



**HAL**  
open science

# Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation

Denis Arzelier

► **To cite this version:**

Denis Arzelier. Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation. Mathématiques [math].  
Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. tel-00010257

**HAL Id: tel-00010257**

**<https://theses.hal.science/tel-00010257>**

Submitted on 23 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Habilitation à diriger des recherches

Théorie de Lyapunov, commande robuste et  
optimisation

Denis Arzelier



Il y a surtout les vers qui arrivent pour continuer la partie, hein? Ils arrivent d'abord par le coin des yeux. Et, au nombre des voix dans l'orchestre, il est possible de savoir depuis combien de temps déjà quelqu'un est mort car, dès la première seconde de la mort, le premier ver arrive en frétilant au coin de l'oeil. Mais ce que l'on a du mal à voir, c'est s'il s'agit du droit ou du gauche. Et c'est justement le problème des médecins légistes, ils se disputent encore aujourd'hui pour savoir si le premier ver saute vraiment au coin de l'oeil droit ou au coin de l'oeil gauche. Alors, il y a des colloques, c'est très à la mode de nos jours, on les appelle les «colloques du coin de l'oeil».

Thomas Bernhard



# Remerciements

## La séance de sac

*Je crache sur ma vie. Je m'en désolidarise.  
Qui ne fait mieux que sa vie?*

Cela commença quand j'étais enfant. Il y avait un grand adulte encombrant.

Comment me venger de lui? Je le mis dans un sac. Là je pouvais le battre à mon aise. Il criait, mais je ne l'écoutais pas. Il n'était pas intéressant.

Cette habitude de mon enfance, je l'ai sagement gardée. Les possibilités d'intervention qu'on acquiert en devenant adulte, outre qu'elles ne vont pas loin, je m'en méfiais.

A qui est au lit, on n'offre pas une chaise.

Cette habitude, dis-je, je l'ai justement gardée, et jusqu'aujourd'hui gardée secrète. C'était plus sûr.

Son inconvénient - car il y en a un - c'est que grâce à elle, je supporte trop facilement les gens impossibles.

Je sais que je les attends au sac. Voilà qui donne une merveilleuse patience.

Je laisse exprès durer des situations ridicules et s'attarder mes empêcheurs de vivre.

La joie que j'aurais à les mettre à la porte *en réalité* est retenue au moment de l'action par les délices incomparablement plus grandes de les tenir prochainement dans le sac. Dans le sac où je les roue de coups impunément et avec une fougue à lasser dix hommes robustes se relayant méthodiquement.

Sans ce petit art à moi, comment aurais-je passé ma vie décourageante, pauvre souvent, toujours dans le coude des autres?

Comment aurais-je pu la continuer des dizaines d'années à travers tant de déboires, sous tant de maîtres, proches ou lointains, sous deux guerres, deux longues occupations par un peuple en armes qui croit aux quilles abattues, sous d'autres innombrables ennemis.

Mais l'habitude libératrice me sauva. De justesse il est vrai, et je résistai au désespoir qui semblait devoir ne me laisser rien. Des médiocres, des raseuses, une brute dont j'eusse pu me défaire cent fois, je me les gardais pour la séance de sac.

Henri Michaux



# Notations

- $\mathbb{N}$ : ensemble des nombres naturels
- $\mathbb{R}$ : corps des nombres réels
- $\mathbb{C}$ : corps des nombres complexes
- $\mathbb{C}^+$ : demi-plan complexe droit
- $\mathbb{C}^-$ : demi-plan complexe gauche
- $\mathbb{C}^0$ : axe imaginaire
- $\mathbb{R}^{n \times m}$ : espace vectoriel de Hilbert des matrices réelles de dimension  $n \times m$
- $\mathbb{C}^{n \times m}$ : espace vectoriel de Hilbert des matrices complexes de dimension  $n \times m$
- $u' (A')$ : vecteur transposée du vecteur  $u$ , (matrice transposée de la matrice  $A$ )
- $z^* (A^*)$ : complexe conjugué de  $z$  (matrice complexe conjuguée transposée de  $A$ )
- $\langle u, v \rangle = u'v$ : produit scalaire usuel défini sur  $\mathbb{R}^n$
- $\langle u, v \rangle = u^*v$ : produit scalaire usuel défini sur  $\mathbb{C}^n$
- $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A'B)$ : produit scalaire défini sur  $\mathbb{R}^{m \times n}$
- $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^*B)$ : produit scalaire défini sur  $\mathbb{C}^{m \times n}$
- $\|u\|$ : norme Euclidienne usuelle du vecteur  $u$
- $\mathbf{1}_n$ : matrice identité de dimension  $n$
- $\mathbf{0}_{n \times m}$ : matrice identité de dimension  $n \times m$
- $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ : anneau des polynômes à coefficients réels à  $n$  indéterminées
- $\mathcal{RH}_2$ : sous-espace de Hardy des matrices de transfert réelles rationnelles stables strictement propres
- $\|F\|_2$ : norme  $H_2$  de la matrice de transfert  $F$
- $\|F\|_\infty$ : norme  $H_\infty$  de la matrice de transfert  $F$



- $\mathcal{RH}_\infty$  : sous-espace de Hardy des matrices de transfert réelles rationnelles stables propres
- $\mathbb{S}_N$  : simplexe à  $N$  sommets
- $\mathcal{S}_n$  : sous-espace vectoriel des matrices symétriques de dimension  $n$
- $\mathcal{S}_n^+$  : cône convexe des matrices symétriques semidéfinies positives de dimension  $n$
- $\mathcal{S}_n^{++}$  : cône convexe des matrices symétriques définies positives de dimension  $n$
- $B(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$
- $\text{aff}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in D \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$
- $\text{relint}(D) = \{x \in D \mid B(x, r) \cap \text{aff}(D) \text{ pour } r > 0\}$
- $\succeq$  : ordre partiel de Löwner défini sur le cône  $\mathcal{S}_n^+$ .  $A \succeq B$  ( $A \succ B$ ) indique que la matrice  $A - B$  est semidéfinie positive (définie positive)
- $\text{arg}[\bullet]$  : solution du problème d'optimisation
- $A \oplus B$  : somme de Kronecker des matrices  $A$  et  $B$

# Introduction

Les récents développements en programmation semidéfinie positive (SDP) et en optimisation globale ont montré que les échanges entre les communautés de la théorie de la commande et de l'optimisation sont souvent à l'origine d'avancées significatives dans l'une ou l'autre des communautés [201]. Originellement défini en théorie de la commande robuste, le formalisme lié aux inégalités matricielles linéaires (LMI) a rapidement permis de développer le champ original de recherche en théorie de l'optimisation connu sous le terme de programmation semidéfinie positive. En retour, les nombreux progrès théoriques (théorie de la dualité, méthodes de barrière...) et numériques (méthodes de points intérieurs, optimisation non différentiable...) ont fourni un support rigoureux à la majeure partie des développements algorithmiques produits en théorie de la commande robuste. Pour tous les formalismes actuellement utilisés en analyse et synthèse robustes allant de la théorie du  $\mu$  (analyse et synthèse) au cadre de travail défini par les contraintes intégrales quadratiques, en passant par la théorie de la séparation des graphes, il est nécessaire de disposer d'une théorie de l'optimisation adéquate ainsi que des outils numériques efficaces associés. Malgré les très nombreux travaux sur le sujet et la grande maturité acquise par la théorie de la commande robuste, il apparaît clairement que, pour être pertinentes, les prochaines extensions devront nécessairement aller au delà de la frontière fixée par la convexité et traiter directement ou indirectement (approche numériques, relaxations) la non convexité intrinsèque des problématiques actuels.

Au delà des liens habituels unissant les deux communautés (utilisation des algorithmes et méthodes numériques à convergence garantie produits en amont pour la mise à disposition en contrepartie d'un champ d'applications pertinentes), il nous a semblé qu'une relation plus subtile les liait. Outre le fait que les notions de performance et de robustesse conduisent naturellement à celle d'optimisation, les recherches entreprises et les résultats obtenus en théorie de la commande montrent souvent une parenté étroite avec le corpus issu de la théorie de l'optimisation. Une formalisation possible de ce lien organique entre les deux champs scientifiques est constituée par la théorie de Lyapunov. Principalement utilisée comme un outil puissant dans la littérature scientifique anglo-saxonne, celle-ci a été remise en perspective avec l'ouverture plus large de la communauté soviétique dont elle émanait [71].

Le premier chapitre de ce document s'attache donc à illustrer les différents aspects que peut recouvrir la relation entre optimisation et théorie de la commande robuste. L'accent est particulièrement placé sur la théorie de Lyapunov, même si celle-ci n'en épuise pas toutes les facettes. Ainsi, après avoir présenté le contexte général de l'analyse et de la synthèse robustes et les problèmes d'optimisation particuliers qui leur sont liés, nous montrons comment de nombreux résultats obtenus dans le cadre de la théorie de Lyapunov peuvent être interprétés en terme de relaxations. Ce chapitre se conclut sur

quelques exemples d'approches numériques directes des problèmes d'optimisation non convexes rencontrés en commande robuste.

Les deux chapitres suivants sont plus spécifiquement consacrés à des exemples illustratifs de problèmes ouverts en théorie de la commande pour lesquels la théorie de Lyapunov a été un outil particulièrement intéressant pour définir des «approches par l'optimisation». Nous avons ainsi retenu deux problèmes d'analyse robuste et deux problèmes de synthèse.

Enfin, un certain nombre d'enjeux actuels liés à l'application des méthodes et résultats de l'optimisation en théorie de la commande sont proposés en conclusion.

A dessein, le document n'a pas été conçu comme un catalogue de mes contributions sur le sujet. Celles-ci apparaissent en filigrane par le jeu des références croisées. L'exercice consistant à embrasser une thématique et à en dégager les lignes de force ainsi que les apports majeurs m'a paru plus significatif que celui, un peu vain, d'autopromotion consistant à exagérer sa propre contribution dans un champ scientifique donné. Le lecteur absolument désireux de connaître celle-ci peut également consulter la référence [12] qui est très régulièrement mise à jour.

# Chapitre 1

## Optimisation et commande robuste

### 1.1 Introduction

Le paradigme central en théorie de la commande robuste repose sur la structure de commande à contre-réaction et sur les modèles linéaires temps invariant (LTI) des systèmes dynamiques. Le principe de la commande à contre-réaction (feedback control systems) est au coeur des théories classiques et modernes de la commande et définit une structure de commande très générale fondée sur la comparaison entre l'information supportée par un ensemble de signaux de sorties  $y$  mesurés par des capteurs et l'information supportée par un ensemble de signaux de référence souhaités. Les différences constatées lors de cette comparaison sont traitées par le système de commande afin d'élaborer un signal de commande  $u$  affectant le système. J.C. Doyle a proposé une formulation générale en 1983 et unifiée (représentée à la figure 1.1) des différents problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes de commande à contre-réaction [66].

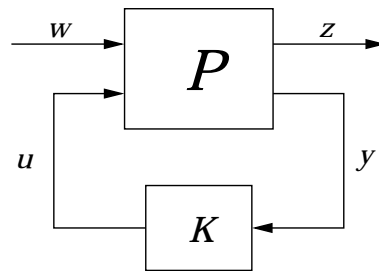


FIG. 1.1 – La forme standard de commande

$P$  est appelé le **modèle généralisé** et  $K$  est le **correcteur généralisé**.  $P$  modélise les interactions dynamiques entre les deux ensembles de signaux d'entrée  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et les deux ensembles de signaux de sortie  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $y \in \mathbb{R}^r$ .  $u$  est le vecteur des commandes délivrées par le correcteur généralisé.  $w$  est le vecteur des signaux exogènes d'entrée (signaux exogènes d'entrée pour le modèle généralisé autres que ceux dans  $u$ ).  $y$  est le vecteur des signaux de sortie accessibles à la mesure et donc disponibles pour élaborer la commande. Enfin,  $z$  est le vecteur des signaux régulés de sortie. Ils caractérisent le bon fonctionnement de la structure commandée. Le schéma standard prend toute son importance dans un cadre de travail linéariste où les interconnexions entre les signaux d'entrée et de sortie mises en oeuvre par le modèle et le correcteur généralisés sont supposées

linéaires.

### Hypothèses 1.1.1

- Le modèle généralisé  $P$  est un modèle linéaire invariant dans le temps et en dimension finie (LTI).
- Le correcteur généralisé  $K$  est un modèle linéaire invariant dans le temps et en dimension finie (LTI).

Ces hypothèses sont évidemment restrictives mais elles sont souvent faites en pratique. En effet, de nombreux systèmes non linéaires (tous les systèmes réels le sont en pratique) peuvent être correctement approximatés par des modèles linéaires. De plus, les modèles LTI sont des objets mathématiques bien caractérisés, simples à manipuler et pour l'étude desquels de nombreux outils mathématiques puissants sont disponibles. Cette simplicité n'est toutefois pas sans conséquences sur la précision relative de ce modèle et sur sa représentativité du système physique réel. Il est donc judicieux d'adjoindre au modèle LTI un modèle mathématique de l'incertitude représentant l'écart entre la réalité physique et le modèle mathématique simplifié définissant ainsi une problématique nouvelle en Automatique.

## 1.2 Modélisation incertaine

Le fait que le modèle LTI soit incertain est généralement formalisé par la dépendance du modèle vis-à-vis d'un opérateur d'incertitude  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  qui vient compléter le schéma standard précédent pour donner le schéma standard de la figure 1.2.

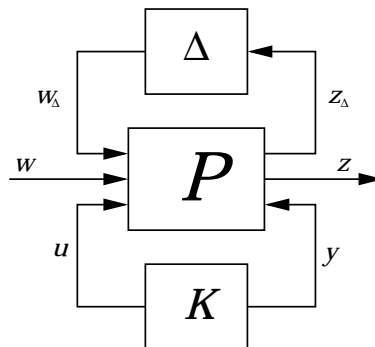


FIG. 1.2 – Le schéma standard avec incertitude

### Problème 1.2.1 (modélisation incertaine)

Choisir les sous-ensembles de signaux entrée-sortie, déterminer les lois mathématiques régissant la causalité entrée-sortie et la représentation mathématique de l'incertitude de modélisation.

Le schéma 1.2 représente une structure particulière du modèle d'incertitude où un opérateur d'incertitude  $\Delta$  opère par bouclage sur un modèle nominal défini par  $P(s)$ . La nature de ce bouclage caractérise la complexité du modèle incertain complet. Travaillant désormais sous les hypothèses linéaristes (1.1.1), le schéma-bloc 1.2 se traduit par les

relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta \quad \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

$$u = Ky$$

Les objets systèmes  $P$  et  $K$  sont alors représentés par des matrices de transfert  $P(s)$  et  $K(s)$ .  $P(s)$  peut être partitionnée en sous-blocs conformément à la taille des différents vecteurs d'entrée et de sortie.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{z_\Delta w_\Delta}(s) & P_{z_\Delta w}(s) & P_{z_\Delta u}(s) \\ P_{zw_\Delta}(s) & P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw_\Delta}(s) & P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

En opérant les bouclages supérieurs et inférieurs de  $\Delta$  et  $K$  sur  $P$ , le transfert incertain en boucle fermée est ainsi obtenu. Par exemple, si le bouclage de l'opérateur d'incertitude  $\Delta$  sur  $P$  est effectué en suivant la partition adéquate, les relations de bouclage deviennent :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(\Delta) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{z_\Delta w_\Delta} \\ P_{yw_\Delta} \end{bmatrix} \Delta [\mathbf{1} - P_{z_\Delta w_\Delta} \Delta]^{-1} \begin{bmatrix} P_{z_\Delta w} & P_{z_\Delta u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

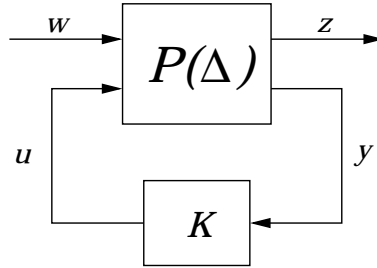


FIG. 1.3 – Le schéma standard incertain de synthèse

La forme (1.3) schématisée dans la figure 1.3 fait intervenir une transformation linéaire fractionnaire (LFT) sur la matrice  $\Delta$  qui permet de définir un cadre de travail très général défini comme le **paradigme LFT** [210]. Plus formellement, nous distinguerons deux LFT différentes correspondant aux deux bouclages possibles du schéma 1.2.

### Définition 1.2.1 (LFT [210])

Soient les matrices complexes :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)} \quad K \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \quad \Delta \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1} \quad (1.4)$$

- Si la matrice  $(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}$  existe alors la **LFT inférieure** est la fonction  $L_l$  définie par :

$$L_l(P, \bullet) : \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \rightarrow \mathbb{C}^{p_1 \times q_1} \quad (1.5)$$

$$L_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

- Si la matrice  $(\mathbf{1} - P_{11}\Delta)^{-1}$  existe alors la **LFT supérieure** est la fonction  $L_u$  définie par :

$$L_u(P, \bullet) : \mathbb{C}^{q_1 \times p_1} \rightarrow \mathbb{C}^{p_2 \times q_2} \quad (1.6)$$

$$L_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(\mathbf{1} - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}$$

La matrice  $P$  est appelée **la matrice coefficient**.

Le paradigme LFT a été très largement utilisé pour définir une représentation mathématique rigoureuse de l'incertitude affectant un modèle LTI. Cette formulation qui généralise la transformation bilinéaire scalaire a l'avantage d'être invariante pour les interconnexions linéaires et d'être associée à une algèbre de manipulation simple et puissante [210]. Même si la plupart des incertitudes considérées dans la littérature peuvent être abordées dans le cadre LFT, il est parfois nécessaire de définir des modèles d'incertitudes moins structurés. L'incertitude non structurée diffère de l'incertitude structurée par le fait que les éléments incertains du modèle sont implicitement supposés indépendants. En particulier, les modèles regroupés dans la famille des inclusions différentielles ne comportent que peu ou pas d'information sur la nature du «bouclage» du modèle d'incertitudes sur le modèle LTI  $P$ . Sans entrer dans le détail de la théorie très générale des inclusions différentielles présentée dans [14], nous rappelons l'interprétation usuelle de ces modèles en Automatique et leur définition particulière dans le cas polytopique. Reprenant le schéma 1.3, l'inclusion différentielle linéaire polytopique est définie par la famille de représentation d'état associée à  $P(\Delta)$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$M \in \mathcal{M} = \text{co} \{M^{[1]}, \dots, M^{[N]}\} = \left\{ M = \sum_{i=1}^N \xi_i M^{[i]} : \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (1.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système. Le modèle incertain est défini par des sommets et il n'y a pas à proprement parler de modèle nominal.

Un modèle paramétré incertain est généralement obtenu à partir de données expérimentales entrée-sortie et de connaissances physiques conduisant à la définition de différentes problématiques intégrées : identification robuste, caractérisation des ensembles d'appartenance des paramètres cohérents avec les données et la structure du modèle, validation de modèle, modélisation LFT systématique et obtention de réalisation minimale, réduction de modèles incertains LFT... Ces aspects ne seront pas abordés en détail dans la suite de ce document mais il est intéressant de souligner la part prépondérante occupée par l'optimisation dans cette phase préliminaire [29], [30], [105], [198], [95], [96].

### 1.3 Analyse et synthèse robustes

Le modèle incertain et sa structure étant fixés, l'objectif principal de la structure de commande est d'assurer la stabilité de la boucle fermée ainsi qu'un certain degré

de performance pour l'ensemble des réalisations possibles du modèle incertain. Il s'agit donc de réduire la sensibilité de la structure de commande en présence des variations paramétriques et d'éventuelles perturbations affectant le modèle du système à commander.

**Problème 1.3.1 (synthèse robuste)**

Déterminer un correcteur généralisé  $K$  conférant au système représenté par la structure de la figure 1.2 les propriétés de stabilité et de performance robustes souhaitées.

La notion de performance pour un système dynamique est une notion extrêmement versatile qui recouvre de très nombreuses caractérisations différentes dans la littérature. Cette pluralité s'explique fondamentalement par le développement historique des méthodes modernes de commande. Ainsi, la séparation entre domaines fréquentiel et temporel a conduit à des développements séparés et complémentaires des méthodes de commande associées jusque dans les années 80. La notion de robustesse intrinsèquement contenue dans toutes les approches fréquentielles (contre-réaction, marges de stabilité...) n'est plus centrale dans le cadre imposé par l'espace d'état. L'avènement du formalisme d'état et des problématiques liées à la commande optimale a ainsi occulté l'impératif de robustesse au profit de l'optimisation de la performance définie par un critère agrégé. Ce n'est qu'au tournant des années 80 avec les interrogations concernant les propriétés de robustesse du régulateur LQG (paradigme moderne de la commande optimale en boucle fermée) [65], que les bases du cadre de travail  $H_\infty$  ont été posées. Face aux insuffisances de la théorie de Wiener-Hopf-Kalman, la nécessité d'une théorie de la commande optimale incluant *a priori* les questions relatives aux incertitudes de modélisation et à celles liées aux perturbations externes s'est fait rapidement sentir. Institué au rang de paradigme central de la commande robuste moderne, le problème de commande  $H_\infty$  devait fournir le cadre de la réconciliation entre performance optimale et propriétés de robustesse [208]. En rendant de nouveau centrale la notion d'incertitude décrite dans le domaine fréquentiel, Zames a alors introduit la norme  $H_\infty$  qui sert d'outil fondamental pour la spécification de l'amplitude d'incertitude acceptée et conjointement pour la spécification du niveau de performance entrée-sortie.

**Problème 1.3.2 (synthèse  $H_\infty$ )**

Etant donné un modèle généralisé  $P$ , déterminer un correcteur généralisé  $K$  stabilisant de manière interne l'interconnexion définie par le schéma standard 1.1 qui minimise la norme  $H_\infty$  du transfert en boucle fermée entre  $z$  et  $w$ .

Si l'ensemble des correcteurs stabilisant de manière interne  $P$  est noté  $\mathcal{K}$  et si  $T_{zw}$  est la fonction de transfert en boucle fermée entre  $z$  et  $w$  alors cela revient à résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|T_{zw}(K)\|_\infty \quad (1.9)$$

Si une solution du problème (1.9) permet d'obtenir un optimum tel que  $\|T_{zw}(K)\|_\infty \leq \gamma$  alors l'interconnexion 1.2 sera stable de manière interne pour tout opérateur d'incertitude  $\Delta$  stable et tel que  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$  conférant ainsi un certain degré de robustesse au système. Pour autant, on sait depuis lors que la commande  $H_\infty$  n'apporte pas une solution définitive à cette difficile problématique, en particulier quand l'incertitude est modélisée de manière paramétrique. Malgré ses limitations, la problématique  $H_\infty$  a doublement contribué au développement de la théorie de la commande robuste en tant que champ autonome de recherches. La définition du problème standard directement lié au cadre  $H_\infty$



a permis l'unification d'approches relativement décorréées (méthodes fréquentielles classiques, théorie de Wiener-Hopf-Kalman) et la constitution d'une nouvelle problématique complémentaire de la problématique de synthèse.

**Problème 1.3.3 (analyse robuste)**

Déterminer si la structure 1.4 dotée d'un correcteur généralisé donné et calculé par une méthode de synthèse quelconque possède les propriétés de stabilité et de performance robustes souhaitées.

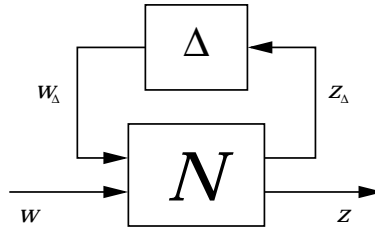


FIG. 1.4 – Le schéma standard bouclé avec incertitude

Dans ce schéma, le modèle bouclé  $N$  n'est rien d'autre que la LFT inférieure de  $K$  opérant sur  $P$ .

$$N = \begin{bmatrix} P_{z\Delta w\Delta} & P_{z\Delta w} \\ P_{zw\Delta} & P_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{z\Delta w} \\ P_{zu} \end{bmatrix} K [\mathbf{1} - P_{yu}K]^{-1} \begin{bmatrix} P_{yw\Delta} & P_{yw} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Historiquement, les méthodes permettant d'aborder les problèmes de synthèse et d'analyse des systèmes de commande élaborés dans ce cadre ont en premier lieu fait appel aux champs mathématiques traditionnels : théorie des fonctions analytiques et de l'interpolation analytique de Nevanlinna-Pick-Schur, théorie des opérateurs [208], [209], [18]. Cela s'explique par le simple fait que la contrainte de stabilité interne apparaissant dans les problèmes de minimisation du type (1.9) se reformule à l'aide de contraintes d'interpolation pour lesquelles l'algorithme de Nevanlinna-Schur fournit une solution. Devant les difficultés rencontrées pour les étendre au cas multivariable, les premières méthodes dans l'espace d'état, fondées sur les factorisations coprimales et spectrales ont permis de reformuler le problème initial comme un problème de distance de Nehari/Hankel [88], [79] dont la solution est obtenue par résolution d'équations de Riccati.

Parallèlement, la théorie de Lyapunov est utilisée afin d'aborder les problèmes d'analyse et de synthèse robustes en stabilité dans un contexte purement temporel défini par le formalisme d'état [21], [37], [83]. Ces dernières références reformulent explicitement un problème de synthèse robuste par retour d'état comme un problème d'optimisation convexe dans un espace de paramètres de synthèse particulier. Si le terme de LMI (Linear Matrix Inequality), bien qu'ayant émergé sans succès initialement dans l'article fondateur de Willems [200], n'est pas encore présent, les conditions d'analyse et de synthèse sont effectivement des LMI dont la solution est obtenue par la méthode des plans sécants. L'optimisation convexe et la méthode des plans sécants sont indépendamment mises à l'honneur dans le livre [46] où la paramétrisation de Youla-Kučera sert de support à la synthèse de correcteurs multi-objectifs. Il est à noter que ces approches sont restées relativement confidentielles tant fut important le développement de la commande  $H_\infty$ , trouvant son apothéose dans le fameux papier DGKF [67].

Les liens établis entre stabilité quadratique et problème  $H_\infty$  [117], [156] ainsi que le développement des méthodes de points intérieurs pour la programmation semidéfinie positive [151] ont sensiblement modifié ce contexte. Portée par la publicité engendrée par le livre [47], la thématique que l'on pourrait rapidement identifier par «Des LMI en commande robuste» a rapidement atteint le statut officiel de théorie dogmatique officielle. La solution LMI du problème de commande  $H_\infty$  [80] et les très nombreuses contributions résumées dans les deux ouvrages [47] et [71] en apportent un témoignage suffisamment concret. Même si cet engouement a paru parfois excessif au regard de la masse de résultats produits (dont certains qualifiés parfois d'incrémentaux), un certain nombre d'arguments plus ou moins profonds peuvent l'expliquer.

En premier lieu, la formulation des problèmes d'analyse et de synthèse robustes modernes induisent nécessairement l'expression de nombreuses spécifications antagonistes impliquant des compromis et posant le problème fondamental de l'existence de lois de commande satisfaisant ces exigences. Même si les méthodes classiques ont montré leur capacité à gérer des objectifs conflictuels, cette capacité ne va pas au delà d'un degré de complexité relativement faible (peu de paramètres). De plus, de par leur nature même, ces approches ne peuvent répondre à la question de l'existence. Les problèmes pré-cités ne trouvent qu'à de rares exceptions des solutions analytiques littérales complètes. Par solution analytique littérale, on entend une formulation explicite du correcteur en fonction des données du modèle incertain et/ou des conditions d'existence impliquant une résolution exacte (solution d'équations de Riccati par exemple). Par conséquent et de manière très naturelle, les progrès dans la définition des performances accessibles et dans la résolution des questions d'existence impliquent nécessairement la mise en oeuvre de processus d'optimisation. La pente naturelle est donc de reformuler les problèmes d'analyse et de synthèse robustes comme des problèmes d'optimisation et d'y associer des méthodes numériques de résolution nous assurant de résoudre ainsi la question de l'existence et le problème de la construction de la loi de commande. La différence entre résultats forts et résultats faibles se manifeste alors au travers du caractère unique et global des solutions et au travers de la complexité calculatoire (temps polynomial ou exponentiel) des algorithmes de résolution associés. La théorie de l'optimisation permet de répondre simplement et synthétiquement à ces questions par **la convexité** ou non convexité des problèmes d'optimisation associés. Dans l'état actuel des développements en optimisation, la convexité constitue la frontière séparant les problèmes faciles des problèmes difficiles. Les problèmes reformulables en termes de conditions LMI résolus par des méthodes de points intérieurs sont donc rapidement tombés dans la première catégorie.

Une autre raison plus subtile et donc peut être plus profonde doit être recherchée dans la nature même des outils techniques usuellement utilisés par les automaticiens pour l'étude des problèmes de commande robuste. Il est frappant de constater comment de nombreux résultats obtenus dans la communauté reposent sur l'idée sous-jacente de **relaxation** si familière dans le champ thématique de l'optimisation. Ainsi de nombreux résultats instrumentaux sont habituellement utilisés et considérés du seul point de vue algébrique par les automaticiens alors qu'ils sont issus originalement d'une problématique variationnelle (S-procédure, lemme de Finsler, lemme d'élimination) et ne sont que des reformulations particulières de résultats liés à la relaxation lagrangienne. De même, la théorie de Lyapunov si largement utilisée en synthèse et analyse robustes des modèles LTI peut être réinterprétée à la lumière de l'optimisation et des multiplicateurs de Lagrange. Ce rapprochement ne doit pas étonner puisqu'en définitive, J.L. Lagrange a introduit

les multiplicateurs du même nom afin d'étudier les problèmes d'équilibre sous contraintes permettant ainsi d'aborder les problèmes de maxima et de minima du calcul des variations comme des problèmes de statique.

Les motivations pour rapprocher théorie de l'optimisation et commande robuste sont donc multiples et de niveaux différents. Dans la suite de ce chapitre, nous entrons plus précisément dans le détail des problèmes d'optimisation types que l'on est amené à rencontrer en analyse et synthèse robustes.

## 1.4 Les problèmes d'optimisation en commande robuste

### 1.4.1 La programmation semidéfinie positive

Comme nous venons de le voir, la théorie de l'optimisation est au coeur des développements actuels et futurs en théorie de la commande robuste. Il est toutefois remarquable de constater qu'il est possible de présenter l'ensemble de ces problèmes dans un cadre unifié. L'ossature de ce cadre est formé par la généralisation de la programmation linéaire au cône des matrices semidéfinies positives. Pour cela, il est nécessaire de définir la notion d'inégalités généralisées [33], [49]. Celles-ci sont définies à partir des ordres partiels induits par les cônes convexes pointés et non vides  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{R}^m$ . Ainsi,

$$y \succeq_{\mathcal{K}} x \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{K} \quad (1.11)$$

Si le cône  $\mathcal{K}$  est fermé et a un intérieur non vide alors l'ordre partiel  $\preceq_{\mathcal{K}}$  définit **une inégalité généralisée** [49].  $\prec_{\mathcal{K}}$  définit alors **une inégalité généralisée stricte**. Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement à l'ensemble des matrices symétriques semidéfinies positives de dimension  $n$  et noté  $\mathcal{S}_n^+$ .

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X \succeq 0\} \quad (1.12)$$

$\mathcal{S}_n^+$  est un cône convexe pointé fermé non vide dont l'intérieur est l'ensemble des matrices symétriques définies positives :

$$\mathcal{S}_n^{++} = \text{int}(\mathcal{S}_n^+) = \{X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X \succ 0\} \quad (1.13)$$

L'ordre partiel  $\succeq_{\mathcal{S}_n^+}$  définit donc une inégalité généralisée qui sera notée plus simplement  $\succeq$  par la suite. En munissant  $\mathcal{S}_n$  l'espace des matrices symétriques de dimension  $n$  du produit scalaire de Frobenius :

$$\langle X, Y \rangle = \text{Trace}(XY) \quad X, Y \in \mathcal{S}_n \quad (1.14)$$

il est possible de montrer que le cône  $\mathcal{S}_n^+$  est auto-adjoint :

$$\mathcal{S}_n^+ = \mathcal{S}_n^{+*} = \{Y \in \mathcal{S}_n \mid \text{Trace}(YX) \geq 0 \quad \forall X \in \mathcal{S}_n^+\} \quad (1.15)$$

Un type particulièrement important d'inégalités généralisées définies sur le cône  $\mathcal{S}_n^+$  est celui des inégalités matricielles linéaires dont on a déjà souligné l'importance en théorie

de la commande. Elles permettent de poser un problème d'optimisation générique bien connu de la communauté automatique.

**Définition 1.4.1 (problème LMI)**

Le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i=1}^m c_i x_i = c'x \\ \text{sous} \quad & F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i \succ \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.16}$$

où les matrices  $F_i \in \mathcal{S}_n$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  est appelé **problème de programmation semidéfinie positive (SDP)** ou problème d'**optimisation LMI**.

L'ensemble réalisable défini par les contraintes de positivité est un ensemble semi-algébrique [159] appelé **spectraèdre**.

La dénomination SDP est préférentiellement en usage dans la communauté des mathématiciens alors que la communauté de la commande se réfère plus volontiers au terme de **problème LMI**. De nombreuses raisons expliquent le développement exponentiel des études plus ou moins directement liées au problème (1.16).

Un des intérêts majeurs de ce type de problèmes d'optimisation est qu'il entre dans la classe des problèmes d'optimisation pour lesquels des algorithmes en temps polynomial peuvent être appliqués. Au moins théoriquement, la taille (nombre de variables, nombres de contraintes) n'est donc pas un facteur discriminant. La généralisation des méthodes de point intérieur aux problèmes d'optimisation non linéaires convexes dont (1.16) est une sous-classe dans [151] a ouvert la voie pour le développement d'algorithmes et de solveurs (SeDuMi, LMILab, SDPT3, SDPA, CSDP, DSDP... [10]) associés permettant en pratique d'aborder les problèmes de taille moyenne (jusqu'à 5000 variables et autant de contraintes).

Un autre avantage réside dans la capacité de (1.16) à modéliser des problèmes pratiques très variés aussi bien en théorie de la commande [47], [201], [33] qu'en statistiques, finances ou conception de structures [201], [33]. Ceci est lié en partie à la flexibilité de (1.16) qui permet d'ajouter diverses contraintes sur les variables de décision sans altérer le degré de difficulté si l'on préserve le caractère LMI.

Une dernière raison plus subtile et moins facile à mettre en évidence est que la programmation SDP semble être un outil intrinsèquement adapté à la prise en compte de l'incertitude affectant les données d'un problème. Pour s'en convaincre, il suffit de constater le succès rencontré en théorie de la commande robuste mais aussi le développement de nouveaux champs d'application tels que la programmation quadratique robuste.

A titre d'exemple, nous rappelons la formulation LMI du problème de stabilisation par retour d'état d'un modèle LTI. Ce choix s'explique par sa simplicité illustrative et par le fait que ce fut un des premiers problèmes LMI utilisé en tant que tel avec la résolution du problème de Lur'e dans [171]. Il est à noter que ce problème de stabilisabilité par retour d'état peut aisément être envisagé dans le cadre du problème standard de la figure 1.1

pour lequel  $y = x$  et le correcteur est choisi dans la classe des correcteurs statiques.

**Théorème 1.4.1 ([37])**

Le modèle LTI d'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.17)$$

est stabilisable par un retour d'état

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.18)$$

si et seulement s'il existe  $X \in \mathcal{S}_n^{++}$  et  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  solutions de la LMI :

$$AX + XA' + BS + S'B' \prec \mathbf{0} \quad (1.19)$$

Ce résultat est essentiellement fondé sur l'utilisation de la théorie de Lyapunov pour les modèles LTI et sur un changement de variables linéarisant proposé initialement dans [37].

### 1.4.2 MPI + LMI = CR? ou NLP + BMI = TC?

Depuis les mutations introduites en théorie de la commande par le paradigme standard et par le formalisme LMI, la somme de nouveaux résultats en commande robuste ramenant le calcul de la solution à celui de la résolution d'un problème de programmation semidéfinie positive a pu laisser penser qu'il suffisait de trouver la bonne formulation LMI du problème initial pour ensuite le résoudre numériquement avec une méthode adéquate de point intérieur. Il a fallu rapidement en rabattre et plutôt constater que la plupart des problèmes difficiles de l'Automatique dite moderne conduisaient dans la majorité des cas à poser des problèmes d'optimisation globale possédant de multiples extrema locaux (l'hypothèse de convexité n'étant pas vérifiée) et pour la plupart des cas réalistes d'applications, de grande taille. Que ce soit pour le problème du retour de sortie statique (ou dynamique d'ordre faible), pour le problème de commande multi-objectif, pour la recherche de correcteurs PID optimaux ou pour l'analyse de robustesse paramétrique dans le cas général, la reformulation exacte aboutit à la définition de problèmes d'optimisation où interviennent des contraintes matricielles bilinéaires.

**Définition 1.4.2 (problème d'optimisation BMI)**

Le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i=1}^m c_i x_i = c'x \\ \text{sous} \quad & F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m G_{ij} x_i x_j \succ \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.20)$$

où  $F_0, F_i, G_{ij} \in \mathcal{S}_n$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  est appelé **problème d'optimisation BMI**.

Le problème (1.20) a l'avantage d'étendre simplement la formulation LMI afin de prendre en compte les problèmes de commande qui n'ont pas encore trouvé leur transcription LMI. Il offre également un cadre très général pour l'étude de ces problèmes. Il semble

que cette trop grande généralité soit également son plus gros inconvénient puisque l'on y perd toute information sur la structure du problème original. Rappelons par exemple que le problème de stabilisation par retour d'état peut très simplement se reformuler comme (1.20) alors qu'en exploitant sa structure, la formulation LMI (1.19) peut être plus efficacement utilisée. La difficulté théorique du problème (1.20) est connue par ailleurs.

### **Théorème 1.4.2 ([192])**

Le problème de déterminer un élément réalisable d'un ensemble de contraintes BMI est **un problème NP-difficile**.

Ce résultat ne doit pas occulter le fait que des algorithmes en temps exponentiel peuvent toutefois être utilisés pour des problèmes BMI de faible taille. Il peut être intéressant afin d'exploiter au mieux l'information structurelle contenue dans le problème initial, de formuler différemment mais de manière équivalente le problème (1.20). En effet, trois classes de problèmes d'optimisation non convexes peuvent être associées à (1.20) (cf. chapitre 14 de [71]).

### **Définition 1.4.3 ([71])**

Le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i=1}^m c_i x_i = c'x \\ \text{sous} \quad & F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i \succ \mathbf{0} \\ & \text{rang}(G_0 + \sum_{i=1}^m G_i x_i) \leq N \end{aligned} \tag{1.21}$$

où  $F_i, G_i \in \mathcal{S}_n$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  est appelé **problème LMI avec contrainte de rang**.

L'équivalence entre (1.20) et (1.21) est obtenue en introduisant une variable auxiliaire permettant de réécrire la contrainte BMI comme :

$$\begin{aligned} F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m G_{ij} z_{ij} \succ \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} Z & x \\ x' & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \\ \text{rang} \begin{bmatrix} Z & x \\ x' & 1 \end{bmatrix} = 1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

où  $Z = [z_{ij}]$  est la matrice composée des variables  $z_{ij}$  [71].

Il est à noter que la suppression de la condition de rang dans la formulation (1.22) conduit à la relaxation de rang très utilisée en optimisation combinatoire (problème du max-cut [201]). De nombreux problèmes de commande robuste (retour dynamique à ordre fixé, synthèse robuste paramétrique) se formulent naturellement comme des problèmes LMI sous contraintes de rang [100]. Comme il est montré dans cette dernière référence et

dans le chapitre 14 de [71], ces deux derniers problèmes peuvent se réécrire de manière équivalente comme un problème de maximisation convexe (ou minimisation concave) particulier défini sur une intersection d'ellipsoïdes centrés en 0. De même, la plupart des problèmes d'analyse et de synthèse robustes actuellement ouverts trouvent une formulation adéquate par le problème générique de minimisation concave [4], [6].

**Définition 1.4.4 ([71])**

Le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} & \min && f(x) \\ & \text{sous} && \\ & && F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i \succ \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $F_i \in \mathcal{S}_n$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  et  $f$  une fonction concave, est appelé **problème de minimisation concave**.

Dans [71], la formulation particulière de (1.23) équivalente au problème de réalisabilité BMI (1.20) est explicitement proposée.

**Théorème 1.4.3 ([71])**

Le problème de réalisabilité BMI a une solution ssi  $\eta^* > 2$  :

$$\max_{w_1, w_2 \in \mathcal{C}} \|w_1 - w_2\| \quad (1.24)$$

L'ensemble  $\mathcal{C}$  est un ensemble convexe défini par l'intersection d'ellipsoïdes centrés en 0.

$$\mathcal{C} = \{w \in \mathbb{R}^{2m \times 2m} : w'Q(z)w \leq 1 \quad z \in \mathbb{R}^n, \|z\| = 1\}$$

$$Q(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{\rho}H(z) \\ \frac{1}{\rho}H(z)' & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$H(z)_{ij} = z'F_{ij}z \quad H(z) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \rho > \max_{\|z\|=1} \sigma_{\max}(H(z))$$

Enfin, une dernière formulation très générale permet de mettre en oeuvre une généralisation de l'algorithme du gradient conditionnel de Franck et Wolfe sur le cône des matrices semidéfinies positives.

**Définition 1.4.5 ([71])**

Le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} & \min && \text{trace}(ZF) \\ & \text{sous} && \\ & && (F, Z) \in \mathcal{K}_F \times \mathcal{K}_Z \end{aligned} \quad (1.26)$$

où  $\mathcal{K}_*$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathcal{S}_n^{++}$ , est un **problème de complémentarité conique**.

En définissant les variables additionnelles :

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z'_2 & Z_3 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

et en ajoutant la contrainte  $Z_1 \succeq \mathbf{1}$ , nous retrouvons exactement le problème LMI sous contrainte de rang (1.21) avec

$$F = \begin{bmatrix} G_0 + \sum_{i=1}^m G_i x_i & M \\ M' & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad M \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad (1.28)$$

Cette formulation a également l'avantage de pouvoir traiter le cas rectangulaire ( $G_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ) et le cas de contraintes égalités non linéaires [6], [8] très générales du type :

$$W = US^{-1}V \quad (1.29)$$

Il suffit pour cela de définir la matrice  $F$  comme suit.

$$F = \left[ \begin{array}{cc|cc} T_1 & T_2 & W & U \\ T'_2 & T_3 & V & S \\ \hline \star & \star & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \quad (1.30)$$

où  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  sont des variables additionnelles. Sauf à exploiter la structure proposée par des cas particuliers (monotonie du problème de complémentarité conique [71] ou de la minimisation de rang [147]), il n'existe pas encore de résultats théoriques forts ni d'algorithmes réellement efficaces sur de tels problèmes de grande taille.

Les différentes approches afin de traiter de tels problèmes en analyse et synthèse robustes peuvent être classées en deux grandes familles. La première regroupe les méthodes fondées plus ou moins directement sur l'utilisation de relaxations convexes du problème original. Un problème (1.16) (ou une séquence de problèmes (1.16)) qui constitue une relaxation convexe des problèmes précédents est alors défini. La seconde approche peut être qualifiée d'algorithmique dans la mesure où le problème difficile (1.20) est directement traité sous cette forme ou sous l'une des formes associées par des méthodes numériques plus ou moins sophistiquées fondées sur des résultats théoriques.

## 1.5 Les approches par relaxation

En supposant que la formalisation d'un problème d'analyse ou de synthèse robustes conduise à devoir résoudre un problème du type (1.20), l'approche par relaxation consiste à formuler un problème associé du type (1.16) dont l'optimum est un majorant pour l'optimum global de (1.20). Le problème ainsi défini est généralement l'expression d'une condition suffisante pour le problème original. La qualité de la relaxation est alors liée au pessimisme de la condition. La notion de dualité telle qu'elle est définie en théorie de l'optimisation propose un cadre théorique pour formaliser cette méthodologie.



### 1.5.1 Dualité et relaxation lagrangiennes

D'un point de vue purement formel, le concept de dualité relie deux objets ou concepts différents induisant ainsi une relation (symétrique ou non) parfois subtile entre eux. En théorie des systèmes, la dualité entre les notions de commandabilité et d'observabilité est ainsi bien connue des automaticiens manipulant les systèmes LTI. En programmation mathématique, elle est la pierre angulaire autour de laquelle s'articulent non seulement de nombreux résultats théoriques mais également de nombreuses méthodes pratiques de résolution. La dualité étant un concept relativement versatile, différentes formes de dualité peuvent être définies pour un même problème. Dans le cadre de l'application des concepts et méthodes de l'optimisation à la théorie de la commande robuste, nous nous intéressons plus particulièrement à la dualité lagrangienne qui permet de présenter un ensemble de résultats dans un cadre unifié. Cette dernière apparaît ainsi être l'outil central en optimisation combinatoire et en programmation quadratique où certaines relaxations bien connues (relaxation SDP par exemple) résultent en fait d'une application particulière de la relaxation lagrangienne (cf. chapitre 13 dans [201]).

#### La dualité lagrangienne

Nous rappelons ici quelques éléments de la théorie de la dualité lagrangienne. Même si nous nous sommes efforcés de tendre vers la plus grande précision mathématique, pour ces rappels, nous ne prétendons pas avoir atteint toute la rigueur mathématique nécessaire à l'exposition de ces notions. Le lecteur intéressé consultera avec profit les références [135], [134], [133] et [106] (chapitre XII) que nous avons suivies dans cette partie.

Soit le problème général de programmation mathématique :

$$\begin{aligned}
 p^* = \inf_{x \in \mathcal{X}} & f(x) \\
 \text{sous} & \\
 & h_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

où  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Aucune hypothèse particulière n'est nécessaire sur les éléments ( $f$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $h_i$ ) pour mettre en oeuvre la relaxation lagrangienne du problème (1.31) excepté le fait que la contrainte imposée par l'ensemble  $\mathcal{X}$  n'est pas difficile à prendre en compte alors que celles imposées par les inégalités  $h_i(x) \leq 0$  sont difficiles à traiter. La relaxation lagrangienne du problème (1.31) portera donc sur la relaxation de ces contraintes.

Le lagrangien associé au problème (1.31) est défini comme la fonction  $L$  :

$$\begin{aligned}
 L(.,.) & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \\
 L(x, \lambda) & = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) = f(x) + \lambda' h(x)
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Le vecteur  $\lambda$  est le vecteur des **multiplieurs de Lagrange**. Le lagrangien est composé de la fonction critère augmentée de la somme pondérée par les multiplieurs de Lagrange des fonctions définissant les contraintes. Associée au lagrangien, la fonction duale joue un

rôle essentiel dans la définition du problème dual de (1.31) au sens de Lagrange.

**Définition 1.5.1 (la fonction duale)**

La fonction duale associée au problème (1.31) est définie comme la fonction :

$$\begin{aligned} \theta(\cdot) &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup -\infty \\ \theta(\lambda) &= \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda) \end{aligned} \tag{1.33}$$

Quand le lagrangien est inférieurement non borné en  $x$ , la fonction duale vaut  $-\infty$ . Il est alors possible d'écrire le problème dual au sens de Lagrange associé à (1.31) :

**Problème 1.5.1 (problème dual)**

$$\begin{aligned} d^* &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \theta(\lambda) \\ &\text{sous} \\ &\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1.34}$$

Il est à noter que le problème primal (1.31) peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} L(x, \lambda) \\ \text{sous} \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1.35}$$

Il s'ensuit que l'écriture du dual revient simplement à inverser l'ordre de minimisation et de maximisation.

Etant donné un problème d'optimisation (1.31), il n'existe pas un problème dual unique puisque celui-ci dépend des contraintes relaxées choisies et de celles que l'on incorpore dans l'ensemble  $\mathcal{X}$ .

**La relaxation lagrangienne**

Les relations qu'entretiennent le problème (1.31) et (1.34) sont à la source de la relaxation lagrangienne. Elles sont principalement formalisées par les résultats sur la dualité faible et forte.

**Théorème 1.5.1 (dualité faible [28])**

Etant donnés  $\bar{x}$  et  $\bar{\lambda}$  réalisables respectivement pour le problème primal (1.31) et le problème dual (1.34) alors :

$$f(\bar{x}) \geq \theta(\bar{\lambda}) \tag{1.36}$$

On en déduit donc

$$p^* \geq d^* \tag{1.37}$$

De plus, si  $f(\bar{x}) = \theta(\bar{\lambda})$  alors  $\bar{x}$  résout le problème primal et  $\bar{\lambda}$  résout le problème dual. Si  $p^* = -\infty$  alors  $\theta(\lambda) = -\infty \quad \forall \lambda \mid \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$ . Si  $d^* = \infty$  alors le problème primal n'a pas de solution réalisable.

Le résultat de dualité faible établit donc que résoudre le problème dual en lieu et place du problème primal revient généralement à en déterminer une borne inférieure. Dans le cas où l'inégalité est stricte, il existe **un saut de dualité** ( $p^* - d^*$ ). Cette démarche n'a de sens que dans le cas où la résolution du problème dual est «facile». Les propriétés de la fonction duale permettent de répondre en partie à cette question.

**Théorème 1.5.2 ([135])**

La fonction duale  $\theta(\lambda)$  est concave et semi-continue supérieurement.

Cette propriété assure donc l'existence d'un maximum sur tout ensemble compact. La résolution du problème dual est donc «facile» pour autant que le calcul de la fonction duale  $\theta$  l'est. Le choix de l'ensemble  $\mathcal{X}$  et des contraintes qui y sont incorporées est donc primordial pour l'efficacité de la procédure de relaxation.

Le saut de dualité est donc l'indicateur de la qualité de la relaxation lagrangienne. Sous certaines conditions de convexité et de qualification de contraintes, cette dernière peut être exacte.

**Théorème 1.5.3 (dualité forte [28])**

Si les fonctions  $f$  et  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont convexes et que la condition de qualification de contrainte (condition de Slater) est vérifiée :

$\exists \hat{x} \in \mathcal{X}$  strictement réalisable pour le problème primal ( $h_i(\hat{x}) < 0 \forall i = 1, \dots, m$ ) alors

$$p^* = d^* \quad (1.38)$$

De plus, si  $p^*$  est fini alors  $d^*$  est atteint en  $\bar{\lambda}$  avec  $\bar{\lambda}_i \geq 0 \ i = 1, \dots, m$ . Si  $p^*$  est atteint en  $\bar{x}$  alors

$$\bar{\lambda}'h(\bar{x}) = 0 \quad (1.39)$$

Cette dernière condition est la **condition de complémentarité**. Une utilisation différente mais complémentaire de la dualité lagrangienne peut être appliquée au problème de réalisabilité d'un système de contraintes d'inégalité donné par (1.40).

$$h_i(x) < 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (1.40)$$

En notant le domaine du problème de réalisabilité du système (1.40) par

$$D = \bigcap_{i=1}^m \text{dom}(h_i) \quad (1.41)$$

la fonction duale associée à (1.40) est définie par

$$\theta(\lambda) = \inf_{x \in D} \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (1.42)$$

Cette fonction duale est un cas particulier de (1.33) avec  $f(x) \equiv 0$ .

**Théorème 1.5.4 (théorème des alternatives [49])**

Au plus une des deux assertions est vraie :

- 1- Il existe  $x$  tel que  $h_i(x) < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$

2- Il existe  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m,$

$$\theta(\lambda) \geq 0 \quad (1.43)$$

Si les fonctions  $h_i, i = 1, \dots, m$  sont convexes et que la condition de qualification de contraintes suivante est vérifiée alors une seule des deux assertions est vraie.

$$\exists x \in \text{relint}(D) \quad (1.44)$$

Dans ce cas, cela définit une **alternative forte** en comparaison de l'**alternative faible** (1.43).

Le théorème des alternatives est important car il permet d'établir par passage au dual qu'un ensemble d'inégalités n'a pas de solution réalisable. La sous-optimalité d'un point réalisable ou sa non réalisabilité peuvent donc être certifiées par application de la dualité.

### Exemple de la dualité SDP

Le cadre de travail fourni par la dualité lagrangienne peut être étendu à des problèmes d'optimisation conique construits autour de la notion d'inégalités généralisées que nous avons présentée dans une section précédente. En particulier, le cas des inégalités matricielles linéaires conduit à définir la formulation canonique des problèmes SDP que nous rappelons.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i=1}^m c_i x_i \\ \text{sous} \quad & \\ & F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i \succ \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Même si les résultats de dualité lagrangienne appliqués à ce type de problèmes sont moins forts que ceux déduits pour la programmation linéaire, il est toutefois possible d'écrire explicitement le dual lagrangien de (1.45). En effet, la fonction duale se déduit analytiquement comme

$$\theta(Z) = \begin{cases} -\text{Trace}(F_0 Z) & \text{si } -\text{Trace}(F_i Z) + c_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ -\infty & \text{autrement} \end{cases} \quad (1.46)$$

Cela permet d'écrire le problème LMI dual.

#### Définition 1.5.2 (problème LMI dual [49])

Le dual lagrangien de (1.45) est le problème d'optimisation LMI :

$$\begin{aligned} \max_{Z \in \mathcal{S}_n} \quad & -\text{Trace}(F_0 Z) \\ \text{sous} \quad & \\ & -\text{Trace}(F_i Z) + c_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Z = Z' \succeq 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

où les multiplicateurs de Lagrange sont formés par les éléments indépendants de la matrice  $Z \in \mathcal{S}_n^+$ .

Il est à noter que les problèmes (1.47) et (1.45) sont respectivement dénommés **problème primal sous forme canonique** et **problème dual sous forme standard** dans la littérature spécialisée en théorie de l'optimisation [27].

Le théorème des alternatives peut être particularisé au cas des inégalités matricielles linéaires contraignant (1.16).

### **Théorème 1.5.5 (alternative SDP)**

Les deux assertions suivantes forment une alternative forte.

$$1- \exists x \in \mathbb{R}^m \mid F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i \succ 0$$

$$2- \exists Z = Z' \in \mathcal{S}_n^+, Z \neq \mathbf{0} \mid \text{Trace}(F_0 Z) \leq 0, \text{Trace}(F_i Z) = 0, i = 1, \dots, m$$

Le problème (1.45) est un objet d'étude intéressant à plusieurs titres. D'abord en tant que problème d'optimisation convexe, il est le domaine privilégié d'application des résultats développés en analyse convexe et constitue donc un objet d'étude autonome. Le développement récent de l'intérêt porté à ce type de problème provient également de l'application de la relaxation lagrangienne à des problèmes difficiles en optimisation combinatoire, en optimisation quadratique et en théorie de la commande en vue d'obtenir des bornes calculables. Par exemple, la relaxation de Shor pour les problèmes quadratiques [187] conduit à la résolution d'un problème du type (1.45) (ou son dual (1.47)) et est également connue sous le nom de relaxation SDP. Objet central en théorie de la commande robuste depuis les années 90, le problème d'optimisation LMI résulte là encore de l'application directe ou indirecte d'une relaxation lagrangienne au problème d'analyse ou de synthèse originel. Cet angle de vue initié dans [48], [71] est encore très peu connu dans la communauté de la commande. La suite de cette section s'attache donc à l'illustrer au mieux.

### **La $\mathcal{S}$ -procédure - le lemme de Finsler - le lemme d'élimination**

La  $\mathcal{S}$ -procédure essentielle en théorie de la commande [47] et à l'origine de très nombreux résultats est l'exemple typique d'un outil mathématique connu, largement utilisé et développé de manière indépendante par les deux communautés de l'optimisation [167], [107] et de la commande [202], [203], [204]. Prenant ses fondements dans l'étude des propriétés de convexité de l'ensemble image obtenu par des transformations quadratiques par O. Toeplitz, F. Hausdorff et L.L. Dines [167], ce résultat semble avoir été très tôt utilisé (proposé?) sous ce nom dans la communauté soviétique de la commande puisque le principe de son application à l'étude des problèmes de stabilité absolue des systèmes non linéaires remonterait à un article russe de A.I. Lur'e et A.M. Postnikov d'après la référence [202]. Quant à cette dénomination, elle aurait été introduite dans le livre de M.A. Aizerman et F.R. Gantmacher [1]. Parallèlement, le problème de la positivité d'une forme quadratique définie sur un ensemble caractérisé par des inégalités (égalités) quadratiques initié par le résultat de P. Finsler (connu aussi comme le lemme de Debreu) est devenu un sujet d'étude important et a connu des extensions variées [167], [107].

Le principe en est très général. En considérant les fonctions réelles  $f(x)$ ,  $h_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  définies sur un ensemble  $\mathcal{X}$ , la  $\mathcal{S}$ -procédure consiste à substituer la condition

(1.49) à la condition (1.48).

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathcal{X} \mid h_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.48)$$

$$\exists \tau_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \mid f(x) + \sum_{i=1}^m \tau_i h_i(x) \geq 0 \quad (1.49)$$

Les deux conditions ne sont pas équivalentes en général mais il est évident que (1.49) implique toujours (1.48). Le problème intéressant est donc d'étudier les hypothèses et conditions sous lesquelles (1.49) est une condition nécessaire pour (1.48). Dans ce cas, la  $\mathcal{S}$ -procédure est dite non pessimiste (lossless). Il est à noter que différentes versions de cette procédure peuvent être définies en considérant des inégalités strictes, larges ou des égalités. Dans le cas des inégalités strictes

$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathcal{X} \mid h_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.50)$$

$$\exists \tau_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \mid f(x) + \sum_{i=1}^m \tau_i h_i(x) > 0 \quad (1.51)$$

Les résultats les plus forts ont été obtenus sous l'hypothèse que les fonctions  $f$  et  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont des fonctions quadratiques homogènes ou non. Nous rappelons les résultats concernant le cas particulier des formes quadratiques homogènes définies sur  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  avec des inégalités strictes ou larges.

### **S-procédure 1 ([202])**

Pour  $f(x) = x'Ax$ ,  $h_i(x) = x'B_i x$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  :

- S'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $h_1(x) > 0$  alors pour  $m = 1$ , la  $\mathcal{S}$ -procédure n'est pas pessimiste.
- Si  $m = 2$ , la  $\mathcal{S}$ -procédure peut être pessimiste.

De nombreuses extensions et compléments de ces résultats peuvent être trouvés dans la littérature spécialisée en théorie de la commande [204] ou dans la littérature liée à l'optimisation [167], [107]. Cette procédure a été l'objet de beaucoup d'attention par les automaticiens durant les dernières années et particulièrement en théorie de la commande robuste où elle est très largement utilisée sans que ses liens avec la dualité et la relaxation lagrangiennes soient bien compris et connus. En effet, le pessimisme de la  $\mathcal{S}$ -procédure correspond très directement au saut de dualité présent dans les problèmes de programmation quadratique non convexes. Il est remarquable de constater que cette interprétation fut essentiellement l'oeuvre des automaticiens A. Fradkov et V.A. Yakubovich de l'école soviétique [77], [78]. Ces derniers montrent en effet que le fait que la  $\mathcal{S}$ -procédure est non conservative est équivalent à un saut de dualité nul pour les problèmes d'optimisation associés.

$$\inf_{h_i(x) \leq 0} f(x) = \sup_{\tau_j \geq 0} \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x) + \sum_{j=1}^m \tau_j h_j(x) \quad (1.52)$$

Les coefficients réels  $\tau_j$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont donc les multiplieurs de Lagrange associés à la dualisation du problème primal de gauche dans (1.52).

Un résultat usuellement utilisé de manière instrumentale par les automaticiens peut également être relié à la relaxation lagrangienne.

**Lemme 1.5.1 (Finsler [31])**

Définissant les deux formes quadratiques homogènes réelles ( $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ )  $f(x) = x'Ax$  et  $h_1(x) = x'Bx$  alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$f(x) > 0 \ \forall x \neq 0 \mid h_1(x) = 0 \quad (1.53)$$

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \mid \forall x \neq 0 \ f(x) + \tau h_1(x) > 0 \quad (1.54)$$

Il est montré dans [167] que ce résultat constitue un cas particulier de l'application d'un résultat plus général également apparenté à la  $\mathcal{S}$ -procédure. Une version algébrique du lemme de Finsler constitue un des outils fondamentaux utilisés en théorie de la commande robuste.

**Lemme 1.5.2 (Finsler [190])**

Etant données les matrices complexes  $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$  et  $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que  $\text{rang}(H) = r < n$  alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

$$H^\perp AH^{\perp*} \succ \mathbf{0} \quad (1.55)$$

$$\exists \tau \in \mathbb{R} \mid \tau HH^* + A \succ \mathbf{0} \quad (1.56)$$

où la matrice  $H^\perp \in \mathbb{C}^{(n-r) \times n}$  est une matrice de rang plein dont les colonnes engendrent le noyau à gauche de  $H$  :

$$H^\perp H = \mathbf{0} \quad H^\perp H^{\perp*} \succ \mathbf{0} \quad (1.57)$$

La démonstration de ce résultat dans [190] ne fait appel qu'à des arguments d'algèbre linéaire. Cela permet ainsi d'écrire non seulement le résultat d'existence sur  $\tau$  mais également de paramétrer l'ensemble des valeurs de  $\tau$  réalisables. Si cette vision purement algébrique du lemme de Finsler a des avantages, en particulier en offrant un certain cadre unifié et simple d'une partie de la théorie de la commande, il n'en reste pas moins que cela a masqué aux yeux de nombreux automaticiens le véritable fondement de ce résultat. Ce fondement est particulièrement bien illustré dans l'article de référence [17] où le lemme de Finsler est prouvé par l'application du théorème des alternatives fortes SDP.

**Théorème 1.5.6 (alternative forte - Finsler [17])**

Les deux assertions suivantes forment une alternative forte.

- 1-  $\exists \tau \in \mathbb{R} \mid \tau HH^* + A \succ \mathbf{0}$
- 2-  $\exists Z = Z^* \in \mathcal{S}_n^+ : \text{trace}(H^*ZH) = 0$  et  $\text{trace}(AZ) \leq 0$

Ce théorème est l'application directe du théorème (1.5.5) avec  $m = 1$ ,  $\tau = x \in \mathbb{R}$ ,  $F_0 = A$  et  $F_1 = HH^*$  où la deuxième alternative du théorème précédent est équivalente à dire que (1.55) n'est pas vérifiée.

**Lemme 1.5.3 (lemme de projection [190])**

Etant données les matrices complexes  $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$  et  $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que  $\text{rang}(H) < n$  alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1-  $\exists X \in \mathbb{C}^{m \times n}$  telle que :

$$HX + (XH)^* + A \prec \mathbf{0} \quad (1.58)$$

2- La condition suivante est vraie :

$$H^\perp AH^{\perp*} \prec \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad HH^* \succ \mathbf{0} \quad (1.59)$$

Connu également dans la littérature comme le lemme d'élimination (quand il est utilisé pour éliminer la variable  $X$ ) et démontré à partir d'arguments d'algèbre linéaire [190], ce résultat peut également être prouvé par l'utilisation du théorème des alternatives fortes SDP de façon identique à ce que l'on a vu pour le lemme de Finsler.

**Théorème 1.5.7 (alternative forte - projection)**

Les deux assertions suivantes forment une alternative forte.

1-  $\exists X \in \mathbb{C}^{m \times n} \mid HX + (XH)^* + A \prec \mathbf{0}$

2-  $\exists Z = Z^* \in \mathcal{S}_n^+ : ZH = 0$  et  $\text{trace}(AZ) \leq 0$

L'identité des équations (1.56) et (1.59) montre suffisamment clairement que le lemme de projection est une version «matricielle» du lemme de Finsler dans la mesure où le multiplicateur de Lagrange scalaire  $\tau$  est remplacé par un multiplicateur de Lagrange matriciel  $X$ . Certains auteurs confondent d'ailleurs les deux en un seul et même résultat.

Le point de vue algébrique qui a longtemps prévalu en théorie de la commande [189] a fait que l'utilisation de ces résultats était souvent purement instrumentale et que la notion de dualité sous-jacente et de relaxations par addition de variables duales restent encore mal connues dans la communauté. Ainsi, le lemme de projection est le plus souvent utilisé afin d'éliminer des variables (les variables du compensateur par exemple) alors que l'autre «sens» de l'équivalence peut également être intéressant pour la création de variables additionnelles de relaxation. Ce dernier point est illustré par la reformulation des conditions de stabilité des systèmes dynamiques par la théorie de Lyapunov dans le cas où le modèle est précisément connu et dans le cas où le modèle est incertain.

## 1.5.2 Théorie de Lyapunov et relaxation lagrangienne

La théorie de Lyapunov appliquée aux modèles LTI peut être considérée comme l'un des éléments fondamentaux ayant permis la constitution et le développement de la théorie de la commande robuste comme champ scientifique autonome. Si les liens entre théorie de Lyapunov et formalisme LMI (l'inégalité de Lyapunov est historiquement la première LMI de l'Automatique [47]) sont bien connus des automaticiens, la relation très directe entre



fonction de Lyapunov et multiplicateur de Lagrange l'est moins malgré les références [71] et [201]. Le résultat fondamental de Lyapunov appliqué aux modèles LTI permet d'écrire une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique comme une condition d'existence d'une solution à l'inégalité de Lyapunov.

**Théorème 1.5.8 (théorème de Lyapunov)**

Etant donné un système dont le modèle LTI d'état autonome est donné par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x_0 \neq 0 \quad (1.60)$$

alors le système est asymptotiquement stable (ses trajectoires tendent vers le point d'équilibre 0) ssi  $\exists P \in \mathcal{S}_n^{++}$  telle que :

$$A'P + PA \prec \mathbf{0} \quad (1.61)$$

Dans cette partie, nous rappelons donc que la matrice de Lyapunov  $P$  est une variable de Lagrange découlant d'une relaxation lagrangienne pour laquelle le saut de dualité est nul. Nous avons suivi [71] pour l'établissement de la condition suffisante (relaxation lagrangienne) et [17] pour la condition nécessaire qui est relativement mal connue.

La condition de stabilité asymptotique du modèle (1.60) revient à imposer que le spectre de la matrice  $A$  soit contenu dans le demi-plan complexe gauche strict (à l'exclusion de l'axe imaginaire). L'inclusion du spectre de  $A$  dans le demi-plan complexe gauche strict se traduit par l'inversibilité de la matrice  $s\mathbf{1} - A$  pour tout  $s \in \mathbb{C}^+$ .

$$\Lambda(A) \in \mathbb{C}^- \quad \Leftrightarrow \quad (s\mathbf{1} - A)^*(s\mathbf{1} - A) > 0, \quad \forall s \mid s + s^* \geq 0 \quad (1.62)$$

En posant  $w = sx$

$$(w - Ax)^*(w - Ax) > 0 \quad \forall (w, x) \neq 0 \mid w = sx \text{ pour } s + s^* \geq 0 \quad (1.63)$$

il peut être montré que si  $w = sx$  alors  $s + s^* \leq 0 \Leftrightarrow wx^* + xw^* \succeq 0$  et donc

$$(w - Ax)^*(w - Ax) > 0 \quad \forall (w, x) \neq 0 \mid wx^* + xw^* \succeq 0 \quad (1.64)$$

Par application du théorème de Fejer [201] et en introduisant le paramètre matriciel de Lagrange  $P \in \mathcal{S}_n^{++}$ , on obtient la condition suffisante suivante :

Si  $\exists P \succ \mathbf{0}$  telle que

$$\forall (w, x) \neq 0 \quad (w - Ax)^*(w - Ax) > \text{trace}(P(wx^* + xw^*)) \quad (1.65)$$

alors le modèle LTI (1.60) est asymptotiquement stable.

La condition suffisante (1.65) peut être reformulée comme :

$$\exists P \succ \mathbf{0} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} [ A \quad -\mathbf{1} ] \prec \mathbf{0} \quad (1.66)$$

En multipliant à gauche et à droite par  $[ \mathbf{1} \quad A' ]$  et son transposé respectivement, on obtient l'inéquation de Lyapunov. Ce développement mérite que l'on s'y attarde puisqu'il établit très clairement que la matrice de Lyapunov est une variable de Lagrange. Ce fait très largement ignoré par la communauté de la commande est justifié si l'on considère

que la théorie de Lyapunov est une extension de la méthode de Lagrange pour l'étude de l'équilibre des corps à l'étude de l'équilibre des systèmes dynamiques.

La démonstration de la nécessité de l'existence de la solution de l'inégalité de Lyapunov dans le cadre de la dualité lagrangienne est beaucoup moins fréquente et à notre connaissance, seule la référence [17] la propose de manière explicite. Là encore, elle repose sur le théorème des alternatives fortes SDP.

### Théorème 1.5.9 (alternative - Lyapunov)

Les deux assertions suivantes forment une alternative forte.

- 1-  $\exists P \in \mathcal{S}_n^{++} \mid A'P + PA \prec \mathbf{0}$
- 2-  $\exists (Z_1, Z_2) \in \mathcal{S}_n^+ \times \mathcal{S}_n^+ : AZ_1 + Z_1A' - Z_2 = \mathbf{0}$

Afin de compléter la démonstration, [17] montrent que l'alternative 2 est équivalente au fait que  $A$  possède des valeurs propres à partie réelle non négative.

Il est à noter que le théorème de Lyapunov peut être obtenu par un argument de relaxation dual du précédent qui consiste en une relaxation de rang. Ainsi, en introduisant la variable matricielle duale de  $P$  :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* & w^* \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad (1.67)$$

le problème de stabilité asymptotique de la matrice  $A$  est équivalent à un problème d'optimisation LMI sous contrainte de rang [101].

### Lemme 1.5.4

$A$  est asymptotiquement stable ssi  $\mu^* > 0$  où

$$\begin{aligned} \mu^* &= \min_{X \in \mathcal{S}_{2n}^+} \text{trace} \begin{bmatrix} A' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -\mathbf{1} \end{bmatrix} X \\ &\text{sous} \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \\ &\text{rang}(X) = 1 \\ &\text{trace} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} X = 1 \end{aligned} \quad (1.68)$$

La relaxation de la contrainte de rang conduit alors à un problème d'optimisation LMI qui est équivalent au problème (1.68) (la relaxation est exacte) [101]. L'application de la dualité SDP sur le problème LMI ainsi obtenu conduit naturellement à retrouver l'inégalité de Lyapunov. Cette relaxation de rang est très usuelle en optimisation combinatoire (par exemple pour le problème du max-cut) [92], [101].

La condition de stabilité asymptotique de la matrice  $A$  exprimée à travers l'inégalité de Lyapunov (1.61) n'est pas l'unique condition de type LMI qu'il est possible de définir en utilisant des arguments liés à la relaxation lagrangienne. Une condition équivalente introduisant des variables additionnelles a été proposée dans [86] en reliant les notions de

stabilité asymptotique et de positivité réelle d'un système. Indépendamment, une condition identique de stabilité étendue à des sous-régions (régions LMI) du plan complexe est parue dans [162].

**Théorème 1.5.10 (condition de stabilité étendue [86])**

$\dot{x} = Ax$  est stable asymptotiquement ssi  $\exists P \in \mathcal{S}_n^{++}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F' & G' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (1.69)$$

Cette nouvelle condition est intéressante à divers titres. Du point de vue de l'étude de la stabilité asymptotique d'un modèle LTI de matrice dynamique  $A$  parfaitement connue, elle n'apporte rien par rapport à la condition classique de Lyapunov. Cette condition est également LMI mais elle nécessite plus de variables de test. Par contre, cette condition prend toute son importance pour l'étude de l'analyse robuste des modèles incertains polytopiques comme nous le verrons dans le chapitre consacré à l'analyse robuste.

Un autre aspect illustré par cette condition est la différence des points de vue choisis dans [86] et [162] pour l'élaborer. Comme nous l'avons déjà mentionné, la première référence dans laquelle apparaît ce résultat, étudie essentiellement un problème de stabilité simultanée et diagonale par des arguments de positivité réelle du modèle associé. Dans [162], le résultat est directement obtenu par application du lemme de projection utilisé dans le sens de la création de variables additionnelles. L'idée sous-jacente est donc bien de mettre en oeuvre deux relaxations successives : la première conduit à la création de la matrice de Lyapunov alors que la seconde, par application du lemme de projection, à la création des variables additionnelles. La mise en oeuvre de relaxations successives conduisant pour des problèmes particuliers à des conditions dont le pessimisme décroît avec l'ordre de la relaxation est une procédure générale très séduisante, dont la puissance est illustrée dans le cas de problèmes d'optimisation posés sur l'ensemble des polynômes positifs.

### 1.5.3 Les relaxations hiérarchiques

La grande faiblesse des relaxations lagrangiennes est qu'elles peuvent être très pessimistes (le saut de dualité peut être arbitrairement grand). L'évaluation du degré de pessimisme peut constituer en soi un problème très difficile à résoudre [201]. Pour la classe des problèmes d'optimisation impliquant des polynômes, des résultats plus forts fondés sur l'emploi simultané de la relaxation et de techniques de lifting ont été récemment obtenus de manière duale dans [152], [124], [159].

Soient  $g_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  des fonctions polynomiales à plusieurs indéterminées i.e.  $g_i(x) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Nous définissons le problème d'optimisation suivant sur l'ensemble

des polynômes positifs :

**Problème 1.5.2**

$$\begin{aligned}
 p^* &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} g_0(x) \\
 &\text{sous} \\
 &g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

L'ensemble réalisable associé à 1.5.2 est noté  $\mathbb{P}$ .

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m\} \tag{1.71}$$

De plus, afin d'être plus concis, nous supposons que le degré des polynômes  $g_i$  est  $2\alpha_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, m$  avec la notation  $\bar{\alpha} = \max_{i=1, \dots, m} \alpha_i$ .

Ce problème est particulièrement difficile puisque de nombreux problèmes réputés NP-difficiles peuvent se réécrire sous cette forme générale. La référence [104] donne de nombreux exemples de problèmes d'analyse et de synthèse robustes reformulés comme 1.5.2 (analyse de stabilité robuste, stabilisation simultanée, placement de pôles par retour de sortie statique...)

La procédure générale consiste à transformer le problème initial en un problème de programmation quadratique par lifting et ajout de contraintes additionnelles redondantes. L'opération de lifting est l'opération inverse de la projection et consiste à plonger le problème initial dans un espace de dimension supérieure en introduisant des variables polynomiales  $y$  en les variables initiales  $x$ . L'origine de l'idée de lifting remonte aux travaux de Sherali-Adams qui en ont déduit une relaxation linéaire pour les problèmes d'optimisation 0-1 [125]. N. Shor a par ailleurs proposé une procédure de lifting afin de réduire un problème polynomial en un problème quadratique pour y appliquer ensuite une relaxation SDP [187], [188]. Le problème initial 1.5.2 est ainsi reformulé comme le problème de programmation quadratique suivant :

$$\begin{aligned}
 \min_{y \in \mathbb{R}^\delta} & \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}' Q \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} \\
 & \text{sous} \\
 & \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}' A_i \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad i = 1, \dots, p \\
 & \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}' B_i \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

où  $y \in \mathbb{R}^\delta$  est le vecteur des monômes de degré inférieur ou égal à  $\bar{\alpha}$  et

$$\delta = \binom{n + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} - 1 \tag{1.73}$$

Les matrices  $Q$  et  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont obtenues à partir de la donnée des polynômes  $g_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Les matrices  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  sont construites dans le processus de lifting et constituent les contraintes additionnelles redondantes.

Les contraintes additionnelles redondantes appelées **inégalités valides** ne changent évidemment pas la valeur de l'optimum primal mais peuvent conduire à des relaxations primales et duales moins pessimistes.

**Définition 1.5.3 (inégalités valides [159])**

La fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définit une **inégalité valide** pour le problème 1.5.2 si

$$h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{P} \quad (1.74)$$

En appliquant une deuxième procédure de lifting obtenue en posant :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}' \quad (1.75)$$

la formulation «liftée» du problème précédent est donnée par :

$$\begin{aligned} & \min_{Y \in \mathcal{S}_{\delta+1}} \text{trace}[QY] \\ & \text{sous} \\ & \text{trace}[A_i Y] = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ & \text{trace}[B_i Y] \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Y_{11} = 1 \\ & Y \succeq \mathbf{0} \\ & \text{rang}(Y) = 1 \end{aligned} \quad (1.76)$$

La relaxation de Shor (relaxation SDP) consiste alors à relaxer la contrainte de rang dans ce dernier problème afin d'obtenir la relaxation primale d'ordre 1 :

**Relaxation 1 (relaxation primale d'ordre 1 [188])**

$$\begin{aligned} q_1^* &= \min_{Y \in \mathcal{S}_{\delta+1}} \text{trace}[QY] \\ & \text{sous} \\ & \text{trace}[A_i Y] = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ & \text{trace}[B_i Y] \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & Y_{11} = 1 \\ & Y \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.77)$$

$Y$  est définie comme **la matrice des moments** associés à la relaxation d'ordre 1.

Cette relaxation fournit donc une borne inférieure pour l'optimum global du problème initial  $q_1^* \leq p^*$ . L'apport majeur produit dans [124] est d'avoir proposé une hiérarchie de relaxations d'ordre croissant et de pessimisme monotone non croissant. La méthode consiste à ajouter des inégalités valides au problème initial 1.5.2 de la façon suivante. Chaque contrainte polynomiale définie par la fonction  $g_i$  est remplacée par deux contraintes.

$$g_i(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} g_i(x)(a'z)^2 \geq 0 \\ (a'z)^2 \geq 0 \end{array} \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \forall a, \forall i = 1, \dots, m \quad (1.78)$$

Ces dernières contraintes sont alors réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned} g_i(x)Z &\succeq 0 \\ Z &\succeq 0 \\ Z &= zz' \end{aligned} \quad (1.79)$$

Par lifting sur la matrice polynomiale  $g_i(x)Z$  et relaxation de la contrainte de rang, on obtient la relaxation d'ordre  $k$  faisant intervenir une matrice des moments  $W \in \mathcal{S}_{\beta_k}$  avec

$$\beta_k = \begin{pmatrix} n + \bar{\alpha} + k - 1 \\ \bar{\alpha} + k - 1 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

### Relaxation 2 (relaxation d'ordre $k$ )

$$\begin{aligned} q_k^* &= \min_{W \in \mathcal{S}_{\beta_k}} \text{trace}[Q_k W] \\ &\text{sous} \\ &W \succeq 0 \\ &H_i(W) \succeq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ &W_{11} = 1 \end{aligned} \quad (1.81)$$

où  $H_i$  sont des fonctions affines de  $W$ ,  $H_i : \mathcal{S}_{\beta_k} \rightarrow \mathcal{S}_{\gamma_i}$  appelées **matrices de localisation**.

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} n + \bar{\alpha} - \alpha_i \\ \bar{\alpha} - \alpha_i \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

La terminologie employée ici (matrices des moments et de localisation) fait directement référence à l'interprétation stochastique de ces relaxations primales comme une solution donnée au problème des moments [124], [104]. Cette approche est particulièrement

intéressante du fait du résultat asymptotique suivant obtenu sous l'hypothèse de Putinar [170].

**Hypothèses 1.5.1 ([124])**

L'ensemble  $\mathbb{P}$  est compact (par exemple un polytope) et il existe un polynôme réel  $u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\{u(x) \leq 0\}$  est compact et

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x)u_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1.83)$$

où les polynômes  $u_i(x)$  sont des sommes de carrés pour  $i = 0, \dots, m$ .

**Théorème 1.5.11 ([124])**

La séquence de relaxations primales tend vers l'optimum global  $p^*$  du problème 1.5.2 quand l'ordre de la relaxation tend vers l'infini.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q_k^* = p^* \quad (1.84)$$

En pratique, il n'est pas nécessaire de mettre en oeuvre des relaxations d'ordre élevé afin d'obtenir la solution globale  $p^*$ .  $q_k^*$  est très proche de  $p^*$  pour des ordres relativement faibles et dans certains cas  $q_k^* = p^*$ . Dans ce dernier cas, un certificat d'optimalité globale ainsi que la solution associée peuvent être obtenus en testant le rang des matrices des moments et par la mise en oeuvre d'une factorisation de Cholesky.

Une vision duale du problème 1.5.2 fondée sur la théorie des polynômes positifs et des polynômes égaux à des sommes de carrés (polynômes SOS) a été présentée dans [159]. Nous rappelons la définition des polynômes SOS.

**Définition 1.5.4 (cône des polynômes SOS [160])**

L'ensemble  $P_{SOS}^{n,d}$  des polynômes  $h$  de  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  de degré  $\leq d$  SOS est un cône convexe dans  $\mathbb{R}^\xi$ .

$$P_{SOS}^{n,d} = \left\{ h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] : h(x) = \sum_{i=1}^r s_i(x)^2 \right\} \quad (1.85)$$

où  $s_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  et  $\xi = \binom{n+d}{d}$ .

En appliquant la relaxation lagrangienne au problème (1.72) ou la dualité SDP au problème (1.81), la relaxation duale suivante est obtenue :

$$q^{d*} = \max_{q_k^d, s_i(x) \in P_{SOS}^{n,d_i}} q_k^d \quad \text{sous} \quad (1.86)$$

$$q_k^d - g_0(x) + s_0(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)s_i(x) = 0 \quad \forall x$$

L'ordre des polynômes  $s_i$  étant choisi et fixé, l'ordre  $k$  de la relaxation est fixé et le problème d'optimisation (1.86) est un problème SDP dont les variables de décision sont les coefficients des  $s_i$ . Ce problème est alors le dual SDP de la relaxation primale d'ordre  $k$  correspondante.

La diminution du pessimisme quand l'ordre de la relaxation augmente se paie par l'augmentation du nombre de variables et du nombre de contraintes au passage d'une relaxation donnée à une relaxation d'ordre supérieur. Des outils de calcul numériques ont été développés (GloptiPoly [103], SOSTOOLS [168]) et permettent de mettre en oeuvre efficacement ces approches.

### 1.5.4 Les relaxations heuristiques

Un autre type de relaxation très souvent utilisé en analyse et synthèse robustes consiste à utiliser un schéma de relaxations SDP successives fondé sur une heuristique. Cette approche est essentiellement utilisée pour la résolution de problèmes du type (1.20) qui sont biconvexes et revient à une linéarisation du problème bilinéaire initial. La classe des problèmes abordés par ces méthodes se définit comme suit.

#### Problème 1.5.3

Soit le problème d'optimisation non linéaire et non convexe :

$$\begin{aligned} & \min_{X, Y} f(X, Y) \\ & \text{sous} \\ & L(X, Y) \succ \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.87}$$

où  $f$  et  $L$  sont des fonctions bilinéaires en les variables matricielles  $X$  et  $Y$  ne contenant pas de termes quadratiques homogènes en les variables  $X$  et  $Y$ .

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R} \\ L & : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathcal{S}_p \end{aligned} \tag{1.88}$$

De plus, les fonctions  $f$  et  $L$  sont des fonctions convexes en  $X$  et  $Y$  respectivement mais non conjointement convexes en  $X, Y$ . Si l'une des deux variables est considérée comme constante, le problème (1.87) devient convexe et n'est rien d'autre qu'un problème SDP.

Le principe de la méthode s'inspire donc des méthodes classiques de descente coordonnée [56], [193], [194] où l'on identifie deux sous-ensembles de variables distinctes  $X$  et  $Y$ . Cela permet de décomposer le problème d'optimisation conjoint en  $(X, Y)$  en une série d'optimisations croisées convexes consécutives en chacune des variables  $X$  et  $Y$ . Le processus d'optimisation est un processus itératif dont chaque itération  $k$  est divisée en deux demi-itérations consistant, chacune en la résolution d'un problème LMI, est résolu.

#### Algorithme de descente-coordonnée

##### Etape 1

Déterminer un point réalisable initial  $(X_0, Y_0)$ ;  $k_1 = 0$  et  $k_2 = 0$ ;

##### Etape 2

Résoudre les problèmes LMI en  $X$  et  $Y$

$$\begin{aligned} & \text{Itération } k_1 : \\ X_{k_2+1} & = \arg \min_X f(X, Y_{k_1}) \\ & \text{sous} \\ & L(X, Y_{k_1}) \succ \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.89}$$



$$\begin{aligned}
& \text{Itération } k_2 : \\
Y_{k_1+1} = \arg \min_Y & f(X_{k_2+1}, Y) \\
\text{sous} & \\
& L(X_{k_2+1}, Y) \succ \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{1.90}$$

**Etape 3**

$$\text{Calculer } \bar{f}_{k_1, k_2} = \frac{f(X_{k_1-1}, Y_{k_2-1}) - f(X_{k_1}, Y_{k_2})}{f(X_{k_1-1}, Y_{k_2-1});}$$

**Etape 4**

$k_1 \leftarrow k_1 + 1$  et  $k_2 \leftarrow k_2 + 1$ ; Retourner à l'étape 2 tant que  $\epsilon < \bar{f}_{k_1-1, k_2-1}$ ;

Le test d'arrêt peut être défini de manière plus sophistiquée si nécessaire. Le fait que pour chaque optimisation LMI, nous disposions d'un point initial réalisable permet d'obtenir la propriété de décroissance monotone du critère.

**Lemme 1.5.5**

Pour tout point réalisable initial  $(X_0, Y_0)$ , la séquence de critères  $f_k = f(X_k, Y_k)$  générés par l'algorithme de relaxation croisée est une séquence monotone non croissante.

D'une grande facilité de mise en oeuvre, cette approche est très populaire en théorie de la commande robuste où une séparation naturelle en variables d'analyse et variables de synthèse peut souvent être opérée. Son utilisation remonte aux premières méthodes de  $\mu$ -synthèse ( $K_m$ -synthèse) où les relaxations croisées appelées D-(G)K itérations portent sur l'optimisation alternée des matrices de scaling (multiplicateurs) et du compensateur [180], [66], [207]. Un certain nombre de raffinements et généralisations de ce type d'algorithme dans le même cadre de la théorie du  $\mu$  ont également vu le jour (L-R itérations [178],  $\mu - K$  itérations [137]). L'utilisation de la théorie de Lyapunov a permis également le développement d'approches de descente coordonnée pour des problèmes de synthèse robuste, V-K itérations (fonction de Lyapunov-correcteur [69], [19]), K-L itérations (gain de retour d'état, gain de l'observateur [87]),  $K_e - K_s$  itérations (gain de retour d'état-gain de retour de sortie [9], [11]).

Ce type d'approche ne peut évidemment prétendre apporter une réponse complètement satisfaisante à la résolution du problème (1.20). En particulier, même si l'hypothèse sur la réalisabilité du point initial n'est pas strictement nécessaire, une initialisation avec un point partiellement réalisable ne donne aucune garantie sur la réalisabilité de l'étape suivante. Ces algorithmes sont en pratique bien adaptés à des problèmes pour lesquels on dispose déjà d'une solution préliminaire qu'il est souhaitable d'améliorer vis-à-vis d'un critère de performance. Il est important de signaler que même dans ce dernier cas, la convergence vers un optimum local en les deux variables  $X$  et  $Y$  n'est pas garantie. Les propriétés de convergence et le point final obtenu sont de plus très sensibles au choix du point initial  $(X_0, Y_0)$ .

## 1.6 Les approches algorithmiques

Dans cette section, les principales approches algorithmiques permettant d'aborder les problèmes d'optimisation du type (1.20) sont présentées brièvement. Les algorithmes n'y sont pas détaillés pour ne pas alourdir le manuscrit et seuls les principes généraux ainsi qu'une évaluation sommaire de leurs potentialités sont exposés.

### 1.6.1 La méthode du gradient conditionnel

Cette méthode est une extension de la méthode du gradient conditionnel (ou méthode de Franck et Wolfe) développée pour la recherche de directions réalisables en programmation non linéaire [38]. Appliquée à un problème de complémentarité linéaire [140], cette technique de linéarisation est ensuite généralisée pour aborder les problèmes du type (1.26) ou (1.23) [70]. Il est intéressant de consulter les références [127] et [6] pour avoir un point de vue complémentaire. De par l'équivalence polynomiale entre les différents problèmes (1.20), (1.23), (1.26) et (1.22), cet algorithme peut être mis en oeuvre après quelques aménagements sur chacun de ces problèmes.

Formellement, le principe de la méthode de linéarisation est le suivant.

#### Problème 1.6.1

Soit le problème d'optimisation défini par la donnée d'un ensemble réalisable convexe formulé par une contrainte LMI :

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times m} : L(X) \succ \mathbf{0}\} \quad (1.91)$$

et la donnée de la fonction  $f : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times r}$ .  $f$  est différentiable et bornée inférieurement sur  $\mathcal{X}$ .

$$\min_{X \in \mathcal{X}} f(X) \quad (1.92)$$

La méthode consiste à résoudre séquentiellement un problème LMI linéarisé fournissant une solution optimale qui est utilisée pour le calcul du gradient à l'étape suivante. On obtient ainsi une séquence d'optimisation linéaire (LMI dans le cas matriciel) dont on espère qu'elle converge vers un optimum local.

#### Algorithme du gradient conditionnel

##### Etape 1

Déterminer un point réalisable initial  $X_0$ ;  $k = 0$

##### Etape 2

Déterminer  $U_k$  solution du problème LMI (1.93);

$$\begin{aligned} \min_{U \in \mathbb{R}^{n \times m}} & \quad \langle \nabla f(X_k), U \rangle \\ \text{sous} & \quad L(U) \succ \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.93)$$

##### Etape 3

Déterminer  $\alpha_k \in [0, 1]$  solution du problème de recherche monodimensionnel :

$$\min_{\alpha \in [0, 1]} f((1 - \alpha)X_k + \alpha U_k) \quad (1.94)$$

$X_{k+1} = (1 - \alpha_k)X_k + \alpha_k U_k$ . Si un critère d'arrêt est vérifié, la solution est donnée par  $X_{k+1}$ ; sinon  $k=k+1$  et aller à l'étape 2.

L'étape d'initialisation est une simple étape de calcul d'un point réalisable dans un ensemble LMI. L'étape 2 consiste à résoudre un problème d'optimisation LMI pour rechercher la direction de plus grande pente. Le fait qu'à chaque étape, le point utilisé pour calculer le gradient est un point réalisable pour le problème initial permet d'établir que la séquence générée par cet algorithme est une séquence monotone non croissante.

**Lemme 1.6.1** ([32])

La séquence de points  $X_k$  générée par l'algorithme de Franck et Wolfe est une séquence monotone non croissante bornée qui converge vers un point satisfaisant les conditions d'optimalité au premier ordre ou vers un point d'accumulation vérifiant le principe du minimum.

Les tests d'arrêt pour un tel algorithme peuvent être délicats à définir. Ils sont généralement calculés afin d'utiliser au mieux la structure de la fonction  $f$  à minimiser et ses propriétés. Dans [71] et [127], la fonction  $f$  est bilinéaire :

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(X, Z) = \text{trace}(XZ) \tag{1.95}$$

et

$$\langle \nabla f(X, Z), (U, V) \rangle = \text{trace}(UZ + XV)$$

Le critère d'arrêt proposé dans [127] est calculé comme :

$$\begin{aligned} \tau_k &= \langle \nabla f(X_k, Z_k), (U_k - X_k, V_k - Z_k) \rangle \\ &= \text{trace}(U_k Z_k + X_k V_k) - 2\text{trace}(X_k Z_k) \geq -\epsilon \quad \epsilon > 0 \end{aligned} \tag{1.96}$$

La condition (1.96) est vérifiée pour tout optimum local de  $f$  dans son ensemble réalisable.

La référence [4] propose d'utiliser cet algorithme pour la fonction concave :

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(X, Y, Z) = \text{trace}(X - YZ^{-1}Y')$$

et

$$\langle \nabla f(X, Y, Z), (U, V, W) \rangle = \text{trace}(U + (Z^{-1}Y'YZ^{-1})V - 2(Z^{-1}Y')W) \tag{1.97}$$

La propriété de concavité de  $f$  permet d'alléger l'algorithme en supprimant l'étape de recherche monodimensionnelle en imposant  $\alpha = 1$ . De plus, la séquence générée est strictement décroissante impliquant la convergence vers un point vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. Divers critères d'arrêt fondés sur des techniques de perturbation sont présentés dans [4]. Il est à noter que ce dernier cas peut être traité dans le même cadre que celui défini dans le premier cas en ajoutant des variables complémentaires [8].

Ce type de méthodes a pour avantage sa très grande simplicité de mise en oeuvre qui ne nécessite que peu d'hypothèses sur  $f$  et sur  $\mathcal{X}$ . Seul le choix du critère d'arrêt nécessite quelques précautions. Pour autant, comme toutes les méthodes du premier ordre,

la vitesse de convergence s'avère parfois faible au voisinage de l'optimum et il n'est pas rare d'observer un phénomène de plateau ne conduisant pas à un optimum local. Ces difficultés peuvent être en partie contournées en utilisant des méthodes du second ordre (Gauss-Newton) [5]. En cas d'apparition d'un phénomène de plateau, l'étape 2 est remplacée par une étape incluant un terme du second ordre (hessien) dans la fonction coût.

$$\min_{U \in \mathcal{X}} \langle \nabla f(X_k), U \rangle + \langle (U - X_k), H(X_k)(U - X_k) \rangle \quad (1.98)$$

Afin de garantir la convergence de cette nouvelle séquence, il est nécessaire d'assurer la définie-positivité du hessien  $H(X_k)$  et de mettre en oeuvre des procédures de réglage relativement délicates.

### 1.6.2 Les méthodes de pénalité et de barrière

Une approche numérique qui apparaît prometteuse sur des résultats préliminaires consiste à étendre les méthodes de pénalité/barrière issues des techniques d'optimisation différentielle [75], [38] au cône SDP pour la recherche de solutions locales avec garantie de convergence (méthodes du lagrangien augmenté et méthodes de point intérieur) [128], [72], [122], [51], [123], [115], [154]. Le principe général consiste à incorporer dans une fonction lagrangienne tout ou partie des contraintes (les contraintes dures non convexes) à l'aide d'une fonction pénalité/barrière et de séquentiellement minimiser par une méthode du second ordre le lagrangien augmenté ainsi obtenu. Cette approche tombe donc dans la classe des méthodes de programmation séquentielle SDP comme la précédente.

Considérons par exemple le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & c'x \\ \text{sous} \quad & \\ & F(x) \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.99)$$

où  $c \in \mathbb{R}^m$  et  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{S}_n$  est un opérateur matriciel donné (généralement non convexe).

Dans le cas des méthodes de pénalité, l'algorithme du lagrangien augmenté dépend du choix d'une fonction de pénalité  $\Phi_p : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  telle que :

$$\Phi_p(F(x)) \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow F(x) \succeq \mathbf{0} \quad (1.100)$$

Différents choix généralisant ceux rencontrés en programmation non linéaire peuvent être faits. Par exemple, [122] propose de choisir une fonction de pénalité :

$$\Phi_p(F(x)) = c^2(F(x) - c\mathbf{1})^{-1} - c\mathbf{1} \quad (1.101)$$

Pour une discussion plus approfondie sur ces choix, on pourra consulter la référence [122]. Pour  $\Phi_p(F(x))$ , le lagrangien augmenté s'écrit alors :

$$L(x, \Lambda, c) = c'x + \text{trace}(\Lambda \Phi_p(F(x))) \quad (1.102)$$

où  $\Lambda \in \mathcal{S}_n$  est un multiplicateur de Lagrange et  $c$  est le paramètre de pénalité. Le schéma général de l'algorithme peut se résumer comme suit.

### Algorithme du lagrangien augmenté

#### Etape 1

Déterminer un point initial  $x^0$ ; initialiser le paramètre de pénalité  $c^0 > 0$  et le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda^0$ ;  $k = 0$ ;

#### Etape 2

Minimiser le lagrangien augmenté  $L_c(x, \Lambda^k, c)$ :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} L_c(x, \Lambda^k, c^k) \quad (1.103)$$

$x^{k+1} = \arg[(1.103)]$ .

#### Etape 3

Mise à jour de  $c^k$  et  $\Lambda^k$  avec  $c^{k+1} < c^k$ .

#### Etape 4

Test d'un critère d'arrêt. Arrêt si le test est vérifié sinon retour à l'étape 2.

Il va sans dire que chacune des étapes de l'algorithme doit être clairement précisée et que les choix effectués pour chacune d'elles conditionnent la réussite de l'algorithme ou du moins son efficacité numérique.

- Si l'étape d'initialisation de  $x$  n'est pas cruciale, celle de  $\Lambda$  a une grande influence sur le comportement de l'algorithme. [72] recommande d'utiliser le maximum d'information afin de choisir  $\Lambda_0$  proche de sa valeur optimale.
- La mise à jour de  $c$  et de  $\Lambda$  est également un élément important de «réglage» de l'algorithme. [72] utilise par exemple une règle du premier ordre.
- Une méthode du second ordre (méthode de Newton) est généralement utilisée pour la minimisation sans contraintes du lagrangien augmenté [122] mais l'utilisation de méthodes de région de confiance est également possible [72]. Dans le cas où l'opérateur  $F$  est non convexe, la méthode de Newton est remplacée par la méthode de Levenberg-Maquardt qui permet de régulariser le hessien si celui-ci n'est pas défini en signe. En ce qui concerne l'approche par région de confiance, outre le réglage délicat du rayon de la région de confiance, celle-ci ne semble pas réduire significativement les inconvénients liés au signe du hessien.

Sous des hypothèses standard, l'algorithme du lagrangien augmenté converge globalement vers un optimum local. Toutefois, le «doigté» nécessaire au réglage des différents paramètres rend ces approches encore peu attractives.

Une alternative aux méthodes de pénalité est donnée par les méthodes de barrière dont la généralisation à la programmation SDP a permis le développement de nombreux solveurs LMI fondés sur les méthodes de point intérieur [151], [201], [10]. Leur extension au cas non convexe est encore en phase préliminaire et il existe relativement peu de travaux sur le sujet [114], [128], [51], [115]. Les méthodes de point intérieur sont très semblables dans leur principe aux méthodes de pénalité puisque ce sont également des méthodes d'optimisation séquentielle. La principale différence vient des propriétés de la

fonction barrière qui est ajoutée au critère afin de définir un problème d'optimisation non contraint. Si l'on note  $\mathcal{F}$  l'ensemble réalisable du problème (1.99) :

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^m : F(x) \preceq \mathbf{0}\} \quad (1.104)$$

alors la fonction barrière  $B : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  est seulement définie à l'intérieur de  $\mathcal{F}$  et tend vers l'infini quand  $x$  tend vers la frontière de  $\mathcal{F}$ . Un exemple de fonction barrière est donné par la fonction  $-\log \det$  bien connue en programmation semidéfinie positive [201].

$$B(F(x)) = -\log \det F(x) \quad (1.105)$$

Cette fonction est strictement convexe et possède la propriété importante d'être auto-concordante, primordiale pour le développement d'algorithmes en temps polynomial [151].

### Définition 1.6.1 (fonction auto-concordante [151])

Etant donné un ensemble ouvert convexe  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ , la fonction  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable et convexe est  $\alpha$ -auto-concordante si  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$  et  $\forall h \in \mathbb{R}^m$  elle vérifie :

$$|\nabla_t^3 F(x + tv)| \leq 2\alpha^{-1/2} (\nabla_t^2 F(x + tv))^{3/2} \quad (1.106)$$

Cette propriété assure essentiellement la convergence en temps polynomial de la séquence de minimisation sans contrainte de la fonction  $c'x + \mu^k B(F(x))$ . L'algorithme prend alors la forme suivante.

### Algorithme de Barrière

#### Etape 1

Déterminer un point initial  $x^0 \in \text{int}\mathcal{F}$ ; initialiser le paramètre de barrière  $\mu^0 > 0$ ;  $k = 0$ ;

#### Etape 2

Résoudre le problème de barrière :

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} c'x + \mu^k B(F(x)) \quad (1.107)$$

#### Etape 3

Mise à jour de  $\mu^k$  avec  $\mu^{k+1} < \mu^k$ .

#### Etape 4

Test d'un critère d'arrêt. Arrêt si le test est vérifié sinon retour à l'étape 2.

L'étape de minimisation sans contrainte peut, comme dans le cas des méthodes de lagrangien augmenté, être menée par une méthode de Newton [51] ou par une méthode de région de confiance [128].

L'application de ces méthodes à des problèmes non convexes est relativement récente et il est difficile d'en analyser la portée exacte. Dans le premier cas, les nombreux réglages rendent hasardeux de les considérer actuellement comme opérantes pour des non spécialistes. L'extension des méthodes de barrière bute encore sur le peu de propriétés fortes des barrières utilisées. Elles sont toutefois en plein développement pour les problèmes SDP convexes et non convexes. Citons par exemple le solveur PENNON développé sur la base d'une méthode mixte pénalité/barrière dont les résultats numériques apparaissent extrêmement prometteurs [122], [123].

### 1.6.3 L'optimisation non différentiable

L'optimisation non différentiable a connu un regain d'intérêt ces dernières années dû en majeure partie à la nécessité de disposer d'une alternative crédible aux solveurs LMI usuels fondés sur des méthodes de point intérieur [99]. Ces progrès théoriques récents en optimisation non différentiable (méthodes des liasses du second ordre ; chapitre 3 de [71]) participent aussi de ce regain d'intérêt. L'optimisation non différentiable est principalement concernée par les problèmes d'optimisation convexe faisant intervenir des fonctions non différentiables. Un exemple classique rencontré couramment en théorie de la commande est le problème d'optimisation de valeur propre suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} c'x + \lambda_{max}(F(x)) \quad (1.108)$$

où  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{S}_n$  est un opérateur affine. La convexité de la fonction valeur propre maximale est essentielle pour l'utilisation des outils de l'analyse convexe et de l'analyse non différentiable. En effet, il est toujours possible de définir un hyperplan support pour toute fonction convexe à partir de la notion de sous-gradients et de sous-différentiel.

#### Définition 1.6.2 (sous-différentiel [106])

Etant donnée une fonction convexe définie sur un ensemble convexe  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'ensemble des  $\xi_0 \in \mathbb{R}^m$  tels que pour  $x_0 \in \mathcal{X}$  :

$$\partial f(x_0) = \{\xi_0 \in \mathbb{R}^m : f(x_0) + \xi_0'(x - x_0) \leq f(x)\} \quad (1.109)$$

est le **sous-différentiel** de  $f$  en  $x_0$  et tout  $\xi_0 \in \partial f(x_0)$  est appelé **sous-gradient**.

Afin de généraliser les méthodes de descente au cas non différentiable, les méthodes de ( $\epsilon$ -)sous-gradients ont été proposées [186]. Le calcul des sous-gradients nécessaires pour l'obtention des directions de descente est réalisé à l'aide d'un oracle. La sophistication plus ou moins grande des oracles a permis de définir différentes méthodes d'optimisation pour les problèmes convexes telles que les méthodes des plans de coupe [116], les méthodes du centre analytique [93], les méthodes des liasses [121], [132] ainsi que certaines variantes plus particulièrement dédiées à la fonction  $\lambda_{max}$  [71].

Dans le cas où l'hypothèse de convexité n'est pas vérifiée, les problèmes sont beaucoup plus difficiles à traiter mais il existe quelques généralisations des méthodes non différentiables [120], [52]. L'algorithme par tirage aléatoire de gradients (sous-gradients) de [52] a par exemple été testé sur des problèmes de commande (synthèse par retour de sortie statique). Ce type d'algorithme s'applique sur des problèmes de minimisation d'une fonction  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continue, continuellement différentiable presque partout et telle que son gradient quand il existe est facilement calculable.

#### Algorithme par tirage de gradients

##### Etape 1

Choisir un point initial  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ , un rayon de tirage initial  $\epsilon > 0$ , une tolérance  $\tau > 0$ , un facteur de réduction  $\theta < 1$ , un nombre de gradients à tirer  $N \in \mathbb{N}$  et  $M_1 \in \mathbb{N}$ ,  $M_2 \in \mathbb{N}$ ;  $k = 0$ .

**Etape 2**

$j = 0$ ;

1-  $G = \{\nabla f(y_i), i = 1, \dots, N\}$  en les  $N$  points  $y_i$  constitués du point courant  $x_k$  et des  $N - 1$  points tirés aléatoirement à partir d'une distribution uniforme définie sur  $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ .

2- Calculer la direction de recherche  $d_k$  par la minimisation quadratique convexe :

$$d_k = -\arg \min_{v \in \text{co}(G)} \|v\|_2 \quad (1.110)$$

Si  $\|d_k\|_2 \leq \tau$  aller à l'étape 2.

3- Chercher  $t_k > 0$  par une recherche monodimensionnelle satisfaisant :

$$f(x_k + t_k d_k) < f(x_k), \quad t_k \in (0, \bar{t}_k] \quad \bar{t}_k = \arg \max_{t_k} \|x_k + t_k d_k\|_\infty \leq \xi \quad (1.111)$$

4-  $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ ; si  $t_k = \bar{t}_k$  arrêter. Si  $j < M_2$ ;  $j = j + 1$ ; et retour à l'étape 2.1.

**Etape 3**

Si  $k < M_1$ ,  $\epsilon = \theta\epsilon$  et retour à l'étape 2 sinon terminer.

L'étape 2.2 de minimisation quadratique convexe est généralement résolue par un solveur LMI.  $d_k \neq 0$  est une direction de descente de  $f$  en  $x_k$ . Une analyse complémentaire de convergence de cet algorithme est donnée dans [53].

**1.6.4 L'optimisation globale**

De par la diversité de ses applications possibles et la difficulté des problèmes qui lui sont proposés, l'optimisation globale s'est graduellement constituée comme un champ scientifique à part entière recouvrant des approches extrêmement nombreuses et variées. Il ne s'agit donc pas de faire dans ce paragraphe une recension exhaustive de ce vaste domaine en plein développement (ce document dans son entier n'y suffirait pas). Nous souhaitons simplement rappeler le principe de la stratégie d'optimisation globale la plus répandue et qui a été particulièrement utilisée dans des problèmes d'optimisation globale posés en théorie de la commande : l'algorithme de branch and bound. Pour plus de détails sur le sujet, les références [109], [195], [153] permettent d'aborder de manière détaillée les méthodes déterministes tout en fournissant de nombreuses références sur les autres (recuit simulé, algorithmes génétiques, approches statistiques, recherche tabou, méthodes hybrides...).

Considérons le problème BMI :

$$\min_{(x, y) \in \mathcal{Q}} \lambda_{\max}(F(x, y)) \quad (1.112)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{m_x}$  et  $y \in \mathbb{R}^{m_y}$  sont les variables de décision du problème d'optimisation et  $F(x, y)$  est une fonction bilinéaire.

$$F : \mathbb{R}^{m_x} \times \mathbb{R}^{m_y} \rightarrow \mathcal{S}_n$$

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^{m_x} F_i x_i + \sum_{j=1}^{m_y} G_j y_j + \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} H_{ij} x_i y_j \quad (1.113)$$



$\mathcal{Q} \subset X \times Y$  est un hyper-rectangle avec

$$\begin{aligned} X &= [\underline{b}_{x_1}, \bar{b}_{x_1}] \times \cdots \times [\underline{b}_{x_{m_x}}, \bar{b}_{x_{m_x}}] \\ Y &= [\underline{b}_{y_1}, \bar{b}_{y_1}] \times \cdots \times [\underline{b}_{y_{m_y}}, \bar{b}_{y_{m_y}}] \end{aligned} \quad (1.114)$$

Nous définissons également l'hyper-rectangle  $\mathcal{W}(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^{m_x \times m_y}$  image de  $\mathcal{Q}$  par les variables produits  $w_{ij} = x_i x_j$  ainsi que la fonction affine  $F_L$  :

$$\begin{aligned} F_L &: \mathbb{R}^{m_x} \times \mathbb{R}^{m_y} \times \mathbb{R}^{m_x \times m_y} \rightarrow \mathcal{S}_n \\ F_L(x, y, W) &= F_0 + \sum_{i=1}^{m_x} F_i x_i + \sum_{j=1}^{m_y} G_j y_j + \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} H_{ij} w_{ij} \end{aligned} \quad (1.115)$$

Pour chaque hyper-rectangle  $\mathcal{Q}$ , une borne inférieure est définie :

$$\Phi_I(\mathcal{Q}) = \min_{(x, y) \in \mathcal{Q}, W \in \mathcal{W}(\mathcal{Q})} \lambda_{\max}(F_L(x, y, W)) \quad (1.116)$$

La borne supérieure est obtenue par un algorithme de minimisation local quelconque sur la fonction originale.

$$\Phi_S(\mathcal{Q}) = \min_{(x, y) \in \mathcal{Q}} \lambda_{\max}(F(x, y)) \quad (1.117)$$

L'idée générale est de découper l'espace de recherche de manière plus ou moins heuristique et de calculer des bornes inférieures et supérieures sur les sous-domaines ainsi constitués. Le processus global doit permettre de faire converger les bornes supérieures et inférieures vers l'optimum global.

### Algorithme de branch and bound [90]

#### Etape 1

Initialisation :  $\epsilon > 0$ ;  $k = 0$ ;  $\mathcal{Q}_0 = X \times Y$ ;  $\mathcal{T}_0 = \{\mathcal{Q}_0\}$ ;  $I_0 = \Phi_I(\mathcal{Q}_0)$ ;  $S_0 = \Phi_S(\mathcal{Q}_0)$ ;

#### Etape 2

Tant que  $|I_k - S_k| > \epsilon$  répéter :

1- Choisir  $\bar{\mathcal{Q}}$  dans  $\mathcal{T}_k$  tel que :

$$I_k = \Phi_I(\bar{\mathcal{Q}})$$

2- Faire une partition de  $\bar{\mathcal{Q}}$  en  $\bar{\mathcal{Q}}_1$  et  $\bar{\mathcal{Q}}_2$  suivant sa plus longue arête.

3- Calculer  $\Phi_I(\bar{\mathcal{Q}}_i)$ ; Si  $\Phi_I(\bar{\mathcal{Q}}_i) \leq I_k$  calculer  $\Phi_S(\bar{\mathcal{Q}}_i)$ ,  $\forall i = 1, 2$ ;

4-  $\mathcal{T}_{k+1} = \{\mathcal{T}_k - \{\bar{\mathcal{Q}}\}\} \cup \{\bar{\mathcal{Q}}_1, \bar{\mathcal{Q}}_2\}$ ;

5-  $S_{k+1} = \min \left\{ S_k, \min_{\mathcal{Q} \in \mathcal{T}_{k+1}} \Phi_S(\mathcal{Q}) \right\}$ ;  $I_{k+1} = \min_{\mathcal{Q} \in \mathcal{T}_{k+1}} \Phi_I(\mathcal{Q})$ ;

$$6- \mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_{k+1} - \{Q : \Phi_I(Q) > S_{k+1}\}; k = k + 1;$$

Pour  $\epsilon$  fixé, un tel algorithme converge en un nombre fini d'itérations. Divers raffinements sont présentés dans [90] afin d'en accélérer la convergence et d'alléger la charge de calcul. D'autres applications des techniques de branch and bound en théorie de la commande robuste peuvent être rencontrées dans la littérature [15], [16], [26], [4], [6]. Les techniques de branch and bound, outre qu'elles nécessitent une bonne expertise, induisent pour des problèmes de grande taille une charge calculatoire importante voire rédhibitoire pour certaines applications.

D'autres approches d'optimisation globale telles que la décomposition généralisée de Benders [82] ont également été utilisées pour la solution des problèmes BMI en commande. En particulier, l'algorithme GOP primal relaxé-dual présenté dans [76] a été appliqué avec succès sur des problèmes spécifiques d'analyse paramétrique et polynomiale de la marge de stabilité robuste [169]. Il a été également étendu au problème de synthèse de matrices de retour de sortie statique dont les coefficients sont supposés être bornés en amplitude [35].

Même si le problème initial est effectivement dans la majorité des cas un problème d'optimisation globale, les dernières techniques présentées ne donnent pas entièrement satisfaction de par leur lourdeur de mise en oeuvre et leur complexité de réglage pour un non spécialiste tel que peut l'être un automaticien désireux d'analyser la robustesse d'une boucle d'asservissement industrielle ou de régler une loi de commande efficace.



# Chapitre 2

## Analyse robuste

### 2.1 Introduction

La problématique générale de l'analyse robuste peut s'énoncer comme suit. Etant donnée une modélisation incertaine et une loi de commande associée, il s'agit d'établir par une étape d'analyse si cette loi de commande garantit la stabilité et un certain niveau de performance de la boucle de contre-réaction pour toute réalisation du modèle dans son ensemble d'incertitudes. Suivant les résultats de cette dernière étape, une stratégie de correction peut être nécessaire, résultant alors en la synthèse d'un nouveau compensateur. Une fois celui-ci obtenu, une nouvelle étape d'analyse du système bouclé intervient afin d'attester des propriétés réelles du système corrigé. L'étape d'analyse est donc très importante dans le processus de synthèse puisqu'elle va conditionner en partie les choix effectués pour la synthèse mais également en sanctionner les résultats.

L'analyse est usuellement séparée en deux problèmes présentant des degrés de difficulté différents : l'analyse de stabilité robuste et l'analyse de performance robuste. La notion de valeur singulière structurée ( $\mu$ -théorie) [157] a permis de donner un cadre général d'étude permettant de ramener l'analyse de performance robuste à celui de l'analyse de la stabilité robuste vis-à-vis d'un ensemble structuré d'incertitudes mettant ainsi en lumière la difficulté théorique de l'étude de la performance.

Ces problèmes d'analyse de la stabilité et de la performance robustes ont été très largement abordés dans la littérature et ont donc atteint un état de maturité important impliquant la grande complexité des problématiques actuelles. Même si une typologie exacte et exhaustive des approches possibles est toujours délicate, il est toutefois possible de dégager trois grandes approches :

- Les approches algébriques ou approches polynomiales [25], [39].
- La théorie de la valeur singulière structurée ou  $\mu$ -théorie [210].
- La théorie de Lyapunov [60].

Evidemment, celles-ci ne sont pas complètement cloisonnées et il existe de nombreux passages de l'une à l'autre mais également des outils communs. Comme nous l'avons déjà mentionné, seule la théorie de Lyapunov sera abordée ici même si quelques références seront faites à d'autres approches. L'utilisation de fonctions de Lyapunov, pour l'étude du problème d'analyse robuste, conduit dans les cas avec incertitudes structurées à poser

un problème d'optimisation non convexe possédant peu de propriétés fortes et de grandes dimensions (nombre de variables et de contraintes). Un compromis inévitable entre la complexité de la formulation et le degré de pessimisme qu'elle implique est au coeur des relaxations proposées. Dans le cadre de la théorie de Lyapunov qui est le nôtre dans ce document, nous n'aborderons de manière détaillée que le problème d'analyse de stabilité robuste pour les modèles LTI incertains polytopiques et les modèles LTI avec incertitude paramétrique réelle structurée de type linéaire fractionnaire (LFT).

## 2.2 Stabilité robuste d'un polytope de matrices

### 2.2.1 Définition du problème

Nous reprenons l'inclusion différentielle linéaire polytopique du premier chapitre permettant de définir le modèle incertain LTI autonome :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad A \in \mathcal{A} \quad (2.1)$$

où :

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A^{[i]} \quad \lambda_i > 0 \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{A} = \text{co} \{ A^{[1]}, \dots, A^{[N]} \}$$

La matrice dynamique  $A$  n'est donc pas précisément connue mais est supposée appartenir à un polytope de matrices  $\mathcal{A}$  défini comme l'enveloppe convexe des matrices sommets  $A^{[1]}, \dots, A^{[N]}$ . Toute réalisation  $A$  de la matrice dynamique peut s'exprimer comme une combinaison linéaire convexe des  $N$  matrices sommets. Ce type de modèles incertains est très général et contient le type particulier des matrices intervalles. Une matrice intervalle est définie comme une matrice réelle dont les éléments appartiennent à un intervalle.

$$A = [[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]]_{1 \leq i, j \leq n} \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij} \quad (2.3)$$

Dans ce cas, il est possible de définir un vecteur de paramètre  $\delta \in \mathbb{R}^{n^2}$  tel que le polytope de matrices s'écrit comme :

$$\mathcal{A}_\delta = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\delta) = \sum_{i=1}^{n^2} \delta_i A^{[i]} \quad \text{rang}(A^{[i]}) = 1 \quad \forall i \right\} \quad (2.4)$$

Cette dernière structure d'incertitude a été très étudiée à l'aide de méthodes issues de l'approche polynomiale car elle possède la propriété remarquable de permettre l'écriture d'un polynôme caractéristique de  $A_\delta \in \mathcal{A}$  dont les coefficients sont des fonctions multilinéaires de  $\delta$ . Il est alors possible d'appliquer un résultat important : le *mapping theorem* [25]. L'hypothèse sur le rang des matrices sommets  $A^{[i]}$  est restrictive. Cela explique en partie pourquoi des résultats plus forts ont été obtenus sur cette classe de modèles.

Afin d'utiliser une terminologie plus concise largement en usage, quand la stabilité robuste du polytope de matrices  $\mathcal{A}$  sera assurée, nous parlerons de **polytope de matrices de Hurwitz** [23].

**Problème 2.2.1**

Déterminer si le polytope de matrices  $\mathcal{A}$  est stable.

$$\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (2.5)$$

Ce problème peut être vu comme une extension dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  du problème de stabilité d'un polytope de polynômes associé au résultat fameux de Kharitonov [119] sur les polynômes intervalles. Coxson et DeMarco dans [61] ont montré par ailleurs que ce problème est  $\mathcal{NP}$ -difficile.

**Lemme 2.2.1 ([61])**

Le problème 2.2.1 est NP-difficile.

Une interprétation intéressante de ce problème a été donnée dans la référence [57] où la théorie de Lyapunov et la théorie des jeux sont combinées. L'ensemble  $\mathcal{Q}$  est défini par :

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{S}_n^{++} : \lambda_{\max}(P) = 1\} \quad (2.6)$$

Il est alors possible de formuler un test de stabilité robuste comme celui de la valeur d'un jeu à deux joueurs et à somme nulle.

**Théorème 2.2.1 ([57])**

$\mathcal{A}$  est stable ssi :

$$J = \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{Q}} \lambda_{\max}(A'P + PA) = \max_{A \in \mathcal{A}} \phi(A) < 0 \quad (2.7)$$

Tester la négativité de  $J$  est un problème non trivial de théorie des jeux. En effet, la fonction  $\phi(A)$  est généralement une fonction non différentiable et non concave. Il est donc difficile de tester la condition du point-selle (la notation  $*$  correspond à l'identification du point-selle).

$$\exists (A^*, P^*) \in \mathcal{A} \times \mathcal{Q} \mid \lambda_{\max}(A'P^* + P^*A) \leq \lambda_{\max}(A^{*'}P^* + P^*A^*) \leq \lambda_{\max}(A^{*'}P + PA^*) \quad (2.8)$$

## 2.2.2 Quelques résultats préliminaires

Les premières approches de ce problème ont principalement consisté à essayer d'étendre les résultats connus dans le cadre polynomial au cas matriciel. Malheureusement, mis à part quelques cas particuliers pour lesquels il est supposé que le polytope  $\mathcal{A}$  possède une structure particulière, il existe peu de résultats forts. En particulier, Shi et Gao ont montré que la stabilité des sommets d'une matrice intervalle symétrique est une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

**Théorème 2.2.2 ([185])**

Si  $\mathcal{A}_\delta \subset \mathcal{S}_n$  alors le polytope de matrices intervalles  $\mathcal{A}_\delta$  est Hurwitz si et seulement si les matrices sommets  $A_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$  sont des matrices de Hurwitz.

En général, même dans le cas des matrices intervalles, il n'existe pas de résultats forts extrapolés de la théorie des polytopes de polynômes. Ainsi, la conjecture des sommets proposée par Bialas [40] a été mise en défaut par des contre-exemples donnés dans [20]. Une autre conjecture possible consiste à tester les arêtes du polytope.

**Conjecture 2.2.1 (conjecture des arêtes)**

$\mathcal{A}$  est un polytope Hurwitz si et seulement si les arêtes de  $\mathcal{A}$  sont Hurwitz. Cela revient à tester la stabilité de toutes les combinaisons convexes :

$$\lambda A^{[i]} + (1 - \lambda)A^{[j]} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (2.9)$$

De même que la conjecture des sommets, celle des arêtes s'est avérée fautive pour des contre-exemples relativement simples [23]. Il est à noter que ces conjectures sont vraies pour  $n = 2$ .

Les conjectures précédentes peuvent être réinterprétées comme des tentatives afin de décider la stabilité d'un polytope de matrices par l'étude de la stabilité de ses faces de faible dimension.

**Définition 2.2.1 (face d'un polytope [50])**

Une **face** d'un polytope  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  de la forme  $H \cap \mathcal{A}$  où  $H$  est un hyperplan support de  $\mathcal{A}$ .

Le résultat le plus complet exploitant cette vision géométrique est celui donné par Cobb et DeMarco.

**Théorème 2.2.3 ([58])**

Si  $\mathcal{A}$  est un polytope de matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  avec  $n \geq 3$  alors il est suffisant de tester la stabilité de toutes les faces de dimension  $2n - 4$ . De plus, pour  $k \leq n^2$ , il existe un polytope non Hurwitz tel que toutes ses faces de dimension  $\min\{2n - 5, k - 1\}$  sont stables. Pour  $n = 2$ , il est nécessaire et suffisant de tester les faces de dimension 1 (arêtes).

Le nombre de faces de dimension égale à  $2n - 4$  croît exponentiellement avec  $n$ . Sachant que tester une seule de ces faces pose déjà un problème numérique difficile, il apparaît clairement que ce résultat très élégant n'est toutefois pas d'une grande utilité pratique. D'autres approches plus ou moins exotiques ont également été proposées. Nous en mentionnons quelques unes avec les références associées pour mémoire : conditions suffisantes utilisant la décomposition polaire [59], conditions fondées sur la transformation du problème de stabilité robuste en un problème de non singularité robuste [24], [176].

### 2.2.3 Approche par la théorie de Lyapunov

Historiquement, les premières approches traitant de sujets connexes (synthèse d'un retour d'état stabilisant un polytope de matrices) ont fait appel à des résultats directement issus de la théorie de Lyapunov [144], [108], [145]. Le problème d'analyse de stabilité robuste 2.2.1 se reformule alors comme celui de la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique paramétrée prouvant la stabilité du polytope  $\mathcal{A}$ .

**Définition 2.2.2 (stabilité robuste)**

Le polytope  $\mathcal{A}$  est Hurwitz si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov quadratique

dépendant des paramètres définie par  $P : \mathbb{S}_N \rightarrow \mathcal{S}_n$  telle que :

$$\begin{aligned} A(\lambda)'P(\lambda) + P(\lambda)A(\lambda) &< \mathbf{0} \\ P(\lambda) &\succ \mathbf{0} \end{aligned} \quad \forall \lambda \in \mathbb{S}_N \quad (2.10)$$

où  $\mathbb{S}_N$  est le simplexe associé à la description du polytope  $\mathcal{A}$ .

$$\mathbb{S}_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad 0 \leq \lambda_i \right\} \quad (2.11)$$

Il est clair que le choix de la paramétrisation de la fonction de Lyapunov est crucial dans le développement de tests de stabilité robuste numériquement exploitables. Les premiers travaux mentionnés ci-dessus ont jeté les bases de la définition de la stabilité quadratique qui a permis de donner une condition suffisante de stabilité robuste dont le test associé consiste à résoudre  $N$  LMI définies aux sommets du polytope.

### Définition 2.2.3 (stabilité quadratique [21])

Le polytope  $\mathcal{A}$  est stable quadratiquement si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov quadratique unique  $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$ ,  $P \in \mathcal{S}_n^{++}$  prouvant que le polytope est Hurwitz.

$$A'P + PA < \mathbf{0} \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (2.12)$$

Si la stabilité quadratique du polytope de matrices est établie alors la stabilité robuste de ce même polytope est également établie. Cette notion est principalement intéressante par la simplicité du test numérique associé.

### Théorème 2.2.4

Le polytope  $\mathcal{A}$  est stable quadratiquement si et seulement si  $\exists P \in \mathcal{S}_n^{++}$  solution des LMI suivantes :

$$A_i'P + PA_i < \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

et  $\dot{x} = Ax$  est stable  $\forall A \in \mathcal{A}$ .

Ce résultat est très simple à établir par combinaison convexe sur les sommets. L'emploi de la stabilité quadratique en lieu et place de la stabilité robuste revient à réaliser une relaxation du problème original dont il a été montré qu'il est NP-difficile. Cette relaxation peut être simplement visualisée à l'aide de l'interprétation par la théorie des jeux fournie dans [57]. Elle consiste à permuter le min et le max dans le problème de théorie des jeux associé et de définir ainsi une borne supérieure  $J_{quad}$  sur la valeur  $J$  du jeu initial :

$$J = \max_{A \in \mathcal{A}} \min_{P \in \mathcal{P}} \lambda_{max}(A'P + PA) < J_{quad} = \min_{P \in \mathcal{P}} \max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{max}(A'P + PA) \quad (2.14)$$

Le calcul de  $J_{quad}$  est peu complexe puisqu'il s'agit de résoudre un problème de programmation convexe. En effet, la fonction  $\max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{max}(A'P + PA)$  est une fonction convexe puisqu'elle est calculée comme un maximum sur une collection finie de fonctions convexes.



Une interprétation complémentaire de celle proposée par la théorie des jeux permet de montrer que la matrice  $P$  n'est rien d'autre qu'une variable de Lagrange issue d'une relaxation lagrangienne du problème de stabilité robuste initial obtenue de manière similaire à celle obtenue au chapitre 1 mais en «figeant» le modèle [71].

La condition (2.13), aussi séduisante soit-elle, conduit à des tests prohibitifs en terme de temps de calcul dans le cas de matrices intervalles. Le nombre de sommets est en effet alors défini au maximum par  $2^{n^2}$ . De plus, le pessimisme induit par l'emploi de la stabilité quadratique  $J_{quad} - J$  (le saut de dualité) peut être très grand (cf. 4.4.3 dans [33] pour une évaluation du pessimisme des relaxations quadratiques pour les matrices intervalles). L'idée a donc été d'utiliser des relaxations moins pessimistes en considérant des paramétrisations plus complexes de la fonction de Lyapunov (i.e. fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres). Nous ne rappelons que les résultats connus concernant les polytopes de matrices en omettant ceux relatifs à des modèles incertains affines en un vecteur de paramètres [126], [63], [74], chapitre 5 dans [71], [41]. Ces derniers modèles peuvent effectivement toujours s'écrire comme des modèles polytopiques mais au prix de l'explosion combinatoire du nombre de sommets ( $2^k$  où  $k$  est la dimension du vecteur de paramètres).

Les premières conditions de stabilité robuste d'un polytope de matrices semblent remonter au travail de Barmish et DeMarco qui proposent d'utiliser une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres polytopique.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i P_i \quad (2.15)$$

Confrontés à la difficulté de dériver des conditions numériquement testables, les auteurs proposent une condition suffisante très conservative.

### **Théorème 2.2.5 ([22])**

S'il existe  $N$  matrices  $P_j \in \mathcal{S}_n^{++}$  telles que :

$$A'_i P_j + P_j A_i \prec \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N \text{ et } \forall j = 1, \dots, N \quad (2.16)$$

alors le polytope  $\mathcal{A}$  est Hurwitz.

Une avancée qui a permis de s'affranchir définitivement (théoriquement) du test déduit de la stabilité quadratique a été proposée indépendamment dans [86] et dans [162] et repose sur le test de stabilité étendue présenté dans le théorème 1.5.10 du premier chapitre. Il est ainsi possible d'en déduire une nouvelle condition suffisante de stabilité robuste dont on peut montrer qu'elle est toujours meilleure que celle fondée sur la notion de stabilité quadratique.

### **Théorème 2.2.6 ([86], [162])**

Si  $\exists N$  matrices  $P_i \in \mathcal{S}_N^{++}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_i \\ P_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A'_i \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & G' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

alors le polytope  $\mathcal{A}$  est Hurwitz.

En fixant la matrice de Lyapunov  $P_i = P, \forall i = 1, \dots, N$  et en appliquant le lemme d'élimination, il est aisément montré que (2.17) est nécessaire pour la condition de stabilité quadratique (2.13).

Les variables matricielles intervenant dans ce test de stabilité robuste, les  $N$  matrices de Lyapunov et les matrices  $F$  et  $G$  peuvent être réinterprétées comme des variables de Lagrange issues de relaxations lagrangiennes successives du problème initial. Les matrices  $F$  et  $G$  peuvent être vues comme des paramètres de Lagrange constants permettant d'utiliser une relaxation de Lyapunov non constante (la matrice de Lyapunov est polytopique).

Un certain nombre de travaux récents améliorant les résultats précédents peuvent être présentés de manière unifiée. Si la paramétrisation polytopique de la fonction de Lyapunov est choisie *a priori*, il est possible de réécrire la condition de Lyapunov (2.10) comme une LMI paramétrée par  $\lambda$ . Le problème de stabilité robuste devient donc :

$$\exists x \in \mathbb{R}^m \mid F(x, \lambda) = -[A(\lambda)'P(\lambda) + P(\lambda)A(\lambda)] \succeq \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{S}_N \quad (2.18)$$

$x$  est le vecteur regroupant toutes les variables de décision contenues dans les matrices  $P_i, \forall i = 1, \dots, N$ . La dépendance de  $F(x, \lambda)$  vis-à-vis de  $\lambda$  est polynomiale d'ordre 2. Un résultat d'existence a été récemment donné dans [42].

### Théorème 2.2.7 ([42])

S'il existe, pour chaque  $\lambda \in \mathbb{S}_N$ , une fonction  $x(\lambda) : \mathbb{S}_N \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $F(x(\lambda), \lambda) \succ \mathbf{0}$  alors il existe une fonction polynomiale  $x_p(\lambda) : \mathbb{S}_N \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{S}_N$ ,  $F(x_p(\lambda), \lambda) \succ \mathbf{0}$ .

Le choix d'une fonction de Lyapunov polytopique revient donc à tronquer la fonction de Lyapunov à l'ordre 1.

L'idée principale afin de développer des conditions suffisantes consiste à tirer partie de cette dépendance polynomiale en exprimant la positivité d'un certain polynôme de  $\lambda$  sur le simplexe  $\mathbb{S}_N$ . En définissant le polynôme  $h(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ , on obtient la condition suffisante pour (2.18) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{S}_N, \exists x \in \mathbb{R}^m \mid \begin{array}{l} F(x, \lambda) \succeq h(\lambda)\mathbf{1} \\ h(\lambda) \geq 0 \end{array} \quad (2.19)$$

Les variables additionnelles de ce nouveau problème sont les coefficients du polynôme  $h(\lambda)$ . Le choix du polynôme  $h(\lambda)$  permet alors de réécrire le problème (2.19) comme un problème LMI en les variables de décision  $y$  ne dépendant plus de  $\lambda$ . Différents choix de  $h(\lambda)$  ont été proposés dans la littérature. En imposant la propriété de multiconvexité au polynôme  $h$ , [7] donne des conditions suffisantes très générales.

### Définition 2.2.4 ([7])

Le polynôme  $h \in \mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$  possède la propriété de multiconvexité si

$$\frac{\partial^2 h(\lambda)}{\partial \lambda_i^2} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.20)$$

Un compromis entre l'ordre élevé du polynôme, donc la charge de calcul, et le pessimisme de la condition suffisante doit être effectué pour le choix du polynôme  $h$ . Les

conditions suffisantes LMI du théorème 2.2.8 sont obtenues pour le choix suivant :

$$h(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \quad (2.21)$$

**Théorème 2.2.8 ([7])**

S'il existe  $N$  matrices  $P_i \in \mathcal{S}_n^{++}$  et  $N$  scalaires  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} A'_k P_k + P_k A_k &< -\lambda_k \mathbf{1} \quad \forall k = 1, \dots, N \\ A'_i P_i + P_i A_i + A'_j P_j + P_j A_j - (A'_i P_j + P_j A_i + A'_j P_i + P_i A_j) &\succeq -(\lambda_i + \lambda_j) \mathbf{1} \\ &1 \leq i < j \leq N \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$$

alors le polytope  $\mathcal{A}$  est stable.

Cette idée de la multiconvexité vient en fait de la référence [81] où elle est appliquée pour l'analyse de robustesse en stabilité de modèles incertains affines.

L'hypothèse forte de multiconvexité du polynôme  $h$  peut être levée comme le montre le choix proposé dans [172] et [131].

$$h(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (2.23)$$

**Théorème 2.2.9 ([172])**

S'il existe  $N$  matrices  $P_i \in \mathcal{S}_n^{++}$  telles que :

$$\begin{aligned} A'_j P_j + P_j A_j &< -\mathbf{1} \quad \forall j = 1, \dots, N \\ A'_i P_j + P_j A_i + A'_j P_i + P_i A_j &< \frac{2}{N-1} \mathbf{1} \quad 1 \leq i < j \leq N \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dans [131], la même procédure est appliquée sur une condition de stabilité robuste comprenant les multipliers de Lagrange  $F(\lambda)$  et  $G(\lambda)$  tels qu'ils ont été introduits pour la condition de stabilité étendue. Elle permet donc d'utiliser des multipliers non constants paramétrés de manière polytopique en fonction de  $\lambda$ .

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i F_i \quad G(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i G_i \quad (2.25)$$

Il est à noter que l'ensemble des contributions sur le sujet proposent des conditions suffisantes de stabilité robuste fondées sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov polytopique du type (2.15) à l'exception de la référence [149] qui propose une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres définie par :

$$P(\lambda) = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i P_i^{-1} \right)^{-1} \quad (2.26)$$

Les conditions suffisantes de stabilité robuste associées s'expriment non comme des conditions LMI mais comme un système d'équations linéaires.

**Théorème 2.2.10 ([149])**

S'il existe une matrice  $S = -S' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $Q \in \mathcal{S}_n^{++}$  telles que :

$$A'_i S + S A_i - A'_i Q + Q A_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.27)$$

alors le polytope  $\mathcal{A}$  est Hurwitz.

Nous finissons cette section par un résultat récent de la littérature qui fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un polytope de matrices utilisant les notions conjointes d'inversibilité robuste et de matrices de Lyapunov-Kronecker.

**Définition 2.2.5 (matrice de Lyapunov-Kronecker [205])**

À toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est associée la **matrice de Lyapunov-Kronecker**  $L \in \mathbb{R}^{(n(n+1)/2) \times (n(n+1)/2)}$  définie par :

$$L = A^\dagger = A \times \mathbf{1}_n + \mathbf{1} \times A \quad (2.28)$$

$\times$  est une opération apparentée au produit de Kronecker. Il est toujours possible de construire un polytope  $\mathcal{L}$  de matrices de Lyapunov-Kronecker associé au polytope  $\mathcal{A}$ .

$$\mathcal{L} = \left\{ L = \sum_{i=1}^N \lambda_i L^{[i]} \quad L^{[i]} = (A^{[i]})^\dagger, \lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.29)$$

L'auteur construit alors les matrices *virtual centre* qui vont permettre de mettre en oeuvre le test de robustesse.

**Définition 2.2.6 (matrice centre virtuel [205])**

La **matrice virtual centre** formée de  $k$  matrices  $L^{i_1}, L^{i_2}, \dots, L^{i_k}$  est définie par :

$$L_{vc,k}(i_1, i_2, \dots, i_k) = L^{[i_1]} + L^{[i_2]} + \dots + L^{[i_k]} \quad (2.30)$$

**Théorème 2.2.11 ([205])**

Le polytope  $\mathcal{A}$  est Hurwitz si et seulement si les matrices

$$L_{rn,k}(i_1, \dots, i_k) = - \left[ (L_{vc,k}(i_1, \dots, i_k))^{-1} L^{[j]} \right] \quad j = i_1, i_2, \dots, i_k \quad (2.31)$$

ont leurs valeurs propres réelles stables pour tout  $i_1 = 1, \dots, N, \dots, i_k = 1, \dots, N$  et  $k = 2, \dots, N$  et sont Hurwitz pour  $k > 2$ .

La simple lecture du théorème montre clairement que ce résultat ne permet en aucune manière de tester efficacement un polytope de matrices de taille raisonnable (sommets  $N \geq 4$  et dimension du vecteur d'état  $n > 3$ ).

## 2.3 Stabilité robuste des modèles incertains LFT

L'étude de la stabilité robuste des modèles incertains polytopiques menée à la section précédente a clairement montré que le choix de la modélisation incertaine est un élément essentiel de la définition de procédures d'analyse de la robustesse en stabilité plus ou moins pessimistes. Les modèles polytopiques constituent des familles de modèles structurés qui génère peu d'information pour l'étape d'analyse. Bien souvent, le processus de modélisation d'un système physique permet de faire apparaître naturellement une décomposition du système en sous-systèmes interconnectés. Comme nous l'avons déjà vu dans le premier chapitre, le paradigme standard de la synthèse robuste repose sur l'interconnexion (par rétro-réaction) du correcteur avec le modèle nominal (problème de synthèse) et sur l'interconnexion du modèle bouclé avec un opérateur d'incertitudes (problème d'analyse). Il n'est évidemment pas indifférent que nous retrouvions un même modèle pour ces deux interconnexions puisque, dans les deux cas, les opérateurs LFT et l'algèbre associée sont utilisés. Dans cette section, nous nous plaçons donc dans le cadre de l'analyse de stabilité robuste des modèles incertains LFT décrits par le schéma 2.1.

### 2.3.1 Définition du problème

La stabilité robuste des modèles incertains LFT se formule donc comme la stabilité d'une boucle de rétro-action dont la forme générale se trouve en figure 2.1 où  $\Delta$  est un opérateur matriciel stable constant possiblement structuré appartenant à un ensemble  $\Delta \subseteq \mathbb{C}^{m \times r}$ .  $N(s)$  est un opérateur matriciel complexe représentant le modèle nominal du système bouclé par un correcteur  $K$  donné  $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{r \times m}$ .  $s$  est la variable de Laplace,  $s \in \mathbb{C}$ .

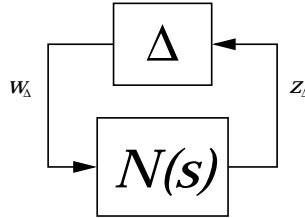


FIG. 2.1 – Le schéma standard bouclé avec incertitude

La fonction de transfert  $N(s)$  peut être réécrite comme une LFT de sa représentation d'état  $M = \begin{bmatrix} A & B_{w_\Delta} \\ C_{z_\Delta} & D_{z_\Delta w_\Delta} \end{bmatrix}$  et de la variable de Laplace  $s^{-1}\mathbf{1}$ , [210].

$$N(s) = L_l(M, s^{-1}\mathbf{1}) = D_{z_\Delta w_\Delta} + C_{z_\Delta}(s^{-1})(\mathbf{1} - A(s^{-1}))^{-1}B_{w_\Delta} \quad (2.32)$$

L'interconnexion 2.1 devient alors l'interconnexion 2.2 dont les équations sont :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_{w_\Delta} \\ C_{z_\Delta} & D_{z_\Delta w_\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_\Delta \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$x = s^{-1}\dot{x}$$

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta$$

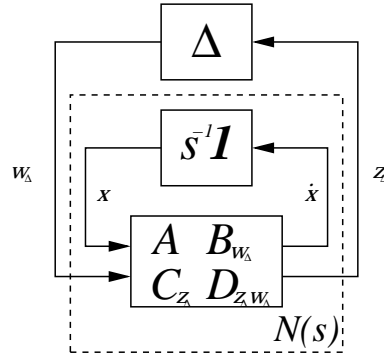


FIG. 2.2 – Modèle incertain sous forme LFT

En fonction de l'ordre de bouclage des deux interconnexions ainsi définies, l'analyse de la stabilité robuste se fait dans un contexte entrée-sortie ou espace d'état. Les équations de l'interconnexion bouclée dans un cadre entrée-sortie sont alors :

$$\begin{aligned} z_{\Delta}(s) &= N(s)w_{\Delta}(s) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{1} - N(s)\Delta)z_{\Delta}(s) = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$w_{\Delta} = \Delta z_{\Delta}$$

Dans l'espace d'état, les équations sont alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\Delta)x = (A + B_{w_{\Delta}}\Delta(\mathbf{1} - D_{z_{\Delta}w_{\Delta}}\Delta)^{-1}C_{z_{\Delta}})x \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{1} - A(\Delta)s^{-1})\dot{x} = 0 \\ x &= s^{-1}\dot{x} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pour un opérateur  $\Delta = \mathbf{0}$ , cette dernière interconnexion permet d'étudier la stabilité nominale du système de représentation d'état  $M$  ou de manière équivalente de la matrice de transfert  $N(s)$ .

Quel que soit le cadre de travail, il est donc possible de poser le problème de l'analyse de stabilité robuste de l'interconnexion 2.1 comme un problème d'analyse du bien posé de cette interconnexion [113].

### Définition 2.3.1 (bien posé [113])

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- L'interconnexion 2.3 est bien posée.

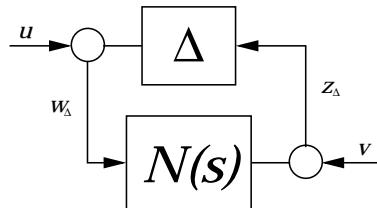


FIG. 2.3 – Modèle incertain pour le bien posé

-  $\forall s \in \mathbb{C}^+, \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$ , et pour tout  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+r}$ , il existe un unique vecteur  $\begin{bmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+r}$  et  $\gamma > 0$  tels que :

$$\left\| \begin{bmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{bmatrix} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\| \quad (2.36)$$

- Le modèle (2.35) ou (2.34) est stable de manière robuste vis-à-vis de  $\mathbf{\Delta}$ .

Il est à noter que la condition d'existence et d'unicité du vecteur  $\begin{bmatrix} z_\Delta \\ w_\Delta \end{bmatrix}$  est équivalente à la condition :

$$\det(\mathbf{1} - \Delta N(s)) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}^+, \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \quad (2.37)$$

Cette dernière condition est exactement la condition de stabilité robuste définie dans le cadre de la  $\mu$ -théorie [210]. L'intérêt de cette formulation du problème d'analyse de la stabilité robuste de 2.1 est qu'elle permet l'application de résultats très généraux de séparation topologique très intimement liés à des outils de relaxation.

### 2.3.2 La séparation topologique des graphes

#### Quelques définitions préliminaires

La notion de séparation topologique est brièvement rappelée pour être ensuite utilisée afin de dériver des conditions de stabilité robuste de 2.1. Les notions présentées ici sont directement issues des références [181], [89], [91], [113].

On considère le système interconnecté de la figure 2.4 où  $G_1$  et  $G_2$  sont des opérateurs matriciels complexes définis sur les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

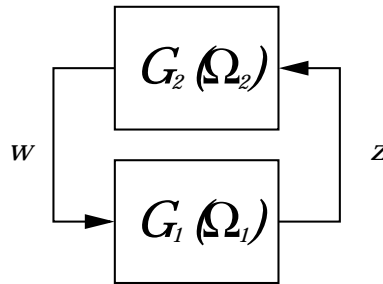


FIG. 2.4 – Modèle d'interconnexion pour la séparation topologique

Le graphe d'un opérateur linéaire  $G(\Omega)$  est défini comme l'ensemble des signaux entrée-sortie admissibles :

$$\mathcal{G}(G(\Omega)) = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+r} : z = G(\Omega)w \right\} \quad (2.38)$$

et le graphe inverse de  $G(\Omega)$  :

$$\mathcal{G}^I(G(\Omega)) = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m+r} : w = G(\Omega)z \right\} \quad (2.39)$$

**Définition 2.3.2 (séparation topologique [89])**

Le graphe de  $G_1(\Omega_1)$  et le graphe inverse  $G_2(\Omega_2)$  sont dits topologiquement séparés si

$$\mathcal{G}(G_1(\Omega_1)) \cap \mathcal{G}^I(G_2(\Omega_2)) = \{0\} \quad , \quad \forall \Omega_1 \in \mathbf{\Omega}_1, \Omega_2 \in \mathbf{\Omega}_2 \quad (2.40)$$

Il est montré dans [181] que l'étude de la stabilité de l'interconnexion 2.4 est équivalente à la séparation topologique entre le graphe  $\mathcal{G}(G_1(\Omega_1))$  et le graphe inverse  $\mathcal{G}^I(G_2(\Omega_2))$ . Ainsi, pour résoudre le problème de stabilité, il est nécessaire de rechercher une fonctionnelle  $\theta_{\Omega_1, \Omega_2}(w, z) : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée **séparateur topologique** qui prouve la séparation topologique entre les graphes concernés.

$$\begin{aligned} \theta_{\Omega_1, \Omega_2}(w, z) < 0 & \quad \text{si} \quad \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{G}(G_1(\Omega_1)) \\ \theta_{\Omega_1, \Omega_2}(w, z) \geq 0 & \quad \text{si} \quad \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{G}^I(G_2(\Omega_2)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Appliqué au problème de stabilité robuste de 2.4,

$$G_2(\Omega_2) = \Delta, \quad \Delta \in \mathbf{\Delta} \subset \mathbb{C}^{m \times r} \quad \text{et} \quad G_1(\Omega_1) = N(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}, \quad s \in \mathbb{C}^+ \quad (2.42)$$

Iwasaki et Hara ont prouvé dans [113] que l'on peut considérer sans pessimisme les fonctionnelles quadratiques proposées dans [89] indépendantes de  $\Omega_2$ .

$$\theta_{\Omega_1, \Omega_2}(w, z) = \begin{bmatrix} w^* & z^* \end{bmatrix} \Theta(\Omega_1) \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \quad \Theta \in \mathbb{C}^{(m+r) \times (m+r)} \quad (2.43)$$

Le concept de séparation topologique dans le cadre quadratique est étroitement lié à celui de contrainte intégrale quadratique (IQC) en analyse robuste [143] mais également à la théorie des multiplieurs généralisés [89]. Dans le premier cas, la condition de séparation peut être vue comme une reformulation plus générale de la condition suffisante de stabilité robuste obtenue par la théorie des IQC. Dans le second, il est montré dans [89], comment, sous certaines hypothèses, le séparateur quadratique peut être factorisé de façon à faire apparaître un paramètre libre assimilé à un multiplieur généralisé. La condition de séparation est alors réécrite sous la forme d'une contrainte de positivité à l'aide d'une transformation de secteur généralisée.

**2.3.3 Etude de la stabilité nominale**

Nous commençons par appliquer le résultat de séparation quadratique au problème de l'analyse de stabilité nominale. A cette fin, l'opérateur d'incertitude est réduit à l'opérateur d'intégration  $\Delta = s^{-1}\mathbf{1}$ ,  $s \in \mathbb{C}^+$ .

**Théorème 2.3.1 (analyse de stabilité nominale)**

Le système autonome de modèle d'état  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  est stable asymptotiquement si et seulement s'il existe un séparateur quadratique constant,  $\Theta \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , tel que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A' & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} A \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & (s^{-1}\mathbf{1})^* \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ s^{-1}\mathbf{1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \end{aligned} \quad (2.44)$$



Un choix particulier du séparateur quadratique  $\Theta$  permet de retrouver la condition de stabilité asymptotique de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  développée dans le cadre de la théorie de Lyapunov et dont on a vu, au premier chapitre, qu'elle constitue une relaxation lagrangienne exacte du problème initial de stabilité. En effet, pour un séparateur quadratique choisi tel que :

$$\Theta_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad P \in \mathcal{S}_n^{++} \quad (2.45)$$

alors les conditions (2.44) deviennent :

$$\begin{aligned} [A' \quad \mathbf{1}] \Theta_L \begin{bmatrix} A \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} &\Leftrightarrow A'P + PA < \mathbf{0} \\ [\mathbf{1} \quad (s^{-1}\mathbf{1})^*] \Theta_L \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ s^{-1}\mathbf{1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \forall s \in \mathbb{C}^+ &\Leftrightarrow P \succ \mathbf{0} \text{ et } s \in \mathbb{C}^+ \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ce résultat appelle deux commentaires. Le fait de savoir que le théorème de Lyapunov pour les systèmes linéaires temps invariant est nécessaire et suffisant (la relaxation de Lagrange liée à l'existence de  $P$  est exacte) permet de dire que le choix de  $\Theta = \Theta_L$  est non pessimiste. D'autre part, il semble que les séparateurs quadratiques peuvent être identifiés à des paramètres de Lagrange généralisés dont l'origine est une relaxation lagrangienne généralisée appelée séparation topologique (quadratique). Ce dernier point est rendu plus clair par l'application de la séparation topologique au problème d'analyse de stabilité robuste.

### 2.3.4 Etude de la stabilité robuste

Pour l'étude de l'interconnexion 2.2, deux conditions de séparation peuvent être proposées comme nous l'avons vu précédemment.

#### **Théorème 2.3.2 (Analyse de stabilité robuste)**

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- 1- L'interconnexion 2.2 est robustement stable  $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$ .
- 2- Il existe un séparateur quadratique  $\Theta(s) : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^{(m+r) \times (m+r)}$  tel que :

$$\begin{aligned} [N^*(s) \quad \mathbf{1}] \Theta(s) \begin{bmatrix} N(s) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ [\mathbf{1} \quad \Delta'] \Theta(s) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \end{aligned} \quad (2.47)$$

- 3- Il existe un séparateur quadratique,  $\Theta(\Delta) : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}^{(m+r) \times (m+r)}$  tel que :

$$\begin{aligned} [A(\Delta)' \quad \mathbf{1}] \Theta(\Delta) \begin{bmatrix} A(\Delta) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ [\mathbf{1} \quad (s^{-1}\mathbf{1})^*] \Theta(\Delta) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ s^{-1}\mathbf{1} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \forall s \in \mathbb{C}^+ \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dans les deux cas, le séparateur quadratique n'est pas constant. Si l'on s'intéresse à la condition 2-, il est simple de montrer que le choix d'un séparateur constant (indépendant de  $\Delta$ ) revient à appliquer la relaxation liée à la stabilité quadratique rencontrée pour l'analyse de stabilité des polytopes de matrices. Dans le cas des modèles incertains LFT, cette condition suffisante de stabilité robuste prend la forme suivante.

**Théorème 2.3.3 ([113])**

Si  $\exists P \in \mathcal{S}_n^{++}$  et  $\Psi \in \mathbb{R}^{(r+m) \times (r+m)}$  telles que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta' \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \\ \begin{bmatrix} A'P + PA & B_{w\Delta}P \\ PB'_{w\Delta} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'_{z\Delta} & \mathbf{0} \\ D'_{z\Delta w\Delta} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} C_{z\Delta} & D_{z\Delta w\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.49)$$

alors l'interconnexion 2.1 est robustement stable  $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$ .

Ce résultat est obtenu par application du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov [113] sur la deuxième condition du résultat 2- du théorème 2.3.2.

Les résultats de séparation topologique constituent une extension des relaxations lagrangiennes usuelles obtenues en théorie de la commande par l'application, par exemple, de la S-procédure. Ainsi, ils ont également été obtenus de manière indépendante dans [64], [183] par l'application d'une procédure appelée *full-block S-procédure*. Pour cela, il est possible de réinterpréter les résultats 3- dans le cadre de la théorie de Lyapunov par un choix judicieux du séparateur quadratique  $\Theta(\Delta)$ . Le choix non pessimiste

$$\Theta(\Delta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\Delta) \\ P(\Delta) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad P \in \mathcal{S}_n^{++} \quad (2.50)$$

conduit à écrire une condition équivalente à la condition de stabilité robuste au sens de Lyapunov.

**Théorème 2.3.4 (stabilité robuste par Lyapunov)**

L'interconnexion 2.2 est robustement stable  $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$  si et seulement si  $\exists P(\Delta) \in \mathcal{S}_n^{++}$  telle que :

$$A'(\Delta)P(\Delta) + P(\Delta)A(\Delta) \prec \mathbf{0} \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \quad (2.51)$$

La matrice  $A(\Delta)$  est une LFT inférieure de matrice coefficient  $M$  :  $A(\Delta) = L_l(M, \Delta)$ . En choisissant de nouveau un séparateur (2.50)  $\Theta(\Delta) = \Theta$  constant, il est possible d'appliquer le résultat de [64].

**Théorème 2.3.5 (full-block S-procédure [64])**

Pour  $\Theta \in \mathcal{S}_n$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1-  $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$ ,  $(\mathbf{1} - D_{z\Delta w\Delta} \Delta)$  est inversible et

$$A'(\Delta)\Theta A(\Delta) \prec \mathbf{0} \quad (2.52)$$

2- Il existe un scaling symétrique  $\Psi \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)}$  tel que :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B_{w_\Delta} \end{bmatrix}' \Theta \begin{bmatrix} A & B_{w_\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'_{z_\Delta} & \mathbf{0} \\ D'_{z_\Delta w_\Delta} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} C_{z_\Delta} & D_{z_\Delta w_\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \preceq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta' \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \end{aligned} \quad (2.53)$$

L'application de la full-block S-procédure à la condition 3- pour le choix de (2.50) conduit au même résultat que celui présenté au théorème 2.3.3. Dans les deux cas, tester la condition de stabilité robuste nécessite de rechercher une matrice  $\Theta$  réelle dans l'ensemble :

$$\Psi = \left\{ \Psi \in \mathbb{R}^{(m+r) \times (m+r)} : \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta' \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \right\} \quad (2.54)$$

Cet ensemble réalisable est un ensemble convexe pour  $\Psi$ , défini comme l'intersection d'un nombre infini d'ensembles réalisables convexes fermés. Cependant, ce domaine ne peut en général être décrit exactement sous une forme numériquement exploitable par la donnée de  $\mathbf{\Delta}$  excepté pour des formes particulières des ensembles d'incertitudes. La référence [113] donne différents schémas d'approximation plus ou moins pessimistes de cet ensemble (2.54) ( $P$ -séparateur, vertex-séparateur) pour différents types d'ensemble d'incertitudes  $\mathbf{\Delta}$ .

### Lemme 2.3.1 (vertex-separateur [113])

Si

$$\mathbf{\Delta} = \{ \text{diag}(\delta_1 \mathbf{1}_{k_1}, \dots, \delta_\alpha \mathbf{1}_{k_\alpha}) : \delta_i \in \mathbb{R}, |\delta_i| \leq 1 \} \quad (2.55)$$

alors  $\Psi_v \subseteq \Psi$  où l'ensemble  $\Psi_v$  est défini par :

$$\Psi_v = \left\{ \Psi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix}, -R_{ii} \in \mathcal{S}_m^+, i = 1, \dots, \alpha, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Delta'_k \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Delta_k \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, k = 1, \dots, 2^\alpha \right\} \quad (2.56)$$

avec  $R_{ii}$  ième bloc  $k_i \times k_i$  sur la diagonale de  $R$  et  $\Delta_k$ ,  $k = 1, \dots, 2^\alpha$  sommets de  $\mathbf{\Delta}$ .

Un compromis doit donc être fait entre le pessimisme dû au choix d'une classe de séparateurs et la complexité numérique des problèmes induits. Un aspect important des résultats de séparation topologique mis en avant dans [113] est sa capacité à unifier différents formalismes proposés dans la littérature pour le problème d'analyse de la stabilité robuste des modèles incertains LFT. Ainsi la  $\mu/k_m$ -théorie (théorie de la valeur singulière structurée) et la théorie des scalings peuvent être très simplement interprétées comme des applications de la théorie de la séparation topologique pour lesquelles des relaxations particulières du séparateur quadratique sont données ( $D$  scalings,  $D - G$  scalings, LFT-scalings) [157], [184]. Pour une présentation plus détaillée ainsi qu'un catalogue de conditions et de séparateurs, le lecteur intéressé peut consulter [161] avec profit.

# Chapitre 3

## Synthèse robuste

Le modèle incertain du système étant défini, il s'agit de calculer une loi de commande compatible avec la structure en contre-réaction de la figure 1 et qui confère au système la propriété d'être le plus insensible possible aux incertitudes et perturbations pouvant l'affecter, tout en permettant d'atteindre un niveau de performance satisfaisant. Cela implique le choix d'une structure de commande par la définition de spécifications fonctionnelles et de classes, mais également le choix d'une méthode de synthèse. Étant donnée la diversité des approches et des cadres de travail possibles, ce texte est volontairement limité à deux problèmes classiques de la théorie de la commande robuste : la synthèse de loi de commande par retour de sortie statique (incluant tous les problèmes de synthèse avec complexité réduite) et la synthèse multi-objectifs.

### 3.1 La synthèse par retour de sortie statique

#### 3.1.1 Introduction

Si le premier exemple ne peut être considéré *stricto sensu* comme un problème de synthèse robuste, il est l'exemple paradigmatique regroupant l'essentiel des problématiques envisagées pour la synthèse de loi de commande dans un cadre linéaire et sous contraintes de structure. En effet, de très nombreux problèmes de synthèse (synthèse d'ordre réduit, synthèse de correcteur PID, synthèse décentralisée) peuvent également être reformulés ainsi. Il constitue donc l'un des problèmes ouverts majeurs en théorie de la commande [45]. Dans la majorité des cas, les problèmes pratiques de commande doivent être résolus sous l'hypothèse restrictive d'information partielle. Le système de commande ne dispose pas de la connaissance complète de l'état du système afin d'élaborer la loi de commande puisque seules les mesures fournies par les capteurs (en nombre limité) lui sont accessibles.

#### 3.1.2 Formulation du problème et hypothèses

Soit le modèle d'état linéaire temps-invariant (LTI) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^r$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ . Il s'agit de résoudre le problème suivant :

**Problème 3.1.1 (retour de sortie statique)**

Déterminer  $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$  telle que  $A + BKC$  soit stable ou en d'autres termes, le spectre de la matrice en boucle fermée  $A + BKC$  est inclu dans le demi-plan complexe gauche strict.

$$\Lambda(A + BKC) \subset \mathbb{C}^- \quad (3.2)$$

$\mathcal{K}_{rss}$  est l'ensemble des matrices de retour de sortie  $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$  stabilisant le triplet  $(A, B, C)$ .

Les hypothèses suivantes sont définies habituellement pour ce problème.

**Hypothèses 3.1.1**

- 1- La paire  $(A, B)$  est stabilisable et la paire  $(A, C)$  est détectable.
- 2- Les matrices  $B$  et  $C$  sont de rang plein.

$$\text{rang}(B) = m \quad \text{rang}(C) = r \quad (3.3)$$

L'hypothèse 2 ne restreint en rien la généralité du problème initial puisqu'une simple élimination des entrées et/ou sorties redondantes permet de l'assurer.

L'hypothèse 1 est une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité par retour de sortie dynamique d'ordre fixé. Cela signifie que sous ces hypothèses, il existe un correcteur  $K$  d'ordre fixé  $k$  défini par sa représentation d'état et stabilisant le modèle (3.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le problème de stabilisation par retour de sortie dynamique d'ordre réduit est directement apparenté au problème 3.1.1 et se définit comme suit.

**Problème 3.1.2 (retour de sortie dynamique d'ordre réduit)**

Etant donné le triplet  $(A, B, C)$  définissant le modèle d'état LTI (3.1) et un entier  $k < n$ , déterminer les matrices  $A_K \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $B_K \in \mathbb{R}^{k \times r}$ ,  $C_K \in \mathbb{R}^{m \times k}$  et  $D_K \in \mathbb{R}^{m \times r}$  telles que la matrice dynamique en boucle fermée  $A_{bf}$  est stable asymptotiquement.

$$\Lambda(A_{bf}) \subset \mathbb{C}^- \quad \text{avec} \quad A_{bf} = \begin{bmatrix} A + BA_K C & BC_K \\ B_K C & D_K \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$\mathcal{K}_{krds}$  est l'ensemble des correcteurs d'ordre  $k$  de retour de sortie dynamique (3.4) stabilisant le triplet  $(A, B, C)$ .

Un des objectifs dans la définition du problème précédent est de minimiser  $k$  et de le rendre le plus petit possible par rapport à  $n$ . Pour  $k = 0$ , le problème 3.1.2 est exactement le problème 3.1.1. D'autre part, en définissant un système augmenté :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

la résolution du problème 3.1.2 d'ordre  $k$  peut se ramener à celle de 3.1.1.

Dans le cas où  $k = n$ , la synthèse par retour de sortie est dite d'ordre plein et les résultats proposés dans [182] et [141] montrent qu'un changement de variables linéarisant généralisant le cas du retour d'état résolu dans [37] permet de poser le problème d'ordre plein en termes de réalisabilité d'un système de LMI. Ce cas particulier peut donc être entièrement traité par résolution d'un problème d'optimisation convexe.

Dans le cas du problème 3.1.1 avec  $k < n$ , un certain nombre de questions de niveaux différents peuvent être abordées, classées dans un ordre croissant de généralité.

- 1- Question de l'existence: déterminer des conditions d'existence de  $K \in \mathcal{K}_{rss}$  qui soient numériquement viables.
- 2- Question de la construction: développer des algorithmes constructifs et efficaces pour le calcul de  $K$ .
- 3- Question de la convexité: le problème 3.1.1 est-il un problème intrinsèquement convexe?
- 4- Question de la complexité théorique: le problème 3.1.1 est-il un problème NP-difficile?

### 3.1.3 Quelques résultats

Les travaux de [3] ont montré que la question de l'existence peut se ramener à un problème décidable en utilisant par exemple le test de stabilité de Routh-Hurwitz. Nous entendons par là qu'une suite finie d'opérations élémentaires (un algorithme) permet de répondre par oui ou par non à la question posée. Pour des raisons de concision, nous ne donnons pas ici la définition formelle de la décidabilité que le lecteur intéressé pourra consulter dans la référence [43].

#### **Théorème 3.1.1 ([3])**

Le problème 3.1.1 est **décidable**.

Les méthodes de décision par élimination des quantificateurs de Tarski-Seidenberg peuvent alors être mises en oeuvre afin de répondre à la question de la construction. Comme nous le verrons par la suite, cette technique a des limitations numériques importantes puisque les algorithmes d'élimination des quantificateurs les plus récents sont exponentiels en le nombre de blocs de variables quantifiées considérées.

Malgré ces résultats sur la décidabilité et la somme très importante de travaux sur le sujet, la complexité théorique liée à la stabilisation du triplet  $(A, B, C)$  n'a jamais été clairement établie [45] et seule une conjecture proposant de déclarer le problème 3.1.1 NP-difficile a été proposée dans [44].

#### **Conjecture 3.1.1 ([44])**

Le problème 3.1.1 est **NP-difficile**.

Dans ce vaste ensemble d'approches différentes et parfois décorréées, deux catégories regroupant respectivement les approches structurelles et les approches constructives peuvent être distinguées. Les premières ont pour but de donner des conditions (nécessaires ou suffisantes, nécessaires et suffisantes) d'existence sans pour autant que ces conditions ne

permettent la construction effective (du point de vue numérique) de la matrice stabilisante  $K \in \mathcal{K}_{rss}$ . Nous rappelons ici une condition nécessaire fondée sur la propriété des parités alternées (PIP pour Parity Interlacing Property).

**Théorème 3.1.2 (PIP paire [191])**

Une condition nécessaire de stabilisabilité par retour de sortie statique pour le modèle (3.1) est que les deux conditions suivantes soient vérifiées.

- le nombre (compté suivant leur degré de Mc Millan) de pôles réels positifs ou nuls entre deux paires de zéros réels est pair.
- le nombre de zéros réels entre deux pôles réels est pair.

Même si elle peut être facilement testée pour un modèle (3.1) parfaitement connu, il est clair qu'outre le fait qu'elle n'assure pas l'existence d'une solution, cette propriété n'est absolument pas constructive.

### 3.1.4 Formulation par la théorie de Lyapunov

La seconde catégorie d'approches qui proposent des méthodes de construction de la matrice de retour de sortie statique est essentiellement fondée sur la théorie de Lyapunov. Dans le cadre linéariste, il est en effet simple de reformuler le problème d'existence comme un problème conjoint de recherche d'une matrice de Lyapunov  $P$  et de la matrice  $K$  devant satisfaire une inégalité de Lyapunov en boucle fermée.

**Théorème 3.1.3**

Le problème de retour de sortie statique a une solution ssi  $\exists K \in \mathbb{R}^{r \times m}$  et  $\exists P \in \mathcal{S}_n^{++}$  solutions de :

$$(A + BKC)'P + P(A + BKC) \prec \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Le problème de recherche de  $K$  est donc transformé en un problème de recherche des matrices  $(P, K)$  dans un ensemble non convexe défini par une inégalité matricielle bilinéaire dont il est prouvé que c'est un problème NP-difficile [192]. De plus, aucune paramétrisation explicite de l'ensemble des matrices  $K \in \mathcal{K}_{rss}$  n'est proposée.

#### Paramétrisations de $\mathcal{K}_{rss}$

En partant de l'inéquation de Lyapunov (3.7), une paramétrisation complète de l'ensemble  $\mathcal{K}_{rss}$  est donnée dans [111].

**Théorème 3.1.4 ([111])**

Le modèle (3.1) est stabilisable par retour de sortie statique ssi  $\exists (X, Y) \in \mathcal{S}_n^{++} \times \mathcal{S}_n^{++}$  solutions de :

$$B^\perp (AX + XA') B^{\perp'} \prec \mathbf{0} \quad (3.8)$$

$$C'^\perp (A'Y + YA) C'^{\perp'} \prec \mathbf{0} \quad (3.9)$$

avec la condition de couplage :

$$X = Y^{-1} \quad (3.10)$$

L'ensemble des matrices de retour de sortie statique stabilisant le modèle est alors paramétré par :

$$\mathcal{K}_{rss} = \{K \in \mathbb{R}^{m \times r} \mid K = -R^{-1}B'XQ^{-1}C'(CQ^{-1}C')^{-1} + S^{1/2}L(CQ^{-1}C')^{-1/2}\} \quad (3.11)$$

où les matrices  $R$ ,  $Q$ ,  $S$  et  $L$  sont définies par :

$$R^{-1} \succ B^\dagger(\Phi - \Phi B'^\perp[B^\perp\Phi B'^\perp]^{-1}B^\perp\Phi)B' \quad (3.12)$$

$$\Phi = AY + YA'$$

$$Q = XBR^{-1}B'X - XA - A'P \quad (3.13)$$

$$S = R^{-1} - R^{-1}B'XQ^{-1}[Q - C'(CQ^{-1}C')^{-1}C]QXBR^{-1} \succ \mathbf{0} \quad (3.14)$$

$$\|L\| < 1 \quad (3.15)$$

Le plus intéressant dans ce résultat n'est pas tant la paramétrisation explicite de  $\mathcal{K}_{rss}$  que les conditions d'existence (3.8), (3.9) et (3.10) sur lesquelles de nombreuses méthodes constructives actuelles reposent. En effet, le théorème 3.1.4 établit que la solution du problème 3.1.1 est donnée par les couples  $(X, Y)$  appartenant à l'ensemble convexe défini par les LMI (3.8) et (3.9) sous la contrainte égalité non convexe (3.10). De nombreux algorithmes et relaxations du problème initial utilisent cette formulation particulière [112], [94], [85] comme nous allons le voir.

D'autres paramétrisations de l'ensemble  $\mathcal{K}_{rss}$  fondées sur la théorie de Lyapunov sont également possibles.

### Théorème 3.1.5

Il existe un retour de sortie statique  $K \in \mathbb{R}^{m \times r}$  stabilisant le triplet  $(A, B, C)$  si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

- 1- Intersection d'un ensemble convexe et du domaine d'une fonction non linéaire [84] :  
 $\exists (X, F) \in \mathcal{S}_n^{++} \times \mathbb{R}^{m \times n}$  solutions de :

$$AX + XA' + BF + F'B' \prec \mathbf{0} \quad (3.16)$$

$$f(X, F) = \text{trace}[F'X^{-1}F - F'C'(CXC')^{-1}CF] \leq 0$$

Le gain de retour de sortie stabilisant est alors calculé par :

$$K = FC'(CXC')^{-1} \quad (3.17)$$



2- Equations de Riccati [13]:  $\exists X \in \mathcal{S}_n^{++}, F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  solutions de :

$$\begin{aligned} 0 &= A'X + XA - XBB'X + C'C + F'F \\ 0 &= V(A'X + XA)V \quad V = \mathbf{1} - C'(CC')^{-1}C \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les gains de retour de sortie stabilisant sont paramétrés par :

$$K = (T'F - B'X)C'(CC')^{-1} \quad T \text{ matrice orthogonale} \quad (3.19)$$

3- Calcul d'un retour d'état et de sortie partageant une unique fonction de Lyapunov [164]:  $\exists X \in \mathcal{S}_n^{++}, Z \in \mathbb{R}^{m \times r}, K_e \in \mathbb{R}^{m \times n}, F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  solutions de :

$$\begin{bmatrix} A'X + XA & XB \\ B'X & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_e' \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} C & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C' \\ F' \end{bmatrix} Z' \begin{bmatrix} K_e & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Le gain de retour de sortie stabilisant est alors calculé par :

$$K = -F^{-1}Z \quad (3.21)$$

4- Paramétrisation d'un ellipsoïde non vide [165]:  $\exists Z \in \mathcal{S}_m^{++}, P \in \mathcal{S}_n^{++}, X \in \mathcal{S}_r, Y \in \mathbb{R}^{r \times m}$  solutions de :

$$\begin{aligned} X &\preceq YZ^{-1}Y' \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A & B \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A & B \end{bmatrix} &\prec \begin{bmatrix} C & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le gain de retour de sortie stabilisant est alors un élément de l'ellipsoïde de matrices défini par le triplet  $(X, Y, Z)$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & K' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ K \end{bmatrix} \preceq \mathbf{0} \quad (3.23)$$

Si toutes ces paramétrisations sont équivalentes théoriquement, elles possèdent des propriétés distinctes qui permettent de développer des relaxations convexes adéquates ou des approches purement algorithmiques et numériques.

### Quelques relaxations

Devant la difficulté de résoudre exactement l'une ou l'autre des conditions imposées dans les différentes paramétrisations, des relaxations convexes de certaines d'entre elles ont été proposées. Elles sont donc définies par des conditions suffisantes d'existence décrites en termes de conditions LMI.

En ce qui concerne la paramétrisation 1 du théorème 3.1.5, la difficulté principale provient de la non convexité de la fonction  $f(X, F)$ . En étudiant les propriétés de cette fonction, les auteurs ont montré qu'un hyperplan support de l'épigraphe de  $f$  peut être calculé sur un sous-ensemble du domaine de  $f$  permettant ainsi de définir un algorithme

de plans de coupe. Toutefois, la convergence de cet algorithme n'est pas garantie. Une alternative simple consiste à imposer des conditions supplémentaires qui vont assurer que la fonction  $f$  s'annule.

**Théorème 3.1.6 ([84])**

S'il existe  $X \in \mathcal{S}_n^{++}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times r}$  solutions de :

$$\begin{aligned} AX + XA' + BF + F'B' &< \mathbf{0} \\ CX &= WC \\ F &= ZC \end{aligned} \tag{3.24}$$

alors tout gain  $K$  donné par (3.17) est un retour de sortie statique stabilisant pour le triplet  $(A, B, C)$ .

Les égalités supplémentaires garantissent que  $f(X, F) = 0$ . Les conditions d'existence de solutions à (3.24) étant inconnues, il est difficile d'évaluer le pessimisme d'une telle relaxation. Quelques éléments numériques chiffrés sont donnés dans la référence [155].

Dans le même esprit, deux conditions suffisantes duales imposant des conditions supplémentaires de commutation sont les suivantes.

**Théorème 3.1.7 ([62])**

1- S'il existe  $X \in \mathcal{S}_n^{++}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{m \times r}$  solutions de :

$$\begin{aligned} AX + XA' - BNC - C'N'B' &< \mathbf{0} \\ MC &= CX \end{aligned} \tag{3.25}$$

alors la matrice

$$K = -NM^{-1} \tag{3.26}$$

est un gain statique stabilisant pour le triplet  $(A, B, C)$ .

2- S'il existe  $Y \in \mathcal{S}_n^{++}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{m \times r}$  solutions de :

$$\begin{aligned} A'Y + YA - BNC - C'N'B' &< \mathbf{0} \\ BM &= YB \end{aligned} \tag{3.27}$$

alors la matrice

$$K = -M^{-1}N \tag{3.28}$$

est un gain statique stabilisant pour le triplet  $(A, B, C)$ .

Malgré l'apparent pessimisme des conditions de permutation sur les matrices  $C$  ou  $B$ , ces conditions sont intéressantes puisqu'elles permettent aisément d'incorporer des contraintes structurelles additionnelles (décentralisation, robustesse vis-à-vis d'incertitudes polytopiques, contrainte  $H_\infty$ ). Enfin, il est montré qu'il existe une transformation

de similarité sur le triplet  $(A, B, C)$  pour laquelle les conditions suffisantes (3.25) (respectivement (3.27)) deviennent nécessaires et suffisantes. Evidemment, le coeur du problème reste entier puisqu'aucun élément ne permet de construire cette transformation.

La paramétrisation 2 a donné lieu à une heuristique LMI itérative [54] interprétable également comme une relaxation convexe. Une partie des variables est «intelligemment» initialisée rendant ainsi la deuxième étape convexe par rapport aux variables restantes. Ce principe est en particulier appliqué sur la paramétrisation 3 dont la structure se prête bien à l'initialisation «intelligente». En effet, la variable  $K_e$  est nécessairement un retour d'état stabilisant pour la paire  $(A, B)$ . En choisissant judicieusement  $K_e \in \mathcal{K}_{res}$  à l'étape d'initialisation, on peut espérer obtenir une solution pour le problème LMI (3.20) pour  $K_e$  fixé.

**Théorème 3.1.8 ([164])**

S'il existe  $\exists X \in \mathcal{S}_n^{++}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  solutions de (3.20) pour  $K_e = RY^{-1}$  où  $(Y, R) \in \mathcal{S}_n^{++} \times \mathbb{R}^{n \times m}$  solution du problème LMI :

$$AY + YA' + BR + R'B' \prec \mathbf{0} \quad (3.29)$$

alors le gain  $K = -F^{-1}Z$  est un gain de retour de sortie statique stabilisant pour le triplet  $(A, B, C)$ .

Jusqu'à présent, aucun résultat théorique n'a pu être fourni concernant la paramétrisation des retours d'état conduisant à une étape LMI réalisable pour la paramétrisation 3. En pratique, la paramétrisation (3.29) s'est révélée particulièrement bien adaptée. Cette constatation est étayée par les liens entre stabilisabilité quadratique et stabilisation par retour de sortie statique mis en évidence dans [55]. Une approche similaire mais moins efficace peut être trouvée dans la référence [34].

**Quelques algorithmes**

Dans cette section, quelques approches purement numériques du problème de stabilisation par retour de sortie statique sont rappelées. Ces approches ont pour précurseurs les travaux développés pour le problème de synthèse LQ (ou  $\mathcal{H}_2$ ) par retour de sortie statique, apparentées à des méthodes itératives de descente (méthode de Anderson et Moore [2], méthodes de Levine-Athans primale et duale [136], méthode de Newton [139]). Outre leur médiocre comportement numérique (vitesse de convergence faible) et leur réglage parfois délicat, elles nécessitent une initialisation  $K_0 \in \mathcal{K}_{r_{ss}}$ . Nous intéressant exclusivement à la question de la construction d'une solution  $K \in \mathcal{K}_{r_{ss}}$  quand cet ensemble est non vide, il est clair que ces méthodes n'apportent pas une réponse satisfaisante ni à la question de l'existence ni à la question de la construction. Elles ne peuvent être utilisées que pour trouver des solutions locales lors de l'optimisation d'un critère. De ces méthodes itératives, nous avons extrait trois algorithmes qui nous ont paru particulièrement intéressants.

Soient les deux ensembles de matrices symétriques :

$$\mathcal{X} = \left\{ X \in \mathcal{S}_n^{++} : B^\perp (AX + XA') B^{\perp'} \prec \mathbf{0} \right\} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ Y \in \mathcal{S}_n^{++} : C'^\perp (A'Y + YA) C'^{\perp'} \prec \mathbf{0} \right\} \quad (3.31)$$

Le premier algorithme appelé **algorithme min/max** consiste à successivement minimiser la plus grande valeur propre du produit  $XY$  par rapport à  $Y$  pour  $X$  fixée et à maximiser la plus petite valeur propre de  $XY$  par rapport à  $X$  pour  $Y$  fixée.

### Algorithme min/max [85]

#### Etape 1

Initialiser  $X_0 \in \mathcal{X}$ ;  $k=0$ .

#### Etape 2

Itérer sur les étapes 1 et 2 jusqu'à la convergence.

1- Déterminer  $(\lambda_k, Y_k)$  solutions du problème LMI :

$$\begin{array}{ll} \min_{\lambda, Y \in \bar{\mathcal{Y}}} & \lambda \\ \text{sous} & \\ & X_k^{-1} \preceq Y \preceq \lambda X_k^{-1} \end{array} \quad (3.32)$$

2- Déterminer  $(\mu_{k+1}, X_{k+1})$  solutions du problème LMI :

$$\begin{array}{ll} \max_{\mu, X \in \bar{\mathcal{X}}} & \mu \\ \text{sous} & \\ & \mu Y_k^{-1} \preceq X \preceq \mu Y_k^{-1} \end{array} \quad (3.33)$$

Les ensembles  $\bar{\mathcal{X}}$  et  $\bar{\mathcal{Y}}$  sont définis pour  $\epsilon > 0$  par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{X}} &= \{X \in \mathcal{S}_n^{++} : B^\perp (AX + XA') B^{\perp'} \prec -\epsilon\} \\ \bar{\mathcal{Y}} &= \{Y \in \mathcal{S}_n^{++} : C'^\perp (A'Y + YA) C'^{\perp'} \prec -\epsilon\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sous les hypothèses :

$$\begin{aligned} \forall X \in \bar{\mathcal{X}} \quad \rho X \in \bar{\mathcal{X}} \quad \rho \geq 1 \\ \forall Y \in \bar{\mathcal{Y}} \quad \rho Y \in \bar{\mathcal{Y}} \quad 0 < \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

l'algorithme min/max a les propriétés de convergence global vers un minimum local.

#### Théorème 3.1.9 ([85])

- $1 \leq \lambda_{k+1} < \lambda_k$  et  $\mathbf{0} \prec Y_k \preceq Y_{k+1}$ .
- $\mu_k < \mu_{k+1} \leq 1$  et  $\mathbf{0} \prec X_{k+1} \preceq X_k$ .
- Si la séquence  $Y_k$  est bornée alors  $X_\infty Y_\infty = \mathbf{1}$ .

Un algorithme très proche conceptuellement de l'algorithme min/max a été défini dans [112]. En lieu et place d'une minimisation/maximisation, les auteurs proposent une séquence de minimisations successives de la plus grande valeur propre du produit  $XY$  par rapport à  $X$  ( $Y$ ) pour  $Y$  ( $X$ ) fixée. La solution issue de la minimisation est remplacée

par un calcul de centre analytique plus efficace en terme de vitesse de convergence. Si l'on suit les auteurs, ce dernier algorithme serait plus efficace que le min/max sans toutefois que les propriétés de convergence aient été clairement établies.

Une autre solution afin de déterminer un couple  $(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  vérifiant la condition (3.10) est d'utiliser la notion de projection sur un ensemble convexe. Etant donnée une famille d'ensembles convexes fermés, l'idée est de faire converger une séquence de projections alternées sur ces ensembles vers un point intérieur à l'intersection des ensembles.

### Algorithme des projections alternées

#### Etape 1

Initialiser  $(X_0, Y_0) \in \mathcal{S}_n^{++} \times \mathcal{S}_n^{++}$ ;  $k = 0$ .

#### Etape 2

Itérer sur les sous-étapes 1, 2 et 3 jusqu'à la convergence.

1- Déterminer  $(X, Y)$  solutions du problème LMI :

$$\begin{aligned} & \min_{(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \|X - X_k\|_F^2 + \|Y - Y_k\|_F^2 \\ & \text{sous} \\ & \begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

2- Décomposer

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} = V \Sigma V' \quad (3.37)$$

où  $V' = [V'_1 \ V'_2] \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  et  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  contient les  $n$  valeurs propres les plus grandes.

3- Calculer

$$X_{k+1} = V_1 \Sigma V'_1 \quad Y_{k+1} = V_2 \Sigma V'_2 \quad (3.38)$$

En général, ce type d'algorithme ne peut assurer de convergence que localement dans un voisinage d'un point réalisable recherché (cf. chapitre 13 dans [71]).

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, les problèmes comportant des contraintes du type (3.10) sur les variables  $(X, Y)$  peuvent s'exprimer de manière équivalente sous la forme de problèmes comprenant une condition LMI associée à une condition de rang.

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} = n \quad (3.39)$$

Dans [70], ce dernier problème est redéfini comme un problème de complémentarité conique.

$$\begin{aligned} & \min_{(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \text{trace}(XY) \\ & \text{sous} \\ & \begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.40)$$

L'ensemble réalisable de (3.40) est non vide si et seulement si  $(A, B)$  est stabilisable et  $(C, A)$  est détectable [111]. Un algorithme du gradient conditionnel est alors appliqué à (3.40). Cet algorithme est particulièrement intéressant numériquement puisque l'on retrouve les résultats de convergence suivants.

**Théorème 3.1.10 (algorithme du gradient conditionnel [70])**

La séquence  $t_k = \text{trace}(X_k Y_{k-1} + Y_k X_{k-1})$  est décroissante et bornée inférieurement par  $2n$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t^* \geq 2n \quad (3.41)$$

De plus,  $t^* = 2n$  ssi  $XY = \mathbf{1}$ . A chaque étape,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} X & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & Y \end{bmatrix} \leq 2n - \min(m, r) \quad (3.42)$$

Cette procédure est toutefois difficilement adaptable à la recherche d'un retour de sortie statique minimisant un critère donné  $(H_2, H_\infty)$ . De telles extensions ont toutefois été présentées dans [127] et [129]. D'autre part, cet algorithme légèrement modifié a été appliqué à la paramétrisation 4 (ellipsoïde de matrices [165]). Enfin, la référence [155] donne une comparaison numérique entre ces trois approches ainsi qu'avec certaines relaxations évoquées dans la section précédente.

Les méthodes de pénalité et de barrière présentées au premier chapitre ont également été utilisées pour aborder le problème de stabilisation par retour de sortie statique. Ainsi, [72] propose de le redéfinir comme le problème générique suivant :

$$\begin{array}{ll} \min_{(X, Y) \in \mathcal{X}} & \gamma \\ \text{sous} & X = Y^{-1} \end{array} \quad (3.43)$$

où  $\mathcal{X}$  est un ensemble convexe défini par des contraintes LMI et  $\gamma$  est une constante. (3.43) correspond par exemple à un problème d'optimisation de performance par retour de sortie statique. La fonction pénalité associée à (3.43) est définie par :

$$\Phi_c(X, Y, \Lambda, c) = \text{trace}[\Lambda(XY - \mathbf{1})] + \frac{c}{2} \text{trace}[(XY - \mathbf{1})'(XY - \mathbf{1})] \quad (3.44)$$

En ce qui concerne les méthodes de point intérieur, les auteurs de [128] ont défini une fonction barrière pour traiter le problème LQ par retour de sortie statique.

$$B_\mu(K, X) = -\mu \log \det(X) + \log \det(-(A + BKC)X + X(A + BKC)') \quad (3.45)$$

Une contribution intéressante et originale dans ce domaine a été produite par [51] où la recherche de gains de retour de sortie statique est transformée en un problème de minimisation de **l'abscisse spectrale robuste**  $\alpha_\epsilon(A(x))$ .

$$\begin{array}{ll} \alpha_\epsilon(A(x)) = \min_{\gamma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^p, X \in \mathcal{S}_n} & \gamma \\ \text{sous} & \delta \mathbf{1} \preceq X \preceq \mathbf{1} \end{array} \quad (3.46)$$

$$2\gamma X \succeq A(x)'X + XA(x)$$

$x \in \mathbb{R}^{mr}$  est le vecteur des variables de décision contenues dans le gain  $K$ . Pour un coefficient de robustesse fixé  $\delta \in [0, 1]$  faible, (3.46) est un problème non convexe dont l'optimum global est difficile à calculer. La fonction barrière proposée dans [51] est définie par :

$$\begin{aligned} B_\mu(\gamma, x, X) = & \gamma - \mu \log \det(\mathbf{1} - X) - \mu \log \det(X - \delta \mathbf{1}) \\ & - \mu \log \det(2\gamma X - A(x)'X - XA(x)) - \mu \log(\psi^2 - x'x) \end{aligned} \quad (3.47)$$

$\psi$  est une constante permettant d'imposer une contrainte  $\|x\|_2 \leq \psi$  sur la norme des variables de décision de  $K$ . L'abscisse spectrale robuste est une «régularisation» de l'**abscisse spectrale**  $\alpha(A(x))$  dont le calcul est obtenu par la résolution du problème (3.48).

$$\begin{aligned} \alpha(A(x)) = & \min_{\gamma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^p, X \in \mathcal{S}_n} \gamma \\ & \text{sous} \\ & \mathbf{0} \prec X \\ & 2\gamma X \succeq A(x)'X + XA(x) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ce dernier problème est généralement non différentiable à l'optimum. Cela implique donc d'utiliser des méthodes d'optimisation non différentiables (méthode par tirage du gradient) présentées au chapitre 1 [51]. Ce même algorithme a par ailleurs été développé également pour des alternatives du problème de calcul de l'abscisse spectrale : l'optimisation du  $\epsilon$ -pseudospectre  $\alpha_{p\epsilon}(A(x))$  et du rayon de stabilité complexe  $\beta(A(x))$  [52]. Nous rappelons la définition du  $\epsilon$ -pseudospectre qui est très étroitement liée à l'abscisse spectrale robuste et permet d'obtenir de meilleurs résultats pour la synthèse de retour de sortie statique.

$$\begin{aligned} \alpha_{p\epsilon}^*(A(x)) = & \min_{x \in \mathbb{R}^p} \max_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{Re} z \\ & \text{sous} \\ & \sigma_{\min}(A(x) - z\mathbf{1}) \leq \epsilon \end{aligned} \quad (3.49)$$

En effet, pour  $\epsilon > 0$ ,  $\forall \delta \in (0, 1)$  et  $n$  fixé,  $\exists \epsilon_1, \epsilon_2, C_1, C_2$  tels que :

$$C_1 \alpha_{p\epsilon_1}(A(x)) < \alpha_\delta(A(x)) < C_2 \alpha_{p\epsilon_2}(A(x)) \quad (3.50)$$

Il y a donc une certaine équivalence entre abscisse spectrale robuste et  $\epsilon$ -pseudospectre. Afin de mettre en oeuvre l'algorithme par tirage aléatoire de gradient, il est nécessaire de disposer du calcul explicite du gradient de la fonction pseudospectrale  $\alpha_{p\epsilon}(X)$ .

$$\nabla \alpha_{p\epsilon}(X) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{u^*v} uv^* \right) \quad (3.51)$$

où  $u$  et  $v$  sont respectivement les vecteurs singuliers à gauche et à droite correspondant à  $\sigma_{\min}(X - z\mathbf{1})$ .

## 3.2 La synthèse mixte $H_2/H_\infty$

### 3.2.1 Introduction

Le deuxième exemple recouvre à lui seul un très grand nombre de formalismes et d'approches différentes qui nécessiteraient un ouvrage entièrement dédié à leur présentation. Pour cette raison, nous avons choisi de focaliser notre attention sur le problème mixte  $H_2/H_\infty$  qui est également un problème très largement ouvert.

Depuis la fin des années 80, les théories de la synthèse  $H_2$  et de la synthèse  $H_\infty$  sont bien établies. Ce sont donc principalement les applications de ce type de synthèse dans l'espace d'état à des cas pratiques de plus en plus complexes qui se sont développées ces dernières années. La confrontation de ces théories très élégantes mais en partie fermées a conduit à faire deux constats complémentaires. D'une part, il est bien connu depuis les travaux présentés dans [65], que le régulateur LQG peut présenter des marges de robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, dramatiquement et arbitrairement faibles. D'autre part, les nombreuses applications récentes des compensateurs  $H_\infty$  à des problèmes pratiques ont également montré qu'il est relativement difficile d'obtenir avec ce type de correcteurs un niveau satisfaisant de performances mesurées par exemple par la norme  $H_2$ . Cela provient en partie du fait que la synthèse  $H_\infty$  est essentiellement fondée sur l'analyse de la performance dans le pire des cas alors que la norme  $H_2$  reflète une performance moyenne. Face à ces deux constats, l'idée d'associer ces deux types de performance est donc apparue relativement naturelle d'autant que les approches  $H_2$  et  $H_\infty$  partagent le même formalisme fondé sur le problème standard.

### 3.2.2 Formulation du problème et hypothèses

Cette idée a éclos à la fin des années 80 en prenant la forme de la définition du problème mixte  $H_2/H_\infty$  dont le schéma standard est représenté par la figure 3.1.

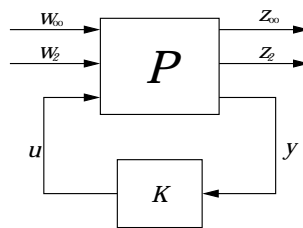


FIG. 3.1 – Modèle standard du problème  $H_2/H_\infty$

La matrice de transfert  $P$  est usuellement partitionnée suivant les signaux d'entrée et de sortie.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_\infty & P_{\infty 2} & P_{\infty u} \\ P_{2\infty} & P_2 & P_{2u} \\ P_{y\infty} & P_{y2} & P_{yu} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$



La réalisation du modèle d'état généralisé est donnée par :

$$P(s) := \left[ \begin{array}{c|ccc} A & B_\infty & B_2 & B \\ \hline C_\infty & D_\infty & \mathbf{0} & D_{\infty u} \\ C_2 & \mathbf{0} & D_2 & D_{2u} \\ C & D_{y\infty} & D_{y2} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.53)$$

En définissant les matrices de transfert obtenues comme les transformations fractionnaires linéaires de  $K$  sur la partition adéquate de  $P$  :

$$T_{z_\infty w_\infty}(K) = P_\infty + P_{\infty u} K (\mathbf{1} - P_{yu} K)^{-1} P_{y\infty} \quad (3.54)$$

$$T_{z_2 w_2}(K) = P_2 + P_{2u} K (\mathbf{1} - P_{yu} K)^{-1} P_{y2}$$

et l'ensemble des correcteurs stabilisant de manière interne la boucle par  $\mathcal{K}$ , le problème standard  $H_2/H_\infty$  est le suivant.

### Problème 3.2.1 (problème $H_2/H_\infty$ )

Etant donné un niveau de performance  $H_\infty$  admissible  $\gamma$ , déterminer un retour de sortie admissible ( $K \in \mathcal{K}$ ) tel que :

$$\begin{aligned} & \inf_{K \in \mathcal{K}} \|T_{z_2 w_2}(K)\|_2 \\ & \text{sous} \\ & \|T_{z_\infty w_\infty}(K)\|_\infty \leq \gamma \end{aligned} \quad (3.55)$$

L'objectif est de résoudre un problème d'optimisation des performances nominales de la boucle fermée, mesurées par la norme  $H_2$ , sous une contrainte de stabilité robuste exprimée par la norme  $H_\infty$ . Le problème mixte  $H_2/H_\infty$  permet d'intégrer ainsi l'exigence de performances optimisées et de robustesse en un seul correcteur.

Le problème mixte standard  $H_2/H_\infty$  est un problème très difficile à résoudre et pour lequel il existe peu de résultats analytiques forts. Ainsi il n'existe pas de solution analytique au problème standard (3.55) sauf dans un cas particulier [177] et il est de plus impossible de connaître *a priori* une borne sur l'ordre du correcteur optimal.

Les hypothèses classiques issues du cadre de travail de la commande  $H_\infty$  sont définies dans la littérature.

#### Hypothèses 3.2.1

- 1-  $(A, B)$  est stabilisable.
- 2-  $(A, C)$  est détectable.

Les hypothèses 1 et 2 sont des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un correcteur  $K$  stabilisant  $P$  de manière interne et donc pour que l'ensemble  $\mathcal{K}$  soit non vide.

#### Hypothèses 3.2.2

- 3- La matrice

$$\left[ \begin{array}{cc} A - j\omega \mathbf{1} & B \\ C_\infty & D_{\infty u} \end{array} \right] \quad (3.56)$$

est de rang plein pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

4- La matrice

$$\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B \\ C_2 & D_{2u} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

est de rang plein pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

5- La matrice

$$\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B_\infty \\ C & D_{y\infty} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

est de rang plein pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

6- La matrice

$$\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B_2 \\ C_2 & D_{y2} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

est de rang plein pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$

Les hypothèses 3 à 6 sont essentiellement des hypothèses techniques permettant de s'assurer que les matrices hamiltoniennes associées au problème  $H_2$  et au problème  $H_\infty$  intrinsèquement définis dans (3.55) possèdent la propriété de stabilité et de complémentarité. Certaines conditions pourraient certainement être relaxées sans que le problème mixte ne devienne singulier. Par exemple la condition 4- garantit la non-singularité de la partie  $H_2$  du problème et l'hypothèse 3- garantit la non-singularité de la partie  $H_\infty$ . Une partie des conditions est certainement redondante puisque le même correcteur est utilisé pour le problème mixte. La définition rigoureuse d'un problème mixte singulier et des conditions de régularisation reste un sujet ouvert.

### 3.2.3 Existence de la solution optimale

Le problème (3.55) est très intimement lié aux deux problèmes sous-jacents que sont le problème  $H_2$  et le problème  $H_\infty$ . Les notations utilisées dans cette section sont les suivantes :

- $K_2^* = \arg \left[ \inf_{K \in \mathcal{K}} \|T_{z_2 w_2}(K)\|_2 = \alpha_2^* \right]$
- $\gamma_2 = \|T_{z_\infty w_\infty}(K_2^*)\|_\infty$
- $K_\infty^* = \arg \left[ \inf_{K \in \mathcal{K}} \|T_{z_\infty w_\infty}(K)\|_\infty = \gamma_\infty^* \right]$

$K_{mix}^*$  est le correcteur optimal du problème mixte (3.55) avec  $\alpha^*$  le coût  $H_2$  optimal et  $\gamma^*$  le coût  $H_\infty$  optimal correspondants. Il est alors possible de déduire les résultats d'existence suivants :

#### **Théorème 3.2.1 ([199])**

- Pour  $0 < \gamma < \gamma_\infty^*$ , il n'existe pas de correcteur résolvant le problème mixte (3.55).

- Pour  $\gamma_2 < \gamma < \infty$ , alors la contrainte  $H_\infty$  est dite **redondante**.

$$\begin{aligned} K_{mix}^* &= K_2^* \\ \alpha^* &= \alpha_2^* \\ \gamma^* &= \gamma_2 \end{aligned}$$

La région définie par  $\gamma_\infty^* < \gamma < \gamma_2$  est évidemment la région la plus intéressante et nécessite d'inclure une discussion menée à la sous-section suivante sur l'ordre du correcteur optimal.

### 3.2.4 Unicité et ordre du compensateur

Contrairement aux problèmes de synthèse élémentaires  $H_2$  et  $H_\infty$ , les questions d'unicité et d'ordre de la solution optimale sont des questions primordiales pour le problème mixte.

Le problème de l'unicité du compensateur optimal a été complètement résolu dans [197]. En effet, sous l'hypothèse additionnelle  $D_2 = \mathbf{0}$ , la paramétrisation de Youla-Kučera des compensateurs stabilisant permet d'écrire que toute fonction de transfert stable peut être paramétrée de la façon suivante :

$$T_{z_2 w_2} = T_{22} + T_{23}QT_{32} \quad (3.60)$$

$$T_{z_\infty w_\infty} = T_{11} + T_{13}QT_{31} \quad (3.61)$$

avec  $T_{ij} \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $Q \in \mathcal{RH}_2$ .

$\mathcal{RH}_2$  est l'espace de Hardy des fonctions rationnelles  $\hat{f}(s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$  analytiques dans  $Re(s) > 0$  telles que :

$$\|\hat{f}\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^*(j\omega)\hat{f}(j\omega)d\omega \right)^{1/2} < \infty \quad (3.62)$$

$\mathcal{RH}_\infty$  est l'espace de Hardy des fonctions  $\hat{f}(s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$  analytiques dans  $Re(s) > 0$  telles que :

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{Re(s)>0} \bar{\sigma}(\hat{f}(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\hat{f}(j\omega)) < \infty \quad (3.63)$$

#### Théorème 3.2.2 ([197])

Si  $\gamma > \gamma_\infty^*$  alors le problème (3.55) est équivalent à un problème d'optimisation convexe en dimension infinie.

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \inf_{\substack{Q \in \mathcal{RH}_2 \\ \text{sous} \\ \|T_{11} + T_{13}QT_{31}\|_\infty \leq \gamma}} \|T_{22} + T_{23}QT_{32}\|_2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

La solution de (3.64) est unique et si  $\gamma < \gamma_2$  alors  $\gamma^* = \gamma$ .

Le paramètre de Youla  $Q$  est donc à rechercher dans l'espace de fonction  $\mathcal{RH}_2$ . Afin d'en prendre toute la mesure, ce résultat théorique très important doit être complété par ceux obtenus sur l'ordre du compensateur optimal. S.R. Wells et D.B. Ridgely ont ainsi étudié les solutions en retour de sortie dynamique d'ordre croissant pour le problème mixte standard.

**Théorème 3.2.3 ([199])**

Si l'on note  $n$  l'ordre du modèle d'état de (3.55) et  $n_K$  celui du compensateur alors si  $n_K > n$  et  $\gamma_\infty^* < \gamma < \gamma_2$  :

- $\alpha_2^* < \alpha_{n_K}^* \leq \alpha_n^*$
- $\gamma^* = \gamma$
- $n^* \geq n$

Ce résultat préliminaire peut être complété par celui donné dans [142] qui établit que pour une contrainte non redondante, l'ordre du correcteur à l'optimum est infini et que la fonction de transfert en boucle fermée résultante  $T_{z_2 w_2}$  (obtenue comme une limite) est une fonction de transfert d'ordre infini ne permettant pas de réalisation exponentiellement stable.

Ce résultat est très important puisqu'il montre qu'il peut être inutile et même néfaste de résoudre le problème mixte (3.55) dans sa généralité (sans structure de commande définie). Cela justifie donc le choix, usuellement rencontré dans la littérature, de résoudre des problèmes mixtes en supposant donnée la structure du correcteur (retour d'état - retour de sortie) et en supposant que l'ordre du compensateur est fixé. Ce résultat est en contradiction avec les théories de la commande  $H_\infty$  et  $H_2$  pour lesquelles l'ordre fini du correcteur optimal est obtenu implicitement et automatiquement comme un sous-produit du processus de résolution du problème d'optimisation.

Le problème n'en reste pas moins difficile puisque le choix de l'ordre du paramètre de Youla-Kučera ne peut être utilisé afin d'imposer l'ordre du compensateur et il peut être nécessaire de paramétrer le problème mixte de façon différente. Dans la suite, nous nous intéressons uniquement au retour de sortie dynamique d'ordre plein ( $n_K = n$ ).

### 3.2.5 Le retour de sortie dynamique d'ordre plein

Comme il a été vu précédemment, il est nécessaire de préciser le type de correcteur utilisé dans le cadre du problème mixte. Dans ce mémoire, notre choix s'est porté sur le retour de sortie dynamique d'ordre plein. Ce dernier étant complètement résolu par des méthodes d'optimisation convexe dans les cas simples  $H_2$  et  $H_\infty$ , on peut espérer isoler ainsi le point dur lié au problème mixte. Dans la suite de ce chapitre ne seront exposés que des résultats spécifiques à ce dernier.

Le compensateur d'ordre fixé *a priori*,  $n_K = n$ , est donné par sa représentation d'état minimale :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + C_K y(t) \end{cases} \quad (3.65)$$

où  $x_K \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état du correcteur.

Le système bouclé par un tel correcteur s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\chi} &= \mathcal{A}\chi + \mathcal{B}_\infty w_\infty + \mathcal{B}_2 w_2 \\ z_\infty &= \mathcal{C}_\infty \chi + \mathcal{D}_\infty w_\infty + \mathcal{D}_{\infty 2} w_2 \\ z_2 &= \mathcal{C}_2 \chi + \mathcal{D}_2 w_2 + \mathcal{D}_{1\infty} w_\infty \end{cases} \quad (3.66)$$

avec  $\chi = \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$  et :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\mathcal{B}_\infty = \begin{bmatrix} B_\infty + BD_K D_{y\infty} \\ B_K D_{y\infty} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 + BD_K D_{y2} \\ B_K D_{y2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathcal{C}_\infty = [ C_\infty + D_{\infty u} D_K C \quad D_{\infty u} C_K ], \quad \mathcal{C}_2 = [ C_2 + D_{2u} D_K C \quad D_{2u} C_K ] \quad (3.69)$$

$$\mathcal{D}_\infty = [ D_\infty + D_{\infty u} D_K D_{y\infty} ], \quad \mathcal{D}_{\infty 2} = [ D_{\infty 2} + D_{\infty u} D_K D_{y2} ] \quad (3.70)$$

$$\mathcal{D}_{2\infty} = [ D_{2\infty} + D_{2u} D_K D_{y\infty} ], \quad \mathcal{D}_2 = [ D_2 + D_{2u} D_K D_{y2} ] \quad (3.71)$$

Le problème mixte est alors :

**Problème 3.2.2 (problème  $H_2/H_\infty$  avec retour de sortie dynamique d'ordre plein)**

Étant donné un niveau de performance  $H_\infty$  admissible  $\gamma$ , déterminer un correcteur d'ordre  $n$  admissible,  $K \in \mathcal{K}_n$  de représentation d'état (3.65) tel que :

$$\begin{aligned} & \inf_{K \in \mathcal{K}_n} \|T_{z_2 w_2}(K)\|_2 \\ & \text{sous} \\ & \|T_{z_\infty w_\infty}(K)\|_\infty \leq \gamma \end{aligned} \quad (3.72)$$

### 3.2.6 Formulation par la théorie de Lyapunov

La théorie de Lyapunov permet de reformuler et de paramétrer 3.2.2 à l'aide de variables matricielles additionnelles solutions d'équations de Riccati et de Lyapunov [175] ou d'inégalités matricielles bilinéaires.

**Problème 3.2.3 (formulation par équations de Riccati et Lyapunov)**

Étant donné un niveau de performance  $H_\infty$  admissible  $\gamma$ , le problème mixte est de déterminer un correcteur  $K$  et deux matrices de Lyapunov  $Q_2 \in \mathcal{S}_n^+$ ,  $Q_\infty \in \mathcal{S}_n^+$  solutions de :

$$\begin{aligned} & \min_{K \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+r)}, Q_2 \in \mathcal{S}_n^+, Q_\infty \in \mathcal{S}_n^+} \text{trace}(Q_2 \mathcal{C}'_2 \mathcal{C}_2) \\ & \text{sous} \\ & \mathcal{A}Q_2 + Q_2 \mathcal{A}' + \mathcal{B}_2 \mathcal{B}'_2 = \mathbf{0} \\ & \mathcal{A}Q_\infty + Q_\infty \mathcal{A}' + \gamma^{-2} Q_\infty \mathcal{C}'_\infty \mathcal{C}'_\infty Q_\infty + \mathcal{B}_\infty \mathcal{B}'_\infty = \mathbf{0} \\ & \mathcal{D}_2 = D_2 + D_{2u} D_K D_{y2} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$Q_2$  est le grammien d'observabilité. Une formulation duale fondée sur l'utilisation du grammien de commandabilité est également possible.

Une formulation alternative utilisant des inégalités en lieu et place des égalités permet de faire appel au cadre LMI.

### Problème 3.2.4 (formulation par inégalités matricielles)

Etant donné un niveau de performance  $H_\infty$  admissible  $\gamma$ , le problème mixte est de déterminer un correcteur  $K$  et deux matrices de Lyapunov  $P_2 \in \mathcal{S}_n^+$ ,  $P_\infty \in \mathcal{S}_n^+$  solutions de :

$$\begin{aligned}
& \min_{K \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+r)}, P_2 \in \mathcal{S}_n^+, P_\infty \in \mathcal{S}_n^+} \text{trace}(P_2 C_2' C_2) \\
& \text{SOUS} \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{A}P_2 + P_2 \mathcal{A}' & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_2' & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{A}P_\infty + P_\infty \mathcal{A}' & \mathcal{B}_\infty & P_\infty \mathcal{C}_\infty \\ \mathcal{B}_\infty' & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_\infty' P_\infty & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \\
& \mathcal{D}_2 = D_2 + D_{2u} D_K D_{y2} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Les deux formulations précédentes sont intimement reliées l'une à l'autre puisque les solutions des équations de Lyapunov et de Riccati sont liées respectivement aux solutions des inégalités matricielles intervenant dans le problème 3.2.4 [179].

La formulation 3.2.4 fait clairement apparaître le caractère bilinéaire du problème d'optimisation associé au problème mixte à travers les multiplications entre les variables de décision définissant le correcteur et les variables de décision liées à la théorie de Lyapunov.

### 3.2.7 Une approche algorithmique directe

Une première approche fondée sur la formulation par équations de Riccati et de Lyapunov 3.2.3 a été proposée en 1992 dans [175]. Elle consiste essentiellement à écrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème 3.2.3. Une solution locale de ces conditions est alors déterminée par application d'une méthode de Davidon-Fletcher-Powell.

Les hypothèses additionnelles sont les suivantes :

#### Hypothèses 3.2.3

- $D_2 = \mathbf{0}$ ,  $D_\infty = \mathbf{0}$ .
- Le compensateur dynamique est strictement propre ( $D_K = \mathbf{0}$ ).

Le lagrangien associé au problème 3.2.3 s'écrit :

$$\begin{aligned}
L(K, Q_2, Q_\infty, X, Y) = & \text{trace}[Q_2 C_2' C_2] + \text{trace}([\mathcal{A}Q_2 + Q_2 \mathcal{A}' + \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2'] X) \\
& + \text{trace}([\mathcal{A}Q_\infty + Q_\infty \mathcal{A}' + \gamma^2 Q_\infty \mathcal{C}_\infty \mathcal{C}_\infty Q_\infty + \mathcal{B}_\infty \mathcal{B}_\infty'] Y)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

avec  $X \in \mathcal{S}_n$  et  $Y \in \mathcal{S}_n$  les matrices symétriques jouant le rôle de multiplieurs de Lagrange.

Les conditions nécessaires du premier ordre d'existence d'un minimum local sont alors dérivées. En notant :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X'_{12} & X_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q_\infty = \begin{bmatrix} Q_{aa} & Q_{ab} \\ Q'_{ab} & Q_{bb} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y'_{12} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

De plus :

$$\mathcal{B}_\infty \mathcal{B}'_\infty = \begin{bmatrix} V_{aa} & V_{ab} B'_K \\ B_K V'_{ab} & B_K V_{bb} B'_K \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 \mathcal{B}'_2 = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} B'_K \\ B_K V'_{12} & B_K V_{22} B'_K \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_\infty \mathcal{C}'_\infty = \begin{bmatrix} R_{aa} & R_{ab} C_K \\ C'_K R'_{ab} & C'_K R_{bb} C_K \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2 \mathcal{C}'_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} C_K \\ C'_K R'_{12} & C'_K R_{22} C_K \end{bmatrix}$$

Nous obtenons en différentiant (3.75) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_K} = X'_{12} Q_{12} + X_{22} Q_{22} + Y'_{12} Q_{ab} + Y_{22} Q_{bb} = 0 \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_K} &= X'_{12} Q_{11} C' + X_{22} Q'_{12} C' + X'_{12} V_{12} + X_{22} B_K V_{22} \\ &+ Y'_{12} Q_{aa} C' + Y_{22} Q'_{ab} C' + X'_{ab} V_{ab} + X_{bb} B_K V_{bb} = 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_K} &= B' X_{11} Q_{12} + B' X_{12} Q_{22} + R'_{12} Q_{12} + R_{22} C_K Q_{22} \\ &+ B' Y_{11} Q_{ab} + B' Y_{12} Q_{bb} + \gamma^{-2} \{ R'_{ab} Q_{aa} Y_{11} Q_{ab} \\ &+ R'_{ab} Q_{aa} Y_{12} Q_{bb} + R'_{ab} Q_{ab} Y'_{12} Q_{ab} + R'_{ab} Q_{ab} Y_{22} Q_{bb} \\ &+ R_{bb} C_K Q'_{ab} Y_{11} Q_{ab} + R_{bb} C_K Q_{bb} Y'_{12} Q_{ab} \\ &+ R_{bb} C_K Q'_{ab} Y_{12} Q_{bb} + R_{bb} C_K Q_{bb} Y_{22} Q_{bb} \} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \mathcal{A} Q_2 + Q_2 \mathcal{A}' + \mathcal{B}_2 \mathcal{B}'_2 = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = \mathcal{A}'X + X\mathcal{A} + C_2' C_2 = 0 \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \mathcal{A}Q_\infty + Q_\infty \mathcal{A}' + \gamma^{-2} Q_\infty C_\infty' C_\infty Q_\infty + \mathcal{B}_\infty \mathcal{B}_\infty' = 0 \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = [\mathcal{A} + \gamma^{-2} Q_\infty C_\infty' C_\infty]' Y + Y [\mathcal{A} + \gamma^{-2} Q_\infty C_\infty' C_\infty] = 0 \quad (3.82)$$

Formulées ainsi, ces équations sont quasiment inexploitables même si un algorithme sous-optimal en a été déduit [174]. L'idée est de partir de l'équation (3.82) et de la modifier de façon à rendre le problème numériquement abordable.

Soit :

$$\mathcal{A}'_y Y + \mathcal{A}_y Y + \mu \mathcal{Z} = 0 \quad (3.83)$$

où  $\mathcal{A}_y = \mathcal{A} + \gamma^{-2} Q_\infty C_\infty' C_\infty$  et  $\mathcal{Z} \in \mathcal{S}_n$  et  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Pour  $\mu \rightarrow 0$  (3.83)  $\rightarrow$  (3.82). Le lagrangien sous optimal devient :

$$\begin{aligned} L_\mu = & (1 - \mu) \text{trace}[Q_2 C_2' C_2] + \mu \text{trace}[Q_\infty C_\infty' C_\infty] \\ & + \text{trace}([\mathcal{A}Q_2 + Q_2 \mathcal{A}' + \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2'] X) \\ & + \text{trace}([\mathcal{A}Q_\infty + Q_\infty \mathcal{A}' + \gamma^2 Q_\infty C_\infty' C_\infty Q_\infty + \mathcal{B}_\infty \mathcal{B}_\infty'] Y) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Il est alors possible de déduire le résultat suivant.

### **Théorème 3.2.4 ([174])**

Le problème sous-optimal précédent converge vers le problème mixte «pur» pour  $\mu \rightarrow 0$ .

L'idée est ensuite de résoudre le problème en appliquant l'algorithme de Davidon-Fletcher-Powell (DFP).

### **Algorithme du lagrangien modifié**

Soit  $\gamma$  le niveau de commande admissible.

#### **Etape 1**

Calculer le correcteur  $H_\infty$  central  $K_{c\infty}$  associé au problème.

#### **Etape 2**

$K_0(s) = K_{c\infty}$ ;  $k = 0$ ; choisir  $\hat{\gamma} > \gamma_\infty$ ; poser  $\mu_k < 1$ .

#### **Etape 3**

Démarrer l'algorithme de Davidon-Fletcher-Powell avec  $K_0(s)$  comme condition initiale,  $\hat{\gamma}$  comme objectif pour  $\mu_k$  afin d'obtenir  $K_{k+1}$ .

#### **Etape 4**

$K_k(s) = K_{k+1}(s)$ , prendre  $\mu_{k+1} < \mu_k$  et retour à 3.



**Etape 5**

Si la valeur du critère  $H_2$  est stationnaire, revenir à 3 en prenant  $\hat{\gamma}$  un peu plus grand,  $\mu = 1$ , et  $K_0(s) = K_k(s)$ .

**Etape 6**

Arrêter l'algorithme quand le  $\gamma$  désiré est atteint.

Cet algorithme a le mérite de tenter une approche directe du problème mixte mais semble poser plus de problèmes qu'il n'en résoud.

- Les conditions nécessaires ne fournissent qu'une solution optimale locale.
- Il n'existe aucun résultat sur la décroissance de la suite  $J_\mu$ .
- La méthode DFP est locale.
- Les problèmes d'initialisation sont presque rédhitoires.

**3.2.8 Approches par relaxation convexe**

Comme nous venons de le voir, les approches numériques directes ne sont pas réellement bien adaptées à la solution du problème mixte. Un certain nombre d'approches fondées sur des relaxations convexes obtenues par la définition de problèmes associés permettent de donner des solutions sous-optimales au problème initial. Nous présentons les deux plus importantes.

**Le problème mixte avec coût auxiliaire**

La formulation de ce problème est en majeure partie à l'origine des nombreux travaux sur le problème mixte pur  $H_2/H_\infty$  et a été proposée initialement par D. Bernstein et W. Haddad dans l'article fondateur [36]. Initialement, la modélisation comprend un signal d'entrée exogène commun et deux sorties exogènes distinctes. Le compensateur recherché est choisi strictement propre ( $D_K = \mathbf{0}$ ) d'ordre fixé  $n_K = n$ .

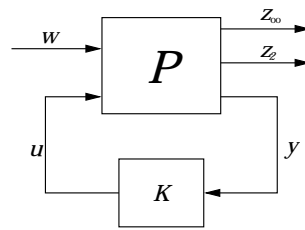


FIG. 3.2 – Problème  $H_2/H_\infty$  à une entrée - deux sorties

Le modèle du système est le même que précédemment avec  $w_2 = w_\infty$  et par conséquent :

$$B_\infty = B_2 = B_{\infty 2} \quad D_{y_\infty} = D_{y_2} = D_{y_{\infty 2}} \quad D_2 = D_\infty = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

Avec  $\mathcal{A}$  définie comme précédemment et :

$$\tilde{R}_\infty = \begin{bmatrix} R_{1\infty} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C'_K R_{2\infty} C_K \end{bmatrix} \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} V_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_K V_2 B'_K \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$R_{1\infty} = C'_\infty C_\infty, \quad R_{2\infty} = D'_{\infty u} D_{\infty u}, \quad V_1 = B_{\infty 2} B'_{\infty 2}, \quad V_2 = D_{y\infty 2} D'_{y\infty 2} \quad (3.87)$$

Le problème mixte avec coût auxiliaire est le suivant :

**Problème 3.2.5 (problème mixte avec coût auxiliaire)**

Déterminer un correcteur d'ordre  $n$ ,  $K \in K_n$ , solution de :

$$\begin{aligned} \inf_{A_K, B_K, C_K} \quad & \Gamma(\gamma, A_K, B_K, C_K) = \text{trace} \left( \tilde{Q} \begin{bmatrix} C'_\infty C_\infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C'_K D_{\infty u} D_{\infty u} C_K \end{bmatrix} \right) \\ \text{SOUS} \quad & \tilde{Q} \geq \mathbf{0} \\ & A\tilde{Q} + \tilde{Q}A' + \gamma^{-2}\tilde{Q}\tilde{R}_\infty\tilde{Q} + \tilde{V} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Il est relativement simple de montrer alors que :

$$\Gamma(\gamma, A_K, B_K, C_K) \geq \|T_{z_\infty w}\|_2 \quad (3.89)$$

Toute solution du problème mixte avec coût auxiliaire sera donc une solution sous-optimale du problème mixte  $H_2/H_\infty$  réel. Dans [68], le problème dual de celui-ci, deux entrées exogènes - une sortie exogène, est présenté.

**Le problème de maximisation d'entropie sous contrainte  $H_\infty$**

Un problème très étroitement lié au précédent et qui a été simultanément proposé comme un moyen d'aborder simplement le problème mixte  $H_2/H_\infty$  est celui de la recherche d'un compensateur stabilisant vérifiant une contrainte  $H_\infty$  donnée et maximisant l'entropie du système en boucle fermée.

**Définition 3.2.1 (entropie)**

L'entropie d'un système stable de matrice de transfert  $H$  telle que  $\|H\|_\infty \leq \gamma$  est définie par :

$$I(H, \gamma) = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |\det(\mathbf{1} - \gamma^{-2} H(j\omega) H^*(j\omega))| \left[ \frac{s_0}{|s_0 - j\omega|} \right]^2 d\omega \right\} \quad (3.90)$$

L'entropie est toujours négative et  $I(H, \gamma) = 0$  si et seulement si  $H = 0$ . Le problème proprement dit a été défini dans le cadre du modèle (3.3) à une entrée et une sortie exogène et en considérant un correcteur de retour de sortie dynamique strictement propre d'ordre plein.

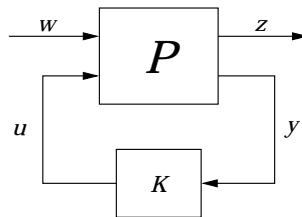


FIG. 3.3 – Problème  $H_2/H_\infty$  mono-entrée - mono-sortie

**Problème 3.2.6 (problème de maximisation d'entropie sous contrainte  $H_\infty$ )**

Déterminer un correcteur  $K \in \mathcal{K}_n$  solution du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} & \sup \quad I(T_{zw}, \gamma) \\ & \text{sous} \\ & \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma \end{aligned} \tag{3.91}$$

En utilisant l'inégalité  $-\log(1 - x^2) > x^2$ , il est montré dans [150] la proposition suivante :

**Lemme 3.2.1**

[150]

$$\frac{1}{\alpha} \sqrt{-\log(1 - \alpha^2)} \geq \sqrt{-I(T_{zw}, \gamma)} \geq \|T_{zw}\|_2 \tag{3.92}$$

où  $\alpha = \|T_{zw}\|_\infty / \gamma$ . De plus, il y a égalité quand  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Finalement, D. Mustafa a montré dans [150] que le problème mixte avec coût auxiliaire par retour de sortie dynamique strictement propre d'ordre plein et le problème de maximisation de l'entropie sous contrainte  $H_\infty$  sont strictement équivalents dans le cadre du problème 3.3.

**Théorème 3.2.5 ([150])**

Pour toute matrice de transfert  $T_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$  telle que  $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$ ,

$$-I(T_{zw}, \gamma) = \Gamma(\gamma, A_K, B_K, C_K) \tag{3.93}$$

Ainsi, dans le cadre de travail défini par 3.3, les deux problèmes précédents sont équivalents.

Historiquement, le problème auxiliaire précède le problème «pur». Le but est de minimiser un coût majorant le coût  $H_2$ , sous contrainte  $H_\infty$ , fournissant ainsi une solution sous-optimale du problème  $H_2/H_\infty$ . Dans [36] ont été données des conditions nécessaires d'existence sous forme de solutions à des équations de Riccati couplées dans le cadre du problème à une entrée exogène, deux sorties exogènes, tandis qu'à la même époque Doyle et al., dans [67], fournissaient des conditions suffisantes sous la même forme, dans le cadre du problème à deux entrées et une sortie exogènes. Dans [206], Yeh a montré que ces deux formulations étaient duales l'une de l'autre et que les conditions proposées sont par conséquent nécessaires et suffisantes. Ainsi le problème et les hypothèses considérées sont ceux définis par le problème 3.2.5. La réalisation minimale d'état du modèle en boucle fermée est :

$$\begin{cases} \dot{\chi} &= \mathcal{A}\chi + \mathcal{B}_{\infty 2}w \\ z_\infty &= \mathcal{C}_\infty\chi + \mathcal{D}_\infty w \\ z_2 &= \mathcal{C}_2\chi + \mathcal{D}_2 w \end{cases} \tag{3.94}$$

**Théorème 3.2.6**

Soit  $M = \gamma^2 I - \mathcal{D}_\infty \mathcal{D}'_\infty \succ \mathbf{0}$ . Soit  $Y \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$  solution unique de l'équation de Riccati :

$$R(Y) = \mathcal{A}Y + Y\mathcal{A}' + (Y\mathcal{C}'_\infty + \mathcal{B}_{2\infty}\mathcal{D}'_\infty)M^{-1}(\mathcal{C}_\infty Y + \mathcal{D}_\infty\mathcal{B}'_{2\infty}) + \mathcal{B}_{2\infty}\mathcal{B}_{2\infty} = 0 \tag{3.95}$$

avec  $\mathcal{A} + (YC'_\infty + \mathcal{B}_{2\infty}D'_\infty)M^{-1}C_\infty$  stable.

Le coût auxiliaire est défini par :

$$J(T_{z_2w}) = \begin{cases} \infty & \text{si } \mathcal{D}_2 \neq 0 \\ \text{trace}(C_2YC'_2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.96)$$

Supposons pour simplifier les écritures que  $V_2 = I$ , avec  $V_2$  défini comme dans (3.86). Soit le système auxiliaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + \gamma^{-2}YC'_\infty C_\infty)x + YC'w + (B + \gamma^{-2}YC'_\infty D_{\infty u})u \\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty u}u \\ z_2 &= C_2x + D_{2u}u \\ y &= x \end{cases} \quad (3.97)$$

où  $Y \in \mathcal{S}_n^{++}$  solution de :

$$AY + YA' + Y(\gamma^{-2}C'_\infty C_\infty - C'C)Y + B_{2\infty}B'_{2\infty} = 0 \quad (3.98)$$

telle que  $A + Y(\gamma^{-2}C'_\infty C_\infty - C'C)$  stable.

Soit  $K$  le retour d'état solution optimale du problème mixte avec coût auxiliaire pour le système (3.97). Soit  $J_{aux}^e$  la valeur optimale du coût auxiliaire de ce dernier.

### **Théorème 3.2.7 ([118])**

Le retour de sortie d'ordre plein optimal résolvant le problème mixte avec coût auxiliaire est alors défini par :

$$A_K = A + Y(\gamma^{-2}C'_\infty C_\infty - C'C) + (B + \gamma^{-2}YC'_\infty D_{\infty u})K \quad (3.99)$$

$$B_K = YC', \quad C_K = K \quad (3.100)$$

De plus :

$$J_{aux}^* = \text{tr}(C_2YC'_2) + J_{aux}^e \quad (3.101)$$

Ce résultat est très important puisqu'il montre que le problème mixte auxiliaire par retour de sortie dynamique d'ordre plein est réductible à un problème mixte auxiliaire par retour d'état sur un système auxiliaire. Ce résultat est complété par le suivant qui montre que le problème mixte auxiliaire par retour d'état est un problème convexe.

### **Théorème 3.2.8 ([118])**

Le problème mixte avec coût auxiliaire par retour d'état est équivalent au problème de programmation convexe :

$$\begin{aligned} & \inf_{Y \in \mathcal{S}_n^{++}, R \in \mathbb{R}^{m \times n}} \text{trace}(C_2YC'_2) + \text{trace}(D_{2u}RY^{-1}R'D'_{2u}) \\ & \text{sous} \\ & \begin{bmatrix} AY + YA' + BR + R'B' & (C_\infty Y + D_\infty R)' & B_{2\infty} \\ \star & -\gamma^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Le gain de retour d'état optimal est alors  $K^* = RY^{-1}$ .

Ainsi le problème mixte avec coût auxiliaire par retour de sortie d'ordre plein peut toujours se ramener à un problème du même type par retour d'état qui est lui-même toujours réductible à un problème LMI. Cette solution sous-optimale a toutefois été donnée dans un cadre restrictif pour lequel  $w_2 = w_\infty = w$ .

Il est possible dans le cadre le plus général du modèle (3.55) de proposer une relaxation convexe du problème mixte initial par l'utilisation conjointe d'un changement de variables linéarisant et du *Lyapunov Shaping Paradigm* défini dans [182]. Pour cela, nous reprenons la formulation du problème mixte par inégalités matricielles.

$$\begin{aligned}
& \min_{K \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+r)}, P_2 \in \mathcal{S}_n^+, P_\infty \in \mathcal{S}_n^+} \text{trace}(P_2 \mathcal{C}'_2 \mathcal{C}_2) \\
& \text{sous} \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{A}P_2 + P_2\mathcal{A}' & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}'_2 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{A}P_\infty + P_\infty\mathcal{A}' & \mathcal{B}_\infty & P_\infty\mathcal{C}_\infty \\ \mathcal{B}'_\infty & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}'_\infty P_\infty & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \\
& \mathcal{D}_2 = D_2 + D_{2u} D_K D_{y2} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Les inégalités présentées dans (3.103) ne sont pas conjointement linéaires en  $K$ ,  $P_2$  et  $P_\infty$ . L'idée principale de la relaxation connue sous le nom de *Lyapunov Shaping Paradigm* est très voisine de celle utilisée pour la définition de la stabilité quadratique. Il consiste donc à ne rechercher qu'une seule et unique matrice de Lyapunov attestant de la performance  $H_2$  et de la contrainte  $H_\infty$ .

$$P_\infty = P_2 = P \tag{3.104}$$

Ce choix introduit un certain degré de pessimisme mais permet par ailleurs de montrer à l'aide d'un changement de variables linéarisant que le nouveau problème ainsi posé est un problème d'optimisation LMI. En effet, en partitionnant  $P$  et  $P^{-1}$  comme :

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N' & \star \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M & \star \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

où  $X \in \mathcal{S}_n$ ,  $Y \in \mathcal{S}_n$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Le changement de variables inversible est défini par :

$$\begin{cases} \hat{A} = NA_K M' + NB_K CX + YBC_K M + Y(A + BD_K C)X \\ \hat{B} = NB_K + YBD_K \\ \hat{C} = C_K M + D_K CX \\ \hat{D} = D_K \end{cases} \tag{3.106}$$

Après application du changement de variables linéarisant et du *Lyapunov shaping paradigm*, la relaxation convexe du problème mixte est définie par :

$$\begin{aligned}
& \min \text{trace}(Q) \\
& X \in \mathcal{S}_n^{++}, Y \in \mathcal{S}_n^{++}, Q \in \mathcal{S}_r^{++} \\
& \hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times r} \\
& \hat{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \hat{D} \in \mathbb{R}^{m \times r} \\
& \text{sous} \\
& \left[ \begin{array}{cccc}
AX + XA' + B\hat{C} + \hat{C}'B' & & & \\
\hat{A} + (A + B\hat{D}C)' & AY + YA + \hat{B}C + (\hat{B}C)' & & \\
(B_\infty + B\hat{D}D_{y\infty})' & (YB_\infty + \hat{B}D_{y\infty})' & -\gamma\mathbf{1} & \\
C_\infty X + D_{\infty u}\hat{C} & C_\infty + D_{\infty u}\hat{D}C & D_\infty + D_{\infty u}\hat{D}D_{y\infty} & -\gamma\mathbf{I}
\end{array} \right] \prec \mathbf{0} \\
& \left[ \begin{array}{ccc}
AX + XA' + B\hat{C} + (B\hat{C})' & & \\
\hat{A} + (A + B\hat{D}C)' & AY + YA + \hat{B}C + (\hat{B}C)' & \\
(B_2 + B\hat{D}D_{y2})' & (YB_2 + \hat{B}D_{y2})' & -\mathbf{1}
\end{array} \right] \prec \mathbf{0} \\
& \left[ \begin{array}{ccc}
X & & \\
\mathbf{1} & Y & \\
C_2X + D_{2u}\hat{C} & C_2 + D_{2u}\hat{D}C & Q
\end{array} \right] \succ \mathbf{0} \\
& D_2 + D_{2u}\hat{D}D_{y2} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Les solutions par le problème mixte auxiliaire pour les cas mono-entrée ou mono-sortie peuvent être obtenues comme des applications particulières de cette dernière relaxation convexe. Il est toutefois difficile d'évaluer le pessimisme de cette relaxation convexe et un certain nombre d'auteurs ont proposé des algorithmes itératifs permettant de réduire ce pessimisme [97], [98], [9].



## Quelques enjeux de l'optimisation en théorie de la commande

Au delà des résultats passés et actuels ayant permis d'établir un lien entre les deux communautés, il apparaît qu'une démarche transversale empruntant concepts et outils dans l'un et l'autre champ scientifique doit profiter autant à la communauté de la théorie de la commande qu'à celle de l'optimisation. Il semble inévitable que passés les verrous actuels, la communauté de la commande doit encore mieux profiter des développements théoriques et numériques en programmation mathématique.

Au plan théorique, le concept de dualité lagrangienne (notamment en programmation semidéfinie positive) a permis des interprétations pertinentes et prometteuses de techniques envisagées jusqu'alors de manière purement instrumentale. Il a également favorisé l'analyse du pessimisme des conditions développées en théorie de la commande robuste [33]. Pour autant, ces résultats sont préliminaires et semblent pouvoir être étendus dans d'autres domaines en Automatique. L'exemple des relaxations hiérarchiques obtenues pour les problèmes d'optimisation définis sur les polynômes positifs montre que la combinaison de différentes techniques et concepts de l'optimisation (dualité lagrangienne, SDP, lifting) autorise la réduction du pessimisme des différentes conditions avec des résultats de convergence forts. Cela se traduit directement par une charge de calcul augmentée et la nécessité de disposer d'outils algorithmiques performants.

Sur le plan algorithmique, il est évident que les solutions proposées actuellement pour résoudre des problèmes du type (1.20) ne sont pas complètement satisfaisantes tant du point de vue des garanties théoriques offertes que des potentialités purement numériques. Sur le premier point, des résultats forts de convergence ainsi que l'aspect global de la solution sont absolument indispensables pour pérenniser un algorithme. Sur le second point, les enjeux actuels sont essentiellement liés à la grande taille (nombre de variables, nombre de contraintes) des problèmes proposés, à la réalisabilité exacte des solutions incontournable en Automatique ainsi qu'au conditionnement numérique des données. Même si les solveurs LMI sont en constante évolution et perfectionnement, il est impossible de considérer qu'ils constituent une technologie fiable et reconnue à l'instar de la programmation linéaire. De ce point de vue, le rapprochement des deux communautés doit permettre une évaluation poussée des dernières avancées algorithmiques (méthode du lagrangien augmenté, extension des méthodes de barrière au cas non convexe, méthodes non différentiables pour la programmation convexe et non convexe, algorithmes SDP structurés par le problème) sur des exemples significatifs et pertinents tant en taille qu'en complexité.

Ces éléments permettent de considérer qu'un domaine d'études original et situé à la frontière des deux champs scientifiques est encore largement ouvert.





# Bibliographie

- [1] M.A. Aizerman, F.R. Gantmacher, *Absolute stability of control systems*, Holden-Day, San Francisco, Californie, USA, 1964.
- [2] B.D.O. Anderson, J.B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [3] B.D.O. Anderson, N.K. Bose, E.I. Jury, "Output feedback stabilization and related problems-solutions via decision methods", *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 20, No. 1, pp. 53-66, 1975.
- [4] P. Apkarian, H.D. Tuan, "Concave programming in control theory", *Journal of Global Optimization*, Vol. 15, No. 4, pp. 343-370, 1999.
- [5] P. Apkarian, H.D. Tuan, "A sequential SDP/Gauss-Newton algorithm for rank-constrained LMI problems", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, pp. 2328-2333, Décembre 1999.
- [6] P. Apkarian, H.D. Tuan, "Robust control via concave minimization: Local and global algorithm", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 2, pp. 299-305, Février 2000.
- [7] P. Apkarian, H.D. Tuan, "Parameterized LMIs in control theory", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 38, No. 4, pp. 1241-1264, 2000.
- [8] D. Arzelier, D. Henrion, D. Peaucelle, "Robust D stabilization of a polytope of matrices", *International Journal of Control*, volume 75, No. 10, pp. 744-752, 2002.
- [9] D. Arzelier, D. Peaucelle, "An iterative method for mixed  $H_2/H_\infty$  synthesis via static output-feedback", *Proceeding of the Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, Décembre 2002.
- [10] D. Arzelier, "Lecture on semidefinite programming", <http://www.laas.fr/~arzelier/>, LAAS-CNRS - CTUV, Prague, Avril 2002.
- [11] D. Arzelier, D. Peaucelle, S. Salhi, "Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound", *Proceedings of the IFAC ROCOND*, Milan, Italie, Juin 2003.
- [12] D. Arzelier, *Rapport d'activité CNRS 2002-2003*, Octobre 2003.

- [13] A. Astolfi, P. Colaneri, "Static output feedback stabilization: From linear to nonlinear and back", in *Nonlinear Control in the Year 2000*, éditeurs A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarriague, W. Respondek, LNCIS 258, Springer, 2000.
- [14] J.P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer-verlag, 1984.
- [15] V. Balakrishnan and S. Boyd, "Global optimization in control system analysis and design", *Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Applications*, éditeur C. T. Leondes, part 1, Vol. 53, pp. 1-56, 1992.
- [16] V. Balakrishnan, S. Boyd, and S. Balemi, "Branch and bound algorithm for computing the minimum stability degree of parameter-dependent linear systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 1, No. 4, pp. 295-317, Octobre-Décembre 1992.
- [17] V. Balakrishnan, L. Vandenberghe, "Semidefinite programming duality and linear time-invariant systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-48, No. 1, pp. 30-41, 2003.
- [18] J.A. Ball, J.W. Helton, "A Beurling-Lax theorem for the Lie group  $(U(m, n))$  which contains most classical interpolation theory", *Journal of Operator Theory*, Vol. 9, pp. 107-142, 1983.
- [19] D. Banjerdpongchai, J.P. How, "Convergence analysis of a parametric robust  $H_2$  controller synthesis algorithm", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, San Diego, Californie, USA, pp. 2602-2607, Décembre 1997.
- [20] B.R. Barmish, C.V. Hollot, "Counter-example to a recent result on the stability of interval matrices", *International Journal Of Control*, Vol. 39, No. 5, pp. 1103-1104, 1984.
- [21] B.R. Barmish, "Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain linear system", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, No. 4, 1985.
- [22] B.R. Barmish, C.L. DeMarco, "A new method for improvement of robustness bounds for linear state equations", *Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems*, John Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA, 1986.
- [23] B.R. Barmish, M. Fu, S. Saleh, "Stability of a polytope of matrices", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, pp. 569-572, 1988.
- [24] B.R. Barmish, "New tools for robustness analysis", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Austin, Texas, USA, Décembre 1988.
- [25] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, MacMillan Publishing Company, 1994.
- [26] B.R. Barmish, C.A. Floudas, C.V. Hollot, R. Tempo, "A global linear programming solution to some open robustness problems including matrix polytope stability", *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, Washington, USA, Juin 1995.

- [27] A. Barvinok, *A course in convexity*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics vol. 54, 2002.
- [28] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley-interscience, Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1993.
- [29] C. Beck, "Minimality for uncertain systems and IQCs", *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, Floride, USA, Décembre 1994.
- [30] C. Beck, R. D'Andrea, "Computational study and comparisons of LFT reducibility methods", *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphie, Pennsylvanie, USA, Juin 1998.
- [31] R.E. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, Mc Graw-Hill, 1970.
- [32] K.P. Bennett, O.L. Mangasarian, "Bilinear separation of two sets in n-space", *Computational Optimization and Applications*, Vol. 2, pp. 207-227, 1993.
- [33] A. Ben-Tal, A. Nemirovskii, *Lectures on modern convex optimization: Analysis, algorithms and engineering applications*, MPS-SIAM Series on Optimization, 2001.
- [34] R.E. Benton, D. Smith, "A non-iterative LMI-based algorithm for robust static-output-feedback stabilization", *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 14, pp. 1322-1330, 1999.
- [35] E. Beran, L. Vandenberghe, S. Boyd, "A global BMI algorithm based on the generalized Benders decomposition", *Proceedings of the European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [36] D.S. Bernstein, W.M. Haddad, "LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: a Riccati equation approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 34, No.3, pp. 293-305, 1989.
- [37] J. Bernussou, P.L.D. Peres, J.C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72, 1989.
- [38] D.P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, USA, 1995.
- [39] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel, *Robust Control: The Parametric approach*, Prentice Hall Information and Sciences Series, 1995.
- [40] S. Bialas, "A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices", *International Journal of Control*, Vol. 37, No. 5, pp. 1103-1104, 1983.
- [41] P.A. Bliman, "A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 42, No. 6, pp. 2016-2042, 2004.

- [42] P.A. Bliman, "An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs", *Systems and Control Letters*, Vol. 51, pp. 165-169, 2004.
- [43] V. Blondel, M. Gevers, "The simultaneous stabilizability question of three linear systems is undecidable", *Mathematics of Control, Signal and Systems*, Vol. 6, pp. 135-145, 1994.
- [44] V. Blondel, J. Tsitsiklis, "NP-hardness of some linear control design problems", *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 35, No. 6, pp. 2118-2127, 1997.
- [45] V. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, J.C. Willems, *Open problems in mathematical systems and control theory*, Springer Verlag, 1999.
- [46] S. Boyd, C.H. Barratt, *Linear Controller Design*, Prentice-hall, 1991.
- [47] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphie, 1994.
- [48] S. Boyd, L. Vandenberghe, "Semidefinite programming relaxations of non-convex problems in control and combinatorial optimization", in *Communications, Computation, Control and Signal Processing: A Tribute to Thomas Kailath*, Editeurs A. Paulraj et al., 1997.
- [49] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [50] A. Brønsted, *An introduction to convex polytopes*, Springer verlag, 1982.
- [51] J.V. Burke, A.S.L. Lewis, M.L. Overton, "Two numerical methods for optimizing matrix stability", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 351-352, pp.117-145, 2002.
- [52] J.V. Burke, A.S. Lewis, M.L. Overton, "A nonsmooth, nonconvex optimization approach to robust stabilization by static output feedback and low-order controllers", *Proceedings of Robust Control Design IFAC Symposium*, Milan, Italie, 2003.
- [53] J.V. Burke, A.S. Lewis and M.L. Overton, "A Robust Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth, Nonconvex Optimization", *soumis à SIAM Journal on Optimization*, disponible sur la page : <http://www.cs.nyu.edu/overton/papers/nonsmoothopt.html>, 2003.
- [54] Y. Cao, J. Lam, Y. Sun, "Static output feedback stabilization: An ILMI Approach", *Automatica*, Vol. 34, No. 12, pp. 1641-1645, 1998.
- [55] E.B. Castelan, J.C. Hennet, E.R.L. Villareal, "Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 4, Avril 2003.
- [56] J. Cea, R. Glowinski, "Sur des méthodes d'optimisation par relaxation", *RAIRO*, No. 7, R-3, pp. 5-32, 1973.

- [57] W.H. Chen, "On relationship between quadratic and robust stability of uncertain systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 9, pp. 51-58, 1999.
- [58] J.D. Cobb, C.L. DeMarco, "The minimal dimension of stable faces required to guarantee stability of a matrix polytope", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 9, Septembre 1989.
- [59] J. Collado, R. Lozano, "Robust stability of the convex-hull of matrices using the polar decomposition", *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, Juin 2000.
- [60] P. Colaneri, J.C. Geromel, A. Locatelli, *Control Theory and design: An  $RH_2$  and  $RH_\infty$  perspective*, Academic Press, 1997.
- [61] G.E. Coxson, C.L. DeMarco, "Testing robust stability of general matrix polytope is an  $\mathcal{NP}$ -hard computation", *Proceedings of the Allerton Conference*, USA, 1991.
- [62] C.A.R. Crusius, A. Trofino, "Sufficient LMI conditions for output feedback control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 5, Mai 1999.
- [63] S. Dasgupta, G. Chockalingam, B.D.O. Anderson, M. Fu, "Lyapunov functions for uncertain systems with applications to the stability of time-varying systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 41, No. 2, Février 1994.
- [64] M. Dettori, C. Scherer, "Robust stability analysis for parameter-dependent systems using full block S-procedure", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Tampa, Floride, USA, Décembre 1998.
- [65] J. Doyle, "Guaranteed margins for LQG regulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 23, No.4, pp. 756-757, 1978.
- [66] J.C. Doyle, "Synthesis of robust controllers and filters with structured plant uncertainty", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, pp. 109-114, San Antonio, Texas, USA, 1983.
- [67] J.C. Doyle, K. Glover, K.K Khargonekar, B.A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
- [68] J. Doyle, K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, "Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  objectives II: Optimal control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 39, No.8, pp. 1575-1587, 1994.
- [69] L. ElGhaoui, V. Nalakrishnan, "Synthesis of fixed-structure controllers via numerical optimization", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, Florida, 1994.
- [70] L. El Ghaoui, F. Oustry, M. AitRami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 8, Août 1997.

- [71] L. El Ghaoui, S. Niculescu, *Advances in linear matrix inequality methods in control*, SIAM advances in design and control, 2000.
- [72] B. Farès, P. Apkarian, D. Noll, "An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems in robust control theory", *International Journal of Control*, Vol. 74, No. 4, pp. 348-360, 2001.
- [73] B. Farès, D. Noll, P. Apkarian, "Robust control via sequential semidefinite programming", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 40, No. 6, pp. 1791-1820, 2002.
- [74] E. Feron, P. Apkarian, P. Gahinet, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 1041 - 1046, Juillet 1996.
- [75] A.V. Fiacco, G.P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, New York, 1968.
- [76] C.A. Floudas, V. Visweswaran, "A global optimization algorithm for certain classes of nonconvex NLPs, I Theory", *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 1397-1417, 1990.
- [77] A.L. Fradkov, "Duality theorems for certain nonconvex extremum problems", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 14, pp. 247-264, 1973.
- [78] A.L. Fradkov, V.A. Yakubovich, "The S-Procedure and a duality relations in nonconvex problems of quadratic programming", *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, Vol. 6, pp. 101-109, 1979.
- [79] B.A. Francis, "A course in  $H_\infty$  control theory", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-verlag, 1987.
- [80] P. Gahinet, P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421-448, 1994.
- [81] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, "Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pp. 436 - 442, Mars 1996.
- [82] A.M. Geoffrion, "Generalized Benders decomposition", *Journal of Optimization Theory and Applications* , Vol. 10, No. 4, 1972.
- [83] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, pp. 381-402, 1991.
- [84] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, S.R. de Souza, "Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 7, pp. 997-1003, Juillet 1997.

- [85] J.C. Geromel, C.C. de Souza, R.E. Skelton, "Static output feedback controllers: Stability and convexity", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, pp. 120-125, 1998.
- [86] J.C. Geromel, M.C. de Oliveira, L. Hsu, "LMI Characterization of structural and robust stability", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 285, pp. 69-80, 1998.
- [87] J.C. Geromel, J. Bernussou, M.C. de Oliveira, " $H_2$  norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: Decentralized and reliable control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 7, pp. 1449-1454, Juillet 1999.
- [88] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $\mathcal{L}_\infty$ -error bounds", *International Journal of Control*, Vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.
- [89] K. Goh, M.G. Safonov, "Robust analysis, sectors and quadratic functionals", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Nouvelle Orléans, Louisiane, Décembre 1995.
- [90] K. Goh, M.G. Safonov, G. P. Papavaissilopoulos, "Global optimization for the biaffine inequality problem", *Journal of global optimization*, Vol. 7, pp. 365-380, 1995.
- [91] K. Goh, "Structure and factorization of quadratic constraints for robustness analysis", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Kobe, Japon, 1996.
- [92] M.X. Goemans, D.P. Williamson, ".878-approximation algorithms for MAX-CUT and MAX-2SAT", *Proceedings of the 26th Annual Symposium on Theory of Computing*, Montréal, pp. 422-431, 1994.
- [93] J.L. Goffin, J.P. Vial, "Convex nondifferentiable optimization: A survey focused on the analytic center cutting plane method", *Rapport technique HEC/Logilab*, No. 99.02, Février 1999.
- [94] K.M. Grigoriadis, R.E. Skelton, "Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods", *Automatica*, Vol. 32, No. 8, pp. 1117-1125, 1996.
- [95] S. Gugercin, A.C. Antoulas, "On consistency and model validation for systems with parametric uncertainty", *Proceedings of IFAC Symposium on System Identification*, Santa Barbara, CA, Juin 2000.
- [96] S. Gugercin, A.C. Antoulas, H.P. Zhang, "An approach to identification for robust control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 6, Juin 2003.
- [97] B. Halder, B. Hassibi, T. Kailath, "Design of optimal mixed  $H_2/H_\infty$  static state feedback controllers", *Proceeding of the American Control Conference*, pp 3239-3243, Philadelphia, Pennsylvanie, USA, 1998.
- [98] B. Halder and T. Kailath, "LMI based design of mixed  $H_2/H_\infty$  controllers: the state feedback case", *Proceeding of the American Control Conference*, pp 1866-1870, San Diego, Californie, USA, 1999.



- [99] C. Helmberg, F. Rendl, "A spectral bundle method for semidefinite programming", *SIAM Journal on Optimization*, 2001.
- [100] D. Henrion, S. Tarbouriech, D. Arzelier, "LMI approximations for the radius of the intersection of ellipsoids: Survey", *Journal of Optimization and Applications*, Vol. 108, No. 1, pp. 1-28, Janvier 2001.
- [101] D. Henrion, G. Meinsma, "Rank one LMIs and Lyapunov's inequality", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 8, pp. 1285-1288, Août 2001.
- [102] D. Henrion, J. B. Lasserre, "GloptiPoly: Global Optimization over Polynomials with Matlab and SeDuMi", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, Décembre 2002.
- [103] D. Henrion, J.B. Lasserre, "GloptiPoly: Global Optimization over Polynomials with Matlab and SeDuMi", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 29, No. 2, pp. 165-194, 2003.
- [104] D. Henrion, J.B. Lasserre, "Convergent LMI relaxations for non convex optimization over polynomials in control", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 24, No. 3, Juin 2004.
- [105] A. Hired, C. Valentin-Charbonnel, G. Duc, J.P. Bonnet, "Different multidimensional reduction algorithms for the LFT model of a missile", *2nd IMACS International multiconference CESA*, Hammamet, Tunisie, 1998.
- [106] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I,II*, Springer Verlag, 1991.
- [107] J.B. Hiriart-Urruty, M. Toriki, "Permanently going back and forth between the «quadratic world» and the «convexity world» in optimization", *Applied Mathematics and Optimization*, Vol. 45, pp. 169-184, 2002.
- [108] H. P. Horisberger and P. R. Bélanger, "Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters," *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 21, pp. 705 - 708, Octobre 1976.
- [109] R. Horst, H. Tuy, *Global Optimization: Deterministic Approaches*, Springer, Berlin, 1996.
- [110] T. Iwasaki, R.E. Skelton, J.C. Geromel, "Linear quadratic suboptimal control with static output feedback", *Systems and Control Letters*, Vol. 23, No. 6, pp. 421-430, 1994.
- [111] T. Iwasaki, R.E. Skelton, "Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 85, No. 2, pp. 291-307, 1995.
- [112] T. Iwasaki, R.E. Skelton, "The XY-centring algorithm for the dual LMI problem: A new approach to fixed-order control design", *International Journal of Control*, Vol. 62, No. 6, pp. 1257-1272, 1995.

- [113] T. Iwasaki, S. Hara, "Well-posedness of feedback systems: Insights into exact robustness analysis and approximate computations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 619-630, 1998.
- [114] F. Jarre, "An interior method for nonconvex semidefinite programs", *Optimization and Engineering*, Vol. 1, pp. 347-372, 2000.
- [115] C.Y. Kao, A. Megretski, "A new barrier function for IQC optimization problems", *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, USA, 2003.
- [116] J.E. Kelley, "The cutting plane method for solving convex programs", *Journal of the SIAM*, Vol. 8, pp. 703-712, 1960.
- [117] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, K. Zhou, "Robust stabilization and  $H_\infty$ -optimal control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 3, pp. 356-361, 1990.
- [118] P. Khargonekar and M. Rotea, "Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 36, No.7, pp. 823-837, 1991.
- [119] V.L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differential'nye Uravneniya*, Vol. 14, No. 11, pp. 1483-1485, 1978.
- [120] K.C. Kiwiel, *Methods of Descent for Non-differentiable Optimization*, Lecture Notes in Mathematics 1133, Springer-Verlag, 1985.
- [121] K.C. Kiwiel, "Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable optimization", *Mathematical Programming*, Vol. 46, pp. 105-122, 1990.
- [122] M. Kočvara, M. Stingl, "PENNON - A generalized augmented Lagrangian method for semidefinite programming", *Workshop on semidefinite programming and its applications in control theory, combinatorial and global optimization*, LAAS-CNRS, Toulouse, France, 27 Septembre 2002.
- [123] M. Kočvara, M. Stingl, "PENNON – a code for convex nonlinear and semidefinite programming", *Optimization Methods and Software*, Vol. 18, No. 3, pp. 317-333, 2003.
- [124] J.B. Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problem of moments", *SIAM Journal On Optimization*, Vol. 11, No. 3, pp. 796-817, 2001.
- [125] M. Laurent, "A comparison of the Sherali-Adams, Lovász-Schrijver, and Lasserre relaxations for 0-1 programming", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 28, No. 3, pp. 470-496, Août 2003.
- [126] M.A. Leal, J.S. Gibson, "A first-order Lyapunov robustness method for linear systems with uncertain parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 9, pp. 1068-1070, 1990.
- [127] F. Leibfritz, "Computational design of stabilizing static output feedback controllers", *Rapport technique Trierer Forschungsberichte MathematiK/Informatik*, 99-01, Université de Trier, Trier, Allemagne, 1999.

- [128] F. Leibfritz, E.M.E. Mostafa, "Optimal static output feedback design by using a trust region interior point method", *Rapport technique de l'Université de Trier*, No. 00-03, 2000.
- [129] F. Leibfritz, "A LMI-based algorithm for designing suboptimal static  $H_2/H_\infty$  out-feedback controllers", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 39, No. 6, pp. 1711-1735, 2001.
- [130] F. Leibfritz, E.M.E. Mostafa, "Trust region methods for solving the optimal output feedback design problem", *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 5, pp. 501-519, 2003.
- [131] V.J.S. Leite, P.L. Peres, "An Improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 3, Mars 2003.
- [132] C. Lemarechal, A. Nemirovskii, Y. Nesterov, "New variants of bundle methods", *Mathematical Programming*, Vol. 69, pp. 111-147, 1995.
- [133] C. Lemaréchal, F. Oustry, "Semidefinite relaxations and Lagrangian duality with applications to combinatorial optimization", *Rapport de recherche INRIA No. 3710*, 1999.
- [134] C. Lemaréchal, A. Renaud, "A geometric study of duality gaps, with applications", *Mathematical Programming series A*, Vol. 90, pp. 399-427, 2001.
- [135] C. Lemaréchal, "Lagrangian relaxation", *Computational Combinatorial Optimization*, pp. 112-156, 2001.
- [136] W. Levine, M. Athans, "On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems", *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 15, pp. 44-48, 1970.
- [137] J.L. Lin, I. Postlethwaite, D.W. Gu, " $\mu - K$  iteration: A new algorithm for  $\mu$ -synthesis", *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp. 219-224, 1993.
- [138] A.I. Lur'e, V.N. Postnikov, "Concerning the theory of stability of regulating systems", *Prikl. Mat. Meh.*, Vol. 8, pp.246-248, 1944.
- [139] P.M. Mäkilä, H.T. Toivonen, "Computational methods for parametric LQ problems-A survey", *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. 32, No. 8, pp. 658-671, Août 1987.
- [140] O.L. Mangasarian, J.S. Pang, "The extended linear complementarity problem", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 16, No. 2, pp. 359-368, 1995.
- [141] I. Masubuchi, A. Ohara, N. Suda, "LMI based controller synthesis: A unified formulation and solution", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, No. 8, pp. 669-686, 1998.

- [142] A. Megretski, "On the order of optimal controllers in the mixed  $H_2/H_\infty$  control", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Buena Vista, Floride, USA, pp. 3173-3174, 1994.
- [143] A. Megretski, A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 42, No. 6, pp. 819-830, 1997.
- [144] A.M. Meilakhs, "Stabilization of linear controlled systems under uncertainty conditions", *Automatika i Telemekhnika*, No. 2, pp. 182-184, 1975.
- [145] A.M. Meilakhs, "Design of stable control systems subject to parametric perturbation", *Automatika i Telemekhnika*, No. 10, pp. 5-16, 1978.
- [146] M. Mesbahi, G.P. Papavasilopoulos, "On the rank minimization problem over a positive semi-definite linear matrix inequality", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 2, pp. 239-243, 1997.
- [147] M. Mesbahi, "On the rank minimization problem and its control application", *Systems and Control Letters*, Vol. 33, pp. 31-36, 1998.
- [148] M. Mesbahi, "On the semi-definite programming solution of the least order dynamic output feedback synthesis", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2355-2359, San Diego, California, Juin 1999.
- [149] T. Mori, H. Kokame, "A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 8, Août 2000.
- [150] D. Mustafa, "Relation between maximum-entropy/ $\infty$  control and combined  $H_\infty$ /LQG control", *Systems and Control Letters*, Vol. 12, pp. 193-203, 1989.
- [151] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, SIAM Studies in applied mathematics, 1994.
- [152] Y. Nesterov, "Squared functional systems and optimization problems", in *High performance optimization*, éditeurs H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [153] A. Neumaier, "Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction", *Acta Numerica*, à paraître 2004.
- [154] D. Noll, M. Torchi, P. Apkarian, "Partially augmented lagrangian method for matrix inequality constraints", *SIAM Journal on Optimization*, à paraître.
- [155] M.C. de Oliveira, J.C. Geromel, "Numerical comparison of output feedback design methods", *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, Nouveau Mexique, USA, Juin 1997.
- [156] A. Packard, J.C. Doyle, "Quadratic stability with real and complex perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 2, pp. 198-201, 1990.
- [157] A. Packard, J. Doyle, "The complex structured singular value", *Automatica*, Vol. 21, No. 1, pp. 71-109, 1993.

- [158] P.A. Parrilo, "Higher order semidefinite relaxations for quadratic programming", *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sidney, Australie, 2000.
- [159] P. Parrilo, "Semidefinite relaxations for semialgebraic problems", *Mathematical Programming Series B*, Vol. 96, pp. 293-320, 2003.
- [160] P. Parrilo, "Semidefinite programming relaxations and algebraic optimization in control", *European Journal of Control*, Cambridge, Angleterre, Vol. 9, pp. 301-321, 2003.
- [161] D. Peaucelle, *Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres*, Thèse de Doctorat en Automatique, Université Paul Sabatier, 4 Juillet 2000.
- [162] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, J. Bernussou, "A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty", *Systems and Control Letters*, Vol. 40, No. 1, 2000.
- [163] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.46, No. 4, pp. 624-630, Avril 2001.
- [164] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Efficient numerical solutions for  $H_2$  static output feedback synthesis", *Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.
- [165] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Ellipsoidal sets for static output feedback", *Proceedings of the Automatic Control 15th IFAC World Congress*, Barcelone, Espagne, 2002.
- [166] P.L.D. Peres, J.C. Geromel, A.M.K. Almulgla, "Quadratic stabilizability of linear uncertain systems", *Proceedings of the European Control Conference*, Grenoble, France, 1993.
- [167] B.T. Polyak, "Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 99, No. 3, pp. 553-583, 1998.
- [168] S. Prajna, A. Papachristodolou, P. Parrilo, "SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB", disponible sur le site <http://control.ee.ethz.ch/~parrilo/sostools>, 2002.
- [169] P. Psarris, C. A. Floudas, "Robust stability analysis of systems with real parametric uncertainty: A global optimization approach", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, pp. 699-717, 1995.
- [170] M. Putinar, "Positive polynomials on compact semi-algebraic sets", *Ind. Univ. Math. J.*, Vol. 42, pp. 969-984, 1993.
- [171] E.S. Pyatniskii, V.I. Skorindiskii, "Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem", *Systems and Control Letters*, Vol. 2, No. 2, pp. 130-135, Août 1982.

- [172] D.C.W. Ramos, P.L.D. Peres, "An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, pp. 675-678, 2002.
- [173] R.M. Redheffer, "On a certain linear fractional transformation", *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 39, pp. 269-286, 1960.
- [174] D.B. Ridgely, C.P. Mracek, L. Valavani, "Numerical solutions of the general mixed  $H_2/H_\infty$  optimization problem", *Proceeding of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, pp. 1353-1357, 1992.
- [175] D.B. Ridgely, L. Valavani, M. Dahleh, G. Stein, "Solution to the general mixed  $H_2/H_\infty$  control problem - necessary conditions for optimality", *Proceeding of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, pp. 1348-1352, 1992.
- [176] J. Rohn, "Systems of linear interval equations", *Linear Algebra and Applications*, Vol. 126, pp. 39-78, 1989.
- [177] M. Rotea, P. Khargonekar, " $H_2$ -optimal control with an  $H_\infty$ -constraint: The state feedback case", *Automatica*, Vol 27, pp 307-316, 1991.
- [178] M. Rotea, T. Iwasaki, "An alternative to the D-K iteration", *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, USA, pp. 53- 57, 1993.
- [179] A. Saberi, P. Sannuti, B.M. Chen,  *$H_2$  Optimal Control*, Prentice Hall, 1995.
- [180] M.G. Safonov, " $L_\infty$  optimal sensitivity against stability margin", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, USA, 1983.
- [181] M.G. Safonov, *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*, MIT Press, 1980.
- [182] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 42, No.7, pp. 896-911, 1997.
- [183] C.W. Scherer, "A full block S-procedure with applications", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, San Diego, Californie, USA, pp. 2602-2607, Décembre 1997.
- [184] G. Scorletti, L. ElGhaoui, "Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, pp. 845-877, 1998.
- [185] Z. Shi, W. Gao, "A necessary and sufficient condition for the positive-definiteness of interval symmetric matrices", *International Journal of Control*, Vol. 43, No. 1, pp. 325-328, 1986.
- [186] N. Shor, *Minimization Methods for Non-differentiable Functions*, Springer, Berlin, 1985.

- [187] N. Shor, "Quadratic optimization problems", *Soviet J. Circuits Systems Sci.*, Vol. 25, pp. 1-11, 1987.
- [188] N. Shor, *Nondifferential Optimization and Polynomial Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [189] R.E. Skelton, T. Iwasaki, "Eye on education: Increased role of linear algebra in control education", *IEEE Control System Magazine*, Vol. 15, pp. 76-90, Août 1995.
- [190] R.E. Skelton, T. Iwasaki, K. Grigoriadis, *A unified algebraic approach top linear control design*, Taylor and Francis, 1998.
- [191] V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis, "Static output feedback-A survey", *Automatica*, Vol. 33, No. 2, pp. 125-137, 1997.
- [192] O. Toker, H. Özbay, "On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback", *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, Washington, USA, pp. 2056-2064, 1995.
- [193] P. Tseng, "Dual coordinate ascent methods for problems with non-strictly convex minimization", *Mathematical programming*, Vol. 59, pp. 231-247, 1993.
- [194] P. Tseng, "Convergence of block coordinate descent method for nondifferentiable minimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.109 n.3, p.475-494, Juin 2001.
- [195] H. Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [196] L. Vandenberghe, V. Balakrishnan, "Semidefinite programming", *SIAM Review*, Vol. 38, No. 1, pp. 49-95, 1996.
- [197] D. Walker and B. Ridgely, "Uniqueness of the general mixed  $H_2/H_\infty$  optimal controller", *Proceedings of the American Control Conference*, pp 1453-1457, Seattle, Washington, USA, 1995.
- [198] M.R. Waszak, D. Andrisani, "Uncertainty modeling via frequency domain model validation", *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Oregon, USA, Août 1999.
- [199] S.R. Wells, D.B. Ridgely, "Using increased order controllers in mixed  $H_2/H_\infty$  optimization", *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, 1992.
- [200] J.C. Willems, "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 621-634, 1971.
- [201] H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe, *Handbook of semidefinite programming*, Kluwer's international series, 2000.

- [202] V.A. Yakubovich, "S-procedure in nonlinear control theory", *Vestnik Leningrad Univ.*, Vol. 1, pp. 62-77, 1971.
- [203] V.A. Yakubovich, "Minimization of quadratic functionals under quadratic constraints and the necessity of a frequency condition in the quadratic criterion for absolute stability of nonlinear control systems", *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 14, No. 2, pp. 593-597, 1973.
- [204] V.A. Yakubovich, "Nonconvex optimization problem: The infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints", *Systems Control Letters*, Vol. 19, pp. 13-22, 1992.
- [205] R. K. Yedavalli, "A necessary and sufficient extreme point solution for checking robust stability of polytopes of matrices", *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, Juin 2000.
- [206] H.H. Yeh, S.S. Banda, "Necessary and sufficient conditions for mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  optimal control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 37, No.3, pp. 355-358, 1992.
- [207] P.M. Young, "Controller design with mixed uncertainties", *Proceedings of American Control Conference*, Baltimore, Maryland, USA, pp. 2333-2337, 1994.
- [208] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 2, pp. 301-320, Avril 1981.
- [209] G. Zames, B.A. Francis, "Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No. 2, pp. 585-601, 1983.
- [210] K. Zhou, J. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Optimisation et commande robuste</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction . . . . .	11
1.2	Modélisation incertaine . . . . .	12
1.3	Analyse et synthèse robustes . . . . .	14
1.4	Les problèmes d'optimisation en commande robuste . . . . .	18
1.4.1	La programmation semidéfinie positive . . . . .	18
1.4.2	MPI + LMI = CR? ou NLP + BMI = TC? . . . . .	20
1.5	Les approches par relaxation . . . . .	23
1.5.1	Dualité et relaxation lagrangiennes . . . . .	24
1.5.2	Théorie de Lyapunov et relaxation lagrangienne . . . . .	31
1.5.3	Les relaxations hiérarchiques . . . . .	34
1.5.4	Les relaxations heuristiques . . . . .	39
1.6	Les approches algorithmiques . . . . .	40
1.6.1	La méthode du gradient conditionnel . . . . .	41
1.6.2	Les méthodes de pénalité et de barrière . . . . .	43
1.6.3	L'optimisation non différentiable . . . . .	46
1.6.4	L'optimisation globale . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Analyse robuste</b>	<b>51</b>
2.1	Introduction . . . . .	51
2.2	Stabilité robuste d'un polytope de matrices . . . . .	52
2.2.1	Définition du problème . . . . .	52
2.2.2	Quelques résultats préliminaires . . . . .	53
2.2.3	Approche par la théorie de Lyapunov . . . . .	54
2.3	Stabilité robuste des modèles incertains LFT . . . . .	60
2.3.1	Définition du problème . . . . .	60
2.3.2	La séparation topologique des graphes . . . . .	62
2.3.3	Etude de la stabilité nominale . . . . .	63
2.3.4	Etude de la stabilité robuste . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Synthèse robuste</b>	<b>67</b>
3.1	La synthèse par retour de sortie statique . . . . .	67
3.1.1	Introduction . . . . .	67
3.1.2	Formulation du problème et hypothèses . . . . .	67
3.1.3	Quelques résultats . . . . .	69
3.1.4	Formulation par la théorie de Lyapunov . . . . .	70
3.2	La synthèse mixte $H_2/H_\infty$ . . . . .	79

3.2.1	Introduction . . . . .	79
3.2.2	Formulation du problème et hypothèses . . . . .	79
3.2.3	Existence de la solution optimale . . . . .	81
3.2.4	Unicité et ordre du compensateur . . . . .	82
3.2.5	Le retour de sortie dynamique d'ordre plein . . . . .	83
3.2.6	Formulation par la théorie de Lyapunov . . . . .	84
3.2.7	Une approche algorithmique directe . . . . .	85
3.2.8	Approches par relaxation convexe . . . . .	88