

---

# LARGEUR DE SEUIL DANS LES LOIS DU ZÉRO-UN

Raphaël ROSSIGNOL  
Université Paris 5

Directeur de Thèse  
Bernard Ycart

R.R.

# Introduction

---

## Etude des phénomènes de seuil

Exemple-type :  $\mathcal{G}(n, p)$   
 $n$  sommets, probabilité d'arête  $p$ .

R.R.

# Introduction

## Etude des phénomènes de seuil

Exemple-type :  $\mathcal{G}(n, p)$   
 $n$  sommets, probabilité d'arête  $p$ .

Si  $p = \frac{\log n}{n} + \frac{c}{n}$ , alors  $\mathbb{P}(\mathcal{G}(n, p) \text{ connexe}) \simeq e^{-e^{-c}}$

- échelle de localisation :  $\frac{\log n}{n}$
- échelle des fluctuations :  $\frac{1}{n}$  **largeur de seuil**

R.R.

# Concentration de la mesure :

---

Une fonction qui dépend de beaucoup de variables aléatoires indépendantes, et pas trop de chacune d'elles est essentiellement constante.

R.R.

# Concentration de la mesure :

---

Une fonction qui dépend de beaucoup de variables aléatoires indépendantes, et pas trop de chacune d'elles est essentiellement constante.

- A  $p$  fixé : concentration “spatiale”
- Phénomène de seuil : concentration “temporelle”

Approche classique : spatial  $\Rightarrow$  temporel

Erdős et Rényi (1960) jusqu'à aujourd'hui

R.R.

# Approche spécifiquement temporelle

---

Friedgut et Kalai (1996) : **largeur de seuil**  $\leq O\left(\frac{1}{\log n}\right)$  pour une propriété “croissante” et “symétrique”

Preuve : **Analyse Harmonique** sur  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

R.R.

# Approche spécifiquement temporelle

---

Friedgut et Kalai (1996) : **largeur de seuil**  $\leq O\left(\frac{1}{\log n}\right)$  pour une propriété “croissante” et “symétrique”

Preuve : **Analyse Harmonique** sur  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

Nos contributions :

- Construction de seuils par **tensorisation**
- **Inégalité de Sobolev logarithmique**  $\Rightarrow$  **Optimisation** du résultat de Friedgut et Kalai

R.R.

# Cadre général

---

$$\forall x \in \{0, 1\}^n$$

$$\mu_{n,p}(x) = p^{\sum x_i} (1 - p)^{\sum 1 - x_i}$$

- Graphes aléatoires
- Percolation
- Fiabilité
- Images aléatoires
- k-satisfaisabilité

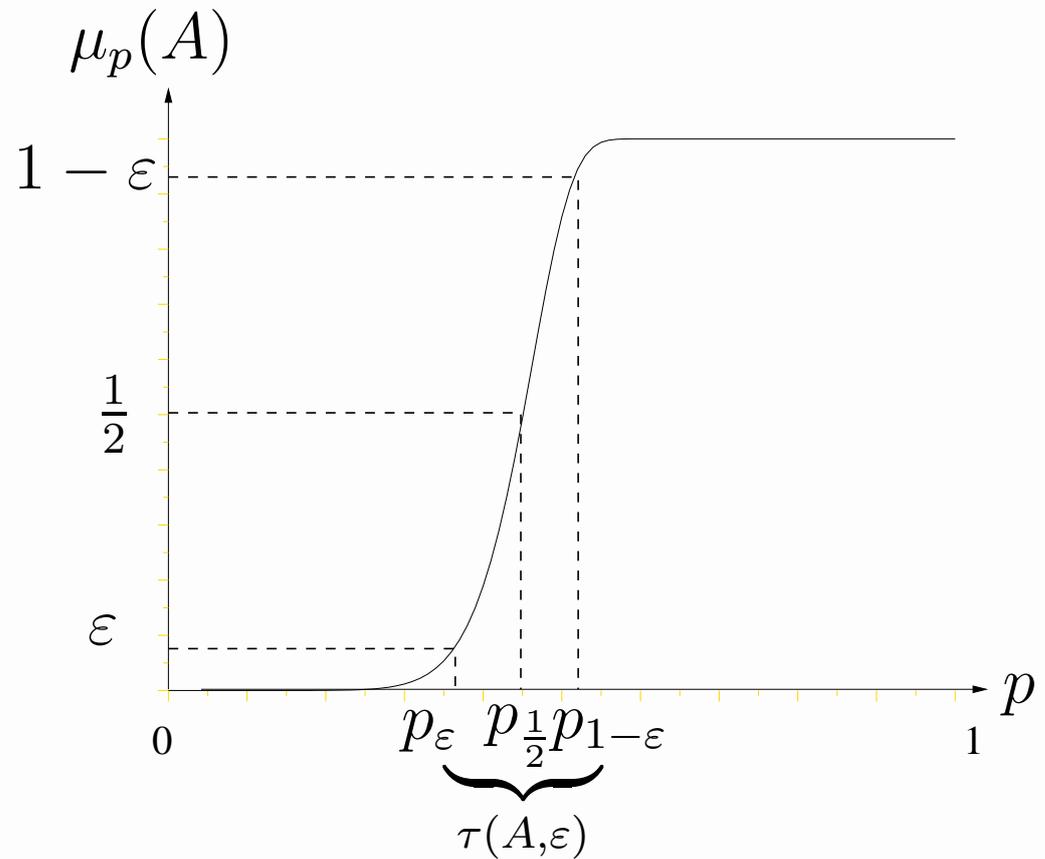
R.R.

# Ensemble croissant

$A$  croissant  $\implies p \mapsto \mu_p(A)$  croissante

Largeur de seuil  
de niveau  $\varepsilon$  pour  $A$

$$\tau(A, \varepsilon) = p_{1-\varepsilon} - p_\varepsilon$$



R.R.

# Symétrie

$A \subset \{0, 1\}^n$  symétrique :  $A$  invariante par l'action de  
 $G \subset \mathcal{S}_n$ , transitif sur  $\{1, \dots, n\}$

- $G = \mathcal{S}_n$  : totalement symétrique
- Graphe aléatoire  $\mathcal{G}(n, p)$  : permutation des sommets
- Images aléatoires  $n \times m$  pixels : translations
- $k$ -satisfaisabilité :  $G = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n \rtimes \mathcal{S}_n$ .

R.R.

# Lois du 0-1

$$A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } A_n \subset \{0, 1\}^{\alpha(n)}$$

$A$  suit une loi du 0-1 si :

$$\forall \varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}], \tau(A_n, \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$A$  a un seuil **étroit** si :

$$\forall \varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}], \frac{\tau(A_n, \varepsilon)}{p_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$A$  a un seuil **grossier** si elle suit une loi du 0-1 et que son seuil n'est pas étroit

R.R.

---

# Lois du 0-1 et opérations ensemblistes

R.R.

# Union et intersection

$A$  et  $B$  croissantes

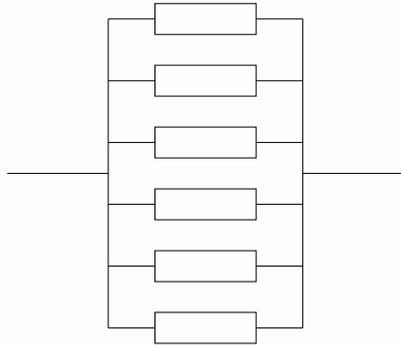
$$\tau(A \cup B, \varepsilon) \geq \inf \{ \tau(A, \sqrt{\varepsilon}), \tau(B, \sqrt{\varepsilon}) \}$$

$$\tau(A \cup B, \varepsilon) \leq \sup \{ \tau(A, 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}), \tau(B, 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}) \}$$

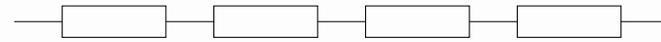
$\implies$  Conservation des lois du 0-1 (grossières ou étroites)  
par union ou intersection finie

R.R.

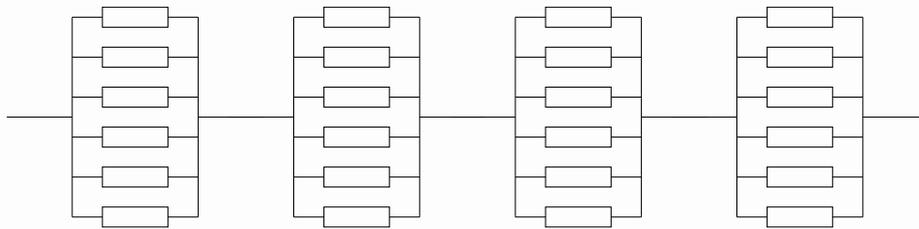
# Systeme parallèle-série



Ensemble de pannes  $A$



Ensemble de pannes  $B$



Ensemble de pannes  $A \otimes B$

$$\mu_p(A \otimes B) = 1 - (1 - p^6)^4$$

R.R.

# Produit tensoriel

$$A \subset \{0, 1\}^r, B \subset \{0, 1\}^m$$

Déf :  $A \otimes B \subset (\{0, 1\}^r)^m$

$$\eta \in A \otimes B \Leftrightarrow (\mathbf{1}_{\eta_1 \in A}, \dots, \mathbf{1}_{\eta_m \in A}) \in B$$

Intérêt :  $\mu_{mr,p}(A \otimes B) = \mu_{m,\mu_{r,p}(A)}(B)$

$A$  et  $B$  croissants  $\Rightarrow A \otimes B$  croissant

$A$  et  $B$  symétriques  $\Rightarrow A \otimes B$  symétrique

R.R.

# Lois du 0-1 et produit tensoriel

Loi du 0-1 de largeur homogène d'ordre  $b_n$  :

$$p_\gamma - p_\beta = \Theta(b_n) \text{ et } b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Fortement homogène :

$$p_{\gamma_n} - p_{\beta_n} = O((\gamma_n - \beta_n)b_n)$$

où  $\varepsilon < \beta_n < \gamma_n < 1 - \varepsilon$

R.R.

# Lois du 0-1 et produit tensoriel

Loi du 0-1 de largeur homogène d'ordre  $b_n$  :

$$p_\gamma - p_\beta = \Theta(b_n) \text{ et } b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Fortement homogène :

$$p_{\gamma_n} - p_{\beta_n} = O((\gamma_n - \beta_n)b_n)$$

où  $\varepsilon < \beta_n < \gamma_n < 1 - \varepsilon$

$$\left. \begin{array}{l} p_{B, \frac{1}{2}} \sim q \in ]0; 1[ \\ B \text{ homogène d'ordre } b_m \\ A \text{ fort. homogène d'ordre } a_r \end{array} \right\} \implies A \otimes B \text{ homogène d'ordre } a_r \times b_m$$

R.R.

# Construction de seuils

- $A_r = \left\{ \sum_{i=1}^r x_i \geq \frac{r}{2} \right\}$   $p_{A, \frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2}$   
largeur fort. homogène en  $O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$
- $B_m$  : pannes d'un par.-série à  $\lfloor \frac{m}{\log m} \rfloor$  blocs de  $\lfloor \log m \rfloor$  composants  $p_{B, \frac{1}{2}} \sim \frac{1}{e}$   
largeur homogène en  $O\left(\frac{1}{\log m}\right)$

$$A_r \otimes B_{m_1} \otimes \dots \otimes B_{m_{k+1}} \subset \{0, 1\}^n \text{ de largeur } O\left(\frac{1}{n^\alpha \log^k n \omega(n)}\right)$$

avec  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega(n) = o(\log n)$

R.R.

---

# Approche temporelle “à la Friedgut et Kalai”

R.R.

# La méthode classique

$$\left. \begin{array}{l} A \subset \{0, 1\}^n \text{ croissant} \\ I_m, m \in \mathcal{M} : \text{indicatrices} \end{array} \right\} X = \sum_{m \in \mathcal{M}} I_m, \quad A = \{X \geq 1\}$$

- Premier moment :

$$\mu_p(A) \leq \mathbb{E}_{\mu_p}(X) .$$

- Second moment :

$$\mu_p(A^c) \leq \frac{\text{Var}_{\mu_p}(X)}{\mathbb{E}_{\mu_p}(X)^2} .$$

- Approximation poissonnienne :  $X \simeq \mathcal{P}(\mathbb{E}(X))$

R.R.

# Un problème de concentration

$$\mathcal{X}(n, p) = \left( \mathbf{1}_{[0,p]}(U_1), \dots, \mathbf{1}_{[0,p]}(U_n) \right) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mu_{n,p}$$

$$U_i \text{ i.i.d } \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([0, 1])$$

Temps d'atteinte de  $A$  :

$$\mathcal{T}(A) = \min \{p \text{ tels que } \mathcal{X}(n, p) \in A\}$$

- Si  $A$  est croissant,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}(A) \in [p_\alpha, p_\beta]) = \beta - \alpha$$

$$\mathcal{T}(A) = \min_{m \in \mathcal{M}} Z_m \quad \text{où} \quad Z_m = \max \{U_i, i \text{ tq } m_i = 1\}$$

R.R.

# Forte dérivée

Si, pour tout  $p \in [0, 1]$  :

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq \frac{a}{g(p)} \mu_p(A)(1 - \mu_p(A))$$

Alors,

$$\tau(A, \varepsilon) \leq \frac{2}{a} \sup_{[p_\varepsilon, p_{1-\varepsilon}]} \{g(p)\} \log \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

R.R.

# Influence des coordonnées

$I_A(k)$  : influence de la  $k$ -ième coordonnée sur  $A$

Mesure en dimension  $n - 1$  des configurations pour lesquelles la coordonnée  $k$  est “sensible” pour  $A$

$$I_A(k) = \mu_{n-1,p} \left( u \in \{0, 1\}^{n-1}, \right. \\ \left. \begin{cases} (u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_k, \dots, u_{n-1}) \notin A \\ (u_1, \dots, u_{k-1}, 1, u_k, \dots, u_{n-1}) \in A \end{cases} \right)$$

$$\frac{d\mu_{n,p}(A)}{dp} = \sum_{i=1}^n I_A(i)$$

R.R.

# Théorème (Talagrand-Friedgut-Kalai)

Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout sous-ensemble croissant, symétrique et non trivial  $A$  de  $\{0, 1\}^n$  et pour tout  $0 < p < 1$ ,

$$\frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq C \frac{\log n}{h(p)} \mu_p(A)(1 - \mu_p(A))$$

Conséquences :

$$\tau(A, \varepsilon) \leq C \sup_{p \in [p_\varepsilon; p_{1-\varepsilon}]} h(p) \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n} \leq C' \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n}$$

$$\text{où } h(p) = p(1 - p) \log \frac{2}{p(1 - p)}$$

R.R.

# Clefs de la démonstration

Base orthonormée de  $L^2(\{0, 1\}^n, \mu_p)$  :

$$r_S(x) = \left( -\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right)^{\sum_{i \in S} x_i} \left( \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right)^{\sum_{i \in S} 1-x_i}$$

Lien avec les influences :

$$\text{Si } \mathbf{1}_A = \sum_S \alpha_S r_S,$$

$$\text{alors } \sum_S |S| \alpha_S^2 = p(1-p) \sum_{k=1}^n I_A(k)$$

R.R.

# Clefs de la démonstration

Lemme de Bonami-Beckner :

Si  $q \geq 2$ ,  $\varepsilon_i$  v.a de Rademacher,

$$\left\| \left\| \sum_{|S| \leq k} a_S \prod_{i \in S} \varepsilon_i \right\|_q \right\| \leq \left( \sqrt{q-1} \right)^k \left\| \left\| \sum_{|S| \leq k} a_S \prod_{i \in S} \varepsilon_i \right\|_2 \right\|$$

Généralisation de Talagrand : Si  $q \geq 2$ ,

$$\left\| \left\| \sum_{|S| \leq k} a_S r_S \right\|_{q, \mu_p} \right\| \leq \left( \sqrt{\frac{q-1}{p(1-p)}} \right)^k \left\| \left\| \sum_{|S| \leq k} a_S r_S \right\|_{2, \mu_p} \right\|$$

R.R.

# Théorème

Soit  $A$  une propriété croissante de  $\{0, 1\}^n$ , symétrique et non triviale. Pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\forall p \in ]0, 1[, \frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq s(n) \frac{\mu_p(A)(1 - \mu_p(A))}{p(1 - p) \frac{\log \frac{1-p}{p}}{1-2p}}$$

où  $s(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \log n$

Csq : 
$$\tau(A, \varepsilon) \leq \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{s(n)}$$

R.R.

# Un semi-groupe bien utile

$$\Delta_k f = f - \int f d\mu_{1,p}(x_k)$$

Générateur de  $n$  processus markoviens de saut :

$$\mathbf{L} = - \sum_{k=1}^n \Delta_k$$

Energie de  $f = \mathbf{1}_A$ , avec  $A$  croissant :

$$\int -f \mathbf{L} f d\mu_p$$

R.R.

# Un semi-groupe bien utile

$$\Delta_k f = f - \int f d\mu_{1,p}(x_k)$$

Générateur de  $n$  processus markoviens de saut :

$$\mathbf{L} = - \sum_{k=1}^n \Delta_k$$

Energie de  $f = \mathbf{1}_A$ , avec  $A$  croissant :

$$\int -f \mathbf{L} f d\mu_p = p(1-p) \sum_{k=1}^n I_k(A)$$

R.R.

# Inégalité de Sobolev logarithmique sur $\{0, 1\}^n$

Entropie de  $f$  :

$$\mathbf{Ent}_{\mu_p}(f) = \int f \log f \, d\mu_p - \left( \int f \, d\mu_p \right) \log \left( \int f \, d\mu_p \right)$$

Inégalité de Sobolev logarithmique :

$$c_{LS}(p) \int -f \mathbf{L} f \, d\mu_p \geq \mathbf{Ent}_{\mu_p}(f^2) \quad (ILS)$$

$$c_{LS}(p) = \begin{cases} \frac{\log(1-p) - \log p}{1-p - p} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

R.R.

# Esquisse de la démonstration

---

$$\left\{ \begin{array}{l} f - \mathbb{E}[f] = \sum_{j=1}^n V_j \\ \text{avec } V_j = \mathbb{E}[f|(x_1, \dots, x_j)] - \mathbb{E}[f|(x_1, \dots, x_{j-1})] \end{array} \right.$$

R.R.

# Esquisse de la démonstration

$$\left\{ \begin{array}{l} f - \mathbb{E}[f] = \sum_{j=1}^n V_j \\ \text{avec } V_j = \mathbb{E}[f|(x_1, \dots, x_j)] - \mathbb{E}[f|(x_1, \dots, x_{j-1})] \end{array} \right.$$

Application de (*ILS*) aux  $V_j$  :

$$c_{LS}(p) \int -V_j \mathbf{L} V_j d\mu_p \geq \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2)$$

R.R.

# Esquisse de la démonstration

$$\begin{cases} f - \mathbb{E}[f] = \sum_{j=1}^n V_j \\ \text{avec } V_j = \mathbb{E}[f|(x_1, \dots, x_j)] - \mathbb{E}[f|(x_1, \dots, x_{j-1})] \end{cases}$$

Application de (*ILS*) aux  $V_j$  :

$$c_{LS}(p) \int -V_j \mathbf{L} V_j d\mu_p \geq \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2)$$

Grâce à l'orthogonalité des  $V_j$  :

$$\sum_{j=1}^n \int -V_j \mathbf{L} V_j d\mu_p = \int -f \mathbf{L} f d\mu_p$$

R.R.

# Esquisse de la démonstration

$$c_{LS}(p) \int -f \mathbf{L} f \, d\mu_p \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2) = \underbrace{\sum_{j=1}^n \int V_j^2 \log V_j^2 \, d\mu_p}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \|V_j\|_2^2 \log \frac{1}{\|V_j\|_2^2}}_{(2)}$$

R.R.

# Esquisse de la démonstration

$$c_{LS}(p) \int -f \mathbf{L} f \, d\mu_p \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2) = \underbrace{\sum_{j=1}^n \int V_j^2 \log V_j^2 \, d\mu_p}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \|V_j\|_2^2 \log \frac{1}{\|V_j\|_2^2}}_{(2)}$$

- Symétrie de  $A \Rightarrow (2) \geq \text{Var}(f) \log \frac{n}{p(1-p) \sum_{k=1}^n I_k(A)}$

R.R.

# Esquisse de la démonstration

$$c_{LS}(p) \int -f \mathbf{L} f d\mu_p \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{Ent}_{\mu_p}(V_j^2) = \underbrace{\sum_{j=1}^n \int V_j^2 \log V_j^2 d\mu_p}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \|V_j\|_2^2 \log \frac{1}{\|V_j\|_2^2}}_{(2)}$$

- Symétrie de  $A \Rightarrow (2) \geq \text{Var}(f) \log \frac{n}{p(1-p) \sum_{k=1}^n I_k(A)}$
- (1) négligeable devant (2)

R.R.

# Optimalité

- Si  $\forall A$  croissant et symétrique  $\frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq \frac{a_n}{f_1(p)} f_2(\mu_p(A))$

$$\text{avec } f_1(p) \underset{0}{\sim} p \log \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\text{Alors, } \limsup \frac{a_n}{\log n} \leq 1$$

R.R.

# Optimalité

- Si  $\forall A$  croissant et symétrique  $\frac{d\mu_p(A)}{dp} \geq \frac{a_n}{f_1(p)} f_2(\mu_p(A))$

$$\text{avec } f_1(p) \underset{0}{\sim} p \log \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\text{Alors, } \limsup \frac{a_n}{\log n} \leq 1$$

- Sous-optimalité de  $\tau(A, \varepsilon) \leq \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{\log n}$  :

$$\text{Il existe } B_n \text{ tq : } \begin{cases} p_{B, \frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2} \\ \tau(B_n, \varepsilon) \sim \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}{2 \log n} \text{ pour } \varepsilon \sim \frac{1}{2} \end{cases}$$

R.R.

---

# Perspectives

R.R.

# Grandes questions

---

- Influence du groupe d'invariance (cf. Bourgain-Kalai)
- Influence de quelques caractéristiques des configurations minimales (cf. Friedgut et Bourgain)
- Aborder directement la concentration du temps d'atteinte ?

R.R.

# A court terme

- Etude de  $\tau(A \otimes B, \varepsilon)$  lorsque  $p_{B, \frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
- Coordonnées non identiquement distribuées dans la minoration générale de  $\tau(A, \varepsilon)$  pour  $A$  symétrique croissante
- Dynamique markovienne à coordonnées indépendantes sur  $\{0, 1\}^n$

seuil étroit pour  $A \xrightarrow{?}$  concentration du temps d'atteinte de  $A$

R.R.