



**HAL**  
open science

# SOLITONS GRIS, PHONONS ET DISSIPATION DANS UN CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN QUASI-UNIDIMENSIONNEL

Abdelaziz Radouani

► **To cite this version:**

Abdelaziz Radouani. SOLITONS GRIS, PHONONS ET DISSIPATION DANS UN CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN QUASI-UNIDIMENSIONNEL. Matière Condensée [cond-mat]. Faculté des sciences de Rabat, 2004. Français. NNT: . tel-00009805

**HAL Id: tel-00009805**

**<https://theses.hal.science/tel-00009805>**

Submitted on 22 Jul 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL**

**FACULTE DES SCIENCES**

**RABAT**

**THESE**

**Présentée à la Faculté des Sciences de Rabat**

**Pour l'obtention du :**

**Diplôme de Doctorat d'Etat**

**Discipline : Physique**

**Spécialité : *Physique Quantique***

**Présentée par :**

**Abdelaziz RADOUANI**

**Sujet :**

**SOLITONS GRIS , PHONONS ET DISSIPATION DANS UN**

**CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN**

**QUASI-UNIDIMENSIONNEL .**

**Soutenue Le 30/09/2004 devant le Jury composé de :**

**Président :**

**Mr. Amal BERRADA**

**Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat**

**Examineurs :**

**Mr. Driss SAYAH**

**Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat**

**Mr. Vincent HAKIM**

**Directeur de Recherche au CNRS (LPS. ENS. Paris)**

**Mr. M-E. BRACHET**

**Directeur de Recherche au CNRS (LPS. ENS. Paris)**

**Mr. A.BENYOUSSEF**

**Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat**

**Mr. A. EL KENZ**

**Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat**

A la mémoire de mes  
Parents

A mon fils el aziz  
Abdelhakim

A toute ma famille  
A tous mes amis



# Avant-Propos

Ce travail de thèse présenté dans ce manuscrit a été réalisé au laboratoire de physique statistique (LPS) à l'Ecole Normale Supérieure (ENS) de Paris, dans le cadre de la collaboration entre ce laboratoire et le laboratoire de physique des matériaux de la faculté des sciences de Rabat, et sous la direction de Monsieur Driss SAYAH et de Monsieur Vincent HAKIM.

En premier lieu, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Driss SAYAH, Directeur du laboratoire de physique des matériaux, qui m'a encouragé à préparer cette thèse en acceptant, avec amabilité, d'engager sa responsabilité de direction de ce travail de thèse. Qu'il veuille bien trouver ici mes remerciements les plus sincères pour sa gentillesse, sa disponibilité, et ses nombreux conseils et suggestions qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

Ma profonde reconnaissance s'adresse au professeur Vincent HAKIM, Directeur de recherche au CNRS (LPS. ENS. Paris), qui m'a réservé, avec gentillesse, un bon accueil au laboratoire de physique statistique (01/02/2000-12/08/2004), m'a guidé à choisir et développer progressivement le sujet de cette thèse, et m'a fait apprendre, avec un dévouement et une compétence remarquables, la pratique de la physique théorique sur ordinateur, et l'accès, dans de bonnes conditions, à cet univers fascinant qui est le monde de la simulation numérique. Je dois dire que c'est grâce à l'aide inconditionnelle de V. HAKIM, scientifique et morale, son dynamisme, ses critiques constructives, son soutien inestimable pendant les moments les plus difficiles, et la confiance qu'il n'a cessé de me manifester durant mon séjour, j'ai pu mener ce travail à terme et vivre une expérience des plus agréables. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma très grande gratitude d'avoir accepté avec amabilité de siéger à ce jury malgré ses préoccupations scientifiques.

Je tiens à exprimer ma très vive gratitude à Monsieur Amal BERRADA, Professeur à la faculté des sciences de Rabat, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant, avec amabilité, de présider ce jury de soutenance de ma thèse.

Je suis très honoré par la présence à ce jury de Monsieur le Professeur Marc-Etienne BRACHET, Directeur de recherche au CNRS (LPS. ENS. Paris), et spécialiste de la dynamique des fluides quantiques et phénomènes non-linéaires associés : vortex, dissipation, bifurcation, ... . Je lui exprime mes remerciements les plus sincères pour avoir accepté, avec amabilité, d'être rapporteur de ce manuscrit de ma thèse. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma très grande gratitude.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur Abdelilah BENYOUSSEF, directeur de l'U.F.P (Matière Condensée et Modélisation des Systèmes Statistiques) et responsable du laboratoire du Magnétisme et de la physique de Hautes Energies à la faculté des sciences de Rabat, pour les aides précieuses et inconditionnelles, scientifiques et morales qu'il m'a apporté tout au long de ce travail. Je tiens à lui témoigner mon admiration, ma gratitude pour sa compétence, sa gentillesse, sa disponibilité et son dynamisme. Qu'il veuille bien trouver ici ma sincère reconnaissance d'avoir accepté, avec amabilité, de juger ce travail de thèse et d'être membre de jury.

Je remercie très profondément Monsieur Abdallah EL KENZ, Professeur et membre du laboratoire du Magnétisme et de la physique de Hautes Energies à la faculté des sciences de Rabat, d'avoir accepté, avec amabilité, de siéger à ce jury et de juger le travail de cette thèse.

Aux premiers mois de mon séjour au LPS, j'ai eu la chance de rencontrer, au bureau de V. HAKIM, Monsieur Sergio RICA, actuellement professeur à l'université du CHILI, qui m'a offert le manuscrit de sa thèse et m'a fait un exposé général sur l'équation de Schrödinger non-linéaire. Je lui exprime ici mes remerciements les plus sincères d'avoir accepté, avec amabilité, d'être l'un des rapporteurs de ce travail de thèse les plus qualifiés dans le domaine de la physique des condensats quantiques et phénomènes non-linéaires associés.

Ce travail de thèse a été mené dans un environnement très convivial et intellectuellement très stimulant. Je voudrais tout d'abord remercier tous les

membres du LPS et notamment ceux qui m'ont facilité mon séjour : Jacques MEUNIER, Directeur du LPS, Nora SADAOUI ainsi que Carole secrétaires du LPS. Merci aux professeurs Yves Pomeau et Sébastien Balibard (LPS), avec lesquels j'ai eu l'occasion de discussions fructueuses sur mon travail de thèse. Un grand merci à Cristian Huepe qui m'a offert le manuscrit de sa thèse portant sur les condensats de Bose-Einstein et les écoulements superfluides (premier document de base). Merci à Mokhtar Adda-Bedia, Arezki Boudaoud, Hervé Henry, Chi-Tuong Pham, Camille Enaud, Paul François, Eric Sultan, Christophe Mora, Jean Farago, Alberto Rosso, Blas Echebarria, ... de m'avoir aidé à apprendre les techniques de l'informatique, et avec qui j'ai passé de bons moments pendant la durée de la préparation de ma thèse au LPS (salle Dc21). Merci à Daniel Le Moal et Remy Portier du service informatique, et à l'équipe de la bibliothèque du département de physique de l'ENS.

J'ai eu l'occasion de nombreuses discussions intéressantes sur mon sujet de thèse avec plusieurs professeurs et chercheurs du groupe " Atomes froids " du laboratoire Kastler Brossel (LKB) de l'ENS, notamment Jean Dalibard, Christophe Salomon, David Guéry-Odelin, Florian Schreck, Vincent Bretin, Frédéric Chevy, Julien Cubizolles. Je les remercie tous très vivement.

Je tiens à exprimer toute ma respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur Abdelmajid BELMAHI, l'ex-Doyen de la faculté de Medecine et de Pharmacie de Rabat pour ses encouragements et sa gentillesse. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma vive reconnaissance.

Mes vifs remerciements s'adressent également à Madame le Professeur N. HAJJAJ, l'actuel Doyen de la faculté de Medecine et de Pharmacie de Rabat. Merci à tous mes collègues et amis de la faculté de Medecine et de Pharmacie de Rabat, notamment les professeurs : Abdelkarim CHBICHEB, Directeur de notre laboratoire de Biophysique, Mohammed EL HASSANI, Directeur du laboratoire de Cytologie-Embryologie, Omar CHOUKAIRI, Mohammed BOURJOUANE, ... . Merci à Najiba, secrétaire du Doyen et à l'équipe du service du personnel enseignant de la faculté de Medecine et de Pharmacie de Rabat.

Je remercie tous les membres du laboratoire du Magnétisme et de la physique de Hautes Energies à la faculté des sciences de Rabat pour leur

soutien inconditionnel : A. Benyoussef, L. Bahmad, H. Ez-Zahraouy, M. Loulidi, et A. El Kenz. Merci à mes collègues M. Taïbi et K. Guerraoui de la faculté des sciences de Rabat qui m'ont initié au début de ce travail à la programmation par " Fortran".

Je suis très reconnaissant envers mes amis de Paris et plus particulièrement Melle. Naziha Kharbachi, Mustapha Ouahid, Mohammed Ismah et d'autres, de m'avoir soutenu dans les moments les plus délicats. Qu'ils trouvent ici mes vifs remerciements.

Je tiens enfin à remercier très vivement tous ceux qui, par leurs aides, encouragements et soutiens, ont directement ou indirectement contribué à la réussite de ce travail de thèse. Un grand merci à ma femme pour son soutien inestimable et quotidien.



# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>11</b>
<b>PREMIERE PARTIE :</b>	
<b>LA CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN : DE LA PRE-     DICTION A LA REALISATION.</b>	<b>21</b>
<b>1 Prédiction et formulation de la condensation de B-E.</b>	<b>25</b>
1.1 Description statistique des gaz parfaits quantiques . . . . .	26
1.1.1 Fonction de partition grand-canonique . . . . .	26
1.1.2 Statistiques des gaz parfaits quantiques . . . . .	28
1.2 Formulation de la condensation de B-E . . . . .	29
1.3 Condensation de B-E de gaz idéal de Bose dans des confine- ments 3D . . . . .	32
1.3.1 Condensation de Bose-Einstein dans une boîte . . . . .	32
1.3.2 Condensation de B-E dans un piège harmonique . . . . .	37
1.4 Condensation de B-E de gaz idéal de Bose de dimension in- férieure à trois . . . . .	45
1.4.1 Pièges harmoniques 2D et 1D . . . . .	45
1.4.2 Gaz idéal de bosons confiné dans une boîte bi et uni- dimensionele . . . . .	48
1.5 Conclusion, Réalité de la condensation de B-E . . . . .	49
<b>2 Réalisation des Condensats de B-E 3D.</b>	<b>53</b>
2.1 Présentation . . . . .	53
2.2 Refroidissement par piégeage magnéto-optique (PMO) . . . . .	55
2.2.1 Refroidissement laser, piégeage non dissipatif . . . . .	55

2.2.2	Piégeage magnétique . . . . .	56
2.2.3	Types de pièges magnétiques . . . . .	58
2.2.4	PMO. et seuil de condensation . . . . .	70
2.3	Refroidissement évaporatif . . . . .	70
2.3.1	Présentation . . . . .	71
2.3.2	Processus d'évaporation . . . . .	72
2.3.3	Dynamique de l'évaporation . . . . .	74
2.3.4	Evolution temporelle de $n$ , $v$ , et $D$ au cours du refroidissement évaporatif . . . . .	79
2.3.5	Cas de $\eta = \text{constant}$ . . . . .	81
2.3.6	Régime d'emballlement et seuil de condensation de B-E . . . . .	83
2.4	Observation directe des condensats de B-E 3D dilués et fini . . . . .	86
2.4.1	Etapas expérimentales . . . . .	86
2.4.2	Observation directe de condensats de B-E 3D . . . . .	89
2.5	Conclusion, nouveaux domaines de recherche . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Description dynamique des condensats de B-E, équation de Gross-Pitaevskii (G-P)</b> . . . . .	<b>95</b>
3.1	Collisions binaires entre bosons atomiques à très basse énergie . . . . .	96
3.1.1	Collisions élastiques binaires : description générale . . . . .	97
3.1.2	Collisions élastiques binaires dans le cas d'un potentiel central . . . . .	100
3.2	Intéraction de contact, pseudopotentiel en $\delta$ de Dirac . . . . .	105
3.2.1	Détermination de $f_k$ et $\sigma$ dans le cas de $V_{\text{pseudo}}$ et pour l'onde $s$ . . . . .	107
3.3	Equation de Gross-Pitaevskii . . . . .	109
3.3.1	Equation de Gross-Pitaevskii stationnaire . . . . .	110
3.3.2	Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps . . . . .	113
3.4	Forme hydrodynamique de l'EGP dépendant du temps, vortex et vitesse du son . . . . .	118
3.4.1	Forme hydrodynamique de l'EGP dépendant du temps . . . . .	118
3.4.2	Vortex quantiques . . . . .	119
3.4.3	L'acoustique dans l'équation de GP . . . . .	121
3.4.4	Superfluidité et critère de Landau . . . . .	122

3.5	Effet des interactions entre atomes dans un condensat de B-E piégé . . . . .	125
3.5.1	Stabilité des condensats de B-E . . . . .	125
3.5.2	Contrôle de $a$ , résonances de Feshbach . . . . .	130
3.5.3	Approximation de Thomas-Fermi pour $g > 0$ . . . . .	132
3.5.4	Longueur de relaxation ou de cohérence $\xi$ . . . . .	135
3.6	Equation de GP et expérience, Conclusion . . . . .	136

## DEUXIEME PARTIE :

### SOLITONS GRIS, PHONONS ET DISSIPATION DANS UN CONDENSAT DE B-E DILUE, FINI ET QUASI-1D. 139

<b>4</b>	<b>Solitons gris et phonons dans un condensat de B-E dilué, quasi-1D et confiné dans un piège nonharmonique.</b>	<b>141</b>
4.1	Solitons gris dans un condensat de B-E dilué, répulsif, quasi-1D et infini . . . . .	142
4.2	Solitons gris et phonons dans un condensat de B-E quasi-1D et confiné dans un piège nonharmonique . . . . .	144
4.2.1	Forme géométrique de pièges nonharmoniques 1D . . . . .	144
4.2.2	Solutions numériques de l'EGP 1D avec un potentiel piège nonharmonique : Solitons gris et phonons . . . . .	145
4.2.3	L'origine physique de l'émission de phonons . . . . .	149
4.2.4	Emission de phonons et forme nonharmonique du piège 1D . . . . .	153
4.3	Conclusion . . . . .	155
<b>5</b>	<b>Production de solitons gris, de phonons et phénomène de dissipation dans un condensat de B-E quasi-1D.</b>	<b>157</b>
5.1	Création de solitons gris et de phonons dans un condensat de B-E quasi-1D . . . . .	159
5.1.1	Description dynamique du condensat en présence de l'obstacle oscillant . . . . .	159
5.1.2	Résultats numériques : Création de solitons gris et phonons . . . . .	160

5.2	Comportement superfluide et dissipatif du condensat de B-E quasi-1D . . . . .	163
5.3	Interprétation analytique du comportement quasi-superfluide du condensat de B-E quasi-1D à grandes $v$ . . . . .	168
5.4	Conclusion . . . . .	170
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		<b>171</b>
<b>PUBLICATIONS</b>		<b>173</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>175</b>

# Introduction

La physique quantique ( mécanique et statistique quantique) a accompli depuis les années 1920 et jusqu'à nos jours des progrès remarquables aussi bien dans le domaine fondamental qu'appliqué, grâce à l'introduction et au développement avec succès de concepts quantiques nouveaux tels que le spin, les bosons et fermions, le principe d'exclusion de Pauli, la symétrisation et anti-symétrisation de la fonction d'onde décrivant respectivement des systèmes de bosons ou de fermions identiques ... etc. Le succès de ces concepts, de nature purement quantique, a été à l'origine de l'interprétation, la compréhension et la prédiction de plusieurs phénomènes physiques, aussi bien macroscopiques que microscopiques. Parmi ces phénomènes, nous rappelons : la conductivité électrique et thermique des métaux, les propriétés des semi-conducteurs et des systèmes magnétiques, le rayonnement du corps noir, la condensation de Bose-Einstein, la superfluidité, la supraconductivité, ... etc.

Toutefois, la condensation de Bose-Einstein (B-E), sujet principal de ce mémoire de thèse, a été initialement prédite en 1925 par Einstein [1], dans un gaz parfait de bosons atomiques identiques enfermés dans une grande boîte 3D, et en équilibre thermodynamique à une température  $T$  très basse et inférieure à une valeur critique  $T_c$  ( $T \leq T_c$ ). Cette prédiction a été inspirée par Einstein des travaux du jeune physicien bengali S.N. Bose accomplis en 1924, et dans lesquels Bose avait statistiquement interprété le rayonnement du corps noir en considérant les photons comme des bosons de masse nulle [2]. Einstein dans sa prédiction généralisa les résultats de ces travaux de Bose pour des bosons de masse non nulle, comme le cas des bosons atomiques.

La condensation de B-E, phénomène dû à la nature statistique quantique des bosons, apparaît, d'après Einstein, lorsque la longueur d'onde

thermique de de Broglie  $\lambda_{dB}$  devient de l'ordre de la distance moyenne interparticule  $d \sim n^{-1/3}$  ( $n$  étant la densité spatiale du gaz bosonique considéré), c'est-à-dire lorsqu'on atteint le régime de la dégénérescence quantique défini par le critère quantitatif d'Einstein :  $n\lambda_{dB}^3 \simeq 2.612$  pour  $T \leq T_c$ , avec  $\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$ ,  $m$  étant la masse d'un boson atomique,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $h$  la constante de Planck. Du point de vue statistique quantique, lorsque  $T < T_c$ , une fraction macroscopique du nombre total de bosons s'accumule dans le même et unique état fondamental d'énergie la plus basse du système bosonique considéré. Dans cet état quantique macroscopique, appelé état condensé ou condensat de B-E, les paquets d'ondes, associés aux bosons individuels, se recouvrent entre eux en formant une seule onde quantique macroscopique cohérente appelée onde du condensat de B-E. Toutefois, il a été justifié que la réalisation de la condensation, et par ailleurs, du condensat de B-E dans un gaz parfait de bosons atomiques à très basse température, est pratiquement impossible. Ceci est dû au fait que cette réalisation nécessite, d'après le critère d'Einstein, des densités élevées de l'ordre de celle de l'hélium liquide ( $n = 10^{27}$  atomes /m<sup>3</sup>) à  $T \sim 2$  K et d'un ordre supérieur à celle de l'air qui nous entoure ( $n \simeq 10^{22}$  atomes/m<sup>3</sup>). De plus, à des températures de l'ordre de grandeur de celle de l'hélium liquide ( $T \sim 2$  K), tous les gaz de la nature se solidifient. " C'est une belle théorie, mais correspond-elle à la réalité? " C'est par ces mots qu'Einstein décrivit ses travaux dans une lettre à son ami Ehrenfest [3], avant de se détourner de ce champ de recherche.

La prédiction de la condensation de bosons atomiques par Einstein est restée controversée et mystérieuse jusqu'en 1938, date de la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide par Kapitza [4], Allen et Misener [5]. London [6] remarqua que la température de la transition de l'hélium superfluide,  $T_s = 2.2$  K, est remarquablement proche de la température estimée de la condensation de B-E d'un gaz parfait de même densité que l'hélium liquide,  $T_s = 3.2$  K, et émit l'idée que les deux phénomènes étaient reliés. L'idée de London est le point de départ de toutes les théories modernes sur l'hélium liquide. Cependant, la connexion entre la condensation de B-E et la superfluidité n'est pas évidente. La superfluidité (absence totale de viscosité) de l'hélium liquide est reliée aux interactions fortes entre parti-

cules, alors qu'Einstein considérait un gaz parfait. De plus, les expériences de diffusion de neutrons dans l'hélium liquide à  $T = 0$  K aboutissent à une fraction condensée ne dépassant pas 10% à basse pression, alors qu'on prédit que tous les bosons atomiques sont condensés pour un gaz parfait de température nulle.

Toutefois, la découverte de la superfluidité marqua le début d'une intense activité aussi bien théorique qu'expérimentale visant à éclaircir les rapports entre superfluidité et condensation de B-E dans l'hélium liquide. Il est à noter à ce propos que de remarquables développements dans ce domaine de recherche avaient conduit à l'introduction de nouveaux concepts, tels que : la vitesse critique introduite par Landau dans son fameux critère [7], phonons et vitesse du son prédits par Bogoliubov [8], quantification des vortex proposée par Feynman [9], etc. Cependant, les interactions fortes dans l'hélium liquide, plus les fluctuations thermiques et quantiques n'ont pas permis la formulation d'un modèle théorique microscopique satisfaisant et capable d'expliquer le mécanisme de production de la superfluidité en lien avec la condensation de B-E.

C'était au début des années 1960 que Gross et Pitaevskii [10] ont réussi séparément à formuler un modèle théorique, à l'approximation de champ moyen, sous forme d'une équation différentielle non linéaire appelée équation de Gross-Pitaevskii (EGP) ou équation de Schrödinger non linéaire (ESNL). L'équation de GP décrit l'évolution dynamique spatio-temporelle à  $T = 0$  K, de l'onde macroscopique (champ scalaire complexe) associée au condensat de B-E. Cette équation contient un terme non linéaire tenant compte de l'interaction faible et binaire entre les bosons dans le condensat de B-E considéré. L'avantage de ce modèle réside dans le fait que les interactions binaires sont entièrement paramétrisées par un seul paramètre microscopique : la longueur de diffusion en onde  $s$ , notée  $a$ . Si  $a > 0$ , le condensat est répulsif. Il est attractif si  $a < 0$ . De plus, la longueur de diffusion  $a$  est directement reliée d'une part à la densité spatiale  $n$  du gaz quasiparfait de Bose 3D à  $T = 0$  K, par la relation :  $n | a |^3 \ll 1$ , ce qui assure le caractère binaire des interactions faibles, et d'autre part à la section efficace totale de diffusion :  $\sigma = 8\pi a^2$  pour des bosons à  $T \simeq 0$  K. Le petit paramètre  $(n | a |^3)^{1/3}$  est utilisé dans le calcul de l'écart entre la

température  $T_c$  d'un gaz parfait de Bose et celle du même gaz de Bose en tenant compte des faibles interactions.

Cependant, cette description théorique du gaz quasiparfait de Bose à  $T = 0$  K par l'équation de GP est restée sans vérification expérimentale à cause des conditions physiques et techniques dans lesquelles doivent se réaliser le critère d'Einstein : densité  $n$  élevée et  $T \simeq 0$  K.

C'est pendant les années 1985-1995 que la physique atomique vit la naissance et les développements spectaculaires des techniques les plus sophistiquées de piégeage et de refroidissement d'atomes neutres alcalins par faisceaux laser. Ce domaine de recherche est désormais connu sous le nom d'« Atomes froids ». Le prix Nobel 1997 a récompensé S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W. D. Phillips pour leurs travaux pionniers aussi bien expérimentaux que théoriques dans ce domaine [11, 12, 13].

Parallèlement, les équipes cherchant à refroidir un gaz d'hydrogène polarisé et piégé magnétiquement développèrent la technique du refroidissement évaporatif [14, 15]. Les atomes sont piégés magnétiquement, mais la profondeur du piège est ajustable. Les atomes les plus chauds s'échappent du piège, et les atomes restants voient alors leur température s'abaisser par thermalisation *via* les collisions élastiques. En abaissant la hauteur de la coupure, on refroidit continûment le gaz piégé. Finalement, au prix d'une perte d'atomes, la densité  $D$  ( $D = n\lambda_{dB}^3$ ) dans l'espace des phases s'accroît par ce procédé de refroidissement de façon spectaculaire. Dans le cas des atomes alcalins confinés dans un piège magnéto-optique, l'ajustement de la profondeur du piège au cours du refroidissement évaporatif se réalise par l'application d'un champ radio-fréquence [16].

C'était grâce au succès des techniques de piégeage magnéto-optique et de refroidissement évaporatif que le critère d'Einstein :  $n\lambda_{dB}^3 \simeq 2.612$  a été réalisé pour des faibles densités :  $n \simeq 10^6$ - $10^8$  atomes/cm<sup>3</sup>, et des températures :  $T \simeq \mu\text{K}$ -nK. Ce succès a immédiatement conduit à la réalisation de la condensation de B-E dans des gaz dilués de bosons atomiques ultrafroids.

La première observation directe de la condensation de B-E a été faite en 1995 dans des gaz dilués ultrafroids d'atomes bosoniques alcalins piégés magnétiquement dans des pièges harmoniques 3D. La découverte d'une telle condensation a été réalisée presque simultanément, par trois groupes améri-



cains : le groupe de E. A. Cornell et C. W. Wieman (JILA, Boulder ) sur un gaz d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$  [17], le groupe de W. Ketterle (MIT, Boston) sur un gaz d'atomes de  $^{23}\text{Na}$  [18], et le groupe de C. C. Bradley (Houston) sur un gaz d'atomes de  $^7\text{Li}$  [19]. Depuis cette date (1995), la condensation de B-E a été reproduite par une trentaine de laboratoires dans le monde. D'abord avec les mêmes espèces atomiques puis avec des atomes ayant des propriétés très différentes, comme l'hydrogène réalisé en 1998 (MIT, Boston) [20], et l'hélium-4 dans l'état métastable  $2^3S_1$ , en 2001 (ENS-Paris et laboratoire Charle-Fabry-Orsay) [21, 22].

Toutefois, la réalisation expérimentale des condensats de B-E a conduit à la redéfinition d'un condensat de B-E comme étant un gaz dilué de bosons atomiques ultrafroids et en faible interaction ( $T$  est de l'ordre de quelques dizaines de nanokelvins). La dilution d'un tel gaz est quantitativement assurée par le critère  $na^3 \ll 1$  ( $n$  est la densité spatiale du gaz,  $a$  la longueur de diffusion en onde  $s$ ). A ce jour, la liste des condensats de B-E, établie par ordre croissant de masse atomique, contient : l'hydrogène [20], le lithium [19], l'hélium métastable [21, 22], le sodium [18], le potassium [23], le rubidium [17], et le césium [24]. De plus, les excitons dans les semi-conducteurs fournissent un autre exemple de systèmes de bosons dilués pour lesquels des effets de statistique quantique spectaculaires peuvent se manifester [25, 26, 27].

Il est à noter que juste après la découverte des condensats de B-E et dans le but de tester la validité des prédictions théoriques des modèles décrivant ces systèmes quantiques, de nombreuses études expérimentales et théoriques des propriétés quantiques de ces condensats, aussi bien macroscopiques que microscopiques, ont été réalisées. Il a été révélé que plusieurs prédictions théoriques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, notamment : la température de condensation  $T_c$  [28], la cohérence quantique caractérisant les condensats de B-E [29, 30] et les interactions faibles limitées à deux corps, ou interactions binaires, représentées par le paramètre : la longueur de diffusion  $a$  [31, 32]. Notons que  $a$  peut être contrôlée expérimentalement au moyen de résonances de Feshbach [33, 34, 35, 36, 37]. Celles-ci permettent en effet de varier, au moyen d'un champ magnétique homogène, le module et le signe de  $a$ , et faire passer un condensat de B-E d'un régime

répulsif ( $a > 0$ ) à un régime attractif ( $a < 0$ ) et vice versa. De plus, ces études ont montré qu'un condensat de B-E est un nouvel état gazeux de la matière à  $T \simeq 0$  K, et qu'il constitue un modèle simple d'un fluide quantique macroscopique compressible dans lequel peuvent être développés et étudiés plusieurs phénomènes physiques tels que : la superfluidité, les excitations types vortex et solitons, la supraconductivité et d'autres. Par ailleurs, le succès remarquablement rapide accompli dans le domaine des condensats de B-E, a été également couronné par l'élargissement et le développement de plusieurs branches de recherche en physique moderne comme : le développement de jets d'atomes froids " laser à atomes " [38, 39, 40], la réalisation par refroidissement sympathique, des condensats de Fermi ou " mers de Fermi " à  $T < T_F$  ( $T_F$  est la température de Fermi) dans  ${}^6\text{Li}$  [41],  ${}^{40}\text{K}$  [42, 43], et très récemment la réalisation des condensats de Fermi moléculaires (voir thèse de Julien Cubizolles (LKB. ENS. Paris) [44] soutenue le : 22/06/2004).

L'importance de la recherche en physique des condensats quantiques a été consacrée par l'académie Nobel, qui a attribué le Prix Nobel de physique 2001 à Eric Cornell, Carl Wieman et Wolfgang Ketterle pour leur découverte de la condensation de Bose-Einstein dans les gaz dilués de bosons atomiques ultrafroids.

Du point de vue théorique, la réalisation des condensats de B-E a conduit à la vérification et à la justification de plusieurs prédictions théoriques dictées aussi bien par le modèle d'Einstein que par l'équation de GP 3D décrivant l'évolution dynamique d'un condensat de B-E à  $T = 0$  K [32, 28]. Analytiquement, l'équation de GP n'est intégrable que dans le cas 1D par la méthode spectrale inverse et pour un système non piégé ( $U_{\text{ext}} = 0$ ) [46, 47]. Cependant, les techniques numériques constituent des outils très efficaces non seulement pour intégrer l'équation nonlinéaire de GP 3D, 2D et 1D, mais aussi pour étudier, analyser et détailler avec une grande rigueur, les propriétés et l'évolution des condensats de B-E. Ces études numériques amènent souvent à la découverte et la prédiction des phénomènes physiques nouveaux dans les condensats de B-E comme nous allons le montrer dans ce travail.

Les solutions numériques de l'équation de GP se présentent sous forme d'excitations élémentaires nonlinéaires types solitons et vortex. Néanmoins,

il a été démontré que les solutions types solitons sont instables à 3D et 2D [45] et stables à 1D [46, 47]. De plus, la stabilité des condensats ne se réalise que dans des condensats répulsifs ( $a > 0$ ). Dans des expériences récentes, les vortex ont été réalisés dans des condensats répulsifs [48, 49], alors que les solitons ont été générés par la méthode d'impression des phases, dans des condensats répulsifs 3D de  $^{23}\text{Na}$  [50] et de  $^{87}\text{Rb}$  [51].

Notons que dans les années récentes, la recherche en physique des condensats quantiques s'est rapidement développée et essentiellement dirigée vers deux directions différentes : i) la création des excitations élémentaires types vortex dans des condensats de B-E dilué [48, 49], et l'étude expérimentale des phénomènes physiques associés, comme la vitesse critique, la superfluidité et la dissipation (présence de viscosité). La vitesse critique et la dissipation dans ces milieux ont été théoriquement [52] et expérimentalement [53] étudiées. ii) La réduction de la dimensionnalité des condensats de Bose en 2D et 1D par des techniques de piégeage très fort selon une ou deux directions transverses, de telle sorte qu'à très basse température, le mouvement transverse du condensat est "gelé". Dans ces conditions, l'énergie moyenne due à l'interaction binaire entre atomes devient petite devant l'énergie de piégeage dans une (ou deux) direction (s) transverse (s). Des condensats de B-E dilués et répulsifs ont été effectivement réalisés par cette technique, à 2D dans le cas de  $^{23}\text{Na}$  [54], et à 1D pour  $^7\text{Li}$  [55].

Signalons avant de fixer le but de ce travail que toutes les études expérimentales et théoriques, réalisées depuis l'observation de la condensation de B-E, ont été faites sur des condensats confinés dans des pièges harmoniques [56, 57]. Théoriquement, la création des solitons gris avec phonons ont été observés dans un fluide répulsif 1D illimité par le mouvement uniforme d'un obstacle (potentiel répulsif) dans ce milieu [58]. Nous allons considérer dans ce travail de thèse, un condensat de B-E dilué quasi-1D et confiné (condensat fini) dans un piège non-harmonique, formé par un potentiel plat avec des bords paraboliques (parois). La forme non-harmonique de ce piège va jouer un rôle crucial dans l'étude de l'effet des parois sur la propagation des solitons dans un condensat répulsif. Cet effet est manifesté sous forme d'émission de phonons aux points de retour des solitons gris.

Le but de cette thèse est double. Nous nous proposons d'étudier en pre-

mier lieu d'une part, la propagation des solitons gris (solitons en forme de trou et en mouvement propagatif uniforme) dans un condensat de B-E dilué répulsif ( $a > 0$ ), quasi-unidimensionnel et confiné dans un piège non-harmonique. D'autre part, d'analyser l'effet des bords paraboliques de ce piège ainsi que l'effet d'un obstacle en forme d'une bosse gaussienne, placé dans ce piège, sur la propagation de ces solitons gris. En second lieu, nous nous consacrerons à l'étude des phénomènes de superfluidité et de dissipation produits, dans le même condensat de B-E quasi-1D, par le mouvement uniforme et en va-et-vient d'un potentiel obstacle répulsif de forme gaussienne.

La description de l'évolution dynamique d'un tel condensat est faite par l'équation de GP 1D dépendant du temps. Nous avons numériquement intégré cette équation, d'abord avec le potentiel statique non-harmonique de piégeage, puis ensuite, avec le potentiel total comprenant le même potentiel statique non-harmonique, combiné avec le potentiel obstacle en mouvement uniforme de va-et-vient dans le condensat de B-E considéré.

Ce mémoire de thèse comprend deux parties. La première partie est composée de trois chapitres. Nous exposons dans le premier chapitre, le développement et la formulation de la condensation de B-E, d'abord telle qu'elle a été prédite en 1925 par A. Einstein dans un gaz idéal de bosons atomiques, confiné dans une grande boîte 3D (limite thermodynamique), puis ensuite, dans un piège harmonique à 3D, 2D et 1D. Nous passons en revue, dans le chapitre 2, l'ensemble des techniques expérimentales les plus sophistiquées (piégeage non dissipatif magnéto-optique et refroidissement évaporatif) développées dans les années 1980, et qui ont conduit en 1995, à la réalisation et l'observation directe de la condensation de B-E dans des vapeurs diluées d'atomes alcalins ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^7\text{Li}$ ), ultrafroids et confinés dans des pièges magnéto-optiques 3D. Nous présentons dans le chapitre 3 l'équation de Gross-Pitaevskii (GP), stationnaire et dépendant du temps, décrivant l'évolution dynamique de l'état quantique macroscopique, également appelé fonction d'onde macroscopique, d'un condensat dilué de B-E à  $T = 0$  K.

La seconde partie de ce travail, comprenant deux chapitres, est consacrée à la présentation de notre contribution. Dans le chapitre 4, nous pré-

---

sentons les résultats de l'étude de la propagation des solitons gris dans un condensat de B-E dilué et confiné dans un piège 1D non-harmonique. Nous montrons que l'effet des bords paraboliques (parois) sur la propagation des solitons gris, se traduit, aux points de retour de ces solitons, par l'émission spontanée de phonons, avec une augmentation progressive de la vitesse de propagation du soliton gris et diminution de sa taille. Cet effet se produit également lorsque un obstacle en forme d'une bosse gaussienne est placé dans le condensat. Les phonons émis aux points de retour de solitons gris accompagnent ceux-ci dans leur propagation. Dans le chapitre 5, nous présentons les résultats de traitement et d'analyse des phénomènes de superfluidité et dissipation produits dans le même condensat de B-E quasi-1D, par le mouvement uniforme et en va-et-vient d'un potentiel obstacle répulsif et en forme gaussienne. Les résultats de notre étude sont parus dans deux articles : Physical Review A68, 043620 (2003); et Physical Review A70, 013602 (2004).



PREMIERE PARTIE

LA CONDENSATION DE  
BOSE-EINSTEIN : DE LA  
PREDICTION A LA  
REALISATION

Dans le but de fixer l'objet principal de cette première partie de ce mémoire de thèse, il serait autant préférable qu'utile de rappeler qu'en physique quantique on postule que toutes les particules de l'univers aussi bien élémentaires (e.g : e, p,  $\gamma$ ) que composées sous forme d'atomes et noyaux atomiques simples (H, He, Li, Na, . . .) sont indiscernables (trajectoires indéterminées), et manifestent un comportement spécifique intrinsèque représenté quantitativement par ce qu'on appelle spin (spin  $\equiv$  rotation) : grandeur physique de nature purement quantique et sans analogue classique. Toutefois, l'importance de spin d'une particule ne réside pas uniquement dans le fait que sa valeur propre caractérise entièrement la nature quantique de la particule, mais aussi qu'elle ne peut prendre qu'un multiple entier ou demi entier de  $\hbar$  (avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$  est la constante de Planck). Ce dernier résultat est d'une extrême importance et a permis aux physiciens de classer, d'un point de vue purement quantique, toutes les particules physiques en deux grandes classes : i) les bosons, particules de spin entier ou nul ( $\alpha$ ,  $\gamma$ , ...), et ii) les fermions, particules de spin demi-entier (e, p, n ...) ( $\hbar$  est prise comme unité). Cette classification en bosons et fermions a ensuite conduit à la révélation d'autres propriétés quantiques spécifiques cette fois-ci au caractère bosonique ou fermionique de la particule. En effet, il a été démontré que l'échange de deux particules dans un système formé de fermions identiques rend la fonction d'onde décrivant ce système anti-symétrique. En revanche, dans le cas d'un système formé de bosons identiques, l'échange de deux particules ne modifie pas la fonction d'onde décrivant ce système, et cette fonction est dite fonction d'onde symétrique. Le processus d'anti-symétrisation (symétrisation) de la fonction d'onde a amené à des conséquences d'une extrême importance. Ainsi, le comportement anti-symétrique de la fonction d'onde fermionique a conduit au principe d'exclusion de Pauli qui postule que deux ou plusieurs fermions ne peuvent jamais occuper le même état quantique, c'est-à-dire qu'un état quantique fermionique ne peut être que vide ou occupé par un seul fermion. Cependant, le caractère symétrique de la fonction d'onde bosonique a montré qu'un seul état quantique peut être vide ou occupé par un ou plusieurs bosons. Par conséquent, un état quantique bosonique pourrait être macroscopique si sa population deviendrait



---

énorme. C'est cette dernière situation qui a été à l'origine de prédiction en 1925 par A. Einstein, de la condensation de Bose-Einstein, et qui constitue le but principal de cette première partie de ce mémoire de thèse.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous traiterons la formulation de la condensation de B-E telle qu'elle a été prédite par A. Einstein dans un gaz idéal de particules bosoniques. Le chapitre II est consacré tout d'abord, à la description des techniques sophistiquées utilisées dans la réalisation expérimentale, en 1995, de la condensation de B-E, ensuite à l'observation directe et spectaculaire des premiers condensats de B-E dans des vapeurs piégés d'atomes alcalins ultrafroids 3D, et enfin, aux conséquences et perspectives de cette découverte. Le chapitre III de cette partie est réservé à l'équation de Gross-Pitaevskii, appelée également équation de Schrödinger nonlinéaire, qui décrit, en parfaite cohérence avec l'expérience, l'évolution dynamique des condensats de B-E à  $T = 0$  K.



# Chapitre 1

## Prédiction et formulation de la condensation de B-E.

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter la notion théorique de la condensation, puis du condensat, de Bose-Einstein (B-E), telle qu'elle a été initialement prédite en 1924-25 par A. Einstein [2, 1] dans un gaz idéal de bosons, ou gaz idéal de Bose, c'est-à-dire un ensemble de bosons piégés dans un potentiel extérieur et sans interactions mutuelles. Nous commençons par rappeler brièvement (section 1.1) les grandeurs statistiques de base conduisant habituellement à une description statistique commode d'un gaz parfait quantique. Dans la section (1.2), nous exposerons les idées théoriques principales qui sont à la base de prédiction de la condensation de B-E dans un gaz idéal de particules bosoniques. Nous traiterons dans la section (1.3) le développement de la condensation de B-E dans un gaz idéal tri-dimensionnel enfermé d'abord dans une grande boîte 3D, puis ensuite confiné dans un piège (potentiel) harmonique. Ces deux cas importants vont nous permettre d'obtenir la fraction macroscopique condensée de bosons à  $T_c \leq T$ . Nous discuterons dans la section (1.4) les possibilités de développement de la condensation de B-E dans un gaz idéal de Bose de dimensions inférieures à trois. La section de cloture (1.5) sera consacrée à une conclusion sommaire de ce chapitre avec une discussion portant sur la réalité physique de la condensation de B-E telle qu'elle a été prédite dans un gaz parfait de bosons atomiques.

## 1.1 Description statistique des gaz parfaits quantiques

### 1.1.1 Fonction de partition grand-canonique

En statistique quantique, un système de particules quantiques identiques (bosons ou fermions) est décrit par un ensemble statistique grand-canonique [59, 60, 61]. Il est obtenu en supposant que le système considéré, de volume  $V$  fixé de manière certaine, peut échanger de l'énergie et des particules avec un réservoir extérieur, supposé beaucoup plus grand [62]. La présence de ce réservoir fixe en valeur moyenne le nombre total de particules  $\hat{N}$  et l'énergie totale  $\hat{H}$ , avec :

$$\langle \hat{H} \rangle = E \quad , \quad \langle \hat{N} \rangle = N \quad . \quad (1.1)$$

L'état quantique d'un système physique est décrit par un opérateur densité  $\hat{\rho}$ . Pour obtenir l'opérateur  $\hat{\rho}$  d'un système en équilibre thermodynamique, soumis à un certain nombre de contraintes, on postule en mécanique statistique quantique que  $\hat{\rho}$  décrit un état qui ne contient pas plus d'informations que celles fournies par les contraintes. Il faut donc pouvoir associer à  $\hat{\rho}$  une quantité caractérisant l'information manquante dans l'état décrit par  $\hat{\rho}$ , puis déterminer  $\hat{\rho}$  en maximisant cette information manquante, compte-tenu des contraintes. L'entropie statistique  $S$  reliée à  $\hat{\rho}$  par la relation [63] :

$$S(\hat{\rho}) = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})) \quad (1.2)$$

caractérise précisément cette information manquante dans l'état décrit par  $\hat{\rho}$ . L'état d'équilibre thermodynamique est alors déterminé en maximisant  $S(\hat{\rho})$ , compte-tenu des deux contraintes (1.1). Cette maximisation sous contraintes se traite simplement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On obtient :

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}}}{Z_G} \quad , \quad (1.3)$$

avec :

$$Z_G = \text{Tr}(e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}}) \quad . \quad (1.4)$$

La fonction  $Z_G$  est appelée fonction de partition grand-canonique. Les multiplicateurs de Lagrange  $\alpha$  et  $\beta$  sont associés aux contraintes sur  $\langle \hat{H} \rangle$  et

$\langle \hat{N} \rangle$  (1.1). Le paramètre  $\beta$  est relié à la température  $T$  par :  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , avec  $k_B$  est la constante de Boltzmann. Le paramètre  $\alpha$  est relié au potentiel chimique  $\mu$  du gaz (énergie à fournir pour ajouter une particule) par  $\alpha = -\beta\mu$ , ainsi qu'à la fugacité  $z = e^{-\alpha} = e^{\beta\mu}$ . La détermination des valeurs de  $z$  et  $\beta$  qui vérifient les contraintes (1.1) se fait par l'intermédiaire de :

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G(z, \beta, V) , \quad (1.5)$$

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G(z, \beta, V) , \quad (1.6)$$

qu'il suffit d'inverser pour obtenir  $z$  et  $\beta$  comme fonctions de  $N$  et  $E$ .

Une fois  $Z_G$  déterminée, toutes les grandeurs thermodynamiques ( $P, S, \dots$ ) s'en déduisent par simple dérivation. Ainsi, la pression se détermine à partir de :

$$P = k_B T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_G(z, \beta, V) . \quad (1.7)$$

Nous notons que le calcul explicite de  $Z_G$  est très ardu dans le cas général d'un fluide en interaction. En revanche, le cas du gaz parfait peut être traité exactement d'une manière remarquablement simple. En effet, pour un système de  $N$  bosons ou fermions identiques n'interagissant pas, l'hamiltonien total  $\hat{H}$  est une somme d'hamiltoniens  $\hat{h}$  à un corps :

$$\hat{H} = \sum_N \hat{h}_i . \quad (1.8)$$

En notant par  $\{ | \lambda \rangle \}$  la base de vecteurs propres de l'hamiltonien à un corps  $\hat{h}$ , et  $\varepsilon_\lambda$  l'énergie associée à  $| \lambda \rangle$ , on peut écrire pour chaque état individuel :

$$\hat{h} | \lambda \rangle = \varepsilon_\lambda | \lambda \rangle . \quad (1.9)$$

Pour déterminer la fonction de partition grand-canonique  $Z_G$ , on introduit le formalisme de la seconde quantification qui tient compte de variation du nombre de particules  $\hat{N}$ . Dans ce formalisme, les grandeurs  $\hat{H}$  et  $\hat{N}$  deviennent des opérateurs de valeurs propres  $E_l$  et  $N_l$  dans la base de l'espace de Fock notée  $| l \rangle = | n_\lambda, n'_\lambda, \dots \rangle$ ,

$$\hat{N} | l \rangle = N_l | l \rangle \quad \text{avec} \quad N_l = \sum_\lambda n_\lambda , \quad (1.10)$$

$$\hat{H} | l \rangle = E_l | l \rangle \quad \text{avec} \quad E_l = \sum_\lambda n_\lambda \varepsilon_\lambda , \quad (1.11)$$

avec :  $n_\lambda = a_\lambda^\dagger a_\lambda$  ( $a_\lambda^\dagger$  et  $a_\lambda$  sont respectivement des opérateurs de création et de destruction d'une particule dans l'état  $|\lambda\rangle$ , et  $n_\lambda$  le nombre moyen d'occupations de cet état).

La fonction  $Z_G$  donnée par (1.4) se calcule aisément dans la base  $|\lambda\rangle$ . On obtient :

$$Z_G = \sum_l e^{-\alpha N_l - \beta E_l} = \prod_\lambda \zeta_\lambda \quad (1.12)$$

avec :

$$\zeta_\lambda = \sum_{N_\lambda} e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_\lambda) n_\lambda} \quad (1.13)$$

Cette factorisation de  $Z_G$  en produit de fonctions de partitions, relatives chacune à un état quantique individuel  $\lambda$  est l'avantage majeur de l'utilisation du formalisme grand-canonique.

## 1.1.2 Statistiques des gaz parfaits quantiques

### Cas des fermions : Statistique de Fermi-Dirac

Pour des fermions, les valeurs possibles de  $n_\lambda$  dans la somme (1.3) sont  $n_\lambda = 0$  ou  $n_\lambda = 1$  (d'après le principe d'exclusion de Pauli). On a donc :

$$\zeta_\lambda^{(F)} = 1 + e^{-\alpha - \beta \varepsilon_\lambda} = 1 + z e^{-\beta \varepsilon_\lambda} \quad (1.14)$$

En utilisant (1.14), (1.12) et (1.5), on en déduit l'expression du nombre total moyen de particules dans le système :

$$N = \sum_\lambda n_\lambda \quad \text{avec} \quad n_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1} \quad (1.15)$$

L'expression (1.15) donnant  $n_\lambda$  est appelée statistique (ou distribution) de Fermi-Dirac. Elle représente le nombre moyen de particules occupant un état quantique individuel  $\lambda$  dans le cas d'un système de fermions sans interactions mutuelles. De plus, elle montre que, pour un système de température fixée, le potentiel chimique  $\mu$  peut prendre n'importe quelle valeur, positive ou négative. Une valeur grande et négative de  $\mu$  correspond à  $n_\lambda$  très faible, donc à un système bien décrit par la statistique de Boltzmann classique :

$$\mu \longrightarrow -\infty \quad : \quad n_\lambda \simeq z e^{-\beta \varepsilon_\lambda} \quad (1.16)$$

Une valeur positive et grande devant  $k_B T$  correspond au contraire à un nombre très élevé, et donc à un gaz de Fermi fortement dégénéré. Les nombres d'occupation  $n_\lambda$  valent presque 1 si  $\varepsilon_\lambda < \mu$  et 0 sinon.

### Cas des bosons : Statistique de Bose-Einstein

Pour des bosons, les valeurs possibles de  $n_\lambda$  dans la somme (1.13) sont des entières positives ou nulles (condensation de Bose), et la somme se ramène à une série géométrique, soit :

$$\zeta_\lambda^{(B)} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha - \beta\varepsilon_\lambda}} = \frac{1}{1 - z e^{-\beta\varepsilon_\lambda}} . \quad (1.17)$$

Le nombre total de particules est alors donné par :

$$N = \sum_\lambda n_\lambda \quad \text{avec} \quad n_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} - 1} = \frac{z}{e^{\beta\varepsilon_\lambda} - z} . \quad (1.18)$$

L'expression (1.18) donnant  $n_\lambda$  est appelée statistique (ou distribution) de Bose-Einstein. Elle représente le nombre moyen de particules occupant un état quantique individuel  $\lambda$  dans le cas d'un système de bosons sans interactions mutuelles. Dans ce cas, et à température fixée, le potentiel chimique  $\mu$  peut prendre toutes les valeurs depuis  $-\infty$  jusqu'à  $\varepsilon_0$ , qui représente l'énergie du niveau fondamental de  $\hat{h}$ . Pour  $\mu > \varepsilon_0$ , alors la population  $n_0$  de ce niveau fondamental deviendrait négative, ce qui n'a bien sûr aucun sens. Comme pour le gaz de Fermi, les valeurs grandes et négatives de  $\mu$  correspondent à un gaz bien décrit par la physique statistique classique (distribution de Boltzmann) :

$$\mu \longrightarrow -\infty \quad : \quad n_\lambda \simeq z e^{-\beta\varepsilon_\lambda} . \quad (1.19)$$

## 1.2 Formulation de la condensation de B-E

La statistique de Bose-Einstein régissant un système idéal de Bose permet d'obtenir, à température fixée  $T$ , le nombre  $n_0$  d'occupation de l'état quantique fondamental individuel d'énergie  $\varepsilon_0$  :

$$n_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} = \frac{z}{e^{\beta\varepsilon_0} - z} . \quad (1.20)$$

On remarque que, quand  $\mu$  tend vers  $\varepsilon_0$ , le nombre  $n_0$  devient extrêmement grand et de l'ordre de  $N$  tel que :  $n_0 \equiv N_0$ , où  $N_0$  est le nombre moyen total de particules du système à l'état fondamental d'énergie  $\varepsilon_0$ . Cette conséquence de nature purement statistique constitue la première signature de la condensation macroscopique de particules bosoniques sans interactions mutuelles dans le même état quantique fondamental. De plus, elle est à la base du mécanisme de traitement et formulation de la condensation de B-E dans un gaz idéal de Bose. Ce mécanisme consiste à répartir, à la température  $T$ , le nombre total  $N$  de particules bosoniques formant le système entre le niveau fondamental et les autres niveaux excités :

$$N = N_0 + N_T , \quad (1.21)$$

avec :

$$N_T = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} - 1} = \sum_{\lambda \neq 0} n_\lambda(T, \mu) , \quad (1.22)$$

et

$$N_0 = \frac{z}{1 - z} . \quad (1.23)$$

où  $N_T$  représente le nombre moyen total de particules non condensées occupant tous les états propres  $\lambda$  de  $\hat{h}$  sauf l'état fondamental ( $\lambda = 0$ ), également appelé le nombre de saturation des états excités ( $\lambda \neq 0$ ) du système, et  $N_0$  est le nombre de particules occupant l'état fondamental ( $\lambda = 0$ ), ( $z$  la fugacité).

La figure (1-1) représente, à température fixée, les courbes de variations de  $N_T(\mu)$  et  $N_0(\mu)$  en fonction de  $\mu$ . Cette figure montre que les variations de  $N_T(\mu)$  sont lentes pour  $\mu < \varepsilon_0$ , et  $N_T(\mu)$  atteint son maximum  $N_c = N_T(T, \mu)$  pour  $\mu = \varepsilon_0$ . Cependant  $N_0(\mu)$  varie très lentement et garde une valeur faible de l'ordre de 1 pour  $\mu < \varepsilon_0$ , puis diverge quand  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ . On remarque que si  $N_c > N$ , l'équation (1.21) se vérifie pour  $\mu < \varepsilon_0$  ( $N_0$  est négligeable). Dans ce cas  $N_T(T, \mu)$  devient une fonction croissante de la température  $T$ . On en déduit que la situation  $N_c > N$  correspond à des températures supérieures à une température critique  $T_c$  définie par :

$$N_T(T_c, \mu = \varepsilon_0) = N . \quad (1.24)$$

D'autre part, si  $N_c(T) < N$ , situation associée à  $T < T_c$ , alors les particules restantes et représentées par la différence  $N - N_c$ , iront se loger sur le



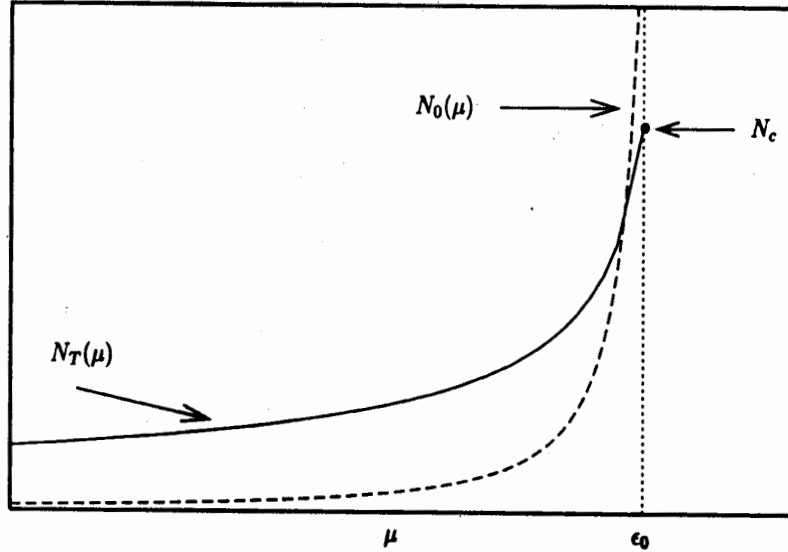


FIG. 1.1 – Courbes de variations de  $N_T(\mu)$  et  $N_0(\mu)$  à température fixée, en fonction de  $\mu$  et  $\varepsilon_0$ .

niveau fondamental d'énergie  $\varepsilon_0$ , et une condensation ( ou accumulation ) de particules se développe de manière cruciale pour que l'équation (1.21) soit vérifiée et surtout à la limite thermodynamique (  $N \rightarrow \infty$  ) lorsque  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ . La température  $T_c$  correspond à la température critique au dessous de laquelle le phénomène de la condensation de B-E se développe. Les équations (1.21) et (1.24), avec les conditions  $N_c < N$  et  $T < T_c$ , sont à la base de la formulation fondamentale de développement de la condensation de B-E dans un gaz idéal de bosons, et permettent, par ailleurs, la détermination de la fraction macroscopique condensée  $N_0/N$  de bosons. Notons que la condensation de photons, bosons de masse nulle, a été prédite, pour la première fois, par le jeune physicien bengali Satyendra Nath Bose en 1924 dans le traitement de rayonnement du corps noir [2]. S'inspirant des travaux de S.N. Bose, Einstrin a généralisé la notion de condensation pour des bosons de masse non nulle ou bosons atomiques [1]. C'est pourquoi la condensation d'un gaz de bosons est connue sous le nom de condensation de B-E.

## 1.3 Condensation de B-E de gaz idéal de Bose dans des confinements 3D

### 1.3.1 Condensation de Bose-Einstein dans une boîte

Nous allons appliquer le formalisme précédent de prédiction de la condensation de B-E pour traiter le développement de ce phénomène dans un gaz idéal de particules bosoniques de masse non nulle, et confiné dans une boîte tri-dimensionnelle, qui est la situation considérée par Einstein en 1925 [1]. Cette géométrie correspond aux expériences menées sur des échantillons macroscopiques confinés dans des récipients matériels, comme l'étude de la superfluidité de l'hélium dans un cryostat, ou d'un gaz d'excitons dans un semi-conducteur, ou encore d'un gaz bidimensionnel d'atomes d'hydrogène maintenus en lévitation au dessus d'une surface d'hélium liquide.

Considérons une boîte de volume  $V$  et pour simplifier de forme cubique de côté  $L$  enfermant un gaz idéal de Bose. L'hamiltonien total décrivant les particules quantiques sans interactions mutuelles contenues dans cette boîte est la somme d'hamiltoniens  $\hat{h}$  à un corps. Pour un choix des conditions aux limites périodiques, les états propres  $\lambda$  de l'hamiltonien  $\hat{h}$  sont les ondes planes  $|\lambda\rangle = |k\rangle$  :

$$\langle r, k_i \rangle = \frac{e^{ik_i r}}{\sqrt{V}} \quad \text{avec} \quad k_i = \frac{2\pi n_i}{L} \quad \text{et} \quad i = x, y, z, \quad (1.25)$$

où les  $n_i$  sont des entiers positifs ou négatifs. L'énergie  $\varepsilon_k$  associée à  $|k\rangle$  est donnée par :

$$\varepsilon_k = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mV^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (1.26)$$

L'expression (1.26) montre que  $\varepsilon_0 = 0$ , et par ailleurs la condition de validité de la statistique de B-E  $\mu < \varepsilon_0$  implique que le potentiel chimique  $\mu$  est négatif ( $\mu < 0$ ).

Passons maintenant au calcul de  $N_T(T, \mu)$  (1.22) à la limite thermodynamique quand les dimensions de la boîte tendent vers l'infini, mais la densité du gaz  $n = N/V$  reste finie et uniforme. Dans cette limite, le spectre discret d'énergie devient continu et le passage du discret au continu se fait en remplaçant la somme  $\sum_{p \neq 0}$  par l'intégrale  $\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\vec{p}$ , avec :

$$p^2 = 2mk_B T x \quad \text{et} \quad x = \beta \varepsilon. \quad (1.27)$$

Par suite, le calcul du nombre de particules excitées  $N_T(T, \mu)$  (1.22) donne :

$$N_T(T, \mu) = \sum_{p \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)} - 1} \simeq \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(e^{\beta\mu}) = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z), \quad (1.28)$$

avec :

$$\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}, \quad (1.29)$$

où  $\lambda_T$  est la longueur d'onde de de Broglie thermique en fonction de la température  $T$ , et  $g_{3/2}(z)$  est la fonction de Bose :

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{z^{-1}e^x - 1} = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{3/2}}, \quad (1.30)$$

avec  $z$  : la fugacité ( $z = e^{\beta\mu}$ ). On note que le passage d'une somme discrète à une somme continue ne se justifie physiquement que si l'énergie thermique  $k_B T_c$  est très grande devant l'écart d'énergie  $\delta\varepsilon$  séparant l'état fondamental du premier niveau excité , c'est-à-dire :

$$k_B T_c \gg \delta\varepsilon \quad \text{avec} \quad \delta\varepsilon = \frac{h^2}{2mV^{2/3}}. \quad (1.31)$$

D'autre part, les résultats établis dans cette section ne sont valables que pour le cas d'une boîte tri-dimensionnelle. Le cas de dimensionalité inférieure à trois sera discuté dans la section (1.4).

La détermination de la température  $T_c$  en fonction de la densité de particules dans la boîte  $n = N/V$  peut se faire à partir de l'équation (1.24), ou en utilisant l'expression (1.28) pour  $\mu = \varepsilon_0 = 0$  qui correspond à :  $z = 1$ , on obtient :

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left( \frac{n}{g_{3/2}(1)} \right)^{2/3} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left( \frac{n}{2.612} \right)^{2/3}. \quad (1.32)$$

avec :  $g_{3/2}(1) = 2.612$ . L'expression (1.32) montre que la température critique  $T_c$  de condensation d'un gaz idéal de particules bosoniques confiné dans une boîte tri-dimensionnelle est complètement déterminée par la donnée de  $n$  et de la masse  $m$  de la particule. De plus, on note que :

- pour  $T > T_c$ , c'est à dire  $\mu < 0$ , l'expression (1.28) conduit à :

$$g_{3/2}(z) = \lambda_T^3 n; \quad (1.33)$$

- pour  $T = T_c$  correspondant à  $\mu = \varepsilon_0 = 0$ , on a ( $z = 1$ ) :

$$\lambda_{T_c}^3 n = 2.612; \quad (1.34)$$

- pour  $T < T_c$ , l'équation (1.21) peut être résolue par la détermination de  $N_T$  (1.28) pour  $\mu = 0$ , et en utilisant (1.32), on obtient :

$$N_T = \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad (1.35)$$

et par ailleurs, l'équation (1.21) prend la forme :

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \quad \text{ou} \quad \frac{N_0}{N} = \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \quad \text{pour : } T \leq T_c \quad (1.36)$$

où  $\frac{N_0}{N}$  est la fraction condensée de particules bosoniques dans l'état fondamental de la boîte tri-dimensionnelle et à la limite thermodynamique. Cette fraction est macroscopique lorsque  $T < T_c$ . La fraction restante est la fraction thermique ou fraction excitée. Les particules dans la fraction condensée occupent le même état quantique et constituent ce qu'on appelle le condensat de Bose ou condensat de B-E. L'état quantique unique qui décrit complètement ce condensat de Bose est appelé fonction d'onde quantique macroscopique.

La figure (1.2) représente les variations de  $N_0/N$  en fonction de  $T/T_c$ . On constate que  $N_0/N$  est négligeable pour  $T > T_c$ , croit de 0 à 1 quand  $T$  décroît de  $T_c$  à 0.

La comparaison de  $\delta\varepsilon$  au  $k_B T_c$  obtenu à partir de (1.32) donne, en négligeant les facteurs de l'ordre de quelques unités :

$$\frac{\delta\varepsilon}{k_B T_c} \sim \frac{1}{N^{2/3}} \ll 1 \quad . \quad (1.37)$$

L'expression (1.37) montre que la condensation de B-E apparaît pour des températures  $T_c$  considérablement plus élevées que la température  $\frac{\delta\varepsilon}{k_B}$ .

Par exemple, pour  $N \sim 10^6$ ,  $T_c \sim 10^4 \frac{\delta\varepsilon}{k_B}$  .

De même, la comparaison de  $N_0$  (1.23) à la population  $N_1$  du premier niveau excité quand  $N_0$  atteint une valeur macroscopique par exemple  $N_0 = N/2$ , donne :

$$\frac{N_1}{N_0} \sim \frac{1}{N^{1/3}} \ll 1 \quad . \quad (1.38)$$

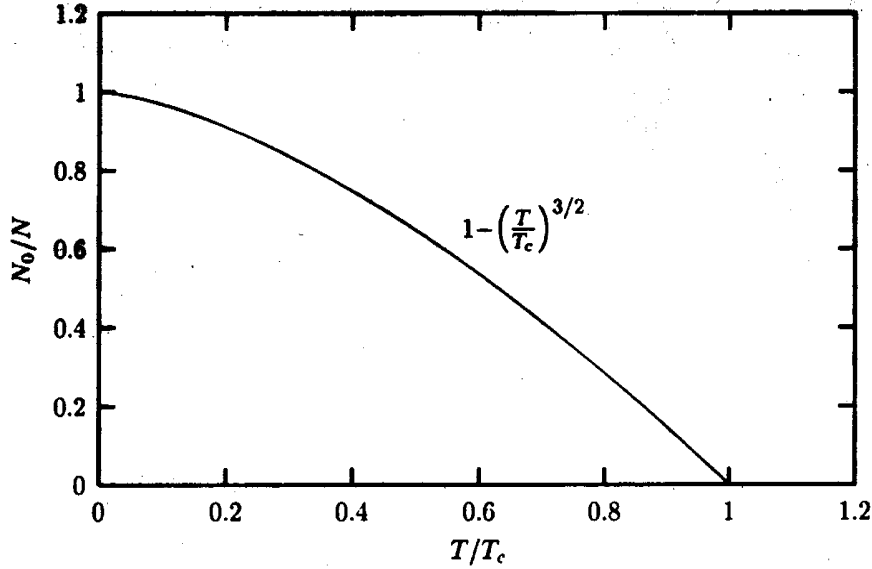


FIG. 1.2 – Courbe des variations de la fraction condensée  $N_0/N$ , en fonction de  $T/T_c$ , de bosons condensés dans l'état fondamental d'une boîte 3D.

En dessous du seuil de condensation, la population du niveau fondamental est donc considérablement plus élevée que celle du premier niveau excité. Même pour  $N$  aussi petit que  $10^6$ ,  $N_0 \sim 10 N_1$ .

### Critère ou seuil de condensation de B-E

le critère de condensation de B-E a été établi en comparant la distance interparticule à la longueur d'onde de de Broglie thermique  $\lambda_T$  (1.29). En effet, si on part d'une température très élevée, la longueur  $\lambda_T$  étant très petite devant la distance moyenne  $d$  entre particules où  $d = n^{-1/3}$ ,  $n$  étant la densité spatiale du gaz idéal de Bose contenu dans la boîte. Ainsi :

- pour  $T \gg T_c$ , on a  $n^{-1/3} \gg \lambda_T$ , ou :

$$n \lambda_T^3 \ll 1 . \quad (1.39)$$

et le gaz n'est que très peu dégénéré. La quantité adimensionnée  $n \lambda_T^3$  est appelée densité du gaz idéal de Bose dans l'espace des phases ;

- quand  $T$  décroît,  $\lambda_T$  croît, et pour  $T = T_c$ , on a :  $n^{-1/3} \sim \lambda_T$ , ou :

$$n \lambda_T^3 \sim 1 . \quad (1.40)$$

Pour  $T = T_c$  le gaz idéal de bosons devient quasi-dégénéré. La relation (1.40) est appelée critère ou seuil de condensation de B-E ou seuil de dégénérescence. Ce critère, qui est sensiblement équivalent à celui obtenu directement (1.34), indique qu'une condensation dans un gaz idéal de particules bosoniques ne peut se produire que si la densité dans l'espace des phases :  $n \lambda_T^3$  du gaz atteint la valeur critique :

$$n \lambda_T^3 \simeq 2.612 , \quad (1.41)$$

avec :

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} . \quad (1.42)$$

Plus précisément, la condensation de Bose-Einstein ne peut se développer dans un gaz idéal de bosons que lorsque la longueur d'onde de de Broglie devient de l'ordre de grandeur de la distance interparticule. Par conséquent, au voisinage du seuil de condensation (1.41), les fonctions d'ondes individuelles, ou états propres individuels, associées aux particules bosoniques commencent à se chevaucher. Lorsque :  $n \lambda_T^3 > 2.612$ , les états propres individuels s'interfèrent et forment un seul état quantique cohérent appelé onde quantique macroscopique condensée. Celle-ci représente l'onde matérielle associée au condensat de bosons formé à  $T < T_c$ .

## Autres conditions aux limites

On pourrait imposer à la fonction d'onde de s'annuler sur les parois. Ceci serait d'ailleurs plus réaliste pour décrire des particules enfermées dans une boîte aux parois réfléchissantes. De telles conditions aux limites conduisent, pour  $\varepsilon$  suffisamment grande, au même résultat représenté par l'équation (1.30), et montrent que l'énergie  $\varepsilon_0$  n'est plus nulle et qu'elle est de l'ordre de  $\frac{\hbar^2}{m L^2}$  et du même ordre que l'écart  $\delta\varepsilon$  séparant l'état fondamental du premier niveau excité. Ces conditions, appelées également conditions aux limites de Dirichlet, ont montré que la densité spatiale n'est pas uniforme à la limite thermodynamique quand  $V \rightarrow \infty$ . La sensibilité du modèle de gaz idéal de Bose aux conditions aux limites révèle que sa compressibilité est infinie quand ce gaz est dans la phase de la condensation de B-E [64].

En résumé, la condensation de B-E ne se développe dans un gaz idéal de bosons confiné dans une boîte 3D qu'à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow$

$\infty$  et  $V \rightarrow \infty$ ), et au dessus du seuil de la condensation de B-E (1.41). Comme la densité spatiale  $n$  est uniforme dans une grande boîte 3D, la densité dans l'espace des phases  $n\lambda_T^3$  ne dépend que des variations de  $T$ , c'est-à-dire de l'impulsion  $p$  ( $p \sim T^{1/2} \sim v$ ), et ne peut par ailleurs être représentée que dans l'espace des phases. De plus, le gaz de bosons confiné dans une grande boîte 3D constitue un système homogène infini ou système non piégé. Ceci résulte du fait que le rôle principal effectivement joué par la boîte 3D était la définition des conditions aux limites, et que la densité spatiale  $n$  des bosons est uniforme à la limite thermodynamique dans laquelle la condensation de B-E se développe.

### 1.3.2 Condensation de B-E dans un piège harmonique

Dans cette section, nous exposerons de manière succincte les étapes principales conduisant au développement de la condensation de B-E dans un gaz idéal de Bose confiné dans un potentiel harmonique tri-dimensionnel 3D [64, 65]. Notons au préalable que le critère :  $k_B T_c \gg \delta\varepsilon$  (1.31) demeure valable dans le cas de piège harmonique et permet de calculer  $N_T$  à l'approximation continue.

#### a) Densité spatiale

Nous avons trouvé qu'à la limite thermodynamique, la densité spatiale  $n = N/V$  des bosons dans une boîte 3D est uniforme et la condensation de B-E ne se produit que dans l'espace des phases (espace des impulsion). Un tel résultat demeure-t-il valable pour un piège fini? Pour ce faire, considérons  $N$  le nombre de bosons confinés dans un piège de forme quelconque  $U(\vec{r})$ . A l'approximation semi-classique,  $N$  s'écrit :

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon) = \int n(\vec{r}) d\vec{r} . \quad (1.43)$$

où  $\rho(\varepsilon)$  est la densité d'états continue à la limite semi-classique,  $f(\varepsilon)$  le nombre moyen d'occupation des états d'énergie  $\varepsilon$  (statistique de B-E), et  $n(\vec{r})$  la densité spatiale des bosons dans le piège  $U(\vec{r})$ . Un calcul simple montre que  $n(\vec{r})$  est reliée au  $U(\vec{r})$  par :

$$n(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z) [z e^{-\beta U(\vec{r})}] . \quad (1.44)$$

L'expression (1.44) montre que  $n(\vec{r})$  dépend de la température  $T$  et de la position  $r$ . Cependant, à la limite  $T \gg T_c$ , on a  $z \ll 1$  et  $g_{3/2}(z) \simeq z$  de sorte que :

$$n(\vec{r}) \simeq \frac{1}{\lambda_T^3} z e^{-\beta U(\vec{r})} \quad \text{pour } T \gg T_c . \quad (1.45)$$

Si l'on suppose que le minimum de  $U(\vec{r})$  est en  $\vec{r} = \vec{0}$  et si l'on prend ce minimum comme zéro d'énergie, on a  $U(\vec{0}) = 0$  et donc :

$$n(\vec{0}) \simeq \frac{z}{\lambda_T^3} , \quad (1.46)$$

de sorte qu'on peut récrire (1.44) sous la forme :

$$n(\vec{r}) \simeq n(\vec{0}) e^{-\beta U(\vec{r})} \quad \text{pour } T \gg T_c . \quad (1.47)$$

Au seuil de condensation  $T = T_c$ , on a alors  $z = 1$ , et (1.44) prend la forme, pour  $r = 0$  :

$$n(0) \lambda_T^3 = g_{3/2}(1) = 2.612 \quad \text{pour } T = T_c . \quad (1.48)$$

La relation (1.48), équivalente au seuil de condensation de B-E dans une grande boîte 3D (1.41), montre que dans un piège fini la densité spatiale  $n_0$  au fond de ce piège vérifie le critère de la condensation de B-E. Ce résultat est valable quel que soit  $U(\vec{r})$ . On en déduit que l'intérêt des pièges est de concentrer les particules bosoniques au fond du piège et d'atteindre rapidement le seuil de condensation que dans une grande boîte où la densité est uniforme.

### b) Condensation de B-E dans un piège harmonique

On considère un gaz idéal de bosons piégé dans un potentiel harmonique 3D et anisotrope :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) . \quad (1.49)$$

A l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , les bosons sont répartis sur des niveaux individuels d'énergie de  $\hat{h}$  caractérisés par les trois nombres quantiques  $(l_x, l_y, l_z) \equiv l$  caractérisant l'état de vibration de l'oscillateur selon les trois axes. L'énergie  $\varepsilon_l$  associée à  $\hat{h}$  est :

$$\varepsilon_l = \hat{h} [(\omega_1 l_x + 1/2) + (\omega_2 l_y + 1/2) + (\omega_3 l_z + 1/2)] . \quad (1.50)$$



où  $l_x, l_y$  et  $l_z$  sont des entiers positifs. Pour simplifier, on considère le cas d'un potentiel harmonique isotrope 3D :  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ . L'énergie  $\varepsilon_l$  s'écrit alors :

$$\varepsilon_l = \hbar\omega(l_x + l_y + l_z + 3/2) = l\hbar\omega + \varepsilon_0, \quad (1.51)$$

avec :

$$l \equiv (l_x + l_y + l_z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega, \quad (1.52)$$

où  $\varepsilon_0$  est l'énergie de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique isotrope. Si l'on prend pour zéro d'énergie l'énergie de l'état fondamental  $\varepsilon_0$ , les valeurs propres  $\varepsilon_l$  de l'hamiltonien  $\hat{h}$  à une particule valent :  $\varepsilon_l = l\hbar\omega$  avec  $l \neq 0$ . Le nombre moyen total  $n_l$  de particules occupant un état individuel à une particule associé au niveau d'énergie  $\varepsilon_l$  (avec  $l \neq 0$ ) du piège harmonique, est donné par la statistique de Bose-Einstein (1.18), en prenant  $\mu = \varepsilon_0$  :

$$n_l = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta l\hbar\omega} - 1} = \left[ \frac{1}{z} e^{l\xi} - 1 \right]^{-1}, \quad (1.53)$$

avec :

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1, \quad (1.54)$$

$n_l$  est positif si  $0 < z \leq 1$ . Le nombre moyen total  $N$  de bosons piégés dans le potentiel harmonique est :  $N = \sum n_l$ , et s'écrit, d'après (1.21) :

$$N = N_0 + N_T = \frac{z}{1-z} + N_T, \quad (1.55)$$

avec :

$$N_T = \sum_{l \neq 0} n_l = \sum_{l \neq 0} \left[ \frac{1}{z} e^{l\xi} - 1 \right]^{-1} < \sum_{l \neq 0} \left[ e^{l\xi} - 1 \right]^{-1} \equiv N'_{max}, \quad (1.56)$$

où  $N_0$  est le nombre total de particules occupant l'état fondamental non excité d'énergie  $\varepsilon_0$ ,  $N_T$  le nombre total de particules occupant tous les états excités avec  $z < 1$ , et  $N'_{max}$  le nombre total maximal (ou nombre de saturation) de particules occupant tous les états excités jusqu'à  $z = 1$ .

Le calcul de  $N'_{max}$  se fait à la limite semi-classique (approximation semi-classique), avec  $\xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$ . Cependant, un calcul plus précis [65, 66] permet d'écrire  $N'_{max}$  sous la forme :

$$N'_{max} = \xi^{-3} g_3(z) + \frac{3}{2} \xi^{-2} g_2(z) + \dots \quad (1.57)$$

avec :

$$N_T = \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(z) , \quad (1.58)$$

et

$$g_3(z) = \zeta(3) \quad , \quad g_2(z) = \zeta(2) \quad , \quad (1.59)$$

où  $\zeta(3)$  et  $\zeta(2)$  sont des fonctions de Riemann, et  $g_3(z)$  et  $g_2(z)$  fonctions de Bose.

Le second terme de (1.57) est plus petit que le premier par un facteur  $\frac{\hbar \omega}{k_B T} \ll 1$ . Si l'on néglige le dernier terme de (1.57), on obtient une valeur de la température critique  $T_c^0$  définie par :

$$k_B T_c^0 = \hbar \omega \left( \frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3} = 0.94 \hbar \omega N^{1/3} , \quad (1.60)$$

par conséquent, pour  $T \leq T_c^0$ , l'équation (1.21) prend la forme :

$$N \simeq N_0 + \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1) . \quad (1.61)$$

En éliminant  $g_3(1)$  des expressions (1.60) et (1.61), on obtient :

$$\frac{N_0}{N} \simeq 1 - \left( \frac{T}{T_c^0} \right)^3 \quad \text{pour} \quad T \leq T_c . \quad (1.62)$$

$\frac{N_0}{N}$  représente la fraction macroscopique de bosons condensés à l'état fondamental du piège harmonique isotrope 3D. L'expression (1.62) est équivalente à celle obtenue dans le cas de la boîte 3D (1.36).

Notons que la prise en compte du dernier terme de (1.57) introduit une correction  $\Delta T_c$  sur  $T_c^0$  :  $\Delta T_c = T_c - T_c^0$ . En effet, un calcul perturbatif de  $\Delta T_c$  à partir de (1.57) et (1.60) donne l'expression de  $\frac{T_c}{T_c^0}$  en fonction de  $N$  :

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq 1 - 0.727 \frac{1}{N^{1/3}} . \quad (1.63)$$

L'expression (1.63) indique que : le fait que  $N$  soit fini entraîne une diminution de la température critique  $T_c$ . Par exemple, pour  $N = 1000$ , l'abaissement relatif  $\frac{T_c^0 - T_c}{T_c^0}$  de la température critique est de l'ordre 7% [16]. Cependant, si  $N \rightarrow \infty$ , limite thermodynamique, alors  $T_c = T_c^0$  et l'équation (1.62) prend la forme :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \quad \text{pour} \quad T \leq T_c . \quad (1.64)$$

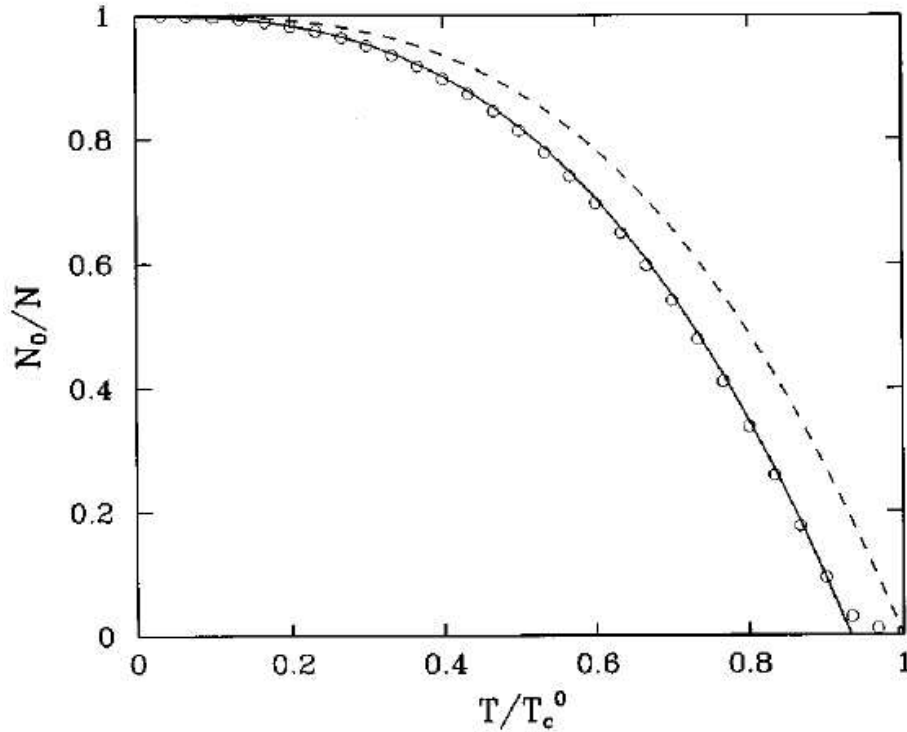


FIG. 1.3 – Courbes représentant les variations de la fraction condensée  $N_0/N$ , en fonction de  $\frac{T}{T_c^0}$ , pour un gaz idéal d’atomes bosoniques confiné dans un piège harmonique 3D et isotrope. Les courbes en petits cercles et en ligne continue correspondent au cas fini :  $N = 1000$  atomes ( la courbe en cercles : calcul exact de  $N_{max}'$  (1.56). La courbe en ligne continue : calcul tenant compte du second terme de (1.57)). La courbe en ligne interrompue correspond à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$  (1.64)).

La figure (1.3) représente les variations de  $\frac{N_0}{N}$  en fonction de  $\frac{T}{T_c^0}$  pour un piège harmonique 3D et isotrope.

On en déduit que le dernier terme de (1.57) tient compte des situations dans lesquelles le  $N$  est fini. De plus, l’équation (1.60) montre que ( $g_3(1) = 1.2$ ) :

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T_c} \simeq \frac{1}{N^{1/3}} \ll 1 \text{ ou } k_B T_c \gg \hbar\omega . \quad (1.65)$$

La relation (1.65) indique que la condensation de B-E n’est pas un effet thermique trivial qui apparaîtrait quand l’énergie thermique  $k_B T_c$  devient

de l'ordre de l'écart  $\hbar\omega$  entre le niveau fondamental et le niveau excité, mais c'est une conséquence de la statistique de Bose-Einstein.

En résumé, à des températures  $T < T_c$  les bosons formant un gaz parfait confiné dans un piège harmonique 3D et isotrope, se condensent dans le même et unique état quantique fondamental de ce piège, et donnent naissance à un régime de dégénérescence quantique (partie gauche de la figure 1.4). En comparaison avec un gaz parfait de fermions obéissant à la statistique de Fermi-Dirac, on remarque que chaque état quantique est occupé par un seul fermion (d'après le principe d'exclusion de Pauli), et un régime de dégénérescence quantique (partie droite de la figure 1.4) se développe quand  $T < T_F$  ( $T_F$  est la température de Fermi définie par :  $k_B T_F = E_{Fermi} = \hbar\omega (N)^{1/3}$ ).

Toutefois, les résultats obtenus pour un piège harmonique isotrope 3D se généralisent au cas d'un piège harmonique anisotrope en remplaçant  $\omega$  par :  $\tilde{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$  ( $\tilde{\omega}$  est la moyenne géométrique des  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , et  $\omega_3$ ) [68].

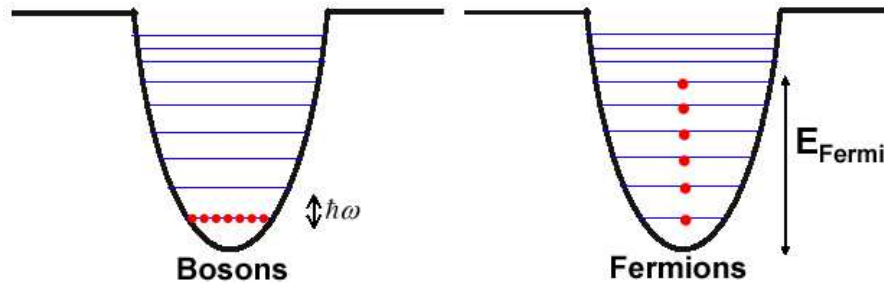


FIG. 1.4 – (a) Partie gauche : pour  $T < T_c$ , les bosons se condensent dans l'état fondamental. Dégénérescence quantique. (b) Partie droite : chaque état est occupé par un seul fermion. Régime de dégénérescence quantique quand  $T < T_F$ .

### c) Condensation spatiale

On a trouvé que la densité spatiale des bosons dans un piège n'est pas uniforme dans l'espace réel des positions (1.44). Ce résultat permet de représenter, dans l'espace réel, la condensation des bosons confinés dans un

piège harmonique.

Les particules condensées dans l'état fondamental d'un piège harmonique anisotrope ont toutes la même fonction d'onde quantique macroscopique  $\phi(\vec{r})$ . L'extension spatiale de  $\phi(\vec{r})$  suivant l'un des axes, par exemple l'axe des  $x$ , est de l'ordre  $\Delta x_0$ . Dans le cas d'un piège harmonique isotrope, le calcul de  $\Delta x_0$  peut se faire à partir de :  $\Delta x_0 \Delta p_0 \simeq \hbar$  avec :  $\frac{1}{2m} (\Delta p_0)^2 = \frac{m}{2} \omega^2 (\Delta x_0)^2$ . On obtient :

$$\Delta x_0 \simeq \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \quad \text{pour } T < T_c . \quad (1.66)$$

On remarque que  $\Delta x_0$  est indépendante de  $N$  et égale à  $\sigma_x$  : largeur moyenne de la forme d'onde dans la direction  $x$ . De même, on calcule  $\Delta y_0$  et  $\Delta z_0$ .

A :  $T > T_c$ , les particules non condensées forment un nuage thermique dont l'extension  $\Delta x_T$ , déduite de l'équation  $\frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x_T)^2 = \frac{1}{2} k_B T$ , s'écrit :

$$\Delta x_T \simeq \left( \frac{k_B T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega} , \quad (1.67)$$

et au voisinage de  $T = T_c$ , on obtient :

$$\frac{\Delta x_0}{\Delta x_T} \simeq \left( \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^{1/2} \sim \left( \frac{\hbar \omega}{k_B T_c} \right)^{1/2} , \quad (1.68)$$

d'où, en utilisant l'équation (1.65) :

$$\frac{\Delta x_0}{\Delta x_T} \simeq N^{-1/6} . \quad (1.69)$$

La relation (1.69) montre que l'extension  $\Delta x_0$ , ainsi que  $\Delta y_0$  et  $\Delta z_0$ , dépend de  $N$  pour  $\Delta x_T$  fixée. En effet, à la limite  $N \rightarrow \infty$ , le pic des particules condensées est beaucoup plus étroit que le fond thermique  $\Delta x_T$  de particules non condensées, et la condensation de B-E apparaît sous forme d'une condensation spatiale très nette. Par exemple, pour  $N = 10^6$ ,  $\Delta x_0$  est environs 10 fois plus petit que  $\Delta x_T$ .

#### d) Limite thermodynamique

La limite thermodynamique est obtenue en faisant tendre  $N$  vers l'infini. Il y a condensation de B-E si  $T_c$  ne tend pas vers zéro lors d'une telle limite. Dans le cas des bosons confinés dans un piège harmonique isotrope,

l'équation :  $k_B T_c \sim \hbar \omega N^{1/3}$  (1.65) montre qu'il faut également tendre  $\omega$  vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ , en gardant  $\omega N^{1/3}$  ou  $N \omega^3$  constant. Cette condition se réalise en partant du fait que la densité moyenne du nuage thermique  $\frac{N}{(\Delta x_T)^3}$  doit être finie à  $T = T_c$  quand  $N \rightarrow \infty$ . En effet, la densité du nuage thermique peut être calculée à partir des équations (1.66) et (1.65). On obtient :

$$\frac{N}{(\Delta x_T)^3} \simeq \left( \frac{m}{k_B T_c} \right)^{3/2} N \omega^3 . \quad (1.70)$$

L'équation (1.70) indique donc que la densité du nuage thermique reste finie et constante si  $N \omega^3 = cte$  pour  $N \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$ , avec :  $T_c \neq 0$ .

De même, dans le cas de la boîte, la densité spatiale reste finie et uniforme quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ . En effet, à  $T = T_c$ , l'équations (1.34) montre que :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2.612}{\lambda_{T_c}^3} = cte \quad \text{quand } N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty . \quad (1.71)$$

## 1.4 Condensation de B-E de gaz idéal de Bose de dimension inférieure à trois

Nous allons examiner dans ce paragraphe les possibilités de développement de la condensation de Bose-Einstein dans un gaz idéal de bosons piégé dans des confinements bi et uni-dimensionnels. Afin de ne pas répéter les étapes de calcul qui sont très analogues à ceux du cas tri-dimensionnel, on se contente de présenter directement les résultats de calcul à 2 et 1 dimensions, puis commenter leur validité physique. Nous considérons des conditions aux limites périodiques dans le cas des boîtes 2D et 1D. Nous commençons par traiter d'abord le cas des pièges harmoniques à 2 dimensions, puis ensuite à 1 dimension.

### 1.4.1 Pièges harmoniques 2D et 1D

#### Piège harmonique 2D

Le nombre total  $N_T$  de bosons occupant tous les états individuels excités à  $T > T_c$  est de la forme :

$$N_T = \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 g_2(z) . \quad (1.72)$$

A  $T = T_c$  ( $z = 1$ ), on a :

$$N = \left( \frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \right)^2 g_2(1) , \text{ et } k_B T_c = \hbar \omega \left( \frac{N}{g_2} \right)^{1/2} \text{ avec } : g_2(1) = 1.465 \quad (1.73)$$

et à  $T \leq T_c$ , on a :

$$N = N_0 + \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 g_2(1) \quad \text{ou} \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (1.74)$$

On en déduit que les résultats obtenus dans le cas de piège harmonique à deux dimensions sont très analogues à ceux obtenus dans le cas du piège harmonique isotrope 3D. La limite thermodynamique correspond ici à  $N \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$  avec  $N\omega^2 = cte$  pour laquelle la densité au centre du nuage thermique :  $\frac{N}{(\Delta x_T)^2} \propto N\omega^2$  est constante.

Un piège harmonique isotrope à  $2D$  peut se réaliser en partant d'un piège harmonique 3D très anisotrope avec :

$$\omega_3 \gg \omega_1 = \omega_2 , \quad (1.75)$$

et pour que le degré de liberté correspondant à  $\omega_3$  soit gelé à une température  $T$  suffisamment basse, il faut que  $T$  vérifie la condition :

$$k_B T \ll \hbar \omega_3 , \quad (1.76)$$

La condition (1.76) s'applique aussi bien sur la température critique  $T_c$  correspondant à la condensation 2D.

### Piège harmonique à 1 dimension

Les bosons sans interactions mutuelles sont confinés dans un piège harmonique à une dimension. Le calcul du nombre total  $N_e$  de bosons dans les états individuels excités à  $T > T_c$  et  $T = T_c$ , donne :

$$N_e = -\frac{k_B T}{\hbar \omega} \ln \left[ 1 - z e^{-\frac{\hbar \omega}{2k_B T}} \right] \quad \text{pour } T > T_c , \quad (1.77)$$

et :

$$N_T = -\frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{2k_B T_c}} \right] \quad \text{pour } T = T_c \quad (z = 1) . \quad (1.78)$$

Comme  $\hbar \omega \ll k_B T_c$ , un développement de (1.78) conduit à la relation :

$$N_T = \frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \ln \left( \frac{2k_B T_c}{\hbar \omega} \right) . \quad (1.79)$$

Pour  $T < T_c$ , la relation (1.77) prend la la forme (avec  $z \simeq 1$ ) :

$$N_e = \frac{k_B T}{\hbar \omega} \ln \left( \frac{2k_B T}{\hbar \omega} \right) , \quad (1.80)$$

et à partir de l'équation  $N = N_0 + N_e$ , on obtient :

$$N = N_0 + \frac{k_B T}{\hbar \omega} \ln \left( \frac{2k_B T}{\hbar \omega} \right) , \quad (1.81)$$

ou :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{T}{T_c} \frac{\ln(2k_B T / \hbar \omega)}{\ln(2k_B T_c / \hbar \omega)} . \quad (1.82)$$



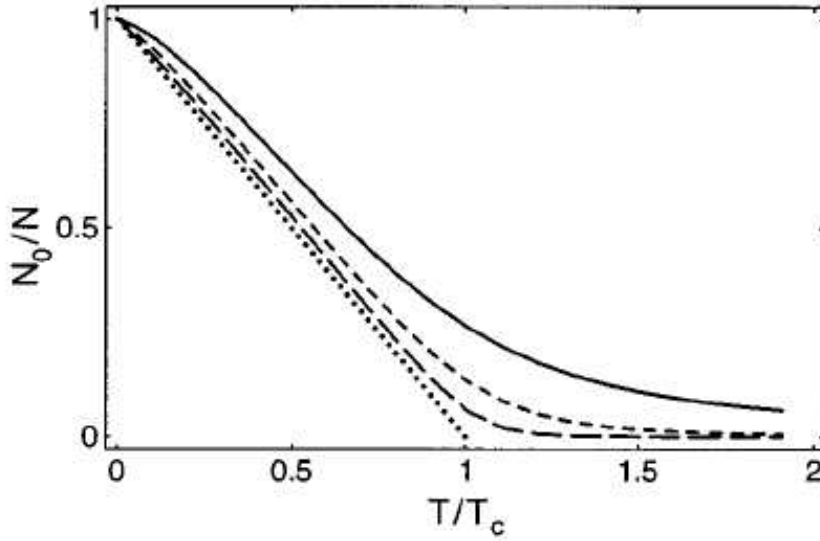


FIG. 1.5 – Variations de la fraction condensée  $N_0/N$  d'un gaz idéal d'atomes bosoniques confiné dans un piège harmonique unidimensionnel, en fonction de  $T/T_c$ . Les courbes sont tracées pour :  $N = 10^2$  (ligne continue),  $10^4$ ,  $10^8$  (lignes interrompues), et  $N \rightarrow \infty$  (trait en pointillés).

La figure (1.5) donne la courbe  $\frac{N_0}{N} = f\left(\frac{T}{T_c}\right)$  pour diverses valeurs de  $N$  :  $N = 10^2, 10^4, 10^8, \infty$  [67]. On voit que l'établissement d'une population macroscopique  $N_0$  au voisinage de  $T = T_c$  est d'autant plus brutale que  $N$  est grand. Les variations de  $N_0/N$  avec  $T/T_c$  sont alors quasi-linéaires.

### Limite thermodynamique dans le cas de piège harmonique à 1 dimension

Comme  $k_B T_c \gg \hbar\omega$  et que :  $\ln u \ll u$  si  $u \gg 1$ , on peut approximer la relation (1.79) par  $N = \left(\frac{k_B T_c}{\hbar\omega}\right) \ln 2N$ , ce qui donne :

$$\frac{k_B T_c}{\hbar\omega} \simeq \frac{N}{\ln N} \longrightarrow k_B T_c \simeq \frac{N \hbar\omega}{\ln N}. \quad (1.83)$$

Par ailleurs, à la limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$  avec  $N\omega = cte$ , la présence de  $\ln N$  au dénominateur de (1.83) entraîne que  $T_c \rightarrow 0$ , c'est à dire que la condensation de B-E ne se produit pas dans un piège harmonique 1D pour

un nombre infini de particules. Nous montrerons dans le chapitre (II) que les expériences récentes ont été réalisées avec  $N$  fini.

### 1.4.2 Gaz idéal de bosons confiné dans une boîte bi et uni-dimensionele

#### Boîte 2D

Les bosons sans interactions mutuelles sont confinés dans une boîte 2D : un carré de côté  $L$ . Le calcul du nombre total  $N$  de particules occupant tous les états individuels excités donne :

$$N = 2 \left[ \frac{L}{\lambda_T(T_c)} \right]^2 \ln \left( \frac{L}{\lambda_T(T_c)} \right). \quad (1.84)$$

Comme  $L \gg \lambda_T$ , on peut remplacer  $\ln \left( \frac{L}{\lambda_T(T_c)} \right)$  par  $\frac{1}{2} \ln N$  ce qui montre que la densité spatiale surfacique :  $n_s \simeq \left[ \frac{1}{\lambda_T(T_c)} \right]^2$ , obtenue à partir de :  $n_s \lambda_T^2 \simeq 1$ , est proportionnelle à  $\frac{N}{L^2 \ln N}$  et tend vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $L \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{L^2} = cte$ . De même, en partant du fait que  $k_B T_c \simeq n_s$  (1.32), on en déduit que  $T_c \rightarrow 0$  quant  $N \rightarrow \infty$  et  $L \rightarrow \infty$ . Il n'y a donc pas de condensation de B-E dans une boîte 2D à la limite thermodynamique.

#### Boîte 1D

Pour un confinement fort selon les axes  $x$  et  $y$ , les dimensions transverses  $L_x$  et  $L_y$  d'une boîte 3D deviennent très petites devant  $L_z$  et la boîte prend une forme allongée quasi-unidimensionnelle. Plus précisément, on suppose que l'énergie nécessaire pour exciter le mouvement d'une particule selon ces directions :  $\frac{2 \hbar^2 \pi^2}{m L_i^2}$  (avec  $i = x, y$ ) est bien supérieure à l'énergie thermique  $k_B T$ , c'est à dire :

$$\frac{2 \hbar^2 \pi^2}{m L_i^2} \gg k_B T. \quad (1.85)$$

Le calcul de la densité linéique  $\Lambda'$  de saturation des états individuels excités, associée à ce confinement longitudinal, donne :

$$\Lambda' = \frac{N'_{max}}{L_z} \simeq \frac{4}{\pi} \frac{L_z}{\lambda_T^2}. \quad (1.86)$$

La relation (1.86) montre que  $\Lambda'$  n'a pas de limite finie quand on prend la limite thermodynamique  $L_z \rightarrow \infty$ . En d'autres termes, pour une densité linéique  $\Lambda'$  et une température fixée, il y a une taille  $L_z$  au dessus de laquelle les particules bosoniques se répartissent essentiellement sur les niveaux excités, la fraction de particules dans le niveau fondamental étant négligeable. Dans ce cas quasi-unidimensionnel, la saturation des niveaux excités n'a pas survécu à la limite thermodynamique.

En résumé, à la limite thermodynamique, il n'y a pas de condensation de B-E dans une boîte ni à  $2D$  ni à  $1D$ .

## 1.5 Conclusion, Réalité de la condensation de B-E

L'ensemble des résultats analytiques obtenus dans les sections précédentes de ce premier chapitre montre que le développement de la condensation de B-E dans un gaz idéal de bosons est une conséquence directe et spectaculaire des effets purement statistiques et quantiques du comportement des bosons. Ces effets, qui ne se manifestent qu'à des températures suffisamment basses, mènent le gaz bosonique à un état quantique quasiment fortement dégénéré dans lequel une fraction macroscopique des bosons s'accumulent dans le même et unique état quantique fondamental individuel à une particule, de plus basse énergie et d'impulsion nulle. Les bosons condensés dans cet état constituent ce qu'on appelle un condensat de B-E. Toutefois, ces résultats décrivent, d'une manière précise, les conditions physiques de base à vérifier quantitativement par les grandeurs thermodynamiques caractérisant l'état du gaz considéré ( $T \leq T_c$  et  $n \lambda_T^3 = 2.612$ ), pour que la condensation de B-E pourrait se développer. Du point de vue qualitatif, ces conditions permettent, d'une part, de préciser la géométrie, la taille, et les dimensions spatiales des confinements contenant le gaz bosonique, et d'autre part, de grouper les condensats de B-E en deux groupes :

i) condensats homogènes non piégés ou condensats infinis caractérisés par une densité spatiale finie et uniforme ( cas des gaz confinés dans une boîte à la limite thermodynamique ), et ii) condensats inhomogènes et piégés ou condensats finis caractérisés par une densité spatiale non uniforme ( cas des gaz confinés dans des pièges harmoniques ).

Cependant, il est bien légitime qu'intéressant de s'interroger sur la réalité physique de la condensation de B-E, et plus précisément, sur l'existence d'un gaz modèle de bosons dans lequel les conditions théoriques de prédiction de la condensation de B-E peuvent être expérimentalement vérifiées, et amènent, par ailleurs, à une éventuelle réalisation des condensats de B-E. A fin d'éclaircir cette problématique, il est très utile d'évaluer l'ordre de grandeur de la température de condensation  $T_c$  et de celle de la densité spatiale  $n$ , théoriquement prévues par Einstein. Pour ce faire, on se place dans le cas de la grande boîte 3D. Ainsi, en remplaçant dans l'expression (1.32), les constantes  $\hbar$  et  $k_B$  par leurs valeurs numériques (en S.I), on obtient  $T_c$  (en °k) en fonction de  $n$  (en atomes/ $m^3$ ) et  $m$  (en kg) :

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left( \frac{n}{2.612} \right)^{2/3} \simeq 6.68 \cdot 10^{-18} \left( \frac{n^{2/3}}{m_a} \right). \quad (1.87)$$

où  $m_a$  est la masse atomique, sans dimensions, de la particule bosonique considérée. L'expression (1.88) montre que  $T_c$  est très basse et prend des valeurs de l'ordre de quelques degrés kelvins même pour des densités élevées. Par exemple :  $T_c \simeq 2$  °K pour  $n = 10^{27}$  atomes/ $m^3$  et  $m_a = 4$ . Or, à des températures très basses, de l'ordre de quelques degrés kelvins, tous les gaz de la nature se solidifient à l'exception de l'hélium-4, gaz atomique à la température ambiante, qui reste liquide à  $T \leq 2.2$  °K. L'hélium-4 liquide a cependant une densité élevée de l'ordre de  $10^{27}$  atomes/ $m^3$ , et ses atomes bosoniques sont en interaction. on peut dire, d'après les estimations précédentes, qu'il n'existe pas un gaz idéal modèle de particules bosoniques dans lequel peuvent se vérifient expérimentalement les conditions de prédiction de la condensation de B-E. « C'est une belle théorie, mais correspond-elle à la réalité? ». C'est par ces mots qu'Einstein décrit ses travaux sur la prédiction de la condensation de bosons, dans une lettre à son ami Paul Ehrenfest, avant de se détourner définitivement de ce champ de recherche [3].

---

Depuis 1925 , la prédiction d'Einstein est restée controversée et mystérieuse jusqu'en 1938, date de la découverte de la superfluidité de l'hélium-4 liquide par Kapitza [4], Allen et Misener [5]. C'est London [6] qui remarqua alors que la température de la transition superfluide de l'hélium-4,  $T_s = 2.2$  °K , est remarquablement proche de la température de la condensation de B-E d'un gaz parfait de même densité que l'hélium-4 liquide,  $T_c = 3.2$  °K, et il émit l'idée que les deux phénomènes étaient reliés.

L'idée de London est le point de départ de toutes les théories modernes sur l'hélium liquide. Cependant, la connexion entre condensation de B-E et superfluidité n'est pas évidente. La superfluidité (absence de dissipation) est reliée aux interactions entre particules, alors qu'Einstein considérait un gaz parfait. Plus quantitativement, les expériences de diffusion de neutrons aboutissent (moyonnant une interprétation fine des données) à une fraction condensée dans l'hélium-4 liquide ne dépassant pas 10 % à basse pression. Par comparaison, on prédit que toutes les particules sont condensées pour un gaz parfait de bosons de température nulle. De plus, on note que le critère de condensation de B-E (1.41) montre que toute diminution de la densité spatiale  $n$  du système bosonique en jeu implique un abaissement de la température  $T$  .

En conclusion, il semble que la réalisation concrète de la condensation, et par ailleurs l'obtention d'un condensat de B-E, ne pourrait être envisageable que dans des gaz dilués de bosons atomiques ultrafroids ( $T \simeq 0$ ), en faible interaction et de faible densité en comparaison avec celle de l'hélium4-liquide ( $n \ll 10^{27}$  atomes/ $m^3$ ).



# Chapitre 2

## Réalisation des Condensats de B-E 3D.

### 2.1 Présentation

Au début de ce chapitre, nous signalons que depuis la découverte partielle (10%) de la condensation de B-E dans l'hélium-4 liquide, la recherche des systèmes plus proches du modèle initial d'Einstein n'est devenue très active qu'au cours des deux dernières décennies du vingtième siècle . En effet, dans ces années le développement des techniques sophistiquées de piégeage et de refroidissement d'atomes par des faisceaux lumineux et des champs magnétiques statiques, a permis de faire sauter les verrous qui avaient auparavant bloqué cette recherche. En 1995, les efforts considérablement accomplis dans ce domaine de recherche ont été couronnés par un grand et remarquable succès, à savoir : la réalisation expérimentale de la condensation de B-E dans des vapeurs diluées et piégées d'atomes alcalins ultrafroids de :  $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$  et  $^7\text{Li}$ . Cette découverte a été réalisée, pour la première fois et presque simultanément, par trois groupes américains : i) le groupe de E. Cornell et C. Wieman (JILA, Boulder) pour  $^{87}\text{Rb}$  [17]; ii) le groupe de W. Ketterle (MIT, Boston) pour  $^{23}\text{Na}$  [18]; et iii) le groupe de C. C. Bradley (Houston) pour  $^7\text{Li}$  [19]. Depuis cette date, la condensation de B-E a été reproduite par une trentaine de laboratoires dans le monde, d'abord avec les mêmes espèces atomiques , puis avec des atomes ayant des propriétés très différentes, comme l'hydrogène , en 1998 (MIT, Boston) [20] et

l'hélium-4 dans l'état métastable  $2^3 S_1$ , en 2001 (ENS-Paris, et laboratoire Charle-Fabry-Orsay) [21, 22]. Toutefois, après la réalisation expérimentale des condensats de B-E, ceux-ci sont redéfinis comme étant des gaz dilués d'atomes bosoniques ultrafroids ( $T$  est de l'ordre de quelques dizaines de nanokelvins), et en faibles interactions. A ce jour, la liste des condensats de B-E, établie par ordre croissant de masse atomique, contient : l'hydrogène [20], le lithium [19], l'hélium métastable [21, 22], le sodium [18], le potassium [23], le rubidium [17], et le césium [24]. De plus, les excitons dans les semi-conducteurs fournissent un autre exemple de systèmes de bosons dilués pour lesquels des effets de statistique quantique spectaculaires peuvent se manifester [25, 26, 27].

On note que la découverte des condensats de B-E et l'étude expérimentale et théorique de leurs propriétés quantiques macroscopiques ont permis d'ouvrir et d'élargir plusieurs branches de recherche de la physique moderne, notamment en physique des fluides quantiques bosonique et fermionique : solitons, vortex, superfluidité, supraconductivité, laser à atomes, mers de Fermi, ...

Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des techniques expérimentales récemment utilisées dans la préparation d'un gaz dilué et ultrafroid d'atomes alcalins dans lequel les premiers condensats de B-E ont été réalisés. Dans la section (2-2) de ce chapitre, nous décrivons les techniques de piégeage magnéto-optique (PMO) permettant d'obtenir un gaz dilué d'atomes bosoniques froids (piège de Ioffé-Pritchard). Nous exposons dans la section (2-3) la méthode de refroidissement évaporatif qui amène un gaz piégé d'atteindre le seuil de condensation avec des densités très faibles, et des températures effectives de l'ordre du microkelvin, voire du nanokelvin. La section (2-4) est consacrée à l'observation directe et spectaculaire de la condensation et des premiers condensats de B-E, dans des vapeurs piégées d'atomes alcalins ultrafroids. Nous terminons ce chapitre (section (2.5)) par une conclusion sommaire avec les titres de nouveaux domaines de recherche développés récemment en plusieurs branches de la physique moderne grâce à la réalisation et au succès des condensats de B-E.



## 2.2 Refroidissement par piégeage magnéto-optique (PMO)

La réalisation expérimentale d'un condensat de B-E dans les conditions du modèle d'Einstein s'est fait attendre pendant 70 ans. Ce retard est dû au fait que, pour des densités gazeuses  $n = \frac{N}{V}$  typiques, il est nécessaire de refroidir le gaz à une très basse température pour atteindre le régime de dégénérescence :  $n\lambda_T^3 = 2.612$ . Les techniques de refroidissement laser et de piégeage magnétique, développées avec succès dans les années 1980, ont permis d'atteindre de très basses densités. En effet, le premier condensat de B-E gazeux de  $^{87}\text{Rb}$ , réalisé en 1995 au JILA, avait une densité de quelque  $10^{18}$  atomes/m<sup>3</sup>, soit 9 ordres de grandeur plus faible que celle de l'hélium liquide et 5 ordres de grandeur plus faible que celle de l'air qui nous entoure. Le prix à payer dans cette voie de « basse densité » est l'abaissement de la température à laquelle le condensat se forme. Le premier condensat s'est formé à une température de l'ordre de 200 nanoKelvin (nK), et à une densité spatiale de l'ordre de  $10^{12}$  atomes/cm<sup>3</sup>.

### 2.2.1 Refroidissement laser, piégeage non dissipatif

Le refroidissement d'un gaz d'atomes se développe par compression de ce gaz dans un piège à parois matérielles (cellule cryogénique dont les parois sont recouvertes d'hélium liquide pour amener le gaz atomique aux températures les plus basses). Dans un tel piège, utilisé pour le refroidissement d'un gaz atomique d'hydrogène [14], il a été remarqué que des effets de recombinaison à trois corps se produisent sur les surfaces de confinement, et la totalité des atomes se colle immédiatement aux parois pour ne plus en bouger (effets de parois matérielles). Ce piège dissipatif fait passer une bonne partie du gaz d'atomes à l'état liquide.

Pour éviter les effets de recombinaison et de collage produits sur les surfaces matérielles de confinement, on utilise le rayonnement laser pour comprimer et refroidir directement le gaz atomique. Cette technique appelée refroidissement laser (refroidissement lumineux) permet de piéger le gaz atomique dans un piège optique n'ayant pas de parois matérielles et non dissipatif.

Le refroidissement initial du nuage atomique, à l'aide des lasers, a permis d'abaisser la température du gaz d'atomes, depuis la température ambiante jusqu'à des températures inférieures au millikelvin [11, 12, 13], et d'obtenir, au centre d'une enceinte à température ambiante, un gaz de plusieurs milliards d'atomes.

Le refroidissement laser, nouvelle technique de piégeage des atomes et qui se réalise aisément dans le cas des atomes alcalins, consiste à utiliser des échanges quasi-résonnants d'impulsion entre atomes et photons pour diminuer au maximum la dispersion  $\delta p$  des impulsions  $p$  d'un ensemble d'atomes, ou encore la dispersion  $\delta v$  de leur vitesse  $v$  [69]. Le dispositif expérimental réalisant un refroidissement laser des atomes alcalins, comporte des faisceaux lasers convenablement dirigés, de fréquences bien choisies, et qui amènent à la formation d'une « mélasse optique » dans laquelle s'engluent et s'immobilisent les atomes, grâce aux échanges d'énergie et d'impulsion avec les photons. Le refroidissement laser a amené le nuage atomique de se rapprocher suffisamment de la condition de condensation de B-E.

### 2.2.2 Piégeage magnétique

Le piégeage magnétique des particules matérielles résulte du couplage attractif d'un champ magnétique avec la charge électrique globale portée par chaque particule. Dans le cas des atomes neutres, ce couplage, beaucoup plus faible que celui des ions, est dû à l'interaction du champ considéré avec les degrés de liberté internes des atomes neutres : moments magnétiques, permanents ou induits. Il fait donc déplacer les niveaux d'énergie internes des atomes (déplacements Zeeman) d'une quantité qui varie d'un point à l'autre de l'espace. De plus, le puits de potentiel résultant du piégeage magnétique est beaucoup moins profond que les pièges de Penning ou de Paul utilisés pour piéger les ions. C'est pourquoi un refroidissement préalable des atomes neutres, par laser, est nécessaire pour que leur énergie cinétique soit inférieure à la profondeur du puits du piège magnétique. Le refroidissement laser d'un gaz atomique suivi par un piégeage magnétique constitue un piège magnéto-optique (PMO, ou MOT en anglais).

Un atome neutre de moment magnétique  $\vec{\mu}$  placé dans un champ magnétique inhomogène  $\vec{B}$ , précesse autour de celui-ci à la fréquence de Larmor

$\omega_L = \mu B/\hbar$ . L'énergie magnétique de couplage de cet atome avec  $\vec{B}$  est de la forme :

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2.1)$$

Cette énergie joue le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement du centre de masse de l'atome, et la force magnétique qui en résulte permet de confiner l'atome.

Si l'atome se déplace suffisamment lentement dans le champ magnétique, c'est-à-dire si le temps caractéristique de variation du champ est plus grand que la période de précession du moment magnétique, la direction de ce dernier reste parallèle à celle du champ : on parle alors de suivi adiabatique. Dans ce cas, si  $\vec{\mu}$  et  $\vec{B}$  sont orientés dans le même sens, l'énergie magnétique de l'atome diminue lorsque le module de  $\vec{B}$  augmente ( $W < 0$ ), et l'atome est donc attiré vers les régions des maxima de  $|\vec{B}|$ . En revanche, si  $\vec{\mu}$  est de sens opposé à  $\vec{B}$  ( $W > 0$ ), l'atome sera attiré par les zones des minima de  $|\vec{B}|$ . Les atomes peuvent donc être localisés au voisinage des extréma du module de  $\vec{B}$ . Or, les équations de Maxwell interdisent au module du champ magnétique (de même pour un champ électrique) statique d'avoir un maximum local dans une région dépourvue de courants, c'est-à-dire dans le vide.

Ce résultat est connu sous le nom de « théorème de Wing » [70]. Il empêche donc le piégeage d'atomes dans un état attiré par les champs forts. La seule possibilité est donc de piéger les atomes en les polarisant initialement, par refroidissement laser, en sens opposé au champ magnétique statique, autrement dit, les pièges magnétiques statiques ne confinent donc que des atomes polarisés dans un état antiparallèle au champ magnétique. Par ailleurs, au voisinage d'un minimum de  $|\vec{B}|$ , l'énergie magnétique  $W$  est elle-même minimale et positive ( $W = \mu B > 0$ ), et l'atome va effectuer des oscillations stables autour de ce minimum, à une fréquence de l'ordre de la centaine de hertz.

La figure (2.1) représente les sous-niveaux Zeeman des atomes de rubidium 87 ( $^{87}\text{Rb}$ ) polarisés dans :  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  (l'axe de quantification étant choisi selon la direction du champ magnétique  $\vec{B}$ ). Cette figure montre qu'au voisinage d'un minimum de champ, le potentiel magnétique  $W(x, y, z)$  vu par les différents sous-niveaux Zeeman associés à la multi-

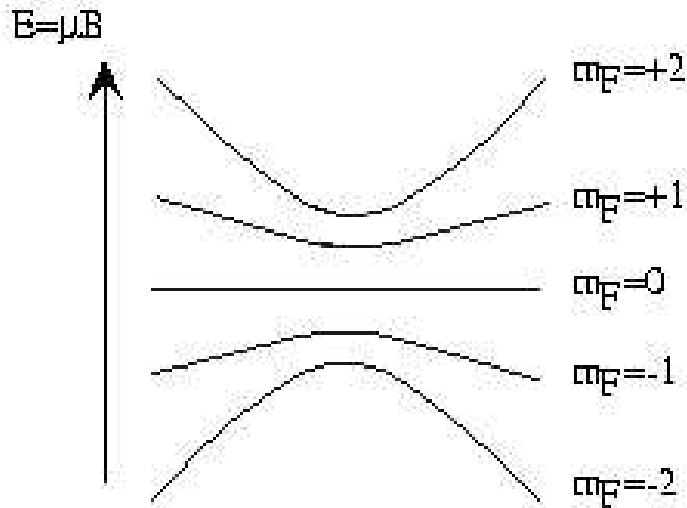


FIG. 2.1 – Potentiel magnétique  $W = E$  vu par les cinq sous-niveaux Zeeman de la multiplicité  $F = 2$  du rubidium 87. Il existe deux niveaux piégés,  $m_F = +2$  et  $m_F = +1$ .

plicité  $F = 2$ , ne pouvant être positif que pour les deux sous-niveaux :  $m_F = +2$ , et  $m_F = +1$ , et par conséquent, les trois autres sous-niveaux :  $m_F = 0$ ,  $m_F = -1$  et  $m_F = -2$  pour lesquels  $W \leq 0$ , sont expulsés.

### 2.2.3 Types de pièges magnétiques

#### a) Le piège quadrupolaire

Pour réaliser un minimum de champ magnétique auquel est associé une énergie de piégeage magnétique minimale et positive, plusieurs configurations sont envisageables. Le piège le plus simple auquel on puisse penser pour produire un minimum du module du champ magnétique est le piège quadrupolaire, où ce minimum vaut zéro [71]. On peut réaliser simplement un tel piège à l'aide de deux bobines mises face à face, et parcourues par des courants en sens opposés (position anti-Helmholtz). Le module du champ magnétique s'annule sur le point équidistant des deux bobines et appartenant à l'axe  $z$  de leur symétrie cylindrique. Au voisinage de ce minimum, le

champ magnétique est au premier ordre de la forme :

$$\vec{B}_{quad} = \begin{pmatrix} -b'x \\ -b'y \\ 2b'z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Il satisfait bien aux équations de Maxwell pour un champ magnétostatique dans le vide :

$$\text{div}(\vec{B}_{quad}) = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot}(\vec{B}_{quad}) = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Le potentiel magnétique  $W$  est donc de la forme :

$$W = \mu b' \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \quad (2.4)$$

Ce potentiel linéaire de confinement porte le nom de piège quadrupolaire, à cause de la forme de son développement multipolaire [72]. Le gradient typique est  $b' = 100$  Gauss/cm, le rayon des bobines est de l'ordre de 5 cm. Le champ est alors à cette distance :  $|\vec{B}| \sim 1000$  Gauss . La profondeur d'un tel piège est donc de l'ordre de quelques mK (millikelvin) (pour le  $^{87}\text{Rb}$  :  $\mu = \mu_B$ , et  $T = \mu_B |\vec{B}|/k_B \sim 30$  mK avec les valeurs précédentes,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr). La capture et le prérefroidissement assurés par le piège magnéto-optique, sont donc adaptés à son remplissage.

Ce piège magnétique quadrupolaire présente un défaut majeur : les atomes qui s'approchent du fond du piège, là où le champ est nul, voient la direction du champ magnétique changer de sens trop vite pour que le critère de suivi adiabatique soit satisfait. Par ailleurs, tous les atomes qui s'approchent du centre du piège sont expulsés du piège quadrupolaire. Ces pertes d'atomes, dues aux transitions non-adiabatiques et connues sous le nom de « transitions de Majorana », sont d'autant plus dramatiques que l'échantillon est plus froid, parce que les atomes sont alors localisés surtout dans la région voisine du zéro du champ. Par ailleurs, ce piège ne permet pas d'atteindre le seuil de condensation de B-E. Il faut impérativement réaliser un piège dont le minimum local soit non nul.

## b) Le piège TOP

Le piège TOP (« Time-averaged Orbiting Potential ») a été proposé la première fois par le groupe de Boulder en 1995 [73]. Il a permis la première

observation de la condensation de B-E avec des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  [17]. Ce piège est constitué par un piège quadrupolaire auquel on ajoute dans le plan transverse un champ tournant à la fréquence  $\omega_0/(2\pi)$ . Cette dernière est choisie petite devant la fréquence de Larmor, pour ne pas provoquer de transition non-adiabatique. On fait ainsi tourner le zéro de champ magnétique.

$$\begin{aligned}\vec{B}_{TOP} = \vec{B}_{quad} + \vec{B}_0(t) &= \begin{pmatrix} -b'x \\ -b'y \\ 2b'z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0 \cos(\omega_0 t) \\ B_0 \sin(\omega_0 t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b'x + B_0 \cos(\omega_0 t) \\ -b'y + B_0 \sin(\omega_0 t) \\ 2b'z \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Si on choisit  $\omega_0/(2\pi)$  grand devant les fréquences d'oscillations dans le potentiel magnétique, les atomes ne sont pas entraînés par le potentiel tournant, mais évoluent dans le potentiel moyen  $W(x, y, z)$  et qui vaut, au voisinage du minimum du module du champ magnétique :

$$\begin{aligned}W(x, y, z) = \mu \langle |\vec{B}| \rangle_{\omega_0} &\simeq \mu B_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + 8z^2) \quad (2.6) \\ \text{avec : } \omega^2 &= \frac{\mu b'^2}{2mB_0}\end{aligned}$$

Ce potentiel est harmonique au voisinage de son centre, anisotrope et de révolution autour de l'axe  $z$ . La raideur dans le plan transverse  $xy$  est 8 fois plus petite que suivant l'axe  $z$ . Notons que  $W \neq 0$  au centre du piège ( $x = y = z = 0$ ). Pour un bon fonctionnement du piège, les pulsations  $\omega$  doivent vérifier :

$$\omega \ll \omega_0 \ll \omega_L \quad (2.7)$$

La deuxième inégalité assure le critère d'adiabaticité, la première permet de faire évoluer les atomes dans le potentiel moyen  $W(x, y, z)$  (2.6). Les ordres

de grandeur typiques sont :

$$B_0 \sim 10 \text{ Gauss} \quad , \quad b' \sim 100 \text{ Gauss/cm} \quad (2.8)$$

$$\omega/(2\pi) \sim 100 \text{ Hz} \quad , \quad \omega_0/(2\pi) \sim 5 \text{ kHz} \quad , \quad \omega_L/(2\pi) \sim 14 \text{ MHz} \quad (2.9)$$

Les échelles de temps sont ainsi bien séparées. Le rayon du cercle parcouru par le centre du quadrupole est  $R_0 = \frac{B_0}{b'}$ . Un atome qui traverse ce cercle est perdu par transitions non-adiabatiques. La profondeur  $W_p$  du piège est :

$$W_p \simeq \mu B_0/4 \quad (2.10)$$

Cette profondeur est de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{K}$  (microkelvin). Ce piège peut être chargé à partir d'un piège magnéto-optique.

### c) Piège de type Ioffé-Pritchard

#### 1) Configuration

Le piège de Ioffé-Pritchard présente une autre configuration pour laquelle un minimum non nul du module du champ est obtenu avec des champs purement statiques. Ce piège a initialement été proposé, dans les années 60, par Ioffé [74] pour le confinement des plasmas, puis repris dans les années 1980 par le groupe de Pritchard pour confiner des atomes neutres [75, 76].

Un piège de Ioffé-Pritchard est configuré par quatre fils parallèles et deux bobines circulaires identiques, appelées bobines de Helmholtz (voir Fig. 2.2). Les 4 fils parallèles sont équidistants du point O, et passent par les sommets d'un carré du plan  $xz$  de demi-diagonale  $a$ . Ils sont parcourus par des courants  $+I$  et  $-I$ . Les 2 bobines circulaires sont centrées sur l'axe  $y$  et parcourues par un courant de même sens  $I'$ . Soit  $R$  le rayon de ces bobines et  $A$  leur distance au point O. On choisit la position :  $A > R/2$  pour créer un minimum  $B_0 \neq 0$  du module du champ magnétique au point O. Le champ magnétique créé par les 4 fils permet de confiner le mouvement des atomes dans le plan  $xz$  ( $B_{xz} \neq 0$ ,  $B_y = 0$ ), alors que celui créé par les deux bobines les confine le long de l'axe  $y$ .

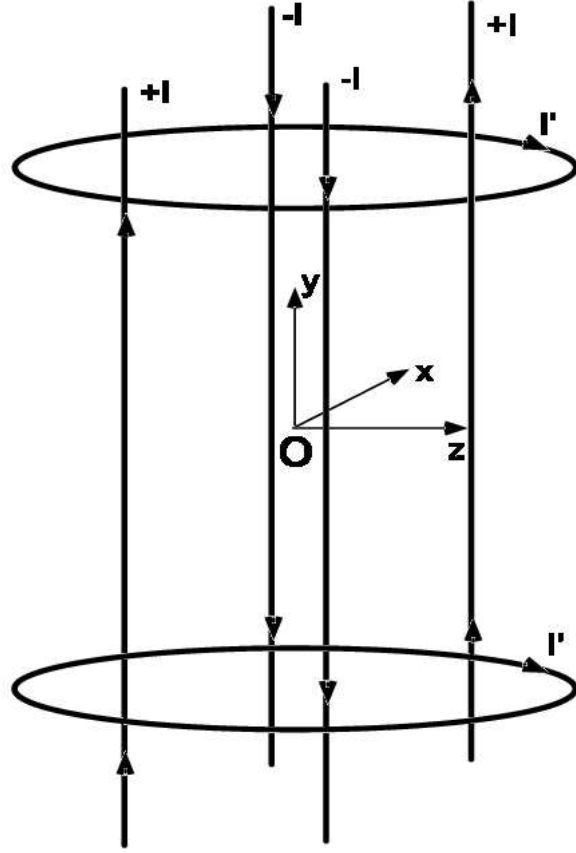


FIG. 2.2 – Schéma du piège de Ioffé-Pritchard. Les quatre fils sont équidistants du point O, et passent par les sommets d'un carré du plan  $xz$  de demi-diagonale  $a$ . Ils sont parcourus par des courants :  $+I$  et  $-I$ . On superpose deux bobines circulaires centrées sur l'axe  $y$  et parcourues par un courant de même sens  $I'$ .

Le champ magnétique résultant est de la forme :

$$\vec{B}_{\text{Ioffé}} = \vec{B}_{4\text{fils}} + \vec{B}_{2\text{bob}}(t) = \begin{pmatrix} -b'x \\ 0 \\ -b'z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{b''}{2}xy \\ B_0 + \frac{b''}{2}\left(y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2)\right) \\ -\frac{b''}{2}yz \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et son module, en ne retenant que les termes d'ordre 2 en  $x$ ,  $y$  et  $z$  :



$$|\vec{B}_{\text{Ioffé}}| = \sqrt{\left(B_0 + \frac{b''}{2}\left(y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2)\right)\right)^2 + \frac{9b'^2}{4}(x^2 + z^2)} \quad (2.12)$$

où

$$b' = \frac{2\mu_0 I}{\pi^2 a^2} \quad \text{et} \quad b'' = \frac{3\mu_0 I' R^2 (4A^2 - R^2)}{2(A^2 + R^2)^{5/2}} \quad (2.13)$$

Une telle configuration de champ permet de contrôler les gradients transverses  $b'$  grâce au courant  $I$ . La courbure  $b''$  suivant l'axe  $y$  dépend seulement du courant  $I'$ . De plus, en superposant un champ magnétique homogène créé par une troisième bobine Helmholtz d'axe  $y$ , il est possible de modifier  $B_0$  sans affecter la courbure  $b''$  suivant l'axe  $y$ , ni le gradient  $b'$  dans le plan transverse.

Plusieurs configurations voisines de celle de Ioffé-Pritchard ont été proposées et utilisées (voir Fig . 2.3). Certaines diffèrent les unes des autres par la manière dont on referme les courants des fils, cas de : piège de Ioffé-Pritchard type baseball, d'autres utilisant d'autres types de géométrie, cas de : piège à trois bobines quadrupolaires, et piège en " feuille de trèfle ".

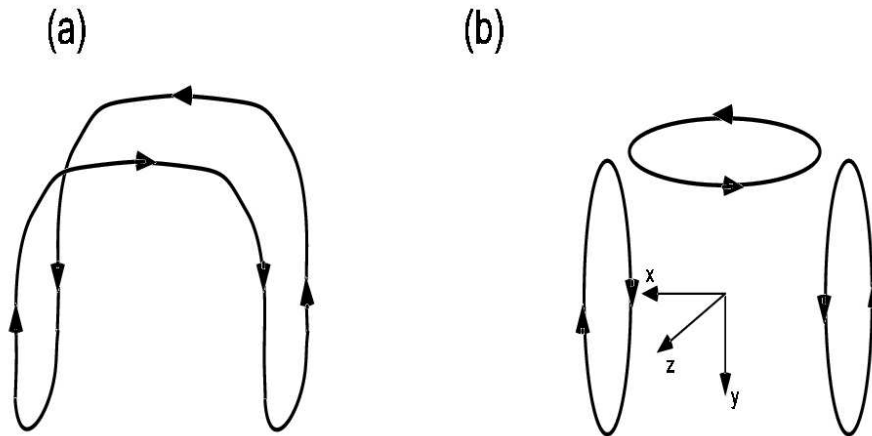


FIG. 2.3 – Pièges de type Ioffé-Pritchard : (a) à un fil en configuration «Baseball»; (b) à trois bobines.



FIG. 2.4 – Géométrie du piège magnétique à trois bobines quadrupolaires et deux bobines Helmholtz. Le piège résultant est allongé selon l'axe des bobines Helmholtz. La raideur verticale du piège est importante pour empêcher les atomes de tomber sous l'effet de la gravité.

Dans le cas du piège à trois bobines quadrupolaires, le champ magnétique résultant (voir Fig . 2.4) est analogue à celui de piège à 4 fils et 2 bobines Helmholtz déjà établi, et de la forme :

$$\vec{B}_{3bob} = \begin{pmatrix} \frac{3b'x}{2} + \dots \\ \frac{3b'y}{2} + \dots \\ B_0 + \frac{b''}{2} \left( z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

et son module est alors :

$$|\vec{B}_{3bob}| = \sqrt{\left( B_0 + \frac{b''}{2} \left( z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) \right)^2 + \frac{9b'^2}{4}(x^2 + y^2)} \quad (2.15)$$

On remarque que  $|\vec{B}_{3bob}| \simeq |\vec{B}_{\text{Ioffé}}|$ .

## 2) Potentiel de piégeage à l'approximation harmonique

On peut réaliser un développement limité du module du champ magnétique  $\vec{B}_{\text{Ioffé}}$  ou  $\vec{B}_{3bob}$  valable pour  $b''z^2 \ll B_0$ ,  $b'x \ll B_0$ , et  $b'y \ll B_0$ .

On obtient pour  $|\vec{B}_{3 \text{ bob}}|$  :

$$|\vec{B}_{3 \text{ bob}}| \simeq B_0 + b'' \frac{z^2}{2} + \left( \frac{9 b'^2}{4 B_0} - \frac{b''}{2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2.16)$$

On constate que le module du champ magnétique au voisinage du centre du piège est harmonique. Il est en général anisotrope. L'énergie potentielle magnétique  $W(x, y, z) = \mu B(x, y, z)$ , à l'approximation harmonique (2.16), s'écrit alors :

$$W(x, y, z) = \mu B_0 + \mu b'' \frac{z^2}{2} + \mu \left( \frac{9 b'^2}{4 B_0} - \frac{b''}{2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2.17)$$

L'expression (2.17) indique que  $W(x, y, z)$  est de symétrie cylindrique autour de l'axe  $z$ . On peut mettre  $W(x, y, z)$  sous la forme :

$$W(x, y, z) = \mu B_0 + \frac{m}{2} \omega_{\parallel}^2 z^2 + \frac{m}{2} \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) \quad (2.18)$$

où  $m$  est la masse de l'atome piégé,  $\omega_{\perp}$  et  $\omega_{\parallel}$  sont respectivement les fréquences de piégeage transverse (ou radiale) et longitudinale (ou axiale), et qui s'écrivent :

$$\omega_{\parallel}^2 = \frac{\mu b''}{m} \quad \text{et} \quad \omega_{\perp}^2 = \frac{\mu}{m} \left( \frac{9 b'^2}{4 B_0} - \frac{b''}{2} \right) \quad (2.19)$$

L'expression (2.19) montre que la fréquence de piégeage transverse  $\omega_{\perp}$  est d'autant plus importante que  $B_0$  est petit. Les 3 bobines quadrupolaires créent un champ directeur  $B_0$  d'une centaine de Gauss. On voit alors tout l'intérêt de pouvoir ajouter un champ constant pour contrôler la valeur de  $B_0$ . En pratique, on ajoute une paire de bobines en configuration Helmholtz, selon l'axe  $z$ , permettant de diminuer  $B_0$  et ainsi d'augmenter la fréquence de piégeage transverse. Le champ longitudinal  $B_0$  varie entre quelques centaines de Gauss et une fraction de Gauss grâce aux bobines Helmholtz additionnelles.

Dans le cas où  $B_0$  est suffisamment petit, ce sera en fait toujours le cas, on pourra écrire :

$$\omega_{\perp}^2 \approx \frac{\mu}{m} \frac{9 b'^2}{4 B_0} \quad (2.20)$$

On note que, dans cette limite,  $\omega_{\perp} \gg \omega_{\parallel}$ . Le confinement transverse est donc beaucoup plus important que le confinement longitudinal, donnant une forme de cigare allongé au nuage piégé.

Notons que les fréquences  $\omega_{\parallel}$  et  $\omega_{\perp}$  dépendent du sous-niveau Zeeman  $m_F$  considéré via  $\mu$  (voir Fig .2.1).

### 3) Limite de validité de l'approximation harmonique, Piège semi-linéaire

L'approximation harmonique (2.16) est valide tant que :

$$b' \sigma_{\perp} \ll B_0 \quad (2.21)$$

où  $\sigma_{\perp}$  est la taille caractéristique du nuage dans les directions radiales, condition qu'on peut encore écrire :

$$m \omega_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2 \ll m \omega_{\perp}^2 \left( \frac{B_0}{b'} \right)^2 \quad (2.22)$$

Comme à l'équilibre thermique  $\frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2 = \frac{1}{2} k_B T$ , l'équation (2.22), où l'on remplace  $m \omega_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2$  par  $k_B T$ , et  $\omega_{\perp}^2$  par son expression (2.21), est équivalente à :

$$k_B T \ll \mu B_0 . \quad (2.23)$$

L'expression (2.23), équivalente à (2.16), montre que pour déterminer la limite de validité de l'approximation harmonique (2.16), il faut comparer l'énergie thermique du nuage piégé  $k_B T$  avec l'énergie magnétique au fond du piège,  $\mu B_0$ . Lorsque  $k_B T \gg \mu B_0$ , le développement limité (2.16) n'est plus valable. Le potentiel reste harmonique dans la direction axiale, mais il est linéaire dans les directions transverses. Ce piège semi-linéaire est alors déterminé par la fréquence  $\omega_{\parallel}$  inchangée et par le gradient de champ radial  $b'$ .

### 4) Conditions de fonctionnement d'un piège Ioffé-Pritchard

#### a) Accès optique

Les valeurs typiques de  $b'$  et  $b''$ , pour un piège à 4 fils et deux bobines Helmholtz, sont de l'ordre :

$$b' = 100 \text{ Gauss/cm} \quad \text{et} \quad b'' = 50 \text{ Gauss/cm}^2 . \quad (2.24)$$

Pour créer de tels gradients, de valeurs assez élevées, il faut approcher au maximum les bobines du centre de la cellule où sont piégés les atomes. Par ailleurs, il est important d'avoir un bon accès optique pour les différents faisceaux lasers (en pratique, on utilise au moins 9 faisceaux lasers : les

6 faisceaux du piège magnétique optique, le faisceau imageur, le faisceau pompeur, et le faisceau sonde). Par exemple, dans le cas d'un piège à 4 fils et 2 bobines, une bobine placée à 4 cm du centre de la cellule et de rayon 3 cm, doit être parcourue par un courant de 3000 Ampères pour réaliser un gradient  $b' = 100$  Gauss/cm!. Il existe donc plusieurs choix technologiques : peu de tours pour des grands courants ou beaucoup de tours avec des courants plus petits. On adopte cette dernière solution. Les deux bobines du piège magnétique sont constituées de 80 tours d'un fil de 1 mm parcouru par un courant  $I \leq 90$  Ampères. Un refroidissement à eau est indispensable et installé sur chaque bobine. Il permet de dissiper une puissance Joule égale à 2 kWatt pour chaque bobine.

Dans le cas du piège à 3 bobines quadrupolaires, la forme tronconique de ces bobines, percées sur leur axe, réalise un bon accès optique. Le courant qui les parcourt ne dépasse pas 47 Ampères, avec une puissance Joule de 1 kWatt.

Notons qu'il est possible de réaliser une configuration de champ de type Ioffé-Pritchard grâce à l'utilisation de matériau ferromagnétique pour lequel des courants de seulement une dizaine d'Ampères sont nécessaires dans les bobines qui entourent le matériau [77]. La condensation de B-E a été observée dans un tel piège à l'institut d'Optique (Orsay-France) dans le groupe d'A. Aspect.

### b) Le suivi adiabatique

En général, on cherche à réaliser des potentiels aussi confinant que possible, c'est-à-dire à obtenir les fréquences d'oscillation les plus grandes possibles. Pour une géométrie donnée, la fréquence axiale est limitée par le courant maximal dont on dispose, alors que la fréquence radiale dépend de deux paramètres :  $b'$  et  $B_0$ . En particulier, elle est d'autant plus grande que  $B_0$  est faible, d'où l'utilité de la compensation du champ  $B_0$ , dans la limite où l'approximation harmonique est valable.

La valeur minimale de  $B_0$  que l'on peut choisir est liée à la condition de suivi adiabatique du spin, qui impose que la fréquence de Larmor  $\omega_L$  doit être plus grande que la fréquence de rotation  $\omega_R$  du champ magnétique dans le référentiel de l'atome. Cette condition ( $\omega_L \gg \omega_R$ ) est d'autant

plus critique à satisfaire que l'atome s'approche de la région où le champ est minimal, et où sa direction change rapidement.

Pour un atome qui se déplace au fond du piège sur une distance radiale  $\delta l$ , la direction du champ magnétique tourne d'un angle  $\delta\theta = b' \frac{\delta l}{B_0}$ , ce qui correspond à une fréquence  $\omega_R$  de rotation de la direction du champ de l'ordre de  $\frac{v b'}{B_0}$ , où  $v$  est la vitesse radiale de l'atome. La condition de suivi adiabatique est alors donnée par :

$$\omega_L = \frac{\mu B_0}{\hbar} \gg \frac{v b'}{B_0}. \quad (2.25)$$

La vitesse transverse caractéristique des atomes au fond du puits de potentiel est :  $v = \omega_{\perp} \sigma_{\perp} = \sqrt{k_B T/m}$ . Le critère précédent dépend donc de la température, et peut s'écrire :

$$B_0^2 \gg \frac{\hbar b'}{\mu} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (2.26)$$

Avec  $b' = 265$  Gauss/cm, on doit avoir  $B_0 \gg 45$  milliGauss pour  $T = 1$  millikelvin, et  $B_0 \gg 8$  milliGauss pour  $T = 1 \mu$  k (microkelvin).

### c) L'adaptation du piège

Pour ne perdre ni sur la densité dans l'espace des phases ni sur le taux de collision élastique, il est important d'adapter, pendant la phase de chargement, les fréquences d'oscillation du piège aux caractéristiques du nuage après le pompage optique.

L'énergie moyenne par atome dans le nuage initialement libre est purement d'origine cinétique, et vaut  $3 k_B T_i/2$ , où  $T_i$  est la température du nuage. Supposons que la distribution en position soit gaussienne, et isotrope : elle est alors caractérisée par la taille  $\sigma$ . Quand on transfère les atomes dans le piège magnétique, supposé harmonique et isotrope ( $\omega_{\parallel} = \omega_{\perp}$ ) lui aussi, on leur transfère en moyenne une énergie potentielle égale à  $3m\omega^2\sigma^2/2$ , où  $\omega$  est la fréquence d'oscillation des atomes dans le piège magnétique. Lorsque l'échantillon a thermalisé, la température finale est  $T_f$  donnée par :

$$3 k_B T_f = \frac{3}{2} k_B T_i + \frac{3}{2} m \omega^2 \sigma^2 \quad (2.27)$$

La densité dans l'espace des phases après transfert et thermalisation est donnée par :

$$n(0) \lambda^3 \propto \frac{\omega^3}{T_f^3} \quad (2.28)$$

Pour ne pas perdre sur la densité dans l'espace des phases, il faut choisir la fréquence d'oscillation  $\omega$  qui maximise le rapport  $\frac{\omega}{T_f}$ . On trouve qu'il faut choisir  $\omega$  tel que  $k_B T_i = m\omega^2 \sigma^2$ . Si cette condition est réalisée, on transfère autant d'énergie potentielle au nuage libre quand on branche le courant dans les bobines du piège qu'il possédait d'énergie cinétique. La température et la taille avant et après transfert sont alors les mêmes. La densité dans l'espace des phases est alors conservée.

Dans le cas d'un nuage gaussien, mais pas forcément isotrope, qu'on doit transférer dans un piège harmonique, éventuellement anisotrope, on peut montrer de la même façon qu'il faut que les températures avant et après transfert soient les mêmes pour optimiser la densité dans l'espace des phases après transfert. Elle est alors au plus égale à la densité dans l'espace des phases initiale.

#### d) La compression adiabatique

Une fois le nuage chargé dans le piège magnétique dans les conditions de courant qui assure l'adaptation du piège, on réalise une compression adiabatique du nuage, en augmentant lentement le courant dans les bobines jusqu'à sa valeur maximale. Le critère d'adiabaticité est rempli quand cette opération se déroule sur un temps qui est long devant la période d'oscillation des atomes dans le piège. La densité atomique et la température augmentent, si bien que le taux de collision augmente lui aussi, alors que la densité dans l'espace des phases est conservée (si le potentiel ne change pas de forme).

Notons que pendant les phases de compression du nuage dans un piège harmonique isotrope, la fréquence d'oscillation du piège change adiabatiquement de  $\omega$  à  $\omega'$ , et fait augmenter la densité du nuage ainsi que le taux de collisions élastiques des atomes formant le nuage. Or, la diminution de  $B_0$  rend le piège harmonique fortement anisotrope, puisqu'on ne comprime le nuage que suivant les directions transverses. En outre, lorsque la valeur de  $B_0$  est faible, et que la température augmente à cause de la compression,

on peut très bien sortir du piège de validité de l'approximation harmonique, et passer adiabatiquement d'un potentiel harmonique à un potentiel final semi-linéaire. Ce passage fait augmenter la densité dans l'espace des phases d'un facteur  $e$  ( $e = \frac{D_f}{D_i}$ ) [78].

### 2.2.4 PMO. et seuil de condensation

Une fois le piège magnéto-optique (PMO) branché dans les conditions de fonctionnement pré-décrites, un nuage atomique, piégé en forme de cigare allongé, se forme dans la région où  $|\vec{B}|$  est minimum. On trouve que les valeurs de  $n$  et  $T$  ont subi des abaissements remarquables, en passant, en valeur moyenne, de :  $n = 10^{18}$  atomes/m<sup>3</sup>,  $T = 300$  K (pour une vapeur atomique initiale à la température ambiante), aux :  $n = 10^{15}$  atomes/m<sup>3</sup>,  $T = 500 \mu$  K (pour un nuage atomique piégé). Cet abaissement implique, par ailleurs, un gain extrêmement grand sur  $n\lambda_T^3$  qui a passé de :  $10^{-13}$  à  $10^{-6}$ , mais il est encore très insuffisant, et il manque six ordres ( $10^6$ ) de grandeur à gagner pour que le nuage piégé par PMO entre effectivement dans le régime de dégénérescence quantique.

On pourrait essayer d'amener le nuage piégé vers la condensation en faisant accroître le courant dans les bobines créant le champ magnétique sans modifier la configuration du PMO. Cet accroissement de courant crée un potentiel confinant plus raide, et donc une densité  $n(0)$  au centre de piège plus élevée. Malheureusement, dans cette opération, la température augmente aussi, mais la densité dans l'espace des phases  $n\lambda_T^3$  ne change pas. Dans les expériences de 1995, le seuil de condensation a été atteint grâce à l'utilisation de la technique de refroidissement par évaporation (ou refroidissement évaporatif), associée au piégeage magnéto-optique.

## 2.3 Refroidissement évaporatif

La technique de refroidissement par évaporation a été proposée pour les expériences sur l'hydrogène polarisé [14] par Hess [15]. Elle a ensuite étendue aux atomes alcalins [73, 79], et a permis l'observation de la condensation de B-E. Dans cette section, nous donnerons d'abord une description qualitative de cette technique, nous présenterons ensuite les paramètres de base de sa



---

modélisation, et nous terminerons par discuter le régime d’emballement qui fait de cette technique un outil efficace pour que le nuage atomique piégé atteigne le seuil de condensation et devienne un condensat de B-E.

### 2.3.1 Présentation

Le refroidissement évaporatif est une technique ancienne, connue de tous les enfants ayant dû avaler une assiette de soupe trop chaude : pour la refroidir, on souffle dessus. Ce refroidissement n’est pas dû à la différence de température entre le liquide et le gaz, mais à l’évaporation de la soupe qui est favorisée par la ventilation provoquée par l’enfant. Arracher une molécule du liquide coûte de l’énergie, qui est prélevée sur le liquide restant.

On procède de la même façon pour les atomes piégés, en tronquant la profondeur du potentiel confinant les atomes à une hauteur légèrement supérieure à l’énergie cinétique moyenne des atomes piégés. Ainsi, les atomes les plus rapides s’échappent du piège, et les atomes restant se rethermalisent à une température inférieure à la température initiale.

Il pourrait sembler à première vue que cette technique, réduisant le nombre d’atomes, serait défavorable quant à la recherche d’une densité élevée dans l’espace des phases. Cependant, en abaissant au cours du temps la hauteur de la coupure du piège, on peut atteindre un régime dit d’emballement dans lequel la densité dans l’espace des phases devient infiniment grande au bout d’un certain temps fini.

La réalisation pratique d’un tel potentiel magnétique à hauteur modifiable se fait grâce à une onde radio, de fréquence  $\nu$  ajustable. Cette onde fait basculer les moments magnétiques des atomes qui sont résonnants avec elle, c’est-à-dire ceux situés sur une surface de champ magnétique donné, tel que  $\mu B = h\nu$ , où  $\mu$  est le moment magnétique d’un atome. Par suite de l’inversion du signe de leur moment magnétique, de tels atomes voient une colline de potentiel au lieu d’un puits, et sont donc expulsés (voir Fig. 2.5).

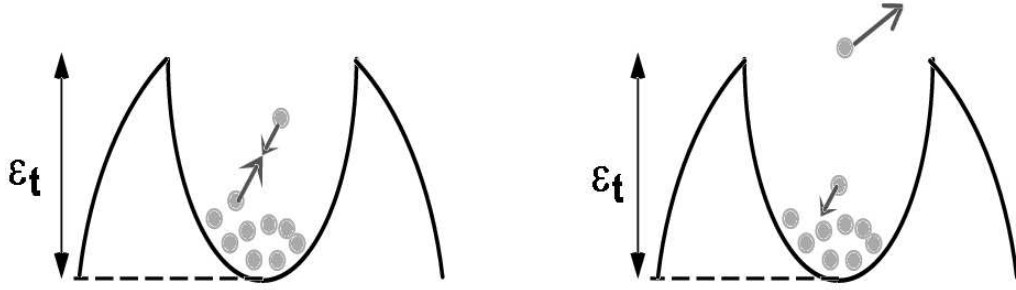


FIG. 2.5 – Représentation schématique d'un exemple de répartition énergétique à l'issue d'une collision élastique conduisant à l'évaporation de l'un des deux atomes entrant en collision.

### 2.3.2 Processus d'évaporation

Le processus d'évaporation menant les atomes du nuage piégé à l'expulsion du piège magnéto-optique, résulte des collisions élastiques entre ces atomes, et inélastiques entre eux et les atomes du gaz résiduel. Une analyse préalable de ce processus montre que si au cours d'une expérience, on laisse des atomes dans un piège magnéto-optique, 63% d'entre eux seront perdus après un temps  $\tau_{vie}$  appelé durée de vie du piège. Cette perte est due au fait que, dans une cellule d'ultravide, les atomes piégés peuvent subir des collisions inélastiques avec les atomes du gaz résiduel. Au cours de telles collisions, les atomes du piège encaissent une énergie plus grande que la profondeur du puits (quelques millikelvins), et sont expulsés. Les temps  $\tau_{vie}$  typiques varient de 5 à 400 secondes. La dispersion des vitesses des atomes permet de définir une température  $T_e$  de l'échantillon atomique.

Avant d'analyser le processus du refroidissement évaporatif du gaz atomique piégé, il est utile de prendre le potentiel piégeant sous forme d'une loi de puissance :

$$U(\vec{r}) = C r^{\frac{3}{\delta}}, \quad (2.29)$$

où  $\delta$  est le paramètre caractérisant le potentiel piégeant.  $\delta = \frac{3}{2}$  pour un potentiel parabolique,  $\delta = 3$  pour un potentiel linéaire,  $\delta = 0$  pour un potentiel carré, et  $C$  est une constante. On peut également considérer le cas

où  $U(\vec{r})$  est de la forme :

$$U(x, y, z) = a|x|^{1/\delta_1} + b|x|^{1/\delta_2} + c|x|^{1/\delta_3} , \quad (2.30)$$

avec :  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta$ , et  $a, b$  et  $c$  des constantes.

La description du processus du refroidissement évaporatif d'un gaz atomique piégé se fait en supposant que le potentiel piégeant est coupé à une hauteur seuil  $\varepsilon_t$  égale, en unités de  $k_B T_e$ , à  $\eta$  (voir Fig . 2.5) :

$$\frac{\varepsilon_t}{k_B T_e} = \eta \quad (2.31)$$

où  $\eta$  est un paramètre. Les  $N$  atomes sont initialement dans le piège, avec chacun une énergie moyenne totale  $(\frac{3}{2} + \delta) k_B T$  (énergie cinétique :  $\frac{3}{2} k_B T$ , et énergie potentielle :  $\delta k_B T$ ) bien plus faible que  $\eta k_B T_e$ .

Le premier effet va être de perdre tous les atomes qui avaient une énergie supérieure à cette barrière. Ensuite, les atomes vont entrer en collision entre eux et se répartir l'énergie restante, ce qui conduit à la thermalisation du nuage. Dans un tel processus, certaines collisions entre atomes suffisamment énergétiques ( $E_1 + E_2 > \varepsilon_t$ ) peuvent conduire, par redistribution de l'énergie après la collision élastique, à un atome d'énergie  $E' > \varepsilon_t$  qui est perdu (voir Fig . 2.5) ; l'autre, ayant alors une énergie faible, se retrouve dans un domaine d'énergie plus proche du fond du potentiel piégeant. Cet effet est qualifié d'évaporation naturelle ou simple. Ainsi, la thermalisation d'un nuage d'atomes dans un potentiel tronqué se traduit par une perte d'atomes et par un refroidissement. A ce stade, ces deux effets sont antagonistes pour la densité dans l'espace des phases, car on perd d'un côté des atomes mais de l'autre la température diminue. Ce processus d'évaporation naturelle est lent, il montre que l'abaissement de la température du nuage se fait au prix d'une perte d'atomes.

Si, à ce stade, on veut volontairement empêcher ce ralentissement, il suffit de baisser progressivement la hauteur de la barrière de potentiel  $\varepsilon_t$  pour l'adapter continûment à la température de l'échantillon. Cette technique appelée évaporation forcée, se réalise à condition que la diminution de  $\varepsilon_t$  soit faite sur une échelle de temps lente devant le temps de thermalisation du nuage. Ainsi, en jouant astucieusement sur cette fonction du temps  $\varepsilon_t(t)$ , un régime où le taux de collisions croît au cours du temps, peut être atteint.

On montrera plus tard que dans ce régime la température décroît plus rapidement que la perte d'atomes, et permet une augmentation de la densité dans l'espace des phases par plusieurs ordres de grandeur (plus de 8).

### 2.3.3 Dynamique de l'évaporation

#### a) Etat dynamique et efficacité de l'évaporation

Nous rappelons préalablement que le nuage atomique piégé constitue avant son évaporation, un gaz non dégénéré, gaz classique ( $T \gg T_c$ ) en équilibre thermodynamique à la température  $T$ . Ce gaz est donc décrit par la fonction de distribution classique de Boltzmann :  $f(\varepsilon) \simeq z e^{-\varepsilon/k_B T}$ , et son état d'équilibre thermodynamique est caractérisé par les deux variables indépendantes  $N$  et  $T$ . Dans ces conditions, chaque grandeur physique caractérisant ce nuage a une dépendance en  $N$  et  $T$  décrite par une loi de puissance. En effet :

$$V_e \propto T^\delta, \quad v \propto T^{1/2}, \quad V_p \propto T^{3/2}, \quad n \propto \frac{N}{V_e} \propto N T^{-\delta}, \quad (2.32)$$

et

$$D = n \lambda^3_T \propto \frac{N}{V_e V_p} \propto N T^{-(\frac{3}{2} + \delta)} \quad (2.33)$$

où  $V_e$  est le volume spatial effectif associé à la densité spatiale  $n(0)$  définie au centre du piège :  $n(0) = \frac{N}{V_e}$ ,  $v$  la vitesse moyenne de l'atome,  $V_p$  le volume dans l'espace des phases associé à  $n(0)$  avec :

$V_p \propto \sqrt{\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle + \langle p_z^2 \rangle}$  ; ( $p_x$ ,  $p_y$ , et  $p_z$  sont les composantes de l'impulsion  $\vec{p}$ ), et  $D$  la densité dans l'espace des phases.

Le déclenchement du processus d'évaporation dans le nuage piégé fait immédiatement sortir ce nuage de son état d'équilibre en raison des variations de  $N$  et  $T$ , et lui placer dans un état dynamique hors équilibre, et évolutif dans le temps, au cours duquel la fonction de distribution de Boltzmann  $f(\varepsilon)$  subit à son tour, une évolution temporelle.

Dans cet état dynamique, les deux variables  $N$  et  $T$  deviennent dépendantes. Cette dépendance peut être démontrée en établissant le lien entre la diminution relative de  $T$  :  $\frac{dT}{T}$ , et celle de  $N$  :  $\frac{dN}{N}$ . Un calcul du bilan d'énergie des atomes échappés et restants dans le piège conduit, en négligeant les

termes du second ordre en  $dN$  et  $dT$ , à l'expression suivante :

$$\frac{dT}{T} = \alpha \frac{dN}{N} , \quad (2.34)$$

avec :

$$\alpha = \frac{\eta + k}{\frac{3}{2} + \delta} - 1 \quad \text{et} \quad k \ll \eta . \quad (2.35)$$

L'équation (2.34) montre qu'au cours du refroidissement,  $N$  et  $T$  sont reliées par une loi de puissance. L'intégration de l'équation (2.34) donne :

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^\alpha . \quad (2.36)$$

Comme  $\eta$  peut être très grand devant 1, il en est de même de  $\alpha$ . Par ailleurs, l'équation (2.36) montre que si  $N$  diminue par un facteur 10 ( $\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{10}$ ),  $T$  diminue par un facteur beaucoup plus grand :  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1}{10}\right)^\alpha \ll \frac{1}{10}$ , si :  $\alpha \gg 1$ . Ce résultat montre que l'évaporation peut être un processus très efficace de refroidissement, et que  $N$  et  $T$  ne sont pas indépendantes c'est-à-dire :  $T \propto N^\alpha$ . En remplaçant dans les expressions (2.32) et (2.33),  $T$  par  $N^\alpha$ , on obtient :

$$T \propto N^\alpha , \quad V_e \propto N^{\alpha\delta} , \quad v \propto N^{\alpha/2} , \quad V_p \propto N^{3\alpha/2} , \quad (2.37)$$

et

$$n \propto \frac{N}{V_e} \propto N^{1-\alpha\delta} , \quad D = n \lambda^3_T \propto \frac{N}{V_e V_p} \propto N^{1-(\frac{3}{2}+\delta)\alpha} . \quad (2.38)$$

Les valeurs et signes des exposants des grandeurs données par (2.37) et (2.38) sont importants, et leur examen permet d'en déduire des conséquences physiques significatives. Par exemple, si l'on veut que la densité dans l'espace des phases  $D$  augmente lors de l'évaporation, il faut que l'exposant de  $N$  dans l'expression de  $D$  (2.38) soit négatif :

$$1 - \left(\delta + \frac{3}{2}\right)\alpha < 0 . \quad (2.39)$$

Bien que  $N$  diminue,  $V_e$  et  $V_p$  diminuent encore plus, de sorte que :  $D \propto \frac{N}{V_e V_p}$  augmente. Cependant, il est clair que l'évaporation fait sortir le système de son état d'équilibre et qu'il n'est plus correct en toute rigueur,

notamment si  $\eta$  n'est pas très grand, d'utiliser les résultats présentés en (2.32) et (2.33) pour obtenir ceux présentés en (2.37) et (2.38). Il faut donc décrire de manière précise l'état du système en train d'évoluer et voir si l'on peut pour cela introduire des nouvelles variables effectives, comme par exemple une température effective.

### b) Distribution de Boltzmann tronquée et quasi-équilibre

L'évolution de la fonction de distribution  $f(\varepsilon)$  peut être décrite par l'équation de Boltzmann. Rappelons que l'équation de Boltzmann décrit la vitesse de variation de la fonction de distribution classique  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ , définie dans l'espace des phases, d'un gaz d'atomes sous l'effet des divers facteurs qui la font évoluer : mouvement libre de ces atomes dans le piège, et leurs collisions. L'équation de Boltzmann dans sa forme générale s'écrit :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}} U \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = I_{coll}(\vec{r}, \vec{p}, t) . \quad (2.40)$$

Le membre de gauche de l'équation (2.40) est la dérivée totale par rapport au temps de  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ , appelée encore "dérivée hydrodynamique", tandis que son membre de droite est l'intégrale de collisions, donnant la vitesse de variation de  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  due aux collisions élastiques binaires.  $I_{coll}$  dépend de  $f$  et de la section efficace de collision élastique  $\sigma$ . L'équation (2.40) est donc une équation intégro-différentielle. Elle permet a priori de déterminer l'évolution de  $f$  dans un potentiel tronqué, mais il est difficile sans hypothèses supplémentaires d'extraire les solutions d'une telle équation. Nous faisons dans la suite une hypothèse simplificatrice dite d'ergodicité suffisante. On suppose supposant que  $f(\vec{r}, \vec{p})$  ne dépende que de l'énergie d'un atome  $\varepsilon = h(\vec{r}, \vec{p})$ , avec :

$$h(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) , \quad (2.41)$$

c'est-à-dire qu'en tous les points d'une surface d'énergie  $\varepsilon$ ,  $f(\vec{r}, \vec{p})$  a la même valeur  $f(\varepsilon)$ . Une telle situation est réalisée si le mouvement d'un atome dans  $U(\vec{r})$  est ergodique. En effet, un tel mouvement, en l'absence d'interactions avec les autres atomes, s'effectue sur une surface d'énergie  $\varepsilon$ , puisque  $h(\vec{r}, \vec{p})$  est une constante du mouvement. Si le mouvement est ergodique, au bout d'un temps suffisamment long, l'atome aura exploré

uniformément tous les points de la surface d'énergie  $\varepsilon$ , et la fonction de distribution sera uniforme sur toute cette surface. En réalité, à cause des symétries du potentiel  $U$ , le mouvement d'un atome isolé n'est pas ergodique parce qu'il peut être limité à certaines zones de la surface  $\varepsilon$ . On supposera cependant que les interactions entre atomes rendent le mouvement suffisamment ergodique pour que l'hypothèse " $f(\vec{r}, \vec{p})$  ne dépend que de l'énergie  $\varepsilon = h(\vec{r}, \vec{p})$ " soit valable.

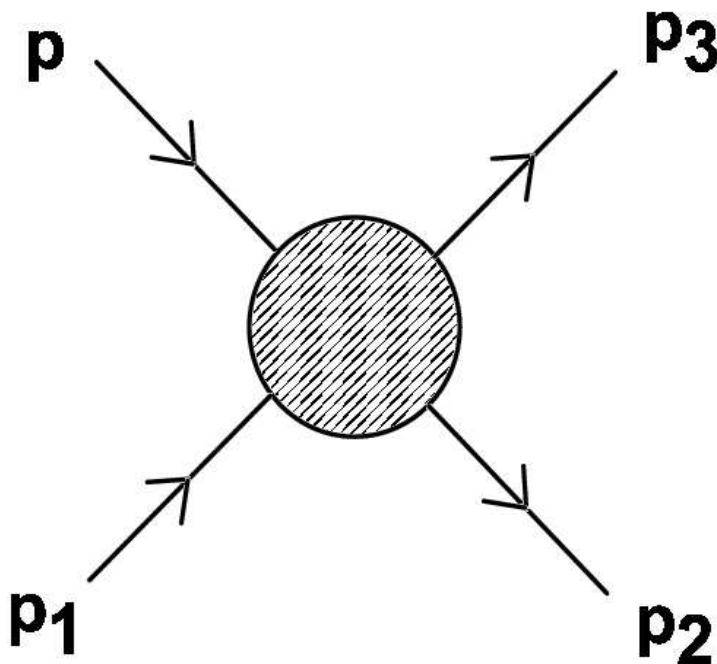


FIG. 2.6 – Convention pour les collisions élastiques dans l'intégrale de collision. Les atomes entrant ont les quantités de mouvement  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , et les atomes après la collision ont les quantités de mouvement  $\vec{p}_2$  et  $\vec{p}_3$ .

Une telle hypothèse a permis de mettre l'équation cinétique de Boltzmann (2.40) sous une forme considérablement simple. En effet, avec les notations de la figure (2.6), l'équation de Boltzmann (2.40) peut s'exprimer sous la forme simple d'une équation d'évolution de la densité  $\rho(\varepsilon)$  dans l'espace des phases :

$$\rho(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon) = \frac{8\pi m\sigma}{h^3} \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 \delta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon) [f(\varepsilon_2) f(\varepsilon_3) - f(\varepsilon_1) f(\varepsilon)] \rho(\varepsilon_{min}) \quad (2.42)$$

où  $\varepsilon_{min} = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ,  $\rho(\varepsilon)$  est la densité d'état, et  $\dot{f}(\varepsilon) = \frac{df(\varepsilon)}{dt}$ . L'équation (2.42) peut être utilisée pour décrire l'évolution dans le temps de la fonction de distribution  $f(\varepsilon)$  d'un gaz d'atomes piégés subissant un refroidissement évaporatif. On suppose dans ce cas que tous les atomes atteignant une énergie supérieure à l'énergie seuil  $\varepsilon_t$  s'échappent du piège et sont éliminés. Ceci revient à imposer la condition aux limites  $f(\varepsilon) = 0$  pour  $\varepsilon \geq \varepsilon_t$ . Une résolution numérique, par la méthode d'Euler, de l'équation (2.42) [80] conduit pour la solution de cette équation à une expression bien représentée par une distribution de Boltzmann  $f(\varepsilon)$  tronquée à  $\varepsilon = \varepsilon_t$  :

:

$$f(\varepsilon) \simeq z e^{-\varepsilon/k_B T} Y(\varepsilon_t - \varepsilon) \quad (2.43)$$

où  $Y$  est la fonction saut ( $Y = 0$  pour  $\varepsilon \geq \varepsilon_t$ , et  $Y = 1$  pour  $\varepsilon < \varepsilon_t$ ),  $z$  un paramètre de normalisation analogue à une fugacité,  $T$  température effective. Un tel résultat décrit l'état dynamique du nuage piégé en évaporation, et demeure valable pour d'autres types de potentiel de piégeage  $U(\vec{r})$  (carré, linéaire).

Toutefois, l'état de  $f(\varepsilon)$  décrit par (2.43) ne représente pas un vrai état d'équilibre. La résolution numérique de l'équation cinétique [80] montre que  $T$  et  $N$  varient. Cette variation est due au processus d'évaporation. On suppose cependant qu'il y a deux échelles de temps dans le problème : le temps d'évaporation  $\tau_{ev}$ , très long devant le temps  $\tau_{el}$  séparant deux collisions élastiques subies par le même atome. En d'autres termes,  $T$  et  $N$  varient suffisamment lentement à cause de l'évaporation pour que, à chaque instant, un quasi-équilibre ait le temps de s'établir après quelques collisions élastiques. A une échelle de temps, courte devant  $\tau_{ev}$ , mais longue devant  $\tau_{el}$ , on peut considérer l'état décrit par (2.43) comme un état de quasi-équilibre. Dans tel état, le nuage atomique peut être décrit à chaque instant, par les trois variables :

$T$  : température effective ;

$\varepsilon_t$  : profondeur du puits de piégeage ;

$z$  : paramètre de normalisation, analogue à une fugacité ou à un paramètre de dégénérescence, relié au nombre total  $N$  d'atomes.

Le fait que l'état de quasi-équilibre du nuage atomique piégé puisse être valablement décrit à chaque instant par une exponentielle de Boltzmann



et par les trois variables  $T$ ,  $\varepsilon_t$  et  $N$  relié au  $z$ , permet de calculer toutes les grandeurs physiques importantes, comme  $E$ ,  $N$  ..., en fonction des paramètres :  $\eta$ ,  $\delta$ , .... Par exemple, le calcul de l'énergie totale du nuage atomique en évaporation  $E$  donne :

$$E = N \tilde{c} k_B T \quad (2.44)$$

avec :

$$\tilde{c} = \left( \frac{3}{2} + \delta \right) R \left( \frac{3}{2} + \delta, \eta \right) \quad (2.45)$$

où  $R$  est un quotient de deux fonctions gamma incomplètes. De plus, à l'aide de la description de l'état du nuage atomique en évaporation par l'équation (2.43), on peut envisager une étude analytique de l'évolution dans le temps du processus du refroidissement évaporatif, et exprimer l'évolution temporelle des grandeurs physiques :  $N$ ,  $n$ ,  $v$ ,  $D$ , ... en fonction des paramètres  $\eta$  et  $\delta$  [81, 70]

### 2.3.4 Evolution temporelle de $n$ , $v$ , et $D$ au cours du refroidissement évaporatif

Le processus du refroidissement évaporatif du nuage atomique piégé s'accompagne par des pertes d'atomes dues aux collisions des atomes du nuage piégé avec le gaz résiduel (collisions inélastiques), à l'évaporation (collisions élastiques entre atomes) et au déversement (échappement d'atomes d'énergie égale à  $\varepsilon_t$  lorsqu'on abaisse volontairement la hauteur  $\varepsilon_t$  de troncature du puits piégeant). Le bilan de ces pertes s'écrit, pour  $dN \ll N$  :

$$\frac{dN}{dt} = \left( \frac{dN}{dt} \right)_{res} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_{evap} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_{dev} , \quad (2.46)$$

où les trois termes représentent les pertes par collisions entre atomes piégés et ceux du gaz résiduel, évaporation et déversement (spilling) respectivement. Par définition,

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{res} = -\frac{N}{\tau_{vie}} \quad (2.47)$$

et,

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{dev} = -\Gamma_{dev} N \quad , \quad \text{avec} \quad : \quad \Gamma_{dev} = -\tilde{\xi} \frac{\dot{\varepsilon}_t}{\varepsilon_t} . \quad (2.48)$$

Dans le cas particulier du piège harmonique isotrope,  $\tilde{\xi} = 3(1 - R(3, \eta))$ . Pour trouver le taux de pertes par évaporation, il suffit de calculer à l'aide

de (2.42), l'expression :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{evap} = - \int_{\varepsilon_t}^{\infty} \rho(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon) d\varepsilon . \quad (2.49)$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{evap} = -\Gamma_{evap} N , \text{ avec } : \Gamma_{evap} = \Gamma_{el} e^{-\eta} \varsigma , \quad (2.50)$$

où  $\Gamma_{el} = n_0 \sigma v / 2$  est le taux de collisions élastiques pour un gaz dans un piège de profondeur infinie,  $v = \sqrt{8k_B T / \pi m}$  la vitesse thermique moyenne,  $\sigma$  section efficace, et  $\varsigma$  une fonction de  $\eta$  qui vaut dans le cas particulier du potentiel harmonique isotrope :  $\varsigma = 2\eta - 8R(3, \eta)$ . Notons que si  $\eta \gg 1$  alors l'expression (2.50) s'écrit dans le cas du potentiel harmonique isotrope :

$$\frac{\Gamma_{evap}}{\Gamma_{el}} \simeq 2\eta e^{-\eta} . \quad (2.51)$$

La décroissance en  $e^{-\eta}$  l'emporte sur le facteur  $\eta$  pour  $\eta$  grand. Le taux d'évaporation  $\Gamma_{evap}$  décroît donc exponentiellement avec la profondeur du puits exprimée en unités de  $k_B T$ .

L'énergie mécanique totale est de même modifiée sous l'effet des trois contributions :

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{res} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{evap} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{dev} \quad (2.52)$$

Pour le premier terme, on peut écrire immédiatement :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{res} = -\frac{E}{\tau_{vie}} = -\Gamma_{inel} E \quad (2.53)$$

Pour calculer la variation d'énergie par déversement, il suffit de noter que l'énergie des particules qui s'échappent quand on abaisse  $\varepsilon_t$  est égale à  $\varepsilon_t$ , de sorte que :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{res} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{res} \varepsilon_t . \quad (2.54)$$

Pour connaître la variation d'énergie liée à l'évaporation, il faut calculer :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{evap} = - \int_{\varepsilon_t}^{\infty} \rho(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon) d\varepsilon . \quad (2.55)$$

On montre après quelques lignes de calculs que :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{evap} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{evap} (\eta + \tilde{\kappa}) k_B T = -\Gamma_{evap} \frac{\eta + \tilde{\kappa}}{\tilde{c}} E \quad (2.56)$$

où  $\tilde{\kappa}$  et  $\tilde{c}$  ne dépendent que de  $\eta$ . On obtient les relations suivantes :  $\tilde{\kappa} = 1 - P(5, \eta)/(\eta P(3, \eta) - 4P(4, \eta))$  et  $\tilde{c} = 3R(3, \eta)$ .  $\tilde{\kappa}$  a une valeur toujours comprise entre 0 et 1, ce qui traduit le fait que les particules qui s'évaporent ont une énergie moyenne au plus de  $k_B T$  au dessus de la hauteur de la barrière de potentiel.

### 2.3.5 Cas de $\eta = \text{constant}$

Les équations des paragraphes précédents font intervenir toute une série de coefficients comme  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{\kappa}$ ,  $\tilde{\eta}$ ..., qui ne dépendent que de  $\eta = \frac{\varepsilon_t}{k_B T}$ , via des fonctions gamma incomplètes  $P(a, \eta)$ .

Si l'on suppose que  $\eta$  reste constant quand on abaisse  $\varepsilon_t$  pour forcer l'évaporation, tous ces coefficients sont indépendents du temps et la résolution des équations d'évolution de  $E, N$ , et  $T$  est grandement simplifiée. On peut même obtenir des solutions analytiques pour décrire l'évolution temporelle. La relation (2.44) sur l'énergie s'écrit sous forme différentielle ( $\tilde{c} = \text{constante}$ , car  $\eta = \text{constante}$ ) :

$$\frac{\dot{E}}{E} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T} . \quad (2.57)$$

Les trois relations (2.57), (2.52), (2.46) forment un système fermé d'équations sur  $E$ ,  $T$ , et  $N$ . Notons que ces équations sont intrinsèquement non-linéaires à cause des termes liés à l'évaporation. Ces termes font intervenir le taux de collisions  $\Gamma_{el}$  qui dépend de  $T$  et de  $N$  via la vitesse thermique  $v$  et  $n_0$  la densité centrale. Ces relations peuvent se réduire à un système de deux équations à deux inconnues sur la densité et la vitesse thermique. Introduisons les variables adimensionnées  $\hat{n} = n_0(t)/n_0(0)$ ,  $\hat{v} = v(t)/v(0)$  et le temps  $\hat{t}$  normalisé au temps de collision initial  $\hat{t} = t/\tau_0$ , où  $\tau_0^{-1} = n_0 v(0) \sigma / 2 = \Gamma_{el}$ . On établit par réarrangement des relations (2.57), (2.52), (2.46) le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{n}} \frac{d\hat{n}}{d\hat{t}} = A\hat{n}\hat{v} - r \\ \frac{1}{\hat{v}} \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = -B\hat{v}\hat{n} \end{cases} \quad (2.58)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions du seul paramètre  $\eta$ .  $r$  est le rapport entre le temps de collision initial  $\tau_0$  et la durée de vie du piège  $\tau_{vie}$  ( $r = \frac{\tau_0}{\tau_{vie}} =$

$\frac{\Gamma_{inel}}{\Gamma_{el}}$ ). L'interprétation physique de ce système est évidente. La variation relative de vitesse est proportionnelle au taux de collisions élastiques  $\hat{\Gamma}_{el} = \sigma \hat{n}\hat{v}/2 \propto \hat{n}\hat{v}/2$  ( $\sigma$  est la section efficace, indépendante de  $v$  à  $T \simeq 0$ ). La variation relative de densité résulte de deux contributions antagonistes : Les variations liées à l'évaporation, proportionnelles également au taux de collisions élastiques moyen, et les pertes liées aux collisions avec le gaz résiduel. On établit les expressions de  $A$  et  $B$  pour  $\delta = 3/2$  (piège harmonique) :

$$\begin{cases} A = \frac{3\hat{\alpha} - 2}{2(1 - \hat{\alpha}\hat{\xi})}(\eta - 4R(3, \eta))e^{-\eta} \\ B = \frac{\hat{\alpha}}{2(1 - \hat{\alpha}\hat{\xi})}(\eta - 4R(3, \eta))e^{-\eta} > 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $\hat{\alpha} = (\eta + \hat{\kappa} - \hat{c})/(\hat{c} + \hat{\xi}\hat{\kappa})$ . Le système (2.58) correspondant à  $\eta = \text{constante}$ , va nous permettre de faire ressortir les facteurs importants du refroidissement évaporatif. En effet, la résolution directe du système (2.58) conduit aux expressions analytiques de  $\hat{n}$  et  $\hat{v}$  :

$$\begin{cases} \hat{n} = e^{-rt} \left[ 1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt}) \right]^{-A/(A-B)} \\ \hat{v} = \left[ 1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt}) \right]^{B/(A-B)} \end{cases} \quad (2.60)$$

En posant :  $\beta = \frac{A}{B}$ , les expressions précédentes de  $\hat{n}$  et  $\hat{v}$  (2.60) prennent la forme :

$$\begin{cases} \hat{n} = \frac{e^{-rt}}{\left[ 1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt}) \right]^{\beta/(\beta-1)}} \\ \hat{v} = \left[ 1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt}) \right]^{1/(\beta-1)} \end{cases} \quad (2.61)$$

Notons enfin que toute grandeur physique peut être exprimée en fonction de  $\hat{n}$  et  $\hat{v}$ , et son évolution temporelle se déduit donc de (2.61) ou (2.60).

Par exemple :  $N$ ,  $T$ ,  $\Gamma_{el}$  et  $D = n \lambda^3_T$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{N} = \hat{n} \hat{V}_e \propto \hat{n} \hat{T}^\delta \propto \hat{n} \hat{v}^{2\delta} = \frac{e^{-rt}}{\left[1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt})\right]^{(\beta-2\delta)/(\beta-1)}} \\ \hat{T} \propto \hat{v}^2 = \left[1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt})\right]^{2/(\beta-1)} \\ \hat{\Gamma}_{el} \propto \hat{n} \hat{v} = \frac{e^{-rt}}{\left[1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt})\right]} \end{array} \right. \quad (2.62)$$

et

$$\hat{D} \propto \hat{n} \hat{v}^{-3} = \frac{e^{-rt}}{\left[1 - \frac{2(A-B)}{r}(1 - e^{-rt})\right]^{(\beta+3)/(\beta-1)}} \quad (2.63)$$

Les expressions précédentes : (2.61), (2.62) et (2.63) montrent que dans le cas d'un piège harmonique, l'évolution temporelle des grandeurs physiques  $n$ ,  $v$ ,  $D$ ,... dépend de valeurs des paramètres :  $A$ ,  $B$  et  $r$  associés à  $\eta = \text{constant}$ .

### 2.3.6 Régime d'emballement et seuil de condensation de B-E

Notons au préalable que le crochet figurant dans les expressions des grandeurs physiques précédentes  $n$ ,  $v$ ,  $D$ ,... est le même et contient le facteur :  $\frac{2(A-B)}{r}$ . On remarque que les variations temporelles de  $n$ ,  $\Gamma$ , et  $D$  dépendent essentiellement de leur dénominateur et plus particulièrement des valeurs de ce facteur. En effet, si  $2(A-B) < r$ , alors le dénominateur de  $n$ ,  $\Gamma$ , et  $D$  ne s'annule jamais et croît de 1 à :  $1 - 2(A-B)/r > 0$ , mais leur numérateur s'annule exponentiellement. Si  $2(A-B) = r$ , alors les grandeurs  $n$ ,  $\Gamma$ , et  $D$  décroissent de 1 à 0. Finalement, si  $2(A-B) > r$ , alors le dénominateur de  $n$ ,  $\Gamma$ , et  $D$  décroît à partir de 1 et s'annule pour une certaine valeur de  $t$  telle que :  $e^{-rt} = 1 - \frac{r}{2(A-B)}$ . L'exponentielle amortie du numérateur, n'empêche pas :  $n$ ,  $\Gamma$ , et  $D$  de diverger au bout d'un temps fini donné par :

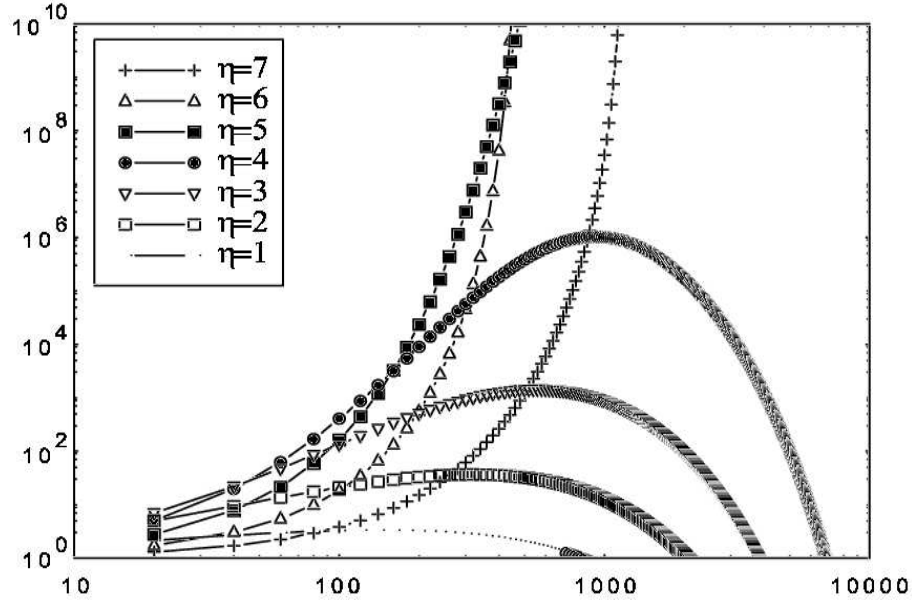


FIG. 2.7 – Evolution de la densité dans l'espace des phases normalisée  $\frac{D}{D_0}$  en fonction du temps en unité de temps de collision initiale  $\frac{\tau}{\tau_0}$  pour différents  $\eta$ ; on a choisi  $1/r = 200$ .

$$t_{div} = -\frac{1}{r} \ln \left[ 1 - \frac{r}{2(A-B)} \right]. \quad (2.64)$$

La divergence de  $n$ ,  $\Gamma$ ,  $D$  est qualifiée du régime d'emballement. Il reflète le caractère nonlinéaire de la dynamique du refroidissement évaporatif. Pour le temps  $t_{div}$ , la vitesse moyenne thermique  $v$  s'annule à  $T = 0$ . On voit que la condition de réalisation du régime d'emballement fait intervenir le paramètre  $\eta$  à travers  $2(A - B)$ , et les taux de collisions par le biais de  $r = \frac{\Gamma_{inel}}{\Gamma_{el}}$ .

La figure (2.7) [82] représente, dans le cas particulier où  $r = 1/200$ , l'évolution de la densité dans l'espace des phases  $D$  normalisée à sa valeur initiale  $D_0$ , en fonction du temps normalisé au temps de collision initial  $\tau_0$ , pour différentes valeurs de  $\eta$ . Il apparaît clairement que pour un  $\eta$  bien choisi, ici de l'ordre de 5, un gain important dans l'espace des phases peut être obtenu par évaporation. Par exemple, un gain de 8 ordres de grandeur en un temps de l'ordre de  $350\tau_0$ . Le temps nécessaire est de l'ordre de

grandeur de la durée de vie  $\tau_0$  du piège.

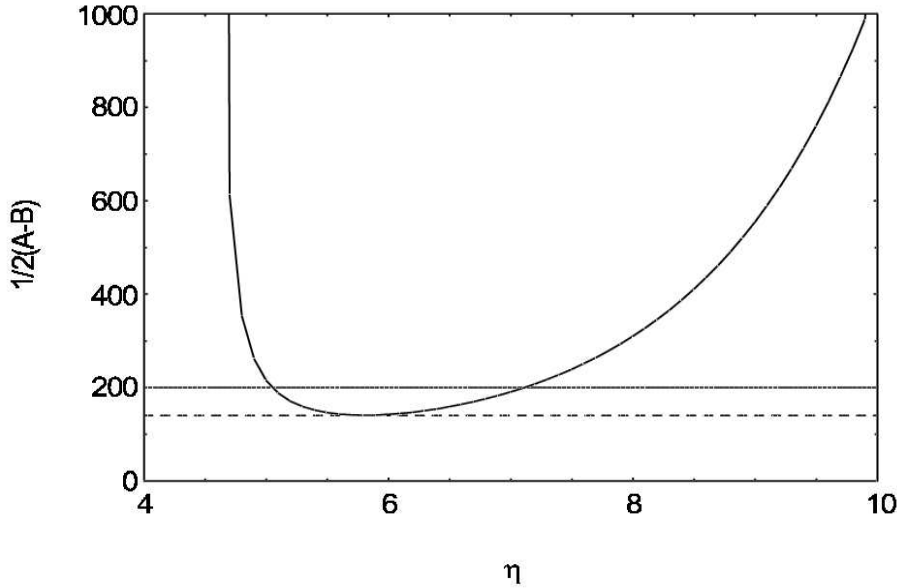


FIG. 2.8 – Courbe de variation de  $\frac{1}{2(A-B)}$  en fonction de  $\eta$ . La droite horizontale en trait plein correspond à  $1/r = 200$ . La droite en pointillés correspond à la valeur seuil pour l’emballement  $1/r_c = 140$ .

La figure (2.8) [82] représente la dépendance de  $\frac{1}{2(A-B)}$  au paramètre  $\eta$ , pour  $1/r = 200$  correspondant au cas particulier de la figure (2.7). La figure (2.8) permet l’estimation des valeurs optimales de  $\eta$ . En effet, on voit que l’emballement a lieu pour le cas particulier  $1/r = 200$ , dans la région :  $\eta \simeq 5$  à  $\eta \simeq 7$ . On observe clairement cette transition sur les courbes de la figure (2.7) représentant l’évolution de la densité dans l’espace des phases en fonction du temps pour différentes valeurs de  $\eta$ . L’emballement apparaît dans les mêmes conditions pour d’autres quantités comme le taux de collisions élastique  $\Gamma_{el}$ . Sur la figure (2.8), on voit qu’il ne peut pas y avoir d’emballement si :  $\frac{1}{r} < \frac{1}{r_c} \simeq 140$ . Si  $\frac{1}{r}$  est supérieur à  $\frac{1}{r_c}$ , il pourra y avoir emballement si  $\eta$  est compris entre les deux abscisses d’intersection de la courbe  $\frac{1}{2(A-B)}$  et de l’horizontale  $\frac{1}{r}$ . La condition d’emballement :  $2(A-B) > r$  est équivalente à :  $\frac{1}{r} > \frac{1}{r_c}$  ou  $r > r_c$ , et s’écrire :  $r < 1/140 \simeq 0.007$ . Cette dernière relation montre bien qu’il faut que  $r$  soit très petit

au début du refroidissement évaporatif ( $t = 0$ ). Or,  $r = \frac{\Gamma_{inel}}{\Gamma_{el}}$ . Il faut donc, d'une part diminuer au maximum  $\Gamma_{inel}$  c'est-à-dire augmenter la durée de vie du piège  $\tau_{vie}$  en réalisant une pression très poussée du gaz résiduel, et d'autre part augmenter  $\Gamma_{el}$  à  $t = 0$ . Techniquement, il est très difficile d'obtenir des pressions plus basses que  $10^{-11}$  torr, ce qui correspond à des durées de vie de l'ordre de la minute. Cependant, une compression adiabatique préalable du piège magnétique permet de gagner un facteur  $:g^{(4\delta/2\delta+3)}$  sur le taux de collisions  $\Gamma_{el}$  à  $t = 0$  sans changer la densité  $D$  dans l'espace des phases [69].

## 2.4 Observation directe des condensats de B-E 3D dilués et fini

Dans cette section, nous commençons par décrire les étapes expérimentales principales suivies pour réaliser la condensation de B-E du rubidium 87 dans un piège de Ioffé-Pritchard type trois bobines. Nous présentons ensuite les images représentant la formation des condensats de B-E à  $T < T_c$ .

### 2.4.1 Etapes expérimentales

Le schéma du dispositif expérimental est représenté sur la figure (2.9). Ce dispositif dans lequel la condensation de B-E du rubidium 87 a été réalisée au lkb (ENS-Paris) [82, 83], comprend le piège de Ioffé-Pritchard type trois bobines. Il fonctionne en un cycle expérimental d'une durée d'environ une minute au cours de laquelle s'enchaînent les opérations suivantes :

- **Création d'un jet d'atomes froids** (figure 2.9 (a)) : un piège magnéto-optique (PMO) est chargé dans la cellule de verre supérieure à partir d'une vapeur résiduelle de  $^{87}\text{Rb}$  de pression  $\sim 10^{-8}$  mBar. Un faisceau laser additionnel (faisceau pousseur) traverse le PMO du haut vers le bas, créant une direction de fuite pour les atomes [84]. On obtient un jet d'atomes froids quasi-monocinétique avec une vitesse typique de  $14 \text{ m.s}^{-1}$ .

- **Chargement du piège magnéto-optique inférieur** : les deux cellules communiquent via un capillaire de 20 cm à travers lequel passe le jet. Dans la cellule inférieure, où règne un vide poussé (mieux que  $\sim 10^{-11}$  mBar), un second PMO capture les atomes du jet. Il se remplit de quelque



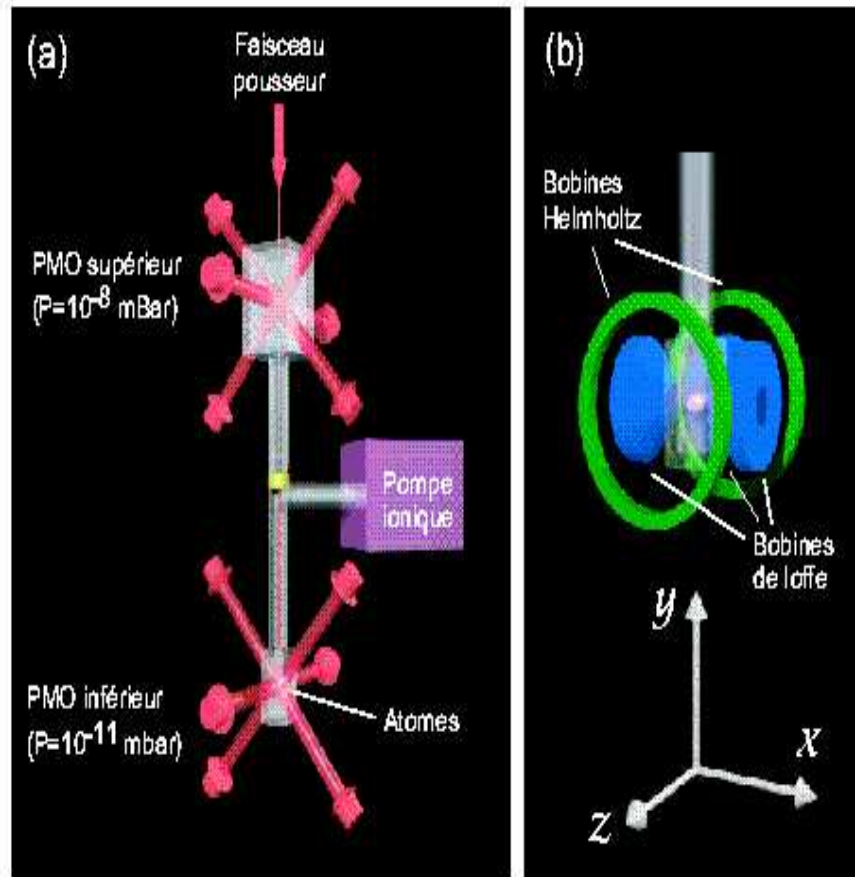


FIG. 2.9 – Dispositif expérimental. (a) Vue d'ensemble du système à deux cellules : seule la cellule inférieure est pompée par une pompe ionique. un vide différentiel est maintenu entre les deux cellules. Les bobines des pièges magnéto-optiques (PMO) ont été omises. (b) Piège magnétique. Ce piège est installé autour de la cellule inférieure. Après le chargement du PMO inférieur, les atomes sont transférés dans ce piège, puis refroidis par évaporation.

$10^9$  atomes en 15 secondes.

- **Transfert dans un piège magnétique** : après chargement du PMO inférieur, les champs magnétiques sont coupés et les atomes subissent une phase de mélasse optique de 10 ms. Du fait de mécanismes de refroidissement de type Sisyphe [85], la température de l'échantillon s'abaisse aux alentours de  $100\mu\text{K}$ . Les atomes sont alors pompés optiquement dans l'état  $|F = m_F = 2\rangle$ , puis transférés dans un piège magnétique de type Ioffé-Pritchard

(figure 2.9 (b)).

- **Refroidissement évaporatif** : alors que les atomes sont maintenus par le piège magnétique, on tronque celui-ci en appliquant une onde radiofréquence (rf) dont la fréquence  $\nu_{rf}(t)$  est scannée de 15 KHz à  $\sim 1$  MHz en  $\sim 30$  s telle que  $\varepsilon_t = 2h(\nu_{rf} - \nu(0))$  ( $\nu(0)$  étant la fréquence résonnante au fond du puits, et 2 pour :  $m_F = 1, m_F = 2$  ). Les atomes restants rethermalisent à une température inférieure. L'abaissement continu de Les atomes restants rethermalisent à une température inférieure. L'abaissement continu de Les atomes restants rethermalisent à une température inférieure. L'abaissement continu de  $\nu_{rf}$ . Cette onde a pour effet de coupler entre eux les différents sous-niveaux Zeeman sur la surface définie par  $\mu | \vec{B} | = h \nu_{rf}(t)$ . Les atomes les plus énergétiques qui sont amenés à croiser cette surface passent ainsi dans un état interne non-piégé et s'échappent du piège. Les atomes restants rethermalisent à une température inférieure. L'abaissement continu de  $\nu_{rf}$  permet d'atteindre le régime d'emballement pour lequel la densité dans l'espace des phases croît avec le temps.

- **Temps de vol et imagerie** : afin d'observer le nuage d'atomes, on procède en fin de cycle à un temps de vol (durée de coupure des champs magnétiques piégeants et de vol balistique, qui est de  $\sim 20$  ms), suivi d'une imagerie par absorption des nuages d'atomes condensés. La procédure d'imagerie par absorption consiste à allumer par un large faisceau laser le nuage d'atomes condensés pendant quelques dizaines de  $\mu s$ . L'absorption de la lumière laser résulte dans un trou dans le profil d'intensité du laser. Ce profil  $I$  tel qu'il est au niveau des atomes est conjugué au capteur CCD d'une caméra par un système optique.  $I$  est ensuite comparé à un profil de référence  $I_{ref}$ . Un traitement numérique simple sur ordinateur conduit à une image typique, pour laquelle chaque point correspond à la densité optique du nuage.

Les images des nuages d'atomes représentent toute l'information dont on dispose pour les analyser. Ces images ne sont que rarement prises lorsque les atomes sont piégés. En effet, aux températures les plus froides, les atomes occupent une région de l'espace de quelques microns, taille typique qu'il faut comparer aux  $5 \mu m$  de résolution spatiale de dispositif d'imagerie. La solution consiste à couper brutalement les champs magnétiques de piégeage afin de laisser le nuage s'étendre un peu : après 20 ms de temps de vol, le

nuage s'est considérablement dilaté de sorte qu'il devient possible d'en faire des images de qualité. Dans la plupart d'expériences, les images prises le long de l'axe de symétrie du piège sont appelées "images longitudinales", et les autres prises dans la direction orthogonale sont des "images transverses".

### 2.4.2 Observation directe de condensats de B-E 3D

La figure (2.10) [82] montre l'apparition du condensat de B-E dans la vapeur diluée de  $^{87}\text{Rb}$  confinée dans un piège 3D de Ioffé-Pritchard type trois bobines.

En effet, les images de l'étendue du nuage atomique prises par absorption après l'expansion balistique du piège magnétique, illustrent que le condensat commence à apparaître lorsque la radiofréquence approche le fond du puits (le fond du puits est à 1380 kHz). Les coupes de ces images mettent en évidence une structure clairement bimodale de l'étendue du condensat : le nuage thermique (images transverses), et un pic central (images longitudinales) correspondant au condensat. La première image (en haut) de cette figure, prise à une température  $T$  supérieure à la température critique  $T_c$  et pour une onde radiofréquence de  $\nu_{rf} = 1440$  kHz, montre un nuage thermique quasi-sphérique, c'est-à-dire une distribution en vitesse quasi-isotrope comme attendu à partir de l'équipartition d'énergie pour un gaz bien décrit par la statistique classique de Boltzmann. Au contraire, les images suivantes prises pour une température  $T$  inférieure à  $T_c$  montrent qu'un pic au centre se développe, et que la partie thermique diminue en prenant une forme elliptique d'autant plus que  $\nu_{rf}$  s'approche du fond de puits piégeant. La forme elliptique du nuage atomique condensé révèle le fait que la distribution en vitesse des atomes est fortement anisotrope. La direction la plus fortement confinée dans le piège magnétique étant celle ayant la plus grande dispersion en vitesse. Nous montrerons dans le chapitre (III) que cette anisotropie résulte de la conversion de l'énergie d'interaction entre atomes du condensat en énergie cinétique transverse, lors de la coupure du piège de confinement.

La figure (2.11) représente les images tridimensionnelles des premiers condensats de B-E réalisés en 1995 dans des vapeurs diluées et piégées 3D d'atomes ultrafroids de  $^{87}\text{Rb}$  (en haut) [17], et de  $^{23}\text{Na}$  (en bas) [18].

Ce type d'images permet d'obtenir des informations quantitatives sur

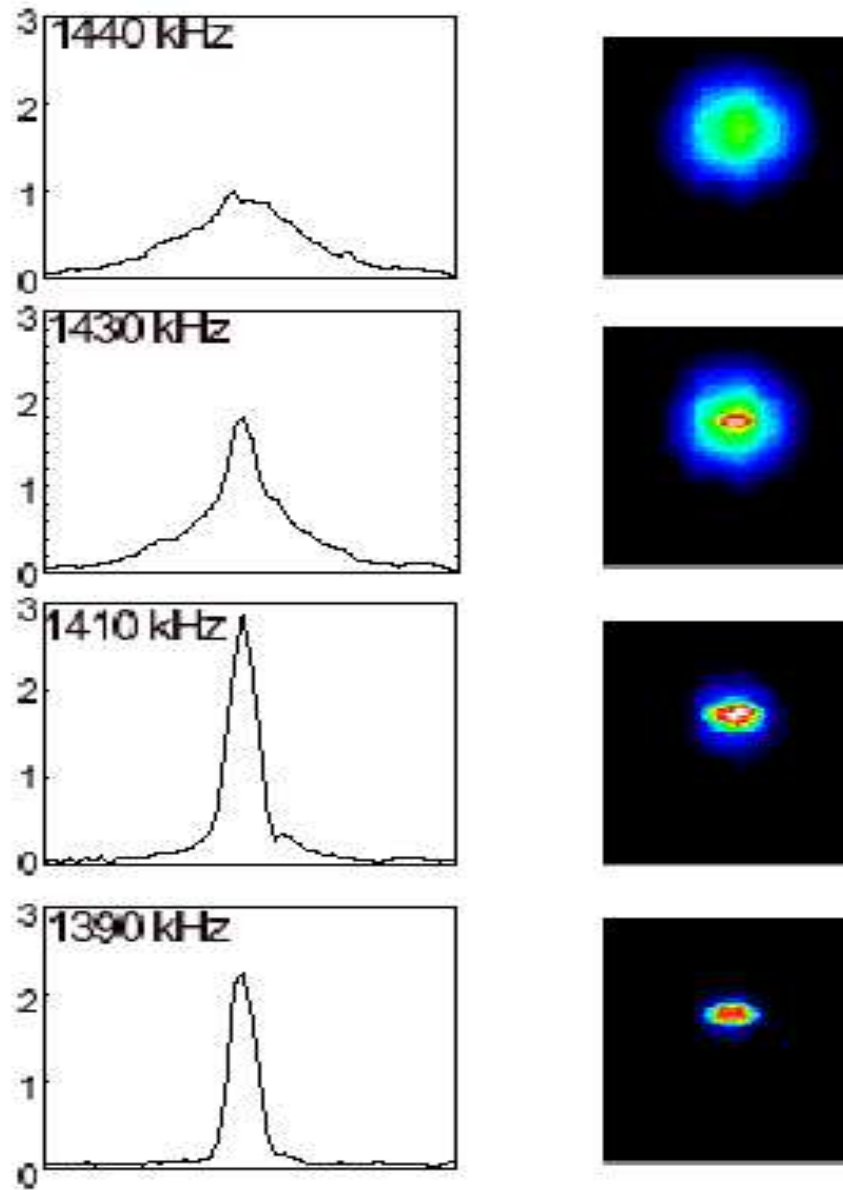
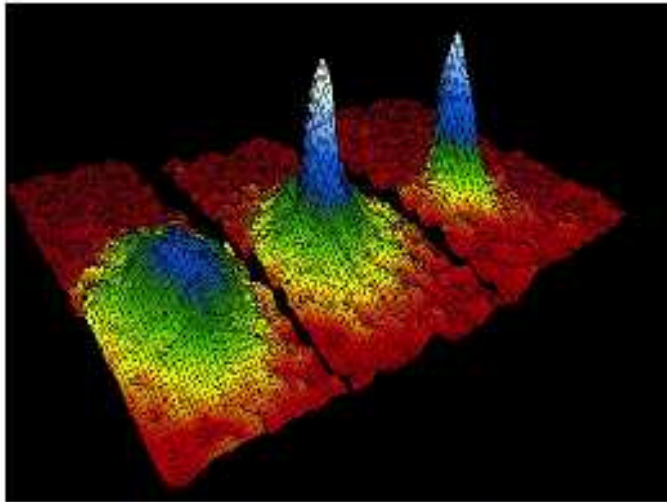


FIG. 2.10 – Apparition du condensat lorsque la radiofréquence approche le fond du puits. Les images sont prises après expansion balistique de 25 ms. Le fond du puits est à 1380 kHz.

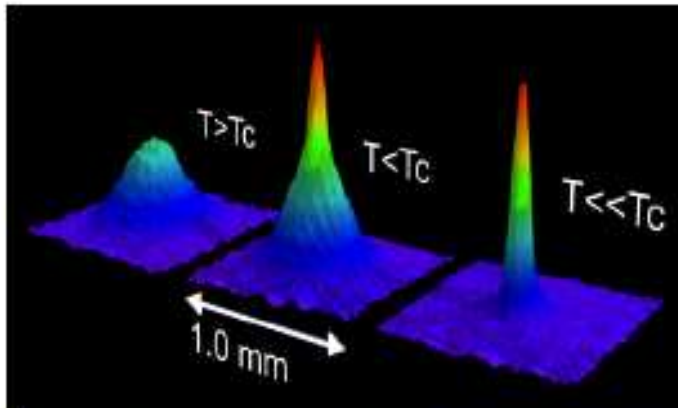
les condensats, comme le nombre d'atomes et la température résiduelle associée à la fraction d'atomes non condensés. On a ainsi vérifié avec une très bonne précision (quelques %) que la température de la transition  $T_c$  était effectivement donnée par :  $n\lambda_T^3 \simeq 2.612$ . On a également pu produire des

JILA



Science, 269, 198 (1995)

MIT



Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995)

FIG. 2.11 – Images des premiers condensats réalisés en 1995 dans des vapeurs piégés 3D des atomes de rubidium 87 au JILA par le groupe de Wieman et Cornell, et de sodium 23 au MIT par le groupe de Ketterle. Le nuage condensé se manifeste comme le pic central sur les deux images de droite. De gauche à droite, les images correspondent à une température légèrement supérieure à  $T_c$ , juste inférieure à  $T_c$  et bien inférieure à  $T_c$ .

condensats pratiquement purs, dans lesquels la fraction non condensée ne dépasse pas 15 % du nombre total d'atomes (en dessous de cette valeur, elle devient très difficile à mesurer).

## 2.5 Conclusion, nouveaux domaines de recherche

Nous avons présenté dans ce deuxième chapitre le développement avec succès autant théorique qu'expérimentale, des techniques de piégeage et de refroidissements magnéto-optique et évaporatif de systèmes gazeux d'atomes alcalins. Ces techniques ont conduit à la réalisation expérimentale remarquable de la condensation de B-E et à la production des condensats gazeux dilués d'atomes alcalins bosoniques ultrafroids dans des pièges magnétiques 3D. Après l'obtention de ces condensats B-E, beaucoup d'études expérimentales de leurs propriétés aussi macroscopiques que microscopiques ont été réalisées. Les résultats de ces études sont très proches de ceux obtenus à partir du modèle d'un gaz idéal de bosons, et confirment d'une manière irréfutable la validité de l'ensemble de prédictions théoriques formulées à base de concepts quantiques et statistiques purs.

La figure (2.12) représentant la variation de la fraction condensée  $N/N_0$  en fonction de  $T/T_c$  montre la bonne concordance entre le résultat expérimental obtenu à partir d'un condensat dilué de B-E et celui prédit théoriquement par le modèle d'un gaz idéal de bosons [28].

De plus, la découverte des condensats de B-E a marqué la relance et la naissance de plusieurs branches d'études physiques des phénomènes de nature purement quantiques, notamment en physique des atomes ultrafroids : condensats de Bose, condensats de Fermi, laser à atomes, et en physique des fluides quantiques : la superfluidité, la supraconductivité, les excitations types : vortex, solitons ... .

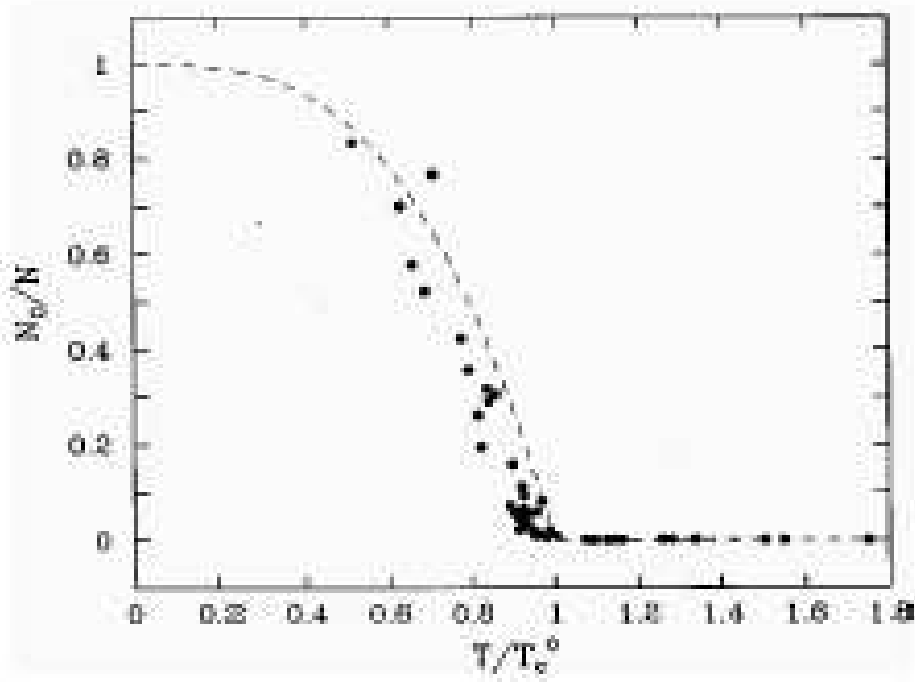


FIG. 2.12 – Variation de  $N_0/N$  en fonction de  $T/T_c^0$ . La courbe en pointillée correspond à la prédiction théorique basée sur le modèle d'un gaz idéal de bosons. Les petits cercles noirs représentent la variation expérimentale de  $N_0/N$  en fonction de  $T/T_c^0$  en partant d'un gaz dilué de bosons.





# Chapitre 3

## Description dynamique des condensats de B-E, équation de Gross-Pitaevskii (G-P)

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que la densité dans l'espace des phases  $D$  du gaz d'atomes bosoniques non condensés à  $T > T_c$  était suffisamment faible ( $D = n\lambda_{dB}^3 \ll 1$ ), de telle sorte que l'on puisse négliger les interactions mutuelles entre atomes. Or, au delà du seuil de condensation, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_{dB}$  excède, à la température  $T < T_c$ , la distance moyenne  $d$  entre plus proche voisins ( $d = n^{-1/3}$ ) :  $\lambda_{dB} > n^{-1/3}$ , le gaz d'atomes bosoniques entre dans le régime de dégénérescence quantique avec apparition du condensat de B-E. Nous avons également montré que le régime de dégénérescence ne peut être atteint que grâce au refroidissement évaporatif qui fait intervenir les collisions élastiques entre les atomes bosoniques.

Dans de ce chapitre, nous allons présenter le modèle théorique formulé au début des années 1960 [10], et qui décrit l'évolution dynamique d'un condensat de B-E dilué d'atomes bosoniques ultrafroids et en faibles interactions. Nous verrons dans la section (3.1) qu'à très basse température (très basse énergie), les collisions élastiques binaires entre atomes bosoniques peuvent être paramétrisées par un seul paramètre microscopique : la longueur de diffusion notée  $a$ . Nous montrerons dans la section (3.2) que chaque collision binaire peut être décrite par un potentiel effectif de contact en  $\delta(r)$ .

Dans la section (3.3), nous présenterons l'équation de GP décrivant, à l'approximation de champ moyen, l'évolution dynamique spatio-temporelle d'un condensat de B-E dilué et à  $T \simeq 0$ . La section (3.4) sera consacrée à la forme hydrodynamique de l'EGP, ainsi qu'aux concepts de vortex, de vitesse du son, de superfluidité et de critère de Landau. Nous décrivons dans la section (3.5) l'effet des interactions sur la stabilité et la structure répulsive ( $a > 0$ ) et attractive ( $a < 0$ ) d'un condensat de B-E. Nous présentons d'une manière très rapide la méthode expérimentale de Feshbach permettant de changer l'amplitude et le signe de  $a$ . Nous terminerons cette section par présenter l'approximation de Thomas-Fermi et la longueur de cohérence. Finalement, nous montrerons dans la section (3.6) le bon accord entre l'EGP et l'expérience, et nous donnerons une conclusion.

### **3.1 Collisions binaires entre bosons atomiques à très basse énergie**

Nous avons montré (chapitre.2) qu'un condensat de B-E à  $T \leq T_c$  ne peut se réaliser que dans un système fini (piège) d'atomes bosoniques en interactions faibles sous forme de collisions élastiques. Le concept de faibles interactions a été initialement introduit par Bogoliubov [8] dans le but d'étudier les excitations élémentaires produites dans un gaz de Bose quasi-parfait. De plus, Les atomes bosoniques formant un condensat de B-E à  $T \leq T_c$  sont en interactions faibles amenant à des collisions. il a été théoriquement admis [8, 10], puis expérimentalement vérifié (JILA) [31], que les collisions élastiques entre atomes bosoniques dans un condensat dilué de B-E sont binaires, limitées à l'onde  $s$  (onde sphérique associée à  $l = 0$ ), et peuvent être caractérisées par un seul paramètre microscopique : la longueur de diffusion en onde  $s$  notée  $a$ . Pour dégager la physique des collisions d'atomes bosoniques froids, nous allons sommairement rappeler les résultats importants de la théorie des collisions élastiques en mécanique quantique [88].

### 3.1.1 Collisions élastiques binaires : description générale

#### a) Hamiltonien

Considérons deux atomes discernables (1) et (2) de même masse  $m$ , interagissant par le potentiel  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . On suppose que cette interaction ne modifie pas leur état quantique interne. Le mouvement des deux atomes est alors décrit par l'hamiltonien  $H$  :

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) , \quad (3.1)$$

ou, si l'on se place dans le référentiel barycentrique :

$$H = \frac{P_G^2}{4m} + \frac{p^2}{m} + V(\vec{r}) , \quad (3.2)$$

avec :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 , \quad \vec{p} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2 , \quad \vec{R}_G = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 \quad \text{et} \quad \vec{P}_G = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2$$

L'expression (3.2) de  $H$  montre que l'étude du mouvement des deux atomes dans le référentiel barycentrique fait découpler le problème à deux corps en deux problèmes à un corps, c'est-à-dire en deux mouvements à une particule : i) le mouvement du centre de masse qui est équivalent au mouvement d'une particule libre de masse  $2m$ , de position  $\vec{R}_G$  et d'impulsion  $\vec{P}_G$ , et ii) le mouvement relatif dans le système du centre de masse d'une particule fictive, la particule relative, de masse réduite  $m_r = m/2$ , de position relative  $\vec{r}$  et de d'impulsion relative  $\vec{p}$ . La dynamique de la collision est donc entièrement contenue dans l'évolution du mouvement relatif, ce qui revient à étudier le mouvement de la particule fictive de masse  $m_r = m/2$  diffusée par le potentiel  $V(\vec{r})$ . Dans tout ce qui suit, nous négligerons les faibles effets liés à l'interaction spin-spin et spin-orbite.

#### b) Fonctions propres

Pour décrire quantiquement le processus de diffusion d'une particule incidente par le potentiel diffusant  $V(\vec{r})$ , il faut a priori poser :  $\vec{p}_1 = \hbar \vec{k}_1$

,  $\vec{p}_2 = \hbar \vec{k}_2$  ,  $\vec{P}_G = \hbar \vec{K}_G$  , et  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  , puis étudier ensuite le comportement au cours du temps du paquet d'ondes qui représente l'état de cette particule. Les caractéristiques de ce paquet d'ondes sont supposées connues pour les temps  $t$  grands et négatifs où la particule n'a pas encore été affectée par le potentiel. On sait que l'évolution ultérieure du paquet d'ondes s'obtient immédiatement si on l'exprime comme une superposition d'états stationnaires. C'est la raison pour laquelle on étudie l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien du mouvement relatif, et on raisonne directement sur ces états stationnaires et non sur le paquet d'ondes. Les états propres  $\psi_k(\vec{r})$  associés à l'hamiltonien du mouvement relatif pour des énergies positives  $E_k = \hbar^2 k^2 / (2m_r)$  vérifient :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta + V(\vec{r}) \right) = E_k \psi_k(\vec{r}) . \quad (3.3)$$

Cette convention suppose que  $V(\vec{r})$  tende vers zéro dans la région  $r \gg b$  et lorsque  $|\vec{r}|$  tend vers l'infini ( $b$  est la portée effective de  $V(\vec{r})$ ). Pour  $r \gg b$ , on cherche asymptotiquement pour les états propres de diffusion une forme du type :

$$\psi_k(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f_k(\vec{n}, \vec{n}') \frac{e^{ikr}}{r} , \quad (3.4)$$

où  $\vec{n} = \vec{k}/k$  : est le vecteur directeur de la direction d'incidence,  $\vec{n} = \vec{r}/r$  : le vecteur directeur de la direction de diffusion, avec :

$$k = \sqrt{\frac{2m_r E_k}{\hbar^2}} . \quad (3.5)$$

L'interprétation physique d'un tel état de collision est évidente. le premier terme du membre de droite de (3.4) correspond à l'onde plane incidente de vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Le deuxième correspond à l'onde diffusée. Cette dernière est sphérique avec une amplitude de diffusion  $f_k(\vec{n}, \vec{n}')$ .

### c) Amplitude de diffusion

En un point  $\vec{r}$  donné, l'amplitude de diffusion  $f_k(\vec{n}, \vec{n}')$  dépend de l'énergie de la particule incidente *via* le vecteur d'onde  $\vec{k}$ , de la direction de l'onde incidente par le terme  $\vec{n}$ , et enfin de la direction d'observation  $\vec{n}'$  (direction

de diffusion). La résolution par l'inversion de Green conduit à l'expression suivante pour l'amplitude de diffusion :

$$f_k(\vec{n}, \vec{n}') = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi_k(\vec{r}') d^3r' , \quad (3.6)$$

où  $\vec{k}' = k \vec{n}'$ .

#### d) Section efficace de diffusion

La section efficace différentielle et totale de diffusion sont définies comme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\vec{n}, \vec{n}')|^2 \quad \text{et} \quad \sigma_k(\vec{n}) = \int |f_k(\vec{n}, \vec{n}')|^2 d^2n' . \quad (3.7)$$

Notons que la fonction d'onde  $\psi_k(\vec{r})$  n'est pas de carré sommable, ce qui justifie l'introduction de la quantité section efficace de diffusion. De plus, l'amplitude de diffusion et la section efficace sont déterminées par le comportement asymptotique de l'état stationnaire de diffusion, et des caractéristiques du potentiel diffusant  $V(\vec{r})$ .

#### d) Limite des énergies faibles

Pour des énergies suffisamment petites :  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \ll 1$ , la diffusion est isotrope si le potentiel diffusant décroît assez rapidement à l'infini. L'ordre de grandeur en dessous de laquelle cette simplification a lieu, est directement liée à la portée du potentiel  $b$ . Pour  $kb \ll 1$  (ou de manière équivalente  $E_k \ll \hbar^2/(2m_r b^2)$ ), l'amplitude de diffusion est indépendante de  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ . Ce résultat est clair sur la relation (3.5) : seuls les  $\vec{r}'$  tels que  $|\vec{r}'| \leq b$  contribuent à l'intégrale. Par conséquent,  $|\vec{k}' \cdot \vec{r}'| \leq kb \ll 1$ , de telle sorte que le terme  $e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'}$  peut être remplacé par 1, et l'amplitude de diffusion dans cette limite est indépendante de  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$ . La symétrie par renversement du temps permet d'écrire  $f_k(\vec{n}, \vec{n}') = f_k(-\vec{n}, -\vec{n}')$ , et on constate alors que  $f$  est aussi indépendante de  $\vec{n}$  dans cette limite. A faible énergie  $E_k \ll \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}$ , l'onde diffusée se met alors sous la forme :

$$\psi_k(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f_k(\vec{n}, \vec{n}') \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (3.8)$$

### e) Approximation de Born

L'analyse complète du problème de diffusion requiert la solution de l'équation de Schrödinger à trois dimensions, ce qui est presque impossible dans la plupart des cas. Aussi est-il utile de pouvoir estimer rapidement les propriétés de diffusion d'un potentiel donné grâce à une approximation supplémentaire. L'approximation de Born permet cette évaluation. Elle consiste à estimer l'amplitude de diffusion au premier ordre en  $V$ . Si nous remplaçons dans (3.6) la fonction d'onde exacte  $\psi_k(\vec{r})$  par la fonction d'onde à l'ordre zéro en potentiel soit  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , il vient :

$$f_k(\vec{n}, \vec{n}') = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') d^3r' . \quad (3.9)$$

L'amplitude de diffusion est ainsi reliée à la transformée de Fourier du potentiel diffusant  $V(\vec{r})$ . Naturellement, cette approximation n'a aucun sens pour un potentiel de cœur dur type  $\delta$  de Dirac, qui prend des valeurs infinies sur une région finie de l'espace.

### 3.1.2 Collisions élastiques binaires dans le cas d'un potentiel central

Pour la détermination exacte de l'amplitude de diffusion, il est nécessaire de connaître la solution de l'équation de Schrödinger. Il s'agit d'un problème redoutablement difficile. Néanmoins, la situation se simplifie considérablement pour un potentiel diffusant à symétrie sphérique ou potentiel central :  $V(\vec{r}) = V(r)$ .

La symétrie sphérique permet de réduire le nombre de variables intervenant dans l'amplitude de diffusion. En effet, au lieu de dépendre de  $\vec{n}\cdot\vec{n}'$ , elle ne dépend que de l'angle  $\theta$  entre ces deux vecteurs ( $\cos\theta = \vec{n}\cdot\vec{n}'$ ). On note désormais  $f_k(\vec{n}, \vec{n}') \equiv f_k(\theta)$ . Soit  $z$  la direction de l'onde incidente.

#### - Développement en ondes partielles

Pour tirer partie de la symétrie du problème, il est commode de développer l'onde incidente  $e^{ikz}$  et l'onde diffusée  $\psi_k(\vec{r})$  sur la base des valeurs propres  $l$  et  $m$  respectivement de  $L^2$  et  $L_z$ , où  $\vec{L}$  est l'opérateur moment angulaire relatif :

$$\psi_k(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \phi) \frac{v_{k,l,m}(r)}{r}, \quad (3.10)$$

où  $\phi$  est l'angle azimutal autour de l'axe  $z$ ,  $Y_l^m(\theta, \phi)$  sont les harmoniques sphériques et  $v_{k,l,m}(r)$  les fonctions radiales.

Comme l'onde incidente est un état propre de  $L_z$  pour la valeur propre  $m = 0$ , le développement de  $e^{ikz}$  est indépendant de l'angle azimutal. On montre alors par des calculs classiques :

$$e^{ikz} \simeq \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) ((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}) \quad \text{pour } kr \gg 1 \quad (3.11)$$

où les  $P_l(\cos\theta)$  sont les polynômes de Legendre. L'onde plane incidente est donc la superposition des ondes entrantes  $P_l(\cos\theta)e^{-ikr}/r$  et des ondes sortantes  $P_l(\cos\theta)e^{ikr}/r$ , avec une phase relative de 0 ou  $\pi$  suivant la parité de  $l$ .

L'onde diffusée  $\psi_k(\vec{r})$  est asymptotiquement la somme de l'onde incidente  $e^{ikz}$  et de l'onde sortante  $f_k(\theta)e^{ikr}/r$ . Pour  $|r| \gg b$ , elle peut donc se mettre sous la forme :

$$\psi_k(\vec{r}) \sim \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) ((-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{2i\delta_l} e^{ikr}), \quad (3.12)$$

où  $\delta_l$  est un déphasage réel, défini modulo  $\pi$ . La réalité de  $\delta_l$  provient de la conservation du flux pour chaque onde partielle, elle même conséquence de la symétrie sphérique du potentiel diffusant.

### - Equation de Schrödinger radiale

La résolution du problème de diffusion se résume maintenant à la détermination des déphasages  $\delta_l(k)$ . Si on reporte (3.10) dans (3.3), on obtient une équation de Schrödinger unidimensionnelle pour la fonction d'onde radiale  $v_{k,l}(r)$  (on peut désormais prendre  $m = 0$ ). Si on suppose que  $v_{k,l}(r)/r$

est régulière c'est-à-dire finie en  $r = 0$ , l'équation (3.3) prend la forme :

$$v_{k,l}''(r) + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m_r V(r)}{\hbar^2} \right) v_{k,l}(r) = 0 . \quad (3.13)$$

En accord avec (3.11), on cherche une solution dont la forme asymptotique pour  $|r| \gg b$  est :

$$v_{k,l}(r) \sim (-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{2i\delta_l} e^{ikr} . \quad (3.14)$$

### - Amplitude de diffusion et section efficace en fonction de $\delta_l$

L'amplitude de diffusion est alors reliée aux déphasage  $\delta_l$  par la relation :

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta) . \quad (3.15)$$

De même, la section efficace s'écrit :

$$\sigma_{tot}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l(k) \quad \text{avec} \quad \sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) . \quad (3.16)$$

On se ramène finalement à un problème unidimensionnel, qui se prête bien, le cas échéant, à une résolution numérique. Il est clair par ailleurs que la méthode des ondes partielles présente un intérêt lorsqu'un petit nombre d'ondes partielles contribuent à la diffusion. Cette situation correspondant à des énergies incidentes faibles, est particulièrement bien adaptée à l'étude des collisions de gaz d'atomes ultrafroids considérées dans ce mémoire.

### - L'effet de l'indiscernabilité sur $f_k(\theta)$ et $\sigma(k)$

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des atomes discernables. Les deux diagrammes de diffusion de la figure (3.1) étaient a priori distincts, ils correspondaient aux amplitudes de diffusion  $f_k(\theta)$  et  $f_k(\pi - \theta)$ .

Cependant, pour des atomes identiques indiscernables, c'est-à-dire des atomes qui ont la même masse et se trouvent dans le même état quantique, il faut tenir compte du principe de symétrisation (anti-symétrisation) qui se



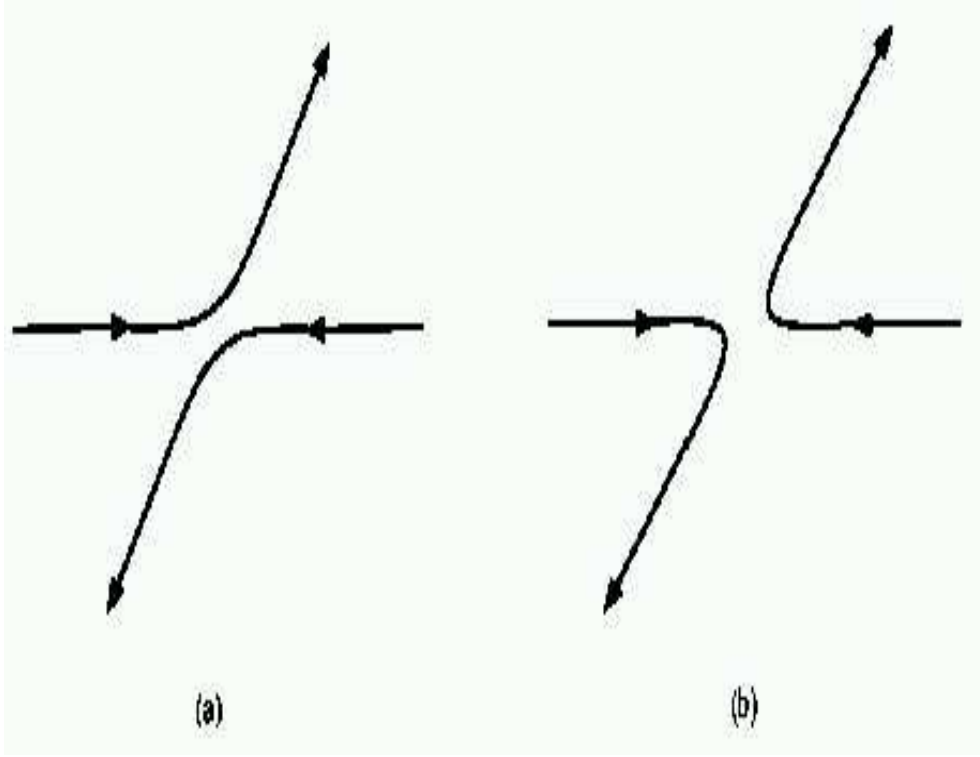


FIG. 3.1 – Les deux processus de diffusion (a) et (b) conduisent au même état final pour des particules indiscernables.

traduit sur la fonction d'onde à deux corps  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  associée à l'hamiltonien (3.2) et de forme :

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\vec{K}_G \cdot \vec{R}_G} \psi_k(\vec{r}) . \quad (3.17)$$

Ce principe s'écrit :

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \epsilon \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) , \quad (3.18)$$

où  $\epsilon = +1$  (respectivement  $-1$ ) pour des bosons (respectivement des fermions). La partie  $e^{i\vec{K}_G \cdot \vec{R}_G}$ , relative au centre de masse, est bien symétrique. La condition (3.17) conduit à  $\psi_k(\vec{r}) = \epsilon \psi_k(-\vec{r})$ . La forme asymptotique de l'état symétrisé s'écrit (pour  $k \neq 0$ ) :

$$\psi_k(\vec{r}) \sim \frac{e^{ikz} + \epsilon e^{-ikz}}{\sqrt{2}} + \frac{f_k(\theta) + \epsilon f_k(\pi - \theta)}{\sqrt{2}} \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (3.19)$$

La section efficace différentielle se met alors sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta) + \epsilon f_k(\pi - \theta)|^2 \quad (3.20)$$

où  $\theta \in [0; \pi/2]$ . On peut maintenant utiliser la parité des harmoniques sphériques :  $(-1)^l$ . Les seules ondes partielles qui contribuent à la section efficace de diffusion des bosons sont celles de  $l$  pair ( $l$  impair pour les fermions) :

$$\delta_{tot}(k) = \frac{8\pi}{k^2} \sum_{l \text{ pair}} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) \quad . \quad (3.21)$$

Pour des fermions identiques, il faudrait remplacer :  $\sum_{l \text{ pair}}$  par :  $\sum_{l \text{ impair}}$ .

Pour l'onde partielle  $l = 0$  (onde  $s$ ), le potentiel intervenant dans l'équation de Schrödinger radiale (3.12) est simplement le potentiel interatomique. Pour les autres ondes partielles ( $l \neq 0$ ), la barrière centrifuge :  $\hbar^2 l(l+1)/(2m_r r^2)$  se rajoute à ce potentiel. Dans ce dernier cas, la particule relative dont l'énergie est plus petite que la hauteur de la barrière ne « sent » pas le potentiel  $V(r)$ . Elle est simplement réfléchiée par la barrière centrifuge. On s'attend donc qualitativement à ce que la diffusion par le potentiel  $V(r)$  tende vers zéro pour les ondes partielles autres que  $l = 0$  pour des énergies suffisamment basses. Cependant, pour des ondes partielles  $s$  ( $l = 0$ ) avec un potentiel central  $V(r)$ , la section efficace (3.20) et l'amplitude de diffusion (3.15) prennent, à la limite de très basse énergie ( $k \rightarrow 0$ ) les formes :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_{l=0}(k) = 8\pi a^2 \quad , \quad (3.22)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = -a \quad , \quad (3.23)$$

où la quantité  $a$ , appelée longueur de diffusion en onde  $s$ , est définie par :

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0(k)}{k} \quad . \quad (3.24)$$

On en conclut que la solution du problème de diffusion pour les énergies ultrafaibles ( $k \rightarrow 0$ ) se réduit à la détermination d'une seule quantité : la longueur de diffusion  $a$ . La détermination de  $a$  est en principe évidente. Il suffit de résoudre l'équation de Schrödinger radiale unidimensionnelle (3.12) pour les ondes  $s$  ( $l = 0$ ) et pour une énergie nulle ( $k = 0$ ).

Notons qu'à faible énergie ( $k \rightarrow 0$ ), on peut calculer  $a$  à l'approximation de Born en remplaçant (3.23) dans (3.9). On obtient, pour des atomes identiques, avec  $m_r = m/2$  :

$$a \simeq a_{Born} = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int V(\vec{r}) d^3r . \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) est valable pour des potentiels non symétriques et à symétrie sphérique. Mais qu'elle est la forme adéquate de  $V$  pour décrire l'interaction entre deux atomes dans un condensat de B-E ?.

### 3.2 Interaction de contact, pseudopotentiel en $\delta$ de Dirac

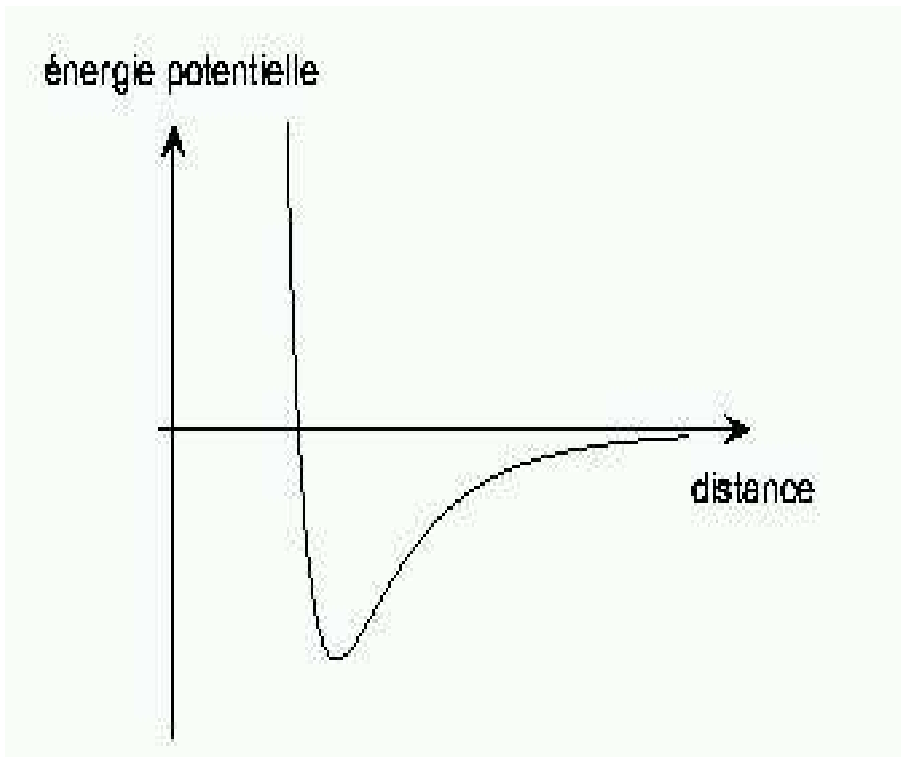


FIG. 3.2 – Potentiel de Van der Waals.

Notons que la détermination directe des grandeurs  $a$ ,  $f_k$  et  $\sigma$  à partir d'un vrai potentiel de type Van der Waals (fig.(3.2)) décrivant l'interaction

entre deux atomes conduit en général à des calculs non aisés, ne permettant pas d'obtenir des expressions analytiques simples de ces grandeurs. En revanche, il est possible de déterminer expérimentalement la longueur de diffusion  $a$ , par exemple par mesures spectroscopiques [89], puis remplacer le vrai potentiel par un potentiel modèle, appelé pseudopotentiel, d'expression mathématique plus simple. Ce pseudopotentiel donnera donc le bon comportement asymptotique des fonctions d'ondes pour des distances grandes entre les atomes. Par contre, il ne décrira pas correctement les corrélations à courte distance. Cependant, si le gaz est dilué, cas du condensat de B-E dilué et en faible interaction, les atomes seront la plupart du temps loin les uns des autres, et on peut espérer que l'erreur commise sera négligeable.

Dans un condensat de B-E, l'interaction la plus simple qu'on puisse considérer entre deux atomes est l'interaction dite de contact ou interaction locale. Elle se présente en deux formes :

#### a ) Potentiel en $\delta$ de Dirac

L'interaction de contact peut être a priori décrite par un pseudopotentiel très localisé en 0, de telle sorte qu'il soit représenté par la fonction  $\delta$  de Dirac :

$$V_\delta(\vec{r}) = g\delta(\vec{r}) , \quad (3.26)$$

où  $g$  est la constante de couplage entre deux atomes. Notons que le potentiel (3.26) est à la base de l'approche des gaz quantiques dans la théorie à  $N$  corps. Comment introduire un tel potentiel en théorie de la diffusion ? La réponse n'est pas évidente. Par exemple, il est bien connu que « un potentiel  $\delta$  à trois dimensions ne diffuse pas ». Cependant, le potentiel  $V_\delta$  (3.26) redonne bien, à l'approximation de Born et pour de faibles énergies ( $k \rightarrow 0$ ), les résultats du vrai potentiel, si l'on se limite au premier ordre en  $g$ . En effet, en reportant (3.26) dans (3.25), on obtient :

$$a_{Born} \simeq a = \frac{gm}{4\pi\hbar^2} . \quad (3.27)$$

Toute tentative d'aller à des ordres supérieurs en  $g$  conduit à des résultats erronés [90].

### b ) Pseudopotentiel de Fermi

Afin de se débarrasser des singularités du potentiel  $V_\delta$  (3.26), il est possible de décrire, et sans ambiguïté, l'interaction de contact par un pseudopotentiel non-local et quasi-identique au précédent, mais de la forme :

$$V_{\text{pseudo}}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = g \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} (r \psi(\vec{r})) . \quad (3.28)$$

$V_{\text{pseudo}}$  a été initialement introduit par Fermi [59]. Dans le cas où la fonction  $\psi$  est régulière c'est-à-dire finie en  $r = 0$ , le potentiel  $V_\delta$  et le potentiel  $V_{\text{pseudo}}$  donnent le même résultat, mais  $V_{\text{pseudo}}$  a l'avantage de donner un résultat fini pour des fonctions  $\psi$  divergeant comme  $\frac{1}{r}$  à l'origine ( $r = 0$ ).

#### 3.2.1 Détermination de $f_k$ et $\sigma$ dans le cas de $V_{\text{pseudo}}$ et pour l'onde $s$

Notons tout d'abord que l'action de  $V_{\text{pseudo}}$  sur une onde non régulière  $\psi$  est finie. En effet :

$$\text{-- si } \psi \text{ est régulière en } r = 0, \text{ alors } V_{\text{pseudo}}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = g \psi(0) \delta(\vec{r}) ; \quad (3.29)$$

- si  $\psi$  est non régulière de forme :  $\psi(\vec{r}) = \frac{v(\vec{r})}{r}$ , alors :

$$V_{\text{pseudo}}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = g v'(0) \delta(\vec{r}) \quad (3.30)$$

où  $v$  est régulière en  $r = 0$ , et  $v'(0) = \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0}$ .

Afin de déterminer  $f_k$  et  $\sigma$  dans le cas de pseudopotentiel de Fermi, nous nous proposons de résoudre l'équation de Schrödinger radiale (3.13) avec  $V = V_{\text{pseudo}}$ , en gardant en mémoire que les solutions doivent inclure des fonctions du type :  $\psi(\vec{r}) = \frac{v(\vec{r})}{r}$ . L'expression opératorielle :  $\Delta \psi$  doit être modifiée. En utilisant :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{v(\vec{0})}{r} + \frac{v(\vec{r}) - v(\vec{0})}{r} , \quad (3.31)$$

il vient :

$$\Delta \psi(\vec{r}) = -4\pi v(\vec{0}) \delta(\vec{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \psi(\vec{r}) \quad (3.32)$$

Pour des ondes partielles autres que  $l = 0$ , on vérifie aisément que la présence de la barrière centrifuge impose à la forme d'onde  $\psi(\vec{r})$  d'être régulière et de tendre vers 0 lorsque  $\vec{r}$  tend vers  $\vec{0}$ . En utilisant (3.29), on montre que  $V_{\text{pseudo}}$  n'affecte pas ces ondes partielles.

Considérons maintenant le cas de la diffusion des ondes  $s$  ( $l = 0$ ) par le pseudopotentiel  $V_{\text{pseudo}}$ . La fonction d'onde à considérer est donc à symétrie sphérique :  $\psi(r) = \frac{v(r)}{r}$ . En introduisant cette fonction dans l'équation de Schrödinger radiale (3.13) avec  $V = V_{\text{pseudo}}$ , il vient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \left( -4\pi v(0) \delta(\vec{r}) + \frac{v''(r)}{r} \right) + g v'(0) \delta(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2 v(r)}{2m_r r}. \quad (3.33)$$

En séparant les termes réguliers en  $r = 0$  et les termes proportionnels à  $\delta(\vec{r})$ , l'équation (3.33) prend la forme :

$$\delta(\vec{r}) \left[ 4\pi v(0) + \frac{mg}{\hbar^2} v'(0) \right] - \frac{1}{r} [v''(r) + k^2 v(r)] = 0. \quad (3.34)$$

L'annulation du coefficient de  $\delta(\vec{r})$  conduit à :

$$\frac{v(0)}{v'(0)} = -a \quad (3.35)$$

avec :

$$g = \frac{2\pi \hbar^2}{m_r} a = \frac{4\pi \hbar^2}{m} a, \quad (3.36)$$

et l'équation (3.34) devient alors :  $v''(r) + k^2 v(r) = 0$ , dont la solution est :

$$v(r) = C \sin [kr + \delta_0(k)]. \quad (3.37)$$

En reportant (3.37) dans (3.35) et en faisant  $r = 0$ , on obtient enfin une équation reliant  $\delta_0(k)$  à  $a$  :

$$\frac{\text{tg } \delta_0(k)}{k} = -a \quad \text{ou} \quad k \cotg \delta_0(k) = -\frac{1}{a}. \quad (3.38)$$

### Expression de $f_k$ associée à $V_{\text{pseudo}}$

L'amplitude de diffusion  $f_k$  dans l'onde  $s$  est reliée au déphasage  $\delta_0(k)$  par (voir équation (3.15)) :

$$f_k = \frac{e^{i\delta_0(k)} \sin \delta_0(k)}{k} = \frac{1}{k [\cotg \delta_0(k) - i]}. \quad (3.39)$$

En reportant (3.38) dans (3.39), on obtient :

$$f_k = -\frac{a}{1 + ika} \quad \text{pour} \quad a = \frac{gm}{4\pi\hbar^2}. \quad (3.40)$$

### Expression de $\sigma_{tot}(k)$ associée à $V_{\text{pseudo}}$

La section efficace totale  $\sigma_{tot}(k)$  se déduit facilement à partir des résultats précédents :

$$\sigma_{tot}(k) = \frac{8\pi a^2}{1 + k^2 a^2}. \quad (3.41)$$

Notons que les expressions de  $f_k$  (3.40) et de  $\sigma_{tot}$  (3.41) deviennent :

$$f_k = -a \simeq -a_{Born} \quad \text{et} \quad \sigma_{tot}(k) = 8\pi a^2 \quad \text{pour} \quad ka \ll 1; \quad (3.42)$$

et :

$$\sigma_{tot}(k) = 8\pi/k^2 \quad \text{pour} \quad ka \gg 1. \quad (3.43)$$

L'équation (3.42) traduit le résultat attendu pour les énergies faibles, alors que l'équation (3.43) correspond à des énergies plus élevées ; la section efficace totale atteint, dans ce cas, la limite maximale autorisée par les ondes  $s$  : c'est ce qu'on appelle la limite unitaire.

Rappelons que :  $\frac{1}{k} \propto \lambda$ , et qu'à faible énergie  $\lambda \sim n^{-1/3}$  ( $d \sim n^{-1/3}$ ,  $d$  étant la distance moyenne entre deux atomes, et  $n$  la densité du gaz bosonique considéré). Ceci permet d'écrire la condition  $ka \ll 1$  sous la forme :

$$n a^3 \ll 1. \quad (3.44)$$

La condition (3.44) assure à la fois la validité des faibles énergies, et de la dilution du gaz bosonique. De plus, elle indique que la distance moyenne entre deux atomes  $d \sim n^{-1/3}$  est très grande devant la longueur de diffusion  $a$  ( $n^{-1/3} \gg a$ )

## 3.3 Equation de Gross-Pitaevskii

Au début de cette section, il est instructif de signaler que c'est à Bogoliubov que revient le mérite de l'introduction en 1947 du modèle théorique

du gaz dilué de bosons atomiques à  $T = 0$  K, appelé également gaz quasi-parfait de Bose. En traitant ce gaz dilué au voisinage de  $T = 0$  K, par son approche perturbative (approche de Bogoliubo), Bogoliubov a pu introduire les concepts des phonons (excitations élémentaires linéaires) et de la vitesse du son [8]. Une description théorique précise du gaz dilué de Bose n'a été formulée qu'au début des années 1960 par Gross et Pitaevskii [10]. Dans cette section, nous allons indiquer les étapes principales conduisant à la formulation de l'équation de GP 3D stationnaire et dépendant du temps.

### 3.3.1 Equation de Gross-Pitaevskii stationnaire

#### a ) Présentation

Considérons  $N$  bosons identiques piégés dans un potentiel extérieur  $U(\vec{r})$ , en équilibre à la température  $T = 0$  K. Si les bosons n'interagissaient pas, ils seraient tous dans l'état fondamental du piège. En présence d'interactions, la structure d'un tel condensat est modifiée. En principe, il faudrait calculer l'état fondamental du Hamiltonien  $H$  :

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + U(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) . \quad (3.45)$$

Le dernier terme de (3.45) représente les interactions entre les bosons. Le facteur  $1/2$  est dû au fait qu'il ne faut pas tenir compte 2 fois de l'interaction entre les particules  $i$  et  $j$ .

La détermination exacte de l'état fondamental de (3.45) n'est en général pas possible. Cependant, il est possible de rechercher un état fondamental approché en considérant une famille variationnelle d'états et en minimisant  $\langle \psi | H | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$  à l'intérieur de cette famille. Pour ce faire, considérons l'état :

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle |\varphi(2)\rangle \dots |\varphi(i)\rangle \dots |\varphi(N)\rangle \quad (3.46)$$

correspondant à une situation où tous les bosons sont dans le même état  $|\varphi\rangle$ . Le ket (3.46) est visiblement complètement symétrique et est donc acceptable pour décrire des bosons identiques. Le sous espace formé par les états (3.46) correspond à tous les  $|\varphi\rangle$  possibles. Dans ce sous espace,



l'état qui approxime le mieux l'état fondamental de  $H$  est obtenu pour le  $|\varphi\rangle$  qui minimise la quantité :

$$E[\varphi] = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} . \quad (3.47)$$

$E[\varphi]$  est une fonctionnelle de  $\varphi$  qui, à chaque  $\varphi$ , associe un nombre  $E[\varphi]$ .

La méthode dont nous venons d'exposer le principe est analogue à la méthode de Hartee-Fock en physique atomique. Comme l'état (3.46) est un produit tensoriel, il ne peut pas décrire les corrélations entre particules. L'équation obtenue pour  $|\varphi\rangle$  en minimisant (3.47) décrira le mouvement de chaque particule dans le champ moyen des  $N - 1$  autres.

### b ) Dérivation de l'équation de GP

- Calcul de  $\langle \psi | H | \psi \rangle$

- Terme de l'énergie cinétique  $E_{cin}$  :

$$E_{cin} = N \int d^3r \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \right]^2 . \quad (3.48)$$

- Terme de l'énergie de piégeage  $E_{piège}$  :

$$E_{piège} = N \int d^3r \varphi^*(\vec{r}) U(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) . \quad (3.49)$$

- Terme de l'énergie d'interaction  $E_{int}$  :

$$E_{int} = \frac{N(N-1)}{2} \int \int d^3r d^3r' \varphi^*(\vec{r}) \varphi^*(\vec{r}') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \varphi(\vec{r}) \varphi(\vec{r}') . \quad (3.50)$$

### - Equations variationnelles

Au lieu de minimiser (3.47), il est plus commode de minimiser  $\langle \psi | H | \psi \rangle$  avec la contrainte  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ . L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange conduit alors à annuler la variation :

$$\delta \langle \psi | H | \psi \rangle - \lambda \delta \langle \psi | \psi \rangle = 0 . \quad (3.51)$$

Le calcul de  $\delta \langle \psi | H | \psi \rangle$  et  $\delta \langle \psi | \psi \rangle$  fait intervenir des intégrales contenant  $\delta\varphi$  et  $\delta\varphi^*$ . En considérant  $\delta\varphi$  et  $\delta\varphi^*$  comme des variations indépendantes, l'équation (3.51) donne :

$$0 = N \int d^3r \delta\varphi^*(\vec{r}) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\varphi(\vec{r}) + U(\vec{r})\varphi(\vec{r}) + \right. \\ \left. (N-1) \left[ \int d^3r' V(\vec{r}-\vec{r}') |\varphi(\vec{r}')|^2 \right] \varphi(\vec{r}) - \lambda\varphi(\vec{r}) \right\} + c.c, \quad (3.52)$$

(c.c : constantes complexes). Comme  $\delta\varphi^*$  peut être quelconque, la solution de (3.51) s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\varphi(\vec{r}) + U(\vec{r})\varphi(\vec{r}) + (N-1) \left[ \int d^3r' V(\vec{r}-\vec{r}') |\varphi(\vec{r}')|^2 \right] \varphi(\vec{r}) = \lambda\varphi(\vec{r}). \quad (3.53)$$

Le dernier terme du membre de gauche de (3.53) représente le potentiel moyen exercé sur une particule par les  $(N-1)$  autres (théorie de champ moyen). L'équation (3.53) a la structure d'une équation de Schrödinger, chaque particule de masse  $m$  évoluant dans la somme du potentiel extérieur  $U$  et du potentiel moyen créé par les autres.

### - Remplacement du vrai potentiel d'interaction par $V_{\text{pseudo}}$

La méthode utilisée ici néglige les corrélations à courte distance entre atomes. Comme le gaz est supposé dilué, les atomes sont la plus part du temps loins les uns des autres. Dans ces conditions, on peut utiliser le pseudopotentiel  $V_{\text{pseudo}}$  à la place du vrai potentiel  $V$ . Or, les fonctions d'onde  $\varphi(\vec{r})$  ne conduisent à aucune singularité en  $\vec{r} = \vec{r}'$ , ce qui permet de prendre  $V_{\text{pseudo}}$  égal à  $V_g$ , c'est-à-dire :

$$V_g = g \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi \hbar^2}{m} a \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.54)$$

Un calcul simple montre que  $\lambda \equiv \frac{\delta E[\varphi]}{\delta N}$  à la limite  $N \gg 1$  et pour  $V = V_g$ .  $\lambda$  est donc la variation de l'énergie moyenne du système quand on lui ajoute une particule. comme cette transformation se fait à entropie  $S$  constante (on reste à  $T = 0$  de sorte que  $S = 0$ ),  $\delta E[\varphi] / \delta N$  n'est autre que le potentiel chimique  $\mu$  :

$$\mu = \lambda = \frac{\delta E[\varphi]}{\delta N}. \quad (3.55)$$

**- Equation de GP stationnaire**

En reportant (3.54) et (3.55) dans (3.53), on obtient pour  $N > 1$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + U(\vec{r})\varphi(\vec{r}) + Ng |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r}) , \quad (3.56)$$

avec :

$$\int d^3r |\varphi(\vec{r})|^2 = 1 . \quad (3.57)$$

En général, on choisit, pour un gaz de Bose, une normalisation de  $\varphi$  différente de (3.57) :

$$\int d^3r |\psi_0(\vec{r})|^2 = N , \quad \text{avec : } \psi_0(\vec{r}) = \sqrt{N} \varphi(\vec{r}) , \quad (3.58)$$

et l'équation (3.56) devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_0(\vec{r}) + U(\vec{r})\psi_0(\vec{r}) + g |\psi_0(\vec{r})|^2 \psi_0(\vec{r}) = \mu \psi_0(\vec{r}) . \quad (3.59)$$

$|\psi_0(\vec{r})|^2$  représente alors la densité spatiale  $n(\vec{r})$  de bosons au point  $\vec{r}$  :  $|\psi_0(\vec{r})|^2 = n(\vec{r})$ . L'équation (3.59) contenant le terme non-linéaire  $|\psi_0(\vec{r})|^2 \psi_0(\vec{r})$  est appelée équation de Gross-Pitaevskii (EGP) [10], ou équation de Schrödinger non-linéaire (ESNL).

### 3.3.2 Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

#### a ) Présentation

Dans de nombreuses expériences, le potentiel extérieur dans lequel est piégé le condensat de B-E quasiparfait est modulé dans le temps, de manière à mesurer les fréquences propres de ces modes. Dans d'autres expériences, ce potentiel est brusquement coupé et on observe l'expansion balistique du condensat (réalisation des premiers condensats en 1995, Chap.2), expansion qui est souvent essentiellement déterminée par les interactions entre les divers atomes du condensat. Dans le but de généraliser l'EGP stationnaire (3.59) à de telles situations, nous allons d'abord introduire l'EGP dépendant du temps dans sa forme la plus simple, puis dans sa forme améliorée

qui tient compte des faibles excitations.

### **b ) Dérivation de l'EGP dépendant du temps**

Il existe plusieurs méthodes équivalentes permettant de décrire un condensat de B-E dilué à  $T = 0$ , toutes se résumant à décrire le condensat par une fonction d'onde unique stationnaire ou dépendant du temps. Dans toutes ces méthodes, on part, pour établir l'EGP dépendant du temps, de l'opérateur champ  $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ . Nous allons utiliser ici l'approche de Bogoliubov pour établir l'EGP dépendant du temps.

#### **- Hamiltonien décrivant le condensat de B-E dilué**

Le hamiltonien décrivant l'évolution de  $N$  bosons contenus dans le condensat de B-E dilué et piégé s'écrit en seconde quantification :

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \hat{\Psi}^\dagger \vec{\nabla} \hat{\Psi} + U(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right] d^3 \vec{r} + \\ \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}' . \end{aligned} \quad (3.60)$$

où  $U$  désigne le potentiel de piégeage et  $V$  est le potentiel d'interaction entre deux atomes. Les opérateurs champs  $\hat{\Psi}$  et  $\hat{\Psi}^\dagger$  représentent respectivement les opérateurs d'annihilation et de création d'un boson à la position  $\vec{r}$ . Ils obéissent aux commutateurs :

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \quad \text{et} : [\hat{\Psi}, \hat{\Psi}] = [\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}^\dagger] = 0 .$$

Le traitement par Bogoliubov en 1947 des excitations élémentaires (phonons) dans un gaz dilué de Bose homogène (non piégé) a été basé sur la décomposition suivante de l'opérateur champ stationnaire  $\hat{\Psi}$  :

$$\hat{\Psi} = \psi_0 + \delta \hat{\Psi} \quad (\text{approche de Bogoliubov}) \quad (3.61)$$

où  $\psi_0$  est un champ scalaire complexe décrivant l'état du condensat à  $T = 0$ , et  $\delta \hat{\Psi}$  est une petite perturbation sur l'opérateur champ stationnaire  $\hat{\Psi}$  pour  $0 \leq T < T_c$ . La généralisation de (3.61) à un opérateur champ bosonique  $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$  non uniforme et dépendant du temps s'écrit [57] :

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \delta \hat{\Psi}(\vec{r}, t) . \quad (3.62)$$

Comme nous avons vu dans la section (3.2), à des faibles énergies, c'est-à-dire à  $T \simeq 0$ , on peut remplacer dans (3.60)  $V$  par  $V_\delta$  (3.26). Cependant, l'équation d'évolution de l'opérateur champ  $\hat{\Psi}$  est donnée en représentation de Heisenberg par :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}] = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\Psi}^\dagger}, \quad (3.63)$$

ce qui conduit à :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}. \quad (3.64)$$

On note que le remplacement du vrai potentiel d'interaction  $V$  par le potentiel de contact  $V_\delta$  dans (3.60) est équivalent à négliger  $\delta \hat{\Psi}(\vec{r}, t)$  dans (3.62), ce qui permet de remplacer l'opérateur champ  $\hat{\Psi}$  dans (3.64) par le champ scalaire classique  $\psi$  et obtenir :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) + g |\psi|^2 \right] \psi. \quad (3.65)$$

L'équation (3.65) porte le nom d'équation de GP dépendant du temps. Le champ scalaire complexe classique  $\psi$  dans (3.65) est souvent appelé onde quantique macroscopique du condensat. Il est aussi appelé paramètre d'ordre du système. Ce paramètre d'ordre contient une phase qui est uniforme dans un condensat au repos; l'apparition de cette phase, alors que rien ne la prédispose à prendre une valeur qu'une autre, est le fait d'une brisure spontanée de symétrie.

L'équation (3.65) ne rend compte ni de la déplétion thermique ni de la déplétion quantique, mais elle reproduit le spectre d'excitations de l'approche de Bogolubov. Notons de plus qu'on peut déduire l'équation stationnaire de GP (3.59) à partir de (3.65) en prenant :  $\psi(\vec{r}, t)$  sous la forme :  $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$ . Ce qui conduit effectivement à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_0(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}) + g |\psi_0(\vec{r})|^2 \psi_0(\vec{r}) = \mu \psi_0(\vec{r}). \quad (3.66)$$

### c ) L'EGP dépendant du temps contenant $\mu$

Le potentiel  $U$  dans lequel le condensat est piégé n'est pas statique en général, mais il dépend du temps  $U(\vec{r}, t)$ . Celui-ci peut se mettre, pour certaines expériences, sous la forme :

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) + \delta U(\vec{r}, t) , \quad (3.67)$$

où  $U(\vec{r})$  est le potentiel statique et  $\delta U(\vec{r}, t)$  une petite perturbation dépendant du temps.

- Si :  $\delta U = 0$ , on peut écrire

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r})e^{-it\mu/\hbar} , \quad (3.68)$$

ce qui a conduit à l'obtention de l'équation stationnaire de GP (3.66) ;

- Si :  $\delta U$  est très petit, on s'attend à ce que  $\psi(\vec{r}, t)$  soit peu différent de (3.68). Si l'on pose :

$$\psi(\vec{r}, t) = \tilde{\psi}(\vec{r}, t)e^{-it\mu/\hbar} . \quad (3.69)$$

En reportant (3.67) et (3.69) dans (3.65), on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \mu + U(\vec{r}) + \delta U(\vec{r}, t) + g |\tilde{\psi}(\vec{r}, t)|^2 \right] \tilde{\psi}(\vec{r}, t) . \quad (3.70)$$

Notons que si l'on met  $\delta U(\vec{r}, t) = 0$  dans l'équation (3.70), on obtient l'EGP dépendant du temps contenant le potentiel chimique  $\mu$  et qui s'écrit, en omettant  $\tilde{\phantom{x}}$  :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \mu + U(\vec{r}) + g |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) . \quad (3.71)$$

Un condensat non piégé ( $U = 0$ ) est qualifié d'homogène ou infini. Il est dit inhomogène ou fini si  $U \neq 0$ .

### - d ) Applicabilité de l'EGP, conservation de N et H

#### - Applicabilité de l'EGP

L'applicabilité de l'EGP ne peut pas être réalisée que :

i ) si le nombre total  $N$  de bosons soit assez grand ( $N \gg 1$ ) ;

ii ) si la dilution du gaz de bosons à très basse température ( $T \simeq 0$ ) soit vérifiée par le critère :  $na^3 \ll 1$ . Cette condition permet d'ignorer la

deplétion thermique et quantique du condensat de B-E, et implique à la normalisation de  $\psi$  au nombre total  $N$  de bosons atomiques :  $\int |\psi|^2 d^3r = N$ .

**- Conservation de N et H**

Notons tout d'abord qu'en dynamique hamiltonienne :  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \psi^*}$ , l'équation de GP dépendant du temps (3.65) peut être obtenue en partant de la fonctionnelle d'énergie totale de Gross-Pitaevskii  $H$  donnée par :

$$H = \int d^3r \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + U(\vec{r}) |\psi|^2 + \frac{g}{2} |\psi|^4 \right]. \quad (3.72)$$

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que l'équation de GP dépendant du temps (3.65) vérifie bien les lois de conservation de  $N$  et de  $H$ .

### 3.4 Forme hydrodynamique de l'EGP dépendant du temps, vortex et vitesse du son

#### 3.4.1 Forme hydrodynamique de l'EGP dépendant du temps

L'équation (3.65) de PG dépendant du temps décrit l'évolution dynamique spatio-temporelle de la fonction d'onde  $\psi$  du condensat dilué de B-E. On peut chercher une autre forme de cette équation si on exprime  $\psi$  en fonction de la densité  $n$  et de la phase  $\theta$ . Pour ce faire, on fait la transformation suivante dite de Madelung [91, 92] :

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\theta(\vec{r}, t)}, \quad (3.73)$$

$\theta$  est la phase de  $\psi$  et  $\sqrt{n(\vec{r}, t)}$  son module, avec :

$$n(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (3.74)$$

D'après (3.74), on a :  $\frac{\partial n}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ . En écrivant l'équation complexe conjuguée de (3.65), en la multipliant par  $\psi$ , puis en l'ajoutant à (3.65) multipliée par  $\psi^*$ , on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} [\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*]. \quad (3.75)$$

Le calcul de :  $[\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*]$  à partir de (3.73) conduit à écrire l'équation (3.75) sous la forme :

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot \left[ n \left( \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \theta \right) \right] = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_t n + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.76)$$

avec :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) = n \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \theta. \quad (3.77)$$

Le vecteur  $\vec{j}$  s'identifie à la densité de courant d'expression courante :  $\vec{j} = n \vec{v}$  à condition qu'on définit le champ de vitesse comme :

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \theta. \quad (3.78)$$

L'équation (3.76) est une équation de continuité indiquant que le nombre total  $N$  de bosons est conservé dans le temps. Une conséquence fondamentale de la relation (3.78) est que l'écoulement du condensat de B-E, fluide



quantique, est potentiel, c'est-à-dire que  $\vec{v}$  dérive d'un potentiel scalaire  $\Phi$  pris sous la forme :

$$\Phi = \frac{\hbar}{m} \theta \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \Phi . \quad (3.79)$$

De même, à partir de (3.73), on calcule  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ , puis en utilisant l'EGP (3.65), on obtient :

$$i\hbar \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] = -2\partial_t \theta . \quad (3.80)$$

Le membre de gauche de (3.80) peut se calculer à partir de l'équation (3.65) et on obtient finalement :

$$\hbar \partial_t \theta = -U - gn - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \theta)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} . \quad (3.81)$$

Avec les notations de (3.79), l'équation (3.81) peut s'écrire :

$$m \left( \partial_t \Phi + \frac{\Delta \Phi}{2} \right) = - \left[ U(\vec{r}) + gn - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right] . \quad (3.82)$$

ou :

$$m \partial_t \vec{v} = \vec{\nabla} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} m v^2 - U(\vec{r}) - gn \right] . \quad (3.83)$$

L'équation (3.83) est analogue à l'équation de Bernoulli, en supprimant le terme  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ , décrivant l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait ou superfluide (i.e. sans viscosité) en évolution dans un potentiel extérieur  $U$ . Le terme  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$  apparaissant dans l'équation (3.83) et qui s'identifie à une pression, est appelé pression quantique du fait qu'il contient la constante de Planck  $\hbar$ , et le terme  $gn$  représente la pression de champ moyen.

Les deux équations couplées (3.76) et (3.83) sont strictement équivalentes à l'EGP dépendant du temps (3.65). Aucune approximation supplémentaire n'a été effectuée pour établir ces deux équations. De plus, elles peuvent être utilisées aussi bien pour des régimes linéaire que non-linéaires.

### 3.4.2 Vortex quantiques

La relation (3.79) qui a été établie en tout point du condensat où  $n \neq 0$  et pour  $\theta$  bien défini, a conduit à la révélation de la nature superfluide de ce condensat et de son écoulement irrotationnel ( $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ), c'est-à-dire

que la circulation de la vitesse  $\vec{v}$  autour d'un contour  $C_1$  à l'intérieur duquel  $n \neq 0$  vaut 0 d'après le théorème de Stokes :

$$\Gamma_C = \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{S_1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.84)$$

Que va-t-il se passer si on autorise à la fonction d'onde de s'annuler dans une région de l'espace du condensat telle que  $n = 0$ ? (avec  $\psi = 0$  implique :  $\text{Re}(\psi) = \text{Im}(\psi) = 0$ ). Il est bien évident que la circulation  $\Gamma$  du champ de vitesse  $\vec{v}$  sur un lacet  $C_2$  entourant cette région où  $n = 0$  est différente de zéro car  $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ . Si l'on suit ce contour sur un tour, la phase  $\theta$  de la fonction d'onde  $\psi$  augmente d'une quantité  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  :

$$\Delta\theta = \frac{m}{\hbar} \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (3.85)$$

La quantité  $\Delta\theta$  doit être un multiple entier  $p$  de  $2\pi$  car la fonction d'onde du condensat est univaluée (elle a la même valeur après chaque tour). Les valeurs autorisées pour  $\Gamma_{C_2}$  sont donc quantifiées, c'est-à-dire :

$$\Gamma_{C_2} = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{S_1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{S} = p \frac{\hbar}{m}, \quad (3.86)$$

où  $\frac{\hbar}{m}$  est le quantum de circulation.

On constate que les régions singulières ( $n = 0$  et  $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ ) ne peuvent apparaître que sous forme de points isolés. Si l'on a des lignes singulières, celles-ci doivent soit se refermer sur elles-mêmes et on parle alors d'anneaux de vorticités, soit s'étendre jusqu'à l'infini (voir Fig.(3.3)). Ces lignes de singularité sont baptisées vortex, ou tourbillons, quantiques. L'entier  $p$  est appelé charge du vortex et  $\frac{\hbar}{m}$  quantum de l'écoulement de circulation non nulle.

Un vortex résulte donc dans un condensat de B-E autour de la singularité de phase  $\theta$  de la fonction d'onde  $\psi$ , là où  $\text{Re}(\psi) = \text{Im}(\psi) = 0$ . Le condensat admet donc des vortex en tant que défauts topologiques. Ceux-ci apparaissent en des points dans des systèmes bidimensionnels et en lignes vorticales pour des systèmes tridimensionnels. L'écoulement de circulation autour de la singularité de phase est souvent appelé supercourant.

Le saut de phase de  $2\pi$  autour d'un vortex a été visualisé dans les condensats de B-E par les expériences d'interférences [94, 95, 96].

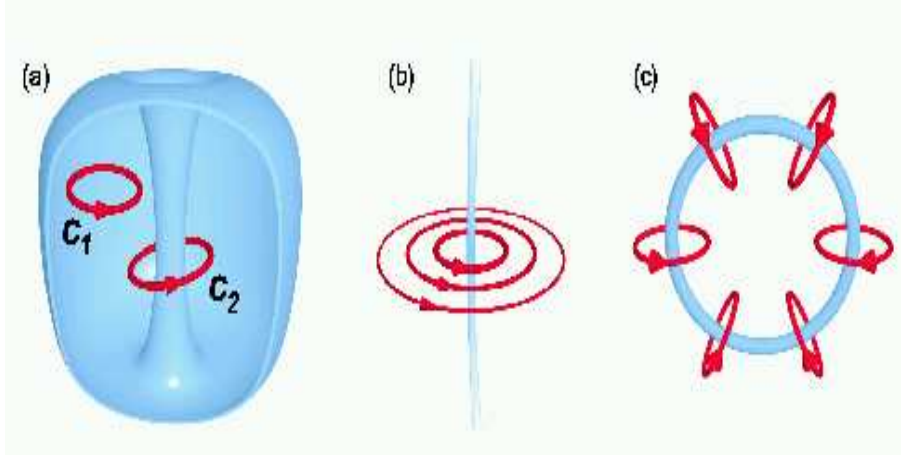


FIG. 3.3 – (a) Circulation de  $\vec{v}$  autour d'un contour  $C_1$  où  $n \neq 0$  et autour de  $C_2$  où  $n = 0$ . (b) et (c) formation de vortex (voir texte)

Le concept des vortex quantiques a été initialement introduit dans l'hélium 4-liquide par Onsager et Feynman dans les années 1950 [93, 9, 97].

Nous en déduisons que l'EGP décrivant la dynamique d'un gaz dilué de B-E, contient des vortex aussi bien dans des fluides concentrés comme l'hélium4-liquide que dilués comme les condensats de B-E. Elle contient également l'hydrodynamique classique d'un fluide parfait ou superfluide, irrotationnel et compressible, qui est usuellement décrit par l'équation de Bernoulli.

Nous terminons ce paragraphe par mentionner que l'étude théorique des solutions stationnaires de l'EGP permet de comprendre et interpréter des phénomènes non-linéaires et d'instabilité dans des fluides quantiques compressibles tels que : la vitesse critique, la bifurcation type noeud-col, les vortex et leur nucléation [102, 103, 104], ...

### 3.4.3 L'acoustique dans l'équation de GP

Considérons un condensat de B-E homogène ( $U(\vec{r}) = 0$  et  $n = n_0 = cte$ ) et en équilibre ( $v_0 = 0$ ). Une petite perturbation du condensat fait introduire des corrections  $\delta n$  et  $\delta \vec{v}$  sur les valeurs d'équilibre  $n_0$  et  $v_0$ , de

telle sorte :

$$n = n_0 + \delta n \quad \text{et} \quad \vec{v} = \delta \vec{v}. \quad (3.87)$$

En injectant (3.87) dans les deux équations (3.76) et (3.83), et en ne gardant que les termes linéaires en  $\delta n$  et  $\delta \vec{v}$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \delta n = -\vec{\nabla} \cdot (n_0 \delta \vec{v}) \\ m \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v} = -g \vec{\nabla} \delta n \end{cases} \quad (3.88)$$

En prenant le gradient de la première équation, la dérivée temporelle de la seconde équation de (3.88) et en éliminant  $\delta \vec{v}$ , on obtient finalement pour un condensat homogène :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \delta n(r, t) = 0 \quad \text{avec} \quad : \quad c = \sqrt{\frac{g n_0}{m}}. \quad (3.89)$$

La production de la perturbation  $\delta n$  conduit donc au premier ordre en  $\delta n$  à la propagation d'ondes sonores (phonons) avec la vitesse  $c = \sqrt{\frac{g n_0}{m}}$ . Ce résultat est identique à celui prédit par l'approche de Bogoliubov dans le régime des grandes longueurs d'ondes ( $k \rightarrow 0$ ). En effet, la relation de dispersion établie à partir de l'approche de Bogoliubov s'écrit :

$$\hbar \omega_k = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{k^4}{4} + \frac{m}{\hbar^2} n_0 g k^2}. \quad (3.90)$$

L'équation (3.90) conduit, pour  $k \rightarrow 0$  ( $\omega_k = k c$ ) :

$$c = \sqrt{\frac{g n_0}{m}}. \quad (3.91)$$

L'équation de GP admet donc un spectre de phonons dans la limite hydrodynamique.

### 3.4.4 Superfluidité et critère de Landau

La superfluidité désigne la propriété d'un fluide de s'écouler sans viscosité ou sans frottement liquide, phénomène observé pour la première fois dans l'hélium 4 liquide en 1937 par Kapitza [4], Allen et Misener [5]. En 1938, London [6] remarqua que la température de la transition de l'hélium superfluide,  $T_s = 2.2$  K, est remarquablement proche de la température estimée

de la condensation de B-E d'un gaz parfait de même densité que l'hélium liquide,  $T_s = 3.2$  K, et émit l'idée que les deux phénomènes étaient reliés. L'idée de London est le point de départ de toutes les théories modernes sur l'hélium liquide. Cependant, la connexion entre la condensation de B-E et la superfluidité n'est pas évidente. La superfluidité de l'hélium liquide est reliée aux interactions fortes entre particules, alors qu'Einstein considérait un gaz parfait.

Au début des années 1940, un pas important dans la compréhension de la superfluidité de l'hélium liquide a été franchi avec l'introduction du modèle à deux fluides. Cette théorie contient deux idées fondamentales. La première, plutôt phénoménologique, a été introduite par Tisza en 1940. Elle consiste à diviser l'hélium 4-liquide (He-II) en deux composantes : une composante normale se comporte comme un fluide visqueux et une composante superfluide qui s'écoule sans viscosité. Le mérite de la seconde idée importante du modèle à deux fluides revient à Landau qui a expliqué la superfluidité à partir de la structure du spectre d'excitations du liquide. En effet, en 1941, dans son travail [7] qui lui a valu le prix Nobel de physique en 1962, Landau supposa que la composante superfluide est un état cohérent quantique, et que la composante normale correspond à des excitations élémentaires autour de cet état. Ce modèle à deux fluides peut être décrit en terme de condensation de B-E : le condensat constitue alors le superfluide, d'entropie nulle, alors que le gaz d'excitations élémentaires joue le rôle du fluide normal.

Pour mettre en évidence le mécanisme de la superfluidité, une expérience simple consiste à envoyer un objet avec une vitesse  $\vec{v}$  dans un fluide au repos. Alors que dans un fluide inviscide (non-visqueux) le mobile peut rester indéfiniment en mouvement (c'est le paradoxe de d'Alembert), ceci n'est plus vrai en présence de viscosité. En se mouvant dans le fluide, l'objet y dissipe en effet de l'énergie en formant des excitations élémentaires. Ceci n'est vrai que si la perturbation introduite par l'objet en mouvement soit faible. Dans le cas contraire, les mécanismes de dissipation peuvent être plus complexes, impliquant par exemple l'apparition d'un sillage tourbillonnaire [98, 99, 96].

Imaginons donc que le mobile, de masse  $M$ , se déplaçant dans un conden-

sat de B-E à température nulle, y crée une quasi-particule, ou excitation élémentaire, de vecteur d'onde  $\vec{q}$  (voir Fig.(3.4)a). Pour conserver à la fois la quantité de mouvement et l'énergie, il faut que l'on ait :

$$\frac{Mv^2}{2} = \hbar\omega_q + \frac{(M\vec{v} - \hbar\vec{q})^2}{2M} = \hbar\omega_q + \frac{Mv^2}{2} - \hbar\vec{v} \cdot \vec{q} + \frac{(\hbar\vec{q})^2}{2M} . \quad (3.92)$$

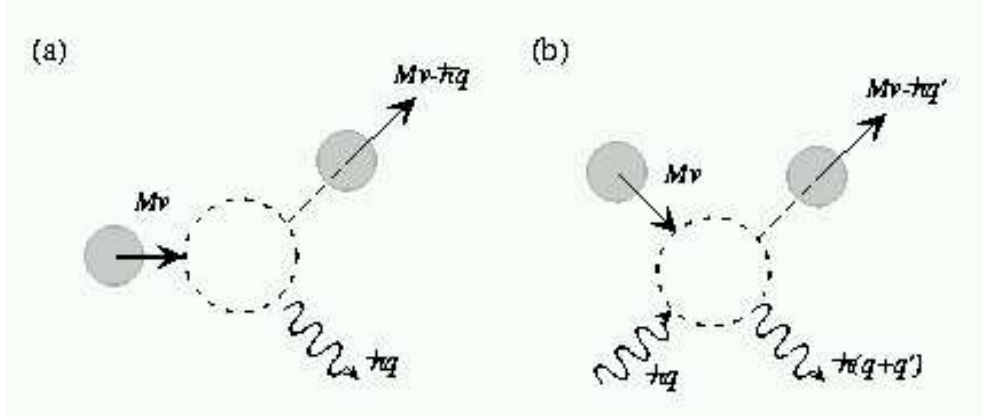


FIG. 3.4 – Création d'une excitation élémentaire dans un condensat de B-E (a) à  $T = 0$  et (b) à  $T \neq 0$ .

En négligeant le terme  $\frac{(\hbar\vec{q})^2}{2M}$  pour une grande masse  $M$ , l'équation (3.92) conduit à :

$$\omega_q = \vec{v} \cdot \vec{q} . \quad (3.93)$$

Puisque  $\vec{v} \cdot \vec{q} < vq$  (inégalité de Schartz), l'équation précédente impose d'avoir :

$$v > \frac{\omega_q}{q} . \quad (3.94)$$

La diffusion de quasi-particule dans le condensat ne peut se faire que s'il existe un  $q$  vérifiant l'inégalité (3.94). Ceci n'est donc possible que si :

$$v > v_c = \min \frac{\omega_q}{q} , \quad (3.95)$$

où  $v_c$  est appelé vitesse critique.

L'inégalité (3.95) constitue le fameux critère de Landau pour la superfluidité : si l'objet test se déplace moins vite que  $v_c$  ( $v \leq v_c$ ) dans le condensat,

alors il ne dépose aucune énergie par viscosité et peut donc prolonger son mouvement indéfiniment. Dans ce cas, le condensat est superfluide. Celui-ci devient un fluide visqueux ou dissipatif si  $v \geq v_c$ , et fait ralentir le mouvement de l'objet test.

Notons que dans le cas d'un gaz parfait, la relation de dispersion  $\omega_q$  est quadrature en  $q$  ( $\omega_q = \frac{\hbar q^2}{2m}$ ), par conséquent  $v_c$  est nulle et le condensat n'est pas superfluide. En revanche, si les atomes du condensat interagissent entre eux, alors la relation de dispersion (3.90) s'écrit :

$$\omega_q = c_{\text{son}} q \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 q^2}{4mgn_0}} \quad (\text{avec } q \equiv k) , \quad (3.96)$$

la vitesse critique est dans ce cas égale à la vitesse du son ( $v_c = c_{\text{son}}$ ). Ce résultat n'est en fait vrai que dans le régime d'interactions faibles. Dans le cas d'interactions fortes (l'hélium liquide par exemple), le critère de Landau est donné par les rotons.

Dans le modèle à deux fluides, le superfluide est en fait en écoulement potentiel, ou écoulement irrotationnel.

Notons que le critère de Landau est aussi valable pour un condensat à température non nulle dans lequel il existe déjà des excitations (voir Fig.(3.4).b).

La vitesse critique  $v_c$  caractérisant un fluide quantique de B-E a été théoriquement étudiée [52]. Dans des expériences récentes, le déplacement rectiligne et uniforme d'un laser dans un condensat de B-E et pour plusieurs valeurs de vitesse a confirmé les prédictions théoriques de  $v_c$  sur la nature superfluide et dissipative des condensats dilués de B-E [53].

## 3.5 Effet des interactions entre atomes dans un condensat de B-E piégé

### 3.5.1 Stabilité des condensats de B-E

La stabilité d'un condensat dilué de B-E décrit par l'EGP dépend du terme nonlinéaire décrivant les interactions entre atomes. On peut facilement imaginer comment la nature répulsive ( $a > 0$ ) ou attractive ( $a < 0$ )

des interactions va influencer sur la structure du condensat. Quantitativement, la stabilité d'une telle structure va être déterminé en minimisant l'énergie totale du condensat. Plus précisément, cette stabilité résulte d'un équilibre entre les divers termes de l'énergie totale du condensat : énergie cinétique, énergie potentielle de piégeage et énergie d'interaction.

Pour examiner cette stabilité, nous partons de l'équation de GP stationnaire (3.66) décrivant un condensat piégé, et tâchons d'évaluer les différents termes d'énergie figurant dans cette équation. Par souci de simplicité, le potentiel de piégeage  $U(\vec{r})$  sera considéré harmonique isotrope ( $\omega = \omega_{\perp} = \omega_z$ ) :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 . \quad (3.97)$$

On peut introduire une échelle caractéristique d'énergie  $\hbar\omega$ , une échelle de longueur typique du piège  $a_{oh}$  : la taille de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique :

$$a_{oh} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} , \quad (3.98)$$

ainsi qu'une longueur typique caractérisant la taille du condensat, notée  $R$ . La fonction d'onde  $\psi_0(\vec{r})$  du condensat stationnaire s'étend sur un volume  $R^3$ , de sorte que sa valeur moyenne soit de la forme :  $\sqrt{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = (N/R^3)^{1/2}$ .

L'évaluation des ordres de grandeur de divers termes d'énergie par atome conduit aux résultats :

- **L'énergie cinétique** :

$$E_c \propto \frac{\hbar^2}{mR^2} \approx \hbar\omega \frac{a_{oh}^2}{R^2} . \quad (3.99)$$

- **L'énergie potentielle de piégeage** :

$$E_p \propto m\omega^2 R^2 \approx \hbar\omega \frac{R^2}{a_{oh}^2} . \quad (3.100)$$

- **L'énergie d'interaction** :

$$E_{int} \propto g |\psi_0|^2 \approx \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N}{R^3} \approx \hbar\omega \frac{a_{oh}^3}{R^3} \left( \frac{Na}{a_{oh}} \right) , \quad (3.101)$$



avec :

$$E_{tot} \propto N \left[ E_c + E_p + E_{int} \right]. \quad (3.102)$$

On constate que  $E_{tot}$  dépend des paramètres  $R$ ,  $N$ ,  $a$  et  $a_{oh}$ . On pose :

$$\chi = \frac{Na}{a_{oh}} \quad \text{et} \quad \varpi = \frac{R}{a_{oh}}. \quad (3.103)$$

Suivant la valeur du paramètre  $\chi$  mesurant l'importance des interactions, plusieurs cas se présentent :

- Si  $\chi \ll 1$  :  $E_{int}$  est négligeable par rapport aux termes au voisinage des valeurs de  $\varpi$  qui minimisent la somme de ces deux termes. On peut alors négliger les interactions en première approximation. Les solutions stationnaires de l'équation GP (3.66) sont proches des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique.

- Si  $\chi \gg 1$ , le terme  $E_{int}$  en (3.102) est prépondérant. Les interactions jouent un rôle essentiel. Il faut déterminer l'éventuel nouveau minimum de  $E_{tot}$  (3.102) en distinguant les cas  $a > 0$  (interactions effectives répulsives) et  $a < 0$  (interactions effectives attractives).

**- Cas de  $a > 0$  (ou  $g > 0$ )**

Les termes  $E_c$  et  $E_{int}$  dans  $E_{tot}$  (Eq. (3.102)) sont des fonctions positives et décroissantes de  $\varpi$ , alors que le terme  $E_p$  est une fonction croissante de  $\varpi$ . Il existe donc toujours une valeur de  $\varpi$  qui minimise  $E_{tot}$ . Une telle prédiction est vérifiée par une résolution numérique de l'EGP stationnaire [57]. La figure (3.5) donne l'évaluation de  $\psi_0(z)$  pour des valeurs croissantes de  $\chi$ .

On constate que, par rapport à ce qui se passe en l'absence d'interaction  $\chi = 0$  (courbe en traits tiretés de la figure), la fonction d'onde  $\psi_0(z)$  caractérisant les atomes condensés le long de  $oz$  s'élargit progressivement quand  $\chi$  croît ( $\chi = 1, 10, 100$ ) : le condensat " gonfle ". les interactions sont donc essentielles et le terme expulsant le plus fort est celui dû à l'énergie d'interaction  $E_{int}$ . On en déduit qu'un condensat de B-E répulsif ( $a > 0$ ) est stable. Remarquons que pour  $\chi > 1$  et  $g > 0$ , le terme  $E_c$  peut être négligé par rapport à  $E_{int}$ . Cette situation est connue sous le nom de régime

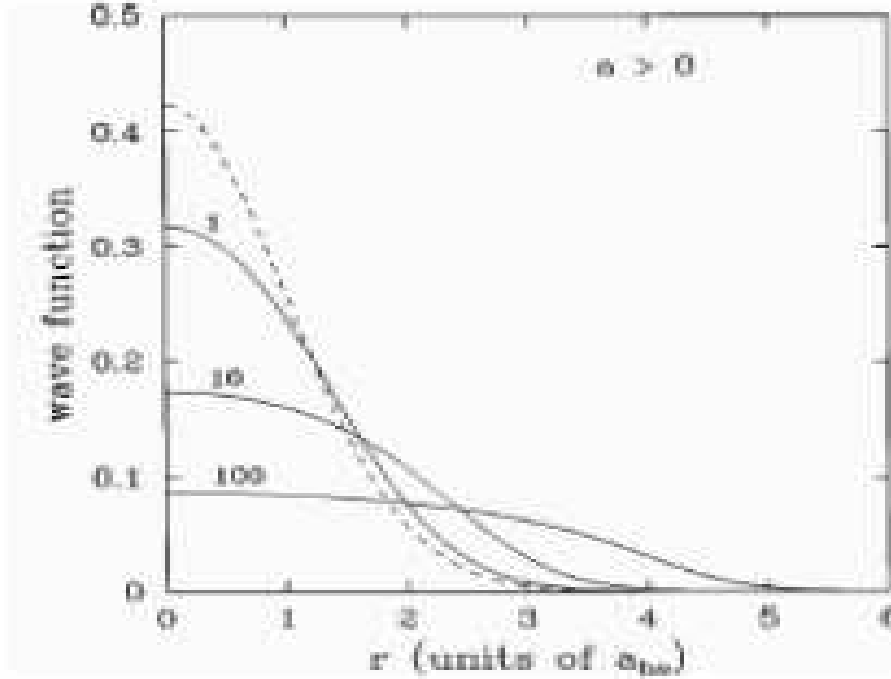


FIG. 3.5 – Variations de  $\psi_0(z)$  en fonction de  $\varpi = r$  dans le  $a > 0$  et pour  $\chi = 0$  (courbe discontinue) et  $\chi = 01, 10, 100$  (courbes continues).

de Thomas-Fermi.

- Cas de  $a < 0$  (ou  $g < 0$ )

- Pour  $\varpi \ll 1$ , c'est le terme  $E_{int}$  de  $E_{tot}$  (Eq. (3.102)) qui est prépondérant. Comme  $a < 0$ ,  $E_{tot}$  tend donc vers  $-\infty$  quand  $\varpi$  tend vers 0. Par contre, quand  $\varpi \gg 1$ , c'est le terme  $E_p$  qui l'emporte et  $E_{tot}$  tend vers  $+\infty$ . L'énergie totale  $E_{tot}$  ne présente plus alors nécessairement un minimum en fonction de  $\varpi$ .

Si  $N$  est trop grand,  $E_{tot}$  varie de manière monotone en croissant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La figure (3.6) donne les variations avec  $\varpi$  de  $E_{tot}/N$ .

Il existe donc une valeur critique de  $\chi$  au dessus de laquelle il n'y a pas de condensat stable. Notons que la courbe donnant  $E_{tot}/N$  (Fig.3.6) en fonction de  $\varpi$  présente un point d'inflexion à tangente horizontale pour  $\chi = \chi_{crit} = \frac{N_{crit} a}{a_{oh}}$ . Au delà d'une certaine valeur critique de  $\chi$  numériquement

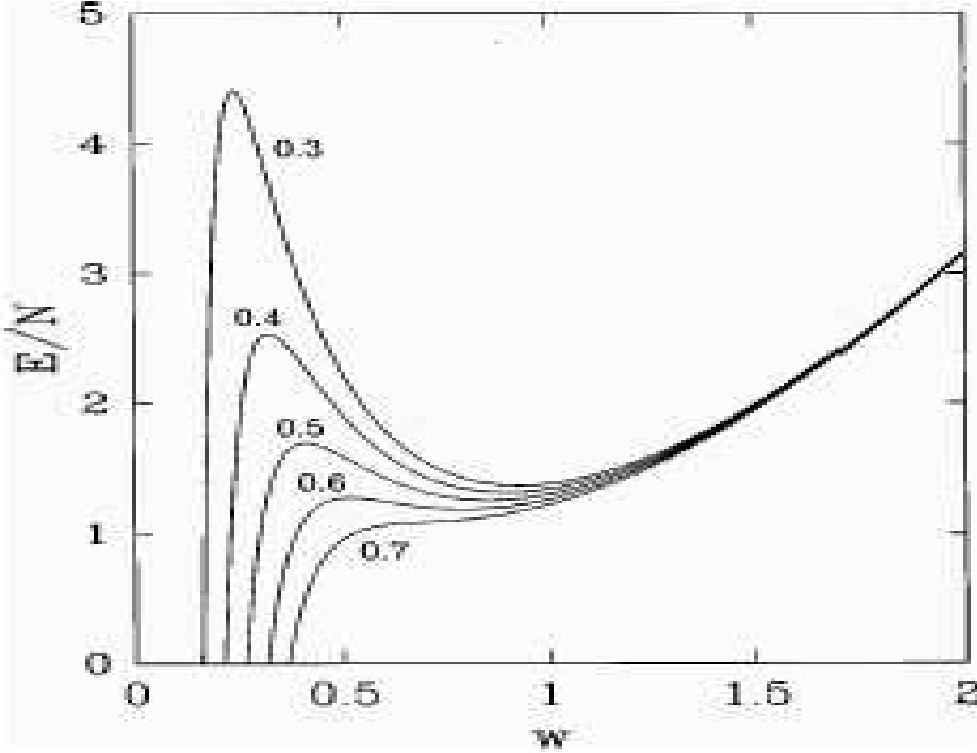


FIG. 3.6 – Variations avec  $\varpi = r$  de  $E_{tot}/N$  dans le cas de  $a < 0$ .

trouvée égale à [105] :

$$\chi_{crit} = 0.575 , \quad (3.104)$$

on trouve que l'équation de GP n'a plus de solution.

La figure (3.7) représentant la variation de  $\psi_0(z)$  en fonction de  $\varpi$  dans le cas de  $a < 0$  et pour  $\chi = 0$  (courbe discontinue) et  $\chi = 0.1, 0.3, 0.5$  (courbes continues), montre que  $\psi_0(z)$  croît avec  $\chi$ , contrairement au cas de  $a > 0$ .

En conclusion, pour  $a < 0$ , le condensat de B-E est caractérisé par des interactions effectives attractives et devient instable pour  $N_{crit}a/a_{oh} \approx 1$  c'est-à-dire pour  $N_{crit} \approx a_{oh}/a$  et s'effondre sur lui-même. Un tel condensat attractif ne peut être stable qu'en présence d'un potentiel de piégeage. Un condensat de B-E attractif a été observé pour une vapeur d'atomes de  ${}^7\text{Li}$  [19].

L'utilisation de résonance de Feshbach a permis d'étudier en détail le

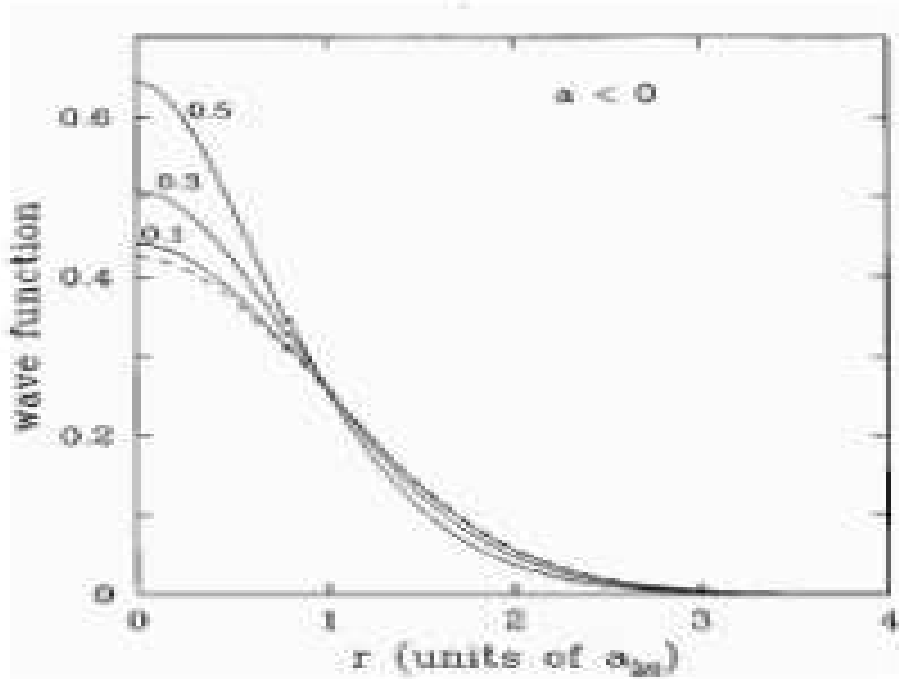


FIG. 3.7 – Variation de  $\psi_0(z)$  en fonction de  $\varpi = r$  dans le cas de  $a < 0$  et pour  $\chi = 0$  (courbe discontinue) et  $\chi = 0.1, 0.3, 0.5$  (courbes continues).

mécanisme d'effondrement (collapse) dans ce régime [36, 37].

### 3.5.2 Contrôle de $a$ , résonances de Feshbach

Nous avons décrit dans le paragraphe précédent, la dépendance de la stabilité d'un condensat de B-E au signe de la longueur de diffusion  $a$ , paramètre caractérisant la structure répulsive ou attractive d'un condensat de B-E dilué. Cependant, il est expérimentalement possible de changer le module et le signe de  $a$  caractérisant le même condensat, grâce aux résonances de Feshbach. Celles-ci consistent à placer le condensat de B-E dans un champ magnétique homogène  $B$ , puis faire augmenter le module de ce champ à l'aide du bouton contrôlant le courant électrique qui produit  $B$ . La mesure des valeurs de  $a$  associées à celles de  $B$  montre qu'autour d'une valeur critique  $B_0$ , ou seuil, de  $B$  la longueur de diffusion  $a$  diverge puis son signe change au delà de  $B_0$ . Ce phénomène, appelé résonance de Feshbach, peut être réalisé dans le piège magnétique dans lequel le condensat

de B-E a été préparé. Le processus amenant à la résonance de Feshbach résulte, d'une part, de la collision entre deux atomes alcalins dans leur état fondamental, et d'autre part, de l'interaction de leurs états internes type interaction spin-spin et spin-champ magnétique  $B$ .

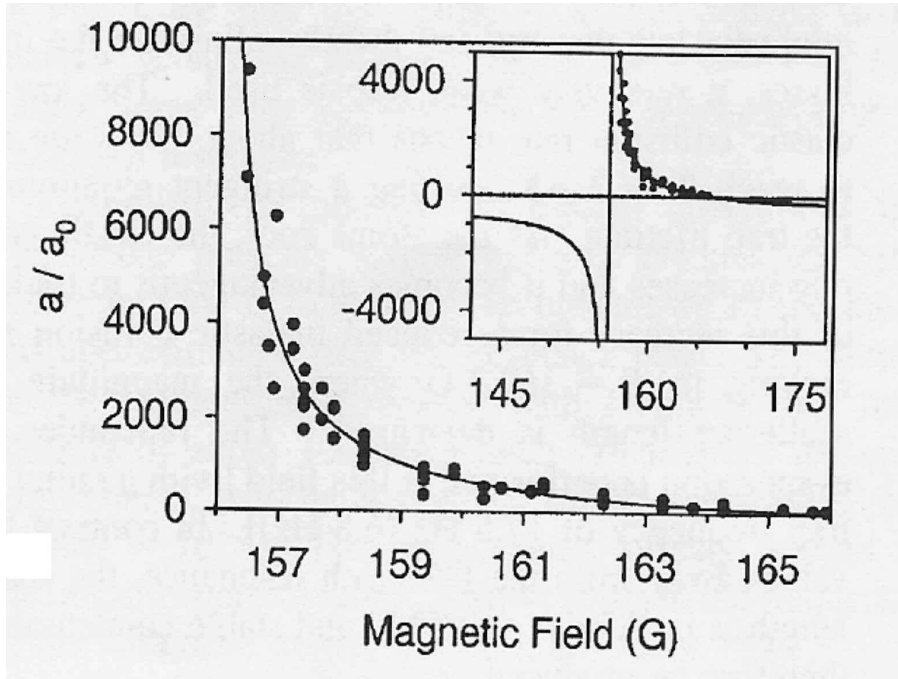


FIG. 3.8 – Résonance de Feshbach. On constate dans l'encadrée que  $a$  peut passer des valeurs négatives aux valeurs positives en divergeant pour un champ magnétique  $B \approx 150G$

Le traitement théorique exact de ces résonances pourra être consulté dans [100, 101].

Nous présentons ici l'expression donnant la longueur de diffusion  $a$  en fonction du champ magnétique :

$$a = \tilde{a} \left( 1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right), \quad (3.105)$$

où  $\Delta$  est la largeur de résonance et  $\tilde{a}$  longueur de diffusion loin de la région de résonance. L'expression (3.105) présente une résonance pour une valeur du champ magnétique telle que  $B = B_0$ . Elle montre alors, en variant  $B$ , qu'on peut changer à la fois l'amplitude et le signe de  $a$ .

La figure (3.8) représente la résonance de Feshbach réalisée dans  $^{85}\text{Rb}$  [37, 36]

### 3.5.3 Approximation de Thomas-Fermi pour $g > 0$

Notons au préalable, qu'un condensat piégé peut se présenter en deux états : stationnaire et évolutif dans le temps. L'approximation de Thomas-Fermi consiste à négliger l'énergie cinétique d'un condensat stationnaire stable ( $g > 0$ ) devant l'énergie d'interaction répulsive. L'énergie cinétique négligée dans cette approximation ne décrit que les variations de l'amplitude de la fonction d'onde  $\psi$  et non pas celles de sa phase. Pour tenir compte des variations de phase, on utilise les deux équations hydrodynamiques régissant l'évolution temporelle d'un condensat à l'approximation de Thomas-Fermi. Dans ce qui suit, nous utiliser les notations du paragraphe précédent.

#### - a) Condensat stationnaire

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que si  $a > 0$ , le condensat de B-E est toujours stable. Quand :  $Na/a_{oh} \gg 1$ , les interactions sont essentielles et le terme expulsant le plus fort est celui dû à l'énergie d'interaction. Dans ce cas on parle de régime ou approximation de Thomas-Fermi. Dans le cas d'un condensat peuplé de  $10^5$  atomes de  $^{87}\text{Rb}$  dans un piège de fréquence 100 Hz, on trouve  $Na/a_{oh} \approx 500$ . Ce résultat correspond pleinement au régime de Thomas-Fermi. Expérimentalement, presque tous les condensats sont réalisés dans le régime de Thomas-Fermi. Les interactions dans ce régime sont répulsives et ont tendance à faire grossir le condensat. Dans ce régime, on peut donc négliger le terme de l'énergie cinétique dans l'équation de GP stationnaire (3.66), de telle sorte que celle-ci prend la forme très simple suivante :

$$U(\vec{r})\psi_0(\vec{r}) + g |\psi_0(\vec{r})|^2 \psi_0(\vec{r}) = \mu \psi_0(\vec{r}) . \quad (3.106)$$

Cette équation purement algébrique se résout aisément, et l'on trouve pour la densité  $|\psi_0(\vec{r})|^2$  du condensat :

$$|\psi_0(\vec{r})|^2 = \frac{\mu - U(\vec{r})}{g} \quad \text{pour} \quad \mu \geq U(\vec{r}) \quad (3.107)$$

et :

$$|\psi_0(\vec{r})|^2 = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \leq U(\vec{r}) \quad (3.108)$$

On voit que la densité du condensat reproduit en négatif la forme du potentiel qui le confine. Dans le cas du potentiel harmonique, le profil de densité est une parabole inversée qui part de la valeur  $\mu/g$  en  $r = 0$  et qui s'annule au delà de  $r_{\max}$  (pour le cas d'un potentiel harmonique isotrope) :

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}. \quad (3.109)$$

Les calculs précédents se généralisent aisément au cas d'un piège harmonique anisotrope.

Le potentiel chimique  $\mu$  se calcule facilement par la condition de normalisation de  $\psi_0$ . On trouve alors :

$$N = \int d^3r |\psi_0(\vec{r})|^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left( \frac{15Na}{\bar{a}_{oh}} \right)^{2/5}, \quad (3.110)$$

où  $\bar{\omega}^3 = \omega_x\omega_y\omega_z$  dans le cas d'un potentiel harmonique anisotrope et  $\bar{a}_{oh}$  est la taille de l'état fondamental harmonique associé à  $\bar{\omega}$ , soit  $\bar{a}_{oh} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ . Notons dans ce cas que l'on a :  $\mu \gg \hbar\bar{\omega}$ , car, dans le régime de Thomas-Fermi,  $Na/a_{oh} \gg 1$ .

La taille caractéristique optimale du condensat, appelée rayon de Thomas-Fermi  $R_{TF}$ , est donnée par la condition  $\mu = U(\vec{r})$  :

$$\mu = U(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad R_{TF} = R_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2}} = \bar{a}_{oh} \left( \frac{15Na}{\bar{a}_{oh}} \right)^{1/5}. \quad (3.111)$$

On constate que la taille du condensat est comme attendu bien plus grande que celle de l'oscillateur harmonique.

Remarquons que l'approximation de Thomas-Fermi n'est plus valable au bord du condensat car elle correspond à un terme d'énergie cinétique divergent.

### Rapport d'aspect ( " aspect ratio " )

Pour un piège harmonique de symétrie de révolution autour de  $oz$ , caractérisé par les fréquences  $\omega_z$  (axiale) et  $\omega_{\perp}$  (radiale), le potentiel  $U(\vec{r})$  prend la forme :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m \left[ \omega_z^2 z^2 + \omega_{\perp}^2 r^2 \right]. \quad (3.112)$$

En reportant (3.112) dans (3.108), on peut déterminer les valeurs maximales  $z_{\max}$  et  $R_{\max}$  de  $z$  et  $r$  par les équations :

$$\mu - \frac{1}{2}m\omega_z^2 z_{\max}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \mu - \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 r_{\max}^2 = 0. \quad (3.113)$$

Ce qui conduit pour le rapport d'aspect du condensat en présence d'interaction :

$$\frac{z_{\max}}{r_{\max}} = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_z}. \quad (3.114)$$

Or, en absence d'interactions, les dimensions du condensat sont données par  $\sqrt{\hbar/m\omega_z}$  le long de  $oz$  et  $\sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$  dans les directions radiales, ce qui conduit au rapport d'aspect :

$$\frac{a_z}{a_{\perp}} = \sqrt{\frac{\omega_{\perp}}{\omega_z}}. \quad (3.115)$$

Comme  $\omega_{\perp}/\omega_z > \sqrt{\omega_{\perp}/\omega_z}$  ( si  $\omega_{\perp} > \omega_z$  ) on en déduit, en comparant (3.114) et (3.115) que les interactions augmentent l'allure anisotrope du condensat.

### - b ) Condensat en évolution

L'approximation de Thomas-Fermi a été obtenue en négligeant les termes en  $\Delta$  dans l'EGP stationnaire décrivant uniquement les variations spatiales de  $\psi$  et non pas celles de sa phase. Si à présent on retourne au cas général d'un condensat évoluant dans le temps, l'approximation de Thomas-Fermi ne se résume pas à négliger les termes en  $\Delta$  (énergie cinétique) dans l'EGP dépendant du temps (3.65), car, dans ce cas,  $\psi$  dépend de sa phase  $\theta$ . Pour éclaircir cette problématique, considérons le cas particulier d'une expansion balistique d'un condensat (voir observation directe de la production de la condensation de B-E, fin chap. 2) : l'énergie de champ moyen accumulée par le piégeage est convertie en énergie cinétique durant l'explosion. Il n'est donc plus question, après l'explosion, de négliger l'énergie cinétique devant l'énergie d'interaction. Ceci peut se comprendre en partant de l'équation hydrodynamique (équation (3.83)) :

$$m \left( \partial_t \Phi + \frac{\Delta \Phi}{2} \right) = - \left[ U(\vec{r}) + gn - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (3.116)$$



L'approximation de Thomas-Fermi consiste à négliger le dernier terme du membre de droite de l'équation (3.116), c'est-à-dire le terme de la pression quantique, et non pas le terme en  $\Delta$  associé à  $\Phi = \frac{\hbar}{m}\theta$ . En résumé, l'état d'évolution d'un condensat non-stationnaire est décrit à l'approximation de Thomas-Fermi, par les deux équations hydrodynamiques couplées :

$$\left( \partial_t \Phi + \frac{\Delta \Phi}{2} \right) = - \left[ U(\vec{r}) + gn \right] \quad \text{et} \quad \partial n_t + \vec{\nabla} (n \vec{\nabla} \Phi) = 0 . \quad (3.117)$$

Remarquons que l'approximation de Thomas-Fermi se réalise non seulement lorsque le terme de l'énergie d'interaction est prépondérant devant celui de l'énergie cinétique, mais aussi pour des densités  $n$  suffisamment élevées de telle sorte que leur variation soit négligée.

### 3.5.4 Longueur de relaxation ou de cohérence $\xi$

Une grandeur apparaît naturellement lorsque l'on se place dans l'approximation de Thomas-Fermi : il s'agit de la longueur typique sur laquelle les énergies cinétique et d'interaction sont comparables. Cette longueur, appelée longueur de relaxation, ou de cohérence, notée  $\xi$ , vaut ( $E_{cin} = E_{int}$ ) :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi an}} . \quad (3.118)$$

Si on impose à la fonction d'onde de s'annuler en un point,  $\xi$  est la longueur sur laquelle la densité spatiale  $n$  passe de 0 à sa valeur asymptotique locale. En d'autres termes, les défauts éventuels de la fonction d'onde sont gommés sur une étendue de  $\xi$ . C'est pourquoi cette longueur est parfois appelée longueur de cicatrisation ( en anglais : healing length ). L'approximation de Thomas-Fermi ne tient plus sur des échelles de longueurs inférieures à  $\xi$ .

Les trois longueurs caractéristiques d'un condensat piégé dans le régime de Thomas-Fermi s'ordonnent simplement :

$$\xi \ll a_{oh} \ll R . \quad (3.119)$$

Elles vérifient en outre :  $R/a_{oh} \sim a_{oh}/\xi$ . Dans la limite :  $n | a |^3 \ll 1$ , on peut inclure la longueur de diffusion  $a$  et la distance moyenne entre particules :  $1/n^{1/3}$ , dans cette classification :

$$a (5 \text{ nm}) \ll 1/n^{1/3} (0.2 \mu\text{m}) < \xi (0.3 \mu\text{m}) \ll a_{oh} (1 \mu\text{m}) \ll R (5 \mu\text{m}) . \quad (3.120)$$

### 3.6 Equation de GP et expérience, Conclusion

Nous avons montré que l'état quantique d'un condensat de B-E dilué homogène ou inhomogène, peut être représenté par une onde quantique macroscopique sous forme d'un champ scalaire complexe, et que l'EGP décrit à l'approximation de champ moyen, l'évolution dynamique spatio-temporelle de cette onde. La réalisation avec succès des premiers condensats de B-E a conduit à la justification expérimentale de la validité à la fois du modèle de champ moyen, de l'interaction binaire entre deux atomes paramétrisée par la longueur de diffusion  $a$  et de la cohérence de l'état quantique du condensat. En effet, pour le condensat de B-E de sodium  $^{23}\text{Na}$ , la comparaison de la densité spatiale  $n$  obtenue directement par le calcul numérique à partir de l'EGP, et mesurée par imagerie après coupure du piège montre une bonne concordance entre l'approximation de champ moyen et l'expérience [32]. De plus, il a été expérimentalement mis en évidence dans un condensat de B-E de  $^{87}\text{Rb}$  [31] que les interactions entre atomes sont limitées à deux atomes, ou interaction binaire, et que le condensat est cohérent. Notons que la propriété de la cohérence quantique d'un condensat a été bien vérifiée [29, 86, 87] par une procédure analogue à celle utilisée dans l'étude de la cohérence transverse d'un faisceau lumineux. En effet, la procédure standard consiste à envoyer le faisceau lumineux sur un écran percé de deux trous et à mesurer le contraste des interférences entre les ondes diffractées par ces trous. Ce schéma a été transposé aux condensats de B-E par le groupe de Munich (voir Fig. 3.9) [30].

En effet, l'équivalent d'un trou est une onde radiofréquence qui extrait les atomes en un point donné du piège magnétique. Quand une seule onde est appliquée, on obtient un jet d'atomes issu du condensat, qui tombe dans le champ de pesanteur terrestre. En appliquant deux ondes radiofréquences, on réalise la situation désirée, avec deux jets issus de deux points différents du condensat (figure 3.9-a).

Les résultats de cette expérience confirment parfaitement l'idée que les bosons atomiques sont accumulés dans le même état quantique, et qu'on dispose donc d'un ensemble cohérent de particules. Quand la température  $T$  est très en dessous de la température critique  $T_c$ , on observe une interférence avec un grand contraste dans la région où les deux faisceaux se recouvrent

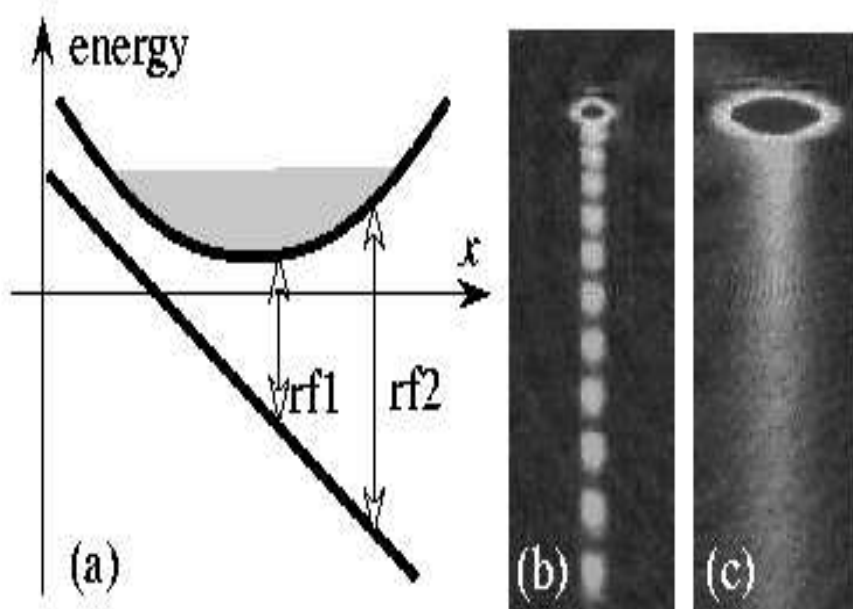


FIG. 3.9 – (a) Extraction de deux jets atomiques d'un nuage d'atomes de rubidium 87. Deux ondes radio-fréquences,  $rf1$  et  $rf2$ , font basculer le moment magnétique d'atomes piégés. Les atomes tombent ensuite dans le champ de pesanteur terrestre (dirigé selon  $x$ ). (b) Le nuage d'atomes est un condensat quasi-pur et un fort contraste d'interférence est observé, ce qui révèle la cohérence de phase de l'ensemble de l'échantillon. (c) Pour un nuage au dessus de la température  $T_c$ , aucune cohérence de phase n'est mesurée si la distance entre les points d'extraction dépasse 200 nm.

(figure 3.9-b). Ceci est vrai même pour une grande différence entre les deux radiofréquences, correspondant à une distance entre les deux points sources de l'ordre de la taille du condensat. Au contraire, quand  $T > T_c$ , aucune interférence détectable n'est visible dans la zone où les deux faisceaux se recouvrent (figure 5.11-c), à moins que la distance entre les deux points sources soit inférieure à 200 nm, c'est-à-dire la longueur de cohérence du gaz dans ces conditions expérimentales.

La cohérence quantique d'un condensat qui est analogue à celle de faisceau laser, a conduit à l'étude et au développement de jets à atomes froids

ou “ laser à atomes ” [38, 39, 40].

En conclusion, l'ensemble de traitements et de résultats présentés dans ce troisième chapitre met en évidence que l'EGP décrit véritablement et d'une manière précise l'évolution spatiale et spatio-temporelle d'un condensat de B-E dilué. La formulation simple de l'EGP qui est basée sur le modèle de champ moyen et du paramètre longueur de diffusion  $a$ , a conduit à des résultats qui sont en bon accord avec ceux obtenus par la mesure expérimentale directe. De plus, l'EGP a constitué, depuis la réalisation des condensats de B-E et jusqu'à nos jours, un modèle théorique très avancé qui décrit aussi bien la dynamique des fluides quantiques dilués comme les condensats de B-E que concentrés comme l'hélium liquide. L'EGP est actuellement très utilisée dans plusieurs domaines de la physique moderne notamment en physique des fluides quantiques et d'optique non-linéaire.

DEUXIEME PARTIE

SOLITONS GRIS, PHONONS  
ET DISSIPATION DANS UN  
CONDENSAT DE B-E DILUE,  
FINI ET QUASI-1D

.

La réalisation des condensats de B-E dilués en 1995 dans des vapeurs d'atomes alcalins ultra-froids a non seulement constitué et jusqu'à nos jours, un progrès expérimental remarquable en physique des condensat gazeux quantiques, mais elle a aussi donné à l'étude de l'EGP une grande importance du fait que cette équation décrit d'une manière précise l'évolution dynamique à  $T = 0K$  des condensats de B-E dilués, et s'applique dans d'autres domaines comme l'optique non-linéaire. Cependant, cette équation sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire en absence du terme de potentiel  $U$ , n'est analytiquement intégrable ni à 3D ni à 2D, que dans le cas particulier 1D par la méthode inverse de diffusion. Cette difficulté n'a été surmontée que grâce à l'utilisation des techniques sophistiquées de simulation numérique qui ont permis l'intégration directe de l'équation de GP dans sa forme la plus générale, et d'étudier par ailleurs l'évolution et les propriétés statiques et dynamiques des condensats de B-E.

Dans cette seconde partie de mémoire de notre thèse, nous allons numériquement étudier l'évolution dynamique d'un condensat de B-E dilué, répulsif, quasi-1D et confiné dans un piège nonharmonique. Les résultats de notre étude qui sont parus dans deux articles (voir [106, 107]), vont être respectivement présentés dans les deux chapitres suivants 4 et 5.

## Chapitre 4

# Solitons gris et phonons dans un condensat de B-E dilué, quasi-1D et confiné dans un piège nonharmonique.

La réalisation des condensats de B-E dilués dans des pièges magnéto-optiques 3D a permis le développement de la technique de piégeage très fort selon une direction longitudinale ou deux directions transverses d'un piège magnétique. Le succès de cette technique a récemment offert la possibilité de réduire la dimensionnalité d'un condensat dilué de 3D à 2D et à 1D en réduisant le nombre d'atomes du condensat piégé. Ainsi, en 2001 des condensats dilués, répulsifs et confinés dans des pièges harmoniques 2D et 1D ont été réalisés dans le  $^{23}\text{Na}$  à 2D et 1D [54], et dans le  $^7\text{Li}$  à 1D [55]. Le condensat fortement confiné dans un piège harmonique 2D a la forme d'un disque très mince et quasi-2D, alors que celui confiné dans un piège harmonique 1D est fortement allongé et quasi-1D.

Nous allons présenter dans ce chapitre les résultats de notre étude qui a été consacrée à la propagation de solitons gris, solutions exactes obtenues par intégration numérique directe de l'EGP 1D avec le terme potentiel de piégeage, dans un condensat de B-E dilué, répulsif et confiné dans un piège nonharmonique 1D. Cette étude a montré que les parois, bords paraboliques du piège nonharmonique 1D, ainsi qu'un obstacle en forme d'une

bosse gaussienne placée dans le même piège, ont des effets surprenant sur le mouvement propagatif uniforme du soliton gris. Ces effets se manifestent par l'émission spontanée de phonons aux points de retour du soliton sur les parois, et quand il traverse l'obstacle bosse gaussienne.

## 4.1 Solitons gris dans un condensat de B-E dilué, répulsif, quasi-1D et infini

Nous exposons dans cette section l'étude théorique de l'évolution dynamique spatio-temporelle d'un condensat de B-E dilué, répulsif, quasi-1D et infini ou longitudinalement illimité. L'EGP 1D décrit à  $T = 0$  et d'une manière précise, la dynamique d'un tel condensat, et s'écrit :

$$i\hbar\partial_\tau\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{XX}\psi - \mu\psi + g|\psi|^2\psi , \quad (4.1)$$

où  $\psi$  est le champ scalaire complexe représentant la fonction d'onde du condensat,  $|\psi|^2$  la densité du condensat,  $g$  la constante de couplage entre deux atomes.  $g$  est reliée à la longueur de diffusion  $a$  et à la section transverse  $S$  du condensat allongé par :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{mS}a \quad (m \text{ est la masse d'un atome}) . \quad (4.2)$$

En choisissant un système d'unités réduites dans lequel  $t$ ,  $x$  et  $A$  sont définis comme :

$$t = \frac{\tau}{\tau_0} , \quad x = \frac{X}{\xi_0} , \quad \text{et} \quad A = \frac{\psi}{\sqrt{\rho_0}} , \quad (4.3)$$

l'équation (4.1) prend alors la forme adimensionnée simple suivante :

$$i\partial_t A = -\partial_{xx}A - A + |A|^2A , \quad (4.4)$$

avec :  $\tau_0 = \frac{\hbar}{g\rho_0}$  est le temps de corrélation ou de relaxation,  $\xi_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho_0}}$  est la longueur de relaxation (the healing length),  $\mu = g\rho_0$  est le potentiel chimique et  $\rho_0$  la densité stationnaire du condensat en équilibre. Dans ce système d'unités réduites, la vitesse du son est définie comme :

$$c_s = \sqrt{g\rho_0/2m} . \quad (4.5)$$



De plus, la densité  $\rho$  et le nombre total  $N$  d'atomes du condensat sont respectivement définis comme :

$$\rho = |A|^2 \quad \text{et} \quad N = \int dx |A|^2. \quad (4.6)$$

Notons que la longueur de relaxation  $\xi_0$  associée au condensat allongé décrit par (4.1), doit être beaucoup plus grande que la distance moyenne  $1/\rho_0$  séparant deux atomes dans le condensat allongé le long de la direction  $x$ , c'est-à-dire  $\rho_0 \xi_0 \gg 1$  [108]. Cette dernière condition est équivalente à  $\mu_3 \ll \omega_\perp$ , où  $\mu_3$  étant le potentiel chimique du condensat à 3D et  $\omega_\perp$  la fréquence transverse utilisée pour confiner ce condensat dans sa forme allongée quasi-1D.

L'équation de GP 1D (4.4) est analytiquement intégrable par la méthode inverse de diffusion [46, 47]. Les solutions analytiques obtenues sont des excitations élémentaires non-linéaires, propagatives avec une vitesse constante et sous forme de "trou". Elles sont appelées en optique non-linéaire solitons gris (gray solitons or dark solitons). Leur expression analytique est [46, 47] :

$$A_u(x, t) = \frac{(c + i\lambda)^2/2 + \exp[\lambda(x - x_0 - ct)]}{1 + \exp[\lambda(x - x_0 - ct)]}, \quad (4.7)$$

avec :

$$c^2 + \lambda^2 = 2, \quad (4.8)$$

où  $c$  et  $\lambda$  sont respectivement la vitesse et la profondeur du soliton, et  $x_0$  sa position à  $t = 0$ . Le soliton au repos ( $c = 0$ ) est appelé soliton noir. La largeur du soliton gris est équivalente à la longueur de relaxation du condensat considéré et donnée par l'expression :  $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho}}$ .

Il a été théoriquement démontré que les solitons gris dans des condensats répulsifs homogènes (infinis) 3D et 2D sont instables [45], alors qu'ils sont stables à 1D [46, 47]. Récemment, les solitons dans des condensats de B-E répulsifs 3D ont été générés dans le  $^{23}\text{Na}$  [50] et le  $^{87}\text{Rb}$  [51] par une technique optique d'impression de phases de ces solitons.

Dans le cas d'un condensat attractif ( $a < 0$ ), quasi-1D et infini, les solutions de l'EGP (4.4) avec  $g < 0$  sont propagatives et en forme de "bosse". Elles sont appelées solitons brillants (bright solitons). Ces derniers ont été très récemment observés [44].

## 4.2 Solitons gris et phonons dans un condensat de B-E quasi-1D et confiné dans un piège nonharmonique

Nous allons considérer dans cette section un condensat de B-E dilué répulsif, quasi-1D et nonhomogène, ou condensat fini, c'est-à-dire confiné dans un potentiel piège  $U$  bien défini. A la température  $T = 0\text{K}$ , l'EGP 1D décrivant l'évolution dynamique de ce condensat piégé est obtenue à partir de l'équation (4.4) en ajoutant au membre de droite de celle-ci le potentiel piège  $U(x)$ , et s'écrit :

$$i\partial_t A = -\partial_{xx} A - A + |A|^2 A + U(x)A . \quad (4.9)$$

En régime stationnaire ( $i\partial_t A = 0$ ), l'équation (4.9) à l'approximation de Thomas-Fermi conduit à :

$$\rho = 1 - U(x) . \quad (4.10)$$

L'équation (4.10) montre que  $0 \leq \rho \leq 1 - U(x)$ , c'est-à-dire que l'effet du potentiel piège  $U(x)$  sur le condensat considéré est de diminuer sa densité  $\rho$ .

Les confinements dans lesquels les condensats de B-E ont été réalisés sont généralement en forme géométrique harmonique 3D [56, 57]. Dans des expériences très récentes, des confinements en forme quartique ont été utilisés [109]. Nous nous proposons dans ce mémoire de thèse l'utilisation de pièges nonharmoniques 1D.

### 4.2.1 Forme géométrique de pièges nonharmoniques 1D

Le potentiel piège nonharmonique  $U(x)$  1D proposé dans ce mémoire est choisi en deux formes. Dans la première forme,  $U(x)$  est pris comme un potentiel plat  $U_1(x)$  limité avec des bords paraboliques (parois paraboliques). Son expression analytique étant :

$$U_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_1}{L}\right)^2 & \text{for : } 0 \leq x \leq x_1 ; \\ 0 & \text{for : } x_1 \leq x \leq (l - x_1) ; \\ \left(\frac{x - l + x_1}{L}\right)^2 & \text{for : } (l - x_1) \leq x \leq l . , \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $l$  est la largeur de  $U_1(x)$ , avec  $l$  est plus grande que  $x_1$  ( $x_1 = 27, l = 200.$ ), et  $L$  est un paramètre identique à une longueur, et qui caractérise la douceur des bords de  $U_1(x)$ . La seconde forme  $U_2(x)$  est obtenue en ajoutant à  $U_1(x)$  dans sa partie plate, un obstacle en forme d'une bosse gaussienne  $W(x)$  de telle sorte que :  $U_2(x) = U_1(x) + W(x)$ . L'expression de  $W(x)$  est :

$$W(x) = W_0 \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2\right], \quad (4.12)$$

où  $\sigma$  est la largeur caractéristique de la bosse gaussienne, et  $W_0$  sa profondeur ( $W_0 = 0.5$ ).

Nous allons montrer que les bords paraboliques de  $U_1(x)$  ainsi que la bosse gaussienne  $W(x)$  contenue dans  $U_2(x)$  joueront un rôle important et inattendu dans la propagation des solitons gris à travers le condensat de B-E dilué et répulsif considéré.

### 4.2.2 Solutions numériques de l'EGP 1D avec un potentiel piège nonharmonique : Solitons gris et phonons

Préalablement, nous signalons que contrairement à l'équation (4.4) qui est analytiquement intégrable, il n'existe pas de méthodes analytiques pouvant conduire à l'intégration directe de l'équation (4.9) en raison de la présence du terme  $U(x)$ . Cependant, les méthodes de calcul par simulation numérique constituent des outils autant puissants que précis pour intégrer des équations de type (4.9). Avant de présenter les solutions que nous avons obtenu par l'intégration numérique directe de l'équation (4.9), il convient d'expliquer assez brièvement la procédure numérique adoptée pour intégrer l'équation (4.9).

#### - Procédure numérique

L'intégration numérique de l'équation (4.9) se fait en partant d'une condition initiale ou solution initiale représentant l'état fondamental  $A_0$  de l'équation (4.9) en régime stationnaire ( $i\partial_t A = 0$ ). L'algorithme que nous avons utilisé consiste à la minimisation de la fonctionnelle d'énergie suivante, connue sous le nom de fonctionnelle de Gross-Pitaevskii, et associée

au condensat considéré :

$$H = \int dx \left[ |\nabla A|^2 + \frac{1}{2}(|A|^2 - 1)^2 + U(x)(|A|^2 - 1) \right]. \quad (4.13)$$

Notons que l'équation (4.9) peut être directement obtenue à partir de la fonctionnelle  $H$  (4.13) en utilisant le système hamiltonien :  $i\partial_t A = \frac{\partial H}{\partial A^*}$ . La minimisation de la fonctionnelle  $H$  est réalisée par intégration jusqu'à relaxation de l'équation réelle 1D de Ginzburg-Landau suivante :

$$-\partial_t R = -\partial_{xx} R - R + R^2 R + U(x)R. \quad (4.14)$$

L'intégration jusqu'à la relaxation de l'équation (4.14), c'est-à-dire à partir de l'instant  $t = 0$  jusqu'à l'instant  $t = t_{\max}$  au delà duquel  $R$  ne varie pas dans le temps, se fait en partant de la condition initiale  $\alpha(x)$  en forme gaussienne :

$$\alpha(x) = \alpha_0 \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\sigma_1}\right)^2\right], \quad (4.15)$$

avec :  $\alpha_0 = 0.5$  ,  $x_0 = 100$  , et  $\sigma_1 = 30$ . La solution réelle et stable  $R_0$  obtenue par intégration jusqu'à la relaxation de l'équation (4.15), correspond au module de l'état fondamental  $A_0$  sans soliton. Un soliton gris peut être inséré en ajoutant à  $R_0$  le module  $b_s$  du soliton gris  $A_u(x, t)$  à  $t = 0$  (équation (4.7)). Le module de la condition initiale  $A_0$  est pris sous la forme convenable suivante :

$$|A_0| = R_0 + b_s - 1, \quad (4.16)$$

et la phase  $\phi_0$  de  $A_0$  est immédiatement déterminée en remarquant que  $\phi_0 = \phi_s$  car  $R_0$  est réelle, et  $\phi_s$  étant la phase de  $A_u(x, t)$  à  $t = 0$ .

La procédure que nous venons de décrire permet de placer le soliton, pris à  $t = 0$ , dans  $A_0$  à la position désirable  $x_0$ . L'intégration numérique de l'équation (4.9) a été réalisée par la méthode des différences finies avec le schéma de Crank-Nicholson qui est couramment utilisé pour intégrer l'EGP 1D [58]. Les résultats numériques obtenus par l'utilisation de ce schéma ont été testés et sont en parfait accord avec ceux obtenus par l'utilisation du schéma spectral qui est beaucoup plus précis que celui de Crank-Nicholson [111].

La discrétisation de l'équation (4.9) par la méthode des différences finies a été faite en posant :  $A = Y + iZ$  , avec  $|A| = \sqrt{Y^2 + Z^2}$  et

$\phi_s = \arctg(Z/Y)$ . Nous avons utilisé comme pas de discrétisation spatiale  $\Delta x = 0.05$  et temporelle  $\Delta t = 0.2 \times 10^{-4}$ .

**- Solutions numériques de l'EGP (4.9) : solitons gris et phonons**

Nous avons numériquement intégré l'EGP 1D (4.9) avec le potentiel piège nonharmonique  $U_1(x)$ , puis ensuite avec  $U_2(x)$ . L'intégration de l'équation (4.9), avec chacun des deux potentiels  $U_1(x)$  et  $U_2(x)$ , a été faite dans deux régimes : i) le régime stationnaire correspondant à  $i\partial_t A = 0$  et qui a permis l'obtention de  $|A_0|$  et  $\phi_0$  représentant respectivement le module et la phase de la solution initiale  $A_0$ , ou solution stationnaire, avec un soliton localisé à la position  $x_0$  pour  $t = 0$ . ii) Le régime évolutif correspondant à  $i\partial_t A \neq 0$ . Les solutions de (4.9) dans ce régime représentent les positions successives par lesquelles passe le soliton gris en parcourant le condensat répulsif de B-E considéré avec la vitesse  $c < c_s$  ( $c_s = \sqrt{2}$  est la vitesse du son obtenue à partir de (4.8 pour  $\lambda = 0$ ).

La figure (4.1) représente les solutions numériques directes et exactes de l'équation (4.9) avec  $U_1(x)$ , aussi bien stationnaires  $A_0$  (partie supérieure :  $|A_0|$  et  $\phi_0$ ), qu'évolutives  $A$  (partie inférieure :  $|A|$  et  $\phi_s$ ).

Sur la partie inférieure de la figure (4.1), on constate que le soliton se propage de gauche à droite en parcourant uniformément la partie plate de  $U_1(x)$  à compter de  $t = 0$  associé à la position  $x_0 = 100$ , puis il subit une réflexion quand il atteint le point de son premier retour (bord droite du condensat). Cette réflexion du soliton, qui se fait aussi au point de son second retour (bord gauche du condensat), s'accompagne par une émission spontanée et inattendue de petites ondes sonores ou phonons (voir les phonons sur les courbes ascendantes de  $|A|$  et  $\phi_s$  de la figure (4.1)). Cette émission de phonons a été également observée lorsqu'on a placé un obstacle dans la partie plate de  $U_1(x)$  et loin des bords du condensat. Cette dernière situation a été réalisée lorsqu'on a numériquement intégré l'équation (4.9) avec le potentiel  $U_2(x)$  (voir figure (4.2)). En effet, la partie inférieure de la figure (4.2) représentant la propagation de soliton à compter de  $t = 0$  associé à la position  $x_0 = 70$ , montre que quand le soliton rencontre l'obstacle en forme gaussienne et placé à  $x_b = 120$ , il le traverse en émettant des

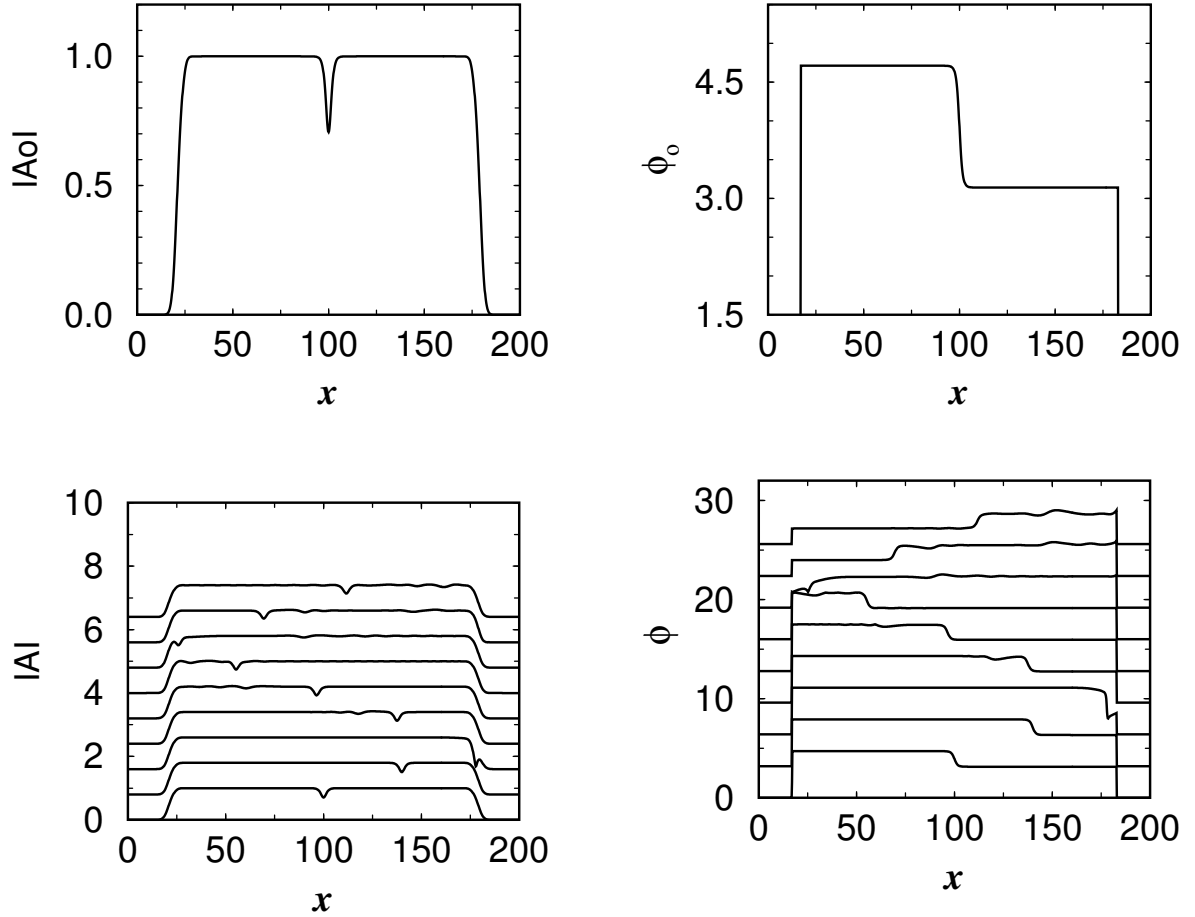


FIG. 4.1 – Solutions numériques de l’EGP (4.9) de  $t = 0$  jusqu’à  $t = 320$ , avec  $U_1(x)$  (Eq.(4.11),  $l = 200$ ,  $L = 6.9006$ ,  $x_0 = 100$ , et  $x_1 = 27$ ), et pour  $c = \lambda = 1$ . En haut,  $|A_0|$  et  $\phi_0$  en fonction de  $x$  (solutions stationnaires de l’équation (4.9)). En bas, solutions propagatives de l’équation (4.9) correspondant aux positions successives du soliton gris et associées aux instants  $t = 0, 40, 80, \dots, 320$ . Ces positions comptées de gauche à droite à partir de  $x_0 = 100$ , sont observées sur  $|A|$  et  $\phi$  avant et après les points de retour du soliton. On constate l’émission des phonons à partir du premier et second points de retour du soliton gris.

phonons. Cet obstacle se comporte comme un point de retour du soliton gris si  $c \leq 0.5$  avec  $W_0 < 0.5$ , et  $W_0 \geq 0.6$  pour  $c = 1$ . On note que dans le cas de  $U_1(x)$ , l’émission de phonons diminue avec la diminution de la vitesse de propagation du soliton gris pour de faibles vitesses initiales :  $c < 0.3$ .

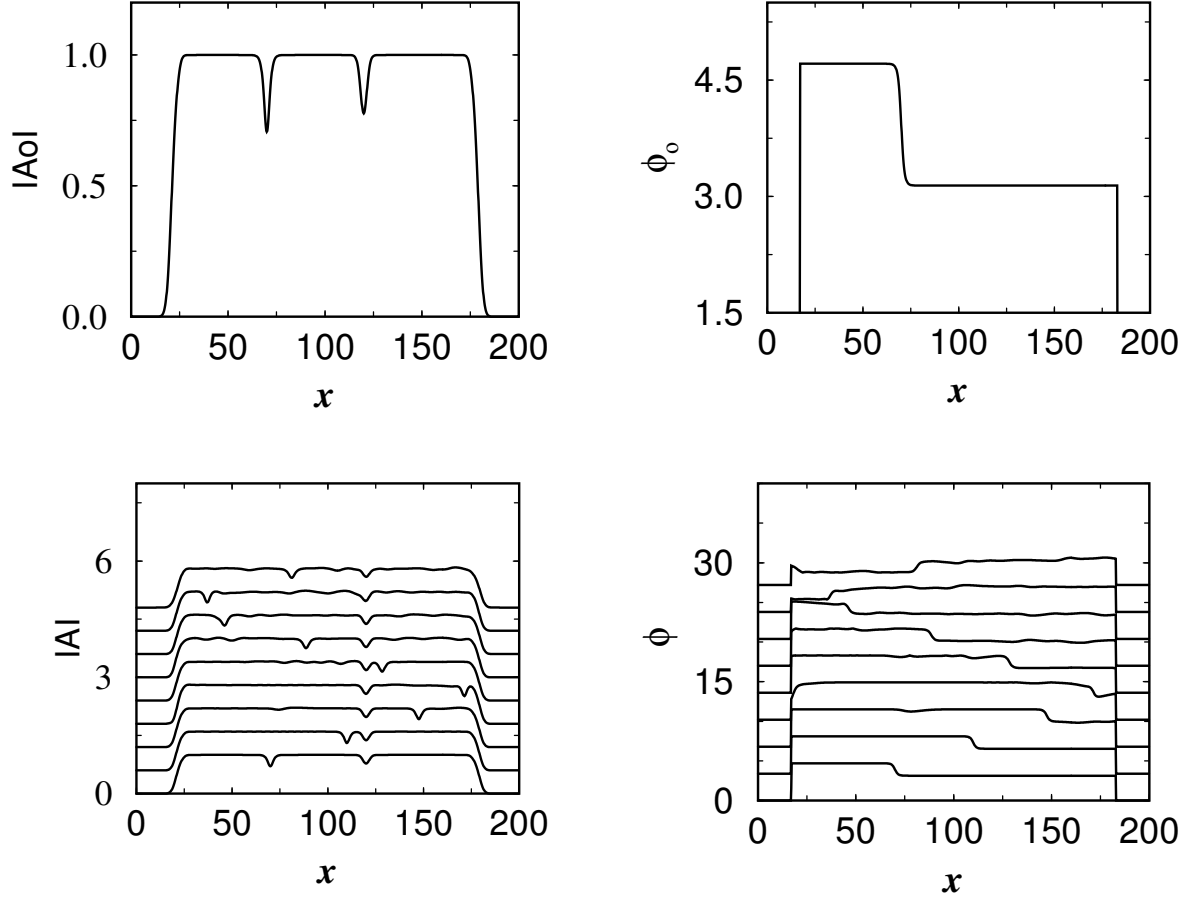


FIG. 4.2 – Solutions numériques de l'EGP (4.9) de  $t = 0$  jusqu'à  $t = 320$ , avec  $U_2(x)$  contenant la bosse gaussienne  $W(x)$  placée à  $x_2 = 120$  ( $U_2(x) = U_1(x) + W(x)$ ), avec  $l = 200$ ,  $L = 6.9006$ ,  $x_0 = 70$ , et  $x_1 = 27$  pour  $U_1(x)$ , et  $W_0 = 0.5$  et  $\sigma = 2$  pour  $W(x)$ , et pour  $c = \lambda = 1$ . En haut,  $|A_0|$  et  $\phi_0$  en fonction de  $x$  (solutions stationnaires). En bas, solutions propagatives de l'équation (4.9) associées aux positions successives du soliton gris aux instants  $t = 0, 40, 80, \dots, 320$ . Ces positions comptées de gauche à droite et partir de  $t = 0$  et  $x_0 = 70$ , sont observées sur  $|A|$  et  $\phi$  avant et après les points de retour du soliton gris. On constate l'émission de phonons à partir du premier et second points de retour du soliton gris et lorsque le soliton traverse la bosse gaussienne  $W$ .

### 4.2.3 L'origine physique de l'émission de phonons

Dans le but d'expliquer et comprendre le mécanisme et l'origine physique de l'émission de phonons aux points de retour du soliton, nous avons

utilisé les solutions numériques directement obtenues à partir de l'équation (4.9) pour déterminer la trajectoire du soliton gris respectivement dans le cas de  $U_1(x)$  et de  $U_2(x)$  (figure (4.3) - courbes en ligne continue). Afin de comparer les deux trajectoires précédentes à d'autres résultats, nous avons tracé sur la même figure (figure (4.3) - courbes en ligne discontinue), la trajectoire du soliton gris considéré dans une étude théorique précédente comme une quasi-particule en mouvement dans un potentiel piège 1D arbitraire  $U_a$ . La trajectoire du soliton en tant que quasi-particule est obtenue par l'intégration numérique directe de son équation de mouvement suivante [110] :

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{dU_a}{dx} . \quad (4.17)$$

L'intégration de l'équation (4.17) a été respectivement faite pour  $U_a(x) = U_1(x)$  et  $U_a(x) = U_2(x)$ .

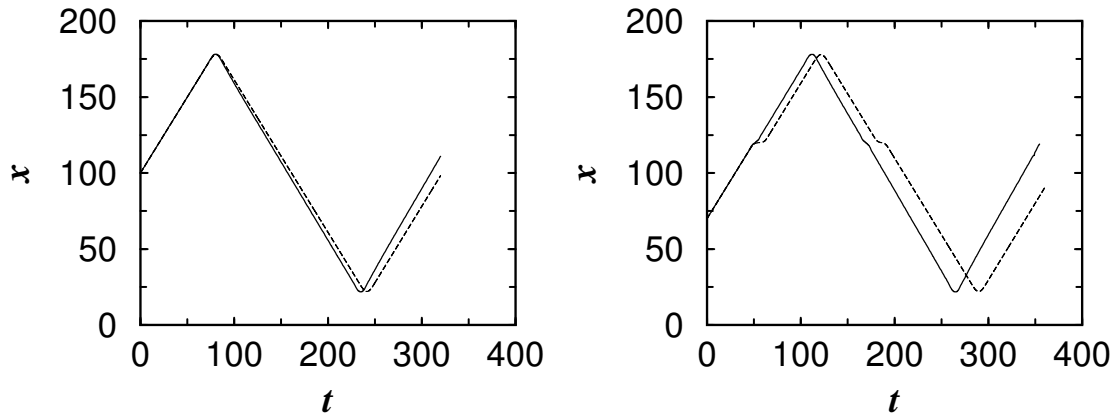


FIG. 4.3 – Comparaison de la trajectoire du soliton gris directement calculée (ligne continue) à partir des solutions numériques de l'équation de GP 1D (Eq. (4.9)), avec la trajectoire (ligne discontinue) obtenue par intégration numérique de l'équation (4.17) . La figure de gauche est obtenue pour le piège nonharmonique  $U_1$ , et de droite pour  $U_2$ . On constate que les trajectoires directement calculées à partir de l'équation (4.9) sont en avance sur celles obtenues à partir de l'équation (4.17).

La figure (4.3) montre que les deux trajectoires continue et discontinue aussi bien pour  $U_1(x)$  que  $U_2(x)$ , ne se confondent qu'avant le premier point



de retour du soliton dans le cas de  $U_1(x)$ , et avant que le soliton gris traverse la bosse gaussienne pour la première fois dans le cas de  $U_2(x)$ . Ceci montre que la vitesse du soliton gris en tant que solution directe de l'équation (4.9), et sa vitesse en tant que quasi-particule ne sont identiques qu'avant le premier point de retour du soliton et sa première traversée de l'obstacle gaussien. De plus, on constate que la trajectoire continue est en avance sur celle discontinue aussi bien pour le potentiel piège  $U_1(x)$  que pour  $U_2(x)$ . Qualitativement, cette avance signifie que la vitesse du soliton gris a subi une légère augmentation juste après les points de retour du soliton et quand il traverse l'obstacle gaussien.

Quantitativement, le calcul de la différence  $\Delta v$  des vitesses du soliton avant et après le premier point de son retour ( $\Delta v = 0.042$  dans le cas de  $U_1(x)$ ), montre que la différence  $\Delta v$  reste pratiquement constante dans l'intervalle séparant le premier et le second point de retour, puis elle croît légèrement après le second point de retour. Physiquement, la croissance de la vitesse du soliton aux points de son retour met en évidence que ces points jouent le rôle d'anti-amortissement (anti-damping) dans le mouvement du soliton gris. Nous notons que la présence de l'obstacle bosse gaussienne dans le piège  $U_2(x)$  joue le même rôle que celui du point de retour en faisant augmenter la vitesse du soliton quand il traverse cet obstacle.

L'ensemble des résultats précédents révèle que la propagation du soliton gris est non-dissipative dans un condensat de B-E dilué, répulsif et confiné dans un piège nonharmonique 1D, sauf aux points de retour de ce soliton et quand il traverse l'obstacle bosse gaussienne. Cet effet dissipatif fait augmenter la vitesse de propagation de soliton (anti-amortissement), et se manifeste sous forme d'émission spontanée de phonons. De plus, l'augmentation constante et progressive de la vitesse de propagation du soliton gris dans le condensat considéré et aux points de retour, fait diminuer la profondeur  $\lambda$  du soliton d'après la relation  $c^2 + \lambda^2 = 2$  (Eq.(4.8)). Par ailleurs, on peut dire qu'au bout d'un certain temps  $\tau$ , appelé durée totale d'anti-amortissement, la vitesse du soliton atteint la vitesse du son  $c_s = \sqrt{2}$ , puis le soliton disparaît ( $\lambda = 0$ ).

La figure (4.4) représente à la fois la trajectoire du soliton (en ligne noire)

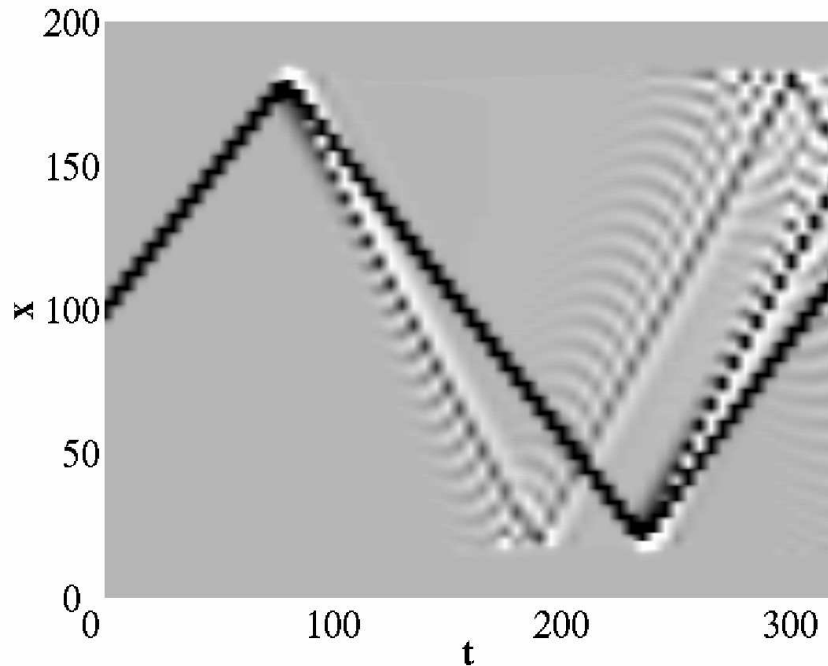


FIG. 4.4 – Courbes représentant respectivement la trajectoire du soliton gris (en ligne noire) et celle des phonons (en ligne grise). Les deux trajectoires sont numériquement obtenues à partir des solutions de l'équation (4.9) et dans le cas du piège  $U_1$ . On constate que l'émission des phonons ne se produit qu'aux points de retour du soliton gris et que les deux trajectoires sont indépendantes et ne s'interfèrent pas.

et celle de phonons (en ligne grise) émis à partir du premier point de retour du soliton. On constate que l'émission de phonons ne se produit qu'après le premier et le second point de retour du soliton, et que leur vitesse est constante et plus grande que celle du soliton. De plus, on remarque que les phonons émis ne se recombinaient pas avec le soliton gris au cours de sa propagation dans le condensat considéré.

Nous notons à la fin de ce paragraphe que le calcul numérique de l'énergie totale  $E$  (Eq.(4.13)) et celui du nombre total  $N$  d'atomes a montré que ces deux quantités sont conservées au cours du temps avant et après les points de retour avec des précisions :  $\Delta E = 2 \times 10^{-3}$  et  $\Delta N = 3 \times 10^{-3}$ .

#### 4.2.4 Emission de phonons et forme nonharmonique du piège 1D

Nous avons montré que pour un piège nonharmonique 1D de forme bien définie ( $L = 6.9006$ , et  $\sigma = 2$ ), l'émission de phonons dans un condensat de B-E dilué et répulsif est due à l'augmentation de la vitesse  $\Delta v$  du soliton gris aux points de son retour et quand il traverse la bosse gaussienne, ou plus exactement l'émission de phonons se réalise à cause de l'anti-amortissement du soliton aux points de son retour et à la traversée de l'obstacle bosse-gaussienne. Pour tenir compte de l'influence de la forme nonharmonique du piège 1D sur l'émission de phonons, nous avons étudié les variations de  $\Delta v$  en fonction de  $L$ , grandeur qui caractérise la douceur des parois du piège, et de la caractéristique  $\sigma$  de la bosse-gaussienne  $W$ .

Sur la figure (4.5), nous avons représenté par des points, l'allure des variations de  $\Delta v$  en fonction respectivement de  $L$  pour le premier (petits cercles) et le second (petits carrés) points de retour du soliton dans  $U_1(x)$  (figure gauche), et en fonction de  $\sigma$  pour la première traversée de la bosse de  $U_2(x)$  par le soliton gris (figure droite). La figure gauche (4.5) montre que  $\Delta v$  croît avec la longueur  $L$  et même quand  $L$  devient longue, c'est-à-dire que les radiations émises, les phonons, augmentent lorsque les bords paraboliques (parois) du potentiel piège deviennent doux pour de grandes valeurs de  $L$ , ce qui est en contradiction avec ce qu'on peut naïvement s'attendre. La figure droite (4.5) dans laquelle les  $\Delta v$  sont représentées par des barres d'erreurs, montre que les augmentations de  $\Delta v$  avec celles de  $\sigma$  ( $\sigma = 2, 4, 6, 8, 10$ ) sont faibles et deviennent pratiquement négligeables pour de grandes valeurs de  $\sigma$ , c'est-à-dire que l'émission de phonons peut être négligée lorsque le soliton gris traverse des bosses quasi-plates.

Les deux parties de la figure (4.5) montrent que la dépendance de  $\Delta v$  respectivement à  $L$  et à  $\sigma$  est nonlinéaire. En effet, les bords paraboliques plats (grande  $L$ ), ou les bosse-gaussiennes allongées ou plates (grande  $\sigma$ ), correspondent à une augmentation finie de  $\Delta v$ . En revanche, une très petite augmentation de  $\Delta v$  est associée à une montée très aigue des bords paraboliques (petite  $L$ ), ou à une bosse gaussienne bien localisée (petite  $\sigma$ ).

Une analogie qualitative peut être établie entre l'émission de phonons

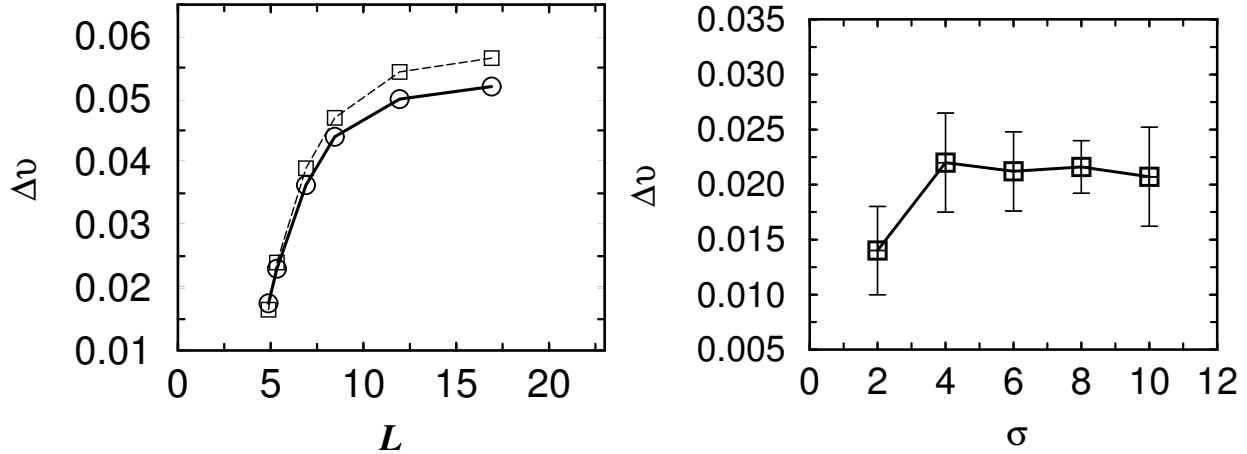


FIG. 4.5 – Dépendance de la différence de vitesse  $\Delta v$  du soliton gris à la douceur  $L$  des parois paraboliques du piège  $U_1$  nonharmonique (figure gauche), et à la caractéristique  $\sigma$  de la bosse gaussienne  $W$  (figure droite). Les variations de  $\Delta v$  avec  $L$  sont tracées pour le premier point de retour (ligne continue) et pour le second (ligne discontinue). On constate que  $\Delta v$  augmente d’une manière remarquable et non-linéaire avec  $L$ . Sur la figure droite, les variations de  $\Delta v$  avec  $\sigma$  sont faibles et deviennent pratiquement négligeables lorsque  $\sigma$  prend des valeurs élevées ( $\Delta v$  est calculée lorsque le soliton gris traverse la bosse gaussienne  $W$  pour la première fois).

et celle de radiations “photons” obtenues au cours du mouvement accéléré d’une particule chargée. En effet, nous avons vu que le mouvement du soliton gris, solution exacte de l’EGP 1D, est uniforme et sans émission de phonons dans un condensat de B-E dilué répulsif et infini, ainsi que sur la partie plate du potentiel piège 1D dans lequel le condensat est confiné. Cette situation correspond bien au mouvement uniforme d’une particule chargée et sans émission de photons. En revanche, le mouvement du soliton gris devient accéléré, comme celui d’une particule chargée, aux points de retour de ce soliton et quand il traverse la bosse gaussienne, ce qui conduit par ailleurs, à l’émission de phonons.

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons numériquement résolu l'équation de GP 1D décrivant l'évolution dynamique d'un condensat de B-E dilué, très allongé, répulsif et confiné dans un piège nonharmonique simple, puis dans le même piège avec un obstacle en forme de bosse-gaussienne. Les solutions numériques exactes et directes de cette équation de GP 1D sont des excitations nonlinéaires en forme de solitons gris et des excitations linéaires qui sont les phonons. Nous avons montré que les solitons gris peuvent être obtenus par intégration analytique et numérique de l'EGP 1D sans potentiel de piégeage, c'est-à-dire lorsque cette équation décrit l'évolution dynamique d'un condensat de B-E dilué répulsif et infini. De plus, nous avons démontré que les phonons émis sont dus à l'effet des parois du piège nonharmonique 1D et de l'obstacle bosse gaussienne placé dans ce piège, sur la propagation du soliton gris dans le condensat considéré. Cet effet surprenant se traduit par l'émission spontanée de phonons aux points de retour du soliton gris et quand il traverse la bosse gaussienne. Nous avons montré que l'émission de phonons est due à une légère augmentation de la vitesse du soliton gris et dépend, d'une part, de la douceur des parois caractérisée par la longueur  $L$ , et d'autre part, de  $\sigma$  grandeur ayant la dimension d'une longueur et caractérisant la largeur de la bosse gaussienne. De plus, nous avons fait une analogie qualitative entre l'émission des radiations " photons " due au mouvement accéléré d'une particule chargée, et l'émission de phonons due à la variation de la vitesse du soliton gris aux points de retour de ce soliton et quand il traverse la bosse gaussienne placée dans la partie plate du potentiel piège nonharmonique 1D.

Une étude quantitative, aussi bien théorique qu'expérimentale, de l'émission de phonons, effet surprenant et qui est dû à la forme nonharmonique du piège 1D, constituera un prolongement naturel de recherche dans le domaine des excitations dans les condensats de B-E dilués, répulsifs et quasi-1D.



## Chapitre 5

# Production de solitons gris, de phonons et phénomène de dissipation dans un condensat de B-E quasi-1D.

Nous commençons ce chapitre par rappeler que l'étude expérimentale et théorique des excitations élémentaires dans un fluide a connu un développement remarquable jusqu'à nos jours, grâce à la découverte de la superfluidité dans l'hélium-II liquide en 1938 par London [7]. En effet, l'étude de ces excitations et de la superfluidité dans un fluide quantique avait conduit à des concepts nouveaux tels que la vitesse critique introduite pour la première fois par Landau dans son fameux critère [7], les phonons et la vitesse du son prédits par Bogoliubov [8] dans son modèle de gaz de Bose dilué ou gaz de Bose quasi-parfait, les vortex quantiques proposés par Feynman [9], le second son et d'autres concepts. Cependant, il a été remarqué que la vérification expérimentale de la validité de ces concepts ne pourrait être envisageable que dans un fluide quantique représentant les caractéristiques du modèle théorique de gaz de Bose dilué de Bogoliubov. Or, l'hélium-II liquide qui a été le seul candidat pour tester la validité des concepts précités, est un fluide quantique mais il ne représente pas toutes les caractéristiques du modèle de gaz de Bose dilué, car les interactions entre ses atomes sont fortes.

C'est grâce à la production des condensats de B-E dilués que l'étude des excitations élémentaires types vortex, solitons et phonons a récemment connu des avancées extrêmement importantes aussi bien expérimentales que théoriques. En effet, un condensat de B-E dilué constitue un véritable modèle de fluide quantique macroscopique compressible dans lequel peuvent être étudiés la vitesse critique et les phénomènes de superfluidité et de dissipation par la création de vortex, de solitons et de phonons. Dans des expériences récentes, les vortex ont été réalisés dans des condensats de B-E dilués et répulsifs [48, 49], alors que les solitons ont été générés dans des condensats répulsifs 3D de  $^{23}\text{Na}$  [50], et de  $^{87}\text{Rb}$  [51] par une technique optique permettant l'impression des phases de solitons. La vitesse critique et les phénomènes de superfluidité et de dissipation ont été théoriquement étudiés dans ces milieux 3D et 2D [52, 112]. La réalisation expérimentale d'un mouvement rectiligne, uniforme et oscillatoire à l'aide d'un laser dans un condensat de B-E dilué, répulsif et en forme de cigare (condensat 3D), a permis pour la première fois d'étudier la vitesse critique et les comportements superfluides et dissipatifs d'un tel condensat [53]. L'étude théorique de la création de solitons gris et de phonons par le mouvement rectiligne et uniforme d'un potentiel obstacle dans un condensat de B-E dilué, répulsif, non piégé et quasi-1D, a été faite par l'intégration numérique de l'EGP 1D [58, 113, 116].

Nous présentons dans ce dernier chapitre, les résultats de notre étude qui a porté sur : i) la création de solitons gris et de phonons par le mouvement rectiligne, oscillatoire et uniforme d'un potentiel obstacle en forme gaussienne, dans un condensat de B-E dilué, répulsif, quasi-1D et confiné dans un piège statique nonharmonique ; ii) la dépendance des comportements superfluides et dissipatifs du condensat considéré aux différentes valeurs de la vitesse de l'obstacle gaussien, ainsi qu'aux paramètres caractérisant la profondeur de cet obstacle et sa largeur. Notre étude a mis en évidence que le condensat de B-E considéré se comporte comme un milieu quasi-superfluide lorsque la vitesse constante de l'obstacle prend de grandes valeurs.



## 5.1 Création de solitons gris et de phonons dans un condensat de B-E quasi-1D

### 5.1.1 Description dynamique du condensat en présence de l'obstacle oscillant

Nous considérons un condensat de B-E dilué, répulsif et quasi-1D confiné dans un piège statique nonharmonique  $V(x, 0) = U_1(x, 0)$ , où  $U_1(x, 0)$  est défini par l'équation (4.11)- chapitre 4. La réalisation d'un mouvement oscillatoire, rectiligne et uniforme à l'aide d'un potentiel obstacle  $W(x, t)$  à travers le condensat initialement considéré en équilibre, conduit à la production des excitations élémentaires dans ce condensat répulsif. Notons que le potentiel obstacle oscillant  $W(x, t)$  représente le laser expérimentalement utilisé [53] pour étudier le comportement superfluide et dissipatif d'un condensat de B-E répulsif en forme de cigare. Si  $W(x, t) \ll V(x, 0)$ , l'équation de GP 1D décrivant l'évolution dynamique du condensat de B-E en présence de  $W(x, t)$  s'écrit :

$$i\partial_t A = -\partial_{xx} A - A + |A|^2 A + U(x, t)A, \quad (5.1)$$

avec :

$$U(x, t) = V(x, 0) + W(x, t). \quad (5.2)$$

En utilisant le système hamiltonien :  $i\partial_t A = \frac{\partial H}{\partial A^*}$ , l'équation (5.1) peut être directement obtenue à partir de la fonctionnelle  $H(x, t)$  :

$$H(x, t) = \int dx \left[ |\nabla A|^2 + \frac{1}{2}(|A|^2 - 1)^2 + U(x, t)(|A|^2 - 1) \right]. \quad (5.3)$$

Le potentiel obstacle  $W(x, t)$  oscillant dans le condensat est pris dans cette étude sous la forme gaussienne suivante :

$$W(x, t) = W_0 \exp \left[ - \left( \frac{x - x(t) - x_0}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (5.4)$$

où  $x_0$  est la position initiale de  $W(x, t)$  ( $t = 0$ ),  $W_0$  et  $\sigma$  sont les paramètres caractérisant respectivement la profondeur et la largeur de  $W(x, t)$ .

Le mouvement oscillatoire uniforme de  $W(x, t)$  se réalise en prenant  $x(t)$  sous la forme triangulaire suivante :

$$x(t) = \begin{cases} v \left( t - \frac{n}{f} \right) & \text{pour : } 0 < \left( t - \frac{n}{f} \right) < \frac{1}{2f} ; \\ -v \left( t - \frac{n}{f} \right) + 4\alpha & \text{pour : } \frac{1}{2f} < \left( t - \frac{n}{f} \right) < \frac{1}{f} , \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $n$  est le nombre d'oscillations complètes,  $\alpha$  l'amplitude des oscillations de fréquence  $f = 1/T$  ( $T$  la période, et  $\alpha$  est égale à la moitié de la distance entre les extrêmes du mouvement oscillatoire de  $W(x, t)$ ), et  $v$  est la vitesse constante de l'obstacle gaussien oscillant, d'expression  $v = 4\alpha f$ . Notons que le condensat de B-E ne peut être considéré comme quasi-1D que si la longueur de cohérence  $\xi$  caractérisant ce condensat soit beaucoup plus grande que la distance moyenne  $\frac{1}{\rho}$  séparant deux atomes consécutifs, c'est-à-dire :  $\rho\xi \gg 1$  [108].

## 5.1.2 Résultats numériques : Création de solitons gris et phonons

### - Procédure numérique

Nous avons numériquement intégré l'équation (5.1) par la procédure numérique suivie dans l'intégration de l'équation (4.9), (voir le sous-paragraphe 4.2.2 du chapitre 4). La préparation de la condition initiale  $A_0$  de l'équation (5.1) a été ici faite par la minimisation de la fonctionnelle d'énergie de Gross-Pitaevskii suivante, associée à l'équation (5.1) :

$$H = \int dx [|\nabla A|^2 + \frac{1}{2}(|A|^2 - 1)^2 + U(x, 0)(|A|^2 - 1)] , \quad (5.6)$$

avec :

$$U(x, 0) = V(x, 0) + W(x, 0) \quad (5.7)$$

où  $W(x, 0)$  est l'obstacle gaussien stationnaire à  $t = 0$ . La minimisation de (5.6) a été réalisée par l'intégration jusqu'à la relaxation de l'équation réelle de Ginzburg-Landau suivante :

$$\partial_t R = -\partial_{xx} R - R + R^2 R + U(x, 0)R . \quad (5.8)$$

La condition initiale suivante est utilisée pour intégrer l'équation (5.8) :

$$\gamma(x) = \gamma_0 \left( \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{\sigma_1} \right)^2 \right] \right), \quad (5.9)$$

où  $\gamma_0 = 0.5$  ,  $x_0 = 100$  et  $\sigma_1 = 30$ .

La discrétisation de l'équation (5.1) a été effectuée par la méthode des différences finies et l'utilisation du schéma de Crank-Nicholson. Nous avons pris comme pas de discrétisation spatiale  $\Delta x = 0.05$  et temporelle  $\Delta t = 0.2 \times 10^{-4}$ .

### - Résultats numériques

Notons au préalable que l'expression de l'obstacle gaussien (Eq. (5.4)) montre que sa forme varie avec les paramètres  $W_0$  et  $\sigma$ , alors que la valeur de sa vitesse  $v$  dépend à la fois de l'amplitude  $\alpha$  et de la fréquence  $f$  ( $v = 4\alpha f$ ). Nous avons numériquement intégré l'équation (5.1) pour des différentes valeurs de la fréquence  $f$ , qui sont associées aux différentes valeurs de la vitesse constante  $v$  de l'obstacle, et aux différentes valeurs de  $W_0$  et de  $\sigma$ .

Sur la figure (5.1), nous avons représenté les solutions numériques directes de l'équation (5.1), avec  $W_0 = 0.5$ ,  $\sigma = 5$  et  $\alpha = 5$ , pour quatre fréquences différentes correspondant respectivement aux quatre vitesses :  $v = 0.16$  ,  $0.625$  ,  $1.40$  ,  $3.36$ .

La figure (5.1) montre que le mouvement oscillatoire uniforme de  $W(x, t)$  est très doux et ne conduit pas à la production d'excitations dans le condensat lorsque la vitesse  $v$  de l'obstacle ne dépasse pas une certaine vitesse critique  $v_c$  (i.e.,  $v < v_c$ ). En effet, pour la Fig.5.1(a) :  $v = 0.16$  et  $v_c = 0.28$ . En revanche, pour des vitesses  $v > v_c$ , le mouvement uniforme de l'obstacle produit des solitons gris et phonons successivement émis de part et d'autre des côtés droite et gauche de l'obstacle (voir Figs.5.1(b) :  $v = 0.625$ , et Fig.5.1(c) :  $v = 1.40$ ). Nous avons constaté que la vitesse du soliton gris est plus grande que celle de l'obstacle (sur la Fig.5.1(b) :  $v = 0.625$  et  $v_{\text{soliton}} = 0.92$ ), et qu'elle augmente progressivement avec l'augmentation de la vitesse  $v$  de l'obstacle. Cependant, l'augmentation progressive de  $v$  fait augmenter le nombre total de solitons et de phonons émis, comme il a

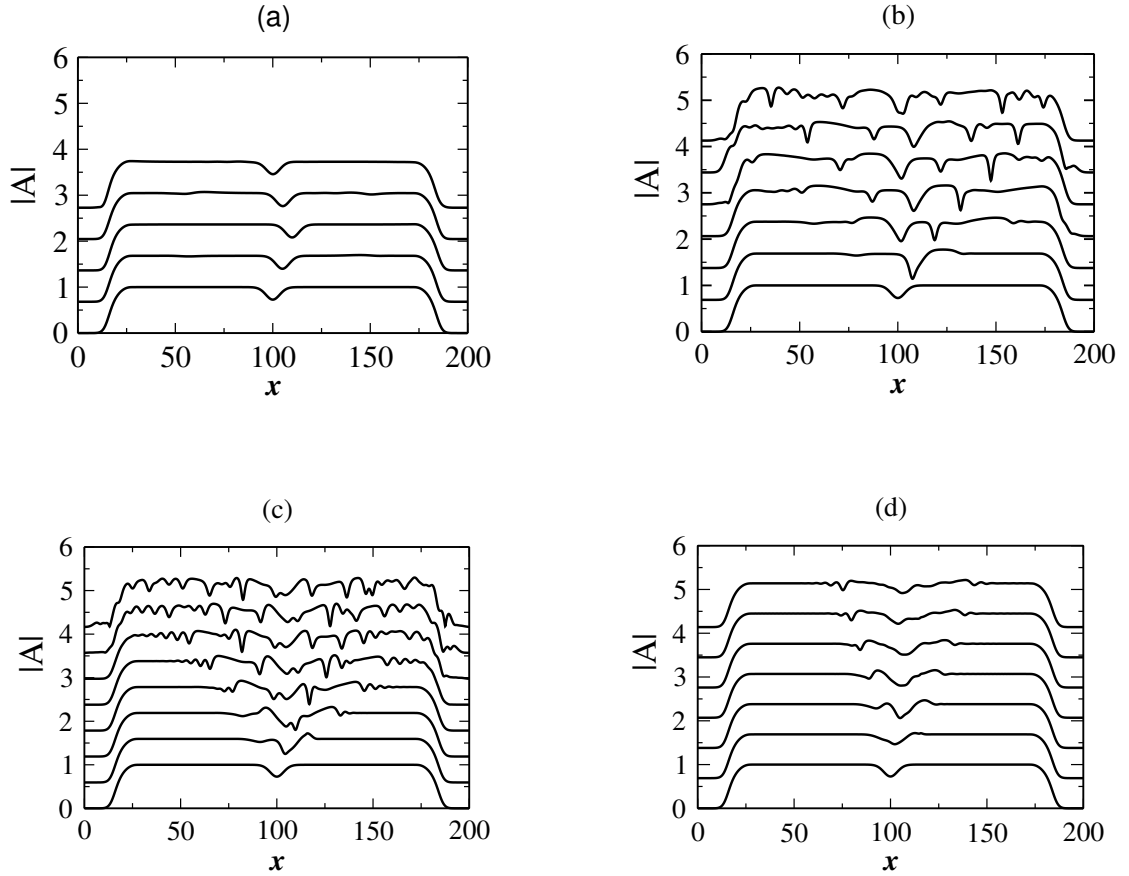


FIG. 5.1 – Variations en fonction de la position  $x$  du module  $|A|$  des solutions numériques  $A$  de l'équation (5.1) obtenues pour les quatre fréquences : (a)  $f = 0.0080$ , (b)  $f = 0.03125$ , (c)  $f = 0.0700$ , et (d)  $f = 0.1666$  correspondant respectivement aux quatre vitesses :  $v = 0.16, 0.625, 0.1.40, 3.36$ . On constate que le mouvement oscillatoire et uniforme de l'obstacle gaussien à partir de la position initiale  $x_0 = 100$  ne crée pas d'excitations si  $v < v_c$  ((a) :  $v = 0.16$ , et  $v_c = 0.28$ ). Pour des vitesses  $v > v_c$ , le mouvement oscillatoire de l'obstacle crée des excitations type solitons gris et phonons (Figs. (b) et (c)). On constate que les excitations se disparaissent quand l'obstacle oscille avec de grandes et constantes vitesses :  $v = 3.36$  (Fig. (d)).

été constaté dans le cas de condensats de B-E répulsifs 3D (étude expérimentale) [53] et 2D (étude numérique) [112]. Le nombre total de solitons

et de phonons émis atteint une valeur maximale pour la vitesse  $v = 1.40$  (Fig.5.1(c)), puis diminue progressivement avec l'augmentation de  $v$  et finit par une disparition complète pour de grandes vitesses  $v = 4, 5, 10$  (voir Fig.5.1(d) :  $v = 4$ ). La disparition de solitons gris à des grandes vitesses  $v$  de l'obstacle peut être partiellement interprétée en tenant compte de la relation  $c^2 + \lambda^2 = 2$  (Eq.(4.8)) qui montre que le soliton gris disparaît pour  $\lambda = 0$ , puis se transforme en phonons lorsque sa vitesse excède la vitesse du son  $c_s = \sqrt{2}$  (Fig.5.1(d)). L'émission de phonons observée au cours des oscillations uniformes de l'obstacle est tout d'abord due au changement brusque de vitesse de l'obstacle aux extréma de son mouvement, puis augmente avec  $v$  et finit par disparaître quasi-complètement pour de grandes vitesses de l'obstacle (voir Fig.5.1(d)).

L'ensemble des résultats précédents montre que les solutions directement obtenues par intégration numérique de l'équation de GP 1D (5.1) nous ont permis d'une part, de suivre le mouvement oscillatoire et uniforme de l'obstacle dans le condensat de B-E répulsif et quasi-1D, et d'autre part, d'observer la création d'excitations élémentaires sous forme de solitons et de phonons pour certaines valeurs de la vitesse de l'obstacle dans son mouvement oscillatoire et uniforme, puis la disparition progressive de ces excitations lorsque cette vitesse dépasse une valeur seuil et devient assez grande.

## 5.2 Comportement superfluide et dissipatif du condensat de B-E quasi-1D

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent ont été quantifiés et utilisés tout d'abord pour étudier le comportement dissipatif et superfluide du condensat de B-E considéré aux différentes valeurs de vitesse de l'obstacle et de ses caractéristiques  $W_0$  et  $\sigma$ , puis ensuite pour expliquer l'origine physique de la disparition des excitations aux grandes vitesses de l'obstacle. En effet, nous avons utilisé les solutions numériques  $A$  de l'équation (5.1) pour calculer numériquement et pour différentes valeurs de la vitesse  $v$  et du temps  $t$ , l'énergie totale  $E$  du condensat donnée par l'équation (5.3), avec :  $E \equiv H$ . Or, le calcul de l'énergie  $E$  effectué pour une valeur constante de  $v$ , nous a montré que  $E$  est une fonction croissante et périodique de la durée

du temps d'intégration de l'équation (5.1). C'est pourquoi nous avons pris et pour chaque valeur de  $v$ , le taux moyen d'énergie totale :  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  associé  $E$ .

Sur la figure (5.2), nous avons tracé sous forme de points noirs, le taux moyen  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  de l'énergie totale associée aux différentes valeurs de la vitesse constante  $v$  de l'obstacle oscillant  $W(x, t)$ , avec :  $W_0 = 0.5$ ,  $\sigma = 5$  et  $\alpha = 5$ .

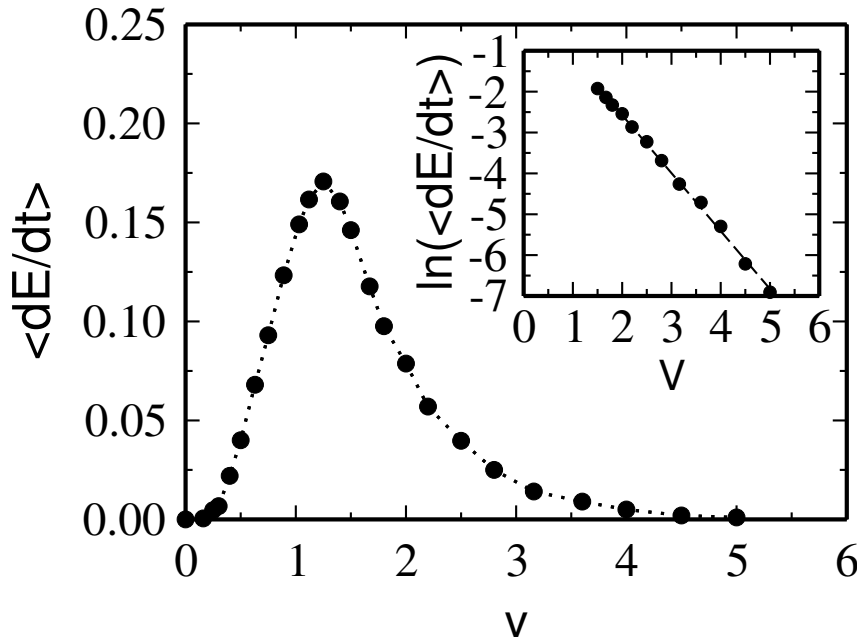


FIG. 5.2 – Variation du taux moyen  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  de l'énergie totale associée aux différentes valeurs de la vitesse constante  $v$  de l'obstacle oscillant (points noirs) (avec :  $W_0 = 0.5$ ,  $\sigma = 5$ , et  $\alpha = 5$ ). On constate que  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  est nul pour  $v < v_c$ , croît approximativement linéairement avec  $v > v_c$ , atteint son maximum puis finit par disparaître à grandes et constantes vitesses de l'obstacle oscillant. La courbe de l'encadrée montre que la décroissance de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  est exponentielle.

La figure (5.2) montre que pour des vitesses  $v$  inférieures à une vitesse critique  $v_c = 0.28$ , l'énergie totale du condensat demeure constante dans

le temps, c'est-à-dire que  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle \simeq 0$ . Cependant, pour  $v > v_c$ , le taux moyen  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  augmente approximativement linéairement avec  $v$ , atteint une limite supérieure, puis ensuite diminue et finit par s'annuler aux grandes vitesses  $v$ . Sur l'encadré de la figure 2, nous avons montré que la diminution de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  est quasi-exponentielle pour de grandes vitesses  $v$  de l'obstacle oscillant.

Nous avons étudié l'influence de la variation des paramètres  $W_0$  et  $\sigma$  caractérisant respectivement la profondeur et la largeur de l'obstacle gaussien oscillant, sur le comportement superfluide et dissipatif du condensat répulsif et quasi-1D considéré.

Sur la figure (5.3), nous avons tracé par des points les variations de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  en fonction des différentes valeurs de la vitesse constante  $v$  de l'obstacle gaussien oscillant, et pour  $W_0 = 0.30$  (diamants noirs),  $W_0 = 0.50$  (cercles noirs) et  $W_0 = 0.75$  (cercles barrés), avec  $\sigma = 5$  et  $\alpha = 5$ . La vitesse critique  $v_c$  associée à chaque courbe peut être évaluée par extrapolation ( $v_c = 0.10, 0.28, 0.47$  associées respectivement aux  $W_0 = 0.75, 0.50, 0.30$ ).

La figure (5.3) montre que  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  augmente avec l'augmentation de  $W_0$ , c'est-à-dire que la dissipation dans le condensat augmente avec l'augmentation de la profondeur de l'obstacle gaussien oscillant pour  $\sigma \gg 1$  et  $W_0 < 1$ . En revanche, on constate que la vitesse critique  $v_c$  augmente lorsque  $W_0$  diminue. Dans l'encadrée de la figure (5.3), nous avons représenté  $W_0$  en fonction de valeurs de  $v_c$  directement évaluées par extrapolation ( $v_c$  en barres d'erreur). La dépendance de  $v$  à  $W_0$  a été théoriquement étudiée pour  $W_0 < 1$  et  $\sigma \gg 1$  [58], et représentée par l'équation :

$$W_0 = \frac{v^2}{4} - \frac{3}{2} \left( \frac{v^2}{2} \right)^{1/3} + 1 . \quad (5.10)$$

Sur l'encadrée de la figure (5.3), la courbe en continue représente l'équation (5.10). On constate que les valeurs de  $W_0$  et  $v_c$  numériquement obtenues sont en bon accord avec celles théoriquement prédites par l'équation (5.10).

Sur la figure (5.4), nous avons tracé trois courbes représentant la dépendance de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  à la vitesse de l'obstacle gaussien oscillant, et associées respectivement aux trois valeurs suivantes de  $\sigma$  :  $\sigma = 1$  (carrés noirs),  $\sigma = 3$  (cercles noirs) et  $\sigma = 5$  (triangles noirs). Les trois courbes sont tracées pour

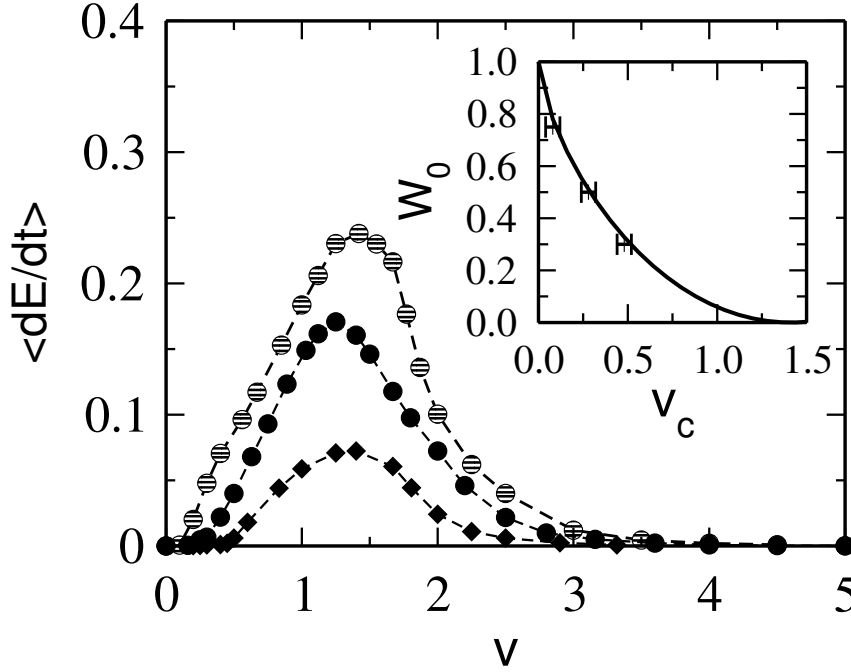


FIG. 5.3 – Dépendance de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  aux différentes valeurs de la profondeur  $W_0 < 1$  de l'obstacle oscillant avec  $\sigma \gg 1$  et fixe (ici,  $\sigma = 5$  et  $\alpha = 5$ ). On a obtenu :  $v_c = 0.10$  pour  $W_0 = 0.75$  (cercles gris),  $v_c = 0.28$  pour  $W_0 = 0.50$  (cercles noirs), et  $v_c = 0.47$  pour  $W_0 = 0.30$  (diamands noirs). Les résultats précédents sont représentés dans l'encadrée par des barres d'erreurs. Ils sont en bon accord avec ceux prédits théoriquement (ligne continue) par l'équation (5.10).

des profondeurs  $W_0 < 1$  et amplitudes  $\alpha > 2$  (ici  $W_0 = 0.5$  et  $\alpha = 5$ ). On constate que lorsque  $\sigma$  diminue, la dissipation représentée par  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  et la vitesse critique  $v_c$  dans le condensat de B-E répulsif augmentent simultanément. L'augmentation de  $\sigma$  caractérisant la largeur de l'obstacle gaussien oscillant favorise donc la suppression de solitons gris et de phonons dans le condensat pour des grandes vitesses de l'obstacle.



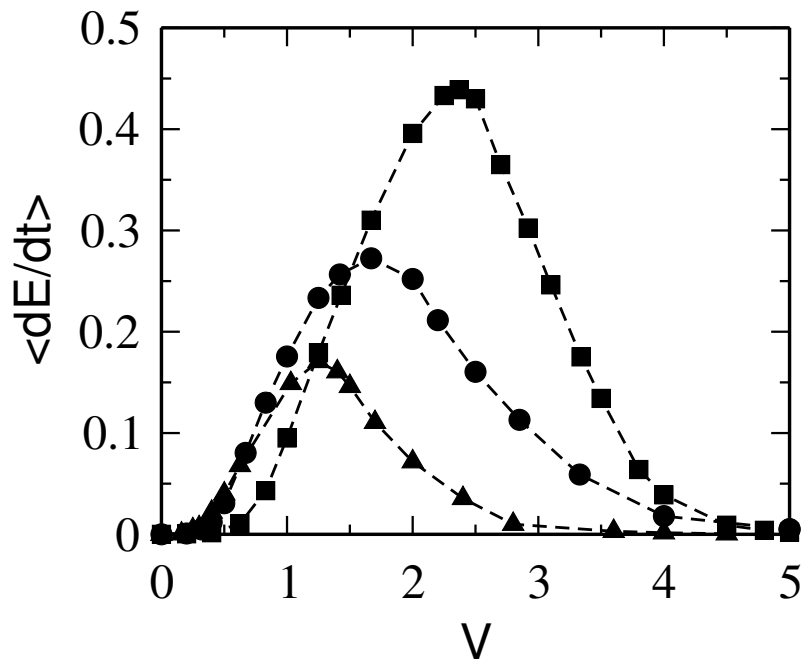


FIG. 5.4 – Dépendance de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  en fonction de  $v$ , aux trois valeurs suivantes de  $\sigma$  :  $\sigma = 1$  (carrés noirs),  $\sigma = 3$  (cercles noirs) et  $\sigma = 5$  (triangles noirs), avec  $W_0 < 1$  et fixe (ici,  $W_0 = 0.5$  et  $\alpha = 5$ ). On constate que la dissipation représentée par  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  et la vitesse critique  $v_c$  augmentent avec la diminution de  $\sigma$ . Par ailleurs, l'augmentation de  $\sigma$  favorise la suppression des solitons gris et phonons dans le condensat de B-E dilué, répulsif et quasi-1D agité uniformément à grandes vitesses par l'obstacle oscillant.

### 5.3 Interprétation analytique du comportement quasi-superfluide du condensat de B-E quasi-1D à grandes $v$

La décroissance exponentielle de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  observée à grandes vitesses de l'obstacle gaussien oscillant (voir Fig.2) et conduisant à la suppression d'émission de solitons gris et de phonons, est en contradiction avec les résultats déjà obtenus dans le cas des condensats de B-E répulsifs 3D et 2D [53, 112]. Dans le but d'établir un lien entre le mouvement oscillatoire à grandes vitesses de l'obstacle gaussien et les petites ondes qui en résultent, nous avons considéré l'état dynamique du condensat rapidement agité comme étant stationnaire, et les faibles ondes émises comme une petite perturbation introduite sur l'état stationnaire du condensat. En partant de cette approximation, nous avons linéarisé l'équation (5.1) en posant :

$$A = 1 + \eta(x, t) , \quad (5.11)$$

où  $\eta$  est une petite perturbation ( $\eta \ll 1$ , et  $\eta(x, t) = \eta_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ ). La linéarisation de l'équation (5.1) a conduit à la relation de dispersion :

$$\omega = k\sqrt{k^2 + 2} . \quad (5.12)$$

Cette relation (5.12) permet de déduire la vitesse de phase d'onde :

$$c(k) = \omega/k = \sqrt{k^2 + 2} . \quad (5.13)$$

La dissipation due au mouvement de l'obstacle oscillant est dominée par l'apparition d'ondes stationnaires de vitesse égale à celle de l'obstacle :  $c(k) = v$ . Ceci permet la détermination du nombre d'ondes  $k$  de phonons émis en fonction de la vitesse  $v$  de l'obstacle, à l'aide de :

$$k = \sqrt{v^2 - 2} . \quad (5.14)$$

Notons que pour  $v \gg \sqrt{2}$ , l'équation (5.14) peut approximativement s'écrire  $k \simeq v$  et par conséquent, la longueur d'onde ( $1/k$ ) des phonons émis devient très petite devant l'échelle des longueurs du potentiel obstacle oscillant. Les relations (5.12) et (5.14) obtenues par la linéarisation de

### 5.3. Interprétation analytique du comportement quasi-superfluide 169

l'équation (5.1) sont identiques à celles résultant du mouvement classique d'un obstacle dans un capillaire en présence de la pesanteur [115].

Pour établir le lien entre l'amplitude des ondes émises dans le condensat et la vitesse  $v$  de l'obstacle d'une part, et ses caractéristiques  $W_0$  et  $\sigma$  d'autre part, nous avons utilisé la relation suivante, reliant approximativement l'amplitude  $P\left(\frac{x}{\sigma}\right)$  de l'onde émise aux  $W_0$  et  $v$  [58] :

$$P\left(\frac{x}{\sigma}\right) \simeq \left[1 - 4\frac{W(x,0)}{v^2}\right]^{-1/4}. \quad (5.15)$$

Le calcul direct et simple de la transformée de Fourier  $\tilde{P}(\sigma, k)$  de  $P\left(\frac{x}{\sigma}\right)$  permet de donner une explication analytique à la décroissance exponentielle de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  à grandes vitesses  $v$  de l'obstacle oscillant, car  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$  est proportionnel à  $\left[\tilde{P}(\sigma, k)\right]^2$ . Ainsi, le calcul de  $\tilde{P}(\sigma, k)$  conduit :

$$\tilde{P}(\sigma, k) = \int \exp(ikx) P\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx \propto \exp(-\beta\sigma k) \quad , \quad \text{pour } k \gg 1 \quad (5.16)$$

ou, pour  $k \simeq v$  :

$$\tilde{P}(\sigma, k) \propto \exp(-\beta\sigma v), \quad (5.17)$$

avec :

$$\beta = \sqrt{\ln\left(\frac{v^2}{4W_0}\right)}. \quad (5.18)$$

On note que  $\beta$  dépend de la forme de  $P\left(\frac{x}{\sigma}\right)$  et résulte de la singularité complexe, incluse sur l'axe réel, de l'équation (5.16). A l'ordre de grandeur des vitesses considérées, l'équation (5.17) met en évidence la décroissance exponentielle de  $\tilde{P}(\sigma, k)$  et par conséquent celle de  $\langle \frac{dE}{dt} \rangle$ , avec l'augmentation de la vitesse  $v$  de l'obstacle, ce qui conduit à la quasi-suppression des phonons dans le condensat de B-E répulsif et quasi-1D (voir figure (5.1(d))), qui devient quasi-superfluide à grandes vitesses de l'obstacle gaussien oscillant. De plus, l'équation (5.16) montre que l'augmentation de  $\sigma$  favorise la suppression des phonons comme il a été observé sur la figure (5.4). Nous notons que l'estimation donnée par l'équation (5.17) est uniquement valable pour un potentiel obstacle doux, c'est-à-dire pour  $W_0 < 1$ . En revanche, pour des potentiels obstacles non-doux ( $W_0 \geq 1$ ), comme le cas de ceux utilisés dans la référence [116], la suppression de la dissipation est beaucoup

moins prononcée du fait que les singularités de ces potentiels sur l'axe réel ne sont pas importantes.

## 5.4 Conclusion

Notre étude numérique qui a porté dans ce dernier chapitre, sur la création de solitons gris et phonons à l'aide du mouvement oscillatoire et uniforme d'un potentiel obstacle gaussien dans un condensat de B-E répulsif et quasi-1D, a permis d'une part, de montrer qu'un condensat de B-E répulsif et quasi-1D est caractérisé par une vitesse critique  $v_c$  et qu'il a le même comportement superfluide et dissipatif que celui des condensats de B-E répulsifs 3D et 2D, et d'autre part, de révéler que le condensat répulsif quasi-1D se comporte comme un quasi-superfluide lorsque la vitesse constante de l'obstacle gaussien oscillant devient assez grande. Nous avons montré que l'augmentation de la vitesse constante  $v$  de l'obstacle à partir de  $v_c$  ( $v > v_c$ ) fait progressivement augmenter la vitesse  $v_s$  des solitons gris. Ceux-ci disparaissent lorsque leur vitesse  $v_s > c_s$  ( $c_s = \sqrt{2}$ ,  $c_s$  la vitesse du son). Par une interprétation analytique simple, nous avons pu mettre en évidence que la suppression des phonons, réalisée par le mouvement oscillatoire, uniforme et à grandes vitesses de l'obstacle, résulte du fait que la longueur d'onde des phonons émis devient courte en comparaison avec l'échelle des longueurs de l'obstacle gaussien oscillant.

# CONCLUSION GENERALE

Nous avons présenté dans ce mémoire de thèse les résultats de notre étude par simulation numérique, qui a porté sur la dynamique d'un condensat de B-E répulsif, quasi-1D et confiné dans un piège non-harmonique, et sur son comportement superfluide et dissipatif. Le potentiel piège non-harmonique 1D est pris dans cette étude sous forme allongée et plate avec des bords (extrémités) paraboliques. L'évolution dynamique d'un tel condensat à la température  $T = 0\text{K}$  a été décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii 1D (GP), également appelée équation de Schrödinger non-linéaire. Par intégration numérique directe de cette équation en présence du terme de potentiel piège, nous avons obtenu des solutions non-linéaires type solitons gris en propagation uniforme. Nous avons remarqué qu'un soliton gris subisse un anti-amortissement, augmentation légère de sa vitesse, aux points de son retour aux bords du piège et quand il traverse un obstacle en forme d'une bosse gaussienne placée sur la partie plate du piège. Cet effet des bords et de l'obstacle gaussien sur la propagation du soliton gris se manifeste par une émission spontanée des phonons. Cette émission augmente avec la douceur de ces bords paraboliques (bords plats) et avec la largeur moyenne caractérisant la bosse gaussienne.

Le comportement superfluide et dissipatif du condensat de B-E répulsif et quasi-1D a été numériquement étudié par l'intégration de l'équation de GP 1D comprenant le potentiel statique non-harmonique 1D précédemment utilisé pour confiner le condensat considéré, et un potentiel obstacle en forme gaussienne et en mouvement oscillatoire uniforme. Le mouvement uniforme de l'obstacle dans le condensat a conduit à la création des excitations non-linéaires type solitons gris et linéaires type phonons. Nous avons constaté que ces excitations ne se produisent que lorsque la vitesse

de l'obstacle oscillant dépasse une certaine valeur critique, augmentent avec la vitesse de l'obstacle et atteignent leur maximum pour une valeur bien précise de la vitesse de l'obstacle oscillant. Au delà de la vitesse associée au maximum d'excitations, celles-ci diminuent d'une manière exponentielle avec l'augmentation de la vitesse de l'obstacle et finissent par disparaître quasi-totalement à grandes valeurs de la vitesse de l'obstacle. Cette disparition quasi-totale des excitations dans le condensat répulsif et quasi-1D montre que celui-ci se comporte comme un milieu quasi-superfluide à grandes vitesses de l'obstacle en oscillation uniforme.

Notre étude numérique de la dynamique d'un condensat de B-E répulsif, quasi-1D et confiné dans un piège nonharmonique a révélé pour la première fois, d'une part l'effet des parois, ou bords paraboliques du piège nonharmonique considéré, et d'un obstacle gaussien sur la propagation uniforme du soliton gris dans ce condensat et qui se manifeste par émission spontanée des phonons, et d'autre part le comportement quasi-superfluide de ce condensat lorsqu'il est agité à grande vitesse par un obstacle en mouvement rectiligne et uniforme.

Ce travail constitue le point de départ vers des pistes nouvelles de recherche autant expérimentale que théorique, notamment la recherche des modèles théoriques pouvant décrire l'émission des phonons et le comportement quasi-superfluide des condensats de B-E répulsifs et quasi-1D.

# Bibliographie

- [1] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. Sitzungsb. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., **3**, (1925).
- [2] S. N. Bose, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. Z. Phys., **26**, 178, (1924).
- [3] A. Pais, *Subtle is the Lord* (Oxford University Press, Oxford 1982)
- [4] P. L. Kapitza, Nature (London) **141**, 74 (1938).
- [5] J. F. Allen, A. D. Misner Nature (London) **141**, 75 (1938)
- [6] F. London, Nature (London) **141**, 643 (1938)
- [7] L. D. Landau, J. Phys. (Moscow) **5**, 71 (1941), et L. D. Landau, J. Phys. (Moscow) **11**, 91 (1947); I. M. Khalatnikov, *Introduction To the Theory of Superfluidity* (Addison-Wesley, Redwood City, C. A, 1989).
- [8] N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
- [9] R. P. Feynman, Prog. Low. Temp. Phys.**1**, 17, édité par J. Gorter, North-Holland, Amsterdam, (1955).
- [10] E . P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454(1961); L . P. Pitaevskii, Zh . Eksp. Teor . Fiz .**40**, 646 (1961) (Sov . Phys . JETP **13** , 451 (1961).
- [11] S. Chu, Rev. Mod. Phys. **70**, 685 (1998).
- [12] C. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).
- [13] W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).
- [14] H. F. Hess. Bull. Am. Soc., **30**, 854 (1985).
- [15] H. F. Hess et al., Phys. Rev. **B34**, R3476 (1986).
- [16] W. Ketterle and V. Drutem. Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, **37**, 181 (1996).

- [17] M . H. Anderson , J . R . Ensher , M. R. Matthews, C. E . Wieman , and E . A . Cornell , Science **269** , 198 (1995).
- [18] K . B . Davis, M . O . Mewess, M . R . Andrews, N. J . Van Druten, D. S . Durfee, D . M . Kurn, and W . Ketterle, Phys . Rev . Lett. **75** , 3969 (1995).
- [19] C . C . Bradley, C . A . Sakett, J . J . Tolett, and R. G . Hulet, Phys . Rev. Lett. **75** , 1687 (1995); C . C. Bradley, C . A .Sakett, and R . G . Hulet, *ibid* . **78** , 985 (1997) .
- [20] D . G . Fried, T. C . Killian, L . Willmann, D. Landhuis, S . C . Moss, D . Kleppner, T . J .Greytak, Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).
- [21] Pereira Dos santos, J. Léonard, Junmin Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc, C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001).
- [22] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nouak, D. Boiron, C. I. Westbrook, A. Aspect, Science **292**, 461 (2001).
- [23] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, M. Inguscio, Science **294**, 1320 (2001).
- [24] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, Science **299**, 232 (2003).
- [25] J. P. Wolfe, J. L. Lin, D. W. Snoke, “ Bose-Einstein Condensation of a Nearly Ideal Gas : Excitons in Cu<sub>2</sub>O ”. In Bose-Einstein Condensation, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Sringari (Cambridge University Press, Cambridge 1995) pp. 281-329.
- [26] A. Mysyrowicz, “ Bose-Einstein Condensation of Excitonic Particles in Semiconductors ”. In Bose-Einstein Condensation, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Sringari (Cambridge University Press, Cambridge 1995) pp. 330-354.
- [27] G. M. Kavoulakis and A. Kavoulakis, Phys. Rev. **B61**, 16619 (2000).
- [28] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 4984 (1996)
- [29] M. R . Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Science, **275**, 637 (1997).



- 
- [30] I. Bloch, T. W. Hänsch, T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999).
- [31] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **79**, 337 (1997).
- [32] L. V. Hau, B. D. Bush, C. Liu, Z. Dutton, M. M. Burns, and J. A. Golovchenko, Phys. Rev. **A58**, R54-R57 (1998).  
D. M. Kurn, and W. Ketterle, Science **275**, 637 (1997).
- [33] H. A. Feshbach, A unified theory of nuclear reactions. Annals of Physics, **19**, 287 (1962).
- [34] E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions. Phys. Rev. **A47**, 4114 (1993)
- [35] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. Nature, **392**, 151-154 (1998).
- [36] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).
- [37] J. L. Roberts, N. R. Claussen, James P. Burke, Jr., Chris H. Greene, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **81**, 5109 (1998).
- [38] A. P. Chikkature et al., Science **296**, 2193 (2002).
- [39] P. Cren et al., Eur. Phys. J. **D20**, 107 (2002)
- [40] E. Mandonnet et al., Eur. Phys. J. **D 10**, 9 (2000)
- [41] F. Schreck et al., Phys. Rev. **A64**, 011402R, (2001).
- [42] B. DeMarco et al., Science **285**, 1703 (1999).
- [43] G. Modugno et al., Science **297**, 2240 (2002).
- [44] J. Cubizolles, Thèse de Doctorat de l'université Paris 6, préparée au laboratoire Kastler Brossel (lkb), (ENS.Paris), et soutenue le : 22/06/2004.
- [45] K. A. Kuznetsov and S. K. Turitsyn, "Instability and Collapse of Solitons in Media with a Defocusing Nonlinearity", Sov. Phys. JETP **67**, 1583 (1988).
- [46] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972).

- [47] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **37**, 823 (1973).
- [48] M. R. Matthews et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [49] K. W. Madison et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [50] J. Denschlag et al., *Science*, **287**, 97 (2000).
- [51] S. Burger, et al. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
- [52] T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1644 (1992).
- [53] C. Raman, M. Kohl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999).
- [54] A. Gorlitz, J.M. Vogels, A. E. Lenhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Ionouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- [55] F. Schreck et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [56] W. P. Reinhardt and C. W. Clark, *J. Phys. B At : Mol. Opt. Phys*, **30** : L785 (1997).
- [57] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [58] V. Hakim, *Phys. Rev.* **E55**, 2835 (1997).
- [59] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New-York, 1963).
- [60] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique statistique* (Hermann, Paris, 1989).
- [61] M. Le Bellac et F. Mortessagne, *Thermodynamique statistique* (Dunod, Paris, 2001).
- [62] C. Cohen-Tannoudji, *Seminaire Poincaré (2003) : La condensation de Bose-Einstein*, [www.lpthe.jussieu.fr/poincare](http://www.lpthe.jussieu.fr/poincare)
- [63] J. Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton 1955), reproduit dans J. A. Wheeler and W. H. Zurek, *quantum theory and measurement* (Princeton 1983).
- [64] L. Pitaevskii, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science publication, 2003).
- [65] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France* (1997-98).

- 
- [66] Y. Castin. Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results. Dans R. Kaiser, C. Westbrook, et F. David, éditeurs, Proceedings of the Les Houches Summer School, Course LXXII in 1999, New York, 2001. Springer. e-print arXiv : cond-mat/0105058.
- [67] W. Ketterle and N. J. van Druten, Phys. Rev. **A54**, 656 (1996).
- [68] T. Haugset et al., Phys. Rev. **A55**, 2922 (1997).
- [69] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, 1995-96.
- [70] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France (1996-97).
- [71] A. L. Migdal et al., Phys. Rev. Lett. **54**, 2596 (1985).
- [72] T. Bergeman et al., Phys. Rev. **A35**, 1535 (1987).
- [73] W. Petrich et al., Phys. Rev. **A74**, 3352 (1995).
- [74] Y. Gott, M. Ioffé et V. Tel’Kovski. Nucl. Fusion. Suppl., **3**, 1045 (1962).
- [75] D. Pritchard , Phys. Rev. Lett. **51**,1336 (1983).
- [76] V. Bagnato et al., Phys. Rev. Lett. **58**, 2194 (1987).
- [77] B. Desruelle et al., Eu. Phys. **D1**, 255 (1998).
- [78] P. Pinkse et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 990 (1997).
- [79] K. B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 5202 (1995).
- [80] O. J. Luiten, M. W. Reynolds, and J. T. M. Walraven Phys. Rev. **A53**, 381 (1996).
- [81] J. T. M. Walraven. Proceedings of the **44 th** Scottish Universities Summer School in Physics, Stirling, 1 (1996).
- [82] D. Guery-Odelin, thèse de doctorat (1998), Laboratoire de Kastler Brossel, Département de Physique de l’Ecole Normale Supérieure de Paris (disponible sur le serveur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>).
- [83] V. Bretin, thèse de doctorat (2004), Laboratoire de Kastler Brossel, Département de Physique de l’Ecole Normale Supérieure de Paris(disponible sur le serveur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>).
- [84] W. Wolhleben, F. Chevy, K. W. Madison, and J. Dalibard, An atom faucet, Eur. Phys. J. **D15**, 237-244 (2001).
- [85] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models, J. Opt. Soc. Am. **B6**, 2023 (1989).

- 
- [86] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [87] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Science*, **282**, 1686 (1998).
- [88] Voir la théorie de la diffusion dans les ouvrages de mécanique quantique de : A. Messiah, L. Landau et Lifchitz, et C. Cohene-Tannoudji, B. Diu et F. Laloe.
- [89] D. J. Heinzen. Bose-Einstein Condensation in atomic gases. Dans M. Inguscio, S. Striangulari, et C. E. Wieman, éditeurs, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL*, pages 351-390, Amsterdam, 1999. IOS Press.
- [90] C. Cohen-Tannoudji, *Cours au Collège de France* (1998-99).
- [91] R. J. Donnelly. *Quantized Vortices in Helium-II*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991 .
- [92] E. A. Spiegel. Fluid dynamical form of the linear and nonlinear Schrödinger equations. *Phys.* **D1**, 236 (1980).
- [93] L. Onsager, *Il Nuovo Cimento* **6 Suppl.2**, 279 (1949).
- [94] F. Chevy et al., *Phys. Rev.***A64**, 031601(R) (2001).
- [95] F. Chevy , thèse de doctorat, Laboratoire Kastler Brossel (lkb)-ENS-Paris (disponible sur le serveur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>), 2001.
- [96] S. Inouye et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080402 (2001).
- [97] R. P. Feynman . *Statistical Mechanics*. *Frontiers in Physics*. The Benjamin Publishing Company, david pines editor edition, 1972.
- [98] T. Winiccki, J. F. McCann and C. S. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5186 (1999).
- [99] T. Frisch, Y. Pomeau and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1644 (1992).
- [100] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, and A. Axelsson. *Phys. Rev.* **A51**, 4852 (1995).
- [101] F. A. van Abeelen. *Interaction Processus in Cold Gases of Alkali Atoms*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven, 1999.
- [102] C. Huepe, M. E. Brachet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série II b, p. 195-202 (1997), *Mécanique des fluides/Fluid mechanics*.

- 
- [103] C. Huepe, M. E. Brachet, Scaling laws for vortical nucleation solutions in a model of superflow. *Physica* **D140**, 126-140 (2000).
- [104] Y. Pomeau et C. Josserand, *Nonlinearity* **14**, R25-R62 (2001).
- [105] P. A. Ruprecht, M. J. Holland, K. Burnett, and M. Edwards, *Phys. Rev.* **A51**, 4704 (1995).
- [106] A. Radouani, *Phys. Rev.* **A68**, 043620 (2003).
- [107] Abdelaziz Radouani, *Phys. Rev.* **A70**, 013602 (2004).
- [108] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).
- [109] V. Bretin, J. Dalibard , and S. Stock (Private communication)
- [110] Th. Busch and J. R. Anglin , *Phys. Rev. Lett.* **11** , 2298 (2000).
- [111] Voir la copie du rapport final d'acceptation définitive de l'article : A. Radouani, *Phys. Rev.* **A68**, 043620 (2003).
- [112] J. B. Jackson , J. F. McCann, and C. S. Adams, *Phys. Rev.* **A61** , 051603 (2000).
- [113] P. Leboeuf and N. Pavloff . *Rev .* **A64**, 033602 (2001) .
- [114] N. Pavloff , *Rev .* **A66**, 013610 (2002).
- [115] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, (Wiley-Interscience, New York, 1974).
- [116] N. Pavloff, *Phys. Rev.* **A66**, 013610 (2002).

# PUBLICATIONS

PUBLICATION

-I-

# Gray solitons and phonons in repulsive Bose-Einstein condensates confined in one-dimensional nonharmonic traps

A. Radouani\*

*Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France  
and Laboratoire de Biophysique, Faculté de Médecine et de Pharmacie, Rabat, Morocco*

(Received 10 June 2002; revised manuscript received 17 June 2003; published 20 October 2003)

We numerically solve the time-dependent Gross-Pitaevskii equation (GPE) that describes the evolution of an elongated dilute repulsive atomic Bose-Einstein condensate trapped in a one-dimensional (1D) nonharmonic potential. We find that the gray solitons, which are propagative solutions of the 1D GPE, traveling at an initial constant velocity, smaller than the speed of sound, oscillate through the trapped condensate, but that this oscillatory motion is accompanied by a spontaneous emission of small sound waves. By examining the gray soliton trajectory and its velocity in the trapped repulsive Bose-Einstein condensate, we show that the oscillatory motion is uniform and nondissipative except at the returning points of the gray soliton, where it exhibits a slight radiative acceleration (antidamping). Our numerical results are in good agreement with previous theoretical predictions, but show the need to take radiation emission into account.

DOI: 10.1103/PhysRevA.68.043620

PACS number(s): 03.75.Kk, 42.65.Tg, 67.40.Hf

## I. INTRODUCTION

After the remarkable realization of Bose-Einstein condensation (1995), in dilute vapor of alkali-metal atoms in three-dimensional (3D) magnetic traps on ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^7\text{Li}$ ) [1–3] and on atomic hydrogen gas (1998) [4], the dilute atomic Bose-Einstein condensates (BEC's), compressible, nonlinear, and macroscopic quantum fluids, have received a great deal of attention in many areas of condensed matter physics. Recently, the BEC's in lower dimension systems (1D, 2D) have been extensively studied and crowned by the successful realization of dilute repulsive BEC in 1D and 2D traps (2001) on  $^{23}\text{Na}$  [5] and in 1D traps on  $^7\text{Li}$  [6]. In this realization, the BEC's have been restricted to lower dimensions by a crossover from 3D to 1D or 2D by reducing the number of atoms in condensates trapped in highly elongated harmonic 1D magnetic traps and in disk-shaped optical harmonic 2D traps. Today, more than 30 groups have produced BEC's in hydrogen, metastable helium, lithium, sodium, potassium, and most often in rubidium [7,8].

A dilute BEC is a quantum macroscopic degenerate gas (bosonic gas) where the behavior of atoms can be described by the same state wave function, known as the condensate wave function or the quantum macroscopic wave function. In a dilute BEC, only binary elastic interparticle collisions are relevant at lower temperatures ( $T \approx 0$ ) and they have been characterized by a single parameter: the  $s$ -wave scattering length denoted by  $a$ . Usually, the dynamical evolution, in time and space, of such BEC's, is accurately described by the nonlinear Schrödinger equation, also known as the Gross-Pitaevskii equation (GPE). This equation was directly derived starting from the mean-field theory for the order parameter [9]. In the present work, we will study the dynamical evolution of a BEC in a very elongated trap, where the dynamics takes place only in one dimension due to the strong trap confinement in the transverse direction. This elongated

BEC in 1D is spatially homogeneous (an infinite 1D BEC) and characterized by a constant density. It can be described dynamically, for a sufficiently low temperature ( $T \approx 0$ ) by the following 1D GPE:

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} \psi - \mu \psi + g |\psi|^2 \psi, \quad (1)$$

where  $\psi$  is the complex field amplitude of the condensate wave function,  $\mu$  is the chemical potential,  $|\psi|^2$  is the time-dependent density of the condensate, and  $g$  is the coupling constant characterizing the interparticle interactions in the BEC. The constant  $g$  is related to the scattering length  $a$  through  $g = (4\pi\hbar^2/mS)a$ , where  $S$  is the transverse area of the elongated BEC and  $m$  is the mass of the particle. The case  $g > 0$  corresponds to a dilute repulsive BEC ( $a > 0$ ), whereas  $g < 0$  corresponds to a dilute attractive BEC ( $a < 0$ ). The last nonlinear term in Eq. (1) represents the self-interparticle-interaction energy. By choosing a system of reduced units in which  $t$ ,  $x$ , and  $A$  are defined as

$$t = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad x = \frac{X}{\xi_0}, \quad \text{and} \quad A = \frac{\psi}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (2)$$

where  $\tau_0 = (\hbar/g\rho_0)$  is the correlation time,  $\xi_0 = (\hbar/\sqrt{2mg\rho_0})$  is the healing length (correlation length),  $\mu = g\rho_0$  is the chemical potential, and  $\rho_0$  is the inflow density of the BEC in equilibrium, Eq. (1) takes the simple form

$$i \partial_t A = -\partial_{xx} A - A + |A|^2 A. \quad (3)$$

In this system of reduced units  $t$ ,  $x$ ,  $A$ , and speed of sound defined as  $c_s = \sqrt{g\rho_0/2m}$  are dimensionless. We note that in the considered elongated BEC, described by Eq. (1), the healing length  $\xi_0$  must be much larger than the mean interparticle separation ( $1/\rho_0$ ) along the  $x$  axis of the BEC, i.e.,  $\rho_0 \xi_0 \gg 1$  [10], and also larger than the mean half-radial width  $R$  of this elongated BEC, i.e.,  $\xi_0 \gg R$ . This latter criterion is equivalent to  $\mu \ll \omega$ , with  $\mu$  being the chemical potential of BEC in 3D and  $\omega$  the transverse frequency used to con-

\*Email address: azizrad@hotmail.com; Radouani@lps.ens.fr



fine the BEC in the elongated form. Now, by confining the preceding elongated BEC in a 1D potential trap  $U(x)$ , it becomes spatially inhomogeneous (a finite or a trapped 1D BEC). In this case, Eq. (3) takes the form

$$i\partial_t A = -\partial_{xx} A - A + |A|^2 A + U(x)A. \quad (4)$$

Here, the density  $\rho$  and the total number of atoms  $N$  of the BEC are defined as  $\rho = |A|^2$  and

$$N = \int dx |A|^2. \quad (5)$$

In the stationary regime ( $i\partial_t A = 0$ ), the Thomas-Fermi approximation [that consists of neglecting the second derivative term in Eq. (4)] allows us to obtain

$$\rho = 1 - U(x). \quad (6)$$

This last equation indicates that  $0 \leq \rho \leq 1 - U(x)$  and the effect of  $U(x)$  is to decrease the density  $\rho$  in the BEC. Analytically, Eq. (4) for an untrapped BEC [ $U(x) = 0$ ] is directly integrable by the inverse scattering method [11,12] and has the following stable propagative soliton solutions, called gray solitons or dark solitons in nonlinear optics,

$$A_u(x,t) = \frac{(c + i\lambda)^2/2 + \exp[\lambda(x - x_0 - ct)]}{1 + \exp[\lambda(x - x_0 - ct)]}, \quad (7)$$

with

$$c^2 + \lambda^2 = 2, \quad (8)$$

where  $c$  and  $\lambda$  are the velocity and depth gray soliton parameters, respectively, and  $x_0$  is its position at  $t=0$ . Theoretically, Zakharov and Shabat [11,12] first treated solitons in an infinite 1D BEC (untrapped 1D BEC), while Reinhardt and Clark [13] first treated the case of solitons in a trapped BEC. Gray soliton creation by a moving potential was studied theoretically in Ref. [14]. In recent experiments, dark solitons have been generated by optical phase imprinting techniques in repulsive BEC of sodium (Na) and rubidium (Rb), respectively [15,16].

It is instructive to note that the dilute BEC, although free of container walls, are realized within the confines of a trapping potential in three and lower dimensions. Early confining traps were well approximated by harmonic potentials [13,17] but more general ones are now in use [18].

The purpose of the present work is to study numerically the dynamical behavior of an elongated dilute repulsive atomic BEC confined in 1D nonharmonic potential traps, and described by the 1D GPE [Eq. (4)]. To do that, we have chosen a 1D nonharmonic potential trap  $U(x)$  in two forms. In the first case,  $U(x)$  is taken as a flat potential  $U_1(x)$  with the parabolic boundaries,

$$U_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-x_1}{L}\right)^2 & \text{for } 0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{for } x_1 \leq x \leq (l-x_1), \\ \left(\frac{x-l+x_1}{L}\right)^2 & \text{for } (l-x_1) \leq x \leq l, \end{cases} \quad (9)$$

where  $l$  is the width of  $U_1(x)$ ,  $l$  is larger than  $x_1$  ( $x_1 = 27$ ,  $l = 200$ ) and  $L$  (length) characterizes the smoothness of  $U_1(x)$ . In the second case, we consider a flat potential  $U_2(x)$  formed by the same flat potential  $U_1(x)$  with an added Gaussian hump  $W(x)$  [with  $U_2(x) = U_1(x) + W(x)$ ],

$$W(x) = W_0 \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right], \quad (10)$$

where  $\sigma$  is the characteristic of the Gaussian hump and  $W_0 = 0.5$ .

This work is organized as follows in Sec. II, we present our numerical results that consists of gray solitons, their trajectories, and velocities through the dilute repulsive atomic BEC confined in nonharmonic potential traps. Section III is devoted to a discussion of these results and conclusion of the present work.

## II. NUMERICAL RESULTS

We present briefly our numerical procedure. The initial condition is built from the ground state of the 1D GPE [Eq. (4)] which is a stationary solution  $A_0$  of this equation for  $i\partial_t A = 0$ . The algorithm consists of first minimizing the following Gross-Pitaevskii energy functional  $H$  associated to the considered BEC,

$$H = \int dx \left[ |\nabla A|^2 + \frac{1}{2}(|A|^2 - 1)^2 + U(x)(|A|^2 - 1) \right]. \quad (11)$$

We note that Eq. (4) can be obtained directly from  $H$  by using a Hamiltonian system:  $i\partial_t A = (\partial H / \partial A^*)$ . The minimization of  $H$  is performed by integrating to relaxation the following 1D real Ginzburg-Landau equation (RGLE):

$$-\partial_t R = -\partial_{xx} R - R + R^2 R + U(x)R,$$

starting from an initial condition  $\alpha(x)$  in the Gaussian form with  $\alpha(x) = \alpha_0 \exp[-(x-x_0/\sigma_1)^2]$  (with  $\alpha_0 = 0.5$ ,  $x_0 = 100$ , and  $\sigma_1 = 30$ ). This allows us to obtain the real and stable ground state wave function  $R_0$ . A gray soliton is then inserted by adding at  $t=0$  the modulus  $b_s$  of the gray soliton  $A_u(x,t)$  [Eq. (7)] to  $R_0$ .

The initial condition  $A_0$  for the numerical integration of the GPE is thus taken in the convenient form:  $|A_0| = R_0 + b_s - 1$ . The phase  $\phi_0$  of  $A_0$  is immediately determined by remarking that  $\phi_0 = \phi_s$  because  $R_0$  is real, with  $\phi_s$  being the phase of  $A_u(x,t)$  at  $t=0$ . The latter procedure allows one to place the stationary soliton contained in  $A_0$  at a suitable position. A finite-difference Crank-Nicholson scheme is used to

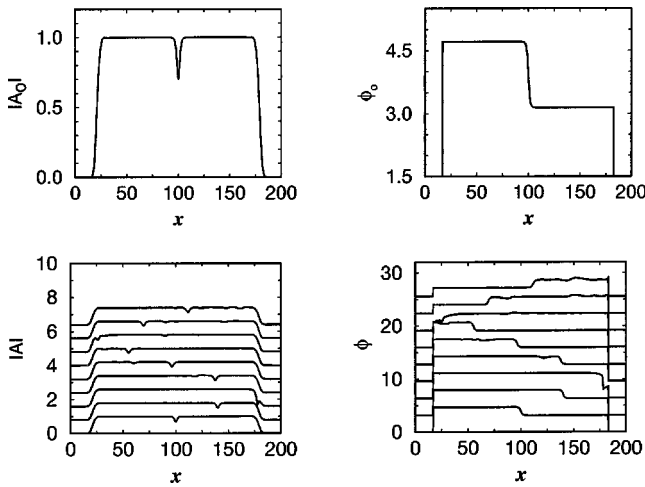


FIG. 1. Numerical solutions of the GPE [Eq. (4)] from times  $t = 0$  to  $t = 320$  (for  $c = \lambda = 1$ ) with a nonharmonic flat form potential trap  $U_1(x)$  in 1D [Eq. (9)] with  $l = 200$ ,  $L = 6.9006$ ,  $x_0 = 100$ , and  $x_1 = 27$ . Top: modulus  $|A_0|$  (left) and phase  $\phi_0$  (right), as a function of position  $x$ , of the stationary solution  $A_0$  of the 1D GPE. Bottom: modulus  $|A|$  (left) and phase  $\phi$  (right), as a function of position  $x$ , of the gray soliton  $A$ , solution of the 1D GPE, at successive times  $t = 0, 40, \dots, 320$ , respectively (in ascending order). We note that, traveling through the trapped repulsive BEC in the right direction from the initial position  $x_0 = 100$  and with a constant velocity  $c < c_s$  (with  $c_s$  is the speed of sound), the gray soliton is accompanied after the first (in the right for  $x_r = 178$ ), and the second (in the left, for  $x_r = 22$ ) returning points, by emission of small sound waves shown on modulus  $|A|$  and phase  $\phi$ , respectively. The motion of the gray soliton before the first returning point is in the right direction for  $0 < t < 80$ , in the left direction after the first returning point for  $80 \leq t < 240$ , and in the right direction after the second returning point for  $240 \leq t \leq 320$ .  $|A_0|$  and  $\phi_0$  correspond to  $t = 0$ .

compute the numerical results presented in this paper, with the respective discretization in space:  $\Delta x = 0.05$ , and in time:  $\Delta t = 0.2 \times 10^{-4}$ .

The numerical solutions of the 1D GPE [Eq. (4)] with  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$  are shown in Figs. 1 and 2, respectively, in which we plotted  $|A_0|$ ,  $\phi_0$ ,  $|A|$ , and  $\phi$  as a function of position  $x$ . In these figures, the gray soliton motion is represented at times  $t = 0, 40, \dots, 320$  (with  $t = 0$  for  $|A_0|$  and  $\phi_0$ ) corresponding to the successive positions of the gray soliton shown in  $|A|$  and  $\phi$ , respectively. The gray soliton motion is started from an initial position  $x_0$ , in the right direction, and with an initial constant velocity  $c = 1$  smaller than the speed of sound  $c_s = \sqrt{2}$ . The figures show that the gray soliton motion, through a repulsive BEC trapped in  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$ , respectively, is oscillatory. It is accompanied, as can be seen in  $|A|$  and  $\phi$ , respectively, by a spontaneous emission of small sound waves at each gray soliton returning points, and after the crossing of the Gaussian hump  $W(x)$ , respectively. However, in the case of  $U_2(x)$ , the Gaussian hump  $W(x)$  stops the gray soliton motion when the initial velocity of the gray soliton is  $c \leq 0.5$  [with  $W_0 < 0.5$ ] and  $W_0 \geq 0.6$  (with  $c = 1$ ), respectively, and therefore, behaves, for any value of  $\sigma$ , as a returning point. The preceding results show that  $W(x)$  plays the role of an obstacle placed in

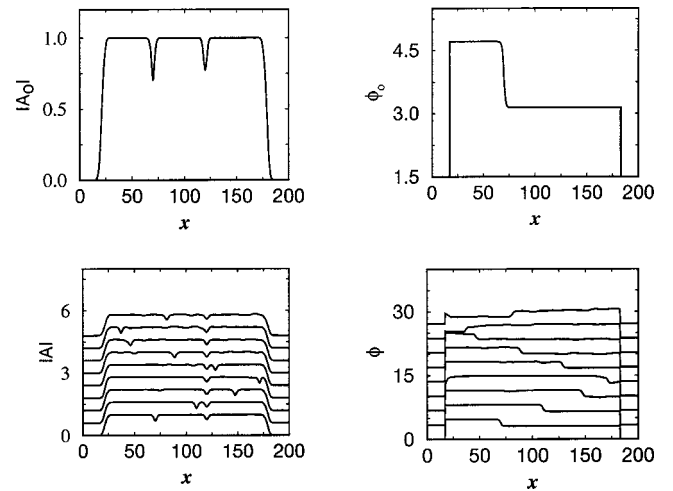


FIG. 2. Numerical solutions of GPE [Eq. (4)] from times  $t = 0$  to  $t = 320$  (for  $c = \lambda = 1$ ) with a nonharmonic flat form potential trap  $U_2(x)$  in 1D with a Gaussian hump  $W(x)$  placed on the position  $x_0 = 120$  [Eq. (10), with  $l = 200$ ,  $L = 6.9006$ ,  $x_0 = 70$ ,  $W_0 = 0.5$ , and  $\sigma = 2$ ]. Top: modulus  $|A_0|$  (left) and phase  $\phi_0$  (right), as a function of position  $x$ , of the stationary solution  $A_0$  of the 1D GPE. Bottom: modulus  $|A|$  (left) and phase  $\phi$  (right), as a function of position  $x$ , of the gray soliton  $A$ , solution of the 1D GPE, at successive times  $t = 0, 40, \dots, 320$ , respectively (in ascendant order). We note that, travelling through the trapped repulsive BEC in the right direction from the initial position  $x_0 = 70$  and with a constant velocity  $c < c_s$  ( $c_s$  is the speed of sound), the gray soliton is accompanied, after the first (in the right, for  $x_r = 178$ ) and the second (in the left, for  $x_r = 22$ ) returning points, by emission of small sound waves shown on modulus  $|A|$  and phase  $\phi$ , respectively. The motion of the gray soliton before the first returning point is in the right direction for  $0 < t < 80$ , in the left direction after the first returning point for  $80 \leq t < 240$ , and in the right direction after the second returning point for  $240 \leq t \leq 320$ .  $|A_0|$  and  $\phi_0$  correspond to  $t = 0$ .

the flat part of  $U_2(x)$ , and its effect on the gray soliton motion depends on the parameter values  $W_0$  and  $\sigma$ , respectively. We note that, in the case of  $U_1(x)$ , and for a low initial velocity  $c < 0.3$ , the gray soliton motion remains oscillatory, but the emission of sound waves decreases with velocity. In order to understand and study quantitatively the origin of the emission of these sound waves, we numerically computed the gray soliton trajectories in the  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$  traps. The trajectories, plotted in Fig. 3 (solid line), are used to calculate the value of the gray soliton velocity  $v$  before and after returning points, and before and after the crossing of the Gaussian hump. Thus, we deduced that the gray soliton velocity  $v$ , after each returning point and after each crossing of the Gaussian hump, is constant but slightly greater than its value before. For example, for the first returning point:  $v_1 = 1$  before and  $v_2 = 1.042$  after; with  $\Delta v = v_2 - v_1 = 0.042$  for  $U_1(x)$  [with  $L = 6.9006$  and  $l = 200$  (see Fig. 3)]. This slight and progressive increase of  $v$ , produced after returning points, leads the gray soliton, moving in  $U_1(x)$ , to reach the speed of sound  $c_s$  and to disappear after the antidamping time scale  $\tau$ . So, the preceding results allow us to conclude that the motion of the gray soliton is uniform through the repulsive BEC trapped in  $U_1(x)$ , and not dissipative except at returning points where the gray soli-

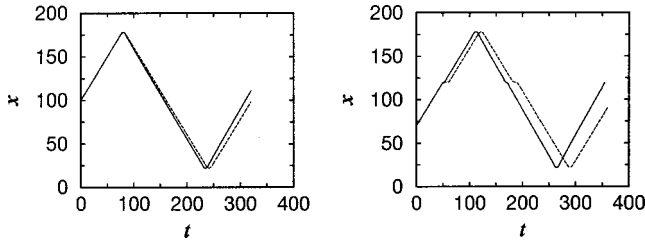


FIG. 3. Left: comparison of two trajectories  $x$ , as a function of time  $t$ , of a gray soliton moving through the repulsive BEC trapped in a nonharmonic flat form potential  $U_1(x)$  in 1D with  $l=200$ ,  $L=6.9006$  [Eq. (9)], and  $x_0=100$ . The trajectory (solid line) is computed directly from numerical solutions of GPE [Eq. (4)]. This trajectory is in advance in time compared with the gray soliton trajectory (dashed line) computed from the equation of motion in 1D [Eq. (12)]. This advance is due to a small increasing of the gray soliton velocity after returning points. Right: comparison of two trajectories  $x$ , as a function of time  $t$ , of the gray soliton moving through the repulsive BEC trapped in a nonharmonic flat form potential  $U_2(x)$  in 1D with a Gaussian hump, with  $l=200$ ,  $L=6.9006$ ,  $x_0=70$ ,  $W_0=0.5$ , and  $\sigma=2$  [Eq. (10)]. The trajectory (solid line) is computed directly from numerical solutions of the GPE [Eq. (4)]. This trajectory is in advance in time as compared with the gray soliton trajectory (dashed line) computed from the equation of motion in 1D [Eq. (12)]. This advance is due to a small increase of the gray soliton velocity after the crossing of the Gaussian hump and returning points.

ton velocity changes. This acceleration leads to the radiative emission (sound waves) at returning points. In order to compare our numerical results with previous theoretical predictions, we have computed the gray soliton trajectory starting from the following equation of motion in one dimension

$$\ddot{x} = \frac{-dU}{dx}. \quad (12)$$

Equation (12) was established for the motion of a gray soliton considered as a particlelike object oscillating in an arbitrary potential  $U(x)$  [19]. The normalization of Eq. (12) corresponds to our normalization of the GPE in Eq. (4). In Fig. 3, we plotted (dashed line) the gray soliton trajectories obtained by integrating numerically Eq. (12) for  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$ , respectively (with  $l=200$ ,  $L=6.9006$ , and  $\sigma=2$ ). In Fig. 3, we note a slight difference between the trajectories directly computed from Eq. (4) GPE (solid line) and predicted theoretically by Eq. (12) (dashed line) for the same initial velocity  $c=1$  and  $\lambda=1$ . Indeed, the trajectories directly computed starting from GPE (solid line) are advance in time, compared with those computed from Eq. (12). This advance (or difference) corresponds to the velocity increase of the gray soliton after the returning points and the crossing of the Gaussian hump. In contrast, the velocity of the particlelike soliton [Eq. (12)] is constant and has the same value before and after the returning points, and after the crossing of the Gaussian hump. The comparison of the two trajectories of the gray soliton confirms the production and emission of sound waves at the returning points and at the crossing of the Gaussian hump in the elongated repulsive BEC trapped in potentials  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$ , respectively. Figure 4 is a space-time plot where the trajectory of the gray soliton

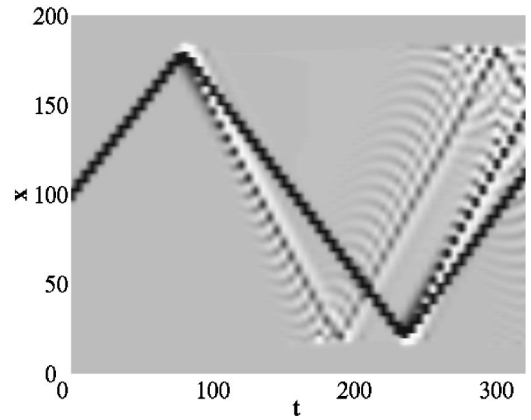


FIG. 4. Space-time plot in gray level of the difference  $|A(x,t)| - R_0$ , where  $|A(x,t)|$  corresponds to Fig. 1 (bottom) and  $R_0$  is the ground state wave function  $R_0(x)$ . The plot shows the trajectory of motion of the gray soliton (black line) and that of the emitted phonons (gray line). The phonons are emitted after the first ( $x_1=178$ ) and the second ( $x_2=22$ ) returning points of the gray soliton. Their velocity is constant and greater than that of the gray soliton. One can note that once the phonons are emitted they do not recombine with the gray soliton.

(black line) and the trajectories of the emitted phonons (gray line) can both be seen. Phonon emission is clearly produced at the first and the second returning points. The phonons travel with a velocity greater than that of the gray soliton, and their trajectory is almost undisturbed when they recross the soliton path.

The computation of total energy  $E$  [Eq. (11)] and total number of particles  $N$  [Eq. (5)] of the repulsive BEC trapped in  $U_1(x)$  show that  $E$  and  $N$  are numerically well conserved in the course of time before and after the first return point, respectively (before  $E_1=24.182$  and  $N_1=152.960$ , after  $E_2=24.184$  and  $N_2=152.963$ , with  $\Delta E=2 \times 10^{-3}$  and  $\Delta N=3 \times 10^{-3}$ ).

Now, we present the numerical results obtained by studying the velocity increase  $\Delta v$ , produced at a returning point, as a function of the variation of the smoothness  $L$ , and the characteristics  $\sigma$  of the Gaussian hump  $W(x)$ , respectively. So, in Fig. 5, we plotted the velocity increase  $\Delta v$  produced on the first and the second returning points, respectively, as a function of  $L$  for  $U_1(x)$  [Fig. 5 (left)], and as a function of  $\sigma$  for  $U_2(x)$  on the first crossing of the Gaussian hump  $W(x)$  by the gray soliton [Fig. 5 (right)]. Figure 5 (left) shows that  $\Delta v$  increases as the length scale  $L$  of the boundary becomes longer. Figure 5 (right) shows that  $\Delta v$  increases progressively with the length scale  $\sigma$  for  $0.25 \leq W_0 \leq 0.5$  (with  $l=200$  and  $L=6.9006$ ), but it becomes practically constant for a large  $\sigma$ . So, we find that the total emitted radiation increases as the potential becomes smoother (but also longer), contrary to what could naively be expected.

### III. DISCUSSION AND CONCLUSION

We have used nonharmonic potential traps in 1D of the form  $U_1(x)$  and  $U_2(x)$  to treat the dynamical evolution of an elongated dilute repulsive atomic BEC confined in  $U_1(x)$

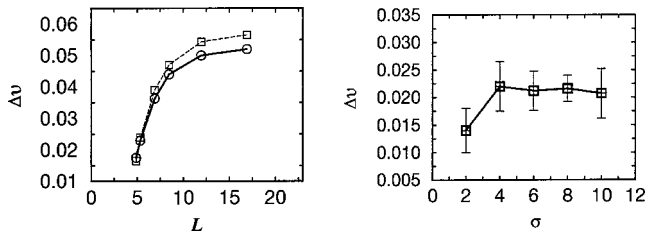


FIG. 5. Left: this figure shows the variation of the difference  $\Delta v$  between the velocities of the gray soliton before and after the first (solid line) and the second (dashed line) returning points, respectively, as a function of the smoothness  $L$  for  $U_1(x)$  (with  $l=200$ ). In these two cases,  $\Delta v$  increases as the length scale  $L$  becomes longer. Right: this figure represents the difference  $\Delta v$  between the velocities before and after the first crossing of the Gaussian hump  $W(x)$  by the gray soliton, as a function of  $\sigma$  for  $U_2(x)$  (with  $l=200$ ,  $L=6.9006$ ). To take into account the slight variation of the velocity of the gray soliton after the Gaussian hump  $W(x)$ , we plotted, for  $W_0=0.5$  in Eq. (10), the mean values of  $\Delta v$ , with error bars, associated with  $\sigma=2,4,6,8,10$ , respectively. This figure shows that  $\Delta v$  is very small for a small  $\sigma$ , and it becomes relatively relevant but practically constant with the increase of the length scale  $\sigma$ .

and  $U_2(x)$ , respectively, and accurately described by the GPE. Our numerical results obtained from integration of GPE [Eq. (4)], have allowed us to reveal a spontaneous emission of small sound waves (phonons) which were accompanying, after each returning point, the uniform and non-dissipative motion of the gray soliton through the trapped elongated repulsive BEC. The production and emission of these small sound waves result in a small variation of the gray soliton velocity after each returning points, and after the crossing of the Gaussian hump, respectively. The difference between the velocities of the gray soliton before and after the returning points and before and after the crossing of the

Gaussian hump depends nonlinearly on  $L$  and on  $\sigma$ , respectively (Fig. 5). Flat parabolic boundaries (large  $L$ ), or an elongated Gaussian hump (large  $\sigma$ ), corresponds to a finite increase of  $\Delta v$ . In contrast, a very small increase of  $\Delta v$  is associated to sharply rising parabolic boundaries (small  $L$ ), or to well localized Gaussian hump (small  $\sigma$ ).

The effect appears qualitatively quite similar to radiation emission by a moving charged particle. The particle does not radiate when it moves at a constant velocity but radiates as soon as it is accelerated since it is coupled to the excitations of the corresponding ground state, that is, the photons. Similarly, the gray solitons moving at constant velocity are exact solutions of the Gross-Pitaevskii only when the potential is flat. When the potential varies, the soliton emits sound waves since it is coupled to the excitations of the ground state, that is, the sound waves. It could have been thought that smoother potentials would lead to smaller radiation emission. In fact, the results of Fig. 4 suggest that the “greater adiabaticity” of the smoother potential is counterbalanced by the fact that the soliton reflection time is longer. It remains to be seen if the qualitative view presented above can be pushed so as to give a complete calculation of phonons emission in the present case and explains this surprising result. Although this may appear a rather difficult task at present, it would also be interesting to investigate radiation emission in experiments [20].

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was performed in the Laboratoire de Physique Statistique de l’Ecole Normale Supérieure, Paris, France. With great pleasure, we thank V. Hakim and B. Echebarria for the instructive and valuable scientific discussions, and acknowledge the hospitality of LPS and J. Meunier. We also thank V. Bretin and D. Guéry-Odelin for informing us about their ongoing experiments.

- 
- [1] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).  
 [2] K.B. Davis, M.O. Mewess, M.R. Andrews, N.J. Van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).  
 [3] C.C. Bradley, C.A. Sakett, J.J. Tolett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995); C.C. Bradley, C.A. Sakett, and R.G. Hulet, *ibid.* **78**, 985 (1997).  
 [4] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner, and T.J. Greytak, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3811 (1998).  
 [5] A. Gorlitz, J.M. Vogels, A.E. Leanhardt, C. Raman, T.L. Gustavson, J.R. AboShaeer, A.P. Chikkakur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).  
 [6] F. Schreck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).  
 [7] See M. Edwards, The Bose-Einstein Condensation Homepage at Georgia Southern University (GSU), <http://bec01.Phy.gasou.edu/bec.html>  
 [8] See R. Grimm, Research groups working with atom traps, <http://www.uibk.ac.at/c/c7/c704/ultracold/atomtraps.html>  
 [9] E.P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961); L.P. Pitaevskii, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **40**, 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)].  
 [10] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).  
 [11] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1972).  
 [12] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **37**, 823 (1973).  
 [13] W.P. Reinhardt and C.W. Clark, *J. Phys. B* **30**, L785 (1997).  
 [14] V. Hakim, *Phys. Rev. E* **55**, 2835 (1997).  
 [15] S. Burger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).  
 [16] J. Denschlag *et al.*, *Science* **287**, 97 (2000).  
 [17] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).  
 [18] V. Bretin, J. Dalibard, and S. Stock (private communication).  
 [19] Th. Busch and J.R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 2298 (2000).  
 [20] C. Raman, M. Kohl, R. Onofrio, D.S. Durfee, C.E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999).

PUBLICATION

-II-



# Soliton and phonon production by an oscillating obstacle in a quasi-one-dimensional trapped repulsive Bose-Einstein condensate

Abdelaziz Radouani\*

Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France  
and Laboratoire de Biophysique, Faculté de Médecine et de Pharmacie, Rabat, Morocco

(Received 20 November 2003; published 1 July 2004)

We use the one-dimensional (1D) Gross-Pitaevskii equation to investigate the dynamical evolution of a dilute repulsive Bose-Einstein condensate (BEC) confined in an elongated static nonharmonic trap and stirred by an oscillating Gaussian obstacle moving at uniform speed in alternate direction. Direct numerical solutions of this equation show that above a critical obstacle velocity, the motion of the obstacle creates gray solitons and phonons. At first, when the velocity of the obstacle increases, the dissipation also increases. But the dissipation reaches a maximal value and then decreases dramatically and vanishes at high obstacle velocities. Our results at low obstacle velocities are similar to those previously obtained experimentally and by simulations in the case of vortices and phonon production in 3D and 2D trapped repulsive BEC's. But at high obstacle velocities, we show that the quasi-1D trapped repulsive BEC behaves as a quasisuperfluid medium with disappearance of gray soliton and phonon excitations. This extends previous results and provides the main dependence of the phenomenon on the obstacle characteristics.

DOI: 10.1103/PhysRevA.70.013602

PACS number(s): 03.75.Kk

## I. INTRODUCTION

Since the discovery of superfluidity in helium II [1], intensive experimental and theoretical efforts have been devoted to the investigation of elementary excitations and superfluidity in quantum Bose gases. Remarkable developments in this field have led to new concepts such as the critical velocity first introduced by Landau [2] in his famous criterion, phonons and speed of sound predicted by Bogoliubov [3], quantized vortices proposed by Feynman [4], and others. However, strong interparticle interactions within superfluid liquid helium, plus thermal and quantum fluctuations, impede the formulation of a satisfactory microscopic theory that can be able to explain from first principles the mechanism of superfluidity and production of vortices in liquid helium.

With the successful experimental realization of Bose-Einstein condensates (BEC's) [5–7] in trapped dilute alkali vapors, remarkable experimental studies of the dynamical properties of BEC's have been performed. In particular, important features of these condensates were found in the MIT experiment on the interference of two independently prepared condensates [8]. In the JILA experiment [9] in a dilute and almost pure BEC at zero temperature ( $T=0$ ), it was found that only binary elastic interparticle collisions are relevant and can be characterized by a single parameter: the  $s$ -wave scattering length denoted  $a$ . These latter results have constituted a direct verification of the Bogoliubov approach of weakly interacting Bose gases [3] and justified the use of the mean-field approximation to model the dynamical and quantum properties of a dilute BEC near zero temperature. A very remarkable consequence is that the time evolution of

such a condensate wave function can be accurately described by the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), also known as the Gross-Pitaevskii equation (GPE) [10]. This has allowed for direct quantitative comparisons between theory and experiment [12]. The stability of large BEC's requires repulsive interparticle interactions (positive  $a$ ).

Two different directions have recently attracted particular interest. One of them is the study of BEC's in reduced dimensionality. Indeed, development of the trapping techniques has allowed for the realization of very anisotropic geometries, where the confinement is so strong in one or two spatial directions that at low temperatures the transversal motion is “frozen” and does not contribute to the dynamics of the system. The mean-field energy, due to binary interparticle interactions, becomes smaller than the typical trapping energy in these directions. In this way, dilute repulsive BEC's have been realized in one dimension (1D) and 2D on  $^{23}\text{Na}$  [14] and in 1D on  $^7\text{Li}$  [15]. Another trend is the study of the creation of elementary excitations (vortices, solitons, and phonons) and dissipation in BEC's. The critical velocity and dissipation in these systems were studied theoretically [16,17] and experimentally first by Raman *et al.* [18] by moving a focused laser beam through a cigar-shaped repulsive BEC.

In recent experimental developments, vortices were realized in repulsive BEC's [19,20], while gray solitons have been generated in 3D repulsive BEC's by phase imprinting techniques on sodium  $^{23}\text{Na}$  [21] and on rubidium  $^{87}\text{Rb}$  [22]. Theoretically, gray solitons and phonons creation by a potential obstacle moving at a uniform speed in a quasi-1D infinite fluid have also been studied [23–25]. Early confining traps were well approximated by harmonic potentials [11–13], but more general ones are now in use [26]. Very recently, the dynamical evolution of a repulsive BEC confined in a quasi-1D static nonharmonic trap has been numerically studied and revealed that the reflection of a gray soliton by the

---

\*Electronic address: azizrad@hotmail.com  
and radouani@lps.ens.fr

parabolic boundaries of the nonharmonic trap gives rise to the emission of phonons [27,28]. In the present work, we consider a very elongated dilute repulsive BEC confined in a static nonharmonic trap. In order to create elementary excitations of soliton and phonon types, we stir this trapped condensate by an oscillating Gaussian obstacle (an external localized repulsive potential). The speed of the obstacle through the condensate is constant but its direction reverses periodically. We numerically solve the 1D GPE that describes the dynamical evolution of this trapped condensate and investigate the superfluidity and dissipation in this quasi-1D trapped condensate at different constant obstacle velocities.

This work is organized as follows: In Sec. II, the model describing the dynamical evolution of the trapped quasi-1D BEC stirring with the oscillating obstacle in the Gaussian form and the numerical procedure are presented. Our numerical results are presented in Sec. III. They consist in the identification of elementary excitations created by the motion of the oscillating Gaussian obstacle through the quasi-1D trapped BEC and in the exploration of superfluid and dissipative behaviors of this condensate for different obstacle velocities. Section IV is devoted to a discussion of these results and to the conclusions of the present work.

## II. DYNAMICAL DESCRIPTION

### A. Model and oscillating obstacle

The dynamical evolution of the condensate wave function can be accurately modeled by the usual dimensionless 1D GPE:

$$i\partial_t A = -\partial_{xx} A - A + |A|^2 A + U(x,t)A, \quad (1)$$

where  $A$  is the complex field amplitude of the condensate wave function,  $\rho = |A|^2$  the time-dependent density of the condensate (with  $N = \int dx |A|^2$  the total number of atoms in the trapped BEC), and  $U(x,t)$  the 1D static nonharmonic trap  $V(x)$  superimposed upon the time-dependent oscillating Gaussian obstacle  $W(x,t)$  with  $U(x,t) = V(x) + W(x,t)$ . We choose  $V(x)$  as a flat potential with parabolic boundaries:

$$V(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-x_1}{L}\right)^2 & \text{for } 0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{for } x_1 \leq x \leq (l-x_1), \\ \left(\frac{x-l+x_1}{L}\right)^2 & \text{for } (l-x_1) \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

where  $l$  is the width of  $V(x)$  ( $l$  is larger than  $x_1$ ,  $x_1=27$ ,  $l=200$ ) and  $L$  (length,  $L=6.9$ ) characterizes the smoothness of  $V(x)$ . The oscillating Gaussian obstacle  $W(x,t)$ , initially centered at  $x_0$ , is expressed as

$$W(x,t) = W_0 \exp\left[-\left(\frac{x-x(t)-x_0}{\sigma}\right)^2\right], \quad (3)$$

where  $W_0$  and  $\sigma$  are the obstacle depth and width, respectively. The oscillatory uniform motion of the  $W(x,t)$  is obtained by taking  $x(t)$  in the following triangular form as a function of the time  $t$ :

$$x(t) = \begin{cases} v\left(t - \frac{n}{f}\right) & \text{for } 0 < \left(t - \frac{n}{f}\right) < \frac{1}{2f}, \\ -v\left(t - \frac{n}{f}\right) + 4\alpha & \text{for } \frac{1}{2f} < \left(t - \frac{n}{f}\right) < \frac{1}{f}, \end{cases} \quad (4)$$

where  $n$  is the number of completed oscillations,  $\alpha$  is the amplitude (half of the distance between motion extrema), and  $v$ , expressed as  $v=4\alpha f$ , is the constant obstacle velocity. We note that  $W(x,t)$  represents the laser beam used in the experiment of Raman *et al.* [18]. For this 1D description to be valid, the healing length  $\xi$  of the condensate must larger than the mean interparticle separation  $1/\rho$  along the  $x$  axis of the BEC—i.e.,  $\rho\xi \gg 1$ —and also larger than the mean half radial width  $R$  of this elongated BEC—i.e.,  $\xi \gg R$  [27,29].

### B. Numerical procedure

We present briefly our numerical procedure. The initial condition is built from the ground state of the 1D GPE [Eq. (1)] which is the stationary solution  $A_0$  of this equation with a stationary Gaussian obstacle  $W(x,0)$  at  $t=0$ . It is obtained by minimizing the Gross-Pitaevskii energy functional  $H$  associated with Eq.(1):

$$H = \int dx \left[ |\nabla A|^2 + \frac{1}{2}(|A|^2 - 1)^2 + U(x,0)(|A|^2 - 1) \right]. \quad (5)$$

The minimization of  $H$  is performed by integrating to relaxation the 1D real Ginzburg-Landau equation (RGLE) [with  $U(x,0) = V(x) + W(x,0)$ ]

$$\partial_t R = -\partial_{xx} R - R + R^2 R + U(x,0)R, \quad (6)$$

starting from an initial condition  $\gamma(x)$  of the Gaussian form with

$$\gamma(x) = \gamma_0 \left\{ \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\sigma_1}\right)^2\right] \right\},$$

with  $\gamma_0=0.5$ ,  $x_0=100$ , and  $\sigma_1=30$ . This provides the real and stable ground-state wave function  $R_0$ , which constitutes our initial condition  $A_0(A_0=R_0)$ . A finite-difference Crank-Nicholson scheme is then used to evolve Eq. (1) starting from this initial condition. We checked that the total number of atoms in the trapped condensate is conserved for all our numerical results.

## III. NUMERICAL RESULTS

The shape of  $W(x,t)$  varies with the parameters  $W_0$  and  $\sigma$  as can be seen from Eq. (3), whereas the value of its velocity  $v$  depends on amplitude  $\alpha$  and frequency  $f$  (with  $v=4\alpha f$ ). The 1D GPE [Eq. (1)] has been integrated at various frequencies associated with different obstacle velocities and for different obstacle parameters  $W_0$  and  $\sigma$ . In Fig. 1, we first present numerical solutions of Eq. (1) (with  $W_0=0.5$ ,  $\sigma=5$ , and  $\alpha=5$ ) at four frequencies associated with different obstacle velocities,  $v=0.16, 0.625, 1.40, 3.36$ . As expected for obstacle velocities  $v$  below a critical value  $v_c$  (e.g., for  $v=0.16$ ,  $v_c=0.28$ ), the oscillatory uniform motion of  $W(x,t)$

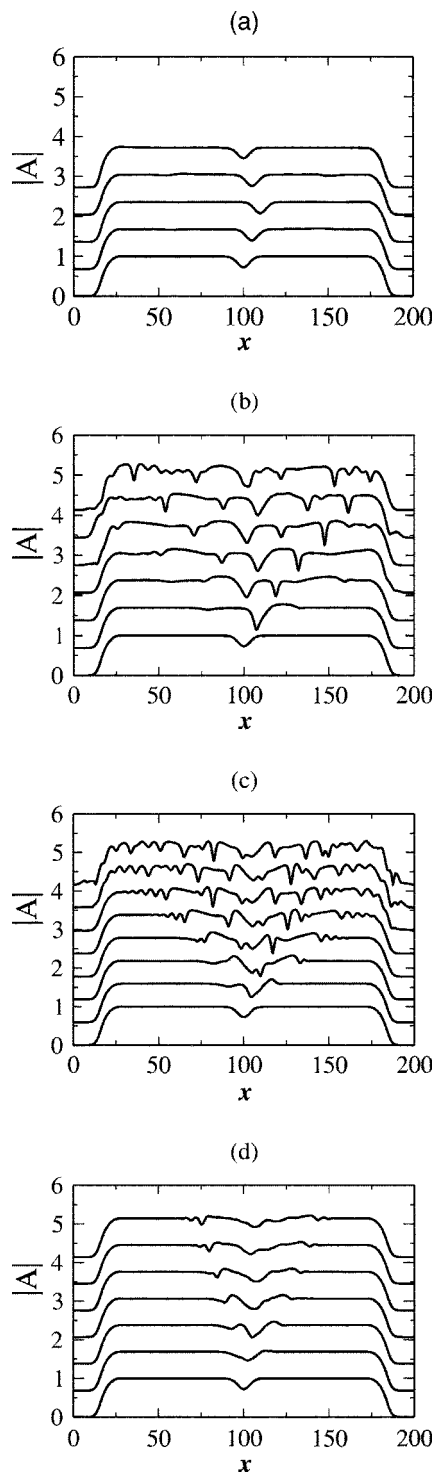


FIG. 1. Solution modulus  $|A|$  of Eq. (1) (with  $W_0=0.5$ ,  $\sigma=5$ , and  $\alpha=5$ ) obtained at four frequencies  $f=0.0080$ ,  $0.03125$ ,  $0.0700$ , and  $0.1666$  which correspond to the constant obstacle velocities  $v=0.16$ ,  $0.625$ ,  $1.40$ , and  $3.36$ , respectively. These four figures, in which  $|A|$  is plotted as a function of position  $x$ , indicate that the oscillatory obstacle motion ( $v=0.16$ ,  $v_c=0.28$ , where  $v_c$  is the critical velocity) does not create excitations for  $v < v_c$  (a), but that this motion produces elementary excitations of gray soliton and phonon types for  $v > v_c$ :  $v=0.625$  (b) and  $v=1.40$  (c). We note that these excitations disappear progressively at high obstacle velocities—for example,  $v=3.36$  (d).

produced almost no excitations in the condensate [Fig. 1(a)]. In contrast, when  $v$  exceeds  $v_c$ , the obstacle uniform motion produces gray solitons and phonons which are successively emitted to the right and left of the obstacle [Figs. 1(b) and 1(c)]. We note that the soliton velocities are greater than that of the obstacle [for example, in Fig. 1(b),  $v=0.625$ ,  $v_{soliton}=0.92$ ]. The increase of  $v$  first leads to the increase of total emission of solitons and phonons [Fig. 1(c)] as previously reported in 2D and 3D repulsive condensates. However, further increase in  $v$  reveals a different phenomenon. When  $v$  exceeds a given value ( $v=1.4$  for Fig. 1), gray soliton emission reaches a maximum at  $v=1.4$  [Fig. 1(c)] and then disappears progressively [Fig. 1(d)], and finally almost completely vanishes at high velocities ( $v=4, 5, 10$ ). The progressive disappearance of gray solitons in the condensate depends on the obstacle velocity and is accompanied by an increase of emitted phonons. This numerical observation can be partially understood by taking into account the relation between the depth  $\lambda$  of a gray soliton and its velocity  $c^2 + \lambda^2 = 2$  (see Ref. [27]). This indicates that a gray soliton which is steady in the obstacle frame disappears for  $\lambda=0$  and transforms into phonons, because its velocity  $c$  exceeds the speed of sound defined as  $c_s = \sqrt{2}$  [Fig. 1(d)].

As for phonons, the emission first is only due to the abrupt change of the obstacle velocity at motion extrema; then, it increases with the increase of  $v$  and finally also completely disappears at high velocity.

In order to further quantify these results and investigate dissipation at different obstacle velocities and for various parameter values of  $W_0$  and  $\sigma$ , we have computed both the total energy  $E$  of the condensate [Eq. (5)] and the associated mean rate of energy dissipation  $\langle dE/dt \rangle$  for different obstacle velocities. This mean rate is obtained by a linear regression analysis of the energy-time data and represents the variation in time of the condensate total energy. In Fig. 2, we plotted  $\langle dE/dt \rangle$  associated with different obstacle velocities (black circles) and for  $W_0=0.5$ ,  $\sigma=5$ , and  $\alpha=5$ . This figure shows that below a critical velocity  $v_c=0.28$ , the total energy  $E$  remains constant in time ( $\langle dE/dt \rangle \approx 0$ ). But for  $v > v_c$ ,  $\langle dE/dt \rangle$  increases approximately linearly with  $v$ , attains an upper limit, and then decreases and vanishes at high obstacle velocities. The decrease of  $\langle dE/dt \rangle$  is exponential for high obstacle velocities, as can be seen in the inset of Fig. 2.

In order to make contact with previous results, we first examine the dependence of  $\langle dE/dt \rangle$  and the critical velocity  $v_c$  on the depth  $W_0$  and separately on the width  $\sigma$  of the oscillating obstacle  $W(x, t)$  (with  $W_0 < 1$ ). We plot in Fig. 3 the energy increase as a function of obstacle velocity  $v$  for  $W_0=0.30, 0.50, 0.75$  (with  $\sigma=5$  and  $\alpha=5$ ). The figure shows that the dissipation in the condensate increases with an increase of the obstacle depth  $W_0$ . The critical velocity value associated with every curve ( $v_c=0.10, 0.28, 0.47$ ) can be evaluated by extrapolation. The critical velocity is found to depend on  $W_0$ . In the inset,  $W_0$  is plotted as a function of  $v_c$  by using directly the preceding evaluated values of  $W_0$  and  $v_c$ . The different values obtained are compared to a previous prediction valid for  $W_0 < 1$  and  $\sigma \gg 1$  [23]:



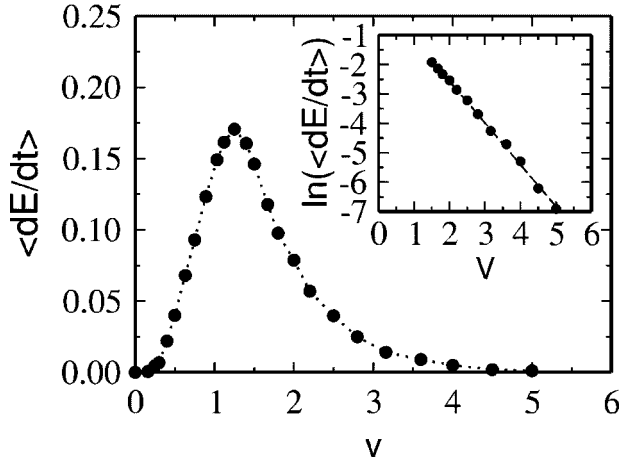


FIG. 2. The mean rate  $\langle dE/dt \rangle$ , which represents the increase of the condensate energy by the oscillating obstacle motion, is plotted as a function of different constant obstacle velocities (black circles), with  $W_0=0.5$ ,  $\sigma=5$ , and  $\alpha=5$ . This figure shows that  $\langle dE/dt \rangle=0$  for velocity values  $v$  below a critical velocity  $v_c=0.28$ . For  $v > v_c$ , it increases approximately linearly with the increase of  $v$ , attains its upper limit, and then decreases progressively and tends to zero at high obstacle velocities ( $v > 4$ ). The decrease of  $\langle dE/dt \rangle$  with the increase of  $v$  is exponential as shown in the inset.

$$W_0 = \frac{v^2}{4} - \frac{3}{2} \left( \frac{v^2}{2} \right)^{1/3} + 1. \quad (7)$$

This inset illustrates that the numerically values obtained of  $W_0$  and  $v_c$  are in good agreement with those theoretically predicted by Eq. (7).

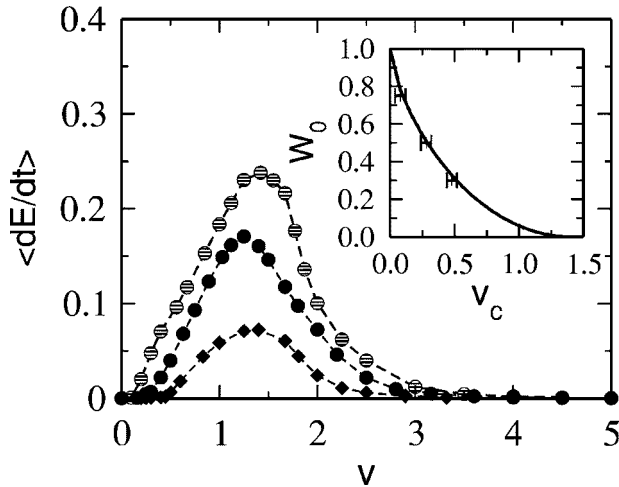


FIG. 3. Dependence of the mean rate  $\langle dE/dt \rangle$  and critical velocity  $v_c$  on the depth  $W_0 < 1$  of the oscillating obstacle  $W(x,t)$  for fixed width  $\sigma \gg 1$  and amplitude  $\alpha > 2$  (here  $\sigma=5$ ,  $\alpha=5$ ). We find that  $v_c=0.10$  for  $W_0=0.75$  (dashed circles),  $v_c=0.28$  for  $W_0=0.50$  (black circles), and  $v_c=0.47$  for  $W_0=0.30$  (black diamonds). In the inset, the preceding values ( $v_c$  with error bars) are compared to the equation  $W_0 = v^2/4 - \frac{3}{2}(v^2/2)^{1/3} + 1$ . The three values of  $v_c$  directly evaluated and represented by error bars are in good agreement with those predicted theoretically (line).

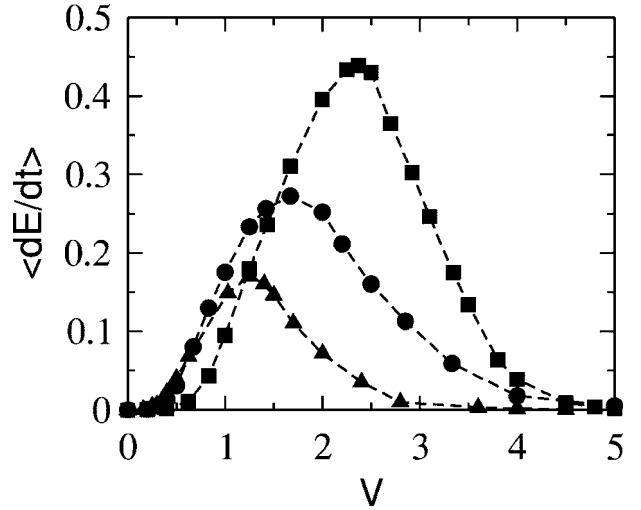


FIG. 4. Dependence of the mean rate  $\langle dE/dt \rangle$  and critical velocity  $v_c$  on the width  $\sigma$  of the oscillating obstacle  $W(x,t)$  for fixed depth  $W_0 < 1$  and amplitude  $\alpha > 2$  (here  $W_0=0.5$  and  $\alpha=5$ ). The three curves correspond, respectively, to  $\sigma=1$  (black squares),  $\sigma=3$  (black circles), and  $\sigma=5$  (black triangles). We note that the dissipation represented by  $\langle dE/dt \rangle$  and the critical velocity  $v_c$  increase with the decrease of  $\sigma$ . The increase of  $\sigma$  favors the suppression of gray solitons and phonons in the condensate at high obstacle velocities.

Figure 4 represents the dependence of  $\langle dE/dt \rangle$  for a fixed depth  $W_0 < 1$  and amplitude  $\alpha > 2$  (here  $W_0=0.5$ ,  $\alpha=5$ ), on the width  $\sigma$  of the oscillating obstacle  $W(x,t)$ . In this figure,  $\langle dE/dt \rangle$  is plotted as a function of the obstacle velocity  $v$  for  $\sigma=1, 3, 5$ . We note that as  $\sigma$  decreases, both the dissipation represented by  $\langle dE/dt \rangle$  and the critical velocity  $v_c$  in the condensate increase. The increase of  $\sigma$  favors the suppression of gray solitons and phonons in the condensate at high obstacle velocities.

#### Analytical interpretation of emission suppression at high velocity

The exponential decrease of  $\langle dE/dt \rangle$  at high obstacle velocities (see inset of Fig. 2) contrasts with previous results reported in two and three dimensions. We provide here a simple explanation of this effect modeled upon classic calculations of radiation of capillary-gravity waves by a moving obstacle [30]. An estimate of the radiation emitted by a particle is also provided in Ref. [31], but without consideration of the high-velocity behavior in 1D.

We can linearize Eq. (1) for small oscillations in the form

$$A = 1 + \eta(x,t), \quad (8)$$

where  $\eta$  is a small perturbation ( $\eta \ll 1$ , and  $\eta(x,t) = \eta_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ ). This leads to the well-known dispersion relation

$$\omega = k\sqrt{k^2 + 2} \quad (9)$$

and provides the wave phase velocity  $c(k) = \omega/k = \sqrt{k^2 + 2}$ . Dissipation is dominated by waves that appear steady in the

obstacle frame and satisfy  $c(k)=v$ . This determines the wave number of the emitted phonons as

$$k = \sqrt{v^2 - 2}. \quad (10)$$

Now, the emission rate of phonons of wavelength  $k$  is proportional to the Fourier transform  $\tilde{P}(\sigma, k)$  of the modulus of the superfluid wave function modulation  $P(x/\sigma)$  due to the moving obstacle. Considering an obstacle moving at stationary speed  $v$  [23],  $P(x/\sigma)$  is approximately obtained as

$$P\left(\frac{x}{\sigma}\right) \approx \left[1 - 4 \frac{W(x, 0)}{v^2}\right]^{-1/4}. \quad (11)$$

For  $v \gg \sqrt{2}$ , Eq. (10) can be approximately written as  $k \approx v$ , and the wavelength of the emitted phonons becomes much shorter than the length scale of the potential. So

$$\tilde{P}(\sigma, k) = \int \exp(ikx) P\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx \propto \exp(-\beta\sigma k) \quad \text{for } k \gg 1 \quad (12)$$

or

$$\tilde{P}(\sigma, k) \propto \exp(-\beta\sigma v), \quad (13)$$

where  $\beta = \sqrt{\ln(v^2/4W_0)}$  and  $W_0$  is the prefactor of the exponential in Eq. (3). Here  $\beta$  depends on the shape of  $P$  and comes from the complex singularity of Eq. (11) closed to the real axis. In the range of velocities considered,  $\beta$  depends very weakly on  $v$  and Eq. (12) explains the exponential suppression of emission at high velocities observed in Fig. 2. It also explains why an increase in  $\sigma$  favors this suppression as seen in Fig. 3 since this further increases the moving potential length scale as compared to the wavelength of the emitted phonons. The estimate given by Eq. (13) is of course only valid for a smooth potential. Dissipation suppression at

high velocity is much less pronounced for nonsmooth potentials like those considered in Ref. [25], since their singularities lie on the real  $x$  axis.

#### IV. DISCUSSION AND CONCLUSION.

In this paper, we have analyzed the creation of elementary excitations produced by an oscillating obstacle through a quasi-1D trapped repulsive Bose condensate. We have shown that the creation of excitations, gray solitons, and phonons depends on the obstacle velocity and on the obstacle shape. We have confirmed previous calculations of critical velocities in 1D [23]. We have found that the dissipation increases with the increase of the obstacle velocity value, like in the case of the formation of vortices previously studied [17,18], but contrarily to the case of vortices, we have found that it attains an upper limit and then decreases exponentially with the obstacle velocity increase. At high obstacle velocity, the dissipation vanishes and the repulsive condensate behaves as a quasisuperfluid. This absence of dissipation already noted in Ref. [25] is reminiscent of that previously described for the motion of a smooth potential with  $\sigma \gg 1$  [32] at fixed velocity as interpreted in Ref. [33]. In both cases, dissipation suppression comes because the wavelength of the emitted phonons is short compared to that of the stirring potential.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This work was performed in the Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, Paris, France. With great and special pleasure, we thank V. Hakim for instructive and valuable scientific discussions. We also wish to thank A. Boudaoud and B. Echebarria for scientific discussions and V. Bretin and D. Guéry-Odelin for informing us on their ongoing experiments. We acknowledge the hospitality of LPS and of its director J. Meunier.

- 
- [1] J. F. Allen and A. D. Misen, *Nature (London)* **141**, 75 (1938); P. L. Kapitza, *ibid.* **141**, 74 (1938).  
 [2] L. D. Landau, *J. Phys. (Moscow)* **5**, 71 (1941); I. M. Khalatnikov, *Introduction To the Theory of Superfluidity* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989).  
 [3] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (Moscow)* **11**, 23 (1947).  
 [4] R. P. Feynman, *Prog. Low Temp. Phys.* **1**, 17 (1955).  
 [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).  
 [6] K. B. Davis, M. O. Mewess, M. R. Andrews, N. J. Van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).  
 [7] C. C. Bradley, C. A. Sakett, J. J. Tolett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995); C. C. Bradley, C. A. Sakett, and R. G. Hulet, *ibid.* **78**, 985 (1997).  
 [8] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Science* **275**, 637 (1997).  
 [9] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).  
 [10] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961); L. P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **40**, 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961)].  
 [11] W. P. Reinhardt and C. W. Clark, *J. Phys. B* **30**, L785 (1997).  
 [12] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).  
 [13] Th. Busch and J. R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 2298 (2000).  
 [14] A. Gorlitz, J. M. Vogels, A. E. Lenhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Ionouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).  
 [15] F. Schreck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).  
 [16] T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1644 (1992).  
 [17] J. B. Jackson, J. F. McCann, and C. S. Adams, *Phys. Rev. A* **61**, 051603 (2000).  
 [18] C. Raman, M. Kohl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999).

- [19] M. R. Matthews *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).  
[20] K. W. Madison *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).  
[21] J. Denschlag *et al.*, Science **287**, 97 (2000).  
[22] S. Burger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).  
[23] V. Hakim, Phys. Rev. E **55**, 2835 (1997).  
[24] P. Leboeuf and N. Pavloff, Phys. Rev. A **64**, 033602 (2001).  
[25] N. Pavloff, Phys. Rev. A **66**, 013610 (2002).  
[26] V. Bretin, J. Dalibard, and S. Stock (private communication).  
[27] A. Radouani, Phys. Rev. A **68**, 043620 (2003).  
[28] N. G. Parker, N. P. Proukakis, M. Leadbeater, and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **90**, 220401 (2003).  
[29] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).  
[30] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley-Interscience, New York, 1974).  
[31] D. L. Kovrizhin and L. A. Maksimov, Phys. Lett. A **282**, 421 (2001).  
[32] C. K. Law, C. M. Chan, P. T. Leung, and M.-C. Chu, Phys. Rev. Lett. **85**, 1598 (2000).  
[33] M. Haddad and V. Hakim, Phys. Rev. Lett. **87**, 218901 (2000).

## Résumé :

Depuis la réalisation expérimentale en 1995 des premiers condensats gazeux de Bose-Einstein (B-E) d'atomes alcalins : ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^7\text{Li}$ ), ultra-froids ( $T = 0\text{K}$ ) et confinés dans des pièges magnétiques 3D, la physique des condensats de Bose-Einstein et de Fermi a connu un développement remarquable aussi bien expérimental que théorique. L'objectif de ce mémoire de thèse a été fixé dans le cadre général du progrès récemment accompli dans l'étude de l'évolution dynamique des condensats de B-E répulsifs, et de la réduction de leur dimensionnalité. Le manuscrit de cette thèse comprend deux parties. La première a été consacrée, d'une part, à la présentation du phénomène de la condensation de B-E depuis sa prédiction en 1925 par Einstein, dans un gaz idéal de Bose, jusqu'à sa réalisation en 1995, et d'autre part, à la description de la dynamique des condensats dilués de B-E, à la température  $T = 0\text{K}$ , par l'équation nonlinéaire de Schrödinger (ENLS), connue aussi sous le nom : équation de Gross-Pitaevskii (EGP). La seconde partie comprend les résultats numériques de notre étude portant sur la dynamique d'un condensat de B-E répulsif, quasi-1D et confiné dans un piège non-harmonique (piège allongé avec des bords paraboliques), et sur son comportement dissipatif et superfluide. Notre étude a montré que: i) les bords paraboliques du piège considéré, ainsi qu'un obstacle en forme d'une bosse gaussienne, placé dans la partie plate de ce piège, ont un effet d'anti-amortissement sur la propagation uniforme d'un soliton gris dans le condensat, et cet effet se manifeste par une émission spontanée des phonons; ii) le mouvement uniforme et rectiligne (en va-et-vient) d'un obstacle gaussien dans le condensat considéré conduit, lorsque la vitesse constante de l'obstacle dépasse une certaine valeur critique (vitesse critique), à la création des solitons gris et des phonons dans ce condensat qui devient un milieu dissipatif. Nous avons montré que le comportement dissipatif du condensat croît avec l'augmentation de la vitesse de l'obstacle, atteint son maximum et finit par disparaître quasi-totalement pour de grandes valeurs de la vitesse constante de l'obstacle, pour lesquelles le condensat se comporte comme un quasi-superfluide.

**Mots clés :** Condensation de Bose-Einstein, Piégeage magnétique, Refroidissement évaporatif, Condensat de Bose-Einstein quasi-1D, Equation de Gross-Pitaevskii, Solitons gris, Anti-amortissement, Vitesse critique, Super-fluidité et Dissipation.

## Abstract :

Since the experimental realization of the first Bose-Einstein condensates (BEC's), in 1995, in ultra-cold ( $T = 0\text{K}$ ) dilute vapor of alkali-metal atoms ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^7\text{Li}$ ), confined in three-dimensional (3D) magnetic traps, the physics of the BEC's and of the Fermi has known a remarkable development both experimentally and theoretically. The purpose of this thesis has been fixed in the general frame of the recent progress accomplished in the study of the dynamical evolution of the repulsive BEC's and the reduction of their dimensionality. This thesis contains two parts. In the first, we describe the Bose-Einstein condensation phenomenon like it was predicted in 1925 by Einstein in an ideal gas of bosonic atoms, and then realized in 1995 in a dilute gas of alkali-metal atoms. We point out that the dynamical evolution of a dilute Bose-Einstein condensate at  $T = 0\text{K}$  is accurately described by the non-linear Schrödinger equation (NLSE), also known as the Gross-Pitaevskii equation (GPE). In the second part, we study the dynamical, dissipative and superfluid behaviours of a quasi-1D repulsive dilute Bose-Einstein condensate confined in an elongated nonharmonic trap (elongated trap with parabolic boundaries). Our numerical results show that : i) the effect of the trap parabolic boundaries and of a Gaussian hump placed in the flat part of the same trap, is anti-damping on the uniform propagation of a gray soliton in the condensate. This effect manifests by a spontaneous emission of phonons ; ii) the production of a rectiline oscillating uniform motion by a Gaussian obstacle in the condensate, leads to the creation of gray solitons and phonons when the obstacle constant velocity exceeds a critical value. In this case, the Bose-Einstein condensate becomes a dissipative medium. We have illustrated that the dissipative behaviour of the condensate increases with the increase of the obstacle velocity, attains its maximum, then decreases and disappears at high values of the obstacle constant velocities. In this limit, the Bose-Einstein condensate behaves as a quasi-superfluid.

**Keywords :** Bose-Einstein Condensation, Magnetic Traps, Evaporative Cooling, Quasi-1D Bose-Einstein condensate, Gross-Pitaevskii equation, Gray Solitons, Anti-Damping, Critical Velocity, Dissipation and Superfluidity.