Etude de sup u*inf u pour l’équation de la courbure scalaire prescrite en dimension >= 3 et inégalités de Harnack

Samy Skander Bahoura

Etude du supu×infu pour l'équation de la courbure prescrite en dimension $n \geq 3$ et inégalités de Harnack.

Samy Skander Bahoura

THESE DE DOCTORAT DE l'UNIVERSITE PARIS VI

Thierry Aubin : Directeur de Thèse.
Pascal Cherrier : Membre du Jury.
Yanyan Li : Rapporteur.
Frank Pacard : Membre du Jury.
Henri Skoda : Membre du Jury.
Laurent Veron : Rapporoeur.

Mes remerciements s'adressent à ceux avec qui j'ai eu des discussions intéréssentes en mathématiques ou autre.

I) Introduction et Enoncées des Théorèmes

II) Preuve des Théorèmes et Appendice.

INTRODUCTION

Le problème auquel nous nous intéressons est le suivant :

Problème 1 *On considère sur une variété riemannienne $\mathcal{C}^\infty(M,g)$ (pas nécéssairement sans bord) l'équation de la courbure scalaire prescrite :*

$$4\frac{(n-1)}{(n-2)}\Delta u + R_0 u = V u^{q-1} \qquad u > 0 \text{ sur } \overset{\circ}{M} \qquad (E_1)$$

avec R_0 la courbure scalaire de M et $2 < q \leq N = \dfrac{2n}{n-2}$

D'autre part, on se donne trois réels non nuls a, b, A et on suppose que la fonction V vérifie :

$$a \leq V(x) \leq b, \qquad \forall x \in M$$

$$|V(x) - V(y)| \leq A[d(x,y)]^\alpha \qquad \forall x, y \in M, \text{ avec } \alpha > 0 \text{ quelconque}$$

existe-t-il, pour chaque compact $K \subset \overset{\circ}{M}$, une constante $c > 0$, ne dépendant que de α, a, b, A, K, M, telle que pour toute fonction u solution de (E_1) relativement à une fonction V vérifiant les hypothèses pécédentes, on ait :

$$(*) \qquad \sup_K u \times \inf_M u \leq c$$

On note, $\Delta = -\sum_i^n \partial_{ii}$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\Delta = -\nabla_i(\nabla^i) = -\nabla_i(g^{ij}\nabla_j)$ sur une variété riemannienne M de métrique g, $\overset{\circ}{M}$ désigne l'intérieur de M.

Dans le cas positif ($a, b > 0$ et $\alpha = 1$), la variété riemannienne se réduira à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Lorsque $q = N$ dans l'équation (E_1), quelques résultats sont connus :

- Le problème a été évoqué sur la sphère lorsque $V = cte$, par T.Aubin[2]. Lié au problème de Yamabé, le sup $\times$ inf est alors fixe.

En effet, considérons sur la sphère $\mathcal{S}_n(1), n \geq 3$, l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta\phi + n(n-1)\phi = n(n-1)\phi^{(n+2)/(n-2)}.$$

D'après Aubin[2], il existe $\beta > 1$ et $P \in \mathcal{S}_n$ tel que :

$$\phi(Q) = \phi_{\beta,P}(Q) = \left[\frac{\beta^2 - 1}{[\beta - cos[d(P,Q)]]^2}\right]^{(n-2)/4}.$$

On a alors :

$$\max_{\mathcal{S}_n} \phi = \phi(P) = \left[\frac{\beta^2 - 1}{[\beta - cos[d(P,-P)]]^2} \right]^{(n-2)/4} = \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{(n-2)/4}$$

$$\min_{\mathcal{S}_n} \phi = \phi(-P) = \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right)^{(n-2)/4}$$

et donc,

$$\max_{\mathcal{S}_n} \phi \times \min_{\mathcal{S}_n} \phi = 1.$$

Le résultat sur $\mathcal{S}_n$ est d'une grande simplicité. On peut se demander si dans un cadre plus général, une inégualité telle que $(*)$ a lieu. C'est l'objet du problème 1.

-En dimension 2, le même problème se pose sur $\mathcal{S}_2$, on a :

$$\max_{\mathcal{S}_2} \phi + \min_{\mathcal{S}_2} \phi = 0$$

-Sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'équation est différente, il s'agit de l'équation :

$$\Delta u = V e^u$$

Le résultat concernant la bornitude de $\max_K + \min_\Omega$, où K est un compact de Ω, a été donné par Brézis-Li-Shafrir[4].

- R.Schoen a parlé de ce problème en évoquant des conditions supplémentaires sur V mais sans en donner de preuve pour $n = 3, 4$

- Yanyan Li[11] a mis en évidence des conditions suffisantes de régularité sur V (au moins $\mathcal{C}^{n-2}$ et le gradiant controle les dérivées succéssives) pour résoudre le problème sur la sphére $\mathcal{S}_n$. Il utilise par ailleurs, les notions de blow-ups isolés et isolés simples.

Ce travail consiste à obtenir des résultats comparables avec des hypothèses plus faibles que celles prises par Yanyan Li..

Quoiqu'il en soit, pour $n \geq 3$, des hypothèses supplémentaires doivent être prises comme le prouve ce contre exemple de C.C Chen et C-S.Lin[8].

Ces derniers considèrent sur la sphére de rayon 1, $\mathcal{S}_n(1)$, de courbure scalaire $R_0 = n(n-1)$, l'équation suivante :

$$\Delta v + \frac{n(n-2)}{4} v = R v^{N-1}$$

En utilisant, la projection stéreographique π, la fonction u définie plus bas vérifie sur $\mathbb{R}^n$ l'équation :

$$\Delta u = K(x) u^{N-1} \qquad (*_1)$$

$$\text{avec } \ u(x) = O(|x|^{2-n}) \qquad (*_2)$$

Ici, $u(x) = \left(\dfrac{2}{1+|x|^2}\right)^{(n-2)/2} v(y)$, $x = \pi(y)$, $y \in \mathcal{S}_n - \{y_0\}$, y_0 est le pôle de la projection.

Pour avoir une fonction radiale sur $\mathbb{R}^n$, les auteurs, prennent $K(x) = R(y_1, ..., y_{n+1}) = R(y_{n+1})$. En effet, pour obtenir une fonction radiale sur $\mathbb{R}^n$ à partir d'une fonction définie sur la sphère, il suffit de prendre la fonction de départ R ne dépendant que de la $(n+1)-$ème coordonnée.

De plus, la fonction K est choisie vérifiant les hypothèses suivantes :

$K(x) = n(n-2) + \epsilon K_0(x)$, avec, $K \in \mathcal{C}^1$ et $\epsilon > 0$

$K_0'(r) < 0$ pour $0 < r < 1$ et $K_0(r) = K_0(\frac{1}{r})$, pour $r \geq 1$, $(r = |x|\ )$

Pour r assez petit, $K_0(r) = K_0(0) - Ar^l + H(r)$, avec $|H(r)|r^{-l} + |H'(r)|r^{1-l} \to 0$ quand $r \to 0$ et l est un réel de $]1, \dfrac{(n-2)}{2}[$.

Dans, leur théorème, les auteurs prouvent l'existence d'une suite de fonctions u_j dont les énergies tendent vers l'infini. Comme par transformation conforme, il y a conservation de l'énergie, on peut affirmer, qu'ils exhibent une suite de fonctions, sur la sphère, dont les énergies tendent vers l'infini. Finalement, grâce à la formule de repésentation de Green, $\sup u_j \times \inf u_j \to +\infty$.

Ce théorème est le suivant (le (i) suffit à prouver la nécessité d'hypothèses sur V pour établir une inégalité du style (*)) :

Théorème. *Soit* $K_\epsilon(x) = n(n-2) + \epsilon K_0(|x|)$, K_0 *vérifiant les hypothèses précédentes, avec* $1 < l < \dfrac{(n-2)}{2}$. *Alors, il existe* $\epsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *il existe une infinité de solutions* $u_j^\epsilon(|x|)$ *de* $(*_1), (*_2)$ *avec* $K = K_\epsilon$ *et vérifiant,* $u_j^\epsilon(r) = u_j^\epsilon(\frac{1}{r})r^{2-n}$ *pour* $0 < r \leq 1$. *De plus, les* u_j^ϵ *vérifient :*

(i) Pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, *la suite* $u_j^\epsilon(0)$ *est strictement croissante en* j *et :*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_j^\epsilon)^{2n/(n-2)} dx = +\infty$$

(ii) Pour $j \in \mathbb{N}$, $u_{2j+1}^\epsilon(r) r^{(n-2)/2}$ *a un maximum local en* $r = 1$, j *autres maxima locaux et* j *minima locaux dans* $]0,1[$. *D'autre part, pour toute suite* $\epsilon_i \to 0$, $u_{2j+1}^{\epsilon_i}$ *converge vers* $U_0(r) = \dfrac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}}$ *dans* $\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *et :*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_{2j+1}^{\epsilon_i})^{2n/(n-2)} dx = (2j+1)[n(n-2)]^{-n/2} {S_n}^{n/2}$$

S_n *etant la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev.(Voir Aubin[1]).*

(iii) Pour $j \in \mathbb{N}$, $u_{2j}^\epsilon(r) r^{(n-2)/2}$ *a un minimum local en* $r = 1$, j *maxima locaux et* $j-1$ *minima locaux dans* $]0,1[$. *D'autre part, pour toute suite* $\epsilon_i \to 0$, $u_{2j}^{\epsilon_i}$ *converge vers* $U_0(r) = \dfrac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}}$ *dans* $\mathcal{C}^2_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *et :*

$$\lim_{i\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(u_{2j}^{\epsilon_i})^{2n/(n-2)}dx=(2j)[n(n-2)]^{-(n-2)/2}{S_n}^{n/2}.$$

Des problèmes similaires ont été étudiés par C.C.Chen et C.S.Lin[7] dans le cas d'ouverts Ω de $\mathbb{R}^n$, avec les hypothèses de Yanyan.Li.

Ils considérent une perturbation de l'équation par une fonction g, $\mathcal{C}^1$, strictement positive, et vérifiant une condition asymptotique à l'infini. L'équation étudiée est alors :

$$\Delta u=Vu^{N-1}+g(u)\qquad \text{sur}\qquad \Omega.$$

Concernant la dernière équation avec la perturbation non linéaire en g, nous avons le problème suivant :

Problème 2 *Sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on considère l'équation suivante :*

$$\Delta u=Vu^{N-1}+Wu^{\alpha} \text{ et } u>0\qquad (E_2)$$

avec $\dfrac{n}{n-2}<\alpha<N-1=\dfrac{n+2}{n-2}$

D'autre part, on se donne des réels a,b,c,d,A,B pour lesquels les fonctions V et W vérifient :

$$0<a\leq V(x)\leq b \text{ et } 0<c\leq W(x)\leq d$$

$$||\nabla V||_{L^\infty}\leq A \text{ et } ||\nabla W||_{L^\infty}\leq B$$

existe t-il pour chaque compact K de Ω, une constante C, ne dépendant que de $\alpha,a,b,c,d,A,B,K,\Omega$ telle qu'on ait, pour toute solution u de (E_2) relativement à des fonctions V et W définie comme ci-dessus :

$$(**)\qquad \sup_K u\times\inf_\Omega u\leq C$$

Problème 3 *Sur une variété riemannienne $\mathcal{C}^\infty(M,g)$ (non nécéssairement compacte), on considère l'équation suivante :*

$$\Delta u=Ve^u\qquad \text{sur}\qquad \mathring{M}\qquad (E_3)$$

V vérifiant pour deux réels donné a et b :

$$a\leq V(x)\leq b<0\ \ \forall x\in M$$

$$|V(x)-V(y)|\leq[d(x,y)]^\alpha\qquad \forall x,y\in M,\ \text{avec } \alpha\in]0,1[$$

existe-t-il pour chaque compact $K\subset\mathring{M}$, une constante $c>0$, ne dépendant que de α,a,b,A,K,M telle que, pour toute fonction u solution de (E_3) relativement à une fonction V vérifiant les hypothèses précédents, on ait :

$$(***)\qquad \sup_K u+\inf_M u\leq c.$$

L'égalité (1) relative au cas positif, nous pousse à nous intérésser au problème suivant :

Problème 4 *Sur une variété riemannienne compacte $\mathcal{C}^\infty (M,g)$ de dimension $n=2$, on considère l'équation suivante :*

$$\Delta u + R = Ve^u \qquad (E_4)$$

avec $0 < a \leq V(x) \leq b$ et $|\nabla V(x)| \leq A$.

A-t-on pour toute solution de (E_4) :

$$\sup_M u + \inf_M u \geq c = c(a,b,A,M)$$

.

Sur une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et de courbure scalaire partout positive, on considère l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = Vu^{N-1} \qquad (E_5)$$

V vérifiant pour deux réels positifs donné a et b :

$0 < a \leq V(x) \leq b \qquad \forall\, x \in M$ *(V non nécéssairement hölderienne).*

existe-t-il une constante positive $c > 0$, ne dépendant que de a, b, M, telle que pour tout fonction u solution de (E_5) relativement à une fonction V vérifiant les hypothèses précédentes, on ait :

$$(****) \qquad \sup_M u \times \inf_M u \geq c = c(a,b,M).$$

Sur la sphére $\mathcal{S}_2$, on peut obtenir grâce à une inégalité d'Aubin (voir [2]) une minoration du type : $\sup_{\mathcal{S}_2} u + \inf_{\mathcal{S}_2} u \geq c(b)$.

Pour le cas où $n \geq 3$, on peut supposer que (M,g) appartient au cas positif du problème de Yamabe, par une transformation conforme de la métrique on se ramène à $R > 0$ partout.

Le fait de prendre une variété riemannienne compacte de courbure partout positive est capital, on peut donner le contre-exemple suivant, pour des solutions d'équations dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On considére sur la boule unité, les fonctions suivantes :

$$u_\epsilon(x) = \left(\frac{\mu_\epsilon}{{\mu_\epsilon}^2 + |x|^2}\right)^{(n-2)/2}$$

On a :

$$\Delta u_\epsilon = n(n-2){u_\epsilon}^{(n+2)/(n-2)}$$

$$\max_{B_1(0)} u_\epsilon = u_\epsilon(0) = \frac{1}{{\mu_\epsilon}^{(n-2)/2}} \text{ pour tout } k \in]0,1]$$

$$\min_{B_k(0)} u_\epsilon = u_\epsilon(k) = \left(\frac{\mu_\epsilon}{{\mu_\epsilon}^2 + |k|^2}\right)^{(n-2)/2}$$

On déduit de tout cela que :

$$\max_{B_1(0)} u_\epsilon \times \min_{B_k(0)} u_\epsilon = \left(\frac{1}{{\mu_\epsilon}^2 + |k|^2}\right)^{(n-2)/2}$$

Il suffit de prendre, $\mu_\epsilon \to +\infty$ pour avoir $\max_{B_1(0)} u_\epsilon \times \min_{B_k(0)} u_\epsilon \to 0$.

Les principales remarques qu'on doit porter sur ces deux problèmes sont :

**) Les solutions sont considérées comme régulières ($\mathcal{C}^{2,\alpha}$) et on cherche à, partir de l'équation, sans avoir de condition au bord ni de condition de bornitude uniforme d'énergie, à montrer des résultats de bornitude au sens L^∞_{loc}.

En d'autres termes, on se donne une suite de fonctions $\{u_i\}$ solutions de l'équation (E_1) par exemple, sans avoir de condition de Dirichlet ou de Neumann et on ne sait pas si $(||\nabla u_i||_{L^2})_{i\in\mathbb{N}}$ ou $(||u_i||_{L^N})_{i\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.

D'autre part on impose aux fonctions V_i d'être au plus lipschtiziennes.

**) Le but est d'estimer le maximum des fonctions u_i sur chaque compact par rapport à leurs minima.

**) Dans le cas de la dimension 4, on imposera à la constante de Lipschitz A de V de tendre vers 0 et aussi que le minimum des solutions ne tende pas vers 0 pour pouvoir obtenir des estimations L^∞_{loc} de ces solutions.

**) On verra que pour $n \geq 4$ en supposant nos fonctions radiales nous pouvons imposer sur V des conditions de telle sorte qu'on ait une bonne estimation L^∞_{loc}.

Dans le cas négatif, la courbure scalaire est négative, l'existence de solutions avec condition de Dirichlet est donnée par Noussair[6], Loewner-Nirenberg[7] et Ni[8].

Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \leq 0$ Ni[13] démontre que (E_1) ne possède pas de solution positive.

Loewner-Nirenberg[12] et Noussair[14] ont prouvé l'existence de solutions de (E_3) dans certains cas.

Noussair[6] nous assure l'existence de solutions de (E_2) dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour Loewner-Nirenberg[12], le problème de Dirichelet suivant :

$$-\Delta u = u^{N-1} \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \text{ et u} \equiv \phi \text{ sur } \partial\Omega$$

a une unique solution dans L^N ou encore mieux $u \in \mathcal{C}^\infty$ et $0 < u < max\phi$.

En outre, dans leur travail, ils affirment qu'il existe une unique solution du problème suivant :

$$-\Delta u = u^{N-1} \text{ dans } \Omega \text{ avec } u(x) \to +\infty \text{ si x} \to \partial\Omega$$

d'où un intérêt pour les estimations des fonctions à l'intérieur du domaine.

Pour Noussair, à l'exterieur de la boule unité et avec condition de Dirichelet, il y a une solution de :

$$-\Delta u = Vu^{N-1} \text{ dans } \Omega \text{ et u} \equiv \phi \text{ sur } \partial\Omega$$

Grâce à la transformation de Kelvin, on se ramène à un problème dans la boule unité privée de l'origine.

On pourrait se poser une question à propos du résultat de Nirenberg d'éxistence de solutions $\mathcal{C}^\infty$ et qui tendent vers l'infini au bord.

La réponse est qu'il en existe une et une seule, d'autre part si on se place à l'intérieur du domaine(strictement), on peut trouver des fonctions de ce type mais elles ne seraient plus continues sur notre domaine de départ, ce qui ne nous intéresse pas.

Si, on revient au résultat de Noussair, celui-ci donne l'existence de solutions dans des domaines non bornés(sauf l'espace tout entier), et en particulier en dehors de boules avec conditions de Dirichelet. Sur un domaine borné, on remarque qu'on a existence de solutions pour le problème qui nous intéresse, ceci parceque notre domaine peut être vu comme étantà l'intérieur d'une boule.

Sur certaines variétés riemanniennes compactes, celles à courbures positives, il y a non existence de solutions et notre problème ne se pose plus.

En effet, sur la sphère $\mathcal{S}_n$, si on considère l'équation :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + Ru = Vu^{N-1}$$

avec $\sup V < 0$, celle-ci ne posséde évidemment pas de solution positive.

Pour le voir, il suffit d'intégrer sur $\mathcal{S}_n$:

$$R\int_{\mathcal{S}_n} udV_g = \int_{\mathcal{S}_n} Vu^{N-1}dV_g \leq sup\,V \times \int_{\mathcal{S}_n} u^{N-1}dV_g < 0$$

ce qui est contradictoire puisque $R > 0$ et $V < 0$.

RESULTATS PRINCIPAUX :

Théorème 1 *Considérons deux suites $\{u_i\}, \{V_i\}$ de fonctions relatives au problème (E_1) dans le cas négatif $a, b < 0$, avec $\alpha > 0$ ($\{V_i\}$ höldériennes).*

Alors, pour tout compact K de $\mathring{M}$ il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de α, a, b, A, K, M telle que pour tout entier i, on ait :

$$\sup_K u_i \leq c.$$

Théorème 2 *Considérons deux suites $\{u_i\}, \{V_i\}$ de fonctions relatives à l'équation (E_3), $V_i(x) \leq b < 0$, pour tout $x \in M$ et tout entier i, alors :*

Pour tout compact K de $\overset{\circ}{M}$, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de b, K, M telle que pour tout i, on ait :

$$\sup_K u_i \leq c.$$

Dans le cas $a, b > 0$, on suppose l'exposant sous-critique ou sous-critique tendant vers le critique, on obtient :

Théorème 3 *Considérons deux suites $\{u_{\epsilon_i}\}, \{V_{\epsilon_i}\}$ de fonctions relatives au problème (E_1) dans le cas positif $a, b > 0$ alors on a :*

Si $q_i = N - \epsilon_i$ avec $\epsilon_i \to \epsilon > 0$ et $\alpha > 0$ ($\{V_{\epsilon_i}\}$ höldériennes), alors :

Pour tout compact K de $\overset{\circ}{M}$, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de α, a, b, A, K, M telle que :

$$\sup_K u_{\epsilon_i} \leq c$$

si $q_i = N - \epsilon_i \to N = \dfrac{2n}{n-2}$, $\alpha = 1$ et $M = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors :

Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de a, b, A, K, Ω telle que pour tout u_{ϵ_i} :

$${\epsilon_i}^{(n-2)/2} (\sup_K u_{\epsilon_i})^{1/4} \times \inf_\Omega u_{\epsilon_i} \leq c$$

Corollaire 1 *Considérons deux suites de fonctions $\{u_{\epsilon_i}\}$ et $\{V_{\epsilon_i}\}$ relatives au problème (E_1) dans le cas positif $a, b > 0$ alors si on suppose :*

$M = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $q_i = N - \epsilon_i$ avec $\epsilon_i \to 0$, $\alpha = 1$ et $||\nabla V_{\epsilon_i}|| \leq k\epsilon_i$ ($k > 0$), alors :

Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de a, b, k, K, Ω telle que :

$$(\sup_K u_{\epsilon_i})^{4/5} \times \inf_\Omega u_{\epsilon_i} \leq c.$$

Remarque 1 : Atkinson-Peletier [1], Brezis-Peletier [5] et Han Z-C [10] se sont intéréssés au cas d'une suite de fonctions solutions de (E_2) dans la boule unité avec conditions de Dirichelet, $V_i \equiv 1$ et $q = q_i = N - \epsilon_i$. Ils prouvent la convergence d'une telle suite vers une fonction particulière. Pour Atkinson-Peletier une telle suite vérifie : $\sqrt{\epsilon}_i u_i^2(0) \to \dfrac{[4(n-2)]^{(n-2)/2}\Gamma(n)}{[\Gamma(n/2)]^2}$ et pour $x \neq 0$, $\dfrac{u_i(x)}{\sqrt{\epsilon}_i} \to \dfrac{n^{(n-2)/4}(n-2)^{n/4}\Gamma(n/4)}{\sqrt{\Gamma(n)}}\left(\dfrac{1}{|x|^{n-2}-1}\right)$.

Remarque 2 : A propos du corollaire 1, il aisé de construire un exemple de solutions de (E_1) avec les fonctions $V_\epsilon \not\equiv 1$.

Partons des fonctions bien connues :

$$u_\epsilon(r) = \left(\frac{\mu_\epsilon}{{\mu_\epsilon}^2 + r^2}\right)^{(n-2)/2}, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

μ_ϵ est un réel positif à choisir de telle manière que les hypothèses du corollaire 1 soient satisfaites.

u_ϵ vérifie :

$$\Delta u_\epsilon = n(n-2){u_\epsilon}^{N-1}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\Delta u_\epsilon = n(n-2){u_\epsilon}^{\epsilon}{u_\epsilon}^{N-1-\epsilon} = V_\epsilon {u_\epsilon}^{N-1-\epsilon}$$

avec $V_\epsilon(r) = n(n-2)\left(\dfrac{\mu_\epsilon}{{\mu_\epsilon}^2 + r^2}\right)^{(n-2)\epsilon/2}$

V_ϵ vérifie les hypothèses du corollaire 1.

En effet,

$0 \leq r \leq 1 \Rightarrow {\mu_\epsilon}^2 \leq r^2 + {\mu_\epsilon}^2 \leq 1 + {\mu_\epsilon}^2$, et on en déduit que :

$\dfrac{n(n-2){\mu_\epsilon}^{(n-2)\epsilon/2}}{(1+{\mu_\epsilon}^2)^{(n-2)\epsilon/2}} \leq V_\epsilon(r) \leq \dfrac{n(n-2)}{{\mu_\epsilon}^{(n-2)\epsilon/2}}$.

Il suffit de prendre μ_ϵ tel que : ${\mu_\epsilon}^{s\times\epsilon} \to 1$ quand $\epsilon \to 0$, $\forall\, s > 0$. On peut prendre $\mu_\epsilon \to 1$ par exemple.Ainsi la premiére hypothèse du corollaire 1 pour les fonctions V_{ϵ_i} est bien vérifiée.

Regardons la seconde hypothèse, le calcul de la dérivée de V_{ϵ_i}, donne :

$$|V_\epsilon^{'}(r)| = \frac{{\mu_\epsilon}^{(n-2)\epsilon/2}\, n(n-2)^2\, 2r\,\epsilon}{2(\mu_\epsilon + r^2)\,({\mu_\epsilon}^2 + r^2)^{(n-2)\epsilon/2}}$$

donc :

$$|V_\epsilon^{'}(r)| \leq \frac{{\mu_\epsilon}^{(n-2)\epsilon/2}\, n(n-2)^2\, 2r\,\epsilon}{2\,\mu_\epsilon\,{\mu_\epsilon}^{(n-2)\epsilon}} \leq n(n-2)^2 \times \frac{1}{{\mu_\epsilon}^{(n-2)\epsilon/2}}\frac{\epsilon}{\mu_\epsilon}$$

En prenant $\mu_\epsilon \to 1$ par exemple on déduit que :

$|V_\epsilon^{'}(r)| \leq k\epsilon,\ k > 0$

Dans le cas positif, la courbure scalaire est positive et l'exposant est crtique on obtient :

Théorème 4 *Considérons deux suites $\{u_i\}, \{V_i\}$ de fonctions relatives au problème (E_1) dans le cas positif $a, b > 0$ alors on a :*

si $n = 3$, $q = N = 5$ et $M = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors :

Pour tout compact K de Ω il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de a, b, A, K, Ω telle que :

$$(\sup_K u_i)^{1/3} \times \inf_\Omega u_i \leq c$$

si, $n = 4$, $q = 3$, $M = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^4$ et la constante de Lipschitz A_i, relative à V_i, tend vers $A \geq 0$, alors :

En supposant que $\liminf_{i\to+\infty} \dfrac{\min_\Omega u_i}{A_i} \geq \dfrac{2e^2}{a}$, on obtient :
Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de $a, b, (A_i)_{i\in\mathbb{N}}, K, \Omega$ telle que :

$$(\sup_K u_i) \times \inf_\Omega u_i \leq c$$

Corollaire 2 *Si $(u_i)_i$ et $(V_i)_i$, sont deux suites de fonctions relatives à l'équation (E_1), sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^4$, alors :*

Si, la constante de lipschitz A_i relative à V_i, tend vers 0 et si $\min_\Omega u_i \geq m > 0$ pour tout i, alors :

Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que de, $a, b, (A_i)_{i\in\mathbb{N}}, m, K$, telle que :

$$\sup_K u_i \leq c.$$

Remarque :. Dans le théorème 4, pour ce qui concerne la dimension 4, on a imposé la condition sur la limite inférieure des minima sur l'ouvert tout entier, mais ceci n'est pas obligatoire, il suffit que la condition des minima soit vraie sur un ouvert Ω' plus petit que Ω.

Sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$ si on considére des conditions supplémentaires sur $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ à savoir :

u_i et V_i sont radiales

$|V_i(r) - V_i(r')| \leq A|r^{[(n-2)/2]+\epsilon} - r'^{[(n-2)/2]+\epsilon}| \qquad \forall\, 0 \leq r, r' \leq 1,\ \epsilon > 0$

On obtient le :

Théorème 5
$$[u_i(0)]^{\epsilon/[(n-2)+\epsilon]} \times u_i(1) \leq c$$
où $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de a, b, A, ϵ

Remarque : On peut exhiber des fonctions u et V vérifiant les hypothèses du Théorème 5 sans que les V soit triviaux ($V \not\equiv 1$).

En dimension 4, on peut prendre :

$$u(r) = 1 - r^2, \ 0 \leq r \leq \frac{1}{2}$$

$$u'(r) = -2r \ et \ u''(r) = -2$$

$$u'' + \frac{3}{r}u' = -2 - 6 = -8 = -[\frac{8}{(1-r^2)^3}] \times u^3$$

$$\Delta u = Vu^3, \text{ avec } V = \frac{8}{(1-r^2)^3}$$

on a :

$$V(r) - V(r') = 8\frac{(1-r'^2)^3 - (1-r^2)^3}{[(1-r^2) \times (1-r'^2)]^3} .$$

Si $\qquad r' \leq \frac{1}{2}$ et $r \leq \frac{1}{2}$ alors :

$$|V(r) - V(r')| \leq 8 \times \frac{16^3}{9^3}|(1-r'^2)^3 - (1-r^2)^3| = 8\frac{16^3}{9^3}|r^2 - r'^2| \times |(1-r'^2)^2 + (1-r^2)^2 + (1-r^2)(1-r'^2)| .$$

$$|V(r) - V(r')| \leq 8 \times 3 \times \frac{16^3}{9^3}|r^2 - r'^2|$$

On voit alors que $\epsilon = 1$.

Si on veut définir deux suites de fonctions u_i et V_i vérifiant les conditions du théorème 5, il suffit de modifier u.Par exemple on prend $u_i(r) = 1 + \alpha_i r^2$ en dimension 4, avec $(\alpha_i)_i$ bornée, la suite $(V_i)_i$ associée à $(u_i)_i$ sera définie comme dans l'exemple précédent.

Concernant le deuxième problème, nous avons le résultat suivant :

Théorème 6 *On considère trois suites de fonctions $\{u_i\}$, $\{V_i\}$ et $\{W_i\}$ solutions de (E_2), alors on a :*

Pour tout compact K de Ω, il existe une constante $c' > 0$, ne dépendant que de $\alpha, a, b, c, d, A, B, K, \Omega$ telle qu'on ait :

$$\sup_K u_i \times \inf_\Omega u_i \leq c'$$

Concernant le deuxieme problème et le théorème qu'il lui est associé, on peut, en imposant d'autres conditions sur la constante B relative à la fonction W, avoir le même résultat avec l'exposant $\dfrac{n}{n-2}$.

Le deuxième problème est intermédiaire, entre le cas sous-critique et le cas critique, puisqu'on a deux termes dont l'un est critique et l'autre sous-critique.

Pour le problème 4, on a le résultat suivant :

Théorème 7 *Considérons deux suites $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ de fonctions relatives au problème (E_4), alors on a :*

si $n=2$ et les V_i sont lipschitziennes, on a :

$$\sup_M u_i + \inf_M u_i \geq c.$$

Si $n \geq 3$, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que a, b, M, telle que pour tout entier i, on ait :

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq c.$$

Proposition *Considérons sur la sphère $\mathcal{S}_2$ deux suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$, telles que :*

$$\Delta u_i + 2 = V_i e^{u_i}\,.$$

Les fonctions V_i vérifient, $0 \leq V_i(x) \leq b$ pour tout x et tout i, alors il existe une constante $c = c(b)$, telle que :

$$\sup_{\mathcal{S}_2} u_i + \inf_{\mathcal{S}^2} u_i \geq c\,.$$

<u>Preuve du Théorème 1 :</u>

Etape 1 : On ramene le problème à un problème sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Les estimations données sont locales, on se place dans des ouverts de cartes.

Soit $y_0 \in \mathring{M}$ et (Ω, ϕ) une carte normale géodésique en y_0, $\bar{\Omega} \subset \mathring{M}$. On note $h = \phi^* g$.

Les suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ vérifient :

$$\Delta u_i + R u_i = V_i {u_i}^{q-1}$$

$$a \leq V_i(y) \leq b < 0 \qquad \forall\, y \in M$$

$$|V_i(y) - V_i(z)| \leq A[d(y,z)]^{\alpha}, \;\; \forall\, y, z \in M, \;\; \alpha, A > 0.$$

On pose :

$$w_i(x) = u_i o \phi^{-1}(x), \;\; W_i(x) = V_i o \phi^{-1}(x) \text{ et } T(x) = R o \phi^{-1}(x)$$

alors $w_i(x)$ vérifie :

$$\Delta_h w_i(x) + T w_i(x) = W_i(x)[w_i(x)]^{q-1}, \;\; x \in \tilde{\Omega} = \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions $x \mapsto h_{ij}(x)$ qui sont continues, il existe $m, M > 0$, tels que pour tout $(x, X) \in \phi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$ on ait, $m||X||^2 \leq h_{jk}(x) X^j X^k \leq M||X||^2$. On obtient, pour un ouvert O relativement compact de $\tilde{\Omega}$:

$\exists\, A' > 0, \forall\, x, x' \in O$, $|W_i(x) - W_i(x')| \leq A'||x - x'||^{\alpha}$.

De plus nous avons

$$a \leq W_i(x) \leq b < 0 \qquad \forall\, x \in O$$

et en $x_0 = \phi(y_0) \in O$, $h_{jk}(x_0) = \delta_{jk}$.

Etape 2 : On commence par prouver le résultat local suivant

Il existe $c(x_0, \alpha, a, b, A, q) > 0$ et $R > 0$ tels que pour tout élément x de $B_R(x_0)$ et tout entier i, on ait :

$$w_i(x) \leq \frac{c}{R^{2/(q-2)}}.$$

En fait, le problème consiste à mettre en evidence une sous-suite qui converge uniformément dans ${L_{loc}}^{\infty}$ en faisant en sorte que les points blow-up restent à l'interieur du domaine. L'absence de conditions au bord est à l'origine de cette démarche.

Supposons le contraire :

$$(H) \qquad \text{pour tout } c \,\text{et}\, R > 0, \text{ il existe } j \in \mathbb{N}, \ (\max_{B_R(x_0)} w_j) R^{2/(q-2)} \geq c.$$

Soit alors, une suite de rayons $R_i \to 0$ telle que : $(\max_{B_i} w_i) {R_i}^{2/(q-2)} \to +\infty$, B_i est noté pour $B_{R_i}(x_0)$.

Posons : $s_i(x) = w_i(x)(R_i - |x - x_i|)^{2/(q-2)}$ avec $w_i(x_i) = \max_{B_i(x_0)} w_i$

$|x_i - x_0| \leq R_i \to 0$.

Soit a_i tel que ; $s_i(a_i) = \max_{B_i(x_i)} s_i$, on a alors :

$w_i(a_i)(R_i - |a_i - x_i|)^{2/(q-2)} = s_i(a_i) \geq s_i(x_i) = w_i(x_i){R_i}^{2/(q-2)} \to +\infty$

Posons alors : $l_i = (R_i - |a_i - x_i|)$ et $L_i = \dfrac{l_i}{2}[w_i(a_i)]^{(q-2)/2} \to +\infty$
et comme $0 < l_i \leq R_i \to 0$, $a_i \to x_0$ et $w_i(a_i) \to +\infty$.

On voit bien que tout se concentre au point x_0 et le fait que $L_i \to +\infty$ est nécéssaire pour appliquer la technique blow-up.

Posons : $v_i(z) = \dfrac{1}{w_i(a_i)} w_i\{z[w_i(a_i)^{(2-q)/2}] + a_i\}$ pour $|z| \leq L_i$.

Vérifions que v_i existe bien, c'est à dire que si $|z| \leq L_i$ alors $x = z[w_i(a_i)^{(2-q)/2}] + a_i \in B_{R_i}(x_i)$. On a :

$R_i - |x - x_i| = R_i - |a_i - x_i + [w_i(a_i)]^{(2-q)/2} y| \geq R_i - |a_i - x_i| - |[w_i(a_i)]^{(2-q)/2} z|$ grâce à l'inégalité triangulaire

d'où, $R_i - |x - x_i| \geq l_i - \dfrac{l_i}{2} = \dfrac{l_i}{2}$,

on en déduit que $|x - x_i| \leq R_i - \dfrac{l_i}{2} < R_i$ et ainsi v_i est bien définie.

D'autre part les dérivées partielles succéssives de v_i vérifient :

$$\partial_l v_i = \partial_l w_i \times \frac{w_i(a_i)^{(2-q)/2}}{w_i(a_i)} = \frac{\partial_l w_i}{[w_i(a_i)]^{q/2}}$$

$$\partial_{jk} v_i = \frac{\partial_{jk} w_i}{[w_i(a_i)]^{q-1}}.$$

On pose :

$$\alpha_i^{jk}(z) = h^{jk}[a_i + z[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}]$$

$$S_i(z) = T[a_i + z[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}]$$

$$Z_i(z) = W_i[a_i + z \times [w_i(a_i)]^{(2-q)/2}].$$

v_i vérifie :

$$\Delta_{\alpha_i} v_i = -\alpha_i^{jk}(z)\partial_{jk} v_i + \frac{\beta_i^l(z)}{[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}}\partial_l v_i = -\frac{S_i}{[w_i(a_i)]^{q-1}} v_i + Z_i \times {v_i}^{q-1},$$

avec la condition $v_i(0) = 1$.

Les fonctions β_i^l s'expriment à l'aide des symboles de Christoffel et des composantes de la métrique dans la carte locale considérée.

La suite v_i est bornée dans L_∞. En effet

$$v_i(z) = \frac{s_i(x)}{s_i(a_i)} \times \frac{(R_i - |a_i - x_i|)^{2/(q-2)}}{(R_i - |x - x_i|)^{2/(q-2)}},$$

or pour $|z| \leq \frac{l_i}{2}[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}$, $R_i - |x - x_i| \geq \frac{l_i}{2}$. En conséquence :

$$0 < v_i(z) \leq 2^{2/(q-2)}.$$

Etudions la suite $\{Z_i\}$.

$$|Z_i(z) - Z_i(z')| = |W_i[a_i + z \times [w_i(a_i)]^{(2-q)/2}] - W_i[a_i + z' \times [w_i(a_i)]^{(2-q)/2}]|.$$

D'où

$$|Z_i(z) - Z_i(z')| \leq A' \times \frac{||z - z'||^\alpha}{[w_i(a_i)]^{\alpha(q-2)/2}]} \to 0 \text{ lorsque } i \to +\infty.$$

La suite (Z_i) est équicontinue et bornée ($q > 2$), on peut grâce au théorème d'Ascoli en extraire une sous-suite qui converge vers une fonction constante notée W. On peut supposer cette sous-suite la suite elle même.

D'après l'inégalité précédente :

$$|W(z) - W(z')| \leq |W(z) - Z_i(z)| + |Z_i(z) - Z_i(z')| + |Z_i(z') - W(z')| \to 0.$$

d'où, $W \equiv W(x_0) = lim_{i\to\infty} Z_i(0) = lim_{i\to\infty} W_i(a_i)$.

La suite $\{\alpha_i^{jk}\}$ tend vers δ_j^k :

en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 en x_0 pour h^{jk}, on obtient :

$h^{jk}(z) = h^{jk}(x_0) + D_{x_0}h^{jk}(z - x_0) + o(|z - x_0|)$, d'où d'après la définition de α_i^{jk} et de z :

$|\alpha_i^{jk}(z) - h^{jk}(x_0)| = |h^{jk}[a_i + x[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}] - h^{jk}(x_0)| \leq C \times |a_i - x_0 + x[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}]| \leq C \times (|x_0 - a_i| + |x|[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}])$ avec C ne dépendant que de $||Dh^{jk}||_\infty$.

Comme $|z| \leq \frac{l_i}{2}[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}]$, on a :

$$|\alpha_i^{jk}(z) - h^{jk}(x_0)| \leq C \times (|x_0 - a_i| + \frac{l_i}{2}) \to 0 \text{ uniformément en } x.$$

Quant aux β_i^l :

$|\beta_i^l(z)| = |[h^{jk}[a_i + x[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}]] \times \bar{\Pi}_{jk}^l[a_i + x[w_i(a_i)]^{(2-q)/2}]]| \leq C(||h^{jk}||_\infty, ||\Pi_{jk}^l||_\infty)$, où $\Pi_{jk}^l = \Gamma_{jk}^l o\phi^{-1}$ avec Γ_{jk}^l les symboles de Christoffel.

Donc, si $q > 2$ et $|z| \leq \frac{l_i}{2}[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}$, $\frac{\beta_i^l}{[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}}$, tend uniformément vers 0 quand i tend vers l'infini.

La suite (v_i) est uniformément bornée, $v_i(0) = 1$ pour tout i et de plus chaque élément de la suite vérifie l'équation suivante :

$$-\alpha_i^{jk}(z) \times \partial_{jk}v_i + \frac{\beta_i^l(z)}{[w_i(a_i)]^{(q-2)/2}}\partial_l v_i(z) + \frac{S_{0i}}{[w_i(a_i)]^{q-1}}v_i = Z_i \times {v_i}^{q-1}$$

Comme les coéfficients satisfont aux hypothèses du théorème de Ladyzenskaya, par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite notée encore (v_i) qui converge uniformément localement vers une fonction $v \geq 0$ définie sur $\mathbb{R}^n$ et qui vérifie :

$$-h^{jk}(x_0)\partial_{jk}v = W(x_0)v^{q-1} \text{ sur } \mathbb{R}^n \text{ et } v(0) = 1.$$

Comme en $y_0 = \phi_0^{-1}(x_0)$, on a choisit des coordonnées géodésiques normales, $h_{jk}(x_0) = \delta_{jk}$, où δ_{jk} sont les symboles de Kronecker.

L'inégalité $v \leq 2^{2/(q-2)}$ se conserve grâce à la convergence L^∞_{loc} des v_i, et d'après les théorèmes de régularité, v est au moins $\mathcal{C}^{3,\alpha}$.

On a vu qu'en raisonnant par l'absurde on obtenait une fonction v (définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier) vérifant :

$$\Delta v = W(x_0)v^{q-1} \qquad sur \qquad \mathbb{R}^n.$$

Posons $\bar{v}(r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r} v(\sigma_r)d\sigma_r = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathcal{S}_{n-1}} v(r\sigma)d\sigma$

il est clair que, par dérivation sous le signe somme, $\bar{v}$ est dérivable deux fois.

$\bar{v}'(r) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathcal{S}_{n-1}} \partial_\nu v(r\sigma) d\sigma = \dfrac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} \partial_\nu v \, d\sigma_r = \dfrac{1}{r^{n-1}\omega_{n-1}} \int_{B_r} -\Delta v dx.$
Ainsi :

$$(r^{n-1}\bar{v}') = \frac{-W(x_0)}{\omega_{n-1}} \int_{B_r} v^{q-1} dx = \frac{-W(x_0)}{\omega_{n-1}} \int_{[0,r]} \int_{\partial B_s} [v^{q-1}(\sigma_s) d\sigma_s] ds$$

donc :

$$(\omega_{n-1} r^{n-1} \bar{v}')'(r) = -W(x_0) \int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r) d\sigma_r.$$

D'où

$$\bar{v}''(r) + \frac{(n-1)}{r} \bar{v}'(r) = -W(x_0) \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r) d\sigma_r, \text{ pour } r > 0,$$

de cette dernière égalité, on déduit que, $\bar{v}'(0) = 0$, puisque le terme de droite et v'' sont bornés lorsque $r \to 0$.

Par l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\partial B_r} v d\sigma_r \leq (|\partial B_r|)^{(q-2)/(q-1)} \left(\int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r) d\sigma_r \right)^{1/(q-1)}$$

qui s'écrit encore,

$$\int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r) d\sigma_r \geq \left(\frac{1}{|\partial B_r|} \right)^{q-2} \left(\int_{\partial B_r} v d\sigma_r \right)^{q-1}$$

ainsi,

$$\int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r) d\sigma_r \geq \left(\frac{1}{r^{n-1}\omega_{n-1}} \right)^{q-2} \left((r^{n-1}\omega_{n-1}\bar{v}) \right)^{q-1} \geq 0$$

et finalement, on obtient :

$$\int_{\partial B_r} v^{q-1}(\sigma_r) d\sigma_r \geq (r^{n-1}\omega_{n-1}) \bar{v}^{q-1}.$$

D'oú $\bar{v}$ satisfait l'inéquation suivante :

$$-\Delta \bar{v} = \frac{(\omega_{n-1} r^{n-1} \bar{v}')'}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \geq -W(x_0) \bar{v}^{q-1}.$$

Comme $W(x_0) < 0$, $\bar{v}' > 0$ puisque $\bar{v}'(0) = 0$, d'où $\bar{v}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par la formule de Stokes :

$$\int_{B_r} -\Delta \bar{v} = \int_{\partial B_r} \partial_\nu \bar{v} d\sigma_r = \omega_{n-1} r^{n-1} \bar{v}'(r)$$

puisque $\bar{v}$ est radiale.

En utilisant l'inéquation vérifiée par $\bar{v}$, on obtient :

$\int_{B_r} -\Delta \bar{v} dx \geq -W(x_0) \int_{B_r} \bar{v}^{q-1} dx = -\omega_{n-1} W(x_0) \int_0^r r^{n-1} [\bar{v}(r)]^{q-1} dr \geq \dfrac{-\omega_{n-1} W(x_0)}{n} r^n$

car $\bar{v}$ est radiale, croissante et $\bar{v}(0) = v(0) = 1$. De ceci on déduit :

$$\bar{v}'(r) \geq \frac{-W(x_0)}{n} r.$$

En integrant $\bar{v}'$ on déduit que $\bar{v}(r) \to +\infty$ lorsque $r \to +\infty$.

Or, $0 \leq v \leq 2^{(n-2)/2} \Rightarrow 0 \leq \bar{v} \leq 2^{(n-2)/2}$, d'où la contradiction, l'hypothèse (H) est absurde.

Fin de la preuve du cas $b < 0$ du Théorème 1. On a vu que :

Pour tout $y_0 \in \overset{\circ}{M}$ et toute carte locale (Ω, ϕ) géodésique normale en y_0, il existe deux constante positives, $c = c(\phi(y_0), a, b, A, M) > 0$, $R > 0$ telles que :

$$B_R(\phi(x_0)) \subset O \subset\subset \phi(\Omega)$$

$$\sup_{B_R(\phi(x_0))} u_i o \phi^{-1} \leq \frac{c}{R^{2/(q-2)}} \qquad (**)$$

Soit K un compact de $\overset{\circ}{M}$, pour chaque $y \in K$, on considère une carte normale géodésique (Ω_y, ϕ_y). Pour chaque ϕ_y, on détermine un rayon $R_y > 0$ et une constante c_y pour lesquels $(**)$ est vraie.

La réunion $\cup_{y \in K} \phi_y^{-1}(B_{R_y(\phi_y(y))})$ est un recouvrement de K qui est compact, on peut en extaire un recouvrement fini. Comme sur chaque ouvert on a une estimation uniforme, cette estimation se conserve pour K.

Preuve du Théorème 2 :

On considère deux suites de fonctions $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ sur M vérifiant :

$$\Delta u_i + R = V_i e^{u_i} \qquad \text{dans} \qquad \mathring{M}$$

$$a \leq V_i(y) \leq b < 0 \text{ pour tout } y \in M$$

Posons $z_i = e^{u_i}$, alors :

$$\nabla_j z_i = \nabla_j u_i \, z_i \text{ et } \Delta z_i = -\nabla^j(\nabla_j z_i) = \Delta u_i \, z_i - |\nabla u_i|^2 \, z_i,$$

ainsi, la fonction z_i vérifie l' équation suivante :

$$\Delta z_i + R z_i = V_i z_i^2 - |\nabla u_i|^2 z_i \qquad (*) .$$

Considérons un compact K de M, et η une fonction sur M telle que :

$$0 \leq \eta(x) \leq 1 \; \forall x \in M \text{ et } \eta \equiv 1 \text{ sur } K.$$

On multiplie $(*)$ par η^4 et on intégre par partie :

$$\int_M z_i \Delta(\eta^4) dV_g = \int_M \Delta z_i \eta^4 dV_g = \int_M V_i z_i^2 \eta^4 dV_g - \int_M |\nabla u_i|^2 z_i \eta^4 dV_g - \int_M R z_i \eta^4 dV_g \, ,$$

ce qui peut s'ecrire :

$$\int_M |\nabla u_i|^2 z_i \eta^4 dV_g + \int_M (-V_i) z_i^2 \eta^4 dV_g = 12 \int_M z_i \eta^2 |\nabla \eta|^2 dV_g - 4 \int_M z_i \eta^3 \Delta \eta dV_g - \int_M R z_i \eta^4 dV_g \, ,$$

on en déduit, puisque $z_i > 0$ et $-V_i \geq -b > 0$ que :

$$(-b) \int_M z_i^2 \eta^4 dV_g \leq \int_M z_i \eta^2 (12 |\nabla \eta|^2 + 4\eta |\Delta \eta| + |R| \eta^2) dV_g.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sqrt{\int_M z_i^2 \eta^4 dV_g} \leq \frac{\sqrt{(12|\nabla \eta|^2 + 4\eta|\Delta \eta| + |R|\eta^2)^2 dV_g}}{-b}.$$

Comme $\eta \equiv 1$ sur K, on peut ecrire :

$$||z_i||_{L^2(K)} \leq c(b, K, M).$$

Ainsi, les fonctions positives z_i sont uniformément localement bornées dans L^2. D'autre part, considérant dans une carte locale (Ω, ϕ), on peut se ramener à une equation sur une ouvert de $\mathbb{R}^n$, où $\{z_i o \phi^{-1}\}$ est sur-harmonique et uniformément localement bornée dans L^2. On conclut grâce à l'inégalité de Harnack (voir [1]) que $\{z_i o \phi^{-1}\}$ est uniformément localement bornée, par conséquent $\{z_i\}$ est localement uniformément bornée.

Preuve du Théorème 3 et du corollaire 1 :

1er Cas : $q_i = N - \epsilon_i \to q = N - \epsilon$, $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$

On se place sur une variété riemannienne M non nécéssairement compacte, et on considére deux suites de fonctions $\{u_{\epsilon_i}\}$ et $\{V_{\epsilon_i}\}$ vérifiant :

$$\Delta_g u_{\epsilon_i} + R_0 u_{\epsilon_i} = V_{\epsilon_i} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i} \quad u_{\epsilon_i} > 0 \qquad \text{sur} \qquad M$$

$$0 < a \leq V_{\epsilon_i}(x) \leq b \quad \forall\, x \in M \qquad \text{et}$$

$$|V_{\epsilon_i}(y) - V_{\epsilon_i}(z)| \leq A[d(y,z)]^{\alpha} \quad \forall\, y, z \in M,\ \alpha \in]0,1]\,,$$

Δ_g s'écrit localement : $-g^{jk}\nabla_j \nabla_k = -g^{jk}\partial_{jk} + g^{jk}\Gamma_{jk}^l \partial_l$

Le principe est le même que celui du théorème 1.On prend un point x_0 de $\mathring{M}$, on choisit une carte normale géodésique (Ω_0, ϕ_0) en x_0 pour nous ramener à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On obtient, comme dans l'étape 1 du théorème 1 :

$$-h^{jk}\partial_{jk} w_{\epsilon_i} + h^{jk}\Pi_{jk}^l \partial_l w_{\epsilon_i} + T_0 w_{\epsilon_i} = W_{\epsilon_i} w_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i} \ \text{ sur } \ O \subset\subset \phi_0(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$$

où on a noté :

$$h^{jk} = g^{jk} o \phi_0^{-1},\ \Pi_{jk}^l = \Gamma_{jk}^l o \phi_0^{-1},\ T_0 = R_0 o \phi_0^{-1} \qquad \text{et}$$

$$w_{\epsilon_i} = u_{\epsilon_i} o \phi_0^{-1} \text{ et } W_{\epsilon_i} = V_{\epsilon_i} o \phi_0^{-1}.$$

Par hypothèse, $w_{\epsilon_i} > 0$ et W_{ϵ_i} vérifient :

$$0 < a \leq W_{\epsilon_i}(x) \leq b \quad \forall\, x \in O \quad \text{et}$$
$$|W_{\epsilon_i}(x) - W_{\epsilon_i}(x')| \leq A'||y-z||^{\alpha} \quad \forall\, x, x' \in O,\ \text{avec } \alpha \in]0,1]$$

où A' ne dépendant que de A et de M

Comme nos estimations sont locales, on commence par prouver l'inégalité suivante :

$$\exists\, c, R > 0,\ w_{\epsilon_i}(x) \leq \frac{c}{R^{2/(N-\epsilon_i-2)}},\ \ \forall\, x \in B_R(x_0)$$

En supposant le contraire et en utilisant la technique blow-up, on arrive à exhiber, comme dans la preuve du théorème 1, une suite de fonction (v_i) qui convergent sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ vers une fonction v qui vérifie :

$$\Delta_{\mathcal{E}} v = \bar{V}(x_0) v^{N-\epsilon} \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^n$$

$$v(0) = 1 \text{ et } v \geq 0$$

La technique blow-up, le phénomène de concentration en un point et le choix de coordonnées géodésiques normales en ce point, expliquent la notation $\Delta_{\mathcal{E}}$, qui fait référence au laplacien euclidien.

Par le principe du maximum $v > 0$ sur tout $\mathbb{R}^n$.

Or, d'après un résultat de Gidas-Spruck [9], de telles fonctions n'existent pas pour l'exposant sous-critique, d'où la contradiction.

Pour conclure, on considère un recouvrement du compact K par des boules définies comme pour l'estimation locale précédente.

2ème Cas : $q_i = N - \epsilon_i \to N$, $\alpha = 1$ et $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$

Par soucis de compréhension, nous allons détailler cette partie. Le début est assez similaire à celui du théorème 1. On aura à utiliser la technique "moving plane " qui est basée essentiellement sur le principe du maximum.

On suppose pour simplifier que $\Omega = B_2(0)$, et on raisonne par l'absurde, en essayant de prouver qu'il existe pour un certain $\beta \in]0, \dfrac{1}{3}[$, une constante c ne dépendant que de a, b, A, β et un réel $R \in]0,1[$ tels que pour tout $u_\epsilon > 0$ solution de (E_1) avec $V = V_\epsilon$ vérifie :

$$\epsilon^{[2/(n-2)-\epsilon/2]^{-1}} (\sup_{B_R(0)} u_\epsilon)^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_\epsilon \leq \frac{c}{R^{4/(N-\epsilon-2)}} \ \forall\ \epsilon > 0.$$

Le fait de prendre l'inf sur la boule unité dans la boule de rayon 2 est du aux calculs qui vont suivre, car nous serons obligés d'effectuer des translations et il nous faut une marge de manoeuvre.

On a remplacé l'exposant $\dfrac{1}{4}$ du sup par β, on verra que le résultat de cette deuxième partie du théorème est valable pour tout $0 < \beta < \dfrac{1}{3}$

Supposons donc que pour tout $c > 0$ et $R \in]0,1[$, il existe V_ϵ et u_ϵ vérifiant :

$$\epsilon^{[2/(n-2)-\epsilon/2]^{-1}} (\sup_{B_R(0)} u_\epsilon)^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_\epsilon \geq \frac{c}{R^{4/(N-\epsilon-2)}} \text{ et}$$

$$\Delta u_\epsilon = V_\epsilon {u_\epsilon}^{N-\epsilon-1}$$

On choisira : $R = R_i \to 0$ et $c = c_i \to +\infty$. Notre hypothèse est : il existe deux suite $\{u_{\epsilon_i}\}$ et $\{V_{\epsilon_i}\}$ notées, pour simplifier l'écriture, $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\Delta u_i = V_i {u_i}^{N-\epsilon_i-1}$$

$${\epsilon_i}^{[2/(n-2)-\epsilon_i/2]^{-1}} (\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_i \geq \frac{c_i}{{R_i}^{4/(N-\epsilon_i-2)}}$$

D'une manière évidente(on suppose $\sup u_i > 1$)

$$(\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^{1+\beta} = (\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^\beta \times \sup_{B_{R_i}(0)} u_i \geq (\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^\beta \times \inf_{B_{R_i}(0)} u_i$$

et comme $\epsilon_i \to 0$, on obtient :

$$(\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^{4/3} \geq (\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_i \geq {\epsilon_i}^{[2/(n-2)-\epsilon_i]^{-1}} (\sup_{B_{R_i}(0)} u_i)^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_i$$

donc :

$$(\sup_{B_{R_i(0)}} u_i)^{1+\beta} \geq \frac{c_i}{R_i^{4/(N-\epsilon_i-2)}} \to +\infty$$

En particulier,

$$(\sup_{B_{R_i(0)}} u_i) \times R_i^{2/(N-\epsilon_i-2)} \geq \sqrt{c_i} \to +\infty$$

Considérons alors :
$s_i(x) = u_i(x)(R_i - |x-x_i|)^{2/(N-\epsilon_i-2)}$ avec
$u_i(x_i) = \max_{\bar{B}_{R_i(0)}} u_i$.

Soit a_i tel que :

$$s_i(a_i) = \max_{B_{R_i(x_i)}} s_i = u_i(a_i)(R_i - |a_i - x_i|)^{2/(N-\epsilon-2)}.$$

Nous avons :

$$s_i(a_i) \geq s_i(x_i) = u_i(x_i)R_i^{2/(N-\epsilon_i-2)} \geq \sqrt{c_i} \quad (*) \text{ avec } c_i \to +\infty$$

Posons :

$$l_i = (R_i - |a_i - x_i|), \text{ et } L_i = \frac{l_i}{\sqrt[4]{c_i}}[u(a_i)]^{(N-\epsilon_i-2)/2}$$

et remarquons que :

$$0 < l_i \leq R_i \longrightarrow 0, \Rightarrow u_i(a_i) \to +\infty\,,$$

d'après $(*)$:

$$L_i \to +\infty$$

Posons lorsque $|y| \leq L_i$,

$$v_i(y) = \frac{1}{u_i(a_i)} u_i\{y[u_i(a_i)^{(2+\epsilon_i-N)/2}] + a_i\}$$

vérifions que si, $|y| \leq L_i$ alors $x = y[u_i(a_i)^{(2+\epsilon_i-N)/2}] + a_i \in B_{R_i}(x_i)$:

grâce à l'inégalité triangulaire :

$$R_i - |x-x_i| = R_i - |a_i - x_i + [u_i(a_i)]^{(2+\epsilon_i-N)/2} y| \geq R_i - |a_i - x_i| - |[u_i(a_i)]^{(2+\epsilon_i-N)/2} y|$$

et donc :

$$R_i - |x - x_i| \geq l_i - l_i \frac{1}{\sqrt[4]{c_i}} = l_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{c_i}}\right) > 0 \qquad (**)$$

$$|x - x_i| \leq R_i - l_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{c_i}}\right) < R_i$$

v_i est ainsi bien définie et vérifie pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\Delta v_i = V_i\{a_i + y[u_i(a_i)^{(-N+\epsilon_i+2)/2}]\} {v_i}^{N-\epsilon_i-1}, \text{ et } v_i(0) = 1\,.$$

D'autre part :

$$v_i(y) = \frac{s_i(x)}{s_i(a_i)} \times \frac{(R_i - |a_i - x_i|)^{2/(N-\epsilon_i-2)}}{(R_i - |x - x_i|)^{2/(N-\epsilon_i-2)}} \leq \left(\frac{l_i}{R_i - |x - x_i|}\right)^{2/(N-\epsilon_i-2)}$$

D'o ù pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $|y| \leq L_i$:

$$0 < v_i(y) \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{c_i}}\right)^{-2/(N-\epsilon_i-2)} \qquad (***)$$

Comme dans l'étape 2 de la preuve du théorème 1, grâce aux théorèmes de Ladyzenskaya et Ascoli, de la suite de fonctions v_i on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction $v \geq 0$ et qui vérifie :

$$\Delta v = V(0) v^{N-1}, \; v(0) = 1, \quad 0 < a \leq V(0) \leq b < +\infty$$

En faisant un changement d'échelle on peut se ramener au cas : $V(0) = n(n-2)$

Les solutions positives de : $\Delta v = n(n-2)v^{N-1}$, sur $\mathbb{R}^n$ sont les fonctions (voir le résultat de Caffarelli-Gidas-Spruck [6]) :

$$v(y) = \frac{\mu}{(\mu^2 + |y - x_0|^2)^{(n-2)/2}} \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x_0 \in \mathbb{R}^n\,.$$

D'après $(***)$ et comme $c_i \to +\infty$,

$$v(y) \leq 1 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n$$

d'où,

$$v(0) = \max_{\mathbb{R}^n} v = 1 \text{ et } \nabla v(0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0\,,$$

enfin

$$v(0) = 1 \Rightarrow \mu = 1\,.$$

Remarquons aussi que :

$${l_i}^{2\beta/(N-\epsilon_i-1)}[u_i(a_i)]^\beta = [s_i(a_i)]^\beta \geq [s_i(x_i)]^\beta = [u_i(x_i){R_i}^{2/(N-\epsilon_i-1)}]^\beta$$

D'où d'après notre hypothèse,

$${l_i}^{2\beta/(N-\epsilon_i-1)}[u_i(a_i)]^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_i \geq \frac{{c_i}^\beta}{{R_i}^{(4-2\beta)/(N-\epsilon_i-1)}}$$

Rappelons que, $u_i(x_i) = \max_{\bar{B}_r(0)} u_i$. Comme $l_i, R_i \to 0$ et $0 < \beta < \dfrac{1}{3}$, on a :

$$[u_i(a_i)]^{\beta} \times \inf_{B_1(0)} u_i \to +\infty.$$

<u>Conclusion de l'Etape 1 :</u>

$v_i(y) = v_{\epsilon_i}(y) = \dfrac{u_{\epsilon_i}[a_{\epsilon_i} + y[u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})]^{\epsilon_i/2-2/(n-2)}]}{u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})}$ avec $a_{\epsilon_i} = a_i$ vérifie :

$$\Delta v_{\epsilon_i} = V_{\epsilon_i} {v_{\epsilon_i}}^{N-\epsilon_i-1} \text{ et } v_{\epsilon_i} \to \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{(n-2)/2}.$$

Cette convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^n$

$$[u_i(a_i)]^{\beta} \times \inf_{B_1(0)} u_i \to +\infty$$

avec $\beta < \dfrac{1}{3}$ et $a_i \to 0$.

Etape 2 : Passage en coordonnées polaires et utilisation de la méthode " moving plane "

<u>Lemme :</u>

On pose pour $t \in]-\infty, 0]$, $\theta \in \mathcal{S}_{n-1}$:

$$w_i(t,\theta) = e^{(n-2)t/2} u_i(a_i + e^t\theta) \text{ et } V_i(t,\theta) = V_{\epsilon_i}(a_i + e^t\theta)$$

Et on considère l'opérateur suivant :

$$L = \partial_{tt} - \Delta_{\sigma} - \frac{(n-2)^2}{4}, \text{ sur }]-\infty, 0] \times \mathcal{S}_{n-1}$$

avec Δ_σ l'opérateur de Baltrami-Laplace sur la sphére $\mathcal{S}_{n-1}$
alors :

$$-Lw_i = e^{[(n-2)\epsilon_i t]/2} V_i {w_i}^{N-\epsilon_i-1}, \text{ pour tout } i.$$

<u>Preuve du lemme :</u>

$$\partial_t w_i = \frac{(n-2)}{2} e^{(n-2)t/2} u_i(a_i + e^t\theta) + e^{nt/2} \partial_r u_i(a_i + e^t\theta)$$

$$\partial_{tt} w_i = \frac{(n-2)^2}{4} e^{(n-2)t/2} u_i(a_i + e^t\theta) + (n-1) e^{nt/2} \partial_r u_i(a_i + e^t\theta) + e^{(n+2)t/2} \partial_{rr} u_i(a_i + e^t\theta)$$

donc :

$$\partial_{tt} w_i = \frac{(n-2)^2}{4} w_i + e^{(n+2)t/2} [\partial_{rr} u_i(a_i + e^t\theta) + \frac{(n-1)}{e^t} \partial_r u_i(a_i + e^t\theta)]$$

Par définition du Δ_σ

$$\Delta_\sigma w_i = e^t \times e^t \times e^{(n-2)t/2} \Delta_\sigma u_i(a_i + e^t\theta) = e^{(n+2)t/2} \Delta_\sigma u_i(a_i + e^t\theta)$$

d'où

$$\partial_{tt} w_i - \Delta_\sigma w_i = \frac{(n-2)^2}{4} w_i + e^{(n+2)t/2} [\partial_{rr} u_i(a_i + e^t\theta) + \frac{(n-1)}{e^t} \partial_r (u_i)(a_i + e^t\theta) - \frac{1}{e^{2t}} \Delta_\sigma u_i(a_i + e^t\theta)]$$

En remplacant e^t par $r > 0$, sachant que l'expression du Laplacien en coordonnées polaires est :

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{(n-1)}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma,$$

$$\partial_{tt} w_i - \Delta_\sigma w_i - \frac{(n-2)^2}{4} w_i = -e^{(n+2)t/2} \Delta u_i(a_i + e^t\theta) = -V_i {u_i}^{N-\epsilon_i - 1} e^{(n+2)t/2}$$

En conséquence :

$$-L w_i = -[\partial_{tt} w_i - \Delta_\sigma w_i - \frac{(n-2)^2}{4} w_i] = V_i e^{(n-2)\epsilon_i t/2} {w_i}^{N-\epsilon_i - 1}$$

Etape 2-2 : Quelques propriétés concernant les fonctions w_i

Posons

$$\eta_i = \frac{1}{{u_i(a_i)}^{(N-\epsilon_i-2)/2}}$$

alors :

$$\log \eta_i = -\frac{N - \epsilon_i - 2}{2} \log u_i(a_i) = -(\frac{2}{n-2} - \frac{\epsilon_i}{2}) \log u_i(a_i).$$

Lemme :

On a :

1) $w_i(\log \eta_i, \theta) - w_i(\log \eta_i + 4, \theta) > 0$, $i \geq i_0$

2) $\forall\, \delta \geq 0$, $\exists\, c(\delta) > 0$, $i_0 = i(\delta) \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\frac{1}{c(\delta)} e^{(n-2)t/2} \times u_i(a_i)^{(n-2)\epsilon_i/4} \leq w_i(t+\log\eta_i, \theta) \leq c(\delta) e^{(n-2)t/2} \times u_i(a_i)^{(n-2)\epsilon_i/4}$$

pour tout $\theta \in \mathcal{S}_{n-1}$, $i \geq i_0$ et $t \leq \delta$.

preuve de 1) :

En utilisant la définition de v_i, donnée dans la conclusion de l'étape 1, nous pouvons écrire :

$$w_i(t+\log\eta_i, \theta) = e^{(n-2)t/2} u_i(a_i + e^t\theta\eta_i){\eta_i}^{(n-2)/2} = e^{(n-2)t/2}[u_i(a_i)]^{(n-2)\epsilon_i/4} \times v_i(e^t\theta)$$

Toujours d'après l'étape 1 :

Pour tout $\beta > 0$, $z_i(t,\theta) = e^{(n-2)t/2} v_i(e^t\theta)$ converge uniformément sur $]-\infty, \log\beta] \times \mathcal{S}_{n-1}$ vers la fonction, $z(t) = \dfrac{e^{(n-2)t/2}}{(1+e^{2t})^{(n-2)/2}} = \left(\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}\right)^{(n-2)/2}$.

Si on prend $\log\beta = 4$ et donc, $t \leq 4$:

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier i_0 tel que $i \geq i_0$ entraine pour $t \leq 4$: $z_i(t,\theta) - z(t) < \epsilon$

En conséquence

$$z_i(0,\theta) - z_i(4,\theta) = [z_i(0,\theta) - z(0)] - [z_i(4,\theta) - z(4)] + z(0) - z(4) \geq -2\epsilon + z(0) - z(4)$$

Sachant que w_i est obtenue en multipliant z_i par $[u_i(a_i)]^{(n-2)\epsilon_i/4}$, comme $z(t)$ est maximum en $t = 0$, pour $i \geq i_0$ (on prend $2\epsilon < z(0) - z(4)$), on a :

$$w_i(\log\eta_i, \theta) - w_i(\log\eta_i + 4, \theta) > 0.$$

preuve de 2) :

Nous venons de voir qu'en utilisant la convergence uniforme des v_i, on obtient 2).

Etape 2-3 : Utilisation de la méthode " moving plane ".

On pose lorsque $\lambda \leq t$:

$$t^\lambda = 2\lambda - t \text{ et } {w_i}^\lambda(t,\theta) = w_i(2\lambda - t, \theta)$$

Lemme 1 :

Soit A_λ l'ensemble suivant :

$$A_\lambda = \{\lambda \leq 0,\ \exists\ (t_\lambda, \theta_\lambda) \in [\lambda, 1/2] \times \mathcal{S}_{n-1},\ {w_i}^\lambda(t_\lambda, \theta_\lambda) - w_i(t_\lambda, \theta_\lambda) \geq 0\}$$

alors :

$$\exists\, \nu \leq 0, \text{ tel que pour } \lambda \leq \nu \text{ on a } A_\lambda = \emptyset.$$

Lemme 2 :

Pour $\lambda \leq 0$ on a :

$${w_i}^\lambda - w_i < 0 \Rightarrow -L({w_i}^\lambda - w_i) < 0,$$

sur $]\lambda, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$ où $t_i = \beta \log \eta_i + \log \dfrac{(n-2)a}{2A}$, $0 < \beta < \dfrac{1}{3}$.

3) Un point utile :

$$\xi_i = \sup\ \{\lambda \leq \bar{\lambda}_i = 2 + \log \eta_i, {w_i}^\lambda - w_i < 0, \text{sur }]\lambda, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}\} \text{ existe}$$

Remarques :

Dans le lemme 1, il ne faut pas confondre t^λ et t_λ, le premier désigne le symétrisé de t alors que le second désigne un point particulier pour lequel(avec θ_λ), une propriété donnée est vérifiée.

Sur les ensembles considérés, le Lemme 2) permettera d'utiliser le principe du maximum on trouve des fonctions h verifiant :

$h \leq 0$ et $Lh \geq 0$ avec $L = \partial_{tt} - \Delta_\sigma - \dfrac{(n-2)^2}{4}$
avec Δ_σ est la laplacien sur la sphére $\mathcal{S}_{n-1}$.

Localement L s'écrit : $\Sigma_{ij} a_{ij} \partial_{ij} + \Sigma_j b_j \partial_j - \dfrac{(n-2)^2}{4}$, et un opérateur de ce type vérifie le principe du maximum de Hopf.

On choisira des domaines particuliers, pour pouvoir utiliser le lemme 1 convenablement.

On voit aussi que le lemme 2 est lié au lemme 1 : pour $\lambda \leq \nu$, la différence ${w_i}^\lambda - w_i$ est négative.

On verra l'utilité du point 3) après les preuves des lemmes 1 et 2.

preuve du lemme 1 :

D'abord,on fixe l'entier i on cherche le signe de $\partial_t w_i$

$$\partial_t w_i(t,\theta) = \frac{(n-2)}{2} e^{(n-2)t/2} u_i(a_i + e^t\theta) + e^{(n/2)t} \partial_r u_i(a_i + e^t\theta)$$

D'où,

$$\partial_t w_i = e^{(n-2)t/2} [\frac{n-2}{2} u_i(a_i + e^t\theta) + e^t \partial_r u_i]$$

La fonction u_i est $\mathcal{C}^1$, positive et sous-harmonique, on en déduit qu'il existe A_i tel que $\| \partial_r u_i \|_\propto \leq A_i$.

D'autre part, le principe du maximum indique que u_i atteint son minimum sur le bord et ainsi,

$$\frac{n-2}{2} u_i(a_i + e^t\theta) \geq \frac{n-2}{2} \min_{B_{1/2}(a_i)} u_i = \beta_i > 0$$

Finalement,

$$\partial_t w_i \geq e^{(n-2)t/2} (\beta_i - e^t A_i)$$

Pour $t < \log \frac{\beta_i}{A_i}$ $\beta_i - e^t A_i > 0$. Ainsi w_i est strictement croissante sur $]-\infty, \log \frac{\beta_i}{A_i}]$ uniformément en $\theta \in \mathcal{S}_{n-1}$.

Supposons que lemme 1 ne soit pas vrai :

Il existe une famille de $\{\lambda\}$ telle que $\lambda \to -\infty$, des réels $t_\lambda \in]\lambda, 1/2], \theta_\lambda \in \mathcal{S}_{n-1}$ tels que :

$$w_i(2\lambda - t_\lambda, \theta_\lambda) - w_i(t_\lambda, \theta_\lambda) \geq 0 \qquad (*)$$

On va voir que pour λ pris dans la famille pour laquelle $(*)$ est vérifiée, $t_\lambda \in [\log(\beta_i/A_i), 1/2]$

Supposons au contraire que $t_\lambda < \log \frac{\beta_i}{A_i}$.

Lorsque λ est voisin de $-\infty$, nous avons : $\lambda < \log \frac{\beta_i}{A_i}$.

D'autre part, sachant qu'on a toujours $t^\lambda < t$, en prenant $t = t_\lambda$ dans $]\lambda, \log \frac{\beta_i}{A_i}[$ et en utilisant la croissance de w_i on obtient l'inégalité suivante :

$$w_i(2\lambda - t_\lambda, \theta) - w_i(t_\lambda, \theta) < 0 \text{ pour tout } \theta \in \mathcal{S}_{n-1}$$

En particulier pour $\theta = \theta_\lambda$ l'inégalité obtenue, contredit $(*)$.

Ainsi, pour tout $\lambda \leq 0$, pris dans la famille pour laquelle $(*)$ est vérifiée :

$$1/2 \geq t_\lambda \geq \log \frac{\beta_i}{A_i}.$$

(En particulier $\log \dfrac{\beta_i}{A_i} \leq \log \eta_i + 4$)

Par compacité on obtient :

$$\lambda \to -\infty \Rightarrow t_\lambda \longrightarrow t_0 \in [\log \frac{\beta_i}{A_i}, 1/2] \text{ et } \theta_\lambda \longrightarrow \theta_0 \in \mathcal{S}_{n-1}$$

Or,

$0 \leq w_i(2\lambda - t_\lambda, \theta_\lambda) - w_i(t_\lambda, \theta_\lambda) = e^{(n-2)(2\lambda - t_\lambda)/2} u_i(a_i + e^{2\lambda - t_\lambda}, \theta_\lambda) - e^{(n-2)t_\lambda/2} u_i(a_i + e^{t_\lambda}\theta) \to -e^{[(n-2)t_0]/2} u_i(a_i + e^{t_0}\theta_0)$, en faisant tendre λ vers $-\infty$, on obtient :

$u_i(a_i + e^{t_0}\theta_0) \leq 0$, or ceci est impossible car $u_i > 0$.

<u>preuve du lemme 2 :</u>

On commence par prouver :

$$\partial_t V_i \geq (\text{termes positifs}) \times \left[\frac{(n-2)a\epsilon_i}{2} - Ae^t \right] \qquad (*)$$

En effet, comme $V_i = V_i(t, \theta) = e^{[(n-2)\epsilon_i t]/2} V_{\epsilon_i}(a_i + e^t\theta)$, on a :

$\partial_t V_i = \dfrac{(n-2)\epsilon_i}{2} e^{[(n-2)\epsilon_i t]/2} V_{\epsilon_i}(a_i + e^t\theta) + e^{[(n-2)\epsilon_i t]/2} \times e^t < \nabla V_{\epsilon_i}(a_i + e^t\theta) | \theta >$

D'où,

$$\partial_t V_i \geq e^{[(n-2)\epsilon_i t]/2} \times [\frac{(n-2)a\epsilon_i}{2} - Ae^t]$$

où A est un majorant de la norme infinie du gradient de V_i.
Ainsi,

$$t \leq \log \epsilon_i + \log \frac{(n-2)a}{2A} \ \Rightarrow \ \partial_t V_i \geq 0$$

Or,d'après notre hypothèse de départ :

$$\epsilon_i^{[2/(n-2) - \epsilon_i/2]^{-1}} [u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})]^\beta \geq \frac{c_{\epsilon_i}}{(l_{\epsilon_i} \times R_{\epsilon_i})^{(n-2)/2}} \geq 1$$

$$\log \epsilon_i \geq -(\frac{2}{n-2} - \frac{\epsilon_i}{2})\beta \log[u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})] = \beta \log \eta_{\epsilon_i}$$

avec $\eta_{\epsilon_i} = [u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})]^{\epsilon_i/2 - 2/(n-2)}$ ($a_{\epsilon_i} = a_i$ est le point défini dans l'étape 1).

On voit alors que :

$$\log \epsilon_i + \log \frac{(n-2)a}{2A} \geq \beta \log \eta_{\epsilon_i} + \log \frac{(n-2)a}{2A} = \bar{t_{\epsilon_i}} = t_i$$

Ceci nous permet d'avoir la croissance en t de la fonction $e^{(n-2)\epsilon_i t/2}V_i$ sur l'intervalle $]-\infty, t_i]$

On prouve maintenant le lemme 2 :

Supposons que pour un $\lambda \leq 0$ on ait :

$$w_i{}^{\lambda}(t,\theta) - w_i(t,\theta) < 0,\ \forall\,(t,\theta) \in]\lambda, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}\,,$$

En notant $\tilde{V}_i(t,\theta) = e^{(n-2)\epsilon_i t/2}V_i(t,\theta), \tilde{V}_i^{\lambda}(t,\theta) = \tilde{V}_i(t^{\lambda},\theta) = \tilde{V}_i(2\lambda - t,\theta)$, on peut écrire :

$$-L(w_i{}^{\lambda} - w_i) = (\tilde{V}_i^{\lambda} - \tilde{V}_i)(w_i{}^{\lambda})^{N-\epsilon_i-1} + \tilde{V}_i[(w_i{}^{\lambda})^{N-\epsilon_i-1} - w_i{}^{N-\epsilon_i-1}]\,.$$

On a vu que sur l'intervalle $[\lambda, t_i]$, la fonction $t \to \tilde{V}_i(t,\theta) = e^{(n-2)\epsilon_i t/2}V_i(t,\theta)$ est uniformément croissante et comme $t \in [\lambda, t_i]$, $t^{\lambda} - t = 2\lambda - t - t = 2(\lambda - t) \geq 0$, on en déduit que :

$$\tilde{V}_i^{\lambda} \leq \tilde{V}_i \ \text{ sur } \ [\lambda, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$$

D'autre part, il existe un rang i_1 à partir duquel $N - \epsilon_i - 1 > 1 > 0$ puisque $\epsilon_i \to 0$. Ainsi la fonction $t \mapsto t^{N-\epsilon_i-1}$ est croissante et on a finalement :

$$w_i{}^{\lambda} < w_i \Rightarrow (w_i{}^{\lambda})^{N-\epsilon_i-1} < w_i{}^{N-\epsilon_i-1}\,.$$

Le lemme 2 est ainsi prouvé.

<u>Vérification du point 3) :</u>

D'après le lemme de l'étape 2-2 :

$$w_i(\log \eta_i, \theta) - w_i(\log \eta_i + 4, \theta) > 0$$

On pose $l_i = \log \eta_i + 4$ et $\bar{\lambda}_i = 2 + \log \eta_i$, alors :

$$2\bar{\lambda}_i - l_i = 2(\log \eta_i + 2) - \log \eta_i - 4 = \log \eta_i$$

Comme $\bar{\lambda}_i < l_i < t_i$, on obtient :

$$w_i{}^{\bar{\lambda}_i}(l_i,\theta) - w_i(l_i,\theta) > 0$$

et finalement ξ_i existe bien

Etape 3 : Utilisation du principe du maximum pour la conclusion

Montrons que les fonctions $w_i{}^{\xi_i} - w_i$ vérifient les propriétés suivantes :

1) sur $]\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$, $w_i{}^{\xi_i} - w_i \leq 0$

2) sur $]\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$, $-L({w_i}^{\xi_i} - w_i) \leq 0$

Pour le point 1), on utilise la définition de ξ_i : il existe une suite $\{\mu_{i,k}\}$ telle que :

a) $\mu_{i,k} < \xi_i$ pour tout entier k

b) $w_i^{\mu_{i,k}} - w_i < 0$ sur $]\mu_{i,k}, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$, pour tout k

donc :

$$w_i(2\mu_{i,k} - t, \theta) - w_i(t, \theta) < 0, \text{ pour } t \in]\mu_{i,k}, t_i[\text{ et tout } \theta \in \mathcal{S}_{n-1}$$

La fonction w_i est continue et tout $t \in]\xi_i, t_i]$ est dans des $]\mu_{i,k}, t_i]$ par a), en passant à la limite en k on obtient 1)

Pour le point 2), la preuve est identique à celle du 1), les fonctions w_i sont C^2, il suffit d'ecrire ${w_i}^{\mu_{i,k}} - w_i = w_i(2\mu_{i,k} - ., .) - w_i(., .)$

Lemme 3 :
les fonctions ${w_i}^{\xi_i}$ et w_i vérifient :

$$\max_{\theta \in \mathcal{S}_{n-1}} {w_i}^{\xi_i}(t_i, \theta) \geq \min_{\theta \in \mathcal{S}_{n-1}} w_i(t_i, \theta)$$

preuve du lemme :

Supposons par l'absurde que :

$$\max_{\theta \in \mathcal{S}_{n-1}} {w_i}^{\xi_i}(t_i, \theta) < \min_{\theta \in \mathcal{S}_{n-1}} w_i(t_i, \theta)$$

Alors :

$$\forall \theta \in \mathcal{S}_{n-1}, \ {w_i}^{\xi_i}(t_i, \theta) < w_i(t_i, \theta) \qquad (3)$$

Notons :

$$h(t, \theta) = {w_i}^{\xi_i}(t, \theta) - w_i(t, \theta) \text{ sur } [\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}.$$

En utilisant les propriétés 1), 2) et (3), la fonction h vérifie :

$h(t, \theta) \leq 0$ sur $[\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$ et $h(t_i, \theta) < 0$, $\forall \theta \in \mathcal{S}_{n-1}$

$Lh \geq 0$ sur $[\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$.

Par le principe du maximum de Hopf, on obtient :

h atteint son maximum sur le bord ou bien elle est constante,

si h n'est pas constante, elle vérifie à l'intérieur du domaine, $h < \max h$, là où h atteint son maximum elle vérifie : $\partial_\nu h > 0$ avec ν la normale exterieure.

En (ξ_i, θ), h est nulle et en (t_i, θ) elle est strictement négative, elle ne peut pas être constante. Donc :

$h < 0$ sur $]\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_{n-1}$ et $\partial_\nu h(\xi_i, \theta) > 0$. Comme $\partial_\nu = -\partial_t$, on obtient :

$\partial_\nu ({w_i}^{\xi_i} - w_i)(\xi_i, \theta) = -\partial_t [w_i(2\xi_i - t, \theta) - w_i(t, \theta)] = 2\partial_t w_i(\xi_i, \theta) > 0.$

En fixant i, la définition de ξ_i comme borne supérieure d'un certain ensemble précedemment défini, donne :

Pour tout $k > 0$, il existe $\mu_k, \sigma_k, \theta_k$ vérifiant : $\xi_i + \dfrac{1}{k} > \mu_k > \xi_i$, et $\mu_k < \sigma_k \leq t_i$, $\theta_k \in \mathcal{S}_{n-1}$ tels que :

$${w_i}^{\mu_k}(\sigma_k, \theta_k) - w_i(\sigma_k, \theta_k) = w_i(2\mu_k - \sigma_k, \theta_k) - w_i(\sigma_k, \theta_k) \geq 0$$

<u>1er Cas :</u> si $\sigma_k \to \sigma_0 > \xi_i$ (ou au moins une valeur d'adhérence) :

En passant à la limite ($\mathcal{S}_{n-1}$ est compacte et quitte à passer aux sous-suites, $\theta_k \to \theta_0$) et en utilisant la continuité de $\bar{w}_i$ on obtient :

$$w_i(2\xi_i - \sigma_0, \theta_0) - w_i(\sigma_0, \theta_0) \geq 0$$

${w_i}^{\xi_i}(\sigma_0, \theta_0) - w_i(\sigma_0, \theta_0) \geq 0$ ce qui contredit le resultat trouvé plus haut sur h .

<u>2ème Cas :</u> si $\sigma_k \to \xi_i$:

Comme $\dfrac{w_i(2\mu_k - \sigma_k, \theta_k) - w_i(\sigma_k, \theta_k)}{2(\mu_k - \sigma_k)} \leq 0$, en passant à la limite, on obtient :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{w_i(2\mu_k - \sigma_k, \theta_k) - w_i(\sigma_k, \theta_k)}{2(\mu_k - \sigma_k)} = \partial_t w_i(\xi_i, \theta_0) \leq 0$$

ce qui contredit l'inégalité établie plus haut.
D'où le lemme 3) est prouvé :

α) $\min_{\mathcal{S}_{n-1}} w_i(t_i, \theta) \leq \max_{\mathcal{S}_{n-1}} w_i(2\xi_i - t_i, \theta)$.

De plus, comme $t_i \to -\infty$, on obtient :

β) $w_i(t_i, \theta) = e^{(n-2)t_i/2} u_i(a_i + e^t \theta) \geq e^{(n-2)t_i/2} \min_{B_i} u_i \geq e^{(n-2)t_i/2} \min_{B_{1/2}(0)} u_i$, où B_i est la boule de centre $a_i \to 0$ et de rayon $e^{t_i} < \dfrac{1}{2}$.

Sachant que :

$$w_i(2\xi_i - t_i, \theta) = e^{(n-2)(2\xi_i - t_i)/2} u_i(a_i + e^{2\xi_i - t_i}\theta),$$

que :

$2\xi_i - t_i = (2\xi_i - t_i - \bar{\lambda}_i) + \bar{\lambda}_i$ et $\xi_i \leq \bar{\lambda}_i \leq t_i \Rightarrow s_i = 2\xi_i - t_i - \bar{\lambda}_i \leq 0$,

nous pouvons écrire :

$w_i(2\xi_i - t_i, \theta) = w_i(2\xi_i - t_i - \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_i, \theta) = w_i(s_i + 2 + \log \eta_i, \theta)$ avec $s_i \leq 0$.

En utilisant une des propriétés des fonctons w_i, vues dans l'étape 2 :

$w_i(2\xi_i - t_i, \theta) \leq c\, e^{(n-2)(2\xi_i - t_i - \bar{\lambda}_i + 2)/2}\ u_i(a_i)^{(n-2)\epsilon_i/4}$, où c une constante positive ne dépendant pas de i.

Comme $\xi_i \leq \bar{\lambda}_i$, on a :

$\gamma)$ $w_i(2\xi_i - t_i, \theta) \leq c\ u_i(a_i)^{(n-2)\epsilon_i/4}\ e^{(n-2)(\bar{\lambda}_i - t_i)/2}$.

Ce qui peut s'écrire, en combinant $\alpha), \beta), \gamma)$:

$$e^{(n-2)t_i/2} \times \min_{B_{1/2}(0)} u_i \leq c\ u_i(a_i)^{(n-2)\epsilon_i/4}\ e^{(n-2)(\bar{\lambda}_i - t_i)/2}$$

Ou encore,

$$e^{(n-2)(-\bar{\lambda}_i + 2t_i)/2} \times \min_{B_{1/2}(0)} u_i \leq c\ u_i(a_i)^{(n-2)\epsilon_i/4}$$

ainsi,

$$u_i(a_i)^{(1-2\beta)(1-(n-2)\epsilon_i/2)} \min_{B_{1/2}(0)} u_i \leq c$$

On voit qu'on s'est ramené à une inégalité du type $[u_i(a_i)]^{\delta} \times \min u_i \leq c$, avec $\delta > 0$ (car $\beta < \dfrac{1}{2}$ et $\epsilon_i \rightarrow 0$).

Pour avoir la contradiction avec l'hypothèse de départ, il suffit que :

$$(1 - 2\beta)(1 - (n-2)\epsilon_i/2) \geq \beta \text{ pour tout } i.$$

On voit alors que si on prend β dans $]0, \dfrac{1}{3}[$, il y a contradiction.

Etape 4 : preuve du Théorème 3

Soit $x_0 \in \Omega$ alors il existe un réel $r = r(\Omega) > 0$ tel que : $B_r(x_0) \in \Omega$

Considérons la suite de fonctions :

$$\bar{u}_i(x) = u_i(x_0 + rx) \times r^{2/(N-\epsilon_i-2)},\ \ x \in B_1(0)$$

alors :

$$\Delta \bar{u}_i = r^2 \Delta u_i(x_0 + rx) r^{2/(N-\epsilon_i-2)} = V_i {u_i}^{N-\epsilon_i-1} r^{2(N-\epsilon_i-1)/(N-\epsilon_i-2)} = V_i \bar{u}_i^{N-\epsilon_i-1}$$

d'après le résultat qui précède (étapes précédentes) :

$$\exists\, c, R > 0,\ \ {\epsilon_i}^{(n-2)/2}(\sup_{B_R(0)} \bar{u}_i)^{\beta} \times \inf_{B_1(0)} \bar{u}_i \leq \frac{c}{R^{4/(N-\epsilon_i-2)}}$$

et finalement :

$$\forall\, x_0 \in B_1(0),\ \ \exists c_{x_0}, R_{x_0} > 0,\ {\epsilon_i}^{(n-2)/2}(\sup_{B_{R_{x_0}}(x_0)} u_i)^{\beta} \times \inf_{\Omega} u_i \leq c_{x_0}$$

Soit K un compact de $B_1(0)$, pour chaque $x \in K$, on considére le R_x comme précedemment

alors :

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{R_x}(x)$$

Comme K est compact, il existe $m \in \mathbb{N}$:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{R_{x_j}}(x_j)$$

donc :

$${\epsilon_i}^{(n-2)/2}(\sup_{K} u_i)^{\beta} \times \inf_{\Omega} u_i \leq \sum_{j=1}^{m} {\epsilon_i}^{(n-2)/2}(\sup_{B_{R_{x_j}}(x_j)} u_i)^{\beta} \times \inf_{\Omega} u_i \leq c(\beta, a, b, A, K, \Omega)$$

Preuve du corollaire 1 :

La preuve se base sur les mêmes téchniques que celles utilisées dans la preuve du théorème 3. On suppose toujours que $\Omega = B_2(0) \subset \mathbb{R}^n$ et on commence par prouver des estimations locales telles que :

$$\exists\, c = c(a,b,A) > 0,\ \exists\, R > 0,\ (\sup_{B_R(0)} u_{\epsilon_i})^\beta \times \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \leq \frac{c}{R^{4/(N-\epsilon-2)}}.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde, les étapes sont les mêmes que celles pour la preuve de la 2ème partie du théorème 3, la différence est que $\epsilon^{(n-2)/2}$ manque dans le membre de droite et on verra qu'on peut choisir l'exposant du sup aussi proche de 1 qu'on le veut.

On exhibe une suite de points (a_{ϵ_i}) tendant vers 0 telle que :

$$[u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})]^\beta \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \to +\infty \qquad (**)$$

Nous souhaiterions utiliser le principe du maximum. Pour cela, on regarde l'accroissement des fonctions V_i :

Comme on a posé, $V_i(t,\theta) = e^{(n-2)\epsilon_i t/2} V_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i} + e^t\theta)$, on obtient :

$$\partial_t V_i(t,\theta) \geq e^{(n-2)\epsilon_i t/2}\, [\frac{(n-2)a\epsilon_i}{2} - A_i e^t]$$

où a est un minorant de V_i et A_i est un majorant de la norme infinie du gradient des V_i (La condition $A_i \leq k\epsilon_i$ $(k > 0)$, va être utilisée).
donc :

$$\partial_t V_i(t,\theta) \geq e^{(n-2)\epsilon_i t/2}\, [\frac{(n-2)a\epsilon_i}{2} - k\epsilon_i e^t] \geq e^{(n-2)\epsilon_i t/2}\, \epsilon_i [\frac{(n-2)a}{2} - ke^t]\,.$$

Ainsi on obtient la condition de croissance suivante pour V_i :

Pour $t \leq \log \dfrac{(n-2)a}{2k} = t_0 \ \Rightarrow \partial_t V_i(t,\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{S}_{n-1}$,
le t_0 ne dépend pas de i.

Soient w_i la fonction $w_i(t,\theta) = e^{(n-2)t/2} u_i(a_i + e^t\theta)$, $\xi_i \leq \bar{\lambda}_i = 2 + \log \eta_i$ et $\eta_i = \dfrac{1}{[u_{\epsilon_i}(a_i)]^{(N-\epsilon_i-2)/2}}$.

Comme dans la preuve de la 2ème partie du théorème 3, en supposant que $\min_{\theta\in\mathcal{S}_{n-1}} w_i(2\xi_i - t_0,\theta) > \max_{\theta\in\mathcal{S}_{n-1}} w_i(t_0,\theta)$ et en utilisant le principe du maximum de Hopf, on aboutit à une contradiction.

Finalement on obtient :

$$\min_{\theta\in\mathcal{S}_{n-1}} w_i(2\xi_i - t_0,\theta) \leq \max_{\theta\in\mathcal{S}_{n-1}} w_i(t_0,\theta).$$

En reprenant la conséquence du lemme 3, on obtient :

$$w_i(t_0,\theta) \geq e^{(n-2)t_0/2} \min_{B_1(0)} u_{\epsilon_i}$$

$$w_i(2\xi_i - t_0,\theta) \leq c\,[u_i(a_{\epsilon_i})]^{(n-2)\epsilon_i/4}\, e^{(n-2)(\log\eta_i - t_0)/2}.$$

Donc :

$$\min_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \leq c \times [u_i(a_{\epsilon_i})]^{(n-2)\epsilon_i/4} \frac{1}{[u_{\epsilon_i}(a_i)]^{[1-(n-2)\epsilon_i/4]}}$$

C'est à dire :

$$[u_{\epsilon_i}(a_i)]^{1-(n-2)\epsilon_i/2} \min_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \leq c.$$

ceci contredit $(**)$ car $\beta < 1 - \dfrac{(n-2)\epsilon_i}{2}$ pour $i \geq i_0$ et $[u_{\epsilon_i}(a_{\epsilon_i})] \to +\infty$.

Preuve du théorème 4 et du corollaire 2 :

1er Cas : $n = 3, q = N = 6$ et $M = \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

La preuve est similaire à celle du théorème 3. Elle utilise les techniques " blow-up " et " moving-plane ".

Etape 1 : la technique blow-up

Commençons par prouver la propriété suivante :

$$\exists\, R \in]0,1[,\ \exists\, c > 0, (\sup_{B_R(0)} u_i)^{1/3} \times \inf_{B_1(0)} u_i \leq \frac{c}{R}$$

En supposant le contraire, on exhibe une sous-suite $\{u_j\} \subset \{u_i\}$, une suite de points de la boule unité (a_j) et trois suites de réels positifs (R_j), (c_j), (l_j) telles que :

$$a_j \to 0, \quad c_j \to +\infty, \quad R_j \to 0 \ \ et \ \ l_j \to 0$$

$$\Delta u_j = V_j {u_j}^5$$

$$[u_j(a_j)]^{1/3} \times \inf_{B_1(0)} u_j \geq \frac{c_j}{R_j}$$

Comme on raisonne par l'absurde, on peut supposer que $u_i = u_j$

D'autre part, on a vu qu'on peut construire à partir de (u_i), une suite (v_i) vérifiant :

$$v_i(y) = \frac{u_i\left[a_i + \dfrac{y}{u_i(a_i)^2}\right]}{u_i(a_i)} \ \ si\ |y| \leq \frac{l_i}{\sqrt[4]{c_i}}[u_i(a_i)]^2$$

$$\Delta v_i = V_i {v_i}^5$$

$$v_i \to v = \frac{1}{(1+|y|^2)^{1/2}}, \text{ uniformément sur } B_\beta(0),\ \forall \beta > 0$$

Etape 2 : Passage en polaire et propriété de certaines fonctions

soit L_0 et L les opérateurs :

$$L_0 = \partial_{tt} + \partial_t - \Delta_\sigma \qquad et \qquad L = \partial_{tt} - \Delta_\sigma$$

avec Δ_σ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathcal{S}_2(1)$

alors en posant : $h_i(t,\theta,\phi) = u_i(a_i + e^t \cos\theta \sin\phi ..., ..., ...)$ on obtient :

$$-L_0 h_i = e^{2t} V_i {h_i}^5$$

Notons, $w_i = e^{t/2} h_i$, on a alors :

$$-Lw_i = -\frac{1}{4} w_i + V_i {w_i}^5 \text{ avec } w_i > 0$$

Considérons l'opérateur $\bar{L} = L - \frac{1}{4}$, $-\bar{L}w_i = V_i(a_i + e^t\theta){w_i}^5$.

<u>Etablissons quelques propriétés des fonctions w_i :</u>

En posant $\eta_i = \dfrac{1}{{u_i(a_i)}^2}$ on obtient :

a) La suite $w_i(t + \log \eta_i, \theta) = e^{t/2} \dfrac{u_i(a_i + \dfrac{e^t\theta}{{u_i(a_i)}^2})}{u_i(a_i)} = e^{t/2}\, v_i(e^t\theta)$ converge vers la fonction symétrique $w = \left(\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}\right)^{1/2}$ uniformément sur $]-\infty, \log\beta] \times \mathcal{S}_2(1)$, pour tout $\beta > 0$.

b) Pour $i \geq i_0, w_i(\log \eta_i, \theta) - w_i(\log \eta_i + 4, \theta) > 0$ pour tout θ.

c) Si $\lambda > 0$, $\bar{w_i} = w_i - \lambda e^t$ vérifie :

$$\bar{w_i}(\log \eta_i, \theta) - \bar{w_i}(4 + \log \eta_i, \theta) > 0, \text{ pour tout } \theta.$$

d) On a :

$\forall \delta \leq 0$, $\exists c(\delta) > 0$, $i_0 = i(\delta) \in \mathbb{N}$ tels que :
$t \leq \delta \Rightarrow \dfrac{1}{c(\delta)} e^{t/2} \leq w_i(t + \log \eta_i, \theta) \leq c(\delta) e^{t/2}$ pour $i \geq i_0$ et tout $\theta \in \mathcal{S}_2(1)$.

Les inégalités b) et c) permetteront de preciser le sup des réels pour lesquels la propriété relative à un ensemble noté A_λ(qu'on définira plustard), est non vide .

L'inégalité d) est trés importante et sera utilisée vers la fin, pour aboutir à une contradiction.

<u>preuve de b)</u>

$w_i(\log \eta_i, \theta) - w_i(\log \eta_i + 4, \theta) = [w_i(0 + \log \eta_i, \theta) - w(0)] - [w_i(4 + \log \eta_i, \theta) - w(4)] + [w(0) - w(4)]$.

La convergence uniforme des w_i nous permet d'avoir pour tout $\epsilon > 0$, un rang i_0 à partir duquel :

$$w_i(\log \eta_i, \theta) - w_i(\log \eta_i + 4, \theta) \geq -2\epsilon + [w(0) - w(4)]$$

De plus :

$$[w(0)]^2 - [w(4)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{e^4}{1+e^8} = \frac{1+e^8-2e^4}{1+e^8} = \frac{(e^4-1)^2}{1+e^8} > 0$$

En prenant $\epsilon < \dfrac{w(0)-w(4)}{2}$, on obtient b).

preuve de c) :

D'après b) $\bar{w}_i(\log \eta_i, \theta) - \bar{w}_i(4 + \log \eta_i, \theta) = w_i(\log \eta_i, \theta) - w_i(\log \eta_i + 4, \theta) - \lambda(e^{\log \eta_i} - e^{\log \eta_i + 4}) > \lambda \eta_i (e^4 - 1) > 0$.

preuve de d)

Par définition de w_i et d'après les propriétés de u_i, $\dfrac{w_i(t + \log \eta_i, \theta)}{e^{t/2}} = \dfrac{u_i(a_i + \dfrac{e^t \theta}{[u_i(a_i)]^2})}{u_i(a_i)} \to \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$, et la convergence est uniforme en θ d'après a)

c'est à dire :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists i_0(\epsilon, \delta) > 0$, $i \geq i_0$, $-\epsilon \leq \dfrac{w_i(t + \log \eta_i, \theta)}{e^{t/2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \leq \epsilon$, pour tout θ et $t \leq \delta$.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2\delta}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \leq 1$, nous avons pour tout θ et $t \leq \delta$:

$$-\epsilon + \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\delta}}} \leq \frac{w_i(t + \log \eta_i, \theta)}{e^{t/2}} \leq \epsilon + 1.$$

le choix suivant de ϵ permet d'avoir d) :

$\epsilon = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{2\delta}}}$ et $c(\delta) = 1 + \epsilon$

Etape 3 : Utilisation de la téchnique " moving-plane "

Posons :

$\bar{w}_i = w_i - \lambda_0 e^t$ où $\lambda_0 \geq 0$ est à choisir convenablement

$t^\lambda = 2\lambda - t$ et $\bar{w}_i^\lambda(t, \theta) = \bar{w}_i(2\lambda - t, \theta)$

$z_{i,\lambda} = {w_i}^\lambda - w_i$ avec $\lambda \leq 0$

Quelques lemmes importants à propos des fonctions $\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i$

Lemme 1 :

pour $0 < \beta < 1$ il existe un $\lambda_0 \geq \mu_0$ tel que :
$\bar{w}_i(t,\theta) > 0$ si $t \leq t_i = \beta \log \eta_i$ pour tout θ et tout i.

Trois remarques :

i) Il est clair que $t_i = \beta \log \eta_i > 4 + \log \eta_i$ pour $i \geq i_0$.

ii) Le choix de l'intervalle $]-\infty, t_i]$, nous permet de conserver la positivité de la fonction, car le choix d'un λ_0, ne permet pas forcemment de conserver la positivité de la fonction, si on prend 0 au lieu de t_i.

iii) Le choix d'un $\beta \in]0,1[$, nous permet de conserver une certaine marge de manoeuvre pour la suite(obtenir notre résultat en utilisant notre hypothèse de départ). On prendera, $\beta = \dfrac{1}{3}$.

Lemme 2 :

Soit A_λ, l'ensemble suivant :

$$A_\lambda = \{\lambda \leq 0,\ \exists\ (t_\lambda, \theta_\lambda) \in]\lambda, t_i] \times \mathcal{S}_2(1),\ \bar{w}_i^\lambda(t_\lambda, \theta_\lambda) - \bar{w}_i(t_\lambda, \theta_\lambda) \geq 0\}$$

Alors, il existe $\nu \leq 0$,tel que pour $\lambda \leq \nu$,$A_\lambda = \emptyset$.

Remarque :

Ce lemme est trés important car il précise le domaine d'existence des réels λ tels que $\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i < 0$, où le lemme 3, ci-dessous, peut être utilisé.

Lemme 3 :

Soit, λ un réel quelconque inférieur à $\bar{\lambda_i} = 2 + \log \eta_i$. Alors :

$\exists\ \mu_0 > 0$, tel que si $\lambda_0 \geq \mu_0$ alors :

$$\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i < 0 \Rightarrow -\bar{L}(\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i) < 0\,.$$

Ne pas confondre λ qui donne le symétrique de la fonction et le λ_0 qui nous permet de construire la fonction $\bar{w}_i = w_i - \lambda_0 e^t$

Une intérprétation de ce lemme 3 :
Ce lemme explique, qu'il existe une valeur μ_0 dépendant que de A, telle que si on se donne n'importe quelle suite δ_i telle que pour tout i, $\delta_i \leq \bar{\lambda_i}$, alors :

$$\bar{w}_i^{\delta_i} - \bar{w}_i < 0 \Rightarrow -\bar{L}(\bar{w}_i^{\delta_i} - \bar{w}_i) < 0.$$

4) Un point utile :

$\xi_i = \sup\ \{\lambda \leq \bar{\lambda}_i = 2 + \log \eta_i, \bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i < 0,\text{sur }]\lambda, t_i] \times \mathcal{S}_2(1)\}$

ξ_i existe toujours d'après le lemme 2.

Preuve du lemme 1 :

Ecrivons :

$$\bar{w}_i(t,\theta) = e^{t/2}u_i(a_i + e^t\theta) - \lambda_0 e^t = e^t\{e^{-t/2}u_i(a_i + e^t\theta) - \lambda_0\}$$

alors :

$$\bar{w}_i(t,\theta) > 0 \Leftrightarrow e^{-t/2}u_i(a_i + e^t\theta) > \lambda_0$$

Rappelons que $t_i = \beta \log \eta_i$ avec $\eta_i = \dfrac{1}{[u_i(a_i)]^2}$. Nous avons :

$\lambda_0 \leq e^{(t_i - t)/2}e^{-t_i/2}u_i(a_i + e^t\theta)$.

Or pour $t \leq t_i$ on a, $e^{(-t_i/2)} \leq e^{-(t/2)} \Rightarrow e^{(-t_i/2)} \min u_i \leq e^{(-t/2)}u_i(a_i + e^t\theta)$.

Donc :

$$\lambda_0 \leq u_i(a_i)^\beta \min u_i \leq e^{-(t/2)}u_i(a_i + e^t\theta) \text{ pour } t \leq t_i.$$

D'après notre hypothèse de départ (celle qui doit aboutir à une absurdité) en prenant $\beta = \dfrac{1}{3}$, on a :

$$u_i(a_i)^\beta \min u_i \to +\infty$$

Le réel λ_0 peut etre choisit convenablement, on le choisira de telle sorte qu'on ait :

$$\lambda_0 \leq (1/2)u_i(a_i)^\beta \min u_i \leq (1/2)e^{(t/2)}u_i(a_i + e^t\theta) \text{ pour } t \leq t_i$$

et en conséquence,

$$u_i(a_i)^\beta \min u_i - \lambda_0 \geq (1/2)u_i(a_i)^\beta \min u_i.$$

Par exemple, on peut prendre $\lambda_0 = \lambda_{0,i} = (1/2)u_i(a_i)^\beta \min u_i$ (il y a une dépendance en fonction de i).

Pour alleger l'écriture, on mettra λ_0 devant e^t au lieu de $\lambda_{0,i}$ dans l'expression de $\bar{w}_i$.

Preuve du lemme 2 :

D'abord, on fixe l'entier i et on cherche le signe de $\partial_t \bar{w}_i$

$\partial_t \bar{w}_i(t,\theta) = (1/2)e^{t/2}u_i(a_i + e^t\theta) + e^{(3/2)t}[\theta^1\partial_1 u_i(a_i + e^t\theta) + \theta^2\partial_2 u_i(a_i + e^t\theta)] - \lambda_0 e^t$

$$\partial_t \bar{w}_i = e^t\{(1/2)e^{-t/2}u_i(a_i + e^t\theta) - \lambda_0 + e^{t/2}(\partial_1 u_i + \theta^2\partial_2 u_i)$$

où $(\theta^1, \theta^2) = \theta$ un point de la sphére $\mathcal{S}_2(1)$.

Comme u_i est supposée $\mathcal{C}^1$, il existe A_i tel que, $\| \nabla u_i \|_\infty \leq A_i$

D'autre part, d'après le choix de λ_0 (fin de la preuve du lemme 1) :

$$(1/2)e^{-t/2}u_i(a_i+e^t\theta)-\lambda_0 \geq \beta_i = \frac{1}{2}[u_i(a_i)]^\beta \min u_i > 0 \text{ pour } t \leq t_i.$$

En conséquence, pour $t \leq t_i$ on obtient $\partial_t \bar{w}_i \geq e^t(\beta_i - e^{t/2}A_i)$.

Ainsi pour $t < 2\log\dfrac{\beta_i}{A_i}$, $(\beta_i - e^{t/2}A_i \geq 0)$, la fonction $\bar{w}_i$ est strictement croissante uniformément en $\theta \in \mathcal{S}_2(1)$.

Supposons que lemme 2 ne soit pas vrai :

Il existe une famille de $\{\lambda\}$, telle que $\lambda \to -\infty$, $t_\lambda \in]\lambda, t_i]$ et $\theta_\lambda \in \mathcal{S}_2(1)$ telles que :

$$\bar{w}_i(2\lambda - t_\lambda, \theta_\lambda) - \bar{w}_i(t_\lambda, \theta_\lambda) \geq 0 \qquad (*)$$

Pour λ voisin de $-\infty$, λ verifie : $\lambda < 2\log\dfrac{\beta_i}{A_i}$ et donc pour $\lambda < t \leq 2\log\dfrac{\beta_i}{A_i}$ la fonction $\bar{w}_i$ est strictement croissante.

Comme $t^\lambda = 2\lambda - t \leq t$ pour $\lambda \leq t$, on obtient alors :

$$\bar{w}_i(2\lambda - t, \theta) - \bar{w}_i(t, \theta) < 0 \text{ pour tout } (t, \theta) \in]\lambda, 2\log\frac{\beta_i}{A_i}] \times \mathcal{S}_2(1)$$

Le réel t_λ vérifie avec θ_λ l'inégalité $(*)$, il vérifie forcément l'inégalité suivante :

$$t_i \geq t_\lambda \geq 2\log(\beta_i/A_i) \text{ pour tout } \lambda$$

Par compacité, on obtient une suite de $\lambda \to -\infty$ telle que :

$t_\lambda \to t_0 \in [-2\log\dfrac{\beta_i}{A_i}, t_i]$ et $\theta_\lambda \longrightarrow \theta_0 \in \mathcal{S}_2$.

Comme les fonctions $\bar{w}_i$ sont continues :

$\bar{w}_i(2\lambda - t_\lambda, \theta_\lambda) - \bar{w}_i(t_\lambda, \theta_\lambda) = e^{(2\lambda - t_\lambda)/2}u_i(a_i + e^{2\lambda - t_\lambda}\theta_\lambda) - \lambda_0 e^{2\lambda - t_\lambda} + \lambda_0 e^{t_\lambda} - e^{t_\lambda/2}u_i(a_i + e^{t_\lambda}\theta_\lambda) \longrightarrow \lambda_0 e^{t_0} - e^{t_0/2}u_i(a_i + e^{t_0}\theta_0) = -\bar{w}_i(t_0, \theta_0)$, quand $\lambda \to -\infty$.

En utilisant $(*)$, on obtient :

$\bar{w}_i(t_0, \theta_0) \leq 0$ et $t_0 \leq t_i$ ce qui contredit le lemme 1(d'où le choix de t_i et pas de 0, pour la borne de droite).

Preuve du lemme 3 :

Considérons l'opérateur $\bar{L} = L - \frac{1}{4} = \partial_{tt} - \Delta_\sigma - \frac{1}{4}$, Δ_σ le laplacien sur $\mathcal{S}_2(1)$.

On a $-\bar{L}\bar{w}_i = -\bar{L}(w_i - \lambda_0 e^t) = -\bar{L}w_i + \lambda_0 \bar{L}\, e^t = V_i {w_i}^5 + \frac{3}{4}\lambda_0 e^t$ avec $V_i(t,\theta) = V_i(a_i + e^t\theta)$.

De même, $\bar{L}\bar{w}_i^\lambda = V_i^\lambda (w_i^\lambda)^5 + \frac{3}{4}\lambda_0 e^{2\lambda - t}$, où on a posé $V_i^\lambda(t,\theta) = V_i(a_i + e^{2\lambda - t}\theta)$.

Ainsi,

$$-\bar{L}(w_i^\lambda - w_i) = \frac{3\lambda_0}{4}(e^{2\lambda - t} - e^t) + (V_i^\lambda - V_i)(w_i^\lambda)^5 + V_i[(w_i^\lambda)^5 - w_i^5].$$

Or, $V_i(a_i + e^{t^\lambda}\theta) - V_i(a_i + e^t\theta) \leq ||\nabla V_i||_\infty (e^t - e^{t^\lambda}) \leq A(e^t - e^{t^\lambda})$ si $\lambda < t$ (ce qui est toujours le cas ici) ,d'où

$$-\bar{L}(\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i) \leq [\frac{3\lambda_0}{4} - A({w_i}^\lambda)^5](e^{t^\lambda} - e^t) + V_i\{(\bar{w}_i^\lambda + \lambda_0 e^{t^\lambda})^5 - (\bar{w}_i + \lambda_0 e^t)^5\}$$

Alors pour avoir :
$\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i < 0 \Rightarrow -\bar{L}(\bar{w}_i^\lambda - \bar{w}_i) < 0 \qquad (*)$,

il suffit que :

$$\frac{3\lambda_0}{4} - A({w_i}^\lambda)^5 \geq 0.$$

Comme $\lambda \leq \bar{\lambda}_i = 2 + \log \eta_i$, $2\lambda - t - \bar{\lambda}_i = (\lambda - \bar{\lambda}_i) + (\lambda - t) \leq 0$, alors :

$w_i(2\lambda - t - \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_i, \theta) \leq (1+\epsilon)e^{(2\lambda - t - \lambda_i)} \leq 1 + \epsilon$ où ϵ est un réel positif fixé.

Pour prouver cette inégalité, on utilise la propriété d) de l'étape 2 :

$\forall \beta > 0,\ w_i(t + \bar{\lambda}_i, \theta) = w_i(t + \delta + \log \eta_i, \theta)$ converge uniformément vers w sur $]-\infty, \log \beta] \times \mathcal{S}_2(1)$. On prendera $t = 2\lambda - t - \bar{\lambda}_i \leq 0$ et $\beta = 1$.

Finalement pour avoir $(*)$, il suffit de prendre $\lambda_0 \geq (3A/4)(1+\epsilon)^5 = \mu_0$ et on voit que μ_0 ne dépend pas de $\lambda \leq \bar{\lambda}_i$.

preuve du point utile 4 :

D'après la propriété d) de l'étape 2-1 :

$$\bar{w}_i(\log \eta_i, \theta) - \bar{w}_i(\log \eta_i + 4, \theta) > 0$$

Posons, $\qquad l_i = \log \eta_i + 4$, on a alors :

$$2\bar{\lambda}_i - l_i = 2(\log \eta_i + 2) - \log \eta_i - 4 = \log \eta_i \text{ et } \bar{\lambda}_i < l_i < t_i$$

Donc :

$$\bar{w}_i^{\bar{\lambda}_i}(l_i, \theta) - \bar{w}_i(l_i, \theta) > 0$$

ξ_i existe .

Etape 4 : utilisation des lemmes précédents pour conclure :

On choisit les $\lambda_{0,i}$ comme dans le lemme 1, puis on détermine les ξ_i correspondant aux $\lambda_{0,i}$ du lemme 2, et après on peut utiliser le lemme 3.

Les fonctions $\bar{w}_i^{\xi_i} - \bar{w}_i$ vérifient les propriétés suivantes :

1) sur $]\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_2(1)$, $\bar{w}_i^{\xi_i} - \bar{w}_i \leq 0$,

2) sur $]\xi_i, t_i] \times \mathcal{S}_2(1)$, $-\bar{L}(\bar{w}_i^{\xi_i} - \bar{w}_i) \leq 0$.

D'où par le principe du maximum le :

Lemme :
Les fonctions $\bar{w}_i^{\xi_i}$ et $\bar{w}_i$ vérifient :

$$\max_{\theta \in \mathcal{S}_2} \bar{w}_i^{\xi_i}(t_i, \theta) \geq \min_{\theta \in \mathcal{S}_2} \bar{w}_i(t_i, \theta).$$

La preuve du lemme est identique à celle du lemme 3 du théorème 3.

D'après le choix de λ_0 dans la fin de la preuve du lemme 2, on a :

$$\bar{w}_i(t_i, \theta) \geq (1/2) e^{t_i/2} \min u_i$$

D'autre part, d'après le point d) de l'étape 2) :
$w_i(t + \bar{\lambda}_i, \theta) = w_i(t + \delta + \log \eta_i, \theta) \to w(t + \delta) \leq e^{(t+\delta)/2}$, uniformément sur $]-\infty, \log \beta] \times \mathcal{S}_2(1)$

D'où :

$$w_i(2\xi_i - t_i, \theta) \leq (1 + \epsilon) e^{\delta/2} e^{(2\xi_i - t_i - \bar{\lambda}_i)/2} \leq c e^{(\bar{\lambda}_i - t_i)/2}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$e^{(1/2)(2t_i - \bar{\lambda}_i)} \min u_i \leq c \text{ pour tout } i$$

Comme $\bar{\lambda}_i = 4 + \log \eta_i$, $t_i = \beta \log \eta_i = \dfrac{1}{3} \log \eta_i$ et $\eta_i = [u_i(a_i)]^{-2}$, on en déduit que :

$$u_i(a_i)^{1/3} \times \inf u_i \leq c$$

Ceci contredit notre hypothèse de départ (étape 1).

Cas : $n = 4$, $q = N = 4$, $M = \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas, on suppose les fonctions V_i lipschitziennes de constantes $A_i \to A \geq 0$.

La preuve est assez similaire à celle de la dimension 3. On se place sur $\Omega = B_2(0)$.

Supposons que

$$\liminf_{i \to +\infty} \frac{\min_{B_2(0)} u_i}{A_i} \geq \frac{2e^2}{a}$$

et montrons qu'alors :

$$\forall\, R > 0, \quad \sup_{B_R(0)} u_i \times \inf_{B_2(0)} u_i \leq c = c(a, b, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, R)$$

Etape 1 : technique blow-up

On prouve d'abord la propriété suivante :

$$\text{il existe } c > 0 \text{ et } R \in]0,1[\text{ tels que } (\sup_{B_R(0)} u_i) \times \inf_{B_2(0)} u_i \leq \frac{c}{R^2}.$$

Supposons le contraire :

$$\text{pour tout } c, R > 0, \text{ il existe } i_j \in \mathbb{N}, \text{ tels que} (\sup_{B_R(0)} u_{i_j}) \times \inf_{B_2(0)} u_{i_j} \geq \frac{c}{R^2}$$

Le but est d'arriver à une contradiction, on peut donc supposer que la suite extraite est la suite elle-même :

Etant données deux suites $c_i \to +\infty$ et $R_i \to 0$, il existe une suite u_i telle que :

$$\sup_{B_{R_i}(0)} u_i \times \inf_{B_2(0)} u_i \geq \frac{c_i}{{R_i}^2}.$$

Comme, la suite des minima est bornée, on en déduit :

$$\sup_{B_{R_i}(0)} u_i \times R_i^2 \geq c_i.$$

Introduisons les fonctions suivantes :

$$s_i(x) = u_i(x)(R_i - |x - x_i|)$$

où, x_i est le point tel que, $u_i(x_i) = \max_{B_{R_i}(0)} u_i$.

Comme $R_i \to 0$, on a $R_i > R_i^2$ et $u_i(x_i) \to +\infty$, on obtient :

$$\max_{B_R(x_i)} s_i = s_i(a_i) \geq s_i(x_i) = u_i(x_i)R_i = \sqrt{[u_i(x_i)]^2 R_i^2} \to +\infty.$$

En posant, $l_i = R_i - |a_i - x_i|$, $(l_i \to 0)$, on montre comme dans la preuve du théorème 3 que :

$$L_i = \frac{l_i}{\sqrt{c_i}} u_i(a_i) \to +\infty.$$

Soit alors v_i la fonction définie par :

$$v_i(y) = \frac{u_i\left(a_i + \dfrac{y}{u_i(a_i)}\right)}{u_i(a_i)} \text{ pour } |y| \leq \frac{l_i}{\sqrt{c_i}} u_i(a_i),$$

on montre aussi, comme dans la preuve du théorème 3, que pour $c_i \geq 4$ (mais $c_i \to +\infty$) :

$$v_i(y) \leq \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{c_i}}\right)} \leq 2\,. \qquad (*)$$

Cette fonction vérifie $\Delta v_i = W_i {v_i}^3$ avec $W_i(y) = V_i[a_i + \dfrac{y}{u_i(a_i)}]$.

Et la suite (v_i) converge uniformément vers la fonction $v(y) = \dfrac{1}{1+|y|^2}$ sur toute boule $B_\beta(0)$, $\beta > 0$.

Les étapes suivantes, sont identiques à celles de la preuve du cas de la dimension 3, mais des modifications importantes sont à noter.

Etape 2 : Passage en polaire et propriété de certaines fonctions

Comme dans le cas de la dimension 3, on considére les opérateurs suivants :

$$L_0 = \partial_{tt} + 2\partial_t - \Delta_\sigma \qquad et \qquad L = \partial_{tt} - \Delta_\sigma$$

Δ_σ est l'opérateur de Laplace-Baltrami sur $\mathcal{S}_3$
Soit, w_i la fonction suivante :

$$w_i(t, \theta) = e^t u_i(a_i + e^t \theta),$$

elle vérifie :

$$-Lw_i + w_i = V_i(a_i + e^t\theta) {w_i}^3$$

Comme dans le cas de la dimension 3, on montre que les fonctions w_i ont les propriétés suivantes :

a) $w_i(t+\log\eta_i,\theta) = e^t \times \dfrac{u_i(a_i + \dfrac{e^t\theta}{u_i(a_i)})}{u_i(a_i)} = e^t \times v_i(e^t\theta)$ converge vers la fonction symétrique $w = \left(\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}\right)$ uniformément sur $]-\infty, \log\alpha] \times \mathcal{S}_3$ pour tout $\alpha > 0$.

b) Pour $i \geq i_0, w_i(\log\eta_i,\theta) - w_i(\log\eta_i + 4,\theta) > 0$ pour tout θ, avec $\eta_i = \dfrac{1}{[u_i(a_i)]^{2/(n-2)}} = \dfrac{1}{u_i(a_i)}$ (on est en dimension 4).

c) si $\mu > 0$ et si on pose $\tilde{w}_i = w_i - \mu e^t$ alors :

$\tilde{w}_i(\log\eta_i,\theta) - \tilde{w}_i(4+\log\eta_i,\theta) > 0$ pour tout θ

Etape 3 : Utilisation de la technique " moving-plane "

On pose :

$\tilde{w}_i(t,\theta) = w_i(t,\theta) - \dfrac{\min_{B_2(0)} u_i}{2} e^t$ (le μ du point c précédent est $\mu = -\dfrac{\min_{B_2(0)} u_i}{2}$), $\tilde{V}_i(t,\theta) = V_i(a_i + e^t\theta)$.

D'autre part :

$$t^\lambda = 2\lambda - t, \quad \tilde{w}_i^\lambda(t,\theta) = \tilde{w}_i(2\lambda - t,\theta) \;\; et \;\; \tilde{V}_i^\lambda(t,\theta) = \tilde{V}_i(2\lambda - t,\theta).$$

Ici, comme dans du lemme 1 pour la dimension 3, on cherche á savoir si les fonctions qu'on utilise sont positives, le choix de $\mu = \dfrac{\min_{B_2(0)} u_i}{2}$ dans le c) de l'étape précédente sera tres important. Nous avons ici :

$t \leq 0 \Rightarrow e^t \leq 1 \Rightarrow u_i(a_i + e^t\theta) \geq \min_{B_1(a_i)} u_i \geq \min_{B_2(0)} u_i$, car $a_i \to 0$.

D'où pour $t \leq 0$ et pour tout θ dans $\mathcal{S}_3$:

$\tilde{w}_i(t,\theta) = e^t u_i(a_i + e^t\theta) - \dfrac{min_{B_2(0)} u_i}{2} e^t \geq \dfrac{min_{B_2(0)} u_i}{2} e^t > 0.$

Dans le cas de la dimension 3, la borne de droite des intervalles sur lesquels on applique le principe du maximum varie, ici c'est plus simple $t_i \equiv t_0 = 0$ est fixe.

Concernant le lemme 2 ainsi que le point utile 4, ils sont les même, puis on montre que :

$$\xi_i = sup\,\{\lambda \leq \bar{\lambda}_i + 2,\; \tilde{w}_i^\lambda - \tilde{w}_i < 0,\; \text{sur }]\lambda, t_0] \times \mathcal{S}_3\} \text{ existe.}$$

Enfin, par continuité des fonctions $\tilde{w}_i$, on obtient :

$$\forall\,(t,\theta)\in]\xi_i,t_0]\times\mathcal{S}_3,\;\;\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i\leq 0.$$

Lemme :

$$\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i<0\Rightarrow -\bar{L}(\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i)<0.$$

Preuve :

$$-\bar{L}(\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i)=\tilde{V}_i^{\xi_i}\big(w_i^{\xi_i}\big)^3-\tilde{V}_i{w_i}^3$$

D'où :

$$-\bar{L}(\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i)=(\tilde{V}_i^{\xi_i}-\tilde{V}_i)\big(w_i^{\xi_i}\big)^3+[\big(w_i^{\xi_i}\big)^3-{w_i}^3]\tilde{V}_i.$$

Pour tous $t\in[\xi_i,t_0]$ et $\theta\in\mathcal{S}_3$:

$$\tilde{V}_i^{\xi_i}(t,\theta)-\tilde{V}_i(t,\theta)=V_i(a_i+e^{2\xi_i-t}\theta)-V_i(a_i+e^t\theta)\leq A_i(e^t-e^{2\xi_i-t}).$$

D'autre part, si $\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i<0$, alors par définition de $\tilde{w}_i$, on obtient :

$$w_i^{\xi_i}-w_i\leq\frac{\min_{B_2(0)}u_i}{2}(e^{2\xi_i-t}-e^t)<0$$

Et en utilisant le fait que $0<w_i^{\xi_i}<w_i$, on obtient :

$$(w_i^{\xi_i})^3-{w_i}^3=(w_i^{\xi_i}-w_i)[(w_i^{\xi_i})^2+w_i^{\xi_i}w_i+(w_i)^2]\leq 3(w_i^{\xi_i}-w_i)\times(w_i^{\xi_i})^2.$$

Ces deux inégalités entrainent, pour tous $t\in[\xi_i,t_0]$ et $\theta\in\mathcal{S}_3$:

$$(w_i^{\xi_i})^3-{w_i}^3\leq 3\frac{\min_{B_2(0)}u_i}{2}\,(w_i^{\xi_i})^2(e^{2\xi_i-t}-e^t).$$

En conséquence on obtient :

$$-\bar{L}(\tilde{w}_i^{\xi_i}-\tilde{w}_i)\leq(w_i^{\xi_i})^2\,(\frac{3min_{B_2(0)}u_i}{2}\tilde{V}_i-A_i{w_i}^{\xi_i})\,(e^{2\xi_i-t}-e^t)\qquad(**)$$

Par définition de w_i et d'après $(*)$ de l'étape 1, rappelons que pour tout $t\leq\log(l_i)-\log 2+\log\eta_i$:

$$w_i(t,\theta)=e^t\times\frac{u_i\left(a_i+\dfrac{y}{u_i(a_i)}\right)}{u_i(a_i)}\leq 2e^t.$$

Comme,

$${w_i}^{\xi_i}(t,\theta)=w_i(2\xi_i-t,\theta)=w_i[(\xi_i-t)+(\xi_i-\log\eta_i)+\log\eta_i,\theta]$$

nous trouvons que

$$w_i{}^{\xi_i}(t,\theta) = e^{(\xi_i - t)+(\xi_i - \log \eta_i)} \times \frac{u_i\left(a_i + \dfrac{e^{(\xi_i-t)+(\xi_i-\log\eta_i)}}{u_i(a_i)}\theta\right)}{u_i(a_i)} \leq 2e^2$$

car, $\xi_i - \log \eta_i \leq 2$ et $\xi_i \leq t \leq t_0$. La constante $2e^2$, peut être largement améliorée.

Revenons à $(**)$ et regardons le signe de :

$$\frac{3\, min_{B_2(0)} u_i}{2} \tilde{V}_i - A_i w_i{}^{\xi_i} \geq \frac{3\, a\, min_{B_2(0)} u_i}{2} - 2e^2 A_i = \frac{3a\, A_i}{2} \times \left[\frac{min_{B_2(0)} u_i}{A_i} - \frac{4e^2}{3\, a} \right]$$

D'après notre hypothèse de départ, $\liminf \dfrac{\min_{B_2(0)} u_i}{A_i} \geq \dfrac{2e^2}{a}$, on en conclu que $(**)$ est négative, et le lemme est démontré.

La fin de la preuve est semblable à celle du corollaire 1. On a, après avoir appliquer le principe du maximum :

$$\min_{\theta \in \mathcal{S}^3} \tilde{w}_i(t_0, \theta) \leq \max_{\theta \in \mathcal{S}^3} \tilde{w}_i(2\xi_i - t_0, \theta)$$

Comme $t_0 = 0$ et $a_i \to 0$ et $B_1(a_i) \subset B_2(0)$, on obtient :

$$\tilde{w}_i(t_0, \theta) = e^{t_0}[u_i(a_i + e^{t_0}\theta) - \frac{\min_{B_2(0)}\ u_i}{2}] \geq \frac{e^{t_0}}{2} \min_{B_2(0)} u_i.$$

D'autre part, la convergence uniforme des w_i entraine :

$$\tilde{w}_i(2\xi_i - t_0, \theta) = w_i(2\xi_i - t_0, \theta) - \frac{min_{B_2(0)} u_i}{2} e^{2\xi_i - t_0} \leq w_i(2\xi_i - t_0, \theta) \leq c \times e^{\log \eta_i}$$

Finalement,

$$[u_i(a_i)] \times \inf_{B_2(0)} u_i \leq c$$

Et ceci, contredit notre hypothèse de l'étape 1 (la constante c dépend de t_0, elle est indépendante de i).

<u>Preuve du corollaire 2 :</u>

Comme les constantes de Lipschitz A_i relative à V_i tendent vers 0, on obtient :

$$\frac{\min_K u_i}{A_i} \geq \frac{m}{A_i} \to +\infty >> \frac{2e^2}{a}$$

avec K compact de Ω et m un minorant uniforme de la suite u_i.

En appliquant le théorème 4, on obtient :

$$\sup_K u_i \leq \frac{c(a, b, (A_i)_{i\in\mathbb{N}}, K, \Omega)}{m}$$

Preuve du théorème 5 :

Dans ce qui suit, les fonctions u_i et V_i sont supposées radiales. L'équation vérifiée par u_i deveint :

$$\Delta u_i = -u_i'' - \frac{(n-1)}{r}u_i' = V_i {u_i}^{N-1}$$

Les fonctions u_i et V_i sont réguliéres, donc, $u_i'(0) = 0$. Comme $V_i \geq a > 0$, on a $(r^{n-1}u_i')' < 0$.

La fonction $r^{n-1}u_i'$ est décroissante, d'où $r^{n-1}u_i'(r) \leq 0$ et u_i est décroissante :

$$\text{pour } r \in [0,1], \;\; u_i(1) \leq u_i(r) \leq u_i(0)$$

.

Nos fonctions V_i sont censées vérifier :

$$|V_i(r) - V_i(r')| \leq A|r^{[(n-2)/2]+\epsilon} - r'^{[(n-2)/2]+\epsilon}| \qquad \text{pour tout } r, r' \in [0,1].$$

Supposons par l'absurde que pour ce $\epsilon > 0$ donné :

$$[u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)} \times u_i(1) \to +\infty$$

Introduisons la fonction :

$$v_i(r) = \frac{u_i\left(\dfrac{r}{[u_i(0)]^{2/(n-2)}}\right)}{u_i(0)}.$$

v_i vérifie :

$$\Delta v_i = V_i {v_i}^{N-1}, \;\; 0 < v_i(r) \leq v_i(0) = 1 \text{ et } v_i'(0) = 0.$$

On suppose sans nuire à la généralité que $V_i(0) \to n(n-2)$. Alors en utilisant les théorèmes de Ladyzenskaya et d'Ascoli, on conclu que :

$$v_i \to v = \frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}}$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

Comme dans les preuves des théorèmes 3 et 4, on utilise la méthode "moving-plane ".

On pose :

$$w_i(t) = e^{(n-2)t/2}u_i(e^t) \;\text{ et }\; \bar{V}_i(t) = V_i(e^t)$$

w_i est solution de l'équation :

$$-Lw_i = \bar{V}_i {w_i}^{N-1}$$

où L est l'opérateur, $\partial_{tt} - \dfrac{(n-2)^2}{4}$.

On pose aussi :

$$\bar{w}_i(t) = w_i(t) - \lambda_i \, e^{(n-2+2\epsilon)t/2}$$

avec, $\lambda_i = \dfrac{[u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)} \times u_i(1)}{2}$. Calculons

$$-L\bar{w}_i = -\partial_{tt}\bar{w}_i + \frac{(n-2)^2}{4}\bar{w}_i = -\partial_{tt}w_i + \frac{(n-2)^2}{4}w_i + \lambda_i\left(\frac{(n-2+2\epsilon)^2}{4} - \frac{(n-2)^2}{4}\right)e^{(n-2+2\epsilon)t/2}$$

on trouve,

$$-L\bar{w}_i = \bar{V}_i\left(\bar{w}_i + \lambda_i \times e^{(n-2+2\epsilon)t/2}\right)^{N-1} + \lambda_i\epsilon(n-2+\epsilon)e^{(n-2+2\epsilon)t/2}$$

Comme dans la preuve du théorème 4 (dimension 3), vérifions que :

1) $\bar{w}_i > 0$ sur $]-\infty, t_i]$ avec $t_i = -\dfrac{1}{(n-2+\epsilon)} \log u_i(0)]$

2) le réel, ξ_i défini par, $\xi_i = \sup\{\lambda \leq 2 + \log \eta_i, \; \bar{w}_i^{\lambda} - \bar{w}_i < 0, \text{ sur }]\lambda, t_i]\}$, existe.

avec $\eta_i = \dfrac{1}{[u_i(0)]^{2/(n-2)}}$.

3) $\bar{w}_i^{\xi_i} - \bar{w}_i \leq 0 \Rightarrow -L(\bar{w}_i^{\xi_i} - \bar{w}_i) \leq 0$.

1) La première assertion se démontre comme suit :

$$\bar{w}_i(t) = e^{(n-2+2\epsilon)t/2}(e^{-\epsilon t}u_i(e^t) - \lambda_i)$$

Or pour $t \leq t_i$, $e^{-\epsilon t} \geq e^{-\epsilon t_i} = [u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)}$ et $u_i(e^t) \geq u_i(1)$ (u_i est décroissante), ainsi :

$$\bar{w}_i(t) \geq e^{(n-2+2\epsilon)t/2}\left[[u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)}u_i(1) - \frac{[u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)}u_i(1)}{2}\right]$$

et finalement, puisque $[u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)}\, u_i(1) \to +\infty$, on a à partir d'un certain rang et pour $t \leq t_i$:

$$\bar{w}_i(t) > 0 \qquad (*)$$

2) La deuxième assertion, se montre comme dans le cas de la dimension 3, la comparaison de t_i et $\log \eta_i$ est cruciale.

3) La preuve du troisième point utilise l'hypothèse sur V_i :

$$\bar{w}_i^{\xi_i} - \bar{w}_i \leq 0 \Rightarrow w_i^{\xi_i} - w_i \leq \lambda_i[e^{(n-2+2\epsilon)(2\xi_i - t)/2} - e^{(n-2+2\epsilon)t/2}] < 0$$

d'où,

$$-L(\bar{w}_i^{\xi_i}-\bar{w}_i)=(\bar{V}_i^{\xi_i}-\bar{V}_i)(w_i^{\xi_i})^{N-1}+V_i\lambda_i\epsilon(\epsilon+n-2)[e^{(n-2+2\epsilon)(2\xi_i-t)/2}-e^{(n-2+2\epsilon)t/2}]$$

La convergence uniforme sur tout compact K de la suite w_i entraine qu'il existe $c>0$ tels que : $w_i^{\xi_i}(t)\leq c\,e^{(n-2)(\log\eta_i-t_i)/2}\leq c$ pout tout i.

Rappelons que d'après la définition de A_i :

$$\bar{V}_i^{\xi_i}-\bar{V}_i\leq -A_i[e^{(n-2+2\epsilon)(2\xi_i-t)/2}-e^{(n-2+2\epsilon)t/2}].$$

On obtient :

$$-L(\bar{w}_i^{\xi_i}-\bar{w}_i)\leq (a\lambda_i\frac{\epsilon(2\epsilon+n-2)}{2}-A\times c)[e^{(n-2+2\epsilon)(2\xi_i-t)/2}-e^{(n-2+2\epsilon)t/2}]$$

et puisque $\lambda_i\to+\infty$, cela entraine que : $-L(\bar{w}_i^{\xi_i}-\bar{w}_i)<0$ pour $i\geq i_0$.

Comme dans les preuves des théorèmes précédents, le principe du maximum entraine :

$$\bar{w}_i(t_i)\leq\bar{w}_i(2\xi_i-t_i)$$

or, à partir de l'inégalité $(*)$ et la convergence uniforme des w_i :

$$\bar{w}_i(t_i)\geq e^{(n-2)t_i/2}u_i(1)\ \text{ et }\ \bar{w}_i(2\xi_i-t_i)\leq w_i(2\xi_i-t_i)\leq c_1\times e^{(n-2)(\log\eta_i-t_i)/2}$$

d'où,

$$u_i(0)e^{(n-2)t_i}u_i(1)\leq 2c_1$$

En conséquence,

$$[u_i(0)]^{1-(n-2)/(n-2+\epsilon)}u_i(1)\leq 2c_1$$

Et finalement on obtient,

$$[u_i(0)]^{\epsilon/(n-2+\epsilon)}u_i(1)\leq 2c_1$$

Ceci, contredit notre hypothèse de départ.

Preuve du théorème 6 :

Soient $\{u_i\}$, $\{V_i\}$ et $\{W_i\}$ trois suites de fonctions telles que :

$$\Delta u_i = V_i {u_i}^{N-1} + W_i {u_i}^{\alpha} \text{ dans } \Omega$$

avec $u_i > 0$ et $\alpha \in]\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2}[$, V_i et W_i vérifiant :

$$0 < a \leq V_i(x) \leq b \text{ et } 0 < c \leq W_i(x) \leq d \ \forall x \in \Omega,$$

$$||V_i(x) - V_i(y)|| \leq A||x-y|| \text{ et } ||W_i(x) - W_i(y)|| \leq B||x-y|| \ \forall x, y \in \Omega.$$

Le schéma de la démonstration est le même que celui du théorème 3. On commence par prouver une estimation locale en utilisant les techniques blow-up et "moving-plane ".

On suppose $\Omega = B_2(0)$ et on cherche à prouver qu'il existe deux constantes positives c et $R < 2$ telles que pour tout entier i, on ait :

$$\sup_{B_R(0)} u_i \times \inf_{B_2(0)} u_i \leq \frac{c}{R^{n-2}}$$

On raisonne par l'absurde en s'inspirant de la preuve du théorème 3, on exhibe une suite de points (a_i) tendant vers 0, deux suites de réels positifs (R_i), (l_i) tendant aussi vers 0 et enfin une suite de fonctions (v_i) bornées qui convergent uniformément vers une certaine fonction positive v.

Plus précisément, on a :

$$u_i(a_i) \times \inf_{B_2(0)} u_i \to +\infty \qquad (*).$$

$$v_i(y) = \frac{u_i[a_i + y[u_i(a_i)]^{-2/(n-2)}]}{u_i(a_i)} \text{ pour } |y| \leq \frac{l_i}{2}[u_i(a_i)]^{2/(n-2)} = L_i$$

avec $u_i(a_i) \to +\infty$ et $L_i \to +\infty$.

Chaque fonction v_i vérifie, pour tout entier i et tout y, tel que $|y| \leq L_i$

$$0 < v_i(y) \leq \beta_i \leq 2^{(n-2)/2} \text{ avec } \beta_i \to 1$$

De plus,

$$\Delta v_i = \bar{V}_i {v_i}^{N-1} + \frac{1}{[u_i(a_i)]^{N-1-\alpha}} \bar{W}_i {v_i}^{\alpha}$$

Où $\bar{V}_i(y) = V_i[a_i + y[u_i(a_i))^{-2/(n-2)}]$ et $\bar{W}_i(y) = W_i[a_i + y[u_i(a_i)]^{-2/(n-2)}]$

Comme $\alpha \in]\frac{n}{n-2}, N-1[$, on voit alors en utilisant les théorèmes de Ladyzenskaya et d'Ascoli, que la suite (v_i), on peut extraire une sous-suite convergeant vers une fonction $v \geq 0$ vérifiant :

$$\Delta v = kv^{N-1} \text{ sur } \mathbb{R}^n \; v(0) = 1 \text{ et } 0 \leq v(y) \leq 1 \; \forall y \in \mathbb{R}^n$$

avec $0 < a \leq k \leq b$

Par un changement d'échelle, on peut toujours supposer que $k = n(n-2)$, et on sait que la fonction v définie précédemment, ne peut être que la suivante :

$$v(y) = \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{(n-2)/2}.$$

Maintenant, on peut aller voir la preuve du théorème 3 et utiliser la technique "moving-plane ".

On remarque que seul le lemme 2 est à vérifier. On commence par préciser quelques notations.

Posons pour $t \in]-\infty, \log 2]$ et $\theta \in \mathcal{S}_{n-1}$:

$w_i(t,\theta) = e^{(n-2)t/2}u_i(a_i + e^t\theta)$, $\bar{V}_i(t,\theta) = V_i(a_i + e^t\theta)$ et $\bar{W}_i(t,\theta) = W_i(a_i + e^t\theta)$.

D'autre part, soit L l'opérateur $L = \partial_{tt} - \Delta_\sigma - \frac{(n-2)^2}{4}$, avec Δ_σ l'opérateur de Laplace-Baltrami sur $\mathcal{S}_{n-1}$.

La fonction w_i est solution de l'équation suivante :

$$-Lw_i = \bar{V}_i {w_i}^{N-1} + e^{[(n+2)-(n-2)\alpha]t/2} \times \bar{W}_i {w_i}^{\alpha}.$$

On pose pour $\lambda \leq 0$:

$t^\lambda = 2\lambda - t$ $w_i^\lambda(t,\theta) = w_i(t^\lambda,\theta)$, $\bar{V}_i^\lambda(t,\theta) = \bar{V}_i(t^\lambda,\theta)$ et $\bar{W}_i^\lambda(t,\theta) = \bar{W}_i(t^\lambda,\theta)$.

Alors, pour pouvoir vérifier si le lemme 2 du théorème 3 reste valable, il suffit de voir si la quantité $-L(w_i^\lambda - w_i)$ est négative lorsque $w_i^\lambda - w_i$ l'est. En fait, pour chaque indice i, $\lambda = \xi_i \leq \log \eta_i + 2$, ($\eta_i = [u_i(a_i)]^{(-2)/(n-2)}$).

Tout d'abord :

$$w_i(2\xi_i - t, \theta) = w_i[(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2) + (\log \eta_i + 2)]$$

par définition de w_i et pour $\xi_i \leq t$:

$$w_i(2\xi_i - t, \theta) = e^{[(n-2)(\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2)]/2} e^{n-2} v_i[\theta e^{\xi_i - t + \xi_i - \log \eta_i - 2)}] \leq 2^{(n-2)/2} e^{n-2} = \bar{c}.$$

On sait que :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) = [\bar{V}_i^{\xi_i}(w_i^{\xi_i})^{N-1} - \bar{V}_i {w_i}^{N-1}] + [e^{\delta t^{\xi_i}} \bar{W}_i^{\xi_i}(w_i^{\xi_i})^\alpha - e^{\delta t}\bar{W}_i {w_i}^\alpha]$$

avec $\delta = \frac{(n+2)-(n-2)\alpha}{2}$

Les deux termes du second membre, notés Z_1 et Z_2, peuvent s'écrire :

$$Z_1 = (\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i)(w_i^{\xi_i})^{N-1} + \bar{V}_i[(w_i^{\xi_i})^{N-1} - {w_i}^{N-1}] \text{ et}$$

$$Z_2 = (\bar{W}_i^{\xi_i} - \bar{W}_i)(w_i^{\xi_i})^{\alpha} e^{\delta t^{\xi_i}} + e^{\delta t^{\xi_i}} \bar{W}_i[(w_i^{\xi_i})^{\alpha} - {w_i}^{\alpha}] + \bar{W}_i {w_i}^{\alpha}(e^{\delta t^{\xi_i}} - e^{\delta t})$$

D'autre part, comme dans la preuve du théorème 3 :

$$ {w_i}^{\xi_i} \leq w_i \text{ et } w_i^{\xi_i}(t,\theta) \leq \bar{c} \text{ pour tout } (t,\theta) \in [\xi_i, 0] \times \mathcal{S}_{n-1}.$$

Où $\bar{c}$ est une constante positive indépendante de i de $w_i^{\xi_i}$ pour $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$.

$$|\bar{V}_i^{\xi_i} - \bar{V}_i| \leq A(e^t - e^{t^{\xi_i}}) \text{ et } |\bar{W}_i^{\xi_i} - \bar{W}_i| \leq B(e^t - e^{t^{\xi_i}})$$

D'où

$Z_1 \leq A\,(w_i^{\xi_i})^{N-1}\,(e^t - e^{t^{\xi_i}})$ et $Z_2 \leq B\,((w_i^{\xi_i})^{\alpha}\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(w_i^{\xi_i})^{\alpha} \times (e^{\delta t^{\xi_i}} - e^{\delta t})$

Ainsi,

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{\alpha}[(A\, {w_i^{\xi_i}}^{N-1-\alpha} + B)\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(e^{\delta t^{\xi_i}} - e^{\delta t})].$$

Puisque $w_i^{\xi_i} \leq \bar{c}$, on obtient :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{\alpha}[(A\bar{c}^{N-1-\alpha} + B)\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(e^{\delta t^{\xi_i}} - e^{\delta t})]. \quad (1)$$

Cherchons le signe de $\bar{Z} = [(A\bar{c}^{N-1-\alpha} + B)\,(e^t - e^{t^{\xi_i}}) + c\,(e^{\delta t^{\xi_i}} - e^{\delta t})]$.

Comme $\alpha \in]\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2}[$ le réel $\delta = \dfrac{n+2-(n-2)\alpha}{2} \in]0,1[$.

On déduit que pour $t \leq t_0 < 0$:

$$e^t \leq e^{(1-\delta)t_0} e^{\delta t} \text{ pour tout } t \leq t_0.$$

Comme $t^{\xi_i} \leq t$ ($\xi_i \leq t$), en intégrant les deux membres, on obtient :

$$e^t - e^{t^{\xi_i}} \leq \frac{e^{(1-\delta)t_0}}{\delta}(e^{\delta t} - e^{\delta t^{\xi_i}}) \text{ pour tout } t \leq t_0,$$

qui s'écrit

$$(e^{\delta t^{\xi_i}} - e^{\delta t}) \leq \frac{\delta}{e^{(1-\delta)t_0}}\,(e^{t^{\xi_i}} - e^t).$$

L'inégalité (1) devient alors :

$$-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq (w_i^{\xi_i})^{\alpha}[-\frac{\delta\, c}{e^{(1-\delta)t_0}} + A\,\bar{c}^{N-1-\alpha} + B](e^t - e^{t^{\xi_i}})$$

Pour $t_0 < 0$ assez petit, la quantité $\dfrac{\delta\, c}{e^{(1-\delta)t_0}} - A\,\bar{c}^{N-1-\alpha} - B$ devient positive et le résultat cherché est obtenu dans l'intervalle $[\xi_i, t_0]$.

Le fait de prendre l'intervalle $[\xi_i, t_0]$ au lieu de $[\xi_i, \log 2]$, n'est pas gênant, au contraire, plus l'intervalle est petit plus l'infimum est grand. La suite de la preuve est identique á celle de la fin du théorème 3.

On aurait tendance à dire que t_0 dépend de ξ_i ou de $w_i^{\xi_i}$, mais si t_0 dépend bien de $\bar{c}$, cette constante est universelle.

On calcule t_0 puis on introduit $\xi_i \leq \log \eta_i + 2$ comme dans les autres théorèmes, et on vérifie l'inégalité $L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$ dès que $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$ sur $[\xi_i, t_0]$.

Ayant déterminé $t_0 < 0$ tel que, $\dfrac{\delta\, c}{e^{(1-\delta)t_0}} - A\, \bar{c}^{N-1-\alpha} - B$ soit positive, on pose :

$\xi_i = \sup\{\mu_i \leq \log \eta_i + 2, w_i^{\mu_i}(t,\theta) - w_i(t,\theta) \leq 0, \forall\, (t,\theta) \in [\mu_i, t_0] \times \mathcal{S}_{n-1}\}$.

Par définition de ξ_i, $w_i^{\xi_i} - w_i \leq 0$. Ensuite, on vérifie que $-L(w_i^{\xi_i} - w_i) \leq 0$.

Comme dans le théorème 3, le principe du maximum, entraine :

$$\min_{\theta \in \mathcal{S}_{n-1}} w_i(t_0, \theta) \leq \max_{\theta \in \mathcal{S}_{n-1}} w_i(2\xi_i - t_0)\,.$$

Or,

$$w_i(t_0, \theta) = e^{t_0} u_i(a_i + e^{t_0}\theta) \geq e^{t_0} \min u_i$$

et,

$$w_i(2\xi_i - t_0) \leq \frac{c_0}{u_i(a_i)}$$

.

donc :

$$u_i(a_i) \times \min u_i \leq c.$$

Ce qui contredit notre hypothèse $(*)$.

Preuve du Théorème 7 :

Etude du cas n=2

Considérons sur une variété riemannienne compacte (M, g) de courbure scalaire R, une suite de fonctions $\{u_i\}$ solutions de :

$$\Delta u_i + R = V_i e^{u_i} \qquad (*)$$

$0 < a \leq V_i(P) \leq b$ et $|\nabla V_i(P)| \leq A$ pour tout $P \in M$ et tout i.

Supposons par l'absurde que :

$$(H) \qquad \sup_M u_i + \inf_M u_i \to -\infty \,,$$

on en déduit que :

$$\sup_M |u_i| \to +\infty \qquad (**).$$

En intégrant l'équation $(*)$, on obtient pour tout i :

$$\int_M V_i e^{u_i} dV_g = \int_M R dV_g \,.$$

Posons $v_i = u_i - \log \int_M V_i e^{u_i} dV_g$. La fonction v_i vérifie :

$\Delta v_i = \lambda_i (V_i e^{v_i} - W_i)$ avec $\lambda_i = \int_M V_i e^{u_i} dV_g = \int_M R dV_g$ et $W_i = \dfrac{R}{\lambda_i} \in \mathcal{C}^2(M)$.

La suite $\{v_i\}$ vérifie les hypothèses du théorème 0.2 de YY.Li (voir [8]), celui-ci entraine l'existence d'une suite de points $\{x_i\}$ de M telle que :

$$\bar{v}_i + v_i(x_i) \geq c = c(a, b, A, M) \text{ avec } \bar{v}_i = \frac{1}{Vol(M)} \int_M v_i dV_g \,.$$

Soit $G(x, y)$ la fonction de Green du laplacien, pour tout $x \in M$:

$$u_i(x) = \bar{u}_i - \textstyle\int_M G(x, y) R(y) dV_g(y) + \int_M G(x, y) V_i(y) e^{u_i(y)} dV_g \,.$$

On peut choisir G vérifiant : $G \geq 0$ et $\int_M G(x, y) dV_g = c$ pour tout $x \in M$. On en déduit que :

$$\inf_M u_i \geq \bar{u}_i - \int_M G(x, y) R(y) dV_g(y) \,,$$

en intégrant cette dernière inégalité, on obtient :

$$\inf_M u_i \geq \bar{u}_i - \bar{c}, \;\; \bar{c} = \bar{c}(M, R) > 0 \,.$$

Ainsi :

$$\inf_M u_i + \sup_M u_i = \inf_M v_i + \sup_M v_i + 2\lambda \geq \bar{v}_i + v_i(x_i) \geq \tilde{c} = \tilde{c}(a, b, A, M) \,.$$

Ceci contredit l'hypothèse (H).

Etude du cas n > 3

Soit M une variété riemannienne compacte de courbure scalaire R partout positive.

Nous considérons une suite de fonctions positives (u_i) vérifiant sur M l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u_i + Ru_i = V_i {u_i}^{N-1}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-suite de (u_i) notée encore (u_i) telle que :

$$\lim_{i\to\infty}(\sup_M u_i \times \inf_M u_i) = 0 \qquad (*)$$

La fonction R est partout positive, l'opérateur $L = -\Delta - \dfrac{n-2}{4(n-1)}R$ est inversible. La fonction de Green associée à cet opérateur et qui est notée G_L vérifie les propriétés suivantes :

$$0 < m \leq G_L(x,y) \leq \frac{c}{d_g(x,y)^{n-2}} \qquad (1)$$

$$u_i(x) = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M G_L(x,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)dV_g \qquad (2)$$

où m, c sont deux constantes ne dépendant que de (M,g) et R, g étant la métrique de la variété M. Nous avons :

$$||u_i||_N^N = \int_M {u_i}^N dV_g \leq \max_M u_i \times \int_M {u_i}^{N-1}dV_g$$

Comme M est une variété compacte, la fonction u_i atteint son minimum en un point noté y_i. On peut ecrire d'après (2) :

$$\min_M u_i = u_i(y_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M G_L(y_i,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)dV_g\,.$$

Puisque $V_i(y) \geq a$ pour tout $y \in M$ et grâce à (1) on a :

$$\int_M G_L(y_i,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)dV_g \geq a \times m \int_M {u_i}^{N-1}(y)dV_g\,.$$

Ainsi,

$$||u_i||_{L^N}^N \leq \frac{4(n-1)}{a\,m\,(n-2)}\max_M u_i \times \min_M u_i\,.$$

On conclut, d'après (*) que :

$$\lim_{i\to+\infty}||u_i||_N^N = 0 \qquad (**)$$

Nous allons utiliser la technique d'itération de Moser pour montrer que $(**)$ nous permet d'avoir la convergence uniforme localement pour une sous-suite de (u_i).

Posons $\tilde{R} = \frac{n-1}{4(n-2)}R$, $\tilde{a} = a\frac{n-2}{4(n-1)}$, $\tilde{b} = b\frac{n-2}{4(n-1)}$ et $\tilde{V}_i = \frac{n-2}{4(n-1)}V_i$. La fonction u_i vérifie :

$$\Delta u_i + \tilde{R}u_i = \tilde{V}_i {u_i}^{N-1}.$$

Multiplions les deux membres par ${u_i}^{2k-1}$, où $k > 1$:

$$\int_M {u_i}^{2k-1}(\Delta u_i + \tilde{R}u_i) = \int_M \tilde{V}_i {u_i}^{N+2k-2}.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$(2k-1)\int_M {u_i}^{2k-2}|\nabla u_i|^2 + \int_M \tilde{R}{u_i}^{2k} = \int_M \tilde{V}_i {u_i}^{N+2k-2}.$$

D'autre part,

$$\int_M |\nabla(u_i^k)|^2 = k^2 \int_M {u_i}^{2k-2}|\nabla u_i|^2.$$

Ainsi,

$$\int_M {u_i}^{2k-2}|\nabla u_i|^2 = \frac{k^2}{2k-1}\int_M (-\tilde{R}{u_i}^{2k} + \tilde{V}_i {u_i}^{N+2k-2})$$

Comme $\tilde{R}$ est partout positive et $0 < \tilde{a} \leq \tilde{V}_i(y) \leq \tilde{b}$ pour tout $y \in M$, on déduit que :

$$\int_M |\nabla(u_i^k)|^2 \leq \frac{k^2}{2k-1}\int_M \tilde{V}_i {u_i}^N {u_i}^{2k-2} \leq \frac{\tilde{b}k^2}{2k-1}\int_M {u_i}^N {u_i}^{2k-2} \qquad (3)\,.$$

Le dernier membre de (3) peut s'écrire :

$$\int_M {u_i}^N {u_i}^{2k-2} = \int_M {u_i}^{N-2}\,{u_i}^{2k}.$$

Comme $N > 2$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder à ${u_i}^{N-2}$ et ${u_i}^{2k}$, avec l'exposant $p = \frac{N}{N-2}$:

$$\int_M {u_i}^{N-2}\,{u_i}^{2k} \leq \left(\int_M {u_i}^N\right)^{(1-2/N)} \times \left(\int_M {u_i}^{kN}\right)^{2/N}.$$

Finalement, on a l'inégalité suivante :

$$\int_M |\nabla(u_i^k)|^2 \leq \frac{\tilde{b}k^2}{2k-1}\left(\int_M {u_i}^N\right)^{(1-2/N)} \times \left(\int_M {u_i}^{kN}\right)^{2/N}.$$

Ce qui revient à écrire :

$$||\nabla(u_i^k)||_2^2 \leq \frac{\tilde{b}k^2}{2k-1}||u_i||_N^{N-2} \times ||u_i^k||_N^2\,.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Sobolev appliquée à u_i^k :

$$||u_i^k||_N^2 \leq C||\nabla(u_i^k)||_2^2 + A||u_i^k||_2^2\,,$$

où la constante C ne dépend que de n. On peut écrire alors :

$$||u_i^k||_N^2(1-\frac{\tilde{b}Ck^2}{2k-1}||u_i||_N^{N-2}) \leq A||u_i^k||_2^2.$$

Comme (u_i) vérifie $(**)$, la quantité $(1-\frac{\tilde{b}Ck^2}{2k-1}||u_i||_N^{N-2})$ est positive à partir d'un certain rang i_0 ne dépendant que de b, C, k. En conséquence :

$$(1-\frac{\tilde{b}Ck^2}{2k-1}||u_i||_N^{N-2}) \geq \delta > 0 \text{ pour } i \geq i_0 \,.$$

Finalement, on a obtenu l'inégalité suivante :

$$||u_i^k||_N^2 \leq \frac{A}{\delta}||u_i^k||_2^2$$

En prenant $k = \frac{N}{2}$, on voit que $||u_i||_{L^{(N^2/2)}} \to 0$, avec $N^2/2 > N$. En recommençant avec $k = \left(\frac{N}{2}\right)^l, l = 2\ldots$, on voit que de proche en proche, la suite (u_i) converge uniformément vers 0 dans tous les espaces $L^p, p > 1$.

En utilisant la représentation intégrale avec la fonction de Green et l'inégalité de Hölder convenablement, on montre que $\sup_M u_i \to 0$.

L'hypothèse $(*)$ entraine donc :

$$\sup_M u_i \to 0 \qquad (***).$$

Maintenant, si on revient à l'écriture de u_i grâce à la fonction de Green, on obtient :

$$\sup_M u_i = u_i(x_i) = \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M G_L(x_i,y)V_i(y){u_i}^{N-1}(y)dV_g(y).$$

De (1) on déduit :

$$0 < m \times Vol(M) \leq \int_M G_L(x,y)dV_g = m' = m'(M,g).$$

On peut écrire alors :

$$u_i(x_i) \leq \tilde{b}\,(\max_M u_i)^{N-1}\int_M G_L(x_i,y)dV_g(y) = \tilde{b}\,m'\,(\max_M u_i)^{N-1}.$$

D'où,

$$\sup_M u_i \geq (\tilde{b}\,m')^{(2-n)/4}$$

et ceci contredit $(***)$.

Preuve de la proposition :

Soit $\{u_i\}$ et $\{V_i\}$ deux suites telles que :

$$\Delta u_i + 2 = V_i e^{u_i} \ \text{ et } \ 0 \leq V_i(x) \leq b.$$

D'après une inégalité de Aubin(voir [1]), il existe une constante positive C, telle que pour tout i :

$$\log \int_{\mathcal{S}_2} e^{u_i} \leq \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i + \log C \qquad (1).$$

En multipliant l'équation vérifiée par u_i et en intégrant sur $\mathcal{S}_2$, on obtient :

$$\int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 + 2 \int_{\mathcal{S}_2} u_i = \int_{\mathcal{S}_2} V_i e^{u_i} u_i \,.$$

Puisque $\int_{\mathcal{S}_2} V_i e^{u_i} = 8\pi$, on peut s'écrire :

$$\int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 + 2 \int_{\mathcal{S}_2} u_i \leq 8\pi \sup_{\mathcal{S}_2} u_i \qquad (2).$$

Soit $G(x,y)$ la fonction de Green du laplacien :

$$u_i(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i - \int_{\mathcal{S}_2} G(x,y) R(y) dV_g(y) + \int_{\mathcal{S}_2} G(x,y) V_i(y) e^{u_i(y)} dV_g \,.$$

La fonction G peut être choisie positive et son intégrale en y est constante, il existe une constante c indépendante de i telle que :

$$\inf_{\mathcal{S}_2} u_i \geq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i - c \qquad (3)\,.$$

En combinant (1), (2) et (3), on obtient :

$$\sup_{\mathcal{S}_2} u_i + \inf_{\mathcal{S}_2} u_i \geq 2 \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u_i + \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}_2} |\nabla u_i|^2 - (c/2) \right] \geq 2 \left[\log \int_{\mathcal{S}_2} e^{u_i} - (c/2) - \log C \right] .$$

Or, $0 \leq V_i(x) \leq b$ et $\int_{\mathcal{S}_2} V_i e^{u_i} = 8\pi$, on en déduit que : $\int_{\mathcal{S}_2} e^{u_i} \geq \dfrac{8\pi}{b}$.

Finalement,

$$\sup_{\mathcal{S}_2} u_i + \inf_{\mathcal{S}_2} u_i \geq 2 \, \log \frac{8\pi}{b\,C} - c = -2(\log b - \bar{c})\,.$$

Appendice :

Ceci concerne le 1ér cas du théorème 3 :

Sur certaines variétés riemanniennes compactes sans bord et dans le cas où l'exposant $p < \frac{n}{n-2}$, on peut utiliser un autre résultat que celui de Caffarelli-Gidas-Spruck, pour abtenir notre estimation L^∞_{loc}.

Enonçons un théorème dû à Brézis [3] qui nous permettera de prouver notre résultat dans certains cas :

Théorème . *Considérons une suite de fonctions $\{V_i\}$, $\{v_i\}$ définies sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et telles que :*

$$\Delta v_i = V_i {v_i}^p, \ \ v_i \geq 0 \ \text{ et } \ 1 + \frac{2}{n} < p \leq \frac{n}{n-2}$$

$$0 \leq V_i(x) \leq A \ \text{ pour tout } x \in \Omega \ \text{ et tout } i \in \mathbb{N}.$$

On suppose que $||v_i||_{L_\beta} \leq B$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ avec $\beta = \frac{n}{2}(p-1)$.

Alors, pour tout compact K de Ω, il existe une constante positive c ne dépendant que de p, A, B, K telle que pour tout entier i, on ait :

$$\sup_K v_i \leq c.$$

Par exemple pour le cas de la sphère unité $\mathcal{S}_n$, si on considère l'équation suivante :

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta u_i + R u_i = V_i {u_i}^p \ \text{ avec } \ 1 + \frac{2}{n} \leq p \leq \frac{n}{n-2} \qquad (*)$$

et $0 < a \leq V_i(P) \leq b$ pour tout $P \in \mathcal{S}_n$ $(R = n(n-1))$.
Alors :

$$\sup_{\mathcal{S}_n} u_i \leq c = c(a,b).$$

Preuve :

Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème .

Considérons une suite de fonctions (u_i) solutions de $(*)$. Comme $\mathcal{S}_n$ est compacte u_i atteint son maximum en un point noté P_i.

Soit ϕ_i la projection stéréographique de pôle Q_i point diamètralement opposé à P_i. Si on note v_i la fonction $\pi_i \, u_i o \phi_i^{-1}$ avec $\pi_i = \left(\frac{2}{1+|y|^2}\right)^{(n-2)/2}$, alors cette fonction vérifie :

$$\Delta_\delta v_i = \bar{V}_i {v_i}^p \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^n$$

où δ est la métrique euclidienne donnée par la formule suivante $g = {\pi_i}^{4/(n-2)}\delta$, g la métrique de la sphére, Δ_δ désigne le laplacien pour la métrique δ et $\bar{V}_i = V_i o \phi_i^{-1} \, {\pi_i}^{N-p}$.

Par définition de la projection stéréographique, $\phi_i(P_i) = 0$ et comme P_i réalise le maximum de u_i, le point 0 est encore un maximum pour v_i.

En effet, $v_i(y) = \pi_i(y) u_i o \phi_i^{-1}(y)$ et $\pi_i(y) \leq 2^{(n-2)/2}$ entrainent :

$$v_i(y) \leq 2^{(n-2)/2} u_i o \phi_i^{-1}(y) \leq 2^{(n-2)/2} u_i(P_i) = v_i(0).$$

Placons nous sur la boule unité et vérifions les hypothèses du théorème. Nous remarquons que seule la bornitude uniforme de $\int_{B_1(0)} v_i^\beta$ est nécessaire pour conclure.

Pour borner uniformément $\int_{B_1(0)} v_i^\beta dy$, il suffit de borner uniformément $\int_{\mathcal{S}_n} u_i^\beta dV_g$. Pour le voir, on utilise le fait que l'élément de volume sur la sphére est donné en fonction de l'élément euclidien par la formule, $dV_g = \left(\dfrac{2}{1+|y|^2} \right)^n dy$.

Comme $\pi_i \geq 1$ pour $|y| \leq 1$:

$$\int_{\mathcal{S}_n} u_i^\beta dV_g = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v_i^\beta}{\pi_i^\beta} \pi_i^{2n/(n-2)} dy \geq \int_{B_1(0)} v_i^\beta dy.$$

Montrons maintenant que la suite $\int_{\mathcal{S}_n} u_i^\beta dV_g$ est uniformément bornée.

Intégrons l'équation $(*)$ vérifiée par u_i :

$$n(n-1) \textstyle\int_{\mathcal{S}_n} u_i = \int_{\mathcal{S}_n} V_i {u_i}^p \geq a \int_{\mathcal{S}_n} u_i^p$$

En utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\textstyle\int_{\mathcal{S}_n} u_i \leq |\mathcal{S}_n|^{(p-1)/p} \times \left(\int_{\mathcal{S}_n} u_i^p \right)^{1/p}$$

d'où,

$$\left(\textstyle\int_{\mathcal{S}_n} u_i^p \right)^{(p-1)/p} \leq \frac{n(n-1)|\mathcal{S}_n|^{(p-1)/p}}{a}$$

ainsi,

$$||u_i||_{L^p} \leq |\mathcal{S}_n|^{1/p} \left(\frac{n(n-1)}{a} \right)^{1/(p-1)}$$

Comme $\beta = \dfrac{n}{2}(p-1) \Rightarrow \beta - p = \dfrac{np - n - 2p}{2} = \dfrac{p(n-2) - n}{2} \leq 0$, on peut utiliser l'inégalité de Hölder :

$$||u_i||_{L^\beta} \leq |\mathcal{S}_n|^{(1/\beta)-(1/p)} \times ||u_i||_{L^p} \leq |\mathcal{S}_n|^{1/\beta} \left(\frac{n(n-1)}{a} \right)^{1/(p-1)}.$$

Les hypothèses du théorème sont vérifiées. D'où, pour $r \in]0,1[$:

$$\sup_{B_r(0)} v_i = v_i(0) = u_i(P_i) = \max_{\mathcal{S}_n} u_i \leq c(a,b).$$

<u>Remarque :</u>

On peut améliorer une hypothèse dans le théorème de Brézis lorsque $V \geq a > 0$:

D'après ce théorème, il suffit de supposer $||v_i||_{L_\beta} \leq C_2$ pour tout i avec $\beta = \frac{n}{2}(p-1)$ et $p > 1 + 2/n$. Ceci entraine que $\alpha > 1$. Mais pour nous, il suffit de supposer $||v_i||_1 \leq C_2$ pour tout i.

En effet, d'après la formule de Stokes, pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^2(\bar{B}_r)$:

$$\int_{B_r} -v_i \Delta \eta + \eta \, V_i \, v_i{}^p = \int_{\partial B_r} v_i \partial_\nu \eta - \eta \partial_\nu v_i.$$

Prenons $\eta = |x|^2$. Comme

$$\int_{\partial B_r} \partial_\nu v_i = \int_{B_r} -\Delta v_i = -\int_{B_r} V_i v_i{}^p,$$

$$\int_{B_r} (r^2 - |x|^2) V_i v_i{}^p + 2r \int_{\partial B_r} v_i = 2n \int_{B_r} v_i.$$

On obtient pour $\mu < r$,

$$(r^2 - \mu^2) \inf_{B_\mu} V_i \int_{B_\mu} v_i{}^p \leq 2n ||v_i||_{L^1(B_r)},$$

et finalement,

$$||v_i||_{L^p(B_\mu)} \leq \left[\frac{2n}{a(r^2 - \mu^2)} \right]^{1/p} \left[||v_i||_{L^1(B_r)} \right]^{1/p}.$$

Références :

[1] Atkinson F and Peletier L. Elliptic equations with nearly critical growth. J. Diff. Eq. V 70 (1987) 349-365.

[2] Aubin T. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer Verlag 1998

[3] Brezis H. Uniform estimates for solutions of $-\Delta u = Vu^p$. Partial differential equations and related subjects (Trento,1990), 38-52, Pitman Res. Notes Math. Ser.269. Longman Sci. Tech, Harlow, 1992.

[4] Brezis H.,Li Y-Y and Shafrir I. A sup+inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities. J.Funct.Anal.115 (1993) 344-358.

[5] Brezis H and Peletier L. A Asymptotics for elliptic equations involving critical growth. Partial differential equations and the calculus of variations, Vol I, 149-192, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.,1. Birkhäuser Boston, Ma, 1989.

[6] Caffarelli L, Gidas B., Spruck J. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. Commun. Pure Appl. Math. 37 (1984) 369-402.

[7] Chen C-C and Lin C-S. Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes. Comm. Pure Appl. Math. L(1997) 0971-1017.

[8] Chen C-C and Lin C-S. Blowing up with infinite energy of conformal metrics on $\mathcal{S}_n$. Comm. Partial Differ Equations. 24 (5,6) (1999) 785-799.

[9] Gidas B. and Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. Commun. Pure and Appl. Math. 34 (1981) 525-598.

[10] Han Z-C. Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non lineaire 8 (1991) 159-174.

[11] Li Y-Y. Prescribing scalar curvature on $\mathcal{S}_n$ and related Problems. C.R. Acad. Sci. Paris 317 (1993) 159-164. Part I :J.Differ. Equations 120 (1995) 319-410. Part II : Existence and compactness. Commun. Pure Appl.Math.49 (1996) 541-597.

[12] Loewner and Nirenberg. Partial Differential equations invariant under conformal projective transformations. Contributions in Analysis 245-272. Academic Press New-York, 1974.

[13] Ni W.M. On the elliptic equations $\Delta u + k(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations and applications in Geometry. Indiana Univ. Math. J. 31 (1982) 493-529.

[14] Noussair E-S. On the existence of solutions of nonlinear elliptic boundaryvalue problems. Differ.Equations 34 (1979) 482-495.