavone, and M. Inguscio, *Measurement of the Helium $2^3P_0 - 2^3P_1$ Fine Structure Interval*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 1112–1115. Cité p. 11

[26] M. C. George, L. D. Lombardi, and E. A. Hessels, *Precision microwave measurement of the $2^3P_1-2^3P_0$ interval in atomic helium : a determination of the fine-structure constant*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), no. 17, 173002. Cité p. 11

[27] T. Beier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 011603. Cité p. 11

[28] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Acceleration of ultracold atoms : towards a measurement of h/M_{Rb}*, J. Opt. B. : Quantum Semiclassical **5** (2003), S178–S182. Cité p. 11, 110

[29] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Bloch oscillations of ultracold atoms : a tool for a metrological determination of h/m_{Rb}*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 253001. Cité p. 11, 128

[30] P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Noise sensitivity of an atomic velocity sensor. Theoretical and experimental treatment*, European Physical Journal D **33** (2005), 173. Cité p. 11

[31] Rémy Battesti, *Accélération d'atomes ultrafroids ; mesure de h/M*, Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, 2003. Cité p. 12, 23, 27, 62, 128

[32] P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *A promising method for the measurement of the local acceleration of gravity using Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical standing wave*, Europhysics Letters **71** (2005), 730. Cité p. 12

[33] Pierre Cladé, Estefania de Mirandes, Malo Cadoret, Saïda Guellati-Khélifa, Catherine Schwob, François Nez, Lucile Julien, and François Biraben, *A new determination of the fine structure constant based on Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical optical lattice*, soumis à Phys. Rev. Lett. Cité p. 12

[34] M. Guinet, C. Daussy, S. Briaudeau, A. Amy-Klein, Y. Hermier, Ch.J. Bordé, and C. Chardonnet, *Mesure directe de la constante de Boltzmann par une méthode de métrologie des fréquences*, Proceedings of OPTRO 2005. Cité p. 17

[35] F. Biraben, B. Cagnac, and G. Grynberg, *Experimental evidence of two-photon transition without Doppler broadening*, Phys. Rev. Lett. **32** (1974), 643–645. Cité p. 18

[36] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique, Tome 3, Mécanique quantique*, Edition MIR. Cité p. 21, 193, 195

[37] A. Clairon, P. Laurent, G. Santarelli, S. Ghezali, S.N. Lea, and M. Bahoura, *Recent results of the LPTF cesium fountain primary frequency standard*, IEEE Trans. Instrum. Meas. **44** (1995)), 128. Cité p. 29

[38] UDT Sensors, Inc, `www.udt.com`, *Photodiode charateristics and application.* Cité p. 50

[39] Hamamatsu, `www.hamamatsu.com`, *Photodiode technical information.* Cité p. 50

[40] B. Cagnac and J.P. Faroux, *Laser — Interaction lumières-atomes*, CNRS Editions, EDP Sciences, 2002. Cité p. 56

[41] F. Yver-Leduc, P. Cheinet, J. Fils, A. Clairon, N. Dimarq, D. Holleville, P. Bouyer, and A. Landragin, *Reaching the quantum noise limit in a high-sensitivity cold-atom inertial sensor*, J. Opt. B. : Quantum Semiclassical **5** (2003), S136–S142. Cité p. 65, 67

[42] A. Peters, K.Y. Chung, and S. Chu, Metrologia **38** (2001), 25. Cité p. 67

[43] Maxime Ben Dahan, *Transport et relaxation d'atomes de césium : oscillations de Bloch et résonance de diffusion*, Thèse de doctorat, 1997. Cité p. 85, 99, 101

[44] F. Bloch, Z. Phys **52** (1929), 555. Cité p. 89

[45] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Physique du solide*, EDP Science. Cité p. 89, 199

[46] J. H. Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice* , Journal of Physics B Atomic Molecular Physics **35** (2002), 3095–3110. Cité p. 90

[47] G. H. Wannier, Physical Review **52** (1937), 191. Cité p. 92

[48] D. M. Greenberger, *The neutron interferometer as a device for illustrating the strange behavior of quantum systems*, Reviews of Modern Physics **55** (1983), 875–905. Cité p. 97

[49] C. Cohen Tannoudji, *Cours au collège de france*, (1992,1993). Cité p. 97

[50] C. Zener, *Non-adiabatic crossing of energy levels*, Proc. Soc. Lond. A **137** (1932), 696. Cité p. 101

[51] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, ArXiv Physics e-prints (1999). Cité p. 108

[52] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio, *Atom interferometry with trapped Fermi gases*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 230402. Cité p. 123

[53] I. Carusotto, L. Pitaevskii, S. Stringari, G. Modugno, and M. Inguscio, *Sensitive measurement of forces at the micron scale using Bloch oscillations of ultracold atoms*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), no. 9, 093202–4. Cité p. 123

[54] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen, *Observation of atomic Wannier-Stark ladders in an accelerating optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 4512–4515. Cité p. 124

[55] B. Taylor, *Determining the Avogadro constant from electrical measurements*, Metrologia **31** (1994), 181. Cité p. 124

[56] D. Touahri, O. Acef, A. Clairon, J.-J. Zondy, R. Felder, L. Hilico, B. de Beauvoir, F. Biraben, and F. Nez, *Frequency measurement of the* $5S_{1/2}(F=3) - 5D_{5/2}(F=5)$ *two-photon transition in rubidium*, Optics Communications **133** (1997), 471–478. Cité p. 147

[57] H. Kogelnik and T. Li, *Laser beams and resonators*, Applied Optics. Cité p. 150

[58] M. Abraham, Rc. Circ. Mat. Palermo **28** (1909). Cité p. 161

[59] M. Abraham, Rc. Circ. Mat. Palermo **30** (1910). Cité p. 161

[60] H. Minkowski, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1908). Cité p. 161

[61] H. Minkowski, Math. Annalen **68** (1910). Cité p. 161

[62] R. Peierls, *Momentum of light and light pressure isn a dispersive medium*, Interaction of radiation with matter, a volume in honor of A. Gozzini (Scuola Normale Superiore, Pisa). Cité p. 161

[63] J. P. Gordon, *Radiation forces and momenta in dielectric media*, Phys. Rev. A **8** (1973). Cité p. 161

[64] G. K. Campbell, A. E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E. W. Streed, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, *Photon recoil momentum in dispersive media*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 170403. Cité p. 161, 164, 173

[65] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D.E. Pritchard, *Contrast interferometry using Bose-Einstein condensates to measure h/m and α*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 140401. Cité p. 172

Oscillations de Bloch d'atomes ultrafroids et mesure de la constante de structure fine

Résumé

Il est possible, à partir de la mesure de la vitesse de recul d'un atome qui absorbe un photon, de déterminer le rapport h/m entre la constante de Planck et la masse de l'atome étudié et d'en déduire une valeur de la constante de structure fine α. Pour effectuer cette mesure, nous utilisons la méthode des oscillations de Bloch qui nous permet de transférer un grand nombre de reculs aux atomes. Un senseur intertiel, basé sur des transitions Raman sélectives en vitesse, nous permet alors de mesurer la quantité de mouvement transférée aux atomes. Une mesure présentant une incertitude statistique de 4,4 ppb, ainsi qu'une étude des différents effets systématiques (5 ppb), nous a permis d'obtenir une determination de α avec une incertitude de 6,7 ppb. Cette incertitude est comparable à l'incertitude des meilleures déterminations de alpha basées sur l'interférométrie atomique.

Mots-clés

atomes froids, métrologie, constante de structure fine, oscillations de Bloch, transitions Raman, senseur inertiel.

Bloch oscillation of ultracold atoms and measurement of the fine structure constant.

Abstract

From a measurement of the recoil velocity of an atom absorbing a photon, it is possible to deduce a determination of the ratio h/m between the Planck constant and the mass of the atoms and then to deduce a value of the fine structure constant alpha. To do this measurement, we use the technic of Bloch oscillations, which allows us to transfer a large number of recoils to the atoms. A velocity sensor, based on velocity selective Raman transition, allows us to measure the momentum transferred to the atoms. A measurement with a statistical uncertainty of 4.4 ppb, in conjunction with a careful study of systematic effects (5 ppb), lead us to a determination of alpha with an uncertainty of 6.7 ppb. This uncertainty is similar to the uncertainty of the best determinations of alpha based on atom interferometry.

Key words

cold atoms, metrology, fine structure constant, Bloch oscillations, Raman transitions, inertial sensor.