Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Laboratoire d'Informatique pour
la Mécanique et les Sciences
de l'Ingénieur (C.N.R.S.)

SIMULATION DES GRANDES ECHELLES DE L'ECOULEMENT INSTATIONNAIRE TURBULENT DANS UNE TUYERE 3D TRANSSONIQUE

THESE

présentée et soutenue publiquement le 15 Juin 2001

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Spécialité Mécanique

par

Laure Coquart

Composition du jury

Président :	Monsieur Georges GEROLYMOS	Professeur, Université Paris 6
Rapporteurs :	Monsieur Jean DELERY	Directeur du Dpt DAFE, O.N.E.R.A.
	Monsieur Francis LEBOEUF	Professeur, Ecole Centrale de Lyon
Examinateurs :	Monsieur Amer CHPOUN	Professeur, Université d'Evry
	Monsieur Loc TA PHUOC	Directeur de Recherche, CNRS
	Monsieur Christian TENAUD	Chargé de Recherche, CNRS

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. Patrick Le Quéré, Directeur du LIMSI, de m'avoir accueillie en stage de DEA, me permettant ensuite de m'engager dans cette grande et belle aventure, parfois difficile, que constitue la thèse. J'exprime également toute ma gratitude à Joseph Mariani, directeur du laboratoire jusqu'au 31 décembre 2000, pour son accueil au sein du laboratoire.

Je souhaite ensuite remercier très sincèrement mes directeurs de thèse Loc Ta Phuoc et Christian Tenaud qui m'ont soutenue durant plus de trois ans. J'ai énormément appris grâce à eux durant cette période aussi bien du point de vue méthodologique que scientifique. Je les remercie d'avoir partagé leur expérience, d'avoir passé du temps à me former et de leur disponibilité.

Je remercie également tous les membres de ce jury de thèse pour avoir accepté d'évaluer ce travail. J'exprime ma reconnaissance aux deux rapporteurs M. Jean Délery et M. Francis Leboeuf, qui ont examiné cette thèse, ainsi qu'à M. Amer Chpoun qui a accepté de faire partie du jury. Je remercie aussi M. Georges Gérolymos, Président du jury, pour les nombreux échanges que nous avons pu avoir sur le sujet étudié, tout au long de la thèse.

Je remercie toute l'assistance IDRIS et en particulier Jalel Chergui, pour toutes les heures allouées à ce projet et pour leur aide !

Pour continuer - la liste va être longue ! - merci à Raphael Lardat qui m'a initiée aux annexes du vendredi soir un jour de l'été 1997 !

Je trinque à la santé de tous les Annexiens du vendredi et des autres jours. Oui c'est vrai j'avoue et j'assume entièrement, je n'ai pas manqué beaucoup d'annexes !

Je remercie Olivier Daube pour m'avoir invitée à danser le rock'n roll les soirs de pots les plus mémorables ... et Shihe Xin qui n'a jamais laissé mon verre vide dans ces occasions !

Je remercie Anh-Tuân Dang pour tous les dépannages qu'il a réalisé durant trois bonnes années sur toutes les machines que j'ai utilisé !

Je remercie Valérie Bhoyroo pour toutes nos discussions, le temps d'un break, sur tout et sur rien et pour son soutien. Ainsi qu'Annick Choisier : mon pot de thèse était à la hauteur !

Merci aussi à mes collègues de bureau, Emilie Gadoin, Stéphanie Pellerin et Catherine Weisman, qui m'ont soutenue surtout à la fin ! Merci à toute la fine équipe de l'ex IMEU-MEU pour l'ambiance qu'ils savent mettre, un petit signe aussi à Marie-Christine Duluc et à Anne Cadiou. Un autre signe à tous les autres, Laetitia Doris, Jean-Luc Guermond, Mouaouia Firdaouss, et j'en oublie c'est sûr !

Enfin je remercie Yann Fraigneau pour ses fichiers binaires tecplot qui m'ont bien servi pour mes films (oui je sais, mais je fais ce que je peux !!) et surtout Hélène Maynard grâce à qui j'ai eu une superbe présentation lors de ma soutenance de thèse. Ainsi que Remi Brageu pour les films.

Finalement - pour être brève ! - je crois que je peux remercier tout le laboratoire, où j'ai rencontré un grand nombre de personnes intéressantes et accueillantes.

Résumé

Cette thèse porte sur la simulation numérique d'un écoulement interne compressible, instationnaire et turbulent à l'aide de la Simulation des Grandes Echelles (**SGE**). Dans cette approche, les grandes échelles énergétiques et instationnaires de l'écoulement sont calculées, tandis que les petites échelles sont modélisées.
L'objectif de ce travail, réalisé en collaboration avec le Consortium Industrie-Recherche dans les Turbomachines (CIRT) et le LEMFI, est d'analyser les potentialités de la SGE pour le calcul d'écoulements confinés en géométrie 3D en vue d'applications aux turbomachines.
Le cas d'étude retenu pour la validation de la méthodologie est l'écoulement dans une tuyère 3D transsonique pour lequel il existe de nombreux résultats statistiques (LEMFI) et expérimentaux (ONERA). La tuyère est caractérisée par une bosse en flèche sur la paroi basse génératrice d'effets 3D. L'écoulement, sans rotation, présente cependant les phénomènes physiques complexes d'interaction onde de choc/couche limite et de large décollement, comme ceux rencontrés au sein des turbomachines. La SGE est obtenue à partir d'un modèle de sous maille d'échelles mixtes développé au LIMSI-CNRS. La discrétisation temporelle des équations est réalisée par un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre deux. Les flux Euler sont discrétisés par un schéma TVD d'Harten-Yee d'ordre deux tandis que les flux visqueux le sont par un schéma centré.
La SGE a permis d'obtenir des informations instationnaires sur l'écoulement, et de mettre en évidence la formation et le lâcher de tourbillons dans la tuyère. La solution instationnaire est différente de la solution stationnaire RANS obtenue avec une modélisation statistique classique et montre l'oscillation du choc et la déstabilisation du décollement au cours du temps. Les résultats de la SGE obtenus sur le nombre de Mach isentropique, les profils de la vitesse moyenne et les tensions de Reynolds sont discutés et comparés aux résultats expérimentaux (ONERA) et statistiques, obtenus avec le modèle de Launder-Shima (LEMFI). Le bilan de l'énergie cinétique turbulente (k) est analysé et comparé à celui donné par la modélisation statistique, dans le décollement. Les résultats de la SGE montrent des différences notables avec les résultats statistiques dans le cœur de la tuyère : les termes de fluctuations de pression importants mesurés dans le choc sont pris en compte par la SGE.

Abstract

A realistic 3D internal, unsteady, turbulent and compressible flow was simulated using the Large Eddy Simulation (**LES**). This work was supported by the Consortium Industrie-Recherche en Turbomachines (CIRT) and was conducted in a collaboration with the LEMFI.
The selected test-case was a 3D convergent-divergent transsonic nozzle. Indeed there were available experimental results (ONERA) and numerical simulations using RANS approach (LEMFI) that could be used for comparisons with our simulation. Also this configuration contained the main physical phenomena encountered in turbomachinery.
The nozzle is a rectangular channel with a swept three-dimensional bump on the lower wall. A 3D shock wave/boundary layer interaction takes place downstream the bump, leading to a large separation.
In the LES approach, the large unsteady and energetic scales are calculated. The contribution of the unresolved small scales is modeled using the mixed scale model, developped at the LIMSI-CNRS. Time integration of the equations is preformed by a second order explicit Runge-Kutta scheme. The spatial discretization of the Euler fluxes is obtained by a second order TVD Harten-Yee scheme while the viscous fluxes are discretized by a central scheme.
The LES of such flow has given some interesting unsteady results. The temporal evolution of the turbulent eddies, convected by the mean flow, has been observed. The large separation became unstable and the shock wave oscillations were captured by the LES.
The methodology was then validated by comparing our results on the isentropic Mach number, the mean velocity and the Reynolds stress tensor to the numerical results given by the statistical modelisation of Launder-Shima (LEMFI) and experiments (ONERA). The kinetic energy balance was also analyzed and compared to the statistical one, in the separation zone. The LES results on the balance of k have shown that this approach predicts correctly the large fluctuations of the pressure in the shock wave measured in the midle of the channel, on the opposite of the statistical ones.

Table des matières

Nomenclature

A_ξ : matrice dans la direction ξ pour un système sous forme non conservative
C_{ij} : terme de convection dans le bilan statistique de R_{ij}
C_{ijk} : corrélations triples
c : vitesse du son
c_P : capacité calorifique à pression constante
c_V : capacité calorifique à volume constant
d_{ij} : les termes de diffusion dans le bilan statistique de R_{ij}
$E = c_v T + \dfrac{1}{2} u_i\, u_i$: énergie totale par unité de volume
F, G, H : flux Euler selon x, y, z
F_v, G_v, H_v : flux visqueux selon x, y, z
$\widehat{F}$, $\widehat{G}$, $\widehat{H}$: flux Euler en coordonnées généralisées selon ξ, η, ζ
$\widehat{F_v}$, $\widehat{G_v}$, $\widehat{H_v}$: flux visqueux en coordonnées généralisées selon ξ, η, ζ
$\breve{F}_{i+1/2,j,k}$, $\breve{G}_{i,j+1/2,k}$, $\breve{H}_{i,j,k+1/2}$: flux numériques d'Harten-Yee selon ξ, η, ζ
$f(a1,a2)$: fonction de correction de Scotti
f : fréquence
$h = c_P T$: enthalpie par unité de volume
$h_t = h + \dfrac{1}{2}(u_i\, u_i)$: enthalpie totale par unité de volume
J : jacobien de la transformation $(x,y,z) \longrightarrow (\xi,\eta,\zeta)$
k : énergie cinétique turbulente
k_i : composantes de la normale au plan $\xi = cte$
M : nombre de Mach
M_{is} : nombre de Mach isentropique
P_{ij} : terme de production dans le bilan statistique de R_{ij}
P_r : nombre de Prandtl
P_{rt} : nombre de Prandtl turbulent
P_t : pression totale
$p = \rho\, \mathcal{R}\, T$: pression
Q : vecteur des inconnues principales filtrées
q_c : énergie cinétique de sous maille
q_j : flux de chaleur
$\mathcal{R}$: constante des gaz parfaits molaire

$\mathcal{R}e$: nombre de Reynolds
R_ξ : matrice des vecteurs propres à droite de A_ξ
R_ξ^{-1} : matrice des vecteurs propres à gauche de A_ξ
r : facteur de récupération
S_{ij} : tenseur de déformation
T : température
T_t : température totale
t_i : composantes de la tangente au plan $\xi = cte$
$t_{ref} = \chi/u_{ref}$: temps de référence
u_{ref} : vitesse à l'entrée considérée comme valeur de référence
u_i : composantes (u,v,w) de la vitesse
u : composante de la vitesse dans la direction x
v : composante de la vitesse dans la direction y
w : composante de la vitesse dans la direction z

α : coefficent de pondération
α_i, β_j, γ_k : éléments métriques de la transformation $(x,y,z) \longrightarrow (\xi,\eta,\zeta)$
$\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$: rapport des chaleurs spécifiques
Δ : longueur de coupure du filtre
ε : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
κ : conductivité thermique
Λ_ξ : matrice diagonale semblable à A_ξ
λ^i : valeurs propres de Λ_ξ
μ : viscosité
μ_t : viscosité de sous maille
ξ, η, ζ : coordonnées généralisées
ρ : densité
σ_{ij} : tenseur des contraintes
τ_{ij} : tenseur de sous maille
τ_{kk} : partie isotrope du tenseur de sous maille
Φ : limiteur de flux
Φ_{ij} : terme de redistribution dans le bilan statistique de R_{ij}
χ : longueur minimum de la bosse considérée comme longueur de référence
ψ_j : flux de chaleur de sous maille

Ω : vecteur des variables caractéristiques

$\widetilde{\omega}$: vorticité locale résolue

Opérateurs

$\langle\ \rangle$: filtrage temporel

$\overline{(.)}$: filtrage spatial

$\widetilde{(.)}$: quantité résolue par rapport à la moyenne spatiale de Favre

$\widehat{(.)}$: quantité résolue par rapport à la moyenne temporelle de Favre

Exposants :

$*$: quantités sans dimension

$'$: quantité de sous maille par rapport au filtrage spatial

$''$: quantité non résolue par rapport à la moyenne spatiale de Favre

$'''$: quantité non résolue par rapport à la moyenne temporelle de Favre

Chapitre I

Introduction

Cette étude s'insère dans le cadre plus général des travaux menés depuis plusieurs années par les industriels pour mieux comprendre les mécanismes de certains phénomènes instationnaires rencontrés au sein des turbomachines, provoqués par la non adaptation des conditions d'alimentation des machines, et qui peuvent être néfastes à leur bon fonctionnement.

Les écoulements au sein des turbomachines font partie des écoulements industriels les plus complexes aussi bien du point de vue des phénomènes physiques mis en jeu que de la complexité des géométries rencontrées [41]. Les turbomachines sont des machines dont le fonctionnement est lié à l'énergie cinétique de rotation. Elles peuvent fonctionner selon deux modes : comme une turbine où il s'agit de transmettre l'énergie cinétique du fluide à un arbre rotatif, l'énergie de rotation pouvant être alors transformée en une autre forme d'énergie. Elles peuvent également fonctionner en pompe ou compresseur où le fluide est comprimé sur plusieurs étages par transformation de l'énergie cinétique de rotation fournie par la machine. Les turbomachines sont en général constituées d'une partie fixe, le stator et d'une partie mobile, le rotor, le stator permettant de contrôler la direction d'attaque du fluide sur le rotor. Chacune des parties, rotor ou stator, est constituée d'une rangée d'aubes en forme.

Les écoulements considérés sont des écoulements de fluide compressible turbulents tridimensionnels et instationnaires en géométrie complexe, caractérisés par la présence de parois nécessitant la prise en compte des effets visqueux. Les écoulements qui nous intéressent plus particulièrement sont des écoulements à haute vitesse où il se produit des ondes de choc qui interagissent avec les couches limites. La présence de chocs dans ce type d'écoulements produit de fortes pertes de charge. Certaines interactions donnent naissance à un décollement des couches limites dont l'instationnarité à grande échelle est très nuisible aux structures solides. Les ondes acoustiques générées peuvent entrer en résonnance avec les aubes et être responsables de nuisances sonores importantes. Nous pouvons également souligner qu'il n'existe pas encore d'explications physiques satisfaisantes du tourbillon bloquant observé dans certains compresseurs ou turbines et ce phénomène nuit de façon importante aux performances de ces machines. Il existe une demande forte de la part des industriels d'études numériques d'écoulements instationnaires, compressibles externes ou internes, notamment pour mieux comprendre certains phénomènes vibratoires acoustiques instationnaires à grande échelle.

Trois sources d'instationnarité peuvent être mises en évidence dans les machines qui nous intéressent. La rotation induit un forçage basse fréquence dans l'écoulement et les aubes de par leur mouvement propre génèrent des ondes acoustiques qui interagissent avec le fluide. Il existe un certain nombre d'études sur l'instationnarité à basse fréquence liée à la rotation [7], [45], [84] autour de l'écoulement moyen. Les aubes sont de plus en plus minces, avec des envergures de plus en plus importantes et donc plus fragiles. On trouve aussi dans la littérature un certain nombre d'études sur la réponse des aubes à des excitations extérieures (ondes de choc ou bulbes de recirculation) [6], [67]. Les mécanismes les plus difficiles à prendre en compte sont les couplages non linéaires entre le mouvement des aubes et l'écoulement du fluide. Une des difficultés de ces types de calcul vient du déséquilibre entre le temps de calcul des écoulements et le temps de calcul des simulations aéroélastiques. L'étude d'élasticité des aubes est en général réalisée par rapport à l'écoulement moyen [12], [66]. Les études couplées sont le plus souvent bidimensionnelles et les écoulements sont calculés à partir des équations d'Euler. Il existe très peu d'études tridimensionnelles avec des modèles statistiques $k-\varepsilon$ pour le calcul d'un couplage fort fluide/aubes [14].

La troisième source d'instationnarité, qui concerne le cadre de cette étude, vient de la turbulence elle-même à travers les variations spatio-temporelle des grandeurs physiques et de l'instationnarité des grandes échelles anisotropes du fluide hors régime nominal.

Avec le développement des moyens informatiques de ces vingt dernières années, l'analyse d'écoulements turbulents de plus en plus complexes par simulation numérique a été rendue possible. L'étude par simulation de ces écoulements à très haut nombre de Reynolds passe par une étape de modélisation car il est impossible d'en résoudre toutes les échelles. Pour les nombres de Reynolds qui nous intéressent, qui sont supérieurs à 10^6, le nombre de points de maillage nécessaires pour en résoudre toutes les échelles serait de l'ordre de $Re^{9/4} \simeq 10^{14}$ [63], et il dépasserait largement les capacités des plus gros calculateurs vectoriels et parallèles actuels. Trois grands types d'approche sont possibles numériquement pour modéliser et calculer les écoulements turbulents à moyen et haut nombres de Reynolds. La première correspond à la **S**imulation **N**umérique **D**irecte (SND). Elle permet de résoudre toutes les échelles d'un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds raisonnable par rapport à l'échelle de Kolmogorov associée. On peut ainsi calculer des écoulements de transition ou faiblement turbulent sans modélisation. Les SND permettent d'obtenir des solutions qui servent de référence aux deux autres méthodes même si les nombres de Reynolds sont différents. La seconde approche est la **S**imulation des **G**randes **E**chelles. Dans cette approche, seules les grandes échelles instationnaires de l'écoulement sont résolues, en filtrant spatialement l'écoulement, tandis que l'action des petites échelles non résolues est modélisée. On peut voir la SGE comme une réduction du nombre de degrés de liberté du système pour lequel le calcul dynamique des grandes structures énergétiques est caractéristique de la dynamique entière de l'écoulement étudié. Le coût CPU et la mémoire nécessaire à l'utilisation de la méthodologie limitent actuellement son utilisation pour le calcul des écoulements industriels en géométrie complexe. Les **S**imulations **S**tatistiques où la solution est filtrée temporellement et décomposée en une valeur moyenne et la valeur fluctuante autour de cette valeur moyenne, sont les plus utilisées dans le domaine des turbomachines. Les modèles utilisés sont, soit des modèles de longueur de mélange, soit des modèles $k-\varepsilon$ [31], même si les validations de simulation $R_{ij}-\varepsilon$ résolvant la totalité des équations de transport des tensions de Reynolds [34] pour le calcul des écoulements au sein des turbomachines semblent prometteuses.

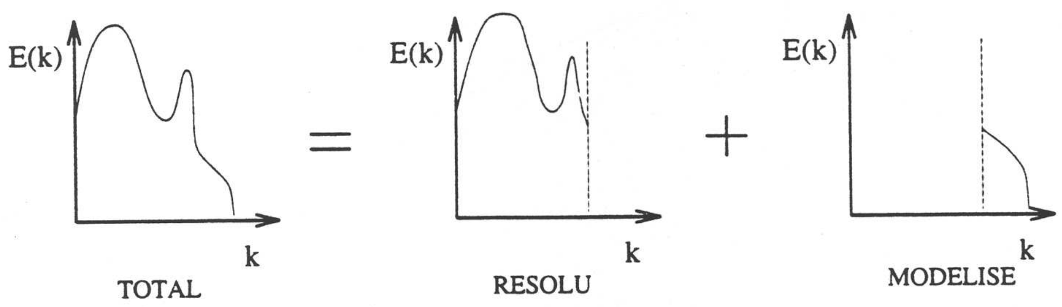


FIG. I.1 – *Décomposition du spectre d'énergie de la solution associée à la simulation des grandes échelles [63]*

La **S**imulation des **G**randes **E**chelles apparaît comme une méthode intermédiaire entre les deux autres types de simulations décrits ci-dessus et présente de fortes potentialités pour le calcul des écoulements dans les turbomachines en régime hors nominal présentant de grandes structures instationnaires énergétiques. Dans la mesure où les petites échelles, supposées plus isotropes, sont modélisées et que les grandes échelles, anisotropes, sont calculées, les modèles de SGE construits à partir d'hypothèses sur les petites échelles sont d'un spectre plus large que les modèles statistiques. Un point fort de la méthodologie des grandes échelles est sa nature intrinsèquement instationnaire permettant théoriquement de capturer les instabilités à grande échelle.

Il existe peu d'études d'écoulements internes instationnaires compressibles en géométries complexes en SGE pour répondre aux demandes croissantes des industriels, malgré par exemple les progrès en différences finies dans la construction de maillages curvilignes complexes [31]. Il est également nécessaire de valider la méthodologie SGE sur des cas tests réalistes avec des phénomènes complexes [19], [27], [29] avant son intégration petit à petit dans le monde industriel [56].

Ce travail a pour objectif la validation de la simulation des grandes échelles pour le calcul des écoulements industriels au sein des turbomachines, écoulements qui sont par nature instationnaires et dont les phénomènes physiques mis en jeu sont en général très complexes. La validation de la méthode est réalisée en calculant l'écoulement dans une tuyère 3D transsonique sans rotation, écoulement qui présente cependant certaines caractéristiques des écoulements hors équilibre et hors régime nominal, au sein des turbomachines. L'écoulement est caractérisé par la présence d'un large décollement tridimensionnel associé à une interaction entre une onde de choc et la couche limite, et pour lequel il existe de nombreux résultats expérimentaux et statistiques.

Dans la première partie du mémoire nous reprenons en détails le cadre général de l'étude et nous présentons la tuyère 3D transsonique (ONERA), avec une bosse en flèche sur la paroi basse, qui nous sert de cas-test en discutant les résultats expérimentaux et statistiques RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) obtenus dans cette configuration. Nous présentons ensuite les équations de Navier-Stokes filtrées résolues dans le cadre de la modélisation des grandes échelles avec les différents termes à modéliser. Seuls les modèles qui ont été utilisés dans les simulations sont ensuite discutés. La troisième partie est consacrée aux méthodes numériques employées pour résoudre les équations discrétisées. Le maillage et un champ convergé statistiquement nous ont été fournis par le LEMFI [80] comme conditions initiales pour nos calculs. Nous présentons rapidement les modifications apportées au maillage et au champ initial pour réaliser nos simulations dans une quatrième partie. Nous présentons ensuite les résultats instationnaires obtenus grâce à la SGE avant de comparer les quantités moyennes aux résultats statistiques et expérimentaux dans l'optique de valider la démarche utilisée. Enfin nous concluons sur ce travail et sur ses perspectives.

Chapitre II

Cadre de l'étude

II.1 Cadre de l'étude et définition du cas test

Nous avons décrit dans le premier chapitre les phénomènes physiques rencontrés au sein des turbomachines. Dans cette étude nous nous limitons à l'étude de la modélisation des phénomènes instationnaires hors régime nominal et à la modélisation de la turbulence pour le calcul des grandes échelles instationnaires énergétiques. Dans cette partie nous discutons des potentialités de la SGE pour le calcul des écoulements dans les turbomachines et nous décrivons le cas test de la tuyère 3D Transsonique avec une bosse en flèche sur la paroi basse de l'ONERA.

Si l'on s'intéresse aux instationnarités liées aux ondes de choc et aux recirculations générées par les interactions onde de choc/couche-limite en régime supersonique [4], [52] il est important de calculer le plus précisément la position de ces ondes de choc et des recirculation pour en retour calculer les bonnes fréquence d'excitation auquelles sont soumises les aubes. Il est également important de prédire correctement les champs de pression sur les aubes. La présence d'onde de choc dans les écoulements lorsque les conditions de fonctionnement sont inadaptées aux points de fonctionnement des machines, ou lorsque l'angle d'attaque du fluide sur les aubes n'est pas correct, diminue les performances des turbomachines en provoquant de fortes pertes de charge.

Les résultats sur le calcul des écoulements obtenus avec les méthodes statistiques décrites précédemment sont en général en très bon accord avec l'expérience. Des différences sont néanmoins observées lorsqu'on est en présence de forts décollements ou d'écoulements turbulents instationnaires dans le sens où les structures anisotropes sont instationnaires. Il est également bien connu que la modélisation $k - \varepsilon$ reproduit difficilement les larges décollements [31], [80]. Concernant le calcul des phénomènes instationnaires, les méthodes statistiques moyennées instationnaires sont mises en œuvre par moyenne de phase lorsqu'il existe une fréquence de forçage prédominante, comme c'est le cas avec la rotation. La solution correspond au calcul de cette fréquence prédominante tandis que les autres sont modélisées [63]. Mais elles ne permettent pas de calculer les instabilités à grandes échelles ou les instationnarités liées à la turbulence.

C'est ainsi que la SGE semble être une méthode mieux adaptée pour analyser les phénomènes liés aux structures et instabilités à grande échelle au sein des turbomachines. Elle permettrait de calculer de façon plus précise l'énergie fluctuante contenue dans les grandes échelles de l'écoulement responsables des vibrations hors régime nominal. Un des facteurs limitant à l'utilisation de cette méthodologie dans des géométries de type compresseur ou turbine à l'heure actuelle est le coût CPU élevé des simulations. Il est également nécessaire d'étudier en détail, dans une première étape, les potentialités de la modélisation de sous maille et des schémas à capture de choc appliqués aux écoulements turbulents confinés rencontrés dans les turbomachines en régime compressible.

Avant de considérer le cas complexe d'un rotor et tous les phénomènes associés, il faut valider la robustesse de la méthode. Il faut considérer un écoulement avec certains des phénomènes génériques rencontrés dans les turbomachines qui posent problèmes à la modélisation statistique mais néanmoins accessible à l'outil d'analyse que représente la SGE. Le cas test retenu pour la validation de la méthodologie des Grandes Echelles appliquée au calcul d'écoulements compressibles instationnaires 3D, confinés et à hauts nombres de Reynolds, est l'écoulement dans la tuyère transsonique 3D avec une bosse en flèche sur la paroi basse de l'ONERA. C'est un cas expérimental bien documenté [9] et qui a fait l'objet de calculs avec entre autre une modélisation statistique hybride $R_{ij} - \varepsilon$ de Launder-Shima lors de la thèse d'I. Vallet au LEMFI [80]. La géométrie de la tuyère étudiée reste simple par rapport aux géométries réelles en turbomachines, tout en étant beaucoup plus complexe que nombre de géométries de canal rencontrées dans la littérature [47], [82]. Le nombre de Reynolds vaut $22\,10^5$ ce qui est élevé même s'il reste encore en dessous des nombres de Reynolds industriels. L'écoulement n'est pas soumis à la rotation mais présente une interaction onde de choc/couche limite tridimensionnelle à l'origine d'un très large décollement, comme il peut en exister au sein des turbomachines hors adaptation, qui prend place sous la structure en lambda du choc.

La géométrie de la tuyère 3D (ONERA) est décrite en détail dans le paragraphe suivant en rappelant la définition des grandeurs fondamentales telles que la température totale et la pression totale. Les études et les résultats obtenus sur ce cas test, expérimentalement et avec des modélisations statistiques, sont ensuite discutés. Enfin nous présentons les apports possibles de la SGE pour l'étude de ce type d'écoulement par rapport aux modélisations statistiques en correspondance avec certaines lacunes montrées par les modèles dans le calcul de l'écoulement dans la tuyère.

II.2 La tuyère transsonique 3D avec bosse en flèche de l'ONERA

Notations et grandeurs physiques caractéristiques :
Dans toute la suite, le fluide considéré est de l'air qui se comporte comme un gaz parfait. En régime compressible dans le domaine aérodynamique où les effets visqueux sont négligés, les grandeurs thermodynamiques caractéristiques de l'écoulement [24] sont l'enthalpie : $h = c_P T$ et la pression $p = \rho\, \mathcal{R}\, T$.
Les équations thermodynamiques permettant de décrire l'état du fluide ne sont valables qu'entre des états à l'équilibre. Souvent le choix d'un état initial de référence thermodynamique pour évaluer les constantes qui apparaîssent dans les calculs est difficile. C'est ainsi que s'introduit la notion de conditions génératrices ou d'arrêt qui correspondent à un état de référence, parfois fictif, où le fluide est au repos et à l'équilibre thermodynamique. Les conditions génératrices (ou réservoir) de l'écoulement sont l'enthalpie totale $h_t = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ et la pression totale P_t. Lorsque les propriétés physiques du fluide sont constantes les conditions génératrices deviennent T_t et P_t. Les formules permettant de définir T_t et P_t dans une transformation isentropique en fonction du nombre de Mach local, M, sont rappelées ci-dessous :

$$\frac{p}{P_t} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)^{(-\gamma/(\gamma-1))}$$
$$\frac{T}{T_t} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)^{-1}$$

Ces relations nous ont servi pour imposer les conditions aux limites. Elles permettent aussi de calculer le nombre de Mach isentropique qui donne la structure de l'écoulement du point de vue de la position des chocs ou des décollements et recollements.

Régimes d'une tuyère :
Les tuyères servent principalement à assurer la propulsion de différents engins comme les avions, les fusées ou les missiles. Elles sont caractérisées par leur débit massique et leur poussée. Les tuyères doivent remplir de multiples fonctions :

- détente optimale des gaz de combustion (c'est-à-dire une poussée maximale lors du régime de croisière).
- pertes de charge minimum lorsque la tuyère est inadaptée au régime de vol

Une tuyère est un conduit convergent-divergent qui assure l'accélération des gaz en provenance du moteur depuis une vitesse très faible à l'entrée, jusqu'à un nombre de Mach supersonique ou subsonique dans la section de sortie. Le nombre de Mach en sortie, pour une géométrie fixée, dépend de la valeur de la pression statique en sortie et l'état sonique ($u = c$), s'il existe, est obligatoirement atteint au niveau du col. Tous les régimes d'écoulement dans une tuyère 2D sont décrits théoriquement dans le livre de Liepmann et Roshko [24] et expérimentalement dans l'article de X. Liu et L. C. Squire [50]. La tuyère est dite subsonique lorsque le fluide à la sortie est subsonique, et supersonique lorsque le fluide est supersonique à la sortie de la tuyère.

Géométrie de la tuyère :

La figure (II.1) représente la tuyère tridimensionnelle (ONERA) qui a donc été choisie comme cas test pour valider la simulation des grandes échelles appliquée aux écoulements turbulents compressibles internes en géométrie complexe. Le maillage et un champ initial compressible des variables conservatives moyennes (ρ,ρu,ρv,ρw,ρE) et des tensions de Reynolds nous ont été fournit par le LEMFI [80]. ρ est la densité du fluide. Les variables (u,v,w) représentent les composantes de la vitesse et (E) est l'energie totale du fluide par unité de volume.

La tuyère est caractérisée par une bosse en flèche sur la paroi basse et un col en sortie. La géométrie en flèche de la bosse permet d'obtenir les effets tridimensionnels. La longueur de la tuyère vaut $L_x = 0{,}8\ m$, la hauteur à l'entrée $L_y = 0{,}1\ m$ et $L_y = 0{,}105\ m$ à la sortie. La largeur, constante sur toute la longueur de la tuyère, vaut $L_z = 0{,}1213\ m$. La longueur minimum de la corde de la bosse définit la longueur de référence pour le calcul du nombre de Reynolds : $\chi = 0{,}245\ m$. Elle varie de $\chi = 0{,}245\ m$ en $z = 0\ m$ à $\chi = 0{,}37\ m$ en $z = L_z$. Le nombre de Reynolds calculé à partir de la vitesse maximum à l'entrée de la tuyère, $u_{ref} = 200\ m\ s^{-1}$, vaut $\mathcal{R}e = 22\ 10^5$. L'écoulement à l'entrée est subsonique avec un nombre de Mach maximum de $M = 0{,}6$. L'écoulement à la sortie de la tuyère est supersonique, sauf dans les couches limites, avec un nombre de Mach maximum de $M_s = 1{,}5$. L'origine des abscisses n'est pas à l'entrée mais au début de la bosse comme le montre la figure (II.1). Les simulations statistiques et SGE ont été réalisées sur un maillage curviligne de 201x91x101 points. La résolution des équations dans le nouveau système de coordonnées sera discutée dans la partie (III.2.3).

Dans les premières simulations numériques de L. Cambier et B. Escande en 1990 [10] le second col n'était pas modélisé et la pression imposée à la sortie était supposée constante. I. Vallet a montré [80] que la simulation numérique du second col a son importance puisque la pression à l'amont du col n'est pas homogène dans les expériences. Expérimentalement le second col ajustable permet de générer et d'ajuster l'onde de choc dans le canal. La section de ce second col a été calculée numériquement de façon à obtenir la même position de l'onde de choc qu'expérimentalement. La hauteur du col fait ainsi 0,095 m (la valeur expérimentale est de 0,0956 m).

Par contre l'entrée et le réservoir de la tuyère ne sont pas modélisés. Les calculs statistiques $R_{ij} - \varepsilon$ sont initialisés avec un champ non visqueux, de conditions réservoir $P_t = 0{,}92\ 10^5\ Pa$ et $T_t = 300\ K$, corrigé par des couches limites. Nos calculs sont initialisés

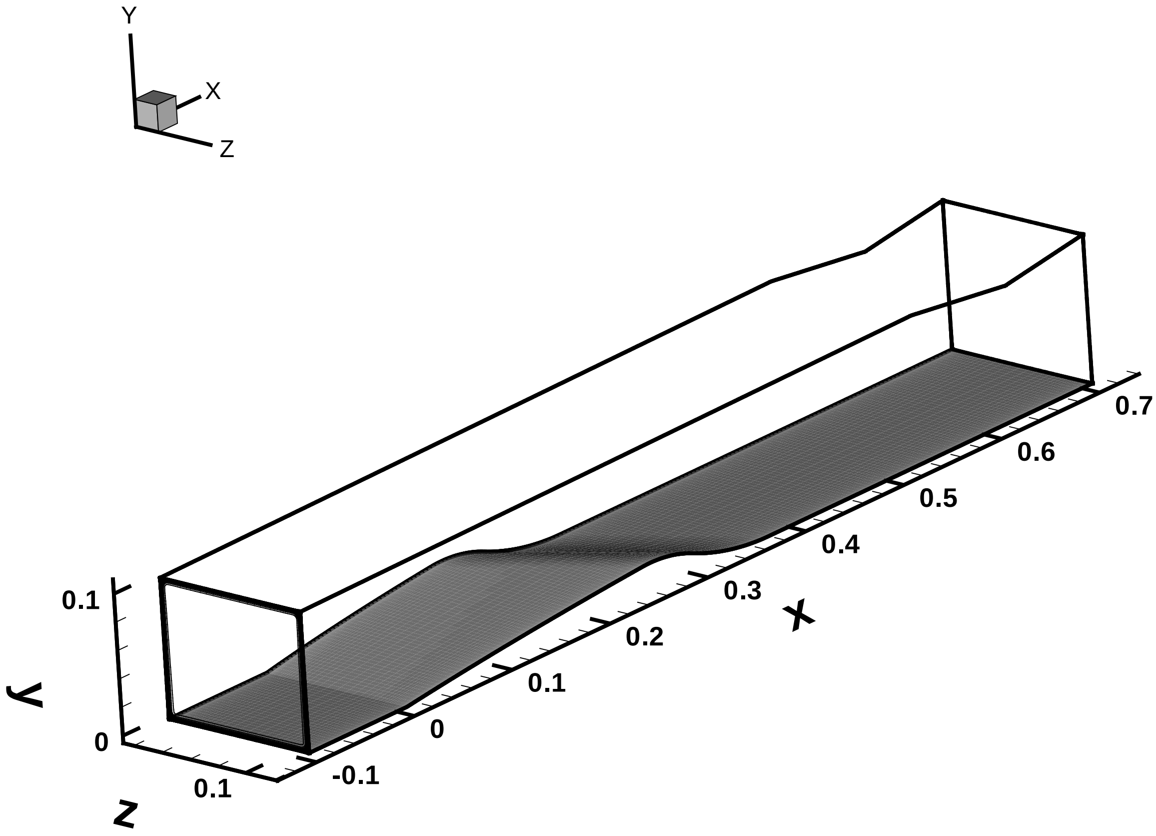


FIG. II.1 – *Tuyère 3D avec bosse en flèche (ONERA)*

par un champ statistique visqueux convergé temporellement obtenu par une modélisation de Launder-Shima au LEMFI [80], et les conditions aux limites sont imposées à partir des profils des quantités qui tiennent compte des couches limites.

Nous passons maintenant en revue les études et les résultats existants sur le cas test de la tuyère 3D avec une bosse en flèche de l'ONERA, aussi bien expérimentaux que statistiques.

II.3 Résultats expérimentaux dans la tuyère

Les mesures expérimentales des vitesses moyennes, du nombre de Mach isentropique et des tensions de Reynolds ont été réalisées par l'équipe de J. Délery à l'ONERA par vélocimétrie laser [5], [21]. Elles ont été réalisées dans le conduit S8 transsonique [21] de section carrée sur laquelle des bosses de différentes formes peuvent être fixées en haut et en bas. Un second col ajustable permet de produire des ondes de choc dans la tuyère et de les positionner en fonction de l'ouverture de la section. Il faut remarquer que les axes et leur orientation ne sont pas les mêmes dans les expériences et la thèse d'I. Vallet [80]. Dans nos simulations, nous avons conservé la même orientation que celle utilisée dans la thèse.

La configuration qui sert de cas-test à la validation de la SGE correspond au conduit S8 de section carrée avec une bosse en flèche qui permet d'obtenir des effets tridimensionnels. La géométrie du canal a été définie avec le souci d'en faciliter la représentation dans les codes de calcul. Les caractéristiques géométriques de la bosse sont décrites en détail dans [5], [9], [10]. Le volume étudié expérimentalement va de $x = 0{,}230\ m$ à $x = 0{,}445\ m$.

Le nombre de Mach isentropique, $M_{is} = \sqrt{(\frac{2}{\gamma - 1}[(\frac{P_t}{p})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1])}$, a été calculé expérimentalement le long de l'axe (Ox) à partir des mesures de pression sur les quatre parois en considérant la pression génératrice P_t constante : $P_t = 0{,}92\ 10^5\ Pa$. Il y a quatre lignes avec des points de mesure selon (Ox), réparties sur toute la hauteur sur les parois latérales. Il y a cinq lignes avec des points de mesure selon (Ox), réparties sur toute la largeur sur les parois basse et haute. La repartition du nombre de Mach isentropique pariétal sur les différentes parois permet d'obtenir une vue précise de la structure de l'écoulement dans les zones d'interaction entre l'onde de choc et les couches limites ainsi que la position des chocs.

Les composantes de la vitesse moyenne et du tenseur de Reynolds obtenues par l'expérience et les simulations statistiques sont comparées le long de (Oy) pour plusieurs stations x fixées par l'expérience dans cinq plans z différents. Les tableaux ci-dessous récapitulent les points expérimentaux où sont mesurées les composantes de la vitesse et des tensions de Reynolds.

Tableau des abscisses x et des côtes z des points de mesure de la vitesse et des tensions de Reynolds

$x1 = 0{,}230\ m$
$x2 = 0{,}270\ m$
$x3 = 0{,}290\ m$
$x4 = 0{,}310\ m$
$x5 = 0{,}340\ m$
$x6 = 0{,}360\ m$
$x7 = 0{,}390\ m$

$z1 = 0{,}0113\ m$
$z2 = 0{,}0413\ m$
$z3 = 0{,}0613\ m$
$z4 = 0{,}0913\ m$
$z5 = 0{,}1113\ m$

L'écoulement, subsonique en entrée, est accéléré sur la bosse en flèche en raison de la diminution de la section. Il atteint l'état sonique au voisinnage du sommet de la bosse qui constitue un col. En aval, il devient supersonique puis se ralentit au travers d'une onde de choc, du fait de la présence du second col sonique. L'onde de choc interagit avec les couches limites des quatres faces de la tuyère. Il se forme un choc en lambda sur toute la hauteur de la tuyère générant de multiples séparations du fluide et plus particulièrement un large décollement tridimensionnel proche de la paroi latérale droite $z = 0{,}1213\ m$. Le développement des différents régimes de l'écoulement dans une tuyère en 2D est détaillé dans l'article de Liu et Squire [50] et reste proche des scénarii d'établissement de l'écoulement dans la configuration 3D. Les principales différences observées entre les études 2D et 3D résident dans la structure de l'écoulement proche des parois latérales où les chocs mis en évidence en 2D sont remplacés par des compressions en 3D [5].

Les figures (II.2) et (II.3) représentent les distributions du nombre de Mach isentropique selon (Ox) sur les deux parois latérales $z = 0\ m$ et $z = 0{,}1213\ m$ proche de la paroi basse. Les croix correspondent aux résultats expérimentaux et le trait correspond aux résultats de simulation RSM (Reynolds Stress Model) avec le modèle de Launder-Shima [80]. On observe bien la structure en lambda du choc en $z = 0\ m$ sur la figure (II.2) avec les deux compressions successives le long de (Ox). La pression derrière le choc reste inférieure à la pression dans la couche limite et l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite ne donne pas naissance à un décollement de la couche limite de ce côté de la tuyère sur la paroi basse. Par contre, de l'autre côté la pression derrière le choc est supérieure à la pression dans la couche limite et on observe un large décollement tridimensionnel. Il est caractérisé par le plateau de pression mesuré sur la figure (II.3). Nous pouvons souligner que l'interaction d'une onde de choc avec une couche limite ne donne pas forcément un choc en lambda et que le résultat dépend de la nature de la compression. Si le plateau qui correspond à la quasi totalité du bulbe de recirculation est dans une zone supersonique, comme on l'observe sur la figure (II.3), il y a un choc en lambda. Si le plateau est dans une zone subsonique un seul choc est produit. Les résultats statistiques observés sur les courbes décrites sont présentés dans la section suivante.

Concernant les résultats expérimentaux obtenus sur l'écoulement moyen, le fluide est accéléré sur la bosse en devenant sonique au col. La dissymétrie de la bosse induit un mouvement transverse du fluide de la paroi latérale gauche $z = 0\ m$ vers la paroi latérale droite $z = 0{,}1213\ m$. Il est difficile de trouver dans la littérature l'étendue exacte du bulbe de recirculation proche de la paroi $z = 0{,}1213\ m$ mais il semble que le bulbe soit situé globalement entre $x = 0{,}280\ m$ et $x = 0{,}310\ m$ [5]. La figure (II.4) représente le profil de la composante longitudinale de la vitesse en $x = 0{,}290\ m$ en $z = 0{,}1113\ m$. A nouveau les croix correspondent aux mesures et la ligne aux résultats RANS obtenus avec le modèle de Launder-Shima. Nous ne commentons pas pour l'instant les résultats statistiques qui seront décrits dans la prochaine section.

Les mesures ne vont pas jusqu'à la paroi, mais la pente de la courbe expérimentale proche de la paroi basse laisse supposer que le fluide est décollé à cette station. La zone décollée doit être trop proche de la paroi pour être détectée. Toutes les vitesses sont rendues sans dimension par la vitesse maximum à l'entrée $u_{ref} = 200\ m\ s^{-1}$. La figure (II.5) représente le profil de la composante longitudinale de la vitesse en $x = 0{,}310\ m$ en $z = 0{,}1113\ m$. Les mesures indiquent que la couche limite est recollée à cette station. Contrairement à un écoulement bidimensionnel où il se formerait un reflux beaucoup plus intense, l'écoulement a la possibilité de fuir transversalement induisant un étalement et un affaiblissement des interactions en 3D [5]. C'est l'écoulement transverse w représenté sur la figure (II.6) en $x = 0{,}340\ m$ en $z = 0{,}0913\ m$ et sur la figure (II.7) en $x = 0{,}360\ m$ en $z = 0{,}1113\ m$, qui donne au bulbe sa tridimensionnalité, limitant son étendue selon (Ox). On observe la forte injection de fluide mesurée expérimentalement proche de la paroi basse dans la direction de la paroi latérale droite où la couche limite décolle. Nous pouvons signaler également qu'un décollement est observé expérimentalement sur la paroi haute derrière le choc droit.

Concernant les résultats expérimentaux sur la mesure de la turbulence, on observe une augmentation de l'énergie cinétique turbulente k proche de la paroi basse au début de l'interaction onde de choc/couche limite en $x = 0{,}270\ m$. Il y a également une amplification de la turbulence dans la zone d'interaction entre l'onde de choc et la couche limite de la paroi haute et de la paroi basse. On observe encore un fort taux de turbulence en aval de l'interaction onde de choc/couche limite, montrant que la couche limite relaxe lentement vers un état non perturbé [9].

II.4 Résultats statistiques dans la tuyère

Différentes simulations de l'écoulement dans la tuyère ont été réalisées avec des modélisations statistiques $k - \varepsilon$ [9], [10], [32] et $R_{ij} - \varepsilon$ avec le modèle hybride de Launder-Shima [80] et les résultats sont en assez bon accord avec les expériences en ce qui concerne les

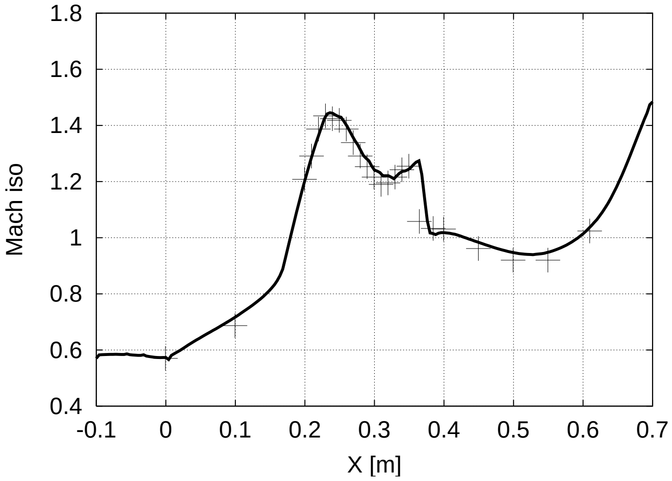


FIG. II.2 – *Mach isentropique selon (Ox) sur la paroi latérale* $z = 0\ m$ *en* $y = 0{,}020\ m$
EXPE : +++ , RANS : —

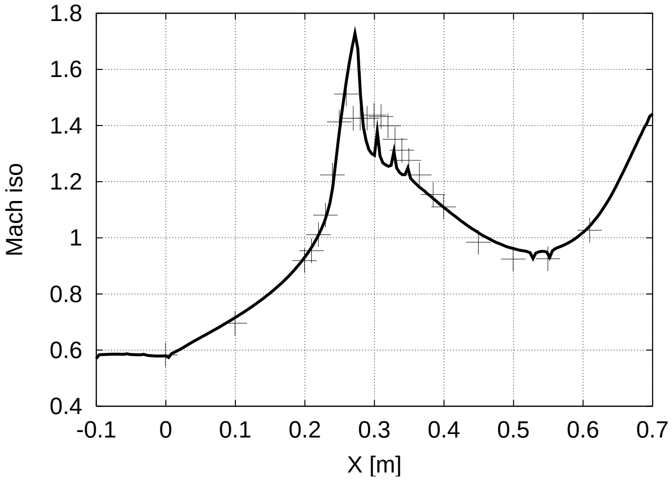


FIG. II.3 – *Mach isentropique selon (Ox) sur la paroi latérale* $z = 0{,}1213\ m$ *en* $y = 0{,}020\ m$
EXPE : +++ , RANS : —

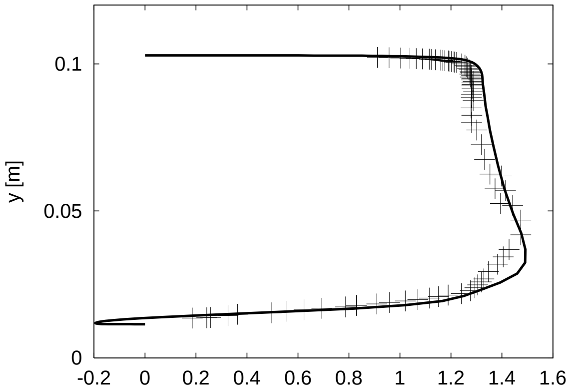


FIG. II.4 – *Vitesse longitudinale moyenne en* $x = 0{,}290\,m$ *en* $z = 0{,}1113\,m$ *EXPE : +++ , RANS : —*

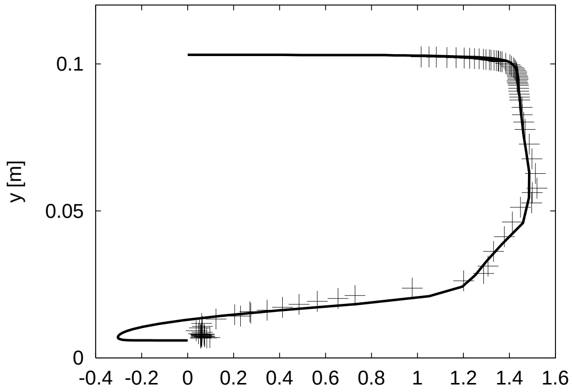


FIG. II.5 – *Vitesse longitudinale moyenne en* $x = 0{,}310\,m$ *en* $z = 0{,}1113\,m$ *EXPE : +++ , RANS : —*

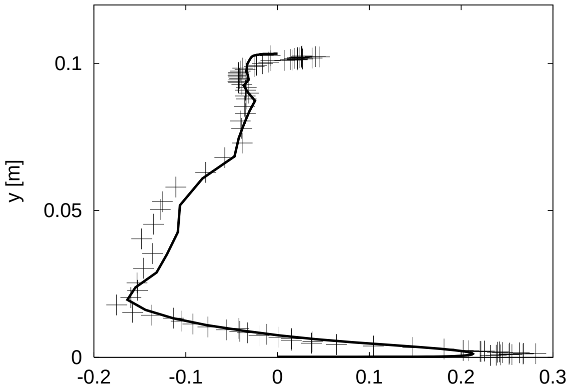


FIG. II.6 – *Vitesse longitudinale moyenne en* $x = 0{,}340\,m$ *en* $z = 0{,}0913\,m$ *EXPE : +++ , RANS : —*

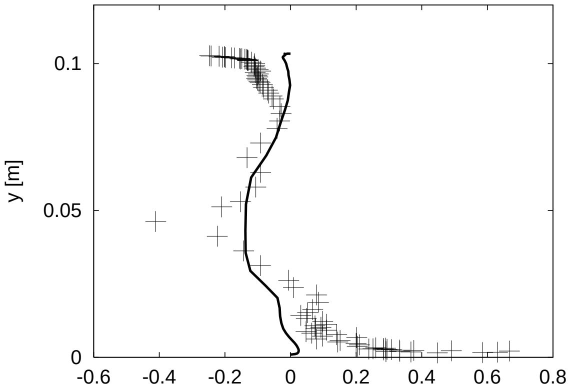


FIG. II.7 – *Vitesse longitudinale moyenne en* $x = 0{,}360\,m$ *en* $z = 0{,}1113\,m$ *EXPE : +++ , RANS : —*

résultats moyens stationnaires. La modélisation statistique ou même RANS montre néanmoins des lacunes dans la prédiction de certains phénomènes comme le calcul des zones de recirculation ou la prédiction de la structure de la turbulence dans certains cas complexes comme lors de l'interaction d'une onde de choc avec une couche limite. D'autre part comme nous l'avons déjà exposé, les constantes des modèles statistiques sont plus nombreuses qu'en SGE et très dépendantes de la géométrie étudiée.

Les figures (II.8) et (II.9) représentent l'écoulement qui nous sert d'initialisation, obtenu par la simulation RANS avec le modèle de Launder-Shima, des deux côtés latéraux de la tuyère. Chaque figure représente les isovaleurs de la vitesse longitudinale, rendue sans dimension par la vitesse du son locale pour faire apparaître clairement les zones subsoniques et les zones supersoniques. Comme nous l'avons déjà décrit on observe l'accélération du fluide sur la bosse et le choc en lambda sur la figure (II.8) du côté latéral droit. De ce côté la pression derrière le second choc est inférieure à la pression dans la couche limite et il n'y a pas de décollement. Au contraire près de la paroi latérale droite, figure (II.9), l'interaction du choc avec la couche limite est à l'origine d'un large décollement tridimensionnel mis en évidence par les isovaleurs négatives de la vitesse (bleu).

Les simulations réalisées avec une modélisation $k-\varepsilon$ et $R_{ij}-\varepsilon$ ont globalement amélioré les résultats obtenus sur les caractéristiques globales de l'interaction onde de choc/couche-limite par rapport aux simulations avec une modélisation algébrique de type longueur de mélange. Elles prédisent de manière précise le choc en lambda près de la paroi latérale gauche où la couche limite ne décolle pas comme le montre la figure (II.2). Et les résultats $R_{ij}-\varepsilon$ avec lesquels nous initialisons nos calculs sont meilleurs que les résultats $k-\varepsilon$.

Les simulations statistiques $k-\varepsilon$ ou RSM avec le modèle de Launder-Shima montrent néanmoins des lacunes dans la prédiction de la zone de recirculation du côté latéral droit de la tuyère comme le montre la distribution du nombre de Mach isentropique proche de la paroi latérale droite figure (II.3). Les oscillations observées sur les résultats RSM sont liés aux limiteurs utilisés dans la méthode numérique. Elles n'existent plus avec un modèle indépendant de la distance à la paroi dans [33]. Le modèle ne capture pas le plateau de pression mesuré expérimentalement qui caractérise la zone d'eau morte dans la recirculation.

Une autre lacune montrée par les modèles vient d'une surprédiction de l'étendue de la zone de recirculation. La figure (II.5) montre que le modèle de Launder-Shima prédit une vitesse négative proche de la paroi basse en $x = 0{,}310\ m$ que l'on ne retrouve pas sur les résultats expérimentaux. Cette surprédiction de la zone de reflux semble liée a une mauvaise prédiction de la composante transverse dans cette zone. La forte injection de fluide dans le décollement, mis en édvidence par la forte valeur de la vitesse transverse mesurée expérimentalement sur la figure (II.7), est mal prédite par les simulations. C'est cette injection de fluide dans la recirculation qui limite l'extension du bulbe selon (Ox) en

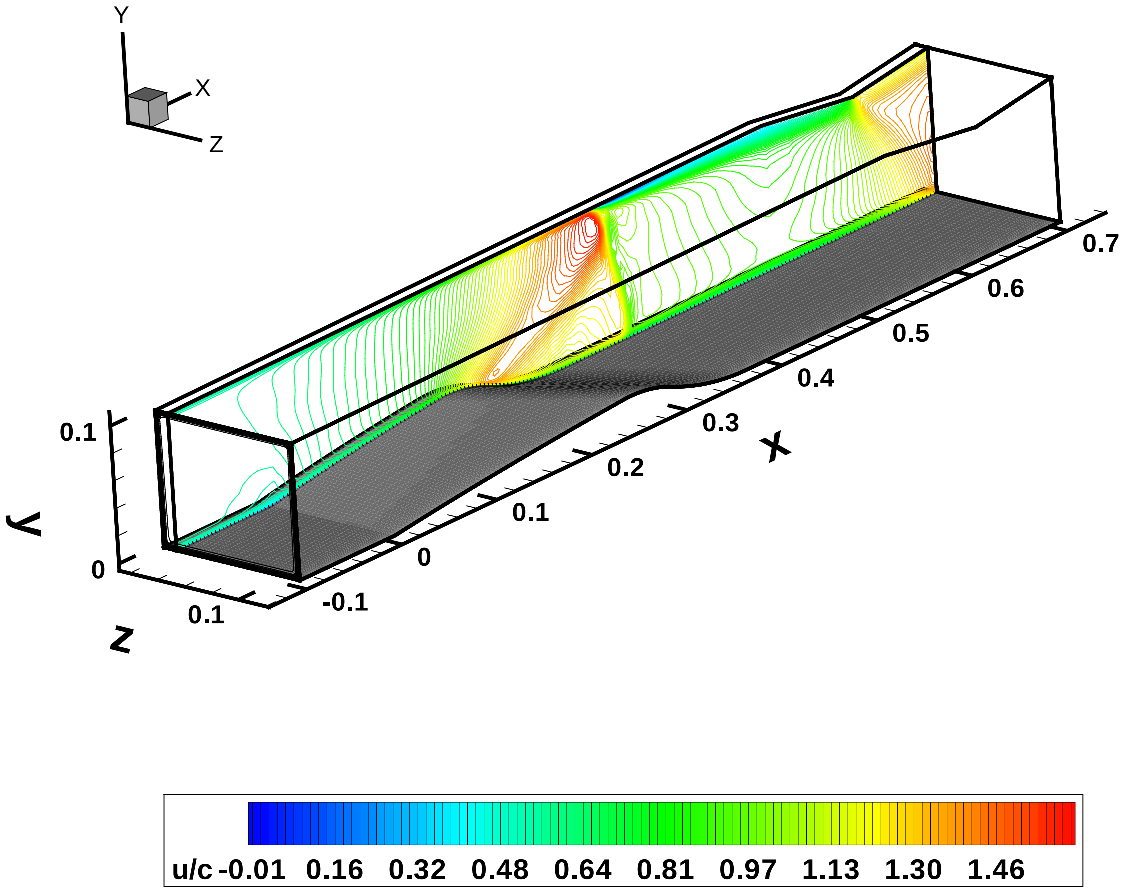


FIG. II.8 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale dans le plan* $z = 0{,}1129\,10^{-1}$ $[m]$ *à l'initialisation, rendue sans dimension par la vitesse du son locale [80]*

tridimensionalisant la structure.

Concernant les résultats de simulation sur la structure de la turbulence, la présence du choc n'apparaît pas sur les intensités turbulentes au cœur de la tuyère. Ils montrent une relaxation des phénomènes d'amplification de la turbulence trop rapide après l'interaction.

Néanmoins, nous pouvons préciser que les résultats présentés sur les figures (II.4) à (II.7) ont été nettement améliorés avec une modélisation de type RSM indépendante de la distance à la paroi [33].

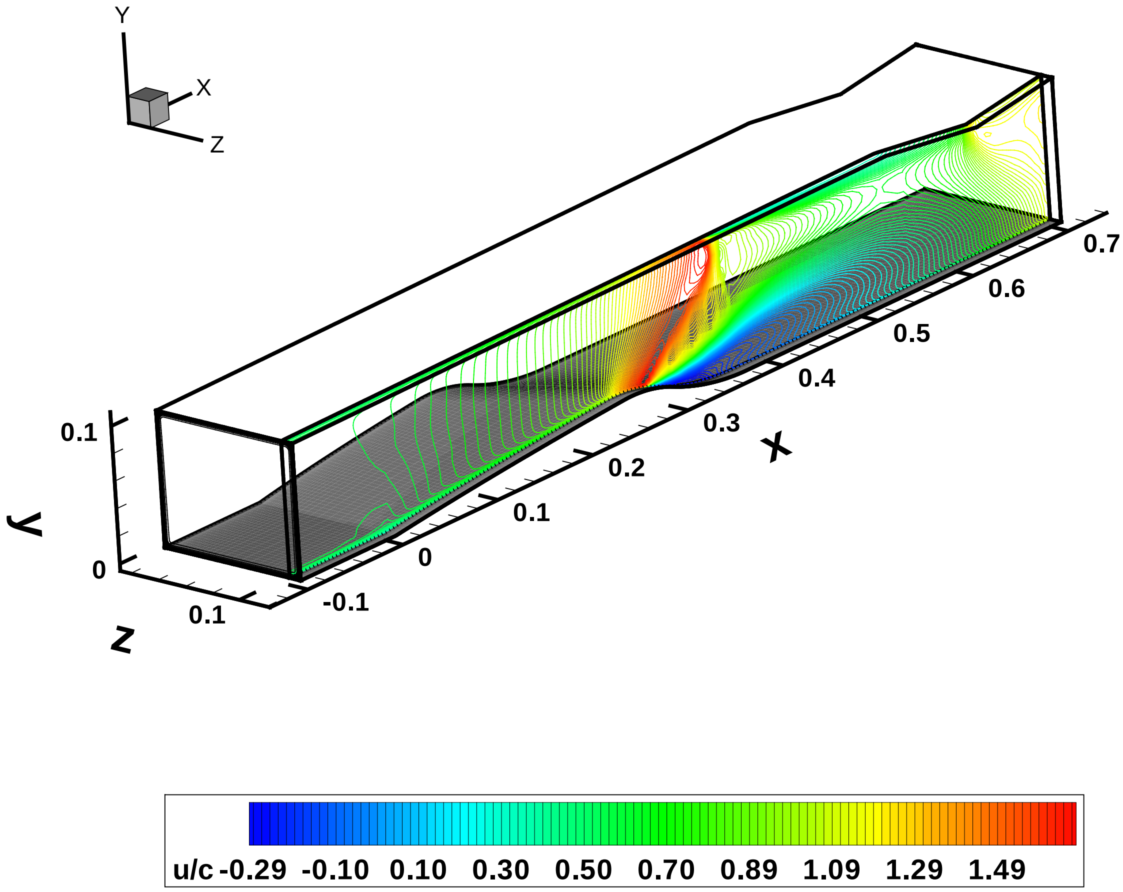


FIG. II.9 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale dans le plan* $z = 0{,}1149$ $[m]$ *à l'initialisation, rendue sans dimension par la vitesse du son locale [80]*

II.5 Simulation des Grandes Echelles d'écoulements complexes de fluide compressible

La simulation des grandes échelles est une méthodologie prometteuse pour le calcul d'écoulements internes complexes avec de grosses structures anisotropes instationnaires. Grâce à la séparation d'échelles, les grandes échelles de l'écoulement sont calculées et les petites échelles sont modélisées avec un modèle de sous maille. On suppose que les modèles de SGE présentent un caractère universel que n'ont pas les modèles statistiques qui doivent modéliser toutes les échelles de l'écoulement, des grandes aux petites échelles. Il est nécessaire d'ajuster les constantes des modèles statistiques en fonction du problème étudié, les grandes échelles étant caractérisées par la géométrie étudiée. Au contraire, les petites structures sont supposées plus isotropes et donc leur modélisation indépendante du problème traité.

La simulation des grandes échelles a montré ses capacités à prédire des écoulements externes caractérisés par de grosses structures instationnaires aussi bien en incompressible [26], [43], [44], [57] qu'en compressible [87], [16], [19], [22], [23], [75]. L'instationnarité des structures est bien capturée par la SGE. Les modèles de sous maille ont évolué vers des modèles moins dissipatifs que le modèle initial de Smagorinsky [69], comme le modèle d'échelles mixtes [58], [64] ou le modèle dynamique [30], qui donnent de bien meilleurs résultats [16], [22], [40], [47], [59].

Le nombre d'études en SGE pour les écoulements confinés en géométrie complexe, 3D, est encore restreint [85], ou limité à des géométries simples de type canal plan [8], [47], [55], même si la construction de maillages curvilignes compliqués avec un nombre de points de plus en plus important ne représente plus un obstacle à l'étude de géométries complexes du fait des progrès qui ont été réalisés dans le domaine [62], [72], [73], [77]. Le temps CPU de calcul nécessaire reste très important limitant l'utilisation de la méthodologie à des écoulements complexes.

A la vue des difficultés actuelles de la modélisation statistique à traiter les problèmes avec des grosses structures instationnaires et à la vue du coût élevé des simulations des grandes échelles, il y a un enjeu à réussir à coupler les deux types de simulations en tirant parti des qualités de chaque modélisation. L'idée de ce travail est de calculer l'écoulement instationnaire dans la tuyère en perturbant l'écoulement moyen obtenu par une modélisation statistique, limitant ainsi le coût des calculs. La simulation RANS permet d'obtenir un écoulement déjà établi dans toute la tuyère avec les caractéristiques macroscopiques physiques déjà présentes dans l'initialisation. La simulation des grandes échelles doit donner les résultats sur les propriétés instationnaires de l'écoulement étudié dans la tuyère. Le modèle d'échelles mixtes a montré ses capacités à prédire correctement les écoulements fortement décollés. Il doit améliorer les résultats sur le calcul de la zone de recirculation dans la tuyère. La SGE doit également permettre d'améliorer la structure de la turbulence en présence de l'interaction onde de choc/couche limite, à la vue de tous les résultats positifs obtenus par la SGE sur la structure de la turbulence dans les géométries avec parois [47]. Un autre apport d'un tel couplage réside dans l'étude énergétique de l'écoulement à travers le bilan de l'énergie cinétique turbulente. Une étude réalisée en SGE localement doit permettre de mieux comprendre certaines lacunes de la modélisation statistique. Comme seules les petites échelles sont modélisées contrairement aux approches statistiques où toutes les échelles sont modélisées, nous pensons obtenir des résultats plus précis sur les termes du bilan en calculant mieux les grandes échelles de l'écoulement.

Il reste de nombreuses questions concernant la SGE en régime compressible, comme par exemple sur les notions de filtrage et leur interprétation. Le maillage que nous utilisons est très anisotrope nous amenant à utiliser la SGE à la limite de son cadre théorique. Les études récentes montrent qu'en présence d'onde de choc dans l'écoulement, les couplages qui existent entre la discrétisation et la modélisation de sous maille posent plus de problèmes en compressible qu'en incompressible. Les schémas de discrétisation à capture de choc introduisent dans les calculs une viscosité numérique qui est en compétition avec la viscosité physique introduite par la modélisation de sous maille. Et d'ailleurs l'un des enjeux de la SGE en régime compressible actuellement est de pouvoir contrôler la viscosité numérique et l'un des moyens utilisé est la recherche de schémas à capture de choc d'ordre élevé [94] ou l'utilisation de capteurs de choc locaux en espace [29].

Néanmoins notre objectif est de calculer des écoulements complexes de nature industrielle et un certain nombre de moyens numériques et de modélisation sont à notre disposition. Nous pensons que la méthodologie SGE peut apporter des améliorations localement sur des caractéristiques bien précises de l'écoulement, comme l'interaction onde de choc/couche limite, par rapport aux calculs statistiques. Un point très fort de la SGE pour son intégration dans le monde industriel vient de la nature intrinsèquement instationnaire de la méthode.

Nous passons maintenant à la description de la modélisation de sous maille et des méthodes numériques utilisées pour calculer l'écoulement dans la tuyère 3D en SGE.

Chapitre III

La simulation des grandes échelles en compressible

La Simulation des Grandes Echelles (SGE) est étroitement liée à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en régime turbulent et à la notion de séparation d'échelles par filtrage spatial. Les grandes échelles de l'écoulement, isolées par un filtre passe-haut en échelles, sont calculées tandis que les petites échelles sont modélisées. Ainsi on peut voir la SGE comme une réduction du nombre de degrés de liberté du système étudié, pour lequel le calcul dynamique des grandes échelles énergétiques est caractéristique de la dynamique globale de l'écoulement. Dans ce chapitre, nous décrivons la méthodologie de façon plus formelle en introduisant la notion de filtrage sous forme mathématique et la notion de modélisation de sous maille.

L'opération de filtrage des termes non linéaires dans les équations de Navier-Stokes en régime compressible fait apparaître de nombreux termes de sous maille dont nous discutons la modélisation en nous inspirant des travaux de Vreman [87] sur la couche de mélange temporelle.

La modélisation de sous maille utilisée pour représenter le tenseur de sous maille et le flux de chaleur de sous maille est ensuite présentée. L'écriture des modèles est très différente selon que l'on travaille dans l'espace physique ou dans l'espace spectral, même si les mécanismes reproduits par la modélisation sont identiques. On ne parlera ici que du modèle d'échelles mixtes qui est utilisé dans l'espace physique mais on peut se référer à [15], [30], [53], [63], pour une présentation détaillée des modèles spectraux.

III.1 Notion de filtrage et propriétés

III.1.1 Définition

La sélection des grandes échelles de l'écoulement en SGE s'effectue en appliquant un filtre passe-haut en échelles à la solution exacte que nous notons f. Le signal est décomposé selon $f = \overline{f} + f'$. $\overline{f}$ est la partie filtrée de la solution exacte et f' est la partie non résolue de la solution exacte. L'opération de filtrage introduit une longueur caractéristique Δ : $\overline{f}$ caractérise les grandes échelles dont la longueur caratéristique est supérieure à Δ et f' caractérise les petites échelles dont la longueur caratéristique est inférieure à Δ.

Lorsque le filtre est temporel, la décomposition est identique à la décomposition de Reynolds où le signal est décomposé autour de sa valeur moyenne. Lorsque le filtre est spatial, la partie non résolue est appelée contribution de sous maille.

D'un point de vue mathématique, l'opération de filtrage est définie par le produit de convolution :

$$\overline{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,t') G(x-\alpha,t-t') dt' d\alpha$$

où le noyau de convolution, G, est caractéristique du filtre utilisé. Des détails sur ces notions de filtrage peuvent être trouvés dans le livre de P. Sagaut [63] ainsi que la thèse d'E. Lenormand [47].
Les propriétés fondamentales des filtres sont définies à partir des moyennes d'ensemble. Les filtres doivent vérifier les propriétés suivantes [63] :

- conservation des constantes : $\overline{a} = a$
- linéarité : $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$
- commutativité avec la dérivation : $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x}$

D'autre part, les opérateurs de Reynolds vérifient les propriétés supplémentaires :

- $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$
- $\overline{f'} = 0$

Dans le cadre des simulations statistiques, les filtres sont des filtres temporels qui sont des opérateurs de Reynolds permettant de sélectionner la solution moyenne constante en temps ou sur un intervalle de temps grand par rapport au temps caractéristique des fluctuations.

Ces propriétés sur les moyennes d'ensemble ne sont malheureusement pas toujours vérifiées pour les maillages curvilignes 3D, notamment la propriété de commutation [35], [44]. Les filtres qui commutent avec l'opérateur de dérivation ne sont pour l'instant construits facilement que dans l'espace de Fourier [51]. La technique très largement utilisée en SGE est l'opération de filtrage implicite des équations. Le filtrage implicite consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes discrétisées sans appliquer de filtre connu analytiquement, les opérateurs de dérivation discrets agissant comme un filtre passe-haut en échelle dans la direction de dérivation [81]. Il est difficile, aussi bien en régime incompressible qu'en régime compressible, d'interpréter l'opération implicite de filtrage sur les maillages curvilignes 3D même si l'approche implicite repose sur l'idée que la taille caractéristique du maillage utilisé est de l'ordre de la taille du filtre qu'il faudrait utiliser pour capturer les grandes échelles.

III.1.2 Décomposition de Favre en régime compressible

Le filtrage des équations de Navier-Stokes compressibles fait apparaître de nombreux termes par rapport aux équations incompressibles filtrées. Favre [25] a introduit en 1965 une nouvelle variable qui est une variable d'ensemble pondérée par la masse volumique, permettant de ne pas introduire de termes supplémentaires à modéliser dans l'équation de conservation de la masse. Les variables sont décomposées selon le même modèle qu'en incompressible : $f = \widetilde{f} + f"$ où $\widetilde{f}$ est définie par $\widetilde{f} = \dfrac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}$. L'opérateur $\overline{(.)}$ est l'opérateur de filtrage qui a été défini au paragraphe (III.1.1) ci-dessus. Dans ce type de décomposition les opérateurs de Reynolds vérifient $\overline{\rho f"} = 0$, ce qui n'est pas le cas des filtres spatiaux.

Les variables de Favre seront utilisées lors du filtrage des équations de Navier-Stokes présenté dans le paragraphe suivant.

III.2 Equations de Navier-Stokes filtrées pour un fluide compressible

Pour faire apparaître de façon claire les termes qui doivent être modélisés dans les équations filtrées implicitement, les quantités sont décomposées formellement en une partie résolue et une partie de sous maille comme au paragraphe (III.1.1). Pour simplifier, les équations filtrées sont présentées en coordonnées cartésiennes. Elle sont données en coordonnées curvilignes à la fin de cette partie, avant de passer à la description du modèle d'échelles mixtes utilisé dans les simulations.

Les équations de Navier-Stokes instantannées pour un fluide compressible sont rappelées ci-dessous sous forme conservative et en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x_j}}(\rho \mathbf{u_j}) = \mathbf{0} \tag{III.1}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u_i}}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x_j}}(\rho \mathbf{u_i} \mathbf{u_j} + \mathbf{p}\delta_{\mathbf{ij}} - \sigma_{\mathbf{ij}}) = \mathbf{0} \tag{III.2}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{E}}{\partial \mathbf{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x_j}}((\rho \mathbf{E} + \mathbf{p})\mathbf{u_j} - \mathbf{u_i}\sigma_{\mathbf{ij}} + \mathbf{q_j}) = \mathbf{0} \tag{III.3}$$

Le fluide simulé est de l'air. ρ est la densité du fluide, u_i sont les composantes (u,v,w) de la vitesse dans chaque direction (Ox_i) et p est la pression statique reliée aux autres variables thermodynamiques par la loi d'état des gaz parfait : $p = \rho\, \mathcal{R}\, T$ avec la constante des gaz parfaits massique $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} = 287\ [J/Kg\ K]$ pour l'air).
$E = c_v T + \frac{1}{2} u_i\ u_i$ est l'énergie totale du fluide par unité de volume.

σ_{ij} est le tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = 2\mu(T)(S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kk}\delta_{ij})$ avec le tenseur de déformation $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$.
μ est la viscosité dynamique du fluide et q_j est le flux de chaleur donné par la loi de Fourier : $q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$.
κ est la conductivité thermique du fluide.
La viscosité dynamique μ est donnée par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_\infty (\frac{T}{T_\infty})^{\frac{3}{2}} (\frac{110{,}4 + T_\infty}{110{,}4 + T})$$

La conductivité thermique $\kappa(T)$ est déduite de $\mu(T)$ à partir d'une hypothèse de nombre de Prandtl constant :

$$\kappa = \frac{\gamma \mathcal{R}}{\gamma - 1} \frac{\mu}{P_r}.$$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, rapport des chaleurs spécifiques, vaut 1,4 et $P_r = 0{,}725$ pour l'air.

III.2.1 Equations filtrées avec tous les termes de sous maille

Les quantités sont donc décomposées en une partie résolue $\overline{f}$ et une quantité de sous maille f' selon : $f = \overline{f} + f'$. $\overline{f}$ correspond au signal filtré spatialement. Les variables sont pondérées par la masse volumique par la technique de Favre [25] : $\widetilde{f} = \overline{\rho f}/\overline{\rho}$ ce qui permet, comme nous l'avons dit, de n'avoir aucun terme à modéliser dans l'équation de conservation de la masse. Selon cette décomposition $f = \widetilde{f} + f$". Pour la pression et la masse volumique $p = \overline{p} + p'$ et $\rho = \overline{\rho} + \rho'$.

Les notations utilisées sont récapitulées ci-dessous :

$$f = \overline{f} + f' = \widetilde{f} + f"$$

$$\widetilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}$$

$$\overline{f'} \neq 0 \qquad \overline{f"} \neq 0$$

$$p = \overline{p} + p'$$

$$\rho = \overline{\rho} + \rho'$$

L'application du filtre spatial en utilisant la décomposition de Favre ne pose pas de problème particulier pour l'équation de conservation de la masse ou l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il y a par contre plusieurs écritures possibles pour l'équation de l'énergie filtrée. On peut trouver six formulations différentes selon les variables utilisées et le regroupement des termes filtrés peut s'effectuer de différentes manières [47]. Ces termes n'ont pas le même poids dans les équations. Vreman et al, [87] ont montré quels termes pouvaient être négligés, à partir d'un calcul à priori sur des données de simulation directe du développement temporel d'une couche de mélange compressible 2D.

La méthode que nous utilisons pour écrire l'équation de l'énergie filtrée est très proche de l'une de celles décrites dans l'article de Vreman [87], en ne faisant apparaître que des quantités résolues. Cela permet de se ramener à des équations proches de la forme des équations non filtrées. La forme que nous utilisons n'introduit ni d'énergie modifiée, ni de pression modifiée, ni de température modifiée. Néanmoins la forme de nos équations est très proche de la seconde forme des équations proposées par Vreman. La raison pour laquelle nous n'avons pas introduit d'énergie modifiée dans nos équations vient du fait que cette forme contient plus de termes de sous maille à modéliser [47], [87].

Les équations de conservation de la masse, de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale obtenues après filtrage s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\widetilde{u}_j) &= 0\\
\frac{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j+\overline{p}\delta_{ij}-\widetilde{\sigma}_{ij}) &= A_{1,i}+A_{2,i}\\
\frac{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}((\overline{\rho}\widetilde{E}+\overline{p})\widetilde{u}_j-\widetilde{u}_i\widetilde{\sigma}_{ij}+\widetilde{q}_j) &= F_1+F_2+F_3+F_4
\end{aligned}$$

$\overline{\rho}$ est la masse volumique résolue, $\widetilde{u}_j$ la composante de la vitesse résolue dans la direction x_j, $\overline{p}$ la pression filtrée, $\widetilde{T}$ la température et $\widetilde{E}$ l'énergie totale résolues. L'énergie totale résolue est directement calculée en filtrant ρE : $\overline{\rho}\widetilde{E}=\overline{\rho c_v T}+\frac{1}{2}\overline{u_i u_i}=\overline{\rho}c_v\widetilde{T}+\frac{\overline{\rho}}{2}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_i+\frac{\overline{\rho}}{2}(\widetilde{u_i u_i}-\widetilde{u}_i\widetilde{u}_i)$.

La température résolue est définie à partir de la pression résolue grâce à l'équation d'état des gaz parfaits : $\overline{p}=\overline{\rho}\mathcal{R}\widetilde{T}$.

Le tenseur des contraintes résolu vaut : $\widetilde{\sigma}_{ij}=2\mu(\widetilde{T})(\widetilde{S_{ij}}-\frac{1}{3}\widetilde{S_{kk}}\delta_{ij})$ avec $\widetilde{S_{ij}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial x_i})$ la partie symétrique du tenseur de déformation de vitesse.

Le flux de chaleur résolu est évalué à partir d'une loi de Fourier (de type premier gradient) portant sur la température résolue $\widetilde{T}$: $\widetilde{q}_j=-\kappa\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_j}$.

$\mu(\widetilde{T})$ est la viscosité dynamique résolue et $\kappa(\widetilde{T})$ est la conductivité thermique résolue. La viscosité dynamique μ est donnée par la loi de Sutherland portant sur la température résolue. La conductivité thermique $\kappa(\widetilde{T})$ est déduite de $\mu(\widetilde{T})$ à partir d'une hypothèse de nombre de Prandtl turbulent comme pour la conductivité thermique physique.

Dans les équations filtrées écrites ci dessus, il y a 6 termes inconnus. Il y a deux termes dans les équations de quantité de mouvement :

$$A_{1,i} = -\partial_j(\tau_{ij})$$
$$A_{2,i} = -\partial_j(\overline{\sigma}_{ij} - \widetilde{\sigma}_{ij})$$

et quatre termes dans l'équation de l'énergie :

$$F_1 = -\partial_j(c_p\overline{\rho}(\widetilde{u_jT} - \widetilde{u}_j\widetilde{T}))$$
$$F_2 = -\partial_j(\frac{\overline{\rho}}{2}(\widetilde{u_i\widetilde{u_i}u_j} - \widetilde{u_i}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}))$$
$$F_3 = \partial_j(\overline{u_j\sigma_{ij}} - \widetilde{u}_j\widetilde{\sigma}_{ij})$$
$$F_4 = -\partial_j(\overline{q_j} - \widetilde{q}_j)$$

avec

$\tau_{\mathbf{ij}} = \overline{\rho}(\widetilde{\mathbf{u_i u_j}} - \widetilde{\mathbf{u}}_\mathbf{i}\widetilde{\mathbf{u}}_\mathbf{j})$: le tenseur de sous maille
$\psi_\mathbf{j} = \mathbf{c_p}\overline{\rho}(\widetilde{\mathbf{u_j T}} - \widetilde{\mathbf{u}}_\mathbf{j}\widetilde{\mathbf{T}})$: le flux de chaleur de sous maille.
$\mathbf{C_{ijk}} = \frac{\overline{\rho}}{\mathbf{2}}(\widetilde{\mathbf{u_i\widetilde{u_i}u_j}} - \widetilde{\mathbf{u_i}}\widetilde{\mathbf{u_i}}\widetilde{\mathbf{u_j}})$: les corrélations triples.

Selon la classification déterminée dans [87] $\|A_{2,i}\| \sim \frac{1}{100}\|A_{1,i}\|$ où la norme $\|.\|$ correspond à la norme L_2. Seul τ_{ij} sera donc modélisé dans les équations de la quantité de mouvement dans nos simulations.

Les termes F_i ont été comparés en annexe aux termes apparaissant dans [87]. Cette comparaison aboutit à la classification suivante de ces termes :

$$\|F_1\| \sim \|F_2\| \simeq \|A_{1,i}\| \text{ et } \|F_3\| \sim \|F_4\| \simeq \frac{1}{10}\|F_1\|.$$

En général, F_1, le flux de chaleur de sous maille, est modélisé par un modèle de type premier gradient, tandis que F_2 est négligé. Cette dernière hypothèse n'est peut-être pas justifiée. Une modélisation possible de ce terme est un modèle de type premier gradient [18]. Nous ne nous sommes pas intéressés à l'influence de ce terme sur nos résultats pour ne pas rajouter de modélisation. Il aurait été de plus nécessaire d'étudier plus en détails ce terme de façon isolée sur un cast test plus simple.

Il existe peu d'études systématiques sur le poid des termes filtrés dans les équations de transport et il est toujours délicat de justifier à priori de négliger certains termes plutôt que d'autres.

III.2.2 Equations résolues en coordonnées cartésiennes

On rappelle que $f = \widetilde{f} + f"$ avec $\widetilde{f} = \overline{\rho f}/\overline{\rho}$

Les équations de Navier-Stokes filtrées instationnaires que l'on résout au final sont données ci-dessous avec les deux seuls termes de sous maille qui ont été retenus : le tenseur de sous maille $\tau_{\mathbf{ij}}$ et le flux de chaleur de sous maille $\psi_{\mathbf{j}}$. Nous abordons la modélisation de ces deux termes dans la section suivante.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\widetilde{u}_j) &= 0 \\
\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j + \overline{p}\delta_{ij} - \overline{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) &= 0 \\
\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}((\overline{\rho}\widetilde{E} + \overline{p})\widetilde{u}_j - \widetilde{u}_i\overline{\sigma}_{ij} + \overline{q_j} + \psi_j) &= 0
\end{aligned}$$

$$\tau_{\mathbf{ij}} = \overline{\rho}(\widetilde{\mathbf{u_i u_j}} - \widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}}\widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{j}})$$

$$\psi_{\mathbf{j}} = \mathbf{c_p}\overline{\rho}(\widetilde{\mathbf{u_j T}} - \widetilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{j}}\widetilde{\mathbf{T}})$$

Les équations s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial F}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial G}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial H}{\partial z}} + \overline{\frac{\partial F_v}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial G_v}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial H_v}{\partial z}} = 0$$

Le vecteur des inconnues principales filtrées vaut :

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\widetilde{u} \\ \overline{\rho}\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{E} \end{pmatrix}$$

Les flux Euler $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$ sont donnés par :

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\widetilde{u} \\ \overline{\rho}\widetilde{u}^2 + \overline{p} \\ \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{E} + \widetilde{u}\overline{p} \end{pmatrix} \qquad \overline{G} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\widetilde{v}^2 + \overline{p} \\ \overline{\rho}\widetilde{v}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{v}\widetilde{E} + \widetilde{v}\overline{p} \end{pmatrix} \qquad \overline{H} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{v}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{w}^2 + \overline{p} \\ \overline{\rho}\widetilde{w}\widetilde{E} + \widetilde{w}\overline{p} \end{pmatrix}$$

Les flux visqueux $\overline{F_v}$, $\overline{G_v}$, $\overline{H_v}$ s'écrivent :

$$\overline{F_v} = \begin{pmatrix} 0. \\ -\widetilde{\sigma}_{11} + \tau_{11} \\ -\widetilde{\sigma}_{12} + \tau_{12} \\ -\widetilde{\sigma}_{13} + \tau_{13} \\ -\widetilde{u}(\widetilde{\sigma}_{11}) - \widetilde{v}(\widetilde{\sigma}_{12}) - \widetilde{w}(\widetilde{\sigma}_{13}) + q_1 + \psi_1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{G_v} = \begin{pmatrix} 0. \\ -\widetilde{\sigma}_{12} + \tau_{12} \\ -\widetilde{\sigma}_{22} + \tau_{22} \\ -\widetilde{\sigma}_{23} + \tau_{23} \\ -\widetilde{u}(\widetilde{\sigma}_{12}) - \widetilde{v}(\widetilde{\sigma}_{22}) - \widetilde{w}(\widetilde{\sigma}_{23}) + q_2 + \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{H_v} = \begin{pmatrix} 0. \\ -\widetilde{\sigma}_{13} + \tau_{13} \\ -\widetilde{\sigma}_{23} + \tau_{23} \\ -\widetilde{\sigma}_{33} + \tau_{33} \\ -\widetilde{u}(\widetilde{\sigma}_{13}) - \widetilde{v}(\widetilde{\sigma}_{23}) - \widetilde{w}(\widetilde{\sigma}_{33}) + q_3 + \psi_3 \end{pmatrix}$$

III.2.3 Equations résolues dans le nouveau système de coordonnées (ξ,η,ζ)

Nous rappelons que les opérations de dérivation et de filtrage sont supposées commuter dans le cadre théorique de la modélisation de sous maille. Les coordonnées (ξ,η,ζ) curvilignes sont introduites dans le cas de maillages non homogènes selon certaines directions, ou pour des géométries complexes où les parois sont curvilignes comme c'est le cas pour la tuyère 3D considérée. Il est alors plus facile, en différences finies, de résoudre les équations dans le plan transformé (ξ,η,ζ) où le maillage est régulier. Les coordonnées curvilignes (ξ,η,ζ) sont telles qu'une ou plusieurs d'entre elles correspondent aux frontières du domaine de calcul ou aux frontières d'obstacles ou aux parois [76]. Les conditions aux limites s'appliquent alors de façon très simple aux parois et en entrée et sortie dans les géométries complexes. La discrétisation des équations est aussi simplifiée. Dans la cas de la tuyère, $\eta = 1$ correspond à la paroi basse de la tuyère avec la bosses en flêche. Le plan $\eta = \eta_{max}$ correspond à la paroi haute et $\zeta = 1$ et $\zeta = \zeta_{max}$ sont associés aux deux parois latérales. Le maillage est régulier dans la direction longitudinale et les coordonnées ξ et x sont proportionnelles.

La méthode utilisée consiste à changer localement de coordonnées $(x,y,z) \longrightarrow (\xi,\eta,\zeta)$ tout en exprimant encore le champ de vitesse dans le repère lié à (x, y, z) :

$$\overrightarrow{V} = u(\xi,\eta,\zeta)\overrightarrow{x} + v(\xi,\eta,\zeta)\overrightarrow{y} + w(\xi,\eta,\zeta)\overrightarrow{z}$$

Cette méthode est plus simple que d'exprimer $\overrightarrow{V}$ dans le nouveau repère lié aux coordonnées (ξ, η, ζ), notamment pour comparer les quantités calculées aux quantités mesurées.

On considère donc le changement de coordonnées (x, y, z) $\longrightarrow$ (ξ, η, ζ). Toutes les notations utilisées sont précisées en annexe. Les équations s'écrivent alors sous forme vectorielle :

$$J\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \widehat{F_v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G_v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{H_v}}{\partial \zeta} = 0$$

avec

$$\widehat{F} = \alpha_\xi \overline{F} + \beta_\xi \overline{G} + \gamma_\xi \overline{H} \ , \ \widehat{G} = \alpha_\eta \overline{F} + \beta_\eta \overline{G} + \gamma_\eta \overline{H} \ , \ \widehat{H} = \alpha_\zeta \overline{F} + \beta_\zeta \overline{G} + \gamma_\zeta \overline{H}$$

$$\widehat{F_v} = \alpha_\xi \overline{F_v} + \beta_\xi \overline{G_v} + \gamma_\xi \overline{H_v} \ , \ \widehat{G_v} = \alpha_\eta \overline{F_v} + \beta_\eta \overline{G_v} + \gamma_\eta \overline{H_v} \ , \ \widehat{H_v} = \alpha_\zeta \overline{F_v} + \beta_\zeta \overline{G_v} + \gamma_\zeta \overline{H_v}$$

où les quantités α_i, β_j et γ_k sont les éléments métriques de la transformation.

$$1 \ \leq \ \xi \ \leq \ 201 \quad 1 \ \leq \ \eta \ \leq \ 91 \quad 1 \ \leq \ \zeta \ \leq \ 101$$

III.3 Modélisation de sous maille

Lorsqu'on discrétise les équations, toutes les structures plus petites que deux fois la taille de la plus petite maille du domaine de calcul ne sont plus résolues. Il faut modéliser l'action de ces petites structures sur les grandes échelles que l'on peut calculer. Cette modélisation passe par la modélisation des contributions de sous maille dans les équations de Navier Stokes filtrées. Nous rappelons que les deux termes de sous maille que nous avons conservé dans les équations filtrées (III.2.2) sont :

$$\tau_{\mathbf{ij}} = \overline{\rho}(\widetilde{\mathbf{u_i u_j}} - \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{i}\tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{j}) \text{ et } \psi_\mathbf{j} = \mathbf{c_p}\overline{\rho}(\widetilde{\mathbf{u_j T}} - \tilde{\mathbf{u}}_\mathbf{j}\widetilde{\mathbf{T}})$$

La modélisation du tenseur de sous maille va être décrite avant celle du flux de chaleur de sous maille, qui est plus simple.

On distingue deux grandes classes de modélisation du tenseur de sous maille à partir desquelles la construction de tous les types de modèles est possible : la modélisation structurelle et la modélisation fonctionnelle. La modélisation structurelle consiste à approcher au mieux l'expression du tenseur lui-même alors que l'approche fonctionnelle consiste à modéliser les transferts d'energie de manière à reproduire au mieux les échanges d'énergie entre les échelles résolues et les échelles non résolues à la coupure Δ. Il est ensuite possible de faire des combinaisons linéaires ou non linéaires entre les différentes approches. On obtient ainsi, par exemple, la famille du modèle d'échelles mixtes développée au LIMSI, qui a été utilisé dans nos simulations.

Lorqu'on développe l'expression du tenseur de sous maille, on tombe sur la décomposition triple de Léonard [48] :

$$\tau_{ij} = (\overline{\rho}\widetilde{\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j} - \overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j) + \overline{\rho}(\widetilde{\widetilde{u}_i u"_j} + \widetilde{\widetilde{u}_j u"_i}) + \overline{\rho}\widetilde{u"_i u"_j} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}.$$

Les modèles de viscosité de sous maille sont en général prévus pour prendre en compte l'ensemble des trois termes sans distinction. Le but est en effet de ne simuler que l'action énergétique de ces termes sur les grandes échelles. Il existe néanmoins des approches où tous les termes sont modélisés ou calculés directement tout en conservant l'invariance galiléenne du tenseur de sous maille τ_{ij} [47], [70], [71].

Pour de faibles nombres de Mach, les modèles en régime compressible sont directement issus de la modélisation de sous maille en régime incompressible, en ne tenant compte que de la variation de la densité filtrée résolue et en négligeant les fluctuations de densité [95].

Nous allons maintenant détailler le modèle d'échelles mixtes que nous utilisons dans nos simulations avec les deux modèles qui entrent dans la construction de ce modèle mixte.

III.3.1 Modèle d'échelles mixtes

Les simulations ont été réalisées avec le modèle d'échelles mixtes mis au point au LIMSI pour la simulation d'écoulements incompressibles par L. Ta Phuoc en 1994 et P. Sagaut en 1995 [58], [64]. Le modèle a été adapté aux écoulements compressibles par C. Tenaud en 1995 [75]. Ce modèle d'échelles mixtes prend en compte les corrélations croisées, L_{ij} et R_{ij} d'une façon globale. Néanmoins il a été comparé au modèle proposé par G. Erlebacher et C. G. Speziale [70] pour le calcul 2D de l'écoulement autour de l'aile NACA 0012 [75] et il donne d'aussi bons résultats. Il a également été utilisé avec succès pour le calcul d'une interaction onde de choc/couche limite [19] et plus récemment pour le calcul du développement spatial d'une couche de mélange 2D et 3D [22].

L'intérêt de ce modèle est qu'il couple, à la coupure, les actions des grandes échelles résolues ainsi que les actions de petites échelles non résolues. Il s'annule lorsque l'écoulement est correctement résolu ou laminaire contrairement à des modèles plus classiques tel que le modèle de Smagorinsky [69]. La prise en compte de l'état des petites échelles comme pour le modèle dynamique [30] permet d'adapter plus facilement la dissipation physique provenant des grandes échelles résolues en évitant ainsi une accumulation d'énergie aux petites échelles [40].

Le tenseur de sous maille est modélisé par l'intermédiaire d'une viscosité de sous maille en utilisant l'hypothèse de Boussinesq :

$$-\tau_{ij} + \frac{1}{3}\tau_{kk} = 2\mu_t(\widetilde{S}_{ij} - \frac{1}{3}\widetilde{S}_{kk}\delta_{ij})$$

La viscosité du modèle d'échelles mixtes s'écrit d'une façon générale [58] :

$$\mu_t = \mu_{t\omega}^{\alpha}\ \mu_{tb}^{(1-\alpha)}$$

La viscosité $\mu_{t\omega}$ est une viscosité de sous maille scalaire basée sur les grandes échelles. L'expression de $\mu_{t\omega}$ que nous utilisons est donnée par le modèle de Vorticité détaillé un peu plus loin. La viscosité μ_{tb} représente une viscosité de sous maille calculée à partir des petites échelles et nous utilisons le modèle de l'énergie cinétique à la coupure (TKE) pour l'évaluer.

Seule la valeur $\alpha = \frac{1}{2}$ a été utilisée jusqu'ici dans les calculs en régime incompressible et en régime compressible. Avec cette valeur, il y a un équilibre entre l'action des grandes et des petites échelles dans la modélisation. Les différents résultats qui ont déjà été obtenus avec cette valeur pour le calcul de couche de mélange incompressible et compressible ou autour d'une aile sous incidence, sont satisfaisants. Les structures des échappées tourbillonaires sont mieux capturées et moins diffusées qu'avec le modèle de Smagorinsky, qui n'excerce qu'une action énergétique. Une lacune peut-être du modèle d'échelles mixtes est qu'il ne prend pas en compte explicitement la cascade inverse d'énergie, par rapport à d'autres modèles spectraux. Nous n'avons pas testé d'autres valeurs de α. Des pareils tests nécessiteraient de travailler sur un écoulement plus simple comme un canal plan à un nombre de Reynolds permettant de résoudre correctement toutes la dynamique des couches limites.

Nous présentons maintenant les deux modèles et nous avons conservé α dans la suite sans remplacer la variable par sa valeur.

Modèle de Vorticité

Ce modèle date de 1978 [1]. Il est obtenu à partir du modèle de Smagorinsky en utilisant l'hypothèse $2\widetilde{S}^2 \simeq |\widetilde{\omega}|$ valable en turbulence isotrope. C'est un modèle qui suppose que l'action des échelles de sous maille sur les échelles résolues est une action purement énergétique de nature dissipative analogue aux mécanismes de dissipation moléculaires avec une intensité bien supérieure.

Le modèle de Smagorinsky s'écrit :

$$\mu_{tS} = \overline{\rho}\ c_s^2\Delta^2(|2\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij}|)^{1/2}$$

où $\widetilde{S}_{ij}$ est le tenseur des contraintes résolues. Δ est la longueur de coupure du filtre, c_s est la constante de Smagorinsky : $c_s = 0{,}18$.

En effet :

$$\mu_{tS} = \overline{\rho}\ (c_s\Delta)^{4/3}\ \varepsilon^{1/3}$$

L'hypothèse d'équilibre local Production = Dissipation permet d'écrire :

$$\varepsilon \simeq -\widetilde{S} : R = 2\ \overline{\rho}\ \mu_{tS}\ \widetilde{S} : \widetilde{S}$$

D'où l'expression de μ_{tS} :

$$\mu_{tS} = \overline{\rho}\ c_s^2\Delta^2(|2\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij}|)^{1/2}$$

La constante est calculée en supposant que la coupure se situe suffisamment loin dans le spectre de Kolmogorov pour pouvoir écrire :

$$\varepsilon = 2\ \mu_{tS}\int_0^{\infty} k^2E(k)dk \simeq 2\ \mu_{tS}\ \int_0^{k_c} k^2E(k)dk = \int_0^{k_c} k^2(C_K\ \varepsilon^{2/3}\ k^{-5/3})\ dk$$

D'où : $c_s = \dfrac{1}{\pi}\ (\dfrac{3\ C_K}{2})^{-3/4} = 0{,}18$

D'une façon analogue, avec $|\widetilde{\omega}|^2 = 2\widetilde{S} : \widetilde{S}$, la viscosité du modèle de vorticité s'écrit :

$$\mu_{\mathbf{t}\omega} = \overline{\rho}\mathbf{c_s^2\Delta^2}|\overline{\omega}|$$

La variable ω est la vorticité locale de l'écoulement et Δ est la longueur caractéristique du filtre liée au maillage.

Le modèle de vorticité a été choisi plutôt que le modèle de Smagorinsky pour calculer la viscosité de sous maille pour plusieurs raisons. D'une part, ce modèle a été testé pour des écoulements fortements décollés comme l'écoulement compressible autour d'un profil d'aile sous incidence [1], [75]. D'autre part, la constante du modèle n'est pas aussi sensible que la constante du modèle de Smagorinsky à la présence de forts gradients de vitesse dans l'écoulement, comme par exemple proche des parois ou en écoulement anisotrope [54].

La valeur de la constante c_s utilisée est celle préconisée dans l'article de Bardina, Ferziger et Reynolds [2] : $c_s = 0{,}2$.

Ce modèle est reconnu pour être très dissipatif et il ne s'annule pas dans les zones de relaminarisation ni près des parois où la viscosité de sous maille tend vers zéro. C'est pourquoi nous utilisons le modèle d'échelles mixtes en couplant ce modèle avec le modèle de l'énergie cinétique à la coupure décrit ci-après.

Modèle de l'énergie cinétique à la coupure (TKE)

Ce modèle est basé sur l'évaluation des échelles de sous maille à l'aide de l'hypothèse de similarité d'échelles introduite par Bardina en 1983 [3]. Un analyse dimensionnelle permet d'écrire [2] :

$$\mu_{\mathbf{tb}} = \overline{\rho}\, \mathbf{C_b}\, \boldsymbol{\Delta}\, \sqrt{\mathbf{q_c}} \quad \text{avec} \quad C_b = 0{,}126$$

Δ est la longueur de coupure du filtre et $q_c = \dfrac{1}{2}\,(\widetilde{u_i})''(\widetilde{u_i})''$ est l'énergie cinétique de sous maille.
La constante a été déterminée en utilisant un modèle de vorticité permettant de retrouver les résultats expérimentaux de Comte-Bellot sur la turbulence en décroissance derrière une grille par simulation [2]. La viscosité est simulée dans un premier temps pour correspondre au mieux aux expériences. La constante $C_b = 0{,}126$ du modèle de l'énergie cinétique est alors obtenue à partir de la valeur de la viscosité en comparant les valeurs expérimentales à la modélisation.

L'hypothèse de similarité d'échelles permet d'évaluer l'énergie cinétique de sous maille à l'aide des échelles résolues en faisant une analogie entre la dynamique des plus petites structures résolues et celle des plus grandes échelles spatiales non résolues. On a ainsi une évaluation de la contribution spatiale non résolue à la coupure. Soit :

$$(\widetilde{u_i})'' = \widetilde{u_i''} = \widetilde{u_i} - \widehat{\widetilde{u_i}} \tag{III.4}$$

d'où

$$q_c = \frac{1}{2}\,(\widetilde{u_i})''(\widetilde{u_i})'' = \frac{1}{2}\,(\widetilde{u_i} - \widehat{\widetilde{u_i}})(\widetilde{u_i} - \widehat{\widetilde{u_i}}).$$

La variable $\widehat{\widetilde{u_i}}$ correspond à une variable doublement filtrée utilisée pour isoler les plus petites structures résolues.

On a de plus une évaluation de la partie isotrope du tenseur de sous maille :

$$\tau_{kk} \simeq 2\,\overline{\rho}\,q_c$$

Ce type de modélisation permet d'annuler la contribution de sous maille lorsque l'écoulement est bien résolu ou laminaire. Cela permet également de ne pas avoir à utiliser de fonction d'amortissement de type Van Driest [75] lorsque les couches limites sont suffisamment discrétisées.

Les expressions de $\mu_{t\omega}$ et de μ_{tb} définies ci-dessus conduisent à l'expression de la viscosité de sous maille du modèle d'échelles mixtes telle que :

$$\mu_{\mathbf{t}} \;=\; \overline{\rho}\, \mathbf{C_{kk}}\, |\overline{\omega}|^{\alpha}\, \mathbf{q_c}^{\frac{1-\alpha}{2}}\, \mathbf{\Delta}^{\mathbf{1}+\alpha}.$$

Le maillage de la tuyère est un maillage curviligne fortement anisotrope. Nous présentons la prise en compte de l'anisotropie dans la modélisation, dans la longueur de coupure du filtre Δ grâce à la fonction de Scotti, après avoir présenté l'expression du flux de chaleur de sous maille.

III.3.2 Modèle de type premier gradient pour le flux de chaleur de sous maille

Les nombres de Mach auxquels nous travaillons restent très en dessous des nombres de Mach (de l'ordre de 3 à 6) où les effets de la température sont prédominants dans la dynamique de l'écoulement. C'est pourquoi, nous ne nous somme pas intéressés en détails à une modélisation fine du flux de chaleur de sous maille.

Le flux de chaleur de sous maille est modélisé par l'intermédiaire de l'hypothèse la plus simple que l'on puisse utiliser qui est une hypothèse de type premier gradient :

$$-\psi_{\mathbf{j}} = (\frac{\mu_{\mathbf{t}}\ \mathbf{c_p}}{\mathbf{P_{rt}}})\ \frac{\partial \widetilde{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{x_j}}$$

Cette formulation est analogue à celle du flux de chaleur de Fourier. Le nombre de Prandtl est supposé constant : $P_{rt} = 0.89$ [17]. En réalité les mesures expérimentales sur les couches limites compressibles turbulentes de Meier et Rotta en 1971 montrent que P_{rt} varie de la paroi à l'extérieur de la couche limite. D'une valeur un peu supérieure à 1 près de la paroi il tend vers sa valeur théorique de 0,6 obtenue en turbulence homogène isotrope à l'extérieur de la couche limite. Comme nous n'avons pas cherché ici à à étudier en détail l'influence de la modélisation du flux de chaleur de sous maille sur les résultats, le nombre de Prandtl a été pris constant. Une amélioration possible au modèle consiste à tenir compte de cette variation à l'aide d'une fonction d'amortissement [17].

III.3.3 Fonction de Scotti

L'échelle de longueur de coupure du modèle d'échelles mixtes a été corrigée pour tenir compte de l'anisotropie du maillage associée à la présence des parois dans notre cas test. L'anisotropie est prise en compte par la fonction déterminée par A. Scotti, C. Meneveau et D. K. Lilly [65]. Les mailles sont très resserées aux parois dans les directions (Oy) et (Oz) et sont très inférieures aux parois à leur dimension longitudinale. Les mailles sont équiréparties sur toute la longueur de la tuyère et $\dfrac{dx}{L_x} = 4{,}975\ 10^{-3}$. Les dimensions du maillage aux parois sont :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{L_y} = 9{,}702\ 10^{-5} \\ \dfrac{dz}{L_z} = 6{,}925\ 10^{-5} \end{cases}$$

Le cadre de la modélisation de sous maille avec la notion de séparation d'échelles n'est valable que pour un filtre homogène et isotrope dans les trois directions de l'espace. Lorsque le maillage est isotrope, la longueur de coupure du filtre est bien définie et vaut :

$$\Delta_{iso} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}.$$

Une longueur caractéristique de coupure est plus difficile à calculer lorsque le maillage est anisotrope. C'est pourquoi, nous utilisons la formule déterminée par Scotti [65] qui donne la longueur de coupure Δ en fonction des rapports de formes du maillage $\Delta y/\Delta x$ et $\Delta z/\Delta x$, à partir de l'étude énergétique de la turbulence isotrope à l'équilibre. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \mu_t \ = \ \overline{\rho}\, C_{kk}\, |\overline{\omega}|^{\alpha}\, q_c^{\frac{1-\alpha}{2}}\ L(\Delta)^{1+\alpha} \\ L(\Delta) = \Delta_{iso} f(a_1,a_2) \\ f(a_1,a_2) = cosh(\sqrt{(\dfrac{4}{27}[(lna_1)^2 - lna_1 lna_2 + (lna_2)^2]} \\ \Delta_{max} = max(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3) \\ a_1 = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{max}} \quad a_2 = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{max}} \quad i,k \neq max \\ a_1 \leq 1 \ \ a_2 \leq 1 \end{cases}$$

La viscosité de sous maille est représentée sur les figures (III.1), (III.2) et (III.3) dans les directions (Ox), (Oy) et (Oz) respectivement. Sur chaque figure la courbe avec les croix correspond à la viscosité de sous maille lorsqu'on ne tient pas compte de $f(a_1,a_2)$ dans le modèle, et la courbe en trait pointillé lorsqu'on en tient compte. A titre de comparaison, la viscosité physique a également été tracée et elle correspond à la courbe en trait plein avec les points. Elle reste de l'ordre de $10^{-5}\ kg\ m^{-1}\ s^{-1}$ dans toute la tuyère. La viscosité de sous maille, comme la viscosité turbulente, est grande dans les couches limites où les gradients de la vitesse sont importants. On remarque sur la figure (III.1) où les mailles sont les plus isotropes que la fonction de Scotti est de l'ordre de l'unité. On observe les effets d'anisotropie du maillage selon la direction (Oy) sur la figure (III.3). La fonction de correction $f(a_1,a_2)$ passe de 2 dans les couches limites où le maillage est fortement anisotrope à 1 hors des couches limites où l'isotropie est quasiment respectée. Le second pic observé sur les courbes proche de la paroi haute selon (Oy) correspond aux effets des gradients de la vitesse. Les mêmes effets sont observés dans la direction (Oz) sur la figure (III.2).

Après avoir abordé certains aspects concernant la modélisation de sous maille, nous passons à la description de la résolution numérique des équations de Navier Stokes filtrées dans lesquelles les termes non linéaires ont été modélisés.

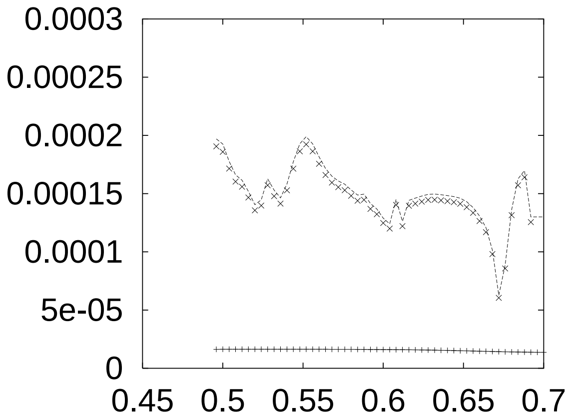


FIG. III.1 – *Viscosité de sous maille selon (Ox) en* $y = 4{,}523\ 10^{-2}$ *m et* $z = 5{,}273\ 10^{-2}$ *m : avec scotti* $---$ *; sans scotti* $\times\ \times$ *; viscosité physique* $+++++$

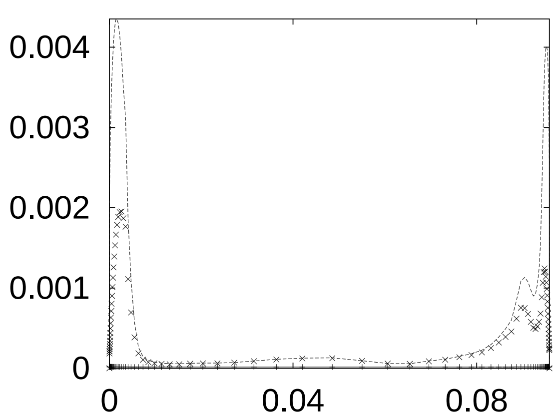


FIG. III.2 – *Viscosité de sous maille selon (Oy) en* $x = 0{,}612$ *m et* $z = 5{,}273\ 10^{-2}$ *m : avec scotti* $---$ *; sans scotti* $\times\ \times$ *; viscosité physique* $+++++$

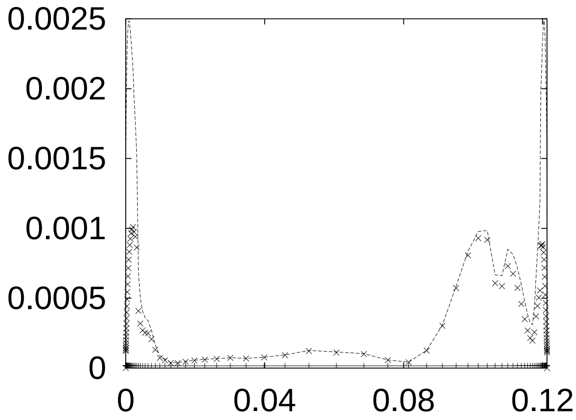


FIG. III.3 – *Viscosité de sous maille selon (Oz) en* $x = 0{,}652$ *m et* $y = 4{,}523\ 10^{-2}$ *m : avec scotti* $---$ *; sans scotti* $\times\ \times$ *; viscosité physique* $+++++$

Chapitre IV

Résolution Numérique

Les équations de Navier Stokes compressibles qui correspondent aux équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale sont composées de deux parties associées à des phénomènes physiques très distincts : la partie convective non linéaire qui correspond aux différents phénomènes de propagation d'ondes dans le système physique et la partie diffusive responsable de la dissipation irréversible de l'énergie en chaleur. Les termes de diffusion sont discrétisés à l'aide d'un schéma centré d'ordre deux. A très haut nombre de Reynolds, lorsque les effets de la viscosité sont faibles par rapport aux effets inertiels, les équations de Navier-Stokes correspondent aux équations d'Euler ; leur discrétisation et leur résolution numérique reposent sur la théorie des systèmes hyperboliques. Une des particularités concernant les solutions possibles aux équations d'Euler est l'existence de solutions discontinues (ondes de choc) pour les fluides supersoniques. Ces propriétés sont rappelées en annexe. Les progrès en analyse numérique de stabilité et de convergence non linéaires ont été importants depuis une vingtaine d'années débouchant sur la construction des schémas à capture de choc non linéaires d'ordre élevé [94].

Un des problèmes majeurs qui a été à l'origine du développement des schémas à capture de choc non linéaires d'ordre élevé au milieu des années 80, est l'apparition d'oscillations à l'approche des discontinuités lorsque l'ordre des schémas classiques augmente (phénomène de Gibbs) [38].

Les schémas d'ordre élevé utilisés pour la discrétisation des systèmes hyperboliques non linéaires peuvent être non linéairement stables et, s'ils convergent, ne pas converger vers la bonne solution physique. Les solutions discontinues obtenues numériquement ne sont pas nécessairement physiques. Certaines familles de solutions ne vérifient pas la condition de saut d'entropie discrète à travers la discontinuité. C'est ainsi que s'introduit la notion de schéma à variation totale décroissante (TVD) pour les conditions de stabilité non linéaire et de schéma entropique pour converger vers la solution physique.

Les couplages qui existent entre la discrétisation et la modélisation de sous maille posent plus de problèmes en compressible qu'en incompressible. La nécessité d'utiliser des schémas à capture de choc les plus précis possibles vient du couplage qui existe entre la discrétisation des équations en régime compressible et la modélisation de sous maille dans la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles en régime turbulent. Les schémas décentrés que nous utilisons introduisent une viscosité numérique qui est en compétition avec la viscosité de sous maille et il est donc important de minimiser la viscosité numérique introduite.

Une possibilité simple et prometteuse réside dans l'utilisation de capteurs de choc pour ne déclencher les schémas à capture de choc que sur le choc et plus là où la solution est régulière [29]. Ce n'est néanmoins pas le type de méthode qui a été utilisée dans ce travail puisque nous disposons de nombreux résultats sur la modélisation de sous maille et sur les différents schémas à capture de choc pour des écoulements où les mécanismes mis en jeu peuvent être étudiés de manière plus fondamentale [20], [22], [74]. Les schémas qui utilisent une fonction de sélection pour ne se déclencher que sur le choc nécessitent plus de validation notamment pour le calcul d'écoulements avec des chocs forts. Il faut également ne pas perdre de vue les applications de ce calcul pour lesquelles il est important d'avoir une certaine robustesse de l'algorithme dans nos simulations tout en conservant la précision.

Dans ce chapitre nous présentons la discrétisation spatiale et temporelle utilisées dans nos simulations, avant de décrire en détail les conditions aux limites imposées à l'entrée, à la sortie et sur les parois du domaine de calcul.

IV.1 Discrétisation spatiale

La résolution spatiale est fondée sur une formulation de type volumes finis. Les équations sont intégrées sur les faces élémentaires des cellules de calcul. Les schémas utilisés sont toujours sous forme conservative pour capturer les discontinuités. La formulation que nous utilisons est explicite et les schémas que nous utilisons sont donc découplés en temps et en espace.

La discrétisation décentrée d'une équation hyperbolique linéaire et d'un système hyperbolique linéaire en régime compressible est rappelée en annexe. Une récapitulation des schémas numériques utilisés dans la résolution des systèmes hyperboliques se trouve dans le cours de Lerat [49], dans le livre de Le Veque [83] et dans le livre de Hirsch [38].

La discrétisation des termes visqueux est donnée avant de décrire le schéma d'Harten Yee à variation totale décroissante d'ordre deux utilisé dans nos simulations pour discrétiser les termes non linéaires.

IV.1.1 Discrétisation spatiale des termes visqueux

Les termes visqueux sont discrétisés par une formule habituelle centrée :

$$\frac{\partial \widehat{F_v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G_v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{H_v}}{\partial \zeta} = (\frac{\widehat{F}_{vi+1/2,j,k} - \widehat{F}_{vi-1/2,j,k}}{\Delta \xi}) + (\frac{\widehat{G}_{vi,j+1/2,k} - \widehat{G}_{vi,j-1/2,k}}{\Delta \eta}) + (\frac{\widehat{H}_{vi,j,k+1/2} - \widehat{H}_{vi,j,k-1/2}}{\Delta \zeta})$$

Par définition du maillage transformé on a : $\Delta_\xi = \Delta_\eta = \Delta_\zeta = 1$.

IV.1.2 Discrétisation spatiale des termes non linéaires

Les notations du paragraphe III.2.3 sont conservées et le schéma ne s'applique qu'à la partie Euler des équations. Soit à discrétiser :

$$J \frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \zeta} = 0$$

Schéma entropique d'Harten-Yee d'ordre deux

L'idée de ce schéma est d'appliquer un flux modifié à un schéma décentré du premier ordre pour en faire un schéma du second ordre vérifiant les propriétés TVD [36], [37]. Les termes négligés dans l'équation équivalente du schéma décentré d'ordre un sont d'ordre deux. Si l'on soustrait ces termes au flux f associé au schéma du premier ordre dans l'équation équivalente, le schéma devient d'ordre deux pour le flux modifié $(f + d)$. Le flux modifié s'écrit en fait sous une forme un peu plus compliquée $f + gd$ où g est le limiteur qui permet d'obtenir un schéma qui vérifie la condition TVD et la condition d'entropie [36], [37]. L'utilisation d'un schéma TVD décentré a été initialement choisi parce qu'il donne globalement de meilleurs résultats qu'un schéma centré même s'il est moins facile d'utilisation [79], [92]. Le schéma initial d'Harten a été ensuite généralisé par Yee, [90], [91].

Nous utilisons le limiteur de Van-Leer qui a donné les meilleurs résultats sur la convection d'un tourbillon et la simulations d'une interaction onde de choc/couche limite [19].

Les équations discrétisées s'écrivent :

$$J \frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + (\frac{\breve{F}_{i+1/2,j,k} - \breve{F}_{i-1/2,j,k}}{\Delta \xi}) + (\frac{\breve{G}_{i,j+1/2,k} - \breve{G}_{i,j-1/2,k}}{\Delta \eta}) + (\frac{\breve{H}_{i,j,k+1/2} - \breve{H}_{i,j,k-1/2}}{\Delta \zeta}) = 0$$

Le flux numérique associé au schéma s'écrit sous forme vectorielle [92], [93] :

$$\breve{F}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2} \, [\widehat{F}_{i+1,j,k} + \widehat{F}_{i,j,k} + R_{i+1/2,j,k} \Phi_{i+1/2,j,k} \,].$$

Les éléments de la matrice associée au limiteur $\Phi_{i+1/2,j,k}$ sont donnés en annexe. La matrice $R_{i+1/2,j,k}$ est la matrice des vecteurs propres de A_ξ à droite.

Les variables de Roe

Lorsque les équations ne sont plus linéaires, la matrice des vecteurs propres n'est plus constante et l'évaluation des éléments des matrices du schéma numérique est plus délicate. Godunov, en 1959, a proposé une méthode décentrée liée à la résolution d'un problème exact de Riemann pour résoudre les équations hyperboliques non linéaires [38], [83].

Le problème de Riemann correspond à résoudre l'équation de convection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

avec une solution initiale $u(\xi,t=0)$ discontinue en $\xi = 0$.

Lorsque le problème est linéaire il existe une solution analytique que l'on peut calculer. Lorsque le problème n'est pas linéaire, la résolution est formellement très proche de la résolution du problème linéaire mais beaucoup plus coûteuse du point de vue numérique. La solution obtenue de manière exacte est de plus moyennée sur chaque cellule de calcul à la fin de chaque pas de temps [38], [83].

Les méthodes numériques récentes sont basées sur la résolution d'un problème de Riemann approché. Le solveur que nous utilisons est un solveur basé sur les variables de Roe [61]. Il considère les solutions approchées du problème non linéaire comme les solutions exactes du problème approché :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{\mathcal{A}}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$ ne dépend que des deux états u_g et u_d. Il construit ainsi une matrice jacobienne de changement de variables $Q \Longrightarrow \Omega$ définie sur les états hybrides :

$$\begin{cases} \rho_{i+1/2} = \sqrt{\rho_{i+1}\ \rho_i} \\ Q_{i+1/2} = \dfrac{\alpha\ Q_{i+1} + Q_i}{1+\alpha} \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{\rho_{i+1}}{\rho_i}} \end{cases}$$

Toutes les matrices sont données en annexe. Le vecteur Ω est le vecteur des variables caractéristiques.

IV.2 Discrétisation temporelle : Schéma de Runge-Kutta TVD d'ordre deux

Le schéma utilisé pour intégrer en temps les équations est un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 2 vérifiant la condition TVD [68]. La discrétisation temporelle est entièrement explicite. Les schémas explicites en temps ne sont pas inconditionnellement stables. Ils sont soumis à une condition de stabilité à travers le CFL, lié à la discrétisation des termes convectifs, et à travers le nombre de diffusion, lié à la discrétisation des termes visqueux. La résolution explicite des équations a été choisie plutôt qu'une résolution implicite car le code est parallèle et la parallélisation est réalisée très simplement et très naturellement avec un code explicite. Le problème de l'implicitation s'est posé au cours de ce travail mais il n'était pas évident, à priori, que le temps gagné par l'implicitation serait suffisant pour compenser les opérations d'inversion de matrices aux interfaces entre les processeurs. Avec la mémoire disponible très importante sur les nouvelles machines vectorielles il est maintenant envisageable de façon plus réaliste d'impliciter le code qui peut tourner sur un seul processeur, après avoir validé ce mode de résolution plus en détails sur des cas test du type du tube à choc.

La méthode de Runge-Kutta utilisée dans les simulations fait partie des méthodes de type prédiction-projection. La figure (IV.1) schématise ce type d'approche. Le pas de temps est fractionné en plusieurs sous-pas. Leur écriture est rappelée en annexe. Ces méthodes, basées sur une approximation de la solution par sa tangente au point au temps $t = n\Delta t$, sont des méthodes intrinsèquement instationnaires. Elles ne sont valables que pour des petits pas de temps.

- Construction d'un schéma de Runge-Kutta TVD

Shu et Osher se sont intéressés à des discrétisations temporelles d'ordre élevé qui conservent la propriété TVD de la solution [68]. Ils considèrent l'équation de convection sous la forme générale :

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{L}(\mathcal{U}) \\ U(x,t=0) = U_0(x) \end{cases}$$

L'opérateur spatial discret $L(U)$ est supposé approximer l'opérateur continu $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ à l'ordre r :

$$L(U) = \mathcal{L}(\mathcal{U}) + \mathcal{O}(h^r)$$

Cet opérateur spatial est supposé, de plus, être TVD.
Le schéma d'Euler décentré aval (premier ordre) avec un opérateur spatial vérifiant les propriétés TVD est un schéma globalement TVD sous la condition $cfl = cfl0 \leq 1$. $cfl0$ caractérisera dorénavant le CFL d'un schéma d'Euler d'ordre 1. Le schéma d'Euler peut

s'écrire :

$$U^{n+1} = (I + \Delta t\ L)(U^n) \quad cfl0 \leq 1$$

L'équation $U_t = \mathcal{L}(\mathcal{U})$ discrétisée s'écrit d'une façon générale :

$$U^i = U^0 + \Delta t\ \sum_{k=0}^{i-1} C_{ik}\ L(U^k), \quad i = 1,2...,m$$

$$U^0 = U^n, \quad U^m = U^{n+1}$$

Par un jeu d'écriture, en introduisant $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$, on peut se ramener à la formule [68] :

$$U^i = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} U^k + \beta_{ik}\ \Delta t\ L(U^k))$$
$$cfl \leq (cfl0 \quad min(\frac{\alpha_{ik}}{|\beta_{ik}|}))$$

Le but est alors de déterminer un schéma temporel d'ordre élevé sous réserve d'une condition optimum sur le CFL.

• Discrétisation Runge-Kutta TVD à l'ordre 2
Pour un shéma Runge-Kutta à l'ordre deux TVD, la discrétisation optimum du point de vue du CFL, donne les formules suivantes :

$$U^1 = U^0 + \Delta t\ L(U^0)$$
$$U^2 = U^0 + \frac{1}{2} U^1 + \frac{1}{2} \Delta t\ L(U^1)$$
$$cfl \leq 1$$

IV.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites d'un problème hyperbolique ne sont absolument pas triviales. C'est pourquoi nous décrivons ces conditions aux limites d'une façon détaillée avant de décrire les conditions aux limites imposées à notre cas test.

D'une façon générale on distingue deux types de conditions aux limites [60], [78], [89] :

- des conditions aux limites analytiques
- des conditions aux limites numériques

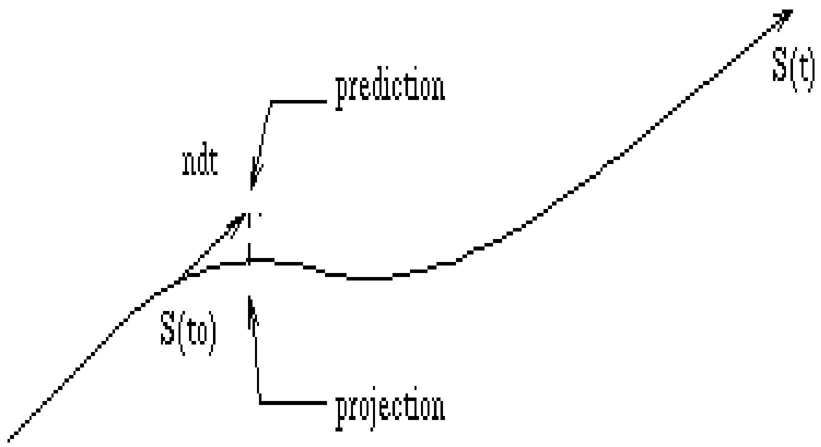


FIG. IV.1 – *Méthodes de prédiction/projection*

L'étude des conditions analytiques est nécessaire pour s'assurer que le problème est bien posé du point de vue mathématique. Les conditions analytiques sont indépendantes de la méthode numérique utilisée et correspondent à un comportement physique du système étudié. On peut citer trois méthodes d'analyse des conditions aux limites analytiques :

- la méthode des caractéristiques
- la méthode des modes normaux
- la méthode de l'énergie

mais seule la méthode des caractéristiques sera considérée ici.

La nécessité d'imposer des conditions aux limites numériques est liée, elle, à la dimension finie du domaine de calcul et au calcul des quantités non imposées. Ces conditions numériques permettent d'avoir au moins autant d'inconnues que d'équations.

IV.3.1 Conditions aux limites à l'entrée

Principe des conditions aux limites analytiques imposées aux équations d'Euler 3D

Les conditions aux limites analytiques imposées à l'entrée d'un domaine en 1D et pour lesquelles il existe un cadre théorique rigoureux sont rappelées en annexe.

On considère ci-dessous les équations d'Euler 3D en coordonnées curvilignes :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0 \tag{IV.1}$$

où Q, F, G et H ont été définis à la section (III.2.2). La direction qui nous intéresse plus particulièrement est la direction définie par la normale au plan $\xi = cte$. On n'explicite donc que les termes liés à cette direction, le reste étant mis dans le terme SM. L'équation (IV.1) s'écrit, sous forme non conservative :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathcal{A}_\xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} + SM = 0 \tag{IV.2}$$

où $\mathcal{A}_\xi$ est la matrice jacobienne du changement de variables de l'espace physique à l'espace des caractéristiques $Q \Longrightarrow \Omega$, déterminée par identification des équations (IV.1) et (IV.2) :

$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{A}_x \xi_x + \mathcal{A}_y \xi_y + \mathcal{A}_z \xi_z$$
$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{R}_\xi \Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1}$$

Le vecteur Ω est le vecteur des variables caractéristiques. La matrice $\mathcal{A}_\xi$ a pour valeurs propres [88] :

$$\begin{cases} \lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ \lambda^4 = \lambda^1 + c\sqrt{\xi_x{}^2 + \xi_y{}^2 + \xi_z{}^2} \\ \lambda^5 = \lambda^1 - c\sqrt{\xi_x{}^2 + \xi_y{}^2 + \xi_z{}^2} \end{cases}$$

où c est la vitesse du son dans la direction définie par la normale à $\xi = cte$.

λ^4 et λ^5 sont les vitesses de propagation des ondes acoustiques dans les deux directions d'espace définies par $\overrightarrow{grad}\xi$ et $-\overrightarrow{grad}\xi$ et λ^1 correspond à la vitesse à laquelle est convectée l'entropie. λ^2 et λ^3 sont les vitesses de convection des vitesses transverses.

En projetant le système (IV.2) sur $\mathcal{R}_\xi^{-1}$ on se ramène aux équations sous forme caractéristiques :

$$\mathcal{R}_\xi^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t} + \Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \mathcal{R}_\xi^{-1} SM = 0 \tag{IV.3}$$

où la matrice R_ξ^{-1} est construite en s'inspirant de [86] et dont l'expression est donnée en annexe. Il n'est plus possible en bidimensionnel ou tridimensionnel de définir les invariants de Riemann de façon globale, comme dans le cas linéaire ou pour un problème d'Euler monodimensionnel. En suivant la méthode préconisée par K. W. Thompson [78], les conditions aux limites analytiques sont déterminées à partir du calcul de $(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})_l$ associé à la valeur propre λ^l.

Le calcul de $(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})$ donne :

$$(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})_1 = (\gamma-1)\frac{\partial p}{\partial t} - \rho\gamma\frac{\partial T}{\partial t} \tag{IV.4}$$

$$(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})_2 = c\rho(\overrightarrow{t_1}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}) \tag{IV.5}$$

$$(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})_3 = c\rho(\overrightarrow{t_2}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}) \tag{IV.6}$$

$$(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})_4 = \frac{1}{2}(\frac{\partial p}{\partial t} + c\rho(\overrightarrow{k}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}) \tag{IV.7}$$

$$(\mathcal{R}_\xi^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t})_5 = \frac{1}{2}(\frac{\partial p}{\partial t} - c\rho(\overrightarrow{k}\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}) \tag{IV.8}$$

où les coordonnées t_i sont les composantes de la tangente au plan $\xi = cte$:

$$\overrightarrow{t_1} = (k_2 - k_3)e_x + (k_3 - k_1)e_y + (k_1 - k_2)e_z$$
$$\overrightarrow{t_2} = (k_1k_2 - k_3^2)e_x + (k_2k_3 - k_1^2)e_y + (k_1k_3 - k_2^2)e_z$$

et les coordonnées k_i sont les composantes de la normale au plan $\xi = cte$:

$$k_1 = \frac{\alpha_\xi}{\sqrt{{\alpha_\xi}^2 + {\beta_\xi}^2 + {\gamma_\xi}^2}}\ ,\ k_2 = \frac{\beta_\xi}{\sqrt{{\alpha_\xi}^2 + {\beta_\xi}^2 + {\gamma_\xi}^2}}\ ,\ k_3 = \frac{\gamma_\xi}{\sqrt{{\alpha_\xi}^2 + {\beta_\xi}^2 + {\gamma_\xi}^2}}$$

En s'inspirant du cas 1D, les relations (IV.4) à (IV.8) ci-dessus qui lient les variables caractéristiques aux variables $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, $\overline{p}$ et $\widetilde{T}$ permettent alors de déterminer quelles variables physiques peuvent être imposées à l'entrée pour que le problème soit bien posé. Par exemple pour la surface d'entrée seul $k_1 \neq 0$. Si toutes les valeurs propres sont positives (écoulement supersonique) on peut imposer des conditions aux limites comme suit à partir du jeu de relations ci-dessus :

$$\begin{cases} \lambda^1 > 0 & \Longrightarrow & \widetilde{T}\quad \widetilde{v}\quad \widetilde{w}\quad \textit{imposées} \\ \lambda^4 > 0 & \Longrightarrow & \widetilde{u}\quad \textit{imposée} \\ \lambda^5 > 0 & \Longrightarrow & \overline{p}\quad \textit{imposée} \end{cases}$$

Lorsque l'entrée est subsonique, la valeur propre λ^5 est négative et les conditions aux limites les plus utilisées sont de laisser libre la pression $\overline{p}$ à l'entrée. C'est l'écoulement qui selectionne lui-même les modes acoustiques associés à la valeur propre λ^5 [60].

Principe des conditions aux limites numériques

Plusieurs types de conditions aux limites numériques peuvent être imposées une fois déterminé le nombre de variables à imposer.

Pour les ondes entrantes, c'est-à-dire celles telles que $\Lambda_k \geq 0$, il est d'usage d'imposer les variables. On pourrait aussi imposer des conditions de non réflexion en annulant le terme $\Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1} \dfrac{\partial Q}{\partial \xi}$ dans l'équation (IV.3).

Pour les ondes sortantes, c'est-à-dire lorsqu'une valeur propre est négative, il est possible par exemple d'imposer une des équations caractéristiques correspondante parmi (IV.4) à (IV.8). Il arrive que les variables soient simplement extrapolées à partir de leur valeur à l'intérieur du domaine de calcul [60].

Le système couplé correspondant aux deux types d'ondes à l'entrée est ensuite résolu.
Ce type de conditions aux limites a été utilisé avec succès pour calculer l'écoulement de type couche de mélange spatiale compressible et pour calculer l'écoulement dans la tuyère. Nous présentons maintenant en détails les conditions imposées à l'entrée de la tuyère.

Conditions aux limites imposées à l'entrée de la tuyère

Concernant les simulations numériques dans la tuyère, nous initialisons les calculs à partir d'un champ statistique (ρ,u,v,w,E) convergé, obtenu par une simulation $R_{ij} - \varepsilon$ [80]. L'écoulement est perturbé à l'entrée pour obtenir l'instationnarité. Les conditions aux limites utilisées à l'entrée de la tuyère dans les calculs statistiques [80] sont des conditions réservoir telles que les vitesses tangentielles, la température totale et la pression totale sont imposées tandis que la relation de compatibilité correspondant à l'onde acoustique sortante est conservée :

$$(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t})_{\xi_0} = 0 \ , \ (\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t})_{\xi_0} = 0 \ , \ (\frac{\partial \widetilde{T}_t}{\partial t})_{\xi_0} = 0 \ , \ (\frac{\partial \overline{P}_t}{\partial t})_{\xi_0} = 0$$

Les conditions aux limites à l'entrée de la tuyère sont imposées à partir de l'écoulement initial en imposant la pression totale, la température totale et les deux composantes transverses de la vitesse (v,w). L'écoulement est perturbé autour du profil moyen des composantes $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ en superposant un bruit blanc aux profils des vitesses. Le bruit blanc est spatialement aléatoire. Il est construit de telle sorte qu'il n'induit pas de débit supplémentaire. La moyenne spatiale des fluctuations calculées sur tous les points du premier plan est imposée nulle. Les calculs réalisés en Simulation des Grandes Echelles permettent de

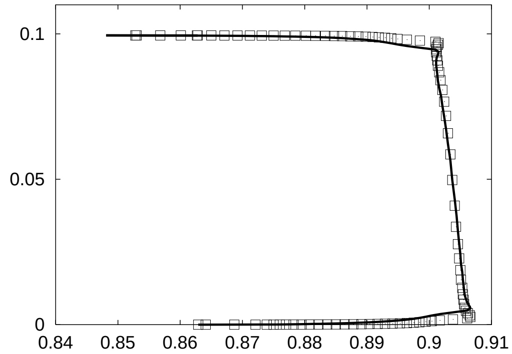


FIG. IV.2 – *Profil de la densité à l'entrée ; SGE –; RANS □*

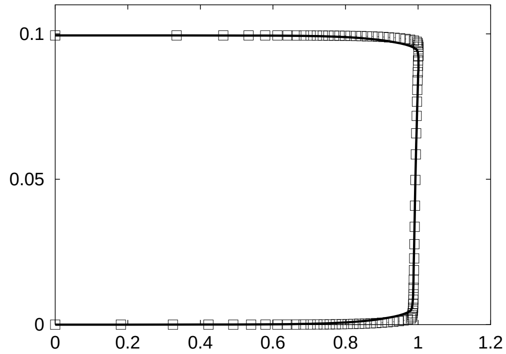


FIG. IV.3 – *Profil de $\widetilde{u}$ à l'entrée ; SGE –; RANS □*

calculer l'écoulement dans une configuration particulière à chaque pas de temps, à l'inverse des calculs statistiques qui moyennent plusieurs réalisations dans le temps. Le bruit blanc est donc une suite spatialement aléatoire mais déterministe en temps. Il est en effet important de pouvoir recommencer les calculs dans la même configuration à tout instant.

L'entrée expérimentale de la tuyère n'est pas simulée et les deux couches limites sont développées. Les profils imposés tiennent compte des pertes de pression totale et de température totale à la traversée de ces couches limites.

Les figures (IV.2) à (IV.9) représentent les profils de $\overline{\rho}$, des composantes de la vitesse $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, de la pression $\overline{p}$ et de la température $\widetilde{T}$, de la pression totale $\overline{P_t}$ et de la température totale $\widetilde{T_t}$ à l'entrée. Les profils sont tracés selon (Oy) pour $z = z_{max}/2$. Sur chaque figure, les courbes imposées en SGE sont comparées aux courbes statistiques initiales. Les courbes en trait plein correspondent aux simulations SGE tandis que les courbes avec les points correspondent aux simulations statistiques. Les vitesses sont rendues sans dimension par la vitesse de référence u_{ref}. L'amplitude des perturbations est la même pour les deux composantes de vitesse transverses et est de l'ordre de 1% de la vitesse maximum à l'entrée $\widetilde{u} = 200\ m/s$. La pression totale dans le cœur de la tuyère vaut $\overline{P_t} = 0.92\ 10^5\ Pa$ et la température totale vaut $\widetilde{T_t} = 300K$.

IV.3.2 Conditions aux limites imposées sur les parois

Les conditions aux limites imposées aux parois solides ($\eta = 1$, $\eta = \eta_{max}$, $\zeta = 1$ et $\zeta = \zeta_{max}$) sont des conditions d'adhérence, de flux de chaleur nul et l'on résout l'équation de conservation de la masse à la paroi. Nous rappelons que dans la cas de la tuyère, $\eta = 1$ correspond à la paroi basse de la tuyère avec la bosses en flèche. Le plan $\eta = \eta_{max}$ correspond à la paroi haute et $\zeta = 1$ et $\zeta = \zeta_{max}$ sont associés aux deux parois latérales.

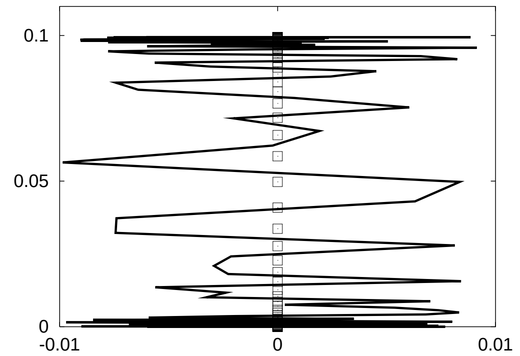


FIG. IV.4 – *Profil perturbé de $\widetilde{v}$ à l'entrée ; SGE –; RANS* □

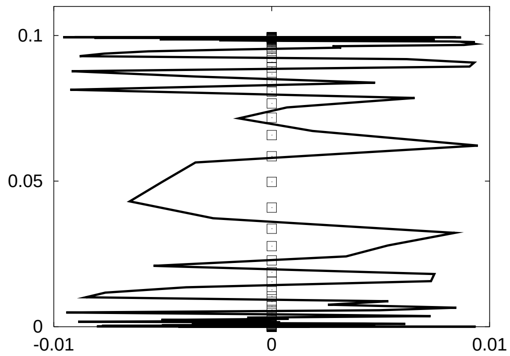


FIG. IV.5 – *Profil perturbé de $\widetilde{w}$ à l'entrée ; SGE –; RANS* □

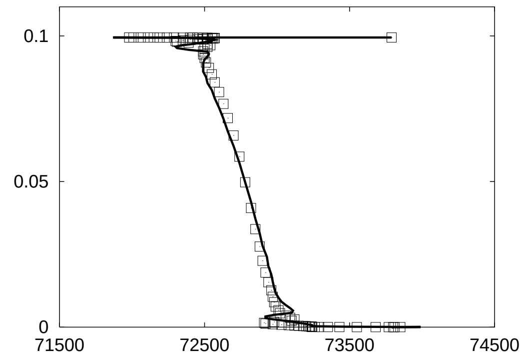


FIG. IV.6 – *Profil de la pression à l'entrée ; SGE –; RANS* □

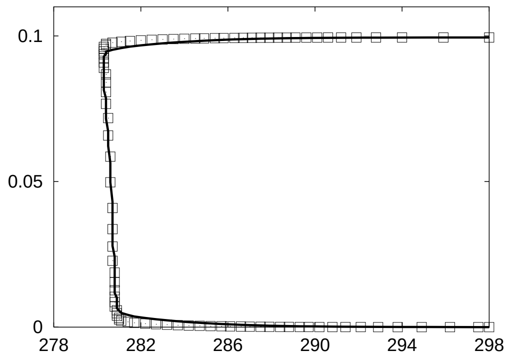


FIG. IV.7 – *Profil de la température à l'entrée ; SGE –; RANS* □

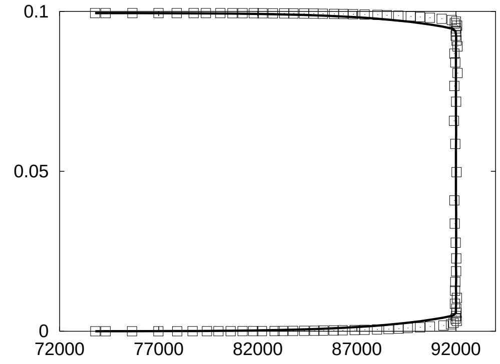


FIG. IV.8 – *Profil de la pression totale à l'entrée ; SGE –; RANS* □

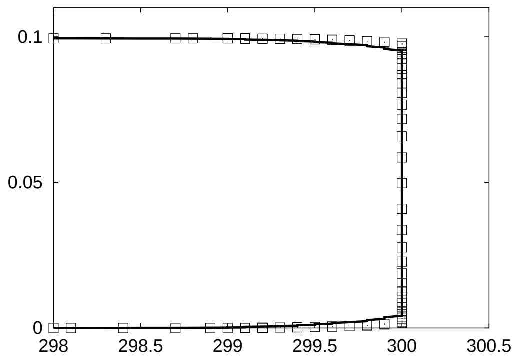


FIG. IV.9 – *Profil de la température totale à l'entrée ; SGE –; RANS* □

Le maillage est régulier dans la direction longitudinale et les coordonnées ξ et x sont proportionnelles.

On résout à la paroi :

$$u = 0 \tag{IV.9}$$
$$v = 0 \tag{IV.10}$$
$$w = 0 \tag{IV.11}$$
$$\frac{\partial T}{\partial n_p} = 0 \tag{IV.12}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overrightarrow{v}) = 0 \tag{IV.13}$$

La condition du flux de chaleur nul à la paroi vient des conditions vérifiées expérimentalement. La normale aux parois latérales est bien définie puisque le maillage est orthogonal aux parois dans cette direction. Par contre, le maillage n'est pas orthogonal aux parois haute et basse. La normale a donc trois composantes (η_x, η_y, η_z) sur ces parois. La bosse ayant un rayon de courbure faible devant les dimension de la tuyère, nous avons fait l'hypothèse que $\overrightarrow{n} \sim n_y\ e_y$.

Concernant la dernière équation à imposer, il est à priori possible de projeter l'équation de la quantité de mouvement sur la normale aux parois ou alors de résoudre l'équation de conservation de la masse à la paroi. La première procédure est la plus classique. Néanmoins projeter l'équation de la quantité de mouvement sur la normale aux parois impose de calculer les flux visqueux avec un décentrement d'ordre deux pour rester cohérent avec l'ordre du schéma dans le reste du domaine. Ceci n'est pas aisé sur un maillage étiré. Au contraire, l'utilisation de l'équation de conservation de la masse est plus simple à implémenter et elle assure que les conditions aux limites imposées aux parois soient conservatives. Nous pouvons néanmoins souligner que cette dernière condition aux limites induit une accumulation d'erreur en temps [19]. Il nous a semblé plus judicieux d'utiliser l'équation de conservation de la masse même si ce n'est pas celle qui a été utilisée dans les calculs $R_{ij} - \varepsilon$.

Les détails numériques et les équations discrétisées appliquées à notre problème sont présentés en annexe.

IV.3.3 Conditions aux limites imposées à la sortie

Les conditions aux limites imposées à la sortie d'un écoulement transsonique sont basées sur les mêmes raisonnements qu'à l'entrée du domaine. Simplement les normales aux surfaces sont inversées et les ondes pour lesquelles $\Lambda_k \geq 0$ sont des ondes sortantes au lieu d'être des ondes entrantes. De même les ondes pour lesquelles $\Lambda_k \leq 0$ sont des ondes entrantes au lieu d'être des ondes sortantes. L'équation étudiée à la sortie est la même que celle à l'entrée :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathcal{A}_\xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} + SM = 0 \tag{IV.14}$$

où $\mathcal{A}_\xi$ est la matrice jacobienne du changement de coordonnées définie par (IV.3).

Le fluide est supersonique à la sortie de la tuyère, avec un nombre de Mach maximum de l'ordre de 1,5 sauf dans les couches limites. Du point de vue mathématique selon les caractéristiques, il ne faut pas de conditions analytiques particulières en sortie [60] dans les zones où le fluide est supersonique. Par contre il en faut dans les couches limites où le fluide est subsonique.

C'est pourquoi les équations de conservations projetées sur les caractéristiques sont résolues à la frontière pour les ondes sortantes. Pour les ondes entrantes, dans les couches limites, nous imposons une condition de non reflexion en annulant le terme $\Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1} \dfrac{\partial Q}{\partial \xi}$ empêchant l'information de remonter.

Chapitre V

Mise en œuvre de la SGE sur le cas test

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre de la Simulation des Grandes Echelles pour calculer l'écoulement dans la tuyère tridimensionnelle présentée au chapitre (II). Le maillage de la tuyère et un champ statistique $R_{ij} - \varepsilon$ convergé obtenu par le modèle de Launder-Shima nous ont été fournis par I. Vallet et G. Gerolymos du LEMFI [32], pour initialiser nos calculs. Les résultats obtenus par la modélisation statistique sont présentés en détail dans [80].

Le maillage, adapté aux calculs statistiques a été modifié. Il était très resserré aux parois et lâche au cœur de la tuyère. Il est important d'avoir un maillage très resserré près des parois dans les calculs statistiques car certains paramètres des modèles sont calculés à partir des gradients de la vitesse et surtout à partir des valeurs de l'énergie cinétique turbulente k et de la dissipation ε proche des parois. Il faut donc évaluer les dérivées avec une grande précision. De plus, la discrétisation temporelle qui a été utilisée dans la résolution statistique était implicite, donc le pas de temps n'était pas un facteur limitant, pour la méthode $R_{ij} - \varepsilon$. Pour les simulations des grandes échelles nous avons modifié le maillage de façon à avoir des mailles plus grandes aux parois et moins lâches dans le cœur de la tuyère. Il est également important de discrétiser correctement les couches limites en SGE [59] pour capturer les phénomènes turbulents et pour ne pas avoir à utiliser de loi de parois. Néanmoins, les constantes dans les modèles de sous maille que nous avons choisis sont moins sensibles aux gradients aux parois. D'autre part, la résolution temporelle étant explicite dans nos simulations, il est nécessaire d'avoir un pas de temps basé sur la plus petite taille de maille qui soit raisonnable. Un calcul sur le maillage adapté aux simulations RANS nous imposait un pas de temps trop petit. La grille de calcul a été interpolée à partir du maillage initial en conservant le même nombre de points 201x91x101 ($1 \leq \xi \leq 201$; $1 \leq \eta \leq 91$; $1 \leq \zeta \leq 101$).

Nous rappelons que la longueur de la tuyère vaut $L_x = 0{,}8\ m$, la hauteur à l'entrée vaut $L_y = 0{,}1\ m$ et vaut $L_y = 0{,}105\ m$ à la sortie. La largeur, constante sur toute la longueur de la tuyère, vaut $L_z = 0{,}1213\ m$. La longueur minimum de la corde de la bosse définit la longueur de référence pour le calcul du nombre de Reynolds : $\chi = 0{,}245\ m$. Elle varie de $\chi = 0{,}245\ m$ en $z = 0\ m$ à $\chi = 0.37\ m$ en $z = L_z$. Le nombre de Reynolds calculé à partir de la vitesse maximum à l'entrée de la tuyère, $u_{ref} = 200\ m\ s^{-1}$, vaut $\mathcal{R}e = 22\ 10^5$. Le temps de référence calculé à partir de la longueur minimum de la corde de la bosse et la vitesse à l'entrée vaut $t_{ref} = 1{,}23\ 10^{-3}\ s$. Nous présentons le nouveau maillage et les données interpolées.

V.1 Interpolation du maillage de la tuyère

Nous avons conservé le même nombre de points dans les trois directions de l'espace, 201x91x101 soit 1,8 10^6 points, en conservant une distribution équidistante le long de l'axe (Ox).

Maillage initial

La distance entre les points equidistants selon la direction x vaut : $\dfrac{dx}{L_x} = 4{,}975\ 10^{-3}$
Les distances maximum aux parois dans les directions (Oy) et (Oz) sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{L_y} = 1{,}35\ 10^{-5} \\ \dfrac{dz}{L_z} = 1{,}39\ 10^{-5} \end{array}\right.$$

Les données ci-dessus correspondent à des coordonnées réduites maximum aux parois telles que $y^+ \sim 0{,}75$ et $z^+ \sim 0{,}75$. Les distributions sont ensuite calculées par une formule algébrique donnée par une suite géométrique.
On rapelle que les coordonnées réduites sont définies en utilisant les unités de parois :

$$\left\{\begin{array}{lll} y^+ = y\ \rho_p \dfrac{U_p}{\eta_p} & U_p = \sqrt{\dfrac{\tau_{py}}{\rho_p}} & \tau_{py} = \mu_p \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \\ z^+ = z\ \rho_p \dfrac{U_p}{\eta_p} & U_p = \sqrt{\dfrac{\tau_{pz}}{\rho_p}} & \tau_{pz} = \mu_p \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \end{array}\right.$$

Un calcul sur le maillage adapté aux simulations RANS nous imposait un pas de temps de l'ordre de $\dfrac{\Delta t}{t_{ref}} = 8{,}13\ 10^{-7}$ et nous l'avons reconstruit en conservant des coordonnées réduites aux parois de l'ordre de l'unité. Nous avons ainsi un pas de temps de l'ordre de $\dfrac{\Delta t}{t_{ref}} = 8{,}13\ 10^{-6}$. Cela correspond entre autres à un nombre de diffusion de 4,6 10^{-1} et un CFL de l'ordre de 0,06.

Maillage utilisé dans la simulation SGE

Le nouveau maillage est illustré sur la figure (V.1). Il est tracé dans le plan $z = 0{,}0613\ m$ et dans les plans $x = -0{,}1\ m$ et $x = 0{,}230\ m$. Dans la tuyère, le plan transformé $\eta = 1$ coïncide avec la paroi basse qui supporte la bosse en flêche et $\eta = \eta_{max}$ coïncide avec la paroi haute. Les plans transformés $\zeta = 1$ et $\zeta = \zeta_{max}$ coïncident respectivement avec les deux parois latérales $z = 0\ m$ et $z = 0{,}1213\ m$. Les plans transformés $\xi = cte$ sont parallèles aux plans $x = cte$.

La distribution initiale équidistante selon (Ox) est conservée. Les arrêtes de la tuyère initiale sont aussi conservées. Nous avons imposé la nouvelle distribution des points selon (Oz) et selon (Oy) à l'aide d'une formule algébrique en cosinus. Le maillage est finalement lissé à l'aide de la résolution d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique (biharmonique) sur x et y dans chaque plan $z = cte$ [39], [76], [77]. Cela permet d'assurer la régularité des éléments métriques α_i, β_j et γ_k (voir annexe) sur le domaine de calcul.

La nouvelle distribution selon (Oz) est telle que $z(\xi,\eta,\zeta) = z(\zeta)$. Les points sont ressérés aux extrémités avec une raison $r_z = 1{,}15$, comme le montre la figure (V.1). Plus la raison r_z est grande, plus les points sont resserrés. Sur la figure (V.1) la pente de la courbe est faible dans les zones proches des parois, ce qui signifie que la variation de z en fonction de ζ est faible et que les points sont très resserrés. Au contraire, au cœur de la tuyère la pente est plus importante et les points sont de plus en plus espacés des parois vers le milieu.

La nouvelle distribution $y(\xi,\eta,\zeta) = y(\eta)$ est ensuite construite à l'aide d'une formule algébrique du même type que celle pour $z(\zeta)$, avec une raison $r_y = 1{,}155$. La distribution des points selon (Oy) est également représentée sur la figure (V.1).

Les nouvelles ordonnées y des points sont d'abord calculées sur les deux parois latérales et de façon à conserver une discrétisation correcte de la bosse en flêche et du second col, les coordonnées $y(\xi,\eta_0,\zeta)$ et $y(\xi,\eta_{max},\zeta)$ sont ajustées à la nouvelle distribution $z(\zeta)$ par interpolation des données initiales sur les parois haute et basse, à partir des arêtes.

Pour avoir un maillage suffisament régulier pour le calcul des coefficients métriques, les coordonnées x et y sont finalement lissées dans chaque plan z par résolution d'une équation elliptique [76].

Le choix de la distribution des points selon (Oy) et (Oz) est réalisé en contrôlant la distance maximum des premiers points aux parois. Comme il n'y a pas de loi de paroi, il est nécessaire de placer correctement les premières coordonnées réduites y^+ et z^+ et en général $y^+ \sim 1$ et $z^+ \sim 1$ [59]. Avec les raisons ci-dessus, les coordonnées réduites maximum des premiers points aux parois sont telles que :

$$\begin{cases} 0{,}18 \leq y^+ \leq 4{,}5 \quad sur \quad \eta = 1 \\ 0{,}12 \leq y^+ \leq 5{,}7 \quad sur \quad \eta = \eta_{max} \\ 0{,}1 \leq z^+ \leq 3{,}4 \quad sur \quad \zeta = 1 \\ 0{,}11 \leq z^+ \leq 3{,}3 \quad sur \quad \zeta = \zeta_{max} \end{cases}$$

La figure (VI.3) représente les intervalles dx^+ en fonction de ξ. La très grande valeur de dx^+ de l'ordre de 12000 correspond à l'onde de choc. Les variables varient très rapidement dans cette zone expliquant la grande valeur de leur dérivée et donc de dx^+. La coordonnée réduite x^+ a été calculée à partir des gradients de la vitesse et des valeurs de la viscosité évaluées à la paroi basse $\eta = 1$. Les intervalles dx^+ varient peu selon que la densité, la viscosité et les gradients de vitesse sont définies sur les parois latérales ou sur les parois haute et basse.

Le maximum des distributions des coordonnées réduites y^+ et z^+ est très localisé. Pour y^+ les maxima sont de l'ordre de 4,5 comme nous l'avons dit et ils sont localisés sur la bosse. La figure (V.4) représente la distribution de dz^+ selon ζ pour $\eta = \eta_{max}/2$ et $\xi = \xi_{max}/2$, c'est-à dire sur la ligne médiane de la tuyère. On peut remarquer que le maximum de cette distribution est de l'ordre de 2500 au centre où les mailles sont les plus grandes. Cette valeur est la valeur maximale observée au cœur sur toute la longueur de la tuyère. Les valeurs des coordonnées réduites dans le cœur sont grandes par rapport à la structures de la turbulence mais il est difficile de faire mieux dans ce type de calcul.

Les nouvelles distributions de coordonnées réduites adoptées correspondent à des distances telles que :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{L_x} = 4{,}975\ 10^{-3} \\ \dfrac{dy}{L_y} = 9{,}702\ 10^{-5} \\ \dfrac{dz}{L_z} = 6{,}925\ 10^{-5} \end{cases}$$

Ces données illustrent à nouveau la très grande anisotropie du maillage utilisé et la nécessité d'utiliser des corrections dans les modèles pour en tenir compte comme cela a été fait.

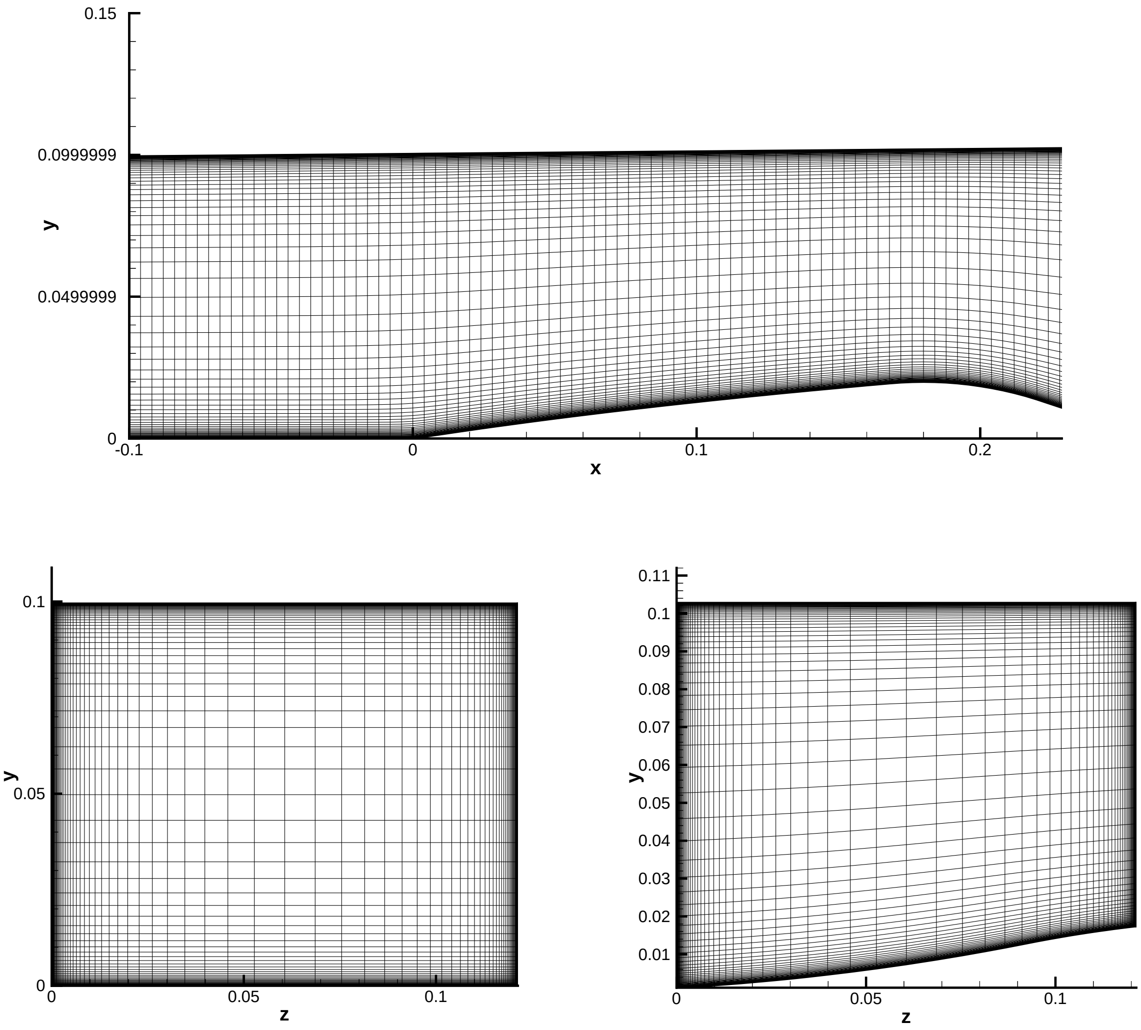


FIG. V.1 – *Maillage de la tuyère dans un plan ζ fixé et dans deux plans ξ fixés*

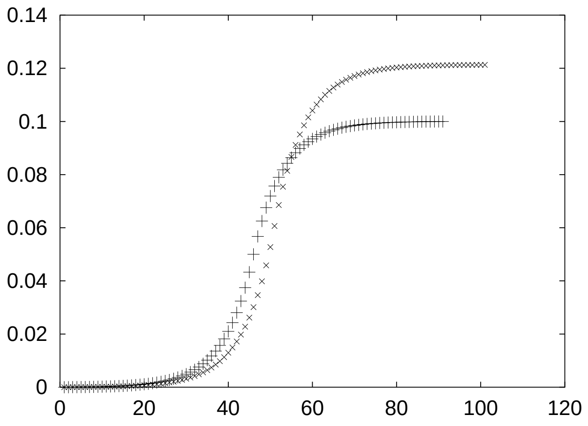


Fig. V.2 – *Distribution des coordonnées y et z respectivement en fonction des coordonnées η et ζ : $y(\eta)$: ++ $1 \leq \eta \leq 91$; $z(\zeta)$: ×× $1 \leq \zeta \leq 101$*

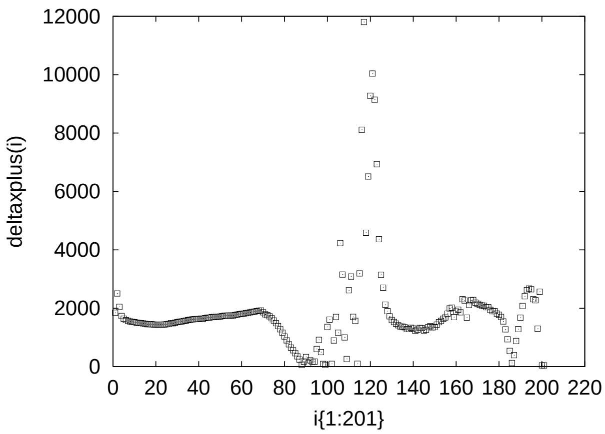


Fig. V.3 – *Intervalle dx^+ selon (Ox) dans le plan $\zeta = \zeta_{max}/2$*

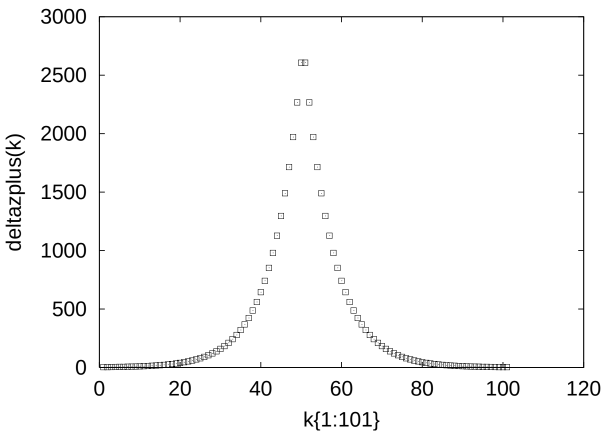


Fig. V.4 – *Intervalle dz^+ selon (Oz) dans le plan $\xi = \xi_{max}/2$*

V.2 Interpolation du champ initial

L'interpolation du champ $\overline{\rho}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{E}$ est réalisée dans chaque plan $x = cte$ puisque la répartition longitudinale des points n'a pas changée. L'interpolation est linéaire dans chaque direction (Oy) et (Oz) en considérant donc que le maillage est quasi-orthogonal dans chaque plan $x = cte$ dans toute la tuyère. Cette hypothèse n'est pas strictement vérifiée sur la bosse. Chaque point du nouveau maillage est encadré par quatre points de l'ancien maillage. Les valeurs des différentes quantités physiques initiales $\overline{\rho}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{E}$ au point du nouveau maillage sont obtenues par une interpolation linéaire selon chaque direction (Oy) et (Oz). Ce type d'interpolation est une interpolation de Lagrange bidimensionnelle d'ordre un.

Comparaison du champ interpolé au champ initial

Nous comparons la densité $\overline{\rho}$, les trois composantes de la vitesse $(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w})$ obtenues sur le nouveau maillage par rapport à leur valeur initiale dans la direction (Oy) pour trois plans x le long de la tuyère. Les trois plans x considérés sont les plans $x = -0{,}100\ m$, $x = 0{,}230\ m$ et $x = 0{,}692\ m$. Le premier plan correspond ainsi à l'entrée de la tuyère, le second à un plan sur la bosse où le maillage est très déformé et le dernier plan choisi est proche de la sortie de la tuyère. Pour chaque courbe, la coordonnée z a été fixée au milieu de la tuyère. Les composantes transverses de la vitesse ne sont pas présentées dans le plan $x = -0{,}100\ m$ puisqu'elles sont nulles à l'initialisation. Le fluide en entrée est subsonique avec un nombre de Mach maximum de l'ordre de $M_{in} = 0{,}6$ pour une vitesse d'entrée maximum de $u_{in} = 200\ m\ s^{-1}$ comme le montre la figure (V.6).

Les figures (V.5-V.6) correspondent aux champs en $x = -0{,}1\ m$. L'hypothèse de couche limite conduit toujours à une dérivée nulle de la pression :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = 0.$$

Nous avons supposé que l'air est un gaz parfait : $\overline{p} = \mathcal{R}\overline{\rho}\widetilde{T}$ et $\overline{\rho}$ varie donc à l'inverse de $\widetilde{T}$. Sur une paroi plane adiabatique, la température de l'air augmente de sa valeur à l'extérieur de la couche limite à la température de frottement à la paroi donnée par [17] :

$$\frac{\widetilde{T}_t}{\widetilde{T}_e} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2)$$

$$\frac{\widetilde{T}_f}{\widetilde{T}_e} = (1 + r\ \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2)$$

où r est le facteur de récupération, caractérisant la différence entre la température de récupération $\widetilde{T}_f$ et la température extérieure $\widetilde{T}_e$:

$$r = \frac{\widetilde{T}_f - \widetilde{T}_e}{\widetilde{T}_t - \widetilde{T}_e}$$

Nous pouvons signaler que les courbes de $\widetilde{T}$, $\overline{p}$ et $\overline{\rho}$ sont normales aux parois. Cela n'est visible que sur les premiers points proches des parois, ce qui explique qu'on l'observe difficilement sur les différentes figures présentées, les points étant très resserrés aux parois. On voit le très bon accord entre les champs initiaux $R_{ij} - \varepsilon$ et les champs interpolés tout le long de la tuyère.

Le fluide a tendance à être dévié de la paroi latérale gauche $z = z_{max}$ vers la paroi latérale droite $z = 0\ m$ et du haut vers le bas en présence de la bosse en flèche [10], comme le montrent les figures (V.9) et (V.10).

En sortie, le fluide est supersonique, avec un Mach maximum de l'ordre de $M_{out} = 1{,}5$ pour une vitesse de sortie maximum de l'ordre de $u_{out} = 400\ m\ s^{-1}$ comme le montre la figure (V.12).

V.3 Moyens informatiques mis en œuvre pour le calcul de l'écoulement

Les calculs ont été réalisés sur trois ans en adaptant le code aux moyens informatiques de plus en plus performants mis à notre disposition au centre de calcul de l'IDRIS. Le code est parallèle et tourne sur quatre processeurs. Il a été optimisé vectoriellement pour fonctionner sur la machine parallèle et vectorielle VPP 200 de Fujitsu dans un premier temps, puis sur la NEC SX5 depuis une année. Les performances du code sur la VPP étaient de 400 Mflops. Les performances du code actuel sur la NEC sont de 1,6 Gflops avec un taux de vectorisation de 0,97 dans les deux cas. Pour donner une meilleure idée des performances du code sur les deux machines le temps de calcul vaut 8,6 10^{-6} $s/iteration/points$ sur VPP 200 et vaut 4,2 10^{-6} $s/iteration/points$ sur la NEC.

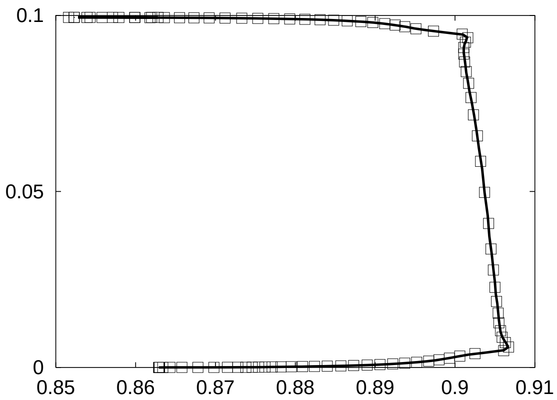


FIG. V.5 – *Densité selon* (Oy) *en* $x = -0{,}1\ m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$ *: SGE —- ; RANS* □□□

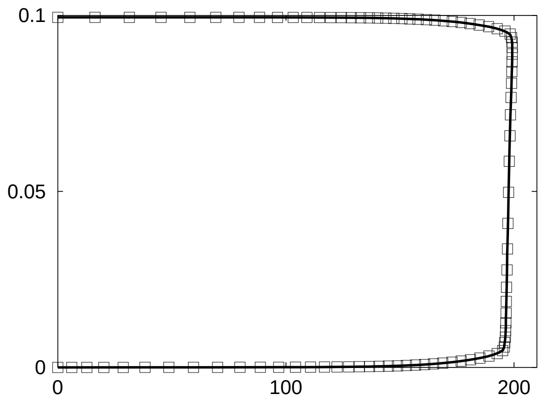


FIG. V.6 – *Vitesse longitudinale selon* (Oy) *en* $x = -0{,}1\ m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$ *: SGE —- ; RANS* □□□

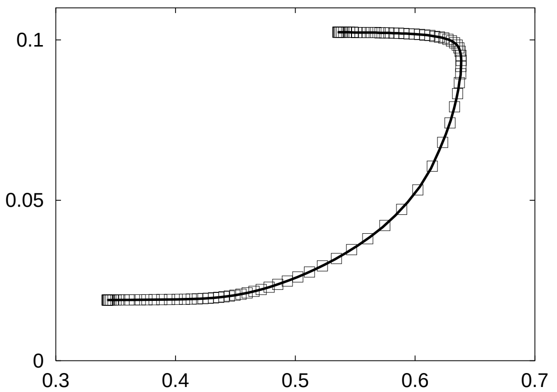


FIG. V.7 – *Densité selon* (Oy) *en* $x = 0{,}23\ m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$ *: SGE —- ; RANS* □□□

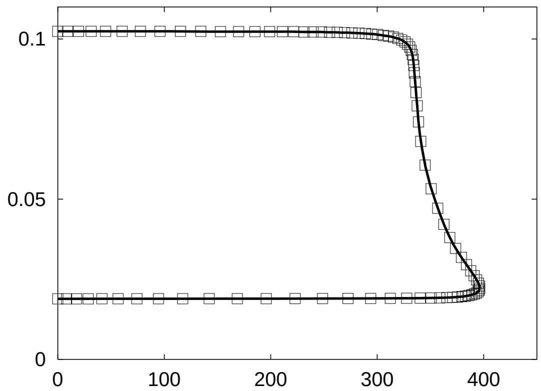


FIG. V.8 – *Vitesse longitudinale selon* (Oy) *en* $x = 0{,}23\ m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$ *: SGE —- ; RANS* □□□

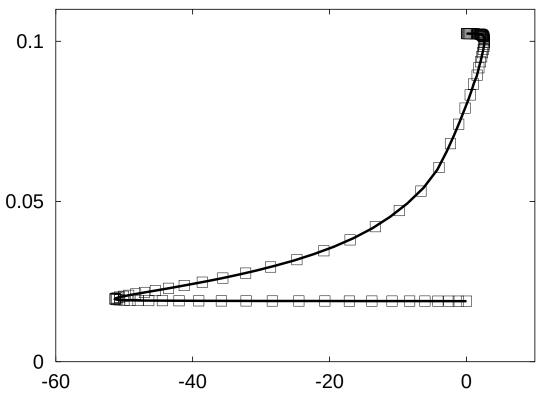


FIG. V.9 – *Vitesse verticale selon* (Oy) *en* $x = 0{,}23\ m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$ *: SGE —- ; RANS* □□□

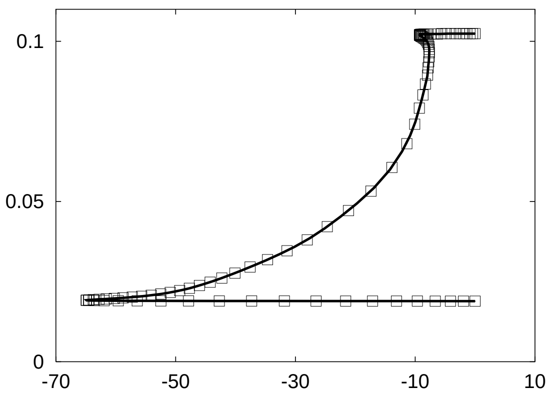


FIG. V.10 – *Vitesse transverse selon* (Oy) *en* $x = 0{,}23\ m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$ *: SGE —- ; RANS* □□□

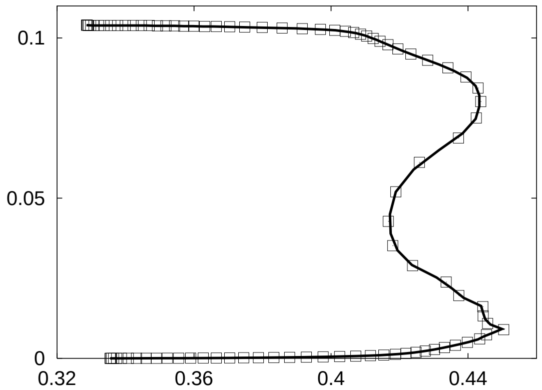


FIG. V.11 – *Densité selon* (Oy) *en* $x = 0{,}692\,m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$: *SGE* —- ; *RANS* □□□

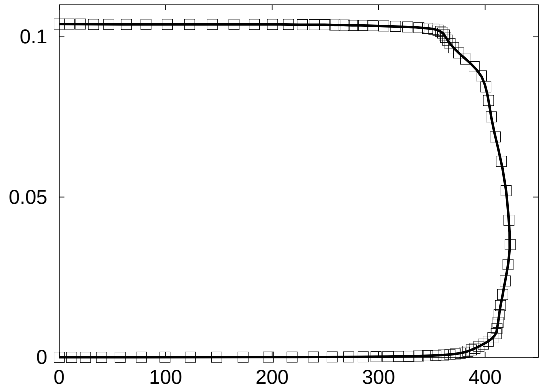


FIG. V.12 – *Vitesse longitudinale selon* (Oy) *en* $x = 0{,}692\,m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$: *SGE* —- ; *RANS* □□□

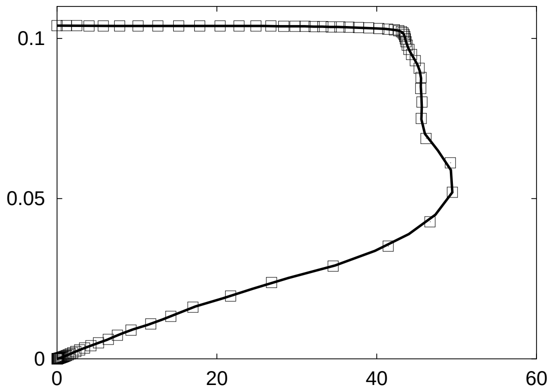


FIG. V.13 – *Vitesse verticale selon* (Oy) *en* $x = 0{,}692\,m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$: *SGE* —- ; *RANS* □□□

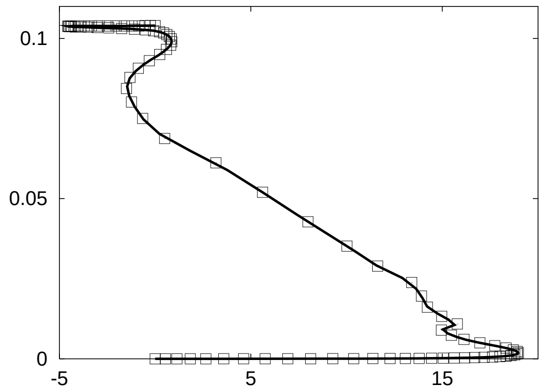


FIG. V.14 – *Vitesse transverse selon* (Oy) *en* $x = 0{,}692\,m$ *et* $z = 6\ 10^{-2}\ m$: *SGE* —- ; *RANS* □□□

Chapitre VI

Résultats instationnaires de la SGE

L'intérêt de la simulation des grandes échelles par rapport à une simulation statistique réside dans les informations accessibles sur les grosses structures instationnaires de l'écoulement.

Cette partie présente quelques résultats instationnaires obtenus dans la tuyère. Nous présentons un instantané du champ des isovaleurs de la vitesse longitudinale. Puis nous présentons l'évolution du champ instantané au cours du temps en montrant la capture de structures tourbillonaires instationnaires sous le choc en lambda. Nous présentons ensuite les spectres temporels réalisés sur les quantités fluctuantes (u',v',w') dans le décollement. Il apparaît qu'il faut certainement des temps totaux d'acquisition plus long pour affiner nos spectres dans les basses fréquences représentant les grandes échelles.

VI.1 Champ instantané dans la tuyère

La figure (VI.1) représente les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse à l'initialisation en $z = 0{,}1113\ m$. Elle est rendue ici sans dimension par la vitesse à l'entrée $u_{ref} = 200\ m/s^{-1}$. Les figures (VI.2) et (VI.3) présentent les isovaleurs du champ instantané de la vitesse longitudinale en $z = 0{,}0913\ m$ et $z = 0{,}1113\ m$ proche de la paroi latérale où la couche limite décolle, à la fin de notre calcul à $t^* = 0{,}975$. Nous rappelons que le temps de référence que nous avons défini correspond au temps de calcul basé sur la vitesse à l'entrée et sur la longueur de la corde de la bosse, et vaut $t_{ref} = 1{,}23\ 10^{-3}\ s$.

Nous pouvons observer sur la figure (VI.2) la déstabilisation de la zone de recirculation visible sur la figure (VI.1), sous le choc en lambda prédit par la SGE. Ce phénomène met en évidence l'importance de l'initialisation dans le calcul et son influence sur un temps non négligeable par rapport au temps de calcul des simulations de la SGE, car on ne l'observe pas sur les résultats moyennés.

Nous observons également des différences entre le champ initial sur la figure (VI.1) et le champ instationnaire de la figure (VI.3) derrière le choc. Les perturbations qui se propagent en aval de l'onde de choc sur les résultats de la SGE viennent de la réorganisation

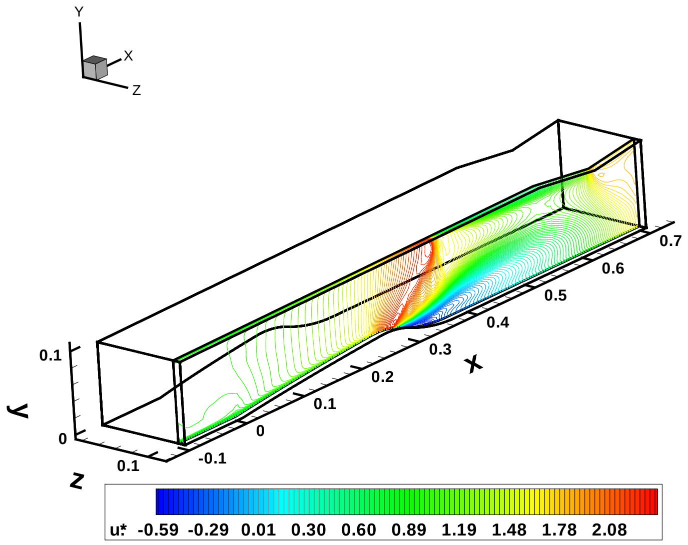


FIG. VI.1 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale dans le plan* $z = 0{,}1149$ *m à l'initialisation, rendue sans dimension par la vitesse à l'entrée [80]*

du fluide dans le choc en lambda et dans le décollement initial avec la présence de structures tourbillonaires. Ce type de structure d'écoulement avec de multiples ondes de chocs dans un canal derrière une interaction entre une onde de choc et la couche limite a déjà été observé [11]. Le système d'onde qui se forme à l'aval dépend fortement de la zone de recirculation et des instabilités qui s'y développent. On peut voir les couches limites déformées comme des parois dont la section varie générant les ondes observées. Si l'on compare la figure (VI.1) à la figure (VI.3), on peut observer que nous avons la présence d'une onde de choc en lambda au dessus du décollement qui n'existait pas à l'initialisation. La modification de la structure de l'écoulement ne remonte pas puisque nous sommes dans une zone supersonique, mais se propage vers l'aval comme on peut le voir à travers la forme de l'écoulement dans la moitié haute de la tuyère.

Nous présentons maintenant quelques instantanés des valeurs de la vitesse à des temps différents pour visualiser les modifications dans l'écoulement.

VI.1.1 Evolution temporelle des champs

Nous présentons quelques champs instationnaires obtenus à différents temps de calcul proche de la paroi latérale droite.

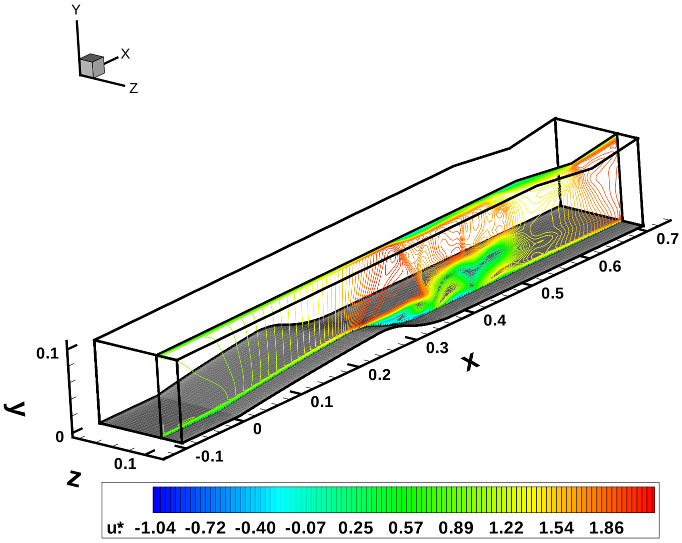


FIG. VI.2 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale instantanée en* $z = 0{,}0913$ *m rendue sans dimension par la vitesse de référence à* $t^* = 0{,}975$

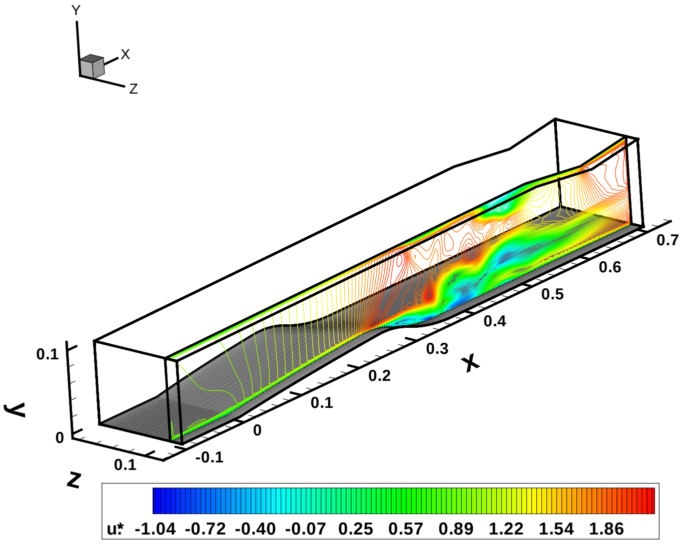


FIG. VI.3 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale instantannée en* $z = 0{,}1113$ *m rendue sans dimension par la vitesse de référence à* $t^* = 0{,}975$

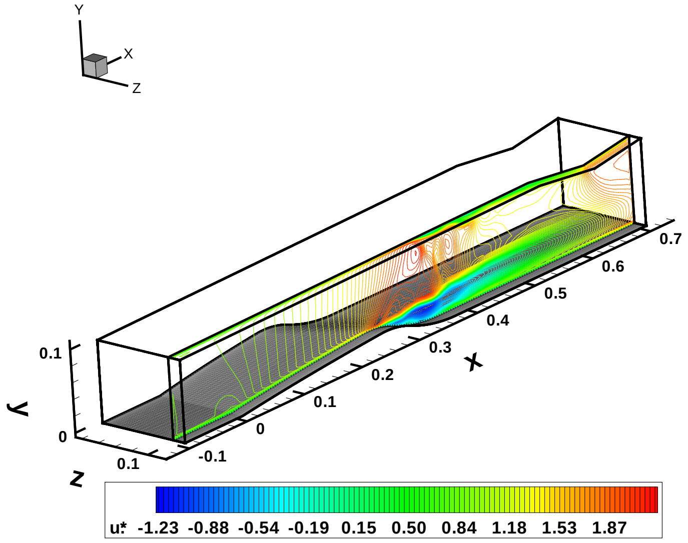


FIG. VI.4 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale instantanée en* $z = 0{,}1113\ m$ *rendue sans dimension par la vitesse de référence à* $t^* = 0{,}366$

Les figures (VI.4), (VI.5) et (VI.6) présentent les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse respectivement pour $t^* = 0{,}366$, $t^* = 0{,}609$ et pour $t^* = 0{,}975$ en $z = 0{,}1113\ m$.

On observe une modification de l'écoulement et de la forme de l'onde de choc et la déstabilisation de la zone initialement décollée. Les oscillations de la couche limite perturbée génèrent au final un lâcher de tourbillons visible sur la figure (VI.6). Nous pouvons remarquer que l'accélération du fluide dans la partie supérieure de la tuyère après le choc permet de compenser la diminution du reflux proche de la paroi basse.

VI.2 Spectres temporels

Nous avons pu voir à travers la présentation des isovaleurs de la vitesse longitudinale qu'il existe des phénomènes instationnaires à grandes échelles. Bien qu'il soit difficile de capturer les basses fréquences des grosses structures instationnaires vu le pas de temps que nous utilisons, nous avons réalisé une étude spectrale des signaux fluctuants (u',v',w') dans le décollement initial. Les acquisition sont réalisées tous les 10000 pas de temps, ce qui correspond à un pas de temps sans dimension de $\Delta t^* = 1{,}219\ 10^{-6}$. Nous présentons

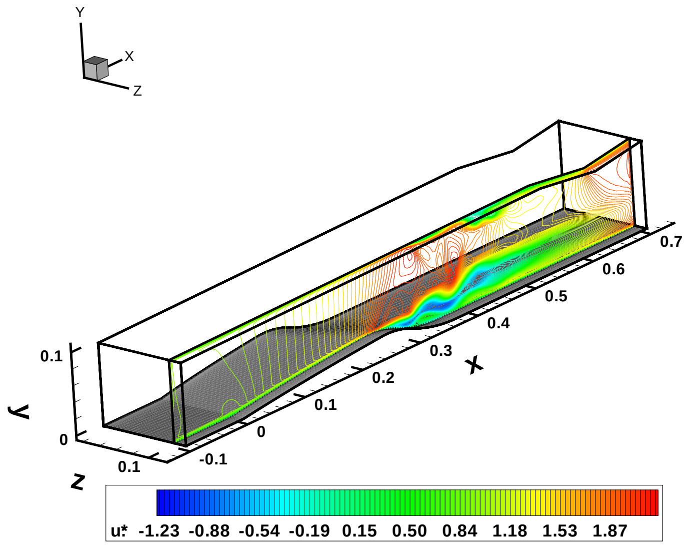


FIG. VI.5 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale instantannée en* $z = 0{,}1113\ m$ *rendue sans dimension par la vitesse de référence à* $t^* = 0{,}609$

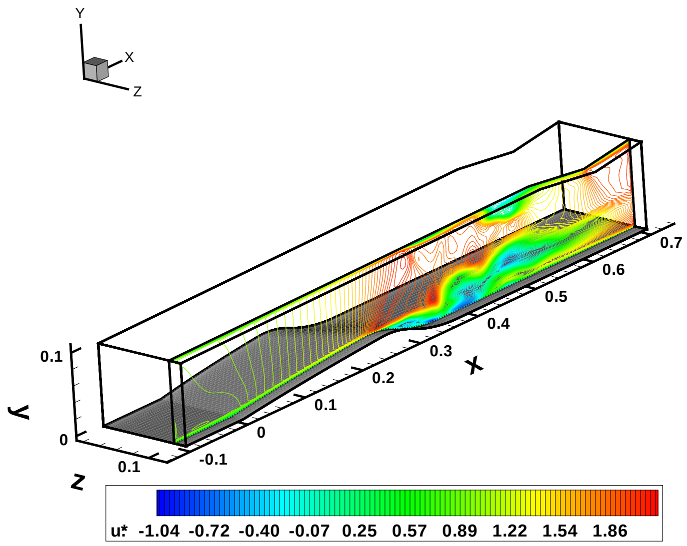


FIG. VI.6 – *Isovaleurs de la vitesse longitudinale instantannée en* $z = 0{,}1113\ m$ *rendue sans dimension par la vitesse de référence à* $t^* = 0{,}975$

les résultats obtenus dans le plan $x = 0{,}328\ m\ s^{-1}$. Le point sélectionné selon la direction transverse se situe en $z = 0{,}1113\ m$ et les trois points choisis dans la direction verticale sont proche de la paroi basse. Nous n'avons pas représenté les lignes correspondantes car les points considérés sont vraiment très proches de la paroi basse et il est difficile de les visualiser. Ils ont des ordonnées qui varient avec z puisque nous sommes sur la fin de la bosse. Pour ne pas surcharger les spectres, seules les ordonnées y sont indiqués sur les figures. Nous avons récapitulé les ordonnées dans le tableau ci-dessous avec et sans dimension. Elles sont rendues sans dimension par la hauteur $L_y = 0{,}1\ m$ de la tuyère.

Tableau des ordonnées des points de calcul des spectres temporels selon (Oy)

$y1 = 1.21\ 10^{-2}\ m$	$y^*1 = 1.21\ 10^{-1}$
$y2 = 1.23\ 10^{-2}\ m$	$y^*2 = 1.23\ 10^{-1}$
$y3 = 1.30\ 10^{-2}\ m$	$y^*3 = 1.30\ 10^{-1}$

Les isovaleurs de la composante longitudinale dans le plan $x = 0{,}328\ m\ s^{-1}$ sont tracés au cours du temps sur les figures (VI.7), (VI.8) et (VI.9) où l'on peut observer le passage des tourbillons au cours du temps. Les figures (VI.10), (VI.11) et (VI.12) représentent l'évolution temporelle des composantes de la vitesse correspondant aux spectres représentés sur les figures (VI.13) à (VI.15). Le nombre d'échantillons utilisé pour réaliser les spectres temporels n'est pas très important mais est un multiple de deux comme le préconisent les transformées de Fourier rapide. Nous présentons les spectres en échelle logarithmique. Tous les spectres sont rendus sans dimension par la valeur maximum de la densité d'énergie du spectre. Nous avons convolué chaque signal par une fonction cosinus à support borné pour le rendre prériodique et limiter ainsi les effets de bords. La fréquence maximum que l'on puisse obtenir sur les spectres vaut $f^* = \dfrac{1}{\Delta t^*} \simeq 70\ 10^3$. Nous avons préféré présenter nos résultats sans analogie de Taylor $k = \dfrac{2\pi f}{U}$ puisque nous avons un écoulement inhomogène.

On observe la présence d'un pic qui se détache sur les spectres de u' et v' autour de $f = 4000\ Hz$. Cela est en assez bon accord avec la fréquence que l'on peut estimer sur la courbe de la composante v correspondante figure (VI.11) en $y = 1.30\ 10^{-2}\ m$. Nous pouvons souligner que les fréquence de l'ordre du kHz correspondent aux ondes sonores.

Il est possible de définir un nombre de Strouhal à partir de la fréquence mesurée. Le nombre de Strouhal est un nombre sans dimension utilisé dans l'étude des corps épais (par exemple un profil d'aile) caractérisés par des lachés tourbillonnaires. Il mesure le temps de retournement des tourbillons convectés par l'écoulement par unité de temps. Il est rendu sans dimension par l'épaisseur des coprs épais étudiés. Si l'on introduit la hauteur de la bosse mesurée en $z = 0{,}1113\ m$, $y_{bm} = 1{,}9985\ 10^{-2}\ m$, et la vitesse de convection au centre de la tuyère à l'entrée $u_{ref} = 200\ m\ s^{-1}$, le nombre de Strouhal associé vaut

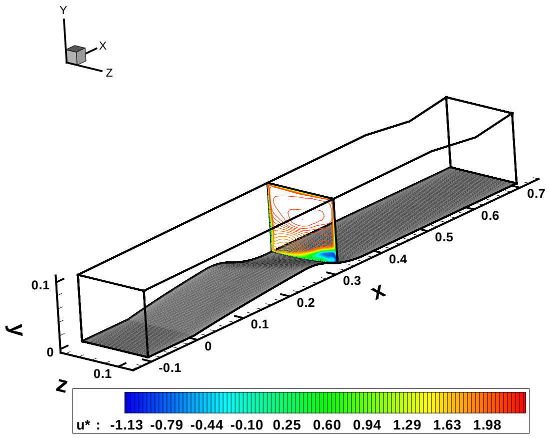


FIG. VI.7 – *Isovaleurs instantanées de u à* $t^* = 0{,}366$

$St = \dfrac{f\ y_{bm}}{u_{ref}} = 0{,}3997$. Cela signifie qu'en étant convecté, le tourbillon a tourné d'à peu près un demi tour. La valeur du nombre de Strouhal calculée ci-dessus est en bon accord avec celle calculée ou mesurée dans les sillages des corps épais avec des lachés tourbillonnaires. Le nombre de Strouhal pour le cylindre vaut $St = 0{,}2$ et il vaut $St = 0{,}3$ pour les corps épais.

Enfin, nous pouvons également obtenir un ordre de grandeur du nombre de d'onde associé au pic que nous avons décrit précédemment : $k = \dfrac{2\pi f}{u_{ref}} = 125{,}6\ m^{-1}$. Cette longueur d'onde correspond à une longueur $l \simeq 7{,}96\ 10^{-3}\ m$. La longueur estimée à partir du volume de chaque maille proche de la paroi basse du côté latéral droit où nous effectuons nos spectres vaut $l_{min} \simeq 4{,}64\ 10^{-5}\ m$. La longueur estimée $l \simeq 7{,}96\ 10^{-3}\ m$ est au moins cent fois plus importante que l_{min} et il n'y a donc pas de problèmes de résolution en maillage. Les phénomènes capturés sont à grande échelle, ils ne sont pas filtrés par le maillage.

Nous discutons maintenant des résultats obtenus en moyennant les quantités sur le temps de calcul total qui correspond à plusieurs lâchers de tourbillons.

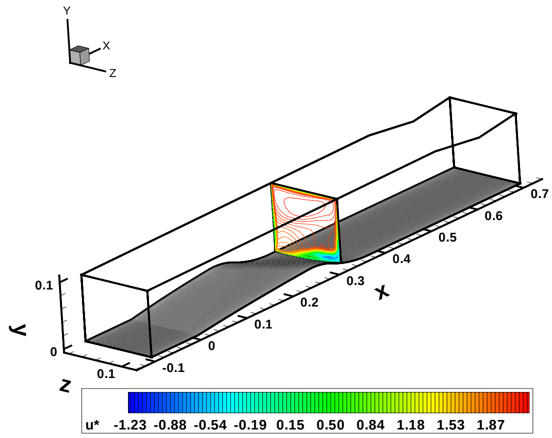


FIG. VI.8 – *Isovaleurs instantanées de u à* $t^* = 0{,}609$

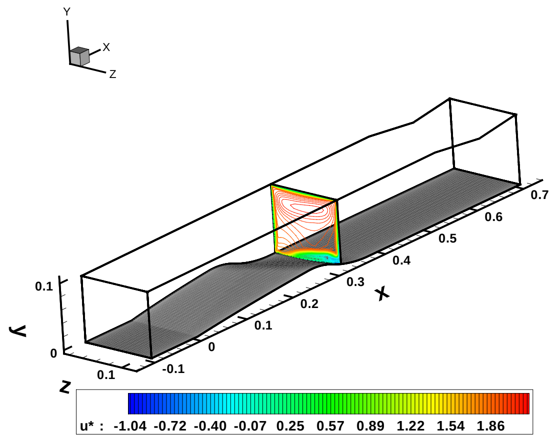
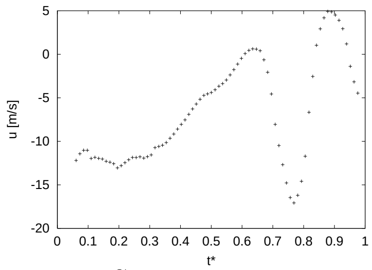
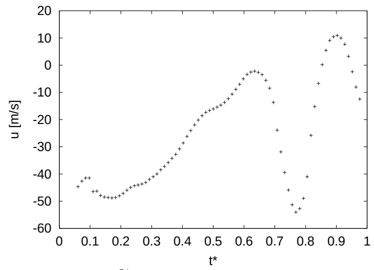


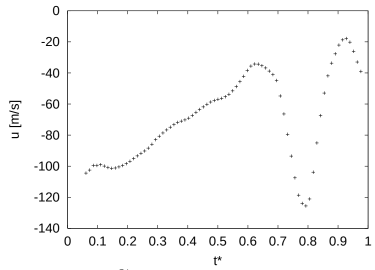
FIG. VI.9 – *Isovaleurs instantanées de u à* $t^* = 0{,}975$



Signal u en
$y = 1.21\ 10^{-4}$

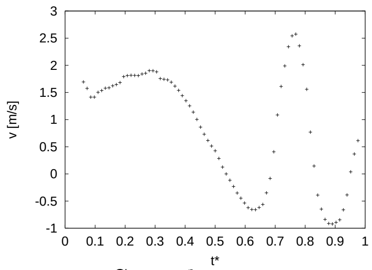


Signal u en
$y = 1.23\ 10^{-4}\ m$

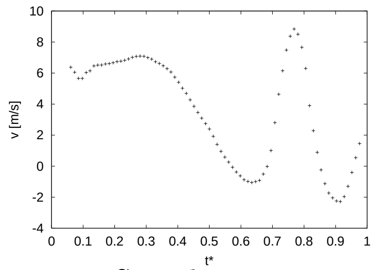


Signal u en
$y = 1.30\ 10^{-4}\ m$

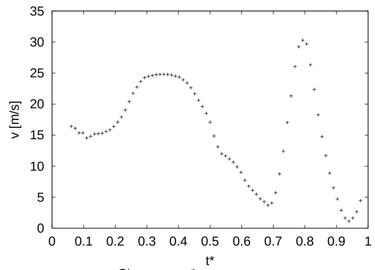
FIG. VI.10 – *Echantillonnage de u au cours du temps*



Signal v en
$y = 1.21\ 10^{-4}$

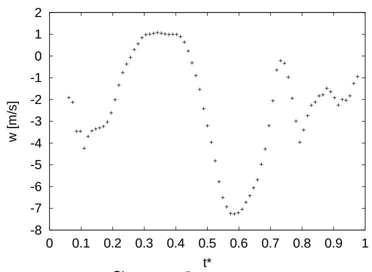


Signal v en
$y = 1.23\ 10^{-4}\ m$

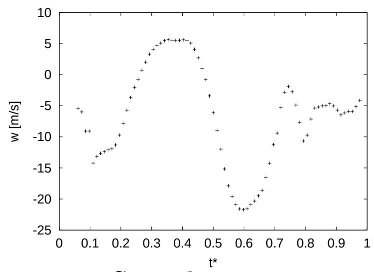


Signal v en
$y = 1.30\ 10^{-4}\ m$

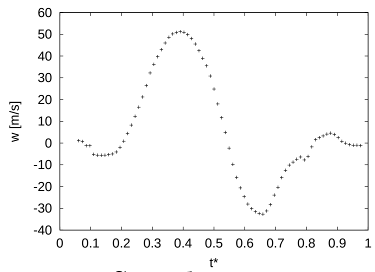
FIG. VI.11 – *Echantillonnage de v au cours du temps*



Signal w en
$y = 1.21\ 10^{-4}$

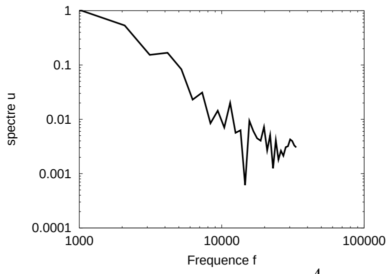


Signal w en
$y = 1.23\ 10^{-4}\ m$

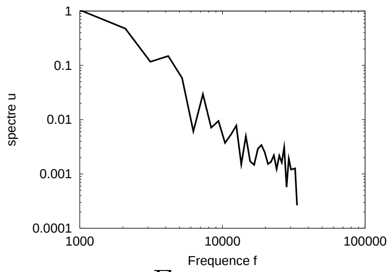


Signal w en
$y = 1.30\ 10^{-4}\ m$

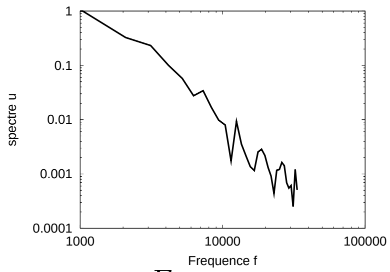
FIG. VI.12 – *Echantillonnage de w au cours du temps*



E_u en $y = 1.21\ 10^{-4}$

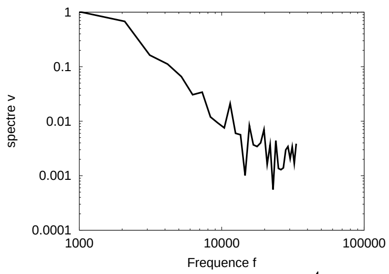


E_u en $y = 1.23\ 10^{-4}\ m$

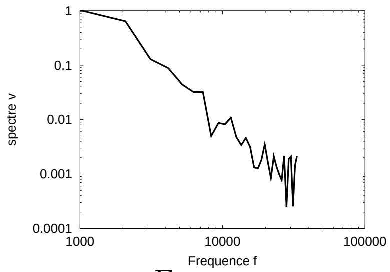


E_u en $y = 1.30\ 10^{-4}\ m$

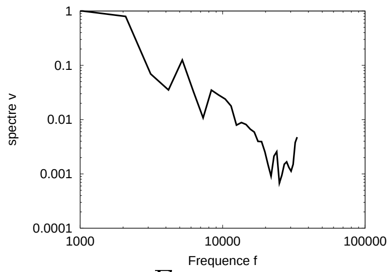
FIG. VI.13 – *Spectre de u*



E_v en $y = 1.21\ 10^{-4}$

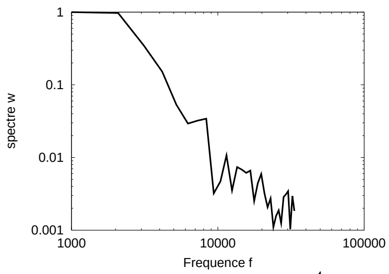


E_v en $y = 1.23\ 10^{-4}\ m$

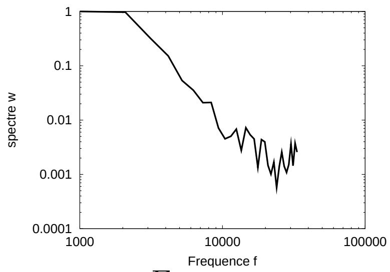


E_v en $y = 1.30\ 10^{-4}\ m$

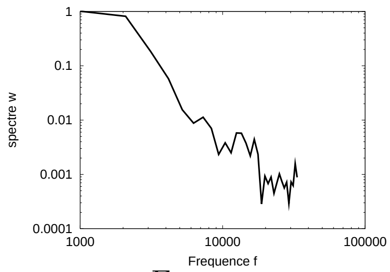
FIG. VI.14 – *Spectre de v*



E_w en $y = 1.21\ 10^{-4}$



E_w en $y = 1.23\ 10^{-4}\ m$



E_w en $y = 1.30\ 10^{-4}\ m$

FIG. VI.15 – *Spectre de w*

Chapitre VII

Comparaison des valeurs moyennes avec RANS et l'expérience

Cette partie présente les résultats obtenus sur le Mach isentropique, les valeurs moyennes de la vitesse et des tensions de Reynolds en les comparant aux simulations statistiques et aux résultats expérimentaux. Le temps de calcul total sans dimension de la simulation SGE que nous avons réalisé est de l'ordre de un. Ce temps de calcul correspond à 800000 pas de temps. Si l'on se base sur la hauteur de la bosse du côté du décollement ce temps sans dimension vaut $t^{**} = 12$. Comme nous l'avons vu sur les résultats instationnaires, nous moyennons sur un temps qui prend en compte plusieurs lâchers de tourbillons. Les moyennes présentées, sauf lorsque nous le mentionnons explicitement, correspondent à un temps d'accumulation égal au temps total de calcul.

Nous présentons et analysons également le bilan de l'énergie cinétique k selon la direction (Oy) en quelques points.

VII.1 Résultats sur les distributions du nombre de Mach isentropique sur les différentes parois

Cette section présente les résultats obtenus sur les distributions du nombre de Mach isentropique. Il est calculé à partir des relations entre la pression totale et la pression statique dans une transformation isentropique données dans la section (II.2) :

$$\frac{\overline{p}}{\overline{P}_{t1}} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{is}^2)^{-(\gamma/(\gamma-1))}$$

d'où :

$$M_{is} = \sqrt{(\frac{2}{\gamma - 1}[(\frac{\overline{P}_{t1}}{\overline{p}})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1])}$$

La pression totale $\overline{P}_{t1}$ est la pression génératrice, qui correspond à la valeur de la pression totale à l'entrée à l'extérieur des couches limites, $\overline{P}_{t1} = 0{,}92\ 10^5\ Pa$.

Le Mach isentropique est une variable globale qui permet de décrire la structure de l'écoulement [50]. En présence de chocs, elle permet de déceler la position des chocs avec précision. Elle permet également de mettre en évidence la position des zones d'eau morte correspondant aux plateaux de pression dans les bulbes de recirculation lorsque l'intensité du choc est suffisante pour faire décoller la couche limite [50].

Tous les résultats sont présentés sur les figures (VII.1) à (VII.4), successivement sur chaque paroi de la tuyère, en commençant par la paroi latérale la plus éloignée $z = 0\ m$, où la couche limite ne présente pas de décollement. Les résultats sont ensuite présentés sur la paroi basse, puis sur la paroi latérale droite du côté où la couche limite décolle et enfin sur la paroi haute. Les points de mesures sur les parois latérales, hautes et basses sont récapitulées ci dessous. Dans le tableau ci-dessous, la première colonne correspond aux ordonnées des points expérimentaux sur les parois latérales. La seconde colonne donne ces ordonnées rendues sans dimension par la hauteur de la tuyère L_y. La troisième colonne donne les côtes des points expérimentaux sur les parois hautes et basses et pour finir la quatrième colonne correspond aux côtes rendues sans dimensions par la largeur de la tuyère L_z.

Tableau 1 des points de mesure du nombre de Mach isentropique sur les parois latérales

$y1 = 0{,}020\ m$	$y^*1 = 0{,}2$	$z1 = 0{,}01630\ m$	$z^*1 = 0{,}134$
$y2 = 0{,}035\ m$	$y^*2 = 0{,}35$	$z2 = 0{,}03130\ m$	$z^*2 = 0{,}258$
$y3 = 0{,}065\ m$	$y^*3 = 0{,}65$	$z3 = 0{,}04630\ m$	$z^*3 = 0{,}381$
$y4 = 0{,}080\ m$	$y^*4 = 0{,}8$	$z4 = 0{,}07630\ m$	$z^*4 = 0{,}629$
×	×	$z5 = 0{,}09130\ m$	$z^*5 = 0{,}753$
×	×	$z6 = 0{,}1063\ m$	$z^*6 = 0{,}875$

Les résultats de la simulation SGE sont comparés aux résultats expérimentaux de Délery (ONERA) [9], et aux résultats d'I. Vallet (LEMFI) obtenus avec une modélisation $R_{ij} - \varepsilon$ [80]. Dans les courbes présentées, les croix correspondent aux points expérimentaux, les carrés à la simulation statistique et la ligne continue aux résultats de la SGE. Les quantités simulées issues de la SGE et des simulations RANS ont été interpolées aux points de mesure. Le nombre de points et leur répartition dans la direction longitudinale sont les mêmes pour la simulation SGE et pour la simulation statistique et nous utilisons une interpolation de Lagrange aux points expérimentaux dans chaque plan x fixé qui est linéaire dans chaque direction (Oy) et (Oz). Pour obtenir une meilleure lisibilté des résultats, nous avons représenté à chaque fois la distribution du nombre de Mach isentropique M_{is} dans la tuyère sur chaque paroi.

Une analyse globale des résultats sur l'ensemble des distributions sur les parois le long de l'axe (Ox) montre que les différences entre la SGE et les résultats statistiques sont observées principalement dans la zone d'interaction entre l'onde de choc et la couche limite et plus en aval de l'interaction. Les résultats obtenus sur les distributions du nombre de M_{is} par la simulation RANS et par la SGE sont confondues avec la distribution expérimentale en aval de la bosse et dans la partie convergente de la tuyère. On observe que la SGE prédit une intensité maximum du nombre de Mach isentropique dans les chocs qui est inférieure à celle calculée dans la modélisation $R_{ij} - \varepsilon$ et à celle mesurée expérimentalement. L'ensemble des résultats montre que l'intensité des chocs prédite par la SGE avec le schéma d'Harten-Yee est moins forte que l'intensité mesurée expérimentalement et que les chocs sont beaucoup plus étalés.

Néanmoins un résultat particulièrement intéressant de la SGE est la capacité de la méthode à prédire la présence du plateau de pression mesuré expérimentalement, associé au décollement de la couche limite, contrairement aux résultats de la simulation RANS.

L'ensemble des courbes figures (VII.1 a) à (VII.4 f) montre que le phénomène de sous prédiction du nombre de Mach par le SGE est moins marqué dans le coin inférieur gauche, comme le montrent les figures (VII.1 a), (VII.1 b), (VII.2 a) et (VII.2 b). Il apparaît au contraire plus marqué dans les zones où l'on observe un plateau de pression correspondant à une zone de recirculation. Nous observons sur les figures (VII.2 d) à (VII.2 f) qui représentent la distribution du nombre de Mach isentropique dans une zone où la couche limite décolle, que le maximum est très sous-estimé par la SGE. Le même phénomène se retrouve sur la paroi haute où nous prédisons un décollement sur toute la largeur de la tuyère. Nous pouvons souligner qu'un décollement se produit expérimentalement derrière le choc droit proche de la paroi haute lié à l'interaction entre le choc et la couche limite haute [9]. Par contre, nous surestimons la zone haute décollée et nous n'avons pas la bonne position du plateau de pression par rapport aux expériences lorsqu'on compare très finement les courbes des figures (VII.4 a) à (VII.4 d).

On peut observer sur les figures (VII.1 c), (VII.1 d), (VII.3 c) et (VII.3 d) l'étalement du choc dans la partie haute de la tuyère où l'onde de choc oblique et l'onde de choc droit se rejoignent. On note également un étalement des gradients sur nos résultats figures (VII.1 a) et (VII.1 b). Nous pensons que ceci est lié au schéma d'Harten-Yee utilisé qui est très dissipatif et moins compressif dans les chocs que le schéma MUSCL utilisé dans la simulation RANS avec laquelle nous comparons nos résultats. Des études récentes en Simulation Numérique Directe ont montrées que le schéma d'Harten-Yee est également très sensible à la résolution du maillage ce qui n'est pas le cas des schémas WENO [74].

Les différences de pression (et donc du nombre de Mach isentropique) à l'aval de l'onde de choc expliquent les différences observées entre la SGE et les deux autres courbes plus en aval de l'interaction. Nous l'observons bien sur les figures (VII.1 c), (VII.3 c) et sur les figures sur la paroi haute figure (VII.4).

Enfin, nous observons sur les figures (VII.1 a) et (VII.1 b) ainsi que sur les figures (VII.2 a), (VII.2 b) et (VII.2 c), dans le coin inférieur latéral gauche, une remontée du nombre de M_{is} après le choc en lambda sur les résultats de la SGE. Nous avons représenté figure (VII.5) les isovaleurs du nombre de M_{is} centrée autour de $x = 0{,}4\ m$. Nous avons également fait apparaître sur la figure la ligne $y = 0{,}020\ m$. Cette légère dépression est aussi visible sur les résultats statistiques et expérimentaux, mais à une valeur beaucoup plus faible avec une amplitude moins forte et semble correspondre à un phénomène d'ondes de choc mulitiples liés à la prédiction des zones de recirculation et des couches limites par la simulation SGE [11]. Il est probable que la diffusion trop importante dans notre calcul diffuse le phénomène de façon plus importante.

Concernant la zone du décollement tridimensionnel, la SGE a la capacité de prédire la présence du plateau de pression associé au décollement de la couche limite, contrairement aux résultats statistiques. Nous pouvons l'observer dans la zone de recirculation proche de la paroi latérale sur la figure (VII.2 f) et sur la paroi haute figure (VII.4). La simulation SGE prédit une recirculation proche de la paroi latérale droite un peu en amont de celle mesurée expérimentalement comme on l'observe sur la figure (VII.2 d). Ceci est lié à la position du choc oblique, qui a une extension plus importante que dans l'expérience, et qui fait décoller plus tôt la couche limite.

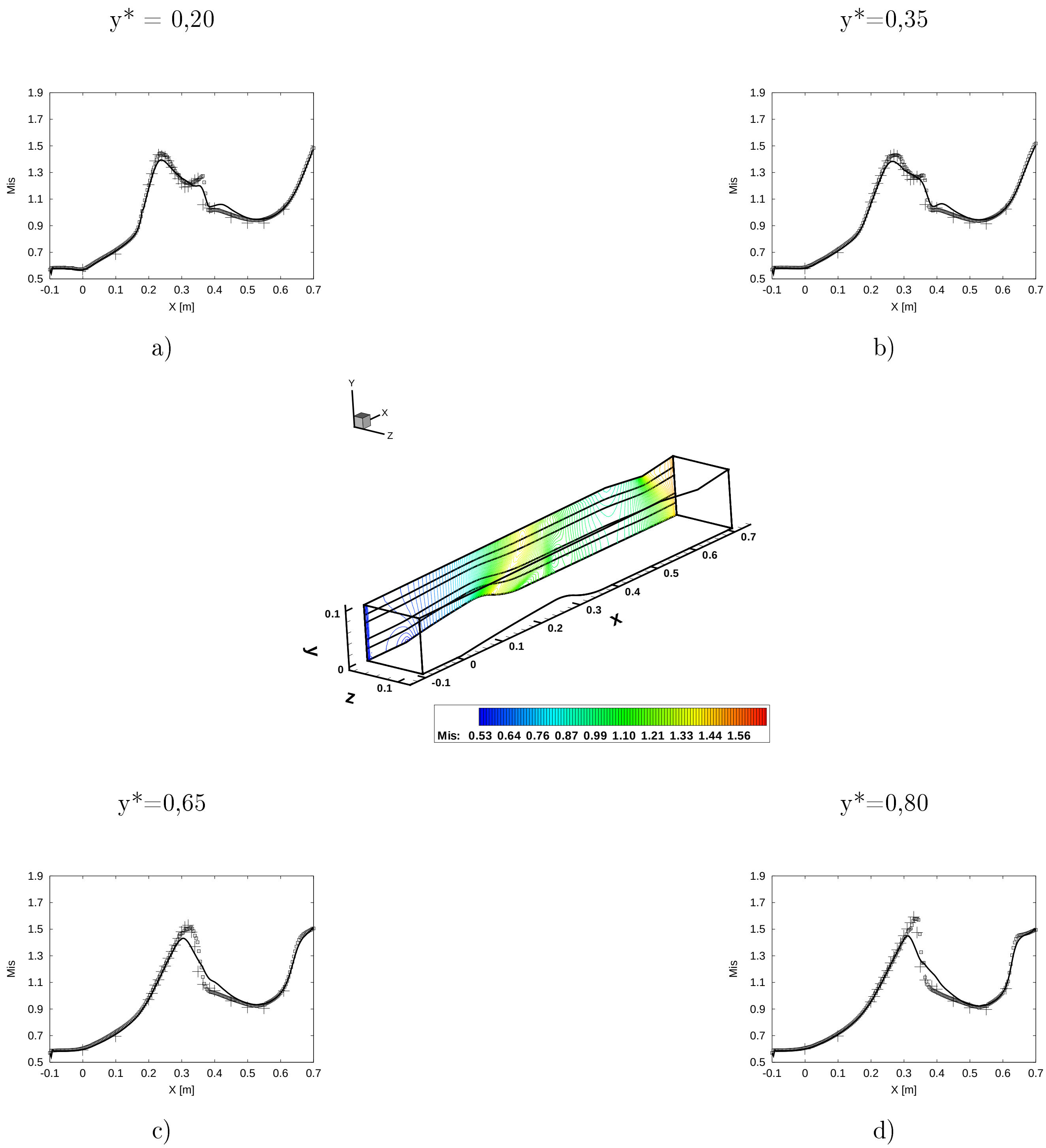


FIG. VII.1 – *Distribution de Mis selon* (Ox) *dans le plan* $z = 0\ m$ *: SGE :* $-$*; EXPE :* $+++$ *; RANS :* $\diamond\diamond$

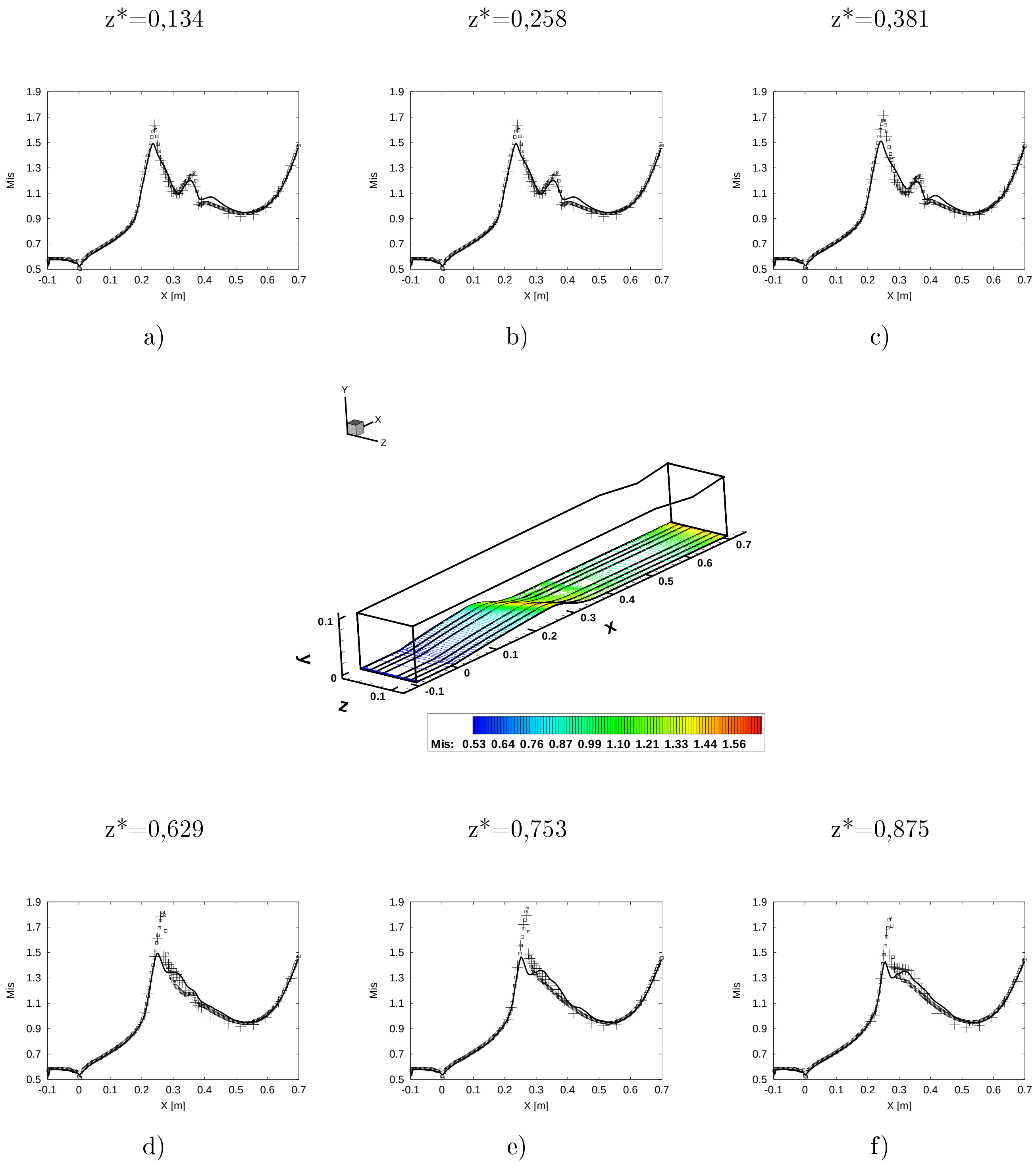


FIG. VII.2 – *Distribution de Mis sur la paroi basse selon (Ox) : SGE : –; EXPE : +++ ; RANS :* $\diamond\diamond$

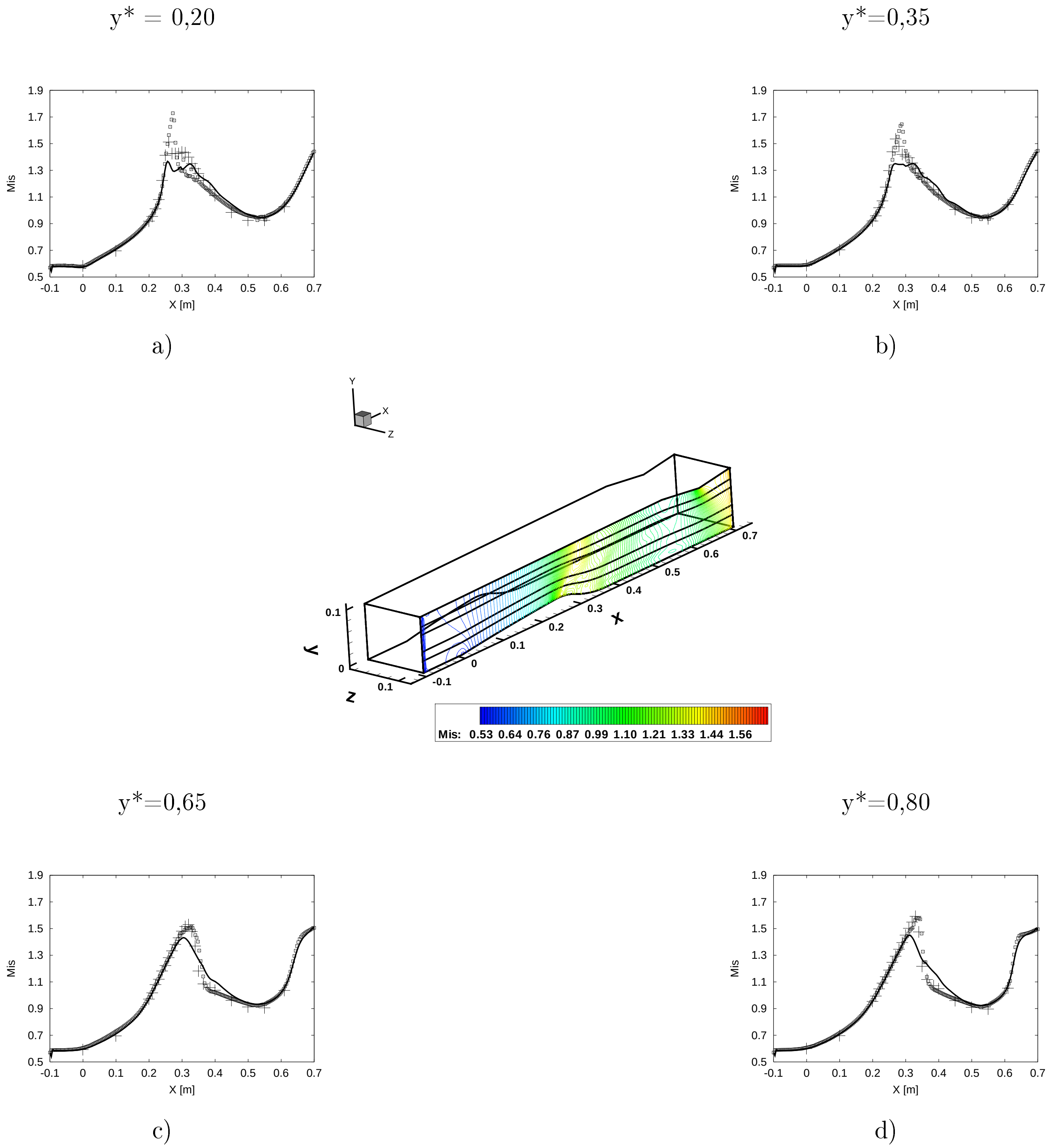
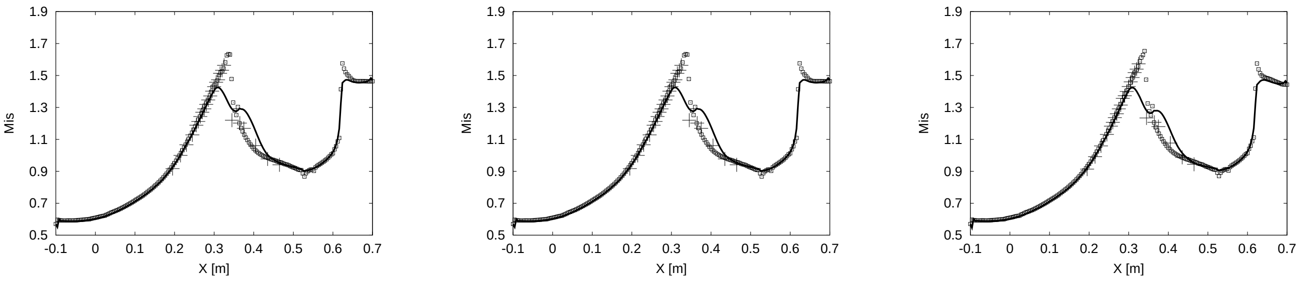
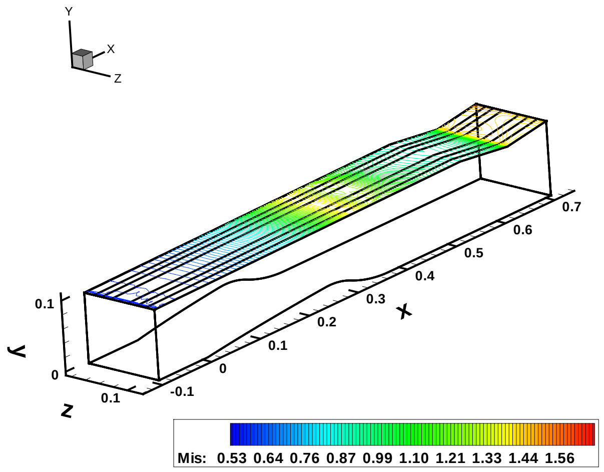


FIG. VII.3 – *Distribution de Mis selon* (Ox) *dans le plan* $z = 0{,}1213\ m$ *: SGE : –; EXPE : +++ ; RANS :* $\diamond\diamond$

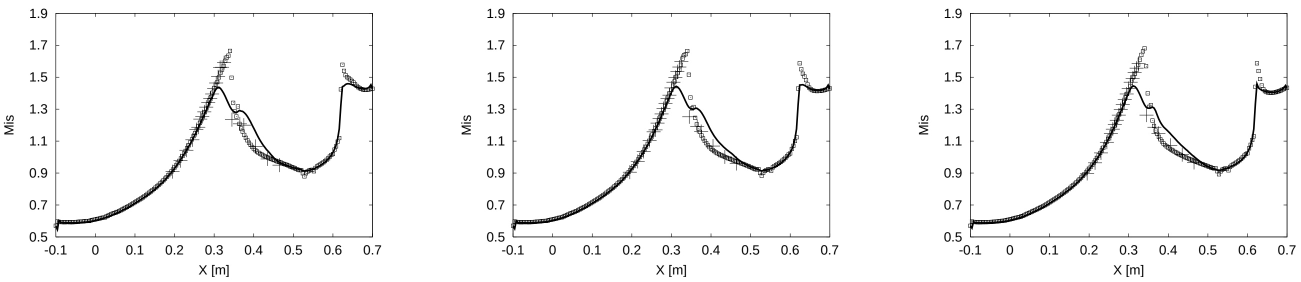
z*=0,134 z*=0,258 z*=0,381



a) b) c)



z*=0,629 z*=0,753 z*=0,875



d) e) f)

FIG. VII.4 – *Distribution de Mis sur la paroi basse selon (Ox) : SGE : –; EXPE : +++; RANS :* ◇◇

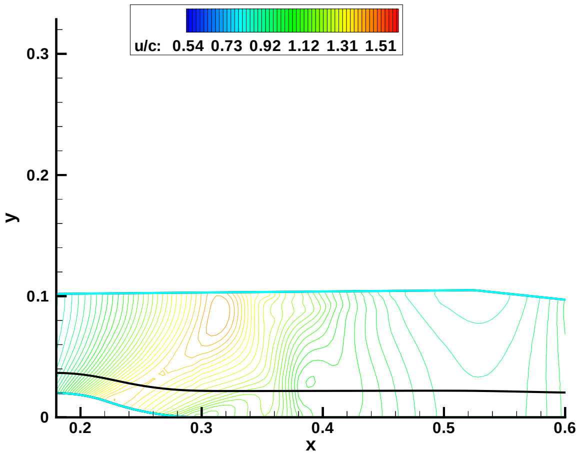


FIG. VII.5 – *Distribution de Mis selon* (Ox) *dans le plan* $z = 0\ m$

VII.2 Résultats sur les profils des vitesses moyennes

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus sur les vitesses moyennes suivant les coordonnées verticales (Oy) dans chaque plan de mesure x fixé pour les cinq stations transversales z définies dans la section (II.4). Expérimentalement, le plan $x1 = 0{,}230\,m$ correspond à un plan sur la bosse en amont de l'onde de choc en lambda. Le plan $x2 = 0{,}270\,m$ correspond à un plan tel qu'il coupe le pied de l'onde de choc oblique au milieu de la tuyère en $z3 = 0{,}0613\,m$, sur la paroi basse. Les plans $x3 = 0{,}290\,m$, $x4 = 0{,}310\,m$, $x5 = 0{,}340\,m$ sont des plans qui coupent le choc oblique et qui sont dans la zone où la couche limite décolle près de la paroi latérale droite [80]. Le plan $x6 = 0{,}360\,m$, en $z5 = 0{,}1113\,m$ coïncide avec le choc droit dans la partie supérieure de la tuyère. Enfin, $x7 = 0{,}390\,m$ est en aval de l'interaction onde de choc/couche-limite.

Sur chaque figure, les croix correspondent aux points expérimentaux, les losanges correspondent à la simulation statistique et le trait représente les résultats de la SGE. Toutes les vitesses (simulées et expérimentales) sont rendues sans dimension par la vitesse de référence qui est la vitesse maximum à l'entrée du domaine $u_{ref} = 200\ m\ s^{-1}$. Nous avons préféré présenter les résultats sans dimension pour avoir des courbes plus lisibles, notamment lors de leur présentation en annexe où les figures sont assez petites. Nous avons placé une tuyère avec les courbes que nous commentons ci-après, avec à chaque fois la position du plan où nous nous trouvons et la position des cinq lignes (Oy) selon lesquelles nous avons des résultats expérimentaux. Les isovaleurs de la composante longitudinale de la vitesse sont également représentées sur le plan dans chaque tuyère.

VII.2.1 Hypothèses pour la comparaison des résultats

Toutes les notations sont définies en annexe. Les résultats statistiques sont comparés aux résultats expérimentaux à l'aide des variables de Favre basées sur un filtrage temporel. C'est pourquoi nous avons choisi de représenter nos résultats avec les variables de Favre. Nous comparons donc nos résultats sur les profils de la vitesse moyenne aux quantités statistiques $\widehat{u_i} = \dfrac{\langle \rho u_i \rangle}{\langle \rho \rangle}$ où $\langle (.) \rangle$ est l'opérateur de moyenne temporelle et $\widehat{u_j}$ est la variable associée à la moyenne de Favre par rapport à cette moyenne réalisée en temps. Les composantes moyennes de la vitesse sont alors obtenues à partir de nos variables filtrées spatialement, seules accessibles par le calcul, par la formule :

$$\widehat{u_i} \simeq \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u}_i \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle}$$

Nous pouvons souligner qu'à convergence ces profils ne doivent pas être très différents de la quantité $\langle \widetilde{u}_i \rangle$.

VII.2.2 Remise à l'échelle des résultats de simulation

La solution RANS convergée statistiquement qui nous sert d'initialisation présente un léger sur-débit comme le montre la figure (VII.6). L'ouverture du second col a été calculée pour pouvoir ajuster la position de l'onde de choc avec les expériences dans la tuyère mais il semble que le col soit un peu trop fermé expliquant ce sur-débit. L'expression du débit maximum dans une tuyère symétrique est reliée à la section A_T du col par :

$$\dot{m}_{max} = \frac{A_T \gamma P_t a_0^{-1}}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Il est donc possible que la différence de vitesse provienne d'une légère différence dans la géométrie du col entre les simulations et la tuyère expérimentale [80].

C'est pourquoi, toutes les vitesses statistiques RANS et de la SGE ont été ajustées aux profils expérimentaux pour présenter les résultats. Le facteur d'ajustement utilisé pour présenter les résultats sur les profils de la vitesse moyenne a été calculé à partir des profils de la vitesse longitudinale en $x = 0{,}230\ m$, abscisse des premiers points expérimentaux, et $z = 0{,}0613\ m$. Cette station correspond à une ligne située au début de la bosse au milieu de la tuyère. On peut alors observer la bonne concordance entre les trois courbes de la SGE, statistique et expérimentale dans le cœur de la tuyère, une fois mises à la même échelle sur la figure (VII.7). Les différences de vitesse observées dans les couches limites entre la SGE et les résultats RANS et expérimentaux ne sont pas modifiées. Nous en discutons les origines dans le paragraphe concernant les résultats dans la section $x = 0{,}230\ m$. Nous observons un bon accord entre les courbes expérimentales et de la SGE pour le facteur d'échelle choisi à partir de la figure (VII.7) tout le long de la tuyère. D'autre part nous pouvons souligner que les deux autres composantes de la vitesse sont peu sensibles au changement d'échelle.

VII.2.3 Résultats sur les profils des vitesses moyennes dans chaque plan x fixé

Nous discutons maintenant des résultats obtenus sur la vitesse moyenne dans chaque section. Pour la bonne lisibilité du document, toutes les courbes sont présentées pour donner une vue d'ensemble des résultats dans toute la tuyère figure (B.5) à figure (B.7) en annexe sans être commentée. Il y a un très grand nombre de points expérimentaux. Seules les courbes représentatives d'un résultat de la SGE sont commentées ci-après dans chaque plan x.

Résultats dans la section $x = 0{,}230\ m$ ou encore en $x1/\chi = 0{,}939$

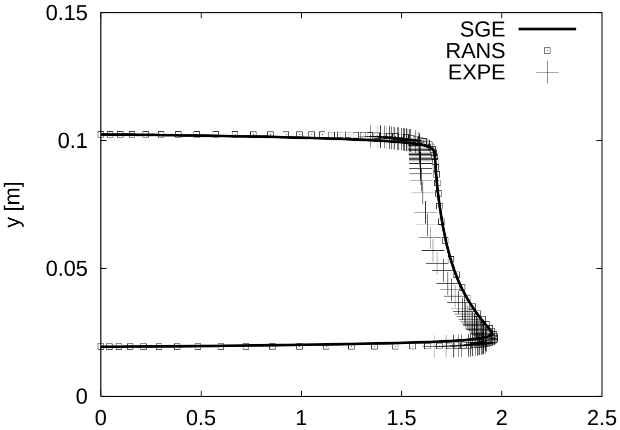


FIG. VII.6 – *Vitesse longitudinale en $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0613\ m$ selon (Oy)*

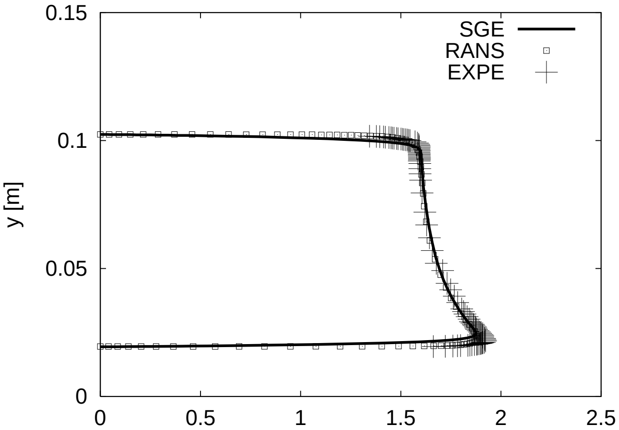


FIG. VII.7 – *Vitesse longitudinale en $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0613\ m$ selon (Oy) un fois ajustée aux expériences*

La section $x = 0{,}230\ m$ est en amont du pied du choc, sur le haut de la bosse. C'est la raison pour laquelle les profils ne commencent pas en $y = 0\ m$.

La pente de la bosse du côté latéral gauche (le plus éloigné) est plus importante que de l'autre côté induisant une accélération plus marquée sur les profils proche de la paroi basse puisque le fluide est subsonique. Ce phénomène crée un mouvement d'entraînement du fluide vers $z = 0\ m$ comme on peut le voir sur les figures des profils transversaux de la vitesse $\widehat{v}$ et et $\widehat{w}$ sur les figures (B.6) et (B.7) en annexe. Les deux composantes sont négatives sur la moitié de la largeur de la tuyère, entraînant le fluide vers la paroi latérale gauche.

Nous pouvons souligner le bon accord observé entre les résultats $R_{ij} - \varepsilon$ avec le modèle de Launder-Shima [80], l'expérience et la simulation des grandes échelles sur les trois composantes de la vitesse à cette station en $z = 0{,}0613\ m$ sur les figures (VII.9), (VII.10) et (VII.11). On observe un léger épaississement de la couche limite sur les profils $\widehat{u}$ de la SGE, proche de la paroi haute et de la paroi basse. Il est possible que l'épaississement de la couche limite à cette station soit lié à trop de dissipation introduite par le modèle de sous maille. Nous avons représenté la pression selon (Oy) en deux stations x consécutives figures (VII.12) et (VII.13). Nous avons également représenté la densité à la même station selon (Oy) sur la figure (VII.14). Le phénomène observé sur nos résultats n'est pas lié à un gradient de pression adverse puisque les pressions sont en bon accord dans la partie convergente dans le cœur de la tuyère comme le montrent les figures (VII.12) et (VII.13).

La composante $\widehat{v}$ est un peu sous estimée près de la paroi basse, figure (VII.10) et nous avons observé la même tendance aux points $z = 0{,}0113\ m$ et $z = 0{,}0413\ m$ figure (B.6). La variation $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ entraîne une variation $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ près de la paroi basse comme le montre la figure (VII.15). Ce léger déficit en vitesse verticale se voit mieux près de la paroi basse où les quantités sont plus importantes en valeur absolue que près de la paroi haute. Il est lié à l'épaississement des couches limites : les vitesses sont plus faibles ce qui implique que le fluide a plus de mal à être entraîné.

Résultats dans la section $x = 0{,}270\ m$ ou encore en $x2/\chi = 1{,}102$

La section $x = 0{,}270\ m$ est également sur la bosse mais elle coupe le pied du choc très près de la paroi basse. Nous avons représenté le plan $x = 0{,}270\ m$ figure (VII.16).

Tous les profils sont donnés en annexe. Les courbes expérimentales, RANS et de la SGE sont en bon accord en $z1 = 0{,}0113\ m$ (voir courbes en annexe). La vitesse transversale selon (Oy) est aussi en bon accord avec les autres résultats à tous les points expérimentaux z fixés figure (B.7). On observe un épaississement de la couche limite basse sur les profils de la composante longitudinale figure (B.5) et un déficit de vitesse verticale figure (B.6). L'épaississement de la couche limite basse est plus marqué à cette station qu'à la station $x = 0{,}230\ m$.

Les figures (VII.17) à (VII.22) représentent les trois composantes de la vitesse aux points $z = 0{,}0413\ m$ et $z = 0{,}0913\ m$. Les résultats statistiques et expérimentaux sont en très bon accord. Les courbes RANS et expérimentale de la vitesse longitudinale ont une forme un peu différente sur les figures (VII.17) et (VII.20) près de la paroi basse dans la mesure où le fluide est encore accéléré continûment sur la bosse en $z = 0{,}0913\ m$ tandis que le sommet a été dépassé en $z = 0{,}0413\ m$, expliquant la diminution brutale observée sur les deux courbes à cette station figure (VII.17).

L'épaississement des profils en SGE est principalement observé dans le cœur de la tuyère aux stations $z = 0{,}0413\ m$, $z = 0{,}0613\ m$ et $z = 0{,}0913\ m$. La conséquence de ce phénomène est un faible décollement près de la paroi latérale droite en $z = 0{,}0913\ m$ figure (VII.20) (ainsi qu'en $z = 0{,}1113\ m$ figure (B.5). Ce phénomène n'est pas observé sur les résultats expérimentaux, ni sur les résultats RANS à cette station. La couche limite décolle plus en aval dans les simulations RANS et dans l'expérience, comme nous le verrons sur les résultats en $x = 0{,}290\ m$. Les différences observées entre les valeurs maximales obtenues par la SGE et l'expérience sur la composante longitudinale figure (VII.17) sont de l'ordre de 8,5%. Elles sont largement plus importantes près de la paroi basse sur la figure (VII.20) (de l'ordre de 70%).

Plus on s'éloigne de la paroi latérale gauche $z = 0\ m$, plus la vitesse verticale prédite par la SGE près de la paroi basse diminue en valeur absolue figures (VII.18) et (VII.21).

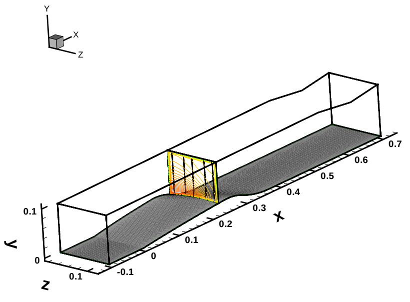


FIG. VII.8 – *Plan* $x = 0{,}230\ m$

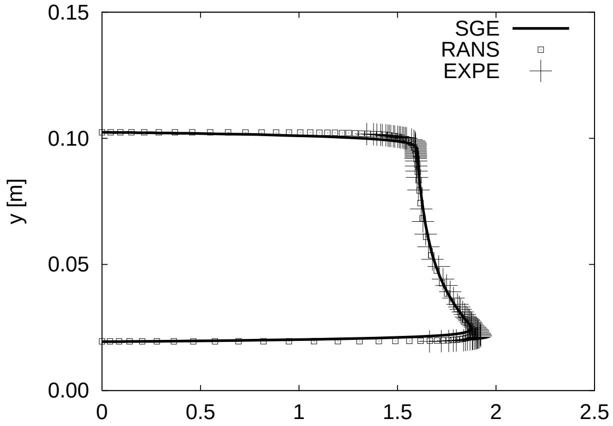


FIG. VII.9 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *selon* (Oy) *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

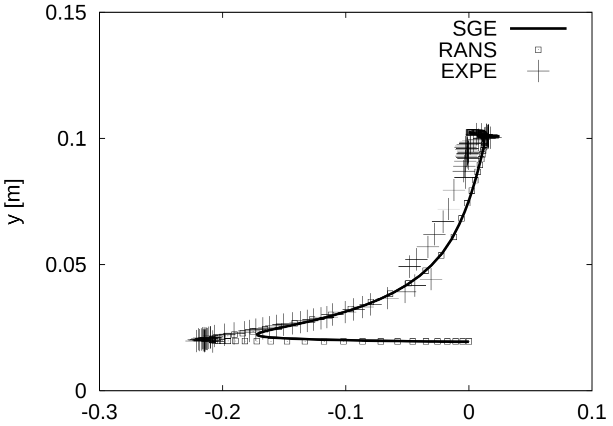


FIG. VII.10 – $\widehat{v}/u_{ref}$ *selon* (Oy) *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

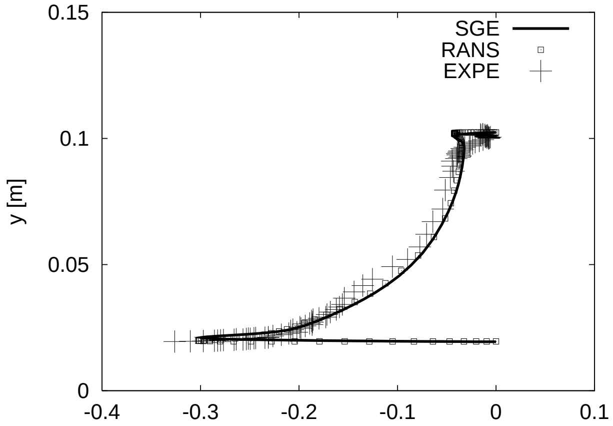


FIG. VII.11 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *selon* (Oy) *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

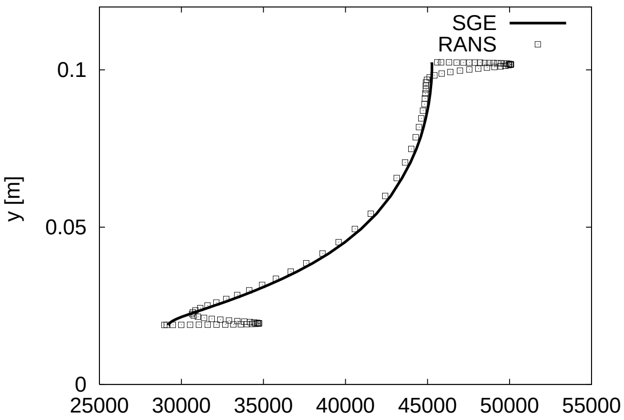


FIG. VII.12 – *Pression statique selon* (Oy) *en* $x = 0{,}232\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

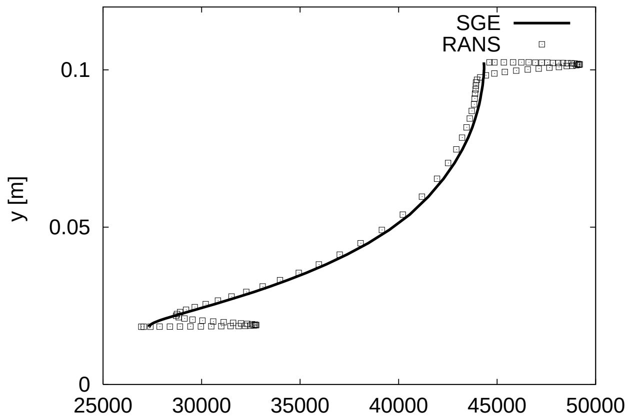


FIG. VII.13 – *Pression statique selon* (Oy) *en* $x = 0{,}236\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

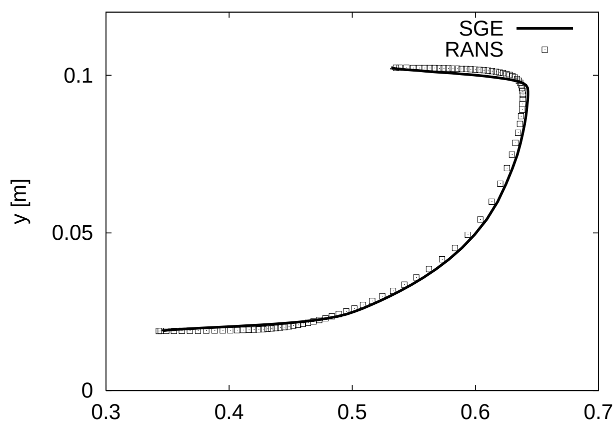


FIG. VII.14 – $\overline{\rho}$ *selon* (Oy) *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0610\ m$

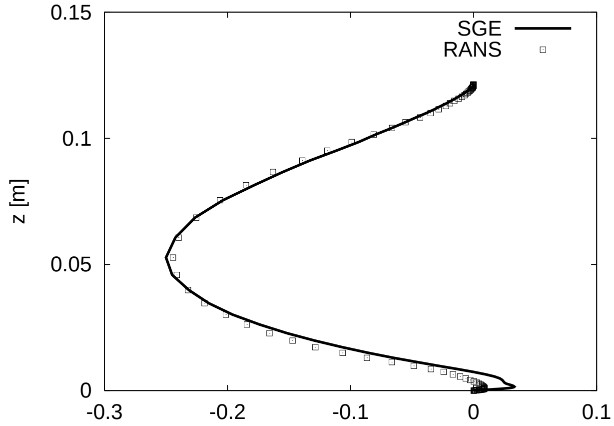


FIG. VII.15 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *selon* (Oz) *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $y = 0{,}0156\ m$

Ce résultat est cohérent avec les résultats observés pour la vitesse longitudinale dans la mesure où, si la couche limite est plus épaisse, le fluide dans son mouvement transverse de la paroi latérale droite $z = 0{,}1213\ m$ vers la paroi latérale gauche $z = 0\ m$ a plus de mal à entraîner le fluide, les vitesses étant plus faibles dans les couches limites. De ce fait, la composante transverse est un peu surestimée en valeur absolue entre $y = 0{,}02\ m$ et $y = 0{,}05\ m$ figure (VII.19), entraînant une forte injection de fluide proche de la paroi.

Pour mieux comprendre les différences entre les résultats prédits par la SGE et les résultats RANS et expérimentaux, nous nous sommes intéressés aux résultats sur la pression et la température un peu en amont de cette station, en $x = 0{,}230\ m$, puis en $x = 0{,}270\ m$ puis en $x = 0{,}288\ m$. Tous les résultats sont regroupés sur les figures (VI.23 a) à (VI.23 f). Nous n'avons pas interpolé les résultats précédents au point expérimental $x = 0{,}290\ m$ situé un plus en aval, puisque nous ne disposons pas de résultats expérimentaux sur la densité et la température. Nous n'avons pas non plus pris en compte les modifications relatives à la mise à l'échelle des vitesses RANS et de la SGE puisque nous ne comparons que les simulations entre elles.

Nous pouvons remarquer, figure (VI.23 a), (VI.23 c) et (VI.23 e), où nous avons représenté le profil de $\widetilde{T}$ en $x = 0{,}230\ m$, que les profils de température prédits par la simulation statistique et la SGE sont proches et les différences peuvent être expliquées par une différence dans la prédiction de la pression. Des différences dans la pression sont observées sur la moitié inférieure de la tuyère plus on se rapproche de $x = 0{,}270\ m$ ainsi que dans les sections plus loin comme le montrent les figures (VI.23 d) et (VI.23 f). C'est le gradient de pression qui est ici à l'origine de l'épaississement de la couche limite et de la décélération du fluide observée à ces stations comme le montrent les figures (VI.23 d) et (VI.23 f). La brutale augmentation de pression, liée à la présence du choc, n'apparaît clairement sur les résultats statistiques que pour $x = 0{,}288\ m$ en $z = 0{,}0913\ m$ alors que ce phénomène est déjà observé sur la SGE en amont figure (VI.23 d). Le gradient de pression n'est de plus pas aussi important sur nos résultats et n'est pas positionné à la même ordonnée (Oy).

Il est probable que nos résultats sur la pression soient dû à la mauvaise résolution du choc oblique comme observé sur les distributions du nombre de Mach isentropique. Comme le choc interagit plus en amont avec la couche limite en SGE, le décollement sera également plus en amont. La réponse à la question de savoir pourquoi nous ne prédisons pas correctement la pression et le fort étalement du choc n'est pas évidente. D'une part des études récentes sur les schémas à capture de choc [74] ont montré que les résultats avec le schéma d'Harten-Yee que nous utilisons dépendent très fortement de la convergence en maillage contrairement aux schémas WENO comme nous l'avons déjà signalé. D'autre part, il existe encore peu d'études sur le couplage entre les schémas à capture de choc et la modélisation de sous maille pour ce type d'interaction [29].

La décélération du fluide observée est compensée par la densité qui est supérieure à celle calculée par la RANS à cette station. A titre d'exemple nous avons tracé la densité sur les figures (VI.23 g) et (VI.23 h) dans les deux directions (Oy) et (Oz) à cette station en $z = 0{,}0613\ m$.

Enfin, on peut noter l'effet du maillage plus lâche au cœur qui vient se coupler aux effets de la pression.

Résultats dans la section $x = 0{,}290\ m$ ou encore $x3/\chi = 1{,}183$

La section $x = 0{,}290\ m$ coupe le choc oblique et se trouve dans la zone où la couche limite décolle près de la paroi latérale droite comme le montre la figure (VII.28) sur le profil de la composante longitudinale RANS et de la SGE.

Nous présentons tout d'abord, figure (VII.24) et figure (VII.25), les lignes de courant du champ moyen $u{,}w$ obtenu par la SGE proche de la paroi basse en $y{*} = 4\ 10^{-4}$, en le comparant aux résultats sur les lignes de frottement pariétal obtenus expérimentalement et par une modélisation de type $k - \varepsilon$ [9]. Le sens de l'écoulement est dirigé de gauche à droite.

Sur les lignes obtenues théoriquement à partir des visualisations expérimentales figure (VII.25), le décollement proche de la paroi basse est caractérisé par un foyer F1 [9] autour duquel la ligne de séparation vient s'enrouler. Cette ligne correspond sur la figure (VII.25) à la première ligne transversale autour de $x = 0{,}260\ m$. Nous observons bien la ligne séparatrice sur la figure (VII.24) observée également sur les autres résultats. Les trajectoires montrent aussi l'enroulement du fluide près de la paroi latérale droite en SGE avec une structure plus allongée et un foyer plus proche de la paroi basse.

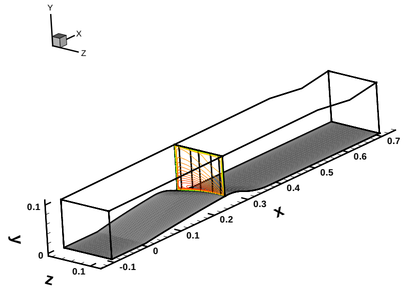


FIG. VII.16 – *Plan* $x = 0{,}270\ m$

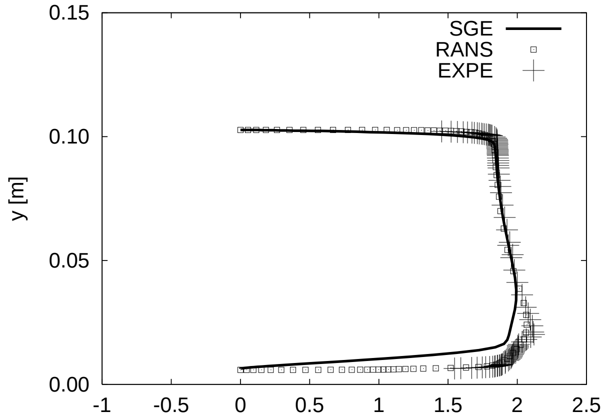


FIG. VII.17 – $\hat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

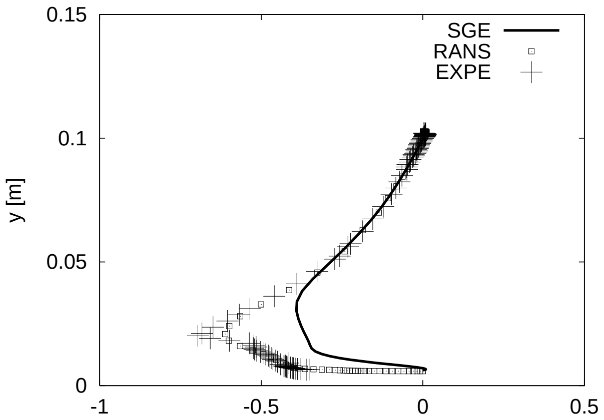


FIG. VII.18 – $\hat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

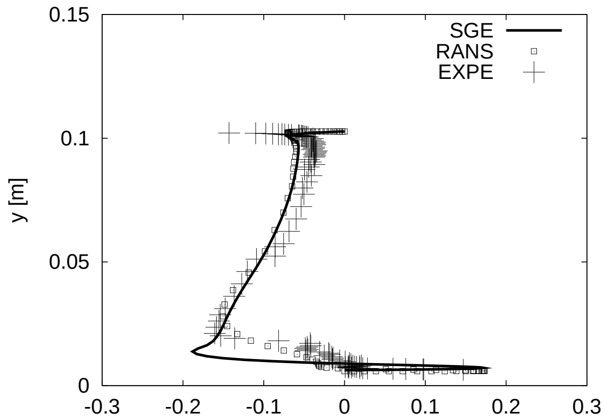


FIG. VII.19 – $\hat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

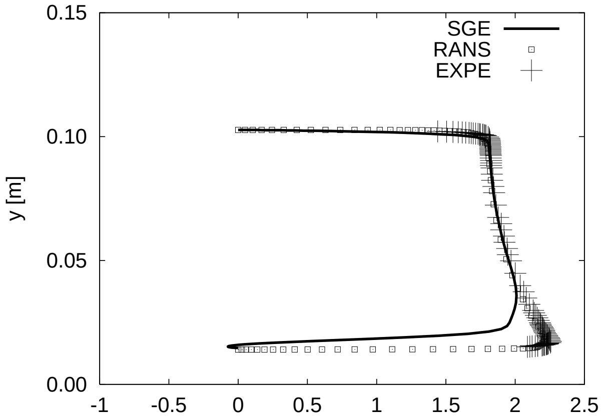


FIG. VII.20 – $\hat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

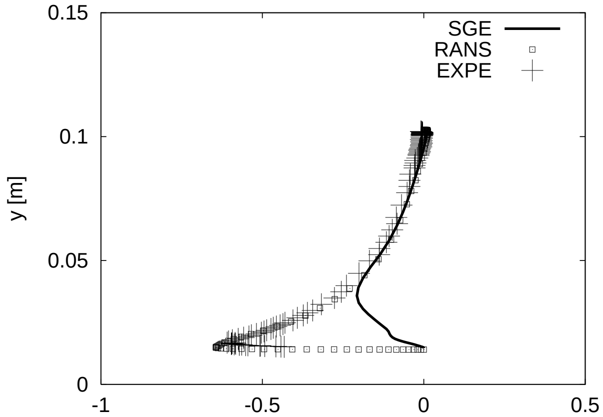


FIG. VII.21 – $\hat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

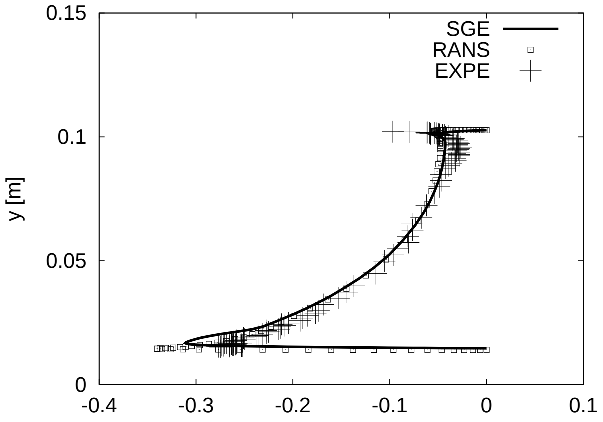
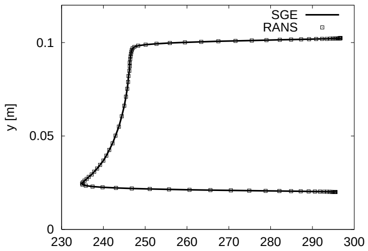


FIG. VII.22 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

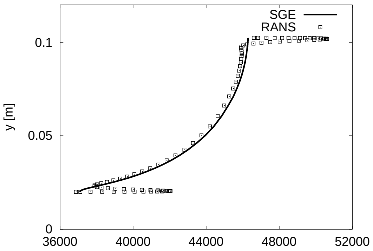
Globalement, on observe le même type de résultats qu'en $x = 0{,}270\ m$. Simplement, les différences sont plus haut selon (Oy) puisque le choc oblique coupe la ligne (Oy) plus haut comme on peut le voir sur les distributions du nombre de Mach isentropique. Le choc se situe entre $x = 0{,}250\ m$ et $x = 0{,}290\ m$ sur les courbes de la SGE des distributions du nombre de M_{is} figures (VII.2 e) et (VII.3 c). Nous observons sur la figure (B.7) que les valeurs moins importantes observées sur $\widehat{v}$ entraînent une augmentation de $\widehat{w}$ en valeur absolue près de la paroi basse avec une forte injection de fluide très prés de la paroi latérale gauche.

La figure (VII.27) représente le profil de la vitesse longitudinale en $z = 0{,}0913\ m$. La courbe expérimentale montre la présence du choc avec la variation rapide de $\widehat{u}$ autour de $y = 0{,}03\ m$. Ceci en accord avec le nombre de Mach isentropique mesuré qui montre figures (VII.2 e) et (VII.3 c) que le choc est placé entre $x = 0{,}280$ et $x = 0{,}310\ m$ entre la paroi du bas et la paroi haute. Ce phénomène n'est pas capturé par les calculs RANS ni par la SGE.

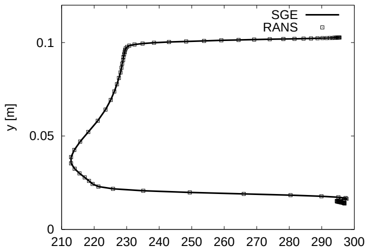
Les figures (VII.28) à (VII.30) représentent les trois composantes de la vitesse en $z = 0{,}1113\ m$. Le décollement tridimensionnel apparaît sur les résultats de la SGE et sur les résultats statistiques. La courbe expérimentale représentant la composante longitudinale de la vitesse ne va pas jusquà la paroi, mais la pente de la courbe par rapport aux simulations et les visualisations pariétales [9] laissent supposer que la couche limite est bien décollée expérimentalement à cette station. Le choc est également visible sur la courbe expérimentale de la composante verticale de la vitesse en $z = 0{,}1113\ m$. Concernant le profil de la vitesse transverse en $z = 0{,}1113\ m$, cette composante est négative permettant d'évacuer le fluide de la zone de recirculation. La SGE prédit une composante transverse plus



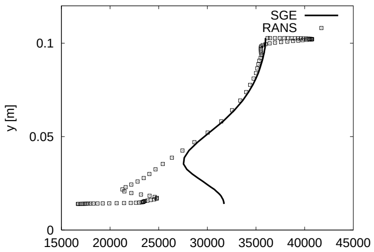
VI.23.a) Température en $x = 0{,}230\ m$ $z = 0{,}0913\ m$



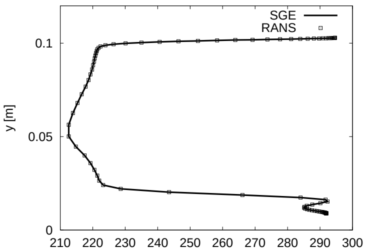
VI.23.b) Pression en $x = 0{,}230\ m$ $z = 0{,}0913\ m$



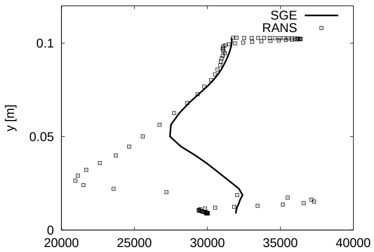
VI.23.c) Température en $x = 0{,}270\ m$ $z = 0{,}0913\ m$



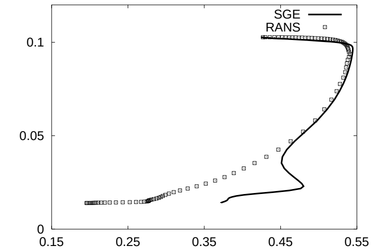
VI.23.d) Pression en $x = 0{,}270\ m$ $z = 0{,}0913\ m$



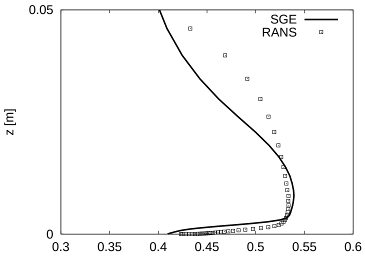
VI.23.e) Température en $x = 0{,}288\ m$ $z = 0{,}0913\ m$



VI.23.f) Pression en $x = 0{,}288\ m$ $z = 0{,}0913\ m$



VI.23.g) Densité en $x = 0{,}270\ m$ et $z = 0{,}0913\ m$ selon (Oy)



VI.23.h) Densité en $x = 0{,}270\ m$ et $y = 0{,}0156\ m$ selon (Oz)

FIG. VII.23 – *Profils de Température, de Pression et de Densité*

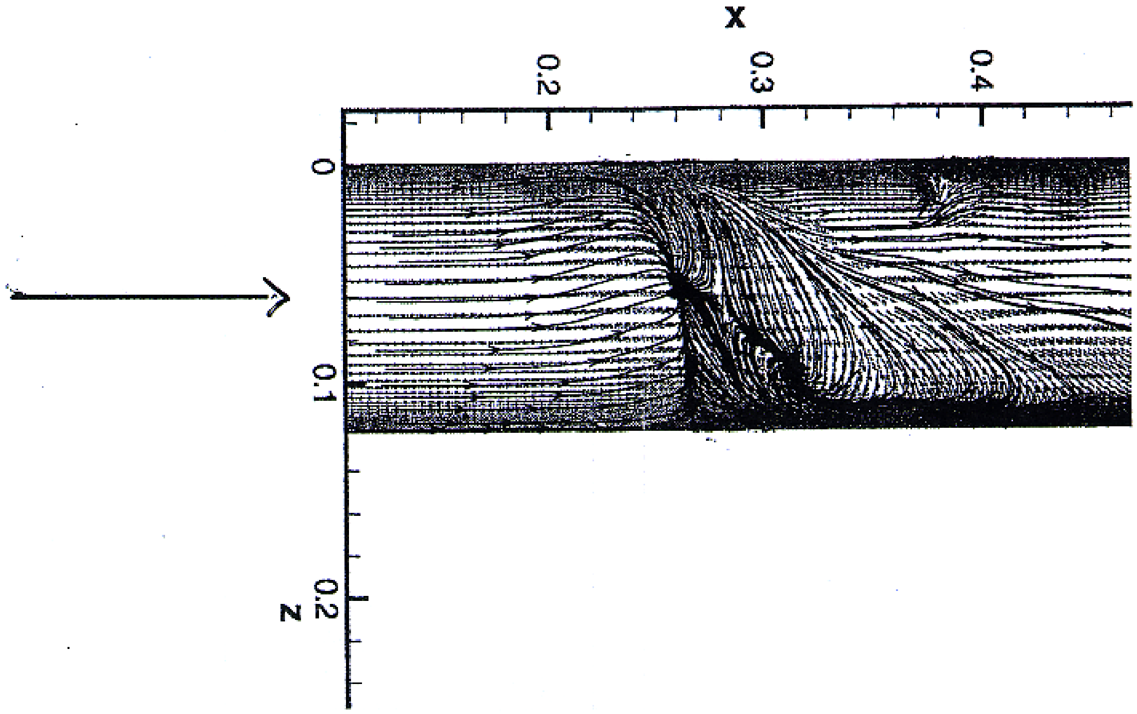


FIG. VII.24 – *Trajectoire des particules proche de la paroi basse*

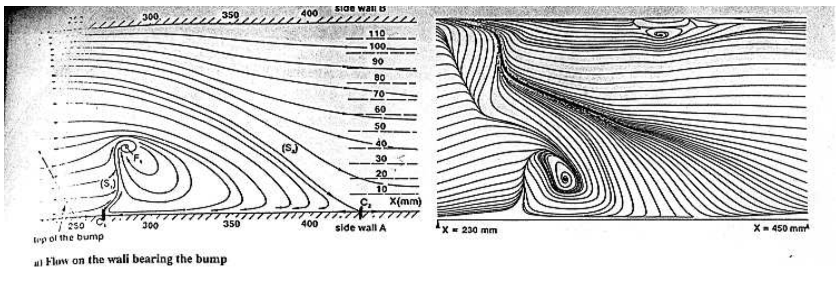


FIG. VII.25 – *Lignes de frottement experimentales et calculées par $k-\varepsilon$ sur la paroi basse [9]* faible que l'expérience et que RANS près de la paroi basse. Mais on peut observer figure (VII.30) que la SGE prédit une valeur plus importante en valeur absolue que RANS et l'expérience entre $y = 0{,}03\ m$ et $y = 0{,}08\ m$. En regardant bien on peut également voir une brusque variation de $\widehat{w}$ très près de la paroi basse similaire à la signature du choc, toujours figure (VII.30).

Résultats dans la section $x = 0{,}310\ m$ ou encore en $x4/\chi = 1{,}265$

Le plan $x = 0{,}310\ m$ est situé dans le creux de la bosse comme le montre la figure (VII.31). Ce plan coupe la zone de décollement proche de la paroi latérale droite. D'une façon générale, en regardant les courbes de la vitesses verticale, on peut observer que l'on retrouve un accord correct entre l'initialisation et la SGE proche de la paroi basse.

Les figures (VII.32) à (VII.33) représentent les deux composantes $\widehat{u}$ et $\widehat{w}$ en $z = 0{,}0113$ près de la paroi latérale gauche et les figures (VII.34) à (VII.36) les trois composantes de la vitesse en $z = 0{,}0613$ au milieu de la tuyère. On observe sur les résultats statistiques et expérimentaux la présence plus marquée du choc oblique avec la variation rapide de la vitesse vers $y = 0{,}35\ m$. Les gradients sont moins visibles et plus étalés sur les résultats de la SGE. A nouveau, l'épaississement de la couche limite se répercute sur $\widehat{v}$ et $\widehat{w}$. Nous observons une forte injection de fluide $\widehat{w}$ près de la paroi basse qui compense en partie le déficit important au niveau de cette composante autour de $y = 0{,}01\ m$.

Résultats dans la section $x = 0{,}340\ m$ ce qui correspond à $x5/\chi = 1{,}388$

La section $x = 0{,}340\ m$ coupe le choc droit proche de la paroi haute et se trouve dans la zone où la couche limite décolle près de la paroi latérale droite. Le plan correspondant est représenté sur la figure (VII.37).

Nous présentons les profils des trois composantes de la vitesse dans le plan $z = 0{,}0413\ m$ sur les figures (VII.38) à (VII.40). On observe un étalement des gradients sur les profils de la composante longitudinale et l'apparition d'un décollement sur la paroi du haut qui n'est pas visible sur les expériences ni sur les résultats statistiques. Il est associé à l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite haute. La présence de ce décollement est néanmoins signalée expérimentalement sur la paroi haute [9] mais son étendue est surprédite par le SGE. Nous pouvons souligner que le déficit observé sur le profil de $\widehat{u}$ figure (VII.38) implique une accélération verticale du fluide plus importante. Le profil observé à cette station semble lié à la position plus amont de l'onde de choc dans nos résultats et nous avons tracé $\widehat{u}$ en $x = 0{,}332\ m$ sur la figure (VII.43) où on observe une courbe avec un profil plus proche de ceux observés expérimentalement et en RANS en $x = 0{,}340\ m$.

Nous présentons également les profils de $\widehat{u}$ et $\widehat{w}$ en $z = 0{,}1113\ m$. La forte variation de $\widehat{u}$ mesurée à cette station autour de $y = 0{,}02\ m$ est liée à l'épaississement de la couche limite

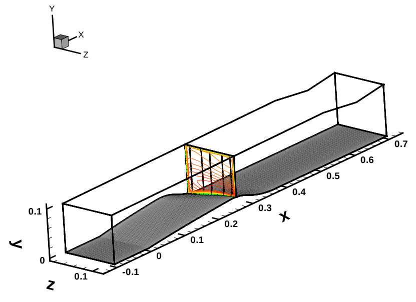


Fig. VII.26 – *Plan* $x = 0{,}290\ m$

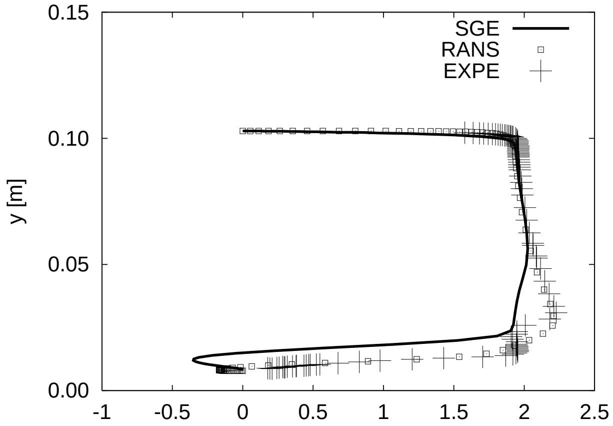


Fig. VII.27 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

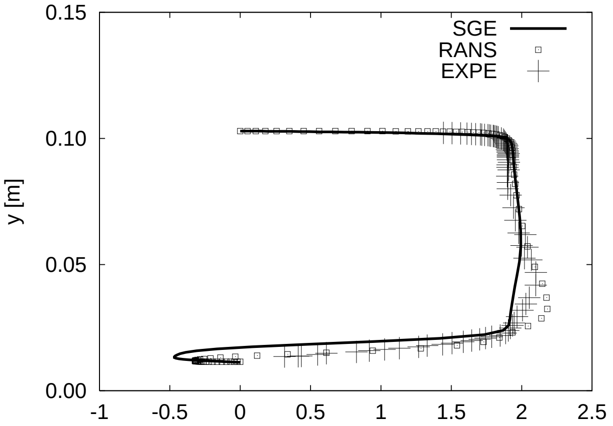


Fig. VII.28 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

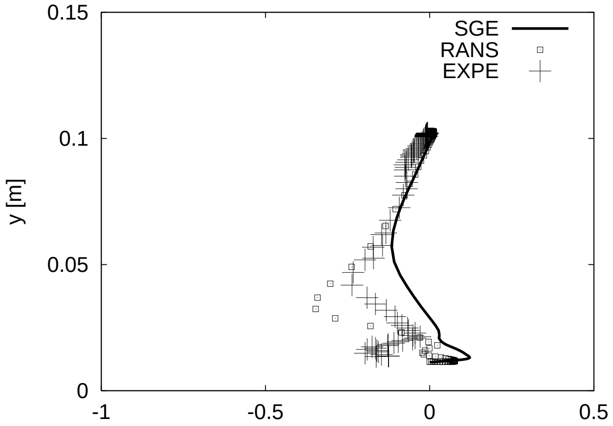


Fig. VII.29 – $\widehat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

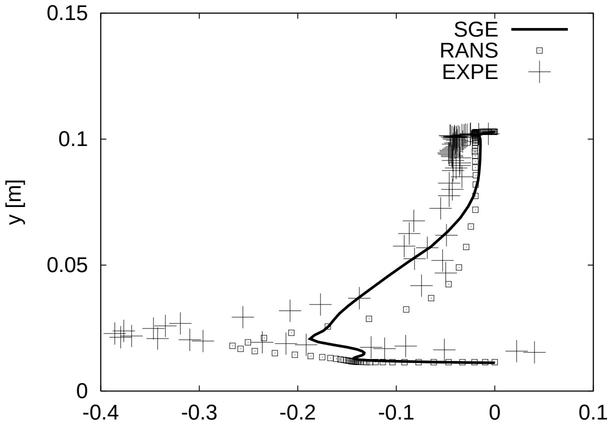


Fig. VII.30 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

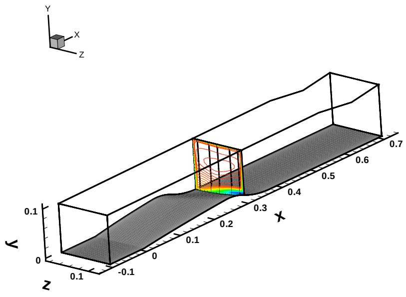


Fig. VII.31 – *Plan* $x = 0{,}310\ m$

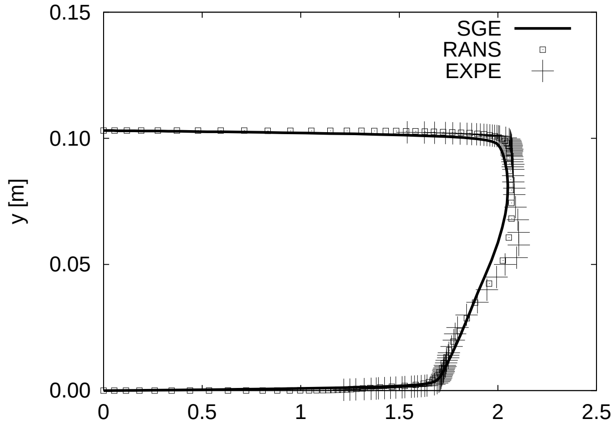


Fig. VII.32 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0113\ m$

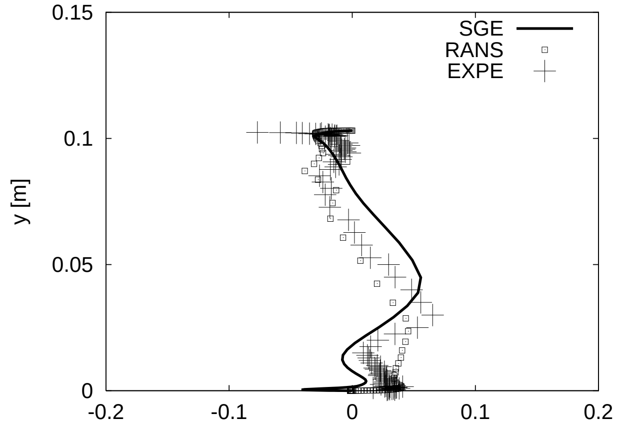


Fig. VII.33 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0113\ m$

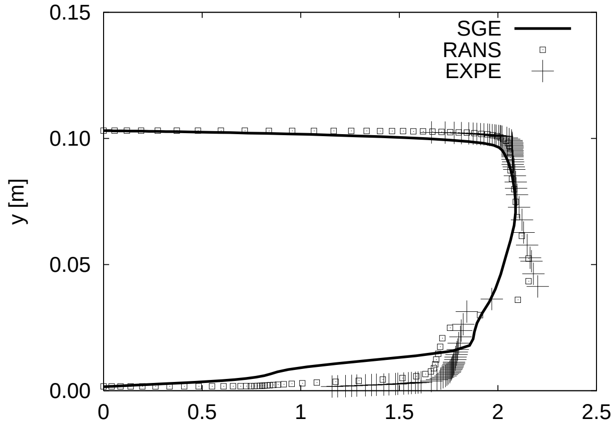


Fig. VII.34 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

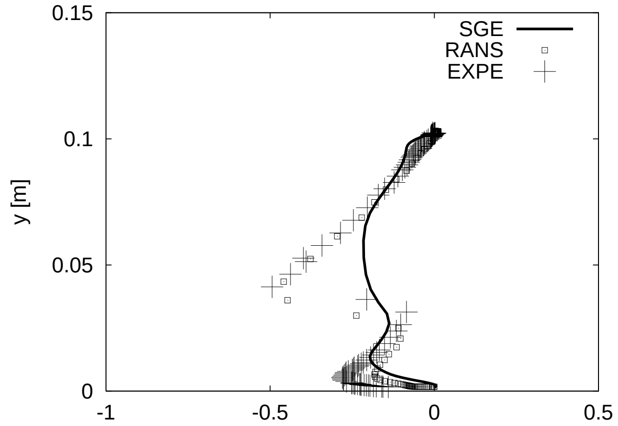


Fig. VII.35 – $\widehat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

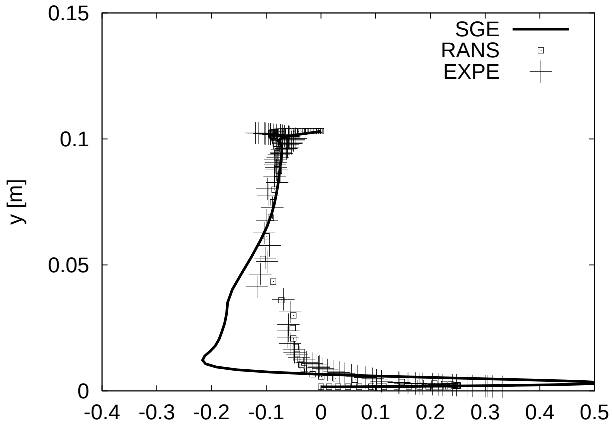


Fig. VII.36 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

à la suite de l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite [5]. Nous avions signalé au chapitre II qu'une lacune montrée par la simulation $R_{ij} - \varepsilon$ avec le modèle de Launder-Shima est la surprédiction de l'étendue de la zone de recirculation selon (Ox) comme le montre la figure (VII.41). Les expériences prédisent qu'à cette station la composante longitudinale est redevenue positive et que la couche limite a recollé. Les simulations statistiques prédisent au contraire que la couche limite est encore décollée à cette station. Ceci est dû à la sous estimation de la réalimentation du décollement par injection de fluide dans la direction transverse figures (VII.40) et (VII.42) par le modèle statistique. Nous pouvons souligner que la zone de recirculation est mieux alimentée par la composante verticale dont l'intensité est importante près de la paroi latérale dans les résultats de la SGE. Nous avons vu sur les résultats instationnaires, qu'une partie de la forte injection de fluide prédite par la SGE près de la paroi basse permet de destabiliser le large décollement prédit par RANS.

La destabilisation du décollement observée sur les résultats instationnaires est liée à la présence de la ligne de glissement observée sur les résultats de simulations statistiques autour de $y = 0{,}02\ m$ entre la zone de vitesse négative et la zone de vitesse positive. Cette zone se comporte localement comme une couche de mélange avec des échappées tourbillonaires.

Enfin, nous pouvons souligner que la brusque variation de $\widehat{u}$ près de la paroi basse correspond à la traversée d'un choc dont on voit apparaître la signature sur la composante transverse sur la figure (VI.41) [50].

Résultats dans la section $x = 0{,}360\ m$ soit $x6/\chi = 1{,}469$

La section $x = 0{,}360\ m$ coupe le choc oblique près de la paroi haute. Nous présentons les profils des composantes de la vitesse en $z = 0{,}0413\ m$. Nous observons un bon accord entre les résultats de la SGE et les expériences à cette station sur toutes les composantes de la vitesse comme le montrent les trois figures (VII.45), (VII.46) et (VII.47). On peut noter à nouveau la forte injection transversale de fluide proche de la paroi basse sur les résultats de la SGE figure (VII.47). Cette fois-ci par contre elle ne sert pas à compenser un déficit de vitesse hors de la couche limite comme c'était le cas dans le plan $x = 0{,}290\ m$, mais elle alimente la zone de recirculation de manière importante.

Les figures (VII.48), (VII.49) et (VII.50) représentent la vitesse en $z = 0{,}1113\ m$, proche de la paroi latérale droite. Les résultats observés sont très similaires à ceux observé en $x = 0{,}340\ m$ à la même côte z. La couche limite mesurée est toujours épaissie et n'a pas retrouvé son état d'équilibre d'avant l'interaction.

Résultats dans la section $x = 0{,}390\ m$ ou encore en $x7/\chi = 1{,}592$

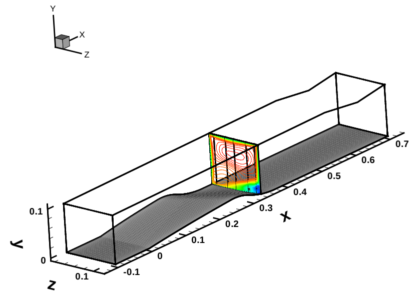


FIG. VII.37 – *Plan* $x = 0{,}340\ m$

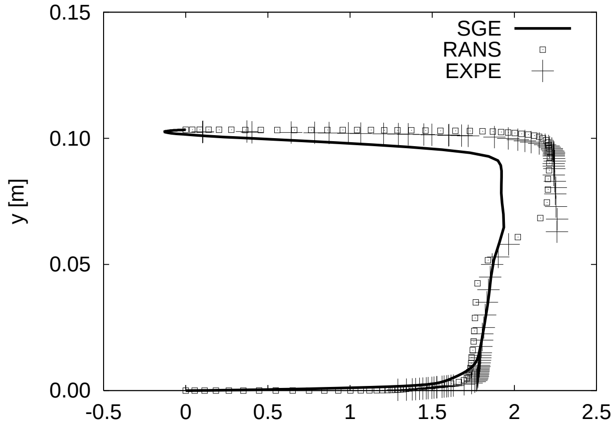


FIG. VII.38 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

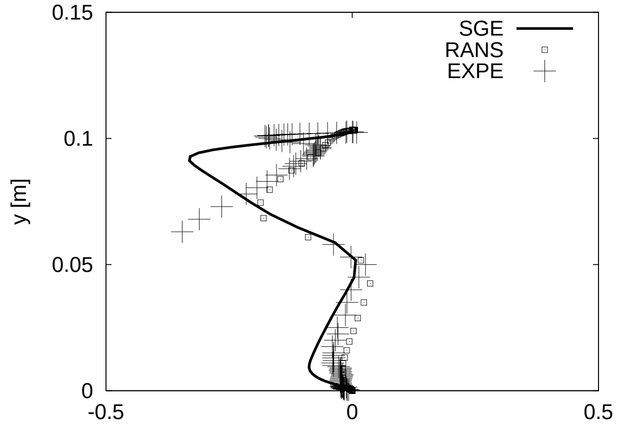


FIG. VII.39 – $\widehat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

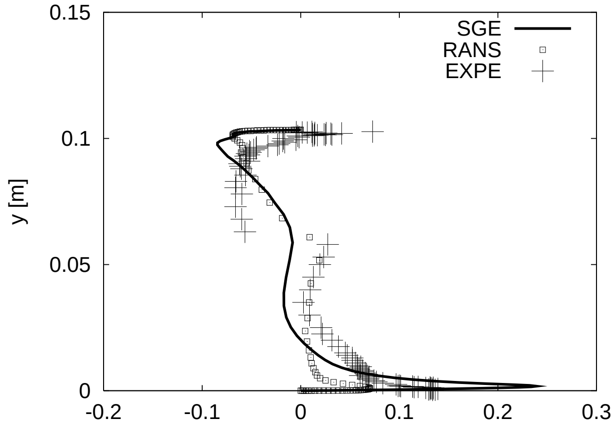


FIG. VII.40 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

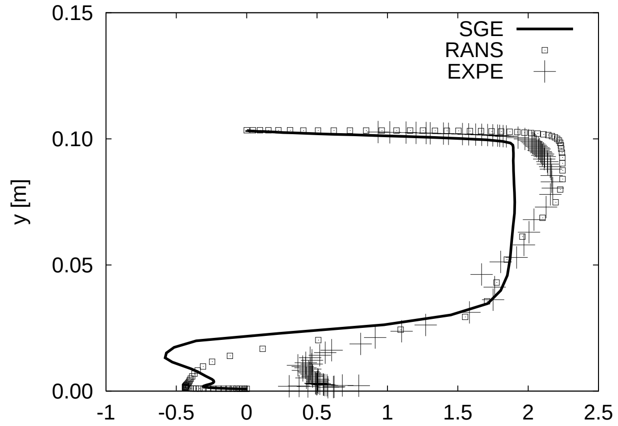


FIG. VII.41 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

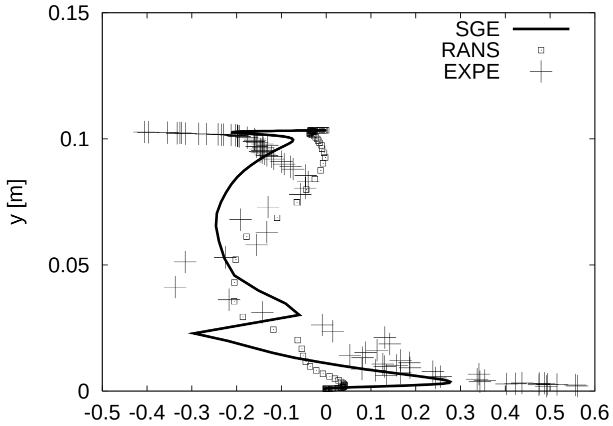


FIG. VII.42 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

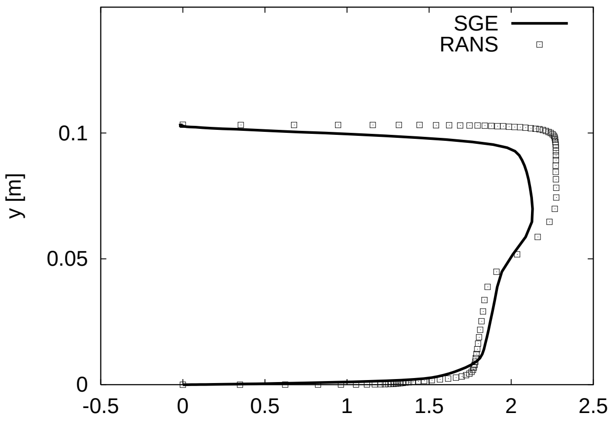


FIG. VII.43 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}320\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

Le plan $x = 0{,}390\ m$ est en aval de l'interaction onde de choc/couche limite pour les plans proches de la parois latérale gauche et coupe le choc droit sur la paroi haute proche de la paroi latérale droite.

On peut remarquer que ni les résultats statistiques ni les résultats de la SGE ne sont capables de prédire la complexité de l'écoulement près de la paroi haute que l'on observe sur les profils de la composante longitudinale, sur toute la largeur de la tuyère. A titre d'exemple la figure (VII.52) représente la vitesse longitudinale en $z = 0{,}0413\ m$. On peut remarquer le fort décollement de la couche limite haute prédit par la SGE associé à l'interaction du choc droit avec la couche limite haute. Nous présentons également $\widehat{u}$ et $\widehat{w}$ en $z = 0{,}1113\ m$. A nouveau, le calcul RANS prédit un décollement qui n'apparaît pas sur les résultats expérimentaux et il y a une structure tourbillonaire qui apparaît en SGE. Il y a une forte injection de fluide près de la paroi basse prédit par la SGE mais qui compense en partie le déficit observé sur $\widehat{w}$ en $y = 0{,}03\ m$, figure (VII.54)

On observe à nouveau la signature d'un choc sur les profils de la vitesse transverse qui n'apparaît pas sur les résultats expérimentaux. La forte injection de fluide proche de la paroi basse prédite par la SGE compense le déficit en $y = 0{,}03\ m$.

VII.2.4 Influence de l'initialisation sur le calcul des vitesses moyennes

Pour finir la présentation des résultats sur les profils des composantes de la vitesse moyenne, les profils de la vitesse moyennés sur un intervalle plus court sont présentés dans leur globalité en annexe, figures (B.12) à (B.14).

Nous observons que les différences sont observées principalement dans le cœur où la maillage est le plus lâche ainsi que dans la zone du décollement. Les profils sont très

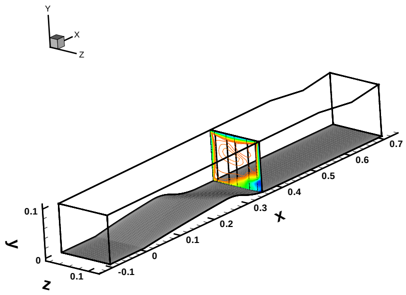


FIG. VII.44 – *Plan* $x = 0{,}360\ m$

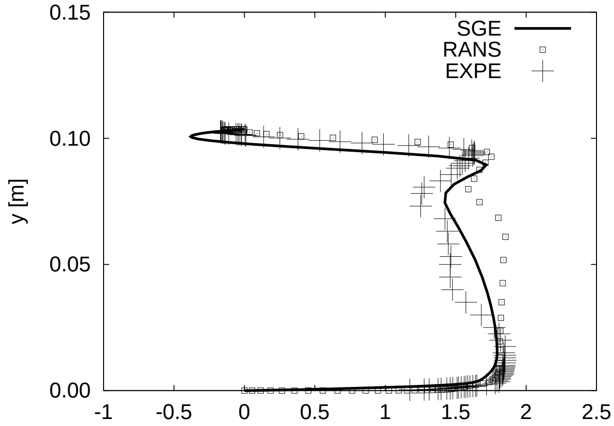


FIG. VII.45 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

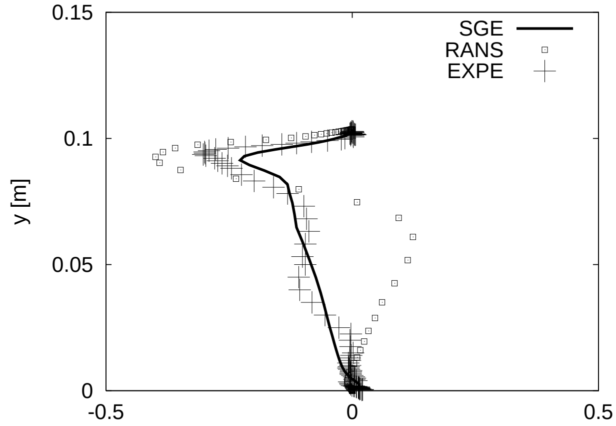


FIG. VII.46 – $\widehat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

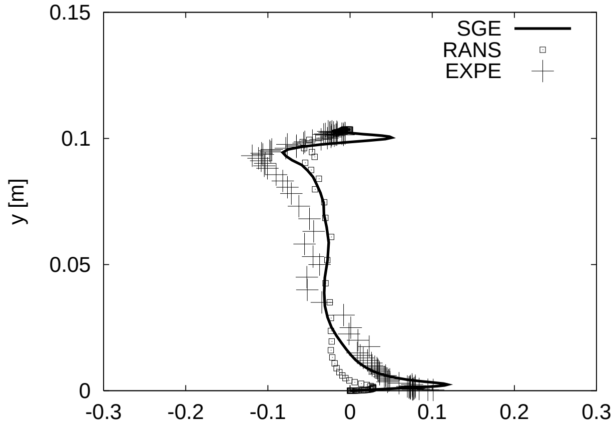


FIG. VII.47 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

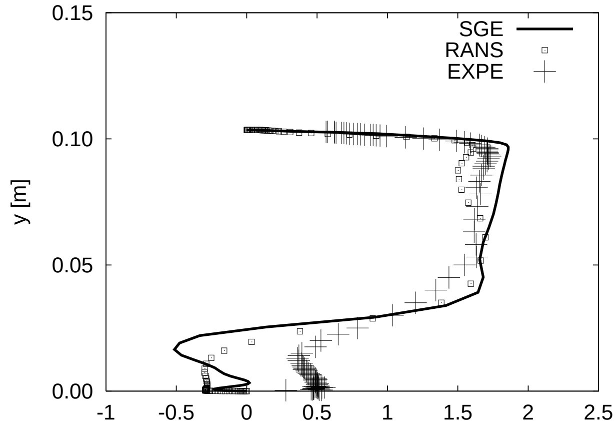


FIG. VII.48 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

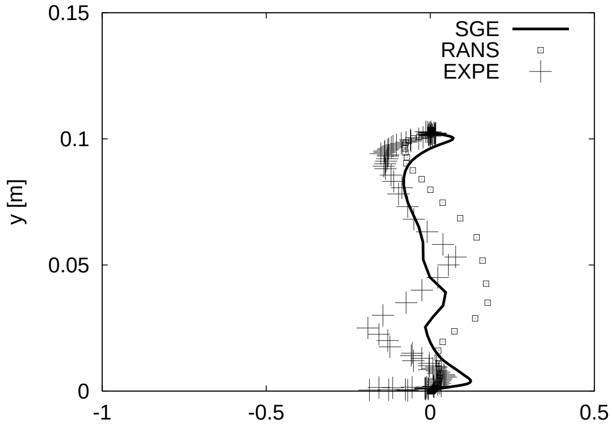


FIG. VII.49 – $\widehat{v}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

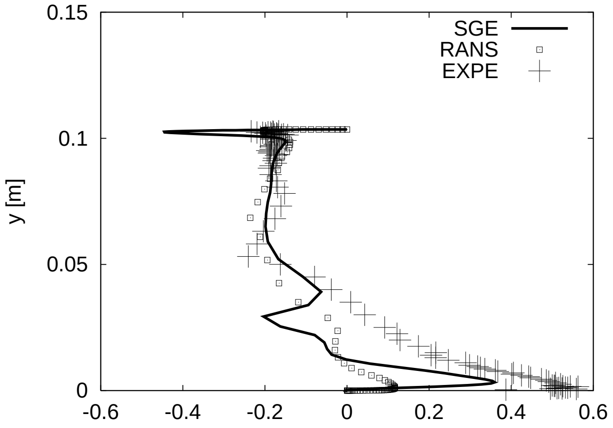


FIG. VII.50 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

perturbés en $z = 0{,}1113\ m$ en $x = 0{,}360\ m$ et $x = 0{,}390\ m$. Comme nous l'avons vu sur les résultats instationnaires dans le chapitre précédent, le décollement a été destabilisé d'une part par la forte injection de fluide dans la direction transverse en $x = 0{,}340\ m$, $x = 0{,}360\ m$ et $x = 0{,}390\ m$ et par la modification de la topologie de l'onde de choc qui présente une structure en lambda plus marquée en SGE proche de la paroi latérale droite.

VII.2.5 Conclusion sur les valeurs de la vitesse moyenne

Les résultats sur la vitesse dans la partie convergente jusqu'en $x = 0{,}230\ m$ soit $x/\chi = 0{,}939$ sont en assez bon accord avec les résultats statistiques et expérimentaux. L'épaississement des couches limites observé à cette station est probablement lié à une dissipation très importante introduite par la modélisation de sous maille et qui ralentit le fluide dans les couches limites entraînant leur épaississement. Nous utilisons la fonction de Scotti à la limite de son domaine de validité et nous ne modélisons pas tous les termes de sous maille. Il y a également un effet très important du maillage que nous utilisons, qui est très lâche dans le cœur et très anisotrope aux parois.

Nous avons observé sur les résultats près de la paroi basse de grandes différences entre nos résultats, les résultats expérimentaux et les simulations RANS dans la partie convergente en aval de $x = 0{,}250\ m$. Ces résultats viennent des différences sur la pression prédite par la SGE et RANS. Nous observons sur nos résultats un étalement du choc et des niveaux de pression dans les chocs supérieurs à ceux prédits par l'expérience et les simulations RANS. Il y a peu de simulations d'interaction entre une onde de choc et une couche limite en SGE, couplant un modèle de sous maille avec un schéma à capture de choc. On peut citer la simulation de l'interaction entre l'onde de choc/couche limite en

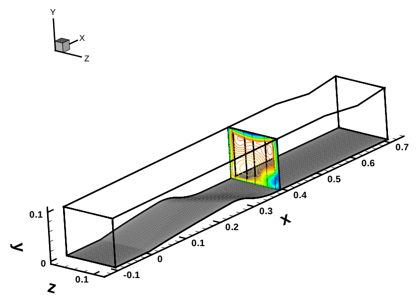


FIG. VII.51 – *Plan* $x = 0{,}390\ m$

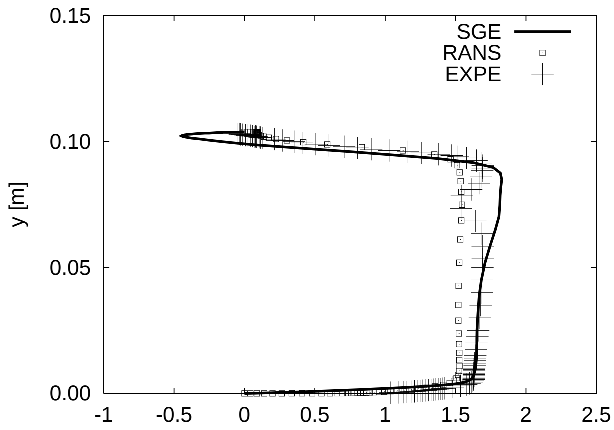


FIG. VII.52 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

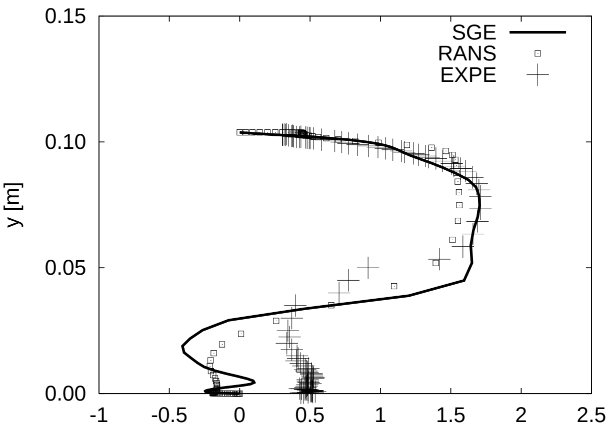


FIG. VII.53 – $\widehat{u}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

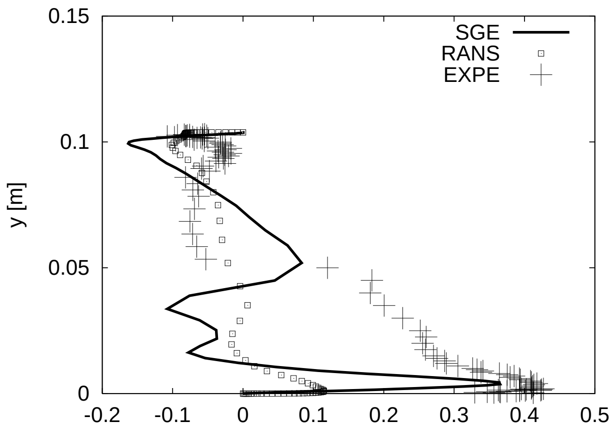


FIG. VII.54 – $\widehat{w}/u_{ref}$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

2D avec une schéma WENO et le senseur de Ducros [29] utilisant un modèle de sous maille dynamique, qui montre l'importance d'une bonne résolution en maillage dans le choc pour capturer correctement l'amplification de la turbulence avec le schéma utilisé. Comme nous l'avons déjà souligné à plusieurs reprises, le schéma que nous utilisons, et qui a été choisi initialement pour assurer une certaine robustesse aux calculs, est en fait plutôt dissipatif et sensible au maillage utilisé [74]. L'utilisation d'un schéma à capture de choc de type WENO semble plus indiqué pour améliorer les résultats sur les profils des vitesses moyennes.

Concernant les résultats après le col, nous prédisons un décollement proche de la paroi haute. Il a été signalé dans les expériences [9] mais nous surestimons la zone décollée. La SGE prédit un très fort épaississement des couches limites. Près de la paroi basse, ni les résultats statistiques, ni les résultats de la SGE ne prédisent l'écoulement mesuré même si nous avons vu lors de la présentation des résultats instationnaires que la structure de l'écoulement en SGE sous le choc en lambda est différente de celle obtenue par la simulation RANS. Par exemple, si l'on se base sur la figure (VII.41) où nous avons tracé la vitesse longitudinale dans la zone où la couche limite décolle, nous prédisons une vitesse minimale de l'ordre de $-0{,}5$ sans dimension, comme RANS, tandis que l'expérience prédit une valeur minimale plutôt de l'ordre de 0,5. Cela représente une erreur de 200% !

En revanche, nous avons vu que la simulation des grandes échelles capture correctement les plateaux de pression (et donc du nombre de Mach isentropique) associés aux zones de recirculation du fluide. Un autre résultat intéressant de la simulation vient de la forte injection de fluide dans la zone de décollement. Enfin on observe sur les résultats instationnaires la formation d'un choc en lambda proche de la paroi latérale droite qui n'est pas prédit sur les résultats statistiques.

VII.3 Résultats sur les profils des tensions de Reynolds

VII.3.1 Résultats sur les profils des tensions de Reynolds dans chaque plan x fixé

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus sur les profils des tensions de Reynolds dans chaque plan de mesure x fixé comme pour les composantes de la vitesse moyenne. Les tensions de Reynolds sont obtenues à partir de nos variables filtrées par la formule ci-dessous (voir en annexe pour le détail des approximations) :

$$\widehat{u_i''' u_j'''} = \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} - \frac{(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \rangle)(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_j} \rangle)}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2} \tag{VII.1}$$

A nouveau, sur chaque figure, les croix correspondent aux points expérimentaux, les losanges correspondent à la simulation statistique et le trait représente les résultats de la SGE. Toutes les corrélations sont rendues sans dimension par la vitesse de référence à l'entrée $u_{ref} = 200\ m\ s^{-1}$. De même que pour la vitesse moyenne, toutes les courbes sont réunies en annexe à la fin du document figures (B.8) à (B.11). Nous n'avons pas mis les courbes relatives aux résultats sur $\widehat{w'''w'''}$ car la SGE sous-estime ces corrélations à tous les points expérimentaux. Nous avons également placé une tuyère avec les courbes que nous commentons. Les cinq lignes selon lesquelles nous avons des valeurs expérimentales sont représentées dans le plan x étudié, de même que les isovaleurs des corrélations longitudinales. Nous pouvons observer que le maximum des valeurs des tensions sont confinés très près des parois jusqu'au plan $x = 0{,}310\ m$.

Les tensions de Reynolds évoluent lentement car comme on le verra à la fin de cette partie consacrée aux résultats sur les tensions de Reynolds, il y a une forte influence de l'initialisation qui masque l'évolution des tensions prédites par la SGE. Nous avons observé que l'intensité des pics turbulents qui apparaîssent sur les différentes corrélations dans le cœur, et qui correspondent à l'interaction entre l'onde de choc et la turbulence, ont tendance à augmenter en intensité et à s'étaler au cours du calcul.

Une analyse des profils dans toute la tuyère montre que nous sous-estimons très largement les corrélations transverses $\widehat{v'''v'''}$ et $\widehat{w'''w'''}$ sauf en présence du choc et dans le décollement. Nous surestimons également les corrélations longitudinales $\widehat{u'''u'''}$ et les corrélations croisées $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ en présence de choc. Concernant les corrélations croisées, les tensions $\widehat{v'''w'''}$ étant très inférieures à $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ dans toute la tuyère, nous ne présentons que les résultats sur ces deux dernières. De plus, ce sont $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ qui sont principalement responsables de la production turbulente. Nous avons remarqué que $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ étaient toujours sous-estimées proche de la paroi du haut sauf en présence du choc.

Un résultat important des calculs SGE dans la tuyère est la capacité de la méthode à prédire la présence du choc dans le cœur de la tuyère, contrairement aux résultats statistiques obtenus avec le modèle de Launder-Shima. La présence du choc apparaît sur les corrélations turbulentes à travers l'amplification de la turbulence liée à l'interaction onde de choc/turbulence [27]. On observe tout de même un étalement des courbes lié à l'étalement des gradients.

Résultats dans la section $x = 0{,}230\ m$ ou encore $x1/\chi = 0{,}939$

Pour chaque plan où nous comparons nos résultats aux résultats expérimentaux, nous avons représenter une tuyère avec à chaque fois les isovaleurs des corrélations longitudinales dans le plan considéré. Nous pouvons remarquer figure (VII.55) que les isovaleurs sont non nulles proche des parois latérales et haute et basse. Nous présentons trois courbes représentatives des résultats sur $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ en $z = 0{,}0613\ m$ figures (VII.56) à (VII.58).

Nous avons des corrélations $\widehat{u'''u'''}$ légèrement plus faibles en intensité que les tensions calculées par RANS. On remarque que les pics sont correctement positionnés même si on observe un léger épaississement sur les courbes de la SGE à relier aux différences que nous avons mis en évidence entre la SGE et RANS sur les gradients à la paroi des profils des vitesses. Ceci peut également expliquer l'intensité plus faible puisque $\widehat{u}$ varie plus lentement.

Comme nous l'avons signalé, les corrélations transverses ne sont pas correctement calculées proche de la paroi haute en absence de choc. Nous discutons de ce résultat dans un paragraphe à part à la fin de la présentation des résultats sur les tensions de Reynolds en nous intéressant à la contribution de chaque terme de l'équation (VII.1). La SGE prédit une intensité turbulente $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ inférieure à celle simulée par RANS proche de la paroi basse plu en accord avec les expériences.

Résultats dans la section $x = 0{,}270\ m$ ou encore $x2/\chi = 1{,}102$

Les résultats à cette section, du fait de l'épaississement observé sur les profils de la vitesse moyenne, et donc de la présence trop en amont du choc, sont largement surestimées. Elles sont d'un ordre de grandeur supérieur à celles en $x = 0{,}230\ m$ sauf les corrélations $\widehat{u'''w'''}$ qui restent du même ordre de grandeur. On peut l'observer sur les figures (VII.60), (VII.61) et (VII.62) représentant les intensités turbulentes $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ en $z = 0{,}0613\ m$. On note sur les intensités $\widehat{u'''v'''}$ la présence de l'interaction de l'onde de choc avec la couche limite que l'on retrouve aussi en $z = 0{,}1113\ m$ figures (VII.63), (VII.64), (VII.65).

Le second pic négatif observé sur les corrélations $\widehat{u'''w'''}$ proche de la paroi basse sur la figure (VII.62) semble venir du couplage entre la vitesse moyenne longitudinale moins importante dans les couches limites et les valeurs plus importantes en valeur absolue de la valeur moyenne $\hat{w}$ dans cette zone figures (VII.17) et (VII.19). Les intensités de $\widehat{u'''u'''}$ et de $\widehat{u'''v'''}$ sont mieux prédites proches de la paroi latérale droite.

Nous pouvons remarquer sur les figures (VII.63) et (VII.64) que la largeur du pic des intensités turbulentes prédites par l'expériences proche de la paroi basse est plus large que celle prédite par les résultats statistiques et que les résultats de la SGE vont plutôt dans le sens des expériences.

Résultats dans la section $x = 0{,}290\ m$, soit $x3/\chi = 1{,}183$

A partir de cette station nous présentons les corrélations $\widehat{v'''v'''}$ en plus des intensités $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$. Elles sont données en annexe figure (B.9).

On observe à nouveau figure (VII.67) que les corrélations longitudinales $\widehat{u'''u'''}$ en $z = 0{,}0613\ m$ sont surestimées. Nous pouvons souligner que l'intensité de toutes les corrélations est 10 fois supérieure à celle prédite et mesurée en $x = 0{,}230\ m$ en présence du choc.

Les corrélations croisées $\widehat{u'''v'''}$ ont également tendance à être surestimées comme on peut le voir sur la figure (VII.69) en $z = 0{,}0613\ m$. La position des pics d'intensité turbulente est décalée par rapport à l'expérience avec une élargissement de leur largeur. Néanmoins la présence du choc, mesurée expérimentalement autour de $y = 0{,}025\ m$ sur les corrélations $\widehat{v'''v'''}$ et $\widehat{u'''v'''}$ en $z = 0{,}0613\ m$ figures (VII.68) et (VII.69), en accord avec les distributions expérimentales du Mach isentropique, est visible sur les résultats de la SGE mais pas sur les résultats statistiques avec le modèle de Launder-Shima. La capture de l'amplification de la turbulence associée à l'interaction entre la turbulence et l'onde de choc par la SGE [28] est un point très positif pour cette méthodologie. Nous regardons à la fin de cette partie l'influence de l'initialisation et la turbulence initiale contenue dans nos résultats. Nous pouvons souligner que les pics observés sur $\widehat{u'''v'''}$ sont propres à la SGE dans la mesure où même s'ils sont longs à croître ils apparaîssent encore après avoir moyenné les quantités sur un temps plus court, comme nous le verrons dans le dernier paragraphe à la fin de ce chapitre.

Comme nous le verrons, d'une façon très globale, les caractéristiques de la turbulence sont finalement assez bien prédites en présence du choc par rapport à la modélisation statistique. On peut remarquer que la largeur du pic calculée par la SGE est trop importante, dû à l'étalement du choc.

Le pic d'intensité positive des corrélations transverses $\widehat{u'''w'''}$ en $z = 0{,}0613\ m$ est mal positionné par rapport à la paroi basse en comparaison des mesures. Sa forme est liée à la mauvaise prédiction du gradient de la vitesse moyenne longitudinale à cette station (voir figure (B.8) en $z = 0{,}0613\ m$). Nous ne voyons pas apparaître le pic mesuré juste en dessous de $y = 0{,}05\ m$ ni sur les résultats statistiques ni sur les résultats de la SGE. Ce phénomène est associé au gradient de vitesse longitudinale que l'on a observé expérimentalement à cette station sur la figure (VII.27).

Les corrélations longitudinales sont par contre bien prédites par la SGE proche de la paroi latérale droite figure (VII.71) avec un pic bien positionné et avec la bonne intensité par rapport aux expériences. Cette station correspond dans l'expérience au début de la zone de recirculation. Le pic turbulent associé aux résultats RANS dans le décollement est également en accord avec l'expérience.

Résultats dans la section $x = 0{,}310\ m$, soit $x4/\chi = 1{,}265$

A cette station nous prédisons une forte amplification de la turbulence proche de la paroi haute comme le montrent $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{v'''v'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ sur les figures (VII.73) à (VII.76) en $z = 0{,}0413\ m$. Il faut remarquer que la SGE prédit des valeurs importantes de $\widehat{v'''v'''}$, de $\widehat{u'''v'''}$ et de $\widehat{u'''w'''}$ proche de la paroi haute ce qui n'était pas le cas jusque là. En regardant les résultats de la SGE sur la vitesse moyenne longitudinale à cette station on observe un faible décollement. Le haut du choc interagit avec la couche limite générant un pic similaire à celui déjà observé en $x = 0{,}270\ m$ proche de la paroi basse sur les corrélations longitudinales figure (VII.60).

La SGE, contrairement aux résultats statistiques, prédisent le pic turbulent mesuré expérimentalement proche de $y = 0{,}050\ m$ en $z = 0{,}0413\ m$ sur les corrélations $\widehat{v'''v'''}$ et $\widehat{u'''v'''}$ figures (VII.74) et (VII.75). A nouveau nous observons un fort étalement du pic sur nos résultats. Il y a certainement un effet du maillage sur les résultats obtenus mais qui n'explique néanmoins pas à lui seul l'élargissement observé. Par exemple on a le même phénomène en $x = 0{,}290\ m$ et $z = 0{,}0613\ m$ sur $\widehat{v'''v'''}$ plus proche de la paroi basse donc dans une zone où le maillage est plus raffiné selon (Oy). L'étalement est également lié à l'étalement des gradients sur les profils de $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$.

Enfin la figure (VII.77) représente les corrélations longitudinales $\widehat{u'''u'''}$ en $z = 0{,}1113\ m$ dans le décollement. Il apparaît que l'intensité turbulente proche de la paroi basse dans le décollement est surestimée mais le double pic mesuré expérimentalement est correctement positionné sur l'axe (Oy). On peut noter à nouveau que les résultats statistiques prédisent correctement l'intensité turbulente dans le décollement mais on ne voit pas apparaître de double pic.

Résultats dans la section $x = 0{,}340\ m$, soit $x5/\chi = 1{,}388$

Expérimentalement $x = 0{,}340\ m$ et $x = 0{,}360\ m$ encadrent la position du choc droit proche de la paroi haute [9]. Les courbes présentent les mêmes caractéristiques globales que toutes les courbes présentées précédemment en $x = 0{,}310\ m$.

La figure (VII.79) montre que la SGE capture bien les fluctuations de $\widehat{v'''v'''}$ mesurées expérimentalement en $z = 0{,}0613\ m$, malgré un épaississement des pics turbulents aussi bien proche de la paroi basse que de la paroi haute. Le pic mesuré expérimentalement autour de $y = 0{,}08\ m$ correspond à la brusque variation de la vitesse longitudinale proche de la paroi haute en $x = 0{,}340\ m$ figure (B.5). Le pic plus proche de la paroi haute prédit par la SGE correspond probablement au décollement de la couche limite prédit par la SGE sur toute la largeur de la tuyère puisque nous avons déjà souligné le fait que les corrélations $\widehat{v'''v'''}$ sont mieux prédites en présence d'une zone décollée (ou d'un choc également). Le pic proche de la paroi basse semble correspondre à la présence du choc mis en évidence sur $\widehat{w}$ dans la section précédente figure (VII.42).

Nous présentons figures (VII.80) à (VII.83) les tensions de Reynolds $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{v'''v'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ en $z = 0{,}1113\ m$ pour souligner le bon accord entre la SGE et les autres courbes à cette station. Les corrélations $\widehat{u'''u'''}$ et $\widehat{v'''v'''}$ et la production turbulente importante observée sur $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ sur les résultats expérimentaux et statistiques correspondent à la couche limite, perturbée par l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite, qui relaxe lentement vers son état d'équilibre [21]. Concernant les résultats de la SGE, nous verrons que ces pics persistent lorsqu'on moyenne les quantités sur un temps plus court figure (VII.119).

Résultats dans la section $x = 0{,}360\ m$, soit encore $x6/\chi = 1{,}469$

Nous présentons les corrélations $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{v'''v'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ en $z = 0{,}0113\ m$, en $z = 0{,}0613\ m$ et $z = 0{,}1113\ m$ figures (VII.85) à (VII.96).

Les corrélations $\widehat{u'''u'''}$ mesurées expérimentalement en $z = 0{,}0113\ m$ figure (VII.85) ont une intensité importante proche de la paroi haute liée à l'épaississement de la couche limite qui interagit avec le choc droit. Nous pouvons souligner que l'intensité qui était sous-estimée par une modélisation de type $k - \varepsilon$ est mieux prédite par $R_{ij} - \varepsilon$ comme le montre la figure [9]. Nous rappelons que la modélisation de type $k - \varepsilon$ est une modélisation scalaire de la viscosité turbulente à partir de k et ε qui permet alors de modéliser les tensions de Reynolds par une hypothèse de Boussinesq, et donc de fermer les équations de quantité de mouvement. La modélisation $R_{ij} - \varepsilon$ résout une équation de transport pour chaque tension de Reynolds pour fermer les équations de quantité de mouvement. La modélisation $R_{ij} - \varepsilon$ plus proche de la physique des écoulements donne de meilleurs résultats que $k - \varepsilon$. Les modèles $k - \varepsilon$ sont connus pour prédire une relaxation de la couche limite trop rapide en aval de l'interaction et donc une décroissance trop rapide de la turbulence.

Nous ne capturons pas le pic du milieu mesuré expérimentalement sur les corrélations longitudinales figure (VII.85), mais il est difficile à interpréter à partir des résultats expérimentaux sur les profils des vitesses moyennes où il n'y a pas de discontinuité qui apparaît. Il doit correspondre expérimentalement à la traversée du pied du choc en lambda qui est légèrement incliné. On le retrouve sur les mesures des corrélations $\widehat{u'''w'''}$. Les intensités turbulentes des corrélations transverses $\widehat{v'''v'''}$ prédites par la SGE sont très étalées mais le pic proche de $y = 0{,}05\ m$ semble associé à celui mesuré expérimentalement un peu plus bas. L'intensité turbulente de cette corrélation est sous-estimée à la paroi basse puisqu'il n'y a pas le choc à cette station de ce côté de la paroi en bas. Nous avons du mal à expliquer le signe négatif de $\widehat{u'''v'''}$ proche de la paroi haute. Il est possible qu'il vienne de la composante longitudinale de la vitesse qui est négative proche de la paroi haute et qui n'est pas compensée par la composante verticale $\widehat{v}$ à cette station. Quand à $\widehat{u'''w'''}$ elles sont bien simulées proche de la paroi haute peut-être grâce à la forte injection de $\widehat{w}$ figure (B.7) en annexe en $z = 0{,}0113\ m$.

Les figures (VII.89) à (VII.92) représentent les tensions de Reynolds en $z = 0{,}0613\ m$ au milieu de la tuyère. Les intensités dans le cœur sont importantes avec à nouveau un fort épaississement des courbes et une surprédiction des intensités turbulentes. Nous voyons apparaître sur les courbes de la SGE les deux pics d'intensité différente l'un au dessus de l'autre selon (Oy) associés à l'interaction onde de choc/couche limite. Ils sont également observés expérimentalement même si les intensités sont moins importantes. Nous pouvons également souligner que la SGE ne prédit pas les pics tout à fait au même endroit selon (Oy) que l'expérience. On observe de même que les intensités turbulentes calculées avec la simulation RANS sont bien prédites avec une bonne épaisseur près de la paroi haute. Contrairement aux stations précédentes où le choc droit n'apparaîssait que proche de la paroi haute, nous nous trouvons à une station où le choc droit est situé sur toute la hauteur de la tuyère. Le pic sur la courbe de $\widehat{v'''v'''}$ est décalé par rapport à l'expérience et il correspond au décollement proche de la paroi haute. Nous ne calculons pas correctement $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$, sauf proche de la paroi haute pour $\widehat{u'''w'''}$. La forte prédiction négative de $\widehat{u'''v'''}$ proche de la paroi haute est associée au décollement prédit sur les résultats de la vitesse longitudinale moyenne. La brusque variation de $\widehat{u'''w'''}$ correspond aux discontinuités que l'on observe sur le profil de la composante transverse $\widehat{w}$ figure (VII.50).

Concernant les résultats en $z = 0{,}1113\ m$, le pic mesuré expérimentalement autour de $y = 0{,}035$ figures (VII.93) et (VII.94) correspond à l'épaississement de la couche limite qui relaxe lentement vers son état d'équilibre, après son interaction avec l'onde de choc. A nouveau nous pouvons noter que $\widehat{v'''v'''}$ n'est plus prédit correctement proche de la paroi haute. Concernant enfin les corrélations transverses $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ nous prédisons une brusque variation, visible proche de la paroi basse, que l'on ne retrouve pas sur les expériences, associée comme nous l'avons déjà souligner aux discontinuités que l'on observe sur le profil de la composante transverse $\widehat{w}$.

Résultats dans la section $x = 0{,}390\ m$, soit $x7/\chi = 1{,}592$

Nous présentons les résultats obtenus sur les tensions de Reynolds $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ en $x = 0{,}290\ m$ et $z = 0{,}0613\ m$ figures (VII.98) à (VII.100). Nous pouvons observer à nouveau sur les résultats expérimentaux, statistiques et de la SGE la forte intensité proche de la paroi haute associée à la couche limite haute qui relaxe lentement vers son état d'équilibre après l'interaction avec l'onde de choc haute. La position du pic est correctement prédite par la SGE pour les corrélations longitudinales tandis qu'il est trop bas pour $\widehat{u'''v'''}$.

Nous obtenons le même type de résultats sur les corrélations présentées en $z = 0{,}1113\ m$ près de la paroi haute. La SGE prédit un profil très proche de celui mesuré expérimentalement autour de $y = 0{,}04\ m$ sur les résultats de $\widehat{u'''u'''}$ contrairement à RANS. Ni la méthode statistique, ni la SGE n'est capable de prédire la forme expérimentale de $\widehat{v'''v'''}$. Nous pouvons noter que le pic d'intensité turbulente qui se trouvait près de la paroi basse sur les corrélations longitudinales $\widehat{u'''u'''}$ plus en amont près de la paroi latérale droite, en $x = 0{,}310\ m$, est de plus en plus détaché de la paroi basse. Ceci s'explique par le fait que le terme de production de $\widehat{u'''u'''}$, positif dans da zone d'interaction, est fonction de $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ et de $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ [21]. La position du maxima d'intensité turbulente dépend donc de la distribution des gradients selon (Oy) et (Ox).

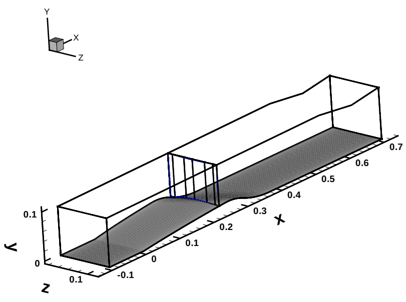


FIG. VII.55 – *Plan* $x = 0{,}230\ m$

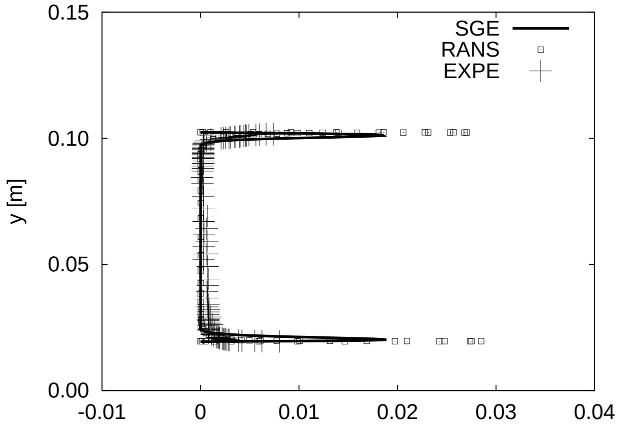


FIG. VII.56 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

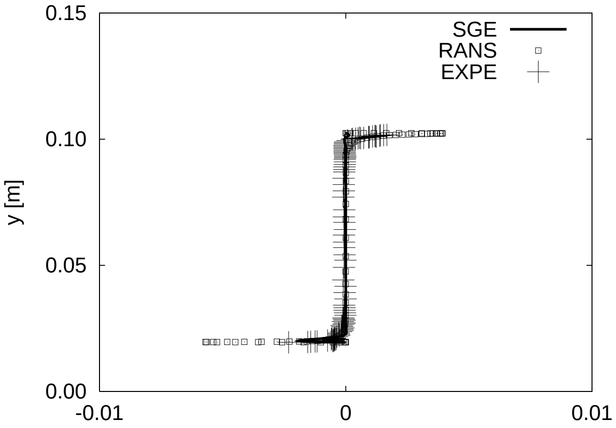


FIG. VII.57 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

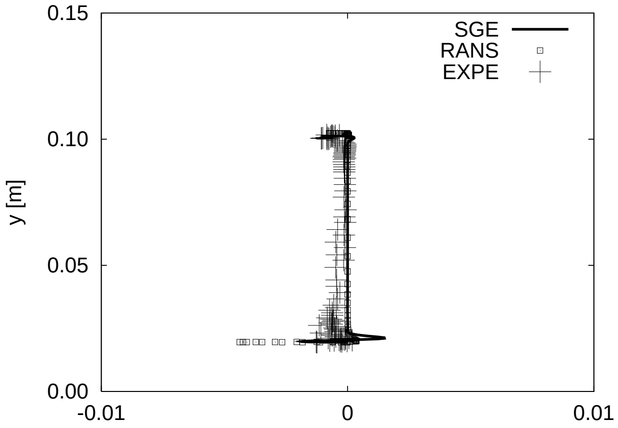


FIG. VII.58 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

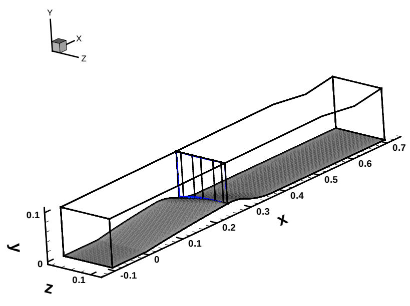


FIG. VII.59 – *Plan* $x = 0{,}270\ m$

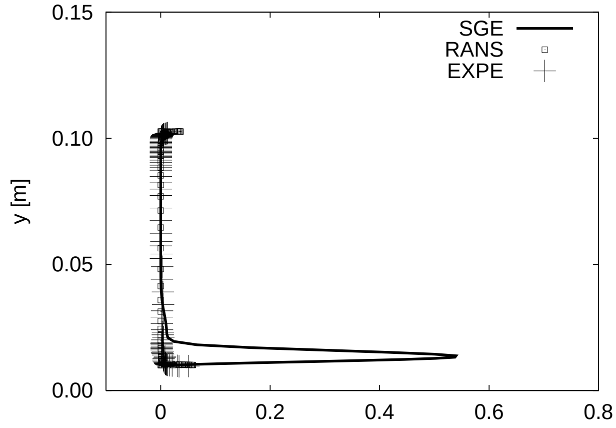


FIG. VII.60 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

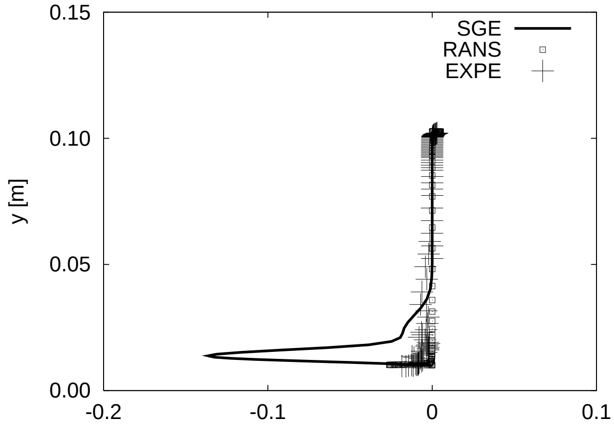


FIG. VII.61 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

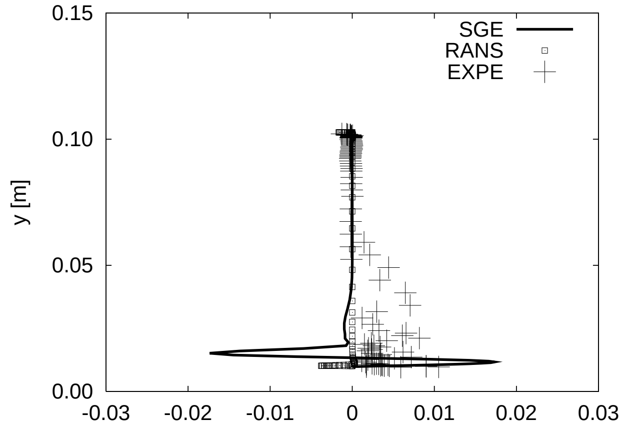


FIG. VII.62 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

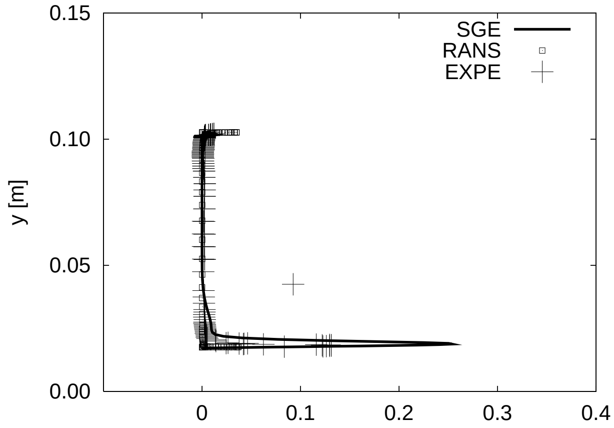


FIG. VII.63 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

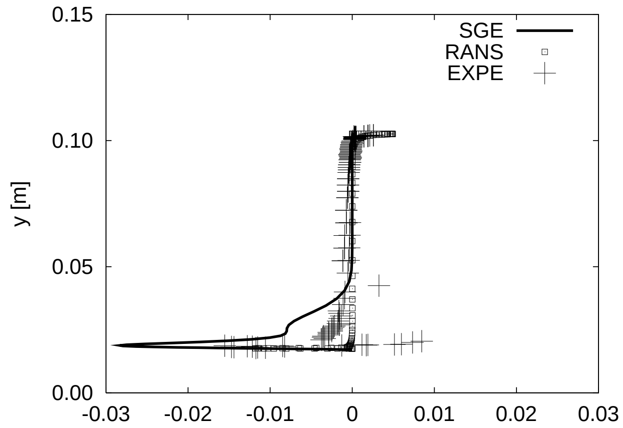


FIG. VII.64 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

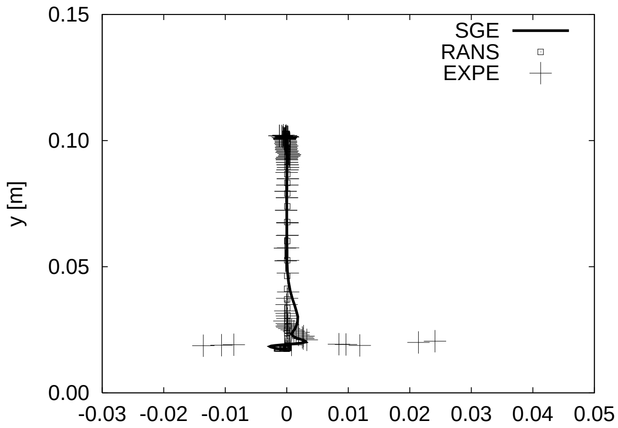


FIG. VII.65 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}270\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

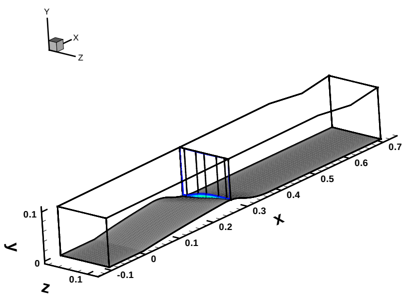


FIG. VII.66 – *Plan* $x = 0{,}290\ m$

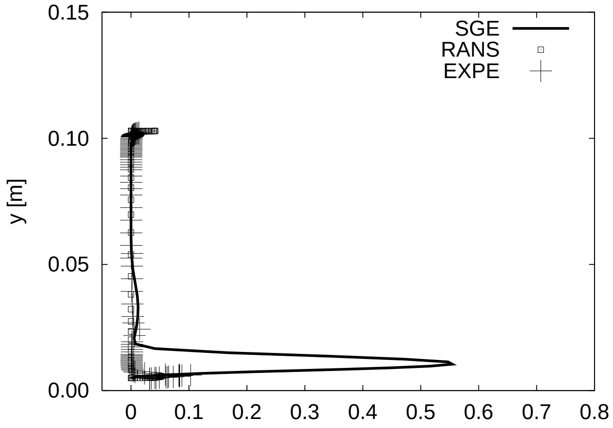


FIG. VII.67 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

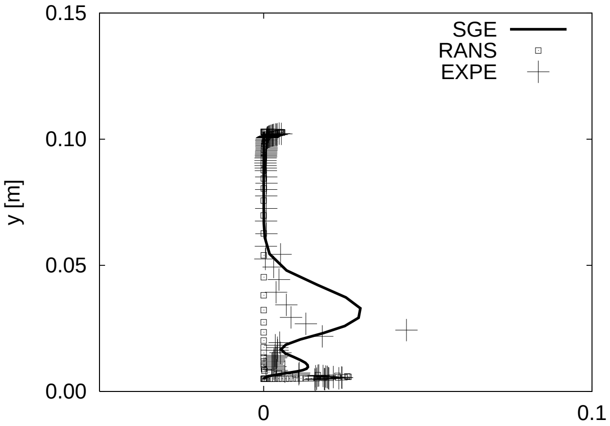


FIG. VII.68 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

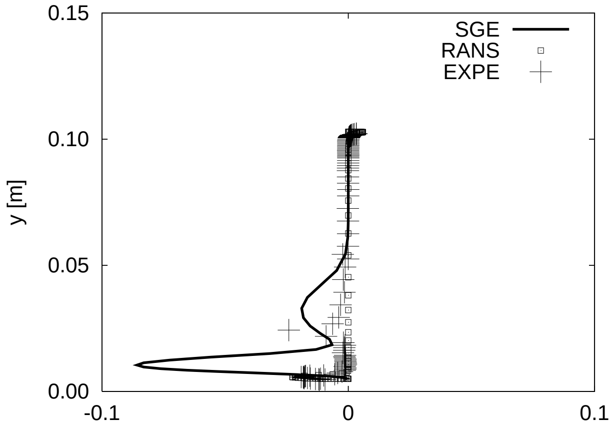


FIG. VII.69 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

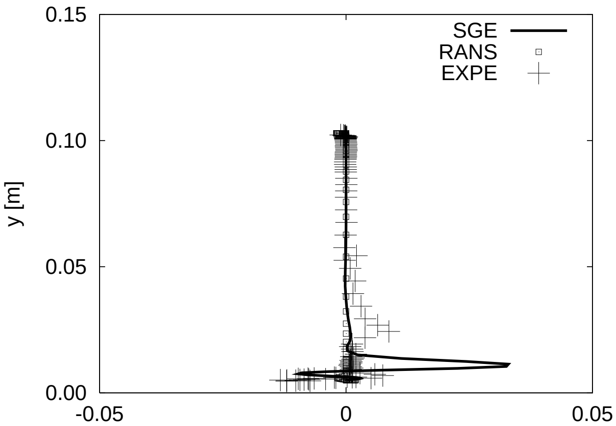


FIG. VII.70 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

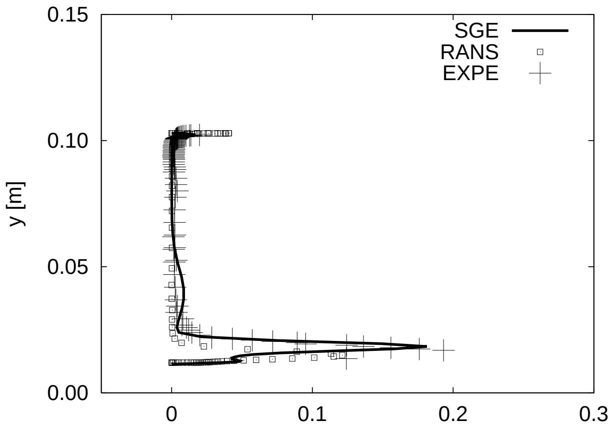


FIG. VII.71 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

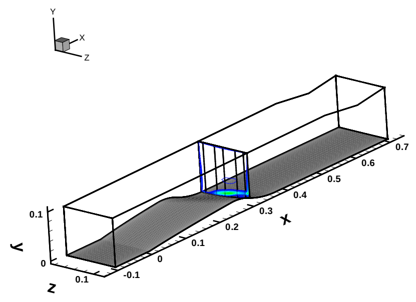


FIG. VII.72 – *Plan* $x = 0{,}310\ m$

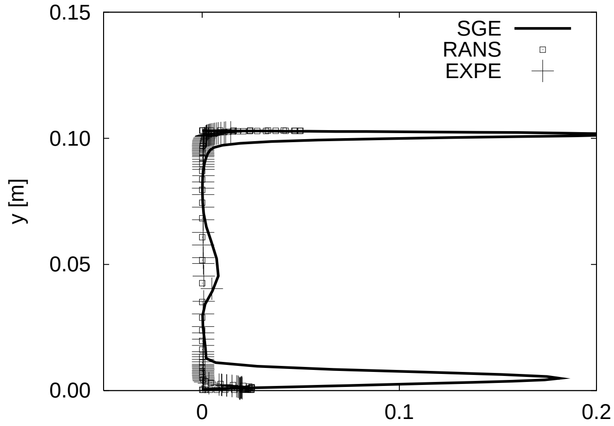


FIG. VII.73 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

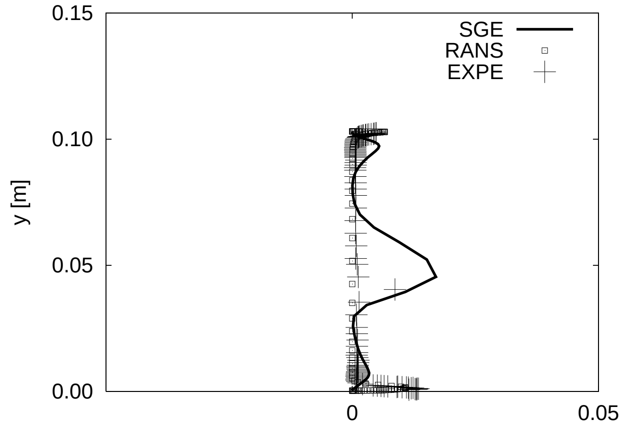


FIG. VII.74 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

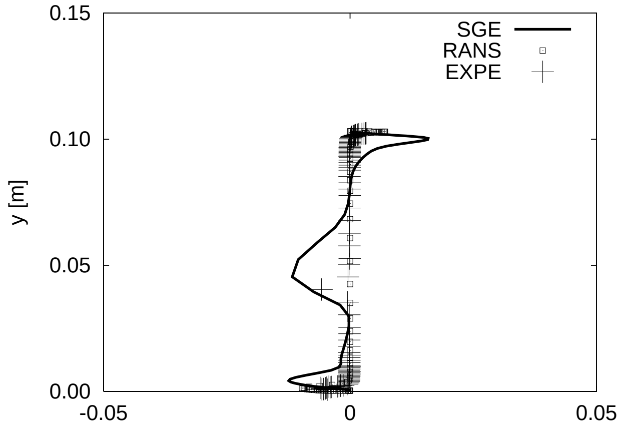


FIG. VII.75 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

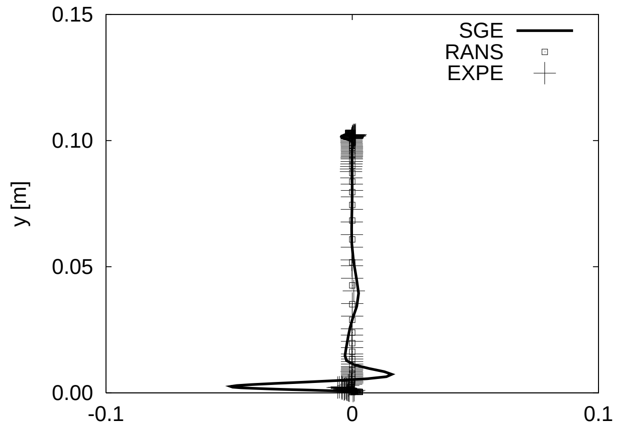


FIG. VII.76 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}0413\ m$

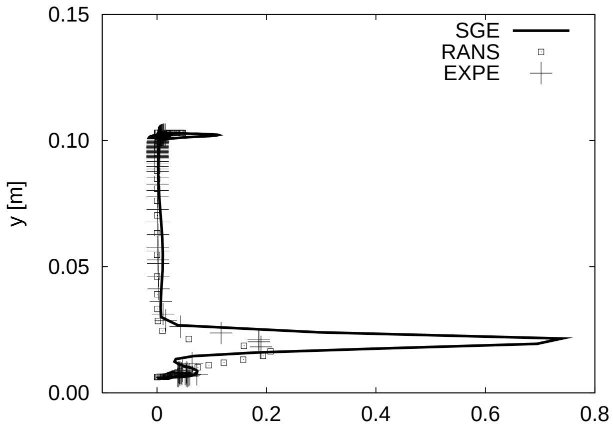


FIG. VII.77 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}310\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

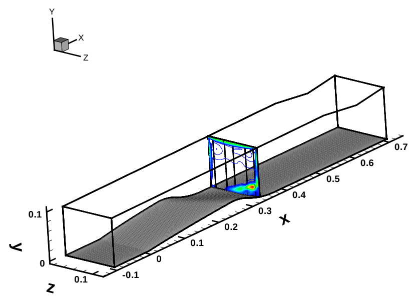


FIG. VII.78 – *Plan* $x = 0{,}340\ m$

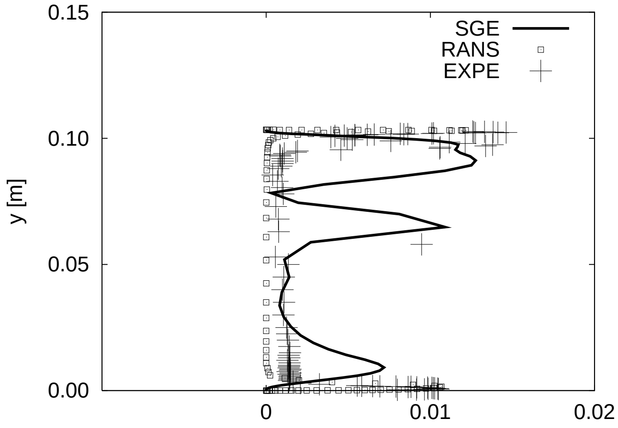


FIG. VII.79 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

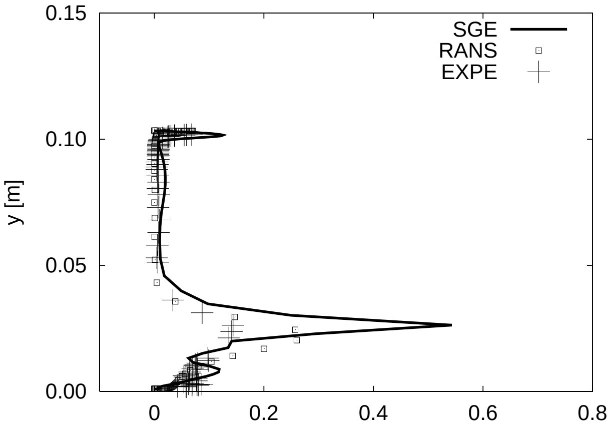


FIG. VII.80 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

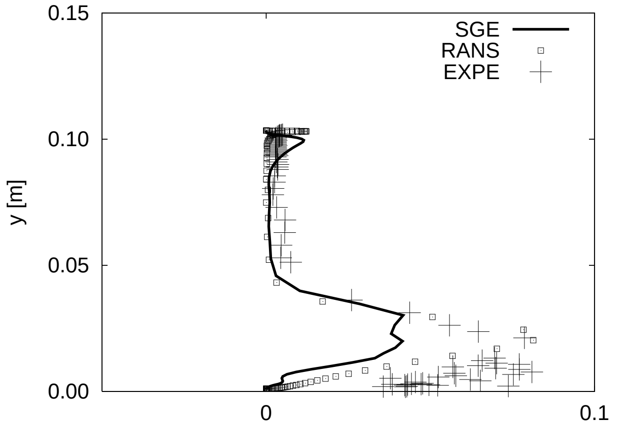


FIG. VII.81 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

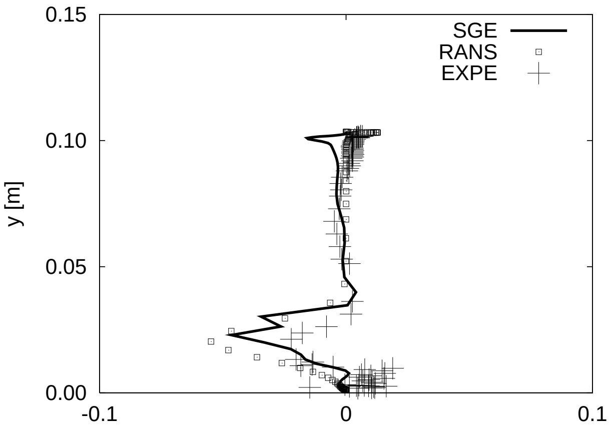


FIG. VII.82 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

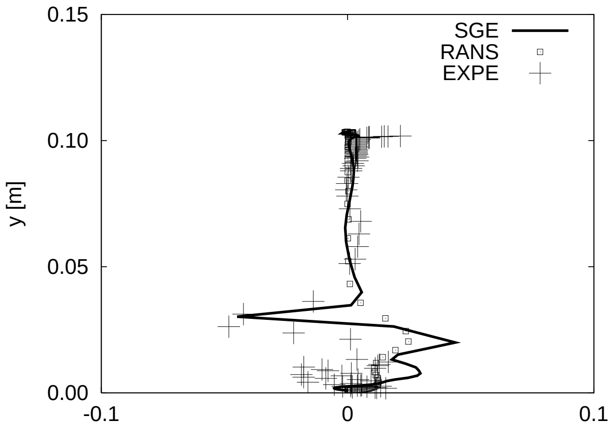


FIG. VII.83 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

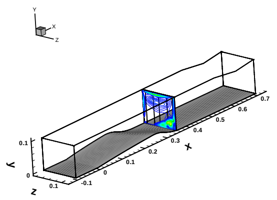


FIG. VII.84 – *Plan* $x = 0{,}360\ m$

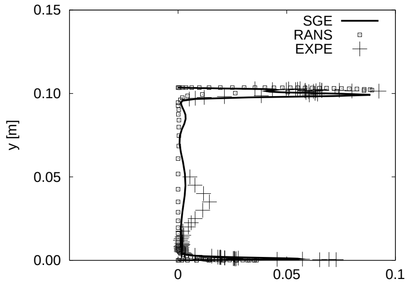


FIG. VII.85 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0113\ m$

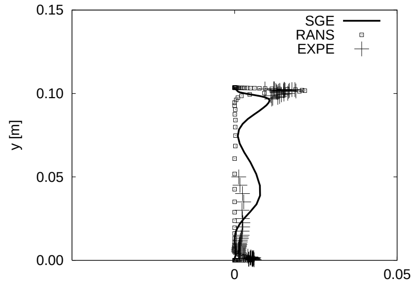


FIG. VII.86 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0113\ m$

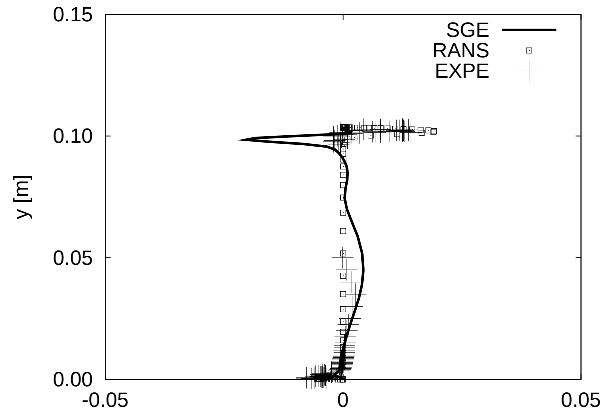


FIG. VII.87 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0113\ m$

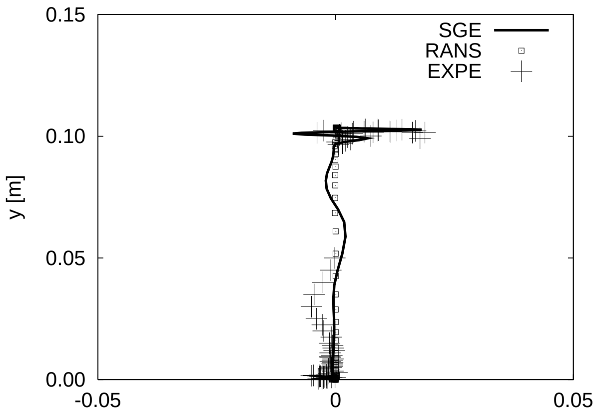


FIG. VII.88 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0113\ m$

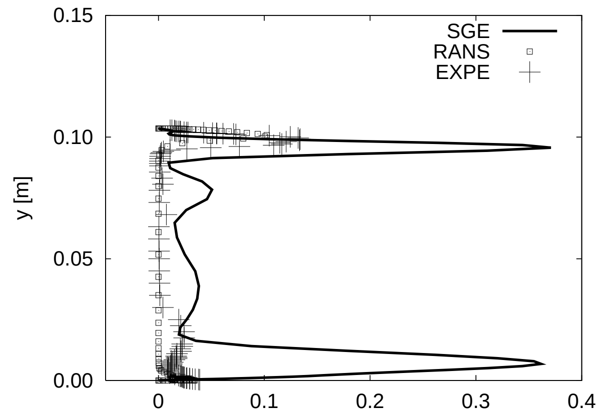


FIG. VII.89 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

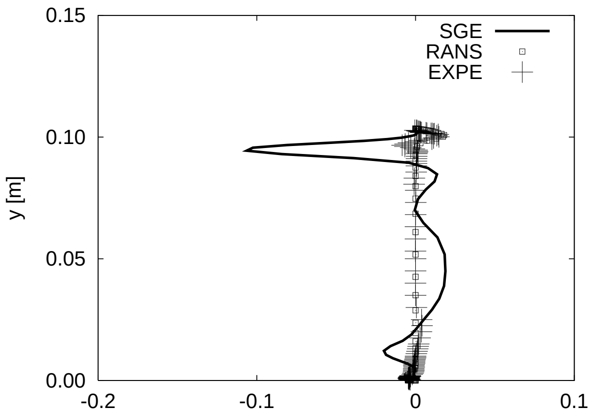


FIG. VII.90 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

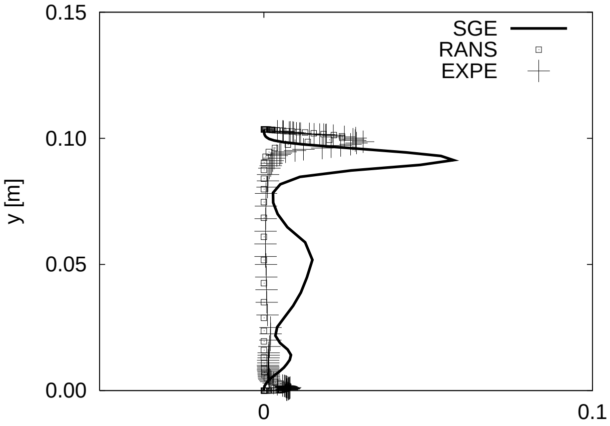


FIG. VII.91 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x =$ 0,360 m *et* $z =$ 0,0613 m

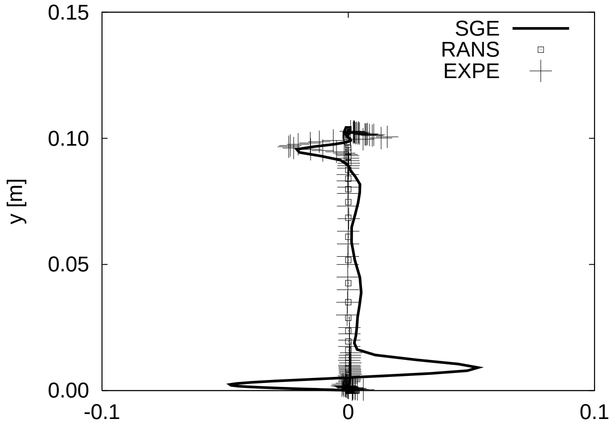


FIG. VII.92 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x =$ 0,360 m *et* $z =$ 0,0613 m

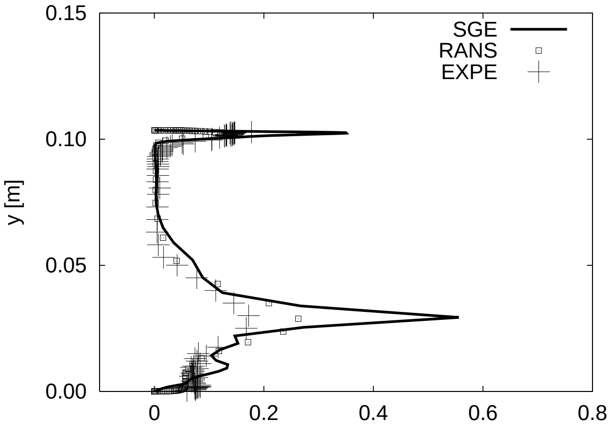


FIG. VII.93 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x =$ 0,360 m *et* $z =$ 0,1113 m

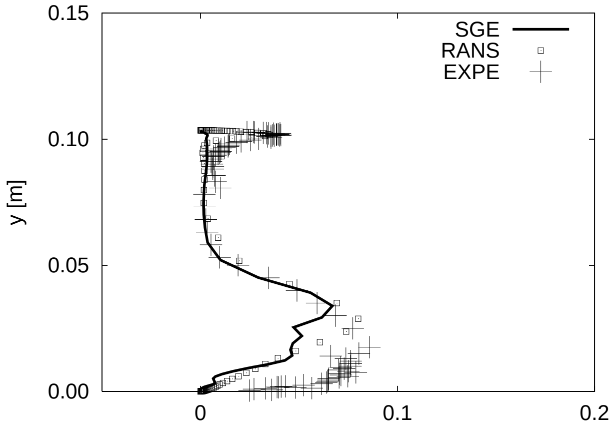


FIG. VII.94 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x =$ 0,360 m *et* $z =$ 0,1113 m

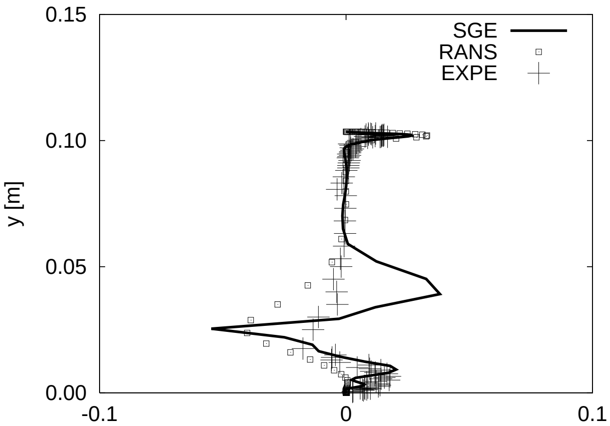


FIG. VII.95 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x =$ 0,360 m *et* $z =$ 0,1113 m

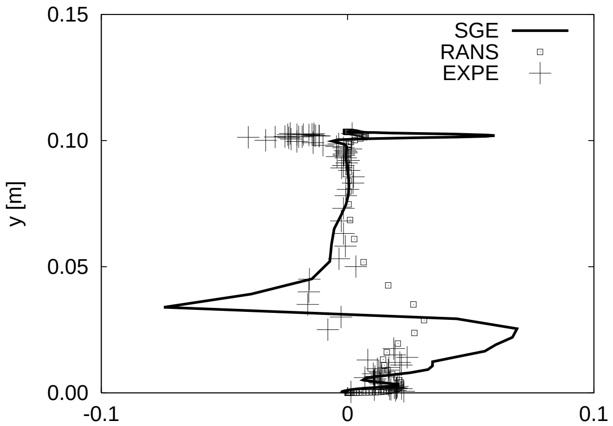


FIG. VII.96 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x =$ 0,360 m *et* $z =$ 0,1113 m

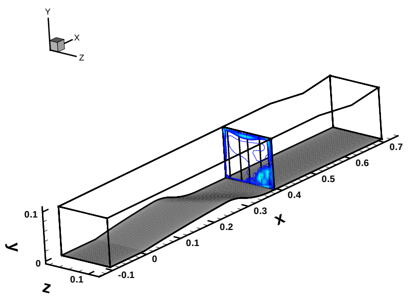


FIG. VII.97 – *Plan* $x = 0{,}390\ m$

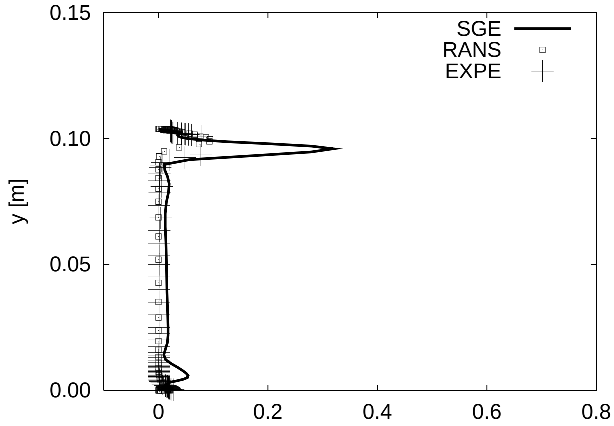


FIG. VII.98 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

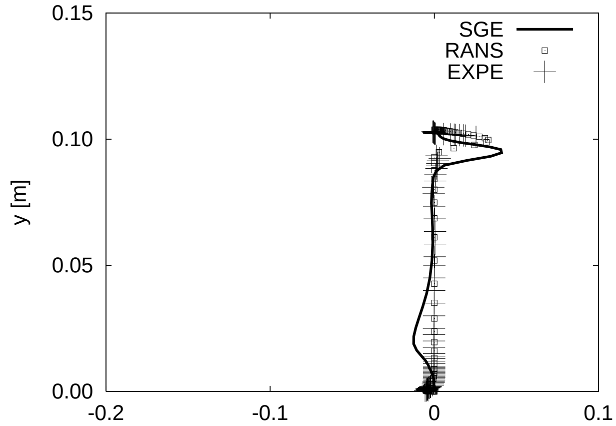


FIG. VII.99 – $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

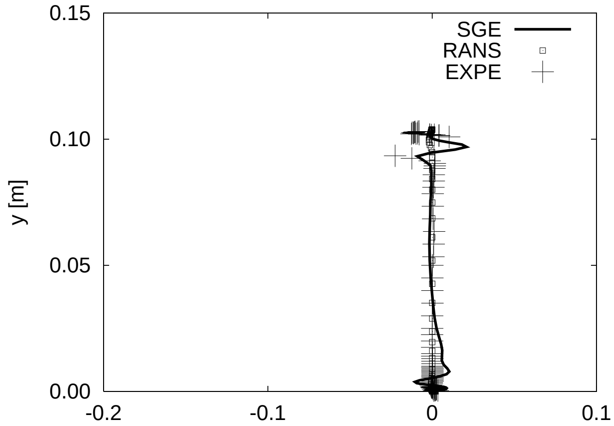


FIG. VII.100 – $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

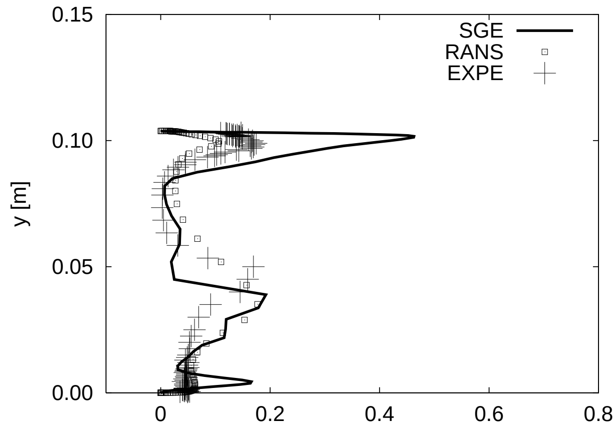


FIG. VII.101 – $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

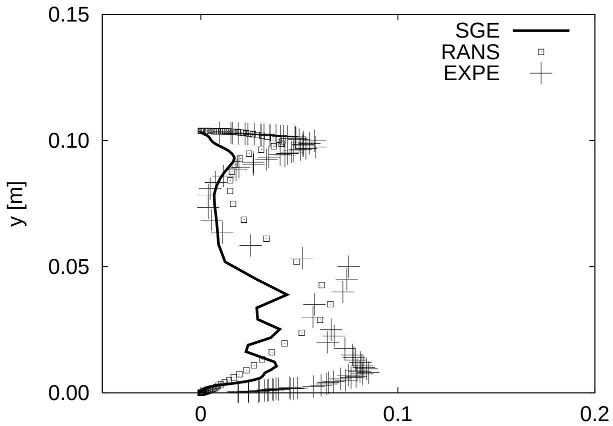


FIG. VII.102 – $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *en* $x = 0{,}390\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

VII.3.2 Contribution du tenseur de sous maille

Les résultats obtenus sur les intensités turbulentes près des parois hautes nous ont amenés à réfléchir sur la manière d'évaluer les tensions de Reynolds à partir des quantités résolues de la SGE (voir annexe). La mauvaise évaluation de $\widehat{u_i''' u_j'''}$ dans la couche limite haute semble venir d'une trop faible différence entre la variation spatiale selon (Oy) des quantités $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ et $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\rangle\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$. Il est également possible que nous n'ayons pas accumulé les quantités qui nous servent à évaluer les tensions de Reynolds sur un temps suffisamment long. Contrairement aux calculs RSM, les tensions de Reynolds sont nulles au début de notre calcul et donc la différence de ces quantités est également nulle à l'initialisation.

Nous avons tracé sur la figure (VII.103) les deux termes ci-dessus, qui permettent d'évaluer le frottement turbulent, le long d'une ligne où nous observons que $\widehat{u'''v'''}$ n'est pas correctement calculé à la paroi du haut par la SGE. Cette ligne se situe en $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0613\ m$. On observe difficilement une différence entre les deux courbes. La somme donne pourtant une intensité turbulente non négligeable près de la paroi du bas, mais une intensité beaucoup trop faible près de la paroi haute comme le montre la figure (VII.104). Nous avons également tracé les quantités qui nous permettent d'évaluer les tensions de Reynolds dans le décollement en $x = 0{,}340\ m$ et $z = 0{,}0913\ m$ sur la figure (VII.105) où l'intensité est surestimée par la SGE. Les tensions obtenues sont données sur la figure (VII.106). Enfin, nous avons également tracé le frottement turbulent plus en aval dans la tuyère en $x = 0{,}360\ m$, le long d'une ligne (Oy) qui coupe l'onde de choc en lambda près de la paroi haute et dont l'intensité est alors correctement prédite par la SGE près de la paroi haute. La figure (VII.107) représente donc à nouveau les deux termes $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ et $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\rangle\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ en $x = 0{,}360\ m$ et $z = 0{,}1113\ m$. On observe sur la figure (VII.108) que l'intensité turbulente est alors correctement calculée près de la paroi haute.

Il semble sur ces résultats que lorsque la variation spatiale selon (Oy) des quantités $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ et $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\rangle\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ près des parois est suffisamment grand, l'intensité turbulente est correctement approximée par l'expression :

$$\widehat{u_i''' u_j'''} = \frac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \frac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\rangle\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2} \tag{VII.2}$$

La mauvaise évaluation des tensions de Reynolds par la SGE peut venir de la différence entre les quantités $\dfrac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ et $\langle \widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle$ aux parois. Une autre explication vient peut-être de l'approximation qui est faite en négligeant la contribution de sous maille dans l'expression (VII.2).

C'est pourquoi nous discutons tout d'abord des résultats obtenus sur les tensions de Reynolds en utilisant une autre approximation, avant de regarder l'influence de la prise en compte de la contribution de sous maille sur le calcul de ces mêmes tensions.

Il peut sembler à première vue contradictoire que là où les quantités qui entrent dans l'évaluation des tensions de Reynolds sont importants les intensités soient bien prédites et donc que la contribution des sous maille soit négligeable, puisque l'on s'attend à ce que le tenseur de sous maille soit important dans les zones de forts gradients. Le tenseur de sous maille est calculé à partir du tenseur de déformation qui tient compte des gradients des profils de la vitesse et donc il est important dans les couches limites puisque les gradients de la vitesse y sont importants. Ici nous considérons des produits de vitesse et le fort gradient de la composante u près de la paroi haute est annulé par l'effet du faible gradient de v, tandis qu'en bas le gradient des deux composantes est important.

Autre formulation pour évaluer les tensions de Reynolds

Nous avons représenté figures (B.15) les corrélations longitudinales $\widehat{u'''u'''}$ évaluées par la formule :

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = (\langle \widetilde{u_i}\widetilde{u_j} \rangle) - (\langle \widetilde{u_i} \rangle)(\langle \widetilde{u_j} \rangle)$$

Nous ne pouvons pas présenter les corrélations transverses car nous n'avons pas stocké les termes nécessaires.

Les courbes obtenues sont très similaires à celles obtenues avec la formule (VII.2) en présence de l'onde de choc et dans le décollement. Néanmoins les corrélations longitudinales évaluées par cette formule sont sous-estimées en absence d'onde de choc, notamment en $x = 0{,}230\ m$, alors que ce n'est pas le cas avec l'autre approximation (VII.2).

Contribution de sous maille

L'expression globale des tensions de Reynolds obtenue à partir des variables de la SGE est donnée par (voir annexe pour les détails) :

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = \frac{\langle \overline{\rho}(\widetilde{u_i} + u_i'')(\widetilde{u_j} + u_j'') \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} - \frac{\langle \overline{\rho}(\widetilde{u_i} + u_i'') \rangle \langle \overline{\rho}(\widetilde{u_j} + u_j'') \rangle}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2} = A - B$$

$$A = \frac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j} \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} + \frac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}u_j'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} + \frac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j}u_i'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} + \frac{\langle \overline{\rho}u_j''u_i'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle}$$

$$B = \frac{(\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i} \rangle + \langle \overline{\rho}u_i'' \rangle)(\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j} \rangle + \langle \overline{\rho}u_j'' \rangle)}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2}$$

Nous nous sommes intéressés à l'influence de la contribution moyenne du tenseur de sous maille $\dfrac{\langle \overline{\rho}u_j''u_i'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle}$ dans le calcul des intensités turbulentes.

La première modélisation que nous avions utilisé consistait à évaluer directement les fluctuations u_i'' et u_j'', avant de développer pour obtenir les deux termes A et B et ainsi de

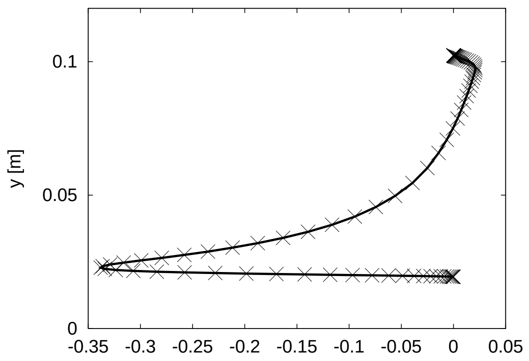


FIG. VII.103 – $\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ —; $\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ $\times\times$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

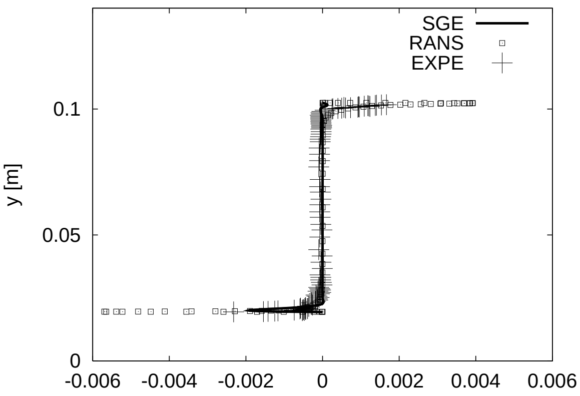


FIG. VII.104 – $\widehat{u'''v'''} = \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

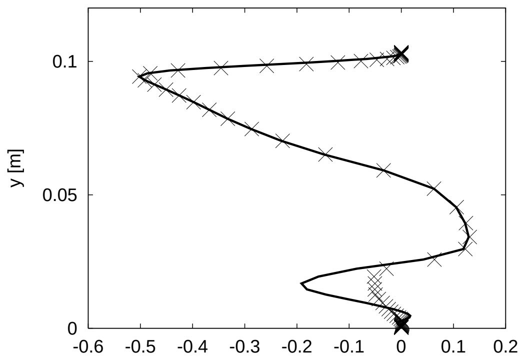


FIG. VII.105 – $\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ —; $\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ $\times\times$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

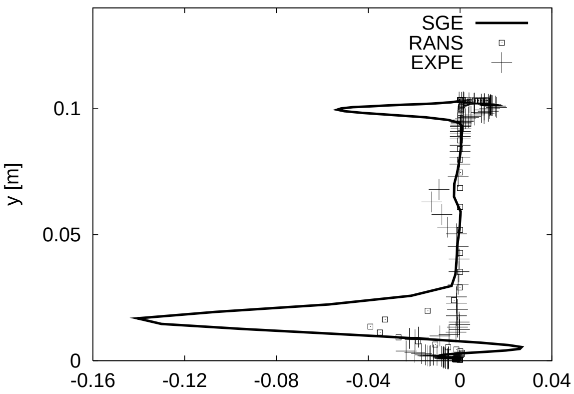


FIG. VII.106 – $\widehat{u'''v'''} = \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

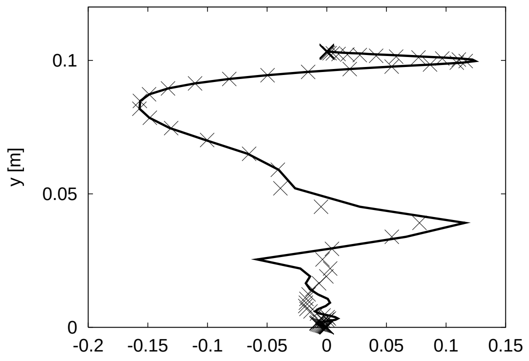


FIG. VII.107 – $\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ —; $\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ $\times\times$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

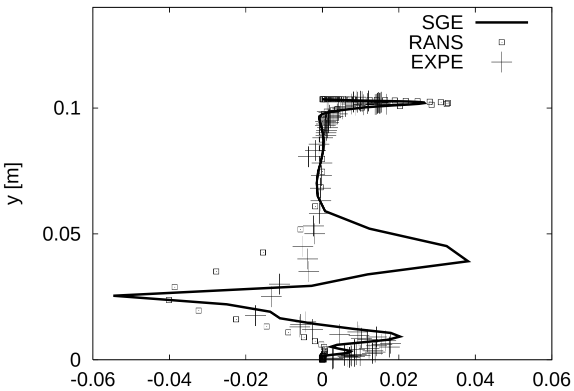


FIG. VII.108 – $\widehat{u'''v'''} = \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

faire apparaître le tenseur de sous maille en moyenne. La modélisation la plus directe de cette fluctuation que nous avions utilisée consistait en la modélisation de Bardina obtenue par un double filtrage (voir section III.3.1.0) :

$$(\widetilde{u_i})'' = \widetilde{u_i''} = \widetilde{u_i} - \widehat{\widetilde{u_i}} \tag{VII.3}$$

Les résultats obtenus n'étaient pas satisfaisants dans la mesure où ils n'avaient plus de sens dans le choc où le double filtrage des quantités n'a plus de sens physique.

C'est pourquoi nous avons regardé l'influence du tenseur de sous maille en moyenne sur le calcul des tensions de Reynolds en stockant le tenseur de sous maille modélisé par le modèle d'échelles mixtes décrit au début du document. Globalement nous observons une amélioration du calcul des tensions croisées sur $\widehat{u'''v'''}$ près de la paroi haute aux stations où (Oy) ne coupe pas le choc comme le montrent les figures (VII.109) et (VII.110) représentant ces corrélations obtenues en tenant compte de la contribution de sous maille. La prise en compte de cette contribution sur les tensions croisées $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ près de la paroi basse dégradre un peu les résultats, l'intensité turbulente alors prédite étant supérieure à celle prédite par les résultats expérimentaux et les résultats RANS. Nous avons également représenté les tensions croisées $\widehat{u'''v'''}$ un peu plus en aval, en $x = 0{,}290\ m$ dans la zone d'interaction entre la couche limite basse et l'onde de choc sur la figure (VII.111) en $z = 0{,}0613\ m$ et sur la figure (VII.112) en $z = 0{,}0913\ m$. Nous observons peu de différences avec les résultats présentés dans la section précédente près de la paroi basse tandis que la prise en compte de la contribution de sous maille améliore le calcul de l'intensité près de la paroi haute.

Enfin les figures (VII.113) et (VII.114) représentent les tensions de Reynolds $\widehat{u'''v'''}$ que nous avons déjà étudiées au début de cette partie en $x = 0{,}340\ m$ et $z = 0{,}0913\ m$ puis en $x = 0{,}360\ m$ et $z = 0{,}1113\ m$. Nous n'observons pas de très grandes différences avec les autres figures (VII.105) et (VII.107), simplement le pic d'intensité sur $\widehat{u'''v'''}$ en $x = 0{,}360\ m$ a une intensité un peu plus importante autour de $y = 0{,}03\ m$.

L'action de la contribution de sous maille est négligeable sur les autres corrélations, notamment sur le calcul des intensités turbulentes longitudinales.

Pour clore cette partie concernant les résultats sur les tensions de Reynolds, nous nous sommes intéressés à l'influence du temps sur lequel sont évaluées les quantités qui permettent de calculer les corrélations turbulentes $\widehat{u_i''' u_j'''}$. Nous avons également voulu vérifier que les intensités turbulentes prédites par la SGE dans le cœur, et que l'on n'observe pas sur les résultats de simulation statistique, correspondent bien aux calculs de la SGE et non à un résidu du champ initial.

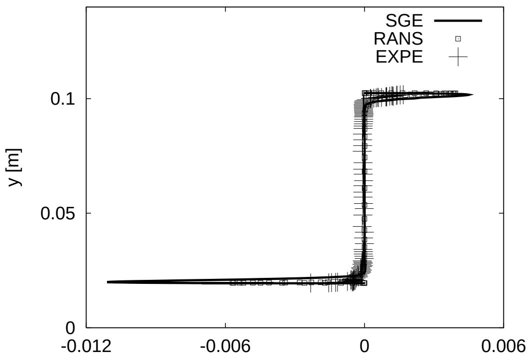


FIG. VII.109 – *Terme* $\widehat{u'''v'''}$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

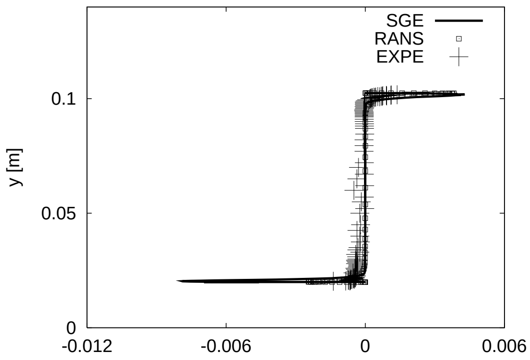


FIG. VII.110 – *Terme* $\widehat{u'''v'''}$ *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

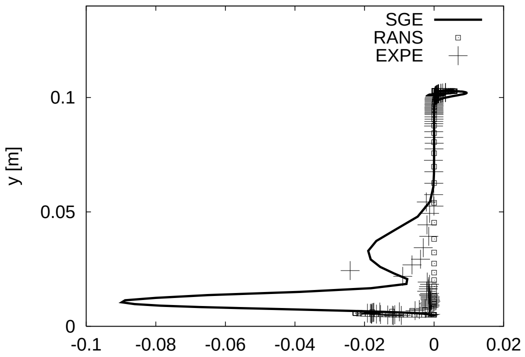


FIG. VII.111 – *Terme* $\widehat{u'''v'''}$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0613\ m$

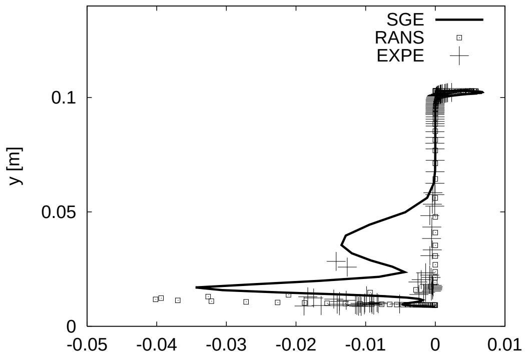


FIG. VII.112 – *Terme* $\widehat{u'''v'''}$ *en* $x = 0{,}290\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

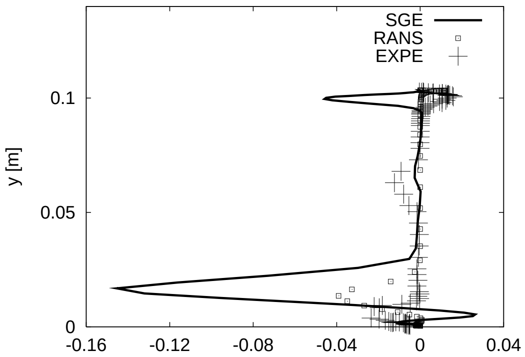


FIG. VII.113 – *Terme* $\widehat{u'''v'''}$ *en* $x = 0{,}340\ m$ *et* $z = 0{,}0913\ m$

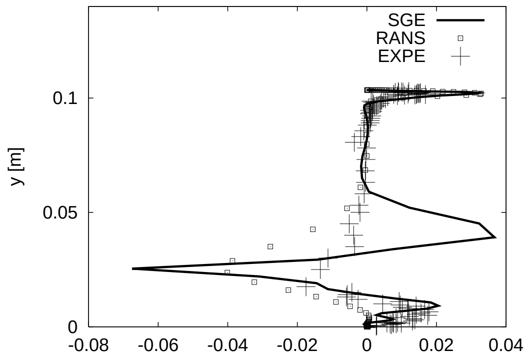


FIG. VII.114 – *Terme* $\widehat{u'''v'''}$ *en* $x = 0{,}360\ m$ *et* $z = 0{,}1113\ m$

VII.3.3 Influence du temps d'accumulation des moyennes sur le calcul des tensions de Reynolds

Pour ne pas trop surcharger le document, nous n'avons sélectionné que quelques courbes caractéristiques pour étudier l'influence du champ initial sur le calcul des tensions de Reynolds. Nous avons soustrait le champ des 300000 premiers pas de temps au champ final pour effectuer la moyenne des quantités. Cela correspond à soustraire au temps total adimensionné de l'ordre de un, le temps adimensionné $t = 0{,}366$.

La figure (VII.115) représente les corrélations $\widehat{u'''u'''}$ en $x = 0{,}230\ m$ lorsqu'on fait une moyenne sur un temps plus court. Nous remarquons qu'elles sont largement sous-estimées. Nous avons donc à nouveau tracé sur une même figure les deux termes $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{u}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ et $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ qui interviennent dans le calcul des tensions de Reynolds avec les l'hypothèses que nous utilisons pour une moyenne réalisée sur un temps plus court figure (VII.116) et sur le temps total figure (VII.117). Il est très difficile de voir une différence entre les deux figures et pourtant dans un cas on obtient les bonnes corrélations mais non dans l'autre cas. Il y a donc une forte influence du temps sur lequel nous moyennons nos quantités dans le calcul des intensités turbulentes.

Les gradients aux parois semblent donc fondamentaux dans les approximations que nous effectuons. Il semble qu'avec le maillage, le schéma et le modèle de sous maille que nous utilisons, nous ne capturons pas finement la variation spatiale des quantités $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ et $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ selon (Oy) près des parois. Nous négligeons trop de turbulence contenue à grande échelle en filtrant, même près des parois, avec un filtre de longueur de coupure trop grande [55]. Pour calculer correctement les tensions de Reynolds il faut capturer correctement les phénomènes de très proche paroi comme les streaks et les burst [47], [55] responsables de la production turbulente.

Nous n'avons pas représenté les intensités turbulentes $\widehat{u'''u'''}$, calculées à partir des quantités moyennées sur le temps court, en tenant compte de la contribution de sous maille car nous devons d'abord étudier plus en détail le calcul de ces contributions. Si son influence n'apparait pas sur les intensités calculées sur le temps total où les corrélations longitudinales sont surrestimées, elle pourrait mieux apparaître sur sur celles calculées sur un temps plus court.

La figure (VII.118) représente les corrélations longitudinales en $x = 0{,}270\ m$ et $z = 0{,}0613\ m$. Nous observons que la SGE prédit encore une forte intensité près de la paroi basse en présence de l'onde de choc. La figure (VII.119) représente les corrélations $\widehat{u'''v'''}$ en $x = 0{,}310\ m$ et $z = 0{,}0413\ m$ qui correspond à une station où l'interaction entre l'onde de choc et la turbulence apparaît sur les résultats de la SGE dans le cœur ce qui montre que cette prédiction n'est pas liée au champ initial et à la répartition initiale des gradients dans la tuyère. On observe l'étalement de la courbe et la position décalée du choc liée à son étalement.

Enfin la figure (VII.120) présente les résultats obtenus sur les corrélations longitudinales dans le décollement proche de la paroi latérale droite. Les corrélations sont surrestimées quel que soit le temps sur lequel on moyenne les quantités.

VII.3.4 Conclusion sur les tensions de Reynolds

Nous avons remarqué que nous sous-estimons les corrélations transverses sauf en présence de choc et dans le décollement. Après avoir regardé l'influence de la contribution du champ initial dans le calcul des tensions de Reynolds évaluées à partir des grandes échelles, il semble que ce phénomène soit lié à une mauvaise redistribution de $\widehat{u'''u'''}$ vers $\widehat{v'''v'''}$ et $\widehat{w'''w'''}$ puisque la SGE ne produit pas suffisamment de $\widehat{u'''u'''}$ sauf dans les zones citées ci dessus. Il se produit le même phénomène avec les tensions croisées, $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$, qui sont les sources de production de la turbulence, lorsqu'il n'y a pas le choc ou la présence de forts gradients comme dans le décollement. L'explication de ces résultats se trouve peut-être dans une mauvaise capture des phénomènes turbulents de type "streaks" dans les couches limites qui sont responsables de la production des tensions de Reynolds [47]. Les streaks sont des zones de fluide près des parois dans un canal, où il y a alternance de zones de fluide à faible vitesse et à haute vitesse. Ces streaks induisent l'ejection intermittente de fluide des couches limites vers le centre du canal (burst) responsable de la production turbulente dans ce type d'écoulement de paroi. La sous estimation de ces corrélations semble donc liée dans notre cas à la mauvaise évaluation des gradients aux parois et à une forte turbulence à petite échelle dans les contributions de sous maille que nous ne capturons pas correctement [55]. Même si nous avons des coordonnées réduites des premiers points aux parois dans la direction normale aux parois qui sont de l'ordre de l'unité, le maillage est très étiré proche des parois au milieu de la tuyère dans les deux autres directions perpendiculaires. Nous observons également un certain épaississement de la largeur des pics turbulents lié à l'épaississement des courbes des profils des vitesses moyennes qui servent à évaluer les tensions.

Nous avons par contre observé sur nos résultats la capacité de la SGE à capturer les amplifications de la turbulence dans le cœur de la tuyère par rapport aux simulations RANS, liées aux gradients du terme de transport par les fluctuations de pression dans les bilans de l'énergie cinétique turbulente comme nous le verrons dans la dernière partie. La prise en compte de la contribution de sous maille dans le calcul des tensions croisées de Reynolds améliore considérablement nos résultats sur ces tensions. Concernant le calcul des tensions longitudinales, en ne tenant pas compte de l'initialisation, la prise en compte de τ_{xx} n'améliore pas les prédictions car nous ne l'évaluons pas correctement malgré une viscosité turbulente importante dans les couches limites. Il est probable que la taille des mailles dans cette direction soit trop importante par rapport aux variations des quantités impliquant une mauvaise évaluation des gradients dans le tenseur des contraintes.

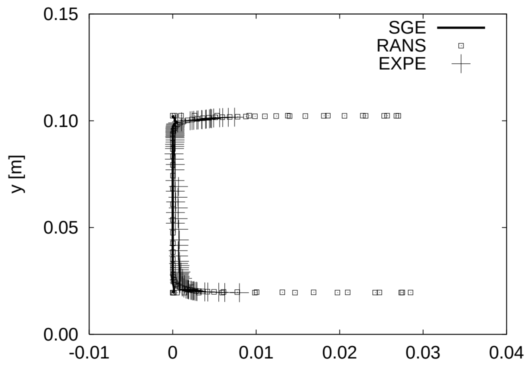


FIG. VII.115 – $\widehat{u'''u'''}$ *en* x = 0,230 m *et* z = 0,0613 m *sur le temps court*

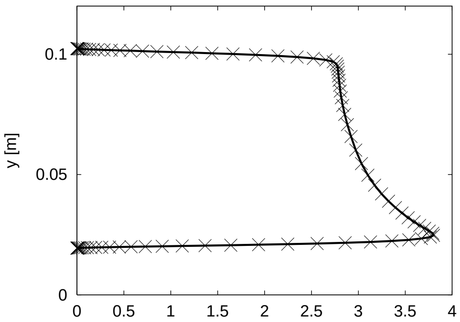


FIG. VII.116 – $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{u}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ — ; $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ $\times\times$ *en* x = 0,230 m *et* z = 0,0613 m *sur le temps court*

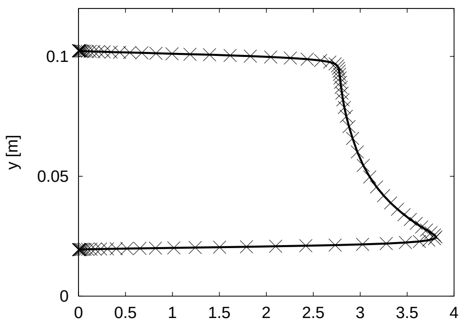


FIG. VII.117 – $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\widetilde{u}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$ — ; $\dfrac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{v}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle^2}$ $\times\times$ *en* x = 0,230 m *et* z = 0,0613 m *sur le temps total de calcul*

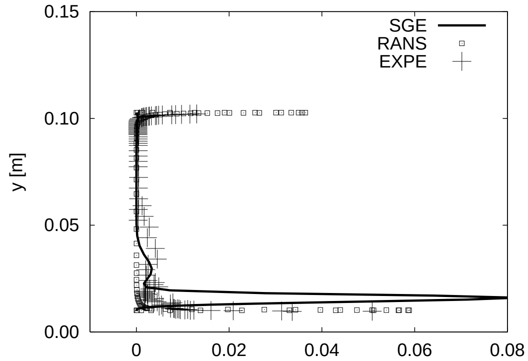


FIG. VII.118 – $\widehat{u'''u'''}$ *en* x = 0,270 m *et* z = 0,0613 m *sur le temps court*

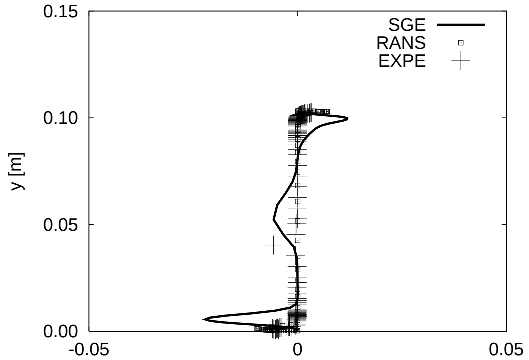


FIG. VII.119 – $\widehat{u'''v'''}$ *en* x = 0,310 m *et* z = 0,0413 m *sur le temps court*

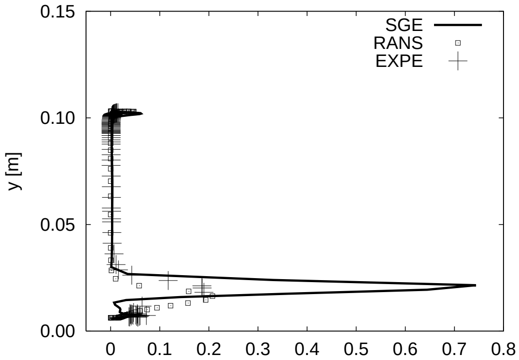


FIG. VII.120 – $\widehat{u'''u'''}$ *en* x = 0,310 m *et* z = 0,1113 m *sur le temps court*

VII.4 Bilan de l'énergie cinétique turbulente k en quelques points

Cette dernière partie présente le bilan de l'énergie statistique k réalisé à partir de nos variables résolues, seules accessibles au calcul.

Nous avons recherché, en comparant des bilans réalisés à des stations différentes, quel terme dans le bilan pouvait être à l'origine du pic observé sur les corrélations prédites par la SGE dans le cœur de la tuyère en présence de choc pour permettre un éventuel retour de nos résultats sur la modélisation statistique puisque les simulations statistiques ne prédisent pas ces pics. Ces bilans permettent également de déterminer si l'utilisation des variables issues de la SGE pour réaliser le bilan de k modifie de manière fondamentale l'allure des bilans de l'énergie cinétique par rapport aux bilans statistique, grâce au calcul des grandes échelles.

VII.4.1 Termes du bilan

La section suivante présente l'équation bilan de l'énergie cinétique turbulente dans une décomposition de type statistique dans le système de coordonnées cartésiennes. Nous donnons ensuite l'expression des différents termes qui apparaîssent dans l'équation bilan en fonction des grandeurs issues de la décomposition de la SGE.

L'équation utilisée pour effectuer le bilan d'énergie est celle donnée dans la thèse d'O. Chambres [13] ou dans celle d'I. Vallet [80]. On a :

$$\underbrace{\frac{\partial\langle\rho\rangle k}{\partial t}}_{I} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\rho k\rangle\widehat{u_j})}_{II} - \underbrace{(\langle\rho\rangle \widehat{u_i''' u_j'''})\frac{\partial\widehat{u_i}}{\partial x_j}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{\sigma}_{ij}u_i'''\rangle - \langle u_j''' p'\rangle - \langle\rho\rangle\widehat{k u_j'''})}_{IV}$$
$$- \underbrace{\langle\widetilde{\sigma}_{ij}\frac{\partial u_i'''}{\partial x_j}\rangle}_{V} + \underbrace{\langle p'\frac{\partial u_i'''}{\partial x_i}\rangle}_{VI} - \underbrace{\langle u_i'''\rangle\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}}_{VII}$$

avec :

$$k = \frac{1}{2}\widehat{u_i''' u_i'''}$$

Les quantités q_i''' sont associées à la décomposition statistique en utilisant les variables de Favre, le filtre $\widehat{(.)}$ correspond au filtre temporel.

$$q_i''' = q_i - \widehat{q}_i$$

Le premier terme de l'équation bilan de l'énergie cinétique représente la variation par unité de temps de l'énergie par unité de volume mais nous ne nous sommes pas intéressés à la variation temporelle de k. Le second terme (II) représente le terme de convection de l'energie cinétique fluctuante par le champ moyen. Le troisième terme (III) est le terme de production de l'énergie cinétique k. Il correspond aux échanges d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent. Le quatrième terme (IV) regroupe tous les termes de diffusion de k sous l'action de la viscosité, de la pression et de la turbulence. Le cinquième terme (V) est le terme de dissipation visqueuse de l'énergie en chaleur. Enfin les deux derniers termes représentent d'une part la corrélation pression-dilatation, propre aux écoulements compressibles, et les variations liées aux fluctuations de la vitesse et de la pression moyenne [17].

Hypothèses de calculs

Nous présentons maintenant les termes apparaissant dans l'équation bilan de k en fonction des grandeurs calculées par la SGE.
Les quantités q_i^{iv} sont les variables associées au filtrage spatial tandis que les quantités q_i'' sont associées à la décomposition spatiale utilisant les variables de Favre :

$$q_i''' = q_i - \widehat{q}_i$$
$$q_i = \widetilde{q}_i + q_i''$$
$$\rho = \overline{\rho} + \rho^{iv}$$
$$p = \overline{p} + p^{iv}$$

Plusieurs approximations sont faites pour évaluer ces termes. D'une part nous considérons que les contributions de sous maille sont négligeables dans le calcul de la densité et de la pression. Nous ne conservons que les contributions résolues $\overline{\rho}$ et de $\overline{p}$ dans le calcul des termes du bilan.
Comme lors de la comparaison de nos résultats avec les tensions de Reynolds au chapitre précédent, nous négligeons les contributions de sous maille u_i'' dans l'évaluation des termes du bilan. On peut imaginer que si la longueur de coupure est suffisamment loin dans le spectre de k, cette hypothèse est vérifiée, même si comme nous l'avons vu ces hypothèses ne sont pas forcément vérifiées partout sur notre maillage.

Tous les termes $\widehat{u_j}$ sont approximés de la façon suivante :

$$\widehat{u_j} = \frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$$

- terme de convection :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle -\rho k\rangle\widehat{u_j}) = -(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}^2\rangle\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \frac{1}{2}(\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}\rangle)^2\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u_j}\rangle}{(\langle\overline{\rho}\rangle)^2}))$$

- termes de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\tilde{\sigma}_{ij}u_i'''\rangle) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\tilde{\sigma}_{ij}\widetilde{u_i}\rangle - \langle\tilde{\sigma}_{ij}\rangle\frac{\langle\widetilde{\overline{\rho}u_i}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle u_j'''p'\rangle) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{u_j}\overline{p}\rangle - \langle\widetilde{u_j}\rangle\langle\overline{p}\rangle)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle\rho\rangle\widehat{ku_j'''}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}^2\widetilde{u_j}\rangle + \frac{(\langle\widetilde{\overline{\rho}u_i}\rangle)^2\langle\widetilde{\overline{\rho}u_j}\rangle}{(\langle\overline{\rho}\rangle)^2} - \frac{\langle\widetilde{\overline{\rho}u_i}\rangle\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \frac{1}{2}\frac{\langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}^2\rangle\langle\widetilde{\overline{\rho}u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle})$$

- Reste :

Les termes ne s'écrivant pas sous forme conservative ont été regroupés dans ce terme.

- production :

On ne détaille ici que l'expression des termes $\langle\rho\rangle\widehat{u_i''' u_j'''}$.

$$\langle\rho\rangle\widehat{u_i''' u_j'''} = \langle\overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}\rangle - \frac{\langle\widetilde{\overline{\rho}u_i}\rangle\langle\widetilde{\overline{\rho}u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}$$

- dissipation visqueuse :

$$\begin{aligned}
-\langle\tilde{\sigma}_{ij}\frac{\partial u_i'''}{\partial x_j}\rangle &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\tilde{\sigma}_{ij}u_i'''\rangle + \langle u_i\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}\rangle - \widehat{u_j}\frac{\partial\langle\tilde{\sigma}_{ij}\rangle}{\partial x_j} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\tilde{\sigma}_{ij}u_i'''\rangle + \langle u_i\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}\rangle - \frac{\langle\widetilde{\overline{\rho}u_j}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle}\frac{\partial\langle\tilde{\sigma}_{ij}\rangle}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

- pression-dilatation:

$$\langle p'\frac{\partial u_i'''}{\partial x_i}\rangle = \langle\overline{p}\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_i}\rangle - \langle\overline{p}\rangle\frac{\partial\langle\widetilde{u_i}\rangle}{\partial x_i}$$

- fluctuations de vitesse-gradient de pression :

$$-\langle u_i'''\rangle\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i} = -\frac{\partial\langle\overline{p}\rangle}{\partial x_i}(\frac{\langle\widetilde{\overline{\rho}u_i}\rangle}{\langle\overline{\rho}\rangle} - \langle\widetilde{u_i}\rangle)$$

VII.4.2 Présentation des bilans

Tous les termes de l'équation bilan sont rendus sans dimension par $\rho_{in}u_{ref}^3/\chi$.

Les termes sont regroupés comme dans les bilans habituels réalisés en RANS [80] sur les tensions de Reynolds :

$$-C_{ij} + P_{ij} + d_{ij} + \Phi_{ij} - \langle\rho\rangle\varepsilon_{ij} = 0$$

Ce sont les seuls bilans à notre disposition pour comparer avec notre bilan sur k. De plus nous comparons nos résultats aux résultats obtenus à l'aide de la modélisation de Launder-Shima des termes d_{ij}, Φ_{ij} et $\langle\rho\rangle\varepsilon_{ij}$.

Le terme C_{ij} est le terme de convection. Le terme P_{ij} correspond à la Production, $-\langle\rho\rangle\varepsilon_{ij}$ est la dissipation visqueuse, d_{ij} regroupe les termes de diffusion, tandis que le terme Φ_{ij} correspond au terme de redistribution. Le terme de redistribution tel qu'il est désigné dans la modélisation ne tient pas compte des effets de compressibilité. Par rapport aux termes qui apparaissent dans notre bilan de l'énergie cinétique $k = \dfrac{1}{2}u_i'''u_i'''$ nous avons les relations :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle -\rho k\rangle\widehat{u_j}) = \text{conv}(\equiv -C_k)$$

$$-(\langle\rho\rangle\widehat{u_i'''u_j'''})\frac{\partial\widehat{u_i}}{\partial x_j} = \text{prod}(\equiv P_k)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\widetilde{\sigma}_{ij}u_i'''\rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle u_j'''p'\rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle\rho\rangle\widehat{ku_j'''}) = \text{diff-tot}(\equiv d_k + \frac{\partial}{\partial x_j}(\langle p\rangle\langle u_j'''\rangle))$$

$$-\langle\widetilde{\sigma}_{ij}\frac{\partial u_i'''}{\partial x_j}\rangle = \text{diss}(\equiv -\langle\rho\rangle\varepsilon_k)$$

$$-\langle u_i'''\rangle\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i} + \langle p'\frac{\partial u_i'''}{\partial x_i}\rangle = \text{p-dilat}$$

Le terme de redistribution Φ_{ij} entre les composantes $\widehat{u'''u'''}$, $\widehat{v'''v'''}$ et $\widehat{w'''w'''}$ n'apparaît pas sur le bilan de l'énergie cinétique k de la SGE puisque sa trace est nulle, $\Phi_k = 0$

VII.4.3 Bilan de l'énergie selon (Oy) en $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0398\ m$

Le plan $x = 0{,}230\ m$ est sur le haut de la bosse (voir la figure (VII.8)). L'ordonnée z où nous réalisons le bilan est différente de celle des points expérimentaux car nous n'avons pas interpolé ces résultats aux points de mesure pour les présenter. Le plan $z = 0{,}0398\ m$ se situe néanmoins près de $z = 0{,}0413\ m$, proche de la paroi latérale gauche, où nous avons déjà comparé nos résultats aux résultats expérimentaux.

Les bilans suivant une seule direction en 3D sont difficiles à interpréter par rapport au cas 2D ou dans le cas 3D d'une couche limite à l'équilibre, dans la mesure où la variation de l'énergie cinétique dans une cellule de contrôle est liée aux flux des quantités à travers les faces dans les trois directions de l'espace.

En absence d'onde de choc nous pouvons observer que les phénomènes sont confinés à la paroi, contrairement à ce qui se passe plus en aval à la même côte z comme nous le verrons sur les autres bilans. Nous n'avons pas de bilan statistique à cette station pour nous permettre de comparer nos résultats. Le bilan en $x = 0{,}230\ m$ nous sert principalement de référence pour le comparer aux bilans réalisés plus en aval. Nous pouvons également souligner que le terme de vitesse-gradient de pression est négligeable par rapport au terme de pression-dilatation, comme décrit par O. Chambres [13]. C'est pourquoi dans la suite le terme de compressibilité est associé au seul terme de pression-dilatation.

L'extension des mailles selon (Ox) très près de la paroi basse est très supérieure aux longueurs dans les deux autres directions. Si l'on pose par exemple $\Delta x = L\Delta y$, avec $L >> 1$, alors la dérivée selon (Ox) varie en $\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial y}$. De même pour la direction (Oz) par rapport à (Ox). Pour une meilleure compréhension du bilan à cette station où les phénomènes sont localisés dans les couches limites nous avons négligé les termes en $\frac{\partial}{\partial x}$ dans le terme de convection par le champ moyen, dans le terme de production et dans le terme de diffusion turbulente de l'énergie cinétique turbulente.

En traçant le bilan selon l'axe (Oz) à cette station, figure (VII.121), nous observons que la dissipation, qui est importante dans le cœur puisque nous sommes très près de la paroi basse, est compensée par la diffusion visqueuse.

La figure (VII.122) représente le bilan selon (Oy) en $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0398\ m$. Il est très différent selon que l'on se trouve près de la paroi haute ou basse. Le terme de pression-dilatation est le terme le plus important près de la paroi haute. Il est positif puis négatif. Nous n'observons pas de terme de production en haut car nous avons vu que les corrélations transverses $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$, responsables de la production turbulente, sont sous estimées à cette station. Le terme de dissipation $-\langle\tilde{\sigma}_{ij}\frac{\partial u_i'''}{\partial x_j}\rangle$ et le terme de diffusion turbulente par les contraintes visqueuses $\frac{\partial}{\partial x_j}(\langle\tilde{\sigma}_{ij}u_i'''\rangle)$ sont importants près des parois haute et basse et nous pouvons souligner que le terme de diffusion totale est comparable, aux parois, au terme de diffusion turbulente par les contraintes visqueuses. Le terme de dissipation et de diffusion turbulente par les contraintes visqueuses s'équilibrent sur les premiers points proche de la paroi basse et proche de la paroi haute. Ceci reste vrai à tous les points où nous présentons les bilans de l'énergie cinétique. Ces termes sont d'un ordre de grandeur supérieur aux autres termes à la paroi. Comme ils s'équilibrent nous présenterons dorénavant nos bilans centrés sur les autres termes pour mieux pouvoir les analyser. Enfin, le terme de diffusion totale dans le cœur correspond principalement aux corrélations de pression-vitesse. Elles sont importantes et négatives impliquant un transfert de l'énergie cinétique turbulente de la paroi vers le cœur par les fluctuations de pression. Ce terme n'est pas compensé et il ne change pas de signe selon (Oy).

La figure (VII.123) représente le bilan en $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0398\ m$ centré sur la paroi basse pour mieux analyser les différents termes. Le terme de diffusion total est négatif, positif puis négatif dans le sens des ordonnées croissantes. Nous pouvons souligner que la diffusion visqueuse qui intervient dans le terme de diffusion total est positive puis négative comme observé dans les bilans classiques de la couche limite incompressible [17]. (Le signe positif près de la paroi basse correspond à un transfert vers la paroi du fait de la dissipation importante. Le signe négatif plus on s'éloigne vient de la dissipation qui diminue et à un transfert important de la paroi vers le cœur). La valeur positive observée sur le terme de diffusion est donc associée au terme de diffusion turbulente.

Le terme de convection de k par le champ moyen est positif puis négatif lorsqu'on s'éloigne de la paroi. Ce terme de convection est sensible aux gradients du champ moyen. L'allure de ce terme est cohérente avec les variations de $\widehat{v}$ selon (Oy) en $x = 0{,}230$ figure (B.6) : $\widehat{v}$ croît en valeur absolue puis décroît avec y. Le terme de production est positif et son intensité est également sensible à la prise en compte ou non de la dérivée longitudinale $\dfrac{\partial}{\partial x}$. Le terme de pression-dilatation est négatif. Il représente un transfert réversible entre l'énergie cinétique k et l'énergie interne [13], [46]. Si le terme est positif il y a un transfert réversible de l'énergie interne vers l'énergie cinétique k. Si ce terme est négatif, le transfert se fait de l'énergie cinétique k vers l'énergie interne. Dans la couche limite sur la figure (VII.123) proche de la paroi la dissipation est importante et le terme de pression-dilatation est négatif indiquant un transfert d'énergie de k vers l'énergie interne.

Nous pouvons observer que le terme de production et le terme de diffusion contrebalancent la convection, la dissipation et le terme de pression-dilatation autour de $y = 0{,}04\ m$. Par contre, les termes de convection et production ne sont pas suffisamment importants à la paroi pour contrebalancer la dissipation et la diffusion.

Nous avons vu au chapitre précédent l'importance du temps d'accumulation des moyennes dans le calcul des corrélations longitudinales à cette station. Même s'il n'y a pas Production = Dissipation puisque la couche limite n'est pas à l'équilibre (la convection crée un déficit en énergie k qui induit un mécanisme de diffusion) les bilans réalisés à partir de la SGE à cette station montrent qu'il y a un déficit très important dans notre bilan au niveau de la paroi basse. Nous avons tracé le résidu du bilan sur la figure (VII.124). Il correspond en partie au terme (I) de l'équation bilan $\dfrac{\partial \langle \rho \rangle k}{\partial t}$ que nous n'avons pas étudié. Nous voulons souligner qu'en réalité le bilan que nous réalisons porte sur la quantité

$$\frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} - \frac{(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \rangle)(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_j} \rangle)}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2}$$

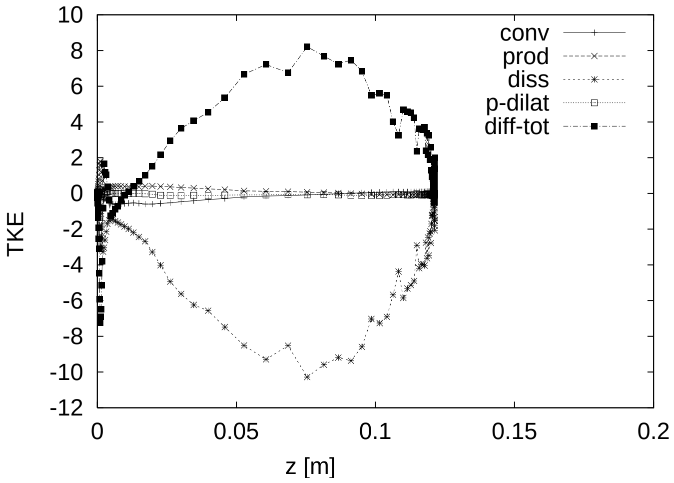


FIG. VII.121 – *Bilan selon* (Oz) *en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $y = 0{,}0196\ m$

qui nous sert à approximer l'expression de k.

Nous ne produisons pas assez, ce qui en accord avec le fait que nous sous estimions les corrélations longitudinales de Reynolds à cette station sur le temps court, et il faudrait tenir compte de la variation temporelle de k pour affiner nos bilans.

VII.4.4 Bilan de l'énergie selon (Oy) en $x = 0{,}308\ m$ en $z = 0{,}0398\ m$

Cette station est très proche dans nos calculs d'un plan où l'interaction entre l'onde de choc et la turbulence apparaît sur les tensions de Reynolds prédites par la SGE dans le cœur de la tuyère (voir figure (VII.73)). Nous ne disposons de résultats statistiques sur les bilans des tensions de Reynolds que près de la paroi latérale droite [80]. Néanmoins il nous semble important de tracer les bilans à une station proche de la paroi latérale gauche, où il n'y a pas le décollement, pour interpréter plus facilement les résultats.

Nous nous sommes placés en $z = 0{,}0398\ m$ pour observer les différences entre les bilans de l'énergie cinétique effectués en $x = 0{,}230\ m$ et en $x = 0{,}308\ m$ sur une même ligne (Oz). A nouveau le terme de production a été calculé en ne tenant compte que des corrélations croisées $\widehat{u'''v'''}$ et $\widehat{u'''w'''}$ et nous avons négligé les dérivées selon (Ox) dans le terme de convection par le champ moyen et dans le terme de diffusion turbulente de l'énergie cinétique turbulente.

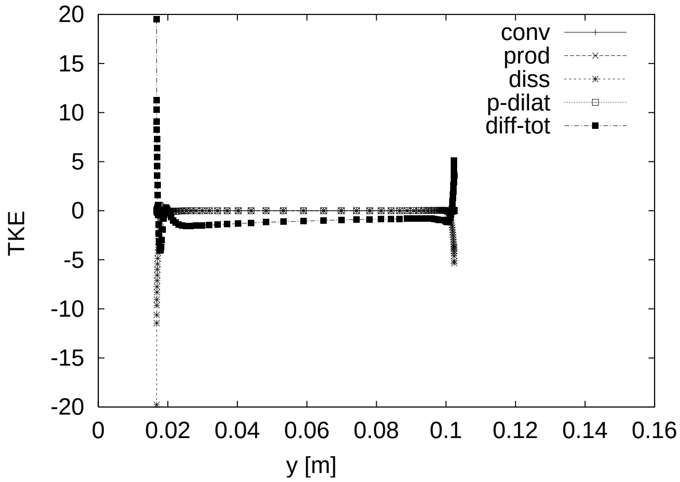


Fig. VII.122 – $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0398\ m$

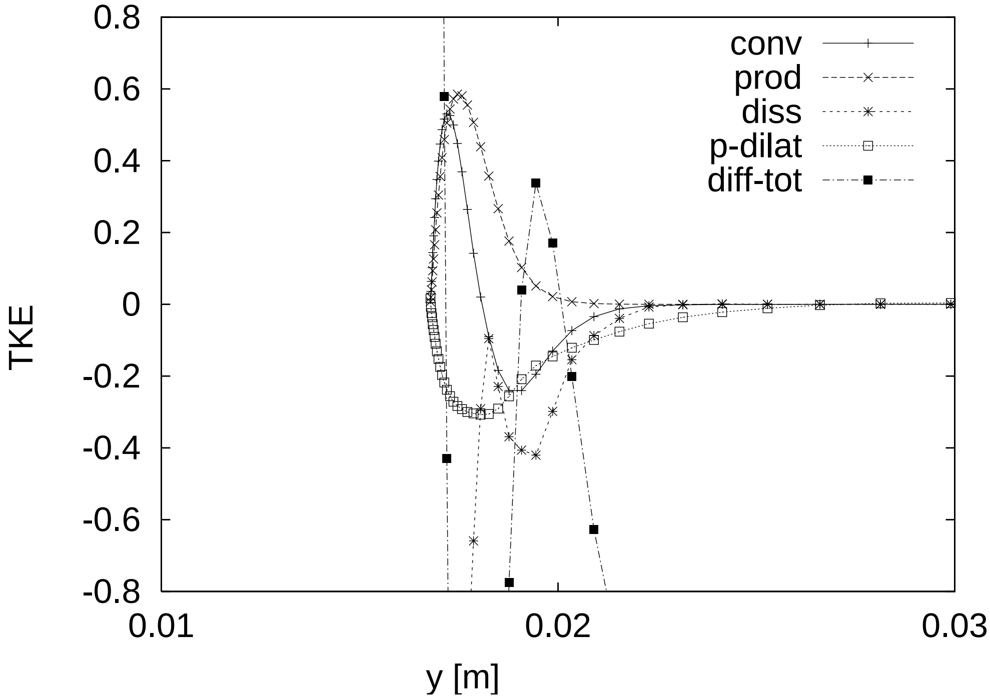


Fig. VII.123 – $x = 0{,}230\ m$ et $z = 0{,}0398\ m$

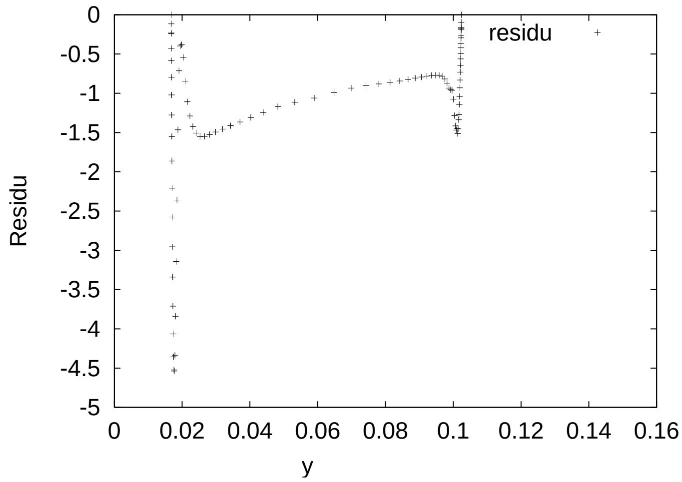


FIG. VII.124 – *Résidu du bilan en* $x = 0{,}230\ m$ *et* $z = 0{,}0398\ m$

La figure (VII.125) représente le bilan avec tous les termes dans la direction (Oz) à la même abscisse pour souligner qu'il n'y a pas de déséquilibre important autour de $z = 0{,}0398\ m$ dans cette direction.

Le bilan selon (Oy) est représenté avec tous les termes sur la figure (VII.127). L'allure du bilan est assez différent de celui obtenu en $x = 0{,}230\ m$ mais par contre nous observons le même type de bilan qu'en $x = 0{,}268\ m$ que nous avons également représenté sur la figure (VII.126) où l'onde de choc interagit avec la couche limite basse. Le terme de production est faible, mais la somme des termes à la paroi est positive expliquant la production importante de k, et par voie de conséquence des corrélations longitudinales. Nous n'avons pas présenté toutes les courbes lors de l'étude de l'influence du temps d'accumulation sur le calcul des tensions de Reynolds mais nous pouvons souligner que les corrélations $\widehat{u'''u'''}$ sont encore importantes lorsqu'on moyenne les quantités sur un temps plus court à cette station.

Le terme de diffusion de k et le terme de pression-dilatation sont non nuls dans le cœur. Sur la figure (VII.127) nous observons une inversion de signe du terme de redistribution (qui nous le rappelons est comparable au terme de pression-dilatation) le long de (Oy) autour de $y = 0{,}05\ m$ comme également observé sur la figure (VII.126) autour de $y = 0{,}03\ m$. Le changement de signe brutal et localisé du terme de pression-dilatation vient de la présence de l'onde de choc à cette station. Lorsqu'on se déplace de la paroi basse vers le cœur, les vitesses varient avec des gradients positifs impliquant des fluctuations $v''' \simeq \Delta v = \widetilde{v}(y + dy) - \widetilde{v}(y)$ positives et qui augmentent avec y. Le terme de pression-dilatation est donc positif. Lorsqu'on traverse le choc au contraire, comme il est oblique, les gradients sont inversés selon (Oy) et donc le sens de variation des fluctuations aussi.

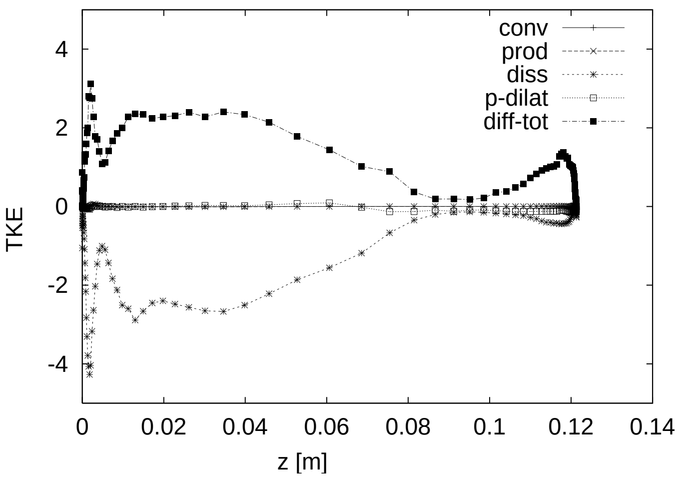


FIG. VII.125 – *Bilan selon (Oz) en* $x = 0{,}308\ m$ *et* $y = 0{,}007\ m$

Le terme de pression-dilatation redevient négatif.

Le terme de diffusion turbulente dans le cœur est comparable au terme de corrélation de pression-vitesse. La figure (VII.128) représente le résidu du bilan à la station $x = 0{,}308\ m$ en $z = 0{,}0398\ m$. Nous pouvons observer que le bilan est positif dans la moitié inférieure de la tuyère, impliquant ici plutôt un accroissement de l'énergie cinétique dans la cellule de contrôle dans nos prédictions. Cela a effectivement été observé sur nos résultats où nous prédisons de fortes corrélations longitudinales à cette station. Le terme de transfert associé aux fluctuations de pression est donc à l'origine des pics d'intensité turbulente observés sur les tensions de Reynolds en SGE dans le cœur de la tuyère [46] puisqu'il est le seul terme positif là où le terme de pression-dilatation diminue et s'annule en $y = 0{,}05\ m$.

Pour finir nous présentons le bilan obtenu en $x = 0{,}308\ m$ en $z = 0{,}1113\ m$ du côté de la paroi où nous observons un décollement de la couche limite et une forte prédiction des intensités turbulentes où nous disposons de résultats sur les bilans statistiques des tensions de Reynolds.

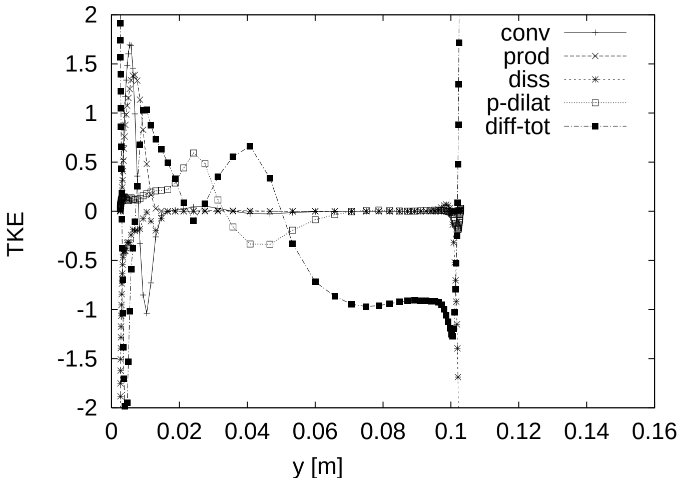


FIG. VII.126 – *Bilan selon (Oy) en* $x = 0{,}268$ *m et* $z = 0{,}0398$ *m*

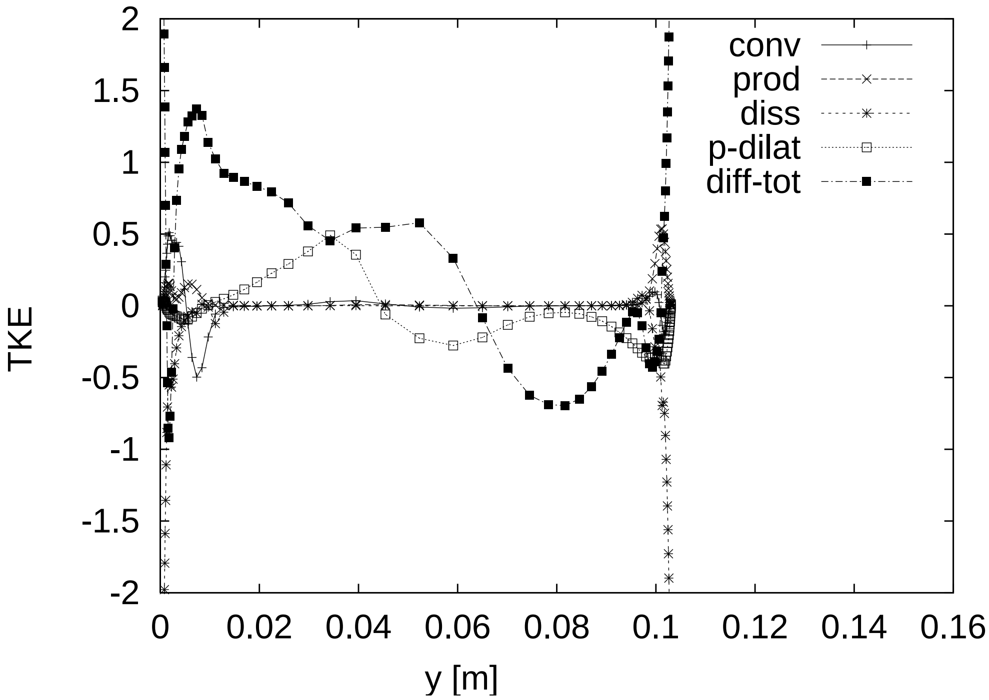


FIG. VII.127 – *Bilan selon (Oy) en* $x = 0{,}308$ *m et* $z = 0{,}0398$ *m*

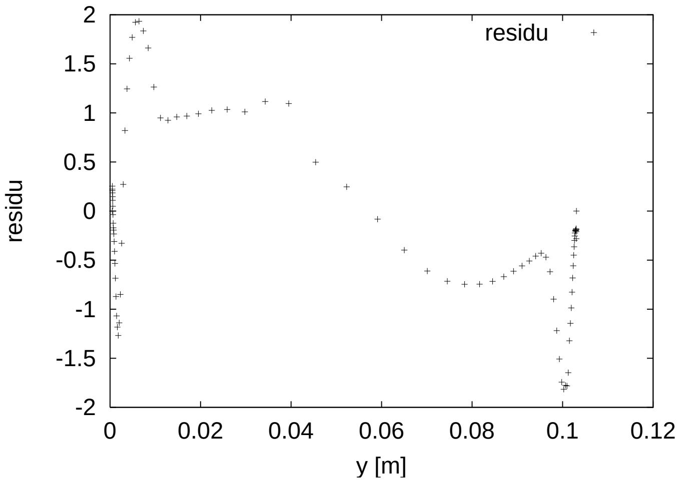


FIG. VII.128 – *Résidu du bilan en $x = 0{,}308$ m et $z = 0{,}0398$ m*

VII.4.5 Bilan de l'énergie selon (Oy) en $x = 0{,}308$ m en $z = 0{,}1115$ m

Cette station correspond à un plan où la couche limite décolle proche de la paroi basse et où nous disposons de résultats statistiques sur les différentes tensions de Reynolds. Le bilan est tracé sur la figure (VII.129). Nous pouvons souligner que le bilan obtenu selon l'autre direction (Oz) est très similaire à ceux déjà présentés sur les deux autres figures (VII.121) et (VII.125).

L'allure du bilan selon (Oy) est très différente selon que l'on tient compte ou non des dérivées selon (Ox) dans le calcul de la production autour de $y = 0{,}02$ m, et notamment du terme $\widehat{u'''u'''}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x}$. C'est pourquoi nous en avons tenu compte pour présenter les résultats obtenus à cette station aussi bien dans le terme de production que dans le terme de convection. Ceci n'est pas vrai pour le bilan réalisé en $z = 0{,}0398$ m à la même abscisse ou même celui que nous avons tracé en $x = 0{,}288$ m sur la figure (VII.126). Le fait de tenir compte de $\widehat{u'''u'''}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ dans le terme de production augmente considérablement celui-ci à cette station. Nous pensons que ceci est lié à la forte variation de ce terme selon (Oy), puisque nous sommes dans la zone de décollement proche de la paroi basse, située sous le choc en lambda, dans une zone où $\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ varie rapidement selon (Oy).

Le terme de convection, de diffusion et de dissipation sont contrebalancés par le terme de production et également par le terme de pression-dilatation en $y = 0{,}021$ m. C'est la forte production à cette station qui permet d'expliquer le pic d'intensité turbulente important prédit par la SGE observé dans le décollement. Ce pic est encore présent lorsqu'on moyenne sur des temps plus courts figure (VII.77). Nous observons la présence du choc en lambda visualisé sur les résultats instationnaires figures (VI.3) sur la figure (VII.129) associée au changement de signe des courbes autour de $y = 0{,}055\ m$.

La figure (VII.130) représente le résidu associé au bilan à cette station. Lors de la présentation des résultats sur les tensions de Reynolds (voir figure VII.77), nous n'observions pas de production turbulente dans le cœur associée à la présence du choc comme aux autres stations. Ceci s'explique par le fait que la diffusion contrebalance le terme de pression-dilatation dans le cœur, comme le montre le calcul du résidu au centre figure (VII.130).

A nouveau, par rapport à nos résultats, il faut souligner que cette forte production dans le décollement correspond en réalité à une forte production de :

$$\frac{\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j} \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} - \frac{(\langle \overline{\rho}\widetilde{u_i} \rangle)(\langle \overline{\rho}\widetilde{u_j} \rangle)}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2}$$

qui nous permet d'approximer correctement k.

La figure (VII.131) représente le bilan centré sur la première moitié de la tuyère. Le bilan que nous présentons à cette station est très différent de celui obtenu par les simulations $R_{ij} - \varepsilon$ pour $y > 0{,}03\ m$ figure (VII.132). Ceci n'est pas trop surprenant dans la mesure où tous les termes, sauf la production, sont modélisés dans les simulations statistiques [80], tandis que nous évaluons chaque terme du bilan à partir de nos variables même si comme nous l'avons déjà souligné nous négligeons toutes les contributions de sous maille. La figure (VII.132) représente le bilan obtenu sur les tensions longitudinales $\widehat{u'''u'''}$ par $R_{ij} - \varepsilon$ [80] en $x = 0{,}310\ m$ et $z = 0{,}1113\ m$. Comme la majorité de l'énergie est contenue dans nos fluctuations longitudinales, il y a un sens à comparer notre bilan sur k avec le bilan sur $\widehat{u'''u'''}$. Nous rappelons que :

$$\langle \rho \rangle \frac{D\widehat{u_i''' u_j'''}}{Dt} = C_{ij} = P_{ij} + d_{ij} + \Phi_{ij} - \langle \rho \rangle \varepsilon_{ij}$$

avec P_{ij} la Production, $-\langle \rho \rangle \varepsilon_{ij}$ la dissipation visqueuse. d_{ij} les termes de diffusion turbulente et de diffusion visqueuse tandis que le terme Φ_{ij} correspond au terme de redistribution. Nous avons vu que le regroupement de nos termes est un peu différent de ceux avec lesquels nous comparons notre bilan à cette station et Φ_k est nul dans le bilan de k. Par contre le terme de pression-dilatation qui est négligée dans la modélisation de Launder-Shima [80] des tensions de Reynolds apparaît dans notre bilan. Nous avons souligné que le terme de fluctuation de vitesse avec le gradient de pression filtrée est négligeable par rapport au terme de pression-dilatation. Les résultats de la SGE obtenu sur le terme de pression-dilatation pourrait donc servir de modélisation dans la simulation statistique où il est négligé puisqu'il apparaît qu'il n'est pas nul dans le cœur.

Le bilan réalisé avec la modélisation statistique et le bilan réalisé à partir des variables résolues ont une allure similaire dans la zone de recirculation autour de $y = 0{,}02\ m$.

Nous n'avons pas les mêmes échelles puisque nos termes sont rendus sans dimension par $\rho_{in}u_{ref}^3/\chi$ et qu'il y a un facteur deux entre le calcul de l'énergie cinétique et les corrélation ; c'est pourquoi nous discutons plutôt du rapport des différents termes entre eux pour les comparer.

Sur la figure (VII.131), le terme positif correspond à la production qui est importante dans le décollement et où les corrélations longitudinales prédites par la SGE sont importantes. Le second terme positif correspond au terme de redistribution. Enfin les trois termes négatifs sont la dissipation avec l'intensité minimale en valeur absolue, le terme de pression-dilatation et enfin le terme de convection qui présente l'intensité maximum. On observe également une forte production sur les résultats obtenus par RANS à cette station figure (VII.132). Les trois termes négatifs sur la figure (VII.132) sont respectivement la dissipation, puis le terme de convection et enfin Φ_{ij} qui a l'intensité maximum en valeur absolue. Tous ces termes tendent rapidement vers zero hors de la zone du décollement, ce qui n'est pas le cas avec la SGE.

Le terme de production est positif et important dans les deux bilans. Le terme de convection, qui est négatif sur les deux bilans, est plus important en SGE. La dissipation est négative dans les deux cas et du même ordre d'importance. La diffusion, qui est très faible en RANS, apparaît plus importante avec nos données. Il faut néanmoins souligner que nous tenons compte d'un partie de la diffusion turbulente du tenseur des contraintes qui est négligée dans la modélisation de Launder-Shima. Enfin, le terme de pression-dilatation est positif sur nos résultats.

VII.4.6 Conclusions sur les bilans de k présentés

Cette partie nous a permi de montrer qu'il est possible d'avoir un retour des résultats moyens de la SGE sur la modélisation statistique. Les bilans sont assez différents selon qu'ils sont obtenus par RANS ou la SGE, plus particulièrement dans le cœur de la tuyère. La modélisation du terme des corrélations de pression-dilatation semble importante pour bien capturer l'amplification de la turbulence dans le cœur comme observé sur nos résultats et il serait intéressant de regarder l'influence d'une modélisation de ce terme à partir de nos calculs dans la simulation statistique..

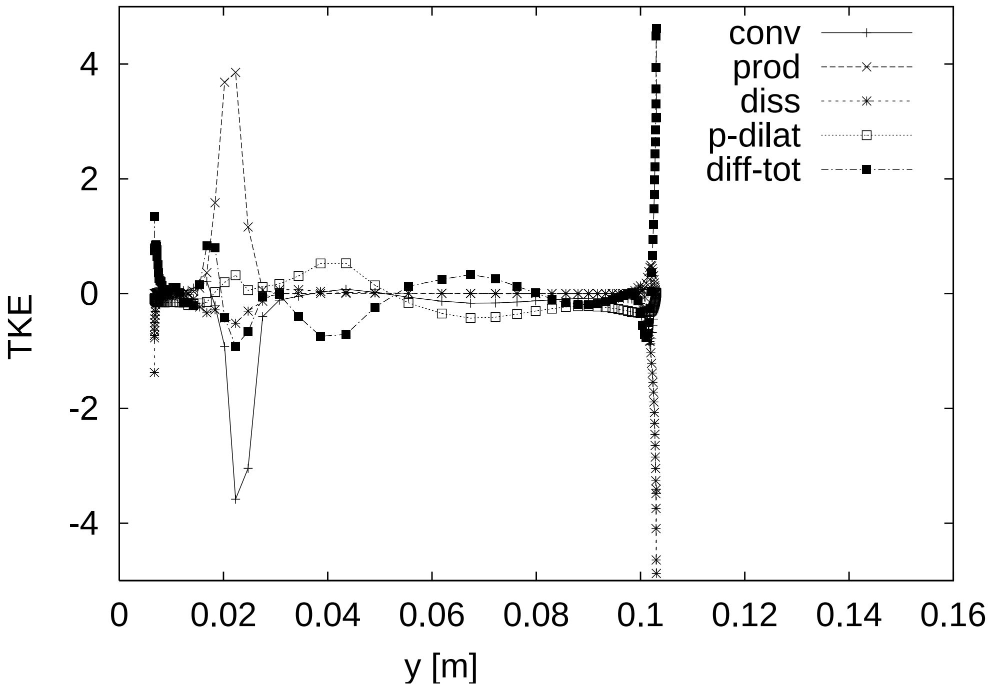


FIG. VII.129 – *Bilan selon (Oy) en* $x = 0{,}308$ *m et* $z = 0{,}1115$ *m*

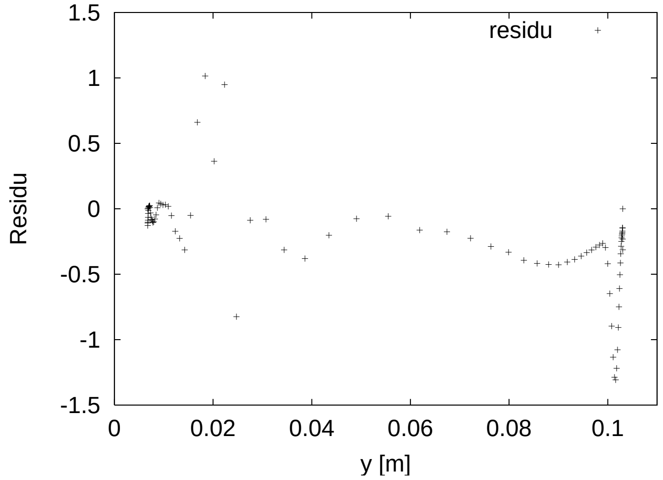


FIG. VII.130 – *Résidu du bilan en* $x = 0{,}308$ *m et* $z = 0{,}1115$ *m*

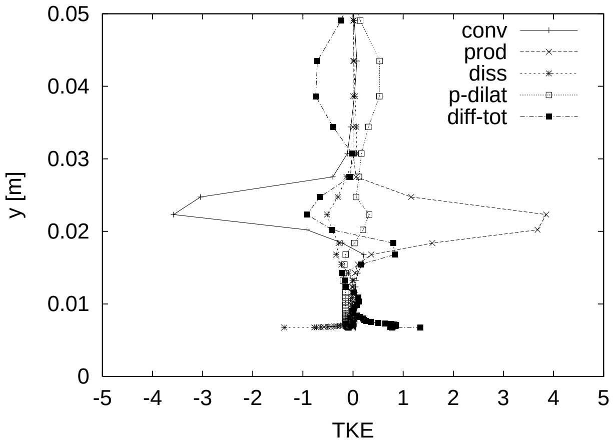


FIG. VII.131 – *Bilan selon (Oy) en* $x = 0{,}308$ *m et* $z = 0{,}1115$ *m*

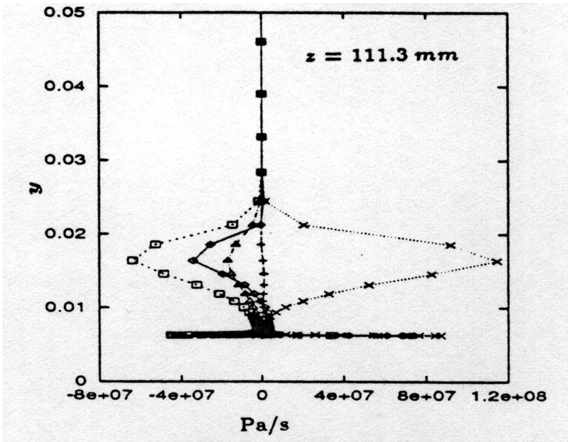
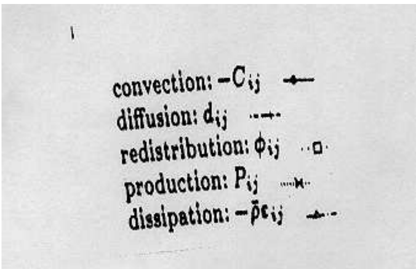


FIG. VII.132 – *Bilan RANS selon (Oy) en* $x = 0{,}310$ *m et* $z = 0{,}1113$ *m*



Chapitre VIII

Conclusion et Perspectives

Ce travail a porté sur la Simulation des Grandes Echelles en régime compressible en géométrie complexe, en vue d'une application aux écoulements dans les turbomachines pour le calcul des grandes structures énergétiques présentes dans ces écoulements hors régime nominal. La tuyère 3D de l'ONERA, avec une bosse en flèche sur la paroi basse, a été retenue pour valider les potentialités de la SGE en géométrie complexe. C'est un cas test qui présente un phénomène d'interaction entre une onde de choc et une couche limite à l'origine d'un large décollement, qui est un phénomène qui peut être rencontré au sein des turbomachines, pouvant avoir des effets néfastes. De plus, c'est un cas test pour lequel il existe de nombreux résultats expérimentaux et statistiques.

Les équations de Navier Stokes pour un fluide compressible ont été résolues dans la géométrie considérée en adaptant les conditions aux limites en entrée, sortie et aux parois. La méthodologie de la simulation des grandes échelles a été utilisée pour filtrer spatialement les grandes échelles de l'écoulement et modéliser la turbulence à petite échelle. Les équations des écoulements de fluide compressible présentent un grand nombre de termes à modéliser. Seuls le tenseur de sous maille et le flux de chaleur de sous maille sont modélisés dans cette étude. Le tenseur de sous maille est calculé à l'aide du modèle d'échelles mixtes développé au LIMSI et le flux de chaleur est modélisé à l'aide d'une hypothèse de premier gradient. Les équations sont discrétisées avec un schéma temporel explicite Runge-Kutta d'ordre deux. Les termes non linéaires sont discrétisés grâce au schéma TVD d'Harten-Yee d'ordre deux et les termes visqueux sont approximés par un schéma centré également d'ordre deux.

Ce travail a permis de montrer qu'il est possible de récupérer des informations instationnaires en perturbant un écoulement initial obtenu par simulation statistique en utilisant la méthodologie des grandes échelles. C'est un fait important dans la mesure où une des difficultés majeures des méthodes RANS à l'heure actuelle pour le calcul instationnaire vient du nombre d'équations à résoudre et du nombre important de termes à modéliser. Le nombre d'équations utilisées en SGE est constant et les résultats obtenus sont instationnaires. Un autre avantage de la SGE est sa simplicité et le faible nombre de paramètres à caler par rapport à RANS car nous avons vu qu'il y a quand même un certain nombre de termes de sous maille en régime compressible. Les résultats obtenus sur les tensions de Reynolds sont encourageants même si les tensions sont surestimées. La SGE capture mieux les oscillations de l'onde de choc dans le cœur de la tuyère. Nous avons vu aussi que certains termes directement liés aux effets de la compressiblité négligés dans la modélisation de Launder-Shima apparaîssent dans le bilan de k réalisé à partir des variables résolues de la SGE. Le terme de pression-dilatation responsable de l'amplification de la turbulence dans le cœur n'est pas négligeable et les résultats de la SGE pourraient permettre de modéliser ce terme dans les bilans statistiques.

Néanmoins, nous nous sommes heurtés lors de ce calcul à un certain nombre de difficultés. La première est liée au coût CPU de la SGE très important en résolution explicite. Comme nous l'avons souligné au chapitre (IV), le code que nous utilisons est parallèle du fait de la nécessité d'importantes ressources de stockage. La résolution explicite est alors très simple d'utilisation sur ce type de structure de code. Cependant, l'un des facteurs contraignant dans le calcul est la taille des mailles aux parois et donc le pas de temps que nous utilisons en résolution explicite. Nous avons choisi initialement de ne pas utiliser de lois de paroi parce qu'il semble judicieux de ne pas introduire de modélisation supplémentaire dans la résolution des grandes échelles. Une amélioration des résultats est possible en utilisant un maillage plus serré autour du choc et aux parois. Un nombre de points plus important dans la direction longitudinale pour mieux capturer le choc peut permettre d'éviter de trop le diffuser. Un maillage plus serré aux parois serait mieux adapté pour capturer plus précisément l'interaction entre l'onde de choc et les couches limites. Cela permettrait également de mieux prédire la production de l'énergie cinétique par la SGE et ainsi d'améliorer les bilans et le calcul des tensions de Reynolds.

L'utilisation de la simulation des grandes échelles pour calculer un écoulement aussi complexe a soulevé de nombreuses questions fondamentales. L'interprétation de l'opération de filtrage sur des maillages curvilignes qui sont anisotropes n'est pas évidente. Il subsiste également des problèmes associés au couplage entre la viscosité numérique introduite par les schémas à capture de choc robustes et la viscosité de sous maille. Les schémas à capture de choc d'ordre élevé de type WENO ne coûtent pas plus cher en temps que l'utilisation de schémas robustes et il peuvent limiter la dissipation numérique introduite. Nous avons également vu que nos résultats sur les vitesses moyennes et le nombre de Mach isentropique ont besoin d'être améliorés. Il serait intéressant d'étudier l'effet d'un second col plus ouvert sur la prédiction de l'écoulement par la SGE. L'ouverture du second col permettrait d'avoir un choc plus fort en diminuant la pression totale derrière le choc et donc d'obtenir de meilleurs résultats sur le nombre de Mach isentropique.

Nous tenons à souligner au final que ce calcul n'a été rendu possible que grâce à une évolution très rapide des moyens informatiques sur ces trois dernières années et il ne constitue qu'un premier calcul.

La SGE est une méthodologie qui sera de plus en plus utilisée dans le monde industriel vu ses capacités à capturer les grandes échelles instationnaires des écoulements. Mais comme nous l'avons vu, c'est une technique qui reste encore très chère. Une voie pour son utilisation plus systématique en écoulement complexe passe certainement par l'implicitation des codes. Cela s'avèrera d'autant plus nécessaire s'il faut des maillages très serrés aux parois pour bien calculer les différentes interactions qui sont observée dans la tuyère. Cela pose de nouveaux problèmes, comme le problème du filtrage temporel des solutions en plus du filtrage spatial et du choix d'un pas de temps pertinent par rapport aux phénomènes physiques considérés. Il se pose également la question de savoir s'il ne faut impliciter que les termes de diffusion ou aussi une partie des termes de convection. Néanmoins, la réalisation d'études paramétriques sur les modélisations utilisées en SGE pour calculer des écoulements présentant des phénomènes physiques complexes ne sera rendue possible qu'à condition de faire diminuer le temps des calculs. Cette voie est d'autant plus sérieusement envisageable depuis que la mémoire de calcul nécessaire n'implique plus forcément la parallélisation des codes. Une autre voie complémentaire est peut-être d'utiliser le couplage entre la SGE et les simulations statistiques un peu différemment. Nous avons vu sur les résultats que les différences observées entre les résultats se situent après le col sonique et non dans les parties où le fluide accélère à l'entrée. Il pourrait être bénéfique de ne calculer que la partie d'interaction entre l'onde de choc/couche limite en travaillant sur les conditions physiques à imposer à l'entrée d'un domaine de calcul plus restreint. Il a déjà été utilisé avec succès des initialisations de calculs spatiaux à partir de calculs temporels moins chers [29].

La montée en puissance de calcul des ordinateurs dans les années à venir permettra de simuler numériquement des écoulements de plus en plus complexes et de tester plus systématiquement la méthodologie de la SGE dans les conditions réelles d'écoulements industriels compressibles, permettant une modélisation de plus en plus fine des écoulements turbulents instationnaires compressibles 3D en géométrie confinée.

Annexe A

A.1 Changement de coordonnées et notations

On considère la transformation des équations de Navier Stokes par changement de coordonnées (x, y, z) $\longrightarrow$ (ξ, η, ζ). On a respectivement :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

Le jacobien de la transformation s'écrit :

$$J = \frac{\partial z}{\partial \xi}(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi}) - \frac{\partial z}{\partial \eta}(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi}) + \frac{\partial z}{\partial \zeta}(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi})$$

Soit $F_t = F + F_v$, $G_t = G + G_v$ et $H_t = H + H_v$. Les équations se transforment selon [39] :

$$\begin{aligned} J\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(J\frac{\partial \xi}{\partial x}F_t + J\frac{\partial \xi}{\partial y}G_t + J\frac{\partial \xi}{\partial z}H_t) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(J\frac{\partial \eta}{\partial x}F_t + J\frac{\partial \eta}{\partial y}G_t + J\frac{\partial \eta}{\partial z}H_t) + \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}(J\frac{\partial \zeta}{\partial x}F_t + J\frac{\partial \zeta}{\partial y}G_t + J\frac{\partial \zeta}{\partial z}H_t) = 0 \end{aligned}$$

Les notations suivantes sont utilisées dans le document :

$$\alpha_\xi = J\frac{\partial \xi}{\partial x}\ ,\ \alpha_\eta = J\frac{\partial \eta}{\partial x}\ ,\ \alpha_\zeta = J\frac{\partial \zeta}{\partial x}\ ,\ \beta_\xi = J\frac{\partial \xi}{\partial y}\ ,\ \beta_\eta = J\frac{\partial \eta}{\partial y}\ ,\ \beta_\zeta = J\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$
$$\gamma_\xi = J\frac{\partial \xi}{\partial z}\ ,\ \gamma_\eta = J\frac{\partial \eta}{\partial z}\ ,\ \gamma_\zeta = J\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

$$\widehat{F} = \alpha_\xi F + \beta_\xi G + \gamma_\xi H\ ,\ \widehat{G} = \alpha_\eta F + \beta_\eta G + \gamma_\eta H\ ,\ \widehat{H} = \alpha_\zeta F + \beta_\zeta G + \gamma_\zeta H$$
$$\widehat{F_v} = \alpha_\xi F_v + \beta_\xi G_v + \gamma_\xi H_v\ ,\ \widehat{G_v} = \alpha_\eta F_v + \beta_\eta G_v + \gamma_\eta H_v\ ,\ \widehat{H_v} = \alpha_\zeta F_v + \beta_\zeta G_v + \gamma_\zeta H_v$$

Les quantités α_i, β_j et γ_k sont les éléments métriques de la transformation.

D'où le système d'équations à résoudre dans le système de coordonnées (ξ,η,ζ) :

$$J\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \widehat{F_v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G_v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{H_v}}{\partial \zeta} = 0$$
$$\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$$

A.2 Matrices des équations de la Dynamique des Fluides et leur transformation

Matrice du système hyperbolique d'équations de conservation sous forme conservative :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0 \tag{A.1}$$

où Q, F, G et H ont été définis à la section (A.1).

Le système A.1 s'écrit encore sous forme non conservative [88] :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} A_{nj}\frac{\partial Q}{\partial nj} = 0 \tag{A.2}$$

où les A_{nj} correspondent aux trois matrices dans les directions (ξ,η,ζ) :

$$\begin{aligned} A_\xi &= \alpha_\xi A_x + \beta_\xi A_y + \gamma_\xi A_z \\ A_\eta &= \alpha_\eta A_x + \beta_\eta A_y + \gamma_\eta A_z \\ A_\zeta &= \alpha_\zeta A_x + \beta_\zeta A_y + \gamma_\zeta A_z \end{aligned}$$

A titre d'exemple nous donnons l'expression de la matrice A_ξ en posant [86], [80] :

$$\begin{cases} n_x = \alpha_\xi \\ n_y = \beta_\xi \\ n_z = \gamma_\xi \end{cases}$$

$(\alpha_\xi,\beta_\xi,\gamma_\xi)$ sont les composantes du gradient de $\xi(x,y,z)$ définies dans le système (x,y,z), qui définit la normale à la direction $\xi = c1$.

Les coordonnées de la normale sont données par :

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{n_x}{\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}} \\ k_2 = \dfrac{n_y}{\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}} \\ k_3 = \dfrac{n_z}{\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2}} \end{cases}$$

La matrice A_ξ s'écrit :

$$A_\xi =$$

$$\begin{matrix} 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ \frac{(\gamma-1)q^2}{2}n_x - u(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}) & -(\gamma-2)un_x + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & -(\gamma-1)vn_x + un_y & -(\gamma-1)wn_x + un_y & (\gamma-1)n_x \\ \frac{(\gamma-1)q^2}{2}n_y - v(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}) & -(\gamma-1)un_y + vn_x & -(\gamma-2)vn_y + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & -(\gamma-1)wn_y + vn_z & (\gamma-1)n_y \\ \frac{(\gamma-1)q^2}{2}n_z - w(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}) & -(\gamma-1)un_z + wn_x & -(\gamma-1)vn_z + wn_y & -(\gamma-2)wn_z + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & (\gamma-1)n_z \\ (\gamma-1)q^2 - \gamma E)\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & \delta n_x - u(\gamma-1)\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & \delta n_y - v(\gamma-1)\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & \delta nz - w(\gamma-1)\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} & \gamma\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \end{matrix}$$

où q^2 est l'énergie cinétique : $q^2 = \sum_{j=1}^{3} u_j^2$ et $\delta = (\gamma E - (\gamma-1)\dfrac{q^2}{2})$.

Pour un système hyperbolique, les valeurs propres sont réelles et la matrice est diagonalisable :

$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{R}_\xi \Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1}$$

$$\begin{cases} \lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = n_x u + n_y v + n_z w \\ \lambda^4 = \lambda^1 + c\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2} \\ \lambda^5 = \lambda^1 - c\sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_z}^2} \end{cases}$$

Les matrices $\mathcal{R}_\xi$ et $\mathcal{R}_\xi^{-1}$ sont construites à partir de [86] par rapport à la base canonique $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ et pour un scalaire $\beta = 0$. Les vecteurs propres sont rangés selon la même numérotation que les valeurs propres. D'un point de vue numérique, pour éviter de multiples divisions dans le calcul de $\mathcal{R}_\xi^{-1}$ utilisée plus souvent que $\mathcal{R}_\xi$ dans nos calculs, tous les élements de $\mathcal{R}_\xi^{-1}$ ont été mulitipliés par le carré de la vitesse du son locale c^2 et ceux de $\mathcal{R}_\xi$ divisés par c^2.

$$
\mathcal{R}_\xi = \begin{pmatrix}
\dfrac{1}{c^2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c^2} \\
\dfrac{u}{c^2} & R_{22} & R_{23} & \dfrac{u+ck_1}{c^2} & \dfrac{u-ck_1}{c^2} \\
\dfrac{v}{c^2} & R_{32} & R_{33} & \dfrac{v+ck_2}{c^2} & \dfrac{v-ck_2}{c^2} \\
\dfrac{w}{c^2} & R_{42} & R_{43} & \dfrac{w+ck_3}{c^2} & \dfrac{w-ck_3}{c^2} \\
\dfrac{q^2}{2c^2} & (uR_{22}+vR_{32}+wR_{42}) & (uR_{23}+vR_{33}+wR_{43}) & \dfrac{H+c(\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{v})}{c^2} & \dfrac{H-c(\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{v})}{c^2}
\end{pmatrix}
$$

avec

$$
\begin{cases}
F = (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 - 1)c \\
R_{22} = \dfrac{k_2(k_1k_3 - k_2^2) - k_3(k_2k_3 - k_1^2)}{F} \\
R_{32} = \dfrac{k_3(k_1k_2 - k_3^2) - k_1(k_1k_3 - k_2^2)}{F} \\
R_{42} = \dfrac{k_1(k_2k_3 - k_1^2) - k_2(k_1k_2 - k_3^2)}{F} \\
R_{23} = -\dfrac{k_2(k_1 - k_2) - k_3(k_3 - k_1)}{F} \\
R_{33} = -\dfrac{k_3(k_2 - k_3) - k_1(k_1 - k_2)}{F} \\
R_{43} = -\dfrac{k_1(k_3 - k_1) - k_2(k_2 - k_3)}{F}
\end{cases}
$$

De même on a :

$$
R^{-1} = \begin{pmatrix}
c^2 - (\gamma-1)\dfrac{q^2}{2} & (\gamma-1)u & (\gamma-1)v & (\gamma-1)w & -(\gamma-1) \\
R^{-1}_{21} & (k_2-k_3)c & (k_3-k_1)c & (k_1-k_2)c & 0 \\
R^{-1}_{31} & (k_1k_2-k_3^2)c & (k_2k_3-k_1^2)c & (k_1k_3-k_2^2)c & 0 \\
R^{-1}_{41} & \dfrac{ck_1-(\gamma-1)u}{2} & \dfrac{ck_2-(\gamma-1)v}{2} & \dfrac{ck_3-(\gamma-1)w}{2} & \dfrac{\gamma-1}{2} \\
R^{-1}_{51} & -(\dfrac{ck_1+(\gamma-1)u}{2}) & -(\dfrac{ck_2+(\gamma-1)v}{2}) & -(\dfrac{ck_3+(\gamma-1)}{2}) & \dfrac{\gamma-1}{2}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
R^{-1}_{21} = ((k_3-k_2)u + (k_1-k_3)v + (k_2-k_1)w)c \\
R^{-1}_{31} = ((k_3^2 - k_1k_2)u + (k_1^2 - k_2k_3)v + (k_2^2 - k_1k_3)w)c \\
R^{-1}_{41} = \dfrac{(\gamma-1)q^2}{4} - \dfrac{\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{v}}{2}c \\
R^{-1}_{51} = \dfrac{(\gamma-1)q^2}{4} + \dfrac{\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{v}}{2}c
\end{cases}
$$

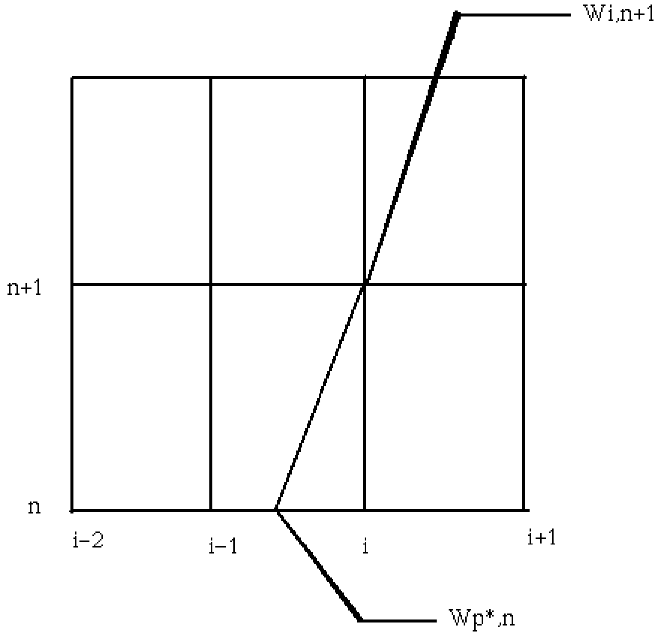


FIG. A.1 – *Méthodes des caractéristiques*

A.3 Résolution d'un système d'équations linéaires hyperbolique

Equation linéaire :

Cette section ne présente que les schémas décentrés, utilisés pour résoudre les équations scalaires hyperboliques $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial \xi} = 0$, avec $f = au$. La discrétisation des systèmes linéaires se généralise ensuite.

La discrétisation décentrée basée sur les caractéristiques a été introduite par Courant, Isaacson et Reeves en 1952.

Soit à discrétiser l'équation de convection scalaire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0$$

On suppose $\lambda \geq 0$. La solution ω est constante le long des lignes caractéristiques définies par l'équation $\dfrac{d\xi}{dt} = \lambda$. On peut donc écrire que $\omega_i^{n+1} = \omega_{p*}$ avec $\omega_{i-1}^n \leq \omega_{p*} \leq \omega_i^n$ comme le montre la figure (A.1).

Au premier ordre, on peut supposer que la solution varie linéairement avec ξ à un instant t fixé :

$$\frac{\omega_{p*}^n - \omega_i^n}{\xi_{p*} - \xi_i} = \frac{\omega_{i-1}^n - \omega_i^n}{\xi_{i-1} - \xi_i}.$$

On a de plus $\dfrac{\xi_i - \xi_{p*}}{t^{n+1} - t^n} = \lambda$.

D'où l'expression bien connue du schéma décentré pour $\lambda \geq 0$:

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\omega_i^n - \omega_{i-1}^n).$$

De même pour $\lambda \leq 0$:

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\omega_{i+1}^n - \omega_i^n).$$

Ces discrétisations ne sont stables que si le nombre de CFL, $\sigma = \lambda \dfrac{\Delta t}{\Delta \xi} \leq 1$.

En posant $f_i = \lambda \omega_i$, le schéma au premier ordre ci-dessus, peut se reécrire sous forme conservative :

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n - \sigma(h_{i+1/2} - h_{i-1/2})$$

avec

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + fi) - \frac{|\lambda|}{2}(\omega_{i+1} - \omega_i).$$

La discrétisation d'un système linéaire sous forme conservative se déduit de la discrétisation de l'équation scalaire en diagonalisant la matrice jacobienne du flux et en introduisant les variables caractéristiques. Une fois dans l'espace des caractéristiques, les équations sont découplées et se discrétisent selon le signe de la valeur propre. Les équations sont ensuite reprojetées dans l'espace physique.

Système d'équations linéaires

Pour l'instant on ne considère qu'une direction de l'espace. Soit à résoudre :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

En écrivant les équations sous forme non conservative, il apparaît la matrice $\mathcal{A}_\xi = \dfrac{\partial F}{\partial Q}$.

Le système se réécrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathcal{A}_\xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0$$

Pour un système hyperbolique, les valeurs propres sont rélles et la matrice est diagonalisable :

$$\mathcal{A}_\xi = \mathcal{R}_\xi \Lambda_\xi \mathcal{R}_\xi^{-1}$$

La matrice $\mathcal{A}_\xi$ a pour valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = \xi_x u \\ \lambda^4 = \lambda^1 + c|\xi_x| \\ \lambda^5 = \lambda^1 - c|\xi_x| \end{cases}$$

où c est la vitesse du son dans la direction définie par la normale à $\xi = c1$.

$$\overrightarrow{v_{son}} = c\frac{\overrightarrow{grad}\xi}{\|\overrightarrow{grad}\xi\|}$$

On pose $\Lambda_\xi = \Lambda_\xi^+ + \Lambda_\xi^-$. Les variables caractéristiques sont définies par : $\mathcal{R}_\xi^{-1}\partial Q = \partial\omega$.

On a donc le système d'équations à résoudre dans l'espace des caractéristiques :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \Lambda_\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = 0.$$

D'où :

$$\begin{cases} \omega_i^{n+1} = \omega_i^n - \Lambda_\xi^-\frac{\Delta t}{\Delta\xi}(\omega_i^n - \omega_{i-1}^n) - \Lambda_\xi^+\frac{\Delta t}{\Delta\xi}(\omega_{i+1}^n - \omega_i^n) \\ \omega_i^{n+1} = \omega_i^n - \Lambda_i\frac{\Delta t}{\Delta\xi}(\omega_{+1}^n - \omega_{i-1}^n) - |\Lambda_i|\frac{\Delta t}{2\Delta\xi}(\omega_{i+1}^n - 2\omega_i^n + \omega_{i-1}^n) \end{cases}$$

En repassant dans l'espace physique, on obtient :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta\xi}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + \frac{\Delta t}{2\Delta\xi}|\mathcal{A}_{\xi,i}|(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n)$$

La viscosité numérique, non nulle pour les schémas décentrés, correspond au laplacien :

$$(Q_{i+1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n)$$

Le schéma peut se réécrire sous forme conservative : $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{\xi_{i+1/2}} - F_{\xi_{i-1/2}})$ avec $F_{\xi_{i+1/2}} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i) - \frac{1}{2}|\mathcal{A}_{\xi,i+1/2}|(Q_{i+1}^n - Q_i^n)$.

A.4 Schéma Runge-Kutta

- Principe

On cherche à résoudre :

$$U_t = f(t,U)$$

Le principe de la méthode Runge-Kutta pour obtenir la solution à l'instant (n+1) la connaissant à l'instant (n), consiste à approximer la courbe solution au point n par un arc de parabole. La propriété des paraboles, à savoir que la pente de la corde (MoM1) est

la moyenne arithmétique des pentes des tangentes (MoTo) et (M1T1), permet de calculer la solution de l'équation différentielle au temps (n+1). Les notations sont précisées sur la figure (A.2).
Ainsi on a :

$$M1 : \begin{cases} t_0 + h \\ U_0 + \frac{1}{2}(p_0 + p_1)h \end{cases}$$

où les p désignent la pente de la tangente à la parabole. On projette $M1$ sur $M'1$. Donc :

$$M'1 : \begin{cases} t_0 + h \\ U_0 + \frac{1}{2}(p_0 + p'_1)h \\ h \to 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne la valeur U_1 :

$$U_1 = U_0 + \frac{1}{2}h(f(t_0,U_0) + f(t_0 + h,U_0 + hp_0))$$

à l'ordre $\mathcal{O}(h^3)$. Les notations suivantes sont souvent utilisées :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_0,U_0) \\ k_2 = hf(t_0 + h,U_0 + k_1) \\ U_1 = U_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

• Généralisation
Dans la cas général il faut trouver a, b ... ; α, β, γ ... et R_1, R_2 ... tels que :

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_0,U_0) \\ k_2 = hf(t_0 + ah,U_0 + \alpha k_1) \\ k_3 = hf(t_0 + bh,U_0 + \beta k_1 + \gamma k_2) \\ \vdots \\ U_1 = U_0 + R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3 .... \end{cases}$$

avec U_1 une approximation de la solution à l'ordre $(\Delta t)^r$.

U_1 peut encore s'écrire sous la forme [68] :

$$U^i = U^0 + \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} C_{ik}\, L(U^k), \quad i = 1,2...,m \quad U^0 = U^n, \quad U^m = U^{n+1}$$

A.5 Principe des conditions analytiques pour les systèmes hyperboliques

On considère l'équation scalaire :

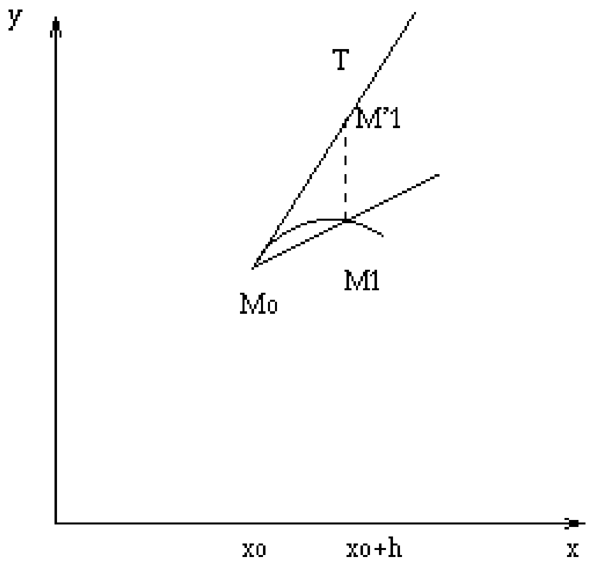


FIG. A.2 – *Coordonnées de M1*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \qquad 0 < x < b, \quad t > 0 \tag{A.3}$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{cases} W(x,0) = W_0(x) & 0 < x < b \\ W(0,t) = g(t) & t > 0 \end{cases}$$

La solution générale de ce système s'écrit :

$$W(x,t) = W_0(x - \lambda t)$$

Plusieurs cas se présentent [89] :

$\boxed{\lambda \geq 0}$

$f = c1$ sur $x - \lambda t = c2$ donne la figure (A.3) dans le plan (x,t). Pour $x - \lambda t \geq 0$ la solution à l'instant t dépend continument de la condition initiale. Pour $(x - \lambda t) < 0$, il faut une condition à la limite $W(0,t) = g(t)$ pour avoir un problème bien posé.

$\boxed{\lambda < 0}$

$f = c1$ sur $x - \lambda t = c2$ donne la figure (A.4) dans le plan (x,t). Dans ce cas, au contraire, la solution dépend toujours de la condition initiale et il n'y a pas besoin de conditions aux limites supplémentaires.

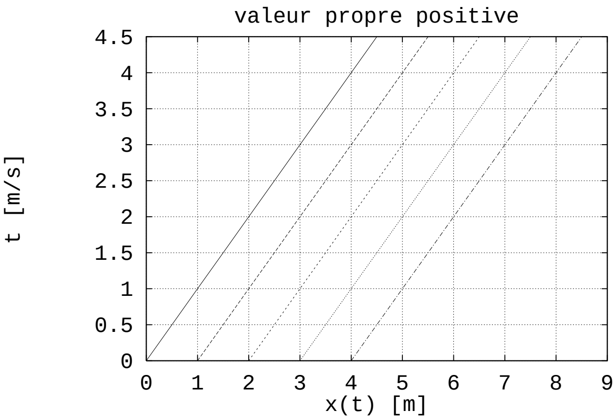


FIG. A.3 – $(x - \lambda t) = cste$ *pour* $\lambda = 1$.

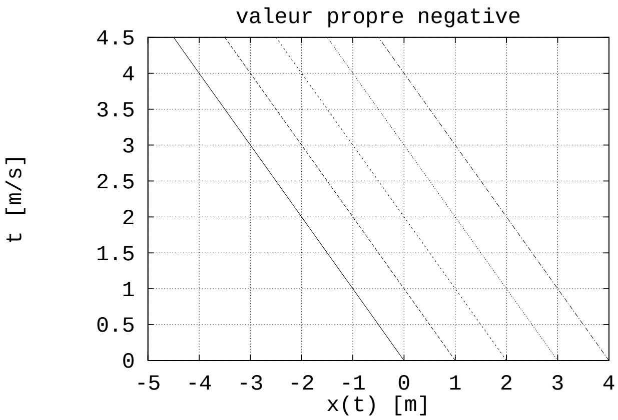


FIG. A.4 – $(x - \lambda t) = cste$ *pour* $\lambda = -1$.

Annexe B

B.1 Classification des termes dans les équations filtrées

Pour mieux montrer la complexité de l'opération de filtrage des équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles, nous présentons également les équations filtrées de façon classique sans introduire les variables de Favre.

B.1.1 Filtrage classique

Nous rappelons que les variables sont filtrées spatialement. Elles sont décomposées en une partie résolue $\overline{f}$ et une partie de sous maille f'' et donc $f = \overline{f} + f'$. Il y a plusieurs possibilités pour écrire les équations filtrées de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie et nous en avons sélectionné une qui reste proche de celle obtenue avec les variables de Favre [47]. Les équations obtenues après filtrage classique s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\,\overline{u}_j) = &\ -\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u_j} - \overline{\rho}\,\overline{u}_j) \\
\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\,\overline{u}_i\,\overline{u}_j + \overline{p}\delta_{ij} - \overline{\sigma}_{ij}) = &\ +\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u_j} - \overline{\rho}\,\overline{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u_i u_j} - \overline{\rho}\,\overline{u}_i\,\overline{u}_j) \\
\frac{\partial \overline{\rho}\,\overline{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\,\overline{u}_j\,\overline{e}) = &\ \overline{p}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{q_j}}{\partial x_j} + \overline{\Phi} - \frac{\partial(\overline{\rho e} - \overline{\rho}\,\overline{e})}{\partial t} + (\overline{\frac{\partial q_j}{\partial x_j}} - \frac{\partial \overline{q_j}}{\partial x_j}) \\
&\ -\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u_j e} - \overline{\rho}\,\overline{u}_j\,\overline{e}) - (\overline{p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \overline{p}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j})
\end{aligned}
$$

où la variable $\overline{e}$ est définie par $\overline{e} = \overline{(E/\rho)}$ et Φ est la fonction dissipation.

B.1.2 Filtrage avec changement de variable par pondération par la masse volumique

Les équations obtenues après filtrage en utilisant les variables de Favre sont rappelées :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\widetilde{u}_j) =\ & 0\\
\frac{\partial\overline{\rho}\widetilde{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j+\overline{p}\delta_{ij}-\widetilde{\sigma}ij) =\ & -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho}(\widetilde{u_iu_j}-\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j)-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\sigma}_{ij}-\widetilde{\sigma}ij)\\
\frac{\partial\overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}((\overline{\rho}\widetilde{E}+\overline{p})\widetilde{u}_j-\widetilde{u}_i\widetilde{\sigma}ij+\widetilde{q}_j) =\ & -\frac{\partial}{\partial x_j}(c_p\overline{\rho}(\widetilde{u_jT}-\widetilde{u}_j\widetilde{T}))-\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\overline{\rho}}{2}(u_i\widetilde{u_iu}_j-\widetilde{u_iu_i}\widetilde{u_j}))\\
& +\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j\sigma_{ij}}-\widetilde{u}_j\widetilde{\sigma}ij)-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{q_j}-\widetilde{q}_j)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\tau_{ij}=\overline{\rho}(\widetilde{u_iu_j}-\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j)}$ est le tenseur de sous maille
$\boldsymbol{\psi_j=c_p\overline{\rho}(\widetilde{u_jT}-\widetilde{u}_j\widetilde{T})}$ est le flux de chaleur de sous maille.
$\boldsymbol{C_{ijk}=\frac{\overline{\rho}}{2}(u_i\widetilde{u_iu}_j-\widetilde{u_iu_i}\widetilde{u_j})}$ sont les corrélations triples.

Il y a deux termes inconnus dans les équations de quantité de mouvement :

$$
\begin{aligned}
A_{1,i} &= -\partial_j(\tau_{ij})\\
A_{2,i} &= -\partial_j(\overline{\sigma}_{ij}-\widetilde{\sigma}_{ij})
\end{aligned}
$$

et quatre termes inconnus dans l'équation de l'énergie :

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -\partial_j(c_p\overline{\rho}(\widetilde{u_jT}-\widetilde{u}_j\widetilde{T}))\\
F_2 &= -\partial_j(\frac{\overline{\rho}}{2}(u_i\widetilde{u_iu}_j-\widetilde{u_iu_i}\widetilde{u_j}))\\
F_3 &= \partial_j(\overline{u_j\sigma_{ij}}-\widetilde{u}_j\widetilde{\sigma}_{ij})\\
F_4 &= -\partial_j(\overline{q_j}-\widetilde{q}_j)
\end{aligned}
$$

Nous allons développer les relations qui existent entre les variables que nous utilisons et les variables de Vreman pour justifier la classification des termes F_i que nous avons données dans la section (III.2.1) : $\|F_1\|\sim\|F_2\|\simeq\|A_{1,i}\|$ et $\|F_3\|\sim\|F_4\|\simeq\frac{1}{10}\|F_1\|$.
Nos variables physiques sont calculées à partir de la température $\widetilde{T}$ et de la pression $\overline{p}$ tandis que les variables physiques dans [87] sont évaluées à la température modifiée $\breve{T}=\widetilde{T}+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)M_R^2\tau_{ii}$ et à la pression modifiée $\breve{p}=(\gamma-1)(\overline{\rho}\widetilde{E}-\frac{\overline{\rho}}{2}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_i)$. Si l'on réecrit les équations en introduisant la pression modifiée $\breve{p}$ et la température modifiée $\breve{T}$ on peut exprimer les coefficients F_1, F_2, F_3 et F_4 en fonction des termes D_k évalués par simulation directe dans l'article [87]. Les termes D_k s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\gamma}{\gamma-1}\partial_j(\overline{pu_j}-\overline{p}\widetilde{u})\\
D_2 &= \partial_j(\frac{1}{2}\overline{\rho}(u_i\widetilde{u_iu}_j-\widetilde{u_iu_i}\widetilde{u_j}))\\
D_3 &= \partial_j(\frac{\gamma-1}{2}\overline{\rho}\tau_{ii}\widetilde{u_j})
\end{aligned}
$$

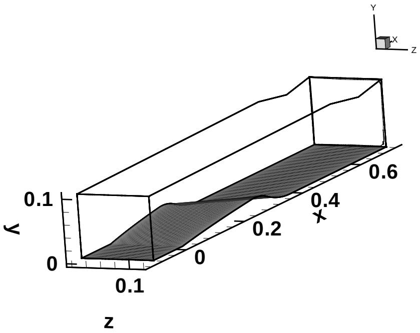


FIG. B.1 – *Tuyère de Délery 3D*

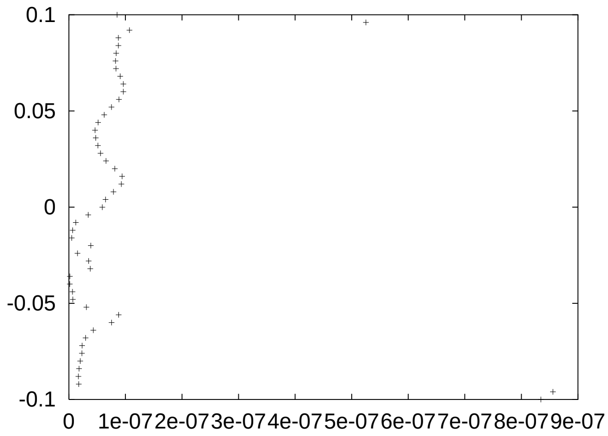


FIG. B.2 – *Energie cinétique de sous maille rendue sans dimension par l'énergie cinétique résolue selon (Ox) pour y = 0,043 m et z = 0,0527 m*

$$D_4 = \partial_j(\overline{\sigma_{ij} u_i} - \breve{\sigma}_{ij}\widetilde{u_i})$$
$$D_5 = \partial_j(\overline{q_j} - \breve{q}_j)$$

On a :

$$F_1 = -D_1$$
$$F_2 = -D_2$$
$$F_3 = D_4 - \partial_j(\breve{u}_j\widetilde{\sigma}_{ij} - \widetilde{u}_j\breve{\sigma}_{ij})$$
$$F_4 = -D_5 + \partial_j(\widetilde{q}_j - \breve{q}_j)$$

Les quantités $\breve{q}_j$ et $\breve{\sigma}_{ij}$ étant évaluées à la température modifiée $\breve{T}$ et à la pression modifiée $\breve{p}$. La principale différence entre les termes D_k et F_k vient donc de la différence entre les paramètres physiques évalués à $(\breve{T}, \breve{p})$ et à $(\widetilde{T}, \overline{p})$. Comme les couples diffèrent de quantités proportionnelles à l'énergie cinétique de sous maille, nous l'avons tracé dans notre géométrie dans les trois directions de l'espace.

Les figures (B.2), (B.3) et (B.4) montrent la répartition de l'énergie cinétique de sous-maille τ_{kk}, rendue sans dimension par l'énergie cinétique locale résolue $\widetilde{u}_i\widetilde{u}_i$, dans notre géométrie, selon (Ox), (Oy), (Oz) respectivement. La géométrie de la tuyère est rappelée sur la figure (B.1). La figure (B.2) représente τ_{kk} le long de l'axe (Ox) pour la première portion de la tuyère définie par $-0{,}1\ m \leq x \leq 0\ m$. La figure (B.3) représente τ_{kk} le long de l'axe (Oy) dans un plan médian et la figure (B.4) représente l'énergie cinétique de sous maille dans la troisième direction sur une ligne située aussi au milieu de la tuyère. On observe que les maxima de τ_{kk} sont localisé dans les couches limites et que τ_{kk} reste faible devant l'énergie cinétique résolue. On en conclu que les couples $(\breve{u}_j\widetilde{\sigma}_{ij} - \widetilde{u}_j\breve{\sigma}_{ij})$ et $(\widetilde{q}_j - \breve{q}_j)$ sont du même ordre de grandeur, ce qui justifie l'utilisation de la classification de Vreman concernant les termes filtrés dans notre cas.

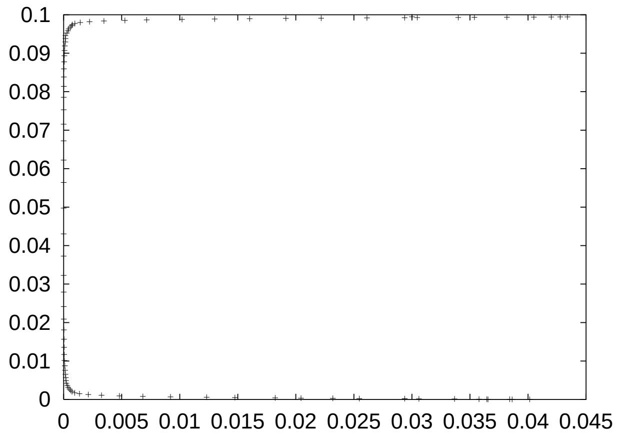


FIG. B.3 – *Energie cinétique de sous maille rendue sans dimension par l'énergie cinétique résolue selon (Oy) pour x = - 0,1 m et z = 0,0527 m*

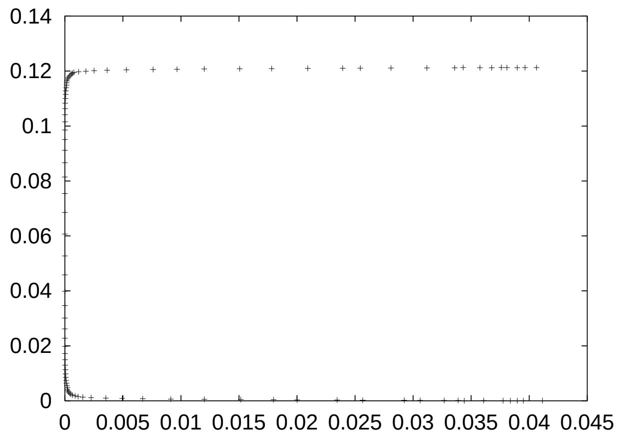


FIG. B.4 – *Energie cinétique de sous maille rendue sans dimension par l'énergie cinétique résolue selon (Oz) pour x = - 0,1 m et y = 0,043 m*

B.2 Expression du schéma numérique d'Harten Yee utilisé

Pour un système d'équations hyperboliques, le flux du schéma s'écrit :

$$\breve{F}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}\left[\widehat{F}_{i+1,j,k} + \widehat{F}_{i,j,k} + R_{i+1/2,j,k}\Phi_{i+1/2,j,k}\right]$$

avec

$$\begin{cases} \phi^l_{i+1/2} = -\frac{1}{2}\,\sigma(a^l_{i+1/2})\,(g^l_{i+1} + g^l_i) + \psi(a^l_{i+1/2} + \gamma^l_{i+1/2})\alpha^l_{i+1/2} \\ \alpha^l_{i+1/2} = \omega^l_{i+1} - \omega^l_i \\ g^l_i = \dfrac{(\alpha^l_{i+1/2}\alpha^l_{i-1/2}) + |(\alpha^l_{i+1/2}\alpha^l_{i-1/2})|}{(\alpha^l_{i-1/2} + \alpha^l_{i+1/2})} \\ \sigma(z) = \frac{1}{2}\left[\psi(z) - \lambda\, z^2\right] \\ \psi(z) = |z| \end{cases}$$

$$\gamma^l_{i+1/2} = \sigma(a^l)\begin{cases} \dfrac{g^l_{i+1} - g^l_i}{\alpha^l_{i+1/2}} & \alpha^l_{i+1/2} \neq 0 \\ 0 \quad sinon \end{cases}$$

B.3 Conditions aux limites discrètes imposées sur les parois

Les conditions aux limites imposées aux parois solides ($\eta = 1,\ \eta = \eta_{max},\ \zeta = 1$ et $\zeta = \zeta_{max}$) sont les suivantes :

$$\widetilde{u} = 0 \tag{B.1}$$

$$\widetilde{v} = 0 \tag{B.2}$$

$$\widetilde{w} = 0 \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial n_p} = 0 \tag{B.4}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + div(\overline{\rho}\overrightarrow{v}) = 0 \tag{B.5}$$

La première étape consiste à écrire ces équations en fonction des nouvelles coordonnées (ξ, η, ζ), en remarquant qu'il n'y a que les deux dernières qui font intervenir des opérateurs spatiaux. Le maillage n'est pas orthogonal aux parois haute et basse. La normale a donc trois composantes (η_x,η_y,η_z). Néanmoins, comme la courbure de la bosse est faible, nous avons considéré que $\overrightarrow{n} \sim n_y\ e_y$. La condition d'adiabaticité se réécrit de façon simple :

$$(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \eta})^n_{i,1,k} = 0 \quad en \quad \eta = 1$$

$$(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \eta})^n_{i,jm,k} = 0 \quad en \quad \eta = \eta_{max}$$

$$(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \zeta})^n_{i,j,1} = (\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial z})^n_{i,j,1} = 0 \quad en \quad \zeta = 1$$

$$(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \zeta})^n_{i,j,km} = (\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial z})^n_{i,j,km} = 0 \quad en \quad \zeta = \zeta_{max}$$

La divergence de $\overline{\rho}\overrightarrow{v}$ sécrit :

$$div(\overline{\rho}\overrightarrow{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho}\widetilde{v}_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\widetilde{u}) = (\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \zeta})\overline{\rho}\widetilde{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\widetilde{v}) = (\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \zeta})\overline{\rho}\widetilde{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\widetilde{w}) = (\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta})\overline{\rho}\widetilde{w}$$

Le système d'équations (1.1) à (1.5) èquivaut donc à résoudre :

$$\widetilde{u}^n_i + (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t})^n_i \Delta t = 0 \tag{B.6}$$

$$\widetilde{u}^n_i + (\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t})^n_i \Delta t = 0 \tag{B.7}$$

$$\widetilde{w}^n_i + (\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t})^n_i \Delta t = 0 \tag{B.8}$$

$$(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial n_p})^n_i + (\frac{\partial}{\partial n_p}\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t})^n_i \Delta t = 0 \tag{B.9}$$

$$(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t})^n_i = -\frac{\partial}{\partial x_m}(\overline{\rho}\widetilde{v}_m) \tag{B.10}$$

Pour rester cohérent vis-à-vis de la discrétisation spatiale du second ordre utilisée dans le domaine et conserver l'ordre de discrétisation, la discrétisation des termes spatiaux concernés est décentrée aux parois.

Traitement des coins

La normale n'est plus définie de façon biunivoque sur les arrêtes. Pour tous ces points, le flux de chaleur est défini grâce à la normale à la paroi en $\eta = 1$ pour les arrêtes du bas et grâce à la normale à la paroi en $\eta = \eta_{max}$ pour les arrêtes du haut.

Système discret résolu aux parois

Les équations résolues à l'intérieur du domaine portent sur les variables résolues conservatives :

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\widetilde{u} \\ \overline{\rho}\widetilde{v} \\ \overline{\rho}\widetilde{w} \\ \overline{\rho}\widetilde{E} \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites sont écrites en utilisant ces variables conservatives à partir des relations :

$$(\frac{\partial \widetilde{v}_m}{\partial t})_i^n = (-\frac{\widetilde{v}_m}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_m}{\partial t})_i^n$$

$$(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t})_i^n = \frac{1}{c_v}((-\frac{\widetilde{E}}{\overline{\rho}} + \frac{q^2}{\overline{\rho}})\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} - \frac{\widetilde{v}_m}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{v}_m}{\partial t} + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{E}}{\partial t})_i^n$$

On résout au final à chaque paroi un système de la forme :

$$A_{i,1,k}^n(\frac{\partial Q}{\partial t})_{i,1,k}^n + B_{i,2,,k}^n(\frac{\partial Q}{\partial t})_{i,2,k}^n + C_{i,3,k}^n(\frac{\partial Q}{\partial t})_{i,3,k}^n = D_{i,1,k}^n$$

où les différentes matrices sont définies à la paroi (ici $\eta = 1$) par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{3}{\rho c_v}(E - q^2) & \frac{3u}{\rho c_v} & \frac{3v}{\rho c_v} & \frac{3w}{\rho c_v} & -\frac{3}{\rho c_v} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{4}{\rho c_v}(E - q^2) & -\dfrac{4u}{\rho c_v} & -\dfrac{4v}{\rho c_v} & -\dfrac{4w}{\rho c_v} & \dfrac{4}{\rho c_v} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho c_v}(E - q^2) & \dfrac{u}{\rho c_v} & \dfrac{v}{\rho c_v} & \dfrac{w}{\rho c_v} & -\dfrac{1}{\rho c_v} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -div(\rho \overrightarrow{v}) \\ -\dfrac{u}{\Delta t} \\ -\dfrac{v}{\Delta t} \\ -\dfrac{w}{\Delta t} \\ \dfrac{3T_{i,1,k} - 4T_{i,2,k} + T_{i,3,k}}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

soit :

$$A\frac{\partial Q}{\partial t} = D' \tag{B.11}$$

B.4 Conditions aux limites discrètes imposées à l'entrée de la tuyère

Les relations mathématiques discrètes qui traduisent les conditions aux limites imposées à l'entrée, section (IV.3.1.0), s'écrivent :

$$P_{tot}^{n+1} = [p(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{q^2}{\gamma \mathcal{R} T})^{\gamma/(\gamma-1)}]^{n+1} = C1(\eta,\zeta)$$

$$T_{tot}^{n+1} = [T(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{q^2}{\gamma \mathcal{R} T})]^{n+1} = C2(\eta,\zeta)$$

$$v^{n+1} = \widetilde{V_{moy}} + pertv(\eta,\zeta)$$

$$w^{n+1} = \widetilde{W_{moy}} + pertw(\eta,\zeta)$$

Soit :

$$P_{tot} - [p(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)}]^n = \frac{\partial p}{\partial t}(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)} + p\frac{\partial}{\partial t}((1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)})$$

$$T_{tot} = T^n + \frac{\partial T}{\partial t}\Delta t + (\frac{q^2}{2C_p})^n + \frac{1}{2C_p}2\ v_m\frac{\partial v_m}{\partial t}\Delta t$$

$$v_i^n + (\frac{\partial v}{\partial t})_i^n\Delta t = \widetilde{V_{moy}} + pertv(\eta,\zeta)$$

$$w_i^n + (\frac{\partial w}{\partial t})_i^n\Delta t = \widetilde{W_{moy}} + pertw(\eta,\zeta)$$

Les perturbations superposées aux profils de $V_{statmoy}$ et $W_{statmoy}$ sont des fonctions de η et de ζ. Par construction, leur moyenne est nulle sur le plan $\xi = 1$. On note :

$$v_i^{imp} = \widetilde{V_{statmoy}} + pertv(\eta,\zeta)$$
$$w_i^{imp} = \widetilde{W_{statmoy}} + pertw(\eta,\zeta)$$

Concernant les conditions aux limites imposées sur la pression, on note $(PM)^n$ le membre à droite de l'égalité. Les deux contributions sont écrites séparément.

$$\begin{aligned}\frac{(PM)^n}{\Delta t} &= (\gamma-1)q^2(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)}\ \frac{\partial\rho}{\partial t} - (\gamma-1)(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)}\ v_m\frac{\partial\rho v_m}{\partial t}\\
&+(\gamma-1)(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{\gamma/(\gamma-1)}\ \frac{\partial\rho E}{\partial t} - [q^2(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{1/(\gamma-1)}(1+\frac{q^2-E}{2C_vT}]\ \frac{\partial\rho}{\partial t}\\
&+[(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{1/(\gamma-1)}\ v_m\ (1+\frac{q^2}{2C_vT})]\ \frac{\partial\rho v_m}{\partial t}\\
&-[(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{\gamma\mathcal{R}T})^{1/(\gamma-1)}\frac{q^2}{2C_vT}]\ \frac{\partial\rho E}{\partial t}\end{aligned}$$

La condition à la limite sur la température totale est plus simple à exprimer en fonction des variables conservatives :

$$\frac{1}{\Delta t}(T_{tot} - T^n - (\frac{q^2}{2C_p})^n) = [\frac{1}{\rho C_v}(q^2-E) - \frac{q^2}{\rho C_p}]\ \frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{(\gamma-1)^2}{\rho\gamma\mathcal{R}}\ v_m\frac{\partial\rho v_m}{\partial t} + \frac{1}{\rho C_v}\ \frac{\partial\rho E}{\partial t}$$

Pour les vitesses, il suffit de se reporter aux discrétisations à la paroi :

$$\frac{v_i^{imp} - v_i^n}{\Delta t} = -\frac{v}{\rho}\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\rho v}{\partial t}$$
$$\frac{w_i^{imp} - w_i^n}{\Delta t} = -\frac{w}{\rho}\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\rho w}{\partial t}$$

On est ramené à résoudre à l'entrée un système de la même forme qu'aux parois avec cette fois :

$$A = \begin{pmatrix} R^{-1}_{51} & R^{-1}_{52} & R^{-1}_{53} & R^{-1}_{54} & R^{-1}_{55} \\ -\dfrac{v}{\rho} & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\dfrac{w}{\rho} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \dfrac{q^2-E}{\rho C_v} - \dfrac{q^2}{\rho C_p} & -u\dfrac{(\gamma-1)^2}{\rho\gamma\mathcal{R}} & -v\dfrac{(\gamma-1)^2}{\rho\gamma\mathcal{R}} & -w\dfrac{(\gamma-1)^2}{\rho\gamma\mathcal{R}} & \dfrac{1}{\rho C_v} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir l'expression des éléments de la dernière ligne il faut se réferrer à la page précédente.

Les coefficients R^{-1}_{ij} correspondent aux éléments de la matrice jacobienne R^{-1}_{ξ} définie en annexe section (A.2).

Pour le second membre, on a :

$$D = \begin{pmatrix} -(\Lambda_\xi \mathcal{R}^{-1}_\xi \dfrac{\partial Q}{\partial \xi} + \mathcal{R}^{-1}_\xi SM)_5 \\ \dfrac{v_i^{imp} - v_i^n}{\Delta t} \\ \dfrac{w_i^{imp} - w_i^n}{\Delta t} \\ \dfrac{1}{\Delta t}(T_{tot} - T^n - \dfrac{q^2}{2C_p}) \\ \dfrac{1}{\Delta t}(P_{tot} - p(1 + \dfrac{\gamma-1}{2}\dfrac{q^2}{\gamma \mathcal{R} T})^{\gamma/(\gamma-1)}) \end{pmatrix}$$

B.5 Notations utilisées pour la présentation des résultats et présentation des résultats aux points expérimentaux dans leur globalité

B.5.1 Notations utilisées pour la présentation des résultats

Nous traitons en même temps des quantités issues de la décomposition statistique et des quantités issues de la SGE moyennées en temps. Il est donc nécessaire d'introduire les notations qui sont utilisées pour différencier les différentes grandeurs et les différents opérateurs de filtrage utilisés. Les notations ci-dessous ont été définies de façon arbitraire. Les notations utilisées pour la décomposition d'une variable selon le filtrage temporel sont :

$$f = \langle f \rangle + f'$$

Les variables de Favre associées au filtrage temporel sont définies par :

$$\begin{cases} f = \widehat{f} + f''' \\ \widehat{f} = \dfrac{\langle \rho f \rangle}{\langle \rho \rangle} \end{cases}$$

Les notations utilisées pour la simulation des grandes échelles pour la décomposition par filtrage spatial sont :

$$f = \overline{f} + f^{iv}$$

Les variables de Favre associées au filtrage spatial sont notées :

$$\begin{cases} f = \widetilde{f} + f'' \\ \widetilde{f} = \dfrac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}} \end{cases}$$

Evaluation des composantes de la vitesse :

$$\widehat{u_i} = \frac{\langle \rho u_i \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{\langle (\overline{\rho} + \rho^{iv})(\widetilde{u_i} + u_i'') \rangle}{\langle \overline{\rho} + \rho^{iv} \rangle} \simeq \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u}_i \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle}$$

Evaluation des tensions de Reynolds :

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = \frac{\langle \rho u_i''' \, u_j''' \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{\langle \rho (u_i - \widehat{u_i})(u_j - \widehat{u_j}) \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{\langle \rho u_i u_j \rangle}{\langle \rho \rangle} - \frac{\langle \rho u_i \widehat{u_j} \rangle}{\langle \rho \rangle} - \frac{\langle \rho \widehat{u_i} u_j \rangle}{\langle \rho \rangle} + \frac{\langle \rho \widehat{u_i} \widehat{u_j} \rangle}{\langle \rho \rangle}$$

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = \frac{\langle \rho u_i u_j \rangle}{\langle \rho \rangle} - \frac{\widehat{u_j} \langle \rho u_i \rangle}{\langle \rho \rangle} - \frac{\widehat{u_i} \langle \rho u_j \rangle}{\langle \rho \rangle} + \frac{\langle \rho \rangle \widehat{u_i} \widehat{u_j}}{\langle \rho \rangle}$$

puisque par hypothèse $\langle \langle (.) \rangle \rangle = \langle (.) \rangle$

D'où :

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = \frac{\langle \rho u_i u_j \rangle}{\langle \rho \rangle} - \frac{\langle \rho u_j \rangle \langle \rho u_i \rangle}{(\langle \rho \rangle)^2}$$

La décomposition des variables en SGE donne :

$$u_i = \widetilde{u}_i + u_i''$$

$$\rho = \overline{\rho} + \rho^{iv}$$

Nous négligeons les contributions de sous maille dans le calcul de la densité.

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = \frac{\langle \overline{\rho} (\widetilde{u_i} + u_i'')(\widetilde{u_j} + u_j'') \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} - \frac{\langle \overline{\rho} (\widetilde{u_i} + u_i'') \rangle \langle \overline{\rho} (\widetilde{u_j} + u_j'') \rangle}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2} = A - B$$

$$A = \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} + \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} u_j'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} + \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u_j} u_i'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} + \frac{\langle \overline{\rho} u_j'' u_i'' \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle}$$

$$B = \frac{(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \rangle + \langle \overline{\rho} u_i'' \rangle)(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_j} \rangle + \langle \overline{\rho} u_j'' \rangle)}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2}$$

En général on approxime :

$$\widehat{u_i''' \, u_j'''} = \frac{\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \rangle}{\langle \overline{\rho} \rangle} - \frac{(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_i} \rangle)(\langle \overline{\rho} \widetilde{u_j} \rangle)}{(\langle \overline{\rho} \rangle)^2}$$

Nous avons dit section (III.1.2) que $\langle \rho f''' \rangle = 0$ pour les opérateurs de Reynolds.
$\langle \rho f''' \rangle \simeq \langle \overline{\rho}(f - \langle f \rangle) \rangle = \langle \overline{\rho} f \rangle - \langle \rho \rangle \langle f \rangle = \langle \overline{\rho} \widetilde{f} \rangle - \langle \rho \rangle \langle f \rangle + \langle \overline{\rho} f'' \rangle$
Il faudrait vérifier explicitement sur la tuyère par exemple que $\langle \overline{\rho} \widetilde{f} \rangle - \langle \rho \rangle \langle f \rangle \simeq \mathcal{O}(\varepsilon)$ avec $\varepsilon \to 0$ mais l'hypothèse $\langle \overline{\rho} f'' \rangle \simeq \mathcal{O}(\varepsilon)$ semble plausible. Par contre il n'est pas à priori évident que les corrélations croisées et le tenseur de sous maille soient négligeables en moyenne dans le temps, comme nous avons tenté de le vérifier dans la section (VII.3.2) pour la contribution de sous maille.

B.5.2 Présentation des résultats dans leur globalité

Nous présentons maintenant les courbes sur les profils des vitesses moyennes et sur les tensions de Reynolds dans leur globalité aux points expérimentaux.

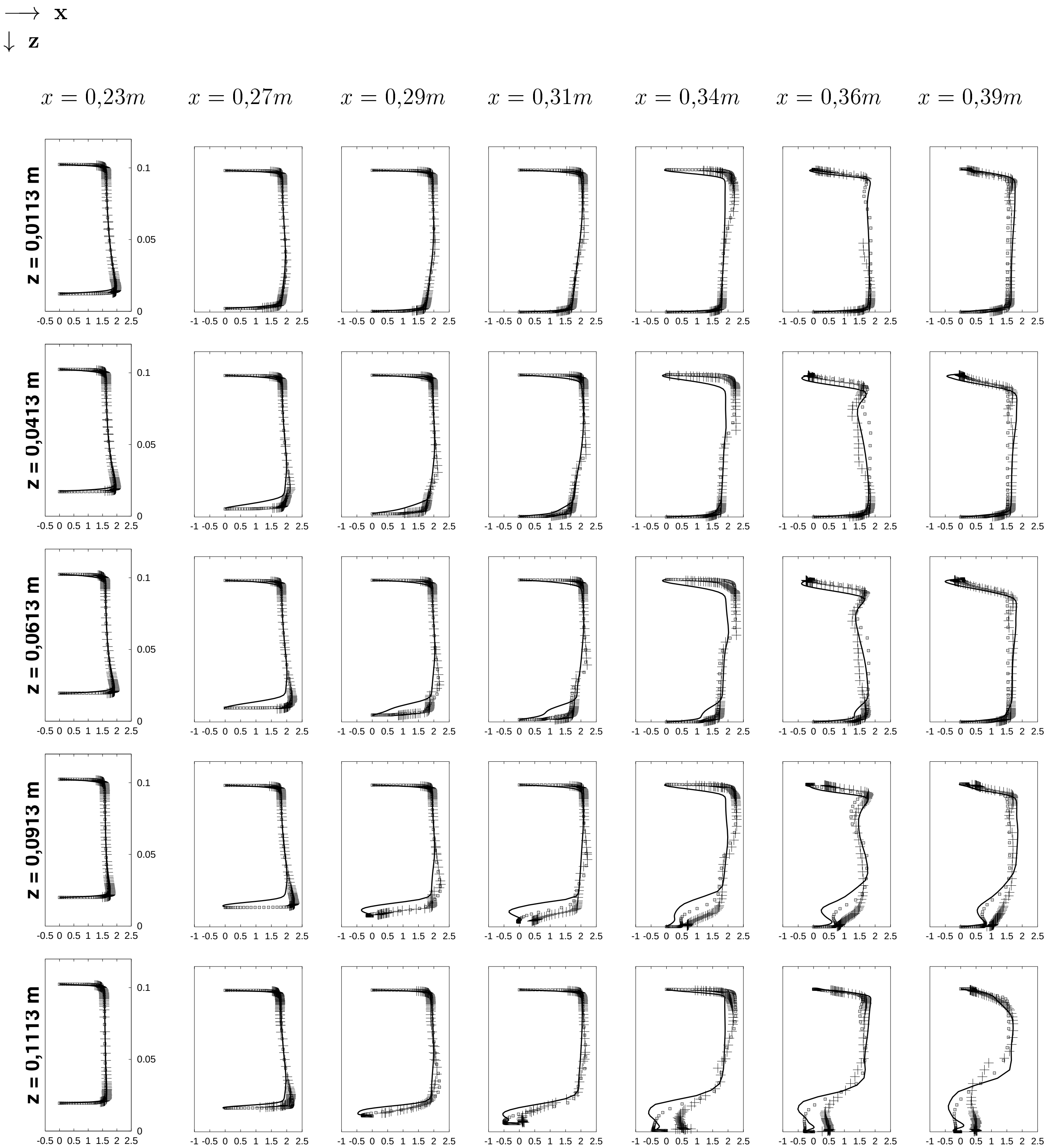


FIG. B.5 – *Evolution du profil de la vitesse longitudinale* $\widehat{u}/u_{ref}$ *tracée selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) : $SGE : -\quad EXPE : ++\quad RANS : \diamond\diamond$

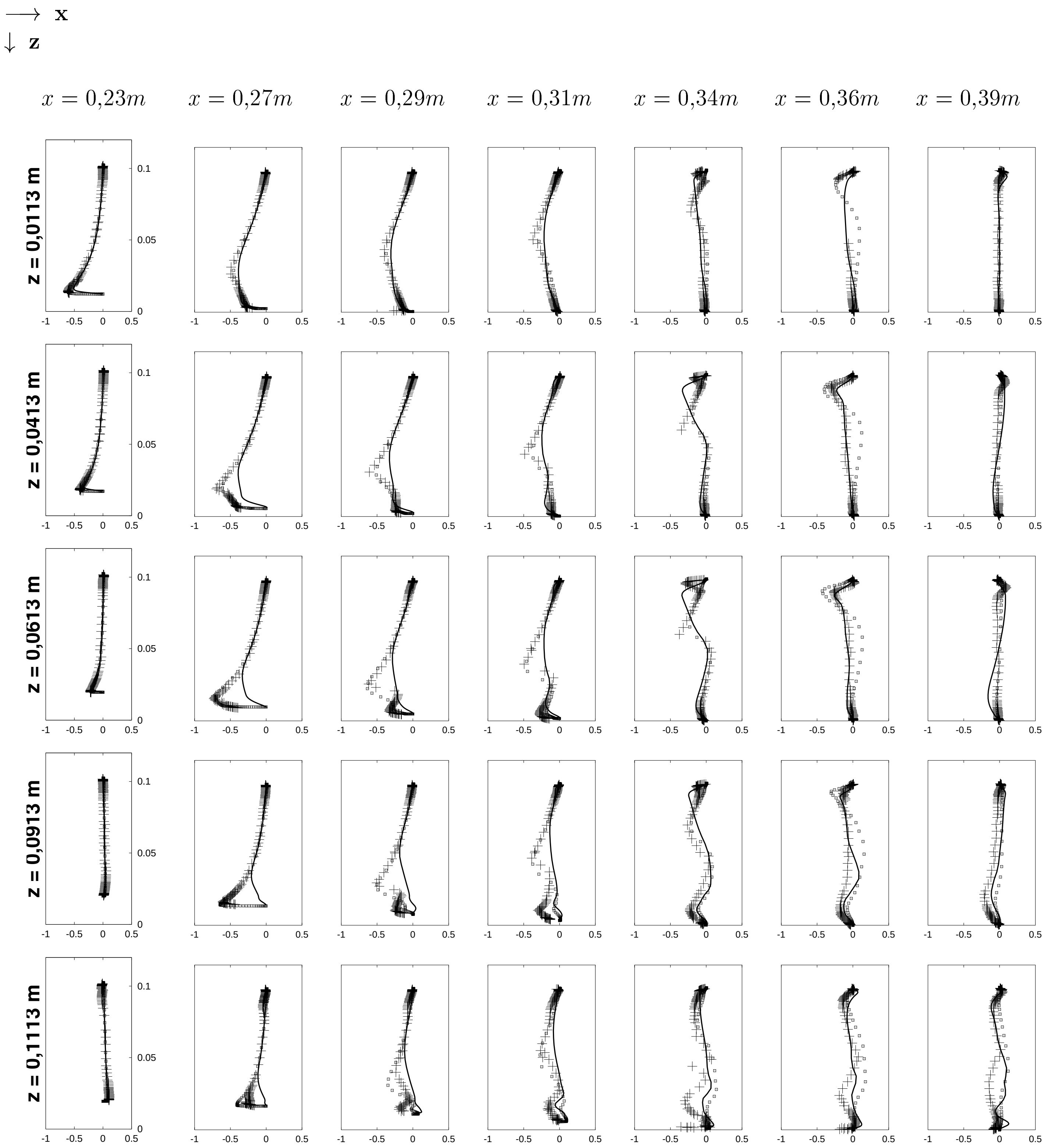


FIG. B.6 – *Evolution du profil de la vitesse verticale* $\widehat{v}/u_{ref}$ *tracée selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *: SGE :* $-$ *EXPE :* $++$ *RANS :* $\diamond\diamond$

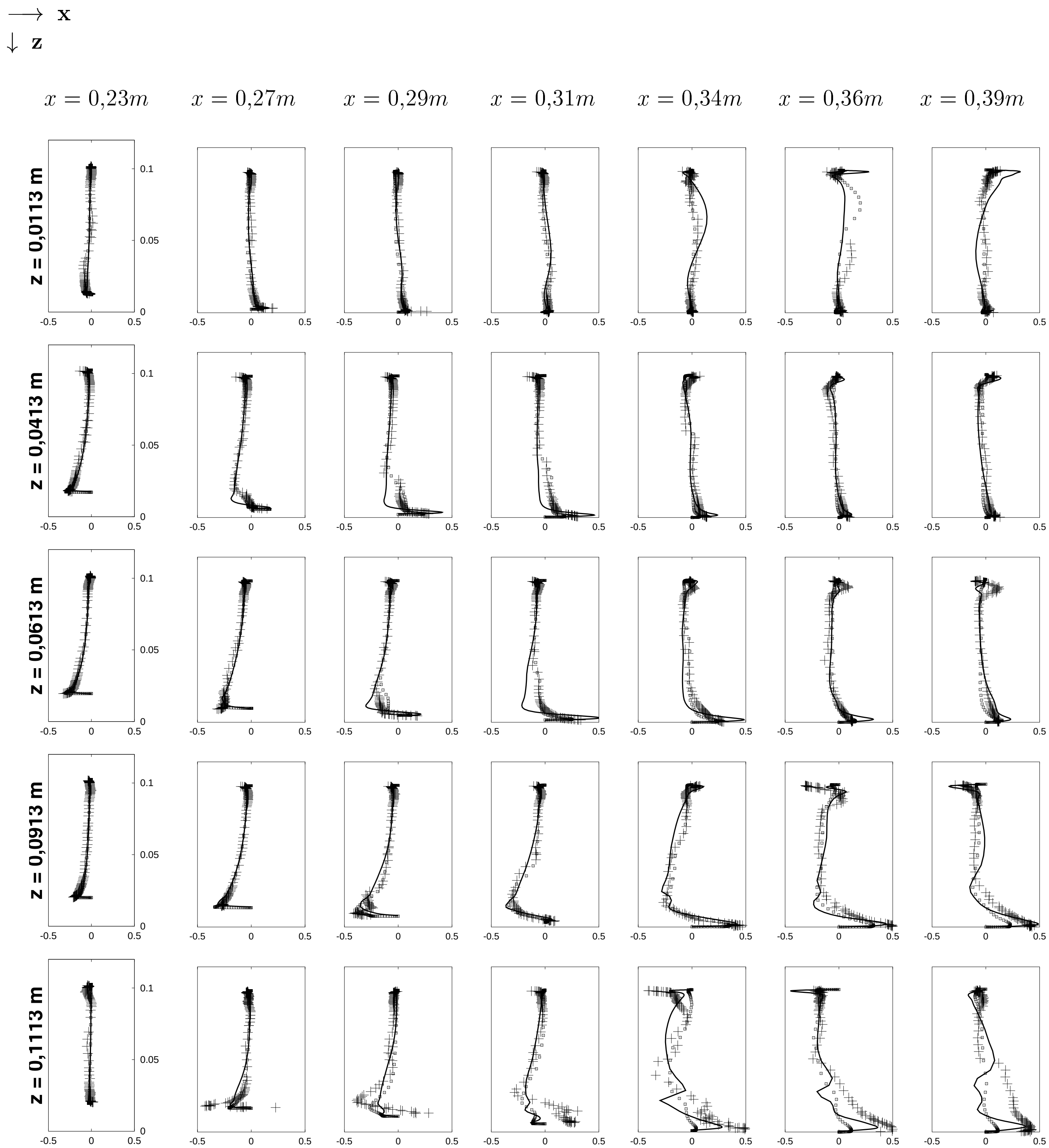


FIG. B.7 – *Evolution du profil de la vitesse transverse* $\widehat{w}/u_{ref}$ *tracée selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *:* $SGE : -\quad EXPE : ++\quad RANS : \diamond\diamond$

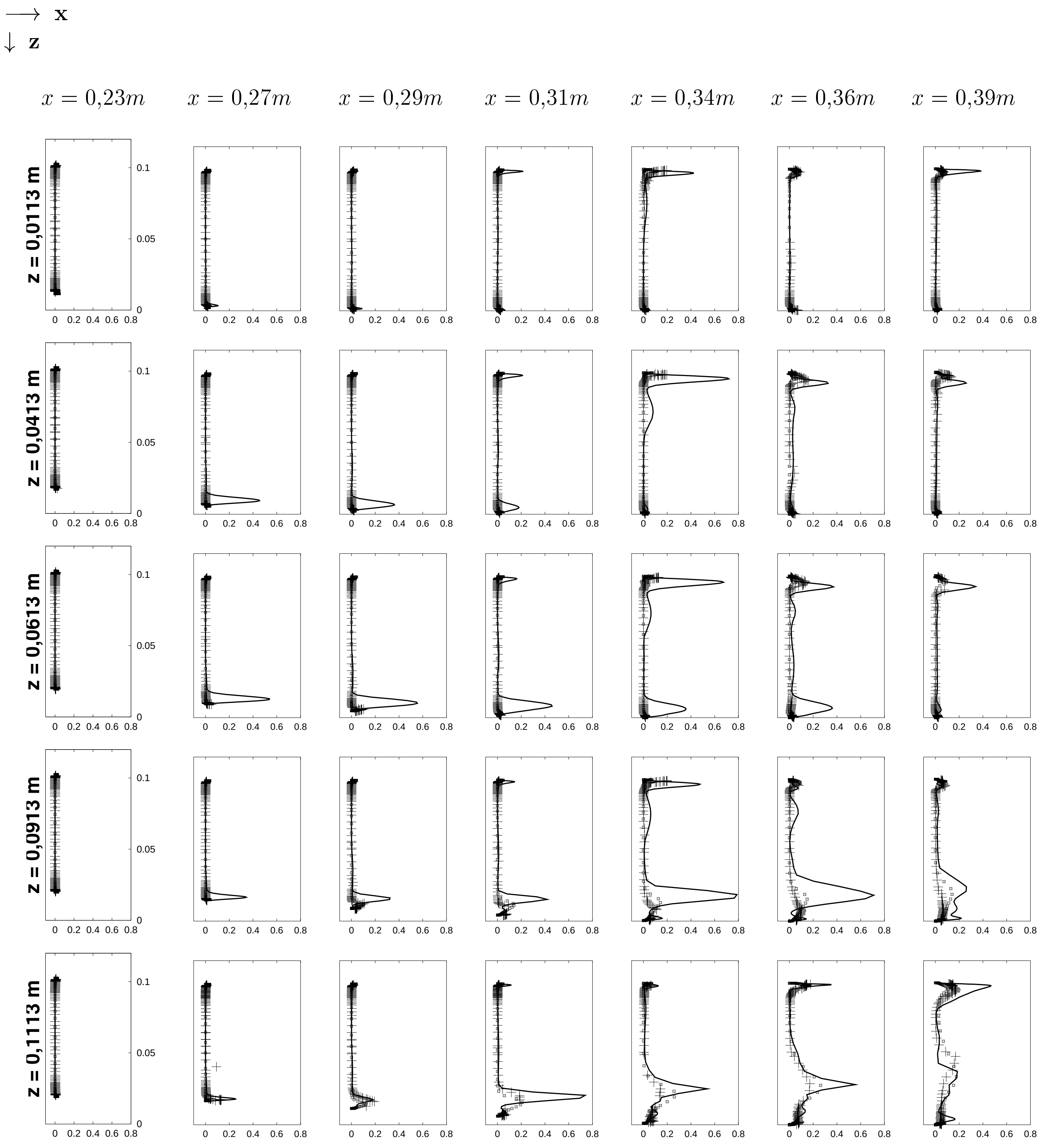


FIG. B.8 – *Evolution du profil des tensions longitudinales* $\widehat{u'''u'''}/u_{ref}^2$ *tracées selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *: SGE : − EXPE : + + RANS :* $\diamond\diamond$

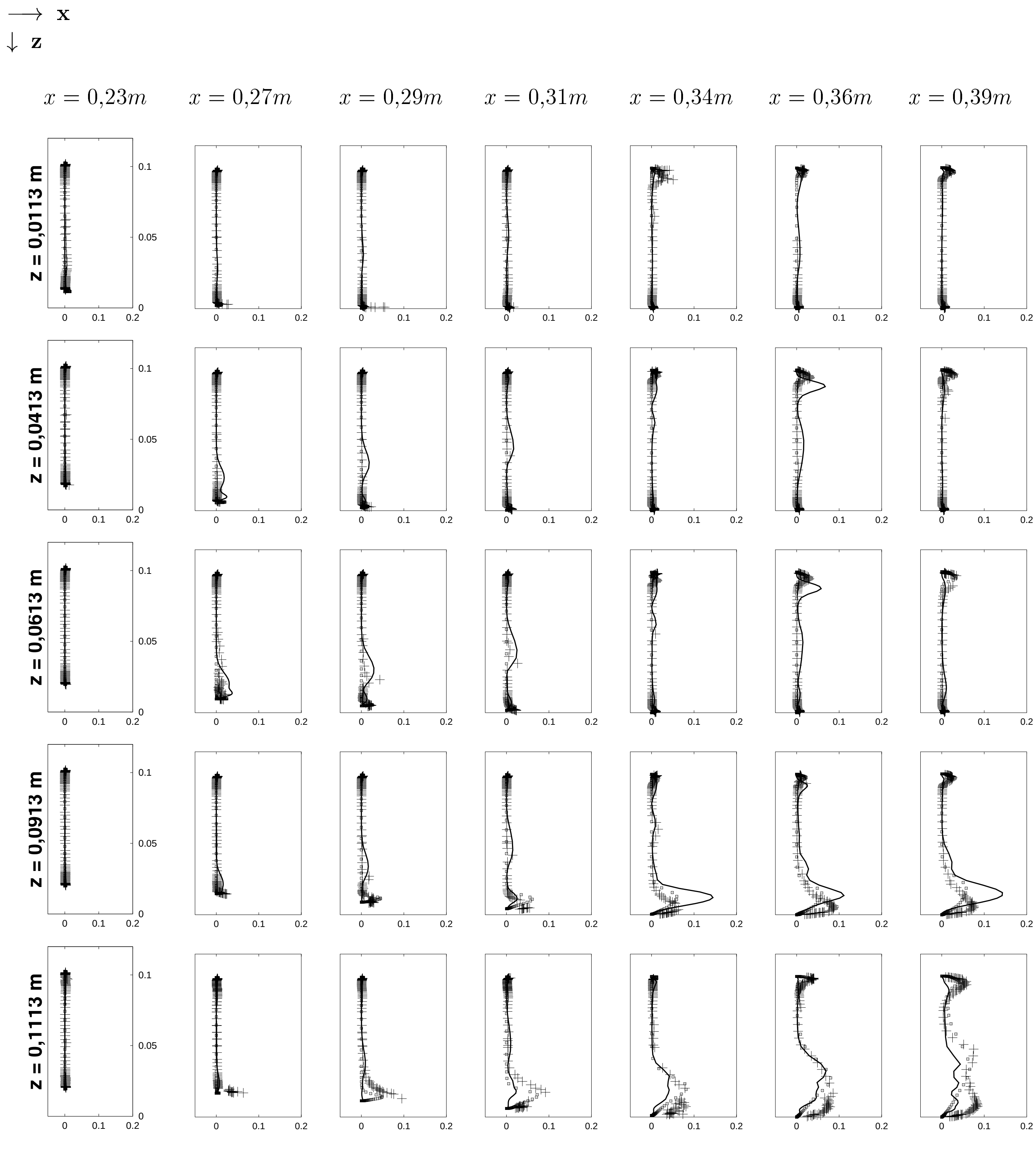


FIG. B.9 – *Evolution du profil des tensions longitudinales* $\widehat{v'''v'''}/u_{ref}^2$ *tracées selon (Oy), dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *: SGE : –   EXPE : + + RANS :* $\diamond\diamond$

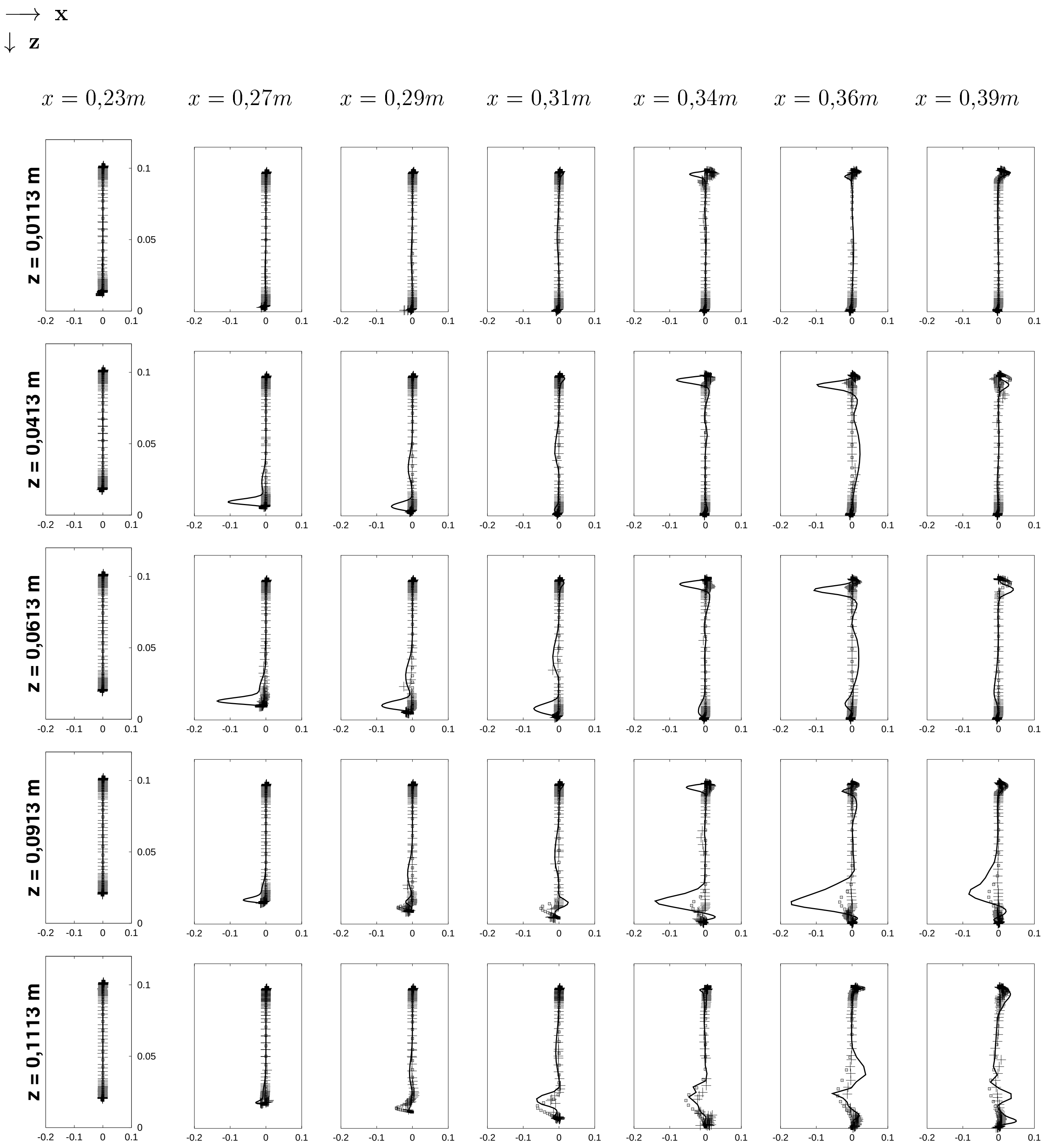


FIG. B.10 – *Evolution du profil des tensions croisées $\widehat{u'''v'''}/u_{ref}^2$ tracées selon (Oy), dans la tuyère, aux différents points expérimentaux (x_i,z_i) : SGE : $-$ EXPE : $++$ RANS : $\diamond\diamond$*

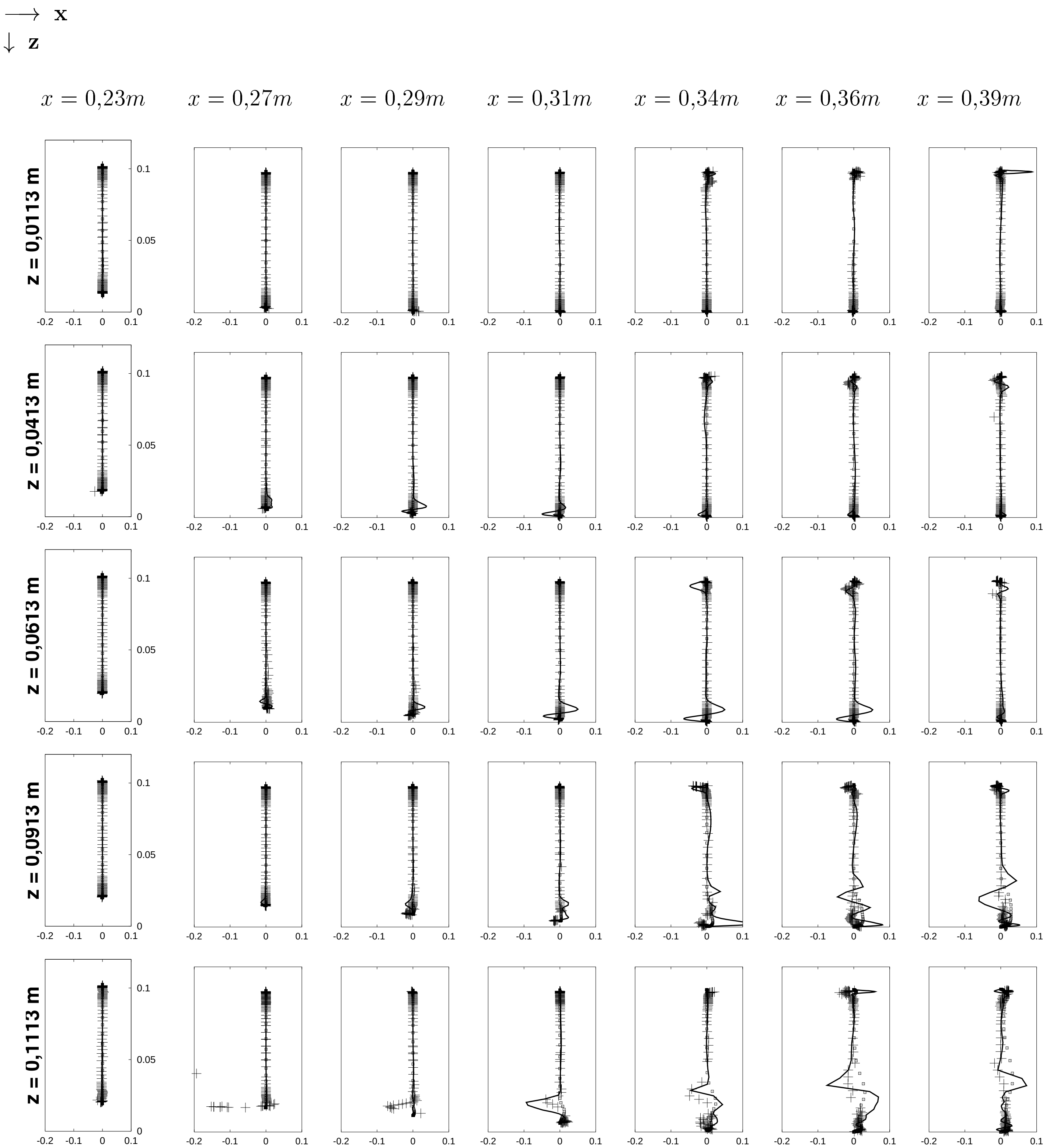


FIG. B.11 – *Evolution du profil des tensions croisées* $\widehat{u'''w'''}/u_{ref}^2$ *tracées selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *:* $SGE : -\quad EXPE : ++\quad RANS : \diamond\diamond$

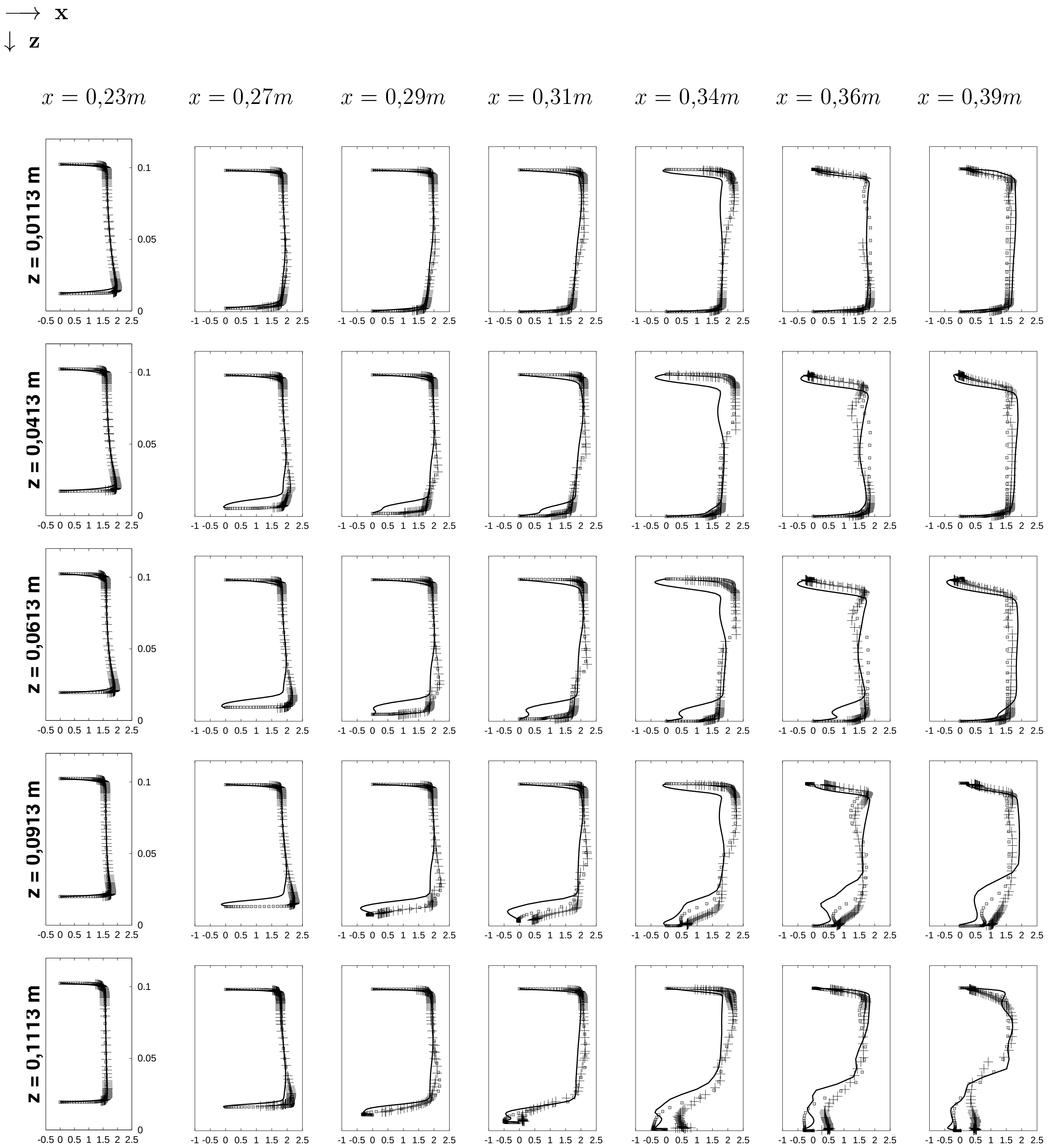


FIG. B.12 – *Evolution du profil de la vitesse longitudinale* $\widehat{u}/u_{ref}$ *tracée selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *:* $SGE : -\quad EXPE : ++\quad RANS : \diamond\diamond$

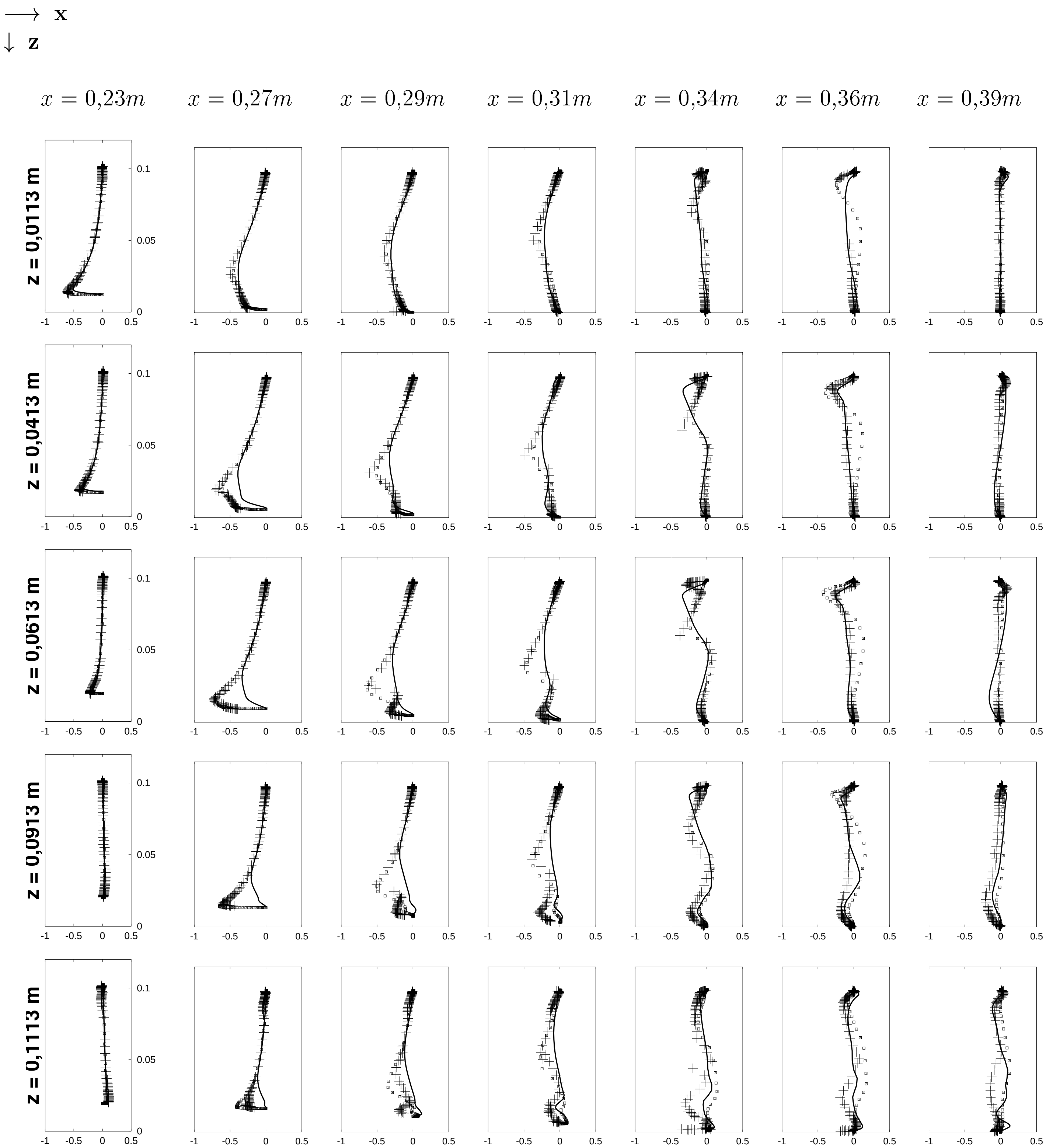


FIG. B.13 – *Evolution du profil de la vitesse verticale $\widehat{v}/u_{ref}$ tracée selon (Oy), dans la tuyère, aux différents points expérimentaux (x_i,z_i) : $SGE : -$ $EXPE : ++$ $RANS : \diamond\diamond$*

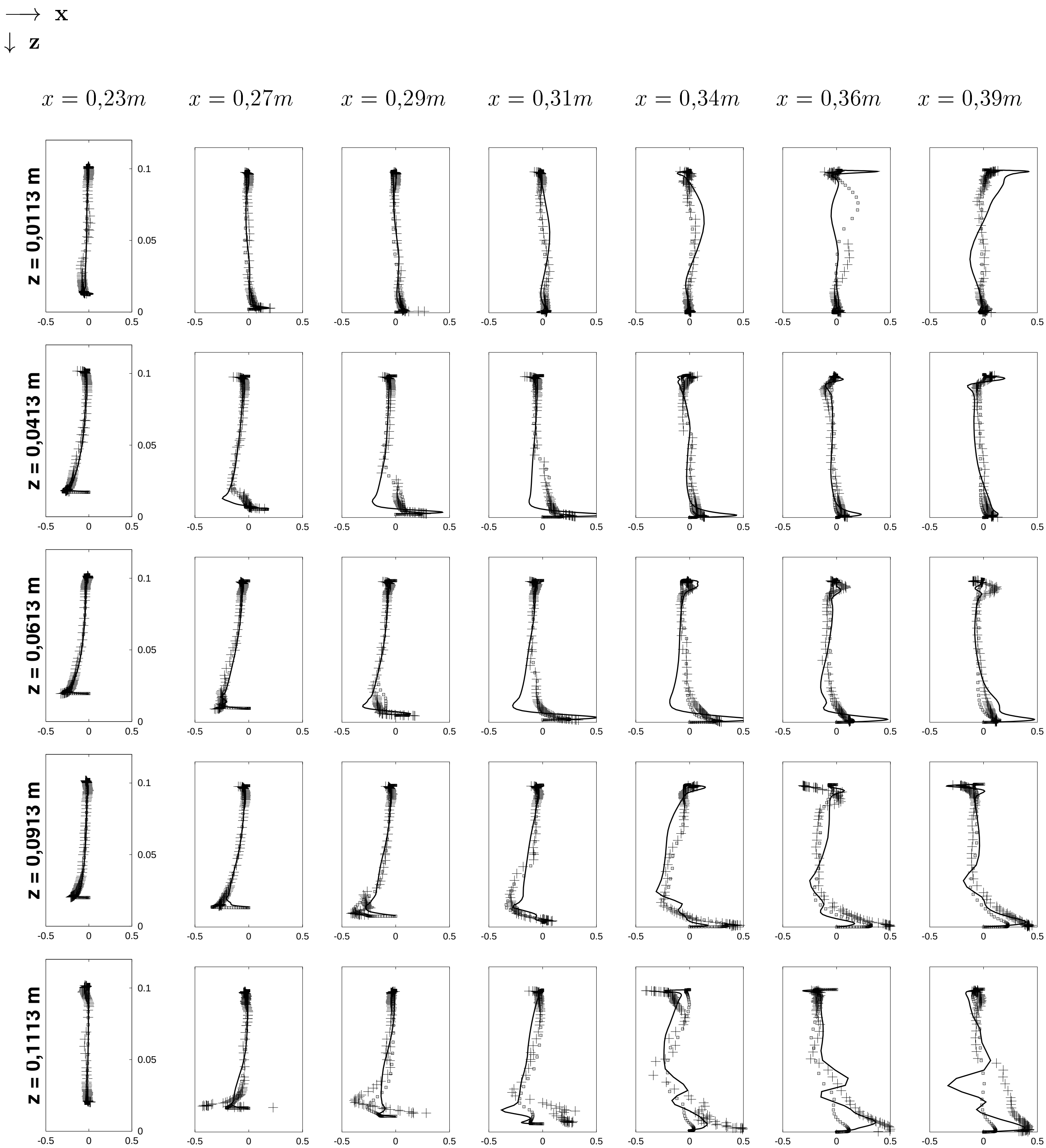


FIG. B.14 – *Evolution du profil de la vitesse transverse* $\widehat{w}/u_{ref}$ *tracée selon* (Oy), *dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *: SGE* : $-$ *EXPE* : $++$ *RANS* : $\diamond\diamond$

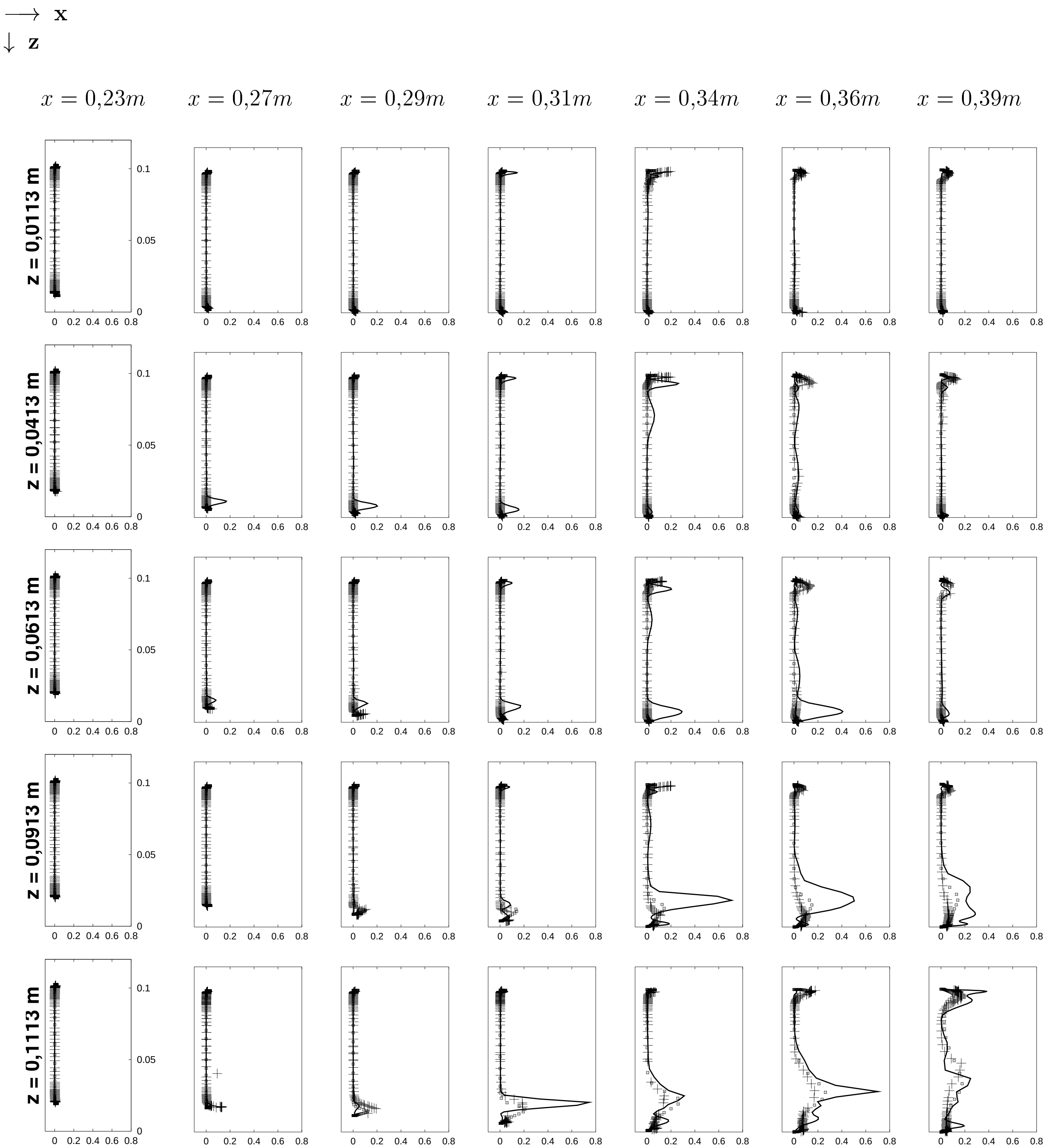


FIG. B.15 – *Evolution du profil de* $(\langle\tilde{u}\ \tilde{u}\rangle - \langle\tilde{u}\rangle\ \langle\tilde{u}\rangle)/u_{ref}^2$ *tracées selon* (Oy)*, dans la tuyère, aux différents points expérimentaux* (x_i,z_i) *:* $SGE : -$ $EXPE : ++$ $RANS : \diamond\diamond$

Bibliographie

[1] B. S. Balwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. In *AIAA Paper no 78-257, 16th ASM, Huntsville, Alabama*, 1978.

[2] J. Bardina, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Improved subgrid scale models for large eddy simulation. In *AIAA 13th, Fluid & Plasma Dynamics Conference*, 1980.

[3] J. Bardina, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows. Technical report, Report TF-19, Dept Mech. Engineering, Stanford University, 1983.

[4] H. Bauer, J. F. Mayer, and H. Stetter. Computational study on the simulation of transonic flow with moving shocks. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[5] R. Benay, J. Délery, and T. Pot. Analyse expérimentale de l'écoulement dans un canal transsonique tridimensionnel. *La Recherche Aérospatiale*, pages 399–414, 1986.

[6] O. O. Bendiksen. Transonic bending flutter in rotors and cascades. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[7] O. Bron, P. Ferrand, and T. H. Fransson. Non linear interaction of acoustic waves with transonic flows in a nozzle. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[8] C. Brun and R. Friedrich. A-priori tests of SGS stress models in fully developed pipe flow and a new local formulation. In Kluwer Academic Publishers, editor, *Ercofact Series, Direct and Large-Eddy Simulation III*, 1999.

[9] J. Cahen, V. Couaillier, J. Délery, and T. Pot. Validation of code using turbulence model applied to three-dimensional transonic channel. *AIAA Journal*, 33(4), 1995.

[10] L. Cambier and B. Escande. Calculation of a three-dimensional shock wave-turbulent boundary-layer interaction. *AIAA Journal*, 28(11):1901–1908, 1990.

[11] B. F. Caroll and J. C. Dutton. Turbulence phenomena in a multiple normal shock wave/turbulence boundary-layer interaction. *AIAA Journal*, 30:43–48, 1992.

[12] V. Carstens and S. Schmitt. Investigation of fluid-structure interaction in vibrating cascades using a time domain method. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[13] Olivier Chambres. *Analyse expérimentale de la modélisation de la turbulence en couche de mélange supersonique*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1997.

[14] J. C. Chassaing and G. A. Gerolymos. Compressor flutter analysis using time-nonlinear and time-linearized 3D Navier-Stokes methodes. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[15] J. P. Chollet and M. Lesieur. Parametrization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 38:2747–2757, 1981.

[16] P. Comte and M. Lesieur. Large-eddy simulations of compressible turbulent flows. In *Lecture Series 1998-05, Advances in Turbulence Modelling*, 1998.

[17] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. Cepadues-Editions, Aérodynamique, 1989.

[18] Daly and Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. of Fluids*, 41:453–465, 1970.

[19] V. Daru, G. Fernandez, and C. Tenaud. On CFD to investigate bifurcated shock wave pattern. In Great Keppel Island, editor, *Issw21*, Australia, 1997.

[20] V. Daru and C. Tenaud. Application of TVD high resolution schemes to the calculation of the viscous shock tube problem. In *Proceedings, Godunov 70 Conference, 'Godunov methods : theory and application'*, Oxford, UK, 1999.

[21] J. M. Délery. Experimental investigation of turbulence properties in transonic shock/boundary-layer interactions. *AIAA Journal*, 21(2):180–185, 1983.

[22] Laetitia Doris. *Simulation des grandes échelles du développement spatial d'une couche de mélange compressible*. PhD thesis, Université Paris 6, 2000.

[23] F. Ducros, P. Comte, and M. Lesieur. Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate. *J. Fluid Mech*, 326:1–36, 1996.

[24] H. W. Liepmann et A. Roshko. *Eléments de la dynamique des gaz*. Gauthier-Villars et Cie Editeur Paris, 1962.

[25] A. Favre. Equations des gaz turbulents compressibles ; ii.- méthode des vitesses moyennes, méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique. *Journal de Mécanique*, 4, 1965.

[26] J. H. Ferziger. The physics and simulation of turbulence, state of the art 1998. In *Lecture Series 1998-05, Advances in Turbulence Modelling*, 1998.

[27] E. Garnier and al. On the use of shock-capturing schemes for large eddy simulation. *Journal of Computational Physics*, 153:273–311, 1999.

[28] E. Garnier, P. Sagaut, and M. Deville. Large Eddy Simulation of shock/homogeneous turbulence interaction. In Kluwer Academic Publishers, editor, *Ercofact Series, Direct and Large-Eddy Simulation III*, 1999.

[29] Eric Garnier. *Smulation des Grandes Echelles en régime transsonique*. PhD thesis, Paris XI, 2000.

[30] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy-viscosity model. *Phys. Fluids A.*, 3:1760–1765, 1991.

[31] G. A. Gerolymos and C. Hanisch. Multistage three-dimensional Navier-Stokes computation of off-design operation of a four-stage turbine. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, 213 Part A:243–261, 1999.

[32] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Near-wall reynolds-stress three-dimensional transonic flow computation. *AIAA Journal*, 35(2):228–236, 1997.

[33] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Wall normal free near-wall reynolds-stress closure for 3D compressible separated flows. *AIAA Journal*, 1999.

[34] G. A. Gerolymos and I. Vallet. Wall normal free reynolds-stress model for compressible rotating flows applied to turbomachinery. *AIAA Journal*, 2000.

[35] S. Ghosal and P. Moin. The basic equations for the Large Eddy Simulation of turbulent flows in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 118:24–37, 1995.

[36] A. Harten. High resolution scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.

[37] A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21, 1984.

[38] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley and Sons, 1988.

[39] Klaus A. Hoffmann. *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Engineering Education System, 1989.

[40] J. Jiménez. On Eddy-viscosity sub-grid models. In Kluwer Academic Publishers, editor, *Ercofact Series, Direct and Large-Eddy Simulation III*, 1999.

[41] B. Lakshminarayana. An assessment of computational fluid dynamic techniques in the analysis and design of turbomachinery - the 1990 freeman scholar lecture. *Journal of Fluids Engineering*, 113:315–352, 1991.

[42] L. Landau and E. Lifchtz. *Physique Théorique, Mécanique des Fluides*. Ellipses, 1994.

[43] R. Lardat, A. Dulieu, L. Ta Phuoc, and C. Tenaud. L. E. S. of spatially developing 3D incompressible mixing layer with velocity-voticity formulation. *Lecture Notes in Physics*, 515:183–188, 1998.

[44] Raphael Lardat. *Simulations numériques d'écoulements externes instationnaires décollés autour d'une aile avec des modèles de sous maille*. PhD thesis, Université Paris VI, 1997.

[45] M. Lebrun, M. Roger, and B. De Gouville. A study of high speed subsonic fan quadrupole noise. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[46] S. Lee, S. K. Lele, and P. Moin. Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 251:533–562, 1993.

[47] Eric Lenormand. *Modélisation de sous maille pour les écoulements compressibles*. PhD thesis, Université Paris VI, 1999.

[48] A. Léonard. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. in Geophysics*, 18:237–248, 1974.

[49] A. Lerat. *Difference methods for hyperbolic problems with emphasis on space-centered approximations*. Von Karman Institute, Lecture Series, 1990.

[50] X. Liu and L. C. Squire. An investigation of shock/boundary-layer interactions on curved surfaces at transonic speeds. *J. Fluid Mech*, 187:467–486, 1988.

[51] T. S. Lund. On the use of discrete filters for large eddy simulation. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997.

[52] M. Matsushita and T. Shiratori. Experimental study of shock wave fluctuations on unstaggered and staggered cascade in transonic flows. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[53] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified tubulence. *J. Fluid Mech.*, 256:157–194, 1992.

[54] O. J. Mc Millan and J. H. Ferziger. Test of new subgrid-scale models in strained turbulence. In *AIAA 13th, Fluid & Plasma Dynamics Conference*, 1980.

[55] P. Moin and J. Kim. Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech*, 118:341–377, 1982.

[56] M. Opiela, M. Meinke, and W. Schroder. LES of wake blade interaction in a turbine stage. In 9^{th} *International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[57] S. Pellerin, A. Dulieu, L. Ta Phuoc, and C. Tenaud. Incompressible 3D mixing layer using L.E.S. : influence of subgrid scale models and upstream perturbations. *Comp. Fluid Dynamic Journal*, 9, 2000. Special issue The proceedings of ISCFD'99 held in Bremen, Spet 1999.

[58] L. Ta Phuoc. Aérodymique instationnaire turbulente : aspects numériques et expérimentaux. In *DGA*, 1994.

[59] U. Piomelli. Modeling requirements for turbulent flows. In *Lecture Series 1998-05, Advances in Turbulence Modelling*, 1998.

[60] T. J. Poinsot and S. K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101:104–129, 1992.

[61] P. L. Roe. The use of Riemann problem in finite différence schemes. In *Proceedings, Seventh Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.*, New York/Berlin, 1981. Springer-Verlag.

[62] G. Ryskin and L. G. Leal. Orthogonal mapping. *Journal of Computational Physics*, 50:71–100, 1983.

[63] P. Sagaut. *In troduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluides incompressibles.* Springer-Verlag, Mathemetiques et Applications, 1998.

[64] Pierre Sagaut. *Simulations numériques d'écoulements décollés avec modèles de sous-maille.* PhD thesis, Université Paris 6, 1995.

[65] A. Scotti, C. Meneveau, and D. K. Lilly. Generalized smagorinsky model for anisotropic grids. *Phys. of Fluids*, 5, 1993.

[66] M. Sdeghi and F. Liu. Computation of cascade flutter with a coupled aerodynamic and structural model. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[67] E. Seinturier, C. Dupont, M. Berthillier, and M. Dumas. A new method to predict flutter in presence of structural mistuning application to a wide chord fan stage. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[68] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77:439–471, 1988.

[69] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. i : the basic experiment. *Month. Weath. Rev.*, pages 99–165, 1963.

[70] C. G. Speziale, G. Erlebacher, and al. The subgrid scale modeling of compressible turbulence. *Physics of Fluids*, 31:940–942, 1988.

[71] Charles G. Speziale. Galilean invariance of subgrid-scale stress models in the large-eddy simulation of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 156:55–62, 1985.

[72] J. L. Steger and R. L. Sorenson. Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptique partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 33:405–410, 1979.

[73] P. Tamamidis and D. N. Assanis. Generation of orthogonal grids with control of spacing. *Journal of Computational Physics*, 94:437–453, 1991.

[74] C. Tenaud, E. Garnier, and P. Sagaut. Evaluation of some high-order shock capturing schemes for direct numerical simulation of unsteady two-dimensional free flow. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33:249–278, 2000.

[75] C. Tenaud and Loc Ta Phuoc. Large eddy simulation of unsteady, compressible, separated flow around NACA 0012 airfoil. In Monterey, editor, *15st ICNMFD*, CA, July 1996.

[76] Joe F. Thompson, Z. U. A. Warsi, and C. Wayne Mastin. *Numerical Grid Generation*. North-Holland, 1985.

[77] Joe F. Thompson, Zahir U. A. Warsi, and C. Wayne Mastin. Boundary-fitted coordinate system for numerical solution of partial differential equations–a review. *Journal of Computational Physics*, 47:1–108, 1982.

[78] Kevin W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68:1–24, 1987.

[79] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1999.

[80] Isabelle Vallet. *Aérodynamique Numérique 3-D Instationnaire avec Fermeture Bas-Reynolds au Second Ordre*. PhD thesis, Université Paris 6, 1995.

[81] Oleg V. Vasiley and Thomas S. Lund. A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997.

[82] Martin Salinas Vasquez. *Simulation numérique des grandes échelles d'écoulements dans les canaux de refroidissement de moteur de fusée*. PhD thesis, INP Grenoble, 1999.

[83] Randall J. Le Veque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Verlag, Lectures in Mathematics, 1992.

[84] J. M. Verdon. Linearized Analysis of the Acoustic Response to Wake/Blade-Row Interaction. In *ISUAAAT'2000 and First Legendre Lecture Series*, Lyon, 2000.

[85] R. Verzicco, J. Mohd-Yusof, P. Orlandi, and D. Haworth. L. E. S. in complex geometries using boudary body forces. *Proceedings of the Summer Program, Center for Turbulence Research*, 1998.

[86] M. Vinokur. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 81:1–52, 1989.

[87] Bert Vreman, Bernard Geurts, and Hans Kuerten. A priori tests of large eddy simulation of the compressible plane mixing layer. *Journal of Engineering Mathematics*, 29:299–327, 1994.

[88] R. F. Warming, Richard M. Beam, and B. J. Hyett. Diagonalization and simultaneous symmetrization of the gas-dynamic matrices. *Mathematics of Computation*, pages 1037–1045, 1975.

[89] Zi Niu Wu. Conditions aux limites pour un probleme hyperbolique.

[90] H. C. Yee. Linearized form of implicit TVD schemes for the multidimensional euler and navier-stokes equations. *Comp. & Maths. with Appls.*, 12 A:413–432, 1986.

[91] H. C. Yee. *Numerical Experiment with a Symmetric High-Resolution Shock-Capturing Scheme*. NASA TM 88325, 1986.

[92] H. C. Yee. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *Journal of Computational Physics*, 68:151–179, 1987.

[93] H. C. Yee, R. M. Beam, and R. F. Warming. Boundary approximations for implicit schemes for one dimensional inviscid equations of gasdynamics. *AIAA Journal*, 20(9):1203–1211, 1982.

[94] H. C. Yee, G. H. Klopfer, and J.-L. Montagné. *High-Resolution Shock-Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows.* NASA TM 100097, 1988.

[95] A. Yoshizawa. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. *Phys. Fluids*, 29:2152–2164, 1986.