



**HAL**  
open science

# instabilités dans les écoulements granulaires

Yoel Forterre

► **To cite this version:**

Yoel Forterre. instabilités dans les écoulements granulaires. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2002. Français. NNT : . tel-00010005

**HAL Id: tel-00010005**

**<https://theses.hal.science/tel-00010005>**

Submitted on 30 Aug 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
Ecole Polytechnique Universitaire de Marseille  
IUSTI UMR CNRS 6595

**THÈSE DE DOCTORAT**

*présentée par*

**Yoël FORTERRE**

*pour obtenir le grade de*

**Docteur de l'Université de Provence**

Ecole doctorale Mécanique, Physique et Modélisation

*intitulée*

**Instabilités dans les écoulements  
granulaires**

Soutenue le 29 avril 2002 devant le jury composé de :

B. Andreotti	
É. Clément	Rapporteur
S. Fauve	Rapporteur
P. Manneville	Président
A. Pocheau	
O. Pouliquen	Directeur de thèse
J-P. Vilotte	



*Je voudrais tout d'abord remercier le laboratoire de l'IUSTI dans son ensemble, et en particulier son directeur Roger Martin, pour m'avoir accueilli au cours de ces trois années de thèse.*

*Je remercie Bruno Andreotti, Paul Manneville, Alain Pocheau et Jean-Pierre Vilotte d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je remercie tout particulièrement mes deux rapporteurs, Stéphan Fauve et Eric Clément, qui ont lu avec attention (et dans un court délai!) ce manuscrit. Tous ont contribué, par leurs discussions, leurs travaux ou leurs cours, à me faire découvrir la physique des milieux granulaires et des instabilités.*

*J'ai eu l'immense chance au cours de cette thèse d'être encadré par Olivier Pouliquen. Je me souviens très bien de mon ascension vers les hauteurs brumeuses du "Plateau", à la recherche d'un sujet. La clarté et l'enthousiasme d'Olivier avait alors suffi à me déraciner vers un ciel plus brillant. Depuis, sa disponibilité et son (immense) intuition n'ont cessé de m'impressionner. Je voudrais lui dire un grand merci et combien je suis heureux d'avoir travaillé avec lui.*

*Le GEP a été le lieu de travail et de rencontre de ces années de thèse. Je voudrais tout d'abord remercier Elisabeth Guazzelli (i.e. Babette) de m'avoir accueilli au sein de l'équipe. Ses encouragements, son intérêt et son enthousiasme valent largement quelques entrées tonitruantes dans la salle de manip', réclamant sans délai un nettoyage draconien, à défaut de printemps. Avec elle, je remercie l'ensemble des membres du GEP pour leur aide, leurs conseils et leur bonne humeur : Maxime (et le plaisir de travailler en musique live), Nathalie, Max, Fred (qui m'a aidé à construire de nombreuses manip'-sans oublier Roland et l'atelier) et Laurence.*

*Bien sûr, il reste les thésards. Tout d'abord (honneur aux anciens) Paul, qui m'a initié à tout ce qu'il faut savoir (pommeQ, ps-frag, awalé et "Roi du Poulet"). Je garde un souvenir ému de nos virées à travers les collines de Marseille, vitres baissées et ska à fond, "en passant par Chutes Lavies", pour Sciences-en-fête, un peu de néoprène ou à la recherche d'une plage de Pointe-Rouge (et une lutte sans merci)- sans compter son légendaire fair-play au poker. Un grand merci aussi à Jean-Philippe, qui m'a si souvent recueilli (et grassement nourri) le soir, alors que j'errais près du cours Lieutaud. J'ai trouvé chez lui tout le réconfort nécessaire après une dure journée de travail : TV trash, chips-whisky et atlas historiques merveilleux. Enfin merci à Céline-et ses belles avalanches multicolores, qui tient, au milieu d'une Rose, une maison d'accueil pour thésards encore inédite, mais promise à un grand succès, remplie de lampes tamisées et de jeux violents.*

*Je voudrais remercier également l'ensemble des chercheurs, thésards ou stagiaires que j'ai rencontrés au cours de ces années de thèse, lors de visites, séminaires, Ecoles d'été ou colloques. Je pense en particulier à la "communauté" du GDR Midi, pour sa bonne humeur et plein de discussions passionnantes.*

*Je pense aussi à tous les amis, d'enfance ou d'ailleurs, qui m'ont fait partager la vie, Victor et les Champions, Mathias, Paul, Sébastien et Juliette, Anne, Stéphane, Damien, Denis, François, Yves, Jérôme, Dorothée et Sonia, Sarah, Abdou Malek,...*

*Enfin, un grand, grand, grand merci à mes parents, Lisette et Patrick, ainsi qu'à Evelyne, Gilles et toute la famille, pour leur amour et leur aide.*

*Et puis, et puis...*

*Merci à toi Fabienne pour TOUT.*





# Table des matières

Introduction	11
Configuration expérimentale : Écoulements sur plan incliné	23
<b>I Instabilité dans les écoulements rapides : Vortex longitudinaux</b>	<b>29</b>
<b>1 Expérience</b>	<b>33</b>
1.1 Description de l'instabilité . . . . .	33
1.2 Structure de l'écoulement : vortex longitudinaux . . . . .	36
1.3 Mécanisme d'instabilité . . . . .	37
1.4 Copie de la lettre . . . . .	41
<b>2 Théorie</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction à la théorie cinétique . . . . .	45
2.1.1 Equations . . . . .	46
2.1.2 Couplage température/écoulement : exemple du cisaillement simple	47
2.1.3 Limites de la théorie cinétique . . . . .	49
2.2 Analyse de stabilité linéaire : présentation de l'article . . . . .	51
2.2.1 Choix des équations et des conditions aux limites . . . . .	51
2.2.2 Analyse de stabilité linéaire . . . . .	52
2.2.3 Principaux résultats et discussion . . . . .	54
2.3 Copie de l'article . . . . .	56
<b>II Instabilité dans les écoulements denses : Ondes de surface</b>	<b>83</b>
<b>1 Résultats préliminaires</b>	<b>87</b>
<b>2 Ondes de surface dans les écoulements sur pente</b>	<b>91</b>
2.1 Etude bibliographique . . . . .	91
2.1.1 Ondes de Kapitza et Roll waves . . . . .	91
2.1.2 Écoulements géophysiques . . . . .	93



2.1.3	Cas des écoulements granulaires . . . . .	93
2.2	Mécanisme d'instabilité . . . . .	94
2.2.1	Ondes cinématiques . . . . .	94
2.2.2	Effet déstabilisant de l'inertie . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Analyse de stabilité linéaire</b>	<b>99</b>
3.1	Équations moyennées dans l'épaisseur . . . . .	99
3.2	Loi de friction . . . . .	101
3.3	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	107
3.3.1	Relation de dispersion . . . . .	107
3.3.2	Analyse de stabilité temporelle . . . . .	109
3.3.3	Analyse de stabilité spatiale . . . . .	110
3.4	Interprétation du critère de stabilité . . . . .	111
3.4.1	Critère de stabilité . . . . .	112
3.4.2	Cas des fluides classiques . . . . .	114
3.4.3	Cas des milieux granulaires . . . . .	116
3.5	Limites de l'approche moyennée . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Résumé de l'étude de stabilité et problématique</b>	<b>119</b>
<b>5</b>	<b>Dispositif expérimental et méthodes de mesure</b>	<b>121</b>
5.1	Forçage des ondes . . . . .	121
5.2	Détection des ondes . . . . .	124
5.3	Méthode de mesure . . . . .	126
5.4	Difficultés expérimentales . . . . .	128
5.4.1	Forçage à basse fréquence . . . . .	129
5.4.2	Précision des mesures et quantité de grains nécessaire . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Résultats pour les billes de verre</b>	<b>133</b>
6.1	Evolution spatiale d'une onde forcée: régime linéaire . . . . .	133
6.2	Relation de dispersion . . . . .	137
6.2.1	Taux de croissance spatiale . . . . .	137
6.2.2	Vitesse de phase . . . . .	138
6.3	Seuil de stabilité . . . . .	140
6.3.1	Une instabilité à nombre d'onde nul . . . . .	140
6.3.2	Diagramme de stabilité . . . . .	142
6.4	Comparaison avec la théorie . . . . .	146
6.4.1	Seuil de stabilité . . . . .	147
6.4.2	Relation de dispersion . . . . .	147
6.4.3	Influence du paramètre $\alpha$ relié au profil de vitesse . . . . .	150
6.5	Conclusion de l'étude sur les billes de verre . . . . .	151

<b>7 Résultats pour le sable</b>	<b>153</b>
7.1 Instabilité naturelle . . . . .	153
7.2 Instabilité forcée . . . . .	155
7.2.1 Difficultés expérimentales . . . . .	155
7.2.2 Relation de dispersion . . . . .	158
7.3 Comparaison avec la théorie . . . . .	161
7.3.1 Seuil de stabilité . . . . .	161
7.3.2 Taux de croissance . . . . .	162
7.4 Discussion et conclusion de l'étude pour le sable . . . . .	164
7.4.1 Influence de la loi de friction phénoménologique sur les propriétés de l'instabilité . . . . .	164
7.4.2 Spécificité des écoulements granulaires . . . . .	165
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>169</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>



# Introduction

Sable, gravier, riz, sucre... La matière en grains nous est familière et abonde autour de nous. Pourtant, la physique des milieux granulaires est encore mal comprise (Jaeger *et al.* 1996). Ces matériaux présentent en effet une variété de comportements et de propriétés exceptionnelles. Assez solides pour soutenir le poids d'un immeuble, ils peuvent aussi s'envoler par une brise légère pour former des dunes ou couler comme de l'eau dans un sablier. La compréhension des milieux granulaires, et en particulier de leurs propriétés d'écoulement, est d'autant plus importante qu'ils interviennent dans de nombreux domaines. Il suffit d'observer, sur le bord d'une route, une carrière à ciel ouvert pour se convaincre de l'importance des milieux granulaires dans l'industrie : plans inclinés, tapis roulant et conduites se conjugent pour extraire et transporter la matière en grains (sable, graviers, charbon) vers les sites de transformation. De façon générale, les milieux granulaires sont au centre de nombreuses activités industrielles (Duran, 1997) : génie civil (bétons, stabilité des sols), agro-alimentaire (stockage et transport des céréales), pharmaceutique (médicaments, cosmétique) ou génie chimique. L'autre grand domaine d'application des milieux granulaires est la géophysique (figure 1). La nature offre en effet des exemples spectaculaires de phénomènes et de structures où intervient la matière en grains : dunes de sable, plages s'étirant le long des côtes, avalanches de roches lors d'éruptions volcaniques, glissements de terrain. Bien souvent d'ailleurs, ces événements naturels interagissent avec l'activité humaine (désertification, prévention des risques d'avalanche) .

Contrairement aux fluides classiques qui sont bien décrits par des équations constitutives de type Navier-Stokes, il n'existe pas aujourd'hui de description unifiée des écoulements granulaires. D'un point de vue fondamental, la difficulté pour modéliser ces matériaux est qu'ils sont constitués d'un très grand nombre de particules pour lesquelles l'agitation thermique est complètement négligeable<sup>1</sup>. Il est donc difficile de transposer à ces écoulements les méthodes usuelles de la physique statistique<sup>1</sup>. La taille macroscopique des particules est

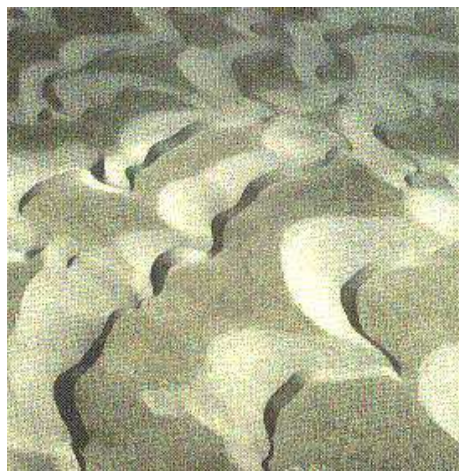
---

1. On s'intéresse ici aux milieux granulaires *secs*, c'est-à-dire pour lesquels les interactions entre grains sont essentiellement des interactions de contact (frottement solide, collisions inélastiques). Cela impose aux particules une taille d'ordre millimétrique, voir plus (on pourra lire la revue de Hinch 1995 pour une classification des écoulements de particules en fonction de l'importance du fluide environnant). Dans ce cas, l'énergie thermique  $kT$  est complètement négligeable devant l'énergie potentielle de pesanteur  $\rho_p g d^4$ .

1. Il est d'ailleurs significatif que de nombreux modèles tentent d'introduire, d'une manière ou d'une autre, une "température" (effective ou non) associée aux écoulements granulaires, tant ce concept est fructueux en physique statistique.



a)



b)

FIG. 1 – Quelques exemples de phénomènes naturels où interviennent les milieux granulaires. a) Éruption volcanique du Volcan de la Soufrière (île de Montserrat). b) Champs de barchanes dans le désert de Vizcaino, en Basse-californie.

également responsable de la nature fortement dissipative des interactions entre grains (frottement solide, collisions inélastiques). Cette dissipation entraîne, dans de nombreuses situations, une absence de séparation claire entre la taille du grain et l'échelle caractéristique de l'écoulement (avalanche à la surface d'un tas, bande de cisaillement) donc des problèmes sérieux pour passer d'une description microscopique à une description macroscopique.

Face à la grande variété de comportements observés selon le type de sollicitation, on classe généralement les écoulements granulaires en trois régimes suivant la nature des interactions mises en jeu entre les grains (figure 2).

## Écoulements quasi-statiques

Prenons l'exemple d'une maison posée sur un sol granulaire (figure 2a). Sous le poids de l'édifice, le terrain se déforme très lentement et les grains interagissent uniquement par friction solide, avec des contacts de longue durée. Ce régime d'écoulement quasi-statique ou *plastique* est typique des problèmes qui se posent en mécanique des sols. A partir de quelle contrainte le sol va-t-il céder? Comment s'écoule-t-il par la suite? L'approche la plus répandue, celle des ingénieurs, consiste à modéliser le milieu granulaire comme

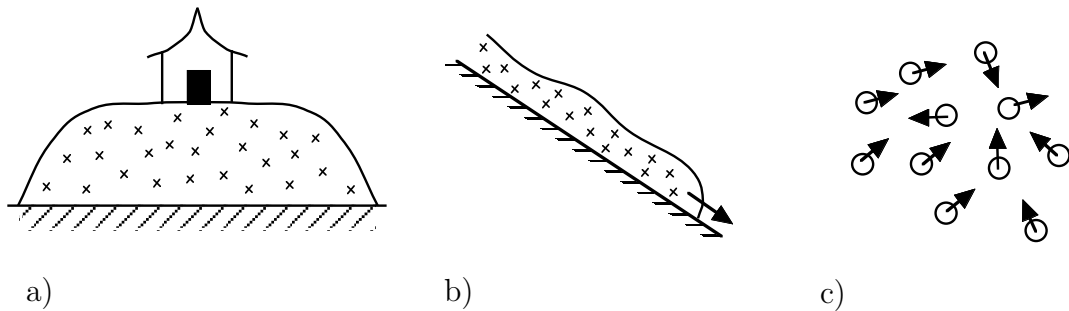


FIG. 2 – *Les différents régimes d’écoulements granulaires. a) Régime quasi-statique ou plastique. b) Régime dense. c) Régime rapide et dilué.*

un milieu continu et à relier contraintes et déformations par des lois de comportement de type élasto-plastique (Brown & Richards 1970, Darve 1987). Pour prédire le seuil de rupture du matériau, le critère le plus couramment utilisé est le critère de Mohr-Coulomb, qui généralise aux milieux continus la loi de Coulomb pour le frottement solide. Selon ce critère, le matériau cède sur un plan quand la contrainte tangentielle  $\tau$  sur ce plan atteint quelque part dans l’échantillon une valeur critique proportionnelle à la contrainte normale  $P$ :

$$\frac{\tau}{P} = \tan \Phi, \quad (1)$$

où  $\Phi$  est l’angle de friction interne du matériau, qui dépend en général de la densité du milieu. Ces lois permettent de prédire relativement bien le seuil de stabilité d’un sol granulaire sous contrainte, ainsi que les directions de rupture du matériau (voir figure 3).

Il reste cependant encore de nombreux problèmes non résolus concernant le régime d’écoulement “plastique”. On peut citer le problème de la localisation des bandes de cisaillement et de l’évolution du milieu au-delà du seuil de rupture. Une autre difficulté des lois élasto-plastiques de la mécanique des sols est qu’elles introduisent un grand nombre de paramètres phénoménologiques qui sont difficiles à identifier physiquement. Récemment, un effort important a été entrepris pour caractériser de manière plus locale la structure des milieux granulaires “statiques”. Ces études ont mis en évidence la forte hétérogénéité des contacts et des forces dans un empilement granulaire (Radjai 1998). Toutefois, le passage entre ces descriptions “microscopiques” et les comportements globaux (angle de talus par exemple), n’est pas encore accompli.

## Écoulements rapides

A l’extrême opposée du régime “quasi-solide” que nous venons de décrire se trouvent les écoulements granulaires rapides et dilués. Considérons par exemple une boîte partiellement remplie de grains. Si on secoue cette boîte avec énergie, les grains à l’intérieur sont fortement agités et interagissent essentiellement par collisions binaires quasi-instantanées (voir figure

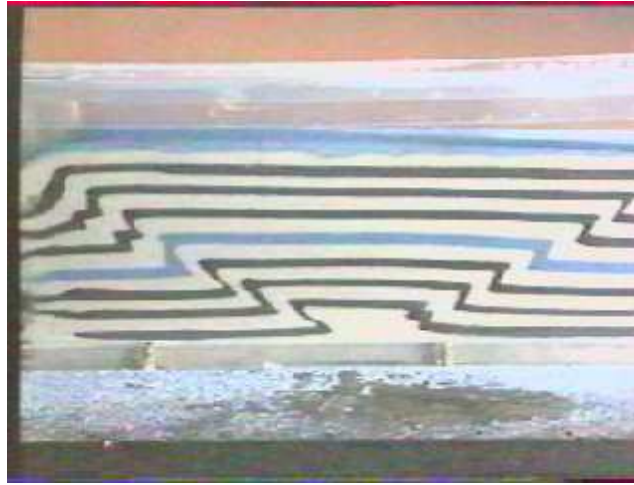


FIG. 3 – Visualisation des plans de rupture dans une expérience de “Buldozer”.

4a). Il existe une forte ressemblance entre ce régime *collisionnel* et un gaz classique de molécules et on peut voir l’agitation aléatoire des grains comme l’équivalent de l’agitation thermique dans les gaz (Ogawa 1980). Cette analogie a conduit à l’élaboration, au début des années 80, d’une théorie cinétique des écoulements granulaires qui s’inspire directement de la théorie cinétique des gaz denses de sphères dures (voir par exemple les revues de Campbell 1990 et Goldhirsch 1999). Dans cette approche, on introduit une “température granulaire” qui est reliée aux fluctuations de vitesse comme pour un gaz selon :

$$T \propto \langle (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle)^2 \rangle. \quad (2)$$

Il existe cependant une grande différence entre les gaz classiques et les “gaz granulaires” : dans un milieu granulaire, les collisions entre particules sont inélastiques. Si on arrête brusquement de secouer la boîte de grains, chaque collision retire un peu d’énergie cinétique aux particules et le milieu retourne rapidement au repos. Pour maintenir le régime collisionnel, il faut donc fournir en permanence suffisamment d’énergie pour équilibrer les pertes inélastiques, par exemple en secouant fortement les parois du récipient (Warr *et al.* 1995, Falcon *et al.* 1999, Rouyer & Menon 2000). Dans un écoulement granulaire, un autre moyen de maintenir la température granulaire est d’imposer un cisaillement important à l’écoulement moyen (figure 4b). Dans ce cas, la valeur de la température granulaire est fixée par un équilibre entre la production de “chaleur”, due au travail des forces de cisaillement, et les pertes inélastiques. En retour, la température granulaire rétroagit sur l’écoulement moyen par l’intermédiaire de la pression et des coefficients de transport. Ce couplage entre la “température granulaire” et l’écoulement moyen est une des caractéristiques fondamentales des écoulements granulaires rapides, comme nous le verrons dans la première partie de la thèse.

La théorie cinétique a soulevé un grand espoir pour la compréhension des écoulements granulaires, lors de son élaboration dans les années 80. Elle fournit en effet des rela-

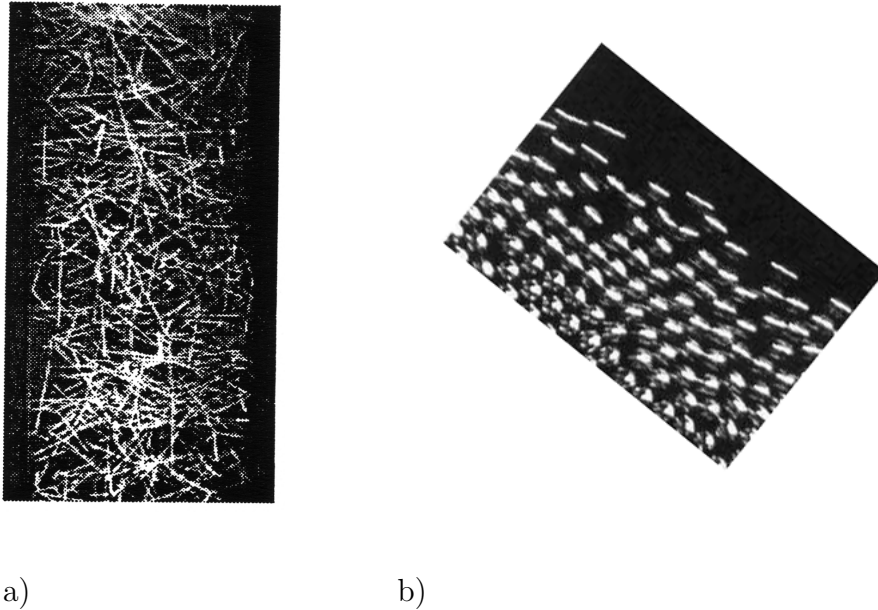


FIG. 4 – Régime collisionnel. a) Vibration d'un cylindre partiellement rempli de particules (Falcon *et al.* 1999). b) Écoulement granulaire de billes d'acier sur plan incliné (Azanza 1998).

tions constitutives complètes, qui s'insèrent dans un système d'équations hydrodynamiques proches des équations de Navier-Stokes. Cependant, son domaine d'application est limité en raison de problèmes liés à l'inélasticité des collisions.

Les premiers signaux alarmants sont venus de simulations numériques au début des années 90. Des études se sont en effet intéressées au problème fondamental du refroidissement homogène d'un gaz granulaire isolé. Ces travaux ont montré qu'un gaz granulaire, pourvu qu'il soit suffisamment grand, est toujours instable et forme spontanément des agrégats denses ou "clusters" (Walton 1992, Goldhirsch & Zanetti 1993). Cette instabilité provient du fait qu'une petite augmentation de la densité locale entraîne une baisse locale de la température, à cause de l'augmentation des collisions inélastiques à cet endroit. Cette baisse de température induit une dépression qui attire les particules, accentuant ainsi l'augmentation de densité initiale. Le même type d'instabilité a ensuite été observée, toujours numériquement, dans des systèmes cisailés, puis étudiées dans le cadre de la théorie cinétique (Wang *et al.* 1996).

L'instabilité de "clustering" a suscité un grand enthousiasme parmi les physiciens et certains ont même proposé qu'elle soit à l'origine de la formation des planètes et des agrégats interstellaires (Weaver & Danly 1989). D'un point de vue fondamental, l'apparition spontanée de "cluster" pose des problèmes non triviaux sur la notion d'état d'équilibre ou sur la distribution des vitesses dans les "gaz granulaires".

Quand on augmente la densité et l'inélasticité des particules, un phénomène encore



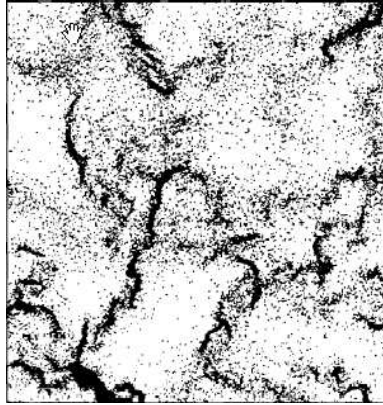


FIG. 5 – Simulation numérique montrant l’instabilité de “clustering” dans un gaz granulaire (Goldhirsch & Zanetti 1993).

plus dramatique apparaît. On constate en effet que le “gaz granulaire” peut s’effondrer sur lui-même et sortir complètement du régime collisionnel (un exemple de transition entre le régime dilué et la formation d’un “bloc” granulaire est donné dans Falcon *et al.* 1999). Les grains sont alors en contact permanent les uns avec les autres et la théorie cinétique ne peut plus être appliquée. L’origine de ce phénomène, appelé “collapse inélastique”, est l’inélasticité des chocs, qui entraîne un nombre infini de collisions dans un temps fini (Hopkins & Louge 1991, McNamara & Young 1992).

## Écoulements denses

En raison justement de l’efficacité des collisions inélastiques, la plupart des écoulements granulaires observés dans la nature appartiennent à un régime intermédiaire entre le régime quasi-statique et le régime dilué. Au cours d’une avalanche de sable à la surface d’un tas par exemple, les grains sont en contact les uns avec les autres et le milieu coule à la manière d’un liquide. Dans ce régime *dense*, les particules interagissent à la fois par friction et par collisions et la théorie cinétique n’est plus valable. Malgré l’importance pratique de ce type d’écoulement, en particulier en géophysique, il n’existe pas à l’heure actuelle d’équations constitutives pour décrire les écoulements denses.

Depuis quelques années, le régime d’écoulements denses fait l’objet d’une recherche active. De nombreux résultats, à la fois expérimentaux, numériques et théoriques ont apporté des renseignements précieux sur les propriétés de ces écoulements (on pourra consulter à ce propos les revues de Rajchenbach 2000 ou de Pouliquen & Chevoir 2002). Cependant, une des difficultés qui se présente pour dégager une vision d’ensemble des écoulements denses est la variété des comportements observés suivant la configuration étudiée (écoulements confinés ou à surface libre, sur fond fixe ou sur fond meuble : voir la figure 6 pour un bref inventaire). Il semble que les conditions aux limites jouent de façon générale un rôle important dans la dynamique de ces écoulements, ce qui rend difficile l’élaboration d’équations

tridimensionnelles qui s'appliquent à l'ensemble des configurations. La floraison de modèles actuellement développés pour décrire les écoulements denses illustrent assez bien cette difficulté (Andreotti & Douady 2001, Aranson & Tsimring 2001, Bocquet *et al.* 2002, Debregas & Josserand 2000, Jenkins & Chevoir 2002, Lemaitre 2002, Mills *et al.* 2000, Pouliquen *et al.* 2001, Savage 1998. . .).

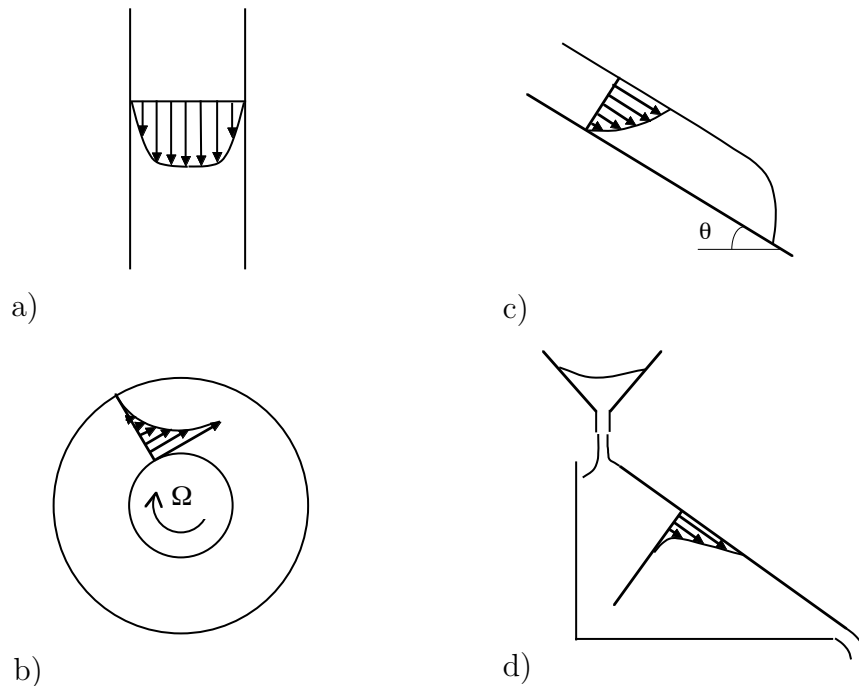


FIG. 6 – Configurations typiques pour l'étude des écoulements denses et quelques propriétés associées. A gauche, écoulements confinés. A droite, écoulements à surface libre. a) Écoulement en silo sous gravité. L'écoulement est cisailé au niveau des parois et la zone de cisaillement ne dépend pas de la vitesse de chute (Pouliquen & Gutfraind 1996, Chevoir *et al.* 2001). b) Cellule de Couette circulaire. L'écoulement est localisé près de la paroi interne. En revanche, les fluctuations de vitesses s'étendent au-delà de la bande de cisaillement (Losert *et al.* 2000). c) Écoulement sur plan incliné rugueux. L'écoulement est cisailé sur toute l'épaisseur. Les angles de démarrage et d'arrêt dépendent fortement de l'épaisseur (Pouliquen & Renaut 1996, Daerr & Douady 1999). d) Écoulement de surface sur fond meuble (les écoulements en tambour tournant font partie de cette catégorie) (voir par exemple la revue de Aradian *et al.* 2002).

Une approche qui semble prometteuse pour les écoulements à surface libre est la description en terme d'équations moyennées, ou équations de St Venant (1871). Dans ce cadre, le milieu est supposé incompressible et les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont intégrées dans l'épaisseur. Cette analyse est valable quand la

couche de l'écoulement est fine devant les dimensions latérales de l'écoulement, ce qui est souvent le cas des écoulements géophysiques. Le grand avantage des équations moyennées est qu'elles permettent d'incorporer la rhéologie complexe et inconnue du milieu granulaire dans un terme unique : la contrainte entre la couche qui coule et le fond.

Cette approche a d'abord été utilisée dans le contexte des milieux granulaires par Savage & Hutter (1989) pour modéliser les écoulements granulaires sur fond fixe (voir aussi Pouliquen & Forterre 2002). Plus récemment, elle a été étendue aux cas des écoulements sur fond meuble (Khakhar *et al.* 1997, Douady *et al.* 1999, Khakhar *et al.* 2001, Bonamy 2001, Aradian 2002). Dans ce dernier cas, la surface qui délimite la zone d'écoulement de la zone statique n'est pas connue *a priori*, ce qui introduit une inconnue supplémentaire dans le problème.

## Objectif et plan de la thèse

Cette brève revue montre que notre compréhension des écoulements granulaires est encore parcellaire. Les écoulements granulaires rapides et dilués bénéficient, avec la théorie cinétique, d'une description relativement avancée. Bien que cette théorie soit d'application limitée, plusieurs études ont montré qu'elle permet de décrire, au moins qualitativement, le régime d'écoulement collisionnel (Campbell 1990, Azanza 1999, Reydellet *et al.* 2000). La caractéristique fondamentale des écoulements rapides est la dissipation due aux collisions inélastiques entre les grains. Comprendre le rôle de cette dissipation est important afin de mieux cerner les analogies et les différences entre les écoulements granulaires et les fluides classiques.

La situation est différente pour les écoulements denses. Dans ce cas il n'existe pas de relations constitutives. En revanche, ces écoulements ont fait l'objet de nombreux travaux, tant expérimentaux que numériques, qui se sont appliqués à caractériser les écoulements stationnaires uniformes dans des configurations simples. En particulier, l'approche de St Venant a permis de proposer récemment des lois de friction empiriques pour les écoulements sur plan incliné (Pouliquen 1999a) ou en tambour tournant (Khakhar 2001, Bonamy 2001). La pertinence de ces lois pour l'étude d'écoulements non stationnaires et non uniformes est une question importante.

L'approche que nous avons choisie pour tenter de mieux comprendre les écoulements granulaires est d'étudier les instabilités qui peuvent se développer. La mise en évidence et la compréhension des mécanismes d'instabilités devraient nous permettre de mieux cerner les mécanismes physiques qui contrôlent les écoulements granulaires. Cette démarche est bien connue en mécanique des fluides, où l'apparition d'instabilités peut modifier en profondeur la dynamique de l'écoulement (formation de structures cohérentes, transition vers la turbulence, voir par exemple Godrèche & Manneville 1998). De grandes classes de mécanismes d'instabilité ont été ainsi mises en évidence (cisaillement, convection thermique, force centrifuge, effet de la viscosité, gravité ; voir par exemple Drazin & Reid 1981).

Pour les écoulements granulaire en revanche, ce travail n'en est qu'à ses prémises. La comparaison entre les instabilités observées dans les écoulements granulaires et celles déjà étudiées dans les fluides classiques devrait permettre de mieux mettre en évidence les propriétés communes et les spécificités des matériaux granulaires.

Les études sur les instabilités dans les milieux granulaires sont peu nombreuses. La plupart concernent les systèmes vibrés, par analogie avec l'instabilité de Faraday pour les fluides classiques (par exemple Douady *et al.* 1989, Melo *et al.* 1995, Umbanhowar *et al.* 1996). Dans ce cas, l'équilibre non trivial entre l'énergie injectée par le forçage et la dissipation due aux collisions inélastiques entraîne une phénoménologie variée et complexe (figure 7). Ces recherches s'inscrivent pour la plupart dans le cadre général de la physique non linéaire des "pattern". Dans ce cas, les structures observées témoignent plus des symétries brisées sous-jacentes qu'elles ne renseignent sur les propriétés intrinsèques des milieux granulaires.

Peu d'études ont abordé le problème des instabilités dans les écoulements granulaires. Un premier type d'instabilité qui a été étudiée est lié à la présence de particules de tailles différentes dans le milieu. Le phénomène de ségrégation induit par l'écoulement peut alors donner lieu à la formation de structures. Ainsi, l'écoulement sur un plan rugueux d'un mélange de grains entraîne une instabilité de digitation du front (Pouliquen *et al.* 1997, figure 8a). Dans un tambour tournant, la ségrégation induit des motifs en bandes transversales (Hill *et al.* 1997). Dans ces deux situations, les structures disparaissent si le matériau est monodisperse. Dans le cas d'écoulements monodisperses, une instabilité de la surface libre de l'écoulement a été récemment observée en tambour tournant, pour des vitesses de rotation très élevées (Fried *et al.* 1998, Shen 2002). Enfin, un dernier type d'instabilité qui se trouve dans la littérature concerne la formation de vagues lors d'écoulements sur plan incliné. Nous reviendrons en détail sur cette instabilité dans la deuxième partie de la thèse.

Dans cette thèse, nous avons étudié expérimentalement et théoriquement deux instabilités observées dans les écoulements granulaires sur plan incliné rugueux. Le manuscrit est divisé en deux parties, qui peuvent se lire indépendamment.

La première partie de notre travail est consacrée à une instabilité qui apparaît dans le régime d'écoulements rapides et qui donne lieu à la formation de vortex longitudinaux. Nous présentons dans le premier chapitre l'étude expérimentale de l'instabilité, qui nous a permis de proposer un mécanisme pour la formation de ces tourbillons longitudinaux. Ce travail est présenté essentiellement sous la forme d'une lettre publiée dans *Physical Review Letters*. Dans le second chapitre, nous étudions la pertinence du mécanisme d'instabilité proposé dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires. Après une brève introduction à la théorie cinétique, nous présentons notre analyse de stabilité linéaire des écoulements sur plan incliné sous la forme d'un article à paraître dans *Journal of Fluid Mechanics*.

La seconde partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude expérimentale d'une instabilité observée dans le régime d'écoulement dense. Cette instabilité se manifeste par la formation d'ondes de grande longueur d'onde qui se propagent le long de l'écoulement. Nous

avons choisi de caractériser avec précision l'instabilité primaire en forçant l'écoulement. Les résultats de ce travail sont ensuite comparés avec les prédictions des équations de St Venant.

Les principaux résultats de cette thèse sont résumés dans le dernier chapitre du manuscrit (chapitre 8) qui, outre une conclusion générale, présente quelques perspectives ouvertes par l'ensemble de notre travail.

Le fil conducteur de la thèse est l'étude des écoulements sur plan incliné rugueux. Avant d'aborder en détail chacune des instabilités, nous allons décrire dès maintenant le dispositif expérimental commun aux différentes expériences.

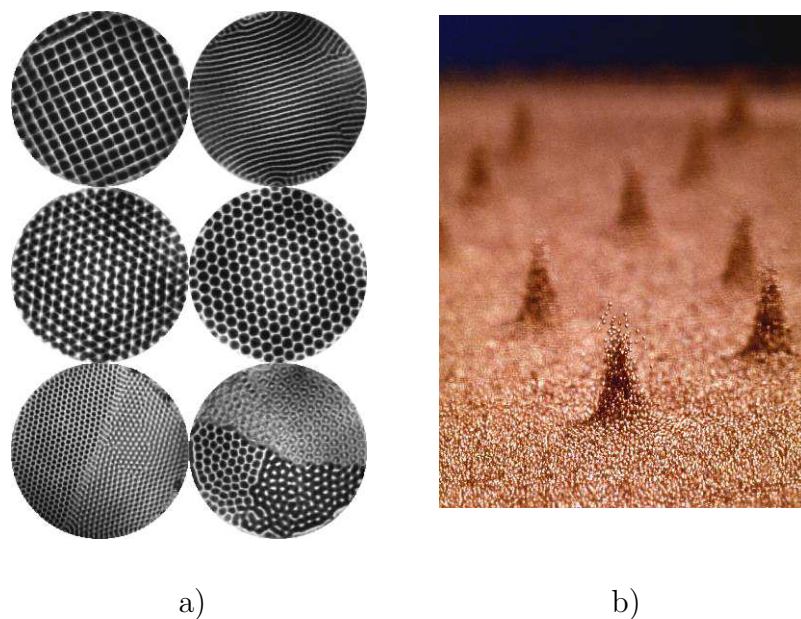
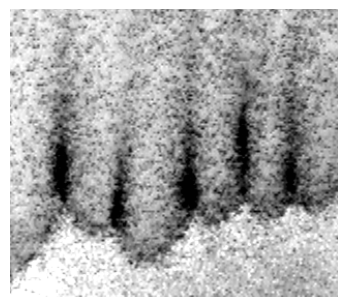
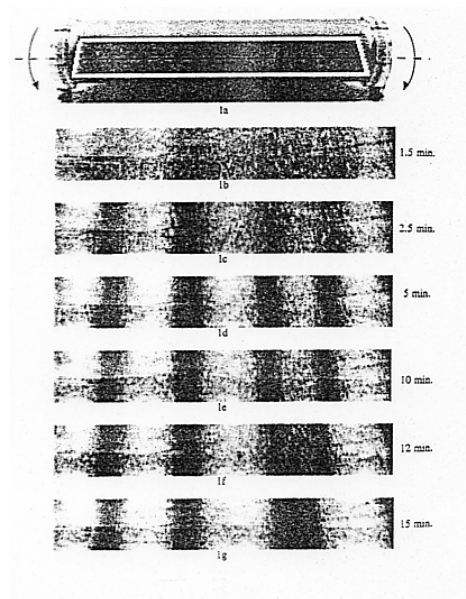


FIG. 7 – Quelques exemples de “pattern” dans les milieux granulaires vibrés. a) Melo et al. 1995. b) Umbanhowar et al. 1996.



a)



b)

FIG. 8 – Instabilité dans les écoulements granulaires due à la ségrégation. a) Instabilité de digitation d’un front granulaire (Pouliquen et al. 1997). b) Formation de bandes transversales en tambour tournant (Hill et al. 1997).



# Configuration expérimentale : Écoulements sur plan incliné rugueux

Ce chapitre présente la configuration expérimentale que nous allons étudier dans toute la thèse : les écoulements granulaires sur un plan incliné rugueux. Cette configuration a déjà été largement utilisée pour étudier les écoulements granulaires (parmis les dernières études Drake 1990, Vallance 1996, Ancey 1997, Azanza 1998, Daerr & Douady 1999, Pouliquen 1999a). Elle présente l'avantage d'être bien contrôlée et préfigure une situation géophysique d'écoulement granulaire sur pente.

## Plan incliné rugueux

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 9. Il s'agit d'un plan incliné rugueux avec un réservoir en amont qui contient le milieu granulaire utilisé. Le plan est constitué d'une grande plaque de verre (longueur 2 mètres, largeur 70 centimètres) sur laquelle est posée le fond rugueux. Pour réaliser le plan rugueux, on utilise une feuille collante de type *Velleda*. La face non collante est posée sur le plan tandis que la face collante est couverte de grains. En disposant une couche épaisse de particules sur la colle, puis en enlevant le surplus, on parvient à créer une monocouche de grains dans un empilement aléatoire compact (voir figure 9a). Il faut alors réaliser quelques écoulements pour stabiliser et fixer définitivement la monocouche de particules (cette phase de "vieillessement" du fond rugueux permet à certains grains de se réarranger et à d'autres de s'incruster dans le plan). Pour toutes les expériences présentées dans la thèse, le fond rugueux est constitué des mêmes particules que celles qui participent à l'écoulement.

Les deux paramètres de contrôle principaux de l'expérience sont l'ouverture  $h_g$  du réservoir et l'angle  $\theta$  d'inclinaison du plan. L'ouverture  $h_g$  est fixée avec précision grâce à un système de double porte. La première porte garantit une épaisseur constante  $h_g$  sur toute la largeur du plan, à l'aide de deux vis situées de part et d'autre du réservoir. La seconde porte peut coulisser simplement sur la première à l'aide d'aimants et permet de déclencher ou d'arrêter l'écoulement rapidement (voir figure 9b).

L'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan est contrôlé par un cric de voiture placé sous le réservoir. Ainsi, on peut facilement varier l'angle tout en supportant la grande charge du réservoir quand il est rempli de grains. La reproductibilité de l'angle est garantie par un étalonnage.



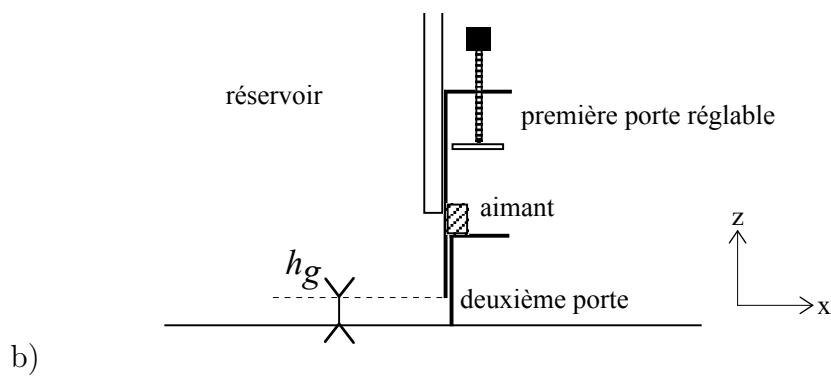
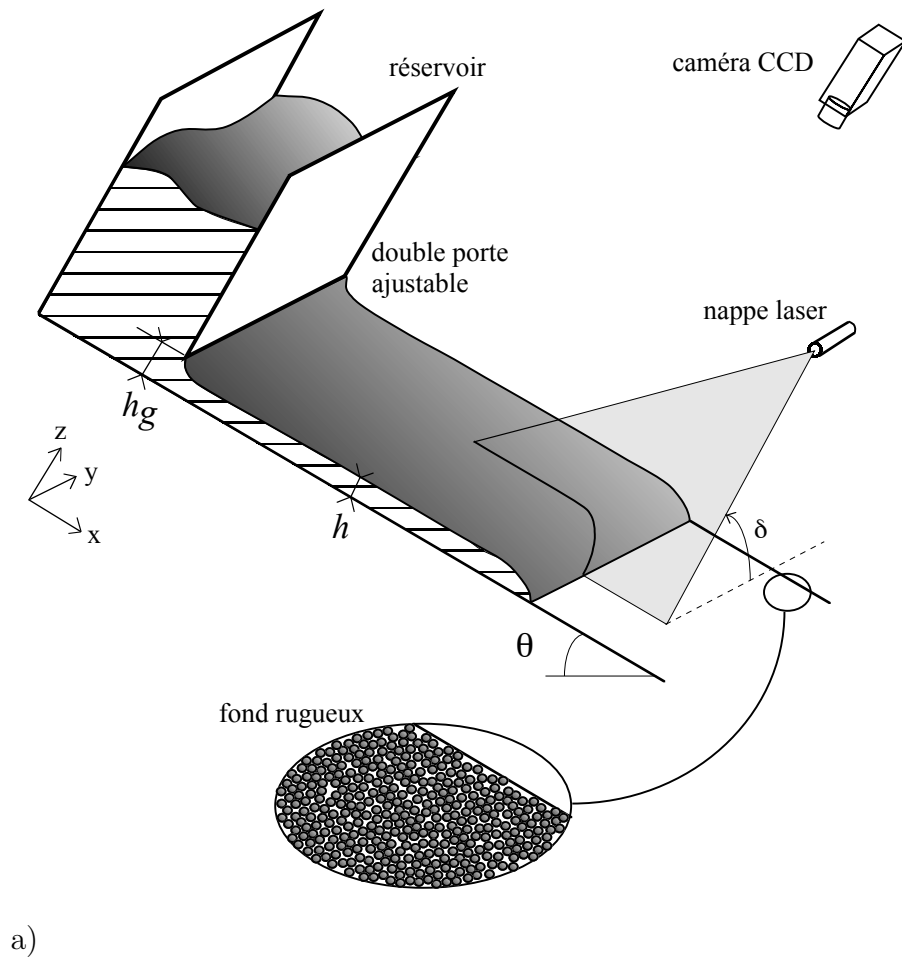


FIG. 9 – Schéma du dispositif expérimental. a) Plan incliné rugueux. b) Détail du système d'ouverture du réservoir.

Il faut signaler ici une particularité des milieux granulaires : le débit à la sortie du réservoir est entièrement fixé par l'ouverture  $h_g$  et l'angle d'inclinaison  $\theta$  et ne dépend pas de la quantité de grains. En effet, lorsqu'il y a assez de grains dans le réservoir, la pression au niveau de l'ouverture est indépendante de la hauteur de remplissage. Cet effet de saturation de la pression dans un milieu granulaire statique, dû au frottement des grains avec la paroi, est bien connu en agro-alimentaire dans les silos (effet "Janssen", Janssen 1895). Ainsi, l'ouverture  $h_g$  et l'angle d'inclinaison  $\theta$  sont bien les deux seuls paramètres de contrôle du système.

Notre dispositif expérimental se distingue en particulier des expériences antérieures par la grande largeur du plan (70 cm, soit 1000 fois le diamètre des plus grosses particules que nous utiliserons). Jusqu'à présent, la plupart des études avaient été réalisées en canal relativement étroit, de quelques centimètres environ. Dans ce cas, les effets de bord sont importants et peuvent contrôler entièrement la dynamique de l'écoulement (Savage 1979). Il faut d'ailleurs signaler que cette influence "à longue portée" des parois dans les écoulements granulaires n'est pas limitée aux écoulements sur plans inclinés, mais semble jouer un rôle important dans d'autres types de configurations, comme les écoulements sur fond meuble ou en tambour tournant (Bonamy 2001).

## Matériaux granulaires utilisés

Pour faire nos expériences, nous avons utilisé différents types de matériaux granulaires :

- Des billes de verre monodisperses, de diamètre  $d = 0.5$  mm (figure 10a). Ces billes proviennent de lot de billes de broyage 400 – 600  $\mu\text{m}$  *Potters & Ballotini*, que nous avons ensuite tamisées. Il faut signaler que ces billes sont particulièrement sphériques. Il semble plus difficile aujourd'hui de se procurer des lots de cette qualité, les normes de fabrication ayant changé depuis le début de la thèse.
- Du sable de la Loire de diamètre moyen  $d = 0.8 \pm 0.05$  mm (figure 10b).
- Du sable de la Durance de diamètre moyen  $d = 0.25 \pm 0.03$  mm (figure 10c).

On observe que le sable de la Loire est beaucoup plus régulier et rond que le sable de la Durance dont les grains sont extrêmement facettés.

## Mesure de l'épaisseur et de la vitesse moyenne

Nous donnons ici deux techniques de mesure que nous utiliserons largement par la suite :

- La mesure de l'épaisseur  $h$  de la couche granulaire en écoulement par une nappe laser
- La mesure de la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement.

Pour mesurer avec précision l'épaisseur  $h$  de l'écoulement, nous utilisons une nappe laser (Lasiris 10 mW) projetée en incidence rasante sur la surface de l'écoulement (voir figure 9a). En présence d'une couche de grains d'épaisseur  $h$ , la projection de la nappe laser sur la surface est décalée par rapport à la projection sur le fond rugueux d'une quantité  $\Delta = h / \tan \delta$ , où  $\delta$  est l'angle d'inclinaison de la nappe laser (voir le schéma de la figure 11).

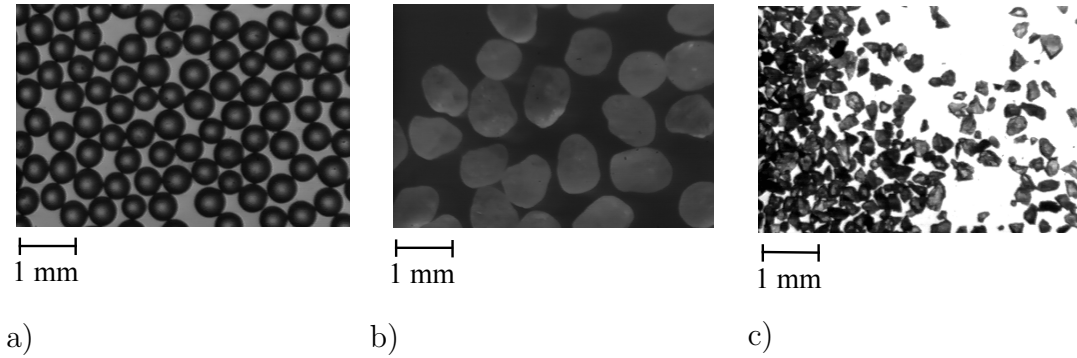


FIG. 10 – *Matériaux utilisés. a) Billes de verre 0.5 mm. b) Sable de Loire 0.8 mm. c) Sable de Durance 0.25 mm.*

Cette technique permet d'amplifier l'épaisseur de l'écoulement  $h$  par un facteur  $1/\tan\delta$ . On peut alors mesurer des couches fines avec une bonne précision (de l'ordre du dixième de millimètre).

En pratique, la mesure de la déviation  $\delta$  de la nappe laser se fait à l'aide d'une caméra vidéo qui filme l'écoulement du dessus. On soustrait l'image en présence de la couche d'épaisseur  $h$  de l'image qui a été prise sans la couche de grain. Un logiciel de traitement d'image (NIH image) permet ensuite de mesurer facilement le décalage  $\delta$  en pixels (voir figure 12). Pour remonter à l'épaisseur  $h$  en millimètres, il suffit de calibrer le système à l'aide d'une cale d'épaisseur connue. Il faut signaler que cette technique permet de mesurer des couches d'épaisseur moyenne inférieure à la taille d'un grain. En effet, la nappe laser possède une certaine largeur ( $\sim 5$  mm) et moyenne spatialement la mesure de  $h$  sur plusieurs tailles de grain.

La nappe laser permet également de mesurer la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement granulaire dans le régime des écoulements stationnaires uniformes (la vitesse moyenne est définie par  $u = Q/h$  où  $Q$  est le débit volumique par unité de largeur). Pour cela, on réalise l'expérience qui consiste à ouvrir brusquement l'alimentation du réservoir, le plan rugueux étant nettoyé. Un front matériel se propage alors à vitesse constante le long de la pente, laissant derrière lui un écoulement d'épaisseur  $h$  et de vitesse moyenne  $u$  constants. L'écoulement étant stationnaire, la conservation de la masse implique que la vitesse du front est exactement égale à la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement. Pour mesurer  $u$ , il suffit donc de mesurer la vitesse du front en filmant la déformation de la nappe laser sur le plan (voir figure 12). La figure 13 donne le diagramme spatio-temporel que l'on obtient de cette manière. La pente constante de ce diagramme (traits pointillés) est égale à la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement.

Une dernière mesure utilisée dans les expériences est l'estimation de la fraction volumique  $\nu$  du milieu en écoulement, c'est-à-dire le rapport entre le volume occupé par les grains au volume total. Pour cela on piège le sable en écoulement dans une boîte de sur-

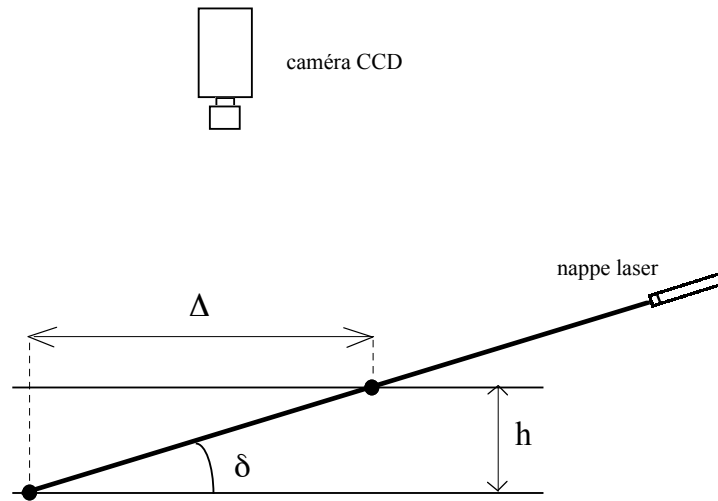


FIG. 11 – Principe de la mesure de  $h$  par une nappe laser projetée en incidence rasante.

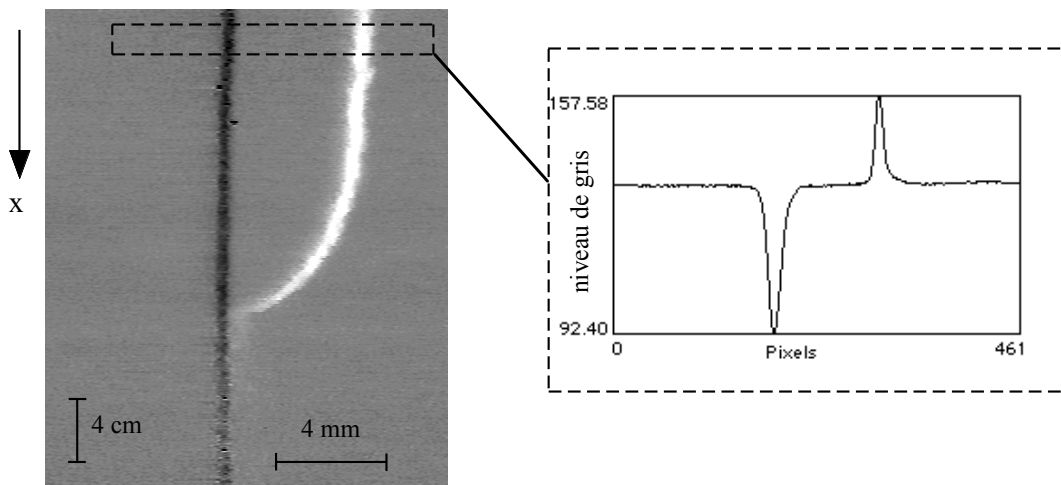


FIG. 12 – Mesure de l'épaisseur de l'écoulement par la nappe laser. A gauche : projection de la nappe laser sans écoulement (trace noire) superposée avec la projection de la nappe laser sur un front granulaire (trace blanche). Le logiciel NIH permet de mesurer facilement le décalage entre ces deux traces (à droite).

face  $S$  connue que l'on vient plaquer subitement sur le fond. Connaissant l'épaisseur  $h$  de l'écoulement et la masse  $M$  de grains piégés dans la boîte, on en déduit la fraction volumique  $\nu = M/\rho_p Sh$ . Quoique rudimentaire, cette technique permet d'obtenir une mesure de  $\nu$  avec une précision d'environ 10%.

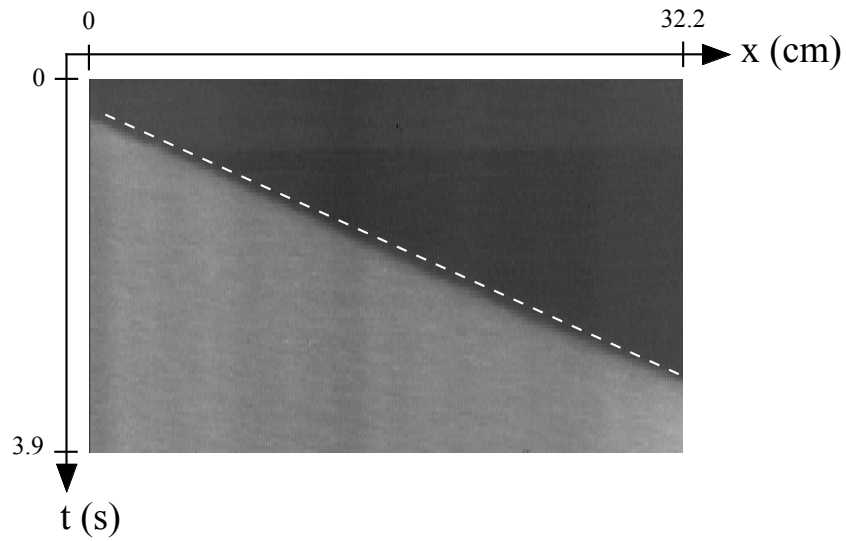


FIG. 13 – *Diagramme spatio-temporel du front matériel de l'écoulement dans le régime d'écoulement stationnaire uniforme. La vitesse constante du front est égale à la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement.*

Les mesures d'épaisseur, de vitesse et de concentration ont été utilisées dans les deux études d'instabilité présentées dans la suite. Cependant, d'autres mesures plus spécifiques ont été développées qui seront décrites plus en détail dans chaque partie.

## Première partie

# Instabilité dans les écoulements rapides : Vortex longitudinaux



La première partie de ma thèse porte sur les écoulements granulaires rapides sur plans inclinés rugueux. Ce régime s'observe lorsqu'on incline suffisamment le plan. Dans ce cas, le milieu granulaire ne coule pas à vitesse constante mais accélère le long de la pente, du moins dans un premier temps. Cette phase d'accélération permet à l'écoulement d'atteindre des vitesses importantes et des fractions volumiques relativement faibles, comparées au régime dense caractéristique des écoulements stationnaires uniformes. C'est dans ce régime rapide et dilué que nous avons observé une nouvelle instabilité: à une certaine distance de la sortie du réservoir, il apparaît spontanément à la surface libre de l'écoulement des stries longitudinales très régulières dans le sens de l'écoulement, comme le montre la figure 14. Cette instabilité s'observe dans une large gamme de paramètres de contrôle (angle d'inclinaison, débit), et avec différents matériaux granulaires (billes de verre monodisperse, sable de différentes tailles). L'apparition de cette instabilité est donc caractéristique des écoulements rapides et son étude devrait permettre de mieux comprendre les mécanismes physiques qui contrôlent ces écoulements.

Nous avons étudié expérimentalement et théoriquement cette instabilité. La principale motivation de ce travail a été de découvrir et d'expliquer le mécanisme d'instabilité. Dans une première étape, nous avons cherché à caractériser par des mesures précises la structure de l'écoulement instable. Nous avons ainsi mis en évidence pour la première fois l'existence de vortex longitudinaux dans les écoulements granulaires. Ces résultats nous ont permis de proposer une explication pour la formation de ces vortex, basée sur le concept de "température granulaire" dans les écoulements rapides. Nous avons ensuite étudié ce mécanisme d'instabilité dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires, en faisant une analyse de stabilité des écoulements sur plan incliné.

L'ensemble de ce travail sera présenté essentiellement à travers deux articles, l'un qui décrit l'expérience, l'autre qui étudie théoriquement l'instabilité. Dans le premier chapitre, nous présentons l'étude expérimentale de l'instabilité et nous donnons le mécanisme d'instabilité proposé. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude théorique de l'instabilité, dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires.



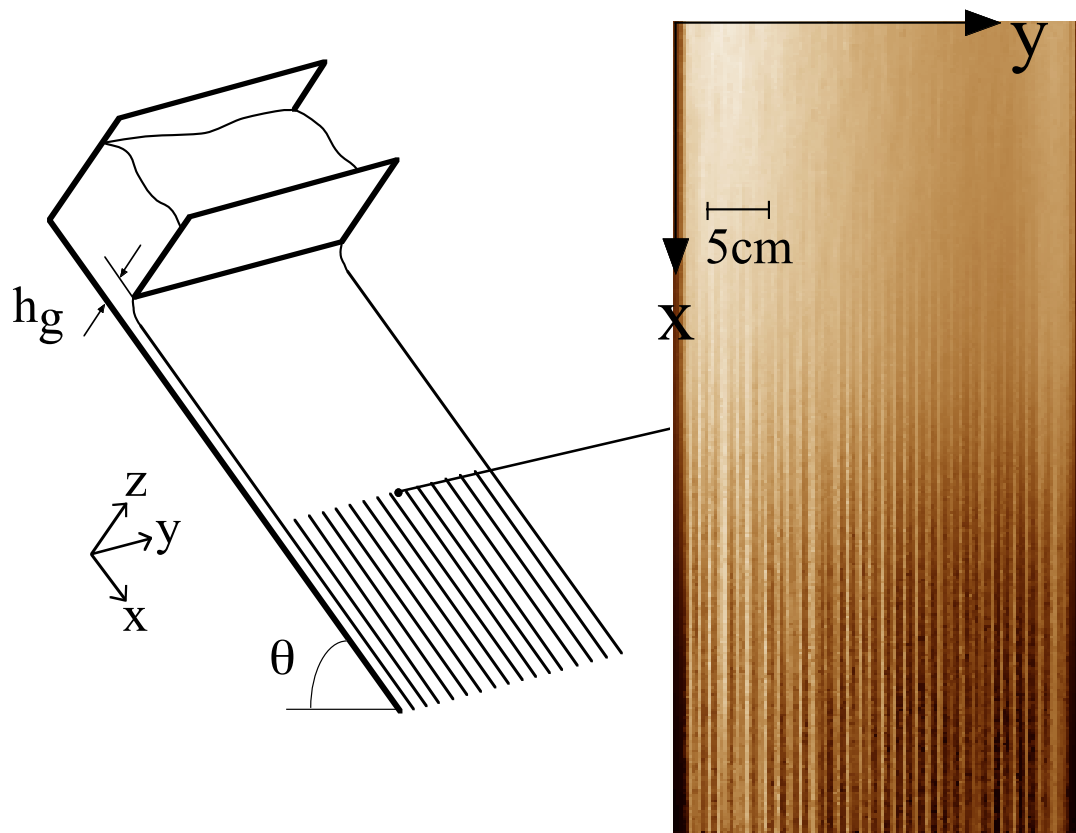


FIG. 14 – Image de l'instabilité. (sable de diamètre 0.25 mm,  $\theta = 41^\circ$ ,  $h_g = 13$  mm).

# Chapitre 1

## Expérience

Ce premier chapitre est consacré à l'étude expérimentale de l'instabilité donnant naissance à des vortex longitudinaux dans les écoulements granulaires rapides. L'essentiel de cette étude est présenté sous la forme d'une lettre intitulée *Longitudinal vortices in granular flows* et publiée dans *Physical Review Letters* (Forterre & Pouliquen 2001), que nous donnons à la fin de ce chapitre (paragraphe 4). Les trois premières parties offrent un résumé succinct de cette étude expérimentale, et nous permettent de présenter quelques mesures qui ne se trouvent pas dans la lettre originale.

### 1.1 Description de l'instabilité

C'est en étudiant les écoulements sur plan incliné pour des forts angles d'inclinaison  $\theta$  et des débits élevés que nous avons observé une nouvelle instabilité. Dans ce régime, le milieu granulaire qui sort du réservoir accélère le long du plan, tandis que son épaisseur et sa fraction volumique diminuent (voir figure 1.1). A une certaine distance de l'entrée du réservoir, nous voyons apparaître à la surface libre de l'écoulement des stries longitudinales très régulières (figure 14). Sur la figure 14, l'écoulement est observé en lumière rasante ; les bandes sombres et claires sont donc la manifestation d'une déformation périodique de la surface libre dans la direction transverse à l'écoulement. La première fois que nous avons observé cette instabilité, nous lui avons donné le nom de "peigne". En effet, une des signatures de l'instabilité est la formation à la sortie du plan de jets réguliers en forme de "peigne", quand les grains tombent en chute libre dans le bac en bas du plan (voir figure 1.2).

Quelque dizaines de centimètres après l'apparition de l'instabilité, la structure atteint un régime saturé : la longueur d'onde  $\lambda$  et l'amplitude des déformations de surface  $\Delta h$  restent constantes le long du plan. L'écoulement moyen atteint également un état "stationnaire", avec une épaisseur moyenne  $h$ , une vitesse moyenne  $u$  et une fraction volumique moyenne  $\nu$  constante, comme le montre la figure 1.1. Nous avons mesuré systématiquement la longueur d'onde de l'instabilité  $\lambda$  dans ce régime saturé, en variant les paramètres de contrôle  $h_g$  et  $\theta$ , ainsi que le matériau granulaire. La longueur d'onde  $\lambda$  des déformations de surface

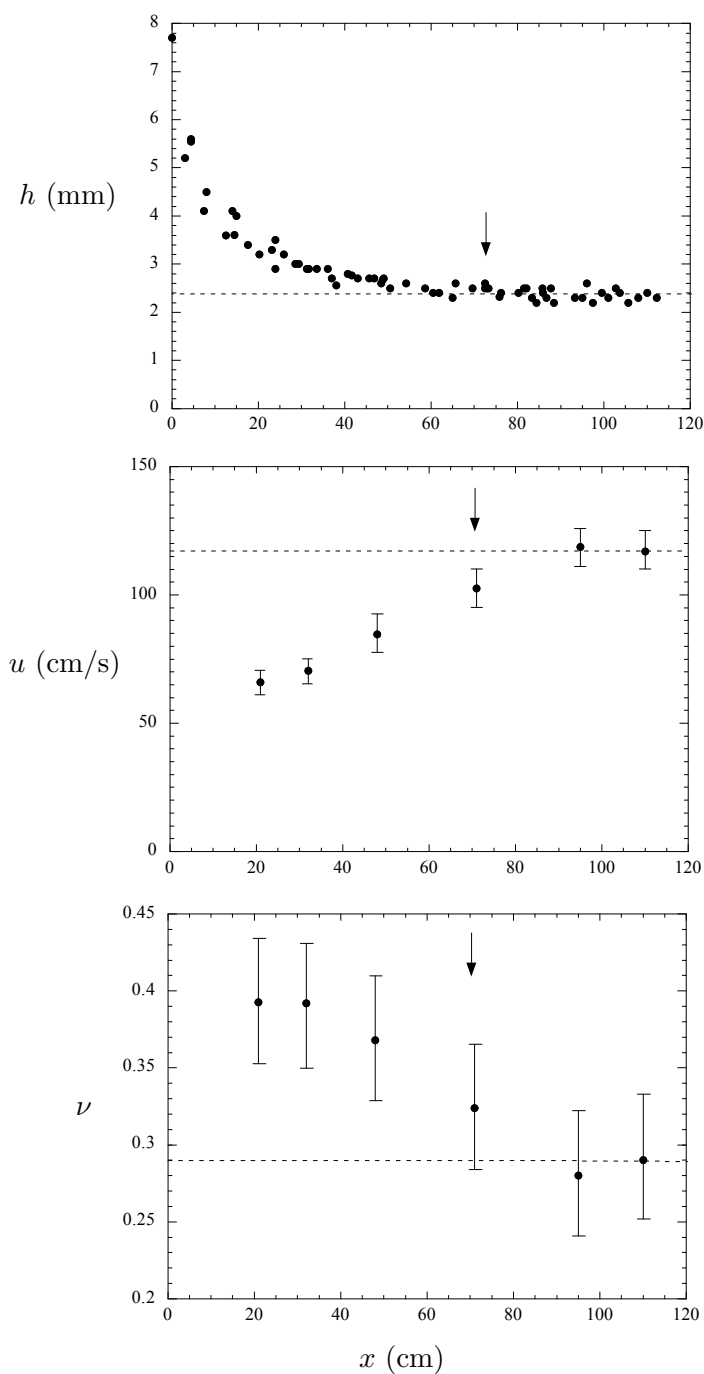


FIG. 1.1 – Evolution le long du plan de l'épaisseur moyenne  $h$ , de la vitesse moyenne  $u$  et de la fraction volumique moyenne  $\nu$  (la distance  $x$  est comptée depuis la sortie du réservoir). La flèche indique la position où l'instabilité apparaît. La vitesse moyenne  $u$  est donnée par  $u = Q/(Lh\rho_p\nu)$  où  $Q$  est le débit massique,  $L$  la largeur du plan et  $\rho_p = 2.7 \pm 0.0 \text{ g/cm}^3$  la densité des grains. (sable de diamètre  $0.25 \text{ mm}$ ,  $\theta = 41^\circ$ ,  $h_g = 13 \text{ mm}$ ).

semble être reliée à l'épaisseur moyenne de l'écoulement : typiquement  $\lambda = 2 \sim 3h$ . Il est cependant difficile de tester ce "scaling" sur une grande plage d'épaisseur, l'épaisseur moyenne  $h$  variant très peu dans le régime saturé même pour des variations importantes de l'ouverture  $h_g$ .

Une autre caractéristique de l'instabilité est qu'elle n'est pas stationnaire mais dérive

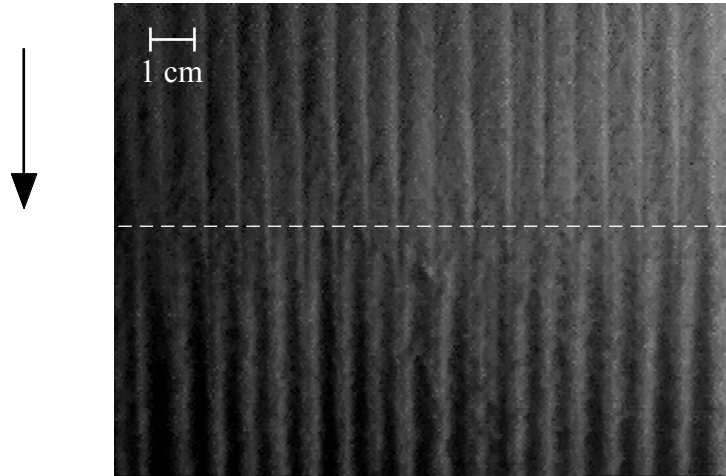


FIG. 1.2 – Image de l'écoulement à la sortie du plan (les traits pointillés indiquent la fin du plan rugueux). Les grains qui tombent en chute libre créent des jets en forme de "peigne" (Image prise avec une caméra rapide et un temps d'exposition  $1/8000$  s. Sable de diamètre  $0.25$  mm).

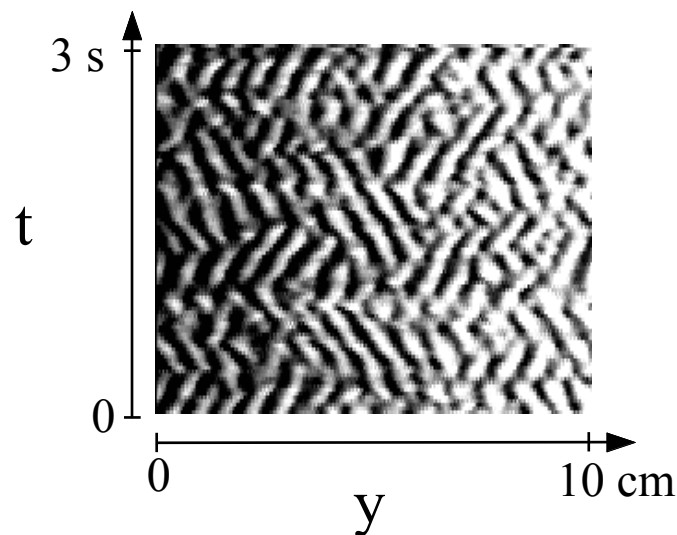


FIG. 1.3 – Diagramme spatio-temporel de l'instabilité dans le régime saturé. (sable de diamètre  $0.25$  mm,  $\theta = 41^\circ$ ,  $h_g = 13$  mm).

lentement dans la direction transverse à l'écoulement (direction  $y$ ). Cette propagation est

visualisée sur le diagramme spatio-temporel de la figure 1.3, qui montre l'évolution dans le temps d'une ligne de la surface libre perpendiculaire à l'écoulement. On distingue clairement deux directions de propagation dans la direction transverse, la vitesse de phase  $v_\phi$  étant petite devant la vitesse de chute  $u$  dans la direction  $-x$  (typiquement  $v_\phi \sim 1$  cm/s tandis que  $u \sim 1$  m/s). Cette dérive est associée à une dynamique non linéaire spatio-temporelle complexe, avec des créations et des annihilations de bandes, que nous n'avons pas étudiées systématiquement.

Pour comprendre cette instabilité, et en particulier le mécanisme d'instabilité sous jacent, nous nous sommes concentrés sur la structure de l'écoulement. En particulier, nous avons cherché à répondre à la question : quel est le mouvement des grains associé aux déformations de surface ?

## 1.2 Structure de l'écoulement : vortex longitudinaux

Nous avons mesuré le champ de vitesse à la surface de l'écoulement en utilisant une technique de PIV (Particule Image Velocimetry), ainsi que la fraction volumique moyenne par une technique de transmission de lumière (voir la lettre). La figure 1.4 schématise la structure de l'écoulement déduite de ces mesures. Le premier résultat important est que l'instabilité est associée à la formation de vortex longitudinaux au sein de l'écoulement. Nous avons en effet montré que les grains ont un mouvement latéral à la surface de l'écoulement, qui va des bosses vers les creux. Afin d'assurer la conservation de la masse, il doit donc exister un mouvement ascendant au niveau des bosses et descendant au niveau des creux. La structure de l'écoulement consiste donc en vortex longitudinaux contrarotatifs, chaque longueur d'onde contenant une paire de vortex comme schématisé sur la figure 1.4. En plus du mouvement de rotation, il existe au sein de l'écoulement instable une variation de vitesse dans la direction  $-x$  de chute : les grains ont une vitesse longitudinale plus importante que la vitesse moyenne au niveau des creux et moins importante au niveau des bosses. En mesurant la lumière transmise à travers la couche de grains en écoulement, nous avons montré que cette instabilité est également associée à des variations de fraction volumique moyenne dans la direction transverse à l'écoulement (par la suite nous parlerons de façon équivalente de "densité" à la place de fraction volumique) : les creux sont systématiquement plus denses que les bosses. Ce dernier résultat, combiné avec les mesures de vitesses, montre que les zones montantes de l'écoulement sont diluées tandis que les zones descendantes sont denses, comme le schématise la figure 1.4.

L'apparition spontanée de vortex longitudinaux dans les écoulements granulaires n'avait pas encore été observée. En revanche, de telles structures sont courantes en mécanique des fluides. On peut citer par exemple les vortex de Görtler qui apparaissent dans les écoulements en canal courbe (Görtler 1940, Saric 1994) (figure 1.5a.) ou les tourbillons longitudinaux dans les couches limites turbulentes (Klebanoff 1962, Kachanov 1994) (figure 1.5b.). Cependant, l'instabilité de Görtler provient de la force centrifuge due à la

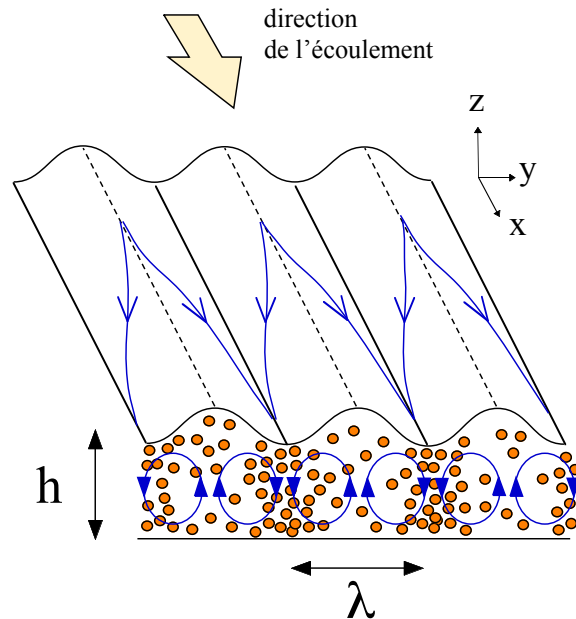


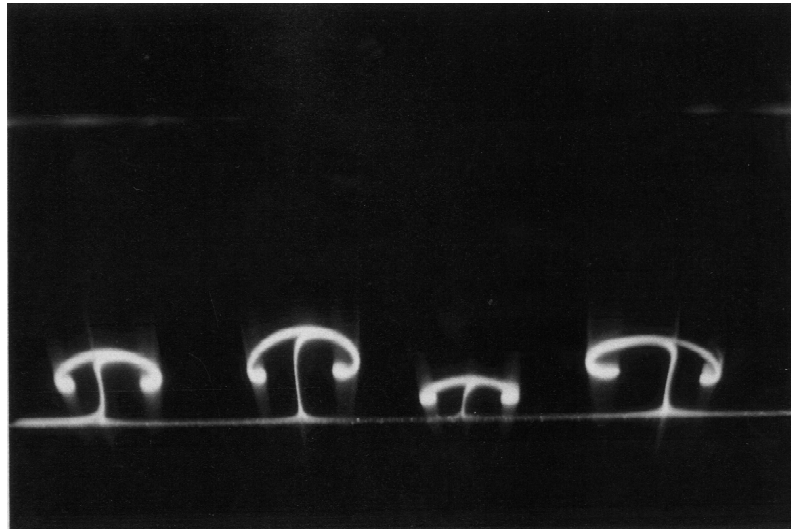
FIG. 1.4 – Schéma de l'écoulement déduit des mesures de vitesses et de densité, montrant les vortex longitudinaux et les variations de densité associées.

courbure des lignes de courant tandis que la formation de tourbillons longitudinaux dans les couches limites est une instabilité secondaire, qui semble liée à la nature turbulente de l'écoulement (Aihara 1990). Ces mécanismes ne peuvent donc pas expliquer la formation de vortex longitudinaux dans notre configuration d'écoulement granulaire sur plan incliné.

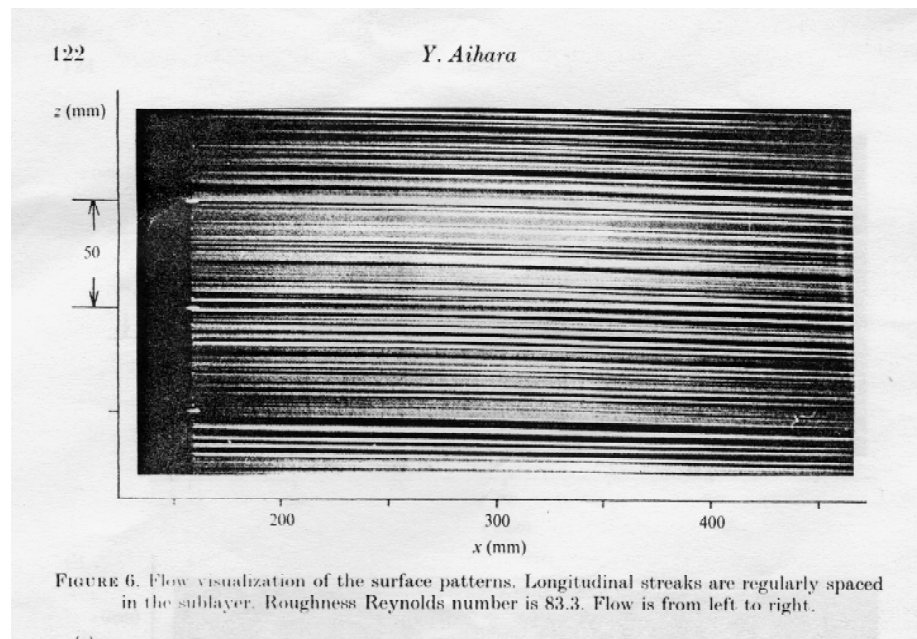
### 1.3 Mécanisme d'instabilité

Nos mesures de vitesses et de densité schématisées sur la figure 1.4 nous ont conduit à proposer un mécanisme de formation des structures tourbillonnantes. On remarque en effet que le mouvement de convection des grains au sein de l'écoulement est étroitement lié aux variations de densité du milieu : les parties diluées (ou *légères*) de l'écoulement montent tandis que les parties denses (ou *lourdes*) descendent. Ces observations rappellent les mécanismes de convection thermique et suggèrent le scénario suivant pour expliquer la formation des vortex longitudinaux dans les écoulements granulaires (voir figure 1.6).

Tout d'abord l'instabilité apparaît dans un régime où l'écoulement est rapide et relativement dilué ( $\nu \sim 0.2 - 0.3$  contre  $\nu \sim 0.4 - 0.5$  pour le régime dense). La dynamique de l'écoulement est donc essentiellement contrôlée par les collisions entre les particules, ainsi que par les collisions entre les particules et le fond rugueux. Nous avons vu dans l'introduction que dans ce régime collisionnel, l'écoulement granulaire peut être assimilé à un gaz et les fluctuations de vitesse des particules à une "température granulaire". Dans notre



a)



b)

FIG. 1.5 – Exemples de vortex longitudinaux en hydrodynamique. a) Coupe transverse de vortex de Görtler (Petitjeans 1992). b) Tourbillons longitudinaux dans une couche limite turbulente (Aihara 1990).

écoulement sur plan incliné rugueux, la source de mouvement fluctuant est la rugosité du fond. Ainsi, quand l'écoulement accélère le long du plan, les particules proches de la paroi sont fortement agitées à cause des collisions avec le fond rugueux. Au niveau de la surface libre en revanche, les particules restent "froides" en raison des collisions inélastiques. La "température granulaire" au niveau du fond augmente donc au cours de l'écoulement ce qui diminue la densité du milieu au niveau du fond (comme dans un gaz moléculaire, la densité diminue quand la température augmente). Il arrive alors un moment où la densité au niveau du plan est plus basse que la densité à la surface libre, comme le schématise la figure 1.6. L'écoulement est alors instable sous gravité car le fluide lourd se trouve au-dessus du fluide léger, entraînant la formation de rouleaux de convection qui s'alignent avec l'écoulement.

Il existe une forte analogie entre le mécanisme que nous proposons et l'instabilité de Rayleigh-Bénard observée quand on chauffe un fluide par dessous. On observe ainsi des rouleaux de convection longitudinaux quand un fluide s'écoule le long d'une plaque chauffée (Sparrow & Husar 1969, Jeschke & Beer 2001) (voir figure 1.7). Cependant, dans ce cas la chaleur est fournie de l'extérieur par la plaque dont on fixe la température tandis que dans notre écoulement granulaire, la chaleur est produite par l'écoulement lui-même : la surface rugueuse impose un fort cisaillement qui agite les grains par dessous.

Notre explication de la formation des vortex longitudinaux est basée sur l'inversion du profil de densité. Dans un milieu granulaire, le profil de densité résulte en réalité d'un équilibre complexe entre la gravité, les collisions et l'inélasticité et sa prédiction n'est pas triviale. Afin d'étudier la pertinence de ce mécanisme, nous avons décidé de faire une analyse de stabilité linéaire des écoulements granulaires sur plan incliné, dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires. Cette théorie contient en effet l'ingrédient essentiel du mécanisme d'instabilité que nous proposons : le couplage entre la "température granulaire" et l'écoulement.



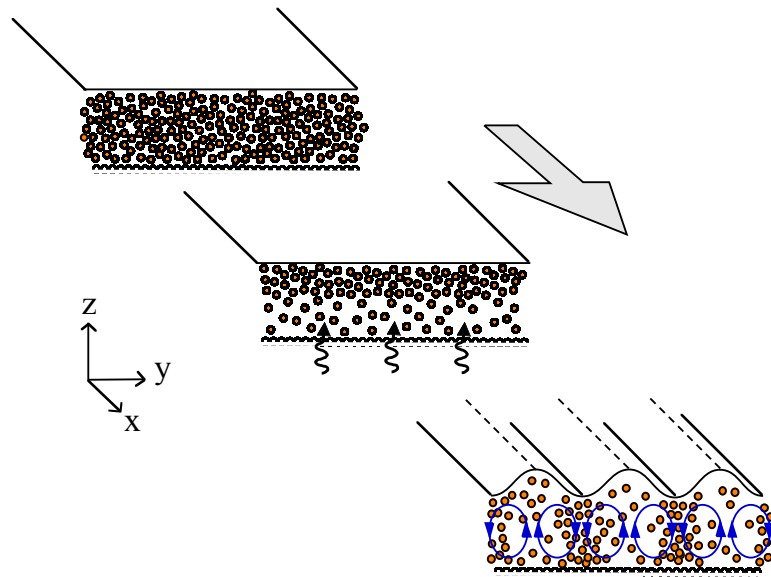


FIG. 1.6 – Mécanisme d'instabilité.

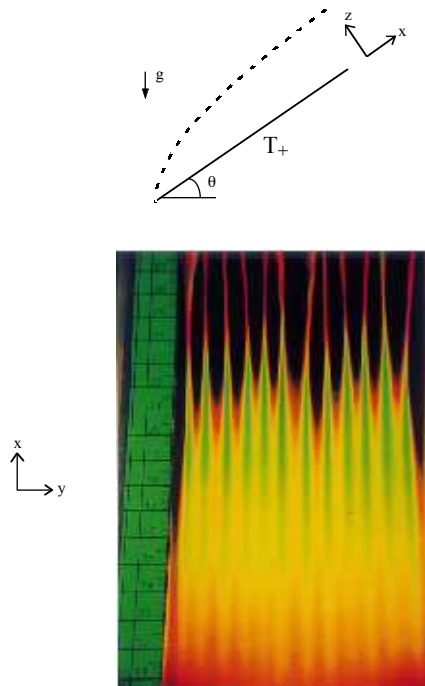


FIG. 1.7 – Rouleaux de convection longitudinaux dans un écoulement de couche limite le long d'une plaque chauffée inclinée (Jeschke &amp; Beer 2001).

## 1.4 Copie de la lettre

VOLUME 86, NUMBER 26

PHYSICAL REVIEW LETTERS

25 JUNE 2001

## Longitudinal Vortices in Granular Flows

Y. Forterre and O. Pouliquen

*Institut Universitaire des Systèmes Thermiques et Industriels (USTI), 5 rue Enrico Fermi, 13453 Marseille cedex 13, France*  
(Received 20 December 2000; revised manuscript received 6 March 2001)

We present a new instability observed in rapid granular flows down rough inclined planes. For high inclinations and flow rates, the free surface of the flow experiences a regular deformation in the transverse direction. Measurements of the surface velocities imply that this instability is associated with the formation of longitudinal vortices in the granular flow. From the experimental observations, we propose a mechanism for the longitudinal vortex formation based on the concept of granular temperature.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.5886

PACS numbers: 45.70.Mg, 45.70.Qj, 47.32.Cc

In fluid mechanics, flow instabilities lead to the formation of patterns which strongly affect the dynamics, yielding coherent structures and controlling the transition to turbulence [1]. For granular flows, the relevance of these hydrodynamic concepts and the existence of a similar scenario are open issues. Although granular media can exhibit fluidlike properties, they do not behave like classical fluids [2,3]. The dissipative nature of grain interactions and the overlap between grain scale and flow scale are fundamental differences with classical fluid flows which lead to difficulties in our research for a hydrodynamic description of granular flows [4]. One way to better understand the specificities of granular flows is to study the instabilities that can develop in these media. Pattern formation has been investigated in vertically vibrated granular layers where the nontrivial balance between the injected energy and the dissipation due to collision leads to a rich phenomenology [5,6]. The instability of simple shear flows leading to the formation of clusters has also been studied numerically and theoretically [7,8]. In contrast, few studies concern the stability of granular flows along slopes which are the paradigm for geophysical situations. The formation of roll waves has been reported [9] and a fingering instability observed during the propagation of a granular front has been described [10]. In this Letter we present a new instability that spontaneously generates longitudinal vortices (i.e., with axes parallel to flow) in rapid granular flows down rough inclined planes. Although such structures are common in fluid mechanics (Görtler vortices [11,12], streaks in turbulent boundary layers [13,14]), they have never been observed in a granular flow. From the experimental observations, we propose a mechanism for the longitudinal vortex formation which is specific to rapid granular flow and relies on the concept of granular temperature [15].

The experimental setup consists of a rough inclined plane with a reservoir containing the granular material (Fig. 1). The plane is a glass plate (1.3 m long, 0.3 m wide) made rough by randomly gluing one layer of particles onto its surface. The glued particles are the same as the ones used for the flow and cover about 70% of the plane. The side walls are glass plates and have no influence on the flow considering the large width of the channel.

The results presented here have been obtained using sand with a mean diameter  $d = 0.25 \pm 0.03$  mm. Experiments carried out with 0.8 mm sand and 0.5 mm monodispersed glass beads give the same results. The amount of particles in the reservoir is always large enough to ensure a constant flow rate during the whole experiment. Therefore, the only two control parameters of the experiment are the inclination of the plane  $\theta$  and the opening of the gate  $h_g$ . This configuration has been widely used to study the rheology of granular flows [16–18], instabilities [10], and avalanches dynamics [19], and provides a simple laboratory model for geological granular flows down slopes.

Here we study a new instability observed when the inclination  $\theta$  and the opening  $h_g$  are large (Fig. 2). In this regime, the granular material flowing out from the reservoir accelerates along the slope while the thickness of the granular layer decreases. At a certain distance from the outlet (from 0.4 to 1.3 m depending on the flow conditions),

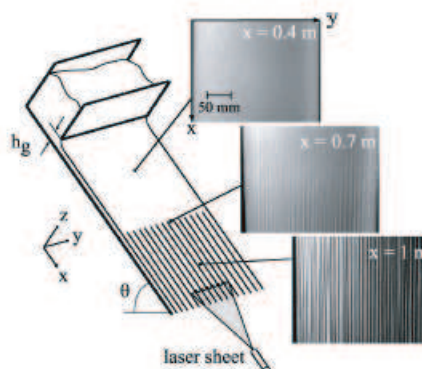


FIG. 1. Sketch of the experimental setup. The three pictures correspond to top views of the free surface lit from the side at three different locations along the slope.  $\theta = 41^\circ$ ,  $h_g = 13$  mm. The sheet laser light is used to measure the surface deformation (see picture in Fig. 2).

a regular pattern develops and longitudinal streaks parallel to the flow direction are observed (Fig. 1). In the pictures of Fig. 1, the plane is lit from the side. The bright and dark stripes are thus the signature of a periodic free surface deformation. A sheet laser light projected at a low incident angle provides a precise measurement of the local thickness (Fig. 2). About 0.2 m downstream of the initiation of the instability, the pattern reaches a "saturated" state: the deformation amplitude  $\Delta h$  between crests and troughs and the pattern wavelength  $\lambda$  remain constant along the slope. In this saturated state the mean flow also becomes uniform: mean thickness  $h$ , mean velocity, and mean volume fraction no longer vary along the slope. The wavelength  $\lambda$  seems to scale with the mean layer thickness:  $\lambda \sim 3h$ . However, it is difficult to significantly vary  $h$ . In the saturated state,  $h$  varies between only 2.1 and 2.6 mm when varying the height of the gate  $h_g$  or the inclination  $\theta$  over the range indicated in Fig. 2.

The streaked pattern described above is not stationary, but slowly drifts in the transverse  $y$  direction with a phase velocity small compared to the chute  $x$  velocity (the drift is about 1 cm/s while the chute velocity is of the order of 1 m/s). This drift leads to a complex nonlinear spatiotemporal evolution including annihilations and creations of streaks, which is beyond the scope of this study. In this Letter we focus on the flow structure and try to understand the underlying instability mechanism.

We have first investigated the grain motions once the pattern is fully developed, by measuring the velocity field at the free surface. For this purpose, black tracers of the same size of the bulk particles are mixed in the material. The flow being rapid, a fast charge-coupled device (CCD) (charge-coupled device) camera (4500 frames/s, Kodak

HS4540 Ektapro) is necessary to capture the particles displacement at the surface. The movies of particles displacement are analyzed using a particle image velocimetry method [20]. Typical longitudinal and transverse velocity profiles  $V_x(y)$  and  $V_y(y)$  are given in Fig. 3a. The instability induces spatial velocity modulations which are correlated with the surface deformation. First, one observes that the longitudinal particle velocity  $V_x$  is no longer uniform across the bed, but becomes greater in the troughs than in the crests with the modulation of  $\Delta V_x$  being about 20 cm/s. The second result is that the instability also induces periodic modulations of the transverse velocity  $V_y$  ( $\Delta V_y \sim 4$  cm/s): particles no longer follow the bed slope, but also experience lateral motions. The important observation is the  $\pi/2$  phase shift between  $V_x$  and  $V_y$ : in the troughs  $V_x$  is maximum, whereas  $V_y$  vanishes. This implies that particles move from the crests towards the troughs as sketched in Fig. 3b.

This two-dimensional picture of the surface flow implies a three-dimensional particle motion and the presence of longitudinal vortices in the bulk. The mean flow being uniform, mass conservation indeed requires that particles move upwards at the crests and downwards at the troughs. The longitudinal vortices are then counterrotating with one wavelength  $\lambda$  of the wavy surface corresponding to a pair of vortices as sketched in Fig. 3b. This 3D structure is reminiscent of patterns observed in liquid flows including Görtler vortices in curved channel flow [11,12] or longitudinal vortices in laminar/turbulent-boundary-layer transition [13,14,21]. However, the Görtler instability is driven by the inertial forces coming from the curvature, while streamwise vortices in boundary layers seem to be linked

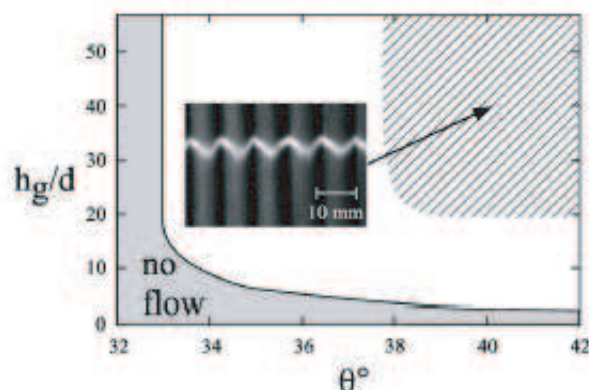


FIG. 2. Phase diagram in  $(\theta, h_g)$  plane: the instability is observed in the hatched zone. The picture is a closeup of the free surface in the saturated regime ( $\theta = 41^\circ$  and  $h_g = 13$  mm). The corrugated laser line provides the thickness profile measurement: mean thickness  $h \sim 2.5$  mm, deformation amplitude  $\Delta h \sim 0.5$  mm, wavelength  $\lambda \sim 7.5$  mm.

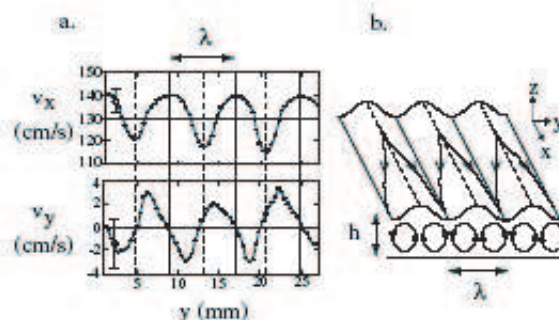


FIG. 3. (a) Longitudinal and transverse free surface velocity profiles  $V_x(y)$  and  $V_y(y)$  ( $\theta = 41^\circ$ ,  $h_g = 13$  mm). The vertical solid (respectively, dashed) line indicates the position of troughs (respectively, crests). To get these measurements, a  $30 \times 30$  mm area of the free surface (at  $x = 1.1$  m) is imaged with a 4500 frames/s fast CCD camera. The PIV method gives the velocity field  $V_x(x, y)$  and  $V_y(x, y)$  from two time-successive pictures with a spatial resolution of 0.3 mm.  $V_x(y)$  and  $V_y(y)$  are obtained by averaging the velocity field along the  $x$  axis and by averaging over 50 successive pictures (11 ms). The error bars represent the dispersion of the measurements. (b) Sketch of the particle trajectories showing the longitudinal vortices.

to the turbulent nature of the flow [21]. Therefore, neither of these mechanisms can explain the structure we observed in our granular flow configuration.

To understand the instability mechanism, we have studied how the volume fraction (the ratio between the volume occupied by the particles and the total volume, called simply density in the following) varies in the flow. The first result concerns the mean density measured by trapping some material during the flow and weighing the trapped material. The mean density is found to be never higher than  $0.3 \pm 0.05$  in the whole range of parameters where the instability is observed. This result means that the instability takes place in a dilute flow regime. Second, the density is not uniform across the bed when the flow becomes unstable but varies periodically with the surface deformation: crests are dilute and troughs are dense. Experimental evidence of this density variation is presented in Fig. 4a. To obtain this picture, the transparent rough bed is lit from below and the light transmitted through the flow is collected from above by a CCD camera. The light transmitted by the thick part (the crest) is greater than the light transmitted by the thin part (the trough). This is possible only if the crests are more dilute than the troughs.

A complete picture of the flow pattern in a cross section can then be sketched in order to present the surface deformation, the grain motion, and the density (Fig. 4b). One observes that the dense (thus heavy) part of the flow is going down while the dilute (thus light) part is going up, suggesting that density plays an important role in the

instability. We thus propose the following mechanism to explain the formation of the granular longitudinal vortices. When the instability appears, the flow is rapid and dilute: its dynamics are controlled by the particle-particle and particle-boundary collisions. In this regime, the granular material can be seen as a dissipative dense gas, and a granular temperature can be defined related to the fluctuating motion of the grains [15]. In our flow down a rough inclined plane, the source of the fluctuating motion is the bed roughness. Hence, as the flow accelerates from the outlet of the reservoir, particles close to the plane become more and more agitated due to collisions with the rough bed. The bottom granular temperature then increases along the slope. Consequently, the density at the bottom decreases (as in a molecular gas, density in a granular gas decreases when increasing the temperature) and eventually becomes smaller close to the plane than above. The flow is then mechanically unstable under gravity because the heavy material is above the light one yielding convective longitudinal rolls. There is a close analogy between this situation and the case of a liquid heated from below (Rayleigh-Bénard instability). When a liquid film is flowing down an inclined hot plate, one observes longitudinal convective rolls [22]. However, in this case the heating is provided by the imposed temperature at the bottom plate, whereas in the granular flow, the heating is produced by the flow itself. The rough surface induces a strong shear at the bottom which agitates the material from below.

The mechanism we propose is based on the density profile inversion. In a granular dissipative gas, the density profile actually results from a complex balance between gravity, collisions and dissipation, and its prediction is not straightforward. Density profiles with higher density at the free surface than below have been indeed observed in numerical simulations of rapid flows using discrete element methods [17,23]. However, no instability was observed because the simulations were two dimensional. In order to investigate the relevance of the proposed instability mechanism, we have performed a linear stability analysis of steady uniform flows in the framework of the kinetic theory of rapid granular flows [15,24–27]. We have found that inverted density profiles are unstable to transverse perturbations and yield to longitudinal rolls with transverse variations of velocities and density in qualitative agreement with the experimental observations [28].

The new instability presented in this paper leads to a spontaneous pattern formation in a granular flow. An important issue is whether the longitudinal vortices represent the first step in a global scenario leading to more and more complex structures. This evolution towards disordered states is well known in fluid mechanics for the transition to turbulence, but could be strongly affected in granular flows by the dissipative nature of the grain interactions.

This work was supported by the French Ministry of Research and Education (ACI blanche #2018). We thank the

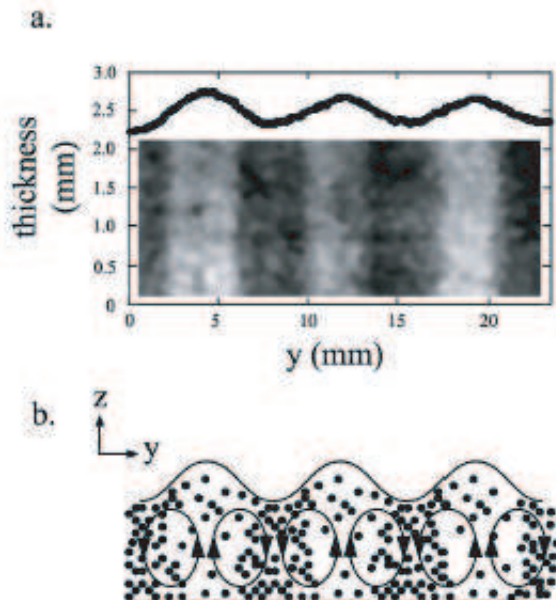


FIG. 4. (a) Picture obtained by lighting the flow from below to obtain information on the local volume fraction. The plots give the corresponding free surface transverse deformation. (b) Sketch of the flow in a cross section.

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre (IRPHE, Marseille) for the use of their fast CCD camera and C. Clanet for his help. Many thanks go to O. Cardoso who provided us with the PIV macro. This work would not have been possible without the technical assistance of F. Ratouchniak.

- 
- [1] C. Godrèche and P. Manneville, *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1998).
  - [2] H.J. Jaeger, S.R. Nagel, and R.P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259 (1996).
  - [3] J. Rajchenbach, *Adv. Phys.* **49**, 229 (2000).
  - [4] I. Goldhirsch, *Chaos* **9**, 659 (1999).
  - [5] S. Douady, S. Fauve, and C. Laroche, *Europhys. Lett.* **8**, 621 (1989).
  - [6] P.B. Umbanhowar, F. Melo, and H.L. Swinney, *Nature (London)* **382**, 793 (1996).
  - [7] S.B. Savage, *J. Fluid Mech.* **241**, 109 (1992).
  - [8] M. Alam and P. Nott, *J. Fluid Mech.* **377**, 99 (1998).
  - [9] S.B. Savage, in *Theoretical and Applied Mechanics*, edited by P. Germain, M. Piau, and D. Callerie (Elsevier, Amsterdam, 1989).
  - [10] O. Pouliquen, J. Delour, and S. B. Savage, *Nature (London)* **386**, 816 (1997).
  - [11] H. Görtler, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, New Ser.* **2**, No. 1 (1940).
  - [12] W.S. Saric, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 379 (1994).
  - [13] P.S. Klebanoff, K.D. Tidstrom, and L.M. Sargent, *J. Fluid Mech.* **12**, 1 (1962).
  - [14] Y.S. Kachanov, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 411 (1994).
  - [15] C.S. Campbell, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 57 (1990).
  - [16] S.B. Savage, in *Advances in Applied Mechanics*, edited by T.Y. Wu and J. Hutchinson (Academic Press, London, 1984).
  - [17] E. Azanza, F. Chevoir, and P. Moucheront, *J. Fluid Mech.* **400**, 199 (1999).
  - [18] O. Pouliquen, *Phys. Fluids* **11**, 542 (1999).
  - [19] A. Daer and S. Douady, *Nature (London)* **399**, 241 (1999).
  - [20] O. Cardoso, D. Marteau, and P. Tabeling, *Phys. Rev. E* **49**, 454 (1994). The PIV program is based on the public domain NIH image program, developed by W. Rasband at the U.S. National Institutes of Health and available from the Internet at <http://rsb.info.nih.gov/nih-image/>. Both adapted source code and compiled application for PIV on MacOS have been developed by O. Cardoso from LBHP-Université Paris 7, and are available at <http://134.157.79.91/olivier/NIH/NIH.html>.
  - [21] Y. Aihara, *J. Fluid Mech.* **214**, 111 (1990).
  - [22] E.M. Sparrow and R.B. Husar, *J. Fluid Mech.* **37**, 251 (1969).
  - [23] C.S. Campbell and C.E. Brennen, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **52**, 172 (1985).
  - [24] C.K.K. Lun, S.B. Savage, D.J. Jeffrey, and N. Chepurnyi, *J. Fluid Mech.* **140**, 223 (1984).
  - [25] J.J. Brey, J.W. Dufty, C.S. Kim, and A. Santos, *Phys. Rev. E* **58**, 4638 (1998).
  - [26] N. Sela and I. Goldhirsch, *J. Fluid Mech.* **361**, 41 (1998).
  - [27] J.T. Jenkins and M.W. Richman, *J. Fluid Mech.* **171**, 53 (1986).
  - [28] Y. Forterre and O. Pouliquen, "Stability Analysis of Rapid Granular Chute Flows: Formation of Longitudinal Vortices" (to be published).

# Chapitre 2

## Théorie

Ce chapitre présente une étude théorique de l'instabilité en vortex longitudinaux dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires. Le but principal de ce travail est d'étudier la pertinence du mécanisme de "convection granulaire" que nous avons proposé pour expliquer la formation des vortex.

Dans un premier temps, nous faisons une brève introduction à la théorie cinétique des milieux granulaires, en insistant sur une des caractéristiques fondamentales de cette théorie à savoir le couplage entre la "température granulaire" et l'écoulement, dû aux collisions inélastiques. Nous discutons également quelques limites de cette théorie cinétique. Nous présentons ensuite l'analyse de stabilité linéaire des écoulements sur plan incliné dans le cadre de la théorie cinétique. Ce travail est présenté essentiellement sous la forme d'un article à paraître dans *Journal of Fluid Mechanics* (Forterre & Pouliquen 2002). Notre démarche et les principaux résultats de cette étude sont résumés dans le paragraphe 2.

### 2.1 Introduction à la théorie cinétique des milieux granulaires

La théorie cinétique des milieux granulaires a été développée pour décrire les écoulements rapides et dilués (Jenkins & Savage 1983, Haff 1983, Lun *et al.* 1984, Jenkins & Richman 1985, Sela & Goldhirsch 1998, Brey *et al.* 1998). Dans ce cas, les interactions entre les grains sont dominées par les collisions et on peut faire une analogie entre le milieu granulaire et un gaz, le mouvement aléatoire des grains étant l'équivalent d'une "température granulaire". La grande différence entre un gaz classique et un milieu granulaire est cependant l'inélasticité des collisions entre les grains, qui introduit un couplage entre cette "température granulaire" et l'écoulement moyen. Nous présentons brièvement ici la théorie cinétique des milieux granulaires et nous discutons certaines de ses limites.

### 2.1.1 Equations

La théorie cinétique des milieux granulaires s'inspire de la théorie cinétique des gaz moléculaires denses (Chapman & Cowling 1970). Elle repose sur l'hypothèse de collisions binaires instantanées et du "chaos moléculaire" à l'échelle microscopique. La différence avec le cas des gaz classiques est cependant qu'elle tient compte de la dissipation lors des collisions inélastiques entre les grains. La théorie cinétique fournit, à partir d'une équation de type Boltzmann, un ensemble d'équations hydrodynamiques couplées pour la densité  $\rho$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  et la température granulaire  $T$ , définie comme la valeur moyenne des fluctuations de vitesse:  $T = \frac{1}{3}\langle\delta\mathbf{u}^2\rangle$ . En présence de la gravité, ces équations hydrodynamiques s'écrivent :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{g} + \nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}, \quad (2.2)$$

$$\frac{3}{2}\rho\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\Sigma}:\nabla\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} - \gamma, \quad (2.3)$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$ . La première équation (2.1) est la conservation de la masse. La seconde équation (2.2) vient de la conservation de la quantité de mouvement, où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est le tenseur des contraintes et  $\mathbf{g}$  la gravité. Enfin la troisième équation (2.3) est l'équation d'énergie associée aux fluctuations de vitesse. La variation de la température granulaire est contrôlée par trois termes. Le premier terme  $\boldsymbol{\Sigma}:\nabla\mathbf{u}$  représente la production d'énergie cinétique fluctuante due au travail de la contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}$  pendant le cisaillement. Le terme  $-\nabla\cdot\mathbf{q}$ , où  $\mathbf{q}$  est le flux d'énergie cinétique fluctuante, représente un terme de conduction "thermique". Enfin le terme  $\gamma$  est un terme de perte pour l'énergie cinétique fluctuante, en raison des collisions inélastiques entre les particules. Ce terme n'est pas présent dans les gaz classiques. Il est responsable du couplage entre la température granulaire et l'écoulement spécifique aux milieux granulaires.

La théorie cinétique permet également de connaître les relations constitutives pour les flux ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\mathbf{q}$ ) et  $\gamma$  en fonction des variables hydrodynamiques  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  and  $T$ . On introduit alors, comme pour les gaz classiques, une pression  $P(\rho,T)$ , une viscosité de cisaillement  $\eta(\rho,T)$ , une seconde viscosité  $\xi(\rho,T)$  et une conductivité thermique  $K(\rho,T)$  qui dépendent de la densité et de la température. Par exemple, la viscosité de cisaillement est donnée par  $\eta(\rho,T) = \rho_p d f_2(\nu)\sqrt{T}$  où  $f_2$  est une fonction de la fraction volumique  $\nu$  et du coefficient d'inélasticité  $e$ ,  $\rho_p$  est la densité d'une particule et  $d$  son diamètre (l'expression exacte des coefficients de transport est donnée dans l'article). Dans la limite diluée, on retrouve l'expression classique des gaz parfaits:  $\eta \sim \rho l\sqrt{T}$  où  $l \sim d/\nu$  est le libre parcours moyen.

La spécificité des écoulements granulaires vient du terme de dissipation  $\gamma$  dans l'équation d'énergie (2.3), qui est dû aux collisions inélastiques. Il est assez facile de connaître la dépendance de ce terme vis-à-vis de la température granulaire. Considérons un choc binaire entre deux particules de masse  $m$  avec une vitesse incidente  $v$ . La perte d'énergie cinétique lors du choc est:  $\delta E = (1/2)m(1 - e^2)v^2$  où  $e$  est le coefficient de restitution de

l'énergie ( $0 < e \leq 1$ ). La fréquence des chocs pour une particule étant proportionnelle à la vitesse d'agitation  $v$ , la perte d'énergie par unité de temps et par unité de volume  $\gamma$  est proportionnelle à  $v^3$  soit  $\propto T^{3/2}$ . L'expression exacte est donnée par (voir article) :

$$\gamma = \rho_p f_5(\nu) \frac{(1 - e^2)}{d} T^{3/2}, \quad (2.4)$$

qui s'écrit  $\gamma \sim \rho(1 - e^2)T^{3/2}/l$  dans la limite diluée. Bien entendu, lorsque  $e = 1$  (collision élastique) le terme  $\gamma$  est nul et on retrouve pour l'équation d'énergie (2.3) l'équation classique de la chaleur en mécanique des fluides.

Nous allons voir comment la présence des pertes inélastiques  $\gamma$  entraîne un couplage entre la température granulaire et l'écoulement moyen.

### 2.1.2 Couplage température/écoulement : exemple du cisaillement simple

Un moyen simple de comprendre ce couplage "température/écoulement" dans les écoulements granulaires rapides est de considérer le cas d'un cisaillement simple dans un écoulement uniforme (on ne tient pas compte de la gravité) (figure 2.1) :

$$\begin{aligned} \rho &= \text{cste}, \\ \mathbf{u} &= \dot{\Gamma} z \mathbf{e}_x, \\ T &= \text{cste}. \end{aligned}$$

où  $\dot{\Gamma}$  est le taux de cisaillement constant. Dans ce cas, la conservation de la masse (2.1) est automatiquement vérifiée et la pression  $P = -\Sigma_{zz}$  et la contrainte de cisaillement  $\tau = \Sigma_{xz}$  sont constantes, d'après (2.2). Il ne reste donc plus que l'équation de l'énergie (2.1) qui se

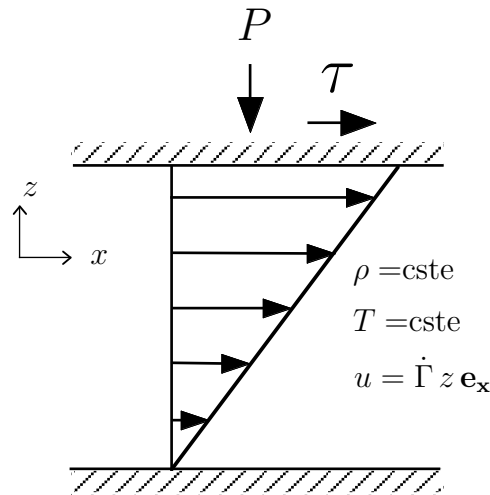


FIG. 2.1 – Cisaillement simple.



résume à :

$$\tau \frac{du}{dz} = \gamma. \quad (2.5)$$

A l'équilibre, la production de "chaleur" due au travail des forces de cisaillement est donc entièrement compensée par la perte d'énergie due aux collisions inélastiques. La valeur de la température granulaire est fixée par cet équilibre entre production et dissipation. En effet, on a  $\tau = \eta(du/dz) \propto \sqrt{T}\dot{\Gamma}$  et  $\gamma \propto (1 - e^2)T^{3/2}$  (voir 2.4). L'équilibre entre l'énergie fournie par le cisaillement et les pertes inélastiques (2.6) impose donc :

$$T = d^2 \frac{f_2(\nu)}{f_5(\nu)} \frac{\dot{\Gamma}^2}{(1 - e^2)}, \quad (2.6)$$

où encore  $T \sim l^2 \dot{\Gamma}^2 / (1 - e^2)$  dans la limite diluée. La valeur de la température granulaire à l'équilibre est donc entièrement fixée par le taux de cisaillement  $\dot{\Gamma}$  et le coefficient de restitution inélastique  $e$ . Quand on cisaille le milieu, la température granulaire augmente jusqu'à ce que la production de chaleur par le cisaillement soit exactement compensée par les pertes inélastiques.

Cette dépendance de la température avec l'écoulement implique un comportement rhéologique non linéaire à l'échelle macroscopique, bien que la relation locale entre contraintes et déformations soit newtonienne. En effet, on a  $\tau = \eta \dot{\Gamma} \propto \sqrt{T} \dot{\Gamma}$  et  $P \propto T$  (comme dans un gaz, la pression est proportionnelle à la température). En utilisant l'expression de la température granulaire en fonction du taux de cisaillement (2.6), on trouve donc :

$$\tau \propto \dot{\Gamma}^2, \quad (2.7)$$

$$P \propto \dot{\Gamma}^2. \quad (2.8)$$

La contrainte de cisaillement  $\tau$  varie donc de façon quadratique avec le taux de cisaillement. De plus, il apparaît une contrainte normale dans le système qui est elle aussi proportionnelle au carré du taux de cisaillement. Physiquement, ce résultat vient simplement du fait qu'un cisaillement augmente la température et donc la viscosité de l'écoulement. Il faut donc appliquer une contrainte plus importante que dans un fluide newtonien pour maintenir un taux de cisaillement donné. De même, l'échauffement lors du cisaillement induit une augmentation de pression quand on maintient le volume du milieu constant.

Une conséquence intéressante de ces relations est que le rapport entre la contrainte tangentielle  $\tau$  et la contrainte normale  $P$  est indépendant du taux de cisaillement :  $\tau/P = \text{cste}$ . L'écoulement granulaire se comporte donc à l'échelle macroscopique comme un milieu frottant de type coulombien, bien que les interactions entre grains soient purement collisionnelles. D'un point de vue dimensionnel, cette relation vient simplement du fait que pour un cisaillement à volume constant, le seul temps caractéristique est donné par  $\dot{\Gamma}^{-1}$  (cela n'est plus vrai à pression constante, la pression offrant une seconde échelle de temps). C'est par des arguments similaires que Bagnold a interprété sa fameuse expérience de 1954 sur la rhéologie des suspensions denses (Bagnold 1954). Dans cette expérience, un mélange de fluide visqueux et de particules isodensités remplit une cellule de cisaillement à volume constant. Pour des taux de rotation importants, Bagnold observe une transition entre un

régime visqueux et un régime “collisionnel” où le couple augmente quadratiquement avec le taux de rotation, avec de plus l’apparition d’une “pression de dispersion”<sup>1</sup>.

L’exemple du cisaillement simple uniforme illustre bien le couplage entre la température granulaire et l’écoulement moyen dans la théorie cinétique des milieux granulaires. D’une part, la valeur de la température granulaire résulte d’un équilibre entre le travail des forces de cisaillement et les pertes inélastiques. D’autre part, la température granulaire rétroagit sur l’écoulement *via* la dépendance en température de la pression et des coefficients de transport (viscosité, conductivité thermique).

### 2.1.3 Limites de la théorie cinétique

La théorie cinétique des milieux granulaires a été développée dans sa première forme pour des milieux relativement dilués et pour des collisions quasi-élastiques ( $e \sim 1$ ). Nous discutons ici brièvement ces deux limites.

La première limite de la théorie cinétique concerne les hautes densités, quand la fraction volumique du milieu s’approche de la fraction volumique maximale d’un empilement de sphères dures. Dans ce cas, il apparaît des corrélations entre les particules et l’équation classique de Boltzmann doit être modifiée. Une première modification de l’équation de Boltzmann est déjà prise en compte dans la version “classique” de la théorie cinétique des milieux granulaires. En effet, les pionniers de cette théorie (Savage & Jeffrey 1981, Jenkins & Savage 1983, Haff 1983) se sont directement inspirés de la théorie d’Enskog (1921) des gaz moléculaires denses, qui tient compte du transport *spatial* instantané sur la taille du grain de la quantité de mouvement et de l’énergie au cours du choc entre deux sphères dures. Il apparaît alors dans le tenseur des contraintes et le flux de chaleur une contribution collisionnelle en plus du transport cinétique des gaz dilués. Cette contribution collisionnelle est d’ailleurs dominante à haute densité.

Pour des fractions volumiques encore plus grandes (i.e. de l’ordre de la fraction volumique maximale), il apparaît des corrélations de vitesse importantes entre les particules. Le déplacement d’une particule implique en effet un mouvement collectif autour d’elle comme le schématise la figure 2.2. Ces corrélations de vitesse ne sont pas du tout prises en compte par la théorie cinétique, qui repose sur l’hypothèse de “chaos moléculaire”. Des théories récentes tentent de modéliser ces mouvements collectifs au voisinage de la densité critique en s’inspirant des travaux sur les verres et les gaz de sphères dures à très haute densité (Bocquet *et al.* 2002). On obtient alors des équations hydrodynamiques très analogues à celles de la théorie cinétique, la différence principale étant une dépendance “anormale” de la viscosité vis-à-vis de la densité.

La deuxième limite de la théorie cinétique est plus fondamentale et concerne la dissipation lors des collisions entre les grains. En effet, l’inélasticité des collisions entraîne

---

1. Signalons qu’un article récent réinterprète les données de l’expérience de Bagnold différemment (Hunt *et al.* 2002).

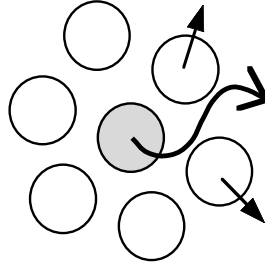


FIG. 2.2 – *Mouvement collectif quand la densité approche la densité maximale d'un empilement de sphères dures.*

une absence de séparation d'échelles claire entre l'échelle des particules et l'échelle de l'écoulement, quelle que soit la densité du milieu. Pour le montrer, nous allons nous placer dans la limite diluée et suivre un argument donné par Goldhirsch (1999). Il y a séparation nette entre l'échelle microscopique et macroscopique quand les variations spatiales et temporelles de l'écoulement sont grandes devant le libre parcours moyen  $l$  et le temps  $\tau_0$  entre deux collisions. Dans l'exemple du cisaillement simple que nous avons présenté, la variation de la vitesse macroscopique  $u$  sur la distance du libre parcours moyen  $l$  est simplement  $\dot{\Gamma}l$ . Cette variation peut être considérée comme petite si elle est très faible devant la vitesse d'agitation des grains  $v = \sqrt{T}$ . La condition de variation lente du champ de vitesse sur le libre parcours moyen est donc  $\dot{\Gamma}l/\sqrt{T} \ll 1$ . En utilisant l'expression (2.6) qui relie la température granulaire au taux de cisaillement dans le régime dilué, on trouve que l'écoulement varie lentement à l'échelle du libre parcours moyen si :

$$\sqrt{1 - e^2} \ll 1. \quad (2.9)$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée, il faut que  $e \sim 1$ , c'est-à-dire que les collisions soient pratiquement élastiques (avec  $e = 0.9$  on a déjà  $\sqrt{1 - e^2} = 0.44$  ce qui n'est pas négligeable). On obtient le même type de condition si on s'intéresse au temps  $\tau_0$  entre deux collisions. Ce temps microscopique a pour valeur  $\tau_0 = l/v = l/\sqrt{T}$  tandis que le temps macroscopique lié au cisaillement est donné par  $\dot{\Gamma}^{-1}$ . Le rapport entre ces deux temps,  $\tau_0/\dot{\Gamma}^{-1}$ , est donc lui aussi proportionnel à  $\sqrt{1 - e^2}$ .

Ces arguments dimensionnels montrent qu'il n'y a pas de séparation nette entre l'échelle du grain et l'échelle hydrodynamique dans les gaz granulaires, sauf pour des collisions quasi-élastiques. Des théories récentes cherchent à étendre la validité de la théorie cinétique pour des collisions fortement inélastiques, en développant systématiquement les équations de transport en fonction des petits paramètres  $\epsilon = 1 - e^2$  et  $K = l/L$ , où  $L$  est l'échelle de l'écoulement. Il apparaît alors des termes supplémentaires dans les équations constitutives (voir par exemple la fermeture de Sela & Goldhirsch 1998). Cependant, il n'est pas sûr qu'une telle démarche soit pertinente pour les écoulements granulaires rapides. D'une part, les expressions trouvées sont d'une complexité quasi-inextricable. D'autre part, elles ne tiennent pas compte des problèmes fondamentaux liés à l'effondrement inélastique : si

l'énergie injectée dans le système n'est pas suffisante, le milieu peut s'effondrer sur lui-même et quitter le régime collisionnel (voir l'introduction).

La théorie cinétique des milieux granulaires est donc d'application limitée et fait l'objet d'une recherche encore active afin d'étendre son domaine de validité. Des expériences modèles et des simulations numériques ont malgré tout montré qu'elle permet de décrire qualitativement les écoulements granulaires dans le régime rapide et dilué (Campbell 1990, Azanza *et al.* 1999, Reydellet *et al.* 2000). De plus, cette théorie contient la principale caractéristique des gaz granulaires qui est le couplage entre l'agitation des grains et le cisaillement moyen dû à l'inélasticité des collisions. Ce couplage étant au coeur du mécanisme d'instabilité que nous proposons, une analyse de stabilité basée sur cette théorie doit pouvoir décrire, au moins qualitativement, la formation des vortex longitudinaux.

## 2.2 Analyse de stabilité linéaire des écoulements rapides sur plan incliné : présentation de l'article

Dans ce paragraphe, nous donnons un résumé de l'analyse de stabilité linéaire des écoulements sur plan incliné que nous avons faite dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires, afin d'expliquer la formation des vortex longitudinaux. L'ensemble des calculs et des résultats, ainsi qu'une discussion plus approfondie, peuvent être trouvés dans l'article intitulé *Stability analysis of rapid granular chute flows: formation of longitudinal vortices* (Forterre & Pouliquen 2002) que nous reproduisons à la fin du chapitre.

### 2.2.1 Choix des équations et des conditions aux limites

Nous avons choisi la relation de fermeture "classique" de Lun *et al.* (1984) pour relier les contraintes, le flux de chaleur et la dissipation inélastique aux variables hydrodynamiques (voir l'article). Des modèles plus récents ont été proposés pour tenir compte de corrections supplémentaires dues à l'inélasticité et aux forts gradients de vitesse. Cependant ces équations sont toujours en développement et compliquent considérablement les lois constitutives (qui n'en n'ont d'ailleurs pas besoin).

Les équations de la théorie cinétique de Lun *et al.* contiennent deux paramètres : le coefficient de restitution inélastique  $e$  et la fraction volumique maximale de l'écoulement  $\nu_m$ . Ce dernier paramètre intervient dans la fonction de distribution radiale  $g_0(\nu)$ , qui représente la probabilité de trouver deux particules en contact. Dans toute l'étude nous prenons  $\nu_m = 0.6$ .

Afin d'étudier théoriquement les écoulements sur plan incliné rugueux, nous devons spécifier des conditions aux limites pour  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  et  $T$  au niveau du plan et à la surface libre. Contrairement aux cas des fluides classiques, la vitesse d'un écoulement granulaire dilué ne s'annule pas nécessairement à une paroi solide. Il existe donc une vitesse de glissement

au niveau du plan, qui contribue au travail des forces de cisaillement. Le plan rugueux peut donc agir comme une source de “chaleur”, si la production d’énergie associée à cette vitesse de glissement est plus grande que les pertes par collisions inélastiques avec le plan. Les conditions aux limites pour les écoulements granulaires rapides ont fait l’objet de nombreux travaux (Hui *et al.* 1984, Jenkins & Richman 1986, Johnson *et al.* 1990, Goldhirsch 1999). Nous avons choisi l’approche heuristique de Johnson *et al.*, qui calculent la contrainte et le flux de chaleur au niveau du plan à partir d’un bilan sur les collisions entre les particules et la paroi. On obtient alors deux conditions aux limites qui permettent de relier la vitesse de glissement et la température, au niveau du plan, au gradient de vitesse et au flux de chaleur. Le point important est que le système ajuste lui-même la température et la vitesse à la paroi de manière à vérifier ces deux conditions aux limites. Si ce choix de condition aux limites est pertinent, car il prend en compte le couplage cisaillement/température à la paroi due aux collisions, on sait en revanche qu’il ne décrit pas correctement la réalité. Des expériences ont mis en évidence une structuration locale de l’écoulement près de la paroi qui n’est pas prise en compte ici (Azanza 1998).

Au niveau de la surface libre, les contraintes et le flux de chaleur doivent s’annuler. Il y a deux méthodes différentes pour traiter ces conditions à la surface libre. La première est de définir *a priori* une épaisseur finie  $h$  pour l’écoulement. Dans ce cas, la densité ne s’annule pas à la surface libre et il est difficile d’annuler la contrainte. L’autre solution, que nous avons adoptée, est d’imposer aux contraintes et au flux de chaleur de s’annuler à l’infini. La densité tend alors vers zéro à l’infini. L’épaisseur de l’écoulement  $h$  est alors définie *a posteriori* par l’allure du profil de densité.

### 2.2.2 Analyse de stabilité linéaire

Notre but est de faire une analyse de stabilité linéaire des écoulements sur plan incliné. La démarche que nous avons employée pour faire cette étude est classique (Chandrasekhar 1961, Drazin & Reid 1981). La première étape est de chercher un état de base, c’est-à-dire de chercher des solutions stationnaires uniformes sous la forme :

$$\begin{cases} \nu(x,y,z,t) &= \nu_0(z), \\ \mathbf{u}(x,y,z,t) &= u_0(z)\mathbf{x}, \\ T(x,y,z,t) &= T_0(z). \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $\nu$  est la fraction volumique,  $\mathbf{u}$  la vitesse et  $T$  la température granulaire de l’écoulement (voir figure 2.3 pour les notations). Cet écoulement doit également vérifier les conditions aux limites au niveau du plan et à la surface libre. On obtient alors un système d’équations différentielles non linéaires que l’on résout numériquement par une méthode de tir, les deux paramètres de contrôle étant l’angle d’inclinaison du plan  $\theta$  et la densité moyenne  $\bar{\nu}$  (voir l’article pour une discussion détaillée du choix des paramètres de contrôle).

Le principal résultat de cette étude des écoulements stationnaires uniformes est qu’il existe des écoulements dont le profil de densité est inversé i.e. la densité est plus faible au niveau du fond que près de la surface libre. Ces profils de densité sont observés quand la chaleur fournie au niveau du plan par le cisaillement et le refroidissement dû aux collision inélastiques

à la surface libre créent un gradient de température suffisant pour contrebalancer la gravité.

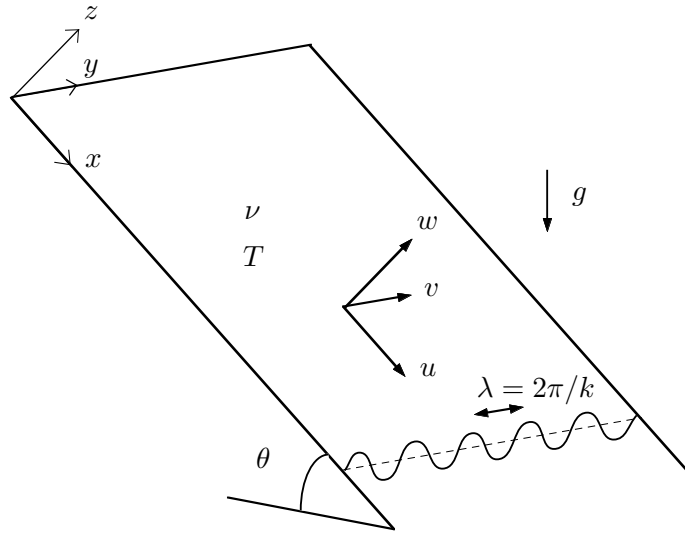


FIG. 2.3 – Notations pour l'analyse de stabilité linéaire.

La seconde étape consiste à étudier la stabilité linéaire de ces écoulements stationnaires uniformes. L'existence de profils de densité inversés est de façon évidente un facteur déstabilisant sous gravité. Cependant, la gravité doit surmonter les effets stabilisants dus à la viscosité et à la conductivité thermique. Dans un écoulement granulaire, le profil de densité, la viscosité et la conductivité thermique sont couplés à l'écoulement et il n'est pas évident *a priori* de prédire une instabilité.

Cette étude s'intéresse à la formation de vortex longitudinaux, nous avons donc restreint notre analyse à des écoulements invariants selon la direction longitudinale (direction  $-x$ ). L'écoulement  $(\nu, u, v, w, T)$  est alors perturbé autour de l'état de base  $(\nu_0, u_0, T_0)$  sous la forme :

$$\nu = \nu_0(z) + \nu_1(y, z, t), \quad \begin{cases} u = u_0(z) + u_1(y, z, t) \\ v = v_1(y, z, t) \\ w = w_1(y, z, t) \end{cases}, \quad T = T_0(z) + T_1(y, z, t), \quad (2.11)$$

où  $\nu_1, (u_1, v_1, w_1)$  et  $T_1$  sont respectivement les perturbations de densité, de vitesse et de température. On linéarise ensuite les équations autour de l'état de base en cherchant pour les perturbations des solutions en modes normaux de la forme :

$$(\nu_1, u_1, v_1, w_1, T_1) = \Re \left[ \left( \hat{\nu}(z), \hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{T}(z) \right) e^{\sigma t + iky} \right]. \quad (2.12)$$

Nous avons étudié la stabilité temporelle de l'écoulement. Le taux de croissance  $\sigma$  est donc complexe tandis que le nombre d'onde  $k$  est supposé réel. L'écoulement de base  $(\nu_0, u_0, T_0)$

est instable vis-à-vis d'une perturbation transverse de nombre d'onde  $k$  si la partie réelle du taux de croissance,  $\Re(\sigma)$ , est positive.

Cette analyse de stabilité linéaire tridimensionnelle des écoulements sur plan incliné conduit à un système de 5 équations différentielles ordinaires linéaires : une d'ordre un pour la conservation de la masse, trois d'ordre deux pour la quantité de mouvement et une d'ordre deux pour l'énergie. Il y a de plus 9 conditions aux limites au niveau du plan et à la surface libre. Ce système constitue un problème aux valeurs propres. Pour un état de base  $(\nu_0, u_0, T_0)$  et un nombre d'onde  $k$  donné, il existe une solution non identiquement nulle uniquement pour certaines valeurs du taux de croissance  $\sigma$ .

Pour résoudre ce système, nous avons utilisé une méthode de collocation spectrale de Chebychev (Gottlieb *et al.* 1984) (voir l'article partie 4). Le principe de cette méthode est de discrétiser le système d'équations différentielles sur une base appropriée de façon à se ramener à un problème algébrique du type :

$$\mathcal{A}\hat{\mathcal{X}} = \sigma\mathcal{B}\hat{\mathcal{X}}. \quad (2.13)$$

Ici, les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dépendent de l'état de base et du nombre d'onde  $k$ . Les valeurs propres  $\sigma$  de ce système permettent alors d'avoir accès aux taux de croissance tandis que les vecteurs propres  $\mathcal{X}$  donnent les fonctions propres des perturbations de densité, de vitesse et de température associées au taux de croissance  $\sigma$ .

### 2.2.3 Principaux résultats et discussion

Cette analyse de stabilité linéaire reproduit les principales caractéristiques de l'instabilité en vortex longitudinaux. Tout d'abord, notre analyse montre que les écoulements stationnaires uniformes peuvent être instable vis-à-vis de perturbations transverses. L'origine physique de l'instabilité est l'inversion du profil de densité, qui provient du cisaillement à la base qui chauffe l'écoulement par le bas et des pertes inélastiques dans le milieu. La structure de l'écoulement instable est constituée de vortex longitudinaux avec des variations d'épaisseur, de vitesse et de densité en accord *qualitatif* avec les observations expérimentales. Comme observé dans l'expérience, la vitesse des particules dans la direction longitudinale est plus grande au niveau des creux qu'au niveau des bosses. La même variation a lieu pour la densité moyenne : les creux sont denses et les bosses sont diluées. Enfin l'instabilité sélectionne une longueur d'onde au seuil qui est de l'ordre de 2 – 3 fois l'épaisseur moyenne de l'écoulement, en accord avec les observations.

Un autre résultat de cette analyse est que l'instabilité peut être stationnaire (i.e.  $\Im(\sigma) = 0$ ) ou propagative ( $\Im(\sigma) \neq 0$ ) selon les paramètres de contrôle. Quand l'instabilité est propagative, la vitesse de phase dans la direction transverse à l'écoulement est de l'ordre de grandeur de la vitesse de phase observée expérimentalement. Cependant, la théorie prédit également une transition entre une instabilité stationnaire et propagative qui n'est pas observée expérimentalement. La vitesse de phase observée expérimentalement est plus

vraisemblablement reliée à la très légère inclinaison de la structure dans l'expérience. Cette inclinaison n'est pas prise en compte dans cette étude, puisque nous avons restreint notre analyse à des perturbations purement transverses ( $k_x = 0$ ,  $k_y \neq 0$ ). Il serait intéressant d'étudier la stabilité des écoulements stationnaires uniformes quand une petite perturbation dans la direction longitudinale ( $k_x \ll 1$ ) est ajoutée en plus de la perturbation  $k_y$ . Cela devrait donner naissance à une vitesse de phase pour l'ensemble des paramètres.

L'accord entre la théorie et l'expérience est uniquement qualitatif. Des différences entre les prédictions de la théorie cinétique et l'expérience existent concernant les angles d'inclinaisons pour lesquels on observe l'instabilité. Ce désaccord n'est pas surprenant puisque l'expérience a lieu pour un écoulement mince (une dizaine de tailles de particule), dans un régime semi-dilué et utilise des particules relativement inélastiques ( $e \sim 0.8$ ). Nous sommes donc au-delà du domaine de validité strict de la théorie cinétique. Cependant cette étude montre la pertinence du raisonnement sur les collisions pour les écoulements granulaires rapides et met en évidence le rôle fondamental que la dissipation peut jouer sur la stabilité des écoulements.



## 2.3 Copie de l'article

*J. Fluid Mech.* (2002), vol. 467, pp. 361–387. © 2002 Cambridge University Press  
DOI: 10.1017/S0022112002001581 Printed in the United Kingdom

361

### Stability analysis of rapid granular chute flows: formation of longitudinal vortices

By YOËL FORTERRE AND OLIVIER POULIQUEN

IUSTI, Technopôle Château-Gombert, 5 rue Enrico Fermi, 13453 Marseille Cedex 13, France

(Received 28 August 2001 and in revised form 10 April 2002)

In a recent article (Forterre & Pouliquen 2001), we have reported a new instability observed in rapid granular flows down inclined planes that leads to the spontaneous formation of longitudinal vortices. From the experimental observations, we have proposed an instability mechanism based on the coupling between the flow and the granular temperature in rapid granular flows. In order to investigate the relevance of the proposed mechanism, we perform in the present paper a three-dimensional linear stability analysis of steady uniform flows down inclined planes using the kinetic theory of granular flows. We show that in a wide range of parameters, steady uniform flows are unstable under transverse perturbations. The structure of the unstable modes is in qualitative agreement with the experimental observations. This theoretical analysis shows that the kinetic theory is able to capture the formation of longitudinal vortices and validates the instability mechanism.

#### 1. Introduction

Unlike classical fluids which are well-described by Navier–Stokes constitutive equations, granular flows still lack a unifying description. For slow deformations at high density, multi-body interactions and friction between grains control the dynamics of the flow. On the other hand, when the energy injected into the material is large, the particles are strongly agitated and interact mainly via instantaneous collisions. In this collisional regime, the material can be compared to a gas and a ‘granular temperature’ can be defined in relation to the random motion of the particles (Ogawa, Umemura & Oshima 1980; Campbell 1990). This analogy between a collisional granular flow and a molecular gas has led to the development of a kinetic theory for rapid granular flows (Jenkins & Savage 1983; Haff 1983; Lun *et al.* 1984; Brey *et al.* 1998; Sela & Goldhirsch 1998) which is inspired by the kinetic theory of dense gas (Chapman & Cowling 1970). However, the main difference with classical molecular gases is that the collisions between granular particles are inelastic. If no energy is supplied to the system, the granular temperature decays rapidly because each collision removes kinetic energy from the particles. It can be shown that a free dissipative gas can form dense clusters and eventually collapses in a finite time, as a consequence of inelasticity (McNamara & Young 1992; Goldhirsch & Zanetti 1993). In order to maintain the collisional regime, energy must therefore be supplied to the system, for instance by strongly shaking the boundaries (Warr, Huntley & Jacques 1995; Falcon, Fauve & Laroche 1999; Rouyer & Menon 2000).

In a rapid granular flow, another way to maintain granular temperature is to impose a shear on the mean flow. In that case, the granular temperature results from a balance between the production by the shear work and the loss due to the inelastic collisions.

362

Y. Forterre and O. Pouliquen

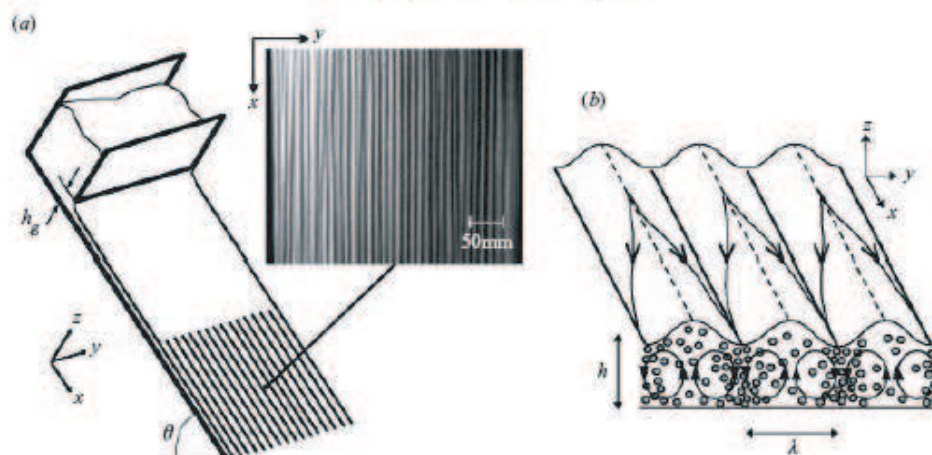


FIGURE 1. (a) Experimental set-up. The inset is a top view of the free surface lit from the side when the instability is fully developed (the granular material is sand 0.25 mm in mean diameter, the angle of inclination of the plane is  $\theta = 41^\circ$ , the opening of the reservoir is  $h_g = 13$  mm). (b) Sketch of the flow deduced from the measurements showing the surface deformation, the longitudinal vortices and the density variations.

In return, the granular temperature influences the mean flow because the pressure and the transport coefficients (e.g. viscosity, thermal conductivity) depend on the temperature, as in a molecular gas. The coupling between the granular temperature and the mean flow is one of the fundamental properties of rapid granular flows. Understanding the role of this coupling is thus important in order to better define the analogies and the differences between classical fluids and granular flows.

Recently, we have reported an instability observed in rapid granular flows down rough inclined planes which seems to result from this coupling (Forterre & Pouliquen 2001). The experimental set-up was a rough inclined plane as sketched in figure 1(a). For high inclinations and large openings of the reservoir, the free surface deforms in a very regular pattern of longitudinal streaks parallel to the flow direction (see figure 1a). Velocity measurements of the grains have revealed that the streaks correspond to the formation of longitudinal vortices as sketched in figure 1(b). Although such structures are common in fluid mechanics (e.g. Görtler vortices, see Saric 1994, or streaks in turbulent boundary layers, see Kachanov 1994), they had not been observed before in granular flows. The main experimental observations are the following:

- (i) the wavelength  $\lambda$  of the surface deformation scales with the mean thickness  $h$  of the flow ( $\lambda \sim 2-3h$ );
- (ii) the troughs correspond to the downward part of the flow while the crests correspond to the upward part (see figure 1b);
- (iii) the  $x$ -component of velocity is greater in the troughs than in the crests;
- (iv) troughs are dense whereas crest are dilute (see figure 1b);
- (v) the pattern drifts slowly in the transverse direction.

These observations suggest the following instability mechanism to explain the formation of the longitudinal vortices (Forterre & Pouliquen 2001). Because of the collisions with the rough bottom, particles close to the plane are strongly agitated, i.e. the granular temperature is high at the bottom. Since high temperature means low density, the density may become lower at the bottom than at the free surface. The flow is then mechanically unstable under gravity resulting in longitudinal vortices.

The mechanism we propose is analogous to the classical Rayleigh–Bénard instability observed when a fluid is heated from below. However, in the present case the heating is not imposed by a thermostat but is created by the flow itself through the coupling between temperature and shear specific to granular media.

The above explanation for the vortices formation is based on density profile inversion. In a granular dissipative gas, the density profile results from a complex balance between gravity, collisions and dissipation and its prediction is not straightforward. Density profiles with higher density at the free surface than below have been observed in numerical simulations of rapid granular flows using discrete element methods (Campbell & Brennen 1985; Azanza 1998). However, no instability was observed because the simulations were two-dimensional. In the present paper, we investigate the relevance of the proposed instability mechanism by using the kinetic theory of granular flows. We present a linear stability analysis of steady uniform flows down inclined planes, in the framework of the classical kinetic theory of Lun *et al.* (1984). This theory provides a set of hydrodynamic equations coupling the density, the velocity and the granular temperature under the assumption of instantaneous binary inelastic collisions. Although steady uniform flows down inclined planes have been studied within this framework (Anderson & Jackson 1992; Ahn, Brennen & Sabersky 1992; Azanza, Chevier & Moucheron 1999), no stability analysis has been performed. Stability studies of rapid granular flows using the kinetic theory have mainly focused on two-dimensional Couette flows (Savage 1992; Alam & Nott 1998; Nott *et al.* 1999) or gravity-driven flows in vertical channels (Wang, Jackson & Sundaresan 1997; Wang & Tong 2001).

We do not expect from the present study a complete and quantitative description of the longitudinal vortices instability, since the applicability of the kinetic theory is known to be limited. The lack of separation between the microscopic and macroscopic scales inherent to inelastic gases (Tan & Goldhirsch 1999) and the existence of multi-body interactions when density is high are serious difficulties which are the subject of active research (Goldhirsch 1999). However, the kinetic theory qualitatively contains the most important characteristic of rapid granular flow, i.e. the coupling between shear flow and particle agitation due to the inelasticity of collisions. This coupling being the core of the instability mechanism we propose, this analysis should capture at least qualitatively the formation of longitudinal vortices.

The paper is structured as follows. Section 2 gives the governing equations and the boundary conditions we will use in the paper. Basic flows, i.e. steady uniform flows down inclined planes, are studied in §3. Section 4 is devoted to the linearization of the equations around the basic state and the numerical method. The results of the stability analysis are given in §5. Comparison with the experiment and discussion are presented in §6. Concluding remarks are given in §7.

## 2. Kinetic theory of granular flows

In this section, we recall the equations of the kinetic theory of granular flow we shall use to investigate the formation of longitudinal vortices.

### 2.1. Governing equations

The kinetic theory of granular flows provides a set of hydrodynamic equations coupling the density  $\rho$ , the mean velocity  $\mathbf{u}$ , and the granular temperature  $T$  under the assumption of instantaneous binary inelastic collisions (the granular temperature  $T$  is defined by  $\frac{1}{3}\langle\delta\mathbf{u}^2\rangle$ , where  $\delta\mathbf{u}$  is the random velocity fluctuations). In the presence

364

*Y. Forterre and O. Pouliquen*

of gravity, the hydrodynamic equations are

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \Sigma, \quad (2.2)$$

$$\frac{3}{2}\rho \frac{dT}{dt} = \Sigma : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \gamma, \quad (2.3)$$

where  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ . The first equation (2.1) is the conservation of mass. The second equation (2.2) comes from the conservation of momentum, where  $\Sigma$  is the stress tensor and  $\mathbf{g}$  is the gravitational acceleration. The third equation (2.3) is the energy equation where the temporal variation of the random kinetic energy is balanced by three terms. The term  $\Sigma : \nabla \mathbf{u}$  represents the production of fluctuation energy due to the work of the stress  $\Sigma$  during shear. The term  $-\nabla \cdot \mathbf{q}$ , where  $\mathbf{q}$  is the flux of fluctuation energy, represents the conduction term. The term  $\gamma$  is the collisional rate of energy dissipation. The distinctive feature of rapid granular flows lies in the dissipative term  $\gamma$  due to the inelastic collisions between particles: it is responsible for the coupling between the mean flow and the granular temperature.

The kinetic theory gives the constitutive relations for  $\Sigma$ ,  $\mathbf{q}$  and  $\gamma$  as functions of the flow variables  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  and  $T$ . For the present purpose, we will use the closure due to Lun *et al.* (1984). The total stress tensor  $\Sigma$ , the heat flux  $\mathbf{q}$  and the rate of energy dissipation  $\gamma$  are written as

$$\Sigma = -\{P(v, T) - \xi(v, T)\nabla \cdot \mathbf{u}\}I + 2\eta(v, T)\mathbf{S}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q} = -K(v, T)\nabla T, \quad (2.5)$$

$$\gamma = \frac{\rho_p}{d}(1 - e^2)f_5(v)T^{3/2}. \quad (2.6)$$

Here  $I$  is the identity matrix,  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}$  is the deviatoric part of the rate of deformation,  $\rho_p$  is the particle density,  $v = \rho/\rho_p$  is the solid fraction and  $d$  is the particle diameter. We have omitted in (2.5) the contribution of the gradient of  $v$  to the heat flux. This term increases the algebra considerably and we have checked that it has little effect on the steady uniform solutions. Note that the collisional rate of energy dissipation  $\gamma$  is proportional to  $(1 - e^2)$ , where  $e$  is the coefficient of inelasticity of the particles ( $0 < e \leq 1$ ). As in classical dense gases, the pressure  $P(v, T)$ , the viscosities ( $\eta(v, T)$ ,  $\xi(v, T)$ ) and the thermal conductivity  $K(v, T)$  depend on the solid fraction  $v$  and the temperature  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} P(v, T) &= \rho_p f_1(v)T, \\ \eta(v, T) &= \rho_p d f_2(v)T^{1/2}, \\ \xi(v, T) &= \rho_p d f_0(v)T^{1/2}, \\ K(v, T) &= \rho_p d f_3(v)T^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

where the dimensionless functions  $f_0(v)$ ,  $f_1(v)$ ,  $f_2(v)$ ,  $f_3(v)$  and  $f_5(v)$  are given in table 1 (Lun *et al.* 1984).

These functions involve the radial distribution function  $g_0(v)$ . In the following, we shall use the one suggested by Lun & Savage (1986):

$$g_0(v) = \frac{1}{(1 - v/v_m)^{2.5v_m}}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
f_0(v) &= \frac{8\sqrt{\pi}}{3}\eta v^2 g_0(v) \\
f_1(v) &= v + 4\eta v^2 g_0(v) \\
f_2(v) &= \frac{5\sqrt{\pi}}{96} \left[ \frac{1}{\eta(2-\eta)} \frac{1}{g_0(v)} + \frac{8}{5} \frac{3\eta-1}{2-\eta} v + \frac{64}{25\eta} \left( \frac{3\eta-2}{2-\eta} + \frac{12}{\pi} \right) v^2 g_0(v) \right] \\
f_3(v) &= \frac{25\sqrt{\pi}}{16\eta(41-33\eta)} \left[ \frac{1}{g_0(v)} + \frac{12}{5}\eta(1+\eta(4\eta-3))v + \frac{16}{25}\eta^2 \left( 9\eta(4\eta-3) + \frac{4}{\pi}(41-33\eta) \right) v^2 g_0(v) \right] \\
f_4(v) &= \frac{12}{\sqrt{\pi}} v^2 g_0(v) \\
f_5(v) &= \frac{\pi\sqrt{3}}{6v_m} v g_0(v) \\
f_7(v) &= \frac{3\sqrt{3}\pi}{12v_m} v g_0(v)
\end{aligned}$$

TABLE 1. Dimensionless constitutive functions,  $\eta = \frac{1}{2}(1 + e)$ .

where  $v_m$  is the maximum solid fraction ( $v_m = 0.6$  in the following). This radial distribution function is suitable for free-surface flows since the resulting equations have no singularity at  $v = 0$ . We have checked that this choice does not qualitatively change the results by using other kinds of radial distribution functions, such as the Carnahan–Stirling radial distribution (Jenkins & Savage 1983). Finally, all the equations that follow will be written in terms of non-dimensional variables defined by

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{d}(x, y, z), \quad \tilde{t} = \sqrt{\frac{d}{g}}t, \quad \tilde{v} = \frac{\rho}{\rho_p}, \quad \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{gd}}u, \quad \tilde{T} = \frac{1}{gd}T, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{1}{\rho_p gd}\Sigma. \quad (2.9)$$

For simplicity in the notation, the tildes will be omitted and the solid fraction  $v$  will be called the density in the following.

## 2.2. Boundary conditions

In order to solve the problem of granular flows down rough inclined planes, we have to specify boundary conditions for  $v$ ,  $u$  and  $T$  both at the free surface of the flow and at the plane. Unlike classical fluid, the velocity in rapid granular flows does not vanish at a fixed solid boundary. Therefore, the rough plane may act as a source (resp. a sink) of fluctuating energy when the shear work of the slip velocity is larger (resp. smaller) than the inelastic loss due to collisions with the plane. Boundary conditions for rapid granular flows at a rough surface have been the subject of extensive research (Hui *et al.* 1984; Jenkins & Richman 1986; Johnson, Nott & Jackson 1990; Goldhirsch 1999). Here we will use the heuristic approach of Johnson *et al.* (1990) relating the tangential stresses  $t \cdot \Sigma \cdot n$  and the heat flux  $q \cdot n$  at the plane to density, slip velocity  $u_s$  and temperature by

$$t \cdot \Sigma \cdot n = \eta^*(v, T) \|u_s\|, \quad \text{at the plane}, \quad (2.10)$$

$$q \cdot n = (u \cdot \Sigma) \cdot n - \gamma^*(v, T), \quad \text{at the plane}. \quad (2.11)$$

The vector  $t$  is parallel to the plane and defined as  $t = u_s / \|u_s\|$ . The vector  $n$  is normal to the plane. Finally the functions  $\eta^*(v, T)$  and  $\gamma^*(v, T)$  are given by

$$\left. \begin{aligned} \eta^*(v, T) &= \phi f_6(v) T^{1/2}, \\ \gamma^*(v, T) &= (1 - e_w^2) f_7(v) T^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

where the dimensionless functions  $f_6(v)$  and  $f_7(v)$  are given in table 1. The relation (2.10) is a transfer of momentum balance at the plane. Equation (2.11) expresses that heat can be produced at the plane if the shear work is stronger than the loss of energy due to collisions with the plane. The boundary conditions (2.10) and (2.11) depend on two dimensionless parameters,  $\phi$  and  $e_w$ , which are related to the wall properties. The parameter  $e_w$  is the particle-wall coefficient of restitution. In the following,  $e_w$  will be taken equal to the particle-particle coefficient of restitution  $e$ . The parameter  $\phi$  is related to the rate of momentum transfer to the flow by the collision with the plane. Its value can be related to the wall geometry in the case of two-dimensional flows of disks (Jenkins & Richman 1986). For a rough plane made of close-packed disks, one obtains a value  $\phi \sim 0.1$ . For three-dimensional flows, one can expect lower values of  $\phi$  since collisions do not always occur in the shear plane. We will use in the following the value  $\phi = 0.05$  and will discuss its influence later.

At the free surface, the stresses and the energy flux must vanish. However, the location of the free surface is not known *a priori* and its definition is somewhat artificial for very dilute flows. Rather than define the location of the free surface, we impose stresses and energy flux to vanish when the distance from the plane goes to infinity. Note that the boundary conditions used here are somewhat different from those used in previous studies (Johnson *et al.* 1990; Anderson & Jackson 1992; Ahn *et al.* 1992; Azanza *et al.* 1999). In the work of Anderson & Jackson (1992), the thickness  $h$  of the granular layer is taken as a control parameter. Numerical difficulties then arise when trying to match the stress-free condition at the free surface (Johnson *et al.* 1990). Ahn *et al.* (1992) do not define the free surface but require stresses to vanish at infinity. However, they arbitrarily fix the density, velocity and granular temperature at the plane. The same procedure is used by Azanza *et al.* (1999). Here, we adopt a mixed point of view since at the plane the boundary conditions of Johnson *et al.* (1990) are satisfied whereas at infinity the procedure of Ahn *et al.* (1992) is chosen.

### 3. Steady uniform flows

The first step in performing a linear stability analysis is to determine the basic flow, i.e. two-dimensional steady uniform flow. Steady uniform flows down inclined planes have already been studied in the framework of the kinetic theory (Anderson & Jackson 1992; Ahn *et al.* 1992; Azanza *et al.* 1999). It is not within the scope of the present study to make an extensive investigation of steady uniform flows. Rather, we shall focus on the shape of the density profile, which plays an important role in the instability mechanism we propose.

#### 3.1. Equations for steady uniform flows

We apply equations (2.1)–(2.3) with boundary conditions (2.10) and (2.11) to two-dimensional steady uniform flows down inclined planes. We thus look for solutions

for density, velocity and temperature in the following form:

$$\left. \begin{aligned} v(x, y, z, t) &= v_0(z), \\ u(x, y, z, t) &= u_0(z)x, \\ T(x, y, z, t) &= T_0(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

In such a flow the derivatives parallel to the plane are zero and the mass-conservation equation (2.1) is satisfied. The momentum-conservation equation (2.2) in the flow direction ( $x$ -direction) and in the direction normal to the plane ( $z$ -direction) becomes

$$\frac{d\Sigma_{xz0}}{dz} = -v_0 \sin \theta, \quad (3.2)$$

$$\frac{d\Sigma_{zz0}}{dz} = v_0 \cos \theta, \quad (3.3)$$

where  $\theta$  is the angle of inclination of the plane,  $\Sigma_{xz0} = f_2(v_0)T_0^{1/2} du_0/dz$  and  $\Sigma_{zz0} = -f_1(v_0)T_0$ . The energy conservation (2.3) simplifies to

$$0 = \Sigma_{xz0} \frac{du_0}{dz} - \frac{dq_{z0}}{dz} - \gamma_0, \quad (3.4)$$

where  $q_{z0} = -f_3(v_0)T_0^{1/2}dT_0/dz$  and  $\gamma_0 = (1 - e^2)f_5(v_0)T_0^{3/2}$ .

From (3.2) and (3.3) together with boundary conditions  $\Sigma_{xz0} = \Sigma_{zz0} = 0$  at infinity, one obtains  $\Sigma_{xz0} = -\tan \theta \Sigma_{zz0}$ . Therefore, equations (3.2), (3.3) and (3.4) can be written in the following form:

$$\frac{dv_0}{dz} = -\frac{1}{f_1'(v_0)T_0} \left( v_0 \cos \theta + f_1(v_0) \frac{dT_0}{dz} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{du_0}{dz} = \frac{f_1(v_0)}{f_2(v_0)} \tan \theta T_0^{1/2}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_0}{dz^2} &= \left( \frac{(1 - e^2)f_5(v_0)f_2(v_0) - f_1^2(v_0) \tan \theta}{f_2(v_0)f_3(v_0)} \right) T_0 + \frac{v_0 f_3'(v_0)}{f_3(v_0)f_1'(v_0)T_0} \cos \theta \frac{dT_0}{dz} \\ &\quad + \frac{1}{T_0} \left( \frac{f_1(v_0)f_3'(v_0)}{f_3(v_0)f_1'(v_0)} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{dT_0}{dz} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

where the primes denote differentiation with respect to  $v_0$ .

This system of three nonlinear ordinary differential equations requires boundary conditions both at the plane and at infinity. At infinity, the stresses and the flux of energy must vanish. It can be shown (Ahn *et al.* 1992) that these conditions are satisfied if and only if the temperature gradient vanishes at infinity:

$$\frac{dT_0}{dz} \rightarrow 0 \quad \text{when } z \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

At the plane, relations (2.10) and (2.11) become

$$f_2(v_0)T_0^{1/2} \frac{du_0}{dz} = \phi f_6(v_0)T_0^{1/2}u_0 \quad \text{at } z = 0, \quad (3.9)$$

$$-f_3(v_0)T_0^{1/2} \frac{dT_0}{dz} = f_2(v_0)T_0^{1/2} \frac{du_0}{dz} u_0 - (1 - e^2)f_7(v_0)T_0^{3/2} \quad \text{at } z = 0. \quad (3.10)$$

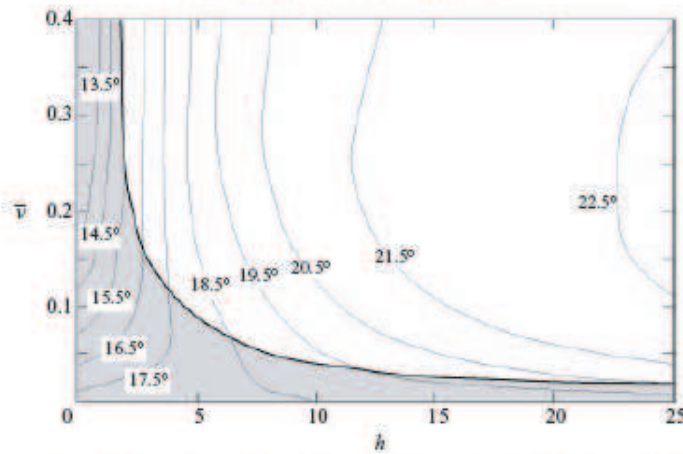


FIGURE 2. Phase diagram for steady uniform flows in the  $(h, \bar{v})$ -plane. The thin solid lines give the contours of constant angle  $\theta$ . Along these lines,  $v_0(0)$  increases from bottom to top. The grey zone is the domain of non-inverted density profiles.  $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ .

These relations can be combined with equation (3.6) to express the temperature and the gradient of temperature at the plane as a function of density and velocity at the plane:

$$T_0 = \frac{\phi^2 f_6^2(v_0)}{f_1^2(v_0) \tan^2 \theta} u_0^2 \quad \text{at } z = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{dT_0}{dz} = \frac{\phi f_6(v_0)}{f_3(v_0)} \left( -1 + \frac{\phi f_6(v_0)(1 - e^2) f_7(v_0)}{f_1^2(v_0) \tan^2 \theta} \right) u_0^2 \quad \text{at } z = 0. \quad (3.12)$$

In order to integrate numerically the above boundary value problem, a 'shooting method' has been chosen. The angle  $\theta$  and the density at the wall  $v_0(0)$  are the two control parameters whereas the slip velocity  $u_s = u_0(0)$  is taken as the shooting parameter. Then, the temperature and the gradient of temperature at the plane are given by equations (3.11) and (3.12). The differential equations (3.5)–(3.7) can therefore be integrated from  $z = 0$  to  $z = \infty$ . This procedure is repeated for different values of the shooting parameter  $u_s = u_0(0)$  until the boundary condition at infinity  $dT_0/dz = 0$  is satisfied. In practice, a fourth-order Runge–Kutta method is employed and the equations are integrated up to a maximum value  $z = z_{max}$ . The boundary condition at infinity is considered to be satisfied when the gradient of temperature is smaller than  $10^{-5}$  at  $z = z_{max}$ .

### 3.2. Results

By applying the above procedure to different values of the angle  $\theta$  and the density  $v_0(0)$ , we were able to explore the whole set of steady uniform flows. However, in order to help in the physical interpretation of the results, we present the results in the  $(h, \bar{v})$ -plane where  $h$  is the thickness of the flow and  $\bar{v}$  the mean density. The thickness  $h$  is defined *a posteriori* by the value  $z = h$  for which the density is 1% of the maximum density inside the flow. The mean density  $\bar{v}$  is simply given by  $\bar{v} = (1/h) \int_0^h v_0(z) dz$ . The relation between  $(\theta, v_0(0))$  and  $(h, \bar{v})$  appears to be single valued, i.e. numerically, a single solution exists for a given set  $(h, \bar{v})$  (which is not the case if one chooses the flow rate as a control parameter, see Johnson *et al.* 1990 and Anderson & Jackson 1992). The relation between  $(\theta, v_0(0))$  and  $(h, \bar{v})$  is shown in figure 2 for  $e = 0.6$  and



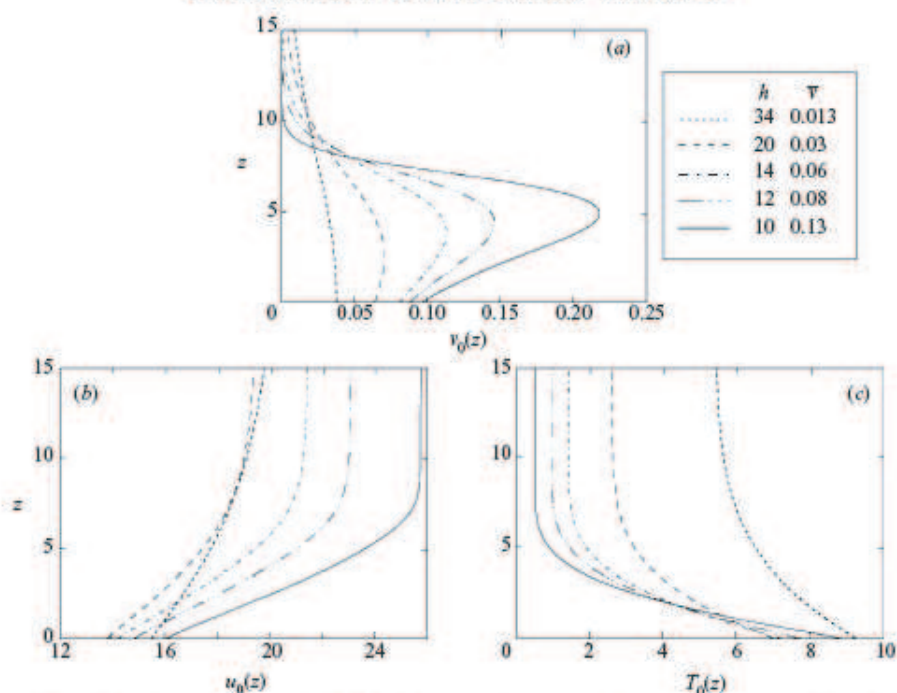


FIGURE 3. (a) Density profiles  $v_0(z)$ , (b) velocity profiles  $u_0(z)$  and (c) temperature profiles  $T_0(z)$  for steady uniform flows at a fixed angle ( $\theta = 20.5^\circ$ ) when the mean density is increased. The inset gives the value of  $(h, \bar{\nu})$  for the different profiles ( $e = 0.6, \phi = 0.05$ ).

$\phi = 0.05$ . In this figure, the thin solid lines are obtained for constant inclination  $\theta$  by varying  $v_0(0)$ . We observe that the angle  $\theta$  has a strong influence on the thickness of the flow  $h$ : the thickness of the flow rapidly increases on increasing the angle. For angles  $\theta > 23^\circ$ , the thickness diverges whereas for  $\theta < 14^\circ$ , the thickness becomes less than one grain diameter. Therefore, for a given set of parameters ( $e, \phi$ ) there exists a finite range of angles where steady uniform flows are obtained. These results are consistent with analytical solutions for steady uniform flows found in the high-density limit (Anderson & Jackson 1992).

Typical solutions ( $v_0(z), u_0(z), T_0(z)$ ) for steady uniform flows are given in figure 3. They are obtained for  $\theta = 20.5^\circ$  by increasing the mean density  $\bar{\nu}$ , i.e. along the thin solid line  $\theta = 20.5^\circ$  in figure 2. As the mean density is increased, the shear close to the plane increases (see figure 3b). The difference between the temperature at the plane and the asymptotic temperature for the top layer also increases with the mean density (see figure 3c). Note that with our boundary conditions, the temperature is always higher at the plane than in the rest of the material. Finally, the density profile  $v_0(z)$  is strongly modified when varying the mean density (see figure 3a). For dilute flows, the thickness  $h$  is large and the density profile is non-inverted, i.e. the density decreases with  $z$ . As the mean density increases, the flow becomes thinner and the free surface is better defined. At a given mean density, the density profile becomes inverted, i.e. the maximum of density is no longer at the plane but in the bulk. In the  $(h, \bar{\nu})$  diagram of figure 2, the dividing line between non-inverted density profiles and inverted density profiles is given by the solid line. Above this line, the maximum of density is in the bulk.

The shape of density profiles can be understood qualitatively by inspecting equations (3.5)–(3.7). Equation (3.5) shows that the sign of the density gradient results from a competition between gravity, which tends to increase density close to the plane, and the negative temperature gradient, which tends to decrease density close to the plane. The temperature gradient results from the shearing at the base, which heats the material from below, and the inelastic dissipation in the bulk, which cools the material. Therefore, inverted density profiles are observed when heating due to the shear at the base and the cooling due to dissipation in the bulk create a temperature gradient strong enough to overcome gravity.

### 3.3. Influence of the parameters

The results presented so far have been obtained using  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ . Here we discuss briefly the qualitative influence of the inelastic coefficient  $e$  and the boundary parameter  $\phi$  on the solutions presented above. First, inverted density profiles are observed only for small values of  $\phi$ . For  $\phi > 0.3$ , no inverted density profile can be obtained, neither by changing the control parameters  $(h, \bar{v})$  nor by modifying the coefficient of inelasticity  $e$ . For high values of  $\phi$ , the plane is indeed no longer a source of fluctuating energy (see equation (3.12)). The density gradient close to the plane is therefore negative and no inverted density profile can be obtained. For values of  $\phi$  less than 0.3, the results are qualitatively the same as for  $\phi = 0.05$ . Varying  $\phi$  changes the range of inclinations where steady uniform flows are observed. For example, the maximum angle is increased from  $\theta \sim 23^\circ$  to  $\theta \sim 32^\circ$  on increasing  $\phi$  from 0.05 to 0.15 ( $e = 0.6$ ). No qualitative change is observed when changing the inelasticity  $e$  either. Increasing the value of  $e$  decreases the angles and shrinks the domain of steady uniform flows. With  $e = 0.8$  ( $\phi = 0.05$ ), the range of angles is  $11^\circ < \theta < 18^\circ$ .

Steady uniform flows with inverted density profiles can therefore be obtained in the framework of the kinetic theory of granular flows. The question we address in this study is the stability of these inverted density profiles under transverse perturbations. Obviously, gravity is a destabilizing effect since the heavy fluid is above the light one. However, gravity has to overcome the stabilizing effects due to viscosity and thermal conductivity. In a rapid granular flow, viscosity, thermal conductivity and density profiles are coupled with the flow and the prediction of the stability properties is not straightforward.

## 4. Three-dimensional linear stability analysis

We investigate the stability of the steady uniform flows  $(v_0, u_0, T_0)$  found in the previous section using the classical normal mode analysis (Drazin & Reid 1981). The basic flow is perturbed by infinitesimal disturbances, and its time evolution is studied by linearizing the governing equations about the basic state. The perturbations are then decomposed into different Fourier modes and because of the linearity of the governing equations, the stability of each mode can be analysed separately.

### 4.1. Normal mode analysis

As pointed out by Alam & Nott (1998), the Squire theorem does not hold for rapid granular flows since density and temperature are not constant across the layer. Therefore, the first instability is not necessarily two-dimensional. In this study, we are interested in the formation of longitudinal structures and we restrict our analysis to flows which are invariant in the  $x$ -direction. The flow  $(v, u, v, w, T)$  is perturbed

around the basic flow  $(v_0, u_0, T_0)$  and written as

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0(z) + v_1(y, z, t), \\ u &= u_0(z) + u_1(y, z, t), \quad v = v_1(y, z, t), \quad w = w_1(y, z, t), \\ T &= T_0(z) + T_1(y, z, t), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

where  $v_1, (u_1, v_1, w_1)$  and  $T_1$  are respectively the density, velocity and temperature disturbances. By substituting (4.1) into the governing equations (2.1)–(2.3) and then linearizing about the basic state, we obtain a set of linear equations for  $(v_1, u_1, v_1, w_1, T_1)$  (see Appendix A, §A.1). Then, we seek normal-mode solutions for density, velocity and temperature perturbations:

$$(v_1, u_1, v_1, w_1, T_1) = \text{Re}[(\hat{v}(z), \hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{T}(z))e^{\sigma t + ky}]. \quad (4.2)$$

We have restricted the stability analysis to temporal stability, i.e. the growth rate  $\sigma$  is complex whereas the transverse wavenumber  $k$  is assumed to be real. The basic flow  $(v_0, u_0, T_0)$  is unstable under the transverse perturbation of wavenumber  $k$  if the real part of the growth rate,  $\text{Re}(\sigma)$ , is positive. After some algebra, it can be shown that the perturbed variables satisfy a system of ordinary differential equations:

$$\mathbf{L}_0(z) \frac{d^2}{dz^2} \hat{X}(z) + \mathbf{M}_0(z) \frac{d}{dz} \hat{X}(z) + \mathbf{N}_0(z) \hat{X}(z) = 0, \quad (4.3)$$

where  $\hat{X}(z)$  is the five-element vector defined by  $\hat{X}(z) = (\hat{v}(z), \hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{T}(z))$ , and  $\mathbf{L}_0(z), \mathbf{M}_0(z), \mathbf{N}_0(z)$  are  $5 \times 5$  matrices which are given in Appendix A, §A.2. Note that these matrices depend on the basic flow  $(v_0, u_0, T_0)$ , on the wavenumber  $k$  and on the growth rate  $\sigma$ . The boundary conditions at the plane can be written in the same manner:

$$\mathbf{Q}_0(z) \frac{d}{dz} \hat{X}(z) + \mathbf{R}_0(z) \hat{X}(z) = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (4.4)$$

where  $\mathbf{Q}_0(z)$  and  $\mathbf{R}_0(z)$  are matrices which are also given in Appendix A, §A.2. At infinity, the disturbances  $\hat{X}(z)$  have to vanish. It can be shown by an asymptotic expansion of equations (4.3) that the disturbances  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})$  decrease as  $\exp(-kz)$  when  $z$  is much larger than the characteristic thickness of the basic flow (see Appendix B). Matching the boundary conditions at infinity thus leads to numerical difficulties when  $k$  becomes small since the computational domain varies as  $1/k$ . Instead of writing the boundary conditions at infinity, the equations are integrated up to a finite value  $z = z_{\max}$  and the disturbances  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})$  are assumed to satisfy

$$\frac{d}{dz} (\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{T}(z)) = -k(\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{T}(z)) \quad \text{at } z = z_{\max}. \quad (4.5)$$

The system of five ordinary differential equations (4.3) together with the eight boundary conditions (4.4) and (4.5) constitute an eigenvalue problem. For a given basic flow  $(v_0, u_0, T_0)$  and wavenumber  $k$ , a non-zero solution  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})$  exists only for specific values of the growth rate  $\sigma$ .

#### 4.2. Numerical method

We have solved the above eigenvalue problem using a Chebychev spectral collocation method (Gottlieb, Hussaini & Orszag 1984). The Chebychev collocation approach has been shown to be well-adapted to the stability of boundary-layer flows, since Chebychev polynomials resolve the boundary regions extremely well (Malik 1990). It is thus suitable for our flow which is localized close to the plane. Moreover, the use

of collocation makes the derivatives easy to compute and simplifies the treatment of boundary conditions.

The principle of the Chebychev spectral collocation method is to discretize the ordinary differential equations (4.3) by interpolating the perturbed functions ( $\hat{v}(z)$ ,  $\hat{u}(z)$ ,  $\hat{v}(z)$ ,  $\hat{w}(z)$ ,  $\hat{T}(z)$ ) on  $N + 1$  collocation points given by

$$\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad (j = 0, \dots, N). \quad (4.6)$$

In order to relate the Chebychev space ( $\zeta \in [-1, 1]$ ) to the physical domain ( $z \in [0, z_{max}]$ ), we use a two-parameter algebraic transformation (Malik 1990)

$$z = a \frac{1 + \zeta}{b - \zeta}, \quad (4.7)$$

where  $b = 1 + 2a/z_{max}$  and  $a = z_h z_{max}/(z_{max} - 2z_h)$ . The location  $z_h$  corresponds to  $\zeta = 0$ , i.e. half of the grid points are located in the region  $0 \leq z \leq z_h$ . This mapping allows us to cluster grid points near the plane. Using the expression for the derivatives at the collocation points (Gottlieb *et al.* 1984), the system of ordinary differential equations (4.3) together with the boundary conditions (4.4) and (4.5) reduces to a linear algebraic eigenvalue problem that can be written in the following form:

$$\mathcal{A} \hat{\mathcal{X}} = \sigma \mathcal{B} \hat{\mathcal{X}}. \quad (4.8)$$

Here,  $\hat{\mathcal{X}}$  is the vector containing the  $5(N + 1)$  elements of the interpolation of ( $\hat{v}(z)$ ,  $\hat{u}(z)$ ,  $\hat{v}(z)$ ,  $\hat{w}(z)$ ,  $\hat{T}(z)$ ) on the  $(N + 1)$  collocation points:

$$(\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_N; \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_N; \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_N; \hat{w}_0, \dots, \hat{w}_N; \hat{T}_0, \dots, \hat{T}_N), \quad (4.9)$$

and  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are  $5(N + 1) \times 5(N + 1)$  matrices computed from the matrices  $\mathbf{L}_0$ ,  $\mathbf{M}_0$  and  $\mathbf{L}_0$ .  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  depend on the basic flow and on the wavenumber  $k$ . Since the boundary conditions (4.5) do not contain the eigenvalue  $\sigma$ , the matrix  $\mathcal{B}$  is singular. Note that the above discretization requires ten boundary conditions while the physical boundary conditions (4.4) and (4.5) give only eight relations for the perturbed fields (four at the plane and four at infinity). The same problem arises in the stability analysis of compressible hydrodynamic flows (Malik 1990). Here we have chosen the conservation of mass at  $z_{max}$  and the vertical momentum balance at the plane as the two extra boundary conditions.

The generalized eigenvalue problem (4.8) is solved by using the scientific software MatLab. The advantage of spectral methods is that the whole spectrum of eigenvalues may be obtained. However, many eigenvalues are spurious due to the discretization (Mayer & Powell 1992). The locations of these spurious modes are very sensitive to the number  $N$  of collocation points while the physical modes are insensitive. This allows us to select the few physical modes among the large spectrum of the discretized problem. With a typical number of collocation points  $N = 50$ , the absolute error in the physical eigenvalues is less than  $10^{-7}$ .

## 5. Results

### 5.1. Diagram of stability

Figure 4 gives the stability diagram in the plane  $(h, \bar{v})$  for  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ . The region of non-inverted density profiles is presented on the same diagram. Since we are mainly interested in thin granular layer flows, we have limited our stability analysis to  $h < 30$  particle diameters. The study is also limited to mean density less than 0.4. For

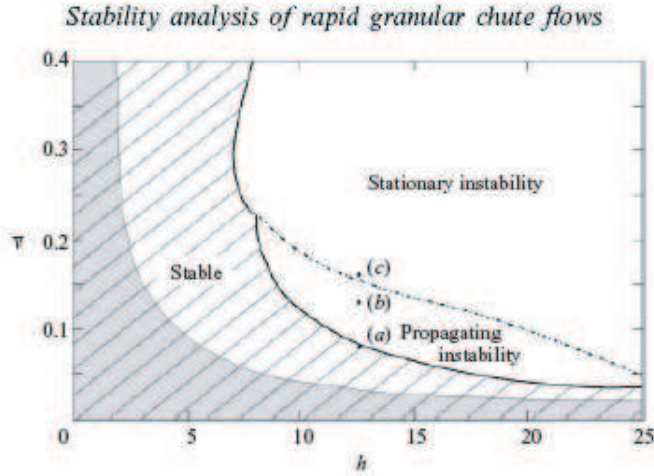


FIGURE 4. Stability diagram for  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ . The flow is stable inside the hatched region and unstable outside. The bold solid line is the marginal curve. The dotted line separates a region where the most amplified mode is propagating from a region where it is stationary. The grey zone is the domain of non-inverted density profiles.

higher mean density, the density profile is very sharp and the number of collocation points required for accurate computation increases dramatically.

The stability diagram can be divided in three regions: a stable region (hatched region), an unstable region with stationary modes, an unstable region with propagating modes in the transverse direction. The stable zone is delimited by the marginal curve where the real part of  $\sigma$  vanishes. For  $h$  less than 7 particle diameters, the flow is always stable whatever the value of the mean density. The unstable region is composed of two regions: one where the most amplified mode is stationary i.e.  $\text{Im}(\sigma) = 0$ , and one where the most amplified mode is propagating, i.e. with a non-zero phase velocity in the transverse direction ( $\text{Im}(\sigma) \neq 0$ ). Propagating modes are obtained at low density while stationary instability occurs at high density.

The transition between the stationary instability and propagating modes appears clearly in figure 5, where we have plotted the growth rate  $\text{Re}(\sigma)$  and  $\text{Im}(\sigma)$  as a function of the wavenumber  $k$ , for the most unstable mode at different locations in the stability diagram ( $a$ ,  $b$  and  $c$  in figure 4). We keep the thickness constant ( $h = 12.8$ ) and increase the mean density from  $\bar{v} = 0.08$  to  $\bar{v} = 0.16$ . The stationary mode in ( $c$ ) appears from the collapse of the two conjugated propagating modes. In figure 5 we also observe that at the threshold of the instability, the first unstable mode occurs at a finite wavenumber  $k_c$ . We have systematically studied the critical wavelength  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  along the marginal curve. When the instability is stationary, the wavelength  $\lambda_c$  is nearly constant and equal to twice the thickness of the flow. By contrast, the wavelength  $\lambda_c$  strongly varies along the marginal curve for the propagating instability. In figure 6 we have plotted  $\lambda_c/h$  as a function of  $h$ . We observe that  $\lambda_c$  is about 2.5 the thickness  $h$  of the flow as long as  $h < 15$  particle diameters but starts to increase for large thickness. For example,  $h = 21$  corresponds to a wavelength  $\lambda_c = 315$ , which is 15 times the thickness of the flow. We shall discuss this behaviour later as the signature of a change in the instability mechanism.

### 5.2. Eigenfunctions

The three-dimensional stability analysis of the basic flow also gives the five eigenfunctions ( $\hat{v}(z), \hat{u}(z), \hat{w}(z), \hat{T}(z)$ ) for a given wavenumber  $k$  and growth rate  $\sigma$ .

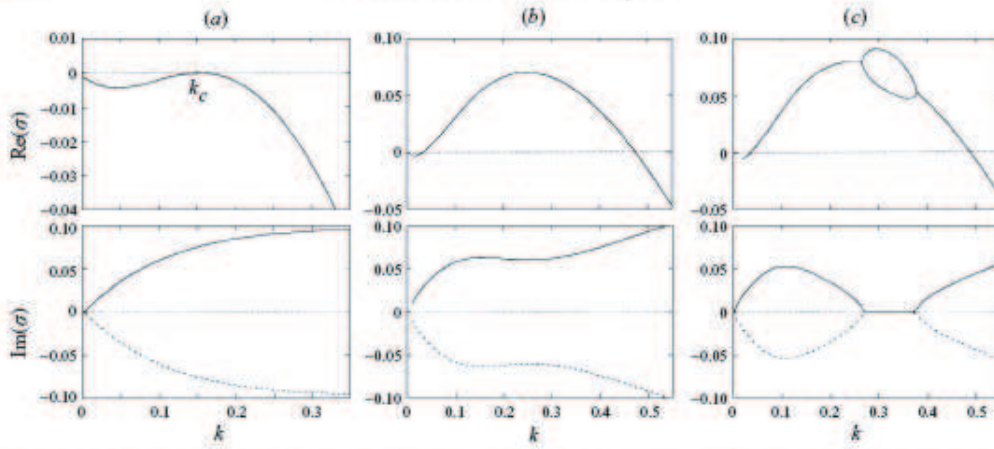


FIGURE 5. Growth rate  $\text{Re}(\sigma)$  and  $\text{Im}(\sigma)$  as a function of the wavenumber  $k$  for the most dangerous mode. The thickness is constant ( $h = 12.8$ ) and the mean density is increased:  $\bar{v} = 0.08$  (A),  $\bar{v} = 0.13$  (B) and  $\bar{v} = 0.16$  (C) (see the stability diagram in figure 4).  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ .

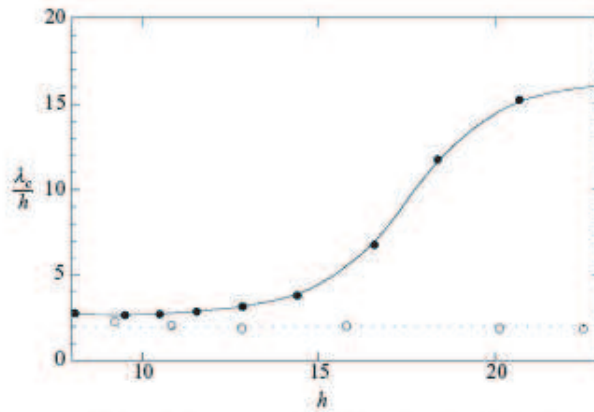


FIGURE 6.  $\lambda_c/h$  (●) as a function of  $h$ , where  $\lambda_c$  is the wavelength selected by the instability along the marginal curve for the propagating instability. The open circles (○) are the same curve obtained when the collisional dissipation  $\gamma_1$  is artificially set to zero.  $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ .

In figure 7, we have plotted the real part of the eigenfunctions corresponding to the most amplified mode for ( $h = 8, \bar{v} = 0.23$ ). This mode is stationary. We observe that the perturbation of density  $\hat{v}(z)$  vanishes for  $z > h$  whereas the velocity and temperature perturbations extend further and decay exponentially (see Appendix B). From these eigenfunctions, we can simply recover the perturbed field  $(v_1, u_1, v_1, w_1, T_1)(y, z, t)$ . For example,  $v_1(y, z, t)$  is obtained from the eigenfunction  $\hat{v}(z)$  by the relation  $v_1(y, z, t) = \text{Re}[\hat{v}(z) \exp(\sigma t + ik_y y)]$  (see equation (4.2)). In the following the perturbed fields are plotted for  $t = 0$ . In figure 8, we present the perturbations of the flow corresponding to the most amplified stationary mode presented in figure 7 ( $h = 8, \bar{v} = 0.23$ ). The pattern is typical of that observed in the stationary unstable region. Figure 8(a) presents the transverse velocity field  $(v_1(y, z, 0), w_1(y, z, 0))$ . We can see that the motion in the transverse plane consists of counter-rotating vortices with a pair of vortices per wavelength  $\lambda$ . This transverse flow is strongly correlated with the perturbation of the longitudinal velocity. Figure 8(b) shows the contours of constant

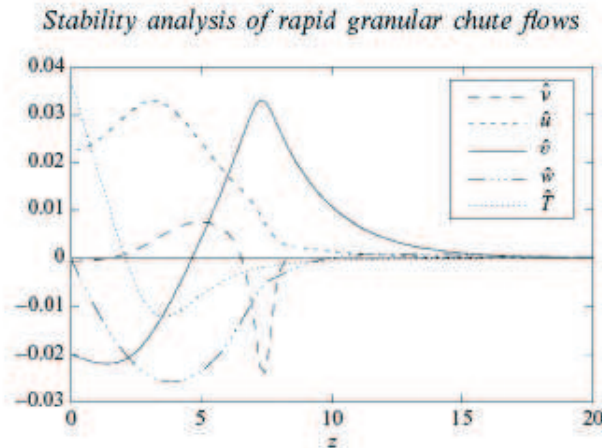


FIGURE 7. Real part of the eigenfunctions ( $\hat{v}(z)$ ,  $\hat{u}(z)$ ,  $\hat{\phi}(z)$ ,  $\hat{w}(z)$ ,  $\hat{T}(z)$ ) corresponding to the stationary mode ( $h = 8$ ,  $\bar{v} = 0.23$ ,  $k = 0.4$ ,  $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ ).

value for the perturbed longitudinal velocity  $u_1(y, z, 0)$ . The material moving towards the plane is flowing faster in the slope direction than the material rising up to the free surface. Therefore, the three-dimensional structure of the perturbed flow consists of longitudinal vortices with transverse variation of the longitudinal velocity.

The corresponding perturbations of density  $v_1(y, z, 0)$  and temperature  $T_1(y, z, 0)$  are given in figure 8(c, d). The perturbed density results from two effects: the advection of the basic flow by the transverse perturbed flow and the compressibility. In order to compare more easily the density with the transverse flow, we have plotted in figure 9 the depth-averaged density  $\mu(y) = \int_0^{z_{\max}} v_1(y, z) dz$  as a function of the transverse direction  $y$  (solid line). The vertical velocity is given on the same plot (dotted line). We observe that the average density is higher where the flow is downwards and smaller when the flow is upwards. The perturbation of density can also be interpreted in terms of a free-surface perturbation. If we define the free surface as the surface where the total density ( $v_0(z) + v_1(y, z, 0)$ ) is constant and equal to 1% of the maximum value of  $v_0(z)$ , we obtain the bold solid line in figure 8(a). One can see that the downward part of the flow corresponds to a trough while the upward part of the flow corresponds to a crest.

Most of the features of the stationary modes are recovered for the propagating modes except that the whole pattern is now drifting in the transverse direction, due to the non-zero phase velocity (see figure 10). Qualitative differences exist since the propagating modes lead to a phase shift between the eigenfunctions. The vortices are asymmetric as shown in figure 10(a) and the transverse variations of density and longitudinal velocity are no longer in phase but slightly shifted.

### 5.3. Influence of the parameters

The results of the stability analysis presented in the previous section have been obtained for a given set of parameters  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ . Changing these parameters modifies the solutions for steady uniform flows and therefore modifies the results of the stability analysis. However, the main results of the previous section are not qualitatively changed in the range of parameters  $(e, \phi)$  where inverted density profiles are observed. For instance, we have performed the stability analysis using  $e = 0.8$  and  $\phi = 0.12$  and recovered the instability and the formation of longitudinal vortices. The

376

Y. Forterre and O. Pouliquen

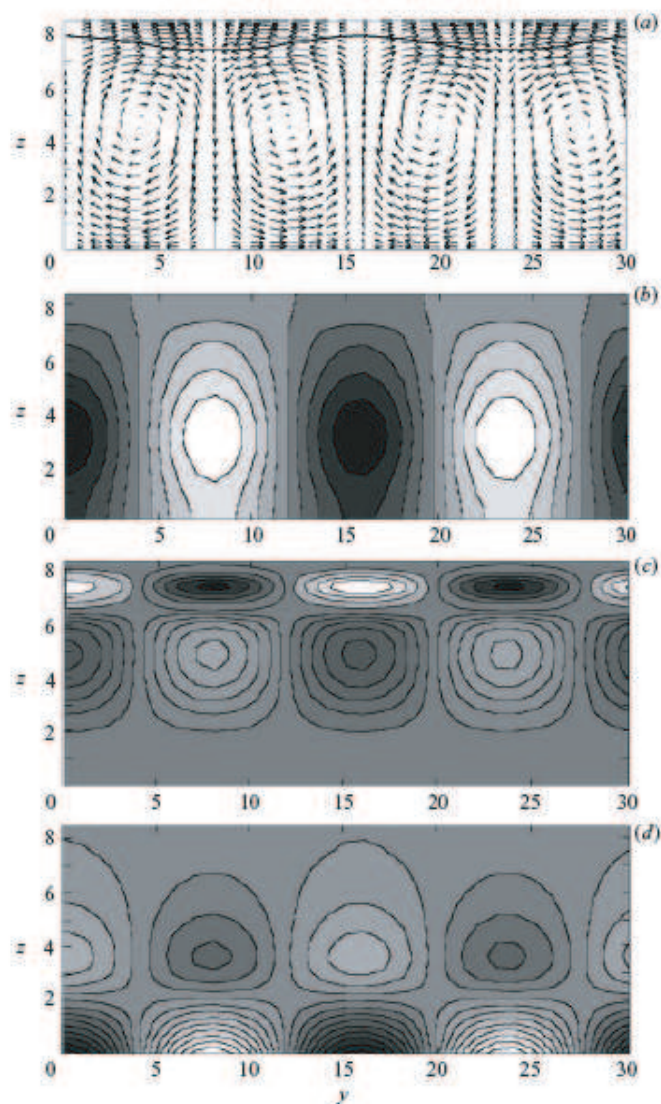


FIGURE 8. Perturbed fields corresponding to the stationary mode ( $h = 8$ ,  $\bar{\nu} = 0.23$ ,  $k = 0.4$ ): (a) transverse velocity field, the bold solid line gives the free-surface deformation; (b), (c), (d) contours of constant values for longitudinal velocity, density and temperature. The grey level is white for the most positive value and black for the most negative value.  $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ .

domain of propagating instability increases with higher values of  $\phi$  and the vortices are more tilted from the vertical for the propagating unstable modes (see figure 11).

However, an important difference with the case  $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$  is that the curve of marginal stability may overlap the domain of non-inverted density profiles. This means that for some values of  $\phi$  and  $e$ , it is possible to find basic flows with non-inverted density profiles which are unstable. These non-inverted unstable flows are observed in a narrow range of the stability diagram for large thickness ( $h > 30$ ) and small density ( $\bar{\nu} < 0.1$ ). We will see in the next section that inelasticity is responsible of the instability of such non-inverted density profiles.



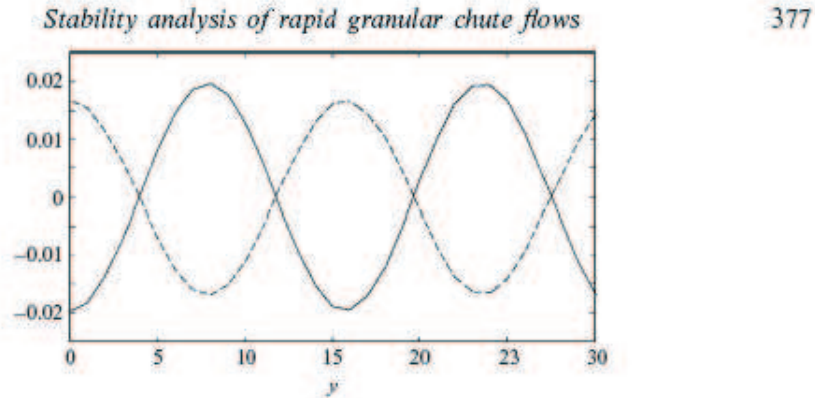


FIGURE 9. Perturbed depth-averaged density  $\mu(y) = \int_0^{2\pi} v_1(y, z) dz$  (solid line) as a function of  $y$  for the stationary unstable mode ( $h = 8$ ,  $\bar{v} = 0.23$ ,  $k = 0.4$ ). The dotted line presents the transverse variations of the perturbed vertical velocity  $w_1$  (arbitrary scale). The perturbed averaged density is higher where the flow is going downwards ( $w_1 < 0$ ) and smaller when the flow is going upwards ( $w_1 > 0$ ).  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ .

## 6. Discussion

### 6.1. Instability mechanism and role of the inelasticity

In figure 4, the domain of non-inverted density profiles is shown together with the domain of instability. The correlation between the two regions suggests that inversion of the density profile plays an important role in the instability mechanism. We have checked the role of gravity by artificially modifying  $g$  in the linearized equations. In a wide range of thickness and mean density, increasing gravity increases the growth rate whereas decreasing gravity stabilizes the flow. In that case, the instability comes from the inversion of the density profile, which is due to the self-heating at the plane ('Rayleigh-Bénard' type of instability mechanism). In fluid mechanics, the Rayleigh-Bénard instability is controlled at the threshold by a single dimensionless parameter, the Rayleigh number  $Ra = g\rho\Delta\rho h^3/\eta K$ . In a granular flow, it is difficult to define such a non-local control parameter since the Boussinesq approximation is far from satisfied. Indeed, flow quantities (density, temperature) as well as transport coefficients (viscosities, conductivity) vary strongly inside the flow.

As pointed out in the previous section, some flows with non-inverted density profiles are unstable (e.g. with  $e = 0.8$  and  $\phi = 0.12$ ). This means that gravity is not the only destabilizing effect. Another well-known source of instability in granular flows is inelasticity. Studies on two-dimensional shear flows have shown that the dissipation due to inelastic collisions can lead to the formation of clusters (Tan & Goldhirsch 1997; Alam & Nott 1998). In order to better understand the role of dissipation in our problem, we have performed the stability analysis by setting to zero the collisional rate of energy dissipation  $\gamma_1$  in the linearized energy equation. In all the other terms, inelasticity is kept in order to study the same basic flow. Figure 12 presents on the same diagram the curve of marginal stability in the cases  $\gamma_1 \neq 0$  and  $\gamma_1 = 0$  ( $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ ). We observe that the flow remains unstable in a wide range of parameters with  $\gamma_1 = 0$ . This proves that inelasticity is not necessary to obtain an instability. For thin and dense flows, inelasticity stabilizes the flow whereas for dilute flows inelasticity slightly lowers the threshold. The interesting point is that non-inverted density profiles are always stable without inelasticity, whatever the choice of parameters  $e$  and  $\phi$ . The dissipation also strongly influences the wavelength selection  $\lambda_c$  at the threshold. In figure 6 we have plotted  $\lambda_c/h$  as a function of  $h$  both for  $\gamma_1 \neq 0$  (solid circles)

378

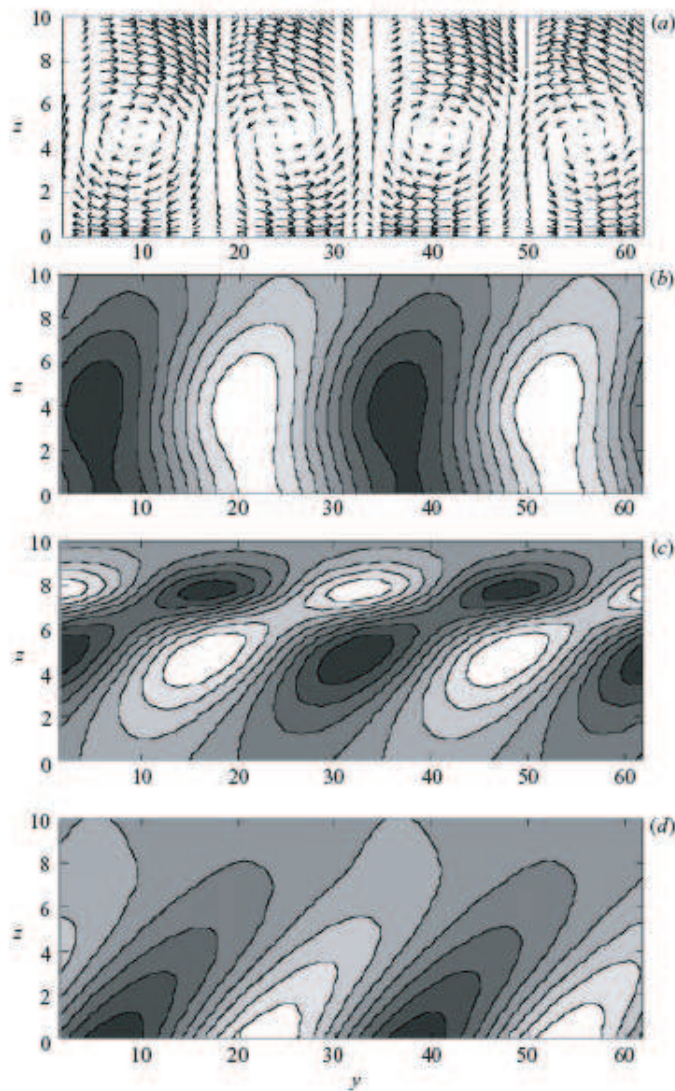
*Y. Forterre and O. Pouliquen*

FIGURE 10. Perturbed fields corresponding to the propagating mode ( $h = 10$ ,  $\bar{\nu} = 0.13$ ,  $k = 0.2$ ): (a) transverse velocity field; (b), (c), (d) contours of constant values for longitudinal velocity, density and temperature.  $\varepsilon = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ .

and  $\gamma_1 = 0$  (open circles). When the dissipation is zero  $\gamma_1 = 0$ , the wavelength at the threshold scales with the thickness of the flow over the whole range of thickness ( $\lambda_c \sim 2h$ ). This implies that the increase of  $\lambda_c$  for large  $h$  observed in the real system ( $\gamma_1 \neq 0$ ) comes from inelasticity.

This analysis suggests that both gravity and inelasticity contribute to the instability depending on the parameters. For thin and dense flows, gravity is the dominant destabilizing effect giving rise to a Rayleigh–Bénard kind of instability, whereas for large and dilute flows inelasticity is the principal ingredient of instability, giving rise to a clustering-like instability. However, it is not possible to separate the two effects since gravity and inelasticity are associated with the same unstable mode.

## Stability analysis of rapid granular chute flows

379

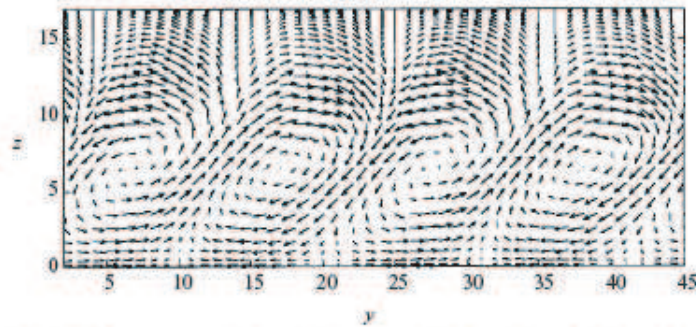


FIGURE 11. Typical transverse velocity field with  $e = 0.8$  and  $\phi = 0.12$  for the propagating instability ( $h = 17$ ,  $\bar{v} = 0.25$ ,  $k = 0.3$ ).

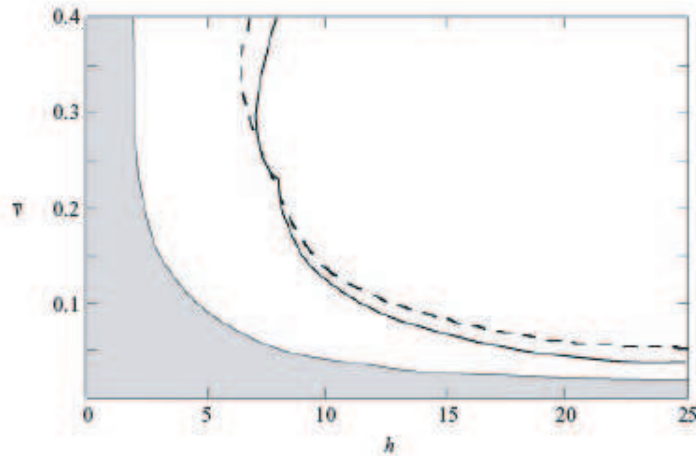


FIGURE 12. Role of inelasticity on the stability diagram. The solid line is the marginal curve with  $\gamma_1 \neq 0$  and the dotted line is the marginal curve with  $\gamma_1 = 0$  ( $e = 0.6$ ,  $\phi = 0.05$ ). The grey zone is the domain of non-inverted density profiles.

### 6.2. Comparison with experimental observations

The present study captures the principal features of the longitudinal vortices instability. First, our analysis has shown that steady uniform flows down inclined planes may be unstable under transverse perturbations. In the range of parameters of the experiment ( $h = 10\text{--}12$  grain diameters,  $\bar{v} = 0.2\text{--}0.3$ ), the physical origin of this instability is the inversion of the density profile, which is induced by the self-heating at the plane. Secondly, the unstable flow consists of longitudinal vortices leading to surface deformation, and transverse variations of longitudinal velocity and density in agreement with the experimental observations. As observed in the experiment, the longitudinal velocity is larger in the troughs (i.e. where the flow is going downwards) than in the crests (i.e. where the flow is going upwards). The same variation occurs with the density: troughs are dense and crests are dilute. Finally, the instability selects a wavelength which is always 2–3 times the average thickness of the flow above the threshold, as observed in the experiment.

It is more difficult to perceive the relevance of this analysis in explaining the phase velocity observed in the experiment. We have seen that depending on the control parameters ( $h, \bar{v}$ ), the growth rate of the instability may be complex, i.e.  $\sigma_i \neq 0$ .

This imaginary part of the growth rate is associated to a phase velocity  $v_\phi = \sigma_i/k$ , where  $k$  is the wavenumber. A typical order of magnitude for  $v_\phi$  is  $(0.1-0.5)\sqrt{gd}$  which is a few percent of the chute velocity. This order of magnitude is compatible with the drift velocity observed in the experiment. However, the theory predicts a transition between propagating and stationary instability, which is not observed in the experiment. Moreover, in the range of parameters of the experiment, the theory predicts a stationary instability. The phase velocity observed experimentally is more likely to be related to the very weak inclination of the pattern in the experiment. This inclination is not taken into account in this study since we have restricted our analysis to pure transverse perturbations ( $k_x = 0, k_y \neq 0$ ). It would be interesting to investigate the stability of steady uniform flows when a small perturbation in the longitudinal direction ( $k_x \ll 1$ ) is added to the  $k_y$  perturbation. This should give rise to a phase velocity in the whole range of parameters.

The agreement between theory and experiment is only qualitative. The most important discrepancy between theory and experiment lies in the range of angles where the instability is predicted. With  $e = 0.6$  and  $\phi = 0.05$ , the predicted angles are  $\theta \sim 20^\circ$  while in the experiment the minimum angle in order to observe the instability is  $\theta = 38^\circ$  with sand 0.25 mm diameter. The same order of magnitude is obtained in the experiment with monodisperse glass beads. In the theory, it is not possible to reach such inclinations by varying the parameters ( $e, \phi$ ) except for non-physical values of inelasticity ( $e \sim 0$ ). However, this discrepancy between theory and experiment is not surprising since the standard kinetic theory is known to be limited. The kinetic theory was first developed for quasi-elastic particles ( $e \sim 1$ ) and rather dilute flows. Even under these conditions, experimental studies of two-dimensional collisional granular flows down inclined planes have shown that the theory is not quantitative (Azanza *et al.* 1999). One of the main problems of the kinetic theory is the determination of the boundary conditions at the rough plane. Experiments indicate that, even in the collisional regime, the material is structured near the plane (Azanza *et al.* 1999). This local organization is not taken into account in the kinetic theory. Since boundary conditions control the production of granular temperature, it is not surprising that the theory fails to quantitatively describe steady uniform flows. Another difficulty of the kinetic theory lies in the treatment of strongly inelastic particles. For high inelasticity, additional terms should be introduced in the kinetic theory in order to take into account the lack of separation between the microscopic and macroscopic scales inherent to inelasticity (Tan & Goldhirsch 1999; Sela & Goldhirsch 1998). However, such additional terms complicate considerably the equations and are still the subject of active research (Goldhirsch 1999).

## 7. Conclusion

In this paper, we have performed a three-dimensional stability analysis of rapid granular flows in the framework of the kinetic theory of granular gases. We have shown that steady uniform flows down inclined planes can be unstable under transverse perturbations. The structure of the unstable flow consists of longitudinal vortices with transverse variations of free surface, chute velocity and density in agreement with the experimental observations (Forterre & Pouliquen 2001). However, the agreement is only qualitative. This is not surprising since the experiments take place in thin flows (10 particle diameters thick), in a semi-dilute regime and use rather inelastic particles, which is beyond the domain of applicability of the simple kinetic theory used in the analysis. The validity of continuous hydrodynamics equations could even

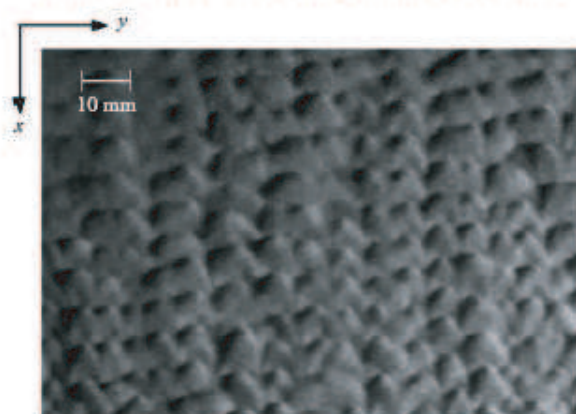


FIGURE 13. Top view of the free surface of the flow showing the formation of ‘scales’ when the plane is strongly inclined (sand 0.25 mm mean diameter,  $\theta = 52^\circ$ ,  $h_s = 15$  m). The picture is taken with a short shutter time of 1/10 000 s.

be discussed for such thin flows. However, our study shows that the kinetic theory is a relevant framework for the description of rapid granular flows. The kinetic theory has revealed a new instability mechanism specific to granular material: inelastic collisions trigger a self-induced convection yielding longitudinal vortices in chute flows.

In classical fluid mechanics, Rayleigh–Bénard convection is the paradigm for pattern forming instabilities and the study of spatio-temporal chaos. Therefore, an important question is whether the granular convection observed in our experiment represents the starting point of a similar scenario towards more complex structures. We have observed in the experiment a new pattern when the plane is strongly inclined ( $\theta > 50^\circ$  with sand 0.25 mm in mean diameter). Instead of longitudinal streaks, a regular square pattern looking like fish scales develops on the free surface, as shown in figure 13. Similar structures have been observed in rotating drums (Fried, Shen & Thoroddsen 1998). Note that under such inclinations, a fast camera is necessary to capture this structure. The appearance of this new pattern raises several issues. A first possibility is that for this range of parameters the square pattern represents the most unstable mode for the primary instability, as for example observed in inclined layer convection (Daniels, Brendan & Bodenschatz 2000). This could be investigated by generalizing the present stability analysis to longitudinal modes, i.e.  $k_x \neq 0$  and  $k_y \neq 0$ . A second possibility is that the ‘scales’ result from a secondary instability of the longitudinal vortices, as a consequence of nonlinear effects. Such an evolution is well-documented for classical fluid flows (Godrèche & Manneville 1998) but still remains an open issue for granular flows.

This work was supported by the French Ministry of Research and Education (ACI blanche #2018). We thank Stéphane Le Dizès and Jacques Liandrat for fruitful discussions.

## Appendix A

In this Appendix we detail the main steps of the linear stability analysis presented in §4.1.

A.1. *Linearization of the governing equations*

The linearization of the mass equation (2.1), the momentum equation (2.2) and the energy equation (2.3) around the basic flow  $(v_0, u_0, T_0)$  gives

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -v_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) - \frac{du_0}{dz} w_1, \tag{A 1}$$

$$v_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{du_0}{dz} w_1 \right) = v_1 \sin \theta + \frac{\partial \Sigma_{xy1}}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma_{xz1}}{\partial z}, \tag{A 2}$$

$$v_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \Sigma_{yy1}}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma_{yz1}}{\partial z}, \tag{A 3}$$

$$v_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = -v_1 \cos \theta + \frac{\partial \Sigma_{zy1}}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma_{zz1}}{\partial z}, \tag{A 4}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} v_0 \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{dT_0}{dz} w_1 \right) = & \Sigma_{xz1} \frac{du_0}{dz} + \Sigma_{xz0} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \Sigma_{yy0} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \Sigma_{zz0} \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ & - \frac{\partial q_{y1}}{\partial y} - \frac{\partial q_{z1}}{\partial z} - \gamma_1. \end{aligned} \tag{A 5}$$

where  $\Sigma_1$  is the stress tensor disturbance,  $q_1$  is the heat flux disturbance and  $\gamma_1$  is the energy dissipation disturbance given by

$$\begin{aligned} \Sigma_{xy1} &= \eta_0 \frac{\partial u_1}{\partial y}, \\ \Sigma_{xz1} &= \eta_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \eta_1 \frac{du_0}{dz}, \\ \Sigma_{yy1} &= -P_1 + (\xi_0 - \frac{2}{3}\eta_0) \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + 2\eta_0 \frac{\partial v_1}{\partial y}, \\ \Sigma_{yz1} &= \eta_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right), \\ \Sigma_{zz1} &= -P_1 + (\xi_0 - \frac{2}{3}\eta_0) \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) + 2\eta_0 \frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ q_{y1} &= K_0 \frac{\partial T_1}{\partial y}, \\ q_{z1} &= K_0 \frac{\partial T_1}{\partial z} + K_1 \frac{dT_0}{dz}. \end{aligned}$$

Here the pressure disturbance  $P_1$ , the viscosity disturbance  $\eta_1$ , the conductivity disturbance  $K_1$  and the energy dissipated disturbance  $\gamma_1$  are linearized functions of  $v_1$  and  $T_1$  which are given in table 2.

The system of equations (A 1)–(A 5) must be considered together with the boundary conditions for the disturbances  $(v_1(z), u_1(z), v_1(z), w_1(z), T_1(z))$ . At the plane, the boundary conditions are written as

$$w_1 = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, \tag{A 6}$$

$$\eta_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \eta_1 \frac{du_0}{dz} = \eta_0^* u_1 + \eta_1^* u_0 \quad \text{at} \quad z = 0, \tag{A 7}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= f'_1(v_0)T_0v_1 + f_1(v_0)T_1 = a_0v_1 + b_0T_1 \\
\eta_1 &= f'_2(v_0)T_0^{1/2}v_1 + \frac{1}{2}f_2(v_0)T_0^{-1/2}T_1 = c_0v_1 + d_0T_1 \\
K_1 &= f'_3(v_0)T_0^{1/2}v_1 + \frac{1}{2}f_3(v_0)T_0^{-1/2}T_1 = e_0v_1 + h_0T_1 \\
\gamma_1 &= f'_5(v_0)T_0^{3/2}v_1 + \frac{3}{2}f_5(v_0)T_0^{1/2}T_1 = l_0v_1 + m_0T_1 \\
\eta_1^* &= \phi f'_6(v_0)T_0^{1/2}v_1 + \frac{1}{2}\phi f_6(v_0)T_0^{-1/2}T_1 = n_0v_1 + p_0T_1 \\
\gamma_1^* &= (1 - e^2)f'_7(v_0)T_0^{3/2}v_1 + \frac{3}{2}(1 - e^2)f_7(v_0)T_0^{1/2}T_1 = q_0v_1 + r_0T_1
\end{aligned}$$

TABLE 2. Pressure disturbance  $P_1$ , viscosity disturbance  $\eta_1$  and  $\eta_1^*$ , conductivity disturbance  $K_1$  and energy dissipated disturbance  $\gamma_1$  and  $\gamma_1^*$ .

$$\eta_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) = \eta_0^* v_1 \quad \text{at } z = 0, \quad (\text{A } 8)$$

$$-K_0 \frac{\partial T_1}{\partial z} - K_1 \frac{dT_0}{dz} = \eta_1 \frac{du_0}{dz} u_0 + \eta_0 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \eta_0 \frac{du_0}{dz} u_1 + \gamma_1^* \quad \text{at } z = 0, \quad (\text{A } 9)$$

where  $\eta_1^*$  and  $\gamma_1^*$  are given in table 2. The first condition (A 6) simply expresses that the plane is rigid. The last three conditions (A 7)–(A 9) are the boundary conditions (2.10) and (2.11), which are linearized around the basic flow  $(v_0, u_0, T_0)$ . At infinity, we assume the disturbances vanish:

$$v_1, u_1, v_1, w_1, T_1 \rightarrow 0 \quad \text{when } z \rightarrow \infty. \quad (\text{A } 10)$$

### A.2. Matrices of the eigenvalue problem

The non-zero elements of the coefficient matrices in equations (4.3) and (4.4) are given below. The definitions of the functions of the basic flow  $(a_0, \dots, r_0)$  are given in table 2.

$$\begin{aligned}
L_{22} &= \eta_0, & L_{33} &= \eta_0, & L_{44} &= \xi_0 + \frac{4}{3}\eta_0, & L_{55} &= K_0, \\
M_{14} &= v_0, & M_{21} &= c_0 \frac{du_0}{dz}, & M_{22} &= \frac{d\eta_0}{dz}, & M_{25} &= d_0 \frac{du_0}{dz}, & M_{33} &= \frac{d\eta_0}{dz}, \\
M_{34} &= ik(\xi_0 + \frac{1}{3}\eta_0), & M_{41} &= -a_0, & M_{43} &= ik(\xi_0 + \frac{1}{3}\eta_0), & M_{44} &= \frac{d\xi_0}{dz} + \frac{4}{3} \frac{d\eta_0}{dz}, \\
M_{45} &= -b_0, & M_{51} &= e_0 \frac{dT_0}{dz}, & M_{52} &= 2\eta_0 \frac{du_0}{dz}, \\
M_{54} &= -P_0, & M_{55} &= \frac{dK_0}{dz} + h_0 \frac{dT_0}{dz}, \\
N_{11} &= \sigma, & N_{13} &= ikv_0, & N_{14} &= \frac{du_0}{dz}, & N_{21} &= \sin \theta + c_0 \frac{d^2 u_0}{dz^2} + \frac{dc_0}{dz} \frac{du_0}{dz}, \\
N_{22} &= -\sigma v_0 - k^2 \eta_0, & N_{24} &= -v_0 \frac{du_0}{dz}, & N_{25} &= d_0 \frac{d^2 u_0}{dz^2} + \frac{dd_0}{dz} \frac{du_0}{dz}, \\
N_{31} &= -ika_0, & N_{33} &= -\sigma v_0 - k^2(\xi_0 + \frac{4}{3}\eta_0), & N_{34} &= ik \frac{d\eta_0}{dz}, \\
N_{35} &= -ikb_0, & N_{41} &= -\cos \theta - \frac{da_0}{dz}, & N_{43} &= ik \left( \frac{d\xi_0}{dz} - \frac{2}{3} \frac{d\eta_0}{dz} \right),
\end{aligned}$$

384

*Y. Forterre and O. Pouliquen*

$$\begin{aligned}
N_{44} &= -\sigma v_0 - k^2 \eta_0, & N_{45} &= -\frac{db_0}{dz}, \\
N_{51} &= c_0 \left( \frac{du_0}{dz} \right)^2 + e_0 \frac{d^2 T_0}{dz^2} + \frac{de_0}{dz} \frac{dT_0}{dz} - l_0, & N_{53} &= -ikP_0, & N_{54} &= -\frac{3}{2} v_0 \frac{dT_0}{dz}, \\
N_{55} &= -\frac{3}{2} v_0 \sigma - k^2 K_0 + d_0 \left( \frac{du_0}{dz} \right)^2 + h_0 \frac{d^2 T_0}{dz^2} + \frac{dh_0}{dz} \frac{dT_0}{dz} - m_0, \\
Q_{22} &= \eta_0, & Q_{33} &= \eta_0, & Q_{52} &= -\eta_0 u_0, & Q_{55} &= -K_0, \\
R_{14} &= 1, & R_{21} &= c_0 \frac{du_0}{dz} - u_0 n_0, & R_{22} &= -\eta_0^*, & R_{33} &= -\eta_0^*, & R_{34} &= ik\eta_0, \\
R_{51} &= -e_0 \frac{dT_0}{dz} - c_0 u_0 \frac{du_0}{dz} + q_0, & R_{52} &= -\eta_0 \frac{du_0}{dz}, & R_{55} &= -h_0 \frac{dT_0}{dz} - d_0 u_0 \frac{du_0}{dz} + r_0.
\end{aligned}$$

### Appendix B

Here we give the asymptotic behaviour of the disturbances  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})$  when  $z$  is much larger than the characteristic thickness of the basic flow. The linearized equations (4.3) which govern the disturbances can be written as

$$\sigma \hat{v} = -v_0 \left( ik \hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) - \frac{du_0}{dz} \hat{w}, \quad (\text{B } 1)$$

$$v_0 \left( \sigma \hat{u} + \frac{du_0}{dz} \hat{w} \right) = \hat{v} \sin \theta - k^2 \eta_0 \hat{u} + \frac{d}{dz} \left( \eta_0 \frac{d\hat{u}}{dz} + \hat{\eta} \frac{du_0}{dz} \right), \quad (\text{B } 2)$$

$$v_0 \sigma \hat{v} = -ik \hat{P} + (\xi_0 - \frac{2}{3} \eta_0) \left( -k^2 \hat{v} + ik \frac{d\hat{w}}{dz} \right) - 2\eta_0 k^2 \hat{v} + \frac{d}{dz} \left( \eta_0 \frac{d\hat{v}}{dz} + ik \eta_0 \hat{w} \right), \quad (\text{B } 3)$$

$$\begin{aligned}
v_0 \sigma \hat{w} &= -\hat{v} \cos \theta - \frac{d\hat{P}}{dz} + \eta_0 \left( ik \frac{d\hat{v}}{dz} - k^2 \hat{w} \right) + \frac{d}{dz} \left[ (\xi_0 - \frac{2}{3} \eta_0) \left( ik \hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) \right] \\
&\quad + 2 \frac{d}{dz} \left( \eta_0 \frac{d\hat{w}}{dz} \right), \quad (\text{B } 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} v_0 \left( \sigma \hat{T} + \frac{dT_0}{dz} \hat{w} \right) &= \left( \eta_0 \frac{d\hat{u}}{dz} + \hat{\eta} \frac{du_0}{dz} \right) \frac{du_0}{dz} + \eta_0 \frac{du_0}{dz} \frac{d\hat{u}}{dz} - P_0 \left( ik \hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} \right) - k^2 K_0 \hat{T} \\
&\quad + \frac{d}{dz} \left( K_0 \frac{d\hat{T}}{dz} + \hat{K} \frac{dT_0}{dz} \right) - \hat{\nu}. \quad (\text{B } 5)
\end{aligned}$$

In order to obtain the asymptotic expressions for these equations, one has to know the asymptotic behaviour of the basic flow. Equation (3.5) shows that the zero-order density  $v_0$  decays exponentially to zero as

$$v_0 \rightarrow \exp \left( -\frac{\cos \theta}{T_0} z \right)$$

when  $z$  is large. Using equations (3.5)–(3.7), the asymptotic behaviour of the basic flow is given by

$$\frac{du_0}{dz} \sim v_0, \quad \frac{d^2 u_0}{dz^2} \sim v_0, \quad (\text{B } 6)$$



*Stability analysis of rapid granular chute flows*

385

$$\frac{dT_0}{dz} \rightarrow 0, \quad \frac{d^2T_0}{dz^2} \rightarrow 0, \quad (\text{B } 7)$$

$$\eta_0 \rightarrow C, \quad \frac{d\eta_0}{dz} \rightarrow 0, \quad (\text{B } 8)$$

$$K_0 \rightarrow D, \quad \frac{dK_0}{dz} \rightarrow 0, \quad (\text{B } 9)$$

$$P_0 \sim v_0, \quad (\text{B } 10)$$

$$\xi_0 \sim v_0^2, \quad \frac{d\xi_0}{dz} \sim v_0^2, \quad (\text{B } 11)$$

Substituting (B 6)–(B 11) into the linearized equations (B 1)–(B 5) gives an asymptotic behaviour for  $z$  which is much larger than the characteristic thickness of the basic flow. From equation (B 1), the perturbed density decays on the same length scale as the basic flow:

$$\hat{v} \sim v_0. \quad (\text{B } 12)$$

Therefore, the asymptotic limit of equations (B 1)–(B 5) is given by

$$\frac{d^2\hat{u}}{dz^2} - k^2\hat{u} = 0, \quad (\text{B } 13)$$

$$\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} - \frac{4}{3}k^2\hat{v} + \frac{1}{3}ik \frac{d\hat{w}}{dz} = 0, \quad (\text{B } 14)$$

$$\frac{1}{3}ik \frac{d\hat{v}}{dz} + \frac{4}{3} \frac{d^2\hat{w}}{dz^2} - k^2\hat{w} = 0, \quad (\text{B } 15)$$

$$\frac{d\hat{T}}{dz} - k^2\hat{T} = 0. \quad (\text{B } 16)$$

These equations are easily solved and give

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{T} \end{pmatrix} \sim \exp(-kz)$$

when  $z$  is much larger than the characteristic thickness of the basic flow.

#### REFERENCES

- AHN, H., BRENNEN, C. E. & SABERSKY, R. H. 1992 Analysis of the fully developed chute flow of granular materials. *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* **59**, 109–119.
- ALAM, M. & NOTT, P. R. 1998 Stability of plane Couette flow of a granular material. *J. Fluid Mech.* **377**, 99–136.
- ANDERSON, K. G. & JACKSON, R. 1992 A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials for fully developed flow down inclined planes. *J. Fluid Mech.* **241**, 145–168.
- AZANZA, E. 1998 Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné. PhD Dissertation, École Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- AZANZA, E., CHEVOIR, F. & MOUCHERONT, P. 1999 Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **400**, 199–227.
- BREY, J. J., DUFTY, J. W., KIM, C. S. & SANTOS, A. 1998 Hydrodynamics for granular flow at low density. *Phys. Rev. E* **58**, 4638–4653.
- CAMPBELL, C. S. 1990 Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 57–92.

- CAMPBELL, C. S. & BRENNEN, C. E. 1985 Chute flows of granular material: some computer simulation. *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* **52**, 172–178.
- CHAPMAN, S. & COWLING, T. G. 1970 *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*, 3rd edn. Cambridge University Press.
- DANIELS, K. E., BRENDAN, B. P. & BODENSCHATZ, E. 2000 Pattern formation in inclined layer convection. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5320–5323.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- FALCON, E., FAUVE, S. & LAROCHE, C. 1999 Cluster formation, pressure and density measurements in a granular medium fluidized by vibration. *Eur. Phys. J. B* **9**, 183–186.
- FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2001 Longitudinal vortices in granular flows. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5886–5889.
- FRIED, E., SHEN, A. Q. & THORODDSEN, S. T. 1998 Wave patterns in a thin layer of sand within a rotating horizontal cylinder. *Phys. Fluids* **10**, 10–12.
- GODRÈCHE, C. & MANNEVILLE, P. 1998 *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Cambridge University Press.
- GOLDHIRSCH, I. 1999 Scales and kinetics of granular flows. *Chaos* **9**, 659–672.
- GOLDHIRSCH, I. & ZANETTI, G. 1993 Clustering instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1619–1622.
- GOTTLIEB, D., HUSSAINI, M. Y. & ORSZAG, S. A. 1984 Theory and application of spectral methods. In *Spectral Methods for Partial Differential Equations* (ed. R. G. Voight, D. Gottlieb & M. Y. Hussaini). SIAM.
- HAFF, P. K. 1983 Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.* **134**, 401–430.
- HUI, K., HAFF, P. K., UNGAR, J. E. & JACKSON, R. 1984 Boundary conditions for high-shear grains flows. *J. Fluid Mech.* **145**, 223–233.
- JENKINS, J. T. & RICHMAN, M. W. 1986 Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks. *J. Fluid Mech.* **171**, 53–69.
- JENKINS, J. T. & SAVAGE, S. B. 1983 A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *J. Fluid Mech.* **130**, 187–202.
- JOHNSON, P. C., NOTT, P. & JACKSON, R. 1990 Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes. *J. Fluid Mech.* **210**, 501–535.
- KACHANOV, Y. S. 1994 Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 411–482.
- LUN, C. K. K. & SAVAGE, S. B. 1986 The effects of an impact velocity dependent coefficient of restitution on stresses developed by sheared granular materials. *Acta Mechanica* **63**, 15–44.
- LUN, C. K. K., SAVAGE, S. B., JEFFREY, D. J. & CHEPURNIY, N. 1984 Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *J. Fluid Mech.* **140**, 223–256.
- MALIK, M. R. 1990 Numerical methods for hypersonic boundary layer stability. *J. Comput. Phys.* **86**, 376–413.
- MAYER, E. W. & POWEL, K. G. 1992 Viscous and inviscid instabilities of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, 191–114.
- MCMANARA, S. & YOUNG, W. R. 1992 Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. *Phys. Fluids A* **4**, 496–504.
- NOTT, P. R., ALAM, M., AGRAWAL, K., JACKSON, R. & SUNDARESAN, S. 1999 The effect of boundaries on the plane Couette flow of granular materials: a bifurcation analysis. *J. Fluid Mech.* **397**, 203–229.
- OGAWA, S., UMEMURA, A. & OSHIMA, N. 1980 On the equations of fully fluidized granular materials. *Z. Angew. Math. Phys.* **31**, 483–493.
- ROUYER, F. & MENON, N. 2000 Velocity fluctuations in a homogeneous 2D granular gas in steady-state. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3676–3679.
- SARIC, W. S. 1994 Görtler vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 379–409.
- SAVAGE, S. B. 1992 Instability of unbounded uniform granular shear flow. *J. Fluid Mech.* **241**, 109–123.
- SELA, N. & GOLDHIRSCH, I. 1998 Hydrodynamic equations for rapid flows of smooth inelastic spheres, to Burnett order. *J. Fluid Mech.* **361**, 41–74.
- TAN, M.-L. & GOLDHIRSCH, I. 1997 Intercluster interactions in rapid granular shear flows. *Phys. Fluids* **9**, 856–869.

*Stability analysis of rapid granular chute flows*

387

- TAN, M.-L. & GOLDBIRSCHE, I. 1999 Rapid granular flows as mesoscopic systems. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3022–3025.
- WANG, C.-H., JACKSON, R. & SUNDARESAN, S. 1997 Instabilities of fully developed rapid flow of a granular material in a channel. *J. Fluid Mech.* **342**, 179–197.
- WANG, C.-H. & TONG, Z. 2001 On the density waves developed in gravity channel flows of granular materials. *J. Fluid Mech.* **435**, 217–246.
- WARR, S., HUNTLEY, J. M. & JACQUES, G. T. H. 1995 Fluidization of a two-dimensional granular system: experimental study and scaling behavior. *Phys. Rev. E* **52**, 5583–5595.

## Deuxième partie

### Instabilité dans les écoulements denses : Ondes de surface



Les écoulements granulaires rapides et dilués décrits dans la première partie de la thèse s’observent tant que l’énergie injectée dans le système est suffisante pour vaincre la dissipation lors des collisions inélastiques. Sur plan incliné rugueux, ce régime est obtenu lorsque le plan est fortement incliné. Cependant, pour des pentes plus proches du seuil d’écoulement, l’énergie injectée par la gravité ne suffit pas à maintenir un régime collisionnel entre les grains. On observe alors un écoulement de type “liquide” au sein duquel les contacts entre particules sont de longue durée, la fraction volumique du milieu étant proche de celle d’un empilement statique lâche. Dans ce régime dit *dense*, les grains interagissent à la fois par friction et par collisions et la théorie cinétique, du moins dans sa forme originale que nous avons exposée auparavant, n’est plus valable.

Nous ne possédons pas à ce jour d’équations constitutives pour décrire les écoulements granulaires dans le régime dense et une meilleure compréhension de leur propriétés est donc nécessaire. C’est dans ce cadre que se situe la seconde partie de la thèse, qui étudie une instabilité d’onde de surface observée dans ce régime d’écoulement dense.

Sous certaines conditions et pour certains matériaux, la surface de l’écoulement sur un plan incliné rugueux ne reste pas plane mais forme des ondes qui prennent la forme de vagues (figure 4). Comprendre le mécanisme de formation de ces ondes ainsi que leurs caractéristiques devrait nous renseigner sur les propriétés des écoulements denses.

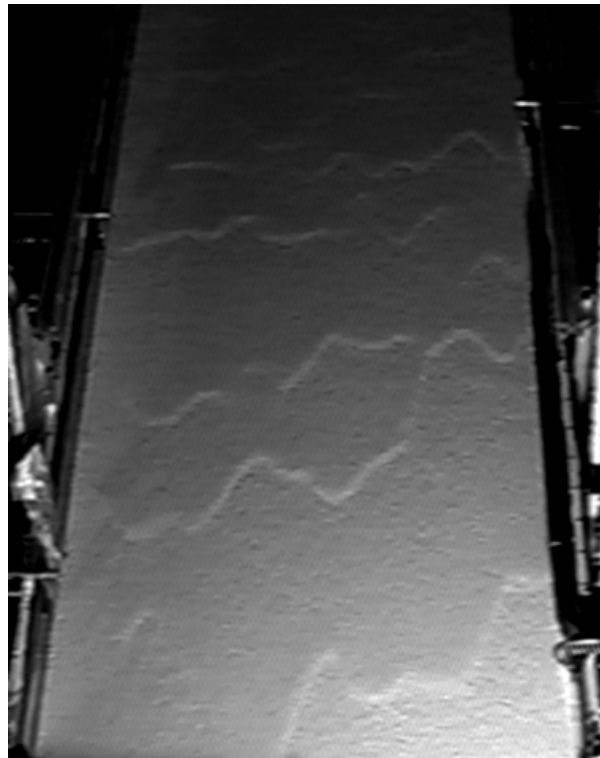


FIG. 4 – Vue d’ensemble de l’écoulement montrant les ondes de surface. l’écoulement est dirigé vers le bas ; la largeur du plan est de 70 cm. (sable de diamètre 0.8 mm,  $\theta = 34^\circ$ ,  $h = 4.6$  mm).

Récemment, une approche hydrodynamique a été développée pour décrire les écoulements granulaires sur plan incliné (voir introduction). Cette approche consiste à écrire des équations moyennées dans l'épaisseur (équations de St Venant). On s'affranchit alors de la description à l'intérieur de la couche en écoulement, la seule inconnue étant la contrainte qui décrit l'interaction entre la couche et le fond rugueux. De récentes expériences ont permis de proposer une loi de friction empirique qui peut être utilisée dans ce cadre (Pouliquen 1999a). Cette loi a été testée pour prédire l'étalement d'une masse granulaire constituée de billes de verre sur un plan rugueux (Pouliquen & Forterre 2002).

Les équations de St Venant prédisent-elles l'existence d'une instabilité en onde plane pour les milieux granulaires? Auquel cas, les ondes prédites correspondent-elles à celles que nous observons? La loi de friction empirique proposée permet-elle de prédire quantitativement les caractéristiques de l'instabilité? Ce sont ces questions qui ont motivé notre travail.

Dans un premier temps, nous présentons au chapitre 1 les observations expérimentales préliminaires qui ont attiré notre attention sur ce problème. Dans le chapitre 2, nous présentons succinctement d'autres systèmes présentant des instabilités en onde de surface dans les écoulements sur pentes. Le chapitre 3 sera consacré à l'étude de stabilité linéaire des écoulements granulaires sur plan incliné dans le cadre des équations de St Venant. Nous verrons que cette étude soulève de nombreuses questions au regard des résultats préliminaires (chapitre 4), appelant des expériences plus précises et poussées. Le chapitre 5 présente en détail notre démarche expérimentale de caractérisation de l'instabilité par forçage des ondes. Les résultats des mesures seront ensuite exposés et comparés avec la théorie pour deux matériaux: des billes de verre monodisperses (chapitre 6) et du sable (chapitre 7).

# Chapitre 1

## Instabilités en ondes de surface : résultats préliminaires

En faisant couler du sable sur un plan incliné rugueux, nous avons observé la formation d'ondes de surface de grande longueur d'onde se propageant dans la direction de l'écoulement (figure 4). Ces ondes apparaissent d'abord en amont de l'écoulement sous la forme d'ondes bidimensionnelles. Elles s'amplifient ensuite rapidement avant de se déformer dans la direction transverse sous l'effet d'instabilités secondaires.

Les ondes saturées ont un profil fortement non linéaire comme le montre la figure 1.1a, qui donne les variations d'épaisseur de la couche en écoulement mesurées en utilisant une nappe laser. La forme des ondes est dissymétrique avec un front avant relativement raide et une queue étalée. La présence des ondes module donc l'épaisseur de l'écoulement autour d'une valeur moyenne  $h$ . On remarque sur la figure 4 que la longueur d'onde  $\lambda$  de ces modulations de la surface libre n'est pas bien définie. Typiquement, la longueur d'onde naturelle sélectionnée en amont du plan évolue rapidement en interagissant avec les autres fronts d'onde et  $\lambda$  augmente le long du plan. Cette longueur d'onde est cependant toujours très grande par rapport à l'épaisseur moyenne de l'écoulement. Ainsi, sur l'exemple de la figure 1.1a,  $\lambda \sim 20$  cm tandis que  $h \sim 5$  mm.

Pour des écoulements fortement instables, l'amplitude  $\Delta a$  des ondes saturées peut devenir comparable à l'épaisseur moyenne de la couche en écoulement. C'est le cas sur la figure 1.1a où l'amplitude des ondes  $\Delta a = 1.2$  mm tandis que l'épaisseur moyenne  $h = 4.6$  mm. Plus loin en aval de l'écoulement, les déformations de la surface libre peuvent être alors telles que la hauteur de l'écoulement atteint par endroits la hauteur minimale d'écoulement du matériau à cet angle. Dans ce cas, l'écoulement se produit de manière discontinue, la vitesse des grains s'annulant entre deux fronts d'onde. Dans ces régimes très instables, le dépôt restant sur le plan rugueux après un écoulement porte la trace des ondes comme le montre la figure 1.2. Lorsque l'écoulement s'arrête, les ondes ont tendance à se figer et à laisser un relief sur le dépôt.

De façon générale, la vitesse de propagation  $c$  des ondes de surface est plus grande que la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement, comme le montre le diagramme spatio-temporel présenté sur la figure 1.1b. Pour obtenir ce diagramme, nous avons ouvert subitement l'ali-



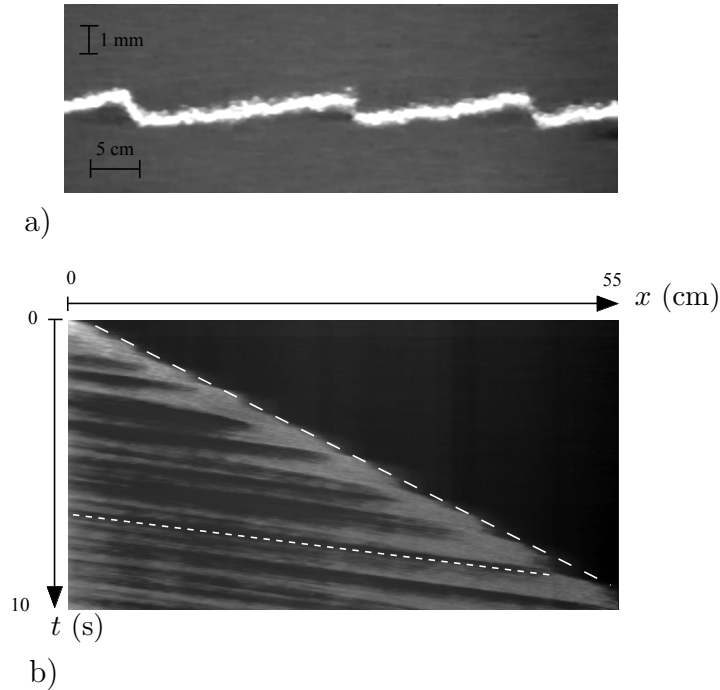


FIG. 1.1 – a) Profil des ondes de surface mesuré en projetant sur la surface de l'écoulement une nappe laser en incidence rasante :  $\lambda = 19$  cm et  $\Delta a = 1.2$  mm. Noter que l'échelle verticale est fortement dilatée par rapport à l'échelle horizontale. b) Diagramme spatio-temporel de l'écoulement montrant le front matériel de l'écoulement (traits pointillés larges) et les ondes de surface (traits pointillés fins). La vitesse du front est  $u = 6.5$  m/s et la vitesse de propagation des ondes est  $c = 19.2$  m/s (sable de diamètre 0.8 mm,  $\theta = 34^\circ$ ,  $h = 4.6$  mm).

mentation en sable. Un front matériel se propage alors le long de la pente et l'instabilité en ondes se développe derrière. Le diagramme spatio-temporel montre la propagation du front matériel le long de la pente (trait pointillé large) qui nous renseigne sur la vitesse moyenne de l'écoulement. Les lignes qui apparaissent derrière le front sont la signature de la propagation des ondes de surface. On constate qu'elles rattrapent le front matériel, la vitesse des ondes allant environ trois fois celle de l'écoulement moyen.

Afin de mieux comprendre la formation de ces ondes de surface, nous avons dans un premier temps établi un diagramme de stabilité qualitatif dans l'espace des phases ( $\theta$ ,  $h$ ) en jugeant "à l'oeil nu" de la présence ou non des ondes lors de l'écoulement. Les résultats sont rassemblés sur la figure 1.3 dans le cas de sable de diamètre 0.8 mm.

L'observation la plus frappante est que les ondes sont d'autant plus visibles que l'on se trouve proche du seuil d'écoulement (faibles épaisseurs et petits angles). L'écoulement est alors fortement instable et on observe des ondes tridimensionnelles de grande amplitude qui apparaissent rapidement à la sortie du réservoir. Cette situation correspond aux ondes

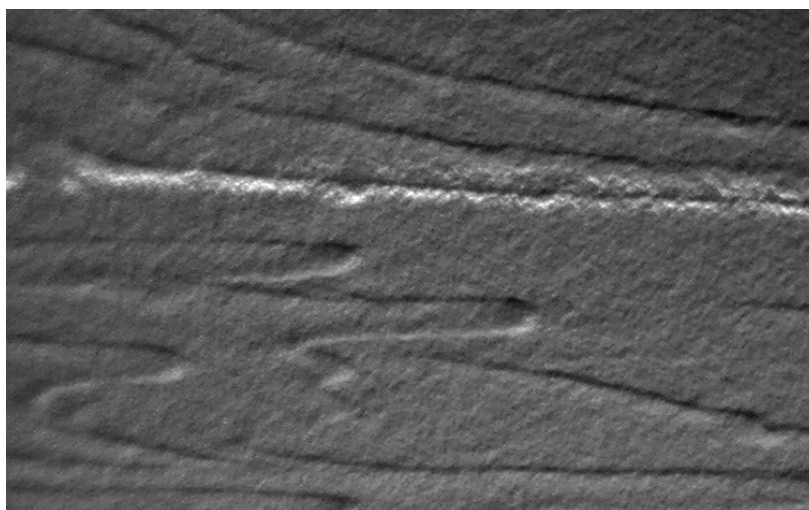


FIG. 1.2 – Allure du dépôt laissé par un écoulement dans un cas très instable (sable de diamètre 0.25 mm,  $\theta = 36^\circ$ ).

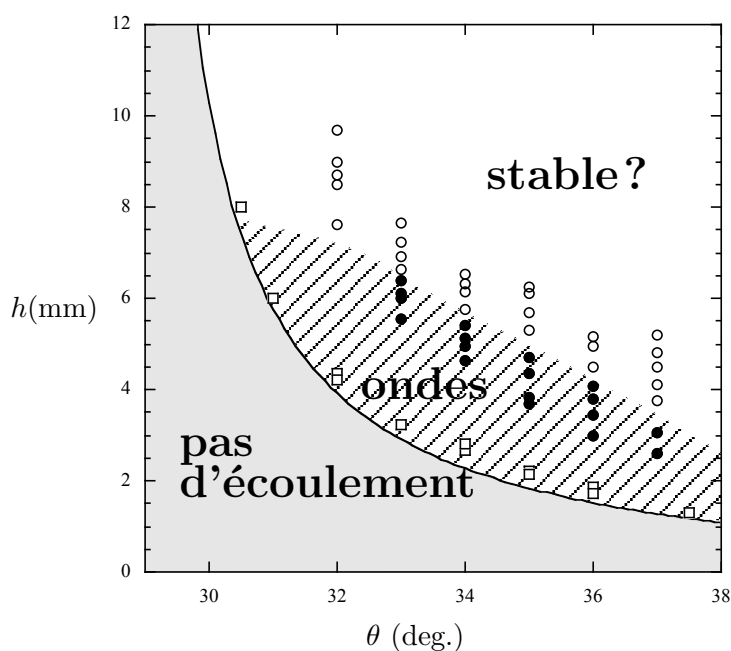


FIG. 1.3 – Diagramme de stabilité qualitatif pour le sable de diamètre 0.8 mm. La partie hachurée correspond au domaine de l'espace des phases où l'on observe des ondes sur le plan incliné.

présentées au début de ce chapitre sur la figure 4. Lorsqu'on augmente l'épaisseur de la couche de grain (à angle fixé), la distance d'apparition des ondes le long du plan augmente, les fronts d'onde sont moins déformés et l'amplitude des ondes diminue. Enfin, pour des

grandes épaisseurs (c'est-à-dire pour des vitesses élevées), les ondes semblent disparaître et l'écoulement semble devenir stable.

Ces observations ont été faites avec du sable de diamètre 0.8 mm. Nous avons également réalisé des expériences avec du sable de diamètre 0.25 mm ayant une forme différente de celle du gros sable et observé la même phénoménologie. En revanche, nous n'avons observé aucune onde dans les écoulements de billes de verre de 0.5 mm de diamètre. L'absence de déformation notable de la surface libre est d'ailleurs ce qui a permis une étude précise et quantitative des écoulements stationnaires uniformes dans le cas des billes de verre (Pouliquen 1999a).

Les premières observations qualitatives montrent donc que des ondes de surface peuvent spontanément se développer dans les écoulements de certains milieux granulaires secs. Or la formation de structures de grande longueur d'onde est bien connue dans le cas d'écoulements à surface libre de fluides classiques (ondes de Kapitza ou Roll waves). Une question importante est de savoir si cette ressemblance est fortuite ou si le mécanisme d'instabilité à l'oeuvre dans les deux cas est le même. Avant de nous attaquer à ce problème, nous présentons dans le chapitre suivant une revue succincte des études sur les ondes de surface pour les fluides classiques.

## Chapitre 2

# Ondes de surface dans les écoulements sur pente

L'apparition d'une instabilité en onde de surface de grande longueur d'onde dans les écoulement sous gravité est un phénomène commun à de nombreux fluides. Nous présentons dans ce chapitre une brève revue des différentes situations où l'on peut rencontrer ces ondes, avant de présenter le mécanisme d'instabilité à l'origine de leur formation.

### 2.1 Etude bibliographique

#### 2.1.1 Ondes de Kapitza et Roll waves

La formation d'ondes dans les écoulement de films liquides sur plan incliné est un phénomène classique qui peut s'observer très facilement. Par jour de pluie par exemple, l'eau qui ruisselle sur un trottoir en pente présente souvent cette instabilité et l'on observe alors de très belles ondes de longueur d'onde grande par rapport à l'épaisseur du film d'eau en écoulement. Ces ondes dans les écoulements laminaires de fluides visqueux sont souvent appelées "ondes de Kapitza" par référence aux travaux pionniers de Kapitza & Kapitza 1949 sur la stabilité des films minces tombants. Depuis ces travaux, les écoulements de films minces sur plan incliné ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques (voir les revues de Chang 1994 et de Oron *et al.* 1997). Une des motivations de ces recherches est l'importance dans l'industrie des films liquides, qui interviennent par exemple dans les processus de lubrification ou de transfert de chaleur. D'un point de vue plus fondamental, l'écoulement d'un film mince sur pente constitue un système modèle dans le cadre de la théorie du chaos spatio-temporel. En effet, la dynamique du film présente une série de bifurcations bien définies, partant de l'instabilité primaire en ondes longues jusqu'à l'apparition d'instabilités tridimensionnelles et de désordre spatio-temporel. Pour des films minces, ces instabilités se produisent de plus à nombre de Reynolds relativement bas ce qui entraîne une grande cohérence de l'écoulement. Il est alors possible d'éliminer une partie des variables internes de l'écoulement et la dynamique du film est en grande partie asservie

à l'évolution de la surface libre de l'écoulement.

L'instabilité primaire des films minces a été étudiée expérimentalement avec précision par Liu *et al.* 1993. En forçant l'instabilité, ils ont montré que cette instabilité est convective et apparaît pour un nombre de Reynolds critique égal à  $(5/6) \cot \theta$ , où  $\theta$  est l'angle d'inclinaison du plan, en accord les prédictions théoriques basées sur l'équation de Orr-Sommerfeld (Benjamin 1957, Yih 1963). Près du seuil d'instabilité, la capillarité et la viscosité sélectionnent la longueur d'onde la plus instable. A mesure que l'on se rapproche du seuil, cette longueur d'onde augmente jusqu'à tendre vers l'infini pour un nombre de Reynolds égal au nombre de Reynolds critique. On dit dans ce cas que l'instabilité est à nombre d'onde  $k = 0$ . Grâce à leur dispositif de forçage, Liu *et al.* ont également pu mesurer la relation de dispersion linéaire et observer la saturation non-linéaire de ces ondes. Plus loin en aval de l'écoulement, les fronts d'onde se raidissent et les ondes bidimensionnelles sont le siège d'instabilités secondaires donnant lieu à une phénoménologie complexe. On peut observer des modifications de la longueur d'onde par interactions entre modes, l'apparition d'ondes solitaires ou bien des instabilités tridimensionnelles en forme de chevrons (Liu *et al.* 1995).



FIG. 2.1 – *Roll waves dans un déversoir de barrage (Reddin, Californie, USA).*

La formation d'ondes de surface se rencontre également dans le cas d'écoulements turbulents à surface libre sur une pente (voir figure 2.1) (Cornish 1934). On les désigne alors plutôt par le terme anglais "roll waves". Ces ondes, qui ont une grande importance en hydraulique dans les écoulements en canal ouvert, ont été principalement étudiées théoriquement en se basant sur des équations moyennées de type "shallow water" (Dressler 1949, Needham & Merkin 1984, Kranenburg 1992) (voir chapitre 3). En prenant pour la contrainte turbulente au niveau du fond une expression empirique du type  $\tau = \rho C_t u^2$  (formule de Chevy), on montre que l'écoulement est linéairement instable vis-à-vis d'ondes de surface lorsque le nombre de Froude, défini comme  $u/\sqrt{gh \cos \theta}$ , est supérieur à 2.

### 2.1.2 Écoulements géophysiques

De nombreux phénomènes naturels mettent également en jeu des écoulements gravitaires le long de pentes. On observe parfois lors de ces écoulements la formation d'ondes de surface qui rappellent les ondes de grande longueur d'onde observée dans les fluides classiques. La figure 2.2 montre ainsi une vague de grande amplitude qui se propage dans un écoulement de débris constitué de boue et de particules solides. L'écoulement se produit alors par bouffées, ou "surge waves", séparées dans le temps par une dizaine de minutes et entre lesquelles le débit est pratiquement nul (Simpson 1997). De telles ondes se rencontrent fréquemment dans la vallée du Jin-jia en Chine à la suite de violentes précipitations. Ces ondes sont particulièrement destructrices car elles ont la capacité de transporter des débris de grande taille arrachés lors de l'écoulement (arbres, rochers). Pour expliquer leur origine, on suppose généralement qu'elles résultent d'une instabilité de type "Roll wave" en amont de l'écoulement. Liu & Mei 1994 ont ainsi étudié l'instabilité linéaire dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur, en modélisant les propriétés rhéologiques de la boue par celle d'un fluide à seuil newtonien de type fluide de Bingham.



FIG. 2.2 – *Surge wave dans un écoulement de boue (vallée du Jiang-jia, province du Sichan, Chine).*

Il existe d'autres types d'écoulements géophysiques qui présentent une instabilité de la surface libre. On peut par exemple citer les courants de gravité sous-marins (Alavian 1986) ou les avalanches de neige sèche. Hopfinger 1983 a ainsi suggéré que la transition entre une avalanche de neige dense et une avalanche en aérosol pouvait provenir de la formation de "roll waves" entraînant un flux d'air turbulent important dans le milieu.

### 2.1.3 Cas des écoulements granulaires

Les ondes que nous avons observées dans les écoulements de sable ont été signalées auparavant par plusieurs auteurs. Ces travaux soulignent en général l'analogie avec les

“Roll waves” mais restent tous très qualitatifs. Savage 1979, un des premiers, rapporte la formation d’ondes de surface dans les écoulements granulaires sur canal incliné rugueux, lorsque la vitesse de l’écoulement est élevée. Les même ondes sont observées dans des configurations analogues par Davies 1988, Vallance 1996 et Ancey 1997. Plus récemment, Daerr 2001 a signalé l’apparition d’une instabilité à l’arrière des fronts d’avalanche sur plan incliné revêtu de feutrine. Bien que l’écoulement soit dans ce cas transitoire, ces ondes sont certainement du même type que celles que nous observons dans les écoulements stationnaires. Lorsque le fond n’est pas rugueux mais lisse, il apparait également une instabilité de grande longueur d’onde. Dans ce cas la densité semble jouer un rôle important et il n’est pas clair que l’origine physique des ondes soit la même (Louge & Keast 2001, Prasad *et al.* 2000).

D’un point de vue théorique, la seule analyse de cette instabilité pour un milieu granulaire est due à Savage 1989, qui étudie la stabilité linéaire des ondes de surface dans le cadre des équations moyennées dans l’épaisseur. En prenant une loi de type hydraulique pour la contrainte entre le fond et la couche en écoulement, il parvient à montrer que l’écoulement est instable au-delà d’un nombre de Froude critique. Cependant, la loi rhéologique qu’il considère n’est pas justifiée pour un milieu granulaire.

## 2.2 Mécanisme d’instabilité

Dans cette partie, nous donnons le mécanisme d’instabilité à l’origine de la formation d’ondes dans les écoulements sur plan incliné. Une présentation plus précise de ce mécanisme dans le cas de liquides visqueux peut être trouvée dans le très clair article de Smith (1990). Ce mécanisme dépend peu des caractéristiques précises du fluide, ce qui explique l’observation d’ondes dans des systèmes ayant des propriétés rhéologiques très différentes.

### 2.2.1 Ondes cinématiques

Pour tenter d’expliquer le mécanisme d’instabilité, nous allons raisonner de la manière suivante. Considérons un écoulement unidirectionnel d’épaisseur  $h$  et de vitesse moyenne  $u$ . De façon très générale, la vitesse d’écoulement est reliée à l’épaisseur par une loi de type :

$$u = u(h). \quad (2.1)$$

La loi de conservation de la masse sous forme intégrale s’écrit alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu(h)}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

Si on effectue maintenant une petite perturbation de la surface libre  $\tilde{h}(x,t)$  autour d’un écoulement stationnaire uniforme d’épaisseur  $h_0$ , l’équation ci-dessus devient après linéarisation :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + (u_0 + u'_0 h_0) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0, \quad (2.3)$$

avec

$$u_0 = u(h_0) \quad \text{et} \quad u'_0 = \left. \frac{du}{dh} \right|_{h_0}. \quad (2.4)$$

La petite perturbation  $\tilde{h}$  va donc se propager sans se déformer avec une vitesse  $c_0$  différente de la vitesse moyenne de l'écoulement et donnée par :

$$c_0 = u_0 + u'_0 h_0. \quad (2.5)$$

La situation est schématisée sur la figure 2.3. Dans un référentiel se déplaçant avec la perturbation à la vitesse  $c_0$ , le flux de masse à travers une section quelconque de l'écoulement est partout le même et la perturbation se propage sans évoluer. Une telle onde est appelée onde cinématique (Witham 1974) car elle est une simple conséquence de la conservation de la masse et de l'existence d'une relation  $u = u(h)$ , sans référence particulière aux forces dans l'écoulement.

Bien sûr, en toute rigueur, la relation (2.1) est uniquement valable pour un écoulement stationnaire uniforme. La détermination exacte de la vitesse des ondes de surface nécessite la prise en compte de l'équation sur la quantité de mouvement en plus de la conservation de la masse. Nous ferons le calcul complet dans le chapitre suivant mais nous pouvons anticiper dès maintenant que la vitesse des ondes cinématiques calculée ici reste valable lorsque la longueur d'onde de la perturbation est grande devant l'épaisseur de la couche en écoulement.

Nous allons voir que l'existence d'une onde cinématique qui se propage avec une vitesse différente de celle de l'écoulement moyen est le point de départ du mécanisme d'instabilité.

### 2.2.2 Effet déstabilisant de l'inertie

Le raisonnement mené jusqu'ici est valable tant que l'écoulement adapte instantanément sa vitesse à l'épaisseur locale de la couche. En réalité, lorsque l'onde cinématique se propage, le fluide n'a pas le temps d'ajuster instantanément sa vitesse à l'évolution de la surface libre en raison de l'inertie de l'écoulement. Sur la figure 2.3a par exemple, le fluide qui entre à droite dans le volume de contrôle délimité par les traits pointillés ne peut ajuster immédiatement sa vitesse avec la nouvelle épaisseur  $h_0 + \Delta h$  de la couche. Il entre alors dans le volume de contrôle avec une vitesse  $u'_0 h_0$  *un peu trop grande*. Pour les mêmes raisons, le fluide sort du volume de contrôle à gauche avec une vitesse  $u'_0(h_0 - \Delta h)$  *un peu trop faible* comparée à celle qui correspond à l'épaisseur locale  $h_0$  de la couche. Les deux effets vont donc dans le même sens et la masse de fluide sous la perturbation augmente comme le schématise la figure 2.3b.

Pour qu'il y ait instabilité, il faut cependant que l'effet déstabilisant dû à l'inertie de l'onde cinématique dépasse les effets stabilisants. Le principal facteur stabilisant est la pression hydrostatique qui a tendance à étaler la perturbation comme le montre la figure 2.3c. Un autre effet stabilisant est paradoxalement l'inertie, qui limite les mouvements du fluide. Bien que ce rôle stabilisant de l'inertie soit nettement plus faible que son rôle déstabilisant



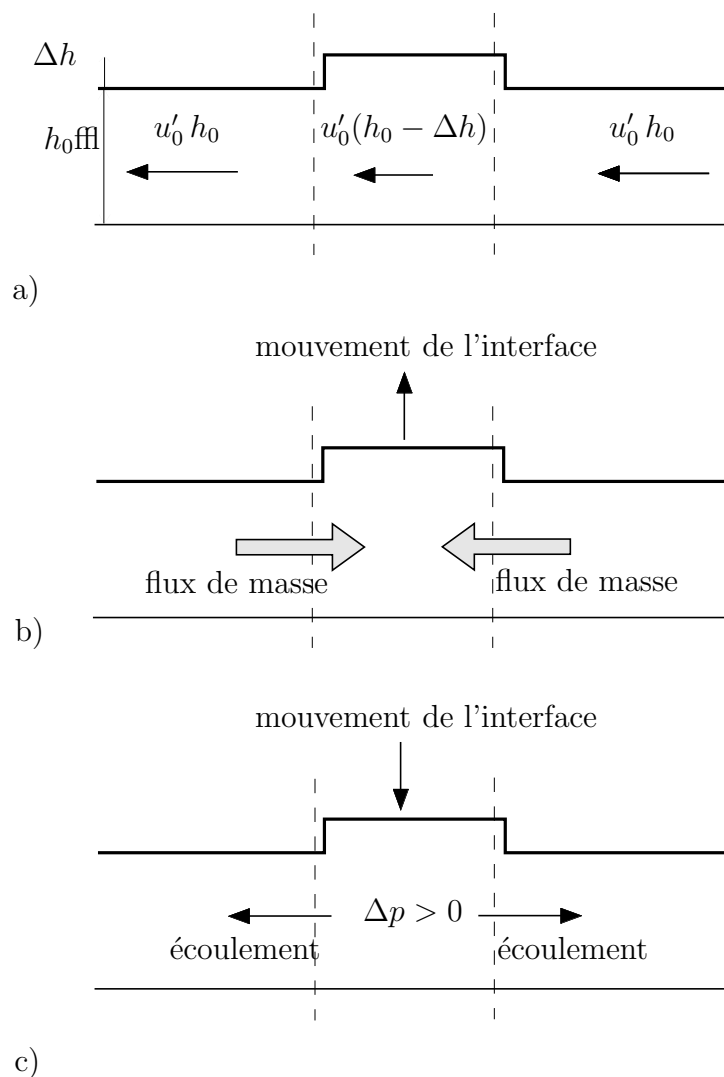


FIG. 2.3 – Mécanisme d'instabilité. a) Propagation d'une onde cinématique. Les vitesses sont exprimées dans le référentiel de l'onde se propageant avec une vitesse  $c_0 = u_0 + u'_0 h_0$ . b) A cause de l'inertie, il y a un flux de masse net entrant sous la perturbation et la surface libre croît. c) Rôle stabilisant de la pression. Les gradients de pression dus à la perturbation ont tendance à étaler cette dernière.

sur les ondes cinématiques, l'inertie peut limiter les taux de croissance de l'instabilité pour des grandes vitesses d'écoulement.

L'instabilité qui conduit à l'apparition d'onde de surface de grande longueur d'onde dans les écoulements sur plan incliné est donc d'origine inertielle. Les perturbations de surface libre (provenant par exemple du bruit) se propagent à l'ordre le plus bas comme une onde cinématique. La différence de vitesse entre cette onde et l'écoulement moyen est

responsable de l'instabilité car l'inertie limite l'ajustement de la vitesse de l'écoulement au passage de l'onde cinématique. Ce type de mécanisme se retrouve dans de nombreux autres systèmes comme dans les problèmes de "traffic flows" (Witham 1974) ou lors des instabilités de lits fluidisés (Duru *et al.* 2002). Dans ce dernier exemple, la concentration en particules est l'équivalent de l'épaisseur  $h$  de l'écoulement.

L'instabilité inertielle en onde de surface est donc très générale et peut se développer dans tout fluide coulant en film mince. Elle pourrait donc expliquer les ondes que nous avons observées dans les écoulements de sable. Nous présentons dans le chapitre suivant l'analyse de stabilité complète dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur, en prenant en compte la spécificité rhéologique des milieux granulaires.



## Chapitre 3

# Analyse de stabilité linéaire des écoulements granulaires sur plan incliné

L'instabilité en onde de surface se retrouve potentiellement dans tout écoulement en film mince. Cependant, ses caractéristiques dépendent des propriétés du fluide en écoulement. Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse de stabilité linéaire pour les écoulements granulaires. Dans un premier temps, nous présentons le cadre théorique des équations moyennées dans l'épaisseur et discutons du choix de la loi de friction pour décrire l'interaction entre le fond rugueux et le milieu granulaire en écoulement. Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire de ce modèle sont ensuite présentés.

### 3.1 Équations moyennées dans l'épaisseur

Pour établir les équations moyennées dans l'épaisseur, on part des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Savage & Hutter 1989) pour un fluide incompressible. L'hypothèse d'incompressibilité est raisonnable pour les écoulements granulaires denses pour lesquels les grains restent en contact les uns avec les autres dans un arrangement compact aléatoire. On suppose ensuite que la couche en écoulement est mince devant les variations spatiales caractéristiques du système. Cette hypothèse permet de négliger certains termes et on trouve en particulier que la contrainte normale obéit simplement à la loi de l'hydrostatique. En intégrant ensuite les équations entre le fond rugueux fixe et la surface libre de l'écoulement, on obtient deux équations couplées pour l'épaisseur locale de la couche en écoulement  $h(\mathbf{r},t)$  et la vitesse moyenne de l'écoulement  $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ . Pour un écoulement bidimensionnel sur une pente constante d'angle  $\theta$ , les équations moyennées se réduisent à :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial hu}{\partial t} + \alpha \frac{\partial hu^2}{\partial x} \right) = \left( \tan \theta - \mu - K \frac{\partial h}{\partial x} \right) \rho gh \cos \theta. \quad (3.2)$$

où la vitesse moyenne  $u$  est définie par  $u = Q/h$ ,  $Q$  étant le débit par unité de largeur.

La première équation est simplement la version intégrale de la conservation de la masse. La seconde peut s'interpréter comme un bilan de quantité de mouvement pour une tranche élémentaire de grain d'épaisseur  $h$  (voir figure 3.1). Le membre de gauche est l'accélération de la tranche de grain tandis que le membre de droite rassemble les forces extérieures. La tranche de grain est soumise à trois forces : la gravité qui est représentée par  $\rho gh \sin \theta$ , une force d'étalement d'expression  $K \rho gh \cos \theta (\partial h / \partial x)$  dont l'origine provient des forces de pressions qui agissent de part et d'autre de la tranche, enfin la contrainte tangentielle décrivant l'interaction entre la couche en écoulement et le fond,  $\rho gh \cos \theta \mu$ , qui est ici exprimée comme un coefficient de friction  $\mu$  multiplié par la contrainte normale. Le facteur  $K$  devant la force d'étalement est le rapport entre la contrainte normale selon  $x$  et la contrainte normale selon  $z$ . Des simulations numériques ont montré que ce facteur était toujours proche de 1 pour les écoulements denses (Prochnow *et al.* 2000, Ertas *et al.* 2001). Par la suite, nous prendrons donc  $K = 1$  (pression isotrope). Dans le terme d'accélération, le coefficient  $\alpha$  est défini par  $\alpha = \bar{u}^2 / \bar{u}^2$ . Pour fermer le système d'équations, il faut donc faire une hypothèse sur le profil de vitesse. La valeur de  $\alpha$  pour des profils de vitesse usuels est donnée sur la figure 3.2.

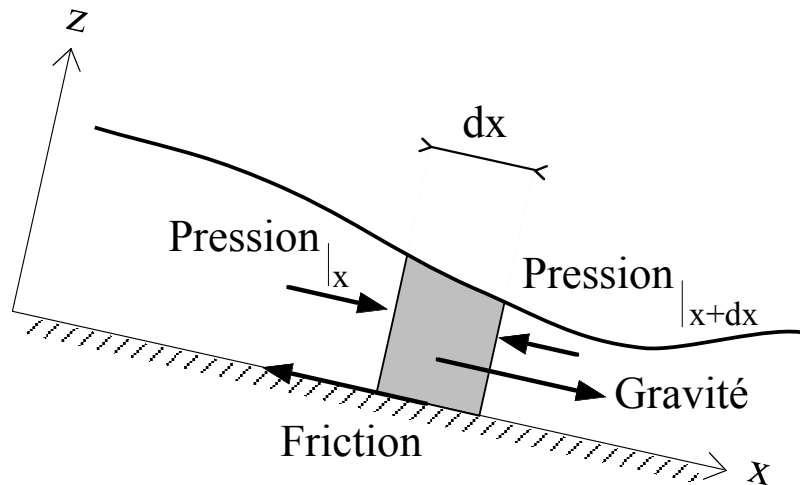


FIG. 3.1 – Les équations moyennées dans l'épaisseur reviennent à écrire la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour une tranche élémentaire verticale du matériau.

Il n'est pas évident *a priori* que l'on puisse réduire ainsi la dynamique complète de l'écoulement à seulement deux variables globales couplées : l'épaisseur  $h$  et la vitesse moyenne

$u$ . Pour établir les équations moyennées, on suppose en effet implicitement que le profil de vitesse dans la couche en écoulement s'adapte instantanément à l'évolution de la surface libre  $h(x,t)$ . En réalité, la réponse du profil de vitesse aux variations de l'interface est limitée par le temps de diffusion de la quantité de mouvement à l'intérieur de la couche. La prise en compte rigoureuse de ces effets dans le cadre des équations moyennées a fait l'objet de recherches pour les écoulements de films liquides sur plans inclinés. Il est ainsi possible de fermer plus rigoureusement le système d'équations moyennées en introduisant des variables supplémentaires associées aux degrés de liberté du profil de vitesse (Ruyer-Quil 1999, Ruyer-Quil & Manneville 2000).

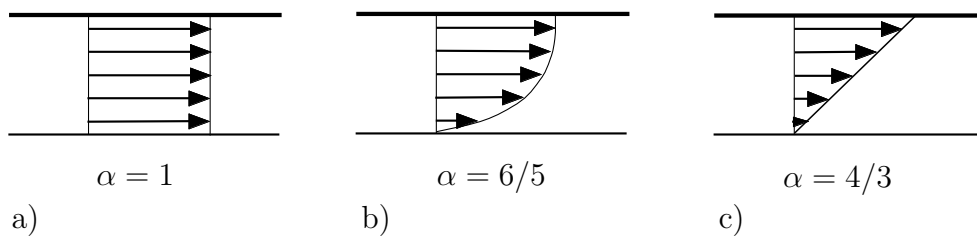


FIG. 3.2 – Valeur du coefficient  $\alpha$  défini par  $\alpha = \bar{u}^2/\bar{u}^2$  pour différents profils de vitesse. a) profil uniforme ou “plug”, b) profil parabolique, c) profil linéaire.

Pour les écoulements granulaires denses dont on ne connaît pas les équations constitutives un tel travail n'est pas réalisable, et les équations de St Venant simples constituent une première approche raisonnable. Le grand avantage des équations de St Venant est qu'elles permettent de décrire l'évolution de la couche en écoulement sans avoir à connaître la structure interne de l'écoulement. Toute la rhéologie tridimensionnelle du matériau se trouve incorporée dans le terme de friction  $\mu$  au niveau du fond. Alors que cette contrainte est connue pour un fluide newtonien par exemple, son expression pour un milieu granulaire est encore en discussion. Des expériences récentes réalisées en laboratoire permettent cependant de proposer une loi de friction empirique à partir des études sur les écoulements granulaires stationnaires uniformes.

## 3.2 Loi de friction

La première tentative pour décrire les écoulements granulaires dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur est due à Savage et Hutter (Savage & Hutter 1989). Dans leur modèle, l'interaction entre la couche de grain et le fond est décrite par une simple friction solide: la contrainte de cisaillement au niveau du fond est proportionnelle à la contrainte normale, le coefficient de friction  $\mu$  étant constant, indépendant de la vitesse. Ce modèle marche relativement bien pour décrire l'écoulement d'une masse granulaire sur un fond lisse et à angles élevés. En revanche, l'utilisation d'un simple coefficient de friction solide

ne permet pas de décrire les écoulements granulaires sur plan inclinés rugueux, i.e. lorsque la rugosité est de l'ordre de la taille des particules en écoulement.

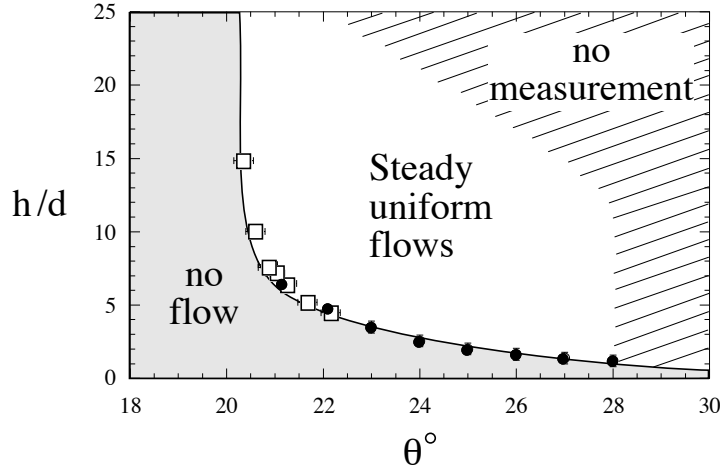


FIG. 3.3 – Diagramme de phase pour les écoulements de billes de verre monodisperses de diamètre  $d = 0.5$  mm. La courbe en trait plein est la fonction  $h_{stop}(\theta)$ . (Pouliquen 1999a).

Plusieurs expériences ont en effet montré que des écoulements stationnaires uniformes sont observés dans une large gamme d'angles d'inclinaison (Suzuki & Tanaka 1971, Hungr & Morgenstern 1984, Vallance 1994, Pouliquen 1999a, Ancy *et al.* 2002) comme l'indique le diagramme de phase de la figure 3.3. Cela montre en particulier que la contrainte au niveau du fond rugueux n'est pas une simple constante mais doit dépendre par exemple de la vitesse de l'écoulement, afin de contrebalancer la gravité aux différentes inclinaisons. L'influence du fond rugueux se manifeste également sur les propriétés du seuil de l'écoulement. La courbe continue  $h_{stop}(\theta)$  sur la figure 3.3 délimite la zone des écoulements stationnaires uniformes de la zone où aucun écoulement n'est possible. Cette courbe se détermine précisément en mesurant l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt qui reste après un écoulement stationnaire uniforme à l'angle  $\theta$  (Pouliquen & Renault 1996, Daerr & Douady 1999, Pouliquen 1999a). On constate que plus l'angle d'inclinaison est faible, plus l'épaisseur minimale  $h_{stop}$  qu'il faut atteindre pour observer un écoulement est grande. En dessous d'un angle limite,  $h_{stop}$  diverge et aucun écoulement stationnaire uniforme n'est possible. La fonction  $h_{stop}(\theta)$  montre donc qu'une couche fine résiste mieux aux contraintes qu'une couche épaisse. Cette propriété, qui n'est pas encore clairement interprétée, semble une conséquence de la présence d'un fond rugueux rigide qui rend plus difficiles les mouvements collectifs de grains dans son voisinage. L'existence d'écoulements stationnaires uniformes et d'un seuil d'écoulement qui dépend de l'angle d'inclinaison du plan ne peuvent donc pas être décrits par une simple loi de friction solide  $\mu = \text{cste}$ .

L'étude des écoulements stationnaires uniformes donne un moyen pour déterminer expérimentalement le coefficient de friction  $\mu$  entre la couche en écoulement et le fond rugueux. En effet, la propriété fondamentale des écoulements stationnaires uniformes est que la gravité est exactement contrebalancée par la friction. L'équation de la quantité de mouvement (3.2) se ramène alors à :

$$\mu = \tan \theta. \quad (3.3)$$

Pour trouver  $\mu$ , il suffit donc de savoir comment la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement varie en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  et de l'épaisseur  $h$ . En inversant la relation  $u = u(h, \theta)$ , on obtient  $\theta = \theta(u, h)$  ce qui donne d'après la relation d'équilibre (3.3) l'expression recherchée :  $\mu(u, h) = \tan \theta(u, h)$ .

Des mesures systématiques sur les écoulements de billes de verre monodisperses ont montré que la vitesse moyenne  $u$ , l'angle d'inclinaison  $\theta$  et l'épaisseur de l'écoulement  $h$  sont reliés par la relation suivante (Pouliquen 1999a) (voir figure 3.4) :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}. \quad (3.4)$$

avec  $\beta = 0.136$ . L'influence de l'angle d'inclinaison sur la vitesse des écoulements stationnaires uniformes est donc entièrement contenue dans la fonction  $h_{stop}(\theta)$ . Il suffit de mesurer l'épaisseur des dépôts pour pouvoir prédire les vitesses d'écoulements pour tous les angles et toutes les épaisseurs. La fonction  $h_{stop}(\theta)$  contient donc beaucoup des informations importantes sur les propriétés des écoulements denses et met en évidence le rôle fondamental du fond rugueux dans la dynamique des écoulements sur fond rigide. Ce résultat, encore inexplicé, a été retrouvé par des simulations numériques de dynamique des contacts pour des écoulements bidimensionnels (Prochnow *et al.* 2000).

La loi d'échelle (3.5) permet de proposer la loi de friction suivante pour les écoulements de billes de verres sur plan rugueux (Pouliquen 1999a) :

$$\mu(u, h) = \tan h_{stop}^{-1} \left( \frac{\beta h \sqrt{gh}}{u} \right). \quad (3.5)$$

Pour donner une expression analytique de cette loi de friction, il est nécessaire d'avoir une expression pour l'épaisseur des dépôts  $h_{stop}(\theta)$ . En interpolant les mesures de la figure 3.3 par une fonction exponentielle, on obtient l'expression analytique de loi de friction suivante (Pouliquen 1999a) :

$$\mu(u, h) = \tan \delta_1 + (\tan \delta_2 - \tan \delta_1) \exp \left( -\frac{\beta h \sqrt{gh}}{Ld u} \right), \quad (3.6)$$

où  $d$  est le diamètre des billes,  $\delta_1$  correspond à l'angle pour lequel la fonction  $h_{stop}(\theta)$  diverge,  $\delta_2$  est l'angle pour lequel  $h_{stop}(\theta)$  s'annule et  $L$  est l'épaisseur caractéristique sur



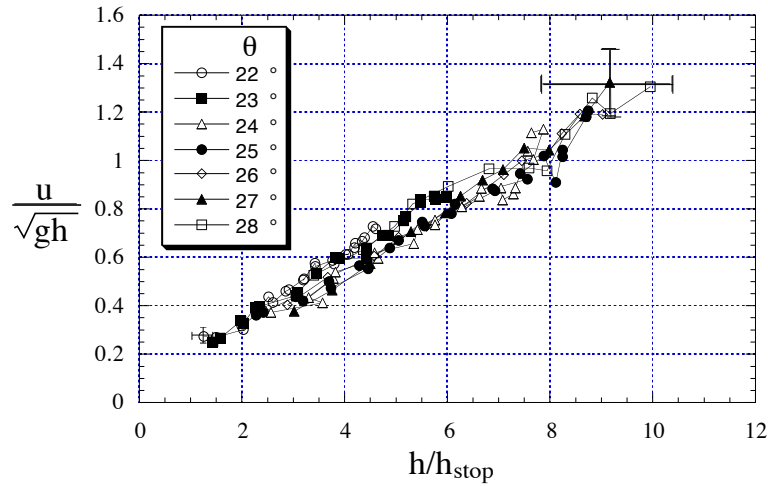


FIG. 3.4 – Mesures de la vitesse moyenne des écoulements stationnaires uniformes en fonction de l'épaisseur  $h$  et de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour des billes de verre monodisperses. Les données se rassemblent sur une même droite quand on exprime le nombre de Froude  $u/\sqrt{gh}$  en fonction de  $h/h_{stop}(\theta)$ . (Pouliquen 1999a).

laquelle  $h_{stop}(\theta)$  varie.

La figure 3.5 trace la loi de friction ainsi obtenue en fonction de la vitesse, pour différentes épaisseurs. On remarque que la friction augmente avec la vitesse et tend vers une limite finie  $\tan \delta_2$  aux grandes vitesses, qui est indépendante de l'épaisseur. Pour une vitesse donnée, le coefficient de frottement  $\mu$  est une fonction décroissante de l'épaisseur. Cette loi de friction appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, l'existence d'une limite supérieure aux fortes vitesses pour la friction implique qu'il n'existe pas d'écoulement stationnaire uniforme pour des angles supérieurs à  $\delta_2$ . Ce résultat est compatible avec l'observation d'écoulements accélérés pour des grands angles d'inclinaison (Hung & Morgenstern 1984). D'un autre côté, il existe une limite à la validité de la loi de friction (3.6) pour les très faibles vitesses (traits pointillés sur la figure 3.5). En effet, la loi  $\mu(u, h)$  est établie à partir de la loi d'échelle (3.5) qui est valable pour  $h > h_{stop}$  uniquement. Pour des vitesses telles que  $u/\sqrt{gh} < \beta$ , il n'y a pas d'écoulements stationnaires uniformes. Ce régime n'est donc pas décrit par la loi de friction qui est déduite des écoulements stationnaires uniformes. Pour les très faibles vitesses, l'existence d'une hystérésis entre les angles de démarrage et d'arrêt, observée dans une grande variété de configurations (Caponeri *et al.* 1995, Pouliquen & Renaut 1996, Daerr & Douady 1999) suggère plutôt une friction diminuant avec la vitesse. Un tel comportement se rencontre par exemple en frottement solide et donne lieu au phénomène de “stick-slip” (Heslot *et al.* 1994).

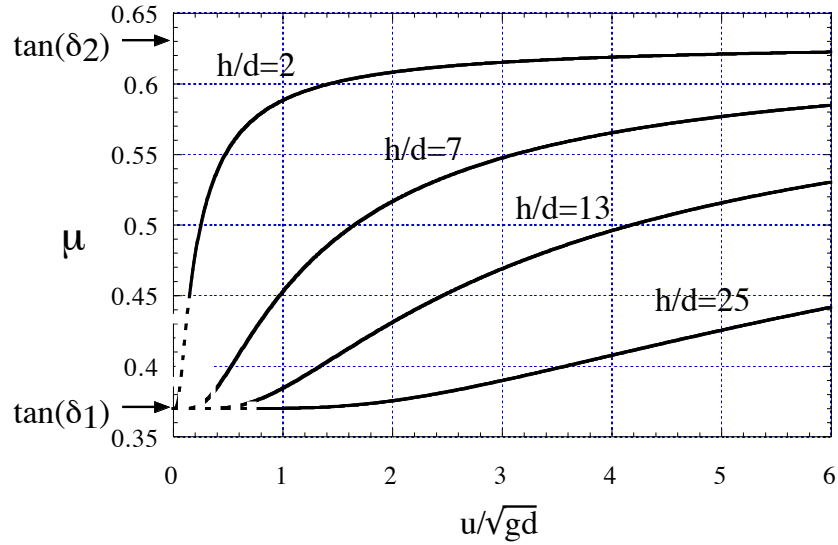


FIG. 3.5 – Loi de friction  $\mu(u,h)$  déduite des écoulements stationnaires uniformes.

Le point important est que la loi de friction (3.6) qui décrit l'interaction entre la couche granulaire et le fond rugueux est entièrement déterminée par la mesure des dépôts aux différents angles  $h_{stop}(\theta)$ . La validité de cette loi de friction déduite des écoulements stationnaires uniformes a ensuite été testée dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur pour prédire des écoulements non stationnaires et non uniformes. Il a été ainsi possible de prédire quantitativement la forme stationnaire des fronts d'écoulements le long du plan (Pouliquen 1999b) ou l'étalement d'une masse granulaire sur une pente rugueuse, du démarrage jusqu'à l'arrêt (Pouliquen & Forterre 2002). Il faut cependant noter que dans chacune de ces configurations, les termes d'accélération des équations moyennées sont négligeables. La dynamique de l'écoulement est alors essentiellement contrôlée par l'équilibre à chaque instant entre la force de friction, la gravité et la force d'étalement, ainsi que par la conservation de la masse. La validité la loi de friction  $\mu(u,h)$  dans le cas d'écoulements fortement instationnaires est donc une question importante encore ouverte. L'étude de l'instabilité inertielle en onde de surface représente donc un test important de la loi de friction empirique  $\mu(u,h)$  (3.6).

La loi de friction précédente a été déterminée pour des billes de verre. Qu'en est-il pour le sable, avec lequel nous avons observé les ondes? Nous avons réalisé le même type de mesures systématiques de vitesse moyenne fonction de l'angle et de l'épaisseur et nous avons montré que la fonction de dépôt  $h_{stop}$  permet encore une fois de rassembler les données

sur une courbe maîtresse (voir figure 3.6). Des différences avec les billes existent cependant dans la pente et l'origine de la droite maîtresse.

Il semble donc que dans tous les cas on puisse écrire :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = -\gamma + \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}, \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma = 0 \quad \beta = 0.136 & \text{ pour les billes,} \\ \gamma = 0.77 \quad \beta = 0.75 & \text{ pour le sable.} \end{aligned}$$

Cette loi conduit par la relation (3.3) à une loi de friction empirique légèrement différente dans le cas des billes et dans le cas du sable. Connaissant la loi de friction de ces milieux, nous pouvons donc étudier la stabilité des écoulements stationnaires uniformes en injectant son expression dans les équations de St Venant (3.1) et (3.2).

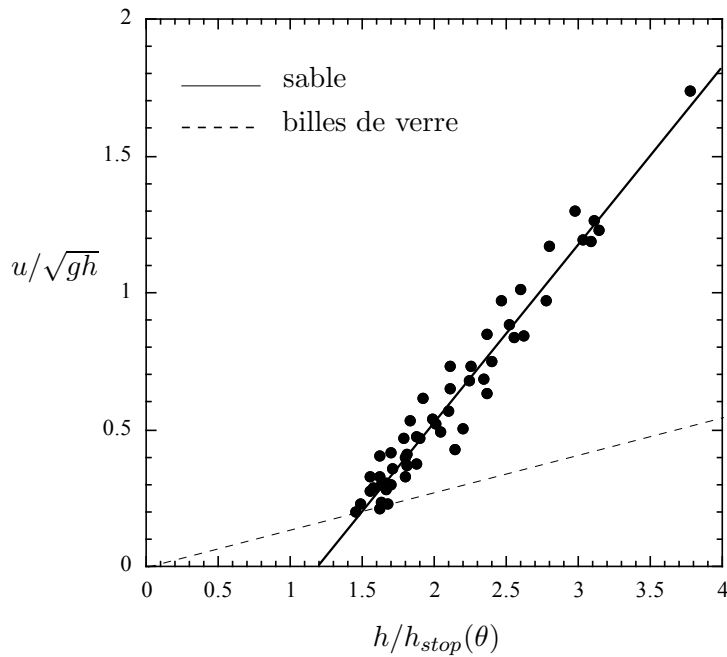


FIG. 3.6 – Mesures de la vitesse moyenne des écoulements stationnaires uniformes en fonction de l'épaisseur  $h$  et de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour du sable de diamètre 0.8 mm. Les données se rassemblent sur une même droite quand on exprime le nombre de Froude  $u/\sqrt{gh}$  en fonction de  $h/h_{stop}(\theta)$ . La loi d'échelle pour les billes de verre est donnée en pointillés à titre de comparaison.

### 3.3 Analyse de stabilité linéaire

#### 3.3.1 Relation de dispersion

Considérons un écoulement de vitesse  $u(x,t)$  et d'épaisseur  $h(x,t)$  sur un plan incliné faisant un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale comme schématisé sur la figure 3.7. La première étape consiste à écrire les équations de St Venant sous une forme adimensionnée. Pour cela, il est pratique de prendre comme référence de longueur et de vitesse l'épaisseur  $h_0$  et la vitesse moyenne  $u_0$  de l'écoulement stationnaire uniforme dont on étudie la stabilité. Les variables adimensionnées sont alors données par :  $\tilde{h} = h/h_0$ ,  $\tilde{u} = u/u_0$ ,  $\tilde{x} = x/h_0$  et  $\tilde{t} = (u_0/h_0)t$ . En utilisant ces variables adimensionnées, les équations de St Venant (3.1) et (3.2) s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{h}\tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (3.8)$$

$$F^2 \left( \frac{\partial \tilde{h}\tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \alpha \frac{\partial \tilde{h}\tilde{u}^2}{\partial \tilde{x}} \right) = \left( \tan \theta - \mu(\tilde{u}, \tilde{h}) - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \tilde{h}, \quad (3.9)$$

où  $F$  est le nombre de Froude défini par :

$$F = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}. \quad (3.10)$$

Les deux nombres sans dimension qui contrôlent le problème sont donc le nombre de Froude  $F$  et l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$ .

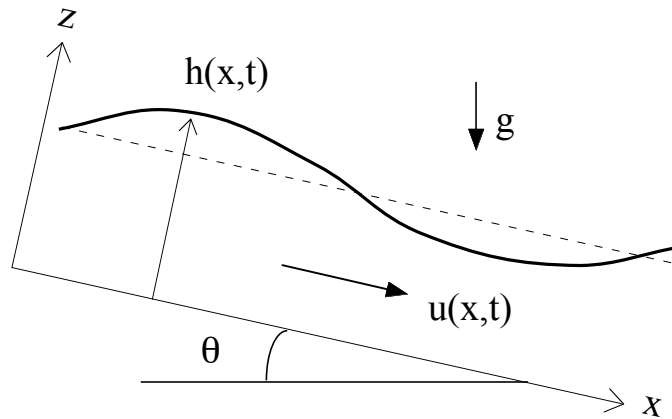


FIG. 3.7 – Schéma de l'écoulement.

L'état de base de l'écoulement en variables sans dimension s'écrit simplement (on omet les tildes par la suite pour simplifier les notations) :

$$h(x,t) = 1, \quad u(x,t) = 1. \quad (3.11)$$

La conservation de la masse (3.8) est alors automatiquement vérifiée et l'équation de la quantité de mouvement (3.9) se réduit à l'équilibre entre la gravité et la friction au niveau du plan :

$$\mu(1,1) = \tan \theta. \quad (3.12)$$

Pour étudier la stabilité linéaire de cet état de base, on perturbe l'écoulement autour de l'état de base sous la forme :  $h(x,t) = 1 + h_1(x,t)$  et  $u(x,t) = 1 + u_1(x,t)$  avec  $h_1(x,t) \ll 1$  et  $u_1(x,t) \ll 1$ . Les équations de Saint-Venant linéarisées deviennent alors :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad (3.13)$$

$$F^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\alpha - 1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + (2\alpha - 1) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = -au_1 - bh_1 - \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (3.14)$$

où les variables sans dimension  $a$  et  $b$  sont définies à partir de la loi de friction  $\mu(u,h)$  par :

$$a = \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} \right)_0, \quad b = \left( \frac{\partial \mu}{\partial h} \right)_0, \quad (3.15)$$

l'indice 0 signifiant que les dérivées sont prises pour l'état de base. Par la suite, nous considérerons toujours des situations où la friction augmente avec la vitesse et décroît avec l'épaisseur. C'est le cas par exemple de la loi de friction (3.6) que nous avons présentée pour les écoulements granulaires de billes de verre. On aura donc toujours  $a > 0$  et  $b < 0$ . Notons enfin que pour établir l'équation (3.14), on a utilisé l'équation de conservation de la masse (3.13).

L'invariance par translation dans le temps et l'espace du problème linéaire (3.13) et (3.14) nous permet de chercher des solutions pour les perturbations  $(h_1(x,t), u_1(x,t))$  sous la forme de modes normaux :

$$h_1(x,t) = \hat{h} \exp i(kx - \omega t), \quad u_1(x,t) = \hat{u} \exp i(kx - \omega t). \quad (3.16)$$

En introduisant ces expressions dans les équations (3.13) et (3.14), on obtient un système linéaire homogène qui admet des solutions non triviales uniquement quand la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  sont reliés par la relation de dispersion suivante :

$$-\omega^2 + 2\alpha\omega k + \frac{i}{F^2} ((a-b)k - a\omega) + \left( \frac{1}{F^2} - \alpha \right) k^2 = 0. \quad (3.17)$$

On peut étudier cette relation de dispersion de deux manières différentes. La première est de supposer une perturbation de nombre d'onde  $k$  réel dont on suit l'évolution temporelle,  $\omega$  étant complexe. C'est l'analyse de stabilité temporelle. La seconde approche consiste à prendre  $k$  complexe et  $\omega$  réelle. Dans ce cas, on étudie l'évolution le long de l'écoulement d'une perturbation de pulsation réelle  $\omega$  imposée en un point fixe de l'écoulement. C'est l'analyse de stabilité spatiale. Les deux approches donnent le même résultat pour le seuil d'instabilité. L'analyse spatiale se compare plus facilement à l'étude expérimentale d'une instabilité dans un écoulement ouvert.

### 3.3.2 Analyse de stabilité temporelle

L'analyse temporelle correspond à  $k$  réel et  $\omega$  complexe :  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . L'écoulement est instable vis-vis du nombre d'onde  $k$  si la partie imaginaire de  $\omega$  est positive :  $\omega_i(k) > 0$ . La résolution de la relation de dispersion (3.17) donne deux branches (+) et (-) pour  $\omega(k)$  :

$$\omega_r^\pm = \alpha k \pm \frac{((1-\alpha)a-b)}{F^2} k \sqrt{2} \left[ -f(k) + \left( f(k)^2 + \frac{16((\alpha-1)a+b)^2}{F^4} k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$\omega_i^\pm = -\frac{a}{2F^2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ -f(k) + \left( f(k)^2 + \frac{16((\alpha-1)a+b)^2}{F^4} k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

où  $f(k)$  a pour expression :

$$f(k) = 4 \left( \alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2} \right) k^2 - \frac{a^2}{F^4}. \quad (3.20)$$

A partir de là, il faut introduire la loi de friction  $\mu(u, h)$  explicitement pour connaître  $a$  et  $b$  et tracer les relations de dispersion, afin de déterminer le seuil d'instabilité. Nous ferons ce travail lors de la comparaison avec les mesures expérimentales. On peut cependant faire quelques observations générales. La branche (-) est toujours stable tant que  $a = (\partial\mu/\partial u)_0 > 0$ , c'est-à-dire tant que la loi de friction est une fonction croissante de la vitesse. Au contraire quand la friction décroît avec la vitesse ( $a < 0$ ), l'écoulement est toujours instable vis-à-vis d'une perturbation de vitesse, quel que soit  $h$ . Une telle situation s'observe par exemple en frottement solide aux faibles vitesses lors du phénomène de "stick-slip". Les lois de friction que nous considérerons étant des fonctions croissantes de la vitesse, la branche (-) sera pour nous toujours stable.

Contrairement à la branche (-), la branche (+) peut être stable ou instable selon le nombre de Froude  $F$  ou l'angle d'inclinaison  $\theta$ . On peut montrer que pour des rhéologies usuelles, l'allure de la relation de dispersion temporelle  $\omega(k)$  est donnée par la figure 3.8. Pour un angle et un nombre de Froude fixés, le taux de croissance temporelle  $\omega_i$ , qui est nul en  $k = 0$ , varie de façon monotone avec le nombre d'onde  $k$  et tend vers une valeur finie pour  $k \rightarrow \infty$ . Le signe de  $\omega_i$ , c'est-à-dire la stabilité de l'écoulement, est donc indépendant du nombre d'onde  $k$ . Pour déterminer le critère de stabilité, il suffit de connaître le comportement  $\omega_i$  aux grands nombres d'onde. Pour  $k \rightarrow \infty$ , on a :

$$\omega_r^\pm = \left( \alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \right) \operatorname{sgn}((1-\alpha)a-b) k, \quad (3.21)$$

$$\omega_i^\pm = \frac{-a \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}} \pm |((1-\alpha)a-b)|}{2F^2 \sqrt{\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{F^2}}}, \quad (3.22)$$

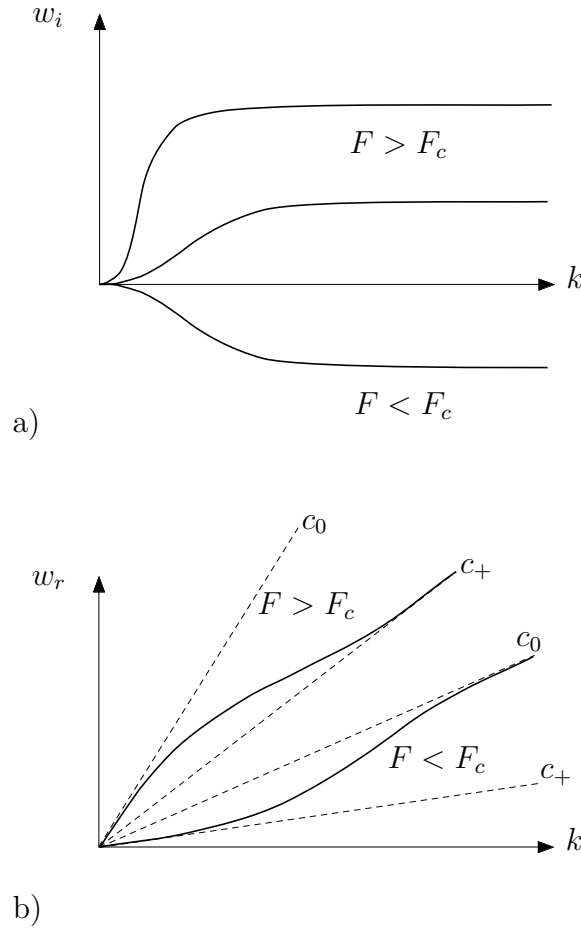


FIG. 3.8 – Allure de la relation de dispersion temporelle de la branche (+) pour différents nombres de Froude à angle fixé ( $a > 0$ ,  $b < 0$ ). a) Taux de croissance temporel  $\omega_i(k)$ . b)  $w_r(k)$ . Par définition,  $c_0 = 1 - (b/a)$  et  $c_+ = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + (1/F^2)}$ .

où le symbole  $\text{sgn}()$  vaut  $+1$  si le signe de l'expression entre parenthèse est positif et  $-1$  s'il est négatif. L'écoulement est donc instable quand :

$$1 - \frac{b}{a} \geq \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}, \quad \text{avec } a = \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} \right)_0, \quad b = \left( \frac{\partial \mu}{\partial h} \right)_0, \quad (3.23)$$

l'égalité correspondant au seuil de stabilité.

### 3.3.3 Analyse de stabilité spatiale

L'analyse spatiale correspond cette fois-ci à une pulsation  $\omega$  réelle et à  $k$  complexe,  $k = k_r + ik_i$ . L'écoulement est instable quand  $k_i k_r < 0$ . La résolution de la relation de dispersion (3.17) donne là encore deux branches spatiales (+) et (-) pour  $k(\omega)$  qui ont

pour expression :

$$k_r^\pm = \frac{\alpha}{\left(\alpha - \frac{1}{F^2}\right)} \omega \mp \frac{\sqrt{2}\left(\frac{a}{F^2} - \alpha b\right)}{F^2\left(\alpha - \frac{1}{F^2}\right)} \omega \left[ -g(k) + \left( g(k)^2 + \frac{16\omega^2}{F^4} \left(\frac{a}{F^2} - \alpha b\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

$$k_i^\pm = \frac{a - b}{2F^2\left(\alpha - \frac{1}{F^2}\right)} \mp \frac{1}{2\sqrt{2}\left(\alpha - \frac{1}{F^2}\right)} \left[ -g(k) + \left( g(k)^2 + \frac{16\omega^2}{F^4} \left(\frac{a}{F^2} - \alpha b\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

où  $g(k)$  est donné par :

$$g(k) = 4 \left( \alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2} \right) \omega^2 - \frac{(a - b)^2}{F^4}. \quad (3.26)$$

L'allure typique du taux de croissance spatiale  $-k_i$  (pour  $k_r > 0$ ) est donnée sur la figure (3.9) (pour  $a > 0$  et  $b < 0$ ). Nous constatons, comme pour l'analyse temporelle, que le signe du taux de croissance spatiale  $-k_i$  ne dépend pas de la fréquence  $\omega$  et tend vers une limite finie pour  $\omega \rightarrow \infty$ . On peut donc se contenter d'une étude asymptotique aux grandes fréquences pour déterminer le seuil d'instabilité. Pour  $\omega \rightarrow \infty$  on trouve :

$$k_r^\pm = \frac{\omega}{\alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}}, \quad (3.27)$$

$$k_i^\pm = \frac{\mp a \left( 1 - \frac{b}{a} - \alpha \mp \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}} \right)}{2F^2 \left( \alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}} \right) \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}}. \quad (3.28)$$

On montre facilement que la branche  $(-)$  est toujours stable tandis que la branche  $(+)$  est instable quand :

$$1 - \frac{b}{a} \geq \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}. \quad (3.29)$$

On retrouve comme prévu le critère de stabilité obtenu par l'analyse de stabilité temporelle.

### 3.4 Interprétation du critère de stabilité en terme d'ondes

Le critère de stabilité que nous avons déterminé s'exprime en fonction des dérivées de la loi de friction  $\mu(u, h)$  par rapport à la vitesse et à l'épaisseur,  $a$  et  $b$ . Pour pouvoir comparer plus facilement les prédictions théoriques avec l'expérience, il est intéressant de disposer d'un critère de stabilité qui porte plutôt sur la loi de vitesse  $u(h, \theta)$ , que l'on mesure directement en étudiant les écoulements stationnaires uniformes. Les deux approches sont bien entendu équivalentes. Afin d'établir ce critère de stabilité en fonction de  $u(h, \theta)$ , nous allons suivre une démarche différente de celle de l'analyse en modes normaux. Cette



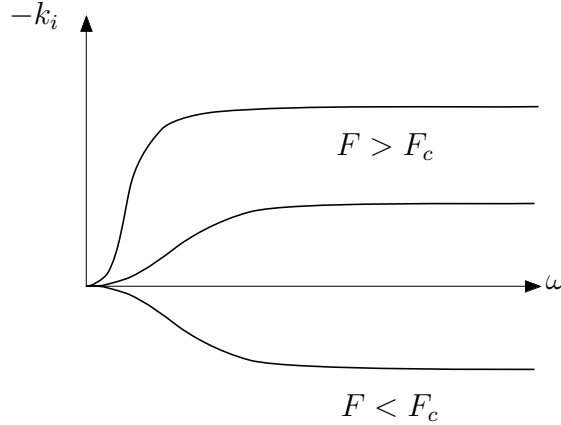


FIG. 3.9 – Allure du taux de croissance spatiale de la branche (+) pour différents nombres de Froude à angle fixé ( $a > 0$ ,  $b < 0$ ).

approche consiste à établir pour la perturbation  $h_1(x,t)$  une équation qui fait apparaître une “hiérarchie d’ondes” dans le système (Witham 1974). Par la même occasion, nous donnerons ainsi un éclairage nouveau du mécanisme d’instabilité présenté dans le chapitre précédent.

### 3.4.1 Critère de stabilité

Pour établir le critère de stabilité suivant cette démarche, on part des équations linéarisées (3.13) et (3.14) qui régissent l’évolution de  $h_1(x,t)$  et  $u_1(x,t)$ . En dérivant (3.13) par rapport à  $t$  et (3.14) par rapport à  $x$ , on peut éliminer le champ de vitesse  $u_1$  et obtenir une équation faisant uniquement intervenir  $h_1(x,t)$  :

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial t} + \left(\alpha - \frac{1}{F^2}\right) \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = -\frac{a}{F^2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial t} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right), \quad (3.30)$$

L’idée est ensuite de réécrire l’équation 3.30 en rassemblant les dérivées du même ordre. On obtient alors :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_- \frac{\partial}{\partial x} \right) h_1 = -\frac{a}{F^2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right), \quad (3.31)$$

où  $c_+$  (resp.  $c_-$ ) est la vitesse adimensionnée des ondes de gravité dans le sens de l’écoulement (resp. le sens opposé) :

$$c_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}, \quad (3.32)$$

et  $c_0$  est donnée par :

$$c_0 = 1 - \frac{b}{a}. \quad (3.33)$$

On peut montrer que  $c_0$  est la vitesse adimensionnée des ondes cinématiques que l'on a définie précédemment (voir chapitre 2). En effet, la loi de vitesse pour un écoulement stationnaire uniforme  $u(h, \theta)$  est reliée à la loi de friction  $\mu(u, h)$  par la relation  $\mu(u, h) = \tan \theta(u, h)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} a &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} \right)_0 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)_0, \\ b &= \left( \frac{\partial \mu}{\partial h} \right)_0 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)_0. \end{aligned}$$

En utilisant la relation sur les fonctions implicites :  $\left( \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)_u \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)_\theta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_h = -1$ , on obtient :

$$a = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)_0, \quad (3.34)$$

$$\frac{b}{a} = - \left( \frac{\partial u}{\partial h} \right)_0. \quad (3.35)$$

ou encore :

$$c_0 = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial h} \right)_0, \quad (3.36)$$

qui correspond bien à la définition de la vitesse adimensionnée des ondes cinématiques donnée au chapitre 2.

L'équation (3.31) fait apparaître une "hiérarchie d'ondes" dans le système. Pour une perturbation de grande longueur d'onde, les dérivées d'ordre deux sont négligeables et la perturbation se propage à l'ordre le plus bas comme une onde cinématique de vitesse  $c_0$ . Pour connaître l'effet des dérivées d'ordre supérieur sur cette onde, on pose  $\partial/\partial t \sim -c_0 \partial/\partial x$  dans le membre de gauche de l'équation (3.31). On obtient ainsi :

$$(c_0 - c_-)(c_+ - c_0) \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = \frac{a}{F^2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right). \quad (3.37)$$

On reconnaît une équation de diffusion pour la perturbation  $h_1(x, t)$  dans le référentiel de l'onde cinématique. L'effet des termes d'ordre supérieur est donc d'amortir ou d'amplifier la perturbation selon le signe du "coefficient de diffusion"  $(F^2/a)(c_0 - c_-)(c_+ - c_0)$ . Ainsi la perturbation est instable quand :

$$a(c_0 - c_-)(c_+ - c_0) < 0. \quad (3.38)$$

Pour  $a > 0$ , c'est-à-dire quand la friction augmente avec la vitesse, on trouve que l'écoulement est instable lorsque la vitesse des ondes cinématiques  $c_0$  n'est pas comprise dans l'intervalle de vitesse délimité par la vitesse des ondes de gravité  $c_-$  et  $c_+$ . Si  $b < 0$ , c'est-à-dire quand la friction diminue avec l'épaisseur, on a de plus  $c_0 > c_-$  et la condition d'instabilité (3.38) se réduit à :

$$c_0 > c_+, \quad (3.39)$$

ou en variables dimensionnées :

$$u_0 + \left( \frac{\partial u}{\partial h} \right)_0 h_0 > \left( \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}} \right) u_0. \quad (3.40)$$

L'écoulement est instable quand la vitesse des ondes cinématiques est plus grande que la vitesse des ondes de gravité dans le sens de l'écoulement. On peut donc donner une interprétation du critère de stabilité simplement en termes de compétition entre l'onde cinématique, qui vient de la conservation de la masse, et les ondes de gravité, qui proviennent des termes d'accélération et du terme d'étalement dû à la pression. La situation est schématisée sur la figure 3.10. Si la vitesse de l'onde cinématique est encadrée par la vitesse des ondes de gravité, ces dernières "rayonnent" de part et d'autre de l'onde cinématique et permettent au fluide d'ajuster sa vitesse par rapport au déplacement de l'onde cinématique. Dans ce cas l'amplitude de l'onde cinématique décroît et l'écoulement est stable. Au contraire, quand la vitesse de l'onde cinématique n'est pas comprise dans l'intervalle de vitesse délimité par les ondes de gravité, le fluide n'est pas "averti" de la propagation de l'onde cinématique et il ne peut ajuster sa vitesse. Il y a alors un flux de masse continu sous la perturbation et l'écoulement est instable.

L'avantage de cette description est qu'elle permet, connaissant la loi de vitesse des écoulements stationnaires uniformes  $u(h, \theta)$ , de conclure immédiatement quant à la stabilité des écoulements.

### 3.4.2 Cas des fluides classiques

Considérons un écoulement laminaire d'un liquide newtonien sur un plan incliné. Pour un écoulement stationnaire uniforme, la relation entre la vitesse moyenne  $u_0$  de l'écoulement, l'épaisseur  $h_0$  du film et l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  est donnée par (voir par exemple Landau & Lifchitz 1989) :

$$u_0 = \frac{\rho g \sin \theta}{3\eta} h_0^2, \quad (3.41)$$

où  $\rho$  est la densité du liquide et  $\eta$  sa viscosité. La vitesse  $c_0$  des ondes cinématiques est, en utilisant la définition (2.5),  $c_0 = 3u_0$ . Pour un profil de vitesse parabolique,  $\alpha = 6/5$  et on trouve comme condition d'instabilité :

$$F > \frac{1}{2}. \quad (3.42)$$

Pour un film de liquide, il est plus fréquent d'utiliser le nombre de Reynolds  $R$  défini par  $R = \rho u_0 h_0 / \eta$ . Le nombre de Froude et le Reynolds sont reliés par  $F = \sqrt{\tan \theta (R/3)}$  et le Reynolds critique  $R_c$  de l'instabilité est :

$$R_c = \cot \theta. \quad (3.43)$$

Cette valeur obtenue à partir des équations moyennées dans l'épaisseur surestime légèrement le seuil de stabilité exact, déterminé à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées :

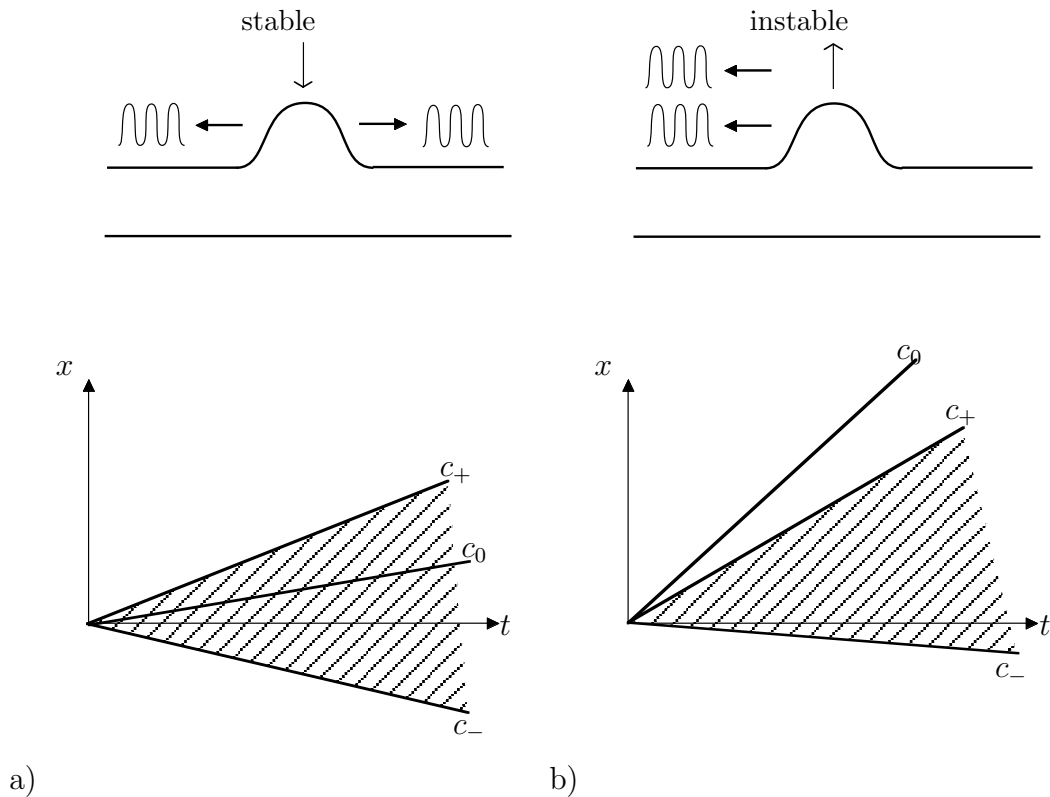


FIG. 3.10 – Critère de stabilité en terme de compétition entre les ondes cinématiques et les ondes de gravité. a) cas stable, la vitesse des ondes cinématiques  $c_0$  est comprise entre les vitesse des onde de gravité remontante  $c_-$  et descendante  $c_+$ . b) cas instable.

$R_c = (5/6) \cot \theta$  (voir chapitre 2).

Pour un écoulement de liquide turbulent le long d'un plan incliné, on ne sait pas résoudre les équations de Navier-Stokes. Un modèle couramment employé en hydraulique est de prendre pour la contrainte turbulente au niveau du plan une expression du type :

$$\tau = \rho C_t u_0^2. \quad (3.44)$$

où  $C_t$  est un coefficient phénoménologique (relation de Chévy). La condition d'équilibre des écoulements stationnaires uniformes,  $\tau = \rho gh \sin \theta$ , donne la loi d'écoulement pour la vitesse moyenne :

$$u_0 = \sqrt{\frac{gh_0 \sin \theta}{C_t}}. \quad (3.45)$$

On en déduit la vitesse des ondes cinématiques :  $c_0 = (3/2)u_0$ . En prenant un profil de

vitesse uniforme ( $\alpha = 1$ ), la condition d'instabilité est donc :

$$F > 2. \quad (3.46)$$

On peut remarquer que pour cet écoulement, le nombre de Froude dépend uniquement de l'angle du plan :  $F = \sqrt{(\tan \theta / C_t)}$ . Le critère de stabilité est donc indépendant de l'épaisseur de l'écoulement pour un écoulement turbulent.

### 3.4.3 Cas des milieux granulaires

Pour un écoulement granulaire, nous avons vu que la vitesse moyenne obéit à une loi d'échelle du type :

$$\frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} = -\gamma + \beta \frac{h_0}{h_{stop}(\theta)}, \quad (3.47)$$

où  $h_{stop}(\theta)$  est le dépôt qui reste sur le plan après un écoulement stationnaire uniforme. Pour ce type d'écoulement, la vitesse des ondes cinématiques adimensionnée est  $c_0 = (5/2) + (\gamma/F\sqrt{\cos \theta})$ . On ne connaît pas pour le moment le profil de vitesse d'un écoulement granulaire tridimensionnel. En prenant  $\alpha = 1$ , la condition d'instabilité prend une expression particulièrement simple donnée par :

$$F > \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\cos \theta}} \right). \quad (3.48)$$

L'analyse linéaire prédit donc une instabilité pour les écoulements granulaires quand le nombre de Froude dépasse un nombre de Froude critique  $F_c$ . Dans le cas des billes de verre, on a  $\gamma = 0$  et le Froude critique est indépendant de l'angle et donné par  $F_c = 2/3$ . Nous allons dans le chapitre suivant comparer ces prédictions aux études expérimentales.

## 3.5 Limites de l'approche moyennée

Les équations de St Venant permettent donc de déterminer le seuil de stabilité conduisant à la formation d'ondes de grande longueur d'onde dans les écoulements sur pente. Le critère de stabilité s'interprète simplement en terme de compétition entre les ondes cinématiques et les ondes de gravité dans le système. Cependant, l'approche moyennée dans l'épaisseur ne permet pas de caractériser entièrement l'instabilité.

Une première limite importante de la théorie est l'absence de mécanisme qui stabilise les petites longueurs d'onde. En effet, nous avons vu que le taux de croissance temporel est toujours une fonction monotone du nombre d'onde  $k$  (voir la figure 3.8). Lorsque l'écoulement est instable, il est instable pour tous les nombres d'onde, le taux de croissance maximal étant même atteint pour  $k \rightarrow \infty$ . En réalité, il existe des mécanismes physiques qui stabilisent les grands nombres d'onde. Dans le cas de l'eau par exemple, un

des mécanismes stabilisants est la tension de surface. En prenant en compte cette force de rappel dans les équations moyennées, on montre qu'il existe un nombre d'onde critique  $k_c$  au-delà duquel l'écoulement est stable comme le schématise la figure 3.11.

Un autre mécanisme stabilisant provient des gradients de vitesse de l'écoulement dans la direction longitudinale. Pour tenir compte de ces termes dans les équations moyennées, il faudrait partir des équations tridimensionnelles et pousser à un ordre supérieur le développement en fonction du petit paramètre  $\epsilon = h/\lambda$ . Dans le cas d'un film liquide newtonien sur plan incliné, ce développement fait apparaître des termes visqueux supplémentaires qui stabilisent les petites longueurs d'onde, en plus de la tension de surface (Ruyer-Quil & Manneville 2000). Pour un milieu granulaire, il n'y a pas de tension de surface et on ne connaît pas les équations constitutives tridimensionnelles, ce qui ne nous donne pas les termes stabilisants dans les équations moyennées dans l'épaisseur.

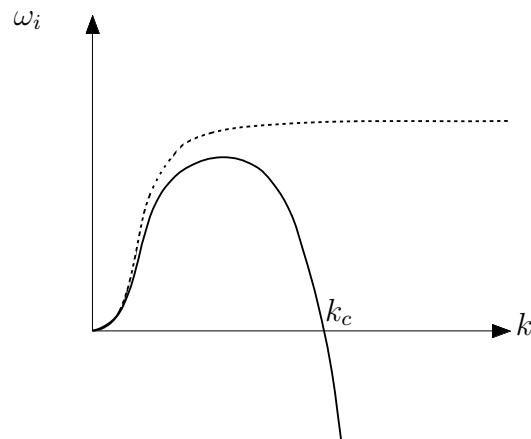


FIG. 3.11 – Allure du taux de croissance en présence de termes stabilisants les petites longueurs d'onde.

La deuxième limite des équations moyennées dans l'épaisseur vient de la prise en compte des effets instationnaires. Nous avons déjà signalé que l'introduction d'un terme constant  $\alpha$  pour caractériser le profil de vitesse est une approximation, faisant appel à une hypothèse sur le profil de vitesse. Une autre hypothèse vient de l'introduction dans les équations d'une loi de friction  $\mu(u, h)$  qui est établie à partir des écoulements stationnaires uniformes. Il n'est pas évident que cette loi reste identique quand l'écoulement est fortement instationnaire. Dans ce cas, la loi de friction pourrait dépendre, en plus de  $u$  et de  $h$ , des variations temporelles de  $u$  et de  $h$  lorsque le temps de diffusion de la quantité de mouvement à travers la couche n'est pas négligeable devant le temps caractéristique d'évolution du système. Ces approximations expliquent que le seuil de stabilité calculé à partir des équations moyennées dans l'épaisseur soit légèrement différent du seuil de stabilité exact déterminé à partir des équations tridimensionnelles. Ainsi dans le cas de la stabilité d'un film liquide newtonien, le Reynolds critique prédit par l'approche moyennée est de 20 % supérieur à

celui déterminé à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées. Il est possible de corriger le seuil de stabilité prédit par les équations moyennées en introduisant des variables supplémentaires liées aux degrés de libertés du profil de vitesse (Ruyer-Quil & Manneville 2000). Cependant, ces méthodes nécessitent la connaissance de la rhéologie tridimensionnelle de l'écoulement et ne sont donc pas applicables aujourd'hui dans le cas d'écoulements granulaires.

## Chapitre 4

# Résumé de l'étude de stabilité et problématique

La principale prédiction de l'analyse linéaire des équations de St Venant est que l'instabilité de grandes longueurs d'onde dans les écoulements sur pente est une instabilité à grand nombre de Froude, son origine physique étant inertielle. Nous avons également vu comment calculer ce nombre de Froude critique à partir de la loi de vitesse des écoulements stationnaires uniformes  $u(h, \theta)$  propre à chaque fluide.

Ces résultats théoriques soulèvent deux problèmes importants par rapport à nos observations dans les écoulements granulaires :

- Dans le cas des écoulements de sable, les ondes observées apparaissent à faible vitesse et s'atténuent lorsque la vitesse augmente (voir figure 1.3) pour finalement disparaître aux grands nombres de Froude. Ces observations semblent en contradiction avec l'instabilité "classique" prédite par les équations moyennées qui est une instabilité à grand nombre de Froude.
- Pour les écoulements de billes de verre, les équations moyennées prédisent une instabilité lorsque le nombre de Froude est supérieur à  $2/3$ . Cette valeur est située à l'intérieur du domaine des écoulements stationnaires uniformes exploré expérimentalement comme le montre la figure 4.1. Pourtant, nous n'avons pas observé d'onde dans ces écoulements de billes de verre.

La situation est donc assez confuse ! L'instabilité que nous observons dans les écoulements de sable correspond-elle à un nouveau mécanisme d'instabilité ? Dans ce cas, pourquoi ne voit-on pas l'instabilité "classique" à grands nombres de Froude ? De même, pourquoi ne voit-on jamais d'ondes avec les billes de verre ? Afin d'éclaircir la situation, nous avons choisi d'étudier précisément les caractéristiques de l'instabilité dans notre expérience, en forçant l'écoulement en amont.

Dans un écoulement ouvert et pour une instabilité convective, les ondes que l'on observe résultent en effet de l'amplification par l'écoulement des perturbations à l'entrée de l'expérience. En l'absence de forçage, les ondes naturelles observées sont difficiles à in-



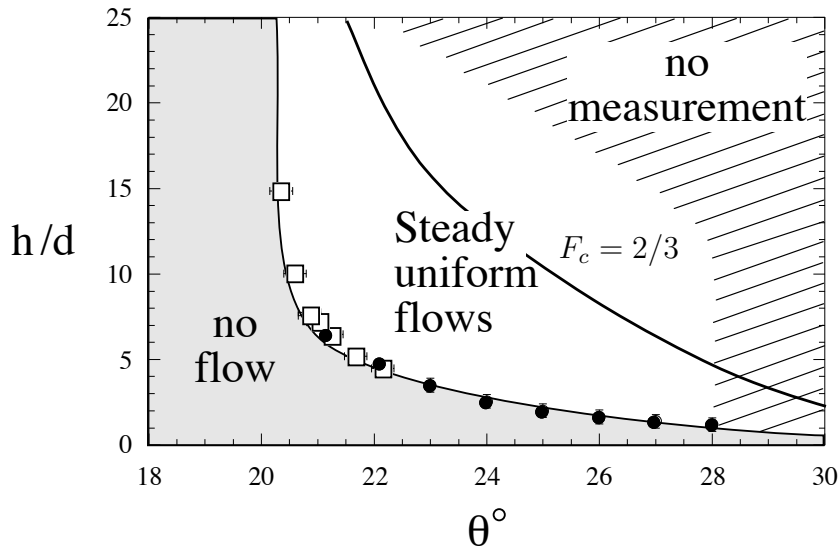


FIG. 4.1 – Diagramme de phase des écoulements de billes de verre de diamètre  $d = 0.5$  mm tiré de Pouliquen 1999a, sur lequel on a rajouté la courbe de stabilité marginale théorique qui correspond à un nombre de froude critique  $Fr_c = 2/3$  (courbe en trait gras).

interpréter car leur amplitude dépend du niveau de bruit dans l'expérience, niveau qui peut varier en fonction des paramètres de contrôle et des matériaux utilisés. En imposant de l'extérieur une perturbation bien définie et en suivant son évolution le long de l'écoulement, on s'affranchit du bruit naturel.

Pour cela, nous avons développé un dispositif de forçage des ondes en amont de l'écoulement. Notre démarche s'inspire directement des expériences de Liu *et al.* 1993 sur la stabilité des films liquides sur plan incliné. L'idée est d'imposer en amont de l'écoulement une perturbation de fréquence  $f$  donnée que l'on suit le long de l'écoulement. Si la perturbation croît, l'écoulement est instable vis-vis de cette fréquence pour des paramètres de contrôle  $(h, \theta)$  fixés. En revanche si la perturbation décroît, l'écoulement est stable à cette fréquence.

Dans un premier temps, nous avons étudié la stabilité des écoulements de billes de verre. Dans ce cas la théorie moyennée dans l'épaisseur jointe à la loi de friction phénoménologique  $\mu(u, h)$  prédit un seuil de stabilité contrôlé par le nombre de Froude. Nous avons ensuite réalisé des expériences similaires en utilisant du sable afin de mieux comprendre l'apparition des ondes aux faibles vitesses.

## Chapitre 5

# Dispositif expérimental et méthodes de mesure

Nous présentons dans ce chapitre le dispositif expérimental que nous avons mis en place pour faire l'étude précise de l'instabilité en onde de surface. L'ensemble de ce dispositif est présenté sur la figure 5.1. Le principe de l'expérience est de forcer en amont de l'écoulement des ondes d'amplitude et de fréquence bien définies afin de suivre leur évolution spatiale le long du plan incliné. Pour imposer cette perturbation, nous avons mis en place un dispositif de forçage qui envoie un jet d'air périodique sur la surface de l'écoulement. Les ondes ainsi produites sont détectées en aval du forçage par transmission de lumière à travers la couche de grain.

### 5.1 Forçage des ondes

La première étape consiste à imposer en amont de l'écoulement une perturbation de la surface libre de la couche de grains. Cette perturbation doit avoir une fréquence bien déterminée pour nous permettre de distinguer le forçage des fluctuations naturelles pouvant se développer lors de l'écoulement. De plus, l'amplitude du forçage doit être suffisamment petite pour étudier le régime linéaire de l'instabilité. Pour cela, nous avons choisi d'appliquer sur la surface libre de l'écoulement un mince jet d'air périodique, réparti sur toute la largeur du plan. Le jet d'air est produit par un ensemble de trois haut-parleurs (Monacorp SP-60/8) insérés dans une buse (voir figure 5.1). Le grand rapport de surface entre la surface totale des haut-parleurs (environ  $200 \text{ cm}^2$ ) et la surface de la fente à la sortie de la buse ( $1\text{mm} \times 30 \text{ cm}$ ) permet de produire un jet d'air homogène et bien localisé, avec une intensité suffisante pour déformer la couche de grains. Les haut-parleurs sont excités par un générateur basse fréquence (TTI TG550) relié à un amplificateur de puissance. La buse est positionnée transversalement au plan à une distance d'environ 30 cm de la sortie du réservoir. Cette technique permet de forcer en amont de l'écoulement des ondes quasi-bidimensionnelles de fréquence et d'amplitude contrôlées par la fréquence  $f$  et l'amplitude  $A_{GBF}$  appliquées aux haut-parleurs.

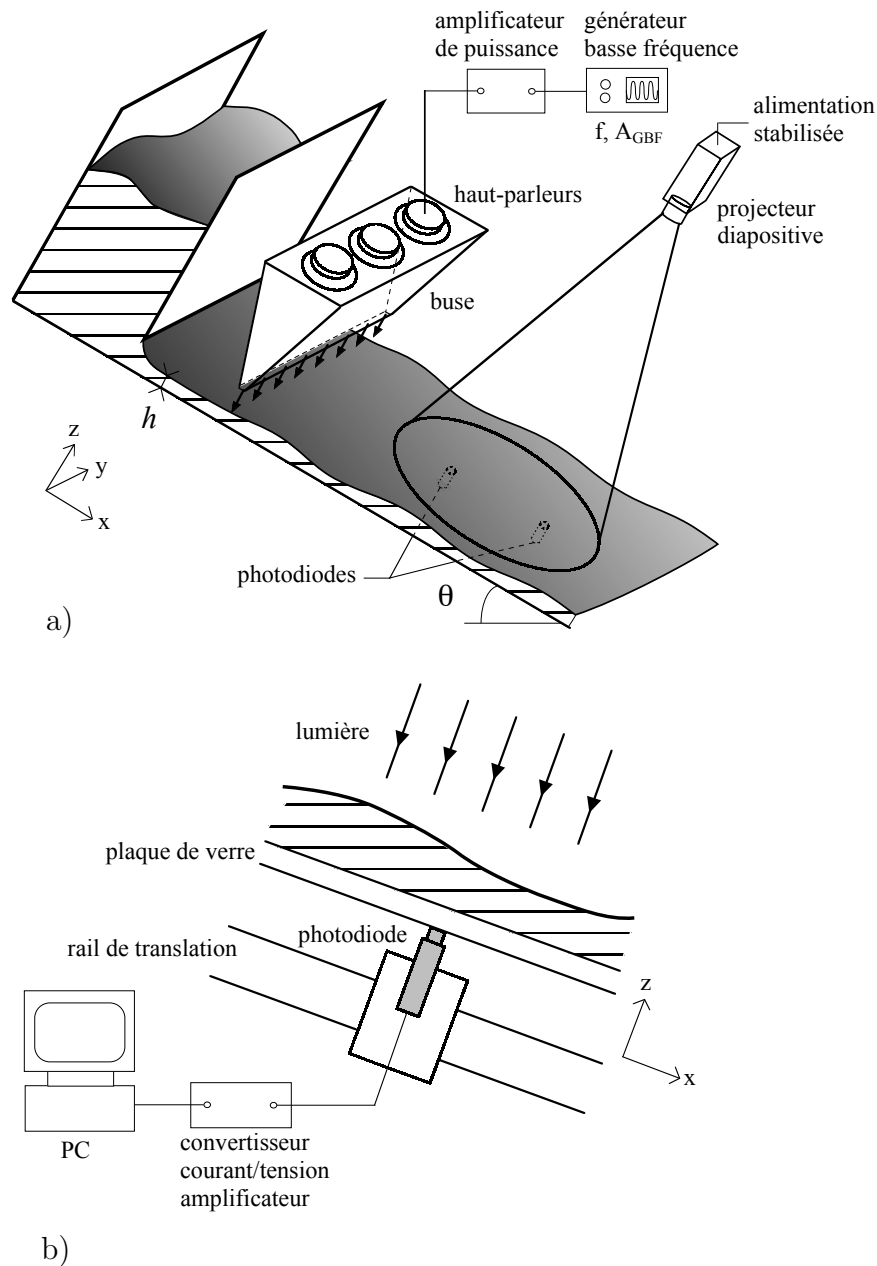


FIG. 5.1 – Schéma du dispositif expérimental de forçage de l'instabilité. a) Vue d'ensemble du dispositif. b) Détail de la technique de détection des ondes par transmission de lumière.

Une réponse typique de la surface libre de l'écoulement au forçage sous la buse est présentée sur la figure 5.2.a, lorsque les haut-parleurs sont excités sinusoïdalement à une fréquence  $f = 3$  Hz et une amplitude  $A_{GBF} = 1.5$  V (l'épaisseur de l'écoulement est mesurée par transmission de lumière, comme nous le verrons dans le prochain paragraphe). Nous

constatons que les variations d'épaisseur  $\delta h$  de la couche de grains suivent bien la fréquence de forçage des haut-parleurs. En revanche, la réponse de la surface libre est fortement non-sinusoïdale et traduit la réponse non linéaire de la buse au forçage. En effet, l'écoulement d'air produit par la buse au voisinage de la couche de grain n'est pas symétrique au cours d'un cycle. Lorsque la buse souffle sur la surface, le jet d'air est intense et localisé. La surface libre est alors creusée et les grains sont repoussés sur les cotés. En revanche lorsque la buse aspire l'air, l'écoulement est étalé et ne pénètre pratiquement pas dans la couche de grains.

Cette réponse anharmonique de la surface libre au forçage de la buse est particulièrement visible sur la transformée de Fourier des variations locales d'épaisseur (figure 5.2b). Nous remarquons que la perturbation générée par la buse est périodique à la fréquence de forçage  $f$  mais qu'elle contient de nombreuses harmoniques, souvent plus fortes que le mode fondamental (noter l'échelle *linéaire* pour représenter l'amplitude des pics de Fourier).

La figure 5.2.a nous donne enfin un ordre de grandeur des déformations de surface induites

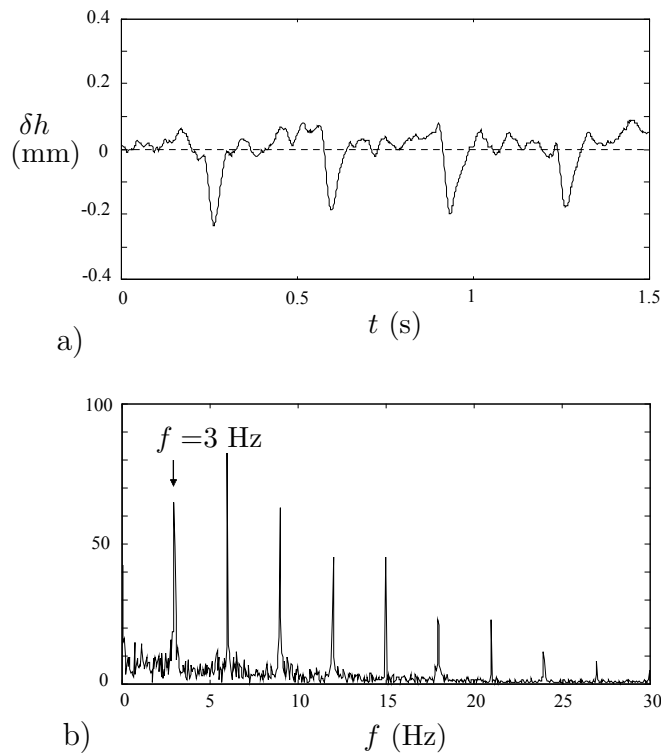


FIG. 5.2 – Déformations de la surface libre de l'écoulement au niveau de la buse pour un forçage  $f = 3$  Hz et  $A_{GBF} = 1.5$  V. a) Variations d'épaisseur  $\delta h$  de la couche en fonction du temps. b) Moyenne de la transformée de Fourier des variations d'épaisseur sur 60 cycles (unités arbitraires).

par le forçage. Pour une fréquence typique  $f = 3$  Hz et une amplitude  $A_{GBF} = 1.5$  V, les variations d'épaisseur de la couche de grains au niveau de la buse sont de l'ordre de 0.25

mm, ce qui correspond à une demi-taille de particule dans le cas des billes de verre 0.5 mm. Cette amplitude est à comparer à l'épaisseur  $h$  de la couche en écoulement et à la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes de surface. Typiquement,  $h \sim 10 d$  et  $\lambda \sim 100 d$ ; on aura donc toujours  $a \ll h \ll \lambda$ .

## 5.2 Détection des ondes

La seconde étape consiste à détecter les ondes forcées, c'est-à-dire à mesurer les variations locales d'épaisseur de la couche en écoulement. Nous avons choisi de mesurer l'amplitude et la forme des ondes forcées le long de l'écoulement en utilisant une technique d'atténuation de la lumière. Un des intérêts de cette méthode est que l'on accède à l'épaisseur locale instantanée de la couche de grains avec une grande précision et une très bonne résolution temporelle. Nous verrons également que l'on peut s'affranchir des problèmes de calibration si on s'intéresse uniquement aux variations d'épaisseur de la couche autour de la valeur moyenne.

La réalisation technique de cette mesure par transmission de lumière est décrite sur la figure 5.1.b. Un faisceau de lumière parallèle est projeté sur la surface libre de l'écoulement et la lumière transmise par la couche de grain est recueillie par une photodiode, fixée sous le plan (rappelons à ce propos que le plan est en verre transparent, ce qui nous permet de "voir" la lumière transmise à travers la couche). Le faisceau de lumière est produit par un projecteur de diapositive dont l'ampoule est branchée directement sur une alimentation continue stabilisée 250 V/10 A (EA-PS 3032-10), afin de s'affranchir des fluctuations du réseau. Pour détecter l'intensité lumineuse qui traverse la couche de grain, nous avons utilisé des photodiodes linéaires avec une grande surface active (modèle UDT PIN-6DI, 16.4 mm<sup>2</sup>). Cela nous permet d'améliorer la sensibilité de la détection tout en moyennant spatialement la lumière transmise (typiquement, la surface de mesure de la photodiode est d'une dizaine de grains). En effet, une des difficultés de cette mesure est le niveau de bruit relativement élevé du signal d'intensité, en raison de la nature discrète des particules. En utilisant une lumière parallèle de grande extension et un détecteur assez large, nous avons pu réduire sensiblement le bruit du signal d'intensité transmise. Les photodiodes sont montées sur platines Micro-Contrôle et positionnées le long d'un rail de translation sous le plan.

Afin de calibrer notre système de mesure, nous avons tout d'abord déterminé la loi qui relie l'intensité de la lumière transmise à l'épaisseur  $h$  de la couche de grains. L'intensité de la lumière est détectée en reliant la photodiode à un convertisseur courant-tension et un amplificateur tandis que l'épaisseur  $h$  est mesurée indépendamment grâce à la technique de la nappe laser. Les résultats sont présentés sur la figure 5.3a pour une couche de billes de verre et sur la figure 5.3b pour une couche de sable. Dans un premier temps, nous avons mesuré la loi de transmission de lumière dans le cas d'une couche de grains statique (ronds

noirs  $\bullet$ ). Un moyen simple de créer une couche de grains d'épaisseur constante est d'utiliser le dépôt qui suit un écoulement stationnaire uniforme (voir chapitre 3). En changeant l'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan, on varie l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}(\theta)$  sur une large gamme. Nous constatons tout d'abord que l'intensité de la lumière transmise décroît exponentiellement avec l'épaisseur de la couche pour les deux types de matériaux. Les données sont bien interpolées par une loi de type  $I = I_0 \exp(-h/L)$ , la longueur d'atténuation caractéristique  $L$  étant nettement plus grande pour les billes de verre que pour le sable ( $L_{billes} = 7.40 d$ ,  $L_{sable} = 1.82 d$ ). Pour vérifier que cette atténuation exponentielle reste valable lorsque les grains coulent, nous avons également fait des mesures sur des écoulements stationnaires uniformes, en variant l'épaisseur  $h$  (cercles blancs  $\circ$ ). Bien que la gamme d'épaisseurs explorées soit plus restreinte que dans le cas des couches statiques, nous remarquons que la loi de transmission de la lumière est la même, que les grains soient au repos ou en écoulement (les données se superposent).

De façon générale, la lumière transmise à travers une couche de particules est une fonction à la fois de l'épaisseur  $h$  et de la fraction volumique  $\nu$  du milieu. Nos mesures montrent donc que la fraction volumique reste pratiquement constante dans le régime d'écoulement dense qui nous intéresse ici.

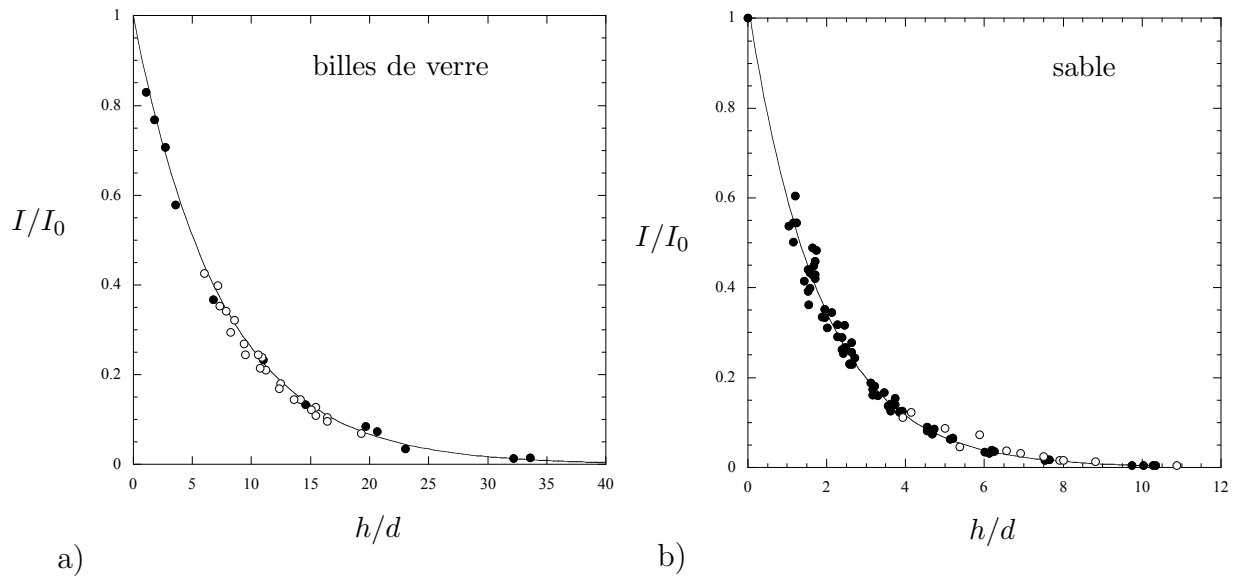


FIG. 5.3 – Mesure de l'intensité transmise par une couche de grain en fonction de son épaisseur  $h$ . a) Billes de verre de diamètre  $d = 0.5$  mm. b) Sable de diamètre moyen  $d = 0.8$  mm. L'intensité est normalisée par l'intensité reçue par la photodiode pour une épaisseur nulle et l'épaisseur  $h$  est adimensionnée par la taille  $d$  des grains. ( $\bullet$ ): lumière transmise à travers une couche statique. ( $\circ$ ): lumière transmise à travers une couche en écoulement. La courbe continue est un fit exponentielle des données:  $I/I_0 = \exp -h/L$ . Pour les billes de verre,  $L = 7.40 d$ . Pour le sable,  $L = 1.82 d$ .

Cette loi d'atténuation exponentielle de la lumière va nous permettre de mesurer les variations d'épaisseur locale de la couche sans faire de calibration. Pour le montrer, on part du fait que la tension  $V$  délivrée par la photodiode est proportionnelle à l'intensité  $I$  reçue. La relation entre la tension  $V(t)$  et l'épaisseur  $h(t)$  de la couche en écoulement s'écrit alors :

$$V(t) = G I_0 \exp\left(-\frac{h(t)}{L}\right), \quad (5.1)$$

où  $I_0$  est l'intensité incidente sur la couche et  $G$  est le gain de la photodiode. En prenant le logarithme de la tension  $V(t)$ , on obtient :

$$\ln V(t) = \ln V_0 - \frac{h(t)}{L}, \quad (5.2)$$

où  $V_0 = GI_0$ . Enfin, en retranchant la valeur moyenne dans le temps des deux cotés, on a :

$$\delta \ln V(t) = -\frac{\delta h(t)}{L}, \quad (5.3)$$

où  $\delta f(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle$ .

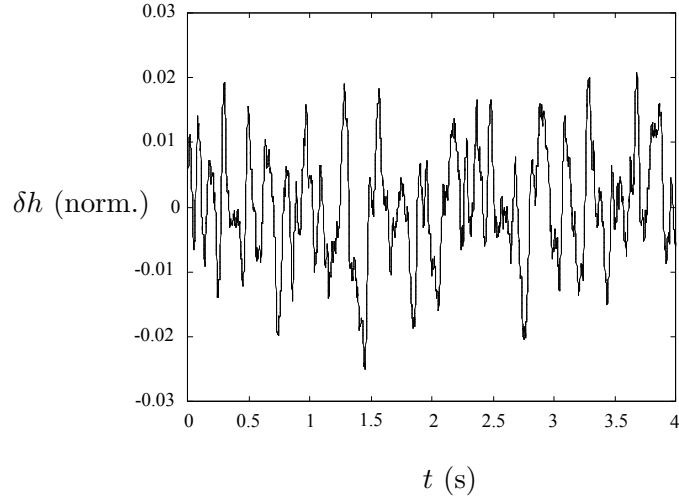
Les variations temporelles du logarithme de la tension délivrée par la photodiode,  $\delta \ln V(t)$ , sont donc directement reliées aux variations temporelles d'épaisseur de la couche en écoulement,  $\delta h(t)$ . Pour un matériau donné ( $L$  fixée),  $\delta \ln V(t)$  ne dépend donc pas de la lumière incidente  $I_0$  ou du gain  $G$  de la photodiode. Nous avons vérifié ce résultat en variant l'intensité et le gain sur une grande gamme d'amplitude. Par la suite, nous pourrions donc mesurer l'amplitude des ondes le long du plan avec plusieurs photodiodes, sans nous préoccuper des variations spatiales de lumière incidente sur le plan, ni des différences éventuelles de gain entre les photodiodes.

Pour acquérir et traiter les données, la tension  $V(t)$  délivrée par la photodiode est recueillie par une carte d'acquisition analogique/numérique 8 voies (NationalInstrument, PCI-MIO-16XE-10, 16 bits, 100 kHz) installée sur un PC. La carte est interfacée par le logiciel LabWindows/CVI et les données enregistrées sont traitées sous Matlab.

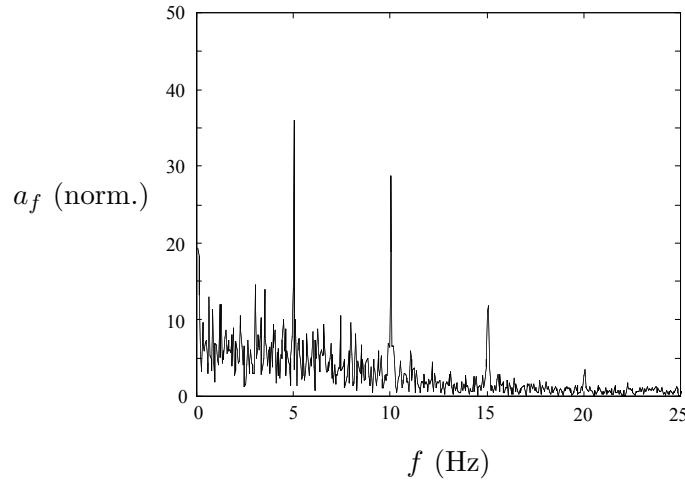
### 5.3 Méthode de mesure

La mesure de l'amplitude et de la phase de l'onde forcée à la fréquence  $f$  se fait par un traitement en deux étapes. Tout d'abord, on calcule le logarithme de la tension  $V(t)$  délivrée par la photodiode pour s'affranchir des problèmes de calibration. D'après (5.3), les variations de  $\ln V(t)$  autour de sa valeur moyenne sont en effet directement proportionnelles aux variations d'épaisseur  $\delta h$  de l'écoulement. Dans un deuxième temps, on effectue la transformée de Fourier discrète de ce signal,  $\text{TF}(\ln V)$ , afin de mesurer l'amplitude et la phase de chaque composante de Fourier de l'onde.

De façon générale, on peut exprimer l'onde forcée à la fréquence  $f$  en chaque point de



a)



b)

FIG. 5.4 – a) Variations d'épaisseur locale de la couche en écoulement pour une fréquence de forçage  $f = 5$  Hz, mesurées à une distance de 15 cm de la buse.  $\delta h$  est normalisée par  $L$  ( $L = 3.7$  mm pour les billes de verre). b) Spectre des variations locales d'épaisseur moyenné sur 120 cycles. La transformée de Fourier des variations d'épaisseur est normalisée par  $(2/N)L$ . Le temps d'échantillonnage est de 1.25 ms et le nombre de points d'acquisition est  $N = 16284$ . ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm).

l'espace par un développement de Fourier de la forme :

$$\delta h(t) = \sum_{n \geq 1} a_{nf} \cos(2\pi n f t - \phi_{nf}), \quad (5.4)$$

où  $a_{nf}$  et  $\phi_{nf}$  sont respectivement l'amplitude et la phase du  $n^{\text{ième}}$  harmonique de l'onde forcée. Sachant que  $\delta h = -L \delta \ln V(t)$ ,  $a_{nf}$  est relié à la transformée de Fourier du signal



acquis par :

$$a_{nf} = K L |\text{TF}(\ln V)|_{nf}. \quad (5.5)$$

Le facteur  $K$  est un facteur numérique lié à la discrétisation du signal. Sa valeur exacte est  $K = (2/N)$ , où  $N$  est le nombre total de points d'acquisition du signal. Pour connaître l'amplitude exacte des fluctuations d'épaisseur  $\delta h$  d'un mode donné, il faut donc connaître la longueur d'atténuation  $L$  de la lumière à travers la couche de grains et le nombre  $N$  de points d'acquisition du signal. Par la suite, nous nous intéresserons essentiellement à des rapports d'amplitudes pour déterminer les taux de croissance. Ces préfacteurs n'interviennent donc pas et nous normalisons les fluctuations d'épaisseur  $\delta h$  par  $L$  et l'amplitude du mode de Fourier  $a_{nf}$  par  $(2/N)L$ .

Nous pouvons également facilement accéder par cette méthode à la phase de l'onde forcée pour le  $n^{\text{ième}}$  mode,  $\phi_{nf}$ . C'est simplement la phase du spectre de  $\ln V(t)$  à cette fréquence.

La figure 5.4 présente une onde mesurée par cette méthode pour une fréquence de forçage  $f$  de 5 Hz (écoulement de billes de verre). L'onde est détectée en aval du point de forçage à une distance  $x = 15$  cm de la buse. On constate tout d'abord que le signal temporel qui mesure les fluctuations d'épaisseur locale de l'écoulement est relativement bruité (5.4a). Ce bruit peut avoir plusieurs origines. Par exemple, lorsque l'écoulement est instable, il se développe des ondes naturelles de grande longueur d'onde qui se superposent aux ondes forcées. De plus, il existe toujours des petites fluctuations dues à la taille du grain. La transformée de Fourier du signal moyennée sur de nombreux cycles permet d'extraire de ce signal la partie correspondant uniquement au forçage, comme le montre la figure 5.4b. Sur cette figure, le spectre associé à l'onde forcée se détache clairement du spectre naturel des fluctuations d'épaisseur de l'écoulement. Il est constitué d'une série de pics discrets à la fréquence de forçage et de ses harmoniques. D'après la relation (5.5), l'amplitude de chacun de ces pics est directement proportionnelle à l'amplitude de chaque mode de l'onde forcée.

## 5.4 Difficultés expérimentales

Le dispositif de forçage combiné avec la technique de transmission de lumière nous permet donc d'imposer une perturbation de fréquence donnée en amont de l'écoulement et de suivre son évolution le long du plan incliné (amplitude, phase). Cependant, pour étudier l'instabilité, nous devons faire face à quelques difficultés que nous présentons brièvement ici. Le premier problème concerne la technique de forçage par la buse. La seconde difficulté, d'ordre plus pratique, n'est pas moins importante ! Il s'agit d'estimer quelle quantité de grains est nécessaire pour observer l'instabilité sur une durée d'écoulement raisonnable.

### 5.4.1 Forçage à basse fréquence

Une première difficulté de l'expérience est liée à notre technique de forçage. Nous avons vu que la perturbation imposée par la buse à la surface libre de l'écoulement était anharmonique. Cette réponse non linéaire de la buse au forçage des hauts-parleurs est d'autant plus marquée que la fréquence de forçage est basse, comme le montre la figure 5.5. Cette

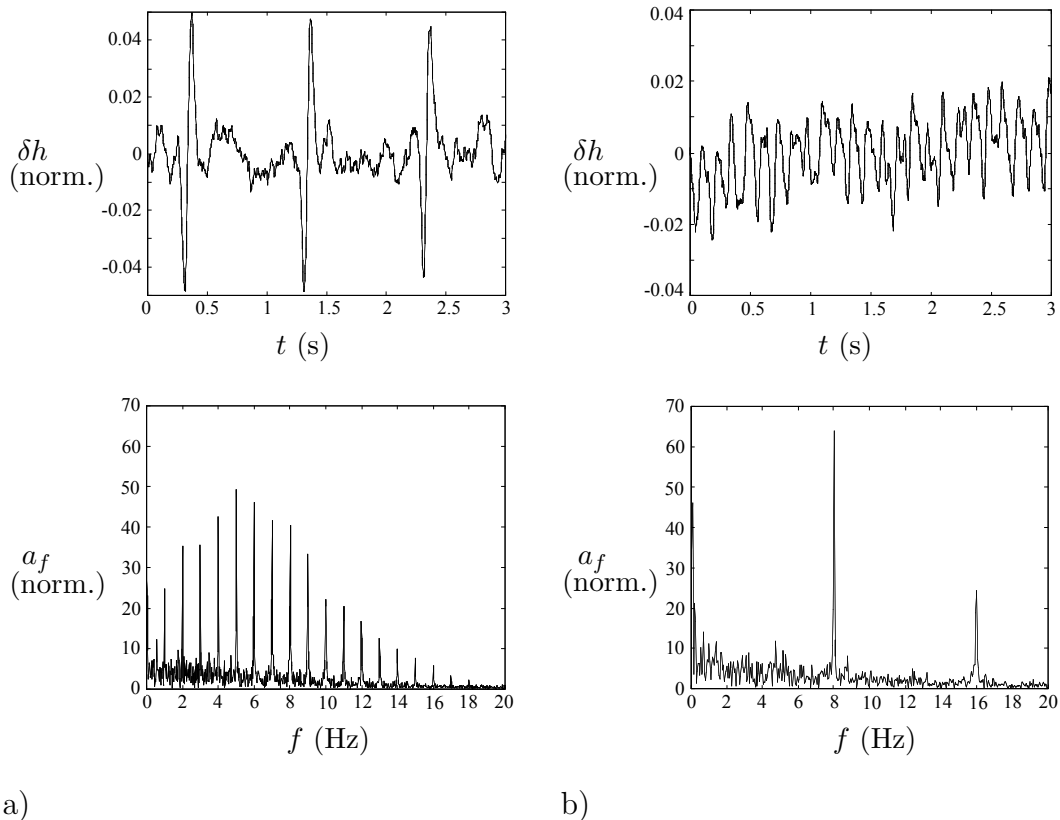


FIG. 5.5 – Fluctuations d'épaisseur proches du point de forçage ( $x = 3$  cm) et spectre de Fourier associé pour deux fréquences de forçage  $f = 1$  (a) et  $f = 8$  Hz (b). Le spectre est moyenné sur 120 cycles. (billes de verre,  $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm).

figure présente la réponse de la surface libre au forçage de la buse pour deux fréquences différentes,  $f = 1$  Hz et  $f = 8$  Hz, ainsi que le spectre de Fourier correspondant. Dans le cas du forçage à la fréquence  $f = 1$  Hz, le signal temporel est fortement non-sinusoidal et le spectre contient de nombreux harmoniques. Nous constatons également que l'amplitude du mode fondamental à la fréquence de forçage est petite devant l'amplitude des premières harmoniques. Ce signal diffère fortement de celui pour une fréquence de forçage de 8 Hz (figure 5.5b). Dans ce cas, les déformations de surface induites par la buse sont beaucoup plus sinusoidales et la majeure partie de l'énergie du forçage est injectée dans le mode fondamental.

Cette différence entre le forçage à basse et haute fréquence est caractéristique de la réponse

non linéaire de la buse aux oscillations des haut-parleurs. On remarque sur la figure 5.5.a que le temps caractéristique  $t_0$  de réponse de la buse est de l'ordre de 0.2 s, ce qui correspond à une fréquence  $f_0$  d'environ 5 Hz. Tant que la fréquence  $f$  imposée par les haut-parleurs est petite devant cette fréquence caractéristique de la buse, on observe pratiquement la réponse impulsionnelle de la buse qui se répète périodiquement à la fréquence de forçage. Les déformations de surface sont alors fortement non-sinusoidales et l'énergie injectée dans le mode fondamental est très faible.

Il est donc difficile avec notre technique de forçage d'injecter dans l'écoulement des modes de basse fréquence d'amplitude raisonnable, à moins de "souffler" assez violemment sur la surface! Sur la figure 5.5, on remarque que l'amplitude  $\delta a$  de l'onde forcée à 1 Hz est deux fois plus grande que celle de l'onde à 8 Hz. Pourtant, quand on s'intéresse à l'amplitude du mode fondamental, les rapports sont complètement inversés : l'amplitude du mode fondamental est presque trois fois plus faible pour  $f = 1$  Hz que pour  $f = 8$  Hz. Pour injecter dans le système un mode de basse fréquence qui sorte du bruit, il est donc nécessaire de déformer assez fortement la surface libre de l'écoulement. Le risque est alors de générer des harmoniques de trop grande amplitude qui peuvent interagir non-linéairement. Suivant les gammes de paramètres, il n'est pas toujours facile de concilier ces deux impératifs.

Nous verrons par la suite que les harmoniques de fréquence élevée sont amortis rapidement au cours de l'écoulement, ce qui "adoucit" le forçage de la buse. Pendant ce cours transitoire, les effets non linéaires peuvent être non négligeables. Pour étudier le régime linéaire de l'instabilité, nous effectuerons donc systématiquement les mesures au-delà de 20 cm de la buse.

### 5.4.2 Précision des mesures et quantité de grains nécessaire

La seconde difficulté de l'expérience concerne la reproductibilité de la mesure de l'amplitude des ondes. En effet, la précision de notre mesure est en grande partie conditionnée par le nombre de cycles sur lequel on calcule la transformée de Fourier du signal. Pour avoir une bonne précision, il faut donc que l'écoulement dure suffisamment longtemps, c'est-à-dire qu'il y ait assez de grains disponibles dans le réservoir.

Il est assez facile d'estimer le débit volumique de grains, par unité de largeur, nécessaire pour étudier l'instabilité qui nous intéresse. En effet, un ordre de grandeur du nombre de Froude  $F$  qu'il faut atteindre pour observer les ondes est  $F_c \sim 1$ . Le débit volumique  $Q$  par unité de largeur étant donné par  $Q = uh = \sqrt{g \cos \theta} F h^{3/2}$ , le débit critique est  $Q_c \sim \sqrt{g} h^{3/2}$ . Pour un écoulement granulaire constitué de billes de verre, nous avons vu que la vitesse est reliée à l'épaisseur et à l'angle par une relation du type  $u/\sqrt{gh} = \beta h/h_{stop}(\theta)$  avec  $\beta = 0.136$  (voir chapitre 3). Un ordre de grandeur du débit critique est donc donné par :

$$Q_c \sim 20\sqrt{g}h_{stop}(\theta)^{3/2}. \quad (5.6)$$

Nous remarquons que plus l'épaisseur de dépôt  $h_{stop}$  est grande, plus le débit qu'il faut atteindre pour observer l'instabilité est important. Appliquons ce résultat à un angle typique de  $25^\circ$  ( $h_{stop} \sim 0.2$  cm), une largeur de plan  $l = 70$  cm et une durée d'écoulement de une minute (ce qui revient à moyennner le signal sur 60 cycles à une fréquence de forçage de 1 Hz). On trouve que le volume de grains nécessaire est de l'ordre de  $1.5 \cdot 10^5$  cm<sup>3</sup>, soit 150 litres!

Pour moyennner suffisamment les mesures, nous avons donc opté pour une solution de compromis (l'idée de la construction d'un "tapis roulant" pour remonter en continu les billes a vite été écartée pour des raisons de coût et d'encombrement de l'expérience...). Tout d'abord, nous disposons d'une quantité importante de billes de verre (environ 40 litres) que l'on remonte avec un seau dans le réservoir. Il faut cependant souligner qu'il est de plus en plus difficile de trouver en grande quantité des billes de verre de qualité, les normes européennes ayant changé au cours de la thèse! Nous avons également divisé la largeur du plan par deux, soit  $l = 35$  cm (pour des largeurs plus petites, les effets de bord deviennent trop gênants). Enfin, on réalise pour chaque mesure cinq expériences identiques, la durée typique d'un écoulement étant de 20 secondes.



## Chapitre 6

# Résultats pour les billes de verre

Nous présentons dans ce chapitre les résultats de notre étude de l'instabilité par forçage des ondes dans le cas des écoulements de billes de verre. Sans forçage, aucune onde n'était observée. Nous montrons ici grâce au forçage que l'instabilité existe mais que les taux de croissance sont très faibles. Notre plan incliné était donc trop court pour que l'on puisse voir se développer les ondes naturellement.

Nous montrons dans un premier temps qu'il existe un régime d'instabilité linéaire de ces écoulements. Nous étudions ensuite la relation de dispersion des ondes forcées, c'est-à-dire les taux de croissance et la vitesse de phase de ces ondes. Enfin, nous présentons le diagramme de stabilité expérimental et nous comparons ces résultats avec l'analyse de stabilité linéaire faite dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur.

### 6.1 Evolution spatiale d'une onde forcée : régime linéaire

La première étape avant d'étudier plus en détail l'instabilité est de s'assurer de l'existence d'un régime linéaire. Pour cela, nous avons étudié l'évolution le long du plan d'une perturbation périodique imposée en amont de l'écoulement. La figure 6.1 montre l'évolution typique d'une onde forcée au-dessus du seuil de stabilité ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm). L'onde est mesurée à deux positions successives en aval de l'écoulement ( $x = 6$  cm et  $x = 96$  cm de la buse) et la fréquence de forçage est  $f = 2$  Hz.

La première observation est que la fréquence de l'onde qui se propage le long de l'écoulement "suit" exactement la fréquence de forçage. On remarque que le spectre des variations locales d'épaisseur est la superposition du spectre de l'onde forcée, constitué de pics discrets à la fréquence de forçage et de ses harmoniques, et du spectre continu des fluctuations naturelles de l'écoulement. Ce résultat est important car il signifie que l'instabilité est convective, c'est-à-dire qu'une perturbation imposée en un endroit fixe de l'écoulement est entraînée par l'écoulement moyen.

Nous remarquons également que l'onde forcée évolue fortement le long du plan. Cela est particulièrement clair sur la transformée de Fourier du signal (on a pris ici le logarithme de la transformée de Fourier pour mieux distinguer le spectre naturel lié au bruit). On re-

marque que les modes de haute fréquence ( $f > 6$  Hz) sont amortis au cours de l'écoulement tandis que les modes de basse fréquence ( $f \leq 6$  Hz) sont amplifiés. Cette amplification des fluctuations d'épaisseur de basse fréquence est également visible sur le spectre continu naturel de l'écoulement.

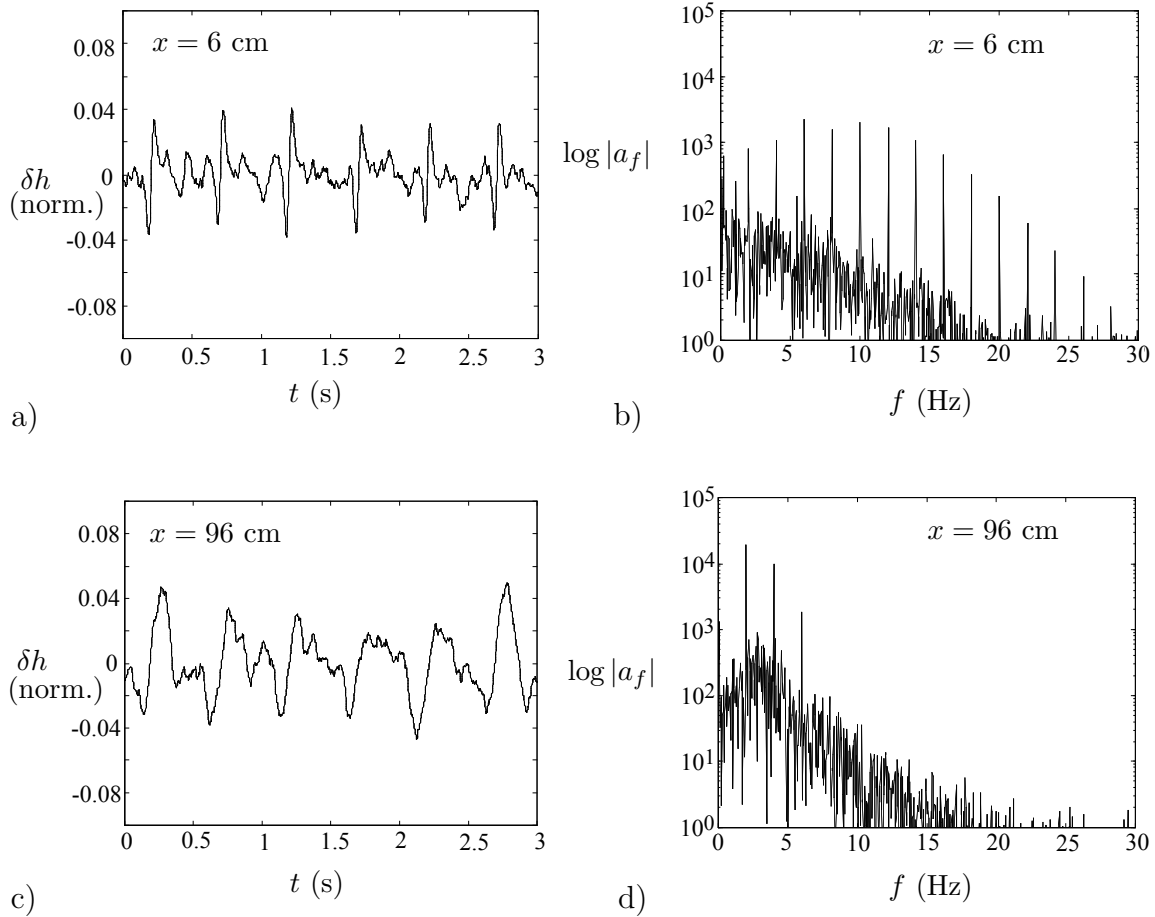


FIG. 6.1 – Evolution typique d'une onde forcée au-dessus du seuil de stabilité. L'onde est mesurée à deux positions différentes,  $x = 6$  cm et  $x = 96$  cm du point de forçage. ( $f = 2$  Hz,  $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm). a) et c) Fluctuations d'épaisseur locales adimensionnée par  $L$ . b) et d) Spectre de puissance moyenné sur 40 cycles en coordonnées logarithmiques.

Ces résultats sont obtenus pour une seule fréquence de forçage et deux positions le long de l'écoulement. Il est donc difficile à partir de ces seules observations de conclure à une instabilité de l'écoulement. En particulier, l'amplification des modes de basse fréquence pourrait provenir d'effets non linéaires par interaction avec d'autres modes. Nous avons donc systématiquement mesuré pour différentes fréquences de forçage l'évolution de l'amplitude du mode *fondamental*  $a_f$  en fonction de la distance  $x$  au point de forçage. Les résultats sont donnés sur la figure 6.2 pour cinq fréquences de forçage:  $f = 2$  Hz,  $f = 5$

Hz,  $f = 7$  Hz et  $f = 12$  Hz. Nous constatons tout d'abord que l'évolution spatiale du mode fondamental dépend fortement de la fréquence de forçage. Pour une fréquence de 2 Hz et de 5 Hz, l'amplitude du mode fondamental croît au cours de l'écoulement, tandis que pour une fréquence de forçage de 12 Hz le mode est rapidement amorti. Enfin, on remarque que pour une fréquence de forçage de 7 Hz l'amplitude du mode fondamental reste constante au cours de l'écoulement. Pour les paramètres de contrôle que l'on s'est fixé, on retrouve donc le résultat obtenu précédemment, à savoir que les basses fréquences sont amplifiées au cours de l'écoulement tandis que les hautes fréquences sont amorties. Il existe également une fréquence qui correspond à un mode *neutre*, c'est-à-dire une fréquence pour laquelle le mode n'est ni amplifié ni amorti le long du plan.

Le second résultat important est que pour une fréquence de forçage fixée, l'amplitude du mode fondamental varie exponentiellement le long de l'écoulement :  $a_f(x) = a_f(0) \exp \sigma x$ , où  $\sigma$  est le taux de croissance spatiale. De plus, ce taux de croissance ne dépend pas de l'amplitude de forçage, dans la gamme d'amplitudes typiques que nous employons.

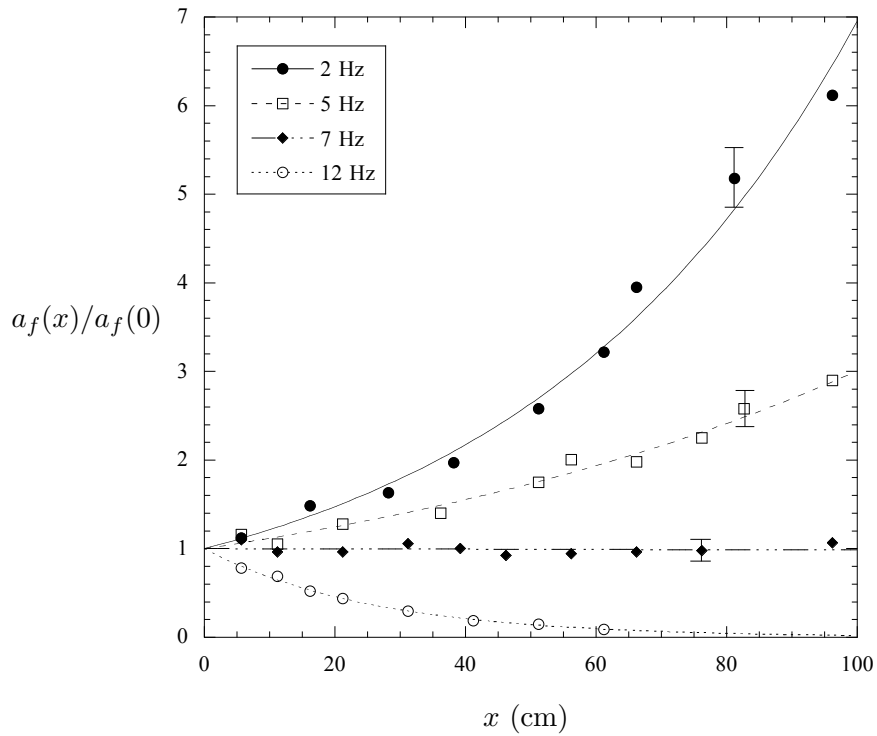


FIG. 6.2 – Evolution le long du plan d'une onde forcée, pour différentes fréquences de forçage. La distance  $x$  est mesurée le long du plan à partir du point de forçage et l'amplitude de l'onde est normalisée par son amplitude en  $x = 0$ . Les courbes continues correspondent à une interpolation exponentielle de la forme  $\exp(\sigma x)$  avec  $\sigma(2Hz) = 0.0194 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\sigma(5Hz) = 0.0110 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\sigma(7Hz) = 0.0001 \text{ cm}^{-1}$  et  $\sigma(12Hz) = -0.0389 \text{ cm}^{-1}$ . Les barres d'erreur indiquent la dispersion des mesures. ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3 \text{ mm}$ ).



Ces résultats montrent qu'il existe un régime d'instabilité linéaire de l'écoulement. Un autre moyen de vérifier que l'on travaille dans un régime linéaire est de comparer le taux de croissance  $\sigma$  déduit de l'évolution spatiale du mode fondamental à celui déduit de l'évolution spatiale des modes harmoniques. En effet, la perturbation imposée par notre forçage en amont de l'écoulement étant non-sinusoidale, nous injectons dans l'écoulement non seulement le mode fondamental à la fréquence de forçage  $f$ , mais également des modes harmoniques de fréquence  $f_n = nf$ . On peut donc déterminer le taux de croissance  $\sigma(f)$  d'un mode à la fréquence  $f$  de plusieurs façons. Soit on impose une perturbation de fréquence  $f$  et on suit l'évolution spatiale du mode fondamental. Soit on force une onde de fréquence  $f' = f/n$  et on suit l'évolution spatiale du  $n^{\text{ième}}$  harmonique de cette onde. Nous avons systématiquement mesuré le taux de croissance en fonction de la fréquence selon ces deux méthodes. Pour mesurer le taux de croissance d'un mode de fréquence  $f$ , nous plaçons deux photodiodes à une position  $x_1$  et  $x_2$  du point de forçage et nous mesurons l'amplitude  $a_f$  en chaque point. L'évolution spatiale d'un mode étant exponentielle, le taux de croissance est simplement donné par :

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{a(x_2)}{a(x_1)}, \quad (6.1)$$

où  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Les résultats obtenus sont rassemblés sur la figure 6.3. Sur ce graphe, les taux de croissance mesurés directement à partir du mode fondamental sont donnés par les ronds noirs ( $\bullet$ ). Les autres points correspondent aux taux de croissance mesurés à partir des modes harmoniques pour des fréquences de forçage indiquées sur le graphe. Nous remarquons que l'allure de la courbe donnant le taux de croissance en fonction de la fréquence dépend peu de la méthode choisie, aux incertitudes de mesure près. En particulier, le mode le plus amplifié ( $f = 2 - 3$  Hz) et le mode neutre ( $f \sim 7$  Hz) sont les mêmes. Grâce à notre forçage fortement non-sinusoidal, on peut donc espérer obtenir d'un seul coup la relation de dispersion de notre système, en forçant uniquement à une seule fréquence !

Il existe cependant de légères différences entre les taux de croissance mesurés à partir du mode fondamental de l'onde forcée et à partir des modes harmoniques. En particulier, nous avons remarqué que pour les modes instables, les taux d'amplification sont systématiquement plus petit en mesurant le mode fondamental. Pour déterminer précisément les taux de croissance, nous utiliserons donc toujours le mode fondamental.

Cette étude de l'évolution spatiale d'une onde le long du plan montre donc qu'il existe un régime d'instabilité linéaire. Les différents modes injectés dans le système par notre forçage non-sinusoidal interagissent très peu les uns avec les autres, du moins dans la zone où nous effectuons les mesures. L'existence d'un régime linéaire pour l'instabilité va nous permettre d'étudier avec précision la relation de dispersion des ondes de surface et le seuil de stabilité de l'écoulement.

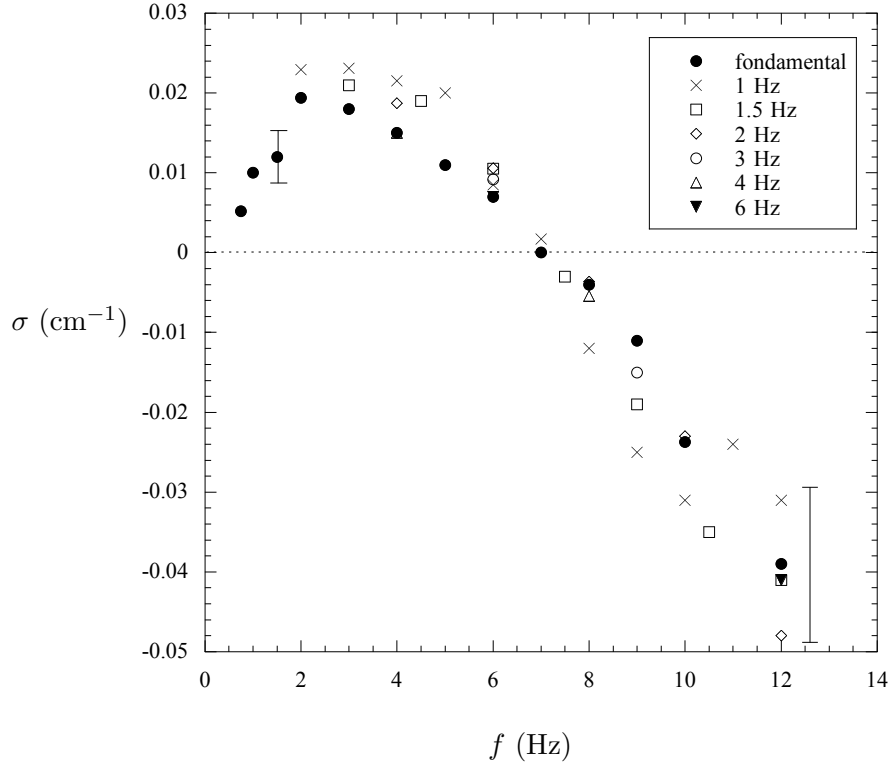


FIG. 6.3 – Taux de croissance spatiale  $\sigma$  en fonction de la fréquence de forçage  $f$ . Le taux de croissance est mesuré à partir du mode fondamental de l'onde forcée ( $\bullet$ ) ou à partir de ces modes harmoniques (dans ce cas, les fréquences de forçage sont indiquées sur le graphe). ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm).

## 6.2 Relation de dispersion

Dans cette partie, nous présentons la relation de dispersion typique de l'instabilité en onde de surface, c'est-à-dire le taux de croissance spatiale et la vitesse de phase des ondes en fonction de la fréquence de forçage, pour une valeur des paramètres de contrôle  $\theta$  et  $h$  fixée.

### 6.2.1 Taux de croissance spatiale

La figure 6.4a est une mesure typique du taux de croissance spatiale  $\sigma$  en fonction de la fréquence  $f$  quand l'écoulement est instable ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm). Tout d'abord, on remarque qu'il existe toute une bande de fréquences instables pour des fréquences inférieures à une certaine fréquence  $f_c$  qui est ici de l'ordre de 7 Hz. Une onde sinusoïdale de fréquence inférieure à cette fréquence  $f_c$  est donc amplifiée au cours de l'écoulement. L'existence de modes amplifiés prouve que l'écoulement est instable pour les paramètres de contrôle  $\theta = 29^\circ$  et  $h = 5.3$  mm considérés.

Le taux d'amplification d'un mode le long de l'écoulement dépend fortement de sa fréquence.

Sur l'exemple de la figure 6.4a, le mode le plus instable a lieu pour une fréquence de l'ordre de 2 – 3 Hz, le taux de croissance spatiale étant alors de l'ordre de  $10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ . Pour des fréquences plus faibles,  $\sigma$  semble diminuer tout en restant positif quand  $f \rightarrow 0$ . Il est cependant difficile expérimentalement de mesurer le taux de croissance pour des fréquences inférieures à 1 Hz. Nous avons déjà signalé au chapitre 5 que notre technique de forçage était peu efficace pour ces basses fréquences, la perturbation imposée par la buse étant alors fortement non-sinusoidale. Par la suite, les fréquences que nous étudierons seront toujours supérieures ou égales à 1 Hz.

L'autre résultat important est qu'au-delà d'une certaine fréquence, les modes sont tous amortis le long de l'écoulement, et ce d'autant plus que la fréquence est élevée. Il existe donc une fréquence dite *de coupure*  $f_c$ , qui sépare les fréquences instables des fréquences stables. Un mode à la fréquence de coupure se propage sans évoluer le long de l'écoulement comme le montre la figure 6.2.

Nous allons voir que l'existence d'une fréquence de coupure bien définie dans le système va nous permettre de déterminer avec précision le seuil de stabilité. Un moyen rapide d'estimer la fréquence de coupure du système est d'imposer une perturbation de basse fréquence (1 Hz par exemple) et de suivre l'évolution des modes harmoniques. On obtient alors un encadrement grossier de  $f_c$ , à 1 ou 2 Hz près. Pour déterminer ensuite plus précisément  $f_c$ , on varie la fréquence de forçage autour de cette fréquence de coupure en mesurant simultanément les taux de croissance. Il faut cependant noter que l'incertitude sur la mesure des taux de croissance limite la précision de notre mesure de  $f_c$ .

## 6.2.2 Vitesse de phase

Notre technique de mesure permet également d'accéder à la vitesse de phase  $v_\phi$  des ondes forcées en fonction de la fréquence  $f$  ou, ce qui revient au même, à la longueur d'onde  $\lambda$  donnée par  $\lambda = v_\phi/f$ . Pour cela, nous mesurons la phase de la transformée de Fourier des variations locales d'épaisseur à deux positions successives le long de l'écoulement. En effet, un mode sinusoidal de fréquence  $f$  peut s'écrire en chaque point  $x$  de l'espace :

$$\delta h_f = a_f(x) \cos[2\pi ft - \phi_f(x)]. \quad (6.2)$$

Pour une onde plane qui évolue exponentiellement le long de l'écoulement, on a

$$a_f(x) = a_f(0)e^{\sigma x} \text{ et } \phi_f(x) = kx, \quad (6.3)$$

où  $k$  est le nombre d'onde défini par  $k = 2\pi/\lambda$ . En mesurant la phase de la transformée de Fourier du signal,  $\phi_f(x)$ , en deux points  $x_1$  et  $x_2$  le long du plan, on détermine donc le nombre d'onde  $k$  et la vitesse de phase  $v_\phi$  par :

$$k = \frac{\phi_f(x_2) - \phi_f(x_1)}{\Delta x} \text{ et } v_\phi = \frac{2\pi f}{k}, \quad (6.4)$$

où  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

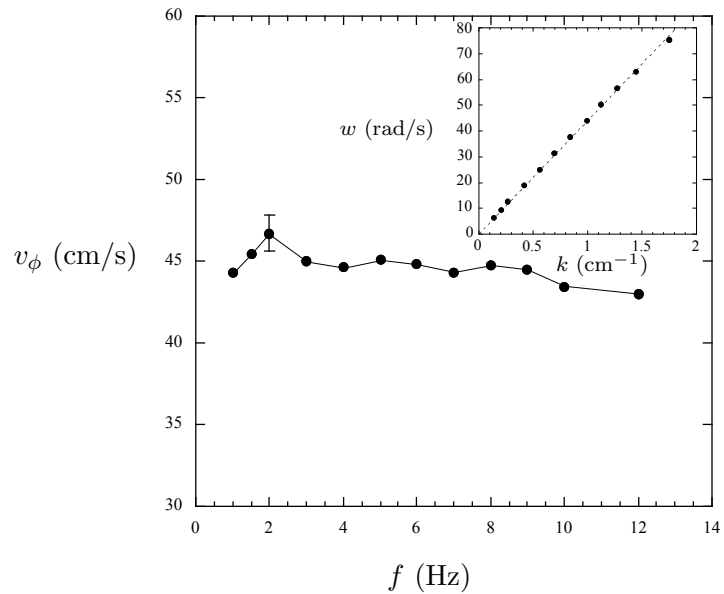
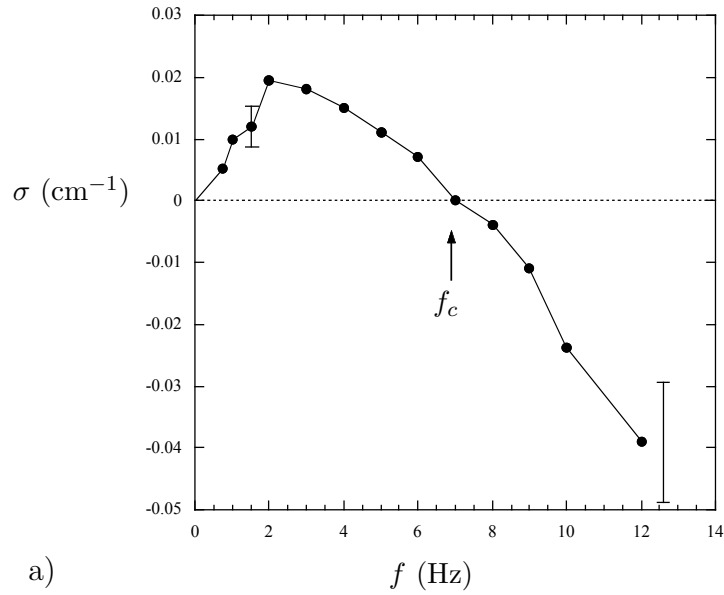


FIG. 6.4 – Relation de dispersion expérimentale. a) Taux de croissance spatiale en fonction de la fréquence de forçage. b) Vitesse de phase en fonction de la fréquence de forçage. Le graphe en insert donne la relation entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ . ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm).

Il est à noter que la mesure de la vitesse de phase est beaucoup plus précise que celle des taux de croissance, l'amplitude de l'onde étant beaucoup plus sensible au bruit de

l'écoulement que sa phase.

La vitesse de phase ainsi déterminée est donnée sur la figure 6.4b pour les mêmes conditions expérimentales que précédemment ( $\theta = 29^\circ$ ,  $h = 5.3$  mm). On remarque que la vitesse de phase est pratiquement constante dans la gamme de fréquences que nous avons explorée. Pour les paramètres de contrôle considérés, sa valeur est de l'ordre de 45 cm/s, soit un peu plus du double de la vitesse moyenne de l'écoulement ( $u = 21$  cm/s). Ce caractère non dispersif des ondes est parfaitement visible sur le graphe qui donne la pulsation  $\omega$  en fonction du nombre d'onde réel  $k$  (6.4b.insert) : la relation entre la pulsation et le nombre d'onde est linéaire, la pente donnant la vitesse de phase.

Nous avons également fait des mesures de vitesses de phase pour d'autres valeurs des paramètres de contrôle ( $\theta$ ,  $h$ ). La vitesse de phase est toujours pratiquement indépendante de la fréquence. Par contre, la valeur de la vitesse de phase dépend des paramètres ( $\theta$ ,  $h$ ) comme nous le verrons lors de la comparaison avec la théorie.

## 6.3 Seuil de stabilité

### 6.3.1 Une instabilité à nombre d'onde nul

Jusqu'à présent, nous avons étudié les caractéristiques de l'instabilité (taux de croissance, vitesse de phase) pour un angle d'inclinaison du plan  $\theta$  et une épaisseur de l'écoulement  $h$  fixes. Pour  $\theta = 29^\circ$  et  $h = 5.3$  mm, nous avons ainsi montré que l'écoulement est instable car il existe des modes amplifiés le long de l'écoulement. Que se passe-t-il maintenant quand on modifie un des deux paramètres de contrôle ?

La figure 6.5 donne l'évolution typique des taux de croissance quand on diminue l'épaisseur tout en maintenant l'angle du plan fixe ( $\theta = 29^\circ$ ). Nous constatons que l'écoulement est moins instable quand l'épaisseur diminue. Tout d'abord la fréquence de coupure diminue quand l'épaisseur diminue, ce qui veut dire que la bande de fréquences instables dans le système rétrécit. De plus, la valeur du taux de croissance maximal diminue également quand l'épaisseur décroît.

Nous avons mesuré systématiquement la fréquence de coupure en fonction de l'épaisseur de l'écoulement (voir figure 6.6a). La relation  $f_c(h)$  ainsi obtenue constitue la courbe marginale de l'instabilité dans l'espace  $(h, f)$ , pour un angle  $\theta$  fixé. Cette courbe délimite la zone où les ondes sont stables (faibles épaisseurs, hautes fréquences) de la zone où les ondes sont instables (grandes épaisseurs, basses fréquences). On remarque que la fréquence de coupure  $f_c$  décroît avec l'épaisseur et tend vers zéro quand l'épaisseur se rapproche d'une épaisseur critique  $h_c$ . Pour des épaisseurs inférieures à  $h_c$ , les ondes sont stables quelle que soit leur fréquence. L'écoulement est donc stable pour  $h < h_c$ ,  $h_c$  étant le seuil de stabilité de l'écoulement pour l'angle que l'on a fixé.

Cette situation où la fréquence de coupure du système tend vers zéro quand on s'approche du seuil de stabilité est caractéristique d'une instabilité "à fréquence nulle" ou

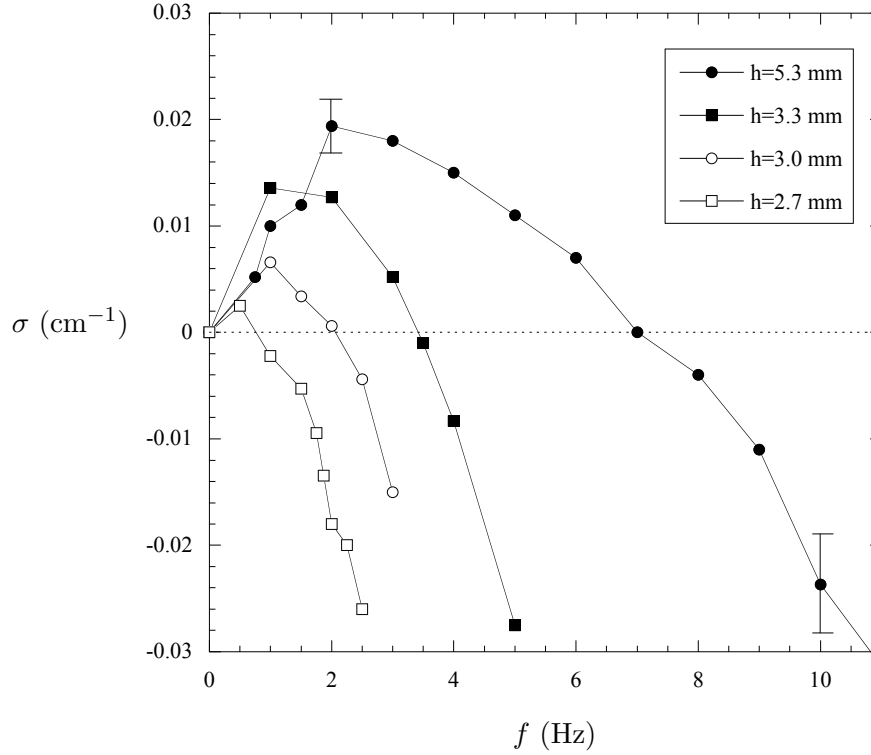


FIG. 6.5 – Taux de croissance spatiale en fonction de la fréquence quand on diminue l'épaisseur  $h$  de l'écoulement en maintenant l'angle fixe ( $\theta = 29^\circ$ , les valeurs de  $h$  sont données sur le graphe). Le nombre de Froude pour ces paramètres de contrôle est respectivement 1.02 ( $\bullet$ ), 0.66 ( $\blacksquare$ ), 0.58 ( $\circ$ ) et 0.51 ( $\square$ ).

à nombre d'onde  $k$  nul. Expérimentalement, il est dans ce cas difficile de mesurer avec précision le seuil de stabilité car on ne peut pas forcer l'écoulement à des fréquences arbitrairement basses. Pour déterminer le seuil de stabilité  $h_c$ , nous devons donc extrapoler la relation  $f_c(h)$  de la figure 6.6a lorsque la fréquence de coupure tend vers zéro. Cette méthode a été par exemple utilisée par Liu *et al.* 1993 pour mesurer le nombre de Reynolds critique  $R_c$  d'un écoulement de film liquide sur plan incliné. Pour ce système, une analyse de stabilité linéaire des équations de Navier-Stokes montre que la fréquence de coupure varie comme la racine carrée de l'écart au seuil au voisinage du point critique, ce qui permet d'interpoler la relation  $f_c(Re)$ . Dans le cas d'un écoulement granulaire, nous avons déjà signalé que les équations moyennées dans l'épaisseur ne donnent pas de renseignement sur les mécanismes stabilisants. La théorie ne prédit donc pas de fréquence de coupure et nous ne connaissons pas le comportement de  $f_c$  près du seuil. Nous avons donc essayé différentes fonctions pour interpoler nos données  $f_c(h)$ . Sur la figure 6.6a, la courbe en trait continu (resp. en trait pointillé) est une interpolation des données expérimentales du type  $h = h_{c1} + af_c + bf_c^2$  (resp. du type  $h = h_{c2} + bf_c^2$ ). Compte tenu des incertitudes sur la mesure de la fréquence de coupure, il est difficile de trancher entre ces deux expressions. Par la suite, la valeur que nous donnerons pour le seuil de stabilité  $h_c$  sera la

valeur moyenne des valeurs  $h_{c1}$  et  $h_{c2}$  déduites de ces deux “fits”. On obtient ainsi pour l'épaisseur critique  $h_c(29^\circ) = 2.6 \pm 0.3$  mm à un angle  $\theta = 29^\circ$ .

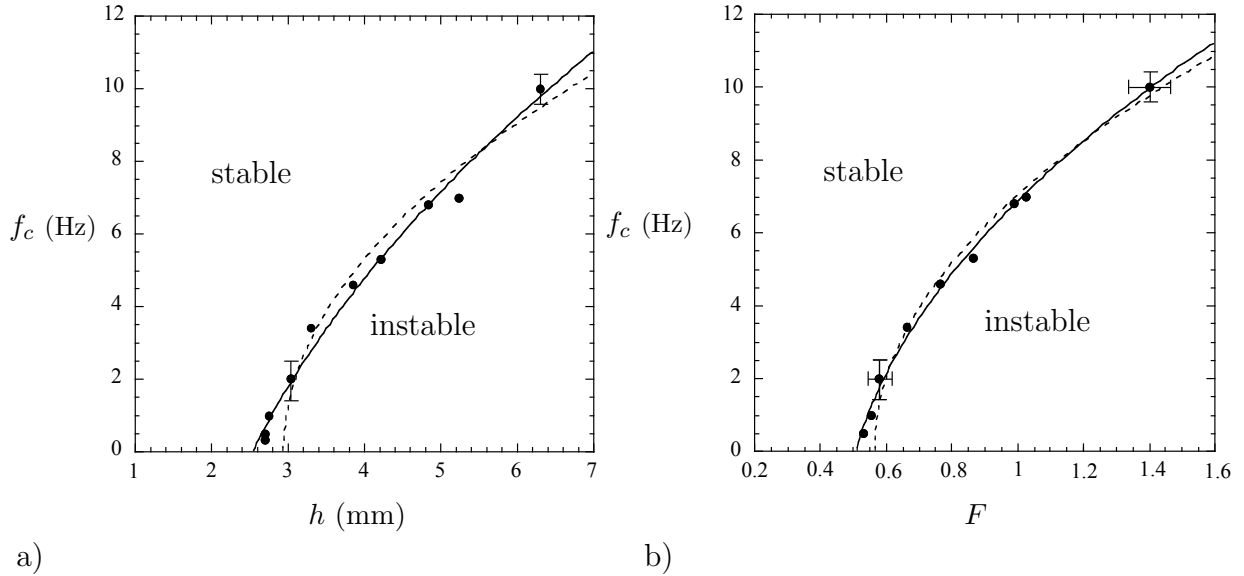


FIG. 6.6 – Fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de l'épaisseur  $h$  de l'écoulement (a) et du nombre de Froude  $F = u/\sqrt{gh \cos \theta}$  (b), pour un angle  $\theta = 29^\circ$ . La courbe en continu est une interpolation polynomiale du type  $a + bf_c + cf_c^2$  et la courbe en pointillés est une interpolation quadratique du type  $a + cf_c^2$ .

Nous avons vu dans le chapitre consacré à l'analyse linéaire de l'instabilité que la théorie prédit une instabilité contrôlée par le nombre de Froude  $F$ , défini par  $F = u/\sqrt{gh \cos \theta}$ . Il est donc intéressant d'utiliser ce nombre de Froude à la place de l'épaisseur comme paramètre de contrôle, c'est-à-dire de passer du couple de paramètres de contrôle  $(\theta, h)$  au couple  $(\theta, F)$ . Pour mesurer le nombre de Froude, nous avons mesuré pour chacune des expériences la vitesse moyenne de l'écoulement  $u$  en plus de l'épaisseur  $h$ .

Quand on diminue l'épaisseur à angle fixé, on diminue également le nombre de Froude. L'épaisseur critique  $h_c$  correspond donc à un nombre de Froude critique  $F_c$  pour l'instabilité. Pour déterminer  $F_c$ , on utilise la procédure décrite auparavant en interpolant la relation  $f_c(F)$  vers zéro comme le montre la figure 6.6b. Pour  $\theta = 29^\circ$ , on trouve un nombre de Froude critique  $F_c(29^\circ) = 0.54 \pm 0.02$ . Lorsque le nombre de Froude est inférieur à  $F_c$ , l'écoulement est stable.

### 6.3.2 Diagramme de stabilité

Une fois déterminé le seuil de stabilité pour un angle donné, nous pouvons changer l'angle et répéter toute la procédure expérimentale que nous avons décrite. L'ensemble de ces mesures est rassemblé sur la figure 6.7 qui donne la fréquence de coupure des ondes  $f_c$

en fonction de l'épaisseur  $h$  de l'écoulement (a) et du nombre de Froude  $F$  (b), pour des angles allant de  $29^\circ$  jusqu'à  $24^\circ$ .

Nous retrouvons pour différents angles les résultats que nous avons obtenus avec un seul angle : pour un angle fixé, la fréquence de coupure décroît quand l'épaisseur diminue. Nous constatons également que pour une épaisseur donnée, la fréquence de coupure diminue lorsque l'angle diminue. Cela veut dire que plus l'angle d'inclinaison du plan est faible, plus il faut augmenter l'épaisseur de l'écoulement pour observer l'instabilité.

Le point important est que toutes ces données se rassemblent quand on utilise le nombre de Froude  $F$  comme paramètre de contrôle au lieu de l'épaisseur  $h$ . Ce résultat montre que l'instabilité, au voisinage du seuil, est pilotée par le nombre de Froude.

Nous n'avons pas déterminé le seuil de stabilité pour des angles inférieurs à  $24^\circ$  ou supérieurs à  $29^\circ$ . Pour des angles supérieures à  $29^\circ$ , il semble que nous quittions la région des écoulements stationnaires uniformes. Dans ce cas l'écoulement accélère le long de la pente et on observe encore l'instabilité en onde de surface. Cependant l'écoulement n'est plus décrit par le régime des écoulements denses.

Le problème auquel on est confronté pour des angles inférieures à  $24^\circ$  est d'une toute autre nature. En effet, à mesure que l'on diminue l'angle, l'épaisseur qu'il faut atteindre pour observer l'instabilité est de plus en plus grande. Cela entraîne deux difficultés expérimentales. Tout d'abord, le débit volumique nécessaire pour observer l'instabilité augmente fortement (voir chapitre 5). La quantité de billes dont nous disposons étant limitée, la durée sur laquelle le signal est moyenné est de plus en plus réduite à mesure que l'on diminue l'angle du plan. Ainsi, la durée moyenne d'un écoulement au seuil de stabilité est à peine de dix secondes à  $24^\circ$  contre plus de deux minutes à  $29^\circ$ , compte tenu du volume de billes disponible dans le réservoir. L'autre difficulté qui apparaît aux faibles angles est liée à la longueur d'établissement du régime stationnaire uniforme à la sortie du réservoir : plus l'épaisseur de l'écoulement est grande, plus cette "longueur d'entrée" du système est importante. Pour des faibles angles, les épaisseurs qu'il faut atteindre pour observer l'instabilité sont grandes et nous ne sommes pas certains de forcer les ondes dans une zone d'écoulement pleinement développée. Ces difficultés expérimentales expliquent la grande incertitude de la mesure faite à  $\theta = 24^\circ$ , ainsi que le peu de données à cet angle. Il faut d'ailleurs interpréter avec précaution le seuil de stabilité mesuré dans ce cas.

A partir de ces mesures, nous pouvons déterminer l'épaisseur critique  $h_c(\theta)$  et le nombre de Froude critique  $F_c(\theta)$  en fonction de l'angle d'inclinaison du plan. On obtient alors les diagrammes de stabilité de l'écoulement dans l'espace des phases  $(\theta, h)$  et  $(\theta, F)$ . Ceux-ci sont présentés sur la figure 6.8. On remarque que l'instabilité apparaît aux grandes épaisseurs et aux grands angles. Lorsque l'angle du plan est fixé, il faut atteindre une certaine épaisseur critique pour observer l'instabilité. De même à épaisseur donnée, l'instabilité apparaît au-delà d'un angle critique.

Le paramètre de contrôle de l'instabilité est le nombre de Froude comme le montre la figure 6.8b. Alors que l'épaisseur critique  $h_c$  varie fortement avec l'angle d'inclinaison du plan, le nombre de Froude critique  $F_c$  ne dépend pratiquement pas de l'angle d'inclinaison. Pour



les écoulements granulaires de billes de verre, on trouve  $F_c = 0.55 \pm 0.05$ .

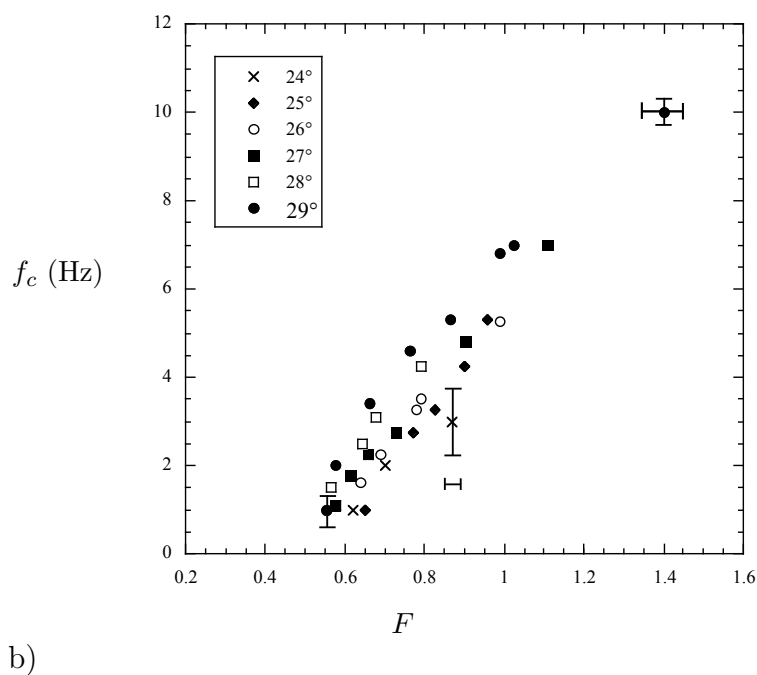
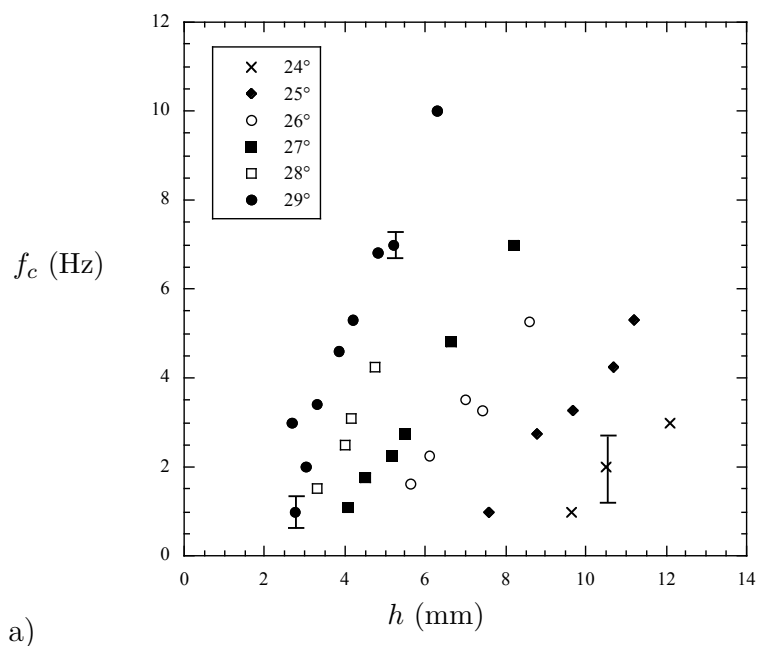
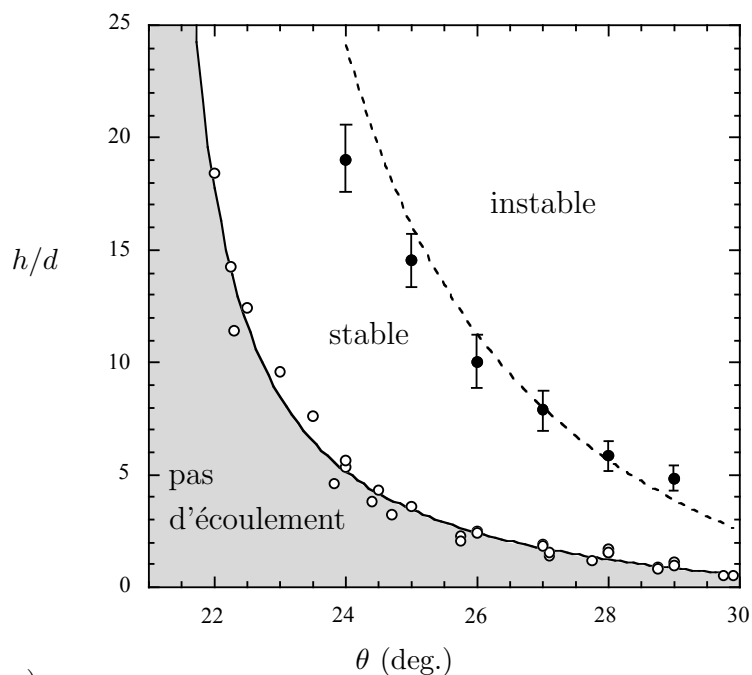
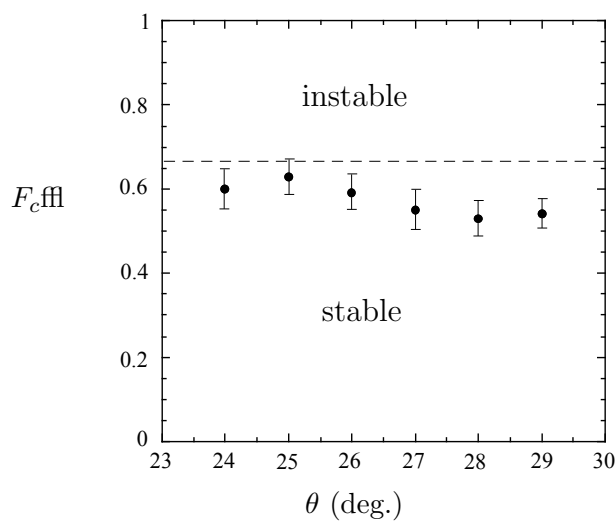


FIG. 6.7 – Fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de l'épaisseur  $h$  de l'écoulement (a) et du nombre de Froude  $F = u/\sqrt{gh \cos \theta}$  (b) pour l'ensemble des angles  $\theta$  explorés dans l'expérience (voir légende du graphe).



a)



b)

FIG. 6.8 – a) Diagramme de stabilité dans l'espace des phases  $(\theta, h)$  (a) et  $(\theta, F)$  (b). Les points noirs (●) correspondent au seuil de stabilité déterminé expérimentalement. La courbe en pointillés est la courbe de stabilité marginale théorique. La courbe en continue est une interpolation de l'épaisseur de dépôt  $h_{stop}(\theta)$  (○) de la forme  $h_{stop}(\theta) = L((\tan \delta_2 - \tan \delta_1)/(\tan \theta - \tan \delta_1) - 1)$  avec  $L = 0.824\text{mm}$ ,  $\delta_1 = 20.90^\circ$  et  $\delta_2 = 32.76^\circ$ .

## 6.4 Comparaison avec la théorie

L'étude expérimentale précise de l'instabilité en onde plane dans le cas des écoulements de billes de verre nous a donc apporté plusieurs résultats importants :

- Contrairement à ce que suggéraient nos observations préliminaires des écoulements non forcés, l'instabilité en onde longue existe. Elle est contrôlée par le nombre de Froude et apparaît au-dessus d'un nombre de Froude critique  $F_c$  donné par  $F_c = 0.55 \pm 0.05$ .
- L'instabilité en onde de surface est une instabilité à nombre d'onde nul. Au dessus du seuil de stabilité, il existe une fréquence de coupure qui sépare les modes instables des modes stables.
- Dans la gamme de fréquence explorée, la vitesse de propagation des ondes ne dépend pas de la fréquence, i.e. le milieu n'est pas dispersif vis-à-vis des ondes de surface.

Dans cette partie, nous comparons ces résultats expérimentaux avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire menée dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur (chapitre 3). Nous avons vu que cette analyse permet de déterminer le seuil de stabilité et la relation de dispersion de l'écoulement en fonction de la loi de friction  $\mu(u, h)$  ou, de façon équivalente, de la loi  $u(h, \theta)$  des écoulements stationnaires uniformes.

Plus précisément, la loi d'écoulement intervient dans la théorie par l'intermédiaire des dérivées de  $u(h, \theta)$  :  $a = \frac{u}{\cos^2 \theta} (\frac{\partial \theta}{\partial u})_0$  et  $b/a = -\frac{1}{u} (\frac{\partial u}{\partial h})_0$ . Pour un écoulement granulaire constitué de billes de verre monodisperses, la vitesse moyenne  $u$  des écoulements stationnaires uniformes est reliée à l'épaisseur  $h$  de l'écoulement et à l'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan par la loi d'échelle suivante (voir chapitre 3) :

$$u = \beta \sqrt{g} \frac{h^{3/2}}{h_{stop}(\theta)}. \quad (6.5)$$

où  $\beta = 0.136$  et  $h_{stop}(\theta)$  est l'épaisseur des dépôts. En connaissant l'expression de  $h_{stop}(\theta)$  en fonction de l'angle, on peut donc déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  de l'analyse linéaire :

$$a = \frac{h_{stop}'(\theta)}{\cos^2 \theta h_{stop}(\theta)^2}, \quad (6.6)$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}. \quad (6.7)$$

La seule grandeur inconnue qui reste dans la théorie est alors le paramètre  $\alpha$ , qui est relié au profil de vitesse dans la couche en écoulement. Pour un écoulement granulaire sur plan incliné, on ne connaît pas la forme du profil de vitesse mais nous avons vu que  $\alpha$  est proche de 1 pour plusieurs profils usuels. Par la suite, nous prendrons  $\alpha = 1$ . Nous reviendrons sur ce choix à la fin de ce paragraphe.

### 6.4.1 Seuil de stabilité

Nous comparons tout d'abord les seuils de stabilité expérimental et théorique. Selon la théorie, l'écoulement est instable quand :

$$c_0 > c_+, \quad (6.8)$$

où  $c_0 = 1 - \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{u} \left( \frac{\partial u}{\partial h} \right) h$  est la vitesse des ondes cinématiques adimensionnée par la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement et  $c_+ = 1 + \frac{1}{F}$  est la vitesse des ondes de gravité, elle aussi adimensionnée. En utilisant (6.7), on trouve donc que l'écoulement est instable quand :

$$F \geq \frac{2}{3}, \quad (6.9)$$

$$\text{soit } h \geq \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\beta} h_{stop}(\theta). \quad (6.10)$$

Le seuil de stabilité théorique ainsi calculé est donné sur la figure 6.8 par la courbe en pointillés, en parallèle avec le seuil de stabilité déterminé expérimentalement. Pour calculer l'épaisseur critique  $h_c(\theta)$  donnée par (6.10), nous avons interpolé les mesures des dépôts  $h_{stop}(\theta)$  (courbe en trait continu-voir légende). Nous constatons que l'accord entre la théorie et les mesures expérimentales est relativement bon. En particulier, la variation de l'épaisseur critique avec l'angle d'inclinaison du plan et l'ordre de grandeur du nombre de Froude critique sont les mêmes dans l'expérience et la théorie. Cependant, la théorie prédit un nombre de Froude critique  $F_c = 2/3$ , supérieur d'environ 15 – 20% au seuil de stabilité expérimental (qui est compris entre 0.62 et 0.52).

### 6.4.2 Relation de dispersion

La théorie donne également la relation de dispersion des ondes c'est-à-dire le taux de croissance et la vitesse de phase en fonction de la fréquence. La figure 6.9 montre ainsi la relation de dispersion théorique typique de l'instabilité calculée pour un angle  $\theta = 29^\circ$  et un nombre de Froude  $F = 1.02$  ainsi que les mesures expérimentales dans les mêmes conditions. Afin de comparer plus facilement la théorie et l'expérience, le taux de croissance  $\sigma$ , la vitesse de phase  $v_\phi$  et la pulsation de forçage  $\omega$  sont adimensionnés par l'épaisseur  $h = 5.3$  mm et la vitesse moyenne  $u = 21.7$  cm/s de l'écoulement.

La différence la plus évidente entre la théorie et l'expérience concerne la dépendance du taux de croissance spatiale en fonction de la fréquence (figure 6.9a). En effet, l'analyse linéaire prédit un taux de croissance qui part de zéro quand  $\omega = 0$  et qui croît ensuite de façon monotone vers une valeur finie pour  $\omega \rightarrow \infty$ . Au contraire, l'expérience montre qu'il existe une fréquence de coupure bien définie au-delà de laquelle les ondes sont amorties. Cette différence n'est pas très surprenante. Nous avons déjà signalé que les équations moyennées dans l'épaisseur telles que nous les avons écrites ne contiennent pas de mécanisme qui stabilise les petites longueurs d'onde. Pour prédire une fréquence de coupure dans la théorie,

il faudrait par exemple tenir compte de la dissipation liée aux variations de vitesse longitudinale au sein de l'écoulement.

On remarque également que le taux de croissance maximal prédit par la théorie est plus faible que le taux de croissance maximal mesuré dans l'expérience. Ce résultat est général. La théorie semble systématiquement "sous-estimer" l'instabilité par rapport à l'expérience, comme nous l'avons déjà vu sur la valeur du nombre de Froude critique.

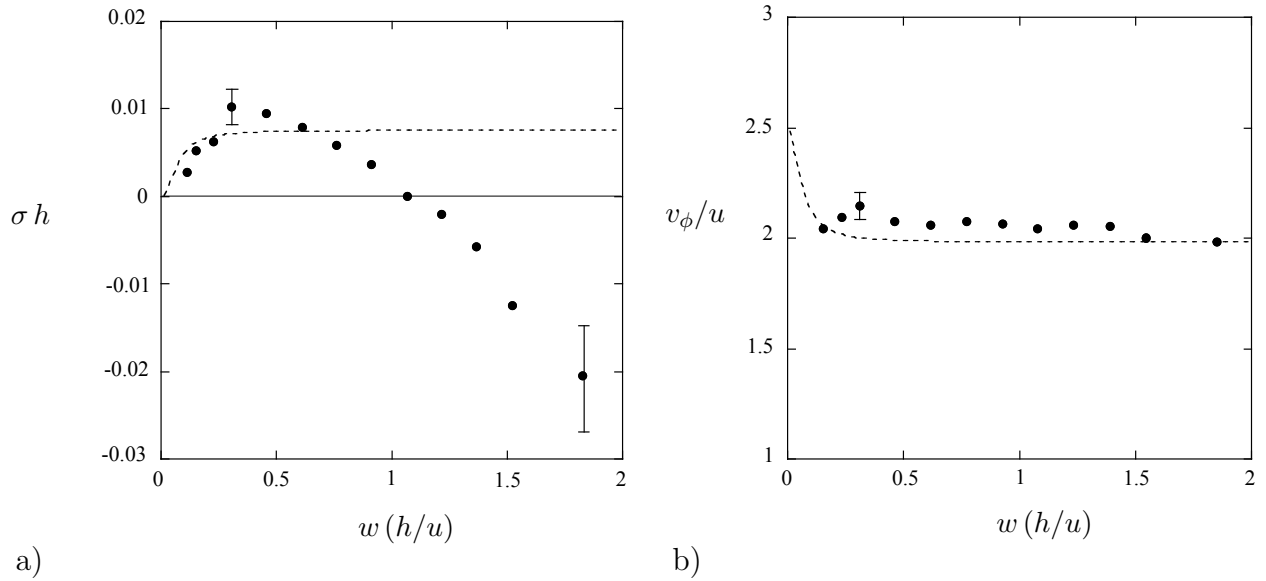


FIG. 6.9 – Relation de dispersion théorique pour  $\theta = 29^\circ$  et  $F = 1.02$  ( $\alpha = 1$ ). a) Taux de croissance spatiale adimensionné par l'épaisseur  $h = 5.3\text{mm}$  de l'écoulement. b) Vitesse de phase adimensionnée par la vitesse moyenne  $u = 21.7\text{ cm/s}$  de l'écoulement. La pulsation est également adimensionnée par l'épaisseur et la vitesse moyenne. Les points noirs ( $\bullet$ ) correspondent aux mesures expérimentales dans les mêmes conditions.

Il est également intéressant de comparer la vitesse de propagation des ondes  $v_\phi$  mesurée expérimentalement avec celle prédite par l'analyse linéaire. Cette comparaison est donnée sur la figure 6.9b. Dans la plage de fréquences explorée expérimentalement, nous constatons que la théorie prévoit une vitesse de phase pratiquement constante, en bon accord avec les mesures expérimentales ( $v_{\phi\text{exp.}} \approx 45\text{cm/s}$  tandis que  $v_{\phi\text{theo.}} \approx 43\text{cm/s}$ ). Il faut souligner que cette valeur théorique correspond à la vitesse des ondes de gravité  $c_+ = u + \sqrt{gh \cos \theta}$ . La théorie prévoit également une remontée de la vitesse de propagation des ondes aux très basses fréquences, la vitesse de phase étant égale à la vitesse des ondes cinématiques  $c_0 = (5/2)u$  pour  $\omega = 0$ . Cependant, ce régime dispersif correspond à des fréquences de forçage trop basses pour que l'on puisse les observer dans notre expérience.

La vitesse de propagation des ondes le long de l'écoulement semble donc coïncider avec la vitesse des ondes de gravité donnée par la théorie:  $c_+ = u + \sqrt{gh \cos \theta}$ . Afin de confirmer

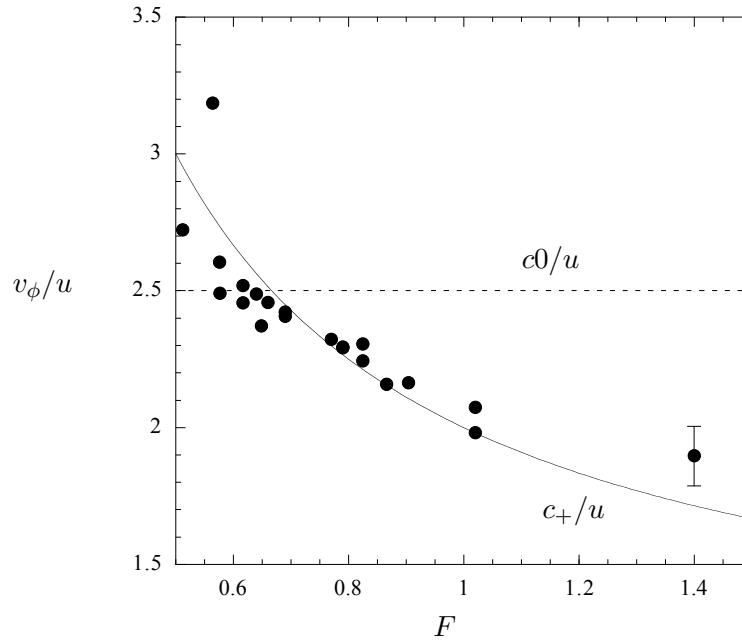


FIG. 6.10 – Vitesse de phase expérimentale adimensionnée par la vitesse moyenne  $u$  de l'écoulement ( $\bullet$ ) en fonction du nombre de Froude  $F$ , pour différents angles ( $24^\circ - 29^\circ$ ) et différentes fréquences de forçage. La courbe en trait continu donne la vitesse théorique des ondes de gravité  $c_+ = u + \sqrt{gh \cos \theta}$  adimensionnée par  $u$  ( $\alpha = 1$ ). La courbe en trait pointillés donne la vitesse théorique des ondes cinématiques  $c_0 = (5/2)u$  adimensionnée par  $u$ .

ce résultat pour d'autres épaisseurs et d'autres angles, nous avons systématiquement mesuré la vitesse de phase  $v_\phi$  pour différents angles en fonction du nombre de Froude  $F$ . Les résultats sont rassemblés sur la figure 6.10 qui donne la vitesse de phase expérimentale adimensionnée par la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction du nombre de Froude, pour l'ensemble des angles de  $24^\circ$  à  $29^\circ$  que nous avons explorés. Sur cette figure est également donnée la vitesse théorique des ondes de gravité  $c_+$  (courbe en trait continu) ainsi que la vitesse théorique des ondes cinématiques  $c_0$  (courbe en trait pointillé). On constate que la vitesse de propagation des ondes est toujours proche de la vitesse des ondes de gravité le long de l'écoulement. Cela explique en partie le bon accord entre la vitesse de propagation théorique et la vitesse de propagation expérimentale. En effet, la vitesse des ondes de gravité  $c_+ = u + \sqrt{gh \cos \theta}$  est indépendante de la rhéologie particulière du milieu en écoulement. Sa valeur ne constitue donc pas un test fort de la loi de friction.

On remarque également qu'à l'approche du seuil de stabilité, la vitesse de propagation des ondes coïncide avec celle des ondes cinématiques. Cela confirme que l'instabilité en onde de surface dans les écoulements de billes de verre provient bien d'une compétition entre les ondes cinématiques et les ondes de gravité comme nous l'avons expliqué au chapitre 3.

### 6.4.3 Influence du paramètre $\alpha$ relié au profil de vitesse

Les résultats ont jusqu'à présent été présentés en prenant dans la théorie le paramètre  $\alpha$  égal à un. Nous avons vu que ce paramètre intervient dans les équations moyennées dans l'épaisseur du côté des termes d'accélération pour fermer le système d'équations. Sa définition précise est  $\alpha = \bar{u}^2/\bar{u}^2$ . Il faut donc connaître le profil de vitesse pour déterminer sa valeur exacte,  $\alpha = 1$  correspondant à un profil de vitesse uniforme. Par exemple, dans le cas d'un film mince de liquide visqueux, le profil de vitesse est parabolique et  $\alpha = 6/5$ . Pour un milieu granulaire, il n'existe pas à l'heure actuelle de mesure expérimentale du profil de vitesse dans un écoulement tridimensionnel sur plan incliné. Cependant, il existe de nombreuses indications montrant que l'écoulement est cisailé dans l'épaisseur. Ainsi, le profil de vitesse peut être obtenu dans des simulations numériques 2D ou 3D d'écoulements granulaires sur plan incliné (Prochnow *et al.* 2000, Ertas *et al.* 2001). Ces travaux montrent que la vitesse de l'écoulement s'annule à la paroi rugueuse, le profil de vitesse étant légèrement concave. Dans ce cas, le coefficient  $\alpha$  est plus proche de  $4/3$ , sa valeur pour un profil linéaire.

Si on prend  $\alpha$  supérieur à un dans la théorie, la vitesse des ondes cinématiques n'est pas modifiée. En revanche on augmente la vitesse  $c_+$  des ondes de gravité qui est alors égale à  $c_+ = \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{F^2}}$ . Le seuil de stabilité théorique est alors donné par :

$$F > \frac{1}{\sqrt{(\frac{5}{2} - \alpha)^2 - \alpha(\alpha - 1)}}. \quad (6.11)$$

Le seuil théorique est donc augmenté quand  $\alpha > 1$  par rapport à  $\alpha = 1$ . Cela éloigne encore plus le seuil de stabilité théorique du seuil de stabilité expérimental. Par exemple, en prenant  $\alpha = 4/3$  le seuil théorique est  $F_c = 1.03$  contre  $F_c = 0.55 - 0.6$  expérimentalement. Dans ce cas, la vitesse de propagation des ondes est également mal prédite par la théorie.

Ces résultats montrent que la prise en compte du profil de vitesse par l'intermédiaire d'un paramètre constant  $\alpha$  n'est pas très satisfaisante. Ce résultat n'est pas surprenant. Pour un film liquide visqueux, on sait en effet que la prise en compte dans les équations moyennées du profil parabolique par un simple facteur  $\alpha = 6/5$  ne permet pas de décrire *quantitativement* l'instabilité. Dans ce cas, on peut comparer les prédictions des équations moyennées avec les résultats exacts tirés de la linéarisation des équations de Navier-Stokes. On trouve alors que le seuil prédit par les équations moyennées est supérieur d'environ 20% au seuil de stabilité exacte. Nous avons déjà souligné ce désaccord entre les équations moyennées et la résolution exacte qui tient compte de la dynamique de l'écoulement dans la couche (chapitre 3). Il provient du fait que, pour un écoulement instationnaire, la contrainte visqueuse au niveau du plan dépend des variations temporelles de l'épaisseur et de la vitesse.

Il ne faut donc pas accorder trop de signification physique à la valeur du paramètre  $\alpha$  dans les équations de St Venant. Au mieux, on peut considérer  $\alpha$  comme un paramètre de "fit" dans ces équations. Pour faire coïncider au mieux le seuil de stabilité théorique et le seuil

de stabilité expérimental dans notre cas, il faudrait alors prendre  $\alpha = 0.8$ .

## 6.5 Conclusion de l'étude sur les billes de verre

Notre démarche expérimentale de caractérisation de l'instabilité par forçage a donc permis d'éclaircir la situation pour les écoulements de billes de verre. Rappelons que dans ce cas, nous n'avons pas observé d'ondes se développer naturellement au cours de l'écoulement, contrairement à ce que prévoyait la théorie. Notre étude montre qu'il existe bien une instabilité en onde de surface pour les écoulements de billes de verre. Le fait que nous ne l'observons pas en l'absence de forçage tient sans doute au faible niveau de bruit naturel dans l'expérience ainsi qu'à la longueur limitée du plan.

Cette instabilité apparaît au-dessus d'un nombre de Froude critique comme le prédit l'analyse linéaire des équations moyennées dans l'épaisseur. L'ordre de grandeur du nombre de Froude critique expérimental est également proche de celui donné par la théorie quand on introduit dans les équations moyennées la loi de friction spécifique aux écoulements de billes de verre déduite des écoulements stationnaires uniformes. Enfin, la vitesse de propagation des ondes mesurée expérimentalement est comparable avec la vitesse des ondes de gravité dans la théorie.

Ces résultats montrent que les équations moyennées dans l'épaisseur permettent d'expliquer quantitativement une instabilité primaire dans les écoulements granulaires denses, à partir du moment où l'on connaît la loi de friction. L'origine de l'instabilité étant inertielle, cette étude fournit également un bon test des équations moyennées pour des écoulements où l'inertie joue un rôle important. Cependant, le principal désaccord entre les équations simples de St Venant et l'expérience est la non prédiction par la théorie d'une fréquence de coupure dans le système. En l'absence de tension de surface pour les granulaires, la détermination des mécanismes stabilisant les petites longueurs d'ondes nécessite la connaissance des équations constitutives tridimensionnelles des écoulements granulaires denses, ce qui reste encore un problème ouvert aujourd'hui. Nos mesures de la fréquence de coupure de l'instabilité peuvent donc fournir un point de départ pour des comparaisons ultérieures.





## Chapitre 7

# Résultats pour le sable

Nous venons de voir que dans le cas d'écoulements de billes de verre, il existait une instabilité à grand nombre de Froude en accord avec la prédiction des équations moyennées dans l'épaisseur et la loi de friction. Qu'en est-il avec du sable? Dans ce cas, les résultats préliminaires que nous avons présentés en introduction semble être en contradiction avec les caractéristiques d'une instabilité à grand nombre de Froude. En effet, l'écoulement semblait d'autant plus instable que la vitesse de l'écoulement était faible. Près du seuil d'écoulement, les ondes avaient une grande amplitude tandis que pour des vitesses élevées, les ondes semblaient disparaître et l'écoulement semblait devenir stable (voir figure 1.3 du chapitre 1). L'instabilité observée avec du sable provient-elle donc d'un autre mécanisme d'instabilité? Dans ce cas, qu'en est-il de l'instabilité "classique" à grand nombre de Froude prédite par la théorie? Nous montrons dans ce chapitre que notre système de forçage permet là aussi d'éclaircir la situation.

### 7.1 Instabilité naturelle

L'observation la plus spectaculaire concernant l'instabilité naturelle dans les écoulements de sable est que les ondes apparaissent d'autant mieux que la vitesse de l'écoulement est faible. Pour des vitesses élevées, l'amplitude des ondes diminue et au-delà d'une certaine vitesse, l'écoulement semble devenir stable. Ces observations sont faites "à l'oeil nu". Notre technique de détection des ondes par transmission de lumière à travers la couche en écoulement nous permet de déterminer avec plus de précision cette première impression visuelle. Nous avons ainsi mesuré l'évolution spatiale de l'instabilité naturelle pour deux vitesses d'écoulements différentes  $u = 6$  cm/s (figure 7.1a) et  $u = 32$  cm/s (figure 7.1b) à un angle donné  $\theta = 35^\circ$ .

Intéressons nous tout d'abord à l'évolution spatiale de l'instabilité lorsque la vitesse de l'écoulement est faible ( $u = 6$  cm/s) (figure 7.1a). Quand on se place près de l'entrée de l'écoulement ( $x = 30$  cm), les fluctuations de la surface libre sont relativement aléatoires mais on perçoit déjà des ondes de faible amplitude. La situation est radicalement différente

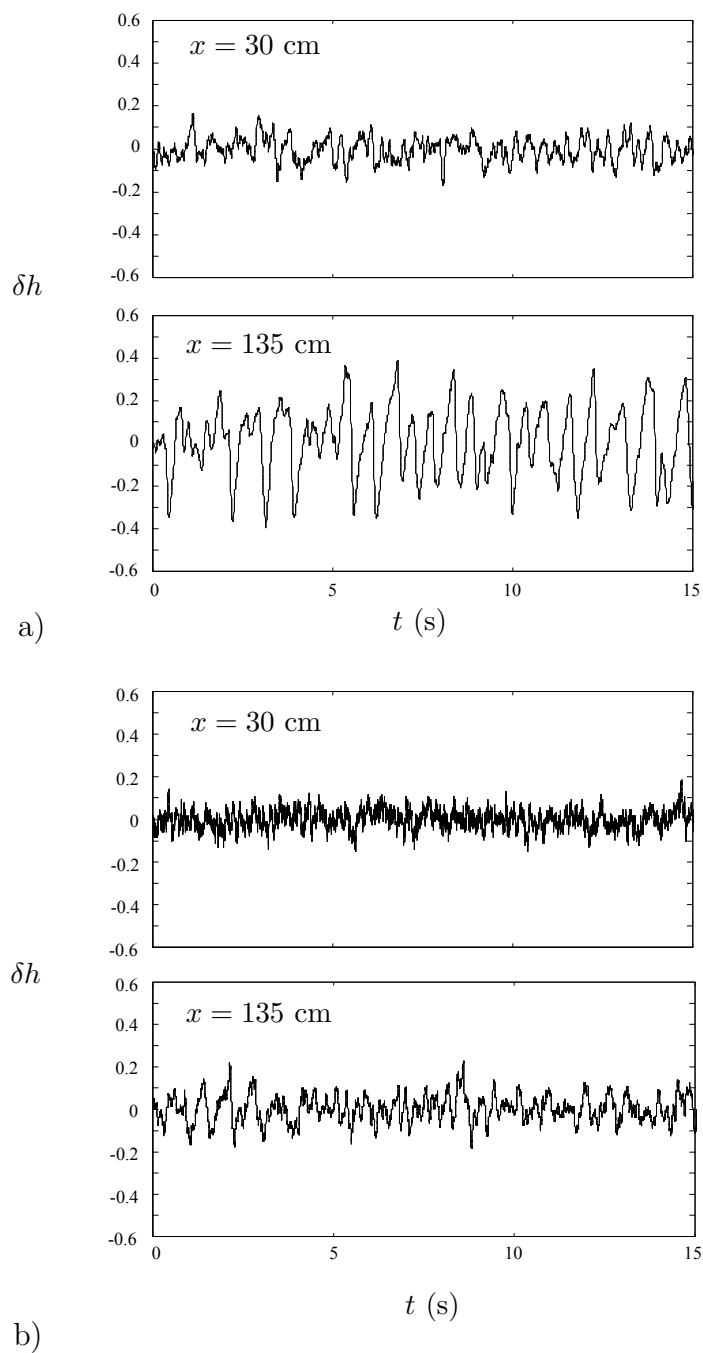


FIG. 7.1 – Evolution spatiale de l'instabilité naturelle pour le sable de diamètre 0.8 mm. La figure donne les fluctuations d'épaisseur locale de l'écoulement mesurées par transmission de lumière à deux positions différentes le long du plan. a)  $u = 6$  cm/s. b)  $u = 32$  cm/s. ( $\theta = 35^\circ$ ).

lorsque l'on mesure les fluctuations de surface loin de la sortie du réservoir ( $x = 135$  cm). A cette distance, on distingue clairement des ondes de grande amplitude qui se succèdent régulièrement le long de l'écoulement. L'écoulement est donc fortement instable à basse vitesse, et le bruit naturel en amont du plan est amplifié au cours de l'écoulement.

Que se passe-t-il quand la vitesse de l'écoulement augmente? La figure 7.1b montre les fluctuations d'épaisseur de l'écoulement mesurées aux mêmes positions que précédemment, pour une vitesse d'écoulement élevée ( $u = 32$  cm/s). A cette vitesse, on ne distingue plus d'onde "à l'oeil nu" et l'écoulement semble stable. La mesure des fluctuations d'épaisseur par transmission de lumière confirme en partie cette observation. Alors que le bruit à l'entrée de l'écoulement est à peu près le même que lorsque la vitesse de l'écoulement est faible, les fluctuations de surface libre en bas du plan sont nettement moins importantes à grande vitesse qu'à faible vitesse. Il y a approximativement un facteur trois entre l'amplitude des ondes observées lorsque la vitesse de l'écoulement est  $u = 6$  cm/s et lorsque la vitesse est  $u = 32$  cm/s. Ces mesures par transmission de lumière sur l'instabilité naturelle semblent donc bien confirmer que l'écoulement est "plus instable" à faible vitesse qu'à grande vitesse. En revanche, nous constatons que les ondes ne disparaissent pas à vitesse élevée, contrairement à ce que nous laissait croire la simple observation visuelle de l'écoulement. On distingue sans ambiguïté sur la figure 7.1b des ondes de faibles amplitude qui commencent à apparaître en bas du plan ( $x = 135$  cm) (le contraste entre ces ondes et le bruit non cohérent de la surface libre à l'entrée de l'écoulement est particulièrement visible sur cette figure).

Cette brève étude de l'instabilité naturelle confirme donc l'observation préliminaire. L'écoulement semble plus instable à faible vitesse qu'à grande vitesse. En revanche, les ondes ne semblent pas disparaître à grande vitesse comme un jugement hâtif pouvait nous le laisser croire. Pour mieux caractériser l'instabilité, nous allons par la suite forcer celle-ci en amont de l'écoulement, et étudier l'évolution spatiale des ondes forcées comme nous l'avons fait avec les écoulements de billes de verre.

## 7.2 Instabilité forcée

### 7.2.1 Difficultés expérimentales

Nous avons réalisé avec le sable les mêmes mesures systématiques de taux de croissance spatiale que pour les billes de verre, en variant le nombre de Froude et l'angle d'inclinaison du plan. Nous ne revenons donc pas en détail ici sur la mise en oeuvre de ces mesures. Il faut cependant souligner une difficulté importante lors de cette étude dans le cas du sable. En effet, l'écoulement étant dans ce cas très instable, il est difficile de définir clairement une zone de croissance exponentielle des ondes le long du plan. Lorsqu'on impose en amont de l'écoulement une perturbation périodique de fréquence  $f$ , certains modes sont fortement amplifiés et peuvent interagir non-linéairement entre eux ou avec d'autres modes stables. La figure 7.2 illustre ce comportement dans le cas d'un écoulement fortement instable

( $f = 1.2$  Hz,  $\theta = 35^\circ$ ,  $F = 0.35$ ). Nous remarquons que l'évolution spatiale du mode fondamental (figure 7.2a) diffère fortement de celle des modes harmoniques (figure 7.2b) : le mode à la fréquence de forçage croît exponentiellement au cours de l'écoulement tandis que certains modes harmoniques sont amplifiés dans un premier temps avant de voir leur amplitude décroître à une certaine distance du point de forçage.

Il semble donc que rapidement après le forçage, les ondes ne soient plus dans un régime de croissance linéaire de l'instabilité. Pour étudier le régime d'instabilité linéaire, il faut donc mesurer l'évolution spatiale des ondes sur une courte distance après le point de forçage.

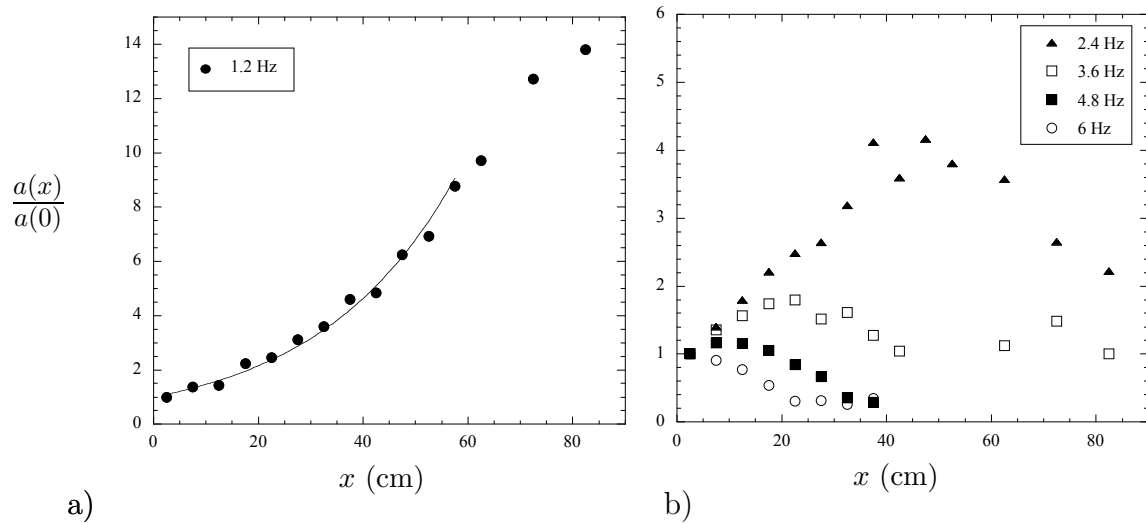


FIG. 7.2 – Evolution spatiale d'une perturbation périodique de fréquence  $f = 1.2$  Hz imposée en  $x = 0$ . a) Mode fondamental. La courbe en trait continu est une interpolation exponentielle. b) Modes harmoniques. ( $\theta = 35^\circ$ ,  $F = 0.35$ ).

Un autre moyen d'étudier le caractère linéaire ou non de l'instabilité est de mesurer les taux de croissance de l'onde en fonction de l'amplitude de la perturbation imposée de l'extérieur. La figure 7.3 donne ainsi le taux d'amplification d'un mode mesuré entre deux points de l'écoulement  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de l'amplitude de forçage. Nous constatons que le taux d'amplification, défini comme le rapport  $a(x_2)/a(x_1)$ , croît légèrement quand l'intensité du forçage augmente. Ces mesures sont cependant difficiles à interpréter sans ambiguïté. En effet, pour des faibles amplitudes de forçage, l'onde forcée est "noyée" dans le bruit de l'instabilité naturelle, ce qui entraîne une grande incertitude sur la mesure de l'amplitude.

Ces résultats montrent que le régime linéaire d'instabilité est plus délicat à étudier pour le sable que pour les billes de verre. Pour mesurer les taux de croissance, nous utiliserons le protocole suivant. Les deux photodiodes sont placées près de la buse, à une distance respective de 2 cm et 10 cm. Pour chaque mesure du taux de croissance, défini par  $\sigma = (1/\Delta x) \ln(a_2/a_1)$ , nous effectuons des mesures en changeant l'amplitude et la fréquence de

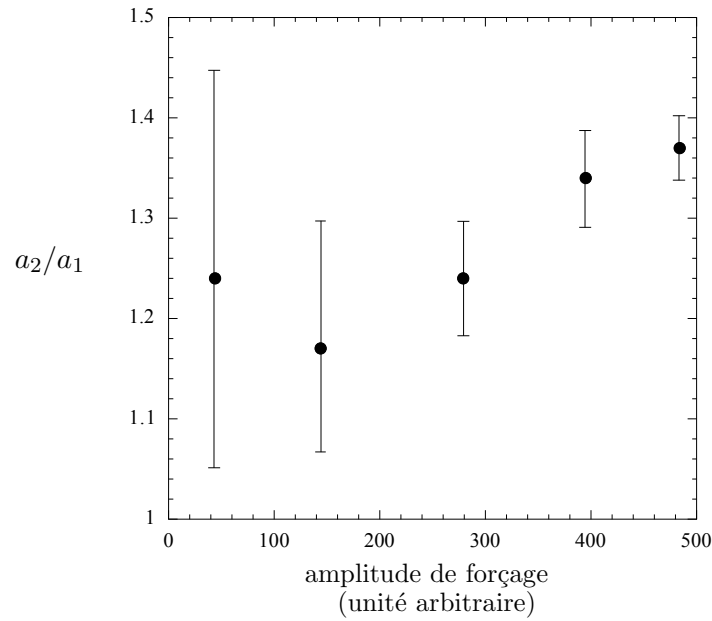


FIG. 7.3 – Taux d'amplification spatiale d'un mode forcé en fonction de l'amplitude de forçage (unité arbitraire). Les ondes sont mesurées à une distance  $x_1 = 2$  cm et  $x_2 = 10$  cm de la buse. ( $f = 4$  Hz,  $\theta = 35^\circ$ ,  $F = 0.44$ ).

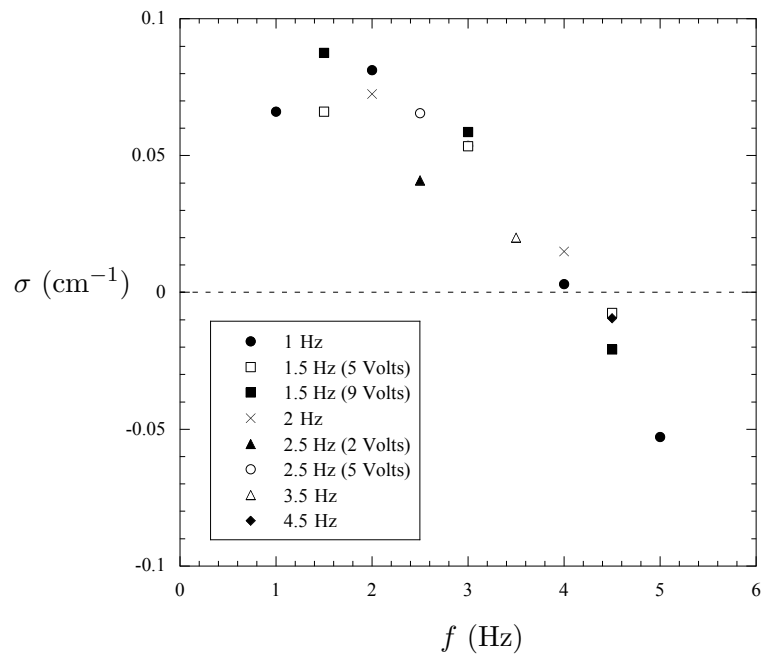


FIG. 7.4 – relation de dispersion  $\sigma(f)$  mesurée pour différentes amplitudes de forçage et différentes fréquences de forçage (données sur le graphe). ( $\theta = 35^\circ$ ,  $F = 0.44$ )

forçage. Nous constatons alors que les valeurs obtenues sont relativement reproductibles comme le montre la figure 7.3, qui donne le taux de croissance en fonction de la fréquence, pour différentes amplitudes et fréquences de forçage.

## 7.2.2 Relation de dispersion

La figure 7.5, qui donne la relation de dispersion de l'instabilité  $\sigma(f)$  pour différents nombres de Froude ( $\theta = 35^\circ$ ), résume à elle seule les principales caractéristiques de l'instabilité dans le cas du sable.

Pour un nombre de Froude donné, la variation du taux de croissance des ondes avec la fréquence est du même type que celle mesurée avec les billes de verre. On retrouve l'allure caractéristique d'une instabilité à nombre d'onde nul, avec une bande de fréquence instable aux basses fréquences et l'existence d'une fréquence de coupure  $f_c$  au-delà de laquelle les ondes sont amorties le long de l'écoulement.

Cependant, quand on étudie l'évolution de cette relation de dispersion avec le nombre de

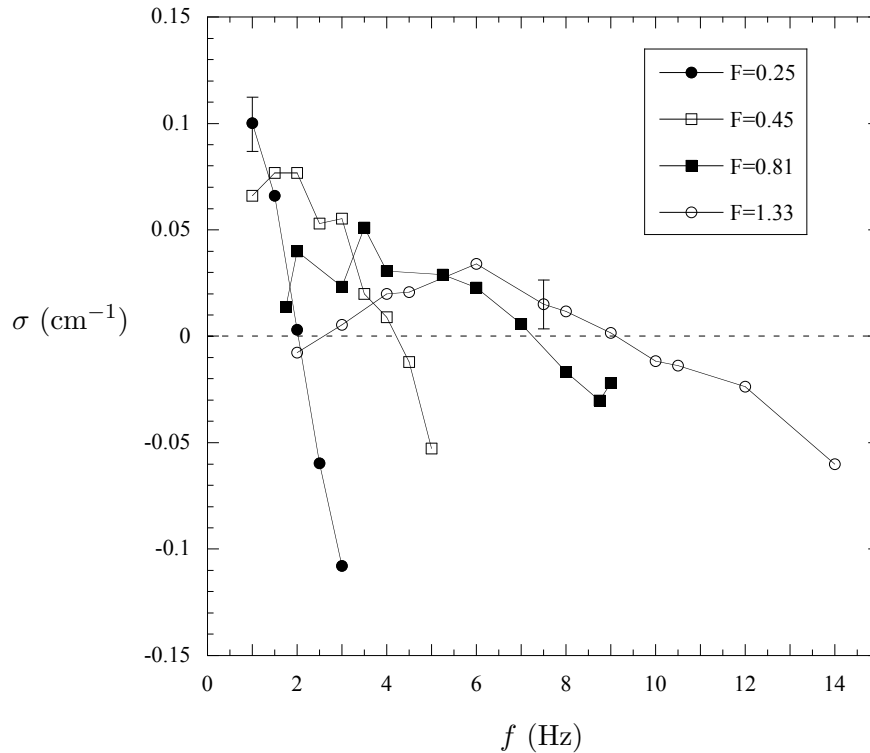


FIG. 7.5 – Taux de croissance spatiale en fonction de la fréquence pour différents nombres de Froude, à angle fixe ( $\theta = 35^\circ$ ). L'épaisseur de l'écoulement est  $h = 3.3$  mm (●),  $h = 4$  mm (□),  $h = 5$  mm (■),  $h = 6$  mm (○).

Froude, il apparaît une différence essentielle avec les résultats sur les billes de verre. En effet, on constate que le taux de croissance du mode le plus instable augmente quand le nombre de Froude diminue. Ce résultat est d'autant plus surprenant que dans le même

temps, la fréquence de coupure des ondes diminue avec le nombre de Froude, comme c'est le cas pour les écoulements de billes de verre. Il semble donc que la conclusion sur la nature de cette instabilité soit différente selon que l'on étudie le mode le plus instable ou la fréquence de coupure du système. Du point de vue du mode le plus instable, l'écoulement est d'autant plus instable que le nombre de Froude est faible (c'est-à-dire que la vitesse de l'écoulement est petite). En revanche, si on considère la fréquence de coupure des ondes, l'écoulement est plus instable à grand Froude puisque la bande de fréquence instable dans le système augmente avec le nombre de Froude. Ainsi dans l'exemple de la figure 7.5, une onde de fréquence  $f = 6$  Hz est amortie pour les faibles nombres de Froude ( $F = 0.25$  et  $F = 0.45$ ) et amplifiée aux grands nombres de Froude ( $F = 0.81$  et  $F = 1.33$ ). En ce sens, l'instabilité avec le sable est une instabilité "à grand nombre de Froude", puisque la fréquence de coupure augmente avec le nombre de Froude.

La dernière remarque que l'on peut faire sur ces mesures concerne l'ordre de grandeur des taux de croissance. On constate que le taux de croissance du mode le plus instable,  $\sigma_{max}$ , varie entre  $0.02 \text{ cm}^{-1}$  et  $0.1 \text{ cm}^{-1}$ . Ces valeurs sont environ cinq fois plus importantes que les taux de croissance de l'instabilité avec les billes de verre, ce qui explique que nous voyons facilement les ondes naturelles avec ce sable.

Ces résultats sont obtenus en variant le nombre de Froude à un angle donné. Quand on change l'angle d'inclinaison, on retrouve les mêmes caractéristiques de l'instabilité : le mode le plus instable est d'autant plus amplifié que le nombre de Froude est faible, la fréquence de coupure augmente avec le nombre de Froude.

La figure 7.6 donne ainsi le taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{max}$  en fonction du nombre de Froude pour les différents angles que nous avons étudiés ( $32^\circ < \theta < 36^\circ$ ). On constate que  $\sigma_{max}$  augmente systématiquement quand le nombre de Froude diminue. C'est donc à faible vitesse que l'amplification des ondes est la plus importante. L'angle d'inclinaison du plan a également une influence sur les taux de croissance : l'écoulement est plus instable à grand angle qu'à faible angle, pour un nombre de Froude fixé.

Il faut noter que nous n'avons pas pu faire de mesure pour des nombres de Froude inférieurs à  $F \sim 0.25$  (zone hachurée sur la figure 7.6). En effet, cette valeur correspond à la limite des écoulements dans notre configuration. Pour des vitesses plus faibles, l'épaisseur de la couche en écoulement est de l'ordre de l'épaisseur limite  $h_{stop}$  et l'écoulement s'arrête à une certaine distance de la sortie du réservoir. Nous n'avons donc pas accès aux caractéristiques de l'instabilité pour  $F < 0.25$ ,  $F = 0.25$  correspondant au seuil d'écoulement.

Du côté des grands nombres de Froude, nos mesures montrent que le taux de croissance du mode le plus instable reste toujours positif, bien qu'il diminue quand le nombre de Froude augmente. L'écoulement est donc toujours instable pour l'ensemble des paramètres de contrôle ( $\theta$ ,  $F$ ) que nous avons exploré.

Il est également intéressant d'étudier le comportement de la fréquence de coupure du système en fonction du nombre de Froude (figure 7.7). On remarque que la fréquence de coupure diminue avec le nombre de Froude, pour l'ensemble des angles étudiés. Au faibles vitesses, il y a donc de moins en moins de modes instables dans le système, bien que ces



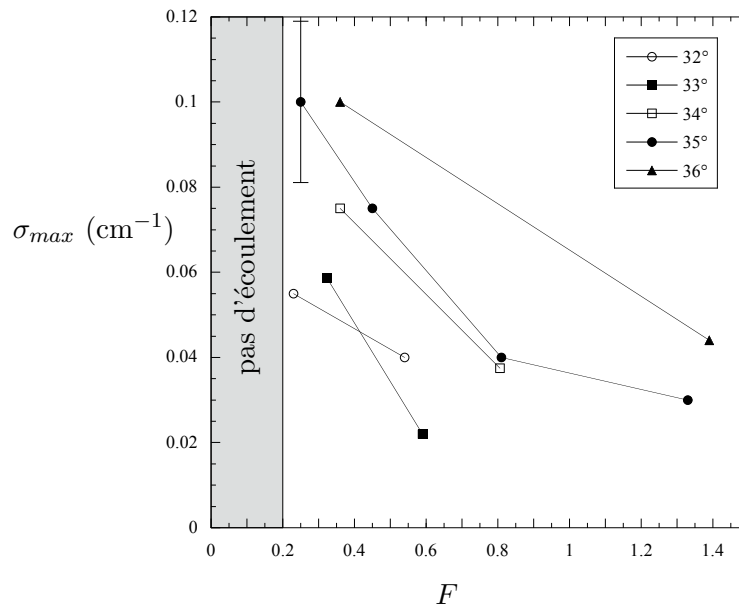


FIG. 7.6 – Taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{max}$  en fonction du nombre de Froude  $F$  pour différents angles d'inclinaison  $\theta$  (donnés sur le graphe).

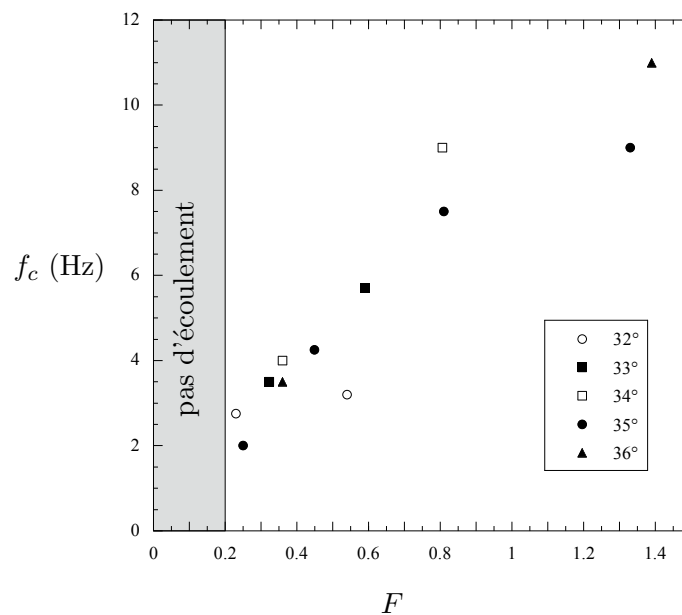


FIG. 7.7 – Fréquence de coupure  $f_c$  en fonction du nombre de Froude  $F$  pour différents angles d'inclinaison  $\theta$  (donnés sur le graphe).

modes soient de plus en plus amplifiés! Nous avons vu avec les billes de verre que le seuil d'instabilité peut se déterminer en interpolant la relation  $f_c(F)$  pour  $f_c \rightarrow 0$ . Dans le cas du sable, le nombre de Froude critique que l'on trouve en interpolant la relation  $f_c(F)$  est

inférieur au nombre de Froude minimale  $F \sim 0.25$  nécessaire pour observer un écoulement (voir la zone grisée de la figure 7.7). Le seuil de stabilité est donc repoussé en dessous du seuil d'écoulement.

La première conclusion que nous pouvons tirer de cette étude expérimentale de l'instabilité est qu'il n'existe pas d'écoulement stationnaire uniforme stable pour le sable. Dès le seuil d'écoulement, la surface libre est instable vis-à-vis de la formation d'ondes de surface. Ce résultat diffère fortement du cas des billes de verre pour lesquelles il existait une région d'écoulement stable à faible Froude.

Le deuxième résultat important est que l'instabilité est "à grand nombre de Froude", dans le sens où la fréquence de coupure des ondes augmente quand le nombre de Froude augmente. La grande différence avec les billes de verre est cependant que le taux de croissance du mode le plus instable diminue quand le nombre de Froude augmente. Ce dernier résultat explique l'impression que nous avons eu de voir disparaître les ondes lorsque la vitesse de l'écoulement augmentait.

## 7.3 Comparaison avec la théorie

Nos résultats expérimentaux montrent donc que les caractéristiques de l'instabilité en ondes de surface dans le cas du sable sont différentes de celles des billes de verre. Pourtant, nous avons vu au chapitre 3 que la loi de vitesse des écoulements stationnaires uniformes  $u(h, \theta)$  pour les écoulements de sable est du même type que celle des billes de verre. Dans les deux cas, on peut écrire une loi d'échelle pour la vitesse en utilisant l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}(\theta)$  du type :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = -\gamma + \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}. \quad (7.1)$$

avec  $(\gamma = 0, \beta = 0.136)$  pour les billes et  $(\gamma = 0.77, \beta = 0.75)$  pour le sable. Nous allons voir que ces différences *a priori* seulement quantitatives dans la rhéologie ont un effet spectaculaire sur les propriétés de l'instabilité prédite par l'analyse linéaire des équations moyennées dans l'épaisseur.

### 7.3.1 Seuil de stabilité

Intéressons-nous tout d'abord au seuil de stabilité prédit par la théorie. Nous avons vu que pour une loi d'écoulement donné par (7.1), l'analyse de stabilité linéaire prédit une instabilité quand :

$$F > \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\cos \theta}} \right), \quad (7.2)$$

(en prenant  $\alpha = 1$  comme dans le reste de cette comparaison théorie/expérience).

Nous remarquons que le seuil de stabilité dépend de l'angle d'inclinaison du plan et du

paramètre  $\gamma$  qui est différent suivant les matériaux. Pour les billes de verre, on a  $\gamma = 0$  et le Froude critique  $F_c$  est égale à  $2/3$ , indépendamment de l'angle. Pour le sable en revanche, on constate que la loi d'échelle (7.1) ne passe pas par l'origine et on a  $\gamma = 0.77$  (cette valeur correspond au meilleur "fit" des données expérimentales des écoulements stationnaires uniformes). En reportant cette valeur dans la condition de stabilité (7.2), on trouve un nombre de Froude critique dans le cas des écoulements de sable donné par :

$$F_c = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{0.77}{\sqrt{\cos \theta}} \right) \approx 0.1. \quad (7.3)$$

Le seuil de stabilité théorique correspond donc à un nombre de Froude très faible. Cette valeur est bien inférieure au nombre de Froude minimal que l'on réussit à atteindre dans les expériences. Cette prédiction est donc entièrement compatible avec nos résultats expérimentaux sur le sable qui montrent que l'écoulement est toujours instable dès seuil d'écoulement.

### 7.3.2 Taux de croissance

La relation de dispersion typique  $\sigma(f)$  prédite par la théorie est donnée sur la figure 7.8a, pour des paramètres de contrôle ( $\theta, F$ ) fixés. On remarque que le taux de croissance est toujours positif et croît asymptotiquement vers une valeur finie  $\sigma_{max}$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ . La théorie ne prédit donc pas de fréquence de coupure comme nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises. Dans la théorie, le mode le plus instable correspond à une fréquence infinie.

Nous pouvons donner une expression analytique de  $\sigma_{max}$  en fonction de la rhéologie propre de l'écoulement (voir l'analyse de stabilité spatiale du chapitre 3). Pour le sable, on trouve :

$$\sigma_{max} = -k_i(+\infty) = a \left[ \frac{c_0 - 1 - (\frac{1}{F})}{2(F + 1)} \right], \quad (7.4)$$

où  $a$  est le paramètre sans dimension défini par  $a = (u/\cos^2 \theta)(\partial\theta/\partial u)_0$  et  $c_0$  est la vitesse des ondes cinématiques adimensionnée par la vitesse moyenne de l'écoulement :  $c_0 = 1 + (h/u)(\partial u/\partial h)_0$ . Pour le sable, on trouve en utilisant la loi  $u(h, \theta)$  (7.1) :

$$a = -\frac{h_{stop}(\theta)}{\cos \theta^{3/2} h_{stop}'(\theta)} \frac{F}{(F\sqrt{\cos \theta} + \gamma)}, \quad (7.5)$$

$$c_0 = \frac{5}{2} + \frac{\gamma}{F\sqrt{\cos \theta}}. \quad (7.6)$$

La figure 7.8b donne la variation théorique du taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{max}$  en fonction du nombre de Froude, lorsque l'on introduit la rhéologie du sable ( $\theta = 35^\circ$ ). On remarque tout d'abord que  $\sigma_{max}$  est positif dès que le nombre de Froude est supérieur à 0.1. Cette valeur correspond au seuil de stabilité de l'écoulement à cet angle. L'observation la plus remarquable est cependant que  $\sigma_{max}$  diminue avec le nombre

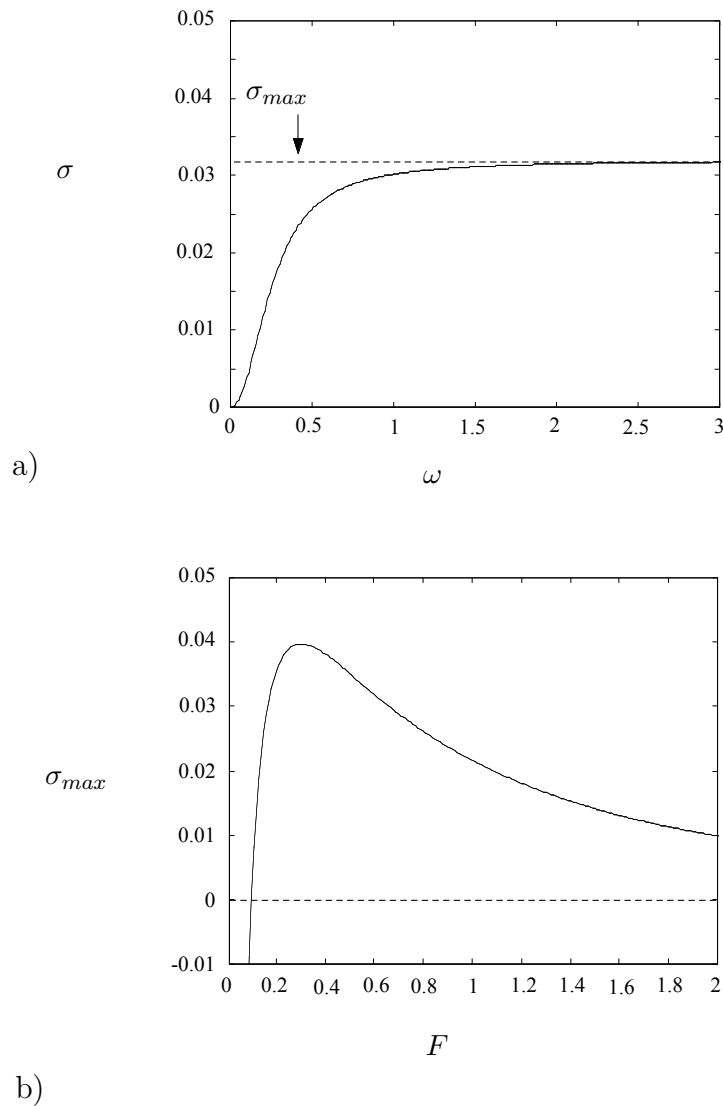


FIG. 7.8 – a) Relation de dispersion théorique typique donnant le taux de croissance  $\sigma$  adimensionné par  $h^{-1}$  en fonction de la pulsation adimensionnée par  $u/h$ . (sable,  $\theta = 35^\circ$ ,  $F = 0.6$ ). b) Taux de croissance (adimensionné) du mode le plus instable en fonction du nombre de Froude (sable,  $\theta = 35^\circ$ ,  $L = 1.624\text{mm}$ ,  $\delta_1 = 27^\circ$  and  $\delta_2 = 43.4^\circ$ ).

de Froude dès que le nombre de Froude est supérieur à  $F \sim 0.2$ , soit pratiquement dès que l'écoulement est instable.

Ces prédictions théoriques concordent relativement bien avec les mesures expérimentales des taux de croissance  $\sigma_{max}$  comme le montre la figure ???. Sur cette figure, nous avons superposé nos mesures de taux de croissance du mode le plus instable en fonction du nombre de Froude avec la relation théorique  $\sigma_{max}(F)$ , pour les différents angles étudiés. On constate que dans la gamme de nombres de Froude étudiée dans l'expérience ( $F > 0.2$ ), la théorie

prédit un écoulement toujours instable quel que soit l'angle, et des taux de croissance  $\sigma_{max}$  qui décroissent avec le nombre de Froude. L'ordre de grandeur du taux de croissance est également correctement prédit par la théorie.

## 7.4 Discussion et conclusion de l'étude pour le sable

La principale conclusion de cette étude est que l'analyse de stabilité linéaire des équations de St Venant permet de comprendre qualitativement les caractéristiques "paradoxaes" de l'instabilité dans le cas du sable, quand on tient compte de la loi de friction spécifique de ces écoulements. Dans cette partie, nous allons essayer de comprendre comment la loi de friction propre aux écoulements granulaires peut modifier qualitativement les propriétés de l'instabilité en ondes de surface des écoulements sur pente.

### 7.4.1 Influence de la loi de friction phénoménologique sur les propriétés de l'instabilité

Une première constatation est que la théorie prédit des résultats assez différents selon que l'on prend la loi de friction phénoménologique des billes de verre ou celle du sable. Pour les billes de verre, les caractéristiques de l'instabilité sont proches de celles d'un fluide classique (voir figure 7.9) : l'écoulement est stable à bas nombre de Froude et au-dessus du nombre de Froude critique les taux de croissance augmentent avec le nombre de Froude (du moins au voisinage du seuil). Pour le sable en revanche, des ondes se forment dès le seuil d'écoulement et leur amplitude diminue quand le nombre de Froude augmente. Ces différences sont d'autant plus étonnantes que, dans les deux cas, la loi  $u(h, \theta)$  dont découle la loi de friction est relativement proche et peut s'écrire :  $u/\sqrt{gh} = -\gamma + \beta h/h_{stop}(\theta)$ .

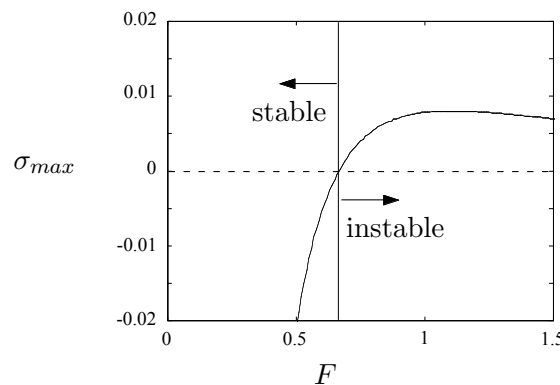


FIG. 7.9 – Billes de verre. Taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{max}$  (adimensionné) en fonction du nombre de Froude ( $\theta = 29^\circ$ ).

L'analyse de stabilité linéaire des équations moyennées montre que c'est le paramètre  $\gamma$  qui a une influence cruciale sur les propriétés de l'instabilité, comme le montre la figure 7.10. Cette figure donne le taux de croissance  $\sigma_{max}$  du mode le plus instable en fonction du nombre de Froude, pour différentes valeurs de  $\gamma$  ( $\beta = 0.75$ ). Nous constatons tout d'abord que plus  $\gamma$  est élevé, plus l'écoulement est instable. Cela se traduit par une diminution du nombre de Froude critique et par une augmentation des taux de croissance. De plus,  $\gamma$  a une forte influence sur la variation des taux de croissance avec le nombre de Froude. Pour  $\gamma$  proche de zéro (cas des billes de verre) le taux de croissance augmente avec le nombre de Froude, comme pour une instabilité "classique" à grand Froude. En revanche lorsque  $\gamma$  augmente, les taux de croissance deviennent plus grands à faibles Froude qu'à Froude élevés. Pour  $\gamma \sim 1$ , il n'y a même plus de seuil de stabilité: l'écoulement est toujours instable quel que soit le nombre de Froude et le taux de croissance est maximum pour  $F = 0$ .

On voit donc qu'en modifiant la loi de friction des écoulements granulaires du type (7.1), on peut modifier fortement les caractéristiques de l'instabilité. Il est d'ailleurs surprenant que la théorie donne justement les bonnes prédictions pour l'instabilité quand on introduit pour chaque matériau les valeurs  $\gamma$  et  $\beta$  déduites de l'étude des écoulements stationnaires uniformes. A l'heure actuelle, il n'existe pas de théorie qui permette de relier ces coefficients phénoménologiques aux propriétés "microscopiques" des grains. En ce sens, les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  doivent être pris comme des paramètres macroscopiques au même titre que, par exemple, l'angle de talus d'un granulaire.<sup>1</sup>

### 7.4.2 Spécificité des écoulements granulaires

Le fait que les équations de St Venant puissent prédire les caractéristiques de l'instabilité pour le sable juste par les propriétés de la loi de friction montre que cette instabilité n'est pas liée à un nouveau mécanisme: la formation des ondes résulte, comme pour les fluides classiques, d'une compétition entre les ondes cinématiques et les ondes de gravité. Il y a cependant une spécificité qui est propre aux milieux granulaires, et qui n'est pas observée avec les fluides classiques: les ondes peuvent se former dans un écoulement granulaire dès le seuil de l'écoulement, c'est-à-dire lorsque la vitesse d'écoulement tend vers zéro. Une telle propriété est pour le moins surprenante quand il s'agit d'une instabilité inertielle! Cette propriété est en fait liée à l'existence d'un seuil d'écoulement pour les milieux granulaires. En effet, la grande différence entre un milieu granulaire et un fluide classique est l'existence d'un angle minimal d'écoulement. Pour qu'un fluide classique d'épaisseur  $h$  soit au repos, il faut nécessairement que l'angle d'inclinaison du plan soit nul. Dans ce cas, la notion d'onde cinématique n'a pas de sens puisque la vitesse moyenne de l'écoulement est nulle quelle que soit  $h$ . Si on perturbe la surface libre horizontale du film liquide, on observe dans ce cas uniquement des ondes de gravité de vitesse  $c_{\pm} = \pm\sqrt{gh}$  qui sont bien évidemment stables (figure 7.11a).

---

1. La forme est la principale différence entre les billes de verre et le sable que nous utilisons. On constate ainsi, sans pouvoir l'expliquer quantitativement, que l'angle minimal d'écoulement du sable est supérieur d'environ  $10^\circ$  à l'angle minimal d'écoulement des billes de verre ( $30^\circ$  contre  $20^\circ$ ).

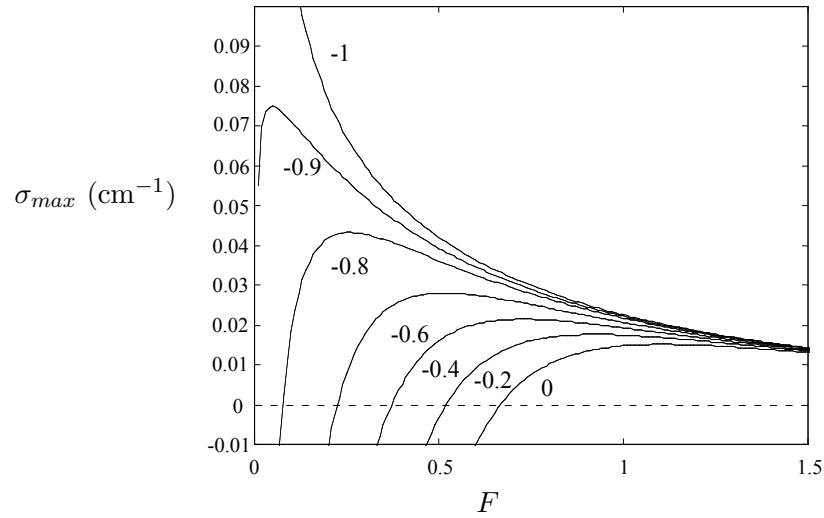


FIG. 7.10 – Evolution du taux de croissance du mode le plus instable  $\sigma_{max}$  (adimensionné) en fonction du nombre de Froude pour différentes valeurs du paramètre  $\gamma$  ( $\beta = 0.75$ ,  $\theta = 35^\circ$ ).

La situation est complètement différente avec un milieu granulaire. Dans ce cas la vitesse des ondes cinématiques *ne s'annule pas* au seuil d'écoulement. Cette propriété vient du fait qu'un milieu granulaire peut avoir une vitesse nulle bien que sa surface libre soit inclinée, comme le schématise la figure 7.11b. Lorsque l'épaisseur  $h$  de la couche granulaire atteint l'épaisseur limite  $h_{stop}$  d'écoulement à l'angle considéré, la vitesse s'annule ( $u = 0$ ). En revanche, une petite perturbation de la surface libre d'épaisseur  $h_{stop} + \Delta h$  se propage à une vitesse non nulle donnée en théorie par  $c_0 = u'|_{(h_{stop})} h_{stop}$  (d'après la conservation de la masse). La vitesse des ondes cinématiques ne s'annule donc pas lorsque  $h \rightarrow h_{stop}$ . Si cette vitesse est plus grande que la vitesse des ondes de gravité  $c_+ = \sqrt{gh_{stop} \cos \theta}$  pour  $h = h_{stop}$ , l'écoulement peut être instable dès le seuil d'écoulement. C'est pourquoi l'analyse de stabilité linéaire des équations de St Venant peut prédire la formation d'ondes lorsque  $u \rightarrow 0$  bien que l'instabilité soit d'origine inertielle. <sup>1</sup>

1. Ce raisonnement *purement linéaire* est présenté pour montrer que la vitesse des ondes cinématiques reste finie au voisinage du seuil d'écoulement dans un milieu granulaire, contrairement à un fluide classique. Il ne prend pas en compte les effets d'hystérésis lors de la mise en mouvement du matériau ni les éventuelles singularités de la loi  $u(h, \theta)$  près du seuil. Nous ne prétendons donc pas que la vitesse d'une "goutte" qui se propage le long d'une couche statique  $h_{stop}$  soit exactement donnée par la vitesse des ondes cinématiques  $c_0$ .

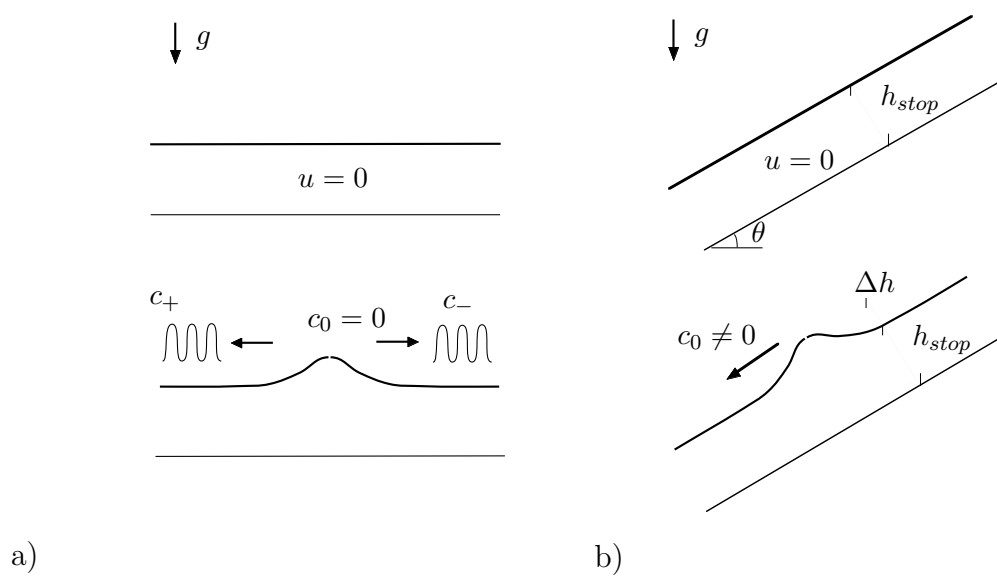


FIG. 7.11 – a) *Fluide classique.* b) *Milieu granulaire.*





## Conclusion et perspectives

Nous avons vu que l'on distingue généralement deux grandes classes d'écoulements granulaires suivant le type d'interaction mise en jeu entre les grains : le régime d'écoulement collisionnel et le régime d'écoulement dense. Au cours de cette thèse, nous avons étudié deux instabilités se rapportant à chacun des deux régimes pour les écoulements sur plan incliné rugueux. Cette étude nous a permis d'éclairer un certains nombres de mécanismes fondamentaux suivant les régimes d'écoulement. Nous avons vu que des approches hydrodynamiques (théorie cinétique ou équations de St Venant) permettent de décrire le seuil de stabilité linéaire de ces écoulements. Cependant, des spécificités liées aux milieux granulaires (collisions inélastiques, existence d'un seuil minimal d'écoulement) entraînent des mécanismes originaux qui diffèrent fortement de ceux rencontrés avec les fluides classiques.

### Instabilité dans les écoulements rapides

Dans la première partie de la thèse, nous avons étudié une nouvelle instabilité observée dans le régime d'écoulement rapide, lorsque le plan est fortement incliné. Cette instabilité se caractérise par la formation de stries dans la direction de l'écoulement qui sont la signature de vortex longitudinaux au sein de l'écoulement. Bien que ces structures soient fréquemment rencontrées en mécanique des fluides, elles n'avaient pas encore été observées dans les écoulements granulaires. Des mesures précises de vitesse et de fraction volumique nous ont permis de proposer un mécanisme d'instabilité pour la formation des vortex longitudinaux qui fait appel au concept de "température granulaire". Afin de valider ce mécanisme, nous avons étudié la stabilité des écoulements granulaires sur plan incliné dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires. L'analyse de stabilité linéaire de ces équations nous a permis de prédire la formation des vortex longitudinaux, en accord qualitatif avec les observations expérimentales, et validant ainsi le mécanisme de "convection granulaire" que nous avons proposé.

Bien que l'accord entre la théorie et l'expérience ne soit que qualitatif, notre étude montre la pertinence du raisonnement sur les collisions dans les écoulements granulaires rapides et met en évidence le rôle fondamental de la dissipation. En ce sens, ce travail constitue, selon nous, un des (rares) succès de la théorie cinétique pour décrire les écoulements granulaires. En effet, la théorie cinétique a pu décrire un nouveau mécanisme d'instabilité

spécifique aux milieux granulaires : les collisions inélastiques sont à l'origine d'une "auto-convection" qui entraîne la formation de vortex longitudinaux dans les écoulements sur plan incliné.

Signalons que ce type de mécanisme d'instabilité dans les milieux granulaires n'est sans doute pas réservé aux écoulements sur plan incliné. Récemment, une instabilité dans les écoulements en tambour tournant a été observée pour des vitesses de rotation élevée (Thoroddsen *et al.* 1998, Shen 2002). Cette instabilité se manifeste par l'apparition de stries longitudinales ayant une longueur d'onde comparable à celle que nous observons sur plan incliné. Il est possible que ces structures soient la signature de vortex provenant, comme dans notre cas, d'une "auto-convection" liée au cisaillement à la paroi du tambour. Cependant, les auteurs n'ont pas mesuré la vitesse des grains ni la fraction volumique du milieu. Il faut également signaler que pour un écoulement en tambour tournant, un autre effet déstabilisant peut provenir des forces centrifuges, comme dans l'instabilité de Taylor-Couette ou de Görtler (Drazin & Reid 1981).

Un autre moyen de générer de la "chaleur" dans un milieu granulaire est de vibrer une couche de grains avec un mouvement aléatoire de fréquence élevée. Ainsi, il a été très récemment observé (en simulation numérique et expérimentalement) des rouleaux de convection dans des couches granulaires diluées et fortement vibrées (Ramirez *et al.* 2000, Wildman *et al.* 2001a, Wildman *et al.* 2001b, He *et al.* 2002).

Il peut donc exister dans les écoulements granulaires une convection analogue à l'instabilité de Rayleigh-Bénard rencontrée dans les fluides classiques quand on chauffe un fluide par le bas. En mécanique des fluides, l'apparition d'une première instabilité est généralement suivie d'instabilités secondaires, selon un scénario pouvant mener jusqu'au chaos spatio-temporel. La pertinence de ces concepts et l'existence d'un scénario similaire sont des questions ouvertes pour les écoulements granulaires.

Dans notre expérience, l'apparition des vortex longitudinaux n'est qu'une première étape et nous avons observé une seconde instabilité quand on incline plus fortement le plan. Dans ce cas, les vortex font place à une structure plus désordonnée en forme "d'écailles" (voir figure 7.12). Une question importante est de savoir si cette nouvelle structure provient de la déstabilisation de l'instabilité primaire en vortex. Dans ce cas, une analyse non linéaire des vortex longitudinaux serait nécessaire pour étudier la stabilité de l'écoulement autour de ce nouvel état de base. Une autre possibilité est que la formation des "écailles" corresponde à une instabilité primaire, dans un certain domaine de paramètres de contrôle. Afin de répondre à ces questions, il serait intéressant de généraliser notre analyse de stabilité linéaire des équations de la théorie cinétique à des perturbations tridimensionnelles.

## Instabilité dans les écoulements denses

La deuxième partie de la thèse était consacrée à l'étude d'une instabilité en ondes de surface dans les écoulements denses sur plan incliné. Pour ce type d'écoulements, il n'existe pas à l'heure actuelle d'équations constitutives. Cependant dans le cas d'écoulements de

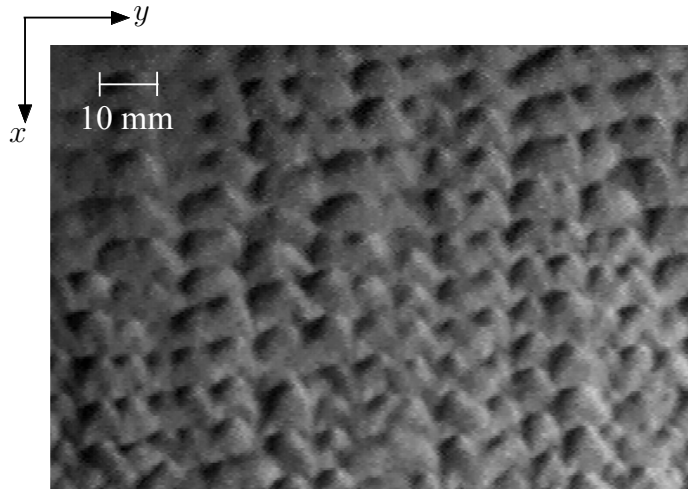


FIG. 7.12 – Image de la surface de l’écoulement montrant la formation “d’écailles” quand le plan est fortement incliné. L’image est prise avec une caméra rapide 4500 images/s. (sable 0.25 mm,  $\theta = 52^\circ$ ,  $h = 15\text{mm}$ ).

couche mince, une approche prometteuse est celle des équations moyennées dans l’épaisseur (équation de St Venant). Dans ce cadre, on prédit la formation d’ondes de surface de grande longueur d’onde qui se propagent dans la direction de l’écoulement lorsque le nombre de Froude de l’écoulement dépasse un nombre de Froude critique. Cette instabilité est d’origine inertielle et le nombre de Froude critique dépend fortement de la rhéologie du matériau. L’étude expérimentale de cette instabilité est donc un test important des rhéologies proposées et de la robustesse des équations de St Venant.

Nous avons choisi de caractériser l’instabilité linéaire en forçant l’écoulement, dans l’esprit des expériences sur les systèmes ouverts en mécanique des fluides. Grâce à ce dispositif de forçage, nous avons pu étudier précisément la relation de dispersion des ondes (taux de croissance spatial, vitesse de propagation).

Cette étude montre que les caractéristiques de l’instabilité dépendent fortement du matériau utilisé. Dans le cas de billes de verre, l’instabilité est contrôlée par le nombre de Froude et apparaît au-delà d’un nombre de Froude critique. Le seuil de stabilité et la vitesse de propagation des ondes déterminés expérimentalement sont en bon accord avec les prédictions des équations de St Venant quand on introduit la loi de friction spécifique aux écoulements de billes de verre déduite des écoulements stationnaires uniformes. Dans le cas de sable, l’écoulement est toujours instable, quels que soient le nombre de Froude et l’angle d’inclinaison du plan. De plus, les taux de croissance maximum de l’instabilité sont obtenus au voisinage du seuil d’écoulement et diminuent quand la vitesse de l’écoulement augmente. Bien que ces propriétés semblent en contradiction avec celles d’une instabilité inertielle, elles ne sont pas la signature d’un nouveau mécanisme d’instabilité mais proviennent de

différences quantitatives dans la loi de friction entre les billes de verre et le sable.

Notre étude montre donc que les équations moyennées dans l'épaisseur permettent d'expliquer quantitativement la formation d'ondes de surface dans les écoulements granulaires denses. L'origine de l'instabilité étant inertielle, cette étude fournit également un bon test de la pertinence des lois de friction déduites des écoulements stationnaires uniformes dans le cas où les termes d'accélération dans les équations de St Venant jouent un rôle important. La formation d'ondes de surface dans les écoulements granulaires résulte, comme pour les fluides classiques, d'une compétition entre l'inertie et la gravité. Cependant, les caractéristiques de l'instabilité peuvent être fortement modifiées en raison des spécificités de la loi de friction des écoulements granulaires. Nous avons ainsi montré que le seuil de stabilité peut être abaissé sous le seuil d'écoulement, c'est-à-dire qu'un milieu granulaire peut être instable dès qu'il s'écoule, quelle que soit sa vitesse. Cette propriété provient de l'existence d'un angle minimal d'écoulement pour les milieux granulaires.

Il existe cependant une limite à l'approche moyennée dans l'épaisseur que notre travail met en évidence. En effet, les équations de St Venant telle que nous les avons écrites sont incapables de prédire l'existence d'une fréquence de coupure pour l'instabilité que nous observons expérimentalement. Cette fréquence de coupure est la signature d'une dissipation associée aux variations de vitesse dans le sens de l'écoulement qui n'est pas prise en compte, à l'ordre le plus bas, par les équations moyennées. En l'absence de tension de surface pour les granulaires, la détermination des mécanismes stabilisant les petites longueurs d'ondes nécessite la connaissance des équations constitutives tridimensionnelles des écoulements granulaires denses, ce qui reste encore un problème ouvert aujourd'hui. Nos mesures de la fréquence de coupure de l'instabilité peuvent donc fournir un point de départ pour des comparaisons ultérieures. Il serait également intéressant d'étudier le rôle de ces effets stabilisants sur la forme saturée des ondes non linéaires. Le milieu étant très faiblement dispersif, ces termes doivent avoir une grande importance dans la sélection de la largeur des fronts d'onde de grandes amplitudes.

\*\*\*

Malgré le relatif succès des approches hydrodynamiques (théorie cinétique, équations de St Venant) pour décrire les différentes instabilités étudiées dans cette thèse, la situation générale des écoulements granulaires reste quelque peu frustrante. Tout d'abord, la distinction entre un régime d'écoulement rapide et un régime d'écoulement dense, pour légitime quelle soit au vu des interactions mise en jeu entre les grains, pose le problème de la transition entre les deux régimes. Ce problème est loin d'être abstrait. Lors de la formation des vortex longitudinaux, l'écoulement accélère le long de la pente et passe continuellement du régime dense au régime collisionnel. Il semble difficile aujourd'hui de décrire l'ensemble de l'écoulement et donc de donner une théorie plus complète de l'instabilité (en particulier, à quelle distance les peignes apparaissent-ils le long de l'écoulement?).

L'autre grande question concerne le régime d'écoulement dense et la recherche d'une rhéologie tridimensionnelle qui transcende les différentes configurations d'étude. Ces équations devraient en particulier permettre de mieux comprendre l'origine des lois d'échelle observées sur plan incliné et de donner une interprétation plus claire des différentes grandeurs phénoménologiques que nous avons introduit dans la loi de friction ( $h_{stop}$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ). De nombreux modèles sont actuellement développés en ce sens (Andreotti & Douady 2001, Aranson & Tsimring 2001, Bocquet *et al.* 2002, Debregas & Josserand 2000, Jenkins & Chevoir 2002, Lemaitre 2002, Mills *et al.* 2000, Pouliquen *et al.* 2001, Savage 1998...). Cet effort, associé à des études expérimentales combinant mesures macroscopiques et mesures à l'échelle des grains, devrait permettre de relever ce défi.



# Bibliographie

- AIHARA, Y. 1990 Formation of longitudinal vortices in the sublayer due to boundary-layer turbulence. *J. Fluid. Mech.* **214**, pp. 111-129.
- ALAM, M. & NOTT, P. R. 1998 Stability of plane Couette flow of a granular material. *J. Fluid Mech.* **377**, pp. 99-136.
- ALAVIAN, V. 1986 Behaviour of density currents on an incline. *J. Hydraulic Eng.* **112** (1), pp. 27-42.
- ANCEY, C. 1997 Rhéologie des écoulements granulaires en cisaillement simple : application aux laves torrentielles granulaires. *Thèse de l'Ecole Centrale Paris*, Chatenay Malabry, France.
- ANCEY, C. 2002 Dry granular flows down an inclined channel: Experimental investigations on the frictional-collisional regime. *Phys. Rev. E* **65** (1), 011304.
- ANDERSON, K. G. & JACKSON, R. 1992 A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials for fully developed flow down inclined planes. *J. Fluid Mech.* **241**, pp. 145-168.
- ANDREOTTI, B. & DOUADY, S. 2001 Selection of velocity profile and flow depth in granular flows. *Phys. Rev. E* **63**, 031305.
- ARADIAN, A., RAPHAËL, E. & DE GENNES, P. G. 2002 Surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *C. R. Physique* **3**, pp. 187-196.
- ARANSON, I. S. & TSIMRING, L. S. 2001 Continuum theory of partially fluidized granular flows. preprint cond-mat/0109358.
- AZANZA, E. 1998 Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- AZANZA, E., CHEVOIR, F. & MOUCHERONT, P. 1999 Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **400**, pp. 199-227.
- AHN, H., BRENNEN, C. E. & SABERSKY, R. H. 1992 Analysis of the fully developed chute flow of granular materials. *Trans. ASME J. App. Mech.* **59**, pp. 109-119.
- BAGNOLD, R. A. 1954 Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proc. R. Soc. Lond. A* **225**, pp. 49-63.
- BENJAMIN, T. B. 1957 Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **2**, pp. 554-574.
- BOCQUET, L., LOSERT, W., SCHALK, D., LUBENSKY, T. C. & GOLLUB, J. P. 2002 Granular shear flow dynamics and forces: experiment and continuum theory. *Phys. Rev. E* **65** (1), 011307.



- BONAMY, D. 2001 Phénomènes collectifs dans les matériaux granulaires. Ecoulements de surface et réarrangements internes dans des empilements modèles. *Thèse de l'Université Paris 11, Orsay*.
- BREY, J. J., DUFTY, J. W., KIM, C. S. & SANTOS, A. 1998 Hydrodynamics for granular flow at low density. *Phys. Rev. E* **58**, pp. 4638-4653.
- BROWN, R. L. & RICHARDS, J. C. 1970 *Principle of powder mechanics*, first edn. Pergamon Press. New York.
- CAMPBELL, C. S. & BRENNEN, C. E. 1985 Chute flows of granular material: some computer simulation. *Trans. ASME J. Appl. Mech.* **52**, pp. 172-178.
- CAMPBELL, C. S. 1990 Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, pp. 57-92.
- CAPONERI, M., DOUADY, S., FAUVE, S. LAROCHE, C. 1995 Dynamics of avalanches in a rotating cylinder. in *Mobile Particulate System* pp. 331-366, Guazzelli, E. & Oger, L. (eds.) Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- CHAPMAN, S. & COWLING, T. G. 1970 *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3rd edn. Cambridge University Press.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Clarendon Press, Oxford.
- CHANG, H-C. 1994 Wave evolution on a falling film. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, pp. 103-136.
- CHEVOIR, F., PROCHNOW, M., MOUCHERONT, P., DA CRUZ, F., BERTRAND, F., GUILBAUD, J. P., COUSSOT, P. & ROUX, J. N. 2001 Dense granular flows in a vertical chute. in *Powder and Grains*. Kishino, Y. editor. Lisse, Swets and Zeitlinger. pp. 399-402.
- CORNISH, V. 1934 *Ocean waves and kindred geophysical phenomena*. Cambridge University Press.
- DAERR, A. & DOUADY, S. 1999 Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature* **399**, pp. 241-243.
- DAERR, A. 2001 Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane. *Phys. Fluids* **13**, pp. 2115-2125.
- DANIELS, K. E., BRENDAN, B. P. & BODENSCHATZ, E. 2000 Pattern formation in inclined layer convection. *Phys. Rev. Lett.* **84**, pp. 5320-5323.
- DARVE, F. 1987 *Manuel de rhéologie des géomatériaux*. Presses des Ponts et Chaussées, Paris.
- DAVIES, T. R. H. 1988 Deris flow surges-a laboratory investigation. *Mitteilung No. 96 der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie an der ETH Zürich*.
- DEBREGAS, G. & JOSSERAND, C. 2000 A self-similar model for shear flows in dense granular materials. *Europhys. Lett.* **52** pp. 137-143.
- DOUADY, S., FAUVE, S. & LAROCHE, C. 1989 Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations. *Europhys. Lett.* **8** (7), pp. 621-627.
- DOUADY, S., ANDREOTTI, B. & DAERR, A. 1999 On granular surface flows equations. *Eur. Phys. J. B* **11**, pp. 131-142.
- DRAKE, T. J. 1990 Structural features in granular flows. *J. Geophys. Res.* **95**, pp. 8681-8696.

- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- DRESSLER, R. F. 1949 Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels. *Communs pure appl. Math.* **2**, pp. 149-194.
- DURAN, J. 1997 *Sables, poudres et grains. Introduction à la physique des milieux granulaires*. Eyrolles Sciences.
- DURU, P., NICOLAS, M., HINCH, J. & GUAZZELLI, E. 2002 Constitutive laws in liquid-fluidized beds. *J. Fluid Mech.* **452**, pp. 371-404.
- ENSKOG, D. 1921 Kinetische theorie. *K. Svensk. Vet-Akad. Handl.* **63** (4).
- ERTAS, D., GREST, G. S., HALSEY, T. H., LEVINE, D. & SILBERT, E. 2001 Gravity-driven dense granular flows. preprint cond-mat/0005051.
- FALCON, E., FAUVE, S. & LAROCHE, C. 1999 Cluster formation, pressure and density measurements in a granular medium fluidized by vibration. *Eur. Phys. J. B* **9**, pp. 183-186.
- FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2001 Longitudinal vortices in granular flows. *Phys. Rev. Lett.* **86**, pp. 5886-5889.
- FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2001 Stability analysis of rapid granular chute flows: formation of longitudinal vortices. *to be published in J. Fluid Mech.*
- FRIED, E., SHEN, A. Q. & THORODDSEN, S. T. 1998 Wave patterns in a thin layer of sand within a rotating horizontal cylinder. *Phys. Fluids* **10**, pp. 10-13.
- GODRÈCHE, C. & MANNEVILLE, P. 1998 *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*. Cambridge University Press.
- GOLDHIRSCH, I. & ZANETTI, G. 1993 Clustering instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett.* **70**, pp. 1619-1622.
- GOLDHIRSCH, I. 1999 Scales and kinetics of granular flows. *Chaos* **9**, pp. 659-672.
- GÖRTLER, H. 1940 Über eine dreitridimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. in *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, New Ser.* 2, no. 1.
- GOTTLIEB, D., HUSSAINI, M. Y. & ORSZAG, S. A. 1984 Theory and application of spectral methods. In *Spectral methods for partial differential equations* (ed. R. G. Voight, D. Gottlieb & M. Y. Hussaini). Soc. Indus. & Appl. Math.
- HAFF, P. K. 1983 Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.* **134**, pp. 401-430.
- HE, X., MEERSON, B. & DOOLEN, G. 2002 Hydrodynamics of granular convection. *Phys. Rev. E* **65**, 030301.
- HESLOT, F., BAUMBERGER, T., PERRIN, B., CAROLI, B. & CAROLI, C. 1994 Creep, Stick-slip, and dry-friction dynamics: experiments and a heuristic model. *Phys. Rev. E* **49**, pp. 4973-4987.
- HILL, K. M., CAPRIHAN, A. & KAKALIOS, J. 1997 Axial segregation of granular media rotated in a drum mixer: pattern evolution. *Phys. Rev. E* **56**, pp. 4386-4393.
- HINCH, E. J. 1995 Introduction to mobile particulate systems. in *Mobile particulate systems*. Guazzeli, E. & Oger, L. editors (Kluwer Academic Publishers, Netherlands), pp. 1-22.

- HOPFINGER, E. J. 1983 Snow avalanche motion and related phenomena. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **15**, pp. 47-76.
- HOPKINS, M. A., LOUGE, M. Y. 1991 Inelastic microstructure in rapid granular flows of smooth disks. *Phys. Fluids.* (A) **3**, pp. 47-57.
- HUI, K., HAFF, P. K., UNGAR, J. E. & JACKSON, R. 1984 Boundary conditions for high-shear grains flows. *J. Fluid Mech.* **145**, pp. 223-233.
- HUNGR, O. & MORGENSTERN, N. R. 1984 Experiments on the flow behavior of granular materials at high velocity in an open channel. *Géotechnique* **34**, pp. 405-413.
- HUNT, M. L., ZENIT, R., VALET, C. S. & BRENNEN, C. E. 2002 Revisiting the 1954 suspension experiments of R. A. Bagnold. *J. Fluid Mech.* **452**, pp. 1-24.
- JAEGER, H. M., NAGEL, S. R. & BEHRINGER, R. P. 1996 Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.* **68** (4), pp. 1259-1273.
- JANSSEN, H. A. 1895 Test on grains pressure in silos. *Z. Vereins Deutsch Ing.* **39**, pp. 1045-1049.
- JENKINS, J. T. & SAVAGE, S. B. 1983 A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *J. Fluid Mech.* **130**, pp. 187-202.
- JENKINS, J. T. & RICHMAN, M. W. 1985 Grad's 13-moment system for dense gas of inelastic spheres. *Arch. Rat. Mech. Anal* **87**, pp. 355-377.
- JENKINS, J. T. & RICHMAN, M. W. 1986 Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks. *J. Fluid Mech.* **171**, pp. 53-69.
- JENKINS, J. T. & CHEVOIR, F. 2002 Dense plane flows of frictional spheres down a bumpy frictional incline. preprint.
- JESCHKE, P. & BEER, H. 2001 Longitudinal vortices in a laminar natural convection boundary layer flow on an inclined flat plate and their influence on heat transfer. *J. Fluid Mech.* **432**, pp. 313-339.
- JOHNSON, P. C., NOTT, P. & JACKSON, R. 1990 Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes. *J. Fluid Mech.* **210**, pp. 501-535.
- KACHANOV, Y. S. 1994 Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, pp. 411-482.
- KAPITZA, P. L. & KAPITZA, S. P. 1949 Wave flow of thin layers of viscous fluid. *Zh. Ekper. Teor. Fiz.* **19**, 105. traduction anglaise dans *Collected papers of P.L. Kapitza* (ed D. Ter Haar) pp. 690-709.
- KHAKHAR, D. V., MCCARTHY, J. J. & OTTINO, J. M. 1997 Radial segregation of granular mixtures in rotating cylinder. *Phys. Fluids* **9**, pp. 3600-3614.
- KHAKHAR, D. V., ORPE, A. V., ANDREDÉN, P. & OTTINO, J. M. 2001 Surface flow of granular materials: model and experiments in heap formation. *J. Fluid Mech.* **441**, pp. 255-263.
- KLEBANOFF, P. S., TIDSTROM, K. D. & SARGENT L. M. 1962 The three-dimensional nature of boundary-layer instability. *J. Fluid Mech* **12**, pp. 1-34.
- KRANENBURG, C. 1992 On the evolution of roll waves. *J. Fluid Mech* **245**, pp. 249-261.

- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. 1989 *Mécanique des fluides*. 2ème édition, Mir.
- LEMAITRE, A. 2002 The origin of a repose angle: kinetic rearrangement for granular materials. preprint cond-mat/0107422.
- LIU, K. & MEI, C. C. 1994 Roll waves on a layer of a muddy fluid flowing down a gentle slope-A Bingham model. *Phys. Fluids* **6**, pp. 2577-2590.
- LIU, J., PAUL, J. D. & GOLLUB, J. P. 1993 Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.* **250**, pp. 69-101.
- LIU, J., SCHNEIDER, J. B. & GOLLUB, J. P. 1995 Three-dimensionnal instabilities of film flows. *Phys. Fluids* **7**, pp. 55-67.
- LOUGE, M. Y. & KEAST, S. C. 2001 On dense granular flows down flat frictional inclines. *Phys. Fluids* **13**, pp. 1213-1233.
- LOSERT, W., BOCQUET, L., LUBENSKY, T. C. & GOLLUB, J. P. 2000 Particle dynamics in sheared granular matter. *Phys. Rev. Lett.* **85**, pp. 1428-1431.
- LUN, C. K. K., SAVAGE, S. B., JEFFREY, D. J. & CHEPURNIY, N. 1984 Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *J. Fluid Mech.* **140**, pp. 223-256.
- MALIK, M. R. 1990 Numerical methods for hypersonic boundary layer stability. *J. Comput. Phys.* **86**, pp. 376-413.
- MAYER, E. W. & POWEL, K. G. 1992 Viscous and invicid instabilities of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, pp. 191-114.
- MCNAMARA, S. & YOUNG, W. R. 1992 Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. *Phys. Fluid A*, **4**, pp. 496-504.
- MELO, F., UMBANHOWAR, P. B. & SWINNEY, H. L. 1995 Hexagons, kinks, and disorder in oscillated granular layers. *Phys. Rev. Lett.* **21**, pp. 3838-3841.
- MILLS, P., TIXIER, M. & LOGGIA, D. 2000 Influence of roughness and dilatancy for dense granular flow along an inclined wall. *Eur. Phys. J. E* **1**, pp. 5-8.
- NEEDHAM, D. J. & MERKIN, J. H. 1984 On roll waves down an open inclined channel. *Proc. R. soc. Lond. A* **394**, pp. 259-278.
- NOTT, P. R., ALAM, M., AGRAWAL, K., JACKSON, R. & SUNDARESAN, S. 1999 The effect of boundaries on the plane Couette flow of granular materials: a bifurcation analysis. *J. Fluid Mech.* **397**, 203-229.
- OGAWA, S., UMEMURA, A. & OSHIMA, N. 1980 On the equations of fully fluidized granular materials. *Z. angew. Math. Phys.* **31**, pp. 483-493.
- ORON, A., DAVIS, S. & BANKOFF, S. G. 1997 Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.* **69** (3), pp. 931-980.
- PETITJEANS, P. 1992 Etude expérimentale des instabilités de couches limites sur des parois concaves: instabilité de Görtler. *Thèse de l'Université Paris 6*, Paris. .
- POULIQUEN, O. & GUTFRAIND, R. 1996 Stress fluctuations and shear zones in quasi-static granular chutes flows. *Phys. Rev. E* **53**, pp. 552-561.
- POULIQUEN, O. & RENAUT, N. 1996 Onset of granular flows on an onclined rough surface: dilatancy effect. *J. Phys. II* **6**, pp. 923-935.

- POULIQUEN, O., DELOUR, J. & SAVAGE, S. B. 1997 Fingering in granular flows. *Nature* **386**, pp. 816-817.
- POULIQUEN, O. 1999a Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11** (3), pp. 542-548.
- POULIQUEN, O. 1999b On the shape of granular fronts down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11** (7), pp. 1956-1958.
- POULIQUEN, O., FORTERRE, Y. & LEDIZES, S. 2001 Dense granular flows down incline as a self-activated process. *Adv. Complex Systems* **4**, pp. 441-450.
- POULIQUEN, O. & FORTERRE, Y. 2002 Friction law for dense granular flows: application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.* **453**, pp. 133-151.
- POULIQUEN, O. & CHEVOIR, F. 2002 Dense flows of dry granular material. *C. R. Physique* **3**, pp. 163-175.
- PRASAD, S. N., PAL, D. & RÖMKENS, M. J. M. 2000 Wave formation on a shallow layer of flowing grains. *J. Fluid Mech.* **413**, pp. 89-110.
- PROCHNOW, M., CHEVOIR, F. & ALBERTELLI, M. 2000 Dense granular flows down a rough inclined plane. in *Proceedings, XIIIth International Congress on rheology, Cambridge, UK*.
- RADJAI, F., DIETRICH, E. W., JEAN, M. & MOREAU, J-J. 1998 Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.* **80**, pp. 61-64.
- RAJCHENBACH, J. 2000 Granular flows. *Advances in Physics* **49**, pp. 229-256.
- RAMÍREZ, R., RISSO, D. & CORDERO, P. 2000 Thermal convection in fluidized granular systems. *Phys. Rev. Lett.* **85**, pp. 1230-1233.
- REYDELLET, G., RIOUL, F. & CLÉMENT, E. 2000 Granular hydrodynamics and density wave regions in a vertical chute experiment. *Europhys. Lett.* **51** (1), pp. 27-33.
- ROUYER, F. & MENON, N. 2000 Velocity fluctuations in a homogeneous 2D granular gas in steady-state. *Phys. Rev. Lett.* **85**, pp. 3676-3679.
- RUYER-QUIL, C. 1999 Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné. *Thèse de l'École polytechnique*.
- RUYER-QUIL, C. & MANNEVILLE, P. 2000 Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B* **15**, pp. 357-369.
- DE SAINT VENANT, A. J. C. 1871 Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sci. Paris* **73**, pp. 147-154.
- SARIC, W. S. 1994 Görtler vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, pp. 379-409.
- SAVAGE, S. B. 1979 Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels. *J. Fluid Mech.* **92**, pp. 53-96.
- SAVAGE, S. B. & JEFFREY, D. J. 1981 The stress tensor in a granular flow. *J. Fluid Mech.* **110**, pp. 255-272.
- SAVAGE, S. B. 1989 Flow of granular materials. in *Theoretical and Applied Mechanics*, Germain, P., Piau, M. & Caillerie, D. editors., Elsevier, pp. 241-266.
- SAVAGE, S. B. & HUTTER, K. 1989 The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.* **199**, pp. 177-215.

- SAVAGE, S. B. 1992 Instability of unbounded uniform granular shear flow. *J. Fluid Mech.* **241**, pp. 109-123.
- SAVAGE, S. B. 1998 Analysis of slow high-concentration flows of granular materials. *J. Fluid Mech.* **377**, pp. 1-26.
- SELA, N. & GOLDBIRSCHE, I. 1998 Hydrodynamic equations for rapid flows of smooth inelastic spheres, to Burnett order. *J. Fluid Mech.* **361**, pp. 41-74.
- SHEN, A. Q. 2002 Granular fingering patterns in horizontal rotating layer. *Phys. Fluids* **14**, pp. 462-470.
- SILBERT, L. E., ERTAS, D., GREST, G. S., HALSEY, T. C., LEVINE, D. & PLIMPTON, S. J. 2001 Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology. *Phys. Rev. E* **64** (5), 012501.
- SIMPSON, J. E. 1997 *Gravity currents* second ed., Cambridge University Press.
- SMITH, M. K. 1990 The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *J. Fluid Mech.* **217**, pp. 469-485.
- SPARROW, E. M. & HUSAR, R. B. 1969 Longitudinal vortices in natural convection flow on inclined plates. *J. Fluid Mech.* **37**, pp. 251-255.
- SUSUKI, A. & TANAKA, T. 1971 Measurement of flow properties of powders along an inclined plane. *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **10**, pp. 84-91.
- TAN, M-L. & GOLDBIRSCHE, I. 1999 Rapid granular flows as mesoscopic systems. *Phys. Rev. Lett.* **81**, pp. 3022-3025.
- UMBANHOWAR, P. B., MELO, F. & SWINNEY, H. L. 1996 Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature* **382**, pp. 793-796.
- VALLANCE, J. W. 1994 Experimental and field studies related to the behavior of granular mass flows and the characteristics of their deposits. *Ph.D Thesis* (Michigan Technological University).
- WALTON, O. R. 1992 Numerical simulations of inelastic frictional particule-particule interactions. in *Particulate Two-phase Flow, Part I*, edited by Roco. M. C. (Butterworth-Heinemann, Boston), pp. 884-911.
- WANG, C.-H., JACKSON, R. & SUNDARESAN, S. 1996 Stability of bounded rapid shear flows of a granular material. *J. Fluid Mech.* **308**, pp. 31-62.
- WANG, C.-H., JACKSON, R. & SUNDARESAN, S. 1997 Instabilities of fully developed rapid flow of a granular material in a channel. *J. Fluid Mech.* **342**, pp. 179-197.
- WARR, S., HUNTLEY, J. M., & JACQUES, G. T. H. 1995 Fluidization of a two-dimensional granular system: experimental study and scaling behavior. *Phys. Rev. E* **52**, pp. 5583-5595.
- WEAVER, H. A. & DANLY, L. 1989 *Formation and evolution of planetary systems* (Cambridge University Press). Cambridge.
- WILDMAN, R. D., HUNTLEY, J. M. & PARKER, D. J. 2001a Convection in highly fluidized three-dimensional granular beds. *Phys. Rev. Lett.* **86**, pp. 3304-3307.
- WILDMAN, R. D., HUNTLEY, J. M. & PARKER, D. J. 2001b Granular temperature profiles in three-dimensional vibrofluidized granular beds. *Phys. Rev. E* **63**, 061311.

WITHAM, G. B. 1974 *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience.

YIH, C. S. 1963 Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids* **6**, pp. 321-330.





## Instabilités dans les écoulements granulaires

**Résumé** - Bien qu'intervenant dans de nombreuses situations industrielles et géophysiques, les écoulements granulaires sont aujourd'hui encore mal compris. Dans cette thèse, nous étudions deux instabilités qui apparaissent lorsque l'on fait couler un milieu granulaire par gravité sur un plan incliné rugueux.

Nous avons tout d'abord étudié une nouvelle instabilité observée dans le régime d'écoulement rapide et dilué, lorsque le plan est fortement incliné. Cette instabilité se manifeste par l'apparition spontanée de vortex longitudinaux au sein de l'écoulement. A partir de mesures expérimentales, nous proposons un mécanisme d'instabilité qui fait appel au concept de "température granulaire". Ce mécanisme est ensuite validé par une analyse de stabilité dans le cadre de la théorie cinétique des milieux granulaires.

La deuxième instabilité que nous avons étudiée apparaît dans le régime d'écoulement dense. Dans certains cas, on observe la formation de vagues de grande longueur d'onde qui se propagent dans la direction de l'écoulement. Nous avons étudié expérimentalement la formation de ces ondes de surface en forçant l'instabilité, dans l'esprit des expériences sur les systèmes ouverts en mécanique des fluides. Les résultats sont ensuite confrontés à une approche moyennée dans l'épaisseur. Cette étude montre que les propriétés de l'instabilité "classique" en ondes de surface peuvent être profondément modifiées par la rhéologie des écoulements granulaires denses.

**Mots-clés** : écoulements granulaires, instabilités, rhéologie, théorie cinétique, équations de St-Venant, vortex, ondes de surface.

## Instabilities in granular flows

**Abstract** - In spite of their importance in many industrial and geophysical processes, granular flows are still not completely understood. In this thesis, we study two instabilities that occur when a granular material is flowing under gravity down a rough inclined plane.

We first study a new instability observed for rapid and dilute flows, when the plane is strongly inclined. This instability corresponds to the spontaneous formation of longitudinal vortices in the flow. From the experimental measurements, we propose an instability mechanism based on the concept of "granular temperature". This mechanism is then validated by a stability analysis in the framework of the kinetic theory of granular flows.

The second instability we have studied appears in the dense flow regime. In a given range of parameters, we observe the formation of long surface waves that propagate downstream. We have precisely studied the formation of these surface waves by forcing the instability, in the spirit of open flows stability experiments in fluid mechanics. The results are then compared with a depth-averaged approach. This study shows that the properties of the "classical" long surface waves instability may be deeply modified by the rheology of dense granular flows.

**Keywords** : granular flows, instabilities, rheology, kinetic theory, St-Venant equations, vortices, surface waves.