



HAL
open science

Simulation dynamique de corps biologiques et changements de topologie interactifs

François Boux de Casson

► **To cite this version:**

François Boux de Casson. Simulation dynamique de corps biologiques et changements de topologie interactifs. Autre [cs.OH]. Université de Savoie, 2000. Français. NNT : . tel-00010170

HAL Id: tel-00010170

<https://theses.hal.science/tel-00010170>

Submitted on 16 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

François BOUX DE CASSON

pour obtenir le grade de DOCTEUR

de l'UNIVERSITÉ DE SAVOIE

Spécialité : Informatique

SIMULATION DYNAMIQUE DE CORPS BIOLOGIQUES ET CHANGEMENTS DE TOPOLOGIE INTERACTIFS

Directeur de thèse : Christian Laugier

Soutenue le 18 décembre 2000

Composition du jury :

Président : M. Michel Riveill
Rapporteurs : M. Christophe Chaillou
M. Hervé Delingette
Examineurs : Mme. Marie-Paule Cani
M. Christian Laugier

Thèse préparée au sein du projet SHARP,
commun au Laboratoire GRaphique, VIsion, Robotique
et à l'INRIA Rhône-Alpes
ZIRST, 655 av. de l'Europe
38330 Montbonnot St. Martin – France

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les personnes qui ont accepté de juger ce travail de thèse et d'y apporter leur caution :

- Michel Riveill, Professeur des Universités, qui me fait l'honneur de présider le jury ;
- Christophe Chaillou, Professeur, et Hervé Delingette, Chargé de Recherche de l'INRIA, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail et qui ont grandement contribué à sa forme finale par leurs commentaires constructifs ;
- Marie-Paule Cani, Professeur des Universités, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer durant mon travail ;
- Christian Laugier, Directeur de Recherche INRIA, qui a su m'encadrer, tout en me laissant suffisamment de liberté, durant ces trois années.

Je remercie Jack Lanier, du laboratoire 3S, pour sa relecture attentive de la section concernant la mécanique des milieux continus. Je remercie également François Faure, qui a su faire plus que représenter Marie-Paule lors de la soutenance, en s'intéressant de près à mes travaux, et ce malgré les délais très courts.

J'exprime également ma gratitude à toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de travailler dans le cadre de l'AIMS, projet dont les réunions de travail ont aidé à donner un cadre concret à mes travaux.

Un grand merci aussi à toutes les personnes qui travaillent au service de documentation de l'unité de recherche. Celles-ci, de part leur redoutable efficacité et leur accueil toujours chaleureux, ont grandement facilité mes recherches bibliographiques.

Que serions nous, pauvres thésards, sans la précieuse aide des assistantes de projet, qui nous guident à travers les démarches administratives, parfois (il faut bien l'avouer) tortueuses ? Merci donc pour leur aide à Danièle Herzog et Bénédicte Fluxa.

Je suis bien entendu reconnaissant envers les personnes de l'équipe SHARP, sans qui ces trois années n'auraient pas été ce qu'elles ont été. Je remercie donc, par ordre d'apparition :

- Emmanuel Mazer, pour sa rigueur et son intégrité scientifique, mais aussi pour sa façon si particulière de raconter les blagues ;

- Thierry Fraichard, dont j'ai grandement apprécié les conseils et dépannages pour LaTeX ;
- Sepanta Sekhvat, dont la bonne humeur, le soutien et les coups de main en aideront plus d'un à boucler un article ;
- Anton Deguet, qui m'a encadré durant mon DEA, et avec qui j'ai partagé le bureau durant les deux premières années de ma thèse. Sa disponibilité et son intérêt pour l'administration système l'ont un peu détourné de son travail de thèse, je lui souhaite tout le courage nécessaire pour la terminer ;
- Alberto Munoz, mexicain philosophe et bon vivant, dévoreur de littérature scientifique. J'espère vivement passer un jour lui rendre visite, ainsi qu'à sa toute nouvelle petite famille, à Mexico ;
- Diego d'Aulignac, le polyglote, avec qui j'ai partagé le bureau les deux dernières années. Merci à lui pour ses remarques pertinentes, mais aussi pour les «Yoghurt time» et tous ces moments si intenses que nous avons partagés, ainsi que pour l'ambiance musicale du bureau, si ... originale et toujours renouvelée ;
- Jorge Hermosillo, mexicain, qui a su m'aider à résoudre mes problèmes de grammaire ou de vocabulaire ;
- Frédéric Large, l'inspecteur gadget de l'équipe, dont l'aquarium, bien qu'envahit par les algues, a fini par héberger des poissons, enfin quelque temps ... ;
- David Raulo, le gourou Open-GL et Linux de l'équipe. Merci à lui pour ses innombrables coups de main pour debugger mon code, et pour l'intérêt qu'il portait à mes travaux ;
- Kenneth Sundaraj, malaisien militant et skieur débutant ;
- Cesar Mendozas, dont le sourire éternel rejouit quiconque, et à qui je souhaite bonne chance pour son prix Nobel ainsi que pour ramener au Mexique sa première médaille Olympique en ski alpin ;
- Olivier Lebeltel, dont les réflexions bayésiennes ont éclairé les travaux de simulations dynamiques d'une façon nouvelle ;
- Jérôme Truchet, pour son aide précieuse pour l'implantation des algorithmes de découpe, qui m'a permis de (presque) terminer (presque) dans les temps.

Je tiens également à remercier les thésards de l'équipe IMAGiS, et notamment Gilles Debunne et Eric Ferley, pour leur aide sur de nombreux points et les agréables moments de détente et de discussion que j'ai passé avec eux.

Enfin, je souhaite remercier mes parents pour leur relecture attentive de ce mémoire et car ils m'ont toujours soutenu dans mes études, tant financièrement que moralement, tout en respectant mes choix et en gardant confiance en moi.

Pour terminer, j'exprime toute ma gratitude (et bien plus encore) à Claire, qui m'a soutenu au quotidien durant ces trois années, en partageant mes joies ou mes doutes, et pour tout le reste également. Je remercie aussi notre fille, Maya, pour ses sourires chaque matin au reveil, qui m'ont grandement aidé à démarrer chaque journée, durant la difficile phase de rédaction, et ce parfois malgré le manque de sommeil . . .

Et puis, je remercie les gens.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Fondements de la mécanique des milieux continus et approches informatiques	5
1.1 La mécanique des milieux continus	6
1.1.1 Déplacements, déformations, contraintes et principes généraux	7
1.1.2 Lois de comportement	11
1.1.2.1 L'élasticité	11
1.1.2.2 L'élasto-plasticité	15
1.1.2.3 La visco-élasticité linéaire	16
1.1.3 Les méthodes de résolution	16
1.1.3.1 La méthode des éléments finis	17
1.1.3.2 L'intégration numérique	20
1.2 L'approche informatique de la simulation mécanique d'objets déformables	22
1.2.1 Les modèles continus	22
1.2.2 Les modèles discrets	24
1.3 Conclusion	27
2 Simulation dynamique de corps biologiques	29
2.1 Les simulateurs médicaux, état de l'art	30
2.1.1 Contextes, contraintes et objectifs	31
2.1.2 Exemples de réalisations de modèles biomécaniques interactifs	32
2.1.3 Conclusion	36
2.2 Vers un modèle discret, hétérogène, non-linéaire et interactif du foie humain	37
2.2.1 Anatomie et biomécanique du foie humain	38
2.2.2 Objectifs de la modélisation	39
2.2.3 Modèle du foie	40
2.2.3.1 Représentation géométrique	40
2.2.3.2 Modèle mécanique	41
2.2.4 Conditions aux limites	44
2.2.5 Interactions	44

2.2.5.1	Détection des collisions	45
2.2.5.2	Traitement des collisions	46
2.2.6	Intégration numérique	47
2.3	Conclusion	50
3	Changer la topologie dans un modèle mécanique interactif	51
3.1	Notions de base et bibliographie	52
3.1.1	Terminologie	52
3.1.2	Découpe VS rupture	53
3.1.3	Le phénomène de la rupture au niveau atomique	53
3.1.4	Principales approches informatiques sur les changements de topologie	54
3.1.4.1	Approches par suppression d'entités dans le modèle	55
3.1.4.2	Approche par «subdivision»	59
3.1.4.3	Conclusion	65
3.2	Vers une approche simulant des changements de topologie en temps interactif	66
3.2.1	Idées de base et choix philosophiques	66
3.2.2	Déchirement de modèles surfaciques	67
3.2.2.1	Critère de rupture	67
3.2.2.2	Remaillage local	68
3.2.2.3	Mise à jour des paramètres mécaniques	70
3.2.2.4	Détection et traitement des singularités géométriques	71
3.2.2.5	Discussion	73
3.2.3	Découpe de modèles surfaciques	73
3.2.3.1	Calcul de la trajectoire de découpe	74
3.2.3.2	Remaillage local	75
3.2.3.3	Discussion	75
3.2.4	Déchirement de modèles volumiques	75
3.2.4.1	Critère de rupture	75
3.2.4.2	Remaillage local	76
3.2.4.3	Détection et traitement des singularités géométriques	76
3.2.4.4	Discussion	78
3.3	Conclusion	78
4	Implantation et résultats expérimentaux	79
4.1	Choix technologiques	80
4.2	Modèle interactif du foie humain	80
4.2.1	Implantation	80
4.2.1.1	Boucle d'animation	81
4.2.1.2	Une première structure des données pour le modèle mécanique	82
4.2.1.3	Amélioration en terme de rapidité d'exécution	82

4.2.1.4	Intégration d'un dispositif de retour haptique	83
4.2.2	Validation et Résultats	84
4.2.2.1	Validation globale de l'utilisation de ressorts non-linéaires . .	84
4.2.2.2	Construction du modèle du foie humain	87
4.2.3	Discussion	90
4.3	Changements de topologie	90
4.3.1	Déchirement de modèles surfaciques	90
4.3.1.1	Implantation	90
4.3.1.2	Résultats	92
4.3.2	Découpe de modèles surfaciques	94
4.3.2.1	Implantation	94
4.3.2.2	Discussion	100
4.3.3	Déchirement de modèles volumiques	100
4.3.3.1	Implantation	100
4.3.3.2	Résultats	105
4.3.3.3	Discussion	106
4.4	Conclusion	107
 Conclusion et perspectives générales		109
 Index des auteurs cités		113
 Table des figures		115
 Références bibliographiques		121

Introduction générale

Problématique

L'avènement de l'imagerie médicale a bouleversé les méthodes de travail des médecins. Les investigations de l'informatique pour faire avancer la médecine continuent, et un champ de travail, très actif actuellement, est celui du développement de simulateurs médico-chirurgicaux. Un des objectifs de ces travaux est de proposer aux médecins des simulateurs pour l'entraînement à des procédures chirurgicales, de la même manière qu'il existe des simulateurs de vol pour former les pilotes. Afin d'être réalistes, ces simulateurs doivent évidemment intégrer des modèles mécaniques de déformation des organes. Le défi est d'envergure, car la mécanique du «vivant» est loin d'être complètement connue, du fait de complexité des systèmes vivants.

Les avantages attendus de ces simulateurs sont nombreux dans la mesure où, contrairement à l'entraînement sur animaux, la formation sur des simulateurs permettra aux médecins de répéter autant que nécessaire une intervention. Il sera également possible de s'entraîner au traitement de pathologies rares, par définition difficiles à appréhender.

C'est dans ce cadre que nous nous intéressons au développement de modèles interactifs d'organes du corps humain, et plus particulièrement à la modélisation du foie. Les opérations chirurgicales sur cet organe sont, en effet, de plus en plus souvent pratiquées de manière non invasive, technique qui se prête bien à la simulation, comme nous allons le voir. L'objectif de ce nouveau procédé opératoire est de ne plus ouvrir le corps pour opérer, ou seulement pour une durée la plus courte possible. Les instruments chirurgicaux, ainsi qu'une caméra, sont introduits dans le corps via de petites incisions pratiquées dans l'abdomen. Le chirurgien opère alors, avec comme seule vue du champ opératoire l'image retournée par la caméra.

Les «entrées» et «sorties» du «système patient» sont alors bien déterminées :

- entrée : commande en force via les outils chirurgicaux ;
- sorties : retour visuel via un écran et en force via les outils chirurgicaux.

Ce type d'intervention se prête donc particulièrement bien au développement d'un simulateur.

L'objectif de ce travail de thèse est tout d'abord de proposer un modèle interactif du foie humain. Le comportement rhéologique¹ de cet organe n'étant pas encore bien connu de manière quantitative, nous nous attacherons à respecter ses particularités mécaniques *qualitatives* de non-linéarité et d'hétérogénéité. Les opérations chirurgicales consistant principalement à changer la topologie des organes, nous nous intéressons également à la modélisation des déchirements et des découpes, dans un contexte interactif.

Notre contribution

Une première contribution de cette thèse est une classification et une caractérisation des méthodes de simulation mécanique, et des modèles biomécaniques interactifs, proposés dans le domaine de l'informatique. Les conclusions de cette étude nous ont conduit à proposer un modèle volumique interactif du foie humain, de type masses-ressorts. Ce modèle présente les particularités d'être non-linéaire et hétérogène. La non-linéarité du foie est obtenue en utilisant une nouvelle classe de ressorts non-linéaires, dont la loi de comportement est de forme cubique. Une calibration du paramètre de viscosité des ressorts non-linéaires, différente pour la peau du modèle et son intérieur, permet de modéliser le comportement mécanique hétérogène du foie.

Une autre contribution consiste en l'étude bibliographique approfondie des méthodes de simulation des phénomènes de la rupture et de la découpe de corps mous. Nous proposons alors une nouvelle approche qui permet de simuler ces phénomènes de manière compatible avec une simulation interactive. En effet, cette méthode permet de borner l'augmentation de la complexité du modèle, inhérente aux opérations de changement de topologie, tout en conservant une simulation réaliste.

Une dernière contribution de cette thèse concerne l'établissement d'une présentation synthétisée de la mécanique des milieux continus et des méthodes de résolution numérique proposées par les mécaniciens. Même si l'approche que nous avons utilisée ne s'appuie pas directement sur la mécanique des milieux continus, ce travail de synthèse nous est apparu important, car il permettra au lecteur de se familiariser avec les principaux concepts de la mécanique.

1. La rhéologie est une branche de la mécanique qui étudie les relations entre les contraintes et les déformations dans un matériau.

Organisation de ce mémoire

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier aborde les aspects fondamentaux de la mécanique des milieux continus et donne un aperçu non exhaustif des méthodes de résolution proposées par les mécaniciens. Une synthèse des travaux sur les modèles déformables dans le domaine de l'informatique y est également exposée.

Le deuxième chapitre est axé sur le problème spécifique de la modélisation interactive d'organes du corps humain. Après l'analyse de trois modèles biomécaniques interactifs, notre approche de la modélisation interactive du foie humain est exposée.

Suivant la même méthodologie, le troisième chapitre débute par un état de l'art des méthodes de modélisation des changements de topologie dans les modèles mécaniques. Une approche originale et adaptée aux contraintes inhérentes à une simulation interactive est alors présentée.

Le quatrième chapitre regroupe les détails d'implantations du modèle du foie et des algorithmes de changements de topologie présentés dans les deux chapitres précédents. Des résultats d'expérimentations qui valident nos approches y sont également exposés et commentés.

Mots clés : Simulation dynamique interactive, Modèle biologique, Découpes, Déchirements.

Chapitre 1

Fondements de la mécanique des milieux continus et approches informatiques

Les modèles mécaniques sont de plus en plus utilisés en informatique, dans des domaines aussi variés que l'animation, la robotique, les jeux vidéos et, de manière générale, dans les environnements virtuels nouvelle génération. Ces modèles ont pour objectif de simuler de façon physiquement réaliste le comportement mécanique d'entités virtuelles. Après de nombreux travaux sur la dynamique des objets rigides ([Bar89] par exemple) et le traitement de leurs collisions [MC95a, MW88, DJL98], le problème de la simulation de corps déformables a été abordé en informatique.

La science qui étudie les relations entre les forces s'appliquant sur un système et les mouvements qui en résultent s'appelle la **mécanique**. La problématique particulière de l'étude des corps continus est le champ de travail de la mécanique des milieux continus¹ (MMC). Un problème de mécanique se définit par :

- La géométrie du corps étudié ;
- ses propriétés mécaniques, c'est à dire sa loi de comportement ;
- les conditions aux limites : forces ou déplacements imposés au système.

A partir de ces données, la mécanique des milieux continus permet de calculer les états de contrainte et de déformation dans tout le corps étudié.

Dans la première partie de ce chapitre, nous tenterons de donner un rapide aperçu des principaux aspects de la MMC et des méthodes numériques proposées par les mécaniciens. Dans une seconde partie, nous présenterons les approches utilisées dans le domaine de l'informatique, en précisant comment les différences d'objectifs entre les deux communautés ont conduit à des formulations différentes.

1.1 La mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus étudie les relations entre les forces ou les déplacements appliquées sur un corps en certains endroits (c'est à dire les conditions aux limites) et le champ de déformation ou de contrainte global qui en résulte. Suivant la problématique, on souhaite calculer l'état de déformation induit par un ensemble de forces, ou l'état de contrainte auquel est soumis le solide s'il est déformé d'une certaine façon.

1. En mécanique des milieux continus, il est supposé que le milieu, les contraintes et les déformations sont continus.

1.1.1 Déplacements, déformations, contraintes et principes généraux

Les forces et les déformations mis en jeux lors d'un essai mécanique (ou d'une simulation) peuvent varier énormément suivant la taille et le poids des objets étudiés, c'est pour cela qu'ont été introduits les concepts *relatifs* de **déformation** et de **contrainte**.

DÉFINITION 1 Couramment noté \vec{u} , le **déplacement** représente la différence (vectorielle) entre la position courante et la position initiale d'un point donné du matériau. C'est à dire :

$$\vec{u}_i = \vec{X}^*_i - \vec{X}_i \quad (1.1)$$

où \vec{u}_i est le déplacement du point i , \vec{X}^*_i sa position finale et \vec{X}_i sa position initiale (voir fig. 1.1).

PROPRIÉTÉ 1 Si l'on connaît le déplacement de chaque particule d'un corps, on peut construire sa forme déformée.

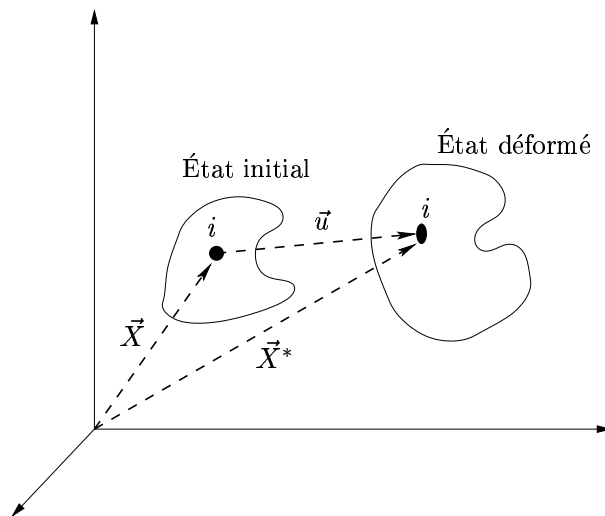


FIG. 1.1: Déformation d'un corps tridimensionnel, les différentes coordonnées

DÉFINITION 2 On appelle **déformation** l'état de transformation d'un matériau autour d'un point donné.

Par exemple, pour une poutre de section circulaire, sollicitée par un effort longitudinal F , la déformation peut être représentée par un allongement unitaire² $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$, ou $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l}$, avec l

2. En général, la notation ε est utilisée pour les déformations uniaxiales. Il est dès à présent important de noter qu'il existe de nombreuses manières de définir les déformations, suivant la problématique. Nous allons

la longueur de la poutre sous contrainte et l_0 sa longueur au repos. La déformation est donc une variable sans dimension.

DÉFINITION 3 Le **tenseur de déformation** peut être décrit par le champ de déplacement du corps considéré, au voisinage d'un point.

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Les termes diagonaux de la matrice du tenseur de déformation représentent les déformations suivant les axes principaux (déformations de type extension ou compression, suivant le signe) et les termes non diagonaux sont les termes de cisaillement. La matrice du tenseur de déformation est symétrique. Le tenseur de déformation étant une image de l'état de déformation du corps au voisinage d'un point, l'état global de déformation d'un corps est décrit par un champ tensoriel : le champ de déformation.

Le tenseur de déformation se calcule à partir du champ de déplacement à l'aide des relations suivantes [Fun69]) :

$$\begin{aligned} E_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right)^2, \\ E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

où \vec{u} est le vecteur de déplacement et \vec{X} le vecteur de position *avant* déformation. E est appelé **tenseur de déformation de Green**. Ce tenseur de déformation est calculé à partir de la configuration *initiale*. Une autre formulation du tenseur de déformation, proposé par **Almansi**, permet de calculer ce tenseur à partir de la configuration *déformée*³ :

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial X_i^*} - \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i^*} \right)^2, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j^*} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i^*} - \sum_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i^*} \frac{\partial u_k}{\partial X_j^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec \vec{X}^* le vecteur de position dans la configuration *déformée*.

voir ultérieurement plusieurs définitions du tenseur de déformation. Le lecteur ne devra donc pas être surpris de voir le tenseur de déformation noté E , e ou ε , suivant le contexte.

3. Par analogie avec la terminologie utilisée en hydrodynamique, le tenseur de Green est parfois nommé **tenseur de Lagrange**, et celui d'Almansi **tenseur d'Euler**.

Lorsque les déplacements sont supposés infinitésimaux (linéarité géométrique), les tenseurs de déformation de Green et d'Almansi tendent l'un vers l'autre, et l'on peut écrire, en approximation du premier ordre, que :

$$\begin{aligned} e_{ii} &= E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i}, \\ e_{ij} &= E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

DÉFINITION 4 Souvent notée σ , une **contrainte** est une force par unité de surface, c'est à dire une pression.

On dira par exemple qu'une poutre de section circulaire A , encastrée à l'une de ses deux extrémités, et sur laquelle on applique une force longitudinale, \vec{F} , à l'autre extrémité, est soumise à une contrainte $\sigma = \vec{F}/A$. Les forces s'exprimant en Newton (N) et les surfaces en mètres carrés (m^2), l'unité pour les contraintes est donc N/m^2 , ou Pascal (Pa). Cette notion de contrainte sert à représenter l'état des forces (par unité de surface) au sein du matériau.

DÉFINITION 5 Le **vecteur de contrainte** $\vec{t}^s(\vec{n})$ au point s de normale \vec{n} est lié, pour des raisons de continuité, aux efforts externes \vec{F}^s appliqués sur ds par :

$$\vec{t}^s(\vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}^s}{ds} \quad (1.6)$$

DÉFINITION 6 On appelle **tenseur des contraintes** l'état des contraintes autour d'un point.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

PROPRIÉTÉ 2 Le vecteur de contrainte est relié au tenseur de contrainte par la relation suivante (théorème de Cauchy) :

$$\vec{t}^s(\vec{n}) = [\sigma]\vec{n} \quad (1.8)$$

Les termes diagonaux de la matrice du tenseur de contrainte représentent les contraintes normales (de compression ou d'extension, suivant leur signe) et les termes non diagonaux sont les termes de cisaillement. La matrice du tenseur de contrainte est symétrique.

Dans un solide, ce tenseur de contrainte varie suivant la région étudiée, on a donc affaire à un champ de tenseurs. Si ce tenseur est indépendant de la position étudiée, on dit que le champ des contraintes est homogène.

Équation du mouvement. [Fun69] Le bilan des forces sur un corps volumique soumis à des forces extérieures est le suivant :

$$\int_v \rho \vec{\Gamma}^v dv = \int_v \vec{f}^v dv + \int_s \vec{t}^s ds \quad (1.9)$$

et le bilan des moments est :

$$\int_v \rho \vec{\Gamma}^v \wedge \vec{x} dv = \int_v \vec{f}^v \wedge \vec{x} dv + \int_s \vec{t}^s \wedge \vec{x} ds \quad (1.10)$$

où ρ est la masse volumique du matériau, $\vec{\Gamma}^v$ l'accélération du point P , et \vec{f}^v et \vec{t}^s les forces externes (volumiques et surfaciques, respectivement) appliquées au solide.

En utilisant le théorème de la divergence sur l'équation 1.8 tel que :

$$\int_s \vec{t}^s ds = \int_s [\sigma]^T \vec{n} ds = \int_v \text{div}([\sigma]^T) dv \quad (1.11)$$

l'équation du mouvement devient alors :

$$\rho \vec{\Gamma}^v = \vec{f}^v + \text{div}([\sigma]^T) \quad (1.12)$$

et 1.10 donne la symétrie du tenseur de contrainte :

$$[\sigma] = [\sigma]^T \quad (1.13)$$

On peut alors écrire le bilan des forces sous la forme suivante :

$$\rho \Gamma^v = \vec{f}^v + \text{div}([\sigma]) \quad \text{ou} \quad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.14)$$

On verra plus loin comment ce bilan des forces, qui lie l'accélération à un ensemble de forces extérieures et un état de contrainte interne, permet, via une intégration temporelle, d'obtenir la déformée d'un corps simulé.

Principe des travaux virtuels. [MWMTT98] Cette re-écriture de l'équation du mouvement, plus facilement résolvable par des méthodes numériques, fût introduite par Germain [Ger73] et mise en oeuvre numériquement par Trompette [Tro92]. Ce principe permet de résoudre certains problèmes qui ne peuvent pas l'être par l'équation locale du mouvement 1.14. L'idée est d'appliquer un déplacement virtuel $\delta \hat{u}$ à un élément de volume, l'équation 1.12 donne alors l'expression du travail virtuel dû à ce déplacement :

$$\delta \hat{u}^T \rho \vec{\Gamma}^v = \delta \hat{u}^T \vec{f}^v + \delta \hat{u}^T \text{div}(\sigma^T) \quad (1.15)$$

qui, après intégration globale et transformations, devient la forme variationnelle :

$$\int_v \delta \hat{u}^T \rho \vec{\Gamma}^v dv = \int_v \delta \hat{u}_f^T \vec{f}^v dv + \int_s \delta \hat{u}_t^T \vec{t}^s \vec{n} ds - \int_v Tr(\delta \hat{e}^T \sigma) dv \quad (1.16)$$

Cette formulation est dite *faible*, ou *globale* car elle approxime la solution locale du problème par une solution globale. Le principe des travaux virtuels s'écrit en général :

$$\delta \hat{W}^{acc} = \delta \hat{W}^{ext} + \delta \hat{W}^{int} \quad (1.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta \hat{W}^{acc} &= \int_v \delta \hat{u}^T \rho \vec{\Gamma}^v dv && \text{Travaux virtuels inertiels} \\ \delta \hat{W}^{int} &= - \int_v Tr(\delta \hat{e}^T \sigma) dv && \text{Travaux virtuels internes} \\ \delta \hat{W}^{ext} &= \int_v \delta \hat{u}_f^T \vec{f}^v dv + \int_s \delta \hat{u}_t^T \vec{t}^s \vec{n} ds && \text{Travaux virtuels externes} \end{aligned} \quad (1.18)$$

où \hat{e} est la forme vectorielle du tenseur de déformation d'Almansi et σ celle du tenseur de contrainte.

1.1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement définissent les relations entre les contraintes et les déformations. Ces relations, suivant les caractéristiques du matériau étudié, peuvent avoir ou non différentes propriétés : linéarité, mémoire (comportement dépendant du passé du matériau), directions privilégiées, incompressibilité, discontinuités (phénomène de rupture), thermodépendance, etc . . .

La taxinomie des modèles de comportement est donc très importante, nous n'aborderons ici que les modèles les plus couramment utilisés dans notre domaine, à savoir l'élasticité, l'élasto-plasticité et la visco-élasticité.

1.1.2.1 L'élasticité

La théorie de l'élasticité est la théorie des déformations réversibles. Elle suppose que les matériaux simulés sont parfaitement «élastiques». C'est à dire que les déformations résultantes de l'application d'un ensemble de forces disparaissent lorsque ces contraintes sont relâchées. Autrement dit, le matériau n'a pas de mémoire des contraintes auxquelles il a été soumis (pas de déformations résiduelles)[OS89].

Bien entendu, en réalité, les matériaux possèdent plus ou moins cette propriété, et notamment pour des plages de contraintes (ou de déformations) bornées. C'est pourquoi l'on dit souvent que ce type de modèle est valide pour de petites déformations.

L'élasticité linéaire. La loi de Hooke définit que dans un corps élastique le tenseur de contrainte, $[\sigma]$, s'exprime *linéairement* en fonction du tenseur de déformation, $[\varepsilon]$ (voir fig.1.2):

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (1.19)$$

où $[C]$ est le tenseur d'élasticité, ou de rigidité, qui est indépendant des contraintes et des déformations. $[C]$ est un tenseur d'ordre quatre, il contient $3^4 = 81$ éléments. Heureusement, comme les tenseurs de contrainte et de déformation sont symétriques, seuls 36 éléments indépendants composent le tenseur de rigidité.

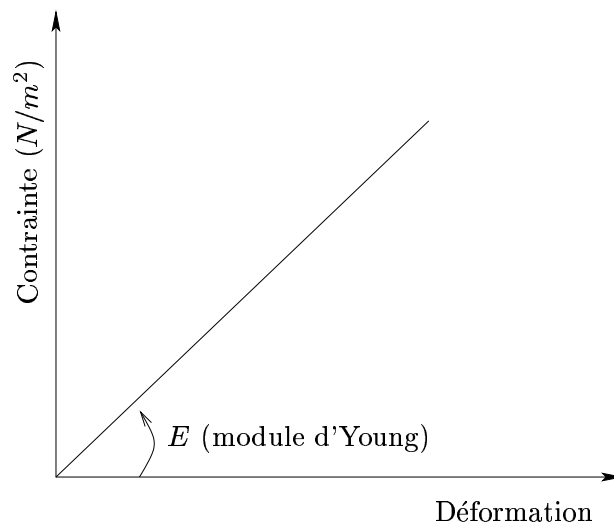


FIG. 1.2: Relation entre contrainte et déformation pour un matériau suivant la loi de Hooke, dans le cas d'un essai de traction uniaxiale. Le module d'Young, E , représente la rigidité du matériau (on rappelle qu'une déformation est sans dimension).

Différentes hypothèses sur le matériau étudié peuvent être formulées, permettant une simplification de la loi de Hooke (via une diminution du nombre d'éléments indépendants dans le tenseur de rigidité).

Une de ces hypothèses est l'isotropie: un matériau est isotrope si ses propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions. C'est l'hypothèse de simplification la plus forte, elle permet de réduire à deux le nombre d'éléments indépendants du tenseur de rigidité (pour

des petites déformations). La loi de Hooke s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.20)$$

où les constantes λ et μ sont appelées coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, 1 sinon). En inversant la relation on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad (1.21)$$

E et ν sont, respectivement, le module d'Young (ou d'élasticité), et le coefficient de Poisson. Ils sont liés aux coefficients de Lamé par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Une autre hypothèse est l'homogénéité : le matériau est homogène et de densité uniforme si n'importe quel élément du solide, si petit soit il, présente les mêmes caractéristiques physiques que le corps dans son ensemble. Sous cette hypothèse la matrice de rigidité ne dépend plus de la position du point étudié.

L'élasticité non linéaire. Paradoxalement, le caoutchouc, que l'on connaît comme le matériau élastique par excellence, ne présente pas un comportement qui puisse être décrit par la loi de Hooke pour des contraintes trop importantes. La courbe $\sigma = f(\varepsilon)$, pour un essai en traction uniaxiale sur une éprouvette de caoutchouc, est présentée dans la figure 1.3.

Cette courbe est non-linéaire, et une approximation linéaire par la loi de Hooke ne peut être faite que pour des petites déformations (i.e. 40% d'extension tout de même pour le caoutchouc). La plupart des organes biologiques présentent de la même façon un comportement non-linéaire.

Comme aucune équation générique n'a pour l'instant été trouvée pour ce type de matériau, les mécaniciens proposent de chercher une fonction énergétique de déformation pseudo-élastique. Considérant ρ_0 comme la densité du matériau non contraint, $\rho_0 W$ est une énergie de déformation par unité de volume. On a alors la relation différentielle :

$$S_{ij} = \frac{\partial \rho_0 W}{\partial E_{ij}}, (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.23)$$

où S_{ij} est le tenseur de contrainte sous la forme de Kirchhoff et E_{ij} le tenseur de déformation de Green.

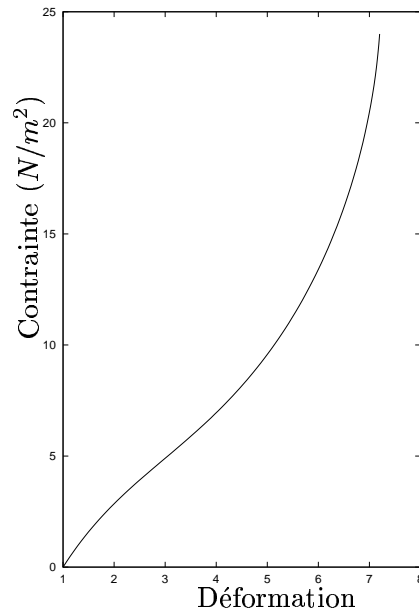


FIG. 1.3: Relation contrainte/déformation pour du caoutchouc vulcanisé soumis à un essai de traction uniaxiale (source [Fun69])

Reste alors à proposer une forme pour W . En s'appuyant sur des expérimentations, Fung propose, dans [Fun69], pour modéliser le comportement de vaisseaux sanguins, avec comme hypothèse que les vaisseaux ne sont pas soumis à des contraintes de torsion, la forme exponentielle suivante :

$$\rho_0 W = P + \frac{C}{2} e^Q,$$

avec :

$$\begin{aligned} P &= b_1 E_{\theta\theta}^2 + b_2 E_{zz}^2 + b_3 E_{\theta\theta} E_{zz}, \\ Q &= a_1 E_{\theta\theta}^2 + a_2 E_{zz}^2 + a_3 E_{\theta\theta} E_{zz} \end{aligned} \tag{1.24}$$

où $C, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sont des constantes, z est l'axe longitudinal du vaisseau et θ son axe radial.

Ce type d'approche est utilisée dans un contexte d'analyse scientifique, visant à valider numériquement des hypothèses mécaniques faites sur le comportement de corps biologiques. Dans ce cadre, la précision des simulations est très importante, et les temps de calcul importent peu.

1.1.2.2 L'élasto-plasticité

Si l'on effectue des essais de traction sur des éprouvettes de métal, on peut tracer les courbes de comportement montrant l'évolution de la déformation $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$ (où l_0 est la longueur initiale de l'éprouvette et l sa longueur sous contrainte) en fonction de la contrainte appliquée. De nombreux essais mécaniques ont révélé une forme typique de ces courbes pour les métaux (fig.1.4).

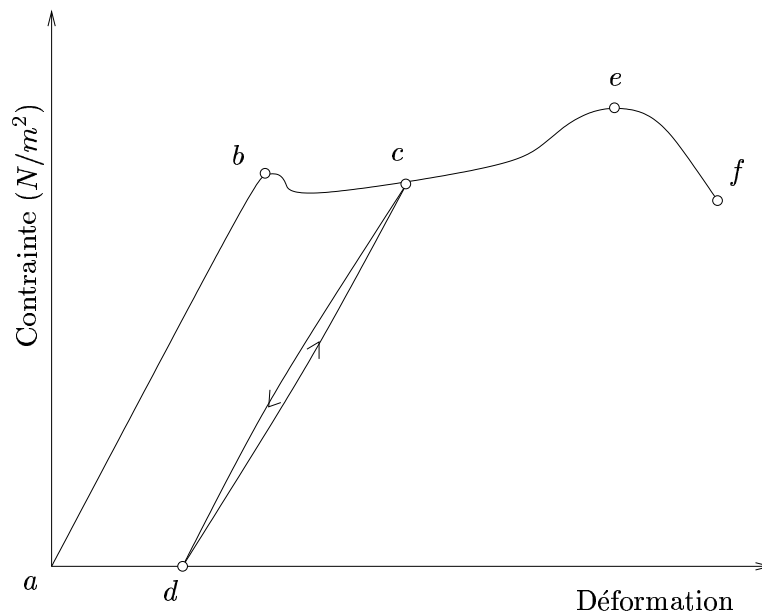


FIG. 1.4: Relation typique contrainte/déformation pour les métaux élasto-plastiques soumis à une traction uniaxiale (source [Fun69]).

Pour de très petites déformations (entre a et b), la relation $\sigma = f(\varepsilon)$ est pratiquement linéaire, on peut alors approximer par la loi de Hooke le comportement du métal. La déformation croît ensuite de façon non-linéaire par rapport à la contrainte appliquée (entre b et c), c'est la phase de **plasticité**. Si l'on relâche alors la contrainte, la déformation ne passera pas par sa courbe de charge initiale (ca), mais directement via une courbe quasi-linéaire (de c à d), de même pente que pendant la phase élastique. On obtient donc des déformations résiduelles. En rechargeant l'éprouvette, la déformation suit pratiquement la courbe de décharge, puis continue la phase de plasticité, jusqu'à atteindre la contrainte maximale admissible par le matériau (e), qui finit par rompre (f).

Tous les matériaux ne comportent pas de phase de plasticité, ou à des échelles très variables. Les matériaux comme la céramique, le fer ou les roches en général, par exemple, présentent une phase de plasticité très réduite, ils sont appelés matériaux **fragiles**. Les matériaux qui

présentent une phase de plasticité plus marquée (acier, matériaux organiques, par exemple) sont appelés matériaux **ductiles**.

1.1.2.3 La visco-élasticité linéaire

Fung [Fun69] décrit la propriété visco-élastique comme suit : quand un corps visco-élastique est soudainement déformé, et que cette déformation est maintenue constante, les contraintes induites par cette déformation diminuent dans le temps (phénomène appelé **relaxation**). De plus, lorsque le corps est soudainement soumis à une contrainte, et que celle-ci est maintenue constante, le corps continue de se déformer (caractéristique appelé **fluage**). Enfin, lorsque le corps est soumis à un chargement cyclique (contrainte de forme sinusoïdale, par exemple), des phénomènes d'hystérésis apparaissent.

Autrement dit, contrairement aux matériaux élastiques, les corps visco-élastiques se «rappellent» de leurs chargements et de leurs déformations passés. Cela conduit à formuler le comportement visco-élastique, de manière générale, comme une relation entre les contraintes, les déformations et leur dérivées dans le temps sous la forme [MWMTT98] :

$$\left[a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right] \sigma(t) = \left[b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right] \varepsilon(t) \quad (1.25)$$

D'autres formulations ont été proposées, nous ne les exposerons pas ici.

1.1.3 Les méthodes de résolution

La théorie de la mécanique des milieux continus, dont nous avons brièvement présenté certains aspects dans la section précédente, permet d'obtenir un ensemble d'équations différentielles qui décrivent les propriétés et le comportement des matériaux étudiés. Des méthodes de résolutions sont nécessaires afin d'obtenir une description temporelle de l'évolution de ces comportements. Les équations obtenues dans la section précédente sont, dans la plupart des cas, non linéaires. Les solutions de ces équations ne peuvent donc être approchées que par des méthodes incrémentales, après discrétisation spatiale et temporelle du phénomène étudié. L'approche la plus couramment utilisée pour cela en mécanique est une discrétisation géométrique par la méthode des éléments finis couplée à une intégration temporelle itérative des équations de la dynamique.

1.1.3.1 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique mathématique permettant de résoudre de façon numérique les équations du mouvement, afin de calculer les états de déformation et de contrainte du corps simulé. L'idée de base de la méthode est d'approximer les champs de déformation et de contrainte d'un corps continu par ceux d'un ensemble de primitives de géométrie simple, appelées **éléments finis**. La position de tout point du corps peut alors être exprimée en fonction de la position des noeuds de l'élément fini auquel ce point appartient, via une fonction d'interpolation appelée **fonction de forme**. De plus, toute fonction appliquée sur le corps tout entier, peut être approximée par une fonction du maillage interpolé (le maillage des éléments finis). C'est à dire que l'on approxime le problème continu global par un système d'équations dépendantes des coordonnées des noeuds des éléments finis. La précision de cette approximation dépendra, bien entendu, de la finesse du maillage et de la fonction de forme utilisée, et sera inversement proportionnelle aux temps de calculs et à l'emplacement mémoire nécessaires à la simulation.

Discrétisation géométrique. Généralement, les éléments de la discrétisation spatiale sont des primitives de géométrie simple, comme des triangles ou des quadrilatères pour des simulations surfaciques et des parallélépipèdes ou des tétraèdres pour les problèmes volumiques (voir fig.1.5). Après avoir maillé le domaine, tout point du milieu continu initial peut être exprimé par une interpolation des coordonnées des noeuds de l'élément fini auquel il appartient. La relation d'interpolation a, en général, la forme suivante :

$$\vec{X} = [H]\vec{N} \quad (1.26)$$

où \vec{X} est le vecteur de coordonnées du point dans le repère global, $[H]$ est la fonction de forme tensorielle et \vec{N} le vecteur de coordonnées local à l'élément considéré. Cette relation est, en particulier, utilisée pour trouver le déplacement de n'importe quel point, en fonction du déplacement \vec{U} des noeuds du maillage.

Le degré des fonctions de forme dépend du nombre de noeuds qui composent les éléments. La figure 1.5 montre un élément présentant quatre cotés et huit noeuds, nécessitant par la même une fonction de forme quadratique.

Les déplacements, dans un élément, sont alors interpolés de la manière suivante :

$$\vec{U}_X = [H(X)]\vec{U}_N \quad (1.27)$$

où \vec{U}_X est le déplacement dans le repère global et \vec{U}_N dans le repère local à l'élément.

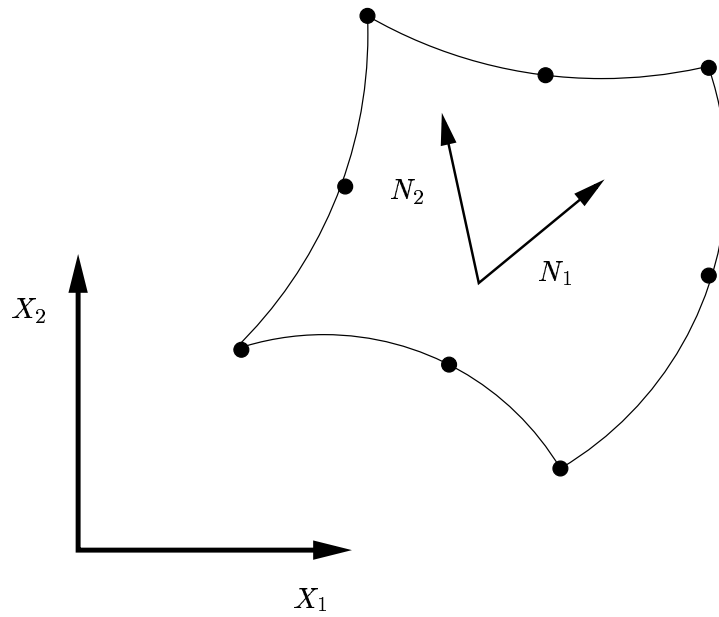


FIG. 1.5: Coordonnées locales (N_i) et globales (X_i) pour un élément bi-dimensionnel. On peut noter que le repère local n'est pas forcément orthonormé.

Dans le cas d'éléments bi-dimensionnels, les déformations sont alors obtenues par la relation :

$$\varepsilon = [B]\vec{U}_N \quad (1.28)$$

où :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H}{\partial X_2} \\ \frac{\partial H}{\partial X_2} & \frac{\partial H}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

avec :

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} = [J]^{-1} \frac{\partial H}{\partial N_i} \quad (1.30)$$

et (toujours avec des éléments 2D) :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial N_1} & \frac{\partial X_2}{\partial N_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial N_2} & \frac{\partial X_2}{\partial N_2} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Le tenseur de contrainte, quant à lui, se calcule à partir de :

$$\sigma = [D]\varepsilon \quad (1.32)$$

où $[D]$ est la matrice définissant la relation contrainte/déformation, autrement dit la formulation de la loi de comportement du matériau simulé.

Dans le cas d'un matériau visco-élastique non-linéaire, avec une relation contrainte/déformation du type $S(E, \dot{E})$, le principe des travaux virtuels, dans sa forme tensorielle, s'écrit :

$$[M]\ddot{U} + \Pi(U, \dot{U}) = L \quad (1.33)$$

avec :

- $[M] = \int_v \rho_0 H^T H dv$, la matrice de masse nodale ;
- $\Pi(U, \dot{U}) = \int_v B^T S(U, \dot{U}) dv$, le vecteur de force interne nodal ;
- $L = \int_v H_f^T f^v dv + \int_s H_t^T t^s N ds$, le vecteur de force externe nodal.

où $[B]$ est un opérateur différentiel matriciel non-linéaire obtenu à partir de l'équation de relation entre le tenseur de déformation et les déplacements (eq. 1.3, page 8).

Dans le cas particulier d'un matériau linéaire visco-élastique ($S = K^M E + D^M \dot{E}$) on obtient :

$$[M]\ddot{U} + [D]\dot{U} + [K]U = L \quad (1.34)$$

où \ddot{U} , \dot{U} et U sont, respectivement, les matrices colonnes d'accélération, de vitesse et de déplacement, $[D] = \int_v [B]^T D^v [B] dv$ la matrice de viscosité et $[K] = \int_v [B]^T K [B] dv$ la matrice de rigidité.

Après la phase de discrétisation géométrique, on donc peut analyser la réponse dynamique du matériau soumis à des contraintes externes en résolvant le système différentiel du second ordre pour les déplacements U des noeuds du maillage éléments finis.

Formulation variationnelle. [Mau98] La discrétisation géométrique du domaine a permis une linéarisation géométrique du problème. Il reste néanmoins des non-linéarités physiques dues, notamment, aux propriétés non-linéaires des matériaux. L'équation du mouvement 1.14, page 10, ne pouvant être résolue directement, faute de méthode de résolution adéquate, seule une approximation pas à pas est possible via une méthode incrémentale. Il est donc nécessaire de transformer l'équation du mouvement et l'équation contrainte/déformation dans des formes incrémentales, de façon à ce que, entre chaque pas de temps, le problème puisse être traité comme un problème linéaire. Utiliser les formes itératives donne un système d'équations tensorielles, linéaire pour chaque intervalle temporel, de la forme :

$$[M_n]\Delta\ddot{U} + [D_n]\Delta\dot{U} + [K_n]\Delta U = \Delta L \quad (1.35)$$

où $\Delta U = U_{n+1} - U_n$ est le vecteur de déplacement incrémental nodal, $[M_n]$ la matrice de masse de l'élément considéré, $[D_n]$ sa matrice de viscosité et $[K_n]$ sa matrice de rigidité. L_n est la matrice des forces extérieures s'exerçant sur l'élément. Le relation peut s'écrire :

$$[M_n]\ddot{U}_{n+1} + [D_n]\dot{U}_{n+1} + [K_n]\Delta U = L_{n+1} - L_n + [M_n]\ddot{U}_n + [D_n]\dot{U}_n \quad (1.36)$$

Dans ce schéma, tous les termes sont supposés connus au pas de temps n , excepté ΔU que l'on désire connaître pour passer au pas de temps $n + 1$.

1.1.3.2 L'intégration numérique

Les méthodes d'intégration numérique sont généralement cataloguées comme *explicites* ou *implicites*. L'idée de base des méthodes explicites est de calculer $U_{t+\Delta t}$ à partir de l'équation de l'équilibre au temps t . Ces méthodes, souvent très rapides, présentent l'inconvénient de posséder un pas de temps critique, au delà duquel des instabilités numériques les font diverger.

Les méthodes implicites déterminent la solution au temps $t + \Delta t$ à partir de l'équation de l'équilibre au temps $t + \Delta t$. Elles restent stables pour des pas de temps plus élevés, au détriment d'un coût numérique plus important.

Méthode d'intégration explicite directe [CMP89] Une méthode d'intégration directe explicite couramment utilisée est la méthode de la différence centrale. La vitesse et l'accélération sont approximés par :

$$\dot{U}_n = \frac{1}{2\Delta t}(U_{n+1} - U_{n-1}) \quad (1.37)$$

$$\ddot{U}_n = \frac{1}{\Delta t^2}(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) \quad (1.38)$$

Ces deux équations sont obtenues à partir des développements de Taylor de U_n et U_{n+1} par rapport au temps, en négligeant les termes d'ordre deux. Ces équations sont donc des approximations du second ordre. En utilisant ces expressions de la vitesse et de l'accélération dans 1.34 on obtient :

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2}[M] + \frac{1}{2\Delta t}[D] \right] U_{n+1} = L - [K]U_n + \frac{1}{\Delta t^2}[M](2U_n - U_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t}[D]U_{n-1} \quad (1.39)$$

qui est un système d'équations algébriques linéaires. Cette équation est conditionnellement stable, c'est à dire stable si $\Delta t < \frac{2}{f_{max}}$, où f_{max} est la plus haute fréquence naturelle du système.

Méthode d'intégration implicite directe [CMP89] La plupart des méthodes d'intégration implicites directes présentent l'avantage d'être inconditionnellement stables, sans restriction sur le pas de temps. Une méthode implicite populaire est la méthode de la **loi du trapèze**, ou **méthode de l'accélération moyenne**. Cette méthode décrit les relations entre les déplacements, vitesses et accélération tel que :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{U}_n + \dot{U}_{n+1}) \quad (1.40)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{U}_n + \ddot{U}_{n+1}) \quad (1.41)$$

Ces équations sont obtenues par développement en série de Taylor. Elles peuvent être résolues pour \dot{U}_{n+1} et \ddot{U}_{n+1} :

$$\dot{U}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t}(U_{n+1} - U_n) - \dot{U}_n \quad (1.42)$$

$$\ddot{U}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2}(U_{n+1} - U_n) - \frac{4}{\Delta t}\dot{U}_n - \ddot{U}_n \quad (1.43)$$

et en combinant les équations 1.42 et 1.43 avec l'équation du mouvement 1.34 on obtient :

$$[K]^{\text{eff}}U_{n+1} = R_{n+1}^{\text{eff}} \quad (1.44)$$

où $[K]^{\text{eff}}$ est la **matrice de rigidité effective** et R^{eff} le **vecteur de charge effectif**, qui sont donnés par :

$$[K]^{\text{eff}} = \frac{4}{\Delta t^2}[M] + \frac{2}{\Delta t}[D] + [K] \quad (1.45)$$

$$R^{\text{eff}} = L + [M] \left(\frac{4}{\Delta t^2}U_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{U}_n + \ddot{U}_n \right) + [D] \left(\frac{2}{\Delta t}U_n + \dot{U}_n \right) \quad (1.46)$$

Comme ce type de méthode est stable numériquement pour n'importe quel pas de temps, le choix de celui-ci ne dépend que de la précision de simulation souhaitée (en terme de fréquence de simulation). Par rapport aux méthodes explicites, le coût de calcul par pas de temps est bien plus élevé. Donc, pour un problème donné, les méthodes implicites ne sont intéressantes (en terme d'efficacité numérique) que lorsque leur pas de temps peut être bien plus grand que celui qu'il faudrait prendre pour une méthode explicite.

1.2 L'approche informatique de la simulation mécanique d'objets déformables

Simuler la dynamique d'objets mous trouve des applications dans plusieurs domaines de l'informatique. En robotique, très tôt, il a été nécessaire de modéliser le comportement dynamique de corps déformables, ainsi que les interactions pouvant intervenir entre ces corps, cela afin de développer et tester des algorithmes de planification de tâches et/ou de trajectoires prenant en compte les contraintes du monde réel [Luc85, Che95, Jou97].

Plus récemment, il s'est avéré que ces méthodes permettaient la génération de mouvements dans les environnements virtuels pour contrôler des corps inanimés de façon réaliste [Coz96].

Dans le domaine de l'animation, la simulation mécanique a permis d'animer de façon visuellement convaincante des corps qui, de part leur nombre très important de degrés de liberté, auraient été très difficiles, voire impossibles à animer à la main. L'animation de personnages organiques (donc déformables...), et notamment l'animation de visage, a donné lieu à de nombreux travaux sur les modèles déformables [Wat87, TW90].

En informatique médicale, dont le principal sujet était le traitement d'informations issues de l'imagerie médicale, un nouveau champ de travail est en train d'émerger : la construction de simulateurs de gestes médico-chirurgicaux. L'objectif de ce nouveau domaine est de proposer des outils pour la simulation d'actes médicaux, en vue de former des médecins ou de planifier des gestes opératoires. Il est bien évident que ces simulateurs doivent intégrer des modèles biomécaniques réalistes et interactifs.

Les modèles mécaniques interactifs proposés par des informaticiens peuvent être classés suivant leur formalisme continu ou discret. Nous décrivons brièvement ci-dessous quelques modèles satisfaisant ce critère, parmi les plus significatifs.

1.2.1 Les modèles continus

Les champs d'application de la simulation mécanique en informatique n'étant pas les mêmes que ceux de la mécanique théorique, les objectifs recherchés ne sont pas identiques. C'est pourquoi les modèles continus de type éléments finis développés dans le domaine de l'informatique sont souvent des optimisations de méthodes de simulations numériques issues de la mécanique théorique.

Bro-Nielsen et Cotin [CBN96] proposent de simuler le comportement de corps volumiques par la méthode des éléments finis, en utilisant une technique de condensation [Zie77] de la

matrice de rigidité. La loi de comportement utilisée est l'élasticité linéaire, pour de petits déplacements. Le matériau est supposé isotrope et homogène. L'utilisation d'une matrice de rigidité condensée permet d'obtenir un comportement équivalent à celui d'un corps volumique, en ne simulant que les noeuds de la surface du maillage de l'objet. Il n'est alors, bien entendu, pas possible de déchirer ou découper ce type de modèle (qui est creux).

En se basant sur les propriétés de linéarité de l'élasticité linéaire, Delingette et al. [DCA99] pré-calculent des déformations élémentaires d'objets volumiques isotropes et homogènes, par la méthode des éléments finis. Cette phase de pré-calculs achevée, il leur est alors possible de restituer un comportement mécanique pour des corps volumiques élastiques de manière interactive, en utilisant le principe de superposition des lois linéaires. Là aussi, il n'est pas possible de changer la topologie du corps simulé, puisque les pré-calculs ne peuvent pas être faits a priori, pour tous les changements de topologie possibles. De plus, ce modèle se basant sur une loi d'évolution quasi-statique, des phénomènes typiquement dynamiques, comme les oscillations amorties, par exemple, ne peuvent être simulés.

Dans sa thèse de doctorat Cotin [Cot97] propose, afin de pouvoir effectuer des opérations de découpe/déchirement, un modèle qu'il appelle **masses-tenseurs**. L'idée de base de ce modèle est de combiner les avantages des modèles continus et discrets. Il utilise un maillage volumique tétraédrique et calcule la force appliquée sur chaque noeud (masse) du maillage en fonction du déplacement du noeud en question et de ceux de ses voisins. Ces déplacements, pondérés par un tenseur de rigidité (pour chacun des tétraèdres du maillage), donnent la force interne à laquelle est soumise la masse considérée. A cette force interne peuvent s'ajouter des forces externes, de type tension de surface ou autre. Après avoir calculé les forces s'appliquant sur chacune des masses du modèle, il les intègre par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. Ce modèle lui permet d'animer des primitives comportant 760 masses et 4000 liaisons à des fréquences de 40Hz. Cotin propose un algorithme de découpe/déchirement basé sur son modèle, nous y reviendrons plus tard (section 3.1.4.1, page 57). Cette méthode, extrêmement proche de la résolution d'un problème d'élasticité linéaire par une méthode éléments finis explicite, présente l'inconvénient de calculer les forces qui s'appliquent sur les masses, en fonction de leur déplacement par rapport à leur position d'équilibre. Ceci exclut, par exemple, la possibilité de modéliser un objet se repliant sur lui même. De plus l'hypothèse de linéarité géométrique (petits déplacements) rend la simulation de grandes déformations hasardeuse.

Une autre approche intéressante de simulation interactive de corps déformables par un modèle continu est proposée par Debonne dans [DDCB00]. Le modèle est également basé sur une loi de comportement élastique linéaire, dans le cadre de petits déplacements. Le matériau simulé est là aussi supposé isotrope et homogène et l'équation du mouvement utilisée est

celle de Lamé. L'originalité de ce travail réside dans l'approche adaptative choisie. En effet, la résolution géométrique du modèle s'adapte en fonction de l'état d'agitation locale, dans le but de simuler plus finement les zones du modèle où «il se passe quelque chose». De même, le pas de temps utilisé s'adapte de façon à éviter les instabilités numériques dans les zones soumises à des contraintes ou à des vitesses élevées. L'adaptativité du modèle pose néanmoins le problème du rendu graphique, puisqu'un maillage polygonal, utilisé pour le rendu, doit être réajusté à chaque pas de temps, en fonction des coordonnées des points des éléments extérieurs du modèle. Enfin, l'auteur n'aborde pas le problème du changement de topologie.

1.2.2 Les modèles discrets

Une autre famille de modèles mécaniques est constituée par les modèles discrets. Dans ces modèles, l'aspect continu des matériaux simulés est approché par un réseaux de primitives de base, reliées entre elles par des contraintes. Ces modèles présentent souvent l'avantage d'être plus rapides que les modèles continus, au détriment d'un réglage de leurs paramètres mécaniques moins trivial et donc souvent d'une précision moindre.

Une approche permettant de simuler des corps déformables non structurés – typiquement les fluides, la boue ou le sable – est l'approche «systèmes de particules non structurés». Cette méthode propose d'approcher le comportement mécanique d'un corps déformable non structuré par celui d'un ensemble de particules, souvent de forme sphérique, pour des raisons de calcul de collision. Ces particules interfèrent les unes avec les autres via des forces qui les empêchent de s'interpénétrer, tout en les attirant les unes vers les autres afin de conserver la cohésion du corps simulé. Une limitation de cette approche est sa complexité algorithmique, quadratique par rapport au nombre de particules simulées. Afin de conserver des temps de calcul raisonnables, il est parfois proposé de diminuer le nombre de particules à simuler, en utilisant une modélisation en couches. Le modèle est alors composé de particules de taille décroissante suivant que l'on se rapproche de sa surface externe.

Dans l'optique de modéliser le comportement mécanique de corps déformables structurés, des contraintes entre les particules peuvent être spécifiées explicitement. Les modèles de type masse-ressort illustrent bien ce type de modèle et ils ont été abondamment utilisés. Miller [Mil88] a utilisé un modèle de type masse-ressort afin d'animer de façon réaliste le déplacement de serpents virtuels. Ses serpents sont modélisés par un ensemble de cubes dont les sommets sont des masses ponctuelles et les arêtes des ressorts. Afin d'éviter que les cubes ne se plient, des ressorts supplémentaires sont ajoutés pour contraindre les diagonales des cubes.

Certaines propositions ont permis d'améliorer le réalisme des simulations faisant appel à ce

type de modèle. Les travaux de Provot [Pro95] sur la simulation de tissus textiles, décrivent une méthode dont l'objectif est d'éviter les phénomènes d'hyper-élasticité. En effet, l'utilisation de ressorts élastiques linéaires pour simuler le comportement mécanique de tissus textiles peut entraîner des déformations peu réalistes lorsque des contraintes sont très localisées, typiquement aux points d'accroche d'un drapeau. Provot propose donc de contraindre les ressorts de son modèle à ne pas dépasser une longueur maximale autorisée, et propage cette contrainte à travers le maillage. Il n'a pas réussi à prouver la convergence de cette méthode, mais affirme qu'en pratique cela se passe bien.

Terzopoulos et Witkin [TW88] ainsi que Meseure et Chaillou [MC96] et [CGVP91, CGD97] proposent, quant à eux, des modèles déformables avec composante rigide. La composante rigide sert à calculer rapidement les mouvements balistiques (rotations et translations) du modèle, et la composante déformable simule les petites déformations résultant de contact avec d'autres corps, par exemple. Bien entendu, ce type de modèle ne permet pas de simuler de grandes déformations, ni des changements de topologie.

Un des problèmes des simulations physiques est le choix du pas de temps, si la méthode d'intégration numérique utilisée est de type explicite. Joukhadar [Jou96] propose pour cela un pas de temps évoluant suivant la variation de l'énergie mécanique du système simulé. En effet, pour que les méthodes numériques explicites d'intégration ne divergent pas lors de phénomènes à haute fréquence comme les collisions, il est nécessaire de diminuer le pas de temps utilisé, et la variation de l'énergie mécanique des objets est un bon indicateur de l'apparition de ce type de phénomènes.

Dans le même objectif, Baraff et Witkin [BW98] ont étudié l'impact sur les temps de calcul de l'utilisation de méthodes d'intégration implicites pour simuler des tissus textiles déformables en flexion mais rigides en traction. Pour simuler ce type de comportement mécanique, de très hautes fréquences de calcul sont nécessaires si l'on utilise un schéma d'intégration explicite (comme celui d'Euler, par exemple). L'utilisation d'une méthode d'intégration implicite permet simuler ces comportements, sans avoir à utiliser des pas de temps d'intégration très petits et donc ainsi de gagner du temps de calcul, sans toutefois atteindre des simulations interactives.

Dans [HPH96] Hutchinson et al. proposent, afin d'accélérer les temps de calcul, un modèle masse-ressort surfacique adaptatif. Leur modèle remaille localement le réseau masse-ressort lorsque l'angle entre deux ressorts devient trop important, ce qui est le signe qu'une interaction est en cours avec un autre corps. Leur algorithme permet un calcul rapide de l'état d'équilibre statique recherché, puisqu'il permet de ne simuler finement que les zones d'interaction. Le problème est qu'aucune répartition de masse n'est proposé et, en conséquence, la masse

globale des tissus simulés augmente au fur et à mesure des raffinements. De plus, à cause de la nature discrète des modèles masse-ressort, le fait d'ajouter des ressorts dans certaines zones du modèle, mais avec des caractéristiques de rigidité et de viscosité identiques à celles des ressorts initiaux, modifie le comportement mécanique du modèle. Enfin, le critère de raffinement proposé est très lié à leur application (simuler la forme finale d'un drap posé sur un objet de forme quelconque) et n'est pas généralisable. C'est en effet un seuil sur l'angle entre deux ressorts, dans une direction perpendiculaire au réseau masse ressort, qui est toujours initialement plan.

Enfin, Gibson propose dans [Gib96] un modèle de déformation basé sur la propagation de contraintes géométriques. Ce modèle ne fait pas appel explicitement à une loi de comportement mécanique, mais contraint les éléments simulés à rester vis à vis de leur voisins à une distance comprise entre une borne minimale et une borne maximale. Ce comportement étant similaire à celui des maillons d'une chaîne, l'algorithme est appelé **ChainMail**. La figure 1.6 illustre le comportement d'un maillage d'éléments bi-dimensionnels. Une relaxation du maillage est obtenue via un processus de minimisation d'énergie basé sur les distances entre les éléments. D'après les auteurs, cette approche permet de simuler de façon interactive des modèles volumiques contenant des centaines de milliers de primitives. La modélisation de changements de topologie est également théoriquement réalisable. Reste le problème du rendu graphique des voxels, assez coûteux par rapport au rendu de polygones, du fait de l'absence d'accélérateurs graphiques appropriés à ce type de représentation.

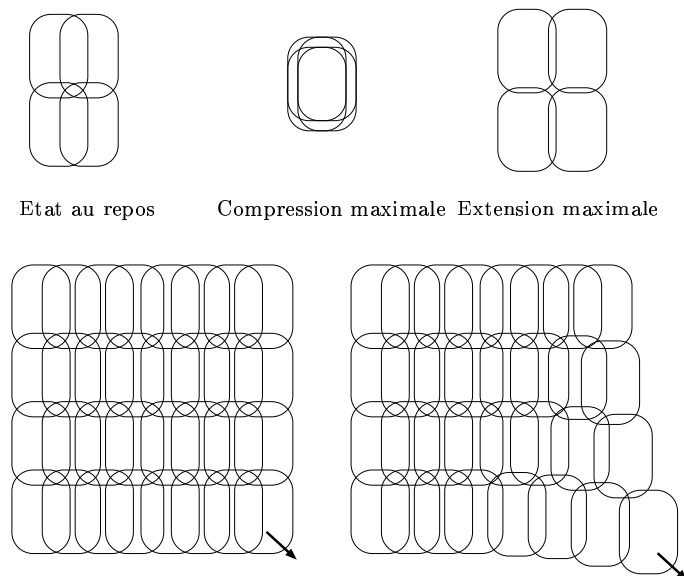


FIG. 1.6: *Principe de base de l'algorithme ChainMail et exemple de déformation sur un modèle bi-dimensionnel.*

1.3 Conclusion

Nous avons vu, dans la première partie de ce chapitre, que les méthodes numériques basées sur la mécanique des milieux continus permettent de simuler de façon très précise le comportement mécanique d'un grand nombre de matériaux. Cependant, suivant le comportement des matériaux simulés, les méthodes de résolution mises en jeu peuvent nécessiter des temps de calculs très importants.

Nous avons également montré que certaines hypothèses simplifient énormément le problème. Par exemple, supposer que les déplacements sont petits (linéarisation géométrique), utiliser une loi de comportement linéaire ou supposer le matériau isotrope ou homogène permet une simplification significative des équations à résoudre.

Au début de la seconde partie de ce chapitre, les objectifs de la simulation mécanique dans le domaine de l'informatique ont été exposés. Puis, des approches continues et discrètes interactives ont été présentées.

Les modèles continus utilisés sont des modèles de MMC, avec des hypothèses très fortes (petits déplacements, élasticité linéaire, isotropie, homogénéité), et des optimisations des méthodes de résolution, afin de tourner en «temps interactif». Ce sont des modèles possédant une base théorique solide. Celle-ci devrait rendre le réglage de leurs paramètres mécaniques (rigidité, viscosité, incompressibilité, ...) plus aisé, mais nous verrons plus tard que cela n'est pas toujours le cas, surtout lorsque les matériaux que l'on désire simuler ne satisfont pas les hypothèses émises.

Les modèles discrets sont une approximation du milieu continu par un assemblage de primitives simples. De part leur simplicité, ils sont plus véloces. Par contre, il n'est pas évident de caler ce type de modèle sur un comportement mécanique voulu, et l'utilisation d'algorithmes de minimisation d'erreur ou d'apprentissage est requise.

Le chapitre suivant a pour premier objectif d'étudier les contraintes relatives à la simulation *interactive* de corps organiques, de la façon la plus réaliste possible. Nous proposerons ensuite, en tenant compte des conclusions du présent chapitre et des contraintes liées à notre domaine d'application, des pistes pour modéliser le comportement mécanique du foie humain.

Chapitre 2

Simulation dynamique de corps biologiques

Une application de la simulation de comportements mécaniques revêt actuellement une importance particulière : la modélisation biomécanique des organes du corps humain. Ses domaines d'application vont de la formation des médecins au développement de nouvelles procédures d'intervention, en passant par la compréhension de phénomènes physiologiques. Les techniques opératoires de plus en plus perfectionnées et les soins médicaux de plus en plus coûteux expliquent en partie l'essor actuel des recherches sur ce type d'applications.

Bien entendu, étant donné le caractère éminemment plus complexe des organes biologiques par rapport aux matériaux inertes (métaux, céramiques, . . .), des hypothèses simplificatrices doivent être formulées suivant l'application exacte que l'on désire faire du modèle biomécanique.

La première section de ce chapitre traitera de l'état de l'art dans ce domaine, en s'intéressant au contexte, aux contraintes et aux objectifs liés à la modélisation d'organes humains. Quelques réalisations significatives seront ensuite décrites. Dans une seconde section, un modèle biomécanique du foie humain sera proposé.

2.1 Les simulateurs médicaux, état de l'art

L'objectif de cette section est de donner un aperçu d'un domaine récent en informatique : le développement de modèles biomécaniques.

L'informatique a révolutionné le monde de l'imagerie médicale, en permettant de traiter de plus en plus rapidement et efficacement les données issues des techniques d'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) et de Scanner. Les avancées dans ce domaine du traitement des images médicales ont changé les méthodes de travail des médecins, leur permettant non seulement de détecter de manière plus fiable et plus précise certaines pathologies, mais aussi, dans certains cas, de planifier les opérations chirurgicales.

Des modèles géométriques tri-dimensionnels des organes du corps humain ont été générés, notamment à l'aide des données issues du projet «Visible man»¹, facilitant l'apprentissage de l'anatomie par leur côté interactif.

La géométrie du corps humain étant maintenant relativement bien connue, l'étape suivante dans la modélisation du corps humain est la simulation de la biomécanique des organes.

1. ensemble de photos en «coupe» du corps humain, scannées à partir du corps congelé d'un condamné à mort américain.

2.1.1 Contextes, contraintes et objectifs

Différents objectifs gouvernent les recherches actuelles sur les simulateurs médicaux. En effet, avoir un modèle biomécanique réaliste du corps humain pourrait permettre, tout d'abord, de planifier des opérations chirurgicales non pas uniquement sur des considérations géométriques, mais également en prenant en compte des contraintes mécaniques ou dynamiques (comme la respiration).

Pour la formation des médecins, des modèles biomécaniques d'organes permettrait un entraînement à certains gestes médico-chirurgicaux de façon répétitive, à moindre coût. Actuellement, certaines techniques de chirurgie sont en effet enseignées sur animaux ou cadavres, ce qui pose des problèmes d'éthique, de coût et d'utilisation unique. Un simulateur permettrait également de simuler des pathologies rares, par définition difficiles à étudier.

En plus de la formation des jeunes médecins, la formation continue des chirurgiens retirera beaucoup d'avantages à disposer de simulateurs. De nos jours encore plus qu'hier, les médecins sont en effet appelés à se former tout au long de leur carrière, étant donnée la vitesse à laquelle évoluent les techniques opératoires.

Bien entendu, au dessus d'un modèle biomécanique du corps humain, il conviendrait d'ajouter une couche didactique, mettant en oeuvre des mises en situations et des scénarii, ainsi que des processus d'évaluation.

Différents champs de recherche appartenant à différents domaines scientifiques entrent donc en jeu afin de mettre au point un simulateur chirurgical. Les principaux axes de recherche sont les suivants :

- compréhension et description du comportement mécanique des organes que l'on désire simuler, c'est à dire trouver les lois de comportement de ces organes (voir section 1.1.2) ;
- développement de modèles mécaniques interactifs, au comportement dynamique le plus proche possible de la réalité (c'est à dire de la loi de comportement théorique du matériau) ;
- spécification de scénarii de formation et de méthodes d'évaluation.

Le premier axe fait partie du domaine de la rhéologie, branche de la mécanique, le second est aux carrefours de l'informatique et des méthodes numériques issues de la mécanique des milieux continus et enfin, le troisième axe fait appel aux sciences humaines et cognitives.

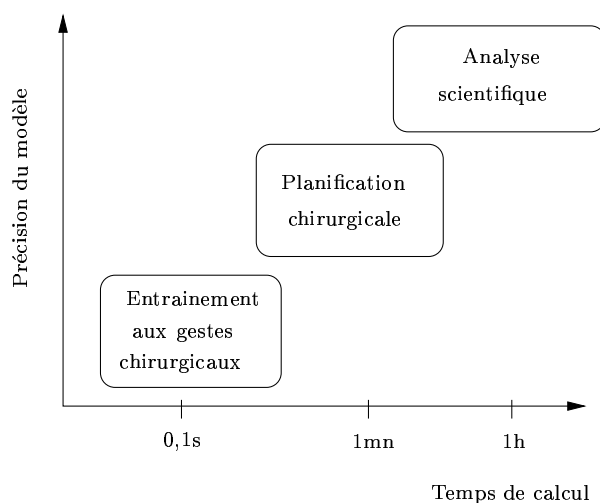


FIG. 2.1: *Rapports temps de calcul/précision de simulation, suivant l'application (source [Del98]).*

La figure 2.1 montre la relation liant le type de simulation médicale au degrés de réalisme et aux temps de calcul acceptables. Par **analyse scientifique**, H. Delingette [Del98] entend la validation numérique d'hypothèses mécaniques faites sur des comportements de corps biologiques, en vue du développement de nouvelles procédures d'intervention ou d'implants. Dans cette optique, la précision des simulations est primordiale, et peu importent les temps de calcul. La **planification chirurgicale** demande souvent plusieurs essais de simulation afin de trouver la bonne procédure. Ce type de planification demande néanmoins une précision relativement importante, et des temps de calcul de 30 secondes à une heure sont généralement acceptés. Nous nous intéressons quant à nous aux **simulateurs biomécaniques interactifs**, qui ont pour objectif l'entraînement – en ligne – à des procédures d'interventions chirurgicales, et qui sont donc fortement contraints par le coté interactif, inhérent à ce type d'application. Si l'on se contente d'un retour visuel, des fréquences de simulation de l'ordre de 30Hz sont suffisantes alors que pour un retour haptique le kHz devient nécessaire.

2.1.2 Exemples de réalisations de modèles biomécaniques interactifs

Bien que beaucoup de travaux aient été réalisés sur les modèles déformables interactifs, peu de modèles anatomiques interactifs, basés sur des modèles mécaniques, ont été proposés. Nous allons tenter de décrire ci-dessous quelques uns des travaux que nous avons trouvés les plus significatifs et les plus complets.

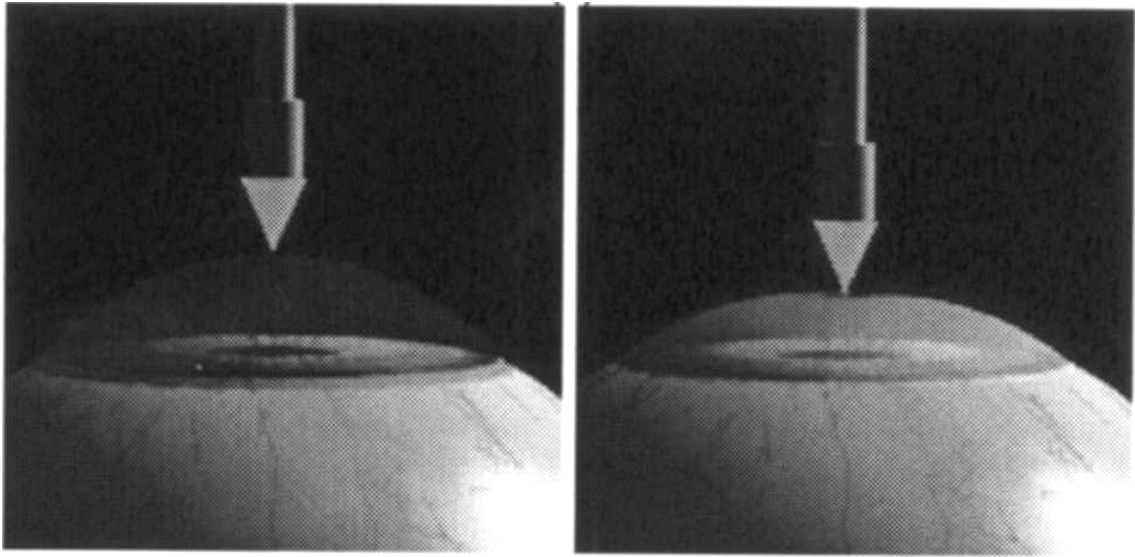


FIG. 2.2: Le modèle biomécanique de l'oeil développé par Sagar et al. (source [SBM⁺94]).

Sagar et al. ont proposé dans [SBM⁺94] un modèle anatomique de l'oeil humain. Le modèle biomécanique est basé sur les équations de l'élasticité en grandes déformations. L'oeil est supposé incompressible, anisotrope et homogène. La loi de comportement utilisée est non linéaire, avec une relation contrainte/déformation uniaxiale en forme de J. La méthode de résolution utilisée est la méthode des éléments finis, les auteurs la décrivent plus précisément dans [HS89]. Tirant parti de la géométrie particulière de l'oeil, les auteurs ont travaillé avec les équations de l'équilibre sous leur forme sphérique. Ils ne sont pas très précis sur les temps de calculs de leur modèle, et annoncent juste qu'il faut à peu près une seconde, sur une station de travail Alpha 3000/300, pour calculer la réponse statique du modèle à un chargement, ou une déformation. Le rendu graphique de la simulation est basé sur des NURBS permettant, à l'aide d'une gestion du niveau de détail, un affichage interactif de bonne qualité. Le modèle ne simule pas la dynamique, ce qui n'est pas très gênant, étant données les vitesses de déformation et les masses déplacées durant ce type d'opération. Le simulateur ne permet pas non plus de simuler des opérations de découpe ou de déchirement. Enfin, le modèle proposé n'est pas du tout générique, mais est au contraire très bien adapté au problème étudié, à savoir la chirurgie de l'oeil.

Cotin, dans sa thèse de doctorat [Cot97], propose un modèle hybride du foie humain. Ce modèle est basé sur les méthodes de simulation mécanique d'objets déformables présentées dans la section 1.2.1. Un modèle statique volumique pré-calculé du foie est proposé, ainsi qu'un modèle masse-tenseur dynamique et un modèle hybride. Le modèle pré-calculé permet

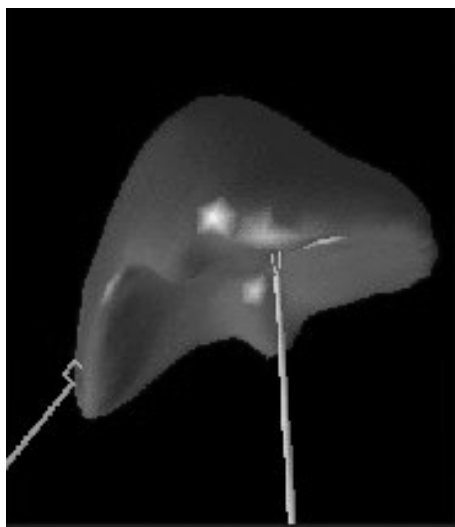


FIG. 2.3: Le modèle volumique précalculé de *S. Cotin* peut être manipulé interactivement, à l'aide de deux outils à retour d'effort (source [Cot97]).

une simulation à 300Hz avec retour d'efforts (fig.2.3) et le modèle masse-tenseur permet des opérations de découpe (nous y reviendrons plus tard, dans la section 3.1.4.1). Le modèle hybride présente une zone simulée par la méthode pré-calculée et une zone masse-tenseur. Étant donnée la relative lenteur du modèle masse-tenseur, le modèle hybride permet de simuler l'organe dans son ensemble, en autorisant des opérations de découpe dans les zones simulées par le réseau masse-tenseur. Cependant, le modèle hybride ne permet pas de retour haptique. L'auteur a utilisé des données issues de tests rhéologiques effectués *in vitro* sur un foie de porc afin de caler son modèle. Les mesures ont montré un comportement visco-élastique non linéaire. Le modèle de déformation de Cotin étant linéaire (petites déformations et loi de comportement linéaire) et sa méthode de résolution quasi-statique, seule la partie linéaire de ces données (pour de petites contraintes) à été utilisée pour caler le modèle. La méthode proposée est bien générique, et pourrait être utilisée afin de modéliser le comportement d'autres organes. Il est toutefois important de noter que les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie sont faites, alors que le foie, qui est un organe fortement vascularisé, ne présente pas un comportement mécanique isotrope, ni homogène.

d'Aulignac et al. ont développé un modèle dynamique de la cuisse humaine [dLC99]. L'objectif de ce travail est de proposer un simulateur d'examen échographiques. Des mesures forces/déplacements ont été effectuées sur une cuisse humaine, à l'aide d'un bras de robot (voir fig.2.4). Deux sondes de géométrie différentes ont été utilisées pour cela : une pointue, pour mesurer la réponse de la cuisse à une force ponctuelle, et une plate, présentant la même

surface qu'une sonde échographique typique.



FIG. 2.4: *Mesure des données force/déplacement effectuées à l'aide d'un robot Puma sur une cuisse humaine (source [dLC99]).*

Les mesures montrent clairement le caractère non linéaire du comportement de la cuisse, ainsi que son hétérogénéité. Afin de modéliser ce comportement, les auteurs proposent d'utiliser un réseau masses-ressorts composé de ressorts linéaires et non linéaires (fig. 2.5). Des ressorts linéaires modélisent la surface de la peau et, orthogonalement à cette surface, des ressorts non-linéaires servent de support à celle-ci. Les ressorts non-linéaires modélisent le caractère incompressible de la cuisse, au dessus d'une certaine déformation. La relation force/déplacement des ressorts non-linéaires est de la forme :

$$f(x) = \frac{x}{ax + b} \quad (2.1)$$

où x est l'élongation du ressort. Les paramètres a et b ont été identifiés pour chaque ressort, suivant la mesure expérimentale correspondante.

Pour l'intégration des équations de la dynamique, les auteurs utilisent une méthode implicite, plus adéquate qu'une méthode explicite d'après eux, car les ressorts simulés sont relativement rigides. Leur modèle permet une simulation à 100 images par seconde sur une Octane R10000 cadencée à 175Mhz. Afin d'obtenir un retour d'effort de meilleur qualité, les auteurs proposent dans [dBL00] l'utilisation d'un **modèle local**. Ce modèle local fait office d'interface entre

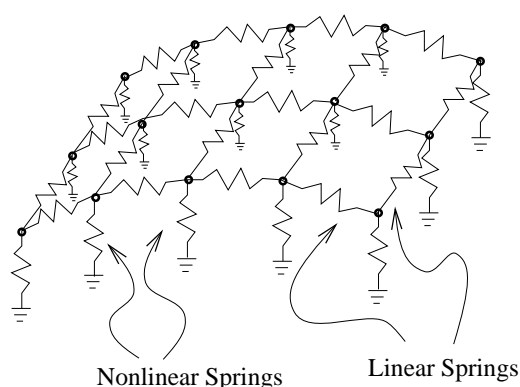


FIG. 2.5: Le modèle masses-ressorts à deux couches d'Aulignac et al. (source [dLC99]).

le modèle physique, qui tourne à 100Hz, et le dispositif à retour d'effort qui travaille à une fréquence de 1Khz. Le modèle local est un modèle physique simplifié, qui simule l'interaction entre l'outil contrôlé par l'utilisateur et un corps rigide (une sphère ou un plan, au choix). Les positions relatives du corps simulé par le modèle local et de l'outil sont mises à jour à la fréquence du modèle physique, alors que le modèle local envoie au dispositif à retour d'effort les forces à la fréquence de 1kHz.

Ce modèle, bien que peu générique, présente l'avantage de simuler à des fréquences permettant le retour haptique un comportement dynamique non linéaire calé sur des mesures réelles. Malheureusement, ce modèle n'est toujours pas relié au système permettant de générer des images échographiques en fonction de la position de la sonde et de la force exercée, son intérêt est donc pour l'instant limité. Enfin, comme il s'agit d'un modèle surfacique, il ne peut pas être utilisé pour modéliser des opérations de découpe.

2.1.3 Conclusion

Nous avons tout d'abord vu dans cette section que les objectifs de simulation dépendent de l'application visée. Les modélisations ayant pour objectif le développement de simulateurs pour l'entraînement aux gestes chirurgicaux se doivent de tourner en «temps interactif», à des fréquences élevées si le retour haptique est désiré. Cette contrainte sur les temps de calcul se répercute bien entendu sur la précision des simulations.

L'étude de trois exemples de réalisation de modèles biomécaniques interactifs a montré une autre dualité à gérer. En effet, en tirant parti des spécificités des organes à simuler (géométrie sphérique ou plane), les modèles de l'oeil ou de la cuisse présentent des comportements mécanique plus proches de la réalité que celui du foie qui s'appuie sur les hypothèses fortes



FIG. 2.6: *Le modèle de la cuisse, couplé à un système à retour d'efforts de type PHANTOM (source [dLC99]).*

de l'homogénéité et de l'isotropie. Cette précision de simulation est faite au détriment d'une généralisation qui est alors quasiment nulle.

Le tableau 2.1 résume les principales caractéristiques des trois modèles présentés.

2.2 Vers un modèle discret, hétérogène, non-linéaire et interactif du foie humain

Nous présentons dans cette section un modèle du foie humain volumique, hétérogène, non-linéaire, interactif et compatible avec des opérations de découpe ou de déchirement. Après avoir expliqué les principales caractéristiques biomécaniques du foie humain, nous définirons

Auteur(s)	Organe simulé	Modèle physique	Identification des paramètres	Hypothèses et spécificités	Fréquences de simulation
Sagar, et al.	Oeil	Éléments Finis	???	Modèle sphérique, homogène, non linéaire, grandes déformations	1Hz
Cotin	Foie	Éléments finis et masse-tenseur	oui, dans leur domaine linéaire	Modèle hybride, homogène, linéarité, petites déformations	40Hz et 300Hz retour haptique
d'Aulignac et al.	Cuisse	masses-ressorts en couche	oui	Modèle surfacique, hétérogène, non linéaire, modèle local	100Hz retour haptique

TAB. 2.1: Récapitulatif des principales caractéristiques des modèles biomécaniques présentés dans la section.

nos objectifs et présenterons le modèle.

2.2.1 Anatomie et biomécanique du foie humain

Le foie est l'organe le plus gros de l'organisme, il pèse autour de 2,3 Kg (dont à peu près 800g de sang) et mesure, en moyenne, 28 cm de large, 16 cm en hauteur et 8 cm en profondeur. Il est situé sous le diaphragme, à droite de l'abdomen. Sa fonction principale est de réguler le taux de glucose dans le sang, ce qui permet à l'organisme de ne pas être obligé d'ingérer des aliments de façon continue (très utile, par exemple, pour pouvoir faire la sieste entre deux repas).

Mécaniquement parlant, on peut considérer que le foie est encastré² à son emplacement. En effet, le péritoine qui l'entoure fait des replis, unis entre eux, qui forment ainsi ce que l'on appelle les ligaments. Ces ligaments relient le foie aux organes voisins. Le foie est vascularisé par la veine Porte, et la veine Cave inférieure en assure le drainage. Durant une opération chirurgicale, une première phase consiste à approcher le segment du foie à opérer, en coupant les ligaments. On peut donc considérer le foie comme encastré, mais présentant une zone libre: le champ opératoire.

L'intérieur du foie est constitué du **parenchyme**, corps spongieux rempli de sang qui est lui même parcouru par un réseau vasculaire très développé (fig.2.7). Ce parenchyme est recouvert par une peau, appelée **capsule de Glisson**, qui délimite l'extérieur de l'organe.

Peu d'essais mécaniques visant à identifier le comportement rhéologique du foie humain ont été réalisés. Cela tient principalement au fait que le foie est composé en grande partie de sang – un tiers de sa masse – qui coagule lors d'essais *in vitro*. Il faudrait donc, idéalement, effectuer les essais rhéologiques *in vivo*, ce qui ne va pas sans poser des problèmes technologiques et d'éthique. Une autre difficulté pour identifier le comportement mécanique du foie est son

2. L'encastrement est une condition limite qui ne laisse aucun degrés de liberté.

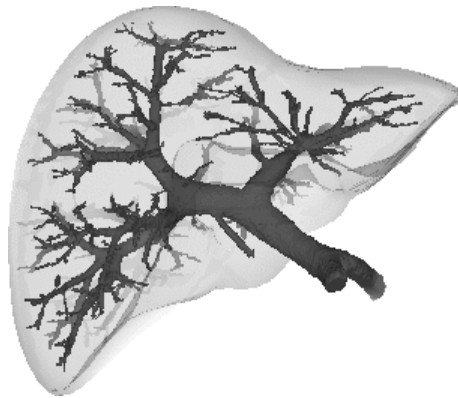


FIG. 2.7: Représentation du foie humain avec son réseau vasculaire (source : projet *Epidaure*, INRIA Sophia-Antipolis).

caractère fortement hétérogène et non isotrope. En effet, bien que le parenchyme et la capsule de Glisson présentent des caractéristiques mécaniques assez homogènes, l'important réseau vasculaire présent au sein du foie en altère les propriétés. Le comportement rhéologique de l'organe dépend donc de la zone étudiée.

Néanmoins, après discussions avec des médecins-chirurgiens dans le cadre de l' AISIM³, il apparaît raisonnable de décrire *qualitativement* le comportement mécanique du foie, lorsque l'on fait abstraction du réseau vasculaire, comme celui d'une éponge remplie de liquide et recouverte d'une peau élastique.

Enfin, les quelques études biomécaniques quantitatives sur la capsule de Glisson [DCRC99] ont montré le caractère visco-élastique linéaire de celle-ci, pour de petites déformations (moins de 10%). D'après la même étude, la capsule de Glisson est fragile et rompt facilement sous contrainte. La figure 2.8 montre le résultat de tests effectués *in vivo* sur un foie humain. Elle représente la relation entre contrainte et déformation (moyenne de cinq essais effectués sur le même sujet). Cette étude présente l'intérêt d'avoir été faite *in vivo* et sur l'organe entier, et montre donc le comportement global du foie, en un emplacement donné.

2.2.2 Objectifs de la modélisation

Les données rhéologiques sur le comportement du foie humain étant rares, nous nous plaçons dans l'optique de développer un modèle *qualitativement* réaliste. Nous garderons toutefois comme objectif que ce modèle devra pouvoir être réglé, lorsque des données forces/déplacements seront publiées.

3. Action Incitative SIMulation de chirurgie de l'INRIA

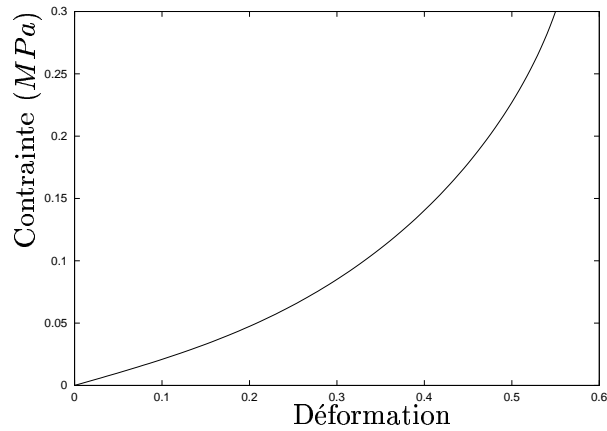


FIG. 2.8: Relation contrainte/déformation pour un foie humain. Mesures effectuées *in vivo*, en compression (source [CFD⁺00]).

Nous désirons également que le modèle présente un comportement hétérogène, non-linéaire, dynamique et qu'il soit compatible avec des opérations de découpe ou déchirement. Enfin, il devra être possible d'interagir de façon intuitive avec le modèle, si possible via un dispositif à retour de force.

2.2.3 Modèle du foie

2.2.3.1 Représentation géométrique

La représentation géométrique du modèle est utilisée pour le rendu graphique et la détection des collisions. Nous verrons plus tard qu'elle sert également de base à la construction du modèle mécanique. La technique utilisée doit permettre d'offrir un compromis entre la précision géométrique et les performances d'affichage et de navigation dans le maillage. Le caractère volumique du modèle ne nécessite pas d'être rendu graphiquement, cependant, le modèle devant pouvoir être déchiré ou découpé, la représentation géométrique doit posséder un caractère volumique, ou pouvoir être mise à jour et modifiée facilement.

Afin de modéliser l'hétérogénéité du foie, nous proposons d'utiliser deux maillages distincts : un maillage surfacique pour la capsule de Glisson et un volumique pour le parenchyme.

Il nous est apparu opportun d'utiliser un maillage surfacique triangulé (fig.2.9) car ce type de maillage offre un rapport précision/performance intéressant, notamment grâce à l'accélération matérielle pour le rendu graphique, disponible actuellement à faible coût. Un maillage tétraédrique, construit à partir du maillage surfacique, et dont les faces externes correspondent à

celles du maillage de la peau, est utilisé pour représenter le côté volumique de la géométrie du parenchyme.

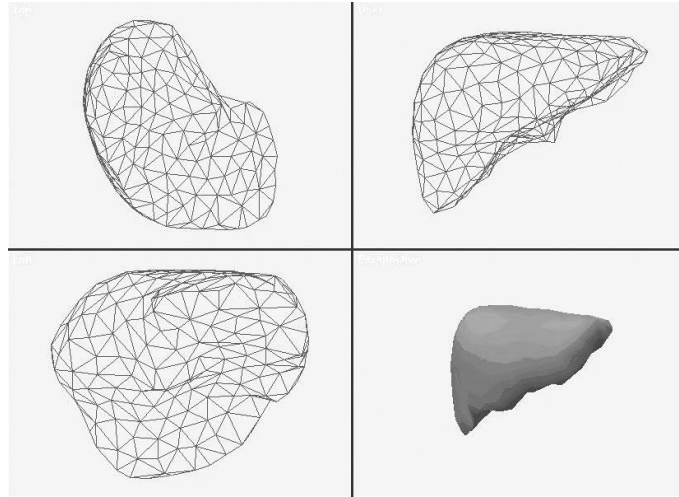


FIG. 2.9: *Maillage surfacique du foie (source [BL99]).*

2.2.3.2 Modèle mécanique

Pour modéliser la dynamique du foie humain, nous avons utilisé un modèle mécanique de type masse-ressort [BL99]. Cette approche, très utilisée dans le domaine de l'animation (voir la section 1.2.2), permet de simuler à hautes fréquences et à faible coût algorithmique des comportements dynamiques très variés. Elle présente toutefois des inconvénients qu'il convient de ne pas négliger.

Tout d'abord, ce n'est pas une approche continue (au sens de la mécanique des milieux continus) mais une approximation du milieu continu par un assemblage de primitives reliées par des contraintes. Bien qu'il soit montré [Fey88] qu'un modèle masse-ressort utilisant des ressorts à l'échelle microscopique tend à modéliser un milieu continu, en pratique personne n'utilise une discrétisation si fine, impossible à mettre en oeuvre. Cette première limitation en implique une deuxième: le comportement mécanique d'un modèle masse-ressort dépend de sa géométrie. Enfin, un dernier inconvénient, découlant lui aussi du caractère non continu de la méthode, est le réglage des paramètres pour ce type de modèle. En effet, s'il existe des méthodes [MC95b] donnant une correspondance entre un maillage quasi-régulier de ressorts et des paramètres mécaniques usuels comme le module d'Young et le coefficient de Poisson, pour des maillages à la géométrie quelconque il faut faire appel à des méthodes de minimisation d'erreur ([dLC99, JGL97]).

Malgré ces limitations, les modèles masse-ressort sont largement utilisés car ils présentent les avantages d'être rapides, numériquement simples et facilement modifiables, afin de simuler des comportements spécifiques comme la non-linéarité, l'hétérogénéité ou les changements de topologie.

Nous proposons de construire le modèle mécanique du foie humain directement à partir des maillages géométriques décrits dans la section précédente. En plaçant des masses ponctuelles aux emplacements des noeuds des deux maillages géométriques, et en les reliant par des ressorts suivant les arrêtes des maillages, on obtient aisément un réseau masse-ressort adéquat. Bien entendu, la qualité des maillages géométrique est primordiale, afin de minimiser les artefacts liés à la topologie du réseau. Cette contrainte nous avait notamment fortement influencé dans le choix d'une discrétisation géométrique basée sur une surface triangulée et un maillage volumique tétraédrique. En effet, et contrairement au cas des primitives carrés ou des cubiques, un assemblage de poutres rigides basé sur ces primitives géométriques (triangle et tétraèdre) ne possède qu'une configuration d'équilibre si l'on exclu les retournements de primitive (voir figure 2.10). Les retournements sont peu probables lorsque l'on travaille sur un maillage assemblant un grand nombre de primitives triangulaires ou tétraédriques⁴ (alors qu'un «aplatissement» de réseau cubique est fort probable).

La masse totale du modèle est uniformément répartie dans toutes les masses ponctuelles qui le composent. Les ressorts utilisés sont visco-élastiques, et répondent à la loi de comportement suivante :

$$\vec{F}_{ressort} = (\lambda_1 d^3 + \lambda_2 d) + \mu \dot{p} \quad (2.2)$$

où d est la déformation relative du ressort, c'est à dire $d = \frac{l-l_0}{l_0}$, avec l la longueur du ressort et l_0 sa longueur au repos, λ_1 et λ_2 sont des facteurs de rigidité, μ est un paramètre de viscosité et \dot{p} la vitesse relative des particules reliées par le ressort. La forme du premier terme de cette force de rappel est illustrée sur la figure 2.11. Ce premier terme donne aux ressorts un comportement non linéaire qui les rend relativement incompressibles et inextensibles (puisque leur force de rappel tend rapidement vers l'infini lorsqu'ils sont trop étirés ou comprimés, voir fig. 2.11). Néanmoins, pour de petites déformations (moins de 20%), les ressorts présentent un comportement linéaire.

Le second terme, quant à lui, est un terme de viscosité, qui dissipe de l'énergie. Afin de modéliser l'aspect hétérogène du foie humain, le paramètre de viscosité, μ , est réglé de façon différente pour les ressorts qui composent la capsule de Glisson (maillage triangulé surfacique)

4. On peut d'ailleurs noter que les assemblages de poutres rigides, dans le génie civil, se font toujours sur des bases de maillages triangulés ou tétraédriques.

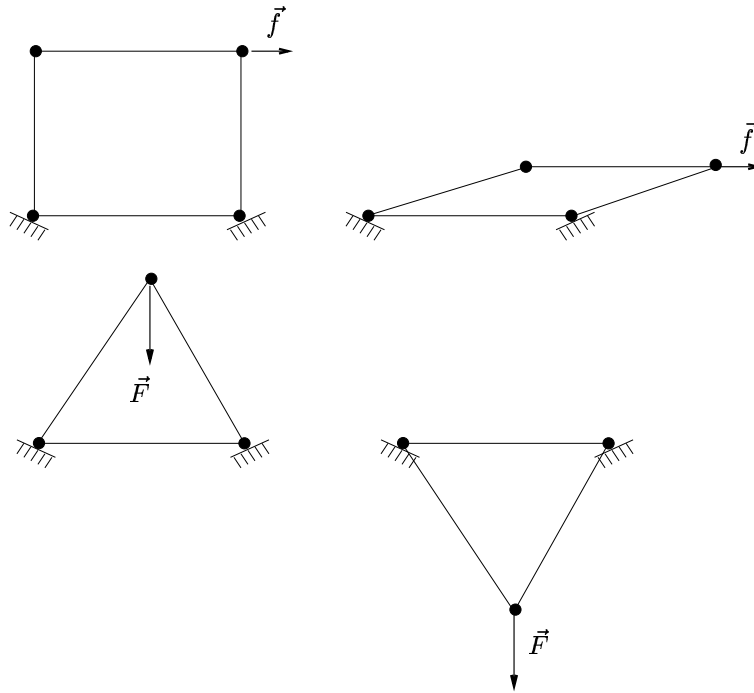


FIG. 2.10: Un assemblage de ressorts virtuels rigides de forme carrée s'aplatit facilement sous l'action d'une force faible, alors qu'un assemblage de forme triangulaire ne peut pas s'aplatir et, s'il est assez rigide, ne se retourne que sous l'action d'une force très importante.

et ceux qui modélisent le parenchyme (maillage tétraédrique interne). Nous avons vu, dans la section 2.2.1, que la capsule de Glisson présentait un comportement quasi élastique. En conséquence, la viscosité des ressorts la modélisant est réglée de façon à être négligeable devant leur rigidité. Le parenchyme présentant pour sa part un comportement plutôt visqueux, le paramètre de viscosité des ressorts internes du modèle est réglé de manière que cette viscosité induise une force qui soit du même ordre que celle induite par la rigidité des ressorts.

Ainsi, nous obtenons un modèle présentant une peau qui tend à conserver sa forme originelle, en dissipant très peu d'énergie lorsqu'on la déforme, et une structure interne qui dissipe une grande quantité d'énergie. Le maillage volumique étant construit à partir du maillage surfacique, les deux composants du modèle sont interconnectés, et interagissent naturellement. Cette hétérogénéité du modèle n'entre en action, bien entendu, qu'en phase de simulation dynamique.

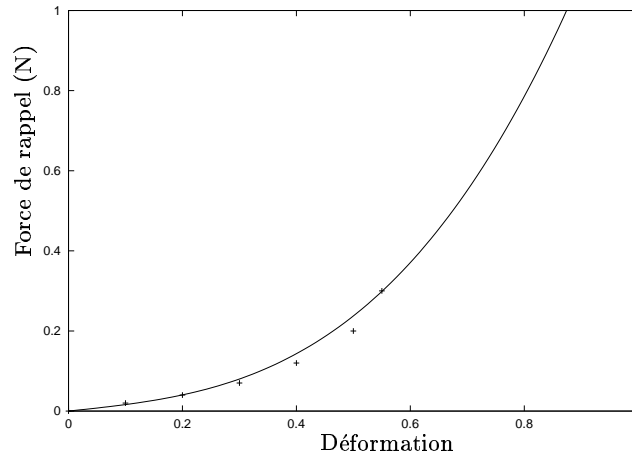


FIG. 2.11: *Forme du premier terme de l'équation 2.2 pour $\lambda_1 = 1.3$ et $\lambda_2 = 0.15$. Les ressorts présentent alors un comportement non linéaire très proche de celui présenté dans la figure 2.8, page 40 (les coordonnées des croix proviennent de cette figure).*

2.2.4 Conditions aux limites

Nous modélisons deux types de conditions aux limites : celles liées à l'anatomie du corps humain et celles induites par les actions de l'utilisateur. Dans l'état actuel de développement du simulateur, les conditions limites anatomiques sont simplement modélisées par l'encastrement des noeuds d'un élément tétraédrique se trouvant au centre de l'organe. Afin d'être plus proche de la réalité, il aurait fallu encastrement les noeuds du modèle se trouvant sur les veines Porte et Cave.

Les conditions aux limites découlant des actions de l'utilisateur sont des conditions de force. La façon d'évaluer les points d'application et l'intensité de ces forces est décrite dans la section suivante.

2.2.5 Interactions

Le modèle du foie étant développé avec l'objectif d'être intégré dans un simulateur à but pédagogique, il est primordial que les utilisateurs du simulateur puissent interagir avec lui. C'est à dire qu'ils puissent, à l'aide d'un périphérique à retour de force par exemple, appliquer des forces sur le modèle, et en ressentir – visuellement et haptiquement – les effets. Il devient alors primordial de détecter les collisions entre un outil chirurgical virtuel, contrôlé en position par l'utilisateur, et les modèles simulés. Lorsque des collisions sont détectées, le modèle doit réagir en conséquence ; un modèle de contact est donc nécessaire.

2.2.5.1 Détection des collisions

La détection des collisions est un problème géométrique qui a été très tôt étudié en robotique. De nombreux algorithmes permettent de détecter rapidement la collision entre deux polyèdres. Cependant, la complexité et l'efficacité des algorithmes dépendent fortement de la géométrie des objets testés. Malheureusement, les objets déformables sont par définition concaves (en effet, il suffit «d'appuyer» dessus pour qu'ils le deviennent), catégorie d'objets pour laquelle la détection des collisions est la plus ardue.

Si une collision a lieu entre deux polyèdres, et afin de calculer une réponse adéquate à la collision, il peut être intéressant de déterminer les points et les faces des polyèdres qui sont en interaction, ainsi que leur distance (voire leur volume) d'interpénétration.

Lin et Canny [LC91] proposent un algorithme qui calcule la distance entre deux polyèdres indéformables convexes composés de n caractéristiques (une caractéristique pouvant être un point, un segment ou une arête). Cet algorithme possède une complexité linéaire en n ($O(n)$). En profitant de la continuité du mouvement, la détection peut être faite en temps constant ($O(1)$). Une extension [KKT92] de cet algorithme permet de déterminer les caractéristiques qui sont en contact.

Gilbert et al [GJK88] proposent un algorithme qui calcule la distance entre les enveloppes convexes de deux ensembles de points, sans calculer les enveloppes convexes. La complexité de cet algorithme est quadratique par rapport au nombre, n , de points composant les deux polyèdres ($O(n^2)$). Elle peut être ramenée à une complexité linéaire ($O(n)$) en profitant de la continuité du mouvement. L'algorithme peut également donner une approximation de la distance d'interpénétration. Toutefois, le fait que les enveloppes convexes de deux polyèdres soient en collision, n'implique pas que les polyèdres en question le soient également.

Enfin, Joukhadar [Jou97] propose une extension de l'algorithme de Gilbert, qui calcule en temps linéaire ($O(n)$) la plus petite distance qui permet de séparer deux polyèdres concaves en collision. Cette distance peut être choisie pour définir une distance d'interpénétration.

Dans notre contexte particulier, nous nous limiterons à la détection de collisions pouvant survenir entre l'outil contrôlé par l'utilisateur et le modèle déformable du foie humain. Dans une optique de rapidité de simulation, la géométrie de l'outil peut être approximée par une boîte englobante, voire par un segment de droite. Il nous faut donc détecter les collisions entre un objet convexe à la géométrie simple et un polyèdre concave à la géométrie plus complexe.

Étant données ces hypothèses, la méthode proposée par Lombardo et al. [LCN99] présente une solution intéressante. Cette méthode propose de tirer partie des accélérateurs graphiques

compatibles avec la librairie Open-GL. Elle permet d'obtenir la liste des facettes d'un polyèdre quelconque se trouvant dans une région parallélépipédique simplement en définissant une caméra Open-GL de la forme parallélépipédique voulue, et en demandant au matériel la liste des facettes rendues par cette caméra virtuelle. Cette méthode se met en oeuvre très facilement, a fortiori si l'application possède déjà un rendu Open-GL.

2.2.5.2 Traitement des collisions

Une fois les collisions détectées, il convient de les traiter de façon à conserver un comportement cohérent du modèle. Trois principales approches ont été proposées pour traiter ce type de problème.

La première est de gérer les collisions comme des contraintes géométriques à respecter, ce qui se ramène à la résolution d'un système d'équations non linéaires, difficile à maintenir et à résoudre. De plus, cette méthode de traitement des collisions peut mener à des comportements physiquement incohérents [Mir96].

Les deux autres modèles de collision sont des méthodes basées sur une approche mécanique du problème. La méthode d'**impulsion** propose de considérer la collision entre deux corps rigides comme un phénomène instantané, voyant les vitesses des corps en collision modifiées tel que :

$$v_z(t^+) = -ev_z(t^-) \quad (2.3)$$

où v_z est la composante normale de la vitesse relative des corps, et $e \in \{0, 1\}$ le coefficient de restitution de Poisson, qui dépend des caractéristiques mécaniques des matériaux en contact. Cette méthode est mal adaptée pour modéliser des contacts où un corps déformable entre en jeu, car dans ce cas là, la phase de contact peut difficilement être supposée instantanée.

La troisième approche est la méthode dite de **pénalité** [MW88]. Elle propose de séparer deux corps en contact par une force dépendante de leur distance d'interpénétration et de leur vitesse de collision. Les corps en collisions sont donc repoussés l'un de l'autre par une force du type «force d'archimède». L'approche présente l'avantage de ne pas nécessiter de retour-arrière afin de déterminer l'instant exact de la collision (alors que c'est le cas pour la méthode d'impulsion), puisque la collision est alors vue comme un phénomène continu et non-instantané. En contrepartie, les corps simulés peuvent s'interpénétrer géométriquement durant la phase de collision.

Travaillant sur des corps fortement déformables, nous avons fait le choix d'utiliser cette dernière approche, bien adaptée à un traitement en «temps interactif» des collisions entre

corps de ce type. La force de collision que nous utilisons est de la forme [MO96] :

$$\vec{F}_{collision} = \begin{cases} (-\lambda x - \mu \dot{x})\vec{k} & \text{si } x < 0 \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

où x est la distance d'interpénétration, \vec{k} la direction du contact, λ sa rigidité et μ sa viscosité. Le terme visqueux permet d'obtenir une déperdition d'énergie durant la collision. Nous utilisons la proposition de [HC75] qui consiste à multiplier ce terme visqueux par la distance d'interpénétration afin d'éviter les discontinuités de la force de collision en début et fin de contact (voir figure 2.12).

Afin de déterminer la distance d'interpénétration, la liste des facettes obtenue par l'algorithme de détection de collision est parcouru, et on calcule pour chaque vertex de ces facettes leur distance à l'extrémité de l'outil. Sur chacun des vertex en collision est alors appliqué une force calculée comme décrit précédemment, et l'opposé de la somme de toutes ces forces est appliquée à l'outil.

2.2.6 Intégration numérique

L'intégration numérique permet de faire «avancer» la simulation dans le temps. C'est à dire, à partir de l'état du système au temps t , de calculer l'état du système au temps $t + \Delta t$. De nombreuses méthodes numériques existent, elles diffèrent suivant leur stabilité, leur précision et leur rapidité de calcul.

La méthode d'Euler est la méthode d'intégration numérique explicite la plus simple à mettre en oeuvre, elle est beaucoup utilisée dans les modèles mécaniques en informatique. A partir de la position \vec{P} et de la vitesse \vec{V} au temps t , on obtient celles-ci au temps $t + \Delta t$ à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{P}(t + \Delta t) &= \vec{P}(t) + \vec{V}(t)\Delta t \\ \vec{V}(t + \Delta t) &= \vec{V}(t) + \vec{A}(t)\Delta t \end{aligned} \quad (2.5)$$

où \vec{A} est l'accélération du point considéré, qui s'obtient à partir de l'équation de Newton $\vec{F} = m\vec{A}$, c'est à dire d'après le calcul de l'ensemble des forces externes et internes du modèle.

Cette méthode présente l'avantage d'être très rapide à calculer, car une seule évaluation de l'accélération, c'est à dire de l'ensemble des forces, est à faire. Toutefois, elle présente l'inconvénient d'être conditionnellement stable. En effet, la méthode diverge si le pas de

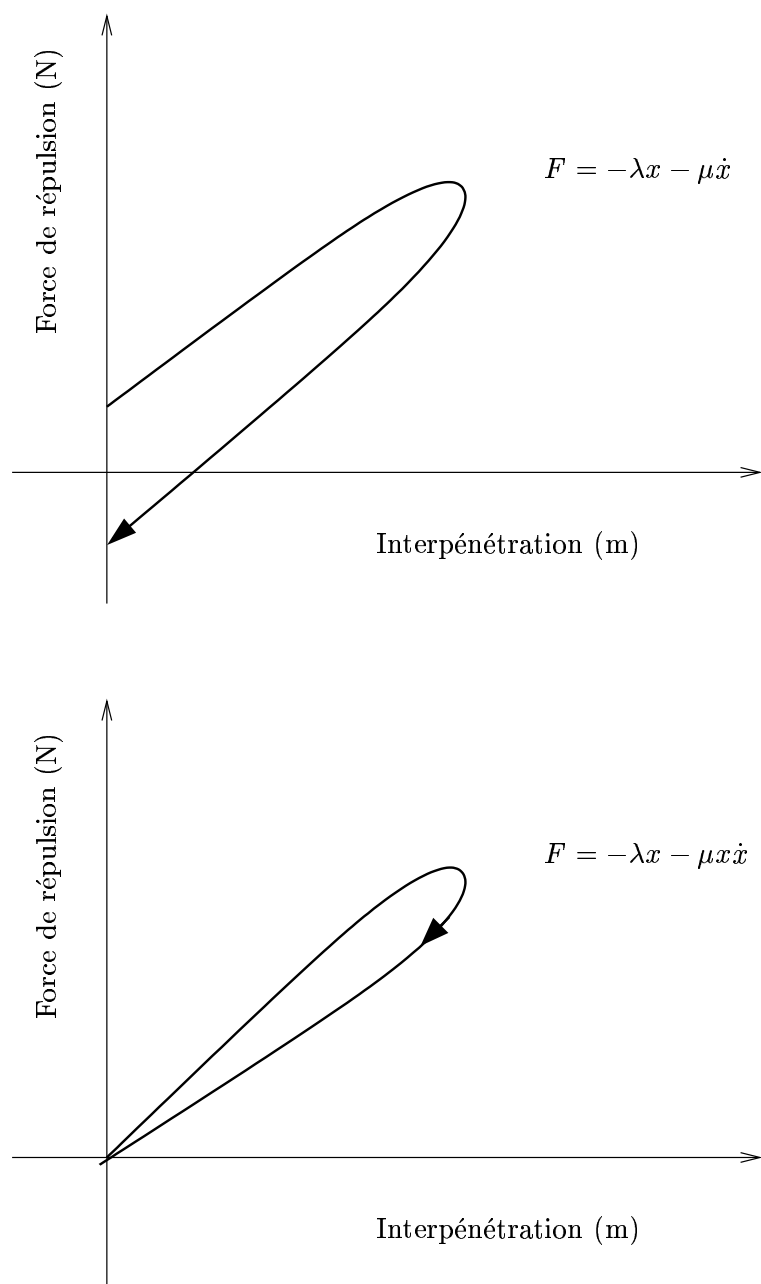


FIG. 2.12: La modification de la force de contact proposée par [HC75] permet d'éviter les discontinuités au début et à la fin de la collision, annulant ainsi les effets de « collage ».

temps Δt utilisé est supérieur à la période propre, T_0 , du phénomène simulé :

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

avec m la masse et λ la rigidité.

Ceci est principalement dû au fait que sa précision est de l'ordre de Δt . En pratique, il faut donc faire appel à des pas de temps bien plus petits que ceux utilisés pour les autres méthodes d'intégration numérique.

Les méthodes de type **Runge-Kutta** donnent de ce point de vue de meilleurs résultats. La méthode Runge-Kutta 2, dite parfois **méthode du point milieu**, est plus stable que la méthode d'Euler. Elle nécessite toutefois deux évaluations de l'accélération par itération. En contrepartie, sa stabilité accrue permet de plus que doubler la durée du pas de temps. La méthode Runge-Kutta d'ordre 4, encore plus stable, demande quant à elle quatre évaluations de l'accélération.

Une autre méthode d'intégration, utilisée notamment dans le domaine de la dynamique moléculaire [AT87, FS96], traite l'équation du mouvement, qui est une équation différentielle du second ordre, directement, sans passer par un système du premier ordre. Cette variante de l'algorithme du «Leapfrog» s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{V}(t + \frac{\Delta t}{2}) &= \vec{V}(t - \frac{\Delta t}{2}) + \vec{A}(t)\Delta t \\ \vec{P}(t + \Delta t) &= \vec{P}(t) + \vec{V}(t + \frac{\Delta t}{2})\Delta t\end{aligned}\tag{2.6}$$

Cette formulation, très proche du schéma d'Euler, s'en distingue car le calcul de la vitesse est décalé d'un demi pas de temps par rapport à celui de la position, et car la nouvelle position est évaluée en fonction de la vitesse qui vient d'être recalculée, et non pas de celle calculée au pas de temps précédent. Comme le fait remarquer Provot [Pro97], la première distinction est purement formelle, exéptée à la première itération. Donc, si l'on fait l'approximation que :

$$\vec{A}(\vec{P}(t), \vec{V}(t)) \simeq \vec{A}(\vec{P}(t), \vec{V}(t + \frac{\Delta t}{2}))$$

on arrive au schéma suivant :

$$\begin{aligned}\vec{P}(t + \Delta t) &= \vec{P}(t) + \vec{V}(t + \Delta t)\Delta t \\ \vec{V}(t + \Delta t) &= \vec{V}(t) + \vec{A}(t)\Delta t\end{aligned}\tag{2.7}$$

Provot montre également dans sa thèse que ce schéma d'Euler modifié possède une erreur locale en $O(\Delta t^4)$, c'est à dire bien plus faible que pour la méthode d'Euler ($O((\Delta t))$).

Cette méthode allie donc coût de calcul très compétitif (équivalent à celui du schéma d'Euler) à une stabilité numérique performante. Après avoir testé les schémas d'Euler, Runge-Kutta 2 et Euler modifié (Eq. 2.7), notre choix s'est porté sur cette dernière méthode, qui nous a donné le meilleur rapport rapidité/stabilité.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord spécifié les particularités de notre contexte de travail par rapport au champ d'étude plus large de la simulation médicale. Une étude de modèles biomécaniques interactifs existant a ensuite permis de mieux cerner les difficultés à gérer, et les caractéristiques mécaniques importantes à simuler pour obtenir un modèle biomécanique réaliste. De plus, contrairement aux matériaux traditionnellement étudiés en mécanique, les tissus organiques peuvent difficilement être supposés homogènes et isotropes, et présentent, en général, un comportement non linéaire dès que les déformations dépassent 10%.

Suivant ces considérations, un modèle biomécanique du foie humain a ensuite été proposé. Sans développer une nouvelle approche pour le calcul des déformations, notre modèle, par l'intégration de nombreux algorithmes et outils existants, permet de simuler de manière interactive un comportement dynamique non linéaire. L'utilisation de ressorts «cubiques» permet d'obtenir un modèle relativement incompressible et inextensible, qui correspond bien à la réalité de la rhéologie du foie.

Le modèle présente également la caractéristique d'être hétérogène, avec des paramètres mécaniques différents pour la Capsule de Glisson et le parenchyme. L'intégration d'un modèle de collision adapté permet d'interagir avec le modèle.

La chirurgie consiste en partie à découper des tissus organiques, et le modèle a été implanté dans l'optique de permettre ce type de manipulations. Nous proposons, dans le chapitre suivant, une approche pour modéliser les découpes et les déchirements de modèles biomécaniques.

Chapitre 3

Changer la topologie dans un modèle mécanique interactif

Nous allons nous intéresser, durant ce chapitre, aux problématiques liées aux changements de topologie. La chirurgie consiste en effet, dans la plupart des cas, à effectuer des opérations de découpe ou de déchirement sur des corps biologiques. Avoir un modèle biomécanique interactif peut permettre d'apprendre à ressentir et reconnaître le comportement mécanique des organes simulés. Mais pour simuler spécifiquement les opérations chirurgicales de découpe, un processus de changement de topologie du modèle doit être mis en oeuvre.

Dans le cas de la simulation de rupture, ce processus se compose de deux phases : l'évaluation d'un critère de rupture, et une étape de remaillage du modèle. Dans le cas de la simulation d'opérations de découpe, la première phase est remplacée par une détection de collision géométrique entre un outil, contrôlé en position par l'utilisateur, et le modèle biomécanique.

Après avoir clarifié la terminologie et les concepts mis en jeu dans le chapitre, nous décrirons et analyserons les précédentes approches du changement de topologie développées dans les domaines de l'animation et de la simulation de gestes chirurgicaux. Nous présenterons ensuite une nouvelle approche du problème, ayant comme caractéristique de présenter un rapport précision /performances le plus élevé possible, tout en restant compatible avec une simulation interactive.

3.1 Notions de base et bibliographie

Le but de cette section est de clarifier la terminologie utilisée ainsi que de décrire les principaux concepts et phénomènes sur lesquels nous avons travaillé. Une bibliographie des travaux dans le domaine de l'informatique traitant des changements de topologie dans les modèles déformables structurés est également proposée.

3.1.1 Terminologie

DÉFINITION 7 Dans cet ouvrage, nous utilisons le terme **topologie** dans son sens généralisé, c'est à dire comme l'étude des notions de limite et de voisinage dans un milieu.

Etant donné que nous nous plaçons dans un contexte discret, nous entendons donc par «changement de topologie», un changement des relations de voisinage dans un maillage géométrique. C'est à dire, de façon plus imagée : apparition de nouveaux bords au maillage, que ce soit un agrandissement des bords existants, ou l'apparition de nouveaux bords, comme

dans le cas de la création de trous.

DÉFINITION 8 *Nous utilisons le terme **rupture** pour désigner le fait de se rompre sous l'effet d'une forte pression [Lar00]. Ce phénomène pouvant être plus ou moins violent, nous appellerons **fracture** une rupture violente et **déchirement** une rupture plus lente.*

Bien entendu, c'est la nature – loi de comportement – des matériaux et leur mode de chargement qui impliquent un mode de rupture de type fracture ou déchirement. Les matériaux fragiles sont plutôt soumis à des fractures et les matériaux ductiles mous à des phénomènes de déchirement (ceci dépend bien entendu des contraintes auxquelles ils sont soumis : un matériau fragile soumis à une faible contrainte durant une plage de temps très élevée aura tendance à se déchirer plutôt que se fracturer).

DÉFINITION 9 *Un maillage triangulé de surface est dit **ouvert** s'il contient des bords, c'est à dire des faces qui ne possèdent pas trois faces voisines. Dans le cas contraire, il est dit **fermé**.*

Par exemple, Un maillage de sphère est fermée, alors que celui d'un cylindre ou d'un drapeau sont ouverts. Le fait de déchirer un maillage le rend ouvert, puisque des bords sont créés.

3.1.2 Découpe VS rupture

Nous différencions les phénomènes de **découpe** et de **rupture** d'un matériau par le fait qu'une découpe est engendrée par l'action d'un corps étranger au matériau alors qu'une rupture ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau et de son état de contrainte (ou de déformation). Bien entendu, d'un point de vue purement mécanique, une découpe *est* une rupture, engendrée par une concentration de contraintes élevées, induites par un outil de découpe¹. Dans ce sens, nous proposerons plus loin une approche abordant la découpe comme un sous-problème du phénomène de rupture.

3.1.3 Le phénomène de la rupture au niveau atomique

La rupture est le moment où un matériau, apparemment homogène, se scinde en deux morceaux et crée, ainsi, deux nouvelles surfaces libres. Le critère de rupture doit donc être une image de la facilité que l'on a à séparer deux éléments de matière, et donc des forces qui assuraient la cohésion du matériau.

1. Une contrainte ayant la dimension d'une pression ($\frac{Newton}{m^2}$), cela explique la forme des outils de découpes usuels, qui présentent une surface de contact la plus réduite possible.

Dans la matière, deux atomes voisins sont soumis à des forces attractives et répulsives (résultats de la force électromagnétique). Il existe une distance à laquelle ces deux forces s'annulent (voir fig. 3.1), celle-ci implique la distance naturelle entre deux atomes adjacents. Rompre le matériau correspond donc à déplacer un plan d'atomes depuis sa position d'équilibre vers une distance plus grande. Pour cela, il faut soumettre le matériau à une contrainte en traction supérieure à une contrainte seuil, notée σ_m . La valeur de cette contrainte seuil est fortement dépendante du caractère homogène des matériaux. En effet, il a été montré [And95] que ce seuil est, en pratique, bien plus bas (un facteur 3000) que celui auquel on pourrait s'attendre théoriquement. Ceci est dû aux irrégularités au niveau atomique des matériaux, qui entraînent des concentrations de contraintes parfois très importantes, menant à la rupture.

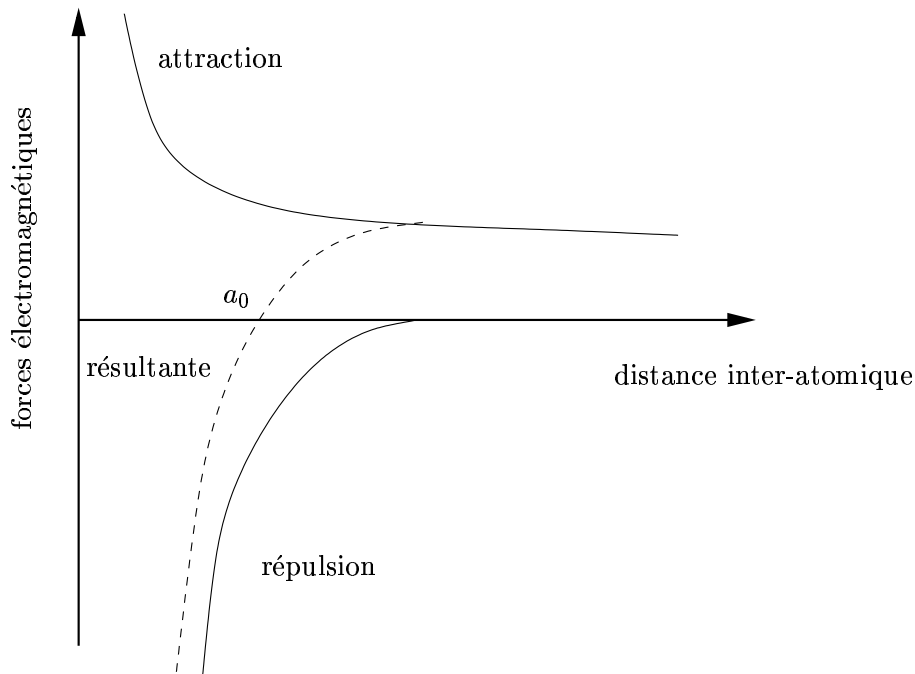


FIG. 3.1: Pour une distance a_0 , les forces d'attraction et de répulsion s'annulent : c'est la distance inter-atomique d'équilibre (source [Bil95]).

3.1.4 Principales approches informatiques sur les changements de topologie

Le phénomène de la rupture des corps solides tire ses causes de champs de contraintes existant au niveau microscopique. Il n'est donc pas raisonnable de vouloir le simuler de manière exacte *et* interactive. Il est par contre évident que pour simuler ce type comportement, éminemment physique, un modèle mécanique doit être utilisé. Peu de travaux ont été proposés

en informatique pour modéliser les ruptures ou découpes. Nous proposons dans cette section de les décrire et les analyser.

Enfin, il est important de noter que pour les matériaux répondant à une loi de comportement élastique (que ce soit l'élasticité linéaire ou non linéaire) il est possible d'utiliser comme critère de rupture, soit un seuil sur le niveau de contrainte, soit un seuil sur les déformations.

3.1.4.1 **Approches par suppression d'entités dans le modèle**

Un premier type d'approche, pour modéliser des changements de topologie dans les modèles déformables, est de supprimer des liaisons ou des éléments du modèle.

Approche de Terzopoulos et Fleischer Dans [TF88] les auteurs proposent une extension de leur travail sur les modèles physiques élastiques pour l'animation [TPBF87], permettant de modéliser la rupture d'objets déformables. Ils posent comme hypothèses que le matériau simulé est isotrope, visco-élastique, de densité uniforme et de viscosité constante et uniforme. Ils travaillent à partir de l'équation du mouvement de Lagrange. L'espace est discrétisé par la méthode des différences finies, c'est à dire en appliquant une grille de discrétisation avec une interpolation par éléments finis linéaires. Le système différentiel ordinaire non-linéaire ainsi obtenu est converti en un ensemble d'équations algébriques linéaires par différences finies, et est intégré dans le temps à l'aide d'un schéma semi-implicite. Ils modélisent le phénomène du déchirement en annulant localement un coefficient qui contrôle la continuité du matériau simulé, introduisant par là même des discontinuités dans le matériau. Ce processus est déclenché lorsque les contraintes ou les déformations sont trop importantes entre deux points de contrôle. Dans le cas d'un critère de rupture basé sur les déformations, ils ont utilisé un seuil de déformation pondéré par une fonction stochastique.

Les travaux de Terzopoulos et Fleischer furent précurseurs dans le domaine de l'infographie. Leur modèle déformable permet de simuler le phénomène de la rupture, mais il présente deux inconvénients :

- en annulant les liaisons entre les éléments de simulation trop contraints ou trop éloignés, ils font disparaître de la matière, ce qui est préjudiciable au réalisme de la simulation si la discrétisation géométrique du domaine est trop grossière ;
- la forme des déchirements simulés dépend de la topologie du maillage géométrique utilisé, car aucune direction de rupture du matériau n'est calculée. Donc, si le maillage

utilisé présente des directions privilégiées, celles-ci introduisent des artefacts sur la forme du déchirement ;

Enfin, il est important de noter qu'il n'est donné dans l'article aucun ordre d'idée des temps de calcul des simulations présentées, mais l'approche n'est pas du tout orientée «temps interactif».

Approche de Norton et al. [NTB⁺91] Norton et al. proposent de modéliser le phénomène de la fracture pour des objets fragiles (au sens décrit dans la section 1.1.2.2, page 15, c'est à dire pour des matériaux comme la céramique par exemple). Leur approche est basé sur un modèle discret, de type masse-ressorts. Le comportement physique des solides est approximé par une grille quasi régulière tri-dimensionnelle de masses interconnectées par des ressorts visco-linéaires. La grille utilisée est construite à partir d'éléments de base de géométrie quasi-cubique. Les cubes, quant à eux, sont composés de huit masses et 18 ressorts (pour les 12 arêtes du cube plus les diagonales de chaque face). C'est pour pouvoir modéliser (géométriquement) des objets à géométrie courbe que les auteurs autorisent les cubes à n'avoir pas 12 arêtes exactement de la même taille. A chaque pas de temps de la simulation, leur système calcule les forces que chaque ressort applique aux deux masses qu'il connecte suivant la loi visco-linéaire suivante :

$$F = kX + dV \quad (3.1)$$

où k est la rigidité du ressort, X mesure la différence entre la distance courante des deux particules reliées par le ressort et la longueur du ressort au repos, d est la viscosité du ressort et V la vitesse relative des deux particules reliées par le ressort. Des forces environnementales comme la gravité ou une viscosité du milieu sont également calculées, ainsi que des forces de contact en cas de collisions.

La phase suivante permet, connaissant pour chaque particule la somme des forces auxquelles elle est soumise, et en utilisant la loi de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) localement, d'obtenir l'accélération de chaque particule. Ils utilisent ensuite un schéma d'intégration de type Euler pour intégrer ces accélérations afin de connaître les nouvelles vitesses et positions des particules.

Pour simuler les fractures apparaissant au sein des matériaux, les ressorts possèdent deux attributs spécifiques : un seuil d'élongation maximum et un champ booléen qui détermine si le ressort a rompu antérieurement. Au début de chaque pas de simulation, les ressorts sont parcourus et, si leur longueur est supérieure à 1 plus leur seuil de rupture, leur booléen est instancié à VRAI. Dès lors qu'un élément cubique possède un ressort détruit, tous les ressorts

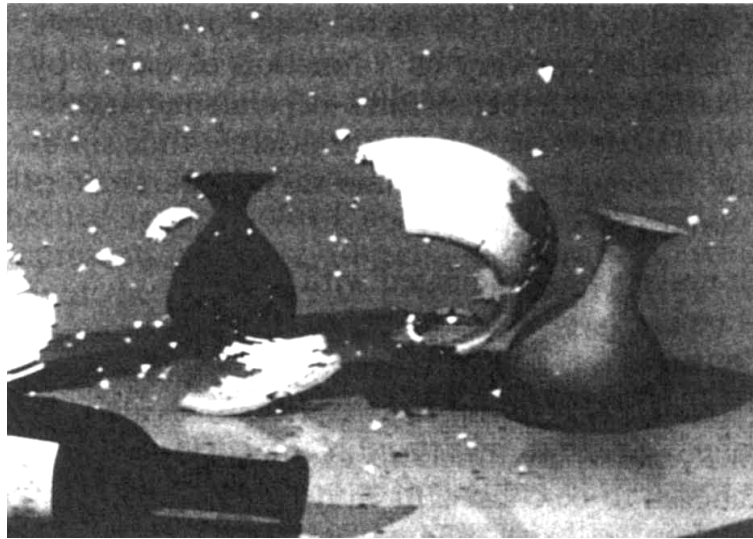


FIG. 3.2: Exemple de simulation de chute d'une théière sur une table. La forme cubique des cellules de base est clairement visible (source [NTB⁺91]).

dont est composé cet élément sont également détruits, afin d'éviter d'obtenir des cubes dont le comportement deviendrait incohérent.

Cette méthode présente le même inconvénient que la précédente : des éléments de simulation disparaissent. Comme pour des raisons de temps de calcul les cellules cubiques utilisées pour modéliser les solides ne sont pas minuscules, on voit clairement dans leur exemple les «trous» apparus dans le modèle. La forme cubique des éléments de base n'arrange rien, et fait apparaître des effets d'escalier dans le rendu final (fig. 3.2). Aucun ordre de grandeur des temps de calcul n'est donné dans l'article.

Approche de Cotin Dans sa thèse de doctorat [Cot97] Cotin aborde brièvement les problèmes de la découpe et du déchirement pour son modèle déformable masse-tenseur. Il a effectivement développé le modèle masse-tenseur car son modèle précédent, basé sur un pré-calcul des déformations possibles sur un solide, via un modèle éléments-fini linéaire et une utilisation du principe de superposition, ne permettait pas de changer la topologie du corps simulé. Pour le modèle masse-tenseur (décrit brièvement dans la section 1.2, page 22) Cotin propose, pour simuler les déchirements, d'utiliser un critère de rupture basé sur un seuil de déformation pour les tétraèdres. Il propose trois critères de déformation pour les tétraèdres, mais il ne dit pas lequel il a choisi pour ses simulations. Les critères proposés sont les

suivants :

- variation du volume des tétraèdres $\frac{V_{courant}-V_{repos}}{V_{repos}}$. Mais un tétraèdre peut être fortement déformé sans que son volume ne varie beaucoup ;
- variation de longueur des six segments composant le tétraèdre $\frac{l^k-l_0^k}{l_0^k}$ pour $k = 1..6$. Le critère de rupture pour le tétraèdre est vérifié si au moins trois segments sont au dessus de leur seuil de rupture. Ce critère, plus coûteux en temps de calcul que le précédent, est cependant plus discriminant ;
- variation de la longueur d'une liaison quelconque du maillage tétraédrique $\frac{l-l_0}{l_0}$ et suppression de tous les tétraèdres adjacents à cette liaison. Ce critère présente l'inconvénient de supprimer les tétraèdres par blocs.

Une fois le critère de rupture vérifié pour un ou plusieurs tétraèdres, l'auteur supprime les primitives en question. Pour la découpe, le même processus est proposé en utilisant, comme critère de destruction, la collision d'un outil contrôlé par l'utilisateur avec un élément tétraédrique.

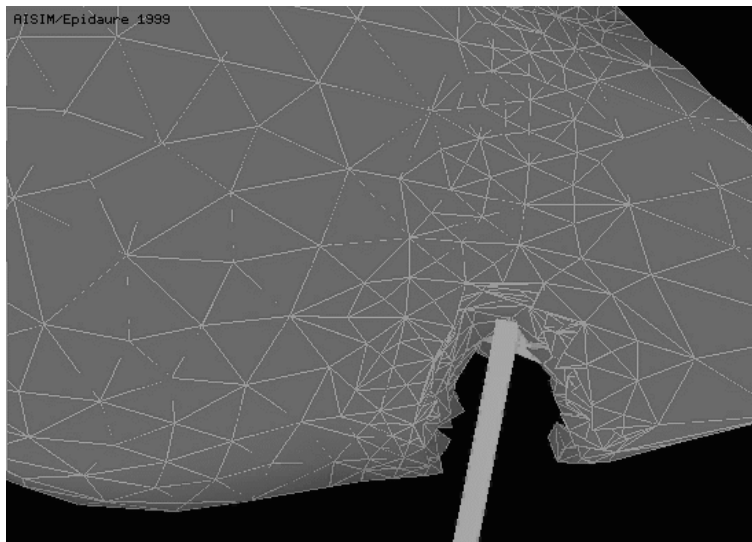


FIG. 3.3: *Opération de découpe interactive sur le modèle masse-tenseur de Cotin. Lorsque l'outil rentre en collision avec un tétraèdre du modèle, celui-ci est retiré de la simulation. Le maillage a été préalablement raffiné là où devait avoir lieu la découpe (source : projet Epidaure, INRIA Sophia-Antipolis).*

Le modèle masses-tenseur de Cotin tourne en « temps interactif » (40Hz) et permet donc les coupes et les déchirements. La méthode pour les changements de topologie présente

néanmoins le même inconvénient que les deux méthodes précédemment décrites : de la matière disparaît. D'ailleurs, dans une des simulations d'opération de découpe d'une partie du foie humain (fig. 3.3), le maillage tétraédrique à été raffiné là où la découpe devait avoir lieu, afin d'obtenir un résultat visuel plus satisfaisant (car les tétraèdres supprimés sont plus petits).

3.1.4.2 Approche par «subdivision»

Afin d'éviter les inconvénients des approches précédentes, certains auteurs ont récemment proposé de subdiviser certaines primitives des maillages géométriques sur lesquelles se basent les modèles mécaniques, afin d'approcher au mieux la géométrie des ruptures ou des coupes.

Approche de Bielser et al. [BMG99] Bielser et al. ont travaillé sur le problème spécifique de la découpe d'un modèle dynamique volumique et interactif. L'opérateur humain contrôle un outil virtuel via un dispositif à six degrés de liberté et, lorsque l'outil entre en contact avec le maillage, celui-ci est découpé suivant la trajectoire exacte de l'outil. Ils utilisent comme modèle physique un maillage masse-ressort tétraédrique.

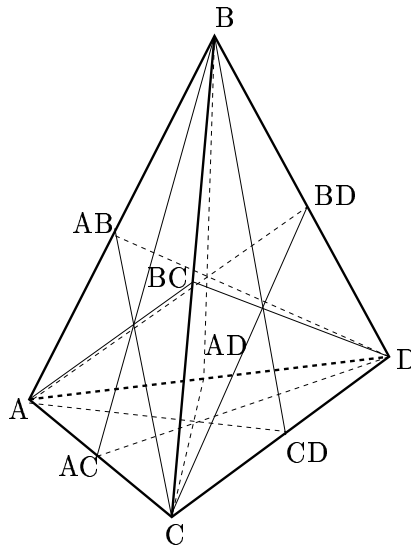


FIG. 3.4: *Tétraèdre «pré-découpé» générique proposé par Bielser et al. [BMG99]*

Afin de modéliser les coupes, ils énumèrent toutes les façons possibles pour un segment (l'outil) de traverser un tétraèdre, sachant que le segment peut traverser le tétraèdre de part en part ou avancer puis reculer, en ne découpant qu'un coin du tétraèdre (en cas de demi-tour de la manoeuvre de découpe). A partir de cette étude, ils proposent une structure

de données basée sur des tétraèdres pré-découpés (voir fig. 3.4). Les coordonnées des points présents au milieu des arêtes et des faces sont bien évidemment flottantes, et ne sont déterminées définitivement qu'à la fin de la collision segment/tétraèdre, suivant la trajectoire effective de l'outil virtuel.

Ils assurent, via une technique assez simple, la conservation de la masse. Par contre ils n'abordent pas dans l'article la façon dont ils choisissent les paramètres (rigidité et viscosité) des ressorts créés durant la manoeuvre de découpe du tétraèdre.

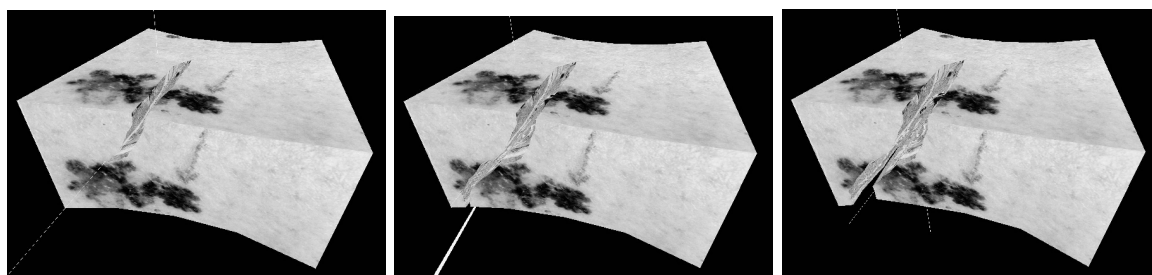


FIG. 3.5: Exemple de découpe sur un parallélépipède composé initialement de 576 tétraèdres. A la fin de la découpe, le nombre de tétraèdres a été multiplié par 4,2 (source [BMG99]).

Cette méthode permet donc de découper un modèle déformable le long d'un chemin parcouru par un outil virtuel, sans faire disparaître de matière. Elle présente toutefois à notre avis trois inconvénients :

- le premier est que, comme les tétraèdres sont pré-découpés, ils ne peuvent être découpés qu'une seule fois. Il n'est donc pas possible, par exemple, d'effectuer des coupes en T, car, pour cela, il faudrait re-découper des tétraèdres adjacents à la lèvre d'une découpe précédente, ce qui est impossible ;
- un deuxième inconvénient, inhérent à la méthode proposée, est l'accroissement du nombre de primitives physiques. En effet, même si le modèle initial, avant découpe, tourne de manière interactive, il est impossible de garantir qu'avec l'accroissement du nombre de tétraèdres, engendré par la méthode de «subdivision», cette interactivité sera conservée après un certain nombre de coupes. Chaque tétraèdre découpé est en effet remplacé par 17 nouveaux tétraèdres. Sur les trois exemples donnés par les auteurs (fig. 3.5), l'accroissement moyen du nombre de tétraèdres est un facteur 6 , avec des taux de rafraîchissement moyens de 2,5 images par secondes ;
- enfin, les tétraèdres étant découpés seulement une fois que l'outil en soit sorti, les coupes apparaissent toujours avec un retard sur le mouvement de l'utilisateur.

Approche de Mor et Kanade [MK00] Mor et Kanade présentent une méthode pour découper un modèle éléments finis, résolu de manière explicite (inspiré par les travaux de Cotin sur les masses-tenseurs). Ils proposent une technique permettant de découper *progressivement* les tétraèdres du modèle, en minimisant la création de nouveaux éléments. Les auteurs ont listé les cinq différentes manières de découper un tétraèdre à l'aide d'un segment de droite, et calculé pour chacun des cas l'ensemble de tétraèdres à créer pour modéliser la découpe. L'originalité de leur méthode est que tant que l'outil n'est pas ressorti du tétraèdre en train d'être découpé, des éléments temporaires sont créés afin de modéliser une découpe progressive (fig. 3.6). Une fois l'outil ressorti du tétraèdre, celui est détruit et remplacé par le nombre minimal de nouveaux tétraèdres nécessaires pour modéliser la découpe, suivant le type de trajectoire effectuée durant la manoeuvre (entre cinq et neuf nouveaux tétraèdres créés).

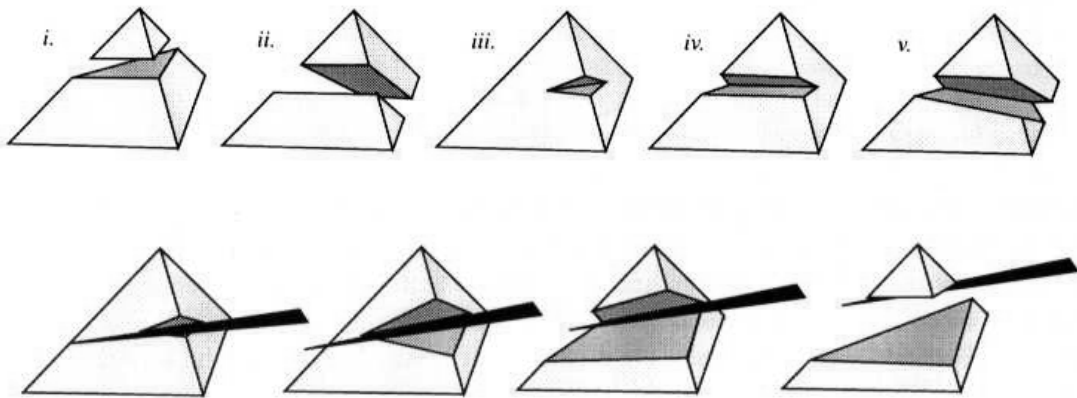


FIG. 3.6: *En haut : les cinq manières différentes de découper un tétraèdre à l'aide d'un segment de droite. En bas : exemple de découpe progressive d'un tétraèdre (source [MK00]).*

Les auteurs présentent le résultat d'une découpe sur un modèle du foie et sur un parallélépipède régulier (fig. 3.7). Dans les exemples l'accroissement du nombre de tétraèdres est de l'ordre de 5,2 nouveaux éléments ajoutés par tétraèdre découpé. L'accroissement du nombre d'éléments est donc mieux maîtrisé qu'avec la méthode précédente, mais les exemples de découpe sur lesquels sont basés ces résultats sont bien plus réguliers. Une limitation de la méthode est la création d'éléments de taille disparate, et notamment de tout petits éléments qui génèrent des forces très importantes et font alors diverger le modèle éléments finis. Les auteurs ont donc dû utiliser des pas de temps d'intégration très petits, et leurs simulations ne tournent pas en temps-réel (ils ne donnent pas d'ordre de grandeur des temps de calcul).

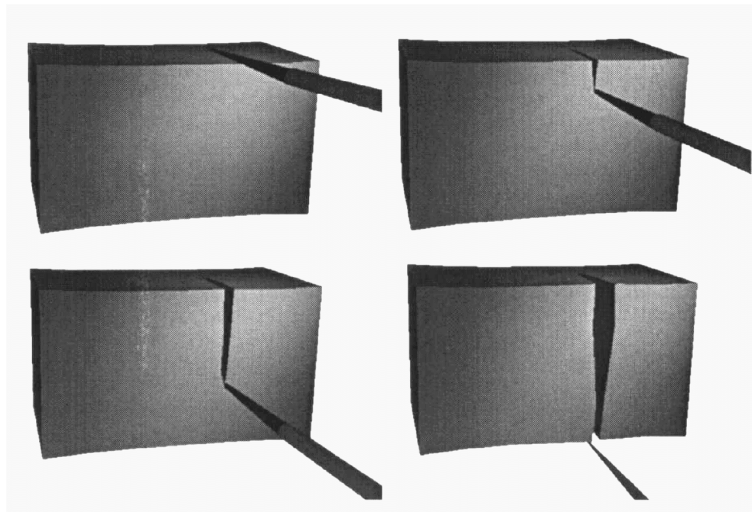


FIG. 3.7: Exemple de découpe plane sur un corps parallélépipédique composé initialement de 576 tétraèdres. A la fin de l'opération, le nombre de tétraèdres a été multiplié par 1,5 (source [MK00]).

Approche de Jie Shen et Yee-Hong Yang [SY98] Jie Shen et Yee-Hong Yang proposent une méthode pour simuler la rupture de corps volumiques déformables basée sur une analyse éléments finis. Pour modéliser les fractures (il s'agit de corps fragiles), ils utilisent des éléments finis de forme cubique. Leur critère de rupture, pour chaque élément de la simulation, est un seuil sur sa contrainte principale. Lorsque le critère de rupture est vérifié pour un élément, ils déterminent la direction de rupture en fonction des directions principales du tenseur de contrainte de l'élément en question. Mais, pour simplifier le problème, les éléments cubiques ne peuvent être séparés que suivant leur trois directions principales, c'est à dire suivant des plans parallèle aux faces du cube. Les auteurs doivent donc déterminer de quel plan la direction principale du tenseur de contrainte est la plus proche, afin de séparer l'élément fini suivant ce plan (fig. 3.8).

La consistance géométrique du maillage est assurée en ne rattachant les noeuds créés qu'aux autres noeuds de leur élément (et pas aux éléments voisins). Les auteurs présentent un exemple de simulation d'une poutre encastree à l'une de ses extrémités, et sur laquelle on applique une force verticale dirigée vers le bas à l'autre extrémité.

Le type fonction de forme utilisé n'est pas précisé dans l'article. Les auteurs font appel à une méthode de résolution implicite. Dans cette approche, le choix d'éléments finis cubiques limite fortement la géométrie des corps pouvant être simulés, ainsi que la géométrie des fractures pouvant apparaître. Les temps de calculs annoncés sont également incompatibles avec notre

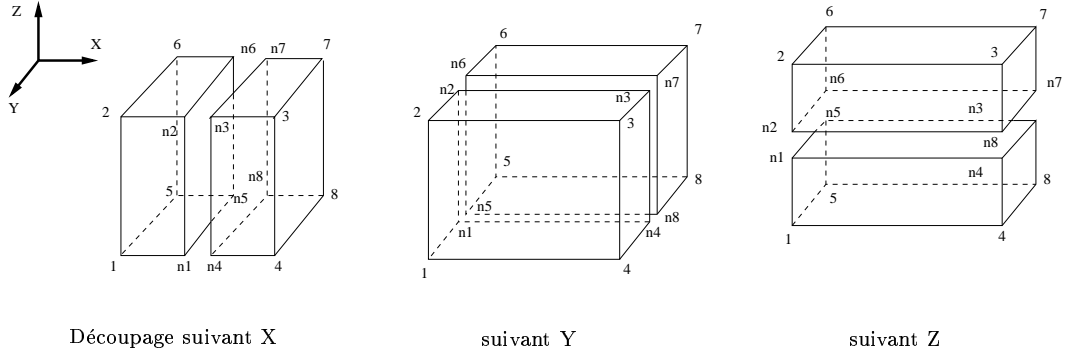


FIG. 3.8: *Découpage des éléments cubiques proposé par Jie Shen et Yee-Hong Yang, les n_i sont les noeuds ajoutés au maillage (source [SY98]).*

contrainte d'interactivité, d'autant plus que l'exemple présenté est assez simple.

Approche de O'Brien et Hodgins [OH99] O'Brien et Hodgins présentent une méthode pour modéliser les fractures dans les objets fragiles (au sens défini dans la section 1.1.2.2, page 15). Les corps simulés sont modélisés par des éléments finis tétraédriques avec des fonctions de forme linéaires. A chaque pas de temps, leur système calcule les forces agissant sur chacun des noeuds et les assemble afin d'obtenir un tenseur de contrainte local au noeud. Ce tenseur décrit comment les forces internes au matériau tendent à séparer ce noeud. Ce tenseur est alors décomposé afin de connaître ses composantes de traction et de compression. Ceci est réalisé en étudiant ses valeurs propres : des valeurs propres positives correspondent à des efforts de traction et des valeurs propres négatives à des efforts de compression. La décomposition se fait de la manière suivante :

$$\sigma^+ = \sum_{i=1}^3 \max(0, v^i(\sigma)) m(\hat{n}^i(\sigma)) \quad (3.2)$$

$$\sigma^- = \sum_{i=1}^3 \min(0, v^i(\sigma)) m(\hat{n}^i(\sigma)) \quad (3.3)$$

où σ^+ est la composante de traction de σ , σ^- sa composante de compression, $v^i(\sigma)$ la i^{eme} valeur propre de σ , $\hat{n}^i(\sigma)$ son i^{eme} vecteur propre et enfin m est une matrice 3×3 définie telle que :

$$m(\vec{a}) = \frac{\vec{a}\vec{a}^T}{|\vec{a}|} \text{ si } \vec{a} \neq \vec{0}, 0 \text{ sinon} \quad (3.4)$$

avec \vec{a} un vecteur dans R^3 .

A partir des composantes de traction et de compression du tenseur de contrainte, il est possible de calculer les forces de traction \vec{f}^+ et de compression \vec{f}^- , puis d'en déduire un tenseur de séparation, noté ζ , de la manière suivante :

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(-m(\vec{f}^+) + \sum_{\vec{f} \in \{\vec{f}^+\}} m(\vec{f}) - m(\vec{f}^-) - \sum_{\vec{f} \in \{\vec{f}^-\}} m(\vec{f}) \right) \quad (3.5)$$

En prenant la valeur propre positive la plus grande de ce tenseur, et en la comparant à un seuil de rupture pour le matériau simulé, la méthode détermine si une fracture doit apparaître à ce noeud. La direction de la fracture est alors donnée par le vecteur propre correspondant à la valeur propre responsable de la rupture. Au cas où plusieurs valeurs propres sont supérieures au seuil de rupture, plusieurs plans de fracture sont calculés.

Lorsqu'une fracture apparaît, le noeud qui casse est divisé en deux, et tous les éléments attachés à ce noeud sont divisés suivant le plan de rupture, et rattachés à l'un ou l'autre des noeuds résultants de la fracture, créant ainsi une discontinuité dans le matériau. Les caractéristiques mécaniques locales, comme les fonctions de forme, doivent alors être recalculées et la masse redistribuée.

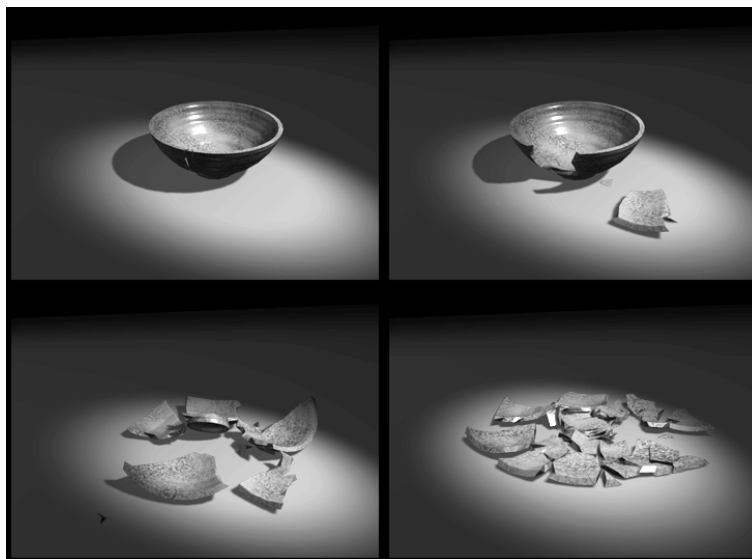


FIG. 3.9: Résultats de simulations de la chute d'un bol tombant sur une table depuis une hauteur plus ou moins élevée. Temps de calcul moyen : 109 minutes par seconde d'animation (source [OH99]).

Cette méthode, basée sur des fondements mécaniques solides, présente l'avantage de donner des résultats très réalistes (voir fig. 3.9). Nous voyons toutefois deux inconvénients majeurs

à l'application de cette méthode dans notre cas :

- Les temps de calcul et le type des matériaux simulés. Les temps de calcul donnés dans l'article sont en effet extrêmement prohibitifs par rapport à notre contrainte d'interactivité. Pour la simulation la plus simple (un bol tombant sur une table), les temps de calcul moyens donnés sont de 109 minutes pour une seconde de simulation, et pour la plus complexe (un ensemble de trois objets tombant sur trois autres) de 4665 minutes pour une seconde d'animation ;
- enfin, leur modèle simule des objets au comportement fragile, alors que nous nous intéressons à des corps de type plutôt visco-élastique, qui présentent une dynamique de rupture moins violente (à moins haute fréquence).

3.1.4.3 Conclusion

L'étude bibliographique des travaux sur la problématique du changement de la topologie des modèles déformables, phénomène initié soit par une action d'un utilisateur (découpe), soit par une limitation du matériau simulé (rupture), nous permet de classer les approches suivant différents critères. Le tableau 3.1.4.3 synthétise les caractéristiques de chaque approche.

Auteur(s)	destruction	subdivision	rupture	découpe	interactivité	modèle mécanique sous-jacent
Terzopoulos, Fleischer	✓	-	✓	-	non	modèle continu, équation de Lagrange
Norton et al.	✓	-	✓	-	non	masse-ressort, grille cubique
Cotin	✓	-	✓	✓	oui, 40Hz	masse-tenseur linéaires
Mor et Kanade	-	✓	-	✓	non	éléments finis tétraédriques explicites
Bielser et al.	-	✓	-	✓	oui, $\approx 2.5\text{Hz}$	masse-ressort RK4 adaptatif
Shen et Yang	-	✓	✓	-	non	éléments finis cubiques
O'Brien Hodgins	-	✓	✓	-	non	éléments finis tétraédriques explicites

TAB. 3.1: *Récapitulatif des principales caractéristiques des approches pour modéliser les découpes ou les ruptures.*

Les approches de type «destruction» présentent comme avantages d'être simples à mettre en oeuvre et de diminuer la complexité de la simulation à chaque destruction d'élément. En contrepartie, comme elles détruisent de la matière, elles demandent l'utilisation de maillages assez fins pour rester réalistes. Le nombre de primitives utilisées par les modèles déformables

tournant de manière interactive étant limité, ce type d'approche donne des résultats peu satisfaisant.

Les approches type «subdivision» ont été introduites afin d'obtenir des ruptures ou découpes plus précises. En subdivisant le maillage, il est alors possible d'obtenir la forme exacte d'une découpe ou d'une rupture, même si le maillage initial du modèle ne comporte que peu d'éléments. Les limitations de ce type d'approche, dans un contexte de simulation interactive, sont d'une part l'accroissement du nombre de primitives simulées et d'autre part la disparité de leurs propriétés géométriques. En effet, au fur et à mesure des changements de topologie, le modèle est composé de plus en plus de primitives. Ni le nombre ni la taille des découpes ou des fractures ne peut être connu à l'avance, et il n'est donc pas possible de garantir que l'on conservera un nombre d'éléments compatible avec une simulation interactive. La subdivision des éléments peut également amener à la création de très petites primitives, qui induisent des concentrations de contraintes et obligent alors à l'utilisation de très petits pas de temps pour la méthode d'intégration numérique utilisée.

Ces considérations nous amené à explorer une troisième voie, décrite dans la section suivante.

3.2 Vers une approche simulant des changements de topologie en temps interactif

3.2.1 Idées de base et choix philosophiques

Notre objectif est de simuler en temps interactif des changements de topologie dans un modèle déformable. L'idéal serait de combiner la précision des approches «subdivision» avec la rapidité d'exécution des approches «destruction». En des termes plus réalistes, il nous faut trouver un compromis entre les deux types de méthodes. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que de développer un modèle biomécanique qui soit interactif n'est pas une chose aisée. Dans le cas de l'utilisation d'un modèle continu, des hypothèses sur le matériau doivent être formulées (homogénéité, isotropie, linéarité). Les modèles discrets, quant à eux, permettent de simuler interactivement des comportements plus variés (non-linéarité, hétérogénéité, non-isotropie), mais sont en contrepartie plus complexes à calibrer par rapport à des paramètres mécaniques globaux.

Notre optique est donc de proposer une approche du changement de topologie qui soit très peu coûteuse en temps de calcul, et qui induise une augmentation de la complexité des modèles (par la création de nouvelles entités à simuler) raisonnable et surtout bornée. Ces objectifs

nous ont conduit à formuler les deux principes suivants :

- PRINCIPE 1 : *Au lieu de détruire ou de subdiviser les primitives du modèle, nous proposons de les « séparer » les unes des autres, suivant une direction perpendiculaire aux déformations ayant entraîné la rupture. Cette approche permet de contrôler l'augmentation du nombre de primitives simulées (et donc l'augmentation de la complexité du modèle) tout en garantissant une simulation qui conserve la matière de objets concernés.*
- PRINCIPE 2 : *Les découpes sont traitées comme un cas particulier des déchirements. Une découpe provoque en effet également un changement de topologie dans le modèle, qui peut être vu comme un « déchirement provoqué ». Les algorithmes nécessaires à la modélisation des déchirements étant implantés, nous faisons l'hypothèse qu'il suffit de modifier le critère de rupture pour obtenir un algorithme de découpe.*

3.2.2 Déchirement de modèles surfaciques

Les problèmes spécifiques à résoudre afin modéliser des déchirements de façon interactive sont les suivants :

- choisir un critère de rupture fiable et rapide à évaluer ;
- mettre à jour de façon efficace et robuste la structure des données géométriques (i.e. remaillage local) ;
- vérifier que les principales propriétés mécaniques des corps simulés sont bien conservées lors du processus.

3.2.2.1 Critère de rupture

Le critère de rupture détermine *quand* et *où* le modèle cède, soit sous l'action de contraintes trop importantes, soit lorsqu'il est trop déformé. En pratique, lorsque des essais contrainte / déformation sont effectués, afin de déterminer le seuil de rupture d'un matériau, des déplacements uniaxiaux sont imposés par le banc d'essai et les contraintes qui en résultent sont mesurées.

Pour les matériaux répondant à une loi de comportement élastique, un seuil sur les déformations peut toujours être ramené à un seuil sur les contraintes (et vice versa), puisque pour ce type de matériaux une relation bi-univoque relie les contraintes et les déformations. Par

contre, utiliser un critère de rupture basé sur un seuil sur le niveau de contrainte pour un matériau élasto-plastique serait une erreur, car les matériaux de ce type, avant de passer en plasticité ou avant la rupture, peuvent présenter des niveaux de contrainte supérieurs à celui existant au moment de la rupture (voir fig. 1.4, page 15).

Nous avons donc fait le choix d'utiliser un seuil sur les déformations comme critère de rupture. Le modèle physique de nous utilisons étant de type discret, nous ne travaillons pas avec des tenseurs de contraintes ni de déformation. Nous avons par contre directement accès aux longueurs des connecteurs (qui sont de type «ressort non-linéaire», dans notre implantation). Nous utilisons donc, comme critère de rupture, un seuil sur la déformation des connecteurs. La déformation d'un connecteur est définie comme son allongement relatif, de la manière suivante: $d = \frac{l-l_0}{l_0}$, avec l la longueur du connecteur et l_0 sa longueur au repos.

PROPRIÉTÉ 3 *Une face du maillage est déclarée «en rupture» si au moins deux de ses arêtes² sont déformées au delà d'un seuil d'élongation donné.*

Si une face satisfait le critère de rupture, c'est donc que deux des arêtes qui la composent subissent des déformations trop importantes. Cela résulte de l'action des forces s'appliquant sur chacune des trois particules de cette face, qui induisent une contrainte importante dans une direction que nous approximations par la bissectrice des deux connecteurs en question.

DÉFINITION 10 *Les matériaux rompant suivant des plans perpendiculaires aux directions de forte contrainte, un **plan de rupture** est alors déterminé par le vecteur porté par la bissectrice des ces deux connecteurs (normale du plan de rupture), et par leur particule commune (point du plan de rupture).*

A chaque pas de temps, l'ensemble des faces du modèle est donc parcouru, et les longueurs des trois arêtes de chaque face sont comparées au seuil défini pour le matériau. Lorsque deux arêtes d'une même face satisfont le critère de rupture, les paramètres du plan de rupture sont calculés, et les opérations de remaillage local sont effectuées.

3.2.2.2 Remaillage local

PRINCIPE: *L'idée de base de la méthode de remaillage est de «séparer» suivant le plan de rupture les primitives de simulation, afin de n'accroître la complexité du modèle que de ma-*

2. Nous rappelons que les connecteurs *sont* les arêtes des faces du maillage

nière minimale. Par primitive nous entendons, dans le cas d'une simulation de corps bi-dimensionnels, les faces qui composent le maillage.

La figure 3.10 illustre ce principe.

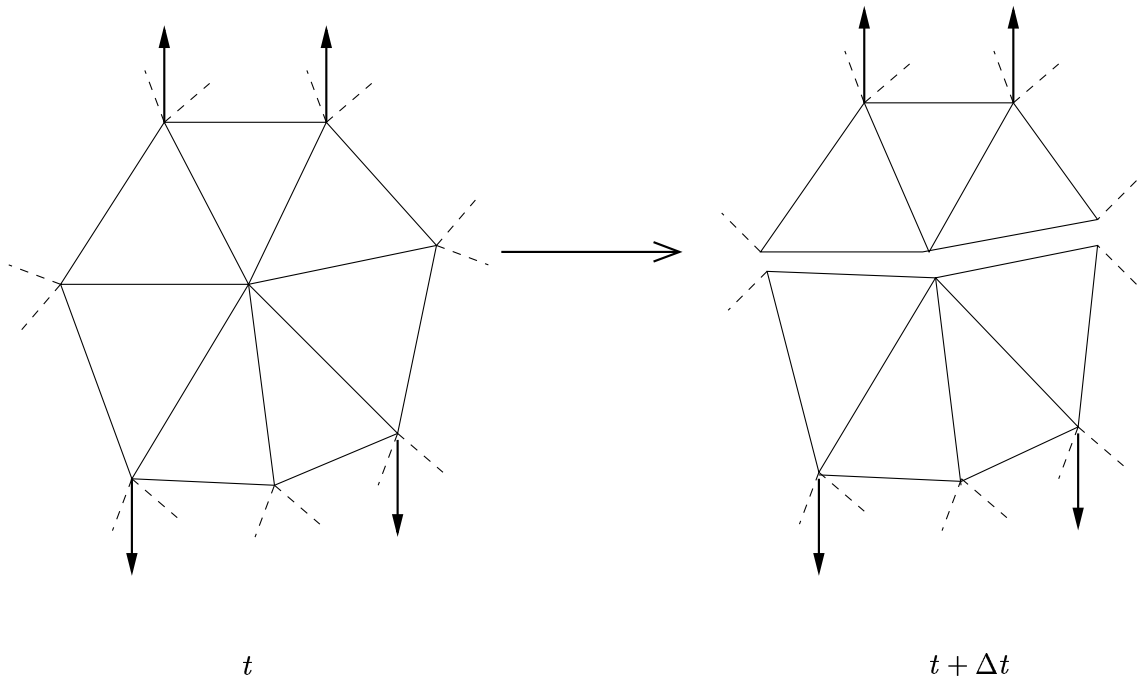


FIG. 3.10: Principe de base du remaillage local. Pour la simulation de corps bi-dimensionnels, lorsque le critère de rupture est vérifié, les faces du modèle sont séparées les unes des autres suivant leur position par rapport au plan de rupture.

Création d'une nouvelle particule. Une fois les caractéristiques du plan de rupture calculées, la particule P_c , commune aux deux connecteurs qui cèdent, est scindée en deux. Une nouvelle particule est donc créée, au même emplacement que P_c , nous la noterons P_n (Particule nouvelle). Les connecteurs qui ont cédés, notés C_{c1} et C_{c2} , restent reliés à la particule P_c .

Tri des faces. Les faces adjacentes à P_c sont alors parcourues et classées suivant leur position par rapport au plan de rupture (voir figure 3.11) :

- les faces présentes du même côté que la face qui a cédé par rapport au plan de rupture ne sont pas modifiées ;

- celles présentes de l'autre côté du plan de rupture voient leurs arêtes qui contenaient P_c modifiées pour contenir P_n à la place ;
- enfin, les faces *traversées* par le plan de rupture sont rattachées à la particule présente du côté du plan de rupture contenant la plus grande partie de leur aire.

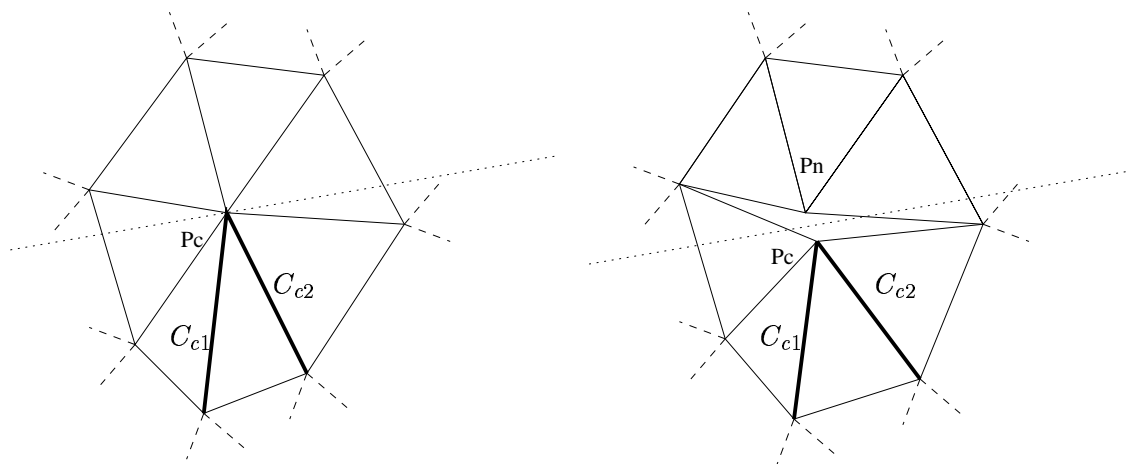


FIG. 3.11: Procédure de détachement des faces du modèle : une nouvelle particule P_n est créée au même emplacement que P_c , et les faces adjacentes à P_c sont parcourues et reliées à P_n ou P_c suivant leur position par rapport au plan de rupture (en pointillé sur la figure). Sur l'illustration, les particules P_c et P_n ne sont pas à la même position, pour une raison de clarté. Les faces traversées par le plan de rupture sont rattachées à la particule présente du côté du plan contenant la plus grande partie de leur aire.

Création de nouveaux connecteurs. Les connecteurs se trouvant sur la frontière de la rupture appartiennent aux faces traversées par le plan de rupture. Ces connecteurs doivent être scindés et deux nouveaux connecteurs sont alors créés et reliés à la nouvelle particule P_n .

3.2.2.3 Mise à jour des paramètres mécaniques

Un point important, lorsqu'on simule des changements de topologie, est de conserver les propriétés mécaniques du corps simulé, au fur et à mesure des déchirements ou des découpes. Lors des opérations de division de particules ($P_c \implies P_c + P_n$), nous redistribuons la masse, P_c perdant la moitié de la sienne au profit de P_n .

Les paramètres de rigidité et de viscosité des connecteurs créés sont initialisés avec les mêmes valeurs que ceux de leur connecteur «frère». Ceci permet de conserver les propriétés de rigidité des faces adjacentes au déchirement, mais présente l'inconvénient de rigidifier le modèle dans

la direction de la lèvre du déchirement (la rigidité des connecteurs s'ajoutant lorsqu'ils sont placés en parallèle). Cette limitation peut toutefois être relativisée, car comme les nouveaux connecteurs sont créés dans une direction perpendiculaire aux efforts internes qui ont engendrés le déchirement, ils ne commenceront à être sollicités que lorsque la zone de déchirement sera bien ouverte, et à ce moment là, ils ne seront plus parallèles à leur connecteur «frère».

3.2.2.4 Détection et traitement des singularités géométriques

L'algorithme proposé peut générer des configurations de maillage où plusieurs ensembles de faces ne sont connectés que par une particule (figure 3.12). Ces configurations, appelées **singularités**, doivent être détectées et traitées, afin de conserver un maillage conforme.

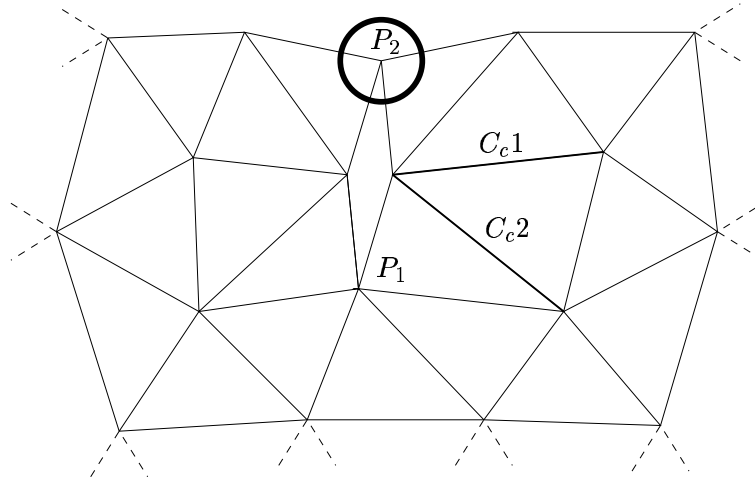


FIG. 3.12: *Singularité géométrique engendrée par une opération de remaillage antérieure. Une fois la singularité détectée, il convient de scinder en deux la particule joignant plusieurs blocs de faces.*

Formellement [BY95], une singularité se définit à partir des notions d'**étoile** et de **coque**. Rappelons qu'un **simplexe** de dimension k est un polytope qui est l'enveloppe convexe de $k + 1$ points indépendants de l'espace. Par exemple, les simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3 sont respectivement les sommets, les arêtes, les triangles et les tétraèdres.

DÉFINITION 11 *Soit M un maillage connexe surfacique (qui contient des points, des segments et des triangles uniquement) et S un point ou un segment de M . L'**étoile de S dans M** est le sous-maillage de M formé par les triangles de M qui contiennent S et les points et segments de ces triangles.*

DÉFINITION 12 La **coque de S dans M** est le sous-maillage de M constitué par tous les simplexes de l'étoile de S dans M disjoints de S .

DÉFINITION 13 Un point ou un segment d'un maillage surfacique M est **singulier** si sa coque dans M est non connexe.

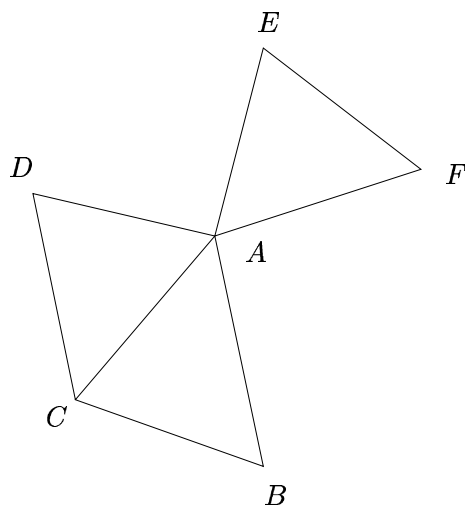


FIG. 3.13: Point singulier dans un maillage surfacique triangulé.

Par exemple, dans la figure 3.13, le point A est singulier car sa coque, composée des points B , C , D , E et F et des segments BC , CD et EF , n'est pas connexe.

La détection des singularités est faite à chaque fois qu'un déchirement a lieu, pour le (ou les) sommets se trouvant au fond de la lèvre de déchirement (P_1 et P_2 sur la figure 3.12). La propriété suivante permet de détecter facilement ces singularités :

PROPRIÉTÉ 4 Dans un maillage surfacique triangulé, le nombre de blocs de faces connexes connectés par un sommet se calcule à partir de la différence, D , entre le nombre d'arêtes adjacentes à ce sommet et le nombre de faces adjacentes à ce sommet. Si $D = 0$ ou $D = 1$, un seul bloc de faces connexes est connecté par le sommet. Sinon, le nombre de blocs de faces connexes connectés par le sommet est égale à D .

Si ce nombre de blocs est égal à deux, le modèle est remaillé localement, en divisant la particule singulière en deux, ce qui déconnecte les blocs qui étaient adjacents à la singularité. Si le nombre de blocs est supérieur à deux, les blocs sont déconnectés les uns des autres de façon récursive.

3.2.2.5 Discussion

La méthode proposée permet donc de simuler des phénomènes de déchirements dans des modèles surfaciques. Elle nécessite néanmoins, afin de fonctionner efficacement, une structure de donnée géométrique adéquate. Il est en effet primordial de pouvoir parcourir rapidement et facilement le maillage, et les mises à jour des relations de voisinages ou l'insertion de nouveaux éléments dans le maillage doivent être aisés et rapides. La structure de donnée géométrique que nous avons utilisée pour cela est décrite dans le chapitre suivant.

Une particularité de cette approche est que la forme des déchirements dépend directement de la topologie du maillage du modèle. Il est donc primordial que les modèles soient construits à partir de maillages de «bonne qualité». C'est à dire un maillage qui ne présente pas de directions privilégiées, et dont les faces qui le composent sont les plus régulières possible. Par contre, l'utilisation de maillages présentant des directions privilégiées, permet d'induire des directions de rupture privilégiées. En construisant un maillage adéquat, il est donc possible de simuler la fracture de corps possédant des directions privilégiées, comme les matériaux cristallins par exemple.

L'approche présente comme avantage une maîtrise de la complexité du modèle. En effet, l'augmentation du nombre de connecteurs à simuler est bornée. Dans le pire des cas, c'est à dire si l'on sépare toutes les faces du modèle, et que celui ci présente une géométrie fermée (voir définition 9, page 53), le nombre de connecteurs est multiplié par deux. Dans le cas d'un modèle avec une géométrie ouverte, ce rapport est inférieur à deux (les connecteurs se trouvant sur le bord du maillage ne pouvant être divisés). Le nombre de faces, quant à lui, n'augmente pas, ce qui implique que le temps de rendu graphique reste constant.

Par rapport aux approches existantes, le réalisme de l'approche est bien entendu inférieur à celui que l'on obtient en subdivisant les éléments de simulation. Il est par contre supérieur à celui des approches «destruction», et d'autant plus si la discrétisation du modèle est grossière, ce qui est souvent le cas des modèles interactifs.

Enfin, nous pensons qu'il est important de remarquer que l'approche est indépendante du modèle mécanique utilisé, puisque le critère de rupture (seuil sur les déformations) et le processus de remaillage local sont basés uniquement sur la géométrie du modèle.

3.2.3 Découpe de modèles surfaciques

PRINCIPE: Nous proposons une approche de la modélisation de la découpe de corps surfaciques déformables basée sur l'algorithme de déchirement présenté dans la section précédente.

Le processus de découpe découle d'une interaction entre un outil, contrôlé en position par l'utilisateur, et le modèle déformable.

Deux étapes sont donc nécessaires à la modélisation des découpes :

- détecter les collisions entre l'outil et le modèle, dans le but de définir une «trajectoire de découpe» ;
- remailler localement le modèle le long de la trajectoire de découpe, afin de changer sa topologie pour rendre compte du phénomène de découpe.

3.2.3.1 Calcul de la trajectoire de découpe

Le calcul de la trajectoire de découpe se déroule en trois phases :

Détection des collisions entre l'outil virtuel et le modèle. La détection des collision entre l'outil virtuel et le modèle revient à détecter la collision entre un segment de droite et un ensemble de faces. Nous décrirons dans le prochain chapitre la solution que nous avons choisi pour cela. Nous supposons, pour l'instant, que la méthode de détection de collision nous renvoie le nom du sommet du modèle le plus proche du point de collision entre l'outil virtuel et le modèle.

Interprétation du comportement de l'utilisateur. Les mouvements de l'outil virtuel doivent être interprétés, afin de déterminer si l'utilisateur est en train d'initier une découpe, d'en continuer une, ou simplement de toucher le modèle. En analysant l'historique de l'existence de collision entre le modèle et l'outil sur trois pas de temps, il est possible de différencier ces trois scenarii (détails au chapitre suivant).

Calcul d'un chemin de découpe. Lorsqu'une découpe est à effectuer entre deux points du maillage (initiation d'une découpe ou continuation), il convient de calculer le chemin de la découpe. En effet, suivant la vitesse de déplacement de l'opérateur, deux sommets à relier par une découpe ne sont pas forcément adjacents dans le maillage. Le chemin de la découpe est donc une liste d'arêtes qui approximent au mieux le segment de droite reliant les deux sommets.

3.2.3.2 Remaillage local

Le remaillage local de la découpe est effectué en utilisant les algorithmes de remaillage développés pour la modélisation du déchirement. Afin d'obtenir une découpe qui soit la plus proche possible de la trajectoire effective de l'outil virtuel, les sommets présents le long du chemin de découpe sont projetés orthogonalement sur le segment de droite qui relie les deux sommets entre lesquels la découpe a lieu. Ce faisant, nous interpolons linéairement, entre chaque pas de temps, le mouvement de l'outil.

3.2.3.3 Discussion

Cette approche du processus de la découpe interactive de corps déformables est basée sur l'algorithme de déchirement. Elle en hérite donc les avantages et les inconvénients :

La précision des trajectoires de coupes est en effet limitée par la résolution initiale du maillage géométrique. En contrepartie, l'accroissement de la complexité du modèle déformable est bornée.

La méthode présente toutefois l'inconvénient de ne pas générer des coupes progressives, les faces n'étant séparées les unes des autres que lorsque l'outil virtuel passe d'un élément à un autre.

3.2.4 Déchirement de modèles volumiques

Notre idée de base, pour parvenir à simuler interactivement des changements de topologie dans des modèles volumiques, est d'élever les algorithmes de changement de topologie surfaciques d'une dimension. Au lieu de séparer des faces, l'algorithme sépare donc des tétraèdres.

3.2.4.1 Critère de rupture

Le même critère de rupture que pour les modèles surfaciques a été utilisé, avec comme différence que seuls les connecteurs présents sur la surface externe du maillage sont testés. En effet, dans la majeure partie des cas, les déchirements survenant sur des corps volumiques sont initiés par des interactions avec des entités extérieures, interactions ayant lieu au niveau de la surface externe des modèles.

À chaque pas de temps, toutes les faces de la peau du modèle sont donc parcourues et, si deux des connecteurs communs à une face présentent une élongation supérieure au seuil défini

pour le matériau, le processus de remaillage local est entrepri.

Il est évident que la liste de faces de la surface extérieure du maillage est appelée à s'agrandir. Effectivement, lorsqu'on sépare deux tétraèdres, les faces qui les joignaient se retrouvent sur la surface externe.

3.2.4.2 Remaillage local

Le principe du remaillage local est le même que celui décrit pour les modèles surfaciques. Lorsqu'une face satisfait le critère de rupture et que les deux connecteurs qui cèdent, C_{c1} et C_{c2} , et la particule à diviser, P_c , ont été identifiés, un plan de rupture est calculé, perpendiculairement au vecteur porté par la bissectrice des deux connecteurs qui cèdent. Une nouvelle particule, P_n , est alors créée, au même emplacement que P_c . Les tétraèdres adjacents à P_c sont alors parcourus et, suivant leur position par rapport au plan de rupture, sont rattachés soit à P_c , soit à P_n .

Ce processus, très simple en théorie, demande une structure des données géométriques très spécifique. Cette structure doit en effet permettre, notamment, de parcourir dans un ordre donné, et de façon simple et rapide, les faces ou les tétraèdres adjacents à une particule. Malheureusement, la notion de «sens», dans un maillage volumique, n'existe pas. De fait, une particule se trouvant sur la surface externe du maillage pointe non seulement sur les faces de la surface externe, mais également sur les faces qui composent des tétraèdres internes du modèle. Il en est de même pour le parcours des tétraèdres adjacents à une particule et qui comportent des faces présentes sur la surface du maillage. La structure des données doit également permettre des modifications de relations de voisinage en ligne, et l'insertion de nouveaux éléments. Nous présenterons, dans le chapitre suivant, une structure des données géométriques permettant ce type de manipulations.

3.2.4.3 Détection et traitement des singularités géométriques

Comme pour l'algorithme de déchirement surfacique, le processus de remaillage peut amener le modèle dans une configuration géométrique comportant des singularités géométriques. Pour une raison de cohérence physique, nous ne tolérons pas en effet dans le modèle que les primitives volumiques connectées par une surface. C'est à dire, lorsqu'on fait appel à un maillage tétraédrique, à des tétraèdres connectés par une face. Or, la phase de remaillage local peut engendrer des cas topologiques présentant des tétraèdres voisins qui ne sont connectés que par une arête ou une particule. Les figures 3.14 et 3.15 présentent ces deux configurations

singulières qui peuvent survenir du fait du remaillage local.

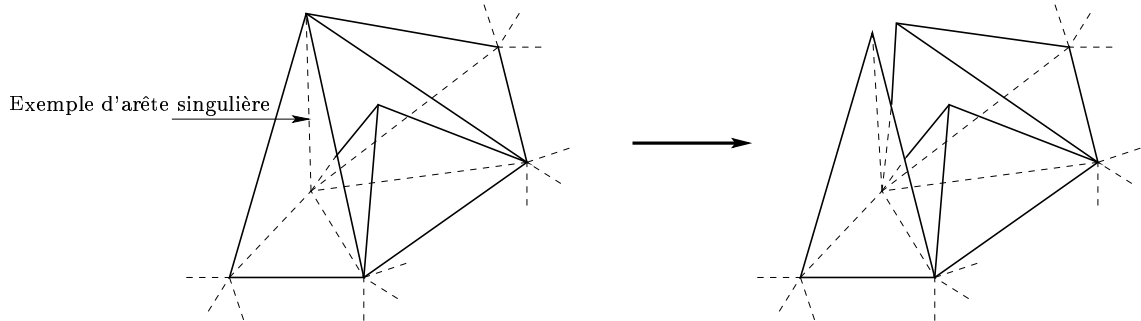


FIG. 3.14: Exemple de deux tétraèdres connectés uniquement par une arête, et résultat du remaillage que nous effectuons.

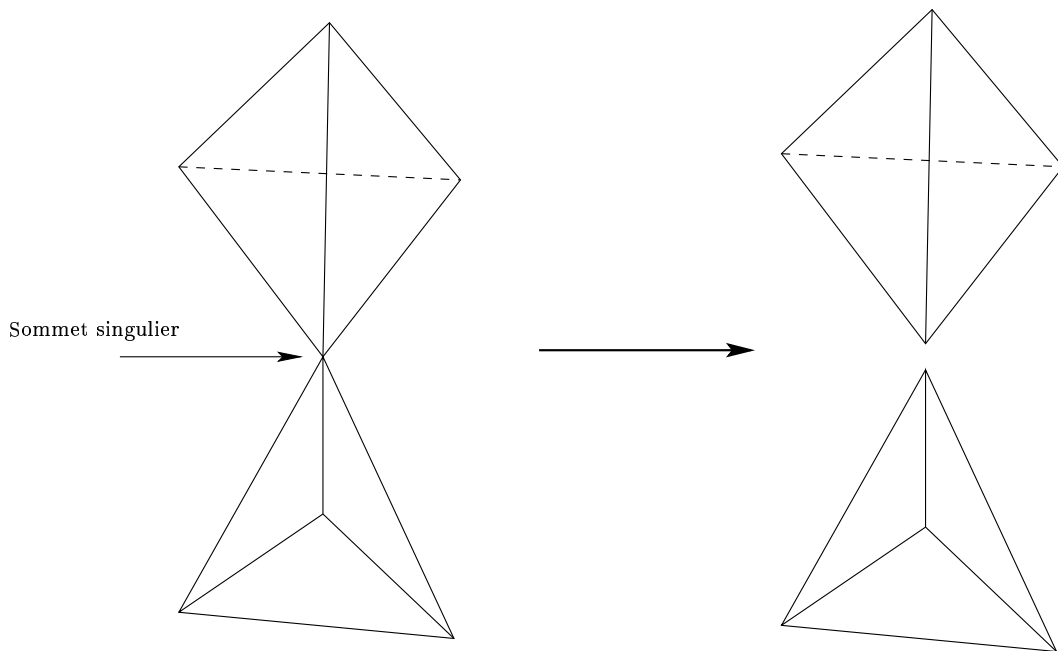


FIG. 3.15: Exemple de deux tétraèdres connectés uniquement par un sommet, et résultat du remaillage que nous effectuons.

Après chaque remaillage, les tétraèdres adjacents à la lèvre de déchirement doivent donc être parcourus et, s'ils sont dans une configuration géométrique singulière, un remaillage local est effectué. Nous verrons, dans le chapitre suivant, que détecter et surtout traiter les deux configurations singulières, dans les maillages volumiques, est un problème complexe.

3.2.4.4 Discussion

La méthode proposée permet de simuler des phénomènes de déchirement sur des corps volumiques. Basée sur le même principe que l'algorithme de déchirement de corps surfaciques, elle présente les mêmes avantages et inconvénients. Sa mise en oeuvre, par contre, a été bien plus ardue, car il a fallu développer des algorithmes permettant de se déplacer de façon cohérente, et de mettre à jour dynamiquement une structure de données géométriques volumique.

Le traitement des singularités, qui est une phase primordiale pour conserver la cohérence du modèle, nous a posé de nombreux problèmes, nous y reviendrons également dans le chapitre suivant.

3.3 Conclusion

Après avoir défini la terminologie et les concepts de base mis en jeu dans le chapitre, une étude approfondie des méthodes de changement de topologie dans les modèles déformables a permis de les classer suivant certaines caractéristiques. L'approche consistant à détruire des éléments de simulation présente l'inconvénient de faire disparaître de la matière. L'approche «subdivision», bien plus précise, est quant à elle incompatible avec la contrainte d'interactivité, puisqu'elle accroît à chaque changement de topologie la complexité du modèle.

Une nouvelle approche a donc été proposée, permettant de simuler de manière interactive des opérations de déchirement et de découpe. Le principe de cette nouvelle approche est de «séparer» les primitives du modèle mécanique les unes des autres. Cette méthode donne des résultats moins précis que la méthode de subdivision, mais bien meilleurs, à résolution du modèle équivalente, que ceux donnés par la méthode de «destruction». La principale limitation de la méthode est que les changements de topologie réalisables sont limités par la géométrie initiale du modèle. Enfin, en bornant l'augmentation de la complexité du modèle (doublement du nombre de ressorts, dans le pire des cas, c'est à dire si l'on sépare tous les éléments du modèle), la méthode proposée permet d'assurer une simulation interactive, tout au long des opérations de changement de topologie.

Cette nouvelle approche présente néanmoins l'inconvénient de demander une structure des données géométriques adéquate. Celle-ci doit en effet pouvoir être parcourue et mise à jour de façon rapide et fiable. Le chapitre suivant regroupe les détails d'implantation du modèle biomécanique du foie et des algorithmes de changement de topologie les plus significatifs. Des résultats quantitatifs de simulation sont également exposés et commentés.

Chapitre 4

Implantation et résultats expérimentaux

Nous avons présenté, dans les deux chapitres précédents, une modélisation du foie humain prenant en compte ses caractéristiques mécaniques de non-linéarité et d'hétérogénéité, ainsi qu'une approche permettant de simuler de manière interactive des changements de topologie dans des modèles mécaniques surfaciques ou volumiques. Ces travaux ont été menés dans l'optique d'obtenir des simulations interactives. L'objectif du présent chapitre est de décrire les structures de données et les algorithmes critiques de ce point de vue, ainsi que les modèles mis en oeuvre. Des résultats expérimentaux sont également présentés, afin de valider les approches proposées.

4.1 Choix technologiques

Les choix technologiques, matériels et logiciels, effectués durant le développement d'un prototype, conditionnent fortement son rapport précision/performances. Depuis le commencement de nos travaux, notre objectif est de développer des algorithmes permettant de simuler des changements de topologie dans des modèles biomécaniques, de façon interactive sur des machines de moyenne gamme. Par machine de moyenne gamme, nous entendons un PC coûtant moins de 15000 francs. Pour ce prix, il est possible actuellement d'obtenir un PC disposant d'un processeur relativement puissant, d'au moins 128Mo de mémoire vive et d'un accélérateur graphique compatible Open-GL. Bien entendu, les dispositifs à retour d'effort n'étant pas encore démocratisés, leur prix restent, quant à eux, assez élevés.

Du point de vue logiciel, nous avons fait le choix des standards industriels, avec un développement en C++ et un rendu graphique Open-GL, permettant d'obtenir à moindre coût (financier et processeur) un rendu graphique de qualité. Le choix de l'utilisation d'outils de développement sous licence GNU¹ a également été fait, pour des raisons philosophiques, pratiques et financières.

4.2 Modèle interactif du foie humain

4.2.1 Implantation

Les travaux d'implantation relatifs au modèle biomécanique du foie ont été effectués au sein d'un simulateur développé en commun par les membres de l'équipe *Génération du mouvement dans les environnements virtuels* du projet SHARP. Développer dans le cadre du simulateur du projet nous a permis de tirer parti des développements existant, et notamment des routines

1. GNU's Not Unix, www.gnu.org

de rendu graphique.

4.2.1.1 Boucle d'animation

Une représentation globale de la boucle d'animation du simulateur est présentée dans la figure 4.1.

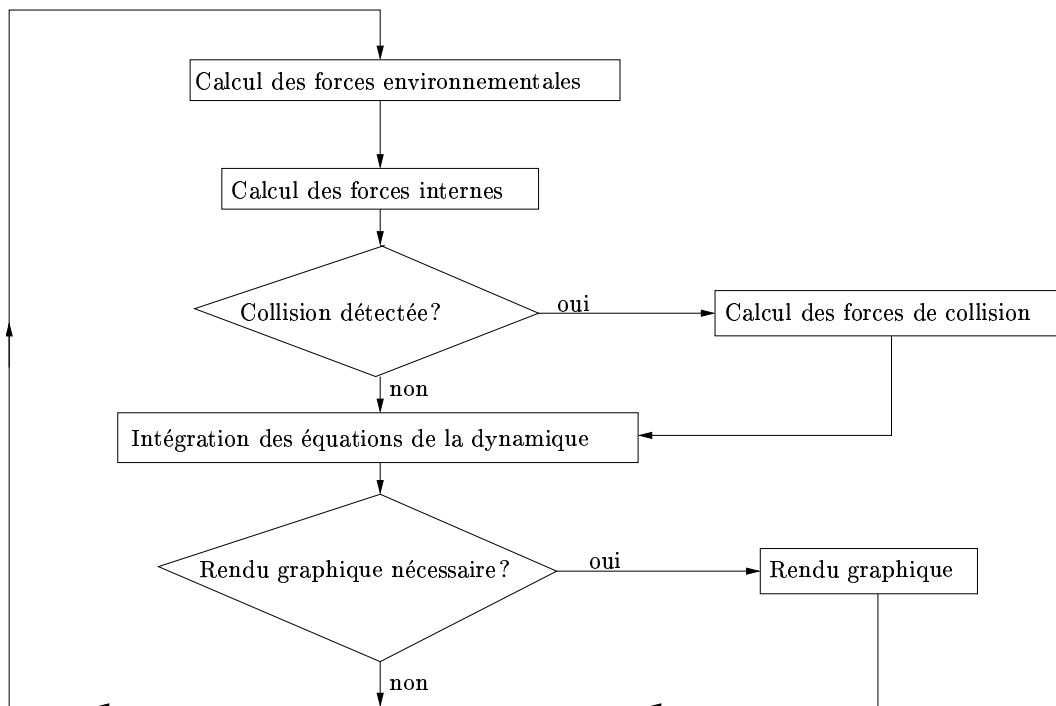


FIG. 4.1: Boucle d'animation du simulateur.

Pour passer d'un état du modèle au temps t à son état au temps $t + \Delta t$, un ensemble de processus est à réaliser. Les forces environnementales sont les premières à être calculées. Ce sont les forces induites par le milieu dans lequel est plongé le modèle. Il s'agit par exemple de la force gravitationnelle et des frottements de l'air. Les forces internes au modèle sont ensuite évaluées. Celles-ci dépendent des caractéristiques mécaniques du modèle et de sa loi de comportement.

Le modèle étant interactif, il est important de tester à chaque pas de temps si des collisions ont lieu et, le cas échéant, de calculer des forces de collision qui permettront de conserver la cohérence de la simulation. L'ensemble des forces calculées (environnementales, internes et de collision) est ensuite intégré à travers le temps, afin d'obtenir l'état du système au pas de temps suivant.

N'ayant pas besoin d'un rendu graphique à la fréquence d'intégration des équations de la dynamique ($\simeq 150\text{Hz}$), le rendu est découplé de la boucle d'animation principale, et a lieu à une fréquence moins élevée (à 20Hz , par exemple).

4.2.1.2 Une première structure des données pour le modèle mécanique

Comme mentionné précédemment, le simulateur a été développé en utilisant un formalisme orienté objets. Dans ce cadre, une première proposition de hiérarchie pour les classes `PARTICULE`, `RESSORT` et `RÉSEAU_MASSES_RESSORTS` a été de les faire dériver, respectivement, des classes géométriques existantes `SOMMET`, `ARÊTE` et `POLYÈDRE` (voir figure 4.2).

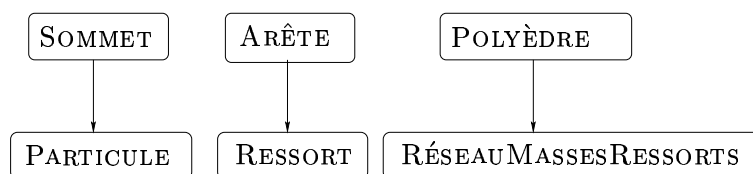


FIG. 4.2: Première proposition de hiérarchie des classes liées à la modélisation mécanique.

Chacune des classes ainsi créée contient, de manière encapsulée, ses attributs et ses méthodes spécifiques à la simulation dynamique.

Cette approche nous a permis d'obtenir rapidement un premier prototype de test. Néanmoins, étant donné le nombre important d'instances de ces classes manipulées, les limitations en terme de performance de cette approche sont rapidement apparues. En effet, les algorithmes de remaillage, effectuent de nombreuses opérations de création, destruction et surtout de modification des relations de voisinage entre les primitives du maillage (sommets, arêtes et faces). Cette implantation a donc été abandonnée, au profit d'une seconde approche, beaucoup plus performante.

4.2.1.3 Amélioration en terme de rapidité d'exécution

La seconde approche a été de regrouper toutes les méthodes liées au calcul des forces internes des modèles mécaniques au sein d'une même et seule classe : `RÉSEAU_MASSES_RESSORTS`. Cette classe comporte alors des tableaux, indexés par des entiers, de particules, ressorts et faces, ainsi que toutes les méthodes des classes précédemment définies. Un facteur deux pour la rapidité de simulation a été gagné grâce à cette nouvelle implantation plus compacte.

4.2.1.4 Intégration d'un dispositif de retour haptique

Le couplage de notre modèle avec un dispositif de retour haptique n'était pas un objectif prioritaire de nos travaux. Cependant, la présence d'un dispositif de ce type dans l'équipe et de personnes compétentes en la matière, nous a permis d'intégrer rapidement un système à retour d'effort au simulateur.

La perception humaine. La perception humaine du toucher, tout comme le sens de la vision, présente des limitations, dont il est possible de tirer parti dans le but de synthétiser des sensations haptiques. En animation par exemple (dessin animés, films, réalité virtuelle), on utilise le fait qu'une séquence d'images visionnée à une fréquence supérieure à 30-60Hz ne peut être discriminée d'un flux d'images continu. De la même manière, la connaissance des limitations du système haptique humain a permis de développer des systèmes à retour d'efforts «convaincants».

Les êtres humains sont peu compétents pour discriminer des positions. La position des mains est calculée par le cerveau en fonction des angles des articulations du poignet, du coude et de l'épaule. Des études [Sri94] ont montré que les incertitudes sur chacun des angles de ces articulations donnent une incertitude en position, sans référence externe, pour la main, de l'ordre de un pouce (2,54 cm). Nous sommes par contre meilleurs pour comparer des intensités de force, puisque nous pouvons discriminer deux forces différentes de 5 à 15%. Enfin, les humains sont très sensibles aux vibrations et aux discontinuités des forces : jusqu'à 1kHz, des vibrations de fréquences différentes peuvent être discriminées [Da94].

Le PHANToM, caractéristiques techniques. Le PHANToM² est un dispositif de retour haptique de type bras articulé. En manipulant un stylo relié au système ou en mettant son doigt dans une sorte de dé à coudre (le système est modulable), l'utilisateur contrôle la position et l'orientation de l'extrémité du bras articulé. Le PHANToM peut, quant à lui, renvoyer des forces dans n'importe quelle direction. Par contre aucun retour de force en couple n'est possible. Des encodeurs permettent de connaître la position et l'orientation de l'extrémité du bras (six degrés de liberté), et des moteurs d'appliquer des forces suivant les trois degrés de liberté en position. Le PHANToM a été conçu de façon que deux de ces trois moteurs, par un jeu de balanciers, équilibrent le système pour contrebalancer la force de gravité. En pratique, l'équilibre statique n'est pas obtenu, mais le poids du système, en son extrémité, reste négligeable devant celui de la main de l'utilisateur.

2. Fabriqué par Sensable Technologies

Intégration au simulateur. L'intégration du PHANToM au simulateur s'est faite en utilisant la librairie logicielle GHOST, livrée avec le dispositif. Cette librairie permet notamment de s'affranchir des aspects commande. À chaque pas de simulation (≈ 150 Hz), nous récupérons la position du PHANToM à l'aide d'une fonction GHOST, puis l'assignons à l'outil virtuel. Si une collision entre l'outil et le modèle est alors détectée, les forces de collision sont calculées (section 2.2.5.2, page 46) et appliquées au modèle et à l'utilisateur via le PHANToM. Les processus de la simulation et de la commande du PHANToM tournent sur la même machine, et communiquent par mémoire partagée, évitant ainsi les problèmes liés aux délais sur le réseau.

4.2.2 Validation et Résultats

4.2.2.1 Validation globale de l'utilisation de ressorts non-linéaires

Connaître les caractéristiques mécaniques globales (module d'Young, coefficient de Poisson) d'un assemblage de ressorts, à partir des caractéristiques mécaniques de chacun des ressorts qui le composent n'est pas évident. Ce comportement global dépend, en effet, non seulement des caractéristiques mécaniques de chacun des ressorts, mais également de leur agencement géométrique. C'est pourquoi, il nous est apparu nécessaire de valider l'utilisation de ressorts présentant une loi de comportement de forme cubique pour le modèle du foie, par des mesures sur le comportement global d'un modèle composé d'un grand nombre de ressorts de ce type. L'objectif de l'utilisation de ressorts au comportement non-linéaire étant, bien entendu, d'obtenir un modèle présentant également ce type de comportement.

Afin de déterminer la loi de comportement d'un matériau, les mécaniciens utilisent des éprouvettes (échantillon du matériau) de section circulaire ou carrée. Ils soumettent ensuite ces éprouvettes à des essais de différents types, suivant le paramètre qu'ils désirent identifier. Pour identifier le module d'élasticité, des essais en traction uniaxiale sont le plus souvent utilisés. Nous avons donc développé un modèle cylindrique, dans le but d'effectuer des essais de traction uniaxiale «virtuels». Le modèle a été construit à partir d'une surface maillée composée de 240 faces. À partir de ce maillage surfacique, un maillage volumique composé de 626 tétraèdres a été obtenu, en utilisant le logiciel GHS3D [GB98]. Nous avons ensuite construit, à partir de ces deux maillages, un réseau masses-ressorts composé de 176 masses et 921 ressorts.

Trois types de loi de comportement pour les ressorts du modèle ont été testés :

1. une loi de comportement linéaire : $F_{ressort} = \lambda d$;

2. une loi de comportement quadratique : $F_{ressort} = \lambda d^2$;
3. une loi de comportement «cubique plus linéaire» (premier terme de l'équation 2.2, page 42) : $F_{ressort} = (\lambda_1 d^3 + \lambda_2 d)$;

avec $d = \frac{l-l_0}{l_0}$ où l est la longueur du ressort et l_0 sa longueur au repos.

Les trois modèles cylindriques ainsi obtenus ont ensuite été soumis aux conditions aux limites suivantes :

- les particules de leur face supérieure sont encastrées ;
- une force, variant de 0,1 à 10 newton, est appliquée à toutes les particules de leur face inférieure.

La simulation en ensuite été lancée et, pour chaque valeur de la force, l'allongement relatif du cylindre à l'équilibre, $\frac{L-L_0}{L_0}$, a été relevé. La figure 4.3 présente les résultats de ces essais mécaniques virtuels.

Les essais montrent que la forme de la courbe représentant les déformations globales des cylindres, en fonction de la force appliquée sur chacune des particules de leur face inférieure, présente un aspect qualitativement similaire à celui de la loi de comportement de chacun des ressorts qui les composent. L'utilisation d'une force de rappel non linéaire pour les ressorts qui composent un modèle se répercute donc bien au niveau global, rendant le modèle non linéaire. Par contre, la topologie du maillage peut influencer sur le comportement global du modèle. La figure 4.5 présente le résultat d'essais similaires sur un maillage plus régulier, sans directions privilégiées et comportant le même nombre de faces externes. Le comportement global est là aussi assez proche, qualitativement, de celui de la loi de comportement des ressorts, mais il est différent de celui du premier cylindre.

Les illustrations de la figure 4.4 montrent la forme initiale et les formes finales des trois modèles cylindriques. On voit bien, sur ces captures d'écran, l'incidence de l'utilisation d'une force de rappel des ressorts non linéaire ; le modèle s'en trouve bien rigidifié.

Enfin, si des retournements de tétraèdres pouvaient survenir quand le modèle était soumis à des forces importantes en compression et lorsque des ressorts linéaires étaient utilisés, l'utilisation de ressorts non-linéaires élimine totalement ce type d'artefacts.

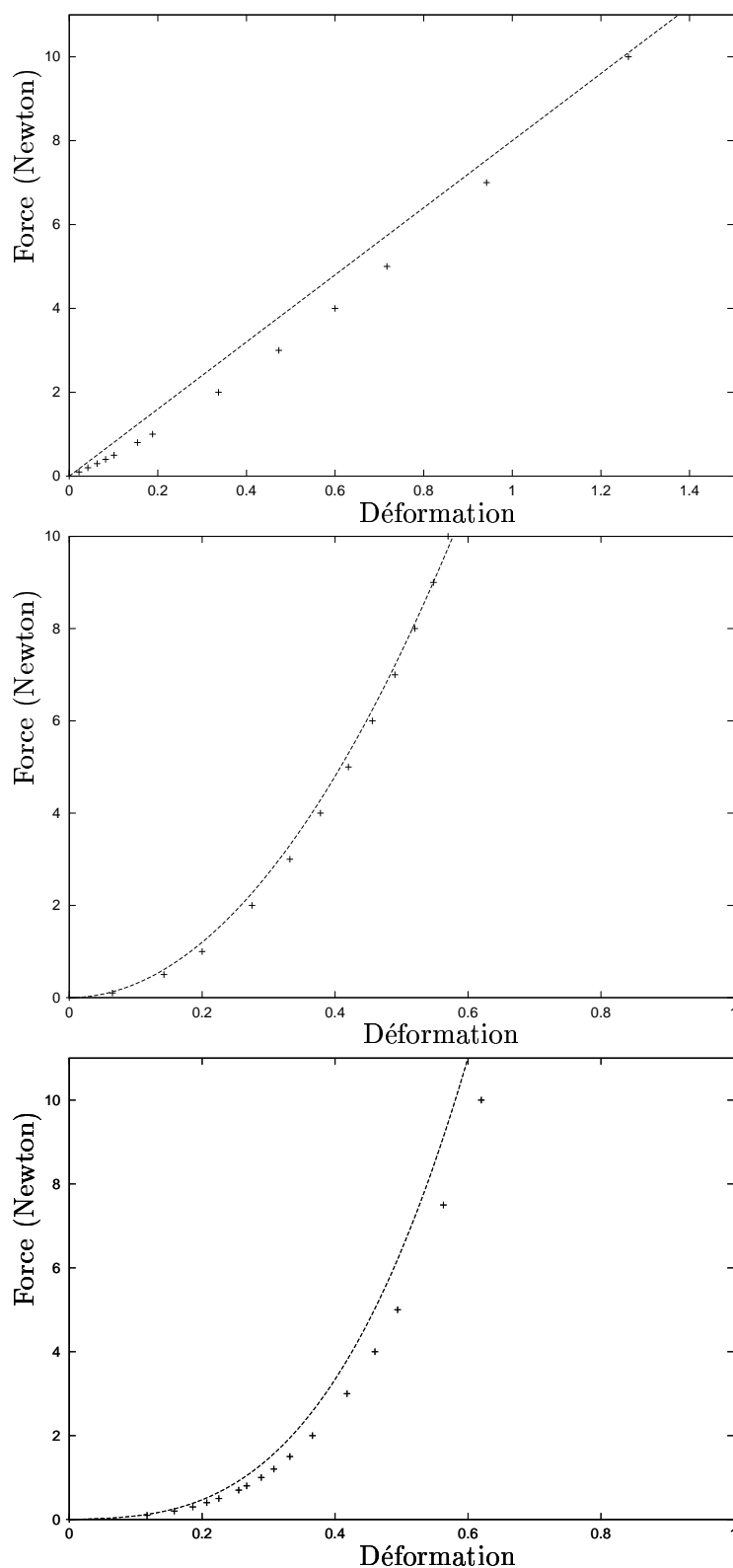


FIG. 4.3: Résultats d'essais de traction uniaxiale sur des modèles cylindriques construits à partir de ressorts présentant différentes lois de comportement. La loi de comportement utilisée pour les ressorts est, de haut en bas, de type linéaire (λd), quadratique (λd^2) et cubique plus linéaire ($\lambda_1 d^3 + \lambda_2 d$). Dans chacune des figures, la courbe en pointillés est un tracé de la loi de comportement de chaque ressort composant le modèle et les croix sont issues des essais sur le modèle cylindrique.

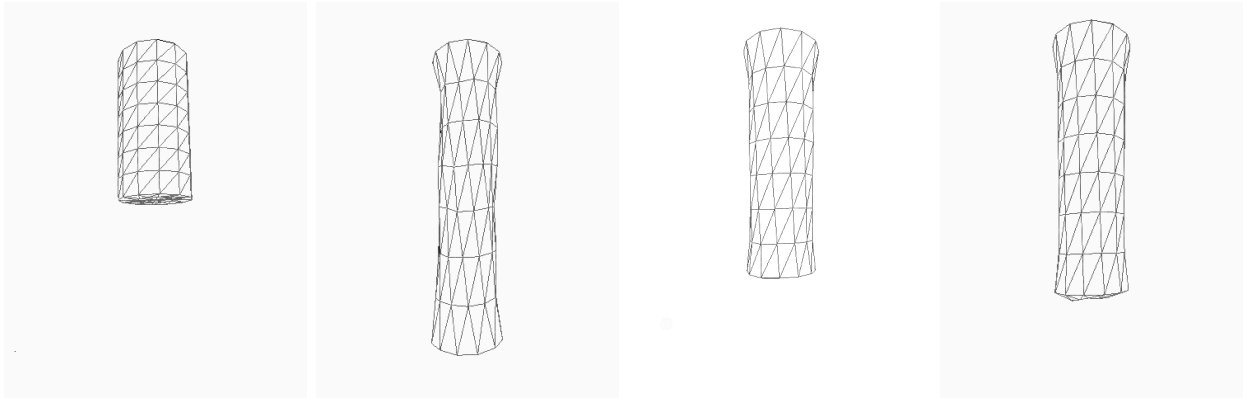


FIG. 4.4: À gauche, forme au repos du modèle cylindrique. Puis, de gauche à droite, forme à l'équilibre des modèles cylindriques contruits, respectivement, à partir de ressorts présentant une loi de comportement linéaire (λd), quadratique (λd^2) et cubique plus linéaire ($\lambda_1 d^3 + \lambda_2 d$). La force appliquée sur chacune des particules de la face inférieure du cylindre est fixée à six newton pour les trois essais.

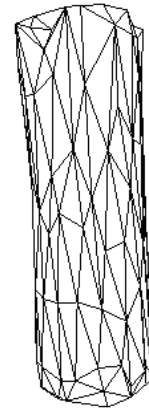
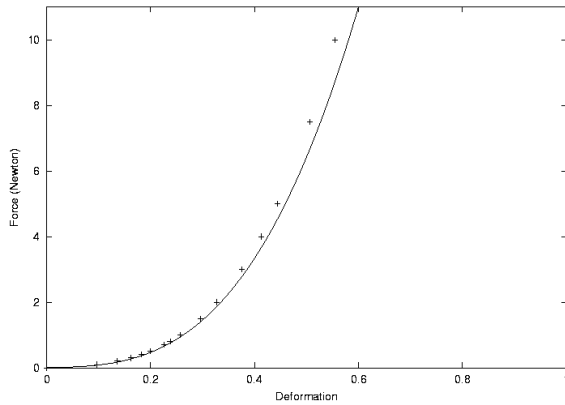


FIG. 4.5: Résultat des essais sur un maillage à la topologie différente. À droite : forme finale du modèle soumis aux mêmes conditions aux limites que celles de la figure 4.4.

4.2.2.2 Construction du modèle du foie humain

Le modèle du foie humain que nous avons développé est basé sur un maillage de surface qui nous a été fourni dans le cadre de l' AISIM. Ce maillage est composé de 187 sommets et 370

faces. À partir de ce maillage surfacique, et en utilisant GHS3D [GB98] George, P.L., nous avons généré un maillage interne tétraédrique comportant 1210 tétraèdres et 122 sommets internes. Un réseau masses-ressorts a ensuite été construit, à partir de ces deux maillages. Ce réseau comprend 309 masses ponctuelles et 3399 ressorts.

La force de rappel des ressorts est visco-élastique non linéaire (Eq. 2.2, page 42). Les paramètres de rigidité λ_1 et λ_2 des ressorts ont été déterminés par interpolation polynomiale d'ordre trois sur les seules données rhéologiques effectuées *in vivo* sur un foie humain que nous connaissions [CFD⁺00]. Forts des résultats des essais présentés dans la section précédente, nous faisons l'hypothèse que le comportement global du modèle est, au moins qualitativement, proche de celui des ressorts qui le composent. Le paramètre de viscosité, μ , est quant à lui réglé de manière différente pour les ressorts de la surface et ceux de l'intérieur du modèle :

- pour les ressorts de la surface du modèle (qui modélisent la capsule de Glisson), il est réglé de façon à produire une force négligeable devant celle induite par la composante élastique ;
- pour les ressorts internes (qui modélisent le parenchyme), il est réglé de manière à induire une force du même ordre de grandeur que celle de la composante élastique.

La masse m_i de chaque particule est ensuite calculée en fonction d'une masse volumique m_v , inhérente au modèle, et du volume V_i de chacun des tétraèdres adjacents à cette particule, suivant la formule :

$$m_i = \sum_{i=1}^{nbT} \frac{m_v V_i}{4} \quad (4.1)$$

nbT étant le nombre de tétraèdres adjacents à la particule i . La masse volumique (m_v) a été calculée à partir du volume total du maillage du foie, et de la masse moyenne de 2,3kg pour un foie humain.

La dynamique de ce modèle est simulée à une fréquence de 150 Hz, sur une machine de type Bi-Pentium II, cadencée à 300Mhz. Les drivers du PHANToM n'étant fournis que pour les systèmes d'exploitation Windows NT et Irix, c'est sur une Octane de SGI que les tests avec retour haptique ont été effectués. La figure 4.6 montre une séquence d'images issue d'une simulation interactive, avec retour d'effort.

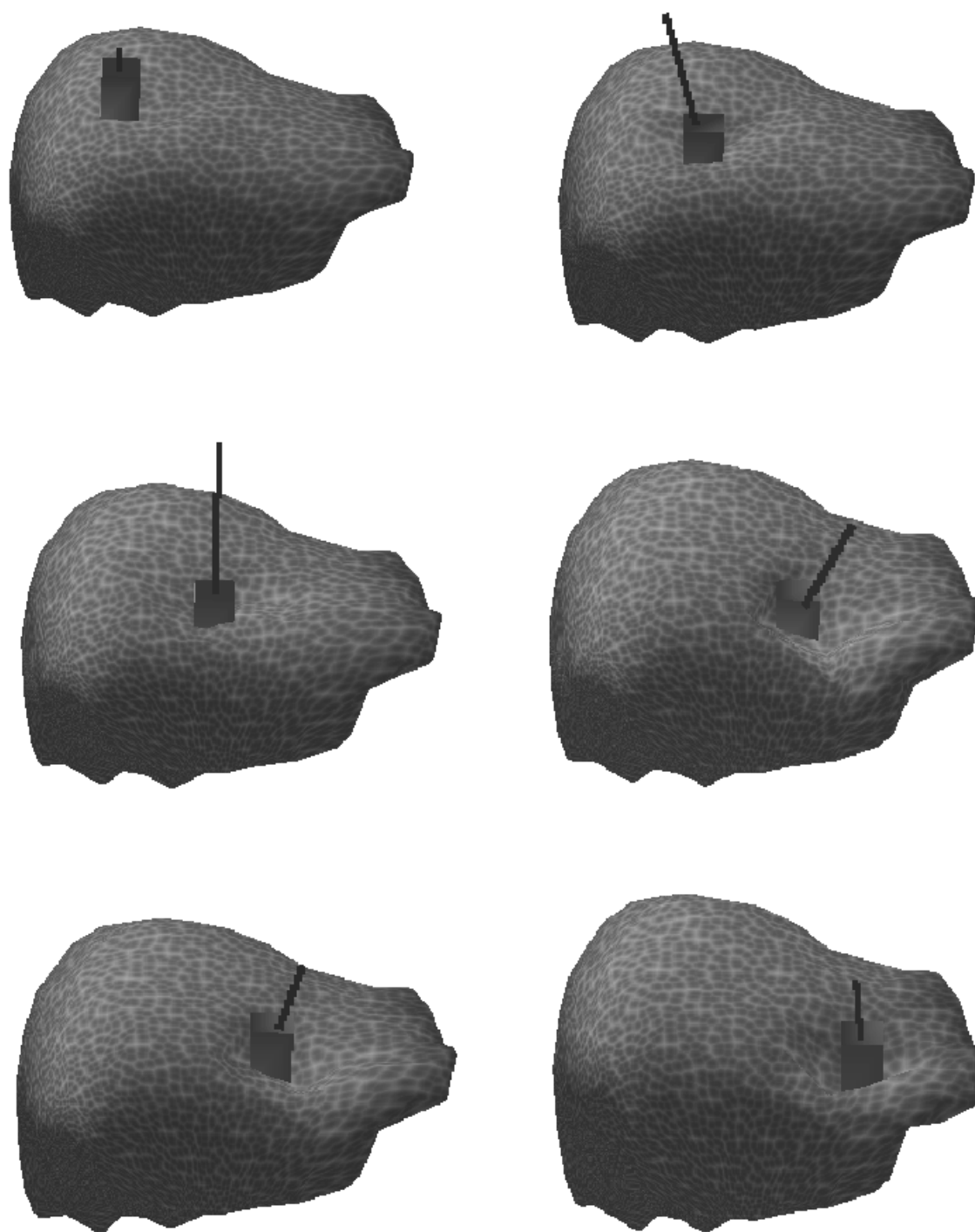


FIG. 4.6: Exemple de manipulation interactive du modèle du foie, avec retour haptique. Le vecteur qui part de l'outil représente la direction et l'intensité de la force renvoyée à l'utilisateur.

4.2.3 Discussion

Un modèle biomécanique interactif du foie humain a donc été développé. Celui-ci présente un comportement qualitativement proche de celui d'un foie réel (hétérogénéité, non-linéarité). Des essais mécaniques en traction uniaxiale sur un réseau masses-ressorts composé de ressorts au comportement non-linéaire ont montré que le comportement du modèle, dans sa globalité, présentait bien également un comportement non-linéaire qualitativement similaire. Enfin, le modèle a été interfacé avec un dispositif de retour haptique. Cependant, les fréquences de simulation, de l'ordre de 150 Hz, qui permettent d'interagir avec le modèle via ce périphérique, restent trop faibles pour un retour de force «fin», bien qu'une implantation plus compacte du modèle ait permis de doubler ses performances.

4.3 Changements de topologie

Bien que l'idée de base ayant gouverné notre approche de la modélisation des changements de topologie soit simple, l'implantation d'algorithmes la mettant en oeuvre s'est avérée complexe. Le choix de la structure des données géométriques fut crucial, pour des raisons d'efficacité, mais surtout de «navigation» au sein du maillage, et de mise à jour des informations de topologie des primitives géométriques.

Comme dans tout problème de géométrie, de nombreux cas particuliers à traiter ont ralenti nos travaux, nous les exposerons également dans cette section.

4.3.1 Déchirement de modèles surfaciques

4.3.1.1 Implantation

Modification de la boucle d'animation. La boucle d'animation du simulateur, pour intégrer les opérations de changement de topologie, est modifiée par l'insertion d'un test de rupture et d'une procédure de remaillage (figure 4.7). Le test de rupture est fait au début de la boucle d'animation, avant tous les calculs des forces, et la procédure de remaillage locale n'est appelée que si le critère de rupture est vérifié .

Structure des données géométriques. Afin de mettre en place les algorithmes de remaillage local, la structure des données géométriques doit répondre aux trois critères suivants :

1. permettre des navigations dans le maillage du type : parcourir toutes les faces adjacentes

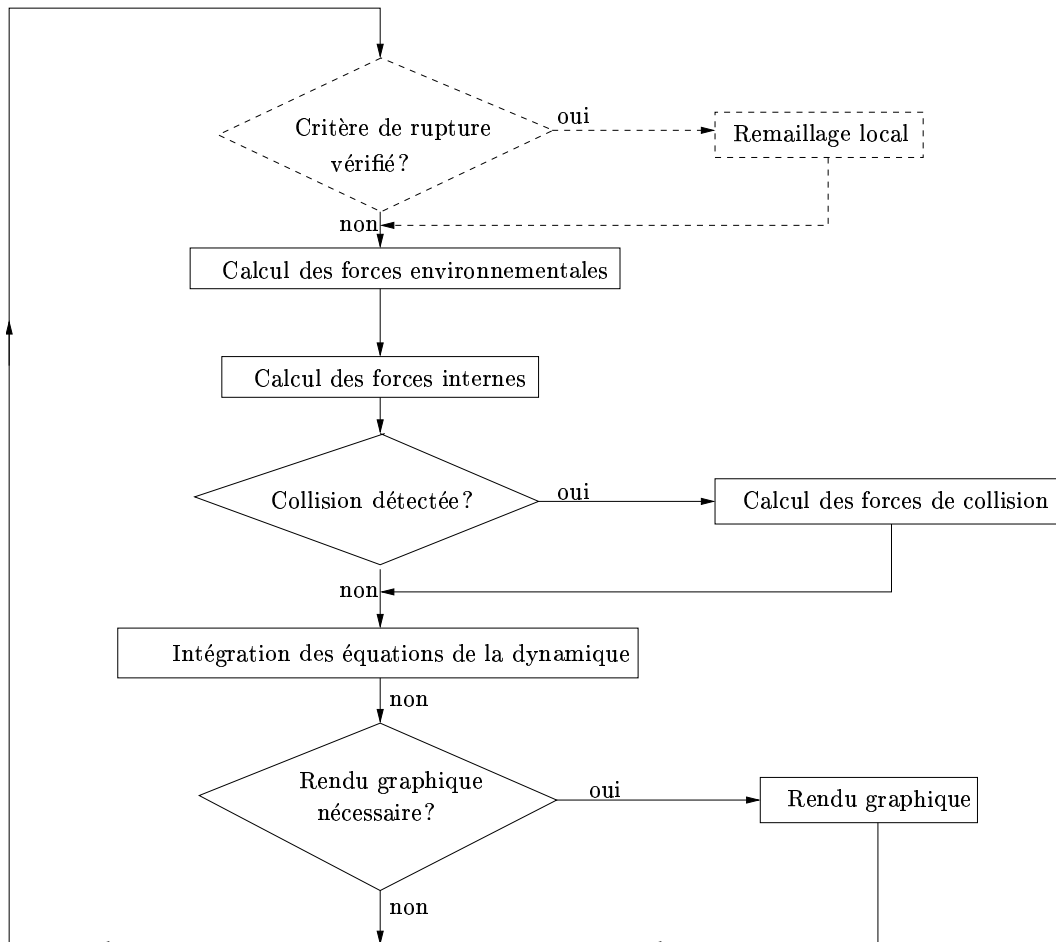


FIG. 4.7: Boucle d'animation du simulateur incluant les changements de topologie. Les phases spécifiques aux changements de topologie sont encadrées par des pointillés.

à une particule, dans le sens trigonométrique;

2. comprendre un minimum de pointeurs croisés, difficiles à mettre à jour lors des modifications de topologie;
3. être compacte pour pouvoir être parcourue rapidement.

Une structure de donnée géométrique de type «arête-ailée» [Bau72, CS89, Sza90], parfois appelée DCEL (pour «Doubly Connected Edge List») répond bien à ces contraintes. Le principe de cette structure est de stocker toutes les informations de topologie dans les arêtes du maillage (figure 4.8). Les arêtes pointent donc sur :

- un premier et un second sommet, ce qui oriente l'arête ;

- une face de droite et une face de gauche ;
- une prochaine arête et une arête précédente;

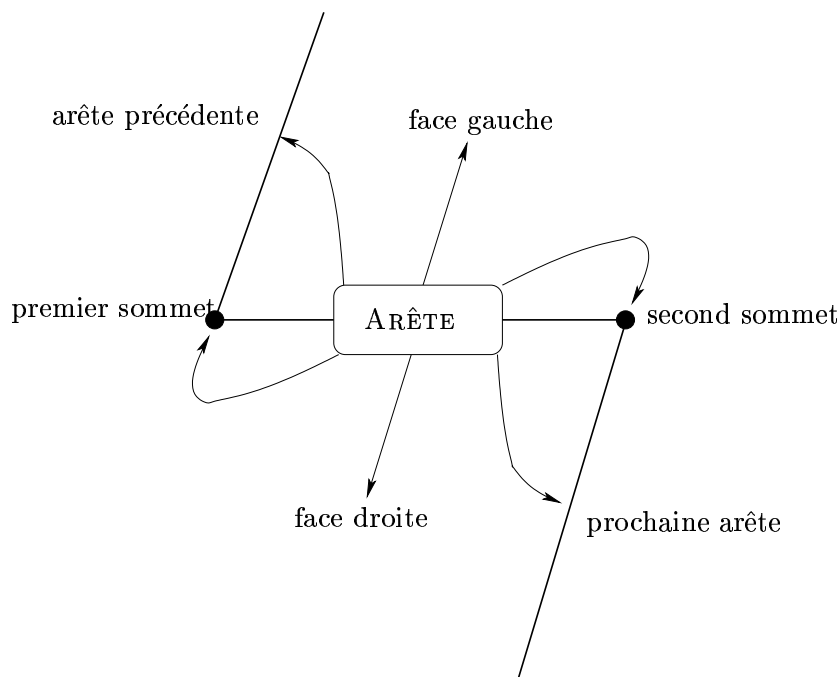


FIG. 4.8: Structure de donnée de type « arête-aillée ».

Les sommets et les faces, quant à eux, ne pointent que sur *une* des arêtes auxquelles ils sont adjacents.

4.3.1.2 Résultats

Afin de tester l'algorithme de déchirement de modèle surfacique, une scène comportant une voile fixée le long de ses deux bords verticaux a été construite. La voile est composée de 256 particules et 705 ressorts, qui définissent 450 faces. Cette voile est soumise à un vent virtuel, qui souffle dans une direction perpendiculaire à la voile, vers le fond de l'écran. Le seuil de rupture est fixé à 30%, c'est à dire que le modèle cède localement si la déformation est supérieure à 1,30. La figure 4.9 présente une séquence d'images issues d'une simulation. Le nombre de connecteurs du modèle passe de 705 à 790, c'est à dire une augmentation de 10,8%. En augmentant l'intensité du vent (figure 4.11), le modèle se déchire rapidement en un grand nombre d'éléments. L'augmentation du nombre de connecteurs est alors de 26,8%. Ces simulations tournent à 30Hz, de manière constante malgré les nombreuses opérations de remaillage (une fréquence plus élevée n'est pas utile puisque le rendu est seulement visuel).

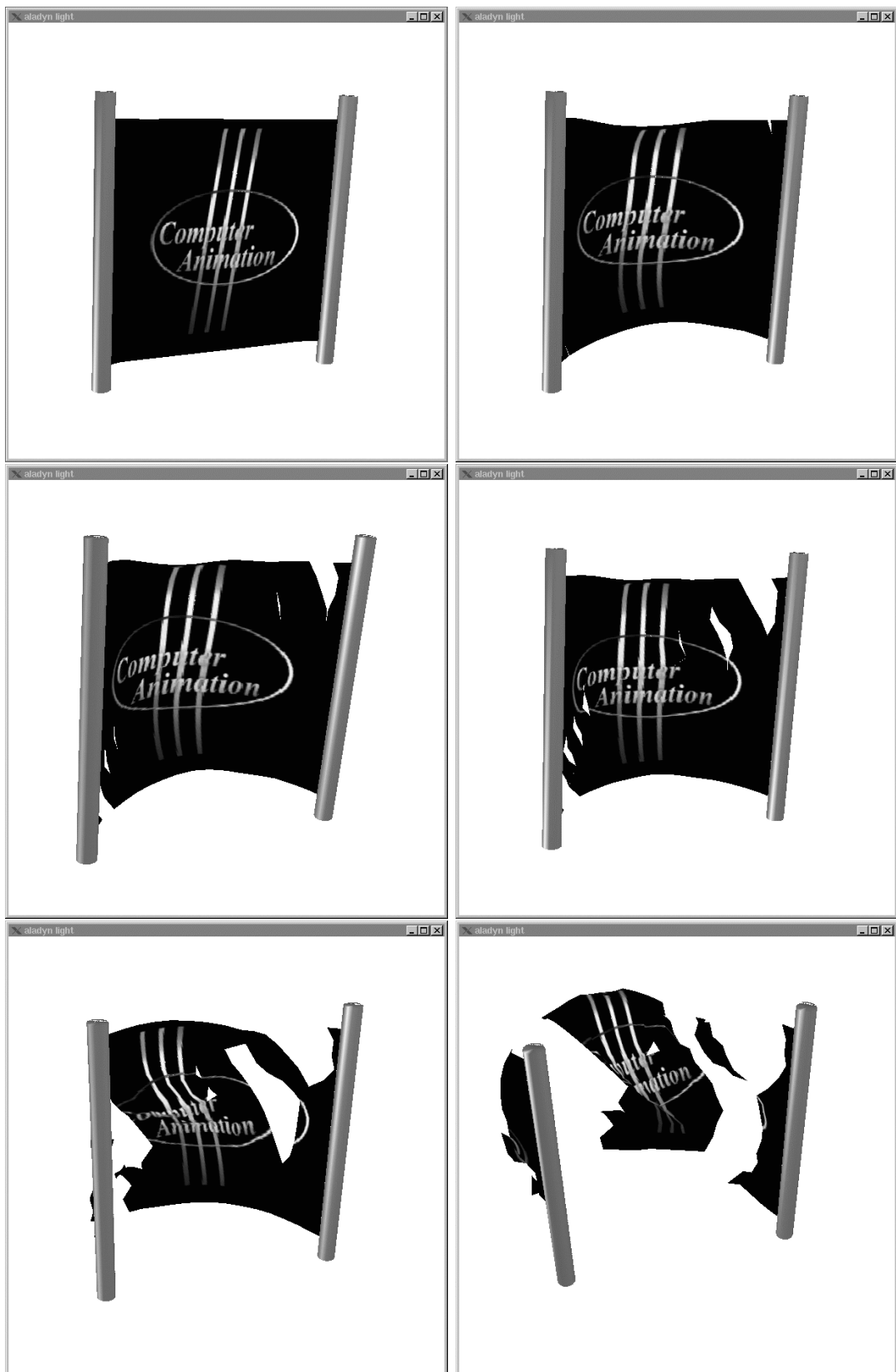


FIG. 4.9: Déchirement d'une voile soumise au vent. Maillage de 256 faces. (source [BL00]).

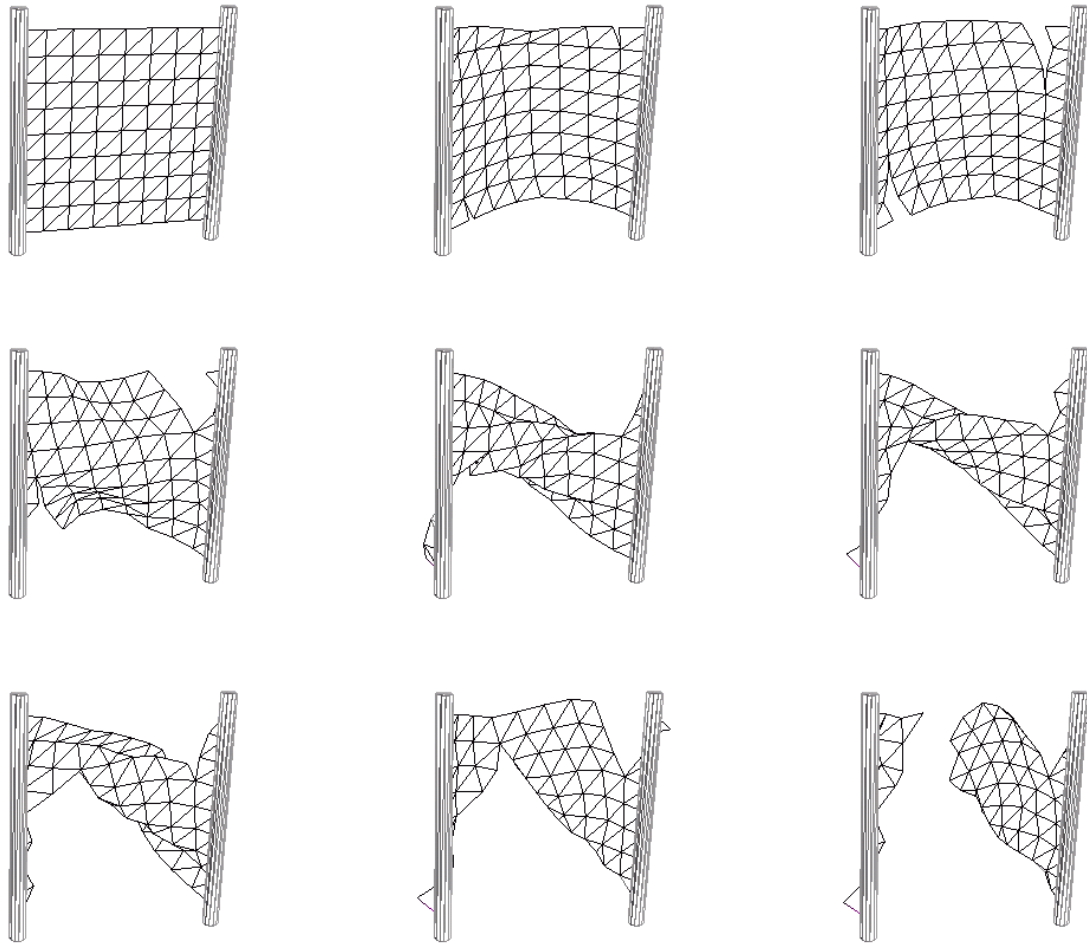


FIG. 4.10: *Déchirement d'une voile soumise au vent. Rendu en fil de fer. Maillage de 128 faces.*

4.3.2 Découpe de modèles surfaciques

4.3.2.1 Implantation

Comme nous l'avons exposé dans la section 3.2.3 (page 73), la modélisation d'opérations de découpe se fait en deux phases : le calcul de la trajectoire de découpe et le remaillage local.

Calcul de la trajectoire de découpe. Le modèle est découpé dès lors qu'un scalpel virtuel le traverse. Le scalpel virtuel est contrôlé en position par l'utilisateur, via le dispositif

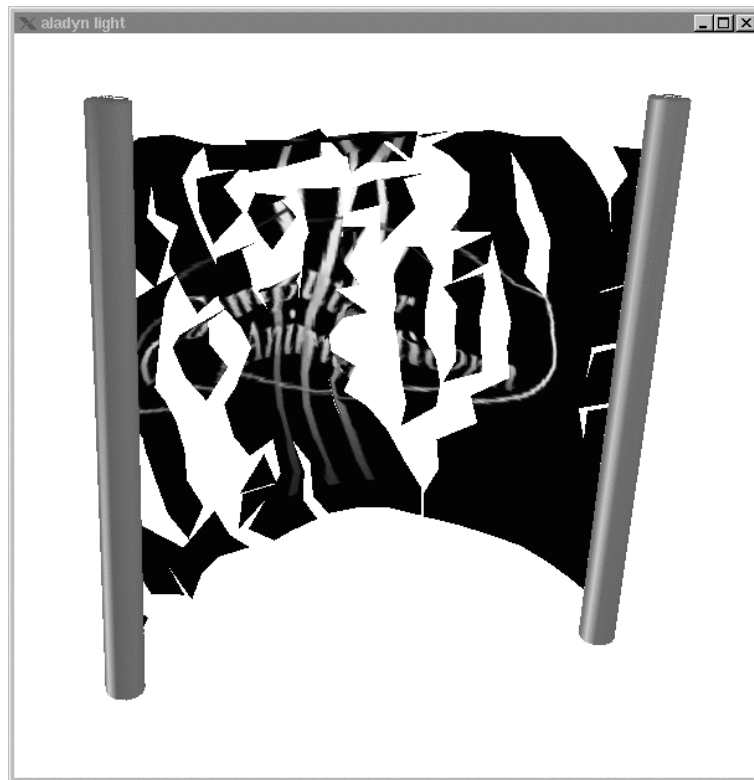


FIG. 4.11: *Soumise à un vent plus violent, la voile vole en morceaux (source [BL00]).*

à retour de force. Le PHANToM est donc utilisé, pour cette manipulation, uniquement comme dispositif d'entrée, c'est à dire sans retour haptique.

Le calcul de la trajectoire de découpe se décompose en trois phases : la détection des collisions entre le scalpel virtuel et le modèle, l'interprétation du comportement de l'utilisateur et le calcul du chemin de découpe.

La détection des collisions entre le modèle et le scalpel virtuel n'est pas faite comme dans le chapitre précédent (voir section 2.2.5.1, page 45). Nous utilisons en effet un algorithme de détection de collision segment/face, afin de connaître précisément les coordonnées du point de contact. La forme du scalpel est donc approximée par un segment de droite.

Une fois la détection de collision effectuée, il convient d'interpréter le comportement de l'utilisateur. Il est en effet possible qu'après avoir effectué une découpe (cas (1) de la figure 4.12), l'utilisateur stoppe son mouvement un instant, puis le poursuive (cas (2) de la figure 4.12). L'utilisateur peut également à ce moment là relever le scalpel pour initier une deuxième découpe en un autre emplacement du maillage (cas (3) de la figure 4.12).

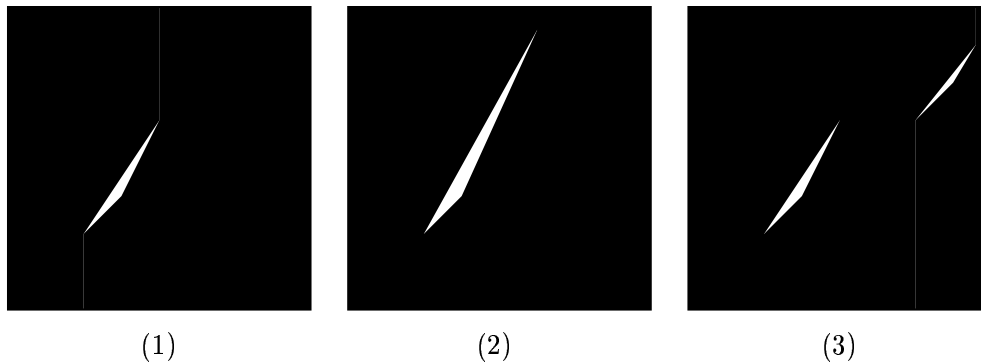


FIG. 4.12: Exemples de comportements de l'utilisateur durant une opération de découpe.

L'algorithme suivant est donc utilisé, pour déterminer si un changement de topologie doit être effectué, et entre quels sommets :

P_c est le point de contact

S_c est le sommet qui est le plus proche de P_c

S_p est le dernier sommet qui était le plus proche de P_c et tel que $S_c \neq S_p$

F_c est la face en collision

F_p est la dernière face en collision différente de F_c

Initialisation

$S_p = S_c = F_p = F_c = -1$

Début

Si (Une collision à lieu) **alors**

Si ($F_p = -1$) **alors** $F_p = F_c$

Si ($S_p = -1$) **alors** $S_p = S_c$

$F_c =$ face en collision

$S_c =$ plus proche sommet de P_c

Si ($F_p \neq -1$ ET $F_c \neq F_p$ ET $S_p \neq S_c$) **alors**

 Une découpe doit avoir lieu entre S_p et S_c

Sinon

$S_p = S_c = F_p = F_c = -1$

Fin

Une découpe entre S_p et S_c est donc initiée si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. une collision a lieu ;
2. une collision avait lieu au pas de temps précédent ;
3. le point de contact a changé de face ;
4. le point de contact s'est rapproché d'un autre sommet.

Il reste alors à calculer le chemin de la découpe, c'est à dire à déterminer quelles arêtes du maillage doivent être scindées pour modéliser une découpe entre les sommets S_p et S_c . Bien que dans la plupart des cas les sommets S_p et S_c soient reliés par une arête, il se peut, si l'utilisateur se déplace rapidement, qu'ils ne le soient pas. Il convient alors de chercher un chemin, dans le maillage, qui relie S_p et S_c de la manière la plus directe possible.

L'algorithme proposé pour cela est le suivant :

S_i est le sommet courant

S_{i-1} est le sommet précédent

$S_i = S_p$

$S_{i-1} = S_p$

Tant que $S_i \neq S_c$ faire :

S_i = la deuxième particule de l'arête adjacente à S_i , telle que l'angle entre cette arête et le vecteur $\overrightarrow{S_i S_c}$ soit minimal,

Si $(\overrightarrow{S_{i-1} S_i}, \overrightarrow{S_i S_c}) \notin [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ alors Sortir (pas de chemin avec demi-tour),

Sinon :

Ajouter l'arête $[S_{i-1} S_i]$ à la liste des arêtes du chemin

$S_{i-1} = S_i$

Fin tant que

Cet algorithme fonctionne si S_p et S_c peuvent être connectés par un chemin en ligne droite. La figure 4.13 présente une configuration du maillage mettant en échec l'algorithme. En effet, l'algorithme cherchant un chemin en ligne droite entre deux points, si le maillage présente déjà des opérations de découpe, il se peut que deux points ne soient pas joignables par un chemin sans détour (comme S_1 et S_2 sur la figure, par exemple). Afin de contrer cette limitation, lorsque l'algorithme s'arrête et que $S_i \neq S_c$, il est relancé, mais en sens inverse, c'est à dire en cherchant un chemin allant de S_c vers S_p . Ceci permet d'obtenir des découpes en croix,

mais la limitation persiste si plus de deux découpes existent entre les points S_c et S_p comme, par exemple, entre S_1 et S_3 .

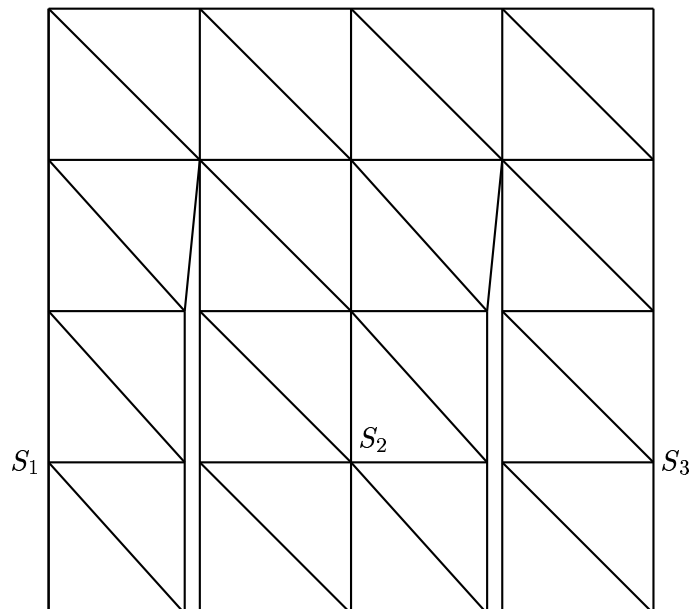


FIG. 4.13: Exemple de maillage présentant des découpes.

En pratique, étant donné la géométrie des maillages utilisés (relativement grossière), la vitesse de déplacement de l'outil (inférieure à un centimètre par seconde) et les pas de temps d'intégration (inférieurs à 1/50ème de seconde), ce dernier cas ne s'est jamais présenté lors de nos essais³.

Remaillage local. Afin d'obtenir un profil de découpe en adéquation avec le déplacement de l'outil, si une découpe doit avoir lieu entre deux sommets S_p et S_c , le sommet S_p est placé sur le point de contact (P_c) du pas de temps précédent. Le sommet S_c est, quant à lui, placé sur le point de contact de la collision en cours. Tous les autres sommets du chemin de découpe sont projetés orthogonalement sur le segment de droite joignant S_p et S_c . Les longueurs à vide des connecteurs adjacents à tous ces sommets sont mises à jour, afin de que les sommets conservent leurs nouvelles positions. Alors seulement, le remaillage le long du chemin de découpe est effectué.

La figure 4.14 montre le résultat de l'opération de remaillage, avec (figures du bas) ou sans (figures du haut) les projections que nous venons de présenter. Ces illustrations sont tirées

³ Pour un déplacement à une vitesse de 1cm par seconde, lors d'une simulation à 50Hz, le déplacement de l'utilisateur par pas de temps est de $\frac{1}{50}$ cm. Même en image de synthèse, il n'est pas raisonnable d'utiliser des maillages si fins.

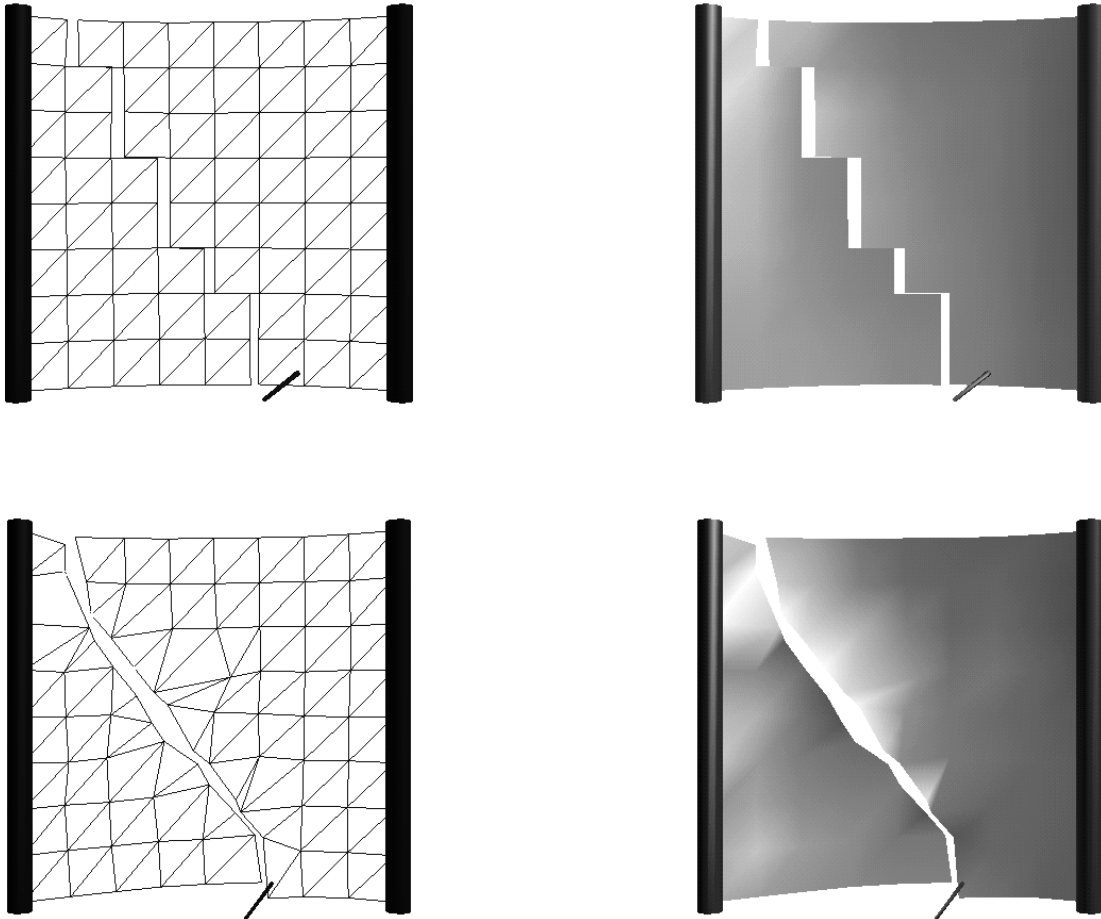


FIG. 4.14: *Exemple de découpe sur un maillage présentant des directions privilégiées. Sans la projection des sommets du chemin de découpe, le profil de découpe approche mal la trajectoire de l'utilisateur.*

d'une simulation d'une voile dont les particules des deux bords verticaux sont fixes. La voile est soumise à un vent virtuel de faible amplitude, soufflant dans une direction perpendiculaire à elle, afin de rendre visibles les changements de topologie. L'utilisateur contrôle la position et l'orientation de l'outil de découpe à l'aide d'un PHANToM.

Enfin, il se peut que le chemin de découpe ne comporte qu'une arête (en début de découpe). Si celle-ci possède un de ces sommets sur le bord du maillage, une découpe est opérée le long de cette arête. Sinon, l'algorithme garde l'index de cette arête en mémoire, et le remaillage n'est effectué que plus tard, après que l'utilisateur se soit encore déplacé, et que le chemin

comporte alors au moins deux arêtes.

4.3.2.2 Discussion

La méthode proposée permet de faire des découpes interactives de modèles surfaciques. Elle présente néanmoins trois limitations.

Tout d'abord, le calcul du chemin de découpe entre deux pas de temps de simulation est limité car il ne peut traverser plus d'une «faille» dans le maillage. En pratique, comme nous l'avons déjà mentionné, des cas de ce type n'arrivent jamais, étant donné les résolutions des modèles interactifs.

Ensuite, la projection orthogonale des sommets du chemin de découpe sur le segment de droite joignant S_p et S_c entraîne, du fait de l'utilisation d'un modèle de type masse-ressort, une modification du comportement mécanique du modèle. Toutefois, notamment parce que les déplacements effectués par la projection orthogonale restent petits devant la taille des faces du maillage, cette modification du comportement n'est pas perceptible.

Enfin, étant donné le principe du processus de remaillage, il existe un décalage temporel entre les mouvements de l'utilisateur et le découpage effectif du modèle. Les faces du modèle ne sont en effet détachées les unes des autres que lorsque le chemin de découpe contient au moins deux arêtes. L'utilisateur ne voit donc pas le modèle se découper exactement au fur et à mesure de ses mouvements, mais avec un décalage de l'ordre de la taille d'une face du maillage du modèle.

4.3.3 Déchirement de modèles volumiques

4.3.3.1 Implantation

Structure des données géométriques. La structure des données géométriques pour les modèles volumiques doit également répondre, dans la mesure du possible, aux trois critères définis pour les maillages des modèles surfaciques (section 4.3.1.1, page 90). Notre première idée était donc d'élever la structure arête-ailée d'une dimension, afin d'obtenir une structure «face-ailée» présentant, nous l'espérons, les mêmes caractéristiques. Malheureusement, la difficulté de définir des sens «positifs» et «négatifs» absolus dans un espace tri-dimensionnel a rendu les notions de «face précédente» et de «prochaine face» difficilement définissables.

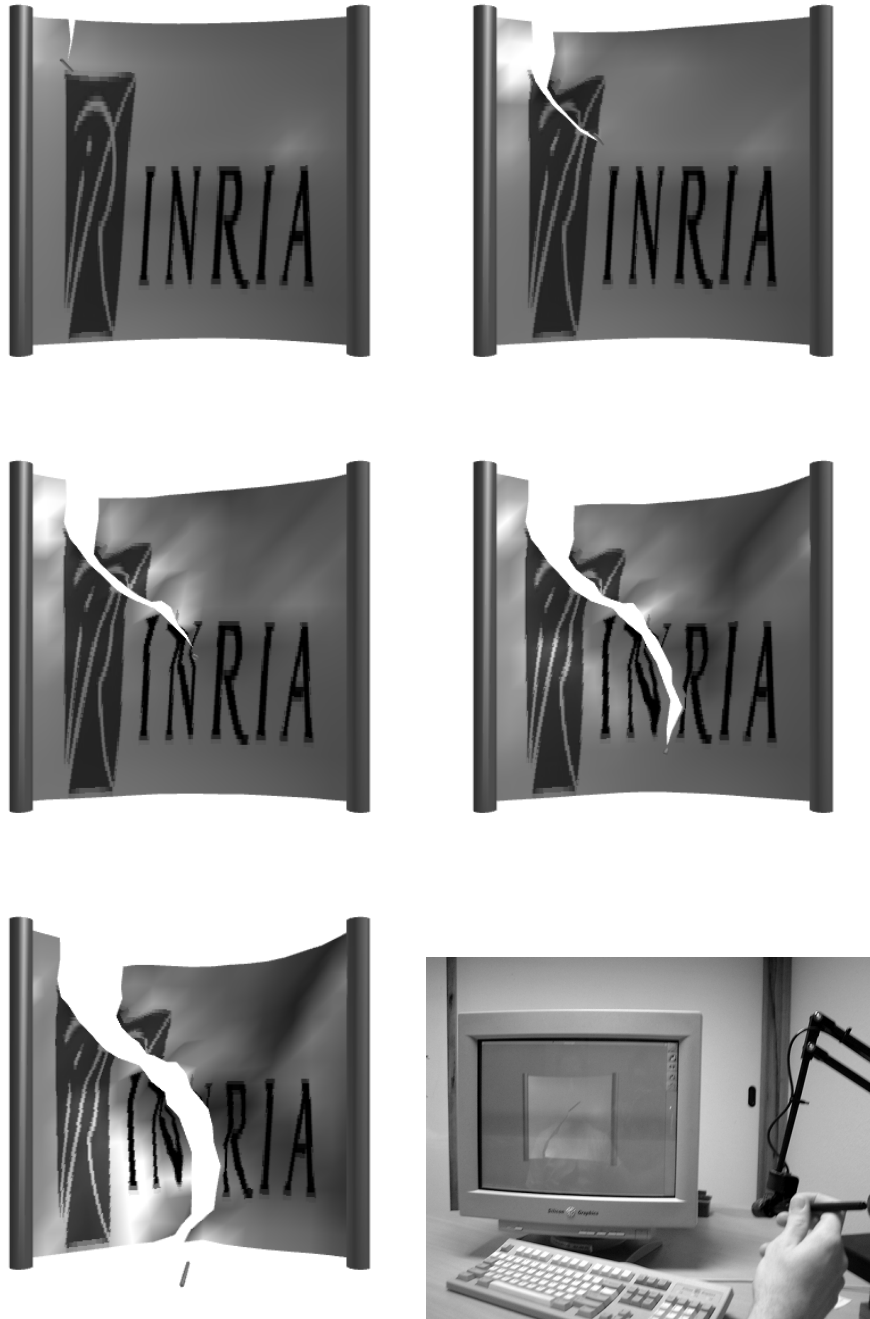


FIG. 4.15: Exemple de découpe sur un maillage comportant 450 faces.

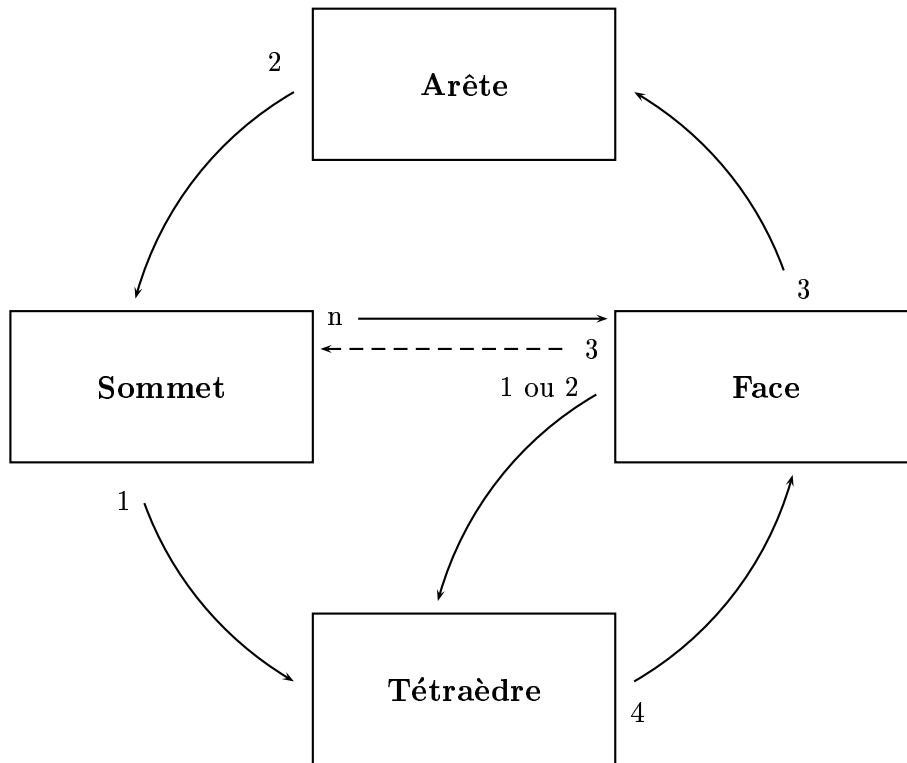


FIG. 4.16: Structure des données géométriques pour le modèle volumique. Le trait en pointillé indique que seules les faces externes du maillage pointent sur trois sommets.

Nous proposons donc la structure suivante (figure 4.16) :

- chaque sommet pointe sur un tétraèdre ;
- chaque sommet pointe sur toutes les faces qui lui sont adjacentes ;
- chaque arête pointe sur ses deux sommets ;
- chaque face pointe sur ses trois arêtes ;
- chaque face pointe sur un ou deux tétraèdre(s) ;
- chaque face *se trouvant sur la surface externe du maillage* pointe sur ses trois sommets ;
- chaque tétraèdre pointe sur ses quatre faces.

Cette structure de données est tout de même «orientée face», et ce sont d'ailleurs les faces qui seront les pivots de toutes les opérations de navigation dans le maillage. De plus, lors de la phase d'initialisation du modèle, les faces de la surface externe du maillage sont orientées telles que leur normale soit dirigée vers l'extérieur du modèle. Les faces de la surface externe

du maillage sont différenciées des faces internes par le fait qu'elles ne pointent que sur un seul tétraèdre (contre deux pour les faces internes). Les notions de sens positif ou négatif peuvent donc être utilisées pour naviguer sur la surface externe du maillage volumique.

Évaluation du critère de rupture. L'évaluation du critère de rupture ne se fait que sur les arêtes des faces externes du maillage (voir chapitre précédent).

Remaillage local. Après avoir calculé les caractéristiques du plan de rupture, tous les tétraèdres adjacents à la particule à scinder sont parcourus et trois listes créées :

1. La liste des tétraèdres présents du même coté du plan que les arêtes qui cèdent ;
2. La liste des tétraèdres présents de l'autre coté ;
3. La liste des tétraèdres traversés par le plan.

Les tétraèdres de la seconde liste sont alors rattachés à la nouvelle particule et ceux de la troisième liste à la particule présente du coté du plan de rupture contenant la plus grande partie de leur volume.

Pour chaque tétraèdre de la troisième liste, au moins une nouvelle face et deux nouvelles arêtes sont créées lors du remaillage local. Les pointeurs de voisinage de la face et des arêtes «soeurs» de ces nouvelles primitives sont ensuite mis à jour.

Détection et traitement des singularités géométriques.

Sommet singulier. Un sommet du maillage est singulier si sa coque dans le maillage est non connexe (voir section 3.2.2.4). On définit la notion de **bloc de tétraèdres** telle que :

DÉFINITION 14 *Le bloc de tétraèdres défini par le sommet S_i (respectivement : l'arête A_i) et le tétraèdre T_i est l'ensemble des tétraèdres du maillage connexes à T_i qui contiennent S_i (respectivement A_i).*

La détection des sommets singuliers se fait alors de la manière suivante :

1. On calcule du nombre de faces adjacentes au sommet testé ET appartenant au bloc de tétraèdres défini. par le sommet testé et le tétraèdre sur lequel il pointe ;

2. Si cette valeur est différente du nombre total de faces adjacentes au sommet, le sommet est singulier.

Lorsqu'un sommet singulier est détecté, il est scindé en deux et les informations topologiques de ses éléments voisins mises à jour, afin de séparer les blocs de tétraèdres qu'il connectait.

Arête singulière. Une arête du maillage est singulière si sa coque dans le maillage est non connexe. La propriété suivante, extension à la dimension supérieure de la propriété 4 (décrite page 72), permet théoriquement de détecter facilement les arêtes qui sont singulières :

PROPRIÉTÉ 5 Dans un maillage volumique tétraédrique, le nombre de blocs de tétraèdres adjacents à une arête est égal à la différence entre le nombre total de faces adjacentes à cette arête et le nombre total de tétraèdres adjacents à cette arête.

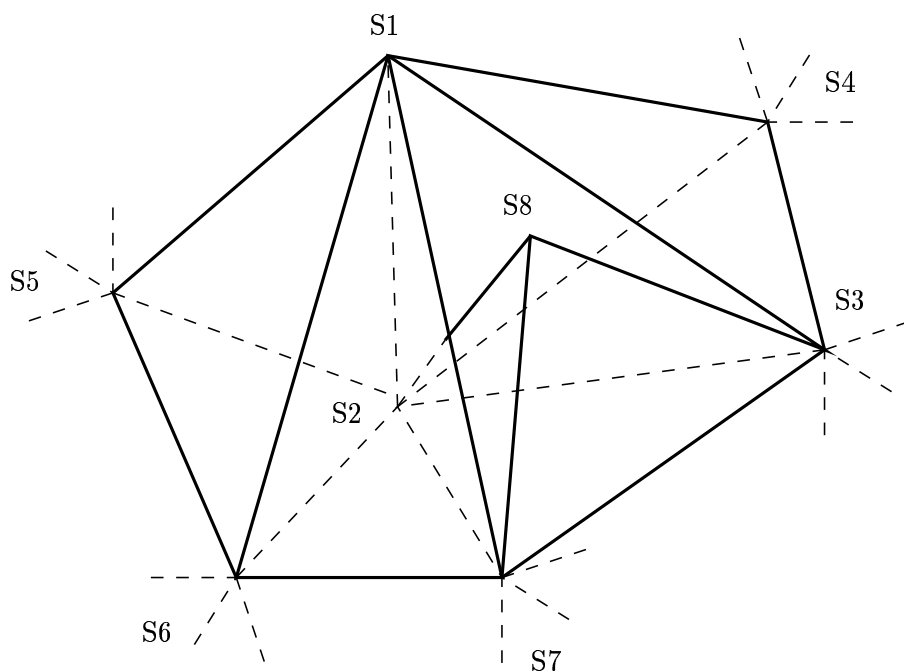


FIG. 4.17: L'arête $S1S2$ est singulière.

En pratique, notre structure des données géométriques ne nous permet pas d'utiliser directement cette propriété. Pour détecter les arêtes singulières, nous parcourons l'ensemble des faces adjacentes à l'arête testée pour compter combien se trouvent sur la surface externe du maillage. En divisant ensuite le nombre de faces adjacentes à l'arête testée qui se trouvent

sur la surface externe du maillage par deux, on obtient le nombre de blocs de tétraèdres connexes contenant l'arête. Si ce nombre est supérieur à deux, l'arête est singulière.

Traiter ces singularités est en revanche bien plus complexe. En effet, il faut alors choisir de scinder le premier, le second ou les deux sommets de l'arête singulière. On voit bien, sur la figure 4.17, que si le sommet $S1$ peut être scindé, pour séparer deux blocs de tétraèdres, le sommet $S2$ ne peut pas l'être. Il faudrait pour cela, en effet, propager le changement de topologie aux tétraèdres se trouvant en dessous de $S2$... et cela jusqu'où dans le maillage?

Nous avons manqué de temps pour discriminer les cas topologiques de $S1$ et de $S2$, dans les arêtes singulières.

Si l'on définit l'opération de remaillage suivante (figure 4.17) :

- $S8$ a été scindée pour créer $S1$;
- les faces $S1S2S3$ et $S1S2S7$ et les arêtes $S1S2$, $S1S7$ $S1S3$ ont été créées ;

Nous effectuons, afin de tenter de conserver la cohérence du maillage, après chaque opération de déchirement, les tests et remaillages supplémentaires suivants :

- si $S1S2$ est singulière alors $S1S2$ est scindée suivant $S1$ (figure 3.14, page 77) ;
- si $S2S3$ est singulière alors $S2S3$ est scindée suivant $S3$;
- si $S2S7$ est singulière alors $S2S7$ est scindée suivant $S7$;

4.3.3.2 Résultats

L'algorithme de déchirement volumique a été testé sur le modèle cylindrique décrit dans la section 4.2.2.1. Les mêmes conditions aux limites sont utilisées, le seuil de rupture des arêtes est fixé à 30%. La figure 4.18 présente des captures d'écran réalisées durant la simulation.

Le nombre de connecteurs du modèle passe de 921 à 1003 durant le déchirement, ce qui équivaut à une augmentation de 8.9%. On voit, sur la séquence d'images, que les arêtes singulières qui n'ont pas été détectées et traitées «retiennent» des tétraèdres. Ceux-ci sont alors soumis à des contraintes très importantes et donc fortement déformés. La dynamique est intégrée à une fréquence de 100Hz, durant toute la durée de la simulation.

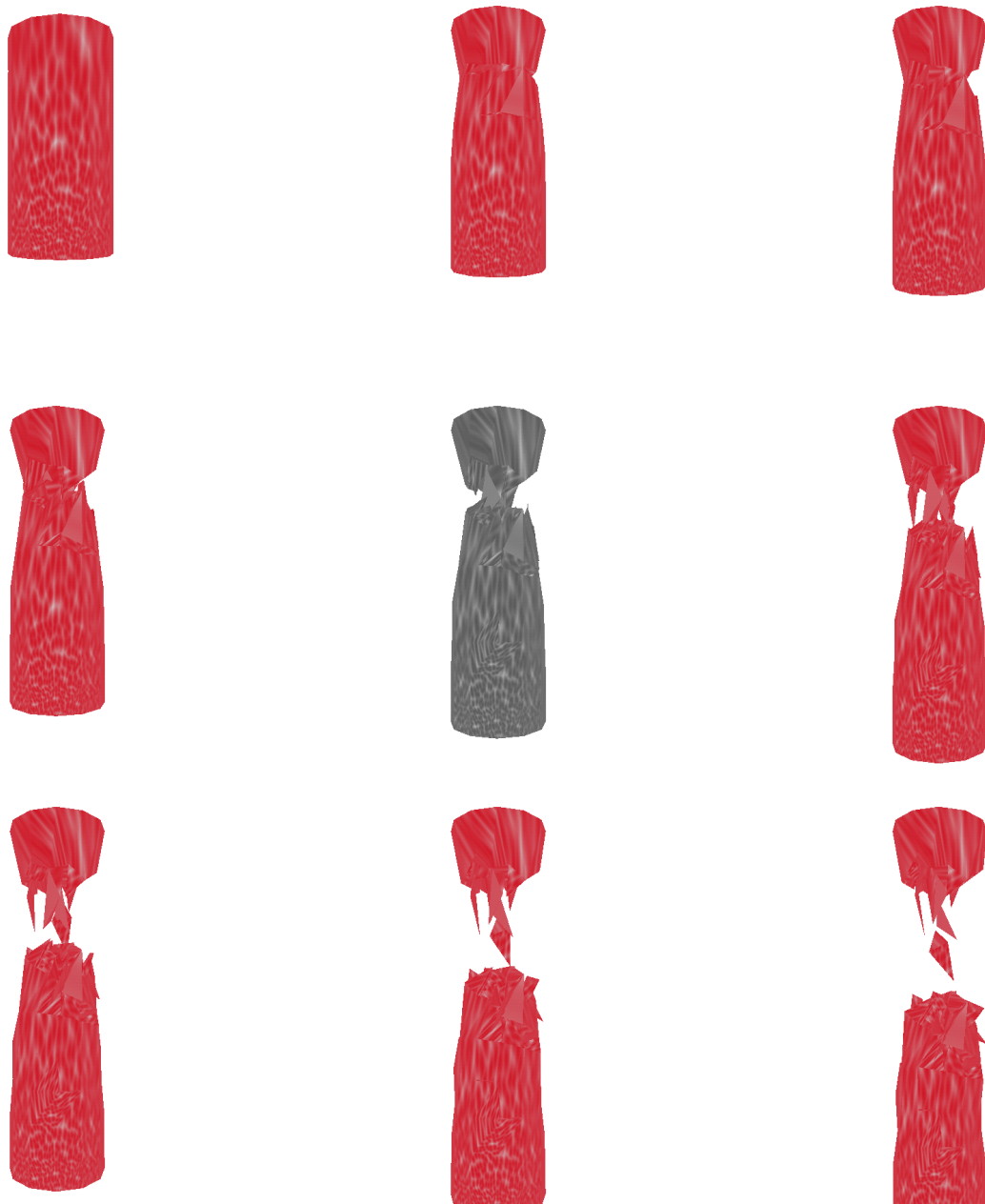


FIG. 4.18: *Cylindre volumique fixé sur sa face supérieure et cédant sous l'action d'une force de six newton exercée sur sa face inférieure.*

4.3.3.3 Discussion

L'idée de base de «séparer» les primitives de simulation donne les résultats escomptés, en terme de limitation de l'augmentation de la complexité du modèle durant la simulation de

déchirements. Néanmoins, de nombreuses arêtes singulières apparaissent au fur et à mesure des opérations de remaillage. Faute de temps, nous n'avons pas pu développer tous les tests et procédures de remaillage permettant de traiter ces singularités. Les simulations de déchirements de corps volumiques sont donc encore «polluées» par ces singularités, qui en dégradent le réalisme.

4.4 Conclusion

Lors de ce chapitre, nous avons présenté certains détails d'implantation relatifs aux algorithmes proposés dans les chapitres précédents. Nous avons également validé, par des expérimentations, l'approche consistant à utiliser des ressorts à force de rappel de forme cubique. La répercussion *au niveau global* du comportement des ressorts «cubiques», qui composent un modèle, a bien été mise en évidence.

Nous avons ensuite présenté la mise en oeuvre des algorithmes de déchirement pour des corps surfaciques. Des résultats expérimentaux corroborent nos intuitions : l'augmentation de la complexité des modèles, du fait des opérations de remaillage, reste très raisonnable. Des modélisations de déchirements de corps surfaciques sont donc possibles de manière interactive.

Puis, l'implantation de l'approche de la modélisation d'opérations de découpe à partir des algorithmes de déchirement, a été présentée pour les modèles surfaciques. Le plus gros travail pour cela a, en fait, consisté à interpréter le comportement de l'utilisateur du système, afin d'appeler l'algorithme de déchirement de manière adéquate.

Enfin, nous avons décrit les difficultés inhérentes à l'implantation de l'algorithme de déchirement de modèles volumiques. L'approche répond bien à la contrainte de maîtrise de l'augmentation de la complexité du modèle, durant les phases de remaillage. En revanche, des arêtes singulières qui apparaissent au fur et à mesure des déchirements, et qui n'ont pas encore été traitées, dégradent le réalisme des simulations.

Conclusion et perspectives générales

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problématiques liées à la modélisation interactive de la dynamique d'un organe vivant, le foie. Nous avons également travaillé sur la modélisation des changements de topologie dans les modèles déformables interactifs.

Une bibliographie sur les fondements de la mécanique des milieux continus et des méthodes de résolution traditionnellement utilisées en mécanique nous a permis de définir les principaux composants d'un modèle mécanique :

- le modèle de matière. Il comprend une description de la géométrie du corps étudié (ou simulé) ainsi que sa loi de comportement, qui définit les relations entre les contraintes et les déformations dans le corps ;
- les équations du mouvement et les conditions aux limites. La forme générale des équations du mouvement d'un mécanisme constitue un système d'équations différentielles du second ordre ;
- la méthode de résolution dynamique. Elle définit l'algorithme numérique de résolution temporelle des équations du mouvement.

En nous basant sur une étude de modèles biomécaniques interactifs, nous avons ensuite proposé un modèle biomécanique interactif du foie humain. Les caractéristiques mécaniques de cet organe n'étant pas encore bien déterminées de façon quantitative, nous nous sommes attachés à en modéliser les caractéristiques qualitatives bien connues, de non-linéarité et d'hétérogénéité. Pour cela, nous avons tiré parti de la souplesse des réseaux masses-ressorts, en définissant une nouvelle classe de ressorts non-linéaires : les ressorts à force de rappel de forme cubique. Le caractère hétérogène du comportement mécanique du foie est, quant à lui, modélisé en utilisant un réglage des paramètres de viscosité des ressorts qui dépend de leur position dans le maillage. Ainsi, le modèle présente une peau élastique et un parenchyme plus

visqueux. Nous défendons donc l'idée que dans un objectif de performance et d'application concrète, un modèle ad-hoc est plus adapté qu'un modèle générique.

Enfin, nous avons proposé une nouvelle approche de la modélisation des changements de topologie dans les modèles mécaniques. Celle-ci est basée sur l'idée de «séparer» les primitives de simulation, au lieu de les détruire ou de les subdiviser, comme cela est fait dans la littérature. Cette approche, alternative aux approches classiques, permet d'obtenir des simulations plus réalistes que celles obtenues par l'approche «destruction», tout en bornant l'augmentation de la complexité des modèles, inhérente aux opérations de changement de topologie. Elle permet donc de simuler de manière interactive des opérations de déchirements ou de découpes.

L'approche a été validée pour les modèles surfaciques, tant pour la modélisation de déchirements que pour celle d'opérations de découpes interactives. Lors de nos tests, l'augmentation de la complexité n'a jamais excédé 27%, alors que dans la littérature elle peut aller de 150% à 600%. Cette augmentation est, bien entendu, dépendante du nombre et de la forme des opérations de changement de topologie effectuées sur le modèle. Avec notre approche, elle est dans tous les cas bornée à 100%, pour les modèles présentant une géométrie fermée, et inférieure pour les modèles présentant une géométrie ouverte (la borne dépendant alors du rapport entre le nombre de primitives présentes sur le bord du maillage et le nombre total de primitives).

Pour les modèles volumiques, nous avons manqué de temps pour développer toutes les procédures permettant de traiter les arêtes singulières qui apparaissent durant les opérations de remaillage. Nous n'obtenons donc pas encore des simulations totalement réalistes de déchirements pour les modèles volumiques. Toutefois, les expérimentations ont montré que l'objectif de maîtriser l'augmentation de la complexité du modèle est bien atteint, également pour les modèles volumiques. La modélisation interactive de déchirements des modèles volumiques est donc possible.

Les travaux présentés dans ce mémoire comportent de nombreux points qui n'ont pu être approfondis autant que nous l'aurions désiré. Un deuxième aspect de l'hétérogénéité du comportement mécanique du foie, non traité durant cette thèse, est l'importance de l'influence de son réseau vasculaire sur son comportement mécanique. Il serait intéressant d'étudier la possibilité de «greffer» au modèle existant, en certains points, un modèle de ce réseau vasculaire.

Concernant les opérations de changement de topologie, il nous paraît important d'étudier les possibilités offertes par un retour haptique, car ces opérations demandent une grande dextérité. Un retour de force, durant les changements de topologie, permettrait à l'utilisateur

d'affiner son contrôle de l'outil. Une fois le traitement des arêtes singulières terminé, il serait aussi intéressant de développer une approche de la découpe de modèles volumiques basée sur les algorithmes de déchirements volumiques, comme nous l'avons fait pour les modèles surfaciques.

Enfin, étant donné que tous nos algorithmes de changement de topologie sont indépendants du modèle de déformation utilisé, ils peuvent être intégrés à d'autres modèles mécaniques, de type éléments finis, par exemple.

Index des auteurs cités

- A
- Allen, M.P. 49
- Anderson, T.L. 54
- Ayache, N. 23
- B
- Bacon, B. 56
- Balaniuk, R. 35
- Baraff, D. 6, 25
- Barr, A. 23, 55
- Bielser, D. 59
- Billon, N. 54
- Boux de Casson, F. 41, 93, 95
- Bro-Nielsen, M. 22
- Bullivan, D. 33
- C
- Caillerie, D. 41
- Cani, M.P. 23, 25, 45
- Canny, J.F. 6, 45
- Carter, F.J. 39
- Cavusoglu, M.C. 34, 41
- Chaillou, C. 25
- Cherif, M. 22
- Cook, R.D. 20, 21
- Cotin, S. 22, 23, 33, 57
- Cozot, R. 22
- Crossley, F.R.E. 47, 48
- Cuschieri, A. 39
- D
- d'Aulignac, D. 34, 35, 41
- Davies, P.J. 39
- Debrun, M. 25
- Debunne, G. 23
- Deguet, A. 6
- Delingette, H. 23, 32
- Desbrun, M. 23
- F
- Feynman 41
- Fleischer, K. 55
- Frenkel 49
- Fung, Y.C. 8, 14–16
- G
- G 88
- Garat, F. 41
- George, P.L. 84
- Germain, P. 10
- Gerth, J. 56
- Gibson, S.F.F. 26
- Gilbert, E.G. 45
- Gross, M.H. 59
- H
- Hewitt, T. 25
- Hodgins, J.K. 63
- Hunt, K.H. 47, 48
- Hunter, I. 33
- Hunter, P. 33
- Hutchinson, D. 25
- J

- Jie Shen 62
- Johnson, D.W. 45
- Joukhadar, A. 6, 22, 25, 41, 45
- K**
- Kanade, T. 61
- Keerthi, S.S. 45
- Komoriya, K. 45
- Kotoku, T. 45
- L**
- Laugier, C. 6, 34, 35, 41, 93, 95
- Lin, M.C. 45
- Lombardo, J.C. 45
- Luciani, A. 22
- M**
- Magnenat Thalmann, N. 10, 16
- Maiwald, V.A. 59
- Malkus, D.S. 20, 21
- Mallison, G. 33
- Marhefka, D.W. 47
- Maurel, W. 10, 16, 19
- Meseure, P. 25
- Miller, G. 24
- Mirtich, B. 6
- Mirtich, B.V. 46
- Moore, M. 6, 46
- Mor, A.B. 61
- Moreau, G. 41
- N**
- Neyret, F. 45
- Norton, A. 56
- O**
- O'Brien, J.F. 63
- Oden, J.T. 11
- Orion, D.E. 47
- P**
- Platt, J.B. 55
- Plesha, M.E. 20, 21
- Preston, M. 25
- Provot, X. 25, 49
- Puech, C. 25
- R**
- Roxburgh, D.C. 39
- S**
- Sagar, M.A. 33
- Smaill, B.H. 33
- Smith 49
- Steele, J.M. 11
- Sweeney, P. 56
- T**
- Tanie, K. 45
- Terzopoulos, D. 22, 25, 55
- Thalmann, D. 10, 16
- Tidesley, D.J. 49
- Trompette, P. 10
- Turk, G. 56
- V**
- Verroust, A. 25
- W**
- Waters, K. 22
- Wilhelms, J. 6
- Wilhems, J. 46
- Witkin, A. 25
- Wu, Y. 10, 16
- Y**
- Yee-Hong Yang 62
- Z**
- Zienkiewicz, O.C. 22

Table des figures

1.1	Déformation d'un corps tridimensionnel, les différentes coordonnées	7
1.2	Relation entre contrainte et déformation pour un matériau suivant la loi de Hooke, dans le cas d'un essai de traction uniaxiale. Le module d'Young, E , représente la rigidité du matériau (on rappelle qu'une déformation est sans dimension).	12
1.3	Relation contrainte/déformation pour du caoutchouc vulcanisé soumis à un essai de traction uniaxiale (source [Fun69])	14
1.4	Relation typique contrainte/déformation pour les métaux élasto-plastiques soumis à une traction uniaxiale (source [Fun69]).	15
1.5	Coordonnées locales (N_i) et globales (X_i) pour un élément bi-dimensionnel. On peut noter que le repère local n'est pas forcément orthonormé.	18
1.6	Principe de base de l'algorithme ChainMail et exemple de déformation sur un modèle bi-dimensionnel.	26
2.1	Rapports temps de calcul/précision de simulation, suivant l'application (source [Del98]).	32
2.2	Le modèle biomécanique de l'oeil développé par Sagar et al. (source [SBM ⁺ 94]).	33
2.3	Le modèle volumique précalculé de S. Cotin peut être manipulé interactivement, à l'aide de deux outils à retour d'effort (source [Cot97]).	34
2.4	Mesure des données force/déplacement effectuées à l'aide d'un robot Puma sur une cuisse humaine (source [dLC99]).	35
2.5	Le modèle masses-ressorts à deux couches d'Aulignac et al. (source [dLC99]).	36

2.6	Le modèle de la cuisse, couplé à un système à retour d'efforts de type PHANTOM (source [dLC99]).	37
2.7	Représentation du foie humain avec son réseau vasculaire (source: projet Epidaure, INRIA Sophia-Antipolis).	39
2.8	Relation contrainte/déformation pour un foie humain. Mesures effectuées in vivo, en compression (source [CFD ⁺ 00]).	40
2.9	Maillage surfacique du foie (source [BL99]).	41
2.10	Un assemblage de ressorts virtuels rigides de forme carrée s'aplatit facilement sous l'action d'une force faible, alors qu'un assemblage de forme triangulaire ne peut pas s'aplatir et, s'il est assez rigide, ne se retourne que sous l'action d'une force très importante.	43
2.11	Forme du premier terme de l'équation 2.2 pour $\lambda_1 = 1.3$ et $\lambda_2 = 0.15$. Les ressorts présentent alors un comportement non linéaire très proche de celui présenté dans la figure 2.8, page 40 (les coordonnées des croix proviennent de cette figure).	44
2.12	La modification de la force de contact proposée par [HC75] permet d'éviter les discontinuités au début et à la fin de la collision, annulant ainsi les effets de «collage».	48
3.1	Pour une distance a_0 , les forces d'attraction et de répulsion s'annulent: c'est la distance inter-atomique d'équilibre (source [Bil95]).	54
3.2	Exemple de simulation de chute d'une théière sur une table. La forme cubique des cellules de base est clairement visible (source [NTB ⁺ 91]).	57
3.3	Opération de découpe interactive sur le modèle masse-tenseur de Cotin. Lorsque l'outil rentre en collision avec un tétraèdre du modèle, celui-ci est retiré de la simulation. Le maillage a été préalablement raffiné là où devait avoir lieu la découpe (source: projet Epidaure, INRIA Sophia-Antipolis).	58
3.4	Tétraèdre «pré-découpé» générique proposé par Bielser et al. [BMG99]	59
3.5	Exemple de découpe sur un parallélépipède composé initialement de 576 tétraèdres. A la fin de la découpe, le nombre de tétraèdres a été multiplié par 4,2 (source [BMG99]).	60

3.6	En haut : les cinq manières différentes de découper un tétraèdre à l'aide d'un segment de droite. En bas : exemple de découpe progressive d'un tétraèdre (source [MK00]).	61
3.7	Exemple de découpe plane sur un corps parallélépipédique composé initialement de 576 tétraèdres. A la fin de l'opération, le nombre de tétraèdres a été multiplié par 1,5 (source [MK00]).	62
3.8	Découpage des éléments cubiques proposé par Jie Shen et Yee-Hong Yang, les n_i sont les noeuds ajoutés au maillage (source [SY98]).	63
3.9	Résultats de simulations de la chute d'un bol tombant sur une table depuis une hauteur plus ou moins élevée. Temps de calcul moyen : 109 minutes par seconde d'animation (source [OH99]).	64
3.10	Principe de base du remaillage local. Pour la simulation de corps bi-dimensionnels, lorsque le critère de rupture est vérifié, les faces du modèle sont séparées les unes des autres suivant leur position par rapport au plan de rupture.	69
3.11	Procédure de détachement des faces du modèle : une nouvelle particule P_n est créée au même emplacement que P_c , et les faces adjacentes à P_c sont parcourues et reliées à P_n ou P_c suivant leur position par rapport au plan de rupture (en pointillé sur la figure). Sur l'illustration, les particules P_c et P_n ne sont pas à la même position, pour une raison de clarté. Les faces traversées par le plan de rupture sont rattachées à la particule présente du côté du plan contenant la plus grande partie de leur aire.	70
3.12	Singularité géométrique engendrée par une opération de remaillage antérieure. Une fois la singularité détectée, il convient de scinder en deux la particule joignant plusieurs blocs de faces.	71
3.13	Point singulier dans un maillage surfacique triangulé.	72
3.14	Exemple de deux tétraèdres connectés uniquement par une arête, et résultat du remaillage que nous effectuons.	77
3.15	Exemple de deux tétraèdres connectés uniquement par un sommet, et résultat du remaillage que nous effectuons.	77
4.1	Boucle d'animation du simulateur.	81

4.2	Première proposition de hiérarchie des classes liées à la modélisation mécanique.	82
4.3	Résultats d'essais de traction uniaxiale sur des modèles cylindriques construits à partir de ressorts présentant différentes lois de comportement. La loi de comportement utilisée pour les ressorts est, de haut en bas, de type linéaire (λd), quadratique (λd^2) et cubique plus linéaire ($\lambda_1 d^3 + \lambda_2 d$). Dans chacune des figures, la courbe en pointillés est un tracé de la loi de comportement de chaque ressort composant le modèle et les croix sont issues des essais sur le modèle cylindrique.	86
4.4	À gauche, forme au repos du modèle cylindrique. Puis, de gauche à droite, forme à l'équilibre des modèles cylindriques construits, respectivement, à partir de ressorts présentant une loi de comportement linéaire (λd), quadratique (λd^2) et cubique plus linéaire ($\lambda_1 d^3 + \lambda_2 d$). La force appliquée sur chacune des particules de la face inférieure du cylindre est fixée à six newton pour les trois essais.	87
4.5	Résultat des essais sur un maillage à la topologie différente. À droite: forme finale du modèle soumis aux mêmes conditions aux limites que celles de la figure 4.4.	87
4.6	Exemple de manipulation interactive du modèle du foie, avec retour haptique. Le vecteur qui part de l'outil représente la direction et l'intensité de la force renvoyée à l'utilisateur.	89
4.7	Boucle d'animation du simulateur incluant les changements de topologie. Les phases spécifiques aux changements de topologie sont encadrées par des pointillés.	91
4.8	Structure de donnée de type «arête-aillée».	92
4.9	Déchirement d'une voile soumise au vent. Maillage de 256 faces. (source [BL00]).	93
4.10	Déchirement d'une voile soumise au vent. Rendu en fil de fer. Maillage de 128 faces.	94
4.11	Soumise à un vent plus violent, la voile vole en morceaux (source [BL00]). . .	95
4.12	Exemples de comportements de l'utilisateur durant une opération de découpe.	96
4.13	Exemple de maillage présentant des découpes.	98

4.14 Exemple de découpe sur un maillage présentant des directions privilégiées. Sans la projection des sommets du chemin de découpe, le profil de découpe approche mal la trajectoire de l'utilisateur.	99
4.15 Exemple de découpe sur un maillage comportant 450 faces.	101
4.16 Structure des données géométriques pour le modèle volumique. Le trait en pointillé indique que <i>seules</i> les faces externes du maillage pointent sur trois sommets.	102
4.17 L'arête $S1S2$ est singulière.	104
4.18 Cylindre volumique fixé sur sa face supérieure et cédant sous l'action d'une force de six newton exercée sur sa face inférieure.	106

Références bibliographiques

- [And95] Anderson (T.L.). – *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. – CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [AT87] Allen (M.P.) et Tidesley (D.J.). – *Computer Simulation of Liquids*. – Oxford Science Publications, 1987, 71–83p.
- [Bar89] Baraff (D.). – Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies. *Computer Graphics*, vol. 23, n° 3, juillet 1989, pp. 223–232.
- [Bau72] Baumgart (B.G.). – *Winged-Edge Polyhedron Representation*. – Rapport technique n° STAN-CS-320, Stanford Artificial Intelligence Laboratory, Stanford-University, 1972.
- [BDL00] Boux de Casson (F.), Diego (d'Aulignac) et Laugier (C.). – An interactive model of the liver. *In: International Symposium on Experimental Robotics*. – Honolulu, Hawaii, U.S.A., décembre 2000.
- [Bil95] Billon (N.). – *La mécanique linéaire de la rupture. Notes de cours*. – CEMEF, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1995.
- [BL99] Boux de Casson (F.) et Laugier (C.). – Modelling the dynamics of a human liver for a minimally invasive simulator. *In: Proc. of the Int. Conf. on Medical Image Computer-Assisted Intervention, MICCAI'99*, pp. 1156–1165. – Cambridge, U.K., septembre 1999.
- [BL00] Boux de Casson (F.) et Laugier (C.). – Simulating 2D tearing phenomena for medical surgery simulators. *In: Computer Animation*. – Philadelphie, U.S.A., mai 2000.
- [BMG99] Bielser (D.), Maiwald (V.A.) et Gross (M.H.). – Interactive cuts through 3-dimensional soft tissue. *In: EUROGRAPHICS'99*, pp. C31–C38. – Milan, Italie, septembre 1999.

- [BW98] Baraff (D.) et Witkin (A.). – Large steps in cloth simulation. *In : SIGGRAPH 98 Conference Proceedings*, éd. par Cohen (Michael). ACM SIGGRAPH, pp. 43–54. – Orlando F.L., U.S.A., juillet 1998.
- [BY95] Boissonnat (J.D.) et Yvinec (M.). – *Géométrie algorithmique*. – Ediscience International, Paris, 1995, 255–259p.
- [CBN96] Cotin (S.) et Bro-Nielsen (M.). – Real-time deformable models for surgery simulation using finite-elements and condensation. *In : Eurographics proceedings*, pp. 21–30. – Poitiers, France, août 1996.
- [CFD⁺00] Carter (F.J.), Frank (T.G.), Davies (P.J.), McLean (D.) et Cushieri (A.). – Bio-mechanical testing of intra-abdominal soft tissues. *In : Medical Image Analysis*. – soumis, non publié.
- [CGD97] Cani-Gascuel (M.P.) et Debrun (M.). – Animation of deformable models using implicit surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 3, mars 1997.
- [CGVP91] Cani-Gascuel (M.P.), Verroust (A.) et Puech (C.). – A modelling system for complex deformable bodies suited to animation and collision processing. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, vol. 2, n° 3, 1991, pp. 82–91.
- [Che95] Cherif (M.). – *Planification de mouvements pour un robot mobile autonome tout terrain : une approche par utilisation des modèles physiques*. – Grenoble, France, Thèse de doctorat, Inst. Nat. Polytechnique de Grenoble, octobre 1995.
- [CMP89] Cook (R.D.), Malkus (D.S.) et Plesha (M.E.). – *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. – Wiley, 1989.
- [Cot97] Cotin (S.). – *Modèles anatomiques déformables en temps-réel*. – Thèse de doctorat, INRIA Sophia Antipolis – Université de Nice, Sophia Antipolis, 1997.
- [Coz96] Cozot (R.). – *Environnement de simulation de système physiques : modèle et langage*. – Renne, France, Thèse de doctorat, Université de Renne 1, juillet 1996.
- [CS89] Carlier (T.) et Szafran (N.). – *Structure de données pour la représentation et la manipulation de polyèdres*. – Rapport de recherche, institut Imag, RR 772-M-, mars 1989.

- [Da94] Durlach (N.) et al. – *Virtual Reality: Scientific and Technological Challenges*. – Washington D.C., National Academy of Science, rapport produit pour le National Research Council, décembre 1994.
- [dBL00] d’Aulignac (D.), Balaniuk (R.) et Laugier (C.). – A haptic interface for a virtual exam of the human thigh. *In: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2452–2457. – San Francisco, CA (US), avril 2000.
- [DCA99] Delingette (H.), Cotin (S.) et Ayache (N.). – A hybrid elastic model allowing real-time cutting, deformations and force-feedback for surgery training and simulation. *In: Computer Animation*. – Genève, Suisse, mai 1999.
- [DCRC99] Davies (P.J.), Carter (F.J.), Roxburgh (D. C.) et Cuschieri (A.). – Mathematical modelling for keyhole surgery simulations: spleen capsule as an elastic membrane. *Journal of Theoretical Medicine*, vol. 1, 1999, pp. 247–62.
- [DDCB00] Debunne (G.), Desbrun (M.), Cani (M.-P.) et Barr (A.). – Adaptive simulation of soft bodies in real-time. *In: Computer Animation*. – Philadelphie, U.S.A., mai 2000.
- [Del98] Delingette (H.). – Toward realistic soft-tissue modeling in medical simulation. *In: Proc. of IEEE: Special Issue on surgery Simulation*, pp. 512–523. – ., avril 1998.
- [DJL98] Deguet (A.), Joukhadar (A.) et Laugier (C.). – Models and algorithms for the collision of rigid and deformable bodies. *In: Robotics: the algorithmic perspective*, éd. par Agarwal (P. K.), Kavraki (L. E.) et Mason (M. T.), pp. 327–338. – AKPeters, 1998.
- [dLC99] d’Aulignac (D.), Laugier (C.) et Cavusoglu (M. C.). – Towards a realistic echographic simulator with force feedback. *In: Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 727–732. – Kyongju (KR), octobre 1999.
- [Fey88] Feynman. – *Cours de physique - Electromagnétisme*. – InterEditions, 1988.
- [FS96] Frankel et Smith. – *Understanding Molecular Simulation*. – Academic Press, 1996, 59–67p.
- [Fun69] Fung (Y.C.). – *A First Course in Continuum Mechanics*. – Prentice-Hall, 1969.

- [GB98] George (P.L.) et Borouchaki (H.). – *Delaunay Triangulation and Meshing - Applications to Finite Elements*. – Éditions Hermès, 1998.
- [Ger73] Germain (P.). – La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. *Journal de Mécanique*, vol. 12, 1973, pp. 235–273.
- [Gib96] Gibson (S.F.F.). – 3d chainmail: a fast algorithm for deforming volumetric objects. *In: The Interactive 3D Graphics Conference*. – ., octobre 1996.
- [GJK88] Gilbert (E.G.), Johnson (D.W.) et Keerthi (S.S.). – A fast procedure for computing the distance between objects in three-dimensional space. *In: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. – Philadelphie, CA, U.S.A., 1988.
- [HC75] Hunt (K. H.) et Crossley (F. R. E.). – Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, juin 1975, pp. 440–445.
- [HPH96] Hutchinson (D.), Preston (M.) et Hewitt (T.). – Adaptive refinement for mass/spring simulation. *In: 7th Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pp. 31–45. – Poitiers, France, septembre 1996.
- [HS89] Hunter (P.) et Smaill (B.H.). – The analysis of cardiac function: a continuum approach. *Prog. Biophys. Molec. Biol.*, vol. 52, 1989, pp. 101–164.
- [JGL97] Joukhadar (A.), Garat (F.) et Laugier (C.). – Constraint-based identification of a dynamic model. *In: Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*. – Grenoble, France, septembre 1997.
- [Jou96] Joukhadar (A.). – Adaptive time step for fast converging dynamic simulation system. *In: Proc. of the IEEE-RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 418–424. – Osaka, Japon, novembre 1996.
- [Jou97] Joukhadar (A.). – *Simulation Dynamique et Applications Robotiques*. – Grenoble, France, Thèse de doctorat, Inst. Nat. Polytechnique de Grenoble, juin 1997.
- [KKT92] Komoriya (K.), Kotoku (T.) et Tanie (K.). – A force display system for virtual environments and its evaluation. *In: IEEE/International Workshop on Robot and Human Communication (RoMan'92)*. – ., septembre 1992.
- [Lar00] Larousse. – *Le petit Larousse illustré*. – Larousse, 2000.

- [LC91] Lin (M.C.) et Canny (J.F.). – A fast algorithm for incremental distance calculation. *In: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation.* – Sacramento, CA, U.S.A., avril 1991.
- [LCN99] Lombardo (J.-C.), Cani (M.-P.) et Neyret (F.). – Real-time collision detection for virtual surgery. *In: Computer Animation.* – Genève Suisse, mai 1999.
- [Luc85] Luciani (A.). – *Un outil informatique de création d'images animées : le système ANIMA.* – Grenoble, France, Thèse de doctorat, Inst. Nat. Polytechnique de Grenoble, novembre 1985.
- [Mau98] Maurel (W.). – *3D Modeling of the Human Upper Limb including the Biomechanics of Joints, Muscles and Soft Tissues.* – Thèse de doctorat, Laboratoire d'infographie, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1998.
- [MC95a] Mirtich (B.) et Canny (J.F.). – Impulse based simulation of rigid bodies. *In: Proceedings of Symposium on interactive 3D Graphics.* ACM SIGGRAPH, pp. 181–188. – Monterey, California U.S.A., avril 1995.
- [MC95b] Moreau (G.) et Caillerie (D.). – Continuum modeling of lattice structures in large displacement framework. *In: Developments in computational techniques for structural engineering.* pp. 245–252. – Cambridge, U.K., septembre 1995.
- [MC96] Meseure (P.) et Chaillou (C.). – Modélisation mécanique pour la simulation d'actes chirurgicaux. *In: Actes du 4ème séminaire du groupe de travail Animation et Simulation.* – Strasbourg, France, 1996.
- [Mil88] Miller (G.). – The motion dynamics of snakes and worms. *Computer Graphics*, vol. 22, n° 4, août 1988, pp. 169–177. – Proceedings of SIGGRAPH'88 (Atlanta, Georgia).
- [Mir96] Mirtich (B. V.). – *Impulse-based Dynamic Simulation of Rigid Body System.* – Thèse de doctorat, Université de Californie à Berkeley, 1996.
- [MK00] Mor (A. B.) et Kanade (T.). – Modifying soft tissue models: Progressive cutting with minimal new element creation. *In: MICCAI, Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention.* – Pittsburg, U.S.A., octobre 2000.
- [MO96] Marhefka (D.W.) et Orin (D.E.). – Simulation of contact using a non-linear damping model. *In: Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation.* – Minneapolis, Minnesota, U.S.A., avril 1996.

- [MW88] Moore (M.) et Wilhelms (J.). – Collision detection and response for computer animation. *Computer Graphics*, vol. 22, n° 4, août 1988, pp. 289–298. – Proceedings of SIGGRAPH'88 (Atlanta, August 1988).
- [MWMTT98] Maurel (W.), Wu (Y.), Magnenat Thalmann (N.) et Thalmann (D.). – *Biomedical Model for Soft Tissue Simulation*. – Springer, 1998.
- [NTB⁺91] Norton (A.), Turk (G.), Bacon (B.), Gerth (J.) et Sweeney (P.). – Animation of fracture by physical modeling. *The Visual Computer*, vol. 7, 1991, pp. 210–217.
- [OH99] O'Brien (J.F.) et Hodgins (J.K.). – Graphical modeling and animation of brittle fracture. *Computer Graphics*, 1999. – Proceedings of SIGGRAPH'99.
- [OS89] Oden (J.T.) et Steele (J.M.). – *Finite Elements of Non-linear Continua*. – New York: Dekker, 1989.
- [Pro95] Provot (X.). – Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. *In: Graphics Interface*, pp. 147–154. – Quebec city, Canada, juin 1995.
- [Pro97] Provot (X.). – *Animation Réaliste de Vêtements*. – France, Thèse de doctorat, décembre 1997.
- [SBM⁺94] Sagar (M.A.), Bullivant (D.), Mallison (G.), Hunter (P.) et Hunter (I.). – A virtual environment and model of the eye for surgical simulation. *Computer Graphics*, 1994, pp. 205–212. – Proceedings of SIGGRAPH'94.
- [Sri94] Srinivasan (M.A.). – Virtual haptic environments: Facts behind the fiction. *In: Proceedings of the Eighth Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems*. – New Haven, U.S.A., juin 1994.
- [SY98] Shen (J.) et Yang (Y.-H.). – Deformable object modeling using the time-dependent finite element method. *Graphical Models and Image Processing*, 1998, pp. 461–487.
- [Sza90] Szafran (N.). – *Zonoèdres: structures de données et algorithmes*. – Rapport de recherche, institut Imag, RR 800-M-, janvier 1990.
- [TF88] Terzopoulos (D.) et Fleischer (K.). – Modeling inelastic deformation: Viscoelasticity, plasticity, fracture. *Computer Graphics*, vol. 22, n° 4, août 1988, pp. 269–278. – Proceedings of SIGGRAPH'88 (Atlanta, Georgia).

-
- [TPBF87] Terzopoulos (D.), Platt (J.), Barr (A.) et Fleischer (K.). – Elastically deformable models. *Computer Graphics*, vol. 21, n° 4, juillet 1987, pp. 205–214. – Proceedings of SIGGRAPH'87 (Anaheim, California).
- [Tro92] Trompette (P.). – *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis : Statique et dynamique*. – Paris:Masson, 1992.
- [TW88] Terzopoulos (D.) et Witkin (A.). – Physically based model with rigid and deformable components. *IEEE Computer Graphics and Applications*, décembre 1988, pp. 41–51.
- [TW90] Terzopoulos (D.) et Waters (K.). – Physically-based facial modeling, analysis, and animation. *Visualization and Computer Animation*, vol. 1, 1990, pp. 73–80.
- [Wat87] Waters (K.). – A muscle model for animating three-dimensional facial expression. *Computer Graphics*, vol. 21, juillet 1987, pp. 17–24.
- [Zie77] Zienkiewicz (O.C.). – *The Finite Element Method*. – McGraw-Hill, 1977.

Simulation Dynamique de Corps Biologiques et Changements de Topologie Interactifs

Résumé : Ce travail de thèse porte sur la simulation interactive du comportement mécanique de corps biologiques. Nous nous sommes intéressés à la modélisation de deux aspects de la mécanique des tissus biologiques : les déformations et les ruptures. Pour aborder la modélisation des déformations, nous nous appuyons sur une étude bibliographique de la mécanique des milieux continus et des modèles déformables développés en informatique. Nous proposons ensuite un modèle volumique du foie humain de type masses-connecteurs. Ce modèle présente un comportement dynamique hétérogène et non-linéaire, conformément à la réalité. L'hétérogénéité du modèle du foie est obtenue en paramétrant la viscosité des connecteurs de façon différente pour ceux de la surface du modèle (capsule de Glisson) et ceux de son intérieur (parenchyme). Son caractère non-linéaire est modélisé par des connecteurs répondant à une loi de comportement polynomiale de degré trois. Le modèle du foie humain peut être manipulé de façon interactive à l'aide d'un dispositif à retour d'efforts. Nous proposons ensuite une approche pour modéliser en temps-réel les changements de topologie, c'est à dire la rupture ou la découpe de modèles déformables. Notre méthode permet de borner l'augmentation de la complexité des modèles dont la topologie est modifiée, augmentation qui est due aux opérations de remaillage. Pour cela, au lieu de «détruire» des primitives de simulation ou de les «subdiviser», comme cela est proposé dans la littérature, notre approche les «sépare» les unes des autres. Les algorithmes de changement de topologie proposés et implantés offrent une méthode générique pour simuler la rupture et la découpe de corps surfaciques, de façon interactive.

Abstract : This thesis deals with the simulation of the dynamic mechanical behavior of biological tissues, in a real-time context. It proposes methods and algorithms to simulate topological changes induced by interactions between the virtual model and a human operator. In the first chapter, the foundations of continuum mechanics are presented, followed by the computer science approach to model deformable bodies. In the second chapter, an interactive non-linear heterogeneous model of the human liver is proposed. The non-linear behavior is modeled using non-linear connectors, responding to a polynomial law. Tuning the viscous parameter in a different way for the skin and the inner of the body provides a dynamic heterogeneous mechanical behavior. In the third chapter, to model topological changes (typically tearing and cutting operations) we propose to separate the elements of the simulation, instead of destroying or splitting them as is often proposed in the literature. The objective of this approach is to be as realistic as possible, avoiding an increase in the number of elements of the model during remeshing operations. Indeed, increasing excessively the number of elements leads to non real-time simulations. The implementation choices and experimental results are presented in the last chapter.

Mots Clés : Simulation dynamique interactive, Modèle biologique, Découpes, Déchirements.