UNIVERSITÉ PARIS 13

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

présentée et soutenue publiquement

par

Kévin SANTUGINI REPIQUET

le 16 décembre 2004

Titre :

Matériaux ferromagnetiques : influence d'un espaceur mince non magnétique, et homogénéisation d'agencements multicouches, en présence de couplage sur la frontière

JURY

M.	Grégoire ALLAIRE	Rapporteur
M.	François ALOUGES	
M.	Thiery COLIN	Rapporteur
Mme	Laurence HALPERN	Directeur de thèse
M.	Stéphane LABBÉ	Co-directeur de thèse
M.	Michel LABRUNE	
M.	Olivier LAFITTE	Président du Jury

À mes parents, à Marc,
Pour ma regrettée Danaë.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Laurence Halpern d'avoir dirigé ma thèse. Durant ces trois longues années, elle s'est montré d'une grande patience. Cette thèse n'aurait pas été possible sans ses conseils avisés et sa vigilance pratiquement sans faille.

Je tient aussi à remercier Stéphane Labbé qui m'a co-encadré durant ces trois années. Son aide en programmation m'a été précieuse et les simulations numériques de cette thèse lui doivent beaucoup.

La partie homogénéisation de cette thèse repose sur les travaux de Grégoire Allaire. Je l'ai rencontré pour la première fois au CMAP où il a répondu à mes questions sur l'homogénéisation. Je le remercie d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Je remercie également Thierry Colin d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse. De nombreuses corrections ont pu être apportées grâce à leur vigilance.

J'ai eu de nombreuses discussions avec Michel Labrune sur la physique du ferromagnétisme avec lui. Il a toujours été disponible pour répondre à mes questions. Ses explications furent la source de nombreux éclaircissements et ont contribué à l'amélioration de cette thèse. Je le remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu la chance d'avoir François Alouges pour professeur de DEA, il y a quatre ans, à Orsay. Il a accepté de faire partie de mon jury, ce dont je le remercie.

Olivier Laffite a souvent répondu à mes questions sur des sujets très divers. Je le remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens également à remercier l'équipe du LAGA de m'avoir accueilli pendant les trois années qu'ont duré cette thèse. Je remercie François Cuvelier pour le temps qu'il a passé sur le cluster. Je remercie Caroline Japhet pour son aide.

C'est avec fierté que je remercie mes parents. Si ce travail a pu arriver à terme, c'est en grande partie grâce aux efforts et sacrifices qu'ils ont consentis pour lesquels je leur suis éternellement reconnaissant. Je ne saurais trop remercier mon frère Marc, pour le temps qu'il a consacré à vérifier l'anglais de mes articles.

Résumé

Les matériaux ferromagnétiques jouent un rôle primordial dans de nombreuses applications industrielles. W.F. Brown a été à l'origine dans les années 1940-1950 de la théorie du micromagnétisme qui permet de modéliser le comportement des matériaux ferromagnétiques. Ce modèle attribue à chaque phénomène physique, tels l'échange, l'anisotropie, le champ démagnétisant et Zeeman, une énergie et une excitation magnétique. Nous travaillons dans cette thèse dans le cadre de la magnétostatique. Pour étudier l'évolution dans le temps, on adjoint au modèle une équation aux dérivées partielles : l'équation de Landau-Lifchitz.

Dans ce travail, nous commençons par étudier l'influence d'un espaceur mince sur le comportement des matériaux ferromagnétiques. Nous prenons en compte deux phénomènes physiques apparaissant sur l'espaceur : le super-échange et l'anisotropie surfacique.

Après avoir exposé la théorie du micromagnétisme, nous établissons d'abord l'existence de deux types de solutions à l'équation de Landau-Lifchitz en présence de super-échange et d'anisotropie surfacique sur un espaceur plan. Nous prouvons l'existence de solutions faibles globalement en temps et celle de solutions fortes localement en temps uniquement.

Ensuite, nous faisons varier l'épaisseur de l'espaceur et en déduisons une condition équivalente de bord sur le terme d'ordre 1 du développement de l'aimantation. Nous prouvons alors le caractère bien posé du système vérifié par le terme d'ordre 1 puis établissons la convergence du développement. Ce dernier travail se fait d'abord en l'absence d'interactions surfaciques et ensuite en présence de ces interactions sur l'espaceur. Nous calculons alors des états d'équilibre pour diverses configurations en utilisant cette condition équivalente. Nous calculons aussi la susceptibilité hyperfréquence en présence d'un espaceur et d'interactions sur la surface de contact.

Dans une dernière partie, nous étudions plusieurs processus d'homogénéisation. D'abord, nous procédons à l'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz dans un domaine périodiquement perforé par des trous isolés. Ensuite, nous procédons à l'homogénéisation de l'équation de la chaleur dans un agencement multicouche en présence de termes de conduction intercouche. Nous homogénéisons alors l'équation de Landau-Lifchitz dans un domaine multicouche en présence d'énergies de surfaces.

MOTS CLÉS : ferromagnétisme, micromagnétisme, équation de Landau-Lifchitz, multicouche magnétique, espaceur non magnétique, homogénéisation, analyse asymptotique, énergie d'anisotropie de surface, énergie de super-échange.

Abstract

At present, ferromagnetic materials are widely used in industry. W.F. Brown introduced in the years 1940-1950 the theory of micromagnetism to model the behavior of ferromagnetic materials. This model associates to each physical interaction such as exchange, anisotropy, demagnetization field and Zeeman, an energy and an excitation field. In this thesis, we remain in the magnetostatic framework. To study the evolution problem, we add to the model a partial differential equation: the Landau-Lifshitz equation.

We begin this paper by the study of the influence of a thin spacer upon the behavior of ferromagnetic bodies. We will take into account two physical phenomena arising on the spacer: super-exchange and surface anisotropy.

After introducing the micromagnetic model, we establish the existence of both weak and strong solutions to the Landau-Lifshitz equation when surface energy, surface anisotropy or super-exchange, are present on a plane spacer. Weak solutions exist globally and strong solutions locally.

Then, we study the evolution of the solutions to the Landau-Lifshitz system as the thickness of the spacer vary. We establish an equivalent boundary condition for the first order term in the magnetization. We prove the well-posedness of the system verified by the first order term, then prove the convergence of the development. This latter work is done first when surface energies are absent, then generalized in their presence. We then proceed to the numerical simulations. We compute equilibrium states for various configurations using the equivalent boundary condition. We also compute the ultrafrequency susceptibility for geometries crossed by a spacer and with surfaces energies.

In the last part, we study several homogenization process. First, we homogenize the Landau-Lifshitz equation in a domain periodically perforated by isolated holes. Then, we homogenize the heat equation in a multilayer with interlayer conduction. Eventually, we homogenize the Landau-Lifshitz equation in a multilayer with surface energies.

Keywords: ferromagnetism, micromagnetism, Landau-Lifshitz equation, magnetic multilayers, nonmagnetic spacer, homogenization, asymptotic analysis, surface anisotropy energy, interlayer exchange energy.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Les matériaux ferromagnétiques sont actuellement omniprésents dans les applications industrielles. Depuis leur découverte dans l'antiquité, ils ont été largement étudiés. Bien qu'ayant subi un certain désintérêt au début du XX^e siècle, ils ont connu un regain d'intérêt lors de la deuxième partie de ce siècle et sont maintenant l'objet constant d'études. Cela est dû à leur importance dans de nombreuses applications industrielles. Parmi ces applications, citons seulement le stockage magnétique, (disques durs, cassettes, disques magnéto-optiques), la gestion de l'énergie où les circuits magnétiques jouent un rôle important, dans les transformateurs ou les moteurs notamment, la protection radar et les télécommunications. Les propriétés des matériaux ferromagnétiques dépendent pour beaucoup de leur forme. L'intérêt pour les formes de couches minces et les multicouches est croissant, voir [66], chapitre 20. Ces configurations interviennent dans le domaine de l'enregistrement magnétique ou magnéto-optique. L'importance économique de ce secteur, dont le principal marché reste la gestion de l'énergie, s'évalue annuellement à 60 milliards de dollars. On comprend aisément que la compréhension de ces phénomènes et leur modélisation est un enjeu industriel important. En effet l'amélioration des performances et la diminution des coûts de fabrication dépend largement de la qualité de ces modélisations et des algorithmes mis en œuvres dans les simulations numériques.

Les premières tentatives de modélisation des matériaux ferromagnétiques ont eu lieu dans les années 1930. Le modèle du micromagnétisme établi par W.F Brown [11, 12], a constitué un progrès important dans la compréhension des phénomènes magnétiques. Le modèle micromagnétique associe à chaque phénomène physique une énergie interne. On distingue en général quatre énergies :

- L'énergie extérieure ou de Zeeman, associée au champ appliqué.
- L'énergie d'anisotropie, favorisant certaines directions d'aimantation,
- L'énergie d'échange, qui favorise l'alignement des spins voisins,
- L'énergie magnétostatique.

Si un corps ferromagnétique contient un domaine mince, épousant une surface et constitué d'un matériau ayant des propriétés magnétiques différentes, alors certains phénomènes physiques apparaissent sur la frontière :

- L'anisotropie surfacique qui favorise ou pénalise l'alignement de l'aimantation sur la normale à la surface de l'espaceur.
- Le super-échange ou échange intercouche qui couple les aimantations de part et d'autre de l'espaceur en favorisant leur alignement (anti-alignement dans les arrangements antiferromagnétiques).

Nous appelerons par la suite espaceurs ces domaines minces.

De ces énergies, on peut déduire la valeur des excitations magnétiques internes. Pour obtenir un modèle dynamique du ferromagnétisme, il suffit d'adjoindre au modèle micromagnétique l'équation de Landau-Lifchitz [48],

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial T} = -|\gamma|\mu_0 \left(\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H}(\boldsymbol{M}) + \frac{\alpha}{M_s} \boldsymbol{M} \wedge (\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H}(\boldsymbol{M})) \right), \tag{LL}$$

où $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{M})$ est l'excitation magnétique, γ le facteur gyromagnétique, et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Les propriétés du système (LL) ont été largement étudiées. L'existence de solutions à l'équation de Landau-Lifchitz couplée aux équations de Maxwell a été établie par A. Visintin [67] en domaine borné. L'existence de solutions faibles au système (LL), ainsi que leur non unicité, ont été établie en présence de l'interaction d'échange uniquement par F. Alouges et A. Soyeur [6]. S. Labbé a alors étendu le résultat d'existence en présence des interactions d'échange, magnétostatiques, d'anisotropie et de Zeeman [43]. L'existence de solutions fortes en l'absence de super-échange a été établie par G. Carbou et P. Fabrie en domaine borné dans [15] et en domaine non borné [14]. Pour des domaines non bornés, J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [41] ont établi l'existence de solutions globales et des résultats d'unicité pour le système de Landau-Lifchitz couplé aux équations de Maxwell en l'absence d'échange. En présence d'une forme simplifiée du super-échange et de l'anisotropie surfacique, l'existence de solutions faibles pour un espaceur a été prouvée par K. Hamdache et M. Tilioua [37] et [38].

La complexité des phénomènes dans les matériaux ferromagnétiques est telle que le recours à la simulation numérique est impératif. De nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet. Un des principaux problèmes de la simulation numérique est la prise en compte de l'énergie magnétostatique. En effet, ce terme est global et son coût de calcul peut devenir rapidement prohibitif. Pour les maillages réguliers, il est possible d'utiliser le caractère Toeplitz de l'opérateur magnétostatique et d'effectuer le calcul par FFT, voir S. Labbé [43, 44].

Cette thèse est principalement consacrée à la modélisation de l'évolution de l'aimantation dans des corps ferromagnétiques dont la géométrie est peu propice à la simulation numérique. En particulier, nous étudions les corps traversés par un espaceur mince et les agencements multicouches. Il est en effet difficile de les mailler correctement, dû à l'étroitesse soit de l'espaceur, soit des différentes couches magnétiques. Obtenir des problèmes équivalents sur des géométries plus favorables à la simulation sera notre objectif.

Dans une première partie, nous introduisons les concepts essentiels du magnétisme. Après un bref historique, nous rappelons les équations du modèle micromagnétique.

Dans une deuxième partie, nous étudions le problème d'existence pour l'équation de Landau-Lifchitz en présence d'interactions surfaciques sur l'espaceur : le super-échange et l'anisotropie surfacique. Nous introduisons deux concepts de solutions :

les solutions faibles et les solutions fortes. Après un bref rappel des propriétés des espaces de Sobolev, nous démontrons successivement l'existence de solutions faibles globales en temps au chapitre 6 et l'existence de solutions fortes en temps fini au chapitre 7.

Dans une troisième partie, nous étudions ce que nous appelons le problème d'espaceur. Nous considérons un domaine ferromagnétique traversé par un espaceur mince non magnétique. La faible épaisseur de l'espaceur rendrait prohibitif toute simulation nécessitant le maillage de l'espaceur. Dans la perspective d'une simulation numérique, nous cherchons un problème équivalent sur la même géométrie mais avec une épaisseur de l'espaceur nulle. Après avoir effectué un développement à l'ordre 1 en la demi-épaisseur de l'espaceur, nous établissons une condition équivalente de bord pour le terme d'ordre 1 et démontrons la convergence à l'ordre 1 du développement. Dans la quatrième partie, nous généralisons ce travail en prenant en compte des interactions de surface sur l'espaceur.

Dans la cinquième partie, nous effectuons des simulations numériques. Nous commençons par présenter les schémas de discrétisation en espace et en temps. Nous avons modifié le code EMicroM de S. Labbé pour calculer les états d'équilibre de l'aimantation, ordre 0 et ordre 1, dans certaines configurations magnétiques, en prenant en compte les interactions surfaciques. Il est difficile de faire le lien entre les observations physiques et les simulations numériques. La susceptibilité hyperfréquence d'un corps ferromagnétique est une des rares quantités que l'on peut mesurer et calculer. Nous effectuons quelques calculs de susceptibilité hyperfréquence au chapitre 16, après avoir modifié le code SMicroM de S. Labbé pour tenir compte du super-échange et de l'anisotropie surfacique.

Enfin, la sixième partie est consacrée à l'homogénéisation sur des domaines variables, périodiquement troués ou agencés en multicouches. Nous souhaitons caractériser la limite des solutions sur ces domaines lorsque la période d'homogénéisation tend vers 0. Des résultats de convergence forte ont été établis pour l'homogénéisation de domaines ferromagnétiques non perforés en dimension 1 et 2, par H. Haddar et P. Joly [32]. Pour les agencements multicouches, une première approche a été réalisée par K. Hamdache [35]. Notre but principal est d'homogénéiser l'équation de Landau-Lifchitz en dimension 3 pour des agencement multicouches. Nous allons alors nous apercevoir du rôle primordial dans le processus d'homogénéisation des interactions surfaciques : super-échange et anisotropie surfacique. L'anisotropie surfacique tend à favoriser l'alignement sur la normale aux différentes couches et le super-échange rigidifie le système en pénalisant les variations de l'aimantation entre couches successives. De nombreuses difficultés sont présentes : le caractère non linéaire pour l'équation de Landau-Lifchitz et la non connexité des agencements multicouches. C'est pour cela que nous commençons par réaliser l'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz pour des domaines perforés, et celle de la chaleur pour les agencements multicouches. Nous tentons alors de généraliser ces cas plus simples au cas de l'équation de Landau-Lifchitz pour des agencements multicouches. Nous y parvenons pour certaines formes de dépendance des constantes d'anisotropie surfacique et de super-échange en fonction de la distance intercouche.

Première partie

Présentation du problème

Chapitre 1

Introduction aux propriétés du magnétisme

Avant d'exposer la théorie des matériaux ferromagnétiques et le modèle mathématique associé, nous rappelons les bases de la théorie de l'électromagnétisme dans le vide et dans les matériaux à réponse linéaire : les diamagnétiques et les paramagnétiques. Mais auparavant, nous présentons un très bref historique du magnétisme.

1.1 Bref historique

Nous commençons par relater très sommairement l'histoire de l'étude du magnétisme de l'antiquité à nos jours. L'attraction magnétique entre deux aimants ou entre un aimant et du fer semble avoir été le premier phénomène magnétique ayant entraîné l'attention des hommes. La découverte de ce phénomène est très ancienne même si on ne peut en citer la date avec précision. Si l'on a retrouvé des objets en fer et en oxyde de fer datant de un à quelques millénaires avant notre ère, il est douteux que leur vertu magnétique ait été connue. Les écrits chinois de l'époque montrent que l'on a su fabriquer des boussoles —plus exactement leur ancêtre— dès 300 ans avant notre ère. Le blindage magnétique par un plateau en fer a été observé en Chine au dix-septième siècle. Aucune théorie sérieuse du magnétisme n'apparaît avant le dix-neuvième siècle.

Au dix-neuvième siècle, on parvient enfin à relier les phénomènes électriques et magnétiques. Enfin, en 1864, les équations de Maxwell sont formulées. Elles deviendront la base incontournable de toutes les études du magnétisme au cours des années qui suivirent.

1.2 Rappels sur la théorie du magnétisme

1.2.1 Les équations de l'électromagnétisme dans le vide

L'état électromagnétique d'un point de l'espace est caractérisé par deux champs de vecteurs : le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et le champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Supposons la présence d'une densité de charge électrique $\boldsymbol{x} \mapsto \rho(\boldsymbol{x})$ et d'un vecteur courant de charge $\boldsymbol{J}$. Nous pouvons alors donner les équations de Maxwell de l'électromagnétisme.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{B}) = 0, \tag{1.2.1a}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \mathbf{rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right). \tag{1.2.1b}$$

où ϵ_0 est la permittivité électrique du vide et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Les valeurs de ces constantes physiques sont :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}, \tag{1.2.2a}$$

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \mathrm{s}^4 \cdot \mathrm{m}^{-4} \cdot \mathrm{A}^2, \qquad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{1.2.2b}$$

où c est la célérité de la lumière.

1.2.2 Les équations du magnétisme dans un milieu matériel

Dans un milieu matériel, les équations de Maxwell sont modifiées de la manière suivante. On ajoute deux vecteurs qui caractérisent l'état magnétique et électrique du matériau : la polarisation électrique $\boldsymbol{P}$ et l'aimantation, encore appelée moment magnétique, $\boldsymbol{M}$. Nous remplaçons alors dans le système de Maxwell (1.2.1), la charge totale ρ par $-\operatorname{div} \boldsymbol{P} + \rho_{\text{ext}}$ et le vecteur courant total $\boldsymbol{J}$ par $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{\text{ext}}$. Les termes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ correspondent aux contributions intrinsèques des matériaux et les termes indicés $\rho_{\text{ext}}, \boldsymbol{J}_{\text{ext}}$ correspondent aux courants extérieurs macroscopiques.

Nous pouvons alors définir les deux grandeurs $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ et l'excitation $\boldsymbol{H}$ par $\mu_0 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{M}$. Réécrivons les équations de Maxwell en fonction de $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$. Nous obtenons

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{D}) = \rho_{\text{ext}}, \tag{1.2.3a}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0, \tag{1.2.3b}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P}) = -\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\partial (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})}{\partial t}, \tag{1.2.3c}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{J}_{\text{ext}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{1.2.3d}$$

Nous allons de plus ne considérer que les cas où il n'y a ni courants extérieurs, ni charges extérieures, i.e. $\boldsymbol{J}_{\text{ext}} = 0$ et $\rho_{\text{ext}} = 0$. Nous pouvons alors réécrire les équations de Maxwell dans un matériau :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{D}) = 0, \tag{1.2.4a}$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0, \tag{1.2.4b}$$
$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{D}) = \mathbf{rot}(\boldsymbol{P}) - \frac{\mu_0}{\epsilon_0}\frac{\partial(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})}{\partial t}, \tag{1.2.4c}$$
$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{H}) = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{1.2.4d}$$

À l'avenir, nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation magnétostatique, i.e. nous annulons tous les termes de dérivées en temps. Nous obtenons alors les équations de l'approximation quasi-stationnaire

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{D}) = 0, \tag{1.2.5a}$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0, \tag{1.2.5b}$$
$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{D}) = \mathbf{rot}(\boldsymbol{P}), \tag{1.2.5c}$$
$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{H}) = 0. \tag{1.2.5d}$$

Nous observons le découplage des équations électrostatiques et magnétostatiques. Dans la suite, nous ne nous préoccuperons plus de la partie électrique des équations. Si nous ne gardons que la partie magnétostatique, nous obtenons le système

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0, \qquad \mathbf{rot}(\boldsymbol{H}) = 0. \tag{1.2.6}$$

Ce système n'est pas suffisant pour modéliser le comportement d'un matériau magnétique. Il nous faut en effet une autre équation liant les deux grandeurs $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{H}$. Pour les matériaux paramagnétiques ou diamagnétiques, cette relation sera linéaire.

1.2.3 Les matériaux à réponse linéaire

Pour certains matériaux, la réaction de l'aimantation est linéaire par rapport à l'excitation. Ces matériaux sont les paramagnétiques et les diamagnétiques. Pour les premiers, l'aimantation s'aligne sur l'excitation et amplifie celle-ci alors que pour les seconds l'aimantation tend à s'opposer à l'excitation. L'équation d'état entre l'aimantation $\boldsymbol{M}$ et l'excitation $\boldsymbol{H}$ est la relation linéaire

$$\boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H}, \tag{1.2.7}$$

avec $\chi < 0$ dans les matériaux diamagnétiques, et $\chi > 0$ dans les matériaux paramagnétiques. On appelle susceptibilité la valeur χ. Elle dépend à la fois du matériau considéré et de sa température. Le diamagnétisme provient de la modification du mouvement des électrons sous un champ appliqué, suivant la loi de Lenz. C'est le magnétisme des substances non magnétiques. La valeur absolue de la susceptibilité χ est très faible pour les diamagnétiques. Par des calculs physiques, voir [65] p.117, on obtient une valeur de la susceptibilité

$$\chi = -\mu_0 \frac{N\mathrm{e}^2 Z R^2}{6\mathrm{m_e}}, \qquad (1.2.8)$$

où

- N est le nombre d'atomes par unité de volume,
- Z est le nombre d'électrons dans un atome,
- $\mathrm{e} = 1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$ est la charge de l'électron,
- $\mathrm{m_e} = 9.1 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$ est la masse de l'électron,
- R^2 est le rayon carré moyen des électrons de l'atome de la substance considérée.

Le paramagnétisme a lieu quand les atomes composant une substance portent des moments magnétiques permanents indépendants et ne s'influant pas les uns les autres en dehors des lois de Maxwell. Dans ce cas, l'inverse de la susceptibilité varie proportionnellement à la température. Il existe aussi d'autres formes de paramagnétisme dont la susceptibilité ne varie pratiquement pas en fonction de la température. C'est le cas dans les métaux avec le *paramagnétisme de Pauli*.

1.3 Conclusion

Ce chapitre nous a seulement permis d'effleurer la théorie du magnétisme. Il existe heureusement de nombreux ouvrages de référence sur ce sujet. Nous pouvons en particulier citer A. Aharoni [2], E. Trémolet [65] et Landau-Lifchitz [49]. La théorie de l'électromagnétisme dans le vide du point de vue de la relativité est également exposée dans Landau-Lifchitz [50].

Chapitre 2

Le modèle mathématique du micromagnétisme

La théorie du micromagnétisme introduite par Brown [12] dans les années 1940 a pour but d'expliquer le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques. Elle modélise le magnétisme à l'échelle mésoscopique où les grandeurs sont moyennées sur des domaines composés de quelques millions d'atomes. Le principe de cette méthode est d'attribuer à chaque phénomène physique intervenant dans les matériaux ferromagnétiques une énergie. Les états d'équilibre sont alors les minima locaux de cette énergie. Mais cette théorie ne se contente pas de l'étude statique du ferromagnétisme. En effet, elle introduit un modèle dynamique utilisant l'équation de Landau-Lifchitz qui décrit l'évolution de l'aimantation au cours du temps. Dans cette thèse, c'est cette équation dont nous nous efforcerons d'étudier les propriétés et particulièrement le comportement des solutions pour des géométries particulières.

2.1 Propriétés qualitatives des matériaux ferromagnétiques

Les matériaux ferromagnétiques ont un comportement plus complexe que les diamagnétiques ou les paramagnétiques. Tout d'abord, ils peuvent présenter une aimantation spontanée en l'absence de toute excitation extérieure. De plus, les phénomènes d'aimantation liés à ces matériaux sont d'un ordre de grandeur bien plus élevé que pour les matériaux paramagnétiques ou diamagnétiques. Enfin, ils présentent un cycle d'hystérésis. Ce dernier phénomène est mis à contribution pour le stockage magnétique, par exemple dans les disques durs de nos ordinateurs.

On observe aussi que le comportement des matériaux ferromagnétiques dépend de la température. Leur aimantation globale tend à diminuer lorsque la température augmente. Au delà d'une certaine température T_C, appelée « température de Curie », ils se comportent comme des matériaux paramagnétiques.

Outre les disques durs, les matériaux ferromagnétiques sont aussi employés pour la protection radar —avions furtifs— et l'électronique de puissance avec les circuits magnétiques. On observe aussi que la forme des matériaux ferromagnétiques a une grande influence sur leur comportement. Optimiser cette forme permet d'en améliorer les performances. Cette optimisation demande évidemment une simulation numérique du comportement de ces matériaux.

2.2 Principes de base de l'aimantation

Le comportement particulier des matériaux ferromagnétiques est explicable uniquement dans le cadre de la mécanique quantique où le moment magnétique microscopique est lié au spin des électrons et est de module constant. La présence d'une aimantation globale est due à la présence dans les matériaux ferromagnétiques de forces de rappel tendant à aligner les spins des électrons des atomes voisins. Chaque atome est doté d'un moment magnétique microscopique $\mathfrak{m}$. La moyenne de ces moments microscopiques à l'échelle mésoscopique est notée $\boldsymbol{M}$ et appelée aimantation ou moment magnétique.

Le modèle micromagnétique suppose que l'aimantation locale $\boldsymbol{M}$ a un module constant M_s. Le module de l'aimantation dépend de la température et diminue quand cette dernière augmente pour atteindre 0 à la température de Curie T_C. Dans ce travail, nous négligerons les effets des variations de la température.

Pour pouvoir modéliser le comportement des matériaux ferromagnétiques, il faut d'abord donner la forme de l'excitation $\boldsymbol{H}$ en fonction de l'aimantation $\boldsymbol{M}$. Cette excitation totale sera elle-même dérivée de la forme de l'énergie de l'échantillon magnétique. Nous donnons la forme des énergies magnétiques internes à la section suivante.

2.3 Les énergies internes des matériaux ferromagnétiques

Dans un matériau ferromagnétique, divers phénomènes physiques interviennent. Il convient d'attribuer à chacun de ces phénomènes une énergie. La connaissance de ces énergies permettra d'étudier le problème statique et de caractériser les états d'équilibre [34]. Ce sont en effet ceux qui réalisent un minimum local de l'énergie parmi les champs d'aimantation qui vérifient la contrainte

$$|\boldsymbol{M}| = \begin{cases} M_s & \text{dans } \mathcal{O}, \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $\mathcal{O}$ est le domaine occupé par le matériau ferromagnétique. Nous rappelons que nous notons

- $\boldsymbol{M}$ le moment magnétique adimensionné,
- $\boldsymbol{H}$ l'excitation magnétique adimensionnée.

Pour tout phénomène ou interaction p, nous notons

- $\mathrm{E}_p^{\mathrm{Phys}}$, l'énergie associée à une contribution p. En général, $\mathrm{E}_p^{\mathrm{Phys}}(\mathbf{0}) = 0$.
- $\mathcal{H}_p$ l'opérateur lié à l'énergie $\mathrm{E}_p^{\mathrm{Phys}}$ par

$$\mathrm{DE}_p^{\mathrm{Phys}}(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{V} = -\mu_0 \int_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_p(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

- $\boldsymbol{H}_p = \mathcal{H}_p(\boldsymbol{M})$ la contribution de l'interaction p à l'excitation magnétique.

En particulier, si $\mathcal{H}_p$ est linéaire symétrique, nous avons

$$\mathrm{E}_p^{\mathrm{Phys}}(\boldsymbol{M}) = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_p(\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{M} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Nous allons maintenant donner les formes les plus courantes des énergies internes des matériaux ferromagnétiques (Brown [12]) et nous en déduirons les opérateurs associés.

2.3.1 L'énergie Zeeman ou extérieure

L'opérateur extérieur peut appliquer une excitation $\boldsymbol{H}_{\mathrm{ext}}$ au système. Nous désignons par Zeeman cette énergie. L'énergie a alors la forme

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{Phys}} = -\mu_0 \int_{\mathcal{O}} \boldsymbol{H}_{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{M} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

Cette excitation extérieure peut dépendre du temps.

2.3.2 L'énergie d'échange

L'aimantation des matériaux ferromagnétiques est modélisée par la présence d'aimants permanents sur les atomes. Ce qui va distinguer les matériaux ferromagnétiques des matériaux paramagnétiques est la présence de forces de rappel. Ces forces tendent à aligner les moments microscopiques des atomes voisins et s'expliquent dans le cadre de la mécanique quantique par la superposition des orbitales des électrons d'atomes voisins. On appelle généralement interaction d'échange, l'interaction macroscopique qui découle de ces forces de rappels. Les physiciens attribuent à cette interaction une énergie donnée par

$$\mathrm{E}_e^{\mathrm{Phys}}(\boldsymbol{M}) = \frac{A\mu_0}{2} \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\nabla \boldsymbol{M}}{M_s} \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.3.2}$$

La constante d'échange A dépend du matériau et peut être estimée à partir d'autres données physiques, voir p.153 et p.468 dans [65]. Nous pouvons alors déduire de cette énergie, la forme de l'opérateur d'échange,

$$\mathcal{H}_e(\boldsymbol{M}) = A\frac{\triangle \boldsymbol{M}}{{M_s}^2}. \tag{2.3.3}$$

Il arrive aussi que l'échange soit anisotrope. Dans ce cas, la constante d'échange est une matrice définie positive $\mathbf{A} = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, uniformément coercive si A_{ij} dépend de la variable d'espace $\boldsymbol{x}$, et la forme de l'énergie et de l'opérateur associée sont données

$$\mathrm{E}_e^{\mathrm{Phys}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\mu_0}{2{M_s}^2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathcal{O}} A_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.3.4a}$$

$$\mathcal{H}_e(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{{M_s}^2}\,\mathrm{div}(\mathbf{A}\nabla\boldsymbol{M}). \tag{2.3.4b}$$

2.3.3 L'énergie de champ démagnétisant

C'est la partie de l'excitation magnétique créée par $\boldsymbol{M}$ dans le cadre des équations de la magnétostatique (1.2.6). Pour des échantillons de petite taille, l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell est tout à fait acceptable [33]. L'opérateur de champ démagnétisant associe à $\boldsymbol{M}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, la solution $\boldsymbol{H}_d$ de

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{H}_d + \boldsymbol{M}) = 0, \qquad\qquad \mathbf{rot}(\boldsymbol{H}_d) = 0. \tag{2.3.5}$$

Aussi,

$$\mathrm{E}_d^{\mathrm{Phys}}(\boldsymbol{M}) = -\frac{\mu_0}{2}\int_{\mathcal{O}} \boldsymbol{H}_d\cdot\boldsymbol{M}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.3.6a}$$

$$\mathcal{H}_d(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{H}_d. \tag{2.3.6b}$$

Cette contribution est globale et rayonne à l'extérieur du matériau. Elle n'est pas nulle à l'extérieur du matériau contrairement aux autres contributions provenant de $\boldsymbol{M}$. Nous précisions que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ a pour valeur $\mu_0(\mathcal{H}_d(\boldsymbol{M}) + \boldsymbol{H}_{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{M})$.

2.3.4 L'énergie d'anisotropie

L'anisotropie est due à la structure cristalline du matériau. Les cristaux présentent, de par leur structure des directions privilégiées, suivant lesquelles les spins des atomes tendent à s'aligner. Nous allons donner la forme la plus générale de l'énergie. Soit $\mathbf{K}$ une application de $\mathcal{O}$ dans l'espace des matrices $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3)$ symétriques positives. Alors, nous pouvons définir l'énergie et l'opérateur

$$\mathrm{E}_a^{\mathrm{Phys}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathcal{O}} \frac{\mathbf{K}\boldsymbol{M}}{M_s} \cdot \frac{\boldsymbol{M}}{M_s} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.3.7a}$$

$$\mathcal{H}_a(\boldsymbol{M}) = -\frac{\mathbf{K}\boldsymbol{M}}{{M_s}^2}. \tag{2.3.7b}$$

Il existe plusieurs types d'anisotropies, une des formes possibles est l'anisotropie uniaxiale où une direction de l'aimantation est favorisée. Dans ce cas,

$$\mathbf{K}\boldsymbol{M} = K(\boldsymbol{M} - (\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}), \tag{2.3.8}$$

où $\boldsymbol{u}$ est un vecteur unitaire dans la direction de facile aimantation et K la constante d'anisotropie.

2.3.5 Les termes d'énergie de surface

Lorsque deux matériaux ferromagnétiques sont séparés par un espaceur non magnétique de faible épaisseur, d'autres interactions apparaissent. En particulier, apparaît l'anisotropie surfacique qui favorise l'alignement de l'aimantation sur la normale à la surface. Apparaît aussi le super-échange qui favorise l'alignement de l'aimantation de part et d'autre de l'espaceur. L'objet de ce paragraphe est de décrire ces interactions d'un point de vue physique, en écrivant les énergies associées à ces interactions. Dans un matériau ferromagnétique occupant le domaine $\mathcal{O} = \mathcal{O}^+ \cup \mathcal{O}^-$, et

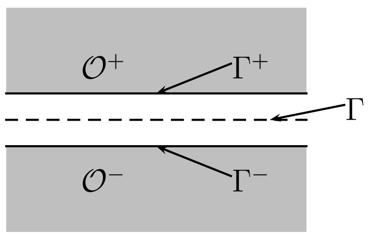


FIG. 2.a: Espaceur et surfaces de contact

traversé par un espaceur plan de faible épaisseur, nous notons Γ, Γ^+ et Γ^- les surfaces représentées à la figure 2.a. Nous posons $\Gamma^\pm = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Nous notons γ l'opérateur qui envoie $\boldsymbol{M}$ vers sa trace sur $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Nous notons γ^+ l'opérateur qui envoie $\boldsymbol{M}$ sur $\tau^-\gamma\boldsymbol{M}$ où τ^- est la translation qui envoie Γ^+ sur Γ. De même, nous notons γ^- l'opérateur qui envoie $\boldsymbol{M}$ sur $\tau^+\gamma\boldsymbol{M}$ où τ^+ est la translation qui envoie Γ^- sur Γ. Une définition plus rigoureuse de ces opérateurs de traces se trouve à la section 4.1.

2.3.5.1 L'interaction d'anisotropie surfacique

L'anisotropie surfacique a d'après les physiciens deux causes. La première cause est une correction de l'échange près de l'espaceur. La deuxième est liée à la magnétostriction. L'anisotropie surfacique est modélisée par une énergie

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{sa}^{\mathrm{Phys}} &= \mu_0 \frac{K_s}{2{M_s}^2} \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} ({M_s}^2 - (\gamma \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\nu})^2) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &= \mu_0 \frac{K_s}{2{M_s}^2} \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} |\gamma \boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{\nu}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

où $K_s \geq 0$ est la constante d'anisotropie surfacique, $\boldsymbol{\nu}$ la normale à la surface. Nous ne considérons pas, dans cette thèse, le cas où l'alignement sur la normale est pénalisée, $K_s < 0$. La configuration de minimum d'énergie est l'alignement de l'aimantation sur la normale à la surface porteuse de l'espaceur.

2.3.5.2 L'interaction de super-échange

Le super-échange [1] est une interaction d'origine quantique qui lie l'aimantation de part et d'autre d'un espaceur faiblement magnétique. Elle provient de la superposition de chaque orbitale des électrons des atomes ferromagnétiques de part et d'autre de l'espaceur avec l'orbitale des électrons du matériau faiblement magnétique qui remplie l'espaceur mince séparant les deux parties ferromagnétiques. Ce modèle qualitatif implique que le super-échange ne peut avoir lieu que si l'espaceur magnétique est très mince, de l'ordre de quelques épaisseurs atomiques. Nous utilisons le modèle mathématique de [46]. Si l'espaceur a pour support la surface Γ, alors l'énergie associée à cette interaction est

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{se}(\boldsymbol{M}) &= \mu_0 \frac{J_1}{2{M_s}^2} \int_\Gamma |\gamma^+ \boldsymbol{M} - \gamma^- \boldsymbol{M}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &\quad + \mu_0 \frac{J_2}{{M_s}^4} \int_\Gamma |\gamma^+ \boldsymbol{M} \wedge \gamma^- \boldsymbol{M}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}), \\ &= \mu_0 \frac{J_1}{{M_s}^2} \int_\Gamma ({M_s}^2 - \gamma^+ \boldsymbol{M} \cdot \gamma^- \boldsymbol{M}) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &\quad + \mu_0 \frac{J_2}{{M_s}^4} \int_\Gamma ({M_s}^4 - |\gamma^+ \boldsymbol{M} \cdot \gamma^- \boldsymbol{M}|^2) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

où J_1 et J_2 sont des nombres positifs. Nous ne considérons pas les arrangements antiferromagnétiques, $J_1 < 0$. En réalité, J_1 et J_2 dépendent de l'épaisseur ε de l'espaceur. Elles tendent dans tous les cas vers des valeurs finies non nulles quand ε tend vers 0. Ces valeurs peuvent donc être considérées constantes pour ε petit.

[1] Voir M. Labrune et J. Miltat [46], W.F. Brown [12] et [65, p. 309]

2.4 Évolution du moment magnétique

2.4.1 Évolution microscopique du moment magnétique

L'application de la loi de Laplace sur une boucle de courant microscopique permet d'obtenir la loi d'évolution à laquelle obéit le moment magnétique microscopique $\mathfrak{m}$. Cette loi s'écrit

$$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = -|\gamma| \mathfrak{m} \wedge \boldsymbol{B}^{\text{micro}}, \tag{2.4.1}$$

où $\boldsymbol{B}^{\text{micro}}$ est le champ magnétique microscopique, et γ une constante appelée facteur gyromagnétique, négative pour les électrons. Les détails peuvent être consultés dans [65], p.120 et 258. Si cette équation convient pour le moment microscopique, le passage à l'échelle mésoscopique va demander l'ajout d'un terme de dissipation d'énergie.

2.4.2 L'équation de Landau-Lifchitz

Il n'est pas possible d'utiliser (2.4.1) pour l'équation d'évolution de l'aimantation mésoscopique. En effet, il suffit de faire le produit scalaire de (2.4.1) par $\boldsymbol{H}$ et d'intégrer sur $\mathcal{O}$ pour vérifier qu'alors l'énergie resterait constante, ce que contredit l'expérience qui constate une dissipation de l'énergie. C'est pour cette raison que L. Landau et E. Lifchitz dans [48] ont introduit un terme supplémentaire phénoménologique de dissipation d'énergie de la forme $\boldsymbol{M} \wedge (\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H})$. L'équation de Landau-Lifchitz s'écrit

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial T} = -|\gamma| \mu_0 \left(\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H} + \frac{\alpha}{M_s} \boldsymbol{M} \wedge (\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H}) \right), \tag{2.4.2}$$

où $\alpha > 0$ est le facteur de dissipation d'énergie. Si nous calculons formellement l'évolution de l'énergie, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{E}^{\text{Phys}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{H}_{ext}) = +\mu_0 \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial T} \cdot \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.4.3a}$$

$$= -{\mu_0}^2 |\gamma| \frac{\alpha}{M_s} \|\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{H}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}. \tag{2.4.3b}$$

Il apparaît donc que l'énergie macroscopique décroît dans le modèle de Landau-Lifchitz, ce qui est en accord avec l'expérience.

2.5 Adimensionnement

Nous allons effectuer tous nos calculs sur des grandeurs adimensionnées. Cela nous permettra de diminuer le nombre de variables nécessaires à l'étude du système. Il sera alors possible de revenir au système physique par simple changement de variables.

2.5.1 Variables adimensionnées

Nous posons comme variables adimensionnées :

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{M}}{M_s}, \qquad \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{H}}{M_s}, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 M_s}, \tag{2.5.1a}$$

$$t = |\gamma|\mu_0 M_s T, \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{Phys}}}{\mu_0 M_s^2}. \tag{2.5.1b}$$

Nous obtenons à partir des équations (2.4.2) et de la contrainte $|\boldsymbol{M}| = M_s$, que l'aimantation adimensionnée $\boldsymbol{m}$ vérifie

$$|\boldsymbol{m}| = 1, \tag{2.5.2a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h} - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h}). \tag{2.5.2b}$$

Nous notons que le lien entre énergie adimensionnée et opérateur adimensionné est maintenant

$$\delta \mathrm{E}_p(\boldsymbol{m}) = -\int_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}) \cdot \delta \boldsymbol{m} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \mathrm{E}_p(\boldsymbol{0}) = 0. \tag{2.5.3}$$

Nous allons maintenant définir les opérateurs adimensionnés.

2.5.2 Énergies et excitations adimensionnées

Les opérateurs adimensionnés ont la même forme que les opérateurs non adimensionnés. Cependant, le terme M_s qui apparaissait dans les notations physiciennes disparait et il faut changer les constantes en conséquence. Les opérateurs d'échange $\mathcal{H}_e$, d'anisotropie, et de champ démagnétisant $\mathcal{H}_d$ adimensionnés sont :

$$\mathcal{H}_e(\boldsymbol{m}) = A \triangle \boldsymbol{m} \qquad \text{champ d'échange,} \tag{2.5.4a}$$

$$\mathcal{H}_a(\boldsymbol{m}) = -\mathbf{K}\boldsymbol{m} \qquad \text{champ d'anisotropie,} \tag{2.5.4b}$$

$$\mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{h}_d \qquad \text{champ démagnétisant,} \tag{2.5.4c}$$

$$\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}} = \frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{ext}}}{M_s} \qquad \text{champ Zeeman,} \tag{2.5.4d}$$

où $\boldsymbol{h}_d$ vérifie dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{h}_d) = 0, \qquad \mathbf{rot}(\boldsymbol{h}_d) = 0.$$

Les énergies adimensionnées s'écrivent

$$\mathrm{E}_e(\boldsymbol{m}) = \frac{A}{2}\int_{\mathcal{O}} |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \text{ énergie d'échange,} \tag{2.5.5a}$$

$$\mathrm{E}_a(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} (\mathbf{K}\boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \text{ énergie d'anisotropie,} \tag{2.5.5b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_d(\boldsymbol{m}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{H}_d(\boldsymbol{m})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} \boldsymbol{m} \cdot \mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \quad \text{énergie démagnétisante,} \tag{2.5.5c}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}) = -\int_{\mathcal{O}} \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2.5.5d}$$

pour les termes volumiques. L'anisotropie uniaxiale a toujours pour forme $\mathbf{K}\boldsymbol{m} = K(\boldsymbol{m} - ((\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}))$. Les énergies de surface s'écrivent, avec les notations de la section 2.3.5,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{se}(\boldsymbol{m}) = \frac{J_1}{2}&\int_{\Gamma} |\gamma^+\boldsymbol{m} - \gamma^-\boldsymbol{m}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &+ J_2 \int_{\Gamma} |\gamma^+\boldsymbol{m} \wedge \gamma^-\boldsymbol{m}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}), \\ = J_1 &\int_{\Gamma} (1 - \gamma^+\boldsymbol{m} \cdot \gamma^-\boldsymbol{m}) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &+ J_2 \int_{\Gamma} (1 - |\gamma^+\boldsymbol{m} \cdot \gamma^-\boldsymbol{m}|^2) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{2.5.6a}$$

pour le super-échange, et

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{sa}(\boldsymbol{m}) &= \frac{K_s}{2}\int_{\Gamma^-\cup\Gamma^+} (1 - (\gamma\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nu})^2) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{K_s}{2}\int_{\Gamma^-\cup\Gamma^+} |\gamma\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{\nu}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{2.5.6b}$$

pour l'anisotropie surfacique.

Cependant les constantes ont été changées et il faut alors faire les transformations suivantes pour passer des grandeurs physiques aux grandeurs adimensionnées.

$$A \to \frac{A}{{M_s}^2}, \qquad \mathbf{K} \to \frac{\mathbf{K}}{{M_s}^2}, \tag{2.5.7a}$$

$$J_1 \to \frac{J_1}{{M_s}^2}, \qquad J_2 \to \frac{J_2}{{M_s}^4}, \qquad K_s \to \frac{K_s}{{M_s}^2}. \tag{2.5.7b}$$

Dans le cas de l'anisotropie uniaxiale, $\boldsymbol{u}$ reste inchangé et K doit être divisée par ${M_s}^2$ lors du passage des grandeurs physiques aux grandeurs adimensionnées.

À partir de maintenant, nous ne travaillerons plus que sur les grandeurs adimensionnées.

2.5.3 Notations diverses

Par souci de concision, nous définissons aussi l'opérateur d'excitation totale et d'énergie totale des interactions volumiques.

$$\mathcal{H}_v = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_d, \qquad \mathrm{E}_v = \mathrm{E}_a + \mathrm{E}_e + \mathrm{E}_d + \mathrm{E}_{\text{ext}}, \tag{2.5.8a}$$
$$\mathrm{E}_s = \mathrm{E}_{sa} + \mathrm{E}_{se}, \qquad \mathrm{E} = \mathrm{E}_s + \mathrm{E}_v. \tag{2.5.8b}$$

L'excitation totale étant définie par

$$\boldsymbol{h} = \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}), \qquad \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) = \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}. \tag{2.5.8c}$$

Dans un souci de concision, nous notons aussi

$$\mathcal{H}_{d,a} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_d, \qquad \mathrm{E}_{d,a} = \mathrm{E}_a + \mathrm{E}_d. \tag{2.5.8d}$$

Cette dernière notation sera très utile dans des estimations car très souvent, nous pourrons majorer en même temps les termes de champ démagnétisant et d'anisotropie.

2.6 Le système complet de Landau-Lifchitz

L'équation de Landau-Lifchitz (2.5.2b) ne suffit pas à caractériser l'évolution de l'aimantation. Il faut en effet lui adjoindre une condition initiale et des conditions aux limites. C'est uniquement dans ces dernières conditions qu'apparaîtra l'influence des interactions surfaciques comme le super-échange et l'anisotropie surfacique.

2.6.1 La condition de bord en présence d'interactions surfaciques

Pour obtenir les conditions aux limites, nous calculons les conditions de stationnarité d'Euler-Lagrange.

Nous commençons par obtenir les conditions de bord en l'absence d'énergies surfaciques. Supposons que $\boldsymbol{m}$ soit un point stationnaire de l'énergie E_v sous la contrainte $|\boldsymbol{m}| = 1$. Alors, pour tout $\boldsymbol{v}$ orthogonal presque partout à $\boldsymbol{m}$, nous avons

$$-\int_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + A \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{2.6.1}$$

la condition de stationnarité volumique est :

$$\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) = 0, \tag{2.6.2}$$

et la condition de stationnarité sur le bord est :

$$\boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}. \tag{2.6.3}$$

Faisons le même calcul en incluant les énergies surfaciques. Nous utilisons les notations de la section 2.3.5. Nous définissons γ' comme l'opérateur de trace qui envoie $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma'\boldsymbol{m} = \gamma\boldsymbol{m} \circ \sigma$, où $\sigma(x, y, z, t) = (x, y, -z, t)$. Supposons que $\boldsymbol{m}$ est un point stationnaire de l'énergie $\mathrm{E}_v + \mathrm{E}_s$ sous la contrainte $|\boldsymbol{m}| = 1$. Alors, pour tout $\boldsymbol{v}$ orthogonal presque partout à $\boldsymbol{m}$,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}})\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + A \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ +K_s \int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} (\gamma\boldsymbol{m} - (\gamma\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}) \cdot \gamma\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ +J_1 \int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} (\gamma\boldsymbol{m} - \gamma'\boldsymbol{m}) \cdot \gamma\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ +2J_2 \int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} \big(|\gamma'\boldsymbol{m}|^2\gamma\boldsymbol{m} - (\gamma\boldsymbol{m} \cdot \gamma'\boldsymbol{m})\gamma'\boldsymbol{m}\big) \cdot \gamma\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = 0. \end{aligned} \tag{2.6.4a}$$

La condition de stationnarité volumique (2.6.2) reste inchangée. La condition de stationnarité surfacique devient :

$$A\boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \setminus \Gamma^{\pm}, \\ K_s(\gamma\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nu})\gamma\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{\nu} + J_1\gamma\boldsymbol{m} \wedge \gamma'\boldsymbol{m} & \\ \qquad +2J_2(\gamma\boldsymbol{m} \cdot \gamma'\boldsymbol{m})\gamma\boldsymbol{m} \wedge \gamma'\boldsymbol{m} & \text{sur } \Gamma^{\pm}. \end{cases} \tag{2.6.5}$$

Nous choisissons comme conditions aux limites de l'équation de Landau-Lifchitz les conditions de stationnarité (2.6.3) ou (2.6.5) en fonction de la présence ou non d'interactions sur la surface de contact.

Or, la contrainte $|\boldsymbol{m}| = 1$ implique

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{m} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \tag{2.6.6}$$

Donc, nous en déduisons que les conditions aux limites sont

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, \tag{2.6.7}$$

en l'absence d'interactions surfaciques sur l'interface. Et,

$$A\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \setminus \Gamma^{\pm}, \\ (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) - (\gamma\boldsymbol{m} \cdot \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}))\,\gamma\boldsymbol{m}) & \text{sur } \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \end{cases} \tag{2.6.8a}$$

en présence d'interactions surfaciques où

$$\mathcal{H}_{sa} = K_s((\gamma\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \gamma\boldsymbol{m}) \text{ sur } \Gamma^- \cup \Gamma^+, \tag{2.6.9a}$$

$$\mathcal{H}_{se} = J_1(\gamma'\boldsymbol{m} - \gamma\boldsymbol{m}) + 2J_2((\gamma\boldsymbol{m} \cdot \gamma'\boldsymbol{m})\gamma'\boldsymbol{m} - |\gamma'\boldsymbol{m}|^2\gamma\boldsymbol{m}) \text{ sur } \Gamma^- \cup \Gamma^+, \tag{2.6.9b}$$

$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{sa} + \mathcal{H}_{se}. \tag{2.6.9c}$$

Nous allons maintenant écrire le système de Landau-Lifchitz dans son ensemble.

2.6.2 Écriture du système complet

Nous pouvons maintenant écrire le système complet de Landau-Lifchitz, d'abord en l'absence de super-échange et d'anisotropie surfacique :

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}) - \alpha\boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m})) \text{ dans } \mathcal{O} \times (0,T), \tag{2.6.10a}$$

avec la condition de bord

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \times (0,T), \tag{2.6.10b}$$

la donnée initiale

$$\boldsymbol{m}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \tag{2.6.10c}$$

et respectant la contrainte

$$|\boldsymbol{m}| = 1 \text{ presque partout dans } \mathcal{O} \times (0,T). \tag{2.6.10d}$$

Puis nous l'écrivons en présence d'interactions surfaciques diverses où seule la condition de bord change par rapport au système (2.6.10) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \alpha\boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}})) \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0,T), \tag{2.6.11a}$$

$$|\boldsymbol{m}| = 1, \tag{2.6.11b}$$

$$\boldsymbol{m}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0, \tag{2.6.11c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \setminus \Gamma, \\ Q^+(\gamma\boldsymbol{m}, \gamma'\boldsymbol{m}) & \text{sur } \Gamma^+, \\ Q^-(\gamma\boldsymbol{m}, \gamma'\boldsymbol{m}) & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \tag{2.6.11d}$$

où $Q^{\pm}(\gamma\boldsymbol{m}, \gamma'\boldsymbol{m}) = Q_r^{\pm}(\gamma\boldsymbol{m}, \gamma'\boldsymbol{m}) - (Q_r^{\pm}(\gamma\boldsymbol{m}, \gamma'\boldsymbol{m}) \cdot \gamma\boldsymbol{m})\gamma\boldsymbol{m}$, avec Q_r un polynôme en deux variables. Nous avons écrit des conditions de bord plus générales que celles liées au super-échange et à l'anisotropie surfacique. Nous constatons sans difficulté que la condition de bord (2.6.8) est bien un cas particulier de la condition au limite du système (2.6.11).

Ce modèle rend compte de la diminution de l'énergie au cours du temps et de la constance locale du module de l'aimantation. En effet, nous avons formellement en multipliant scalairement l'équation (2.6.10b) par $\boldsymbol{m}$ puis par $\mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}})$:

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{m}|^2}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{E}(\boldsymbol{m})\right) = -\alpha\|\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}})\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}.$$

Notons en particulier le rôle primordial des conditions aux limites pour obtenir l'égalité d'énergie. Cela confirme que le choix de conditions aux limites est cohérent.

2.7 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre la théorie du micromagnétisme pour les matériaux ferromagnétiques. Nous n'avons pas introduit des matériaux au comportement plus complexe comme les ferrimagnétiques et les antiferromagnétiques dans lesquels il existe plusieurs sous-réseaux d'aimantation qui se compensent en partie ou totalement. Nous sommes aussi restés dans le cadre de l'approximation magnétostatique, c'est justifié par [33]. Nous disposons maintenant de toutes les équations nécessaires pour caractériser l'évolution de l'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques. Le problème ayant été posé, nous allons enfin pouvoir mener à bien notre programme.

Chapitre 3

L'opérateur de champ démagnétisant : quelques propriétés

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques propriétés du champ démagnétisant défini au chapitre 2, équations (2.3.6) et (2.3.5). Cet opérateur peut être défini par l'intermédiaire d'une intégrale singulière. Une étude générale de cet opérateur a été effectuée par M.J. Friedman [26–28].

3.1 Définition de l'opérateur de champ démagnétisant

Nous avons défini l'opérateur $\mathcal{H}_d$ par (2.3.6) et (2.3.5). l'opérateur $\mathcal{H}_d$ envoie $\boldsymbol{m}$ de l'espace[1] $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^3)$ sur l'unique solution, au sens des distributions, $\boldsymbol{h}_d$ dans $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^3)$ du système

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{h}_d) = -\operatorname{div}(\boldsymbol{m}), \tag{3.1.1a}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{h}_d) = 0, \tag{3.1.1b}$$

$$\tag{3.1.1c}$$

Ce système se résout facilement par transformée de Fourier. La solution de cette équation est donnée par :

$$\boldsymbol{h}_d = -\,\mathbf{grad}\left(\operatorname{div}(G*\boldsymbol{m})\right) = -\,\mathbf{grad}(G*\operatorname{div}(\boldsymbol{m})) \tag{3.1.2}$$

où

$$G = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|} \tag{3.1.3}$$

[1] L'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^3)$ est l'espace de Sobolev comme défini à la définition 5.1.1.

Remarque 3.1.1. Par extension, pour tout $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est une ouvert de $\mathbb{R}^3$, nous posons

$$\mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}) = \mathcal{H}_d(\widetilde{\boldsymbol{m}}),$$

où

$$\widetilde{\boldsymbol{m}} = \begin{cases} \boldsymbol{m} & \text{dans } \mathcal{O}, \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}. \end{cases}$$

3.2 Propriétés classiques de l'opérateur de champ démagnétisant

Nous donnons dans cette section des résultats classiques sur l'opérateur de champ démagnétisant.

Théorème 3.2.1. *L'opérateur $\mathcal{H}_d$ envoie $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$, est symétrique négatif et de norme inférieure à* 1*.*

Preuve *:* Voir M.J. Friedman [26]. □

Des résultats de régularité plus élaborés ont été démontrés. En particulier, le théorème suivant sera essentiel.

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ régulier. Pour tout $1 < p < +\infty$, $\mathcal{H}_d$ est un opérateur continu de $\mathbb{L}^p(\mathcal{O})$ dans $\mathbb{L}^p(\mathcal{O})$, et de $\mathbb{W}^{1,p}(\mathcal{O})$ dans $\mathbb{W}^{1,p}(\mathcal{O})$.*

Preuve *:* Voir [15], [26], ou [47, p.196]. □

3.3 Champ démagnétisant d'une plaque mince

Nous terminons par un lemme permettant de connaître la limite du rayonnement d'une plaque dont l'épaisseur tend vers 0. *A priori*, nous n'en avons pas trouvé trace dans la littérature.

Lemme 3.3.1. *Soit B un ouvert borné à frontière $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $\varepsilon < L/2$ et tout $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{H}^1(B \times (0, L))$.*

$$\|\mathcal{H}_d(\chi_{B\times(0,+\varepsilon)}\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{L}^2(B\times(+\varepsilon,L))} \leq C\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^1(B\times(0,L))}.$$

Preuve *:* Soit $\boldsymbol{v}$ appartenant à $\mathbb{H}^1(B \times (0, L))$. Notons α_ε l'homothétie

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(x_1, x_2, \frac{L}{L - \varepsilon}(x_3 - \varepsilon)\right).$$

Nous définissons alors la fonctionnelle β_ε par

$$\begin{aligned}\beta_\varepsilon \colon \mathbb{H}^1(B\times(0;L)) &\to \mathbb{H}^1(B\times(\varepsilon,L)),\\ \boldsymbol{v} &\mapsto \boldsymbol{v}\circ\alpha_\varepsilon.\end{aligned}$$

Alors, si χ_I est la fonction caractéristique de $B\times I$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))} &\le \|\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})-\mathcal{H}_d(\chi_{(\varepsilon,L)}\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}\\ &\le \underbrace{\|\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})-\beta_\varepsilon(\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v}))\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}}_{I}\\ &\quad+\underbrace{\|\beta_\varepsilon(\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v}))-\mathcal{H}_d(\beta_\varepsilon(\boldsymbol{v}))\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}}_{II}\\ &\quad+\underbrace{\|\mathcal{H}_d(\beta_\varepsilon(\boldsymbol{v})-\chi_{(\varepsilon,L)}\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}}_{III}.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Commençons par estimer le terme I :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_d(\chi_{(0,L)}\boldsymbol{v})-\beta_\varepsilon(\mathcal{H}_d(\chi_{(0,L)}\boldsymbol{v}))\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))} &\le \varepsilon\left\|\frac{\partial\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})}{\partial x_3}\right\|_{\mathbb{L}^2(B\times(0,L))}\\ &\le \varepsilon\|\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{H}^1(B\times(0,L))}.\\ &\le C\varepsilon\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^1(B\times(0,L))},\end{aligned}$$

d'après le théorème 3.2.2. Le terme III s'évalue de la même façon. En effet, d'après le théorème 3.2.1,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_d(\beta_\varepsilon(\boldsymbol{v})-\chi_{(\varepsilon,L)}\boldsymbol{v})\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))} &\le \|\beta_\varepsilon(\boldsymbol{v})-\chi_{(\varepsilon,L)}\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}\\ &\le \varepsilon\left\|\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_3}\right\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}\\ &\le \varepsilon\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^1(B\times(\varepsilon,L))}\end{aligned}$$

Pour estimer II quand ε est près de 0, nous définissons

$$\boldsymbol{w}=\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})-\beta_\varepsilon^{-1}[\mathcal{H}_d(\beta_\varepsilon(\boldsymbol{v}))].$$

Nous avons alors

$$\|\beta_\varepsilon(\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v}))-\mathcal{H}_d(\beta_\varepsilon(\boldsymbol{v}))\|_{\mathbb{L}^2(B\times(\varepsilon,L))}=\frac{L-\varepsilon}{L}\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{L}^2(B\times(0,L))}.$$

Si nous décomposons $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ et $\boldsymbol{h}=(h_x,h_y,h_z)=\mathcal{H}_d(\boldsymbol{v})$, alors le champ de vecteur $\boldsymbol{w}=(w_x,w_y,w_z)$ satisfait, au sens des distributions, le système sur $\mathbb{R}^3$

suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{L}{L-\varepsilon}\frac{\partial w_z}{\partial z} &= \frac{\varepsilon}{L-\varepsilon}\frac{\partial (v_z + h_z)}{\partial z},\\
\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{L}{L-\varepsilon}\frac{\partial w_y}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon}{L-\varepsilon}\frac{\partial h_y}{\partial z},\\
\frac{L}{L-\varepsilon}\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{L-\varepsilon}\frac{\partial h_x}{\partial z},\\
\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}$$

Utilisant $\mathbf{rot}(\boldsymbol{h}) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\frac{\partial\big((L-\varepsilon)w_z + \varepsilon h_z\big)}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} &= 0,\\
\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{1}{L}\frac{\partial\big((L-\varepsilon)w_z + \varepsilon h_z\big)}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

Appliquant la transformée de Fourier à ces équations et le théorème de Schwarz, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\hat{w}_x &= \frac{\varepsilon}{L-\varepsilon}\frac{\xi_x\xi_z}{|\xi_x|^2 + |\xi_y|^2 + \left|\dfrac{L\xi_z}{L-\varepsilon}\right|^2}\left(\hat{v}_z + \frac{2L-\varepsilon}{L-\varepsilon}\hat{h}_z\right),\\
\hat{w}_y &= \frac{\varepsilon}{L-\varepsilon}\frac{\xi_y\xi_z}{|\xi_x|^2 + |\xi_y|^2 + \left|\dfrac{L\xi_z}{L-\varepsilon}\right|^2}\left(\hat{v}_z + \frac{2L-\varepsilon}{L-\varepsilon}\hat{h}_z\right),\\
\hat{w}_z &= \frac{\varepsilon L}{(L-\varepsilon)^2}\frac{|\xi_z|^2}{|\xi_x|^2 + |\xi_y|^2 + \left|\dfrac{L\xi_z}{L-\varepsilon}\right|^2}\left(\hat{v}_z + \frac{2L-\varepsilon}{L-\varepsilon}\hat{h}_z\right) - \frac{\varepsilon}{L-\varepsilon}\hat{h}_z,
\end{aligned}$$

Par Parseval et le théorème 3.2.1, nous obtenons le résultat recherché. □

Nous notons $\mathrm{d}\Gamma$ la mesure de surface de $B \times \{0\}$.

Remarque 3.3.2. Le lemme 3.3.1 implique que si $\gamma^0\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(B\times\{0\})$, alors $\mathcal{H}_d(\gamma^0\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\Gamma)$ appartient à $\mathbb{L}^2(B\times(0,L))$.

3.4 Conclusion

Ces quelques résultats sur l'opérateur de champ démagnétisant s'avéreront essentielles pour prouver l'existence de solutions de l'équation de Landau-Lifchitz par estimations. En particulier, le lemme 3.3.1 sera nécessaire pour pouvoir obtenir des résultats de convergence pour le problème d'espaceur aux parties III et IV.

Deuxième partie

Existence de solutions à l'équation de Landau-Lifchitz en présence de super-échange et d'anisotropie surfacique

Chapitre 4

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème d'existence pour l'équation de Landau-Lifchitz. L'existence de solutions faibles au système de Landau-Lifchitz couplé aux équations de Maxwell a été établie par A. Visintin [67] en domaine borné. L'existence de solutions faibles ainsi que leur non unicité a été établie, en présence d'échange uniquement, par F. Alouges et A. Soyeur [6]. En présence des interactions d'échange, magnétostatiques, d'anisotropie et de Zeeman, leur existence a été établie par S. Labbé [43]. L'existence de solutions fortes, en l'absence de super-échange, a été établie par G. Carbou et P. Fabrie en domaine borné [15], et en domaine non borné [14]. Enfin, J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [41] ont établi l'existence de solutions faibles au système de Landau-Lifchitz couplé aux équations de Maxwell en domaine non borné en l'absence d'échange.

L'étude du problème d'existence en présence de conditions aux limites de Neumann non homogènes est plus récente. En particulier, en présence de super-échange non biquadratique, l'existence de solutions a été prouvée par K. Hamdache et M. Tilioua [37] et [38]. Enfin, indépendamment de l'auteur [59], l'existence de solutions faibles a été prouvée en présence de super-échange biquadratique par K. Hamdache et D. Hamroun [36].

Nous allons d'abord décrire la géométrie sur laquelle nous traiterons le problème d'existence.

4.1 Notations géométriques

Dans cette section, nous précisons les notations nécessaires pour décrire la géométrie concernée, Figure 4.a. Nous adoptons les notations suivantes.

- L^+, L^- sont deux réels strictement positifs.
- ε la demi-épaisseur de l'espaceur, telle que $\varepsilon \ll \min(L^+, L^-)$.
- $\mathcal{I}_\varepsilon^+ = (\varepsilon, L^+)$, $\mathcal{I}_\varepsilon^- = (-L^-, -l)$, et $\mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{I}_\varepsilon^+ \cup \mathcal{I}_\varepsilon^-$.

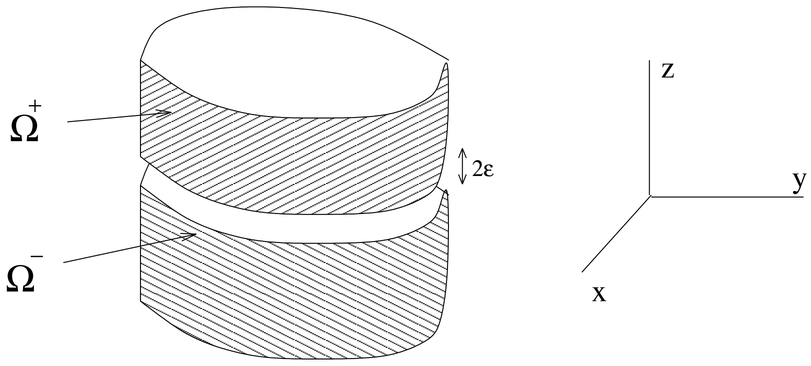


FIG. 4.a: Géométrie et notations

- B est un ouvert borné régulier à frontière lisse de $\mathbb{R}^2$.
- $\Omega^{+,\varepsilon} = B\times\mathcal{I}_\varepsilon^+$, $\Omega^{-,\varepsilon} = B\times\mathcal{I}_\varepsilon^-$ et $\Omega^\varepsilon = \Omega^{+,\varepsilon}\cup\Omega^{-,\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon < \min(L^-, L^+)/2$. Ω^ε est le domaine du corps ferromagnétique.
- $\Omega^+ = \Omega^{+,0}$, $\Omega^- = \Omega^{-,0}$ et $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$.
- $Q_T^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \times (0, T)$, pour tout ε positif inférieur à $\min(L^-, L^+)/2$, et $Q_T = \Omega \times (0, T)$.
- $\Gamma_\varepsilon^+ = B \times \{+\varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon^- = B \times \{-\varepsilon\}$ et $\Gamma_\varepsilon^\pm = \Gamma_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon^-$. Lorsque l'on omet ε, cela correspond à $\varepsilon = 0$.
- γ_ε^0 est l'application qui envoie $\boldsymbol{m}$ vers sa trace sur $\Gamma_\varepsilon^+ \cup \Gamma_\varepsilon^-$, voir le Théorème 5.3.1.
- $\gamma_\varepsilon^{0,\prime}$ est l'application de trace qui envoie $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma_\varepsilon^0(\boldsymbol{m}\circ\sigma)$ où σ est l'application qui envoie (x, y, z, t) sur $(x, y, -z, t)$. Formellement $\gamma_\varepsilon^{0,\prime}$ inverse les traces entre Γ_ε^+ et Γ_ε^-.
- Nous notons $\Gamma = B \times \{0\}$.
- Nous notons $\gamma_\varepsilon^{0,+}$ l'application de trace qui envoie $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma_0^0(\boldsymbol{m}\circ\tau_{-\varepsilon})$ sur Γ^+ où $\tau_{-\varepsilon}(x, y, z, t) = (x, y, z+\varepsilon, t)$, $\gamma_\varepsilon^{0,-}$ est l'application de trace envoyant $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma_0^0(\boldsymbol{m}\circ\tau_{+\varepsilon})$ sur Γ^-. Formellement, $\gamma_\varepsilon^{0,+}$ translate la trace qui se trouvait sur Γ_ε^+ de ϵ pour qu'elle se trouve sur Γ.
- $\boldsymbol{\nu}$ est la normale extérieure à la frontière du domaine considéré, en général Ω^ε ou Ω.
- γ_ε^1 est l'application de trace qui envoie $\boldsymbol{m}$ sur sa trace normale $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ sur $\Gamma_\varepsilon^\pm$, voir le Théorème 5.3.1.
- $\gamma_\varepsilon^{1,\prime}$ est l'application de trace envoyant $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma_\varepsilon^1(\boldsymbol{m}\circ\sigma)$,
- $\gamma_\varepsilon^{1,+}$ est l'application de trace envoyant $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma_0^1(\boldsymbol{m}\circ\tau_{-\varepsilon})$ sur Γ^+. $\gamma_\varepsilon^{1,-}$ est l'application envoyant $\boldsymbol{m}$ sur $\gamma_0^1(\boldsymbol{m}\circ\tau_\varepsilon)$ sur Γ^-.

4.2 Types de solutions pour le système de Landau-Lifchitz

Il existe plusieurs types de solutions au système Landau-Lifchitz. Nous appelons solution classique du système de Landau-Lifchitz, une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^\varepsilon} \times [0,+\infty);\mathbb{R}^3)$ qui vérifie ponctuellement (2.6.11).

Nous donnons maintenant une définition rigoureuse du concept de solution forte.

Définition 4.2.1. *Soit $T^* > 0$. Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega^\varepsilon)$. Soit $\boldsymbol{h}_{\rm ext}$ dans l'espace*[1] *$\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$. Soit Q_r^+, Q_r^- deux polynômes à deux variables $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On dit que $\boldsymbol{m}$ est une solution forte du système de Landau-Lifchitz avec conditions aux limites généralisées* (2.6.11) *si $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$, pour tout $T < T^*$, et vérifie*

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\rm ext}) - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\rm ext})) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times (0,T), \tag{4.2.1a}$$

$$|\boldsymbol{m}| = 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega^\varepsilon \times (0,T), \tag{4.2.1b}$$

$$\boldsymbol{m}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \tag{4.2.1c}$$

et les conditions aux limites

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma, \\ Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) & \text{sur } \Gamma^+, \\ Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \tag{4.2.1d}$$

où

$$Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) = Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) - (Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{m}) \gamma^0 \boldsymbol{m},$$
$$Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) = Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) - (Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{m}) \gamma^0 \boldsymbol{m},$$

et $\mathcal{H}_v$ a la forme définie dans (2.5.8).

Précisons enfin le concept de solutions faibles.

Définition 4.2.2. *Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, telle que $|\boldsymbol{m}_0| = 1$ p.p. dans Ω^ε, on dit que $\boldsymbol{m}$ est une solution faible du système de Landau-Lifchitz* (2.6.11) *dans le cas particulier des conditions aux limites* (2.6.8), *si*

(1) *Pour tout $T > 0$, $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$, et $|\boldsymbol{m}| = 1$ presque partout dans $\Omega^\varepsilon \times (0, \mathbb{R}^+)$.*

[1] L'espace $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ est un espace de Sobolev anisotrope défini à la section 5.3.

(2) Pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$,

$$\begin{aligned}
\iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \alpha \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
= (1+\alpha^2) A \iint_{Q_T^\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} \left(\boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
- (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
- (1+\alpha^2) K_s \iint_{\Gamma_\varepsilon^\pm \times (0,T)} (\boldsymbol{\nu} \cdot \gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m})(\gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
- (1+\alpha^2) J_1 \iint_{\Gamma_\varepsilon^\pm \times (0,T)} (\gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m} \wedge \gamma_\varepsilon^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
- 2(1+\alpha^2) J_2 \iint_{\Gamma_\varepsilon^\pm \times (0,T)} (\gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m} \cdot \gamma_\varepsilon^{0,\prime} \boldsymbol{m})(\gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m} \wedge \gamma_\varepsilon^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

(3) $\boldsymbol{m}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0$ au sens des traces.

(4) Pour tout $T > 0$,

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{m}(\cdot, T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left|\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \mathrm{E}(\boldsymbol{m}_0), \tag{4.2.3}$$

où l'énergie E est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) &= \mathrm{E}_v(\boldsymbol{u}) + \mathrm{E}_s(\boldsymbol{u}), \\
\mathrm{E}_v(\boldsymbol{u}) &= \frac{A}{2} \|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{1}{2} \|\mathcal{H}_d(\boldsymbol{u})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}, \\
\mathrm{E}_s(\boldsymbol{u}) &= \frac{K_s}{2} \int_{\Gamma_\varepsilon^\pm} (1 - (\gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu})^2) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\quad + J_1 \int_\Gamma (1 - \gamma_\varepsilon^{0,+} \boldsymbol{u} \cdot \gamma_\varepsilon^{0,-} \boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\quad + J_2 \int_\Gamma (1 - (\gamma_\varepsilon^{0,+} \boldsymbol{u} \cdot \gamma_\varepsilon^{0,-} \boldsymbol{u})^2) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.2.3) est appelée inégalité d'énergie, nous remarquons en particulier qu'elle garantit, qu'en tout temps, l'énergie E est inférieure à l'énergie initiale. Il est facile de vérifier que toute solution classique du système de Landau-Lifchitz est solution forte et que toute solution forte est solution faible du système. Réciproquement, toute solution faible de classe $\mathcal{C}^\infty$ est solution classique.

4.3 Plan

D'abord, nous rappelons les définitions et les propriétés importantes des espaces de Sobolev, chapitre 5, dont nous avons besoin pour prouver nos théorèmes d'existence. Puis nous établissons l'existence de solutions faibles globalement en temps au chapitre 6. Enfin, l'existence de solutions fortes est démontrée localement en temps au chapitre 7.

Chapitre 5

Quelques propriétés des espaces de Sobolev

Nous rappelons dans le présent chapitre quelques propriétés des espaces de Sobolev qui seront nécessaires pour établir nos théorèmes d'existence. La plupart des propriétés énoncées dans ce chapitre sont classiques si $\mathcal{O}$ est un ouvert suffisamment régulier. Nous précisons les hypothèses de régularité nécessaires. Dans tout ce chapitre, nous travaillons en dimension $n = 3$.

Notation 5.0.1. Dans ce chapitre, $\mathcal{O}$ sera toujours, sauf indication contraire, un ouvert borné d'un des trois types suivants :

(1) Un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(2) Un ouvert de type $B \times I$ où B est un ouvert borné convexe à frontière lisse de $\mathbb{R}^2$, et I un intervalle borné.

(3) Une union finie et disjointe d'ouverts des deux types précédents. Dans ce dernier cas, il suffit de faire toutes les preuves pour chaque composante connexe.

5.1 Définition des espaces de Sobolev

Dans cette section, nous rappelons la définition des espaces de Sobolev [1].

Définition 5.1.1. *Soit n un entier naturel non nul. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit m un entier naturel, et $1 \leq p \leq +\infty$. Nous définissons $\mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O})$ comme l'ensemble des distributions u telles que pour tout multi-indice α d'ordre inférieur ou égal m, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ appartient à $\mathrm{L}^p(\mathcal{O})$. Nous notons*

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O})} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \mathrm{D}^\alpha u \|^p_{\mathrm{L}^p(\mathcal{O})} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Il existe plusieurs manières de généraliser la définition à des m non entiers. Nous utilisons la définition suivante basée sur une norme intrinsèque, [1] chapitre 8, théorème 7.48.

Définition 5.1.2 (Espaces de Sobolev). *Soit $s = m + \sigma$, m entier et $0 < \sigma < 1$. Nous définissons $\mathrm{W}^{s,p}(\mathcal{O})$ comme l'ensemble des éléments u de $\mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O})$ dont la norme suivante est finie :*

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{s,p}(\mathcal{O})} = \|u\|_{\mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O})} + \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} \frac{|\,\mathrm{D}^\alpha u(\boldsymbol{x}) - \mathrm{D}^\alpha u(\boldsymbol{y})|^p}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+\sigma p}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\|u\|_{\mathrm{W}^{s,p}(\mathcal{O})}$ est la norme associée à $\mathrm{W}^{s,p}(\mathcal{O})$.

Pour tout s réel positif, nous posons $\mathrm{H}^s(\mathcal{O}) = \mathrm{W}^{s,2}(\mathcal{O})$. Nous définissons aussi $\mathbb{W}^{s,p}(\mathcal{O}) = \mathrm{W}^{s,p}(\mathcal{O};\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{H}^s(\mathcal{O}) = \mathrm{H}^s(\mathcal{O};\mathbb{R}^3)$. Nous notons également, pour $s > \frac{3}{2}$,

$$\widetilde{\mathrm{H}}^s(\mathcal{O}) = \left\{u \in \mathrm{H}^s(\mathcal{O}), \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\right\}. \tag{5.1.1}$$

Nous donnons à présent la définition des espaces H^s_0 et H^s_{00}.

Définition 5.1.3. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné, soit $s > 0$. $\mathrm{H}^s_0(\mathcal{O})$ est la fermeture de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{O})$ dans $\mathrm{H}^s(\mathcal{O})$. $\mathrm{H}^s_{00}(\mathcal{O})$ est le sous espace de $\mathrm{H}^s_0(\mathcal{O})$ constitué des fonctions g vérifiant,*

$$\sum_{|\alpha|<s-\frac{1}{2}} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\,\mathrm{D}^\alpha g(\boldsymbol{x})|^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\rho(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < +\infty,$$

où $\rho(\boldsymbol{x}) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\mathcal{O})$. La norme de $\mathrm{H}^s_{00}(\mathcal{O})$ est donnée par

$$\|g\|_{\mathrm{H}^s_{00}(\mathcal{O})} = \|g\|_{\mathrm{H}^s_0(\mathcal{O})} + \left(\sum_{|\alpha|<s-\frac{1}{2}} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\,\mathrm{D}^\alpha g(\boldsymbol{x})|^2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\rho(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

Les espaces H^s_{00} ont été définis par Lions-Magenes [51]. Il ne diffèrent de H^s_0 que pour $s = m + \frac{1}{2}$, m entier.

Nous aloons maintenant définir une classe d'ouverts plus large que celle des bornés à frontière lisse. Les propriétés habituelles des espaces de Sobolev seront assurées pour ces domaines, voir [1], section 4.3.

Définition 5.1.4. *On appelle cône C (Figure 5.a), tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe $\mathbb{B}_0$ boule centrée autour de 0, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{B}_1$ une boule centrée sur $\boldsymbol{x}$ telle que*

$$C = \mathbb{B}_0 \cap \mathbb{R}\mathbb{B}_1.$$

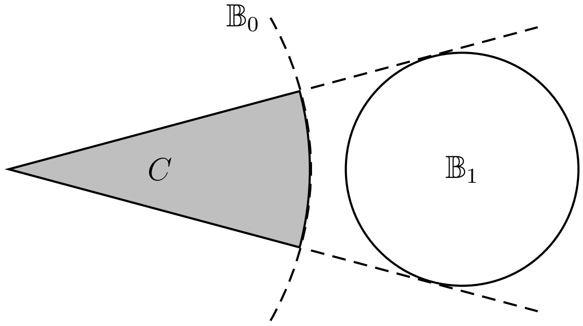


FIG. 5.a: Cône

Définition 5.1.5. *Un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit avoir la propriété du cône si il existe un cône C tel que pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{O}$, il existe une rotation $\mathbf{R}$ telle que*

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{R}C \subset \mathcal{O}. \tag{5.1.2}$$

La propriété du cône suffit en général pour que des propriétés importantes des espaces de Sobolev soient vérifiées, telles les injections de Sobolev, [1] théorème 5.4, p.97. Les ouverts $\mathcal{O}$ que nous considérons dans ce chapitre vérifient la propriété du cône. Nous rappelons le théorème d'injections de Sobolev.

Théorème 5.1.6 (Injections de Sobolev)**.** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la propriété du cône, alors pour tout m entier naturel, $p \geq 1$, nous avons les injections continues suivantes :*

Cas A *Si $mp < n$, alors*

$$\mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O}) \subset \mathrm{L}^q(\mathcal{O}) \quad \textit{pour } p \leq q \leq q_0,$$

où $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$. De plus, si $\mathcal{O}$ est borné, alors l'injection est compacte pour $p \leq q < q_0$.

cas B *Si $mp = n$, alors*

$$\mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O}) \subset \mathrm{L}^q(\mathcal{O}) \quad \textit{pour } p \leq q < +\infty.$$

Les constantes d'injections dépendent du cône, de p, n et de m.

PREUVE *:* Voir [1] théorème 5.4, p.97 et théorème 6.2, p. 144. □

Lemme 5.1.7. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert satisfaisant l'une des trois propriétés de la notation 5.0.1. Soit u dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$, alors $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O})$ et il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O})} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^1(\mathcal{O})}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})}^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, si nous notons $C(L)$ la plus petite constante pour l'ouvert $B \times (0, L)$, nous avons

$$\sup_{L_0 \leq L \leq L_1} C(L) < +\infty,$$

pour tous réels L_0, L_1, tels que $0 < L_0 < L_1$.

Preuve : Cette propriété est vraie pour tout ouvert de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant la propriété du cône, voir Maz'ya [53], page 274. $\square$

Lemme 5.1.8 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert satisfaisant l'une des trois propriétés de la notation 5.0.1. ALors, il existe $C > 0$ telle que*

$$\|\nabla v\|_{\mathbb{L}^4(\mathcal{O})} \leq C \|v\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O})} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})},$$

pour tout v dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$. De plus, si nous notons $C(L)$ la plus petite constante pour l'ouvert $B \times (0, L)$, nous avons

$$\sup_{L_0 \leq L \leq L_1} C(L) < +\infty,$$

pour tous réels L_0, L_1, tels que $0 < L_0 < L_1$.

Preuve : Comme $\mathcal{O}$ vérifie la propriété du cône, l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg est vérifiée. Voir Maz'ya [53], page 69-70. $\square$

5.2 Régularité elliptique : rappels

Pour les estimations que nous utiliserons dans cette thèse, nous avons besoin de quelques résultats classiques de régularité elliptique.

Proposition 5.2.1 (Régularité elliptique)**.** *Soit B un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. L'espace*

$$\left\{ v \in \mathrm{H}^1(\mathcal{O}) \mid \triangle v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}), \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \textit{ sur } \partial\mathcal{O} \right\},$$

est égal algébriquement et topologiquement à $\widetilde{\mathrm{H}}^2(\mathcal{O})$. Il existe une constante $C > 0$, indépendante de L et de B, telle que, pour tout v dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$,

$$\|v\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})} \leq C \left(\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \|\triangle v\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} \right). \tag{5.2.1a}$$

Preuve : L'ouvert $\mathcal{O}$ est convexe. Il y a donc régularité elliptique, voir Grisvard [29] théorèmes 3.1.2.3 et 3.2.1.3. La constante C est indépendante du domaine tant qu'il est convexe. $\square$

Nous souhaitons avoir des résultats de régularité avec des conditions de Neumann plus générales. Cela demande des résultats de relèvement. Nous définissons

Définition 5.2.2. *Soit m entier plus grand que 1. Nous définissons $\mathrm{H}^{m-\frac{1}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial\mathcal{O})$ comme le sous ensemble de $\mathrm{L}^2(\partial\mathcal{O})$ constitué des éléments dont les restrictions à $\partial B \times (0, L)$, $B \times \{0\}$ et $B \times \{L\}$ appartiennent à $\mathrm{H}^{m-\frac{1}{2}}$.*

Lemme 5.2.3. *Soit B un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$, à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. Soit γ^1 l'application de trace qui envoie $\boldsymbol{m}$ sur $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$. Alors,*

$$\gamma^1(\mathrm{H}^2(\mathcal{O})) = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial\mathcal{O}).$$

Preuve : Par carte locale et partition de l'unité, nous nous ramenons sur le demi-espace et pouvons nous contenter d'examiner la surjectivité de

$$\begin{aligned} \gamma^1 : \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_z^+) &\to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^+) \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^+), \\ \boldsymbol{u} &\mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, 0, \cdot), \frac{\partial u}{\partial z}(\cdot, \cdot, 0)\right), \end{aligned}$$

Il faut démontrer qu'aucune condition de raccord entre ces traces n'est nécessaire. Nous définissons

$$\begin{aligned} \gamma^0 : \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_z^+) &\to \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^+) \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_z^+) \\ \boldsymbol{u} &\mapsto (u(\cdot, 0, \cdot), u(\cdot, \cdot, 0)) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 2.3, chapitre 4 présenté dans Lions-Magenes [51], et reproduit en Annexe au théorème A.1.5, on déduit que le quadruplet (f_0, f_1, g_0, g_1) est dans l'image de $\mathrm{H}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ par γ^0, γ^1 si et seulement si

(1) Les traces f_0 et g_0 appartiennent à $\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$,

(2) Les traces normales g_0 et g_1 appartiennent à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$,

(3) La relation $f_0(\cdot, 0) = g_0(\cdot, 0)$ est vérifiée sur $\mathbb{R}$,

(4) Les quantités

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} |g_1(\boldsymbol{x}, \sigma) - \partial_y f_0(\boldsymbol{x}, \sigma)|^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} |f_1(\boldsymbol{x}, \sigma) - \partial_z g_0(\boldsymbol{x}, \sigma)|^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

sont finies.

Remarquons qu'aucune relation de compatibilité directe entre f_1 et g_1 n'existe. Pour en déduire le résultat escompté, il ne reste plus qu'à construire f_0 et g_0 de manière à ce que le quadruplet (f_0, f_1, g_0, g_1) satisfasse toutes les relations de compatibilité. Soit f_1, g_1 dans $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^\times\mathbb{R}^+)$. Nous définissons g_0 par

$$\widehat{g_0}(\xi, y) = \chi(y\sqrt{1+|\xi|^2}) \int_0^y \widehat{f_1}(\xi, z)\,\mathrm{d}z,$$

où χ est une fonction lisse vérifiant $0 \leq \chi \leq 1$, à support $\mathrm{Supp}(\chi)$ inclus dans $[0, 2]$, et $\chi = 1$ dans $[0, 1]$. Nous construisons f_0 de manière analogue et le quadruplet (f_0, f_1, g_0, g_1) satisfait toutes les relations de compatibilités requises. C'est vérifié par la proposition A.4.1. γ^1 est donc surjective. Tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert admet un supplémentaire topologique, donc il existe un relèvement continu. □

Remarquons, *a posteriori*, que pour les ouverts cylindriques, les résultats de relèvement sont plus compliqués que pour le cas classique des ouverts à frontière lisse. En effet, $\gamma^0(\mathrm{H}^1(\mathcal{O})) \neq \gamma^1(\mathrm{H}^2(\mathcal{O}))$, lorsque γ^0 est l'application de trace, et γ^1, l'application de trace normale. Nous pouvons déjà déduire de ce théorème de relèvement le résultat suivant.

Remarque 5.2.4. Le résultat vaut aussi pour le cas vectoriel. En effet,

$$\gamma^1(\mathbb{H}^2(\mathcal{O})) = \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial\mathcal{O}).$$

Corollaire 5.2.5. *Soit B un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. L'espace*

$$\left\{ v \in \mathrm{H}^1(\mathcal{O}) \mid \triangle v \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}), \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial\mathcal{O}) \right\},$$

est égal à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$ et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout v dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$,

$$\|v\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{O})} \leq C \left(\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \|\triangle v\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial\mathcal{O})} \right). \tag{5.2.1b}$$

De plus, si on note $C(L)$ la meilleure constante d'injection pour l'ouvert $B \times (0, L)$, nous avons pour tous réels L_0, L_1 tels que $0 < L_0 < L_1$,

$$\sup_{L_0 \leq L \leq L_1} C(L) < +\infty.$$

Preuve : Utilisant le lemme 5.2.3 sur $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$, nous obtenons l'existence de f dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$, telle que $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$. Donc, $u - f$ vérifie alors la proposition 5.2.1. Donc $u - f$ appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$. □

Le lemme suivant, établi dans [22], est la base qui nous permettra de déduire des théorèmes de régularité supérieure.

Lemme 5.2.6. *Soit B un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. Nous posons,*

$$X(\mathcal{O}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}), \operatorname{div} \boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}), \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}), \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\}.$$

Alors, si $\boldsymbol{u}$ appartient à $X(\mathcal{O})$, $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$, et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\boldsymbol{u}$, dans $X(\mathcal{O})$,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^1(\mathcal{O})} \leq C \left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} \right). \tag{5.2.1c}$$

Nous avons donc l'égalité topologique et algébrique :

$$X(\mathcal{O}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1(\mathcal{O}), \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\}.$$

Si nous notons $C(L)$ la meilleure constante pour l'ouvert $B \times (0, L)$, nous avons pour tous réels L_0, L_1 tels que $0 < L_0 < L_1$,

$$\sup_{L_0 \leq L \leq L_1} C(L) < +\infty.$$

Preuve : Ce résultat est classique pour les ouverts bornés avec frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$, voir [22] théorème 6.1, p.354. Si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ sur la frontière et si $\mathcal{O}_2$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$, nous avons l'égalité *a priori* :

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O}_2)} + \|\operatorname{div}(\boldsymbol{u})\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O}_2)} + \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{u})\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O}_2)} \\ &\qquad = \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{H}^1(\mathcal{O}_2)} - \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\mathcal{O}_2} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_j) \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s_j} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ représente une base au plan tangent à la frontière et s_i, s_j représente les composantes associées à cette base. Mais la forme quadratique

$$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \mapsto \sum_{i,j=1}^{2} \xi_i \nu_j \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s_j} \cdot \boldsymbol{\tau}_i,$$

est négative si $\mathcal{O}_2$ est convexe, voir [29, p.133 et p.141]. Donc, pour un ouvert convexe borné avec frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous pouvons choisir 1 pour constante dans (5.2.1c).

Nous généralisons ce résultat aux domaines cylindriques avec une frontière latérale de classe $\mathcal{C}^\infty$ de type $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. Si l'on note $\boldsymbol{u} = [u_x, u_y, u_z]$ dans $X(\mathcal{O})$, nous définissons

$$\overline{\boldsymbol{u}}(x, y, z) = \begin{cases} [u_x, u_y, -u_z]\,(x, y, 2L - z) & \text{dans } B \times (L, 2L), \\ [u_x, u_y, u_z]\,(x, y, z) & \text{dans } B \times (0, L), \\ [u_x, u_y, -u_z]\,(x, y, -z) & \text{dans } B \times (-L, 0). \end{cases}$$

Donc $\overline{\boldsymbol{u}}$ appartient à $X(B \times (-L, 2L))$. Soit χ une fonction réelle $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ telle que

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{sur } \left(-\frac{1}{4}L, \frac{5}{4}L\right), \\ 0 & \text{sur } \complement \left(-\frac{1}{2}L, \frac{3}{2}L\right). \end{cases}$$

Il existe un ouvert borné convexe $\mathcal{O}_2$ avec une frontière lisse telle que $B \times \left(-\frac{1}{2}L, \frac{3}{2}L\right) \subset \mathcal{O}_2 \subset B \times (-L, 2L)$. Donc, $\boldsymbol{x} \mapsto \chi(z)\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ appartient à $X(\mathcal{O}_2)$. Nous appliquons le résultat déjà connu sur $\mathcal{O}_2$. $\chi\overline{\boldsymbol{u}}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O}_2)$. Sa restriction $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$. La constante ne dépend que de la constante d'injection de $\mathcal{O}_2$ et des normes L^∞ de χ, χ'. La meilleure constante d'injection dans (5.2.1c) pour l'ouvert $\mathcal{O}_2$ est inférieure à 1 car $\mathcal{O}_2$ est convexe. Les fonctions χ peuvent être choisies pour que les normes L^∞ de χ et χ' soient uniformément bornées en L lorsque L appartient à $[L_0, L_1]$. □

Nous cherchons maintenant à généraliser le lemme précédent. Le théorème suivant fut prouvé par C. Foias et R. Temam [23], pour $\mathcal{O}$ ouvert borné à frontière lisse. Nous généralisons ce théorème à d'autres types d'ouverts, en modifiant légèrement sa preuve.

Théorème 5.2.7. *Soit B un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. Soit $m \geq 1$. Soit*

$$X^m(\mathcal{O}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}), \operatorname{div} \boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^{m-1}(\mathcal{O}), \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^{m-1}(\mathcal{O}), \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \in \mathrm{H}^{m-\frac{1}{2}}_{\text{morc}}(\partial\mathcal{O})\}.$$

Alors, $X^m(\mathcal{O}) = \mathbb{H}^m(\mathcal{O})$, et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^m(\mathcal{O})} \leq C \left(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|_{\mathrm{H}^{m-1}(\mathcal{O})} + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^{m-1}(\mathcal{O})} + \|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{\mathrm{H}^{m-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{O})} \right).$$

De plus, notant $C(L)$ la constante pour l'ouvert $B \times (0, L)$, nous avons, pour tous réels L_0, L_1 tels que $0 < L_0 < L_1$,

$$\sup_{L_0 L \leq L_1} C(L) < +\infty.$$

Preuve : Nous procédons par récurrence sur m.

(1) Soit $m = 1$. Soit G le sous-espace fermé de $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ dont les éléments sont des gradients de fonctions de $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$. L'orthogonal de G est $\mathrm{HD} = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}), \operatorname{div}(\boldsymbol{f}) = 0, \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\}$. Soit $\boldsymbol{u}$ dans $X^1(\mathcal{O})$, et ∇p la projection orthogonale de $\boldsymbol{u}$ sur G. Alors, p est caractérisée par

$$\triangle\, p = \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) \text{ dans } \mathcal{O},$$
$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \text{ dans } \partial\mathcal{O}.$$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$ appartient à $\gamma^1(\mathrm{H}^2(\mathcal{O}))$. D'après la régularité elliptique, p appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{O})$. De plus, $\boldsymbol{u} - \nabla p$ satisfait aux hypothèses du lemme 5.2.6. Donc, $\boldsymbol{u} - \nabla p$ appartient à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$, donc $\boldsymbol{u}$ appartient aussi à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$.

(2) Soit $m > 1$. Supposons que le théorème est vrai pour $m - 1$. Par l'hypothèse de récurrence. $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{H}^{m-1}(\mathcal{O})$. Soit D^{m-1} un opérateur différentiel d'ordre $m - 1$. Alors, $\boldsymbol{v} = \mathrm{D}^{m-1}\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$, $\mathrm{div}(\boldsymbol{v})$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, et $\mathbf{rot}(\boldsymbol{v})$ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$. De plus,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathrm{D}^{m-1}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{D}^i \boldsymbol{\nu}\, \mathrm{D}^{m-1-i} \boldsymbol{u} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial \mathcal{O}).$$

Donc, $\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$, et en conséquence $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{H}^m(\mathcal{O})$. □

Comme corollaire classique, nous avons

Corollaire 5.2.8. *Soit B un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. Soit $m \geq 1$. L'ensemble*

$$\left\{ v \in \mathrm{H}^1(\mathcal{O}), \triangle v \in \mathrm{H}^{m-1}(\mathcal{O}), \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \textit{ sur } \partial \mathcal{O} \right\},$$

est égal algébriquement et topologiquement à $\widetilde{\mathrm{H}}^{m+1}(\mathcal{O})$. De plus, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de $\mathcal{O}$, telle que

$$\|v\|_{\mathrm{H}^{m+1}(\mathcal{O})} \leq C \left(\|v\|_{\mathrm{L}^2} + \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2} + \|\triangle v\|_{\mathrm{H}^{m-1}} \right).$$

De plus, notant $C(L)$ la constante pour l'ouvert $B \times (0, L)$, nous avons pour tous réels L_0, L_1 tels que $0 < L_0 < L_1$,

$$\sup_{L_0 \leq L \leq L_1} C(L) < +\infty.$$

Preuve : C'est une conséquence évidente du Théorème 5.2.7 appliqué à ∇v. □

Corollaire 5.2.9. *Soit B un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. Les fonctions propres du laplacien dans $\mathcal{O}$ avec conditions de bord de Neumann homogènes appartiennent à $\mathbb{H}^m(\mathcal{O})$ pour tout $m \geq 0$ et donc à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}})$.*

Preuve : C'est une conséquence du corollaire 5.2.8. □

Proposition 5.2.10. *Soit B un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\mathcal{O} = B \times (0, L)$. L'espace*

$$\left\{ v \in \mathrm{H}^1(\mathcal{O}), \nabla \triangle v \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}), \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \in \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{morc}}(\partial \mathcal{O}) \right\},$$

est égal à $\mathrm{H}^3(\mathcal{O})$*. De plus, il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* v *dans* $\mathrm{H}^3(\mathcal{O})$*, on ait*

$$\|v\|_{\mathrm{H}^3(\mathcal{O})} \leq C\left(\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \|\nabla \triangle v\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} + \left\|\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|_{\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\mathcal{O})}\right). \tag{5.2.1d}$$

Preuve *:* C'est une conséquence évidente du Théorème 5.2.7 appliqué à ∇v. □

En particulier, pour v vérifiant les conditions de Neumann homogènes, nous déduisons de la proposition 5.2.10 le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.11. *Soit* B *un ouvert borné convexe de* $\mathbb{R}^2$ *à frontière* $\mathcal{C}^\infty$*. Soit* $\mathcal{O} = B \times (0, L)$ *Si* v *appartient à* $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$*, et si* $\nabla \triangle v$ *appartient à* $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$*, et* $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ *sur* $\partial\mathcal{O}$*, alors* v *appartient à* $\mathrm{H}^3(\mathcal{O})$ *et*

$$\|v\|_{\mathrm{H}^3(\mathcal{O})} \leq C\left(\|v\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \|\nabla \triangle v\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}\right). \tag{5.2.2}$$

5.3 Espaces de Sobolev anisotropes

Comme dans Lions-Magenes [51], nous définissons les espaces de Sobolev anisotropes.

$$\mathrm{H}^{s_1,s_2}(\mathcal{O} \times (0,T)) = \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{s_1}(\mathcal{O})) \cap \mathrm{H}^{s_2}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O})). \tag{5.3.1}$$

et

$$\mathbb{H}^{s_1,s_2}(\mathcal{O} \times (0,T)) = \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^{s_1}(\mathcal{O})) \cap \mathrm{H}^{s_2}(0,T;\mathbb{L}^2(\mathcal{O})) = (\mathrm{H}^{s_1,s_2}(\mathcal{O} \times (0,T)))^3.$$

En particulier, nous ferons un usage important des espaces $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O} \times (0,T))$ et $\mathbb{H}^{2,1}(\mathcal{O} \times (0,T))$.

Nous commençons par rappeler les théorèmes de traces sur les espaces de Sobolev anisotropes. Rappelons que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O} \times (0,T)})$ est dense dans $\mathrm{H}^{r,s}(\mathcal{O} \times (0,T))$. Nous définissons donc les traces par densité.

Théorème 5.3.1 (Théorème de trace)**.** *Soit* $\mathcal{O}$ *un ouvert borné, à frontière* $\mathcal{C}^\infty$*. Soit* u *dans* $\mathrm{H}^{r,s}(\mathcal{O} \times (0,T))$*. Alors, on peut définir pour tout entier naturel* $j < r - \frac{1}{2}$*,* $\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}$ *sur* $\partial\mathcal{O} \times (0,T)$*, avec*

$$\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} \in \mathrm{H}^{\mu_j,\nu_j}(\partial\mathcal{O} \times (0,T)), \tag{5.3.2}$$

où

$$\frac{p_k}{r} = \frac{s - k - \frac{1}{2}}{s}$$

De même, on peut définir pour tout entier naturel $k < s - \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ sur $\mathcal{O} \times \{0\}$, avec

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in \mathrm{H}^{p_k}(\mathcal{O} \times \{0\}), \tag{5.3.3}$$

où

$$\frac{\mu_j}{r} = \frac{\nu_j}{s} = \frac{r - j - \frac{1}{2}}{r}.$$

Preuve : Voir Lions-Magenes [51], chapitre 4, théorème 2.1. □

Nous donnons alors des résultats de compacité sur les espaces $\mathrm{H}^{r,t}$.

Proposition 5.3.2. *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné satisfaisant la propriété du cône. Soient r, s deux réels positifs, alors pour tous réels p, q positifs telle que $0 \leq p < r$ et $0 \leq q < s$, l'injection de $\mathrm{H}^{r,s}(\mathcal{O} \times (0,T))$ dans $\mathrm{H}^{p,q}(\mathcal{O} \times (0,T))$ est compacte.*

Preuve : L'injection de $\mathrm{H}^{r,s}(\mathcal{O} \times (0,T))$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ est compacte, Théorème 5.1.6. Nous concluons grâce à J.L. Lions et E. Magenes [51, proposition 2.1, p.9, chap.4] et J. Bergh et J. Lofström [10, corollaire 3.8.2]. □

Lemme 5.3.3. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné satisfaisant la propriété du cône. L'espace $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O} \times (0,T))$ est inclus dans $\mathcal{C}^0(0,T;\mathrm{H}^2(\mathcal{O}))$ et l'injection est continue.*

Preuve : Il s'agit d'une application immédiate de [52, th. 3.1, chap. 1, p.23]. □

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.4. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné satisfaisant la propriété du cône. L'espace $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O} \times (0,T))$ est inclus dans $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O} \times (0,T))$ et l'injection est continue : il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de $\mathcal{O}$ et de T telle que, pour tout u dans $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O} \times (0,T))$, on ait*

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))}. \tag{5.3.4}$$

Preuve : D'après le théorème 5.1.6, l'injection de $\mathbb{H}^2(\mathcal{O})$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O})$ est continue. □

Lemme 5.3.5. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné satisfaisant la propriété du cône. L'espace $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O} \times (0,T))$ est une algèbre. Il existe $C > 0$ telle que pour tout u et v dans $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O} \times (0,T))$,*

$$\|uv\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))}\|v\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))} \tag{5.3.5}$$

où C ne dépend que de $\mathcal{O}$ et de $T > 0$.

Preuve : $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}\times(0,T)})$ est dense dans $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$. Il suffit de vérifier l'inégalité (5.3.5) pour tout u, v dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}\times(0,T)})$. Tout d'abord, d'après le corollaire 5.3.4, la norme $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ de uv, de $\nabla uv = u\nabla v + v\nabla u$, de $\frac{\partial uv}{\partial t} = v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t}$ est bornée par $C\|u\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))}\|v\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))}$. Les normes $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ de $\mathrm{D}^2uv = u\,\mathrm{D}^2v + 2\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v + v\,\mathrm{D}^2u$ et $\mathrm{D}^3uv = u\,\mathrm{D}^3v + 3\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}^2v + 3\,\mathrm{D}v\,\mathrm{D}^2u + v\,\mathrm{D}^3u$ sont bornées de la même façon car l'opérateur de dérivation D est continu de $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$ dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))\cap\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}))$ et l'opérateur de dérivation D^2 est continu de $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$ dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))$. Il reste à prouver que si u, v appartiennent à $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$, alors $\frac{\partial u}{\partial t}v + u\frac{\partial v}{\partial t}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))$. Il suffit de prouver que si a appartient à $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$, et b appartient à $\mathrm{H}^{1,\frac{1}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$, alors ab appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))$. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^T \frac{\|a(\tau)b(\tau)-a(\sigma)b(\sigma)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}}{|\tau-\sigma|^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma \\ \leq 2\|a\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}\times(0,T))} \underbrace{\int_0^T\int_0^T \frac{\|b(\tau)-b(\sigma)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})}}{|\tau-\sigma|^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma}_{I} \\ + 2\underbrace{\int_0^T\int_0^T \frac{\|b(\sigma)\,(a(\tau)-a(\sigma))\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})}}{|\tau-\sigma|^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma}_{II}.\end{aligned}$$

Le terme I est borné par $\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}\times(0,T))}\|a\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))}$. Le terme II est plus difficile à traiter car b n'appartient pas forcément à $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))$. Nous avons par contre, pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$,

$$II \leq \|b\|^2_{\mathrm{L}^p(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))}\left|\int_0^T \frac{\|a(\tau)-a(\sigma)\|^q_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O})}}{|\tau-\sigma|^q}\right|^{\frac{2}{q}}.$$

Donc, II est borné par $\|b\|^2_{\mathrm{L}^p(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O}))}\|a\|^2_{\mathrm{W}^{1-\frac{1}{q},q}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}))}$. De plus, pour $\eta>0$, par interpolation, nous avons

$$\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))\subset\mathrm{H}^{\frac{3}{4}-\eta}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O})),$$

avec injection continue. Donc, a appartient à $\mathrm{W}^{2,\frac{3}{4}-\eta}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}))$ pour $\eta>0$. Par injection de Sobolev, a appartient donc à $\mathrm{W}^{s,q}(0,T;\mathrm{L}^\infty(\mathcal{O}))$, pour tous réels s, q, $\frac{1}{4}<s<\frac{3}{4}$, $2<q<\frac{1}{s-\frac{1}{4}}$, voir Adams [1, pp.218 théorème 7.58]. Il existe des valeurs q et s satisfaisant de telles conditions —on peut prendre, par exemple, $q=\frac{16}{7}$, et $s=1-\frac{1}{q}=\frac{9}{16}$. $\square$

Lemme 5.3.6. *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné satisfaisant la propriété du cône. Soit u dans $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))$ et v dans $\mathrm{H}^{2,1}(\mathcal{O}\times(0,T))$ alors uv appartient à $\mathrm{H}^{2,1}(\mathcal{O}\times(0,T))$ et*

$$\|uv\|_{\mathrm{H}^{2,1}(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}\times(0,T))}\|v\|_{\mathrm{H}^{2,1}(\mathcal{O}\times(0,T))}.$$

Preuve *:* Nous procédons comme pour la preuve du lemme 5.3.5, sans les complications dues aux espaces de Sobolev fractionnaires. □

5.4 Quelques résultats supplémentaires

Nous aurons aussi besoin de quelques résultats assurant la compacité forte de sous-ensembles des espaces L^p à valeurs vectorielles.

Lemme 5.4.1 (Lemme d'Aubin)**.** *Soit p, $1 \leq p < +\infty$. Soit E un espace de Banach. Soient X, Y des espaces de Banach tels que $X \subset E \subseteq Y$. Nous supposons que l'injection de X dans E est compacte. Soit F un sous-ensemble de $\mathrm{L}^p(0,T;E)$. Supposons que F soit borné dans $\mathrm{L}^p(0,T;X)$, et que l'ensemble $\{\partial_t f, f \in F\}$ soit borné dans $\mathrm{L}^p(0,T;Y)$, alors F est compacte dans $\mathrm{L}^p(0,T;E)$.*

Preuve *:* Voir J. Simon [60]. □

Enfin, le lemme suivant permettra de récupérer la régularité $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$ en temps en réutilisant l'équation de Landau-Lifchitz et la régularité $\mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{H}^1(\mathcal{O}))\cap\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\mathcal{O}))$ de la solution.

Lemme 5.4.2. *Soit $T > 0$. Soient X, Y, Z trois espaces de Banach. Si A est un opérateur bilinéaire continu des espaces X, Y dans l'espace Z, alors l'opérateur A est bilinéaire continu de $\big((\mathrm{L}^\infty\cap\mathrm{H}^{\frac{1}{2}})(0,T;X), (\mathrm{L}^\infty\cap\mathrm{H}^{\frac{1}{2}})(0,T;Y)\big)$ dans $(\mathrm{L}^\infty\cap\mathrm{H}^{\frac{1}{2}})(0,T;Z)$.*

Preuve *:* Rappelons qu'une norme équivalente à la norme $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(0,T;X)$ est :

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(0,T;X)} + \left(\int_0^T\int_0^T \frac{\|u(\tau)-u(\sigma)\|_X^2}{|\tau-\sigma|^2}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\right)^2.$$

Voir Lions-Magenes [52], chapitre 1, théorème 10.2, formule (10.22). Soient u, v appartenant respectivement à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,T;X)$ et à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,T;Y)$.

$$\|A(u,v)\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;Z)} \leq \|A\|\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;X)}\|v\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;Y)},$$
$$\|A(u,v)\|_{\mathrm{L}^2(0,T;Z)} \leq \|A\|\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;X)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(0,T;Y)},$$

et

$$\left(\int_0^T \int_0^T \frac{\|A(u(\tau), v(\tau)) - A(u(\sigma), v(\sigma))\|_Z^2}{|\tau - \sigma|^2} \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \|A\| \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;X)} \left(\int_0^T \int_0^T \frac{\|v(\tau) - v(\sigma)\|_Y^2}{|\tau - \sigma|^2} \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \|A\| \|v\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;Y)} \left(\int_0^T \frac{\|u(\tau) - u(\sigma)\|_X^2}{|\tau - \sigma|^2} \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Chapitre 6

Les solutions faibles du système de Landau-Lifchitz en présence de super-échange et d'anisotropie surfacique

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existence de solutions faibles pour l'équation de Landau-Lifchitz en présence d'interactions surfaciques telles que le super-échange et l'anisotropie surfacique. Ces solutions existent en temps infini mais ne sont malheureusement pas uniques. L'existence de telles solutions a été prouvée par F. Alouges et A. Soyeur [6] en la seule présence de l'interaction d'échange. S. Labbé [43] a généralisé le résultat en rajoutant les termes Zeeman, de champ démagnétisant et d'anisotropie. La difficulté est la contrainte non convexe $|\boldsymbol{m}| = 1$. Pour surmonter cette difficulté, ces auteurs ont introduit un problème pénalisé pour lequel on prouve l'existence de solutions par la méthode de Galerkin. K. Hamdache et M. Tilioua [37] ont prouvé l'existence de solutions faibles en présence d'anisotropie surfacique, et en présence de super-échange non biquadratique [38] grâce un choix judicieux de la base de Galerkin. Malheureusement, cette méthode ne convient pas si le terme surfacique est fondamentalement non linéaire, i.e. ne peut être mis sous la forme $\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) - (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{m}$, forme apparaissant naturellement lors de la pénalisation. Enfin, indépendamment de l'auteur [59] une preuve différente a été donnée pour l'existence de solutions faibles en présence de super-échange biquadratique par K. Hamdache et D. Hamroun [36].

6.1 Existence de solutions faibles

Dans cette section, nous nous attachons à prouver l'existence de solutions faibles au sens de la définition 4.2.2. Pour la démonstration de l'existence de solutions faibles nous ne considérons pas les conditions aux limites générales 2.6.11d mais seulement le cas particulier des conditions (2.6.8), du super-échange et de l'anisotropie surfacique. Dans la suite, nous dénotons par $\mathcal{H}_s$ l'opérateur défini par les équations (2.6.9). Nous en rappelons la forme :

$$\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon \setminus \Gamma^\pm \times (0,T), \\ K_s\big((\gamma^0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \gamma^0\boldsymbol{m}\big) & \\ \quad +J_1(\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m} - \gamma^0\boldsymbol{m}) & \text{sur } \Gamma^\pm \times (0,T). \\ \qquad +2J_2\big((\gamma^0\boldsymbol{m}\cdot\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m} - |\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}|^2\gamma^0\boldsymbol{m}\big) & \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Théorème 6.1.1. *Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, telle que $|\boldsymbol{m}_0| = 1$ presque partout. Alors, il existe au moins une solution faible, du système de Landau-Lifchitz avec anisotropie surfacique et super-échange au sens de la définition 4.2.2.*

Preuve *:* Nous utilisons une méthode de pénalisation. Nous remplaçons le terme surfacique par une interaction volumique sur une faible épaisseur η. Nous pénalisons ensuite le module local de $\boldsymbol{m}$ comme dans Alouges-Soyeur [6]. Nous prenons alors la limite du problème pénalisé en module local, puis nous faisons tendre l'épaisseur virtuelle η de l'interaction surfacique vers 0. La limite sera alors une solution faible de l'équation de Landau-Lifchitz.

Pour tout η appartenant à $(0, \min(L^- - \varepsilon, L^+ + \varepsilon))$, nous définissons l'opérateur non linéaire $\mathcal{H}_s^\eta$ par

$$\boldsymbol{m} \mapsto \frac{1}{2\eta}\begin{cases} 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \big(B \times (\mathcal{I}_\varepsilon \setminus \mathcal{I}_{\varepsilon+\eta})\big), \\ 2K_s((\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{m}) + 2J_1(\boldsymbol{m}^\sigma - \boldsymbol{m}) & \text{dans } B \times (\mathcal{I}_\varepsilon \setminus \mathcal{I}_{\varepsilon+\eta}), \\ \quad +4J_2((\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}^\sigma)\boldsymbol{m}^\sigma - |\boldsymbol{m}^\sigma|^2\boldsymbol{m}) & \end{cases} \tag{6.1.2}$$

où $\boldsymbol{m}^\sigma(\cdot,\cdot,z,\cdot) = \boldsymbol{m}(\cdot,\cdot,-z,\cdot)$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{e}_z$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_t$ et $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{e}_z$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}_t$. Nous introduisons l'énergie correspondante

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_s^\eta = {} & \frac{K_s}{2\eta}\int_{B\times(\mathcal{I}_\varepsilon\setminus\mathcal{I}_{\varepsilon+\eta})} \big(|\boldsymbol{m}|^2 - (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\big) \\ & + \frac{J_1}{2\eta}\int_{B\times(\mathcal{I}_\varepsilon\setminus\mathcal{I}_{\varepsilon+\eta})} \left(\frac{|\boldsymbol{m}|^2 + |\boldsymbol{m}^\sigma|^2}{2} - (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}^\sigma)\right) \\ & + \frac{J_2}{2\eta}\int_{B\times\mathcal{I}_\varepsilon\setminus\mathcal{I}_{\varepsilon+\eta}} \big(|\boldsymbol{m}^\sigma|^2|\boldsymbol{m}|^2 - (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}^\sigma)^2\big)\,. \end{aligned}$$

L'idée générale est d'introduire la solution $\boldsymbol{m}^\eta$ du système de Landau-Lifchitz avec pour excitation $\boldsymbol{h} = \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}) + \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m})$, puis de faire tendre η vers 0. Nous devons dans un premier temps prouver l'existence de solutions avec une excitation non linéaire.

Pour cela nous utilisons la preuve de F. Alouges et A. Soyeur [6], et de S. Labbé [43]. Pour tout réel positif k et tout η positif nous introduisons le problème pénalisé :

$$\begin{aligned}\alpha\frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t} + \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t} &= (1+\alpha^2)(\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}) + \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)})) \\ &\quad - k(1+\alpha^2)(|\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}|^2 - 1)\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \\ \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega^\varepsilon.\end{aligned}$$

Nous employons la méthode de Galerkin pour résoudre le problème d'existence

La méthode de Galerkin Nous introduisons la base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$, constituée des vecteurs propres $(w_1, \ldots, w_i, \ldots)$ de l'opérateur de Laplace avec des conditions de Neumann homogènes. La base $(w_1, \ldots, w_n, \ldots)$ est aussi une base orthogonale de $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Cette base existe dès que l'injection canonique de $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$ est compacte, ce qui est le cas car le domaine Ω^ε satisfait la propriété du cône et est borné [1, théorème 6.2]. Comme Ω^ε est convexe, il y a régularité elliptique [29, théorèmes 3.1.2.3 et 3.2.1.3]. D'après le corollaire 5.2.9 w_i appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^\varepsilon})$.

Soit V_n le sous-espace engendré par la base $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Soit $\mathcal{P}_n$ le projecteur orthogonal de $\mathrm{L}^2(\Omega^\varepsilon)$ sur V_n. $\mathcal{P}_n$ est aussi un projecteur orthogonal de $\mathrm{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ sur V_n. Pour tout $n \geq 1$, nous allons définir $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ comme l'unique solution appartenant à $V_n \otimes \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^3)$ du problème variationnelle suivant :

$$\begin{aligned}&\Big(\alpha\frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t} + \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t} - (1+\alpha^2)\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}), \boldsymbol{\psi}\Big)_{\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)} \qquad (6.1.3a)\\ &\qquad +(1+\alpha^2)\left(k(|\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}|^2 - 1)\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}) - \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}), \boldsymbol{\psi}\right)_{\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)} = 0, \\ &\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(\cdot, 0) = \mathcal{P}_n(\boldsymbol{m}_0), \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \qquad (6.1.3b)\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{\psi}$ dans $V_n \otimes \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^3)$. Nous décomposons $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ dans la base $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sous la forme $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_{i,n}(t) w_i$, chaque $\boldsymbol{\varphi}_{i,n}$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^3)$. Nous définissons $\Phi_n = (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{n}})_{i\in[\![1,n]\!]}$, et obtenons un système équivalent sur Φ_n :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}t} - \mathbf{B}(\Phi_n(t))\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}t} = F(\Phi_n(t)),$$

où F est une fonction polynomiale, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\Phi_n(t) \mapsto \mathbf{B}(\Phi_n(t))$ est linéaire continue. Comme $\mathbf{B}(\Phi)$ est antisymétrique pour tout Φ, la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{B}(\Phi)$ est inversible et la fonction $\Phi \mapsto (\mathbf{I} - \mathbf{B}(\Phi))^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ sur un intervalle de temps $(0, T_n)$ avec Φ_n de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour continuer, nous avons besoin de quelques estimations sur $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$. $\frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t}$ appartient à $\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_n\right) \otimes \mathcal{C}^\infty([0,T];\mathbb{R}^3)$ et est donc une fonction test acceptable. Prenons $\psi = \frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t}$ dans l'équation (6.1.3a). Après intégration sur $(0,T)$, nous obtenons, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left| \frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t} \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&+\mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)) + \frac{k}{4}\int_{\Omega^\varepsilon} (|\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)|^2 - 1)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(0)) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(0)) \\
&\qquad + \frac{k}{4}\int_{\Omega^\varepsilon} (|\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(0)|^2 - 1)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Donc, $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ existe en temps global, et appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$, pour tout entier naturel n. Comme $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ s'injecte canoniquement dans $\mathbb{L}^4(\Omega^\varepsilon)$, le membre droit de l'équation (6.1.4) reste borné indépendamment de n. Donc, pour tout $T > 0$,
- $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ est borné dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$,
- $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ est borné dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$,
- $\frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t}$ est borné dans $\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$,
- $(|\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}|^2 - 1)$ est borné dans $\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$.

Il existe une sous-suite $\boldsymbol{m}_{n_j}^{k,(\eta)}$, encore dénotée par $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$, et une aimantation $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ telles que, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)} &= \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} && \text{faiblement dans } \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T)),\\
\lim_{n\to\infty} (|\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}|^2 - 1) &= (|\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}|^2 - 1) && \text{faiblement dans } \mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon \times (0,T)).
\end{aligned}$$

De plus, $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$. D'après le lemme d'Aubin, reproduit au lemme 5.4.1, pour tout $1 \leq p < 6$, $1 \leq q < +\infty$ et tout temps $T > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)} = \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \quad \text{fortement dans } \mathrm{L}^q(0,T;\mathbb{L}^p(\Omega^\varepsilon)).$$

En conséquence, $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}$ vérifie les propriétés suivantes

(1) $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0$ car $\mathcal{P}_n(\boldsymbol{m}_0)$ tend fortement vers $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ lorsque n tend vers l'infini.

(2) Nous prenons la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'équation (6.1.4). Comme $|\boldsymbol{m}_0| = 1$ et $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(0)$ tend fortement vers $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ et

donc dans $\mathbb{L}^6(\Omega^\varepsilon)$ par injection de Sobolev, le membre de droite de l'équation (6.1.4) converge vers $\mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_0)+\mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_0)$. Les fonctions convexes continues pour la topologie forte sont semi-continues inférieurement pour la topologie faible, donc

$$\iint_{Q_T^\varepsilon} \left|\frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \leq \liminf_{n\to\infty} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left|\frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.$$

Avant de traiter les termes d'énergies et de pénalisation, nous extrayons pour chaque $T \geq 0$ une nouvelle sous-suite telle que

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T) = \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T) \quad \text{faiblement dans } \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon).$$

Or, l'énergie d'échange est une fonction convexe semi-continue inférieure, donc

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

De plus, $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)$ converge fortement dans $\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)\cap\mathbb{L}^p(\Omega^\varepsilon)$ vers $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)$, pour tout $1 \leq p < 6$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}(T)) = \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)).$$

Cela nous donne en tout

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left|\frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &+\mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)) + \frac{k}{4}\int_{\Omega^\varepsilon} (|\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(T)|^2-1)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_0) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_0). \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

(3) Pour tout $T > 0$, pour tout $\boldsymbol{\varphi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ vérifie l'égalité

$$\iint_{Q_T^\varepsilon} \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t} w_i \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t + \alpha \iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial t} w_i \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$= (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}) w_i \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$- (1+\alpha^2) A \iint_{Q_T^\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi} w_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$+ (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}) \cdot \boldsymbol{\varphi} w_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$- (1+\alpha^2) k \iint_{Q_T^\varepsilon} (|\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}|^2 - 1) \boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)} w_i \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t.$$

Nous rappelons que $\boldsymbol{\varphi} w_i$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T^\varepsilon})$. Par le lemme d'Aubin, $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ tend fortement vers $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}$ dans $\mathbb{L}^4(Q_T^\varepsilon)$. Prenons la limite dans chaque terme et nous obtenons

$$\iint_{Q_T^\varepsilon} \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = -\alpha \iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$+ (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$- (1+\alpha^2) A \iint_{Q_T^\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$+ (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t$$
$$- (1+\alpha^2) k \iint_{Q_T^\varepsilon} (|\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}|^2 - 1) \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t, \quad (6.1.6)$$

pour tout $\boldsymbol{\psi}$ dans $\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_n\right) \otimes \mathcal{C}^\infty([0,T];\mathbb{R}^3)$. Cet ensemble étant dense dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$, l'égalité (6.1.6) reste vraie pour tout $\boldsymbol{\psi}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$.

Convergence du problème pénalisé D'après l'estimation (6.1.5), il existe une sous-suite de $(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)})_k$, encore dénotée par $(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)})_{k\in\mathbb{N}}$, et $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ dans $\mathbb{H}^1(Q_T^\varepsilon)$ et dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$ pour tout temps $T>0$ tels que

$$\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \to \boldsymbol{m}^{(\eta)} \text{ faiblement dans } \mathbb{H}^1(Q_T^\varepsilon),$$
$$|\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}|^2 - 1 \to 0 \text{ fortement dans } \mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon),$$

pour tout $T > 0$. De plus, par le lemme d'Aubin,

$$\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \to \boldsymbol{m}^{(\eta)} \text{ fortement dans } \mathrm{L}^q(0,T;\mathbb{L}^p(\Omega^\varepsilon)),$$

pour $1 \leq p < 6$, pour $1 \leq q < +\infty$. En particulier, la convergence a lieu dans $\mathbb{L}^4(Q_T^\varepsilon)$.

Les propriétés de $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ sont

(1) Pour tout $k \geq 0$, $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0$, donc $\boldsymbol{m}^{(\eta)}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0$.

(2) $|\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}|^2 - 1$ converge fortement dans $\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)$ vers 0 et $|\boldsymbol{m}^{(\eta)}|^2 - 1$, donc $|\boldsymbol{m}^{(\eta)}| = 1$ p.p. dans $\Omega^\varepsilon \times (0,+\infty)$.

(3) Comme le terme de pénalisation dans l'estimation d'énergie est positif, nous pouvons l'omettre quand nous passons à la limite dans (6.1.5). Les autres termes sont traités de la même façon que lors de la précédente étape où l'on regardait la convergence de $\boldsymbol{m}_n^{k,(\eta)}$ vers $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}$ et nous obtenons

$$\mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}^{(\eta)}(T)) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{(\eta)}(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left|\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(\eta)}}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ \leq \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_0) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_0). \quad (6.1.7)$$

(4) Soit $\boldsymbol{\phi}$ un champ de vecteur appartenant à $(\mathcal{C}^\infty(\Omega^\varepsilon \times (0,T))^3$. Nous prenons $\boldsymbol{\psi}$ sous la forme $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \boldsymbol{\phi}$ dans l'égalité (6.1.6) et nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T^\varepsilon} |\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}|^2 \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t &= \alpha \iint_{Q_T^\varepsilon} \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &+ \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial t}\right) \boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \cdot \boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &- (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)})) \cdot \boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &+ A(1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \left(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^{k,(\eta)}}{\partial x_j}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &- (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m}^{k,(\eta)} \wedge \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{k,(\eta)})) \cdot \boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t. \quad (6.1.8) \end{aligned}$$

Par le lemme d'Aubin, $\boldsymbol{m}^{k,(\eta)}$ tend fortement vers $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ dans $\mathbb{L}^4(Q_T^\varepsilon)$. Nous pouvons prendre la limite dans chaque terme de l'égalité (6.1.8) et obtenir

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(\eta)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = \alpha \iint_{Q_T^\varepsilon} \boldsymbol{m}^{(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(\eta)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ - (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m}^{(\eta)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(\eta)})) \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ + (1+\alpha^2) A \iint_{Q_T^\varepsilon} \sum_{j=1}^{3} \left(\boldsymbol{m}^{(\eta)} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(\eta)}}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ - (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m}^{(\eta)} \wedge \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{(\eta)})) \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t. \quad (6.1.9)\end{aligned}$$

Convergence vers la solution faible Nous étudions la convergence de la suite $(\boldsymbol{m}^{(\eta)})_{\eta>0}$ quand l'épaisseur virtuelle η tend vers 0. Comme l'aimantation initiale $\boldsymbol{m}_0$ appartient[1] à $\mathcal{C}^0((-L^-,0) \cup (0,L^+); \mathbb{L}^4(B))$. Donc,

$$\lim_{\eta \to 0} \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_0) + \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}_0) = \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_0) + \mathrm{E}_s(\boldsymbol{m}_0).$$

Donc, le membre de droite de l'estimation (6.1.7) est borné indépendamment de η. De plus, $|\boldsymbol{m}^{(\eta)}| = 1$ presque partout sur $\Omega^\varepsilon \times \mathbb{R}^+$, donc
– $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ est borné dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$,
– $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ est borné dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$,
ceci indépendamment de η. Les espaces considérés étant réflexifs, il existe une sous-suite de $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ et une aimantation $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T)) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$ telles que

$$\boldsymbol{m}^{(\eta)} \to \boldsymbol{m} \qquad \text{faiblement dans } \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T)), \qquad (6.1.10a)$$

$$\boldsymbol{m}^{(\eta)} \to \boldsymbol{m} \qquad \text{fortement dans } \mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon \times (0,T)), \qquad (6.1.10b)$$

$$\boldsymbol{m}^{(\eta)} \to \boldsymbol{m} \qquad \text{fortement dans } \mathrm{L}^\infty(\mathcal{I}_\varepsilon, \mathbb{L}^2(B \times (0,T))). \qquad (6.1.10c)$$

L'injection canonique de $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{I}_\varepsilon, \mathbb{L}^2(B \times (0,T)))$ est compacte. De plus, $|\boldsymbol{m}^{(\eta)}| = 1$. Donc, $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ converge fortement vers $\boldsymbol{m}$ dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{I}_\varepsilon, \mathbb{L}^p(B \times (0,T)))$, pour tout p, $2 \le p < +\infty$.

Nous prouvons maintenant que $\boldsymbol{m}$ est une solution faible du système de Landau-Lifchitz.

(1) En passant à la limite sur les traces, $\boldsymbol{m}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0$.

(2) La convergence forte $\mathbb{L}^2$ implique que $|\boldsymbol{m}| = 1$ dans $\Omega^\varepsilon \times (0,T)$.

[1] Ce résultat est démontré dans [1], théorème 5.4, ou dans [52], théorème 3.1 chapitre 1.

(3) Nous prenons la limite de l'équation (6.1.9). Les termes d'énergie de volume convergent vers leur limite intuitive comme lors des étapes précédentes de la preuve. $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ converge fortement vers $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{L}^\infty(\mathcal{I}_\varepsilon, \mathbb{L}^4(B \times (0,T)))$. En conséquence,

$$\limsup_{\eta\to 0}\left|\iint_{Q_T^\varepsilon} \big(\boldsymbol{m}^{(\eta)} \wedge \mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{(\eta)})\big)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}))\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t)\right| = 0.$$

De plus, d'après [1] théorème 5.4, ou [52] théorème 3.1 chapitre 1, $\boldsymbol{m}$ appartient à à $\mathrm{L}^\infty([0,+\infty); \mathcal{C}^0(\mathcal{I}_\varepsilon; \mathbb{L}^4(B)))$. Donc,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_s^\eta(\boldsymbol{m}))\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \iint_{(\Gamma^\pm)\times(0,T)} (\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}))\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.$$

En conséquence, les termes de bord convergent vers leur limite intuitive et nous obtenons la relation (4.2.2).

(4) Pour prendre la limite, quand η tend vers 0, dans l'estimation d'énergie (6.1.7), nous extrayons, pour chaque $T > 0$, une sous-suite de $\boldsymbol{m}^{(\eta)}$ tel que $\boldsymbol{m}^{(\eta)}(\cdot, T)$ tende vers $\boldsymbol{m}(\cdot, T)$ faiblement dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Tous les termes volumiques convergent vers leur limite intuitive comme lors de l'étape précédente. Il reste à calculer la limite, lorsque η tend vers 0 de $\mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{(\eta)}(T))$. Premièrement, pour chaque s, $0 \le s < 1$, $\boldsymbol{m}^{(\eta)}(\cdot, T)$ converge fortement vers $\boldsymbol{m}(\cdot, T)$ dans $\mathbb{H}^s(\Omega^\varepsilon)$. Donc, pour tout p, $1 \le p < 4$, la convergence a lieu fortement dans $\mathbb{L}^\infty(\mathcal{I}_\varepsilon, \mathbb{L}^p(B))$. Comme $|\boldsymbol{m}^{(\eta)}| = |\boldsymbol{m}| = 1$ presque partout, la convergence a lieu pour $1 \le p < +\infty$. En particulier, elle a lieu lorsque $p = 4$.

$$\limsup_{\eta\to 0}\left|\mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}^{(\eta)}(T)) - \mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}(T))\right| = 0.$$

L'aimantation $\boldsymbol{m}(T)$ appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Or, $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{I}_\varepsilon, \mathbb{L}^4(B))$,

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{E}_s^\eta(\boldsymbol{m}(T)) = \mathrm{E}^s(\boldsymbol{m}(T)).$$

Donc, $\boldsymbol{m}$ satisfait l'estimation d'énergie

$$\mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}(T)) + \mathrm{E}_s(\boldsymbol{m}(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\iint_{Q_T^\varepsilon}\left|\frac{\partial\boldsymbol{m}}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \le \mathrm{E}_v(\boldsymbol{m}_0) + \mathrm{E}_s(\boldsymbol{m}_0) \le \mathrm{E}(\boldsymbol{m}_0). \quad (6.1.11)$$

Donc, $\boldsymbol{m}$ satisfait toutes les propriétés requises et est une solution faible.

□

Remarque 6.1.2. Il est important de noter que nous n'avons aucune information sur l'unicité de la solution $\boldsymbol{m}$. Elle est cependant très peu probable. En effet, il n'y a pas unicité dans le cas où seule l'interaction d'échange est présente [6].

6.2 Quelques propriétés des solutions faibles

Nous montrons d'abord que la contrainte non convexe $\boldsymbol{m} = 1$ est redondante :

Proposition 6.2.1. *Soit $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ satisfaisant* (4.2.2)*, alors $|\boldsymbol{m}| = |\boldsymbol{m}_0|$ presque partout.*

Preuve : Choisissons $\boldsymbol{\phi} = \varphi \boldsymbol{m}$ dans l'équation (4.2.2) avec φ variant dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$. Donc, $\frac{\partial |\boldsymbol{m}|^2}{\partial t} = 0$. Comme $|\boldsymbol{m}|^2$ appartient à $\mathbb{W}^{1,1}(\Omega^\varepsilon)$, $|\boldsymbol{m}|$ ne dépend pas du temps. □

Nous notons $\mathbb{H}^1_\omega$ l'espace $\mathbb{H}^1$ muni de la topologie faible.

Proposition 6.2.2. *Si $\boldsymbol{m}$ est solution faible de Landau-Lifchitz au sens de la définition 4.2.2, alors $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathcal{C}(0,+\infty;\mathbb{H}^1_\omega(\Omega^\varepsilon))$.*

Preuve : D'après l'inégalité d'énergie (4.2.3), l'aimantation $\boldsymbol{m}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))$. Soit (t_n) une suite convergeant vers t. Alors, une sous-suite de $\boldsymbol{m}(\cdot,t_n)$ converge faiblement dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Mais $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ pour tout $T > 0$, donc à $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega^\varepsilon))$, voir [52, th. 3.1, p. 23, chap. 1]. Ainsi, la limite de la sous-suite est forcément $\boldsymbol{m}(\cdot,t)$: la suite entière converge. □

Proposition 6.2.3. *Soit $\boldsymbol{m}$ une solution faible de Landau-Lifchitz, alors*

$$\triangle\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^1(\Omega^\varepsilon)), \tag{6.2.1a}$$

$$\triangle\, \boldsymbol{m} + |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m} \in \mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon \times (0,T)), \tag{6.2.1b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) - (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{m}. \tag{6.2.1c}$$

De plus, si l'on pose $\boldsymbol{h} = A \triangle \boldsymbol{m} + \mathcal{H}_a(\boldsymbol{m}) + \mathcal{H}_d(\boldsymbol{m})$, alors, presque partout sur $\Omega^\varepsilon \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} &= -\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h} - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h}),\\
\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} - \alpha \boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} &= -(1+\alpha^2)\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h},\\
\alpha \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} + \boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} &= -(1+\alpha^2)\boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h}).
\end{aligned}$$

PREUVE : Soit $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^\varepsilon \times (0,T)})$, alors

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha^2)A\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
&= (1+\alpha^2)A\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T^\varepsilon}\left(\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&= (1+\alpha^2)A\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T^\varepsilon}\left(\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial\,(\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{\phi})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad -(1+\alpha^2)A\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T^\varepsilon}\left(\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\wedge\boldsymbol{\phi}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Donc, d'après l'équation (4.2.2)

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha^2)A\sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
&= -(1+\alpha^2)\iint_{Q_T^\varepsilon}(\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})))\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad -(1+\alpha^2)\iint_{\Gamma\times(0,T)}K_s(\gamma^0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nu})(\gamma^0\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\
&\quad -(1+\alpha^2)\iint_{\Gamma\times(0,T)}(J_1+2J_2\gamma^0\boldsymbol{m}\cdot\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})(\gamma^0\boldsymbol{m}\wedge\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\
&\quad -\iint_{Q_T^\varepsilon}\left(\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-\alpha\iint_{Q_T^\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad +(1+\alpha^2)A\iint_{Q_T^\varepsilon}|\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Donc, $\triangle\,\boldsymbol{m}$ appartient à la somme des deux espaces $\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)$ et $\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^1(\Omega^\varepsilon))$. Et, nous avons

$$
A\triangle\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}))+\frac{\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{m}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\boldsymbol{m}}{\partial t}}{1+\alpha^2}-A|\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{m}.
$$

Donc, presque partout

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}&=-\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{h}-\alpha\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{h}),\\
\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}-\alpha\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}&=-(1+\alpha^2)\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}),\\
\alpha\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}+\boldsymbol{m}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}&=-(1+\alpha^2)\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m})),
\end{aligned}
$$

où $\boldsymbol{h} = \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}) + A \triangle \boldsymbol{m}$. Et $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) - (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{m}$. $\square$

Proposition 6.2.4. *Soit $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ pour tout $T > 0$. Supposons que $\triangle \boldsymbol{u}$ appartienne à $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^1(\Omega^\varepsilon))$ et que*

(1) $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}) - (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$,

(2) $\boldsymbol{u}(\cdot,0) = \boldsymbol{u}_0$, $|\boldsymbol{u}_0| = 1$, $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$,

(3) L'une des trois égalités suivantes est satisfaite

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{u}) - \alpha \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{u})), \tag{6.2.2a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \alpha \boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -(1+\alpha^2)\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{u}), \tag{6.2.2b}$$

$$\alpha \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -(1+\alpha^2)\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{u})). \tag{6.2.2c}$$

Alors, $\boldsymbol{u}$ satisfait les propriétés 1, 2 et 3 de $\boldsymbol{m}$ dans la définition 4.2.2.

Preuve : Comme $\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$, $|\boldsymbol{u}|^2$ appartient à $\mathbb{W}^{1,1}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$, et $\frac{\partial |\boldsymbol{u}|^2}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{u}$. Donc, dès que $\boldsymbol{u}$ satisfait l'une des trois équations (6.2.2), $\frac{\partial |\boldsymbol{u}|^2}{\partial t} = 0$. Donc, $|\boldsymbol{u}|$ ne dépend pas du temps. Donc, $|\boldsymbol{u}| = 1$ presque partout. Donc, si $\boldsymbol{u}$ satisfait l'une des trois équations (6.2.2), $\boldsymbol{u}$ satisfait l'ensemble des trois équations (6.2.2).

Montrons maintenant que $\triangle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -|\nabla \boldsymbol{u}|^2$. Soit $(\boldsymbol{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T^\varepsilon})$ telle que pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^n &\to \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \mathbb{H}^1(Q_T^\varepsilon),\\
\boldsymbol{u}^n &\to \boldsymbol{u} \quad \text{p.p. },\\
\triangle \boldsymbol{u}^n &\to \triangle \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \mathbb{L}^1(Q_T^\varepsilon),\\
\triangle \boldsymbol{u}^n &\to \triangle \boldsymbol{u} \quad \text{p.p. },\\
\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathrm{L}^\infty} &\leq C.
\end{aligned}$$

De plus, nous pouvons choisir la suite pour que la suite $|\triangle \boldsymbol{u}^n|$ soit dominée par une fonction $g \in \mathrm{L}^1(Q_T^\varepsilon)$ indépendante de n. Une telle suite existe. Alors,

$$\begin{aligned}
&|\nabla \boldsymbol{u}^n|^2 \to |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \quad \text{dans } \mathbb{L}^1(Q_T^\varepsilon),\\
&\triangle |\boldsymbol{u}^n|^2 \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Pour tout $n > 0$,

$$\triangle |\boldsymbol{u}^n|^2 = 2 \triangle \boldsymbol{u}^n \cdot \boldsymbol{u}^n + 2|\nabla \boldsymbol{u}^n|^2.$$

Nous prenons la limite dans chaque terme et obtenons

$$\triangle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = -|\nabla \boldsymbol{u}|^2.$$

Prouvons maintenant l'égalité variationnelle faible. En effet, $\boldsymbol{u}$ satisfait localement l'équation (6.2.2b). Donc,

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T^\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \alpha \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ = -(1+\alpha^2) A \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{u} \wedge \triangle\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ - (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u})) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathbb{H}^1(Q_T^\varepsilon)$. Il suffit de prouver que, pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q_T^\varepsilon})$,

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{u} \wedge \triangle\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} = -\sum_{i=1}^{3} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ + \iint_{\Gamma^\pm \times (0,T)} (\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_s(\boldsymbol{u})) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{u}^n \wedge \triangle\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{3} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial x_i} \wedge \boldsymbol{\phi}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ - \sum_{i=1}^{3} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{u}^n \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ + \iint_{\Gamma^\pm \times (0,T)} (\boldsymbol{u}^n \wedge (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u} \cdot \mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{u})) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{u}^n \wedge \triangle\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \iint_{Q_T^\varepsilon} (\boldsymbol{u} \wedge \triangle\, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \\ \lim_{n\to\infty} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{u}^n \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

car $\boldsymbol{\phi}$ appartient à $\mathbb{L}^\infty(\overline{Q_T^\varepsilon})$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}$ à $\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)$ et $\frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial x_i}$ converge vers $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}$ $\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)$. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{3} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{u}^n \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{3} \iint_{Q_T^\varepsilon} \left(\boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right)$$

par convergence dominée. Enfin,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\Gamma^\pm\times(0,T)} (\boldsymbol{u}^n \wedge (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}\cdot\mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{u}))\cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$$
$$= \iint_{\Gamma^\pm\times(0,T)} (\boldsymbol{u}\wedge \mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}))\cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t,$$

car $\mathcal{H}_s(\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{u}\cdot\mathcal{H}_s(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{u}$ appartient à $\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)$ et $\boldsymbol{u}^n$ converge vers $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{L}^2(Q_T^\varepsilon)$. □

Enfin, nous terminons cette section par une remarque. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de H. Triebel [63, 64] pour la définition des espaces de Besov et de Nikol'skii.

Proposition 6.2.5. *Toute solution faible appartient à $\mathbb{L}^2(0,T;\mathrm{B}^0_{1,+\infty}(\Omega^\varepsilon))$, où $\mathrm{B}^0_{1,+\infty}$ est la notation pour les espaces de Besov. Le $+\infty$ indique que nous sommes dans le cas des espaces de Nikol'skii.*

Preuve *:* $\mathbb{L}^1$ est inclus dans l'espace de Besov $\mathrm{B}^0_{1,+\infty}$, aussi appelé espace de Nikol'skii, voir [7], équation (5.15). Nous appliquons alors les théorèmes de régularité elliptique sur les Besov. La proposition 2.1 de D. Guidetti [30] permet de conclure. □

D'après R. Adams [1], p.226 l'espace de Nikol'skii $\mathrm{B}^2_{1,+\infty}$ est inclus dans l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{s,1}$ pour tout $0 < s < 2$. En conséquence, toute solution faible $\boldsymbol{u}$ est dans $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{W}^{s,1}(\Omega^\varepsilon))$, pour tout $s < 2$.

6.3 Limites du concept de solutions faibles et améliorations possibles

Dans cette section, nous expliquons pourquoi le concept de solutions faibles n'est pas tout à fait satisfaisant puis nous citons quelques travaux récents qui restreignent l'espace des solutions. Ces limites sont valables pour les solutions faibles avec ou sans interactions de surface, avec ou sans anisotropie volumique, et avec ou sans champ démagnétisant.

6.3.1 Les limites du concept de solutions faibles

Tout d'abord, les solutions faibles n'ont pas de raisons d'être uniques [6]. Plus problématique est le fait qu'elles ne respectent *a priori* pas vraiment l'inégalité d'énergie. En effet, pour tout $T > 0$, s'il est toujours exact que

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{m}(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\int_0^T \left\|\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \mathrm{d}\tau \le \mathrm{E}(\boldsymbol{m}(0)), \tag{6.3.1}$$

nous devrions exiger de toute solution physique que, pour tout $T > S \geq 0$,

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{m}(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \int_S^T \left\| \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \mathrm{d}\tau \leq \mathrm{E}(\boldsymbol{m}(S)). \tag{6.3.2}$$

Au minimum, nous devrions exiger la décroissance de l'énergie, qui au passage donnerait la continuité à droite de $\boldsymbol{m}$ comme application du temps vers $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Or, rien n'interdit que certaines solutions faibles aient une énergie croissante. Utilisant le fait que si $\boldsymbol{u}$ est solution faible de Landau-Lifchitz pour la condition initiale $\boldsymbol{m}_0$ et si $\boldsymbol{v}$ est solution faible de Landau-Lifchitz pour la condition initiale $\boldsymbol{u}(S_0)$, $S_0 > 0$ alors $\boldsymbol{m}$, définie par

$$\boldsymbol{m}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}(t) & \text{si } 0 < t \leq S_0, \\ \boldsymbol{v}(t - S_0) & \text{si } t \geq S_0. \end{cases}$$

est aussi solution faible et vérifie l'inégalité d'énergie aussi depuis le temps S_0, nous pouvons trivialement construire une solution faible qui vérifie l'inégalité d'énergie depuis un choix arbitraire de temps discrets $0 = t_0 < t_1, \ldots, t_n, \ldots$. En particulier, il est alors facile de démontrer la proposition suivante.

Proposition 6.3.1. *Soit une ensemble discret d'instants $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, infini ou non, telle que $t_0 = 0$, $t_i < t_{i+1}$. Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Il existe une solution faible de Landau-Lifchitz tel que pour tout $T, S > 0$ n'étant pas tous les deux dans un quelconque intervalle commun (t_i, t_{i+1}), l'inégalité (6.3.2) est vérifiée.*

Preuve *:* Construisons la solution par récurrence sur $i \geq 1$. Supposons que l'on ait une solution sur $[0, t_{i-1}]$. Choisissons alors $\boldsymbol{v}$ solution faible de Landau-Lifchitz sur $[0, t_i - t_{i-1}]$, minimisant

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{v}(t_i - t_{i-1})) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \int_0^{t_i - t_{i-1}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}^2 .$$

Nous posons alors

$$\boldsymbol{m}(\cdot) = \boldsymbol{v}(\cdot - t_{i-1}) \text{ sur } [t_{i-1}, t_i] \ .$$

La vérification que $\boldsymbol{m}$ convient est triviale. □

Il n'est guère possible de passer à la limite quand le pas de la partition t_i tend vers 0.

6.3.2 De meilleures solutions faibles

Certains mathématiciens ont travaillé à donner un sens plus restrictif au concept de solutions faibles. Pour l'instant, ces travaux se sont limités au cas où seule l'interaction d'échange est présente. Nous exposons ici rapidement quelques résultats en renvoyant aux références pour les détails.

Tout d'abord, tout ce que nous avons démontré en dimension 3 peut aussi être démontré en dimension 2. Cependant, en dimension 2, si les solutions faibles ne sont pas uniques, il existe une unique bonne solution dont l'énergie décroît. Cette solution est appelée solution de Struwe. Une solution de Struwe est une solution faible lisse en dehors d'un ensemble sans points d'accumulations et a une énergie décroissante. L'existence de ce type de solution a d'abord été établie par M. Struwe [61] pour l'équation de flot harmonique sur les surfaces Riemanniennes. Le cas de la sphère étant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = |\nabla u|^2 u.$$

A. Freire [24,25] a ensuite démontré l'unicité de la solution de Struwe pour l'équation de flot harmonique dans l'espace constitué des fonctions appartenant à

$$\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1(B)) \cap \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}^2(B)), \tag{6.3.3}$$

et dont l'énergie décroît. L'existence de telles solutions pour l'équation de Landau-Lifchitz a été établie par B. Guo et M.C Hong [31], et P. Harpes [39] pour les domaines avec frontières. L'unicité des solutions de Struwe pour l'équation de Landau-Lifchitz dans l'espace des fonctions $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1(B)) \cap \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{L}^2(B))$, dont l'énergie décroît a été établie par Y. Chen, S, Ding et B. Guo [17] [16] [18] [21]. P. Harpes [40], a corrigé quelques omissions en ce qui concerne l'unicité en rétablissant l'hypothèse primordiale de décroissance d'énergie.

Pour la dimension 3, il n'existe pas autant de résultats. Une condition de stabilité est étudiée par R. Moser dans [55]. En particulier, il est prouvé que les solutions vérifiant ces conditions sont partiellement régulières. L'existence n'est pas établie. C. Melcher [54] a établi l'existence de solutions, pour le domaine $\Omega^\varepsilon = \mathbb{R}^3$, qui sont lisses en dehors d'un sous ensemble de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ de dimension 3 pour la mesure de Hausdorff. L'unicité n'est pas établie pour ces solutions partiellement régulières.

Chapitre 7

Existence et unicité des solutions fortes du système de Landau-Lifchitz en présence d'interactions surfaciques

Nous avons prouvé au chapitre 6 l'existence de solutions faibles en temps infini pour des données peu régulières. Malheureusement, les seuls résultats sur l'unicité de ces solutions sont négatifs. G. Carbou et P. Fabrie ont prouvé l'existence et l'unicité de solutions plus régulières existant dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}$ si la donnée initiale est dans $\mathbb{H}^2$ et satisfait les conditions aux limites de Neumann homogènes [15]. Ces solutions existent localement en temps. Nous généralisons dans ce chapitre ce résultat d'existence lorsque des interactions surfaciques sont présentes. Commençons par préciser la notion de solutions fortes. Dans ce chapitre, nous utilisons les notations de la section 4.1.

7.1 Solutions fortes : le théorème d'existence

Le concept de solutions fortes a été posé dans la définition 4.2.1. Concernant le caractère bien posé du problème, nous avons le théorème suivant :

Théorème 7.1.1. *Soit Q^+, Q^- comme dans la définition 4.2.1. Soit une excitation extérieure $\boldsymbol{h}_{\text{ext}}$ appartenant à $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega \times (0,T))$. Si la condition initiale $\boldsymbol{m}_0$ appartient à $\mathbb{H}^2(\Omega)$, $|\boldsymbol{m}_0| = 1$, et si*

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^{\pm}, \\ Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0) & \textit{sur } \Gamma^+, \\ Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0) & \textit{sur } \Gamma^-, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

alors, il existe un temps positif $T^* > 0$ *et une solution forte* $\boldsymbol{m}$ *de Landau-Lifchitz avec* $\boldsymbol{m}_0$ *comme condition initiale. De plus, le temps maximal* T^* *est minoré par une fonction dépendant uniquement de* $\|\boldsymbol{m}_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$*, et la fonction* $\boldsymbol{m}_0 \to T^*$ *est semi-continue inférieurement. Enfin, la fonction qui à* $\boldsymbol{m}_0$ *associe la solution* $\boldsymbol{m}$ *est continue de* $\mathbb{H}^2(\Omega)$ *dans* $\mathbb{H}^3(\Omega \times (0,T))$*, pour tout* $T < T^*$*. Nous appelons stabilité cette dernière propriété.*

Prouver ce théorème nécessitera plusieurs étapes. Elles sont réalisées en détail à la section 7.2. Dans nos preuves, nous remplaçons l'équation de Landau-Lifchitz par sa forme développée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} &= \alpha A \bigtriangleup \boldsymbol{m} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{m} - A\boldsymbol{m} \wedge \bigtriangleup \boldsymbol{m} \\ &\quad - \boldsymbol{m} \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})).\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Cette décision est justifiée par le lemme suivant dont la démonstration est évidente.

Lemme 7.1.2. *Si* $\boldsymbol{m}$ *appartient à* $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ *et si* $|\boldsymbol{m}| = 1$ *presque partout, alors* $\boldsymbol{m}$ *satisfait l'équation* (4.2.1a) *si et seulement si elle satisfait l'équation* (7.1.2).

L'idée générale pour prouver le théorème 7.1.1 est alors d'introduire une suite de fonctions $(\boldsymbol{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments satisfont le système le système :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}^n}{\partial t} &= \alpha A \bigtriangleup \boldsymbol{m}^n + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^n|^2 \boldsymbol{m}^n - A\boldsymbol{m}^n \wedge \bigtriangleup \boldsymbol{m}^n - \boldsymbol{m} \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^n) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{m}^n \wedge (\boldsymbol{m}^n \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^n) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})) \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T),\end{aligned} \tag{7.1.3a}$$

$$\boldsymbol{m}^n(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{7.1.3b}$$

$$|\boldsymbol{m}^n| = 1, \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{7.1.3c}$$

$$\tag{7.1.3d}$$

et les conditions aux limites

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^{\pm} \times (0,T), \\ \begin{array}{c} Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{n-1}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{n-1}) \\ -(Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{n-1}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{n-1}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{m}^n)\gamma^0 \boldsymbol{m}^n \end{array} & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \begin{array}{c} Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{n-1}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{n-1}) \\ -(Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{n-1}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{n-1}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{m}^n)\gamma^0 \boldsymbol{m}^n \end{array} & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T), \end{cases} \tag{7.1.3e}$$

pour tout entier naturel n. Formellement, la limite sera la solution du théorème 7.1.1. La construction de $\boldsymbol{m}^{n+1}$ à partir de $\boldsymbol{m}^n$ sera elle-même basée sur la convergence d'une suite analogue. La construction de cette dernière suite se fera par la méthode employée dans [15].

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.1.3. *Soit* $\boldsymbol{m}$ *dans* $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega))\cap\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$. *Si* $\boldsymbol{m}$ *satisfait l'équation de Landau-Lifchitz* (4.2.1a) *ou sa version développée* (7.1.2), *alors*

$$\boldsymbol{m}\in\mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega)),\qquad \boldsymbol{m}\in\mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega)),\qquad \boldsymbol{m}\in\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Preuve : Prenons le gradient de l'équation (7.1.2) ou (4.2.1a). Par l'inégalité de Hölder et les injections de Sobolev $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))$. Par interpolation, voir [52], Théorème 3.1 ch.1 p.23, $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$. Pour la dernière assertion, nous utilisons le lemme 5.4.2 ainsi que la partie appartenant à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$ de la preuve du Lemme 5.3.5 pour les termes affines en $\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}$. □

7.2 Preuve du Théorème 7.1.1

Cette section est entièrement consacrée à la preuve du théorème d'existence.

7.2.1 L'équation de Landau-Lifchitz avec une condition de bord de Neumann affine

Pour construire les suites dont nous aurons besoin, nous avons d'abord besoin de prouver l'existence de solutions du système de Landau-Lifchitz avec un terme affine. De ce résultat, nous déduirons l'existence de solutions avec une condition de Neumann affine.

Proposition 7.2.1. *Soit* T^* *une réel positif. Soit* $\boldsymbol{m}_0$ *dans* $\mathbb{H}^2(\Omega)$. *Soit* $\boldsymbol{v}$ *dans* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ *pour tout* $T<T^*$, *et vérifiant*

$$\frac{\partial(\boldsymbol{m}_0-\boldsymbol{v}(\cdot,0))}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0.$$

Soit $\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}$ *dans* $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega\times(0,T))$ *pour tout* $T<T^*$. *Alors, il existe un temps maximal* $\widetilde{T}^*\leq T^*$ *et un unique* $\boldsymbol{u}$ *dans* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, *pour tout* $T<\widetilde{T}^*$, *solution de*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=&-\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\alpha A\,\triangle(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\alpha A|\nabla(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})|^2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\wedge\triangle(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\\&-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\wedge((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}))\\&-\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}+\alpha\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}})\qquad \textit{dans }\Omega\times(0,\widetilde{T}^*),\end{aligned}\tag{7.2.1a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0,\qquad \textit{sur }\partial\Omega\times(0,\widetilde{T}^*),,\tag{7.2.1b}$$

$$\boldsymbol{u}(\cdot,0)=\boldsymbol{m}_0-\boldsymbol{v}(\cdot,0)\qquad \textit{dans }\Omega.\tag{7.2.1c}$$

De plus, si $\widetilde{T}^* < T^*$, alors

$$\lim_{t \to \widetilde{T}^*} \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^2}(t) = +\infty.$$

Preuve : Nous utilisons la méthode de Galerkin, Pour les estimations, nous employons les inégalités (5.2.1a) et (5.2.2). Soit $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace scalaire avec des conditions de Neumann homogènes. Les vecteurs propres $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et une base orthogonale de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et de $\{f \in \mathrm{H}^2(\Omega) | \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0\}$.

Nous cherchons une solution $\boldsymbol{u}^n$ dans $V_n \otimes \mathcal{C}^\infty([0, T_n); \mathbb{R}^3)$ du système

$$\boldsymbol{u}^n(\cdot, 0) = \mathcal{P}^n(\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{v}(\cdot, 0)), \tag{7.2.2a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial t} = \mathcal{P}^n\bigg(&-\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \alpha A \,\triangle(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) + \alpha A |\nabla(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v})|^2 (\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \\ &- A(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge \triangle(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge \big(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}\big) \\ &- \alpha(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge \Big((\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge \big(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}\big)\Big)\bigg),\end{aligned} \tag{7.2.2b}$$

où $\mathcal{P}^n$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace V_n engendré par $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Nous décomposons $\boldsymbol{u}^n = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\phi}_k^n(t) w_k$ sur la base $(w_1, \ldots, w_n)$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\boldsymbol{u}^n$ existe localement en temps. Nous avons besoin de quelques estimations sur $\boldsymbol{u}^n$. Nous rappelons que des estimations sur $\nabla \triangle \boldsymbol{u}^n$ donnent une estimation sur la norme $\mathrm{L}^2(0, T; \mathbb{H}^3(\Omega))$ de $\boldsymbol{u}^n$, voir le corollaire 5.2.11. Pour ces estimations, nous définissons $\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}$. Dans toutes les estimations suivantes, η est un réel strictement positif pouvant être choisi arbitrairement petit et indépendamment de n. C est une constante ne dépendant que de Ω. $C(\eta)$ est une constante qui dépend aussi de η.

Première estimation La première estimation que l'on obtient est

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A \|\nabla \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq P_1(\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + P_2(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \tag{7.2.3}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes ne dépendant pas de n.

Pour l'obtenir, nous multiplions (7.2.2b) par $\boldsymbol{u}^n$ et intégrons sur Ω.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A \|\nabla \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = &-\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I} \\ &+ \alpha A \underbrace{\int_\Omega \triangle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II} + \alpha A \underbrace{\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2 \boldsymbol{w}^n \cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III}\end{aligned}$$

$$\underbrace{-A\int_\Omega (\boldsymbol{v}\wedge \triangle \boldsymbol{w}^n)\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV} - \underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{v}\wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\text{ext}}))\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{V}$$
$$-\alpha \underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{v}\wedge (\boldsymbol{w}^n \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\text{ext}})))\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VI}. \quad (7.2.4)$$

Estimons d'abord $I = \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$$|I| \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \quad (7.2.5a)$$

Ensuite, nous majorons $II = \int_\Omega \triangle \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

$$|II| \leq \frac{1}{2}\|\triangle \boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \quad (7.2.5b)$$

Estimons maintenant $III = \int_\Omega |\nabla(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})|^2(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Par l'inégalité de Hölder,

$$|III| \leq 2(\|\nabla \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)})(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}. \quad (7.2.5c)$$

Pour évaluer $IV = \int_\Omega (\boldsymbol{v}\wedge \triangle(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}))\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, nous utilisons l'inégalité de Hölder, et obtenons

$$|IV| \leq \left(\|\triangle \boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle \boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \quad (7.2.5d)$$

Estimons $V = \int_\Omega (\boldsymbol{v}\wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{h}_{\text{ext}})\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. D'après le théorème 3.2.2, l'opérateur $\mathcal{H}_{d,a}$ est continu de $\mathbb{L}^4$ dans $\mathbb{L}^4$, donc,

$$|V| \leq C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{h}_{\text{ext}}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)})\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \quad (7.2.5e)$$

Traitons maintenant $VI = \int_\Omega (\boldsymbol{v}\wedge ((\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{h}_{\text{ext}})))\cdot \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. D'après le théorème 3.2.2, l'opérateur $\mathcal{H}_{d,a}$ est continu de $\mathbb{L}^6$ dans $\mathbb{L}^6$, donc,

$$|VI| \leq C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)}(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)} + \|\boldsymbol{h}_{\text{ext}}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)})^2\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \quad (7.2.5f)$$

Nous combinons les estimations (7.2.5), et par injections classiques de Sobolev, nous obtenons l'estimation annoncée (7.2.3).

Seconde estimation La seconde estimation est

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha A}{2}\|\nabla \triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq g_1 P_3(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + g_2, \quad (7.2.6)$$

où P_3 est un polynôme indépendant de n, et g_1 et g_2 sont deux éléments dans $\mathrm{L}^1(0,T;\mathbb{R})$ qui ne dépendent que de la norme de $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$.
Pour obtenir cette estimation, nous multiplions l'équation (7.2.2b) par $\triangle^2 \boldsymbol{u}^n$, puis intégrons sur Ω

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla\triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial \nabla \boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I} \\
-\alpha A\underbrace{\int_\Omega \nabla\triangle\boldsymbol{v}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II} - 2\alpha A\underbrace{\int_\Omega (\mathrm{D}^2\boldsymbol{w}^n\nabla\boldsymbol{w}^n)(\boldsymbol{w}^n\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III} \\
-\alpha A\underbrace{\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{w}^n|^2\nabla\boldsymbol{w}^n\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV} + A\underbrace{\int_\Omega (\nabla\boldsymbol{w}^n\wedge\triangle\boldsymbol{w}^n)\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{V} \\
+A\underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{w}^n\wedge\nabla\triangle\boldsymbol{v})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VI} - \underbrace{\int_\Omega (\nabla\boldsymbol{w}^n\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}))\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VII} \\
-\underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{w}^n\wedge\nabla(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}))\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VIII} \\
-\alpha\underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{w}^n\wedge(\boldsymbol{w}^n\wedge\nabla(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}})))\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IX} \\
-\alpha\underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{w}^n\wedge(\nabla\boldsymbol{w}^n\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}})))\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{X} \\
-\alpha\underbrace{\int_\Omega (\nabla\boldsymbol{w}^n\wedge(\boldsymbol{w}^n\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n)+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}})))\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{XI}\,. \qquad (7.2.7)
\end{aligned}$$

Estimons $I=\int_\Omega \frac{\partial\nabla\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, et pour tout η strictement positif,

$$|I| \leq \frac{1}{4\eta}\left\|\frac{\partial\nabla\boldsymbol{v}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \qquad (7.2.8a)$$

Par l'inégalité de Hölder, nous estimons $II=\int_\Omega \nabla\triangle\boldsymbol{v}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

$$|II| \leq \frac{1}{4\eta}\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \qquad (7.2.8b)$$

Majorons $III = \int_\Omega \mathrm{D}^2(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\nabla(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Par l'inégalité de Hölder, l'inégalité d'interpolation pour les espaces L^p et les injections de Sobolev

$$\begin{aligned}|III| &\le (\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})(\|\mathrm{D}^2\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)}+\|\mathrm{D}^2\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)})\\ &\qquad(\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)}+\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)})\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le C(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^{\frac{5}{2}}\\ &\quad(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le C''\left(1+\frac{1}{\eta^3}\right)\left(P_4(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})+P_4(\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\right)\\ &\quad+\frac{\eta}{6}\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\end{aligned}\tag{7.2.8c}$$

où P_4 est un polynôme indépendant de η et de n.
Estimons maintenant $IV = \int_\Omega|\nabla(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})|^2\nabla(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

$$|IV| \le \frac{8}{\eta}\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|^6_{\mathbb{L}^6(\Omega)}+\frac{8}{\eta}\|\nabla\boldsymbol{v}\|^6_{\mathbb{L}^6(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\tag{7.2.8d}$$

Si nous estimons $V = \int_\Omega(\nabla(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\wedge\triangle(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}))\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ par l'inégalité de Hölder et les injections de Sobolev, nous obtenons

$$\begin{aligned}|V| &\le (\|\nabla\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)}+\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)})\left(\|\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)}+\|\triangle\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)}\right)\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le C(\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^{\frac{3}{2}}\\ &\quad(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le C''\left(1+\frac{1}{\eta^3}\right)\left(P_5(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})+P_5(\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\right)\\ &\quad+\frac{\eta}{6}\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},\end{aligned}\tag{7.2.8e}$$

où P_5 est un polynôme qui ne dépend pas de η.
Estimons $VI = \int_\Omega((\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\wedge\nabla\triangle\boldsymbol{v})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}|VI| &\le (\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{C}{\eta}(\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^2\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{7.2.8f}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{H}_{d,a}$ est continu de $\mathbb{L}^4$ dans $\mathbb{L}^4$, et de $\mathbb{W}^{1,4}$ dans $\mathbb{W}^{1,4}$, voir le théorème 3.2.2, l'évaluation de $VII = \int_\Omega(\nabla(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}))\cdot$

$\nabla \triangle \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, et de $VIII = \int_\Omega ((\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge (\nabla \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) + \nabla \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}})) \cdot \nabla \triangle \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ donne

$$\begin{aligned} |VII| + |VIII| \leq \frac{C}{\eta} \big(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\big)^2 & \\ \times \Big(\big(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\big)^2 + \|\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}\|^2_{\mathbb{L}^6(\Omega)} & \\ + \|\nabla \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^2 \Big) + \eta \|\nabla \triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. & \end{aligned} \tag{7.2.8g}$$

De même, nous majorons $IX = \int_\Omega ((\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}) \wedge ((\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}) \wedge \nabla (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}))) \cdot \nabla \triangle \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $X = \int_\Omega ((\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}) \wedge (\nabla (\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}) \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n+\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}))) \cdot \nabla \triangle \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, et $XI = \int_\Omega (\nabla (\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge ((\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}))) \cdot \nabla \triangle \boldsymbol{u}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Comme l'opérateur $\mathcal{H}_{d,a}$ est continu de $\mathbb{W}^{1,6}$ dans $\mathbb{W}^{1,6}$, voir le théorème 3.2.2, nous avons

$$\begin{aligned} |IX| + |X| + |XI| \leq \frac{C}{\eta} \big(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\big)^4 & \\ \times \Big(\big(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\big)^2 + \|\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}\|^2_{\mathbb{L}^6(\Omega)} & \\ + \|\nabla \boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^2 \Big) + \eta \|\nabla \triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. & \end{aligned} \tag{7.2.8h}$$

Puis, par injections de Sobolev, et en choisissant η petit, nous déduisons des inégalités (7.2.8), l'estimation annoncée (7.2.6).

Nous combinons les deux estimations (7.2.3) et (7.2.6) puis utilisons les inégalités (5.2.1a) et (5.2.2). Nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \|\nabla \triangle \boldsymbol{u}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq g P'(\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + g',$$

où P' est un polynôme indépendant de n, et où g, g' sont deux éléments de $\mathrm{L}^1(0,T;\mathbb{R})$ ne dépendant que de la norme de $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$.

Par le lemme de Gronwall, nous obtenons un temps minimum $\widetilde{T}^*$ pour tout n. De plus, pour tout $T < \widetilde{T}^*$, il existe une constante C_T telle que pour tout $n \geq 0$, on ait

$$\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))} \leq C_T, \qquad \|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega))} \leq C_T.$$

Comme $\boldsymbol{u}^n$ vérifie l'équation (7.2.2b), nous appliquons le lemme 7.1.3 et obtenons

$$\|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega))} \leq C_T, \qquad \|\boldsymbol{u}^n\|_{\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C_T.$$

Nous extrayons une sous-suite $\boldsymbol{u}^{n_k}$, telle que

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{u}^{n_k} &= \boldsymbol{u} \quad \text{faiblement dans } \mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega)), \\ \lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{u}^{n_k} &= \boldsymbol{u} \quad \text{faiblement dans } \mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega)), \\ \lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{u}^{n_k} &= \boldsymbol{u} \quad \text{faiblement dans } \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Vérifions que $\boldsymbol{u}$ est solution du système (7.2.1a), (7.2.1b) et (7.2.1c). D'abord, $\boldsymbol{u}^n(\cdot,0)$ converge vers $\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{v}(\cdot,0)$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Donc, $\boldsymbol{u}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{v}(\cdot,0)$. La condition de bord est $\frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$. $\frac{\partial \boldsymbol{u}^{n_k}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ converge faiblement vers $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ dans $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))$, $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$. Il reste à prouver que l'équation (7.2.1a) est vérifiée par $\boldsymbol{u}$. Par compacité, voir la proposition 5.3.2, la sous-suite converge fortement dans

- $\mathbb{H}^{s_1,s_2}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $0 \le s_1 < 3$, $0 \le s_2 < \frac{3}{2}$,
- $\mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}^s(\Omega))$ pour tout $0 \le s < 2$,
- $\mathbb{L}^\infty(\Omega \times (0,T))$.

D'après le lemme d'Aubin, voir lemme 5.4.1, la sous-suite converge aussi fortement dans $\mathrm{L}^p(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ pour tout $1 \le p < +\infty$. Nous pouvons prendre la limite dans chaque terme de l'équation (7.2.2b). $\boldsymbol{u}$ vérifie l'équation (7.2.1a). *A posteriori*, l'équation (7.2.1a) et le lemme 7.1.3 impliquent que $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ pour tout $T < \widetilde{T}^*$. Donc $\boldsymbol{u}$ appartient aussi à $\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$.

Supposons maintenant qu'il y ait deux solutions, $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ avec la même condition initiale. Multiplions l'équation (7.2.1a) par $\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1$, et intégrons sur Ω

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\delta\boldsymbol{u}\|^2}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\le \alpha A\int_\Omega |\nabla(\boldsymbol{u}^1+\boldsymbol{v})|^2|\delta\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A\int_\Omega (\nabla\delta\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{v}))\left((\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{u}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad + A\sum_{i=1}^3\int_\Omega\left(\frac{\partial(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v})}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v})\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\delta\boldsymbol{u}))\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad\qquad - \alpha\int_\Omega((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v})\wedge(\delta\boldsymbol{u}\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}})))\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\qquad\qquad\qquad - \alpha\int_\Omega((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v})\wedge((\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v})\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\delta\boldsymbol{u})))\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad (7.2.9)
\end{aligned}$$

sur $\min(T^*(\boldsymbol{u}_1),T^*(\boldsymbol{u}_2))$. Estimons le membre de droite de la précédente inégalité.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\delta\boldsymbol{u}\|^2}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &\le \alpha A\|\nabla(\boldsymbol{u}^1+\boldsymbol{v})\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{(\alpha A)^2}{4\eta}\|\nabla(\boldsymbol{u}^1+\boldsymbol{u}^2+2\boldsymbol{v})\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{A^2}{4\eta}\|\nabla(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v})\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 3\eta\|\nabla\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + C\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\Big(1+\|\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}(\|\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\boldsymbol{h}_{\mathrm{ext}}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}) \\
&\qquad + \|\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\Big)\|\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\le g(t)\|\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + 3\eta\|\nabla\delta\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

où g appartient à $\mathrm{L}^1(0,T;\mathbb{R}^+)$. Choisissons η suffisamment petit. Par le lemme de Gronwall, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1$ car $\|\boldsymbol{u}_2(\cdot,0) - \boldsymbol{u}_1(\cdot,0)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$, sur leur temps d'existence commun. Il existe donc une unique solution surr un intervalle de temps maximal.

Prouvons maintenant l'explosion à la fin du temps d'existence. Supposons que $\widetilde{T}^* < T^*$, choisissons $\delta = \min(T^* - \widetilde{T}^*, \widetilde{T}^*)/2$. La norme $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (\widetilde{T}^*/2, \widetilde{T}^* + \delta))$ de $\boldsymbol{v}$ est finie, donc il existe une constante C telle que

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(\widetilde{T}^*-t,\widetilde{T}^*-t+\delta))} < C,$$

pour tout $t < \widetilde{T}^*/2$. Supposons aussi que la norme $\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$ reste bornée sur $(0,\widetilde{T}^*)$. Donc, il existe une durée Δt, telle que l'équation avec condition initiale $\boldsymbol{m}(\cdot,t)$ et le terme affine $\boldsymbol{v}(\cdot,t+\cdot)$ pour t dans $(\widetilde{T}^*/2,\widetilde{T}^*)$ ait une solution qui existe sur $(0,\Delta t)$. Choisissons $t > \widetilde{T}^* - \Delta t$, nous pouvons alors étendre la solution au delà de $\widetilde{T}^*$, ce qui est une contradiction. □

De la proposition précédente, nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 7.2.2. *Soit $T^* > 0$. Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ telle que*

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^{\pm}, \\ Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{m}_0, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}_0) - (Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{m}_0, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}_0)\cdot\gamma^0\boldsymbol{m}_0)\gamma^0\boldsymbol{m}_0 & \text{sur } \Gamma^+, \\ Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{m}_0, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}_0) - (Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{m}_0, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}_0)\cdot\gamma^0\boldsymbol{m}_0)\gamma^0\boldsymbol{m}_0 & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases}$$

Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, pour tout $T < T^*$ tels que

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\setminus\Gamma^{\pm}\times(0,T^*), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\setminus\Gamma^{\pm}\times(0,T^*),$$
$$\boldsymbol{a}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \boldsymbol{b}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Il existe un temps maximal $\widetilde{T}^*$ et un unique champ de vecteur $\boldsymbol{b}'$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, pour tout $T < T^*$, et satisfaisant le système Landau-Lifchitz suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{b}'}{\partial t} &= \alpha A \triangle \boldsymbol{b}' + \alpha A|\nabla \boldsymbol{b}'|^2\boldsymbol{b}' - A\boldsymbol{b}' \wedge \triangle \boldsymbol{b}' \\ &\qquad - \boldsymbol{b}' \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{b}') + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \alpha \boldsymbol{b}' \wedge (\boldsymbol{b}' \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{b}') + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})). \\ \boldsymbol{b}'(\cdot,0) &= \boldsymbol{m}_0, \\ \frac{\partial \boldsymbol{b}'}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega\setminus\Gamma, \\ Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\gamma^0\boldsymbol{b})\gamma^0\boldsymbol{b} & \text{sur } \Gamma^+\times(0,\widetilde{T}^*), \\ Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\gamma^0\boldsymbol{b})\gamma^0\boldsymbol{b} & \text{sur } \Gamma^-\times(0,\widetilde{T}^*). \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, si $\widetilde{T}^* < T^*$, alors

$$\lim_{t\to\widetilde{T}^*} \|\boldsymbol{b}'\|_{\mathbb{H}^2}(t) = +\infty.$$

Preuve : Supposons d'abord l'existence d'un relèvement $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T < T^*$ telle que

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{b})\gamma^0 \boldsymbol{b} & \text{sur } \Gamma^+, \\ Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) - (Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{b})\gamma^0 \boldsymbol{b} & \text{sur } \Gamma^-. \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial(\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{v}(\cdot,0))}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$, nous appliquons la proposition 7.2.1 pour construire $\boldsymbol{u}$. Le champ de vecteur $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ est la solution recherchée. L'unicité de $\boldsymbol{b}'$ est conséquence directe de l'unicité de $\boldsymbol{u}$.

Nous construisons maintenant $\boldsymbol{v}$. D'abord rappelons que $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ est une algèbre. Soit χ dans $\mathcal{C}_c^\infty(-\infty, +\infty; \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{\min(L^+, L^-)}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{3}{4}\min(L^+, L^-). \end{cases}$$

Définissons

$$\boldsymbol{g} = \begin{cases} Q_r^+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \circ \sigma) - (Q_r^+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \circ \sigma) \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{b} & \text{dans } \Omega^+, \\ Q_r^-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \circ \sigma) - (Q_r^+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \circ \sigma) \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{b} & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

où σ est l'application qui envoie (x, y, z, t) sur $(x, y, -z, t)$. Alors,

$$\boldsymbol{v}(\cdot, \cdot, z, \cdot) = \int_0^z \chi(s) \boldsymbol{g}(\cdot, \cdot, s, \cdot) \, \mathrm{d}s,$$

est dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ et a les propriétés recherchées. □

7.2.2 Les suites convergentes

Pour construire la suite (7.1.3e), nous avons besoin de la proposition 7.2.4 dont la preuve elle-même nécessite une autre suite. Il n'est pas possible de fusionner les deux suites en une car $\mathbb{H}^1(\Omega)$ n'est pas une algèbre. Les éléments de la suite ne vérifiant pas la condition de Neumann homogène, nous ne pouvons pas utiliser le corollaire 5.2.11 et la proposition 5.2.1. Nous utilisons les propositions plus générales 5.2.5 et 5.2.10.

Pour construire les deux suites, nous avons besoin d'un élément initial. Il est fourni par le lemme suivant :

Lemme 7.2.3. *Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$, avec $\frac{\partial \boldsymbol{m}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Alors, il existe $\boldsymbol{m}^{-1}$ appartenant à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ telle que*

$$\boldsymbol{m}^{-1}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0 \ \textit{dans } \Omega, \tag{7.2.10a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{-1}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T). \tag{7.2.10b}$$

Preuve : Pour construire une telle fonction, nous utilisons les espaces $\mathrm{H}^{r,s,t}(B \times (0,L) \times (0,T))$ à l'annexe A dérivées des espaces $\mathrm{H}^{r,s}$ de Lions-Magenes [51], chapitre 4, section 2. Les conditions de compatibilité sont vérifiées, $\boldsymbol{u}$ existe par le théorème A.2.6. $\square$

7.2.2.1 Convergence de la suite interne

Proposition 7.2.4. *Soit $T^* > 0$. Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ satisfaisant la condition (7.1.1). Soit $\boldsymbol{a}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T < T^*$ satisfaisant les équations (7.2.10a) et (7.2.10b). Soit $\boldsymbol{h}_{\text{ext}}$ dans $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega \times (0,T))$. Alors, il existe un temps maximal $\widetilde{T}^*$ et un unique $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T < \widetilde{T}^*$ satisfaisant le système de Landau-Lifchitz suivant :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} &= \alpha A \triangle \boldsymbol{w} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{w}|^2 \boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} \wedge \triangle \boldsymbol{w} \\ &\quad - \boldsymbol{w} \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \alpha \boldsymbol{w} \wedge (\boldsymbol{w} \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})).\end{aligned} \tag{7.2.11a}$$

$$\boldsymbol{w}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0, \tag{7.2.11b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,\widetilde{T}^*), \\ Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{w})\gamma^0 \boldsymbol{w} & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,\widetilde{T}^*), \\ Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{w})\gamma^0 \boldsymbol{w} & \text{sur } \Gamma^- \times (0,\widetilde{T}^*). \end{cases} \tag{7.2.11c}$$

De plus, si $\widetilde{T}^* < T^*$, alors

$$\lim_{t \to \widetilde{T}^*} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^2}(t) = +\infty.$$

Si, de plus $|\boldsymbol{m}_0| = 1$ presque partout sur Ω, alors $|\boldsymbol{w}| = 1$ presque partout dans $\Omega \times (0,T)$.

Preuve : La preuve est divisée en trois étapes.

(1) Nous construisons une suite $(\boldsymbol{w}^n)_{-1 \le n}$ dont les éléments sont les solutions, de temps maximale, du système :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial t} &= \alpha A \triangle \boldsymbol{w}^n + \alpha A |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2 \boldsymbol{w}^n - A\boldsymbol{w}^n \wedge \triangle \boldsymbol{w}^n \\ &\quad - \boldsymbol{w}^n \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \alpha \boldsymbol{w}^n \wedge (\boldsymbol{w}^n \wedge (\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}^n) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})),\end{aligned} \tag{7.2.12a}$$

$$\boldsymbol{w}^n(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0, \qquad \text{dans } \Omega, \tag{7.2.12b}$$

pour tout $n \geq 0$ et les conditions aux limites

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T), \\ Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \\ \quad -(Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{w}^{n-1})\gamma^0 \boldsymbol{w}^{n-1} & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \\ \quad -(Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{w}^{n-1})\gamma^0 \boldsymbol{w}^{n-1} & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T), \end{cases} \tag{7.2.12c}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

(2) Nous estimons la taille des éléments de la suite $(\boldsymbol{w}_n)_n$.

(3) Nous prouvons que la limite est la solution recherchée.

Première étape : D'abord, nous devons construire la suite décroissante de T_n^* maximaux et de $\boldsymbol{w}^n$ appartenant à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ tels que pour tout $n \geq 0$, $\boldsymbol{w}^n$ satisfait le système (7.2.12). Nous définissons

- $\boldsymbol{w}^{-1} = \boldsymbol{a}$.
- Soit $\boldsymbol{w}^{n-1}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, nous construisons $\boldsymbol{w}^n$ par le corollaire 7.2.2 avec $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{w}^{n-1}$, le même champ de vecteur $\boldsymbol{a}$, en posant $\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{b}'$..

Nous avons initialisé la suite avec $\boldsymbol{a}$ à partir de $n = -1$ et non de $n = 0$ pour que $\boldsymbol{w}^0$ satisfasse l'équation de Landau-Lifchitz (7.2.12a).

Avant de procéder aux estimations, nous devons établir un rapport entre les estimations de $\triangle \boldsymbol{w}^n$ et de $\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n$ et les estimations des normes $\mathbb{H}^2(\Omega)$ et $\mathbb{H}^3(\Omega)$ de $\boldsymbol{w}^n$. La condition de Neumann non homogène provoque des difficultés par rapport aux estimations de la proposition 7.2.1. D'abord une intégrale sur le bord va apparaître dans chaque estimation. En sus, les inégalités (5.2.1b) et (5.2.1d) contiennent un terme de bord dans leur membre de droite. La seule majoration de $\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{L}^2}$, $\|\triangle \boldsymbol{w}\|_{\mathbb{L}^2}$ et de $\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}\|_{\mathbb{L}^2}$ ne donne plus automatiquement une majoration de $\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^2}$ ou de $\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^3}$. Par le corollaire 5.2.5 et la condition de bord (7.2.12c), pour tout entier naturel n, nous avons

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\Big(& \|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ & + \left\|Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{w}^n)\gamma^0 \boldsymbol{w}^n\right\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^+)} \\ & + \left\|Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) - (Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{a}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{a}) \cdot \gamma^0 \boldsymbol{w}^n)\gamma^0 \boldsymbol{w}^n\right\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^-)}\Big) \\ \leq C & \left(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})(1 + \|\, |\boldsymbol{w}^n|^2 \,\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}) \\ \leq C & \left(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + 3P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})(1 + \|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}) \\ \leq C & \left(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + C' P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})(1 + \|\boldsymbol{w}^n\|^3_{\mathbb{H}^1(\Omega)})\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

où P_1 est un polynôme. Donc,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C &\left(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle\, \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) \\ &+ C''(1+P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^2)(1+\|\boldsymbol{w}^n\|^6_{\mathbb{H}^1(\Omega)}) + \frac{\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}}{2}.\end{aligned} \tag{7.2.14}$$

Les inégalités précédentes sont justifiées par le fait que $\mathbb{H}^2(\Omega)$ est une algèbre, voir lemme 5.3.5, et par le lemme 5.1.7. Donc, si $N \geq 1$

$$\begin{aligned}\sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\right\} \leq 2C &\left(\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\} + \sup_{1\leq n\leq N}\{\|\triangle\, \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\}\right) \\ &+ 2C''P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^2(1+\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{w}^n\|^6_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\}) \\ &+ \|\boldsymbol{w}^0\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + 2C''P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^2(1+\|\boldsymbol{w}^0\|^6_{\mathbb{H}^1(\Omega)}).\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

Par la même méthode et la proposition 5.2.10, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)} \leq C\Bigg(&\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\triangle\, \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &+ \left\|Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\gamma^0\boldsymbol{w}^n)\gamma^0\boldsymbol{w}^n\right\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^+)} \\ &+ \left\|Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\gamma^0\boldsymbol{w}^n)\gamma^0\boldsymbol{w}^n\right\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^-)}\Bigg) \\ \leq C' &\left(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\triangle\, \boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right) + P_2(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{7.2.16}$$

où P_2 est un polynôme. Donc, si $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\} \leq &\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\} + \sup_{1\leq n\leq N}\{\|\nabla\triangle\, \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\} \\ &P_2(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\} + P_2(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\|\boldsymbol{w}^0\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

Deuxième étape : Faisons maintenant trois estimations sur la norme de $\boldsymbol{w}^n$ pour $n \geq 1$.

(1) Nous multiplions l'équation (7.2.12a) par $\boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω.

(2) Nous prenons le gradient de l'équation (7.2.12a), la multiplions par $\nabla\triangle\, \boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω.

(3) Nous prenons le gradient de l'équation (7.2.12a), la multiplions par $\nabla \boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω.

Les deux premières estimations sont présentes dans la preuve de la proposition 7.2.1, ou dans Carbou-Fabrie [15], sauf pour la condition de Neumann non homogène. La troisième estimation est une simplification de la seconde.

Première estimation Par la formule de Green et les théorèmes de traces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &\leq \alpha A\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \alpha A\left|\int_\Gamma \frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}}\cdot \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right| \\ &\leq P_1(\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}),\end{aligned} \tag{7.2.18}$$

où P_1 est un polynôme fixé.

Seconde estimation La seconde estimation est :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\quad\leq \big(1+\frac{1}{\eta^3}\big)\big(P_2(\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + (1+\left\|\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)})P_2(\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\big) \\ &\qquad + \eta(\|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{w}^{n-1}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}).\end{aligned} \tag{7.2.19}$$

où P_2 est un polynôme dont les coefficients dépendent seulement de la norme $\mathrm{L}^\infty(\Omega\times(0,T))$ de $\boldsymbol{a}$.

En effet, prenons le gradient de l'équation (7.2.12a), puis multiplions la par $\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω. Voir [15] pour les estimations des termes d'intégrales sur le volume. Nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\quad\leq \left(1+\frac{1}{\eta^3}\right)P_2(\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + \eta\|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\qquad + \alpha A\left|\int_{\Gamma^\pm}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}\partial t}\cdot\triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right|.\end{aligned} \tag{7.2.20}$$

Le terme de bord $\boldsymbol{w}$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, donc $\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t\partial\boldsymbol{\nu}}$ appartient à $\mathrm{H}^{-\frac{1}{4}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ et $\gamma^0\triangle\boldsymbol{w}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$. L'estimation de cette intégrale sur $\Gamma^\pm$ donne

$$\int_{\Gamma^+}\left|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}\partial t}\cdot\triangle\boldsymbol{w}^n\right|\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{4}\|\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} + \left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}.$$

Or,

$$\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} \leq C\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}(\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{\frac{3}{2}}, \tag{7.2.21}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} &\leq \left\|\frac{\partial((Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{w}^{n-1})\boldsymbol{w}^{n-1} - Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}))}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}\\ &\leq 4\left\|\frac{\partial Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}(1+\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})\\ &\quad + 8\|Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma^+)}\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{n-1}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}.\end{aligned} \tag{7.2.22}$$

Donc, il existe un polynôme P_3 tel que

$$\left\|\frac{\partial Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} \leq P_3(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})\left\|\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}, \tag{7.2.23a}$$

$$\|Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\|_{\mathbb{L}^\infty(\Gamma^+)} \leq P_3(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}) \tag{7.2.23b}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{n-1}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} &\leq C\left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{n-1}}{\partial t}\right\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{n-1}}{\partial t}\right\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\\ &\leq P_3(\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\\ &\leq \frac{1}{\eta^3}P_3(\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^2 + \eta\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^3_{\mathbb{H}^3(\Omega)}.\end{aligned} \tag{7.2.23c}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^+}\left|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}\partial t}\cdot\triangle \boldsymbol{w}^n\right| \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) &\leq C'\left(1+\frac{1}{\eta^3}\right)\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \eta\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\\ &\quad + C''\left(1+\frac{1}{\eta^3}\right)P_4(\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + \eta\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\\ &\quad + C\left\|\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)},\end{aligned} \tag{7.2.24}$$

où P_4, P_5 sont des polynômes. Le terme $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$ est une fonction $\mathrm{L}^1(0,T)$. En combinant ces inégalités, nous obtenons l'estimation (7.2.19).

Troisième estimation C'est une simplification de l'estimation précédente.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} &+ \alpha A\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\
&\leq \left(1+\frac{1}{\eta^{1/3}}\right) P_3(\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + \eta\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\
&\qquad + P_4(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})(1+\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}), \quad (7.2.25)\end{aligned}$$

où P_3 et P_4 sont des polynômes.
En effet, prenons le gradient de l'équation (7.2.12a), puis multiplions la par $\nabla \boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} &+ \alpha A\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\
&\leq \left(1+\frac{1}{\eta^{1/3}}\right) P_6(\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) + \eta\|\mathrm{D}^3\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\
&\qquad + \alpha A\left|\int_{\Gamma^\pm}\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}}\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right|. \quad (7.2.26)\end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale sur $\Gamma^\pm$ donne

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma^+}\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}}\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right| &\leq \frac{1}{2}\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}\\
&\leq C\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\triangle \boldsymbol{w}^n\|^{\frac{3}{2}}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\
&\qquad + P_7(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})(1+\|\boldsymbol{w}^{n-1}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}),\end{aligned}$$

où les P_i sont des polynômes et C une constante dépendant uniquement de la norme $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ de $\boldsymbol{a}$ qui est bornée pour tout $T < T^*$.

Nous choisissons η suffisamment petit et combinons les trois estimations avec les inégalités(7.2.14) et (7.2.17). Nous prenons le maximum sur $1 \leq n \leq N$, et obtenons pour tout $(0, \min\limits_{0\leq n\leq N} T^*_n)$,

$$\begin{aligned}\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\} &+ \sup_{1\leq n\leq N}\left\{\int_0^t \|\nabla\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s\right\}\\
&\leq \int_0^t P_5^\eta(\sup_{1\leq n\leq N}\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\,\mathrm{d}s + \int_0^t P_5^\eta\|\boldsymbol{w}^0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})(s)\,\mathrm{d}s\\
&\qquad + \eta\int_0^t \|\nabla\triangle \boldsymbol{w}^0\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s + \eta\int_0^t \|\nabla\triangle \boldsymbol{w}^{-1}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s. \quad (7.2.27)\end{aligned}$$

Nous remplaçons maintenant la norme $\mathbb{H}^2(\Omega)$ de $\boldsymbol{w}^n$ grâce à l'inégalité (7.2.15). Par le lemme de Gronwall, les normes $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ de $\boldsymbol{w}^n$, de $\triangle\,\boldsymbol{w}^n$, et de $\nabla\boldsymbol{w}^n$, ainsi que la norme $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ de $\nabla\triangle\,\boldsymbol{w}^n$ ne peuvent exploser avant un certain temps $\widetilde{T}^*$ indépendant de n. Donc, par l'inégalité (7.2.15), la norme $\mathbb{H}^2$ de $\boldsymbol{w}^n$ reste bornée indépendamment de n. En conséquence, il existe un temps commun d'existence $\widetilde{T}^*$ pour tout $n \geq 0$. D'après le lemme 7.1.3, pour tout $T < T^*$, la norme $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ reste bornée indépendamment de n. Donc, il existe une sous-suite faiblement convergente $\boldsymbol{w}^{n_k}$ dans $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ pour tout $T<T^*$.

Troisième étape : Nous devons prouver que $\boldsymbol{w}$ est solution du système (7.2.11). Comme dans la proposition 7.2.1, nous pouvons prendre la limite de chaque terme dans l'équation (7.2.12a). Donc, $\boldsymbol{w}$ vérifie (7.2.11a). Pour tout entier positif n, $\boldsymbol{w}^n(\cdot,0)$ est égal à $\boldsymbol{m}_0$, donc $\boldsymbol{w}(\cdot,0)=\boldsymbol{m}_0$. De plus, $\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0$ sur $\partial\Omega\setminus\Gamma$, donc $\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0$ sur $\partial\Omega\setminus\Gamma$. Il reste à vérifier la condition de Neumann non homogène sur Γ.

Supposons que l'on ait prouvé que

Lemme 7.2.5. *Soit $T < T^*$, les normes de $\boldsymbol{w}^{n+1}-\boldsymbol{w}^n$ dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ et $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega))$ tendent vers* 0.

Alors, si les deux suites $\boldsymbol{w}^{n_k}$ et $\boldsymbol{w}^{n_k+1}$ convergent faiblement dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, alors les deux suites convergent vers la même limite. La preuve se termine alors facilement. Extrayons une sous-suite supplémentaire telle que $\boldsymbol{w}^{n_k+1}$ converge aussi. D'après le lemme 7.2.5, les deux suites convergent vers une même limite. Sur Γ^+,

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^{n_k+1}}{\partial\boldsymbol{\nu}} = Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\gamma^0\boldsymbol{w}^{n_k})\gamma^0\boldsymbol{w}^{n_k}.$$

Prenons la limite quand k tend vers $+\infty$:

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}} = Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) - (Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\cdot\gamma^0\boldsymbol{w})\gamma^0\boldsymbol{w}.$$

Le résultat équivalent a lieu sur Γ^-.

Prouvons maintenant que si $|\boldsymbol{m}_0|=1$ p.p., alors $|\boldsymbol{w}|=1$ p.p. Nous travaillons par estimations. Multiplions l'équation (7.2.11a) par $(|\boldsymbol{w}|^2-1)\boldsymbol{w}$ et intégrons sur Ω

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&\left(\||\boldsymbol{w}|^2-1\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)+\frac{\alpha A}{2}\left\|\nabla(|\boldsymbol{w}|^2-1)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\\ &\leq \alpha A\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{w}|^2(|\boldsymbol{w}|^2-1)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{\alpha A}{2}\int_\Gamma^\pm\frac{\partial|\boldsymbol{w}|^2}{\partial\boldsymbol{\nu}}\left(|\boldsymbol{w}|^2-1\right)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Nous estimons l'intégrale de bord grâce à (7.2.11c).

$$\begin{aligned}\int_\Gamma^\pm\frac{\partial|\boldsymbol{w}|^2}{\partial\boldsymbol{\nu}}\left(|\boldsymbol{w}|^2-1\right)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) &= 2\int_{\Gamma^+}Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\left(|\boldsymbol{w}|^2-1\right)^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\\ &\quad+2\int_{\Gamma^-}Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})\left(|\boldsymbol{w}|^2-1\right)^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\||\boldsymbol{w}|^2-1\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)+\frac{\alpha A}{2}\left\|\nabla(|\boldsymbol{w}|^2-1)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\\
&\leq \alpha A\|\nabla\boldsymbol{w}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\||\boldsymbol{w}|^2-1\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}+C\alpha A P_1(\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^\infty})\||\boldsymbol{w}|^2-1\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\||\boldsymbol{w}|^2-1\|^{\frac{3}{2}}_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\\
&\qquad\qquad\leq C(\eta)P_2(\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\||\boldsymbol{w}|^2-1\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla(|\boldsymbol{w}|^2-1)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Nous choisissons η suffisamment petit. Nous appliquons le lemme de Gronwall. Or $\||\boldsymbol{m}_0|^2-1\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}=0$. Donc, $|\boldsymbol{w}|=1$ presque partout dans $\Omega\times(0,T)$.

Il reste à prouver le lemme 7.2.5.

Preuve du lemme 7.2.5 Premièrement, utilisant (5.2.1b), nous évaluons la norme $\mathbb{H}^2$ de $\delta^n\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{n+1}-\boldsymbol{w}^n$ pour $n\geq 1$

$$
\begin{aligned}
\|\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\leq C&\left(\|\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|\triangle\,\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)\\
&+P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\sup_j\{\|\boldsymbol{w}^j\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\}\|\delta^{n-1}\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{7.2.28}
$$

et la norme $\mathbb{H}^3$ en utilisant (5.2.1d)

$$
\begin{aligned}
\|\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\leq C&\left(\|\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|\nabla\triangle\,\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)\\
&+P_2(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\sup_j\{\|\boldsymbol{w}^j\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\}\|\delta^{n-1}\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{7.2.29}
$$

Nous faisons maintenant quelques estimations. Pour la première estimation, nous multiplions l'équation (7.2.12a) par $\delta^n\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{n+1}-\boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω. Pour la deuxième estimation, nous prenons le gradient de l'équation (7.2.12a), la multiplions par $\nabla\triangle(\boldsymbol{w}^{n+1}-\boldsymbol{w}^n)$ et intégrons sur Ω. Pour la troisième estimation, nous prenons le gradient de l'équation (7.2.12a), la multiplions par $\nabla(\boldsymbol{w}^{n+1}-\boldsymbol{w}^n)$, et intégrons sur Ω. Nous ajoutons ces trois estimations, appliquons les inégalités de régularité (7.2.28) et (7.2.29) puis intégrons sur $(0,t)$. Alors,

$$
\begin{aligned}
&\|\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\triangle\,\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\int_0^t\|\nabla\triangle\,\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad\leq\int_0^t P_1(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)},\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\|\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad+\int_0^t P_1(\|\boldsymbol{a}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\sup_j\{\|\boldsymbol{w}^j\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\}^2\|\delta^{n-1}\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad\qquad+\eta\int_0^t\|\nabla\triangle\,\delta^n\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s+\eta\int_0^t\|\nabla\triangle\,\delta^{n-1}\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

où η peut être choisi arbitrairement petit. Nous sommons alors pour k entier compris entre 1 et n.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\|\delta^k \boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\triangle\,\delta^k \boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\|\nabla\triangle(\delta^k \boldsymbol{w})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s$$
$$\leq \psi_1(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\|\delta^k \boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\right)+2\eta\sum_{k=1}^{n}\|\delta^k \boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$
$$+\psi_1(t)\|\boldsymbol{w}^1-\boldsymbol{w}^0\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle(\boldsymbol{w}^1-\boldsymbol{w}^0)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

où Ψ_1 est une fonction $\mathrm{L}^1(0,T)$. Comme $\sum_{k=1}^{n}\delta^k\boldsymbol{w}(\cdot,0)=0$, la norme $\mathbb{H}^2(\Omega)$ de la condition initiale reste bornée indépendamment de n. Après avoir utilisé (7.2.28), nous pouvons appliquer le lemme de Gronwall. Donc, pour tout $T<T^*$, il existe une constante C_T telle que

$$\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{w}^{k+1}-\boldsymbol{w}^k\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}\leq C_T,$$
$$\sum_{k=0}^{n}\|\boldsymbol{w}^{k+1}-\boldsymbol{w}^k\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega))}\leq C_T.$$

Donc le terme sous le signe somme tend vers 0. FIN DE LA PREUVE DU LEMME 7.2.5.

L'unicité est prouvé par des estimations similaires à celles de la preuve du lemme 7.2.5. Par la même preuve que celle de la proposition 7.2.1, il y a explosion de la norme $\mathbb{H}^2$ de $\boldsymbol{w}$ à la fin du temps d'existence si $\widetilde{T}^*<T^*$. Si ce n'était pas le cas, nous pourrions étendre la solution au delà de T^*, ce qui est une contradiction. □

7.2.2.2 Convergence de la suite (7.1.3e)

L'existence d'une suite satisfaisant le système (7.1.3). est conséquence directe du lemme 7.2.3 et de la proposition 7.2.4. Chaque élément de la suite est dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ pour tout $T<T_n^*$, où T_n^* est le temps d'existence de $\boldsymbol{m}^n$. Pour prouver la convergence de la suite, nous adaptons la preuve de la proposition 7.2.4. La seule différence est l'estimation de régularité (7.2.14) et l'inégalité (7.2.24). Cette dernière est remplacée pour $n\geq 1$ par

$$\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{m}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}$$
$$\leq\left\|\frac{\partial((Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{m}^{n-1},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^{n-1})\cdot\boldsymbol{m}^n)\boldsymbol{m}^n-Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{m}^{n-1},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^{n-1}))}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}$$

$$\leq \frac{C}{\eta}(\left\|\boldsymbol{m}^{n-1}\right\|^2_{\mathbb{H}^2(\Gamma^+)} + \|\boldsymbol{m}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Gamma^+)}) + \eta(\|\boldsymbol{m}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}\left\|\boldsymbol{m}^{n-1}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} + \|\boldsymbol{m}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}).$$

La première est remplacée par

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{m}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\bigg(&\|\boldsymbol{m}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle\,\boldsymbol{m}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &+ \left\|Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{m}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^n) - (Q_r^+(\gamma^0\boldsymbol{m}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^n)\cdot\gamma^0\boldsymbol{m}^{n+1})\gamma^0\boldsymbol{m}^{n+1}\right\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^+)}\\ &+ \left\|Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{m}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^n) - (Q_r^-(\gamma^0\boldsymbol{m}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^n)\cdot\gamma^0\boldsymbol{m}^{n+1})\gamma^0\boldsymbol{m}^{n+1}\right\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^-)}\bigg)\\ &\leq C\left(\|\boldsymbol{m}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle\,\boldsymbol{m}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + C'(\|\boldsymbol{m}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{m}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Cette inégalité est vérifiée car le module local de $\boldsymbol{m}^n$ vaut 1 pour tout $n \geq 1$. Le reste de la preuve de la proposition 7.2.4 s'applique. La norme $\mathbb{H}^2(\Omega)$ de $\boldsymbol{m}^n$ ne peut donc exploser avant un temps commun T^*. La norme $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ de $\boldsymbol{m}^n$ reste bornée indépendamment de n pour $T < T^*$. Nous extrayons une sous-suite faiblement convergente $\boldsymbol{m}^{n_k}$, telle que $\boldsymbol{m}^{n_k+1}$ converge vers la même limite.

La limite est la solution forte du théorème 7.1.1. Il y a une seule solution, et si $T^* < +\infty$, alors

$$\lim_{t\to T^*}\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} = +\infty.$$

Si ce n'était pas le cas, nous pourrions étendre la solution au delà de T^*, ce qui serait une contradiction.

7.2.3 Preuve de l'unicité et de la stabilité

Soient deux solutions $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{m}'$. Alors, $\delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}'$ vérifie l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\boldsymbol{m}}{\partial t} &= \alpha A\triangle\delta\boldsymbol{m} + \alpha A(\nabla\delta\boldsymbol{m}\cdot\nabla(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}'))\boldsymbol{m}' + \alpha A|\nabla\boldsymbol{m}|^2\delta\boldsymbol{m} - A\delta\boldsymbol{m}\wedge\triangle\boldsymbol{m}'\\ &- A\boldsymbol{m}\wedge\triangle\delta\boldsymbol{m} - \delta\boldsymbol{m}\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}') + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \boldsymbol{m}'\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\delta\boldsymbol{m})\\ &- \alpha\delta\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}'\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}') + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})) - \alpha\boldsymbol{m}\wedge(\delta\boldsymbol{m}\wedge(\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}') + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}))\\ &- \alpha\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\delta\boldsymbol{m})),\end{aligned} \tag{7.2.30}$$

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{m}}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \begin{cases}0 & \text{sur } \partial\Omega\setminus\Gamma,\\ \Delta Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}, \gamma^0\boldsymbol{m}', \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}', \gamma^0\boldsymbol{m} - \gamma^0\boldsymbol{m}', \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m} - \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}') & \text{sur } \Gamma^+,\\ \Delta Q^-(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}, \gamma^0\boldsymbol{m}', \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}', \gamma^0\boldsymbol{m} - \gamma^0\boldsymbol{m}', \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m} - \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}') & \text{sur } \Gamma^-.\end{cases} \tag{7.2.31}$$

où $\Delta Q^{\pm}$ est le polynôme à 6 variables, linéaires en les deux dernières, tel que

$$\delta Q^{\pm}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = Q^{\pm}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}') - Q^{\pm}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'),$$

pour tout $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'$ dans $\mathbb{R}^3$. Nous pouvons alors multiplier l'équation (7.2.30) par $\delta\boldsymbol{m}$ et intégrer sur $\Omega\times(0,T)$. Par les mêmes estimations que celles utilisées pour la preuve de l'existence, et après application du lemme de Gronwall, nous obtenons $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}'$.

Nous allons maintenant prouver la stabilité. Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Notons alors $T(\boldsymbol{m}_0)$ le temps maximal d'existence. Notons $T^*(\boldsymbol{m})$ la borne supérieure de l'ensemble des temps t pour lesquels il existe $C>0$ et $\delta>0$ telle que pour tout $\boldsymbol{m}_0'$ telle que $\|\boldsymbol{m}_0-\boldsymbol{m}_0'\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}<\delta$, la solution du système de Landau-Lifchitz $\boldsymbol{m}'$ associée à $\boldsymbol{m}_0'$ vérifie $\|\boldsymbol{m}'\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))}\leq C$. Nous notons aussi $\widetilde{T}^*(\boldsymbol{m})$ la borne supérieure de l'ensemble des temps t pour lesquels pour tout $\epsilon>0$, il existe $\delta>0$ telle que pour tout $\boldsymbol{m}_0'$ telle que $\|\boldsymbol{m}_0-\boldsymbol{m}_0'\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}<\delta$, la solution du système de Landau-Lifchitz $\boldsymbol{m}'$ associée à $\boldsymbol{m}_0'$ vérifie $\|\boldsymbol{m}'-\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))}\leq\epsilon$. La preuve de l'existence montre que pour tout $C>0$, il existe un temps T_C, et une application réelle croissante f sur $(0,T_C)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, tels que pour toute condition initiale $\boldsymbol{m}_0$ satisfaisant les conditions (7.1.1) et dont la norme $\mathbb{H}^2(\Omega)$ est inférieure à C, on ait

$$T(\boldsymbol{m}_0)\leq C,\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))}\leq f(T), \tag{7.2.32}$$

pour tout $T<T_C$ et où $\boldsymbol{m}$ est la solution forte au sens de la définition 4.2.1. Donc, $T^*(\boldsymbol{m})\geq T_{\|\boldsymbol{m}_0\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}}>0$. Nous pouvons alors réaliser pour tout $T<T^*(\boldsymbol{m}_0)$ deux estimations que nous ne détaillons pas car elles ont été faites dans la preuve de l'existence.

- Nous multiplions l'équation (7.2.30) par $\delta\boldsymbol{m}$ et intégrons sur $\Omega\times(0,T)$.
- Nous prenons le gradient de l'équation (7.2.30), la multiplions par $\nabla\delta\boldsymbol{m}$ et intégrons sur $\Omega\times(0,T)$.

Nous obtenons alors la stabilité sur tous les intervalles de temps $(0,T)$ pour $T<T^*(\boldsymbol{m}_0)$. Donc, $\widetilde{T}^*(\boldsymbol{m}_0)=\min(T^*(\boldsymbol{m}_0),T(\boldsymbol{m}_0))$. Nous allons maintenant prouver que $T(\boldsymbol{m}_0)\leq T^*(\boldsymbol{m}_0)$. En effet supposons l'inverse, $T^*(\boldsymbol{m}_0)<T(\boldsymbol{m}_0)$. Dans ce cas, il existe C telle que la norme $\mathbb{H}^1(\Omega)$ de $\boldsymbol{m}(t)$ sur $[0,T^*(\boldsymbol{m}_0)]$ soit inférieure à $C-1$. Il existe T_C telle que $T^*(\boldsymbol{u}_0)\geq T_C$ pour toute condition initiale $\boldsymbol{u}_0$ dont la norme $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est plus petite que C. Choisissons t dans l'intervalle $(\max(0,T^*(\boldsymbol{m}_0)-\frac{T_C}{2}),T^*(\boldsymbol{m}_0))$. Il existe δ telle que pour tout $\boldsymbol{m}_0'$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, telle que la norme $\mathbb{H}^1(\Omega)$ de $\boldsymbol{m}_0'-\boldsymbol{m}_0$ soit plus petite que δ, la norme de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ de $\boldsymbol{m}'(t)-\boldsymbol{m}(t)$ soit plus petite que 1. Nous pouvons prolonger le temps d'existence T_C, et pour tout $\boldsymbol{m}_0'$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$, telle que la norme $\mathbb{H}^2(\Omega)$ de $\boldsymbol{m}_0'-\boldsymbol{m}_0$ soit plus petite que δ, le temps d'existence de la solution $\boldsymbol{m}'$ s'étend au delà de $T^*(\boldsymbol{m})$. C'est une contradiction avec notre précédente supposition. Nous avons la stabilité et le temps d'existence est une fonction semi-continue inférieure.

7.3 Conclusion

Nous avons prouvé l'existence et l'unicité pour une géométrie particulière de solutions fortes en temps finis du système de Landau-Lifchitz. L'existence de telles solutions doit pouvoir se généraliser, à des domaines plus compliqués où l'espaceur n'est plus plan. Cela demanderait cependant quelques modifications techniques. Nous n'avons pas souhaité alourdir inutilement la preuve.

Troisième partie

Influence de la présence d'un espaceur mince non magnétique sur un matériau ferromagnétique en l'absence d'interactions surfaciques

Chapitre 8

La condition équivalente formelle

Considérons l'équation de Landau-Lifchitz sur un domaine ferromagnétique traversé par un espaceur mince constitué d'un matériau non magnétique. Pour calculer l'évolution en temps de l'aimantation, nous aurons besoin de réaliser des simulations numériques. La faible épaisseur de l'espaceur va rendre cette simulation numérique plus difficile. En effet, si nous souhaitons, dans l'optique d'une simulation numérique, appliquer la méthode Toeplitz pour le calcul numérique du champ démagnétisant, nous avons besoin d'un maillage régulier. Par conséquent, mailler l'espaceur provoquerait une explosion du nombre de mailles et donc du coût en temps de calcul. Notre but est d'obtenir après développement à l'ordre 1 de l'aimantation une condition de bord équivalente, puis de justifier rigoureusement ce développement. Nous reprenons les notations de la section 4.1.

Dans ce chapitre, nous allons maintenant comparer les solutions du système de Landau-Lifchitz (2.6.10) sur différents domaines ferromagnétiques, Ω ou Ω^ε, Figure 8.a, et dériver une condition de bord équivalente pour le terme d'ordre 1. Nous résoudrons le problème d'existence au chapitre 9 et établirons la convergence du développement à l'ordre 1 au chapitre 10.

8.1 La condition équivalente : le calcul formel

Tout d'abord, nous devons préciser la condition initiale. Soit une famille de conditions initiales $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ indicée par $\varepsilon \geq 0$, $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ appartenant à $\widetilde{\mathbb{H}}^2(\Omega^\varepsilon)$, $|\boldsymbol{m}_0^\varepsilon| = 1$ presque partout. Supposons maintenant qu'il existe $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$ dans $\widetilde{\mathbb{H}}^2(\Omega)$, et $\boldsymbol{m}_0^{(1)}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, telle que

$$\|\boldsymbol{m}_0^{(0)} - \boldsymbol{m}_0^{\varepsilon,(0)}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega^\varepsilon)} = O(1), \quad \|\boldsymbol{m}_0^{(0)} - \boldsymbol{m}_0^{\varepsilon,(0)}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon), \tag{8.1.1a}$$

$$\frac{\boldsymbol{m}_0^{(0),\varepsilon} - \boldsymbol{m}_0^{(0)}}{\varepsilon} \to \boldsymbol{m}_0^{(1)}{}_{|\Omega^{\varepsilon_0}} \quad \text{faiblement dans } \mathbb{H}^1(\Omega^{\varepsilon_0}), \text{ pour tout } \varepsilon_0 > 0. \tag{8.1.1b}$$

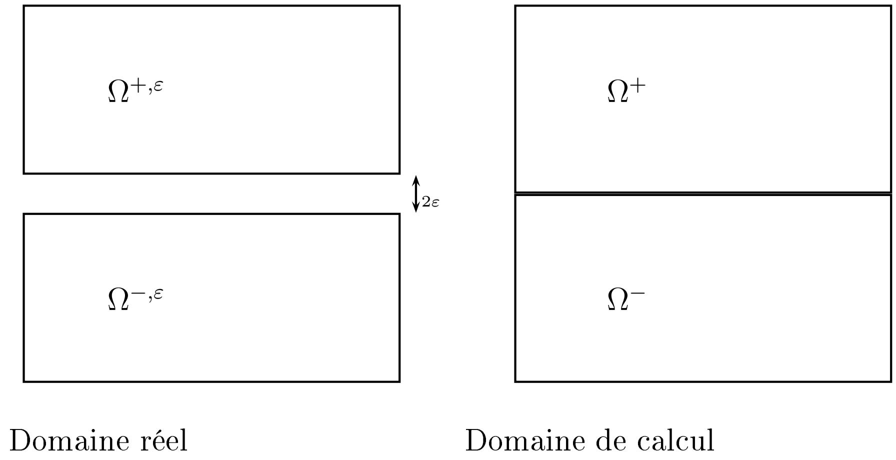


FIG. 8.a: Domaines géométriques

Remarque 8.1.1. Il existe de telles suites. Par exemple, il suffit pour $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$, $|\boldsymbol{m}_0^{(0)}| = 1$ p.p. dans Ω, de poser

$$\boldsymbol{m}_0^{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{m}_0^{\varepsilon}(x, y, L\frac{z-\varepsilon}{L-\varepsilon}).$$

pour (x, y, z) dans Ω^{ε}.

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, nous notons $\boldsymbol{m}^{\varepsilon}$ la solution du système de Landau-Lifchitz, système (2.6.10), sur le domaine Ω^{ε}, avec condition initiale $\boldsymbol{m}_0^{\varepsilon}$. Nous souhaitons maintenant obtenir formellement un développement à l'ordre 1 de $\boldsymbol{m}^{\varepsilon}$ sur Ω^{ε} sous la forme $\boldsymbol{m}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{m}^{(1)} + o(\varepsilon)$. Nous obtenons alors les systèmes suivants.

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t} = -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})), \tag{8.1.2a}$$

$$|\boldsymbol{m}^{(0)}| = 1 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{8.1.2b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \tag{8.1.2c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^{(0)}. \tag{8.1.2d}$$

Et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} &= -\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)})) \\ &\quad + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\, \mathrm{d}\Gamma) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\, \mathrm{d}\Gamma)),\end{aligned} \tag{8.1.3a}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0, \tag{8.1.3b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } (\partial\Omega \setminus \Gamma) \times (0,T), \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T), \end{cases} \tag{8.1.3c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(1)}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \tag{8.1.3d}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale extérieure à la frontière. L'égalité (9.1.2c) s'obtient formellement de

$$0 \approx \frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{m}^{(1)})}{\partial z}(\cdot,\cdot,\varepsilon,\cdot) \approx \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial z}(\cdot,\cdot,0,\cdot) \right),$$

où z est la troisième variable d'espace.

Ainsi $\boldsymbol{m}^{(0)}$ est la solution du système de Landau-Lifchitz (2.6.10) sur Ω, avec condition initiale $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$. $\boldsymbol{m}^{(1)}$ est la solution d'un système de Landau-Lifchitz linéarisé.

8.2 Conclusion

Nous avons établi l'équation que vérifie formellement le terme d'ordre 1 du développement de l'aimantation. Nous devons à présent établir le caractère bien posé du système (8.1.3) et prouver la convergence du développement $\boldsymbol{m}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{m}^{(1)}$.

Chapitre 9

Existence et unicité pour le terme d'ordre 1

Le terme d'ordre 1 de l'aimantation vérifie l'équation de Landau-Lifchitz linéarisée avec un terme affine et une condition de Neumann non homogène. Il nous faut maintenant prouver le caractère bien posé d'une telle équation. Cela passe d'abord par une réécriture du système lorsque le terme de dissipation d'énergie d'échange a été développé.

9.1 Énoncé du théorème d'existence

Rappelons que le couple $\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}$ vérifie formellement

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t} = -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})), \tag{9.1.1a}$$

$$|\boldsymbol{m}^{(0)}| = 1 \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{9.1.1b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \tag{9.1.1c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^{(0)}. \tag{9.1.1d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} = &-\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ &- \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)})) \\ &+ \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)} \, \mathrm{d}\Gamma) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)} \, \mathrm{d}\Gamma)),\end{aligned} \tag{9.1.2a}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0, \tag{9.1.2b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T), \\ 0 & \text{sur } (\partial\Omega \setminus \Gamma) \times (0,T), \end{cases} \tag{9.1.2c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(1)}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \tag{9.1.2d}$$

Le caractère bien posé du système vérifié par $\boldsymbol{m}^{(0)}$ ayant déjà été établi dans [15], nous nous intéressons au système vérifié par $\boldsymbol{m}^{(1)}$. Nous allons établir le théorème suivant.

Théorème 9.1.1. *Soit $\boldsymbol{m}^{(0)}$ une solution du système* (9.1.1)*. Si*

$$\boldsymbol{m}_0^{(1)} \in \mathbb{H}^1(\Omega), \qquad \boldsymbol{m}_0^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}_0^{(1)} = 0,$$

alors, le système (9.1.2) *a une unique solution $\boldsymbol{m}^{(1)}$ qui, pour tout $T < T^*$, T^* temps d'existence de $\boldsymbol{m}^{(0)}$, appartient à* $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega)) \cap \mathrm{H}^1(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$*. De plus, l'application suivante est continue.*

$$\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T)) \times \mathbb{H}^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{2,1}(\Omega),$$
$$(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}_0^{(1)}) \mapsto \boldsymbol{m}^{(1)}.$$

La démonstration de ce théorème passe par un système équivalent où le terme de dissipation d'échange a été développé. Nous prouvons ensuite le caractère bien posé de ce système équivalent.

9.2 Un système équivalent

Avant de montrer le caractère bien posé de ce système, nous allons développer certains termes. En particulier, nous avons

$$\triangle \left(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}\right) = \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(1)} + 2\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{m}^{(1)} + \boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(0)}, \tag{9.2.1a}$$

$$\triangle \left|\boldsymbol{m}^{(0)}\right|^2 = 2\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} + 2\left|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\right|^2. \tag{9.2.1b}$$

Quand les contraintes (9.1.1b) et (9.1.2b) sont vérifiées, nous avons

$$\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} + \left|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\right|^2 = 0, \tag{9.2.2a}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(1)} + 2\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{m}^{(1)} + \boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} = 0. \tag{9.2.2b}$$

Nous développons certains termes de l'égalité (9.1.2a).

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)}) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)}) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(1)}) \\ &\quad = (\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(0)})\boldsymbol{m}^{(0)} + (\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(0)})\boldsymbol{m}^{(1)} - 2(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}) \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} \\ &\qquad + (\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle \boldsymbol{m}^{(1)})\boldsymbol{m}^{(0)} - |\boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \triangle \boldsymbol{m}^{(1)}. \end{aligned}$$

Comme les contraintes (9.1.1b) et (9.1.2b) sont vérifiées, nous pouvons utiliser les égalités (9.2.2) et nous obtenons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)}) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)}) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(1)}) \\ = -2(\nabla \boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \nabla \boldsymbol{m}^{(0)})\boldsymbol{m}^{(0)} - |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{m}^{(1)} - \triangle \boldsymbol{m}^{(1)}.\end{aligned}$$

Nous développons $\mathcal{H}_v$ dans les équations (9.1.1a) et (9.1.2a). en utilisant les notations de la section 2.5.3 Donc, en particulier, le couple $\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}$ vérifie, au moins formellement,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t} - \alpha A \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} = -A\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{m}^{(0)} - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) \\ - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \big(\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})\big), \quad (9.2.3a)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} - \alpha A \triangle \boldsymbol{m}^{(1)} = -A\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(1)} - A\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} + 2\alpha A(\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{m}^{(1)})\boldsymbol{m}^{(0)} \\ + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{m}^{(1)} - \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(1)}) \\ - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\, \mathrm{d}\Gamma) - \alpha \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(1)})) \\ - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\, \mathrm{d}\Gamma)). \quad (9.2.3b)\end{aligned}$$

Nous pouvons établir rigoureusement la proposition suivante :

Proposition 9.2.1. *Soit* $\boldsymbol{m}^{(0)}$ *appartenant à* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, $|\boldsymbol{m}^{(0)}| = 1$ *presque partout. Soit* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *appartenant à* $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, $\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0$ *presque partout. Alors,*

$$\big(\boldsymbol{m}^{(1)} \text{ vérifie } (9.1.2a)\big) \Longleftrightarrow \big(\boldsymbol{m}^{(1)} \text{ vérifie } (9.2.3b)\big)\,.$$

PREUVE *:* Lorsque $\boldsymbol{m}^{(0)}$ appartenant à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, et $\boldsymbol{m}^{(1)}$ appartenant à $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, toutes les égalités de cette section sont rigoureuses et ont un sens. $\square$

En réalité, notre système est redondant.

Proposition 9.2.2. *Soit* $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$ *dans* $\mathbb{H}^2(\Omega)$. *Soit* $\boldsymbol{m}^{(0)}$ *dans* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, *solution du système* (9.1.1). *Soit* $\boldsymbol{m}_0^{(1)}$ *dans* $\mathbb{H}^1(\Omega)$, $\boldsymbol{m}_0^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}_0^{(1)} = 0$. *Soit* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *solution du système constitué de* (9.1.2c), (9.1.2d), *et* (9.2.3b). *Alors,* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *vérifie la contrainte* (9.1.2b). *Et par conséquent, l'égalité* (9.1.2a).

Preuve : Nous avons en utilisant les équations (9.2.3a) et (9.2.3b) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)} + \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{m}^{(1)} \\
&= -A(\boldsymbol{m}^{(1)}\wedge\triangle\,\boldsymbol{m}^{(0)})\cdot\boldsymbol{m}^{(0)} - A(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\triangle\,\boldsymbol{m}^{(1)})\cdot\boldsymbol{m}^{(1)} \\
&\quad - (\boldsymbol{m}^{(1)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))\cdot\boldsymbol{m}^{(0)} - (\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(1)}))\cdot\boldsymbol{m}^{(1)} \\
&\quad - \alpha\big(\boldsymbol{m}^{(1)}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))\big)\cdot\boldsymbol{m}^{(0)} \\
&\quad - \alpha\big(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))\big)\cdot\boldsymbol{m}^{(1)} \\
&\quad + \alpha A\big(2\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla\boldsymbol{m}^{(1)} + \triangle\,\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\boldsymbol{m}^{(1)} + \triangle\,\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)} \\
&\qquad + 2|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)}\big) \\
&= \alpha A\big(2\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla\boldsymbol{m}^{(1)} + \triangle\,\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\boldsymbol{m}^{(1)} + \triangle\,\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)} \\
&\qquad + 2|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)}\big).
\end{aligned}$$

Donc, d'après les relations (9.2.1),

$$\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial t} = \alpha A\left(\triangle(\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)}) + 2|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2(\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)})\right).$$

Or, $\boldsymbol{m}_0^{(0)}\cdot\boldsymbol{m}_0^{(1)} = 0$. De plus, $\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\boldsymbol{m}^{(1)})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0$ sur $\partial\Omega\times(0,T)$. C'est une conséquence des conditions de bord sur $\partial\Omega\setminus\Gamma$. En effet, sur Γ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\boldsymbol{m}^{(1)})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial\boldsymbol{\nu}} &= \boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial\boldsymbol{\nu}^2} \\
&= \frac{\partial\left(\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\sum_{i=1}^3\alpha_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial x_i}\right)}{\partial\boldsymbol{\nu}} - \left(\frac{\partial\boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)^2 = 0,
\end{aligned}$$

où le champ de vecteur $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et satisfait $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nu}$ sur $\Gamma^\pm$ et pour tout entier strictement positif k, $\frac{\partial^k\boldsymbol{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\nu}^k} = 0$.

Multiplions alors l'équation (9.2) par $\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)}$, et intégrons sur $\Omega\times(0,T)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left[\int_\Omega|\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]_0^T &+ \alpha A\iint_{Q_T}\left|\nabla(\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)})\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\alpha A\iint_{Q_T}|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2(\boldsymbol{m}^{(1)}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \\
&\le 2\alpha A\int_0^T\|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\boldsymbol{m}^{(1)}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Gronwall,

$$\|\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}(T) \leq \|\boldsymbol{m}^{(1)}_0 \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \exp\left(2\alpha A \int_0^T \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \,\mathrm{d}t\right).$$

Donc, $\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)} = 0$ presque partout. □

9.3 Existence de solutions au système de Landau-Lifchitz linéarisé

Pour prouver l'existence de $\boldsymbol{m}^{(1)}$, il suffit de prouver le caractère bien posé du système linéaire suivant.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \alpha A \triangle \boldsymbol{w} = & -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge A \triangle \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} \wedge A \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} + 2\alpha A (\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{w}) \boldsymbol{m}^{(0)} \\ & + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}) \\ & - \alpha \boldsymbol{w} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{w} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ & - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w})) + \theta,\end{aligned} \tag{9.3.1a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \beta \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \tag{9.3.1b}$$

$$\boldsymbol{w}(\cdot, 0) = \boldsymbol{w}_0 \tag{9.3.1c}$$

Pour résoudre cette équation, nous aurons besoin de préciser le domaine d'existence de β.

Définition 9.3.1. *Nous définissons $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\mathrm{morc}}(\partial\Omega \times (0,T))$ comme le sous espace de $\mathbb{L}^2(\partial\Omega \times (0,T))$, constitué des fonctions dont les restrictions à $\partial B \times (0,T)$, $B \times \{L^+\} \times (0,T)$, $B \times \{0\} \times (0,T)$, et $B \times \{-L^-,\} \times (0,T)$ sont dans $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}$.*

Nous aurons besoin du résultat de relèvement suivant.

Proposition 9.3.2. *Il existe un opérateur linéaire continu $\mathcal{R}$ de $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\mathrm{morc}}(\partial\Omega \times (0,T))$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, tel que pour tout β dans $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\mathrm{morc}}(\partial\Omega \times (0,T))$*

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\beta)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \beta sur\ \partial\Omega \times (0,T).$$

Preuve : C'est une conséquence du théorème A.3.2. □

Nous aurons aussi besoin des inégalités suivantes. Définissant

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{p,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{w}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{w}) - \alpha\boldsymbol{w}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}^{(0)}))\\ -\alpha\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\boldsymbol{w}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{w})).\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

Nous obtenons par simple application de l'inégalité de Hölder que

$$\|\boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le C'(1+\|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)})\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}. \tag{9.3.3}$$

Nous arrivons enfin aux théorèmes d'existence.

Théorème 9.3.3. *Soit $\boldsymbol{m}^{(0)}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, pour tout $T<T^*$. Soit β dans $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\mathrm{morc}}(\partial\Omega\times(0,T))$. Soit θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))$. Soit $\boldsymbol{w}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Alors, le système (9.3.1) a une unique solution $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega\times(0,T))$. Si plus est, $\boldsymbol{w}$ dépend continûment des données θ,$\boldsymbol{w}_0$, β et de $\boldsymbol{m}^{(0)}$.*

Preuve *:* Premièrement, nous réduisons ce théorème au cas où $\beta=0$. Pour cela, soit $\mathcal{R}$ le relèvement de la proposition 9.3.2. Posons $\widetilde{\boldsymbol{f}}=\mathcal{R}(\beta)$. $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ appartient à $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega\times(0,T))$ et $\beta=\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{f}}}{\partial\boldsymbol{\nu}}$. Alors, $\boldsymbol{w}$ satisfait le système (9.3.1) si et seulement si $\boldsymbol{w}-\widetilde{\boldsymbol{f}}$ satisfait le système (9.3.1) en remplaçant β par 0, $\boldsymbol{w}_0$ par $\boldsymbol{w}_0-\widetilde{\boldsymbol{f}}(\cdot,0)$, et θ par $\widetilde{\theta}$ qui vaut

$$\begin{aligned}\theta-\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{f}}}{\partial t}+\alpha A\triangle\widetilde{\boldsymbol{f}}+2\alpha A(\widetilde{\boldsymbol{f}}\cdot\boldsymbol{m}^{(0)})\boldsymbol{m}^{(0)}+\alpha A|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2\widetilde{\boldsymbol{f}}-\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_v(\widetilde{\boldsymbol{f}})-\widetilde{\boldsymbol{f}}\wedge\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})\\ -\alpha\widetilde{\boldsymbol{f}}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))-\alpha\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\widetilde{\boldsymbol{f}}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))-\alpha\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\widetilde{\boldsymbol{f}})).\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\widetilde{\theta}$ appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))$. Comme $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ dépend continûment de β, le système (9.3.1) est bien posé si et seulement si il est bien posé quand $\beta=0$. Nous supposons maintenant que $\beta=0$. Commençons par prouver l'unicité. Soit $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ deux solutions du système (9.3.1). Alors, $\delta\boldsymbol{w}_0=0$, $\frac{\partial\delta\boldsymbol{w}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0$, et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\boldsymbol{w}}{\partial t}-\alpha A\triangle\delta\boldsymbol{w}=-A\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\triangle\delta\boldsymbol{w}-A\delta\boldsymbol{w}\wedge\triangle\boldsymbol{m}^{(0)}+2\alpha A(\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla\delta\boldsymbol{w})\boldsymbol{m}^{(0)}\\ +\alpha A|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2\delta\boldsymbol{w}-\delta\boldsymbol{w}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})-\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\delta\boldsymbol{w})-\alpha\delta\boldsymbol{w}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))\\ -\alpha\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\delta\boldsymbol{w}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))-\alpha\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge(\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\delta\boldsymbol{w})),\end{aligned} \tag{9.3.4}$$

sur $\Omega\times(0,T)$. Multiplions cette équation par $\delta\boldsymbol{w}$ et intégrons sur $\Omega\times(0,T)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\delta\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+(\alpha A-\eta)\int_\Omega|\delta\nabla\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ \le C(\eta)\left(\|\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\right)\|\delta\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pour prouver l'unicité, il suffit alors de prendre $\eta = \alpha A/2$ et d'appliquer le lemme de Gronwall. Il nous reste à prouver l'existence, pour cela nous utilisons la base de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ constituée des vecteurs propres $(w_1, \ldots, w_i, \ldots)$ du laplacien avec conditions de bord de Neumann homogènes, voir page 74. Chaque w_i est dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)})$. Posons V_n le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ engendré par $(w_1, \ldots, w_n)$. L'espace $\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et dans $\widetilde{\mathrm{H}}^2(\Omega)$. La famille $(w_1, \ldots, w_i, \ldots)$ est aussi une base orthogonale de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et dans $\widetilde{\mathrm{H}}^2(\Omega)$. Nous notons $\mathcal{P}_n$ le projecteur orthogonal de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ sur V_n.

Nous pouvons maintenant appliquer la méthode de Galerkin avec la base $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Nous cherchons $\boldsymbol{w}^n$ dans $V_n \otimes \mathcal{C}^\infty(0,T;\mathbb{R}^3)$, telle que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial t} - \alpha A \bigtriangleup \boldsymbol{w}^n = A\mathcal{P}_n \left(-\boldsymbol{w}^n \wedge \bigtriangleup \boldsymbol{m}^{(0)} - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \bigtriangleup \boldsymbol{w}^n + 2\alpha(\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{w}^n)\boldsymbol{m}^{(0)}\right) \\ + \mathcal{P}_n \left(\alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{w}^n + \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n) + \theta\right), \qquad (9.3.5a)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{w}^n{}_0 = \mathcal{P}_n(\boldsymbol{w}_0). \qquad (9.3.5b)$$

Décomposons $\boldsymbol{w}^n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i^n(t) w_i$ où les $\boldsymbol{\varphi}_i$ sont des fonctions de $(0,T)$ dans $\mathbb{R}^3$. Le système (9.3.5) est équivalent au suivant

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}_i(0) = \langle \boldsymbol{w}_0, w_i \rangle, \\ &\boldsymbol{\varphi}_i'(t) = -A\lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^n(t) + A\sum_{j=1}^n \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j^n(t) \wedge \int_\Omega \boldsymbol{m}^{(0)} w_i w_j \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad - A\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\varphi}_j^n(t) \wedge \int_\Omega \bigtriangleup \boldsymbol{m}^{(0)} w_i w_j \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\varphi}_j^n(t) \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 w_j w_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad + 2\alpha A \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\varphi}_j^{n,k}(t) \int_\Omega \left(\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial x_k} \cdot \nabla w_j\right) \boldsymbol{m}^{(0)} w_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\varphi}_j^{n,k}(t) \left(\int_\Omega \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{e}_k w_j) w_i\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \theta w_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

pour tout i, $1 \leq i \leq n$, et où $(\boldsymbol{e}_k)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire en $(\boldsymbol{\varphi}_i^n)_i$ dont les paramètres dépendent continûment du temps. Le terme affine au second membre est dans $\mathbb{L}^1(0,T)$. Il y a donc existence locale et globale de $\boldsymbol{w}^n$ sur $[0,T^*)$ où T^* est le temps d'existence de $\boldsymbol{m}^{(0)}$. Nous réalisons maintenant quelques estimations sur la taille de $\boldsymbol{w}^n$. Dans ces estimations, η est un réel positif pouvant être choisi arbitrairement petit. C est une constante dépendant uniquement de Ω^ε, pouvant être choisie bornée tant que $\varepsilon < \varepsilon_0 = \min(L^+, L^-)$.

Première estimation Multiplions (9.3.5) par $\boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω. Par la formule de Green, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \underbrace{-A\int_\Omega (\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge \triangle\,\boldsymbol{w}^n)\cdot \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I}$$
$$+\underbrace{\alpha A\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2|\boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II} + \underbrace{2\alpha A\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla \boldsymbol{w}^n)(\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot \boldsymbol{w}^n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III}$$
$$+\underbrace{\int_\Omega \theta\cdot \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n)\cdot \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{V} \tag{9.3.6}$$

Nous estimons maintenant séparément chaque terme de la somme. Nous commençons par traiter $I = \int_\Omega (\boldsymbol{m}^{(0)}\wedge \triangle\,\boldsymbol{w}^n)\cdot \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}
|I| &= \left|\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega \left(\boldsymbol{w}^n \wedge \frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial x_k}\right)\cdot \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \\
&\le \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\le \frac{1}{4\eta}\|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{9.3.7a}$$

Puis, nous évaluons $II = \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2|\boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$|II| \le \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{9.3.7b}$$

De même pour $III = \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla \boldsymbol{w}^n)(\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot \boldsymbol{w}^n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$|III| \le \frac{1}{4\eta}\|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{9.3.7c}$$

Ensuite, nous pouvons traiter $IV = \int_\Omega \theta\cdot \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$|IV| \le \frac{1}{2}\|\theta\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{9.3.7d}$$

Usant de l'inégalité (9.3.3) sur $V = \int_\Omega \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n)\cdot \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|V| &\le \|\boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\le C\left(1+\|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right)\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + C\left(1+\|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right)\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\le C'\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\left(1+\|\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right)\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{9.3.7e}$$

Nous combinons toutes les inégalités (9.3.7), et obtenons pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\le C\left(1+\frac{1}{\eta}\right)(\|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty} + \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{H}^1})\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\theta\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.3.8}$$

Choisissons $\eta = \frac{\alpha A}{2}$. Par l'inégalité de Gronwall, il existe, pour tout $T < T^*$, une constante $C_T > 0$, telle que, pour tout $n \ge 0$,

$$\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C_T, \qquad \|\nabla \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(0,T\times\Omega)} \le C_T, \tag{9.3.9}$$

où T^* est le temps d'existence de $\boldsymbol{m}^{(0)}$.

Seconde estimation Nous multiplions (9.3.5) par $\boldsymbol{\psi}$ by $-\triangle \boldsymbol{w}^n$ et obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A\int_\Omega |\triangle \boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= A\underbrace{\int_\Omega (\boldsymbol{w}^n \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)})\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I} - 2\alpha A\underbrace{\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\cdot \nabla \boldsymbol{w}^n)\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II}\\ &\quad - \alpha A\underbrace{\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{w}^n\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III} - \underbrace{\int_\Omega \theta\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV}\\ &\quad - \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n)\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{V}.\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

Nous estimons chaque terme indépendamment. Tout d'abord, nous traitons $I = \int_\Omega (\boldsymbol{w}^n \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)})\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|I| &\le \|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)}\|\triangle \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)}\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\triangle \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^6(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^3(\Omega)} + \eta\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{C}{\eta}\|\triangle \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^6(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \eta\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.3.11a}$$

Puis, nous estimons $II = \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\cdot \nabla \boldsymbol{w}^n)\cdot \triangle \boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}|II| &\le \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.3.11b}$$

De même pour $III = \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{w}^n \cdot \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}|III| &\le \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{4\eta} \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.3.11c}$$

Par Cauchy-Schwarz, $IV = \int_\Omega \theta \cdot \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

$$|IV| \le \frac{1}{4\eta} \|\theta\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{9.3.11d}$$

Usant de (9.3.3), nous pouvons estimer $V = \int_\Omega \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n) \cdot \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}|V| &\le \|\boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}^n)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\le C(1 + \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}) \|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\le \frac{C}{\eta}(1 + \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}) \|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \eta \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.3.11e}$$

Nous combinons toutes les estimations (9.3.11), et obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) + \alpha A \int_\Omega |\triangle \boldsymbol{w}^n|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad \le \frac{C}{\eta}\left(\|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^4_{\mathbb{L}^\infty} + \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{H}^3}\right) \|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\qquad + \frac{C}{\eta}(\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^\infty} + \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{H}^3}) \|\nabla \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\qquad\qquad + \eta \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\theta\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.3.12}$$

Après avoir choisi un η suffisamment petit, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) + \int_\Omega |\triangle \boldsymbol{w}^n|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \le f(t) + g(t) \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{w}^n|^2 + \eta \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

où f et g appartiennent tous les deux à $\mathrm{L}^1(0,T)$. Par l'inégalité de Gronwall, il existe, pour tout $T < T^*$, une constante $C_T > 0$, telle que, pour tout $n \ge 0$,

$$\|\nabla \boldsymbol{w}^n\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C_T, \qquad \|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathrm{L}^2((0,T)\times\Omega)} \le C_T.$$

Nous avons prouvé, pour tout $T < T^*$, l'existence d'une constante C_T, telle que

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C_T, && \|\nabla \boldsymbol{w}^n\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C_T, \\ &\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C_T, && \left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial t}\right\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \le C_T.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence des autres, de la contractivité de $\mathcal{P}_n$ dans L^2 et de l'équation (9.3.5a). Utilisant la régularité elliptique 5.2.1 sur Ω, nous avons aussi

$$\| \mathrm{D}^2 \boldsymbol{w}^n \|_{\mathrm{L}^2((0,T)\times\Omega)} \leq C_T.$$

Donc, il existe une sous-suite $\boldsymbol{w}^{n_k}$ et $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, tels que $\boldsymbol{w}^{n_k}$ converge faiblement vers $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, pour tout $T < T^*$. Passant à la limite, $\boldsymbol{w}$ satisfait alors $\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ presque partout sur $\partial\Omega \times (0,T)$, $\boldsymbol{w}(\cdot, 0) = \boldsymbol{w}_0$ sur Ω au sens des traces, et

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle &= \left\langle -A\boldsymbol{w} \wedge \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)} - A\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle\, \boldsymbol{w} + \alpha A \triangle\, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle 2\alpha A(\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{w})\boldsymbol{m}^{(0)} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{w} + \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\boldsymbol{w}) + \theta, \boldsymbol{\psi} \right\rangle,\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{\psi}$ dans $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n\right) \bigotimes \mathcal{C}^\infty([0,T^*);\mathbb{R}^3)$. Comme $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, $\boldsymbol{w}$ est solution du système (9.3.1).

Il nous reste à démontrer la stabilité. Premièrement, l'unicité et les estimations utilisées pour l'existence nous montrent que la taille de $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ reste bornée tant que la taille de $\boldsymbol{m}^{(0)}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, celle de θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$ et celle de $\boldsymbol{w}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ le sont. Comme l'équation est linéaire par rapport à $\boldsymbol{w}_0$, il y a continuité par rapport à $\boldsymbol{w}_0$. Nous souhaitons aussi obtenir la continuité par rapport à $\boldsymbol{m}^{(0)}$. Pour cela, nous devons procéder par des estimations très similaires à celles utilisées pour la preuve de l'existence.

Soient $(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)$ et $(\boldsymbol{m}^{(0)\prime}, \boldsymbol{w}_0', \theta')$. Notons $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ les solutions de l'équation de Landau-Lifchitz linéarisée ayant respectivement pour données $(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)$ et $(\boldsymbol{m}^{(0)\prime}, \boldsymbol{w}_0', \theta')$. Nous savons déjà, grâce aux estimations obtenues lors de la démonstration de l'existence, que la taille des solutions reste bornée quand la taille des données le reste aussi. Pour la démonstration de la continuité, nous procédons aussi par estimations. Tout d'abord, notons :

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}, & \delta \boldsymbol{w}_0 &= \boldsymbol{w}_0' - \boldsymbol{w}_0, \\ \delta \boldsymbol{m}^{(0)} &= \boldsymbol{m}^{(0)\prime} - \boldsymbol{m}^{(0)}, & \delta\theta &= \theta' - \theta.\end{aligned}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \boldsymbol{w}}{\partial t} - \alpha A \triangle \delta \boldsymbol{w} = {} & -A \underbrace{\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \delta \boldsymbol{w}}_{I} - A \underbrace{\delta \boldsymbol{w} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)}}_{II} + 2\alpha A \underbrace{(\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \delta \boldsymbol{w}) \boldsymbol{m}^{(0)}}_{III} \\
& + \alpha A \underbrace{|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \delta \boldsymbol{w}}_{IV} + \underbrace{\boldsymbol{F}^{a,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\delta \boldsymbol{w})}_{V} + \underbrace{\boldsymbol{F}^{d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}^{(0)}}(\delta \boldsymbol{w})}_{VI} + \underbrace{\delta\theta}_{VII} \\
& - A \underbrace{\delta \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle \boldsymbol{w}'}_{VIII} - A \underbrace{\boldsymbol{w}' \wedge \triangle \delta \boldsymbol{m}^{(0)}}_{IX} + 2\alpha A \underbrace{(\nabla \delta \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{w}') \boldsymbol{m}^{(0)\prime}}_{X} \\
& + 2\alpha A \underbrace{(\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{w}') \delta \boldsymbol{m}^{(0)}}_{XI} + \alpha A \underbrace{(\nabla \delta \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla (\boldsymbol{m}^{(0)} + \boldsymbol{m}^{(0)\prime})) \boldsymbol{w}'}_{XII} \\
& - \underbrace{\delta \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}')}_{XIII} - \underbrace{\boldsymbol{w}' \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta \boldsymbol{m}^{(0)})}_{XIV} \\
& - \alpha \underbrace{\boldsymbol{w}' \wedge \big(\delta \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})\big)}_{XV} - \alpha \underbrace{\boldsymbol{w}' \wedge \big(\boldsymbol{m}^{(0)\prime} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta \boldsymbol{m}^{(0)})\big)}_{XVI} \\
& - \alpha \underbrace{\delta \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{w}' \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}))}_{XVII} - \alpha \underbrace{\boldsymbol{m}^{(0)\prime} \wedge (\boldsymbol{w}' \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta \boldsymbol{m}^{(0)}))}_{XVIII} \\
& - \alpha \underbrace{\delta \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}'))}_{XIX} - \alpha \underbrace{\boldsymbol{m}^{(0)\prime} \wedge (\delta \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}'))}_{XX}.
\end{aligned}$$

Nous allons successivement faire les trois estimations suivantes :

- multiplier scalairement l'équation par $\delta \boldsymbol{w}$ et intégrer sur Ω,
- multiplier scalairement l'équation par $\triangle \delta \boldsymbol{w}$ et intégrer sur Ω,
- multiplier scalairement l'équation par $\partial_t \delta \boldsymbol{w}$ et intégrer sur Ω.

Commençons par estimer les normes $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des termes VII à XII. :

$$\begin{gathered}
\|VII\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\delta\theta\|_{\mathbb{L}^2}, \qquad \|VIII\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\triangle \boldsymbol{w}'\|^2_{\mathbb{L}^2}, \\
\|IX\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^3} \|\triangle \delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^6}, \qquad \|X\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\nabla \boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla \delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty}, \\
\|XI\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\nabla \boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty}, \\
\|XII\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^2} \|\nabla (\boldsymbol{m}^{(0)} + \boldsymbol{m}^{(0)\prime})\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\delta \nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty}.
\end{gathered}$$

Continuons avec l'évaluation des termes d'anisotropie et démagnétisant $XIII$ à XX :

$$\begin{aligned}
\|XIII, XIX, XX\|_{\mathbb{L}^2} &\leq \|\boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^2} \|\delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty}, \\
\|XIV, XVI, XVIII\|_{\mathbb{L}^2} &\leq \|\boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^2}, \\
\|XV, XVII\|_{\mathbb{L}^2} &\leq C \|\boldsymbol{w}'\|_{\mathbb{L}^\infty} \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^6} \|\delta \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^3}.
\end{aligned}$$

Ces estimations nous permettent d'affirmer que la norme $\mathbb{L}^2(\Omega)$ de la somme des termes VII à XX est majorée par $\phi(t)(\|\delta(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)\|)$, où ϕ est une fonction appartenant à $\mathrm{L}^2(0,T)$ pour tout $T < T^*$. Et où ϕ peut être choisie indépendamment des données, tant que celles-ci restent bornées. Les termes où apparaît $\delta \boldsymbol{w}$ se traitent comme lors des estimations utilisées pour la démonstration de l'existence. Les trois estimations obtenues sont alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|\nabla \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \psi(t)\|\delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \phi^2(t)\|\delta(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)\|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|\triangle\, \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \psi(t)\|\nabla \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \phi^2(t)\|\delta(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)\|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \left\|\frac{\partial \delta \boldsymbol{w}}{\partial t}\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \psi(t)\|\nabla \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2} + \|\triangle\, \delta \boldsymbol{w}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \phi^2(t)\|\delta(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)\|$$

où ψ et ϕ appartiennent, pour tout $T < T^*$, respectivement à $\mathrm{L}^1(0,T)$ et à $\mathrm{L}^2(0,T)$ et peuvent être choisies indépendamment des données tant que la taille de celles-ci reste bornée. Nous appliquons l'inégalité de Gronwall successivement à ces trois inégalités et nous obtenons que la norme $\mathbb{H}^{2,1}$ de $\delta \boldsymbol{w}$ est dominée par la norme des données initiales donc la fonction qui aux données $(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{w}_0, \theta)$ associe la solution $\boldsymbol{w}$ est lipschitzienne sur les bornés de $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T)) \times \mathbb{H}^1(\Omega)) \times \mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$ à valeur dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$. $\square$

Chapitre 10

Convergence à l'ordre 1 du développement

Nous rappelons au lecteur le problème obtenu au chapitre 8. Nous nous donnons un continuum de conditions initiales $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ dans $\widetilde{\mathbb{H}}^2(\Omega)$ Il existe alors par [15] un continuum de solutions $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ du système (8.1.2). Nous supposons aussi que les conditions initiales vérifient (8.1.1).

Nous avons établi l'existence de l'aimantation $\boldsymbol{m}^{(1)}$ et le caractère bien posé du système qu'elle vérifie au chapitre 9. Dans ce chapitre, nous souhaitons démontrer la convergence à l'ordre 1 de $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ vers le développement $\boldsymbol{m}^{(0)}+\varepsilon\boldsymbol{m}^{(1)}$, où les aimantations $\boldsymbol{m}^{(0)}$ et $\boldsymbol{m}^{(1)}$ sont caractérisées par les systèmes (8.1.2) et (8.1.3). Le problème est que $\boldsymbol{m}^{(0)}$ et $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ ne vivent pas sur le même domaine. Ainsi, avant la comparaison, faudra-t-il prolonger la solution $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ sur tout le domaine Ω.

10.1 Convergence du terme d'ordre 0. Vitesse de convergence

Dans cette section, nous estimons la norme de $\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}$ dans Ω^ε. Pour prouver la convergence, nous devons d'abord introduire un terme d'ordre 1 artificiel. Ce terme sera introduit par l'intermédiaire de la proposition suivante.

Proposition 10.1.1. *Soit*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}^{(0)} &\in \mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T)), & \boldsymbol{m}^{(0)\prime} &\in \mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T)),\\
\beta^+ &\in \mathbb{H}^{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(B\times\{0\}\times(0,T)), & \beta^- &\in \mathbb{H}^{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(B\times\{0\}\times(0,T)),\\
\boldsymbol{w}_0 &\in \mathbb{H}^1(\Omega\times(0,T)), & \theta &\in \mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T)).
\end{aligned}$$

Alors, le système suivant, avec pour inconnue $\boldsymbol{w}$, vérifiant

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \alpha A \triangle \boldsymbol{w} = &-A\boldsymbol{w} \wedge \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} - A\boldsymbol{m}^{(0)'} \wedge \triangle \boldsymbol{w} + \alpha A|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{w} \\ &+ \alpha A((\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} + \nabla \boldsymbol{m}^{(0)'}) \cdot \nabla \boldsymbol{w})\boldsymbol{m}^{(0)'} - \boldsymbol{w} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) \\ &- \boldsymbol{m}^{(0)'} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)'} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)'} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w})) + \theta \\ &- \alpha \boldsymbol{m}^{(0)'} \wedge (\boldsymbol{w} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{w} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})), \end{aligned} \tag{10.1.1a}$$

sur Ω^ε, et avec pour condition initiale et conditions aux limites,

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } \partial\Omega^\varepsilon \setminus (B \times \{\pm\varepsilon\} \times (0,T^*)), \\ \beta^+ & \textit{sur } B \times \{+\varepsilon\} \times (0,T^*), \\ \beta^- & \textit{sur } B \times \{-\varepsilon\} \times (0,T^*), \end{cases} \tag{10.1.1b}$$

$$\boldsymbol{w}(\cdot, 0) = \boldsymbol{w}_0. \tag{10.1.1c}$$

a une unique solution dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$. De plus, il y a stabilité de la solution dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ par rapport aux données $(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(0)'}, \beta^+, \beta^-, \boldsymbol{w}_0, \theta)$. De plus,
- *l'application qui envoie $(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(0)'}, \beta^+, \beta^-, \boldsymbol{w}_0)$ sur la solution $\boldsymbol{w}$ est lipschitzienne sur les bornés.*
- *Les constantes de Lipschitz dépendent de l'ouvert Ω^ε, mais elles restent bornées pour ε proche de 0.*

Preuve : Il suffit de réutiliser la preuve du théorème 9.3.3. □

Proposition 10.1.2. *Soit $\chi_{\mathcal{O}}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$. Soit $\boldsymbol{m}^{\varepsilon,(1)}$ la solution sur Ω^ε du système (10.1.1a) avec pour données*

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\chi_{B\times(-\varepsilon,+\varepsilon)}\boldsymbol{m}^{(0)}) + \frac{1}{\varepsilon}\alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\chi_{B\times(-\varepsilon,+\varepsilon)}\boldsymbol{m}^{(0)})),$$

$$\boldsymbol{m}_0^{\varepsilon,(1)} = 0, \quad \boldsymbol{m}^{(0)'} = \boldsymbol{m}^\varepsilon, \quad \boldsymbol{m}^{(0)'} = \boldsymbol{m}^{0,(0)},$$

$$\beta^+ = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\cdot,\cdot,+\varepsilon,\cdot), \quad \beta^- = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\cdot,\cdot,-\varepsilon,\cdot).$$

Alors, $\boldsymbol{m}^{\varepsilon,(1)}$ existe et est unique dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon)$. De plus, sa norme $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon)$ reste bornée quand ε tend vers 0.

Preuve : La condition initiale et les conditions de bord sont dans les espaces requis. Nous pouvons appliquer la proposition 10.1.1. La taille des données reste bornée. En effet,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\cdot,\cdot,\varepsilon,\cdot) \right\|_{\mathbb{H}^{\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(B\times(0,T)} &\leq \|\tau_{-\varepsilon}\boldsymbol{m}^{(0)} - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(B\times(0,+\infty)\times(0,T))}, \\ &\leq \varepsilon \|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(B\times(0,\varepsilon)\times(0,T))},\end{aligned} \tag{10.1.2}$$

après extension de $\boldsymbol{m}^{(0)}$ sur $B \times \mathbb{R}^{+,*} \times (0,T)$, et où $\tau_{-\varepsilon}$ est l'opérateur de translation sur la troisième variable d'espace défini par $\tau_{-\varepsilon} f = (x,y,z,t) \mapsto f(x,y,z+\varepsilon,t)$. Le terme affine θ reste borné grâce au lemme 3.3.1. $\square$

Nous définissons $\delta_\varepsilon \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}$, and $\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)} - \varepsilon \boldsymbol{m}^{\varepsilon,(1)}$. Nous faisons des estimations sur $\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}$. Des estimations sur $\delta_\varepsilon \boldsymbol{m}$ feraient apparaître des termes de bord difficiles à traiter.

Théorème 10.1.3. *Nous avons*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)} - \varepsilon \boldsymbol{m}^{\varepsilon,(1)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))} &= O(\varepsilon), \\ \|\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))} &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Preuve : Comme $\boldsymbol{m}^{\varepsilon,(1)}$ est borné dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T)))$ indépendamment de ε, la seconde inégalité est une conséquence de la première. Nous prouvons maintenant la première inégalité. $\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}$ vérifie les équations (10.1.1a) avec $\theta = 0$ et les conditions de Neumann homogènes. La norme $\mathbb{H}^1(\Omega)$ de la condition initiale est dominée par ε, ceci grâce à l'hypothèse (8.1.1a).

Estimation des termes d'anisotropie et de champ démagnétisant Nous définissons

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{F}^{a,d} = &-\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^\varepsilon \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}) \\ &- \alpha \boldsymbol{m}^\varepsilon \wedge (\boldsymbol{m}^\varepsilon \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m})) \\ &- \alpha \boldsymbol{m}^\varepsilon \wedge (\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})). \end{aligned}$$

Or, l'opérateur $\mathcal{H}_{d,a} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_d$ est continu de L^q dans L^q, pour tout $1 < q < +\infty$, voir théorème 3.2.2, en particulier pour $q = 4$ et $q = 6$. De plus, $\boldsymbol{m}^{\varepsilon,(1)}$, $\boldsymbol{m}^{(0)}$ et $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ appartiennent à $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^6(\Omega^\varepsilon))$ et à $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^4(\Omega^\varepsilon))$ pour tout $T < T^*$. Donc, pour tout $T < T^*$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de ε telle que

$$\|\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{F}^{a,d}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C(T) \|\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Première estimation Il existe pour tout $T < T^*$, une constante C_T telle que

$$\|\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C_T \varepsilon \qquad \|\nabla \delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C_T \varepsilon. \tag{10.1.3}$$

Pour établir cette estimation, nous multiplions l'équation (10.1.1a) par $\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}$ et intégrons sur Ω. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega^\varepsilon}|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\alpha A\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ = -A\underbrace{\sum_i\int_{\Omega^\varepsilon}\left(\frac{\partial\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{m}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\cdot\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I}\\ +\alpha A\underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon}(\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla(\boldsymbol{m}^{(0)}+\boldsymbol{m}^\varepsilon))(\boldsymbol{m}^\varepsilon\cdot\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II}\\ +\alpha A\underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III}+\underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon}\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{F}^{a,d}\cdot\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV}.\end{aligned}\tag{10.1.4}$$

Nous estimons maintenant chaque terme indépendamment. Premièrement, nous estimons $I=\sum_i\int_{\Omega^\varepsilon}\left(\frac{\partial\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{m}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\cdot\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|I|&\le\|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega^\varepsilon)}\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}\\&\le\frac{1}{4\eta}\|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega^\varepsilon)}\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}+\eta\|\nabla\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{10.1.5a}$$

Ensuite, nous majorons $II=\int_{\Omega^\varepsilon}(\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\cdot\nabla(\boldsymbol{m}^{(0)}+\boldsymbol{m}^\varepsilon))(\boldsymbol{m}^\varepsilon\cdot\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|II|\le{}&\frac{1}{4\eta}\|\nabla(\boldsymbol{m}^{(0)}+\boldsymbol{m}^\varepsilon)\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega^\varepsilon)}\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}\\&+\eta\|\nabla(\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{10.1.5b}$$

Puis, nous évaluons $III=\int_{\Omega^\varepsilon}|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}|^2|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$|III|\le\|\nabla\boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega^\varepsilon)}\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}.\tag{10.1.5c}$$

Nous estimons enfin $IV=\int_{\Omega^\varepsilon}\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{F}^{a,d}\cdot\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|IV|&\le\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{F}^{a,d}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}\\&\le C\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\|\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}+\eta\|\nabla\delta^1_\varepsilon\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{10.1.5d}$$

Nous regroupons toutes les inégalités (10.1.5), puis nous choisissons η suffisamment petit. Par l'inégalité de Gronwall, nous obtenons l'estimation annoncée (10.1.3).

Seconde estimation Il existe une constante C_T telle que

$$\|\nabla \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \varepsilon C_T \qquad \|\triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \varepsilon C_T \tag{10.1.6}$$

Donc, d'après la proposition 5.2.1, la norme $\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ de $\mathrm{D}^2\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}$ reste aussi bornée par $C'_T\varepsilon$.

Pour établir cette estimation, nous multiplions l'équation (10.1.1a) par $-\triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}$ et intégrons sur Ω.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla(\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A \int_{\Omega^\varepsilon} |\triangle(\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)& \\
= A \underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon} (\triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}) \cdot \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I}& \\
- \alpha A \underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon} (\nabla \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \cdot \nabla(\boldsymbol{m}^\varepsilon + \boldsymbol{m}^{(0)}))(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II}& \\
- \alpha A \underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \cdot \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III} - \underbrace{\int_{\Omega^\varepsilon} \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{F}^{a,d} \cdot \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV}.&
\end{aligned} \tag{10.1.7}$$

Nous estimons ensuite chacun de ces termes. D'abord, nous traitons le terme $I = \int_{\Omega^\varepsilon} (\triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}) \cdot \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \|\triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{L}^3(\Omega^\varepsilon)} \|\triangle(\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \|\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq \frac{1}{4\eta} \|\triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^3(\Omega^\varepsilon)} \|\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^6(\Omega^\varepsilon)} + \eta \|\triangle(\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq \frac{C}{4\eta} \|\triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^3(\Omega^\varepsilon)} \|\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)} + \eta \|\triangle(\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m})\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{10.1.8a}$$

Puis, nous estimons $II = \int_{\Omega^\varepsilon} (\nabla \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \cdot \nabla(\boldsymbol{m}^\varepsilon + \boldsymbol{m}^{(0)}))(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$|II| \leq \frac{1}{4\eta} \|\nabla(\boldsymbol{m}^\varepsilon + \boldsymbol{m}^{(0)})\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega^\varepsilon)} \|\nabla \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} + \eta \|\triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{10.1.8b}$$

Nous pouvons ensuite évaluer $III = \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \cdot \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$|III| \leq \frac{1}{4\eta} \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega^\varepsilon)} \|\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} + \eta \|\triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{10.1.8c}$$

Enfin, nous évaluons $IV = \int_{\Omega^\varepsilon} \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{F}^{a,d} \cdot \triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}
|IV| &\leq \|\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{F}^{a,d}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \|\triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq \frac{C}{\eta} \|\delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)} + \eta \|\triangle\, \delta^1_\varepsilon \boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{10.1.8d}$$

Nous combinons toutes les estimations (10.1.8), et choisissons η suffisamment petit. Par l'inégalité de Gronwall, nous obtenons l'estimation annoncée (10.1.6).

Quand ε est proche de 0, la quantité $\left\|\frac{\partial\delta_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon))}$ est dominée par ε, d'après les estimations précédentes et l'équation (10.1.1a). Ce qui termine la preuve. $\square$

10.2 Convergence à l'ordre 1

Pour comparer les solutions existant sur des domaines différents comme Ω et Ω^ε, nous introduisons un opérateur de prolongement. Nous définissons l'opérateur de prolongement $\mathrm{Prol}_\varepsilon$ par réflexions. Pour $\boldsymbol{m}$ définie sur Ω^ε,

$$\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{m})(x,y,z,t) = \begin{cases} \boldsymbol{m} & \text{sur } \Omega^\varepsilon, \\ \boldsymbol{m}(x,y,2\varepsilon - z,t) & \text{sur } B \times (0,\varepsilon) \times (0,T), \\ \boldsymbol{m}(x,y,-2\varepsilon - z,t) & \text{sur } B \times (-\varepsilon,0) \times (0,T). \end{cases}$$

Nous posons alors $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon = \mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{m}^\varepsilon)$. Donc, $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, et vérifie la condition de Neumann homogène sur le bord latéral $\partial B \times (0,L) \times (0,T)$, et l'équation de Landau-Lifchitz sur $\Omega^\varepsilon \times (0,T)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour déduire du théorème 10.1.3, l'estimation sur la norme $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}$.

Lemme 10.2.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$,*

$$\|\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_{|\Omega^\varepsilon}) - \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)},$$

et pour tout $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{H}^3(\Omega)$,

$$\|\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_{|\Omega^\varepsilon}) - \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)}.$$

Preuve : Ce résultat est la conséquence de l'inégalité

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{u}_{|\Omega^\varepsilon}) - \boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &\le \int_B \int_0^\varepsilon |\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, 2\varepsilon - z) - \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, z)|^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\quad + \int_B \int_{-\varepsilon}^0 |\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, -2\varepsilon - z) - \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, z)|^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\le \int_B \int_0^\varepsilon \left| \int_z^{2\varepsilon - z} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}(\hat{\boldsymbol{x}}, s)\,\mathrm{d}s \right|^2 u dz\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\quad + \int_B \int_{-\varepsilon}^0 \left| \int_{-2\varepsilon - z}^{z} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}(\hat{\boldsymbol{x}}, s)\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\le \int_B \int_0^\varepsilon 2(\varepsilon - z) \int_z^{2\varepsilon - z} \left| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}(\hat{\boldsymbol{x}}, s) \right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\quad + \int_B \int_{-\varepsilon}^0 2(\varepsilon + z) \left| \int_{-2\varepsilon - z}^{z} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}(\hat{\boldsymbol{x}}, s)\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\le \varepsilon^2 \int_B \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \left| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}(\hat{\boldsymbol{x}}, s) \right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\le \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 10.2.2. *La quantité* $\frac{\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{m}^\varepsilon) - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon}$ *converge faiblement vers* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *dans* $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$.

Preuve : D'après le théorème 10.1.3, la quantité $\|\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon)}$ est dominée par ε près de 0. De plus,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega)} &\le \|\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}{}_{|\Omega^\varepsilon})\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega)} + \|\mathrm{Prol}_\varepsilon(\boldsymbol{m}^{(0)}{}_{|\Omega^\varepsilon}) - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega)} \\
&\le 2\|\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon\|\boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega)}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 10.2.1. Donc, la quantité $\|\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}}$ est dominée par ε. Il existe alors une sous-suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ telle que

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{m}}^{\varepsilon_n} - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon_n} \to \overline{\boldsymbol{m}^{(1)}} \text{ faiblement dans } \mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T)).$$

Nous introduisons $\delta'_\varepsilon \boldsymbol{m} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon}$. Et pour tout entier $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m}}{\partial t} - \alpha A \triangle \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} = -\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon \wedge A \triangle \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} - \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} \wedge A \triangle \boldsymbol{m}^{(0)} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} \\ + \alpha A ((\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} + \nabla \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon) \cdot \nabla \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m}) \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) \\ - \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m}) - \alpha \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ - \alpha \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon \wedge (\delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon \wedge (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m})) \\ - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{H}_d(\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \boldsymbol{m}^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{H}_d(\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \boldsymbol{m}^{(0)})) \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon.\end{aligned} \tag{10.2.1}$$

Nous prenons la limite au sens des distributions dans (10.2.1). $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait l'équation (9.1.2a). Comme $\delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{m}^{(0)} + \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon) = 0$, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait la contrainte (9.1.2b). De plus, sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$ $\frac{\partial \delta'_{\varepsilon_{n_k}} \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$. Donc, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait l'équation (9.1.2c) sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Sur Γ,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}(\boldsymbol{x}', \varepsilon, t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon}{\partial z}(\boldsymbol{x}', 0^+, t) \right|^2 \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}t \\ \leq \int_0^T \int_\Gamma \left| \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2 (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z^2}(\boldsymbol{x}', z, t)\, \mathrm{d}z \right|^2 \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}t \\ \leq \varepsilon \int_0^T \int_{B\times(0,\varepsilon)} \left| \frac{\partial^2 (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z^2}(\boldsymbol{x}, t) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}t \\ \leq \varepsilon^3 \left\| \frac{\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon} \right\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}(\boldsymbol{x}', \varepsilon, t) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon}{\partial z}(\boldsymbol{x}', 0^+, t) \right|^2 \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}')\, \mathrm{d}t = O(\varepsilon).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}}{\partial z}(\cdot, 0^+, \cdot) &= \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon}{\partial z}(\cdot, 0^+, \cdot), \\ &= - \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}(\cdot, \varepsilon, \cdot), \\ &= - \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z^2}(\cdot, 0^+, \cdot).\end{aligned}$$

Donc, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait l'équation (9.1.2c) sur Γ. Comme $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait aussi l'équation (9.1.2d), d'après l'égalité (8.1.1b). $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait donc le système (9.1.2). Comme ce système admet une unique solution, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}} = \boldsymbol{m}^{(1)}$. La suite toute entière converge.

$\square$

Quatrième partie

Influence de la présence d'un espaceur mince non magnétique sur un matériau ferromagnétique en présence d'interactions surfaciques

Chapitre 11

La condition équivalente formelle en présence d'interactions surfaciques

Nous avons dans cette partie les mêmes buts que dans la partie III. Cependant, dans cette partie, nous prenons en compte l'influence du super-échange et de l'anisotropie surfacique. Cela rendra les preuves de cette partie plus techniques et nous obligera à utiliser les méthodes du chapitre 7.

Nous considérons un domaine ferromagnétique traversé par un espaceur mince puis nous faisons tendre l'épaisseur de cet espaceur vers 0. Comme au chapitre 8, nous souhaitons obtenir formellement une condition équivalente de bord pour le terme d'ordre 1, mais en présence de super-échange et d'anisotropie surfacique. Cela nous permettra de réaliser des simulations numériques sans mailler l'espaceur. Nous comparons pour cela les solutions du système de Landau-Lifchitz (2.6.11) sur différents domaines Ω et Ω^ε, voir les notations de la section 4.1.

Dans ce chapitre, nous obtiendrons formellement une condition de bord équivalente pour le terme d'ordre 1 de l'aimantation. Nous résoudrons le problème d'existence du terme d'ordre 1 au chapitre 12 et établirons la convergence du développement à l'ordre 1 au chapitre 13.

11.1 La condition équivalente : le calcul formel

Tout d'abord, nous avons besoin d'une famille de conditions initiales. Soit une famille de conditions initiales $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ indicée par $\varepsilon \geq 0$. $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ appartenant à $\mathbb{H}^2(\Omega^\varepsilon)$ et vérifiant les conditions

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0^\varepsilon, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0^\varepsilon) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^+, \\ Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0^\varepsilon, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0^\varepsilon) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^-, \end{cases} \tag{11.1.1}$$

où les $Q^{\pm}$ sont définies comme pour les conditions (7.1.1), $|\boldsymbol{m}_0^{\varepsilon}| = 1$.

Nous supposons qu'il existe $\boldsymbol{m}_0^{(1)}$ telle que

$$\|\boldsymbol{m}_0^{(0)} - \boldsymbol{m}_0^{\varepsilon,(0)}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega^\varepsilon)} = O(1), \quad \|\boldsymbol{m}_0^{(0)} - \boldsymbol{m}_0^{\varepsilon,(0)}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon), \tag{11.1.2a}$$

$$\frac{\boldsymbol{m}_0^{(0),\varepsilon} - \boldsymbol{m}_0^{(0)}}{\varepsilon} \to \boldsymbol{m}_0^{(1)}{}_{|\Omega^\varepsilon} \quad \text{faiblement dans } \mathbb{H}^1(\Omega^{\varepsilon_0}), \text{ pour tout } \varepsilon_0 > 0. \tag{11.1.2b}$$

Remarque 11.1.1. De telles suites existent. Par exemple, il suffit pour $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$, $|\boldsymbol{m}_0^{(0)}| = 1$ p.p. dans Ω, de poser

$$\boldsymbol{m}_0^{\varepsilon}(x,y,z) = \boldsymbol{m}_0^{\varepsilon}(x,y,\frac{\varepsilon}{(L-\varepsilon)^2}(z-\varepsilon)^2 + z - \varepsilon).$$

pour (x,y,z) dans Ω^ε.

Nous définissons ensuite $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ comme la solution du système (4.2.1), avec pour condition initiale $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ sur Ω^ε. Formellement, nous avons le développement au premier ordre $\boldsymbol{m}^\varepsilon = \boldsymbol{m}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{m}^{(1)}$ sur Ω^ε. Comme au chapitre 8, nous obtenons des équations sur $\boldsymbol{m}^{(1)}$ et $\boldsymbol{m}^{(0)}$. $\boldsymbol{m}^{(0)}$ vérifie l'équation de Landau-Lifchitz sur $\Omega \times (0,T)$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t} = -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})), \tag{11.1.3a}$$

$$|\boldsymbol{m}^{(0)}| = 1 \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{11.1.3b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T), \\ Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T), \end{cases} \quad \boldsymbol{m}^{(0)}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^{(0)}. \tag{11.1.3c}$$

Et $\boldsymbol{m}^{(1)}$ vérifie un système de Landau-Lifchitz linéarisé.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} = & -\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ & - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)})) \\ & + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)} \, d\Gamma) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)} \, d\Gamma)), \end{aligned} \tag{11.1.4a}$$

avec

$$\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0, \tag{11.1.4b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T), \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} + \mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot \\ \qquad (\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(1)} - \gamma^1 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(1)} - \gamma^{1,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} + \mathrm{D}Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot \\ \qquad (\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(1)} - \gamma^1 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(1)} - \gamma^{1,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T). \end{cases} \tag{11.1.4c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(1)}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \tag{11.1.4d}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale extérieure à la frontière. Pour obtenir la condition aux limites de $\boldsymbol{m}^{(1)}$, nous procédons comme au chapitre 8.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z}(\cdot,\cdot,\varepsilon,\cdot) \approx & -\frac{1}{\varepsilon}\big(Q^+(\gamma_\varepsilon^{0,+}\boldsymbol{m}^\varepsilon, \gamma_\varepsilon^{0,-}\boldsymbol{m}^\varepsilon) - Q^+(\gamma_\varepsilon^{0,+}\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_\varepsilon^{0,-}\boldsymbol{m}^{(0)})\big) \\ & - \frac{1}{\varepsilon}\big(Q^+(\gamma_\varepsilon^{0,+}\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_\varepsilon^{0,-}\boldsymbol{m}^{(0)}) - Q^+(\gamma^{0,+}\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,-}\boldsymbol{m}^{(0)})\big) \\ & - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}(\cdot,\cdot,\varepsilon,\cdot) - \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z}(\cdot,\cdot,0,\cdot)\right) \\ \approx -\mathrm{D}Q^+(\gamma^{0,+}\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,-}\boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot & \left(\gamma^{0,+}\boldsymbol{m}^{(1)} + \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}, \gamma^{0,-}\boldsymbol{m}^{(1)} - \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}. \end{aligned}$$

Donc, au moins formellement, sur $\Gamma^\pm$, la condition au limite équivalente est

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\boldsymbol{m}^{(1)} - \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot \left(\gamma^0\boldsymbol{m}^{(1)} - \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^{(1)} - \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \\ &= \mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot (\gamma^0\boldsymbol{m}^{(1)} - \gamma_0^1\boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}^{(1)} - \gamma_0^{1,\prime}\boldsymbol{m}^{(0)}). \end{aligned} \tag{11.1.5}$$

Ainsi $\boldsymbol{m}^{(0)}$ est la solution du système de Landau-Lifchitz (2.6.11) sur Ω, avec condition initiale $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$. $\boldsymbol{m}^{(1)}$ est la solution d'un système de Landau-Lifchitz linéarisé.

11.2 Conclusion

Nous disposons maintenant formellement de l'équation vérifiée par $\boldsymbol{m}^{(1)}$ qui est le terme d'ordre 1 dans le développement de l'aimantation. Nous devons à présent établir le caractère bien posé du système (11.1.4) et prouver la convergence du développement $\boldsymbol{m}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{m}^{(1)}$.

Chapitre 12

Existence du terme d'ordre 1 en présence d'interactions surfaciques

Dans ce chapitre, nous souhaitons démontrer l'existence du terme d'ordre 1 obtenu formellement au chapitre 11, système (11.1.4).

Nous avons démontré au chapitre 9 l'existence de solutions à l'équation de Landau-Lifchitz linéarisée avec des conditions aux limites de Neumann fixées dans $\mathbb{H}^{2,1}$. Nous avons démontré au chapitre 7 l'existence de solutions à l'équation de Landau-Lifchitz avec des conditions de Neumann non linéaires dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}$. Nous prouvons dans ce chapitre l'existence de solutions à l'équation de Landau-Lifchitz linéarisée avec des conditions de Neumann affines. Nous obtenons d'abord l'existence et l'unicité de solutions dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}$ pour des données suffisamment régulières. Nous pourrons ensuite déduire des résultats précédents l'existence de solutions dans $\mathbb{H}^{2,1}$ pour des données moins régulières.

12.1 Énoncé du théorème d'existence

Rappelons que le couple $\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}$ satisfait formellement le système

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t} = -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})), \tag{12.1.1a}$$

$$|\boldsymbol{m}^{(0)}| = 1 \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{12.1.1b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) & \text{sur } \Gamma^+, \\ Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases} \quad 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \tag{12.1.1c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^{(0)}, \tag{12.1.1d}$$

pour le terme d'ordre 0, et

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} &= -\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}^{(1)})) \\ &\quad + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\,\mathrm{d}\Gamma) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\,\mathrm{d}\Gamma)),\end{aligned} \tag{12.1.2a}$$

$$\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0, \tag{12.1.2b}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T), \\ \mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot (\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(1)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(1)}) \\ \quad +\beta^+ & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \mathrm{D}Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot (\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(1)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(1)}) \\ \quad +\beta^- & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T). \end{cases} \tag{12.1.2c}$$

$$\boldsymbol{m}^{(1)}(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \tag{12.1.2d}$$

avec

$$\beta^+ = -\,\mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot \left(\gamma_0^1 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{1,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}\right), \tag{12.1.3a}$$

$$\beta^- = -\,\mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot \left(\gamma_0^1 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{1,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}\right). \tag{12.1.3b}$$

Nous avons déjà prouvé le caractère bien posé du système que vérifie $\boldsymbol{m}^{(0)}$ au chapitre 7, théorème 7.1.1. Il nous reste à prouver le caractère bien posé du système vérifié par $\boldsymbol{m}^{(1)}$ par rapport aux données $\boldsymbol{m}_0^{(1)}, \boldsymbol{m}^{(0)}$. Pour cela, nous devrons introduire un problème équivalent où le terme de dissipation d'énergie lié à l'interaction d'échange a été développé.

L'existence et l'unicité de solutions au problème formellement satisfait par $\boldsymbol{m}^{(1)}$ sont données par les théorèmes suivants.

Théorème 12.1.1. *Soit $\boldsymbol{m}^{(0)}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, solution du système* (12.1.1) *de Landau-Lifchitz avec temps d'existence T^*. Soit θ dans $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T < T^*$, et telle que $\theta \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}$ presque partout. Soit β^+, β^- dans $\mathbb{H}_{00,}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Gamma^\pm \times (0,T))$, orthogonales presque partout à $\boldsymbol{m}^{(0)}$. Soit $\boldsymbol{m}_0^{(1)}$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ orthogonal presque partout sur Ω à $\boldsymbol{m}^{(0)}$ et vérifiant*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{m}_0^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{m}_0^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0^{(0)})(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0^{(1)}) + \beta^+(\cdot, 0) \ \textit{sur } \Gamma^+, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{m}_0^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathrm{D}Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0^{(1)})(\gamma^0 \boldsymbol{m}_0^{(1)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}_0^{(1)}) + \beta^-(\cdot, 0) \ \textit{sur } \Gamma^-.\end{aligned} \tag{12.1.4}$$

Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *dans* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ *solution du système* (12.1.2).

Le précédent théorème ne sera pas suffisant car β^+ et β^- ne sont pas dans notre cas suffisamment réguliers. Mais la preuve du dernier théorème est nécessaire avant de pouvoir diminuer les conditions de régularité comme nous le faisons dans le théorème suivant.

Théorème 12.1.2. *Soit* $\boldsymbol{m}^{(0)}$ *dans* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ *solution du système de Landau-Lifchitz avec temps d'existence* $T^* > 0$*. Soit* θ *dans* $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$ *pour tout* $T < T^*$*, et telle que* θ *est orthogonal à* $\boldsymbol{m}^{(0)}$ *presque partout. Soit* β^+, β^- *dans* $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma^\pm \times (0,T))$*, et telle que* $\beta^\pm \cdot \boldsymbol{m}^{(0)} = 0$ *presque partout. Soit* $\boldsymbol{m}_0^{(1)}$ *dans* $\mathbb{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* $\boldsymbol{m}_0^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}_0^{(1)} = 0$ *presque partout sur* Ω*. Alors, il existe, une unique solution* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *dans* $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ *au système* (12.1.2).

Ce chapitre est entièrement consacré à la preuve de ces deux théorèmes.

12.2 Un problème équivalent

Nous utilisons la même méthode qu'à la section 9.2. Nous rappelons que si $\boldsymbol{m}^{(0)}$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, $\boldsymbol{m}^{(1)}$ à $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, et si $|\boldsymbol{m}^{(0)}| = 1$, $\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0$ presque partout sur $\Omega \times (0,T^*)$, alors

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)}) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)}) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \triangle\, \boldsymbol{m}^{(1)}) \\
&\quad = (\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)})\boldsymbol{m}^{(0)} + (\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)})\boldsymbol{m}^{(1)} - 2(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}) \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)} \\
&\qquad + (\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \triangle\, \boldsymbol{m}^{(1)})\boldsymbol{m}^{(0)} - |\boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \triangle\, \boldsymbol{m}^{(1)}.
\end{aligned}$$

La proposition 9.2.1 reste donc valable. Et, nous pouvons remplacer dans le système (12.1.2) l'équation (12.1.2a) par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} - \alpha A \triangle\, \boldsymbol{m}^{(1)} &= -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge A \triangle\, \boldsymbol{m}^{(1)} - \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge A \triangle\, \boldsymbol{m}^{(0)} \\
&\quad + 2\alpha A(\nabla \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \nabla \boldsymbol{m}^{(1)})\boldsymbol{m}^{(0)} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \boldsymbol{m}^{(1)} \\
&\quad - \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(1)}) - \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\, \mathrm{d}\Gamma) \\
&\quad - \alpha \boldsymbol{m}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(0)})) \\
&\quad - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}^{(1)})) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\, \mathrm{d}\Gamma)), \quad (12.2.1)
\end{aligned}$$

Comme au chapitre 9, la contrainte d'orthogonalité (12.1.2b) est redondante. En effet,

Proposition 12.2.1. *Soit* $\boldsymbol{m}_0^{(0)}$ *dans* $\mathbb{H}^2(\Omega)$. *Soit* $\boldsymbol{m}^{(0)}$ *dans* $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, *solution du système* (12.1.1). *Soit* $\boldsymbol{m}_0^{(1)}$ *dans* $\mathbb{H}^1(\Omega)$, $\boldsymbol{m}_0^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}_0^{(1)} = 0$. *Soit* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *solution du système constitué de* (12.1.2c), (12.1.2d), *et* (12.2.1). *Alors,* $\boldsymbol{m}^{(1)}$ *vérifie la contrainte* (9.1.2b). *Et par conséquent, l'égalité* (12.1.2a).

Preuve : Nous avons $\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} + \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(1)}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}$. Donc, par le même calcul que celui effectué lors de la pruve de la proposition 9.2.2 :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial t} = \alpha A \left(\triangle(\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}) + 2|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 (\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)})\right).$$

De plus, la condition aux limites vérifiée par $\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}$ est une condition de Neumann.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T),\\
&\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -2Q_r^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)})\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \gamma^0 \boldsymbol{m}^{(1)} \text{ sur } \Gamma^+ \times (0,T),\\
&\frac{\partial(\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -2Q_r^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)})\gamma^0 \boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \gamma^0 \boldsymbol{m}^{(1)} \text{ sur } \Gamma^- \times (0,T).
\end{aligned}$$

Nous multiplions l'équation (9.2) par $\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}$ et intégrons sur $\Omega \times (0,T)$.

$$\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega |\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]_0^T + (\alpha A - \eta) \iint_{Q_T} \left|\nabla(\boldsymbol{m}^{(1)} \cdot \boldsymbol{m}^{(0)})\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \leq \\
&\qquad 2\alpha A \int_0^T \|\nabla \boldsymbol{m}^{(0)}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \frac{C}{\eta^3} \iint_{Q_T} |\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or, $\boldsymbol{m}_0^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}_0^{(1)} = 0$. Donc, par le lemme de Gronwall $\boldsymbol{m}^{(0)} \cdot \boldsymbol{m}^{(1)} = 0$. □

12.3 Démonstration du théorème d'existence

Pour prouver l'existence dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, nous procédons en quatre étapes.

(1) Preuve de l'existence avec une condition de Neumann homogène par la méthode de Galerkin.

(2) Relèvement d'une condition de Neumann affine puis existence avec condition de Neumann affine.

(3) Construction d'une suite dont chaque élément $\boldsymbol{w}^{n+1}$ est solution d'une équation de Landau-Lifchitz linéarisée avec condition de Neumann affine, chaque élément

étant solution de (12.3.2a), (12.3.2c) et de la condition de Neumann affine suivante.

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T), \\ \mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0 \boldsymbol{w}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}^n) + \beta^+ & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \mathrm{D}Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0 \boldsymbol{w}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}^n) + \beta^- & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T). \end{cases} \tag{12.3.1}$$

(4) Convergence de la suite vers la solution en prouvant que la suite est bornée et que la différence de deux éléments consécutifs tend vers 0.

12.3.1 Le système de Landau-Lifchitz affine

Considérons le système suivant.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} &= -A\boldsymbol{m} \wedge \triangle \boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} \wedge \triangle \boldsymbol{m} + A\alpha \triangle \boldsymbol{w} + A\alpha|\boldsymbol{m}|\boldsymbol{w} + 2A\alpha(\nabla \boldsymbol{m} \cdot \nabla \boldsymbol{w})\boldsymbol{m} \\ &\quad - \boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{w} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}) - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{w})) \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{w} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})) - \alpha \boldsymbol{w} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})) + \theta, \end{aligned} \tag{12.3.2a}$$

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{12.3.2b}$$

$$\boldsymbol{w}(\cdot, 0) = \boldsymbol{w}_0, \tag{12.3.2c}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0,T), \\ \mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0 \boldsymbol{w}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}) + \beta^+ & \text{sur } \Gamma^+ \times (0,T), \\ \mathrm{D}Q^-(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0 \boldsymbol{w}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}) + \beta^- & \text{sur } \Gamma^- \times (0,T). \end{cases} \tag{12.3.2d}$$

où $\boldsymbol{w}$ est l'inconnue et $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$.

Alors, nous avons

Proposition 12.3.1. *Soit $T^* > 0$. Soit $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ et θ dans $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega \times (0,T))$, pour tout $T < T^*$. Soit $\boldsymbol{w}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$, $\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors, il existe un unique $\boldsymbol{w}$ telle que $\boldsymbol{w}(\cdot,0) = \boldsymbol{w}_0$ au sens des traces, $\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T^*)$, et vérifiant l'équation modifiée de Landau-Lifchitz linéarisée* (12.3.2a).

Preuve : Nous utilisons la méthode de Galerkin comme au chapitre 9. Nous introduisons la base orthonormale $w_1, \ldots, w_n, \ldots$ de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ constituée des vecteurs propres de l'opérateur de Laplace avec conditions de Neumann homogènes. Nous notons V_n le sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ engendré par les vecteurs $w_1, \ldots, w_n$. Nous notons $\mathcal{P}_n$ le projecteur orthogonal sur V_n dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. $\mathcal{P}_n$ est aussi un projecteur orthogonal dans

$\mathrm{H}^1(\Omega)$ et dans $\widetilde{\mathrm{H}}^2(\Omega)$. Nous introduisons pour chaque contribution p à l'excitation

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{p,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}(0)}(\boldsymbol{w}) = &-\boldsymbol{w}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}(0)) - \boldsymbol{m}(0)\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{w}) - \alpha\boldsymbol{w}\wedge(\boldsymbol{m}(0)\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}(0)))\\ &- \alpha\boldsymbol{m}(0)\wedge(\boldsymbol{w}\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{m}(0))) - \alpha\boldsymbol{m}(0)\wedge(\boldsymbol{m}(0)\wedge\mathcal{H}_p(\boldsymbol{w})).\end{aligned} \tag{12.3.3}$$

Nous cherchons alors $\boldsymbol{w}^n$ dans $\mathbb{H}^1(0,T)\otimes V_n$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{w}^n}{\partial t} - \alpha A\triangle\boldsymbol{w}^n = &\mathcal{P}_n(-A\boldsymbol{w}^n\wedge\triangle\boldsymbol{m} - A\boldsymbol{m}\wedge\triangle\boldsymbol{w}^n + 2\alpha A(\nabla\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{w}^n)\boldsymbol{m})\\ &+ \alpha A\mathcal{P}_n(|\nabla\boldsymbol{m}|^2\boldsymbol{w}^n + \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w}^n) + \theta),\end{aligned} \tag{12.3.4}$$

$$\boldsymbol{w}^n(\cdot,0) = \mathcal{P}_n(\boldsymbol{w}_0) \tag{12.3.5}$$

À partir de maintenant, dans les estimations, η représentera un nombre strictement positif pouvant être choisi arbitrairement petit. C représentera une constante générique ne dépendant que de Ω. Pour réaliser ces estimations, nous aurons besoin des inégalités suivantes.

$$\|\boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C'(1+\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)})\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}, \tag{12.3.6a}$$

$$\|\nabla\boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w})\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C'(1+\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})^2\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}. \tag{12.3.6b}$$

Nous savons déjà, d'après le Théorème 9.3.3 chapitre 9, que $\boldsymbol{w}^n$ existe sur $[0,T^*)$ et est unique. De plus, $\boldsymbol{w}^n$ est borné dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega\times(0,T))$ indépendamment de n. Nous n'avons besoin que d'une estimation supplémentaire. Nous multiplions (12.3.4) par $\triangle^2\boldsymbol{w}^n$ et intégrons sur Ω. Comme $\triangle^2\boldsymbol{w}^n$ appartient à V_n,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega|\triangle\boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) + \alpha A\int_\Omega|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = &\underbrace{A\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{w}^n\wedge\triangle\boldsymbol{m})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{I}\\ &+\underbrace{A\int_\Omega(\boldsymbol{w}^n\wedge\nabla\triangle\boldsymbol{m})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{II} + \underbrace{A\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{m}\wedge\triangle\boldsymbol{w}^n)\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{III}\\ &-\underbrace{2\alpha A\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{m}\cdot\mathrm{D}^2\boldsymbol{w}^n)\boldsymbol{m}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IV} - \underbrace{2\alpha A\int_\Omega(\mathrm{D}^2\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{w}^n)\boldsymbol{m}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{V}\\ &-\underbrace{2\alpha A\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{w}^n)\nabla\boldsymbol{m}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VI} - \underbrace{2\alpha A\int_\Omega(\mathrm{D}^2\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{m})\boldsymbol{w}^n\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VII}\\ &-\underbrace{\alpha A\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{m}|^2\nabla\boldsymbol{w}^n\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{VIII} - \underbrace{\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{IX}\end{aligned}$$

$$\underbrace{-\int_\Omega \nabla \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m}}^{a,d,\mathrm{lin}}(\boldsymbol{w}^n)\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{X} \tag{12.3.7}$$

Nous évaluons maintenant chaque terme indépendamment. Commençons par traiter $I=\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{w}^n\wedge\triangle\boldsymbol{m})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|I| &\le \|\nabla\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)}\|\triangle\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\triangle\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^3(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{12.3.8a}$$

Puis, nous estimons $II=\int_\Omega(\boldsymbol{w}^n\wedge\nabla\triangle\boldsymbol{m})\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned}|II| &\le \|\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\nabla\triangle\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{12.3.8b}$$

Ensuite, nous pouvons traiter $III=\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{m}\wedge\triangle\boldsymbol{w}^n)\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|III| &\le \|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\triangle\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\mathrm{D}^3\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{12.3.8c}$$

Puis, nous estimons $IV=\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{m}\cdot\mathrm{D}^2\boldsymbol{w}^n)\boldsymbol{m}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|IV| &\le \|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\mathrm{D}^2\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{12.3.8d}$$

Estimer $V=\int_\Omega(\mathrm{D}^2\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{w}^n)\boldsymbol{m}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ donne

$$\begin{aligned}|V| &\le \|\mathrm{D}^2\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^6(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^3(\Omega)}\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\le \frac{1}{4\eta}\|\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{12.3.8e}$$

Nous pouvons alors évaluer le terme $VI=\int_\Omega(\nabla\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{w}^n)\nabla\boldsymbol{m}\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ ainsi que le terme $VIII=\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{m}|^2\nabla\boldsymbol{w}^n\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$|VI|,|VIII| \le \frac{1}{4\eta}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^4_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{12.3.8f}$$

Puis, nous estimons $VII=\int_\Omega(\mathrm{D}^2\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{m})\boldsymbol{w}^n\cdot\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$|VII| \le \frac{1}{4\eta}\|\mathrm{D}^2\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^3(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^6(\Omega)}\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\eta\|\nabla\triangle\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{12.3.8g}$$

Estimer $IX = \int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ donne

$$|IX| \leq \frac{1}{4\eta}\|\nabla\theta\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{12.3.8h}$$

Utilisant l'inégalité (12.3.6), nous estimons $X = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w}^n) \cdot \nabla \triangle \boldsymbol{w}^n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned}|X| &\leq \|\nabla \boldsymbol{F}^{a,d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w}^n)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{C}{4\eta}(1 + \|\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \eta\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Nous combinons toutes les estimations (12.3.8).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\triangle \boldsymbol{w}^n|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \alpha A \int_\Omega |\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &\leq \frac{C}{\eta} g(t)\|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\\ &+ \eta\|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\theta\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{12.3.9}$$

où g appartient à $\mathrm{L}^1(0,T)$. Nous choisissons η suffisamment petit, puis nous utilisons le lemme de Gronwall.

$$\|\triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C_T, \qquad \|\nabla \triangle \boldsymbol{w}^n\|_{\mathbb{L}^2((0,T)\times\Omega)} \leq C_T. \tag{12.3.10}$$

L'estimation précédente, les résultats de régularité 5.2.1 et le lemme 5.4.2 prouvent que la suite $\boldsymbol{w}^n$ reste bornée dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T < T^*$. Donc, nous pouvons extraire une sous-suite telle que, pour $T < T^*$, $\boldsymbol{w}^{n_k}$ converge faiblement vers $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$. La limite vérifie $\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$, $\boldsymbol{w}(\cdot, 0) = \boldsymbol{w}_0$, et

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times(0,T)} \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\boldsymbol{\psi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= -A \iint_{\Omega\times(0,T)} (\boldsymbol{w} \wedge \triangle \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \wedge \triangle \boldsymbol{w} - \alpha \triangle \boldsymbol{w} - 2\alpha(\nabla \boldsymbol{m} \cdot \nabla \boldsymbol{w})\boldsymbol{m})\,\boldsymbol{\psi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\qquad + \alpha A \iint_{\Omega\times(0,T)} \left(|\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{w} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{F}^{a,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{F}^{d,\mathrm{lin}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{w}) + \theta\right)\boldsymbol{\psi},\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{\psi}$ dans $\mathcal{C}^1(0,T;\mathbb{R}^3) \otimes \bigcup_{i=1}^\infty V_n$. Comme cet espace est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$, $\boldsymbol{w}$ est une solution.

Prouvons maintenant l'unicité. Soit $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ solutions du système (12.3.2a), alors $\delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{w}$ est solution de (12.3.2a) avec pour terme affine $\theta = 0$, et la condition initiale $\boldsymbol{w}_0 = 0$. Après avoir multiplié cette équation par $\delta\boldsymbol{w}$ et intégré sur $\Omega \times (0,T)$, nous obtenons l'estimation suivante.

$$\begin{aligned}&\left[\int_\Omega |\delta\boldsymbol{w}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]_0^T + (\alpha A - \eta)\iint_{Q_T} |\delta\nabla\boldsymbol{w}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\qquad \leq C(\eta)\int_0^T (1 + \|\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\nabla\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)})\|\delta\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{12.3.11}$$

Nous choisissons $\eta = \alpha A/2$ et l'unicité s'ensuit par le lemme de Gronwall. $\square$

Nous obtenons facilement du résultat précédent le corollaire suivant.

Corollaire 12.3.2. *Soit $T < T^*$. Soit $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ pour tout $T < T^*$. Soit β^+, β^- dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}_{00,}(\Gamma\times(0,T))$. Soit $\boldsymbol{w}_0$ in $\mathbb{H}^2(\Omega)$ satisfaisant les conditions* (12.1.4) *avec $Q^+, Q^- = 0$. Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{w}$ du système constitué des équations* (12.3.2c), (12.3.2a) *et* (12.3.2d) *avec $Q^+, Q^- = 0$.*

Preuve : β^+ et β^- satisfont les conditions de compatibilité nécessaires à l'application du Théorème A.2.6. Donc, il existe un relèvement $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, tel que $\boldsymbol{v}$ vérifie les conditions de bord vérifiées par $\boldsymbol{w}$ dans (12.3.2d) avec $Q^+, Q^- = 0$. Nous définissons alors

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta} = -\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - A\boldsymbol{m}\wedge\triangle\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{v}\wedge\triangle\boldsymbol{m} + A\alpha\triangle\boldsymbol{v} + A\alpha|\boldsymbol{m}|\boldsymbol{w} + 2A\alpha(\nabla\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{m}\\ -\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}) - \alpha\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{v}) - \alpha\boldsymbol{m}\wedge(\boldsymbol{v}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}))\\ -\alpha\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{m}\wedge\mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})) + \theta.\end{aligned}$$

$\widetilde{\theta}$ appartient à $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega\times(0,T))$, $\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{v}(\cdot,0)$ vérifie alors les conditions de Neumann homogènes. Nous utilisons la proposition 12.3.1. Il existe donc $\boldsymbol{u}$ telle que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ soit la solution recherchée. Comme $\boldsymbol{u}$ est unique, $\boldsymbol{w}$ l'est aussi. □

Corollaire 12.3.3. *Soit $0 < T^*$. Soit $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ pour tout $T < T^*$. Soit $\boldsymbol{a}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$. Soit β^+, β^- dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}_{00,}(\Gamma\times(0,T))$. Soit $\boldsymbol{w}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ vérifiant*

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } (\partial\Omega\setminus\Gamma)\times(0,T),\\ \mathrm{D}Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m}_0,\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}_0)\cdot(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) + \beta^+ & \textit{sur } \Gamma^+\times(0,T),\\ \mathrm{D}Q^-(\gamma^0\boldsymbol{m}_0,\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}_0)\cdot(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) + \beta^- & \textit{sur } \Gamma^-\times(0,T).\end{cases} \tag{12.3.12}$$

Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{w}$ du système constitué des équations (12.3.2a), (12.3.2c) *et*

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } \partial\Omega\setminus\Gamma\times(0,T),\\ \mathrm{D}Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) + \beta^+ & \textit{sur } \Gamma^+\times(0,T),\\ \mathrm{D}Q^-(\gamma^0\boldsymbol{m},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a}) + \beta^- & \textit{sur } \Gamma^-\times(0,T).\end{cases} \quad . \tag{12.3.13}$$

Preuve : $\mathrm{D}Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{a},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{a})$ est dans $\mathbb{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}_{00,}(\Gamma\times(0,T))$. Pour le prouver, le plus simple est de construire le relèvement explicitement. D'abord, nous rappelons que $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ est une algèbre, voir le lemme 5.3.5. Soit χ dans

$\mathcal{C}_c^\infty(-\infty,+\infty;\mathbb{R}^+)$, telle que $\chi(z) = 0$ si $z > \frac{3}{4}\min(L^+,L^-)$, et $\chi(z) = 1$ si $z < \frac{\min(L^+,L^-)}{2}$. Posons

$$\boldsymbol{g} = \begin{cases} \mathrm{D}Q^+(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}\circ\sigma)\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\circ\sigma) & \text{dans } \Omega^+, \\ \mathrm{D}Q^-(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}\circ\sigma)\cdot(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\circ\sigma) & \text{dans } \Omega^-. \end{cases}$$

où σ est l'application qui envoie (x,y,z,t) sur $(x,y,-z,t)$. Nous posons alors

$$\boldsymbol{v}(x,y,z,y) = \int_0^z \chi(s)\boldsymbol{g}(x,y,s,t)\,\mathrm{d}s.$$

La fonction $\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ et a les propriétés requises. Nous appliquons le corollaire 12.3.2. □

Nous avons maintenant besoin d'un premier élément à notre suite convergente.

Lemme 12.3.4. *Soit $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ telle que $\frac{\partial \boldsymbol{w}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ sur $\partial\Omega\setminus\Gamma$. Alors, il existe $\boldsymbol{a}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}$ telle que $\boldsymbol{a}(\cdot,0) = \boldsymbol{w}_0$ et $\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$ sur $\partial\Omega\setminus\Gamma\times(0,T)$.*

Preuve : Toutes les relations de compatibilités nécessaires à l'application du Théorème A.2.6 sont satisfaites. $\boldsymbol{a}$ existe. □

12.3.2 Existence et convergence d'une suite vers la solution

Le Théorème 12.1.1 est une conséquence de la proposition 12.2.1 et du résultat suivant.

Proposition 12.3.5. *Soit $\boldsymbol{m}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$. Soit $\boldsymbol{w}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ satisfaisant* (12.1.4). *Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ du système constitué de* (12.3.2a), (12.3.2c), *et* (12.3.2d).

Preuve : Nous définissons $\boldsymbol{w}^n$ par induction. Choisissons pour $\boldsymbol{w}^{-1}$ appartenant $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ le $\boldsymbol{a}$ du lemme 12.3.4. Alors, connaissant $\boldsymbol{w}^n$, posons $\boldsymbol{w}^{n+1}$ comme l'unique solution du système d'équations (12.3.2a), (12.3.2c), et (12.3.1). C'est justifié par le corollaire 12.3.3. Nous avons maintenant besoin d'estimations sur la taille de $\boldsymbol{w}^n$. Soit $\boldsymbol{v}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ telle que $\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ soit nulle sur $\partial\Omega\setminus\Gamma$, et égal à $\mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m},\gamma^0\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{w}_0,\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}_0)$. L'existence d'un tel $\boldsymbol{v}_0$ est donnée par la même construction que celle donnée dans la preuve du corollaire 12.3.3. Nous définissons alors $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{v}_0$. Posons $\boldsymbol{u}$ appartenant à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$ comme la solution du système d'équations (12.3.2c), (12.3.2a) et (12.3.2d) avec $Q^\pm = 0$, $\theta = 0$, et la condition initiale $\boldsymbol{u}_0$, mais avec mêmes $\beta^\pm$. Notons alors que si $\beta^\pm = 0$, alors $\boldsymbol{u} = 0$. Cette solution existe grâce au corollaire 12.3.2.

Nous faisons alors toutes nos estimations sur $\boldsymbol{v}^n = \boldsymbol{w}^n - \boldsymbol{u}$. $\boldsymbol{v}^n$ satisfait le système d'équations (12.3.2c), (12.3.2a) et (12.3.1) avec les mêmes conditions initiales, $Q^{\pm}$, et θ mais avec $\beta^{\pm} = \mathrm{D}Q^{\pm}(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{u}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{u})$. Les estimations sont pratiquement les mêmes que celles données dans la preuve de la proposition 12.3.1. Mais les conditions de Neumann non homogènes nous forcent à utiliser des formes des résultats de régularité tenant compte de termes de bord, corollaire 5.2.5 et proposition 5.2.10. Donc, une majoration de la norme $\mathbb{L}^2$ de $\triangle\,\boldsymbol{v}$ ne procure pas directement une majoration de la norme $\mathbb{H}^2$. Nous devons introduire des estimations préliminaires.

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\big(&\|\boldsymbol{v}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\triangle\,\boldsymbol{v}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&+ \|\,\mathrm{D}Q^{\pm}(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{w}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}^n)\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\big)
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\|\,\mathrm{D}Q^{\pm}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}\circ\sigma)\cdot(\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^n\circ\sigma)\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq P\left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\right)\|\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}
$$

Comme $\boldsymbol{m}$ appartient à $\mathcal{C}([0,T^*);\mathbb{H}^2(\Omega))$,

$$
\begin{aligned}
\sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\right\} \leq C\Bigg(&\sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right\} + \sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\triangle\,\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right\} \\
&+ \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^0\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{12.3.14a}
$$

Nous utilisons la même méthode pour estimer la norme $\mathbb{H}^3$.

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}^{n+1}\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)} \leq C\big(&\|\boldsymbol{v}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\triangle\,\boldsymbol{v}^{n+1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&+ \|\,\mathrm{D}Q^{\pm}(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{w}^n, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}^n)\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}\big)
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\|\,\mathrm{D}Q^{\pm}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}\circ\sigma)\cdot(\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^n\circ\sigma)\|^2_{\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq P\left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\right)\|\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\right\} \leq C\Big(&\sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}\right\} + \sup_{1\leq n\leq N}\left\{\|\nabla\triangle\,\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right\} \\
&+ \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{v}^0\|^2_{\mathbb{H}^3(\Omega)}\Big)
\end{aligned}
\tag{12.3.14b}
$$

Les inégalités (12.3.14) nous permettent de faire des estimations utiles. Nous faisons trois estimations sur les normes de $\boldsymbol{v}^n$ pour $n \geq 1$.

(1) Nous multiplions l'équation (12.3.2a) par $\boldsymbol{v}^n$ et intégrons sur Ω.

(2) Nous prenons le gradient de l'équation (12.3.2a), la multiplions par $\nabla \triangle \boldsymbol{v}^n$ et intégrons sur Ω.

(3) Enfin, nous prenons le gradient de l'équation (12.3.2a), la multiplions par $\nabla \boldsymbol{v}^n$ et intégrons sur Ω.

Les deux premières estimations ont pratiquement été complètement réalisées dans la preuve de la Proposition 12.3.1, sauf pour la condition de Neumann non homogène. La troisième estimation est une simplification de la deuxième. Nous ne reprenons pas ici le détail des termes volumiques car nous pouvons les trouver dans la preuve de la Proposition 12.3.1. Dans ces estimations, η représente un nombre strictement positif pouvant être choisi arbitrairement petit.

Première estimation Utilisant des théorèmes de trace, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla \boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &\leq P_0(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\|\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \\ &\quad + \alpha A\left|\int_{\Gamma^\pm} \frac{\partial \boldsymbol{v}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}}\cdot \boldsymbol{v}^n \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right| \\ &\leq P_1(\|\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}),\end{aligned} \tag{12.3.15}$$

où P_0, P_1 sont des polynômes fixés.

Seconde estimation Nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\triangle \boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}{\mathrm{d}t} + \alpha A\|\nabla \triangle \boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\qquad\leq C\left(1+\frac{1}{\eta}\right) P_1(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{m}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \\ &\qquad\quad + \eta\|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \alpha A\left|\int_{\Gamma^\pm}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}\partial t}\cdot\triangle \boldsymbol{v}^n\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\right|.\end{aligned} \tag{12.3.16}$$

Après avoir intégré sur $(0,T)$, le terme de bord a un sens avant même d'utiliser la condition aux limites. En effet, d'après le Théorème 5.3.1 si $\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$, alors $\gamma^0\triangle\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$, et $\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{3}{4}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$. Donc, d'après [29], lemme 1.4.1.3, $\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t\partial\boldsymbol{\nu}}$ appartient à $\mathrm{H}^{-\frac{1}{4}}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$.

L'évaluation de l'intégrale surfacique sur Γ^+, pour $n\geq 1$, donne

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^\pm}\left|\frac{\partial^2\boldsymbol{v}^n}{\partial\boldsymbol{\nu}\partial t}\cdot\triangle\boldsymbol{v}^n\right|\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) &\leq \frac{1}{2}\|\triangle\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} \\ &\quad+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial\big(\mathrm{D}Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{w}^{n-1},\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}^{n-1})\big)}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)},\end{aligned}$$

$$\|\triangle\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}\leq C\|\triangle\boldsymbol{v}^n\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}(\|\triangle\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|\nabla\triangle\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})^{\frac{3}{2}}.$$

Et,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial\big(\mathrm{D}Q^+(\gamma^0 \boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m})\cdot(\gamma^0\boldsymbol{w}^{n-1}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}^{n-1})\big)}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)} \\
&\qquad \le P_3(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \|\boldsymbol{v}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \\
&\qquad + P_4(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}) \left\| \frac{\partial(\boldsymbol{v}^{n-1}+\boldsymbol{u})}{\partial t} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \left\| \frac{\partial(\boldsymbol{v}^{n-1}+\boldsymbol{u})}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

Par (12.3.2a), si $n \ge 1$, il existe C dépendant de la norme $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}$ de $\boldsymbol{m}$, telle que

$$
\left\| \frac{\partial \boldsymbol{v}^{n-1}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \le C \|\boldsymbol{v}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)}, \qquad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{v}^{n-1}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le C \|\boldsymbol{v}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}.
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma^\pm} \left| \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}\partial t} \cdot \triangle \boldsymbol{v}^n \right| \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) &\le C\left(1+\frac{1}{\eta}\right) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 (\|\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{v}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2) \\
&+ \eta(\|\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{v}^{n-1}\|_{\mathbb{H}^3(\Omega)}^2) + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}
\tag{12.3.17}
$$

Troisième estimation C'est une simplification de la précédente.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\nabla \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2}{\mathrm{d}t} + \alpha A \|\triangle \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 &\le \left(1+\frac{1}{\eta}\right) P_6(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) \|\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 \\
&+ \eta \|\mathrm{D}^3 \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \alpha A \left| \int_{\Gamma^\pm} \frac{\partial \boldsymbol{v}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \triangle \boldsymbol{v}^n \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \right|.
\end{aligned}
\tag{12.3.18}
$$

Mais,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma^+} \frac{\partial \boldsymbol{v}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \triangle \boldsymbol{v}^n \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \right| &\le \frac{1}{2} \|\triangle \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{v}^n}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma^+)}^2 \\
&\le C \|\triangle \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \triangle \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + P_3(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) \|\boldsymbol{v}^{n-1} + \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \\
&\le \frac{1}{4\eta} \|\triangle \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + P_4(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}) \|\boldsymbol{v}^{n-1} + \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \eta \|\nabla \triangle \boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
$$

où les P_i sont des polynômes et C une constante ne dépendant que de la norme $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ de $\boldsymbol{m}$ qui est bornée pour tout $T<T^*$.

Nous choisissons η suffisamment petit, combinons toutes les estimations, et obtenons pour tout $n\geq 1$

$$\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\triangle\,\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\int_0^T\|\nabla\triangle\,\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\leq \\ \eta\int_0^T\left(\|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{v}^{n-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\right)\,\mathrm{d}t \\ +\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\int_0^T\Psi(t)(\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}^{n-1}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\,\mathrm{d}t+C\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right). \tag{12.3.19}$$

Nous prenons la borne supérieure sur $1\leq n\leq N$, utilisons les inégalités (12.3.14), et obtenons

$$\sup_{1\leq n\leq N}\{\|\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\triangle\,\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\}+\sup_{1\leq n\leq N}\left\{\int_0^T\|\nabla\triangle\,\boldsymbol{v}^n\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t\right\}\leq \\ \int_0^T C(\eta)(\sup_{1\leq n\leq N}(\|\boldsymbol{v}^n\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)})^2+\|\boldsymbol{v}^0\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}+\|\boldsymbol{v}^{-1}\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)})\,\mathrm{d}t+\int_0^T P_5^\eta(\|\boldsymbol{v}^0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)})\,\mathrm{d}t \\ +\eta\int_0^t\|\nabla\triangle\,\boldsymbol{v}^0\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}+\eta\int_0^T\|\nabla\triangle\,\boldsymbol{v}^{-1}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t+C\left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\right). \tag{12.3.20}$$

Nous réutilisons les inégalités (12.3.14), et par le lemme de Gronwall, nous obtenons que la norme $\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ de $\boldsymbol{v}^n$, de $\triangle\,\boldsymbol{v}^n$, et de $\nabla\boldsymbol{v}^n$ sont bornées par une constante $C(T)$ indépendante de n. Utilisant encore une fois les inégalités (12.3.14), nous en déduisons l'existence d'une constante C_T telle que, pour tout $T<T^*$,

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))}\leq C_T,\qquad \|\,\mathrm{D}^3\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))}\leq C_T. \tag{12.3.21}$$

Utilisons l'équation (12.3.2a) et le lemme 5.4.2. Donc, $\boldsymbol{v}^n$ reste bornée dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))$. Nous pouvons alors extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}$. Notons $\boldsymbol{v}$ cette limite. Supposons que nous ayons le lemme suivant :

Lemme 12.3.6. *Si les deux sous-suites $\boldsymbol{v}^{n_k}$ et $\boldsymbol{v}^{n_k+1}$ convergent faiblement dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega\times(0,T))$, alors elles convergent vers la même limite.*

Nous pouvons alors terminer la preuve de la proposition. Nous extrayons encore une sous-suite pour que $\boldsymbol{v}^{n_k+1}$ converge. D'après notre supposition la limite est $\boldsymbol{v}$

pour les deux sous-suites. sur Γ^+,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^{n_k+1}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathrm{D}Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0\boldsymbol{v}^{n_k} + \boldsymbol{u}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{v}^{n_k} + \boldsymbol{u}). \tag{12.3.22}$$

Nous prenons la limite et obtenons

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathrm{D}Q^+(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}). \tag{12.3.23}$$

Donc, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ est solution. Le résultat équivalent reste vrai sur Γ^-. Il nous reste à prouver le lemme 12.3.6. Pour cela, nous définissons $\delta^n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^n$, et nous obtenons les mêmes estimations sur $\delta^n\boldsymbol{v}$ que celles obtenues à l'équation (12.3.19) sur $\boldsymbol{v}$, mais avec $\boldsymbol{u} = 0$ et une condition initiale nulle. Au lieu de prendre le maximum, nous sommons ces estimations sur $1 \geq k \geq n$. Comme la condition initiale de la somme est la fonction 0, nous pouvons utiliser le lemme de Gronwall. Nous obtenons que, pour tout $T < T^*$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \|\delta^n\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))} \leq C_T, \qquad \sum_{k=1}^{n} \|\delta^n\boldsymbol{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathbb{H}^3(\Omega))} \leq C_T.$$

□

Prouver le Théorème 12.1.2 revient à prouver la

Proposition 12.3.7. *Soit une condition initiale $\boldsymbol{w}_0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, un terme affine θ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$, et des termes de bords $\beta^\pm$ dans $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma^\pm \times (0,T))$. Il existe une unique solution $\boldsymbol{w}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ du système constitué des équations* (12.3.2a), (12.3.2c), *et* (12.3.2d).

Preuve *:* Nous commençons par prouver l'unicité. Soit $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ deux solutions dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$. Alors, $\delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}'$ sont solutions du système (12.3.2a), (12.3.2c), et (12.3.2d) avec $\beta^\pm = 0$, $\theta = 0$ et $\boldsymbol{w}_0 = 0$. Nous remarquons que $\mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}')(\gamma^0\delta\boldsymbol{w}, \gamma^{0,\prime}\delta\boldsymbol{w})$ appartient à $\mathbb{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}_{00,}(\Gamma^\pm \times (0,T))$. Soit $\boldsymbol{w}''$ la solution appartenant à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ du système d'équations (12.3.2a), (12.3.2c), et (12.3.2d) avec $\beta^\pm = \mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}')(\gamma^0\delta\boldsymbol{w}, \gamma^{0,\prime}\delta\boldsymbol{w})$, les $Q^\pm$ de (12.3.2d) pris nuls, et $\theta = 0$. $\boldsymbol{w}''$ existe d'après la Proposition 12.3.1. Donc, $\delta\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}''$ satisfait (12.3.2a), (12.3.2c), et (12.3.2d) avec $\beta^\pm = 0$, les $Q^\pm$ de (12.3.2d) pris nuls, et $\theta = 0$. Donc, d'après la partie unicité du Théorème 9.3.3, $\delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}''$. $\delta\boldsymbol{w}$ appartient donc à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ et est nulle par la partie unicité du corollaire 12.3.2.

Prouvons maintenant l'existence. Comme $\mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0\boldsymbol{w}_0, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}_0)$ appartient à $\mathbb{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(B \times (-L^-, L^+) \setminus \{0\})$, il existe, d'après le lemme 5.2.3 du chapitre 5, $\boldsymbol{v}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$, telle que $\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ vaut 0 sur $\partial\Omega \setminus \Gamma^\pm$ et $\mathrm{D}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0\boldsymbol{w}_0, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{w}_0)$ sur $\Gamma^\pm$. De plus, il existe une constante $C > 0$, indépendante de $\boldsymbol{w}_0$, telle que $\boldsymbol{v}_0$

puisse être choisie pour que $\|\boldsymbol{v}_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{w}_0\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$. Posons $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{v}_0$. Alors, il existe $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ satisfaisant (12.3.2a), (12.3.2c), et (12.3.2d) avec pour paramètres $Q^\pm = 0$ et conditions initiales $\boldsymbol{u}_0$. Ce fut prouvé au chapitre 9, Théorème 9.3.3. Par la Proposition 12.3.5, il existe $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ avec condition initiale $\boldsymbol{v}_0$, les $Q^\pm$ originaux, et $\beta^\pm = \mathrm{d}Q^\pm(\gamma^0\boldsymbol{m}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m}) \cdot (\gamma^0\boldsymbol{u}, \gamma^{0,\prime}\boldsymbol{u})$, qui appartiennent à $\mathbb{H}_{00,}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}$, et $\theta = 0$. $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ est la solution recherchée. $\square$

12.4 Conclusion

Nous avons démontré l'existence du terme d'ordre 1, vérifiant le système (11.1.4). Il nous reste à démontrer la convergence à l'ordre 1 du développement. C'est ce que nous faisons au chapitre suivant.

Chapitre 13

Convergence du développement avec super-échange

Nous rappelons au lecteur le problème obtenu au chapitre 11. Nous nous donnons un continuum de conditions initiales $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon$ vérifiant les conditions de compatibilité (11.1.1). Il existe alors par le Théorème 7.1.1, un continuum de solutions $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ sur $\Omega^\varepsilon \times (0, T_\varepsilon^*)$ du système de Landau-Lifchitz (4.2.1). Nous supposons aussi que le continuum de conditions initiales vérifie (11.1.1). Nous savons par le Théorème 7.1.1 qu'il existe un temps commun d'existence T^* pour ε petit pour tout $T < T^*$, la norme $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ de $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ reste bornée, uniformément en ε. Dans ce chapitre, nous souhaitons démontrer la convergence de $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ au premier ordre vers $\boldsymbol{m}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{m}^{(1)}$, où $\boldsymbol{m}^{(0)}$ et $\boldsymbol{m}^{(1)}$ sont caractérisés par les systèmes (11.1.3) et (11.1.4), chapitre 11. L'existence et l'unicité de $\boldsymbol{m}^{(1)}$ et de $\boldsymbol{m}^{(0)}$ sont le résultat du travail effectué aux chapitre 7, Théorème 7.1.1 et 12, théorème 12.1.2.

13.1 Convergence à l'ordre 0 : une estimation

Dans cette section, nous souhaitons démontrer que la norme $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ de $\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}$ est un $O(\varepsilon)$.

Pour cela, nous aurons besoin de résultats d'existence et d'unicité auxiliaires. Notons $\Delta Q^\pm$ le polynôme à quatre variables tel que

$$Q^\pm(a,b) - Q^\pm(c,d) = \Delta Q^\pm(a,b,c,d) \cdot (a-c, b-d).$$

Soit $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}'$, $\boldsymbol{u}_0$, β^+ et β^-, et θ, nous nous intéressons au système auxiliaire (13.1.1), ayant pour inconnue $\boldsymbol{u}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \alpha A \triangle \boldsymbol{u} = {} & -A\boldsymbol{u} \wedge \triangle \boldsymbol{m} - A\boldsymbol{m}' \wedge \triangle \boldsymbol{u} + \alpha A |\nabla \boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{u} \\ & + \alpha A((\nabla \boldsymbol{m} + \nabla \boldsymbol{m}') \cdot \nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{m}' + \theta - \boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m}) \\ & - \boldsymbol{m}' \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u}) - \alpha \boldsymbol{m}' \wedge (\boldsymbol{m}' \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{u})) \\ & - \alpha \boldsymbol{m}' \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})) - \alpha \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\boldsymbol{m})),\end{aligned} \tag{13.1.1a}$$

$$\boldsymbol{u}(\cdot,\cdot,0) = \boldsymbol{u}_0, \tag{13.1.1b}$$

avec des conditions aux limites Neumann non homogènes

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon \setminus (B \times \{\pm\varepsilon\} \times (0,T^*)), \\ \Delta Q^+(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}, \gamma_0^0 \boldsymbol{m}', \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \\ \quad (\gamma_0^0 \boldsymbol{u}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{u}) + \beta^+ & \text{sur } B \times \{+\varepsilon\} \times (0,T^*), \\ \Delta Q^-(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}, \gamma_0^0 \boldsymbol{m}', \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \\ \quad (\gamma_0^0 \boldsymbol{u}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{u}) + \beta^- & \text{sur } B \times \{-\varepsilon\} \times (0,T^*). \end{cases} \tag{13.1.1c}$$

Nous établissons alors le théorème suivant.

Théorème 13.1.1. *Soit $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m}'$ dans $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, soit β^+, β^- dans $\mathbb{H}_{00,}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Gamma \times (0,T))$, θ dans $\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega \times (0,T))$, et $\boldsymbol{u}_0$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ telle que*

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } \partial\Omega^\varepsilon \setminus (B \times \{\pm\varepsilon\}), \\ \Delta Q^+(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}, \gamma_0^0 \boldsymbol{m}', \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \\ \quad (\gamma_0^0 \boldsymbol{u}_0, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{u}_0) + \beta^+ & \textit{sur } B \times \{+\varepsilon\}, \\ \Delta Q^-(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}, \gamma_0^0 \boldsymbol{m}', \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}) \cdot \\ \quad (\gamma_0^0 \boldsymbol{u}_0, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{u}_0) + \beta^- & \textit{sur } B \times \{-\varepsilon\}. \end{cases} \tag{13.1.2}$$

Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{u}$ appartenant à $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$, pour tout $T < T^*$. De plus, la solution dépend continûment des données. Donc, le problème est donc bien posé. Il existe une constante C dépendant des normes $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'$ telles que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega\times(0,T))} \leq C \left(\|\beta^\pm\|_{\mathbb{H}_{00,}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Gamma\times(0,T))} + \|\theta\|_{\mathbb{H}^{1,\frac{1}{2}}(\Omega\times(0,T))} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \right).$$

En outre, si θ appartient seulement à $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$, β^+, β^- appartiennent seulement à $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma \times (0,T))$, et $\boldsymbol{u}_0$ appartient seulement à $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Alors, il existe une unique solution $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$. la solution dépend continûment des données. Donc, le problème est bien posé. Il existe une constante C dépendant des normes $\mathbb{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega \times (0,T))$ de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'$ telles que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega\times(0,T))} \leq C \left(\|\beta^\pm\|_{\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma\times(0,T))} + \|\theta\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \right).$$

Preuve : C'est une simple adaptation des preuves des propositions 12.3.1, 12.3.5, et de la proposition 12.3.7 sans changements significatifs. □

Notons que le théorème reste vrai pour tout les domaines Ω^ε, et que la constante $C(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}')$, bien que dépendant du domaine peut être choisie indépendamment de ε pour ε restant proche de 0.

Proposition 13.1.2. *La norme $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ de $\frac{\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon}$ reste bornée pour ε petit.*

Preuve : $\frac{\boldsymbol{m}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon}$ est solution du système (13.1.1) avec $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^{(0)}{}_{|\Omega^\varepsilon}$, $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}^\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\beta^\pm = \frac{1}{\varepsilon}\left(\gamma_\varepsilon^1 \boldsymbol{m}^{(0)} - \gamma_0^1 \boldsymbol{m}^{(0)}\right) \\ + \Delta Q^\pm(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_\varepsilon^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \cdot \frac{(\gamma_\varepsilon^0 \boldsymbol{m}^{(0)} - \gamma_\varepsilon^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)})}{\varepsilon},\end{aligned}$$

sur $\Gamma^\pm \times (0,T)$. Et,

$$\theta = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\chi_{B\times(-\varepsilon,+\varepsilon)}\boldsymbol{m}^{(0)}) + \frac{1}{\varepsilon}\alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{d,a}(\chi_{B\times(-\varepsilon,+\varepsilon)}\boldsymbol{m}^{(0)})),$$

et la condition initiale est $\boldsymbol{m}_0^\varepsilon - \boldsymbol{m}_0^{(0)}$. La norme $\mathbb{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Gamma_\varepsilon^\pm \times (0,T))$ de $\beta^\pm$, la norme $\mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon \times (0,T))$ de θ, sont dominées par ε. C'est une conséquence du lemme 3.3.1 et de (10.1.2). La norme $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ de la condition initiale est aussi dominée par ε par l'hypothèse (8.1.1). Nous pouvons alors appliquer le Théorème 13.1.1. □

13.2 Convergence du développement à l'ordre 1

Dans cette section, nous nous attachons à démontrer la convergence à l'ordre 1 du développement, justifiant ainsi tout le travail effectué jusqu'ici. Nous commencerons d'abord par prolonger correctement la solution $\boldsymbol{m}^\varepsilon$ sur Ω par réflexions. Pour cela, nous définissons

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon = \begin{cases} \boldsymbol{m}^\varepsilon & \text{sur } \Omega^\varepsilon \times (0,T), \\ 3\boldsymbol{m}^\varepsilon(\cdot,\cdot,2\varepsilon-\cdot,\cdot) - 2\boldsymbol{m}^\varepsilon(\cdot,\cdot,3\varepsilon-2\cdot,\cdot) & \text{sur } (B\times(-\varepsilon,0))\times(0,T), \\ 3\boldsymbol{m}^\varepsilon(\cdot,\cdot,-2\varepsilon-\cdot,\cdot) - 2\boldsymbol{m}^\varepsilon(\cdot,\cdot,-3\varepsilon-2\cdot,\cdot) & \text{sur } (B\times(0,+\varepsilon))\times(0,T). \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant étendre l'estimation Par les mêmes considérations que celles du lemme 10.2.1, chapitre 10, la norme $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ de $\frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})$ est bornée indépendamment de ε tant que ε reste proche de 0.

Théorème 13.2.1. *La quantité* $\frac{\widetilde{m^{\varepsilon,(0)})} - m^{(0)}}{\varepsilon}$ *converge faiblement vers la magnétisation* $\boldsymbol{m}^{(1)}$*, définie au chapitre 11, dans* $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0,T))$.

Preuve : Nous extrayons une sous-suite ε_n tendant vers 0 telle que $\underline{\boldsymbol{m}^{\varepsilon_n}}$ converge faiblement dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega)$ vers $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$. Il nous reste juste à prouver que $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}} = \boldsymbol{m}^{(1)}$. Comme $\boldsymbol{m}^{(1)}$ est l'unique solution du système (12.1.2), il suffit de prouver que $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ est solution du système (12.1.2), avec les mêmes données. Comme dans la preuve du Théorème 10.2.2, chapitre 10, nous prouvons que $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ vérifie l'équation (12.3.2a), avec $\theta = \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\,\mathrm{d}\Gamma) + \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}\,\mathrm{d}\Gamma))$. De plus, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^{(1)}$, voir (8.1.1). Trivialement, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait les conditions de Neumann homogènes sur $\partial\Omega \setminus \Gamma^{\pm} \times (0,T^*)$. Sur Γ^+, nous avons

$$\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z}(\boldsymbol{x}',\varepsilon,t) - \frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z}(\boldsymbol{x}',0^+,t) \right|^2 \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \iint \left| \int_0^\varepsilon \frac{\partial^2(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z^2}(\boldsymbol{x}',z,t)\,\mathrm{d}z \right|^2 \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \varepsilon \int_0^T \int_{B\times(0,\varepsilon)} \left| \frac{\partial^2(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z^2}(\boldsymbol{x},z,t) \right|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \varepsilon^3 \left\| \frac{\widetilde{\boldsymbol{m}}^\varepsilon - \boldsymbol{m}^{(0)}}{\varepsilon} \right\|^2_{\mathbb{H}^{0,2,0}}.$$

Donc, sur Γ^+, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}}{\partial z}(\cdot,0^+,\cdot) &= \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^{\varepsilon_k} - \boldsymbol{m}^{(0)})}{\partial z}(\cdot,\varepsilon_k,\cdot), \\
&= -\lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \left(Q^+(\gamma_0^0 \widetilde{\boldsymbol{m}}^{\varepsilon_k}, \gamma_0^{0,\prime} \widetilde{\boldsymbol{m}}^{\varepsilon_k})(\cdot,\varepsilon_k,\cdot) - Q^+(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)})(\cdot,\varepsilon_k,\cdot) \right) \\
&\quad - \lim_{\varepsilon_k \to 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \left(Q^+(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)})(\cdot,\varepsilon_k,\cdot) - Q^+(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)})(\cdot,0^+,\cdot) \right) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z^2} \\
&= -\mathrm{D}Q^+(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}^{(0)}, \gamma_0^{0,\prime} \boldsymbol{m}^{(0)}) \left(\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}} + \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z}, \overline{\boldsymbol{m}^{(1)}} + \frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Donc, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ satisfait (11.1.5) sur Γ^+. Par le même calcul, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ vérifie aussi (11.1.5) sur Γ^-. Donc, $\overline{\boldsymbol{m}^{(1)}}$ est la solution unique du système (11.1.4). Comme toute les sous-suites convergentes convergent vers la même limite $\boldsymbol{m}^{(1)}$, toute la suite converge. $\square$

Cinquième partie

Résultats Numériques

Chapitre 14

Schémas en temps et en espace

Dans ce chapitre, nous exposons les méthodes que nous employons pour discrétiser l'équation de Landau-Lifchitz. Notre but est d'utiliser cette discrétisation pour simuler l'évolution de $\boldsymbol{m}^{(0)}$ et de $\boldsymbol{m}^{(1)}$ en l'absence d'interactions surfaciques sur l'interface, systèmes (8.1.2) et (8.1.3) ou au contraire en leur présence, systèmes (11.1.3) et (11.1.4). Cette discrétisation a été réalisée par S. Labbé [43] en l'absence d'interaction de surface. Pour nos simulations, nous supposerons toujours $J_2 = 0$, ceci pour assurer la linéarité de l'opérateur $\mathcal{H}_s$, voir les égalités (2.6.9).

Dans ce chapitre, nous notons :

$$⨍_{\mathcal{O}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{14.0.1}$$

14.1 La discrétisation en espace

La discrétisation en espace se fait en volumes finis. Nous considérons un maillage cubique régulier. Ce choix est primordial pour pouvoir calculer le champ démagnétisant par FFT par l'intermédiaire de matrices Toeplitz [44]. Nous devons discrétiser les opérateurs d'anisotropie, d'échange et de champ démagnétisant. La discrétisation de l'opérateur d'échange est la seule qui dépende des conditions de bord sur Γ.

14.1.1 Le maillage

Soit un maillage $\mathcal{M}$ couvrant l'ouvert de calcul Ω. Nous notons N le nombre de mailles. Nous notons ω_i la i$^{\mathrm{e}}$ maille et supposons $\Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} \omega_i$. Nous notons $|\omega_i|$ la mesure de Lebesgue de ω_i.

Définition 14.1.1. *Nous posons* $\mathrm{l}^2(\mathcal{M}_h)$ *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *muni de la norme*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\omega_i| v_i^2$$

Nous posons alors :

$$P_h(\boldsymbol{u})_i = \frac{1}{|\omega_i|}\int_{\omega_i} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad R_h(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\omega_i}\boldsymbol{v}^i.$$

Par la suite, nous supposerons toujours le maillage cubique régulier.

14.1.2 La discrétisation de l'opérateur d'anisotropie

La discrétisation de l'opérateur d'anisotropie est évidente. Elle est donnée par l'opérateur discret $\mathcal{H}_{a,h}$.

$$\mathcal{H}_{a,h}\boldsymbol{m}_i = \left(\fint_{\omega_i} \mathbf{K}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{m}_i. \tag{14.1.1}$$

La discrétisation des autres opérateurs, échange et champ démagnétisant, sera un peu plus compliquée.

14.1.3 La discrétisation de l'opérateur de champ démagnétisant

La discrétisation de l'opérateur de champ démagnétisant est définie par

$$\begin{aligned} R_h &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{L}^2(\Omega), & P_h &: \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{R}^n, \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \widetilde{1}_{\omega_i}, & P_h(u)_i &= \frac{1}{|\omega_i|}\int_{\omega_i} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{14.1.2}$$

où n est le nombre de mailles. Idéalement, nous poserions $\mathcal{H}_{d,h}$ comme $P_h \circ \mathcal{H}_d \circ R_h$. En pratique, l'action de P_h est calculée par intégration de Gauss avec quelques corrections près des singularités [1]. L'opérateur est Toeplitz et son action peut donc être calculée par transformée de Fourier rapide.

14.1.4 La discrétisation de l'opérateur d'échange

Nous rappelons qu'ici

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{A}\left(\mathcal{H}_s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \left(\boldsymbol{a}\cdot\mathcal{H}_s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right)\boldsymbol{a}\right).$$

L'opérateur $\mathcal{H}_s$ est défini par (2.6.9) section 2.6.1, chapitre 2 quand le super-échange est présent. Ce même opérateur est nul en l'absence d'interactions surfaciques.

[1] On pourra se référer à [43] ou [44] pour les détails

L'opérateur d'échange est discrétisé comme l'opérateur de Laplace.

$$\fint_{\omega_i} \triangle \boldsymbol{m} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\partial\omega_i} \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}). \tag{14.1.3}$$

Sur chaque face b_{ij} de ω_i, nous remplaçons $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ par $\frac{\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}_i}{h}$ si j est l'indice de maille tel que $\omega_i \cap \omega_j = b_{ij}$ et si l'espaceur ne passe pas entre la maille i et la maille j. Si l'espaceur passe entre la maille i et la maille j, nous remplaçons $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ par $Q(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j)$ pour l'ordre 0 et par

$$\mathrm{d}Q(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_j^{(0)}) \cdot (\boldsymbol{m}_i^{(1)} - Q(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_j^{(0)}), \boldsymbol{m}_j^{(1)} - Q(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_j^{(0)})) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} \right)_{i,j},$$

pour l'ordre 1. Nous remplaçons $\left(\frac{\partial \boldsymbol{m}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\nu}^2} \right)_{i,j}$ par

$$\frac{1}{h^3} \left(\boldsymbol{m}_j^{(0)} - \boldsymbol{m}_i^{(0)} \right) + \frac{1}{h^2} Q(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_{N'(i,j)}^{(0)}), \tag{14.1.4}$$

où la maille $N'(i,j)$ est telle que la mailles i se trouve entre les mailles j et $N'(i,j)$ comme représenté à la figure 14.a.

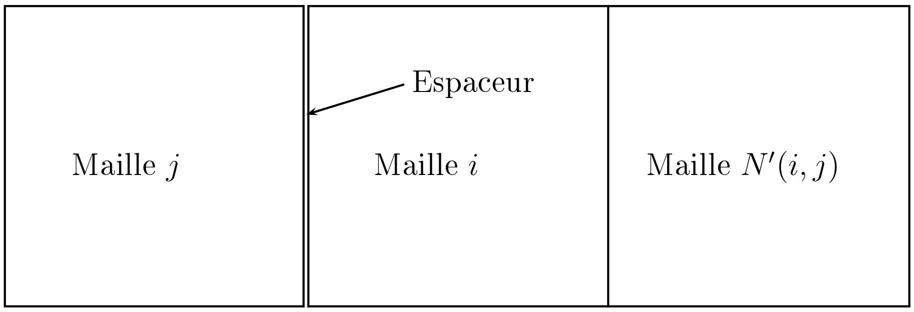


FIG. 14.a: Positions relatives des mailles

Enfin, si b_{ij} est sur la frontière du domaine, $\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ est remplacé par 0. Cela donne pour l'opérateur d'ordre 0

$$\mathcal{H}_{e,h}^{0,\prime}(\boldsymbol{m})_i = \frac{A}{h^2} \sum_{j \in V(i)} (\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_j) + \frac{A}{h} \sum_{j \in VC(i)} (Q(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j)), \tag{14.1.5}$$

où $V(i)$ est l'ensemble de tous les indices des mailles voisines de la maille i, non séparées par l'espaceur, dans le maillage et $VC(i)$ l'ensemble des indices j des mailles voisines de la maille i telles que l'espaceur passe entre les deux mailles i et j. Nous pouvons alors donner la discrétisation de l'opérateur d'échange. Comme dans l'équation de Landau-Lifchitz, les termes parallèles à $\boldsymbol{m}^0$ disparaissent, nous pouvons remplacer dans l'équation de Landau-Lifchitz, tout terme d'excitation $\boldsymbol{h}'$ par un terme $\boldsymbol{h}$ tel que $\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h} = \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{h}'$. En particulier, nous préférons employer l'expression d'échange équivalente suivante.

$$\mathcal{H}^0_{e,h}(\boldsymbol{m})_i = \frac{A}{h^2} \sum_{j \in V(i)} (\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_j) + \frac{1}{h} \sum_{j \in VC(i)} (\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j)), \tag{14.1.6}$$

Pour l'ordre 1, nous définissons l'opérateur d'échange discrétisé d'ordre 1.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{1,\prime}_{e,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)})_i \\
&\quad = \frac{A}{h^2} \sum_{j \in V(i)} \left(\boldsymbol{m}^{(1)}_i - \boldsymbol{m}^{(1)}_j\right) + \delta(i) \frac{A}{h^2} \left(\frac{\boldsymbol{m}^{(0)}_{N(i)} - \boldsymbol{m}^{(0)}_i}{h} + Q(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_{N'(i)}) \right) \\
&\quad\quad + \frac{A}{h} \sum_{j \in VC(i)} \mathrm{D}Q(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_j) \cdot (\boldsymbol{m}^{(1)}_i - Q(\boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{m}_j), \boldsymbol{m}^{(1)}_j - Q(\boldsymbol{m}^{(0)}_j, \boldsymbol{m}^{(0)}_i)),
\end{aligned}$$

où $\delta(i)$ vaut 1 si la maille i est adjacente à l'espaceur et O sinon. Ici, $N(i)$ est la maille adjacente à la maille i telle que l'espaceur se trouve entre les mailles i et $N(i)$. La maille $N'(i)$ étant la maille telle que la maille i soit entre les mailles $N(i)$ et $N'(i)$. Cette discrétisation demande au moins deux mailles de chaque côté de l'espaceur.

Pour l'ordre 1, nous pouvons remplacer $\mathcal{H}^{1,\prime}_{e,h}$ par $\mathcal{H}^1_{e,h}$, sans modifier l'équation semi-discrétisée où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{1,\mathrm{pr}}_{e,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)})_i = {} & \frac{A}{h^2} \sum_{j \in V(i)} \left(\boldsymbol{m}^{(1)}_i - \boldsymbol{m}^{(1)}_j\right) \\
& + \frac{1}{h} \sum_{j \in VC(i)} \mathrm{D}\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_j) \cdot (\boldsymbol{m}^{(1)}_i, \boldsymbol{m}^{(1)}_j),
\end{aligned} \tag{14.1.7a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}(\boldsymbol{m}^{(0)})_i = {} & \frac{\delta(i)}{h^2} \left(\frac{A(\boldsymbol{m}^{(0)}_{N(i)} - \boldsymbol{m}^{(0)}_i)}{h} + \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_{N'(i)}) \right) \\
& - \frac{1}{h} \sum_{j \in VC(i)} \mathrm{D}\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_{N(i)}) \cdot \frac{\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_{N(i)})}{A} \\
& + \frac{1}{Ah} \sum_{j \in VC(i)} \Big((\boldsymbol{m}^{(0)}_i \cdot \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_j)) \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_j) \\
& + \mathrm{D}\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_j) \cdot \left((\boldsymbol{m}^{(0)}_i \cdot \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_i, \boldsymbol{m}^{(0)}_j)) \boldsymbol{m}^{(0)}_i, (\boldsymbol{m}^{(0)}_j \cdot \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}^{(0)}_j, \boldsymbol{m}^{(0)}_i)) \boldsymbol{m}^{(0)}_j \right) \Big),
\end{aligned} \tag{14.1.7b}$$

$$\mathcal{H}^1_{e,h} = \mathcal{H}^{1,\mathrm{pr}}_{e,h} + \mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}. \tag{14.1.7c}$$

14.1.5 L'équation semi-discrétisée

Nous commençons par définir les opérateurs suivants.

$$\mathcal{H}_{d,a,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}) = \mathcal{H}^0_{d,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}) + \mathcal{H}^0_{a,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}), \quad \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}^{(0)}) = \mathcal{H}_{d,a,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}) + \mathcal{H}^0_{e,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}), \tag{14.1.8}$$

$$\mathcal{H}^{1,\mathrm{pr}}_h(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}) = \mathcal{H}_{d,a,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}) + \mathcal{H}^{1,\mathrm{pr}}_{e,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}), \tag{14.1.9}$$

$$\mathcal{H}^1_h(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}) = \mathcal{H}^{1,\mathrm{pr}}_h(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)}) + \mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}(\boldsymbol{m}^{(0)}). \tag{14.1.10}$$

L'équation semi-discrétisée de Landau-Lifchitz est alors

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}_i^{(0)}}{\partial t} = -\boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)})), \tag{14.1.11a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{m}_i^{(0)}}{\partial t} &= -\boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge \mathcal{H}^1_h(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)})_i - \boldsymbol{m}_i^{(1)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}^{(0)})_i \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{m}_i^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}^{(0)})_i) - \alpha \boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}_i^{(1)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}^{(0)})_i) \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}_i^{(0)} \wedge \mathcal{H}^1_h(\boldsymbol{m}^{(0)}, \boldsymbol{m}^{(1)})_i). \end{aligned} \tag{14.1.11b}$$

14.2 Le schéma en temps

Nous allons maintenant exposer le schéma de discrétisation en temps que nous utiliserons. Nous notons d'abord

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}) &= \mathcal{H}_{d,h}(\boldsymbol{m}) + \mathcal{H}_{a,h}(\boldsymbol{m}) + \mathcal{H}^0_{e,h}(\boldsymbol{m}), \\ \mathcal{H}^1_h(\boldsymbol{m}) &= \mathcal{H}_{h,d}(\boldsymbol{m}) + \mathcal{H}_{h,a}(\boldsymbol{m}) + \mathcal{H}^1_{e,h}(\boldsymbol{m}). \end{aligned}$$

L'équation est discrétisée en temps par un schéma du second ordre avec optimisation du pas de temps.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_{i+1}^{(0)} - \boldsymbol{m}_i^{(0)} &= \Delta t_i \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) + \frac{{\Delta t_i}^2}{2} \mathrm{D}\boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) \cdot \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}), \\ \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}^{(0)}) &= -\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}^{(0)}) - \alpha \boldsymbol{m}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}^0_h(\boldsymbol{m}^{(0)})). \end{aligned}$$

Suivant [43], le pas de temps est choisi pour maximiser la décroissance de l'énergie. Pour le terme d'ordre 1, nous employons le schéma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_{i+1}^{(1)} - \boldsymbol{m}_i^{(1)} &= \Delta t_i \boldsymbol{F}^1_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_i^{(1)}, \mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) - \mathcal{H}_{d,h}(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}_i^{(0)} \, \mathrm{d}\sigma(\Gamma))) \\ &\quad + \frac{{\Delta t_i}^2}{2} \mathrm{D}_{\boldsymbol{m}_i^{(0)}} \boldsymbol{F}^1_h\Big(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_i^{(1)}, \mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) - \mathcal{H}_{d,h}(\gamma_0^0 \boldsymbol{m}_i^{(0)} \, \mathrm{d}\sigma(\Gamma))\Big) \cdot \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) \\ &\quad + \frac{{\Delta t_i}^2}{2} \boldsymbol{F}^1_h\Big(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{F}^1_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_i^{(1)}, \mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}(\boldsymbol{m}_i^{(0)})), \\ &\qquad \mathrm{D}\mathcal{H}^{1,\mathrm{co}}_{e,h}(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) \cdot \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) - \mathcal{H}_{d,h}\big(\gamma_0^0 \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{m}_i^{(0)}) \, \mathrm{d}\sigma(\Gamma)\big)\Big), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_h^1(\boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{m}_i^{(0)}, \boldsymbol{h}^{\text{co}}) = -\boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)} \wedge (\mathcal{H}_h(\boldsymbol{m}_{h,i}^{(1)}) + \boldsymbol{h}^{\text{co}}) - \boldsymbol{m}_{h,i}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_h(\boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)}) \\ - \alpha \boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)} \wedge (\mathcal{H}_h(\boldsymbol{m}_{h,i}^{(1)}) + \boldsymbol{h}^{\text{co}})) \\ - \alpha \boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)} \wedge (\boldsymbol{m}_{h,i}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_h(\boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)})) - \alpha \boldsymbol{m}_{h,i}^{(1)} \wedge (\boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_h(\boldsymbol{m}_{h,i}^{(0)})).\end{aligned}$$

Nous utilisons le même pas de temps pour l'ordre 1 que pour l'ordre 0.

14.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les schémas qui seront utilisés pour les calculs de configurations numériques. Nous avons implémenté ces schémas en Fortran, à partir du code EMicroM de Stéphane Labbé.

Chapitre 15

Calcul des états d'équilibre de différentes configurations magnétiques

Nous allons dans ce chapitre effectuer des simulations numériques visant à calculer l'état d'équilibre des termes d'ordre 0 et d'ordre 1 pour différentes configurations initiales. Nous commenterons ensuite les résultats. Nous rappelons qu'asymptotiquement la solution de l'équation de Landau-Lifchitz tend vers l'équilibre. Nous effectuons donc grâce aux schémas décrits au chapitre 14 une simulation numérique de l'évolution en temps des termes d'aimantation d'ordre 0 et d'ordre 1. Pour obtenir un état d'équilibre, nous arrêtons la simulation une fois que la dérivée temporelle discrète de l'énergie devient inférieure à un seuil donné. Par la suite nous désignons par h le pas d'espace.

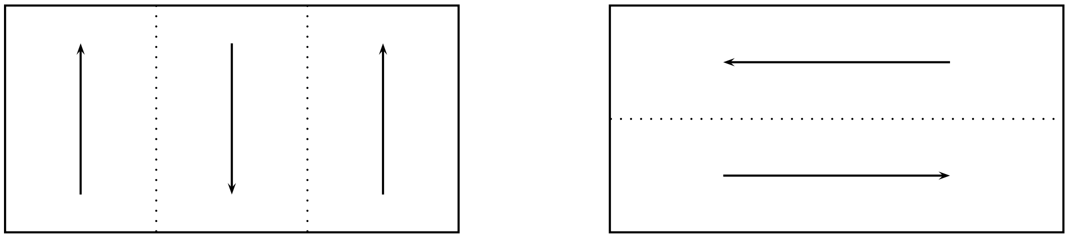
15.1 Paramètres physiques de la simulation

Nous considérons une plaque mince maillée $256 \times 128 \times 1$, soit dotée de 32768 mailles, avec un pas d'espace h de 2.3nm. Les paramètres magnétiques du matériau constituant la plaque sont

$$M_s = 1.4 * 10^6, \qquad A = 10^{-11}/\mu_0, \qquad \mathbf{K} = \mathbf{0}.$$

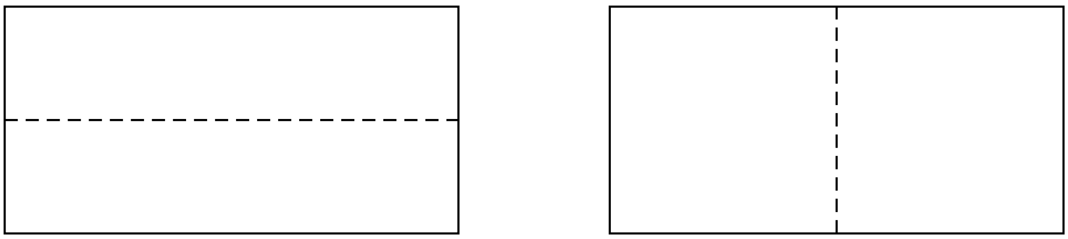
Nous choisissons comme conditions initiales et position de l'espaceur celles représentées aux 15.a et 15.b. Dans toutes nos simulations, nous calculons en réalité $h\boldsymbol{m}^{(1)}$ au lieu de $\boldsymbol{m}^{(1)}$, ceci pour préserver la dimension physique.

Deux autre choix interviennent. Il faut en effet choisir la configuration initiale de l'aimantation. Nous offrons une alternative entre les deux aimantations de la figure 15.a. Ensuite, il faut choisir la position de l'espaceur, transversale ou longitudinale, figure 15.b.



Première condition initiale *Deuxième condition initiale*

FIG. 15.a: Conditions initiales possibles pour $\boldsymbol{m}^{(0)}$



Espaceur longitudinal *Espaceur transversal*

FIG. 15.b: Possibles positions de l'espaceur

15.2 Calculs numériques

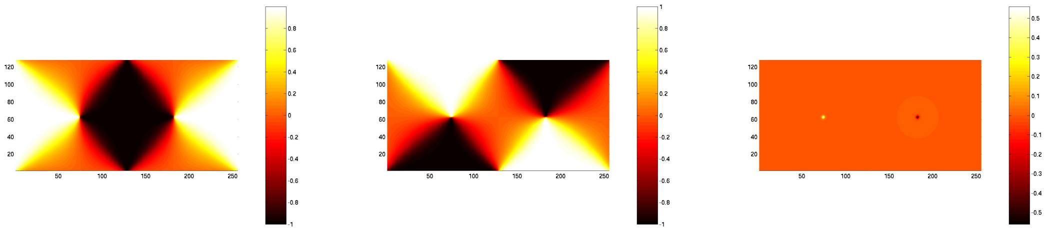
15.2.1 Calculs numériques sans espaceur

Dans cette section, nous exposons les résultats des calculs effectués sur des géométrie sans espaceur. Ces résultats donnent une base de comparaison avec les simulations effectuées en présence d'un espaceur traversant la plaque mince. Nous calculons l'état d'équilibre du terme d'ordre 0 à partir des deux conditions initiales de la figure 15.a.

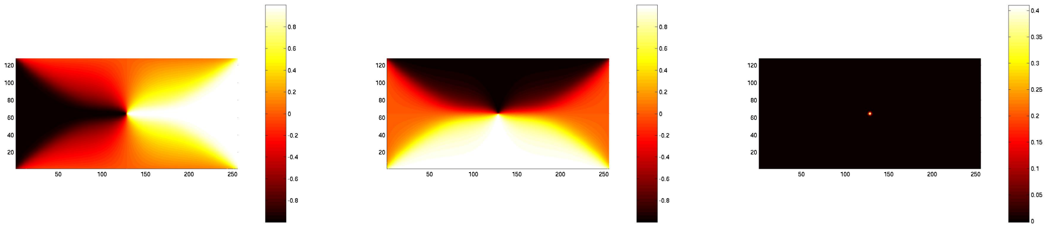
Simulation 0a Première condition initiale sans espaceur.

Simulation 0b Deuxième condition initiale sans espaceur.

Projection sur Ox Projection sur Oy Projection sur Oz



État final atteint lors de la simulation 0a



État final atteint lors de la simulation 0b

FIG. 15.c: Simulations sans espaceur

Nous analysons maintenant les résultats des deux simulations sans espaceur. Pour les deux simulations, nous observons que les retournements d'aimantation ne sont pas brutaux. Cela est dû à l'influence de l'interaction d'échange. Pour la simulation 0a, nous observons deux tourbillons se faisant face de chaque côté de l'axe transversale traversant la plaque. L'état d'équilibre obtenu lors de la simulation Ob présente un unique tourbillon.

15.2.2 États d'équilibre en l'absence de termes d'énergie de surface sur l'espaceur

Nous effectuons les simulations suivantes à partir des conditions initiales et des positions de l'espaceur des figures 15.b et 15.a.

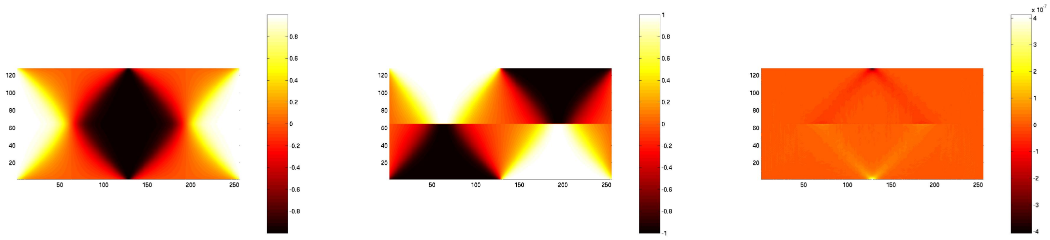
Simulation 1 Première condition initiale avec espaceur longitudinal.

Simulation 2 Deuxième condition initiale avec espaceur transversal.

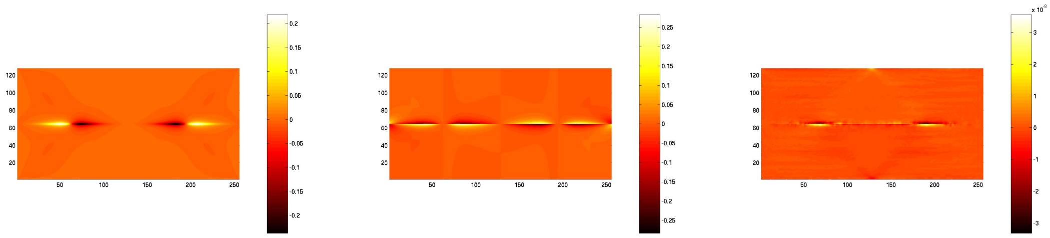
Nous comparons les états d'équilibre atteints lors de ces deux simulations, Figures 15.d et 15.f, avec les états d'équilibre atteints en l'absence d'espaceur, Figure 15.c.

D'abord, nous remarquons que les énergies atteintes sont toujours inférieures en présence d'un espaceur. De plus, le renversement de l'aimantation est favorisé au passage de l'espaceur. Enfin, l'aimantation finale est quasiment parallèle à la plaque mince.

Projection sur Ox Projection sur Oy Projection sur Oz



État final de $\boldsymbol{m}^{(0)}$



État final de $\boldsymbol{m}^{(1)}$

FIG. 15.d: Simulation 1

Nous procédons maintenant à l'analyse des résultats obtenus lors de la première simulation, figure 15.d. Tout comme l'état initial, l'état d'équilibre atteint est resté symétrique par rapport à l'espaceur. Nous remarquons un renversement de l'aimantation au passage de l'espaceur. Deux tourbillons sont présents dans le corps ferromagnétique. Les murs sont épais sauf au passage de l'espaceur. Faisons un agrandissement sur le tourbillon centre gauche, figure 15.e. Nous remarquons que le tourbillon est étiré dans la direction de l'espaceur. Le terme de correction est lui presque entièrement concentré sur l'espaceur. Quatre tourbillons inachevés sont présents, deux se font face à environ un quart de la longueur de l'espaceur, la paire équivalente étant présente aux trois-quarts de la longueur sur l'espaceur.

Nous analysons maintenant l'état d'équilibre de l'aimantation obtenu lors de la deuxième simulation, figure 15.f. La condition initiale d'ordre 0 est antisymétrique par rapport à l'axe transversal. Cette antisymétrie se retrouve dans l'état d'équilibre. Nous voyons un unique tourbillon global sur la plaque et l'espaceur est clairement visible dans l'état d'équilibre atteint. Nous offrons alors un agrandissement sur le tourbillon central, figure 15.g. Encore une fois, le tourbillon est étiré dans la direction de l'espaceur. Cela est dû à l'absence d'interaction d'échange entre les deux faces de

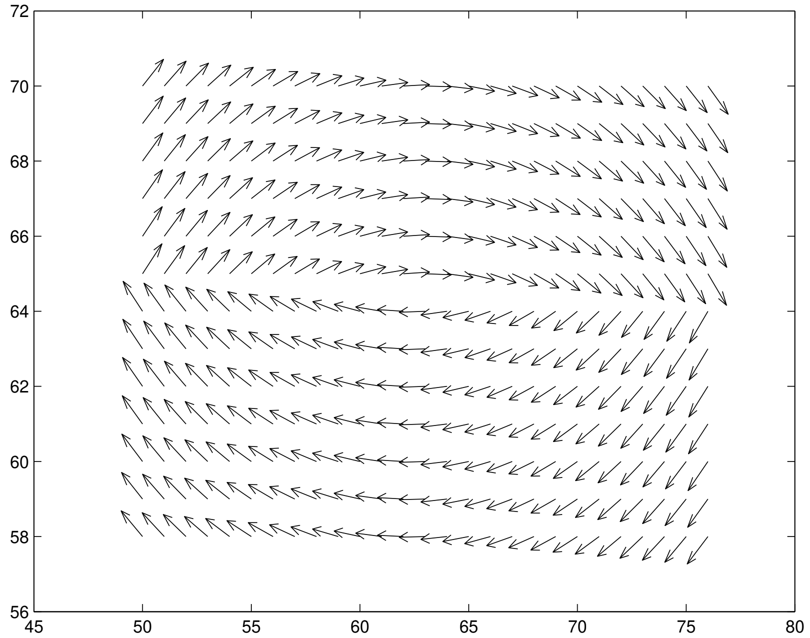


FIG. 15.e: Agrandissement sur le tourbillon centre gauche pour $\boldsymbol{m}^{(0)}$ lors de la première simulation

l'espaceur. Analysons maintenant le terme de correction ou d'ordre 1. Il se concentre presque entièrement sur l'espaceur. Deux tourbillons inachevés se trouvent respectivement au tiers et aux deux tiers de la longueur de l'espaceur. Nous remarquons aussi le faible ordre de grandeur de la correction.

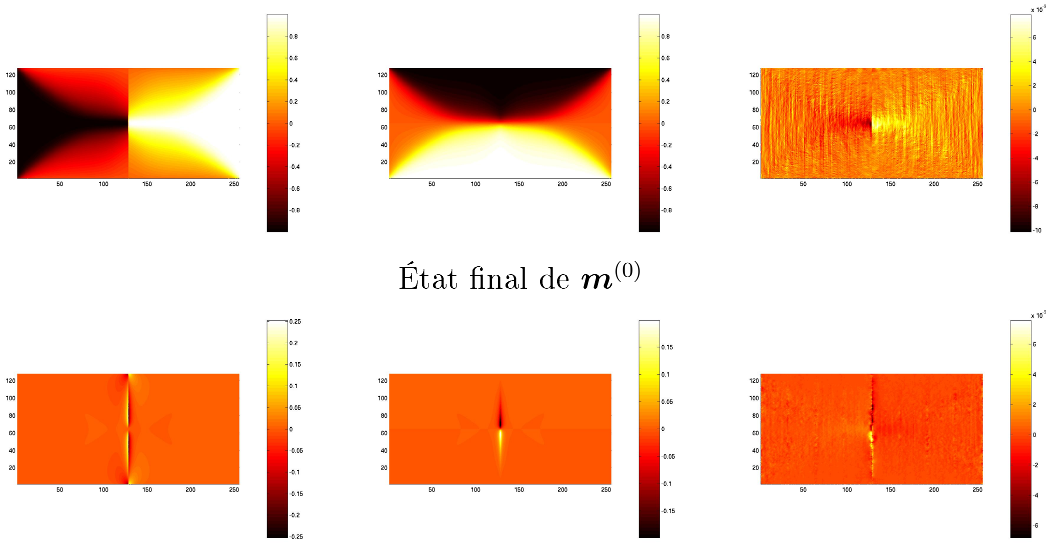
15.2.3 Calcul des états d'équilibre en présence d'interactions surfaciques sur l'espaceur

Dans cette section, nous effectuons des simulations pour calculer l'état d'équilibre de quelques configurations magnétiques lorsque l'on prend en compte les interactions de super-échange. Nous avons choisi de ne pas tenir compte de l'anisotropie surfacique $K_s = 0$ et d'ignorer le terme de deuxième ordre du super-échange, soit $J_2 = 0$. Nous faisons varier la valeur de J_1 parmi les valeurs suivantes.

$$J_1 = 1.0 \times 10^{-5}, \qquad J_1 = 1.0 \times 10^{-4}, \qquad J_1 = 2.0 \times 10^{-4},$$
$$J_1 = 5.0 \times 10^{-4}, \qquad J_1 = 8.0 \times 10^{-4}, \qquad J_1 = 1.0 \times 10^{-3}.$$

Nous n'effectuons de calculs qu'en présence d'un espaceur transversal 15.b et de la deuxième condition initiale 15.a.

Projection sur Ox Projection sur Oy Projection sur Oz



État final de $\boldsymbol{m}^{(0)}$

État final de $\boldsymbol{m}^{(1)}$

FIG. 15.f: Simulation 2

Nous analysons maintenant les résultats. Ils sont représentés aux Figures 15.h, 15.i, 15.j, 15.k, 15.l, 15.m. Nous renvoyons à la figure 15.c, simulation 0b pour le cas sans espaceur. Quand nous augmentons la valeur de J_1, le terme d'ordre 0 de l'aimantation s'approche de l'aimantation d'équilibre du problème sans espaceur 0*b*. Cela confirme qu'un super-échange fort favorise l'alignement à travers l'espaceur. Au contraire, lorsque le super-échange est faible, le retournement de l'aimantation est bien plus brutal. Nous remarquons dans le terme d'ordre 1 deux tourbillons inachevés qui diminuent d'intensité à mesure que la constante de super-échange J_1 augmente.

15.3 Conclusion

Nous avons effectué dans ce chapitre plusieurs calculs d'états d'équilibre pour les termes d'aimantation d'ordre 0 et d'ordre 1. Nous remarquons qu'un fort super-échange tend à minimiser l'influence de l'espaceur sur le comportement magnétique.

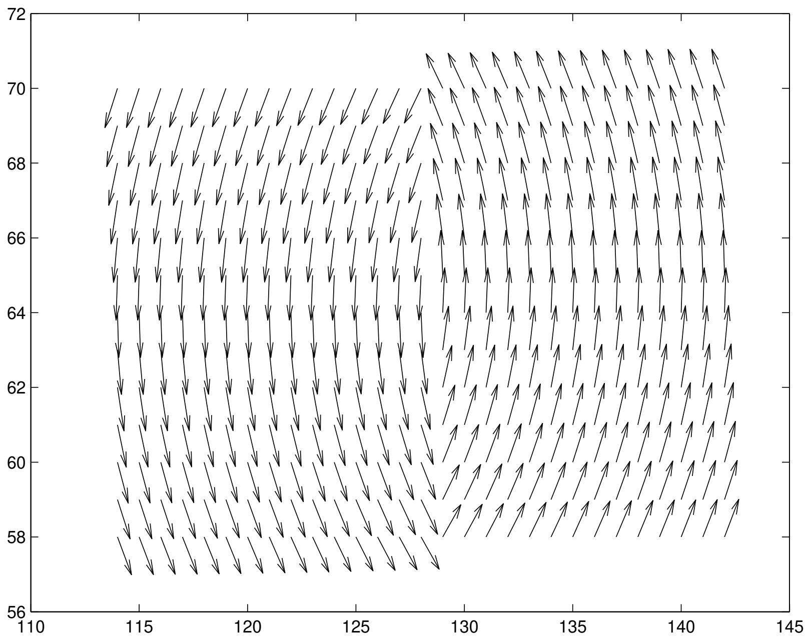


FIG. 15.g: Agrandissement sur le tourbillon central pour $\boldsymbol{m}^{(0)}$ lors de la seconde simulation

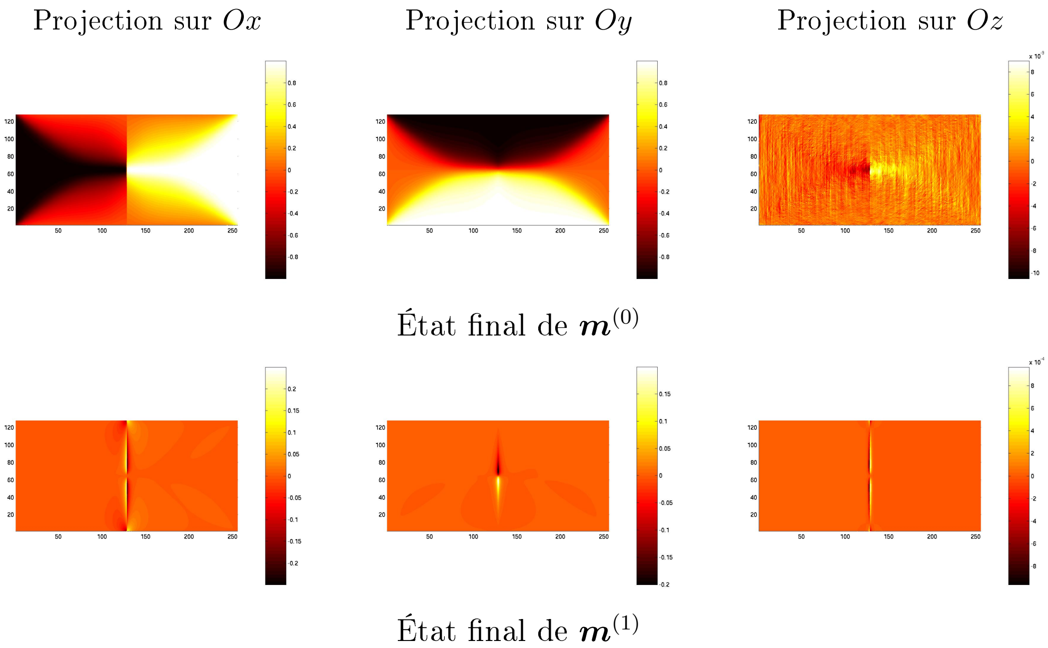


FIG. 15.h: État d'équilibre avec un espaceur transversal, $J_1 = 1.0 \times 10^{-4}$

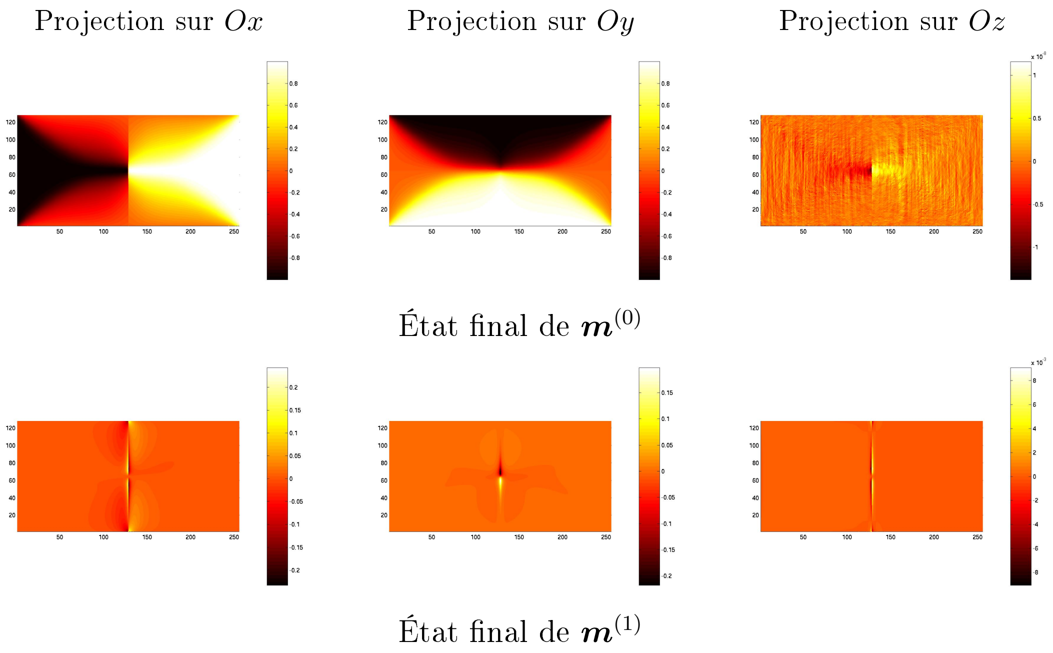


FIG. 15.i: État d'équilibre avec un espaceur transversal, $J_1 = 1.0 \times 10^{-3}$

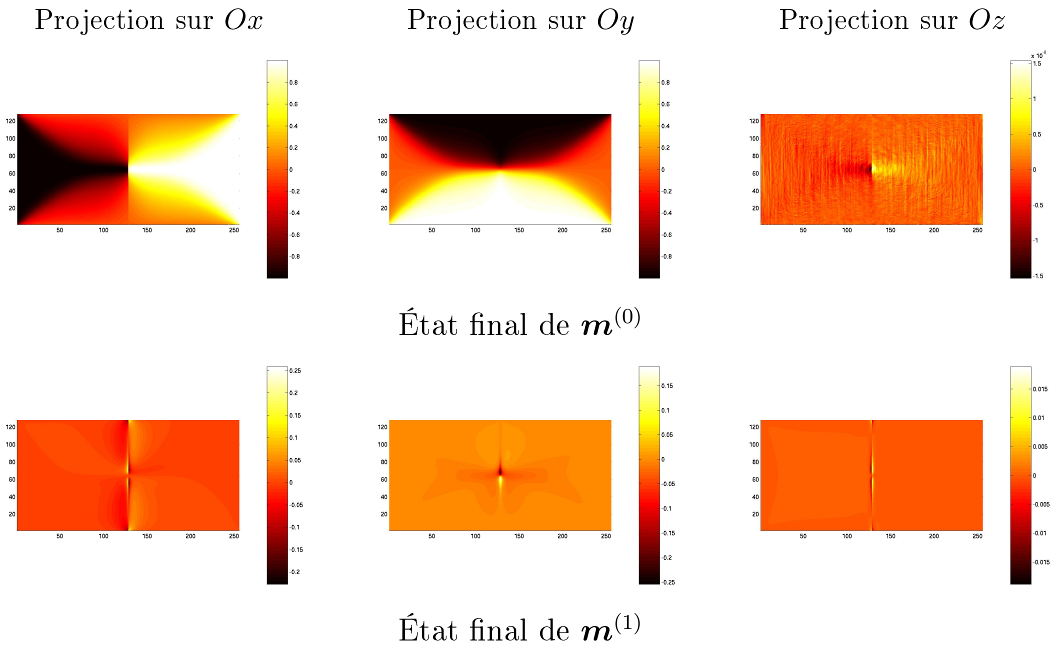


FIG. 15.j: État d'équilibre avec un espaceur transversal, $J_1 = 2.0 \times 10^{-3}$

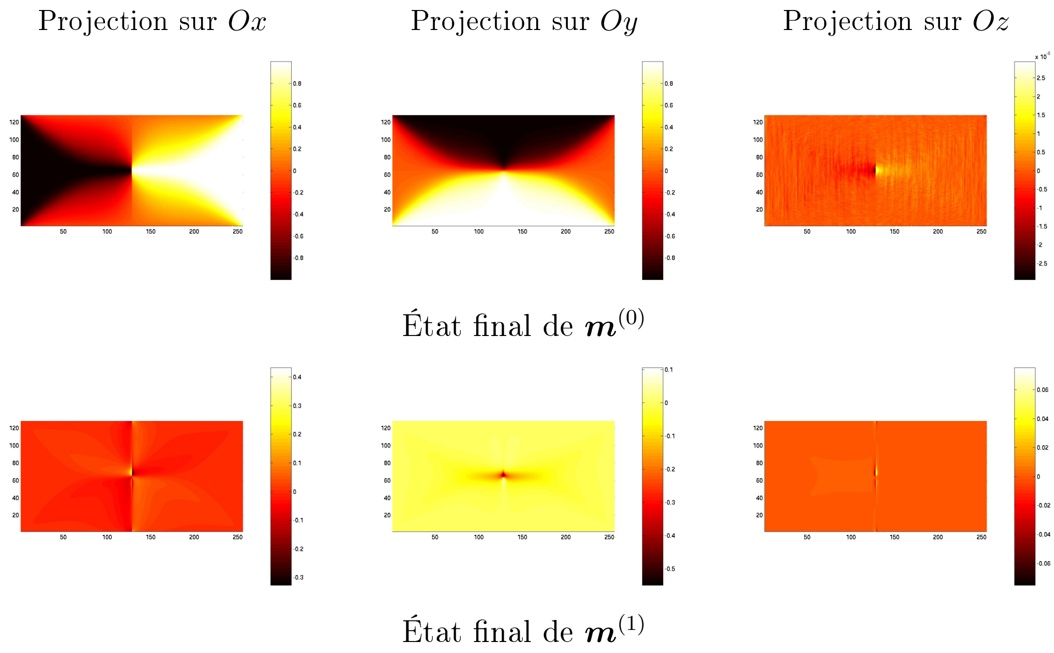


FIG. 15.k: État d'équilibre avec un espaceur transversal, $J_1 = 5.0 \times 10^{-3}$

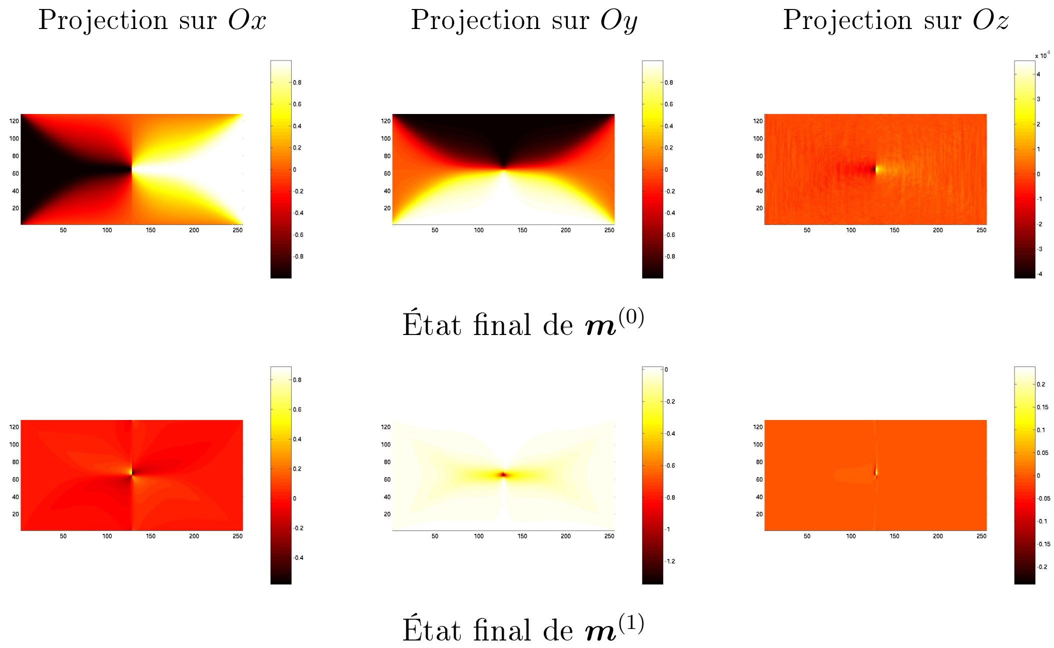


FIG. 15.l: État d'équilibre avec un espaceur transversal, $J_1 = 8.0 \times 10^{-3}$

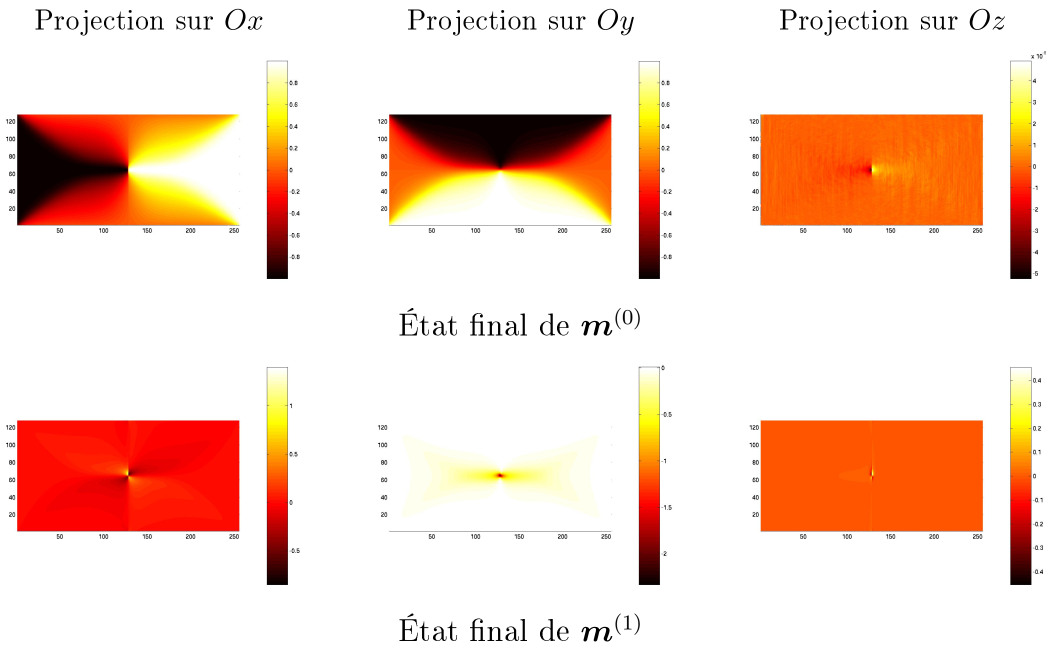


FIG. 15.m: État d'équilibre avec un espaceur transversal, $J_1 = 1.0 \times 10^{-2}$

Chapitre 16

Simulation hyperfréquence

Il est difficile de mesurer la valeur de l'aimantation à l'intérieur d'un échantillon. Tout au plus, peut-on mesurer sa valeur en surface. Pour valider les calculs, il faut relier la valeur de l'aimantation à une quantité physiquement observable. Une telle quantité est la susceptibilité hyperfréquence. S. Labbé et P.Y. Bertin [43, 45] ont réalisé des calculs numériques de susceptibilité hyperfréquence en l'absence d'un espaceur. Les résultats étaient en accord avec les attentes théoriques et les observations physiques. Dans ce chapitre, nous allons d'abord rappeler la définition de la susceptibilité hyperfréquence puis montrer quelques exemples de calculs de susceptibilité en présence d'un espaceur avec ou sans super-échange ou anisotropie surfacique, mais sans super-échange biquadratique, soit $J_2 = 0$.

16.1 Définition de la susceptibilité hyperfréquence

Nous rappelons d'abord l'équation de Landau-Lifchitz qui modélise l'évolution de l'aimantation dans un échantillon.

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}), \tag{16.1.1a}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) = -\boldsymbol{m} \wedge (\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) - \alpha \boldsymbol{m} \wedge (\boldsymbol{m} \wedge (\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})), \tag{16.1.1b}$$

$$A\boldsymbol{m} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur le bord extérieur,} \\ \mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) & \text{sur le bord séparant les deux domaines ferromagnétiques,} \end{cases} \tag{16.1.1c}$$

$$|\boldsymbol{m}| = 1. \tag{16.1.1d}$$

Ici, Ω est un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

$$\mathcal{H}_v(\boldsymbol{m}) = A \bigtriangleup \boldsymbol{m} - \mathbf{K}\boldsymbol{m} + \mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}), \tag{16.1.2a}$$

$$\mathcal{H}_s(\boldsymbol{m}) = K_s((\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{m})\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{m}) + J_1(\gamma^{0,\prime}\boldsymbol{m} - \gamma^0 \boldsymbol{m}). \tag{16.1.2b}$$

Nous pouvons maintenant définir la susceptibilité hyperfréquence [66] chapitre 17,

Définition 16.1.1. *Soit $\widetilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}$ un état d'équilibre associé à une excitation extérieure $\boldsymbol{h}_{\text{ext}}$ appartenant à $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$. On appelle susceptibilité du système la matrice $\chi(\mathrm{h}_{\text{ext}})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ obtenue par perturbation de cet état d'équilibre et définie par*

$$(\chi(\mathrm{h}_{\text{ext}}))_{lk} = -\frac{1}{2T}(\lambda_k, \boldsymbol{m}_l)_{\mathbb{L}^2(Q_T)}, \tag{16.1.3}$$

avec $\lambda_k = \zeta_k \exp(\imath\omega t)$ où ζ_k est constant sur Q_T. Le triplet $(\zeta_k)_{k=1,2,3}$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. $\boldsymbol{m}_k$ est une solution du système (16.1.1) avec $\widetilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}$ comme condition initiale et le champ extérieur $\boldsymbol{h}_{\text{ext}} + \lambda_k$ et $\delta\boldsymbol{m}_k = \widetilde{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}} - \boldsymbol{m}_l$.

Si les ζ_k sont petits alors nous pouvons supposer que

$$\delta\boldsymbol{m}_k = \delta\boldsymbol{M}_k \exp(\imath\omega t) + o(\zeta_k), \tag{16.1.4}$$

où $\delta\boldsymbol{M}_k$ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ pour tout k dans $\{1,2,3\}$. Dans ce cas $\delta\boldsymbol{M}_k$ satisfait formellement les équations

$$(\imath\omega\mathrm{Id} - D_{1,\boldsymbol{h}_{\text{ext}}} \circ \mathcal{H} - D_{2,\boldsymbol{h}_{\text{ext}}})(\delta\boldsymbol{M}_k) = D_{1,\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}(\zeta_k),$$

où

$$\begin{aligned} D_{1,\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}(\boldsymbol{w}) &= -\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}} \wedge \boldsymbol{w} - \alpha\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}} \wedge (\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}} \wedge \boldsymbol{w}), \\ D_{2,\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}(\boldsymbol{w}) &= (\mathcal{H}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}}) \wedge \boldsymbol{w} - \alpha\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}} \wedge (\boldsymbol{w} \wedge (\mathcal{H}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}}) + \boldsymbol{h}_{\text{ext}})). \end{aligned}$$

Pour la discrétisation du système il suffira de discrétiser l'opérateur $\mathcal{H}(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{h}_{\text{ext}}})$ comme au chapitre 14 par $\mathcal{H}_h^0$ équation (14.1.8). Nous pouvons alors inverser le système discret en utilisant la même méthode que S. Labbé [43].

16.2 Exemples de calculs de la susceptibilité hyperfréquence

Nous reprenons les exemples de S. Labbé [43] en y ajoutant un espaceur.

Nous effectuons quelques calculs de susceptibilité sur un cube maillé avec 8 mailles dans chaque direction d'espace et un pas de 0.156×10^{-6}m. Les paramètres du matériau sont donnés à la table 16.1

M_s	Aimantation	$0.27 \cdot 10^6$
K	Anisotropie	$0.401 \cdot 10^6$
A	Échange	$0.82 \cdot 10^{-10}$
α	Coefficient de dissipation	0.5

TAB. 16.1: Paramètres du matériau

L'anisotropie est uniaxiale dirigée suivant $\boldsymbol{e}_z$. Nous avons alors considéré deux types d'espaceurs et fait varier les constantes de super-échange et d'anisotropie surfacique dans ces deux cas.

16.2.1 Calculs de susceptibilité sans espaceur

Nous avons refait les calculs de susceptibilité hyperfréquence de Stéphane Labbé sur le cube. Nous commençons par reproduire ici les résultats en l'absence d'espaceur. Nous avons d'abord calculé un état d'équilibre de l'aimantation à partir d'une aimantation constante égale d'abord à $\boldsymbol{e}_x$, Figure 16.b, puis à $\boldsymbol{e}_z$, Figure 16.a. Ensuite, nous avons calculé les susceptibilité hyperfréquence, nous représentons les parties imaginaires de la matrice de susceptibilité hyperfréquence.

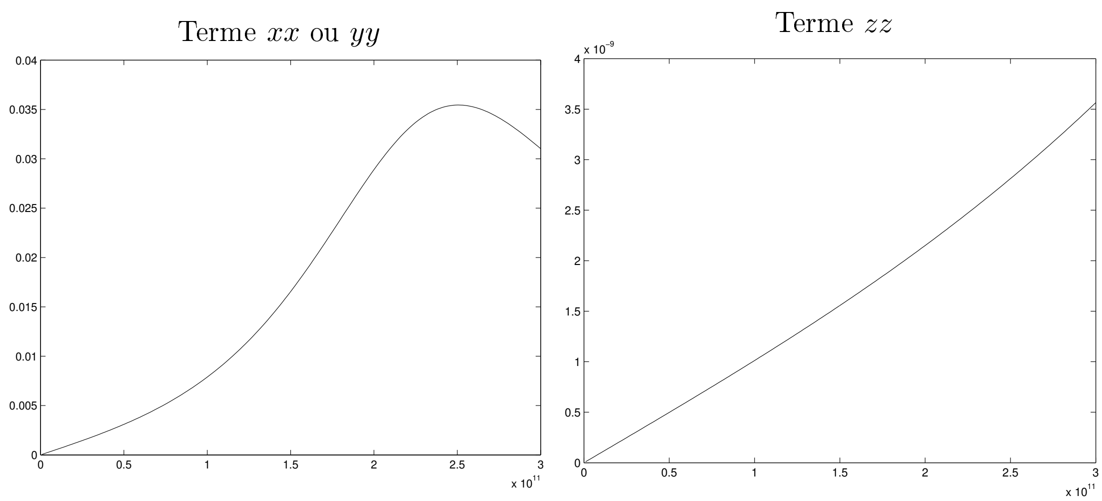


FIG. 16.a: Susceptibilité pour le cube sans espaceur avec CI suivant Oz.

16.2.2 Espaceur perpendiculaire à l'axe d'anisotropie

Ici, nous avons placé l'espaceur dans le plan $0xy$ perpendiculairement à l'axe d'anisotropie Oz. Nous choisissons pour ce cas une anisotropie surfacique nulle : $K_s = 0$. Nous faisons alors varier la valeur de J_1. Nous représentons alors la partie imaginaire des termes xx et zz de la matrice de susceptibilité, soit χ_{11} et χ_{33} en fonction de la fréquence, Figure 16.d. Nous remarquons que la présence d'un espaceur ne modifie pratiquement pas la susceptibilité par rapport à la Figure 16.a. La susceptibilité hyperfréquence ne varie pratiquement par en fonction de J_1.

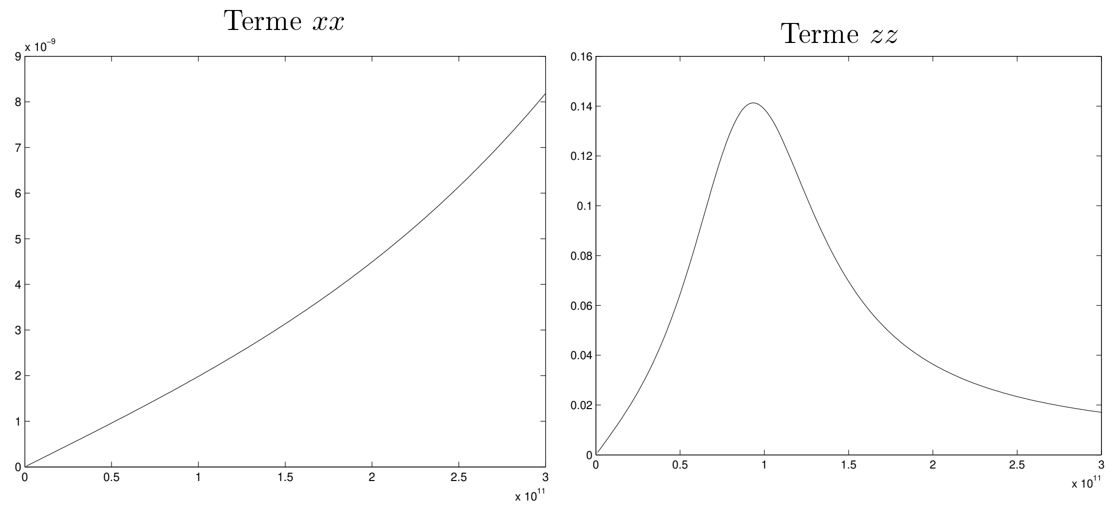


FIG. 16.b: Susceptibilité pour le cube sans espaceur avec CI suivant Ox.

16.2.3 Espaceur parallèle à la direction d'anisotropie

Ici, nous avons placé l'espaceur dans le plan $0zx$ perpendiculairement à l'axe d'anisotropie Oz. Nous choisissons pour ce cas le super-échange nul : $J_1 = 0$. Nous faisons alors varier la valeur de K_s. Dans ce cas, l'anisotropie volumique favorise la direction Oz pour l'aimantation alors que l'anisotropie surfacique favorise la direction Oy. Nous avons choisi une condition initiale pour le calcul de l'état d'équilibre suivant Ox soit peprendiculaire à l'axe d'anisotropie. Nous représentons alors la partie imaginaire des termes zz de la matrice de susceptibilité en fonction de la fréquence, soit χ_{33}, Figure 16.e. Nous représentons aussi les termes xx et yy de la matrice de susceptibilité en fonction de la fréquence, soit χ_{11} et χ_{22}, Figures 16.f et 16.g. Comparé à la Figure 16.b, nous retrouvons la résonnance, la susceptibilité hyperfréquence est très sensible à l'anisotropie surfacique. Nous pouvons remarquer qu'à mesure que la valeur de la constante de l'anisotropie surfacique augmente, la résonnance apparaissant dans les termes zz et yy se décale vers la droite.

16.3 Conclusion

Nous avons réalisé quelques calculs de susceptibilité en présence d'un espaceur. Nous aurions pu effectuer le même calcul pour la quantité $\boldsymbol{m}^{(1)}$ sans grande difficulté. En effet la matrice discrète à inverser ne change pas.

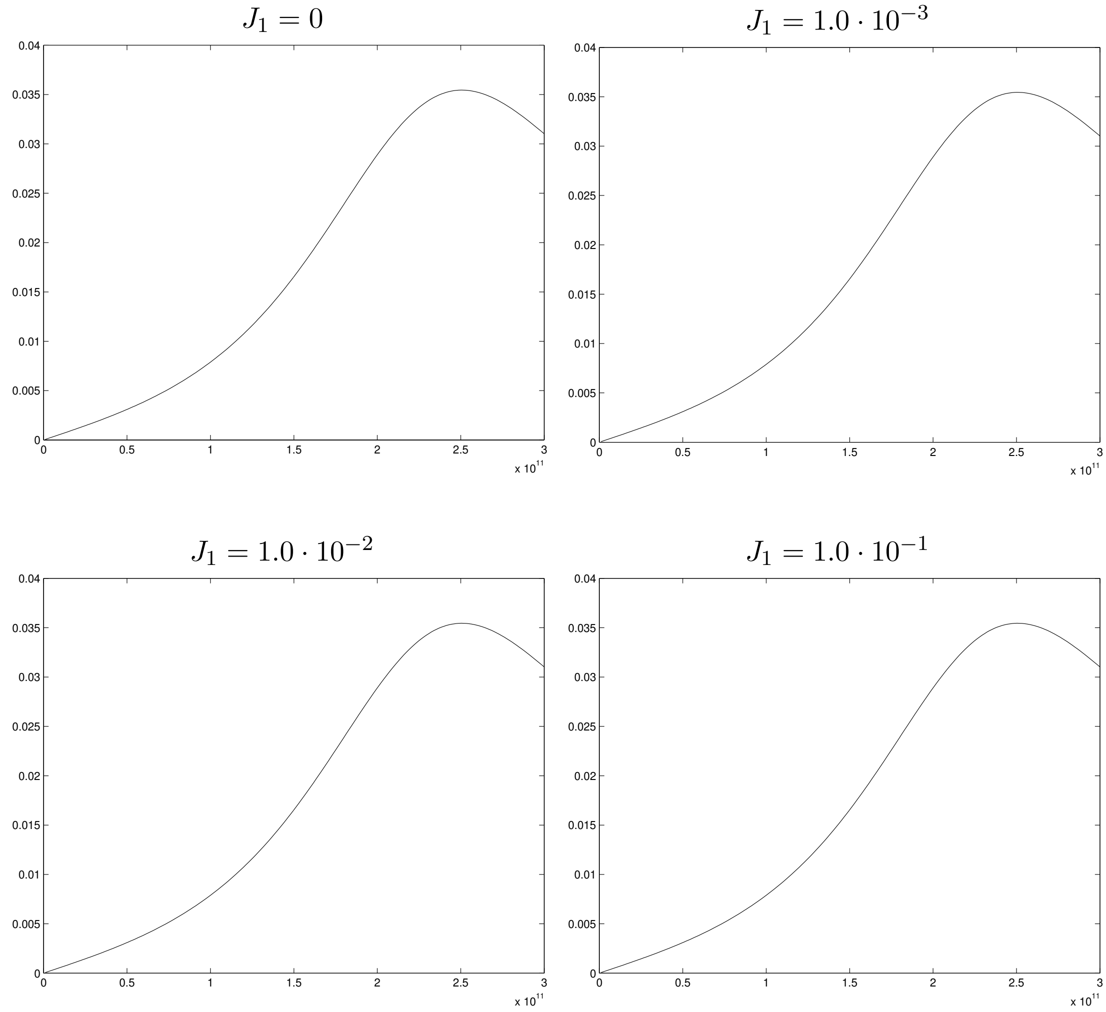


FIG. 16.c: Terme xx ou yy de la susceptibilité pour le cube avec espaceur perpendiculaire à Oz

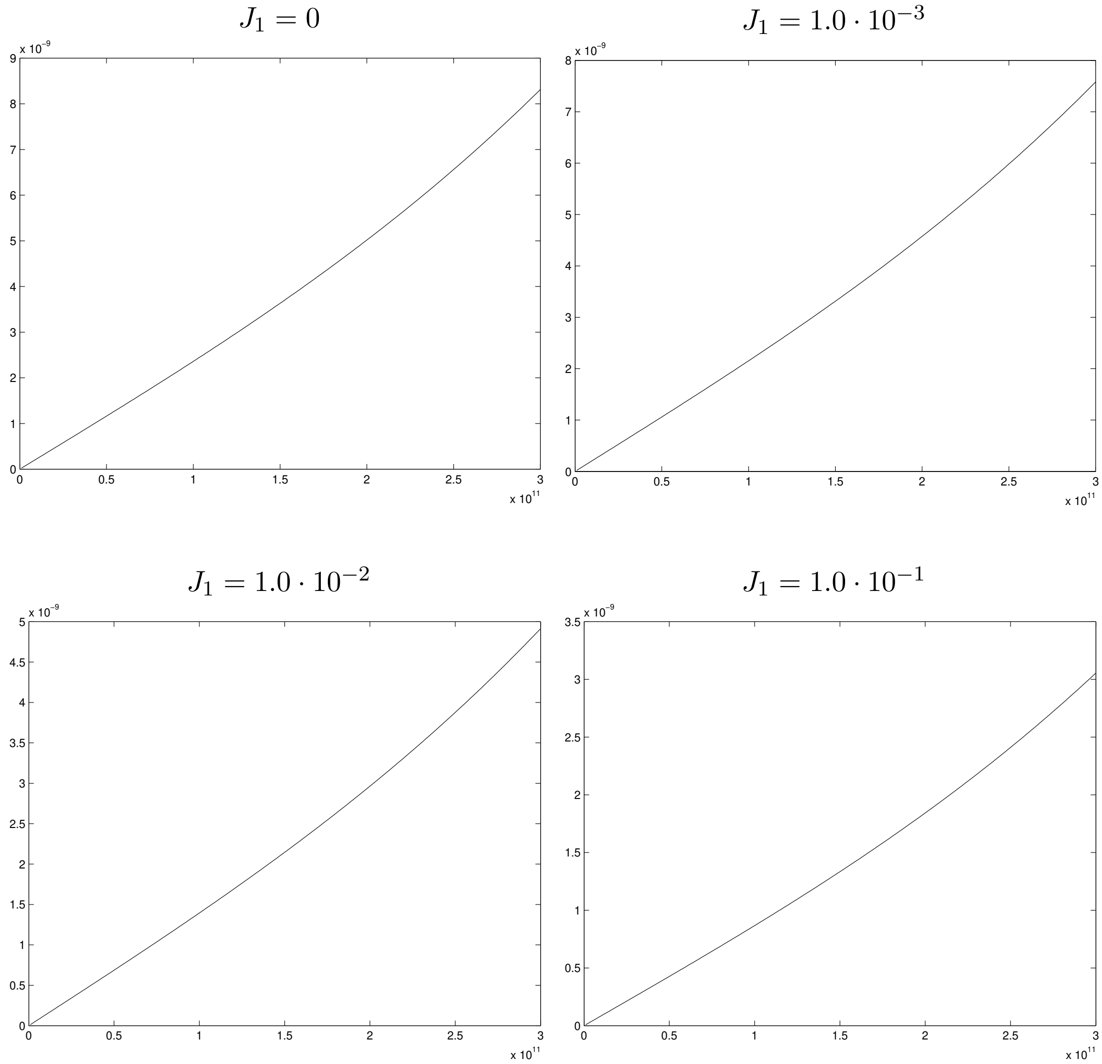


FIG. 16.d: Terme zz de la susceptibilité pour le cube avec espaceur perpendiculaire à Oz

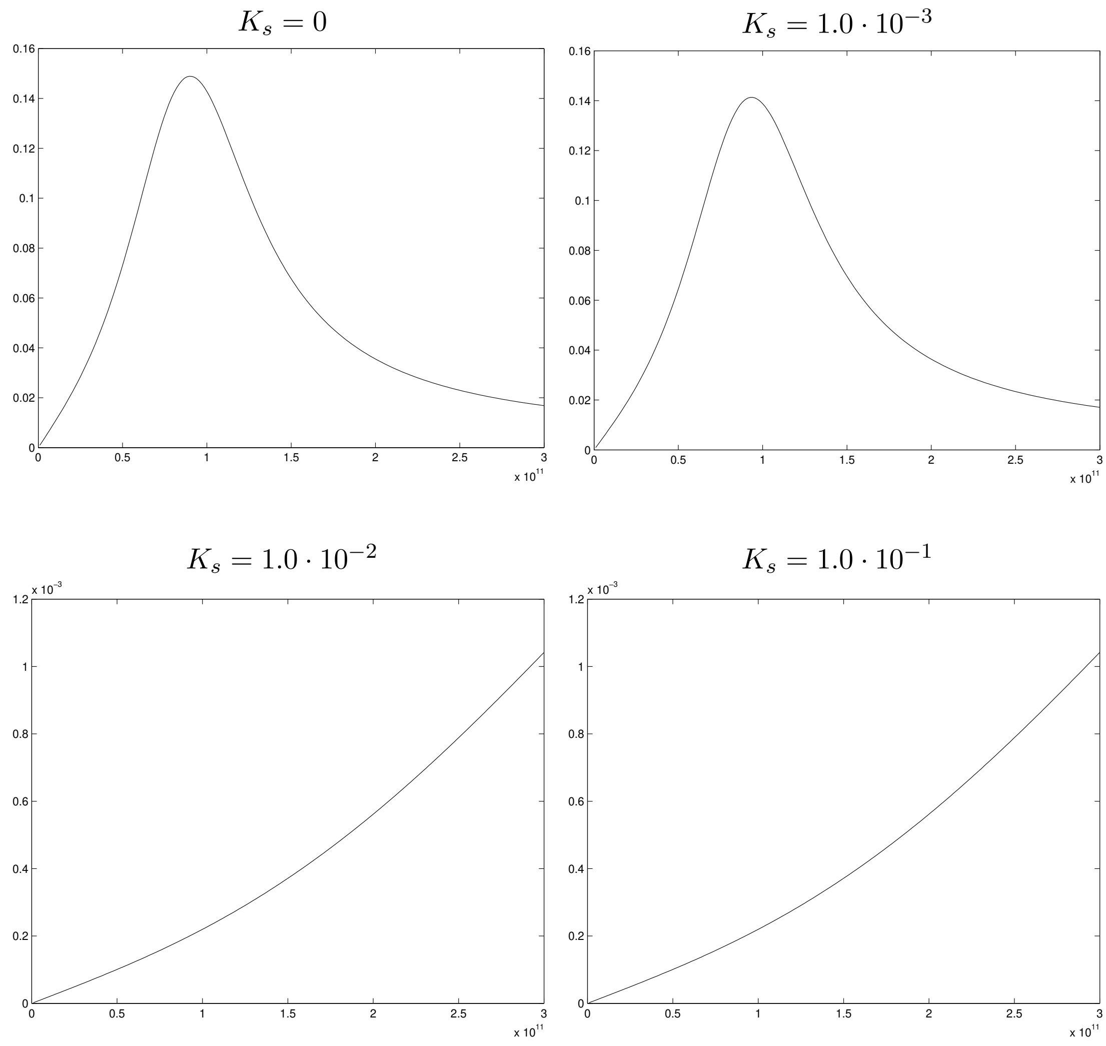


FIG. 16.e: Terme zz de la susceptibilité pour le cube avec espaceur perpendiculaire à Oy

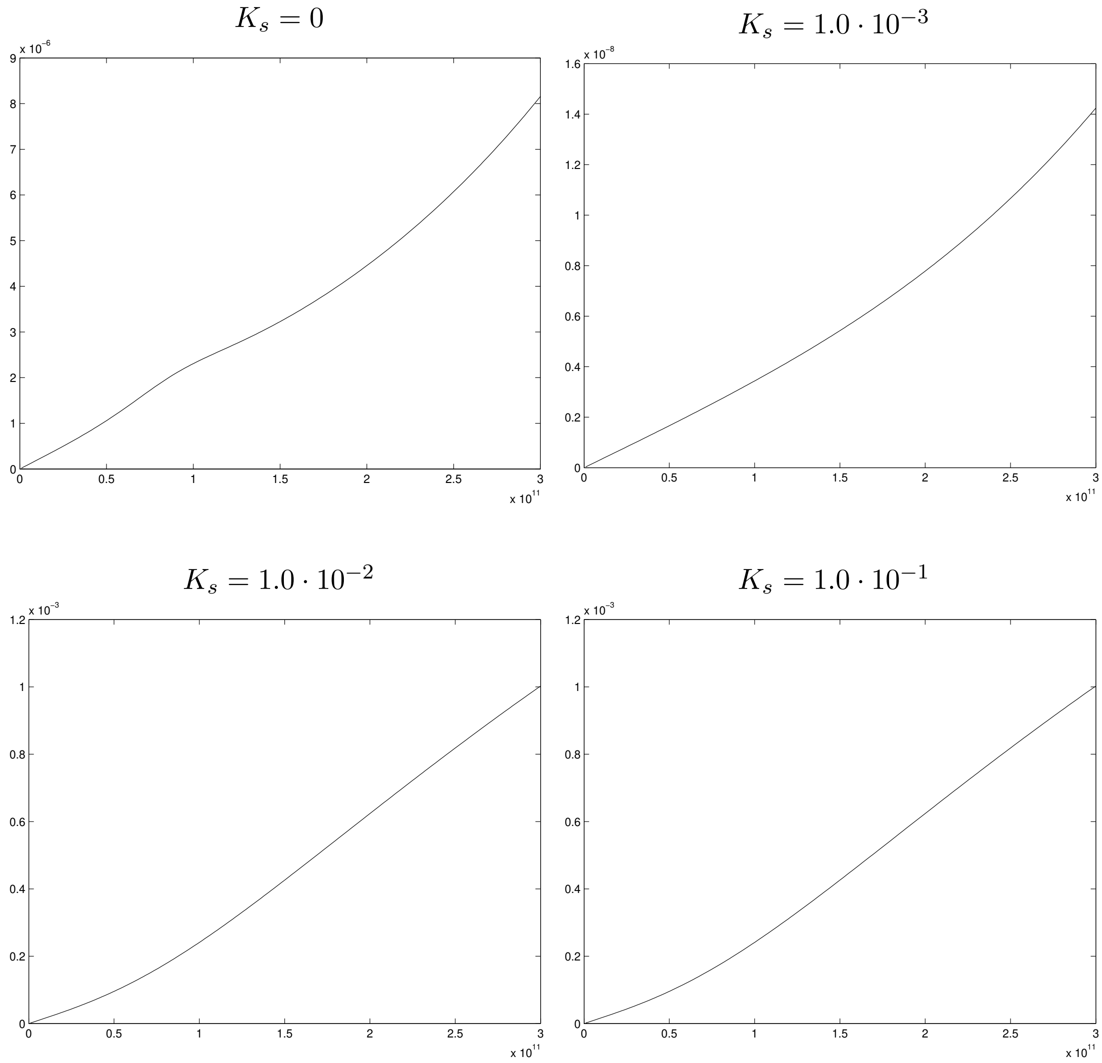


FIG. 16.f: Terme xx de la susceptibilité pour le cube avec espaceur perpendiculaire à Oy

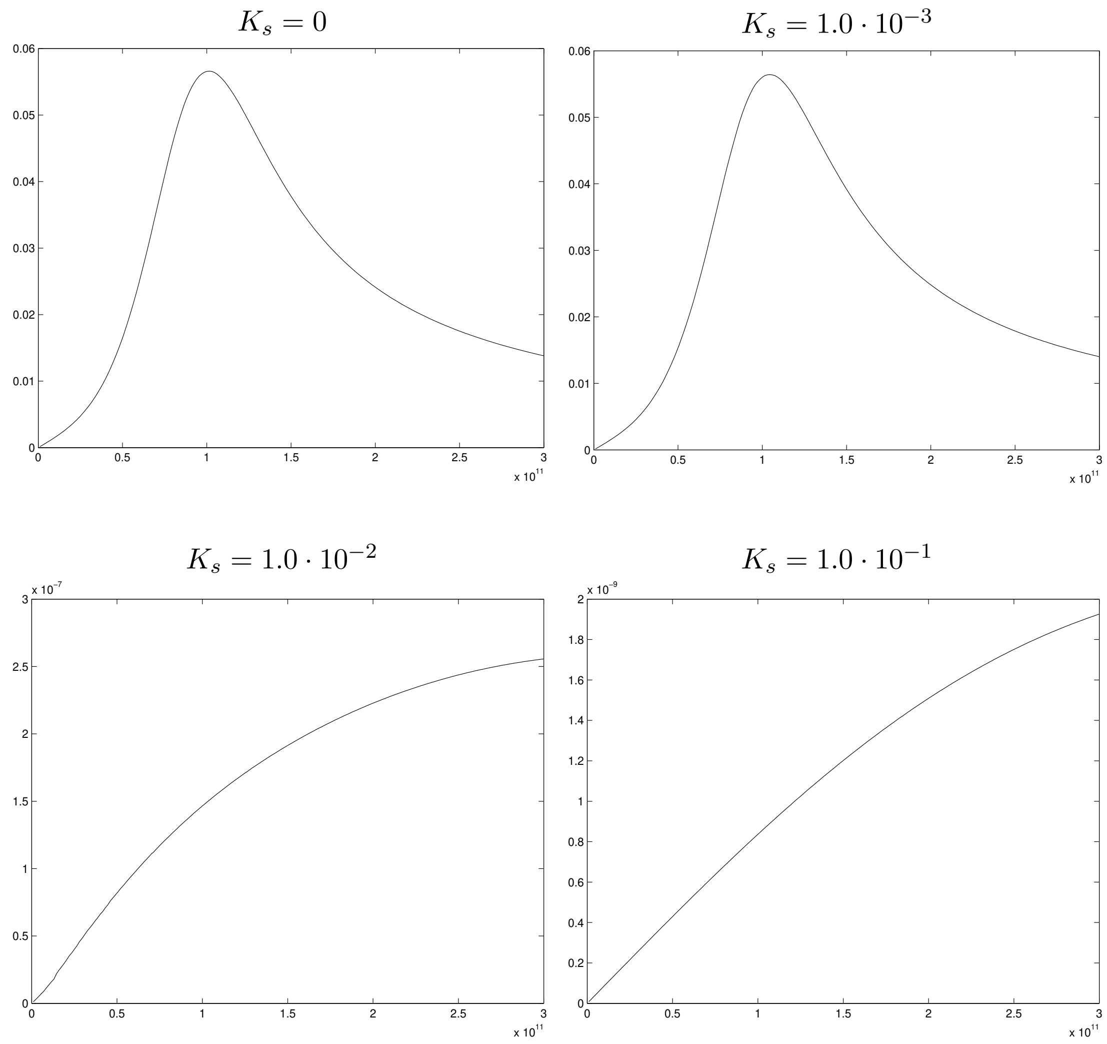


FIG. 16.g: Terme yy de la susceptibilité pour le cube avec espaceur perpendiculaire à Oy

Sixième partie

Homogénéisation

Chapitre 17

Introduction à l'homogénéisation

Il est aujourd'hui possible de fabriquer des empilements de films minces de matériaux ferromagnétiques. Le comportement de ces agencements multicouches diffère de celui des corps ferromagnétiques massifs. Les multicouches [66], chapitre 20, présentent de nombreuses applications en particulier dans le domaine de l'enregistrement magnétique ou magnéto-optique. Nous souhaitons étudier de tels agencements et particulièrement la limite de l'aimantation quand le nombre de couches dans un domaine donné tend vers l'infini. Pour cela, nous devons homogénéiser le système de Landau-Lifchitz.

L'homogénéisation est un procédé mathématique qui modélise des problèmes physiques ayant une structure périodique de période ϵ petite devant les dimensions du domaine. Pour homogénéiser, il faut formellement prendre la limite quand la période ϵ tend vers 0. Étant donnée une famille d'opérateurs L_ϵ et de termes sources f_ϵ et de solutions $L_\epsilon u_\epsilon = f_\epsilon$, nous souhaitons obtenir le terme source $\bar{f}$ et l'opérateur différentiel $\bar{L}$ tels que la limite de u_ϵ quand ϵ tend vers 0 notée u satisfait $\bar{L}u = f$.

Il existe plusieurs méthodes pour homogénéiser, la première méthode [9] consiste à effectuer un développement asymptotique formel sur u^ϵ :

$$u^\epsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots, \tag{17.0.1}$$

à l'insérer dans l'équation $L_\epsilon u^\epsilon = f_\epsilon$, puis identifier les termes de même ordre. Il est alors possible d'identifier formellement $\bar{L}$. Il faut ensuite justifier rigoureusement la limite par une méthode entièrement différente, généralement la méthode d'énergie de L. Tartar [62]. Ces méthodes ont d'abord été appliquées en domaine constant puis sur des domaines périodiquement perforés par des trous, D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin [19].

Pour les phénomènes périodiques, la méthode de la convergence double-échelles de G. Allaire [3], permet de calculer l'opérateur limite $\bar{L}$ et de la justifier rigoureusement dans la même étape. Nous présentons cette méthode au chapitre 18. Nous l'utilisons pour homogénéiser l'équation de Landau-Lifchitz en domaine perforé au chapitre 19, l'équation de la chaleur pour les agencements multicouches au chapitre 20 en présence de conduction intercouche, et l'équation de Landau-Lifchitz pour les agencements multicouches au chapitre 21 en présence d'anisotropie surfacique et de super-échange.

En général, l'homogénéisation en domaine perforé Ω^ϵ nécessite que la séquence de trous soit acceptable dans le sens indiqué par A. Damlamian et P. Donato dans [20], i.e. qu'il existe une famille d'opérateurs de prolongements P_ϵ qui envoie $\mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon)$ sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$ avec une constante de prolongement qui ne dépend pas de ϵ. Malheureusement, nous allons voir que les agencements multicouches ne satisfont pas à cette condition, ce qui va compliquer le processus d'homogénéisation pour les équations non linéaires comme celles de Landau-Lifchitz. En effet, il sera alors difficile de passer à la limite dans les termes non linéaires.

Chapitre 18

Convergence double-échelles : quelques rappels

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats sur la convergence double-échelles. Nous renvoyons aux articles [3], et [5] pour les preuves et les détails. Nous ajoutons quelques remarques sur la convergence triple-échelles avec surfaces périodiques.

18.1 Convergence double-échelles

Considérons un ouvert borné $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$. Le concept de convergence double-échelles est basé sur l'idée qu'une suite de fonctions u^N de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ peut converger, dans un sens que nous définirons dans cette section, vers une fonction $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto u^\infty$ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times\mathbb{R}^3)$ de période 1 en chaque variable de $\boldsymbol{y}$, où formellement $u^N(\boldsymbol{x}) \approx u^\infty(\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{y})$. Nous posons $\mathcal{Y} = (0,1)^3$.

18.1.1 Les fonctions test acceptables

Le concept de convergence double-échelles généralise le concept de convergence faible. Pour sa définition, nous aurons besoin de fonctions test.

Définition 18.1.1. *Une fonction $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est acceptable si elle est 1-périodique en chacune des variables de $\boldsymbol{y}$ et si*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathcal{O}}|\psi(\boldsymbol{x},N\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{Y}}|\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{18.1.1}$$

Nous désignons par $\mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$ l'espace constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ qui sont 1-périodiques sur chaque variable, $\mathrm{L}^2_\#(\mathcal{Y})$ comme le complété dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{Y})$ de

$\mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$, et $\mathcal{C}_\#(\mathcal{Y})$ comme l'ensemble des fonctions continues 1-périodiques sur chaque variable de $\mathbb{R}^3$. Remarquons que $\mathrm{L}^2(\mathcal{Y}) = \mathrm{L}^2_\#(\mathcal{Y})$. Nous dénotons par $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^3$ qui sont 1-périodiques sur chaque variable de $\boldsymbol{y}$. L'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{Y})$ pour lesquelles les valeurs de toutes les dérivées suivant chaque variable de $\boldsymbol{y}$ sont égales sur les plans $y_i = 0$ et $y_i = 1$, pour i dans $\{1, 2, 3\}$. De même, $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}_\#(\mathcal{Y})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^3$ qui sont 1-périodiques sur chacune des trois dernières variables.

Remarque 18.1.2. D'après les résultats de la section 5 de [3], les fonctions réelles appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$, $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}; \mathcal{C}_\#(\mathcal{Y}))$ ou à $\mathrm{L}^2(\mathcal{Y}; \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}))$ sont acceptables.

18.1.2 Définition de la convergence double-échelles et théorème fondamental

Commençons par une définition

Définition 18.1.3. *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O} \times \mathcal{Y})$ constitué de fonctions acceptables au sens de la définition 18.1.1. Soit u^N une suite d'éléments de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, on dit que u^N converge double-échelles vers u^∞ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O} \times \mathcal{Y})$ si*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathcal{O}} u^N(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{Y}} u^\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{18.1.2}$$

pour tout ψ appartenant à E.

Le lemme suivant précise les notions de convergence double-échelles pour différentes classes de fonctions acceptables.

Lemme 18.1.4. *Les notions de convergence double-échelles coïncident si l'on prend comme espace de fonctions test $E = \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$, ou $E = \mathrm{L}^2(\mathcal{O}; \mathcal{C}_\#(\mathcal{Y}))$, ou $E = \mathrm{L}^2(\mathcal{Y}, \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}))$.*

Preuve : Par densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$ dans les autres espaces. □

À partir de maintenant, nous travaillons avec les espaces de fonctions tests du lemme 18.1.4.

Ce lemme permet d'obtenir le corollaire important suivant.

Corollaire 18.1.5. *Soit χ une fonction réelle mesurable sur $\mathbb{R}^3$, 1-périodique sur chaque variable et valant presque partout 0 ou 1. Notons χ^N la fonction réelle $\boldsymbol{y} \mapsto \chi(N\boldsymbol{y})$. Soit u^N une suite de fonctions dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ qui tend vers $u^\infty \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O} \times \mathcal{Y})$ au sens de la convergence double-échelles. Alors, $\chi^N u^N$ converge vers χu^∞ au sens de la convergence double-échelles.*

Preuve : Soit ψ dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}_\#(\mathcal{Y})$. Alors, $\chi\psi$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O};\mathcal{C}_\#(\mathcal{Y}))$ et est donc une fonction test acceptable. D'après le lemme 18.1.4, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathcal{O}} u^N(\boldsymbol{x})\chi(N\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{Y}} u^\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\chi(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \quad (18.1.3)$$

□

Nous reproduisons ici le théorème 1.2 de [3].

Théorème 18.1.6. *Soit $(u^N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, il existe une sous-suite u^{N_k} et u^∞ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times\mathcal{Y})$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{O}} u^{N_k}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, N_k\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{Y}} u^\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad (18.1.4)$$

pour tout ψ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$.

Preuve : Voir [3] pour la preuve. □

Il existe aussi un critère de compacité forte pour passer à la limite dans les produits. Il s'agit du théorème 1.8 de [3] que nous reproduisons ici.

Théorème 18.1.7. *Soit u^N convergeant double-échelles vers u^∞ et v^N convergeant double-échelles vers v^∞. Supposons de plus,*

$$\lim_{N\to\infty} \|u^N\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} = \|u^\infty\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times\mathcal{Y})}. \quad (18.1.5)$$

Alors, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathcal{O}} u^N(\boldsymbol{x})v^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}, N\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}} u^\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})v^\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \quad (18.1.6)$$

Preuve : Le résultat énoncé au théorème 1.8 de [3] est un peu moins fort car il concerne uniquement la convergence au sens des distributions de u^Nv^N vers la moyenne $\int_{\mathcal{Y}} u^\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})v^\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$. En réalité, une fois que l'on a remplacé la fonction test, la preuve est suffisante pour prouver la convergence double-échelles du produit. □

Nous reproduisons en partie la proposition 1.14 de [3].

Proposition 18.1.8. *Nous avons les deux résultats suivants.*

(1) Soit $(u^N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$. Alors, il existe une sous-suite u^{N_k} de u^N, u^∞ dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$ et u_1^∞ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O};\mathrm{H}^1_\#(\mathcal{Y}))$ tels que u_{n_k} et $\nabla_{\boldsymbol{x}}u^{N_k}$ convergent double-échelles respectivement vers u^∞ et $\nabla_{\boldsymbol{x}}u^\infty + \nabla_{\boldsymbol{y}}u_1^\infty$.

(2) Soient u^N et $\frac{1}{N}\nabla u^N$ deux suites bornées dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$. Alors, il existe une fonction u^∞ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O};\mathrm{H}^1_\#(\mathcal{Y}))$ telle que à une sous-suite près, u^N et $\frac{1}{N}\nabla u^N$ convergent respectivement vers u^∞ et $\nabla_{\boldsymbol{y}} u^\infty$ au sens de la convergence double-échelles.

Preuve : Voir [3]. □

En prenant des fonctions test constantes suivant certaines variables, nous remarquons qu'il est possible de n'homogénéiser que sur la troisième variable. C'est le cas que nous considérerons aux chapitres 20 et 21. Pour les sections suivantes, les résultats ne seront plus donnés que pour une homogénéisation sur la troisième variable d'espace. En effet, ces résultats ne seront pas utiles pour le chapitre 19, seul chapitre où nous avons besoin de l'homogénéisation sur les trois variables d'espace.

18.1.3 Surfaces périodiques et convergence double-échelles

Nous nous attardons sur le concept de surfaces périodiques et de convergence double-échelles. Tous les résultats cités proviennent de [5] et [56].

Soit $Y = (0,1)$ qui s'identifie à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, soit T un ouvert de Y et Γ sa frontière. Nous notons $Y^* = Y \setminus \Gamma$. Nous identifions T, Y^* et Γ avec leur relèvements universels dans $\mathbb{R}$. Soit

$$\Gamma^N = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}, Nx_3 \in \Gamma\} \qquad \mathcal{O}^N = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}, Nx_3 \in Y^*\} \tag{18.1.7}$$

Nous avons alors le théorème suivant, reproduction du théorème 1.1. de [5].

Théorème 18.1.9. *Soit u^N une suite de fonctions de $\mathrm{L}^2(\Gamma^N)$ telle que*

$$\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} |u^N(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \leq C. \tag{18.1.8}$$

C étant une constante. Alors, il existe une sous-suite u^{N_k} de u^N et u^∞ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times\Gamma))$, telle que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k}\int_{\Gamma^{N_k}} u^{N_k}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}, Nx_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{O}}\int_\Gamma u^\infty(\boldsymbol{x},y)\phi(\boldsymbol{x},y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{18.1.9}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})\otimes\mathcal{C}_\#(Y)$.

Preuve : Voir [5]. □

La relation (18.1.9) définit le concept de convergence double-échelles pour les surfaces périodiques. Les deux formes de convergence double-échelles coïncident sous certaines conditions.

Proposition 18.1.10. *Soit u^N une suite de fonctions de $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$ telle que*

$$\|u^N\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \frac{1}{N}\|\nabla u^N\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} \leq C, \tag{18.1.10}$$

où C est une constante positive. Alors, la trace de u^N sur Γ^N satisfait

$$\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} |u^N(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \leq C, \tag{18.1.11}$$

et il existe u^∞ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O};\mathrm{H}^1_\#(Y))$ ainsi qu'une sous-suite u^{N_k} de u^N, telle que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k}\int_{\Gamma^{N_k}} & u^{N_k}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}, N_k x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathcal{O}}\int_{\Gamma} u^\infty(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\phi(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\sigma(y_1),\end{aligned} \tag{18.1.12}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathcal{O}} u^{N_k}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, N_k x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}}\int_{Y} u^\infty(\boldsymbol{x}, y)\psi(\boldsymbol{x}, y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y, \tag{18.1.13}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u^{N_k}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, N_k x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}}\int_{Y} \frac{\partial u^\infty(\boldsymbol{x}, y)}{\partial y}\psi(\boldsymbol{x}, y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y, \tag{18.1.14}$$

pour tout ψ dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$.

Preuve : Voir [5]. □

Nous allons maintenant établir un analogue du théorème 18.1.7 pour la convergence double-échelles surfacique.

Théorème 18.1.11. *Soit deux suites u^N et v^N bornées dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ convergeant respectivement vers u^∞ et v^∞ au sens de* (18.1.9). *Supposons de plus que*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} |u^N(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{O}}\int_{\Gamma} |u^\infty(\boldsymbol{x}, y)|^2\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{18.1.15}$$

Alors, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} u^N(\boldsymbol{x})v^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}, Nx_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{O}}\int_{\Gamma} u^\infty(\boldsymbol{x}, y)v^\infty(\boldsymbol{x}, y)\phi(\boldsymbol{x}, y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{18.1.16}$$

Preuve : La preuve est très similaire à celle du théorème 1.8 de [3]. Tout d'abord, soit ψ_k une suite dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$, qui converge vers u^∞ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times\Gamma)$. Alors,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} |u^N(\boldsymbol{x}) - \psi_k(\boldsymbol{x}, Nx_3)|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{O}}\int_{\Gamma} |u^\infty(\boldsymbol{x}, y) - \psi_k(\boldsymbol{x}, y)|^2\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{18.1.17}$$

Nous pouvons alors passer à la limite quand k tend vers $+\infty$.

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}|u^N(\boldsymbol{x})-\psi_k(\boldsymbol{x},Nx_3)|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})=0. \tag{18.1.18}$$

Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}&u^N(\boldsymbol{x})v^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}\psi_k(\boldsymbol{x},Nx_3)v^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\quad+\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}\big(u^N(\boldsymbol{x})-\psi_k(\boldsymbol{x},Nx_3)\big)v^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},Nx_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

D'où, prenant la limite quand N tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\Bigg|\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}&u^N(\boldsymbol{x})v^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},Nx_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\\&-\int_{\mathcal{O}}\int_{\Gamma}\psi_k(\boldsymbol{x},y)v^\infty(\boldsymbol{x},y)\phi(\boldsymbol{x},y)\,\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Bigg|\\&\leq C\int_{\Gamma}|u^\infty(\boldsymbol{x})-\psi_k(\boldsymbol{x},Nx_3)|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Passer à la limite quand k tend vers $+\infty$ donne le résultat escompté. □

18.2 La convergence triple-échelles : l'échelle $\sqrt{N}$

Comme indiqué dans [3], il est facile de généraliser la convergence double-échelles et d'obtenir la notion de convergence multiéchelle. Nous pouvons consulter [4] pour le cas général. Nous nous intéressons au cas de la convergence triple-échelles avec les échelles $1, \sqrt{N}, N$ où N est le nombre de mailles d'homogénéisation et vaut $\frac{1}{\epsilon}$. Nous allons citer les résultats correspondants. Nous commençons par préciser les fonctions test.

18.2.1 Les fonctions test

Tout d'abord, il nous faut des fonctions test acceptables.

Définition 18.2.1. *On dit qu'une fonction ψ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times Y\times Y)$ est acceptable si*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathcal{O}}\left|\psi(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\right|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathcal{O}}\int_{Y}\int_{Y}|\psi(\boldsymbol{x},y_s,y_1)|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}y_1 \tag{18.2.1}$$

Si ψ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O};\mathcal{C}_\#(Y_s)\otimes\mathcal{C}_\#(Y_1))$ ou à $\mathrm{L}^2(Y_1;\mathcal{C}_\#(Y_s)\otimes\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}))$, alors ψ est acceptable.

18.2.2 Définition de la convergence triple-échelles et théorème fondamental

Définition 18.2.2. *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O} \times Y^2)$ dont tous les éléments sont des fonctions acceptables au sens de la définition 18.2.1. Alors, on dit qu'une suite u^N converge triple-échelles vers u^∞ si*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathcal{O}} u^N(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, \sqrt{N}x_3, Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_Y u^\infty(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\psi(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}y_1,$$

pour tout ψ dans E.

Comme pour la convergence double-échelles, nous disposons d'un théorème de compacité.

Théorème 18.2.3. *Soit u^N une suite de fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$, telles que*

$$\|u^N\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} \leq C. \tag{18.2.2}$$

C étant une constante indépendante de N. Alors, il existe u^∞ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}\times Y^2)$ et une sous-suite u^{N_k} telle que u^{N_k} tende vers u^∞ au sens de la convergence triple-échelles.

Preuve : La preuve est similaire à celles trouvées dans [3]. □

18.2.3 Convergence triple-échelles avec surfaces périodiques

Nous pouvons aussi définir le concept de convergence triple-échelles pour les surfaces périodiques.

Théorème 18.2.4. *Soit u^N une suite de fonctions de $\mathrm{L}^2(\Gamma^N)$ telle que*

$$\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} |u^N(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \leq C.$$

C étant une constante. Alors, il existe une sous-suite u^{N_k} de u^N et u^∞ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O} \times Y \times \Gamma)$, telle que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k}\int_{\Gamma^{N_k}} u^{N_k}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}, \sqrt{N_k}x_3, N_kx_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_\Gamma u^\infty(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\phi(\boldsymbol{x}, y_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\sigma(y_1), \tag{18.2.3}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$.

Preuve : Voir [5]. □

Il existe alors le lien suivant entre la convergence triple-échelles classique et la convergence triple-échelles avec surfaces périodiques définie par la relation (18.2.3).

Proposition 18.2.5. *Soit u^N une suite de fonctions de $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$ telle que*

$$\|u^N\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \|\nabla_{2\mathrm{D}} u^N\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \frac{1}{N}\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} \leq C, \tag{18.2.4}$$

où C est une constante positive et $\nabla_{2\mathrm{D}}$ l'opérateur de gradient sur les deux premières variables. Alors, la trace de u^N sur Γ^N satisfait

$$\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N} |u^N(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \leq C. \tag{18.2.5}$$

De plus, il existe $u^\infty(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)$ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}; \mathrm{L}^2(Y; \mathrm{H}^1_\#(Y)))$, indépendante de y_1, et une sous-suite u^{N_k} de u^N telle que, pour tout ψ dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k}\int_{\Gamma^{N_k}} & u^{N_k}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}, \sqrt{N_k}x_3, N_k x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_\Gamma u^\infty(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\phi(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\sigma(y_1),\end{aligned} \tag{18.2.6}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{O}} & u^{N_k}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, \sqrt{N_k}x_3, N_k x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_Y u^\infty(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\psi(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}y_1,\end{aligned} \tag{18.2.7}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k}\int_{\mathcal{O}} & \frac{\partial u^{N_k}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, \sqrt{N_k}x_3, N_k x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_Y \frac{\partial u^\infty}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\psi(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}y_1.\end{aligned} \tag{18.2.8}$$

De plus, si

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} \leq C, \tag{18.2.9}$$

où C est encore une constante, alors u^∞ ne dépend pas de y_1 et appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}; \mathrm{H}^1_\#(Y))$, et il existe u_2^∞ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O}; \mathrm{L}^2(Y; \mathrm{H}^1_\#(Y)))$ telle que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} & \frac{1}{\sqrt{N_k}}\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial u^{N_k}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}, \sqrt{N_k}x_3, N_k x_3) \\ &= \int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_Y \left(\frac{\partial u^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, y_s) + \frac{\partial u_2^\infty}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\right)\psi(\boldsymbol{x}, y_s, y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{18.2.10}$$

pour tout ψ dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$.

PREUVE : La preuve est très similaire à celle pour la convergence double-échelles trouvée dans [5]. Par l'inégalité de trace, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}|u^N(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \leq C\|u^N\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + \frac{1}{N^2}\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x_3}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})}. \tag{18.2.11}$$

Donc, à une sous-suite près, nous avons la convergence triple-échelles de u^N, de $\frac{1}{N}\frac{\partial u^N}{\partial x_3}$, et la convergence triple-échelles avec surfaces périodiques de γu^N respectivement vers u^∞, v^∞, et w^∞. Nous devons établir des relations entre ces trois limites. D'abord, comme dans la preuve de la proposition 1.4 dans [3], nous calculons pour ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}}\frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = &-\int_{\mathcal{O}}u^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &-\sqrt{N}\int_{\mathcal{O}}u^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &-N\int_{\mathcal{O}}u^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{18.2.12}$$

Nous divisons par N et nous obtenons en passant à la limite $\frac{\partial u^\infty}{\partial y_1} = v^\infty$. Pour ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\int_{\mathcal{O}^N}\frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = &-\frac{1}{N}\int_{\mathcal{O}^N}u^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &-\frac{1}{\sqrt{N}}\int_{\mathcal{O}^N}u^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &-\int_{\mathcal{O}^N}u^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &+\frac{1}{N}\int_{\Gamma^N}u^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\nu\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{18.2.13}$$

où ν vaut 1 ou -1 suivant l'orientation de la face. Passant à la limite au sens de la convergence triple-échelles, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_{Y^*}\frac{\partial u^\infty}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},y_s,y_1)\phi(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &+\int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_{Y^*}u^\infty(\boldsymbol{x},y_s)\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,Nx_3)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\qquad=\int_{\mathcal{O}}\int_Y\int_{\Gamma}w^\infty(\boldsymbol{x},y_s,y_1)\phi(\boldsymbol{x},y_s,y_1)\nu\,\mathrm{d}\sigma(y_1)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{18.2.14}$$

D'où, $w^\infty = u^\infty$.

Si la norme L^2 de $\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial u^N}{\partial x_3}$ est bornée, alors u^∞ ne dépend pas de y_1. Nous notons v_2^∞ la limite en convergence triple-échelles de $\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial u^N}{\partial x_3}$. Nous reprenons l'équation (18.2.12), avec ϕ indépendant de y_1, la divisons par $\sqrt{N}$ et calculons la limite, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{O}}\int_Y \phi(\boldsymbol{x},y_s)\int_Y v_2^\infty(\boldsymbol{x},y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\mathcal{O}}\int_Y u^\infty(\boldsymbol{x},y_s)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},y_s)\,\mathrm{d}y_s. \tag{18.2.15}$$

Donc, pour tout $\boldsymbol{x}, y_s$ dans $\mathcal{O}\times Y$, nous avons

$$\int_Y v_2^\infty(\boldsymbol{x},y_s,y_1) - \frac{\partial u^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},y_s)\,\mathrm{d}y_1 = 0.$$

Donc, il existe u_2^∞ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{O};\mathrm{L}^2(Y;\mathrm{H}^1_\#(Y)))$ telle que

$$v_2^\infty = \frac{\partial u^\infty}{\partial y_s} + \frac{\partial u_2^\infty}{\partial y_1}. \tag{18.2.16}$$

Il reste à prouver que u^∞ est 1-périodique sur la variable y_s. Nous choisissons ϕ indépendant de y_s et y_1 dans l'équation (18.2.12), divisons cette équation par $\sqrt{N}$ et obtenons, grâce à (18.2.16), que

$$\int_{\mathcal{O}}\left(\int_Y \frac{\partial u^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},y_s) + \int_Y \frac{\partial u_2^\infty}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\right)\phi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c(\mathcal{O})$. Donc,

$$\int_Y \frac{\partial u^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},y_s)\,\mathrm{d}y_s = 0,$$

pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{O}$. Donc, u^∞ est 1-périodique sur la variable y_s. $\square$

Chapitre 19

Homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz d'un domaine régulièrement perforé par des trous isolés

Dans ce chapitre, nous étudions l'homogénéisation du système de Landau-Lifchitz sur un domaine avec des trous isolés. Ce problème peut être résolu en utilisant les techniques de la convergence double-échelles. Nous allons uniquement considérer des trous de formes régulières et isolés qui formeront une suite acceptable au sens de [20].

19.1 Notations

Dans cette section, nous définissons rigoureusement les géométries perforées qui seront les domaines des solutions de l'équation de Landau-Lifchitz que nous souhaitons homogénéiser.

Soit
- $\mathcal{Y} = (0,1)^3$,
- Ω un ouvert borné à frontière régulière de $\mathbb{R}^3$,
- $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{Y}$ un fermé compact à frontière lisse, telle que $\overline{\mathcal{T}_0^\circ} = \mathcal{T}_0$ est à frontière lisse.
- $\mathcal{Y}^* = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{T}_0$
- Nous définissons alors

$$T_\epsilon = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ \epsilon(k+\mathcal{Y})\subset\Omega}} \epsilon(k+\mathcal{T}_0), \qquad \Omega^\epsilon = \Omega \setminus T_\epsilon. \tag{19.1.1}$$

Un exemple de Ω^ϵ est représenté à la figure 19.a.

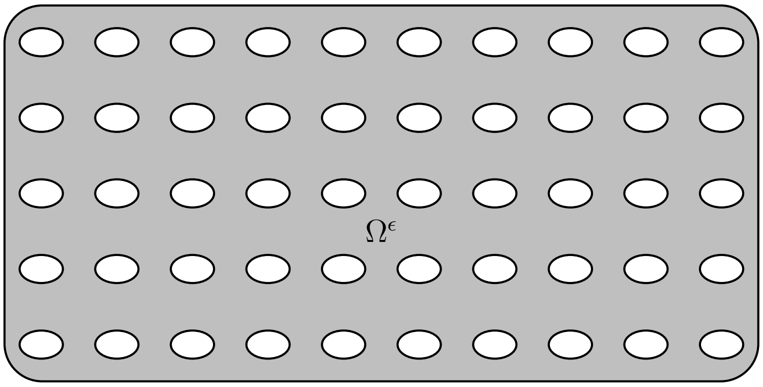


FIG. 19.a: Exemple de domaine perforé

Dans ce chapitre, nous désignons par χ_ϵ la fonction caractéristique de Ω^ϵ. Nous notons aussi par $\chi_{\mathcal{Y}^*}$ la fonction caractéristique de $\mathcal{Y}^*$. Nous posons aussi $\bar{\chi} = \int_{\mathcal{Y}} \chi_{\mathcal{Y}^*}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$. Nous rappelons que $⨍_{\mathcal{O}} f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\mathcal{O}|}\int f\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

Pour passer à la limite dans les équations, nous utiliserons le théorème 18.1.7 couplé au lemme suivant dont la démonstration est immédiate :

Lemme 19.1.1. *La suite χ_ϵ converge au sens de la convergence double-échelles vers $\chi_{\mathcal{Y}^*}$ De plus,*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|\chi_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \|\chi_{\mathcal{Y}^*}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\times\mathcal{Y})}. \tag{19.1.2}$$

Nous définissons maintenant le concept de séquence de trous acceptables :

Définition 19.1.2. *La séquence de trous T_ϵ est dite acceptable si*

(1) Toute limite faible-$*$ de χ_ϵ est positive preque partout sur Ω.

(2) Il existe une constante $c > 0$, indépendante de ϵ et une suite (P_ϵ) d'opérateurs de prolongements linéaires telle que pour tout ϵ

$$\begin{gathered} P_\epsilon \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon); \mathrm{H}^1(\Omega)), \\ (P_\epsilon(v))_{|\Omega^\epsilon} = v \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon), \\ \|P_\epsilon(v)\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon)}. \end{gathered}$$

Remarque 19.1.3. Notre concept de suite de trous acceptables diffère de celui de [20]. En effet, l'équation de Landau-Lifchitz impose des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\Omega$ et non des conditions de Dirichlet. C'est cette différence qui nous a conduit à définir T_ϵ par (19.1.1) et non par $T_\epsilon = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ \epsilon(k+\mathcal{T}_0)\subset\Omega}} \epsilon(k+\mathcal{T}_0)$.

Le lemme suivant de prolongement suivant est primordial.

Lemme 19.1.4. *Il existe un opérateur de prolongement P_ϵ de $\mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon)$ vers $\mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que, pour tout u dans $\mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon)$,*

$$P_\epsilon u = u \qquad \text{dans } \Omega^\epsilon, \qquad\qquad \|P_\epsilon u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^\epsilon)}.$$

PREUVE *:* Nous nous inspirons de la proposition 1.8 de [20] pour prouver que notre séquence de trous est acceptable. Il existe un opérateur de prolongement P linéaire continue de $\mathrm{H}^1(\mathcal{Y}^*)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{Y})$. Nous pouvons alors construire P_ϵ par changement d'échelle. □

19.2 Le problème réel

Jusqu'à présent, nous avons surtout considéré des interactions d'échange isotropes et homogènes, section 2.3. Dans ce chapitre, nous étudions le problème d'homogénéisation périodique, pour des interactions d'échange et d'anisotropie non isotropes et non homogènes. Pour cela, nous nous donnons deux champs de matrices symétriques positives de $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{A} = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$, $\mathbf{K} = (K_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$. Nous supposons que ces deux champs sont dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$. Nous supposons aussi la coercivité uniforme de la forme quadratique $\mathbf{A} = (A_{i,j})_{1\leq i\leq j}$: il existe une constante $\alpha > 0$ tel que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dans $\Omega \times \mathcal{Y}$ et pour tout (ξ_1, ξ_2, ξ_3) dans $\mathbb{R}^3$,

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{i,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\xi_i\xi_j \geq \alpha \left(\sum_{i=1}^{3} {\xi_i}^2\right). \tag{19.2.1}$$

$\mathbf{K}$ et $\mathbf{A}$ sont acceptables au sens de la définition 1.4 de [3], voir définition 18.1.1. Nous rappelons que la définition de l'opérateur de champ démagnétisant $\mathcal{H}_d$ se trouve au chapitre 3.

Nous nous donnons alors une suite de conditions initiales $\boldsymbol{m}_0^\epsilon$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon)$ telle que la quantité $\|\boldsymbol{m}_0^\epsilon\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon)}$ soit bornée. Nous supposons de plus $|\boldsymbol{m}_0^\epsilon| = 1$ p.p. dans Ω^ϵ. Nous supposons qu'il existe $\boldsymbol{m}_0^0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, $|\boldsymbol{m}_0^0| = 1$ p.p. dans Ω^ϵ, telle que si l'on note $\bar{\boldsymbol{m}}_0^\epsilon$ le prolongement par 0 de $\boldsymbol{m}^\epsilon$ en dehors de Ω^ϵ, alors

$$\lim_{\epsilon\to 0} \bar{\boldsymbol{m}}_0^\epsilon = \bar{\chi}\boldsymbol{m}_0^0 \quad \text{faiblement dans } \mathrm{L}^2(\Omega). \tag{19.2.2}$$

Nous considérons alors $\boldsymbol{m}^\epsilon$ une solution faible de Landau-Lifchitz dans Ω^ϵ, i.e. appartenant, pour tout temps $T > 0$ à

$$\mathrm{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon)) \cap \mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon \times (0, T)),$$

et vérifiant :

$$\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \frac{\partial \boldsymbol{m}^\epsilon}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \alpha \iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \left(\boldsymbol{m}^\epsilon \wedge \frac{\partial \boldsymbol{m}^\epsilon}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$= (1+\alpha^2)\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \sum_{i,j=1}^{3}\left(\boldsymbol{m}^\epsilon \wedge A_{i,j}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\frac{\partial \boldsymbol{m}^\epsilon}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+ (1+\alpha^2)\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \left(\boldsymbol{m}^\epsilon \wedge \mathbf{K}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\boldsymbol{m}^\epsilon\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$- (1+\alpha^2)\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \left(\boldsymbol{m}^\epsilon \wedge \mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}^\epsilon)\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \tag{19.2.3a}$$

pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)};\mathbb{R}^3)$, ainsi que les contraintes

$$\boldsymbol{m}^\epsilon(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^\epsilon \quad \text{dans } \Omega^\epsilon, \tag{19.2.3b}$$
$$|\boldsymbol{m}^\epsilon| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega^\epsilon\times\mathbb{R}^+, \tag{19.2.3c}$$
$$\tag{19.2.3d}$$

et l'inégalité d'énergie

$$\mathrm{E}^\epsilon(\boldsymbol{m}^\epsilon(T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\int_0^T \left\|\frac{\partial \boldsymbol{m}^\epsilon}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^\epsilon)}\mathrm{d}t \le \mathrm{E}^\epsilon(\boldsymbol{m}_0^\epsilon). \tag{19.2.3e}$$

où, pour $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon)$,

$$\mathrm{E}^\epsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^\epsilon}\sum_{i,j=1}^{3} A_{i,j}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\Omega^\epsilon}\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{K}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega^\epsilon}|\mathcal{H}_d(\boldsymbol{u})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Une telle solution existe pour tout temps, voir [37] pour la preuve de l'existence de solutions en présence d'une interaction d'échange anisotrope. L'inégalité d'énergie implique que la norme $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon))$ de $\boldsymbol{m}^\epsilon$ et la norme $\mathbb{L}^2(\Omega^\epsilon\times\mathbb{R}^+)$ de $\frac{\partial \boldsymbol{m}^\epsilon}{\partial t}$ restent bornées. Nous posons $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon = P_\epsilon(\boldsymbol{m}^\epsilon)$, où P_ϵ est l'opérateur de prolongement du lemme 19.1.4. Alors, $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega))$ et vérifie

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon = \boldsymbol{m}^\epsilon \text{ dans } \Omega^\epsilon\times\mathbb{R}^+, \qquad \left\|\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))} \le C.$$

D'après la proposition 1.14 de [3], reproduite à la proposition 18.1.8, il existe $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega))$ telle que $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial t}$ appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$, et $\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{H}^1_\#(\mathcal{Y})))$ telles que, à une sous-suite près commune,

– $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ converge vers $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ au sens de la convergence double-échelles.
– $\nabla\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ converge vers $\nabla_{\boldsymbol{x}}\widetilde{\boldsymbol{m}}^0 + \nabla_{\boldsymbol{y}}\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0$ au sens de la convergence double-échelles.

Nous devons maintenant donner les équations que vérifient $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$. C'est ce que nous faisons à la section suivante.

19.3 Le problème limite

Nous avons défini à la section précédente une suite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ de solutions du système de Landau-Lifchitz (19.2.3) sur des domaines perforés. Nous nous intéressons au problème d'homogénéisation. Pour cela, nous employons la méthode de la convergence double-échelles pour déduire l'existence d'une limite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ quand ϵ tend vers 0 et donner l'équation vérifiée par $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$. Dans cette section, pour éviter d'alourdir les notations, nous supposerons que toute la suite converge.

Tout d'abord, nous rappelons que l'injection canonique de $\mathbb{H}^1(\Omega \times (0,T))$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$ est compacte. Donc, d'après le théorème 1.8 et la formule (0.5) de [3], nous pouvons prendre la limite, pour la convergence double-échelles, dans les produits dont $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ est un facteur. De plus, comme nous avons la convergence presque partout pour une sous-suite, $|\widetilde{\boldsymbol{m}}^0| = 1$ presque partout.

Nous allons commencer par traiter la condition initiale.

Lemme 19.3.1. *La trace de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ à l'instant initial vaut $\boldsymbol{m}_0^0$, i.e.*

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\cdot, 0) = \boldsymbol{m}_0^0.$$

Preuve : Notons $\widetilde{\boldsymbol{m}}_0^0$, la limite double-échelles de $\widetilde{\boldsymbol{m}}_0^\epsilon$. Cette limite ne dépend pas de la variable rapide $\boldsymbol{y}$ car $\widetilde{\boldsymbol{m}}_0^0$ est borné dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$. La limite faible dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ de $\bar{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ est alors $\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}$. Nous concluons par l'hypothèse (19.2.2). □

Nous continuons par un lemme évident.

Lemme 19.3.2. *Pour tout entier i, $1 \leq i \leq 3$, $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0}{\partial y_i}$ est orthogonale à $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ presque partout sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$.*

Preuve : Nous avons $|\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon| = 1$. Comme $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ est la limite forte de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$, nous avons aussi $|\widetilde{\boldsymbol{m}}^0| = 1$. Nous pouvons aussi passer, grâce à la convergence double-échelles, à la limite dans l'expression

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \iint_{\Omega\times(0,T)} \chi_\epsilon(\boldsymbol{x})\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ = \iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x}) \cdot \int_{\mathcal{Y}^*} \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0}{\partial y_i}\right) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ = 0, \quad (19.3.1)\end{aligned}$$

pour tout entier i compris entre 1 et 3, et tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y};\mathbb{R}^3)$. Donc $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i} + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0_1}{\partial y_i}$ est orthogonal presque partout sur $\Omega \times \mathcal{Y}^*$ à $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$. Comme $|\widetilde{\boldsymbol{m}}^0| = 1$, $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0_1}{\partial y_i}$ est orthogonale presque partout sur $\Omega \times \mathcal{Y}^*$ à $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$. □

Nous allons maintenant passer à la limite dans l'équation (19.2.3a). Nous avons

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&-\alpha \iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&= (1+\alpha^2)\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \sum_{i,j=1}^{3} A_{i,j}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&+ (1+\alpha^2)\frac{1}{\epsilon}\sum_{i,j=1}^{3}\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} A_{i,j}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y_j}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad + (1+\alpha^2)\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\wedge \mathbf{K}\left(\boldsymbol{x},\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad - (1+\alpha^2)\iint_{\Omega^\epsilon\times(0,T)} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\wedge \mathcal{H}_d(\chi_\epsilon\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon)(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \qquad (19.3.2)
\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y};\mathbb{R}^3)$.

Nous traitons d'abord le terme d'échange. Ce terme va donner le résultat habituel de l'homogénéisation des opérateurs elliptiques. Nous commençons comme dans [9] par définir w_i dans $\mathrm{H}^1_\#(\mathcal{Y}^*)$, $1 \le i \le 3$, comme les solutions 1-périodiques sur chacune des trois variables et de moyenne nulle des équations de cellule :

$$\int_{\mathcal{Y}^*} \mathbf{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\psi}\cdot(\nabla_{\boldsymbol{y}} w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{e}_i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0, \qquad (19.3.3)$$

pour tout $\boldsymbol{x}$ dans Ω, et $\boldsymbol{\psi}$ dans $\mathrm{H}^1_\#(\mathcal{Y}^*)$, $\boldsymbol{e}_i$ étant le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous notons $\boldsymbol{w}$ le vecteur ligne $[w_1, w_2, w_3]$. Nous pouvons alors énoncer le lemme suivant.

Lemme 19.3.3. *Nous avons pour tout $\boldsymbol{x}$ dans Ω :*

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathcal{Y}^*} A_{i,j}\left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0_1}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \bar{\chi}\sum_{i=1}^{3} A^*_{i,j}\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \qquad (19.3.4)$$

où

$$A^*_{i,j} = \fint_{\mathcal{Y}^*} \mathbf{A}(\boldsymbol{e}_j + \nabla w_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\cdot(\boldsymbol{e}_i + \nabla w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \qquad (19.3.5)$$

PREUVE : Nous multiplions (19.3.2) par ϵ et nous prenons la limite. Un seul terme converge vers une valeur non nulle. Nous obtenons, grâce à la convergence double-échelles,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_{\mathcal{Y}^*} A_{i,j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t) \wedge \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},t)\right)\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0. \quad (19.3.6)$$

Grâce au lemme 19.3.2, nous obtenons, pour tout $\boldsymbol{x}, t$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$, et tout $\boldsymbol{\psi}$ dans $\mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Y}^*} A_{i,j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},t)\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0. \quad (19.3.7)$$

Nous avons alors

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) w_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \quad (19.3.8)$$

Donc, pour tout j entre 1 et 3,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{Y}^*} A_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^0}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},t)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(A_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{k=1}^{3} A_{k,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \frac{\partial w_i}{\partial y_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y}\, \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t).\end{aligned} \quad (19.3.9)$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^*_{i,j} &= \int_{\mathcal{Y}^*} A_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{k=1}^{3} A_{k,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \frac{\partial w_i}{\partial y_k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \int_{\mathcal{Y}^*} \mathbf{A}\boldsymbol{e}_j \cdot (\boldsymbol{e}_i + \nabla w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \int_{\mathcal{Y}^*} \mathbf{A}(\boldsymbol{e}_j + \nabla w_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) \cdot (\boldsymbol{e}_i + \nabla w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \bar{\chi} \fint_{\mathcal{Y}^*} \mathbf{A}(\boldsymbol{e}_j + \nabla w_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) \cdot (\boldsymbol{e}_i + \nabla w_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \quad (19.3.10)$$

$\square$

En nous référant à la littérature existante en matière d'homogénéisation[1], nous pouvons faire les remarques suivantes.

Remarque 19.3.4. L'opérateur d'échange homogénéisé dans l'équation de Landau-Lifchitz est le même que celui obtenu par homogénéisation de l'équation elliptique associée à cet opérateur.

Il ne nous reste maintenant qu'à étudier la convergence du terme de champ démagnétisant. Comme pour l'échange, nous allons devoir définir certaines fonctions associées à la géométrie.

Définition 19.3.5. *Nous posons, pour* $1 \leq i \leq 3$, w'_i *dans* $\mathrm{H}^1_\#(\mathcal{Y})$ *solutions de*

$$\int_{\mathcal{Y}} \left(\nabla_{\boldsymbol{y}} w'_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \chi_{\mathcal{Y}^*}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_i\right) \nabla_{\boldsymbol{y}}\psi \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0, \tag{19.3.11a}$$

$$⨍_{\mathcal{Y}} w'_i(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0, \tag{19.3.11b}$$

pour tout ψ *dans* $\mathrm{H}^1_\#(\mathcal{Y})$. *Nous notons aussi* $\boldsymbol{w}'$, *le vecteur ligne* $[w'_1, w'_2, w'_3]$.

Nous avons alors le lemme suivant.

Lemme 19.3.6. *Si nous notons* $\boldsymbol{h}^0_d(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ *la limite au sens de la convergence double-échelles de* $\mathcal{H}_d(\chi_\epsilon \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon)$ *alors*

$$⨍_{\mathcal{Y}^*} \boldsymbol{h}^0_d(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^0) + \mathbf{H}_d \widetilde{\boldsymbol{m}}^0, \tag{19.3.12a}$$

où :

$$(\mathbf{H}_d)_{ij} = \frac{1}{\bar{\chi}} \int_{\mathcal{Y}} \left(\nabla w'_i(\boldsymbol{y}) + \chi_{\mathcal{Y}^*}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(\nabla w'_j(\boldsymbol{y}) + \chi_{\mathcal{Y}^*}\boldsymbol{e}_j\right) \mathrm{d}\boldsymbol{y} - 1. \tag{19.3.12b}$$

Preuve : Notons φ^ϵ le potentiel dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ tel que $\nabla\varphi^\epsilon = \mathcal{H}_d(\chi^\epsilon \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon)$. Comme la suite $\chi^\epsilon \widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ reste bornée dans $\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3))$, la suite φ^ϵ reste bornée dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$. Nous pouvons donc prendre la limite au sens de la convergence double-échelles. Il existe alors φ^0 dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$ et φ^0_1 dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{H}^1_\#(\mathcal{Y})))$, telles que pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_c) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(\mathcal{Y})$, à une

[1] Voir [9], pour le cas sans trous, [19] pour l'homogénéisation avec trous et la section 2 de [3] pour l'obtention de l'homogénéisation des opérateurs elliptiques par la méthode de la convergence double-échelles

sous-suite près, on ait

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} &\varphi^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\varphi^0(\boldsymbol{x},t)\left(\int_Y \phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{19.3.13a}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\int_Y\big(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^0(\boldsymbol{x},t)+\nabla_{\boldsymbol{y}}\varphi_1^0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\big)\,\phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{19.3.13b}$$

Or, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3\times[0,+\infty))\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y})$,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\chi_\epsilon(\boldsymbol{x})(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &+\frac{1}{\epsilon}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\chi_\epsilon(\boldsymbol{x})(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}})\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\qquad= -\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^\epsilon\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\qquad-\frac{1}{\epsilon}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^\epsilon\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{19.3.14}$$

Nous multiplions (19.3.14) par ϵ et nous prenons la limite au sens de la convergence double-échelles. Nous trouvons

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\int_{\mathcal{Y}^*}(\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}})\phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\int_{\mathcal{Y}}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^0(\boldsymbol{x},t)+\nabla_{\boldsymbol{y}}\varphi_1^0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\phi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\quad= 0,\end{aligned}\tag{19.3.15}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3\times[0,+\infty))\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y})$. Donc, pour tout $\boldsymbol{x},t$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^+$, pour tout ψ dans $\mathcal{C}_\#^\infty(\mathcal{Y})$, nous avons

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t)\cdot\int_{\mathcal{Y}^*}\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_{\mathcal{Y}}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^0(\boldsymbol{x},t)+\nabla_{\boldsymbol{y}}\varphi_1^0(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=0.\tag{19.3.16}$$

Or,

$$\int_{\mathcal{Y}}\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^0(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\nabla_{\boldsymbol{x}}\varphi^0(\boldsymbol{x},t)\cdot\int_{\partial\mathcal{Y}}\boldsymbol{\nu}\psi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y})=0,$$

car les fonctions test ϕ sont 1-périodiques sur chacune des variables de $\boldsymbol{y}$. Cela implique directement que, pour tout $(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Y}$,

$$\varphi_1^0(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{3} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{e}_k) w_k'(\boldsymbol{y}). \tag{19.3.17}$$

Dans (19.3.14), nous choisissons ϕ indépendant de $\boldsymbol{y}$. Puis nous passons à la limite. Nous obtenons que

$$\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^+} \bar{\chi}(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}) \phi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t + \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+} \nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi^0 \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t, \tag{19.3.18}$$

car $\fint_{\mathcal{Y}} \nabla_{\boldsymbol{y}} \varphi_1^0 \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = 0$. Donc,

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_0 = \mathcal{H}_d(\bar{\chi} \widetilde{\boldsymbol{m}}^0). \tag{19.3.19}$$

Il s'ensuit que

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \varphi_0 + \nabla_{\boldsymbol{y}} \varphi_1^0 = \mathcal{H}_d(\bar{\chi} \widetilde{\boldsymbol{m}}^0) + \sum_{k=1}^{3} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^0 \cdot \boldsymbol{e}_k) \nabla_{\boldsymbol{y}} w_k'(\boldsymbol{y}). \tag{19.3.20}$$

D'où,

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_d)_{ij} &= \fint_{\mathcal{Y}^*} \frac{\partial w_j'(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\ &= \frac{1}{\bar{\chi}} \int_{\mathcal{Y}} \big(\nabla w_i'(\boldsymbol{y}) + \chi_{\mathcal{Y}^*}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{e}_i\big) \cdot \big(\nabla w_j'(\boldsymbol{y}) + \chi_{\mathcal{Y}^*} \boldsymbol{e}_j\big) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} - 1. \end{aligned} \tag{19.3.21}$$

Ce qui conclut la preuve. □

Nous définissons aussi

$$\bar{\mathbf{K}} = \fint_{\mathcal{Y}^*} \mathbf{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{19.3.22}$$

Il est maintenant trivial de passer à la limite dans l'équation (19.3.2) lorsque $\boldsymbol{\phi}$ est indépendant de $\boldsymbol{y}$. En effet la compacité forte de la suite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega \times (0, T))$ permet de passer à la limite dans les produits. Nous obtenons, pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans

$\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)}; \mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times(0,T)} \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) - \widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t) \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\right) \cdot \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad = (1+\alpha^2) \iint_{\Omega\times(0,T)} \sum_{i,j=1}^{3} A^*_{i,j}(\boldsymbol{x}) \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t) \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + (1+\alpha^2) \iint_{\Omega\times(0,T)} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t) \wedge \bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{x})\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\boldsymbol{x},t)\right) \cdot \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2) \iint_{\Omega\times(0,T)} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon(\boldsymbol{x},t) \wedge \left(\mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^0)(\boldsymbol{x},t) + \mathbf{H}_d\widetilde{\boldsymbol{m}}^0\right)\right) \cdot \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{19.3.23}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 19.3.7. *Soit une suite $\boldsymbol{m}_0^\epsilon$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon)$, $|\boldsymbol{m}_0^\epsilon| = 1$ p.p. dans Ω^ϵ et telle que la quantité $\|\boldsymbol{m}_0^\epsilon\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon)}$ soit bornée. Nous notons $\bar{\boldsymbol{m}}_0^\epsilon$ le prolongement par 0 de $\boldsymbol{m}^\epsilon$ en dehors de Ω^ϵ. Supposons qu'il existe $\boldsymbol{m}_0^0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que $\bar{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ converge faiblement vers $\bar{\chi}\boldsymbol{m}_0^0$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Pour tout ϵ, posons $\boldsymbol{m}^\epsilon$ une solution faible du système (19.2.3) avec $\boldsymbol{m}_0^\epsilon$ pour condition initiale. Alors, la norme $\mathbb{H}^1(\Omega^\epsilon \times (0,T))$ de $\boldsymbol{m}^\epsilon$ est bornée indépendamment de ϵ. Il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un prolongement de $\boldsymbol{m}^\epsilon$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ noté $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ telle que la suite $(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon)$ soit bornée dans $\mathbb{H}^1(\Omega \times (0,T))$.*

À une sous-suite près, $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ converge, au sens de la convergence double-échelles, vers $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega \times (0,T))$. Toute limite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^0$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1(\Omega))$ et à $\mathrm{H}^1(0,T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, pour tout temps $T > 0$, et satisfait l'équation (19.3.23), soit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial t} - \alpha \widetilde{\boldsymbol{m}}^0 \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial t} = -(1+\alpha^2)\widetilde{\boldsymbol{m}}^0 \wedge \Big(&\mathrm{div}((\mathbf{A}^* \cdot \nabla)\widetilde{\boldsymbol{m}}^0) - \bar{\mathbf{K}}\widetilde{\boldsymbol{m}}^0 \\
&+ \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^0) + \mathbf{H}_d\widetilde{\boldsymbol{m}}^0\Big),
\end{aligned}$$

dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^0(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^0 \qquad \textit{dans } \Omega,$$

et les conditions de Neumann homogènes au bord :

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty).$$

Remarque 19.3.8. Dans le théorème 19.3.7, il n'y aucune raison pour que toute la suite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\epsilon$ converge. En effet, tous les résultats d'unicité existant à propos des solutions faibles du système de Landau-Lifchitz sont négatifs.

19.4 Conclusion

Nous avons réalisé l'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz pour des domaines perforés de trous isolés et périodiques régulièrement espacés et homothétiques. Nous allons dans les chapitres suivants étudier l'homogénéisation pour des agencements multicouches pour lesquels l'absence de prolongement acceptable rendra l'étude de la convergence des produits difficile. Au contraire, pour le champ démagnétisant, l'homogénéisation pour un agencement multicouche sera plus simple et donnera un résultat explicite pour le calcul de $\mathbf{H}_d$, antérieurement réalisé dans Hamdache [35].

Chapitre 20

Homogénéisation de l'équation de la chaleur dans un domaine multicouche

La non linéarité de l'équation de Landau-Lifchitz rend difficile l'homogénéisation avec trous quand ces trous ne sont pas acceptables [20]. Cela signifie qu'il n'est pas possible de prolonger toute fonction H^1 du domaine perforé, qui est différent pour chaque paramètre d'homogénéisation, par une fonction H^1 dans un domaine constant, ceci avec une constante de prolongement indépendante du paramètre. En particulier, les multicouches ne sont pas une suite de trous acceptables, à cause de la non connexité entre les différentes couches. Dans ce cas, il n'est plus possible d'utiliser les critères de compacité usuelle de H^1 vers L^2. En l'absence de critères simples pour la convergence double-échelles forte, analogues à ceux trouvés dans [60] pour la convergence classique, il est difficile de traiter les termes non linéaires et de prendre la limite dans les produits contrairement à ce que nous avions pu faire dans le chapitre précédent avec les domaines perforés. Pour ces raisons, nous étudions dans ce chapitre l'homogénéisation du problème de la chaleur avec des espaceurs plans et une constante de conduction intercouche $J(\epsilon)$ valant successivement $\frac{J}{\epsilon}$, J, et $J\epsilon$. La linéarité ne rend cependant pas le problème trivial. Pour le résoudre, il a fallu faire appel à la convergence double-échelles, voir G. Allaire [3], et à une variante appelée convergence double-échelles sur des surfaces périodiques, voir G. Allaire, A. Damlamian et U. Hornung [5]. Pour le cas J constant, nous avons rajouté une troisième échelle et utilisé les résultats de la section 18.2.

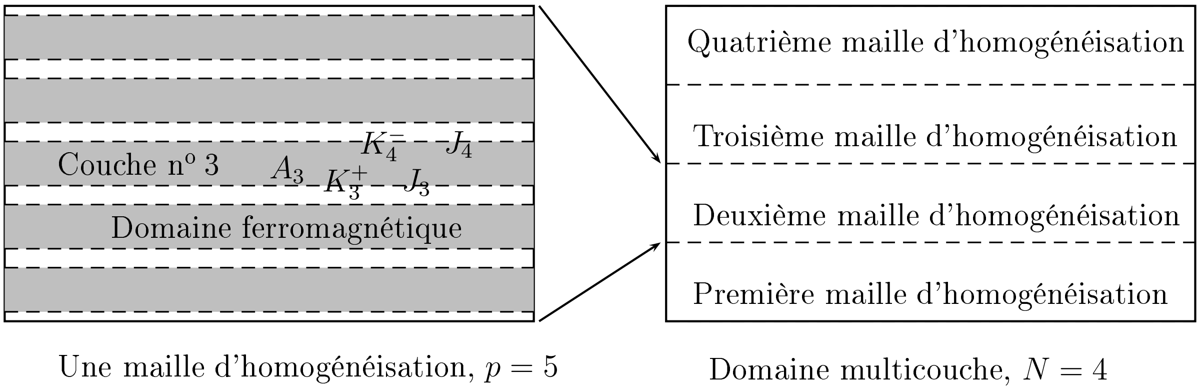


FIG. 20.a: Exemple de domaine multicouche

20.1 Notations

Nous utilisons les notations suivantes. Soit $L > 0$. Soit B un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Posons $Y = (0, 1)$. Étant donné p un entier naturel non nul, nous nous munissons de p longueurs strictement positives $\theta_0, \ldots, \theta_{p-1}$, et de p positions $0 = z_0 < \ldots < z_{p-1} < 1$. Par extension, nous posons, pour i dans $\mathbb{Z}$, $z_{i+kp} = z_i + k$, et $\theta_i = \theta_{i \bmod p}$. Nous définissons alors

$$z_i^+ = z_i + \frac{\theta_i}{2}, \qquad z_i^- = z_i - \frac{\theta_i}{2}.$$

Supposons que pour tout i dans $\mathbb{Z}$,

$$z_i^+ < z_{i+1}^-.$$

Alors, nous pouvons définir les intervalles

$$I_i = (z_i^+, z_{i+1}^-), \qquad \widetilde{I}_i = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_{i+kp}, \qquad \widetilde{I} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} I_i, \qquad I = \widetilde{I} \cap Y,$$

$$J_i = (z_i^-, z_i^+), \qquad \widetilde{J}_i = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} J_{i+kp}, \qquad \widetilde{J} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} J_i, \qquad J = \widetilde{J} \cap Y.$$

et les épaisseurs

$$\bar{\chi}_i = z_{i+1}^- - z_i^+, \qquad \bar{\chi} = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{\chi}_i$$

Et, pour N entier naturel non nul, nous définissons

$$\widetilde{I}_i^N = \frac{L}{N}\widetilde{I}_i, \qquad \widetilde{J}_i^N = \frac{L}{N}\widetilde{J}_i, \qquad I_i^N = \widetilde{I}_i^N \cap (0,L), \qquad J_i^N = \widetilde{J}_i^N \cap (0,L),$$
$$\widetilde{I}^N = \bigcup_{i=0}^{p-1} \widetilde{I}_i^N, \qquad \widetilde{J}^N = \bigcup_{i=0}^{p-1} \widetilde{J}_i^N, \qquad I^N = \widetilde{I}^N \cap (0,L), \qquad J^N = \widetilde{J}^N \cap (0,L).$$

Nous définissons alors

$$\Omega = B \times (0,L), \qquad \Omega^N = B \times I^N, \qquad \Omega_i^N = B \times I_i^N, \tag{20.1.1}$$
$$Q_T = \Omega \times (0,T), \qquad Q_T^N = \Omega^N \times (0,T), \qquad Q_{T,i}^N = \Omega_i^N \times (0,T). \tag{20.1.2}$$

Nous posons aussi comme frontières

$$\Gamma_{i,k}^N = B \times \{\frac{L}{N} z_{i+kp}\}, \quad \Gamma_{i,k}^{N,+} = B \times \{\frac{L}{N} z_{i+kp}^+\}, \quad \Gamma_{i,k}^{N,-} = B \times \{\frac{L}{N} z_{i+kp}^-\}, \tag{20.1.3}$$
$$\Gamma_i^N = \bigcup_{k=\delta_i^0}^{N-1-\delta_i^{p-1}} \Gamma_{i,k}^N, \qquad \Gamma_i^{N,+} = \bigcup_{k=\delta_i^0}^{N-1-\delta_i^{p-1}} \Gamma_{i,k}^{N,+}, \qquad \Gamma_i^{N,-} = \bigcup_{k=\delta_i^0}^{N-1-\delta_i^{p-1}} \Gamma_{i,k}^{N,-}, \tag{20.1.4}$$

pour i,k entiers naturels $0 \leq i \leq p-1$, $0 \leq k \leq N-1$, et où δ est le symbole de Kronecker. Nous notons aussi le bord extérieur

$$\Gamma_\ell^N = \partial B \times I^N, \qquad \Gamma_e^N = \Gamma_\ell^N \cup \Gamma_{p-1,N-1}^{N,-} \cup \Gamma_{0,0}^{N,+}, \tag{20.1.5}$$

et introduisons

$$\Gamma^{N,+} = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Gamma_i^{N,+}, \qquad \Gamma^{N,-} = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Gamma_i^{N,-}.$$

Nous définissons alors aussi les applications de traces suivantes :
- γ est l'application de trace sur $\Gamma^{N,+} \cup \Gamma^{N,-}$.
- Notant σ l'application qui envoie (x_1,x_2,x_3) vers $(x_1,x_2,-x_3)$, et τ_ϵ l'application qui envoie (x_1,x_2,x_3) vers $(x_1,x_2,x_3-\epsilon)$, γ' est l'application de trace qui envoie u vers $\gamma u \circ \sigma \circ \tau_{2\frac{L}{N}z_i}$ sur $\Gamma_i^{N,+} \cup \Gamma_i^{N,-}$.
- γ^+ est l'application qui envoie u vers $\gamma u \circ \tau_{-\frac{L}{2N}\theta_i}$ sur Γ_i^N. γ^- est l'application qui envoie u vers $\gamma u \circ \tau_{\frac{L}{2N}\theta_i}$ sur Γ_i^N.

Nous notons aussi
- χ^N la fonction caractéristique de Ω^N.
- χ la fonction caractéristique de I.

20.2 L'équation de la chaleur avec transmission de chaleur aux interfaces

Nous nous dotons aussi de p constantes de conduction thermique strictement positives $A_0, \ldots, A_{p-1}$, de p constantes de conduction intercouche $J_0, \ldots, J_{p-1}$, et de $2p$ constantes d'anisotropies surfaciques positives $K_0^+, \ldots, K_{p-1}^+$ et $K_0^-, \ldots, K_{p-1}^-$. Par extension, nous posons $A_i = A_{i \bmod p}$ et $K_i^{\pm} = K_{i \bmod p}^{\pm}$, voir Figure 20.a.

Rappelons que ρ est l'exposant contrôlant la variation de la constante de conduction intercouche par $J_i(N) = \frac{J_i}{N^\rho}$. Nous allons étudier les cas où ρ est choisi parmi $\{-1, 0, 1\}$. Étant donnée une suite u_0^N appartenant à $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$, nous notons u^N la solution de l'équation de la chaleur appartenant à $\mathrm{H}^{2,1}(\Omega^N \times (0,T))$, pour tout $T < +\infty$ et vérifiant l'équation

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} - A_i \triangle u^N = 0 \text{ sur } \Omega_i^N \text{ pour tout } 0 \leq i \leq p-1, \tag{20.2.1a}$$

les conditions aux limites

$$\frac{\partial u^N}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_e^N \times (0,T), \\ -\frac{K_i^+}{NA_i}\gamma u^N + \frac{J_i}{N^\rho A_i}(\gamma' u^N - \gamma u^N) & \text{sur } \Gamma_i^{N,+} \times (0,T), \\ -\frac{K_i^+}{NA_{i-1}}\gamma u^N + \frac{J_i}{N^\rho A_{i-1}}(\gamma' u^N - \gamma u^N) & \text{sur } \Gamma_i^{N,-} \times (0,T). \end{cases} \tag{20.2.1b}$$

et la condition initiale

$$u^N(\cdot, 0) = u_0^N. \tag{20.2.1c}$$

20.2.1 Contrôle de la constante de régularité elliptique de Ω^N

Nous commençons par préciser la régularité elliptique sur Ω^N. Nous devons contrôler cette régularité par rapport à N. C'est un résultat de Grisvard [29] pour les ouverts convexes que nous adaptons ici.

Proposition 20.2.1. *Soit N entier naturel non nul. Soit ρ un réel. Soit u dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$, telle que $\triangle u$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega^N)$ et telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } \Gamma_e^N \times (0,T), \\ -\frac{K_i^+}{NA_i}\gamma u + \frac{J_i}{N^\rho A_i}(\gamma' u - \gamma u) & \textit{sur } \Gamma_i^{N,+} \times (0,T), \\ -\frac{K_i^+}{NA_{i-1}}\gamma u + \frac{J_i}{N^\rho A_{i-1}}(\gamma' u - \gamma u) & \textit{sur } \Gamma_i^{N,-} \times (0,T), \end{cases} \tag{20.2.2}$$

pour $0 \leq i \leq p-1$. Alors, u appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega^N)$, et

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^N} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \frac{\max\limits_{0 \leq i < p}(A_i)}{\min\limits_{0 \leq i < p}(A_i)} \|\triangle u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}. \tag{20.2.3}$$

PREUVE : Commençons par établir la régularité pour N fixé. C'est une conséquence des résultats du chapitre 5, corollaire 5.2.5 et du fait que $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ appartient bien à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{N,+} \cup \Gamma^{N,-})$ par le théorème 5.3.1. Donc, u appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega^N)$. Pour prouver l'indépendance de la constante, nous nous inspirons des résultats de Grisvard pour les ouverts convexes. En particulier, nous inspirant de la preuve du théorème 3.1.2.3 de Grisvard, nous utilisons le théorème 3.1.1.1 de [29] avec $\boldsymbol{v} = \nabla u$, et nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \left(\int_{\Omega_i^N} |\triangle u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega_i^N} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} \right|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right) \\ = 2 \int_{\Gamma^{N,+} \cup \Gamma^{N,-}} \nabla_T \gamma u \cdot \left(\frac{K_i^{\pm}}{N} \nabla_T \gamma u + \frac{J_i}{N^\rho} (\nabla_T \gamma u - \nabla_T \gamma' u) \right) \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ - \int_{\Gamma^{N,+} \cup \Gamma^{N,-}} \left(\mathcal{B}(\gamma_T \boldsymbol{v}, \gamma_T \boldsymbol{v}) + \mathrm{tr}(\mathcal{B}) (\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 \right) \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}),\end{aligned} \quad (20.2.4)$$

où $\gamma_T \boldsymbol{v} = \gamma \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{\nu}$ et $\nabla_T \gamma u = \gamma_T \nabla u$, et où $\mathcal{B}$ est une forme bilinéaire sur la frontière qui à deux vecteurs $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ tangents à la frontière associe

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = - \sum_{j,k} \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s_j} \cdot \boldsymbol{\tau}_k \xi_j \eta_k = - \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \xi} \cdot \eta, \quad (20.2.5)$$

où $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$ représente une base du plan tangeant à la frontière, et $\frac{\partial}{\partial s_i}$ représente l'opérateur de dérivation suivant le vecteur $\boldsymbol{\tau}_i$. Par définition,

$$\mathrm{tr}(\mathcal{B}) = - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s_j} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \quad (20.2.6)$$

Le dernier terme du second membre de l'équation (20.2.4) est négatif car la forme $\mathcal{B}$ est négative quand chaque composante connexe de l'ouvert est convexe, cf. P. Grisvard [29, Chap. 3, pp.141]. Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \left(\int_{\Omega^N} |\triangle u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega^N} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} \right|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right) \\ \geq 2 \int_{\Gamma^{N,+} \cup \Gamma^{N,-}} \nabla_T \gamma u \cdot \left(\frac{K_i^{\pm}}{N} \nabla_T \gamma u + \frac{J_i}{N^\rho} (\nabla_T \gamma u - \nabla_T \gamma' u) \right) \mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ \geq 2 \frac{K_i^{\pm}}{N} \int_{\Gamma^{N,+} \cup \Gamma^{N,-}} |\nabla_T \gamma u|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) + \frac{J_i}{N^\rho} \int_{\Gamma^N} |\nabla_T \gamma^+ u - \nabla_T \gamma^- u|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\ \geq 0.\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega^N}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \frac{\max\limits_{0\leq i<p}(A_i)}{\min\limits_{0\leq i<p}(A_i)}\|\triangle\, u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}. \qquad \square$$

20.2.2 Résultats d'existence pour le problème de couches

Nous définissons l'énergie.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^N(u^N) = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \|\nabla u^N\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_i^N)} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^+}{N}\|\gamma u^N\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma_i^{N,+})} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{K_i^-}{N}\|\gamma u^N\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma_i^{N,-})} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{J}{N^\rho}\|\gamma^+ u^N - \gamma^- u^N\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma_i^N)}.\end{aligned} \tag{20.2.7}$$

Formellement, l'énergie décroît en fonction du temps. En effet, multiplions l'équation (20.2.1a) par $\frac{\partial u^N}{\partial t}$ et intégrons par partie.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{E}^N(u^N(\cdot,T))\right) + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} = 0.$$

On dit que u^N est solution faible de (20.2.1a) et (20.2.1c) si et seulement si, pour tout $0 < T$,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega^N\times(0,T)}\frac{\partial u^N}{\partial t}\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\nabla u^N\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^+}{N}\iint_{\Gamma_i^{N,+}\times(0,T)}\gamma u^N\gamma\phi\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^-}{N}\iint_{\Gamma_i^{N,-}\times(0,T)}\gamma u^N\gamma\phi\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=0}^{p-1}\frac{J_i}{N^\rho}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}(\gamma^+u^N - \gamma^- u^N)(\gamma^+\phi - \gamma^-\phi)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t = 0,\end{aligned} \tag{20.2.8}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^N\times(0,T)})$. Dans ce cas, u^N appartient, par la proposition 20.2.1, à $\mathrm{H}^{2,1}(\Omega^N\times(0,T))$. Comme $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^N\times(0,T)})$ est dense dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N\times(0,T))$, nous pouvons remplacer ϕ par u^N et obtenons l'égalité suivante :

$$\|u^N(\cdot,T)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} + 2\int_0^T \mathrm{E}^N(u^N(\cdot,t)\,\mathrm{d}t = \|u^N(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}, \tag{20.2.9}$$

pour tout $T > 0$. L'équation étant linéaire, cette inégalité donne l'unicité dans $\mathrm{H}^{2,1}(\Omega^N\times\mathbb{R}^+)$. L'existence est classique, nous disposons des théorèmes suivants.

Théorème 20.2.2. *Soit u_0^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$, alors il existe une unique solution du système* (20.2.1) *dans $\mathrm{H}^{2,1}(\Omega^N \times (0,T))$ pour tout $T < +\infty$. De plus, si u_0^N appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega^N)$ et vérifie*

$$\frac{\partial u_0^N}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \textit{sur } \Gamma_e^N \times (0,T), \\ -\frac{K_i^+}{NA_i}\gamma u_0^N + \frac{J_i}{N^\rho A_i}(\gamma' u_0^N - \gamma u_0^N) & \textit{sur } \Gamma_i^{N,+} \times (0,T), \\ -\frac{K_i^+}{NA_{i-1}}\gamma u_0^N + \frac{J_i}{N^\rho A_{i-1}}(\gamma' u_0^N - \gamma u_0^N) & \textit{sur } \Gamma_i^{N,-} \times (0,T). \end{cases} \tag{20.2.10}$$

Alors, u^N appartient à $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega^N \times (0,T))$, pour tout $T < +\infty$.

Preuve : Utilisant les inégalités (5.2.1b) et (5.2.1d), nous pouvons prouver le théorème en reprenant la preuve des propositions 12.3.5 et 12.3.7, chapitre 12. □

Nous pouvons améliorer la régularité. En effet, il est bien connu que l'équation de la chaleur présente des propriétés de régularisation.

Corollaire 20.2.3. *Soit u_0^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$. Nous notons u^N la solution du système* (20.2.1)*. Pour tout $S > 0$, u^N appartient à $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega^N \times (S,+\infty))$.*

Preuve : $u^N(\cdot, s)$ appartient à $\mathrm{H}^2(\Omega^N)$ et vérifie (20.2.10) pour presque tout s dans $\mathbb{R}^+$. Choisissons un tel $0 < s < S$. Alors, d'après 20.2.2, u^N appartient à $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega^N \times (s,+\infty))$. □

Nous pouvons ensuite utiliser du corollaire pour démontrer l'égalité d'énergie.

Proposition 20.2.4 (Égalité d'énergie)**.** *Soit u^N dans $\mathrm{H}^{2,1}(\Omega^N \times \mathbb{R}^+)$ solution du système* (20.2.1)*. Soit $0 \leq S < T$, alors*

$$\mathrm{E}^N(u^N(\cdot,T)) + \frac{1}{2}\int_S^T \left\| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}^2 \mathrm{d}t = \mathrm{E}^N(u^N(\cdot,S)). \tag{20.2.11}$$

Preuve : Supposons d'abord $S > 0$, u^N appartient à $\mathrm{H}^{3,\frac{3}{2}}(\Omega^N \times (S,+\infty))$. Nous prenons $\phi = \chi_{(S,T)}\frac{\partial u^N}{\partial t}$ dans l'équation (20.2.8), où $\chi_{(S,T)}(t)$ vaut 1 si t appartient à (S,T), et 0 sinon. Nous obtenons l'égalité d'énergie (20.2.11). Pour le cas $S = 0$, il suffit de passer à la limite dans l'égalité (20.2.11) quand S tend vers 0. C'est possible car u^N appartient à $\mathrm{H}^{2,1}(\Omega^N \times (S,+\infty))$, et donc aussi à $\mathcal{C}([0,+\infty); \mathrm{H}^1(\Omega^N))$ par [52, th. 3.1, chap. 1, pp.23]. □

Nous déduisons de cette égalité, le corollaire suivant :

Corollaire 20.2.5. *Soit u_0^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$ telle que l'énergie $\mathrm{E}^N(u_0^N)$ soit finie. Soit u^N la solution de l'équation de la chaleur* (20.2.1)*. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} \|\triangle u^N\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}^2 \,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\min\limits_{0 \leq i < p} (A_i)^2} \mathrm{E}^N(u_0^N).$$

Preuve : D'après l'équation (20.2.1a), $\frac{\partial u^N}{\partial t} = A_i \bigtriangleup u^N$ sur Ω_i^N. Donc, d'après l'égalité (20.2.11),

$$\mathrm{E}^N(u^N(\cdot,T)) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{{A_i}^2}{2} \int_S^T \left\| \bigtriangleup u^N \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_i^N)} \,\mathrm{d}t = \mathrm{E}^N(u_0^N). \qquad \square$$

Couplé avec la proposition 20.2.1, nous obtenons le corollaire :

Corollaire 20.2.6. *Soit u_0^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$ telle que l'énergie $\mathrm{E}^N(u_0^N)$ soit finie. Soit u^N la solution de l'équation de la chaleur (20.2.1). Alors,*

$$\sum_{i=1}^{3} \int_0^{+\infty} \left\| \frac{\partial^2 u^N}{\partial {x_i}^2} \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} \mathrm{d}t \leq \frac{2 \max\limits_{0\leq i<p}(A_i)}{\min\limits_{0\leq i<p}(A_i)^3} \mathrm{E}^N(u_0^N).$$

Ce contrôle sur les dérivées secondes va nous permettre d'obtenir des estimations puissantes et mêmes surprenantes sur la dérivée suivant la variable orthogonale aux couches.

Proposition 20.2.7. *Soit u_0^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega^N)$ telle que l'énergie $\mathrm{E}^N(u_0^N)$ soit finie. Soit u^N la solution de l'équation de la chaleur (20.2.1). Nous avons l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u^N}{\partial x_3} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N \times (0,T))} \leq {} & 2\sqrt{T} \frac{\sqrt{L \max\limits_{0\leq i<p}(\bar{\chi}_i)}}{\sqrt{N}} \max_{0\leq i<p} \left(\frac{K_i^+}{N{A_i}^2}, \frac{J_i^+}{N^\rho {A_i}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{E}^N(u_0^N)} \\ & + \frac{L \max\limits_{0\leq i<p}(\bar{\chi}_i)}{\sqrt{2}N} \frac{2 \max\limits_{0\leq i<p}(A_i)}{\min\limits_{0\leq i<p}(A_i)^3} \mathrm{E}^N(u_0^N). \end{aligned}$$

Preuve : Nous commençons par exprimer la norme $\mathrm{L}^2(\Omega^N)$ de $\frac{\partial u^N}{\partial x_3}$ en fonction de la norme $\mathrm{L}^2(\Gamma^{N,+})$ de $\frac{\partial u^N}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ et de la norme $\mathrm{L}^2(\Omega^N)$ de $\frac{\partial^2 u^N}{\partial {x_3}^2}$. Pour presque tout temps t, nous avons,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u^N}{\partial x_3} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} &= \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Gamma_{i,k}^{N,+}} \int_0^{\frac{L}{N}\bar{\chi}_i} \left| \frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x} + z\boldsymbol{e}_z) \right|^2 \mathrm{d}z \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Gamma_{i,k}^{N,+}} \int_0^{\frac{L}{N}\bar{\chi}_i} \left| \frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) + \int_{x_3}^{z} \frac{\partial^2 u^N}{\partial {x_3}^2}(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{e}_z) \,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}z \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{L\bar{\chi}_i}{N} \left\| \frac{\partial u^N}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right\|^2_{\Gamma_i^{N,+}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{(L\bar{\chi}_i)^2}{2N^2} \left\| \frac{\partial^2 u^N}{\partial {x_3}^2} \right\|^2_{\Omega_i^N} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{L \max\limits_{0\leq i<p}(\bar{\chi}_i)}}{\sqrt{N}} \left\| \frac{\partial u^N}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^{N,+})} + \frac{L \max\limits_{0\leq i<p}(\bar{\chi}_i)}{\sqrt{2}N} \left\| \frac{\partial^2 u^N}{\partial {x_3}^2} \right\|_{\Omega^N}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est borné dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+)$ par le corollaire 20.2.6. Le premier terme sera borné par l'inégalité d'énergie dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$. En effet, d'après les conditions aux limites (20.2.1b), la définition (20.2.7), et l'égalité d'énergie 20.2.11,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u^N}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma^{N,+})} &\leq 4 \max_{0\leq i<p}\left(\frac{K_i^+}{{A_i}^2}, \frac{J_i^+}{{A_i}^2}\right) \mathrm{E}^N(u^N)\\ &\leq 4 \max_{0\leq i<p}\left(\frac{K_i^+}{N{A_i}^2}, \frac{J_i^+}{N^\rho {A_i}^2}\right) \mathrm{E}^N(u_0^N),\end{aligned}$$

pour tout temps. □

20.3 Homogénéisation pour différentes valeurs de ρ

Nous essayons maintenant d'homogénéiser l'équation de la chaleur. Pour cela nous considérons différentes valeurs du paramètre ρ. Nous étudions les valeurs $1, 0, -1$. Nous nous donnons une suite de conditions initiales u_0^N telle que la norme $\|u_0^N\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}$ et l'énergie $\mathrm{E}^N(u_0^N)$ reste bornées.

20.3.1 Le cas $\rho = 1$

Ce cas correspond à une constante de conduction intercouche de type $J_i(N) = J_i/N$. Il n'est pas très satisfaisant physiquement. En effet, pour qu'il soit possible, il faudrait disposer d'un matériau qui serait d'autant plus isolant qu'il est mince. Il se traite de la même manière que le cas $J = 0$ traité dans [5] par G. Allaire, A. Damlamian et U. Hornung. Soit une suite de conditions initiales u_0^N, telles qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de N,

$$\|u_0^N\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} + \mathrm{E}^N(u_0^N) \leq C. \tag{20.3.1}$$

Notons $\bar{u}_0^N$ le prolongement de u_0^N par 0 en dehors de Ω^N. Nous supposons aussi que la suite $\bar{u}_0^N$ converge double-échelles vers u_0^∞ dans $\mathrm{L}^2(\Omega \times Y)$.

D'après les estimations d'énergie (20.2.9) et (20.2.11), il existe une constante $C > 0$, indépendante de N, telle que

$$\begin{aligned}&\|u^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega^N))} \leq C, && \|\nabla u^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega^N))} \leq C,\\ &\left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N\times\mathbb{R}^+)} \leq C, && \frac{1}{N}\left\|\gamma^+ u^N - \gamma^- u^N\right\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Gamma^N))} \leq C.\end{aligned}$$

Utilisant la proposition B.1.1, nous pouvons choisir un prolongement de u^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega \times (0,T))$ noté $\widetilde{u}^N$ tel que

$$\widetilde{u}^N = u^N \qquad \text{dans } \Omega^N \times \mathbb{R}^+.$$

et vérifiant les estimations suivantes pour une certaine constante $C > 0$.

$$\|\widetilde{u}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega^N))} \leq C, \qquad \left\|\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_1}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq C, \left\|\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq C, \tag{20.3.2a}$$

$$\left\|\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial t}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \leq C, \quad \frac{1}{N}\left\|\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega))} \leq C. \tag{20.3.2b}$$

Nous pouvons donc utiliser la proposition 2.6 de [5], que nous avons reproduite à la proposition 18.1.10, chapitre 18 : il existe $\widetilde{u}^\infty$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega\times Y))$, $\nabla_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^\infty$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega\times Y))$, telle qu'à une sous-suite près

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\iint_{(\Gamma^{N,+}\cup\Gamma^{N,-})\times(0,T)} \widetilde{u}^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{Np-1}\iint_{\Omega\times(0,T)}\left(\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},z_j^-)\phi(\boldsymbol{x},t,z_j^-)+\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},z_j^+)\phi(\boldsymbol{x},t,z_j^+)\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20.3.3a}$$

et

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\iint_{\Omega\times(0,T)}\widetilde{u}^N(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &\qquad = \iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y u^\infty(\boldsymbol{x},t,y)\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20.3.3b}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{L}{N}\iint_{\Omega\times(0,T)}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &\qquad = \iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y\frac{\partial\widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t,y)\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20.3.3c}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega\times(0,T)})\otimes\mathcal{C}_\#(Y)$. Nous devons maintenant donner l'équation que vérifie $\widetilde{u}^\infty$. Nous commençons par un lemme trivial.

Lemme 20.3.1. *Pour tout $\boldsymbol{x},t$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^+$, la fonction $\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ est constante sur chaque intervalle I_i, pour tout entier i, $0\leq i\leq p-1$.*

Preuve : Choisissons $\phi(\boldsymbol{x},t,y)=\psi(\boldsymbol{x},t)\zeta(y)$ avec $\zeta(y)$ à support compact dans I_i, alors

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times(0,T)}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\zeta(\frac{N}{L}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= -\iint_{\Omega\times(0,T)}\widetilde{u}^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\zeta(\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-\frac{N}{L}\iint_{\Omega\times(0,T)}\widetilde{u}^N(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t)\zeta'(\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nous divisons par N et faisons converger chaque terme suivant les règles de la convergence double-échelles, nous obtenons

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \psi(\boldsymbol{x},t) \int_{I_i} \widetilde{u}^{\infty}(\boldsymbol{x},t,y)\zeta'(y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \tag{20.3.4}$$

pour tout ζ dans $\mathcal{C}_c^{\infty}(I)$ et ψ dans $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega\times(0,T))$. □

Nous continuons alors par un autre lemme qui permettra de traiter le terme $\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_3}$:

Lemme 20.3.2. *La fonction* $\chi^N \frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_3}$ *converge fortement vers* 0 *dans* $\mathrm{L}^2(\Omega\times(0,T))$.

Preuve : Pour $\rho = 1$, d'après la proposition 20.2.7, la norme $\mathrm{L}^2(\Omega^N\times(0,T))$ de $\frac{\partial u^N}{\partial x_3}$ est dominée par N^{-1}. □

Nous notons $u_i^{\infty}(\boldsymbol{x})$ la valeur prise par $\widetilde{u}^{\infty}(\boldsymbol{x},\cdot)$ sur I_i. Nous souhaitons prendre la limite, quand N tend vers $+\infty$, dans l'équation (20.2.8) pour $\phi(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)$. Nous obtenons, pour tout temps T positif, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega\times(0,T)})\otimes\mathcal{C}_{\#}^{\infty}(Y)$

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^N\times(0,T)} \frac{\partial u^N}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} \nabla u^N(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{N}{L}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} \frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^+}{N}\iint_{\Gamma_i^{N,+}\times(0,T)} \gamma u^N\gamma\phi\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^-}{N}\iint_{\Gamma_i^{N,-}\times(0,T)} \gamma u^N\gamma\phi\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{J_i}{N}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+u^N-\gamma^-u^N)(\gamma^+\phi^N-\gamma^-\phi^N)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

où $\phi^N(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)$. Choisissons ϕ telle que $\phi(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ soit constante sur chaque intervalle $\widetilde{I}_i$, $0\le i\le p-1$. Nous notons $\phi_i(\boldsymbol{x},t)$ la valeur prise par $\phi(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ sur $\widetilde{I}_i$. Prenons la limite quand N tend vers $+\infty$. Les termes en $\frac{\partial u^N}{\partial x_3}$ disparaissent à la limite, voir lemme 20.3.2. D'après la convergence double-échelles classique, théorème 18.1.6

et avec surfaces périodiques, proposition 18.1.10, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} \bar{\chi}_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \frac{\partial u_i^\infty}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\phi_i(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ + \sum_{i=0}^{p-1} A_i\bar{\chi}_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \nabla_{\mathrm{2D}} u_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\mathrm{2D}}\phi_i(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ + \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}(K_i^+ + K_i^-) \iint_{\Omega\times(0,T)} u_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\phi_i(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ + \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Omega\times(0,T)} (u_{i+1}^\infty(\boldsymbol{x},t) - u_i^\infty(\boldsymbol{x},t))(\phi_{i+1}(\boldsymbol{x},t)-\phi_i(\boldsymbol{x},t))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ = 0, \quad (20.3.5)\end{aligned}$$

pour tout $(\phi_i)_{0\leq i\leq p-1}$ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega\times(0,T)})$.

Nous avons dans cette section prouvé le théorème suivant.

Théorème 20.3.3. *Soit une suite de conditions initiales u_0^N, satisfaisant l'estimation* (20.3.1)*. Notons $\bar{u}_0^N$ le prolongement de u_0^N par* 0 *en dehors de Ω^N. Supposons, de plus, que la suite $\bar{u}_0^N$ converge double-échelles vers u_0^∞ dans $\mathrm{L}^2(\Omega\times Y)$. Alors, il existe un prolongement de u^N noté $\widetilde{u}^N$ satisfaisant les estimations* (20.3.2)*. Une sous-suite de $\widetilde{u}^N$ converge double-échelles vers $\widetilde{u}^\infty$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega\times(0,T)\times Y)$. Pour tout $\boldsymbol{x},t$ dans $\Omega\times Y$, $\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ a une valeur unique $u_i^\infty(\boldsymbol{x},t)$ sur l'intervalle $\widetilde{I}_i$ et vérifie l'égalité variationnelle* (20.3.5)*. Le système vérifié par u_i^∞ est formellement :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i^\infty}{\partial t} - A_i\,\triangle_{\mathrm{2D}}\,u_i^\infty + \frac{K_i^+ + K_i^-}{L}u_i^\infty + \frac{J_i}{L\bar{\chi}_i}(u_i^\infty - u_{i-1}^\infty) \\ + \frac{J_{i+1}}{L\bar{\chi}_i}(u_i^\infty - u_{i+1}^\infty) = 0,\end{aligned} \quad (20.3.6a)$$

dans $\Omega\times\mathbb{R}^+$, avec la condition de bord :

$$\frac{\partial u_i^\infty}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \textit{sur } \partial B\times(0,L)\times\mathbb{R}^+, \quad (20.3.6b)$$

et la condition initiale :

$$\widetilde{u}_0^\infty = u_0^\infty \qquad \textit{dans } \Omega\times I. \quad (20.3.6c)$$

où $\triangle_{\mathrm{2D}} = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$.

Remarque 20.3.4. L'unicité des solutions de l'équations de la chaleur permet d'affirmer que toute la suite converge.

Remarque 20.3.5. Ce cas est peu satisfaisant car l'homogénéisation est alors dépendante du nombre de couches dans une maille d'homogénéisation.

20.3.2 Le cas $\rho = -1$

Ce cas est le plus simple car nous pourrons prolonger la solution de manière à ce que la norme $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathrm{H}^1(\Omega))$ reste bornée. Nous nous dotons d'une suite de conditions initiales, u_0^N satisfaisant

$$\|u_0^N\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} + \mathrm{E}^N(u_0^N) \leq C. \tag{20.3.7}$$

Nous supposons aussi que le prolongement de u_0^N par 0 en dehors de $\Omega^N \times \mathbb{R}^+$ tende faiblement vers $\bar{\chi} u_0^\infty$. Grâce aux égalités d'énergies (20.2.9) et (20.2.11), nous avons

$$\|u^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{H}^1(\Omega^N))} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\|^2_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\Omega^N))} \leq C, \tag{20.3.8a}$$

$$N \sum_{i=1}^{p-1} \|\gamma^+ u^N - \gamma^- u^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\Gamma_i^N))} \leq C. \tag{20.3.8b}$$

D'après la proposition B.1.1, ces trois inégalités permettent d'obtenir un prolongement acceptable. Pour tout $N \geq 1$, il existe $\widetilde{u}^N$ appartenant à $\mathrm{L}^\infty(0, +\infty; \mathrm{H}^1(\Omega))$, telle que $\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial t}$ appartienne à $\mathrm{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ avec les estimations :

$$\|\widetilde{u}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{H}^1(\Omega))} \leq C, \tag{20.3.9a}$$

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial t} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)} \leq C, \tag{20.3.9b}$$

$$N \sum_{i=1}^{p-1} \|\gamma^+ \widetilde{u}^N - \gamma^- \widetilde{u}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\Gamma_i^N))} \leq C. \tag{20.3.9c}$$

Donc, d'après [3], proposition 1.4, il existe $\widetilde{u}^\infty$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathrm{H}^1(\Omega))$ indépendante de y, et $\widetilde{u}_1^\infty$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega; \mathrm{H}^1_\#(Y))$, tels que à une sous-suite près

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{u}^N(\boldsymbol{x}, t) \phi(\boldsymbol{x}, t, \frac{N}{L} x_3) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \,\mathrm{d}t = \\ \iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \int_Y \phi(\boldsymbol{x}, t, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{20.3.10}$$

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \iint_{\Omega\times(0,T)} \frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) \phi(\boldsymbol{x}, t, \frac{N}{L} x_3) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \,\mathrm{d}t = \\ \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial \widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x}, t, y) \right) \phi(\boldsymbol{x}, t, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{20.3.11}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega \times (0,T)}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$. Les limites des dérivées suivant les autres variables, qui ne sont pas homogénéisées, sont les dérivées de la limite. De même, l'inégalité (20.3.9c) permet d'appliquer le théorème 18.1.9 : il existe des fonctions w_i^∞, $0 \le i \le p-1$, dans $\mathrm{L}^2(\Omega \times (0,T))$ telles que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma^N} (\gamma^+ u^N - \gamma^- u^N) \cdot \gamma\phi^N \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega\times(0,T)} w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,z_i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \tag{20.3.12}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega\times(0,T)}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$, où $\phi^N(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)$.

Il nous faut maintenant établir l'équation vérifiée par la limite. Nous notons χ^N la fonction caractéristique de Ω^N. Nous avons d'après l'équation (20.2.8), pour tout temps T positif, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)}) \otimes \mathcal{C}_\#^\infty(Y)$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times(0,T)} \chi^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} \nabla\widetilde{u}^N(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{N}{L}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} \chi^N(\boldsymbol{x})\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^+}{N} \iint_{\Gamma_i^{N,+}\times(0,T)} \gamma\widetilde{u}^N\gamma\phi^N\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^-}{N} \iint_{\Gamma_i^{N,-}\times(0,T)} \gamma\widetilde{u}^N\gamma\phi^N\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + N\sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{u}^N - \gamma^-\widetilde{u}^N)(\gamma^+\phi^N - \gamma^-\phi^N)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t = 0,
\end{aligned} \tag{20.3.13}$$

où $\phi^N(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x},\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)$.

Nous commençons par prendre la limite dans l'équation (20.3.13). Nous obtenons alors l'équation variationnelle que doivent satisfaire $\widetilde{u}^\infty$, $\widetilde{u}_1^\infty$ et w_i^∞.

Lemme 20.3.6. *Les limites w^∞, $\widetilde{u}^\infty$ et $\widetilde{u}_1^\infty$ satisfont l'équation variationnelle suivante :*

$$\begin{aligned}
&\bar{\chi}\iint_{\Omega\times(0,T)} \frac{\partial\widetilde{u}^\infty}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \Big(\sum_{i=0}^{p-1} A_i\bar{\chi}_i\Big) \iint_{\Omega\times(0,T)} \nabla_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{2\mathrm{D}}\phi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \iint_{\Omega\times(0,T)} \sum_{i=0}^{p-1} A_i\left(\int_{I_i} \frac{\partial\widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\right)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^+ + K_i^-}{L}\iint_{\Omega\times(0,T)}\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega\times(0,T)}J_i\theta_i w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=0,\quad (20.3.14)$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)})$.

Preuve *:* Nous choisissons ϕ indépendante de la variable rapide y et nous prenons la limite dans l'équation (20.3.13). Seule la limite du dernier terme est non triviale :

$$\Bigg|N\sum_{i=0}^{p-1}J_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}(\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N)(\gamma^+\phi-\gamma^-\phi)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$$
$$-\sum_{i=0}^{p-1}J_iL\theta_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}(\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t.\Bigg|$$
$$\leq\frac{\max\limits_{0\leq i\leq p-1}(L\theta_iJ_i)^2}{\sqrt{N}}|B|^{\frac{1}{2}}\|\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^N\times(0,T))}\left\|\frac{\partial^2\phi}{\partial {x_3}^2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times(0,T))}.$$

Comme la quantité $\|\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^N\times(0,T))}$ est dominée par $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$\lim_{N\to\infty}N\sum_{i=0}^{p-1}J_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}(\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N)(\gamma^+\phi-\gamma^-\phi)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{p-1}J_iL\theta_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}(\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega\times(0,T)}\sum_{i=0}^{p-1}J_i\theta_iw_i(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,$$

par (20.3.12). □

Il ne nous reste plus qu'à exprimer w_i^∞ et $\frac{\partial\widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}$ en fonction de $\widetilde{u}^\infty$. Nous allons commencer par donner un lien entre w_i^∞ et $\widetilde{u}^\infty$.

Lemme 20.3.7. *Nous avons, pour tout $\boldsymbol{x},t$ dans $\Omega\times(0,T)$,*

$$\int_I\frac{\partial\widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)=(1-\bar{\chi})\frac{\partial\widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t).\qquad(20.3.15)$$

Preuve : Nous avons

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega^N\times(0,T)} \frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \iint_{\Omega^N\times(0,T)} u^N(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+\frac{N}{L}\iint_{\Omega^N\times(0,T)} u^N(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial \phi}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
=\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\gamma^- u^N\gamma^-\phi^N - \gamma^+u^N\gamma^+\phi^N\right)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{20.3.16}
$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega\times(0,T))\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$, et où $\phi^N(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)$. Diviser l'équation (20.3.16) par N et prendre la limite ne donne qu'une égalité triviale. Nous choisissons ϕ indépendante de la variable rapide y. Puis, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \gamma^+u^N\gamma^+\phi - \gamma^-u^N\gamma^-\phi\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
=\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\gamma^+u^N-\gamma^-u^N\right)\left(\frac{\gamma^+\phi+\gamma^-\phi}{2}\right)\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
+\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\frac{\gamma^+u^N+\gamma^-u^N}{2}\right)\left(\gamma^+\phi-\gamma^-\phi\right)\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{20.3.17}
$$

La limite double-échelles de ces termes donne par développement de Taylor-Lagrange sur ϕ et les résultats classiques de la convergence double-échelles.

$$
\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega\times(0,T)} w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{p-1}\theta_i\iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\tag{20.3.18}
$$

Donc, prenant la limite dans (20.3.16) quand N tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_I \left(\frac{\partial\widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\right)\phi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+\bar{\chi}\iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega\times(0,T)} w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+(1-\bar{\chi})\iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0,
\end{aligned}
\tag{20.3.19}
$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega\times(0,T))$. □

Le prochain lemme permet d'exprimer w_i^∞ et $\frac{\partial \widetilde{u}_i^\infty}{\partial x_3}$ en fonction de $\widetilde{u}^\infty$ et de ses derivées.

Lemme 20.3.8. *Pour tout* $\boldsymbol{x}, t$ *dans* $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{u}_1^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t,y) = \frac{\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})}{A_i \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_j}{A_j} + \frac{1}{J_j L}}, \qquad \text{si } y \in \widetilde{I}_i, \tag{20.3.20a}$$

$$w_i^\infty(\boldsymbol{x},t) = \frac{\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)}{J_i \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_j}{A_j} + \frac{1}{J_j L}}. \tag{20.3.20b}$$

Preuve *:* Divisons l'équation (20.3.13) par N et prenons la limite au sens de la convergence double-échelles, nous obtenons,

$$\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_{I_i} \left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\right)\cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+ \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Omega\times(0,T)} w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\left(\phi(\boldsymbol{x},t,z_i^+) - \phi(\boldsymbol{x},t,z_i^-)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0, \tag{20.3.21}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,L)}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$. Pour obtenir rigoureusement la limite du deuxième terme, il a suffi de prendre les limites pour la fonction test $\phi \circ h^+$ où $h^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$, croissante et telle que $h^+(z_i) = h^+(z_i^+)$. Choisissons d'abord ϕ à support compact dans $\Omega \times \widetilde{I}$, donc la fonction $\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ est constante sur chaque intervalle $\widetilde{I}_i$. Notons alors $v_i^\infty(\boldsymbol{x},t)$ la valeur prise par $\frac{\partial \widetilde{u}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ sur $\widetilde{I}_i$. Donc,

$$\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + v_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\right)\left(\phi(\boldsymbol{x},t,z_{i+1}^-) - \phi(\boldsymbol{x},t,z_i^+)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Omega\times(0,T)} w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\left(\phi(\boldsymbol{x},t,z_i^+) - \phi(\boldsymbol{x},t,z_i^-)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc, pour tout $\boldsymbol{x}, t$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$, et tout a_i^p, a_i^t tels que $\sum_{i=1}^{p-1} a_i^p + a_i^t = 0$

$$\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i^p A_i \left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + v_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\right) + a_i^t J_i w_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\right) = 0.$$

Donc, il existe, une constante $C(\boldsymbol{x},t)$ telle que, pour tout i,

$$A_i\left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + v_i^\infty(\boldsymbol{x},t)\right) = J_i w_i^\infty(\boldsymbol{x},t) = C(\boldsymbol{x},t).$$

Nous savons, relation (20.3.15), que pour tout $\boldsymbol{x}, t$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\bar{\chi}_i \left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) + v_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) \right) + \frac{1}{L} w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) \right) = (1 - \bar{\chi}) \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t).$$

Donc,

$$C(\boldsymbol{x}, t) \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_i}{A_i} + \frac{1}{J_i L} \right) = \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t).$$

Donc, pour tout $\boldsymbol{x}, t$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$C(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t)}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_j}{A_j} + \frac{1}{J_j L}}, \qquad \square$$

Grâce au lemme 20.3.8, nous pouvons expliciter l'équation (20.3.14) :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0,T)} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \phi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_i A_i}{\bar{\chi}} \iint_{\Omega \times (0,T)} \nabla_{2\mathrm{D}} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla_{2\mathrm{D}} \phi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ + \frac{1}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_j}{A_j} + \frac{1}{J_j L}} \iint_{\Omega \times (0,T)} \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ + \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^- + K_i^+}{L \bar{\chi}} \right) \iint_{\Omega \times (0,T)} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \phi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ + \left(\frac{1}{\bar{\chi}} - 1 \right) \frac{1}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_j}{A_j} + \frac{1}{J_j L}} \iint_{\Omega \times (0,T)} \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ = 0, \quad (20.3.23) \end{aligned}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0, T)})$. Cette équation admettant une unique solution si la condition initiale est unique, toute la suite $\widetilde{u}^N$ converge.

Dans cette section, nous avons établi le théorème suivant :

Théorème 20.3.9. *Soit une suite de conditions initiales u_0^N, satisfaisant l'estimation* (20.3.7)*. Notons $\bar{u}_0^N$ le prolongement de u_0^N par 0 en dehors de Ω^N. Supposons, de plus que la suite $\bar{u}_0^N$ converge faiblement vers $\bar{\chi} u_0^\infty$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Alors, il existe un prolongement $\widetilde{u}^N$ de u^N borné dans $\mathrm{H}^1(\Omega \times (0, T))$. La suite $\widetilde{u}^N$ converge double-échelles vers $\widetilde{u}^\infty$ appartenant à $\mathrm{H}^1(\Omega \times (0, T))$. $\widetilde{u}^\infty$ est solution de l'équation variationnelle* (20.3.23)*, soit du système :*

$$\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial t} - A_T \triangle_{2\mathrm{D}} \widetilde{u}^\infty - A_N \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial {x_3}^2} + \bar{K} \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t) = 0 \qquad \textit{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

avec la condition de bord :

$$\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial \boldsymbol{\nu}_A} = 0 \qquad \text{sur } \partial B \times (0,L) \times \mathbb{R}^+,$$

et la condition initiale :

$$\widetilde{u}_0^\infty = u_0^\infty \qquad \text{dans } \Omega \times I.$$

où

$$A_T = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_i}{\bar{\chi}} A_i, \qquad\qquad A_N = \frac{1}{\bar{\chi}} \frac{1}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_j}{A_j} + \frac{1}{J_j L}},$$

$$\bar{K} = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^- + K_i^+}{L\bar{\chi}} \right),$$

et notant la normale extérieure $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$,

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial \boldsymbol{\nu}_A} = A_T \nu_1 \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_1} + A_T \nu_2 \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_2} + A_N \nu_3 \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_3}.$$

20.3.3 Le cas $\rho = 0$

C'est le cas le plus compliqué car il fait appel à une convergence triple-échelles avec une échelle $\sqrt{N}$. Soit une suite de conditions initiales u_0^N satisfaisant,

$$\|u_0^N\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)} + \mathrm{E}^N(u_0^N) \leq C. \tag{20.3.26}$$

Notons $\bar{u}_0^N$ le prolongement de u_0^N par 0 en dehors de Ω^N. Nous supposons aussi que la suite $\bar{u}_0^N$ converge triple-échelles[1] vers u_0^∞ dans $\mathrm{L}^2(\Omega \times Y \times Y)$. Grâce aux égalités d'énergies (20.2.9) et (20.2.11), il existe une constante $C > 0$, indépendante de N, telle que

$$\|u^N\|_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{H}^1(\Omega^N))} \leq C, \qquad \sum_{i=1}^{p-1} \|\gamma^+ u^N - \gamma^- u^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\Gamma_i^N))} \leq C, \tag{20.3.27a}$$

$$\left\| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N \times \mathbb{R}^+)} \leq C. \tag{20.3.27b}$$

[1] i.e. au sens de la définition 18.2.2.

Ces trois estimations et la proposition B.1.1 permettent de construire pour tout N un prolongement $\widetilde{u}^N$ appartenant à $\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{H}^1(\Omega))$, tel que $\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial t}$ appartienne à $\mathrm{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)$, satisfaisant pour une constante $C>0$, indépendante de N :

$$\|\widetilde{u}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\Omega))} \le C, \qquad \|\nabla_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^N\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \le C, \tag{20.3.28a}$$

$$\left\|\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial t}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \le C, \qquad \frac{1}{\sqrt{N}}\left\|\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \le C \tag{20.3.28b}$$

$$\sum_{i=1}^{p-1}\|\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\Gamma_i^N))} \le C, \tag{20.3.28c}$$

Nous pouvons utiliser les résultats de la section 18.2. D'après la proposition 18.2.5. Il existe donc $\widetilde{u}^\infty$ dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{H}^1_\#(Y)))$ et $\widetilde{u}_1^\infty$ dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega\times Y;\mathrm{H}^1_\#(Y)))$, telles que, à une sous-suite près, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)})\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\iint_{\Omega\times(0,T)} &\widetilde{u}^N(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= \iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\int_Y \phi(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20.3.29}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\iint_{\Omega\times(0,T)}\frac{\partial \widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\ &= \iint_{\Omega\times(0,T)}\iint_{Y^2}\left(\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)+\frac{\partial \widetilde{u}_1^\infty}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\right)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{20.3.30}$$

Il existe aussi w_i^∞, $0\le i\le p-1$, dans $\mathrm{L}^2(\Omega\times(0,T))$ telle que, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)})\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\iint_{\Gamma^N\times(0,T)}&\big(\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N\big)\gamma\phi^N\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{20.3.31}$$

où $\phi^N(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)$.

Les résultats de régularité elliptique et les conditions aux limites sur des surfaces de plus en plus rapprochées permettent d'obtenir une estimation surprenante sur la dérivée suivant la troisième variable d'espace de $\widetilde{u}^\infty$. En effet, d'après la proposition 20.2.7 et les contraintes (20.3.26) que nous avons imposé aux conditions initiales, il existe une constante $C>0$ indépendante de N telle que :

$$\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega^N\times(0,T))} \le \frac{C}{\sqrt{N}}, \tag{20.3.32}$$

où une constante possible est

$$C = 2\sqrt{T}\sqrt{L\max_{0\le i<p}(\bar{\chi}_i)}\max_{0\le i<p}\left(\frac{K_i^+}{A_i{}^2},\frac{J_i^+}{A_i{}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt{\mathrm{E}^N(u_0^N)}\right)$$
$$+\frac{L\max_{0\le i<p}(\bar{\chi}_i)}{\sqrt{2}}\frac{2\max_{0\le i<p}(A_i)}{\min_{0\le i<p}(A_i)^3}\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left(\mathrm{E}^N(u_0^N)\right).$$

Par conséquent, il existe v^∞ dans $\mathrm{L}^2(\Omega\times(0,T)\times Y^2)$, telle qu'à une sous-suite près

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}\iint_{\Omega\times(0,T)}\frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$=\iint_{\Omega\times(0,T)}\iint_{Y^2}v^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\quad (20.3.33)$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$.

Reprenons l'équation variationnelle (20.2.8). Nous avons,

$$\iint_{\Omega^N\times(0,T)}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}A_i\iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\nabla_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^N(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{2\mathrm{D}}\phi(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}A_i\iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\sqrt{N}\sum_{i=0}^{p-1}A_i\iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{N}{L}\sum_{i=0}^{p-1}A_i\iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\frac{\partial\widetilde{u}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^+}{N}\iint_{\Gamma_i^{N,+}\times(0,T)}\gamma\widetilde{u}^N\gamma\phi^N\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^-}{N}\iint_{\Gamma_i^{N,-}\times(0,T)}\gamma\widetilde{u}^N\gamma\phi^N\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}J_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}(\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N)(\gamma^+\phi^N-\gamma^-\phi^N)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t=0,\quad (20.3.34)$$

pour tout temps T positif, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)})\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$, et en notant $\phi^N(\boldsymbol{x},t)=\phi^N(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3,\frac{N}{L}x_3)$.

Nous prenons la limite dans l'équation variationnelle (20.3.34), quand ϕ ne dépend pas de la variable rapide y_1, nous obtenons le lemme suivant

Lemme 20.3.10. *Les limites w^∞, $\widetilde{u}^\infty$ et v_1^∞ satisfont :*

$$\begin{aligned}
\bar{\chi} \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,y)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \Big(\sum_{i=0}^{p-1} A_i\bar{\chi}_i\Big) \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \nabla_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y)\cdot\nabla_{2\mathrm{D}}\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \iint_{\Omega\times(0,T)} \Big(\sum_{i=0}^{p-1} A_i\Big(\int_{I_i} v^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_s\Big)\Big)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \Big(\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_i^+ + K_i^-}{L}\Big)\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \iint_{\Omega\times(0,T)} \Big(\sum_{i=0}^{p-1} J_i\theta_i w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\Big)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0, \quad (20.3.35)
\end{aligned}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)})\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$.

Preuve *:* Nous choisissons ϕ indépendante de la variable rapide y et nous prenons la limite dans l'équation (20.3.34). Seule la limite du dernier terme est non triviale :

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{u}^N - \gamma^-\widetilde{u}^N)(\gamma^+\phi^N-\gamma^-\phi^N)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
- \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{p-1} J_iL\theta_i \iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{u}^N - \gamma^-\widetilde{u}^N)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\Big| \\
\le \frac{|B|^{\frac12}}{\sqrt{N}}\left(\max_{0\le i\le p-1}(J_iL\theta_i)\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times(0,T))} + \max_{0\le i\le p-1}(J_iL\theta_i)^2\left\|\frac{\partial^2\phi}{\partial {y_s}^2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times(0,T))}\right) \\
\times \|\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^N\times(0,T))},
\end{aligned}$$

Comme la quantité $\|\gamma^+\widetilde{u}^N-\gamma^-\widetilde{u}^N\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^N\times(0,T))}$ est bornée indépendamment de N :

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{u}^N - \gamma^-\widetilde{u}^N)(\gamma^+\phi^N-\gamma^-\phi^N)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{p-1} J_iL\theta_i\frac{1}{\sqrt{N}} \iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{u}^N - \gamma^-\widetilde{u}^N)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
= \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Omega\times(0,T)}\int_Y w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

par (20.3.31). □

Il ne nous reste plus qu'à exprimer v^∞ et w^∞ en fonction de $\widetilde{u}^\infty$. Pour cela, nous commençons par obtenir une relation indépendante de l'équation (20.3.34).

Lemme 20.3.11. *Les relations suivantes sont vérifiées*

$$\sum_{i=0}^{p-1} w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = L\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x}, t, y_s),$$
$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_Y w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s)\,\mathrm{d}y_s = 0.$$

Preuve *:* Pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega \times (0,T)) \otimes \mathcal{C}_\#^\infty(Y) \otimes \mathcal{C}_\#^\infty(Y)$,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^N\times(0,T)} \frac{\partial u^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t)\phi(\boldsymbol{x}, t, \sqrt{N}x_3, \frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \iint_{\Omega^N\times(0,T)} u^N(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t, \sqrt{N}x_3, \frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sqrt{N}\iint_{\Omega^N\times(0,T)} u^N(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial \phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x}, t, \sqrt{N}x_3, \frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{N}{L}\iint_{\Omega^N\times(0,T)} u^N(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial \phi}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}, t\sqrt{N}x_3, \frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&= -\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\gamma^+u^N(\boldsymbol{x}, t) - \gamma^-u^N(\boldsymbol{x}, t)\right)\left(\frac{\gamma^+\phi^N(\boldsymbol{x}, t) + \gamma^-\phi^N(\boldsymbol{x}, t)}{2}\right)\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\frac{\gamma^+u^N + \gamma^-u^N}{2}\right)\left(\gamma^+\phi^N - \gamma^-\phi^N\right)\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t, \quad (20.3.37)
\end{aligned}$$

où $\phi^N(\boldsymbol{x}, t) = \phi(\boldsymbol{x}, t, \sqrt{N}x_3, \frac{N}{L}x_3)$. Choisissons ϕ indépendant de y_1, divisons l'équation par $\sqrt{N}$ et prenons la limite au sens de la convergence triple-échelles. La limite de l'avant dernier terme s'obtient par (20.3.31). Pour obtenir la limite du dernier terme, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\frac{\gamma^+u^N + \gamma^-u^N}{2}\right)\left(\gamma^+\phi^N - \gamma^-\phi^N\right)\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\qquad - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{p-1} L\theta_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} \left(\frac{\gamma^+u^N + \gamma^-u^N}{2}\right)\frac{\partial \phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x}, t, \sqrt{N}x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\Bigg| \\
&\qquad\qquad \leq \frac{C}{N}\left(\left\|\frac{\partial^2\phi}{\partial {y_s}^2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times(0,T))} + \left\|\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times(0,T))}\right)\|\gamma u^N\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma^{N,-}\cup\Gamma^{N,+})}.
\end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0 car d'après les estimations (20.3.28) et la proposition 18.2.5, la quantité $\frac{1}{N}\|\gamma u^N\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma^{N,-}\cup\Gamma^{N,+})}$ reste bornée. Donc, pour tout ϕ appartenant à l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathcal{O}}\times(0,T))\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}\left(\frac{\gamma^+u^N+\gamma^-u^N}{2}\right)\left(\gamma^+\phi^N-\gamma^-\phi^N\right)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\
&\quad=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{p-1}\theta_i\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)}\left(\frac{\gamma^+u^N+\gamma^-u^N}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,\sqrt{N}x_3)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad=\Big(\sum_{i=0}^{p-1}\theta_i\Big)\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Au total, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}
&\bar{\chi}\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\qquad=-\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\qquad-\Big(\sum_{i=0}^{p-1}\theta_i\Big)\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\frac{\partial\phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{20.3.38}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathcal{O}}\times(0,T))\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$. Ce qui donne pour tout $\boldsymbol{x},t$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^+$, et tout y_s dans Y,

$$\sum_{i=0}^{p-1}w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)=L\frac{\partial\widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s).$$

Prenons ϕ indépendant de y_s et de y_1 dans l'égalité variationnelle (20.3.38). Alors, pour tout $\boldsymbol{x},t$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^+$,

$$\int_Y\sum_{i=0}^{p-1}w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s=0.$$ □

Lemme 20.3.12. *La fonction $v^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s,\cdot)$ est constante sur chaque intervalle $\widetilde{I}_i$.*

Preuve : Divisons l'équation (20.3.34) par $\sqrt{N}$ et prenons la limite au sens de la convergence triple-échelles. Nous obtenons grâce à (20.3.31) et (20.3.33) que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}A_i\iint_{\Omega\times(0,T)}\iint_{Y^2}v^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},t,y_s,y_1)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}J_i\iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y w_i^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\left(\phi(\boldsymbol{x},t,y_s,z_i^+)-\phi(\boldsymbol{x},t,y_s,z_i^-)\right)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=0.
\end{aligned}\tag{20.3.39}$$

Choisissant ϕ telle que $\phi(\boldsymbol{x}, t, y_s, \cdot)$ soit à support compact dans $\widetilde{I}$, nous obtenons que $v^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s, \cdot)$ est constante sur chaque intervalle $\widetilde{I}_i$. $\square$

Dorénavant, nous notons

$$v_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = v^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s, \cdot) \qquad \text{sur } \widetilde{I}_i. \tag{20.3.40}$$

Les lemmes 20.3.11 et 20.3.12 vont nous permettre d'établir le résultat suivant :

Lemme 20.3.13. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$v_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = \frac{L\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x}, t, y_s)}{A_i \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{J_j}}, \tag{20.3.41a}$$

$$w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = \frac{L\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x}, t, y_s)}{J_i \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{J_j}}. \tag{20.3.41b}$$

Preuve : L'équation (20.3.39) peut être réécrite :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y v_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) \left(\phi(\boldsymbol{x}, t, y_s, z_{i+1}^-) - \phi(\boldsymbol{x}, t, y_s, z_i^+)\right) \mathrm{d}y_s \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\ + \sum_{i=0}^{p-1} J_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) \left(\phi(\boldsymbol{x}, t, y_s, z_i^+) - \phi(\boldsymbol{x}, t, y_s, z_i^-)\right) \mathrm{d}y_s \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = 0,\end{aligned}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega\times(0,T))\otimes\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$. Donc, pour tout $(\boldsymbol{x}, t, y_s)$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^+\times Y$,

$$A_i \sum_{i=0}^{p-1} a_i v_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) + J_i \sum_{i=0}^{p-1} a_i' w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = 0, \tag{20.3.42}$$

pour tout a_i, a_i' tels que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i + a_i' = 0$. Donc, il existe $C(\boldsymbol{x}, t, y_s)$ tels que

$$A_i v_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = J_i w_i^\infty(\boldsymbol{x}, t, y_s) = C(\boldsymbol{x}, t, y_s). \tag{20.3.43}$$

Le lemme 20.3.11 permet de calculer $C(\boldsymbol{x}, t)$:

$$C(\boldsymbol{x}, t, y_s) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{J_i} = L\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}. \tag{20.3.44}$$

D'où,

$$C(\boldsymbol{x}, t, y_s) = \frac{L\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x}, t, y_s)}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{J_j}}, \qquad \square$$

Pour obtenir l'équation variationnelle satisfaite par $\widetilde{u}^\infty$, il suffit d'insérer les égalités (20.3.41) dans l'équation (20.3.35) pour ϕ indépendant de y_1. Nous obtenons alors, pour tout temps T positif, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$,

$$\begin{aligned}
\bar{\chi} \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,y_s)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \sum_{i=0}^{p-1} A_i\bar{\chi}_i \iint_{\Omega\times(0,T)} \nabla_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\cdot\nabla_{2\mathrm{D}}\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \bar{\chi} \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \frac{L\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)}{\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{J_j}} \frac{\partial \phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^+ + K_i^-}{L} \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)\phi(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
+ (1-\bar{\chi})\frac{L}{\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{J_j}} \iint_{\Omega\times(0,T)} \int_Y \frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\frac{\partial \phi}{\partial y_s}(\boldsymbol{x},t,y_s)\,\mathrm{d}y_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
= 0. \quad (20.3.45)
\end{aligned}$$

La solution de cette équation étant unique pour une condition initiale donnée, toute la suite $\widetilde{u}^N$ converge.

Dans cette section, nous avons établi le théorème suivant :

Théorème 20.3.14. *Soit une suite de conditions initiales u_0^N, satisfaisant l'estimation* (20.3.26). *Notons $\bar{u}_0^N$ le prolongement de u_0^N par* 0 *en dehors de Ω^N. Supposons, de plus que la suite $\bar{u}_0^N$ converge triple-échelles vers u_0^∞. Il existe un prolongement $\widetilde{u}^N$ de u^N dans $\mathrm{H}^1(\Omega\times(0,T))$, satisfaisant les estimations* (20.3.27). *Toute la suite $\widetilde{u}^N$ converge triple-échelles vers la fonction $(\boldsymbol{x},t,y_s)\mapsto\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)$ appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+\times Y)$,* 1 *périodique sur la variable y_s et telle que*

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}^\infty &\in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{H}^1_\#(Y))),\\
\widetilde{u}^\infty &\in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2((0,L)\times Y;\mathrm{H}^1(B))),\\
\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial t} &\in \mathrm{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+\times Y),
\end{aligned}$$

De plus, la fonction $\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t,y_s)$ satisfait l'équation variationnelle (20.3.45), *et est donc solution du système suivant :*

$$\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial t} - A_T \triangle_{2\mathrm{D}}\widetilde{u}^\infty - A_N\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial {y_s}^2} + \bar{K}\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad (20.3.46\mathrm{a})$$

dans $B \times \mathbb{R}^+ \times Y$, pour tout x_3 dans $(0, L)$, et les conditions de bord :

$$\frac{\partial \widetilde{u}^\infty}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \textit{sur } \partial B \times (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times Y, \tag{20.3.46b}$$

$$\widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t, 0) = \widetilde{u}^\infty(\boldsymbol{x}, t, 1), \qquad \textit{pour tout } \boldsymbol{x}, t \textit{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{20.3.46c}$$

et la condition initiale :

$$\widetilde{u}^\infty(\cdot, 0, \cdot) = u_0^\infty \qquad \textit{dans } \Omega \times Y. \tag{20.3.46d}$$

où

$$A_T = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\bar{\chi}_i}{\bar{\chi}} A_i, \qquad A_N = \frac{1}{\bar{\chi}} \frac{1}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{J_j}},$$

$$\bar{K} = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^- + K_i^+}{L\bar{\chi}} \right),$$

et

$$\triangle_{2\mathrm{D}} = \frac{\partial}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial}{\partial {x_2}^2}.$$

Remarque 20.3.15. La fonction homogénéisée $\widetilde{u}^\infty$ vérifie donc l'équation de la chaleur pour les variables d'espace x_1, x_2, y_s. La transmission de chaleur sur l'axe d'homogénéisation se fait donc à une échelle de longueur $\frac{1}{\sqrt{N}}$, où N est le nombre de mailles d'homogénéisation. En particulier, cela implique qu'à l'échelle macroscopique, la transmission de chaleur est interrompue sur l'axe d'homogénéisation. En effet, si nous intégrons sur l'échelle y_s le système (20.3.46), nous obtenons une simple équation de la chaleur 2D ou aucun terme ne dépend de la troisième variable d'espace.

20.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé les méthodes de la convergence double-échelles et triple-échelles pour homogénéiser l'équation de la chaleur linéaire alors même que la séquence de trous n'est pas acceptable au sens de [20]. La linéarité est essentielle pour tous les cas sauf $\rho = 1$. En effet, nous ne disposons de la compacité forte que dans ce dernier cas. Généraliser rigoureusement les méthodes employées ici pour l'équation de Landau-Lifchitz qui est non linéaire ne serait possible qu'avec un critère utilisable de compacité forte pour la convergence double-échelles.

Chapitre 21

Homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz dans un domaine multicouche

L'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz présente des difficultés importantes. En effet, l'équation est non linéaire. Tout passage à la limite devra tenir compte des produits ponctuels de fonctions. En l'absence de compacité pour la convergence double-échelles forte, le passage à la limite dans les produits est difficile. Il n'est pas possible d'utiliser le concept de solutions fortes car le temps d'existence dépend fortement de l'épaisseur de la couche la plus mince. Aussi, rien n'interdit au temps d'existence de tendre vers 0 lorsque l'épaisseur d'homogénéisation tend elle-même vers 0. Aussi, devons nous homogénéiser en utilisant le concept de solutions faibles. La non unicité des solutions de l'équation de Landau-Lifchitz peut rendre le calcul d'une limite difficile même lorsque seule l'interaction d'échange est présente.

21.1 L'équation de Landau-Lifchitz dans les arrangements multicouches

Nous reprenons les mêmes notations qu'à la section 20.1. Nous supposons que les constantes de super-échange et d'anisotropie surfacique, voir section 2.3.5, dépendent de l'épaisseur de l'espaceur. En particulier, nous supposons que si N est le nombre de mailles d'homogénéisation, alors

$$K_s(N) = \frac{K_s}{N^{\varpi}}, \qquad J_1(N) = \frac{J_1}{N^{\rho}}, \qquad J_2(N) = \frac{J_2}{N^{\rho}}.$$

Nous nous dotons de p constantes d'échanges $(A_0, \ldots, A_{p-1})$, de p matrices d'anisotropie $(\mathbf{K}_0, \ldots, \mathbf{K}_{p-1})$, de $2p$ constantes d'anisotropies surfaciques $(K^+_{s,0}, \ldots, K^+_{s,p-1})$

et $(K^-_{s,0},\dots,K^-_{s,p-1})$, de p constantes de super-échange quadratique $(J_{1,0},\dots,J_{1,p-1})$, ainsi que de p constantes de super-échange biquadratique $(J_{2,0},\dots,J_{2,p-1})$. Choisissons aussi deux paramètres : ϖ parmi $\{0,1\}$ et ρ parmi $\{0,-1\}$. Nous rappelons que l'opérateur de champ démagnétisant est défini au chapitre 3.

Nous nous donnons, pour tout entier naturel N non nul, une condition initiale $\boldsymbol{m}_0^N$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^N)$, $|\boldsymbol{m}_0^N| = 1$. Nous choisissons $\boldsymbol{m}^N$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega^N))$ parmi les solutions de l'équation de Landau-Lifchitz au sens de la définition 4.2.2.

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega^N\times(0,T)} \frac{\partial \boldsymbol{m}^N}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \alpha\iint_{\Omega^N\times(0,T)}\left(\boldsymbol{m}^N\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}^N}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad= (1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1} A_i\iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\sum_{j=1}^{3}\left(\boldsymbol{m}^N\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}^N}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad\quad-\beta(1+\alpha^2)\iint_{\Omega^N\times(0,T)}\big(\boldsymbol{m}^N\wedge\mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}^N)\big)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad\quad-(1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{\Omega_i^N\times(0,T)}\big(\boldsymbol{m}^N\wedge\mathbf{K}_i\boldsymbol{m}^N\big)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad-(1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K^+_{s,i}}{N^\varpi}\iint_{\Gamma_i^{N,+}\times(0,T)}(\boldsymbol{\nu}\cdot\gamma\boldsymbol{m}^N)(\gamma\boldsymbol{m}^N\wedge\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad-(1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K^-_{s,i}}{N^\varpi}\iint_{\Gamma_i^{N,-}\times(0,T)}(\boldsymbol{\nu}\cdot\gamma\boldsymbol{m}^N)(\gamma\boldsymbol{m}^N\wedge\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\quad-(1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{J_{1,i}}{N^\rho}\iint_{\Gamma_i^{N}\times(0,T)}(\gamma^+\boldsymbol{m}^N\wedge\gamma^-\boldsymbol{m}^N)\cdot(\gamma^+\boldsymbol{\phi}-\gamma^-\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&-2(1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{J_{2,i}}{N^\rho}\iint_{\Gamma_i^{N}\times(0,T)}(\gamma^+\boldsymbol{m}^N\cdot\gamma^-\boldsymbol{m}^N)(\gamma^+\boldsymbol{m}^N\wedge\gamma^-\boldsymbol{m}^N)\cdot(\gamma^+\boldsymbol{\phi}-\gamma^-\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{21.1.1a}$$

avec les contraintes

$$\boldsymbol{m}^N(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^N \text{ sur } \Omega^N, \tag{21.1.1b}$$
$$|\boldsymbol{m}^N| = 1 \text{ p.p. sur } \Omega^N\times\mathbb{R}^+, \tag{21.1.1c}$$

et l'inégalité d'énergie

$$\mathrm{E}^N(\boldsymbol{m}^N(\cdot,T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\int_0^T\left\|\frac{\partial\boldsymbol{m}^N}{\partial t}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^N)}\mathrm{d}t \le \mathrm{E}^N(\boldsymbol{m}(\cdot,0)). \tag{21.1.1d}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^N(\boldsymbol{u}) = {} & \sum_{i=0}^{p-1} \frac{A_i}{2} \|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_i^N)} + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega^N} |\mathcal{H}_d(\boldsymbol{u})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Omega_i^N} \boldsymbol{u} \cdot (\mathbf{K}_i \boldsymbol{u}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_{s,i}^+}{N^{\varpi}} \int_{\Gamma_i^{N,+}} |\gamma \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\nu}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\
& + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_{s,i}^-}{N^{\varpi}} \int_{\Gamma_i^{N,-}} |\gamma \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\nu}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=0}^{p-1} J_{1,i}^- \int_{\Gamma_i^N} |\gamma^+ \boldsymbol{u} - \gamma^- \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\
& + \sum_{i=0}^{p-1} J_{2,i}^- \int_{\Gamma_i^N} |\gamma^+ \boldsymbol{u} \wedge \gamma^- \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).
\end{aligned} \tag{21.1.2}$$

L'existence de solutions est donnée par le théorème 6.1.1. Dorénavant, nous ne considérons que des suites de conditions initiales $\boldsymbol{m}_0^N$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega^N)$, $|\boldsymbol{m}_0^N| = 1$, satisfaisant, pour une constante positive $C > 0$ indépendante de N,

$$\mathrm{E}^N(\boldsymbol{m}_0^N) \leq C, \tag{21.1.3}$$

i.e. dont l'énergie initiale reste bornée.

21.2 Le cas trivial n'est pas trivial

Nous appelons cas trivial, le cas où $p = 1$, $K_{s,i}^{\pm} = 0$, $\mathbf{K}_i = 0$, $J_{1,i} = 0$ et $J_{2,i} = 0$, et $A_i = A$ indépendante de i et $\beta = 0$. Aucune interaction n'est présente entre deux couches distinctes. Ce cas semble facile à traiter à première vue. Nous allons voir que la non linéarité et la non unicité des solutions de l'équation de Landau-Lifchitz compliquent considérablement l'analyse rigoureuse. Nous pouvons résoudre ce problème en prenant la limite à x_3 fixée.

Pour tout x_3 dans $(0, L)$, nous notons z_N^+, z_N^-, les bornes supérieures et inférieures de la composante connexe de I^N auquel appartient x_3. Notons $\boldsymbol{v}^N$ la fonction définie sur $B \times (0,1) \times \mathbb{R}^+$ par

$$\boldsymbol{v}^N(x, y, z, t) = \boldsymbol{m}^N \left(x, y, \frac{z - z_N^-}{z_N^+ - z_N^-}, t \right).$$

Notons aussi $\boldsymbol{v}_0^N = \boldsymbol{v}^N(\cdot, 0)$, la condition initiale. Désignons par E'^N l'énergie

$$\mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}) = \frac{A}{2} \int_{B \times (0,1)} \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2} \right|^2 + \left(\frac{N}{z_N^+ - z_N^-} \right)^2 \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_3} \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{21.2.1}$$

Nous avons alors l'inégalité d'énergie

$$\mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}^N(\cdot,T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\int_0^T \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}^N}{\partial t}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)} \mathrm{d}t \leq \mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}^N(\cdot,0)), \tag{21.2.2}$$

pour tout $T > 0$.

Nous allons maintenant prendre la limite pour $\boldsymbol{v}^N$. Ce calcul de limite a été effectué dans [8, H. Ammari, L. Halpern et K. Hamdache] [13, G. Carbou], et [37, K. Hamdache et M. Tilioua]. Nous avons alors en l'absence de toute interaction entre couches, grâce à (21.2.2) que $|\boldsymbol{v}^N| = 1$ p.p. dans $\Omega^N \times \mathbb{R}^+$ et

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}^N}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)} \leq C\mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}_0^N), \qquad \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}^N}{\partial x_1}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)} \leq C\mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}_0^N), \tag{21.2.3a}$$

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}^N}{\partial x_2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)} \leq C\mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}_0^N), \qquad \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)} \leq C\mathrm{E}'^N(\boldsymbol{v}_0^N). \tag{21.2.3b}$$

Supposons que $\mathrm{E}(\boldsymbol{v}_0^N)$ est bornée indépendamment de N, ce qui est le cas si par exemple $\nabla \boldsymbol{m}_0^N$ est borné dans $\mathrm{L}^\infty(0,L;\mathbb{L}^2(B))$. Supposons aussi qu'il existe $\boldsymbol{v}_0$ tel que

- Toute la suite $\boldsymbol{v}_0^N$ tend fortement vers $\boldsymbol{v}_0$ dans $\mathbb{L}^2(B\times(0,L))$, ce qui est toujours le cas si il existe $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathrm{L}^\infty((0,L);\mathbb{L}^2(B))$ tel que $\boldsymbol{m}_0^N$ tende vers $\boldsymbol{m}_0$ dans $\mathrm{L}^\infty((0,L);\mathbb{L}^2(B))$.
- Toute la suite $N\frac{\partial \boldsymbol{v}_0^N}{\partial x_3}$ tend fortement vers 0 dans $\mathbb{L}^2(B\times(0,L))$, ce qui est toujours le cas si $\frac{\partial \boldsymbol{m}_0}{\partial x_3}$ tend vers 0 dans $\mathrm{L}^\infty((0,L);\mathbb{L}^2(B))$.

Donc, il existe $\boldsymbol{v}$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(B\times(0,1)))$, telle qu'à une sous-suite près, pour tout $T>0$, $\boldsymbol{v}^N$ tend faiblement dans $\mathbb{H}^1(B\times(0,1)\times(0,T))$. D'après le théorème 2 et la remarque 3 de G. Carbou [13], $\boldsymbol{v}$ est indépendant de la troisième variable d'espace et vérifie

- $\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{v}_0$.
- $\boldsymbol{v}$ appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(B))$.
- $|\boldsymbol{v}| = 1$ presque partout.
- $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ appartient à $\mathbb{L}^2(B\times(0,1)\times\mathbb{R}^+)$.
- Pour tout ψ dans $\mathcal{D}(B\times\mathbb{R}^+)$,

$$\iint_{B\times\mathbb{R}^+}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \alpha\boldsymbol{v}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t}\right)\psi\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t = A\sum_{j=1}^{3}\iint_{B\times\mathbb{R}^+}\left(\boldsymbol{v}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t. \tag{21.2.4}$$

- Pour tout $T>0$,

$$\mathrm{E}_2(\boldsymbol{v}(\cdot,T)) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\int_0^T \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(B)} \mathrm{d}t \leq \mathrm{E}_2(\boldsymbol{v}_0),$$

où

$$\mathrm{E}_2(\boldsymbol{u}) = A \int_B \left(\left| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} \right|^2 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

La convergence étant H^1 faible, elle est aussi $\mathcal{C}^0(0,1;\mathrm{H}^s)$ uniforme pour $0 < s < \frac{1}{2}$. Donc, pour tout réel z dans l'intervalle $(0,L)$, la trace de $\boldsymbol{m}$ sur le plan $x_3 = z$ converge à une sous-suite près vers une solution de l'équation de Landau-Lifchitz faible $2D$. Seulement, la sous-suite dépend de la côte x_3. En effet, l'absence d'unicité des solutions à cette équation ne nous permet pas d'affirmer que toute la suite converge et de faire le lien entre la convergence à x_3 fixé et la convergence faible $\mathbb{L}^2(B \times (0,L) \times \mathbb{R}+)$.

Nous avons vu que le cas où seul l'échange est présent ne peut être traité de manière complètement satisfaisante. Les interactions de super-échange et d'anisotropie surfacique vont donc être primordiales dans l'analyse de l'homogénéisation car ce sont elles qui assureront une rigidité suffisante du système pour que le passage à la limite puisse être fait rigoureusement.

21.3 Homogénéisation et anisotropie surfacique

Supposons la présence d'anisotropie surfacique $K^{\pm}_{s,i}(N) > 0$. Nous supposons que $K^{\pm}_{s,i}(N) = \frac{K^{\pm}_{s,i}}{N^{\varpi}}$, avec $K^{\pm}_{s,i}$ des constantes strictement positives. Dans cette section, nous choisissons $\beta = 1$ et $\varpi = 0$.

Dans ce cas, nous allons voir que l'anisotropie surfacique domine tout autre interaction et force la stationnarité. Notons $\boldsymbol{e}_z$ le vecteur unitaire $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Pour tout temps $T > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^N} |\boldsymbol{m}^N(\boldsymbol{x},T) \wedge \boldsymbol{e}_z|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_B \int_{\frac{L}{N}\left(z_i^+ + k\right)}^{\frac{L}{N}\left(z_{i+1}^- + k\right)} |\boldsymbol{m}^N(\hat{\boldsymbol{x}},z,T) \wedge \boldsymbol{e}_z|^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}} \\
&\le \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Gamma^{N,+}_{i,k}} \int_0^{\frac{L}{N}\bar{\chi}_i} |\boldsymbol{m}^N(\boldsymbol{x} + z\boldsymbol{e}_z, T) \wedge \boldsymbol{e}_z|^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}) \\
&\le \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Gamma^{N,+}_{i,k}} \int_0^{\frac{L}{N}\bar{\chi}_i} \left| \left(\gamma \boldsymbol{m}^N(\boldsymbol{x},T) + \int_0^z \frac{\partial \boldsymbol{m}^N}{\partial x_3}(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{e}_z, T) \,\mathrm{d}s \right) \wedge \boldsymbol{e}_z \right|^2 \mathrm{d}z \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Donc, il existe une constante $C > 0$, indépendante de N, telle que

$$\|\boldsymbol{m}^N \wedge \boldsymbol{e}_z\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)} \le C \left(\frac{\|\boldsymbol{m}^N \wedge \boldsymbol{e}_z\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^{N,+})}}{N} + \frac{\|\frac{\partial \boldsymbol{m}^N}{\partial x_3}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)}}{N^2} \right).$$

Or, d'après l'inégalité d'énergie (21.1.1d) les deux quantités $\|\boldsymbol{m}^N \wedge \boldsymbol{e}_z\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^{N,+})}$ et $\|\frac{\partial \boldsymbol{m}^N}{\partial x_3}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega^N)}$ sont dominés par $\mathrm{E}^N(\boldsymbol{m}_0^N)$. Donc, d'après la contrainte 21.1.3, que nous avons imposé sur les conditions initiales, il existe une constante $C > 0$, indépendante de N, telle que

$$\|\boldsymbol{m}^N \wedge \boldsymbol{e}_z\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathbb{L}^2(\Omega^N))} \leq \frac{C}{\sqrt{N}}. \tag{21.3.1}$$

Nous allons maintenant étudier les deux cas $\rho = 0$ ou $\rho = 1$ où nous rappelons que ρ est l'exposant qui modélise la variation de la constante d'échange en fonction du nombre N de mailles d'homogénéisation. $J_1(N) = \frac{J_1}{N^\rho}$.

21.3.1 Le cas $\rho = 0$

D'après l'inégalité d'énergie (21.1.1d), si $\rho = 0$, nous avons

$$\|\boldsymbol{m}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega^N))} \leq C, \qquad \|\gamma^+\boldsymbol{m}^N - \gamma^-\boldsymbol{m}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Gamma^{N,-}))} \leq C.$$

D'après la proposition B.1.1, il existe un prolongement de $\boldsymbol{m}^N$ sur $\Omega \times (0,T)$, noté $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$ qui vérifie

$$\|\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \leq 1, \qquad \left\|\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))} \leq C, \qquad \left\|\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_1}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C, \tag{21.3.2a}$$

$$\left\|\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C, \quad \left\|\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{N}}. \tag{21.3.2b}$$

D'après le théorème 18.1.6, il existe $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega \times (0,T) \times (0,1))$ pour tout temps $T > 0$, limite au sens de la convergence double-échelles d'une sous-suite de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$, i.e.

$$\lim_{N\to\infty} \iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{\boldsymbol{m}}^N(\boldsymbol{x},t)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = \iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\int_Y \phi\left(\boldsymbol{x},t,y\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.$$

D'après (21.3.2b) et la proposition 18.1.8, $\boldsymbol{m}^\infty$ ne dépend pas de la variable rapide y. Choisissons $\boldsymbol{\phi} = \phi \boldsymbol{e}_z$, ϕ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^+})$, dans (21.1.1a). Nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\iint_{Q_T^N} \frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \cdot \boldsymbol{e}_z)}{\partial t} \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = \alpha & \underbrace{\iint_{Q_T^N} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t} \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t}_{I} \\
& - \underbrace{(1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{3} A_i \iint_{Q_{T,i}^N} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t}_{II} \\
& + (1+\alpha^2) \underbrace{\iint_{Q_T^N} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \mathcal{H}_d(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N) \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t}_{III} \\
& + (1+\alpha^2) \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{Q_{T,i}^N} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \mathbf{K}_i \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t}_{IV} \\
& + (1+\alpha^2) \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} J_{1,i} \iint_{\Gamma_i^N \times (0,T)} (\gamma^+ \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \gamma^- \widetilde{\boldsymbol{m}}^N (\gamma^+ \phi - \gamma^- \phi) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t}_{V} \\
& + 2(1+\alpha^2) \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} J_{2,i} \iint_{\Gamma_i^N \times (0,T)} (\gamma^+ \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \cdot \gamma^- \widetilde{\boldsymbol{m}}^N)(\gamma^+ \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \gamma^- \widetilde{\boldsymbol{m}}^N (\gamma^+ \phi - \gamma^- \phi) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t}_{VI},
\end{aligned}
\tag{21.3.3}
$$

Les termes d'anisotropie surfacique ont disparu car $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{e}_z = 0$. D'après l'inégalité (21.3.1) et le théorème 3.2.1, les termes I, II, III et IV tendent vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Les termes V et VI qui contiennent le super-échange tendent aussi vers 0. En effet, comme $|\boldsymbol{m}| = 1$, ils sont bornés par

$$
\begin{aligned}
C \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \| \gamma \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{\nu} \|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Gamma_i^{N,+}))} \right)^{\frac{1}{2}} & \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \| \gamma^+ \phi - \gamma^- \phi \|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Gamma_i^N))} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{C'}{N^{\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

En conséquence, en prenant la limite dans (21.3.3), nous obtenons

$$
\iint_{Q_T^N} \frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \cdot \boldsymbol{e}_z)}{\partial t} \phi(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = 0,
$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)})$. Donc,

$$\frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \cdot \boldsymbol{e}_z)}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{21.3.4}$$

Comme $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \boldsymbol{e}_z = 0$, nous obtenons que $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$ ne dépend pas du temps.

21.3.2 Le cas $\rho = 1$

Ce cas est analogue au précédent. D'après l'inégalité d'énergie (21.1.1d), et les conditions 21.1.3 que nous avons imposé sur les conditions initiales, si $\rho = 1$, nous avons

$$\|\boldsymbol{m}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega^N))} \leq C, \qquad \|\gamma^+\boldsymbol{m}^N - \gamma^-\boldsymbol{m}^N\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Gamma^{N,-}))} \leq \frac{C}{N}.$$

D'après la proposition B.1.1, il existe un prolongement $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$ vérifiant

$$\|\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \leq 1, \qquad \left\|\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times(0,T))} \leq C, \qquad \left\|\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_1}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C, \tag{21.3.5a}$$

$$\left\|\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C, \quad \left\|\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_3}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq \frac{C}{N}. \tag{21.3.5b}$$

Ceci, en raison de la moindre importance du super-échange. Il existe $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega\times(0,T)\times(0,1))$ pour tout temps $T > 0$, limite au sens de la convergence double-échelles d'une sous-suite de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$, i.e.

$$\lim_{N\to\infty}\iint_{\Omega\times(0,T)} \widetilde{\boldsymbol{m}}^N(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},\frac{N}{L}x_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iint_{\Omega\times(0,T)}\int_Y \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},y)\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{21.3.6}$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)}) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$. La fonction $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ reste constante sur chaque intervalle I_i. Ce résultat se prouve exactement de la même manière que le lemme 20.3.1. Notons $\widetilde{\boldsymbol{m}}_i^\infty(\boldsymbol{x},t)$ la valeur de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ sur l'intervalle $\widetilde{I}_i$. Choisissons $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3)\boldsymbol{e}_z$, ϕ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times\mathbb{R}^+})\otimes\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$, dans (21.1.1a), telle que $\phi(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ est constant sur chaque intervalle $\widetilde{I}_i$. Notons $\phi_i(\boldsymbol{x},t)$ la valeur de $\phi(\boldsymbol{x},t,\cdot)$

sur l'intervalle $\widetilde{I}_i$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} \frac{\partial(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\cdot\boldsymbol{e}_z)}{\partial t}\phi_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \alpha \sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t}\phi_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad - (1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{3} A_i \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + (1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\mathcal{H}_d(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N)\phi_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + (1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega_i^N\times(0,T)} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\mathbf{K}_i\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\phi_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + (1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1} \frac{J_{1,i}}{N}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\gamma^-\widetilde{\boldsymbol{m}}^N(\gamma^+\phi_i-\gamma^-\phi_{i-1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&+2(1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1} \frac{J_{2,i}}{N}\iint_{\Gamma_i^N\times(0,T)} (\gamma^+\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\cdot\gamma^-\widetilde{\boldsymbol{m}}^N)(\gamma^+\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\gamma^-\widetilde{\boldsymbol{m}}^N(\gamma^+\phi_i-\gamma^-\phi_{i-1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{21.3.7}$$

Comme à la section précédente, les quatre premiers termes du second membre tendent vers 0, ceci pour les mêmes raisons. Les deux derniers termes du second membre sont bornés par

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{N^{\frac{1}{2}}}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{N-1}\|\gamma\boldsymbol{m}^N\wedge\boldsymbol{\nu}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Gamma_{i,k}^{N,+}))}\right)^{\frac{1}{2}}\times \\
&\qquad\times\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{N-1}\|\gamma^+\phi_{i+1}-\gamma^-\phi_i\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Gamma_{i,k}^{N}))}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C'}{N^{\frac{1}{2}}}\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+\times Y)},
\end{aligned} \tag{21.3.8}$$

et tendent aussi vers 0. En conséquence, le passage à la limite dans l'équation (21.3.7), quand N tend vers $+\infty$, donne

$$\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}_i^\infty}{\partial t} = 0, \tag{21.3.9}$$

pour tout entier i, $0\le i\le p-1$. Ainsi la limite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$ ne dépend que de la variable lente $\boldsymbol{x}$ et de la couche i à laquelle la variable rapide y appartient. La faiblesse du super-échange n'impose toutefois pas dans ce cas la constance de $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$ à travers les différentes p couches.

21.3.3 Interprétation physique

Lorsque l'anisotropie surfacique domine tous les autres termes, quand la constante d'anisotropie surfacique ne dépend pas de N, la limite est toujours stationnaire en temps et s'aligne sur la normale à la surface qui sépare deux couches. L'interprétation physique est qu'un arrangement multicouche est extrêmement rigide et que l'énergie nécessaire pour modifier sa magnétisation devient infini en même temps que le nombre de couches. Pour une analyse expérimentale du retournement de la magnétisation dans les arrangements multicouches, nous pouvons consulter [42].

21.4 Homogénéisation et super-échange

Dans cette section, nous homogénéisons l'équation de Landau-Lifchitz lorsque l'anisotropie surfacique n'est pas suffisamment forte pour rigidifier le système. Nous supposons l'exposant d'anisotropie surfacique ϖ égal à 1. Nous ne pouvons traiter ce problème d'homogénéisation que si l'exposant de super-échange $\rho = -1$ dans $J_1(N) = \frac{J_1}{N^\rho}$. Nous supposons aussi $\beta = 1$. En effet, le seul résultat connu permettant de passer à la limite dans la convergence des produits est peu utile en pratique. Il s'agit du résultat donné par le théorème 18.1.7. Lorsque $J_1(N) = NJ_1$, nous disposons d'un opérateur de prolongement adéquat[1], voir proposition B.1.1 donc d'une compacité forte permettant d'appliquer le théorème 18.1.7 et de passer à la limite dans les produits. En effet, dans ce cas, l'inégalité d'énergie (21.1.1d) et les conditions 21.1.3 entraînent l'existence d'une constante $C > 0$, que

$$\|\boldsymbol{m}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega^N\times\mathbb{R}^+)} = 1, \qquad \|\nabla\boldsymbol{m}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega^N))} \leq C,$$
$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{m}^N}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^N\times\mathbb{R}^+)} \leq C, \qquad N\|\gamma^+\boldsymbol{m}^N - \gamma^-\boldsymbol{m}^N\|^2_{\mathbb{L}^2(\Gamma^N)} \leq C.$$

D'après la proposition B.1.1, Il existe donc une constante $C > 0$, et pour tout entier naturel non nul N, une fonction $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$ appartenant à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1(\Omega))$ et à $\mathrm{H}^1(\Omega\times(0,T))$, telles que

$$\|\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \leq 1, \tag{21.4.1a}$$
$$\|\nabla\widetilde{\boldsymbol{m}}^N\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega))} \leq C, \tag{21.4.1b}$$
$$\left\|\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega\times\mathbb{R}^+)} \leq C. \tag{21.4.1c}$$

[1] Dans Hamdache [35], on suppose, lemme 3.2, que cet opérateur de prolongement existe lorsque la constante d'échange $J_1(N)$ ne dépend pas de la distance intercouche, ce qui est erroné. Voir le contre-exemple section B.2.

et nous avons aussi

$$\frac{1}{N}\|N(\gamma^{+}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N}-\gamma^{-}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N})\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}(\Gamma^{N})}\leq C. \tag{21.4.1d}$$

Nous allons passer à la limite au sens de la convergence double-échelles. Pour cela, nous utilisons les théorèmes 18.1.6 et 18.1.9 et la proposition 18.1.8. D'après les estimations (21.4.1), il existe,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\boldsymbol{m}}^{\infty}\text{dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{+};\mathbb{H}^{1}(\Omega))\cap \mathrm{H}^{1}(\Omega\times(0,T)),\\
&\widetilde{\boldsymbol{m}}_{1}^{\infty}\text{dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{+};\mathrm{L}^{2}(\Omega;\mathbb{H}^{1}_{\#}(Y))),\\
&\boldsymbol{w}_{i}^{\infty}\text{dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{+};\mathbb{L}^{2}(\Omega)), \qquad\qquad 0\leq i\leq p-1,\\
&\boldsymbol{h}^{\infty}\text{dans } \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^{+};\mathbb{L}^{2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{3})).
\end{aligned}$$

telles que, pour tout ϕ dans $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega\times\mathbb{R}^{+}})\otimes\mathcal{C}^{\infty}_{\#}(Y)$, on ait, à une sous-suite près, les convergences suivantes :

$$\lim_{N\to\infty}\iint_{Q_T}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x},t)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{\infty}(\boldsymbol{x},t)\int_Y\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \tag{21.4.2a}$$

$$\lim_{N\to\infty}\iint_{Q_T}\mathcal{H}_d(\chi^{N}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N})\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}\int_Y\boldsymbol{h}^{\infty}(\boldsymbol{x},t,y)\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \tag{21.4.2b}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\iint_{Q_T}\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\\
&\qquad=\iint_{Q_T}\int_Y\left(\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^{\infty}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^{\infty}}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\right)\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{21.4.2c}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\iint_{\Gamma^N\times(0,T)}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x})\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})=\frac{1}{L}\iint_{Q_T}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{\infty}(\boldsymbol{x})\sum_{i=0}^{p-1}\phi(\boldsymbol{x},t,z_i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \tag{21.4.2d}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\iint_{\Gamma^N\times(0,T)}\left(\gamma^{+}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x},t)-\gamma^{-}\widetilde{\boldsymbol{m}}^{N}(\boldsymbol{x},t)\right)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\\
&\qquad=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{p-1}\iint_{Q_T}\boldsymbol{w}_i^{\infty}(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t,z_i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{21.4.2e}$$

La limite dans (21.4.2d) est toujours valable si nous remplaçons Γ^N par $\Gamma^{N,+}$ ou $\Gamma^{N,-}$.

Nous avons,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{Q_T^N} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi}^N \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \alpha \iint_{Q_T^N} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial t} \right) \cdot \boldsymbol{\phi}^N \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad = (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{Q_{T,i}^N} \sum_{j=1}^{3} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_j} \left(\boldsymbol{x}, t, \frac{N}{L} x_3 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + (1+\alpha^2) \frac{N}{L} \sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{Q_{T,i}^N} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^N}{\partial x_3} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y} \left(\boldsymbol{x}, t, \frac{N}{L} x_3 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2) \iint_{Q_T^N} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \left(\mathcal{H}_d(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N) + \mathbf{K}_i \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \right) \right) \cdot \boldsymbol{\phi}^N \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_{s,i}^+}{N} \iint_{\Gamma_i^{N,+} \times (0,T)} (\boldsymbol{\nu} \cdot \gamma \widetilde{\boldsymbol{m}}^N)(\gamma \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{\nu}) \cdot \gamma \boldsymbol{\phi}^N \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_{s,i}^-}{N} \iint_{\Gamma_i^{N,-} \times (0,T)} (\boldsymbol{\nu} \cdot \gamma \widetilde{\boldsymbol{m}}^N)(\gamma \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \boldsymbol{\nu}) \cdot \gamma \boldsymbol{\phi}^N \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2) N \sum_{i=0}^{p-1} \Bigg(J_{1,i} \iint_{\Gamma_i^N \times (0,T)} (\gamma^+ \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \gamma^- \widetilde{\boldsymbol{m}}^N) \cdot (\gamma^+ \boldsymbol{\phi}^N - \gamma^- \boldsymbol{\phi}^N) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \\
&\quad - 2 J_{2,i} \iint_{\Gamma_i^N \times (0,T)} (\gamma^+ \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \cdot \gamma^- \widetilde{\boldsymbol{m}}^N)(\gamma^+ \widetilde{\boldsymbol{m}}^N \wedge \gamma^- \widetilde{\boldsymbol{m}}^N) \cdot (\gamma^+ \boldsymbol{\phi}^N - \gamma^- \boldsymbol{\phi}^N) \,\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t \Bigg),
\end{aligned}
\tag{21.4.3}
$$

pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times \mathbb{R}^+}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\widetilde{I}; \mathbb{R}^3)$, et où $\boldsymbol{\phi}^N(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t, \frac{N}{L} x_3)$. Choisissons $\boldsymbol{\phi}$ indépendante de la variable rapide y et prenons la limite dans l'équation (21.4.3). D'après les théorèmes 18.1.7 et 18.1.11 nous pouvons passer à la limite dans les produits et obtenir

$$
\begin{aligned}
&\bar{\chi} \iint_{Q_T} \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \bar{\chi} \alpha \iint_{Q_T} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial t} \right) \cdot \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad = (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} A_i \iint_{Q_T} \sum_{j=1}^{2} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} A_i \bar{\chi}_i \iint_{Q_T} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \int_{I_i} \Big(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3} + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^\infty}{\partial y} \Big) \,\mathrm{d}y \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_3} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} \iint_{Q_T} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \bar{\chi}_i \mathbf{K}_i \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) \boldsymbol{\phi} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (1+\alpha^2) \iint_{Q_T} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \int_I \boldsymbol{h}^\infty \, \mathrm{d}y) \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\
&- (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_{s,i}^+ + K_{s,i}^-}{L} \iint_{Q_T} (\boldsymbol{e}_z \cdot \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty)(\gamma \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\
&+ (1+\alpha^2) \sum_{i=0}^{p-1} (J_{1,i} + 2J_{2,i}) \theta_i \iint_{Q_T} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \boldsymbol{w}_i^\infty) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_3} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t, \quad (21.4.4)
\end{aligned}
$$

pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega \times (0,T)}; \mathbb{R}^3)$. Pour obtenir l'équation à laquelle satisfait $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$, il ne reste plus qu'à établir des relations supplémentaires entre $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$, $\widetilde{\boldsymbol{m}}_1^\infty$, $\boldsymbol{w}^\infty$ et $\boldsymbol{h}^\infty$. Ces relations sont données par les propositions 21.4.1 et 21.4.2.

Proposition 21.4.1. *Nous avons, pour tout entier i, $0 \le i \le p-1$,*

$$
A_i \Big(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x},t) \Big) = \frac{\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)}{\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i} + \frac{1}{L(J_{1,i}+2J_{2,i})} \right)}, \quad (21.4.5a)
$$

$$
(J_{1,i} + 2J_{2,i}) \, \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x},t) = \frac{\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)}{\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i} + \frac{1}{L(J_{1,i}+2J_{2,i})} \right)}. \quad (21.4.5b)
$$

Preuve : Divisons l'équation (21.4.3) par N et prenons la limite, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega \times (0,T)} \int_{I_i} \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y) \right) \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\
&+ \sum_{i=0}^{p-1} \iint_{\Omega \times (0,T)} (J_{1,i} + 2J_{2,i}) \, (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t) \wedge \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x},t)) \cdot (\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t,z_i^+) - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t,z_i^-)) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Choisissant $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ à support compact dans $\widetilde{I}$. Nous obtenons que $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ est constant sur chaque intervalle $\widetilde{I}_i$. Notons $\boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x},t)$ la valeur de $\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,\cdot)$ sur l'intervalle $\widetilde{I}_i$. Nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p-1} \iint_{Q_T} \int_{I_i} A_i \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x},t) \right) \right) \cdot [\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t,\cdot)]_{z_i^+}^{z_{i+1}^-} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{p-1} \iint_{Q_T} (J_{1,i} + 2J_{2,i}) \, (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t) \wedge \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x},t)) \cdot [\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t,\cdot)]_{z_i^-}^{z_i^+} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $\boldsymbol{x}, t$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$, tout suite de constantes a_i, a_i' dont la somme est nulle, $\sum_{i=0}^{p-1} a_i + a_i' = 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{p-1} \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \left(a_i A_i \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) \right) + a_i' \left(J_{1,i} + 2J_{2,i}\right) \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) \right) = 0.$$

Donc, il existe une fonction $C(\boldsymbol{x}, t)$ telle que pour tout i entier, avec $0 \leq i \leq p-1$

$$A_i \left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) \right) = C(\boldsymbol{x}, t), \tag{21.4.6a}$$

$$\left(J_{1,i} + 2J_{2,i}\right) \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) = C(\boldsymbol{x}, t). \tag{21.4.6b}$$

Comme $|\boldsymbol{m}^N| = 1$ presque partout, pour tout i entier compris entre 0 et $p-1$,

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{21.4.7a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{21.4.7b}$$

Donc, il existe $C'(\boldsymbol{x}, t)$ orthogonale à $\widetilde{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}, t)$ presque partout, telle que

$$A_i \Big(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{v}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) \Big) = C'(\boldsymbol{x}, t),$$
$$\left(J_{1,i} + 2J_{2,i}\right) \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) = C'(\boldsymbol{x}, t).$$

La relation (20.3.15) est vraie indépendamment de l'équation. Soit, pour presque tout $(\boldsymbol{x}, t)$ dans $\Omega \times (0, T)$,

$$\int_I \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x}, t, y)\, \mathrm{d}y + \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{p-1} \boldsymbol{w}_i^\infty(\boldsymbol{x}, t) = (1 - \bar{\chi}) \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t).$$

Donc,

$$C'(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}, t)}{\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i} + \frac{1}{L(J_{1,i} + 2J_{2,i})} \right)}. \tag{21.4.9}$$

□

Pour passer à la limite dans l'équation (21.4.3), au sens de la convergence double-échelles, il reste uniquement à traiter le cas du champ démagnétisant.

Proposition 21.4.2. *Le terme $\mathcal{H}_d(\boldsymbol{m}^N)$ converge au sens de la convergence double-échelles vers*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) - (1 - \bar{\chi})(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z & \textit{si } y \in \widetilde{I}, \\ \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) + \bar{\chi}(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z & \textit{si } y \in \widetilde{J}, \end{cases} \tag{21.4.10}$$

PREUVE : Nous procédons comme K. Hamdache dans [35] proposition 3.7. Soit φ^N le potentiel dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$ telle que $\nabla\varphi^N = \mathcal{H}_d(\chi^N \widetilde{\boldsymbol{m}}^N)$. Alors,

$$\mathrm{div}(\nabla\varphi^N + \chi^N \widetilde{\boldsymbol{m}}^N) = 0,$$

où $\chi^N(\boldsymbol{x})$ est la fonction caractéristique de Ω^N. Comme $\chi(\Omega^N)\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$ est borné dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3))$, φ^N est borné dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$. Donc, il existe φ^∞ dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$ et φ_1^∞ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{H}^1_\#(Y)))$, telle que pour tout ϕ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$,

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} \varphi^N(\boldsymbol{x},t)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &\quad= \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} \varphi^\infty(\boldsymbol{x},t)\left(\int_Y \phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{21.4.11a}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} \frac{\partial\varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t)\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\int_Y \left(\frac{\partial\varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\varphi_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\right)\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{21.4.11b}$$

Or,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+} \chi^N\widetilde{\boldsymbol{m}}^N(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &\qquad+ \frac{N}{L}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+} \chi^N(\widetilde{\boldsymbol{m}}^N(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_z)\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &\qquad\quad= -\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} \nabla\varphi^N\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &\qquad\qquad - \frac{N}{L}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} \frac{\partial\varphi^N}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\boldsymbol{x},t,\frac{N}{L}x_3\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{21.4.12}$$

Nous divisons par N et nous passons à la limite, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+} (\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_z)\left(\int_{\widetilde{I}} \frac{\partial\phi}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+}\int_Y \left(\frac{\partial\varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\varphi_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\right)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned} \tag{21.4.13}$$

Donc, il existe $v^\infty(\boldsymbol{x},t)$ telle que

$$v^\infty(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_z + \left(\frac{\partial\varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\varphi_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y)\right) & \text{si } y \in \widetilde{I}, \\ \frac{\partial\varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial\varphi_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y) & \text{si } y \in \widetilde{J}. \end{cases}$$

Comme $\int_Y \frac{\partial \varphi_1^\infty}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$, nous avons

$$v^\infty(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{e}_z. \tag{21.4.14}$$

Cela implique que la limite au sens de la convergence double-échelles de $\mathcal{H}_d(\chi^N \boldsymbol{m}^N)$ vaut

$$\frac{\partial \varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \varphi_1^\infty}{\partial y}(\boldsymbol{x},t,y) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) - (1-\bar{\chi})\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{e}_z & \text{si } y \in \widetilde{I}, \\ \frac{\partial \varphi^\infty}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},t) + \bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{e}_z & \text{si } y \in \widetilde{J}. \end{cases} \tag{21.4.15}$$

Nous choisissons ϕ indépendant de y et nous passons à la limite dans (21.4.12), nous obtenons

$$\bar{\chi}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^+} \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x},t,y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+} \nabla\varphi^\infty\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t = 0. \tag{21.4.16}$$

Donc, $\mathrm{div}(\nabla\varphi^\infty + \bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) = 0$. D'où, $\nabla\varphi^\infty(\boldsymbol{x},t) = \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty)$, et la limite au sens de la convergence double-échelles de $\mathcal{H}_d(\chi^N\boldsymbol{m}^N)$ est

$$\begin{cases} \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) - (1-\bar{\chi})(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z & \text{si } y\in\widetilde{I}, \\ \mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) + \bar{\chi}(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z & \text{si } y\in\widetilde{J}, \end{cases}$$

□

Il suffit maintenant d'insérer les résultats des propositions 21.4.1 et 21.4.2. dans l'équation (21.4.4) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\bar{\chi}\iint_{Q_T} \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t - \alpha\bar{\chi}\iint_{Q_T}\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = (1+\alpha^2)\iint_{Q_T}\sum_{i=0}^{p-1}A_i\bar{\chi}_i\sum_{j=1}^{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + (1+\alpha^2)\frac{\bar{\chi}}{\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i}+\frac{1}{L(J_{1,i}+2J_{2,i})}\right)}\iint_{Q_T}\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2)\bar{\chi}\iint_{Q_T}\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\left(\mathcal{H}_d(\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty)-(1-\bar{\chi})(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\cdot\boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z\right)\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad - (1+\alpha^2)\iint_{Q_T}\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\sum_{i=0}^{p-1}\bar{\chi}_i\mathbf{K}_i\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\right)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - (1+\alpha^2)\sum_{i=0}^{p-1}\frac{K_{s,i}^+ + K_{s,i}^-}{L}\iint_{Q_T}(\boldsymbol{e}_z\cdot\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty)(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$+ (1+\alpha^2)\frac{1-\bar{\chi}}{\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i}+\frac{1}{L(J_{1,i}+2J_{2,i})}\right)}\iint_{Q_T}\left(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty \wedge \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial x_3}\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \quad (21.4.17)$$

pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega\times(0,T)};\mathbb{R}^3)$.

Donc, nous avons le théorème suivant concernant l'homogénéisation des solutions du système (21.1.1) avec les paramètres $\varpi = 1$ et $\rho = -1$,

Théorème 21.4.3. *Nous posons $\rho = -1$ et $\varpi = 1$. Soit $\boldsymbol{m}_0^N$ une suite de $\mathbb{H}^1(\Omega^N)$ satisfaisant la contrainte (21.1.3). Posons $\boldsymbol{m}^N$ une suite de solution dans $\mathbb{H}^1(\Omega^N\times(0,T))$ pour tout temps $T>0$ du système (21.1.1). Il existe une suite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$ prolongeant $\boldsymbol{m}^N$ sur $\mathbb{H}^1(\Omega\times(0,T))$. Nous pouvons en extraire une sous-suite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^N$ qui converge double-échelles vers une limite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$. Cette limite $\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty$ appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega\times(0,T))$, pour tout temps $T>0$, et vérifie l'égalité (21.4.17). Ce qui équivaut formellement à l'équation*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial t} - \alpha\widetilde{\boldsymbol{m}}\wedge\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial t} &= -(1+\alpha^2)\left(A_T\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\triangle_{2\mathrm{D}}\,\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty + A_N\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\frac{\partial^2\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty}{\partial {x_3}^2}\right)\\
&\quad -(1+\alpha^2)\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\bar{\mathbf{K}}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty-(1+\alpha^2)\bar{K}(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\cdot\boldsymbol{e}_z)\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\boldsymbol{e}_z\\
&\quad -(1+\alpha^2)\bar{\chi}\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\mathcal{H}_d(\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty) \qquad \textit{dans } \Omega\times\mathbb{R}^+,\\
\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty\wedge\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial\boldsymbol{\nu}_A} &= 0 \textit{ sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}^+,
\end{aligned}$$

où

$$A_T = \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\bar{\chi}_i}{\bar{\chi}}A_i, \qquad A_N = \frac{1}{\bar{\chi}}\frac{1}{\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i}+\frac{1}{L(J_{1,i}+2J_{2,i})}\right)},$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\bar{\chi}_i}{\bar{\chi}}\mathbf{K}_i, \qquad \bar{K} = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{K_{s,i}^+ + K_{s,i}^-}{L\bar{\chi}}\right) - (1-\bar{\chi}),$$

et, notant la normale extérieure $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$,

$$\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial\boldsymbol{\nu}_A} = A_T\nu_1\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_1} + A_T\nu_2\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_2} + A_N\nu_3\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{m}}}{\partial x_3}.$$

Notons $\bar{\boldsymbol{m}}^N$ le prolongement de $\boldsymbol{m}^N$ par 0 en dehors de Ω^N. Supposons maintenant que la suite $\bar{\boldsymbol{m}}^N$ tende faiblement vers $\bar{\chi}\boldsymbol{m}_0^\infty$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Alors, au sens des traces

$$\widetilde{\boldsymbol{m}}^\infty(\cdot,0) = \boldsymbol{m}_0^\infty \qquad \textit{dans } \Omega.$$

21.5 Les limites de l'homogénéisation et de possibles voies d'explorations

L'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz est hautement non triviale dû à son caractère non linéaire. Si le cas où l'anisotropie surfacique domine est traitée de manière satisfaisante à l'ordre 0, il manque l'analyse de la limite de projection de l'aimantation sur le plan Oxy. En effet, le terme $\sqrt{N}(\boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_z)\boldsymbol{e}_z)$ va converger au sens de la convergence double-échelles pour les surfaces périodiques vers un terme d'aimantation homogénéisé d'ordre 1. Pour le cas trivial 21.2 où seule l'interaction d'échange est présente, l'unicité de la solution de Landau-Lifchitz en deux dimensions suffirait à obtenir le résultat escompté mais nous n'avons pas ce résultat. Cependant, la solution de Struwe, voir section 6.3.2, est unique parmi les solutions faibles. Prouver que la limite d'une sous-suite $\boldsymbol{m}^N(x_3 = z)$ a une énergie décroissante, permettrait d'avoir la convergence de toute la suite $\boldsymbol{m}^N(x_3 = z)$ et de lier la convergence $\mathbb{L}^2(\Omega \times (0,T))$ faible à la convergence à x_3 fixé. Intuitivement, si l'on espère un tel résultat, il faudrait, au minimum, avoir pour tout N grand, une solution $\boldsymbol{m}^N$ dont l'énergie décroît. L'existence d'une telle solution n'est pas établie.

Enfin, pour traiter les cas où le terme d'anisotropie ne domine pas, et où le terme d'échange ne rigidifie pas suffisamment la solution pour avoir un prolongement acceptable, il sera nécessaire de développer des critères, analogues à ceux existant pour la convergence classique, pour passer à la limite dans les produits.

Conclusion et perspectives

Cette thèse était consacrée à la modélisation de l'évolution de matériaux ferromagnétiques dans des géométries, espaceur mince non magnétique et agencements multicouches, peu propices aux simulations numériques. Nous avons alors entrepris d'obtenir des modèles équivalents sur des géométries plus favorables à ces mêmes simulations.

Dans une première partie, nous avons rappelé les notions et les équations du modèle micromagnétique qui permettent de modéliser le comportement des matériaux ferromagnétiques. En particulier, nous avons introduit les interactions surfaciques qui ont lieu à l'interface entre deux matériaux ferromagnétiques : le super-échange et l'anisotropie surfacique. Nous avons aussi introduit l'équation de Landau-Lifchitz qui modélise l'évolution dans le temps de l'aimantation à l'intérieur des matériaux ferromagnétiques.

Dans une deuxième partie, nous avons résolu le problème d'existence pour l'équation de Landau-Lifchitz en présence d'interactions surfaciques. Nous avons prouvé successivement l'existence de solutions faibles et de solutions fortes.

Aux troisième et quatrième parties, nous avons tenté de résoudre le problème d'espaceur où nous étudions un domaine ferromagnétique traversé par un espaceur mince. Nous avons effectué un développement à l'ordre 1 de l'aimantation en fonction de la demi-épaisseur de l'espaceur puis établi une condition équivalente de bord sur le terme d'ordre 1. Nous avons entièrement justifié ce développement que ce soit en l'absence d'interactions surfaciques, partie III, ou en leur présence, partie IV.

Nous avons alors dans la cinquième partie réalisé des simulations numériques qui nous ont permis de calculer des états d'équilibre de l'aimantation, puis de calculer la susceptibilité hyperfréquence, ceci dans diverses configurations.

Enfin, dans la sixième partie, nous avons homogénéisé l'équation de Landau-Lifchitz sans interactions surfaciques pour un domaine régulièrement perforé puis l'équation de la chaleur et celle de Landau-Lifchitz pour un domaine multicouche en présence d'interactions surfaciques. L'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz pour un domaine multicouche n'a pu être réalisé que dans les cas où, soit la constante d'anisotropie surfacique ne dépend pas de la distance intercouche, soit la constante de super-échange J_1 est inversement proportionnelle à la distance intercouche.

Parmi les perspectives, nous pouvons envisager l'étude d'espaceurs moins réguliers. Si l'étude d'espaceurs non plans ne devrait poser que des difficultés techniques dues à l'apparition de cartes locales, d'autres types d'espaceurs vont poser des problèmes qui demanderont des approches différentes. En effet, un espaceur ne traversant pas entièrement un domaine nous aurait empêché d'utiliser les théorèmes de régularité elliptique qui sont primordiaux dans nos démonstrations.

L'homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz reste encore à faire lorsque l'anisotropie surfacique ne force pas l'alignement de l'aimantation dans la direction orthogonale aux multicouches et lorsque le super-échange ne permet plus d'assurer la compacité qui permet de passer à la limite dans les produits. De nouveaux critères de compacité pour la convergence double-échelles seront sûrement nécessaires pour homogénéiser dans ces cas non favorables.

Du côté de l'implémentation, il reste à prendre en compte le terme biquadratique du super-échange, $J_2 \neq 0$ et peut-être à augmenter l'ordre pour la prise en compte des interactions surfaciques. Cela permettra d'atteindre des états d'équilibre et de calculer la susceptibilité hyperfréquence en meilleur accord avec la réalité physique.

Septième partie

Annexes

Annexe A

Relèvements de traces

Cette annexe a pour but d'établir des théorèmes de relèvements sur les espaces de Sobolev anisotropes pour des ouverts deux fois cylindriques, une fois en espace et une fois en temps. Ces théorèmes nous permettent dans cette thèse de relever les conditions aux limites et d'établir nos théorèmes d'existence. Dans ce chapitre t est la variable de temps, $\boldsymbol{x}$ est la variable d'espace dans $\mathbb{R}^n$ avec $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x_n)$, où x_n est un scalaire. Enfin z est une variable scalaire supplémentaire d'espace. B désignera un ouvert quelconque suffisamment régulier.

A.1 Rappels sur les espaces $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}$

J.L. Lions et E. Magenes [51] ont donné les théorèmes de traces primordiaux pour les espaces

$$\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}(B \times (0,T)) = \mathrm{H}^{\mathsf{s}}(0,T;\mathrm{L}^2(B)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}(B)). \tag{A.1.1}$$

Nous renvoyons le lecteur à cet ouvrage pour les preuves. Nous nous intéressons principalements au comportement des traces des fonctions appartenant à ces espaces.

Nous utilisons les espaces H^{s}_{00} de la définition 5.1.3 pour définir :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}_{00,\ }(B \times (0,T)) &= \mathrm{H}^{\mathsf{s}}(0,T;\mathrm{L}^2(B)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}_{00}(B)),\\
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}_{\ ,00}(B \times (0,T)) &= \mathrm{H}^{\mathsf{s}}_{00}(0,T;\mathrm{L}^2(B)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}(B)).
\end{aligned}$$

Dans un souci de clarté, nous reproduisons le théorème 5.3.1

Théorème A.1.1. *Soit B un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière $\mathcal{C}^\infty$. Soit u dans $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}(B\times (0,T))$. Alors, on peut définir pour tout entier naturel $j < r - \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}$ sur $\partial B \times (0,T)$, avec*

$$\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} \in \mathrm{H}^{\mu_j,\nu_j}(\partial B \times (0,T)), \tag{A.1.2}$$

où

$$\frac{\mu_j}{\mathsf{r}} = \frac{\nu_j}{\mathsf{s}} = \frac{\mathsf{r} - j - \frac{1}{2}}{\mathsf{r}}.$$

De même, on peut définir pour tout entier naturel $k < \mathsf{s} - \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ sur $B \times \{0\}$, avec

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in \mathrm{H}^{p_k}(B \times \{0\}), \tag{A.1.3}$$

où

$$\frac{p_k}{\mathsf{r}} = \frac{\mathsf{s} - k - \frac{1}{2}}{\mathsf{s}}$$

Preuve : Voir Lions-Magenes [51], chapitre 4, théorème 2.1. □

Proposition A.1.2 (Conditions de compatibilité locales)**.** *Soient :*

$$f_k = \frac{\partial^k v}{\partial t^k} \in \mathrm{H}^{p_k}(B \times \{0\}),$$
$$g_j = \frac{\partial^j v}{\partial \boldsymbol{\nu}_j^j} \in \mathrm{H}^{\mu_j, \nu_j}(\partial B \times (0, T)).$$

Alors, si $1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{s}}) > 0$, alors pour tout $j, k \geq 0$ tels que $\frac{j}{\mathsf{r}} + \frac{k}{\mathsf{s}} < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{s}}\right)$,

$$\frac{\partial^j f_k}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} = \frac{\partial^k g_j}{\partial t^k} \quad \text{sur } \partial B \times \{0\}.$$

Preuve : Voir [51, chap.4,prop. 2.2]. □

Proposition A.1.3 (Conditions de compatibilité globales)**.**
Prenons les mêmes notations que celles de la proposition A.1.2. Nous nous plaçons dans le cas du demi-plan $B = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, $L = +\infty$. Pour tout entiers j, k tels que $\frac{j}{\mathsf{r}} + \frac{k}{\mathsf{s}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{s}}\right)$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial^k g_j}{\partial t^k}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{r}}) - \frac{\partial^j f_k}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{s}}) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} < +\infty.$$

Preuve : Voir [51, chap.4, pp. 20, eq. (2.48)]. □

Définition A.1.4. *Posons*

$$G = \prod_{j < \mathsf{r} - \frac{1}{2}} \mathrm{H}^{\mu_j, \nu_j}(\partial B \times (0, T)) \times \prod_{k < \mathsf{s} - \frac{1}{2}} \mathrm{H}^{p_k}(B \times \{0\}),$$

muni de la norme produit. Soit G_0 le sous-espace vectoriel de G constitué des fonctions (g_j, f_k) satisfaisant les deux conditions de compatibilité énoncées aux propositions A.1.2 et A.1.3 et muni de la norme :

$$\|u\|^2_{G_0} \quad = \quad \|u\|^2_G \; + \sum_{\substack{j,k\geq 0 \\ \frac{j}{\mathsf{r}}+\frac{k}{\mathsf{s}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{s}}\right)}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^k g_j}{\partial t^k}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{r}}) - \frac{\partial^j f_k}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{s}}) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}.$$

Théorème A.1.5 (Surjectivité de l'application de trace)**.** *L'application de trace suivante est surjective.*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}(B\times(0,T)) &\to G_0, \\ u &\mapsto \left(\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}, \frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right). \end{aligned}$$

De plus, il existe un relèvement continu.

Preuve : Voir [51, chap.4, pp. 20, eq. (2.48)]. □

A.2 Les espaces $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}$

Nous adaptons les résultats précédents pour étudier les ouverts deux fois cylindriques, une fois en espace et une fois en temps.

A.2.1 Définition

Soient $\mathcal{O} = B \times (0, +L)$ et $Q_T = \mathcal{O} \times (0, T)$. Pour $\mathsf{r}, \mathsf{s}, \mathsf{t} > 0$, nous définissons les espaces

$$\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}(Q_T) = \mathrm{H}^{\mathsf{t}}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O})) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{s}}(0,L;\mathrm{L}^2(B))) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}(B))).$$

Nous utilisons les espaces H^s_{00}, définition 5.1.3 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{00,\;,}(Q_T) &= \mathrm{H}^{\mathsf{t}}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O})) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{s}}(0,L;\mathrm{L}^2(B))) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}_{00}(B))),\\
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,00,}(Q_T) &= \mathrm{H}^{\mathsf{t}}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O})) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{s}}_{00}(0,L;\mathrm{L}^2(B))) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}(B))),\\
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,\;,00}(Q_T) &= \mathrm{H}^{\mathsf{t}}_{00}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathcal{O})) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^{\mathsf{s}}(0,L;\mathrm{L}^2(B))) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{H}^{\mathsf{r}}(B))).
\end{aligned}$$

Nous définissons aussi

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{00,00,}(Q_T) &= \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{00,\;,}(Q_T) \cap \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,00,}(Q_T),\\
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{00,\;,00}(Q_T) &= \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{00,\;,}(Q_T) \cap \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,\;,00}(Q_T),\\
\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,00,00}(Q_T) &= \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,00,}(Q_T) \cap \mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}_{,\;,00}(Q_T).
\end{aligned}$$

A.2.2 Interpolations des espaces $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}$

Lemme A.2.1 (Interpolations de $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}$)**.**

$$[\mathrm{H}^{\mathsf{r}_1,\mathsf{s}_1,\mathsf{t}_1},\mathrm{H}^{\mathsf{r}_2,\mathsf{s}_2,\mathsf{t}_2}]_\theta = \mathrm{H}^{(1-\theta)\mathsf{r}_1+\theta\mathsf{r}_2,(1-\theta)\mathsf{s}_1+\theta\mathsf{s}_2,(1-\theta)t_1+\theta t_2}, \tag{A.2.1}$$

$$[\mathrm{H}^{\mathsf{r}_1,\mathsf{s}_1}_{00,},\mathrm{H}^{\mathsf{r}_2,\mathsf{s}_2}_{00,}]_\theta = \mathrm{H}^{(1-\theta)\mathsf{r}_1+\theta\mathsf{r}_2,(1-\theta)\mathsf{s}_1+\theta\mathsf{s}_2}_{00,}, \tag{A.2.2}$$

$$[\mathrm{H}^{\mathsf{r}_1,\mathsf{s}_1}_{00,00},\mathrm{H}^{\mathsf{r}_2,\mathsf{s}_2}_{00,00}]_\theta = \mathrm{H}^{(1-\theta)\mathsf{r}_1+\theta\mathsf{r}_2,(1-\theta)\mathsf{s}_1+\theta\mathsf{s}_2}_{00,00}. \tag{A.2.3}$$

Preuve : C'est une conséquence de Lions-Magenes [52] théorème 9.6, théorème 11.7 et remarque 11.2, et théorème 13.1 du chapitre 1. Voir proposition 2.1 du chapitre 4 de [51] pour les détails. □

A.2.3 Traces des espaces $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}$

Théorème A.2.2 (Existence de trace)**.** *Soit v dans $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}(Q_T)$ alors :*

(1) Si $\mathsf{r} > \frac{1}{2}$, alors pour tout j, $0 \le j < \mathsf{r} - \frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial^j v}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} \in \mathrm{H}^{\mu_j,\nu_j,\lambda_j}(\partial B \times (0,L) \times (0,T)),$$

avec :

$$\frac{\mu_j}{\mathsf{r}} = \frac{\nu_j}{\mathsf{s}} = \frac{\lambda_j}{\mathsf{t}} = \frac{\mathsf{r} - j - \frac{1}{2}}{\mathsf{r}}.$$

(2) Si $\mathsf{s} > \frac{1}{2}$, alors pour tout k, $0 \le k < \mathsf{s} - \frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial^k v}{\partial z^k} \in \mathrm{H}^{p_k,q_k}(B \times \{0\} \times (0,T)),$$

avec :

$$\frac{p_k}{\mathsf{r}} = \frac{q_k}{\mathsf{t}} = \frac{\mathsf{s} - k - \frac{1}{2}}{\mathsf{s}}.$$

(3) Si $\mathsf{s} > \frac{1}{2}$, alors pour tout l, $0 \le l < \mathsf{t} - \frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial^l v}{\partial t^l} \in \mathrm{H}^{\alpha_l,\beta_l}(B \times (0,L) \times \{0\}),$$

avec :

$$\frac{\alpha_l}{\mathsf{r}} = \frac{\beta_l}{\mathsf{s}} = \frac{\mathsf{t} - l - \frac{1}{2}}{\mathsf{t}}.$$

De plus, les applications associées à ces traces sont continues.

PREUVE : La démonstration du théorème repose sur l'utilisation du théorème 4.2, chap. 1 de Lions-Magenes [52]. En effet, la fonction v appartient[1] à l'espace vectoriel $\mathrm{W}(0,T;\mathsf{t};\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}(B\times(0,L)),\mathrm{L}^2(B\times(0,L)))$. D'après le théorème [52, th. 4.2, chap. 1, p.29], pour tout $0\leq l\leq \mathsf{t}-\frac{1}{2}$,

$$\frac{\partial^l v}{\partial t^l}(\cdot,0,0)\in[\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}(B\times(0,L)\times\{0\}),\mathrm{H}^{0,0}(B\times(0,L)\times\{0\})]_{\frac{l+\frac{1}{2}}{\mathsf{t}}}.$$

Ce qui, d'après la proposition 2.1 du chapitre 4 de [51], donne le résultat annoncé. Le même raisonnement permet d'obtenir le résultat pour les traces sur le plan $(\cdot,0,\cdot)$. Pour les traces sur $\partial B\times(0,L)\times(0,T)$, nous nous ramenons par cartes locales et partitions de l'unité à $B=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+$. Nous appliquons les mêmes raisonnements que pour les autres traces mais avec l'égalité d'interpolation (A.2.1). □

A.2.4 Conditions de compatibilité

Proposition A.2.3 (Première condition de compatibilité)**.** *Soit une fonction v dans $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}(Q_T)$. Soient :*

$$f_l=\frac{\partial^l v}{\partial t^l}\in\mathrm{H}^{\alpha_l,\beta_l}(B\times(0,L)),$$
$$g_k=\frac{\partial^k v}{\partial z^k}\in\mathrm{H}^{p_k,q_k}(B\times(0,T)),$$
$$h_j=\frac{\partial^j v}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}\in\mathrm{H}^{\mu_j,\nu_j,\lambda_j}(\partial B\times(0,L)\times(0,T)).$$

Alors,

(1) Si $1-\frac{1}{2}(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{s}})>0$, alors pour tout $j,k\geq 0$ tels que $\frac{j}{\mathsf{r}}+\frac{k}{\mathsf{s}}<1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{s}}\right)$,

$$\frac{\partial^j g_k}{\partial\boldsymbol{\nu}^j}=\frac{\partial^k h_j}{\partial z^k}\quad \textit{sur } \partial B\times\{0\}\times(0,T).$$

(2) Si $1-\frac{1}{2}(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{t}})>0$, alors pour tout $j,l\geq 0$ tels que $\frac{j}{\mathsf{r}}+\frac{l}{\mathsf{t}}<1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{t}}\right)$,

$$\frac{\partial^j f_l}{\partial\boldsymbol{\nu}^j}=\frac{\partial^l h_j}{\partial t^l}\quad \textit{sur } \partial B\times(0,L)\times\{0\}.$$

(3) Si $1-\frac{1}{2}(\frac{1}{\mathsf{s}}+\frac{1}{\mathsf{t}})>0$, alors pour tout $k,l\geq 0$ tels que $\frac{k}{\mathsf{s}}+\frac{l}{\mathsf{t}}<1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{s}}+\frac{1}{\mathsf{t}}\right)$,

$$\frac{\partial^j g_k}{\partial t^l}=\frac{\partial^k f_l}{\partial z^k}\quad \textit{sur } B\times\{0\}\times\{0\}.$$

[1] Nous utilisons la notation (4.1) de Lions-Magenes [52, pp.28].

Preuve : $\mathcal{D}(\overline{Q_T})$ est dense dans $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}(Q_T)$. Les propriétés étant vraies sur $\mathcal{D}(\overline{Q_T})$, elles le sont sur $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}(Q_T)$ par passage à la limite. □

Proposition A.2.4 (Deuxième condition de compatibilité)**.**
Prenons les mêmes notations que celles de la proposition A.2.3. Nous nous plaçons dans le cas du demi-plan $B = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, $L = +\infty$, et $T = +\infty$. Nous avons alors

(1) Pour tout j, k tels que $\frac{j}{\mathsf{r}} + \frac{k}{\mathsf{s}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{s}}\right)$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^k h_j}{\partial z^k}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{r}}, t) - \frac{\partial^j g_k}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{s}}, t) \right|^2 \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} < +\infty.$$

(2) Pour tout j, l tels que $\frac{j}{r} + \frac{l}{\mathsf{t}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{t}}\right)$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^l h_j}{\partial t^l}(\boldsymbol{x}', z, \sigma^{\mathsf{r}}) - \frac{\partial^j f_l}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{t}}, z) \right|^2 \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} < +\infty.$$

(3) Pour tout k, l tels que $\frac{k}{\mathsf{s}} + \frac{l}{\mathsf{t}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{s}} + \frac{1}{\mathsf{t}}\right)$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial^k f_l}{\partial z^k}(\boldsymbol{x}', x_n, \sigma^{\mathsf{t}}) - \frac{\partial^l g_k}{\partial t^l}(\boldsymbol{x}', x_n, \sigma^{\mathsf{s}}, x') \right|^2 \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} < +\infty.$$

Preuve : Nous allons seulement le faire pour l'une des inégalités, les autres se traitant de la même façon. Nous avons

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right) \in \mathrm{H}^{\mu,\nu,\lambda}(B \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t^+) \subset \mathrm{H}^{\nu,\lambda}(\mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t^+; \mathrm{L}^2(B)),$$

avec $\frac{\mu}{r} = \frac{\nu}{s} = \frac{\lambda}{\mathsf{t}} = 1 - \left(\frac{k}{\mathsf{s}} + \frac{l}{\mathsf{t}}\right)$. Or, $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda} = 2$. Nous appliquons le théorème 2.2 chapitre 4 de Lions-Magenes [51]. □

A.2.5 Image de l'application de trace

Définition A.2.5. *Posons*

$$F = \prod_{j<\mathsf{r}-\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{\mu_j,\nu_j,\lambda_j}(\partial B \times (0,L) \times (0,T)) \times \prod_{k<\mathsf{s}-\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{p_k,q_k}(B \times \{0\} \times (0,T))$$
$$\times \prod_{l<\mathsf{t}-\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{\alpha_l,\beta_l}(B \times (0,L) \times \{0\}),$$

muni de la norme produit. Soit F_0 le sous-espace vectoriel de F constitué des fonctions (h_j, g_k, f_l) satisfaisant les deux conditions de compatibilité énoncées aux propositions A.2.3 et A.2.4, muni de la norme

$$\begin{aligned}\|u\|_{F_0}^2 &= \|u\|_F^2 \\ &+ \sum_{\substack{j,k\geq 0\\ \frac{j}{\mathsf{r}}+\frac{k}{\mathsf{s}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{s}}\right)}} \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial^k h_j}{\partial z^k}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{r}}, t) - \frac{\partial^j g_k}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{s}}, t)\right|^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\ &+ \sum_{\substack{j,l\geq 0\\ \frac{j}{r}+\frac{l}{\mathsf{t}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{r}}+\frac{1}{\mathsf{t}}\right)}} \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial^l h_j}{\partial t^l}(\boldsymbol{x}', z, \sigma^{\mathsf{r}}) - \frac{\partial^j f_l}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}(\boldsymbol{x}', \sigma^{\mathsf{t}}, z)\right|^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\ &+ \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ \frac{k}{\mathsf{s}}+\frac{l}{\mathsf{t}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathsf{s}}+\frac{1}{\mathsf{t}}\right)}} \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial^k f_l}{\partial z^k}(\boldsymbol{x}', x_n, \sigma^{\mathsf{t}}) - \frac{\partial^l g_k}{\partial t^l}(\boldsymbol{x}', x_n, \sigma^{\mathsf{s}}, x')\right|^2 \mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}.\end{aligned}$$

Posons $\Sigma = \partial B \times (0, L) \times (0, T)$. Nous donnons maintenant le théorème de relèvement principal.

Théorème A.2.6 (Surjectivité de l'application de trace)**.** *L'application de trace suivante est surjective.*

$$\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}(Q_T) \to F_0,$$
$$u \mapsto \left(\frac{\partial^j u}{\partial \boldsymbol{\nu}^j}, \frac{\partial^k u}{\partial z^k}, \frac{\partial^l u}{\partial t^l}\right).$$

De plus, il existe un relèvement continu.

Preuve *:* Nous aurons besoin des égalités d'interpolation (A.2.2) et (A.2.3). Il ne reste qu'à prouver la surjectivité. Soient (f_l, g_k, h_j) dans F_0. Alors, d'après les preuves des théorèmes de traces, il existe φ telle que

$$\frac{\partial^j \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} = h_j \quad \text{pour tout } 0 \leq j < \mathsf{r} - \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$(f_l - \partial_t^l \varphi, g_k - \partial_z^k \varphi, 0) \in F_0.$$

Donc, $g_k - \partial_z^k \varphi$ appartient à $\mathrm{H}_{00,}^{p_k, q_k}(\mathbb{R}_t^+ \times B)$. D'après le théorème 4.2 de Lions-Magenes [52], il existe ψ telle que

$$\frac{\partial^j \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} = 0 \qquad \text{pour tout } 0 \leq j < \mathsf{r} - \frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} = g_k - \partial_z^k \varphi \qquad \text{pour tout } 0 \leq k < \mathsf{s} - \frac{1}{2}.$$

Or,

$$(f_l - \partial_t^l \varphi - \partial_t \psi, 0, 0) \in F_0.$$

Donc, $f_l - \partial_t^l \varphi - \partial_t^l \psi$ appartient à $\mathrm{H}^{\alpha_l,\beta_l}_{00,00}(\mathbb{R}_z^+ \times B)$. D'après le théorème 4.2, chapitre 1, de Lions-Magenes [52], il existe Φ telle que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^j \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} &= 0 \qquad \text{pour tout } 0 \leq j < \mathsf{r} - \frac{1}{2},\\
\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k} &= 0 \qquad \text{pour tout } 0 \leq k < \mathsf{s} - \frac{1}{2},\\
\frac{\partial^l \psi}{\partial t^k} &= h_l - \partial_t^l \varphi - \partial_t^l \psi \qquad \text{pour tout } 0 \leq l < \mathsf{t} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Nous posons $u = \varphi + \psi + \Phi$, les traces de u sont (f_j, g_k, h_l). □

A.3 Relèvements des traces normales

Nous connaissons pour les espaces $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s}}$ et les espaces $\mathrm{H}^{\mathsf{r},\mathsf{s},\mathsf{t}}$ les relations de compatibilité que doivent vérifier toutes les traces. Mais, parfois, nous souhaitons relever seulement une partie des traces. Nous prouvons, dans deux cas particuliers, qu'aucune relation de compatibilité supplémentaire n'est nécessaire. Dès à présent, nous notons $\boldsymbol{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décomposant en $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x_n)$ où $\boldsymbol{x}'$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$ et x_n un scalaire. z est la variable d'espace supplémentaire, t sera la variable de temps.

Théorème A.3.1. *Soit B un ouvert borné $\mathcal{C}^\infty$, et $L > 0$. L'application*

$$\begin{aligned}
\gamma^1 \colon \mathrm{H}^{2,2}(B \times (0, L)) &\to \mathrm{H}^1(B \times \{0\}) \times \mathrm{H}^1(B \times \{L\}) \times \mathrm{H}^1(\partial B \times (0, L)),\\
u &\mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \frac{\partial u}{\partial z}, -\frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

est surjective et admet un relèvement continu.

Preuve : Le relèvement continu se déduit abstraitement de la surjectivité car l'espace de départ est hilbertien et donc le noyau de l'application à relever admet un supplémentaire topologique. Par carte locale et partition de l'unité, nous nous ramenons au cas où $L = +\infty$ et $B = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+_{x_n}$. Il ne reste qu'à démontrer la surjectivité de :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{2,2}((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}^+_z) &\to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \{0\}) \times \mathbb{R}^+_z) \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \mathbb{R}^+_{x_n}) \times \{0\}),\\
u &\mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Posons pour cette preuve

$$\begin{aligned} F' = \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \{0\}) \times \mathbb{R}^+_z) \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'}) \times \mathbb{R}^+_{x_n}) \times \{0\}) \\ \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \{0\}) \times \mathbb{R}^+_z) \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \mathbb{R}^+_{x_n}) \times \{0\}). \end{aligned}$$

Notons F'_0 le sous-espace de F' constitué des éléments (g_1, f_1, g_0, f_0) tels que

$$\begin{gathered} f_0(\cdot, 0) = g_0(\cdot, 0), \\ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{|f_1(\boldsymbol{x}', \sigma) - \frac{\partial g_0}{\partial z}(\boldsymbol{x}', \sigma)|^2}{\sigma} \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' < +\infty, \\ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{|g_1(\boldsymbol{x}', \sigma) - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}', \sigma)|^2}{\sigma} \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' < +\infty. \end{gathered}$$

D'après Lions-Magenes [51], l'application de trace suivante est surjective.

$$\begin{gathered} \mathrm{H}^{2,2}((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}^+_z) \to F'_0, \\ u \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}((\cdot, 0), \cdot), \frac{\partial u}{\partial z}(\cdot, 0), u((\cdot, 0), \cdot), u(\cdot, 0) \right). \end{gathered}$$

Nous remarquons l'absence de relations de compatibilité directe entre g_1 et f_1. Pour pouvoir appliquer le résultat de Lions-Magenes [51], il suffit de construire f_0, g_0 tel que (g_1, f_1, g_0, f_0) vérifient les relations de compatibilité. C'est ce que l'on a fait à la proposition A.4.1. □

Théorème A.3.2. *Soit B un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $L > 0$, et $T > 0$. Alors, l'application γ^1 :*

$$\begin{aligned} \gamma^1 \colon \mathrm{H}^{2,2,1}(B \times (0, L) \times (0, T)) \to \mathrm{H}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\partial B \times (0, L) \times (0, T)) \\ \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(B \times \{0\} \times (0, T)) \\ \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(B \times \{L\} \times (0, T)), \\ u \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

est surjective et admet un relèvement continu.

Preuve : Il suffit de démontrer la surjectivité. Par carte locale et partition de l'unité, nous nous ramenons au cas où $T, L = +\infty$ et $B = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+_{x_n}$. Il ne reste qu'à démontrer la surjectivité de l'application suivante.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{2,2,1}((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}^+_z \times \mathbb{R}^+_t) \to \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}((\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}^+_z \times \mathbb{R}^+_t) \\ \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}} \times \{0\} \times \mathbb{R}^+_t), \\ u \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Posons pour cette démonstration uniquement

$$\begin{aligned}F'' = {} & \mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \{0\}) \times \mathbb{R}^+_z \times \mathbb{R}^+_t) \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \mathbb{R}^+_{x_n}) \times \{0\} \times \mathbb{R}^+_t)\\ & \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \{0\}) \times \mathbb{R}^+_z \times \mathbb{R}^+_t) \times \mathrm{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}((\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}'} \times \mathbb{R}^+_{x_n}) \times \{0\} \times \mathbb{R}^+_t)\\ & \times \mathrm{H}^1((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}^+_z \times \{0\}).\end{aligned}$$

Notons F''_0 le sous-espace de F'' constitué des fonctions $(h_1, g_1, h_0, g_0, f_0)$ telles que

$$g_0(\cdot, 0, \cdot) = h_0(\cdot, 0, \cdot), \qquad g_0(\cdot, \cdot, 0) = f_0(\cdot, 0, \cdot), \qquad h_0(\cdot, \cdot, 0) = f_0(\cdot, 0, \cdot),$$
$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{|g_1(\boldsymbol{x}', \sigma, t) - \frac{\partial h_0}{\partial z}(\boldsymbol{x}', \sigma, t)|^2}{\sigma} \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \, \mathrm{d}t < +\infty,$$
$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{|h_1(\boldsymbol{x}', \sigma, t) - \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}', \sigma, t)|^2}{\sigma} \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}' \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

D'après A.2.6, l'application de trace suivante est surjective.

$$\mathrm{H}^{2,2,1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}^+_z \times \mathbb{R}^+_t) \to F''_0,$$
$$u \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}((\cdot, 0), \cdot, \cdot), \frac{\partial u}{\partial z}(\cdot, 0, \cdot), u((\cdot, 0), \cdot, \cdot), u(\cdot, 0, \cdot), u(\cdot, \cdot, 0)\right).$$

De plus, il y a relèvement continu. Nous remarquons l'absence de relations de compatibilité directe entre g_1 et h_1. Pour pouvoir appliquer ce résultat, il suffit de construire (f_0, g_0, h_0) tel que (g_1, f_1, g_0, f_0) vérifient les relations de compatibilité. C'est ce que l'on fait à la proposition A.4.2 pour (g_0, h_0). Nous pouvons facilement construire un f_0 convenable. Cependant il est plus simple de remarquer, en reprenant la preuve du théorème A.3.2, que nous n'avons pas besoin de construire f_0. □

A.4 Complémentation des traces

Les théorèmes de Lions-Magenes ne donnent des résultats des résultats de relèvements que pour toutes les traces à la fois. Cependant, il est courant de n'avoir qu'une partie des traces à relever. Dans ce cas, il n'est pas évident que les conditions de compatibilité de Lions-Magenes soient suffisantes. Pour s'en assurer, il faut vérifier que ces traces sont un sous-uplet d'un uplet de traces vérifiant l'ensemble des conditions de compatibilité. Lorsque seules des premières relations de compatibilité sont requises, cela est immédiat. Dans cette section, nous effectuons ce travail pour quelques cas particuliers.

Nous commençons par établir un résultat de complémentation de traces pour les espaces $\mathrm{H}^{2,2}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$.

Proposition A.4.1. *Il existe une application linéaire* $\mathbf{Y}$ *continue de* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$ *dans* $\mathrm{H}^{1,1}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$, *et de* $\mathrm{H}^{\frac12,\frac12}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$ *dans* $\mathrm{H}^{\frac32,\frac32}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$, *et une constante* $C>0$ *telles que, pour tout* f *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\|\frac{\partial(\mathbf{Y}f)}{\partial z}-f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})}}{z}\,\mathrm{d}z\le C\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac12}(\mathbb{R}^{n-1}))},$$
$$\mathbf{Y}(f)(\cdot,0)=0.$$

Preuve : Il suffit de poser, en ne considérant que les transformées de Fourier dans la première variable

$$\widehat{\mathbf{Y}(f)}(\xi,z)=\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z\widehat{f}(\xi,z)\,\mathrm{d}z,$$

où χ est une fonction réelle $\mathcal{C}_c^\infty([0,+\infty))$ vérifiant $\chi=1$ sur $[0,1]$, $0\le\chi\le1$, et $\mathrm{Supp}(\chi)\subset[0,2]$. Il reste à vérifier que $\mathbf{Y}$ convient. Soit $f\in\mathrm{H}^{\frac12,\frac12}(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$, nous posons $g=\mathbf{Y}(f)$. Dans la suite, nous notons pour tout $\phi>0$, L^2_ϕ l'espace des fonctions réelles mesurables v telles que ϕv^2 appartienne à L^1, et muni de la norme $\|v\|_{\mathrm{L}^2_\phi}=\left(\int\phi|v|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac12}$.

(1) Montrons que g existe et est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$. En effet, g est mesurable par Fubini, appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,+\infty))$ et

$$\|g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)}\le\sqrt{2}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)}.$$

(2) Montrons ensuite que g appartient à $\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac32}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Cela revient à prouver que $\widehat{g}$ appartient à $\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{L}^2_{(1+|\xi|^2)^{\frac32}}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Par Parseval,

$$\begin{aligned}
&\|g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}^{\frac32}(\mathbb{R}^{n-1}))}\\
&\quad\le\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+|\xi|^2)^{\frac32}|\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2\left|\int_0^z\widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^2\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}z\\
&\quad\le\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^z z(1+|\xi|^2)^{\frac32}|\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac32}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\int_\tau^{+\infty}z|\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac12}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\left(\int_{\sqrt{1+|\xi|^2}}^{+\infty}s|\chi(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac12}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\quad\le2\int_0^{+\infty}\|f(\cdot,\tau)\|^2_{\mathrm{H}^{\frac12}(\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{d}\tau\le2\|f|\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}^{\frac12}(\mathbb{R}^n))}.
\end{aligned}$$

D'où, comme $\mathbf{Y}f = g$

$$\|\mathbf{Y}f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.$$

Par un calcul similaire, nous obtenons aussi

$$\|\mathbf{Y}f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)}.$$

(3) Montrons alors que g appartient à $\mathrm{H}^1(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Cela revient à montrer que $\partial_z\widehat{g}$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$. Or, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \partial_z\phi\widehat{g}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \partial_z\phi(\xi,z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z \widehat{f}(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi,\tau)\left(\int_\tau^{+\infty} \partial_z\phi(\xi,z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi,\tau)\left(\phi(\xi,\tau)\chi(\tau\sqrt{1+|\xi|^2})\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi,\tau)\left(\int_\tau^{+\infty} \phi(\xi,z)\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \phi(\xi,z)\left[\widehat{f}(\xi,z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}z \\
&\quad -\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \phi(\xi,z)\left[\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z \widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\partial_z\widehat{g} = \underbrace{\widehat{f}(\xi,z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})}_{\widehat{g}_{z1}} + \underbrace{\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z \widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\widehat{g}_{z2}}.$$

Donc, $\partial_z\widehat{g}$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$. Et,

$$\|\partial_z g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)} \leq (1+\|\chi'\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})})\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)}.$$

(4) Montrons ensuite que $\partial_z\widehat{g}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. D'après Lions-Magenes [52], chapitre 1, théorème 10.2, formule (10.22), il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial_z\widehat{g}(\xi,z+\sigma)-\partial_z\widehat{g}(\xi,z)}{\sigma}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Nous traitons d'abord $\widehat{g}_{z1}$.

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{g}_{z1}\|_{\mathrm{H}^{0,\frac{1}{2}}} \\
&\leq \iiint \frac{|\widehat{f}(\xi, z+\sigma)\chi((z+\sigma)\sqrt{1+|\xi|^2}) - \widehat{f}(\xi, z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2}{\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \underbrace{2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |\chi((z+\sigma)\sqrt{1+|\xi|^2})|^2 \frac{|\widehat{f}(\xi, z+\sigma) - \widehat{f}(\xi, z)|^2}{\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi}_{1a} \\
&+ \underbrace{2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\iint_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi, z)|^2 \frac{|\chi((z+\sigma)\sqrt{1+|\xi|^2}) - \chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2}{\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi}_{1b}\,.
\end{aligned}
$$

On a facilement $|1a| \leq C\|f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))}$. Le terme $1b$ est plus compliqué. En effet, il faut séparer l'intégrale sur les intervalles $\sigma > 2$ et $\sigma < 2$. La première intégrale résultante est majorée car la fonction $\sigma \mapsto \sigma^{-2}$ est intégrable sur $(2, +\infty)$. Pour la deuxième intégrale résultante, nous remarquons que l'intégrant est nul si $z > \frac{2}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$. D'où,

$$
\begin{aligned}
|1b| &\leq 4\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{\infty} \|\chi\|^2_{\mathrm{L}^\infty} |\widehat{f}(\xi, z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{1+|\xi|^2}}} \|\chi'\|^2_{\mathrm{L}^\infty} |\widehat{f}(\xi, z)|^2 z\left(1+|\xi|^2\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.
\end{aligned}
$$

Donc, l'application $(\xi, z) \mapsto \widehat{f}(\xi, z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})$ appartient à l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(0, +\infty; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Nous traitons maintenant le terme 2 de $\partial_z\widehat{g}$. Nous avons noté $\widehat{g}_{z2}$ ce terme. Alors,

$$
\widehat{g}_{z2}(\xi, z) = \sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z \widehat{f}(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\tau.
$$

Le plus simple est de démontrer que $\widehat{g}_{z2}$ appartient à

$$
\mathrm{H}^1(0, +\infty; \mathrm{L}^2_{(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}}(\mathbb{R}^{n-1})) \cap \mathrm{L}^2(0, +\infty; \mathrm{L}^2_{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}(\mathbb{R}^{n-1})),
$$

puis de conclure par interpolation que $\widehat{g}_{z2}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Montrons d'abord que g_{z2} appartient à $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^+; \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))$. Soit une fonction ϕ dans

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\partial_z\phi(\xi,z)\widehat{g}_{z2}(\xi,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{\infty}\partial_z\phi(\xi,z)\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\left(\int_0^z\widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\phi(\xi,z)\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\phi(\xi,z)(1+|\xi|^2)\chi''(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z\widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\partial_z\widehat{g}_{z2}(\xi,t)=\underbrace{(1+|\xi|^2)\chi''(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z\widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{2'a}+\underbrace{\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})}_{2'b}.$$

Nous traitons d'abord le terme $2'a$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{|2'a|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}|\chi''(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2\left|\int_0^z\widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\left(\int_\tau^{+\infty}z|\chi''(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\left(\int_0^{+\infty}s|\chi''(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le 2\|\mathrm{Id}^{\frac{1}{2}}\chi''\|^2_{\mathrm{L}^2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\qquad\le C\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.
\end{aligned}$$

Nous traitons ensuite le terme $2'b$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{|2'b|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2|\widehat{f}(\xi,z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le\|\chi'\|_{\mathrm{L}^\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\qquad\le C\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que g_{z2} appartient à $\mathrm{L}^2(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{g}_{z2}(\xi,z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\int_0^z(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}z|\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\left(\int_\tau^{+\infty}z|\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\left(\int_0^{+\infty}s|\chi'(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le 2\|\chi'\|^2_{\mathrm{L}^\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi\\
&\qquad\le C\|f\|_{\mathrm{L}(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.
\end{aligned}$$

Cela démontre que g est dans $\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(0,+\infty;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. Avec les résultats précédents, nous obtenons que g appartient bien à $\mathrm{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+)$.

(5) Montrons enfin que $\partial_z g$ et f sont compatibles. Nous rappelons que :

$$\partial_z\widehat{g}=\widehat{f}(\xi,z)\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2})+\sqrt{1+|\xi|^2}\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})\int_0^z\widehat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{|\partial_z\widehat{g}-\widehat{f}|^2}{z}(z,\xi)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\le 2\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{|\widehat{f}|^2}{z}(1-\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2}))^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi}_{I}\\
&\qquad+2\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi|^2)|\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2\left(\int_0^z|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi}_{II}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
|I|&=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{|\widehat{f}|^2}{z}(1-\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2}))^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\le\sup_{z,\xi}\left(\frac{(1-\chi(z\sqrt{1+|\xi|^2}))}{z\sqrt{1+|\xi|^2}}\right)\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,z)|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\\
&\le C\|f\|_{\mathrm{L}(0,+\infty;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|II| &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} (1+|\xi|^2)|\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2 \left(\int_0^z |\widehat{f}(\xi,\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\xi,\tau)|^2 \left(\int_\tau^{+\infty} z(1+|\xi|^2)|\chi'(z\sqrt{1+|\xi|^2})|^2 \,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \sqrt{1+|\xi|^2}|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2 \left(\int_0^{+\infty} s|\chi'(s)|^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R};\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}))}.
\end{aligned}$$

Le passage entre la deuxième ligne et la troisième ligne se fait par changement de variable $s = z\sqrt{1+|\xi|^2}$.

□

Nous complétons maintenant les traces normales pour relever des traces incomplètes dans $\mathrm{H}^{2,2,1}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_y^+ \times \mathbb{R}_t)$.

Proposition A.4.2. *Il existe une application linéaire continue* $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}\colon \mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t) \to \mathrm{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t),$$

et une constante $C > 0$*, telle que, pour tout* f *dans* $\mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t)$*,*

$$\int_0 \int_t \int_{\boldsymbol{x}} \left|\frac{\partial \mathbf{A}(f)}{\partial z} - f\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}z}{z} \leq C\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))},$$
$$\mathbf{A}(f)(\cdot,0,\cdot) = 0.$$

Preuve : Nous définissons d'abord un opérateur $\mathbf{B}$ de la façon suivante : pour tout $f \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t)$, posons $\mathbf{B}(f)(t) = \mathbf{Y}(f(t))$ pour tout temps. Pour ne pas alourdir les notations, posons $h = \mathbf{B}(f)$. Alors,

$$h \in \mathrm{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t) \cap \mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{1,1}(\mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})),$$
$$\|h\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}\times\mathbb{R}_z^+))} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))},$$
$$\|h\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{1,1}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}\times\mathbb{R}_z^+))} \leq C\|f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{0,0}(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))},$$
$$\int_t \int_0^{+\infty} \int_{\boldsymbol{x}} \left|\frac{\partial \mathbf{B}(f)}{\partial z} - f\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}t \leq C\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))},$$
$$h(\cdot,0,\cdot) = 0,$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant pas de f. Ceci se démontre en appliquant le théorème A.4.1. Définissons alors $\mathbf{A}(f)$ par

$$\widehat{\mathbf{A}(f)} = \chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\widehat{\mathbf{B}(f)},$$

où la transformation de Fourier est prise en temps —ou suivant la dernière variable— et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{sur } \left(-\frac{1}{4}L, \frac{5}{4}L\right), \\ 0 & \text{sur } \complement\left(-\frac{1}{2}L, \frac{3}{2}L\right). \end{cases}$$

Montrons que $\mathbf{A}$ convient. D'abord, nous remarquons que $\mathbf{A}(f)$ existe dans $\mathrm{L}^2(Q_T)$. Posons $g = \mathbf{A}(f)$. Montrons d'abord que pour f dans $\mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_t)$, g appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_z^+; \mathrm{H}^{\frac{3}{4},0}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1} \times \mathbb{R}_t))$.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{g}\|^2_{\mathrm{H}^{0,0,\frac{3}{4}}} &= \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}} |\widehat{g}|^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}} |\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2 |\widehat{h}|^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}} |\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2 z \int_0^z \left|\frac{\partial \widehat{h}}{\partial z}(\boldsymbol{x}, \upsilon, \tau)\right|^2 \mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}} \left|\frac{\partial \widehat{h}}{\partial z}(\boldsymbol{x}, \upsilon, \tau)\right|^2 \left(\int_\upsilon^{+\infty} z|\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2 \,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}} \left|\frac{\partial \widehat{h}}{\partial z}(\boldsymbol{x}, \upsilon, \tau)\right|^2 \left(\int_0^{+\infty} s|\chi(s))|^2 \,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq C\|h\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t; \mathrm{H}^{1,0}(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))} \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))}.
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que g appartient à $\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_z^+; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))$. D'abord, au sens des distributions,

$$\frac{\partial \widehat{g}}{\partial z} = \underbrace{\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\frac{\partial \widehat{h}}{\partial z}}_{\widehat{g}_{t1}} + \underbrace{(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}} \chi'(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\widehat{h}}_{\widehat{g}_{t2}}.$$

Donc, g appartient à $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_z^+; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))$. Il reste à prouver que $\frac{\partial \widehat{g}}{\partial z}$ appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_z^+; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))$.

Calculons directement $\|g_{t1}\|_{\mathrm{H}^{0,\frac{1}{2},0}(\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}^+_z\times\mathbb{R}_t)}$. Nous notons $\mathbb{R}^{n,+}=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+$.

$$
\begin{aligned}
\|g_{t1}\|_{\mathrm{H}^{0,\frac{1}{2},0}} \leq \iint_{\mathbb{R}^{n,+}}\iint_0^{+\infty} \frac{1}{\upsilon^2}\Big|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}(z+\upsilon)\chi((z+\upsilon)(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})& \\
-\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}(z)\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\Big|^2 \,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}& \\
\leq 2\iint_{\mathbb{R}^{n,+}}\iint_0^{+\infty}\left|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}(z)\right|^2\left|\frac{\chi((z+\upsilon)(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})-\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})}{\upsilon}\right|^2\,\mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}& \\
+2\iint_{\mathbb{R}^{n,+}}\iint_0^{+\infty}\frac{1}{|\upsilon|^2}\left|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}(z+\upsilon)-\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}(z)\right|^2\left|\chi((z+\upsilon)(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\right|^2\,\mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}& \\
\leq C\|h\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+_z;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}))}+\|\chi'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\left\|\frac{\partial h}{\partial z}\right\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^+_z\times\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}))}& \\
\leq C\|f\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}^+_z\mathbb{R}_t))}&.
\end{aligned}
$$

Montrons que g_{t2} appartient à $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+_z;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}))$ en deux étapes.

(1) D'abord, montrons que g_{t2} appartient à $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^+_z;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}})))$. Au sens des distributions,

$$
\frac{\partial\widehat{g}_{t2}}{\partial z}=\underbrace{(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}}\chi''(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\widehat{h}}_{i}+\underbrace{(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}\chi'(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}}_{ii}.
$$

Traitons le terme i.

$$
\begin{aligned}
&\iiint|i|^2(1+|\tau|^2)^{-\frac{1}{4}} \\
&\quad=\iiint(1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}}|\chi''(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2\left|\int_0^z\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\,\mathrm{d}\upsilon\right|^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad\leq\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\boldsymbol{x}}\left|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\right|(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}\int_0^{+\infty}|\chi''(s)|^2s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\leq\|z\chi''(z)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|h\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^+_z;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}))} \\
&\qquad\qquad\leq C\|f\|_{\mathrm{H}^{0,0,\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^{n-1}_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}^+_z\times\mathbb{R}_t)}.
\end{aligned}
$$

Traitons le terme ii.

$$\begin{aligned}\iiint |ii|^2(1+|\tau|^2)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi \\ \leq \iiint (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}|\chi'(z(1+\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2\left|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\right|^2 \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}z \\ \leq \|\chi'\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\|h\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_z^+;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))} \\ \leq C\|f\|_{\mathrm{H}^{0,0,\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}\times\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_t)}.\end{aligned}$$

(2) Enfin, montrons aussi que g_{t2} appartient à $\mathrm{H}^{0,0,\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}\times\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_t)$. En effet,

$$\begin{aligned}\|g_{t2}\|_{\mathrm{H}^{0,0,\frac{1}{4}}} &\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} |\widehat{g}_{t2}|^2(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}(1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}}|\chi'(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2\left|\int_0^z\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\,\mathrm{d}\upsilon\right|^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\leq \iiint(1+|\tau|^2)^{\frac{3}{4}}\left|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\right|^2\left(\int_0^{+\infty}|\chi'(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2 z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \iiint(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}\left|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\right|^2\left(\int_0^{+\infty}|\chi'(s)|^2 s\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\upsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \|z\chi'(z)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}\|h\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^1(\mathbb{R}_z^+;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})))} \\ &\leq C\|f\|^2_{\mathrm{H}^{0,0\frac{1}{4}}}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 7.7 du chapitre 1 de [52], les deux inégalités précédentes donnent par interpolation,

$$\begin{aligned}(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}\chi'((z+\upsilon)(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\widehat{h}\in\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_z^+;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})), \\ \|(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}\chi'((z+\upsilon)(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\widehat{h}\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_z^+;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))}\leq C\|f\|^2_{\mathrm{H}^{0,0\frac{1}{4}}}.\end{aligned}$$

Montrons pour finir que $\partial_z g$ et $\partial_z h$ sont compatibles.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left\|\frac{\partial\widehat{g}}{\partial z}-\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})}\frac{\mathrm{d}z}{z} \leq 2\underbrace{\int_0^{+\infty}\left\|\frac{\partial\widehat{h}}{\partial z}\frac{\chi(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})-1}{z}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})}}_{i} \\ +2\underbrace{\int_0^{+\infty}\left\|\frac{(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}}}{z}\chi'(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})\widehat{h}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})}}_{ii}.\end{aligned}$$

Or,

$$
\begin{aligned}
|i| &\leq \left\| \frac{\partial h}{\partial z} \right\|^2_{\mathrm{H}^{0,0,\frac{1}{4}}} \left\| \frac{\chi(s)-1}{s} \right\|^2_{\mathrm{L}^\infty} \\
&\leq C\|h\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{1,1}(\mathbb{R}_z^+\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))} \\
&\leq C'\|f\|^2_{\mathrm{H}^{0,0,\frac{1}{4}}}.
\end{aligned}
$$

Nous traitons maintenant le terme ii.

$$
\begin{aligned}
|ii| &\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial \widehat{h}}{\partial z} \right|^2 \left(\int_{z=\upsilon}^{+\infty} (1+|\tau|^2)^{\frac{1}{2}} |\chi'(z(1+|\tau|^2)^{\frac{1}{4}})|^2 z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\upsilon \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq \iiint_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial \widehat{h}}{\partial z} \right|^2 \left(\int_0^{+\infty} |\chi'(z)|^2 z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\upsilon \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leq C\|h\|_{\mathrm{H}^{0,1,0}} \\
&\leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2}.
\end{aligned}
$$

Or, nous savons déjà que

$$
\int_z \left\| \frac{\partial h}{\partial z} - f \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})} \frac{\mathrm{d}z}{z} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^t\times\mathbb{R}_z^+;\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}))}.
$$

Donc,

$$
\int_0^{+\infty} \left\| \frac{\partial g}{\partial z} - f \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1})} \frac{\mathrm{d}z}{z} \leq C\|f\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{n-1}\times\mathbb{R}^t\times\mathbb{R}_z^+)}.
$$

$\square$

Annexe B

Prolongements de fonctions pour les multicouches

Dans cette annexe, nous établisons un théorème de prolongement pour les espaces de Sobolev dans des agencements multicouches. Nous sommes particulièrement intéressés par le contrôle de la constante.

B.1 Un théorème de prolongement pour les multicouches

Soit $L > 0$. Nous nous dotons de $2N$ réels $z_1, \ldots, z_N$ et $z'_1, \ldots, z'_N$ tels que $0 < z_1$, $z'_N < L$, $z_i < z'_i$ pour tout entier i, $1 \leq i \leq N$, et $z_i < z'_i$ pour tout entier i, $1 \leq i \leq N-1$. Nous notons alors

$$\mathcal{I}_i = (z_i, z'_i), \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}\ , 1 \leq i \leq N, \qquad \mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{I}_i, \qquad \hat{\mathcal{I}} = (z_1, z'_N).$$

Nous posons aussi, pour tout entier i, $1 \leq i \leq N-1$

$$\theta_i^+ = \frac{z'_{i+1} - z_{i+1}}{z_{i+1} - z'_i}, \qquad\qquad \theta_i^- = \frac{z'_i - z_i}{z_{i+1} - z'_i}.$$

Proposition B.1.1. *Soit B un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Il existe un opérateur* P

$$\mathrm{P} \colon \mathrm{H}^1(B \times \mathcal{I}) \to \mathrm{H}^1(B \times \hat{\mathcal{I}})$$

tel que, pour tout u appartenant à $\mathrm{H}^1(B \times \mathcal{I})$,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{P}(u)\|_{\mathrm{L}^\infty(B\times\hat{\mathcal{I}})} &\leq \|u\|_{\mathrm{L}^\infty(B\times\mathcal{I})}\\
\|\mathrm{P}(u)\|_{\mathrm{L}^2(B\times\hat{\mathcal{I}})} &\leq (1+2\alpha)\|u\|_{\mathrm{L}^2(B\times\mathcal{I})},\\
\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathrm{P}(u)\|_{\mathrm{L}^2(B\times\hat{\mathcal{I}})} &\leq (1+2\alpha)\|\nabla_{\boldsymbol{x}}u\|_{\mathrm{L}^2(B\times\mathcal{I})},\\
\left\|\frac{\partial \mathrm{P}(u)}{\partial z}\right\|_{\mathrm{L}^2(B\times\hat{\mathcal{I}})} &\leq (1+2\alpha+2\beta)\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{\mathrm{L}^2(B\times\mathcal{I})} + \mu\left(\sum_{i=1}^{N-1}\|u(\cdot,z_{i+1})-u(\cdot,z_i')\|^2_{\mathrm{L}^2(B)}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où les constantes α, β, μ sont des réels positifs que l'on peut choisir simultanément

$$\alpha = \big(\max_{1\leq i\leq N-1}(\theta_i^+,\theta_i^-)\big)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta = \big(\min_{1\leq i\leq N-1}(\theta_i^+,\theta_i^-)\big)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\mu = \big(\min_{1\leq i\leq N-1}(z_{i+1}-z_i')\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Preuve *:* Pour tout u dans $\mathrm{H}^1(B\times\mathcal{I})$, nous posons

$$\mathrm{P}(u)(\boldsymbol{x},z) = \begin{cases} u(\boldsymbol{x},z) & \text{si } z \text{ appartient à } \mathcal{I},\\ \dfrac{z_{i+1}-z}{z_{i+1}-z_i'}\,u\left(\boldsymbol{x},\theta_i^-(z_i'-z)+z_i'\right) & \\ \quad + \dfrac{z-z_i'}{z_{i+1}-z_i'}\,u\left(\boldsymbol{x},\theta_i^+(z_{i+1}-z)+z_{i+1}\right) & \text{si } z \text{ appartient à } (z_i', z_{i+1}), \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq N-1$. La fonction $\mathrm{P}(u)$ appartient à $\mathrm{H}^1(B\times\mathcal{I})$ et l'opérateur P vérifie les inégalités d'injections requises. □

B.2 Un contre-exemple

Nous allons démontrer dans cette section qu'il n'est guère possible d'améliorer de manière significative les prolongements de la section précédente dans le cas général.

Prenons un cas simplifié. Soit B un ouvert borné et convexe à frontière $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\theta < \frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel non nul N, nous posons

$$\begin{aligned}
z_i^{N,+} &= \frac{i+\theta}{N}, & z_i^{N,-} &= \frac{i-\theta}{N},\\
Y^N &= \bigcup_{i=1}^{N-1}(z_i^{N,+}, z_{i+1}^{N,-}), & Y &= (0,1),\\
\mathcal{O}^N &= B\times Y^N & \mathcal{O} &= B\times Y.
\end{aligned}$$

Notons aussi

$$I^N = \bigcup_{\substack{1 \le i \le N-1 \\ i \text{ impair}}} (z_i^{N,+}, z_{i+1}^{N,-}), \qquad J^N = \bigcup_{\substack{1 \le i \le N-1 \\ i \text{ pair}}} (z_i^{N,+}, z_{i+1}^{N,-}).$$

Nous établissons alors le lemme suivant :

Lemme B.2.1. *Soit* $\widetilde{u}$ *dans* $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$ *telle que* $\widetilde{u} = u$ *sur* $\mathcal{O}^N$. *Alors,*

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z} \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^N)} \geq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\theta}} \Big(\sum_{i=1}^{N-1} \| u(\cdot, \cdot, z_i^{N,+}) - u(\cdot, \cdot, z_i^{N,-}) \|_{\mathrm{L}^2(B)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : Nous avons

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{i=1}^{N-1} \| u(\cdot, \cdot, z_i^{N,+}) - u(\cdot, \cdot, z_i^{N,-}) \|_{\mathrm{L}^2(B)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \leq \left(\sum_{i=1}^{N-1} \iint_B \left| \int_{z_i^{N,-}}^{z_i^{N,+}} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, y, z) \right|^2 \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad\qquad \leq \sqrt{\frac{\theta}{N}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \iint_B \int_{z_i^{N,-}}^{z_i^{N,+}} \left| \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, y, z) \right|^2 \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Comme exemple, nous définissons la fonction u par

$$u^N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 0 & \text{si } z \text{ appartient à } I^N \\ 1 & \text{si } z \text{ appartient à } J^N \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier que

$$\Big(\sum_{i=1}^{N-1} \| u^N(\cdot, \cdot, z_i^{N,+}) - u^N(\cdot, \cdot, z_i^{N,-}) \|_{\mathrm{L}^2(B)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = |B|^{\frac{1}{2}}, \qquad \| u^N \|_{\mathrm{H}^1(\mathcal{O}^N)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après le lemme B.2.1, si $\widetilde{u}^N$ est un prolongement de u^N sur $\mathcal{O}$, alors

$$\| \widetilde{u}^N \|_{\mathrm{H}^1(\mathcal{O})} \geq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}} |B|^{\frac{1}{2}}.$$

Bibliographie

[1] Adams, R.A.: *Sobolev Spaces.* Numéro 65 dans *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, New York-London, 1975.

[2] Aharoni, A.: *Introduction to the theory of ferromagnetism.* Oxford Science Publication, 1996.

[3] Allaire, G.: *Homogenization and two-scale convergence.* SIAM J. Math. Anal., 23(6) :1482–1518, novembre 1992.

[4] Allaire, G. et Briane, M.: *Multiscale convergence and reiterated homogenisation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 126(2) :297–342, 1996.

[5] Allaire, G., Damlamian, A. et Hornung, U.: *Two-scale convergence on periodic surfaces and applications.* Dans eds., A. Bourgeat et al. (rédacteur) : *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media*, pages 15–25, Singapore., mai 1995. World Scientific Pub.

[6] Alouges, F. et Soyeur, A.: *On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations : existence and nonuniqueness.* Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, 18(11) :1071–1084, 1992.

[7] Amann, H.: *Operator-valued Fourier multipliers, vector valued Besov spaces and applications.* Math. Nachr., 186 :5–56, 1997.

[8] Ammari, H., Halpern, L. et Hamdache, K.: *Asymptotic behaviour of thin ferromagnetic films.* Asymptot. Anal, 3–4 :277–294, 2000.

[9] Benssoussan, A., Lions, J.L. et Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analsysis for periodic structures.* Numéro 5 dans *Stud. Math. Appl.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[10] Bergh, J. et Löfstrom, J.: *Interpolation Spaces, An Introduction.* Numéro 223 dans *Series of Comprehensive Studies in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1976.

[11] Brown, W.F.: *Magnetostatic Principles in Ferromagnetism.* North-Holland, 1962.

[12] Brown, W.F.: *Micromagnetics.* Interscience Publishers, 1963.

[13] Carbou, G.: *Thin Layers in Micromagnetism.* Math. Models Methods Appl. Sci., 11 :1529–1546, 2001.

[14] Carbou, G. et Fabrie, P.: *Regular Solutions for Landau-Lifschitz equations in* $\mathbb{R}^3$. Commun. Appl. Anal., 5(1) :17–30, 2001.

[15] Carbou, G. et Fabrie, P.: *Regular Solutions for Landau-Lifshitz equations in a bounded Domain.* Differential and integral equations, 14(2) :213–229, 2001.

[16] Chen, Y.: *The weak solutions to the evolution problems of harmonic maps.* Math. Z., 201 :69–74, 1989.

[17] Chen, Y., Ding, S. et Guo, B.: *Partial regularity for two-dimensional Landau-Lifshitz equations.* Acta Math. Sinica, 14(3) :423–432, 1998.

[18] Chen, Y. et Guo, B.: *Two-dimensional Landau-Lifshitz equation.* J. Partial Differential Equations, 9(4) :313–322, 1996.

[19] Cioranescu, D. et Saint Jean Paulin, J.: *Homogenization in open sets with holes.* J. Math. Anal. Appl., 71 :590–607, 1979.

[20] Damlamian, A. et Donato, P.: *Which sequences of holes are admissible for periodic homogenization with Neumann boundary condition ?* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 8 :555–585, juin 2002.

[21] Ding, S. et Guo, B.: *Initial boundary value problem for the Landau-Lifshitz system(II)-Uniqueness.* Progr. Natur. Sci., 8(2) :147–151, 1998.

[22] Duvault, G. et Lions, J.L.: *Les inéquations variationnelles en Mécanique et en Physique.* Dunod, 1972.

[23] Foias, C. et Temam, R.: *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, V(1) :28–63, 1978.

[24] Freire, A.: *Corrections to "Uniqueness . . . ".* Comment. Math. Helv., 71 :330–337, 1995.

[25] Freire, A.: *Uniqueness for the harmonic flow from surfaces to general targets.* Comment. Math. Helv., 70 :310–338, 1995.

[26] Friedman, M.J.: *Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation I.* SIAM J. Appl. Math., 39(1) :14–20, août 1980.

[27] Friedman, M.J.: *Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation II.* SIAM J. Numer. Math., 18(4) :644–653, août 1981.

[28] Friedman, M.J.: *Mathematical study of the nonlinear singular integral magnetic field equation III.* SIAM J. Math. Anal., 12(4) :644–653, juillet 1981.

[29] Grisvard, P: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman, 1985.

[30] Guidetti, D.: *On elliptic problems in Besov spaces.* Math. Nachr., 152 :247–275, 1991.

[31] Guo, B. et Hong, M.C.: *The Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain and harmonic maps.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 1 :311–334, 1993.

[32] Haddar, H. et Joly, P.: *Homogenized model for a laminar ferromagnetic medium.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 133(3) :567–598, 2003.

[33] Halpern, L. et Labbé, S.: *From the Quasi-Static to the Dynamic Maxwell's Model in Micromagnetism.* Dans SIAM (rédacteur) : *Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 310–314, 2000.

[34] Halpern, L. et Labbé, S.: *La théorie du micromagnétisme. Modélisation et simulation du comportement des matériaux magnétiques.* Matapli, 66 :77–92, 2001.

[35] Hamdache, K.: *Homogenization of layered ferromagnetic media.* preprint 495, CMAP Polytechnique, UMR CNRS 7641, 91128 PALAISEAU CEDEX (FRANCE), décembre 2002.

[36] Hamdache, K. et Hamroun, D.: *Ferromagnets with biquadratic exchange coupling energy.* preprint 536, CMAP Polytechnique, UMR CNRS 7641, 91128 PALAISEAU CEDEX (FRANCE), juin 2004.

[37] Hamdache, K. et Tilioua, M.: *On the zero thickness limit of thin ferromagnetic films with surface anisotropy.* Math. Models Methods Appl. Sci., 11(8) :1469–1490, 2001.

[38] Hamdache, K. et Tilioua, M.: *Interlayer exchange coupling for ferromagnets through spacers.* SIAM J. Appl. Math., 64(3) :1077–1097, 2004.

[39] Harpes, P.: *Ginzburg-Landau type approximations for the Landau-Lifshitz flow and the harmonic map flow in two space dimensions.* Thèse de doctorat, ETH-Zurich, 2001.

[40] Harpes, P.: *Uniqueness and bubbling of the 2-dimensional Landau-Lifshitz flow.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 20(2) :213–229, 2004.

[41] Joly, J.L., Métivier, G. et Rauch, J.: *Propagation des ondes électromagnétiques en presence d'un materiau ferromagnetique.* Dans *ESAIM*, tome 3, pages 85–99, 1998.

[42] Kirilyuk, A., Ferré, J., Grolier, V., Jamet, J. et Renard, D.: *Magnetization reversal in ultrathin ferromagetic films with perpendicular anisotropy.* J. Magn. Magn. Mater, 171 :45–63, 1997.

[43] Labbé, S.: *Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques.* Thèse de doctorat, Université Paris 13, décembre 1998.

[44] Labbé, S. et Leca, P.: *Résolution rapide des équations de Maxwell quasistationnaires : matrices Toeplitz multidimensionnelles. Application au micromagnétisme.* C. R. Acad. Sci. Paris, Série I(t. 327) :415–420, 1998.

[45] Labbé, S. et Bertin, P.Y.: *Microwave Polarisability of ferrite particles with non-uniform magnetization.* Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 206 :93–105, 1999.

[46] Labrune, M. et Miltat, J.: *Wall structure in ferro / antiferromagnetic exchange-coupled bilayers : a numerical micromagnetic approach.* Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 151 :231–245, 1995.

[47] Ladyzhenskaya, O.A.: *The boundary value problem of mathematical physics.* Numéro 49 dans *Applied Math. Sciences.* Springer Verlag, 1985.

[48] Landau, L.D. et Lifchitz, E.M.: *On the Theory of the Dispersion of magnetic Permeability in Ferromagnetic Bodies.* Phys. Z. Sowjetunion, 8 :153–169, 1935.

[49] Landau, L.D. et Lifchitz, E.M.: *Electrodynamique des milieux continus*, tome 8 de *Physique théorique.* Editions MIR, 1969.

[50] Landau, L.D. et Lifchitz, E.M.: *Théorie des champs*, tome 2 de *Physique théorique.* Editions MIR, 4 édition, 1989.

[51] Lions, J.L. et Magenes, E.: *Problèmes aux limites non homogènes*, tome 2 de *Travaux et recherches mathématiques.* Dunod, 1968.

[52] Lions, J.L. et Magenes, E.: *Problèmes aux limites non homogènes*, tome 1 de *Travaux et recherches mathématiques.* Dunod, Paris, 1968.

[53] Maz'ya, V.G.: *Sobolev Spaces.* Springer Verlag, 1986.

[54] Melcher, C.: *Existence of partially regular solutions for Landau-Lifshitz equations.* preprint, Institute for mathematics and its applications, University of Minnesota, novembre 2003.

[55] Moser, R.: *Partial regularity for the Landau-Lifshitz equation in small dimensions.* Rapport technique 26, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, 2002.

[56] Neuss-Radu, M.: *Some extensions of two-scale convergence.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 322(9) :899–904, 1996.

[57] Santugini, K.: *Modelization of a split in a ferromagnetic body by an equivalent boundary condition : Part 1. The classical case : no surface energies present.* preprint http ://www-math.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2004/pp2004-25.html, submitted, 2004.

[58] Santugini, K.: *Modelization of a split in a ferromagnetic body by an equivalent boundary condition : Part 2. The influence of super-exchange and surface anisotropy.* preprint http ://www-math.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2004/pp2004-26.html, submitted, 2004.

[59] Santugini, K.: *Solutions to the Landau-Lifshitz system with nonhomogenous boundary conditions.* preprint http ://www-math.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2004/pp2004-11.ps.gz, submitted, mars 2004.

[60] Simon, J.: *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura Appl., 146 :66–96, 1987.

[61] Struwe, M.: *On the evolution of harmonic maps of Riemannian surfaces.* Comment. Math. Helv., 60 :558–581, 1985.

[62] Tartar, L.: *Cours Peccot au collège de France.* Partiellement écrit par F. Murat dans Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'université d'Alger.

[63] Triebel, H.: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Numéro 18 dans *North-Holland Mathematical Library.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[64] Triebel, H.: *Theory of functions spaces II.* Numéro 84 dans *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[65] Trémolet de Lacheisserie, É. (rédacteur): *Magnétisme : Fondements*, tome I de *Collection Grenoble Sciences.* EDP Sciences, 2000.

[66] Trémolet de Lacheisserie, É. (rédacteur): *Magnétisme : Matériaux et applications*, tome II de *Collection Grenoble Sciences.* EDP Sciences, 2000.

[67] Visintin, A.: *On Landau-Lifshitz equations for ferromagnetism.* Japan J. Appl. Math., 2(1) :69–84, 1985.

Matériaux ferromagnétiques : influence d'un espaceur mince non magnétique, et homogénéisation d'agencements multicouches, en présence de couplage sur la frontière.

Résumé : Les matériaux ferromagnétiques jouent un rôle primordial dans les applications industrielles. Dans le cadre du modèle micromagnétique de Brown (1940), nous étudions l'influence d'un espaceur mince non magnétique sur le comportement d'un corps ferromagnétique. L'évolution dynamique est modélisée par l'équation de Landau-Lifchitz. Nous tenons compte des phénomènes de surface sur l'espaceur : le super-échange et l'anisotropie surfacique. Après avoir étudié le problème d'existence de cette équation en présence des termes de surfaces, nous établissons rigoureusement une condition équivalente de bord qui simule l'épaisseur de l'espaceur sur un domaine avec un espaceur sans épaisseur. Nous calculons alors les états d'équilibres et la susceptibilité hyperfréquence pour certaines configurations magnétiques. Dans une deuxième phase, nous homogénéisons l'équation de Landau-Lifchitz en domaine perforé et pour des agencements multicouches.

Mots clés : ferromagnétisme, micromagnétisme, équation de Landau-Lifchitz, multicouche magnétique, espaceur non magnétique, homogénéisation, analyse asymptotique, énergie d'anisotropie de surface, énergie de super-échange.

Ferromagnetic materials: influence of a nonmagnetic thin spacer, and homogeneization of multilayers in the presence of coupling on the boundary.

Abstract: Ferromagnetic materials are widely used in the industry. In the framework of the micromagnetic model introduced by Brown (1940), we study the influence of a thin nonmagnetic spacer on a ferromagnetic body. The evolution problem is modeled by the Landau-Lifshitz equation. We take into account phenomena on the surface of the spacer: super-exchange and surface anisotropy. We solve the existence problem for this equation with the surface terms. We then establish rigorously an equivalent boundary condition which models the thickness of the spacer on a domain with a thickless spacer. We compute some equilibrium states and the ultrafrequency susceptibility of some configurations. In a second stage, we homogenize the Landau-Lifshitz equation in both perforated and multilayers domains.

Keywords: ferromagnetism, micromagnetism, Landau-Lifshitz equation, magnetic multilayers, nonmagnetic spacer, homogenization, asymptotic analysis, surface anisotropy energy, interlayer exchange energy.

Discipline : Mathématiques appliquées

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications - UMR 7539
Université Paris 13,
99 Av. J-B Clément,
93430 Villetaneuse