



HAL
open science

Coeur de l'invariant de Casson et cobordismes d'homologie

Kristell Dequidt Picot

► **To cite this version:**

| Kristell Dequidt Picot. Coeur de l'invariant de Casson et cobordismes d'homologie. Mathématiques
| [math]. Université de Nantes, 2005. Français. NNT: . tel-00009786

HAL Id: tel-00009786

<https://theses.hal.science/tel-00009786>

Submitted on 20 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE · SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2005

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N° B.U. :

Cœur de l'invariant de Casson et cobordismes d'homologie

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Topologie de basse dimension

Présentée et soutenue publiquement par

Kristell DEQUIDT PICOT

le 4 Mai 2005, devant le jury ci-dessous

<i>Président</i>	:	François LAUDENBACH	Professeur Émérite (Nantes)
<i>Rapporteurs</i>	:	Christine LESCOP	D. R. CNRS (Grenoble)
		Bernard PERRON	Professeur (Dijon)
<i>Examineurs</i>	:	Christian BLANCHET	Professeur (Vannes)
		Gaël MEIGNIEZ	Professeur (Vannes)
		Pierre VOGEL	Professeur (Paris VII)
<i>Invité</i>	:	Sylvain GERVAIS	Maître de conférence (Nantes)

Directeur de thèse : Christian BLANCHET

Laboratoire : LMAM, Université de Bretagne Sud, Centre Yves Coppens
BP 573, F-56017 Vannes, FRANCE.

Co-encadrant : Sylvain GERVAIS

Laboratoire : Laboratoire Jean Leray (UMR CNRS 6629), 2, rue de la Houssinière
BP 92208 44322 Nantes cedex 3, FRANCE.

ED N° 0366 - 141

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde et sincère gratitude à Christian Blanchet, mon directeur de thèse, pour son soutien, sa patience, ses encouragements, son humanité et pour m'avoir prise en thèse. Je remercie chaleureusement François Laudenbach, toujours présent pour les doctorants, pour sa disponibilité, nos discussions, et sa gentillesse. Je suis profondément honorée de l'avoir comme président du jury. Je tiens également à remercier très sincèrement mon co-encadrant Sylvain Gervais. Votre confiance m'a aidée à mener cette thèse au bout.

Je remercie vivement Bernard Perron et Christine Lescop de bien avoir voulu rapporter ma thèse ainsi qu'à Pierre Vogel et Gaël Meigniez d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Ce fut un honneur. Merci également à Hugh Morton qui m'a offert la possibilité de faire un stage à Liverpool : scientifiquement ce fut extrêmement enrichissant.

Je tiens à remercier également Didier Robert pour son écoute et sa médiation ainsi que les membres des laboratoires Jean Leray et LMAM, le GDR "Tresses et Topologie de basse dimension" et l'ED-STIM.

Enfin, merci aux doctorants/docteurs des laboratoires Jean Leray et Ircyn de Nantes -principalement Roch, JB, Gwenaël, Skander, Pierre-M, Aude, Pierrick, et Mik pour le sauvetage de mon ordinateur- merci à mes amis et ma famille, tout ceux qui me soutiennent au quotidien et me donnent tant de force parfois. Je suis fière et heureuse d'avoir dans ma vie des personnes aussi présentes : merci Nico, Claire, Fred pour les petits et grands bonheurs, les discussions, les philosophies de vie, l'appui inconditionnel, les coatching, la machine de guerre, tout ce qui fait que la vie est bien plus belle et plus remplie. Merci à ma mère, mon beau-père et à toute la famille Bataille pour votre soutien.

Table des matières

I	Préliminaires et motivation	19
1	Préliminaires et Motivation	21
1.1	Groupe de difféotopies	21
1.2	Cobordismes d'homologie	23
1.3	Filtration de Johnson pour les groupes $\mathcal{M}_{g,1}$ et $\mathcal{H}_{g,1}$	26
1.3.1	Filtration de Johnson pour le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$	28
1.3.2	Filtration de Johnson pour le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$	30
1.4	Quelques rappels de cohomologie des groupes	31
1.5	Invariant de Casson et homomorphismes d et q de Morita	33
1.5.1	Définition de l'invariant de Casson	33
1.5.2	Invariant de Casson et groupe de difféotopies	34
1.5.3	Homomorphisme de Morita $q : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Q}$	36
1.5.4	Homomorphisme de Morita $d : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$	36
1.6	SU-parallélisations absolues et relatives	38
1.6.1	SU-parallélisations absolues	38
1.6.2	SU-parallélisations relatives	39
1.6.3	Cas des 3-variétés sans bord	40
1.7	Motivation	41
II	Classes caractéristiques relatives	45
2	Classes caractéristiques relatives	47
2.1	Conventions et notations	47
2.2	Rappels sur la théorie d'obstruction	48
2.3	Classes caractéristiques relatives	50
2.3.1	Classe d'Euler relative	50
2.3.2	Plus haute et plus basse classes de Chern relatives	50
2.3.3	Première classe de Pontrjagin relative.	51
2.4	Fibrés produit, Sommes de Whitney et classes caractéristiques relatives	51
2.4.1	Cross et cup produits relatifs	51

2.4.2	Classes caractéristiques relatives et fibrés produit . . .	53
2.4.3	Classe caractéristique relative et somme de Whitney .	56
2.5	Fibré complexifié et classes caractéristiques relatives	57
2.5.1	Fibré complexifié et section complexifiée	58
2.5.2	Fibré complexe, réalifié et obstruction primaire	59
2.5.3	Section complexifiée et classes caractéristiques relatives	60

III Cocycle d'intersection revisité et «cœur» de l'invariant de Casson 63

3 Théorème du cocycle d'intersection revisité 65

3.1	Extension centrale des groupes de difféotopies	66
3.1.1	Extension centrale du groupe de difféotopies de \mathcal{M}_g .	66
3.1.2	Section d'Atiyah et cocycle de Meyer	70
3.1.3	Extension centrale du groupe de difféotopies de $\mathcal{M}_{g,1}$.	71
3.2	SU -parallélisation de Morita des mapping tores	72
3.2.1	Etude des classes d'homotopies des champs de vecteurs tangents non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$	72
3.2.2	Action du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$.	74
3.2.3	Défaut d'homotopie et homomorphisme croisé	75
3.2.4	SU -parallélisation de Morita	77
3.2.5	Théorème du cocycle d'intersection revisité	84
3.3	Description géométrique de l'homomorphisme d de Morita . .	93

4 Calculs explicites des applications k_X et d_X pour un produit de twists de Dehn 99

4.1	Compteur n_γ^X	100
4.1.1	Définition	100
4.1.2	Calculs explicites de n_γ^X pour des courbes particulières	101
4.1.3	Compteur et action des twists de Dehn sur les champs de vecteurs	104
4.2	Calcul explicite de k_X pour un produit de twists de Dehn . .	106
4.2.1	Preuve du théorème 4.2.1.	107
4.2.2	Remarque sur le sous-groupe $\mathcal{V}_{g,1}$	110
4.3	Calcul explicite de d_X pour un produit de twists de Dehn . .	111
4.3.1	Construction d'une bonne 4-variété W_γ	113
4.3.2	Petite digression : fixons une trivialisations complexe de \mathbf{TH}_γ	115
4.3.3	Preuve du théorème 4.3.1	117

IV	Extensions des cocycles de Meyer et d'intersection aux cobordismes d'homologie	127
5	Extension centrale et cocycle de Meyer pour cobordismes d'homologie	129
5.1	Existence d'un champ de vecteurs «temps» sur un cobordisme d'homologie	130
5.2	Cobordismes d'homologie, SU -parallélisations et extension centrale	134
5.2.1	Définition d'une 3-variété sans bord associée à un cobordisme d'homologie	134
5.2.2	SU -parallélisations relatives et cobordismes d'homologie	135
5.2.3	Extension centrale pour le groupe $\mathcal{H}(\Sigma)$	144
5.3	Extension du cocycle de Meyer aux cobordismes d'homologie	146
6	Structures d'Euler relatives et extension du cocycle d'intersection	153
6.1	Définition des structures d'Euler relatives et propriétés	154
6.2	Groupe associé aux cobordismes d'homologie munis d'une structure d'Euler relatives	155
6.3	homomorphisme croisé et extension du cocycle d'intersection .	162
6.4	Perspectives	165

Introduction

L'invariant de Casson est un invariant classique des 3-sphères d'homologie entière. Il est relié au groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ de la surface¹ $\Sigma_{g,1}$ de la manière suivante. Considérons le sous-groupe $\mathcal{K}_{g,1}$ de $\mathcal{M}_{g,1}$ engendré par les twists de Dehn le long des courbes simples fermées séparantes sur $\Sigma_{g,1}$. Morita et Casson ont montré que toute 3-sphère d'homologie entière peut être obtenue par un scindement de Heegaard sur un élément de $\mathcal{K}_{g,1}$ pour un certain g . Aussi l'invariant de Casson induit une application

$$\lambda^* : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$$

Celle-ci est, en fait, un homomorphisme.

A l'origine, le groupe $\mathcal{K}_{g,1}$ est défini comme le deuxième sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ dans la filtration de Johnson. Cette dernière est définie comme suit : le groupe de difféotopies agit sur le groupe fondamental de la surface $F := \pi_1(\Sigma_{g,1}, x_0)$, où x_0 est un point du bord, ainsi que sur sa série² centrale descendante associée $\{F_k\}_{k \geq 1}$. On note alors $\mathcal{M}_{g,1}(k)$ le sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ qui agit trivialement sur F/F_{k+1} . Ceci définit une filtration de $\mathcal{M}_{g,1}$, appelée filtration de Johnson, dont le premier sous-groupe est le sous-groupe de Torelli. On associe également à $\mathcal{M}_{g,1}(k)$ un homomorphisme τ_k , appelé homomorphisme de Johnson, dont le noyau est $\mathcal{M}_{g,1}(k+1)$.

A partir du deuxième homomorphisme de Johnson τ_2 défini sur $\mathcal{K}_{g,1}$, Morita construit un homomorphisme $q : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Q}$. Le défaut entre q et λ^* est un homomorphisme $d : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$ qui vérifie

$$\lambda^* = \frac{1}{24}d + q.$$

Morita conjecture que toute 3-sphère d'homologie entière peut être obtenue par un scindement de Heegaard sur un élément du troisième sous-groupe dans la filtration de Johnson $\mathcal{M}_{g,1}(3)$, généralement noté $\mathcal{L}_{g,1}$, pour un certain g . Par construction, q s'annule sur ce sous-groupe. Restreint à $\mathcal{L}_{g,1}$,

¹On notera $\Sigma_{g,1}$ une surface compacte connexe orientée de genre g à une composante de bord.

²Elle est définie en posant $F_1 := F$ et $F_{k+1} = [F, F_k]$ pour $k \geq 1$.

l'homomorphisme d de Morita est donc proportionnel à λ^* . C'est pourquoi on appellera d le «cœur» de l'invariant de Casson.

L'homomorphisme d est défini comme «différence» entre 2 cocycles³ : le cocycle de Meyer, qui est un cocycle de signature, et un cocycle d'intersection, appelé ainsi car il est défini en utilisant l'intersection algébrique de courbes sur la surface $\Sigma_{g,1}$. Dans [Mo1], Morita en fait une description géométrique en termes de 2-framing (ou SU -parallélisations⁴) sur les mappings tores.

Garoufalidis, Levine et Habiro, entre autres, ont travaillé sur les cobordismes d'homologie.

Définition 0.0.1. Un *cobordisme d'homologie* sur $\Sigma_{g,1}$ est un triplet (M, i^-, i^+) où M est 3-variété compacte orientée munie de deux plongements $i^\pm : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow M$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) Le bord de $\mathcal{M}_{g,1}$ est identifié au bord de $I \times \Sigma$ par un difféomorphisme orienté $\Phi_M : \partial(I \times \Sigma_{g,1}) \rightarrow \partial M$,
- (ii) i^+ correspond à la restriction de Φ_M à $\{1\} \times \Sigma_{g,1}$,
- (iii) i^- correspond à la restriction de Φ_M à $-\{0\} \times \Sigma_{g,1}$,
- (iv) les plongements $i^\pm : \Sigma_{g,1} \hookrightarrow M$, induisent des isomorphismes en homologie.

En les considérant à relation de bordisme d'homologie près, ils forment un groupe $\mathcal{H}_{g,1}$. Via les mapping cylindres, le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ définit un sous-groupe de $\mathcal{H}_{g,1}$. Ce dernier peut être vu comme une généralisation de $\mathcal{M}_{g,1}$ et semble plus facile à étudier dans certains cas (cf [GL], [Ha], [Le1]).

La motivation est alors de bien comprendre la description géométrique du cocycle d'intersection et de l'homomorphisme d faite par Morita dans [Mo1] pour pouvoir l'étendre aux cobordismes d'homologie. L'objet principal de ce manuscrit est de revisiter l'article [Mo1] de Morita en l'enrichissant par des calculs effectifs puis d'étendre les cocycles de Meyer et d'intersection aux cobordismes d'homologie.

Mon travail de thèse se décompose en trois parties : La première porte sur les classes caractéristiques relatives et certaines de leurs propriétés. Les classes caractéristiques absolues, présentées notamment dans [MS], peuvent être définies comme l'obstruction à l'existence de sections de certains fibrés (fibré en sphère pour la classe d'Euler par exemple). Les classes caractéristiques relatives que nous allons considérer sont des obstructions à prolon-

³Nous les expliciterons un peu plus tard dans l'introduction.

⁴Une SU -parallélisation d'un mapping tore est une classe d'homotopie de trivialisations complexes du fibré tangent. La notion de 2-framing sur le mapping tore est équivalente à celle de SU -parallélisation.

ger des sections partielles de ces fibrés à toute la base. Nous généraliserons certaines propriétés des classes caractéristiques absolues au cas relatif, notamment celles des classes d'Euler absolues de fibré produit et de somme de Whitney. Nous avons également le théorème suivant :

Théorème 0.0.2. *Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel orienté de rang $2n$ au-dessus d'un CW-complexe fini. Soit X une section du S^{2n-1} -fibré en sphère associé ξ_0 au-dessus d'un sous-complexe L de B . Sa classe d'Euler relative $e(\xi, X) \in H^{2n}(B, L; \mathbf{Z})$ est l'obstruction à prolonger X à B .*

Par passage au complexifié, X induit une section complexifiée $X_{\mathbf{C}}$ du S^{4n-1} -fibré associé au fibré complexifié $\xi_{\mathbf{C}}$ au-dessus de L . L'obstruction primaire à prolonger $X_{\mathbf{C}}$ à B est une $2n$ -classe de Chern relative qui vérifie

$$c_{2n}(\xi_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{C}}) = (-1)^n e(\xi, X) \cup e(\xi, X) \in H^{4n}(B, L; \mathbf{Z}).$$

Cette partie ne se veut pas une étude exhaustive des classes caractéristiques relatives : nous énoncerons seulement ce dont nous aurons besoin par la suite.

La deuxième partie porte sur la description géométrique de l'homomorphisme d de Morita dont le point-clé est de comprendre géométriquement le cocycle d'intersection. Le chapitre 3 consiste principalement à revisiter l'article [Mo1] en termes de SU -parallélisations et de théorie d'obstruction alors que le chapitre 4 est plus calculatoire.

Cette partie s'articule comme suit : considérons les mapping tores⁵ (rebouchés) associés aux éléments de $\mathcal{M}_{g,1}$: ce sont des 3-variétés orientées sans bord. Pour tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$, nous pouvons considérer l'ensemble $\mathcal{P}_{su}(T_{\varphi})$ des SU -parallélisations de T_{φ} i.e. l'ensemble des classes d'homotopie de trivialisations complexes de T_{φ} . Il s'agit d'un espace affine au-dessus de $H^3(T_{\varphi}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Cependant, il existe une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(T_{\varphi})$ et \mathbf{Z} , appelée σ -invariant⁶ et définie pour tout élément α de $\mathcal{P}_{su}(T_{\varphi})$ par :

$$\sigma(T_{\varphi}, \alpha) = \langle p_1(\mathbf{T}W, \alpha), \mu_W \rangle - 3 \operatorname{sign} W$$

où W est une 4-variété orientée de bord T_{φ} . On peut alors définir l'ensemble $\widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$ formé par les couples (φ, α) où φ est un élément de $\mathcal{M}_{g,1}$ et α est une SU -parallélisation de son mapping tore associé. Dans [At], Atiyah montre que cet ensemble est muni d'une structure de groupe et qu'il définit une extension centrale pour $\mathcal{M}_{g,1}$:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,1} \longrightarrow 1 \quad (\star).$$

⁵Si φ est un élément de $\mathcal{M}_{g,1}$ alors son mapping tore associé T_{φ} est défini comme $I \times \Sigma_g / (0, x) \sim (1, \overline{\varphi}(x))$, $x \in \Sigma_g$ où $\overline{\varphi}$ est l'image de φ par une surjection $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g$.

⁶En fait, le σ -invariant est défini pour toute 3-variété orientée sans bord : voir chapitre 1.

Le σ -invariant définit alors une section préférée, appelée *section d'Atiyah*, qui, à tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$ associe l'unique SU -parallélisation de T_φ de σ -invariant nul. Son cocycle associé est égal à 3τ où τ est le cocycle de Meyer.

La stratégie de Morita dans [Mo1] est alors de construire une autre section de (\star) . Pour cela, fixons un champ de vecteurs X non singulier sur la surface. Nous pouvons alors étudier l'action du groupe de difféotopies sur X : le défaut d'homotopie entre X et φ_*X peut être vu comme un élément $k_X(\varphi)$ de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Ceci définit alors une application $k_X : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ qui est un homomorphisme croisé pour l'action naturelle de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$: pour tous éléments φ et ψ de $\mathcal{M}_{g,1}$,

$$k_X(\varphi\psi) = k_X(\varphi) + \varphi_*k_X(\psi).$$

Géométriquement, ce défaut d'homotopie peut être interprété comme la classe d'homologie d'une courbe d'obstruction plongée dans une copie de surface dans $I \times \Sigma_{g,1}$ comme dans la figure 1.

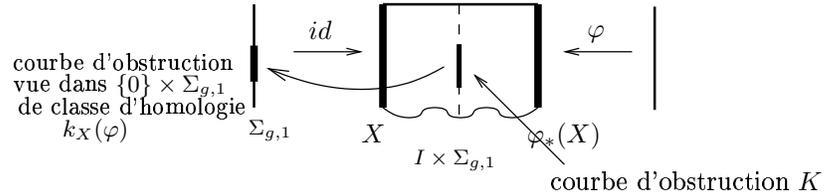


FIG. 1 – Interprétation géométrique du défaut d'homotopie $k_X(\varphi)$.

Nous pouvons calculer ce défaut d'homotopie pour un twist de Dehn et, par récurrence, pour tout produit de twists de Dehn :

Théorème 0.0.3. *Soient γ une courbe simple fermée sur $\Sigma_{g,1}$ et soit $I \times S^1$ un voisinage paramétré orienté de γ dans $\Sigma_{g,1}$. On note \mathfrak{I}_γ le champ de vecteurs non singulier sur γ induit par la direction préférée de I . L'entier n_γ^X est défini comme le nombre de tours que fait X le long de γ par rapport à \mathfrak{I}_γ . Si τ_γ est le twist de Dehn à droite le long de γ , alors*

$$k_X(\tau_\gamma^\epsilon) = \epsilon n_\gamma^X [\gamma] \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \quad \text{où } \epsilon = \pm 1.$$

On définira alors une SU -parallélisation du mapping tore T_φ en considérant la direction préférée de I comme premier vecteur du champ de repères et en exploitant le défaut d'homotopie $k_X(\varphi)$: elle sera appelée *SU -parallélisation de Morita du mapping tore T_φ pour X* et notée $m_X(T_\varphi)$. Cette construction définit une section de l'extension centrale (\star) , appelée *section de Morita pour X* . Le point-clé est le théorème du cocycle d'intersection qui décrit explicitement le cocycle associé à cette section :

Théorème 0.0.4 ([Mo1]). *Le cocycle c_X associé à la section de Morita pour X vérifie pour tous éléments φ et ψ de $\mathcal{M}_{g,1}$*

$$c_X(\varphi, \psi) = -k_X(\varphi) \cdot \varphi_* k_X(\psi).$$

Nous redémontrerons ici ce théorème en termes de théorie d'obstruction, de propriétés des classes caractéristiques relatives et d'auto-intersection de surface d'obstruction.

Nous avons deux cocycles, 3τ et c_X , associés à la même extension centrale donc ils diffèrent par un cobord :

Théorème 0.0.5 ([Mo1]). *L'application $d_X : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$, définie en associant à tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$ le σ -invariant du couple $(T_\varphi, m_X(T_\varphi))$, vérifie naturellement l'égalité suivante :*

$$c_X = 3\tau + \delta d_X.$$

De plus, pour $g \geq 3$, d_X est l'unique 1-cochaîne vérifiant l'égalité précédente.

Nous pouvons alors calculer d_X pour le cas-clé d'un twist de Dehn :

Théorème 0.0.6. *Si τ_γ est le twist de Dehn à droite le long de γ fermée plongée dans $\Sigma_{g,1}$, alors*

$$d_X(\tau_\gamma^\epsilon) = \epsilon(n_\gamma^X - 1)(n_\gamma^X + 1) \quad \text{où } \epsilon = \pm 1.$$

Remarquons qu'en revenant à la définition de d_X et des cocycles c_X et τ , ce théorème permet de calculer d_X pour un produit de twists de Dehn donc théoriquement pour tout difféomorphisme de $\mathcal{M}_{g,1}$.

Dans la fin du chapitre 3, nous irons un peu plus loin que dans [Mo1]. Considérons le sous-groupe $\mathcal{V}_{g,1}$ de $\mathcal{M}_{g,1}$ formé par les difféomorphismes qui agissent trivialement sur les champs de vecteurs non singuliers sur la surface. Alors l'application d_X restreinte à $\mathcal{V}_{g,1}$ est un homomorphisme. De plus, nous avons le théorème suivant :

Théorème 0.0.7. *Si φ est un élément de $\mathcal{V}_{g,1}$ alors le σ -invariant $\sigma(T_\varphi, m_X(T_\varphi))$ ne dépend pas du choix du champ de vecteurs non singulier X sur $\Sigma_{g,1}$.*

Par conséquent, la SU -parallélisation de Morita des mapping tore associés aux éléments de $\mathcal{V}_{g,1}$ ne dépend pas du champ de vecteurs X considéré, on la notera alors $m(T_\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{V}_{g,1}$. De plus, elle est naturellement le complexifié d'une SO -parallélisation qui, elle, dépend du champ de vecteurs X . Nous avons alors le corollaire suivant :

Corollaire 0.0.8. *Tous les d_X coïncident sur $\mathcal{V}_{g,1}$ définissant ainsi un homomorphisme $\tilde{d} : \mathcal{V}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$ défini par :*

$$\begin{aligned} \tilde{d} : \mathcal{V}_{g,1} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ \varphi &\mapsto \sigma(T_\varphi, m(T_\varphi)). \end{aligned}$$

Le groupe $\mathcal{K}_{g,1}$ constitue un sous-groupe de $\mathcal{V}_{g,1}$.

Corollaire 0.0.9. *Par construction, l'homomorphisme \tilde{d} prolonge l'homomorphisme d de Morita.*

La troisième partie de ce manuscrit porte sur l'extension des cocycles de Meyer et d'intersection aux cobordismes d'homologie. Dans le chapitre 5, nous définirons une extension centrale pour le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$ associé aux cobordismes d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. Pour cela, considérons un champ de vecteurs non singulier X sur $\Sigma_{g,1}$ ainsi que la trivialisatation de $I \times \Sigma_{g,1}$ constante le long de I induite par la direction préférée de I et X . Si (M, i^\pm) est un cobordisme d'homologie, alors elle induit une section X_M du $SO(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)$ au-dessus de ∂M via le difféomorphisme Φ_M qui identifie le bord de M avec le bord de $I \times \Sigma_{g,1}$ (cf fig 2).

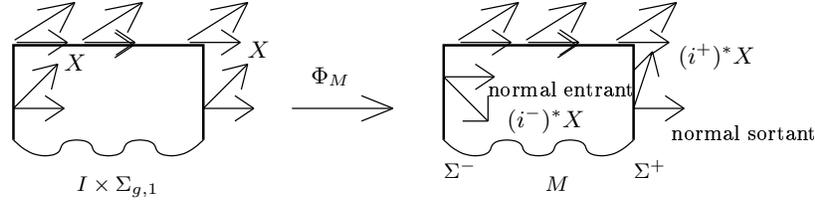


FIG. 2 – section X_M sur le bord de M .

On peut alors considérer l'ensemble $\mathcal{P}_{su}(M, X)$ des SU -parallélisations de M relatives au complexifié de X_M . C'est un espace affine au-dessus de $H^3(M\partial M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. On définira une bijection préférée⁷ entre $\mathcal{P}_{su}(M, X)$ et \mathbf{Z} , appelée σ -invariant relatif :

$$\sigma_r : \mathcal{P}_{su}(M, X) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

La relation de bordisme d'homologie préserve le σ -invariant relatif. Ainsi, on peut définir l'ensemble $\widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^X$:

Définition 0.0.10. L'ensemble $\widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^X$ est l'ensemble des couples (M, α_M) , où M est un cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ et où α_M appartient à $\mathcal{P}_{su}(M, X)$, muni de la relation d'équivalence définie par :

$$(M, \alpha_M) \sim (N, \alpha_N) \iff \begin{cases} M \text{ et } N \text{ sont bordants} \\ \text{et } \sigma_r(M, \alpha_M) = \sigma_r(N, \alpha_N) \end{cases}$$

La loi produit sur $\mathcal{H}_{g,1}$ induit naturellement une loi de groupe sur $\widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^X$: aussi on obtient une extension centrale :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^X \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1} \longrightarrow 1 \quad (*).$$

⁷Pour cela, nous nous ramènerons au cas des 3-variétés sans bord en «rebouchant» M par un $I \times D^2$ puis en recollant les bords : on pourra alors utiliser le σ -invariant.

Si Y est un autre champ de vecteurs non singulier sur $\Sigma_{g,1}$, alors l'extension centrale associée $\widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^Y$ est équivalente à $(*)$. De plus, restreinte à $\mathcal{M}_{g,1}$, l'extension centrale $(*)$ est équivalente à (\star) .

Le σ -invariant relatif fixe une origine préférée :

Définition 0.0.11. Pour tout cobordisme d'homologie (M, i^\pm) sur $\Sigma_{g,1}$, la *SU-parallélisation relative d'Atiyah* est l'unique élément de $\mathcal{P}_{su}(M, X)$ de σ -invariant relatif nul.

Cette construction définit une section \widehat{s}_0 de $(*)$:

Théorème 0.0.12. *Par construction, la section \widehat{s}_0 prolonge la section d'Atiyah de (\star) .*

Son cocycle \widehat{c}_0 associé est un cocycle de signature qui prolonge 3τ où τ est le cocycle de Meyer.

Le but du chapitre 6 est de prolonger le cocycle d'intersection aux cobordismes d'homologie en suivant la stratégie de Morita pour définir un homomorphisme croisé. Dans la construction de Morita pour les mapping cylindres, on utilise la direction préférée de I comme premier vecteur du champ de repères. Le but étant de définir un deuxième champ de vecteurs, indépendant du premier, en utilisant le défaut d'homotopie entre X et φ_*X .

Nous définirons la notion de champ de vecteurs temps sur les cobordismes d'homologie :

Définition 0.0.13. Un champ de vecteurs temps sur M est un champ de vecteurs non singulier sur M qui correspond à la direction préférée de I sur ∂M via Φ_M .

Théorème 0.0.14. *Tout cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ admet des champs de vecteurs temps mais ceux-ci ne sont pas uniques à homotopie relative au bord près.*

Plutôt que de considérer les champs de vecteurs temps, nous considérerons les structures d'Euler relatives sur M i.e. les classes de champs de vecteurs temps qui sont homotopes sur le 2-squelette relativement au bord. Nous définirons un groupe $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ associé aux cobordismes d'homologie munis d'une structure d'Euler relative ainsi qu'une application $\widehat{k}_X : \mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Nous verrons qu'elle est un homomorphisme croisé pour l'action de groupe de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ définie grâce aux isomorphismes en homologie induits par les plongements i^\pm . Cette application prolongera naturellement l'homomorphisme croisé k_X . Nous aurons alors le théorème suivant :

Théorème 0.0.15. *La 2-cochaîne⁸ \widehat{c}_X de $C^2(\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}; \mathbf{Z})$ définie par*

$$\begin{aligned} \widehat{c}_X : \mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E} \times \mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ ((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N)) &\mapsto -\widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) \cdot M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N). \end{aligned}$$

est un 2-cocycle qui prolonge naturellement le cocycle c_X , où

$$M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N) := (i_M^-)^{-1}(i_M^+)_*(\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N)).$$

⁸L'action de groupe de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ sur \mathbf{Z} considérée est l'action triviale.

Première partie

Préliminaires et motivation

Chapitre 1

Préliminaires et Motivation

Le but de cette partie est de rappeler certaines notions et définitions afin de motiver le problème posé.

Après quelques brefs rappels concernant le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$, nous définirons la notion de cobordisme d'homologie ainsi que le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$ qui lui est associé. Via les mapping cylindres, $\mathcal{M}_{g,1}$ peut être vu comme un sous-groupe de $\mathcal{H}_{g,1}$.

Johnson a défini une filtration du groupe $\mathcal{M}_{g,1}$ que Garoufalidis et Levine ont généralisé à $\mathcal{H}_{g,1}$. Après les avoir décrites, nous verrons quelle est la limite de l'étude de la filtration de Johnson pour $\mathcal{M}_{g,1}$ et en quoi $\mathcal{H}_{g,1}$ paraît plus facile à étudier.

Après avoir fait un cours rappel de cohomologie des groupes, nous redonnerons les constructions des homomorphismes d et q de Morita et définirons la notion de SU -parallélisations.

1.1 Groupe de difféotopies

Soit Σ_g une surface compacte connexe orientée de genre g sans bord. Son *groupe de difféotopies* \mathcal{M}_g , appelé aussi *mapping class group*, est le groupe des classes d'isotopies des difféomorphismes de Σ_g qui préservent l'orientation :

$$\mathcal{M}_g = \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_g)).$$

Fixons un disque D^2 sur la surface Σ_g ainsi qu'un point base $* \in \partial D^2$. Le complémentaire de l'intérieur de D^2 est une surface pointée $\Sigma_{g,1}$ compacte connexe orientée de genre g à une composante de bord.

Définition 1.1.1. Le *groupe de difféotopies* $\mathcal{M}_{g,1}$ de $\Sigma_{g,1}$ est le groupe des classes d'isotopies des difféomorphismes de $\Sigma_{g,1}$ qui induisent l'identité sur le bord $\partial\Sigma_{g,1}$:

$$\mathcal{M}_{g,1} = \pi_0(\text{Diff}(\Sigma_{g,1}; \partial\Sigma_{g,1})).$$

Soit φ un élément de $\text{Diff}(\Sigma_{g,1}; \partial\Sigma_{g,1})$, on notera $\bar{\varphi}$ son extension à Σ_g par l'identité sur le disque D^2 . On obtient ainsi un morphisme canonique $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g$ surjectif¹.

Générateurs du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$. Soit γ une courbe simple fermée sur $\Sigma_{g,1}$ et soit $I \times S^1$ un voisinage régulier paramétré orienté² de γ dans $\Sigma_{g,1}$. Le twist de Dehn à droite le long de γ est l'identité en dehors de $I \times S^1$ et est défini sur $I \times S^1$ comme dans la figure 1.1 par :

$$\begin{aligned} I \times S^1 &\rightarrow I \times S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto (t, e^{i(\theta - 2\pi t)}) \end{aligned}$$

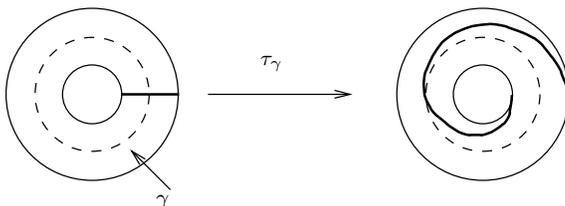


FIG. 1.1 – Twist de Dehn à droite. L'orientation de la figure est celle usuelle.

Théorème 1.1.2 (Dehn, Lickorish). *Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ est engendré par les twists de Dehn le long des $(3g - 1)$ courbes³ dessinées sur la figure 1.2. Nous appellerons ces twists les générateurs de Lickorish.*

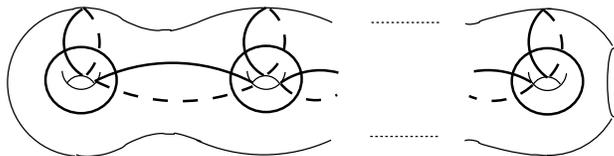


FIG. 1.2 – Générateurs de Lickorish

Malheureusement, à l'heure actuelle on ne sait pas décomposer un difféomorphisme quelconque en produit de twists de Dehn.

Une conséquence non triviale du théorème 1.1.2 est :

Théorème 1.1.3 ([Po]). *$\mathcal{M}_{g,1}$ est parfait pour $g \geq 3$.*

¹A isotopie près, on peut toujours supposer qu'un difféomorphisme fixe le disque D^2 .

²L'orientation canonique de $I \times S^1$ est la même que celle induite par l'orientation de $\Sigma_{g,1}$.

³Dans tout le manuscrit, on fait un choix pour identifier la surface $\Sigma_{g,1}$ à la surface standard orientée de genre g à une composante de bord ainsi toutes nos figures seront faites dans le cas de la surface standard.

Action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ où $*$ $\in \partial\Sigma_{g,1}$. Le groupe fondamental $F := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ de $\Sigma_{g,1}$ est libre de rang $2g$, considérons la base x_i, y_i , $1 \leq i \leq g$ représentée par la figure ci-après.

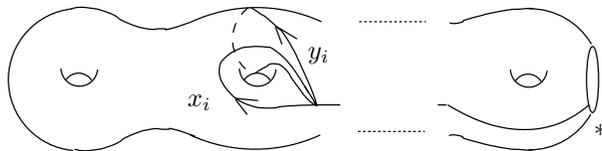


FIG. 1.3 – Générateurs de la base usuelle de $\pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$

L'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur le groupe fondamental a été décrite par Nielsen :

Théorème 1.1.4 (Nielsen). $\mathcal{M}_{g,1}$ est isomorphe au sous-groupe de $\text{Aut } \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ formé par les automorphismes fixant le commutateur $\omega_g = [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]$. Par la suite, nous noterons $\text{Aut}_0(\pi_1(\Sigma_{g,1}, *))$ ce sous-groupe.

Action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$. Notons α_i (resp. β_i) la classe d'homologie de la courbe x_i (resp. y_i) pour $1 \leq i \leq g$. Alors $(\alpha_i, \beta_i, 1 \leq i \leq g)$ est une base symplectique de $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$. L'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$ est induite par celle sur $\pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$. En particulier, elle laisse invariante la forme symplectique d'intersection. Si l'on note $SpH \subset \text{Aut } H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$ le groupe symplectique (que nous pourrions identifier à $Sp(2g, \mathbf{Z})$) alors

Proposition 1.1.5. L'image de $\mathcal{M}_{g,1}$ dans $\text{Aut } H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$ est le groupe SpH .

Le noyau de la surjection $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow SpH$ est appelé *sous-groupe de Torelli* et est noté $\mathcal{T}_{g,1}$.

1.2 Cobordismes d'homologie

Cobordismes et cylindres d'homologie. Soit Σ une surface connexe, compacte, orientée de genre $g \geq 0$, sans bord ($\Sigma = \Sigma_g$) ou à une composante de bord ($\Sigma = \Sigma_{g,1}$). Notons H son premier groupe d'homologie : $H := H_1(\Sigma; \mathbf{Z})$.

Définition 1.2.1. Un *cobordisme d'homologie sur Σ* est un triplet (M, i^-, i^+) où M est 3-variété compacte orientée munie de deux plongements $i^\pm : \Sigma \hookrightarrow M$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) Le bord de M est identifié au bord de $I \times \Sigma$ par un difféomorphisme orienté $\Phi_M : \partial(I \times \Sigma) \rightarrow \partial M$,
- (ii) i^+ correspond à la restriction de Φ_M à $\{1\} \times \Sigma$,
- (iii) i^- correspond à la restriction de Φ_M à $-\{0\} \times \Sigma$,
- (iv) les plongements $i^\pm : \Sigma \hookrightarrow M$, induisent des isomorphismes en homologie.

Par la suite, on notera $\Sigma^\pm := \text{Im } i^\pm$.

Les cobordismes d'homologie sont considérés à difféomorphismes conservant l'orientation près. On note $\mathcal{C}(\Sigma)$ l'ensemble des classes d'équivalence des cobordismes d'homologie sur Σ .

Si (M, i_M^\pm) et (N, i_N^\pm) sont deux cobordismes d'homologie, on peut alors définir leur produit $M.N$ par «empilement» de M et N :

$$M.N := (M \bigcup_{i_M^+(i_N^-)^{-1}} N, i_M^-, i_N^+).$$

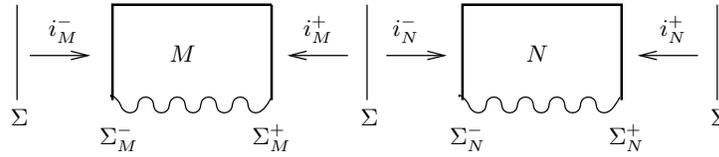


FIG. 1.4 – Loi produit sur les cobordismes d'homologie.

Ce produit confère à $\mathcal{C}(\Sigma)$ une structure de monoïde. L'élément unité est $1_\Sigma := (I \times \Sigma, id_0, id_1)$ où id_ϵ ($\epsilon = 0, 1$) est l'application $id \times \{\epsilon\}$.

Nous pouvons définir à présent la notion de cylindre d'homologie :

Définition 1.2.2. Un *cylindre d'homologie* sur Σ est un cobordisme d'homologie (M, i^\pm) tel que $(i^-)^{-1}_* \circ i^+_* : H_1(\Sigma, \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbf{Z})$ soit l'identité.

L'ensemble des classes d'équivalence des cylindres d'homologie forme un sous-monoïde de $\mathcal{C}(\Sigma)$ noté $\mathcal{TC}(\Sigma)$.

Remarque 1.2.3. – A tout élément ψ du groupe de difféotopies⁴ $\mathcal{M}(\Sigma)$, nous pouvons associer un cobordisme d'homologie sur Σ défini par $C_\psi = (I \times \Sigma, i^- = id, i^+ = \psi)$. Ceci définit un mapping cylindre que nous appellerons *mapping cylindre de ψ* .

La convention utilisée pour les mapping cylindres n'est pas la convention usuelle mais elle a l'avantage de rester proche de la définition de

⁴Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$ est \mathcal{M}_g si $\Sigma = \Sigma_g$ et $\mathcal{M}_{g,1}$ si $\Sigma = \Sigma_{g,1}$.

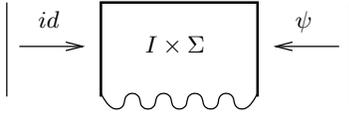


FIG. 1.5 – Mapping cylindre C_ψ

cobordisme d’homologie et de suivre la convention utilisée par Morita dans [Mo1] et par Garoufalidis et Levine dans [GL], [Le1] et [Le2].

Remarquons que si φ, ψ sont deux difféomorphismes de $\mathcal{M}(\Sigma)$, alors le recollement des mapping cylindres C_φ et C_ψ est difféomorphe au mapping cylindre $C_{\varphi\circ\psi}$:

$$C_{\varphi\circ\psi} = C_\varphi \cdot C_\psi.$$

Ainsi la loi de groupe usuelle sur $\mathcal{M}_{g,1}$ est compatible avec la loi de monoïde de $\mathcal{C}(\Sigma)$.

- Si ψ est un élément du sous-groupe de Torelli $\mathcal{T}(\Sigma)$ alors C_ψ est un cylindre d’homologie.

Groupe associé aux cobordismes d’homologie. Nous pouvons considérer la relation d’équivalence sur $\mathcal{C}(\Sigma)$ définie par la notion de bordisme d’homologie :

Définition 1.2.4. Soient M et N deux cobordismes d’homologie. Considérons une 4-variété W telle que le bord de W est obtenu par le recollement de M et $-N$ le long de leur bord de sorte que Σ_M^\pm soit identifié avec $-\Sigma_N^\pm$. Alors M et N sont dits *bordants* si et seulement si les inclusions $M \hookrightarrow W$ et $N \hookrightarrow W$ induisent des isomorphismes en homologie. On dira que W est un *bordisme*⁵ entre M et N .

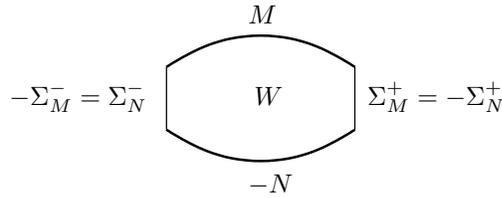


FIG. 1.6 – Bordisme W entre M et N

Par la suite, on verra les bordismes d’homologie W avec les lieux d’attachement de M avec $-N$ épaissis comme c’est le cas dans la figure ci-dessus.

⁵Cette relation est habituellement appelée *bordisme d’homologie*. Afin d’alléger les expressions, on utilisera le terme de bordisme à la place.

Le produit des cobordismes d'homologie préserve les classes d'équivalence. De plus, pour tout cobordisme M , le produit $I \times M$ peut être vu comme un bordisme d'homologie entre M et $I \times \Sigma$ où $-M$ est le cobordisme M muni de l'orientation opposée ($\Sigma_{-M}^\pm = \Sigma_M^\mp$). Ainsi l'ensemble des classes de bordisme des cobordismes d'homologie muni de la loi produit est un groupe que nous noterons $\mathcal{H}(\Sigma)$.

On notera $\mathcal{TH}(\Sigma)$ le sous-groupe⁶ de $\mathcal{H}(\Sigma)$ engendré par les cylindres d'homologie.

Notations : Si Σ est une surface sans bord Σ_g , nous noterons pour abrégier :

- $\mathcal{C}_g := \mathcal{C}(\Sigma)$
- $\mathcal{H}_g := \mathcal{H}(\Sigma)$
- $\mathcal{TH}_g := \mathcal{TH}(\Sigma)$

et, si Σ possède une composante de bord i.e. $\Sigma = \Sigma_{g,1}$, nous noterons

- $\mathcal{C}_{g,1} := \mathcal{C}(\Sigma)$
- $\mathcal{H}_{g,1} := \mathcal{H}(\Sigma)$
- $\mathcal{TH}_{g,1} := \mathcal{TH}(\Sigma)$.

Remarque sur les cobordismes d'homologie de $\Sigma_{g,1}$. Nous voulons associer à M un cobordisme d'homologie \overline{M} sur Σ_g . Pour cela, considérons le plongement $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_g$ précédemment défini. Le cobordisme \overline{M} est défini comme le recollement de M et $I \times D^2$ obtenu en identifiant $\Phi_M(I \times \partial\Sigma_{g,1})$ et $I \times \partial D^2$ via Φ_M^{-1} . Les plongements i^\pm du cobordisme \overline{M} sont définis par le recollement des plongements i^\pm avec l'identité sur le disque D^2 .

Cette construction induit une application de monoïdes

$$\mathcal{C}_{g,1} \rightarrow \mathcal{C}_g$$

qui passe naturellement au quotient en un homomorphisme de groupes⁷

$$\mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_g.$$

1.3 Filtration de Johnson pour les groupes $\mathcal{M}_{g,1}$ et $\mathcal{H}_{g,1}$

Garoufalidis et Levine, dans [GL], ont défini une filtration pour le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$ qui prolonge la filtration de Johnson du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$.

⁶Un cobordisme d'homologie bordant à un cylindre d'homologie est également un cylindre d'homologie et le produit de deux cylindres d'homologie est un cylindre d'homologie.

⁷Pour le voir, il suffit de recoller un $I \times I \times D^2$ à un bordisme W entre deux cobordismes d'homologie M et N pour obtenir un bordisme \overline{W} entre \overline{M} et \overline{N} .

Dans cette section, nous allons rappeler sa définition et en verrons quelques propriétés.

Considérons le groupe fondamental $F := \pi_1(\Sigma_{g,1}, *)$ ainsi que sa série centrale descendante⁸ $\{F_k\}_{k \geq 1}$. Remarquons que $H = F/F_2$ et posons $\mathcal{L}_k = F_k/F_{k+1}$. Nous avons alors l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow F/F_{k+1} \longrightarrow F/F_k \longrightarrow 1.$$

Celle-ci induit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{L}_k \longrightarrow \text{Aut}(F/F_{k+1}) \longrightarrow \text{Aut}(F/F_k) \longrightarrow 1$$

où $H \otimes \mathcal{L}_k \simeq \text{Hom}(H, \mathcal{L}_k)$ est identifié au noyau de la projection $\text{Aut}(F/F_{k+1}) \rightarrow \text{Aut}(F/F_k)$ de la manière suivante ([Pe1]) : soit $\varphi \in \text{Ker}(\text{Aut}(F/F_{k+1}) \rightarrow \text{Aut}(F/F_k))$. Définissons $\alpha : F/F_{k+1} \rightarrow F/F_{k+1}$ par $\alpha(x) = \varphi(x).x^{-1}$: c'est un homomorphisme envoyant F/F_{k+1} sur \mathcal{L}_k . Or \mathcal{L}_k est abélien, α se factorise alors par l'abélianisé de F/F_{k+1} qui est H . Notons $\bar{\alpha}$ l'homomorphisme correspondant de H dans \mathcal{L}_k . On associe φ à $\bar{\alpha}$.

Définissons les groupes $\text{Aut}_0(F/F_k)$ pour $k \geq 2$:

Définition 1.3.1. Notons $\text{Aut}_0(F/F_k)$ le sous-groupe de $\text{Aut}(F/F_k)$ engendré par les automorphismes h de F/F_k vérifiant

$$[\tilde{h}(x_1), \tilde{h}(y_1)] \dots [\tilde{h}(x_g), \tilde{h}(y_g)] = [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g] \pmod{F_k}$$

où \tilde{h} est un relèvement de h dans $\text{Aut} F$.

Remarquons que $\text{Aut}_0(F/F_2)$ est le groupe symplectique $Sp H$.

Nous avons une surjection naturelle $\text{Aut}_0(F/F_{k+2}) \rightarrow \text{Aut}_0(F/F_{k+1})$ induite de la suite exacte précédente. Le noyau de cette surjection est le sous-groupe $D_k(H)$ de $H \otimes \mathcal{L}_{k+1}$ défini de la manière suivante : $\mathcal{L}_{k+1} = F_{k+1}/F_{k+2}$ peut être identifié à la partie de degré $k+1$ de l'algèbre de Lie libre sur H . On pose alors

$$D_k(H) = \text{Ker}(H \otimes \mathcal{L}_{k+1} \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} \mathcal{L}_{k+2}).$$

Nous avons la suite exacte

$$0 \rightarrow D_k(H) \rightarrow \text{Aut}_0(F/F_{k+2}) \rightarrow \text{Aut}_0(F/F_{k+1}) \rightarrow 1.$$

⁸Rappelons qu'elle est définie par $F_1 = F$ et $F_{k+1} = [F, F_k]$ pour $k \geq 1$.

1.3.1 Filtration de Johnson pour le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$

D'après le théorème de Nielsen, le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ peut s'identifier au groupe $Aut_0 F$, or la projection $F \rightarrow F/F_{k+1}$ pour $k \geq 1$ induit une application naturelle $Aut_0 F \rightarrow Aut_0(F/F_{k+1})$. Nous pouvons alors définir

Définition 1.3.2. $\mathcal{M}_{g,1}(k) = Ker(\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow Aut_0(F/F_{k+1}))$.

Nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \swarrow \\
 & & & & \mathcal{M}_{g,1}(k+1) & & \\
 & & & \swarrow & \downarrow & & \\
 1 & & & \mathcal{M}_{g,1}(k) & & \mathcal{M}_{g,1} & \\
 & & \swarrow & \downarrow \tau_k & \searrow & \downarrow & \\
 & & & D_k(H) & & Aut_0(F/F_{k+2}) & \\
 & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\
 1 & & & & & Aut_0(F/F_{k+1}) & \longrightarrow 1
 \end{array}$$

La filtration ainsi définie $\dots \subset \mathcal{M}_{g,1}(k) \subset \dots \subset \mathcal{M}_{g,1}(1) \subset \mathcal{M}_{g,1}$ est appelée *filtration de Johnson* et le morphisme induit $\tau_k : \mathcal{M}_{g,1}(k) \rightarrow D_k(H)$ $k^{\text{ième}}$ *homomorphisme de Johnson*.

Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ agit

- sur $\mathcal{M}_{g,1}(k)$ par conjugaison puisque c'est un sous-groupe distingué
- et sur $H \otimes \mathcal{L}_{k+1}$, sous-groupe distingué de $Aut(F/F_{k+2})$ en composant l'action de conjugaison et le morphisme $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow Aut(F/F_{k+2})$.

Par construction, τ_k est équivariante pour ces actions.

Seuls les deux premiers homomorphismes de Johnson ont été étudiés : le premier par Johnson et le deuxième par Morita.

Propriétés du premier homomorphisme de Johnson. Par définition, $\mathcal{M}_{g,1}(1)$ est le sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ qui agit trivialement sur $F/F_2 = H$: il s'agit du sous-groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$.

Le groupe \mathcal{L}_2 peut être identifié à $\wedge^2 H$ en envoyant $[x, y] \in \mathcal{L}_2 = F_2/F_3$ sur $[x] \wedge [y] \in \wedge^2 H$ où $x, y \in F$ et $[x], [y]$ sont leur classes dans H . On peut alors identifier $D_1(H)$ avec $\wedge^3 H$ vu comme sous-groupe de $H \otimes \wedge^2 H$ via le

morphisme $a \wedge b \wedge c \rightarrow a \otimes (b \wedge c) + b \otimes (c \wedge a) + c \otimes (a \wedge b)$.

L'étude du premier homomorphisme $\tau_1 : \mathcal{T}_{g,1} \rightarrow \wedge^3 H$ par Johnson a permis d'en déterminer l'image puis des générateurs du noyau :

Théorème 1.3.3 ([Jo1], [Jo2]). *Pour $g \geq 2$,*

1. τ_1 est surjectif : $Im \tau_1 = D_1(H) \simeq \wedge^3 H$.
2. τ_1 respecte les actions de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\mathcal{T}_{g,1}$ (par conjugaison) et sur $\wedge^3 H$ (donnée par $\varphi.(a \wedge b \wedge c) = \varphi_*(a) \wedge \varphi_*(b) \wedge \varphi_*(c)$ où φ_* est l'automorphisme de H induit par φ).
3. $Ker \tau_1 = \mathcal{M}_{g,1}(2)$ est le sous-groupe engendré par les twists de Dehn le long des courbes simples fermées séparantes.

Dans la littérature, $\mathcal{M}_{g,1}(2)$ est généralement noté $\mathcal{K}_{g,1}$.

Rappelons qu'une courbe simple fermée γ sur $\Sigma_{g,1}$ est dite *séparante* si $\Sigma_{g,1} \setminus \{\gamma\}$ a deux composantes connexes. Le *genre de la courbe* γ est le genre de la sous-surface n'ayant qu'une seule composante de bord.

Johnson a réduit l'ensemble des générateurs de $\mathcal{K}_{g,1}$ en montrant :

Théorème 1.3.4 ([Jo1][Jo2]). *Les twists de Dehn le long des courbes simples fermées séparantes de genre 1 et 2 suffisent pour engendrer $\mathcal{K}_{g,1}$.*

Propriétés du deuxième homomorphisme de Johnson. Morita a déterminé l'image du deuxième homomorphisme de Johnson

$$\tau_2 : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow D_2(H).$$

Le groupe \mathcal{L}_3 peut être identifié à $H \otimes (\wedge^2 H) / \wedge^3 H$. Ainsi $D_2(H)$ est un sous-groupe de $H \otimes H \otimes (\wedge^2 H) / (H \otimes \wedge^3 H)$.

Considérons T le sous-groupe de $H \otimes H \otimes (\wedge^2 H)$ engendré par les éléments $a \wedge b \otimes a \wedge b$ et $a \wedge b \leftrightarrow c \wedge d := (a \wedge b) \otimes (c \wedge d) + (c \wedge d) \otimes (a \wedge b)$, où a, b, c, d sont des éléments de H et où $a \wedge b \otimes c \wedge d := a \otimes b \otimes c \wedge d - b \otimes a \otimes c \wedge d$ dans $H \otimes H \otimes (\wedge^2 H)$. On notera \overline{T} l'image de T par la projection canonique

$$H \otimes H \otimes (\wedge^2 H) \rightarrow H \otimes H \otimes (\wedge^2 H) / (H \otimes \wedge^3 H).$$

On voit alors que \overline{T} est un sous-groupe de $D_2(H)$.

Proposition 1.3.5 (Morita [Mo4]). *Soit γ une courbe simple fermée séparante de genre h et soit $u_1, v_1, \dots, u_h, v_h$ une base symplectique du premier groupe d'homologie de la sous-surface de $\Sigma_{g,1}$ de bord γ . Notons τ_γ le twist de Dehn (à droite) le long de γ . Alors $\tau_2(\tau_\gamma)$ est l'image de l'élément $(u_1 \wedge v_1 + \dots + u_h \wedge v_h)^{\otimes 2}$ dans \overline{T} par la projection $T \rightarrow \overline{T}$. En particulier, $Im \tau_2 \subset \overline{T}$.*

De plus,

Théorème 1.3.6 (Morita [Mo4]). *Im τ_2 est un sous-module d'indice fini de \overline{T} .*

Nous noterons $\mathcal{L}_{g,1} := \mathcal{M}_{g,1}(3)$ le noyau de τ_2 . L'étude du deuxième homomorphisme de Johnson n'a pu déterminer à l'heure actuelle un système générateur du noyau $\mathcal{L}_{g,1}$. Rappelons que, pour l'instant, bien que l'on connaisse des systèmes générateurs finis, il n'existe pas de présentation des groupes $\mathcal{T}_{g,1}$ et $\mathcal{K}_{g,1}$.

1.3.2 Filtration de Johnson pour le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$

Soit (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. Considérons un point base $*$ de M appartenant à $\partial\Sigma^+ = \partial\Sigma^-$ et posons $\pi_1(M) := \pi_1(M, *)$. En général, les plongements i^\pm n'induisent pas d'isomorphismes au niveau du groupe fondamental. Cependant, ils induisent des isomorphismes en homologie. D'après un résultat de Stallings [Sta], i_*^\pm définissent alors des isomorphismes

$$i_n^\pm : F/F_n \rightarrow \pi_1(M)/\pi_1(M)_n$$

pour tout $n \geq 2$ où $\pi_1(M)_n$ est le $n^{\text{ième}}$ groupe de la série centrale descendante de $\pi_1(M)$.

Garoufalidis et Levine dans [GL] ont défini pour tout $k \geq 1$ des applications :

$$\begin{aligned} \eta_k : \quad \mathcal{C}_{g,1} &\rightarrow \text{Aut}_0(F/F_{k+1}) \\ (M, i^\pm) &\mapsto (i_{k+1}^-)^{-1} \circ i_{k+1}^+ . \end{aligned}$$

Ils ont également montré que ces applications se factorisent par la relation d'équivalence de bordisme d'homologie. Nous noterons encore η_k les applications induites :

$$\begin{aligned} \eta_k : \quad \mathcal{H}_{g,1} &\rightarrow \text{Aut}_0(F/F_{k+1}) \\ (M, i^\pm) &\mapsto (i_{k+1}^-)^{-1} \circ i_{k+1}^+ . \end{aligned}$$

L'une des conséquences directes (mais non triviale) de l'existence de ces applications est le fait que l'homomorphisme $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}$ est injectif. Une autre propriété importante des applications η_k est énoncée dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.7 ([GL]). *Les applications $\eta_k : \mathcal{H}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}_0(F/F_{k+1})$ sont surjectives pour $k \geq 1$.*

Nous pouvons définir pour tout $k \geq 1$,

Définition 1.3.8. $\mathcal{H}_{g,1}(k) = \text{Ker } \eta_k$.

Nous obtenons alors un diagramme commutatif analogue à celui du paragraphe précédent que nous complétons grâce à la surjectivité des applications η_k :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{H}_{g,1}(k+1) & \swarrow \text{---} & 1 \\
 & & & & \downarrow & \swarrow \text{---} & \\
 & & & & \mathcal{H}_{g,1}(k) & \swarrow \text{---} & \\
 & & & & \downarrow & \swarrow \text{---} & \\
 & & & & \mathcal{H}_{g,1} & \xrightarrow{\eta_k} & \\
 & & & & \downarrow \eta_{k+1} & \searrow & \\
 1 & \longrightarrow & D_k(H) & \longrightarrow & \text{Aut}_0(F/F_{k+2}) & \longrightarrow & \text{Aut}_0(F/F_{k+1}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

La filtration $\{\mathcal{H}_{g,1}(k)\}_{k \geq 1}$ généralise donc la filtration de Johnson du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$. Nous avons vu qu'il restait beaucoup de questions non résolues autour de la filtration de Johnson (présentation de $\mathcal{T}_{g,1}$, $\mathcal{K}_{g,1}$ ou $\mathcal{L}_{g,1}$, etc ...) et des morphismes de Johnson dont on ne connaît pas les images pour $k \geq 3$. Cette filtration paraît donc très appropriée :

Proposition 1.3.9. *Les épimorphismes η_k induisent des isomorphismes $D_k(H) \cong \mathcal{G}_k^w(\mathcal{H}_{g,1})$ où $\mathcal{G}_k^w(\mathcal{H}_{g,1})$ est le gradué $\mathcal{H}_{g,1}(k)/\mathcal{H}_{g,1}(k+1)$.*

Cette filtration est notamment étudiée par le biais de la théorie des clas-pers de Goussarov-Habiro (cf [Le1], [Le2], [Ha]).

1.4 Quelques rappels de cohomologie des groupes

Le but de cette section est de faire un bref rappel de ce dont nous aurons besoin par la suite : pour plus de précisions, voir [Br].

Soit G et A deux groupes. Supposons que A soit abélien et muni d'une structure de G -module. On utilisera les notations usuelles pour les lois et neutres de G et de A , à savoir : le neutre de G sera noté 1, la loi de A sera notée additivement et le neutre de A sera noté 0.

On définit un complexe de cochaînes $C^*(G, A)$ de la manière suivante : pour tout entier naturel $n \geq 1$, un élément de $C^n(G, A)$ est une application $f : G^n \rightarrow A$ et $C^0(G, A) \simeq A$. L'opérateur cobord $\delta : C^n(G, A) \rightarrow C^{n+1}(G, A)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \delta f(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) - f(g_1 g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &\quad + f(g_1, g_2 g_3, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Un élément $f : G^n \rightarrow A$ de $C^n(G, A)$ est normalisé si $f(g_1, \dots, g_n) = 0$ dès que l'un des g_i est égal à 1.

On peut alors définir cocycles, cobord et groupe de cohomologie $H^*(G, A)$ associés à ce complexe de cochaînes.

Homomorphismes croisés.

Définition 1.4.1. Une application $f : G \rightarrow A$ est un *homomorphisme croisé* si, pour tous éléments g et h de G ,

$$f(gh) = f(g) + g \cdot f(h)$$

Par conséquent, un homomorphisme croisé est un 1-cocycle de $C^1(G, A)$.

Remarque 1.4.2. Considérons le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$: d'après le paragraphe 1.1, il agit naturellement sur le groupe $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Un homomorphisme croisé est une application $f : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ qui vérifie pour tout φ, ψ de $\mathcal{M}_{g,1}$

$$f(\varphi \circ \psi) = f(\varphi) + \varphi_* \cdot f(\psi)$$

où φ_* est l'automorphisme de H induit par φ .

Classification des extensions centrales Supposons que l'action de G sur A soit triviale.

Définition 1.4.3. Une *extension centrale de G par A* est une suite exacte courte de groupes

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (1)$$

telle que $i(A)$ soit central dans E .

Une autre extension centrale $0 \rightarrow A \rightarrow E' \rightarrow G \rightarrow 1$ est dite *équivalente* à (1) s'il existe un morphisme $E \rightarrow E'$ rendant le diagramme suivant

commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 1 & \longrightarrow & A & & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & \nearrow & \\
 & & E' & &
 \end{array}$$

D'après [Br], nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.4.4 ([Br], thm 3.12). *Soit $\mathcal{E}(G, A)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions centrales de G par A . Alors il existe une bijection*

$$\mathcal{E}(G, A) \simeq H^2(G, A).$$

Idée de la preuve : cette bijection est définie en étudiant les sections ensemblistes normalisées de telles extensions centrales : fixons-en une $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$ munie d'une section ensembliste normalisée i.e. une application $s : G \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = id_G$ et $s(1) = 1$. On peut lui associer une fonction $f : G \times G \rightarrow A$ définie comme «le défaut d'homomorphisme de s » en posant, pour tous éléments g et h de G ,

$$s(g)s(h) = i(f(g, h))s(gh).$$

On montre alors que f est un 2-cocycle normalisé. Si s' est une autre section de cette extension centrale alors le cocycle associé à s' diffère de f par un cobord.

□

1.5 Invariant de Casson et homomorphismes d et q de Morita

1.5.1 Définition de l'invariant de Casson

L'invariant de Casson est un invariant classique des 3-sphères d'homologie orientées considérées à difféomorphismes préservant l'orientation près : On notera 3-ZHS cet ensemble. Dans ce paragraphe, nous voulons seulement en rappeler la définition et quelques propriétés.

Théorème 1.5.1 (Casson, [Ca]). *Il existe un invariant entier λ des 3-sphères d'homologie orientées telles que*

- (i) $\lambda \bmod 2$ est égal à l'invariant de Rochlin,
- (ii) Si $\pi_1(M) = 1$, alors $\lambda(M) = 0$,
- (iii) $\lambda(-M) = -\lambda(M)$ et $\lambda(M_1 \# M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$,

(iv) Soit K un noeud dans une 3-sphère d'homologie orientée M et soit $M_n(K)$ la 3-sphère d'homologie obtenue en effectuant sur M une $\frac{1}{n}$ -chirurgie sur K alors

$$\lambda(M_n(K)) = \lambda(M) + \frac{n}{2} \Delta_K''(1)$$

où $\Delta_K(t) = a_0 + a_1(t + t^{-1}) + a_2(t^2 + t^{-2}) + \dots$ est le polynôme d'Alexander normalisé vérifiant $\Delta_K(1) = 1$. En particulier, $\Delta_K''(1) = 2 \sum_k k^2 a_k$.

1.5.2 Invariant de Casson et groupe de difféotopies

Tout d'abord, fixons un difféomorphisme ι_g de la surface Σ_g qui fixe le disque D^2 point à point et qui est défini, grâce au théorème de Nielsen, par :

$$\begin{aligned} \iota_g : \pi_1(\Sigma_{g,1}) &\rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,1}) \\ x_i &\mapsto y_i^{-1} \\ y_i &\mapsto y_i x_i y_i^{-1} \end{aligned}$$

Considérons le corps en anses \mathbf{H}_g standard de bord $\partial \mathbf{H}_g = \Sigma_g$ de sorte que les courbes \tilde{y}_i , $i = 1, \dots, g$, bordent des disques d_i dans \mathbf{H}_g : cf figure 1.7. Alors le recollement de \mathbf{H}_g et \mathbf{H}_g le long de leur bord via ι_g est difféomorphe à la sphère S^3 :

$$S^3 = \mathbf{H}_g \bigcup_{\iota_g} -\mathbf{H}_g.$$

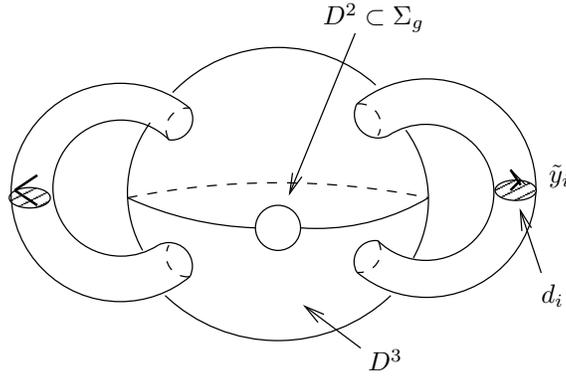


FIG. 1.7 – Corps en anses \mathbf{H}_g .

Pour tout élément φ du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$, le *scindement de Heegaard* associé à φ est la 3-variété S_φ^3 compacte connexe orientée sans bord

obtenue en recollant les deux copies de corps en anses \mathbf{H}_g le long de leur bord via $\iota_g \cdot \bar{\varphi}$ où $\bar{\varphi}$ est l'image de φ par la projection canonique $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g$:

$$S_\varphi^3 = \mathbf{H}_g \bigcup_{\iota_g \cdot \bar{\varphi}} -\mathbf{H}_g.$$

On remarque alors que, si φ est un élément du groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$, la 3-variété S_φ^3 est une 3-sphère d'homologie entière. Inversement, toute 3-ZHS peut être obtenue de cette manière.

Casson et Morita ont montré indépendamment que :

Théorème 1.5.2 (Morita, Casson). *Toute 3-sphère d'homologie entière peut être obtenue par un scindement de Heegaard sur un élément de $\mathcal{K}_{g,1}$ pour un certain g .*

Ceci permet alors de définir une application $\lambda^* : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$ induite par l'invariant de Casson :

$$\begin{aligned} \lambda^* : \mathcal{K}_{g,1} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ \varphi &\mapsto \lambda(S_\varphi^3). \end{aligned}$$

Proposition 1.5.3 (Morita [Mo4]). *λ^* est un homomorphisme.*

Considérons l'homomorphisme $\theta_0 : T \rightarrow \mathbf{Z}$ défini par

$$\begin{cases} \theta_0(x_i \wedge x_j \leftrightarrow y_i \wedge y_j) = 1, \\ \theta_0(\text{d'un autre générateur}) = 0. \end{cases}$$

Nous avons alors la proposition suivante, prouvée par le calcul :

Proposition 1.5.4 (Morita [Mo4]). *Soit τ_γ un twist de Dehn (à droite) le long d'une courbe simple fermée séparante γ de genre h et soit $u_1, v_1, \dots, u_h, v_h$ une base symplectique pour le premier groupe d'homologie de la sous-surface de composante de bord γ . Alors*

$$\lambda^*(\tau_\gamma) = -\theta_0((u_1 \wedge v_1 + \dots + u_h \wedge v_h)^{\otimes 2}).$$

Rappelons que l'image d'un tel twist de Dehn τ_γ par le deuxième homomorphisme de Johnson est l'image de $(u_1 \wedge v_1 + \dots + u_h \wedge v_h)^{\otimes 2}$ par la projection canonique $T \rightarrow \bar{T}$. L'idée est alors de définir l'homomorphisme λ^* en utilisant le deuxième homomorphisme de Johnson $\tau_2 : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \bar{T}$ et $\theta_0 : T \rightarrow \mathbf{Z}$. Malheureusement, l'homomorphisme θ_0 ne peut passer au quotient car il est non nul sur le noyau de la projection $T \rightarrow \bar{T}$. Le but va être d'introduire un nouvel homomorphisme $\bar{d} : T \rightarrow \mathbf{Z}$ qui va permettre de passer au quotient. A partir de τ_2 , θ_0 et \bar{d} , on va obtenir un homomorphisme $q : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Q}$. Morita construit un homomorphisme $d : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$

comme «réalisation géométrique» de \bar{d} . Aussi, les homomorphismes q et d vont satisfaire l'égalité suivante :

$$\lambda^* = q + \frac{1}{24}d.$$

Explicitons un peu plus la construction de ces homomorphismes.

1.5.3 Homomorphisme de Morita $q : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Q}$

L'homomorphisme $\bar{d} : T \rightarrow \mathbf{Z}$ est défini par

$$\begin{cases} \bar{d}((a \wedge b)^{\otimes 2}) = 0, \\ \bar{d}(a \wedge b \leftrightarrow c \wedge d) = (a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c), \end{cases}$$

où a, b, c , et d sont des éléments de H et où \cdot est la forme d'intersection sur H . En particulier, pour toute sous-base symplectique $u_1, v_1, \dots, u_h, v_h$ de H ,

$$\bar{d}((u_1 \wedge v_1 + \dots + u_h \wedge v_h)^{\otimes 2}) = \frac{1}{2}h(h-1).$$

Morita montre alors que $q_0 := \theta_0 + \frac{1}{3}\bar{d}$ s'annule sur $\text{Ker}(T \rightarrow \bar{T})$ ce qui définit un homomorphisme $\bar{q}_0 : \bar{T} \rightarrow \mathbf{Q}$. L'homomorphisme $q : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Q}$ est défini par la composition

$$q = \bar{q}_0 \circ \tau_2 : \mathcal{K}_{g,1} \xrightarrow{\tau_2} \bar{T} \xrightarrow{\bar{q}_0} \mathbf{Q}.$$

1.5.4 Homomorphisme de Morita $d : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$

Le but est de construire un homomorphisme $d : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$ qui réalise \bar{d} géométriquement. En d'autres termes, on cherche un homomorphisme d tel que, pour tout twist de Dehn τ_γ le long d'une courbe séparante γ de genre h , $d(\tau_\gamma)$ soit proportionnel à $\frac{1}{2}h(h-1)$.

Pour cela, définissons deux cocycles⁹ de $Z^2(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbf{Z})$: le cocycle de Meyer et le cocycle d'intersection.

Le cocycle de Meyer.

Commençons par rappeler la définition du mapping tore :

Définition 1.5.5. Soit φ un élément de \mathcal{M}_g . Le mapping tore¹⁰ associé T_φ est la 3-variété sans bord obtenue de $I \times \Sigma_g$ en identifiant $(0, x)$ avec $(1, \varphi(x))$, pour tout x de Σ_g .

⁹L'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur \mathbf{Z} considérée est l'action triviale.

¹⁰la convention utilisée ici n'est pas la convention usuelle.

Soient φ et ψ deux éléments du groupe de difféotopies \mathcal{M}_g . La 4-variété $\mathcal{M}_{\varphi,\psi}$ est décrite par le Σ_g -fibré au-dessus d'un disque à deux trous dont le bord est l'union disjointe des mappings tores T_φ , T_ψ et $-T_{\varphi\psi}$.

Le cocycle de Meyer τ est alors défini par

$$\tau(\varphi, \psi) = \text{sign } \mathcal{M}_{\varphi,\psi} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{M}_g.$$

On peut également le définir comme 2-cocycle pour $\mathcal{M}_{g,1}$ via la surjection canonique $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g$.

Le cocycle d'intersection

Le groupe¹¹ de cohomologie $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z}))$ est infini cyclique. Fixons un homomorphisme croisé $k : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$ qui soit un générateur de $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z}))$. Rappelons qu'un homomorphisme croisé vérifie l'égalité $k(\varphi\psi) = k(\varphi) + \varphi_*k(\psi)$ où φ_* est l'automorphisme de H induit par φ (cf paragraphe 1.4.2).

On peut alors définir le cocycle d'intersection c_k en posant pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{g,1}$:

$$c_k(\varphi, \psi) = -k(\varphi) \cdot \varphi_*k(\psi)$$

où \cdot est l'intersection algébrique sur la surface.

La classe de cohomologie de c_k ne dépend pas du choix de l'homomorphisme croisé k générateur de $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z}))$. De plus, Morita a montré que la classe de cohomologie de c_k est égale à 3 fois celle du cocycle de Meyer τ . Ainsi il existe une 1-cochaîne $d_k : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$ tel que $c_k = 3\tau + \delta d_k$. Puisque le groupe $\mathcal{M}_{g,1}$ est parfait pour $g \geq 3$, la 1-cochaîne d_k est unique pour $g \geq 3$.

Morita a également montré que tous les homomorphismes croisés k générateurs de $H^1(\mathcal{M}_{g,1}; H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})) \simeq \mathbf{Z}$ coïncident (au signe près) sur le sous-groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$ et s'annulent sur $\mathcal{K}_{g,1}$. Par conséquent, tous les d_k coïncident et sont des homomorphismes sur $\mathcal{K}_{g,1}$. Ainsi ils définissent un homomorphisme $d : \mathcal{K}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$ pour $g \geq 3$.

Lemme 1.5.6 (Morita [Mo4]). *Si τ_γ est un twist de Dehn (à droite) le long d'une courbe simple fermée séparante γ de genre h , alors*

$$d(\tau_\gamma) = 4h(h-1).$$

On obtient alors le théorème suivant, prouvé par le calcul sur les générateurs de $\mathcal{K}_{g,1}$:

Théorème 1.5.7 (Morita [Mo4]). *L'homomorphisme $q + \frac{1}{24}d$ coïncide avec l'homomorphisme λ^* induit par l'invariant de Casson*

$$\lambda^* = q + \frac{1}{24}d.$$

¹¹L'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbf{Z})$ est celle énoncée au paragraphe 1.1

1.6 SU-parallélisations absolues et relatives

Commençons par présenter les notions de SU -parallélisations et SU -parallélisations relatives.

1.6.1 SU -parallélisations absolues

La notion de SU -parallélisation est une généralisation de la notion de parallélisation (ou framing) d'une variété orientée, que nous appellerons SO -parallélisation par souci de clarté.

Soit M une n -variété orientée.

Définition 1.6.1. – Une *trivialisation* de $\mathbf{T}M$ est une section du $SO(n)$ -fibré principal $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)$.
– Une *SO -parallélisation* de M est la donnée d'une classe d'homotopie de trivialisations de $\mathbf{T}M$.

Par analogie, on peut écrire la définition suivante :

Définition 1.6.2. – Une *trivialisation complexe* de $\mathbf{T}M$ sera une section du $SU(n)$ -fibré principal $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ associé au complexifié du fibré tangent $\mathbf{T}M$.
– Une *SU -parallélisation* de M est la donnée d'une classe d'homotopie de trivialisations complexes de $\mathbf{T}M$.

Remarque 1.6.3. On remarque ici qu'on ne stabilise pas les espaces tangents. On parle de SO -parallélisation plutôt que de $SO(n)$ -parallélisation afin d'alléger la rédaction. Il en est de même pour l'appellation SU -parallélisation.

Remarque 1.6.4. Dans la littérature, les SU -parallélisations correspondent à la notion de *2-framing* en petites dimensions (cf [At], [Mo1]) ou de *p_1 -structures* si $n \geq 3$.

Via l'injection canonique $SO(n) \hookrightarrow SU(n)$, toute trivialisation α de $\mathbf{T}M$ induit une trivialisation complexe bien définie $\alpha_{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{T}M$ que l'on appellera *complexifiée de la trivialisation* α . Ainsi toute SO -parallélisation de M induit une SU -parallélisation bien définie. Par contre, notons que deux SO -parallélisations peuvent induire la même SU -parallélisation.

Remarque 1.6.5. Cas des surfaces orientées : Soit Σ une surface compacte connexe orientée munie d'une structure riemannienne. Via la bijection préférée $S^1 \simeq SO(2)$ dans les fibres, on identifiera le S^1 -fibré $(\mathbf{T}\Sigma)_0$ et le $SO(2)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}\Sigma)$. Ainsi la donnée d'un champ de vecteurs non singulier sur une sous-variété de Σ définit une section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}\Sigma)$ sur cette sous-variété.

Si Σ est une surface sans bord Σ_g alors son espace tangent n'admet pas de trivialisations si $g \neq 1$. En effet, l'obstruction à l'existence d'un champ de vecteurs non singulier sur Σ_g est mesurée par la classe d'Euler absolue $e(\mathbf{P}\Sigma_g) \in H^2(\Sigma_g; \mathbf{Z})$ qui vérifie

$$\langle e(\mathbf{P}\Sigma_g), \mu_{\Sigma_g} \rangle = \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

où $\chi(\Sigma_g)$ est la caractéristique d'Euler de la surface. En particulier, ceci signifie que l'on peut définir un champ de vecteurs non singulier sur Σ_g en dehors d'un petit disque D^2 et qu'à homotopie près il est entièrement déterminé sur le bord du disque : il fait $2-2g$ tours par rapport au champ de vecteurs tangents qui s'étend au disque.

Si Σ est une surface à bord, alors son espace tangent admet des trivialisations. L'ensemble $\text{Vect}(\Sigma)$ des champs de vecteurs non singuliers sur Σ considérés à homotopie près, i.e. l'ensemble des SO -parallélisations de Σ , est un espace affine au-dessus de $H^1(\Sigma; \mathbf{Z})$. Dans le cas de $\Sigma_{g,1}$, on peut supposer que le champ de vecteurs est fixé comme il faut sur le bord et on verra $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ comme un espace affine au-dessus de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ (voir chapitres 3 et 4).

En ce qui concerne les trivialisations complexes, toute surface compacte connexe orientée (avec ou sans bord) admet une unique SU -parallélisation (par théorie d'obstruction). Comme dans le cas réel, on identifiera le S^3 -fibré $((\mathbf{T}\Sigma)_{\mathbf{C}})_0$ et le $SU(2)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}\Sigma)_{\mathbf{C}}$ via la bijection canonique $S^3 \simeq SU(2)$ dans les fibres. Ainsi toute trivialisations complexe de $\mathbf{T}\Sigma$ pourra être vue comme un champ de vecteurs complexe non singulier sur Σ et vice versa.

Cas des 3-variétés orientées : toute 3-variété admet SO - et SU -parallélisation(s). Dans le cas à bord, il existe une unique SU -parallélisation. Dans le cas sans bord, l'ensemble des SU -parallélisations d'une 3-variété M forme un espace affine au-dessus de $H^3(M; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

1.6.2 SU -parallélisations relatives

Nous pouvons également généraliser la notion de trivialisations et SO -parallélisations relatives qui existent déjà dans la littérature :

Définition 1.6.6. Soit M une n -variété avec ou sans bord. Soit s une section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus d'une sous-variété N . Supposons que l'on puisse prolonger s à M .

- Une *trivialisations complexe de $\mathbf{T}M$ relative à s* est une extension de s à M .
- Une *SU -parallélisation de M relative à s* est une classe d'homotopie relative à N d'extensions de s à M .
- Nous noterons $\mathcal{P}_{su}(M, s)$ l'ensemble des SU -parallélisations de M relatives à s : il est muni d'une structure d'espace affine au-dessus de $H^3(M, N; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

1.6.3 Cas des 3-variétés sans bord

Dans le cas des 4-variétés orientées sans bord, nous avons le théorème d'Hirzebruch :

Théorème 1.6.7 ([GS] thm.1.4.12). *Si W est une 4-variété lisse, orientée et sans bord, alors la signature de W est proportionnelle à la première classe de Pontrjagin absolue $p_1(\mathbf{T}W)$ évaluée sur la classe fondamentale μ_W :*

$$\text{sign } W = \frac{1}{3} \langle p_1(\mathbf{T}W), \mu_W \rangle .$$

Si maintenant on considère une 4-variété à bord munie d'une trivialisation complexe partielle sur le bord, cette égalité n'est plus vérifiée i.e. la première classe de Pontrjagin relative¹² n'est, en général, pas proportionnelle à la signature de cette variété : il existe un certain défaut appelé *défaut de Hirzebruch*.

Considérons, à présent, une 3-variété M sans bord. Notons $\mathcal{P}_{su}(M)$ l'ensemble de ses SU -parallélisations : il est muni d'une structure d'espace affine au-dessus de $H_3(M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Il existe une bijection préférée non canonique entre $\mathcal{P}_{su}(M)$ et \mathbf{Z} donnée par le σ -invariant :

$$\mathcal{P}_{su}(M) \quad \xrightarrow{\sigma} \quad \mathbf{Z}.$$

Celui-ci est défini grâce au défaut évoqué précédemment comme suit :

Définition 1.6.8. Soit M une 3-variété compacte connexe orientée sans bord. Pour toute SU -parallélisation α de M , on pose :

$$\sigma(M, \alpha) = \langle p_1(\mathbf{T}W, \alpha), \mu_W \rangle - 3 \text{ sign } W.$$

où

- W une 4-variété compacte connexe orientée¹³ de bord $\partial W = M$,
- et $p_1(\mathbf{T}W, \alpha)$ est la première classe de Pontrjagin relative¹⁴ au fibré $\mathbf{T}W_{\mathbf{C}}$ et à un représentant de α stabilisé (à gauche) par le champ de vecteurs normal sortant sur ∂W relativement à W . Cette obstruction ne dépend pas du choix du représentant de α choisi.

Cette définition est indépendante du choix de la 4-variété W .

Remarque 1.6.9. S'il existe une 4-variété W munie d'une SU -parallélisation qui prolonge un représentant de α stabilisé alors $\sigma(M, \alpha)$ n'est autre que 3 fois la signature de W au signe près.

¹²Cette notion sera précisément définie dans le chapitre suivant.

¹³L'orientation de W considérée est celle compatible avec la section α stabilisée.

¹⁴Il s'agit de l'opposé de l'obstruction primaire à prolonger à W la section du $SU(4)$ -fibré $\mathbf{P}TW_{\mathbf{C}}$ induite par un représentant de α au-dessus de M : chapitre 2.

Remarque 1.6.10. Soient α et β deux trivialisations complexes d'une 3-variété orientée sans bord M . Elles ont même σ -invariant si et seulement si il existe une homotopie entre α et β . Cette homotopie peut être vue comme une section γ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(I \times \mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ telle que

- γ restreint à $\{0\} \times M$ correspond à α ,
- et γ restreint à $\{1\} \times M$ correspond à β .

La donnée du σ -invariant permet de définir une SU -parallélisation préférée :

Définition 1.6.11. Soit M une 3-variété connexe compacte orientée sans bord. La *SU -parallélisation d'Atiyah* de M est l'unique SU -parallélisation α_0 de M vérifiant $\sigma(M, \alpha_0) = 0$.

1.7 Motivation

L'homomorphisme d de Morita est construit comme défaut entre l'homomorphisme λ^* provenant de l'invariant de Casson et l'homomorphisme q de Morita provenant du deuxième homomorphisme de Johnson τ_2 , qui est bien compris.

Morita conjecture que toute 3-sphère d'homologie entière peut être obtenue par un scindement de Heegaard sur un élément de $\mathcal{L}_{g,1}$ pour un certain g . Aussi, nous pouvons nous intéresser non pas à l'homomorphisme λ^* mais à sa restriction à $\mathcal{L}_{g,1}$. Par construction, $\mathcal{L}_{g,1}$ est le noyau du 2^{ième} homomorphisme de Johnson donc l'homomorphisme q de Morita s'annule sur $\mathcal{L}_{g,1}$ et

$$\lambda^*|_{\mathcal{L}_{g,1}} = \frac{1}{24}d|_{\mathcal{L}_{g,1}}.$$

Pour toutes ces raisons, l'homomorphisme d de Morita peut être considéré comme le «cœur» de l'invariant de Casson.

L'un des premiers problèmes rencontrés est qu'on ne connaît, à l'heure actuelle, aucune présentation de $\mathcal{K}_{g,1}$ comme on ne connaît aucun système de générateurs de $\mathcal{L}_{g,1}$. L'étude des cobordismes d'homologie paraît une alternative intéressante car on peut naturellement généraliser la construction des scindements de Heegaard aux cobordismes d'homologie. En effet, pour tout cobordisme d'homologie M sur Σ_g , construisons une 3-variété orientée sans bord de la manière suivante :

$$S_M^3 = \mathbf{H}_g \cup_{\iota_g \cdot (\tilde{i}_M^-)^{-1}} \overline{M} \cup_{\tilde{i}_M^+} -\mathbf{H}_g.$$

Si M est un cylindre d'homologie, la variété obtenue est une 3-sphère d'homologie entière. Ainsi l'invariant de Casson induit une application

$$\tilde{\lambda}^* : \mathcal{TC}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Par construction, l'application $\tilde{\lambda}^*$ prolonge l'homomorphisme λ^* . La question naturelle est de savoir si l'on peut prolonger la formule de Morita $\frac{1}{24}d+q$ aux cylindres d'homologie en obtenant de nouveau l'invariant de Casson i.e. l'application $\tilde{\lambda}^*$. Remarquons que l'on peut prolonger q en un homomorphisme $\tilde{q} : \mathcal{H}_{g,1}(2) \rightarrow \mathbf{Q}$ en utilisant la généralisation du deuxième homomorphisme de Johnson η_2 de [GL]. Le cœur du problème est alors de prolonger l'homomorphisme d de Morita aux cylindres d'homologie.

Dans [Mo1], Morita donne une description géométrique du «cœur» de l'invariant de Casson en termes de SO -parallélisation préférée des mapping tores associés à un élément de $\mathcal{K}_{g,1}$. Pour cela, il considère une extension centrale de $\mathcal{M}_{g,1}$ définie par Atiyah dans [At] utilisant les 2-framings. Morita décrit alors le cocycle de Meyer et le cocycle d'intersection comme cocycles associés à des sections de cette extension centrale.

Dans un premier temps, nous allons revisiter les résultats de [Mo1] en termes de SU -parallélisations en utilisant la théorie d'obstruction, les propriétés des classes caractéristiques et de l'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur les champs de vecteurs non singulier sur la surface $\Sigma_{g,1}$. Nous compléterons par une partie plus calculatoire qui permettra de mieux comprendre ces constructions.

Dans un deuxième temps, nous définirons une extension centrale associée aux cobordismes d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ qui, restreinte à $\mathcal{M}_{g,1}$ correspond à l'extension centrale d'Atiyah. Nous prolongerons alors les cocycles de Meyer et d'intersection aux cobordismes d'homologie.

Deuxième partie

Classes caractéristiques
relatives

Chapitre 2

Classes caractéristiques relatives

Les classes caractéristiques absolues sont des obstructions à l'existence de sections de certains fibrés : du fibré en sphères en ce qui concerne la classe d'Euler par exemple. Leurs propriétés sont bien connues et étudiées notamment dans [MS] : nous avons, entre autres, les propositions suivantes :

Proposition 2.0.1 ([MS] prop 9.6). *Soient ξ et ξ' des fibrés vectoriels réels orientés au-dessus de CW-complexe connexes finis. Alors la classe d'Euler du fibré produit $e(\xi \times \xi')$ vérifie :*

$$e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi').$$

Si ξ et ξ' ont même base, alors on peut définir leur somme de Whitney et

$$e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi').$$

Proposition 2.0.2 ([MS] cor 15.8). *Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel orienté de rang $2n$ au-dessus d'un CW-complexe connexe fini B . On note $\xi_{\mathbf{C}} : E_{\mathbf{C}} \rightarrow B$ son fibré complexifié. Alors*

$$c_{2n}(\xi_{\mathbf{C}}) = (-1)^n e(\xi) \cup e(\xi)$$

où $c_{2n}(\xi_{\mathbf{C}})$ est la $2n^{\text{ième}}$ -classe de Chern de $\xi_{\mathbf{C}}$ et où $e(\xi)$ est la classe d'Euler du fibré ξ .

Les classes caractéristiques relatives vont être définies comme obstruction à prolonger des sections partielles de ces mêmes fibrés à toute la base. Le but de cette partie est de généraliser les propositions précédentes au cas relatif.

2.1 Conventions et notations

Commençons par donner une courte présentation non exhaustive de la théorie d'obstruction relative. On supposera connues les bases de la théorie

des fibrés (cf [Ste] (part I) ou [MS]).

Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel (resp. complexe) de rang n de groupe $SO(n)$ (resp. $SU(n)$).

- Le *fibré principal associé* à ξ est le fibré de fibre et groupe $SO(n)$ (resp. $SU(n)$) construit à partir de ξ grâce au théorème 3.2 de [Ste]. Nous le noterons $\mathbf{P}\xi : \mathbf{P}E \rightarrow B$.
- Le *fibré en sphères associé* à ξ est le fibré de fibre S^{n-1} (resp. S^{2n-1}) et de groupe $SO(n)$ (resp. $SU(n)$) construit à partir de ξ grâce au théorème 3.2 de [Ste]. Nous le noterons $\xi_0 : E_0 \rightarrow B$.

Remarque 2.1.1. Si M est une n -variété réelle orientée et si ξ est son fibré tangent alors ξ_0 est généralement appelé *fibré tangent unitaire de M* et $\mathbf{P}\xi$ est parfois appelé *fibré des repères*.

Supposons que $\xi : E \rightarrow B$ soit un fibré vectoriel réel orienté de rang n . Son *complexifié* $\xi_{\mathbf{C}} : E_{\mathbf{C}} \rightarrow B$ est le fibré de fibre \mathbf{C}^n et de groupe $SU(n)$ construit via les injections canoniques $\mathbf{R}^n \hookrightarrow \mathbf{C}^n$ et $SO(n) \hookrightarrow SU(n)$ par le théorème 3.2 de [Ste]. Nous pouvons alors définir le fibré principal $\mathbf{P}(\xi)_{\mathbf{C}}$ et le fibré en sphère $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ associés à $\xi_{\mathbf{C}}$. Nous avons donc les injections de fibrés induites des injections canoniques dans les fibres :

$$\begin{aligned} \xi &\hookrightarrow \xi_{\mathbf{C}} \\ \xi_0 &\hookrightarrow (\xi_{\mathbf{C}})_0 \\ \mathbf{P}\xi &\hookrightarrow \mathbf{P}(\xi_{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

2.2 Rappels sur la théorie d'obstruction

Convention : Dans tout le reste du chapitre, les CW -complexes seront supposés connexes et finis. Si B est un tel CW -complexe, on note B^k son $k^{\text{ième}}$ squelette. On supposera également que les fibrés considérés auront pour bases des CW -complexes.

Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré de fibre F . Supposons que F soit $(q-1)$ -connexe, $q \geq 1$. Soit s une section de ξ au-dessus d'un sous-complexe L de B . D'après [Ste] (chap. 29), on peut prolonger s à $L \cup B^q$, squelette par squelette, et deux telles extensions sont homotopes sur $L \cup B^{q-1}$ relativement à L . Par contre, l'ensemble des extensions de s à $L \cup B^q$, considérées à homotopie relative à L près, forme un espace affine au-dessus de $H^q(B, L; \{\pi_q(F)\})$, où $\{\pi_q(F)\}$ est le système de coefficients locaux¹ qui associe à tout point x de B le groupe de coefficients $\pi_q(F_x)$ et où F_x est la fibre au-dessus de x

¹fibré de groupes, voir [MS] et [Ste].

(Si $q = 0$ alors $\pi_0(F)$ est défini par le groupe $\tilde{H}_0(F; \mathbf{Z})$). Remarquons alors que, si $H^q(B, L; \{\pi_q(F)\})$ est trivial, l'extension de s à $L \cup B^q$ est unique à homotopie relative à L près.

L'obstruction à prolonger s à B^{q+1} est mesurée par une classe de cohomologie relative

$$\mathbf{c}(\xi, s) \in H^{q+1}(B, L; \{\pi_q(F)\}).$$

Cette classe de cohomologie est définie de la manière suivante : soit s_q une extension de s à $L \cup B^q$. Considérons une $(q+1)$ -cellule σ de $B \setminus L$ ainsi qu'un point base x_σ de σ . Le fibré ξ est trivial au-dessus de σ aussi la section s_q induit une application continue :

$$s_{\partial\sigma} : \partial\sigma \rightarrow F_{x_\sigma}.$$

La section s_q se prolonge à σ si et seulement si $s_{\partial\sigma}$ s'étend en une application continue $s_\sigma : \sigma \rightarrow F_{x_\sigma}$. En remarquant que $\partial\sigma$ est difféomorphe à S^q , on peut regarder la classe d'homotopie de l'application s_q dans $\pi_q(F_{x_\sigma})$: la section s_q se prolonge à σ si et seulement si la classe d'homotopie de cette application est nulle. On pose alors

$$c(\xi, s_q)(\sigma) = [s_{\partial\sigma}] \in \pi_q(F_{x_\sigma}).$$

On obtient ainsi un cocycle $c(\xi, s_q)$ de $Z^{q+1}(B, L; \{\pi_q(F)\})$ (voir [Ste] chap 29-33) dont la classe de cohomologie, que l'on notera $\mathbf{c}(\xi, s)$, ne dépend ni du choix² de l'extension s_q ni du choix des points base x_σ .

Définition 2.2.1. La classe de cohomologie $\mathbf{c}(\xi, s)$ dans $H^{q+1}(B, L; \{\pi_q(F)\})$ est appelée *obstruction primaire à prolonger s à B* .

Par conséquent, la section s se prolonge à $L \cup B^{q+1}$ si et seulement si l'obstruction primaire $\mathbf{c}(\xi, s)$ est nulle.

Remarque 2.2.2. Si ξ est un fibré en sphères orienté ou un fibré de fibre $SO(n)$ ou $SU(n)$, le système local associé est un fibré produit ([Ste] p.191,p.210, [MS] p.140, p.146, p.171). Ainsi on peut définir l'obstruction primaire comme vivant dans le groupe de cohomologie à coefficients ordinaires $H^{q+1}(B, L; \pi_q(F))$.

Remarque 2.2.3. Lorsque la fibre est contractile, on peut toujours prolonger une section partielle en une section globale. C'est le cas notamment des fibrés vectoriels réels ou complexes.

L'obstruction primaire est fonctorielle : soit $f : \xi \rightarrow \xi'$ une application entre deux fibrés $\xi : E \rightarrow B$ et $\xi' : E' \rightarrow B'$. Si s' est une section de ξ' au-dessus d'un sous-complexe L' , alors s' induit une section $f^*(s')$ de ξ au-dessus de $f^{-1}(L')$ et

$$f^*\mathbf{c}(\xi', s') = \mathbf{c}(\xi, f^*(s')).$$

²Choisir une autre extension de s à $L \cup B^q$ modifie le cocycle $c(\xi, s_q)$ par un cobord.

2.3 Classes caractéristiques relatives

Par analogie au cas absolu ($L = \emptyset$), nous pouvons définir des classes caractéristiques relatives.

2.3.1 Classe d'Euler relative

Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel de rang n . Tous les fibrés réels considérés seront orientés.

Dans le cas absolu, la classe d'Euler est l'obstruction primaire à l'existence d'une section du S^{n-1} -fibré ξ_0 . Elle est notée $e(\xi) \in H^n(B; \mathbf{Z})$.

Définition 2.3.1. Supposons qu'il existe une section X du fibré en sphères ξ_0 au-dessus d'un sous-complexe L . On appellera *classe d'Euler relative au fibré ξ et à la section X* l'obstruction primaire à étendre X à B . On la notera $e(\xi, X)$:

$$e(\xi, X) = \mathbf{c}(\xi_0, X) \in H^n(B, L; \mathbf{Z})$$

Remarque 2.3.2. Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel de rang 2. La bijection canonique $S^1 \simeq SO(2)$ définit une bijection de fibrés $\xi_0 \xrightarrow{\simeq} \mathbf{P}\xi$ qui induit l'identité sur la base. Ainsi, toute section X de ξ_0 au-dessus d'un sous-complexe L définit une section de $\mathbf{P}\xi$ sur L que l'on notera encore X et par functorialité

$$\mathbf{c}(\mathbf{P}\xi, X) = e(\xi, X) \in H^2(B, L; \mathbf{Z}).$$

Dans ce cas, on ne distinguera pas les fibrés ξ_0 et $\mathbf{P}\xi$.

2.3.2 Plus haute et plus basse classes de Chern relatives

Soit $\eta : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel complexe de rang n . Les fibrés vectoriels complexes seront toujours supposés munis d'une structure hermitienne et d'une forme volume complexe. On considérera alors que le fibré η a pour groupe $SU(n)$. Le but de ce paragraphe n'est pas de redéfinir toutes les classes de Chern relatives mais juste celles dont nous aurons besoin par la suite.

Dans le cas absolu, la première classe de Chern $c_1(\eta)$ est nulle à cause de l'existence de la forme volume complexe. La plus basse classe de Chern éventuellement non nulle est la 2^{ième} classe de Chern

$$c_2(\eta) \in H^4(B; \mathbf{Z}).$$

On peut l'interpréter comme l'obstruction primaire à l'existence d'une section du fibré principal $\mathbf{P}\eta$. Définissons-la dans le cas relatif :

Définition 2.3.3. Supposons qu'il existe une section s du $SU(n)$ -fibré $\mathbf{P}\eta$ au-dessus d'un sous-complexe L . On appellera *2^{ième}-classe de Chern relative au fibré η et à la section s* l'obstruction primaire à prolonger s à B . On la notera $c_2(\eta, s)$:

$$c_2(\eta, s) = \mathbf{c}(\eta_0, s) \in H^4(B, L; \mathbf{Z}).$$

Intéressons-nous aussi à la plus haute classe de Chern $c_n(\eta) \in H^{2n}(B; \mathbf{Z})$: elle est l'obstruction primaire à l'existence d'une section du fibré en sphères η_0 .

Définition 2.3.4. Supposons qu'il existe une section \mathbf{X} du S^{2n-1} -fibré η_0 au-dessus d'un sous-complexe L . On appellera *n ^{ième}-classe de Chern relative au fibré η et à la section \mathbf{X}* l'obstruction primaire à prolonger \mathbf{X} à B . On la notera $c_n(\eta, \mathbf{X})$:

$$c_n(\eta, \mathbf{X}) = \mathbf{c}(\eta_0, \mathbf{X}) \in H^{2n}(B, L; \mathbf{Z}).$$

Remarque 2.3.5. Lorsque $n = 2$, on peut identifier les fibrés $\mathbf{P}\eta$ et η_0 via la bijection canonique $S^3 \simeq SU(2)$ dans les fibres.

2.3.3 Première classe de Pontrjagin relative.

Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel orienté de rang $n \geq 2$. Remarquons que le fibré principal du complexifié de ξ est un $SU(n)$ -fibré noté $\mathbf{P}(\xi_{\mathbf{C}})$.

Dans le cas absolu, la première classe de Pontrjagin $p_1(\xi)$ de ξ est définie grâce à la deuxième classe de Chern de son complexifié :

$$p_1(\xi) = -c_2(\xi_{\mathbf{C}}) \in H^4(B; \mathbf{Z}).$$

On définit de même la première classe de Pontrjagin relative :

Définition 2.3.6. Supposons qu'il existe une section s du fibré principal $\mathbf{P}(\xi_{\mathbf{C}})$ au-dessus d'un sous-complexe L . On définit la *première classe de Pontrjagin $p_1(\xi, s)$ relative* au fibré ξ et à la section s par

$$p_1(\xi, s) = -c_2(\xi_{\mathbf{C}}, s) \in H^4(B, L; \mathbf{Z}).$$

Ici encore, nous ne chercherons pas à définir l'ensemble des classes de Pontrjagin relatives.

2.4 Fibrés produit, Sommes de Whitney et classes caractéristiques relatives

2.4.1 Cross et cup produits relatifs

Avant de généraliser la proposition 2.0.1 énoncée dans l'introduction au cas relatif, revoyons la notion de cross produit et de cup produit relatif dans le cas des CW -complexes ([Ma], [Sp]).

Cross produit relatif

Soient X et Y deux CW -complexes finis. Notons $(C_*(X), \partial_X)$ (resp. $(C_*(Y), \partial_Y)$) le complexe de chaîne singulière associé à X (resp. Y).

D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber ([Ma] thm 3.1), il existe une équivalence d'homotopie $C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$.

Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ deux sous-complexes. Rappelons que $C_*(X, A) = \frac{C_*(X)}{C_*(A)}$. En utilisant les propriétés du produit tensoriel, nous obtenons

$$\begin{aligned} C_*(X, A) \otimes C_*(Y, B) &= \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \otimes \frac{C_*(Y)}{C_*(B)} \\ &\cong \frac{C_*(X) \otimes C_*(Y)}{(C_*(A) \otimes C_*(Y)) \oplus (C_*(X) \otimes C_*(B))} \\ &\cong \frac{C_*(X \times Y)}{C_*(A \times Y) \oplus C_*(X \times B)}. \end{aligned}$$

Les inclusions $X \times B \hookrightarrow (A \times Y) \cup (X \times B)$ et $A \times Y \hookrightarrow (A \times Y) \cup (X \times B)$ définissent une application de chaîne :

$$C_*(A \times Y) \oplus C_*(X \times B) \xrightarrow{k} C_*((A \times Y) \cup (X \times B))$$

qui induit un isomorphisme³ en homologie et en cohomologie.

Si $u \in C^p(X, A, G_1)$ et $v \in C^q(Y, B, G_2)$, alors

$$\begin{aligned} u \otimes v &\in \text{Hom}\left(\left(\frac{C_*(X)}{C_*(A)} \otimes \frac{C_*(Y)}{C_*(B)}\right)_{p+q}, G_1 \otimes G_2\right) \\ &= \text{Hom}\left(\left(\frac{C_*(X \times Y)}{C_*(A \times Y) \oplus C_*(X \times B)}\right)_{p+q}, G_1 \otimes G_2\right) \end{aligned}$$

En passant au groupes de cohomologie et en appliquant $(k^*)^{-1}$, nous obtenons un homomorphisme appelé *cross produit relatif*

$$H^p(X, A; G_1) \otimes H^q(Y, B; G_2) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B); G_1 \otimes G_2)$$

Propriété : le cross produit relatif est naturel : pour toutes applications $f : (X, A) \rightarrow (X', A')$ et $g : (Y, B) \rightarrow (Y', B')$ au-dessus de CW -complexes, nous avons : $\forall u \in H^p(X, A, G_1)$ et $\forall v \in H^q(Y, B, G_2)$,

$$(f \times g)^*(u \times v) = f^*u \times g^*v.$$

³Ceci n'est pas le cas pour des espaces topologiques en général : il faut que les paires définissent un couple excisif dans $X \times Y$. Par contre, ceci est toujours vérifié lorsqu'il s'agit de CW -complexes et de sous-complexes.

Cup produit relatif

Soit X un CW -complexe et soient A et B deux sous-complexes. Les deux applications de chaîne ci-dessous induites par les inclusions canoniques déterminent des isomorphismes en homologie et cohomologie :

$$g : \frac{C_*(X \times X)}{C_*(A \times X) \oplus C_*(X \times B)} \rightarrow \frac{C_*(X \times X)}{C_*(A \times X \cup X \times B)}$$

$$l : \frac{C_*(X)}{C_*(A) \oplus C_*(B)} \rightarrow \frac{C_*(X)}{C_*(A \cup B)}.$$

Nous avons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A; G_1) \otimes H^q(X, B; G_2) & & \\ \downarrow \times & & \\ H^{p+q}(\text{Hom}(\frac{C_*(X \times X)}{C_*(A \times X) \oplus C_*(X \times B)}; G_1 \otimes G_2)) & \xrightarrow{d_1^*} & H^{p+q}(\frac{C_*(X)}{C_*(A) \oplus C_*(B)}; G_1 \otimes G_2) \\ \uparrow g^* & & \uparrow l^* \\ H^{p+q}(X \times X, (A \times X \cup X \times B); G_1 \otimes G_2) & \xrightarrow{d_2^*} & H^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2) \end{array}$$

où d_1 et d_2 sont induits par l'application diagonale $d : X \rightarrow X \times X$.

Puisque g^* et l^* sont des isomorphismes, nous pouvons définir le *cup produit relatif* :

$$H^p(X, A; G_1) \otimes H^q(X, B; G_2) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X, A \cup B; G_1 \otimes G_2).$$

De plus, pour tout $u \in H^p(X, A, G_1)$ et pour tout $v \in H^q(X, B, G_2)$,

$$u \cup v = d^*(u \times v).$$

2.4.2 Classes caractéristiques relatives et fibrés produit

Soient $\xi : E \rightarrow B$ et $\xi' : E' \rightarrow B'$ deux fibrés vectoriels réels orientés de rang n et m respectivement. Soient X et Y deux sections de leurs fibrés en sphères associés ξ_0 et ξ'_0 au-dessus de sous-complexes $L \subset B$ et $L' \subset B'$ respectivement.

Dans le cas absolu, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4.1 ([MS] prop 9.6). *La classe d'Euler absolue d'un fibré produit est le cross produit des classes d'Euler absolues des fibrés :*

$$e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi') \in H^{n+m}(B \times B'; \mathbf{Z}).$$

Dans un premier temps, le but est de construire une section $X \times Y$ du S^{n+m-1} -fibré $(\xi \times \xi')_0$ au-dessus de $L \times B' \cup B \times L'$ induite par les sections X et Y , et bien définie à homotopie relative à $L \times L'$ près. Ensuite, nous exprimerons la classe d'Euler relative à cette section en fonction des classes $e(\xi, X)$ et $e(\xi', Y)$ pour obtenir une version relative de la proposition précédente.

Via l'injection canonique $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ dans les fibres, la section X peut être vue comme une section de ξ au-dessus de L . La fibre \mathbf{R}^n de ξ étant contractile, X se prolonge en une section globale $X_{\mathbf{R}}$ de ξ . Remarquons que deux telles extensions sont homotopes relativement à L .

Supposons que $X_{\mathbf{R}}$ soit construite, squelette après squelette, cellule après cellule de la manière suivante : si σ est une cellule de $B \setminus L$ alors $\xi|_{\sigma}$ est trivial et $(X_{\mathbf{R}})|_{\sigma}$ définit une application

$$X_{\mathbf{R}}^{\sigma} : \sigma \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

On demande alors que $X_{\mathbf{R}}^{\sigma}$ soit à valeurs dans S^{n-1} dès que c'est possible. En particulier, de cette manière, $X_{\mathbf{R}}$ restreinte à $L \cup B^{n-1}$ peut être vue comme une section partielle du S^{n-1} -fibré ξ_0 qui prolonge X .

On choisit de manière analogue une section globale de $Y_{\mathbf{R}}$ de ξ' qui prolonge Y (vue comme section partielle de ξ' via l'injection $S^{m-1} \hookrightarrow \mathbf{R}^m$ dans les fibres).

Considérons le fibré produit $\xi \times \xi'$. Les sections $X_{\mathbf{R}} : B \rightarrow E$ et $Y_{\mathbf{R}} : B' \rightarrow E'$ induisent naturellement une section globale

$$X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}} : B \times B' \rightarrow E \times E'.$$

Si σ est une cellule de B et si τ est une cellule de B' alors la section $X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}}$ restreinte à $\sigma \times \tau$ définit l'application :

$$\begin{aligned} f_{\sigma \times \tau} : \sigma \times \tau &\rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \\ (x, y) &\mapsto (X_{\mathbf{R}}^{\sigma}(x), Y_{\mathbf{R}}^{\tau}(y)). \end{aligned}$$

Quitte à homotoper $X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}}$, on renormalise lorsque c'est possible. Ainsi, par construction, $X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}}$ induit une section $X \times Y$ du S^{n+m-1} -fibré $(\xi \times \xi')_0$ au-dessus de $L \times B' \cup B \times L'$.

Théorème 2.4.2. *La classe d'Euler relative $e(\xi \times \xi', X \times Y)$, appartenant à $H^{n+m}(B \times B', B \times L' \cup L \times B'; \mathbf{Z})$, vérifie l'égalité suivante :*

$$e(\xi \times \xi', X \times Y) = e(\xi, X) \times e(\xi', Y).$$

Remarque 2.4.3. Soient $X'_{\mathbf{R}}$ et $Y'_{\mathbf{R}}$ d'autres sections globales de ξ et de ξ' respectivement, construites comme précédemment. Elles induisent une section $X' \times Y'$ de $(\xi \times \xi')_0$ au-dessus de $B \times L' \cup L \times B'$. Alors les sections $X' \times Y'$ et $X \times Y$ sont homotopes relativement à $L \times L'$ et

$$e(\xi \times \xi', X' \times Y') = e(\xi \times \xi', X \times Y).$$

Preuve : Par construction, pour toute p -cellule σ de B et toute q -cellule τ de B' telles que $p + q \leq n + m - 1$, l'application $f_{\sigma \times \tau}$ est à valeurs dans S^{n+m-1} (quitte à être renormalisée). Aussi, la section $X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}}$ induit une section $S_{X \times Y}$ du S^{n+m-1} -fibré $(\xi \times \xi')_0$ qui prolonge $X \times Y$ à $(B \times B')^{n+m-1}$.

Comme dans le paragraphe 2.2, on peut lui associer un cocycle $\mathbf{c}(\xi \times \xi', S_{X \times Y})$ défini par :

$$\mathbf{c}(\xi \times \xi', S_{X \times Y})(\sigma \times \tau) = [f_{\partial(\sigma \times \tau)}] \in \pi_{n+m-1}(S^{n+m-1}) \simeq \mathbf{Z}$$

- où σ est une p -cellule de $B \setminus L$, τ est une q -cellule de $B' \setminus L'$ avec $p + q = n + m$,
- où $f_{\partial(\sigma \times \tau)}$ est la restriction de l'application $f_{\sigma \times \tau}$ au bord de la $n + m$ -cellule,
- et où $[f_{\partial(\sigma \times \tau)}]$ est la classe d'homotopie de l'application $f_{\partial(\sigma \times \tau)}$ vue comme une application de la sphère S^{n+m-1} dans elle-même.

Par définition, la classe de cohomologie de $\mathbf{c}(\xi \times \xi', S_{X \times Y})$ est la classe d'Euler relative $e(\xi \times \xi', X \times Y)$.

Si $p \neq n$, alors, par construction, $f_{\sigma \times \tau}$ est à valeurs dans S^{n+m-1} et la classe d'homotopie $[f_{\partial(\sigma \times \tau)}]$ est nulle.

Supposons maintenant que $p = n$ et notons n_{σ} (resp. n_{τ}) l'entier correspondant à la classe d'homotopie $[X_{\mathbf{R}}^{\sigma}] \in \pi_{n-1}(S^{n-1})$ (resp. $[Y_{\mathbf{R}}^{\tau}] \in \pi_{m-1}(S^{m-1})$) via l'identification canonique de $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ (resp. $\pi_{m-1}(S^{m-1})$) avec \mathbf{Z} :

$$\langle e(\xi, X), \sigma \rangle = n_{\sigma} \quad \text{et} \quad \langle e(\xi', Y), \tau \rangle = n_{\tau}.$$

Fait : $[f_{\partial(\sigma \times \tau)}] = n_{\sigma} \cdot n_{\tau}$.

En effet, si n_{σ} est nul, alors $X_{\mathbf{R}}^{\sigma}$ a valeurs dans S^{n-1} et $f_{\sigma \times \tau}$ a valeurs dans S^{n+m-1} . Il en est de même si n_{τ} est nul.

Si n_{σ} et n_{τ} sont non nuls, alors on peut supposer que l'application $X_{\mathbf{R}}^{\sigma} : \sigma \rightarrow \mathbf{R}^n$ (resp. $Y_{\mathbf{R}}^{\tau} : \tau \rightarrow \mathbf{R}^m$) est non nulle en dehors de $|n_{\sigma}|$ (resp.

$|n_\tau|$) singularités distinctes chacune d'indice $\epsilon_\sigma = \frac{n_\sigma}{|n_\sigma|}$ (resp. $\epsilon_\tau = \frac{n_\tau}{|n_\tau|}$). Par définition, $f_{\sigma \times \tau}$ est non singulier en dehors de $|n_\sigma| \cdot |n_\tau|$ points.

Il ne nous reste plus qu'à calculer l'indice de chaque singularité. Pour cela, il nous suffit de nous restreindre au cas où $|n_\sigma| \cdot |n_\tau| = 1$. Dans ce cas, en utilisant le plongement canonique de S^{n+m-1} dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, l'application $f_{\partial(\sigma \times \tau)}$ est homotope à l'application

$$\begin{aligned} S^{n+m-1} &\rightarrow S^{n+m-1} \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &\mapsto (\epsilon_\sigma x_1, \dots, x_n, \epsilon_\tau y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

car l'orientation dans la fibre $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ de $\xi \times \xi'$ est induite par la structure produit. Par conséquent, en identifiant canoniquement $\pi_{n+m-1}(S^{n+m-1})$ avec \mathbf{Z} , on obtient

$$[f_{\partial(\sigma \times \tau)}] = \epsilon_\sigma \epsilon_\tau,$$

et en général $[f_{\partial(\sigma \times \tau)}] = n_\sigma \cdot n_\tau$. Ainsi $e(\xi \times \xi', X \times Y) = e(\xi, X) \times e(\xi', Y)$. □

Nous avons un résultat analogue dans le cas de fibrés vectoriels complexes :

Corollaire 2.4.4. *Soient $\xi : E \rightarrow B$ et $\xi' : E' \rightarrow B'$ deux fibrés vectoriels complexes de rang n et m , et de groupe $SU(n)$ et $SU(m)$ respectivement. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} des sections des fibrés en sphères associés ξ_0 et ξ'_0 au-dessus de sous-complexes $L \subset B$ et $L' \subset B'$ respectivement. On peut alors construire par le procédé précédent une section $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ du $S^{2n+2m-1}$ -fibré $(\xi \times \xi')_0$ au-dessus de $L \times B' \cup B \times L'$ (bien définie à homotopie relative à $L \times L'$). Nous avons alors l'égalité suivante :*

$$c_{n+m}(\xi \times \xi', \mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = c_n(\xi, \mathbf{X}) \times c_m(\xi', \mathbf{Y}) \in H^{2n+2m}(B \times B', L \times B' \cup B \times L'; \mathbf{Z}).$$

2.4.3 Classe caractéristique relative et somme de Whitney

Soient $\xi : E \rightarrow B$ et $\xi' : E' \rightarrow B$ deux fibrés vectoriels réels orientés de rang n et m respectivement au-dessus du même CW -complexe fini B . Rappelons que la somme de Whitney est le fibré vectoriel induit par le fibré produit $\xi \times \xi'$ et l'application diagonale $d : B \rightarrow B \times B$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E(\xi \oplus \xi') & \longrightarrow & E \times E' \\ \xi \oplus \xi' \downarrow & & \downarrow \xi \times \xi' \\ B & \xrightarrow{d} & B \times B \end{array}$$

où $E(\xi \oplus \xi')$ est défini par $\{(x, x') \in E \times E' / \xi(x) = \xi'(x')\}$. Ce diagramme induit naturellement une application de fibrés en sphères $(\xi \oplus \xi')_0 \rightarrow (\xi \times \xi')_0$.

Soient X et Y deux sections des fibrés en sphère ξ_0 et ξ'_0 au-dessus de sous-complexes $L \subset B$ et $L' \subset B$ respectivement. On considère alors une section $X \times Y$ du fibré $(\xi \times \xi')_0$ définie comme précédemment sur $L \times B \cup B \times L'$. Elle induit une section $X \oplus Y := d^*(X \times Y)$ du fibré en sphère $(\xi \oplus \xi')_0$ au-dessus de $L \cup L'$.

Théorème 2.4.5. *La classe d'Euler $e(\xi \oplus \xi', X \oplus Y)$ vérifie l'égalité suivante :*

$$e(\xi \oplus \xi', X \oplus Y) = e(\xi, X) \cup e(\xi', Y) \in H^{n+m}(B, L \cup L'; \mathbf{Z})$$

où $e(\xi, X) \cup e(\xi', Y)$ est le cup produit relatif des classes d'Euler relatives $e(\xi, X)$ et $e(\xi', Y)$.

Remarquons que $X \oplus Y$ est bien définie à homotopie relative à $L \cap L'$ près.

Preuve : Par functorialité,

$$\begin{aligned} e(\xi \oplus \xi', X \oplus Y) &= e(\xi \oplus \xi', d^*(X \times Y)) \\ &= d^*(e(\xi \times \xi', X \times Y)) \\ &= d^*(e(\xi, X) \times e(\xi', Y)) \\ &= e(\xi, X) \cup e(\xi', Y). \end{aligned}$$

La dernière égalité provient directement de la définition du cup produit relatif.

□

Nous obtenons de nouveau une propriété analogue pour les fibrés vectoriels complexes :

Corollaire 2.4.6. *Soient $\xi : E \rightarrow B$ et $\xi' : E' \rightarrow B$ deux fibrés vectoriels complexes de rang n et m et de groupe $SU(n)$ et $SU(m)$ respectivement. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} des sections des fibrés en sphère associés ξ_0 et ξ'_0 au-dessus de sous-complexes L et L' de B respectivement. On peut construire par le procédé précédent une section $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$ du $S^{2n+2m-1}$ -fibré $(\xi \oplus \xi')_0$ au-dessus de $L \cup L'$,*

$$c_{n+m}(\xi \oplus \xi', \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}) = c_n(\xi, \mathbf{X}) \cup c_m(\xi', \mathbf{Y}) \in H^{2n+2m}(B, L \cup L'; \mathbf{Z}).$$

2.5 Fibré complexifié et classes caractéristiques relatives

Dans le cas absolu, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.5.1 ([MS] cor 15.8). Soit $\xi : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel orienté de rang $2n$ et soit $\xi_{\mathbf{C}} : E_{\mathbf{C}} \rightarrow B$ son fibré complexifié. Alors

$$c_{2n}(\xi_{\mathbf{C}}) = (-1)^n e(\xi) \cup e(\xi)$$

où $c_{2n}(\xi_{\mathbf{C}})$ est la $2n^{\text{ième}}$ -classe de Chern absolue de $\xi_{\mathbf{C}}$ et où $e(\xi)$ est la classe d'Euler absolue du fibré ξ .

Le but de cette section est de rapprocher cette proposition du théorème 2.4.4 précédent afin d'en tirer une version relative. Pour cela, nous avons besoin de préciser ce que l'on entend par «section complexifiée».

2.5.1 Fibré complexifié et section complexifiée

Considérons un fibré réel orienté $\xi : E \rightarrow B$ de rang n au-dessus d'un CW -complexe fini B ainsi que son fibré complexifié associé $\xi_{\mathbf{C}} : E_{\mathbf{C}} \rightarrow B$ défini précédemment.

Soit s une section de ξ au-dessus d'un sous-complexe L de B : il s'agit donc d'une application $s : L \rightarrow E$ qui vérifie $\xi \circ s = id_L$. Via l'injection canonique $\mathbf{R}^n \hookrightarrow \mathbf{C}^n$ dans les fibres, s induit une section naturelle de $\xi_{\mathbf{C}}$ au-dessus de L appelée *section complexifiée de s* et notée $s_{\mathbf{C}}$. Remarquons que $s_{\mathbf{C}}$ est l'application obtenue par composition de s avec l'inclusion canonique $E \hookrightarrow E_{\mathbf{C}}$. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{C}^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E & \xrightarrow{\quad} & E_{\mathbf{C}} \\
 \swarrow s & & \swarrow s_{\mathbf{C}} \\
 & L & \\
 \searrow \xi & \downarrow & \searrow \xi_{\mathbf{C}} \\
 & B &
 \end{array}$$

Pendant, nous pouvons associer à s d'autres sections de $\xi_{\mathbf{C}}$ au-dessus de L via l'injection dans les fibres

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{\iota} \mathbf{C}^n \xrightarrow{\times \lambda} \mathbf{C}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

où λ est un scalaire non nul de \mathbf{C} . Notons alors $\lambda s_{\mathbf{C}}$ la section de $\xi_{\mathbf{C}}$ au-dessus de L ainsi induite de s . L'autre section préférée qui va nous intéresser

est $(1 + i)s_{\mathbf{C}}$.

Considérons maintenant une section X du fibré en sphères associé à ξ au-dessus de L . Via l'injection canonique $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ dans les fibres, elle peut être vue comme section de ξ au-dessus de L . On peut alors définir les sections partielles $X_{\mathbf{C}}$ et $(1 + i)X_{\mathbf{C}}$ de $\xi_{\mathbf{C}}$. Quitte à les renormaliser en les homotopant⁴, on peut les voir comme des sections partielles du S^{2n-1} -fibré $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ au-dessus de L : on les notera encore $X_{\mathbf{C}}$ et $(1 + i)X_{\mathbf{C}}$ respectivement.

Concernant $X_{\mathbf{C}}$, elle est en fait obtenue par l'inclusion canonique $S^{n-1} \hookrightarrow S^{2n-1}$ dans les fibres. On parlera encore de *section complexifiée de X* .

Puisque $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ est connexe par arc, les sections $X_{\mathbf{C}}$ et $(1 + i)X_{\mathbf{C}}$ du S^{2n-1} -fibré $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ au-dessus de L sont homotopes. Elles auront donc même obstruction primaire i.e. même $n^{\text{ième}}$ -classe de Chern relative :

$$c_n(\xi_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{C}}) = c_n(\xi_{\mathbf{C}}, (1 + i)X_{\mathbf{C}}) \in H^{2n}(B, L; \mathbf{Z}).$$

L'objet du paragraphe 2.5 est donc de comprendre cette $n^{\text{ième}}$ -classe de Chern relative.

Remarque 2.5.2. On peut généraliser la notion de «section complexifiée» : si α est une section partielle de $\mathbf{P}(\xi)$ au-dessus de L , la *section complexifiée de α* , notée $\alpha_{\mathbf{C}}$, sera la section de $\mathbf{P}(\xi)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de L induite de α via l'injection canonique $SO(n) \hookrightarrow SU(n)$ dans les fibres.

2.5.2 Fibré complexe, réalifié et obstruction primaire

Avant de généraliser la proposition 2.5.1, rappelons la notion de réalifié d'un fibré complexe qui permet de revenir à un fibré vectoriel réel. Soit $\eta : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel complexe de rang n et de groupe $U(n)$. On peut alors définir un $2n$ -fibré vectoriel réel $\eta_{\mathbf{R}}$ en oubliant la structure complexe dans la fibre et en posant

$$x_{2i-1} = \operatorname{Re}(z_i), \quad x_{2i} = \operatorname{Im}(z_i) \quad i = 1, \dots, n.$$

Le fibré $\eta_{\mathbf{R}}$ est appelé *réalifié de η* .

Les fibrés en sphères associés à η et à $\eta_{\mathbf{R}}$ sont canoniquement isomorphes via l'identité dans la fibre. Donc, si \mathbf{s} est une section de η_0 au-dessus d'un sous-complexe L de B , elle peut être naturellement vue comme section de $(\eta_{\mathbf{R}})_0$ au-dessus de L et

$$c_n(\eta, \mathbf{s}) = e(\eta_{\mathbf{R}}, \mathbf{s}) \in H^{2n}(B, L, \mathbf{Z})$$

⁴ on considèrera alors $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ au lieu du scalaire $1 + i$, mais on préférera garder la notation $(1 + i)X_{\mathbf{C}}$ qui est moins lourde et laisse l'intuition du «dédoublément» dans les fibres.

2.5.3 Section complexifiée et classes caractéristiques relatives

Revenons au cas d'un fibré vectoriel réel orienté $\xi : E \rightarrow B$ de rang n . Nous pouvons alors définir son complexifié $\xi_{\mathbf{C}}$ ainsi que le réalifié $(\xi_{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$ associé. Rappelons le lemme suivant :

Lemme 2.5.3 ([MS], lemme 15.7). *Le fibré $(\xi_{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}$ est isomorphe à $\xi \oplus \xi$ par un isomorphisme qui préserve l'orientation ou la renverse suivant que $\frac{n(n-1)}{2}$ soit pair ou impair respectivement.*

La preuve de ce lemme provient principalement du changement de base de \mathbf{R}^{2n} envoyant la base canonique (e_1, \dots, e_{2n}) sur $(e_1, e_{n+1}, \dots, e_n, e_{2n})$. Ainsi une section s du S^{2n-1} -fibré $((\xi_{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}})_0$ au-dessus d'un sous-complexe L de B définit une section s' du fibré en sphère $(\xi \oplus \xi)_0$ par changement de base.

Nous pouvons à présent démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.5.4. *Soit ξ un fibré vectoriel réel orienté de rang $2k$ et soit X une section du fibré en sphères ξ_0 au-dessus d'un sous-complexe L de B . La $2k^{\text{ième}}$ -classe de Chern relative au S^{4k-1} -fibré $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ et à la section complexifiée $X_{\mathbf{C}}$ vérifie*

$$c_{2k}(\xi_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{C}}) = (-1)^k e(\xi, X) \cup e(\xi, X) \in H^{4k}(B, L; \mathbf{Z})$$

Preuve : Nous avons vu que la section X induisait deux sections préférées $X_{\mathbf{C}}$ et $(1+i)X_{\mathbf{C}}$ de $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ au-dessus de L . De plus, ces dernières sont homotopes donc

$$c_{2k}(\xi_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{C}}) = c_{2k}(\xi_{\mathbf{C}}, (1+i)X_{\mathbf{C}}).$$

La section $(1+i)X_{\mathbf{C}}$ induit naturellement la section $X \oplus X$ du fibré en sphères associé à la somme de Whitney $\xi \oplus \xi$ au-dessus de L . Via le théorème 2.4.5 et le lemme 2.5.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} c_{2k}(\xi_{\mathbf{C}}, (1+i)X_{\mathbf{C}}) &= e((\xi_{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}}, (1+i)X_{\mathbf{C}}) \\ &= (-1)^{\frac{2k(2k-1)}{2}} e(\xi \oplus \xi, X \oplus X) \\ &= (-1)^k e(\xi, X) \cup e(\xi, X). \end{aligned}$$

Par conséquent, $c_{2k}(\xi_{\mathbf{C}}, X_{\mathbf{C}}) = (-1)^k e(\xi, X) \cup e(\xi, X)$.

□

Remarque 2.5.5. Soient X et Y deux sections partielles de ξ_0 au-dessus d'un sous-complexe L de B . Alors la section $X \oplus Y$ du fibré en sphères $(\xi \oplus \xi)_0$ définit une section du fibré en sphères associé à $\xi_{\mathbf{C}}$ au-dessus de L ,

que l'on peut noter $X + iY$, et qui est induite par l'application suivante dans les fibres :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{2k} \times \mathbf{R}^{2k} &\rightarrow \mathbf{C}^{2k} \\ (x, y) &\mapsto x + iy.\end{aligned}$$

Alors l'obstruction primaire à prolonger $X + iY$ à toute la base B vérifie :

$$c_{2k}(\xi_{\mathbf{C}}, X + iY) = (-1)^k e(\xi, X) \cup e(\xi, Y).$$

Troisième partie

Cocycle d'intersection revisité et «cœur» de l'invariant de Casson

Chapitre 3

Théorème du cocycle d'intersection revisité

Dans [At], Atiyah définit une extension centrale du groupe de difféotopies \mathcal{M}_g grâce aux 2-framings des mapping tores

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow 1 \quad (\star)$$

où $\widehat{\mathcal{M}}_g$ est l'ensemble des couples $(\varphi, \alpha_\varphi)$ avec φ élément de \mathcal{M}_g et α_φ 2-framing sur le mapping tore T_φ . Rappelons que la notion de 2-framing est équivalente à la notion de SU -parallélisation.

Puisque les mapping tores sont des 3-variétés orientées sans bord, le σ -invariant définit une rétraction préférée de cette extension centrale. Atiyah définit alors une section ensembliste préférée de (\star) , appelée *section d'Atiyah*, et il montre que le cocycle associé est 3τ où τ est le cocycle de Meyer.

Via la surjection canonique $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g$, on obtient une extension centrale de $\mathcal{M}_{g,1}$

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow 1 \quad (\star')$$

Nous avons encore une rétraction préférée donnée par le σ -invariant et une section préférée d'Atiyah de cocycle associé 3τ (où τ est vu comme 2-cocycle de $\mathcal{M}_{g,1}$, cf [Mo1]).

Rappelons que l'homomorphisme d de Morita est défini comme différence entre le cocycle 3τ et un cocycle d'intersection (cf paragraphe 1.5.4). D'après le paragraphe 1.4, on peut espérer que ce cocycle d'intersection se décrit géométriquement comme cocycle associé à une certaine section de (\star') . La motivation de Morita dans [Mo1] est de pouvoir obtenir par ce biais une description géométrique du « cœur » de l'invariant de Casson.

Dans ce chapitre, nous revisiterons les résultats de Morita énoncés dans [Mo1] : tout d'abord nous redéfinirons les extensions centrales (\star) et (\star') en termes de SU -parallélisations ainsi que leurs sections d'Atiyah. Puis, pour

tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$, nous construirons une SU -parallélisation dite de Morita du mapping tore associé : elle dépendra d'un champ de vecteurs non singulier X sur la surface $\Sigma_{g,1}$. Cette construction définira une section de Morita \hat{m}_X de (\star') . L'objet principal de ce chapitre est de revisiter le théorème du cocycle d'intersection de Morita en termes de théorie d'obstruction et d'auto-intersection de surface d'obstruction : ce théorème vise à montrer que le cocycle associé à la section de Morita \hat{m}_X pour X est un cocycle d'intersection au sens du paragraphe 1.5.4.

Enfin, nous verrons que le « cœur » de l'invariant de Casson peut être prolongé au sous-groupe $\mathcal{V}_{g,1}$ de $\mathcal{M}_{g,1}$ formé par les difféomorphismes qui agissent trivialement sur les champs de vecteurs non singuliers sur la surface. De plus, cet homomorphisme étendu se décrit géométriquement comme le σ -invariant de la SU -parallélisation de Morita.

Convention : Dans ce chapitre, toutes les variétés considérées seront réelles connexes compactes orientées avec ou sans bord. On supposera que leur espace tangent est muni d'une structure riemannienne et que leur fibré tangent complexifié est muni d'une structure hermitienne et d'une forme volume. Si M est une telle variété, on notera $\mathbf{T}M$ son espace tangent et μ_M sa classe fondamentale. De plus, on fixe un plongement de $\Sigma_{g,1}$ dans Σ_g .

3.1 Extension centrale des groupes de difféotopies

Dans un premier temps, nous allons revenir à l'extension centrale construite par Atiyah dans [At] : nous l'exprimerons ici en termes de SU -parallélisations plutôt qu'en termes de 2-framing.

3.1.1 Extension centrale du groupe de difféotopies de \mathcal{M}_g

Soit φ un élément de \mathcal{M}_g . Rappelons que son mapping tore est défini en utilisant une convention non usuelle :

$$T_\varphi = I \times \Sigma_g /_{(0,x) \sim (1,\varphi(x))}.$$

On peut également le construire à partir du mapping cylindre C_φ comme dans la figure 3.1.

Par construction, T_φ est une 3-variété orientée sans bord. On peut donc considérer l'ensemble $\mathcal{P}_{su}(T_\varphi)$ de ses SU -parallélisations (cf paragraphe 1.6) : il s'agit d'un espace affine au-dessus de $H^3(T_\varphi; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Rappelons que le σ -invariant définit une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(T_\varphi)$ et \mathbf{Z} :

$$\sigma : \mathcal{P}_{su}(T_\varphi) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Nous pouvons définir l'ensemble $\widehat{\mathcal{M}}_g$ comme suit :

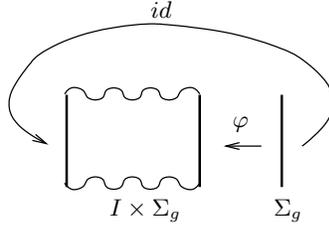


FIG. 3.1 – Mapping tore T_φ pour $\varphi \in \mathcal{M}_g$.

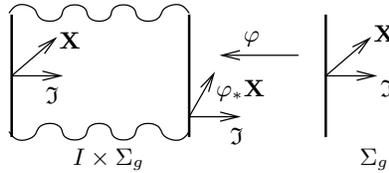
Définition 3.1.1. Notons $\widehat{\mathcal{M}}_g$ l'ensemble des couples $(\varphi, \alpha_\varphi)$ où φ est un élément de \mathcal{M}_g et α_φ est une SU -parallélisation du mapping tore associé T_φ :

$$\widehat{\mathcal{M}}_g = \{(\varphi, \alpha_\varphi) / \varphi \in \mathcal{M}_g, \alpha_\varphi \in \mathcal{P}_{su}(T_\varphi)\}.$$

Remarquons que $\widehat{\mathcal{M}}_g$ est naturellement en bijection avec $\mathcal{M}_g \times \mathbf{Z}$ via le σ -invariant.

A présent, nous voulons définir une loi de groupe sur $\widehat{\mathcal{M}}_g$. Pour cela, nous allons nous ramener aux SU -parallélisations des mapping cylindres relatives au bord. En effet, à homotopie près, il existe une unique section du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}(T_\varphi)\mathbf{C})$ au-dessus de $\{0\} \times \Sigma_g$: considérons celle¹ induite par la direction préférée de I et un champ de vecteurs complexe non singulier \mathbf{X} sur Σ_g (dans cet ordre). Par identification, elle définit une section $\tilde{\mathbf{X}}_\varphi$ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}(C_\varphi)\mathbf{C})$ au-dessus de ∂C_φ induite :

- par le champ de vecteurs normal entrant et \mathbf{X} sur $\{0\} \times \Sigma_g$,
- et par le champ de vecteurs normal sortant et $\varphi_*\mathbf{X}$ sur $\{1\} \times \Sigma_g$.



où \mathcal{J} est le champ de vecteurs induit par la direction préférée de I

FIG. 3.2 – Section partielle $\tilde{\mathbf{X}}_\varphi$ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}(C_\varphi)\mathbf{C})$.

¹Deux vecteurs suffisent pour définir un champ de repères : le troisième est induit des deux premiers grâce à la structure hermitienne et à la forme volume complexe du fibré tangent complexifié.

Par conséquent, toute SU -parallélisation de T_φ admet un représentant qui prolonge $\tilde{\mathbf{X}}_\varphi$. Ainsi, définir une SU -parallélisation de T_φ équivaut à définir une SU -parallélisation de C_φ relative à $\tilde{\mathbf{X}}_\varphi$.

Remarque 3.1.2. Rappelons qu'à homotopie près, il existe un unique champ de vecteurs complexe non singulier sur la surface Σ_g . En prenant la direction préférée de I comme premier vecteur, définir un champ de repères complexe sur C_φ qui prolonge $\tilde{\mathbf{X}}_\varphi$ revient à définir une homotopie entre \mathbf{X} et $\varphi_*\mathbf{X}$.

Loi sur $\widehat{\mathcal{M}}_g$.

Soient $(\varphi, \alpha_\varphi)$ et (ψ, α_ψ) deux éléments de $\widehat{\mathcal{M}}_g$. Choisissons des représentants de α_φ et α_ψ donnés par des trivialisations complexes $\alpha_{\varphi, \mathbf{X}}$ et $\alpha_{\psi, \mathbf{X}}$ de C_φ et C_ψ qui prolongent $\tilde{\mathbf{X}}_\varphi$ et $\tilde{\mathbf{X}}_\psi$ respectivement. Le recollement des mapping cylindres trivialisés $(C_\varphi, \alpha_{\varphi, \mathbf{X}})$ et $(C_\psi, \alpha_{\psi, \mathbf{X}})$ définit une trivialisations complexe de $C_{\varphi\psi}$ qui prolonge $\tilde{\mathbf{X}}_{\varphi\psi}$. Notons $\alpha_{\varphi.\alpha_\psi}$ la SU -parallélisation du mapping tore $T_{\varphi\psi}$ qu'elle définit.

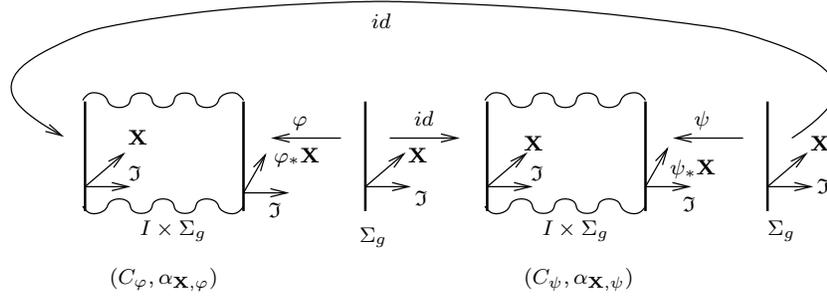


FIG. 3.3 – Loi de composition interne sur $\widehat{\mathcal{M}}_g$.

Remarque 3.1.3. Le difféomorphisme $\Phi := id_I \times \varphi$ agit sur le mapping cylindre C_ψ ainsi que sur la trivialisations complexe α_ψ . Recoller les mapping cylindres $(C_\varphi, \alpha_{\varphi, \mathbf{X}})$ et $(C_\psi, \alpha_{\psi, \mathbf{X}})$ revient donc à recoller $(C_\varphi, \alpha_{\varphi, \mathbf{X}})$ avec $(\Phi(C_\psi), \Phi_*\alpha_{\psi, \mathbf{X}})$: on voit alors mieux apparaître le mapping cylindre $C_{\varphi\psi}$.

Cette construction définit une loi interne sur $\widehat{\mathcal{M}}_g$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}_g \times \widehat{\mathcal{M}}_g &\rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_g \\ (\varphi, \alpha_\varphi), (\psi, \alpha_\psi) &\mapsto (\varphi\psi, \alpha_{\varphi.\alpha_\psi}) \end{aligned}$$

En fait, elle munit $\widehat{\mathcal{M}}_g$ d'une structure de groupe :

- Le *neutre* est l'application identité munie de la classe d'homotopie de la trivialisations complexe de $T_{id} = S^1 \times \Sigma_g$ constante le long de S^1 et induite par la direction préférée de S^1 et un champ de vecteurs complexe non singulier \mathbf{X} sur Σ_g . Remarquons que cette SU -parallélisation

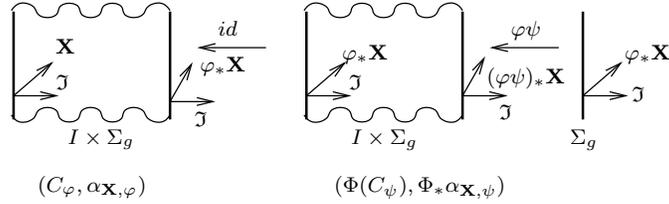


FIG. 3.4 – Description analogue du recollement des mapping cylindres $(C_\varphi, \alpha_{\varphi, \mathbf{X}})$ et $(C_\psi, \alpha_{\psi, \mathbf{X}})$.

a un σ -invariant nul : il s'agit donc de la SU -parallélisation d'Atiyah du mapping tore T_{id} .

- Soit $(\varphi, \alpha_\varphi)$ un élément de $\widehat{\mathcal{M}}_g$. Le mapping tore $T_{\varphi^{-1}}$ est difféomorphe au mapping tore T_φ muni de l'orientation inverse noté $-T_\varphi$. L'inverse de $(\varphi, \alpha_\varphi)$ est alors donné par $(\varphi^{-1}, -\alpha_\varphi)$ où $-\alpha_\varphi$ est la SU -parallélisation de $T_{\varphi^{-1}} \simeq -T_\varphi$ obtenu de α_φ en inversant «l'orientation du premier vecteur» dans les fibres (cf figure 3.5).

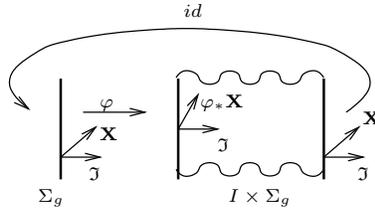


FIG. 3.5 – Inverse d'un élément $(\varphi, \alpha_\varphi)$.

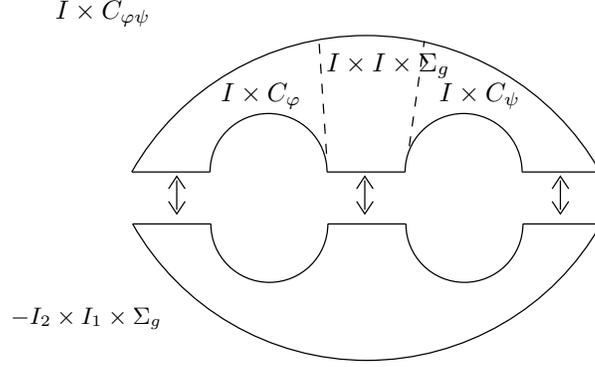
Remarque 3.1.4. Cette loi de groupe peut également être définie comme suit : considérons la 4-variété $\mathcal{M}_{\varphi, \psi}$ définie en 1.5.4 (on peut la voir construite comme dans la figure 3.6).

Alors $\alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi$ peut être définie comme l'unique SU -parallélisation du mapping tore $T_{\varphi\psi}$ telle que la SU -parallélisation $\alpha_\varphi + \alpha_\psi - \alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi$ définie sur $\partial\mathcal{M}_{\varphi, \psi} = T_\varphi \cup T_\psi \cup -T_{\varphi\psi}$ se prolonge² à $\mathcal{M}_{\varphi, \psi}$ (cf [At], [Mo1]).

Le groupe $\widehat{\mathcal{M}}_g$ est en bijection avec $\mathcal{M}_g \times \mathbf{Z}$ mais n'est a priori pas isomorphe au groupe $\mathcal{M}_g \times \mathbf{Z}$ muni de la loi de groupe induite par la structure produit. Cependant, nous obtenons une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow 1 \quad (\star).$$

²Il suffit de considérer sur la 4-variété $I \times C_{\varphi\psi}$ la section du $SU(3)$ -fibré $I \times \mathbf{T}(C_{\varphi\psi})_{\mathbb{C}}$ constante le long de I et induite par le recollement des trivialisations complexes $\alpha_{\varphi, \mathbf{X}}$ sur C_φ et $\alpha_{\psi, \mathbf{X}}$ sur C_ψ . Sur la 4-variété $I_2 \times I_1 \times \Sigma_{g,1}$, on prendra la section du $SU(3)$ -fibré $I_2 \times \mathbf{T}(I_1 \times \Sigma_{g,1})$ induite par la direction préférée de I_1 et \mathbf{X} .



on recolle le long de copies de $I \times \Sigma_g$

FIG. 3.6 – Construction de la 4-variété $\mathcal{M}_{\varphi, \psi}$.

L'inclusion $\mathbf{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_g$ est définie en associant à l'entier n l'unique SU -parallélisation du mapping tore T_{id} de σ -invariant égal à n . Le groupe \mathbf{Z} , vu comme sous-groupe de $\widehat{\mathcal{M}}_g$, est central (cf [At]) ainsi (\star) est une extension centrale³ de $\widehat{\mathcal{M}}_g$ par \mathbf{Z} .

3.1.2 Section d'Atiyah et cocycle de Meyer

Le σ -invariant définit une rétraction préférée de l'extension centrale (\star) . Il induit naturellement une section ensembliste préférée :

Définition 3.1.5. On appelle *section d'Atiyah* la section de (\star) définie en associant à tout élément φ de \mathcal{M}_g la SU -parallélisation d'Atiyah $\alpha_{\varphi, 0}$ du mapping tore T_{φ} , i.e. l'unique SU -parallélisation de T_{φ} ayant σ -invariant nul :

$$\begin{aligned} s_0 : \mathcal{M}_g &\rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_g \\ \varphi &\mapsto (\varphi, \alpha_{\varphi, 0}). \end{aligned}$$

Théorème 3.1.6 ([At]). Le 2-cocycle c_0 associé à la section d'Atiyah s_0 est égal à 3τ où τ est le cocycle de Meyer : il vérifie

$$c_0(\varphi, \psi) = 3 \operatorname{sign} \mathcal{M}_{\varphi, \psi} =: 3\tau(\varphi, \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{M}_g.$$

Le groupe $\widehat{\mathcal{M}}_g$ est isomorphe au groupe $\mathcal{M}_g \times \mathbf{Z}$ muni de la loi suivante : pour tout (φ, n) et (ψ, m) dans $\mathcal{M}_g \times \mathbf{Z}$,

$$(\varphi, n) \cdot (\psi, m) = (\varphi\psi, n + m + 3 \operatorname{sign} \mathcal{M}_{\varphi, \psi}).$$

³Rappelons que l'action de $\widehat{\mathcal{M}}_g$ sur \mathbf{Z} considérée est l'action triviale.

Idée de la preuve : Soient $(\varphi, \alpha_\varphi)$ et (ψ, α_ψ) dans $\widehat{\mathcal{M}}_g$. Considérons des 4-variétés orientées W_φ et W_ψ de bord T_φ et T_ψ respectivement. Notons W' la 4-variété obtenue par recollement de W_φ , W_ψ et $-\mathcal{M}_{\varphi,\psi}$ le long des mapping tores T_φ et T_ψ . Alors W' est une 4-variété orientée de bord $T_{\varphi\psi}$. Par conséquent,

$$\sigma(T_{\varphi\psi}, \alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi) = \langle p_1(\mathbf{T}W', \alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi), \mu_{W'} \rangle - 3 \text{sign } W'.$$

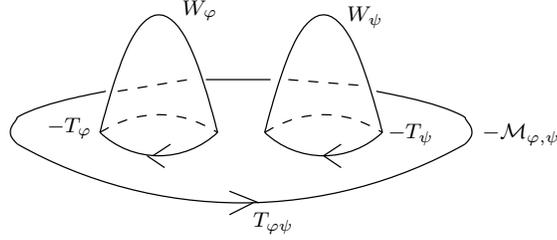


FIG. 3.7 – Construction de W' .

D'après la remarque 3.1.4, l'obstruction à prolonger $\alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi$ à W' se concentre sur W_φ et W_ψ :

$$\langle p_1(\mathbf{T}W', \alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi), \mu_{W'} \rangle = \langle p_1(\mathbf{T}W_\varphi, \alpha_\varphi), \mu_{W_\varphi} \rangle + \langle p_1(\mathbf{T}W_\psi, \alpha_\psi), \mu_{W_\psi} \rangle.$$

D'après le théorème d'additivité de signature de Novikov,

$$\text{sign } W' = \text{sign } W_\varphi + \text{sign } W_\psi - \text{sign } \mathcal{M}_{\varphi,\psi}.$$

Par conséquent,

$$\sigma(T_{\varphi\psi}, \alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi) = \sigma(T_\varphi, \alpha_\varphi) + \sigma(T_\psi, \alpha_\psi) + 3 \text{sign } \mathcal{M}_{\varphi,\psi}.$$

□

3.1.3 Extension centrale du groupe de difféotopies de $\mathcal{M}_{g,1}$

Via la surjection canonique $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_g$ définie en 1.1, l'extension centrale (\star) de \mathcal{M}_g induit une extension centrale de $\mathcal{M}_{g,1}$:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow 1 \quad (\star').$$

Le groupe $\widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$ est alors défini comme l'ensemble des couples $(\varphi, \alpha_\varphi)$ où

- φ est un élément de $\mathcal{M}_{g,1}$,
- α_φ est une SU-parallélisation du mapping tore $T_{\overline{\varphi}}$,
- et où $\overline{\varphi}$ est l'extension de φ à Σ_g par l'identité sur le disque.

La loi de groupe sur $\widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \times \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} &\rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \\ ((\varphi, \alpha_\varphi), (\psi, \alpha_\psi)) &\mapsto (\varphi\psi, \alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi) \end{aligned}$$

où $\alpha_\varphi \cdot \alpha_\psi$ est la SU -parallélisation de $T_{\overline{\varphi\psi}}$ définie comme précédemment.

Remarquons que le σ -invariant définit également une rétraction préférée de (\star') . On peut alors définir de la même manière une section d'Atiyah de (\star') : son cocycle associé sera également égal à 3τ où le cocycle de Meyer τ est vu comme cocycle de $\mathcal{M}_{g,1}$.

Par la suite, pour tout φ dans $\mathcal{M}_{g,1}$, on notera $T_\varphi := T_{\overline{\varphi}}$ et on parlera de mapping tore associé à φ .

3.2 SU -parallélisation de Morita des mapping tores

Le but de ce paragraphe est de construire pour tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$ une SU -parallélisation préférée de T_φ , autre que la SU -parallélisation d'Atiyah, afin de définir une nouvelle section de (\star') . Mais avant cela, étudions l'ensemble $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ des classes d'homotopie des champs de vecteurs tangents non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ ainsi que l'action du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$.

3.2.1 Etude des classes d'homotopies des champs de vecteurs tangents non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$

On supposera par la suite que tous les champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ seront fixés sur le bord $\partial\Sigma_{g,1}$.

Notons $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ l'ensemble des classes d'homotopie des champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$. Il est muni d'une structure d'espace affine au-dessus de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ de la manière suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$. Ils définissent une section $S_{X,Y}$ du S^1 -fibré $(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ induite par

- X sur $\{0\} \times \Sigma_{g,1}$,
- Y sur $\{1\} \times \Sigma_{g,1}$,
- et $X|_{\partial\Sigma_{g,1}} = Y|_{\partial\Sigma_{g,1}}$ sur $I \times \partial\Sigma_{g,1}$.

L'obstruction à prolonger $S_{X,Y}$ à tout $I \times \Sigma_{g,1}$ est une classe d'Euler relative

$$e(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}, S_{X,Y}) \in H^2(I \times \Sigma_{g,1}, \partial(I \times \Sigma_{g,1}); \mathbf{Z}).$$

On lui associe un élément $e_{X,Y}$ de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ défini via les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{c}
 e(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}, S_{X,Y}) \in H^2(I \times \Sigma_{g,1}, \partial(I \times \Sigma_{g,1}); \mathbf{Z}) \\
 \downarrow \text{Dualité de Poincaré} \\
 DP(e(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}, S_{X,Y})) \in H_1(I \times \Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\
 \downarrow p^* \\
 e_{X,Y} \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})
 \end{array}$$

où p est la projection canonique $p : I \times \Sigma_{g,1} \rightarrow \{0\} \times \Sigma_{g,1}$.

On peut interpréter $e_{X,Y}$ comme le *défaut d'homotopie entre X et Y* . Géométriquement, cela signifie que l'on peut prolonger $S_{X,Y}$ en dehors d'un voisinage d'une «courbe d'obstruction» $K_{X,Y}$ que l'on peut supposer plongée dans une copie de $\Sigma_{g,1}$ à l'intérieur de $I \times \Sigma_{g,1}$: vue dans cette copie, la courbe $K_{X,Y}$ aura alors pour classe d'homologie $e_{X,Y}$.

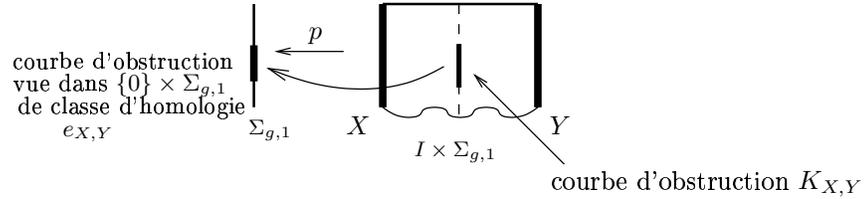


FIG. 3.8 – Interprétation géométrique de $e_{X,Y}$.

Remarque 3.2.1. Soit $\mathcal{V} = \bigcup_{p \in K_{X,Y}} D_p$ un voisinage tubulaire orienté de $K_{X,Y}$ dans $I \times \Sigma_{g,1}$ où D_p est un petit disque centré en $p \in K_{X,Y}$ et normal à $K_{X,Y}$. Alors, par définition de l'obstruction et par dualité de Poincaré, nous avons l'égalité suivante :

$$\langle e(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}, S_{X,Y}), [D_p] \rangle = e_{X,Y} \cdot [D_p] = 1 \quad \forall p \in K_{X,Y}.$$

Lemme 3.2.2. Soient X, Y et Z 3 champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$. Alors

$$e_{X,Z} = e_{X,Y} + e_{Y,Z} \quad \text{et} \quad e_{X,Y} = -e_{Y,X}.$$

Preuve : Géométriquement, on peut le voir de la manière suivante : considérons la section $S_{X,Z}$ du S^1 -fibré $(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$. Notons $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ les sous-intervalles de I .

Soit $K_{X,Y}$ une courbe d'obstruction simple fermée de $\Sigma_{g,1}$ vue comme plongée dans $\{\frac{1}{4}\} \times \Sigma_{g,1} \subset I_1 \times \Sigma_{g,1}$. Le champ de vecteurs tangent $S_{X,Y}$, vu comme section du S^1 -fibré $(I_1 \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus de $\partial(I_1 \times \Sigma_{g,1})$, se prolonge en dehors d'un voisinage régulier de $K_{X,Y}$: notons $s_{X,Y}$ une telle extension.

De même, on peut considérer la section $S_{Y,Z}$ du S^1 -fibré $(I_2 \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus de $\partial(I_2 \times \Sigma_{g,1})$ ainsi qu'une courbe d'obstruction $K_{Y,Z}$ pour cette section, plongée dans $\{\frac{3}{4}\} \times \Sigma_{g,1} \subset I_2 \times \Sigma_{g,1}$. Notons $s_{Y,Z}$ une extension de $S_{Y,Z}$ en dehors d'un voisinage régulier de $K_{Y,Z}$.

Les sections partielles $s_{X,Y}$ et $s_{Y,Z}$ se recollent, définissant ainsi une section du S^1 -fibré $(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ en dehors des courbes $K_{X,Y}$ et $K_{Y,Z}$ qui prolonge $S_{X,Z}$. Par concentration d'obstruction, on obtient l'égalité suivante :

$$e_{X,Z} = e_{X,Y} + e_{Y,Z}$$

Remarquons que la section $S_{X,X}$ se prolonge naturellement à $I \times \Sigma_{g,1}$ en une section globale constante par rapport à I donc $e_{X,X} = 0$. De l'égalité précédente, on en déduit que $e_{X,Y} = -e_{Y,X}$.

□

Remarquons que le défaut d'homotopie $e_{X,Y}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de X et de celle de Y (et de l'orientation de $\Sigma_{g,1}$). D'après [Ste], on munit $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ d'une structure de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ -espace affine en posant

$$[Y] = [X] + e_{X,Y}$$

où $[X]$ et $[Y]$ sont les classes de X et Y dans $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$.

3.2.2 Action du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$

Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ agit sur les champs de vecteurs de la façon suivante :

Définition 3.2.3. Soit X un champ de vecteurs non singulier sur $\Sigma_{g,1}$ et soit φ un élément de $\mathcal{M}_{g,1}$, le champ de vecteurs non singulier φ_*X est défini par

$$(\varphi_*X)_x = \mathbf{T}_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(X_{\varphi^{-1}(x)}) \quad \forall x \in \Sigma_{g,1}.$$

Cette action est covariante : pour tous éléments φ et ψ de $\mathcal{M}_{g,1}$, et pour tout champ de vecteurs non singulier X sur $\Sigma_{g,1}$,

$$(\varphi\psi)_*X = \varphi_*(\psi_*X).$$

Lemme 3.2.4. *Soit φ un élément de $\mathcal{M}_{g,1}$ et soient X et Y deux champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$. Alors*

$$e_{\varphi_*X, \varphi_*Y} = \varphi_*(e_{X,Y}) \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}).$$

Preuve : Considérons la section $S_{X,Y}$ du S^1 -fibré $(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$. Notons Φ le difféomorphisme de $I \times \Sigma_{g,1}$ défini par $id_I \times \varphi$: il agit sur la section $S_{X,Y}$ et $\Phi_*S_{X,Y} = S_{\varphi_*X, \varphi_*Y}$.

Par functorialité, $e(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}, \Phi_*S_{X,Y}) = \Phi^*(e(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}, S_{X,Y}))$ et

$$e_{\varphi_*X, \varphi_*Y} = \varphi_*(e_{X,Y}) \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}).$$

□

On remarque alors que l'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ préserve les classes d'homotopie des champs de vecteurs non singuliers de $\Sigma_{g,1}$. Par conséquent, le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ agit sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ et cette action est affine :

$$\varphi_*Y = \varphi_*X + \varphi_*(e_{X,Y}), \quad \forall X, Y \in \text{Vect}(\Sigma_{g,1}), \forall \varphi \in \mathcal{M}_{g,1}.$$

3.2.3 Défaut d'homotopie et homomorphisme croisé

Replaçons l'étude de l'action du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ dans le contexte qui nous intéresse : les SU -parallélisations des mapping tores. Rappelons que, pour un champ de vecteurs complexe non singulier \mathbf{X} sur Σ_g et pour $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$, définir une SU -parallélisation du mapping tore $T_{\bar{\varphi}}$ revient à définir une SU -parallélisation du mapping cylindre $C_{\bar{\varphi}}$ relative à une trivialisations complexe que l'on avait notée $\tilde{\mathbf{X}}_{\bar{\varphi}}$, où $\bar{\varphi}$ est l'extension de φ à Σ_g par l'identité sur le disque.

Si \mathbf{X} est le complexifié d'un champ de vecteurs réels non singulier X sur $\Sigma_{g,1}$, alors $\tilde{\mathbf{X}}_{\bar{\varphi}}$ est le complexifié d'un champ de repères réels sur $\partial I \times \Sigma_{g,1} \subset C_{\bar{\varphi}}$ donné par la direction préférée de I et X sur $\{0\} \times \Sigma_{g,1}$ et la direction préférée de I et φ_*X sur $\{1\} \times \Sigma_{g,1}$.

Remarquons que, si X et φ_*X sont homotopes, alors une telle homotopie, stabilisée à gauche par la direction préférée de I , définit une trivialisations naturelle de $\mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1})$. Pour obtenir une SO ou SU -parallélisation de $T_{\bar{\varphi}}$, il suffit de déterminer une trivialisations réelle ou complexe de $\mathbf{T}(I \times D^2)$.

On se ramène alors à la question « X et φ_*X sont-ils homotopes ?» .

Dans tout le reste du chapitre, on fixe X un champ de vecteurs tangent non singulier sur $\Sigma_{g,1}$.

Pour tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$, notons $k_X(\varphi) := e_{X, \varphi_*X} \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. D'après le paragraphe 3.2.1, $k_X(\varphi)$ mesure le défaut d'homotopie entre X et φ_*X . Nous obtenons ainsi une application

$$k_X : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$$

qui ne dépend que de la classe d'homotopie de X .

La structure de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ -espace affine de $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ ainsi que l'action affine de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ induisent la proposition suivante

Proposition 3.2.5. *L'application k_X est un homomorphisme croisé pour la loi naturelle de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$:*

$$k_X(\varphi\psi) = k_X(\varphi) + \varphi_*k_X(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{M}_{g,1}.$$

De plus, sa classe de cohomologie⁴ dans $H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$ ne dépend pas du choix de X .

Preuve :

- Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_{g,1}$. En appliquant les lemmes des deux paragraphes précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} k_X(\varphi\psi) &= e_{X,(\varphi\psi)_*X} \\ &= e_{X,\varphi_*X} + e_{\varphi_*X,(\varphi\psi)_*X} \\ &= e_{X,\varphi_*X} + e_{\varphi_*X,\varphi_*(\psi_*X)} \\ &= e_{X,\varphi_*X} + \varphi_*(e_{X,\psi_*X}) \\ &= k_X(\varphi) + \varphi_*(k_X(\psi)). \end{aligned}$$

D'après le paragraphe 1.4, k_X est un homomorphisme croisé : c'est donc un 1-cocycle de $C^1(\mathcal{M}_{g,1}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$.

D'après la remarque 3.1.3, géométriquement, on peut le voir dans la figure 3.9.

- Si Y est un autre champ de vecteurs tangent non singulier sur $\Sigma_{g,1}$ alors

$$\begin{aligned} k_Y(\varphi) &= e_{Y,\varphi_*Y} \\ &= e_{Y,X} + e_{X,\varphi_*X} + e_{\varphi_*X,\varphi_*Y} \\ &= k_X(\varphi) + e_{Y,X} - \varphi_*e_{Y,X} \end{aligned}$$

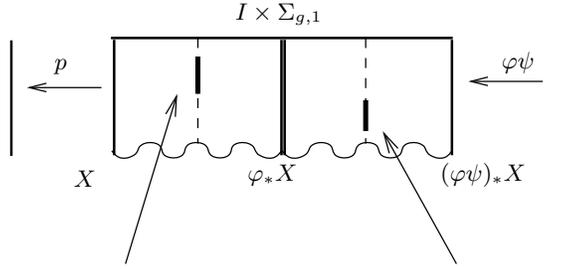
Par conséquent, les 1-cocycles k_X et k_Y diffèrent par un cobord : ils ont donc même classe de cohomologie dans $H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$.

□

Remarque 3.2.6. Dans [Mo1], Morita utilise l'homomorphisme croisé de Furuta : il définit une section explicite du fibré vectoriel $I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}$ en posant :

$$\begin{aligned} \tau_X : I \times \Sigma_{g,1} &\rightarrow I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1} \\ (p, t) &\mapsto (t, (1-t)X_p + t(\varphi_*X)_p). \end{aligned}$$

⁴D'après le paragraphe 1.4, l'homomorphisme croisé k_X est alors un 1-cocycle de $C^1(\mathcal{M}_{g,1}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$.



Courbe d'obstruction $K_{X,\varphi}$
pour la section S_{X,φ_*X}
plongée dans une copie de surface.

Courbe $\varphi(K_{X,\psi})$ plongée dans une copie
de surface où $K_{X,\psi}$ est une courbe d'obstruction
pour la section S_{X,ψ_*X} .

FIG. 3.9 – L'application k_X est un homomorphisme croisé : interprétation géométrique.

Il étudie alors l'intersection de la section nulle Z_0 avec la section τ_X mise en position transverse. En supposant que les vecteurs X_p et $(\varphi^*X)_p$ ont même longueur pour tout point p de $\Sigma_{g,1}$, cette intersection est une courbe simple fermée plongée dans $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$. L'homomorphisme croisé de Furuta $\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ est défini en considérant la classe d'homologie de cette courbe d'obstruction dans $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Ici, la définition de k_X utilise la théorie d'obstruction et les propriétés affines de $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ mais, par construction, ces deux homomorphismes croisés coïncident.

Nous avons alors la proposition 4.1 de [Mo1] :

Proposition 3.2.7 (prop 4.1 [Mo1]). *La classe de cohomologie de k_X est un générateur du groupe infini cyclique $H^1(\mathcal{M}_{g,1}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$.*

On peut alors définir un cocycle d'intersection au sens du paragraphe 1.5.4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{g,1} \times \mathcal{M}_{g,1} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto -k_X(\varphi) \cdot \varphi_* k_X(\psi). \end{aligned}$$

Néanmoins, cette définition ne permet pas d'interpréter géométriquement ce cocycle en termes de SU -parallélisations ni de le relier à l'extension centrale (\star') . L'idée est alors de construire une SU -parallélisation des mapping tores en exploitant ce défaut d'homotopie.

3.2.4 SU -parallélisation de Morita

Soit $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$. Rappelons que le mapping tore associé T_φ peut être obtenu à partir du recollement d'un $I \times D^2$ au mapping cylindre $C_\varphi = I \times \Sigma_{g,1} \cup_{(1,\varphi(x)) \sim x} \Sigma_{g,1}$ comme indiqué dans la figure 3.10.

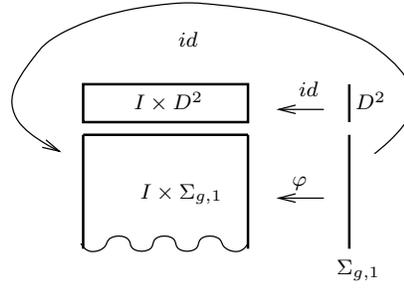


FIG. 3.10 – Construction du mapping tore T_φ à partir du mapping cylindre C_φ .

Nous allons construire une autre SU -parallélisation préférée du mapping tore T_φ en deux étapes.

SU -parallélisation relative de Morita de C_φ pour X .

Considérons la 3-variété $I \times \Sigma_{g,1}$ munie de l'orientation produit. Son fibré tangent admet une décomposition en somme de Whitney canonique induite par la structure produit :

$$\mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1}) = (\mathbf{T}I \times \Sigma_{g,1}) \oplus (I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}).$$

Par la suite, nous noterons $\nu := \mathbf{T}I \times \Sigma_{g,1}$ et $\xi := I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}$. Remarquons que la direction préférée de I définit un champ de vecteurs non singulier \mathfrak{J} sur $I \times \Sigma_{g,1}$ qui trivialise le fibré ν .

Remarque 3.2.8. Le fibré ξ est trivialisable car $\mathbf{T}\Sigma_{g,1}$ l'est. Le champ de vecteurs X permet de fixer une trivialisation préférée ie d'identifier l'espace total de ξ à $I \times \Sigma_{g,1} \times \mathbf{R}^2$ et, par conséquent, d'identifier l'espace total du S^1 -fibré ξ_0 à $I \times \Sigma_{g,1} \times S^1$. Une section de ξ_0 pourra alors être vue comme une application de $I \times \Sigma_{g,1}$ dans S^1 .

Considérons de nouveau la section S_{X,φ_*X} de ξ_0 définie au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ par

- X sur $\{0\} \times \Sigma_{g,1}$,
- φ_*X sur $\{1\} \times \Sigma_{g,1}$,
- et $X|_{\partial\Sigma_{g,1}}$ sur $I \times \partial\Sigma_{g,1}$.

Soit $K_{X,\varphi}$ une courbe d'obstruction plongée dans $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$ de classe d'homologie $k_X(\varphi)$ dans cette copie de surface. Alors la section S_{X,φ_*X} se prolonge en dehors d'un voisinage régulier orienté $\mathcal{V}_{X,\varphi}$ de $K_{X,\varphi}$; notons s_{X,φ_*X} une telle extension. Elle peut être vue comme une application

$$s_{X,\varphi_*X} : (I \times \Sigma_{g,1}) \setminus \text{int}(\mathcal{V}_{X,\varphi}) \rightarrow S^1.$$

Le voisinage régulier $\mathcal{V}_{X,\varphi}$ est muni de l'orientation induite de $I \times \Sigma_{g,1}$ et peut être défini comme $\bigcup_{p \in K_{X,\varphi}} D_p$ où D_p est un petit disque de centre $p \in K_{X,\varphi}$ et normal à $K_{X,\varphi}$. D'après la remarque 3.2.1, on peut homotoper $s_{X,\varphi * X}$ de sorte que, pour tout point p de $K_{X,\varphi}$, il existe un unique point q_p de ∂D_p tel que $s_{X,\varphi * X}(q_p) = 1 \in S^1$. On identifie $\mathcal{V}_{X,\varphi}$ à $K_{X,\varphi} \times D^2$ en envoyant q_p sur $(p, 1) \in K_{X,\varphi} \times D^2$.

Quitte à homotoper encore une fois la section $s_{X,\varphi * X}$, elle est définie le long de $\mathcal{V}_{X,\varphi} \simeq K_{X,\varphi} \times D^2$ par l'application

$$\begin{aligned} s &:= s_{X,\varphi * X}|_{\mathcal{V}_{X,\varphi}} : K_{X,\varphi} \times \partial D^2 \rightarrow S^1 \\ (p, v) &\mapsto v. \end{aligned}$$

Considérons le plongement usuel $S^1 \hookrightarrow S^3$. La section complexifiée $(s_{X,\varphi * X})_{\mathbf{C}}$ est donc l'application $s_{X,\varphi * X}$ composée avec ce plongement. Notons $s_{\mathbf{C}}$ l'application obtenue de s de la même façon.

$$s_{\mathbf{C}} : K_{X,\varphi} \times \partial D^2 \xrightarrow{s} S^1 \hookrightarrow S^3.$$

Restreinte à $\{p_0\} \times \partial D^2$, où p_0 est un point de $K_{X,\varphi}$, l'application $s_{\mathbf{C}}$ définit un lacet de S^3 . Puisque le groupe fondamental de S^3 est trivial, ce lacet est nul homotope. On peut donc prolonger $s_{\mathbf{C}}$ à $\{p_0\} \times D^2$ puis à $K_{X,\varphi} \times D^2$ en une section constante le long de $K_{X,\varphi}$. Nous obtenons ainsi une section $\mathbf{s}_{X,\varphi}$ du S^3 -fibré $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ qui prolonge $(s_{X,\varphi * X})_{\mathbf{C}}$ et qui est bien définie à homotopie relative à $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ près.

Remarque 3.2.9. Soit d un disque plongé dans S^3 de bord S^1 . La section $\mathbf{s}_{X,\varphi}$ peut être décrite comme une extension de $(s_{X,\varphi * X})_{\mathbf{C}}$ en une application

$$\mathbf{s}_{X,\varphi} : I \times \Sigma_{g,1} \rightarrow d \subset S^3.$$

Ceci caractérise complètement la classe d'homotopie relative à $I \times \Sigma_{g,1} \setminus \text{int}(\mathcal{V}_{X,\varphi})$ de la section $\mathbf{s}_{X,\varphi}$. Remarquons que celle-ci ne dépend pas non plus du choix du disque d . Par contre, nous verrons par la suite que cela ne suffit pas pour caractériser la classe d'homotopie relative à $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ de $\mathbf{s}_{X,\varphi}$.

Insistons sur le fait que la classe d'homotopie relative à $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ de $\mathbf{s}_{X,\varphi}$ est entièrement déterminée par les conditions suivantes :

- $\mathbf{s}_{X,\varphi}$ est le complexifié d'un champ de vecteurs réels non singulier en dehors de $\mathcal{V}_{X,\varphi}$ qui prolonge $S_{X,\varphi * X}$,
- et $\mathbf{s}_{X,\varphi}$ restreinte au voisinage $\mathcal{V}_{X,\varphi} \simeq K_{X,\varphi} \times D^2$ est constante le long de $K_{X,\varphi}$.

On peut maintenant se demander dans quelle mesure la classe d'homotopie relative de $\mathbf{s}_{X,\varphi}$ dépend du choix de la courbe d'obstruction.

Proposition 3.2.10. *Le classe d'homotopie relative au bord de la section $s_{X,\varphi}$ ne dépend pas du choix de la courbe d'obstruction $K_{X,\varphi}$ à condition qu'elle soit plongée dans une copie de $\Sigma_{g,1}$.*

Preuve : Soient K_0 et K_1 deux courbes d'obstruction de la section S_{X,φ_*X} plongées dans $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$. Pour $i = 0, 1$, notons \mathcal{V}_i un voisinage régulier de K_i dans $I \times \Sigma_{g,1}$. Comme précédemment, nous pouvons identifier \mathcal{V}_i à $K_i \times D^2$. Soit s_i une section⁵ du S^3 -fibré $(\xi_{\mathbb{C}})_0$ définie comme étant en dehors de \mathcal{V}_i le complexifié d'un champ de vecteurs non singulier réel qui prolonge S_{X,φ_*X} et qui, le long de $\mathcal{V}_i \simeq K_i \times D^2$, est constante par rapport à K_i .

Les courbes K_0 et K_1 ont même classe d'homologie $k_X(\varphi)$ dans $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$. On peut donc supposer qu'elles ne diffèrent que par des mouvements locaux, appelés *mouvements en bandes*, vivant dans des disques plongés dans $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$: cf figure 3.11.

Premier mouvement :



Deuxième mouvement : enlever une petite composante connexe qui borde un disque sur la surface



FIG. 3.11 – Mouvements en bande

Considérons la 4-variété $I' \times I \times \Sigma_{g,1}$ ainsi que les courbes K_0 et K_1 plongées dans $\{0\} \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$ et $\{1\} \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$ respectivement.

La section S_{X,φ_*X} de ξ_0 au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ induit une section du S^1 -fibré $(I' \times \xi)_0$ au-dessus de $I' \times \partial(I \times \Sigma_{g,1})$ constante le long de I' que nous noterons encore S_{X,φ_*X} . Nous pouvons alors prolonger S_{X,φ_*X} en une section s au-dessus de $\partial(I' \times I \times \Sigma_{g,1}) \setminus \text{int}(\mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1)$. Par concentration d'obstruction, les deux classes d'Euler du fibré $(I' \times \xi)_0$ relatives aux sections S_{X,φ_*X} et s respectivement peuvent être représentées par la même surface d'obstruction W plongée dans $I' \times I \times \Sigma_{g,1}$ de bord $K_1 \cup (-K_0)$.

En notant $M := I \times \Sigma_{g,1}$, nous avons alors le diagramme commutatif

⁵les sections s_i sont donc obtenues de la construction précédente en prenant K_i comme courbe d'obstruction, $i = 0, 1$.

suisant, pour $i = 0, 1$, induit par les inclusions canoniques :

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(\{i\} \times M, \{i\} \times \partial M; \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\cong} & H^2(I' \times M, I' \times \partial M; \mathbf{Z}) & & \\
\downarrow DP \simeq & & \downarrow DP \simeq & & \\
H_1(\{i\} \times M; \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\cong} & H_2(I' \times M, \partial I' \times M; \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\cong} & H_1(I', \partial I'; \mathbf{Z}) \otimes H_1(M; \mathbf{Z})
\end{array}$$

qui se traduit au niveau des classes d'Euler relatives par :

$$\begin{array}{ccc}
e(\xi, S_{X, \varphi_* X}) & \leftarrow & e(I' \times \xi, S_{X, \varphi_* X}) \\
\downarrow DP & & \downarrow DP \\
p_*^{-1} k_X(\varphi) & \leftarrow & [W] \leftarrow \mu_I \otimes p_*^{-1} k_X(\varphi)
\end{array}$$

Construisons la surface W : elle sera plongée dans $I' \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$ et est de la forme produit $I \times K$ en dehors des mouvements locaux.

Premier mouvement en bande : Notons d le disque de la surface dans lequel va vivre le mouvement local. Rajoutons une bande B dans $I \times d$ que l'on recolle à la surface produit et qui n'intersecte pas le reste de W comme dans la figure 3.12.

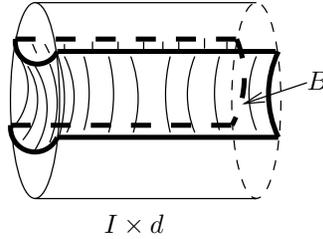


FIG. 3.12 – Premier mouvement en bande : rajout d'une bande B .

Deuxième mouvement en bande : Supposons que K_i ($i = 0$ ou 1) contienne une petite composante connexe qui borde un disque d dans $\{i\} \times I \times \Sigma_{g,1}$. Nous pouvons alors ajouter un disque D plongé dans $I \times d$ de bord ∂d qui n'intersecte pas le reste de W comme dans la figure 3.13.

Nous obtenons ainsi une surface W de bord $K_1 \cup -K_0$ bien définie à difféomorphisme près. Par construction, la surface W a la classe d'holonomie voulue à savoir $\mu_I \times p_*^{-1} k_X(\varphi)$ vue dans $H_1(I', \partial I'; \mathbf{Z}) \otimes H_1(I \times \Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Nous pouvons donc prolonger $S_{X, \varphi_* X}$ en une section s' en dehors d'un voisinage $\mathcal{W} = \bigcup_{p \in W} D_p$ de W où D_p est un petit disque centré en $p \in W$ et normal à W .

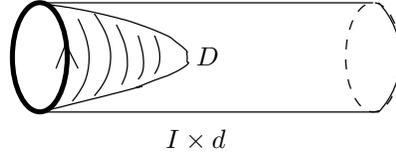


FIG. 3.13 – Deuxième band move : rajout d'un disque D .

Par construction et par théorie d'obstruction, nous avons alors la propriété suivante :

$$\langle e(I' \times \xi, S_{X, \varphi_* X}), [D_p] \rangle = [W] \cdot [D_p] = 1 \quad \forall p \in W.$$

Remarquons que l'on peut trivialisier le S^1 -fibré $(I' \times \xi)_0$ grâce à la section constante le long de $I' \times I$ et induite de X . La section s' peut donc être vue comme une application

$$s' : I' \times I \times \Sigma_{g,1} \setminus \text{int}(W) \rightarrow S^1.$$

De la même manière que dans la construction précédente, on peut identifier W à $W \times D^2$ en envoyant, pour tout point p de W , le point de q_p de ∂D_p vérifiant $s'(q_p) = 1$ sur $(p, 1)$ car, quitte à homotoper s' , le point q_p est unique. Quitte à homotoper s' encore une fois, cette section est définie le long du bord de W par :

$$\begin{aligned} W \times \partial D^2 &\rightarrow S^1 \\ (p, v) &\mapsto v. \end{aligned}$$

Considérons le plongement canonique $S^1 \hookrightarrow S^3$ et soit d un disque plongé dans S^3 de bord S^1 . On peut alors prolonger s' en une application $\tilde{s} : I' \times I \times \Sigma_{g,1} \rightarrow d \subset S^3$ qui, restreinte à $W \simeq W \times D^2$, est constante le long de W . Par conséquent, l'application \tilde{s} définit une section du S^3 -fibré $(I' \times \xi_{\mathbb{C}})_0$ qui prolonge s et qui est homotope à \mathbf{s}_0 sur $\{0\} \times \Sigma_{g,1}$ et à \mathbf{s}_1 sur $\{1\} \times \Sigma_{g,1}$. Ainsi, l'application \tilde{s} définit une homotopie entre \mathbf{s}_0 et \mathbf{s}_1 relative au bord.

□

Stabilisée à gauche par le champ de vecteurs⁶ non singulier \mathfrak{J} , la section $\mathbf{s}_{X, \varphi}$ induit une trivialisatation complexe $\alpha_{X, \varphi}$ de $I \times \Sigma_{g,1}$ et, par conséquent, du mapping cylindre C_φ . Sa classe d'homotopie relative au bord est appelée *SU-parallélisation relative de Morita de C_φ pour X* et sera notée $m_X(C_\varphi)$.

⁶Rappelons que \mathfrak{J} est le champ de vecteurs induit par la direction préférée de I .

***SU*-parallélisation de Morita du mapping tore T_φ pour X .**

Nous avons une trivialisaton complexe $\alpha_{X,\varphi}$ de C_φ : il nous reste à définir une trivialisaton complexe qui convient sur $I \times D^2$ pour obtenir une trivialisaton complexe de T_φ .

Lors du recollement de C_φ avec $I \times D^2$, la section $\mathbf{s}_{X,\varphi}$, stabilisée par le champ de vecteurs \mathfrak{J} , induit une section du $SO(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times D^2))$ au-dessus de $I \times \partial D^2$ constante le long de I .

Le champ de vecteurs X fait $2 - 2g$ tours le long de ∂D^2 par rapport au champ de vecteurs tangent qui s'étend au disque. Ainsi, le lacet de $SO(3)$ obtenu sur $\{0\} \times \partial D^2$ est nul homotope : on le prolonge d'abord à $\{0\} \times D^2$ puis à $I \times D^2$ en une trivialisaton $\mathbf{s}_{I \times D^2}$ de $\mathbf{T}(I \times D^2)$ constante le long de I .

Le recollement de $(C_\varphi, \alpha_{X,\varphi})$ avec $(I \times D^2, (\mathbf{s}_{I \times D^2})\mathbf{C})$ définit une trivialisaton complexe $\beta_X(\overline{\varphi})$ de $C_{\overline{\varphi}}$.

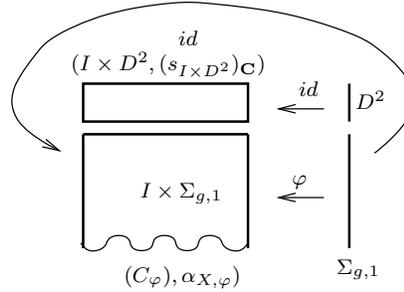


FIG. 3.14 – Recollement de $(C_\varphi, \alpha_{X,\varphi})$ avec $(I \times D^2, (\mathbf{s}_{I \times D^2})\mathbf{C})$.

D'après le paragraphe 3.1.1, par recollement, on obtient une trivialisaton du mapping tore T_φ . Sa classe d'homotopie, notée $m_X(T_\varphi)$, est bien définie : on l'appellera *SU-parallélisation de Morita de T_φ pour X* . Elle ne dépend que de X et de φ .

Cette construction définit une section de l'extension centrale

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow 1 \quad (\star') :$$

Définition 3.2.11. On appelle *section de Morita pour X* la section \hat{m}_X de (\star') qui associe, à tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$, la *SU*-parallélisation de Morita pour X du mapping tore T_φ :

$$\begin{aligned} \hat{m}_X : \mathcal{M}_{g,1} &\rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \\ \varphi &\rightarrow (\varphi, m_X(T_\varphi)). \end{aligned}$$

Remarque 3.2.12. Dans [Mo1], la *SU*-parallélisation de Morita des mapping tores est décrite d'un point de vue quelque peu différent et utilise plutôt

l'intuition des 2-framing : plutôt que de chercher à prolonger la section complexifiée $(S_{X,\varphi_*X})_{\mathbb{C}}$, Morita cherche à prolonger la section $(1+i)(S_{X,\varphi_*X})_{\mathbb{C}}$.

3.2.5 Théorème du cocycle d'intersection revisité

Le but de ce paragraphe est de comprendre géométriquement le cocycle c_X associé à la section de Morita pour X . Il mesure le défaut d'homomorphisme de cette section.

Soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{M}_{g,1}$. Comparons les SU -parallélisations $m_X(T_{\varphi\psi})$ et $m_X(T_{\varphi}).m_X(T_{\psi})$ du mapping tore $T_{\varphi\psi}$ pour avoir une intuition de ce défaut. La première est le complexifié d'un champ de repères réels en dehors d'une courbe d'obstruction $K_{X,\varphi\psi}$ plongée dans une copie de $\Sigma_{g,1}$ dont la classe d'homologie est $k_X(\varphi\psi)$ dans cette copie. La SU -parallélisation $m_X(T_{\varphi}).m_X(T_{\psi})$ de $T_{\varphi\psi}$ est le complexifié d'un champ de repères réels en dehors de deux courbes $K_{X,\varphi}$ et $\varphi(K_{X,\psi})$ plongées dans deux copies différentes de $\Sigma_{g,1}$, où $K_{X,\varphi}$ (resp. $K_{X,\psi}$) est une courbe d'obstruction pour $(T_{\varphi}, m_X(T_{\varphi}))$ (resp. pour $(T_{\psi}, (m_X(T_{\psi})))$) : cf figure 3.9. Ces courbes auront pour classe d'homologie respectivement $k_X(\varphi)$ et $\varphi_*(k_X(\psi))$ dans chacune des copies de la surface. Rappelons que k_X est un homomorphisme croisé donc $k_X(\varphi\psi) = k_X(\varphi) + \varphi_*k_X(\psi)$. La différence entre $m_X(T_{\varphi\psi})$ et $m_X(T_{\varphi}).m_X(T_{\psi})$ va apparaître quand on va pousser les courbes $K_{X,\varphi}$ et $\varphi(K_{X,\psi})$ dans une même copie de la surface et que ces courbes vont s'intersecter.

Théorème 3.2.13 (Théorème du cocycle d'intersection : thm 5.2 [Mo1]). *Le cocycle c_X associé à la section de Morita pour X vérifie, pour tous éléments φ et ψ de $\mathcal{M}_{g,1}$:*

$$c_X(\varphi, \psi) = -k_X(\varphi) \cdot \varphi_*k_X(\psi).$$

Preuve : Cette démonstration étant longue, nous allons la diviser en plusieurs étapes :

Position du problème : Le cocycle c_X associé à la section de Morita pour X mesure le défaut d'homomorphisme de cette section. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{M}_{g,1}$: $c_X(\varphi, \psi)$ est défini par

$$i(c_X(\varphi, \psi)) = \hat{m}_X(T_{\varphi}).\hat{m}_X(T_{\psi}).\hat{m}_X(T_{\varphi\psi})^{-1}$$

où i est l'inclusion $\mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$ définie paragraphe 3.1.1.

En d'autres termes, $c_X(\varphi, \psi)$ est le σ -invariant du mapping tore $T_{id} \simeq T_{\varphi.\psi.(\varphi\psi)^{-1}}$ muni de la SU -parallélisation $\alpha := m_X(T_{\varphi}).m_X(T_{\psi}).(-m_X(T_{\varphi\psi}))$ définie par la loi de groupe de $\widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$:

$$c_X(\varphi, \psi) = \sigma(T_{\varphi.\psi.(\varphi\psi)^{-1}}, \alpha).$$

Considérons des trivialisations complexes $\beta_X(\overline{\varphi})$ de $\mathbf{TC}_{\overline{\varphi}}$, $\beta_X(\overline{\psi})$ de $\mathbf{TC}_{\overline{\psi}}$, et $\beta_X(\overline{\varphi\psi})$ de $\mathbf{TC}_{\overline{\varphi\psi}}$ construites comme au paragraphe 3.2.4. La SU -parallélisation α est la classe d'homotopie de la trivialisations complexes de $T_{\varphi,\psi}(\varphi\psi)^{-1}$ définie dans la figure 3.15.

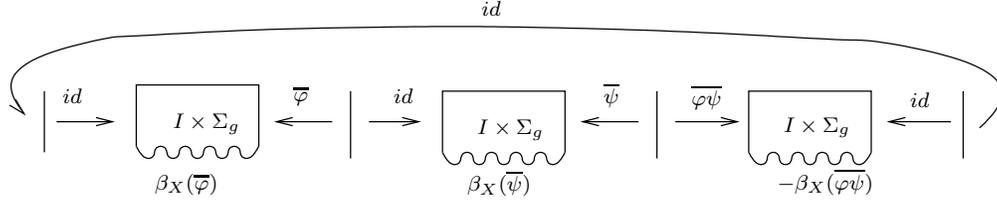


FIG. 3.15 – Description d'un représentant de la SU -parallélisation α .

Pour calculer ce σ -invariant, considérons la 4-variété $I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}$: son bord est difféomorphe au mapping tore $T_{\varphi,\psi}(\varphi\psi)^{-1}$.

Notons $\beta_X(\overline{\varphi}), \beta_X(\overline{\psi})$ la trivialisations complexes de $\mathbf{TC}_{\overline{\varphi\psi}}$ obtenue par le recollement de $(C_{\overline{\varphi}}, \beta_X(\overline{\varphi}))$ et $(C_{\overline{\psi}}, \beta_X(\overline{\psi}))$. Les trivialisations complexes $\beta_X(\overline{\varphi\psi})$ et $\beta_X(\overline{\varphi}), \beta_X(\overline{\psi})$ coïncident sur le bord du mapping cylindre. On peut donc définir une section β du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(I_0 \times \mathbf{TC}_{\overline{\varphi\psi}})_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\partial(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}})$ donnée par

- $\beta_X(\overline{\varphi\psi})$ sur $\{0\} \times C_{\overline{\varphi\psi}}$,
- $\beta_X(\overline{\varphi}), \beta_X(\overline{\psi})$ sur $\{1\} \times C_{\overline{\varphi\psi}}$,
- et $\beta_X(\overline{\varphi\psi})|_{\partial C_{\overline{\varphi\psi}}}$ sur $I_0 \times \partial C_{\overline{\varphi\psi}}$.

Remarquons que la section β définit un représentant de α . Soit β_{stab} la section du $SU(4)$ -fibré $\mathbf{PT}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}})_{\mathbf{C}}$ au-dessus du bord donnée par la section β stabilisée à gauche par la direction préférée de I_0 . Par définition du σ -invariant, nous avons l'égalité

$$c_X(\varphi, \psi) = \langle p_1(\mathbf{T}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}), \beta_{stab}), \mu_{I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}} \rangle - 3 \text{sign}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}).$$

La 4-variété $I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}$ est de signature nulle à cause de sa structure produit. Par conséquent, le calcul de c_X revient à un calcul d'obstruction primaire relative :

$$c_X(\varphi, \psi) = \langle p_1(\mathbf{T}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}), \beta_{stab}), \mu_{I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}} \rangle .$$

La direction préférée de I_0 définit un champ de vecteurs tangent réel non singulier sur $I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}$. Il induit une décomposition en somme de Whitney du fibré tangent de cette 4-variété :

$$\mathbf{T}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}) = (\mathbf{T}I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}) \oplus (I_0 \times \mathbf{TC}_{\overline{\varphi\psi}}).$$

Par functorialité des classes caractéristiques relatives, nous avons l'égalité des premières classes de Pontrjagin relatives :

$$p_1(\mathbf{T}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}), \beta_{stab}) = p_1(I_0 \times \mathbf{T}C_{\overline{\varphi\psi}}, \beta)$$

Ainsi, le problème d'obstruction primaire du $SU(4)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}))_{\mathbf{C}}$ peut se ramener à un calcul de première classe de Pontrjagin relative du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(I_0 \times \mathbf{T}C_{\overline{\varphi\psi}})_{\mathbf{C}}$:

$$c_X(\varphi, \psi) = \langle p_1(I_0 \times \mathbf{T}C_{\overline{\varphi\psi}}, \beta), \mu_{I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}} \rangle .$$

Ce problème est un calcul de deuxième classe de Chern relative d'un $SU(2)$ -fibré. Par construction, les trivialisations complexes $\beta_X(\overline{\varphi}) \cdot \beta_X(\overline{\psi})$ et $\beta_X(\overline{\varphi\psi})$ coïncident sur $I \times D^2$: elles sont données par le complexifié de la trivialisation $\mathbf{s}_{I \times D^2}$. Par conséquent, on peut prolonger partiellement la section β à $\partial(I_0 \times C_{\varphi\psi}) \cup I_0 \times I \times D^2$ en considérant sur $I_0 \times I \times D^2$ la section de $\mathbf{P}(I_0 \times \mathbf{T}(I \times D^2))_{\mathbf{C}}$ constante le long de I_0 et induite de $\mathbf{s}_{I \times D^2}$. Notons β' la restriction de cette extension à $\partial(I_0 \times I \times \Sigma_{g,1})$: on peut la voir comme une section partielle de $\mathbf{P}(I_0 \times \mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1}))_{\mathbf{C}}$. Par excision, nous avons l'égalité :

$$\langle p_1(I_0 \times \mathbf{T}C_{\overline{\varphi\psi}}, \beta), \mu_{I_0 \times C_{\overline{\varphi\psi}}} \rangle = \langle p_1(I_0 \times \mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1})), \beta' \rangle, \mu_{I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}} \rangle .$$

A présent, décrivons plus en détails la section β' : considérons des courbes $K_{X,\varphi}$, $K_{X,\psi}$ et $K_{X,\varphi\psi}$ plongées dans l'intérieur de $\Sigma_{g,1}$ de classe d'homologie $k_X(\varphi)$, $k_X(\psi)$ et $k_X(\varphi\psi)$ respectivement. Plongeons maintenant les courbes $K_{X,\varphi}$, $\varphi(K_{X,\psi})$ et $-K_{X,\varphi\psi}$ dans $\{1\} \times \{\frac{1}{4}\} \times \Sigma_{g,1}$, $\{1\} \times \{\frac{3}{4}\} \times \Sigma_{g,1}$ et $-\{0\} \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$ respectivement.

Soit s une section du S^1 -fibré $(I_0 \times \xi)_0$ donnée par

- X sur $(I_0 \times \{0\} \times \Sigma_{g,1}) \cup (I_0 \times I \times \partial\Sigma_{g,1})$,
- $(\varphi\psi)_* X$ sur $I_0 \times \{1\} \times \Sigma_{g,1}$,
- et $\varphi_* X$ sur $\{1\} \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$

et qui est définie sur $\partial(I_0 \times I \times \Sigma_{g,1})$ en dehors d'un voisinage régulier \mathcal{V} de l'entrelacs $\mathcal{K} = K_{X,\varphi} \cup \varphi(K_{X,\psi}) \cup -K_{X,\varphi\psi}$ (cf figure 3.16).

Comme précédemment, nous pouvons identifier \mathcal{V} à $\mathcal{K} \times D^2$. Notons \tilde{s} une section du S^3 -fibré $(I_0 \times \xi_{\mathbf{C}})_0$ au-dessus de $\partial(I_0 \times I \times \Sigma_{g,1})$ qui prolonge le complexifié de s en une section constante par rapport à \mathcal{K} le long de \mathcal{V} . La section β' est alors définie comme le stabilisé à gauche de \tilde{s} par la direction préférée de I .

Remarquons que la direction préférée de I définit un champ de vecteurs non singulier sur $I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}$, induisant une décomposition du fibré $I_0 \times \mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1})$ en somme de Whitney

$$I_0 \times \mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1}) = (I_0 \times \nu) \oplus (I_0 \times \xi).$$

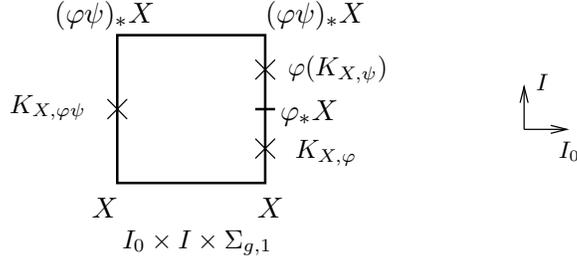


FIG. 3.16 – Description d’un représentant de la SU -parallélisation s .

Par functorialité,

$$\begin{aligned} p_1(I_0 \times \mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1}), \beta') &= p_1(I_0 \times \xi, \tilde{\mathbf{s}}) \\ &= -c_2(I_0 \times \xi_{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{s}}) \end{aligned}$$

Par conséquent, le calcul de $c_X(\varphi, \psi)$ est un calcul de deuxième classe de Chern relative d’un $SU(2)$ -fibré :

$$c_X(\varphi, \psi) = - \langle c_2(I_0 \times \xi_{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{s}}), \mu_{I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}} \rangle .$$

Le calcul de $c_X(\varphi, \psi)$ est un cup produit relatif de classes d’Euler relatives. Pour simplifier les notations, posons $\xi' := I_0 \times \xi$ et $Z := I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}$.

Rappelons que les S^3 -fibrés $(\xi'_{\mathbf{C}})_0$ et $(\xi' \oplus \xi')_0$ sont isomorphes par un isomorphisme qui renverse l’orientation. Le but est alors de comprendre la section $\tilde{\mathbf{s}}$ en tant que section partielle de $(\xi \oplus \xi)_0$ au-dessus de ∂Z et de rapprocher cette interprétation du théorème 2.4.5.

L’idée est de nous inspirer du théorème 2.5.4 : nous allons commencer par homotoper $\tilde{\mathbf{s}}$ afin de ne plus regarder une extension de $s_{\mathbf{C}}$ mais une extension de la section $(1+i)s_{\mathbf{C}}$ définie au paragraphe 2.5. Pour cela, nous allons utiliser, dans les fibres, l’homotopie

$$\begin{aligned} h : I \times S^3 &\rightarrow S^3 \\ (t, (z_1, z_2)) &\mapsto \left(\frac{1+it}{\sqrt{1+t^2}} z_1, \frac{1+it}{\sqrt{1+t^2}} z_2 \right) \end{aligned}$$

où l’on considère S^3 plongée de manière usuelle dans \mathbf{C}^2 . On obtient alors une section $\tilde{\mathbf{s}}'$ qui correspond à la section $(1+i)s_{\mathbf{C}}$ en dehors de \mathcal{V} et qui est constante par rapport à \mathcal{K} le long de $\mathcal{V} \simeq \mathcal{K} \times D^2$. Plus précisément, en dehors de l’intérieur du voisinage \mathcal{V} , elle provient de l’application⁷

$$\partial Z \setminus \text{int}(\mathcal{V}) \xrightarrow{s} S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1 \times S^1$$

⁷Ici, on considère le plongement usuel de $S^1 \times S^1$ dans S^3 .

où Δ est l'application diagonale. La section \tilde{s}' est une extension de cette application qui est sur \mathcal{V} constante par rapport à \mathcal{K} et qui a valeurs dans un disque d' plongé dans S^3 dont le bord est le cercle $\text{Im } \Delta$ (On considère $S^1 \times S^1$ plongé de manière usuelle dans S^3).

La classe d'homotopie relative à $\partial Z \setminus \text{int}(\mathcal{V})$ de \tilde{s}' ne dépend pas du choix du disque d' . De plus, \tilde{s}' correspond à la section $s \oplus s$ du S^3 -fibré $(\xi' \oplus \xi')_0$ sur $\partial Z \setminus \text{int}(\mathcal{V})$. Le but est alors de définir une extension naturelle de $s \oplus s$ à tout ∂Z qui corresponde à une telle application \tilde{s}' .

Soit \mathcal{K}^+ une copie de \mathcal{K} poussée dans la direction de I_0 à l'intérieur du voisinage \mathcal{V} . Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_1^+ des voisinages tubulaires disjoints de \mathcal{K} et \mathcal{K}^+ dans $\text{int}(\mathcal{V})$ respectivement. Par rétraction, s se prolonge en une section s_1 (resp. s_1^+) de ξ'_0 en dehors de $\text{int}(\mathcal{V}_1)$ (resp. $\text{int}(\mathcal{V}_1^+)$).

Les sections s_1 et s_1^+ induisent une section $s_1 \oplus s_1^+$ du S^3 -fibré $(\xi' \oplus \xi')_0$ au-dessus de $(\partial Z \setminus \text{int } \mathcal{V}_1) \cup (\partial Z \setminus \text{int } \mathcal{V}_1^+) = \partial Z$ qui prolonge $s \oplus s$ et qui est constante par rapport à \mathcal{K} le long de \mathcal{V} .

Par construction, la section $s_1 \oplus s_1^+$ du S^3 -fibré $(\xi' \oplus \xi')_0$ au-dessus de ∂Z est homotope relativement à $\partial Z \setminus \text{int}(\mathcal{V})$ à la section partielle induite de \tilde{s}' . Nous obtenons donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} c_2(\xi'_0, \tilde{s}) &= c_2(\xi'_0, \tilde{s}') \quad \text{par homotopie,} \\ &= -e(\xi \oplus \xi, s_1 \oplus s_1^+) \quad \text{grâce au théorème 2.5.4,} \\ &= -e(\xi, s_1) \cup e(\xi, s_1^+) \quad \text{par le théorème 2.4.5.} \end{aligned}$$

La classe d'Euler relative $e(\xi', s_1)$ peut être vue comme une surface W plongée dans Z de bord \mathcal{K} : la section s_1 se prolonge en dehors d'un voisinage régulier de W . Puisque s_1 est une extension de s , chercher à prolonger s revient à chercher à prolonger s_1 . Le diagramme commutatif (pour $i = 0, 1$)

$$\begin{array}{ccc} H^2(\{i\} \times (I \times \Sigma_{g,1}), \{i\} \times \partial(I \times \Sigma_{g,1}); \mathbf{Z}) & \xrightarrow[\simeq]{DP} & H_1(\{i\} \times I \times \Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \text{---} \\ H^2(I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}, I_0 \times \partial(I \times \Sigma_{g,1}); \mathbf{Z}) & \xrightarrow[\simeq]{DP} & H_2(I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}, \partial(I_0) \times I \times \Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\ & & \downarrow \text{Th. de Künneth} \\ & & H_1(I_0, \partial I_0, \mathbf{Z}) \otimes H_1(I \times \Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \end{array}$$

induit la propriété suivante pour la classe de W dans $H_2(Z, \partial(I_0) \times I \times \Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$

$$\begin{array}{ccc}
 e(\xi', s|_{\{i\} \times \partial(I \times \Sigma_{g,1})}) & \xrightarrow{DP} & p_*^{-1} k_X(\varphi\psi) \\
 \uparrow \text{fonctorialité} & & \uparrow \text{---} \\
 e(\xi', s|_{I \times \partial(I \times \Sigma_{g,1})}) & \xrightarrow{DP} & [W] \\
 & & \downarrow \\
 & & \mu_I \otimes p_*^{-1} k_X(\varphi\psi)
 \end{array}$$

Par définition de s_1^+ , la classe d'Euler relative $e(\xi', s_1^+)$ peut être vue comme la surface W^+ plongée dans $I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}$ obtenue en poussant une copie de W dans la direction I : W et W^+ seront alors en position transverse et

$$\begin{aligned}
 c_X(\varphi, \psi) &= [W] \cdot [W^+] \\
 &= [W] \cdot [W]
 \end{aligned}$$

Construisons W . Puisque $K_{X,\varphi\psi}$ et $K_{X,\varphi} \cup \varphi(K_{X,\psi})$ ont même classe d'homologie dans $I \times \Sigma_{g,1}$, nous pouvons supposer que ces courbes ne diffèrent que par des mouvements locaux :

- des mouvements en bandes (cf figure 3.17),

Premier mouvement :



Deuxième mouvement : enlever une petite composante connexe qui borde un disque sur la surface



FIG. 3.17 – Mouvements en bande.

- et des mouvements de lissage (cf figure 3.18).

Ces mouvements sont vus comme projetés dans $\{1\} \times \{0\} \times \Sigma_{g,1}$ avec les conventions habituelles de dessus-dessous.

Nous allons construire W dans $I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}$: en dehors des mouvements locaux, elle est de la forme produit $(l_1 \times K_{X,\varphi}) \cup (l_2 \times \varphi(K_{X,\psi}))$ où l_1 (resp. l_2) est le segment orienté plongé dans $I_0 \times I$ joignant $\{0\} \times \{\frac{1}{2}\}$ à $\{1\} \times \{\frac{1}{4}\}$ (resp $\{1\} \times \{\frac{3}{4}\}$).

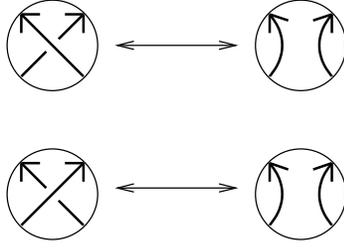


FIG. 3.18 – Mouvements de lissage.

Remarque : La surface va vivre dans $(l_1 \cup l_2) \times \Sigma_{g,1}$. Considérons l_1^+ et l_2^+ des copies de l_1 et l_2 poussées dans la direction I alors

$$W \cap W^+ \subset (l_1^+ \cap l_2) \times \Sigma_{g,1} \quad (\text{cf figure 3.19}).$$

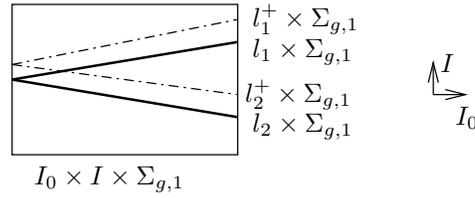


FIG. 3.19 – $W \cap W^+$

Mouvements en bandes : ils ne vont pas intervenir dans l'auto-intersection de W . D'après la proposition 3.2.10, la SU -parallélisation de Morita est indépendante du choix des courbes d'obstruction plongées dans une copie de $\Sigma_{g,1}$. Ainsi nous pouvons supposer que $K_{X,\varphi,\psi}$ est obtenue de la projection des courbes $K_{X,\varphi} \cup \varphi(K_{X,\psi})$ dans une même copie de $\Sigma_{g,1}$ par lissage des points doubles. Dans ce cas, il n'y a pas de mouvements en bande.

Mouvements de Lissage :

Considérons le premier mouvement de lissage : il vit dans deux copies de $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times d^2$ où d^2 est un disque plongé dans $\Sigma_{g,1}$: cf figure 3.20.

Remarquons que vu dans $\{0\} \times d^2$, cette figure⁸ correspond bien au premier mouvement de lissage (on regarde par en-dessous).

Nous avons besoin de bien préciser les orientations : nous supposons que $I_0 \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times d^2$ correspond à l'orientation induite par $I_0 \times I \times \Sigma_{g,1}$ et

⁸Même si cette convention paraît moins facile à utiliser que de regarder par dessus, elle est cohérente avec la définition du mapping cylindre et le fait que les classes d'homologie des courbes d'obstructions sont vues dans $\{0\} \times \Sigma_{g,1}$.

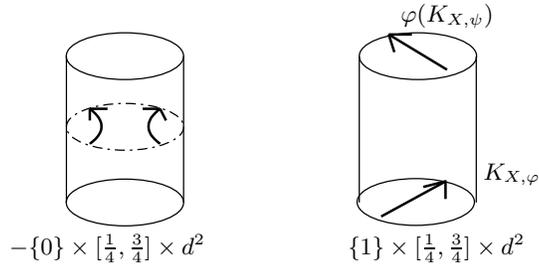


FIG. 3.20 – premier mouvement de lissage

qu'elle est munie de l'orientation canonique de \mathbf{R}^4 dans les figures.

Pour construire W , nous allons rajouter un disque que nous allons homotoper en un disque \mathcal{D} comme dans la figure 3.21.

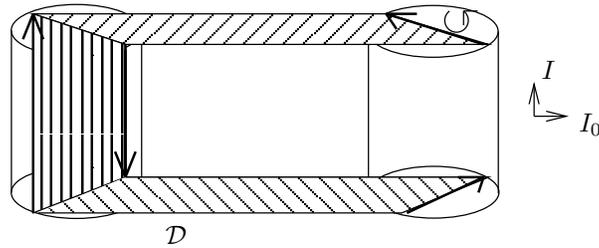


FIG. 3.21 – disque \mathcal{D} rajouté à W pour le premier mouvement de lissage

Pour le deuxième mouvement de lissage (cf figure 3.22), nous allons rajouter un disque homotopé \mathcal{D}' comme dans la figure 3.23.

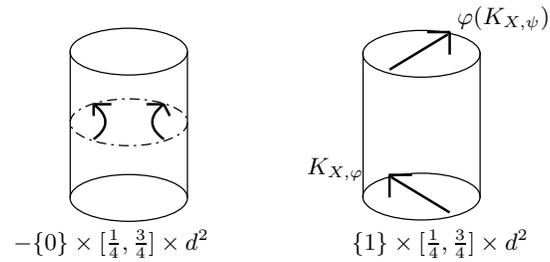


FIG. 3.22 – deuxième mouvement de lissage

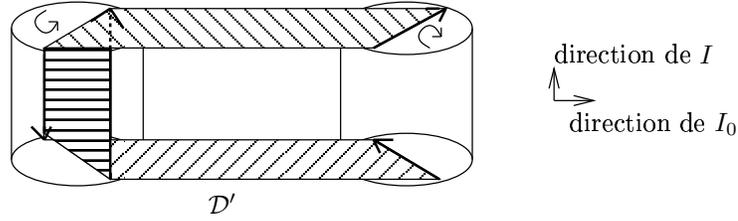


FIG. 3.23 – disque rajouté \mathcal{D}' à W pour le deuxième mouvement de lissage

La variété W ainsi construite a l'homologie voulue et nous pouvons prolonger la section s_1 en dehors d'un voisinage régulier de W .

L'auto-intersection $[W] \cdot [W]$ ne va se passer qu'au niveau des mouvements de lissage; ainsi calculer $[W] \cdot [W]$ revient à calculer les auto-intersections des disques homotopés du type \mathcal{D} et \mathcal{D}' construits précédemment.

Les disques \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont plongés dans des boules de type $I \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times d^2$ et leur bord vit dans le bord de cette boule. Par conséquent, l'auto-intersection de \mathcal{D} est égal à l'auto-enlacement de son bord et il en est de même pour \mathcal{D}' .

Dans le cas du type \mathcal{D} : pour calculer l'auto-intersection de \mathcal{D} , nous allons voir son bord comme un diagramme de noeud plongé dans $-I_0 \times \{0\} \times d^2$: cf figure 3.24.

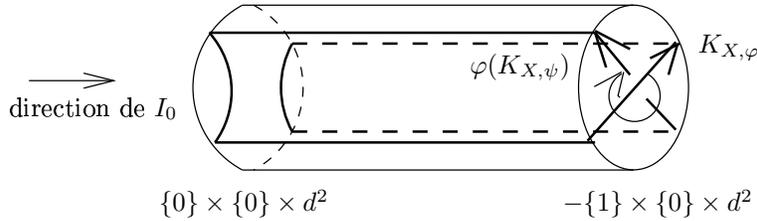


FIG. 3.24 – diagramme du bord de \mathcal{D} dans $-I \times \{0\} \times d^2$

Ainsi $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} = -1$: un croisement positif de $K_{X, \varphi}$ avec $\varphi(K_{X, \psi})$ dans d^2 génère un signe -1 pour l'auto-intersection de W . On montre de la même manière que $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{D}' = 1$: un croisement négatif génère un signe $+1$ donc

$$\begin{aligned}
 c_X(\varphi, \psi) &= [W] \cdot [W] \\
 &= -[K_{X, \varphi}] \cdot [\varphi(K_{X, \psi})] \\
 &= -k_X(\varphi) \cdot \varphi_*(k_X(\psi)) \text{ via l'isomorphisme } p_*^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

3.3 Description géométrique de l'homomorphisme d de Morita

Revenons à l'extension centrale de $\mathcal{M}_{g,1}$ définie à l'aide des SU -parallélisations des mapping tores

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,1} \longrightarrow 1 \quad (\star').$$

Associés à cette extension, nous avons deux cocycles :

- le cocycle 3τ qui est défini comme cocycle associé à la section d'Atiyah s_0 et où τ est le cocycle de Meyer,
- et le cocycle c_X défini comme cocycle associé à la section de Morita \hat{m}_X pour X et qui est un cocycle d'intersection au sens du paragraphe 1.5.4.

Par construction, ils ont même classe de cohomologie dans $H^2(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbf{Z})$ et diffèrent donc pas un cobord.

Théorème 3.3.1. *L'application $d_X : \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$, qui, à tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$, associe le σ -invariant de son mapping tore associé munie de la SU -parallélisation de Morita pour X , vérifie naturellement*

$$c_X = 3\tau + \delta d_X(*).$$

$$\begin{aligned} \text{avec } d_X : \mathcal{M}_{g,1} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ \varphi &\mapsto \sigma(T_\varphi, m_X(T_\varphi)). \end{aligned}$$

Pour $g \geq 3$, d_X est l'unique 1-cochaîne vérifiant (*).

Preuve : D'après [Br] paragraphe IV.3, l'application s' définie par

$$\begin{aligned} s' : \mathcal{M}_{g,1} &\rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{g,1} \\ \varphi &\mapsto i(d_X(\varphi))s_0(\varphi) \end{aligned}$$

est une section de (\star') et son cocycle associé vérifie pour tout φ, ψ de $\mathcal{M}_{g,1}$:

$$\begin{aligned} c'(\varphi, \psi) &= s'(\varphi)s'(\psi)s'(\varphi\psi)^{-1} \\ &= 3\tau(\varphi, \psi) + (\delta d_X)(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

L'isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$ et $\mathcal{M}_{g,1} \times \mathbf{Z}$ du théorème 3.1.6 envoie l'élément $i(d_X(\varphi))s_0(\varphi)$ de $\widehat{\mathcal{M}}_{g,1}$ sur l'élément suivant de $\mathcal{M}_{g,1} \times \mathbf{Z}$:

$$(id, \sigma(T_\varphi, m_X(T_\varphi)).(\varphi, 0) = (\varphi, \sigma(T_\varphi, m_X(T_\varphi))).$$

Par conséquent, les sections s' et \hat{m}_X coïncident naturellement et $c_X = 3\tau + \delta d_X$.

D'après le théorème 1.1.3, le groupe $\mathcal{M}_{g,1}$ est parfait lorsque $g \geq 3$ i.e $H_1(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbf{Z})$ est trivial pour $g \geq 3$. Il existe donc une unique 1-cochaîne d (cf [Mo1] prop 3.1) telle que pour tout φ de $\mathcal{M}_{g,1}$,

$$\hat{m}_X(\varphi) = i(d(\varphi))s_0(\varphi).$$

□

En suivant la preuve du cocycle d'intersection, nous pouvons voir comment varie l'application d_X lorsque l'on change le champ de vecteurs.

Théorème 3.3.2. *Soient X et Y deux champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$. Alors, pour tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$,*

$$d_Y(\varphi) = d_X(\varphi) + (e_{X,Y} + \varphi_*(e_{X,Y})) \cdot k_X(\varphi) + e_{X,Y} \cdot \varphi_*(e_{X,Y}).$$

Preuve : Rappelons que $d_X(\varphi)$ est le σ -invariant du mapping tore T_φ muni de la SU -parallélisation de Morita pour X . Calculer la variation $d_Y(\varphi) - d_X(\varphi)$ revient donc à mesurer le défaut d'homotopie entre la SU -parallélisation de Morita pour X et la SU -parallélisation de Morita pour Y de T_φ . Pour cela, il suffit de calculer le défaut d'homotopie entre les sections $s_{X,\varphi}$ et $s_{Y,\varphi}$.

Considérons la 4-variété $Z := I_2 \times I_1 \times \Sigma_{g,1}$ ainsi que le fibré vectoriel orienté $\xi' := I_2 \times I_1 \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}$. Considérons la section partielle S du S^1 -fibré ξ'_0 définie par

- Y sur $I_2 \times \{0\} \times \Sigma_{g,1} \cup I_2 \times I_1 \times \partial\Sigma_{g,1}$,
- φ_*Y sur $I_2 \times \{1\} \times \Sigma_{g,1}$,
- X en $\{1\} \times \{\frac{1}{3}\} \times \Sigma_{g,1}$,
- et φ_*X en $\{1\} \times \{\frac{2}{3}\} \times \Sigma_{g,1}$.

Considérons trois courbes fermées c , K_X et K_Y plongées dans $\Sigma_{g,1}$ de classe d'homologie $e_{X,Y}$, $k_X(\varphi)$ et $k_Y(\varphi)$ respectivement. Plongeons maintenant les quatre courbes

- $-c$ dans $\{1\} \times \{\frac{1}{4}\} \times \Sigma_{g,1}$,
- K_X dans $\{1\} \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$,
- K_Y dans $\{0\} \times \{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_{g,1}$,
- et $\varphi(c)$ dans $\{1\} \times \{\frac{3}{4}\} \times \Sigma_{g,1}$.

Notons \mathcal{K} l'entrelacs ainsi obtenu plongé dans le bord de Z . La section S se prolonge en une section s de ξ'_0 définie en dehors d'un voisinage régulier \mathcal{V} de l'entrelacs \mathcal{K} . Comme avant, on peut identifier le voisinage \mathcal{V} à $\mathcal{K} \times D^2$. Notons s' une section du S^3 -fibré $(\xi'_C)_0$ qui est le complexifié de s en dehors de \mathcal{V} et qui est constante par rapport à \mathcal{K} le long de \mathcal{V} . Rappelons que la partie d'obstruction du σ -invariant est une première classe de Pontrjagin relative, donc

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi) - d_X(\varphi) &= \langle p_1(\xi', s'), \mu_Z \rangle \\ &= - \langle c_2(\xi'_C, s'), \mu_Z \rangle . \end{aligned}$$

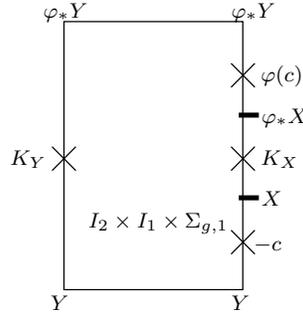


FIG. 3.25 – Description de la section S .

Notons \mathcal{K}^+ une copie de \mathcal{K} obtenue en poussant légèrement \mathcal{K} à l'intérieur de \mathcal{V} dans la direction préférée de I_1 . Notons s^+ (resp. s^-) une extension de s définie en dehors d'un petit voisinage \mathcal{V}^+ (resp. \mathcal{V}^-) de \mathcal{K}^+ (resp. \mathcal{K}) dans \mathcal{V} . On supposera que \mathcal{V}^+ et \mathcal{V}^- sont disjoints. En suivant le même raisonnement que dans la preuve du cocycle d'intersection, on peut montrer que

$$c_2(\xi'_C, \mathbf{s}') = -e(\xi', s^-) \cup e(\xi', s^+).$$

Si W^- est une surface d'obstruction pour la section s^- et si W^+ est une copie de W^- et une surface d'obstruction pour s^+ alors

$$d_Y(\varphi) - d_X(\varphi) = [W^-] \cdot [W^+].$$

D'après la proposition 3.2.5,

$$k_Y(\varphi) = k_X(\varphi) - e_{X,Y} + \varphi_* e_{X,Y}.$$

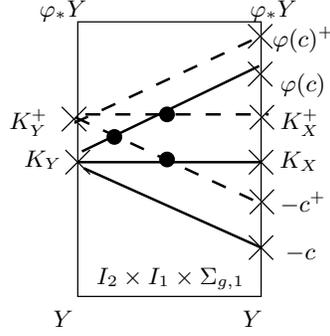
On peut alors supposer que K_Y est obtenue des courbes c , K_X et $-\varphi(c)$ par mouvements de lissage sans point triple. On construit la surface W^- comme dans la preuve du cocycle d'intersection. Elle va donc être plongée dans $(l_1 \cup l_2 \cup l_3) \times \Sigma_{g,1}$ où l_1 (resp. l_2, l_3) est le segment de $I_2 \times I_1$ joignant $\{(0, \frac{1}{2})\}$ à $\{(1, \frac{1}{4})\}$ (resp. $\{(1, \frac{1}{2})\}, \{(1, \frac{3}{4})\}$).

L'auto-intersection algébrique $[W^-] \cdot [W^+]$ provient encore uniquement des mouvements de lissage et seulement des auto-intersections de disques rajoutés pour chaque mouvement de lissage. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi) - d_X(\varphi) &= -[-c] \cdot [K_X] - [-c] \cdot [\varphi(c)] - [K_X] \cdot [\varphi(c)] \\ &= (\varphi_*(e_{X,Y}) + e_{X,Y}) \cdot k_X(\varphi) + e_{X,Y} \cdot \varphi_*(e_{X,Y}). \end{aligned}$$

□

Définition 3.3.3. Notons $\mathcal{V}_{g,1}$ le sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ formé par les difféomorphismes de la surface qui agissent trivialement sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$.



Si φ est un élément de $\mathcal{V}_{g,1}$, alors, pour tout champ de vecteurs non singulier X sur $\Sigma_{g,1}$, les champs de vecteurs X et φ_*X sont homotopes et $k_X(\varphi) = 0$. Ainsi, par construction, la SU -parallélisation de Morita pour X du mapping tore T_φ est le complexifié d'une SO -parallélisation bien définie notée $m_X^{SO}(T_\varphi)$.

Remarque 3.3.4. – Rappelons que $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ est un espace affine au-dessus de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Puisque les éléments de $\mathcal{V}_{g,1}$ agissent trivialement sur les champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$, ils agissent également trivialement sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Par conséquent, $\mathcal{V}_{g,1}$ est un sous-groupe du groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$.

– Le groupe $\mathcal{K}_{g,1}$ est engendré par les twists de Dehn le long des courbes qui séparent. Ces twists agissent trivialement sur les champs de vecteurs non singulier de la surface (cf proposition 4.1.3). Ainsi $\mathcal{K}_{g,1}$ est inclus dans $\mathcal{V}_{g,1}$.

$$\mathcal{K}_{g,1} \subseteq \mathcal{V}_{g,1} \subset \mathcal{T}_{g,1}.$$

En appliquant le théorème ci-dessus et en utilisant la définition de $\mathcal{V}_{g,1}$, nous obtenons le corollaire immédiat :

Corollaire 3.3.5. *Toutes les applications d_X coïncident sur $\mathcal{V}_{g,1}$. Par conséquent, ils définissent, pour tout élément φ de $\mathcal{V}_{g,1}$, une SU -parallélisation de Morita $m(T_\varphi)$ du mapping tore T_φ indépendante des champs de vecteurs non singuliers sur une surface, ainsi qu'une application $\tilde{d} : \mathcal{V}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Z}$:*

$$\begin{aligned} \tilde{d} : \mathcal{V}_{g,1} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ \varphi &\rightarrow \sigma(T_\varphi, m(T_\varphi)). \end{aligned}$$

De plus, cette application est un homomorphisme.

Remarque 3.3.6. Pour tout élément φ de $\mathcal{V}_{g,1}$, la SO -parallélisation $m_X^{SO}(T_\varphi)$ du mapping tore T_φ dépend du choix du champ de vecteurs X même si son complexifié, qui est la SU -parallélisation de Morita $m(T_\varphi)$, n'en dépend pas.

D'après le paragraphe 1.5.4, nous avons le corollaire immédiat :

Corollaire 3.3.7. *Par construction, l'homomorphisme \tilde{d} restreint à $\mathcal{K}_{g,1}$ est l'homomorphisme d de Morita.*

□

Chapitre 4

Calculs explicites des applications k_X et d_X pour un produit de twists de Dehn

On fixe de nouveau un champ de vecteurs non singulier X sur $\Sigma_{g,1}$.

Le but de ce chapitre est de calculer l'application de Morita d_X évaluée sur un produit de twists de Dehn φ .

Rappelons que $d_X(\varphi)$ est le σ -invariant du mapping tore T_φ muni de la SU -parallélisation de Morita $m_X(T_\varphi)$. Pour construire cette SU -parallélisation, nous devons étudier le défaut d'homotopie $k_X(\varphi)$ des champs de vecteurs non singulier X et φ_*X . Puisque k_X est un homomorphisme croisé, la clé est de savoir calculer k_X sur un twist de Dehn :

Théorème 4.0.8. *Soient γ une courbe simple fermée sur $\Sigma_{g,1}$ et soit $I \times S^1$ un voisinage paramétré orienté de γ dans $\Sigma_{g,1}$. On note \mathfrak{I}_γ le champ de vecteurs non singulier sur γ induit par la direction préférée de I . L'entier n_γ^X est défini comme le nombre de tours que fait X le long de γ par rapport à \mathfrak{I}_γ . Si τ_γ est le twist de Dehn à droite le long de γ , alors*

$$k_X(\tau_\gamma^\epsilon) = \epsilon n_\gamma^X [\gamma] \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \quad \text{où } \epsilon = \pm 1.$$

Le calcul de d_X évalué sur un tel twist de Dehn est entièrement déterminé par ce compteur :

Théorème 4.0.9. *Soient γ une courbe simple fermée sur $\Sigma_{g,1}$ et τ_γ le twist de Dehn à droite le long de γ . Alors*

$$d_X(\tau_\gamma^\epsilon) = \epsilon(n_\gamma^X + 1)(n_\gamma^X - 1) \quad \text{où } \epsilon = \pm 1.$$

Enfin on verra comment obtenir d_X pour un produit de twists de Dehn. Rappelons que, bien que $\mathcal{M}_{g,1}$ soit engendré par les twists de Dehn, on ne sait pas, à l'heure actuelle, décomposer un difféomorphisme quelconque en produit de twists.

Avant de définir le compteur n_γ^X , nous avons besoin de poser un certain nombre d'hypothèses et de notations. On fixe un plongement $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow \Sigma_g$ et on note $D^2 = \Sigma_g \setminus \text{int}(\Sigma_{g,1})$. Sauf précision, toutes les figures seront toujours munies de l'orientation canonique.

On suppose que les variétés seront toutes connexes compactes orientées avec ou sans bord et munies d'une structure riemannienne sur leur espace tangent. Si M est une telle variété, on notera μ_M sa classe fondamentale. De plus, si M est de dimension 2 et si Y et Y' sont deux champs de vecteurs non singuliers sur M alors, pour tout point x de M ,

$$\angle_{Y_x, Y'_x} \in S^1$$

sera l'angle orienté entre les vecteurs Y_x et Y'_x mesuré par rapport à la métrique riemannienne et compté modulo 2π .

Enfin, on notera σ le générateur préféré de $H^1(S^1; \mathbf{Z})$.

4.1 Compteur n_γ^X

4.1.1 Définition

Soit γ une courbe simple fermée orientée sur $\Sigma_{g,1}$. Tout au long de ce chapitre, on notera $I_\gamma \times S^1$ un voisinage paramétré orienté de γ dans $\Sigma_{g,1}$ tel que

- $\gamma = \{\frac{1}{2}\} \times S^1$ (ou $\gamma = \{1\} \times S^1$ si $\gamma = \pm\partial\Sigma_{g,1}$),
- l'orientation canonique de $I_\gamma \times S^1$ coïncide avec l'orientation induite par l'orientation de $\Sigma_{g,1}$.

Soit \mathfrak{J}_γ le champ de vecteurs tangent non singulier sur $I_\gamma \times S^1$ induit par la direction préférée de I_γ . On définit l'application

$$\begin{aligned} f_\gamma^X : \gamma &\rightarrow S^1 \\ x &\rightarrow \angle(\mathfrak{J}_\gamma)_x, X_x \end{aligned}$$

ainsi que l'entier

$$n_\gamma^X = \langle (f_\gamma^X)^*(\sigma), \mu_\gamma \rangle .$$

Ce dernier ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne. Par contre, il dépend

- de l'orientation de $\Sigma_{g,1}$,
- de la classe d'homotopie de X ,

– et de la courbe γ .

L'entier n_γ^X est interprété géométriquement comme le nombre de tours que fait X par rapport à \mathcal{J}_γ le long de γ .

Remarque 4.1.1. Soient α_i et β_i les courbes de la figure 4.1 : ce sont des représentants de la base¹ «usuelle» de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$.

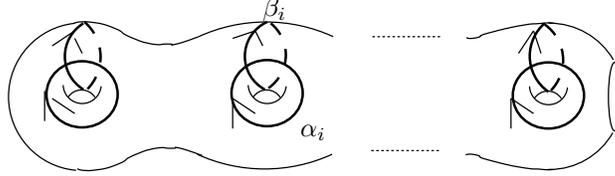


FIG. 4.1 – Courbes α_i et β_i , $i = 1, \dots, g$

Rappelons que l'ensemble $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ des champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ est un espace affine au-dessus de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. On fixe une origine préférée en considérant la classe d'homotopie \mathcal{O} du champ de vecteurs qui vérifie

$$n_{\alpha_i}^X = n_{\beta_i}^X = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, g.$$

Ce choix d'origine préférée induit une bijection préférée entre $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ et $H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$:

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Vect}(\Sigma_{g,1}) &\rightarrow H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\ X &\rightarrow \sum_{i=1}^n n_{\alpha_i}^X [\alpha_i]^* + n_{\beta_i}^X [\beta_i]^* \end{aligned}$$

où les $[\alpha_i]^*$ et $[\beta_i]^*$ est la base duale à la base $([\alpha_i], [\beta_i])_i$ de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. En particulier, cette bijection dépend du choix des courbes α_i et β_i .

Considérons un champ de vecteurs représentant \mathcal{O} que nous noterons de la même manière. Le S^1 -fibré $(\mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ est trivialisable. Choisissons \mathcal{O} comme section préférée : nous pouvons alors identifier l'espace total de $(\mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ avec $\Sigma_{g,1} \times S^1$. Tout champ de vecteurs sur $\Sigma_{g,1}$ pourra donc être vu comme une application de $\Sigma_{g,1}$ dans S^1 .

4.1.2 Calculs explicites de n_γ^X pour des courbes particulières

On peut se demander ce que vaut n_γ^X pour des courbes particulières telles que la courbe orientée $\partial\Sigma_{g,1}$ ou les courbes séparantes.

¹Ici, on identifie $\Sigma_{g,1}$ à une surface standard.

Proposition 4.1.2. – Si γ est la courbe orientée $\partial\Sigma_{g,1}$ alors

$$n_\gamma^X = 2g - 1.$$

– Si γ est une courbe séparante de genre h munie de l'orientation induite par celle de la sous-surface à une composante de bord, alors

$$n_\gamma^X = 2h - 1.$$

Preuve : Il nous suffit d'étudier le cas $\gamma = \partial\Sigma_{g,1}$. Le cas des courbes séparantes sera obtenu comme corollaire immédiat.

Soit $I_\gamma \times S^1$ un voisinage orienté paramétré de la courbe orientée $\gamma = \partial\Sigma_{g,1}$ dans Σ_g tel que

- $\gamma = \{\frac{1}{2}\} \times S^1$
- l'orientation canonique de $I_\gamma \times S^1$ coïncide avec celle induite par l'orientation de Σ_g : cf figure 4.2.

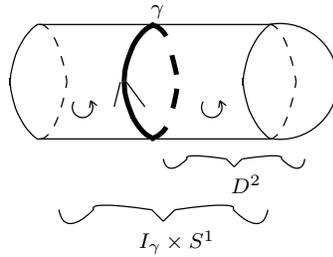


FIG. 4.2 –

La classe d'Euler relative $e(\mathbf{T}D^2, X|_{\partial D^2})$ mesure l'obstruction à prolonger X à Σ_g et vérifie (cf remarque 1.6.5) :

$$\langle e(\mathbf{T}D^2, X|_{\partial D^2}), \mu_{D^2} \rangle = 2 - 2g.$$

En d'autres termes, X fait $2 - 2g$ tours le long de ∂D^2 par rapport au champ de vecteurs qui s'étend au disque. Notons \mathcal{A} un tel champ de vecteurs sur ∂D^2 : cf figure 4.3, remarquons qu'il se prolonge à D^2 .

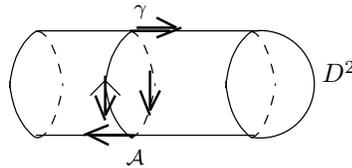


FIG. 4.3 – champ de vecteurs \mathcal{A} sur ∂D^2

Le compteur n_γ^X est le nombre de tours que fait X le long de $\gamma = \partial\Sigma_{g,1}$ par rapport à $\mathfrak{I}_{\partial\Sigma_{g,1}}$. Il peut être calculé comme la somme

- du nombre de tours que fait \mathcal{A} par rapport à \mathfrak{I}_γ (celui-ci est égal à 1),
- et du nombre de tours que fait X par rapport à \mathcal{A} .

En remarquant que $\gamma = -\partial D^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} n_{\partial\Sigma_{g,1}}^X &= 1 - (2 - 2g) \\ &= 2g - 1. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.3. *Si (γ, γ') est une paire bordante de genre h (cf figure 4.4) alors $n_\gamma^Y + n_{\gamma'}^Y = 2h$.*

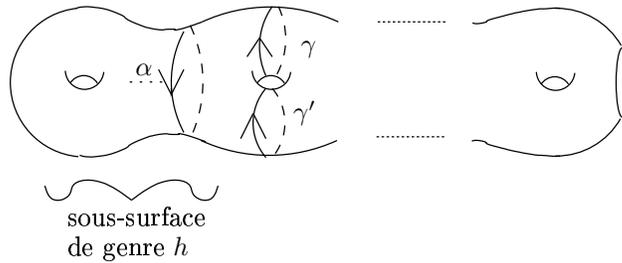


FIG. 4.4 – Exemple de paire bordante γ, γ' : cas standard.

Preuve : Soit (γ, γ') une paire bordante de $\Sigma_{g,1}$ de genre h : les classes d'homologie des courbes vérifient : $[\gamma] = -[\gamma']$. Elles séparent la surface $\Sigma_{g,1}$ en deux sous-surfaces $\Sigma_{h,2}$ et $\Sigma_{g-h,3}$.

Considérons une courbe simple fermée α de $\Sigma_{h,2}$ qui sépare la surface en une surface $\Sigma_{h,1}$ et une paire de pantalon P et telle que le bord de P soit $\alpha \cup \gamma \cup \gamma'$. Notons P' le disque obtenu de P en recollant des disques d_1 et d_2 comme dans la figure 4.5.

Soit Y un champ de vecteurs non singulier de $\Sigma_{g,1}$. L'obstruction à prolonger $Y|_\alpha$ à P' est une classe d'Euler relative $e(\mathbf{TP}', Y|_\alpha)$ qui vérifie

$$\langle e(\mathbf{TP}', Y|_\alpha), \mu_{P'} \rangle = 2 - 2h.$$

D'après la théorie de concentration d'obstruction, nous avons l'égalité :

$$\langle e(\mathbf{TP}', Y|_\alpha), \mu_{P'} \rangle = - \langle e(\mathbf{Td}_1, Y|_\gamma), \mu_{d_1} \rangle - \langle e(\mathbf{Td}_2, Y|_{\gamma'}), \mu_{d_2} \rangle .$$

Notons $l_\gamma^Y := \langle e(\mathbf{Td}_1, Y|_\gamma), \mu_{d_1} \rangle$ et $l_{\gamma'}^Y := \langle e(\mathbf{Td}_2, Y|_{\gamma'}), \mu_{d_2} \rangle$. Nous obtenons donc l'égalité :

$$l_\gamma^Y + l_{\gamma'}^Y = 2h - 2.$$

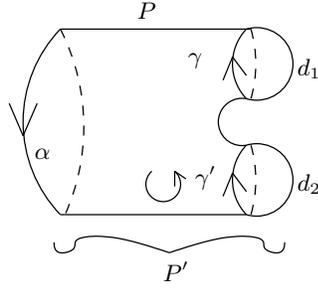


FIG. 4.5 – Paire de pantalon P et variété P'

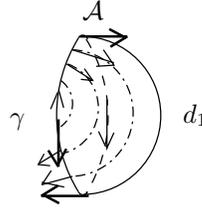


FIG. 4.6 – champ de vecteurs \mathcal{A} sur γ

Calculons à présent n_γ^Y en fonction de l_γ^Y : considérons le champ de vecteurs \mathfrak{I}_γ non singulier le long de γ défini comme précédemment.

Soit \mathcal{A} le champ de vecteurs sur γ défini dans la figure 4.6 : il se prolonge à d_1 . Les entiers l_γ^Y et n_γ^Y sont le nombre de tours que fait Y le long de γ par rapport à \mathcal{A} et \mathfrak{I}_γ respectivement. Or \mathcal{A} fait un tour par rapport à \mathfrak{I}_γ ainsi

$$n_\gamma^Y = 1 + l_\gamma^Y.$$

De même, on obtient pour γ' : $n_{\gamma'}^Y = 1 + l_{\gamma'}^Y$ et

$$\begin{aligned} n_\gamma^Y + n_{\gamma'}^Y &= l_\gamma^Y + l_{\gamma'}^Y + 2 \\ &= 2h. \end{aligned}$$

□

4.1.3 Compteur et action des twists de Dehn sur les champs de vecteurs

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ agit sur l'espace affine $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ et que cette action est affine et covariante. Rappelons que pour tout élément φ de $\mathcal{M}_{g,1}$ et pour tout point x de $\Sigma_{g,1}$,

$$(\varphi_* X)_x = \mathbf{T}_{\varphi^{-1}(x)} \varphi(X_{\varphi^{-1}(x)}).$$

Soit γ une courbe simple fermée orientée sur $\Sigma_{g,1}$ et τ_γ son twist de Dehn à droite. On aimerait savoir s'il est possible d'exprimer le compteur $n_\beta^{(\tau_\gamma)_*X}$ en fonction de n_β^X pour toute courbe simple fermée orientée β de $\Sigma_{g,1}$.

Tout d'abord, remarquons le fait suivant :

Remarque 4.1.4. Le twist τ_γ est défini par l'identité en dehors d'un voisinage paramétré et orienté $I_\gamma \times S^1$ de γ et sur $I_\gamma \times S^1$ par

$$\begin{aligned} \tau : I_\gamma \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\rightarrow e^{i(\theta-2\pi t)} \end{aligned}$$

Le champ de vecteurs $(\tau_\gamma)_*X$ est homotope à X^γ où X^γ est défini par

$$X_x^\gamma = X_{\tau_\gamma^{-1}(x)} \quad \forall x \in \Sigma_{g,1}.$$

Proposition 4.1.5. Pour toute courbe simple fermée β sur $\Sigma_{g,1}$,

$$n_\beta^{(\tau_\gamma^\epsilon)_*X} = n_\beta^X + \epsilon(\beta \cdot \gamma) n_\gamma^X \quad \text{où } \epsilon = \pm 1$$

et où \cdot est l'intersection algébrique dans $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$.

Preuve : Soit $I_\gamma \times S^1$ un voisinage régulier orienté de γ défini comme précédemment.

Si les courbes β et γ ne s'intersectent pas, le champ de vecteurs $(\tau_\gamma)_*X$ est homotope à X le long de β . Aussi $n_\beta^{(\tau_\gamma)_*X} = n_\beta^X$.

Il reste à étudier le cas d'un croisement positif des courbes β et γ et le cas d'un croisement négatif.

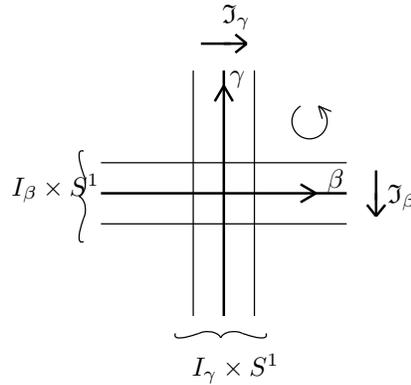


FIG. 4.7 – Croisement positif de β et γ

Supposons que les courbes β et γ s'intersectent comme dans la figure 4.7. Rappelons que nous avons trivialisé le S^1 -fibré $(\mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ grâce au champ de vecteurs \mathcal{O} , qui est un représentant de notre origine préférée de $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$: le champ de vecteurs X sur $\Sigma_{g,1}$ peut être défini comme une application $\Sigma_{g,1} \rightarrow S^1$. On peut supposer que, le long de $I_\gamma \times S^1$, cette application est donnée par :

$$\begin{aligned} (I_\gamma \times S^1) &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto e^{in_\gamma^X \theta}. \end{aligned}$$

D'après la remarque 4.1.4, $(\tau_\gamma)_*X$ est alors homotope le long de $\beta \cap (I_\gamma \times S^1)$ à :

$$\begin{aligned} \beta \cap (I_\gamma \times S^1) &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto e^{in_\gamma^X(\theta+2\pi t)} \end{aligned}$$

Considérons alors les applications :

$$\begin{aligned} f_\beta^X : \beta &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \angle(\mathfrak{J}_\beta)_x, X_x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_\beta^{(\tau_\gamma)_*X} : \beta &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \angle(\mathfrak{J}_\beta)_x, ((\tau_\gamma)_*X)_x \end{aligned}$$

On remarque alors que, pour tout $x = (t, e^{i\theta}) \in \beta \cap (I_\gamma \times S^1)$,

$$\begin{aligned} f_\beta^{(\tau_\gamma)_*X}(x) &= e^{in_\gamma^X(\theta+2\pi t)} \\ &= f_\beta^X(x) + e^{in_\gamma^X(2\pi t)}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque croisement positif de β avec γ , on rajoute n_γ^X tours au compteur n_β^X . Par le même procédé, on peut montrer que si le croisement est négatif alors on rajoute $-n_\gamma^X$ tours.

Par conséquent, $n_\beta^{(\tau_\gamma)_*X} = n_\beta^X + (\beta \cdot \gamma) n_\gamma^X$.

□

4.2 Calcul explicite de k_X pour un produit de twists de Dehn

L'étude du compteur défini à la section précédente va nous servir à calculer explicitement l'obstruction k_X pour un produit de twists de Dehn.

Rappelons que k_X est un homomorphisme croisé :

$$k_X(\varphi.\psi) = k_X(\varphi) + \varphi_* . k_X(\psi) \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{M}_{g,1}.$$

Aussi, il nous suffit de savoir calculer explicitement k_X pour un twist de Dehn.

Théorème 4.2.1. *Pour tout twist de Dehn à droite τ_γ le long d'une courbe simple fermée γ sur $\Sigma_{g,1}$,*

$$k_X(\tau_\gamma^\epsilon) = \epsilon n_\gamma^X[\gamma], \quad \text{où } \epsilon = \pm 1.$$

On obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.2. *Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ n courbes simples fermées sur $\Sigma_{g,1}$. Notons τ_i le twist de Dehn à droite le long de γ_i , et $\epsilon_i = \pm 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors*

$$k_X(\tau_{\gamma_1}^{\epsilon_1} \dots \tau_{\gamma_n}^{\epsilon_n}) = \epsilon_1 n_{\gamma_1}^X[\gamma_1] + \sum_{i=2}^n \epsilon_i n_{\gamma_i}^X(\tau_{\gamma_1}^{\epsilon_1} \dots \tau_{\gamma_{i-1}}^{\epsilon_{i-1}})_*[\gamma_i].$$

Il nous reste à prouver le théorème 4.2.1.

4.2.1 Preuve du théorème 4.2.1.

Fixons une courbe simple fermée orientée γ dans $\Sigma_{g,1}$. On note encore $I_\gamma \times S^1$ un voisinage orienté de γ et τ_γ son twist de Dehn à droite définis comme dans le paragraphe précédent.

Considérons la 3-variété $I \times \Sigma_{g,1}$ ainsi que le fibré vectoriel réel $\xi := I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1}$. Remarquons que celui-ci est trivialisable et choisissons la section préférée constante le long de I et induite par le champ de vecteurs \mathcal{O} . Nous pouvons ainsi identifier son espace total à $I \times \Sigma_{g,1} \times \mathbf{R}^2$. De même, nous pouvons identifier l'espace total de son S^1 -fibré associé ξ_0 à $I \times \Sigma_{g,1} \times S^1$.

Notons X_γ la section partielle de ξ_0 définie au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ par :

$$\begin{aligned} X_\gamma : \partial(I \times \Sigma_{g,1}) &\rightarrow S^1 \\ (t, x) &\mapsto \begin{cases} ((\tau_\gamma)_* X)_x & \text{si } t = 1 \\ X_x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Rappelons que $k_X(\tau_\gamma)$ est interprétée géométriquement comme la classe d'homologie, vue dans $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$, d'une courbe d'obstruction à prolonger X_γ à $I \times \Sigma_{g,1}$. Notons $I_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subset I$.

Le twist de Dehn τ_γ se prolonge en un difféomorphisme ψ_γ de $I \times \Sigma_{g,1} \setminus \text{int}(I_2 \times I_\gamma \times S^1)$ défini par $id_I \times \tau_\gamma$ sur $[\frac{2}{3}, 1] \times \Sigma_{g,1}$, et l'identité en dehors.

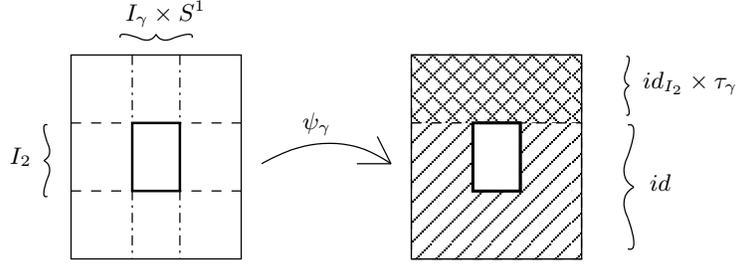


FIG. 4.8 – ψ_γ

On pose \tilde{X} la section du S^1 -fibré $(\xi)_0$ induite par X et constante le long de I . Le diffeomorphisme ψ_γ agit sur \tilde{X} pour définir une section de $(\xi)_0$ en dehors de l'intérieur du tore $I_2 \times I_\gamma \times S^1$ que nous noterons $(\psi_\gamma)_* \tilde{X}$. Remarquons qu'elle prolonge X_γ .

Conséquence : Le problème d'obstruction revient à chercher à prolonger un champ de vecteurs non singulier défini sur le bord du tore $\partial(I_2 \times I_\gamma \times S^1)$ au tore $I_2 \times I_\gamma \times S^1$. On va donc prolonger X_γ en dehors de copies de l'âme de ce tore i.e. en dehors de copies de la courbe γ .

Notons ζ le fibré vectoriel obtenu par restriction de ξ à $I_2 \times I_\gamma \times S^1$ et $\tilde{\zeta}$ la restriction de ζ à $\partial(I_2 \times I_\gamma \times S^1)$. Remarquons que ces fibrés sont naturellement trivialisés.

Petite digression : examinons de plus près le fibré en sphère $\tilde{\zeta}_0$. Soit $\mathcal{S}(\tilde{\zeta}_0)$ l'ensemble des sections de $\tilde{\zeta}_0$ considérées à homotopie près : c'est un espace affine au-dessus de

$$H_1(\partial(I_2 \times I_\gamma \times S^1); \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}[\alpha] \oplus \mathbf{Z}[\beta]$$

où α et β sont les courbes simples fermées orientées $\{*\} \times S^1$ et $\partial(I_2 \times I_\gamma) \times \{*\}$ respectivement.

Considérons le champ de vecteurs \mathfrak{J}_γ non singulier sur $\partial(I_2 \times I_\gamma \times S^1)$ induit par la direction préférée de I_γ : il définit une section constante de $\tilde{\zeta}_0$. Remarquons que \mathfrak{J}_γ peut se prolonger au tore $I_2 \times I_\gamma \times S^1$.

Pour toute section Y de $\tilde{\zeta}_0$, on peut définir les applications

$$\begin{aligned} g_\alpha^Y : \alpha &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \angle(\mathfrak{J}_\gamma)_x, Y_x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_\beta^Y : \beta &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \angle(\mathfrak{J}_\gamma)_x, Y_x \end{aligned}$$

ainsi que le couple d'entiers (m_α^X, m_β^X)

$$m_\alpha^Y = \langle (g_\alpha^Y)^*(\sigma), \mu_\alpha \rangle \quad \text{et} \quad m_\beta^Y = \langle (g_\beta^Y)^*(\sigma), \mu_\beta \rangle .$$

Aussi, les entiers m_α^Y et m_β^Y comptent le nombre de tours que fait Y par rapport à \mathfrak{J}_γ le long des courbes α et β respectivement. Ces entiers déterminent entièrement la classe d'homotopie d'une section de $(\zeta)_0$.

L'obstruction à prolonger une section Y de ζ_0 au tore tout entier se calcule facilement et ne dépend que de l'entier m_β^Y . Puisque \mathfrak{J}_γ se prolonge à ζ_0 , la classe d'Euler relative $e(\zeta_0, Y)$ vérifie :

$$DP(e(\zeta_0, Y)) = m_\beta^Y[\beta] \in H_1(I_2 \times I_\gamma \times S^1; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}[\beta].$$

Retour à la preuve du théorème 4.2.1 : Revenons à présent à notre problème d'obstruction et au champ de vecteurs non singulier $(\psi_\gamma)_*\tilde{X}$. Par restriction, il induit une section \tilde{X}_γ de $\tilde{\zeta}_0$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\gamma : \partial(I_2 \times I_\gamma) \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, t', x) &\mapsto \begin{cases} ((\tau_\gamma)_*X)_x & \text{si } t = 1 \\ X_x & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

A présent, il nous suffit de calculer $m_\beta^{\tilde{X}_\gamma}$.

Rappelons que n_γ^X est le nombre de tours que fait X par rapport au champ de vecteurs \mathfrak{J}_γ le long de γ . Remarquons de suite que la courbe α est l'âme du tore $I_2 \times I_\gamma \times S^1$ et, par définition, une copie de la courbe γ ainsi $m_\alpha^{\tilde{X}_\gamma} = n_\gamma^X$.

Puisque \mathfrak{J}_γ est constant le long de $I_\gamma \times S^1$, il est homotope à l'application

$$\begin{aligned} I_\gamma \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto 1. \end{aligned}$$

On peut supposer que X est constant le long de I_γ : X est alors homotope à

$$\begin{aligned} I_\gamma \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto e^{in_\gamma^X \theta}. \end{aligned}$$

D'après la remarque 4.1.4, $(\tau_\gamma)_*X$ est alors homotope à

$$\begin{aligned} I_\gamma \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t, e^{i\theta}) &\mapsto e^{in_\gamma^X(\theta+2\pi t)}. \end{aligned}$$

Ainsi \tilde{X}_γ est homotope à

$$\begin{aligned} \partial(I_2 \times I_\gamma) \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t_2, t, e^{i\theta}) &\mapsto \begin{cases} e^{in_\gamma^X(\theta+2\pi t)} & \text{si } t_2 = 1 \\ e^{in_\gamma^X \theta} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par définition de $\beta = \partial(I_2 \times I_\gamma) \times \{*\}$, nous obtenons l'égalité : $m_{\beta}^{\tilde{X}_\gamma} = n_\gamma^X$. Par conséquent, on peut prolonger X_γ en dehors de n_γ^X copies de la courbe γ et $k_X(\tau_\gamma) = n_\gamma^X[\gamma]$.

Par le même procédé, on montre que $(\tau_\gamma^{-1})_* X$ est homotope à

$$\begin{aligned} \partial(I_2 \times I_\gamma) \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (t_2, t, e^{i\theta}) &\mapsto \begin{cases} e^{in_\gamma^X(\theta-2\pi t)} & \text{si } t_2 = 1 \\ e^{in_\gamma^X\theta} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On aura alors : $k_X(\tau_\gamma^{-1}) = -n_\gamma^X[\gamma]$. □

4.2.2 Remarque sur le sous-groupe $\mathcal{V}_{g,1}$

Le théorème 4.2.1 peut-il nous renseigner sur le groupe $\mathcal{V}_{g,1}$?

Toute courbe séparante est nulle homologue. Aussi nous retrouvons le corollaire suivant et l'inclusion $\mathcal{K}_{g,1} \subseteq \mathcal{V}_{g,1}$:

Corollaire 4.2.3. *Si γ est une courbe simple fermée séparante sur $\Sigma_{g,1}$ et si τ_γ est le twist de Dehn à droite le long de γ , alors $k_X(\tau_\gamma^\epsilon) = 0 \quad \epsilon = \pm 1$.*

Rappelons que $\mathcal{V}_{g,1}$ est un sous-groupe de $\mathcal{T}_{g,1}$. Le théorème 4.2.1 nous permet également de calculer k_X pour une paire bordante :

Corollaire 4.2.4. *Soit (γ, γ') une paire bordante de genre h dans $\Sigma_{g,1}$. On supposera que γ et γ' sont munies de l'orientation induite par la sous-surface $\Sigma_{h,2}$ qu'elles déterminent. Alors*

$$k_X(\tau_\gamma \tau_{\gamma'}^{-1}) = 2h[\gamma].$$

Preuve : D'après la proposition 4.1.3, nous avons l'égalité suivante :

$$n_\gamma^X + n_{\gamma'}^X = 2h.$$

En appliquant le théorème 4.2.1 et en utilisant la propriété d'homomorphisme croisé de k_X , nous obtenons

$$\begin{aligned} k_X(\tau_\gamma \tau_{\gamma'}^{-1}) &= n_\gamma^X[\gamma] - n_{\gamma'}^X[\gamma'] \\ &= (n_\gamma^X + n_{\gamma'}^X)[\gamma] \\ &= 2h[\gamma]. \end{aligned}$$

□

Remarquons si (γ, γ') et (α, α') sont deux paires bordantes de même genre et telles que les courbes γ et α ont même classe d'homologie, alors

$$k_X(\tau_\gamma \tau_{\gamma'}^{-1} \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha'}) = 0$$

et $\tau_\gamma \tau_{\gamma'}^{-1} \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha'}$ appartient à $\mathcal{V}_{g,1}$. Puisqu'elles ont même genre, ces paires sont conjuguées par un élément du groupe de difféotopies. Si elles sont conjuguées par un élément du sous-groupe de Torelli, alors $\tau_\gamma \tau_{\gamma'}^{-1} \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha'}$ est un commutateur de $\mathcal{T}_{g,1}$; or $[\mathcal{T}_{g,1}, \mathcal{T}_{g,1}] \subset \mathcal{K}_{g,1}$, donc cela ne nous apporte pas d'information sur l'existence d'un élément de $\mathcal{V}_{g,1}$ qui ne serait pas dans $\mathcal{K}_{g,1}$. La question est alors de savoir s'il est possible de trouver deux paires bordantes de même genre comme précédemment qui ne sont pas conjuguées l'une de l'autre par des éléments du Torelli.

4.3 Calcul explicite de d_X pour un produit de twists de Dehn

Savoir calculer k_X sur un produit de twists de Dehn φ permet de construire explicitement la SU -parallélisation relative de Morita $m_X(T_\varphi)$ du mapping tore T_φ associé en suivant les instructions énoncées au chapitre 3. La question est maintenant de savoir si c'est suffisant pour calculer son σ -invariant :

$$d_X(\varphi) = \sigma(T_\varphi, m_X(\varphi)).$$

La clé est le cas du twist de Dehn :

Théorème 4.3.1. *Soit τ_γ un twist de Dehn à droite le long d'une courbe simple fermée γ sur $\Sigma_{g,1}$. Alors,*

$$d_X(\tau_\gamma^\epsilon) = \epsilon(n_\gamma^X - 1)(n_\gamma^X + 1) \quad \text{où } \epsilon = \pm 1.$$

En revenant à la définition de l'application d_X et des cocycles de Meyer et d'intersection :

$$c_X(\varphi, \psi) = 3\tau(\varphi, \psi) + d_X(\varphi) + d_X(\psi) - d_X(\varphi.\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{M}_{g,1},$$

nous obtenons par récurrence une formule explicite de d_X pour tout produit de twists de Dehn et donc, en théorie, pour tout difféomorphisme de $\mathcal{M}_{g,1}$.

Le reste de ce paragraphe va consister à prouver le théorème 4.3.1. Pour cela, nous allons, dans un premier temps, fixer un représentant de la SU -parallélisation de Morita $m_X(T_{\tau_\gamma})$, puis construire une 4-variété W_γ qui permettra, par la suite, de calculer explicitement le σ -invariant.

Position du Problème Reprenons les notations de la preuve du théorème 4.2.1 et considérons à nouveau la section partielle X_γ du S^1 -fibré $\xi_0 := (I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus de $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ définie précédemment :

$$\begin{aligned} X_\gamma : \partial(I \times \Sigma_{g,1}) &\rightarrow S^1 \\ (t, x) &\mapsto \begin{cases} ((\tau_\gamma)_* X)_x & \text{si } t = 1 \\ X_x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.2.1, si n_γ^X est nul, alors on peut prolonger X_γ en une section globale de ξ_0 .

Si n_γ^X est non nul, alors la section X_γ se prolonge en dehors de n_γ^X copies disjointes de la courbe γ plongées dans une même copie de $\Sigma_{g,1}$. Notons ϵ le signe de n_γ^X et soient $x_1, \dots, x_{|n_\gamma^X|}$ $|n_\gamma^X|$ points distincts de l'intérieur de $(\{\frac{1}{2}\} \times I_\gamma) \subset I \times I_\gamma$. Les $|n_\gamma^X|$ courbes définies ci-dessous sont des courbes d'obstruction pour la section X_γ :

$$\mathcal{L}_i = \epsilon \{x_i\} \times S^1 \subset \text{int}(I \times I_\gamma \times S^1) \quad i = 1, \dots, |n_\gamma^X|$$

On peut donc prolonger X_γ en dehors d'un voisinage régulier de ces courbes. Le complexifié de cette extension se prolonge en une section \hat{s}_X du S^3 -fibré $(\xi_{\mathbf{C}})_0$ qui est équivariante pour l'action de S^1 le long de chaque voisinage régulier des courbes \mathcal{L}_i .

Stabilisons \hat{s}_X à gauche par la direction préférée de I : on obtient une trivialisation complexe de $\mathbf{T}(I \times \Sigma_{g,1})$. En la prolongeant en une trivialisation complexe de $\mathbf{T}(I \times \Sigma_g)$ comme au paragraphe 3.2.4 et en identifiant $\{0\} \times \Sigma_g$ avec $\{1\} \times \Sigma_g$ via τ_γ , cette dernière induit une trivialisation complexe $m_X(\tau_\gamma)$ du mapping tore T_{τ_γ} qui est un représentant de la SU -parallélisation de Morita $m_X(T_{\tau_\gamma})$.

Rappelons que le σ -invariant associé à cette construction est défini comme suit : considérons une 4-variété W compacte connexe convenablement orientée de bord $\partial W = T_{\tau_\gamma}$. La trivialisation complexe $m_X(\tau_\gamma)$, stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal sortant relativement à W , définit une section $m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$ du $SU(4)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}W)_{\mathbf{C}}$ au-dessus du bord de W , ainsi :

$$\sigma(T_{\tau_\gamma}, m_X(\tau_\gamma)) = \langle p_1(\mathbf{T}W, m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}), \mu_W \rangle - 3 \text{ sign } W.$$

Le but est maintenant de construire une telle 4-variété qui nous permettra de calculer facilement ce σ -invariant.

4.3.1 Construction d'une bonne 4-variété W_γ

Soit \mathbf{H}_γ une 3-variété² de bord Σ_g qui a l'homologie d'un corps en anses et telle que γ borde un disque dans \mathbf{H}_γ . Soit \mathcal{D} un disque plongé dans \mathbf{H}_γ bordant γ comme dans la figure 4.9. Considérons un voisinage orienté paramétré $I_\gamma \times \mathcal{D}$ de \mathcal{D} et notons $M := \mathbf{H}_\gamma \setminus (\text{int}(I_\gamma \times \mathcal{D}))$.

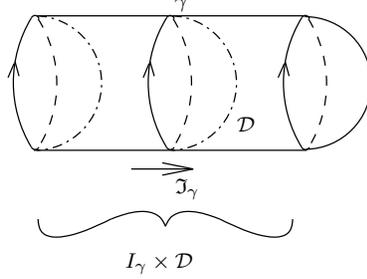


FIG. 4.9 – $I_\gamma \times \mathcal{D}$

Puisque γ borde un disque dans \mathbf{H}_γ , le twist de Dehn τ_γ se prolonge en un difféomorphisme $\tilde{\tau}_\gamma$ de \mathbf{H}_γ défini sur M par l'identité, et sur $I_\gamma \times \mathcal{D}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} : I_\gamma \times \mathcal{D} &\rightarrow I_\gamma \times \mathcal{D} \\ (t, r e^{i\theta}) &\rightarrow (t, r e^{i(\theta - 2\pi t)}). \end{aligned}$$

Notons W_γ la 4-variété obtenue de $I \times \mathbf{H}_\gamma$ en identifiant $-\{0\} \times \mathbf{H}_\gamma$ et $\{1\} \times \mathbf{H}_\gamma$ via $\tilde{\tau}_\gamma$ comme suit :

$$W_\gamma = I \times \mathbf{H}_\gamma /_{(0,x) \sim (1, \tilde{\tau}_\gamma(x))}.$$

Par la suite, nous aurons intérêt à la voir comme obtenue de $I \times M$ et de $I \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ de la manière suivante :

$$W_\gamma = (I \times M /_{(0,x) \sim (1,x)}) \bigcup_{\substack{\{t\} \times \mathcal{D}_i \sim \{t,i\} \times \mathcal{D} \\ i=0,1}} (I \times I_\gamma \times \mathcal{D} /_{(0,x) \sim (1, \tilde{\tau}(x))}).$$

où $\mathcal{D}_i := \{i\} \times \mathcal{D} \subset M$, $i = 0, 1$.

Le théorème de Wall de [Wa] nous permet de calculer la signature de cette 4-variété :

Proposition 4.3.2. *La signature de W_γ est nulle.*

²On peut toujours construire une telle variété en recollant des $I \times D^2$ à la 3-variété $I \times \Sigma_{g,1}$ le long de g courbes essentielles correctement choisies.

Preuve de la proposition 4.3.2 : Nous utiliserons les notations de l'article [Wa] :

$$\begin{aligned}
Y_- &= I \times M /_{(0,x) \sim (1,x)} = S^1 \times M \\
Y_+ &= I \times I_\gamma \times \mathcal{D} /_{(0,x) \sim (1, \bar{\tau}(x))} \\
X_0 &= I \times (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1) / \sim = I \times \partial I_\gamma \times \mathcal{D} / \sim \\
X_- &= S^1 \times (M \setminus \text{int}(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1)) \\
X_+ &= I \times I_\gamma \times \partial \mathcal{D} / \sim \\
Z &= I \times (\partial \mathcal{D}_0 \cup \partial \mathcal{D}_1) / \sim = I \times \partial I_\gamma \times \partial \mathcal{D} / \sim
\end{aligned}$$

On calcule alors les groupes d'homologie $H_1(Z; \mathbf{Z})$, $H_1(X_0; \mathbf{Z})$, $H_1(X_+; \mathbf{Z})$ et $H_1(X_-; \mathbf{Z})$. On obtient

$$\begin{aligned}
A &= \text{Ker}(H_1(Z; \mathbf{R}) \rightarrow H_1(X_0; \mathbf{R})) \\
&= \langle [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_0]; [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \text{Ker}(H_1(Z; \mathbf{R}) \rightarrow H_1(X_+; \mathbf{R})) \\
&= \langle [S^1 \times \{x_0\}] - [S^1 \times \{x_1\}]; [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_0] - [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \text{Ker}(H_1(Z; \mathbf{R}) \rightarrow H_1(X_-; \mathbf{R})) \\
&= \begin{cases} \langle [S^1 \times \{x_0\}] - [S^1 \times \{x_1\}]; [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_0], [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_1] \rangle & \text{si } \gamma \text{ est une courbe séparante} \\ \langle [S^1 \times \{x_0\}] - [S^1 \times \{x_1\}]; [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_0] - [\{x\} \times \partial \mathcal{D}_1] \rangle & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dans tous les cas, } V &= \frac{B \cap (A+C)}{(B \cap A) + (B \cap C)} = 0 \text{ d'où} \\
\text{sign } W_\gamma &= \text{sign } V = 0.
\end{aligned}$$

□

Conséquence : La 4-variété W_γ est connexe compacte orientée de bord le mapping tore T_{τ_γ} . Elle nous permet donc de calculer le σ -invariant $\sigma(T_{\tau_\gamma}, m_X(\tau_\gamma))$. Puisque que sa signature est nulle, on est ramené à un calcul d'obstruction

$$\sigma(T_{\tau_\gamma}, m_X(\tau_\gamma)) = \langle p_1(\mathbf{T}W_\gamma, m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}), \mu_{W_\gamma} \rangle .$$

Avant de passer à ce calcul d'obstruction, intéressons-nous à l'orientation de W_γ : la classe fondamentale μ_{W_γ} est le générateur de $H^4(W_\gamma, \partial W_\gamma; \mathbf{Z})$ qui est compatible avec l'orientation de ∂W_γ donnée par $m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$.

Nous avons également un choix naturel d'orientation de W_γ induit par la structure produit de $I \times \mathbf{H}_\gamma$ et les orientations préférées de I et \mathbf{H}_γ : notons μ'_{W_γ} le générateur de $H^4(W_\gamma, \partial W_\gamma; \mathbf{Z})$ associé à ce choix.

La question est alors de comparer ces orientations : il sera plus convenient d'utiliser l'orientation issue de la structure produit. En explicitant μ'_{W_γ} et en comparant avec l'ordre des vecteurs de $m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$, nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 4.3.3. $\mu_{W_\gamma} = -\mu'_{W_\gamma}$.

Preuve : Notons \mathcal{N}_S le champ de vecteurs de Σ_g normal sortant relativement à \mathbf{H}_γ : il induit un sous-fibré ν_S de rang 1 de $(\mathbf{TH}_\gamma)|_{\Sigma_g}$. L'orientation préférée de \mathbf{H}_γ est celle qui est compatible avec la décomposition en somme de Whitney $(\mathbf{TH}_\gamma)|_{\Sigma_g} = \nu_S \oplus \mathbf{T}\Sigma_g$. Ainsi, l'orientation de $I \times \mathbf{H}_\gamma$ donnée par la structure produit induit la décomposition en somme de Whitney :

$$\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma)|_{I \times \Sigma_g} = (\mathbf{T}I \times \Sigma_g) \oplus (I \times \nu_S) \oplus (I \times \mathbf{T}\Sigma_g).$$

Le champ de vecteurs de ∂W_γ normal sortant relativement à W_γ est le champ de vecteurs induit par \mathcal{N}_S et constant le long de I : c'est donc une trivialisatoin de $I \times \nu_S$. Remarquons que $m_X(\tau_\gamma)$ provient d'une trivialisatoin complexe de $\mathbf{T}(I \times \Sigma_g)$ muni de l'orientation induite par la structure produit. Ainsi l'orientation compatible avec $m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$ est celle qui est compatible avec la somme de Whitney

$$(I \times \nu_S) \oplus (\mathbf{T}I \times \Sigma_g) \oplus (I \times \mathbf{T}\Sigma_g).$$

Par conséquent, $\mu_{W_\gamma} = -\mu'_{W_\gamma}$.

□

Dans la suite du chapitre, nous considèrerons le fibré tangent $\mathbf{T}W_\gamma$ muni de l'orientation induite par la structure produit. Notons $m'_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$ la section du (nouveau) $SU(4)$ -fibré associé au-dessus de ∂W_γ obtenue de $m_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$ en échangeant l'ordre des deux premiers vecteurs du champ de repères : elle est donc donnée par

- la direction préférée de I ,
- le champ de vecteurs normal sortant relativement à W_γ ,
- la section \hat{s}_X du S^3 -fibré $((I \times \mathbf{T}\Sigma_g)_{\mathbb{C}})_0$.

Nous obtenons alors l'égalité

$$d_X(\tau_\gamma) = - \langle p_1(\mathbf{T}W_\gamma, m'_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}), \mu'_{W_\gamma} \rangle .$$

L'idée est alors de nous ramener à un calcul de première classe de Pontrjagin du $SU(4)$ -fibré associé au $\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma)$, muni de l'orientation produit, relative à tout le bord. Pour cela, il nous faut prolonger $m'_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$ à $\partial I \times \mathbf{H}_\gamma$.

4.3.2 Petite digression : fixons une trivialisatoin complexe de \mathbf{TH}_γ .

Revenons au corps en anses \mathbf{H}_γ défini précédemment. Nous voulons fixer une trivialisatoin complexe de \mathbf{TH}_γ .

Pour cela, on considère une extension du champ de vecteurs complexifié $X_{\mathbb{C}}$ à Σ_g . Stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal sortant, elle

induit une section β_Σ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{TH}_\gamma)_\mathbb{C}$ au-dessus de Σ_g . Il n'y a aucune obstruction à prolonger cette section à \mathbf{H}_γ tout entier³.

Dans un premier temps, nous voulons la fixer sur le voisinage orienté $I_\gamma \times \mathcal{D}$. Tout d'abord, on prolonge le champ de vecteurs normal sortant sur $I_\gamma \times S^1$ relativement à $I_\gamma \times \mathcal{D}$ comme dans la figure 4.10. Notons \mathcal{N} ce champ

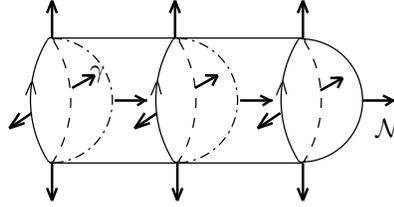


FIG. 4.10 – champ de vecteurs \mathcal{N}

de vecteurs non singulier sur $I_\gamma \times \mathcal{D}$. Il détermine une décomposition du fibré tangent

$$\mathbf{T}(I_\gamma \times \mathcal{D}) = \nu \oplus \eta$$

où η et ν sont des fibrés vectoriels réels orientés de rang 2 et 1 respectivement. On remarque que cette somme de Whitney ne correspond pas à la décomposition canonique d'un fibré produit et que

$$\eta|_{I_\gamma \times S^1} = \mathbf{T}(I_\gamma \times S^1) \quad \text{et} \quad \eta|_{\{t\} \times \mathcal{D}} = \mathbf{T}(\{t\} \times \mathcal{D}) \quad \forall t \in I_\gamma.$$

Le champ de vecteurs non singulier X induit une section du S^1 -fibré η_0 au-dessus de $I_\gamma \times S^1$. Nous pouvons supposer que X est constant le long de I_γ . Chercher à prolonger $X|_{I_\gamma \times S^1}$ à $I_\gamma \times \mathcal{D}$ en une section constante le long de I_γ revient à chercher à prolonger $X|_\gamma$ à \mathcal{D} .

Proposition 4.3.4. *La classe d'Euler relative $e(\mathbf{T}\mathcal{D}, X|_\gamma)$ vérifie*

$$\langle e(\mathbf{T}\mathcal{D}, X|_\gamma), \mu_{\mathcal{D}} \rangle = n_\gamma^X - 1$$

Preuve : Remarquons que le champ de vecteurs \mathcal{A} décrit dans la figure 4.11 est bien défini sur \mathcal{D} .

La classe d'Euler relative $\langle e(\mathbf{T}\mathcal{D}, X|_\gamma), \mu_{\mathcal{D}} \rangle$ est alors le nombre de tours que fait X le long de γ par rapport à \mathcal{A} . Rappelons que n_γ^X est le nombre de tours que fait X par rapport à \mathfrak{I}_γ le long de γ . Puisque \mathfrak{I}_γ fait -1 tour par rapport à \mathcal{A} , on obtient :

$$\langle e(\mathbf{T}\mathcal{D}, X|_\gamma), \mu_{\mathcal{D}} \rangle = n_\gamma^X - 1.$$

□

³car $H^4(\mathbf{H}_\gamma, \partial\mathbf{H}_\gamma; \mathbf{Z})$ est trivial.

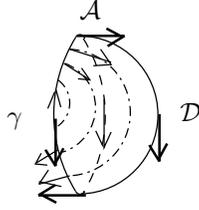


FIG. 4.11 – champ de vecteurs \mathcal{A}

Si $n_\gamma^X = 1$, on peut prolonger X à $I_\gamma \times \mathcal{D}$ en une section de η_0 constante le long de I_γ . On notera \tilde{s}_X son complexifié.

Si $n_\gamma^X - 1$ est non nul, on prolonge X à $I_\gamma \times \mathcal{D}$ en dehors de voisinages réguliers des courbes

$$\bigcup_{j=1, \dots, |n_\gamma^X - 1|} \epsilon' I_\gamma \times \{y_j\}$$

où ϵ' est le signe de $n_\gamma^X - 1$ et où les y_j sont des points 2 à 2 distincts de $\text{int}(\mathcal{D})$. On notera s_X cette extension. On étend son complexifié à $I_\gamma \times \mathcal{D}$ en une section \tilde{s}_X du S^3 -fibré $(\eta_{\mathbf{C}})_0$ de sorte que \tilde{s}_X soit constante le long de I_γ sur chaque voisinage régulier de ces courbes d'obstruction.

En stabilisant à gauche par le champ de vecteurs complexe $\mathcal{N}_{\mathbf{C}}$, la section \tilde{s}_X induit une trivialisatation complexe $\beta_{I_\gamma \times \mathcal{D}}$ de $\mathbf{T}(I_\gamma \times \mathcal{D})$.

Rappelons que $M = \mathbf{H}_\gamma \setminus (\text{int}(I_\gamma) \times \mathcal{D})$. La section β_Σ de fibré $\mathbf{P}(\mathbf{TH}_\gamma)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\partial \mathbf{H}_\gamma = \Sigma_g$ prolongée par $\beta_{I_\gamma \times \mathcal{D}}$ induit une section du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de ∂M . Il n'y a pas d'obstruction à la prolonger à M tout entier⁴. On fixe une telle extension β_M . Recollée à $\beta_{I_\gamma \times \mathcal{D}}$, la section β_M induit une trivialisatation complexe $\beta_{\mathbf{H}_\gamma}$ bien définie de \mathbf{TH}_γ .

4.3.3 Preuve du théorème 4.3.1

Revenons au calcul d'obstruction qui nous intéresse :

$$d_X(\tau_\gamma) = \langle p_1(\mathbf{T}W_\gamma, m'_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}), \mu'_{W_\gamma} \rangle .$$

Nous voulons nous ramener à un calcul de première classe de Pontrjagin de fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma)_{\mathbf{C}})$ relative à tout le bord. En particulier, la trivialisatation complexe $m'_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}$ peut être vue comme une section de ce $SU(4)$ -fibré au-dessus de $I \times \partial \mathbf{H}_\gamma$. On peut alors la prolonger à $-\{0\} \times \mathbf{H}_\gamma$ en utilisant le paragraphe précédent. On va chercher à prolonger cette dernière en une

⁴car $H^4(M, \partial M)$ est trivial.

section $\tilde{m}_X(\tau_\gamma)$ au-dessus de $\partial(I \times \mathbf{H}_\gamma)$ de sorte que $\tilde{m}_X(\tau_\gamma)$ se recolle lors de l'identification de $-\{0\} \times \mathbf{H}_\gamma$ avec $\{1\} \times \mathbf{H}_\gamma$ via $\tilde{\tau}_\gamma$: on aura alors l'égalité

$$< p_1(\mathbf{T}W_\gamma, m'_X(\tau_\gamma)_{\text{stab}}), \mu'_{W_\gamma} > = < p_1(\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma), \tilde{m}_X(\tau_\gamma)), \mu_{I \times \mathbf{H}_\gamma} > .$$

Construction de $\tilde{m}_X(\tau_\gamma)$.

Tout d'abord, intéressons-nous à $\partial I \times M$: on considère le champ de repères complexe β_M sur $\{0\} \times M$ stabilisé à gauche par la direction préférée de I . Puisque $\tilde{\tau}_\gamma$ est l'identité sur M , on prolonge $m_X(\tau_\gamma)$ de la même façon sur $\{1\} \times M$.

Il nous faut encore définir $\tilde{m}_X(\tau_\gamma)$ sur $\partial I \times I_\gamma \times \mathcal{D}$. La somme de Whitney $\mathbf{T}(I_\gamma \times \mathcal{D}) = \nu \oplus \eta$ induit la décomposition du fibré

$$\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma)|_{I \times I_\gamma \times \mathcal{D}} = \mathbf{T}(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}) = (\mathbf{T}I \times I_\gamma \times \mathcal{D}) \oplus (I \times \nu) \oplus (I \times \eta).$$

On considère la section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma)_{\mathbf{C}})$ définie au-dessus de $\{0\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ par :

- le complexifié du champ de vecteurs \mathfrak{J} induit par la direction préférée de I ,
- le champ de vecteurs $\mathcal{N}_{\mathbf{C}}$,
- la section \tilde{s}_X vue comme section de $(I \times \eta_{\mathbf{C}})_0$ au-dessus de $\{0\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$.

Comment doit-on définir le champ de repères complexe sur $\{1\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ pour qu'il coïncide avec la section de $\mathbf{P}\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma)_{\mathbf{C}}$ définie ci-dessus sur $\{0\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ lors du recollement ? On remarque que τ_γ agit trivialement sur les champs de vecteurs \mathcal{N} et \mathfrak{J} . Il nous suffit donc de définir une «bonne» section de $\mathbf{P}(I \times \eta)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\{1\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$.

Si $n_\gamma^X = 1$ alors \tilde{s}_X est le complexifié d'un champ de vecteurs non singulier⁵ s_X qui prolonge $X|_{I_\gamma \times S^1}$ à $I_\gamma \times \mathcal{D}$. Aussi, on peut définir le champ de vecteurs non singulier $(\tilde{\tau}_\gamma)_* s_X$. Son complexifié définira une section de $\mathbf{P}(I \times \eta)_{\mathbf{C}}$ qui conviendra.

Si $n_\gamma^X - 1$ est non nul, alors \tilde{s}_X est le complexifié du champ de vecteurs non singulier s_X défini sur $I_\gamma \times \mathcal{D}$ en dehors de voisinages réguliers des courbes

$$\bigcup_{j=1, \dots, |n_\gamma^X - 1|} \epsilon' I_\gamma \times \{y_j\}.$$

On considère sur $\{1\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ le champ de vecteurs non singulier $(\tau_\gamma)_*(s_X)$: il est défini en dehors des voisinages réguliers des courbes

$$\bigcup_{j=1, \dots, |n_\gamma^X - 1|} \epsilon'(\tau_\gamma)(I_\gamma \times \{y_j\})$$

⁵La notation s_X est déjà utilisée dans le cas $n_\gamma^X \neq 1$. Aussi, s_X sera l'extension «maximale» de X à $I_\gamma \times \mathcal{D}$ en tant que champ de vecteurs non singulier réel.

représentées dans la figure 4.12.

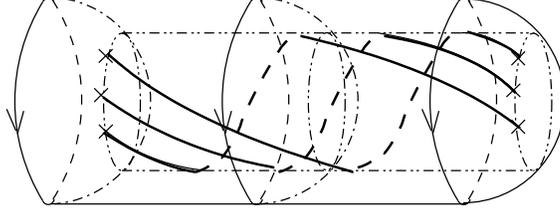


FIG. 4.12 – Courbes d'obstruction de $(\tau_\gamma)_*(s_X)$

On prolonge son complexifié par le même procédé que d'habitude en une section $(\tau_\gamma)_*(\tilde{s}_X)$ de $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times \eta))_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\{1\} \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ qui conviendra.

Nous venons de construire une section $\tilde{m}_X(\tau_\gamma)$ de $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma))_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\partial(I \times \mathbf{H}_\gamma)$ qui prolonge $m_X(\tau_\gamma)$ et qui vérifie

$$d_X(\tau_\gamma) = - \langle p_1(\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma), \tilde{m}_X(\tau_\gamma)), \mu_{I \times \mathbf{H}_\gamma} \rangle .$$

Le calcul de $d_X(\tau_\gamma)$ se ramène au calcul d'une deuxième classe de Chern relative du fibré $(I \times \eta)_{\mathbf{C}}$.

Remarquons que $\tilde{m}_X(\tau_\gamma)$ se prolonge naturellement⁶ à $I \times M$ de manière constante de long de I . Cette extension induit une section \hat{m}_X de $\mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}))_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D})$. Par concentration d'obstruction, nous avons l'égalité suivante :

$$\langle p_1(\mathbf{T}(I \times \mathbf{H}_\gamma), \tilde{m}_X(\tau_\gamma)), \mu_{I \times \mathbf{H}_\gamma} \rangle = \langle p_1(\mathbf{T}(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}), \hat{m}_X), \mu_{I \times I_\gamma \times \mathcal{D}} \rangle$$

où $\mu_{I \times I_\gamma \times \mathcal{D}}$ correspond à l'orientation produit de $I \times I_\gamma \times \mathcal{D}$.

La direction préférée de I et le champ de vecteurs \mathcal{N} induisent des sections de $\mathbf{P}(\mathbf{T}I \times I_\gamma \times \mathcal{D})$ et $\mathbf{P}(I \times \nu)$ respectivement ainsi qu'une injection

$$(I \times \eta)_0 \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}))$$

et, par passage au complexifié,

$$(I \times \eta_{\mathbf{C}})_0 \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{T}(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}))_{\mathbf{C}}.$$

Par construction, le champ de repères complexe \hat{m}_X est défini par une section \tilde{S} de $(I \times \eta_{\mathbf{C}})_0$ au-dessus de $\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D})$ stabilisée à gauche par

⁶Cette extension est donnée par la direction préférée de I (qui définit une section constante de $\mathbf{P}(\mathbf{T}I \times M)_{\mathbf{C}}$), et par la section de $\mathbf{P}(I \times \mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ induite de β_M et constante le long de I .

la direction préférée de I et par le champ de vecteurs $\mathcal{N}_{\mathbf{C}}$ (dans cet ordre), aussi

$$\begin{aligned} d_X(\tau_\gamma) &= - \langle p_1(\mathbf{T}(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}), \hat{m}_X), \mu_{I \times I_\gamma \times \mathcal{D}} \rangle \\ &= \langle c_2((I \times \eta)_{\mathbf{C}}, \tilde{\mathcal{S}}), \mu_{I \times I_\gamma \times \mathcal{D}} \rangle . \end{aligned}$$

Le cobord $d_X(\tau_\gamma)$ est un cup produit relatif de classes d'Euler relatives.

Le but est d'utiliser la même stratégie que dans la preuve du théorème du cocycle d'intersection en passant par l'isomorphisme

$$(I \times \eta_{\mathbf{C}})_0 \simeq -(I \times \eta \oplus I \times \eta)_0.$$

Décomposons le bord $\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D})$ comme le recollement standard de deux tores

$$\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}) = (\partial(I \times I_\gamma) \times \mathcal{D}) \cup (I \times I_\gamma \times \partial\mathcal{D}).$$

Rappelons comment est construite la section $\tilde{\mathcal{S}}$ sur ces deux tores suivant les valeurs de n_γ^X .

Examinons le cas du tore $I \times I_\gamma \times \partial\mathcal{D}$: $\tilde{\mathcal{S}}$ est le complexifié d'une section de $(I \times \eta)_0$

- définie sur tout $I \times I_\gamma \times \partial\mathcal{D}$ lorsque $n_\gamma^X = 0$,
- et définie sur $I \times I_\gamma \times \partial\mathcal{D}$ privé des courbes $\mathcal{L}_i = \epsilon \{x_i\} \times \partial\mathcal{D}$, $i = 1, \dots, |n_\gamma^X|$, lorsque n_γ^X est non nul.

En ce qui concerne le tore $\partial(I \times I_\gamma) \times \mathcal{D}$: $\tilde{\mathcal{S}}$ est le complexifié d'une section de $(I \times \eta)_0$

- définie sur tout $\partial(I \times I_\gamma) \times \mathcal{D}$ lorsque $n_\gamma^X = 1$
- définie en dehors de voisinages réguliers des $|n_\gamma^X - 1|$ courbes

$$\mathcal{K}_j = \epsilon'((-\{0\} \times I_\gamma \times \{y_j\}) \cup (I \times \partial I_\gamma \times \{y_j\}) \cup (\{1\} \times \tau_\gamma(I_\gamma \times \{y_j\})))$$

pour $j = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1|$, lorsque n_γ^X est différent de 1.

Les courbes \mathcal{K}_j , $j = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1|$, sont représentées dans la figure 4.13.

Nous noterons \mathcal{L} l'ensemble de ces courbes d'obstruction et \mathcal{S} la section de $(I \times \eta)_0$ ainsi définie en dehors d'un voisinage régulier \mathcal{V} de l'entrelacs \mathcal{L} . On peut identifier \mathcal{V} à $\mathcal{L} \times D^2$ comme d'habitude. Le champ de vecteurs complexe $\tilde{\mathcal{S}}$ est obtenu comme extension du complexifié de \mathcal{S} constante par rapport à \mathcal{L} le long de $\mathcal{V} \simeq \mathcal{L} \times D^2$.

Considérons deux copies disjointes \mathcal{L}_- et \mathcal{L}_+ de l'entrelacs \mathcal{L} dans \mathcal{V} et notons \mathcal{W}_- et \mathcal{W}_+ des voisinages réguliers de ces copies dans \mathcal{V} . On suppose que ces derniers sont disjoints. Par rétraction, \mathcal{S} se prolonge en dehors de

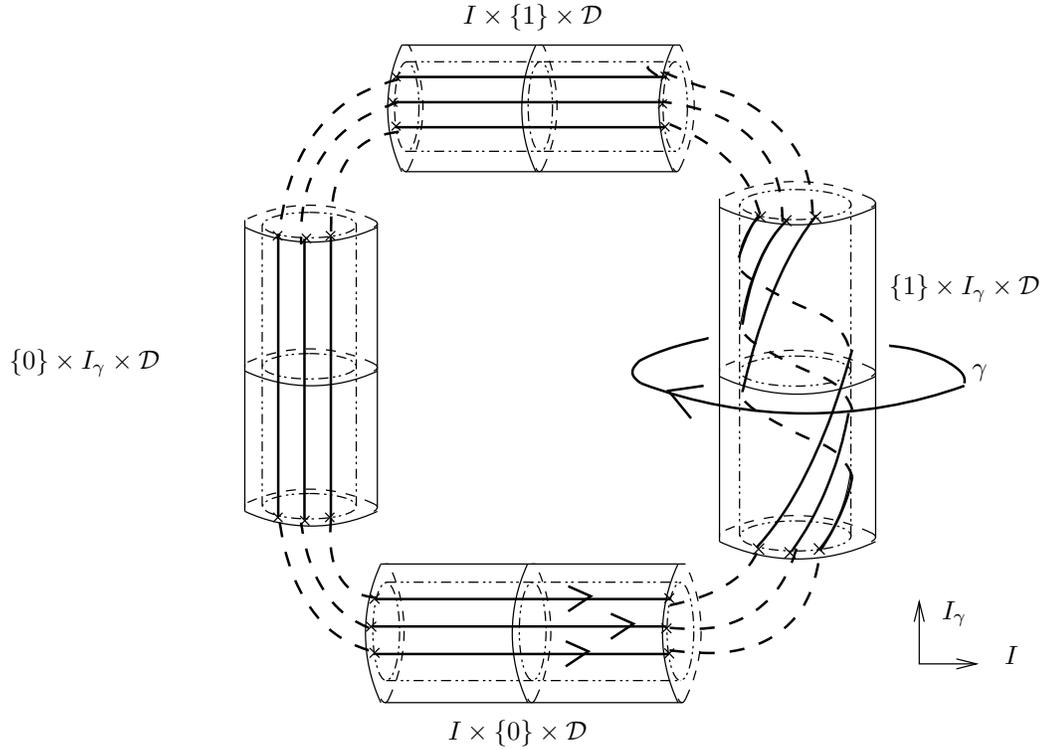


FIG. 4.13 – courbes d’obstruction \mathcal{K}_j , $j = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1|$ avec $\epsilon' = 1$.

\mathcal{W}_- (resp. \mathcal{W}_+) en une section \mathcal{S}_- (resp. \mathcal{S}_+).

Les champs de vecteurs non singuliers \mathcal{S}_- et \mathcal{S}_+ définissent une section $\mathcal{S}_- \oplus \mathcal{S}_+$ de $(I \times \eta \oplus I \times \eta)_0$ au-dessus de $\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D})$ constante par rapport à \mathcal{L} le long de $\mathcal{V} \simeq \mathcal{L} \times D^2$. Par conséquent, comme dans la preuve du cocycle d’intersection, nous pouvons montrer que $\mathcal{S}_- \oplus \mathcal{S}_+$ est homotope à la section du S^3 -fibré $(I \times \eta \oplus I \times \eta)_0$ induite de $\tilde{\mathcal{S}}$ via l’isomorphisme $(I \times \eta_{\mathbf{C}})_0 \simeq (I \times \eta \oplus I \times \eta)_0$. Puisque cet isomorphisme renverse l’orientation :

$$\begin{aligned} c_2(I \times \eta_{\mathbf{C}}, \tilde{\mathcal{S}}) &= -e(I \times \eta \oplus I \times \eta, \mathcal{S}_- \oplus \mathcal{S}_+) \\ &= -e(I \times \eta, \mathcal{S}_-) \cup e(I \times \eta, \mathcal{S}_+) \end{aligned}$$

$$\text{Et } d_X(\tau_\gamma) = - \langle e(I \times \eta, \mathcal{S}_-) \cup e(I \times \eta, \mathcal{S}_+), \mu_{I \times I_\gamma \times \mathcal{D}} \rangle.$$

Calcul de ce cup produit.

Puisque la classe d’Euler $e(I \times \eta, \mathcal{S}_\pm)$ vit dans un deuxième groupe de cohomologie relatif, \mathcal{S}_\pm se prolonge en dehors d’une union \mathcal{U}_\pm de surfaces plongées dans $I \times I_\gamma \times \mathcal{D}$ et de bord l’entrelacs \mathcal{L}_\pm . Nous pouvons supposer qu’elles constituent des surfaces de Seifert pour chaque composante connexe

de \mathcal{L}_\pm .

Calculer le cup produit des classes d'Euler relatives $e(I \times \eta, \mathcal{S}_-) \cup e(I \times \eta, \mathcal{S}_+)$ revient à calculer l'intersection algébrique de $\mathcal{U}_- \cdot \mathcal{U}_+$. Puisque \mathcal{U}_- et \mathcal{U}_+ sont des unions de surfaces de Seifert plongées dans $I \times I_\gamma \times \mathcal{D} \simeq D^4$ dont les bords sont des noeuds plongés dans $\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D}) \simeq S^3$, l'intersection algébrique $\mathcal{U}_- \cdot \mathcal{U}_+$ est donnée par l'enlacement des entrelacs $\mathcal{L}_- \cdot \mathcal{L}_+$ dans $\partial(I \times I_\gamma \times \mathcal{D})$. Par conséquent,

$$d_X(\tau_\gamma) = -\mathcal{L}_- \cdot \mathcal{L}_+$$

Si n_γ^X est différent de 1 et de 0, alors \mathcal{L}_- et \mathcal{L}_+ sont deux copies de $(\bigcup_{i=1, \dots, |n_\gamma^X|} \mathcal{L}_i) \cup (\bigcup_{j=1, \dots, |n_\gamma^X-1|} \mathcal{K}_j)$. On notera

$$\mathcal{L}_\pm = \left(\bigcup_{i=1, \dots, |n_\gamma^X|} \mathcal{L}_i^\pm \right) \cup \left(\bigcup_{j=1, \dots, |n_\gamma^X-1|} \mathcal{K}_j^\pm \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} d_X(\tau_\gamma) &= - \sum_{i,k=1}^{|n_\gamma^X|} \mathcal{L}_i^- \cdot \mathcal{L}_k^+ \\ &\quad - \sum_{i=1}^{|n_\gamma^X|} \sum_{j=1}^{|n_\gamma^X-1|} (\mathcal{L}_i^- \cdot \mathcal{K}_j^+ + \mathcal{K}_j^- \cdot \mathcal{L}_i^+) \\ &\quad - \sum_{j,l=1}^{|n_\gamma^X-1|} \mathcal{K}_j^- \cdot \mathcal{K}_l^+. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^- \cdot \mathcal{L}_k^+ &= 0 \quad \forall i, k \\ \mathcal{L}_i^- \cdot \mathcal{K}_j^+ &= \mathcal{K}_j^- \cdot \mathcal{L}_i^+ = -\epsilon \epsilon' \quad \forall i \forall j = 1 \\ \mathcal{K}_j^- \cdot \mathcal{K}_l^+ &= 1 \quad \forall j, l \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque n_γ^X est différent de 0 et 1, les entiers $n_\gamma^X - 1$ et n_γ^X sont de même signe; aussi $\epsilon = \epsilon'$ et

$$\begin{aligned} d_X(\tau_\gamma) &= 2n_\gamma^X(n_\gamma^X - 1) - (n_\gamma^X - 1)^2 \\ &= (n_\gamma^X + 1)(n_\gamma^X - 1) \end{aligned}$$

Si $n_\gamma^X = 0$, alors \mathcal{L}_- et \mathcal{L}_+ sont deux copies d'un noeud \mathcal{K}_1 et

$$d_X(\tau_\gamma) = -\mathcal{K}_1^- \cdot \mathcal{K}_1^+ = -1.$$

Si $n_\gamma^X = 1$, alors \mathcal{L}_- et \mathcal{L}_+ sont deux copies d'un noeud \mathcal{L}_1 et

$$d_X(\tau_\gamma) = -\mathcal{L}_1^- \cdot \mathcal{L}_1^+ = 0.$$

En conclusion,

$$d_X(\tau_\gamma) = (n_\gamma^X + 1)(n_\gamma^X - 1).$$

Calcul de $d_X(\tau_\gamma^{-1})$

On peut faire le même raisonnement pour τ_γ^{-1} : dans ce cas, l'entrelacs d'obstruction sera l'ensemble des

- $|n_\gamma^X|$ courbes

$$\mathcal{L}_i = -\epsilon\{x_i\} \times S^1 \quad j = 1, \dots, |n_\gamma^X|,$$

- et des $|n_\gamma^X - 1|$ courbes

$$\mathcal{K}_j = \epsilon'((-\{0\} \times I_\gamma \times \{y_j\}) \cup (I \times \partial I_\gamma \times \{y_j\}) \cup (\{1\} \times \tau_\gamma^{-1}(I_\gamma \times \{y_j\}))) \quad j = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1|.$$

Les courbes \mathcal{K}_j sont représentées dans la figure 4.14.

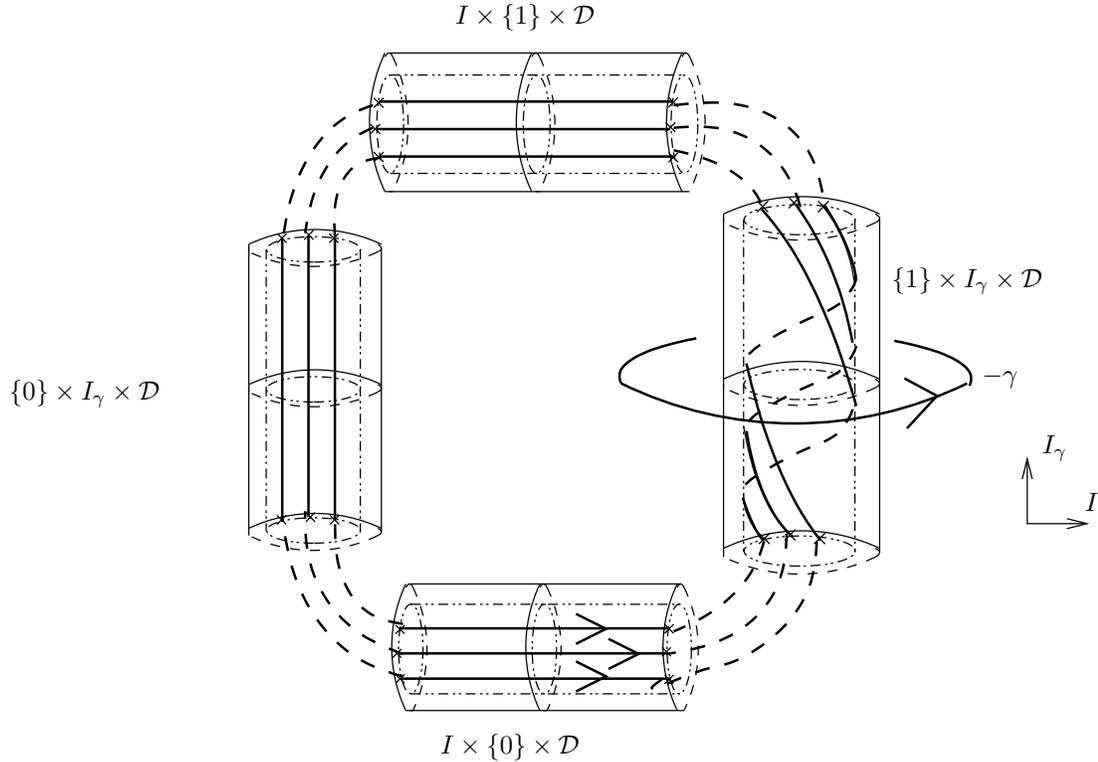


FIG. 4.14 – courbes d'obstruction \mathcal{K}_j , $j = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1|$, pour τ_γ^{-1} et $\epsilon' = 1$.

Comme précédemment, nous aurons à calculer les enlacements suivants

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i^- \cdot \mathcal{L}_k^+ &= 0 & \forall i, k = 1, \dots, |n_\gamma^X| \\
\mathcal{L}_i^- \cdot \mathcal{K}_j^+ &= \mathcal{K}_j^- \cdot \mathcal{L}_i^+ = \epsilon \epsilon' & \forall i = 1, \dots, |n_\gamma^X| \quad \forall j = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1| \\
\mathcal{K}_j^- \cdot \mathcal{K}_l^+ &= -1 & \forall j, l = 1, \dots, |n_\gamma^X - 1|
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
d_X(\tau_\gamma^{-1}) &= -2n_\gamma^X(n_\gamma^X - 1) + (n_\gamma^X - 1)^2 \\
&= -(n_\gamma^X + 1)(n_\gamma^X - 1)
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.3.5. Si γ est une courbe simple fermée séparante de genre h alors on retrouve bien $d_X(\tau_\gamma) = 4h(h - 1)$.

Quatrième partie

Extensions des cocycles de Meyer et d'intersection aux cobordismes d'homologie

Chapitre 5

Extension centrale et cocycle de Meyer pour cobordismes d'homologie

Dans ce chapitre, Σ sera une surface orientée de genre g sans bord ($\Sigma = \Sigma_g$) ou à une composante de bord ($\Sigma = \Sigma_{g,1}$). Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs complexe non singulier sur Σ : il peut être vu comme une trivialisatation complexe de $\mathbf{T}\Sigma$.

A tout cobordisme d'homologie M sur Σ , on va associer une section $\tilde{\mathbf{X}}_M$ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbb{C}}$ au-dessus de ∂M induite par \mathbf{X} . On considèrera alors l'ensemble $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ des SU -parallélisations de M relative à $\tilde{\mathbf{X}}_M$: il s'agira d'un espace affine au-dessus de $H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Nous fixerons une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et \mathbf{Z} que nous appellerons σ -invariant relatif. Ce dernier sera préservé par la relation de bordisme.

Ensuite, nous définirons une relation d'équivalence sur l'ensemble des cobordismes d'homologie M sur Σ munis d'une SU -parallélisation relative à $\tilde{\mathbf{X}}_M$. L'ensemble quotient $\hat{\mathcal{H}}^{\mathbf{X}}(\Sigma)$ sera en bijection avec $\mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}$ et sera muni d'une structure de groupe naturelle induite par la loi produit de $\mathcal{H}(\Sigma)$. Nous obtiendrons ainsi une extension centrale non triviale

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}^{\mathbf{X}}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{H}(\Sigma) \rightarrow 1 \quad (*).$$

Si l'on considère une autre trivialisatation complexe \mathbf{X}' de $\mathbf{T}\Sigma$, l'extension centrale $\hat{\mathcal{H}}^{\mathbf{X}'}(\Sigma)$ associée sera équivalente à (*). De plus, restreinte au groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$, (*) est équivalente à l'extension centrale définie au paragraphe 3.1.

La donnée d'une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et \mathbf{Z} définit une section préférée de (*) qui prolonge la section d'Atiyah définie au paragraphe

3.1. Nous verrons que son cocycle associé est un cocycle de signature qui «prolonge» le cycle de Meyer.

Convention : On supposera fixé le plongement de $\Sigma_{g,1}$ dans Σ_g .

5.1 Existence d'un champ de vecteurs «temps» sur un cobordisme d'homologie

Pour commencer, nous allons définir la notion de champ de vecteurs temps sur les cobordismes d'homologie et énoncer des résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Dans le cas des mapping cylindres, il existe un champ de vecteurs tangent non singulier préféré induit par la direction préférée de I . La question est de savoir s'il existe un tel champ de vecteurs préféré dans le cas des cobordismes d'homologie.

Soit (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie au-dessus de Σ . Son bord est identifié au bord de $I \times \Sigma$ par un difféomorphisme orienté $\Phi_M : \partial(I \times \Sigma) \rightarrow \partial M$ qui correspond à i^- sur $\Sigma \times \{0\}$ et à i^+ sur $\Sigma \times \{1\}$. La direction préférée de I définit un champ de vecteurs sur $\partial(I \times \Sigma)$: il induit via Φ_M un champ de vecteurs non singulier \mathfrak{J}_M sur ∂M .



FIG. 5.1 – Description du champ de vecteurs \mathfrak{J}_M .

Définition 5.1.1. On appellera *champ de vecteurs temps* sur M un champ de vecteurs tangent non singulier sur M qui prolonge \mathfrak{J}_M .

Nous avons alors le théorème d'existence :

Théorème 5.1.2. *Tout cobordisme d'homologie sur Σ possède un champ de vecteurs temps.*

Remarque : Ce théorème est un résultat homotopique, il ne dit rien sur la dynamique (il existe des courbes intégrales non compactes). Par conséquent, on ne peut conclure à l'existence d'une structure produit sur les cobordismes d'homologie en général. Remarquons d'ailleurs que l'inclusion du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ dans $\mathcal{H}_{g,1}$ est stricte d'après [GL].

Preuve :

– **Cas où $\Sigma = \Sigma_g$:** Soit (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie au-dessus sur Σ_g . Considérons le champ de vecteurs normal entrant sur Σ^- : il définit une section du fibré en sphère $(\mathbf{T}M)_0$ au-dessus de Σ^- . Par définition, la cohomologie relative $H^*(M, \Sigma^-; \mathbf{Z})$ est triviale donc il se prolonge à M de manière unique à homotopie près relativement à Σ^- . Notons \mathcal{N}_M une telle extension.

Le champ de vecteurs non singulier \mathcal{N}_M définit un sous-fibré ν de $\mathbf{T}M$ de rang 1. Notons $\xi = \nu^\perp$ le sous-fibré orthogonal :

$$\mathbf{T}M = \nu \oplus \xi.$$

Le fibré ξ est un fibré vectoriel réel orienté de rang 2. Restreint à Σ^- , il correspond au fibré tangent de Σ^- : $\xi|_{\Sigma^-} = \mathbf{T}\Sigma^-$. Le plongement i^- induit alors l'injection de fibrés :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}\Sigma_g & \longrightarrow & E(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_g & \xrightarrow{i^-} & M \end{array}$$

La classe d'Euler absolue $e(\xi) \in H^2(M; \mathbf{Z})$ est l'obstruction primaire à l'existence d'une section de ξ_0 , et par functorialité, on a

$$e(\mathbf{T}\Sigma_g) = (i^-)^* e(\xi) \in H^2(\Sigma_g; \mathbf{Z}).$$

Rappelons que la classe d'Euler absolue $e(\mathbf{T}\Sigma_g)$ est mesurée par la caractéristique d'Euler de la surface ainsi :

$$\langle e(\mathbf{T}\Sigma_g), \mu_{\Sigma_g} \rangle = 2 - 2g.$$

Lorsque l'on restreint ξ à Σ^+ , on obtient la classe d'Euler $e(\xi|_{\Sigma^+}) \in H^2(\Sigma^+; \mathbf{Z})$ qui vérifie l'égalité suivante via les isomorphismes en cohomologie $(i^-)^*$ et $(i^+)^*$:

$$\langle e(\xi|_{\Sigma^+}), \mu_{\Sigma^+} \rangle = 2 - 2g.$$

Nous pouvons donc supposer que $\xi|_{\Sigma^+}$ coïncide avec $\mathbf{T}\Sigma^+$ et, dans ce cas, le champ de vecteurs $(\mathcal{N}_M)|_{\Sigma^+}$ est le champ de vecteurs normal sortant en Σ^+ : par conséquent c'est un champ de vecteurs temps sur M .

– **Cas où $\Sigma = \Sigma_{g,1}$:** Soit (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie au-dessus sur $\Sigma_{g,1}$. Notons \overline{M} son cobordisme d'homologie sur Σ_g associé (cf paragraphe¹ 1.2.). Il existe donc un champ de vecteurs temps $\mathcal{N}_{\overline{M}}$ sur

¹Rappelons que le bord de M est identifié au bord de $I \times \Sigma_{g,1}$ par un difféomorphisme orienté $\Phi_M : \partial(I \times \Sigma_{g,1}) \rightarrow \partial M$. Le cobordisme d'homologie \overline{M} est obtenu de M en recollant un $I \times D^2$ le long de $\Phi_M(I \times \partial\Sigma_{g,1})$ via Φ_M .

M . Nous pouvons supposer que \mathcal{N}_M est donné par la direction préférée de I le long de $I \times D^2$ et on en déduit l'existence d'un champ de vecteurs temps sur M par restriction.

□

Remarque 5.1.3. Dans les deux cas, remarquons que le champ de vecteur temps \mathcal{N}_M n'est pas unique à homotopie près : il y a un double paramétrage car le deuxième et le troisième groupes d'homotopie de la sphère S^2 sont infinis cycliques : il y a donc un paramétrage d'abord en $H^2(M, \partial M; \mathbf{Z})$ puis en $H^3(M, \partial M; \mathbf{Z})$.

Remarque 5.1.4. Dans le cas d'un mapping cylindre, il existe également plusieurs champs de vecteurs temps. Le problème est de caractériser le champ de vecteurs temps préféré donné par la direction de I sans utiliser la structure produit de $I \times \Sigma$.

Voici un lemme dont nous aurons besoin par la suite :

Lemme 5.1.5. *Soient M et N deux cobordismes d'homologie bordants au-dessus de Σ et soit W un bordisme entre M et N . Il existe deux champs de vecteurs tangents sur W , \mathcal{A}_W et \mathcal{N}_W , non singuliers et indépendants tels que*

- \mathcal{A}_W est normal sortant sur M et normal entrant sur N ,
- et \mathcal{N}_W restreint à M (resp N) est un champ de vecteurs temps sur M (resp N).

Preuve :

- **Cas où $\Sigma = \Sigma_g$:** Considérons le champ de vecteurs normal sortant² sur $M \subset W$. La cohomologie relative $H^*(W, M; \mathbf{Z})$ étant triviale, il se prolonge en un champ de vecteurs \mathcal{A}_W tangent et non singulier sur W et une telle extension est unique à homotopie relative à M près. Il induit une décomposition du fibré tangent

$$\mathbf{T}W = \eta_W \oplus (\eta_W^\perp)$$

où η_W est un fibré vectoriel de rang 1. Remarquons que, par construction, $(\eta_W)|_M$ correspond au fibré normal de M relativement à W . Par conséquent, $(\eta_W^\perp)|_M$ correspond au fibré tangent $\mathbf{T}M$.

Soit \mathcal{N}_M un champ de vecteurs temps sur $\mathbf{T}M$. Il peut être prolongé à W en tant que section au S^3 -fibré $(\eta_W^\perp)_0$, de manière unique à homotopie relative à M près. Notons \mathcal{N}_W une telle extension. Elle induit une décomposition en somme de Whitney

$$\eta_W^\perp = \nu_W \oplus \xi_W$$

²On considère qu'il correspond à la direction opposée à la direction préférée de I sur les lieux d'attachement épaissis.

où ν_W et ξ_W sont des fibrés vectoriels réels orientés de genre 1 et 2 respectivement.

On remarque que les champs de vecteurs non singuliers \mathcal{N}_W et \mathcal{A}_W sont indépendants et que l'espace tangent $\mathbf{T}W$ se décompose en somme de Whitney comme suit

$$\mathbf{T}W = \eta_W \oplus \nu_W \oplus \xi_W.$$

Il nous reste à encore montrer que l'on peut supposer que \mathcal{N}_W et \mathcal{A}_W sont comme on veut sur N . Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant induit par les inclusions canoniques $M \hookrightarrow W$ et $N \hookrightarrow W$ et les plongements i_M^\pm et i_N^\pm :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^2(M; \mathbf{Z}) & & \\ & i_M^- \nearrow & \downarrow \simeq & \nwarrow i_M^+ & \\ H^2(\Sigma; \mathbf{Z}) & & H^2(W; \mathbf{Z}) & & H^2(\Sigma; \mathbf{Z}). \\ & i_N^- \searrow & \uparrow \simeq & \swarrow i_N^+ & \\ & & H^2(N; \mathbf{Z}) & & \end{array}$$

Par functorialité des classes d'Euler, nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & e((\xi_W)|_M) & & \\ & i_M^- \nearrow & \downarrow & \nwarrow i_M^+ & \\ e((\xi_W)|_\Sigma) & & e(\xi_W) & & e((\xi_W)|_\Sigma). \\ & i_N^- \searrow & \uparrow & \swarrow i_M^- & \\ & & e((\xi_W)|_N) & & \end{array}$$

Ainsi $\langle e(\xi_W|_{\Sigma^+}), \mu_{\Sigma^+} \rangle = \langle e(\xi_W|_{\Sigma^-}), \mu_{\Sigma^-} \rangle = 2 - 2g$. On peut donc supposer que $\xi_W|_N = \mathbf{T}N$ et qu'il existe un champ de vecteurs temps \mathcal{N}_N sur N tel que la décomposition en somme de Whitney qu'il induit soit de la forme

$$\mathbf{T}N = \nu_N \oplus (\xi_W)|_N.$$

Le champ de vecteurs \mathcal{N}_N et le champ de vecteurs normal entrant sur N relativement à W définissent des sections indépendantes de $(\eta_W \oplus \nu_W)_0$ au-dessus de N qui coïncident sur ∂N respectivement avec \mathcal{N}_W et \mathcal{A}_W . Nous pouvons donc supposer que $(\mathcal{N}_W)|_N = \mathcal{N}_N$ et que $(\mathcal{A}_W)|_N$ est le champ de vecteurs normal entrant.

- **Cas où $\Sigma = \Sigma_{g,1}$** : Si W est un bordisme entre deux cobordismes d'homologie M et N , alors $\overline{W} := W \cup -I_2 \times I_1 \times D^2$ constitue un bordisme entre \overline{M} et \overline{N} . On pourra alors supposer que $\mathcal{N}_{\overline{W}}$ (resp. $\mathcal{A}_{\overline{W}}$) est

donné par la direction préférée de I_1 (resp. I_2) le long de $I_2 \times I_1 \times D^2$.
Le cas $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ est alors obtenu par restriction à W .

□

Remarque 5.1.6. Dans ces deux cas $\Sigma = \Sigma_g$ et $\Sigma = \Sigma_{g,1}$, remarquons que le champ de vecteurs \mathcal{A}_W n'est pas unique à homotopie relative au bord de W près : il y a un paramétrage en $H^4(W, \partial W; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

5.2 Cobordismes d'homologie, SU -parallélisations et extension centrale

Dans ce paragraphe, nous allons définir une classe d'équivalence d'extensions centrales pour $\mathcal{H}(\Sigma)$ qui généralise celle construite au chapitre 3 pour le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Remarquons que les extensions centrales du chapitre 3 sont définies en considérant les mappings tores : on peut les voir comme des 3-variétés sans bord construites à partir des mapping cylindres. L'idée est alors de construire de manière naturelle des 3-variétés sans bord à partir des cobordismes d'homologie.

5.2.1 Définition d'une 3-variété sans bord associée à un cobordisme d'homologie

Nous pouvons associer à tout cobordisme d'homologie une 3-variété sans bord définie comme suit :

Définition 5.2.1. – Soit (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie au-dessus de Σ_g . La 3-variété T_M est la 3-variété compacte connexe orientée sans bord obtenue de M en identifiant $-\Sigma^-$ avec Σ^+ :

$$T_M = M /_{i^-(x)=i^+(x), x \in \Sigma_g}.$$

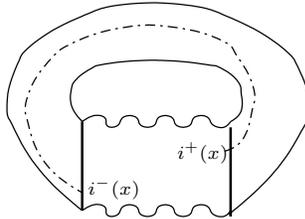


FIG. 5.2 – 3-Variété fermée T_M obtenue de M en identifiant $-\Sigma^-$ avec Σ^+ .

- Si (M, i^\pm) est un cobordisme d'homologie au-dessus de $\Sigma_{g,1}$, considérons \overline{M} son cobordisme d'homologie associé sur Σ_g . On notera alors T_M la 3-variété sans bord $T_{\overline{M}}$.

Remarquons que si M est un mapping cylindre alors T_M est le mapping tore associé.

Pour tout cobordisme d'homologie M , nous pouvons définir l'ensemble $\mathcal{P}_{su}(T_M)$ des SU -parallélisations de T_M . Il est muni d'une structure d'espace affine au-dessus de $H^3(T_M, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Rappelons que le σ -invariant fixe une bijection préférée

$$\sigma : \mathcal{P}_{su}(T_M) \rightarrow \mathbf{Z}$$

5.2.2 SU -parallélisations relatives et cobordismes d'homologie

Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs complexe non singulier sur Σ : rappelons qu'il peut être vu comme une trivialisatation complexe de $\mathbf{T}\Sigma$ et que \mathbf{X} est unique à homotopie près.

Dans ce paragraphe, nous allons associer à tout cobordisme d'homologie M sur Σ une section $\tilde{\mathbf{X}}_M$ de $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de ∂M induite de \mathbf{X} . Ceci va nous permettre de définir l'ensemble $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ des SU -parallélisations de M relatives à $\tilde{\mathbf{X}}_M$: il s'agit d'un espace affine au-dessus $H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. En revenant au cas des 3-variétés sans bord, nous pourrons fixer une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et \mathbf{Z} que nous appellerons σ -invariant relatif. Enfin, nous verrons que le σ -invariant relatif est préservé par l'homotopie entre deux champ de vecteurs complexes non singuliers de $\mathbf{T}\Sigma$ et par la relation de bordisme.

Soit (M, i^\pm) un cobordisme sur Σ . Rappelons que son bord est identifié au bord de $I \times \Sigma$ via un difféomorphisme noté $\Phi_M : \partial(I \times \Sigma) \rightarrow \partial M$ et que les plongements i^- et i^+ correspondent aux restrictions de Φ_M à $\{0\} \times M$ et à $\{1\} \times M$ respectivement.

Considérons la trivialisatation complexe de $\mathbf{T}(I \times \Sigma)$ constante le long de I et induite par la direction préférée de I et \mathbf{X} (dans cet ordre). Via le difféomorphisme Φ_M , elle induit une section \mathbf{X}_M du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de ∂M : voir figure 5.3. Remarquons que :

- sur Σ^- , \mathbf{X}_M est donné par le champ de vecteurs normal entrant relativement à M et $i_*^- \mathbf{X}$,
- et sur Σ^+ , \mathbf{X}_M est donné par le champ de vecteurs normal sortant relativement à M et $i_*^+ \mathbf{X}$.

Il n'y a pas d'obstruction à prolonger \mathbf{X}_M en une trivialisatation complexe de $\mathbf{T}M$.

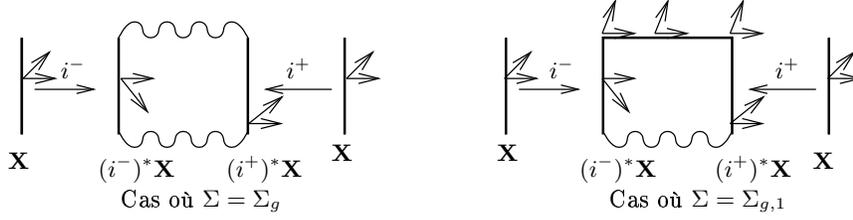


FIG. 5.3 – Description de \mathbf{X}_M

Définition 5.2.2. L'ensemble $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ est l'ensemble des SU -parallélisations de M relatives à \mathbf{X}_M : c'est un espace affine au-dessus de $H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

Dans la proposition suivante, nous allons définir une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et \mathbf{Z} et en énoncer quelques propriétés. Dans les faits, nous aurons besoin de montrer tous les résultats de la proposition pour le cas $\Sigma = \Sigma_g$ avant de pouvoir le faire pour le cas $\Sigma = \Sigma_{g,1}$.

Proposition 5.2.3. Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs complexe non singulier sur Σ . Pour tout cobordisme d'homologie (M, i^\pm) au-dessus de Σ , il existe une bijection canonique

$$\mathcal{P}_{su}(T_M) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$$

qui est affine au-dessus de l'isomorphisme «d'excision»

$$H^3(T_M; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}).$$

Via le σ -invariant $\sigma : \mathcal{P}_{su}(T_M) \rightarrow \mathbf{Z}$, cette bijection définit un σ -invariant relatif

$$\sigma_r : \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Si \mathbf{X}' est un autre champ de vecteurs complexe non singulier sur Σ , alors l'homotopie entre \mathbf{X} et \mathbf{X}' induit une bijection entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}')$ qui préserve le σ -invariant relatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbf{Z} \\ \simeq \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}') & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbf{Z} \end{array}$$

Preuve :

– Cas où $\Sigma = \Sigma_g$

Soit (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie au-dessus de Σ_g . La 3-variété T_M peut être vue comme obtenue de $M \cup (I \times \Sigma_g)$ en recollant Σ_M^+ avec $-\{0\} \times \Sigma_g$ et $-\Sigma_M^-$ avec $\{1\} \times \Sigma_g$.

A homotopie près, il existe une unique section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}(T_M)_{\mathbf{C}})$ au-dessus de $I \times \Sigma_g$: considérons la section $\tilde{\mathbf{X}}$ constante le long de I induite par la direction préférée de I et \mathbf{X} . Pour toute SU -parallélisation de T_M , il existe un représentant qui coïncide avec $\tilde{\mathbf{X}}$ sur $I \times \Sigma_g$. Ainsi toute SU -parallélisation de T_M est entièrement déterminée, à homotopie relative à $I \times \Sigma_g$ près, par une extension de $\tilde{\mathbf{X}}$ à T_M . Notons $\mathcal{P}_{su}(T_M, \tilde{\mathbf{X}})$ l'ensemble des SU -parallélisations de T_M relatives à $\tilde{\mathbf{X}}$. Nous obtenons alors une bijection $\mathcal{P}_{su}(T_M) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(T_M, \tilde{\mathbf{X}})$ affine au-dessus de l'isomorphisme de paire $H^3(T_M; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(T_M, I \times \Sigma_g; \mathbf{Z})$. Chercher à prolonger $\tilde{\mathbf{X}}$ à T_M revient à chercher à prolonger \mathbf{X}_M à M en tant que section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$. Ceci induit une bijection canonique $\mathcal{P}_{su}(T_M, \tilde{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ qui est affine au-dessus de l'isomorphisme d'excision $H^3(T_M, I \times \Sigma_g; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(M, \partial M; \mathbf{Z})$. Nous obtenons ainsi une bijection canonique $\mathcal{P}_{su}(T_M) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ affine au-dessus de l'isomorphisme canonique $H^3(T_M; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(M, \partial M; \mathbf{Z})$. La bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(T_M)$ et \mathbf{Z} donnée par le σ -invariant induit une bijection préférée que nous appellerons σ -invariant relatif :

$$\sigma_{\mathbf{X}} : \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

Remarque 5.2.4. – La bijection inverse de $\mathcal{P}_{su}(T_M) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ peut être décrite simplement de la manière suivante : soit α une trivialisatation complexe de M qui prolonge \mathbf{X}_M . Le recollement de $\alpha|_{-\Sigma_M^-}$ et de $\alpha|_{\Sigma_M^+}$ définit une trivialisatation complexe γ de $\mathbf{T}T_M$. La bijection canonique $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(T_M)$ envoie la classe de α dans $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ sur la classe d'homotopie de γ .
– Pour calculer le σ -invariant relatif, nous nous ramènerons au calcul d'un σ -invariant via la bijection canonique $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(T_M)$ ci-dessus.

Soient \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_1 deux champs de vecteurs complexes non singuliers sur Σ_g . Nous voulons montrer que l'homotopie entre \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_1 induit une bijection entre les espaces affines $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}_0)$ et $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}_1)$ qui préserve le σ -invariant relatif. Pour cela, nous allons considérer la 4-variété orientée $I \times M$ ainsi qu'une homotopie h entre \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_1 : elle induit une homotopie h_M entre les sections $(\mathbf{X}_0)_M$ et $(\mathbf{X}_1)_M$ de $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de ∂M .

Soit α_1 une trivialisatation complexe de $\mathbf{T}M$ qui prolonge $(\mathbf{X}_1)_M$. On peut lui associer une section du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(I \times \mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $M' := (\{1\} \times M) \cup (I \times \partial M)$ définie :

- par α_1 sur $\{1\} \times M$,
- et par l'homotopie h_M sur $I \times \partial M$.

Puisque la cohomologie relative $H^*(I \times M, M'; \mathbf{Z})$ est nulle, cette section peut se prolonger à $I \times M$ de manière unique à homotopie relative

à M' près. Notons α une telle extension et α_0 sa restriction à $\{0\} \times M$: α_0 définit alors une trivialisaton complexe de M qui prolonge $(\mathbf{X}_0)_M$. Le but est alors de vérifier que $\sigma_{\mathbf{X}_0}(M, \alpha_0) = \sigma_{\mathbf{X}_1}(M, \alpha_1)$. Pour cela, nous allons nous ramener au calcul d'un σ -invariant et considérer la 4-variété $I \times T_M$ obtenue de $I \times M$ en identifiant $I \times (-\Sigma_M^-)$ avec $I \times \Sigma_M^+$. La section α de $\mathbf{P}(I \times \mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ induit, via le recollement, une section γ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(I \times \mathbf{T}T_M)_{\mathbf{C}}$. γ induit une homotopie entre $\gamma_0 := \gamma|_{\{0\} \times T_M}$ et $\gamma_1 := \gamma|_{\{1\} \times T_M}$: les trivialisations complexes γ_0 et γ_1 de $\mathbf{T}T_M$ auront donc même σ -invariant (cf remarque 1.6.10). Nous avons donc les égalités

$$\begin{aligned}\sigma(T_M, \gamma_0) &= \sigma_{\mathbf{X}_0}(M, \alpha_0) \\ \sigma(T_M, \gamma_1) &= \sigma_{\mathbf{X}_1}(M, \alpha_1)\end{aligned}$$

par la remarque 5.2.4. Ceci achève la preuve dans le cas $\Sigma = \Sigma_g$. Nous noterons par la suite σ_r le σ -invariant relatif.

- **Cas où $\Sigma = \Sigma_{g,1}$** Nous voulons nous ramener au cas précédent grâce au lemme suivant :

Lemme 5.2.5. *Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs non singulier sur $\Sigma_{g,1}$. Considérons (M, i^\pm) un cobordisme d'homologie au-dessus de $\Sigma_{g,1}$ et $(\overline{M}, \overline{i}^\pm)$ son cobordisme d'homologie associé au-dessus de Σ_g . Pour toute extension $\overline{\mathbf{X}}$ de \mathbf{X} à Σ_g , il existe une bijection canonique*

$$\mathcal{P}_{su}(\overline{M}, \overline{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$$

qui est affine au-dessus de «l'isomorphisme d'excision»

$$H^3(\overline{M}, \partial\overline{M}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}).$$

De plus, si $\overline{\mathbf{X}}'$ est une autre extension de \mathbf{X} à Σ_g , alors nous avons le diagramme commutatif de bijections canoniques suivant

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{P}_{su}(\overline{M}, \overline{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{P}_{su}(\overline{M}, \overline{\mathbf{X}}') \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) & \end{array}$$

qui est affine au-dessus des isomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc}H^3(\overline{M}, \partial\overline{M}; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\quad id \quad} & H^3(\overline{M}, \partial\overline{M}; \mathbf{Z}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}) & \end{array}$$

Le cas $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ se déduit alors du cas $\Sigma = \Sigma_g$ par "restriction".

□

Il nous reste à prouver le lemme précédent :

Preuve du lemme 5.2.5 Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs complexe non singulier sur $\Sigma_{g,1}$ et soit $\overline{\mathbf{X}}$ une extension de \mathbf{X} à Σ_g . On notera

- \mathbf{X}_M la section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de ∂M induite par \mathbf{X} ,
 - et $\overline{\mathbf{X}}_{\overline{M}}$ la section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}\overline{M})_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $\partial \overline{M}$ induite par $\overline{\mathbf{X}}$
- construites comme précédemment.

A homotopie relative à $\partial \overline{M}$ près, il existe une unique extension de $\overline{\mathbf{X}}_{\overline{M}}$ à $\partial \overline{M} \cup (I \times D^2)$. Considérons l'unique extension $s_{\overline{\mathbf{X}}}$ qui soit constante le long de I sur $I \times D^2$.

Toute SU -parallélisation de \overline{M} relative à $\overline{\mathbf{X}}_{\overline{M}}$ est entièrement déterminée, à homotopie relative à $\partial \overline{M} \cup (I \times D^2)$ près, par une extension de $s_{\overline{\mathbf{X}}}$ à \overline{M} . Par excision, toute SU -parallélisation de \overline{M} relative à $\overline{\mathbf{X}}_{\overline{M}}$ est donc entièrement déterminée, à homotopie relative à ∂M près, par une extension de \mathbf{X}_M à M . Nous obtenons donc une bijection canonique

$$\mathcal{P}_{su}(\overline{M}, \overline{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$$

qui est affine au-dessus de «l'isomorphisme d'excision»

$$H^3(\overline{M}, \partial \overline{M}; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(\overline{M}, \overline{M} \cup (I \times D^2); \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}).$$

Remarque 5.2.6. La bijection inverse peut se décrire aisément : soit α une trivialisatation complexe de M qui prolonge \mathbf{X}_M . Pour obtenir la trivialisatation complexe de \overline{M} associée qui prolonge $\overline{\mathbf{X}}_{\overline{M}}$, il suffit de prolonger α par $s_{\overline{\mathbf{X}}}$.

Soient $\overline{\mathbf{X}}_0$ et $\overline{\mathbf{X}}_1$ deux champs de vecteurs complexes non singulier sur Σ qui prolongent \mathbf{X} . Alors il existe une homotopie h entre $\overline{\mathbf{X}}_0$ et $\overline{\mathbf{X}}_1$ qui est l'identité sur $\Sigma_{g,1}$.

Soit α_0 une trivialisatation complexe de $\mathbf{T}\overline{M}$ qui prolonge $(\overline{\mathbf{X}}_0)_{\overline{M}}$: on peut supposer que α_0 corresponde à $s_{\overline{\mathbf{X}}_0}$ sur $I \times D^2$. Notons α la restriction de α_0 à M : α définit une trivialisatation complexe de M qui prolonge \mathbf{X}_M .

Considérons la 4-variété $I' \times \overline{M}$. Nous pouvons construire une section du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(I' \times \mathbf{T}\overline{M})_{\mathbf{C}}$ de la manière suivante :

- l'homotopie h entre $\overline{\mathbf{X}}_0$ et $\overline{\mathbf{X}}_1$ induit une homotopie \overline{h} entre les sections $s_{\overline{\mathbf{X}}_0}$ et $s_{\overline{\mathbf{X}}_1}$. Cette dernière peut être vue comme une section de $\mathbf{P}(I' \times \mathbf{T}\overline{M})_{\mathbf{C}}$ au-dessus de $I' \times I \times D^2$.
- \overline{h} est constante le long de $I' \times I \times \partial D^2$ et peut être recollée à la section de $(\mathbf{P}(I' \times \mathbf{T}\overline{M})_{\mathbf{C}})|_{I' \times M}$ constante le long de I' et induite par α .

La section obtenue restreinte à $\{1\} \times \overline{M}$, que l'on notera α_1 , induit une trivialisatation de $\mathbf{T}\overline{M}$ qui prolonge $(\overline{\mathbf{X}}_1)_{\overline{M}}$. Les trivialisatations complexes ont alors même σ -invariant relatif et nous obtenons le diagramme commutatif de

bijections canoniques

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_{su}(\overline{M}, \overline{\mathbf{X}}_0) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}_{su}(\overline{M}, \overline{\mathbf{X}}_1) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) &
 \end{array}$$

qui est affine au-dessus des isomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc}
 H^3(\overline{M}, \partial\overline{M}; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\quad id \quad} & H^3(\overline{M}, \partial\overline{M}; \mathbf{Z}) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}) &
 \end{array}$$

□

D'après la preuve de la proposition 5.2.3, nous avons le fait suivant :

Remarque 5.2.7. Soient \mathbf{X} et \mathbf{X}' deux trivialisations complexes de $\mathbf{T}\Sigma$ et soit M un cobordisme d'homologie sur Σ . Considérons α (resp. α') une trivialisations complexes de $\mathbf{T}M$ qui prolonge \mathbf{X}_M (resp. \mathbf{X}'_M).

Les couples (M, α) et (M, α') ont même σ -invariant relatif si et seulement si il existe une section de $\mathbf{P}(I \times \mathbf{T}M)_{\mathbf{C}}$ qui corresponde

- à α sur $\{0\} \times M$,
- à α' sur $\{1\} \times M$
- et qui soit induite sur $I \times \partial M$ via Φ_M par une homotopie entre \mathbf{X} et \mathbf{X}' stabilisée à gauche par la direction préférée de I .

Remarque 5.2.8. Le lemme 5.2.5 nous sera utile par la suite pour énoncer des résultats dans le cas général de $\Sigma = \Sigma_g$ ou $\Sigma_{g,1}$ en ne prouvant que le cas $\Sigma = \Sigma_g$: le cas $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ sera déduit du précédent par «restriction».

Maintenant que nous avons défini une bijection préférée entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et \mathbf{Z} , la question est de savoir si elle est compatible avec la relation de bordisme :

Proposition 5.2.9. *Soit \mathbf{X} un champ de vecteurs complexe non singulier sur Σ . Si M et N sont deux cobordismes d'homologie bordants alors il existe une bijection canonique entre $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ et $\mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X})$ induite par la relation de bordisme qui préserve le σ -invariant relatif. En d'autres termes, la relation de bordisme induit le diagramme commutatif de bijections canoniques suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbf{Z} \\
 \downarrow & & \parallel \\
 \mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X}) & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbf{Z}
 \end{array}$$

Preuve : D'après la remarque précédente, il nous suffit de prouver cette proposition seulement dans le cas $\Sigma = \Sigma_g$.

Soient (M, i^\pm) et (N, j^\pm) deux cobordismes d'homologie au-dessus de Σ_g . Supposons qu'ils soient bordants : il existe alors une 4-variété W de bord $\partial W = M \cup -N$ (où Σ_M^\pm est recollée avec $-\Sigma_N^\pm$) telle que les inclusions canoniques $M \hookrightarrow W$ et $N \hookrightarrow W$ induisent des isomorphismes en homologie. Rappelons que l'on considère W avec les lieux d'attachement de M avec $-N$ épaissis :

$$\partial W = M \cup (-\Sigma_M^+ \times I) \cup -N \cup (\Sigma_M^- \times I)$$

où

- Σ_M^+ est identifié avec $-\Sigma_M^+ \times \{0\}$,
- $-\Sigma_M^-$ avec $\Sigma_M^- \times \{0\}$,
- $-\Sigma_N^+$ avec $\Sigma_M^+ \times \{1\}$,
- Σ_N^- avec $-\Sigma_M^- \times \{1\}$.

D'après la proposition 5.1.5, il existe un champ de vecteurs non singulier \mathcal{A}_W sur W qui est normal sortant sur M et normal entrant sur N et donné par la direction préférée de I le long des lieux d'attachement épaissis. Il induit une décomposition en somme de Whitney de l'espace tangent $\mathbf{T}W = \nu \oplus \zeta$ où ν et $\zeta := \nu^\perp$ sont des fibrés vectoriels réels orientés de rang 1 et 3 respectivement. Remarquons que ζ admet les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \zeta|_M &= \mathbf{T}M, \\ \zeta|_N &= \mathbf{T}N. \end{aligned}$$

Soit α_M une trivialisatation complexe de M qui prolonge \mathbf{X}_M : elle peut être vue comme une section de $\mathbf{P}(\zeta)_{\mathbf{C}}$ au-dessus de M . La cohomologie relative $H^*(W, M; \mathbf{Z})$ étant triviale, α_M se prolonge à W de façon unique à homotopie relative à M près. Notons α_W une telle extension et α_N sa restriction à N . Puisque $\zeta|_N = \mathbf{T}N$, la section α_N définit une trivialisatation complexe de N . Via les identifications de Σ_M^\pm avec $-\Sigma_N^\pm$, α_N prolonge \mathbf{X}_N . Ainsi, nous avons une application bien définie

$$\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X})$$

qui envoie la classe d'homotopie relative à ∂M de α_M sur la classe d'homotopie relative à ∂N de α_N . A priori, elle dépend du choix du champ de vecteurs \mathcal{A}_W .

Nous voulons à présent montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbf{Z} \\ \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X}) & \xrightarrow{\sigma_r} & \mathbf{Z} \end{array}$$

Pour cela, revenons à des calculs de σ -invariant et considérons la 4-variété W' obtenue de W en identifiant $-\Sigma_M^+ \times I$ avec $\Sigma_M^- \times I$. (cf figure 5.4). Le bord de W' est $\partial W' = T_M \cup -T_N$.

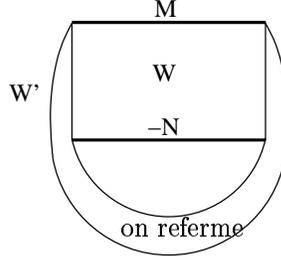


FIG. 5.4 – Construction de W' .

Par recollement, la décomposition de $\mathbf{T}W$ induit une décomposition du fibré tangent $\mathbf{T}W' = \nu' \oplus \zeta'$ où ν' et ζ' sont des fibrés vectoriels réels orientés de rang 1 et 3 induits par ν et ζ respectivement. Remarquons que

$$\begin{aligned}\zeta'|_{T_M} &= \mathbf{T}T_M, \\ \zeta'|_{T_N} &= \mathbf{T}T_N.\end{aligned}$$

Par recollement, le champ de vecteurs non singulier \mathcal{A}_W induit un champ de vecteurs non singulier $\mathcal{A}_{W'}$ sur W' et la section α_W de $\mathbf{P}(\zeta)_{\mathbb{C}}$ induit une section γ du $SU(3)$ -fibré $\mathbf{P}(\zeta')_{\mathbb{C}}$. Notons γ_M et γ_N les trivialisations complexes de $\mathbf{T}T_M$ et de $\mathbf{T}T_N$ induites de γ par restriction. D'après la proposition 5.2.3,

$$\begin{aligned}\sigma(T_M, \gamma_M) &= \sigma_r(M, \alpha_M), \\ \sigma(T_N, \gamma_N) &= \sigma_r(N, \alpha_N).\end{aligned}$$

Il nous reste alors à montrer que $\sigma(T_M, \gamma_M) = \sigma(T_N, \gamma_N)$. Pour cela, considérons une 4-variété Z compacte connexe orientée de bord $\partial Z = T_N$. On notera Z' la 4-variété obtenue en recollant Z et W' le long de T_N : Z' a pour bord T_M . Alors

$$\begin{aligned}\sigma(T_M, \gamma_M) &= \langle p_1(\mathbf{T}Z', \gamma_M), \mu_{Z'} \rangle - 3 \operatorname{sign} Z', \\ \sigma(T_N, \gamma_N) &= \langle p_1(\mathbf{T}Z, \gamma_N), \mu_Z \rangle - 3 \operatorname{sign} Z,\end{aligned}$$

où $p_1(\mathbf{T}Z', \gamma_M)$ (resp. $p_1(\mathbf{T}Z, \gamma_N)$) correspond³ à l'obstruction primaire à prolonger γ_M (resp. γ_N) stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal sortant relativement à Z' (resp. à Z).

³Rappelons que la première classe de Pontrjagin est en fait l'opposé de l'obstruction primaire.

Puisque γ stabilisée par le champ de vecteurs $\mathcal{A}_{W'}$ définit une section de $\mathbf{P}(\mathbf{T}W)_{\mathbf{C}}$ qui correspond aux section stabilisées γ_M sur T_M et à γ_N sur T_N , nous obtenons, grâce à la théorie de concentration d'obstruction, l'égalité suivante :

$$\langle p_1(\mathbf{T}Z', \gamma_M), \mu_{Z'} \rangle = \langle p_1(\mathbf{T}Z, \gamma_N), \mu_Z \rangle .$$

La variété Z' est obtenue de Z et W' en les recollant le long d'une 3-variété close donc, par le théorème d'additivité de Novikov,

$$\text{sign } Z' = \text{sign } W' + \text{sign } Z.$$

La signature de W' est nulle car W' a l'homologie de la 3-variété T_M . En effet, l'étude de la forme d'intersection sur $H_2(W'; \mathbf{Z}) = H_2(T_M; \mathbf{Z})$ peut donc se restreindre l'étude des 2-cycles vivant dans un collier du bord. Or on peut toujours les supposer disjoints.

Par conséquent,

$$\sigma(T_M, \gamma_M) = \sigma(T_N, \gamma_N).$$

Ceci est indépendant du champ de vecteurs \mathcal{A}_W choisi ainsi que des 4-variétés W et Z considérées.

□

Nous avons les corollaires suivants :

Corollaire 5.2.10. *Soient M et M' deux cobordismes d'homologie bordants : il existe un bordisme W entre M et M' . Considérons α (resp. α') une trivialisation complexe de $\mathbf{T}M$ (resp. $\mathbf{T}M'$) qui prolonge \mathbf{X}_M (resp. $\mathbf{X}_{M'}$).*

Les couples (M, α) et (M', α') ont même σ -invariant relatif si et seulement si il existe une section γ du $SU(4)$ -fibré $\mathbf{P}(\mathbf{T}W)_{\mathbf{C}}$ telle que γ corresponde

- à α stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal sortant sur M
- et à α' stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal entrant sur M' .

Corollaire 5.2.11. *Soient M et N deux cobordismes d'homologie bordants. La relation de bordisme induit une bijection affine canonique entre les espaces affines $\mathcal{P}_{su}(T_M)$ et $\mathcal{P}_{su}(T_N)$ qui préserve le σ -invariant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{su}(T_M) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{Z} \\ \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{P}_{su}(T_N) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{Z} \end{array}$$

Ceci nous permet de définir les ensembles $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ et $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$:

Définition 5.2.12. – L'ensemble $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ est l'ensemble des couples (M, α_M) , où M est un cobordisme d'homologie sur Σ et où α_M appartient à $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ quotienté par la relation d'équivalence :

$$(M, \alpha_M) \sim (N, \alpha_N) \begin{cases} M \text{ et } N \text{ sont bordants} \\ \text{et } \sigma_r(M, \alpha_M) = \sigma_r(N, \alpha_N). \end{cases}$$

– De même, on définit $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ comme l'ensemble des couples (M, γ_M) , où M est un cobordisme d'homologie sur Σ et où γ_M appartient à $\mathcal{P}_{su}(T_M)$, quotienté par la relation d'équivalence :

$$(M, \gamma_M) \sim (N, \gamma_N) \begin{cases} M \text{ et } N \text{ sont bordants} \\ \text{et } \sigma_r(T_M, \gamma_M) = \sigma_r(T_N, \gamma_N). \end{cases}$$

Si \mathbf{X}' est une autre trivialisation complexe de $\mathbf{T}\Sigma$, les propositions et corollaires précédents induisent naturellement le diagramme commutatif de bijections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}'} \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}. \end{array}$$

Montrons maintenant que ces ensembles peuvent être munis d'une structure d'extension centrale pour $\mathcal{H}(\Sigma)$.

5.2.3 Extension centrale pour le groupe $\mathcal{H}(\Sigma)$

Tout d'abord, nous allons définir une loi de groupe pour $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$.

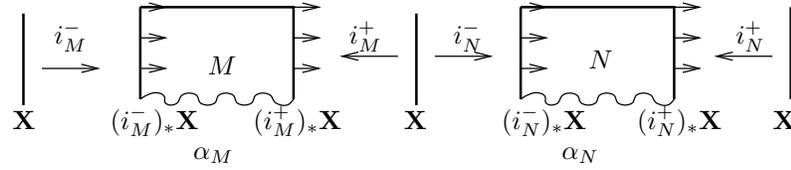
Loi sur $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$. Soient (M, i_M^\pm) et (N, i_N^\pm) deux cobordismes sur Σ . Il existe une application naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \times \mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X}) &\rightarrow \mathcal{P}_{su}(M.N, \mathbf{X}) \\ (\alpha_M, \alpha_N) &\mapsto \alpha_M \cdot \alpha_N \end{aligned}$$

où $\alpha_M \cdot \alpha_N$ est la SU -parallélisation relative de $\mathcal{P}_{su}(M.N, \mathbf{X})$ obtenue par recollement de α_M et α_N via les identifications Σ_M^+ et $-\Sigma_N^-$ comme dans la figure 5.2.3.

Cette application est compatible avec la relation de bordisme :

Lemme 5.2.13. Soient M et M' (resp N et N') deux cobordismes d'homologie bordants au-dessus de Σ . La relation de bordisme induit le diagramme



commutatif suivant où les flèches verticales sont des bijections canoniques (cf proposition 5.2.9)

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X}) \times \mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{su}(M.N, \mathbf{X}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{P}_{su}(M', \mathbf{X}) \times \mathcal{P}_{su}(N', \mathbf{X}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_{su}(M'.N', \mathbf{X})
\end{array}$$

Preuve : Soient α_M et $\alpha_{M'}$ (resp. α_N et $\alpha_{N'}$) des trivialisations complexes de $\mathbf{T}M$ et $\mathbf{T}M'$ (resp. $\mathbf{T}N$ et $\mathbf{T}N'$) qui prolongent \mathbf{X}_M et $\mathbf{X}_{M'}$ (resp. \mathbf{X}_N et $\mathbf{X}_{N'}$) respectivement et telles que les couples (M, α_M) et $(M', \alpha_{M'})$ (resp. (N, α_N) et $(N', \alpha_{N'})$) ont même σ -invariant relatif.

Le but est de montrer que $\sigma_r(M.N, \alpha_M.\alpha_N) = \sigma_r(M'.N', \alpha_{M'}.\alpha_{N'})$. Pour cela, considérons W (resp. Z) un bordisme entre M et M' (resp. N et N'). D'après le corollaire 5.2.10, il existe une trivialisatoin complexe α_W de $\mathbf{T}W$ (resp. α_Z de $\mathbf{T}Z$) vérifiant :

- α_W (resp. α_Z) restreinte à M (resp. à N) coïncide avec α_M (resp. α_N) stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal sortant,
- α_W (resp. α_Z) restreinte à M' (resp. à N') coïncide avec $\alpha_{M'}$ (resp. $\alpha_{N'}$) stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal entrant.

Soit V la 4-variété obtenue de $W \cup Z$ en identifiant $I \times \Sigma_M^+ \subset W$ avec $I \times \Sigma_N^- \subset Z$: elle a pour bord $M.N \cup (-M'.N')$. Via le recollement, α_W et α_Z induisent une trivialisatoin complexe de $\mathbf{T}V$ qui coïncide

- avec $\alpha_M.\alpha_N$ stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal sortant sur $M.N$,
- et avec $\alpha_{M'}.\alpha_{N'}$ stabilisée à gauche par le champ de vecteurs normal entrant sur $M'.N'$.

Par conséquent, les couples $(M.N, \alpha_M.\alpha_N)$ et $(M'.N', \alpha_{M'}.\alpha_{N'})$ ont même σ -invariant relatif (cf corollaire 5.2.10).

□

Nous obtenons une loi de groupe sur $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \times \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} & \rightarrow & \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \\
((M, \alpha_M), (N, \alpha_N)) & \mapsto & (M.N, \alpha_M.\alpha_N)
\end{array}$$

En effet, l'*élément neutre* est donné par la classe d'équivalence du couple $(I \times \Sigma, \alpha_0)$ où α_0 est la classe d'homotopie relative au bord de la trivialisatation complexe de $\mathbf{T}(I \times \Sigma)$ constante le long de I et induite par la direction préférée de I et \mathbf{X} . Remarquons que le σ -invariant relatif de cette SU -parallélisation de $I \times \Sigma$ est nul.

L'*inverse* d'un couple (M, α_M) est donné par le couple $(-M, -\alpha_M)$ où $-M$ est le cobordisme d'homologie M muni de l'orientation opposée et où $-\alpha_M$ est la trivialisatation complexe induite de α_M en changeant l'orientation du premier vecteur du champ de repères complexe.

L'ensemble $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ est en bijection avec $\mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}$ mais le groupe $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ n'est a priori pas isomorphe au groupe $\mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}$ muni de la loi induite par la structure produit. Nous verrons dans le paragraphe suivant quelle va être la loi de groupe associée à $\mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}$. Cependant, nous obtenons une suite exacte de groupes :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma) \longrightarrow 1 \quad (*)$$

où l'inclusion $i : \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ associe à tout entier n le cobordisme d'homologie trivial muni de l'unique SU -parallélisation de σ -invariant relatif égal à n . On voit alors que \mathbf{Z} , vu comme sous-groupe de $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$, est central. Par conséquent, $(*)$ est une extension centrale de $\mathcal{H}(\Sigma)$.

Si \mathbf{X} et \mathbf{X}' sont deux trivialisatations complexes de $\mathbf{T}\Sigma$, alors l'homotopie entre \mathbf{X} et \mathbf{X}' induit un isomorphisme de groupes $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}'}$ rendant les extensions centrales correspondantes équivalentes.

La bijection $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$ induit une loi de groupe sur $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$ qui ne dépend pas du choix de la trivialisatation complexe \mathbf{X} . On obtient alors une extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{H}(\Sigma) \longrightarrow 1$$

qui est équivalente à la précédente. Restreinte au groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$, elle correspond à l'extension centrale définie au chapitre 3, notée (\star) si $\Sigma = \Sigma_g$ ou (\star') si $\Sigma = \Sigma_{g,1}$.

5.3 Extension du cocycle de Meyer aux cobordismes d'homologie

Dans le cas des 3-variétés sans bord, le σ -invariant nous permet de définir une SU -parallélisation préférée : la SU -parallélisation d'Atiyah. Grâce au σ -invariant relatif, nous pouvons également définir une SU -parallélisation relative préférée de $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ pour tout cobordisme d'homologie M :

Définition 5.3.1. On appellera *SU-parallélisation relative d'Atiyah* α_M^0 pour \mathbf{X} du cobordisme d'homologie M l'unique élément de $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ ayant un σ -invariant relatif nul.

Cette caractérisation permet de définir une section associée de l'extension centrale $(*)$:

Définition 5.3.2. La *section d'Atiyah* \widehat{s}_0 pour \mathbf{X} est définie par

$$\begin{aligned} \widehat{s}_0 : \mathcal{H}_{g,1} &\rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^{\mathbf{X}} \\ M &\mapsto (M, \alpha_M^0) \end{aligned}$$

Remarquons que cette section est une section normalisée. Nous avons également la propriété immédiate suivante :

Proposition 5.3.3. *L'homotopie entre deux trivialisations complexes \mathbf{X} et \mathbf{X}' de $\mathbf{T}\Sigma_{g,1}$ préservent la section d'Atiyah relative. En d'autres termes, l'homotopie induit le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\Sigma) & \xrightarrow{\widehat{s}_0} & \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \\ \parallel & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{H}(\Sigma) & \xrightarrow{\widehat{s}_0} & \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}'} \end{array}$$

De même, la bijection $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}} \simeq \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$ définit une section \widehat{s}_0 de $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$.

Proposition 5.3.4. *Par construction, la section \widehat{s}_0 de $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$ prolonge la section d'Atiyah de (\star) . On l'appellera également section d'Atiyah de $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)$.*

Nous pouvons alors décrire le cocycle \widehat{c}_0 associé :

Théorème 5.3.5. *Le cocycle \widehat{c}_0 associé à la section d'Atiyah vérifie l'égalité suivante : pour tous cobordismes d'homologie M et N ,*

$$\widehat{c}_0(M, N) = 3 \operatorname{sign} \mathcal{M}_{M,N}$$

où $\mathcal{M}_{M,N}$ est la 4-variété compacte connexe orientée, décrite figure 5.5, de bord

$$\partial \mathcal{M}_{M,N} = T_M \cup T_N \cup -T_{M.N}$$

obtenue par recollement des variétés $I \times \overline{M.N}$ et $-I_2 \times I_1 \times \Sigma_g$ et où $\overline{M.N}$ désigne soit $M.N$ si $\Sigma = \Sigma_g$ soit le cobordisme d'homologie au-dessus de Σ_g associé à $M.N$ si $\Sigma = \Sigma_{g,1}$.

Par construction, le cocycle \widehat{c}_0 restreint au groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$ coïncide avec le cocycle 3τ où τ est le cocycle de Meyer.

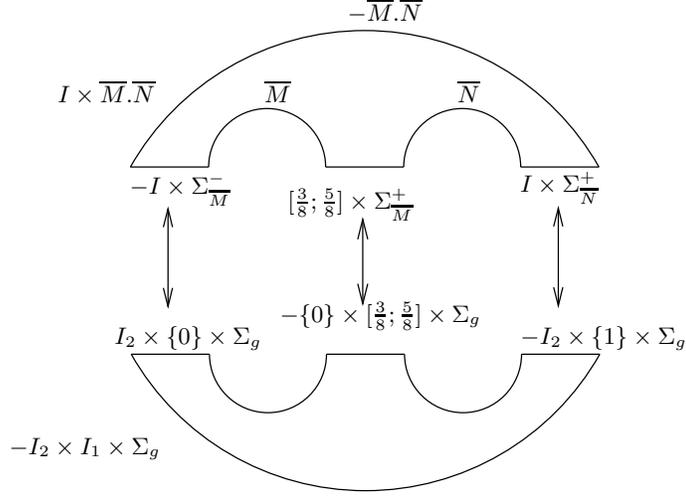


FIG. 5.5 – Construction de la 4-variété $\mathcal{M}_{M,N}$

Preuve : Il nous suffit de prouver le théorème dans le cas où $\Sigma = \Sigma_g$.

Fixons une trivialisatation complexe \mathbf{X} de $\mathbf{T}\Sigma_g$. Soient M et N deux cobordismes d'homologie au-dessus de Σ_g .

D'après [Br], le cocycle \widehat{c}_0 associé à la section d'Atiyah $\widehat{s}_0 : \mathcal{H}_g \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_g^{\mathbf{X}}$ est défini par l'égalité

$$\widehat{s}_0(M)\widehat{s}_0(N) = i(\widehat{c}_0(M, N))\widehat{s}_0(M.N)$$

où $i(\widehat{c}_0(M, N))$ est le cobordisme d'homologie trivial $I \times \Sigma_g$ muni de l'unique SU -parallélisation de σ -invariant relatif égal à $\widehat{c}_0(M, N)$.

Ainsi le groupe $\widehat{\mathcal{H}}_g^{\mathbf{X}}$ est isomorphe au groupe $\mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}$ muni de la loi

$$(M, m).(N, n) = (M.N, m + n + \widehat{c}_0(M, N)) \quad \forall M, N \in \mathcal{H}(\Sigma).$$

Puisque \widehat{s}_0 est une section normalisée, il en est de même pour \widehat{c}_0 i.e $\widehat{c}_0(M, I) = \widehat{c}_0(I, M) = 0$. L'entier $\widehat{c}_0(M, N)$ est le σ -invariant relatif du couple $(M.N, \alpha_M^0.\alpha_N^0)$.

Dans un premier temps, nous allons construire une 4-variété $\mathcal{M}_{M,N}$ de la manière suivante : considérons $I \times M.N$ et ses sous-variétés $-I \times \Sigma_{\overline{M}}^-$, $I \times \Sigma_{\overline{N}}^+$ ainsi qu'un collier $I \times \Sigma_M^+$ de $\{1\} \times \Sigma_M^+$: cf figure 5.6.

Considérons également la 4-variété $-I_2 \times I_1 \times \Sigma_g$ et les sous-variétés $-I_2 \times \{0\} \times \Sigma_g$, $I_2 \times \{1\} \times \Sigma_g$ et $\{0\} \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}] \times \Sigma_g$: cf figure 5.7.

Nous pouvons alors les recoller comme dans la figure 5.8 pour obtenir la 4-variété $\mathcal{M}_{M,N}$. Elle a pour bord $T_M \cup T_N \cup -T_{M.N}$.

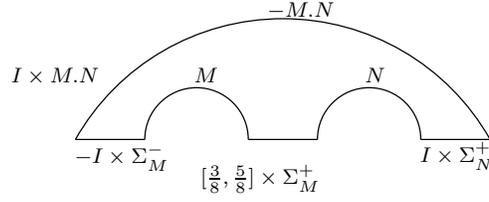


FIG. 5.6 – Variété $I \times M.N$

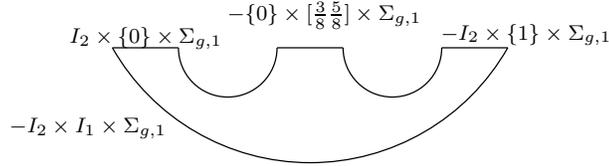


FIG. 5.7 – Variété $-I_2 \times I_1 \times \Sigma_g$

Soit α_M (resp. α_N) une trivialisat on complexe de $\mathbf{T}M$ (resp. $\mathbf{T}N$) qui prolonge \mathbf{X}_M (resp. \mathbf{X}_N) et dont la classe dans $\mathcal{P}_{su}(M, \mathbf{X})$ (resp. $\mathcal{P}_{su}(N, \mathbf{X})$) est la SU -parallélisation relative d'Atiyah α_M^0 (resp. α_N^0). Par recollement, elles induisent une trivialisat on complexe $\alpha_M \cdot \alpha_N$ qui prolonge $\mathbf{X}_{M.N}$. En la stabilisant   gauche par la direction préférée de I , elle induit une trivialisat on complexe de $\mathbf{T}(I \times M.N)$ constante le long de I .

Considérons la trivialisat on complexe sur $I_2 \times I_1 \times \Sigma_g$ constante le long de $I_2 \times I_1$ donnée par la direction préférée de I_2 , la direction préférée de I_1 , et \mathbf{X} .

Par recollement, on obtient une trivialisat on complexe α sur $\mathcal{M}_{M,N}$ qui, par construction, coïncide avec les trivialisat ons complexes correspondantes   α_M sur T_M , α_N sur T_N et $-\alpha_M \cdot \alpha_N$ sur $-T_{M.N}$.

Soient Z_M et Z_N deux 4-variétés compactes connexes orientées de bord T_M et T_N respectivement. Notons W la 4-variété obtenue en recollant   $-\mathcal{M}_{M,N}$ les variétés Z_M le long de T_M et Z_N le long de T_N . Alors

$$\sigma_r(M.N, \alpha_M \cdot \alpha_N) = \langle p_1(\mathbf{T}W, \alpha_M \cdot \alpha_N), \mu_W \rangle - 3 \text{sign } W.$$

Puisque $\alpha_M \cdot \alpha_M$ se prolonge   $-\mathcal{M}_{M,N}$, l'obstruction   prolonger $\alpha_M \cdot \alpha_M$ est concentrée sur les variétés Z_M et Z_N et

$$\langle p_1(\mathbf{T}W, \alpha_M \cdot \alpha_M), \mu_W \rangle = \langle p_1(\mathbf{T}Z_M, \alpha_M), \mu_{Z_M} \rangle + \langle p_1(\mathbf{T}Z_N, \alpha_M), \mu_{Z_N} \rangle.$$

D'après le théorème d'additivité de Novikov, nous avons l'égalité suivante :

$$\text{sign } W = \text{sign } Z_M + \text{sign } Z_N + \text{sign } (-\mathcal{M}_{M,N}).$$

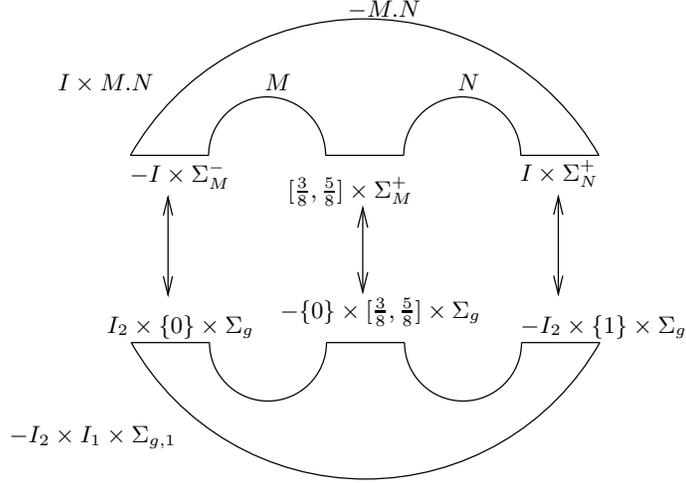


FIG. 5.8 – Construction de la 4-variété $\mathcal{M}_{M,N}$

$$\begin{aligned}
\text{Par conséquent, } \widehat{c}_0(M, N) &= \sigma_r(M.N, \alpha_M . \alpha_N) \\
&= \sigma_r(M, \alpha_M) + \sigma_r(N, \alpha_N) - 3 \text{ sign } (-\mathcal{M}_{M,N}) \\
&= 3 \text{ sign } (\mathcal{M}_{M,N}).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 5.3.6. *Pour toute trivialisation complexe \mathbf{X} de $\mathbf{T}\Sigma_{g,1}$, $\widehat{\mathcal{H}}(\Sigma)^{\mathbf{X}}$ est isomorphe à $\mathcal{H}(\Sigma) \times \mathbf{Z}$ muni de la loi de groupe*

$$(M, m).(N, n) = (M.N, m + n + 3 \text{ sign } \mathcal{M}_{M,N})$$

où M et N appartiennent à $\mathcal{H}(\Sigma)$ et où m et n sont des entiers.

Nous avons la propriété suivante lorsque le cocycle \widehat{c}_0 est restreint aux cylindres d'homologie :

Proposition 5.3.7. *Si (M, i_M^\pm) et (N, i_N^\pm) sont deux cylindres d'homologie, alors*

$$\text{sign } \mathcal{M}_{M,N} = 0.$$

Preuve : Il nous suffit de considérer le cas $\Sigma = \Sigma_g$. Soient (M, i_M^\pm) et (N, i_N^\pm) deux cylindres d'homologie sur Σ_g . Nous nous servons du théorème de Wall pour calculer la signature de la 4-variété $\mathcal{M}_{M,N}$. Le principe de cette démonstration est la suivante : les deux variétés $I \times M.N$ et $I_2 \times I_1 \times \Sigma_{g,1}$ sont de signature nulle. Il nous reste alors à évaluer le défaut de signature :

celui-ci est nul car M et N sont des cylindres d'homologie et donc agissent trivialement sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$.

Montrons maintenant que le défaut de signature est nul : utilisons les notations de l'article [Wa] et posons

$$Y_- = -I_2 \times I_1 \times \Sigma_g \quad \text{et} \quad Y_+ = I \times M.N.$$

Notons

$$\begin{aligned} I_a &= -I_2 \times \{0\} \\ I_b &= \{0\} \times \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right] \\ I_c &= I_2 \times \{1\} \\ I_d &= \{0\} \times \left[0, \frac{3}{8}\right] \\ I_e &= \{0\} \times \left[\frac{5}{8}, 1\right] \\ I_f &= -\{1\} \times I_1 \end{aligned}$$

Notons X_0 le lieu d'attachement de $I \times M.N$ avec $-I_2 \times I_1 \times \Sigma_g$ et $Z = \partial X_0$. On notera alors : $X_- := \partial(-I_2 \times I_1 \times \Sigma_g) \setminus \text{int}(X_0)$ et $X_+ = \partial(I \times M.N) \setminus \text{int}(X_0)$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} X_0 &= I_a \times \Sigma_g \cup I_b \times \Sigma_g \cup I_c \times \Sigma_g \\ &= I_a \times \Sigma_M^- \cup I_b \times \Sigma_M^+ \cup I_c \times \Sigma_N^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \partial I_a \times \Sigma_g \cup \partial I_b \times \Sigma_g \cup \partial I_c \times \Sigma_g \\ X_- &= I_d \times \Sigma_g \cup I_e \times \Sigma_g \cup I_f \times \Sigma_g \\ X_+ &= -\{0\} \times M.N \cup \{1\} \times M \cup \{1\} \times N. \end{aligned}$$

Pour $\epsilon = 0, 1$ et $\alpha = a, b, c$, notons $\gamma_i^{\epsilon\alpha}$, $i = 1, \dots, 2g$, un système de générateurs de $H_1(\{\epsilon_\alpha\} \times \Sigma_g; \mathbf{Z})$. Alors

$$H_1(Z; \mathbf{Z}) = \langle \gamma_i^{\epsilon\alpha}, \epsilon \in \{0, 1\}, \alpha \in \{a, b, c\}, i \in \{1, \dots, 2g\} \rangle$$

$$\begin{aligned} A &= \text{Ker}(H_1(Z; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(X_0; \mathbf{Z})) \\ &= \langle \gamma_i^{1\alpha} - \gamma_i^{0\alpha}, \alpha \in \{a, b, c\}, i \in \{1, \dots, 2g\} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \text{Ker}(H_1(Z; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(X_-; \mathbf{Z})) \\ &= \langle \gamma_i^{0b} - \gamma_i^{1a}, \gamma_i^{0c} - \gamma_i^{1b}, \gamma_i^{0a} - \gamma_i^{1c}, i \in \{1, \dots, 2g\} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \text{Ker}(H_1(Z; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(X_+; \mathbf{Z})) \\ &= \langle \gamma_i^{0b} - [(i_M^-)^{-1}(i_M^+)_*] \gamma_i^{1a}, \gamma_i^{0c} - [(i_N^-)^{-1}(i_N^+)_*] \gamma_i^{1b}, \\ &\quad \gamma_i^{0a} - [(i_{M.N}^-)^{-1}(i_{M.N}^+)_*] \gamma_i^{1c}, i \in \{1, \dots, 2g\} \rangle \end{aligned}$$

Puisque M et N sont des cylindres d'homologie, $C = B$ et

$$V = \frac{A \cap (B + C)}{(A \cap B) + (A \cap BC)} = \{0\}.$$

Ainsi la signature de $\mathcal{M}_{M,N}$, qui est égale à la signature de V , est nulle.

□

Chapitre 6

Structures d'Euler relatives et extension du cocycle d'intersection

Considérons à présent le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$. Le but de ce chapitre est de prolonger le cocycle d'intersection aux cobordismes d'homologie. L'idée est de s'inspirer de la construction faite au chapitre 3. Pour construire la SU -parallélisation relative de Morita des mappings cylindres, la stratégie est d'utiliser, comme premier vecteur du champ de repères, le champ de vecteurs \mathfrak{J} donné par la direction préférée de I puis d'étudier l'action du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$ sur $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la notion de champ de vecteurs temps sur les cobordismes d'homologie. Rappelons que tout cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ admet des champs de vecteurs temps mais qu'ils ne sont pas uniques à homotopie relative au bord près. Le problème est que nous ne savons pas déterminer un champ de vecteurs temps préféré sur les cobordismes d'homologie ni même caractériser le champ de vecteurs temps \mathfrak{J} sur les mapping cylindres sans utiliser la structure produit sous-jacente de $I \times \Sigma_{g,1}$. L'idée est donc de chercher à prolonger le cocycle d'intersection en tenant compte de cet indéterminisme. Pour cela, nous allons utiliser la notion de structures d'Euler relatives, ce qui reviendra à considérer les champs de vecteurs temps à homologie près.

Dans un premier temps, nous définirons la notion de structure d'Euler relative d'un cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. Ensuite, nous associerons à l'ensemble des cobordismes d'homologie muni d'une structure d'Euler un groupe que l'on notera $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$. Nous verrons que ce groupe agit sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Nous construirons alors un homomorphisme croisé $\hat{k}_X : \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ pour tout champ de vecteurs X de la surface $\Sigma_{g,1}$: celui-ci prolongera naturellement l'homomorphisme croisé k_X défini au chapitre 3. Enfin, nous

définirons une 2-cochaîne¹ \hat{c}_X de $Z^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}; \mathbf{Z})$ qui prolongera naturellement le cocycle d'intersection c_X défini au chapitre 3. Nous montrerons alors que cette 2-cochaîne est en fait un 2-cocycle.

6.1 Définition des structures d'Euler relatives et propriétés

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la notion de champ de vecteurs temps sur les cobordismes d'homologie. Rappelons que, d'après le théorème d'existence 5.1.2, tout cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ admet un champ de vecteurs temps. Nous avons vu dans la remarque 5.1.3 que les champs de vecteurs temps n'étaient pas uniques à homotopie relative au bord près. Cherchons à mieux comprendre la façon dont ils sont paramétrés.

Soit (M, i^{\pm}) un corbordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. Notons encore \mathfrak{I}_M le champ de vecteurs non singulier le long de ∂M induit par la direction préférée de I via le difféomorphisme Φ_M . Il s'agit d'une section du S^2 -fibré $(\mathbf{T}M)_0$ au-dessus de ∂M . Nous avons une première obstruction : la classe d'Euler relative $e(\mathbf{T}M, \mathfrak{I}_M) \in H^3(M, \partial M; \mathbf{Z})$.

Le théorème d'existence implique que cette première obstruction est triviale : on peut donc prolonger \mathfrak{I}_M au 2-squelette : de telles extensions, considérées à homotopie relative à ∂M près, forment un espace affine au-dessus de $H^2(\tilde{M}, \partial M; \mathbf{Z})$.

Soit $\tilde{\mathfrak{I}}_M$ une telle extension. Puisque la sphère S^2 possède un deuxième groupe d'homotopie non nul (en effet $\pi_3(S^2) \simeq \mathbf{Z}$), il existe une obstruction secondaire à prolonger $\tilde{\mathfrak{I}}_M$ à tout M qui vit dans le groupe de cohomologie relatif trivial $H^4(M, \partial M; \mathbf{Z})$. Par conséquent, $\tilde{\mathfrak{I}}_M$ se prolonge à tout M et ses extensions sont paramétrées par $H^3(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

Problème : Pour l'instant, nous n'avons pas de choix canonique de champ de vecteurs temps sur M . nous devons donc tenir compte de ces différents paramétrages.

Soit M un corbordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$.

Définition 6.1.1. On appelle *structure d'Euler relative de M* une classe d'homotopie relative au bord d'un champ de vecteurs de temps sur M considérée à homologie² près.

On note alors $\mathcal{E}ul(M)$ l'ensemble des structures d'Euler relatives sur M .

¹On considèrera l'action triviale de $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ sur \mathbf{Z} .

²cf [Tu] pour cette terminologie. En d'autres termes, on considère les champs de vecteurs temps qui sont homotopes sur le 2-squelette relativement à ∂M près : on ne tient compte que du premier paramétrage du champ de vecteurs temps.

Il est muni d'une structure³ d'espace affine au-dessus de $H^2(M, \partial M; \mathbf{Z})$.

Via l'isomorphisme $j : H^2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \xrightarrow{DP} H_1(M; \mathbf{Z}) \xrightarrow{(i^-)^{-1}} H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$, l'ensemble $\mathcal{E}ul(M)$ peut être également vu comme un espace affine au-dessus de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$.

6.2 Groupe associé aux cobordismes d'homologie munis d'une structures d'Euler relatives

Considérons l'ensemble des cobordismes d'homologie muni d'une structure d'Euler relative. Le but de ce paragraphe est de définir un groupe qui lui soit associé. Pour cela, nous avons besoin de définir une relation d'équivalence sur cet ensemble qui tienne compte de la relation de bordisme.

Reprenons les notations du paragraphe 3.2.1 sur l'étude de $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$: soient X et Y deux champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ (on les supposera fixés sur le bord), notons $S_{X,Y}$ la section du S^1 -fibré $(I \times \mathbf{T}\Sigma_{g,1})_0$ au-dessus $\partial(I \times \Sigma_{g,1})$ définie par

- X sur $\{0\} \times \Sigma_{g,1}$,
- Y sur $\{1\} \times \Sigma_{g,1}$,
- $X|_{\partial\Sigma_{g,1}} = Y|_{\partial\Sigma_{g,1}}$ sur $I \times \partial\Sigma_{g,1}$.

On notera également $e_{X,Y}$ l'élément de $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ défini comme le défaut d'homotopie entre X et Y .

Fixons M un cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ et soit \mathcal{N}_M un champ de vecteurs temps sur M . Notons \mathcal{E}_M sa structure d'Euler relative associée. Le champ de vecteurs temps \mathcal{N}_M induit une décomposition en somme de Whitney du fibré tangent $\mathbf{T}M$:

$$\mathbf{T}M = \nu_M \oplus \xi_M$$

où ν_M et ξ_M sont des fibrés vectoriels orientés de rang 1 et 2 respectivement.

Rappelons que le fibré tangent de $I \times \Sigma$ admet une décomposition en somme de Whitney induite par la structure produit :

$$\mathbf{T}(I \times \Sigma) = (\mathbf{T}I \times \Sigma) \oplus (I \times \mathbf{T}\Sigma).$$

Remarquons qu'elle induit sur ∂M via Φ_M une décomposition du fibré $(\mathbf{T}M)|_{\partial M}$ qui coïncide avec la restriction de $\nu_M \oplus \xi_M$ à ∂M . Ainsi, la section $S_{X,Y}$ induit via Φ_M une section $S_{X,Y}^M$ du S^1 -fibré $(\xi_M)_0$ au-dessus de ∂M (cf figure 6.1).

³Pour comprendre la structure d'espace affine, il suffit de généraliser le cas $\text{Vect}(\Sigma_{g,1})$ exposé au paragraphe 3.2.1 ou voir [Ste].

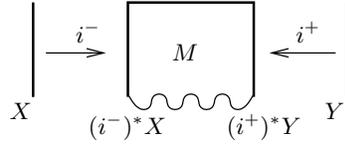


FIG. 6.1 – Description de la section partielle $S_{X,Y}^M$.

L'obstruction à prolonger $S_{X,Y}^M$ à tout M est la classe d'Euler relative

$$e(\xi_M, S_{X,Y}^M) \in H^2(M, \partial M; \mathbf{Z}).$$

Soit \mathcal{N}'_M un autre champ de vecteurs temps sur M qui est homotope à \mathcal{N}_M sur le 2-squelette relativement au bord. Alors \mathcal{N}'_M induit une décomposition en somme de Whitney $\mathbf{T}M = \nu'_M \oplus \xi'_M$. De plus, les fibrés ξ_M et ξ'_M sont homotopes sur le 2-squelette relativement au bord. Par conséquent,

$$e(\xi_M, S_{X,Y}^M) = e(\xi'_M, S_{X,Y}^M).$$

Cette classe d'Euler ne dépend donc que de la structure d'Euler relative \mathcal{E}_M associée à \mathcal{N}_M : nous la noterons $h_{X,Y}^M(\mathcal{E}_M)$. Ceci définit une application

$$h_{X,Y}^M : \mathcal{E}ul(M) \rightarrow H^2(M, \partial M; \mathbf{Z}).$$

Via l'isomorphisme j , l'application $h_{X,Y}^M$ induit une application

$$\widehat{h}_{X,Y}^M : \mathcal{E}ul(M) \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}).$$

Interprétation géométrique de $\widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E})$: L'obstruction primaire $e(\xi_M, S_{X,Y}^M)$ à prolonger $S_{X,Y}^M$ à M peut être vue, par dualité de Poincaré, comme une «courbe d'obstruction» K plongée dans M qui aura pour homologie $DP(e(\xi_M, S_{X,Y}^M)) \in H_1(M; \mathbf{Z})$. Puisque M a la même homologie que la surface $\Sigma_{g,1}$, on peut supposer que la courbe K est plongée dans une copie de $\Sigma_{g,1}$. L'élément $\widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E}_M)$ est alors la classe d'homologie de la courbe K vue dans $\Sigma_{g,1}$ via i^- .

Enonçons quelques propriétés des applications $\widehat{h}_{X,Y}^M$ et $h_{X,Y}^M$.

Lemme 6.2.1. *Soient X, X', Y et Y' quatre champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ et soit \mathcal{E} une structure d'Euler relative de M . Alors*

$$\widehat{h}_{X',Y'}^M(\mathcal{E}) = \widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E}) + e_{X',X} - (i_M^-)^{-1}(i_M^+)_*(e_{Y',Y}).$$

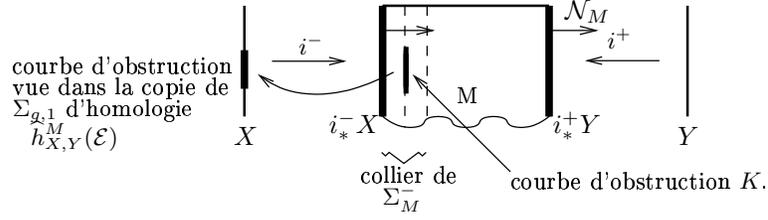


FIG. 6.2 – Interprétation géométrique de $\widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E})$.

Preuve : Soit \mathcal{N} un champ de vecteurs temps sur M et soit \mathcal{E} sa structure d'Euler relative associée. Le champ de vecteurs temps \mathcal{N} induit une décomposition du fibré tangent $\mathbf{T}M = \nu_{\mathcal{N}} \oplus \xi_{\mathcal{N}}$ où $\nu_{\mathcal{N}}$ et $\xi_{\mathcal{N}}$ sont des fibrés orientés de rang 1 et 2 respectivement.

Soit $I \times \Sigma_M^-$ un collier de Σ_M^- (resp. $I \times \Sigma_M^+$ un collier de Σ_M^+) dans M tels que $\{0\} \times \Sigma_M^- = \Sigma_M^-$ (resp. $\{1\} \times \Sigma_M^+ = \Sigma_M^+$). Nous pouvons supposer que $(\xi_{\mathcal{N}})|_{I \times \Sigma_M^\pm} = I \times \mathbf{T}\Sigma_M^\pm$. Les plongements i_M^\pm induisent des difféomorphismes $j_M^\pm : I \times \Sigma_{g,1} \rightarrow I \times \Sigma_M^\pm$.

La section $S_{X',Y'}^M$ du S^1 -fibré $(\xi_{\mathcal{N}})$ définie au-dessus de ∂M se prolonge à $\partial(I \times \Sigma_M^-) \cup \partial(I \times \Sigma_M^+)$ en considérant les champs de vecteurs $(j_M^-)_* S_{X',X}$ sur $\partial(I \times \Sigma_M^-)$ et $(j_M^+)_* S_{Y,Y'}$ sur $\partial(I \times \Sigma_M^+)$: cf figure 6.3. Par conséquent, la section $S_{X',Y'}^M$ se prolonge en dehors de 3 courbes d'obstruction :

- $K_{X',X}^-$ plongée dans une copie de Σ_M^- qui a pour homologie $(i_M^-)_*(e_{X',X})$ dans cette copie de Σ_M^- ,
- $K_{X,Y}$ plongée dans une copie différente de Σ_M^- qui a pour homologie $(i_M^-)_*\widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E})$ dans $H_1(M; \mathbf{Z})$,
- et $K_{Y,Y'}^+$ plongée dans une copie de Σ_M^+ qui a pour homologie $-(i_M^+)_*(e_{Y',Y})$ dans cette copie de Σ_M^+ .

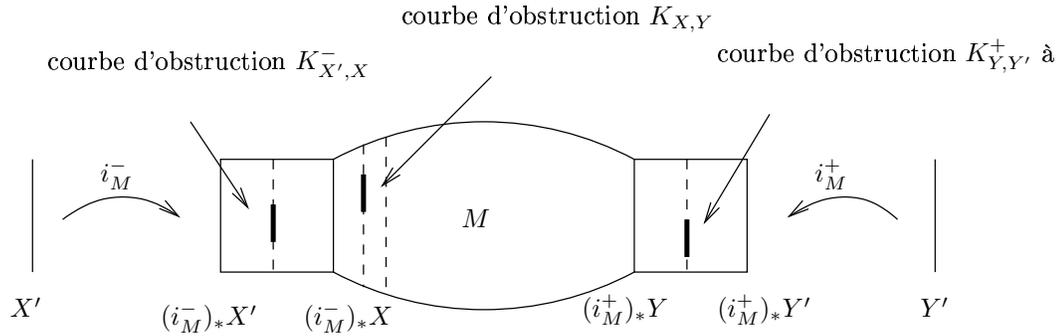


FIG. 6.3 – Extension de $S_{X',Y'}^M$

Par concentration d'obstruction, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \langle e(\xi_M, S_{X',Y'}^M), \mu_M \rangle &= \langle e(I \times \mathbf{T}\Sigma^-, (j_M^-)_* S_{X',X}), \mu_{I \times \Sigma^-} \rangle \\ &\quad + \langle e(\xi_M, S_{X,Y}^M), \mu_M \rangle \\ &\quad + \langle e(I \times \mathbf{T}\Sigma^+, (j_M^+)_* S_{Y,Y'}), \mu_{I \times \Sigma^+} \rangle . \end{aligned}$$

Par conséquent, $\widehat{h}_{X',Y'}^M(\mathcal{E}) = \widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E}) + e_{X',X} - (i^-)^{-1} i_*^+(e_{Y',Y})$.

□

Lemme 6.2.2. *Soient X et Y deux champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ et soit M un cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. Alors les applications $h_{X,Y}^M$ et $\widehat{h}_{X,Y}^M$ sont injectives. Plus précisément, pour tout élément \mathcal{E} de $\mathcal{E}ul(M)$ et tout élément α de $H^2(M, \partial M; \mathbf{Z})$,*

$$h_{X,Y}^M(\mathcal{E} + \alpha) = h_{X,Y}^M(\mathcal{E}) + 2\alpha.$$

Preuve : Il suffit de prouver ce lemme pour le cas-clé qui consiste à modifier le champ de vecteurs temps sur une 2-cellule par le générateur préféré de $\pi_2(S^2)$.

Soit \mathcal{N} un champ de vecteurs temps sur M : il induit une décomposition en somme de Whitney du fibré tangent de M :

$$\mathbf{T}M = \nu \oplus \xi.$$

Notons \mathcal{E} la structure d'Euler relative sur M associée à \mathcal{N} .

Revenons à la définition d'obstruction primaire. Considérons la section $S_{X,Y}^M$ du S^1 -fibré ξ_0 au-dessus de ∂M . Elle peut se prolonger au 0- puis au 1-squelette de M : soit $\tilde{S}_{X,Y}^M$ une telle extension. On cherche maintenant à étendre cette section au 2-squelette. Pour cela, considérons σ une 2-cellule de $M \setminus (\partial M)$. En identifiant canoniquement $\pi_1(S^1)$ avec \mathbf{Z} , l'obstruction à prolonger $\tilde{S}_{X,Y}^M$ à σ est un entier n mesurant le nombre de tours que fait $\tilde{S}_{X,Y}^M$ par rapport au champ de vecteurs qui s'étend à σ .

Sur cette cellule, modifions le champ de vecteurs \mathcal{N} par le générateur préféré de $\pi_2(S^2)$: on obtient un nouveau champ de vecteurs temps défini sur le 2-squelette pour l'instant mais qui peut se prolonger à M tout entier : on le notera \mathcal{N}' . Ce dernier induit également une décomposition de $\mathbf{T}M$ en somme de Whitney $\mathbf{T}M = \nu' \oplus \xi'$ et une structure d'Euler relative \mathcal{E}' sur M .

Sur le 2-squelette, les deux champs de vecteurs \mathcal{N} et \mathcal{N}' ne vont différer que sur l'intérieur de σ ; par conséquent le champ de vecteurs $\tilde{S}_{X,Y}^M$ peut également être vu comme une section du fibré $(\xi')_0$ au-dessus de $\partial M \cup M^1$. On définit alors l'entier n' mesurant l'obstruction à prolonger $\tilde{S}_{X,Y}^M$ à σ . La question est maintenant d'exprimer n' en fonction de n .

Notons s la restriction de la section $\tilde{S}_{X,Y}^M$ à $\partial\sigma$. Pour simplifier, nous noterons de la même manière les fibrés définis ci-dessus de base M et leur restriction à σ , alors :

$$\langle e(\xi, s), \mu_\sigma \rangle = n \quad \text{et} \quad \langle e(\xi', s), \mu_\sigma \rangle = n'.$$

Recollons deux copies de σ : l'une, notée σ_1 , munie du champ de vecteurs \mathcal{N}' et l'autre, notée σ_2 , munie du champ de vecteurs \mathcal{N} . On obtient alors une sphère S^2 munie d'un champ de vecteurs non singulier. Quitte à homotoper \mathcal{N} et \mathcal{N}' , on peut les supposer comme dans le cas standard de la figure 6.4 : le recollement des fibrés ξ et ξ' est alors le fibré tangent de la sphère.

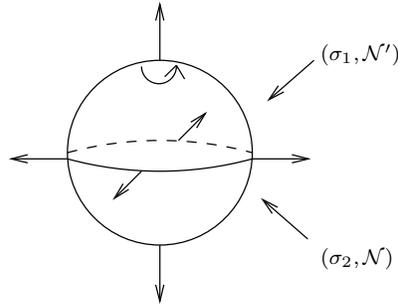


FIG. 6.4 – Changer un champ de vecteurs temps sur une 2-cellule par le générateur de $\pi_2(S^2)$

L'obstruction à définir un champ de vecteurs tangent non singulier sur S^2 est donné par la caractéristique d'Euler de S^2 :

$$\langle e(\mathbf{T}S^2), \mu_{S^2} \rangle = \chi(S^2) = 2.$$

La section s de ξ_0 induit une section du S^1 -fibré $(\mathbf{T}S^2)_0$ au-dessus de l'équateur $\partial\sigma_1$ et chercher à prolonger s à S^2 revient à définir un champ de vecteurs tangent sur S^2 en termes d'obstruction «globale». On peut décomposer le problème en cherchant d'abord à prolonger s à l'hémisphère nord (l'obstruction est alors l'entier n') puis à prolonger s à l'hémisphère sud (l'obstruction est donnée par l'entier $-n$ car l'orientation de l'équateur est l'opposé de l'orientation de $\partial\sigma_2$). Aussi, nous avons l'égalité

$$n' - n = 2.$$

Remarquons que les entiers n et n' ne dépendent que des structures d'Euler relatives associées aux champs de vecteurs temps \mathcal{N} et \mathcal{N}' . Par conséquent, nous obtenons dans le cas général,

$$h_{X,Y}^M(\mathcal{E} + \alpha) = h_{X,Y}^M(\mathcal{E}) + 2\alpha.$$

Cette égalité est indépendante des champs de vecteurs X et Y choisis d'après le lemme précédent. Ainsi, l'application $h_{X,Y}^M$ est affine et injective pour tous champs de vecteurs X et Y non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$ et pour tout cobordisme d'homologie M . L'ensemble $\mathcal{E}ul(M)$ est donc entièrement caractérisé par l'image de cette application.

□

Nous avons besoin d'un dernier lemme avant de pouvoir définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des cobordismes d'homologie munis d'une structure d'Euler relative :

Lemme 6.2.3. *Soient M et N deux cobordismes d'homologie bordants. Alors la relation de bordisme d'homologie induit une bijection canonique entre les espaces affines $\mathcal{E}ul(M)$ et $\mathcal{E}ul(N)$ qui rend le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ul(M) & \xrightarrow{f_{M,N}} & \mathcal{E}ul(N) \\ \downarrow \widehat{h}_{X,Y}^M & & \downarrow \widehat{h}_{X,Y}^N \\ H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) & \equiv & H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \end{array}$$

quels que soient les champs de vecteurs X et Y non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$.

Preuve : Soient M et N deux cobordismes d'homologie bordants. Considérons une 4-variété connexe compacte orientée W de bord $\partial W = M \cup -N$, vu avec les lieux d'attachement épaissis, et telle que les inclusions canoniques $\iota_M : M \hookrightarrow W$ et $\iota_N : N \hookrightarrow W$ induisent des isomorphismes en homologie. D'après le lemme 5.1.5, il existe un champ de vecteurs \mathcal{A}_W non singulier sur W qui induit une décomposition en somme de Whitney du fibré tangent de W :

$$\mathbf{T}W = \eta_W \oplus \eta_W^\perp$$

où η_W et η_W^\perp sont des fibrés vectoriels réels orientés de rang 1 et 3 respectivement et tels que $(\eta_W^\perp)|_M$ correspond à $\mathbf{T}M$ et $(\eta_W^\perp)|_N$ correspond à $\mathbf{T}N$. Soit \mathcal{N}_M un champ de vecteurs temps sur M . Puisque tous les groupes d'homologie relatifs $H^*(W, M; \mathbf{Z})$ sont triviaux, il se prolonge en une section \mathcal{N}_W du S^2 -fibré $(\eta_W^\perp)_0$: remarquons que cette section globale est unique à homotopie relative à M près. Cependant, sur le 2-squelette de W , elle est indépendante du choix de \mathcal{A}_W . Le champ de vecteurs \mathcal{N}_W restreint à N est un champ de vecteurs temps sur N que nous noterons \mathcal{N}_N .

Le champ de vecteurs \mathcal{N}_W induit une décomposition en somme de Whitney du fibré η_W^\perp :

$$\eta_W^\perp = \nu_W \oplus \xi_W$$

où ν_W et ξ_W sont des fibrés vectoriels réels orientés de rang 1 et 2 respectivement.

Soient X et Y deux champs de vecteurs non singuliers sur $\Sigma_{g,1}$. Puisque \mathcal{N}_W induit des champs de vecteurs temps sur M et N , nous pouvons considérer la section $S_{X,Y}^M$ du S^1 -fibré $((\xi_W)|_M)_0$ au-dessus de ∂M ainsi que la section $S_{X,Y}^N$ du S^1 -fibré $((\xi_W)|_N)_0$ au-dessus de ∂N . Remarquons que ces sections induisent la même section du S^1 -fibré $(\xi_W)_0$ au-dessus de $\partial M = \partial N$ que nous noterons encore $S_{X,Y}^M$.

Les inclusions canoniques ι_M et ι_N induisent le diagramme commutatif d'isomorphismes canoniques suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & H^2(M, \partial M; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{DP} & H_1(M; \mathbf{Z}) \\
& \nearrow \iota_M^* & & & \searrow (i_M^-)^* \\
H^2(W, \partial M; \mathbf{Z}) & & & & H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\
& \searrow \iota_N^* & & & \nearrow (i_N^-)^* \\
& & H^2(N, \partial N; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{DP} & H_1(N; \mathbf{Z})
\end{array}$$

Par functorialité de l'obstruction, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccc}
& & h_{X,Y}^M(\mathcal{E}_M) & \xrightarrow{DP} & DP(h_{X,Y}^M(\mathcal{E}_M)) \\
& \nearrow \iota_M^* & & & \searrow (i_M^-)^* \\
e(\xi_W, S_{X,Y}^M) & & & & \widehat{h}_{X,Y}^M(\mathcal{E}_M) = \widehat{h}_{X,Y}^N(\mathcal{E}_N) \\
& \searrow \iota_N^* & & & \nearrow (i_N^-)^* \\
& & h_{X,Y}^N(\mathcal{E}_N) & \xrightarrow{DP} & DP(h_{X,Y}^N(\mathcal{E}_N))
\end{array}$$

où \mathcal{E}_M et \mathcal{E}_N sont les structures d'Euler relatives associées à \mathcal{N}_M et \mathcal{N}_N respectivement.

Puisque les applications $\widehat{h}_{X,Y}$ et $\widehat{h}_{X,Y}^N$ sont des injections affines, nous obtenons une bijection entre les espaces affines $\mathcal{E}ul(M)$ et $\mathcal{E}ul(N)$. D'après le lemme 6.2.2, cette bijection est indépendante du choix des champs des champs de vecteurs X et Y . Elle est également indépendante du choix du bordisme d'homologie W .

□

Nous pouvons maintenant définir l'ensemble $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ comme suit :

Définition 6.2.4. L'ensemble $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des couples (M, \mathcal{E}_M) , où M est un cobordisme d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$ et où \mathcal{E}_M est une structure d'Euler relative sur M , quotienté par la relation d'équivalence :

$$(M, \mathcal{E}_M) \sim (N, \mathcal{E}_N) \left\{ \begin{array}{l} M \text{ et } N \text{ sont bordants} \\ \text{et } f_{M,N}(\mathcal{E}_M) = \mathcal{E}_N. \end{array} \right.$$

Remarquons que le recollement de deux cobordismes d'homologie M et N munis de champ de vecteurs temps définit un champ de vecteurs temps sur le cobordisme d'homologie $M.N$. Ceci induit une loi de groupe naturelle sur l'ensemble $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} &\rightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \\ ((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N)) &\mapsto (M.N, \mathcal{E}_M.\mathcal{E}_N) \end{aligned}$$

Le *neutre* est le cobordisme d'homologie trivial $I \times \Sigma_{g,1}$ muni du champ de vecteurs temps induit par la direction préférée de I .

L'*inverse* d'un couple (M, \mathcal{E}) est donné par le couple $(-M, -\mathcal{E})$ où $-M$ est le cobordisme d'homologie M muni de l'orientation opposée et $-\mathcal{E}$ est la structure d'Euler relative obtenue de \mathcal{E} en changeant l'orientation de S^2 dans les fibres de $(\mathbf{T}M)_0$. En effet, considérons la 4-variété $I \times M$: on peut la voir comme un bordisme entre $M.(-M)$ et $I \times \Sigma^-$. Si \mathcal{N}_M est un champ de vecteurs temps sur M représentant de \mathcal{E} , alors il induit une section $\mathcal{N}_{I \times M}$ du S^2 -fibré $(I \times \mathbf{T}M)$ constante le long de I et induite par \mathcal{N}_M . Ainsi $\mathcal{N}_{I \times M}$ correspond à la direction préférée de $I \times \Sigma^-$ et au champ de vecteurs $\mathcal{N}_M.(-\mathcal{N}_M)$ sur $M.(-M)$. D'après le lemme précédent, la bijection entre $\mathcal{E}ul(M.(-M))$ et $\mathcal{E}ul(I \times \Sigma^-)$ envoie $\mathcal{E}.(-\mathcal{E})$ sur la direction préférée de I .

6.3 homomorphisme croisé et extension du cocycle d'intersection

Soit X un champ de vecteurs non singulier sur $\Sigma_{g,1}$. D'après le paragraphe précédent et notamment le lemme 6.2.3, nous pouvons définir une application

$$\begin{aligned} \widehat{k}_X : \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} &\rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\ (M, \mathcal{E}) &\mapsto \widehat{h}_{X,X}^M(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Avant de montrer que \widehat{k}_X est un homomorphisme croisé, il nous faut définir une action de $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Pour cela, considérons l'application de [GL] (cf chap 1 section 1.3.2) :

$$\begin{aligned} \eta_2 : \mathcal{H}_{g,1} &\rightarrow \text{Aut } H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\ (M, i_M^{\pm}) &\rightarrow (i_M^-)^{-1} \circ (i_M^+)^* \end{aligned}$$

Ceci définit une action de groupe de $\mathcal{H}_{g,1}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$. Celle-ci induit naturellement une action du groupe $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ que nous noterons comme suit afin d'alléger l'écriture :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \times H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) &\rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \\ ((M, \mathcal{E}), \alpha) &\rightarrow M.\alpha. \end{aligned}$$

L'application \widehat{k}_X a la propriété suivante :

Proposition 6.3.1. *Soit X un champ de vecteurs non singulier sur $\Sigma_{g,1}$. L'application $\widehat{k}_X : \mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ est un homomorphisme croisé pour l'action de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$: pour tous éléments (M, \mathcal{E}_M) et (N, \mathcal{E}_N) de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$,*

$$\widehat{k}_X(M.N, \mathcal{E}_M.\mathcal{E}_N) = \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) + M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N).$$

La classe de cohomologie de \widehat{k}_X dans $H^1(\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}; H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$ ne dépend pas du choix du champ de vecteurs X .

Preuve : Soient (M, i_M^\pm) et (N, i_N^\pm) deux cobordismes d'homologie. Considérons des champs de vecteurs temps \mathcal{N}_M sur M et \mathcal{N}_N sur N ; notons \mathcal{E}_M et \mathcal{E}_N leurs structures d'Euler relatives associées. Ils induisent des décompositions en somme de Whitney des fibrés tangents $\mathbf{T}M$ et $\mathbf{T}N$

$$\mathbf{T}M = \nu_M \oplus \xi_M \quad \text{et} \quad \mathbf{T}N = \nu_N \oplus \xi_N.$$

Par recollement, on obtient un champ de vecteurs temps $\mathcal{N}_{M.N}$ sur $M.N$ ainsi qu'une décomposition en somme de Whitney

$$\mathbf{T}(M.N) = \nu_{M.N} \oplus \xi_{M.N}.$$

Le champ de vecteurs X induit les sections

- $X_M := S_{X,X}^M$ du S^1 -fibré $(\xi_M)_0$ au-dessus de ∂M ,
- $X_N := S_{X,X}^N$ de ∂N du S^1 -fibré $(\xi_N)_0$ au-dessus de ,
- et $X_{M.N} := S_{X,X}^{M.N}$ de $(\xi_{M.N})_0$ au-dessus de $\partial M.N$.

Soient $I \times \Sigma_M^-$ (resp. $I \times \Sigma_N^-$) un collier de Σ_M^- dans M (resp. Σ_N^- dans N). Nous pouvons prolonger X_M (resp. X_N) en une section $s_{X,M}$ (resp. $s_{X,N}$) en dehors d'un voisinage tubulaire d'une courbe d'obstruction K_{X,\mathcal{N}_M} (resp. K_{X,\mathcal{N}_N}) plongée dans $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_M^-$ (resp. $\{\frac{1}{2}\} \times \Sigma_N^-$). Les courbes K_{X,\mathcal{N}_M} et K_{X,\mathcal{N}_N} ont respectivement pour homologie $(i_M^-)_* \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M)$ dans $H_1(M; \mathbf{Z})$ et $(i_N^-)_* \widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N)$ dans $H_1(N; \mathbf{Z})$.

Les sections $s_{X,M}$ et $s_{X,N}$ se recollent via l'identification de Σ_M^+ avec $-\Sigma_N^-$ définissant une extension $s_{X,M.N}$ de $X_{M.N}$. En fait, si l'on note $j_M : M \hookrightarrow M.N$ et $j_N : N \hookrightarrow M.N$ les injections canoniques, alors $s_{X,M.N}$ est alors une section de $(\xi_{M.N})_0$ sur $M.N$ privé des voisinages tubulaires des courbes $j_M(K_{X,M})$ et $j_N(K_{X,N})$. Ainsi

$$\begin{aligned} DP(e(\xi_{M.N}, X_{M.N})) &= (j_M)_* DP(e(\xi_M, X_M)) + (j_N)_* DP(e(\xi_N, X_N)) \\ &= (j_M)_* (i_M^-)_* (\widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M)) + (j_N)_* (i_N^-)_* (\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N)). \end{aligned}$$

Via l'identification Σ_M^+ avec $-\Sigma_N^-$, on peut pousser la courbe $K_{X,N}$ en une courbe $K'_{X,N}$ plongée dans une copie de Σ_M^+ . On peut alors homotoper $s_{X,M.N}$ en une section $s'_{X,M.N}$ définie en dehors de voisinages tubulaires des

courbes $K_{X,M}$ et $K'_{X,N}$. On remarque que l'obstruction à prolonger $X_{M,N}$ est alors concentrée dans le cobordisme d'homologie M et que $K'_{X,N}$ a pour homologie $(i_M^+)_*(\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N))$ dans $H_1(M; \mathbf{Z})$.

Puisque M a même homologie que la surface $\Sigma_{g,1}$, on peut homotoper $s'_{X,M,N}$ en une section $s''_{X,M,N}$ définie en dehors des deux courbes $K_{X,M}$ et $K''_{X,N}$ plongées dans deux copies différentes de Σ_M^- et où $K''_{X,N}$ a pour homologie $(i_M^+)_*(\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N))$ dans $H_1(M; \mathbf{Z})$.

Remarque 6.3.2. Rien ne nous permet de les plonger dans une même copie de Σ_M^- car elles peuvent s'intersecter.

Nous pouvons résumer la situation dans la figure 6.5 :

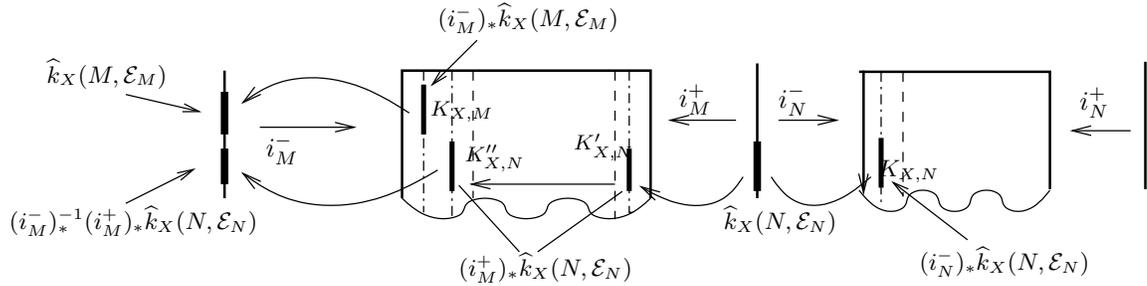


FIG. 6.5 – L'application \widehat{k}_X est un homomorphisme croisé.

Ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{k}_X(M.N, \mathcal{E}_M.\mathcal{E}_N) &= \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) + (i_M^-)^{-1} \cdot (i_M^+)_* \widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N) \\ &= \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) + M \cdot \widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $\widehat{k}_X : \mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E} \rightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ est un homomorphisme croisé pour l'action de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ sur $H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$, donc un 1-cocycle de $C^1(\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$. D'après le lemme 6.2.1, si Y est un autre champ de vecteurs non singulier sur $\Sigma_{g,1}$, alors, pour tout élément (M, \mathcal{E}) de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$:

$$\widehat{k}_Y(M, \mathcal{E}) = \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}) + e_{Y,X} - (i_M^-)^{-1} (i_M^+)_* (e_{Y,X}).$$

Par conséquent, les 1-cocycles \widehat{k}_Y et \widehat{k}_X diffèrent par un cobord : ils ont donc même classe de cohomologie dans $H^1(\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}, H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}))$.

□

Remarquons que \widehat{k}_X restreint au sous-groupe de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ formé par les mapping cylindres munis de la direction préférée de I correspond à l'homomorphisme croisé k_X défini au chapitre 3.

Considérons l'action triviale de $\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}$ sur \mathbf{Z} : on peut alors définir le groupe de cohomologie $H^2(\mathcal{H}_{g,1}^\mathcal{E}; \mathbf{Z})$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 6.3.3. *La 2-cochaîne \widehat{c}_X définie par*

$$\begin{aligned} \widehat{c}_X : \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ ((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N)) &\mapsto -\widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) \cdot M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N). \end{aligned}$$

est un 2-cocycle de $C^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}; \mathbf{Z})$ qui prolonge le cocycle d'intersection c_X du chapitre 3 par construction. Comme dans le cas de c_X , la classe de cohomologie de \widehat{c}_X ne dépend pas du choix de X .

Preuve : Pour montrer que la 2-cochaîne \widehat{c}_X est un 2-cocycle, il nous suffit de vérifier la formule de cobord : soient (M, \mathcal{E}_M) , (N, \mathcal{E}_N) , (P, \mathcal{E}_P) trois éléments de $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$,

$$\begin{aligned} \delta\widehat{c}_X((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N), (P, \mathcal{E}_P)) &= \widehat{c}_X((N, \mathcal{E}_N), (P, \mathcal{E}_P)) \\ &\quad - \widehat{c}_X((M, \mathcal{E}_M).(N, \mathcal{E}_N), (P, \mathcal{E}_P)) \\ &\quad + \widehat{c}_X((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N).(P, \mathcal{E}_P)) \\ &\quad - \widehat{c}_X((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N)) \\ &= -\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N) \cdot (N.\widehat{k}_X(P, \mathcal{E}_P)) \\ &\quad + \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) \cdot (MN.\widehat{k}_X(P, \mathcal{E}_P)) \\ &\quad + M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N) \cdot (MN.\widehat{k}_X(P, \mathcal{E}_P)) \\ &\quad - \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) \cdot (M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N)) \\ &\quad - \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) \cdot (M.(N.\widehat{k}_X(P, \mathcal{E}_P))) \\ &\quad + \widehat{k}_X(M, \mathcal{E}_M) \cdot (M.\widehat{k}_X(N, \mathcal{E}_N)). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\delta\widehat{c}_X((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N), (P, \mathcal{E}_P)) = 0$.

□

6.4 Perspectives

Considérons de nouveau le groupe $\mathcal{H}_{g,1}$ et son extension centrale associée définie au chapitre 3 :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1} \longrightarrow 1. \quad (*)$$

Rappelons que la motivation à terme est de définir une extension de l'homomorphisme d de Morita aux cobordismes d'homologie en s'inspirant de la construction géométrique de d faite dans [Mol] et dans le chapitre 3. Les deux derniers chapitres nous donnent deux voies différentes.

La première piste serait d'utiliser l'extension centrale (*) du groupe $\mathcal{H}_{g,1}$. Nous avons un premier cocycle associé qui prolonge 3τ où τ est le cocycle de

Meyer. Si l'on veut suivre la stratégie de [Mo1] utilisée pour construire les SU -parallélisations relatives de Morita des mapping cylindres, il nous faudrait définir un champ de vecteurs temps préféré sur les cobordismes d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. Le point de vue du chapitre 3, par rapport à celui de [Mo1], aurait l'avantage de pouvoir prolonger aisément toutes les constructions aux cobordismes d'homologie y compris le théorème du cocycle d'intersection à moindres frais. On obtiendrait alors une extension du «cœur» de l'invariant de Casson à un sous-groupe de $\mathcal{H}_{g,1}$. Le premier problème est déjà de réussir à caractériser le champ de vecteurs temps sur les mapping cylindres induite par la direction préférée de I sans utiliser la structure produit de $I \times \Sigma_{g,1}$.

La deuxième piste serait d'utiliser le groupe $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ que l'on vient de définir. En effet, considérons la projection canonique $p : \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{H}_{g,1}$. On peut alors définir le 2-cocycle $\tilde{c}_0 := p^*(\hat{c}_0)$ de $C^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}; \mathbf{Z})$ défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 : \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \times \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ ((M, \mathcal{E}_M), (N, \mathcal{E}_N)) &\mapsto 3 \text{ sign } \mathcal{M}_{M,N} \end{aligned}$$

De même, nous pouvons induire de l'extension centrale $(*)$ du groupe $\mathcal{H}_{g,1}$ une extension centrale centrale du groupe $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \longrightarrow 1$$

où $\widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}} \times \mathbf{Z}$ muni de la loi de groupe suivante : quels que soient les éléments (M, \mathcal{E}_M) et (N, \mathcal{E}_N) de $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ et pour tout entier n et m ,

$$((M, \mathcal{E}_M), m) \cdot ((N, \mathcal{E}_N), n) = ((M, \mathcal{E}_M) \cdot (N, \mathcal{E}_N), m + n + 3 \text{ sign } \mathcal{M}_{M,N}).$$

Nous avons alors les extensions du cocycle de Meyer et du cocycle d'intersection. Il nous faudrait alors comprendre géométriquement le groupe $\widehat{\mathcal{H}}_{g,1}^{\mathcal{E}}$ pour pouvoir rapprocher le cocycle \hat{c}_X de l'extension centrale de $\mathcal{H}_{g,1}^{\mathcal{E}}$. Le but étant de le décrire comme cocycle associé à une certaine section.

Bibliographie

- [At] M.F. Atiyah, *On framings on 3-manifolds*, Topology, vol **29**, no. 1 (1990), p. 1-7.
- [BG] J. Barge, E. Ghys, *Cocycle d'Euler et de Maslov*, Math. Ann., **294** (1992), p. 235-265
- [Bi] J. Birman, *Braids, links, and mapping class group*, Princeton University Press and University of Tokyo Press us Princeton 1975, Annals of Mathematics Studies 82.
- [Br] K. Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag us New York, NY 1982, Graduate Texts in Mathematics 87.
- [Ca] A. Casson, Lectures as MRSI, 1985.
- [De] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta. math. **69** (1938), p. 135-206.
- [Fo] Ralph H. Fox, *Free differential calculus I, derivation in the free group ring*, Annals of Mathematics, **57** (1953), p.547-560.
- [GGP] S. Garoufalidis, M. Goussarov, M. Polyak, *Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds*, Geometry & Topology **5**(2001) p.75-108. p 243-270
- [GL] S. Garoufalidis, J. Levine *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, Preprint 1999, arxiv :math.GT/9904106.
- [GS] R.E. Gompf, A.I. Stipsicz *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol 20, American Mathematical Society.
- [Ha] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geometry & Topology **4**(2000) p.1-83. p 243-270
- [Hi1] F. Hirzebruch, *The signature theorem : reminiscences and recreation*, Prospects in Mathematics, Ann. Math. Stud. **70** (1971), p.3-31, Princeton University press
- [Hi2] F. Hirzebruch, *Hilbert modular surfaces*, Enseign. Math. **19** (1973), p.183-281.
- [HBJ] F. Hirzebruch, Thomas Berger, Rainer Jung, *Manifolds and Modular Forms*, Aspects of Mathematics, A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn.

- [HNS] F. Hirzebruch, W.D. Neumann, S.S. Koh, *Differential manifolds and quadratic forms*, Lecture notes in pure and applied mathematics.
- [HZ] F. Hirzebruch, D.Zagier, *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory*, Mathematics Lecture Series, Bonn University, Germany.
- [Le] Ch. Lescop, *Global surgery formul for the Casson-Walker invariant*, Princeton University Press US Princeton, NJ 1996, Annals of Mathematics Studies 140.
- [Le1] J.Levine, *Homology cylinders : an enlargement of the mapping class group*, Algebraic & Geometric Topology, Volume **1** (2001), p.243-270.
- [Le2] J.Levine, *Addendum and Correction to : Homology cylinders : an enlargement of the mapping class group*, Algebraic & Geometric Topology **2**(2002), paper no.47, p.1197-1204.
- [Ki] R. Kirby, *The Topology of 4-manifolds*, Lectures Notes in Mathematics 1374, Springer Verlag.
- [KMS] W.Karras, D. Magnus, A. Solitar *Combinatorial group theory presentation of groups in terms of generators and relations*, Interscience publishers us New York, NY 1966, Pure and Applied Mathematics 13
- [Jo1] D. Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , Math. Ann. **249** (1980), p. 225-242.
- [Jo2] D. Johnson, *the Structure of the Torelli Group II : a characterization of the Group Generated by Twists on Bounding Curves* , Topology **24** (1985), p.127-144.
- [Ma] W. S. Massey, *Singular Homology Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin.
- [Me1] W. Meyer, *Die Signatur von lokalen Koeffizienten-Systemen und Faserbündeln*, Dissertation. Bonn. Math. Schr.**53** (1972).
- [Me2] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201**, p. 239-264 (1973).
- [MS] J.W. Milnor, J.D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press
- [Mo1] S. Morita, *Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles*, J. Differential Geometry **47** (1997), p. 560-599.
- [Mo2] S. Morita, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles. I* , Ann. Int. Foufier (Grenoble) **39** (1989), p.777-810.
- [Mo3] S. Morita, *Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface bundles. II* , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **105** (1989), p.79-101.
- [Mo4] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-shperes and characteristic classes of surface bundles. I*, Topology **28** (1989), p.305-323.

- [Mo5] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. II*, *Topology* **30** (1991), p.603-621.
- [Oh] T. Ohtsuki, *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, *Geometry & Topology Monographs*, vol 4 (2002), p.377-572.
- [Pe1] B. Perron, *Johnson's and Morita's results on the mapping class group revisited. Part I*, Preprint. Université de Bourgogne (Novembre 2000)
- [Pe2] B. Perron, *Johnson's and Morita's results on the mapping class group revisited. Part II*, Preprint. Université de Bourgogne (Novembre 2001)
- [Pi] W. Pitsch, *Une construction cohomologique de l'invariant de Casson*, Thèse de l'Université de Paris 7 - Denis Diderot (Septembre 2000).
- [Po] J. Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, *Proc. AMS*, **68** vol. 3 (1978), p. 347-350.
- [Ro] D. Rolfsen, *Knots and Links*, University of British Columbia.
- [Sa] N. Saveliev, *Lectures on the Topology of 3-manifolds, An introduction to the Casson invariant*, Walter de Gruyter, New-York Berlin 1999.
- [Si] J. Singer, *Three Dimensional Manifolds and their Heegaard diagrams*, *Trans. AMS* **35** (1933), p. 87-111.
- [Sp] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill series in higher mathematics.
- [Sta] J. Stallings, *Homology and central series of groups*, *Journal of Algebra* **10**, 1968, p. 411-418.
- [Ste] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University press 1951, Princeton, New Jersey
- [Tu] V. Turaev, *Torsions of 3-dimensional manifolds*, *Progress in Mathematics* 208, Birkhäuser, 2002
- [Wa] C.T.C. Wall, *Non-additivity of the Signature*, *Invent. Math.* **7**, 1969, p. 269-274.

CŒUR DE L'INVARIANT DE CASSON ET COBORDISMES D'HOMOLOGIE

L'invariant de Casson est un invariant classique des 3-sphères d'homologie entière. Via les scindements de Heegaard, S. Morita le décrit comme la somme de deux homomorphismes d et q définis sur un sous-groupe $\mathcal{K}_{g,1}$ du groupe de difféotopies $\mathcal{M}_{g,1}$. L'homomorphisme d constitue le «Cœur de l'invariant de Casson» et est décrit géométriquement en termes de SU -parallélisations de Morita des mapping tores. A l'origine, d provient d'une application d_X définie sur $\mathcal{M}_{g,1}$ comme la différence entre le cocycle de Meyer et un cocycle d'intersection dépendant d'un champ de vecteurs X sur la surface $\Sigma_{g,1}$. Tout d'abord, nous revisiterons les résultats de Morita et rendrons l'application d_X calculatoire. Puis nous considérerons les cobordismes d'homologie et leur groupe associé $\mathcal{H}_{g,1}$: via les mapping cylindres, $\mathcal{M}_{g,1}$ constitue un sous-groupe de $\mathcal{H}_{g,1}$. Dans la perspective de prolonger d , nous étendrons les cocycles d'intersection et cocycle de Meyer aux cobordismes d'homologie munis de structure d'Euler.

Mots clés : invariant de Casson, groupe de difféotopies, cobordisme d'homologie, sphère d'homologie entière, scindement de Heegaard, SU -parallélisation, cocycle de Meyer, cocycle d'intersection, classes caractéristiques relatives.

CORE OF THE CASSON INVARIANT AND HOMOLOGY COBORDISMS

The Casson invariant is a classical invariant of integral homology 3-spheres. S. Morita described it as a sum of two homomorphisms d and q defined on a subgroup $\mathcal{K}_{g,1}$ of the mapping class group $\mathcal{M}_{g,1}$. The homomorphism d can be viewed as the core of the Casson invariant and is described geometrically in terms of SU -framings on mapping torii. At the beginning, d comes from an application d_X defined on $\mathcal{M}_{g,1}$ as the difference between the Meyer cocycle and an intersection cocycle which depends on a non singular vector field X on the surface $\Sigma_{g,1}$. First, we will consider the homology cobordisms and their associated group $\mathcal{H}_{g,1}$: via the mapping cylinders, $\mathcal{M}_{g,1}$ is a subgroup of $\mathcal{H}_{g,1}$. In prospect of extending d , we will extend the intersection cocycles and Meyer cocycle to homology cobordisms equipped with relative Euler structure.

Keywords : Casson invariant, mapping class group, homology cobordism, integral homology sphere, Heegaard splitting, SU -framing, Meyer cocycle, intersection cocycle, relative characteristic classes.