

Soutenance de thèse

Matériaux ferromagnétiques : influence d'un espaceur mince non magnétique, et homogénéisation d'agencements multicouches, en présence de couplage sur la frontière

Kévin SANTUGINI
LAGA,
Université Paris XIII,

Sous la direction de Laurence HALPERN et Stéphane LABBÉ

Paris XIII, 16 décembre 2004

PLAN

- (1) Introduction
- (2) Le modèle du micromagnétisme de Brown
- (3) Caractère bien posé du système de Landau-Lifchitz en présence d'énergies de surfaces
- (4) Le problème d'espaceur
- (5) Résultats numériques
- (6) Homogénéisation
- (7) Conclusion et perspectives

(1) INTRODUCTION

Quelques propriétés des matériaux ferromagnétiques

- Peuvent présenter une aimantation non nulle en l'absence d'excitation extérieure
- La courbe d'aimantation présente un cycle d'hystérésis

Applications

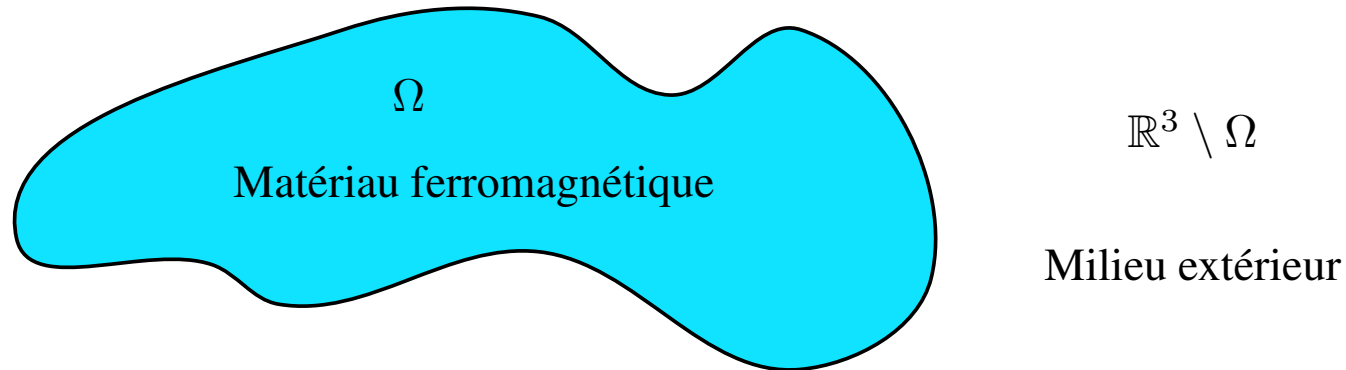
- Stockage de l'information
- Protection radar
- Télécommunications (circulateurs d'ondes)
- Gestion de l'énergie

Les apports de ce travail

- (1) Caractère bien posé de l'équation de Landau-Lifchitz en présence d'énergies de surface
- (2) Condition équivalente de bord en présence d'un espaceur non magnétique
- (3) Simulations numériques en présence d'énergies de surface
- (4) Homogénéisation pour des domaines régulièrement perforés et des agencements multicouches

(2) LE MODÈLE DU MICROMAGNÉTISME DE BROWN

Principes qualitatifs



- État magnétique d'un matériau ferromagnétique caractérisé par son aimantation \mathbf{m}
- Module local de l'aimantation constant. Après adimensionnement :

$$|\mathbf{m}| = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega. \end{cases} \quad (\text{CTR})$$

- Chaque interaction physique \implies une énergie
- Problème statique : minimisation de l'énergie sous contrainte non convexe (CTR)

Les énergies d'interactions de volume

Composantes des énergies de volume :

	Énergie	Opérateur d'excitation \mathcal{H}
Échange	$\frac{A}{2} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m} ^2 \, d\mathbf{x},$	$A \Delta \mathbf{m}$ dans $\Omega,$
Anisotropie	$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} \, d\mathbf{x},$	$-\mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{m}$ dans $\Omega,$
Démagnétisant	$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{h}_d \cdot \mathbf{m} \, d\mathbf{x},$	$\mathcal{H}_d(\mathbf{m}) = \mathbf{h}_d$ dans $\Omega,$
Zeeman	$-\int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{m} \, d\mathbf{x},$	\mathbf{h}_{ext} dans $\Omega.$

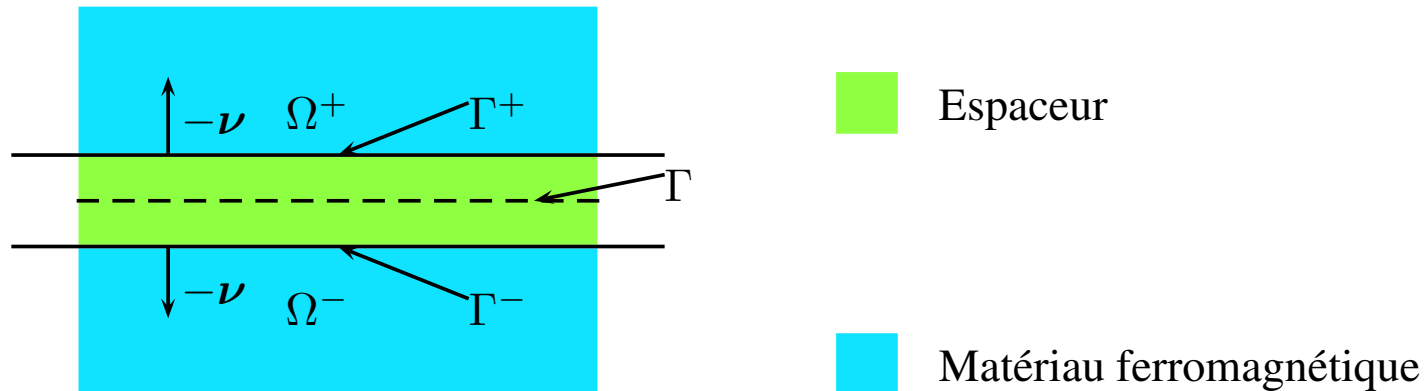
\mathbf{h}_d vérifie les équations de la magnétostatique

$$\text{rot}(\mathbf{h}_d) = 0, \quad \text{div}(\mathbf{h}_d + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

$$\mathcal{H}_{vt}(\mathbf{m}, \mathbf{h}_{\text{ext}}) = A \Delta \mathbf{m} - \mathbf{K} \mathbf{m} + \mathcal{H}_d(\mathbf{m}) + \mathbf{h}_{\text{ext}}, \quad \mathcal{H}_v(\mathbf{m}) = \mathcal{H}_{vt}(\mathbf{m}, \mathbf{0}).$$

Les énergies d'interactions de surfaces

Espaceur traversant un corps ferromagnétique



Phénomènes physiques sur l'interface : super-échange et anisotropie surfacique

Super-échange : contrôle le saut de l'aimantation

Anisotropie surfacique : favorise souvent l'aimantation parallèle à la normale de la surface

$$E_{se}(\mathbf{m}) = \frac{J_1}{2} \int_{\Gamma} |\gamma^+ \mathbf{m} - \gamma^- \mathbf{m}|^2 d\sigma(\mathbf{x}) + J_2 \int_{\Gamma} |\gamma^+ \mathbf{m} \wedge \gamma^- \mathbf{m}|^2 d\sigma(\mathbf{x}),$$

$$E_{sa}(\mathbf{m}) = \frac{K_s}{2} \int_{\Gamma^- \cup \Gamma^+} |\gamma \mathbf{m} \wedge \boldsymbol{\nu}|^2 d\sigma(\mathbf{x}).$$

Conditions aux limites

Effet mathématique des interactions de surfaces : conditions aux limites de Neumann non homogènes

$$A\mathbf{m} \wedge \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^\pm, \\ K_s(\gamma\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu})\gamma\mathbf{m} \wedge \boldsymbol{\nu} + J_1\gamma\mathbf{m} \wedge \gamma'\mathbf{m} + 2J_2(\gamma\mathbf{m} \cdot \gamma'\mathbf{m})\gamma\mathbf{m} \wedge \gamma'\mathbf{m} & \text{sur } \Gamma^\pm. \end{cases} \quad (\text{CL})$$

Proviennent des conditions de stationnarité d'Euler-Lagrange.

Contrainte non convexe $|\mathbf{m}| = 1 : \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 :$

$$A \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^\pm, \\ K_s(\gamma\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu} - (\gamma\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu})\gamma\mathbf{m}) & \text{sur } \Gamma^\pm. \\ \quad + (J_1 + 2J_2(\gamma\mathbf{m} \cdot \gamma'\mathbf{m}))(\gamma'\mathbf{m} - (\gamma'\mathbf{m} \cdot \gamma\mathbf{m})\gamma'\mathbf{m}) & \end{cases}$$

Ni super-échange ni anisotropie surfacique : conditions de Neumann homogènes.

Équation d'évolution dynamique

Équation de Landau-Lifchitz sur les grandeurs mésoscopiques :

$$\partial_t \mathbf{m} = -\mathbf{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\mathbf{m}, \mathbf{h}_{\text{ext}}) - \alpha \mathbf{m} \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\mathbf{m}, \mathbf{h}_{\text{ext}})),$$

avec les conditions (CL) et la contrainte : $|\mathbf{m}| = 1$ dans $\Omega \times (0, T)$.

Inégalité d'énergie :

$$E(\mathbf{m}(\cdot, T)) + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \int_0^T \left| \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right|^2 dt \leq E(\mathbf{m}(\cdot, 0)).$$

Résultats connus en l'absence d'énergies de surfaces :

- (1) Solutions faibles : appartenant à $L^\infty(0, +\infty; \mathbb{H}^1(\Omega)) \cap \mathbb{H}^1(\Omega \times (0, T))$. Existence globale pour C.I. dans H^1 , (Alouges-Soyeur, Labbé).
- (2) Solutions fortes appartenant à $\mathbb{H}^{3, \frac{3}{2}}(\Omega \times (0, T))$. Existence-unicité en temps fini pour C.I. dans H^2 , (Carbou-Fabrie).

Existence de solutions faibles pour énergies de surfaces quadratiques (Hamdache-Tilioua).

(3) CARACTÈRE BIEN POSÉ DU SYSTÈME DE LANDAU-LIFCHITZ

Théorème 1 Soit \mathbf{m}_0 dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, telle que $|\mathbf{m}_0| = 1$ presque partout. Alors, il existe au moins une solution faible, du système de Landau-Lifchitz en présence d'anisotropie surfacique et de super-échange.

Théorème 2 Soit une excitation extérieure \mathbf{h}_{ext} appartenant à $\mathbb{H}^{1, \frac{1}{2}}(\Omega \times (0, T))$. Si la C.I. \mathbf{m}_0 appartient à $\mathbb{H}^2(\Omega)$, $|\mathbf{m}_0| = 1$, et vérifie les C.L.

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^\pm, \\ (Q_r^\pm(\gamma \mathbf{m}, \gamma' \mathbf{m}) \cdot \gamma \mathbf{m}) \gamma \mathbf{m} - Q_r^\pm(\gamma \mathbf{m}, \gamma' \mathbf{m}) & \text{sur } \Gamma^\pm, \end{cases}$$

alors, il existe un temps positif $T^* > 0$ et une solution forte \mathbf{m} de Landau-Lifchitz avec \mathbf{m}_0 comme condition initiale. La fonction $\mathbf{m}_0 \rightarrow T^*$ est semi-continue inférieurement et la fonction qui à \mathbf{m}_0 associe la solution \mathbf{m} est continue de $\mathbb{H}^2(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^3(\Omega \times (0, T))$, pour tout $T < T^*$.

(4) LE PROBLÈME D'ESPACEUR

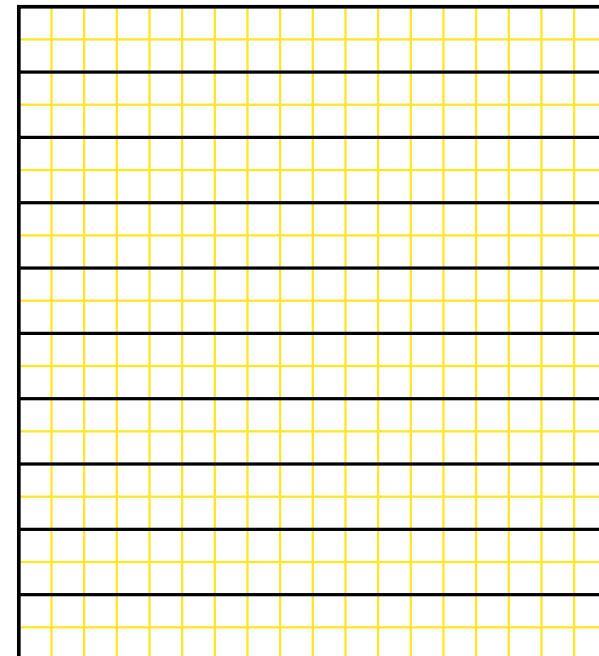
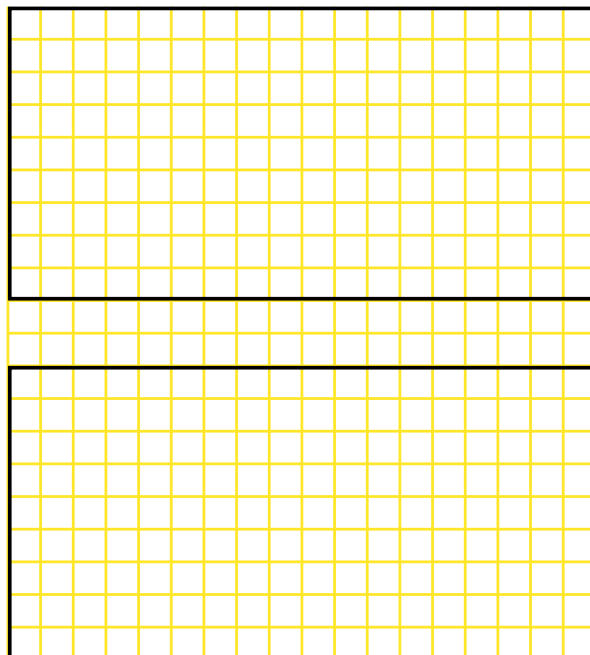
Les difficultés de l'implémentation dans les géométries minces

Configurations géométriques intéressantes peu favorables à la simulation numérique.

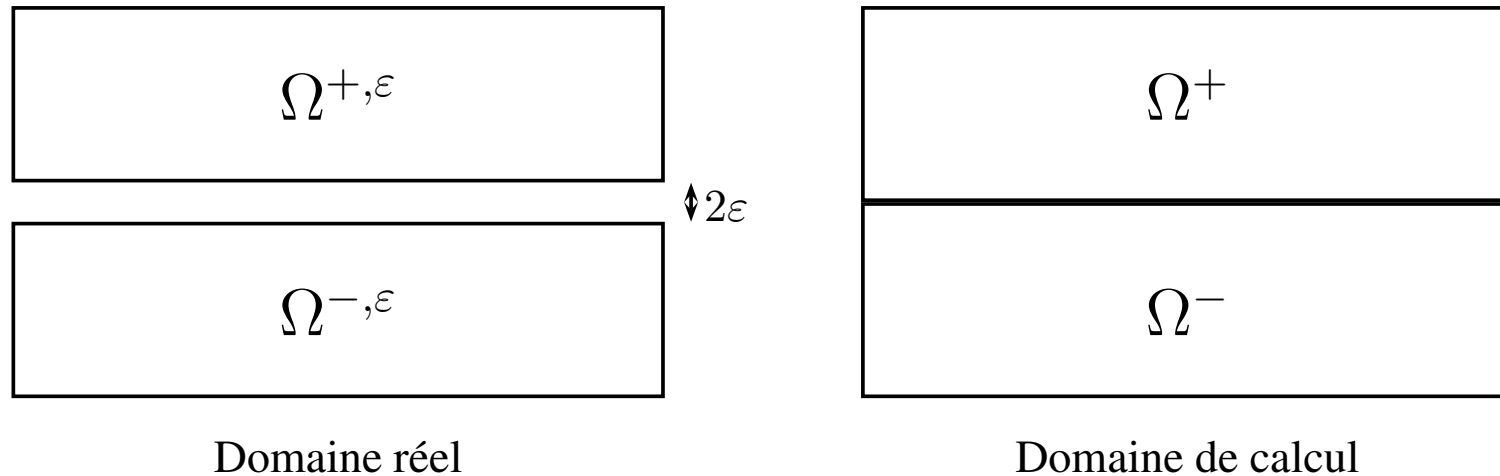
Calcul du terme magnétostatique par FFT très avantageux. Nécessite un maillage régulier.

Autres méthodes rapides : Spectre non respecté.

Agencements multicouches et espaceurs minces nécessitent un pas de maillage très petit.



Le développement à l'ordre 1 et la méthode



Notre but : obtenir un problème équivalent sur géométrie avec espaceur d'épaisseur nulle.

Méthodes d'échelle à éviter pour pouvoir traiter plus tard des coupures.

Suppression d'une couche matérielle au lieu d'ajout.

⇒ Réduction de l'énergie par rapport au problème limite.

⇒ Coercivité insuffisante de l'énergie.

Développement à l'ordre 1 de m^ε solution de Landau-Lifchitz sur Ω^ε .

$m^\varepsilon = m^{(0)} + \varepsilon m^{(1)}$ sur $\Omega^\varepsilon \implies$ Obtention d'une condition équivalente de bord.

Le problème limite : les équations formelles

D'abord développement de l'équation d'évolution :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial t} &= -\mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\mathbf{m}^{(0)}, \mathbf{h}_{\text{ext}}) - \alpha \mathbf{m}^{(0)} \wedge (\mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_{vt}(\mathbf{m}^{(0)}, \mathbf{h}_{\text{ext}})), \\ \frac{\partial \mathbf{m}^{(1)}}{\partial t} &= -\mathbf{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\mathbf{m}^{(0)}) - \mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\mathbf{m}^{(1)}) - \alpha \mathbf{m}^{(1)} \wedge (\mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\mathbf{m}^{(0)})) \\ &\quad - \alpha \mathbf{m}^{(0)} \wedge (\mathbf{m}^{(1)} \wedge \mathcal{H}_v(\mathbf{m}^{(0)})) - \alpha \mathbf{m}^{(0)} \wedge (\mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_v(\mathbf{m}^{(1)})) \\ &\quad + \mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma \mathbf{m}^{(0)} d\Gamma) + \mathbf{m}^{(0)} \wedge (\mathbf{m}^{(0)} \wedge \mathcal{H}_d(\gamma \mathbf{m}^{(0)} d\Gamma)).\end{aligned}$$

Avec les contraintes $|\mathbf{m}^{(0)}| = 1$ et $\mathbf{m}^{(0)} \cdot \mathbf{m}^{(1)} = 0$, les conditions initiales $\mathbf{m}^{(0)}(\cdot, 0) = \mathbf{m}_0^{(0)}$ et $\mathbf{m}^{(1)}(\cdot, 0) = \mathbf{m}_0^{(1)}$. Et la condition aux limites :

$$\frac{\partial \mathbf{m}^{(1)}}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma \times (0, T), \\ \text{DQ}^\pm(\gamma \mathbf{m}^{(0)}, \gamma' \mathbf{m}^{(0)}) \cdot (\gamma \mathbf{m}^{(1)} - \gamma^1 \mathbf{m}^{(0)}, \gamma' \mathbf{m}^{(1)} - \gamma^{1'} \mathbf{m}^{(0)}) \\ \quad + \frac{\partial^2 \mathbf{m}^{(0)}}{\partial \nu^2} & \text{sur } \Gamma^\pm \times (0, T), \end{cases}$$

Obtention formelle de la condition de bord d'ordre 1

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(\mathbf{m}^\varepsilon - \mathbf{m}^{(0)})}{\partial z}(\cdot, \cdot, \varepsilon, \cdot) &\approx -\frac{1}{\varepsilon} (Q^+(\gamma_\varepsilon^+ \mathbf{m}^\varepsilon, \gamma_\varepsilon^- \mathbf{m}^\varepsilon) - Q^+(\gamma_\varepsilon^+ \mathbf{m}^{(0)}, \gamma_\varepsilon^- \mathbf{m}^{(0)})) \\
 &- \frac{1}{\varepsilon} (Q^+(\gamma_\varepsilon^+ \mathbf{m}^{(0)}, \gamma_\varepsilon^- \mathbf{m}^{(0)}) - Q^+(\gamma^+ \mathbf{m}^{(0)}, \gamma^- \mathbf{m}^{(0)})) - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z}(\cdot, \cdot, \varepsilon, \cdot) - \frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z}(\cdot, \cdot, 0, \cdot) \right) \\
 &\approx -\text{D}Q^+(\gamma^+ \mathbf{m}^{(0)}, \gamma^- \mathbf{m}^{(0)}) \cdot \left(\gamma^+ \mathbf{m}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z}, \gamma^- \mathbf{m}^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{m}^{(0)}}{\partial \nu^2}.
 \end{aligned}$$

Cas simple : $K_s = J_1 = J_2 = 0$:

$$\frac{\partial(\mathbf{m}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{m}^{(1)})}{\partial \nu}(\mathbf{x} - \varepsilon \boldsymbol{\nu}, \cdot) \approx 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Après développement formel à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \mathbf{m}^{(1)}}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \cdot) \approx \frac{\partial^2 \mathbf{m}^{(0)}}{\partial \nu^2}(\mathbf{x}, \cdot) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Étude du système de Landau-Lifchitz linéarisé

Théorème 3 *Le système de Landau-Lifchitz linéarisé est bien posé dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ pour une condition initiale $\mathbf{m}_0^{(1)}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ satisfaisant $\mathbf{m}_0^{(0)} \cdot \mathbf{m}_0^{(1)} = 0$ et des conditions aux limites de Neumann affines dans $\mathbb{H}_{\text{morc}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\partial\Omega \times (0, T))$.*

Théorème 4 *Le système de Landau-Lifchitz linéarisé est bien posé dans $\mathbb{H}^{3, \frac{3}{2}}(\Omega \times (0, T))$ pour une condition initiale $\mathbf{m}_0^{(1)}$ dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$ satisfaisant $\mathbf{m}_0^{(0)} \cdot \mathbf{m}_0^{(1)} = 0$ et des conditions aux limites de Neumann linéaires avec termes affines dans $\mathbb{H}_{00}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\partial\Omega \times (0, T))$.*

Théorème 5 *Le système de Landau-Lifchitz linéarisé est bien posé dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ pour $\mathbf{m}_0^{(1)}$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ satisfaisant $\mathbf{m}_0^{(0)} \cdot \mathbf{m}_0^{(1)} = 0$ et des conditions aux limites de Neumann linéaires avec termes affines dans $\mathbb{H}_{\text{morc}}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\partial\Omega \times (0, T))$.*

Convergence à l'ordre 0

m^ε converge-t-il vers $m^{(0)}$? Estimations sur la norme $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon \times (0, T))$ de $m^\varepsilon - m^{(0)}$.

Première approche : estimations et Gronwall. Termes de bord difficiles à traiter.

Solution : technique utilisée pour la preuve de l'existence de $m^{(1)}$ sur une équation proche.

$m^\varepsilon - m^{(0)}$ solution de Landau Lifchitz linéarisée développée autour de m^ε et $m^{(0)}$.

Nouveau système linéaire bien posé dans $\mathbb{H}^{2,1}$ à partir d'une C.I. dans \mathbb{H}^1 .

Données dominées par ε près de 0 :

$$\|m^\varepsilon - m^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega^\varepsilon \times (0, T))} = O(\varepsilon).$$

Construction prolongement $\widetilde{m}^\varepsilon$ sur Ω , telle que :

$$\|\widetilde{m}^\varepsilon - m^{(0)}\|_{\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0, T))} = O(\varepsilon).$$

Convergence à l'ordre 1

Théorème 6 *Le champ de vecteur $\frac{\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon - \mathbf{m}^{(0)}}{\varepsilon}$ tend faiblement vers $\mathbf{m}^{(1)}$ dans $\mathbb{H}^{2,1}(\Omega \times (0, T))$.*

Une limite faible $\overline{\mathbf{m}^{(1)}}$ existe, à une sous-suite près.

But : prouver que $\overline{\mathbf{m}^{(1)}} = \mathbf{m}^{(1)}$. $\overline{\mathbf{m}^{(1)}}$ solution du système LL linéarisé.

Seul point délicat : condition de bord sur Γ :

$$\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon - \mathbf{m}^{(0)})}{\partial z}(\mathbf{x}', \varepsilon, t) - \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon - \mathbf{m}^{(0)})}{\partial z}(\mathbf{x}', 0^+, t) \right|^2 d\sigma(\mathbf{x}') dt \leq \varepsilon^3 \left\| \frac{\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon - \mathbf{m}^{(0)}}{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{H}^{0,2,0}}^2.$$

Donc, sur Γ^+ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathbf{m}^{(1)}}}{\partial z}(\cdot, 0^+, \cdot) &= \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial(\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon_k} - \mathbf{m}^{(0)})}{\partial z}(\cdot, \varepsilon_k, \cdot), \\ &= -\text{DQ}^+(\gamma \mathbf{m}^{(0)}, \gamma' \mathbf{m}^{(0)}) \left(\overline{\mathbf{m}^{(1)}} + \frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z}, \overline{\mathbf{m}^{(1)}} - \frac{\partial \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{m}^{(0)}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

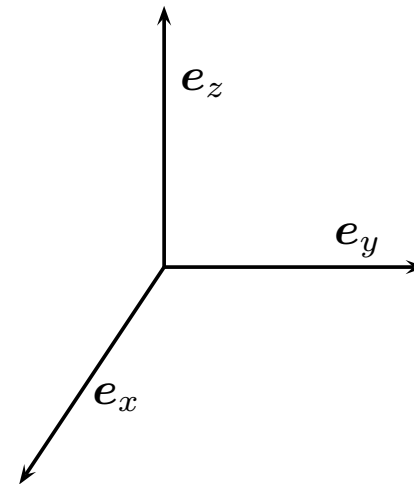
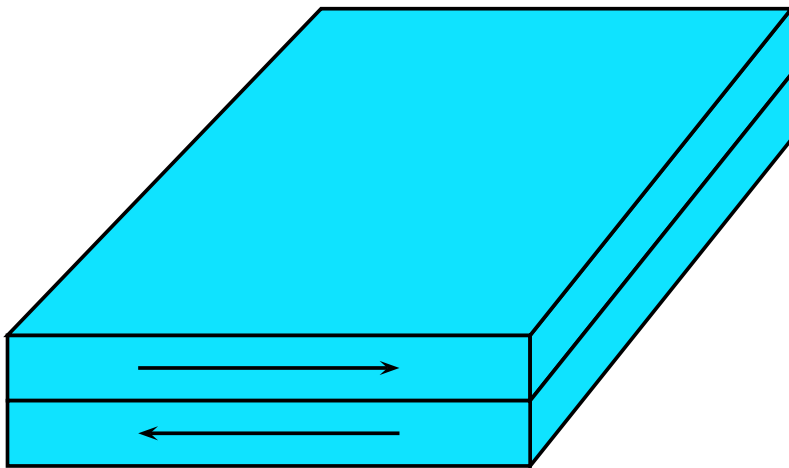
(5) RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Calcul des états d'équilibre pour deux couches superposées par EMicroM.

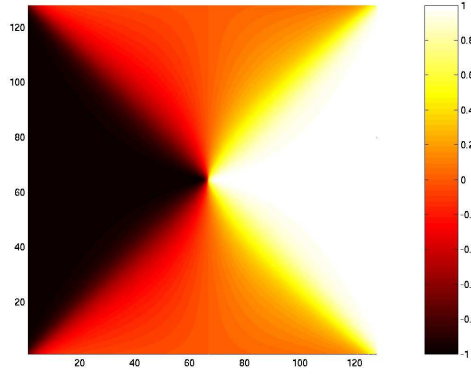
Méthode dynamique par schéma explicite d'ordre 2, pas de temps optimisé (Labbé).

Maillage $128 \times 128 \times 2$, condition initiale e_y sur la couche supérieure, et $-e_y$ sur la couche inférieure.

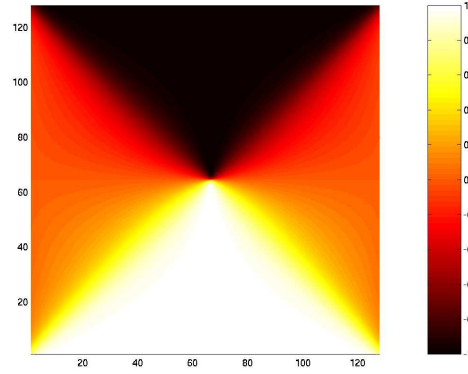
- (1) D'abord, état d'équilibre sans espaceur.
- (2) Espaceur dans la tranche. Différentes valeurs de J_1 .



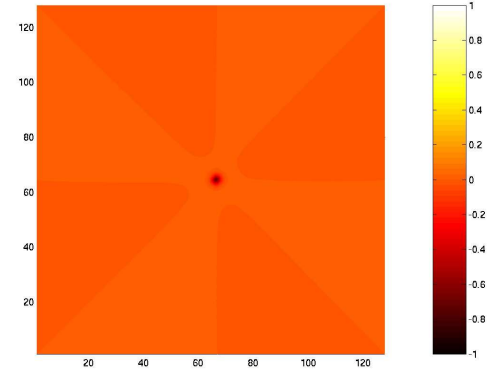
Projection sur Ox



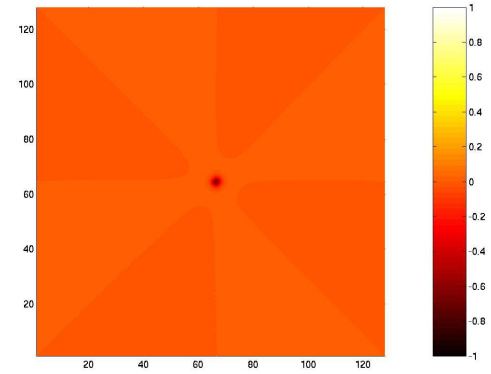
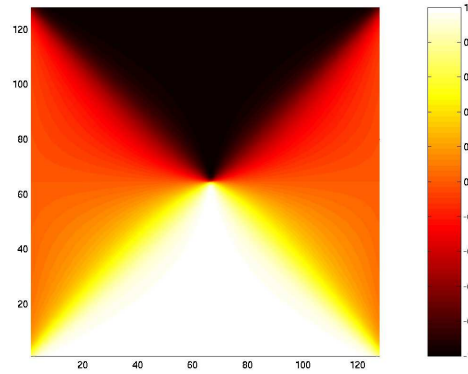
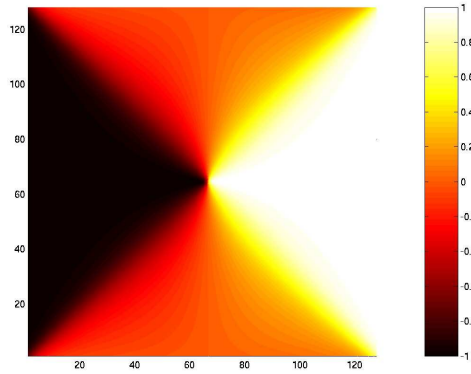
Projection sur Oy



Projection sur Oz

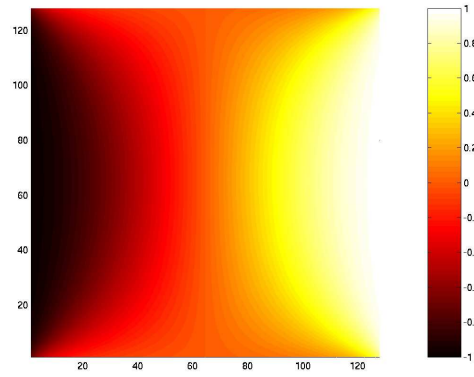


Plaque supérieure

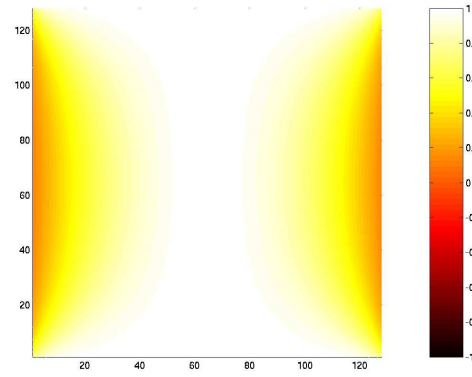


Plaque inférieure
Simulation sans espaceur

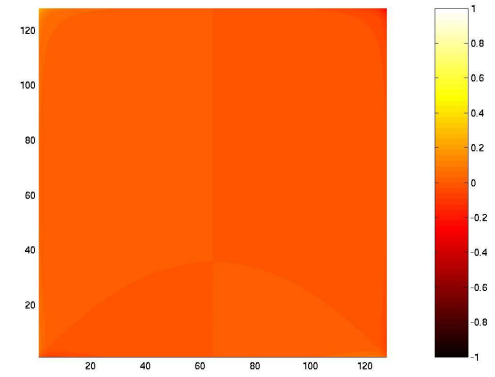
Projection sur Ox



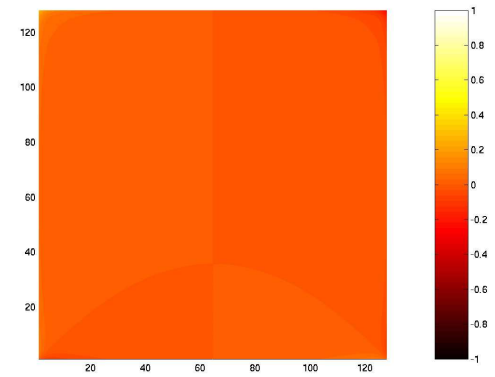
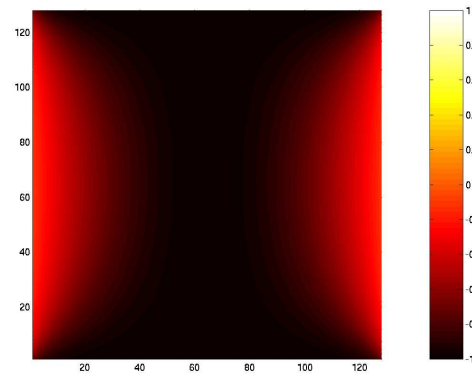
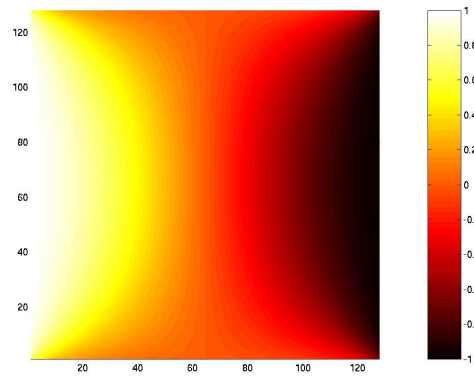
Projection sur Oy



Projection sur Oz



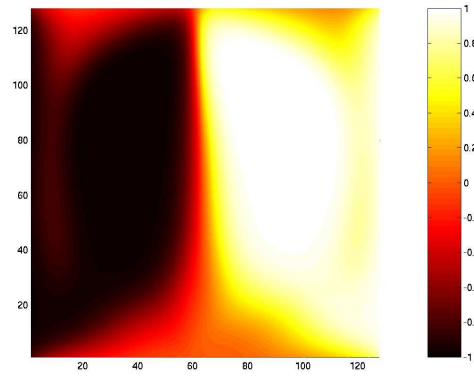
Plaque supérieure



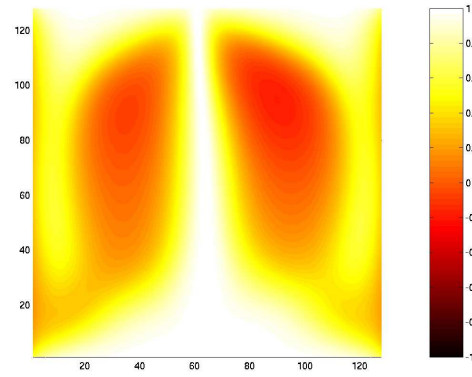
Plaque inférieure

Simulation avec espaceur : $m^{(0)}$, $J_1 = 2 \times 10^{-5}$,

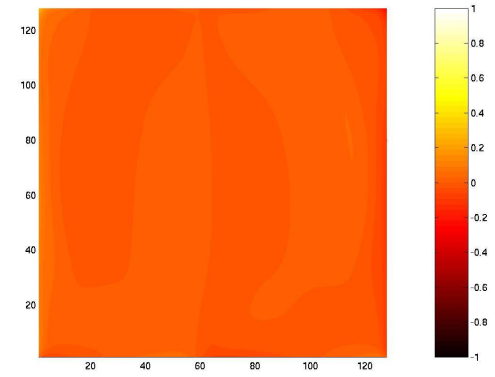
Projection sur Ox



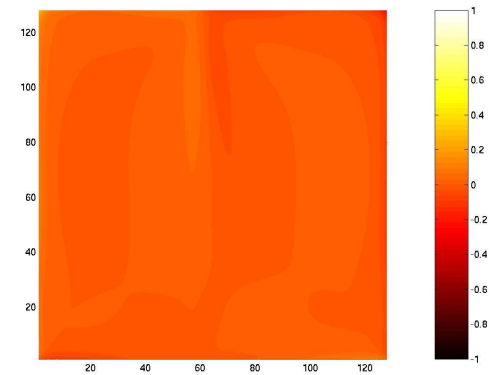
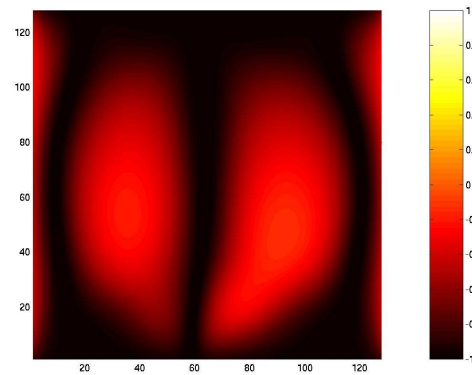
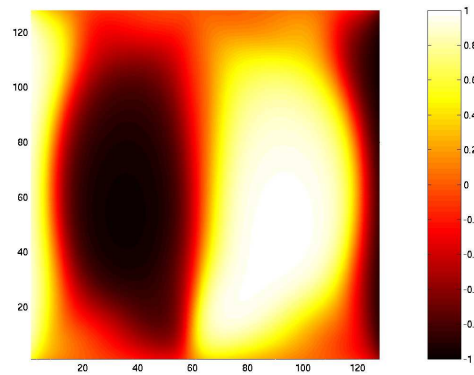
Projection sur Oy



Projection sur Oz



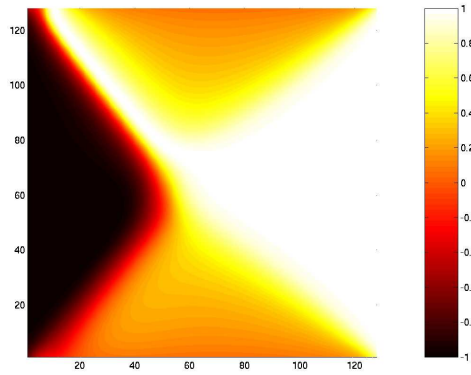
Plaque supérieure



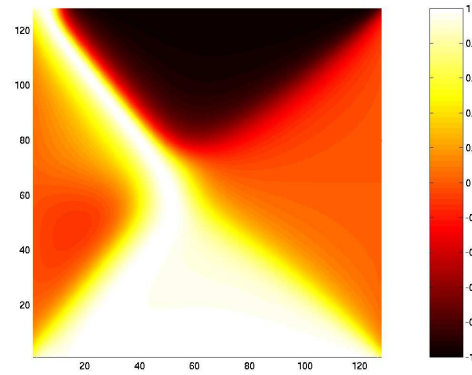
Plaque inférieure

Simulation avec espaceur : $m^{(0)}$, $J_1 = 5 \times 10^{-5}$,

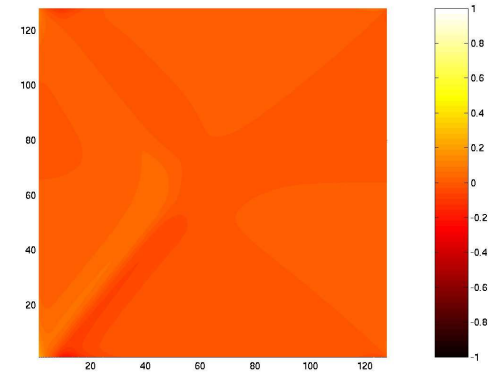
Projection sur Ox



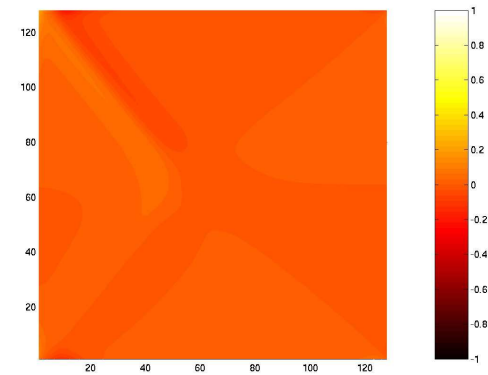
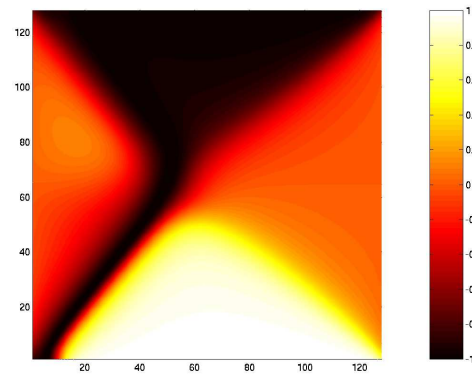
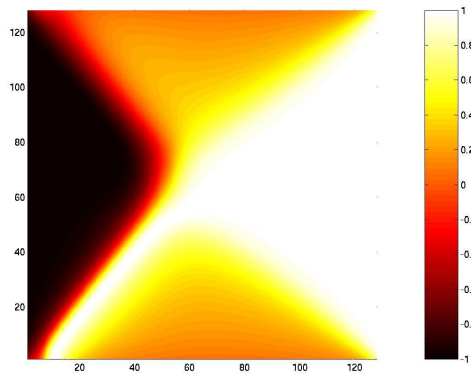
Projection sur Oy



Projection sur Oz



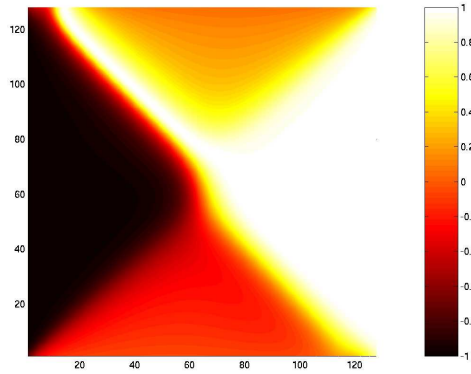
Plaque supérieure



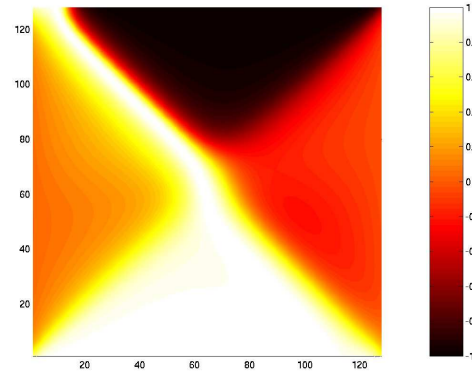
Plaque inférieure

Simulation avec espaceur : $m^{(0)}$, $J_1 = 8 \times 10^{-5}$,

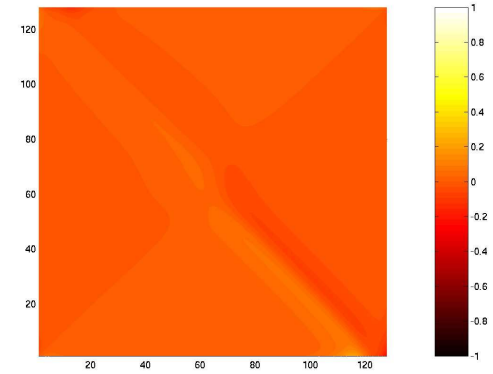
Projection sur Ox



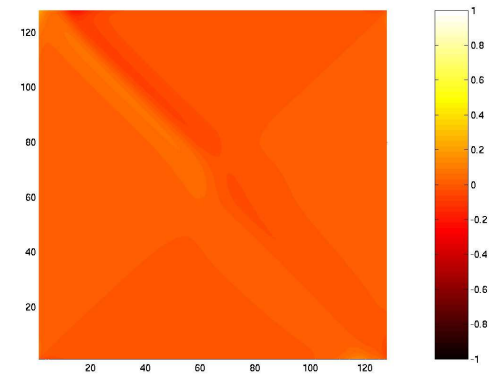
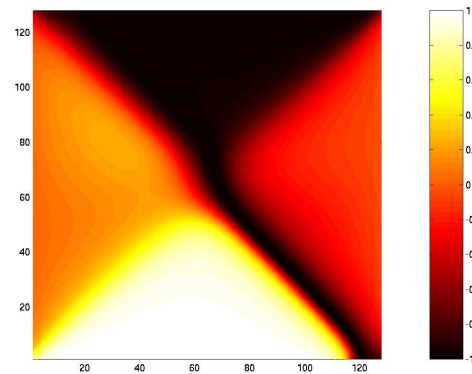
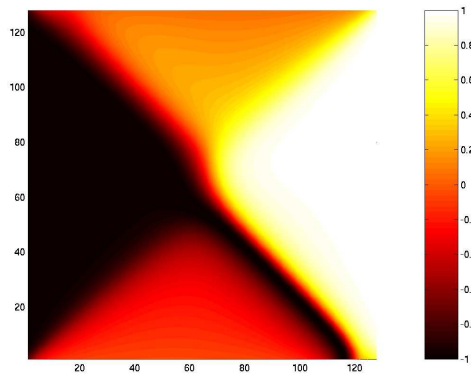
Projection sur Oy



Projection sur Oz



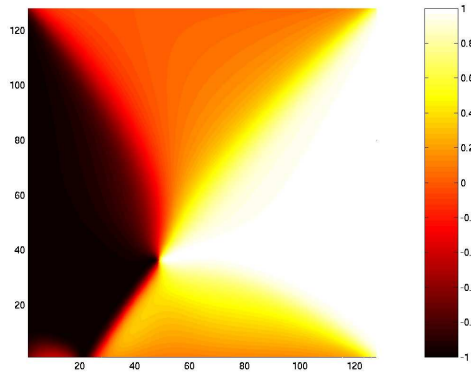
Plaque supérieure



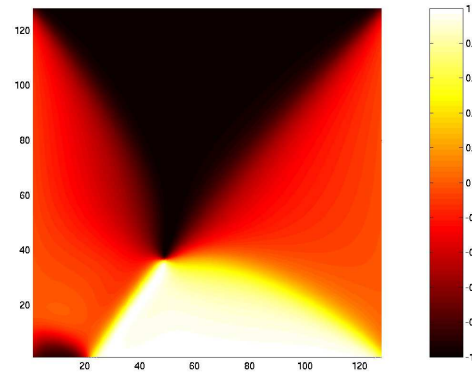
Plaque inférieure

Simulation avec espaceur : $m^{(0)}$, $J_1 = 1 \times 10^{-4}$,

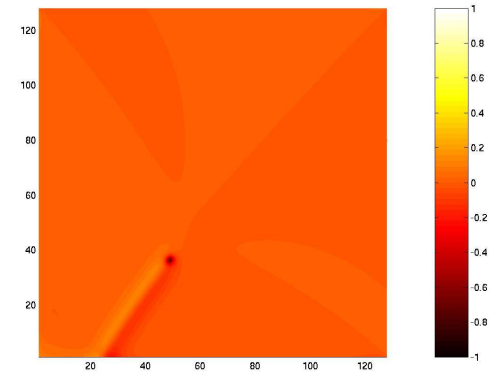
Projection sur Ox



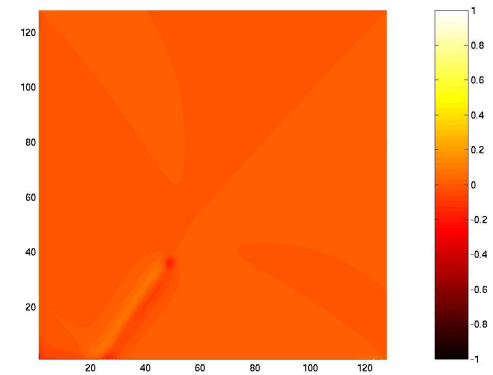
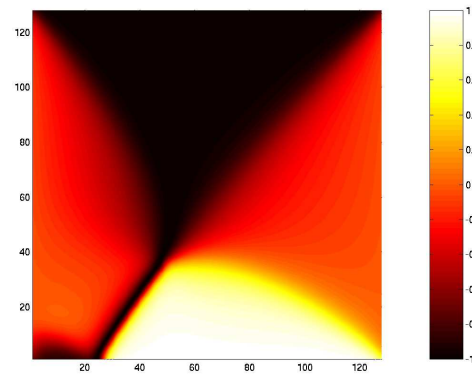
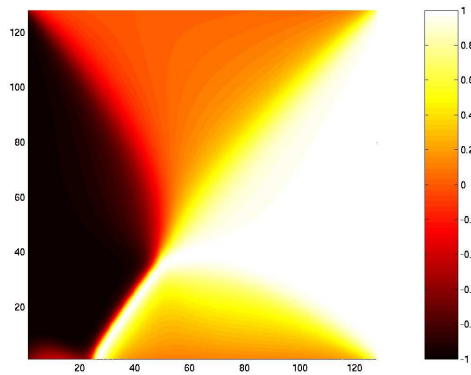
Projection sur Oy



Projection sur Oz



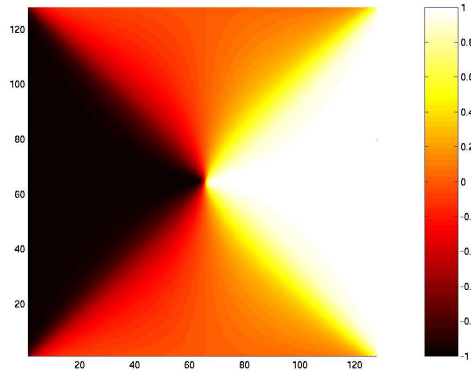
Plaque supérieure



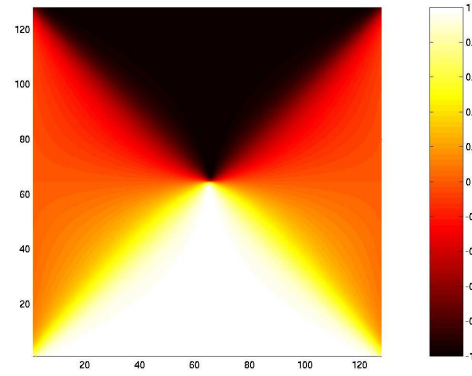
Plaque inférieure

Simulation avec espaceur : $m^{(0)}$, $J_1 = 5 \times 10^{-4}$,

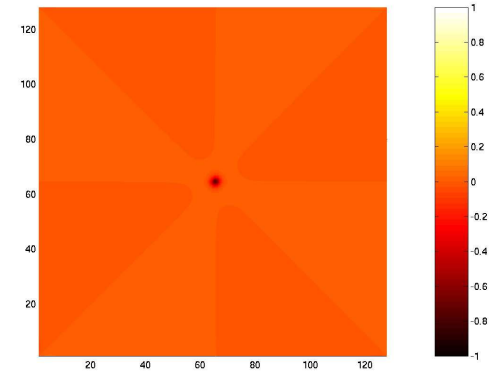
Projection sur Ox



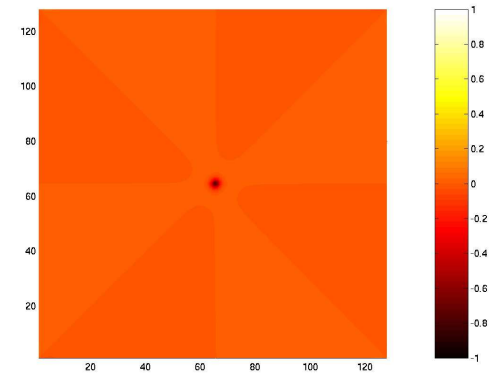
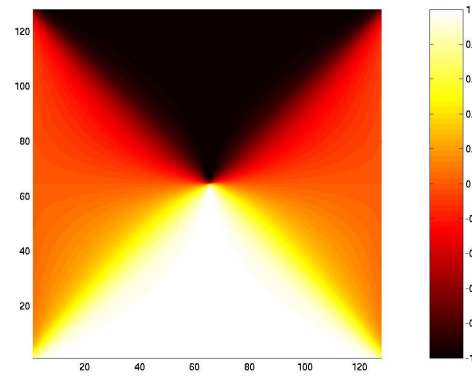
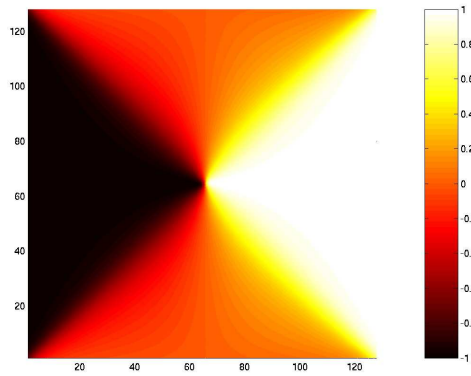
Projection sur Oy



Projection sur Oz



Plaque supérieure



Plaque inférieure

Simulation avec espacur : $m^{(0)}$, $J_1 = 8 \times 10^{-4}$,

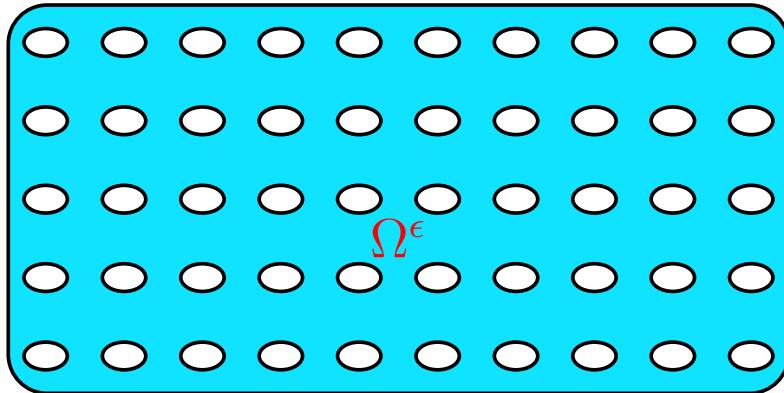
(6) HOMOGENÉISATION EN DOMAINE PERFORÉ

Géométrie du problème

Deux types de domaines : domaines perforés et agencements multicouches.

Problèmes physiques périodiques avec petite échelle ϵ .

Passage à la limite quand ϵ tend vers 0.



Échange anisotrope \mathbf{A} .

Taille des trous isolés ϵ .

$$\mathcal{Y} = (0, 1)^3,$$

$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{Y}$ le trou de base. $\mathcal{Y}^* = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{T}_0$.

$$T_\epsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\epsilon(k + \mathcal{T}_0) \mid \epsilon(k + \mathcal{Y}) \subset \Omega\},$$

$$\Omega^\epsilon = \Omega \setminus T_\epsilon.$$

m^ϵ solution de LL avec conditions de Neumann homogènes sur les trous.

Existence d'un opérateur de prolongement sur tout le domaine sans trou.

Limite suivant la méthode de la convergence double-échelles (Allaire, Briane, Neuss-Radu).

Existence d'une limite \widetilde{m}^0 au sens de la convergence double-échelles.

Équation homogénéisée

La limite vérifie

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{m}}^0}{\partial t} - \alpha \widetilde{\mathbf{m}}^0 \wedge \frac{\partial \widetilde{\mathbf{m}}^0}{\partial t} = -(1 + \alpha^2) \widetilde{\mathbf{m}}^0 \wedge \left(\operatorname{div}((\mathbf{A}^* \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{m}}^0) - \bar{\mathbf{K}} \widetilde{\mathbf{m}}^0 + \mathcal{H}_d(\bar{\chi} \widetilde{\mathbf{m}}^0) + \mathbf{H}_d \widetilde{\mathbf{m}}^0 \right),$$

dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$,

$$\widetilde{\mathbf{m}}^0(\cdot, 0) = \mathbf{m}_0^0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial \widetilde{\mathbf{m}}^0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty).$$

\mathbf{A}^* : matrice d'homogénéisation classique, $\bar{\mathbf{K}}$: moyenne usuelle, $\bar{\chi}$: taux d'occupation.

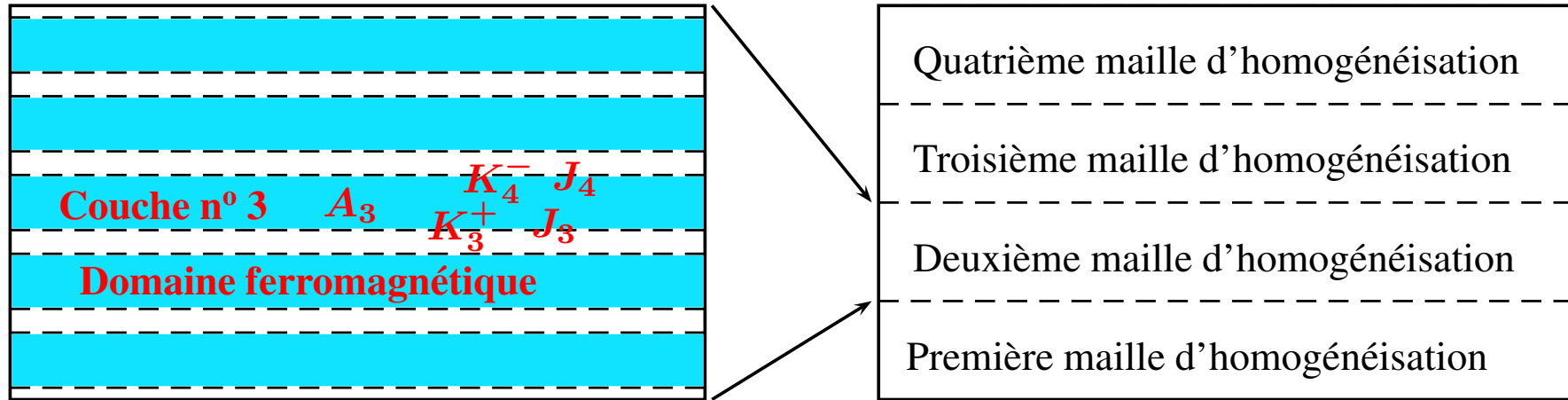
Terme difficile de correction démagnétisant dépendant de la géométrie des trous.

$$(\mathbf{H}_d)_{ij} = \frac{1}{\bar{\chi}} \int_{\mathcal{Y}} (\nabla w'_i(\mathbf{y}) + \chi \mathcal{Y}^*(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i) \cdot (\nabla w'_j(\mathbf{y}) + \chi \mathcal{Y}^* \mathbf{e}_j) d\mathbf{y} - 1.$$
$$\int_{\mathcal{Y}} (\nabla_{\mathbf{y}} w'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \chi \mathcal{Y}^*(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i) \nabla_{\mathbf{y}} \psi d\mathbf{y} = 0, \quad \int_{\mathcal{Y}} w'_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

(7) HOMOGÉNÉISATION POUR DES AGENCEMENTS MULTICOUCHES

Géométrie et prolongements

N : nombre de mailles d'homogénéisation. p : nombre de couches dans une maille.



Une maille d'homogénéisation, $p = 5$

Domaine multicouche, $N = 4$

Existence d'opérateur de prolongement de $H^1(\Omega^N)$ dans $H^1(\Omega)$, P_n :

$$\|P_N(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega^N)}, \quad \|\nabla_{2D}P_N(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla_{2D}u\|_{L^2(\Omega^N)},$$

$$\left\| \frac{\partial P_N(u)}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega^N)} + \sqrt{N} \left(\sum_{i=1}^{Np-1} \|\gamma^+ u - \gamma^- u\|_{L^2(\Gamma_{(i)}^N)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz

Plusieurs paramètres :

- p constantes d'échange A_i et p Matrices d'anisotropie \mathbf{K}_i .
- $2p$ constantes d'anisotropies surfaciques K_i^+ et K_i^- .
- $2p$ constantes de super-échange $J_{1,i}$ et $J_{2,i}$.

Deux cas d'énergies de surfaces rigidifiant suffisamment le système :

Anisotropie surfacique dominante

Constante d'anisotropie surfacique indépendante de la distance intercouche.

Force l'alignement de l'aimantation sur l'orthogonal aux couches.

Force la stationnarité en temps de la limite : $\frac{\partial \mathbf{m}^\infty}{\partial t} = 0$.

Super-échange dominant

Constante d'anisotropie surfacique proportionnelle à la distance intercouche.

Constante de super-échange inversement proportionnelle à la distance intercouche.

Rigidifie suffisamment le système pour opérateur de prolongement.

Passage à la limite rigoureux dans les termes non linéaires.

Équation homogénéisée pour le cas du super-échange dominant

Par les méthodes de la convergence double-échelle (avec et sans surfaces périodiques),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\mathbf{m}}^\infty}{\partial t} - \alpha \widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \frac{\partial \widetilde{\mathbf{m}}^\infty}{\partial t} &= -(1 + \alpha^2) \left(A_T \widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \Delta_{2D} \widetilde{\mathbf{m}}^\infty + A_N \widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{m}}^\infty}{\partial x_3^2} \right) \\ &\quad - (1 + \alpha^2) \widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \bar{\mathbf{K}} \widetilde{\mathbf{m}}^\infty - (1 + \alpha^2) \bar{K} (\widetilde{\mathbf{m}}^\infty \cdot \mathbf{e}_z) \widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \mathbf{e}_z \\ &\quad - (1 + \alpha^2) \bar{\chi} \widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \mathcal{H}_d(\widetilde{\mathbf{m}}^\infty) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbf{m}}^\infty \wedge \frac{\partial \widetilde{\mathbf{m}}^\infty}{\partial \nu_A} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,$$

$$\text{où } A_N = \frac{1}{\bar{\chi}} \frac{1}{\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\bar{\chi}_i}{A_i} + \frac{1}{L(J_{1,i} + 2J_{2,i})} \right)} \text{ et } \bar{K} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_{s,i}^+ + K_{s,i}^-}{L\bar{\chi}} - (1 - \bar{\chi}).$$

Méthode : trouver un lien entre la limite double-échelles avec surfaces périodiques de N fois le saut intercouche et la limite double-échelle de l'aimantation.

Par passage à la limite sur l'équation LL et sur l'équation de Stokes.

Homogénéisation de l'équation de la chaleur en présence de conduction intercouche

$\frac{\partial u^N}{\partial t} - A_i \Delta u^N = 0$ sur la i^e couche.

$$A_i \frac{\partial u^N}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & \text{sur le bord extérieur,} \\ -J_i(\gamma u^N - \gamma' u^N) - \frac{K_i^\pm}{N} \gamma u^N & \text{sur les intercouches.} \end{cases}$$

Le prolongement garantit seulement la borne de $\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial P_n(u^N)}{\partial z}$ dans $L^2(\Omega)$.

Apparition d'une troisième échelle en x_3/\sqrt{N} .

Inégalité d'énergie et régularité elliptique $\implies \sqrt{N} \frac{\partial u^N}{\partial z}$ bornée dans $L^2(\Omega^N)$.

Choix d'une période a arbitraire pour la variable semi-rapide y_s .

La limite triple-échelles $\tilde{u}^\infty(\mathbf{x}, t, y_s)$ a -périodique en y_s .

$$u^N(\mathbf{x}, t) \approx \tilde{u}^\infty(\mathbf{x}, t, \sqrt{N}x_3), \quad \text{formellement.}$$

Le « bon » choix de la période dépend de la limite triple-échelles de la C.I.

Limite triple-échelles C.I. pour période ka , a -périodique \implies pareil pour solution.

Équation homogénéisée pour la chaleur

Toujours obtenue par passage à la limite dans Stokes et l'équation de la chaleur.

Équation de la chaleur anisotropique où la variable semi-rapide a remplacé la troisième variable d'espace.

$$\frac{\partial \tilde{u}^\infty}{\partial t} - A_T \Delta_{2D} \tilde{u}^\infty - A_N \frac{\partial \tilde{u}^\infty}{\partial y_s^2} + \bar{K} \tilde{u}^\infty(\mathbf{x}, t) = 0,$$

dans $B \times \mathbb{R}^+ \times (0, a)$, pour tout x_3 dans $(0, L)$, et les conditions de bord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}^\infty}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sur } \partial B \times (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times (0, a), \\ \tilde{u}^\infty(\mathbf{x}, t, 0) &= \tilde{u}^\infty(\mathbf{x}, t, a), \quad \text{pour tout } \mathbf{x}, t \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

$$\text{où } A_N = \frac{1}{\bar{\chi}} \frac{1}{\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{J_j}} \text{ et } \bar{K} = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{K_i^- + K_i^+}{L \bar{\chi}} \right).$$

(8) CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Étude d'espaces moins réguliers : espaces non plans, coupures et fentes.

Implémentation : prise en compte du terme biquadratique du super-échange, $J_2 \neq 0$.

Augmentation de l'ordre pour la prise en compte des interactions surfaciques.

Homogénéisation de l'équation de Landau-Lifchitz avec anisotropie et super-échange faible.

Critères de compacité nécessaires pour la convergence double-échelles ou autres méthodes.

Pas de bonne période pour une échelle donnée. Limite quand la période augmente ?

Décomposition de domaines pour l'équation de Landau-Lifchitz ?

Calcul du terme global magnétostatique difficile !

PUBLICATIONS

- [1] *Solutions to the Landau-Lifchitz system with nonhomogenous boundary conditions.* preprint
<http://www-math.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2004/pp2004-11.html>,
Mars 2004, soumis à *Nonlinear Analysis*.
- [2] *Modelization of a split in a ferromagnetic body by an equivalent boundary condition : Part 1. The classical case : no surface energies present.* preprint
<http://www-math.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2004/pp2004-25.html>,
Septembre 2004, soumis à *Asymptotic Analysis*.
- [3] *Modelization of a split in a ferromagnetic body by an equivalent boundary condition : Part 2. The influence of super-exchange and surface anisotropy.* preprint
<http://www-math.math.univ-paris13.fr/prepub/pp2004/pp2004-26.html>,
Septembre 2004, soumis à *Asymptotic Analysis*.