Problèmes spectraux inverses pour des opérateurs AKNS et de Schrödinger singuliers sur [0,1].

Frédéric Serier

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes.

Soutenance de thèse

24/06/2005.

Présentation

Les objets

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

Opérateur de Schrödinger radial

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(a+1)}{x^2} + q(x) \right) y = \lambda y, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

Opérateur A.K.N.S. singulier

$$(2) \qquad \begin{cases} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix} \right) Y = \lambda Y, \\ Y(0) = 0, \quad Y(1) \cdot u_\beta = 0, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ sont les potentiels.

UNIVERSITÉ DE NANTES

Les objets

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

Opérateur de Schrödinger radial

$$(1)\quad \begin{cases} \left(-\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{a(a+1)}{x^2} + q(x)\right) y = \lambda y, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

Opérateur A.K.N.S. singulier

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dfrac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix}\right) Y = \lambda Y, \\ Y(0) = 0, \quad Y(1) \cdot u_\beta = 0, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ sont les potentiels.

Motivations physiques : (1) Hélioseismologie.

(2) Chromodynamique quantique.

La problématique

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

L'objectif de cette thèse est, pour chaque entier a,

- de construire un système de coordonnées $\lambda^a \times \kappa^a$, sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, qui paramètre les potentiels à partir de données spectrales du problème considéré,
- de décrire les ensembles isospectraux, c'est à dire les ensembles de potentiels de même spectre.

La problématique

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

L'objectif de cette thèse est, pour chaque entier a,

- de construire un système de coordonnées $\lambda^a \times \kappa^a$, sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, qui paramètre les potentiels à partir de données spectrales du problème considéré,
- de décrire les ensembles isospectraux, c'est à dire les ensembles de potentiels de même spectre.

Pour la suite, nous présenterons les divers résultats dans le cadre du problème (1), c'est à dire le problème spectral inverse concernant l'opérateur de Schrödinger radial :

$$H_a(q) := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(a+1)}{x^2} + q(x).$$

Tour d'horizon

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

Pour le problème (1), associé à l'opérateur de Schrödinger :

$[a = 0]$ J. Pöschel et E. Trubowitz (1987),

$[a = 1]$ J.C. Guillot et J.V. Ralston (1988),

$[a \geq -1/2$ ***réel***$]$ L.A. Zhornitskaya et V.S. Serov (1994),
R. Carlson (1997).

Tour d'horizon

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

Pour le problème (1), associé à l'opérateur de Schrödinger :

$[a = 0]$ J. Pöschel et E. Trubowitz (1987),

$[a = 1]$ J.C. Guillot et J.V. Ralston (1988),

$[a \geq -1/2$ ***réel***$]$ L.A. Zhornitskaya et V.S. Serov (1994),
R. Carlson (1997).

Pour le problème (2) avec $a = 0$, associé au système AKNS :

$[\beta = 0]$ B. Grébert et J.-C. Guillot (1993),

$[\beta$ ***paramètre***$]$ L. Amour (1993), L.Amour et J.C. Guillot (1996).

Tour d'horizon

Présentation
- Les objets
- La problématique
- Tour d'horizon

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

Pour le problème (1), associé à l'opérateur de Schrödinger :

$[a = 0]$ J. Pöschel et E. Trubowitz (1987),

$[a = 1]$ J.C. Guillot et J.V. Ralston (1988),

$[a \geq -1/2$ ***réel***$]$ L.A. Zhornitskaya et V.S. Serov (1994),
R. Carlson (1997).

Pour le problème (2) avec $a = 0$, associé au système AKNS :

$[\beta = 0]$ B. Grébert et J.-C. Guillot (1993),

$[\beta$ ***paramètre***$]$ L. Amour (1993), L.Amour et J.C. Guillot (1996).

Résultats obtenus dans cette thèse pour tout entier $a \geq 1$:

- $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme réel-analytique local,
- Description des variétés isospectrales
  ainsi que des espaces tangents et normaux.

Le problème spectral direct

Construction de λ^a

Présentation
Le problème spectral direct
- Construction de λ^a
- Construction de κ^a
- L'application spectrale

Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse

En utilisant et adaptant les travaux précédents, il vient

- Localisation et identification du spectre avec une suite de réels strictement croissante : $\sigma(H_a(q)) = \{\lambda_{a,n}(q)\}_{n\geq 1}$.
- Régularité de chaque application $q \mapsto \lambda_{a,n}(q)$ sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et détermination du gradient :

$$\nabla_q \lambda_{a,n}(t) = 2 j_a(\omega_{a,n} t)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \quad \omega_{a,n} = \sqrt{\lambda_{a,n}}$$

- Estimation des valeurs propres

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t)dt - a(a+1) + \ell^2(n).$$

L'application λ^a est définie par

$$\lambda^a(q) = \left(\int_0^1 q(t)dt, \left(\widetilde{\lambda}_{a,n}(q)\right)_{n\geq 1}\right).$$

Construction de κ^a

Présentation

Le problème spectral direct
- Construction de λ^a
- Construction de κ^a
- L'application spectrale

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

Définissons les vitesses terminales par

$$\kappa_{a,n}(q) = \ln \left| \frac{{y_2}'(1, \lambda_{a,n}(q), q)}{{y_2}'(1, \lambda_{a,n}(0), 0)} \right|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$$

Viennent alors les propriétés suivantes

- $q \mapsto \kappa_{a,n}(q)$ est régulière sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et admet un gradient

$$\nabla_q \kappa_{a,n}(t) = \frac{1}{\omega_{a,n}} j_a(\omega_{a,n} t)\eta_a(\omega_{a,n} t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

- Uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, nous avons

$$\kappa_{a,n}(q) = \ell^2_1(n) \quad \left(\Leftrightarrow (n\kappa_{a,n})_{n\geq 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}\right).$$

$\rightsquigarrow$ Nous considérons l'application κ^a donnée par

$$\kappa^a(q) = (n\kappa_{a,n}(q))_{n\geq 1}.$$

L'application spectrale

Présentation
Le problème spectral direct
- Construction de λ^a
- Construction de κ^a
- L'application spectrale

Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse

Nous construisons une application spectrale, définie par

$$\begin{array}{rcccl} \lambda^a \times \kappa^a : & L^2_{\mathbb{R}}(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \\ & q & \longmapsto & \left(\int_0^1 q(t)dt, \left\{ \widetilde{\lambda}_{a,n}(q) \right\}_{n\geq 1}, \{n\kappa_{a,n}(q)\}_{n\geq 1} \right), \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\lambda^a \times \kappa^a$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$,
- Sa différentielle $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ est donnée par

$$d_q(\lambda^a \times \kappa^a)[v] = \left(\int_0^1 v(t)dt, \{\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}(q), v\rangle\}_{n\geq 1}, \{\langle n\nabla_q \kappa_{a,n}(q), v\rangle\}_{n\geq 1} \right).$$

L'application spectrale

Présentation
Le problème spectral direct
Construction de λ^a
Construction de κ^a
L'application spectrale
Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse

Nous construisons une application spectrale, définie par

$$\begin{array}{rccl} \lambda^a \times \kappa^a : & L^2_{\mathbb{R}}(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \\ & q & \longmapsto & \left(\int_0^1 q(t)dt, \left\{ \widetilde{\lambda}_{a,n}(q) \right\}_{n\geq 1}, \{n\kappa_{a,n}(q)\}_{n\geq 1} \right), \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\lambda^a \times \kappa^a$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$,
- Sa différentielle $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ est donnée par

$$d_q(\lambda^a \times \kappa^a)[v] = \left(\int_0^1 v(t)dt, \{\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}(q), v\rangle\}_{n\geq 1}, \{\langle n\nabla_q \kappa_{a,n}(q), v\rangle\}_{n\geq 1} \right).$$

Résoudre le problème spectral inverse va signifier

montrer l'inversibilité de $d_q\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)$.

Opérateurs de transformation

Les opérateurs élémentaires

Présentation
Le problème spectral direct
Opérateurs de transformation
- Les opérateurs élémentaires
- La bonne transformation
Le problème spectral inverse

Le point clé : Réduire par étapes la singularité en envoyant les gradients associés à H_a sur ceux associés à H_{a-1}.

Les opérateurs élémentaires

Présentation
Le problème spectral direct
Opérateurs de transformation
- Les opérateurs élémentaires
- La bonne transformation

Le problème spectral inverse

Le point clé : Réduire par étapes la singularité en envoyant les gradients associés à H_a sur ceux associés à H_{a-1}.

Notons $\Phi_a(x) = j_a(x)^2$ et $\Psi_a(x) = j_a(x)\eta_a(x)$.

Théorème. *Pour tout* $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ *soit* $S_a : L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *défini par*

$$S_a[f](x) = f(x) - 4a\, x^{2a-1} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{2a}} dt.$$

Alors,

1. S_a *est un isomorphisme de Banach entre* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* $\left(x \mapsto x^{2a}\right)^{\perp}$.
2. Φ_a *et* Ψ_a *vérifient les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} \Phi_a &= -{S_a}^*[\Phi_{a-1}], & \Psi_a &= -{S_a}^*[\Psi_{a-1}], \\ \Phi'_a &= -S_a^{-1}[\Phi'_{a-1}], & \Psi'_a &= -S_a^{-1}[\Psi'_{a-1}]. \end{aligned}$$

La bonne transformation

Présentation

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

- Les opérateurs élémentaires
- La bonne transformation

Le problème spectral inverse

En composant ces opérateurs, H_0 est “atteint” :

Théorème. *Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, soit T_a l'opérateur défini par*

$$T_a = (-1)^{a+1} S_a S_{a-1} \cdots S_1.$$

Alors,

1. T_a *est un isomorphisme de Banach entre* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* $\mathrm{Vect}\left\{x^2, x^4, \ldots, x^{2a}\right\}^{\perp}$.
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *nous avons les relations*

$$2\Phi_a(\lambda t) - 1 = T_a^*\left[\cos(2\lambda t)\right], \quad \Psi_a(\lambda t) = -\frac{1}{2} T_a^*\left[\sin(2\lambda t)\right],$$

$$\Phi_a'(\lambda t) = T_a^{-1}[-\sin(2\lambda t)], \quad \Psi_a'(\lambda t) = T_a^{-1}[\cos(2\lambda t)].$$

UNIVERSITÉ DE NANTES

Le problème spectral inverse

L'idée

Présentation
Le problème spectral direct
Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse
- L'idée
- La solution
- Les ensembles isospectraux

La différentielle $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ s'exprime comme un opérateur sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, qui à une fonction associe les produits scalaires contre les éléments de la famille

$$\left\{1, \left\{\nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}(q)\right\}_{n\geq 1}, \{n\nabla_q \kappa_{a,n}(q)\}_{n\geq 1}\right\}.$$

UNIVERSITÉ DE NANTES

L'idée

Présentation

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

- L'idée
- La solution
- Les ensembles isospectraux

La différentielle $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ s'exprime comme un opérateur sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, qui à une fonction associe les produits scalaires contre les éléments de la famille

$$\left\{1, \left\{\nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}(q)\right\}_{n\geq 1}, \{n\nabla_q \kappa_{a,n}(q)\}_{n\geq 1}\right\}.$$

Nous cherchons à appliquer le résultat suivant :

Théorème. *Soit $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'un espace de Hilbert H telle que*

1. *Il existe une base orthonormale $\mathcal{E} := \{e_n\}_{n\geq 1}$ de H proche de $\mathcal{F}$, i.e. $\sum \|f_n - e_n\|_2^2 < \infty$,*
2. *$\mathcal{F}$ est libre, i.e. aucun des f_n n'est dans l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les autres éléments de $\mathcal{F}$.*

Alors, $\mathcal{F}$ est une base de H et l'application $\mathbf{F} : x \mapsto \{\langle f_n, x\rangle\}_{n\geq 1}$ est un isomorphisme de Banach entre H et ℓ^2.

La solution

Présentation
Le problème spectral direct
Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse
- L'idée
- La solution
- Les ensembles isospectraux

La famille des gradients donnant $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ peut s'exprimer comme l'image par T_a^* de la famille

$$\mathcal{F} = \left\{1, \left\{\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)\right\}_{n\geq 1}, \left\{\frac{-n}{2\omega_{a,n}}\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right\}_{n\geq 1}\right\},$$

où R_n et S_n sont des restes uniformes dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$.

La solution

Présentation
Le problème spectral direct
Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse
- L'idée
- La solution
- Les ensembles isospectraux

La famille des gradients donnant $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ peut s'exprimer comme l'image par T_a^* de la famille

$$\mathcal{F} = \left\{1, \left\{\cos\left(2\omega_{a,n}t\right)+R_n(t)\right\}_{n\geq 1}, \left\{\frac{-n}{2\omega_{a,n}}\sin\left(2\omega_{a,n}t\right)+S_n(t)\right\}_{n\geq 1}\right\},$$

où R_n et S_n sont des restes uniformes dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$.
Nous obtenons la factorisation :

$$d_q\left(\lambda^a \times \kappa^a\right) = \mathbf{F} \circ T_a,$$

où $\mathbf{F}$ associe à une fonction de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ ses coefficients de Fourier par rapport à $\mathcal{F}$.

Les propriétés de T_a et de $\mathbf{F}$ “donnent” le résultat. $\square$

Les ensembles isospectraux

Présentation

Le problème spectral direct

Opérateurs de transformation

Le problème spectral inverse

- L'idée
- La solution
- Les ensembles isospectraux

Ces ensembles sont définis par

$$\mathrm{Iso}(q_0, a) = \left\{ q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) : \lambda^a(q) = \lambda^a(q_0) \right\}.$$

Les ensembles isospectraux

Présentation
Le problème spectral direct
Opérateurs de transformation
Le problème spectral inverse
- L'idée
- La solution
- Les ensembles isospectraux

Ces ensembles sont définis par

$$\mathrm{Iso}(q_0, a) = \left\{ q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) : \lambda^a(q) = \lambda^a(q_0) \right\}.$$

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème. *Pour tout* $q_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ *et tout* $a \in \mathbb{N}$,

- $\mathrm{Iso}(q_0, a)$ *est une variété réelle-analytique de* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.
- *De plus, nous avons*

$$T_q \,\mathrm{Iso}(q_0, a) = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{\xi_n}{n} \left[2 \frac{d}{dx} \nabla_q \lambda_{a,n} \right] : \xi \in \ell^2_{\mathbb{R}} \right\},$$

$$N_q \,\mathrm{Iso}(q_0, a) = \left\{ \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n \left[\nabla_q \lambda_{a,n} - 1 \right] : (\eta_0, \eta) \in \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \right\}.$$