



HAL
open science

Focalisation d'ultrasons par retournement temporel et filtre inverse, application à l'échographie transcrânienne

Francois Vignon

► **To cite this version:**

Francois Vignon. Focalisation d'ultrasons par retournement temporel et filtre inverse, application à l'échographie transcrânienne. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT: . tel-00010706

HAL Id: tel-00010706

<https://theses.hal.science/tel-00010706>

Submitted on 20 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE de DOCTORAT de L'UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de Physique

Septembre 2005

N° attribué à la bibliothèque :

Spécialité :

Interfaces Physique- Biologie

Présentée par

François Vignon

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7.

Focalisation d'ultrasons par filtre inverse et retournement temporel, application à l'échographie transcrânienne

Sous la direction de Mathias Fink

Soutenue le 30 septembre 2005 devant le jury composé de :

Claude Boccara

Pascal Laugier

Frédéric Patat

Yves Charon

Jean-François Aubry

Mathias Fink

Rapporteur

Rapporteur

Merci !

Je dois d'abord le fait d'être arrivé au bout de cette thèse sain et sauf à Nurt Astrid : merci !!!!!

Je remercie également et surtout Jean-François Aubry, sans qui non plus je ne serais jamais arrivé au bout et je n'aurais sans doute même pas commencé. Il a su trouver les mots qu'il fallait au moment qu'il fallait pour me motiver, et ses qualités humaines ont été un moteur constant pour ma recherche au cours de ces trois ans. Avec patience il a su me montrer que la vie se vit au présent et m'a ainsi libéré de pas mal de questions existentielles sur lesquelles j'avais tendance à trébucher.

Mathias Fink et son enthousiasme légendaire ont également été décisifs. Il a su m'accompagner et m'encourager parout où mon entêtement me disait d'aller, toujours en me montrant sa confiance.

Au laboratoire, j'ai également pu compter sur la disponibilité et les qualités scientifiques des chercheurs, thésards et stagiaires pour faire avancer petit à petit mon schmilblick : Mickaël Tanter, Julien de Rosny, Daniel Royer, Dominique Clorennec, Didier Cassereau, François van der Biest ont joué un rôle particulier mais je crois que tous à un moment donné ont mis leur petit grain de sel dans l'élaboration de cette thèse. Les stagiaires notamment m'ont à chaque fois redonné un petit coup d'accélérateur bienvenu. De plus c'est parfois directement leur travail qui est retranscrit dans ce manuscrit de thèse ! Merci donc à Alexandre Saez, Dominique Doiteau, Fabrice Marquet, Pierre Gouedard, et surtout Abderrahim Margoum qui m'a grandement déchargé de mon travail expérimental lors de l'étape critique de la rédaction de la thèse.

Je voudrais aussi remercier ici toute l'équipe de ces gens sans lesquels un travail de thèse ne pourrait pas s'effectuer dans de bonnes conditions : au laboratoire il s'agit d'Arnaude et de son efficacité bouleversante, Patricia et sa disponibilité ahurissante, Pierre et son amitié rassurante, Michel et sa créativité bienveillante.

En dehors du laboratoire, j'ai pu utiliser les neurones d'autres chercheurs bienveillants qui ont bien voulu m'écouter et essayer de me comprendre : Oliver Dorn, Horacio Pastawski, François Bolley, Eric Larose et bien d'autres....

Et bien sûr... au laboratoire et en-dehors j'ai pu compter en permanence sur le soutien des amis et de la famille, merci à Jean Gab, Victor, Dominique, Guillemette, Samir, Julien A. pour avoir partagé ce « bureau des thésards » dans la bonne humeur, François pour les pauses café au Jardin des Plantes, Jérémy, Delphine, Xavier et Nicolas, Stéphane, Jean-Luc et sa bonne humeur contagieuse, les Arnaud, Christophe, Gabriel, Claire, Christian, Ralph, Valentin, Philippe, Didier, j'en passe et des meilleurs.... Merci également à l'équipe de foot qui m'a aidé à respirer et grâce à qui je me levais plus tôt le dimanche que n'importe quel autre jour de la semaine. Merci à la chorale de la cité U puis Popayan grâce auxquelles les expériences se passaient parfois en musique. Merci aux équipes pédagogiques avec lesquelles j'ai eu l'honneur de travailler à Lariboisière puis à Jussieu, surtout à Sébastien Charnoz avec qui on réinventait la physique au lourd prix de dangereux dépassements de forfaits sur nos portables mais toujours dans le même esprit et sur la même longueur d'onde, et à Sara Ducci qui m'a patiemment enseigné l'optique pendant les longs après-midi de TPs à Jussieu.

Enfin, merci à ma famille : Margot, Marie, Blaise, et surtout à mes parents, dont le soutien inconditionnel et les conseils avisés m'ont permis de suivre le long chemin qui m'a amené jusqu'ici.

Plan

Introduction	5
1. De l'échographie du fœtus à l'échographie du cerveau	9
1.1. Le principe de l'imagerie échographique	9
1.2. La focalisation et la qualité de l'image	11
1.2.1. Caractéristiques de la barrette échographique et caractéristiques de la tache focale	11
1.2.2. La résolution de l'image échographique	12
1.2.3. Le contraste de l'image échographique	16
1.3. La focalisation en réception et la construction de l'image	17
1.3.1. Formation d'une ligne de l'image	17
1.3.2. Formation de l'image ligne par ligne	19
1.4. Focalisation à travers des milieux hétérogènes	20
1.4.1. Hétérogénéités de vitesses	21
1.4.2. Hétérogénéités d'atténuation	22
1.5. L'os du crâne : un obstacle à la focalisation	23
1.5.1. Structure de l'os du crâne	23
1.5.2. Effet de l'os du crâne sur une onde acoustique	24
1.6. Conclusions	29
2. Focalisation et imagerie adaptative	32
2.1. Le formalisme matriciel	32
2.1.1. Propagation d'un front d'ondes	32
2.1.2. Formation de l'image échographique standard	34
2.2. Le retournement temporel	38
2.2.1. Le principe du retournement temporel	38
2.2.2. Description matricielle	39
2.2.3. L'opérateur de retournement temporel	40
2.3. Le filtre inverse	41
2.3.1. Principe du filtre inverse	41
2.3.2. L'inversion du propagateur	42
2.3.3. L'opérateur $H(\omega)\hat{H}(\omega)^{-1}$	45
2.4. Comparaison retournement temporel - filtre inverse	46

2.5. Imagerie par retournement temporel et filtre inverse	47
2.5.1. Imagerie par retournement temporel	47
2.5.2. Imagerie par filtre inverse	48
2.5.3 Résultats	49
2.6. Conclusions	52
Appendice 2.A.....	55
3. Vers l'imagerie transcrânienne adaptative non intrusive	57
3.1. Dispositif expérimental et principe général pour rendre la focalisation non intrusive.....	57
3.2. Imagerie non intrusive par retournement temporel et conjugaison de phase	58
3.2.1. Focalisation par retournement temporel non intrusif.....	58
3.2.2. Focalisation par conjugaison de phase non intrusive.....	64
3.2.3. Imagerie par conjugaison de phase non intrusive	67
3.2.4. Conclusion	71
3.3. Imagerie non intrusive par filtre inverse	72
3.3.1. Le principe du filtre inverse non intrusif	72
3.3.2. Estimation du propagateur $H_2(\omega)$	74
3.3.3. Focalisation par filtre inverse non intrusif.....	81
3.3.4. Imagerie par filtre inverse non intrusif	85
3.3.5. Conclusion	88
3.4. Conclusion générale	89
Appendice 3.A. Améliorer le rapport Signal / Bruit	92
Appendice 3.B. Différentes expériences de focalisation par filtre inverse non intrusif	99
4. Les équations de Stokes : un lien entre retournement temporel et filtre inverse.	103
4.1. Le dispositif expérimental	104
4.2. Le retournement temporel.....	105
4.2.1. Le miroir à retournement temporel	105
4.2.2. La cavité à retournement temporel	107
4.3. Le filtre inverse	109
4.4. Comment le filtre inverse reproduit-il la cavité à retournement temporel en n'utilisant qu'une seule barrette ?	112

4.4.1. Démonstration des équations de Stokes par une expérience de retournement temporel	112
4.4.2. Les relations de Stokes dans un formalisme matriciel.....	113
4.4.3. Comment le filtre inverse reproduit-il la cavité à retournement temporel en n'utilisant qu'une seule barrette ?	115
4.5. Inversion itérative.....	116
4.5.1. Simple itération	116
4.5.2. Double itération	118
4.5.3. Inversion itérative d'un propagateur à travers le crâne, application à la focalisation spatiale.....	121
4.6. Conclusions	124
Appendice 4.A.....	126
Appendice 4.B.....	127
Appendice 4.C.....	129
5. Vers une focalisation équivalente au filtre inverse avec un protocole intrusif comme celui du retournement temporel.	132
5.1. Focalisation adaptative à travers un milieu aberrateur, présentation.	133
5.1.1. Présentation de l'expérience.....	133
5.1.2. Présentation du formalisme	133
5.1.3. Le retournement temporel	135
5.1.4. Le filtre inverse	136
5.1.5. Comment passer du retournement temporel au filtre inverse sans augmenter l'intrusivité du dispositif ?	137
5.1.6. La mesure non intrusive du propagateur ${}^tHH^*$ via la mesure de K	137
5.1.7. Utilisation du propagateur de réflexion K pour le filtre inverse.....	139
5.2. Simulation.....	140
5.2.1. Validité de l'égalité $K = {}^tHH^*$	140
5.2.2. Utilisation de K pour le filtre inverse	143
5.3. Conclusions et perspectives.	145
6. Retournement temporel à l'angle de Rayleigh à l'interface liquide-solide.....	147
6.1. Introduction	148
6.2. Propagation et retournement temporel d'ondes planes en présence d'une interface liquide-solide, l'effet de l'angle d'incidence.....	149

6.2.1. Réflexion d'ondes planes à l'interface liquide-solide	149
6.2.2. Retournement temporel à l'angle de Rayleigh.....	153
6.3. Focalisation latérale par lois cylindriques ou retournement temporel à l'angle critique	157
6.3.1. Simulation	158
6.3.2. Expérience	161
6.4. Focalisation spatiale au-delà de l'angle critique transverse : du miroir à retournement temporel à la cavité à retournement temporel.....	162
6.5. Conclusions	165
Appendice 6.A.....	168
Conclusions générales.....	169

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le projet interdisciplinaire UMEDS (Ultrasonographic Monitoring and Early Detection of Stroke [www1]), financé par l'Union Européenne de 2002 à 2005. Le but général du projet est de mettre en commun le savoir-faire de différentes équipes pour faire avancer la recherche sur la prévention, le diagnostic et le suivi des accidents vasculaires cérébraux (AVC, *stroke* en anglais) par des techniques « tout-ultrasons ».

- Les Accidents Vasculaires Cérébraux

Il existe deux principaux types très différents d'AVC : les accidents de type ischémique et de type hémorragique (figure 1). Une ischémie se présente lorsqu'une artère ou un vaisseau du cerveau se bouche : une partie du cerveau est donc mal irriguée. Une hémorragie intra-cérébrale se présente lorsqu'une petite artère ou un vaisseau présentant une lésion laisse s'épancher le sang à l'intérieur du cerveau. Ischémie et hémorragie peuvent entraîner rapidement des dommages irréversibles dans le cerveau susceptibles d'entraîner la mort. En France, 130 000 personnes sont victimes d'AVC chaque année dont près de 80% sont d'origine ischémique. Dans un 20% des cas l'AVC est rapidement suivi d'un décès, et les trois quarts des survivants en porteront des séquelles [www2, www3].

Les traitements des AVC ischémiques et hémorragiques sont complètement opposés : après un AVC ischémique le but est de rétablir le flux sanguin ce qui implique entre autres l'usage d'antithrombotiques et de fluidifiants sanguins ; au contraire après un AVC hémorragique le but est de freiner l'hémorragie. Il est donc nécessaire de pouvoir distinguer rapidement, dès l'accueil d'un patient présentant des symptômes d'AVC aux urgences, si l'AVC est de type ischémique ou hémorragique. La technique couramment utilisée aujourd'hui est le scan du cerveau par rayons X (figure 1). Il serait intéressant de pouvoir remplacer aux urgences le scanner X par l'échographie, plus flexible et moins coûteuse.

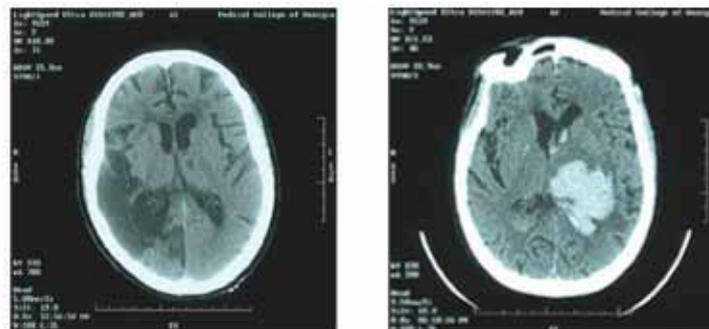


Figure 1. Scans X de : à gauche un AVC ischémique, à droite un AVC hémorragique. L'ischémie apparaît plus sombre, l'hémorragie apparaît plus brillante. Dans certains cas d'ischémie on peut ne rien voir du tout mais une hémorragie est toujours associée à une augmentation du signal.

On aimerait également pouvoir accéder - dans un but de prévention chez des sujets à risque d'AVC et pour le suivi de sujets ayant été victimes d'AVC - à l'évolution des flux sanguins dans le cerveau. Cela pourrait se faire par échographie Doppler transcrânienne et / ou par échographie paramétrique [Deverson00, Seidel00]. Là encore, la flexibilité des échographes permettrait un suivi régulier et généralisé. Le problème est que l'échographie du cerveau chez l'adulte est compliquée par la présence du crâne et reste encore très limitée.

- L'échographie

L'échographie est une technique d'imagerie médicale économique et facile à mettre en œuvre. Son principe est basé sur la réflexion (l'écho) d'ultrasons par des structures biologiques.

Une sonde (barrette) échographique focalise une onde en un point du milieu à imager, cette onde est réfléchiée vers la sonde par les structures biologiques situées en ce point. L'analyse du temps d'arrivée de l'onde réfléchiée donne accès à la profondeur à laquelle se trouve le point sondé, et l'amplitude de l'onde réfléchiée à la nature physique du point sondé. Puis la barrette focalise en un point voisin pour faire l'image du point voisin, etc. L'image échographique se fait ainsi ligne par ligne, et la taille de la tache focale détermine la taille du pixel de l'image échographique finale. Plus petites seront les dimensions spatio-temporelles de la tache focale, plus petit sera le « pixel » échographique, meilleure sera la résolution de l'image.

Les applications de l'échographie se limitent encore principalement à l'imagerie des tissus mous de l'abdomen (reins, foie, fœtus...) car l'abdomen ne perturbe pas significativement la focalisation des ondes ultrasonores. En revanche, l'échographie du cerveau reste un défi : les importantes hétérogénéités de vitesse du son et la forte absorption des ultrasons dans l'os du crâne empêchent la focalisation ; le pixel n'est plus bien défini, et les images échographiques transcrâniennes sont de très mauvaise qualité. En fait, l'imagerie échographique structurale du cerveau n'est vraiment utilisée que pour le nourrisson, en faisant passer les ultrasons par l'ouverture de la fontanelle. Chez l'adulte, l'échographie du cerveau se fait à travers la tempe, relative « fenêtre échographique », est n'est utilisée que dans un but très qualitatif de visualisation des écoulements sanguins (Doppler transcrânien) [Deverson00].

- Vers l'échographie adaptative du cerveau

Depuis les années 70-80 , plusieurs équipes s'intéressent aux propriétés acoustiques de l'os du crâne [Fry78], et à la manière de focaliser des ultrasons de manière adaptative à travers le crâne [Philips75]. L'idée générale est d'émettre depuis la sonde échographique un front d'ondes déformé, qui après déformation par traversée de la boîte crânienne, reforme un front d'ondes focalisant. La

question est alors « quelles sont les déformations à appliquer au front d'ondes émis ? ». Une question aussi simplement posée donne lieu à de multiples approches différentes.

Depuis 1992, le Laboratoire Ondes et Acoustique s'est spécialisé dans les méthodes de focalisation adaptative à travers des milieux aberrateurs. La technique du Retournement Temporel notamment permet de déposer un maximum de pression en un point de l'espace [Fink92]. Mais c'est la technique du Filtre Inverse, développée d'abord par Mickaël Tanter et Jean-François Aubry pour son application à la focalisation adaptative transcrânienne [Tanter01, Aubry01], qui présente le plus grand potentiel pour l'imagerie : le Filtre Inverse assure que l'énergie sera déposée au point focal désiré, mais minimise également l'énergie déposée en-dehors du point focal : les images échographiques transcrâniennes réalisées avec le Filtre Inverse comme technique de focalisation adaptative présentent un contraste optimal.

Cependant, le Filtre Inverse comme le Retournement Temporel présentent un inconvénient majeur : pour focaliser en un point de l'espace, il est nécessaire de disposer de sources ou capteurs ultrasonores en ce point, ce qui interdit leur utilisation en l'état dans un but d'imagerie médicale.

Le but de cette thèse est de montrer comment rendre la focalisation adaptative par Retournement Temporel et Filtre Inverse non intrusive. Pour ce faire, on profite de la géométrie particulière du problème avec un milieu aberrateur (le crâne) très localisé, proche de la barrette échographique. Le principe est d'effectuer d'abord une sorte de tomographie acoustique de l'os du crâne pour en déduire ses propriétés acoustiques, puis utiliser ces propriétés acoustiques pour « effacer » une partie de la paroi crânienne et insérer *virtuellement* des transducteurs dans le cerveau dans la zone dont on désire faire l'image.

- *Présentation de la thèse*

Le présent manuscrit est divisé en six chapitres. Le chapitre 1 est un chapitre introductif destiné à présenter le principe de l'échographie et de la formation d'image à partir de la focalisation d'ultrasons ; on insiste également sur l'effet du crâne sur la propagation et la focalisation d'un front d'ondes ultrasonore. Dans le chapitre 2 sont présentées les techniques de Retournement Temporel et de Filtre Inverse pour la focalisation et l'imagerie adaptative *intrusive*. Le chapitre 3, qui constitue le cœur de la thèse, présente les adaptations qui ont été réalisées pour rendre le Retournement Temporel et le Filtre Inverse non intrusifs. Les chapitres suivants ne concernent pas directement d'imagerie du cerveau, mais on été inspirés par la problématique de focalisation adaptative non intrusive : en cherchant à savoir comment corriger les signaux à transmettre à travers une structure aberratrice à partir des signaux réfléchis, on a mis au jour un lien intéressant entre le Filtre Inverse et la Cavité à Retournement Temporel ; cela fait l'objet du chapitre 4. Dans le chapitre 5, on présente comment obtenir une focalisation de qualité équivalente à celle du filtre inverse (maximisation du contraste) en

réduisant l'intrusivité de la technique. Enfin, il est question dans le chapitre 6 de focalisation par retournement temporel à une interface liquide-solide.

Références :

- [Aubry01, Tanter01] “Optimal focusing by spatio temporal inverse filter, parts I and II”, JF. Aubry, M. Tanter, J. Gerber, JL. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 110(1), 48-68 (2001).
- [Deverson00] “The effects of temporal bone on transcranial doppler ultrasound beam shape”, S. Deverson, D. Evans, C. Bouch, *Ultrasound in Med. & Biol.* 26(2), 239-244 (2000).
- [Fry78] “Acoustical properties of the human skull”, F. Fry, J. Barger, *J. Acoust. Soc. Am.* 63, 1576-1590 (1978).
- [Fink92] “Time reversal of ultrasonic fields – Part I: Basic principles”, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 555-566 (1992).
- [Philips75] “Sampled aperture techniques applied to B-mode echoencephalography”, D. Philips, S. Smith, O. von Ramm, F. Thurstone, *Acoustical Holography* 6, 106-119 (1975).
- [Seidel00] “Visualization of brain perfusion with harmonic gray scale and power Doppler technology”, G. Seidel, C. Algermissen, A. Christoph, T. Katzer, M. Kaps, *Stroke* 31, 1728-1734 (2000).
- [www1] www.umeds.org
- [www2] www.caducee.net/DossierSpecialises/cardiologie/accidents-vasculaires-cerebraux.asp#introduction
- [www3] www.doctissimo.fr/html/dossiers/avc/sa_4720_avc_chiffres_02.htm

1. De l'échographie du fœtus à l'échographie du cerveau

Dans ce chapitre introductif, nous allons présenter brièvement la technique de l'échographie. Nous insisterons sur le fait que l'échographie (du moins pour la plupart des modes standard d'imagerie structurale des tissus) nécessite de focaliser des ondes ultrasonores. Puis nous discuterons de l'effet des milieux traversés par les ultrasons sur la qualité de la focalisation. Nous décrirons spécifiquement l'effet du crâne, obstacle majeur à la propagation d'ultrasons donc à l'échographie du cerveau chez l'adulte.

1.1. Le principe de l'imagerie échographique

L'échographie est une technique d'imagerie médicale pratique et économique. Son application la plus répandue concerne l'examen du fœtus durant la grossesse (figure1).

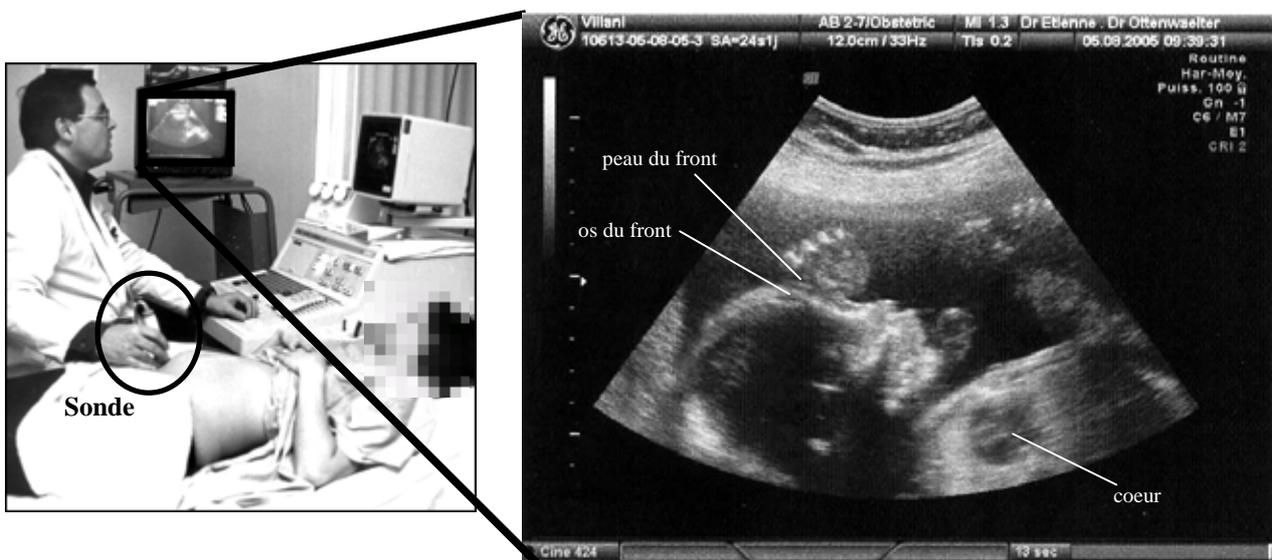


Figure 1. Echographie d'un fœtus. A gauche l'examen, à droite l'image échographique

Le principe de l'imagerie échographique est le suivant : une sonde (barrette échographique) envoie une onde ultrasonore à travers le milieu à imager, l'abdomen pour faire l'échographie d'un fœtus. Cette onde est réfléchiée quand elle rencontre une interface entre deux milieux de caractéristiques physiques (masse volumique et compressibilité¹) différentes, par exemple l'interface entre le liquide amniotique et le nez du bébé. Un écho est donc renvoyé par le nez du bébé et recapté

¹ Un milieu se caractérise, pour ce qui est de la propagation d'ultrasons, par son impédance acoustique $Z = (\rho / \chi)^{1/2}$, où ρ est la masse volumique du milieu et χ sa compressibilité. Une onde acoustique arrivant à l'interface entre deux milieux d'impédances très différentes donnera lieu à un fort écho, au contraire si la différence d'impédances est faible l'écho sera faible.

par la sonde. On mesure le temps d'aller-retour de l'onde entre la sonde et le nez du bébé et on en déduit, via la connaissance de la vitesse de propagation du son dans le milieu traversé, la distance à laquelle se trouve le nez du bébé. On recommence en envoyant cette fois l'onde vers la bouche du bébé, puis vers son menton, son cou, ... mesurant à chaque fois la distance entre la partie du corps du bébé considérée et la sonde. Cette carte des distances est représentée sur l'écran de l'échographe.

Sur l'image finale, on représente en noir et blanc l'intensité des échos reçus en provenance des différentes parties du bébé, le blanc correspondant à un fort écho, le noir à l'absence d'écho. Par exemple, le cœur sur la figure 1 apparaît noir car étant creux, aucun écho n'en revient. On vérifie également sur l'échographie de la figure 1 qu'il y a un écho à chaque fois qu'une interface entre deux milieux est rencontrée : sur le visage du bébé, on voit un écho à l'interface liquide amniotique-peau, un autre à l'interface peau-os ; sur l'arrière du crâne on observe l'écho dû à l'interface cerveau-os... L'écho produit par une interface entre deux milieux est d'autant plus fort que les milieux sont différents : l'écho le plus fort est entre le crâne (peu compressible et dense donc de forte impédance acoustique), et les milieux mous environnants (plus compressibles et moins denses, donc de plus faible impédance acoustique).

L'image échographique est construite point par point : on focalise d'abord l'onde sur le front, on analyse ce qui revient du front, puis sur le nez, on analyse, (figure 2)... La résolution de l'image finale dépend donc de la qualité de la focalisation : plus la focalisation est fine, plus on sera capable d'observer des détails. L'optimisation de la focalisation des ultrasons sera un leitmotiv de ce manuscrit.

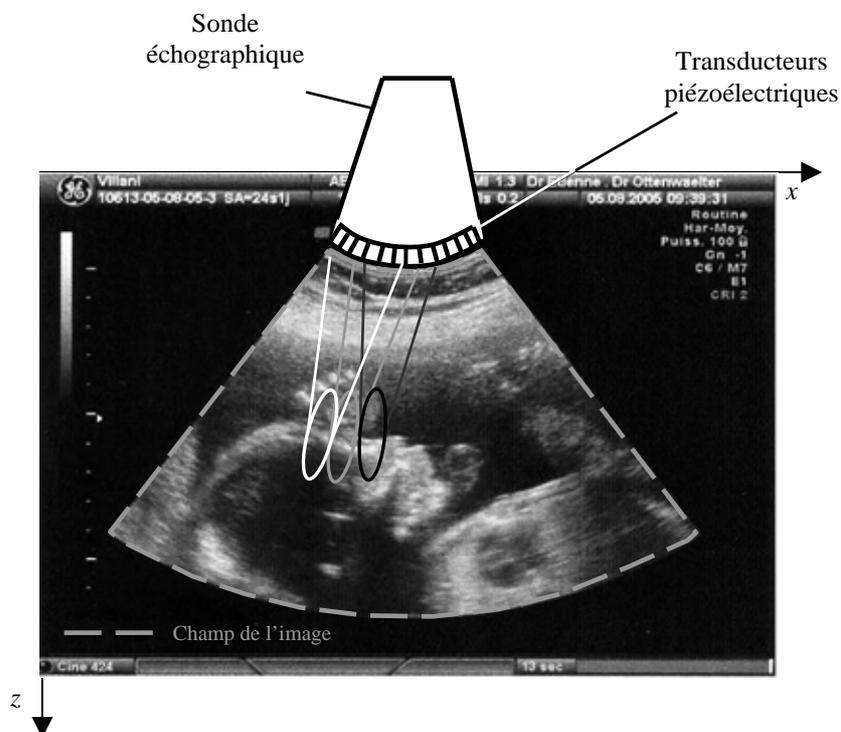


Figure 2. Principe de formation de l'image : la sonde échographique focalise des ultrasons en les différents points de la zone à imager (ici on a représenté 3 taches focales, du front au nez du foetus).

1.2. La focalisation et la qualité de l'image

1.2.1. Caractéristiques de la barrette échographique et caractéristiques de la tache focale

Les barrettes échographiques utilisées au laboratoire sont constituées de 128 transducteurs piézoélectriques *alignés*² capables de générer et de capter des ultrasons (figure 3).

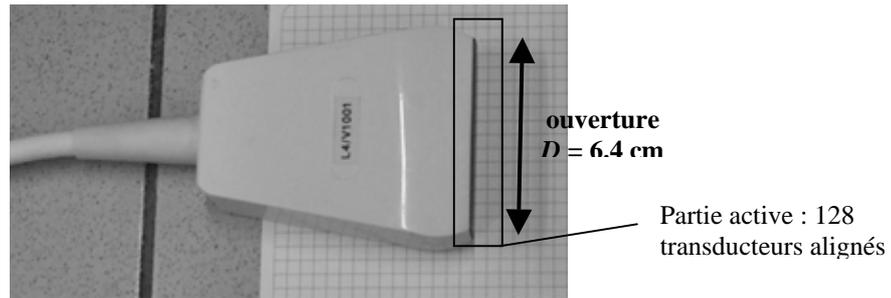


Figure 3. Barrette échographique linéaire utilisée au laboratoire. Elle est constituée de 128 transducteurs piézoélectriques de 1 cm de haut et 0.5 mm de large chacun.

La focalisation d'ondes acoustiques en un point de l'espace s'obtient en appliquant une loi de retards appropriée aux transducteurs de la barrette : le principe est de faire émettre d'abord les transducteurs les plus éloignés du point focal désiré de façon à ce que les signaux provenant de tous les transducteurs arrivent en phase au niveau du point focal, leurs contributions s'additionnent alors constructivement et on obtient un maximum d'intensité acoustique en ce point (figure 4). On parle de *focalisation par lois cylindriques*, car l'onde focalisante est une onde cylindrique convergente.

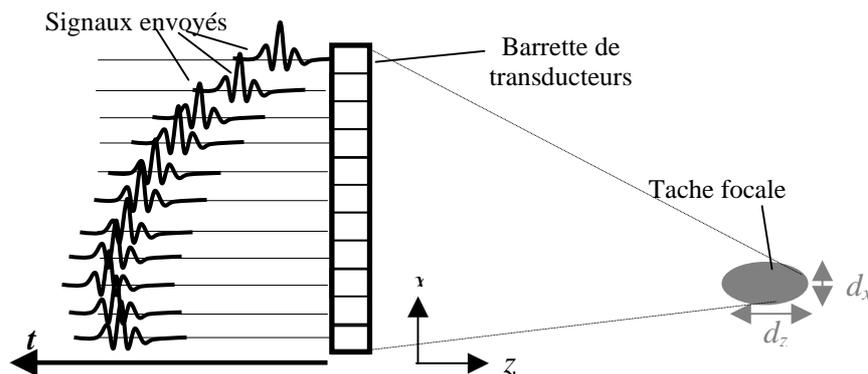


Figure 4. Principe de la focalisation par lois cylindriques : on fait tirer plus tard les transducteurs les plus proches du point focal désiré, et plus tôt les transducteurs les plus éloignés, de façon à ce que les signaux arrivent en phase au point focal.

² Les barrettes échographiques présentées plus haut, destinées à l'obstétrique, sont courbées, ce qui permet d'augmenter le champ de l'image (au détriment de la résolution). Cela est à l'origine de la forme caractéristique « en éventail » de l'image. Avec nos barrettes linéaires, nous obtiendrons des images rectangulaires.

Les dimensions de la tache focale (la zone sur laquelle se concentre l'énergie acoustique) sont déterminées par les lois de la diffraction. Soit λ la longueur d'onde des ultrasons utilisés, D l'ouverture de la barrette et F la distance barrette-tache focale, les dimensions de la tache focale seront :

$$\text{Dimension latérale (selon l'axe des } x \text{)} : d_x = \frac{\lambda F}{D} \quad (1)$$

$$\text{Dimension axiale (selon l'axe des } z \text{)} : d_z = 7\lambda \left(\frac{F}{D} \right)^2 \quad (2)$$

En général, le rapport F/D est proche de 1, la dimension axiale de la tache focale est donc plus grande que la dimension latérale et la tache focale a une forme de cigare (figure 4).

1.2.2. La résolution de l'image échographique

a) Résolution latérale

La dimension latérale d_x détermine la *résolution latérale* Δx de l'image échographique : plus fine sera la tache focale, plus petite la dimension du « pixel » échographique, meilleure la résolution. D'après (1), pour avoir la résolution latérale la plus fine possible (d_x petit), il faut travailler avec une barrette la plus large possible (D grand) et avec la longueur d'onde λ la plus petite possible, donc avec une fréquence élevée³. La résolution est meilleure également lorsque le milieu à imager est plus proche de la barrette (F petit).

b) Résolution axiale

La *résolution axiale* (en z) ne dépend en fait pas de la dimension axiale de la tache focale. En effet, on peut discriminer l'écho qui nous revient de l'avant de la tache focale de ce qui nous vient de l'arrière en utilisant le fait que ce qui nous vient de l'avant arrive plus tôt : en utilisant des fenêtres temporelles on peut découper la tache focale en tranches selon la direction z . La résolution axiale est donc donnée par la distance minimale entre deux objets alignés sur l'axe des z pour que les échos qui nous reviennent de l'un et de l'autre soient captés distinctement.

Deux objets situés respectivement à des distances d_1 et d_2 de la barrette donneront des échos à $t_1 = 2d_1/c$ et $t_2 = 2d_2/c$ respectivement, c étant la vitesse du son dans le milieu (figure 5). Si l'écart

³ En pratique l'atténuation des plus hautes fréquences par les tissus biologiques limite l'utilisation de hautes fréquences dans un but d'imagerie. Nous reviendrons sur ce point à propos de la traversée du crâne par les ultrasons.

temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre les deux échos est inférieur à la durée τ de l'impulsion envoyée (figure 5, en bas) les deux échos se superposent : on ne distingue plus ce qui vient de l'objet 1 et de l'objet 2.

Le critère de séparation axiale de deux objets est donc

$$\Delta t > \tau \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{c}(d_2 - d_1) > \tau \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow (d_2 - d_1) > \frac{c\tau}{2} \quad (5)$$

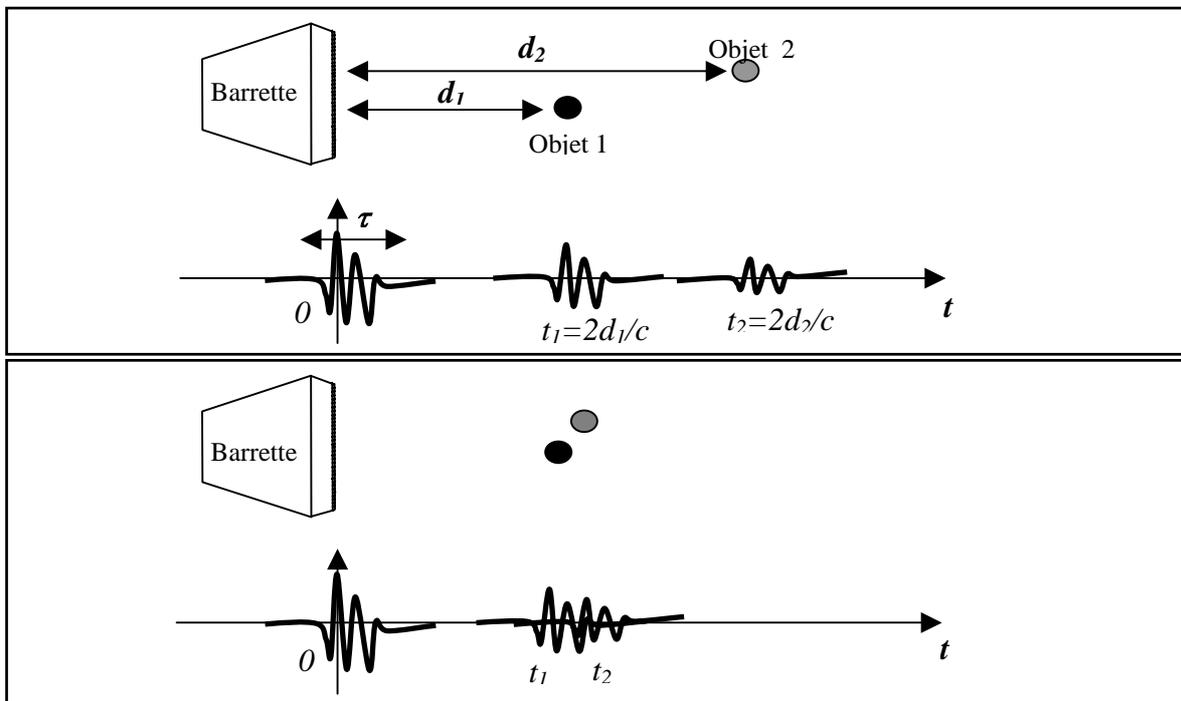


Figure 5. La résolution axiale. On présente en parallèle la géométrie de l'acquisition échographique : une barrette émet un signal de durée τ en direction du milieu à imager, ce signal est réfléchi par deux objets 1 et 2. En dessous, on présente le signal senti par la sonde en fonction du temps : à $t = 0$, la sonde est sensible au signal émis, puis à des temps t_1 et t_2 elle capte les échos provenant des objets 1 et 2. En haut : les objets 1 et 2 sont résolus temporellement, en bas les échos provenant des deux objets se superposent :

les deux objets ne sont pas résolus.

La résolution axiale Δz correspond à la distance axiale minimale entre deux objets pour qu'ils soient résolus, elle est donc liée à la durée de l'écho envoyé par $\Delta z = c\tau/2$: la résolution est meilleure si le signal temporel envoyé pour sonder le milieu est plus court⁴.

⁴ La résolution axiale est encore appelée *résolution temporelle*, car elle est liée au temps que dure le signal émis.

On peut également relier la résolution axiale à la bande passante $\Delta\nu$ des transducteurs de la barrette : soit τ la durée du signal, la largeur de son spectre lui est reliée via la relation :

$$\tau = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (6)$$

La résolution axiale Δz est donc liée à la bande passante des transducteurs utilisés :

$$\Delta z = \frac{c}{2\Delta\nu} \quad (7)$$

c) Résumé

En résumé, une barrette échographique d'ouverture D qui émet un signal de longueur d'onde moyenne λ et de bande passante $\Delta\nu$ permettra d'obtenir d'un objet situé à la distance F une image de résolution :

<ul style="list-style-type: none"> - Résolution latérale $\Delta x = \frac{\lambda F}{D}$ - Résolution axiale $\Delta z = \frac{c}{2\Delta\nu}$ 	<p>(1)</p> <p>(7)</p>
---	-----------------------

dans les conditions optimales d'utilisation. On retiendra que la résolution latérale est déterminée par l'ouverture spatiale de la barrette, et la résolution axiale par la bande passante (l'« ouverture en fréquences »). Dans les deux dimensions, plus l'ouverture est grande, plus la résolution est fine.

Pour apprécier la qualité de la focalisation, on réalise l'expérience suivante : un front d'ondes cylindrique est émis par la barrette échographique, et la pression résultante dans le plan focal est enregistrée par une autre barrette échographique située en face d'elle. On obtient ainsi un scan spatio temporel (B-scan) de la pression dans le plan focal (figure 6). Plus le signal reçu dans le plan focal est court temporellement et concentré latéralement, meilleure sera la résolution axiale et latérale respectivement.

Sur la figure 6 on a représenté également

- le scan latéral de la tache focale (en bas, au milieu) : le maximum de l'intensité acoustique enregistrée est tracé en dB en fonction de la position dans le plan focal⁵. On retrouve un sinus cardinal de largeur caractéristique Δx correspondant à la résolution latérale.

- le scan temporel (A-scan) de la pression reçue au point focal (en bas à droite): on reçoit un signal de durée finie τ liée à la résolution axiale par $\tau = 2\Delta z/c$: le plus court sera ce signal, la meilleure sera la résolution axiale. On représente également l'enveloppe de ce signal en dB afin de mettre sur le même plan résolution latérale et résolution axiale

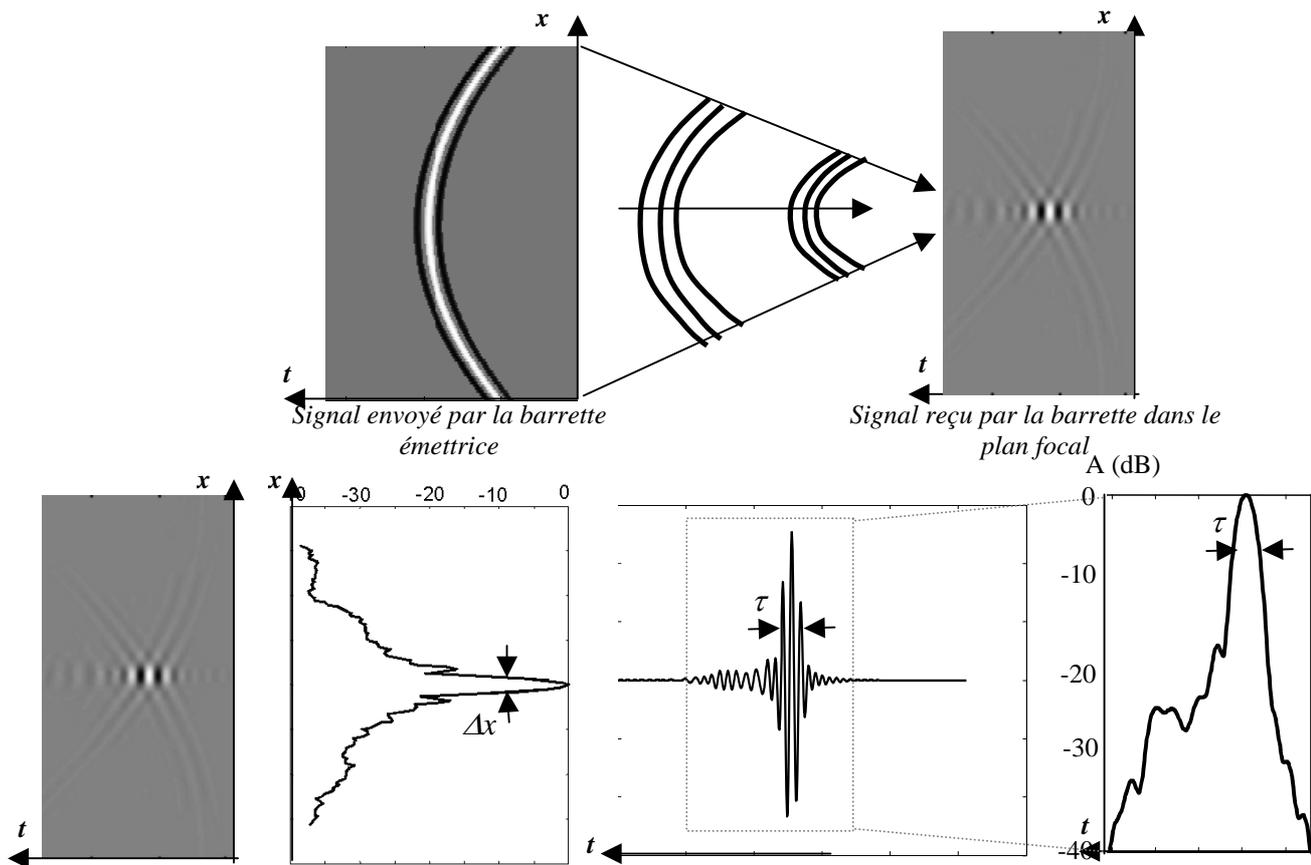


Figure 6. Focalisation et analyse de la tache focale. En haut : la barrette émettrice émet une loi cylindrique (dont on voit un B-scan, à gauche). Le B-scan du signal capté par la barrette qui est dans le plan focal est représenté à droite. En bas : visualisation des dimensions latérale et temporelle (axiale) de la tache focale obtenue : à gauche, B-scan de la tache focale ; au milieu à gauche: graphe du maximum temporel de la pression reçu par les différents transducteurs placés à différentes abscisses dans le plan focal, en dB ; au milieu à droite : signal temporel (A-scan) reçu par le transducteur placé au point focal, en linéaire, puis son enveloppe en dB (tout à droite).

⁵ Ici, et tout au long du manuscrit lorsque l'on représente une intensité en dB on trace $A \text{ (dB)} = 20 \log_{10}(p)$, où p est la pression mesurée.

1.2.3. Le contraste de l'image échographique

a) Contraste latéral

Si la résolution est déterminée par la dimension latérale du lobe principal, c'est le niveau des lobes secondaires (l'intensité résiduelle déposée de part et d'autre du point focal, figure 7 à gauche) qui détermine le contraste. En effet, si l'entourage du point « sondé » est insonifié, du son va revenir vers la barrette en provenance de l'entourage de ce point. L'écho en provenance du point est donc mélangé avec l'écho, plus faible, provenant de ses côtés : cela induit une perte de contraste de l'image échographique. Le plus faible sera le niveau des lobes secondaires, le moins l'écho du point sondé se mélangera avec l'écho de son entourage, le meilleur sera le contraste.

b) Contraste axial

De même, le plus faible sera le niveau des lobes secondaires dans la dimension temporelle, le meilleur sera le contraste temporel (axial) (figure 7, à droite). Si du signal est reçu au niveau du point sondé avant et après le front principal, ce signal, à la réception, va se mélanger avec les réflexions du front principal sur des réflecteurs situés en avant et en arrière du point sondé. Le signal échographique d'un point se mélange ainsi avec le signal émanant de points voisins situés en amont et en aval de lui sur le trajet de l'onde, ce qui induit une perte de contraste axial.

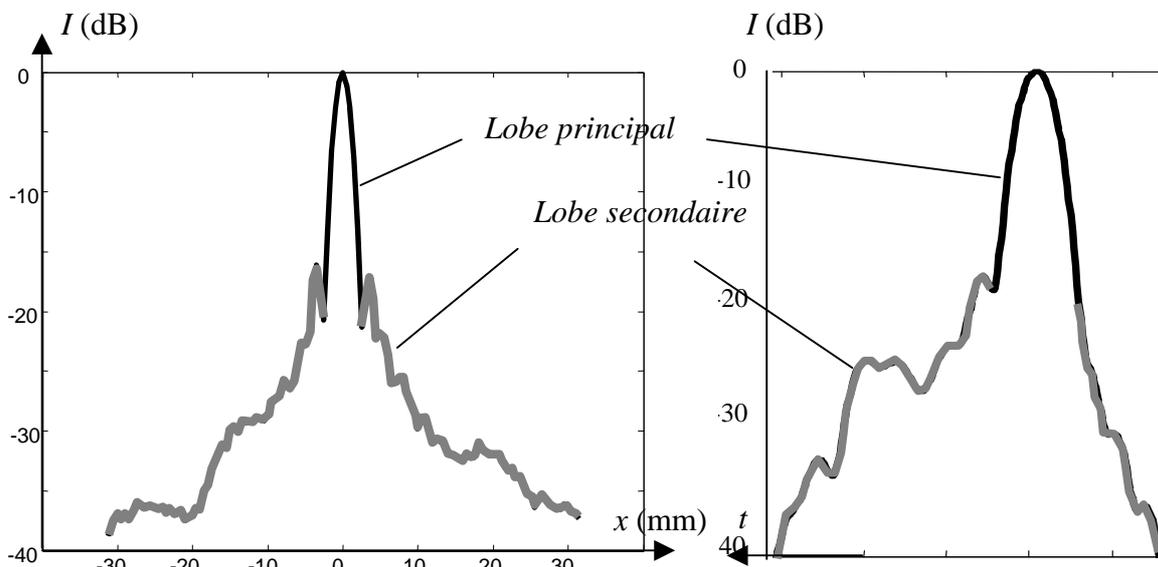


Figure 7. A gauche : scan latéral, en dB du maximum temporel de l'intensité arrivant en chaque point du plan focal lorsque l'on focalise une loi cylindrique à travers un milieu homogène. A droite : plot en dB de l'enveloppe du signal temporel arrivant au point focal. La largeur du lobe principal (en noir) détermine la résolution de l'image échographique ; le niveau des lobes secondaires (en gris) détermine le contraste

1.3. La focalisation en réception et la construction de l'image

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la focalisation en émission : on apprend à focaliser physiquement une onde sur un point du milieu à imager pour tester spécifiquement la réflectivité de ce point. Nous allons maintenant présenter la focalisation en réception, qui est symétrique de la focalisation en émission. Il s'agit, lors de l'analyse des signaux réfléchis, de n'écouter que ce qui provient spécifiquement du point focal sondé : focaliser en réception permet de gagner un facteur 2 sur le contraste.

1.3.1. Focalisation en réception et formation d'une ligne de l'image

Pour tester la réflectivité d'un point du milieu à imager, on envoie depuis la barrette d'imagerie une onde qui va focaliser en ce point et y être réfléchi, puis on analyse le signal qui revient à l'échographe en provenance de ce point : plus la réflectivité du point sondé est forte, plus le signal réfléchi est fort. En réalité, la tache focale n'est pas ponctuelle : le signal est focalisé sur une petite région d'extension latérale $d_x = \lambda F/D$ et axiale $d_x = 7\lambda (F/D)^2$. Le signal qui revient est donc d'amplitude proportionnelle à la réflectivité moyenne du milieu sur la largeur d_x de la tache focale, et contient dans sa dimension temporelle l'information sur les variations axiales de réflectivité du milieu sondé par la tache focale (figure 8). Pour une tache focale, le signal reçu est donc porteur d'information en provenance de toute la *ligne* (en pointillés sur la figure 8) qui se trouve sous l'extension axiale de la tache focale. Si la focalisation se fait point par point, il est plus correct de dire que l'image se fait ligne par ligne.

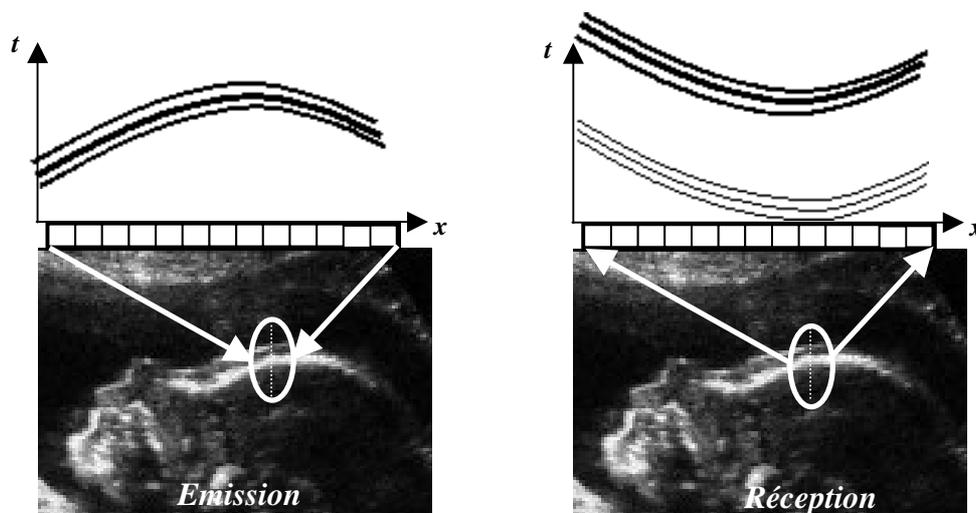


Figure 8 : Focalisation sur le front du bébé. « Sous » la tache focale se trouvent l'interface entre le liquide et la peau du bébé, qui donne lieu à un premier écho faible, puis l'interface entre la peau et l'os du crâne, qui donne lieu à un écho fort.

Plus un transducteur est loin du point focal, plus il émet un signal tôt lors de la focalisation, plus il reçoit l'écho tard lors de la réception. Pour être sûr, lors de la phase de réception, qu'on n'écoute que les signaux qui proviennent du point sondé, on va affecter les transducteurs de retards à la réception : un transducteur proche du point focal va commencer à écouter le signal réfléchi tôt, un transducteur loin du point focal va commencer à écouter le signal réfléchi plus tard. En résumé, plus un transducteur a émis un signal tôt lors de la phase d'émission, plus il va écouter le signal réfléchi tard lors de la phase de réception, et vice versa. Les retards à la réception sont exactement les mêmes que les retards à l'émission, en sens inverse.

Ainsi, les signaux reçus sur tous les transducteurs le seront après un même délai après le début de l'enregistrement (figure 9). Affecter les transducteurs d'un retard à la réception a donc pour l'effet de remettre en phase les signaux reçus en provenance du point focal sur tous les transducteurs.

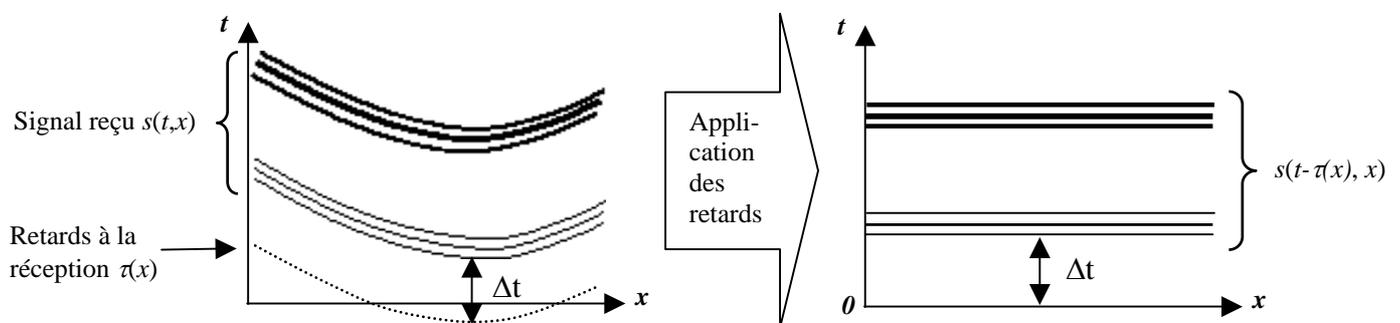


Figure 9. Retards à la réception. A gauche, les signaux reçus en provenance du point focal. On commence à les écouter à partir d'un temps $\tau(x)$ qui dépend de la position du transducteur. A droite, on représente ce qui a été reçu sur chaque transducteur à partir du début de l'enregistrement. Ces signaux sont remis en phase par l'application des retards.

Une autre manière d'appliquer ces retards pour remettre les signaux en phase est de convoluer, transducteur par transducteur, les signaux reçus par les retards correspondant aux signaux émis (figure 10, en haut). On appelle cette opération de remise en phase des signaux reçus la *focalisation en réception*.

Une fois les signaux reçus sur chacun des transducteurs ainsi remis en phase, on les somme : cette somme est proportionnelle à la réflectivité du milieu présent sous la tache focale, et contient dans sa dimension temporelle l'information sur la répartition spatiale des diffuseurs dans la dimension axiale (figure 10, en bas) : c'est une *ligne* de l'image échographique. L'opération de remise en phase puis sommation des signaux reçus sur tous les transducteurs permet de prendre en compte l'amplitude du signal réfléchi capté sur toute la barrette.

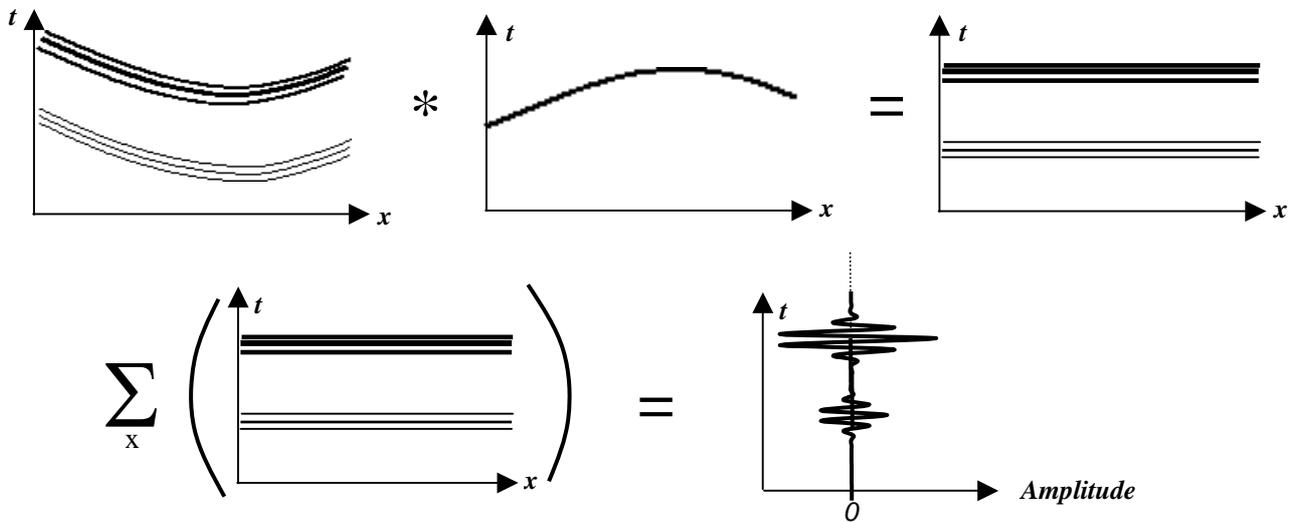


Figure 10 : En haut : convolution des signaux reçus (à gauche) par les retards (au centre) pour les remettre tous en phase (à droite). En bas : sommation des signaux remis en phase (à gauche) pour avoir un signal temporel d'amplitude proportionnel à la réflectivité du point sondé (à droite). On constate la présence de deux échos successifs, l'un dû à l'interface liquide amniotique-peau, suivi d'un autre, plus intense, dû à l'interface peau-os.

1.3.2. Formation de l'image ligne par ligne

Pour obtenir l'image échographique complète, on travaille ligne par ligne : point focal par point focal, on répète les étapes de focalisation, réception des signaux réfléchis, convolution des signaux reçus par les signaux émis (focalisation en réception), et sommation. L'image échographique est formée des M lignes juxtaposées correspondant aux M taches focales (figure 8).

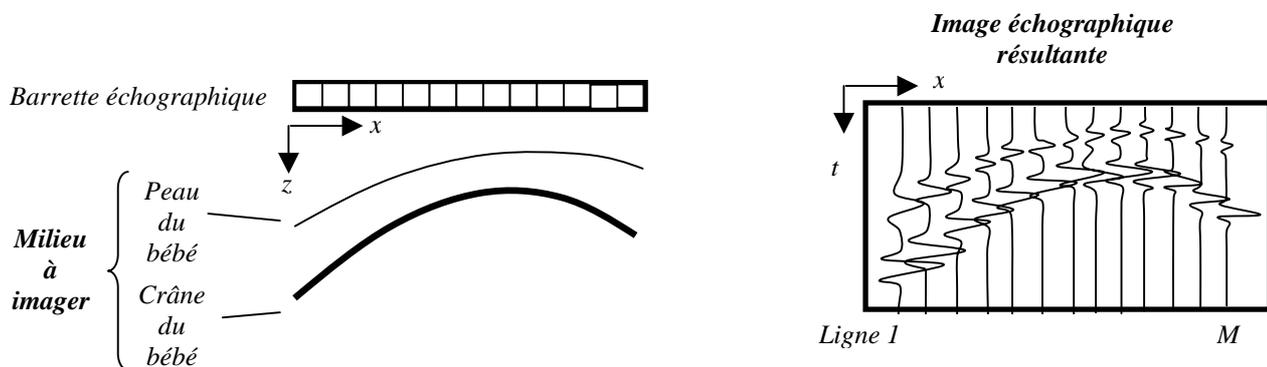


Figure 11. A gauche, la barrette échographique et le milieu à imager (on zoome sur le front du bébé) ; à droite l'image échographique résultante. Elle est composée de M lignes mises côte à côte, une ligne par tache focale. Sur chaque ligne, on observe d'abord un écho faible dû à l'interface liquide amniotique-peau du bébé puis un écho plus fort dû à l'interface peau-crâne du bébé.

Lors de la représentation de l'image, on prendra encore l'enveloppe du signal temporel contenu sur chaque ligne pour éliminer des variations parasites d'intensité dues aux simples oscillations du signal ultrasonore à sa fréquence centrale. L'amplitude de l'image ainsi obtenue est représentée en décibels.

Pour former l'image échographique de tout le milieu, il est nécessaire de focaliser sur une batterie de points de manière à ce que l'union des taches focales recouvre toute la zone à imager (figure 12).

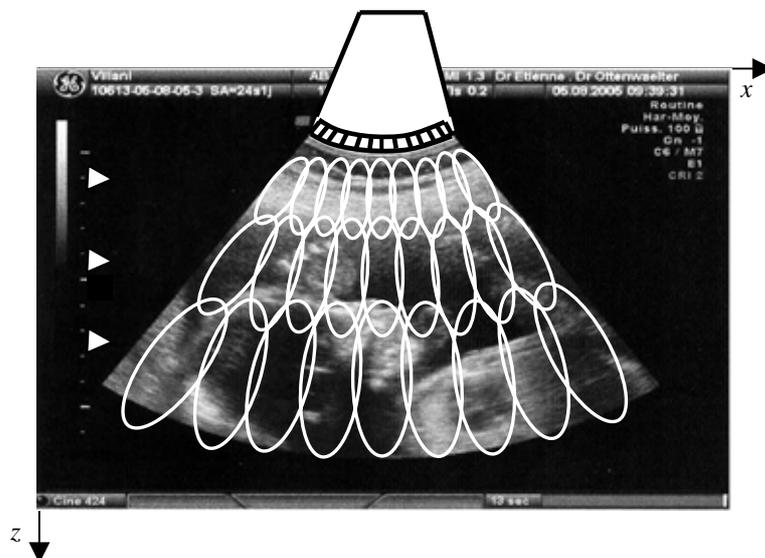


Figure 12. La batterie de taches focales nécessaires pour faire l'image échographique entière (les proportions respectives de la barrette, du fœtus et des taches focales n'est pas respectée). En pointillés, les limites de l'image. On focalise pour faire cette image à trois profondeurs successives, les distances focales sont indiquées par les triangles blancs sur la gauche de l'écran.

1.4. Focalisation à travers des milieux hétérogènes

La résolution d'une image échographique dépend essentiellement des caractéristiques géométriques de l'acquisition de l'image (ouverture D de la sonde échographique, distance F entre la sonde et l'objet à imager) et des caractéristiques technologiques des transducteurs utilisés (fréquence centrale $\nu_0 = c/\lambda$ et bande passante $\Delta\nu$). Cependant, les tissus à travers lesquels on focalise pour faire des images de structures biologiques ne peuvent pas toujours être considérés comme homogènes : des facteurs comme des hétérogénéités de vitesse de phase et d'atténuation⁶ dans les tissus peuvent

⁶ On regroupe sous le terme atténuation l'affaiblissement du signal dû à des phénomènes d'absorption de l'onde par échauffement des tissus, et de diffusion.

dégrader la focalisation et la qualité de l'image [Tanter98, Deverson00, Aubry02, Tabei03, Gerig04, Varslot04].

Nous allons ici essayer d'appréhender l'effet que peuvent avoir des hétérogénéités de vitesse de phase et d'atténuation sur la focalisation d'ultrasons par lois cylindriques.

1.4.1. Hétérogénéités de vitesses

Les lois cylindriques sont calculées pour focaliser de façon optimale à travers un milieu où la vitesse du son est homogène. S'il existe des hétérogénéités de vitesse dans le milieu traversé, le front d'onde focalisant va être déformé : les parties du front d'ondes qui traversent une zone plus « rapide » arriveront plus tôt au point focal que les parties ayant traversé une zone plus « lente » (figure 13). En conséquence, les signaux n'arriveront plus en phase au point focal et la qualité de la focalisation peut être dégradée :

- la tache focale peut être décalée par rapport au point visé (comme sur la figure 13). On croit être en train d'imager un point, en fait on est en train d'imager son voisin. Ceci aura pour conséquence une distorsion (axiale et latérale) de l'image finale ;
- la tache focale peut être élargie, ce qui dégrade la résolution (axiale et latérale), et dissymétrisée (un front d'ondes dissymétrique donnera lieu à une tache focale dissymétrique), ce qui va causer des distorsions de l'image ;
- les lobes secondaires (axiaux et latéraux) peuvent être réhaussés, ce qui affecte le contraste.

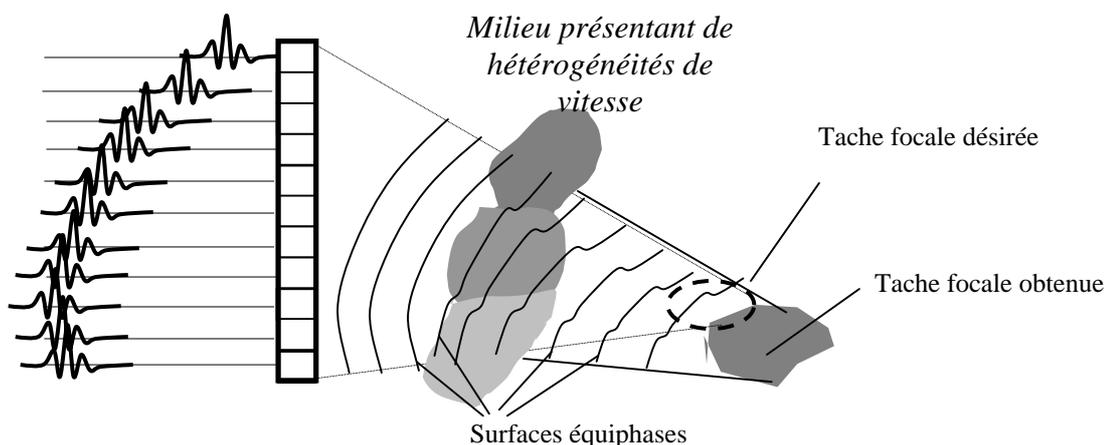


Figure 13. Conséquences des hétérogénéités de vitesse. Un front d'onde cylindrique, lors de sa focalisation, traverse des zones plus « rapides » (en gris foncé) ou plus « lentes » (gris clair). Il est donc déformé, ce qui l'empêche de focaliser correctement.

1.4.2. Hétérogénéités d'atténuation

Si le front cylindrique traverse des zones plus ou moins atténuatrices, il va être affecté. Tout se passe comme si les parties du front d'ondes qui passent par les zones où l'atténuation est la plus forte venaient de transducteurs qui tirent moins fort. C'est comme si on n'avait pas utilisé à plein l'ouverture de la barrette : l'ouverture effective est plus limitée. De plus, certaines fréquences peuvent être atténuées plus que d'autres, ce qui diminue l'« ouverture en fréquences » de la barrette (figure 14). Cela peut avoir pour conséquences

- un élargissement (axial et latéral) de la tache focale (si l'ouverture diminue, la tache focale s'élargit), dégradant la résolution ;
- une déformation de la tache focale (si le front d'onde focalisant est dissymétrisé, la tache focale sera dissymétrique), déformant l'image ;
- un réhaussement du niveau des lobes secondaires (axiaux et latéraux), dégradant le contraste.

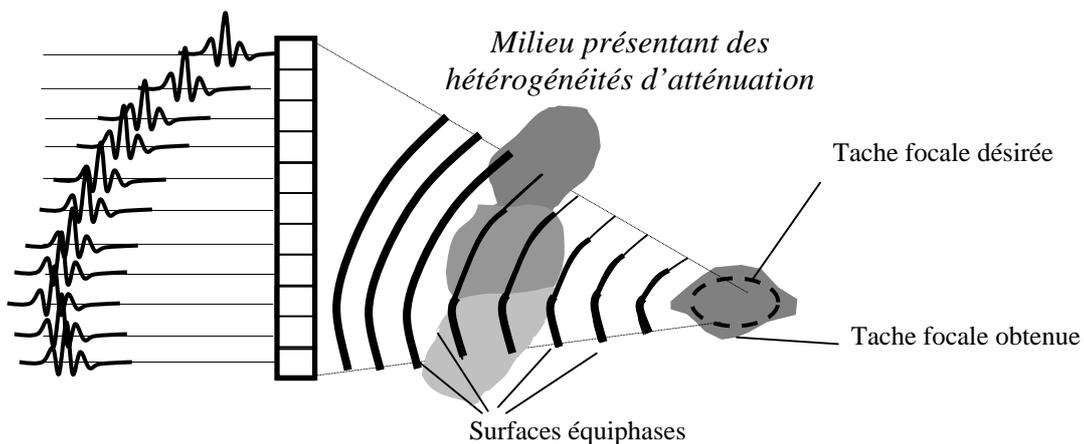


Figure 14. Conséquence des hétérogénéités d'atténuation. Le front d'ondes cylindrique traverse des zones plus (gris foncé) ou moins (gris clair) atténuatrices. Le front d'onde résultant a une amplitude variable spatialement, ce qui affecte la focalisation.

En général, les effets des hétérogénéités de vitesses et d'atténuation s'additionnent : la tache focale risque d'être décalée (distorsion de l'image), déformée (distorsion de l'image), élargie (perte de résolution) ; les lobes secondaires peuvent être réhaussés (perte de contraste).

1.5. L'os du crâne : un obstacle à la focalisation

Pour les applications de l'échographie à l'obstétrique ou à l'imagerie des organes de l'abdomen, les hétérogénéités de vitesse et d'atténuation des milieux traversés dégradent peu la focalisation. En effet la vitesse du son dans les tissus mous de l'abdomen est voisine de celle dans l'eau. (environ 1500 m.s^{-1}), comme on peut le voir dans le tableau 1.

<i>Muscle</i>	$c_0=1600\text{m.s}^{-1}$
<i>Graisse</i>	$c_0=1440\text{m.s}^{-1}$
<i>Sang</i>	$c_0=1540\text{m.s}^{-1}$
<i>Os</i>	$c_0=3000\text{m.s}^{-1}$

Tableau 1 . vitesse moyenne du son dans différents milieux biologiques

L'abdomen, constitué en majeure partie de graisse et d'eau, peut en général être considéré comme homogène. En fait on ne risque d'observer une atténuation importante des ultrasons et une dégradation significative de l'image que si une couche importante de graisse doit être traversée [Hinkelman95, Hinkelman97, Liu97].

En revanche, la vitesse du son dans l'os est très différente [Aubry02, Pernot01, Connor02]; pour cette raison on a longtemps considéré les os comme des obstacles infranchissables par les ondes ultrasonores utilisées pour l'échographie. Nous allons ici détailler l'influence de l'os du crâne sur une onde ultrasonore pour montrer qu'il est un obstacle difficile certes, mais pas impossible à franchir.

1.5.1. Structure de l'os du crâne

L'os du crâne adulte est un milieu tricouche : deux couches d'os dense entourent une couche poreuse appelée diploë (voir figure 15). Cette structure sert vraisemblablement à rendre l'os le plus résistant possible en cas de choc.

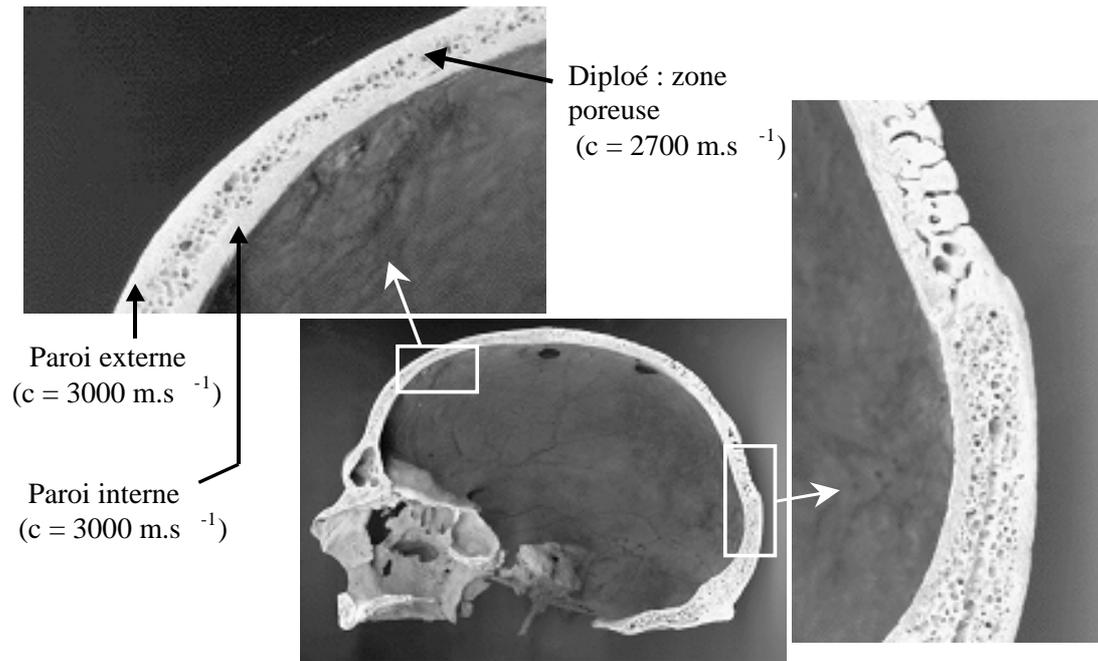


Figure 15. Coupe sagittale de l'os du crâne. Deux couches d'os dense entourent une zone poreuse : la diploë.

1.5.2. Effet de l'os du crâne sur une onde acoustique

a) Effet global

Pour une analyse exhaustive des effets du crâne sur un signal ultrasonore, on renvoie à [Fry78]. Nous allons ici décrire les effets les plus marquants.

Que se passe-t-il si une onde ultrasonore est envoyée depuis une barrette échographique à travers le crâne dans un but d'imagerie du cerveau ? Cette onde va d'abord être fortement réfléchiée par la paroi externe de l'os car le contraste d'impédance entre l'os dense et la peau molle est très grand. L'onde transmise va être absorbée par dissipation visqueuse et diffusée dans toutes les directions par la diploë. Une partie de l'onde va enfin sortir en direction du cerveau, alors qu'une autre partie va encore être réfléchiée par la paroi interne de l'os. Ainsi, une partie de l'onde reviendra encore vers la barrette qui l'a émise, quand une autre partie subira des réflexions multiples [Baikov03, Aarnio04, Doiteau04] et de nouveau absorption et diffusion entre les deux parois de l'os, donnant lieu à un signal temporellement plus long émergeant vers le cerveau (figure 16).

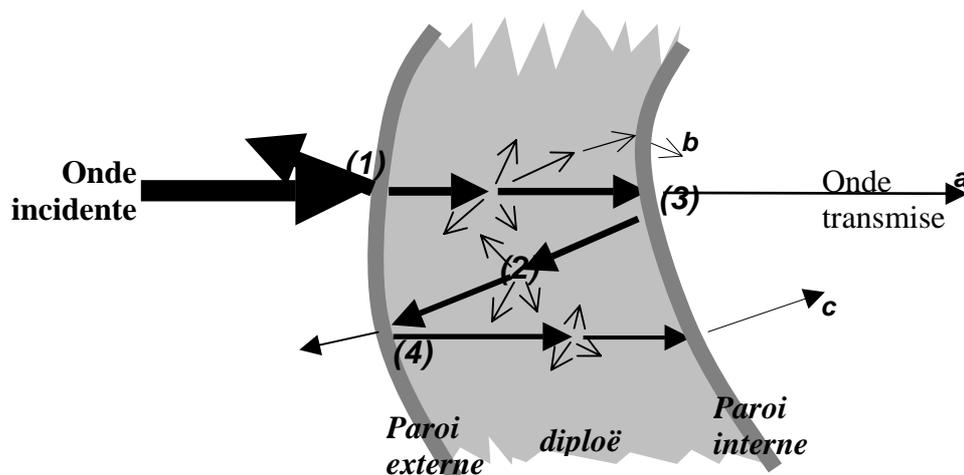


Figure 16. Les différents phénomènes subis par une onde ultrasonore à travers l'os du crâne. (1) réflexion par la paroi externe, (2) diffusion et absorption visqueuse dans la diploë, (3) transmission par la paroi interne, (4) réflexions multiples par les parois internes. Les ondes transmises vers le cerveau sont la somme d'une onde directe (a), des ondes diffusées (b) et des ondes multiplément réfléchies (c).

L'onde ultrasonore qui atteindra le cerveau aura donc été grandement affectée : son amplitude sera nettement plus faible que celle de l'onde incidente à cause de la forte réflexion à l'interface peau-os puis de la forte atténuation dans l'os, ce qui nuira, entre autres, au rapport signal/bruit des signaux d'échographie. De plus, le signal après traversée du crâne sera plus long temporellement, ce qui nuira à la résolution axiale.

Cet allongement du signal se traduit, dans le domaine de Fourier, par une réduction de sa bande passante. On observe notamment une atténuation importante des fréquences les plus élevées, les basses fréquences étant mieux transmises (figure 17) . Pour l'échographie du cerveau, il est nécessaire de trouver un compromis : il faut travailler à des fréquences suffisamment basses pour assurer une bonne transmission du signal à travers le crâne, mais suffisamment élevées pour conserver des images de bonne résolution. Nous avons choisi de travailler à une fréquence centrale de 1.5 MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 1 mm dans le cerveau et une résolution optimale de l'ordre du millimètre.

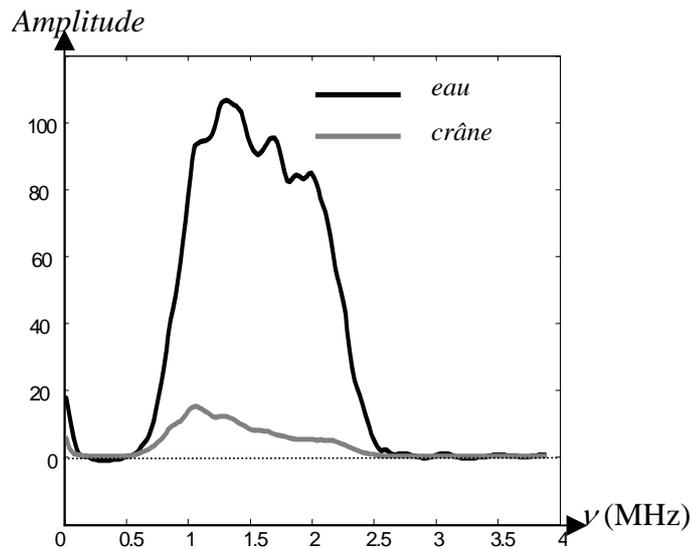


Figure 17. Spectre d'un signal large bande après propagation à travers l'eau (courbe noire) et à travers l'os du crâne (courbe grise). On observe une forte atténuation du signal après passage de l'os du crâne, surtout aux fréquences les plus élevées.

Comment se situe cette bande de fréquences parmi les différents dispositifs ultrasonores destinés au cerveau actuellement disponibles dans les laboratoires d'imagerie médicale ?

- Des échographies de cerveaux de bébés sont réalisées à des fréquences de l'ordre de 8 MHz. Chez le nourrisson, le problème de la traversée de l'os du crâne n'intervient pas : on focalise les ultrasons à travers l'ouverture de la fontanelle. Sur ces échographies, on distingue nettement la structure du cerveau, les circonvolutions, la substance blanche et la substance grise [Hertz02]. La meilleure résolution que l'on puisse espérer obtenir avec un échographe à 1.5 MHz est de l'ordre de cinq fois moins bonne. Lors de la grossesse, il est également possible d'imager le cerveau du fœtus, l'os du crâne étant alors encore « perméable » aux ultrasons (figure 18).

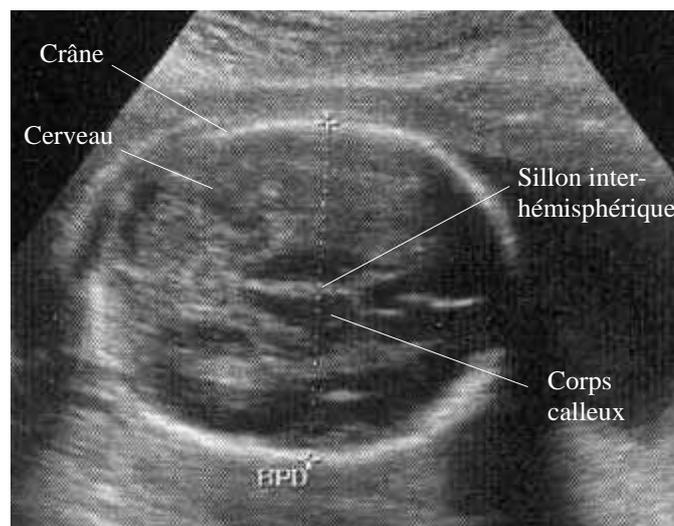


Figure 18. Echographie du cerveau d'un fœtus. On distingue la paroi crânienne, et dans le cerveau le sillon inter-hémisphérique et le corps calleux. La fréquence utilisée ici est de 7.5 MHz.

- Les échographes destinés à faire de l'imagerie Doppler des écoulements sanguins dans les artères principales du cerveau chez l'adulte fonctionnent généralement à 2.25 MHz. Le praticien place la barrette devant la tempe, qui comme la fontanelle chez le bébé constitue une relative « fenêtre échographique » : la tempe étant plus fine, les ultrasons la traversent mieux [Deverson00, Seidel00]. En travaillant à 1.5 MHz, on gagne en rapport signal/bruit.

- Enfin, les dispositifs de focalisation d'ultrasons de haute intensité à travers le crâne pour la thérapie du cerveau fonctionnent autour de 1 MHz. En travaillant à des fréquences plus basses, ils peuvent espérer plus de puissance transmise à travers le crâne, ce qui est nécessaire pour cette application où la résolution est moins critique [Pernot04].

b) Effet défocalisant

Analysons maintenant l'effet de l'os du crâne sur une onde cylindrique préfocalisée telle que celles qui sont utilisées dans les échographes standards.

La structure du crâne étant hétérogène et son épaisseur irrégulière, un front d'onde qui le traverse va être déformé par des aberrations de phase et d'amplitude, la focalisation va donc être dégradée (figures 18 et 19).

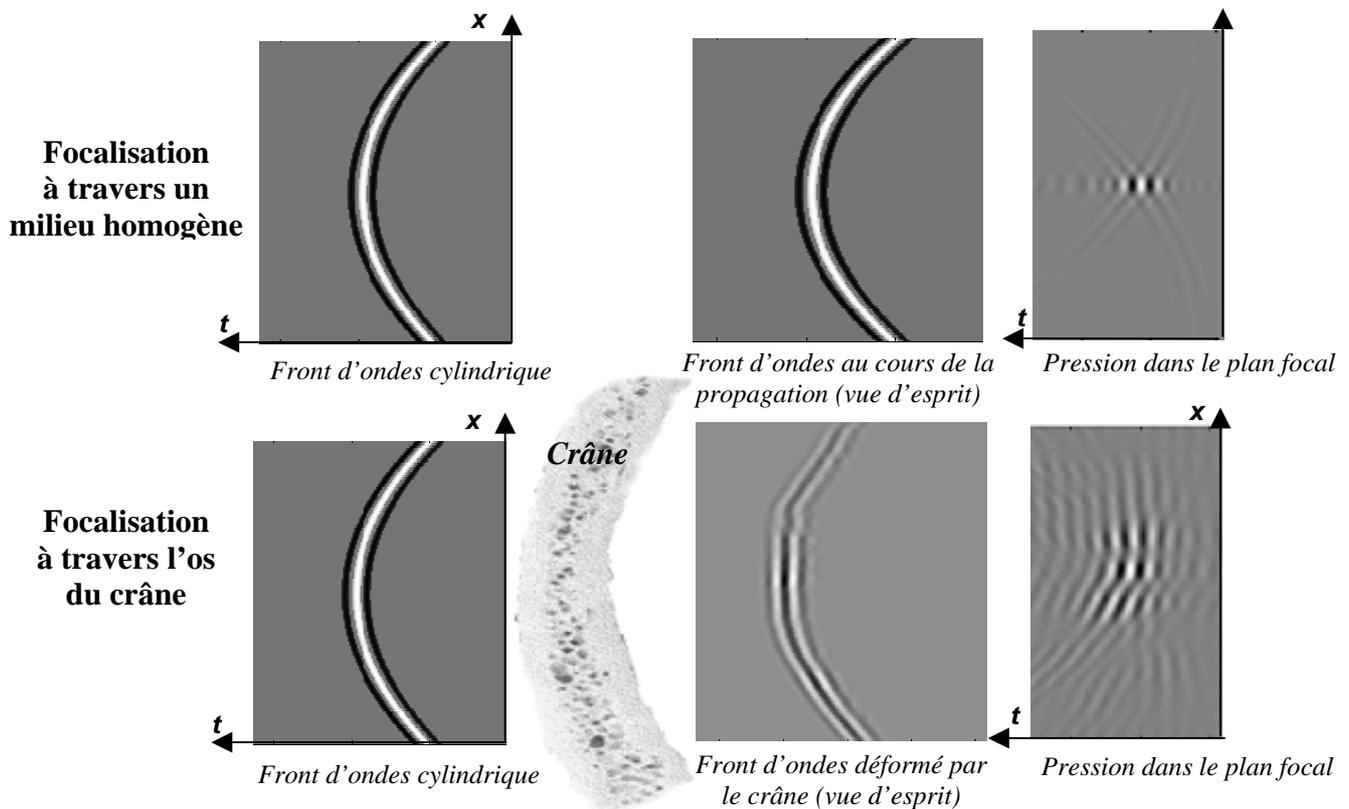


Figure 18. Effet du crâne sur la focalisation. On représente la propagation et focalisation d'un front d'ondes cylindrique ; en haut à travers un milieu homogène ; en bas à travers le crâne. On constate, lorsque l'on focalise à travers le crâne, une dégradation de la résolution latérale (selon x) et axiale (selon t).

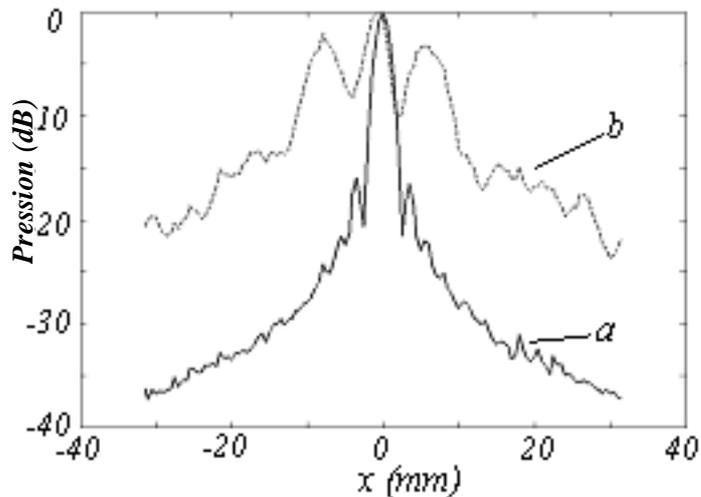


Figure 12. Scans latéraux des taches focales obtenues par focalisation de lois cylindriques à travers l'eau (courbe *a*) et à travers une paroi crânienne (courbe *b*). On trace en dB le maximum de l'intensité obtenue en fonction de l'abscisse dans le plan focal. La tache focale obtenue à travers le crâne est largement dégradée par rapport à la focalisation dans l'eau.

La déformation de la tache focale obtenue à travers le crâne que l'on peut observer sur la figure 12 va avoir plusieurs conséquences : une distortion de l'image échographique, une perte de résolution et une perte de contraste. Ici, les deux lobes secondaires importants auront également pour effet de faire « voir en triple » : c'est comme si on avait trois taches focales au lieu d'une, donc si on sondait le milieu trois fois de manière décalée, l'image du milieu sera donc une superposition de trois images décalées.

L'échographie du cerveau chez l'adulte reste donc aujourd'hui très limitée. En pratique, on place la sonde devant la tempe qui est une zone du crâne relativement peu aberratrice et peu épaisse, ce qui permet d'avoir suffisamment d'ultrasons transmis vers le cerveau. Cependant, la tempe affecte encore la focalisation, de plus son ouverture limitée limite la résolution des images acquises à travers la tempe. Les applications de l'échographie du cerveau chez l'adulte reste encore limitée à une évaluation qualitative des écoulements sanguins (échographie Doppler [Seidel00, Deverson00]) ou à l'évaluation d'événements dramatiques comme une hémorragie interne dans le cerveau ([Seidel04], figure 13).

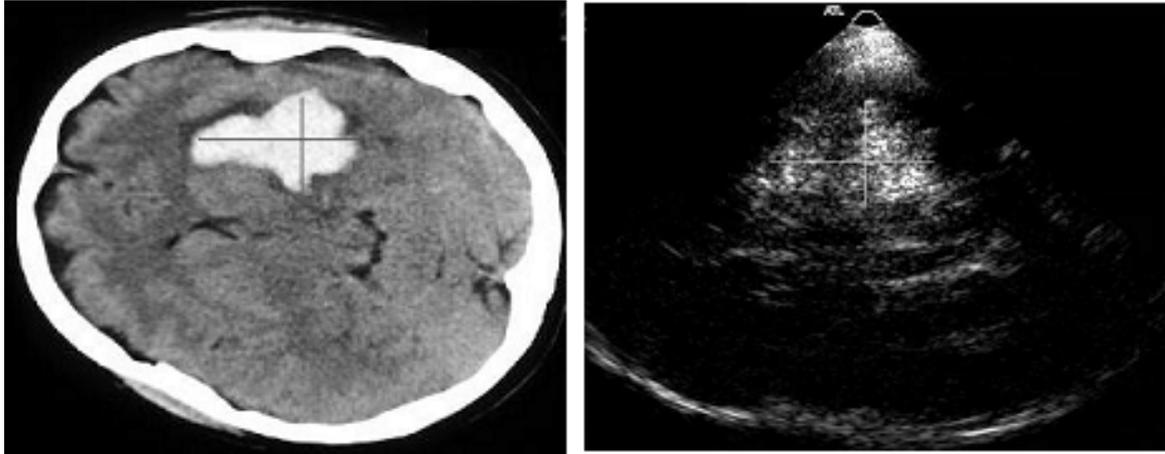


Figure 13. Hémorragie interne dans le cerveau. A gauche, imagée par rayons X, on voit clairement les limites de l'épanchement de sang en blanc. A droite, imagée par échographie (technique d'inversion d'impulsion couplée à l'utilisation d'un agent de contraste⁷). On peut diagnostiquer la présence de l'épanchement mais une analyse quantitative (limites de l'épanchement) est difficile. On constate par ailleurs que le scanner X montre les structures du cerveau, ce qu'est incapable de faire l'échographie.

1.6. Conclusions

L'os du crâne induit de fortes aberrations de phase et d'amplitude sur un front d'ondes focalisant qui le traverse. La défocalisation du front d'ondes interdit a priori d'obtenir des images de haute résolution et de bonne qualité du cerveau par des méthodes conventionnelles. De plus, l'atténuation du front d'ondes par le crâne réduit dramatiquement le rapport signal/bruit, nuisant encore à la qualité des images.

Tout au long du manuscrit il sera question de focalisation adaptative d'ultrasons : la stratégie générale est d'envoyer depuis la barrette échographique un front d'ondes déformé qui, de nouveau déformé par l'os du crâne (ou tout autre milieu aberrateur), retrouve une forme cylindrique focalisante. Nous verrons différentes manières d'apprendre à calculer la forme des fronts d'ondes à envoyer pour focaliser de manière optimale, basées sur deux techniques de focalisation adaptative : le retournement temporel et le filtre inverse.

⁷ La technique d'inversion d'impulsion [Seidel00, Wiesmass00] consiste à faire une échographie en envoyant un signal $s(t)$ puis une autre en envoyant son opposé $-s(t)$, puis de soustraire les deux échographies. L'image ainsi obtenue est donc une image du signal reçu aux harmoniques paires. Cette technique permet d'obtenir une résolution deux fois supérieure à celle que l'on pourrait espérer avec une longueur d'onde donnée et fait ressortir les pathologies (effets non linéaires) mais nécessite un excellent rapport signal/bruit, l'utilisation d'un agent de contraste (pour générer des effets non linéaires), et peu de mouvement entre les deux acquisitions.

Références

- [Aarnio04] “Investigation of ultrasound phase shifts caused by the skull bone using reflection low frequency data”, Jussi Aarnio, *Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium (2004)*.
- [Aubry02] “Focalisation ultrasonore adaptative : application à l’imagerie et à la thérapie du cerveau”, J.F. Aubry, *thèse de doctorat de l’Université Paris 7, (2002)*.
- [Baikov03a] “Physical and technological aspects of ultrasonic imaging of brain structures through thick skull bones: 1. Theoretical and model studies”, S. Baikov, A. Molotilov, V. Svet, *Acoustical physics* 49(3), 276-284 (2003).
- [Baikov03b] “Physical and technological aspects of ultrasonic imaging of brain structures through thick skull bones: 1. Experimental studies”, S. Baikov, L. Babin, A. Molotilov, S. Neiman, V. Riman, V. Svet, A. Selyanon, *Acoustical physics* 49(4), 389-395 (2003).
- [Connor02] “A unified model for the speed of sound in cranial bone based on genetic algorithm optimization”, C. Connor, G. Clement, K. Hynynen, *Phys. Med. Biol.* 47, 3925-3944 (2002).
- [Deverson00] “The effects of temporal bone on transcranial doppler ultrasound beam shape”, S. Deverson, D. Evans, C. Bouch, *Ultrasound in Med. & Biol.* 26(2), 239-244 (2000).
- [Fry78] “Acoustical properties of the human skull”, F. Fry, J. Barger, *J. Acoust. Soc. Am* 63, 1576-1590 (1978).
- [Gerig04] “Errors in ultrasonic scatterer size estimates due to phase and amplitude aberration”, A. Gerig, J. Zagzebski, *J. Acoust. Soc. Am.* 115(6), 3244-3252 (jun. 2004).
- [Hertz02] L. Hertz-Panier, Hôpital Necker-Enfants malades, *communication personnelle (2002)*.
- [Hinkelman95] “Measurement and correction of ultrasonic pulse distortion produced by the human breast”, L. Hinkelman, D. Liu, R. Waag, Q. Zhu, B. Steinberg, *J. Acoust. Soc. Am.* 97(3), 1958-1969 (1995).
- [Hinkelman97] “Measurements of ultrasonic pulse distortion produced by human chest wall”, L. Hinkelman, T. Szabo, R. Waag, *J. Acoust. Soc. Am.* 101(4), 2365-2373 (1997).
- [Liu97] “Harmonic amplitude distribution in a wideband ultrasonic wavefront after propagation through human abdominal wall and breast specimens”, D. Liu, R. Waag, *J. Acoust. Soc. Am.* 101(2), 1172-1183 (1997).
- [Pernot01] “Experimental validation of 3D finite differences simulations of ultrasonic wave propagation through the skull”, M. Pernot, JF. Aubry, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *Proceedings of IEEE Ultrasonics symposium 2, 1547-1550 (2001)*.
- [Pernot04] “Nouvelles techniques de thérapie ultrasonore et de monitoring”, M. Pernot, *Thèse de doctorat de l’université Paris 7 (2004)*.

- [Seidel00a] “Harmonic imaging of the human brain, visualisation of brain perfusion with ultrasound”, G. Seidel, C. Algermissen, A. Christoph, L. Claasen, M. Vidal-Langwasser, T. Katzer, *Stroke* 31,151-154 (2000).
- [Seidel00b] “Visualization of brain perfusion with harmonic gray scale and power Doppler technology”, G. Seidel, C. Algermissen, A. Christoph, T. Katzer, M. Kaps, *Stroke* 31, 1728-1734 (2000).
- [Seidel04] Güter Seidel, *UMEDS meeting, communication personelle* (2004).
- [Tabei03] “Simulation of ultrasonic focus aberration and correction through human tissue”, M. Tabei, T.D. Maast, R.C. Waag, *J. Acoust. Soc. Am.* 113(2), 1166-1176 (2003)
- [Tanter98] “Focusing and steering through absorbing and aberrating layers: application to ultrasonic propagation through the skull”, M. Tanter, J.L. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 103(5), 2403-2410 (1998).
- [Varslot04] “Spectral estimation for characterization of acoustic aberration”, T. Varslot, B. Angelsen, R. Waag, *J. Acoust. Soc. Am.* 116(1), 97-108 (2004).
- [Wiesmass00] “Ultrasound perfusion imaging of the human brain”, M. Wiesmass, G. Seidel, *Stroke* 31, 2421-2425 (2000).

2. Focalisation et imagerie adaptative

Dans cette partie nous introduisons le retournement temporel et le filtre inverse, deux techniques de focalisation adaptative pour l'imagerie à travers des milieux aberrateurs. Nous verrons comment utiliser ces techniques dans un but d'imagerie transcrânienne.

2.1. Le formalisme matriciel

Nous introduisons ici un formalisme matriciel qui nous servira à décrire la propagation d'une onde d'une barrette émettrice vers un réseau de points de contrôle [Aubry02, Tanter01]. Ce formalisme sera utilisé pour présenter les différentes méthodes de focalisation adaptative qui seront présentées dans la suite.

Après l'introduction du formalisme, nous l'utiliserons pour décrire l'étape de focalisation puis la formation d'image avec un échographe standard.

2.1.1. Propagation d'un front d'ondes

Une barrette échographique composée de N transducteurs est disposée en regard d'un réseau de M points « de contrôle » dans le milieu¹. Nous allons présenter une manière de formaliser la propagation d'une onde acoustique depuis la barrette vers le réseau de points de contrôle (figure 1), de manière à relier le signal ressenti au niveau des points de contrôle au signal émis par la barrette.

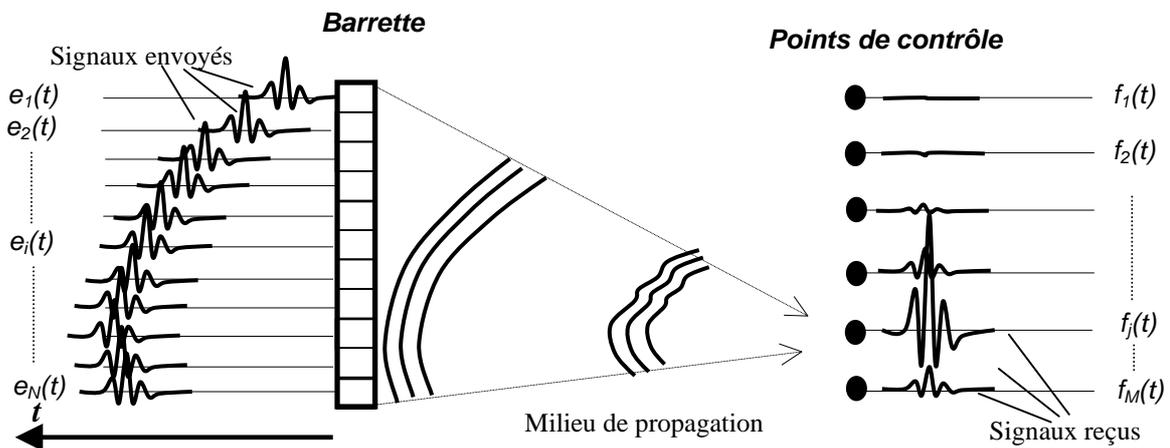


Figure 1. Expérience de propagation d'une onde de la barrette vers le réseau de points de contrôle. Si le milieu de propagation est hétérogène, le front d'ondes peut se déformer, comme ici.

On peut décrire l'onde émise par la barrette 1 par la donnée du signal temporel émis par chacun de ses N transducteurs, que l'on regroupe en un vecteur d'émission $E(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_N(t)]$ de

¹ Les points de contrôle peuvent être matérialisés, par exemple, par une autre barrette échographique

taille N . De même l'onde reçue au niveau des points de contrôle est décrite par un vecteur de réception $F(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_M(t)]$, de taille M . Nous allons voir que le vecteur d'émission émis $E(t)$ et le vecteur de réception $F(t)$ sont liés par une matrice de transfert qui décrit le milieu de propagation.

Appelons $h_{ji}(t)$ le signal reçu par le point de contrôle j lorsque le transducteur i de la barrette émet un dirac temporel (figure 2). $h_{ji}(t)$ est la *réponse impulsionnelle* entre les points i et j .

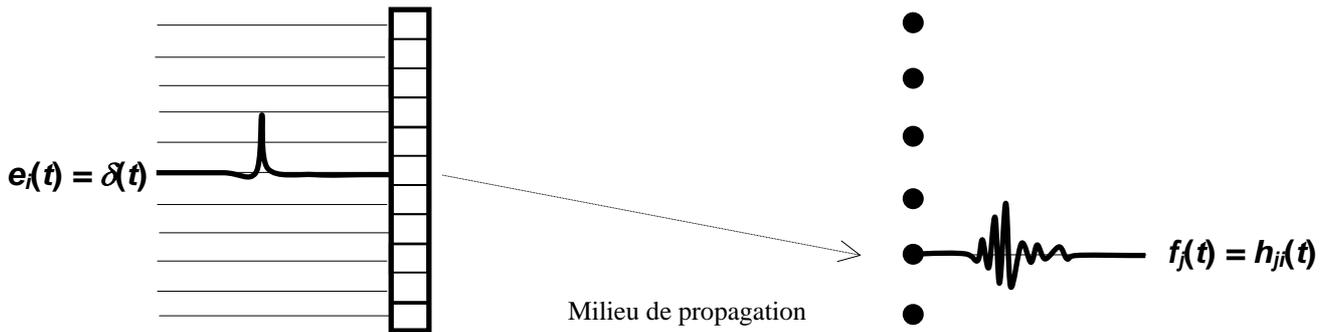


Figure 2. Acquisition de la réponse impulsionnelle entre le transducteur i de la barrette et le point de contrôle j .

Si maintenant le transducteur i de la barrette émet un signal temporel quelconque $e_i(t)$, le signal $f_j(t)$ reçu par point de contrôle j sera la convolution du signal émis par la réponse impulsionnelle :

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ji}(t - \tau) e_i(\tau) d\tau \quad (1)$$

qu'on écrit encore

$$f_j(t) = h_{ji}(t) * e_i(t) \quad (1)$$

où $*$ désigne l'opérateur de convolution.

Dans le domaine de Fourier, l'équation (1) s'écrit

$$F_j(\omega) = H_{ji}(\omega) E_i(\omega) \quad (2)$$

la transformée de Fourier d'un produit de convolution étant égal au produit des transformées de Fourier. $F_j(\omega)$, $E_i(\omega)$ et $H_{ji}(\omega)$ désignent respectivement les transformées de Fourier des signaux émis $e_i(t)$, reçu $f_j(t)$, et de la réponse impulsionnelle $h_{ji}(t)$. ($E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e_i(t) e^{-i\omega t} dt$).

Si tous les transducteurs i de la barrette émettent, le signal reçu par le point de contrôle j est la somme de ce qui provient de chacun des transducteurs de la barrette :

$$F_j(\omega) = \sum_{i=1}^N H_{ji}(\omega) E_i(\omega) \quad (3)$$

relation que l'on peut écrire pour les M points de contrôle et qui se met finalement sous forme matricielle

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega) E(\omega) \quad (4)$$

où $E(\omega)$ est la transformée de Fourier du vecteur émis par la barrette : $E(\omega) = [E_1(\omega), E_2(\omega), \dots, E_N(\omega)]$, $F(\omega)$ est la transformée de Fourier du vecteur reçu par les points de contrôle : $F(\omega) = [F_1(\omega), F_2(\omega), \dots, F_M(\omega)]$, et $\mathbf{H}(\omega)$ est la matrice des réponses impulsionnelles (appelée *propagateur*) entre la barrette et le réseau de points de contrôle : c'est une matrice $M \times N$ qui contient en position (j,i) la transformée de Fourier $H_{ji}(\omega)$ de la réponse impulsionnelle $h_{ji}(t)$. *Le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ contient donc toutes les informations sur le milieu traversé entre la barrette et le réseau de points de contrôle.*

2.1.2. Formation de l'image échographique standard

Dans ce paragraphe nous allons utiliser le formalisme matriciel pour décrire la formation de l'image échographique standard. Nous décrirons l'obtention d'une seule tache focale et l'acquisition et le traitement du signal réfléchi ; la formation de l'image complète se faisant par la répétition du même procédé en focalisant en M différents endroits.

On émet le signal $E(\omega)$ depuis la barrette échographique. C'est un signal cylindrique, construit pour focaliser sur le point j_0 (figure 3).

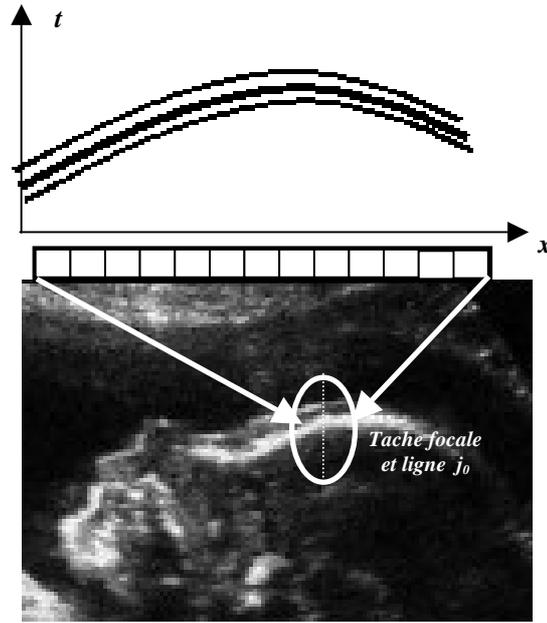


Figure 3. Le vecteur j_0 de focalisation cylindrique et la tache focale correspondante ; la réflectivité de la ligne j_0 est notée $r_{j_0}(\omega)$.

Le signal $F(\omega)$ reçu dans le plan focal est

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) \quad (4)$$

où $\mathbf{H}(\omega)$ désigne le propagateur entre les N transducteurs de la barrette échographique et les M points focaux du plan focal (qui tiennent lieu de « points de contrôle »); il est caractéristique du milieu traversé entre la barrette et le plan focal (peau, graisse, muscles de la paroi abdominale de la maman, utérus, liquide amniotique...).

Ce signal est réfléchi par les réflecteurs élémentaires situés dans le plan focal : si $F_j(\omega) = [F_1(\omega), F_2(\omega), \dots, F_M(\omega)]$ est le signal reçu dans le plan focal, le signal réfléchi en direction de la barrette est

$$F_R(\omega) = [r_1(\omega)F_1(\omega), r_2(\omega)F_2(\omega), \dots, r_M(\omega)F_M(\omega)], \quad (5)$$

où $r_j(\omega)$ est le coefficient de réflectivité du milieu au point j . Le vecteur $F_R(\omega)$ s'écrit sous forme matricielle

$$F_R(\omega) = \mathbf{r}(\omega)F(\omega) \quad (6)$$

$\mathbf{r}(\omega)$ étant la matrice des réflectivités des points focaux, c'est une matrice diagonale $M \times M$:

$$\mathbf{r}(\omega) = \begin{pmatrix} r_1(\omega) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_1(\omega) & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r_M(\omega) \end{pmatrix} \quad (7)$$

La matrice de réflectivité $\mathbf{r}(\omega)$ représente la grandeur que l'on veut mesurer : la réflectivité du milieu dans le plan focal.

Le vecteur $F_R(\omega)$ se propage en sens inverse du plan focal vers la barrette, cette propagation en sens inverse se modélise par une multiplication par la transposée du propagateur de la barrette vers le plan focal. En effet un signal émis par le transducteur i de la barrette et qui arrive au point focal j est le même qu'un signal qui serait émis au niveau du point focal j et reçu par le transducteur i (c'est le principe de réciprocité, illustré figure 4).

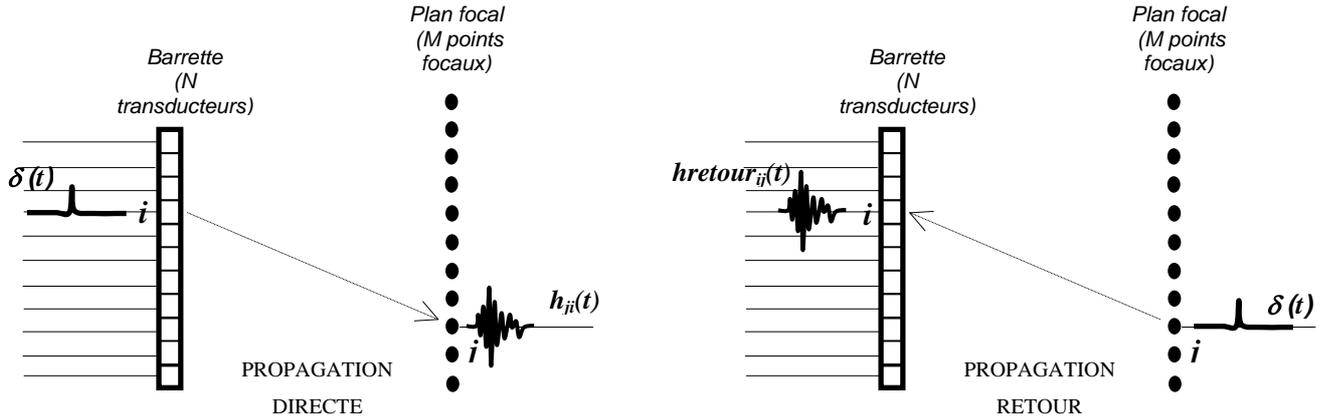


Figure 4. Illustration du principe de réciprocité : le signal capté au point j lorsque le transducteur i émet une impulsion est le même qui serait capté par le transducteur i si le point j émettait une impulsion.

Si on appelle $\mathbf{H}(\omega)$ le propagateur de la barrette vers le plan focal, et $\mathbf{H}_{\text{retour}}(\omega)$ le propagateur du plan focal vers la barrette, on a donc $H_{ji}(\omega) = H_{\text{retour}}_{ij}(\omega)$ pour tout couple i, j : le propagateur retour est le transposé du propagateur direct :

$$\mathbf{H}_{\text{retour}}(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega) \quad (8)$$

Les signaux enregistrés par la barrette après réflexion dans le plan focal et propagation retour sont donc :

$$R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)F_R(\omega) \quad (9)$$

soit, en fonction des signaux émis $E(\omega)$ pour focaliser sur la position j_0 :

$$R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)E(\omega) \quad (10)$$

Pour récupérer un signal proportionnel à la réflectivité du point sondé, on convolue les signaux réfléchis $R(\omega)$ par les retards des signaux émis $E(\omega)$ transducteur par transducteur, puis on les somme (c'est la focalisation en réception). On récupère ainsi un signal temporel qui est l'image de la réflectivité du milieu sur la ligne j_0 . On verra par la suite qu'il est souvent plus intéressant, dans une optique de focalisation adaptative, de convoluer les signaux reçus par les signaux émis et non simplement par les retards, c'est cette opération que nous allons décrire ici.

Une convolution temporelle est équivalente à une multiplication dans le domaine de Fourier, les étapes de convolution du signal reçu par le signal émis et sommation s'écrivent donc dans le domaine de Fourier comme un produit scalaire entre le vecteur reçu $R(\omega)$ et le vecteur émis $E(\omega)$. La transformée de Fourier de la ligne j_0 de l'image échographique vaut donc :

$$\begin{aligned} I_{j_0}(\omega) &= \sum_i E_i(\omega)R_i(\omega) \\ \Leftrightarrow I_{j_0}(\omega) &= {}^tE(\omega)R(\omega) \end{aligned} \quad (11)$$

soit, en fonction simplement du signal émis

$$\boxed{I_{j_0}(\omega) = {}^tE(\omega) [{}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)] E(\omega)} \quad (12)$$

Cette expression de $I_{j_0}(\omega)$, symétrique autour de la matrice de réflectivité $\mathbf{r}(\omega)$, deviendrait simplement $I_{j_0}(\omega) = r_{j_0}(\omega)$ (i.e la ligne j_0 de l'image échographique serait la reproduction fidèle de la réflectivité au point j_0), si l'on avait

$$\mathbf{H}(\omega)E(\omega) = {}^t[0,0,\dots,1(j_0),0,\dots,0] \quad (13)$$

c'est-à-dire si la résolution spatiale et temporelle de la tache focale, ainsi que le contraste, étaient infinis (la tache focale $F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega)$ serait un dirac spatio-temporel). En pratique, on a vu que la tache focale possède une certaine étendue spatiale et temporelle et on a donc seulement $I_{j_0}(\omega) \approx r_{j_0}(\omega)$. La ligne j_0 de l'image échographique est une approximation de la réflectivité de la ligne j_0 du milieu, le signe ' \approx ' traduit le contraste et la résolution finis.

2.2. Le retournement temporel

Dans un premier temps, nous allons décrire le principe de la focalisation par retournement temporel, puis nous le décrivons mathématiquement en utilisant le formalisme matriciel introduit plus haut

2.2.1. Le principe du retournement temporel

Le retournement temporel est une technique de focalisation adaptative à travers des milieux aberrateurs [Fink92, Derode95, Tanter00, Fink03, Borcea02]. Supposons que l'on souhaite focaliser des ultrasons en un point à l'aide d'une barrette échographique. Dans un premier temps, une source acoustique placée en ce point émet un signal qui se propage à travers le milieu et est capté par la barrette échographique. Ce signal est « retourné temporellement » et réémis par la barrette échographique (ce qui a été reçu plus tôt est envoyé plus tard). Le signal va suivre exactement le même chemin que lors de sa propagation de la source vers la barrette, cette fois-ci en sens inverse, pour focaliser à la position d'où il a été originellement émis (figure 5).

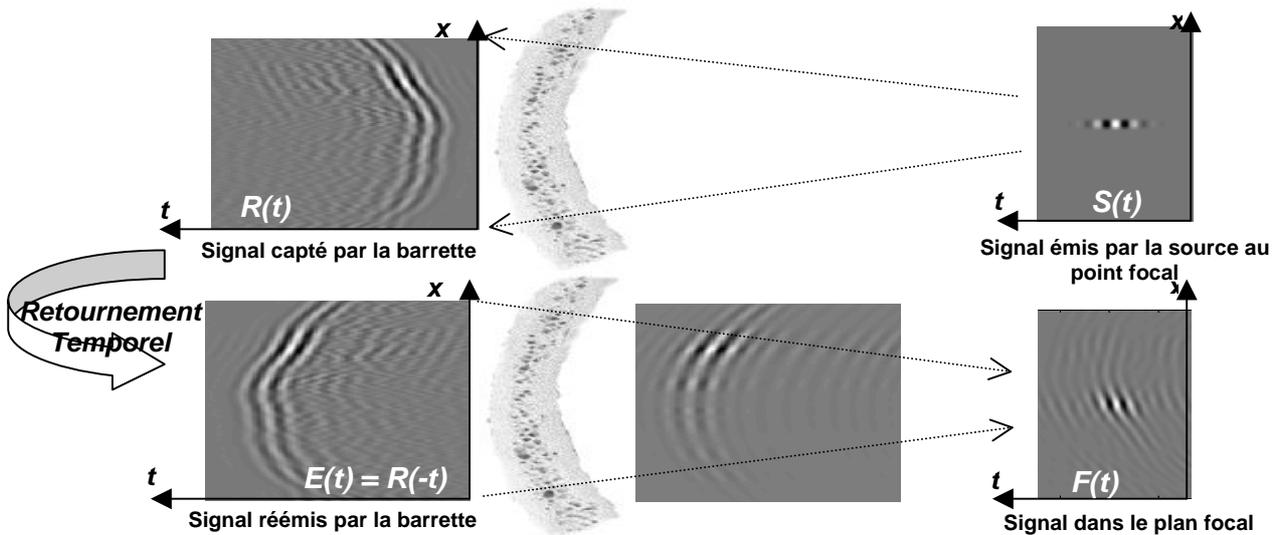


Figure 5. Focalisation à travers le crâne par retournement temporel. Une onde est d'abord émise par une source située au point focal, cette onde est captée par la barrette de transducteurs de l'autre côté du crâne (en haut). Ce signal est alors retourné temporellement et réémis à travers le crâne (en bas)

Les transducteurs ayant reçu en provenance du point focal un signal plus tardivement, c'est-à-dire un signal passé à travers un milieu plus « lent » vont réémettre ce signal en premier. Au retour le signal va de nouveau passer à travers la même zone plus lente et le fait de renvoyer ce signal plus tôt compense ce retard. Finalement, au point focal, les signaux provenant de tous les transducteurs de la barrette arrivent en même temps ; ces signaux interfèrent constructivement pour recréer une focalisation de bonne qualité.

2.2.2. Description matricielle

Le signal $s(t)$ originellement émis par le point focal peut être décrit par un vecteur d'émission $S(t)$ émis par tous les points du plan focal, qui serait non nul seulement au niveau du point focal : $S(t) = [0, 0, \dots, 0, s(t), 0, \dots, 0]$, ($S(\omega) = [0, 0, \dots, 0, s(\omega), 0, \dots, 0]$ dans le domaine de Fourier). Soit $\mathbf{H}(\omega)$ le propagateur reliant les N transducteurs de la barrette aux M points focaux, ${}^t\mathbf{H}(\omega)$ est le propagateur du plan focal vers la barrette et les signaux $R(\omega)$ captés par la barrette sont

$$R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)S(\omega) \quad (14)$$

Ces signaux sont retournés temporellement puis renvoyés par la barrette. Le retournement temporel consiste à renvoyer plus tard les signaux qui sont arrivés plus tôt, formellement on le représente en inversant le signe de la variable temps : si le signal reçu est $R(t)$, le signal réémis sera $E(t) = R(-t)$. Dans le domaine de Fourier, le changement de variable $t \rightarrow -t$ est équivalent à une conjugaison complexe² : si le signal reçu est $R(\omega)$, le signal réémis est $E(\omega) = R(\omega)^*$.

Le signal réémis $E(\omega)$ se propage à travers le milieu représenté par son propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ et le signal $F(\omega)$ finalement reçu dans le plan focal s'écrit

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) = \mathbf{H}(\omega)R(\omega)^* \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow F(\omega) = \mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^* S(\omega)^* \quad (16)$$

De plus, si $s(t)$ est un signal pair ($s(t) = s(-t)$), alors $s(\omega)$ est réel et $s(\omega)^* = s(\omega)$, on a alors

$$\boxed{F(\omega) = \mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^* S(\omega)} \quad (17)$$

La focalisation par retournement temporel est bonne si le vecteur focalisé $F(\omega)$ est proche du vecteur $S(\omega)$ originellement émis par le plan focal (le vecteur « cible »), c'est-à-dire si l'opérateur $\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*$ est proche de l'identité. L'opérateur $\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*$ qui décrit cette opération de retournement temporel est appelé l'*opérateur retournement temporel*.

² par exemple $\text{TF}[\delta(t)] = e^{i\omega t}$; $\text{TF}[\delta(-t)] = e^{-i\omega t} = [e^{i\omega t}]^* = (\text{TF}[\delta(t)])^*$.

2.2.3. L'opérateur de retournement temporel

Examinons de plus près la signification de l'opérateur $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*$. C'est par construction un opérateur hermitien (égal à son transposé conjugué) de taille $M \times M$, où M est le nombre de points de contrôle dans le plan focal. La colonne i de cet opérateur est égale au vecteur $F(\omega)$ que l'on obtient lorsque l'on applique cet opérateur au vecteur contenant un 1 en position i et des 0 partout ailleurs, c'est-à-dire à la composante de Fourier à la fréquence ω du vecteur que l'on obtient dans le plan focal lorsque l'on focalise par retournement temporel sur un dirac temporel émis par la position i . La colonne i du propagateur monofréquentiel $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*$ nous informe donc sur la qualité de la focalisation latérale que l'on peut obtenir par retournement temporel avec un signal monofréquentiel de fréquence ω .

Qu'en est-il maintenant de la qualité de la focalisation latérale avec un signal polyfréquentiel ? Des fréquences différentes n'interférant pas entre elles, la tache focale obtenue avec un signal polyfréquentiel est la somme des taches focales obtenues à toutes les fréquences qui composent le signal.

La somme sur les fréquences ω de la valeur absolue de la colonne i de la matrice $\mathbf{H}^t\mathbf{H}^*$ représente donc le profil de l'amplitude reçue dans le plan focal lorsque l'on « vise » par retournement temporel sur un dirac temporel à la position i (figure 6).

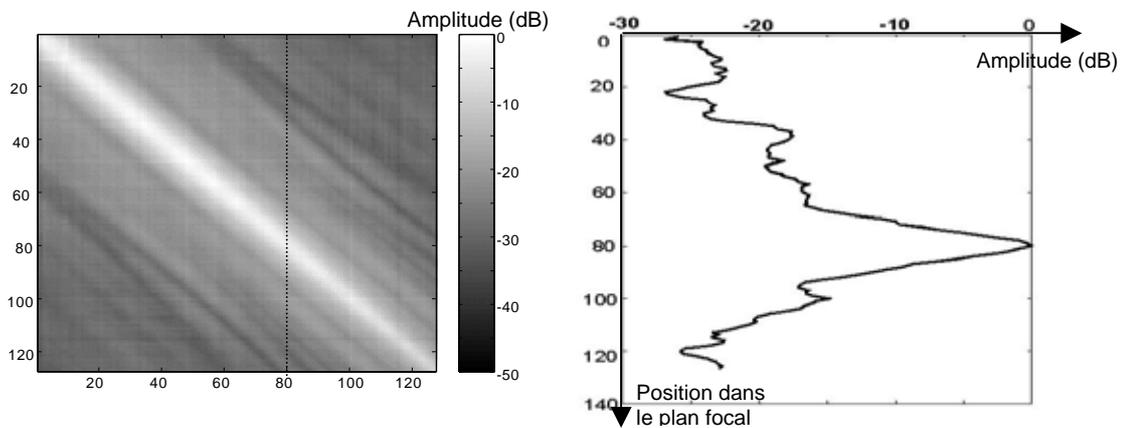


Figure 6. L'opérateur $\mathbf{H}^t\mathbf{H}^*$ et la focalisation par retournement temporel. A gauche: on représente $\mathbf{H}_{\text{sum}} = \sum_{\omega} [\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*]$, (en dB). A droite, la colonne 80 de \mathbf{H}_{sum} (en pointillés sur l'image de gauche), qui correspond à la répartition d'amplitude dans le plan focal lorsque l'on focalise à travers le crâne par retournement temporel avec des signaux polyfréquentiels sur le 80^{ème} point focal.

La matrice $\mathbf{H}_{\text{sum}} = \sum_{\omega} [\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*]$ montre donc la qualité de la focalisation que l'on peut obtenir sur tous les points du plan focal lorsque l'on focalise par retournement temporel. Le plus cette matrice est proche de l'identité, la meilleure est la focalisation obtenue.

2.3. Le filtre inverse

2.3.1. Principe du filtre inverse

Le filtre inverse est une autre méthode de focalisation adaptative, qui a été développée au laboratoire par Michaël Tanter durant sa thèse [Tanter98, Tanter00, Tanter01] puis par Jean-François Aubry dans un but de focalisation et d'imagerie transcrânienne [Aubry00, Aubry01, Aubry02, AubryXX]; en même temps que par d'autres équipes à travers le monde [Shen94, Maast97, Haddadin98, Lin00]. Le but est toujours d'obtenir un signal focalisé dans le plan focal, c'est-à-dire un signal qui soit le plus proche possible de notre signal « cible » $S(t)$ qui est un vecteur qui contient des zéros partout sauf à la position du point focal désiré : $S(t) = [0, 0, \dots, 0, \delta(t), 0, \dots, 0]$ ($S(\omega) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ dans le domaine de Fourier). On cherche les signaux $E(\omega)$ à émettre depuis la barrette pour obtenir les signaux $S(\omega)$ dans le plan focal.

On sait que si l'on émet $E(\omega)$ depuis la barrette, on obtiendra dans le plan focal

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) \quad (4)$$

On cherche donc $E(\omega)$ tel que

$$S(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) \quad (18)$$

Les signaux $E(\omega)$ solutions de l'équation (18) s'obtiennent par inversion de l'équation:

$$E(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (19)$$

En général, la matrice n'est pas inversible et l'inverse est un inverse « régularisé » noté $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ [Tanter01], nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Ces signaux $E(\omega)$ émis par la barrette, on obtiendra dans le plan focal

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (20)$$

La focalisation par retournement temporel est bonne si le vecteur focalisé $F(\omega)$ est proche du vecteur « cible » $S(\omega)$ originellement émis par le plan focal, c'est-à-dire si l'opérateur $\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}$ est proche de l'identité.

2.3.2. L'inversion du propagateur

a) Si le propagateur est une matrice carrée

On cherche à inverser la matrice $\mathbf{H}(\omega)$. Supposons dans un premier temps que cette matrice est carrée : il y a autant de transducteurs sur la barrette que de points focaux dans le plan focal.

On commence par effectuer une décomposition en valeurs singulières de la matrice, c'est-à-dire que l'on écrit la matrice sous la forme

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{U}(\omega)\mathbf{S}(\omega)\mathbf{V}(\omega)^* \quad (21)$$

avec $\mathbf{S}(\omega)$ une matrice diagonale à valeurs réelles positives, c'est la matrice des valeurs singulières du propagateur $\mathbf{H}(\omega)$, et $\mathbf{U}(\omega)$ et $\mathbf{V}(\omega)$ deux matrices unitaires ($\mathbf{U}^t\mathbf{U}^* = \mathbf{V}^t\mathbf{V}^* = \mathbf{I}$).

L'inverse se calcule alors facilement :

$$\mathbf{H}(\omega)^{-1} = \mathbf{V}(\omega)\mathbf{S}(\omega)^{-1}\mathbf{U}(\omega)^* \quad (22)$$

Or, $\mathbf{S}(\omega)$ étant une matrice diagonale, elle est facile à inverser:

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\omega) & & & & \\ & \lambda_2(\omega) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \lambda_N(\omega) \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{S}(\omega)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1(\omega) & & & & \\ & 1/\lambda_2(\omega) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & 1/\lambda_N(\omega) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Cependant, plus une valeur singulière est faible, plus son inverse va être grand. Lors de ce processus d'inversion, on donne donc beaucoup de poids à des valeurs qui ont peu d'importance et/ou qui ont pu être mal mesurées. En pratique, on choisit de ne pas inverser les valeurs singulières qui sont en-dessous d'un certain seuil et on les remplace par 0 dans la matrice inversée. On obtient donc une matrice inverse régularisée $\hat{\mathbf{S}}(\omega)^{-1}$. Si on classe les valeurs singulières par valeurs décroissantes ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$), cela revient à mettre à zéro les dernières valeurs singulières :

sera très différente : l'inversion de la matrice est hautement dépendante du seuil choisi, et le choix du seuil d'inversion est une préoccupation constante dans l'utilisation du filtre inverse.

b) Si le propagateur n'est pas une matrice carrée

Si le propagateur n'est pas une matrice carrée, on peut quand même en calculer un « inverse » régularisé. Si le propagateur est une matrice $M \times N$ qui, appliqué à un vecteur d'émission de taille N (le nombre de transducteurs de la barrette) associe un vecteur de réception de taille M (le nombre de points de contrôle dans le plan focal), le propagateur inverse sera une matrice $N \times M$ qui « envoie » un vecteur du plan focal vers le plan d'émission. On le calcule en se ramenant à un propagateur carré, via la formule

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} = {}^t\mathbf{H}(\omega)^* [\mathbf{H}(\omega) {}^t\mathbf{H}(\omega)^*]^{-1} \quad (26)$$

[Shen94, Haddadin98]. L'inversion de l'opérateur retournement temporel $\mathbf{H}(\omega) {}^t\mathbf{H}(\omega)^*$ qui apparaît dans l'équation (26) se fait par décomposition en valeurs singulières et régularisation, comme expliqué au a). Une interprétation physique de cette inversion faisant appel à la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de retournement temporel est proposée dans l'appendice 2.A.

D'autres formules sont également envisageables, impliquant toutes l'inversion d'un propagateur carré :

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1} = [({}^t\mathbf{H}^*\mathbf{H})^{-1}] {}^t\mathbf{H}^* \quad (26.2)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1} = {}^t\mathbf{H}^* [(\mathbf{H}^*{}^t\mathbf{H})^{-1}]^* \quad (26.3)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1} = [({}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* {}^t\mathbf{H}^* \quad (26.4)$$

Ces formules ne sont pas exactement équivalentes entre elles et n'ont pas la même signification physique. Nous reviendrons en détail sur l'une d'elles (formule 26.4) au cours du chapitre 6.

2.3.3. L'opérateur $\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}$

L'opérateur $\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}$ est une matrice $M \times M$ qui par construction se rapproche de l'identité. La colonne i de cet opérateur est égale au vecteur $F(\omega)$ que l'on obtient lorsque l'on applique cet opérateur au vecteur contenant un 1 en position i et des 0 partout ailleurs, c'est-à-dire à la composante de Fourier à la fréquence ω du vecteur focalisé que l'on obtient lorsque l'on focalise par filtre inverse sur un dirac temporel émis par la position i .

De même que ce qu'on avait vu au paragraphe 2.2.3. à propos de l'étude de l'opérateur $\mathbf{H}^t\mathbf{H}^*$, on conclut que la matrice $\mathbf{H}_{\text{sum}} = \Sigma_{\omega}[\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}]$ montre la qualité de la focalisation que l'on peut obtenir sur tous les points du plan focal lorsque l'on focalise par filtre inverse. Cette matrice étant construite pour être proche de l'identité, on peut obtenir une très bonne focalisation par filtre inverse (figure 8).

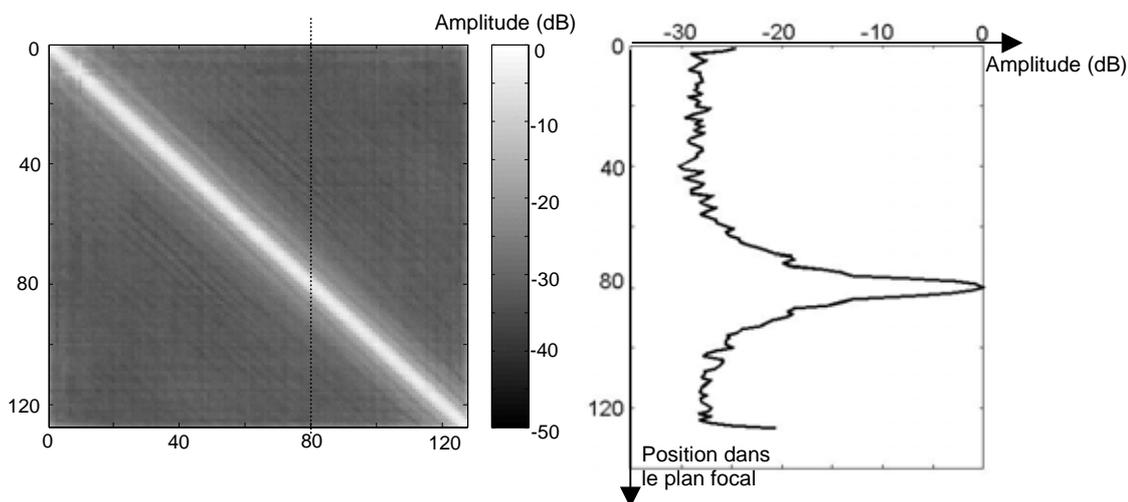


Figure 8. L'opérateur $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ et la focalisation par filtre inverse. A gauche: $\mathbf{H}_{\text{sum}} = \Sigma_{\omega}[\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}]$, l'amplitude est représentée en décibels. A droite, la colonne 80 de \mathbf{H}_{sum} (en pointillés sur l'image de gauche), qui correspond à la répartition d'amplitude dans le plan focal lorsque l'on focalise par filtre inverse sur le 80^{ème} point focal.

La focalisation par filtre inverse est de meilleure qualité (la tache focale est plus fine, les lobes secondaires moins élevés) que la focalisation par retournement temporel. En fait, la focalisation par filtre inverse à travers le crâne est de qualité presque équivalente à la focalisation d'une loi cylindrique préfocalisée à travers un milieu homogène. Le lobe principal temporel est même plus court, et les lobes secondaires plus bas par filtre inverse à travers le crâne que dans l'expérience de référence (figure 9). Cela est dû au fait que le filtre inverse effectue une compensation d'amplitude en fréquences, réhaussant à l'émission les fréquences qui seront atténuées par le crâne [Tanter00].

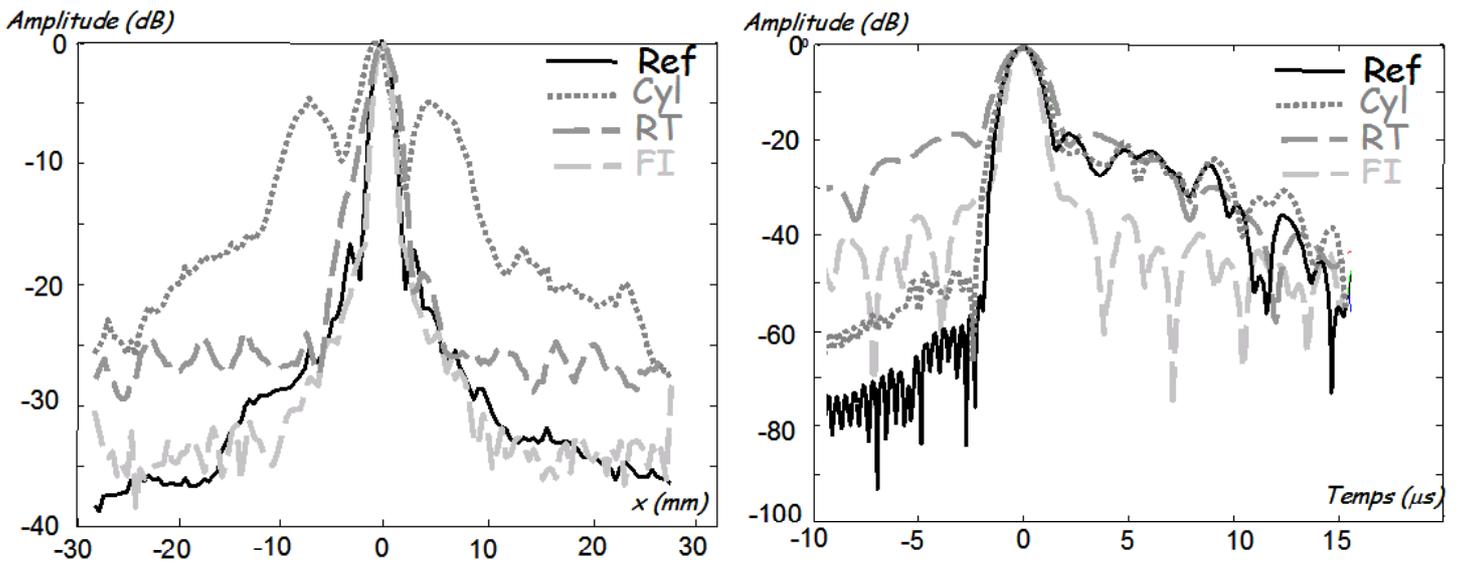


Figure 9. A gauche : scan latéral de la tache focale lorsque l'on focalise sur la position centrale du plan focal par lois cylindrique à travers la paroi crânienne (Cyl), retournement temporel à travers la paroi crânienne (RT), filtre inverse à travers la paroi crânienne (FI), et focalisation cylindrique à travers un milieu homogène (Ref). A droite : scan temporel de la tache focale (on représente l'enveloppe du signal temporel capté au niveau du point focal, en dB). Le scan temporel de la loi cylindrique à travers le crâne n'est pas représenté pour des raisons de lisibilité, il est presque confondu avec le scan temporel de référence.

2.4. Comparaison retournement temporel - filtre inverse

Les deux techniques de focalisation adaptative – retournement temporel et filtre inverse – améliorent la qualité de la focalisation à travers le crâne par rapport à la simple focalisation de lois cylindriques : le maximum de pression est déposé au point désiré dans le plan focal, résolution et contraste sont améliorés. L'effet du filtre inverse est plus spectaculaire que celui du retournement temporel : la résolution et le contraste atteints sont quasiment égaux à ceux que l'on obtient par focalisation de lois cylindriques à travers l'eau (figure 9).

Cependant, le filtre inverse est une technique délicate à mettre en œuvre : la qualité de focalisation par filtre inverse dépend beaucoup de l'inversion du propagateur, donc de la propreté des signaux qui ont été acquis pour le construire (un bon rapport signal/bruit est nécessaire) et du seuil d'inversion (tout procédé de traitement du signal impliquant des divisions est délicat). Le retournement temporel est une technique de focalisation plus robuste.

De plus, si le filtre inverse optimise la qualité de la tache focale (meilleure résolution et meilleur contraste possible, jusqu'à atteindre les limites physiques imposées par la diffraction et la géométrie de l'expérience comme on le vérifie presque sur la figure 9), le retournement temporel, lui, maximise la pression au point focal : les signaux en provenance de tous les transducteurs de la barrette

échographique arrivant en phase au point focal, si chacun des N transducteurs de la barrette échographique est capable d'émettre une amplitude 1, le retournement temporel permet d'avoir au point focal une amplitude N en l'absence d'absorption. Ce n'est pas le cas avec le filtre inverse qui utilise beaucoup de l'énergie envoyée pour créer des interférences destructrices autour du point focal, de façon à limiter l'énergie effectivement déposée en dehors du point focal. Le filtre inverse insonifie donc le point sondé avec moins d'énergie que le retournement temporel. Lors de l'application du filtre inverse pour l'échographie, les signaux réfléchis porteurs d'information seront de plus faible amplitude et le rapport signal/bruit sera diminué d'autant, ce qui est critique pour une technique de focalisation qui nécessite des signaux très propres pour fonctionner correctement.

Le retournement temporel est particulièrement indiqué pour des applications où l'on désire maximiser l'énergie acoustique déposée en un point de l'espace sans avoir besoin nécessairement d'une résolution et d'un contraste optimaux, comme par exemple la nécrose ciblée de tissus cancéreux par ultrasons focalisés de haute intensité [Ebbini91, Clement02, Pernot03], ou la destruction de calculs rénaux [Montaldo02].

2.5. Imagerie par retournement temporel et filtre inverse

Pour imager à travers des milieux aberrateurs, il peut être intéressant d'utiliser les techniques de focalisation adaptative : en améliorant la qualité de la focalisation, on s'attend à améliorer la qualité de l'image. Nous avons vu comment se fait la focalisation en émission par retournement temporel et filtre inverse, nous allons maintenant nous intéresser à l'étape de la focalisation en réception et de la formation d'image [Dorme95, AubryXX].

2.5.1. Imagerie par retournement temporel

Pour construire la ligne j_0 de l'échographie on procède comme indiqué au chapitre 1 : tout d'abord, on envoie depuis la barrette échographiques des signaux fabriqués pour focaliser sur la position j_0 (focalisation en émission). Ces signaux, calculés par retournement temporel, s'écrivent :

$$E(\omega) = \mathbf{H}(\omega)^* S(\omega) \quad (27)$$

$S(\omega) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ étant le vecteur visé, c'est un vecteur nul partout sauf en la position du point focal visé (ici le point j_0). On obtient donc dans le plan focal

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^* S(\omega) \quad (28)$$

La barrette enregistre alors les signaux réfléchis par les réflecteurs situés au point focal j_0 . Soit $\mathbf{r}(\omega)$ la matrice (diagonale) des réflectivités des points focaux, les signaux $R(\omega)$ enregistrés par la barrette s'écrivent :

$$R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)F(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*S(\omega) \quad (29)$$

On convolue enfin les signaux reçus $R(\omega)$ par les signaux émis $E(\omega)$ pour remettre en phase les signaux reçus sur tous les transducteurs (focalisation en réception). On somme enfin les signaux ainsi remis en phase pour obtenir $I_{j_0}(\omega)$, la transformée de Fourier de la ligne j_0 de l'échographie qui s'écrit donc

$$I_{j_0}(\omega) = {}^tE(\omega)R(\omega) = {}^tS(\omega) [\mathbf{H}(\omega)^*{}^t\mathbf{H}(\omega) \mathbf{r}(\omega) \mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*] S(\omega) \quad (30)$$

Cette expression est parfaitement symétrique autour de la matrice de réflectivité $\mathbf{r}(\omega)$, qui est la quantité que l'on veut mesurer. Cette symétrie illustre le fait que l'étape de focalisation en réception (décrite par les termes situés à gauche de $\mathbf{r}(\omega)$ dans (30)) est équivalente à l'étape de focalisation en émission (décrite par les termes situés à droite de $\mathbf{r}(\omega)$ dans (30)) : le fait de convoluer les signaux reçus par les signaux émis du retournement temporel et non simplement les retards permet de remettre en phase, à la réception, *toutes les composantes fréquentielles* des signaux [Dorme95]. On lit encore dans (30) que plus la matrice $\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*$ se rapproche de l'identité, plus la quantité mesurée $I_{j_0}(\omega)$ sera proche de la réflectivité au point visé $r_{j_0j_0}(\omega)$.

2.5.2. Imagerie par filtre inverse

Les signaux focalisant vers le point focal j_0 , calculés par filtre inverse, s'écrivent

$$E(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (19)$$

où $S(\omega) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ est le vecteur visé. Le signal $F(\omega)$ ressenti dans le plan focal s'écrit donc

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (31)$$

et les signaux $R(\omega)$ réfléchis dans le plan focal et captés par la barrette échographique sont

$$R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)F(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (32)$$

De même que pour l'imagerie par retournement temporel, on effectue la focalisation en réception en convoluant les signaux reçus $R(\omega)$ après réflexion par le milieu *par les signaux émis* $E(\omega)$ pour remettre en phase les signaux reçus sur tous les transducteurs [AubryXX]. On somme enfin les signaux ainsi remis en phase pour obtenir $I_{j_0}(\omega)$. La transformée de Fourier de la ligne j_0 de l'échographie par filtre inverse s'écrit donc

$$I_{j_0}(\omega) = {}^t S(\omega) [{}^t \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{r}(\omega) \mathbf{H}(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}] S(\omega) \quad (33)$$

expression parfaitement symétrique autour de la matrice de réflectivité. On lit dans (33) que si la matrice $\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}$ était égale à l'identité (i.e. si l'inversion était parfaite), la quantité mesurée $I_{j_0}(\omega)$ serait exactement égale à la réflectivité au point visé $r_{j_0 j_0}(\omega)$, on aurait alors une image parfaite du milieu.

2.5.3. Résultats

Le filtre inverse permet en théorie d'atteindre à travers des milieux aberrateurs une focalisation aussi bonne sinon meilleure que celle qui est obtenue par focalisation de lois cylindriques à travers un milieu homogène. On peut donc espérer obtenir, même à travers des milieux aberrateurs, des images de qualité équivalente aux images obtenues de manière standard en l'absence d'aberrateur [Aubry02].

Nous avons testé le potentiel du filtre inverse pour l'imagerie à travers des milieux aberrateurs :

- dans un premier temps, nous avons imagé une série de fils immergés dans l'eau à travers une couche d'épaisseur variable d'Ureol, qui induit de fortes aberrations d'amplitude et de vitesse sur les front d'ondes,
- puis, pour nous rapprocher de l'application à l'imagerie médicale, nous avons imagé une série de fils dans un milieu diffusant (un fantôme biologique utilisé par la marque Philips pour tester leurs imageurs), à travers la paroi crânienne.

Les résultats sont présentés figure 10 (image de fils à travers l'Uréol) et 11 (image du fantôme Philips à travers une paroi crânienne). Le filtre inverse parvient effectivement à corriger des aberrations induites par l'Uréol ou la paroi crânienne, restituant à travers un milieu aberrateur une image d'une qualité presque équivalente à celle qui serait obtenue de manière standard en l'absence de milieu aberrateur.

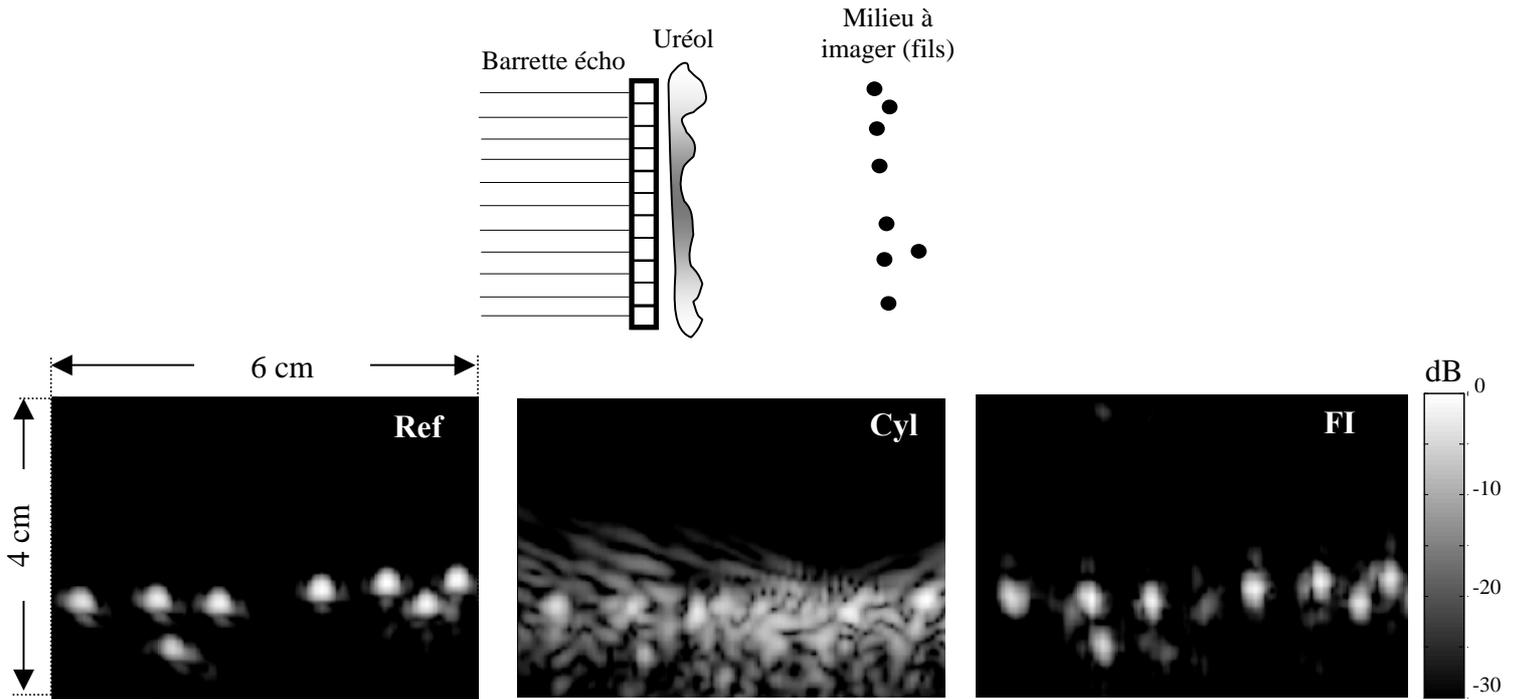


Figure 10. Image de 8 fils métalliques à travers un écran aberrateur d'Uréol. En haut schéma du dispositif expérimental. En bas : a gauche : image de référence par lois cylindriques à travers l'eau ; au centre : lois cylindriques à travers l'Uréol ; à droite : filtre inverse à travers l'Uréol.

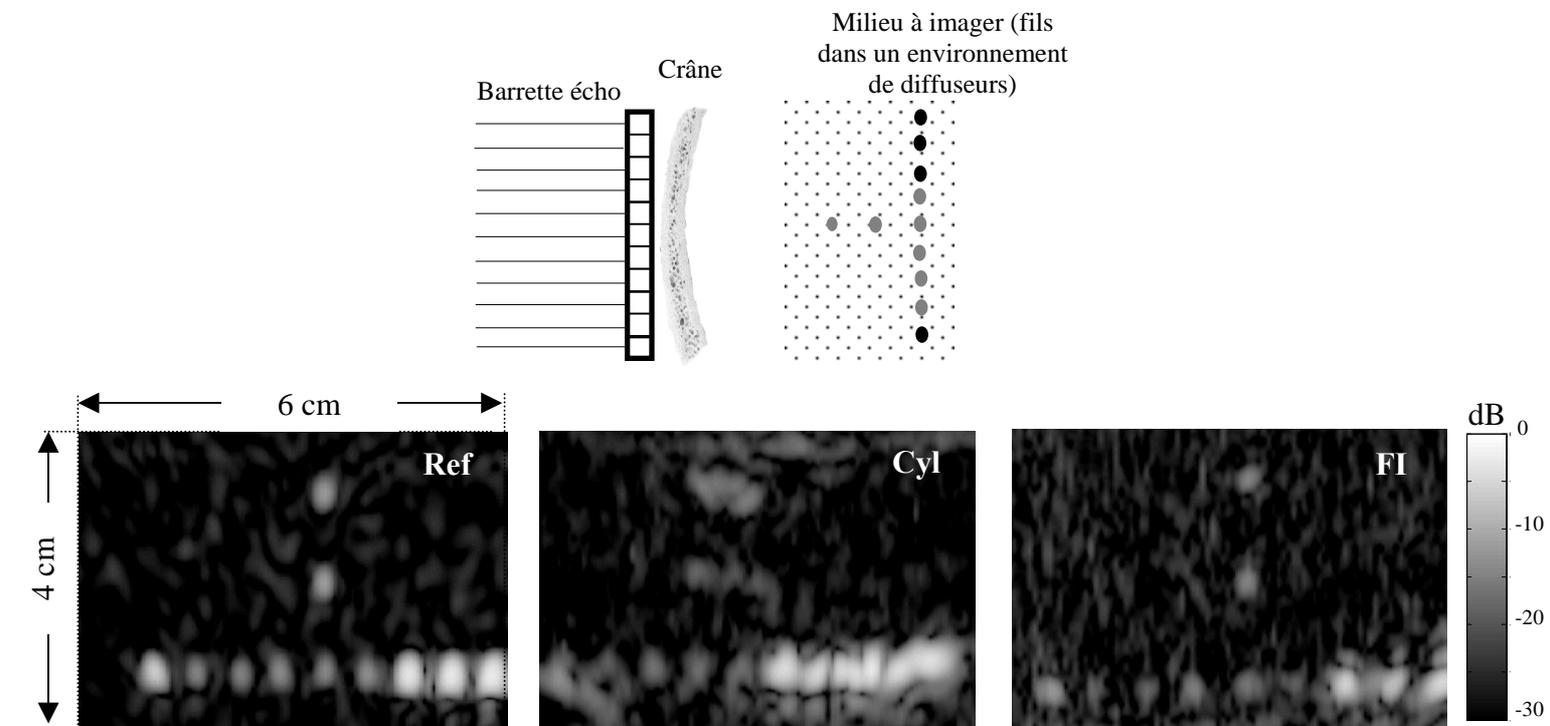


Figure 11. Image du fantôme Philips à travers une paroi crânienne. A gauche : image de référence par lois cylindriques à travers l'eau ; au centre : lois cylindriques à travers le crâne ; à droite : filtre inverse à travers le crâne.

Le filtre inverse reste cependant une technique délicate à mettre en oeuvre. Il arrive que le retournement temporel, bien que sa qualité de focalisation potentielle soit inférieure, donne d'aussi bons résultats que le filtre inverse, comme c'est le cas sur la figure 12.

Si le retournement temporel atteint sa limite théorique, ce n'est pas encore le cas avec le filtre inverse : la qualité de l'image obtenue par filtre inverse est limitée surtout par le faible rapport signal/bruit des signaux utilisés et les éventuelles non linéarités de l'électronique qui commande l'émission-réception des signaux.

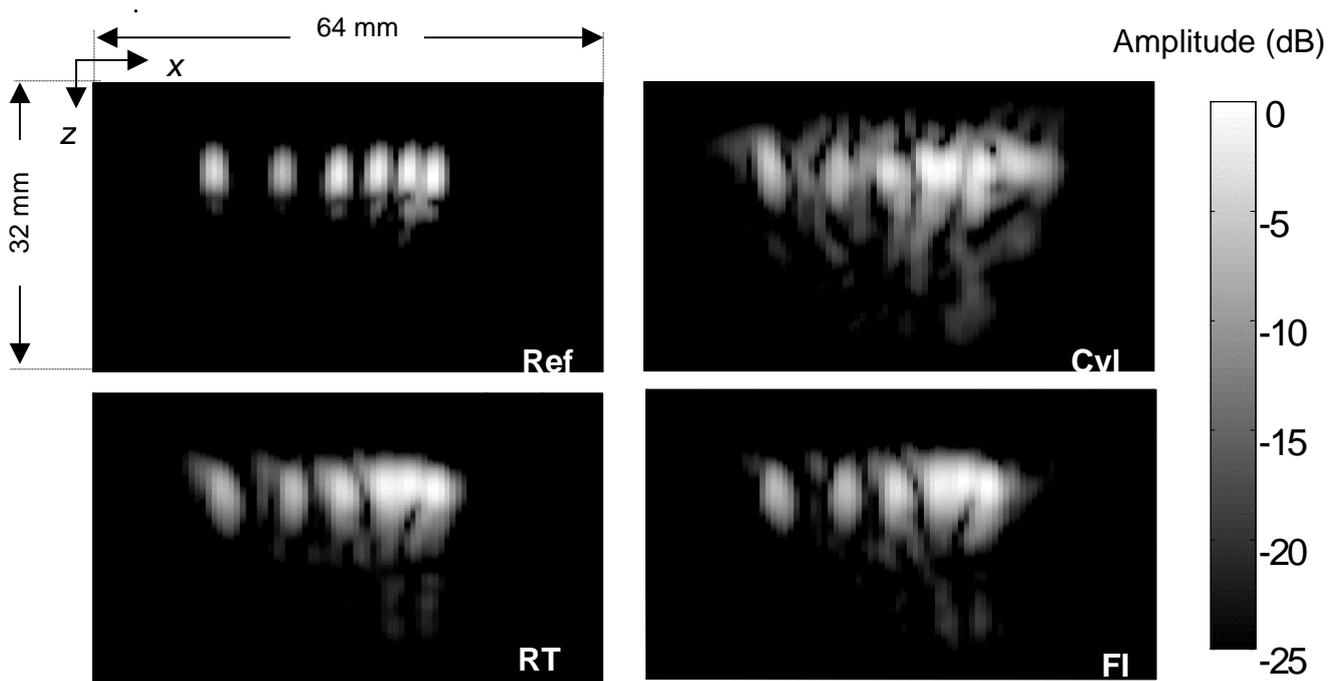


Figure 12. Echographie de 6 fils d'acier immergés dans l'eau par diverses méthodes : Ref : échographie de référence : lois cylindriques à travers l'eau. Cyl : lois cylindriques à travers le crâne. RT : retournement temporel à travers le crâne ; FI : filtre inverse à travers le crâne.

2.6. Conclusions

Nous avons présenté le retournement temporel et le filtre inverse, deux méthodes de focalisation adaptative d'ultrasons. Nous avons utilisé ces méthodes pour l'imagerie échographique adaptative à travers des milieux aberrateurs. Même si la qualité de focalisation est théoriquement plus limitée avec le retournement temporel qu'avec le filtre inverse, les limitations pratiques du filtre inverse (faible dynamique, mauvaise linéarité de l'électronique utilisée) peuvent rendre les deux techniques équivalentes. Retenons que *le filtre inverse n'atteint pas encore ses limites théoriques, les limites rencontrées jusqu'à présent sont d'ordre pratique : le potentiel du filtre inverse pour l'imagerie est plus grand que celui du retournement temporel.*

Il est aussi crucial de remarquer que les deux techniques de focalisation présentées ici sont *intrusives* : pour focaliser dans le plan focal, il est nécessaire de disposer d'un réseau de sources (primaires ou secondaires) ou de capteurs disposés dans le plan focal. Pour faire de l'imagerie du cerveau en utilisant ces techniques adaptatives de focalisation, il serait donc nécessaire de placer des transducteurs ultrasonores dans le cerveau, ce qui n'est pas envisageable en pratique. Dans le chapitre suivant, nous allons nous attacher à montrer comment rendre ces techniques non intrusives.

Références

- [Aubry00] “Towards ultrasonic brain imaging”, JF. Aubry, J. Gerber, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *Proceedings of IEEE Ultrasonics symposium (2000)*.
- [Aubry01] “Optimal focusing by spatio temporal inverse filter. II. Experiments. Application to focusing through absorbing and reverberating media”, JF. Aubry, M. Tanter, J. Gerber, JL. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 110(1), 48-58 (2001).
- [Aubry02] “Focalisation ultrasonore adaptative : application à l’imagerie et à la thérapie du cerveau”, J.F. Aubry, *thèse de doctorat de l’Université Paris 7, (2002)*.
- [AubryXX] “Transmit receive focusing with inverse filter techniques: application to transskull imaging”, JF. Aubry, F. Vignon, M. Tanter, M. Fink, (*J. Acoust. Soc. Am. en préparation*).
- [Borcea02] “Imaging and time reversal in random media”, L. Borcea, G. Papanicolaou, C. Tsogka, J. Berryman, *Inverse problems* 18, 1247-1279 (2002).
- [Clement02] “A non-invasive method for focusing ultrasound through the skull”, G. Clement, K. Hynynen, *Phys. Med. Biol.* 47, 1219-1236 (2002).
- [Derode95] “Robust Acoustic time reversal with high-order multiple scattering”, A. Derode, P. Roux, M. Fink, *Phys. Rev. Lett.* 75(23), 4206-4209 (1995).
- [Dorme95] “Focusing in transmit-receive mode through inhomogeneous media: the time reversal matched filter approach”, C. Dorme, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 98(2), 1155-1162 (1995).
- [Ebbini91] “A spherical-section ultrasound phased-array applicator for deep localized hyperthermia”, E. Ebbini, C. Cain, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 38, 634-643 (1991).
- [Fink92] “Time reversal of ultrasonic fields – Part I: Basic principles”, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 555-566 (1992).
- [Fink03] “Time-reversal acoustics in biomedical engineering”, M. Fink, G. Montaldo, M. Tanter, *Ann. Rev. Biomed. Eng* 5, 465-497 (2003).
- [Folégot03] “Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition”, T. Folégot, C. Prada, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 113(6), 3155-3160 (2003).
- [Haddadin98] “Ultrasonic focusing through inhomogeneous media by application of the inverse scattering problem”, O. Haddadin, E. Ebbini, *J. Acoust. Soc. Am.* 104(1), 313-325 (1998).
- [Lin00] “Quantitative imaging using a time-domain eigenfunction method”, F. Lin, A. Nachman, R. Waag, *J. Acoust. Soc. Am.* 108(3), pt 1, 899-912 (2000).
- [Maast97] “Focusing and imaging using eigenfunctions of the scattering operator”, D. Maast, A. Nachman, R. Waag, *J. Acoust. Soc. Am.* 102(2), pt 1, 715-722 (1997).
- [Montaldo02] “Ultrasound shock wave generator with one-bit time reversal in a dispersive medium, application to lithotripsy”, G. Montaldo, P. Roux, A. Derode, C. Negreira, M. Fink, *Appl. Phys. Lett.* 80(5) (2002).

- [Pernot03] “High power transcranial beam steering for ultrasonic brain therapy”, M. Pernot, JF. Aubry, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *Phys. Med. Biol.* 48, 2577-2589 (2003).
- [Prada02] “Detection and imaging in complex media with the DORT method”, C. Prada, *Topics Appl. Phys.* 84, 107-133 (2002).
- [Prada03] “Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of the time reversal operator interpreted as a covariance matrix”, C. Prada, JL. Thomas, *J. Acoust. Soc. Am.* 114(1), 235-243 (2003).
- [Shen94] “An optimal image operator design technique for coded excitation ultrasound imaging system”, J. Shen, H. Erdogan, E. Ebbini, *proceedings of IEEE Ultrasonics symposium* (1994).
- [Tanter98] “Focusing and steering through absorbing and aberrating layers: application to ultrasonic propagation through the skull”, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 103(5), 2403-2410 (1998).
- [Tanter00] “Time reversal and the inverse filter”, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 108(1), 223-234 (2000).
- [Tanter01] “Optimal focusing by spatio temporal inverse filter. I. Basic principles”, M. Tanter, JF. Aubry, J. Gerber, JL. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 110(1), 37-47 (2001).

Appendice 2.A.

Dans cet appendice, nous allons utiliser la décomposition de l'opérateur de retournement temporel [Folégot03, Prada02, Prada03] pour justifier l'inversion de la formule (26).

Le but est de focaliser à travers un milieu aberrateur d'une barrette vers un réseau de points de contrôle. On appelle \mathbf{H} le propagateur de la barrette vers les points de contrôle (on omet, pour la clarté des notations, la dépendance en fréquence de \mathbf{H})

Notons V_1, V_2, \dots, V_N les vecteurs stables par l'opération de retournement temporel, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, c'est-à-dire que

$$\mathbf{H}^t \mathbf{H}^* V_i = \lambda_i V_i \quad (2A.1)$$

Soit S le vecteur « cible » que l'on veut obtenir sur la barrette 2. On peut le décomposer sur la base des $\{ V_i \}$:

$$S = \sum_i \sigma_i V_i \quad (2A.2)$$

Les signaux E_{RT} à émettre pour focaliser sur S par retournement temporel sont :

$$E_{RT} = {}^t \mathbf{H}^* S = {}^t \mathbf{H}^* \sum_i \sigma_i V_i \quad (2A.3)$$

et le vecteur focalisation F obtenu sur la barrette 2 s'écrit

$$F_{RT} = \mathbf{H} E_{RT} = \mathbf{H} {}^t \mathbf{H}^* \sum_i \sigma_i V_i = \sum_i \lambda_i \sigma_i V_i \quad (2A.4)$$

Ce vecteur focalisation $F_{RT} = \sum_i \lambda_i \sigma_i V_i$ est différent du vecteur focalisation désiré $S = \sum_i \sigma_i V_i$, à cause de la présence des λ_i , d'où l'idée d'émettre plutôt de la barrette 1 le vecteur

$$E_{RT}^{mieux} = {}^t \mathbf{H}^* \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \sigma_i V_i \quad (2A.5)$$

ce vecteur est « compensé des λ_i ».

Dans le plan focal, on reçoit alors

$$\begin{aligned} F_{RT}^{mieux} &= \mathbf{H} E_{RT}^{mieux} = \mathbf{H} {}^t \mathbf{H}^* \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \sigma_i V_i \\ &= \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i \sigma_i V_i \\ &= \sum_i \sigma_i V_i = S \end{aligned} \quad (2A.6)$$

et on retrouve la focalisation désirée.

On remarque au passage que

$$E_{RT}^{mieux} = \mathbf{H}^* \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \sigma_i V_i = \mathbf{H}^* \sum_i (\mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^{-1} \sigma_i V_i \quad (2A.7)$$

car V_i est vecteur propre de $(\mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^{-1}$ associé à la valeur propre $1/\lambda_i$.

Or $\sum_i \sigma_i V_i = S$, (3A.7) donne donc

$$E_{RT}^{mieux} = \mathbf{H}^* (\mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^{-1} S \quad (2A.8)$$

On retrouve les signaux du filtre inverse, calculés avec inversion du propagateur par la formule (26)

3. Vers l'imagerie transcrânienne adaptative non intrusive

Nous avons vu au chapitre précédent deux techniques de focalisation adaptative d'ultrasons à travers des milieux aberrateurs comme la paroi crânienne : le retournement temporel et le filtre inverse. Ces techniques sont intrusives : pour focaliser dans une région de l'espace, il faut disposer de sources acoustiques dans cette région. Cela interdit l'application directe de ces techniques à l'imagerie échographique : pour faire l'image du cerveau, il serait nécessaire d'avoir des sources ultrasonores disposées dans le cerveau.

Dans ce chapitre, on présente un protocole expérimental destiné à rendre le retournement temporel et le filtre inverse non intrusifs, permettant leur usage pour des applications d'imagerie.

3.1. Dispositif expérimental et principe général pour rendre la focalisation non intrusive

Le dispositif expérimental pour l'imagerie échographique adaptative non intrusive du cerveau est présenté figure 1 : deux barrettes échographiques identiques sont placées en regard l'une de l'autre de part et d'autre du crâne. La barrette échographique située à gauche servira à imager l'hémisphère droit, et vice versa.

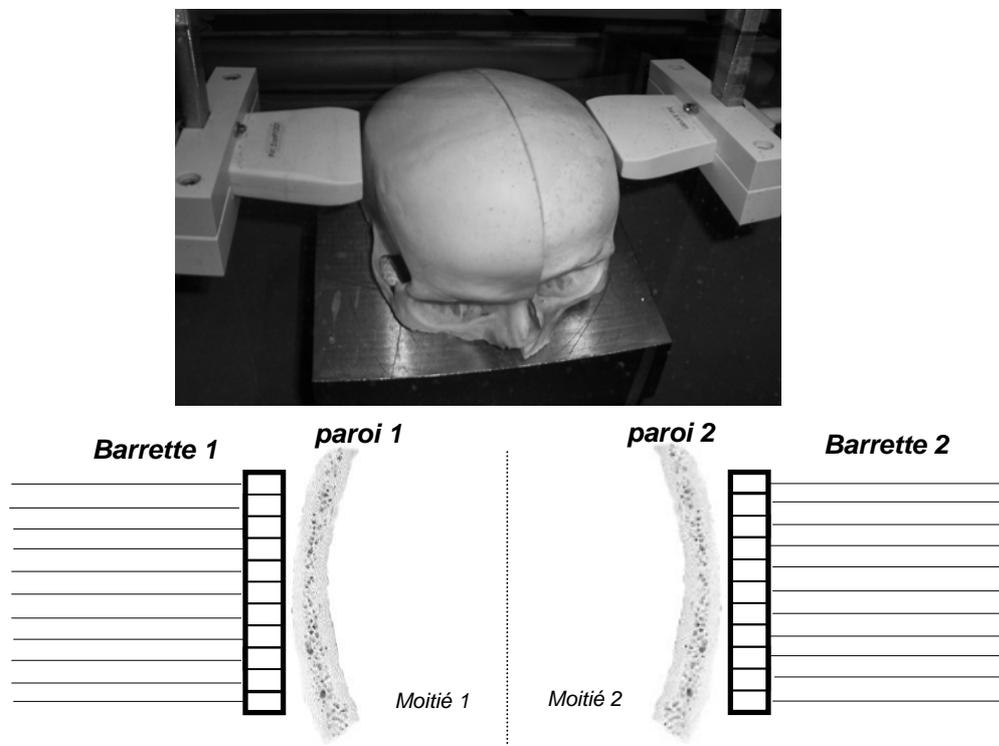


Figure 1 : Photo et représentation schématique du dispositif expérimental pour la focalisation et l'imagerie non intrusives : deux barrettes échographiques sont placées de part et d'autre du crâne. La barrette 1 servira à imager la moitié 2 du cerveau, et vice-versa.

Pour focaliser dans la moitié 2 du cerveau à partir de la barrette 1, le principe général est le suivant (figure 2): on apprend à focaliser par filtre inverse ou retournement temporel sur la barrette 2 à l'extérieur du cerveau (figure 2a). Puis on modifie la loi de retards appliquée aux signaux émis (on « angle ») pour ramener la tache focale à l'intérieur du cerveau (figure 2b).

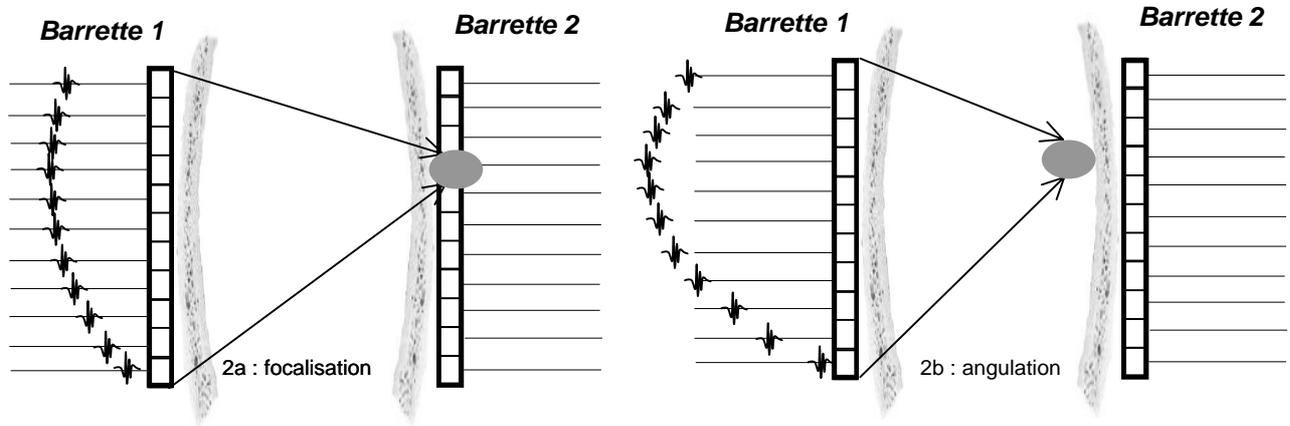


Figure 2. Principe de la focalisation non intrusive. A gauche, étape de focalisation : on focalise de manière adaptative (par retournement temporel ou par filtre inverse) sur la barrette 2. A droite, étape d'angulation : on modifie la loi de retards appliquée pour ramener la tache focale à l'intérieur du cerveau.

La principale difficulté réside maintenant dans l'étape d'angulation : comment modifier les signaux émis par la barrette 1 pour ramener la tache focale à l'intérieur du cerveau ? En effet, modifier la loi de retards de manière simplement géométrique ne suffit pas, puisque la tache focale doit « traverser » la 2^{ème} paroi crânienne, milieu aberrateur dont l'effet sur le front d'ondes est *a priori* inconnu. Nous allons voir ici comment profiter de la configuration expérimentale particulière propre à l'imagerie du cerveau où les aberrateurs sont localisés à proximité des barrettes.

3.2. Imagerie non intrusive par retournement temporel et conjugaison de phase

3.2.1. Focalisation par retournement temporel non intrusif

a) Principe général

Pour rendre la focalisation par retournement temporel non intrusive, on profite du fait que l'effet de la paroi crânienne placée devant la barrette 2 sur la forme des signaux à émettre de la barrette 1 pour focaliser par retournement temporel sur la barrette 2 est faible (figure 3).

Pour caractériser l'effet de la paroi crânienne placée devant la barrette 2 faisons l'expérience suivante : le transducteur j de la barrette 2 émet une impulsion. La barrette 1 capte les signaux propagés. On compare les signaux reçus sur la barrette 1 :

- lorsqu'ils ont traversé deux parois crâniennes (figure 3, à gauche)
- lorsque la paroi crânienne devant la barrette 2 est absente (figure 3, à droite).

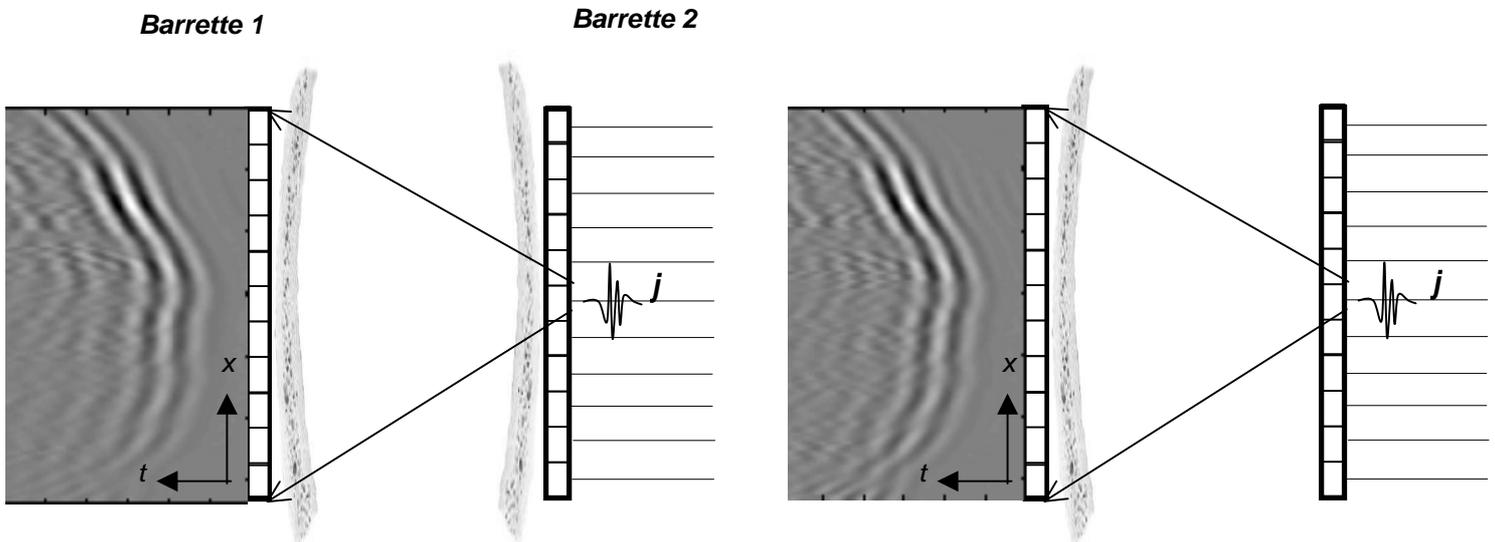


Figure 3. Les signaux reçus sur la barrette 1 lorsque le transducteur j de la barrette 2 émet une impulsion courte. A gauche : les signaux se sont propagés à travers les deux parois crâniennes ; à droite : la paroi crânienne devant la barrette 2 est absente.

On constate que la forme des signaux reçus sur la barrette 1 dans les deux cas est très semblable : le petit bout de crâne situé devant le transducteur de la barrette 2 qui émet l'impulsion n'a qu'une influence *globale* sur les signaux reçus par la barrette 1 : son effet n'est que d'atténuer et de déphaser *globalement* l'onde cylindrique qu'il émet en direction de la barrette 1. Dans le domaine de Fourier, cela se formaliserait par une multiplication globale des signaux par un facteur $A_j \exp(i\varphi_j)$ à la traversée du petit bout de crâne j placé devant le transducteur j de la barrette 2 qui émet le signal. Le module A_j ($A_j < 1$) de ce facteur traduit l'absorption, et sa phase φ_j le déphasage, induits par ce petit bout de crâne sur tout le front d'onde.

Les signaux passés à travers le crâne entier en provenance du transducteur j de la barrette 2 sont donc, à un facteur de phase et d'amplitude près, presque égaux aux signaux qu'on aurait si on faisait la même expérience en l'absence de deuxième paroi crânienne. Si on les retourne temporellement et qu'on les utilise pour focaliser à travers seulement la première paroi crânienne (figure 4), la focalisation sera bonne car les aberrations de phase et d'amplitude induites par la première paroi crânienne sont compensées.

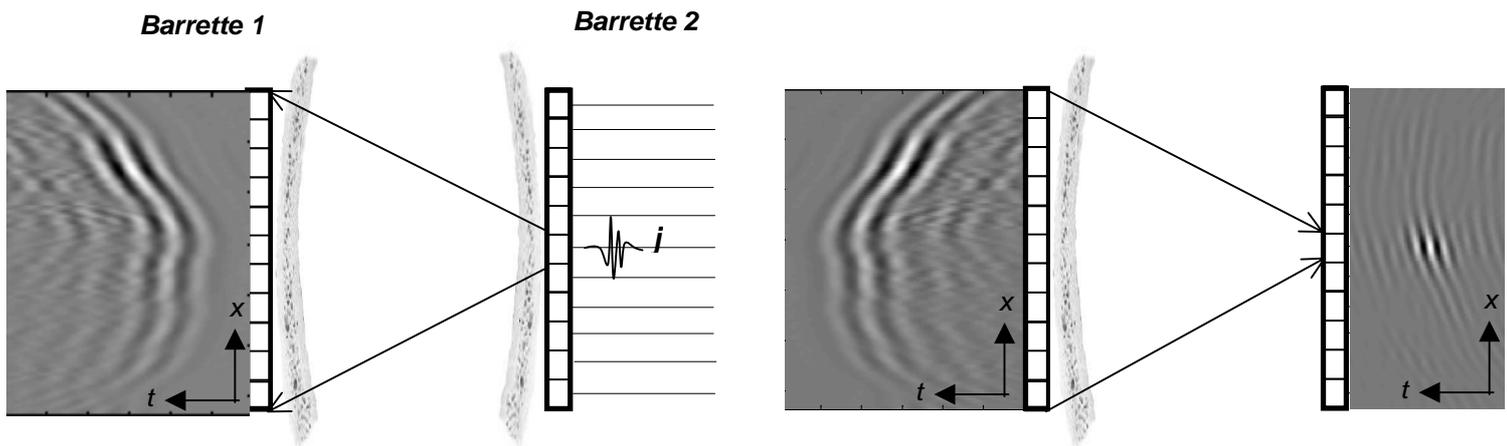


Figure 4. Focalisation à travers un demi-crâne par retournement temporel d'une onde passée à travers un crâne entier. A gauche : le transducteur j de la barrette 2 émet une impulsion en direction de la barrette 1, le signal est enregistré au niveau de la barrette 1. A droite : le signal reçu par la barrette 1 est retourné temporellement et renvoyé cette-fois-ci à travers seulement un demi-crâne, la focalisation reste bonne.

Cependant, le fait de ne pas corriger du facteur de phase et d'amplitude global induit par la deuxième paroi crânienne sur tout le front d'ondes va induire une distorsion en phase et en amplitude de l'image finale. En effet, considérons deux points focaux voisins i et j sur la barrette 2. Focalisons sur chacun de ces points à travers un demi-crâne par retournement temporel d'une onde passée à travers un crâne entier, comme expliqué ci-dessus. Si le petit bout de crâne placé devant le transducteur i est beaucoup plus « rapide » et absorbant que le bout de crâne placé devant le transducteur j , le front d'onde reçu par la barrette 1 en provenance du transducteur i arrivera plus tôt, et avec une amplitude plus faible (figure 5, à gauche). Après retournement temporel, il sera réémis plus tard, avec une amplitude plus faible, et les signaux dans le plan focal arriveront également plus tard et avec une amplitude plus faible (figure 5, à droite).

Supposons maintenant que ces signaux focalisants servent à faire l'image d'un milieu à travers la seule première paroi crânienne, et que la réflectivité du milieu soit la même au niveau du transducteur i et du transducteur j (par exemple on fait l'image d'une plaque parallèle à la barrette 1). Le signal émis pour focaliser sur i étant émis plus tard et avec une intensité plus faible, le signal réfléchi arrivera également plus tard et avec une intensité plus faible que le signal correspondant à j . On aura donc l'impression que le réflecteur placé en position i est plus éloigné de la barrette, et moins réfléchissant, que le réflecteur placé en position j .

Il est donc nécessaire de corriger du facteur de phase et d'amplitude induit par la seconde paroi crânienne sur le front d'ondes pour corriger de tels artefacts lors de la formation de l'image échographique.

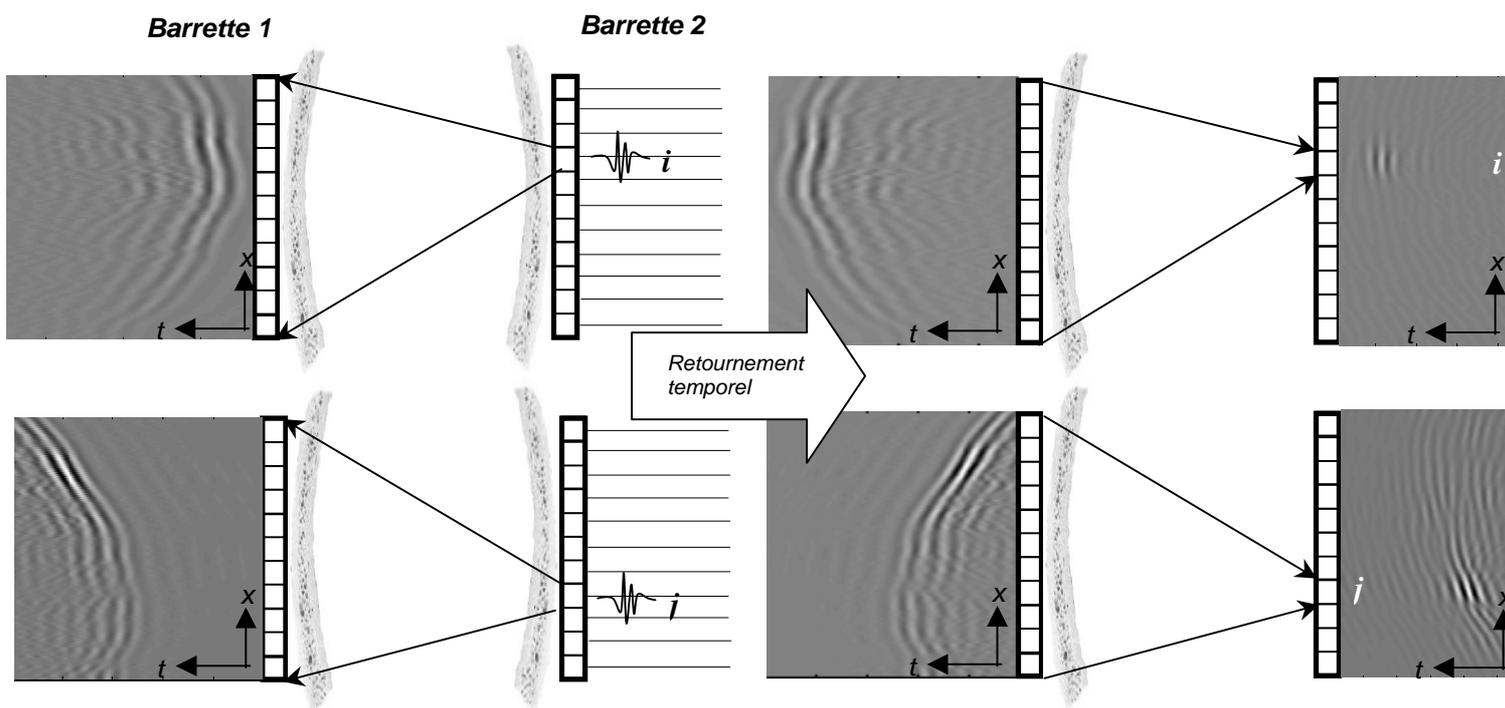


Figure 5. Focalisation à travers un demi-crâne par retournement temporel d'une onde passée à travers un crâne entier. En haut : focalisation sur la position i ; en bas : focalisation sur la position j . A gauche : l'onde est envoyée depuis le transducteur i ou j de la barrette 2, se propage à travers un crâne entier, puis est enregistrée par la barrette 1. A droite, l'onde reçue par la barrette 1 est retournée temporellement puis renvoyée à travers la première paroi crânienne. Les signaux focalisés sur la position i (en haut) arrivent plus tard et avec une amplitude plus faible que les signaux focalisés sur la position j (en bas), ceci est dû au fait que le bout de crâne placé devant le transducteur i de la barrette 2 est plus « lent » et plus absorbant que le petit bout de crâne correspondant à la position j .

b) Correction d'amplitude

On renormalise les signaux reçus sur la barrette 1 ligne par ligne : lors de la phase de focalisation tous les transducteurs de la barrette 1 vont émettre la même amplitude (l'amplitude maximum). Ainsi, quel que soit le point focal, le front d'onde focalisant émis aura la même amplitude globale (figure 6) et on insonifie tous les points focaux avec la même intensité. Un autre avantage de procéder ainsi est que l'on maximise l'énergie envoyée, ce qui est important car la paroi crânienne étant très absorbante il est intéressant d'utiliser au maximum les possibilités de notre échographe pour récupérer un signal significatif après émission, traversée de la paroi crânienne, réflexion dans le plan focal, traversée en sens inverse de la paroi crânienne, et réception.

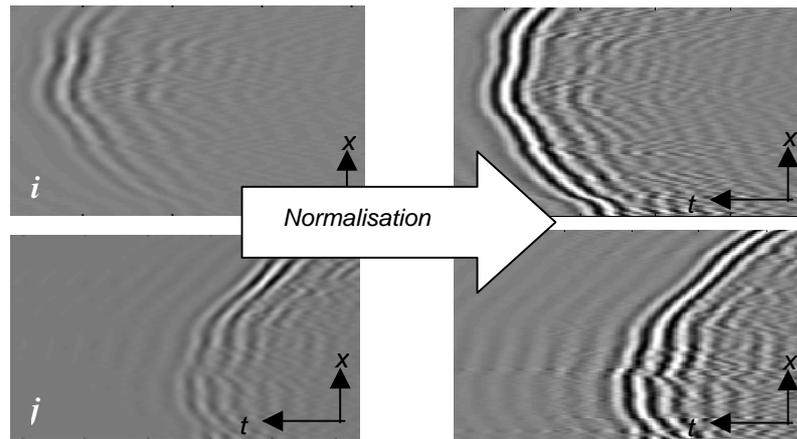


Figure 6. Processus de normalisation pour insonifier tous les points focaux avec la même intensité. En haut les signaux émis pour focaliser sur la position i , en bas sur la position j ; à gauche avant normalisation (les signaux pour focaliser sur la position i sont plus faibles), à droite après normalisation ligne par ligne.

c) Correction de phase

On commence par appliquer une loi de retards cylindrique aux signaux reçus par la barrette 1 en provenance du transducteur i de la barrette 2, de manière à compenser des retards géométriques : si la première paroi crânienne n'était pas aberratrice, les signaux reçus sur tous les transducteurs de la barrette 1 seraient en phase après cette compensation des retards (figure 7).

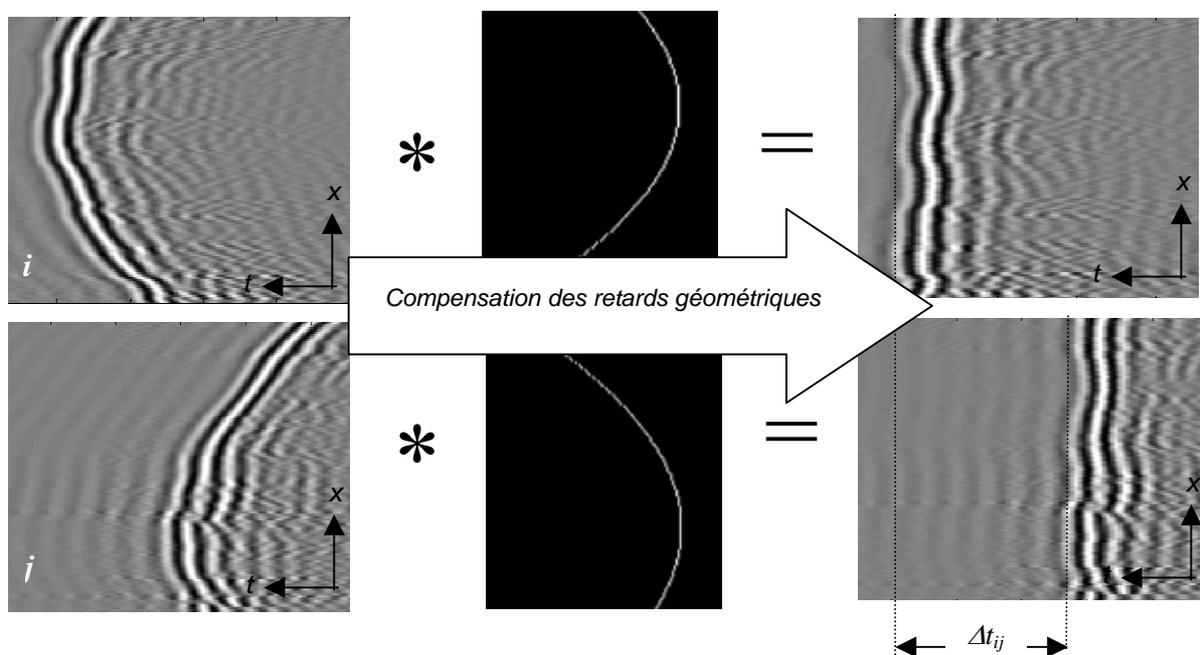


Figure 7. Processus de compensation des retards géométriques. Les signaux reçus (à gauche) sont déconvolués par les retards géométriques cylindriques (au centre) et sont ainsi remis en phase (à droite) ; la seule variabilité de phase qui subsiste entre les transducteurs est due à la traversée de la première paroi crânienne.

Le décalage temporel global Δt_{ij} (figure 7) des signaux venus du point i de la barrette 2 par rapport aux signaux venus du point j vient des différences de temps de traversée des petits bouts de crâne situés devant les transducteurs i et j de la barrette 2. Pour l'éliminer, on décale encore les signaux obtenus de la valeur moyenne du décalage temporel rémanent sur les transducteurs (figure 8). Le signal reçu par le transducteur k de la barrette 1 (originellement reçu à l'instant t_k) est donc recentré temporellement à un temps t'_k tel que

$$t'_k = t_k - \langle t \rangle = t_k - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_n \quad (1)$$

où t_n est l'instant auquel le transducteur n de la barrette 1 reçoit un signal en provenance d'un transducteur de la barrette 2.

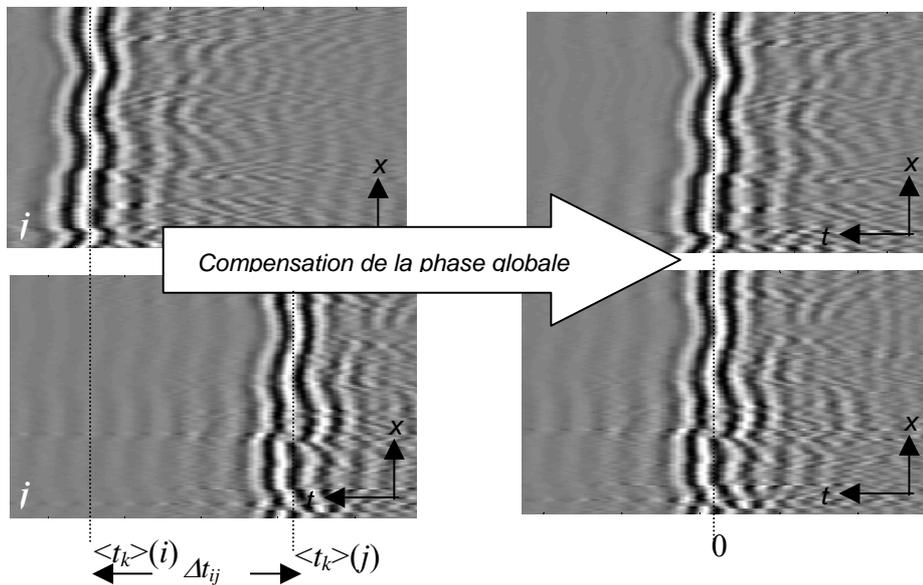


Figure 8. Compensation du déphasage global entre les signaux correspondant aux transducteurs i et j .

A ce stade, les signaux correspondant aux transducteurs i et j ont la même amplitude globale et le même déphasage global, seule subsiste une variabilité inter-éléments de la phase qui va servir à corriger des aberrations de phase induites par la première paroi crânienne. Pour focaliser ces signaux à l'intérieur du cerveau, il faut maintenant les rendre convergents pour ramener la tache focale plus près de la barrette émettrice (anguler), cela se fait en leur appliquant de nouveau une loi de retards cylindrique (figure 9).

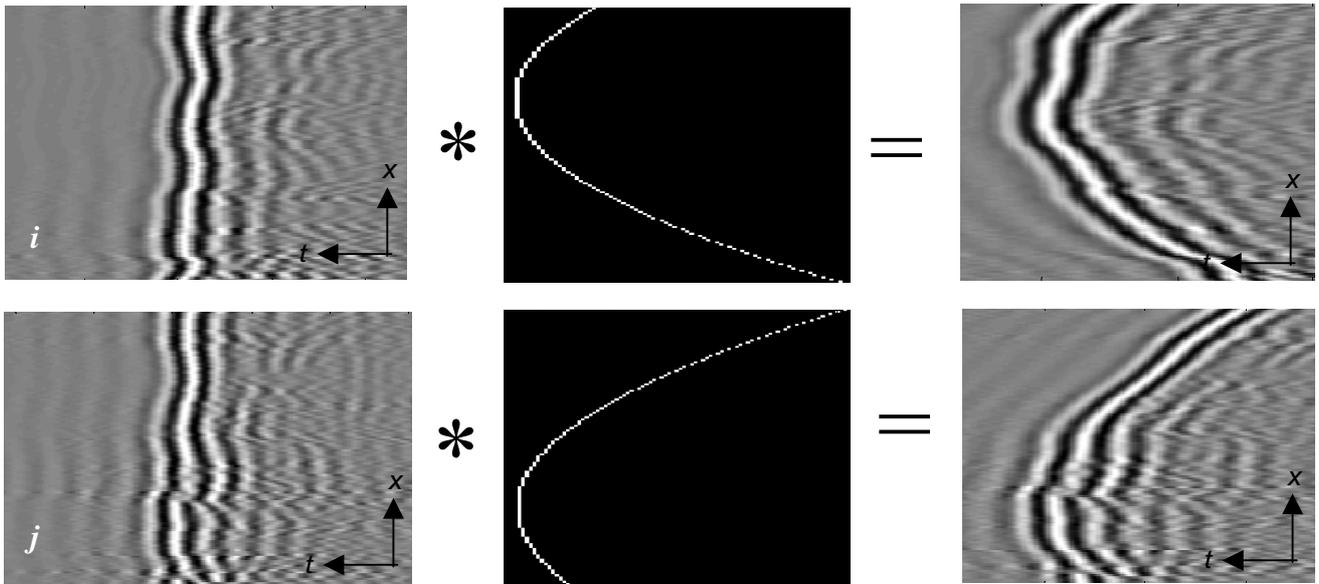


Figure 9. Application d'une loi de retards cylindrique pour avoir des signaux focalisant à l'intérieur du cerveau à travers la première paroi crânienne. En haut, pour focaliser sur une position i' (en face du transducteur i de la barrette 2 mais avant la deuxième paroi crânienne, donc à l'intérieur du cerveau), en bas sur une position j' (en face du transducteur j de la barrette 2 mais avant la deuxième paroi crânienne).

Les signaux ainsi angulés, une fois réémis par la barrette 1, focaliseront à l'intérieur du cerveau. Ils ont été calculés de manière non intrusive : le dispositif expérimental utilisé ne met pas en jeu de transducteurs à l'intérieur du crâne.

3.2.2. Focalisation par conjugaison de phase non intrusive

Le principe est semblable à la focalisation par retournement temporel non intrusif, et une variante en avait été pour la première fois suggérée par Philips dès 1975 [Philips75, Miller80, Ylitalo89]. C'est simplement la forme temporelle des signaux émis qui diffère : l'idée est d'envoyer pour imager le milieu les signaux les plus courts possible, pour améliorer au maximum la résolution temporelle.

En effet, les signaux émis par un transducteur de la barrette 2 et captés par la barrette 1 après traversée de deux parois crâniennes sont relativement longs (figure 10) : d'abord parce qu'ils sont passés à travers deux parois crâniennes, où diffusion et réflexions multiples aux interfaces les ont allongés, mais aussi parce qu'ils sont passés deux fois à travers les transducteurs : la bande passante des signaux émis a ainsi été convoluée deux fois par celle des transducteurs et a donc été réduite d'autant, ce qui a pour effet d'allonger le signal temporel. Renvoyer les signaux tels quels, longs, nuira à la résolution temporelle.

L'idée est donc d'utiliser les signaux de focalisation obtenus par retournement temporel, de venir détecter leur phase (la phase des signaux à la fréquence centrale, par exemple), puis de venir convoluer ces phases par un signal court temporellement, comme schématisé sur la figure 10.

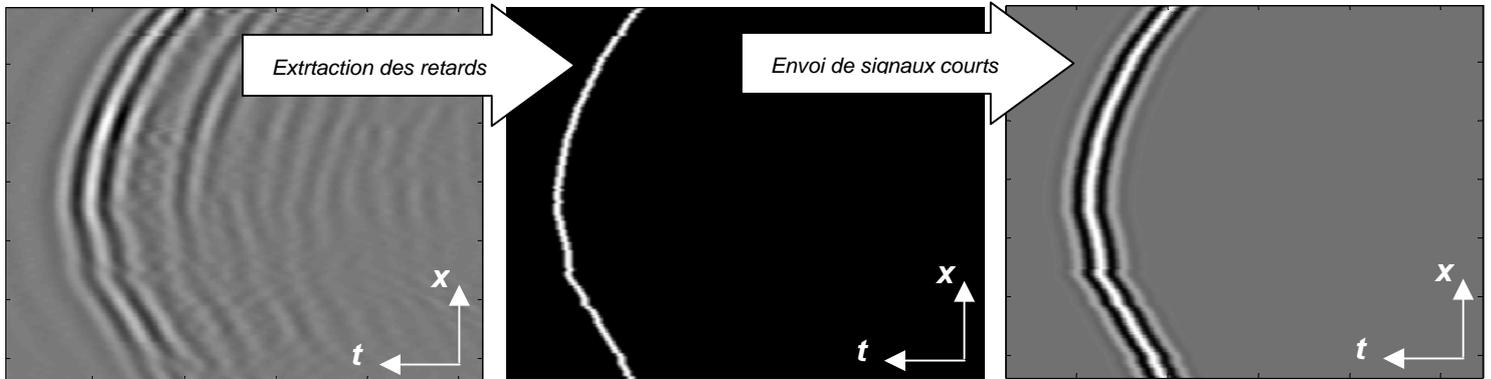


Figure 10. Amélioration de la résolution temporelle en réduisant la durée des signaux de focalisation. A gauche ; le vecteur focalisation calculé par retournement temporel d'un signal passé à travers deux parois crâniennes. Au milieu : on vient extraire la phase de ces signaux à la fréquence centrale. A droite : on convolue cette phase par un signal court.

Pour la focalisation en réception, au lieu de convoluer les signaux reçus par les signaux émis pour les remettre en phase on leur applique simplement les retards que l'on a extrait. Cela améliore encore la résolution et le contraste dans la dimension temporelle (figure 11).

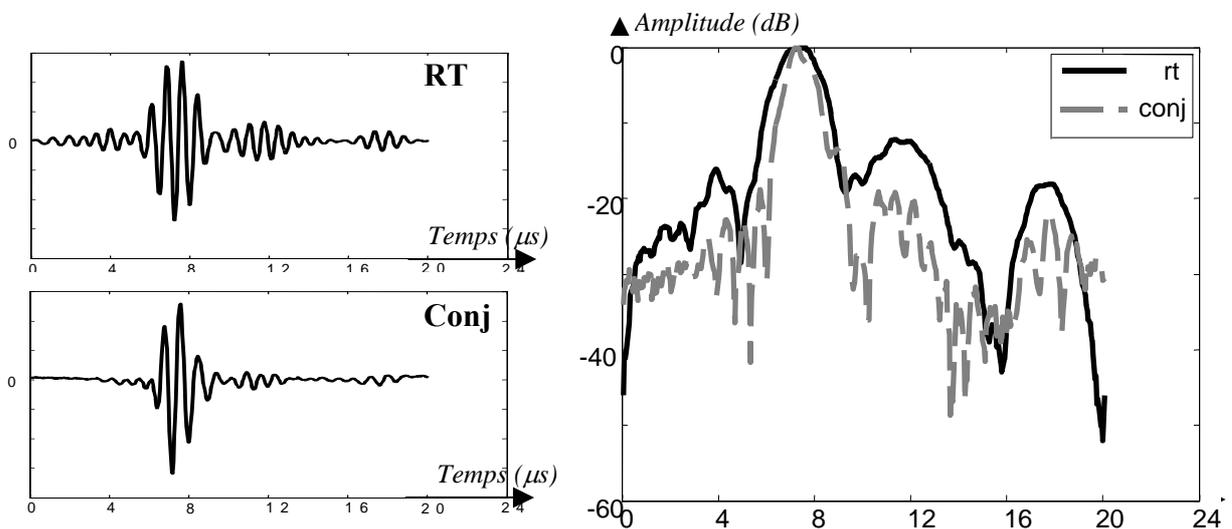


Figure 11. Résolution temporelle des techniques de retournement temporel et conjugaison de phase. A gauche, on représente une ligne de l'image échographique d'une interface plane. RT : émission des signaux du retournement temporel et convolution des signaux réfléchis par les signaux émis, conj : émission de signaux courts temporellement et convolution par les retards. A droite, on représente sur le même graphe, en dB, l'enveloppe des signaux correspondants.

La principale difficulté de la technique de conjugaison de phase est l'extraction automatique des retards. La technique la plus précise et la plus robuste qui ait été testée est basée sur l'extraction de la phase des signaux à la fréquence centrale. Mais pour reconstruire à partir de cette phase des signaux focalisants, il est nécessaire de dérouler cette phase. L'opération de déroulement de la phase est effectuée par un programme automatique qui utilise également l'amplitude des signaux associés à la phase [Costantini96] pour définir un critère de confiance des signaux : plus l'amplitude des signaux est forte, plus le déroulement est efficace. En général, ce programme déroule bien la phase, mais il reste parfois des sauts de phase là où les signaux perçus sont faibles.

Nous avons utilisé la conjugaison de phase non intrusive pour focaliser à travers la paroi crânienne. Il est possible, *in vitro*, de scanner la pression obtenue dans le plan focal, en ôtant la deuxième paroi crânienne. On peut donc représenter le signal reçu dans le plan focal lorsque l'on focalise par conjugaison de phase non intrusive, ou par simple loi cylindrique, à travers la première paroi crânienne. Les taches focales ainsi obtenues, par le filtre inverse non intrusif et les lois cylindriques, sont représentées sur la figure 12 lorsque le point focal est choisi au centre du plan focal 1'. On représente aussi, comme référence, la tache focale que l'on obtient par loi cylindrique en l'absence de paroi crânienne.

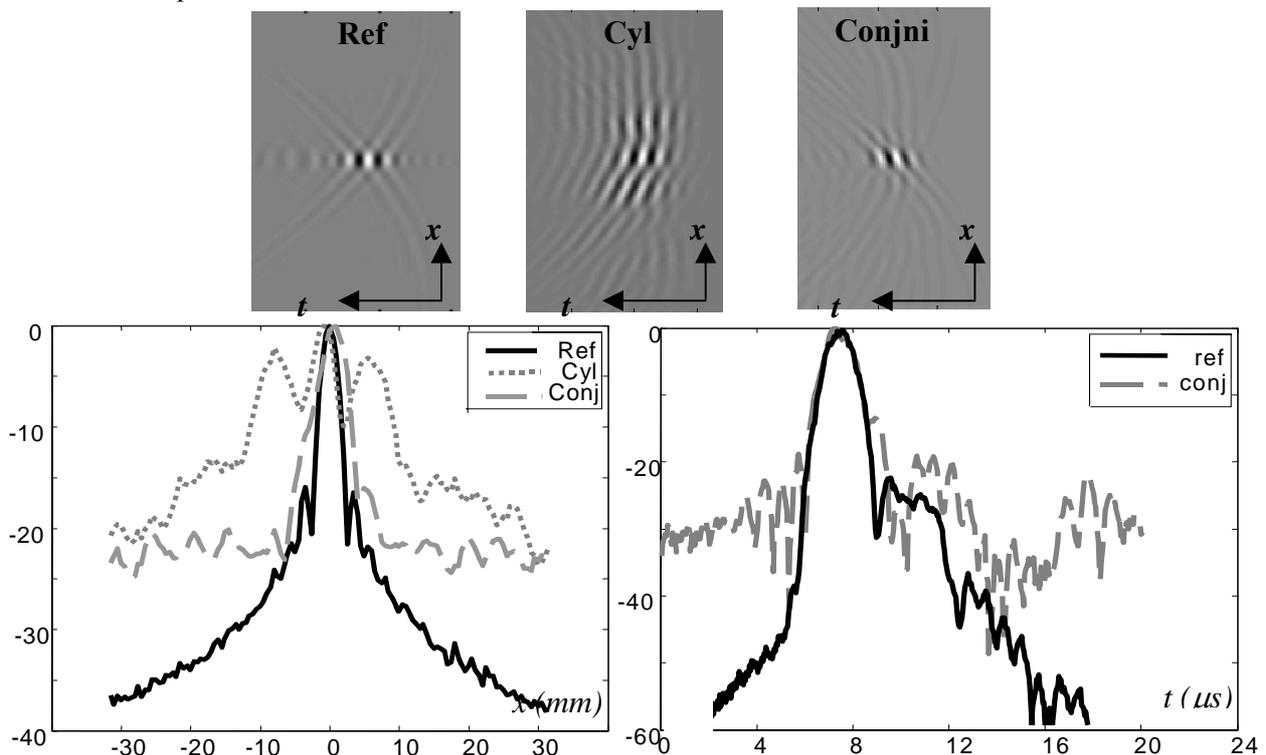


Figure 12. En haut : Bscan des taches focales lorsque l'on focalise en position centrale dans le plan 1' : par lois cylindriques à travers un milieu homogène (Ref), par lois cylindriques à travers le crâne (Cyl), par conjugaison de phase non intrusive à travers le crâne (Conjni). En bas : à gauche, la focalisation latérale correspondante, à droite la focalisation temporelle correspondante (la focalisation temporelle par loi cylindrique à travers le crâne, non représentée ici, est pratiquement confondue avec la focalisation de référence).

La conjugaison de phase non intrusive améliore la focalisation et le contraste latéraux, on élimine notamment les deux lobes latéraux à -3 dB de la focalisation cylindrique à travers le crâne.

Pour faire de l'imagerie transcrânienne, il est nécessaire de focaliser sur une barrette de points dans le plan focal, et non seulement sur le point central. In vitro, il est possible de mesurer la focalisation latérale lorsque l'on focalise sur 128 positions en regard de chacun des transducteurs de la barrette, dans le plan focal. Les 128 taches focales obtenues par conjugaison de phase non invasive et lois cylindriques à travers le crâne, ainsi que les 128 taches focales de référence obtenues par focalisation de lois cylindriques à travers l'eau, sont présentées figure 13.

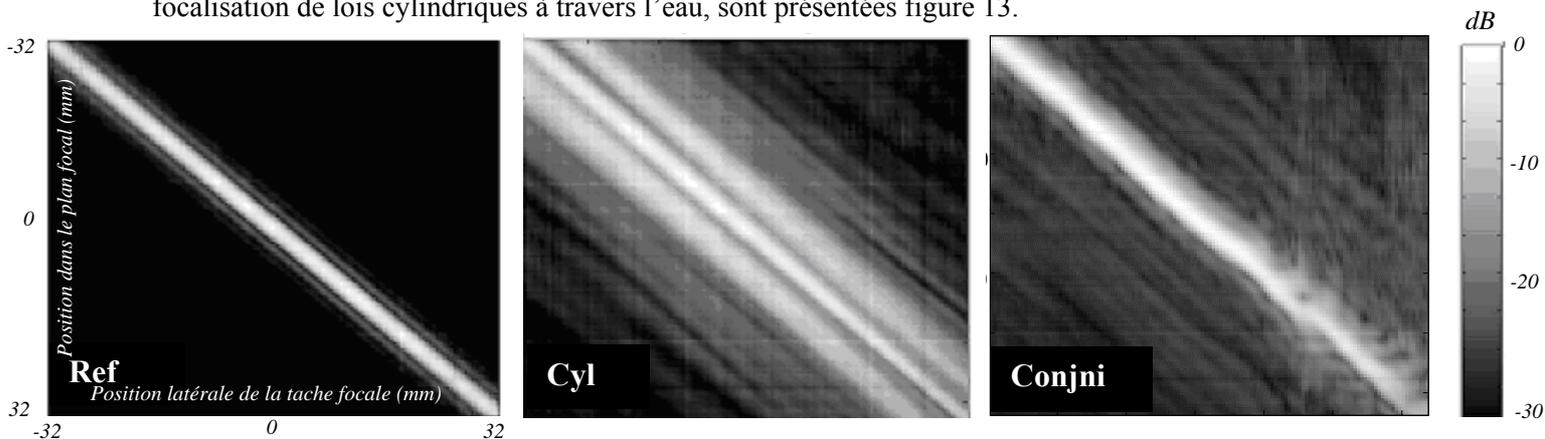


Figure 13. Focalisation latérale dans le plan $1'$ par lois cylindriques à travers un milieu homogène (Ref), lois cylindriques à travers le crâne (Cyl), conjugaison de phase non intrusive à travers le crâne (Conjni). Sur la colonne i de chaque matrice est représentée en niveau de gris (en dB) l'amplitude maximale qui arrive sur tous les points de contrôle du plan $1'$. La colonne centrale de chacune des matrices ci-dessus correspondent aux courbes de focalisation latérale de la figure 12.

3.2.3. Imagerie par conjugaison de phase non intrusive

Nous avons utilisé la conjugaison de phase non intrusive pour faire l'image *in vitro* de trois fils métalliques placés derrière la paroi crânienne. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 14 : le crâne est entouré de deux barrettes échographiques 1 et 2. On apprend grâce à la technique expliquée ci-dessus à focaliser depuis la barrette 1 dans la zone hachurée du cerveau dont on fait l'échographie à travers la paroi crânienne.

L'image obtenue est présentée sur la figure 15d. On la compare à une échographie de référence, qui est l'échographie que l'on aurait obtenu par une méthode standard d'échographie en l'absence de la boîte crânienne (figure 15a). On représente également figure 15b l'image obtenue des trois fils à travers le crâne, en utilisant la méthode de focalisation standard (non adaptative), et dont notre but est donc d'améliorer la qualité, et figure 15c l'échographie obtenue par la technique de conjugaison de phase intrusive, pour voir ce que l'on perd en passant au non intrusif.

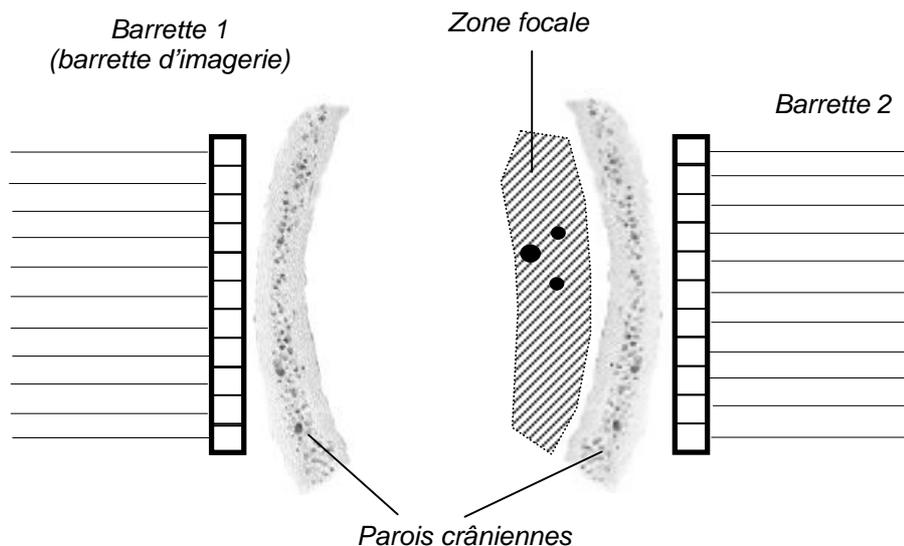


Figure 15. Le dispositif expérimental pour l'échographie non intrusive de trois fils placés à l'intérieur du cerveau. On apprend à focaliser dans toute la zone hachurée à partir de la barrette 1. On place dans la zone de focalisation trois fils métalliques dont on va faire l'échographie à partir de la barrette 1, à travers la première paroi crânienne.

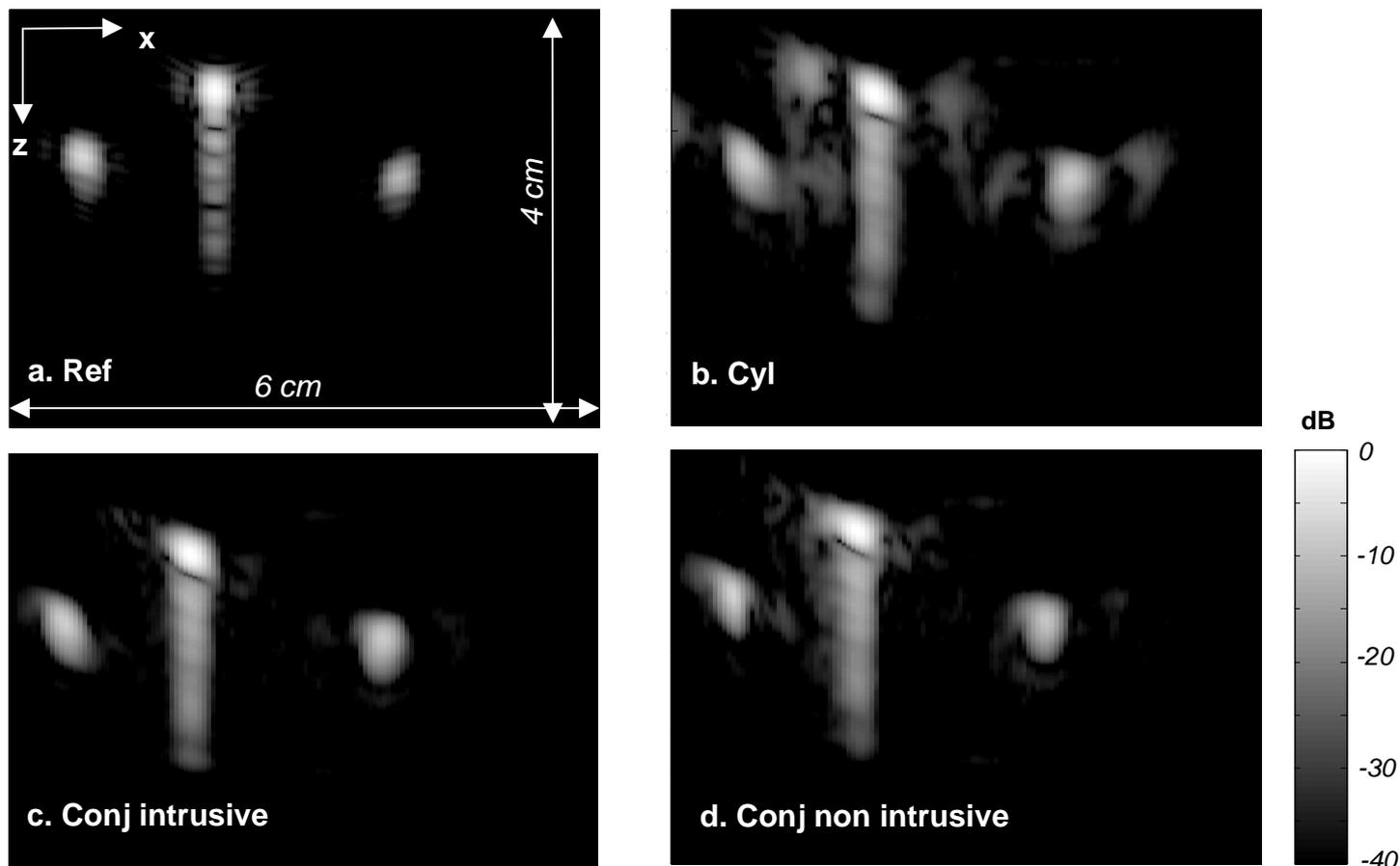


Figure 15. Echographies de trois fils métalliques. a : échographie de référence : échographie standard par émission de lois cylindriques à travers l'eau. b : échographie standard à travers le crâne. c : conjugaison de phase intrusive à travers le crâne. d : conjugaison de phase non intrusive à travers le crâne.

Les trois fils apparaissent distinctement sur toutes les échographies. Le fil du milieu est suivi d'une traînée, cela est dû au fait qu'il est plus gros que les deux autres et que les ultrasons entrent en résonance avec lui, donnant lieu à un signal plus intense et plus étalé dans le temps (les ultrasons réfléchis par le fil sont ceux qui sont réfléchis directement, puis ceux qui ont fait un tour du fil avant de se réfléchir, puis deux tours de fil, etc...). Cet artefact, qui est dû à la nature du réflecteur, est présent sur toutes les échographies, même sur l'échographie de référence. Les aberrations induites par la paroi crânienne sur l'image sont visibles sur l'échographie standard à travers le crâne ; notamment deux répliques de part et d'autre de chaque fil sont dues aux deux lobes latéraux importants qui présentent les taches focales. La focalisation adaptative par conjugaison de phase (intrusive et non intrusive) élimine ces répliques en éliminant les lobes secondaires des taches focales.

Nous utilisons la même méthode pour faire l'image d'une structure relativement plate et de réflectivité homogène dans le cerveau, pour voir si l'on corrige bien des aberrations globales de phase et d'amplitude induites par la deuxième paroi crânienne (figure 16). Les échographies sont présentées sur la figure 17 : échographies standard par lois cylindriques à travers un milieu non aberrateur puis à travers la paroi crânienne (17a, 17b), échographie par conjugaison de phase intrusive (17c) et non intrusive (17d).

Les échographies transcrâniennes adaptatives, par conjugaison de phase intrusive et non intrusive, sont de qualité comparable : on améliore l'image par rapport à l'échographie transcrânienne non adaptative, mais on n'atteint pas la qualité de l'échographie de référence. La phase est bien compensée (l'image de l'interface plate de l'objet, par conjugaison de phase intrusive, est raisonnablement plate), en revanche l'amplitude n'est pas parfaitement compensée : la partie gauche de l'objet apparaît moins brillante que la partie droite sur toutes les échographies transcrâniennes alors que l'objet est symétrique comme on le vérifie sur l'échographie de référence. Cet artefact est dû au fait que pour imager la gauche ou la droite de l'objet, le front d'ondes focalisant ne traverse pas exactement la première paroi crânienne de la même façon, même si les différences sont faibles (figure 18). Une petite différence d'angle de vue de la première paroi crânienne lorsque l'on focalise sur la position i ou j est suffisante pour créer des variations d'amplitude qui ne sont pas corrigées. Cet effet apparaît pour toutes les échographies faites à travers la paroi crânienne (même l'échographie par conjugaison de phase intrusive). Il est d'autant plus fort que la barrette d'imagerie est plus éloignée du crâne : en pratique on essaye de maintenir la barrette d'imagerie le plus proche possible de la paroi crânienne.

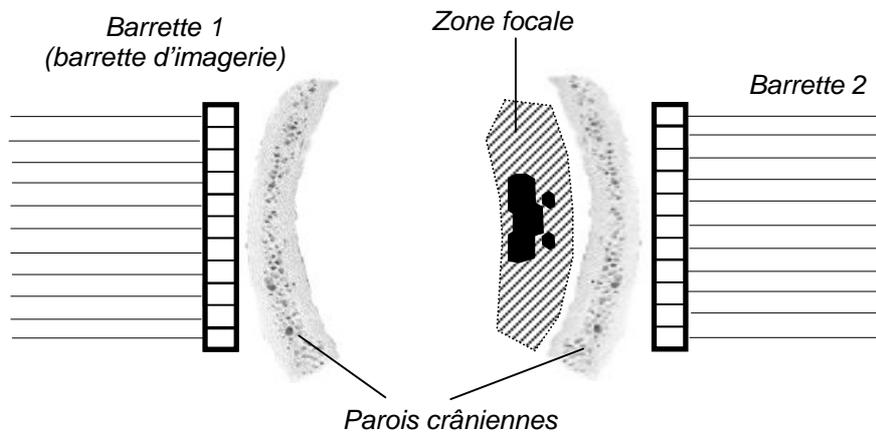


Figure 16. dispositif d'échographie pour imager une structure relativement plate et de réflectivité homogène (objet en noir dans la partie hachurée).

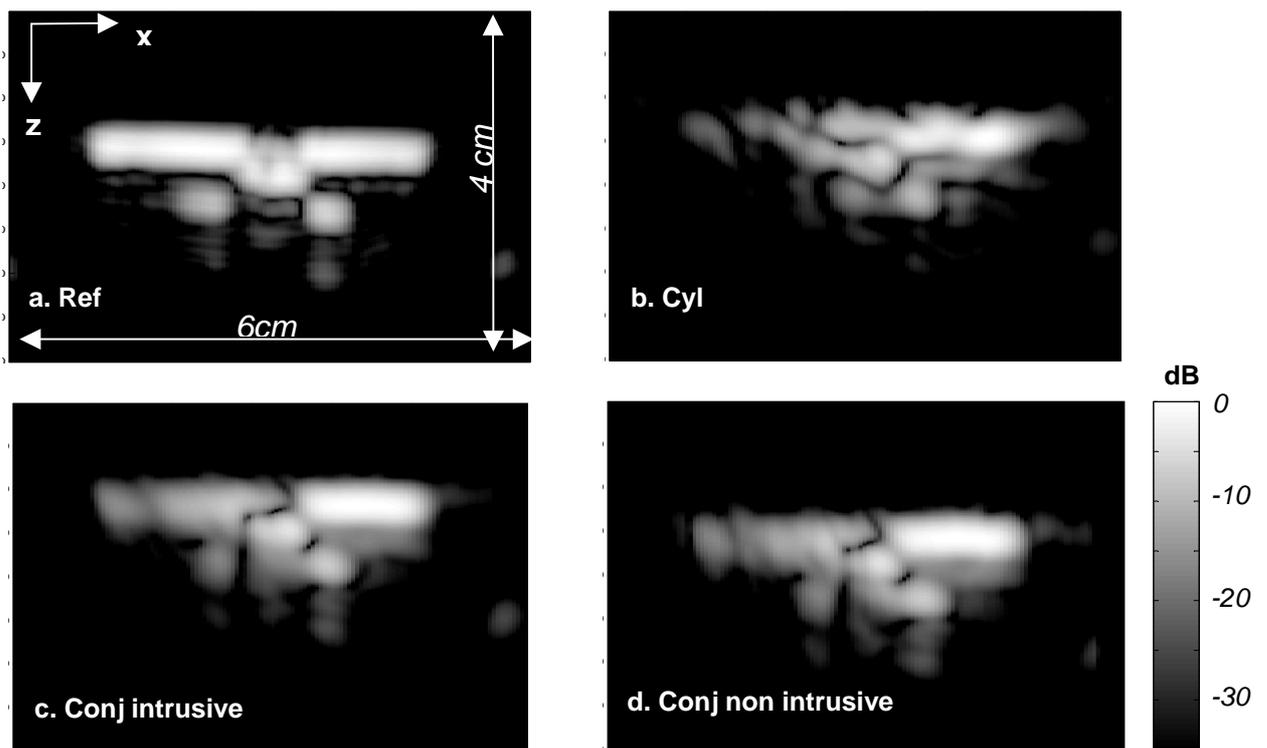


Figure 17. Echographies d'un objet plat et de réflectivité homogène. a : échographie de référence : lois cylindriques à travers l'eau, b : lois cylindriques à travers le crâne. c : conjugaison de phase intrusive à travers le crâne. d : conjugaison de phase non intrusive à travers le crâne.

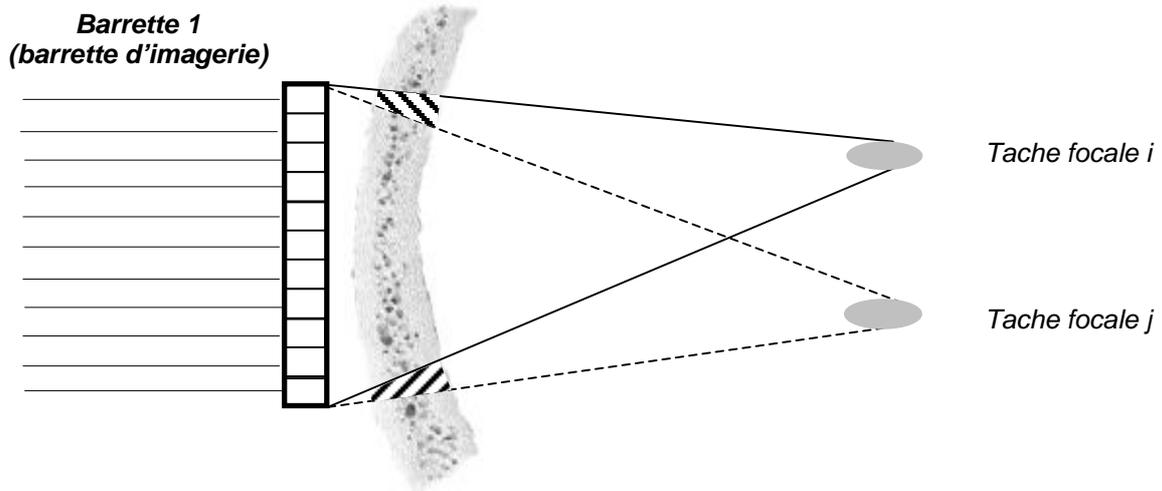


Figure 18. focalisation transcrânienne sur deux positions i et j dans le plan focal. En hachurés sur la paroi crânienne (en bas) la partie du crâne traversée par les ultrasons lorsque l'on focalise en position j et qui n'est pas traversée lorsque l'on focalise en position i . En hachurés inversés (en haut) la partie de crâne traversée par les ultrasons lorsque l'on focalise en position i et qui n'est pas traversée lorsque l'on focalise en position j .

3.2.4. Conclusion

La conjugaison de phase (ou le retournement temporel) non intrusive améliore la qualité d'images échographiques structurales transcrâniennes : on gagne en contraste et en résolution, et on corrige des distortions de l'image. Cependant :

- Il reste encore des aberrations non corrigées dues à la paroi crânienne en regard de la barrette qui fait l'imagerie (figures 17, 18).

- Le retournement temporel assure que toutes les composantes fréquentielles des signaux retournés temporellement arrivent en phase au point focal [Fink92]. Ce n'est pas vrai avec la conjugaison de phase : la seule composante fréquentielle rigoureusement remise en phase au point focal est la fréquence centrale. Si le milieu est dispersif, la focalisation des autres composantes fréquentielles peut être mauvaise, dégradant la focalisation latérale: en utilisant la conjugaison de phase, on gagne en résolution temporelle mais on perd en résolution latérale.

- La technique de conjugaison de phase utilise un algorithme de déroulement de la phase qui n'est fiable que si les signaux auquel on l'applique ont un bon rapport signal/bruit. Pour des signaux reçus sur une barrette après traversée de deux parois crâniennes, il subsiste souvent des sauts de phase. D'autre part, le crâne est tellement aberrateur qu'il induit parfois des sauts de phase de plus de π entre les signaux reçus par deux transducteurs voisins, l'algorithme de déroulement de la phase va corriger ces sauts alors qu'il faudrait les laisser. L'idéal serait d'implémenter un algorithme semi-automatique de déroulement de la phase, ou l'opérateur superviserait le bon déroulement .

- A cause des limites de la sensibilité de notre matériel (sonde échographique + électronique d'acquisition) les signaux d'échographie transcrânienne qui ont traversé deux fois la paroi crânienne absorbante et dissipative sont très faibles. Pour travailler avec des signaux présentant un rapport signal/bruit raisonnables, nous avons fait des images d'objets très réfléchissants : on est loin de distinguer matière blanche et matière grise ! Cependant, la limite actuelle est simplement technologique.

Nous allons voir dans la partie suivante comment le filtre inverse, rendu non intrusif, peut aider à pallier certains de ces défauts. Notamment, on peut espérer du filtre inverse qu'il corrige automatiquement de toutes les aberrations de phase et d'amplitude, et optimise naturellement la résolution latérale et temporelle.

3.3. Imagerie non intrusive par filtre inverse

A priori, le filtre inverse semble être une technique de focalisation adaptative encore plus intrusive que le retournement temporel : en effet, il nécessite pour focaliser de façon optimale sur un point non seulement une source ultrasonore en ce point, mais aussi plusieurs autres sources (points de contrôle) dans son entourage [Tanter98, Aubry00].

Dans cette partie, nous allons voir comment rendre le filtre inverse non intrusif pour la focalisation transcrânienne, en utilisant deux barrettes échographiques placées de part et d'autre du crâne, comme sur la figure 1.

3.3.1. Le principe du filtre inverse non intrusif

Le montage expérimental pour la focalisation par filtre inverse non intrusif est schématisé de nouveau sur la figure 19, en illustrant le formalisme qui va être utilisé.

Le crâne est entouré par deux barrettes échographiques identiques placées de part et d'autre du crâne, le plus près possible de l'os. On veut apprendre à focaliser à partir de la barrette 1 (à gauche) sur le plan 1' (à droite, dans la partie du cerveau opposée à la barrette 1) pour faire une image du cerveau autour de ce plan.

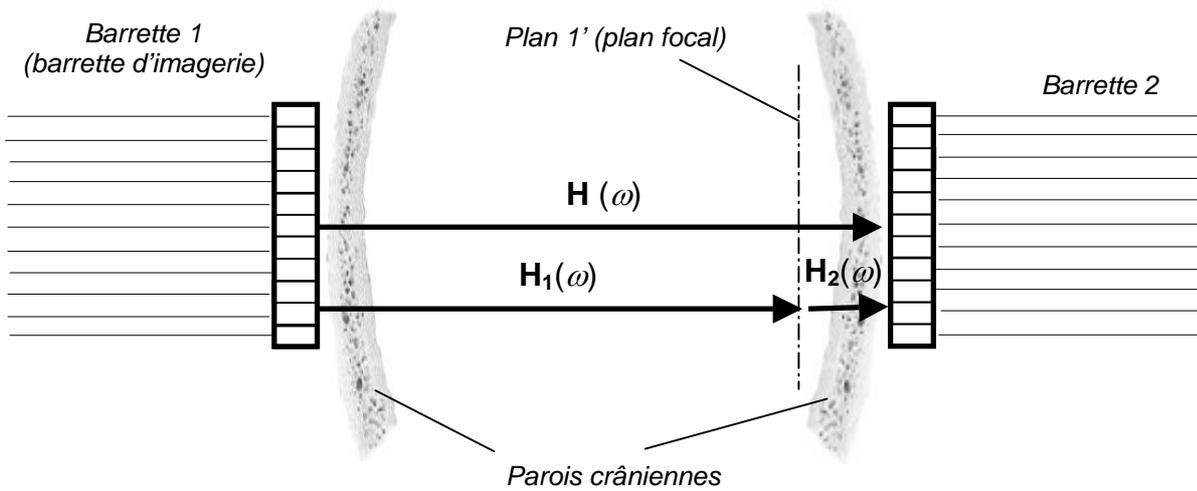


Figure 19. Schématisation du dispositif expérimental et du formalisme pour le filtre inverse non intrusif. On appelle $\mathbf{H}(\omega)$ le propagateur entre la barrette 1 et la barrette 2, $\mathbf{H}_1(\omega)$ le propagateur entre la barrette 1 et un réseau de points de contrôle fictifs dans le plan 1', $\mathbf{H}_2(\omega)$ le propagateur entre le plan 1' et la barrette 2.

Pour focaliser depuis la barrette 1 sur le plan 1' par filtre inverse, il est nécessaire de connaître le propagateur $\mathbf{H}_1(\omega)$ entre la barrette 1 et le plan 1', les signaux du filtre inverse étant obtenus par inversion de ce propagateur.

La matrice $\mathbf{H}_1(\omega)$ est une matrice qui contient toutes les fonctions de Green entre les transducteurs de la barrette 1 et un réseau de points de contrôle disposés dans le plan 1'. On n'a pas accès à cette matrice car il est impossible de placer des transducteurs à l'intérieur du cerveau dans le plan 1' pour mesurer ces fonctions de Green. Le seul propagateur mesurable est le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$, correspondant à la traversée du crâne entier de la barrette 1 vers la barrette 2. On va donc chercher à estimer $\mathbf{H}_1(\omega)$ à partir de la seule connaissance de $\mathbf{H}(\omega)$.

$\mathbf{H}(\omega)$ ne diffère de $\mathbf{H}_1(\omega)$ que par la traversée de la deuxième paroi crânienne. Si on appelle $\mathbf{H}_2(\omega)$ le propagateur entre le plan 1' et la barrette 2, correspondant à cette traversée, on peut écrire la propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ en fonction de $\mathbf{H}_1(\omega)$ et $\mathbf{H}_2(\omega)$:

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{H}_2(\omega)\mathbf{H}_1(\omega) \quad (2)$$

L'équation (2) formalise le fait que pour traverser le crâne entier ($\mathbf{H}(\omega)$) il faut d'abord aller de la barrette 1 vers le plan 1' ($\mathbf{H}_1(\omega)$) puis du plan 1' vers la barrette 2 ($\mathbf{H}_2(\omega)$).

L'idée pour estimer $\mathbf{H}_1(\omega)$ est d'estimer d'abord $\mathbf{H}_2(\omega)$, qui ne correspond qu'à la traversée d'une paroi crânienne et peut donc être construit à partir de la mesure des propriétés acoustiques de l'os (absorption et déphasage). Une fois $\mathbf{H}_2(\omega)$ estimé, on en déduira $\mathbf{H}_1(\omega)$ en inversant (2) :

$$\mathbf{H}_1(\omega) = \mathbf{H}_2(\omega)^{-1} \mathbf{H}(\omega) \quad (3)$$

3.3.2. Estimation du propageur $\mathbf{H}_2(\omega)$

L'étape clé de la méthode consiste donc en la mesure des propriétés acoustiques de la deuxième paroi crânienne (absorption et déphasage) pour estimer le propageur $\mathbf{H}_2(\omega)$ correspondant à sa traversée.

Pour ce faire, imaginons que l'on dispose N points de contrôle fictifs dans le plan 1' en face des N transducteurs de la barrette 2 (figure 20). Le propageur $\mathbf{H}_2(\omega)$ est une matrice contenant en position j,i la fonction de Green entre le point de contrôle i dans le plan 1' et le transducteur j de la barrette 2. Ce propageur prendra surtout des valeurs significatives sur et autour de la diagonale, c'est-à-dire pour i peu différent de j : en effet, à cause de la directivité des transducteurs et de la forte absorption du crâne, si le transducteur j est très éloigné du transducteur i il ne recevra qu'un signal faible. Nous chercherons donc à approcher le propageur $\mathbf{H}_2(\omega)$ à l'aide d'un propageur diagonal $\mathbf{H}_{2d}(\omega)$. Cela revient à considérer que si un point de contrôle fictif i dans le plan 1' émet un signal, seul le transducteur i de la barrette 2 qui lui fait directement face reçoit un signal significatif. On approche au mieux de cette condition quand la paroi crânienne est plus fine et que le plan 1' et la barrette 2 sont les plus proches possibles l'une de l'autre.

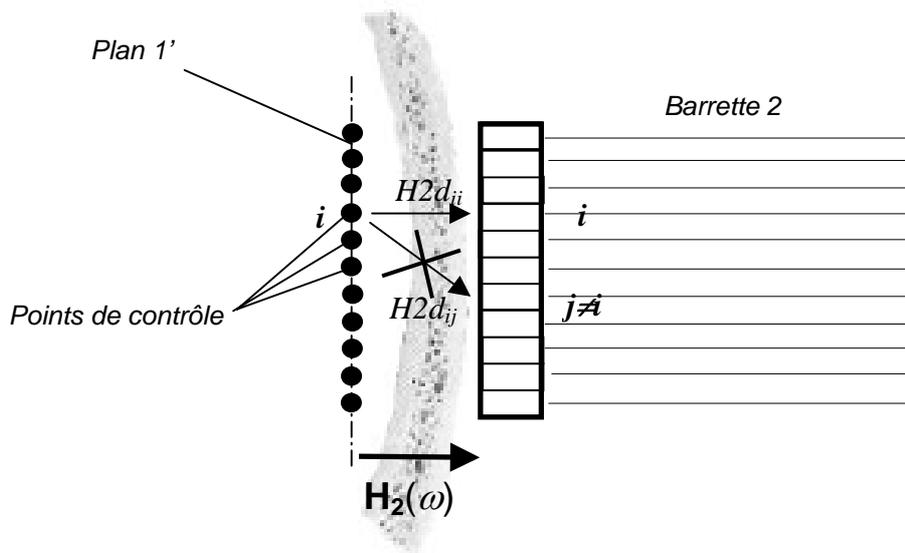


Figure 20. Principe de construction d'un propageur diagonal $\mathbf{H}_{2d}(\omega)$ approchant au mieux le propageur $\mathbf{H}_2(\omega)$ du plan 1' vers la barrette 2.

Le propagateur $\mathbf{H}_{2d}(\omega)$ contient en position i, i un nombre complexe $A_i(\omega)\exp[j\varphi_i(\omega)]$. Le facteur d'amplitude $A_i(\omega)$ correspond à l'amplitude que recevrait le transducteur i de la barrette 2 si le point de contrôle i qui lui fait face dans le plan 1' envoyait un signal d'amplitude 1 à la fréquence ω . Le facteur de phase $\varphi_i(\omega)$ exprime le déphasage de ce signal, correspondant au temps de trajet entre le point de contrôle i du plan 1' et le transducteur i de la barrette 2.

Il faut maintenant estimer $A_i(\omega)$ et $\varphi_i(\omega)$ pour tout i , cela revient à dresser une carte d'absorption et de déphasage de la deuxième paroi crânienne.

a) Estimation du facteur d'amplitude

Le facteur $A_i(\omega)$ par lequel est multiplié la composante de Fourier ω du signal qui traverse le petit bout d'os i de la deuxième paroi crânienne est estimé de la manière suivante : un signal d'amplitude 1 est envoyé depuis le transducteur i de la barrette 2. L'onde transmise est reçue sur la barrette 1 après traversée du crâne entier, puis retournée temporellement et réémise vers la barrette 2. L'amplitude $A_i^{RT}(\omega)$ de la composante de Fourier ω du signal reçu sur le transducteur i de la barrette 2 au terme de ce processus de retournement temporel est proportionnel au carré de $A_i(\omega)$ car l'onde a traversé deux fois le petit bout d'os i durant cet aller-retour (voir figure 21 pour une illustration de ce processus de retournement temporel). Le facteur de proportionnalité, qui est dû à l'absorption par la paroi crânienne située devant la barrette 1, dépend peu de i . En effet, quel que soit le transducteur depuis lequel on émet depuis la barrette 2, la portion de la première paroi crânienne qui est traversée avant d'atteindre la barrette 1 est toujours sensiblement la même (figures 21, 18).

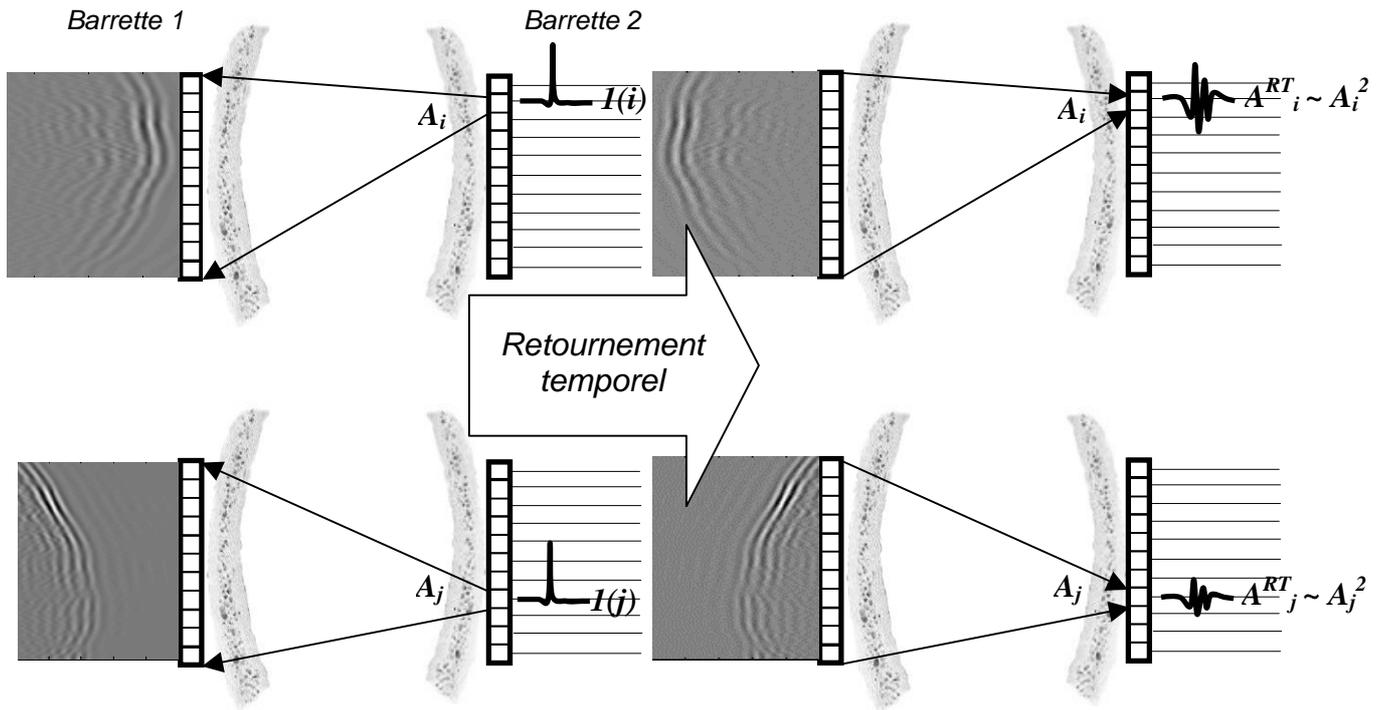


Figure 21. Estimation de l'amplitude de la deuxième paroi crânienne. En haut, estimation du facteur d'amplitude induit par le petit bout de crâne i de la deuxième paroi crânienne, en bas par le petit bout de crâne j plus atténuateur. Un signal d'amplitude 1 est émis depuis le transducteur i (ou j) de la barrette 2, il se propage et est capté par la barrette 1 (à gauche). Ce signal est retourné temporellement et réémis vers la barrette 2 (à droite). L'amplitude du signal alors reçu sur le transducteur i de la barrette 2 est proportionnelle au carré du facteur d'amplitude correspondant au petit bout de crâne i ou j .

Formellement, si l'on appelle $A_i(\omega)$ le facteur d'absorption du petit bout de crâne i de la deuxième paroi crânienne, $B_k(\omega)$ le facteur d'absorption du petit bout de crâne k de la première paroi crânienne, l'amplitude du signal reçu sur le transducteur k de la barrette 1 lorsque le transducteur i de la barrette 2 émet un pulse d'amplitude unité est $B_k(\omega)A_i(\omega)$. Si ce signal est retourné temporellement et renvoyé vers la barrette 2 depuis le transducteur k de la barrette 1, l'amplitude reçue sur le transducteur i de la barrette 2 sera, après une nouvelle traversée des deux parois crâniennes :

$$A_{k \rightarrow i}^{RT}(\omega) = A_i(\omega)B_k(\omega)B_k(\omega)A_i(\omega) \quad (4)$$

Si maintenant tous les transducteurs de la barrette 1 retournent temporellement et réémettent les signaux qu'ils ont d'abord reçu en provenance du transducteur i de la barrette 2, les signaux alors reçus par le transducteur i de la barrette 2 seront en phase et leurs amplitudes s'ajoutent. On aura donc sur le transducteur i de la barrette 2 l'amplitude :

$$\begin{aligned}
A_i^{RT}(\omega) &= \sum_{k=1}^N A_{k \rightarrow i}^{RT} \\
&= \sum_{k=1}^N A_i(\omega) B_k(\omega) B_k(\omega) A_i(\omega) \\
&= A_i(\omega)^2 \sum_{k=1}^N B_k(\omega)^2
\end{aligned} \tag{5}$$

On retrouve bien le fait que l'amplitude du signal reçu sur le transducteur i de la barrette 2 au terme de ce procédé de retournement temporel est proportionnel au carré de $A_i(\omega)$. Le facteur de proportionnalité, qui vaut $\sum_k B_k(\omega)^2$, est un facteur global dû à la traversée de la première paroi crânienne et dépend peu du transducteur i de la barrette 2 sur lequel on fait le retournement temporel.

Finalement le facteur d'amplitude $A_i(\omega)$ qui correspond à la portion de crâne devant le transducteur i de la barrette 2 est estimé comme la racine carrée de l'amplitude du signal reçu après ce procédé de retournement temporel :

$$A_i(\omega) = \sqrt{A_i^{RT}(\omega)} \tag{6}$$

b) Estimation du déphasage

Pour estimer déphasage $\varphi_i(\omega)$ de la composante de Fourier ω d'un signal lors de la traversée du petit bout d'os situé devant le transducteur i de la barrette 2, on procède de la manière suivante : une impulsion est émise successivement depuis le transducteur $1, 2, \dots, N$ de la barrette 2. Les B-scans correspondant aux signaux passés à travers le crâne entier $R_1(t), R_2(t) \dots R_N(t)$ sont alors enregistrés par la barrette 1.

On commence appliquer à chacun de ces B-scans une loi cylindrique de retards géométriques, pour les « aplatis ». Puis on les corrèle deux à deux : $R_1(t)$ avec $R_2(t)$, $R_2(t)$ avec $R_3(t)$, ... $R_{N-1}(t)$ avec $R_N(t)$ pour savoir de combien chacun est décalé par rapport au précédent (figure 22). La position du maximum de corrélation entre deux B-scans consécutifs $R_i(t)$ et $R_{i+1}(t)$ correspond au décalage global entre les deux B-scans, c'est-à-dire à la différence des temps de trajet à travers les portions de crâne situées devant les transducteurs i et $i+1$ de la barrette 2 : de même que pour l'évaluation de l'amplitude, on estime que le déphasage des signaux induit par traversée de la paroi crânienne située devant la barrette 1 est sensiblement le même quel que soit le transducteur de la barrette 2 d'où proviennent ces signaux.

Les différences de temps de trajet $\Delta t_{i(i=1...N)}$ entre toutes les paires de transducteurs adjacents de la barrette 2 sont ainsi calculées, puis intégrées pour avoir accès aux temps de trajet relatifs $t_{i(i=1...N)}$ de toute portion de crâne situé devant tout transducteur i de la barrette 2. Ces temps de trajet sont ensuite traduits en déphasage via la formule :

$$\varphi_i(\omega) = \omega t_i \quad (7)$$

Le principal désavantage cette mesure du déphasage est qu'elle se fait dans le domaine temporel, sur les fronts d'ondes globaux : on ne peut ainsi avoir accès au déphasage fréquence par fréquence, ce qui nous oblige à faire l'approximation que le déphasage est linéaire de la fréquence (équation (7)). Cette approximation est d'autant moins bonne que le crâne est plus dispersif.

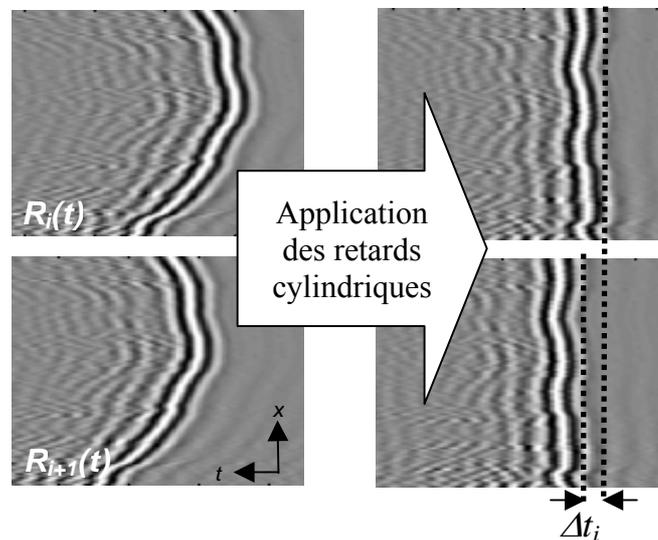


Figure 22. Estimation des différences de phase induites par la deuxième paroi crânienne devant deux transducteurs adjacents i et $i+1$ de la barrette 2. A gauche on a représenté les B-scans reçus sur la barrette 1 quand le transducteur i de la barrette 2 émet une impulsion (en haut) et quand son voisin $i+1$ émet une impulsion (en bas). Ces B-scans sont semblables mais globalement décalés l'un par rapport à l'autre car les petits bouts de deuxième paroi crânienne situés devant les transducteurs i et $i+1$ de la barrette 2 n'induisent pas le même déphasage. On applique à ces B-scans une loi cylindrique calculée géométriquement qui les « remet à plat » (à droite). On peut alors les corrélérer l'un avec l'autre, la position du maximum de corrélation correspond à la différence de temps de trajet entre les bouts i et $i+1$ de la deuxième paroi crânienne.

Une manière d'estimer le déphasage fréquence par fréquence, et qui ressemble plus à la manière d'estimer le facteur d'amplitude, est la suivante : on focalise par lois cylindriques depuis la barrette 1 sur chaque élément i de la barrette 2, l'un après l'autre. Si le bout de deuxième paroi crânienne situé devant le transducteur i de la barrette 2 est plus « rapide » que celui qui est situé devant le transducteur j , le signal focalisé arrivera plus tôt sur le transducteur i que sur le transducteur j (figure 23). On mesure donc la phase de ces signaux focalisés sur chacun des transducteurs de la barrette 2

fréquence par fréquence, ce qui fournit directement la carte des déphasages induits par la deuxième paroi crânienne.

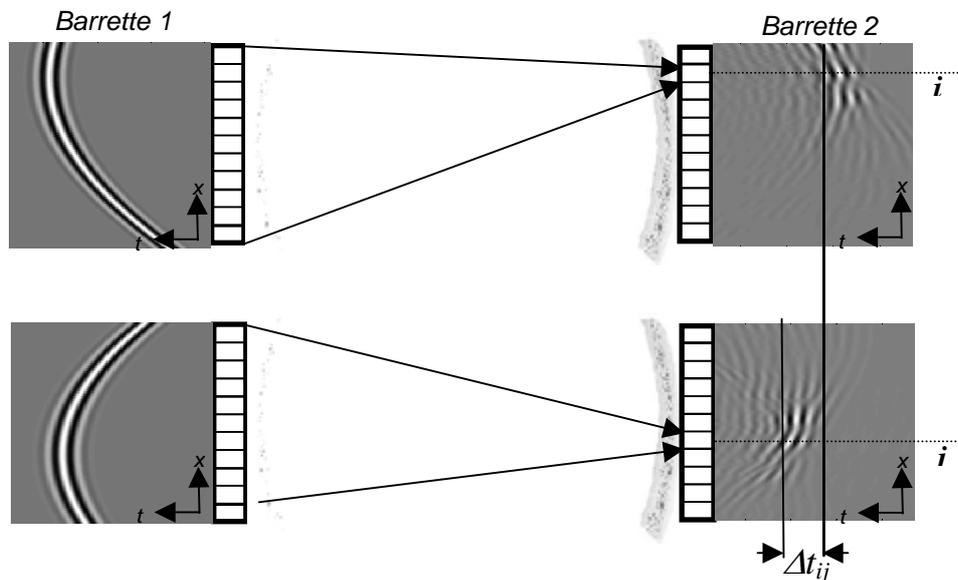


Figure 23. Principe d'estimation de la phase induite par la deuxième paroi crânienne. On focalise à travers le crâne entier par lois cylindriques sur les transducteur i et j de la barrette 2. Le premier demi-crâne aura la même influence sur les fronts d'onde focalisant, mais les bouts de crâne i et j de la deuxième paroi crânienne auront des influences différentes : si le bout de crâne i est plus « rapide » que le bout de crâne j , les signaux focalisés arriveront plus tôt sur le transducteur i que sur le transducteur j .

Le désavantage de cette méthode d'estimation de la carte de phase de la deuxième paroi crânienne est que la focalisation sur la barrette 2 par lois cylindriques est mauvaise (figure 23). Dès lors, comment être sûr que l'information de phase contenue dans la tache focale est bonne ? Cependant, lorsque l'on compare les deux méthodes d'obtention de la phase, on voit qu'elles donnent des résultats très similaires (figure 24). La deuxième méthode sera donc préférée, pour sa rapidité, sa facilité d'implémentation (il n'y a pas besoin d'effectuer de corrélations), et le fait qu'elle fournit une mesure fréquence par fréquence.

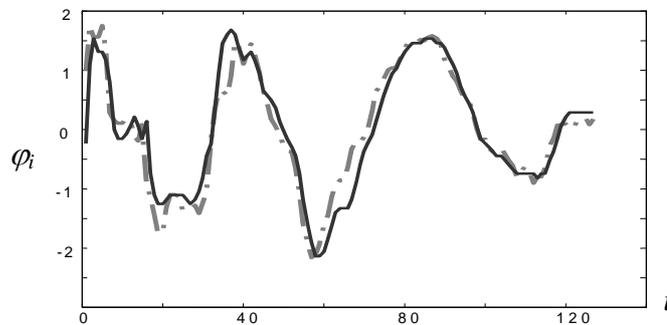


Figure 24. Cartes de phases estimées de la deuxième paroi crânienne pour la fréquence centrale. En trait plein noir la phase estimée par les corrélations, en traits discontinus gris par la méthode exposée ci-dessus.

c) Estimation rapide des amplitudes et des phases : la méthode matricielle.

Pour obtenir les cartes d'amplitude et de phase de la deuxième paroi crânienne, on ne réalise pas réellement les expériences de focalisation par retournement temporel à travers le crâne (pour l'estimation du facteur d'amplitude) et par lois cylindriques préfocalisées (pour l'estimation du facteur de phase). En réalité, on mesure simplement le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ à travers le crâne entier puis on se sert de ce propagateur pour simuler la focalisation, comme nous allons le voir.

- Facteur d'amplitude

L'opérateur $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*$ décrit l'opération de retournement temporel à travers le crâne entier : la colonne i de cette matrice correspond à la composante de Fourier à la fréquence ω du vecteur focalisation obtenu sur la barrette 2 lorsque l'on focalise par retournement temporel sur le transducteur i de la barrette 2 ; l'élément i,i de cette matrice correspond donc à la composante ω du signal alors obtenu sur le transducteur i de la barrette 2. Il a pour amplitude $A^{RT}_i(\omega)$, et il suffit d'en prendre la racine pour accéder au facteur d'amplitude induit par le petit bout de crâne situé devant ce transducteur (figure 25).

En conclusion, le vecteur $A(\omega) = [A_1(\omega), A_2(\omega), \dots, A_M(\omega)]$ représentant la carte d'amplitude du second demi-crâne s'obtient comme la racine carrée de la diagonale de l'opérateur « retournement temporel à travers le crâne » :

$$A(\omega) = \sqrt{\text{diag}(\mathbf{H}(\omega)^t \mathbf{H}(\omega)^*)} \quad (8)$$

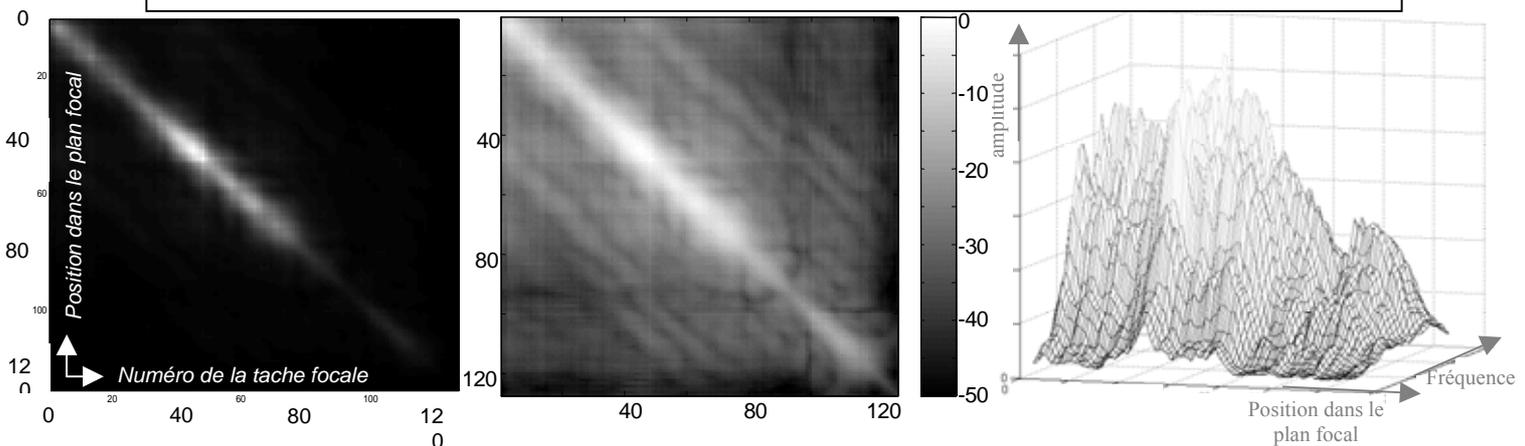


Figure 25. A gauche : l'opérateur retournement temporel à travers le crâne entier (on représente $\mathbf{H}_{\text{sum}} = \sum_{\omega} [\mathbf{H}(\omega)^t \mathbf{H}(\omega)^*]$). Au milieu, la même chose, en dB. La racine de sa diagonale à toutes les fréquences donne une carte de l'amplitude de la deuxième paroi crânienne à toutes les fréquences (à droite).

- Facteur de phase

Le facteur de phase induit par la deuxième paroi crânienne peut être calculé d'une manière similaire. Le facteur de phase induit par le petit bout de crâne i correspond à la phase des signaux reçus sur le transducteur i de la barrette 2 lorsque l'on focalise dessus par lois cylindriques à travers le crâne entier. Une manière simple d'obtenir une loi cylindrique à émettre depuis la barrette 1 pour focaliser sur le transducteur i de la barrette 2 est de propager une impulsion du transducteur i de la barrette 2 vers la barrette 1 *en l'absence de crâne* (à travers l'eau), puis de retourner temporellement les signaux reçus sur la barrette 1 : les lois cylindriques focalisantes sont obtenues par retournement temporel à travers l'eau. Si l'on appelle $\mathbf{H}_e(\omega)$ le propagateur à travers l'eau de la barrette 1 vers la barrette 2, le vecteur loi cylindrique à émettre depuis la barrette 1 pour focaliser sur un dirac temporel sur le transducteur i de la barrette 2 est égal à la colonne i de la matrice ${}^t\mathbf{H}_e(\omega)^*$.

La phase de propagation de ce vecteur cylindrique de la barrette 1 vers la barrette 2 à travers le crâne se traduit par une multiplication par le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ correspondant au crâne. Le vecteur focalisation obtenu sur la barrette 2 lorsque l'on focalise à travers le crâne avec des signaux cylindriques construits pour focaliser sur le transducteur i est donc égal à la colonne i du propagateur $\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}_e(\omega)^*$.

Le facteur de phase recherché $\varphi_i(\omega)$, correspondant au petit bout de crâne situé devant le transducteur i de la barrette 2, est donc égal à la phase de l'élément i,i de la matrice $\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}_e(\omega)^*$.

En conclusion, le vecteur $\varphi(\omega) = [\varphi_1(\omega), \varphi_2(\omega), \dots, \varphi_N(\omega)]$ représentant la « carte » de phase de la deuxième paroi crânienne, s'obtient comme la phase de la diagonale de l'opérateur « focalisation de lois cylindriques à travers le crâne » $\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}_e(\omega)^*$:

$$\varphi(\omega) = \arg[\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}_e(\omega)^*] \quad (9)$$

3.3.3. Focalisation par filtre inverse non intrusif

Il est maintenant possible de construire le propagateur $\mathbf{H}_{2d}(\omega)$ approchant au mieux le propagateur $\mathbf{H}_2(\omega)$ de la deuxième paroi crânienne. C'est un propagateur diagonal contenant sur sa diagonale les cartes d'amplitude et de phase de la deuxième paroi crânienne.

Le propagateur $\mathbf{H}_1(\omega)$ entre la barrette 1 et le plan focal 1' est alors approché par un propagateur $\mathbf{H}_{1g}(\omega)^{(1)}$ à partir du propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ mesuré à travers le crâne entier et du propagateur diagonal $\mathbf{H}_{2d}(\omega)$ estimé à travers la deuxième paroi crânienne via :

$$\mathbf{H}_{1g}(\omega) = \mathbf{H}_{2d}(\omega)^{-1}\mathbf{H}(\omega) \quad (10)$$

On peut visualiser sur la figure 26 les propagateurs $\mathbf{H}(\omega)$, $\mathbf{H}_1(\omega)$ (mesurable, in vitro, en ôtant la deuxième paroi crânienne, et $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$ estimant $\mathbf{H}_1(\omega)$). On s'approche de $\mathbf{H}_1(\omega)$ mais il subsiste sur le propagateur deviné quelques-unes des irrégularités de $\mathbf{H}(\omega)$.

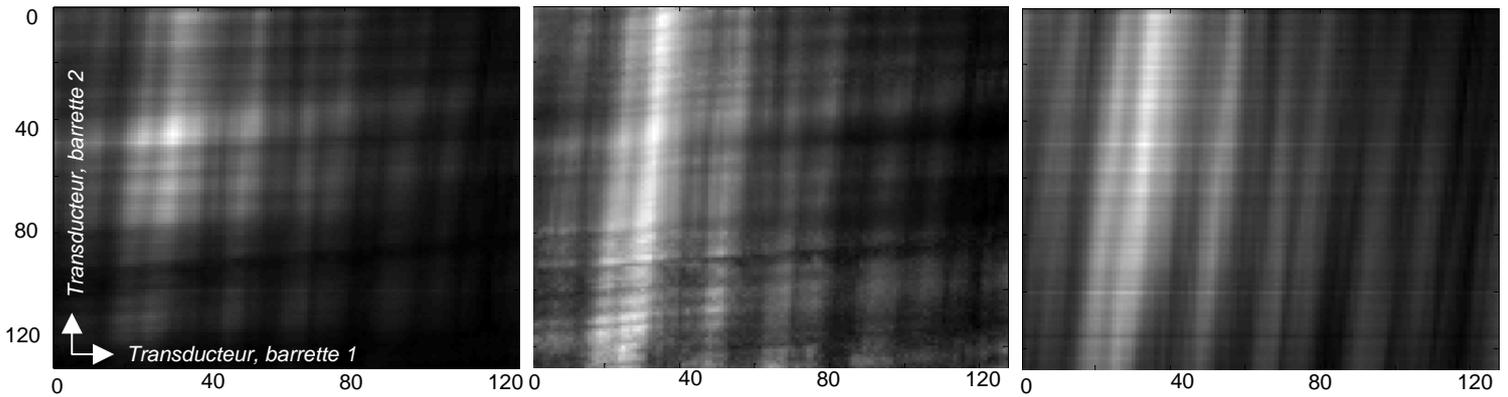


Figure 26 : les propagateurs \mathbf{H} (à gauche), \mathbf{H}_{1g} (au centre), et \mathbf{H}_1 (à droite). On représente la somme sur toutes les fréquences de leur valeur absolue. Sur la ligne j , colonne i de chacun de ces propagateurs est donc représenté en niveaux de gris l'amplitude de la fonction de Green entre le transducteur i de la barrette 1 et le transducteur j de la barrette 2. Par exemple, la raie blanche verticale entre les colonnes 20-40 du propagateur \mathbf{H}_1 signifie que la portion de crâne située en face des transducteurs 20-40 de la barrette 1 laisse relativement bien passer les ultrasons.

Nous pouvons donc maintenant, en inversant le propagateur $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$ – qui a été calculé de manière non intrusive –, faire du filtre inverse pour focaliser depuis la barrette 1 sur le plan 1'. Par exemple, le vecteur d'émission $E(\omega)$ à émettre pour focaliser sur le vecteur cible $S(\omega) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ dans le plan focal 1' sera calculé comme :

$$E(\omega) = \hat{\mathbf{H}}_{1g}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (11)$$

$\hat{\mathbf{H}}_{1g}(\omega)$ étant l'inverse régularisé de $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$. On présente figure 27 les signaux d'émission calculés par filtre inverse non intrusif (équation (11)) et par vrai filtre inverse, par inversion régularisée du vrai propagateur $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$. Ces signaux compliqués d'émission se ressemblent.

⁽¹⁾ On utilise l'indice « g » pour « guessed », le propagateur \mathbf{H}_1 étant en quelque sorte « deviné » à partir du propagateur \mathbf{H} .

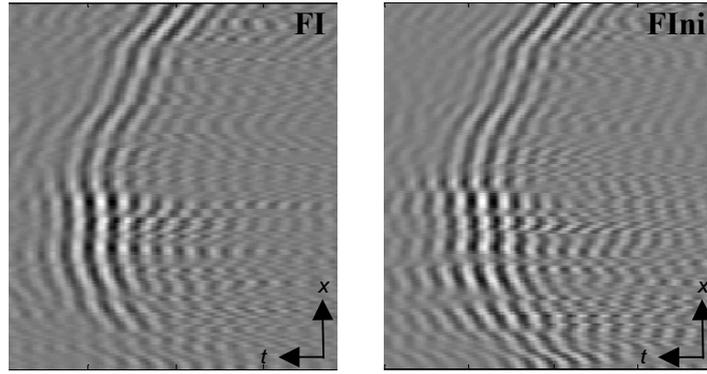


Figure 27. A gauche, les signaux d'émission calculés par vrai filtre inverse pour focaliser à travers le propagateur $\mathbf{H}_1(\omega)$, à droite les signaux du filtre inverse non intrusif obtenus par inversion du propagateur estimé $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$.

Le vecteur final $F(\omega)$ de focalisation sur le plan 1' sera donc, après passage des signaux émis à travers la première paroi crânienne, c'est-à-dire à travers le vrai propagateur $\mathbf{H}_1(\omega)$:

$$F(\omega) = \mathbf{H}_1(\omega)E(\omega) = \mathbf{H}_1(\omega)\hat{\mathbf{H}}_{1d}(\omega)^{-1}S(\omega) \quad (12)$$

La focalisation sera d'autant meilleure que les signaux focalisés $F(\omega)$ seront plus semblables au vecteur cible $S(\omega)$, c'est-à-dire si la matrice $\mathbf{H}_1(\omega)\hat{\mathbf{H}}_{1d}(\omega)^{-1}$ est proche de l'identité.

Il est possible, in vitro, de scanner la pression dans le plan focal. On peut donc représenter la focalisation latérale lorsque l'on focalise par filtre inverse non intrusif, ou par simple loi cylindrique, à travers la première paroi crânienne. Les taches focales ainsi obtenues, par le filtre inverse non intrusif et les lois cylindriques, sont représentées sur la figure 28 lorsque le point focal est choisi au centre du plan focal 1'. On représente aussi, comme référence, la tache focale que l'on obtient par loi cylindrique en l'absence de paroi crânienne.

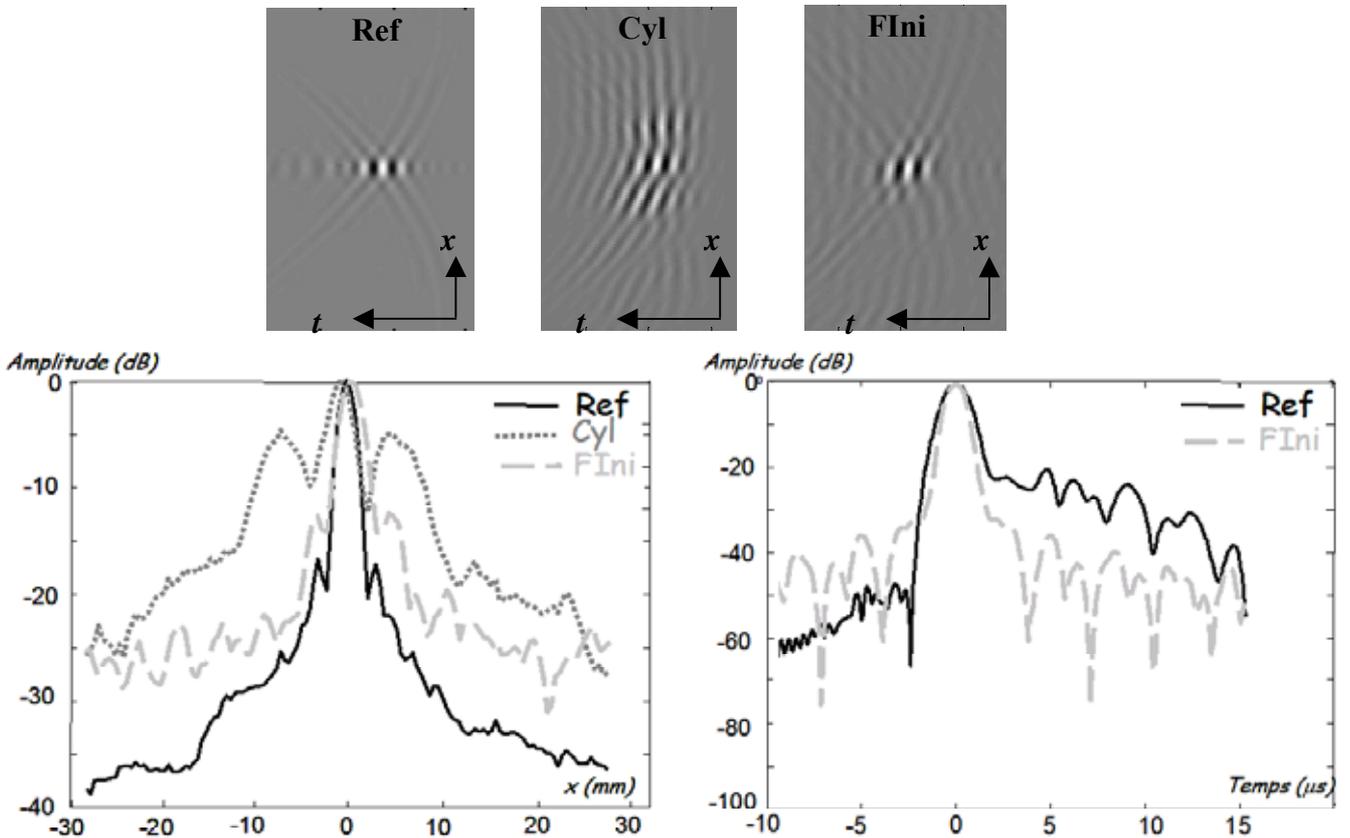


Figure 28. En haut : Bscan des taches focales lorsque l'on focalise en position centrale dans le plan 1' : par lois cylindriques à travers un milieu homogène (Ref), par lois cylindriques à travers le crâne (Cyl), par filtre inverse non intrusif à travers le crâne (FIni). En bas : à gauche, la focalisation latérale correspondante, à droite la focalisation temporelle correspondante (la focalisation temporelle par loi cylindrique à travers le crâne, non représentée ici, est pratiquement confondue avec la focalisation de référence).

Le filtre inverse non intrusif améliore nettement la focalisation et le contraste latéraux, notamment la tache focale est à l'endroit désiré et on élimine les deux lobes latéraux à -3 dB de la focalisation cylindrique à travers le crâne. Cependant, le filtre inverse non intrusif dégrade nettement le contraste temporel (qui reste cependant de l'ordre de grandeur du contraste latéral, avec des lobes à -20 dB).

Il est également possible, in vitro, de mesurer expérimentalement l'opérateur $\mathbf{H}_1(\omega)$ en plaçant une barrette échographique dans le plan 1'. Nous pouvons donc représenter la matrice $\mathbf{H}_1(\omega)\hat{\mathbf{H}}_{1g}(\omega)^{-1}$ qui représente la focalisation par filtre inverse non intrusif (figure 29, FIni) : la colonne i de cette matrice correspond à la tache focale lorsque l'on focalise sur le point de contrôle i du plan 1' par filtre inverse non intrusif. Nous pouvons comparer ces taches focales à celles qui seraient obtenues par lois cylindriques dans un milieu homogène (en réalité, on représente la matrice de retournement temporel à travers l'eau, soit $\mathbf{H}_e(\omega)\mathbf{H}_e(\omega)^*$, qui sert de référence, figure 29, Ref) et à celles qui sont obtenues en focalisant par lois cylindriques à travers une paroi crânienne (en réalité, on représente la matrice « focalisation à travers la première paroi crânienne des signaux du retournement temporel dans l'eau » $\mathbf{H}_1(\omega)\mathbf{H}_e(\omega)^*$, figure 29, Cyl).

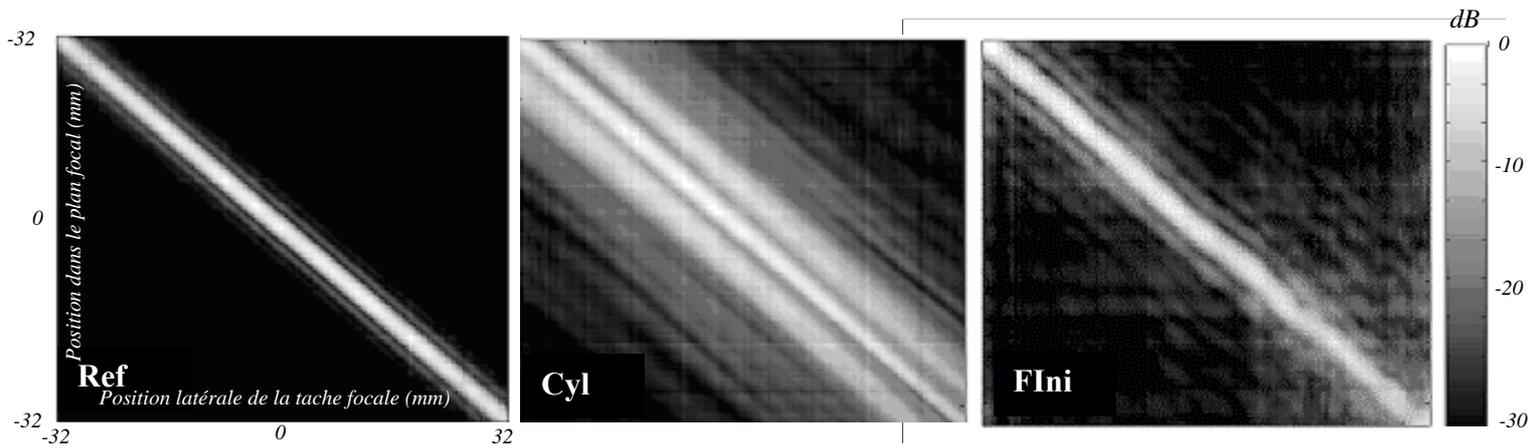


Figure 29. Focalisation latérale dans le plan 1' par lois cylindriques à travers un milieu homogène (Ref), lois cylindriques à travers le crâne (Cyl), filtre inverse non intrusif à travers le crâne (FIni). Sur la colonne i de chaque matrice est représentée en niveau de gris (en dB) l'amplitude maximale qui arrive sur tous les points de contrôle du plan 1'. La colonne centrale de chacune des matrices ci-dessus correspondent aux courbes de focalisation latérale de la figure 26.

3.3.4. Imagerie par filtre inverse non intrusif

a) Images semi-simulées

Il est difficile d'utiliser le filtre inverse non intrusif pour faire de l'imagerie transcrânienne ; en effet la technique est très sensible au bruit. Le rapport signal/bruit des ondes passées à travers deux paroi crânienne utilisées pour mesurer le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ est faible, l'inversion du propagateur $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$ déduit de ce propagateur se fait donc avec peu de valeurs propres significatives. De plus, au contraire du retournement temporel, le filtre inverse ne maximise pas la pression déposée au point focal. Lorsque l'on fait une échographie en focalisant par filtre inverse, les signaux rétrodiffusés par le plan focal en direction de la barrette échographique seront donc d'amplitude relativement faible, surtout après deux traversées de paroi crânienne (à l'aller et au retour de l'onde entre la barrette échographique et le plan focal).

Dans un premier temps, nous avons cherché à contruire des images « semi-simulées » pour tester le potentiel du filtre inverse non invasif pour l'imagerie. Le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ est acquis expérimentalement, on en déduit $\mathbf{H}_{1g}(\omega)$, qu'on inverse pour calculer les signaux d'émission pour focaliser sur le plan 1' par filtre inverse non intrusif. Au lieu de les envoyer à travers le crâne dans la manipulation, on simule leur propagation à travers le premier demi-crâne par multiplication par le vrai propagateur $\mathbf{H}_1(\omega)$. On se donne une matrice de réflectivité $\mathbf{r}(\omega)$ simulant le milieu présent autour du plan focal, et la propagation en sens inverse des signaux réfléchis est encore faite dans l'ordinateur par multiplication par ${}^t\mathbf{H}_1(\omega)$.

En résumé, tous les propagateurs sont acquis expérimentalement, mais la focalisation des signaux et la formation d'image se fait entièrement dans l'ordinateur, c'est pourquoi on parle d'images « semi-simulées ». Pour former la ligne j_0 de l'image échographique, on revient à la formule (33) du chapitre 2 [AubryXX]:

$$I_{j_0}(\omega) = {}^t E(\omega) [{}^t \mathbf{H}_1(\omega) \mathbf{r}(\omega) \mathbf{H}_1(\omega)] E(\omega) \quad (13)$$

où $E(\omega)$ sont les signaux d'émission calculés par filtre inverse non intrusif pour focaliser en position j_0 : $E(\omega) = \hat{\mathbf{H}}_{1g}(\omega)^{-1} S(\omega)$.

On utilise un modèle de kyste hydrique pour tester le potentiel du filtre inverse non intrusif pour l'imagerie (figure 30, à gauche): il s'agit d'une inclusion anéchoïque au sein d'un milieu de diffuseurs représentant un tissu humain. Les échographies transcrâniennes semi-simulées de ce kyste hydrique sont acquises par filtre inverse intrusif (Ref), lois cylindriques (Cyl), filtre inverse non intrusif (FIni).

On distingue très bien le kyste hydrique sur l'image de référence, qui est faite par filtre inverse intrusif et est de qualité comparable à celle que l'on obtiendrait par l'utilisation de lois cylindriques à travers un milieu non aberrateur. Le kyste hydrique devient indiscernable si on l'essaye de l'imager par lois cylindriques à travers le crâne. L'utilisation du filtre inverse non intrusif permet de détecter clairement la présence, la localisation et la taille du kyste, même si l'image est de moins bonne qualité que l'image de référence (faible contraste, encore quelques distortions). Cela montre le gain que peut apporter une technique adaptative de focalisation à l'échographie transcrânienne.

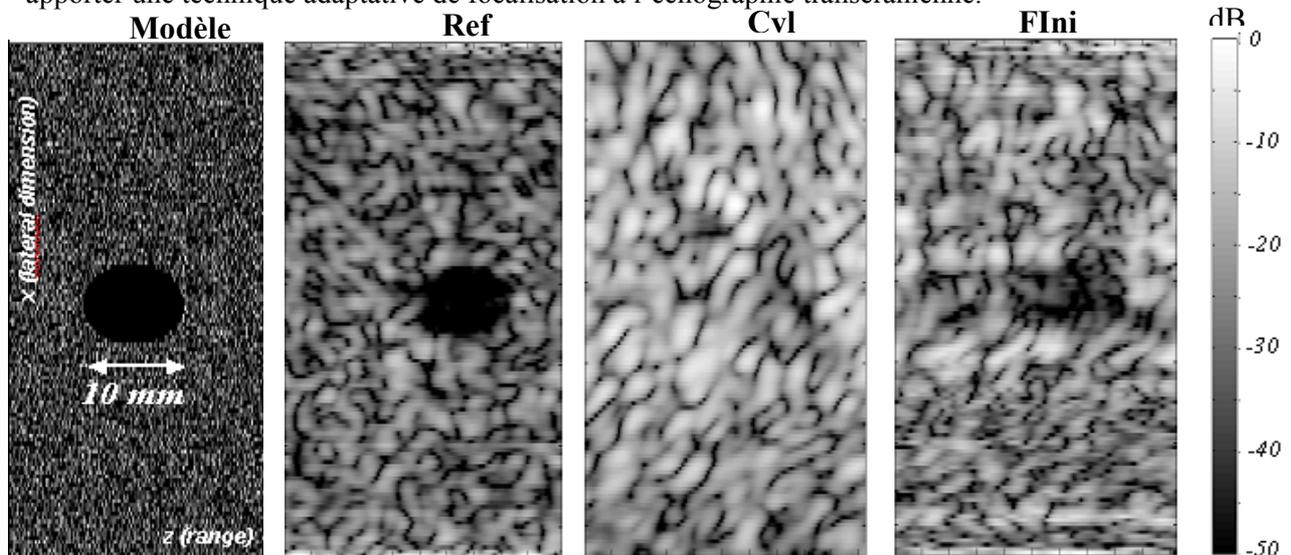


Figure 30. Images semi-simulées d'un modèle kyste hydrique. A gauche, modèle du kyste hydrique, il s'agit d'une inclusion sans diffuseurs au sein d'un milieu de diffuseurs modélisant le cerveau; Ref- image de référence : filtre inverse intrusif à travers le crane; Cyl- lois cylindriques à travers le crâne ; FIni- filtre inverse non intrusif à travers le crâne. les axes x et z sont respectivement parallèle (dimension latérale) et perpendiculaire (dimension axiale, temporelle) à la barrette d'imagerie.

Il est intéressant ici de revenir à la focalisation temporelle (axiale). Nous pouvons avoir une idée de sa qualité en regardant la dimension axiale des grains de speckle dans ces trois échographies : le speckle de l'image acquise par lois cylindriques à travers le crâne est plus grossier que le speckle de l'image acquise par filtre inverse invasif et dans une moindre mesure que le speckle de l'image acquise par filtre inverse non invasif : le filtre inverse améliore la résolution temporelle en réhaussant les fréquences des signaux de tir qui seront atténuées par passage à travers le crâne, ce qui permet d'avoir des signaux large bande après traversée du crâne.

Dans l'appendice 3.B nous présentons les résultats de plusieurs expériences de focalisation transcrânienne par filtre inverse non intrusif : Le filtre inverse non intrusif se trouve entre le filtre inverse invasif et les lois cylindriques en ce qui concerne la qualité de la focalisation et le potentiel pour l'imagerie transcrânienne: sans être optimal (il n'arrive pas à recréer une image d'aussi bonne qualité que si l'os du crâne était absent), il améliore nettement l'imagerie standard par lois cylindriques à travers le crâne.

b) Images expérimentales

On présente sur la figure 31 l'échographie par filtre inverse non intrusif d'une interface plane : le but est de tester si le filtre inverse non intrusif est capable de corriger des aberrations d'amplitude et de phase induites par la paroi crânienne en regard de la barrette d'imagerie, que la conjugaison de phase corrigeait mal. On présente aussi, figure 32, l'échographie par filtre inverse non intrusif de 7 fils métalliques, et ce pour évaluer l'apport de cette méthode pour la résolution de l'image. Dans les deux cas, l'échographie par filtre inverse non intrusif (FIni) est comparée à deux échographies de référence : l'échographie par lois cylindriques à travers l'eau (Ref) et par lois cylindriques à travers le crâne (Cyl).

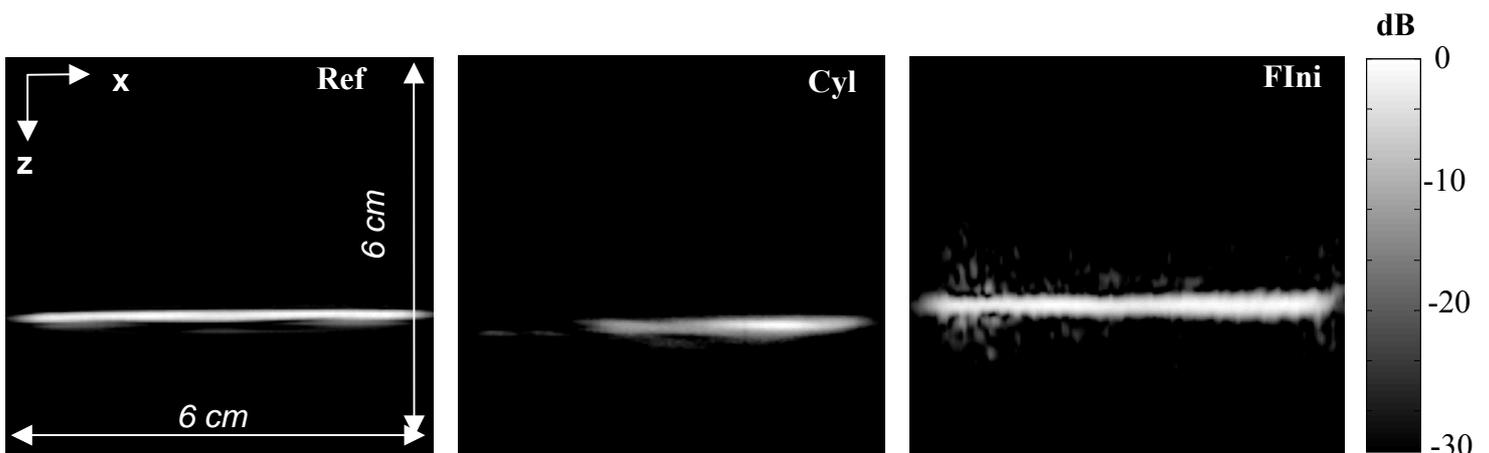


Figure 31. Echographies d'une interface plane. Ref : échographie standard à travers l'eau ; Cyl : échographie standard à travers le crâne ; FIni : filtre inverse non intrusif à travers le crâne.

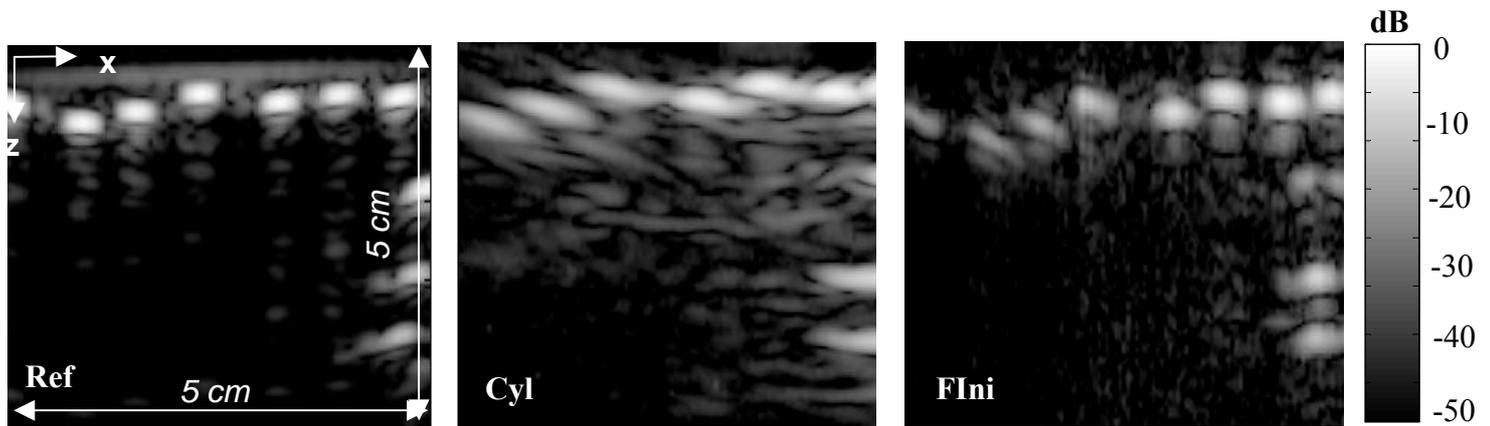


Figure 32. Echographies de 7 fils métalliques immergés dans l'eau. Ref : échographie standard à travers l'eau ; Cyl : échographie standard à travers le crâne ; FIni : filtre inverse non intrusif à travers le crâne.

Le filtre inverse corrige bien des aberrations d'amplitude induites par la première paroi crânienne lors de l'imagerie de l'interface plane, mais pas lors de l'imagerie des fils : les trois fils les plus à gauche apparaissent moins brillants. Sur l'échographie des fils, on constate que le filtre inverse non intrusif améliore effectivement la résolution et le contraste latéraux par rapport aux lois cylindriques à travers le crâne, mais cela se fait au détriment du contraste temporel. On observe également une dégradation du contraste temporel sur l'image de l'interface plane par filtre inverse non intrusif.

L'artefact plan que l'on observe en amont des fils sur l'échographie de référence des fils est dû à l'électronique d'acquisition.

3.3.5. Conclusion

Le filtre inverse non intrusif permet d'améliorer la qualité d'images échographiques structurales transcrâniennes. Cependant

- le faible niveau des signaux reçus pour mesurer le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$, et le faible niveau des signaux rétrodiffusés lors de la phase d'imagerie, sont pour l'instant des obstacles à l'implémentation idéale de cette technique délicate qui nécessite des signaux raisonnablement « propres ». On peut utiliser différentes techniques de traitement du signal comme l'utilisation de chirps ou de matrices de Hadamard (présentées dans l'appendice 3.A) pour essayer d'améliorer le rapport signal/bruit des signaux au cours de l'acquisition des propagateurs et de l'image, mais rien ne vaudra un gain de dynamique en hardware. On travaille dessus via l'élaboration d'un nouveau prototype d'échographe dédié à l'imagerie adaptative du cerveau ;

- la technique de mesure du propagateur $\mathbf{H}_2(\omega)$ basée sur la mesure des propriétés acoustique de la paroi crânienne placée devant la barrette 2, fait appel aux hypothèses que 1- cette paroi crânienne est infiniment fine et 2- la barrette 2 lui est collée sur toute la longueur. L'estimation du propagateur $\mathbf{H}_2(\omega)$ sera donc d'autant moins bonne qualité que la paroi crânienne est épaisse et sa forme s'adapte moins bien à celle (linéaire) de la barrette. L'application reste donc pour l'instant limitée par la nécessité de placer les barrettes devant les tempes, qui sont des zones relativement fines et plates du crâne, limitant ainsi également la zone ainsi imageable du cerveau. En utilisant une nouvelle génération de barrettes échographiques flexibles, il est cependant envisageable d'imager tout le cerveau, en augmentant en plus l'ouverture de la barrette d'imagerie, améliorant d'autant la résolution. Une autre idée est de « repropager » les signaux reçus par la barrette 2 sur la deuxième paroi crânienne, simulant ainsi des transducteurs fictifs collés à la deuxième paroi crânienne [Doiteau03].

Une idée pour améliorer l'estimation du propagateur $\mathbf{H}_2(\omega)$, en éliminant l'hypothèse que le plan 1' est collé à la barrette 2, serait de lui rajouter des éléments hors diagonale. Des tentatives ont été faites dans ce sens, en utilisant une méthode itérative. Une idée par exemple est de focaliser par filtre inverse non invasif dans le plan 1' pour simuler des sources dans ce plan et mesurer directement le propagateur $\mathbf{H}_2(\omega)$, malheureusement cette idée n'a pas abouti.

Notons encore que les hypothèses que nous avons fait ont pour corollaire le fait que le plan 1' est collé à la barrette 2. Pour faire réellement l'imagerie du cerveau, il est donc encore nécessaire d'anguler ces signaux pour ramener les taches focales à l'intérieur du cerveau. L'angulation n'est pas problématique et se fait simplement par l'application globale de lois de retards géométriques aux signaux du filtre inverse.

3.4. Conclusion générale

Nous avons testé deux techniques non intrusives de focalisation adaptative d'ultrasons à travers le crâne : l'une, la conjugaison de phase, est basée sur le retournement temporel ; l'autre, le filtre inverse non intrusif, est basée sur le filtre inverse. A priori, le potentiel du filtre inverse non intrusif pour l'imagerie est plus grand : le filtre inverse est programmé pour optimiser le contraste de l'image échographique. Cependant, sa très grande sensibilité en rend son utilisation difficile en pratique, et nous sommes encore loin d'utiliser tout son potentiel. La conjugaison de phase, qui est une technique potentiellement moins intéressante mais beaucoup plus robuste, donne pour l'instant sur les exemples traités des résultats globalement équivalents au filtre inverse non invasif : si la focalisation latérale est moins bonne, on gagne sur la focalisation temporelle ; si une partie l'image du filtre inverse peut être

bien meilleure car une certaine zone du propagateur a été acquise avec un bon rapport signal/bruit, une autre partie peut être très bruitée car la zone correspondante du propagateur a été mal inversée, ...

Alors, filtre inverse, conjugaison de phase, ou ... rien du tout ? On a pu constater sur les multiples échographies effectuées que *l'on gagne toujours à corriger* (même lorsque l'échographie standard sans correction est déjà de relativement bonne qualité). La technique d'imagerie adaptative optimale se situe sans doute à mi-chemin entre le filtre inverse et la conjugaison de phase.

Références

- [Aubry00] “Towards ultrasonic brain imaging”, JF. Aubry, J. Gerber, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *Proceedings of IEEE Ultrasonics symposium (2000)*.
- [AubryXX] “Transmit receive focusing with inverse filter techniques: application to transskull imaging”, JF. Aubry, F. Vignon, M. Tanter, M. Fink, (*J. Acoust. Soc. Am. en préparation*).
- [Costantini96] “A phase unwrapping method based on network programming”, M. Costantini, *Proceedings of Fringe (1996)*.
- [Doiteau03] “Vers l’imagerie adaptative non invasive du cerveau”, D. Doiteau, *Rapport de stage de DEA de l’Université Paris 7, spécialité Acoustique Physique (2003)*.
- [Dorme95] “Focusing in transmit-receive mode through inhomogeneous media: the time reversal matched filter approach”, C. Dorme, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 98(2), 1155-1162 (1995).
- [Fink92] “Time reversal of ultrasonic fields – Part I: Basic principles”, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 555-566 (1992).
- [Miller80] “Automated arrival time correction for ultrasonic cephalic imaging”, S.M. Miller-Jones, PhD dissertation, Duke University (1980)
- [Philips75] “Sampled aperture techniques applied to B-mode echoencephalography”, D. Philips, S. Smith, O. von Ramm, F. Thurstone, *Acoustical Holography* 6, 106-119 (1975).
- [Tanter98] “Focusing and steering through absorbing and aberrating layers: application to ultrasonic propagation through the skull”, M. Tanter, JL. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 103(5), 2403-2410 (1998).
- [Ylitalo89] “Ultrasonic echo tomography through skullbone”, J. Ylitalo, J. Koivukangas, *Proceedings of IEEE Ultrasonics symposium (1989)*

Appendice 3.A. Améliorer le rapport signal / bruit

Le but de cet appendice est de présenter quelques techniques pratiques pour améliorer le rapport signal / bruit, lors de l'acquisition du propagateur et lors de l'acquisition de l'image.

3.A.1. Lors de l'acquisition du propagateur

- Utilisation de la base d'Hadamard

Pour acquérir le propagateur à travers le crâne entier dans la base canonique, on fait émettre un à un les éléments de la barrette 1 et on enregistre simultanément ce qui est reçu sur tous les éléments de la barrette 2, on acquiert ainsi le propagateur colonne par colonne. Le problème est qu'un signal émis par un seul transducteur, après traversée de deux parois crâniennes, est très faible. Pour gagner en rapport signal / bruit, on peut choisir d'acquérir le propagateur dans la base d'Hadamard, on repasse dans la base canonique par un simple changement de base.

L'avantage d'utiliser la base d'Hadamard est que les vecteurs de base ont tous leurs éléments à 1 ou -1 (jamais 0, cf figures A1 et A2). En pratique, cela veut dire que lors de l'acquisition du propagateur tous les éléments de la barrette 1 émettent du signal en même temps avec une phase 0 ou π , au lieu d'un seul élément à la fois lors de l'acquisition classique dans la base canonique. Le signal transmis à travers le crâne et recapté sur la barrette 2 est donc plus intense : en principe si on utilise des barrettes de N transducteurs pour l'acquisition du propagateur, l'utilisation de la base d'Hadamard améliore le rapport signal / bruit d'un facteur \sqrt{N} .

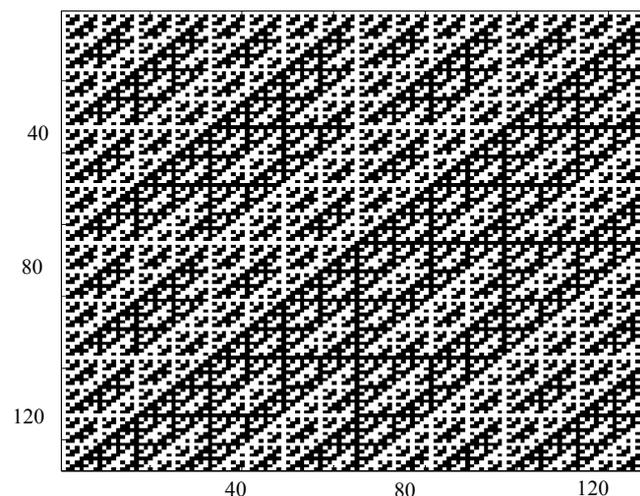


Figure A1. La matrice de passage de la base canonique vers la base d'Hadamard en dimension $N = 128$. Les carrés blancs correspondent à un coefficient +1, les carrés noirs à un coefficient -1 : aucun élément n'est à 0 ce qui assure une utilisation optimale des transducteurs lors de l'acquisition du propagateur dans cette base.

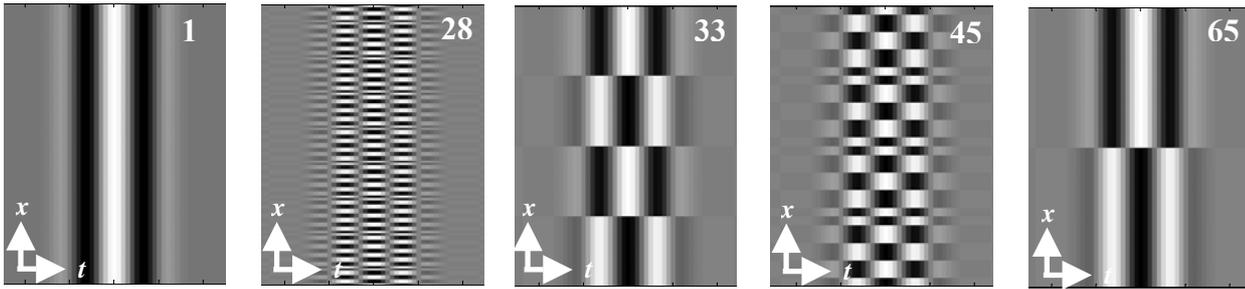


Figure A2. Pour fixer les idées on représente certains signaux émis depuis la barrette 1 lors de l'acquisition du propagateur dans la base d'Hadamard ; ils correspondent aux vecteurs d'Hadamard 1, 28, 33, 45, 65 en dimension 128 (lignes ou colonnes 1, 28, 33, 45, 65 de la matrice d'Hadamard représentée figure A1).

L'expression de la matrice d'Hadamard est immédiate lorsque la dimension N dans laquelle on travaille (le nombre d'éléments de nos barrettes) est une puissance de 2. Il nous est arrivé de devoir travailler avec $N = 120$, nous avons eu recours à des matrices d'Hadamard non « traditionnelles » : matrices carrées de taille N dont les éléments valent 1 ou -1 et dont le produit par leur transposée donne l'identité (propriété générale des matrices de passage). De telles matrices sont listées sur le site www.research.att.com/~njas/hadamard/ pour certaines valeurs de N .

En pratique, il est intéressant d'acquérir le propagateur dans la base d'Hadamard lorsque l'on dispose de deux barrettes ayant un nombre identique de transducteurs. Si l'on dispose d'une seule barrette de N transducteurs et que le champ est scanné dans le plan focal position par position en translatant un hydrophone, le temps d'acquisition dans la base d'Hadamard est multiplié par N par rapport au temps d'acquisition dans la base canonique, ce qui peut rendre l'acquisition prohibitivement longue (il faut envoyer les N vecteurs d'Hadamard pour chacune des N positions de l'hydrophone, ce qui oblige à procéder à N^2 émissions contre N émissions seulement si l'on dispose de deux barrettes ou que l'on utilise la base canonique).

D'autres bases « intelligentes » peuvent être utilisées pour améliorer le rapport signal / bruit lors de l'acquisition du propagateur, signalons encore la base des lois cylindriques focalisantes (Robert, JASA 115(5), p 2586, 2004) qui est plus adaptée au mode de fonctionnement des échographes commerciaux.

- Utilisation de chirps

Pour mesurer les fonction de Green des éléments de la barrette 1 aux éléments de la barrette 2 on ne peut en pratique émettre rigoureusement des diracs temporels, on essaye de s'en approcher en émettant des signaux les plus courts possibles (une arche de sinusöide) ayant ainsi un contenu

fréquentiel le plus large possible. Le problème est que plus court sera le signal émis, moins importante est l'énergie envoyée et donc plus faible sera le rapport signal / bruit des signaux captés sur l'autre barrette après traversée du crâne. Pour envoyer plus d'énergie en conservant le caractère large bande des signaux, on peut utiliser des *chirps* : ce sont des signaux longs temporellement dont la fréquence dépend du temps (signaux de la forme $c(t) = A \sin(\omega(t)t)$ avec $\omega(t) = \omega_0(1 + t/\tau)$).

Il est ensuite nécessaire de convoluer les signaux reçus sur la deuxième barrette par le retourné temporel du chirp envoyé : en effet la convolution du chirp par son retourné temporel correspond à la fonction d'autocorrélation du chirp : c'est un signal court qui contient toutes les fréquences du chirp, on simule ainsi l'émission d'un signal court tout en envoyant plus d'énergie (figures A3 et A4). Une deuxième option peut être de déconvoluer le signal reçu par le chirp envoyé, la convolution par le retourné temporel du chirp lui est préférée car le procédé de déconvolution équivaut à une division dans le domaine de Fourier et tout procédé impliquant une division est délicat et peut facilement diverger.

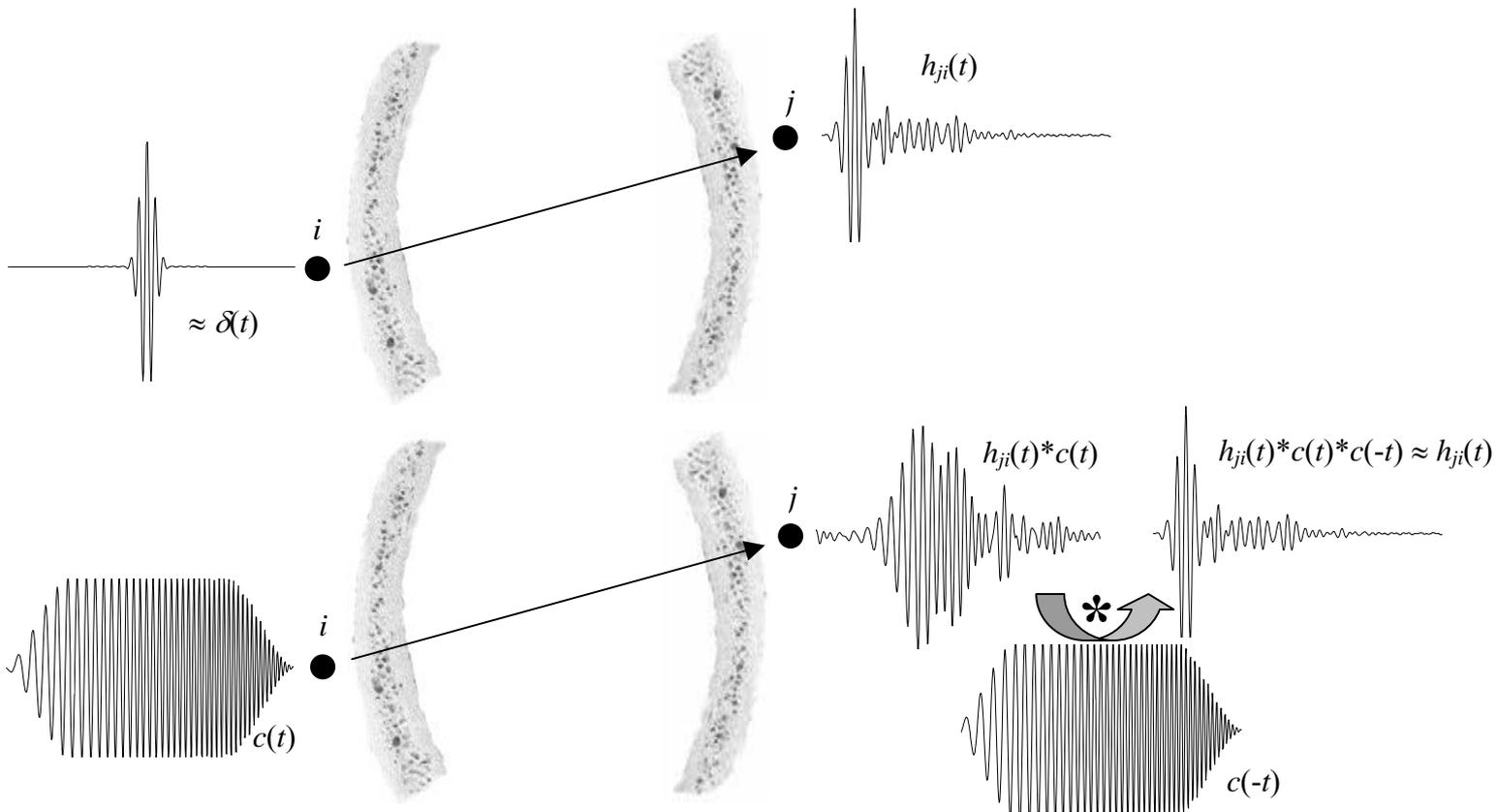


Figure A3. Acquisition de la fonction de Green $h_{ji}(t)$ entre les transducteurs i et j placés de part et d'autre d'un crâne entier. En haut, acquisition classique par l'envoi de signaux courts ; en bas acquisition par l'envoi de chirps et convolution du signal reçu par le retourné temporel du chirp.

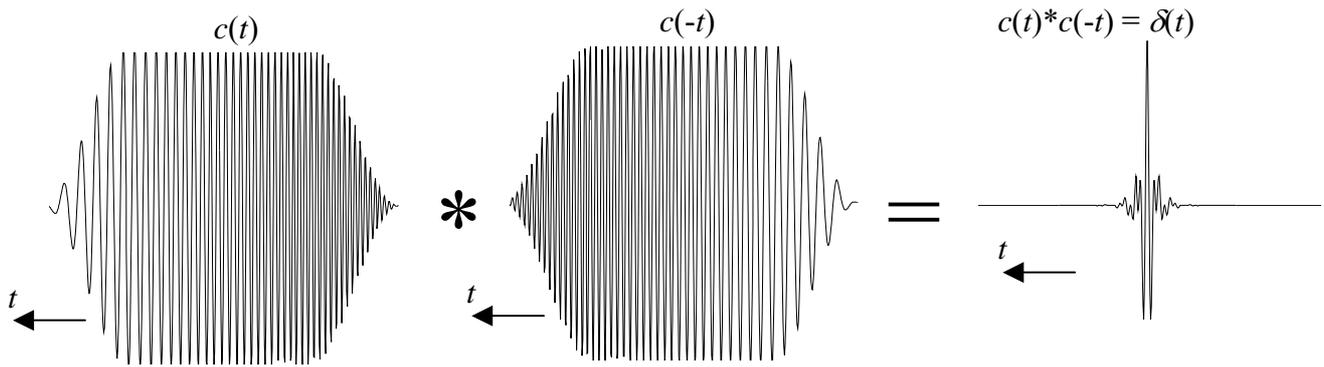


Figure A4. Quand on convolue un chirp par son retourné temporel, on obtient la fonction d'autocorrélation du chirp qui est proche d'un dirac temporel.

3.A.2. Lors de l'acquisition de l'image

Lors de l'acquisition d'une image échographique transcrânienne, on est amené à enregistrer des signaux qui ont été émis par la barrette, sont passés une fois à travers la paroi crânienne, ont été réfléchis parfois très faiblement par les diffuseurs présents au point focal et sont passés une nouvelle fois à travers la paroi crânienne au retour. Pour améliorer le rapport signal / bruit de ces signaux, on peut émettre des signaux d'amplitude plus importante, et/ou amplifier les signaux reçus en réception ; ces approches sont limitées par le matériel dont on dispose.

À amplitude égale on peut émettre plus d'énergie en envoyant des signaux plus longs : nous allons voir comment utiliser les chirps pour l'échographie standard et pour l'échographie par Filtre Inverse.

- Utilisation de chirps pour l'échographie par lois cylindriques

On focalise toujours par l'envoi de lois cylindriques : tous les transducteurs émettent le même signal, avec des retards adéquats pour que tous les signaux en provenance de tous les transducteurs arrivent en phase au point focal. Au lieu d'envoyer des signaux courts on émet des chirps : cela nous permet de sonder le milieu avec des signaux qui sont toujours large bande, mais avec plus d'énergie car les fréquences envoyées sont étalées dans le temps.

Si le milieu est sondé par des chirps, les signaux réfléchis dans le plan focal et recaptés au niveau de la barrette sont également des chirps, longs temporellement, ce qui empêche d'avoir des images avec une bonne résolution axiale (temporelle). Il est donc nécessaire de recomprimer les signaux reçus en les convoluant par le retourné temporel des chirps envoyés, ce qui a pour effet de donner lieu à des signaux courts tout en gardant le même contenu fréquentiel (figure A5).

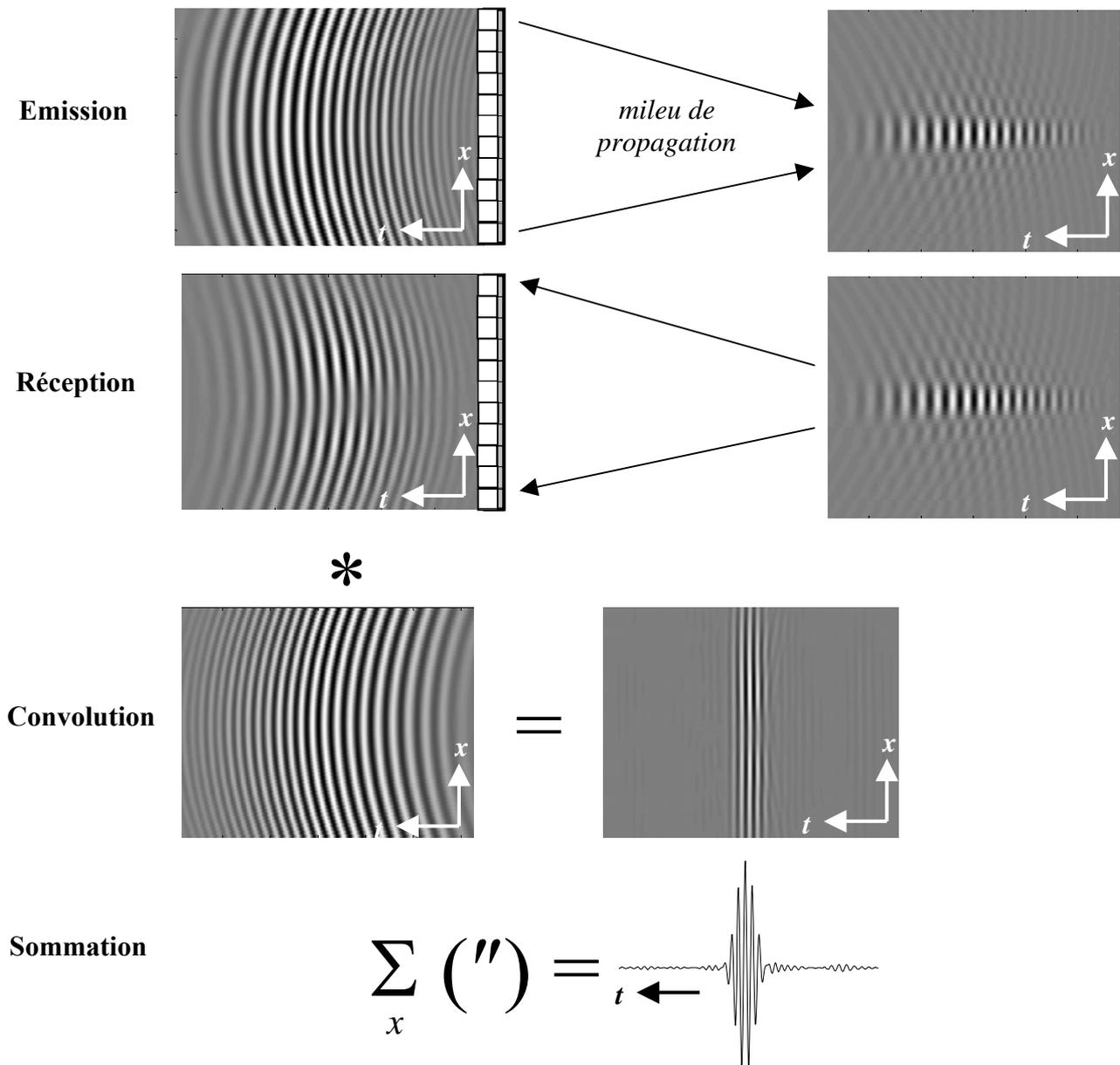


Figure A5. Obtention d'une ligne de l'image échographique par l'utilisation de chirps. Emission : on émet des chirps avec les retards appropriés pour focaliser au point désiré. Le signal reçu au point focal est un chirp. Réception : les signaux réfléchis et enregistrés par les différents transducteurs de la barrette sont donc des chirps qui arrivent avec les retards opposés des retards à l'émission. Convolution : au lieu de convoluer les signaux reçus par les signaux émis on les convolue par des signaux ayant les mêmes retards mais le chirp « à l'envers » (au lieu d'avoir les hautes fréquences au début ils les ont à la fin). Cela a pour effet de remettre les signaux en phase et d'assurer la compression temporelle. Sommation : on somme les signaux temporels ainsi obtenus sur tous les transducteurs pour obtenir la ligne de l'image correspondant au point sondé.

On peut formaliser la construction de la ligne i de l'image échographique avec l'utilisation de chirps de la manière suivante : soit $E(\omega)$ le vecteur d'émission cylindrique pour focaliser en position i dans le plan focal en émettant des diracs temporels. Le vecteur d'émission cylindrique avec les chirps s'écrit $E(\omega)c(\omega)$, $c(\omega)$ étant la transformée de Fourier du chirp. Le signal reçu dans le plan focal est $F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega)c(\omega)$ où $\mathbf{H}(\omega)$ est le propagateur de la barrette échographique vers le plan focal. Soit $\mathbf{r}(\omega)$ la matrice de réflectivité dans le plan focal, le signal réfléchi est $R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)E(\omega)c(\omega)$. On convolue ces signaux à la réception par $E(\omega)c(\omega)^*$ et on somme, la ligne i de l'image échographique ainsi obtenue s'écrit (dans le domaine de Fourier):

$$I_i(\omega) = c(\omega)^*E(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)E(\omega)c(\omega) \quad (\text{A.1})$$

Or $c(\omega)^*c(\omega)$ est la fonction d'autocorrélation du chirp, c'est donc un signal court temporellement ($c(\omega)^*c(\omega) \approx 1$) et on peut écrire

$$I_i(\omega) \approx {}^tE(\omega)\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)E(\omega) \quad (\text{A.2})$$

ce qui est l'expression de la ligne i de l'image échographique lorsque l'on utilise des diracs temporels en émission et en réception.

En pratique, comme la fonction d'autocorrélation du chirp n'est pas exactement égale à un dirac temporel mais fait apparaître des lobes temporels (figure A4), les images acquises avec des chirps présentent également des lobes temporels qui affectent l'image dans sa dimension axiale.

- Utilisation de chirps pour l'échographie par filtre inverse

Les chirps peuvent être utilisés de la même manière pour faire de l'imagerie adaptative, que ce soit par retournement temporel ou par filtre inverse. Au cours de la thèse nous avons été amenés à coupler l'imagerie par filtre inverse à l'utilisation de chirps pour augmenter la dynamique des signaux, nous allons ici expliciter le formalisme associé.

Lors de la focalisation par filtre inverse au point i , au lieu de se donner comme « cible » un signal court temporellement, on « vise » un chirp. Soit $S(\omega)$ le vecteur cible traditionnel du filtre inverse pour focaliser sur un dirac temporel au point i (c'est un vecteur contenant des zéros partout sauf un 1 en position i , à toutes les fréquences), le nouveau vecteur cible s'écrit par convolutoin avec le chirp, $S_{chirp}(\omega) = S(\omega)c(\omega)$. Le nouveau vecteur d'émission du filtre inverse s'écrit donc $E(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega)c(\omega)$, et le signal reçu sur la barrette après réflexion au plan focal est $R(\omega) = {}^t\mathbf{H}(\omega)\mathbf{r}(\omega)\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega)c(\omega)$. Il suffit de convoluer en réception le signal reçu par les signaux d'émission du filtre inverse *focalisant sur le retourné temporel du chirp au point i*

$(E(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}S(\omega)c(\omega)^*)$ pour remettre les signaux en phase et les comprimer temporellement avant sommation. La ligne i de l'échographie obtenue par filtre inverse avec l'utilisation de chirps d'écrit donc

$$I_i(\omega) = c(\omega)^*{}^t S(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1t} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{r}(\omega) \mathbf{H}(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} S(\omega) c(\omega) \quad (\text{A.3})$$

Si l'on approxime la fonction d'autocorrélation du chirp par un dirac temporel ($c(\omega)^* c(\omega) = 1$), l'équation précédente se simplifie en

$$I_i(\omega) = {}^t S(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1t} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{r}(\omega) \mathbf{H}(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} S(\omega) \quad (\text{A.4})$$

ce qui est l'expression de la ligne i de l'image échographique par filtre inverse lorsque l'on se donne comme cible un dirac temporel.

- Conclusion

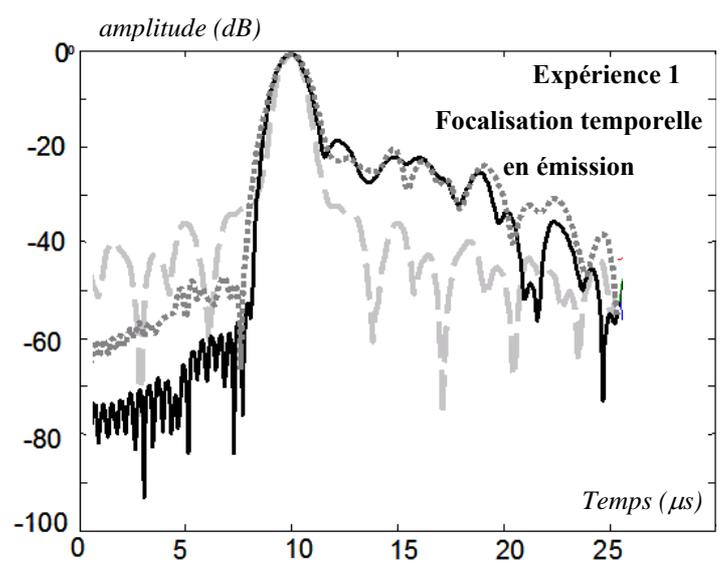
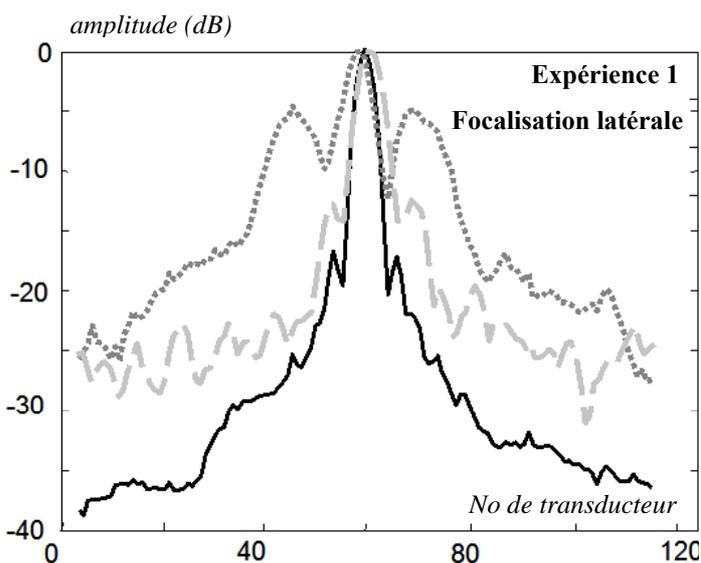
L'utilisation de chirps lors de l'échographie permet d'utiliser plus d'énergie et d'ainsi améliorer le rapport signal / bruit des images, le principal inconvénient est que l'on rajoute des lobes secondaires dans la dimension temporelle (axiale).

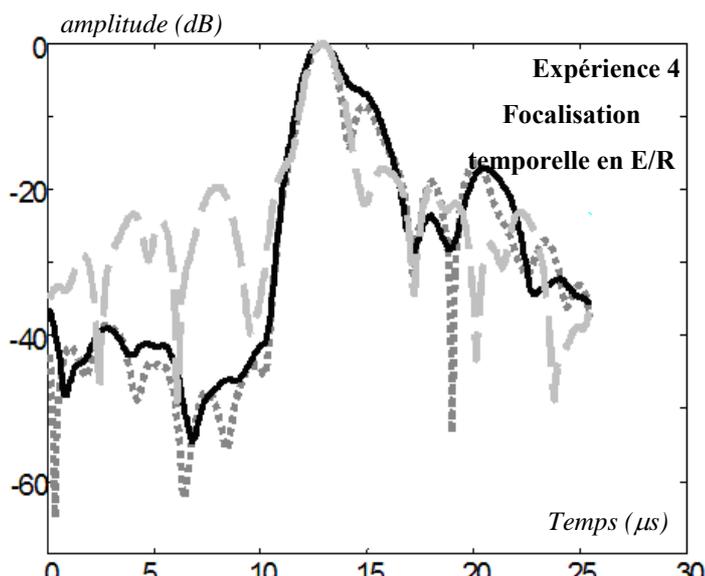
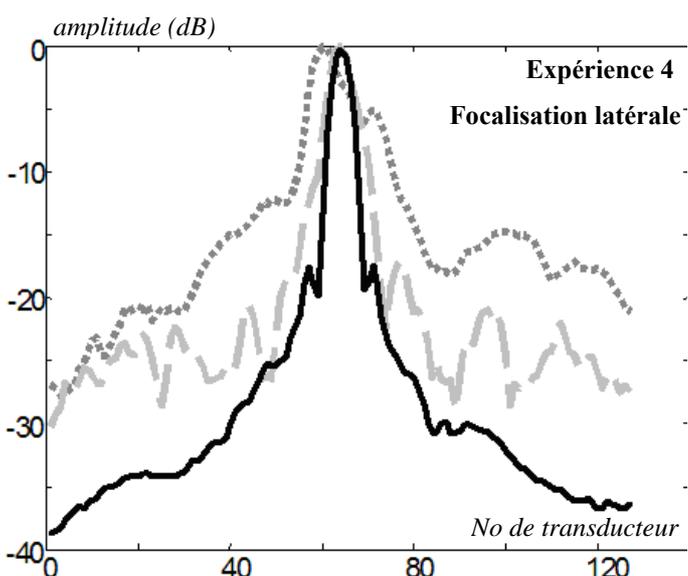
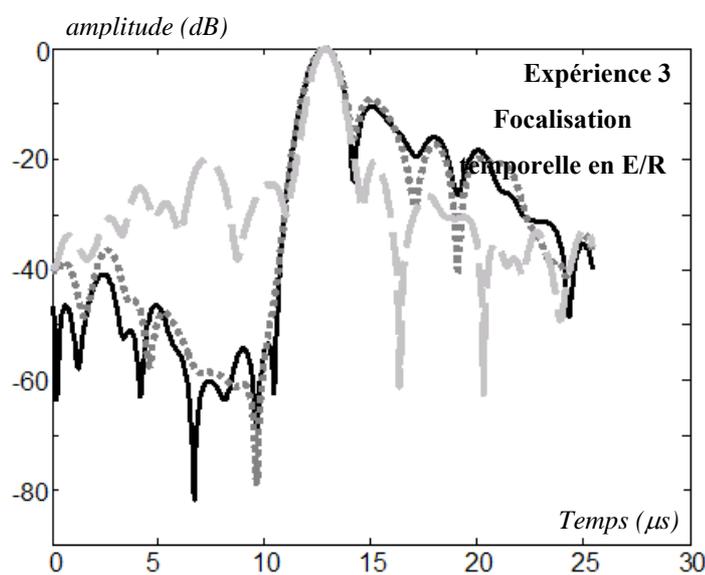
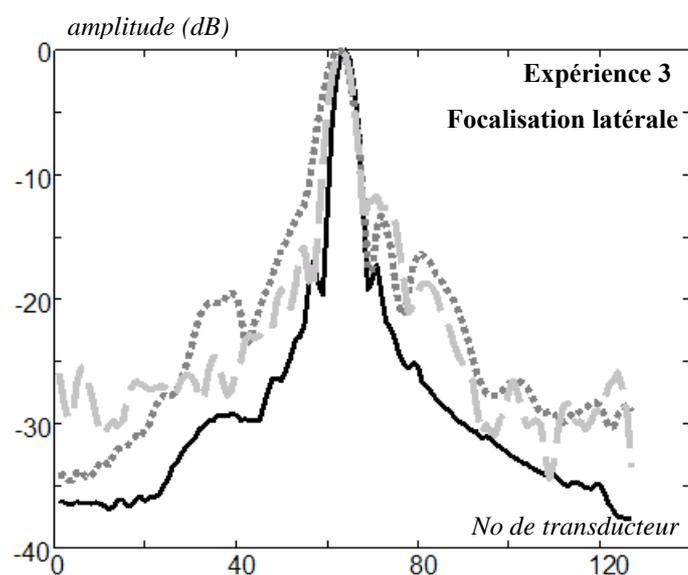
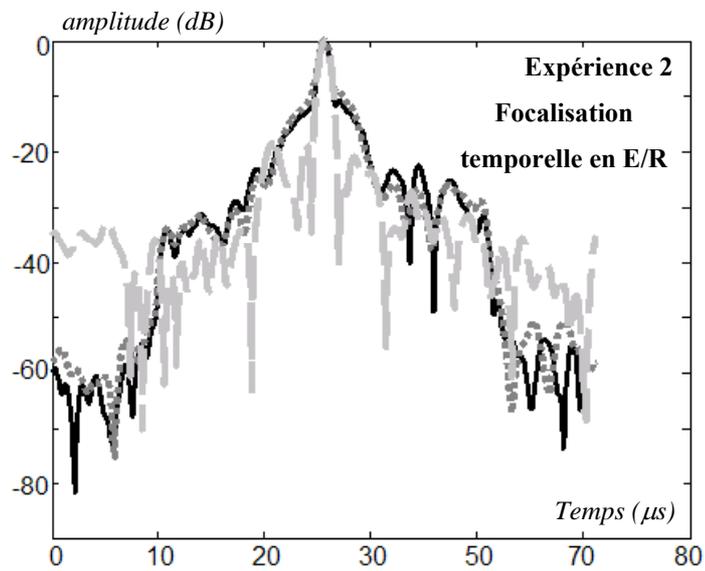
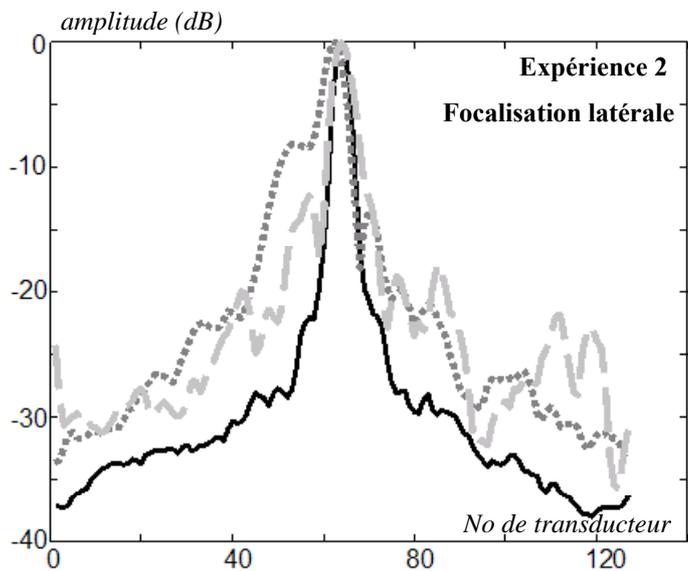
Appendice 3.B. Différentes expériences de focalisation par filtre inverse non intrusif.

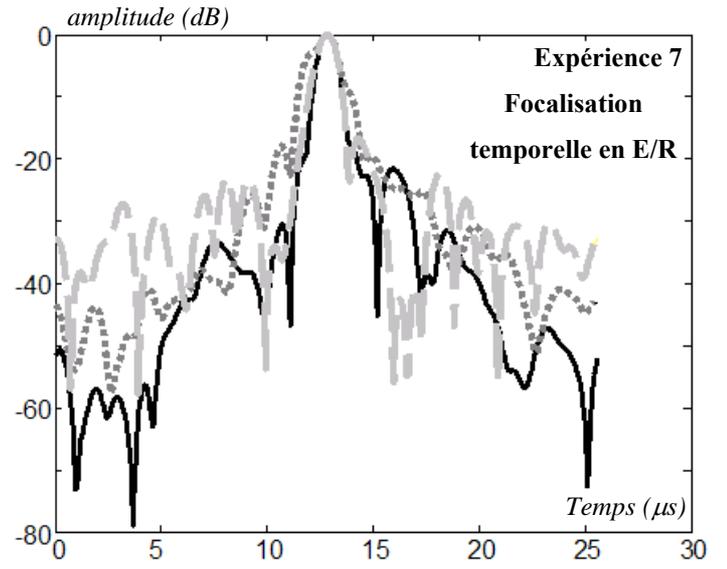
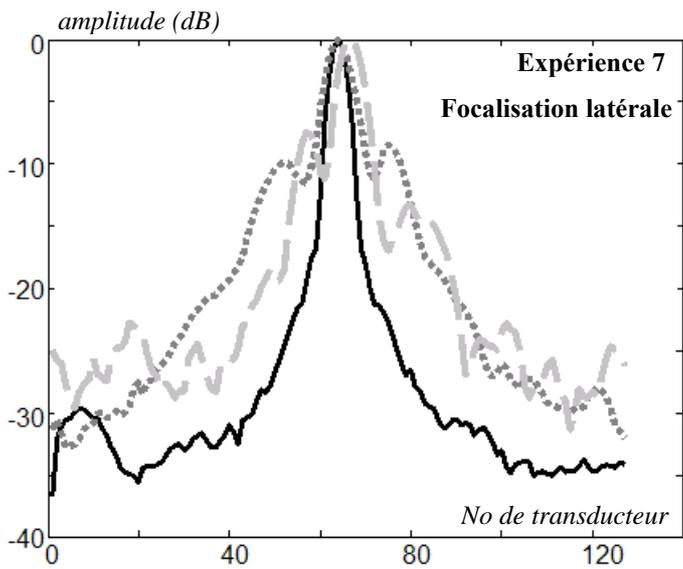
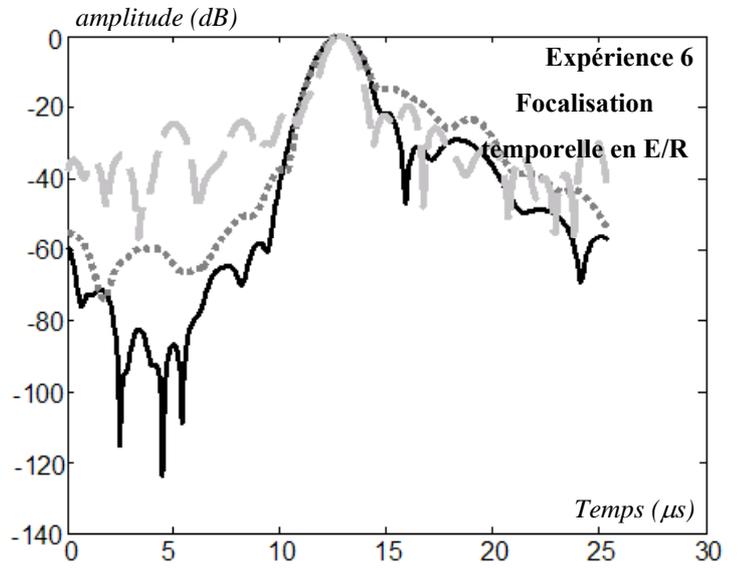
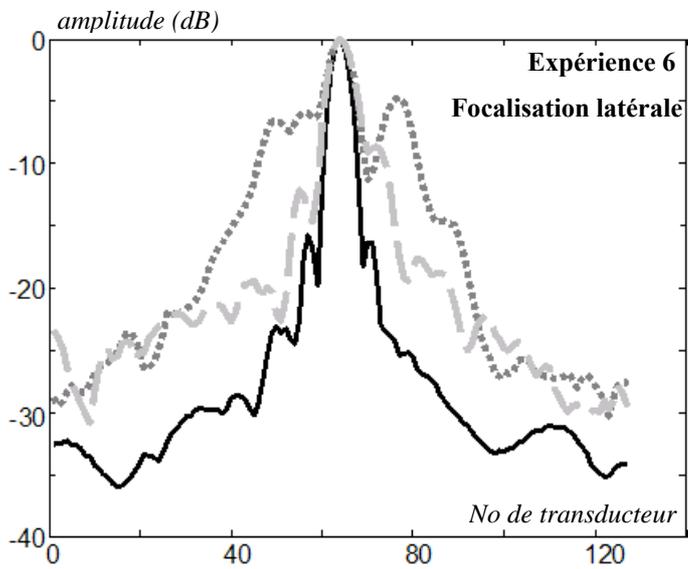
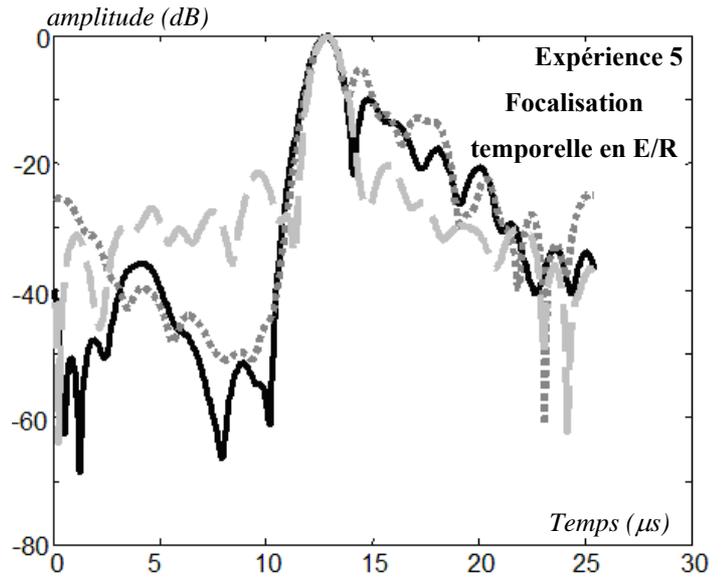
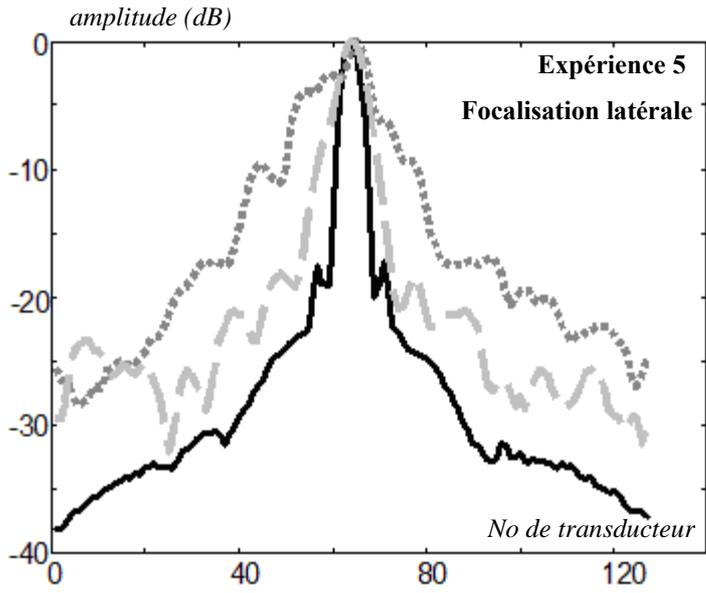
Le filtre inverse non intrusif étant potentiellement plus efficace que le Retournement Temporel non intrusif pour la focalisation en vue de l'imagerie transcrânienne, c'est naturellement vers cette technique que se sont le plus concentrés nos efforts durant la thèse. Le but de cet appendice est de montrer les résultats de différentes expériences de focalisation transcrânienne par filtre inverse non intrusif, à travers différents crânes (trois crânes ont été utilisés) et à travers différentes zones de crâne (toujours autour de la tempe).

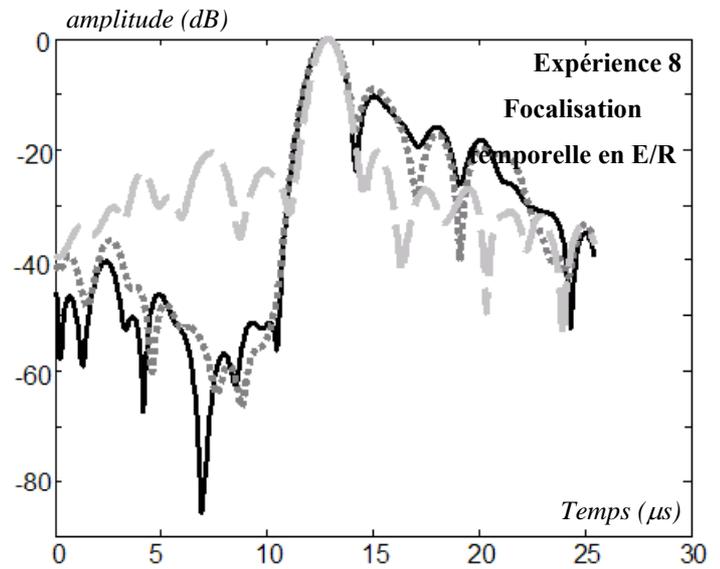
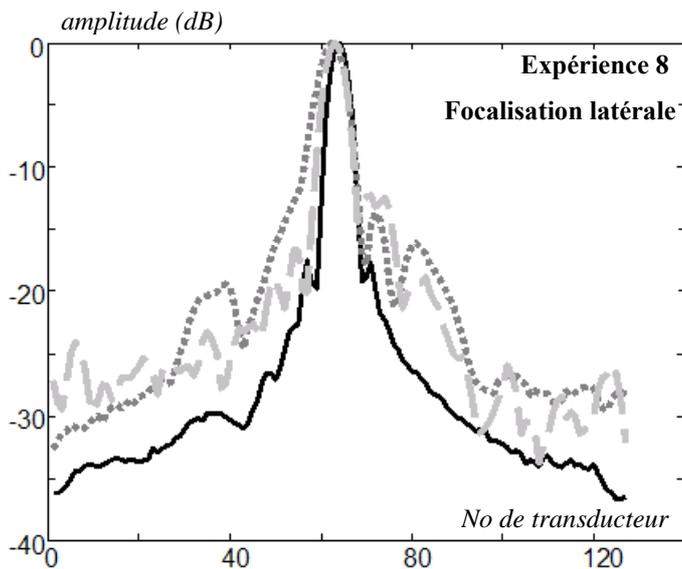
Le dispositif expérimental est celui de la figure 1 pour l'acquisition et l'estimation des propagateurs, puis on enlève le deuxième demi-crâne et on focalise des ondes depuis la barrette 1 sur la barrette 2 en visant l'élément central. Les figures ci-dessous présentent les résultats de focalisation : pour chaque expérience, la figure de gauche présente la focalisation latérale (maximum temporel, en dB, de la pression reçue sur chacun des transducteurs de la barrette 2) et la figure de droite la focalisation temporelle en émission-réception (enveloppe, en dB, de la ligne centrale de l'image échographique d'un réflecteur parfait disposé parallèlement à la barrette) sauf pour la première expérience où l'on ne présente que la résolution temporelle en émission (enveloppe, en dB, du signal temporel reçu au point focal). La focalisation de référence (loi cylindrique à travers l'eau) est en trait plein noir, la loi cylindrique à travers le crâne en petits pointillés gris foncé, le filtre inverse non intrusif en grands pointillés gris clair.

Il s'agit d'expériences de focalisation avec une barrette d'ouverture 6 cm, à une distance focale comprise entre 10 et 15 cm. La longueur d'onde moyenne des signaux dans l'eau est de 1 mm. L'axe des abscisses sur les graphes de focalisation latérale est en « numéro de transducteur » qui reçoit le signal sur la barrette 2 : il y a 128 transducteurs espacés les uns des autres de 0.5 mm.









De toutes ces expériences, et des nombreuses autres qui ont été faites durant la thèse et ne sont pas représentées ici, et des nombreuses autres focalisations que l'on peut tester en focalisant en d'autres positions que la position centrale dans le plan focal, on tire les conclusions suivantes :

- La focalisation latérale par filtre inverse non intrusif est *toujours* meilleure que la focalisation transcrânienne non adaptative : on corrige du décalage spatial de la tache focale, on rétrécit le lobe principal, et on abaisse les lobes secondaires de 10 à 20 dB. Les courbes où l'amélioration de la focalisation par filtre inverse non intrusif par rapport à la focalisation non adaptative est la moins spectaculaire sont les courbes pour lesquelles la focalisation non adaptative est déjà relativement bonne (expériences 3 et 8 par exemple).

- La focalisation temporelle par filtre inverse non intrusif donne lieu à un lobe principal plus court que la focalisation temporelle de référence (loi cylindrique à travers l'eau), de plus le contraste temporel obtenu par filtre inverse non intrusif peut être meilleur que le contraste temporel de référence. Ces deux propriétés viennent de la compensation d'amplitude en fréquences qu'opère le filtre inverse, attribuant plus d'énergies aux composantes fréquentielles du signal qui sont les moins bien transmises par les transducteurs et le crâne (notamment les plus hautes fréquences).

Conclusion : Dans tous les cas testés, on y gagne à utiliser le filtre inverse non intrusif.

4. Les équations de Stokes : un lien entre retournement temporel et filtre inverse.

Jusqu'à présent, nous avons utilisé deux méthodes de focalisation adaptative d'ultrasons : le retournement temporel et le filtre inverse. Dans ce chapitre, nous allons montrer le lien théorique qui existe entre les deux techniques.

Le but original de notre étude était de savoir si l'on pouvait avoir des informations sur le signal transmis à travers le crâne à partir de l'analyse des signaux réfléchis. En effet, signaux transmis et signaux réfléchis à travers une structure sont reliés par les équations de Stokes [Fink92]. Dans un premier temps, nous avons travaillé sur un milieu modèle : une plaque solide immergée dans l'eau, l'approximation à l'ordre 0 de la paroi crânienne [Baikov03, Aarnio04, Doiteau04].

Lorsque l'on envoie un front d'ondes de courte durée à travers une plaque (ou une paroi crânienne), les multiples réflexions internes aux limites de la plaque induisent de multiples fronts d'ondes transmis à la suite du front d'ondes principal. Dans un but d'imagerie, la présence de ces échos nuit à la résolution temporelle : la présence de plusieurs échos successifs fait que le milieu sondé va l'être plusieurs fois successivement, l'image du milieu sera donc répétée sur l'image finale autant de fois qu'il y a d'échos.

Pour tester la capacité qu'ont le retournement temporel et le filtre inverse à éliminer ces échos de plaque, on monte le dispositif expérimental suivant : une plaque solide (titane) est placée entre deux barrettes échographiques linéaires identiques, l'ensemble est immergé dans l'eau (figure 1). Le but est de faire parvenir une onde sans échos sur l'une des barrettes, en émettant un signal depuis une barrette ou en utilisant simultanément les deux barrettes.

Dans un premier temps, on teste le retournement temporel, en utilisant la cavité matérialisée par les deux barrettes qui entourent la plaque. Puis on teste l'élimination d'échos par filtre inverse, en inversant le propagateur de transmission entre une barrette et l'autre. Nous verrons que le filtre inverse est capable d'annuler les échos en utilisant seulement le champ transmis à travers la plaque, alors que le retournement temporel nécessite aussi le champ réfléchi.

Nous analyserons la stratégie du filtre inverse à la lumière des équations de Stokes, qui relie champ transmis et champ réfléchi : le filtre inverse utilise les réflexions multiples dans le milieu pour imiter une cavité à retournement temporel en utilisant une seule barrette. Une analyse mathématique des relations de Stokes conduit à une technique itérative pour inverser l'opérateur de transmission. Nous montrerons de plus que cette méthode numérique est équivalente à la technique de retournement temporel itératif mise en place expérimentalement par Gabriel Montaldo [Montaldo03, Montaldo05].

4.1. Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est présenté figure 1: une plaque solide (titane) est entourée par deux barrettes échographiques linéaires identiques (64 transducteurs chacune, fréquence centrale 1.5 MHz, bande passante approximative 50%, l'écart entre deux transducteurs adjacents est de 1 mm). L'ensemble est immergé dans l'eau.

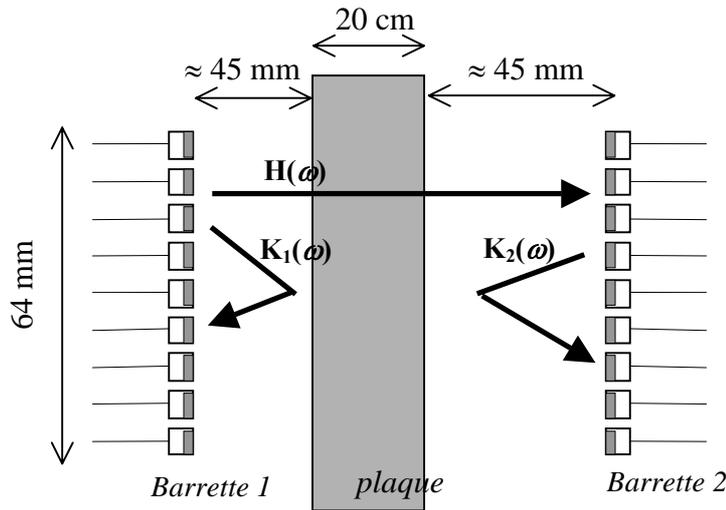


Figure 1 : schématisation du dispositif expérimental : deux barrettes échographiques linéaires identiques sont placées de part et d'autre d'une plaque solide. Les deux propagateurs en réflexion de la barrette 1 à elle-même ($\mathbf{K}_1(\omega)$), de la barrette 2 à elle-même ($\mathbf{K}_2(\omega)$), et le propagateur en transmission de la barrette 1 à la barrette 2 ($\mathbf{H}(\omega)$) sont acquis.

Notons d'ores et déjà que les propagateurs de réflexion $\mathbf{K}_1(\omega)$ et $\mathbf{K}_2(\omega)$ sont égaux à leurs transposés, à cause de la réciprocité spatiale : ce qui est reçu sur j lorsque l'on émet de i ($K_{ji}(\omega)$) est égal à ce qui est reçu sur i lorsque l'on émet de j ($K_{ij}(\omega)$).

Le but est d'obtenir sur la barrette 2 une onde plane courte temporellement (présentant un seul front, sans échos) en envoyant des signaux depuis la barrette 1, ou depuis les deux barrettes 1 et 2. Nous allons utiliser les techniques de retournement temporel et filtre inverse pour essayer de résoudre ce problème de focalisation temporelle. La forme temporelle et fréquentielle du signal « cible » que l'on veut obtenir sur la barrette 2 est présentée figure 2.

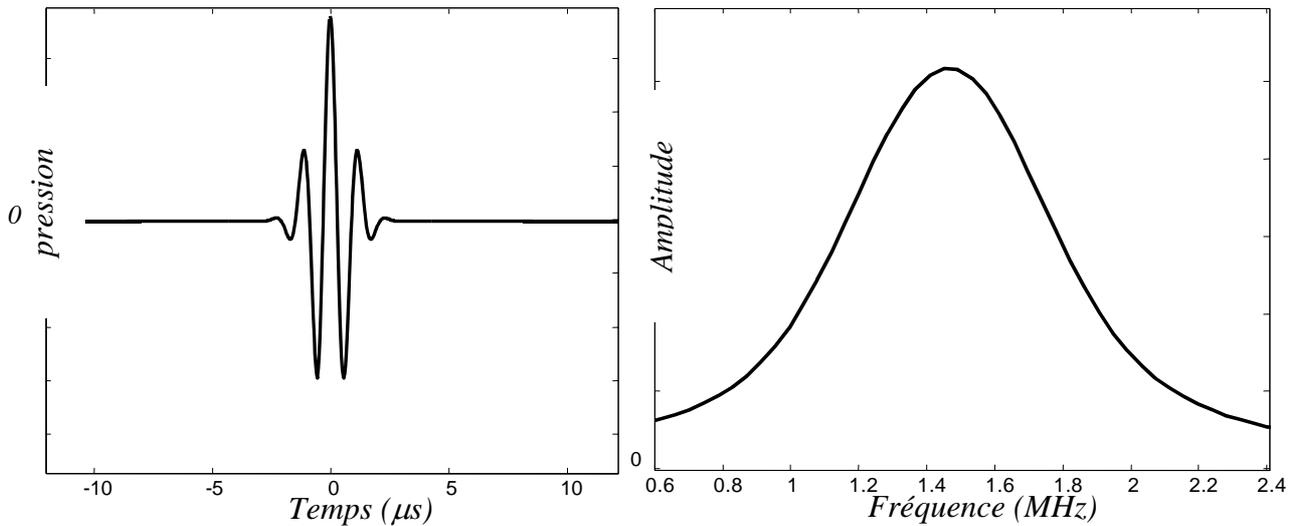


Figure 2 : A gauche : forme temporelle $s(t)$ du signal « cible », court sans échos, que l'on veut obtenir sur la barrette 2. A droite : sa transformée de Fourier $s(\omega)$.

Si on se contente d'envoyer une onde plane depuis la barrette 1, à cause des réflexions multiples aux interfaces entre la plaque et l'eau, le signal qui sera reçu sur la barrette 2 présentera un front principal suivi d'une série d'échos. Pour éliminer ces échos, il est nécessaire d'envoyer un signal plus compliqué, c'est pourquoi nous allons faire appel à des techniques de focalisation adaptative.

4.2. Le retournement temporel

4.2.1. Le miroir à retournement temporel

Dans un premier temps, nous utilisons le miroir à retournement temporel [Cassereau93] matérialisé par la barrette 1 pour focaliser sur la barrette 2. Le principe de l'expérience est le suivant : on émet le signal cible $S_2(\omega) = s(\omega) [1, 1, \dots, 1]$ depuis la barrette 2. Le signal $R_1(\omega)$ capté par la barrette 1 est donc

$$R_1(\omega) = \mathbf{H}(\omega) S_2(\omega) \quad (1)$$

La forme temporelle $r_1(t)$ des signaux ainsi reçus sur la barrette 1 est présentée figure 3 : un front d'ondes principal est suivi d'une série d'échos résultant des réflexions multiples aux interfaces entre la plaque et l'eau.

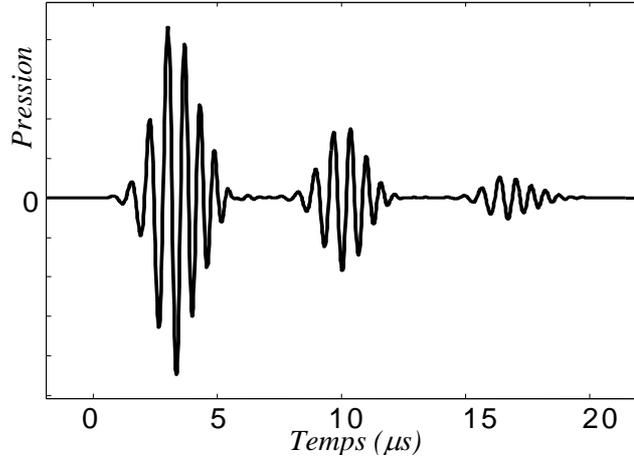


Figure 3 : forme temporelle $r_1(t)$ du signal reçu par la barrette 1 lorsque la barrette 2 émet le signal « cible » $s(t)$.

Ce signal est ensuite retourné temporellement et réémis par la barrette 1 en direction de la barrette 2. Le signal réémis est donc

$$E_1(\omega) = R_1(\omega)^* = {}^t\mathbf{H}(\omega)^* S_2(\omega) \quad (2)$$

(le signal cible $s(t)$ a été choisi symétrique (pair) de telle sorte que sa transformée de Fourier est réelle ($s(\omega) = s(\omega)^*$)).

Les signaux $E_1(\omega)$ se propagent alors de la barrette 1 vers la barrette 2. Les signaux finalement reçus sur la barrette 2 sont

$$F_2(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E_1(\omega) = [\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*] S_2(\omega). \quad (3)$$

La forme temporelle des signaux $f_2(t)$ (la transformée de Fourier inverse de $F_2(\omega)$) reçus sur la barrette 2 à la fin de ce procédé de retournement temporel est présentée figure 4a. A cause des réflexions multiples de l'onde dans la plaque, le signal présente une série d'échos précédant et suivant le front d'ondes principal. Sur le spectre de ces signaux, présenté figure 4b, on observe une amplification des fréquences qui sont résonantes dans la plaque (effet Fabry-Pérot [VanderBiest03, Aarnio04]). Finalement, les signaux $F_2(\omega)$ focalisés sur la barrette 2 par retournement temporel en utilisant la barrette 1 comme miroir à retournement temporel sont loin des signaux cible $S_2(\omega)$.

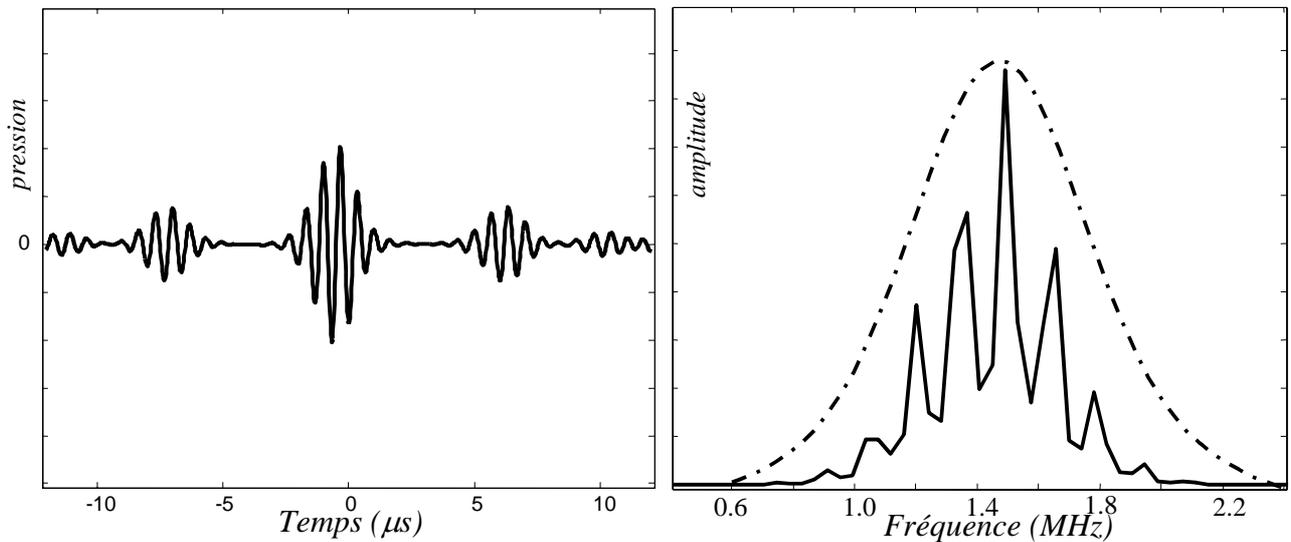


Figure 4 : A gauche : forme temporelle $f_2(t)$ du signal focalisé sur la barrette 2 en utilisant la barrette 1 comme miroir à retournement temporel. A droite : sa transformée de Fourier $f_2(\omega)$ (en trait plein) et la transformée de Fourier $s(\omega)$ du signal cible (tirets-points).

Un *miroir* à retournement temporel est donc insuffisant pour parvenir à une bonne focalisation temporelle : en effet, lorsque la barrette 2 émet le signal cible, une partie de ce signal est réfléchi par la plaque en direction de la barrette 2, ce signal est perdu pour la barrette 1 et pour le retournement temporel. Pour parvenir à une focalisation optimale, il est nécessaire de capter et retourner temporellement également ce signal réfléchi. Cela peut se faire en utilisant les deux barrettes, qui matérialisent alors une *cavité* à retournement temporel [Fink92, Cassereau93, Fink97].

4.2.2. La cavité à retournement temporel

En utilisant les deux barrettes qui entourent la plaque pour enregistrer, retourner temporellement et réémettre les signaux issus de la barrette 2, on matérialise une cavité à retournement temporel [Fink92, Fink97].

Le signal cible $S_2(\omega)$ est émis par la barrette 2 et les signaux correspondant $R_1(\omega)$ et $R_2(\omega)$ sont captés sur les barrettes 1 et 2 après respectivement transmission à travers et réflexion sur la plaque. $R_1(\omega)$ et $R_2(\omega)$ s'expriment donc à partir des signaux émis $S_2(\omega)$ et des propagateurs de transmission $\mathbf{H}(\omega)$ et de réflexion $\mathbf{K}_2(\omega)$ respectivement :

$$R_1(\omega) = \mathbf{H}(\omega)S_2(\omega), \quad (4a)$$

$$R_2(\omega) = {}^t\mathbf{K}_2(\omega)S(\omega). \quad (4b)$$

Ces signaux sont retournés temporellement et réémis en direction de la barrette 2. Le signal $F_2(\omega)$ finalement reçu sur la barrette 2 s'écrit

$$F_2(\omega) = \mathbf{H}(\omega)R_1(\omega)^* + \mathbf{K}_2(\omega)R_1(\omega)^* \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow F_2(\omega) = [\mathbf{H}(\omega){}^t\mathbf{H}(\omega)^*] S_2(\omega) + [\mathbf{K}_2(\omega){}^t\mathbf{K}_2(\omega)^*] S_2(\omega). \quad (6)$$

La première moitié de l'expression ci-dessus décrit le procédé de retournement temporel en transmission en utilisant seulement la barrette 1 comme miroir à retournement temporel, et la seconde moitié le retournement temporel en réflexion en utilisant seulement la barrette 2. Les signaux retournés temporellement provenant des deux barrettes vont interférer constructivement au moment de l'arrivée du front d'ondes principal (figure 5b), et destructivement au moment des échos (figure 5c): le front principal va être amplifié et les échos annulés.

Trois expériences ont été menées pour vérifier cet effet. Dans un premier temps, seule la barrette 1 est utilisée pour le retournement temporel. Les signaux temporels correspondant reçus sur la barrette 2 sont représentés figure 5a, 5c, 5d (courbes noires). Ils correspondent aux résultats obtenus dans la section précédente en utilisant le retournement temporel en transmission. Puis seule la barrette 2 est utilisée pour faire le retournement temporel. Les signaux correspondants reçus sur la barrette 2 sont superposés sur la figure 5a, 5c, 5d (courbe grise) : ces signaux sont en phase avec ceux qui sont issus du retournement temporel en transmission pour le front d'onde principal, et en opposition de phase pour les échos. Finalement, les deux barrettes sont utilisées pour faire le retournement temporel. Le signal reçu sur la barrette 2 est représenté en pointillés sur les figures 5a, 5c, 5d, confirmant l'annulation des échos et l'amplification du front d'ondes principal lorsque l'on utilise toute la cavité.

Dans le domaine fréquentiel (figure 5b), on constate que les fréquences qui sont amplifiées par résonance dans la plaque lors du retournement temporel en transmission (courbe noire), correspondent précisément à des fréquences qui sont atténuées lors du retournement temporel en réflexion (courbe grise). Le spectre des signaux reçus dans le plan focal lorsque l'on utilise la cavité (courbe en pointillés) correspond à la somme des deux spectres de transmission et de réflexion, et se rapproche sensiblement du spectre du signal cible (courbe gris pointillés).

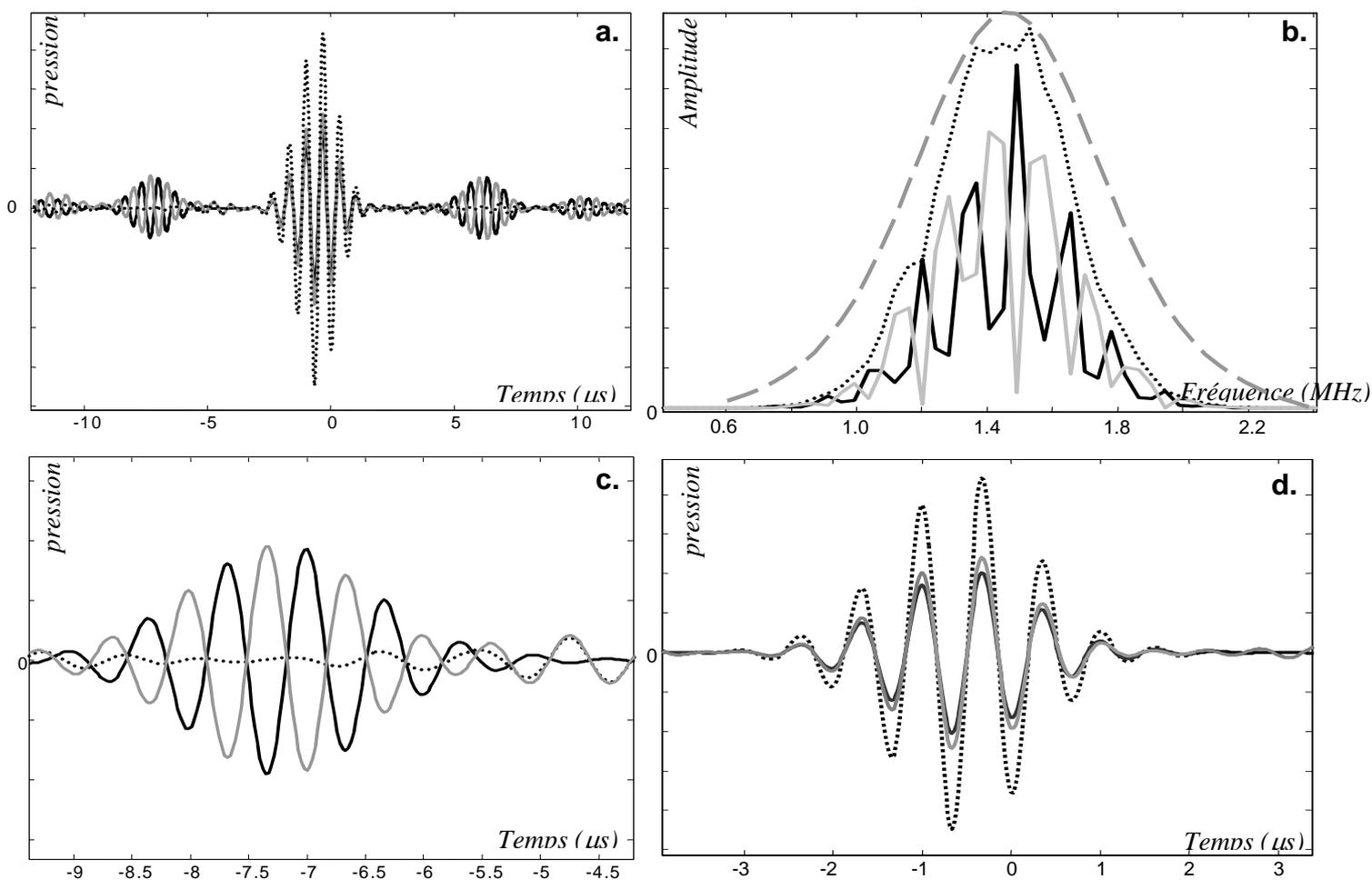


Figure 5 : Focalisation adaptative sur le signal cible $s(t)$ ($S(\omega)$) sur la barrette 2, par retournement temporel. En traits pleins noirs la focalisation par retournement temporel en transmission, en gris le retournement temporel en réflexion, en pointillés le retournement temporel en utilisant les deux barrettes. 5a : vue d'ensemble (temporelle) du signal focalisé. 5b : transformée de Fourier du signal focalisé. 5c : vue temporelle du signal focalisé, zoom sur le premier écho précédant le front d'ondes principal. 5d : vue temporelle du signal focalisé, zoom sur le front d'ondes principal.

4.3. Le filtre inverse

Dans cette section, on montre comment obtenir sur la barrette 2 une focalisation temporelle aussi bonne qu'avec le miroir à retournement temporel, mais en utilisant une seule barrette pour émettre les signaux (ici, la barrette 1).

Si les signaux $E_1(\omega)$ sont envoyés depuis la barrette 1 et se propagent à travers $\mathbf{H}(\omega)$ vers la barrette 2, les signaux $F_2(\omega)$ reçus sur la barrette 2 sont

$$F_2(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E_1(\omega) \quad (7)$$

Le but est de trouver les signaux $E(\omega)$ à envoyer depuis la barrette 1 pour obtenir sur la barrette 2 un signal focalisé $F_2(\omega)$ qui soit le plus proche possible du signal cible $S_2(\omega)$, cela se fait en inversant directement l'équation (7) [Aubry02, Tanter01]:

$$E_1(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} S_2(\omega) \quad (8)$$

où $\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}$ est l'inverse régularisé de $\mathbf{H}(\omega)$ [Tanter01]. Le signal $e_1(t)$ à émettre depuis tous les transducteurs de la barrette 1 se déduit par transformée de Fourier inverse de $E_1(\omega)$, il est présenté figure 6a.

En analysant la forme temporelle de ces signaux, on peut comprendre la stratégie du filtre inverse : un front principal est d'abord émis, c'est lui qui va produire le front principal sur la barrette 2. Ce front va être réfléchi à la sortie de la plaque, et c'est cette réflexion qui va donner lieu à des échos parasites qui suivent le front principal. C'est pourquoi, après le front principal, un deuxième front d'amplitude plus faible est émis : il va servir à interférer destructivement avec l'onde réfléchie pour éliminer l'onde « piégée » dans la plaque dont les réflexions multiple donneraient lieu aux échos.

Si l'on s'intéresse au spectre des signaux émis (figure 6b, courbe en points gris), on peut donner une interprétation en terme de fréquences à la stratégie du filtre inverse : les fréquences qui seront plus tard amplifiées par résonance dans la plaque sont envoyées avec une amplitude plus faible, alors que les fréquences qui vont être atténuées – que ce soit parce qu'elles ne sont pas résonantes dans la plaque ou parce qu'elles se situent aux extrémités de la bande passante des transducteurs – sont envoyées avec une amplitude plus forte. Le filtre inverse réalise donc ainsi une sorte de *compensation d'amplitude en fréquences* [Aubry01, Aubry02].

Les signaux $E_1(\omega)$ du filtre inverse sont émis depuis la barrette 1, les signaux $F_2(\omega)$ qui sont captés sur la barrette 2 sont donc

$$F_2(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E_1(\omega) = [\mathbf{H}(\omega)\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}] S_2(\omega) \quad (9)$$

Les signaux reçus $F_2(\omega)$ seraient égaux aux signaux cible $S_2(\omega)$ si l'inversion était parfaite. On vérifie expérimentalement que les signaux temporels $f_2(t)$ sur la barrette 2 sont proches des signaux cible $s(t)$, sur la figure 6c. En particulier, les échos sont annulés :

Le filtre inverse est capable, avec une seule barrette d'émission, d'une focalisation temporelle équivalente à celle obtenue avec la cavité à retournement temporel.

Sur la figure 6d on présente les spectres des signaux $F_2(\omega)$ reçus sur la barrette 2 en utilisant la cavité à retournement temporel (courbe grise discontinue) et le filtre inverse (pointillés gris). On représente également le spectre du signal cible $S_2(\omega)$ (courbe noire, trait plein). La focalisation par filtre inverse est même plus proche de la cible que la focalisation par cavité à retournement temporel : cela est dû au fait que le filtre inverse augmente dans les signaux d'émission l'amplitude des signaux qui ne seront pas bien transmis par les transducteurs, car aux limites de la bande passante : le filtre inverse compense de la bande passante.

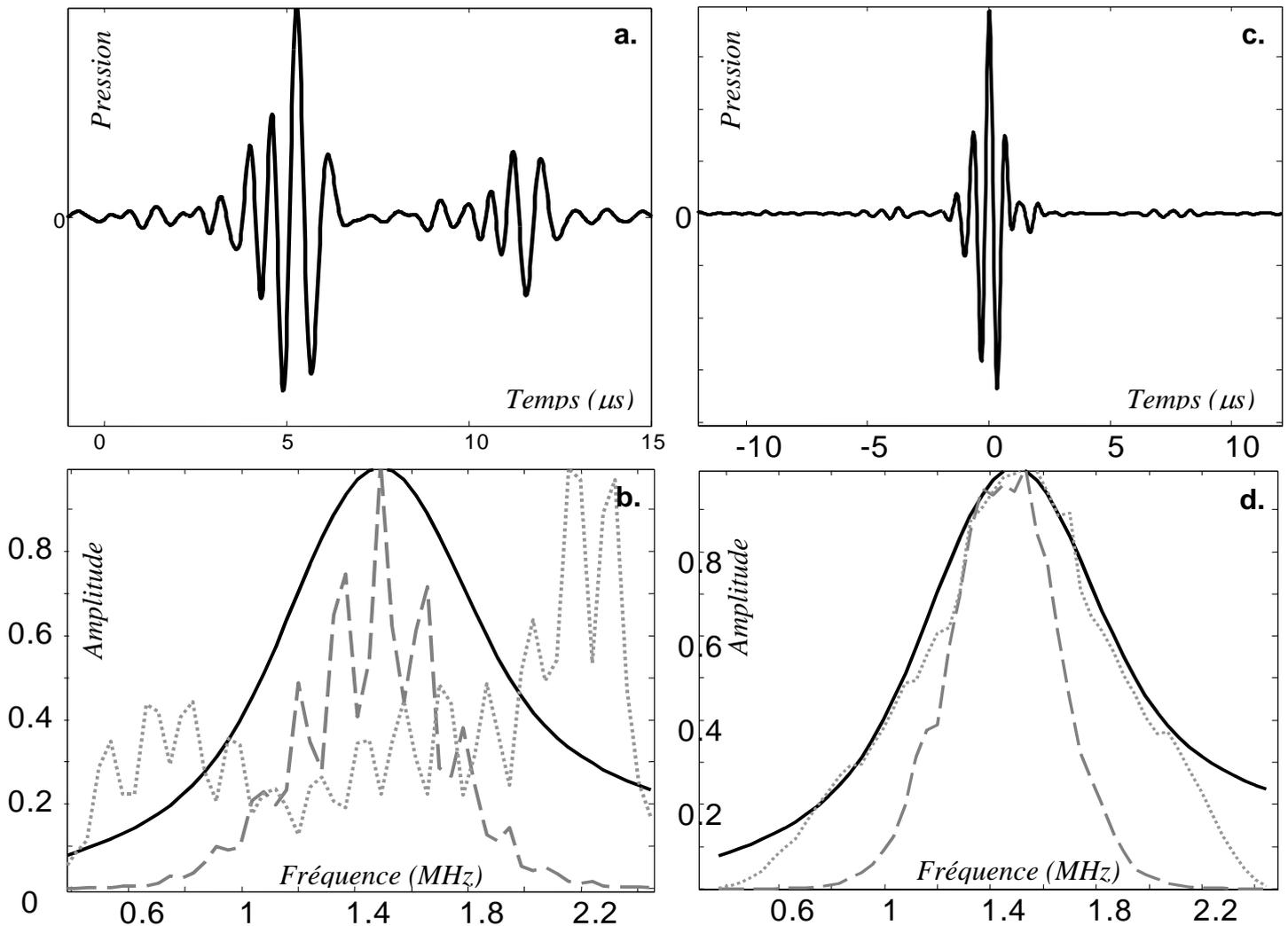


Figure 6 : Focalisation adaptative sur le signal cible $s(t)$ ($S(\omega)$) sur la barrette 2, par filtre inverse. A gauche (a et b) les signaux émis par la barrette 1, forme temporelle et fréquentielle, à droite (c et d) les signaux reçus sur la barrette 2, forme temporelle et fréquentielle. Sur la figure 6b, en plus du spectre des signaux $E_1(\omega)$ émis par la barrette 1 pour focaliser sur la barrette 2 par filtre inverse (en gris pointillée) on a représenté le spectre du signal cible $S_2(\omega)$ (en trait plein noir) et le spectre de la focalisation par retournement temporel en transmission (en tirets gris). Sur la figure 6d, en plus du spectre des signaux $F_2(\omega)$ focalisés depuis la barrette 1 sur la barrette 2 par filtre inverse (en gris pointillée) on a représenté le spectre du signal cible $S_2(\omega)$ (en trait plein noir) et le spectre de la focalisation par retournement temporel avec la cavité (en tirets gris).

4.4. Comment le filtre inverse reproduit-il la cavité à retournement temporel en n'utilisant qu'une seule barrette ?

La capacité qu'a le filtre inverse d'annuler les échos en utilisant une seule barrette soulève une question intéressante : comment le filtre inverse est-il capable de « récupérer » l'information manquante contenue dans l'onde réfléchie par la plaque, et qui est enregistrée par la deuxième barrette lorsque l'on utilise une vraie cavité à retournement temporel ? En fait, nous allons montrer que le lien entre retournement temporel et filtre inverse se fait par les équations de Stokes.

4.4.1. Démonstration des équations de Stokes par une expérience de retournement temporel

Considérons l'expérience présentée sur la figure 7 : deux fluides d'impédances acoustiques différentes sont séparés par une interface plane. Une onde incidente d'amplitude 1 se propage vers l'interface, du milieu 2 vers le milieu 1. A l'interface, il y a réflexion partielle de l'onde avec une amplitude r_{22} et transmission partielle avec une amplitude t_{12} (figure 7a).

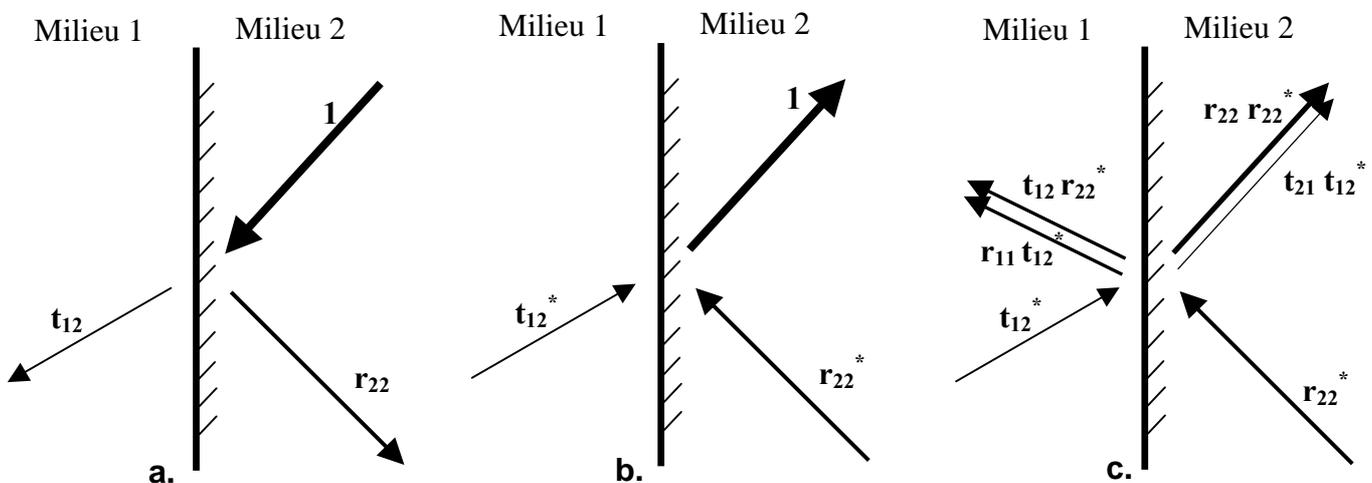


Figure 7. 7a : une onde d'amplitude 1 arrive à l'interface entre deux milieux 1 et 2 ; elle donne naissance à une onde réfléchie d'amplitude r_{22} et une onde transmise d'amplitude t_{12} . 7b : l'expérience présentée en 7a, retournée temporellement. 7c : La même chose qu'en 7b, en décomposant l'expression de l'amplitude des ondes qui se propagent dans les milieux 1 et 2.

La conséquence de l'invariance par retournement du temps est que l'expérience renversée temporellement est également possible [Fink92]. On peut la décrire avec trois nouvelles ondes : deux ondes convergeant vers l'interface, l'une d'amplitude r_{22}^* venant du milieu 2 et l'autre d'amplitude t_{12}^*

venant du milieu 1, ces deux ondes donnent naissance à une onde d'amplitude 1 se propageant depuis l'interface vers le milieu 2 et aucune onde dans le milieu 1 (figure 7b).

On peut analyser l'expérience retournée temporellement en termes de coefficient de réflexion et de transmission : soit r_{11} le coefficient de réflexion du milieu 1 vers le milieu 1, t_{21} le coefficient de transmission du milieu 1 vers le milieu 2, les deux ondes incidentes vers l'interface donnent lieu à une onde d'amplitude $r_{22}r_{22}^* + t_{21}t_{12}^*$ dans le milieu 2 et une onde d'amplitude $r_{11}t_{12}^* + t_{12}r_{22}^*$ dans le milieu 1. Ces ondes doivent être équivalentes à une onde d'amplitude 1 dans le milieu 2 et rien dans le milieu 1. On en déduit les équations de Stokes :

$$\boxed{\begin{aligned} r_{22}r_{22}^* + t_{21}t_{12}^* &= 1 \text{ (S1)} \\ t_{12}r_{22}^* + r_{11}t_{12}^* &= 0 \text{ (S2)} \end{aligned}} \quad \begin{array}{l} \text{(ondes dans le milieu 2)} \\ \text{(ondes dans le milieu 1)} \end{array}$$

On peut démontrer d'une manière analogue ou par simple analogie avec (S1) et (S2), que l'on a aussi :

$$r_{11}r_{11}^* + t_{12}t_{21}^* = 1 \text{ (S3)}$$

$$t_{21}r_{11}^* + r_{22}t_{21}^* = 0 \text{ (S4)}$$

4.4.2. Les relations de Stokes dans un formalisme matriciel.

La même approche peut être étendue au formalisme matriciel que nous utilisons grâce aux opérateurs de transmission $\mathbf{H}(\omega)$ et de réflexion $\mathbf{K}(\omega)$ qui sont les analogues des coefficients de transmission t et de réflexion r . Si les vecteurs d'émission E_1 et E_2 sont émis respectivement des barrettes 1 et 2, les vecteurs R_1 et R_2 reçus sur les barrettes 1 et 2 sont liés aux vecteurs émis par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & {}^t\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\text{global}} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

où $\mathbf{H}_{\text{global}}$ est l'opérateur de propagation global, qui décrit la propagation d'une onde de n'importe laquelle à n'importe laquelle des deux barrettes. Maintenant supposons, comme dans les sections précédentes, qu'un vecteur S_2 soit émis de la barrette 2. Il donne lieu à un signal transmis R_1 et à un signal réfléchi R_2 tels que

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\text{global}} \begin{pmatrix} 0 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Si ces signaux sont maintenant retournés temporellement et réémis de chaque barrette vers la plaque, le signal finalement enregistré sur les deux barrettes sera

$$\begin{pmatrix} R_{RT1} \\ R_{RT2} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\text{global}} \mathbf{H}_{\text{global}}^* \begin{pmatrix} 0 \\ S_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^* + {}^t \mathbf{H} \mathbf{H}^* & \mathbf{K}_1 {}^t \mathbf{H}^* + {}^t \mathbf{H} \mathbf{K}_2^* \\ \mathbf{H} \mathbf{K}_1^* + \mathbf{K}_2 \mathbf{H}^* & \mathbf{H} {}^t \mathbf{H}^* + \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ S_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{K}_1 {}^t \mathbf{H}^* + {}^t \mathbf{H} \mathbf{K}_2^*) S_2^* \\ (\mathbf{H} {}^t \mathbf{H}^* + \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^*) S_2^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

Or l'invariance par retournement temporel nous assure que les signaux alors reçus sur les barrettes sont égaux aux signaux initialement émis, c'est-à-dire que $R_{RT1} = 0$ et $R_{RT2} = S_2^*$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{H} {}^t \mathbf{H}^* + \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* &= \mathbf{I} \quad (S1') \\ \mathbf{K}_1 {}^t \mathbf{H}^* + {}^t \mathbf{H} \mathbf{K}_2^* &= \mathbf{0} \quad (S2') \end{aligned}$$

où \mathbf{I} désigne l'identité. Les équations (S1') et (S2') sont les équations de Stokes, généralisées dans un formalisme matriciel. On peut noter l'analogie de ces équations avec les équations de Stokes scalaires (S1) et (S2), l'opérateur de transmission \mathbf{H} étant analogue au coefficient de transmission t_{21} , son transposé ${}^t \mathbf{H}$ à t_{12} , l'opérateur de réflexion \mathbf{K}_2 au coefficient de réflexion r_{22} et \mathbf{K}_1 à r_{11} . Ces équations sont valables lorsque l'on dispose d'une vraie cavité à retournement temporel, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'absorption dans le milieu traversé, ce qui induirait une perte d'information sur les signaux captés.

D'une manière analogue, ou par analogie avec (S1') et (S2'), on démontre aussi que

$${}^t \mathbf{H} \mathbf{H}^* + \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^* = \mathbf{I} \quad (S3')$$

$$\mathbf{H} \mathbf{K}_1^* + \mathbf{K}_2 \mathbf{H}^* = \mathbf{0} \quad (S4')$$

Les quatre équations de Stokes (S1'-S4') peuvent être résumées en une seule équation matricielle :

$$\mathbf{H}_{\text{global}} \mathbf{H}_{\text{global}}^* = \mathbf{I} \quad (S)$$

(S) traduit le fait que l'union des deux miroirs à retournement temporel est équivalente à une cavité à retournement temporel, qui donne lieu à une focalisation parfaite : lorsque l'on applique l'opérateur retournement temporel global $\mathbf{H}_{\text{global}} \mathbf{H}_{\text{global}}^*$ à un vecteur, on retrouve ce même vecteur.

4.4.3. Comment le filtre inverse reproduit la cavité à retournement temporel en n'utilisant qu'une seule barrette ?

En multipliant à gauche l'équation (S1') par \mathbf{H}^{-1} , on obtient

$${}^t\mathbf{H}^* + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* = \mathbf{H}^{-1} \quad (13)$$

Cette relation fait le lien entre le filtre inverse et la cavité à retournement temporel. En effet, les signaux E_{FI} à émettre depuis la barrette 1 pour focaliser par filtre inverse sur une cible S_2 sur la barrette 2 sont

$$\begin{aligned} E_{FI} &= \mathbf{H}^{-1} S_2 \\ \Leftrightarrow E_{FI} &= {}^t\mathbf{H}^* S_2 + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* S_2 && \text{(d'après (13))} \\ \Leftrightarrow E_{FI} &= E_{RT} + E' && (14) \end{aligned}$$

Les signaux $E_{RT} = {}^t\mathbf{H}^* S_2$ correspondent à ceux qui seraient émis par la barrette 1 pour focaliser sur la barrette 2 par retournement temporel en transmission ; $E' = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* S_2$ sont les signaux complémentaires qui devraient être émis par la barrette 2 ($\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* S_2$) si on utilisait également le retournement temporel en réflexion pour focaliser sur la barrette 2. Ces signaux sont multipliés par \mathbf{H}^{-1} pour les adapter afin de pouvoir les émettre depuis la barrette 1 au lieu de la barrette 2.

En fait, grâce aux relations de Stokes, les champs transmis et réfléchis sont directement liés : l'information contenue dans le champ réfléchi est, en quelque sorte, contenue dans le champ transmis (et vice versa). Ici, l'information sur l'épaisseur et la vitesse du son dans la plaque se déduit de l'écart temporel entre deux échos, cet écart temporel se mesure aussi bien sur le signal transmis que sur le signal réfléchi. Cela explique *a posteriori* pourquoi le filtre inverse est capable d'annuler les échos en utilisant une seule barrette.

4.5. Inversion itérative

4.5.1. Simple itération

Dans l'équation (13), \mathbf{H}^{-1} est exprimé en fonction de \mathbf{H}^1 . Cela suggère l'idée d'utiliser une suite de matrices $\{\mathbf{M}_p\}$ pour calculer \mathbf{H}^{-1} sans passer par l'inversion régularisée. On définit la suite de matrices comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}_{p+1} &= \mathbf{H}^* + \mathbf{M}_p \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation (15) étant directement inspirée de l'équation (13)

On démontre (voir appendice 4.A) que cette suite converge vers \mathbf{H}^{-1} . Pour vérifier la convergence de la suite, on mesure expérimentalement \mathbf{H} et \mathbf{K}_2 puis chaque terme \mathbf{M}_p de la suite est calculé avec l'équation (15). Une manière de visualiser la convergence est de regarder les valeurs propres du produit $\mathbf{H}\mathbf{M}_p$ à une fréquence donnée (par exemple la fréquence centrale) qui doit converger vers l'identité, ses valeurs propres doivent donc toutes converger vers 1. L'évolution des valeurs propres est présentée figure 8. Les premières valeurs propres, qui correspondent à un signal physique, convergent vers 1. Les suivantes, qui correspondent au bruit, convergent vers 0.

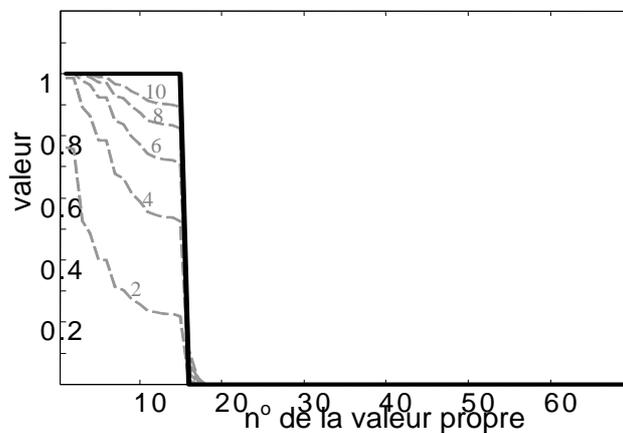


Figure 8. Evolution des valeurs propres du produit $\mathbf{H}\mathbf{M}_p$ à la fréquence centrale, pour l'inversion itérative (\mathbf{M}_p est définie par l'équation (18)). Les courbes grises discontinues correspondent aux valeurs propres, ordonnées par ordre décroissant, de $\mathbf{H}\mathbf{M}_2$, $\mathbf{H}\mathbf{M}_4$, $\mathbf{H}\mathbf{M}_6$, $\mathbf{H}\mathbf{M}_8$, $\mathbf{H}\mathbf{M}_{10}$. Elles convergent vers la ligne noire épaisse, qui correspond aux valeurs propres de $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ (inversion régularisée).

Il est intéressant de se souvenir que le nombre de valeurs propres significatives d'un propagateur entre deux barrettes de transducteurs est égal au nombre de taches focales résolues que l'on peut obtenir sur l'une des barrettes en focalisant depuis l'autre [Tanter01]. Lorsque l'on focalise par

retournement temporel en transmission sur l'élément central de la barrette 2, on obtient sur la barrette 2 une tache focale d'une largeur d'environ 4 mm (figure 9), ce qui signifie qu'il est possible d'obtenir $64 \text{ mm} / 4 \text{ mm} = 16$ taches focales indépendantes sur la barrette 2 qui a 64 mm d'ouverture. On pouvait donc s'attendre à ce que le rang de la matrice \mathbf{H} soit d'environ 16.

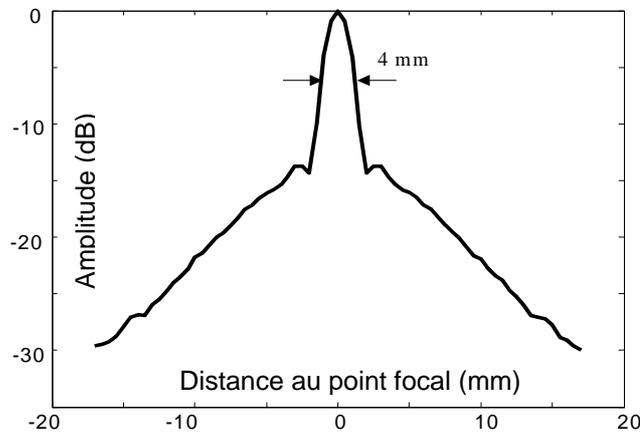


Figure 9. Répartition latérale, en dB, de l'amplitude reçue sur la barrette 2 lorsque l'on focalise sur son élément central par retournement temporel en transmission.

Une autre manière de vérifier la convergence est de regarder le produit \mathbf{HM}_{10} (10^{ème} itération de la suite). Il est présenté figure 10a, il ressemble en effet au produit $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ du filtre inverse, présenté figure 10b.

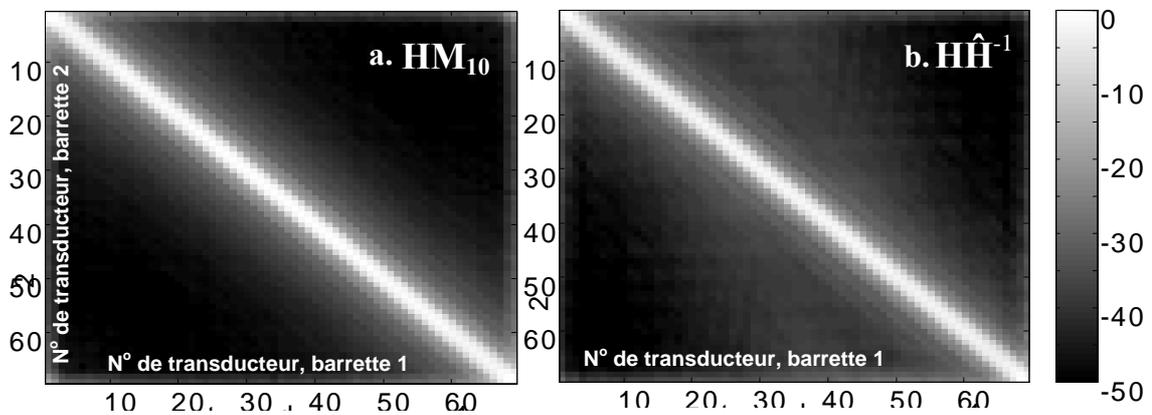


Figure 10. Efficacité de la méthode itérative pour calculer l'inverse de \mathbf{H} . 10a, l'image de \mathbf{HM}_{10} ; 10b, l'image de $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ du filtre inverse. On présente en niveau de gris et en échelle logarithmique la somme sur les fréquences du module du produit $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{M}_{10}(\omega)$, soit $(\sum_{\omega} |\mathbf{H}(\omega)\mathbf{M}_{10}(\omega)|)$.

Une dernière manière de vérifier la convergence est d'appliquer l'opérateur \mathbf{HM}_p au signal cible S_2 pour différentes valeurs de p . Pour $p = 0$, le vecteur $\mathbf{HM}_0 S_2$ est égal à $\mathbf{H}^t \mathbf{H}^* S_2$, c'est-à-dire à la focalisation obtenue par retournement temporel en transmission. La limite de la suite $\mathbf{HM}_p S_2$ doit être égale à $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1} S_2$, c'est-à-dire à la focalisation par filtre inverse. On présente figure 11 les formes

temporelles des vecteurs $\mathbf{HM}_p\mathbf{S}_2$ pour $p = 0, 3, 10$. En itérant, les échos disparaissent, et le front d'onde principal devient plus court, ce qui met en évidence dans le domaine temporel le fait que le filtre inverse compense de la bande passante.

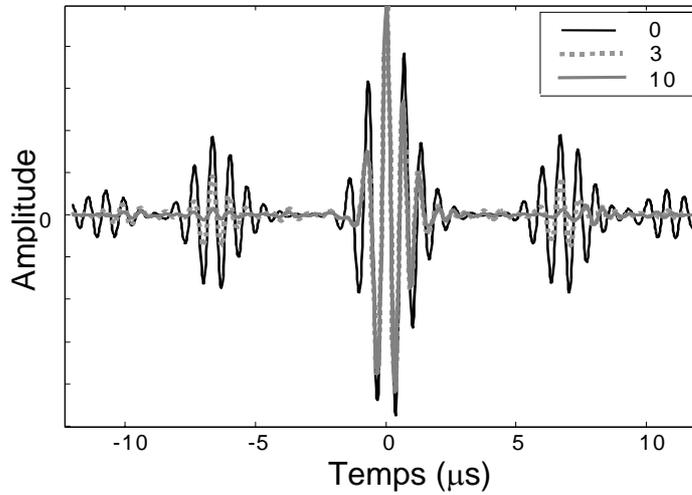


Figure 11. La forme temporel du vecteur focalisé $\mathbf{HM}_p\mathbf{S}_2$ pour différentes valeurs de p : en noir $p = 0$, cela correspond à la focalisation par retournement temporel en transmission, gris pointillés $p = 3$, gris continu $p = 10$, cela tyend vers la focalisation par filtre inverse.

Cette inversion itérative est en fait équivalente au retournement temporel itératif introduit par Gabriel Montaldo [Montaldo03, Montaldo05] (démonstration dans l'appendice 4.C): son approche, expérimentale, consiste à fabriquer un front d'ondes focalisant de manière itérative. Le front d'ondes focalisant converge du le front d'ondes du retournement temporel (première itération) vers le front d'onde du filtre inverse (limite de la méthode itérative). Cependant, alors que l'approche de Gabriel Montaldo était expérimentale et d'abord axée sur les *vecteurs* d'émission et de réception, ici l'approche est théorique et axée sur les *matrices* de propagation.

4.5.2. Double itération

En pratique, il serait particulièrement intéressant de pouvoir calculer \mathbf{H}^{-1} sans faire intervenir \mathbf{H} ni \mathbf{K}_2 dans la suite. Ne pas avoir à mesurer \mathbf{H} ni \mathbf{K}_2 nous permettrait de faire de la *focalisation non intrusive* : on n'aurait plus besoin de la barrette 2 dans le plan focal pour apprendre à focaliser dans ce plan.

\mathbf{H} intervient dans l'équation (15). Cependant, on peut travailler avec une suite birécurrente en remplaçant, dans l'équation (15), ${}^t\mathbf{H}^*$ par

$${}^t\mathbf{H}^* = \mathbf{M}_p - \mathbf{M}_{p-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* \quad (16)$$

(on a inverse l'équation (15), prise un rang plus tôt).

De (15) et (16) il vient

$$\mathbf{M}_{p+1} = \mathbf{M}_p - \mathbf{M}_{p-1} \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* + \mathbf{M}_p \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{M}_{p+1} - \mathbf{M}_p) = (\mathbf{M}_p - \mathbf{M}_{p-1}) \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^* \quad (18)$$

On démontre (appendice 4.B) que la limite de cette suite est $\mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0)(\mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^{-1}$. En choisissant bien les conditions initiales ($\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}^*$), cette limite vaut \mathbf{H}^{-1} .

L'évolution des valeurs propres de $(\mathbf{H}\mathbf{M}_p)$ en fonction de p , pour visualiser la convergence, est présentée figure 12. Le produit $\mathbf{H}\mathbf{M}_{10}$ (10^{ème} itération de la suite), est présenté et comparé avec le produit $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ du filtre inverse figure 13, ils sont en effet très proches.

Une autre manière de voir la convergence est d'appliquer l'opérateur $\mathbf{H}\mathbf{M}_p$ au signal cible S_2 , pour différentes valeurs de p . Pour $p = 0$, le vecteur $\mathbf{H}\mathbf{M}_0 S_2$ est égal $\mathbf{H}^t \mathbf{H}^* S_2$, c'est-à-dire la focalisation par retournement temporel en transmission. La limite de la suite $\mathbf{H}\mathbf{M}_p S_2$ devrait être $\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1} S_2$, i.e. la focalisation par filtre inverse. Les formes temporelles des vecteurs $\mathbf{H}\mathbf{M}_p S_2$ pour $p = 0, 3, 10$ sont présentées figure 14. Quand on itère, le premier écho précédant le front d'ondes principal et le second écho le suivant disparaissent, ce n'est pas évident pour les autres échos, le deuxième écho avant le front d'ondes principal tend même à s'amplifier. Le front d'ondes principal ne devient pas plus court. La double itération semble moins efficace et robuste que la simple itération pour inverser le propagateur

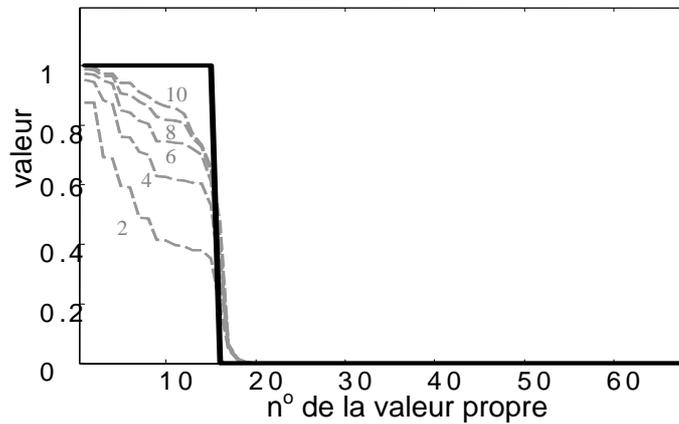


Figure 12. Evolution des valeurs propres du produit $\mathbf{H}\mathbf{M}_p$ à la fréquence centrale, pour l'inversion par la double itération (\mathbf{M}_p est définie par l'équation (18)). Les courbes grises discontinues correspondent aux valeurs propres, ordonnées par ordre décroissant, de $\mathbf{H}\mathbf{M}_2, \mathbf{H}\mathbf{M}_4, \mathbf{H}\mathbf{M}_6, \mathbf{H}\mathbf{M}_8, \mathbf{H}\mathbf{M}_{10}$. Elles convergent vers la ligne noire épaisse, qui correspond aux valeurs propres de $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ (inversion régularisée).

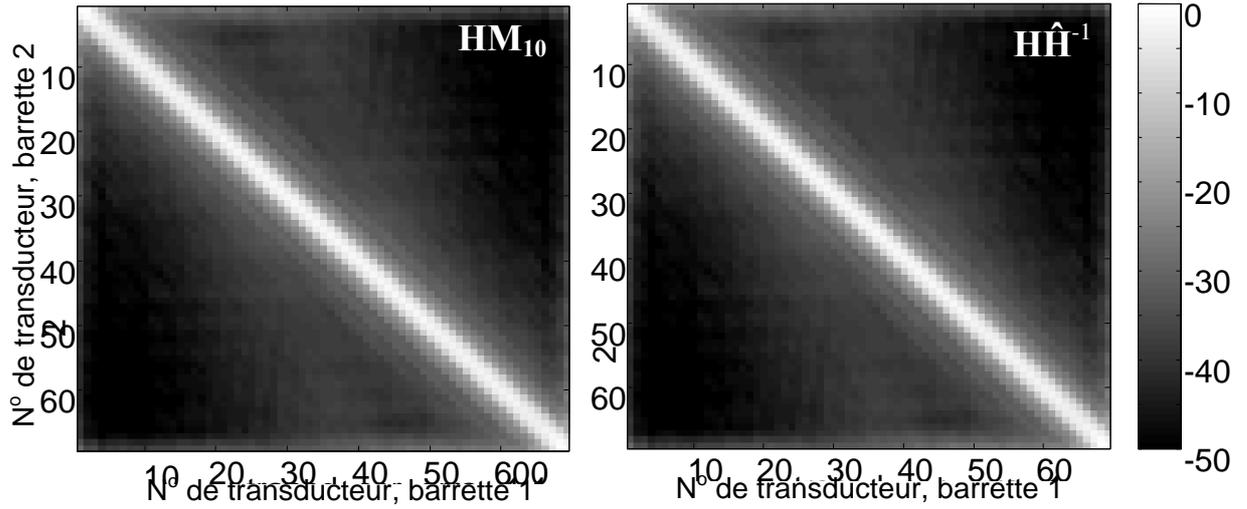


Figure 13. Efficacité de la méthode par double itération pour calculer l'inverse de \mathbf{H} . A gauche, l'image de $\mathbf{H}\mathbf{M}_{10}$; à droite, l'image de $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ du filtre inverse. On présente en niveau de gris et en échelle logarithmique la somme sur les fréquences du module du produit $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{M}_{10}(\omega)$, soit $(\sum_{\omega} |\mathbf{H}(\omega)\mathbf{M}_{10}(\omega)|)$.

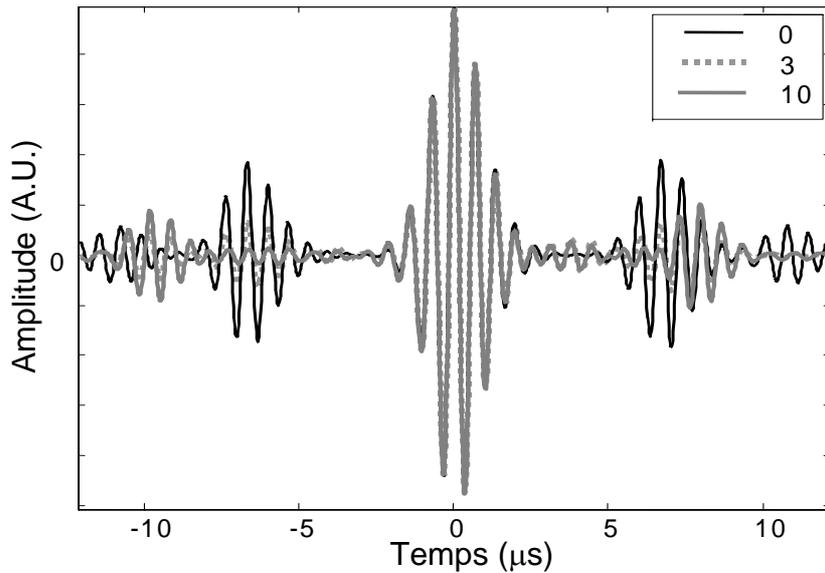


Figure 14. La forme temporelle du vecteur focalisé $\mathbf{H}\mathbf{M}_p\mathbf{S}_2$ pour différentes valeurs de p : courbe noire $p = 0$, cela correspond à la focalisation par retournement temporel en transmission, gris pointillé $p = 3$, gris continu $p = 10$.

\mathbf{K}_2 est encore présent dans l'équation (18) et on a encore besoin de \mathbf{H} lors de l'initialisation de la suite. La méthode birécurrente pour l'inversion de \mathbf{H} reste intrusive. Pour se débarrasser de \mathbf{K}_2 on peut calculer l'inverse de $\hat{\mathbf{H}}$ à la place de l'inverse de \mathbf{H} . Par analogie avec (18) on définit la suite :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_0 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{M}_1 &= \mathbf{H}^* \\
 (\mathbf{M}_{p+1} - \mathbf{M}_p) &= (\mathbf{M}_p - \mathbf{M}_{p-1}) \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^* \quad (20)
 \end{aligned}$$

(on remplace \mathbf{H} par ${}^t\mathbf{H}$ et \mathbf{K}_2 par \mathbf{K}_1)

La limite \mathbf{M}_∞ de cette suite est $({}^t\mathbf{H})^{-1}$ (la démonstration est similaire à celle de l'appendice 4.B). Comme la transposée de l'inverse est égale à l'inverse de la transposée, il suffit de transposer cette limite pour obtenir l'inverse de \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}^{-1} = {}^t\mathbf{M}_\infty \quad (21)$$

Pour que $({}^t\mathbf{H})^{-1}$ soit la limite de la suite *il faut* l'initialiser avec $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$ and $\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}^*$: la méthode est toujours intrusive, nécessitant la mesure de \mathbf{H} . Utiliser une valeur approchée de \mathbf{H} lors de l'initialisation ne peut mener à la même limite, la limite est déterminée par l'équation \mathbf{M}_1 , via (19) :

$$\mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_1 ({}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1} \quad (19 \text{ (modifiée)})$$

($\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$ et on remplace \mathbf{H} par ${}^t\mathbf{H}$ dans l'équation (19))

Bien que l'on ne soit pas parvenu à mettre au point une méthode non intrusive pour le filtre inverse, nous avons défini deux suites pour calculer l'inverse d'une matrice. Notons que seulement deux des quatre équations de Stokes matricielles ont été utilisées ici ((S1') et (S3')) pour arriver aux suites définies par (15), (18), (20). En travaillant avec les quatre équations de Stokes, peut-être pourra-t-on définir un système de suites qui mène au calcul non intrusif de \mathbf{H}^{-1} .

4.5.3 Inversion itérative d'un propagateur à travers une paroi crânienne, application à la focalisation spatiale.

On cherche ici à appliquer les considérations théoriques des sections précédentes à un objet plus compliqué qu'une simple plaque de métal: une paroi crânienne. Nous rejoignons ainsi la thématique générale de la thèse.

Les principales différences entre le crâne et la plaque sont les suivantes: le crâne n'est pas un objet linéaire mais a un rayon de courbure moyen d'environ 12 cm ; c'est un objet hétérogène, diffuseur et absorbant. On acquiert les opérateurs de transmission $\mathbf{H}(\omega)$ et de réflexion $\mathbf{K}_1(\omega)$ et $\mathbf{K}_2(\omega)$. (figure 15). $\mathbf{H}(\omega)$ est inversé à l'aide de la méthode à simple itération (équation (15)). On utilise l'inverse de $\mathbf{H}(\omega)$ dans un but de focalisation *spatiale* à travers le crâne.

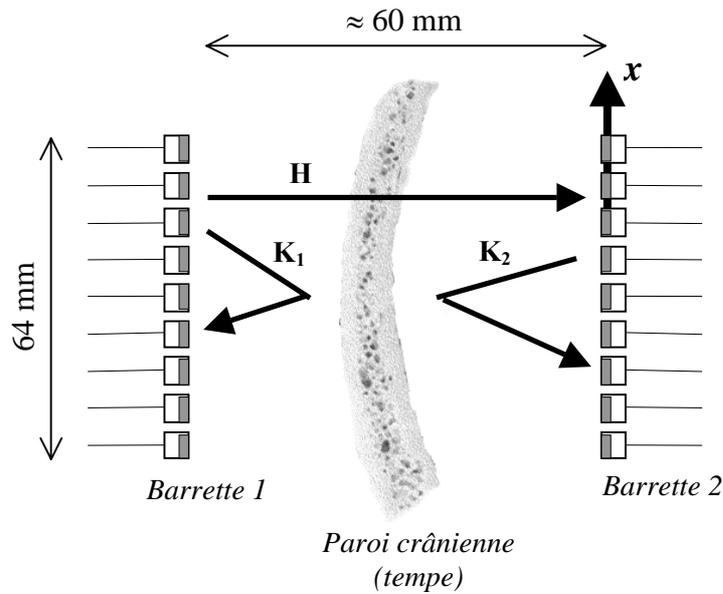


Figure 15. Le nouveau dispositif expérimental pour la focalisation transcrânienne. Un échantillon de paroi crânienne (la tempe) est inséré entre les deux barrettes utilisées dans les expériences sur la plaque. On cherche à focaliser les ultrasons sur l'élément central de la barrette 2. On acquiert les deux propagateurs de réflexion : $\mathbf{K}_1(\omega)$ de la barrette 1 à elle-même, $\mathbf{K}_2(\omega)$ de la barrette 2 à elle-même, et le propagateur de transmission $\mathbf{H}(\omega)$ de la barrette 1 à la barrette 2.

Chaque terme \mathbf{M}_p de la suite définie par (15), en utilisant les propagateurs \mathbf{H} et \mathbf{K}_2 correspondant au crâne, est calculé à toutes les fréquences dans la bande passante des transducteurs. L'évolution des valeurs propres de $(\mathbf{H}\mathbf{M}_p)$ à la fréquence centrale est présentée figure 16. On vérifie encore ici que les valeurs propres significatives tendent vers 1, alors que le bruit tend vers 0.

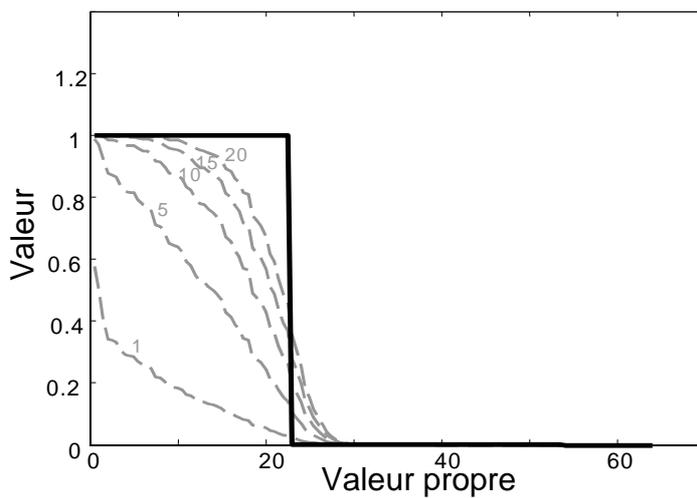


Figure 16. Evolution des valeurs propres de $\mathbf{H}\mathbf{M}_p$ à la fréquence centrale. Les courbes grises discontinues correspondent aux valeurs propres, ordonnées par ordre décroissant, de $\mathbf{H}\mathbf{M}_1, \mathbf{H}\mathbf{M}_5, \mathbf{H}\mathbf{M}_{10}, \mathbf{H}\mathbf{M}_{15}, \mathbf{H}\mathbf{M}_{20}$. Elles convergent vers la ligne noire épaisse, qui correspond aux valeurs propres de $\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ (inversion régularisée).

On peut également vérifier la convergence en appliquant l'opérateur \mathbf{HM}_p au nouveau signal cible S_2 défini comme suit : $S_2(\omega) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$. On focalise maintenant sur un dirac spatio-temporel au niveau du transducteur central de la barrette 2. On cherche maintenant à réaliser une bonne focalisation *spatiale* : la présence du crâne dégrade plus la focalisation spatiale que la focalisation temporelle [Tanter01].

La distribution d'amplitude latérale du vecteur focalisé $\mathbf{HM}_p S_2$ au niveau de la barrette 2 est représentée en dB sur la figure 17, pour $p = 0$ (correspondant à la focalisation par retournement temporel en transmission), $p = 6$, $p = 20$. La largeur du lobe principal lorsque l'on focalise par retournement temporel en transmission est d'environ 3 mm : le nombre de taches focales indépendantes qui peuvent être obtenues sur la barrette 2 de dimension latérale 64 mm est donc de $64 \text{ mm} / 3 \text{ mm} = 21$, cela correspond au nombre de valeurs propres significatives que l'on peut observer pour \mathbf{H} (voir figure 16).

Au fur et à mesure que l'on itère, la distribution d'amplitude dans le plan focal est de plus en plus proche de la distribution d'amplitude obtenue par application du filtre inverse (courbe grise continue sur la figure 17), en particulier le niveau des lobes secondaires décroît jusqu'à 19 dB de moins que les lobes secondaires du retournement temporel en transmission.

Ces résultats démontrent que l'inversion itérative présentée dans les sections précédentes peut être utilisée pour des milieux beaucoup plus compliqués que le milieu modèle qui nous a servi à illustrer la théorie (la plaque), et que les résultats de ce chapitre sont donc très généraux.

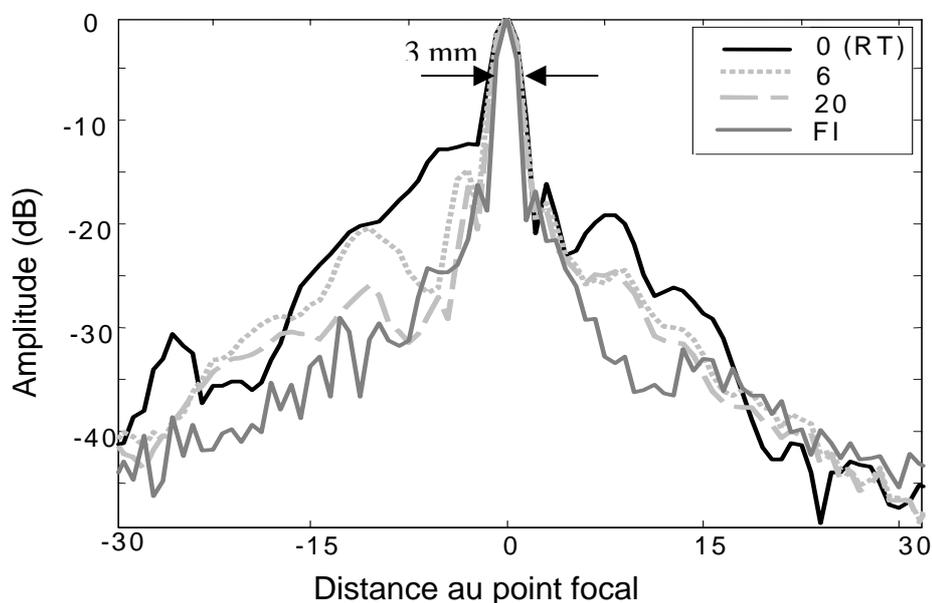


Figure 17. Répartition latérale de l'amplitude le long de la direction x (voir figure 15) du vecteur focalisé $\mathbf{HM}_p S_2$ (S_2 est maintenant un dirac spatio-temporel au niveau du transducteur central de la barrette 2) pour différentes valeurs de p : courbe noire continue, $p = 0$, cela correspond à la focalisation par retournement temporel en transmission, pointillés gris clairs $p = 6$, tirets gris $p = 20$. On approche la focalisation par filtre inverse (gris foncé continu) avec une baisse de 10 dB des lobes secondaires.

4.6. Conclusions

Un miroir à retournement temporel en transmission ne suffit pas pour faire de la compression temporelle à travers une plaque, à cause de la perte du front d'ondes réfléchi qui n'est pas capté par le miroir. Avec une vraie cavité à retournement temporel, capable d'enregistrer les ondes transmises *et* les ondes réfléchies, de les retourner temporellement et de les renvoyer ensemble, on peut annuler les échos pour parvenir à une bonne focalisation temporelle.

On peut également annuler les échos en n'utilisant qu'une seule barrette, grâce au filtre inverse: la technique du filtre inverse est capable de retrouver dans le champ transmis l'information qui est contenue dans le champ réfléchi. Cela est possible car champ transmis et champ réfléchi sont liés par les relations de Stokes.

Grâce à une formalisation matricielle des relations de Stokes, on peut interpréter la stratégie du filtre inverse, qui n'est autre que d'imiter la cavité à retournement temporel en n'utilisant qu'une seule barrette. A partir des relations de Stokes, on propose également deux suites matricielles pour calculer l'inverse d'un propagateur par une méthode itérative.

Enfin, nous avons utilisé cette méthode itérative pour inverser un propagateur à travers une paroi crânienne, démontrant ainsi que les considérations théoriques faites ici sont très générales et peuvent être appliquées à des milieux plus complexes que le milieu 1-D (la plaque) qui a été utilisé pour mettre en place et illustrer les équations.

Références

- [Aarnio04] “Investigation of ultrasound phase shifts caused by the skull bone using low-frequency reflection data”, J. Aarnio, K. Hynynen, *Proceedings of IEEE UFFC (2004)*.
- [Aubry01] “Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter. II. Application to focusing through absorbing and reverberating media”, J.-F. Aubry, M. Tanter, J. Gerber, J.-L. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(1), 48-58 (2001).
- [Aubry02] “Focalisation ultrasonore adaptative : application à l’imagerie et à la thérapie du cerveau”, J.F. Aubry, *thèse de doctorat de l’Université Paris 7*, (2002).
- [Baikov03] “Physical and technological aspects of ultrasonic imaging of brain structures through thick skull bones”, S. Baikov, L. Babin, A. Molotilov, S. Neiman, V. Riman, V. Svet, A. Selyanon, *Acoustical physics* 49(3), 276-395 (2003).
- [Cassereau93] “Focusing with plane time-reversal mirrors: an efficient alternative to closed cavities”, D. Cassereau, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 94(4), 2373-2386 (1993).
- [Doiteau04] “Vers l’imagerie non intrusive du cerveau”, D. Doiteau, *rapport de stage de DEA de l’université Paris VI (2004)*.
- [DornXX] “Iterative time reversal for an inverse problem in telecommunication”, O. Dorn, *Inverse Problems (soumis)*.
- [Fink92] “Time reversal of ultrasonic fields-Part I: Basic principles”, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 555-566 (1992).
- [Fink97] “Time reversed acoustics”, M. Fink, *Physics Today* 20 34-40 (1997).
- [Montaldo03] “Real time inverse filter through iterative time reversal”, G. Montaldo, M. Tanter, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am* 115 (2004).
- [Montaldo05] “Spatio temporal coding in complex media for optimum beamforming: the iterative time reversal approach” G. Montaldo, JF. Aubry, M. Tanter, (F. Vignon), M. Fink, *IEEE TUFFC* 52(2), 220-230 (2005).
- [Tanter01] “Optimal focusing by spatio temporal inverse filter. Part I : Basic Principles”, M. Tanter, J.-F. Aubry, J. Gerber, J.-L. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am* 110(1), 37-47 (2001).
- [VanDerBiest03] “Study of a “Fabry-Perot” structure consisting in two phononic crystals, F. Van der Biest, A. Tourin, M. Fink, *proceedings of WCU (2003)*.

Appendice 4.A

Le but est de démontrer ici que la suite de matrices $\{\mathbf{M}_n\}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}_{n+1} &= {}^t\mathbf{H}^* + \mathbf{M}_n \mathbf{K} \mathbf{K}^* \end{aligned} \quad (15)$$

converge vers \mathbf{H}^{-1} .

(pour simplifier les notations dans l'appendice on ne fait pas apparaître l'indice 2 de \mathbf{K}_2).

Introduisons la suite de matrices $\{\mathbf{N}_n\}$ définie par $\mathbf{N}_n = \mathbf{M}_n - \mathbf{C}$, \mathbf{C} étant une matrice constante que l'on explicitera plus tard, et étudions la convergence de $\{\mathbf{N}_n\}$.

De (15) il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{n+1} + \mathbf{C} &= (\mathbf{N}_n + \mathbf{C}) \mathbf{K} \mathbf{K}^* + {}^t\mathbf{H}^* \\ \Leftrightarrow \mathbf{N}_{n+1} &= \mathbf{N}_n \mathbf{K} \mathbf{K}^* + [{}^t\mathbf{H}^* + \mathbf{C} (\mathbf{K} \mathbf{K}^* - \mathbf{I})] \\ \Leftrightarrow \mathbf{N}_{n+1} &= \mathbf{N}_n \mathbf{K} \mathbf{K}^* + {}^t\mathbf{H}^* - \mathbf{C} \mathbf{H}^t \mathbf{H}^* \end{aligned} \quad (15.1)$$

$\{\mathbf{N}_n\}$ est une suite géométrique de raison $\mathbf{K} \mathbf{K}^*$ si ${}^t\mathbf{H}^* - \mathbf{C} \mathbf{H}^t \mathbf{H}^* = \mathbf{0}$, c'est-à-dire si

$$\mathbf{C} = {}^t\mathbf{H}^* (\mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \quad (15.2)$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_n &= \mathbf{N}_0 (\mathbf{K} \mathbf{K}^*)^n = -\mathbf{C} (\mathbf{K} \mathbf{K}^*)^n \\ \Leftrightarrow \mathbf{N}_n &= \mathbf{N}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^n = -\mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^n \end{aligned} \quad (15.3)$$

Et comme $\mathbf{M}_n = \mathbf{N}_n + \mathbf{C}$ il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n &= \mathbf{C} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^n] \\ \Leftrightarrow \mathbf{M}_n &= \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{H}^t \mathbf{H}^*)^n] \end{aligned} \quad (15.4)$$

Cette suite converge effectivement vers \mathbf{H}^{-1} car les valeurs propres de $\mathbf{I} - \mathbf{H}^t \mathbf{H}^*$ sont toutes inférieures à 1: $\mathbf{H}^t \mathbf{H}^*$ est hermitienne donc diagonalisable avec des valeurs propres réelles positives, les valeurs propres de $\mathbf{I} - \mathbf{H}^t \mathbf{H}^*$ sont donc comprises entre 0 et 1.

Appendice 4.B.

Le but est de démontrer ici que la suite de matrices $\{\mathbf{M}_n\}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}_1 &= \mathbf{H}^*; \\ (\mathbf{M}_{n+1} - \mathbf{M}_n) &= (\mathbf{M}_n - \mathbf{M}_{n-1}) \mathbf{K}\mathbf{K}^* \end{aligned} \quad (18)$$

converge vers \mathbf{H}^{-1} .

(pour simplifier les notations dans l'appendice on ne fait pas apparaître l'indice 2 de \mathbf{K}_2).

$\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ est hermitienne donc diagonalisable à valeurs propres positives $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

On définit les suites de matrices $\{\mathbf{W}_n\}$ et $\{\mathbf{U}_n\}$ par

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{n+1} - \mathbf{M}_n \quad (18.1)$$

$$\mathbf{U}_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{W}_k \quad (18.2)$$

On a donc

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{M}_{n+1} - \mathbf{M}_0 \quad (18.3)$$

D'autre part, d'après (18) et (18.1)

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n \mathbf{K}\mathbf{K}^* \quad (18.4)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{W}_n = \mathbf{W}_0 \mathbf{R}^n = \mathbf{W}_0 \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & 0 \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & & \lambda_n^n \end{pmatrix} \quad (18.5)$$

dans la base des vecteurs propres.

D'où

$$\mathbf{U}_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{W}_k = \mathbf{W}_0 \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_1^n & & & \\ & 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + \lambda_n + \dots + \lambda_n^n \end{pmatrix} \quad (18.6)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{U}_n = \mathbf{W}_0 \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1^n / 1 - \lambda_1 & & & \\ & 1 - \lambda_2^n / 1 - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 - \lambda_n^n / 1 - \lambda_n \end{pmatrix} \quad (18.7)$$

Toutes les valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ étant comprises entre 0 et 1, la limite \mathbf{U} de $\{\mathbf{U}_n\}$ est donc

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}_0 \begin{pmatrix} 1 / 1 - \lambda_1 & & & \\ & 1 / 1 - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 / 1 - \lambda_n \end{pmatrix} \quad (18.8)$$

(la démonstration se trouve dans l'appendice 4.A)

De la première relation de Stokes (S1') on sait que si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$, alors $\{1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \dots, 1-\lambda_n\}$ sont les valeurs propres de $\mathbf{H}^t\mathbf{H}^*$ et \mathbf{U} s'écrit donc

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}_0 (\mathbf{H}^t\mathbf{H}^*)^{-1} \quad (18.9)$$

De (18.1), (18.3) et (18.9) on déduit alors que la suite $\{\mathbf{M}_n\}$ converge et sa limite est

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_0)(\mathbf{H}^t\mathbf{H}^*)^{-1}. \quad (18.10)$$

Soit, avec un choix judicieux des premiers termes de la suite ($\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$; $\mathbf{M}_1 = {}^t\mathbf{H}^*$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^{-1}. \quad (18.11)$$

Appendice 4.C.

Le but de cet appendice est de montrer que notre approche matricielle du retournement temporel itératif est formellement équivalente à l'approche « vectorielle », expérimentale, du retournement temporel itératif développé par Gabriel Montaldo [Montaldo03, Montaldo05]. Nous allons pour cela reprendre la méthode de Gabriel Montaldo et la « traduire » en termes matriciels.

Une autre interprétation de cette méthode matricielle a été proposée par Oliver Dorn : elle serait équivalente à la méthode mathématique de descente de gradient couramment utilisée en optimisation [DornXX].

La méthode de focalisation développée par Gabriel Montaldo est la suivante : le dispositif expérimental est le même que celui qui a été présenté dans ce chapitre : deux barrettes échographiques identiques se faisant face entourent un milieu aberrateur. Le but est d'envoyer depuis la barrette 1 un front d'ondes capable de focaliser sur la barrette 2. On se donne le vecteur $S(\omega)$ comme « cible » à atteindre sur la barrette 2. Les signaux à émettre depuis la barrette 1 pour focaliser sur la barrette 2 par retournement temporel sont

$$E_0 = \mathbf{H}^* S \quad (4C.1)$$

Où \mathbf{H} est le propagateur de la barrette 1 vers la barrette 2. Ce vecteur va donner lieu dans le plan focal, au vecteur focalisé

$$F_0 = \mathbf{H} E_0 = \mathbf{H} \mathbf{H}^* S \quad (4C.2)$$

On n'est pas satisfait de cette solution : le vecteur focalisé F_0 diffère du vecteur visé S d'une quantité D_0 :

$$D_0 = F_0 - S = \mathbf{H} E_0 - S \quad (4C.3)$$

L'idée maintenant pour améliorer la focalisation est de calculer le vecteur E_{D_0} à émettre depuis la barrette 1 pour focaliser par retournement temporel sur la différence D_0 :

$$E_{D_0} = \mathbf{H}^* D_0 \quad (4C.4)$$

Le vecteur à émettre depuis la barrette 1 pour focaliser de manière optimale sera donc le vecteur E_0 calculé par retournement temporel pour focaliser sur S , *moins* le vecteur E_{D_0} . On espère ainsi dans le plan focal éliminer la différence D entre vecteur focalisé F_0 et vecteur visé S .

On émet donc depuis la barrette 1

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_0 - E_{D0} \\
\Leftrightarrow E_1 &= {}^t\mathbf{H}^* S - {}^t\mathbf{H}^* [F_0 - S] \\
\Leftrightarrow E_1 &= {}^t\mathbf{H}^* S - {}^t\mathbf{H}^* [\mathbf{H} E_0 - S]
\end{aligned} \tag{4C.5}$$

Le vecteur F_1 reçu sur la barrette 2 lorsque la barrette 1 émet E_1 va encore différer du vecteur visé S d'une quantité D_1 . Encore une fois on calcule le vecteur à émettre E_{D1} pour focaliser par retournement temporel sur D_1 et à l'étape suivante d'itération on émet depuis la barrette 1 $E_1 - E_{D1}$, dont la focalisation ne va pas être parfaite ; etc... Le processus itératif est enclenché : à chaque étape, on calcule par retournement temporel le vecteur à émettre pour éliminer la différence entre le vecteur effectivement obtenu dans le plan focal à l'étape précédente d'itération et le vecteur visé.

Formellement, le passage de l'étape n d'itération à l'étape suivante s'écrit

$$\begin{aligned}
E_{n+1} &= E_n - E_{Dn} \\
\Leftrightarrow E_{n+1} &= E_n - {}^t\mathbf{H}^* [F_n - S] \\
\Leftrightarrow E_{n+1} &= E_n - {}^t\mathbf{H}^* [\mathbf{H} E_n - S] \\
\Leftrightarrow E_{n+1} &= {}^t\mathbf{H}^* S + [\mathbf{I} - {}^t\mathbf{H}^* \mathbf{H}] E_n
\end{aligned} \tag{4C.6}$$

L'équivalence entre l'expression (4C.6), qui définit le $n^{\text{ème}}$ vecteur de la méthode itérative de Gabriel Montaldo, et l'expression (15), qui définit la $n^{\text{ème}}$ matrice de notre méthode itérative d'inversion, se fait en écrivant la correspondance suivante entre vecteurs et matrices :

$$E_n = \mathbf{M}_n S \tag{4C.7}$$

(le $n^{\text{ème}}$ vecteur de Gabriel Montaldo s'écrit comme notre $n^{\text{ème}}$ matrice appliquée au vecteur cible).

L'équation (4C.6) se réécrit alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{n+1} S &= {}^t\mathbf{H}^* S + [\mathbf{I} - {}^t\mathbf{H}^* \mathbf{H}] \mathbf{M}_n S \\
\Leftrightarrow \mathbf{M}_{n+1} S &= [{}^t\mathbf{H}^* + [\mathbf{I} - {}^t\mathbf{H}^* \mathbf{H}] \mathbf{M}_n] S
\end{aligned} \tag{4C.8}$$

ce qui reste valable quelle que soit la cible S , d'où

$$\mathbf{M}_{n+1} = {}^t\mathbf{H}^* + [\mathbf{I} - {}^t\mathbf{H}^* \mathbf{H}] \mathbf{M}_n \tag{4C.9}$$

L'équation (4C.9) se simplifie en remarquant que

$$[\mathbf{I} - {}^t\mathbf{H}^*\mathbf{H}] = {}^t[\mathbf{I} - \mathbf{H}^t\mathbf{H}^*]^* = {}^t[\mathbf{K}^t\mathbf{K}^*]^* = \mathbf{K}^t\mathbf{K} \quad (4C.10)$$

(en effet l'opérateur ${}^t\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ est hermitien donc égal à sa transposée).

(4C.9) donne donc, avec (4C.10) :

$$\mathbf{M}_{n+1} = {}^t\mathbf{H}^* + \mathbf{K}^t\mathbf{K} \mathbf{M}_n \quad (4C.11)$$

Et on retrouve bien dans (4C.11) l'équation (15) constitutive de notre méthode itérative (simple itération) d'inversion de la matrice \mathbf{H} .

5. Vers une focalisation équivalente au filtre inverse avec un protocole intrusif comme celui du retournement temporel.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment tendre vers une focalisation équivalente à celle du filtre inverse, avec un dispositif intrusif comme celui du retournement temporel.

Pour focaliser par retournement temporel à partir d'une barrette échographique, il suffit de pouvoir capter au niveau de cette barrette un signal provenant du point focal désiré [Fink92]. Pour focaliser en un point, il est donc nécessaire de disposer d'une source sonore (primaire ou secondaire) en ce point. Le retournement temporel nous garantit qu'il concentrera un maximum d'énergie au point focal, mais aucune condition n'est posée sur les points voisins. Le filtre inverse est plus exigeant sur la qualité de focalisation : il garantit que l'énergie sera déposée au point focal, et qu'un minimum d'énergie sera déposée autour de ce point. Pour parvenir à une telle optimisation du contraste, il est nécessaire de mesurer les fonctions de Green non seulement entre la barrette échographique et le point focal – comme le fait le retournement temporel – mais également entre la barrette échographique et une batterie de points de contrôle répartis autour du point focal [Tanter01]. Pour mesurer ces fonctions de Green, il faut disposer de transducteurs autour du point focal dans toute la zone où l'on veut maximiser le contraste. Le filtre inverse est donc beaucoup plus intrusif que le retournement temporel.

Nous proposons ici une méthode qui permet une qualité de focalisation équivalente à celle qui est obtenue par filtre inverse (maximisation du contraste) avec un dispositif aussi peu intrusif que celui du retournement temporel (un seul point de contrôle situé à l'endroit où l'on désire focaliser).

Le principe est le suivant : le point focal émet un signal. Ce signal est reçu par la barrette puis retourné temporellement. Au lieu de simplement renvoyer le signal ainsi obtenu pour focaliser (ce serait la focalisation par retournement temporel), on lui applique un filtre, qui change ces signaux de focalisation par retournement temporel en signaux de focalisation par filtre inverse. Nous verrons que le filtre à appliquer n'est autre que le conjugué de l'inverse du propagateur de réflexion de la barrette vers elle-même (le propagateur de réflexion est une matrice \mathbf{K} qui, en position j,i contient le signal $k_{ji}(t)$ reçu par l'élément j de la barrette lorsque l'élément i émet un dirac temporel). La mesure du propagateur de réflexion permet en quelque sorte de sonder le milieu : les signaux $k_{ji}(t)$ contiennent de l'information sur la réflexion et la rétrodiffusion des ondes par le milieu. Comme dans le chapitre précédent, on se sert des signaux réfléchis et rétrodiffusés (contenus dans le propagateur de réflexion) pour gagner en connaissance sur le milieu à travers lequel on veut focaliser.

Le propagateur de réflexion pouvant être mesuré de manière totalement non intrusive, ce passage du retournement temporel au filtre inverse ne rajoute pas à l'intrusivité de la méthode de focalisation. Les signaux focalisant ainsi obtenus donnent une tache focale théoriquement équivalente à celle du filtre inverse.

5.1. Focalisation adaptative à travers un milieu aberrateur, présentation.

5.1.1. Présentation de l'expérience

On utilise un réseau de transducteurs pour focaliser de manière adaptative sur un point P de l'espace, à travers un milieu aberrateur.

On considère des transducteurs monopolaires dans un espace à deux dimensions, de telle sorte que chaque transducteur considéré individuellement émet une onde cylindrique omnidirectionnelle. Le dispositif de l'expérience est présenté sur la figure 1.

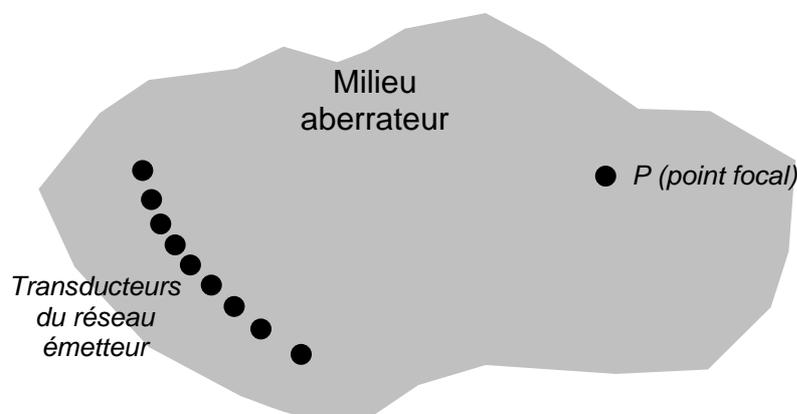


Figure 1 : Expérience de focalisation adaptative : un réseau émetteur (à gauche) est utilisé pour focaliser une onde au point P , à travers un milieu aberrateur.

Nous allons successivement rappeler les principes de construction des signaux à émettre depuis le réseau émetteur pour focaliser sur le point P par retournement temporel, puis par filtre inverse ; nous montrerons ensuite comment le filtre inverse peut être rendu aussi peu intrusif que le retournement temporel.

5.1.2. Présentation du formalisme

Pour décrire mathématiquement le retournement temporel et le filtre inverse, nous avons besoin de (ré)introduire un formalisme matriciel.

Imaginons que l'on dispose d'un réseau de points de contrôle (le réseau de contrôle) contenant le point P , et formant une cavité autour du réseau d'émission (c'est-à-dire que les points de contrôle entoureraient le réseau d'émission, et seraient espacés les uns des autres d'une demi longueur d'onde). Un tel réseau est schématisé sur la figure 2.

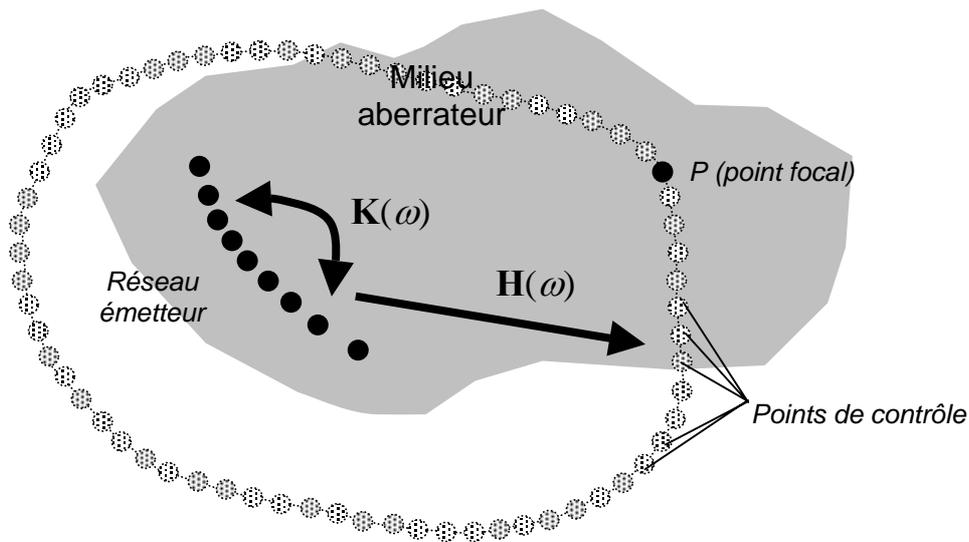


Figure 2. Présentation du formalisme. On appelle $\mathbf{H}(\omega)$ le propagateur liant les transducteurs du réseau émetteur aux points de contrôle qui l'entourent (les points de contrôle sont disposés toutes les demi-longueurs d'onde sur un contour fermé entourant le réseau émetteur) ; on appelle $\mathbf{K}(\omega)$ le propagateur de réflexion entre les éléments du réseau émetteur.

On appelle $\mathbf{H}(\omega)$ le propagateur reliant les N transducteurs du réseau émetteur aux M points de contrôle qui l'entourent, c'est une matrice $M \times N$ qui contient en position j,i la réponse impulsionnelle entre le transducteur i et le point de contrôle j . $\mathbf{H}(\omega)$ décrit la propagation d'ondes du réseau émetteur vers le réseau de contrôle : si on émet depuis le réseau émetteur le vecteur d'émission $E(\omega)$ (vecteur de taille N contenant en position i le signal émis par l'émetteur i), le vecteur de réception $F(\omega)$ (vecteur de taille M contenant en position j le signal reçu par le point de contrôle j) reçu sur le réseau de contrôle est

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)E(\omega). \quad (1)$$

Il nous faut introduire également le propagateur de réflexion $\mathbf{K}(\omega)$, qui relie les N transducteurs du réseau d'émission à eux-mêmes : c'est une matrice $N \times N$ qui contient en position j,i la réponse impulsionnelle entre les transducteurs i et j du réseau émetteur, c'est-à-dire le signal reçu par le transducteur j quand le transducteur i émet un dirac temporel. Ce signal comprend le signal qui s'est propagé directement de i vers j , puis un signal issu de réflexions et de rétrodiffusion par le milieu. Ce signal, donc le propagateur de réflexion $\mathbf{K}(\omega)$, est ainsi chargé d'informations sur le milieu de propagation.

5.1.3. Le retournement temporel

Le point de contrôle sur lequel on veut focaliser (le point P) émet une impulsion. L'onde se propage à travers le milieu aberrateur, arrive au niveau du réseau émetteur qui l'enregistre, la retourne temporellement et la réémet. Le front d'ondes réémis focalise naturellement sur le point P .

Le retournement temporel peut être formalisé dans le domaine de Fourier grâce au propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ introduit au paragraphe précédent. Lorsque le point de contrôle situé au point P émet une impulsion, on peut dire que le réseau de contrôle émet un vecteur d'émission $S(\omega)$:

$$S(\omega) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (2)$$

$S(\omega)$ est un vecteur de taille M (le nombre de points de contrôle), qui contient en position i le signal envoyé par le point de contrôle i . $S(\omega)$ ne contient ici du signal qu'au niveau du point de contrôle P . On appelle aussi $S(\omega)$ le *vecteur cible* : c'est le vecteur sur lequel on veut focaliser.

Le signal $E_{RT}(\omega)$ à émettre depuis le réseau émetteur pour focaliser sur le point P par retournement temporel s'écrit donc

$$E_{RT}(\omega) = R(\omega)^* = \mathbf{H}(\omega)^* S(\omega) \quad (3)$$

et le signal $F_{RT}(\omega)$ reçu au niveau du réseau de contrôle lors de la propagation du vecteur $E_{RT}(\omega)$ est

$$F_{RT}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) E_{RT}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{H}(\omega)^* S(\omega). \quad (4)$$

Plus l'opérateur de retournement temporel $\mathbf{H}(\omega) \mathbf{H}(\omega)^*$ est proche de l'identité, plus le signal focalisé $F_{RT}(\omega)$ sera proche du signal cible $S(\omega)$. L'opérateur de retournement temporel s'approche de l'identité dans beaucoup de cas [Tanter00]; notamment l'élément maximal de chaque ligne et chaque colonne se trouve sur la diagonale, et la phase de la diagonale est nulle.

Pour implémenter cette technique de focalisation, on n'a pas besoin de tous les points de contrôle : pour focaliser au point P , il est juste nécessaire qu'un signal puisse être émis depuis le point P , un point de contrôle en ce point est donc suffisant. Le retournement temporel est donc minimalement intrusif.

5.1.4. Le filtre inverse

Pour le filtre inverse, la première étape est l'acquisition du propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ qui lie les signaux émis par le réseau émetteur et les signaux reçus par le réseau de contrôle, c'est-à-dire que l'on a besoin de mesurer toutes les fonctions de Green entre chacun des émetteurs et chacun des points de contrôle : le filtre inverse nécessite donc la présence de tous les points de contrôle, c'est une technique de focalisation hautement intrusive.

Le signal $E_{FI}(\omega)$ à émettre depuis le réseau émetteur pour focaliser par filtre inverse sur la cible $S(\omega)$ au niveau du réseau de contrôle s'obtient par inversion du propagateur $\mathbf{H}(\omega)$:

$$E_{FI}(\omega) = \hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1} S(\omega), \quad (5)$$

$\hat{\mathbf{H}}(\omega)^{-1}$ étant l'inverse régularisé de $\mathbf{H}(\omega)$. Le propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ n'est pas nécessairement une matrice carrée : il peut y avoir plus de points de contrôle que de transducteurs dans le réseau émetteur ($M > N$), comme c'est le cas dans la situation présentée figure 2. $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ est donc calculé selon la formule 26.4 du chapitre 2 :

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1} = [(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* \mathbf{H}^* \quad (6)$$

Le propagateur $(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)$ étant une matrice carrée, on peut en calculer l'inverse régularisé. Le signal à émettre depuis le réseau émetteur s'écrit donc en réalité

$$E_{FI} = [(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* \mathbf{H}^* S. \quad (7)$$

On remarque les signaux E_{FI} de focalisation par filtre inverse s'écrivent en fonction des signaux E_{RT} de focalisation par retournement temporel :

$$E_{FI} = [(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* E_{RT} \quad (8)$$

Les signaux du filtre inverse se déduisent donc des signaux du retournement temporel par l'application d'un "filtre": $[(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^*$.

Si les signaux du filtre inverse E_{FI} sont émis par le réseau émetteur et se propagent à travers le propagateur \mathbf{H} vers le réseau de contrôle, les signaux F_{FI} finalement reçus au niveau du réseau de contrôle sont

$$F_{FI} = \mathbf{H} E_{FI} = \mathbf{H} [({}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* {}^t\mathbf{H}^* S. \quad (9)$$

Les signaux focalisés F_{FI} sont proches du signal cible S car par construction la matrice $\mathbf{H} [({}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* {}^t\mathbf{H}^*$ est proche de l'identité.

Le filtre inverse donne donc un signal focalisé F_{FI} plus proche du signal cible S que ne l'était le signal focalisé par retournement temporel F_{RT} , cependant le filtre inverse nécessitant tous les points de contrôle c'est une technique de focalisation plus intrusive que le retournement temporel, qui ne nécessite qu'un seul point de contrôle placé au point focal.

5.1.5. Comment passer du retournement temporel au filtre inverse sans augmenter l'intrusivité du dispositif ?

Nous reprenons ici et interprétons différemment une idée qui a été proposée en parallèle par Pastawski et.al. pour la focalisation d'un paquet de spins en RMN [PastawskiXX] et Dorn pour la résolution d'un problème inverse [DornXX].

On a vu (équation (8)) que les signaux d'émission du filtre inverse se déduisent des signaux d'émission du retournement temporel par l'application du filtre $[({}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^*$:

$$E_{FI} = [({}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*)^{-1}]^* E_{RT} \quad (8)$$

Ce filtre, qui s'écrit en fonction du propagateur \mathbf{H} , doit a priori se mesurer de manière intrusive en mesurant le propagateur \mathbf{H} . Cependant nous allons voir, en analysant la signification physique du propagateur ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$, que celui-ci peut se mesurer de manière non intrusive. En effet on montre que le propagateur ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ est, à peu de choses près, égal au propagateur de réflexion \mathbf{K} qui relie le réseau émetteur à lui-même ; or ce propagateur se mesure de manière complètement non intrusive à partir des transducteurs du réseau émetteur.

5.1.6. La mesure non intrusive du propagateur ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ via la mesure de \mathbf{K} .

Nous allons, dans ce paragraphe, essayer de démontrer « avec les mains » comment le propagateur ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ peut s'écrire en fonction de \mathbf{K} . Pour une démonstration et une analyse plus rigoureuse, nous renvoyons à la littérature [Lobkis91, Derode03, Larose04].

Le propagateur de réflexion \mathbf{K} contient en position j,i la fonction de Green $k_{ji}(t)$ entre les transducteur i et j du réseau émetteur. Ce signal peut être obtenu directement : le transducteur i émet

une impulsion, on mesure ce qui arrive sur le transducteur j . Ce signal peut être également mesuré de manière indirecte, en simulant la présence d'une source au niveau du transducteur i : dans un premier temps, le transducteur i émet une impulsion, cette impulsion est captée sur un réseau de points de contrôle formant une cavité parfaite entourant le point i . Le signal capté par le réseau de contrôle est retourné temporellement et réémis vers le point i , recréant au point i l'impulsion de départ à $t = 0$. L'onde focalisée continue à se propager et il apparaît une onde divergente autour du point i , *c'est comme si le point i avait émis une impulsion*. Lorsque cette onde divergente arrive au point j , le signal mesuré correspond donc également à la fonction de Green $k_{ji}(t)$ entre i et j ⁽¹⁾.

Le point j capte également un signal au cours de la focalisation, avant $t = 0$. Ce signal, qui correspond à une onde entrante destinée à focaliser au point i , correspond au retourné temporel $k_{ji}(-t)$ de la fonction de Green entre i et j .

Formalisons tout cela à l'aide du propagateur $\mathbf{H}(\omega)$ reliant les transducteurs et la cavité à retournement temporel entourant les transducteurs :

Le point i émet une impulsion, cela signifie que le vecteur

$$S(\omega) = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0] \quad (9)$$

est émis depuis le réseau émetteur. Il se propage vers la cavité, le signal $R(\omega)$ capté par la cavité s'écrit

$$R(\omega) = \mathbf{H}(\omega)S(\omega) \quad (10)$$

ce signal est retourné temporellement et réémis en direction du réseau émetteur. Le vecteur capté au niveau du réseau émetteur vaut donc

$$F(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^* S(\omega) \quad (11)$$

Ce qui est capté par le transducteur j du réseau émetteur au terme de ce procédé de retournement temporel est l'élément j de ce vecteur, c'est-à-dire l'élément j,i de l'opérateur retournement temporel² $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*$. Or on a vu plus haut que le transducteur j capte, lors de la focalisation, la fonction de Green « anticausale » $k_{ji}(-t)$, puis après focalisation sur le point i la fonction de Green « causale » $k_{ji}(t)$.

¹ On retrouve rigoureusement la fonction de Green si la focalisation par retournement temporel est parfaite. En utilisant une cavité à retournement temporel entourant le point focal, c'est vrai seulement en l'absence d'absorption [Fink92].

² cet opérateur de retournement temporel est en quelque sorte « à l'envers » car il décrit la focalisation par retournement temporel sur la barrette émettrice

L'élément j,i de l'opérateur de retournement temporel $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*$ est donc égal (à une transformée de Fourier près) à la partie anticausale $k_{ji}(-t)$ plus la partie causale $k_{ji}(t)$ de la fonction de Green entre les transducteurs i et j du réseau émetteur.

Ce qui se traduit dans le domaine de Fourier par l'égalité matricielle

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^* = \mathbf{K}(\omega) + \mathbf{K}(\omega)^* = 2\text{Re}(\mathbf{K}(\omega)) \quad (12)$$

Pour avoir accès à l'opérateur $\mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^*$ il n'est donc pas nécessaire de mesurer $\mathbf{H}(\omega)$ via la mesure directe, hautement intrusive, des fonctions de Green entre tous les transducteurs du réseau émetteur et tous les points de contrôle de la cavité ; il suffit de mesurer le propagateur de réflexion du réseau émetteur à lui-même, ce qui se fait de manière complètement non intrusive.

5.1.7. Utilisation du propagateur de réflexion \mathbf{K} pour le filtre inverse

$\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ est donc égal à \mathbf{K} , le propagateur de réflexion du réseau d'émission à lui-même, matrice qui en position i,j contient la réponse impulsionnelle entre les transducteurs i et j du réseau d'émission³. Les signaux de filtre inverse s'écrivent donc

$$E_{FI}(\omega) = [\hat{\mathbf{K}}^{-1}]^* \mathbf{H}^* S(\omega) \quad (13)$$

Ou encore

$$E_{FI}(\omega) = [\hat{\mathbf{K}}^{-1}]^* E_{RT}(\omega) \quad (14)$$

où $E_{RT}(\omega)$ désigne les signaux de focalisation par retournement temporel sur la cible $S(\omega)$ ($E_{RT}(\omega) = \mathbf{H}^* S(\omega)$).

Pour focaliser par filtre inverse, il suffit d'appliquer aux signaux du retournement temporel le conjugué de l'inverse du propagateur de réflexion \mathbf{K} , qui se mesure de manière non intrusive : les signaux de filtre inverse, calculés de telle manière, ne nécessitent pas un dispositif plus intrusif que les signaux de retournement temporel : il suffit pour focaliser en un point de pouvoir capter un signal originaire de ce point, c'est-à-dire que pour focaliser en un point et maximiser le contraste tout autour, un seul point de contrôle est nécessaire.

³ Par souci de simplicité, à partir de maintenant on notera \mathbf{K} la partie réelle de \mathbf{K} , ce qui est également sa partie causale plus sa partie anticausale $\mathbf{K} + \mathbf{K}^*$.

5.2. Simulation.

Pour tester cette nouvelle technique de focalisation par filtre inverse peu invasif, on procède à une simulation en deux dimensions. Le réseau d'émission est constitué de 113 transducteurs disposés sur une grille en deux dimensions échantillonnée spatialement à $\lambda/2$. Cette grille est immergée au sein d'un réseau multidiffusant d'extension finie constitué de cylindres fluides de rayon 0.4 mm disposés aléatoirement dans l'eau. Les cylindres sont eux-mêmes confinés dans une zone de rayon 10 mm autour de l'origine des coordonnées. Le but est de focaliser à l'aide de ce réseau d'émission, sur un point P situé immédiatement en-dehors de la zone multidiffusante (figure 3).

La propagation d'ondes dans un tel milieu est simulée à l'aide du programme ACEL aux différences finies, développé par Michaël Tanter.

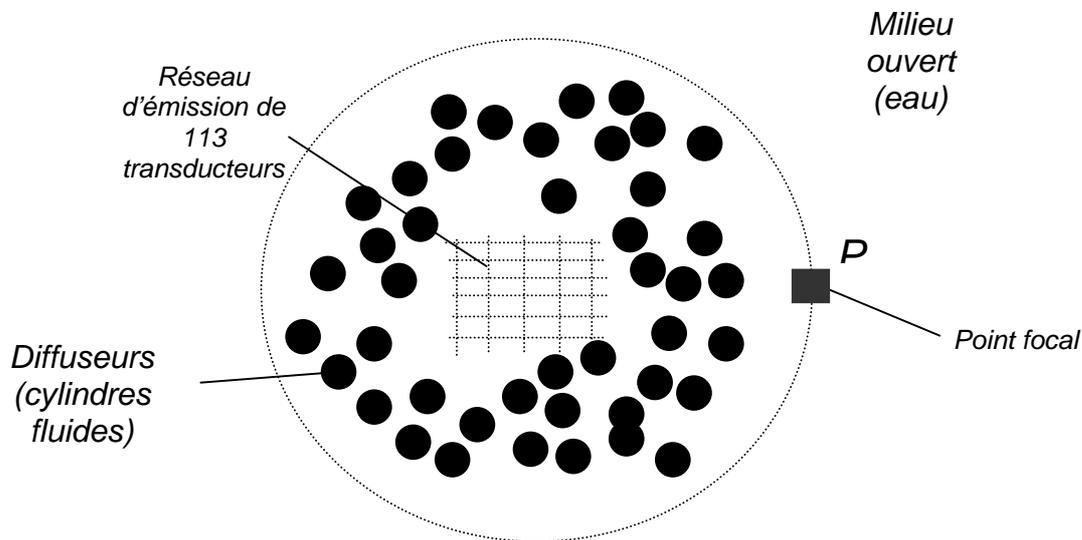


Figure 3 : le dispositif de la simulation : le réseau d'émission constitué d'une grille 2D de transducteurs monopolaires est inséré au cœur d'un milieu multidiffusant, on cherche le signal à émettre pour focaliser au point P .

5.2.1. Validité de l'égalité $\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*$

Dans un premier temps, nous allons quantifier dans quelle mesure les propagateurs \mathbf{K} et $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ s'identifient vraiment, en effet l'hypothèse $\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*$ est au centre de la stratégie pour rendre le filtre inverse minimalement intrusif.

Nous pouvons disposer dans la simulation des points de contrôle toutes les demi-longueurs d'onde sur un cercle contenant le point P et au centre duquel se trouve le réseau émetteur (cercle gris sur la figure 3), il est ainsi possible de faire une mesure directe de \mathbf{H} donc de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$. On rappelle que l'élément j,i de cette matrice est un signal issu du transducteur i du réseau émetteur qui a été capté par la cavité, retourné temporellement et réémis, et finalement capté par le transducteur j . L'élément j,i du

propagateur de réflexion \mathbf{K} est simplement le signal $k_{ji}(t)$ capté par le transducteur j lorsque i émet une impulsion *plus* sa partie anticausale $k_{ji}(-t)$. Ces deux signaux sont présentés sur la figure 4, on vérifie qu'ils se superposent bien⁴ ce qui « prouve visuellement » que les élément j,i de \mathbf{K} et de ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ sont égaux, d'où la vérification qualitative de l'égalité $\mathbf{K} = {}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$.

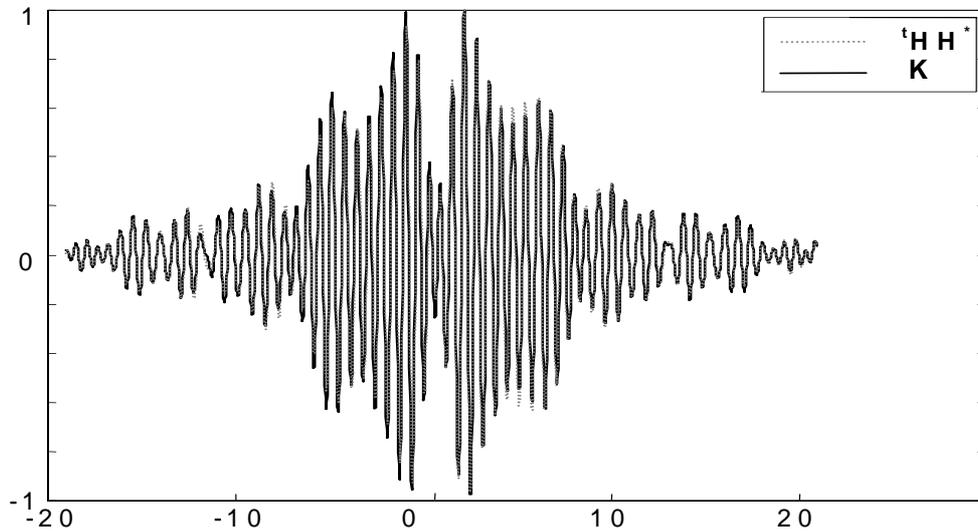


Figure 4. En noir la transformée de Fourier de l'élément 64,80 du propagateur de réflexion \mathbf{K} (correspondant à la fonction de Green $k_{80,64}(t)$ entre les transducteurs 64 et 80 du réseau émetteur plus son retourné temporel $k_{80,64}(-t)$) ; en gris pointillés la transformée de Fourier de l'élément 64,80 de la matrice ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$, qui correspond au signal capté sur le transducteur 80 lorsque le transducteur 64 émet une impulsion qui est captée par le réseau de points de contrôle, retournée temporellement et réémise dans le milieu.

Une autre manière de comparer « visuellement » \mathbf{K} et ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ est de les représenter directement (figure 5).

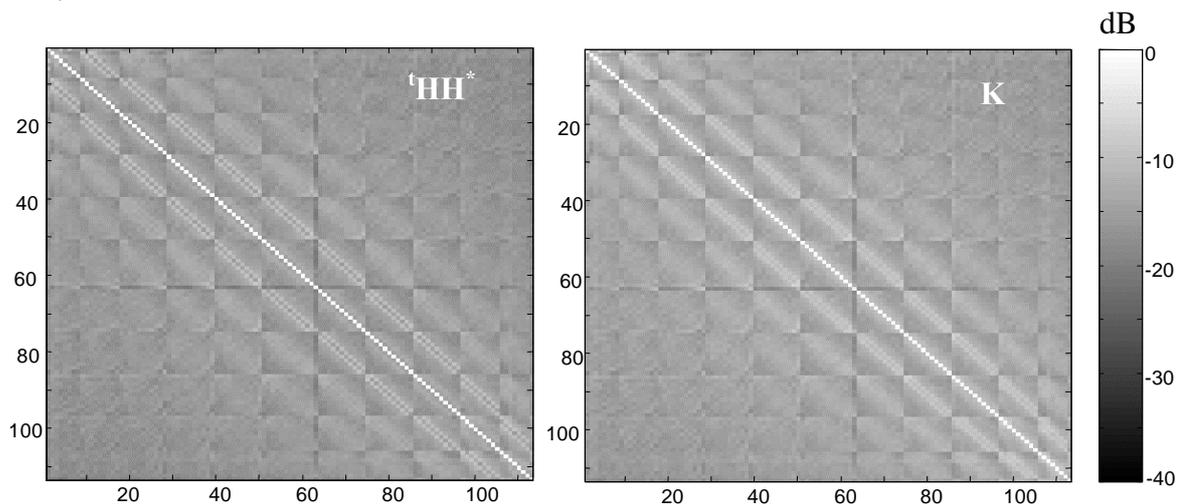


Figure 5. A gauche, le propagateur ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ (en fait la somme sur les fréquences utiles de la valeur absolue de ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*$, c'est-à-dire ${}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*_{\text{sum}} = \sum_{\omega} |{}^t\mathbf{H}\mathbf{H}^*(\omega)|$), à droite le propagateur de réflexion \mathbf{K} (en fait $\mathbf{K}_{\text{sum}} = \sum_{\omega} |\mathbf{K}(\omega)|$). Leur amplitude est présentée en dB.

⁴ En réalité, ils se superposent bien à une dérivée temporelle près [Lobkis91].

Une manière plus quantitative de comparer \mathbf{K} et $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ est de comparer leurs valeurs singulières ; en effet pour faire du filtre inverse minimalement intrusif il faut faire l'inverse régularisé de \mathbf{K} (équation 14), qui doit être le plus proche possible de l'inverse régularisé de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ pour s'approcher au maximum du vrai filtre inverse. Les valeurs singulières de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ et \mathbf{K} sont présentées sur la figure 6.

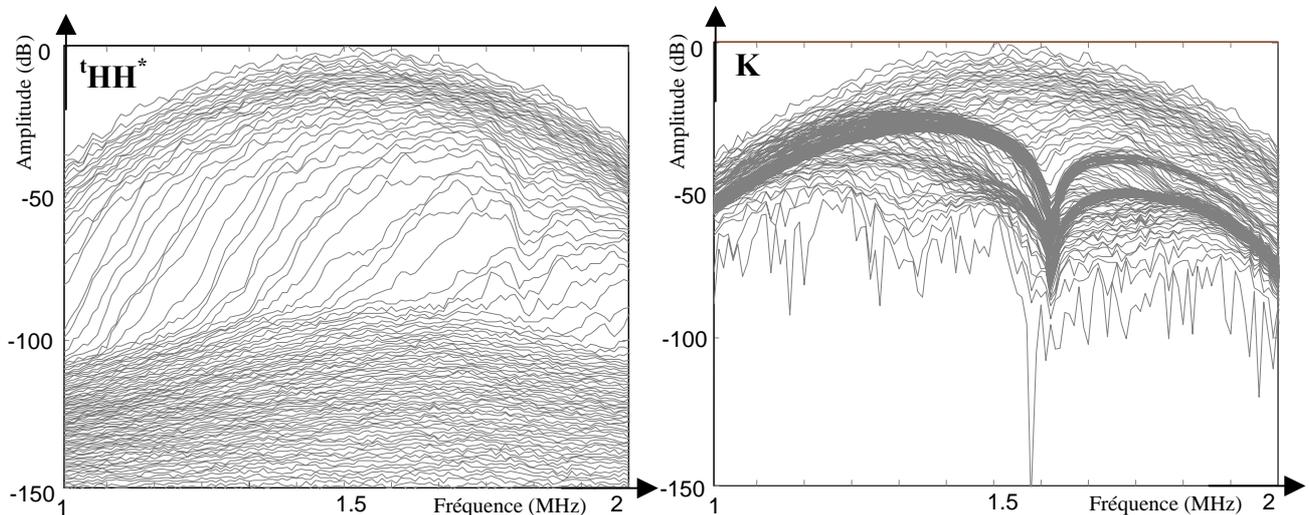


Figure 6. Les valeurs singulières de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ (à gauche) et \mathbf{K} (à droite). On présente en dB les valeurs singulières à toutes les fréquences, la valeur à 0 dB correspondant à la valeur singulière la plus haute pour la fréquence centrale. La $i^{\text{ème}}$ courbe grise à partir du haut correspond à la $i^{\text{ème}}$ valeur singulière (classées par ordre décroissant) de la matrice considérée, à toutes les fréquences de la bande passante.

Les premières valeurs singulières de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ et \mathbf{K} se ressemblent, mais plus on descend vers des valeurs singulières faibles, moins elles s'identifient, ce qui traduit les infimes différences qu'il existe entre les deux matrices. Ces observations se confirment en analysant les courbes valeur singulière par valeur singulière, comme on le fait sur la figure 7. Lors de l'inversion de \mathbf{K} pour le calcul des signaux du filtre inverse minimalement intrusif, il faudra faire attention à ne pas inverser les valeurs singulières les plus faibles, car elles diffèrent trop des valeurs singulières de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$. En pratique, ce n'est pas très contraignant car cela équivaut à ne pas inverser les valeurs singulières qui sont trop proches du bruit, et ces valeurs singulières n'étaient de toute façon pas inversées.

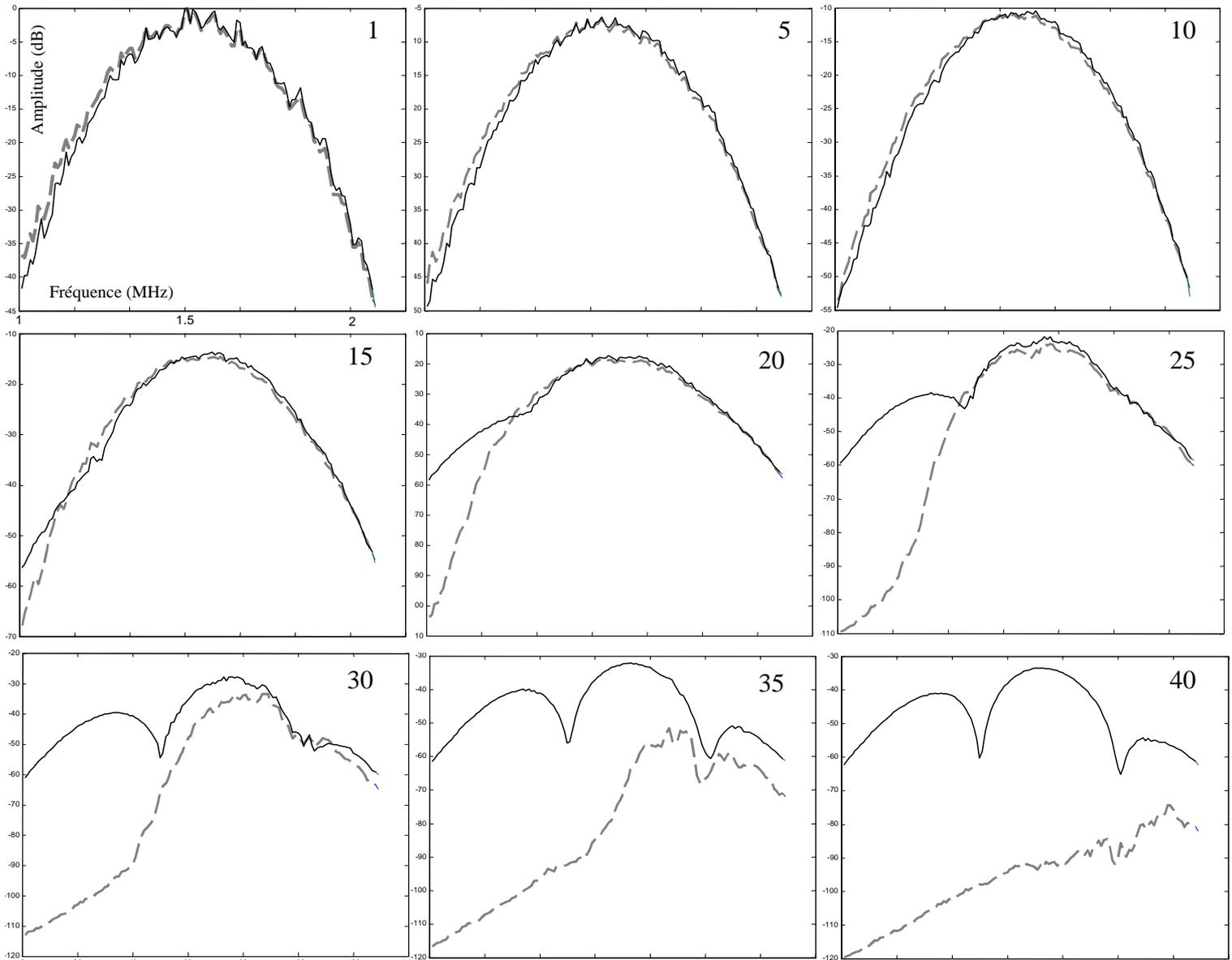


Figure 7. Les valeurs singulières de \mathbf{K} (en noir) et de \mathbf{HH}^* (en tirets gris). On représente en dB les 1^{ère}, 5^{ème}, 10^{ème}, ... 40^{ème} valeur singulière en fonction de la fréquence. Les 15 premières valeurs singulières de \mathbf{K} et de \mathbf{HH}^* s'identifient bien puis elles commencent à diverger.

5.2.2. Utilisation de \mathbf{K} pour le filtre inverse

Nous avons calculé l'inverse régularisé de \mathbf{K} pour tester la focalisation par filtre inverse peu intrusif via l'utilisation de l'équation (14) pour calculer ses signaux de focalisation, et l'avons comparée à la focalisation par filtre inverse classique (mesure directe, complète, de \mathbf{H} pour en déduire \mathbf{HH}^* et utilisation de l'équation (8) pour calculer les signaux de focalisation) et à la focalisation par retournement temporel. Les résultats sont présentés figure 8.

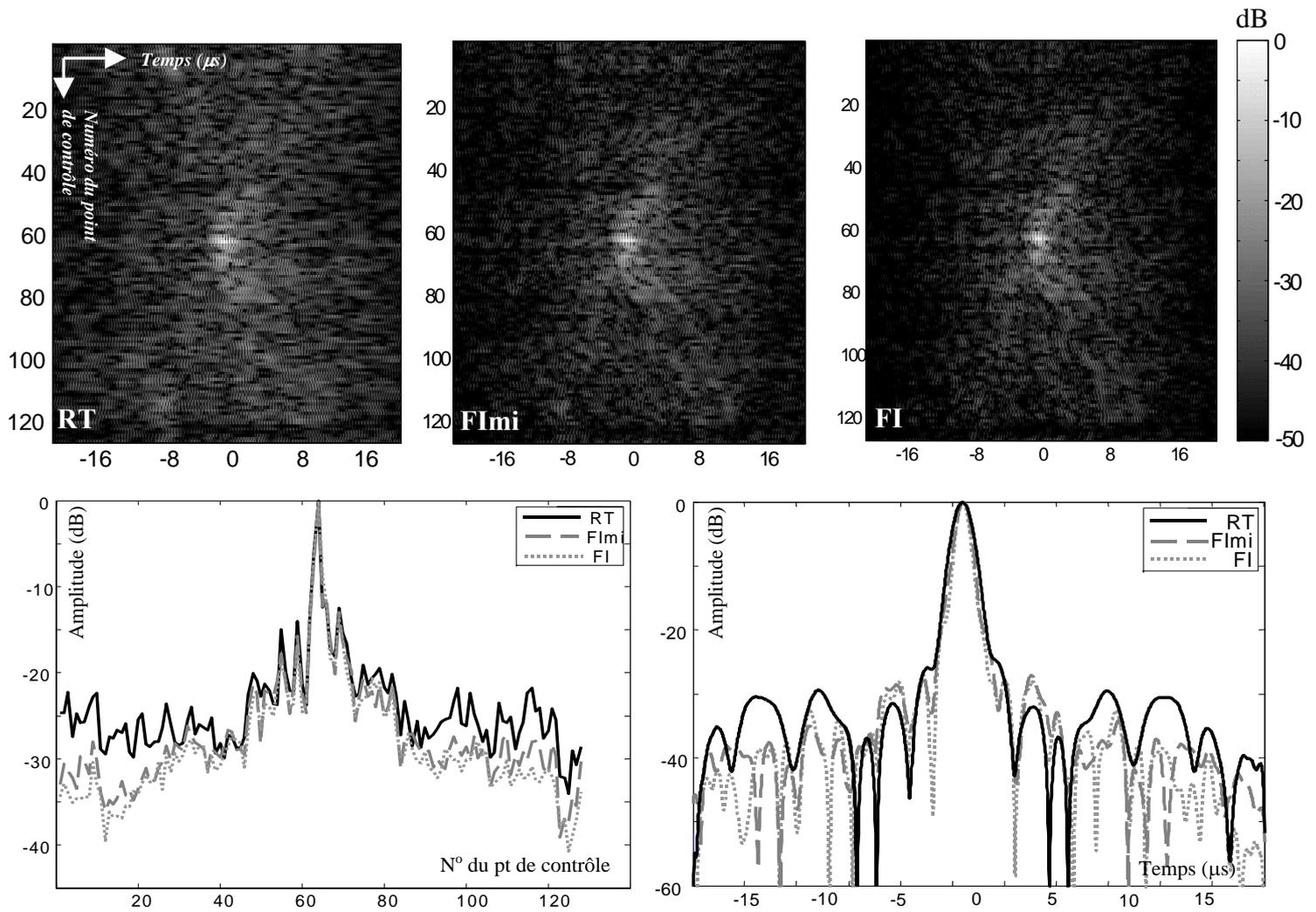


Figure 8. Focalisation sur le point de contrôle 64 (point focal P en dehors de la zone diffusante). En haut, focalisation spatio temporelle : à gauche, par retournement temporel, au centre par filtre inverse minimalement intrusif (équation 14), à droite par vrai filtre inverse (équation 8). On représente en dB sur la ligne i le signal temporel capté sur le point de contrôle i du réseau de contrôle lors de la focalisation. En bas : à gauche, focalisation latérale : on représente en dB le maximum temporel de la pression captée sur tous les points de contrôle lorsque l'on focalise sur le point de contrôle 64 par retournement temporel (courbe noire), par filtre inverse minimalement intrusif (tirets gris foncés), par vrai filtre inverse (pointillés gris clair). A droite, focalisation temporelle : on représente en dB l'enveloppe du signal temporel capté au point focal.

On observe avec le filtre inverse minimalement intrusif une qualité de focalisation équivalente à celle du vrai filtre inverse. En particulier, le niveau des lobes secondaires est environ 5 dB plus bas que lorsque l'on focalise par retournement temporel, tant dans la dimension latérale que la dimension temporelle.

On a donc réussi à minimiser la pression déposée autour du point focal (maximisation du contraste) sans avoir à mesurer toutes les fonctions de Green entre les transducteurs du réseau émetteur et tous les points de contrôle ; on a bien réalisé un filtre inverse minimalement intrusif.

5.3. Conclusions et perspectives.

Nous avons montré comment, avec un dispositif de retournement temporel, nous pouvons calculer les signaux focalisants du filtre inverse. Nous pouvons ainsi améliorer la qualité de la focalisation (le filtre inverse assure qu'un minimum d'énergie sera déposée en-dehors du point focal) sans augmenter l'intrusivité du dispositif (le retournement temporel, donc notre nouvelle méthode de filtre inverse peu intrusif, ne nécessite que la présence d'une source au point focal désiré, alors que le vrai filtre inverse nécessite une batterie de points de contrôle répartis dans la zone où l'on veut minimiser l'énergie déposée).

Nous avons testé notre méthode dans une seule configuration, il reste à en évaluer la robustesse dans différentes configurations. A priori le raisonnement utilisé qui montre qu'on peut se baser sur la mesure du propagateur de réflexion pour passer du retournement temporel au filtre inverse est très général et s'applique dans n'importe quel milieu en l'absence d'absorption. La seule restriction est d'ordre topologique : pour focaliser sur un point à partir d'un réseau émetteur, il faut pouvoir dessiner un contour fermé (la cavité) passant par ce point et entourant le réseau émetteur.

Cependant, il faut reconnaître que l'expérience simulée ici est très idéale : elle fait intervenir des transducteurs parfaitement monopolaires (difficiles à réaliser en pratique, et ce n'est surtout pas le cas des transducteurs des réseaux d'émission utilisés au laboratoire, qui sont très directifs), de plus les transducteurs n'interagissent pas avec l'onde (ce qui dans certaines applications en sismologie pourrait être vérifié). Le passage du stade des simulations au stade expérimental risque d'être difficile.

En revanche, il doit exister des situations où le filtre inverse peu intrusif donne des résultats beaucoup plus spectaculaires que ceux qui sont présentés ici (une amélioration du contraste de 5 dB par rapport au retournement temporel). En effet, la simulation présentée fait intervenir un milieu fortement diffusant et non absorbant, dans lequel le retournement temporel marche déjà très bien.

L'application la plus évidente de cette méthode de focalisation pourrait être dans le domaine des télécommunications, où l'on peut imaginer focaliser un signal de manière optimale sur un utilisateur, simplement après avoir capté un signal en provenance de cet utilisateur.

Références

- [Derode03a] “Recovering the Green’s function from field-field correlations in an open scattering medium (L)”, A. Derode, E. Larose, M. Tanter, J. de Rosny, A. Tourin, M. Campillo, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 113(6), 2973-2976 (2003).
- [Derode03b] “How to estimate the Green’s function of a heterogeneous medium between two passive sensors ? Application to acoustic waves”, A. Derode, E. Larose, M. Campillo, M. Fink, *App. Phys. Lett.* 83(15), 3054-3056 (2003).
- [DornXX] “Time reversal for symmetric hyperbolic systems and the adjoint imaging technique”, O. Dorn, *Inverse Problems (soumis)*
- [Fink92] “Time reversal of ultrasonic fields – Part I: Basic principles”, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 555-566 (1992).
- [Larose04] “Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields”, E. Larose, A. Derode, M. Campillo, M. Fink, *Journal of Applied Physics* 95(12), 8393-8399 (2004).
- [PastawskiXX] “Towards a time-reversal mirror for quantum systems”, H. Pastawski, E. Danieli, L. Foa Torres, *en preparation*.
- [Tanter00] “Time reversal and the inverse filter”, M. Tanter, J.L. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 108(1), 223-234 (2000).
- [Tanter01] “Optimal focusing by spatio temporal inverse filter. I. Basic principles”, M. Tanter, JF. Aubry, J. Gerber, J.L. Thomas, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 110(1), 37-47 (2001).
- [Lobkis91] “On the emergence of the Green’s function in the correlations of a diffuse field”, O. Lobkis, L. Weaver, *J. Acoust. Soc. Am.* 110(6), 3011-3017 (1991).

6. Retournement temporel à l'angle de Rayleigh à une interface liquide-solide

Ce chapitre est un peu en marge de la thèse dans la mesure où il n'y a pas de lien direct entre le retournement temporel à l'interface liquide-solide et la focalisation transcrânienne. Ici sont présentés quelques résultats théoriques et expérimentaux obtenus dans le cadre de deux projets expérimentaux d'élèves de l'ESPCI [Marquet04]. Il m'a semblé pertinent de les présenter dans le cadre de cette thèse car il est ici encore question de déformation d'un front d'ondes focalisant, et de focalisation spatiale et temporelle.

Dans ce chapitre nous étudions une configuration particulière de retournement temporel pour la focalisation spatiale et temporelle : une onde réfléchie à une interface liquide-solide avec un angle d'incidence proche de l'angle de Rayleigh peut dans certains cas se déformer [Brekhovskikh60, Royer00, Wang03], nous utilisons le retournement temporel pour annuler cette déformation. Nous allons également étudier l'importance d'avoir une vraie cavité à retournement temporel pour arriver à compenser les déformations de manière optimale.

Si une onde plane est envoyée vers une interface liquide-solide, l'onde réfléchie est affectée. Près de l'angle de Rayleigh le coefficient de réflexion a une forte partie imaginaire [Royer00]. Cela a pour effet de modifier la forme temporelle de l'onde réfléchie. Si l'on fait du retournement temporel en réflexion autour de l'angle de Rayleigh, l'onde va être déformée par réflexion à l'aller, mais devrait recouvrer sa forme originale au retour, car le retournement temporel annule les effets de phase [Fink92].

Ce chapitre présente l'étude de ces phénomènes par la théorie et par l'expérience. La déformation du front d'ondes autour de l'angle de Rayleigh est observée puis compensée à l'aide du retournement temporel. Cependant, il subsiste une perte significative d'amplitude de l'onde au terme du procédé de retournement temporel, pour des angles d'incidence proches de l'angle de Rayleigh. En effet, beaucoup d'énergie est perdue dans l'onde de Rayleigh qui se propage le long de l'interface liquide-solide, ré-irradie progressivement dans le liquide [Royer00] et n'est donc retournée que partiellement par notre dispositif qui ne capte que les ondes réfléchies. On montre également, par des simulations puis des expériences, comment la déformation du signal réfléchi influence la focalisation spatiale.

6.1. Introduction

Nous allons faire des expériences de retournement temporel à l'aide de miroirs à retournement temporel [Fink92, Wu92, Cassereau93] dans une configuration bien spécifique: deux barrettes échographiques linéaires sont disposées du même côté d'une interface liquide-solide, de telle sorte qu'une onde puisse être émise depuis l'une des barrettes, réfléchiée par l'interface, puis enregistrée par la deuxième barrette (figure 1). L'angle d'attaque θ des ondes à l'interface (défini sur la figure 1) est réglable manuellement. La barrette qui reçoit les ondes peut les retourner temporellement et les réémettre en direction de l'autre via une nouvelle réflexion à l'interface, agissant ainsi comme un miroir à retournement temporel. Ainsi, on peut tester le retournement temporel en réflexion pour la focalisation temporelle (est-on capable de retrouver sur la première barrette un front d'onde non déformé temporellement ?) et spatiale (est-on capable de focaliser des ultrasons dans une petite zone de l'espace ?)

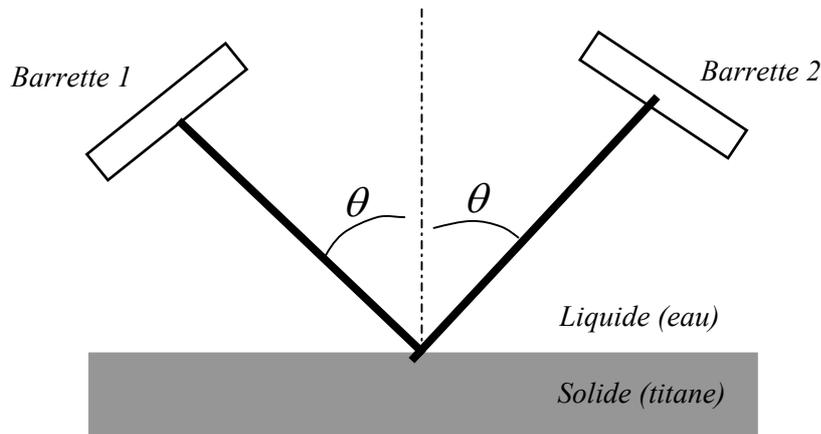


Figure 1. Le dispositif expérimental : deux barrettes échographiques linéaires identiques sont montées sur un dispositif circulaire centré sur une interface liquide-solide, de telle sorte que des ondes puissent être émises de la barrette 1, réfléchies par l'interface, et enregistrées par la barrette 2 (et vice-versa). L'angle d'attaque θ des ondes à l'interface (défini sur le dessin) est réglable manuellement avec une précision du quart de degré.

A cause de la réflexion à l'interface liquide-solide, la forme temporelle des signaux réfléchis est modifiée par rapport à celle des signaux émis. Wang et al. avaient déjà mentionné ce phénomène pour des ondes transmises à une interface liquide-solide, ce qui les gênait pour mesurer une vitesse du son dans un solide [Wang03]. Ce phénomène devait donc être évité ou compensé.

Nous allons ici nous intéresser à la déformation temporelle des ondes réfléchies, et utiliser le retournement temporel en réflexion pour compenser cette déformation.

Dans un deuxième temps, nous testerons la focalisation spatiale en utilisant le miroir à retournement temporel en réflexion. Le but est de voir comment la focalisation est affectée quand les ondes transmises dans le solide ne sont pas enregistrées et sont donc perdues pour le retournement temporel.

6.2. Propagation et retournement temporel d'ondes planes en présence d'une interface liquide-solide, l'effet de l'angle d'incidence.

6.2.1. Réflexion d'ondes planes à l'interface liquide-solide

Les phénomènes accompagnant la réflexion et la réfraction d'ondes planes à une interface liquide-solide sont déjà l'objet d'une abondante littérature [Brekhovskikh60, Lindh62, Nayfeh95, Royer00]. Plus particulièrement, Wang et al. [Wang03], dans un contexte de contrôle non destructif de matériaux, ont étudié la déformation temporelle d'ondes transmises à une interface liquide-solide. D'autre part, Neubauer et al [Neubauer73] ont observé par imagerie Schlieren le décalage latéral prévu à la réflexion d'un faisceau incident à l'incidence de Rayleigh. La réflexion d'ondes à l'interface fluide-solide a également été minutieusement étudiée par Chen et Wu [Chen00] qui ont utilisé une technique de réflectométrie (étude de l'amplitude d'un signal réfléchi en fonction de l'angle d'incidence) pour mesurer la vitesse du son dans des solides sans avoir à mesurer des signaux qui aient traversé le solide.

Nous allons ici souligner quelques aspects théoriques au sujet de la réflexion d'ondes planes à l'interface liquide-solide. En particulier, la principale différence entre la réflexion à une interface liquide-solide et la réflexion à une interface liquide-liquide [Towne68, Cassereau92b, Cassereau94], réside dans le fait que dans le solide, selon l'angle d'incidence, peuvent apparaître des ondes transverses et/ou de Rayleigh (figure 5). On démontre ici qu'une déformation temporelle du signal réfléchi doit apparaître lorsque l'on attaque l'interface avec une incidence voisine de l'angle de Rayleigh. Cette déformation sera mise en évidence expérimentalement par la suite

Une onde plane est envoyée vers une interface liquide-solide avec un angle d'incidence θ_i . Dans le fluide, les ondes sont seulement longitudinales (ondes P, de compression) mais dès que l'incidence n'est plus normale il y a création d'ondes transverses (ondes S, de cisaillement) dans le solide, en plus des ondes longitudinales.

Soit c_f la vitesse du son dans le fluide, c_p et c_s les vitesses des ondes longitudinales (P) et transverses (S) dans le solide. L'angle d'incidence θ_i et l'angle que fait l'onde transmise (longitudinale ou transverse) sont liés par la loi de Snell-Descartes:

$$\theta_t = \sin^{-1} \{c_f/c_p \cdot \sin(\theta_i)\} \text{ pour les ondes P} \quad (1)$$

$$\theta_t = \sin^{-1} \{c_f/c_s \cdot \sin(\theta_i)\} \text{ pour les ondes S.} \quad (2)$$

Il n'y a pas d'onde transmise P ou S propagative si $\theta_{p,s} > \pi/2$, c'est-à-dire si

$$\theta_i > \theta_p^* = \sin^{-1}(c_f/c_p) \text{ pour les ondes P, et si} \quad (3)$$

$$\theta_i > \theta_s^* = \sin^{-1}(c_f/c_s) \text{ pour les ondes S.} \quad (4)$$

θ_p^* et θ_s^* sont appelés respectivement l'angle critique longitudinal et l'angle critique transverse. Un autre angle d'intérêt pour notre étude est l'angle de Rayleigh θ_r , qui est légèrement supérieur à l'angle critique transverse. Pour un angle d'incidence compris entre θ_s^* et θ_r , il y a apparition d'une onde dite de Rayleigh, qui est confinée à la surface du solide et finit par réirradier toute son énergie dans le liquide au cours de sa propagation, c'est pourquoi le coefficient de réflexion en amplitude vaut 1 à l'angle de Rayleigh (figures 3 et 5) [Royer00].

Afin d'analyser l'effet de l'angle d'incidence sur l'onde réfléchie, on utilise le dispositif expérimental présenté figure 1 : deux barrettes échographiques identiques de 64 transducteurs de fréquence centrale 1.5 MHz, espacés de 1mm, sont placées en face d'un bloc de titane de telle sorte qu'une onde plane puisse être émise depuis la barrette 1, se réfléchir sur le bloc de titane, et être enregistrée par la barrette 2. L'angle d'incidence de l'onde plane sur le bloc de titane peut varier autour de l'angle de Rayleigh. Le tout est immergé dans l'eau.

Une onde plane de forme temporelle $e(t)$ est émise par la barrette 1 et arrive à l'interface avec un angle d'incidence θ_i . Lorsque l'angle d'incidence est proche de l'angle de Rayleigh, la forme temporelle $f(t)$ des signaux reçus sur la barrette 2 est différente de celle des signaux émis (figure 2).

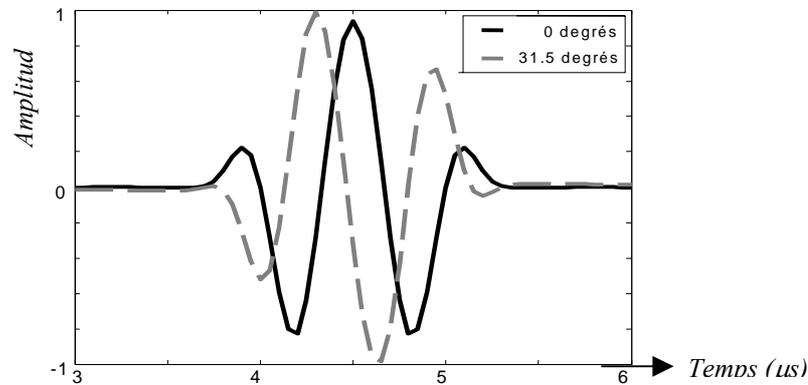


Figure 2 : le signal $e(t)$ émis depuis la barrette 1 (en noir) et le signal $f(t)$ reçu sur la barrette 2 (en tirets gris) lorsque l'angle d'incidence est de 31.5° (proche de l'angle de Rayleigh).

Soient $E(\omega)$ et $F(\omega)$ les transformées de Fourier de $e(t)$ et $f(t)$ respectivement, $E(\omega)$ et $F(\omega)$ sont liées par le coefficient de réflexion $R(\theta)$, qui dépend de l'angle d'incidence θ_i mais ne dépend pas de la fréquence de l'onde incidente. $R(\theta)$ peut être calculé à partir des relations de continuité à l'interface [Brekhovskikh60, Royer00, Marquet04] :

$$R(\theta) = (\Delta_1 - \Delta_2) / (\Delta_1 + \Delta_2) \quad (5)$$

avec

$$\Delta_1 = [1/2 (1/c_s)^2 - \alpha^2]^2 + v_p v_s \alpha^2 \quad (6)$$

$$\Delta_2 = \rho_f v_p / 4c_s^4 \rho_s v_f \quad (7)$$

ρ_f et ρ_s étant les masses volumiques du fluide et du solide respectivement, et

$$\alpha = (1/c_j) \sin(\theta_j) \quad (8)$$

$$v_j = [(1/c_j)^2 - \alpha^2]^{1/2} \quad (j = f, p, s) \quad (9)$$

v_j devient complexe dès que $(1/c_j)^2 - \alpha^2 < 0$, c'est-à-dire si $\theta_j > \theta_p^*$ ou θ_s^* . La conséquence immédiate est que le coefficient de réflexion $R(\theta_i)$ devient complexe dès que l'angle d'incidence dépasse un des angles critiques (l'angle critique longitudinal ou transverse).

On a présenté figure 3 les parties réelle et imaginaire du coefficient de réflexion $R(\theta_i)$ en fonction de l'angle d'incidence θ_i . Dès que $R(\theta_i)$ devient complexe, les signaux réfléchis $F(\omega)$ sont affectés d'un décalage en phase (égal à la phase de $R(\theta_i)$) indépendant de la fréquence par rapport aux signaux émis $E(\omega)$.

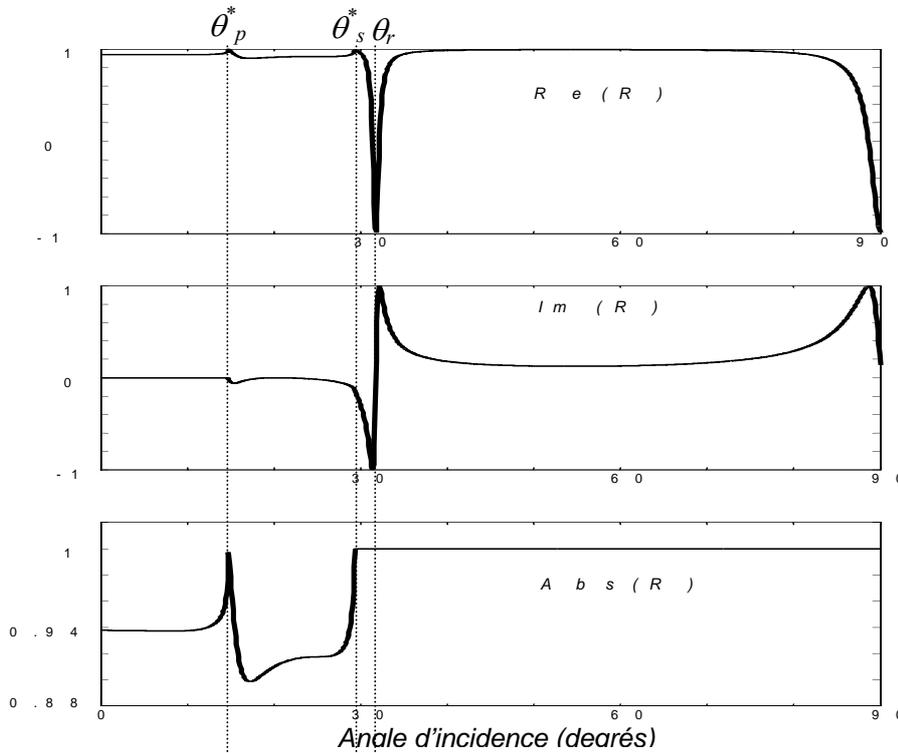


Figure 3. Le coefficient de réflexion R en fonction de l'angle d'incidence θ_i . En haut: partie réelle $R(\theta_i)$, au milieu: partie imaginaire de $R(\theta_i)$, en bas: module de $R(\theta_i)$. θ_p^* = angle critique longitudinal, θ_s^* = angle critique transverse, θ_r = angle de Rayleigh. La phase de $R(\theta_i)$ « tourne » de 2π autour de l'angle de Rayleigh.

Si on émet de la barrette 1 les signaux $E(\omega)$ avec un angle d'incidence θ_i , les signaux $F(\omega)$ reçus sur la barrette 2 sont

$$F(\omega) = R(\theta_i)E(\omega)$$

$$\Leftrightarrow F(\omega) = [\operatorname{Re}(R(\theta_i)) + i \operatorname{Im}(R(\theta_i))] E(\omega). \quad (10)$$

On ne peut pas directement faire la transformée de Fourier inverse de l'équation (10) pour calculer la forme temporelle $f(t)$ des signaux réfléchis : $f(t)$ serait en effet une fonction à valeurs complexes, ce qui n'a aucun sens pour des signaux physiques mesurables. Si l'on tient en compte le fait que $e(t)$ et $f(t)$ doivent être des fonctions à valeurs réelles, leurs transformées de Fourier doivent être hermitiennes ($E(\omega)^* = E(-\omega)$, $F(\omega)^* = F(-\omega)$), et on montre (appendice 6.A) que (10) donne, après passage dans le domaine temporel :

$$f(t) = \operatorname{Re}(R(\theta_i))e(t) + \operatorname{Im}(R(\theta_i)) TH[e(t)] \quad (11)$$

TH représentant l'opérateur transformée de Hilbert.

L'équation (11) met en évidence le fait que dès que le coefficient de réflexion devient complexe, les signaux réfléchis $f(t)$ ne sont plus simplement proportionnels aux signaux émis $e(t)$: le signal est déformé à cause de la présence de la transformée de Hilbert.

Le coefficient de réflexion a une partie imaginaire significative pour des angles d'incidence proches de l'angle de Rayleigh (voir figure 3). Il est donc possible de visualiser le passage de l'angle critique en regardant la forme temporelle des signaux réfléchis $f(t)$ en fonction de l'angle d'incidence θ_i . En utilisant l'équation (11) pour calculer le coefficient de réflexion $R(\theta_i)$, on a calculé la forme temporelle des signaux réfléchis $f(t)$ quand on émet un signal $e(t)$ avec un angle d'incidence θ_i , ces signaux sont présentés pour un angle d'incidence nul et de 31.5° sur la figure 2, et pour tous les angles d'incidence entre 0 et 90° sur la figure 4. (Les paramètres acoustiques suivants ont été mesurés et utilisés pour décrire le fluide (l'eau) et le solide (titane) dans la simulation: $\rho_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_f = 1460 \text{ m.s}^{-1}$; $\rho_s = 7890 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_s = 2991 \text{ m.s}^{-1}$, $c_p = 5765 \text{ m.s}^{-1}$.)

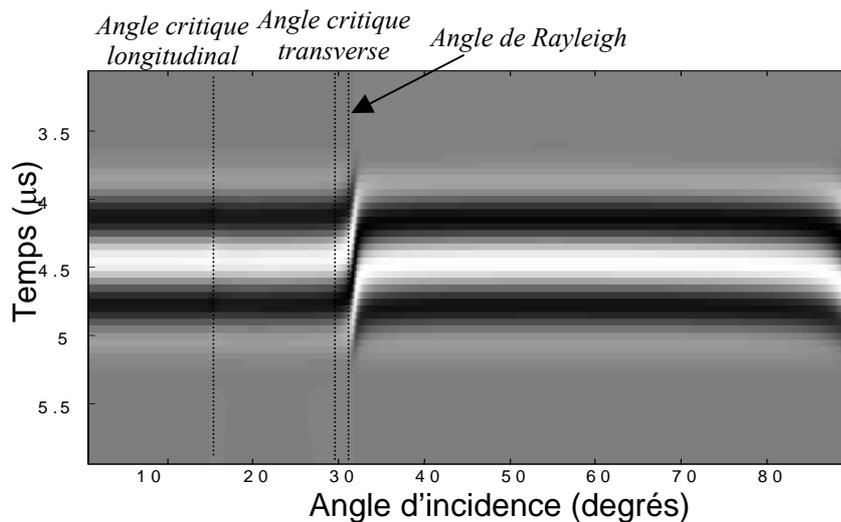


Figure 4. La forme temporelle théorique des signaux réfléchis $f(t)$, en fonction de l'angle d'incidence θ_i . Sur chaque colonne on présente en niveaux de gris $f(t)$, pour un angle d'incidence donné. Noter surtout le déphasage de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente autour de l'angle de Rayleigh.

La déformation de l'onde réfléchie n'est visible que sur un faible intervalle angulaire autour de l'angle de Rayleigh. En effet, au-delà de cet angle, la partie imaginaire du coefficient de réflexion est presque une constante de l'angle d'incidence (voir figure 3), la conséquence en est un déphasage global d'une longueur d'onde des signaux réfléchis par rapport aux signaux incidents, qui ne peut être détecté. En pratique, pour détecter un changement dans la forme temporelle de l'onde lorsque l'on passe l'angle de Rayleigh, il sera nécessaire de faire varier l'angle d'incidence très peu autour de cet angle.

6.2.2. Retournement temporel à l'angle de Rayleigh

Nous allons utiliser un miroir à retournement temporel pour restaurer la forme temporelle initiale de l'onde qui a été déformée par réflexion à l'angle de Rayleigh. Il est intéressant ici de mentionner un travail similaire effectué par Michaël Tanter [Tanter01] qui utilisa le retournement temporel pour restaurer la forme d'une onde déformée par des non linéarités dans l'équation de propagation.

La théorie des cavités à retournement temporel nous indique que l'on devrait être capable de retrouver la forme initiale de l'onde [Fink92, Wu92, Cassereau92a]. Cependant ici la cavité n'est pas fermée : notre miroir à retournement temporel en réflexion ne nous permet pas d'enregistrer les ondes transmises dans le solide ni la totalité des ondes de Rayleigh éventuellement créées à la surface du solide (figure 5).

Ces ondes sont perdues pour le retournement temporel, il en résulte une perte globale d'énergie. Si l'on voulait avoir une vraie cavité à retournement temporel, il serait nécessaire de placer une ou deux barrettes à l'intérieur du solide pour capter les ondes longitudinales et transverses éventuellement transmises (pour des angles d'incidence inférieurs à l'angle critique transverse), et une série de transducteurs parallèlement à la surface du solide pour capter l'onde de Rayleigh [Marston97] (pour des angles d'incidence compris entre l'angle critique transverse et l'angle de Rayleigh) (figure 5).

Seule l'onde réfléchie $f(t)$ ($F(\omega)$ dans le domaine de Fourier) est enregistrée et retournée temporellement. Les signaux retournés temporellement $F(\omega)^*$ sont renvoyés avec le même angle d'incidence vers la première barrette, et l'onde $s(t)$ ($S(\omega)$) enfin captée par la première barrette s'écrit:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= R(\theta_i) F(\omega)^* \\
 \Leftrightarrow S(\omega) &= R(\theta_i) [R(\theta_i) E(\omega)]^* \\
 \Leftrightarrow S(\omega) &= |R(\theta_i)|^2 E(\omega) \\
 \boxed{\Leftrightarrow s(t) &= |R(\theta_i)|^2 e(t)} & (12)
 \end{aligned}$$

si $e(t)$ sont des signaux symétriques (pairs), de sorte que $E(\omega)^* = E(\omega)$.

Les signaux enregistrés $s(t)$ à la fin de cette expérience de retournement temporel devraient donc être proportionnels aux signaux $e(t)$ originellement émis, le facteur de proportionnalité étant $|R(\theta_i)|^2$: les signaux $s(t)$ ne devraient pas être déformés par rapport aux signaux $e(t)$, le retournement temporel corrigeant des aberrations de phase.

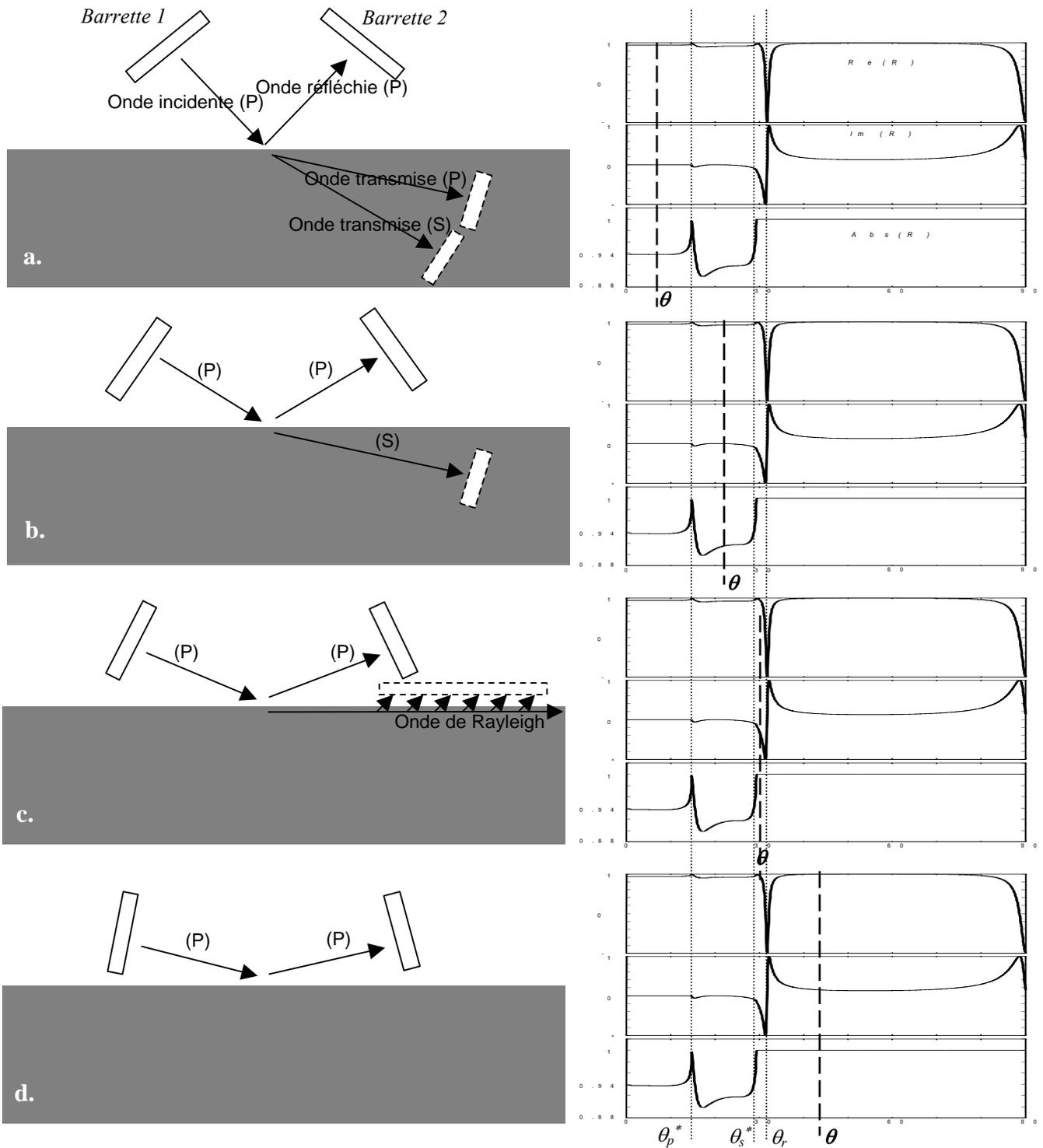


Figure 5. Les différentes ondes réfléchies et transmises lors de l'incidence d'une onde plane émise par la barrette 1 à l'interface liquide-solide, en fonction de l'angle d'incidence θ . a) $\theta < \theta_p^*$, il y a transmission d'ondes longitudinales et transverses. b) $\theta_p^* < \theta < \theta_s^*$, il y a transmission d'ondes transverses uniquement. c) $\theta_s^* < \theta < \theta_r$, il y a création d'ondes de Rayleigh qui se propagent le long de l'interface liquide-solide et ré-irradient dans le fluide. d) $\theta > \theta_r$, il n'y a pas d'ondes transmises. Les rectangles blancs correspondent aux deux barrettes dont on dispose, les rectangles blancs à contours pointillés sont les barrettes dont on aurait besoin pour capter toutes les ondes et disposer d'une vraie cavité à retournement temporel. A droite on représente en parallèle la position de θ par rapport à θ_p^* , θ_s^* , θ_r , sur les courbes donnant le coefficient de réflexion.

Cependant, ces signaux ne devraient pas être identiques aux signaux originellement émis, car de l'énergie est perdue en transmission et/ou dans l'onde de Rayleigh: pour un angle d'incidence compris entre 0 (incidence normale) et l'angle de Rayleigh θ_r , il y aura toujours transmission d'ondes dans le solide et perte d'information, et les barrettes 1 et 2 ne forment pas une cavité fermée (figure 5a,b,c). Dès que $\theta_i > \theta_s^*$, $|R(\theta_i)| = 1$ et $s(t) = e(t)$: aucune onde propagative n'est transmise, aucune information n'est perdue en transmission pour le retournement temporel, et les deux barrettes forment une parfaite cavité à retournement temporel (figure 5d).

La forme temporelle des signaux $f(t)$ captés après une réflexion sur l'interface, ainsi que celle des signaux $s(t)$ issus du retournement temporel et de la repropagation de $f(t)$ est présentée sur la figure 6, en fonction de l'angle d'incidence (résultats expérimentaux). Comme on s'y attendait, on observe une déformation des signaux réfléchis $f(t)$ pour des angles d'incidence compris entre 30 et 31 degrés (proche de l'angle de Rayleigh), et la compensation de cette déformation dans les signaux $s(t)$. On observe également une perte d'énergie pour les signaux retournés temporellement et repropagés $s(t)$ pour des angles d'incidence proches de l'angle de Rayleigh ; cela est probablement dû à la perte d'énergie de l'onde réfléchie par génération d'ondes de Rayleigh dans le solide pour des angles d'incidence compris entre l'angle critique transverse et l'angle de Rayleigh.

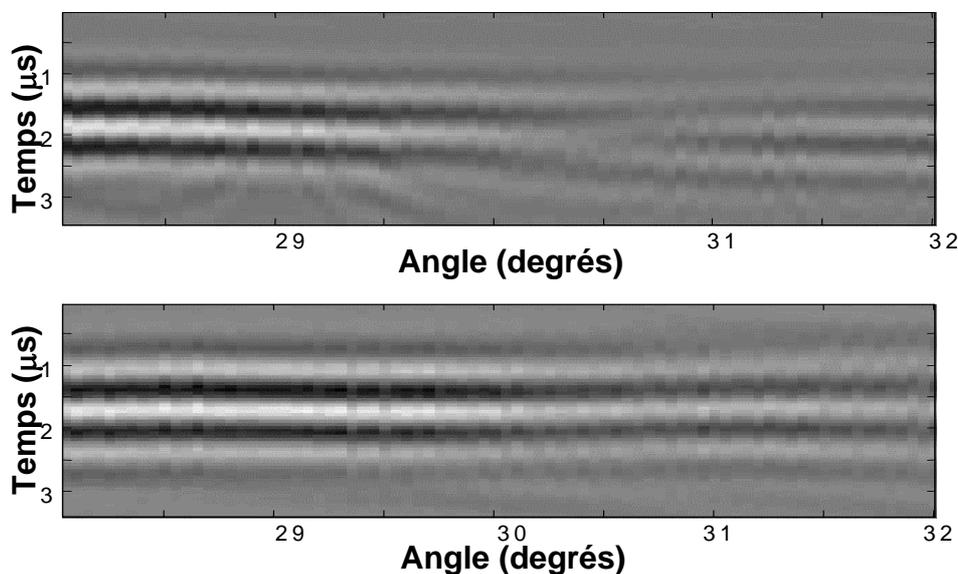


Figure 6. Retournement temporel d'ondes planes (expérience). En haut : la forme temporelle des signaux $f(t)$ enregistrés sur la barrette 2 lorsque la barrette 1 émet une onde plane de forme temporelle $e(t)$, en fonction de l'angle d'incidence. En bas: la forme temporelle $s(t)$ des signaux enregistrés sur la barrette 1 après retournement temporel et repropagation des signaux $f(t)$, en fonction de l'angle d'incidence.

6.3. Focalisation latérale par lois cylindriques ou retournement temporel au voisinage de l'angle de Rayleigh

On s'intéresse maintenant à la focalisation spatiale: une onde focalisante est émise depuis une des barrettes, rebondit sur l'interface, et focalise sur l'élément central de l'autre barrette. Nous allons tester la focalisation par lois cylindriques (simples lois de retard géométriques) et par retournement temporel, observer et discuter qualitativement la qualité de la focalisation.

Didier Cassereau et Mathias Fink ont déjà étudié, théoriquement et par des simulations, la focalisation spatiale en présence d'une interface fluide-fluide, pour des incidences proche de la normale [Cassereau92b, Cassereau94]. Dans ce cas, aucune déformation de l'onde n'était attendue. Ici, l'expérience est une expérience classique de focalisation spatiale, le but étant de focaliser le champ ultrasonore sur le transducteur central de la barrette 2 en émettant une onde depuis la barrette 1. Indépendamment, Nagy et. al. et Matikas et. al. ont effectué des expériences de focalisation d'ondes via une réflexion à l'angle de Rayleigh sur une interface liquide-solide, ils observèrent un décalage latéral de la tache focal [Nagy87, Matikas92] qui ne sera pas observé ici.

Deux techniques sont utilisées : dans un premier temps, une loi cylindrique est émise depuis la barrette 1: tous les éléments de la barrette 1 émettent le même signal temporel, avec un retard approprié, de sorte que les signaux en provenance de tous les éléments de la barrette 1 arrivent en phase au niveau du transducteur central de la barrette 2 (le point focal). Les retards sont calculés géométriquement, en supposant une vitesse du son uniforme de $1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$ dans l'eau, *et en négligeant les effets dû au coefficient de réflexion variable autour de l'angle de Rayleigh* (le coefficient de réflexion est pris constant et égal à 1). Un tel front d'ondes cylindrique est présenté figure 7 (à gauche). Puis on essaye la focalisation par retournement temporel: une impulsion est émise depuis le point focal désiré (le transducteur central de la barrette 2), l'onde se propage et est enregistrée par la barrette 1, retournée temporellement et réémise vers la barrette 2. Un exemple de front d'ondes focalisant obtenu par retournement temporel est présenté figure 7 (à droite) pour un angle d'attaque¹ proche de l'angle critique transverse. Les taches focales associées à ces deux manières de focaliser sont comparées à une tache focale de référence : la focalisation que l'on obtient lorsque l'on envoie une loi cylindrique d'une barrette à une autre qui lui ferait face, sans qu'il y ait de réflexion à une interface.

¹ L'angle d'attaque est l'angle θ_i que fait la normale à l'interface avec la normale aux barrettes échographiques, il est défini sur la figure 1. On ne peut plus parler d'un unique angle d'incidence pour une onde cylindrique

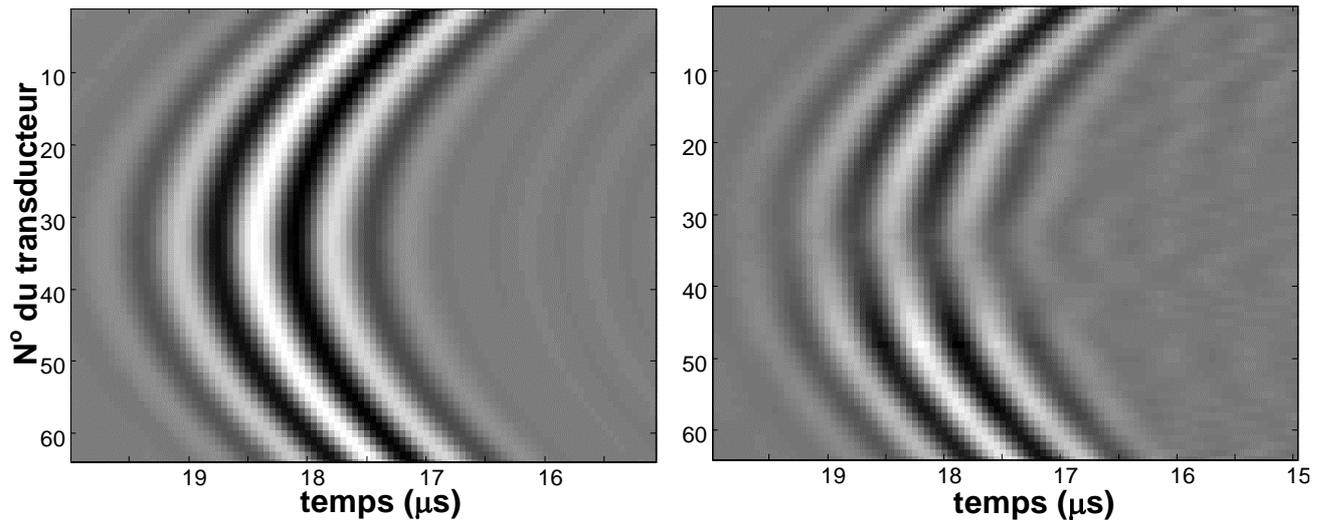


Figure 7. Fronts d’ondes à envoyer depuis la barrette 1 pour focaliser sur l’élément central de la barrette 2. A gauche : le front d’ondes cylindrique construit géométriquement à partir des distances entre les transducteurs de la barrette émettrice et le point focal, sans tenir compte de la variation du coefficient de réflexion avec l’angle d’incidence. A droite : le front d’ondes focalisant obtenu par retournement temporel. Sur la ligne i est représenté, en niveaux de gris, la forme temporelle du signal à émettre depuis l’élément i de la barrette 1.

6.3.1. Simulation

Dans un premier temps, afin de bien comprendre comment la focalisation spatiale peut être affectée par une réflexion à l’interface liquide-solide, nous simulons à partir du coefficient de réflexion théorique et de la géométrie de l’expérience la propagation et la focalisation d’un front d’ondes focalisant avec réflexion à l’interface. La géométrie de l’expérience et les variations du coefficient de réflexion autour de l’angle de Rayleigh étant connues, on peut calculer toutes les fonctions de Green entre tous les éléments d’une barrette 1 et tous les éléments d’une barrette 2 et les regrouper sous forme d’une matrice de propagation théorique $\mathbf{H}(\omega)$ reliant les signaux émis par la barrette 1 et les signaux reçus par la barrette 2.

On utilise ce propagateur théorique pour simuler la focalisation sur la barrette 2 lorsque la barrette 1 émet une onde, avec les trois méthodes de focalisation exposées plus haut : a- focalisation cylindrique de référence (pas de rebond sur une interface), b- focalisation par retournement temporel près de l’angle de Rayleigh, c- focalisation par loi cylindrique avec un angle d’attaque proche de l’angle de Rayleigh. Les taches focales correspondantes sont présentées figure 8.

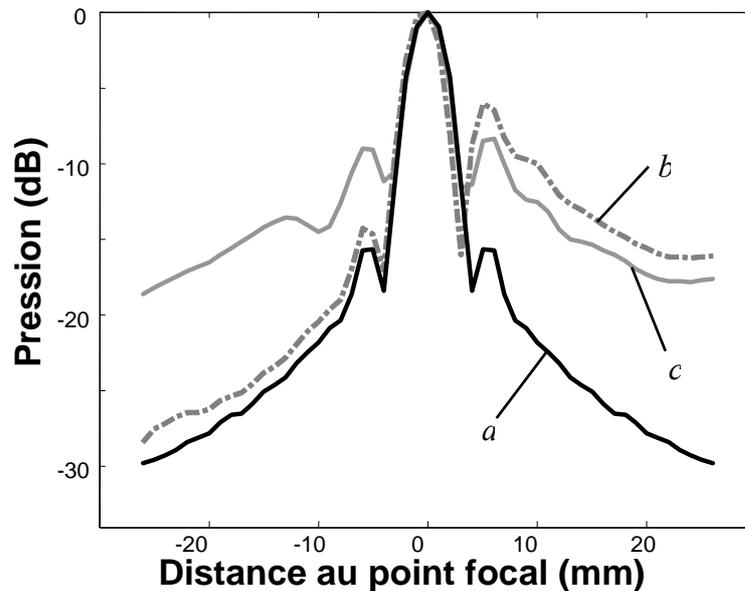


Figure 8. Scan latéral des taches focales obtenues par différentes techniques de focalisation (simulation): a- référence: loi cylindrique à travers l'eau. b- loi cylindrique avec un angle d'attaque proche de l'angle de Rayleigh. c- retournement temporel avec un angle d'attaque proche de l'angle de Rayleigh. Les courbes présentent le maximum temporel (en dB) de la pression reçue sur chaque transducteur de la barrette 2, en fonction de sa distance au point focal.

La focalisation avec une loi cylindrique donne une tache focale dissymétrique, avec une pression résiduelle plus importante du côté droit du lobe principal que du côté gauche (en d'autres termes, un moins bon contraste sur la droite que sur la gauche). De manière surprenante, focaliser avec une loi symétrique dans une géométrie apparemment symétrique donne une tache focale dissymétrique.

C'est la réflexion autour de l'angle de Rayleigh qui brise la symétrie : la loi cylindrique peut être décomposée en une somme d'ondes planes avec différents angles d'incidence sur l'interface. Seulement les composantes de cette décomposition qui ont un angle d'incidence proche de l'angle de Rayleigh vont être affectées, avec une perte d'énergie et une déformation temporelle. Le front d'ondes va être affecté de manière asymétrique, car la courbe du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence ne présente pas d'axe de symétrie.

L'interface détruit la symétrie du front d'ondes qui lui arrive en atténuant, déphasant et déformant une partie. Le résultat est une tache focale dissymétrique avec moins d'énergie d'un côté du lobe principal que de l'autre.

Ce phénomène de rupture de symétrie du front d'ondes à l'interface est illustré figure 9.

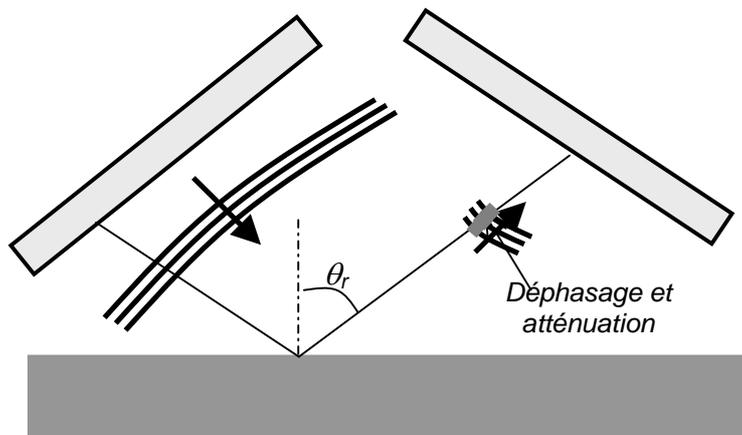


Fig.9. Focalisation spatiale d'une loi cylindrique pour un angle d'attaque proche de l'angle de Rayleigh θ_r . Les composantes de la décomposition en ondes planes de l'onde cylindrique incidente ne sont pas toutes affectées de la même manière par la réflexion car leurs angles d'incidence couvrent un large intervalle autour de θ_r^* , de telle sorte qu'après réflexion, le front d'ondes est déformé (une partie du front d'ondes est déphasée et atténuée) et cela résulte en une tache focale dissymétrique..

Focaliser par retournement temporel permet de retrouver la symétrie de la tache focale, mais il y a une perte de contraste (une pression résiduelle plus importante) de part et d'autre du lobe principal. On peut comprendre ainsi le fait que le retournement temporel permette de retrouver la symétrie de la tache focale : dans la première étape du retournement temporel, une onde cylindrique divergente est émise depuis le transducteur central de la barrette 2. Cette onde se décompose en une somme d'ondes planes qui ont des angles d'incidence différents sur l'interface. Toutes les composantes planes de la décomposition ne sont pas affectées de la même manière par la réflexion, de telle sorte que l'onde qui est enregistrée sur la barrette 1 est dissymétrique. Cette onde est ensuite retournée temporellement pour créer le front d'ondes focalisant du retournement temporel présenté figure 7 (à droite) : on voit clairement que l'onde qui arrive sur les transducteurs 30-40 a été particulièrement affectée (perte d'énergie, déformation temporelle et déphasage par rapport au front d'ondes cylindrique).

Lors de la phase de focalisation, la phase et la forme temporelle des composantes angulaires qui ont été affectées dans la première étape sont de nouveau affectées, et leur déformation est compensée car le retournement temporel compense les phases. La tache focale résultante est donc symétrique.

Cependant, l'amplitude de ces composantes de la décomposition en ondes planes est affectée par une perte égale à celle qu'elle avait subie dans la première étape : dans la première comme dans la deuxième étape, de l'énergie est perdue par transmission dans le solide et dans la génération d'ondes de Rayleigh. Finalement, le système se comporte comme si l'ouverture de la barrette focalisante était

modulée par une fonction de transfert qui laisse moins bien passer les ondes en provenance des transducteurs 30-40. Une telle “anti-apodisation” donne des niveaux de pression résiduelle plus hauts que dans l’expérience de référence de part et d’autre du lobe principal de la tache focale.

Ce phénomène de restauration de symétrie du front d’ondes à l’interface par retournement temporel est illustré figure 10.

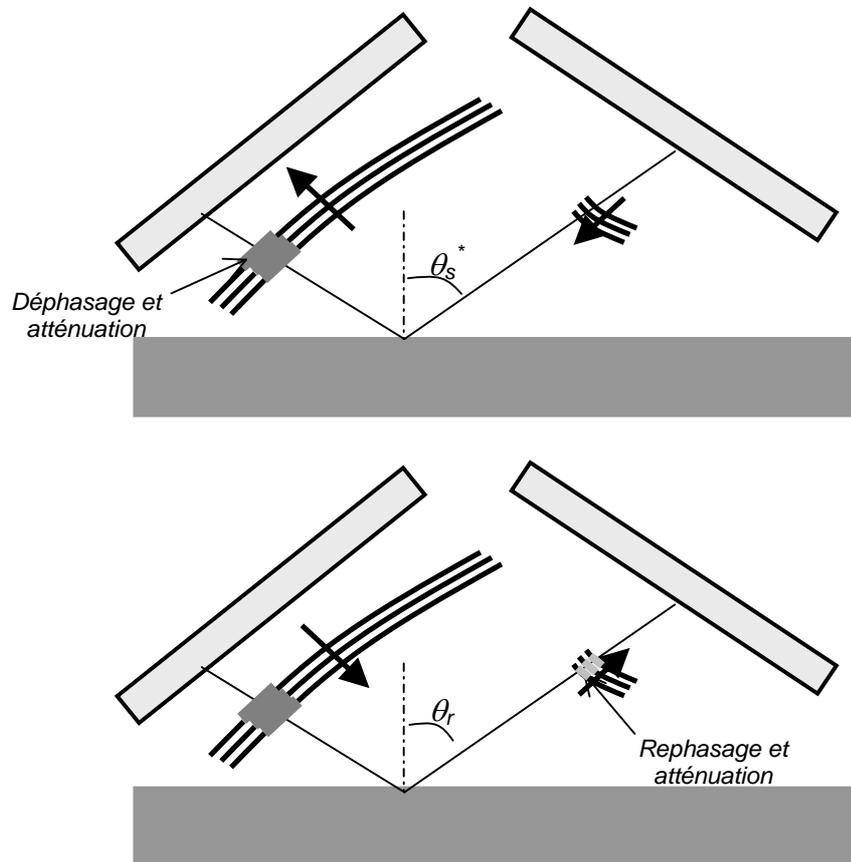


Figure 10. Focalisation spatiale par retournement temporel pour un angle d’attaque proche de l’angle de Rayleigh. En haut, étape 1 : une impulsion est émise depuis le point focal désiré (le transducteur central de la barrette 2). Le front d’onde cylindrique divergent qui se propage alors vers la barrette 1 est réfléchi à l’interface fluide-solide ce qui induit une déformation du front d’ondes qui est enregistré par la barrette 1. En bas : ce front d’ondes déformé est retourné temporellement et réémis vers la barrette 2, la nouvelle réflexion à l’interface corrige ces déformations et la tache focale obtenue est symétrique.

6.3.2. Expérience

On fait l’expérience correspondante avec un angle d’attaque proche de l’angle de Rayleigh. Les taches focales obtenues avec les trois techniques de focalisation (a- focalisation cylindrique de référence (sans rebond sur une interface), b- focalisation par retournement temporel près de l’angle de Rayleigh, c- focalisation par loi cylindrique près de l’angle de Rayleigh) sont obtenues et présentées figure 11. Les courbes de focalisation expérimentale présentent les mêmes particularités que celles qui

avaient été notées sur les courbes de focalisation simulées: une tache focale dissymétrique lorsque l'on focalise avec la loi cylindrique, une re-symétrisation de la tache focale associée à une perte de contraste lorsque l'on focalise par retournement temporel. Comme lors de la simulation, la tache focale obtenue par focalisation d'une loi cylindrique avec un angle d'attaque proche de l'angle de Rayleigh se confond avec la tache focale de référence du côté gauche du lobe principal, et avec la tache focale du retournement temporel du côté droit du lobe principal.

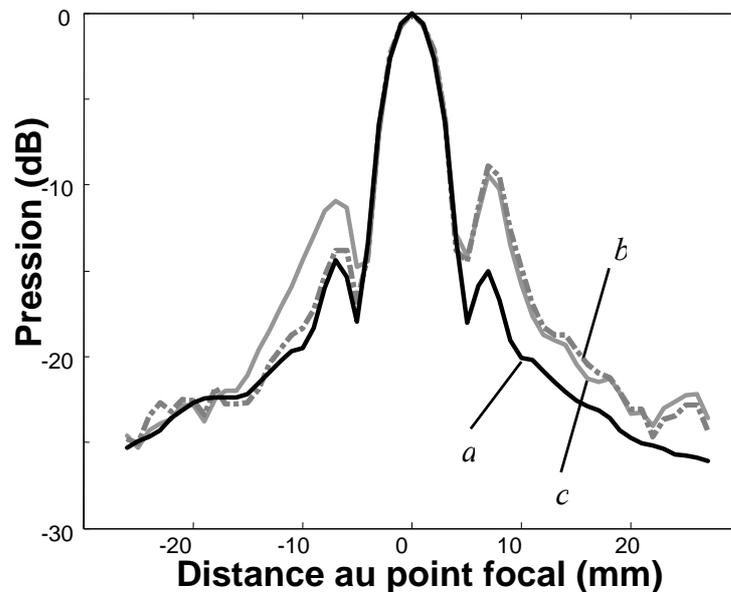


Figure 11. Scan des taches focales obtenues par différentes techniques de focalisation (résultats expérimentaux): a- référence: loi cylindrique à travers l'eau. b- loi cylindrique avec un angle d'attaque proche de l'angle de Rayleigh. c- retournement temporel avec un angle d'attaque proche de l'angle de Rayleigh. Les courbes présentent le maximum temporel (en dB) de la pression reçue sur chaque transducteur de la barrette 2, en fonction de sa distance au point focal.

6.4. Focalisation spatiale au-delà de l'angle de Rayleigh : du miroir à retournement temporel à la cavité à retournement temporel.

Lors de la focalisation par retournement temporel à l'angle de Rayleigh, une perte de contraste est observée sur la tache focale par rapport à la tache focale de référence. Cette perte de contraste est due au fait que lors du procédé de retournement temporel, les ondes sont réfléchies deux fois à l'interface fluide-solide. Près de l'angle de Rayleigh une énergie significative peut être transmise dans le solide ou convertie sous forme d'ondes de Rayleigh qui ne sont pas captées, ou seulement partiellement, par notre miroir à retournement temporel (voir figure 5) et est donc perdue pour le retournement temporel. En théorie, si l'on était capable d'enregistrer et retourner temporellement l'onde réfléchie, l'onde transmise, et l'éventuelle onde de Rayleigh (c'est-à-dire si l'on disposait des

barrettes en pointillés de la figure 5) on obtiendrait une focalisation d'aussi bonne qualité que celle de l'expérience de référence [Fink92, Cassereau92a].

En pratique, il est impossible de placer des récepteurs à l'intérieur du bloc de titane pour enregistrer les ondes transmises. On pourrait imaginer de placer une barrette échographique parallèlement à l'interface pour enregistrer l'onde de Rayleigh, mais notre électronique nous limite à l'usage de deux barrettes simultanément de manière synchronisée.

Cependant on peut envisager de faire une vraie cavité à retournement temporel sans changer le dispositif expérimental utilisé : il suffit de s'assurer qu'aucune onde propagative n'est transmise dans le solide. Cela arrive dès que tous les angles d'incidence de toutes les composantes de la décomposition en onde planes de la loi cylindrique focalisante sont supérieurs à l'angle de Rayleigh (cas d. de la figure 5).

Nous avons procédé aux mêmes simulations et expériences de focalisation que dans la section précédente, en focalisant a- par loi cylindrique sans réflexion (référence), b- par retournement temporel, c- par loi cylindrique avec un angle d'attaque 1- proche de l'angle de Rayleigh (cas b. ou c. de la figure 5) et 2- largement supérieur à l'angle de Rayleigh.

Les taches focales correspondantes sont représentées figure 12 (taches focales simulées) et 13 (taches focales expérimentales). Pour des incidences au-delà de l'angle de Rayleigh, aucune onde ne se propage dans le solide et l'onde réfléchi n'est pas déformée par rapport à l'onde incidente (cf section 1.1): dans la simulation comme dans l'expérience, on vérifie que la focalisation par retournement temporel ou par lois cylindriques avec réflexion sont de qualité équivalente à la focalisation de référence sans réflexion (figures 12 et 13, à droite). Cela vient confirmer le fait que les deux barrettes placées du même côté de l'interface forment une vraie cavité à retournement temporel lorsque l'angle d'attaque est très supérieur à l'angle de Rayleigh².

Les taches focales obtenues en travaillant près de l'angle de Rayleigh (figure 12 et 13, à gauche) présentent les mêmes particularités que ce qui a été décrit dans la section précédente: dissymétrisation de la tache focale lorsque l'on focalise par lois cylindriques, restauration de la symétrie avec une perte de contraste lorsque l'on focalise par retournement temporel : les deux barrettes ne forment pas une cavité à retournement temporel parfaite car il y a transmission d'ondes dans le solide.

² Des ondes évanescentes sont créées à l'intérieur du solide pour des angles d'incidence supérieurs à l'angle de Rayleigh. Ainsi, une petite fraction de l'énergie incidente est transmise dans ces ondes évanescentes est la cavité à retournement temporel est seulement *presque* parfaite.

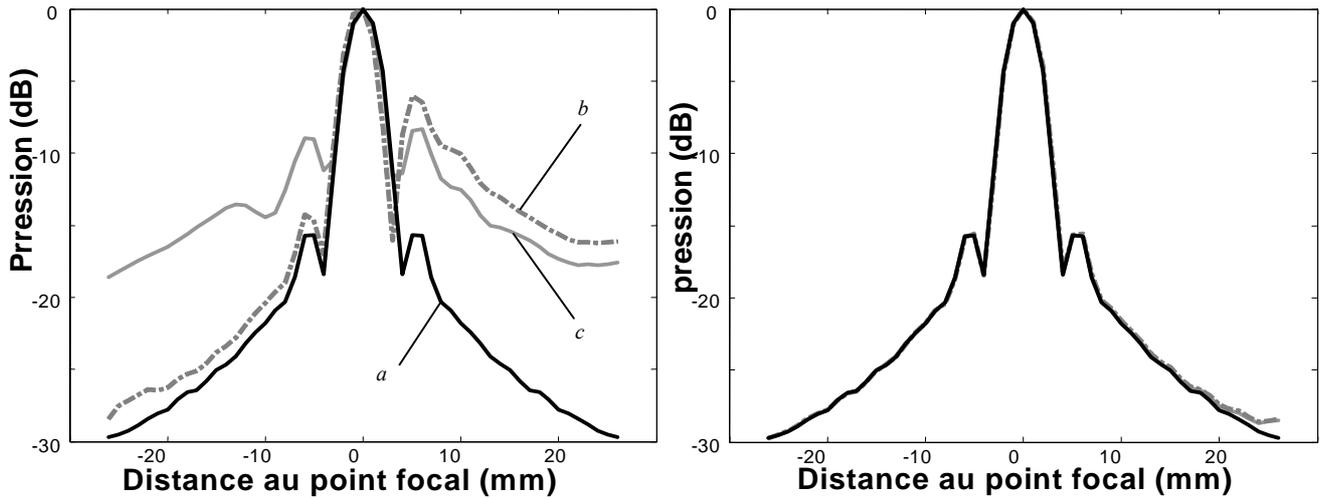


Figure 12. Scan des taches focales obtenues par différentes méthodes de focalisation (simulation): a- référence: loi cylindrique à travers l'eau. b- loi cylindrique en réflexion, c- retournement temporel en réflexion. A gauche: avec un angle d'incidence $\theta_i = 31^\circ \approx \theta_r$, à droite: avec un angle d'incidence $\theta_i = 42^\circ > \theta_r$. Les courbes présentent le maximum temporel en dB de la pression reçue dans le plan focal, en fonction de la distance au point focal.

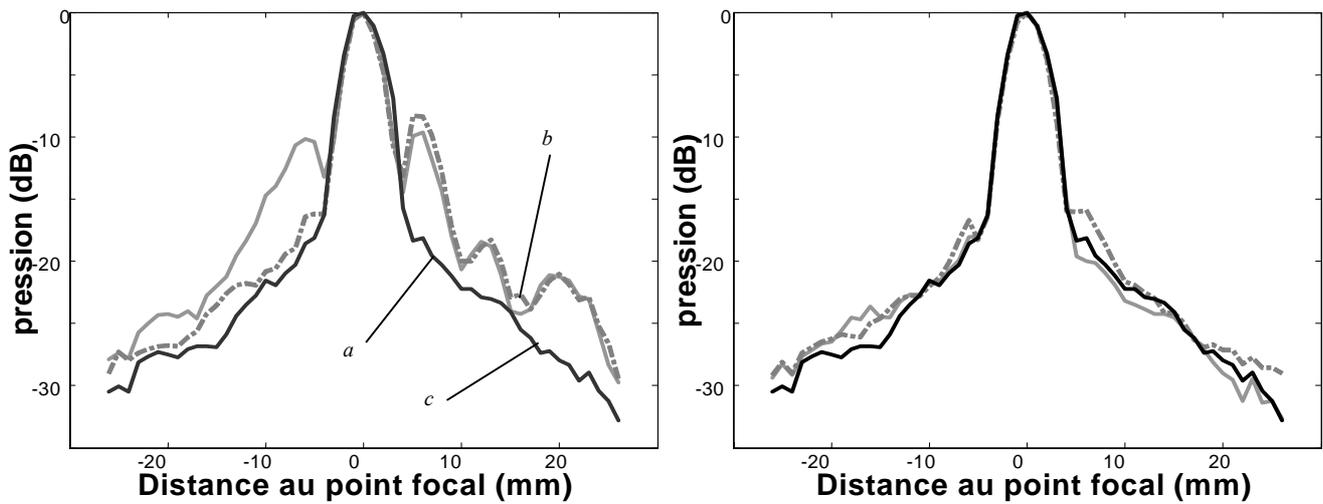


Figure 13. Scan des taches focales obtenues par différentes méthodes de focalisation (résultats expérimentaux): a- référence: loi cylindrique à travers l'eau. b- loi cylindrique en réflexion, c- retournement temporel en réflexion. A gauche: avec un angle d'incidence $\theta_i = 31^\circ \approx \theta_r$, à droite: avec un angle d'incidence $\theta_i = 42^\circ > \theta_r$. Les courbes présentent le maximum temporel en dB de la pression reçue dans le plan focal, en fonction de la distance au point focal.

6.5. Conclusions

Nous avons mené une série d'expériences de retournement temporel autour de l'angle de Rayleigh.

Dans un premier temps, on a décrit les effets d'une interface fluide-solide sur la réflexion d'une onde plane : une déformation de la forme *temporelle* des signaux réfléchis lorsque l'angle d'incidence est proche de l'angle de Rayleigh a été prédite puis observée. En utilisant le retournement temporel, on peut compenser ces déformations et retrouver la forme originale du signal. Pour cela, il suffit d'utiliser un retournement temporel en réflexion, fait de deux barrettes situées du même côté de l'interface. Il n'est pas indispensable pour cela d'utiliser une cavité à retournement temporel fermée avec une troisième barrette pour enregistrer et réémettre les ondes transmises dans le solide ou les ondes de Rayleigh générées à la surface du solide.

Dans une deuxième partie, on a étudié l'influence de la présence de l'interface sur la focalisation *spatiale* d'ondes. On a montré que lorsque l'on envoie des fronts d'ondes cylindriques vers l'interface avec un angle d'incidence proche de l'angle de Rayleigh, la qualité de la focalisation est affectée et une tache focale dissymétrique est observée, même si le dispositif expérimental est symétrique. En revanche, on n'a pas observé le décalage spatial de la tache focal qui avait été mis en évidence dans [Nagy87] et [Matikas92]. Le retournement temporel permet d'obtenir une tache focale symétrique: une telle propriété pourrait être intéressante dans certaines configurations de contrôle non destructif où plusieurs barrettes sont utilisées en réflexion. Cependant, la focalisation par retournement temporel présente un contraste moins bon que la focalisation de référence (si aucune interface n'était rencontrée sur le trajet de l'onde) : le fait que le miroir à retournement temporel en réflexion n'est pas une cavité fermée affecte la qualité de la focalisation spatiale.

Une focalisation optimale par retournement temporel peut être obtenue dans une configuration où les deux barrettes en réflexion forment une cavité à retournement temporel, i.e si aucune onde n'est transmise dans le solide. C'est le cas lorsque les angles d'incidence sont supérieurs à l'angle de Rayleigh.

Il serait intéressant de placer une barrette échographique le long de l'interface afin de capter l'onde de Rayleigh qui est produite à la surface du solide et ré-irradie dans le fluide. En retournant temporellement cette onde ainsi que l'onde réfléchie, on devrait se rapprocher d'une cavité à retournement temporel et ainsi améliorer la focalisation spatiale. Il est pour l'instant impossible de faire cela expérimentalement car l'électronique et les connecteurs dont on dispose nous interdisent d'utiliser plus de deux barrettes à la fois de manière synchronisée.

Références

- [Brekhovskikh60] “Waves in layered media”, L. M. Brekhovskikh, *Academic, New York (1960)*.
- [Cassereau92a] “Time reversal of ultrasonic fields-Part III: theory of the closed time-reversal cavity”, D. Cassereau, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 579-592 (1992).
- [Cassereau92b] D. Cassereau and D. Guyomar, “Reflection of an impulse spherical wave at a plane interface separating two fluids”, *J. Acoust. Soc. Am.* 92, 1706-1720 (1992).
- [Cassereau93] “Focusing with plane time-reversal mirrors: an efficient alternative to closed cavities”, D. Cassereau, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 94, 2373-2386 (1993).
- [Cassereau94] “Time-reversal focusing through a plane interface separating two fluids”, D. Cassereau, M. Fink, *J. Acoust. Soc. Am.* 95, 3145-3154 (1994).
- [Chen00] “Reflectometry using longitudinal, shear and Rayleigh waves”, W. Chen, J. Wu, *Ultrasonics* 38, 909-913 (2000).
- [Coulon84] “Théorie et traitement des signaux”, F. de Coulon, *Dunod (1984)*.
- [Fink92] “Time reversal of ultrasonic fields-Part I: Basic principles”, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 555-566 (1992).
- [Lindh62] “Transmission of a transient spherical wave at a plane interface”, H. Lindh., *Acustica* 12, 108-112 (1962).
- [Marquet04] F. Marquet, rapport de projet expérimental, ESPCI (2004).
- [Marston97] “Spatial approximation of leaky wave surface amplitudes for 3-D high-frequency scattering : Fresnel patches and application to edge-excited end regular helical waves on cylinders”, P. Marston, *J. Acoust. Soc. Am.* 102, 1628-1638 (1997).
- [Matikas92] “Experimental study of focused ultrasonic beams reflected at a fluid-solid interface in the vicinity of the Rayleigh angle”, T.E. Matikas, M. Rousseau, P. Gatignol, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* 39 (6), 737-744 (1992).
- [Nagy87] “Focal shift of convergent ultrasonic beams reflected from a liquid-solid interface”, P.B. Nagy, K. Cho, L. Adler, D.E. Chimenti, , *J. Acoust. Soc. Am.* 81 (4), 835 (1987).
- [Nayfeh95] “Wave propagation in layered anisotropic media”, A. H. Nayfeh, *North Holland, Amsterdam (1995)*
- [Neubauer73] “Ultrasonic reflection of a bounded beam at Rayleigh and critical angles for a plane liquid-solid interface”, W.G. Neubauer, *J. Appl. Phys* 44(1), 48-55 (1973).
- [Royer00] “Ondes élastiques dans les solides”, D. Royer, *Vol.1 pp. 217-223, Masson (2000)*.
- [Tanter01] “Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics”, M. Tanter, J.L. Thomas, M. Fink, *Phys. Rev. E.* 64, 016602 (2001).
- [Towne68] “Pulse shapes of spherical waves reflected and refracted at a plane interface separating two homogeneous fluids”, D. H. Towne, *J. Acoust. Soc. Am.* 44, 65-76 (1968).

- [Wang03] “Beam and phase effects in angle-beam-through-transmission method of ultrasonic velocity measurement”, L. Wang, A. I. Lavrentyev, Rokhlin, *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3), 1551-1559 (2003).
- [Wu92] “Time reversal of ultrasonic fields-Part II: Experimental results”, F. Wu, J. L. Thomas, M. Fink, *IEEE TUFFC* 39(5), 567-578 (1992).

Appendice 6.A.

Cet appendice a pour objet la démonstration de l'équation (7) à partir de l'équation (6).

On a

$$F(\omega) = [\operatorname{Re}(R(\theta_i)) + i \operatorname{Im}(R(\theta_i))]E(\omega) \quad (6)$$

$F(\omega)$ et $E(\omega)$ étant les transformées de Fourier de fonctions à valeurs réelles, elles doivent être hermitiennes ($F(-\omega)=F(\omega)^*$ et $E(-\omega)=E(\omega)^*$). La conjuguée de l'équation (6) vaut donc

$$F(-\omega) = [\operatorname{Re}(R(\theta_i)) - i \operatorname{Im}(R(\theta_i))]E(-\omega) \quad (6.1)$$

En réunissant les équations (6) et (6.1), qui relie $E(\omega)$ et $F(\omega)$ pour les fréquences positives et négatives respectivement, on obtient

$$F(\omega) = [\operatorname{Re}(R(\theta_i)) + i \operatorname{sign}(\omega) \operatorname{Im}(R(\theta_i))]E(\omega). \quad (6.2)$$

Cette équation est valable aussi bien pour les fréquences positives que pour les fréquences négatives.

La transformée de Fourier inverse de l'équation (6.2) nous amène directement à l'équation (7) [Coulon84]

$$f(t) = \operatorname{Re}(R(\theta_i))e(t) + \operatorname{Im}(R(\theta_i)) TH[e(t)] \quad (7)$$

Conclusions générales

Cette thèse s'inscrit dans la continuité du travail réalisé au laboratoire Ondes et Acoustique sur la focalisation adaptative à travers des milieux aberrateurs et son application à l'échographie du cerveau. Dans la thèse de Christian Dorme (1995), il était déjà question d'imagerie transcrânienne, en utilisant le retournement temporel intrusif. Mickaël Tanter (1999) fit un bond en avant en introduisant la focalisation par filtre inverse, plus adapté à une application d'imagerie car capable d'optimiser le contraste de l'image. Jean-François Aubry (2002) continua dans cette direction et obtint les premières images d'objets à travers le crâne par filtre inverse intrusif.

Au cours de cette thèse nous avons développé des versions non intrusives du retournement temporel et du filtre inverse, spécialement adaptées à l'échographie du cerveau. Le principe général est d'effectuer d'abord une sorte de tomographie acoustique de l'os du crâne pour en déduire ses propriétés acoustiques, puis d'utiliser ces propriétés acoustiques pour calculer les fronts d'ondes focalisants. Nous avons constaté durant la thèse que le filtre inverse, qui est une technique délicate à cause de l'inversion du propagateur, devient encore plus délicate lorsque l'on passe au « non intrusif » (inversion d'un propagateur deviné, dont les erreurs sont susceptibles d'être amplifiées à l'inversion). Les résultats obtenus sont cependant très encourageants: la qualité des images obtenues reste inférieure à celle des échographies de référence (échographie standard à travers un milieu homogène) et des échographies adaptatives intrusives, mais est toujours meilleure que celle des échographies standard (non adaptatives) à travers le crâne. Après deux ans de développement, l'arrivée d'une nouvelle génération d'électronique plus puissante et plus linéaire dédiée à l'échographie du cerveau devrait nous permettre de sonder tout le potentiel du filtre inverse non intrusif développé dans cette thèse.

Le retournement temporel possède a priori un potentiel moins important pour l'imagerie, mais du fait de sa robustesse donne parfois d'aussi bons résultats que le filtre inverse lorsqu'il s'agit de focalisation non intrusive. Des applications médicales variées basées sur le retournement temporel non intrusif ou sur le filtre inverse non intrusif sont maintenant envisageables pour le cerveau.

Par exemple, focaliser des ultrasons de haute intensité dans le cerveau dans le but de nécroser des tissus cancéreux peut se faire par retournement temporel non intrusif ; on disposerait alors d'une méthode « tout ultrasons » plus simple à mettre en œuvre que celle actuellement utilisée du guidage d'ultrasons à partir d'images rayons X de la paroi crânienne. Des expériences préliminaires ont été menées dans cette direction et ont donné des résultats encourageants. Une autre application serait d'adapter la technique d'élastographie transitoire ultrasonore à la détection de tumeurs dans le cerveau. Pour cette application, il est en effet nécessaire de focaliser des ultrasons à relativement forte puissance dans le milieu à imager, puis de sonder le milieu avec des ondes planes : l'obtention à

travers le crâne d'une bonne tache focale et d'ondes raisonnablement planes peut se faire de façon non intrusive.

La problématique de la thèse, « comment trouver les signaux déformés à émettre pour que, après déformation par un milieu aberrateur, ils forment un front d'onde cylindrique focalisant, *sans* utiliser de capteurs acoustiques dans la zone focale capables de mesurer l'influence du milieu aberrateur sur une onde *transmise* à travers ce milieu », nous a amenés à aborder quelques aspects fondamentaux de la focalisation adaptative. En particulier, on s'est demandé comment, à partir de l'analyse des signaux réfléchis par le milieu aberrateur (qu'on est capable de mesurer), on peut déduire de l'information sur la transmission d'ondes à travers ce milieu. Les signaux réfléchis et transmis étant reliés par les équations de Stokes, nous avons montré comment le filtre inverse en transmission seule est capable de donner lieu à une focalisation de qualité équivalente au retournement temporel en transmission accompagné du retournement temporel en réflexion. Le lien ainsi mis en évidence entre retournement temporel et filtre inverse nous a suggéré deux méthodes d'inversion matricielle par l'utilisation de suites.

D'autre part, nous avons montré comment, à partir de l'information sur les signaux réfléchis et d'un minimum d'information sur les signaux transmis, on est capable de focaliser par filtre inverse en transmission. Les résultats de simulations sont très positifs, et laissent entrevoir des applications potentielles dans le domaine des télécommunications : comment envoyer de manière très sélective à un utilisateur de l'information à travers un milieu aberrateur, connaissant les fonctions de Green entre l'utilisateur et un réseau d'antennes émettrices ? On connaissait déjà le retournement temporel, nous présentons ici une manière de le faire par filtre inverse. Le filtre inverse, en ciblant mieux l'information sur l'utilisateur désiré, diminue les parasites reçus par d'éventuels utilisateurs voisins.

Enfin, le dynamisme des stagiaires accueillis durant la thèse a permis d'aborder d'autres aspects du retournement temporel, du filtre inverse, de la focalisation adaptative. Notamment nous avons trouvé pertinent de présenter dans ce manuscrit les résultats obtenus par retournement temporel à l'angle de Rayleigh à une interface liquide-solide. Une manière de plus de mettre en évidence le fait que le retournement temporel compense toutes les aberrations de phase, mais aussi peut-être le point de départ d'une méthode précise de mesure de vitesses du son dans un solide par l'analyse des signaux réfléchis.

Résumé

Les échographies de cerveau chez l'adulte sont aujourd'hui de pauvre qualité à cause de l'os du crâne qui absorbe et défocalise fortement les ultrasons.

Il est possible de focaliser des ultrasons à travers le crâne en émettant un front d'onde déformé qui, après passage de l'os du crâne, reforme un front d'ondes focalisant. Le calcul des déformations à appliquer au front d'ondes émis se fait par retournement temporel ou par filtre inverse, deux techniques basées sur la mesure et le traitement de fonctions de Green entre les transducteurs de la barrette d'imagerie et les points focaux désirés. Il est nécessaire de disposer des transducteurs ultrasonores au cœur du milieu à imager pour mesurer ces fonctions de Green, ce qui interdit l'application directe de ces techniques pour l'imagerie médicale.

Nous montrons ici comment modifier ces techniques de focalisation pour les rendre non intrusives : filtre inverse et retournement temporel non intrusifs améliorent la qualité d'échographies transcrâniennes.

La problématique de la thèse : « comment focaliser de manière adaptative à travers un milieu aberrateur sans placer de transducteurs ultrasonores dans le milieu à imager ? », nous a conduit à nous demander « comment avoir accès aux déformations de l'onde transmise à partir de l'analyse de signaux réfléchis par l'aberrateur (mesurables de manière non intrusive)? »

Nous avons mis en évidence le lien qui existe entre filtre inverse et cavité à retournement temporel, *via* les équations de Stokes. D'autre part, nous avons posé les bases d'une manière de rendre le filtre inverse minimalement intrusif, ouvrant des perspectives intéressantes dans le domaine des télécommunications.

Discipline : Interfaces Physique-Biologie

Mots-clés : Echographie, crâne, focalisation adaptative, retournement temporel, filtre inverse.

Abstract

Transcranial ultrasound images exhibit a low quality, because of the aberrating effects of the skull bone.

It has been shown that using time reversal or inverse filtering it is possible to obtain a good focusing through the skull. The strategy is to emit a distorted wave front that, after further distortion by the skull, restores a good focusing. The calculation of the corrections to apply to the emitted wavefront is based on the measurement of the Green's functions between the transducers of the echographic array and the desired focal points. It is thus necessary to embed a set of transducers in the medium under investigation in order to measure the Green's functions. This is prohibitive for direct applications of these techniques to medical imaging.

We show here how to modify the existing adaptive focusing techniques in a non invasive way: non invasive time reversal and inverse filter allow us to obtain transcranial images of better quality.

Moreover, the problem we had to solve here: « how to adaptively focus ultrasounds through an aberrating medium without using transducers embedded in the medium » induced us to wonder « how can we guess the effect of the propagating medium on transmitted waves, from information carried by the reflected waves (that can be measured non invasively) ? »

This allowed us to highlight the link that exists between time reversal and inverse filter, via the Stokes equations. We also drew the basis of a new technique to obtain a minimally invasive inverse filter, opening interesting perspectives in telecommunications.

Keywords : Ultrasound imaging, skull, adaptive focusing, time reversal, inverse filter.