

Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées

Application aux signaux de musique

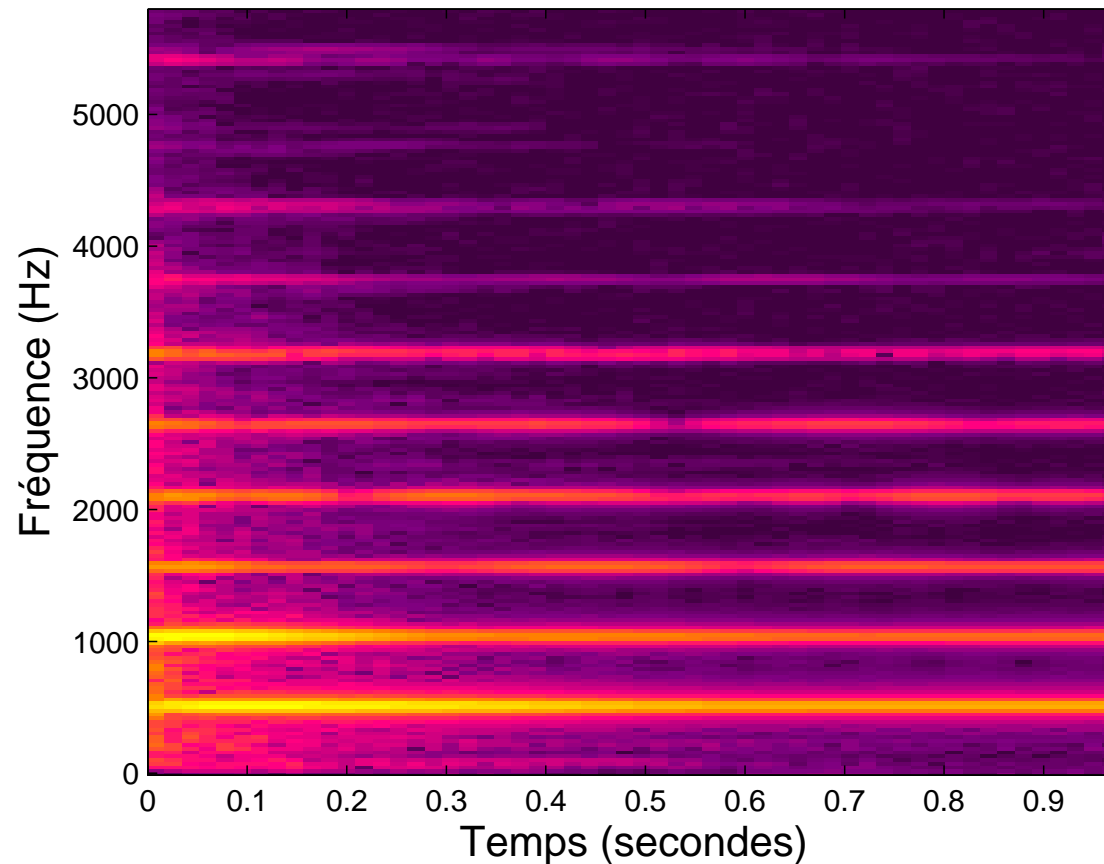
Roland Badeau

Télécom Paris

<http://www.tsi.enst.fr/~rbadeau>

Introduction

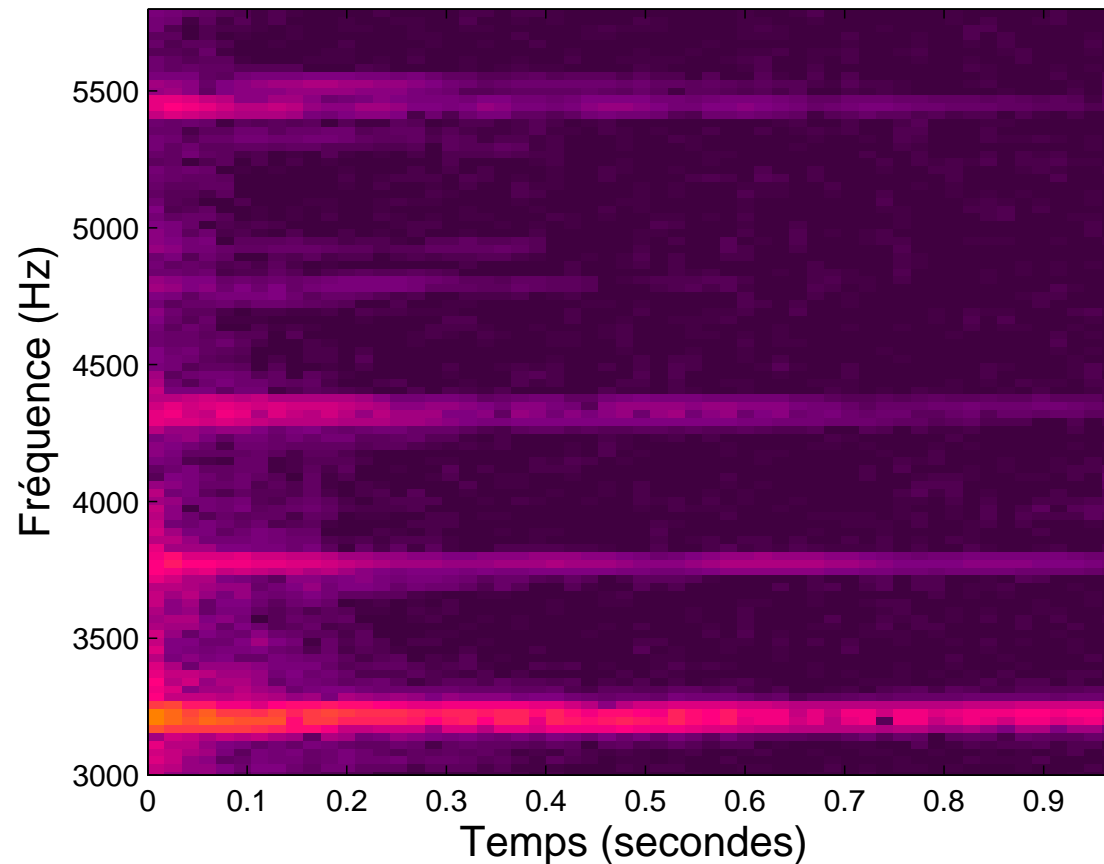
Piano : do grave 🗣️ , do aigu 🗣️ , accord 🗣️



Spectrogramme ($N \sim 35ms$, Hanning)

Introduction

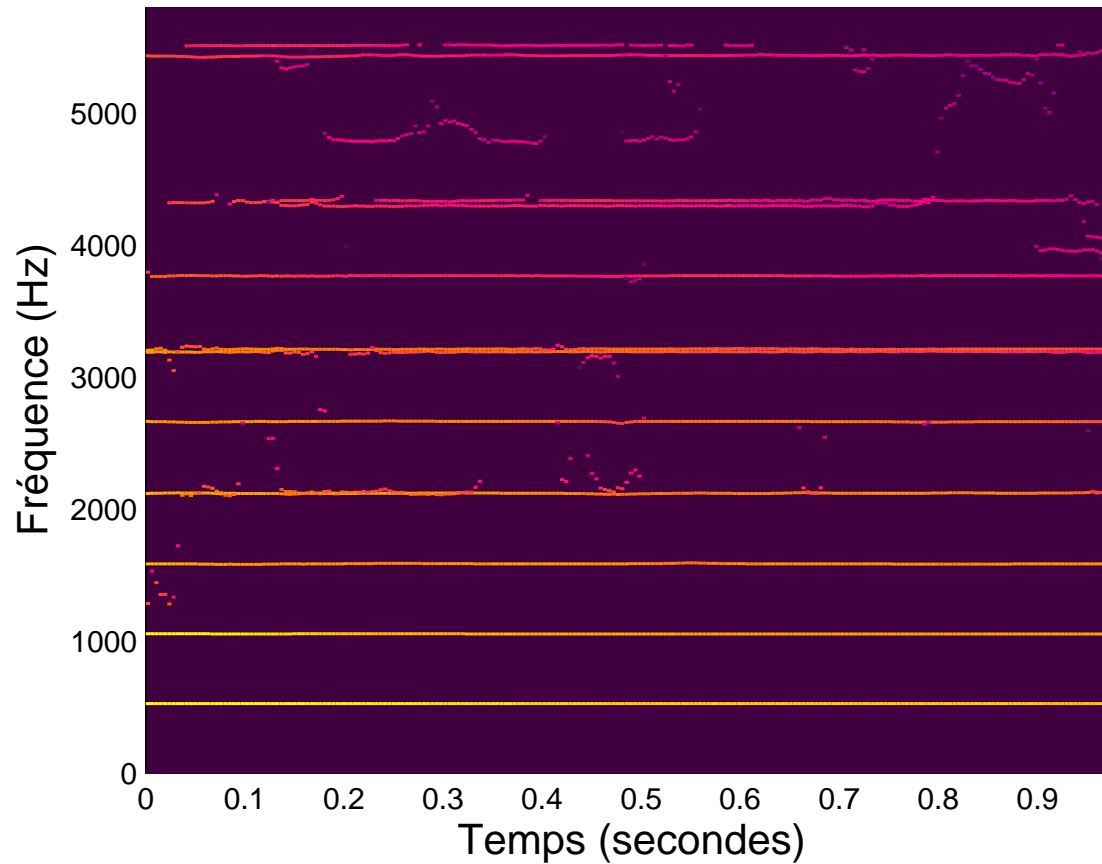
Piano : do grave 🗣️ , do aigu 🗣️ , accord 🗣️



Spectrogramme ($N \sim 35ms$, Hanning)

Introduction

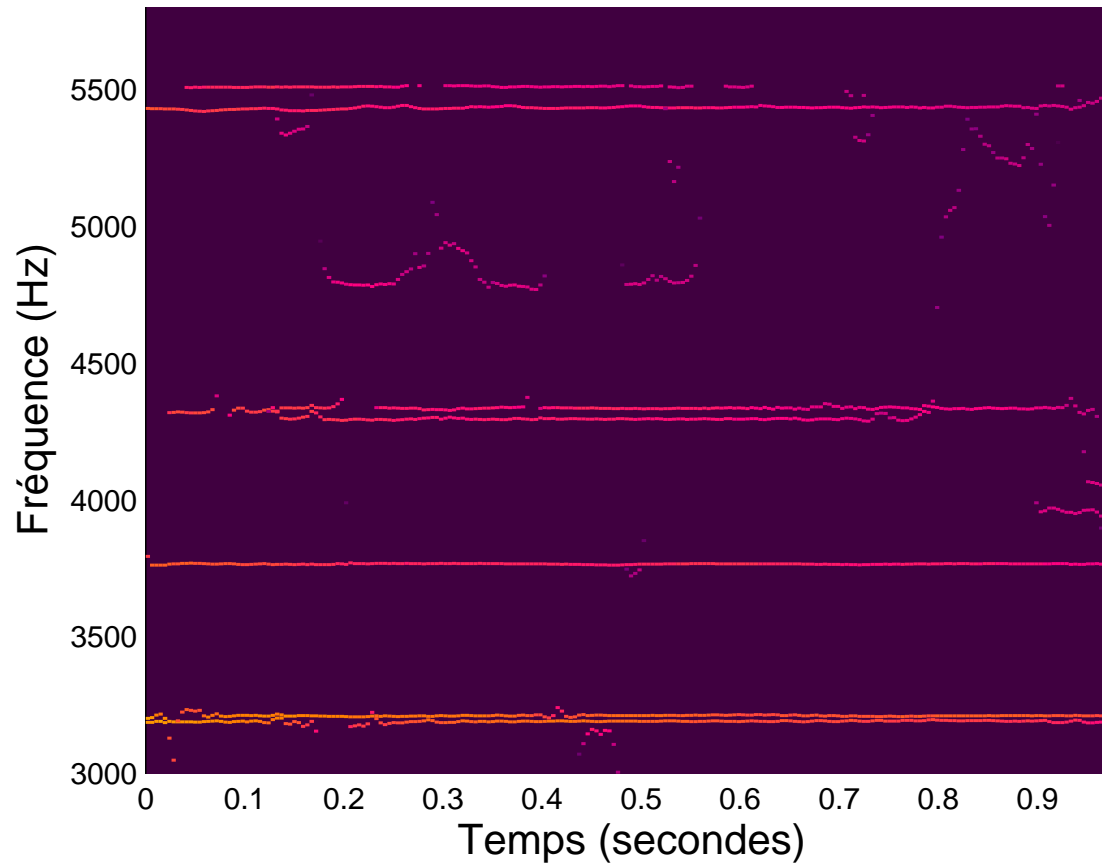
Piano : do grave 🗣️, do aigu 🗣️, accord 🗣️



HR-ogram ($N \sim 35ms$)

Introduction

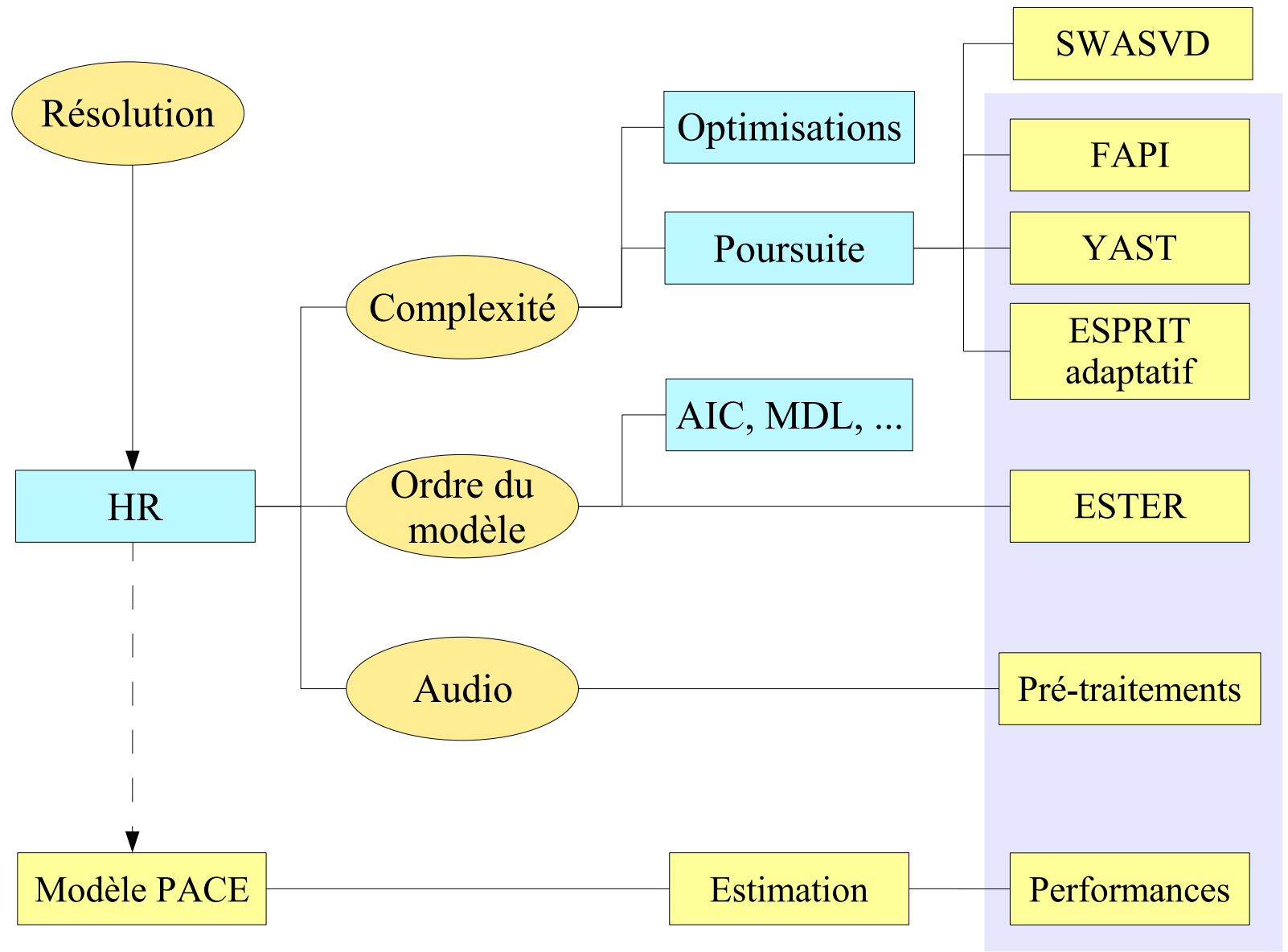
Piano : do grave  , do aigu  , accord 



HR-ogram ($N \sim 35ms$)

Introduction

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
- Conclusion



Plan de l'exposé

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- **Modèle et méthodes**
 - ◆ Modèle sinusoïdal avec modulation exponentielle
 - ◆ Analyse en terme de sous-espaces
 - ◆ Algorithme ESPRIT
- **Méthodes de suivi**
 - ◆ Algorithmes rapides de poursuite de sous-espaces
 - ◆ Algorithme ESPRIT adaptatif
- **Signaux de musique**
 - ◆ Difficultés liées à la nature du signal
 - ◆ Prétraitements pour l'analyse HR
 - ◆ Exemples sonores

■

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

Modèle et méthodes

Modèle de signal

■ Modulation d'amplitude exponentielle

Introduction

Modèle et méthodes

● **Modèle**

- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion



Modèle de signal

- Modulation d'amplitude exponentielle
- Pas de contrainte d'harmonicité entre les sinusoïdes

Introduction

Modèle et méthodes

● **Modèle**

- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion



Modèle de signal

Introduction

Modèle et méthodes

● **Modèle**

- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Modulation d'amplitude exponentielle
- Pas de contrainte d'harmonicité entre les sinusoïdes

- **Modèle complexe** :
$$x(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)}$$

Modèle de signal

Introduction

Modèle et méthodes

• **Modèle**

- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

■ Modulation d'amplitude exponentielle

■ Pas de contrainte d'harmonicité entre les sinusoïdes

■ Modèle complexe : $x(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)}$

■ Écriture compacte : $x(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k z_k^t$

◆ les **pôles complexes** $z_k = e^{\delta_k + i2\pi f_k}$ sont distincts et non nuls

◆ les **amplitudes complexes** $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$ sont non nulles

Modèle de signal

Introduction

Modèle et méthodes

• **Modèle**

- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Modulation d'amplitude exponentielle
- Pas de contrainte d'harmonicité entre les sinusoïdes
- Modèle complexe : $x(t) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)}$
- Écriture compacte : $x(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k z_k^t$
 - ◆ les **pôles complexes** $z_k = e^{\delta_k + i2\pi f_k}$ sont distincts et non nuls
 - ◆ les **amplitudes complexes** $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$ sont non nulles
- Modèle probabiliste : ajout d'un bruit blanc gaussien complexe



Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- $\forall t \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}(t) = [x(t) \dots x(t + n - 1)]^T$ où $n > r$



Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- $\forall t \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}(t) = [x(t) \dots x(t + n - 1)]^T$ où $n > r$
- $\mathbf{x}(t)$ appartient à l'**espace signal**, engendré par la matrice

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

• Modèle

• Sous-espaces

• Algorithme ESPRIT

• Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

■ $\forall t \in \mathbb{Z}$, on pose $x(t) = [x(t) \dots x(t + n - 1)]^T$ où $n > r$

■ $x(t)$ appartient à l'espace signal, engendré par la matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

■ Sur l'horizon d'observation $\{t - l + 1 \dots t + n - 1\}$ de longueur $N = n + l - 1$, on définit la matrice de dimensions $n \times l$ ($l > r$)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t - l + 1) & x(t - l + 2) & \dots & x(t) \\ x(t - l + 2) & x(t - l + 3) & \dots & x(t + 1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x(t - l + n) & x(t - l + n + 1) & \dots & x(t + n - 1) \end{bmatrix}$$



Décomposition en sous-espaces

- L'espace image de $X(t)$ est égal à l'espace signal

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion



Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- L'espace image de $\mathbf{X}(t)$ est égal à l'espace signal
- La matrice $\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t)^H$, dite **matrice de corrélation**, est singulière, de rang $r < n$:
 - ◆ Son espace image est égal à l'espace signal
 - ◆ Son noyau, orthogonal à l'espace signal, est l'**espace bruit**



Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- L'espace image de $\mathbf{X}(t)$ est égal à l'espace signal
- La matrice $\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t)^H$, dite **matrice de corrélation**, est singulière, de rang $r < n$:
 - ◆ Son espace image est égal à l'espace signal
 - ◆ Son noyau, orthogonal à l'espace signal, est l'**espace bruit**
- L'espace signal est aussi l'espace propre principal de $\mathbf{C}_{xx}(t)$



Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- L'espace image de $\mathbf{X}(t)$ est égal à l'espace signal
- La matrice $\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t)^H$, dite **matrice de corrélation**, est singulière, de rang $r < n$:
 - ◆ Son espace image est égal à l'espace signal
 - ◆ Son noyau, orthogonal à l'espace signal, est l'**espace bruit**
- L'espace signal est aussi l'espace propre principal de $\mathbf{C}_{xx}(t)$
- Une base $\mathbf{W}(t)$ de l'espace signal peut être obtenue comme
 - ◆ la base des principaux vecteurs propres de $\mathbf{C}_{xx}(t)$
 - ◆ toute autre base de l'espace propre principal de $\mathbf{C}_{xx}(t)$



Décomposition en sous-espaces

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- **Sous-espaces**
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- L'espace image de $\mathbf{X}(t)$ est égal à l'espace signal
- La matrice $\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t)^H$, dite **matrice de corrélation**, est singulière, de rang $r < n$:
 - ◆ Son espace image est égal à l'espace signal
 - ◆ Son noyau, orthogonal à l'espace signal, est l'**espace bruit**
- L'espace signal est aussi l'espace propre principal de $\mathbf{C}_{xx}(t)$
- Une base $\mathbf{W}(t)$ de l'espace signal peut être obtenue comme
 - ◆ la base des principaux vecteurs propres de $\mathbf{C}_{xx}(t)$
 - ◆ toute autre base de l'espace propre principal de $\mathbf{C}_{xx}(t)$
- En présence d'un **bruit blanc**, l'espace signal peut encore être estimé comme l'espace propre principal de $\mathbf{C}_{xx}(t)$



Algorithme ESPRIT

- Propriété d'invariance rotationnelle de V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_V$$

$n \times r$

Algorithme ESPRIT

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Propriété d'invariance rotationnelle de V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{V \uparrow}$$

$$(n-1) \times r$$

Algorithme ESPRIT

■ Propriété d'invariance rotationnelle de V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{V}_\uparrow \\ (n-1) \times r}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{V} \\ n \times r}}$$

Algorithme ESPRIT

■ Propriété d'invariance rotationnelle de V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\uparrow} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_\downarrow}$$

$(n-1) \times r$

Algorithme ESPRIT

■ Propriété d'invariance rotationnelle de V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{V}_\uparrow \\ (n-1) \times r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_0 & \dots & z_{r-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ z_0^{n-2} & \dots & z_{r-1}^{n-2} \\ z_0^{n-1} & \dots & z_{r-1}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{V}_\downarrow \\ (n-1) \times r}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_0 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & z_{r-1} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{J} \\ r \times r}}$$

Algorithme ESPRIT

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- **Algorithme ESPRIT**
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Propriété d'**invariance rotationnelle** de V :

$$V_{\uparrow} = V_{\downarrow} J$$

Algorithme ESPRIT

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- **Algorithme ESPRIT**
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Propriété d'**invariance rotationnelle** de V :

$$V_{\uparrow} = V_{\downarrow} J$$

- Invariance rotationnelle de $W(t)$:

$$W(t)_{\uparrow} = W(t)_{\downarrow} \Phi(t)$$

où $\Phi(t)$ est appelée **matrice spectrale**

Algorithme ESPRIT

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Propriété d'**invariance rotationnelle** de V :

$$V_{\uparrow} = V_{\downarrow} J$$

- Invariance rotationnelle de $W(t)$:

$$W(t)_{\uparrow} = W(t)_{\downarrow} \Phi(t)$$

où $\Phi(t)$ est appelée **matrice spectrale**

- Les valeurs propres de $\Phi(t)$ sont les pôles $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots r-1\}}$



Algorithme ESPRIT

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Propriété d'**invariance rotationnelle** de V :

$$V_{\uparrow} = V_{\downarrow} J$$

- Invariance rotationnelle de $W(t)$:

$$W(t)_{\uparrow} = W(t)_{\downarrow} \Phi(t)$$

où $\Phi(t)$ est appelée **matrice spectrale**

- Les valeurs propres de $\Phi(t)$ sont les pôles $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots r-1\}}$
- **Algorithme ESPRIT** [Roy et Kailath, 1989]
 - ◆ déterminer une base de l'espace signal $W(t)$
 - ◆ calculer la matrice $\Phi(t) = W(t)_{\downarrow}^{\dagger} W(t)_{\uparrow}$
 - ◆ en déduire les pôles comme valeurs propres de $\Phi(t)$
 - ◆ estimer les amplitudes par la méthode des moindres carrés



Performances

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Hypothèses : atténuations nulles, $R_{SB} \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$



Performances

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Hypothèses : atténuations nulles, $RSB \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$
- Evaluation des performances en terme de **biais et dispersion** :
 - ◆ Tous les estimateurs sont asymptotiquement sans biais
 - ◆ Leurs variances dépendent des dimensions n et l
 - ◆ Elles sont minimales pour $n = 2l$ ou pour $l = 2n$.



Performances

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Hypothèses : atténuations nulles, $RSB \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$
- Evaluation des performances en terme de **biais et dispersion** :
 - ◆ Tous les estimateurs sont asymptotiquement sans biais
 - ◆ Leurs variances dépendent des dimensions n et l
 - ◆ Elles sont minimales pour $n = 2l$ ou pour $l = 2n$.
- Evaluation en terme d'**efficacité asymptotique** :



Performances

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Hypothèses : atténuations nulles, $RSB \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$
- Evaluation des performances en terme de **biais et dispersion** :
 - ◆ Tous les estimateurs sont asymptotiquement sans biais
 - ◆ Leurs variances dépendent des dimensions n et l
 - ◆ Elles sont minimales pour $n = 2l$ ou pour $l = 2n$.
- Evaluation en terme d'**efficacité asymptotique** :
 - ◆ L'efficacité asymptotique des estimateurs ne dépend pas des paramètres du modèle, mais seulement du rapport n/l



Performances

Introduction

Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Hypothèses : atténuations nulles, $RSB \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$
- Evaluation des performances en terme de **biais et dispersion** :
 - ◆ Tous les estimateurs sont asymptotiquement sans biais
 - ◆ Leurs variances dépendent des dimensions n et l
 - ◆ Elles sont minimales pour $n = 2l$ ou pour $l = 2n$.
- Evaluation en terme d'**efficacité asymptotique** :
 - ◆ L'efficacité asymptotique des estimateurs ne dépend pas des paramètres du modèle, mais seulement du rapport n/l
 - ◆ Si $n = 2l$ ou $l = 2n$, elle est égale à
 - $9/8 = 1,125$ pour les fréquences et les facteurs d'atténuation ([Hua et Sarkar, 1990] dans le cas $r = 1$)
 - $35/32 \simeq 1,094$ pour les amplitudes et les phases



Performances

Introduction

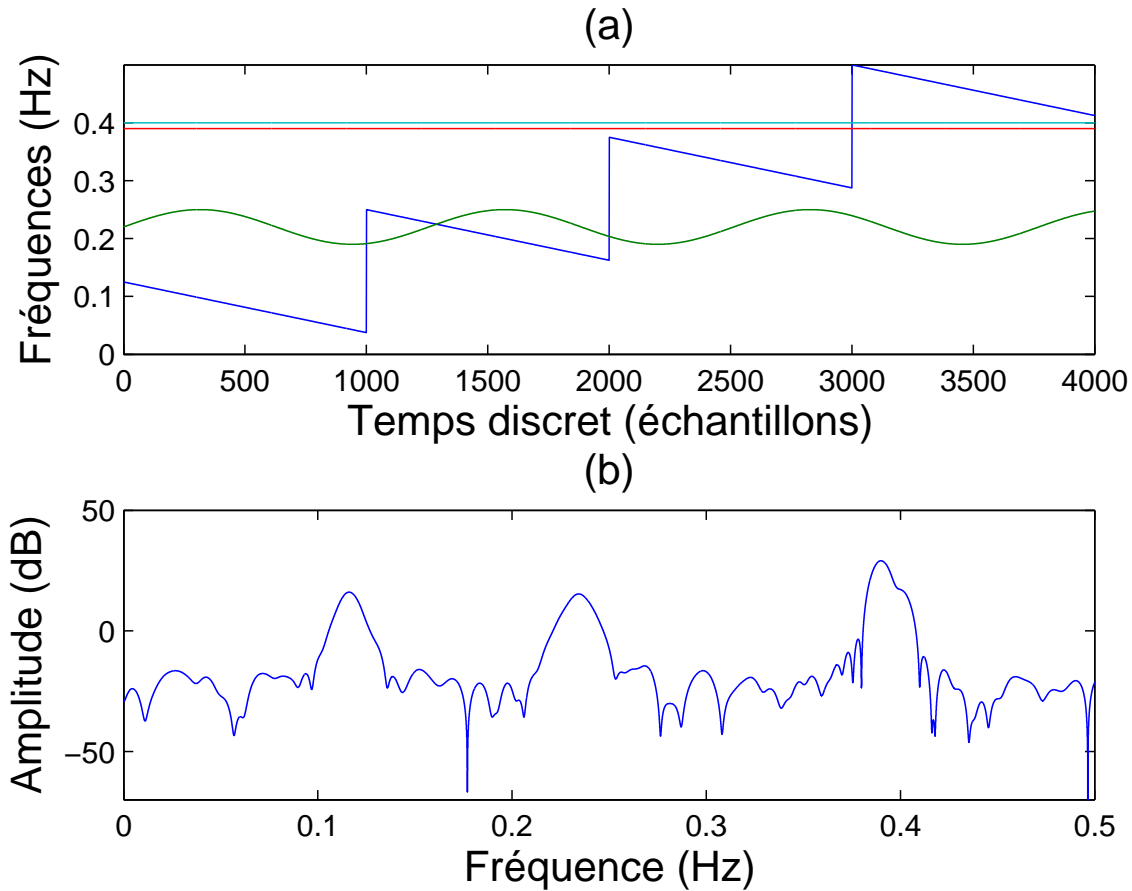
Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion



(a) Trajectoires fréquentielles, (b) Périodogramme ($N = 200$)

Performances

Introduction

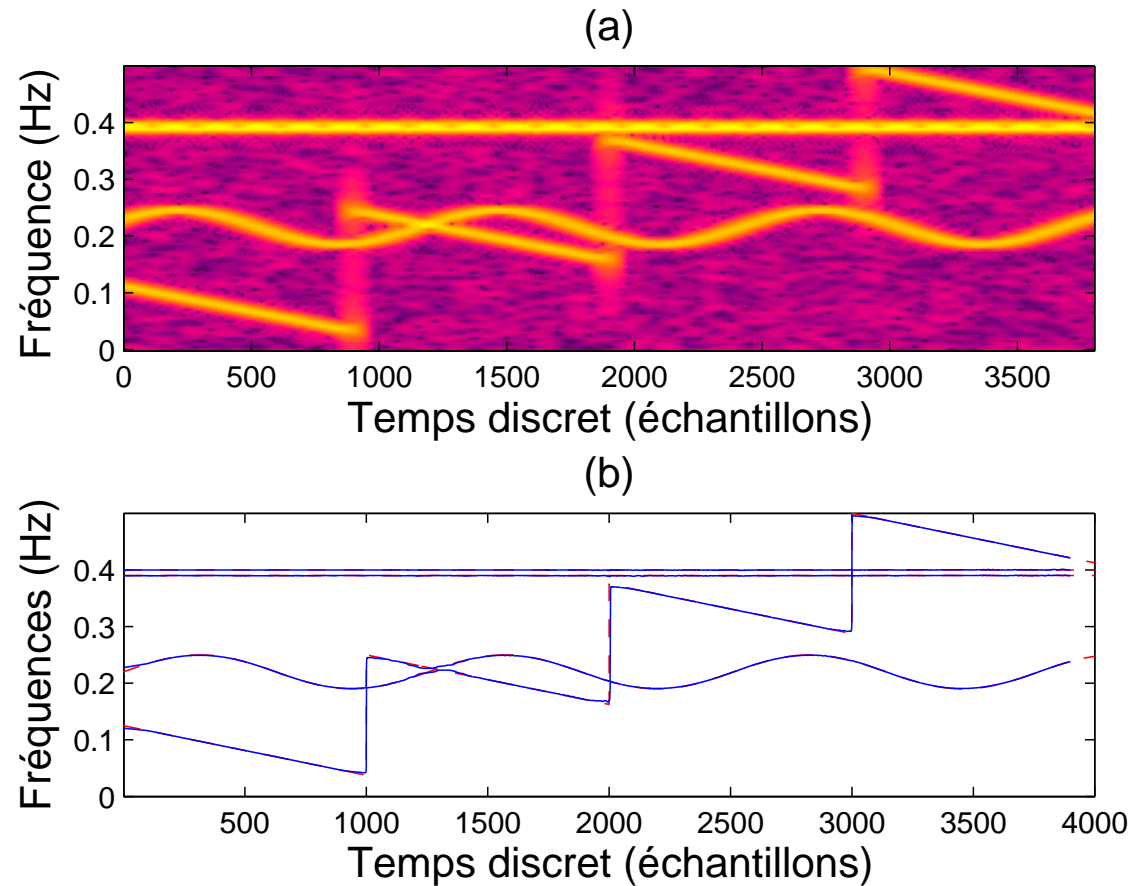
Modèle et méthodes

- Modèle
- Sous-espaces
- Algorithme ESPRIT
- Performances

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion



(a) Spectrogram ($N=200$), (b) HR-ogram ($n=80$, $l=120$, $r=4$)



Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

Méthodes de suivi

Optimisation des calculs numériques

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

● Optimisation

- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

■ Analyse détaillée du coût des calculs en MACs

Etape de l'algorithme	Méthode	Complexité
Calcul de $C_{xx}(t)$	produit matriciel	n^2l
Calcul de $W(t)$	EVD	$O(n^3)$
Calcul de $\Phi(t)$	moindres carrés	$2nr^2$
Calcul des pôles	EVD	$O(r^3)$
Calcul des amplitudes	moindres carrés	Nr^2

Optimisation des calculs numériques

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

● Optimisation

- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

■ Analyse détaillée du coût des calculs en MACs

Etape de l'algorithme	Méthode	Complexité
Calcul de $C_{xx}(t)$	produit matriciel	n^2l
Calcul de $W(t)$	EVD	$O(n^3)$
Calcul de $\Phi(t)$	moindres carrés	$2nr^2$
Calcul des pôles	EVD	$O(r^3)$
Calcul des amplitudes	moindres carrés	Nr^2

■ En pratique, $n \sim l$ sont choisis grands devant r



Optimisation des calculs numériques

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

● Optimisation

- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

■ Analyse détaillée du coût des calculs en MACs

Etape de l'algorithme	Méthode	Complexité
Calcul de $C_{xx}(t)$	produit matriciel	n^2l
Calcul de $W(t)$	EVD	$O(n^3)$
Calcul de $\Phi(t)$	moindres carrés	$2nr^2$
Calcul des pôles	EVD	$O(r^3)$
Calcul des amplitudes	moindres carrés	Nr^2

- En pratique, $n \sim l$ sont choisis grands devant r
- Les étapes limitantes sont le calcul de $C_{xx}(t)$ et $W(t)$ (estimation de l'espace signal)

Algorithmes de poursuite de l'espace signal

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

• Optimisation

• Suivi de l'espace

• Algorithme FAPI

• Algorithme YAST

• Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

■ Définition récursive de la matrice de corrélation

- ◆ Fenêtre glissante de longueur l :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H - \mathbf{x}(t-l)\mathbf{x}(t-l)^H$$

- ◆ Fenêtre exponentielle de longueur infinie ($0 < \beta < 1$) :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H$$

Algorithmes de poursuite de l'espace signal

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

• Optimisation

• Suivi de l'espace

• Algorithme FAPI

• Algorithme YAST

• Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

■ Définition récursive de la matrice de corrélation

◆ Fenêtre glissante de longueur l :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)^H - \mathbf{x}(t-l) \mathbf{x}(t-l)^H$$

◆ Fenêtre exponentielle de longueur infinie ($0 < \beta < 1$) :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)^H$$

■ Calcul récursif de $\mathbf{W}(t)$

Algorithmes de poursuite de l'espace signal

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

• Optimisation

• Suivi de l'espace

• Algorithme FAPI

• Algorithme YAST

• Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

■ Définition récursive de la matrice de corrélation

- ◆ Fenêtre glissante de longueur l :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H - \mathbf{x}(t-l)\mathbf{x}(t-l)^H$$

- ◆ Fenêtre exponentielle de longueur infinie ($0 < \beta < 1$) :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H$$

■ Calcul récursif de $\mathbf{W}(t)$

■ L'algorithme PAST [Yang, 1995]

- ◆ repose sur l'approximation $\mathbf{W}(t) \simeq \mathbf{W}(t-1)$
- ◆ met à jour $\mathbf{W}(t)$ par addition d'une matrice de rang faible
- ◆ possède la complexité la plus faible :
 - $3nr$ en fenêtre exponentielle, et $6nr$ en fenêtre glissante
- ◆ ne garantit pas l'orthonormalité de la matrice $\mathbf{W}(t)$
- ◆ ne calcule pas les vecteurs propres

Algorithmes de poursuite de l'espace signal

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

• Optimisation

• Suivi de l'espace

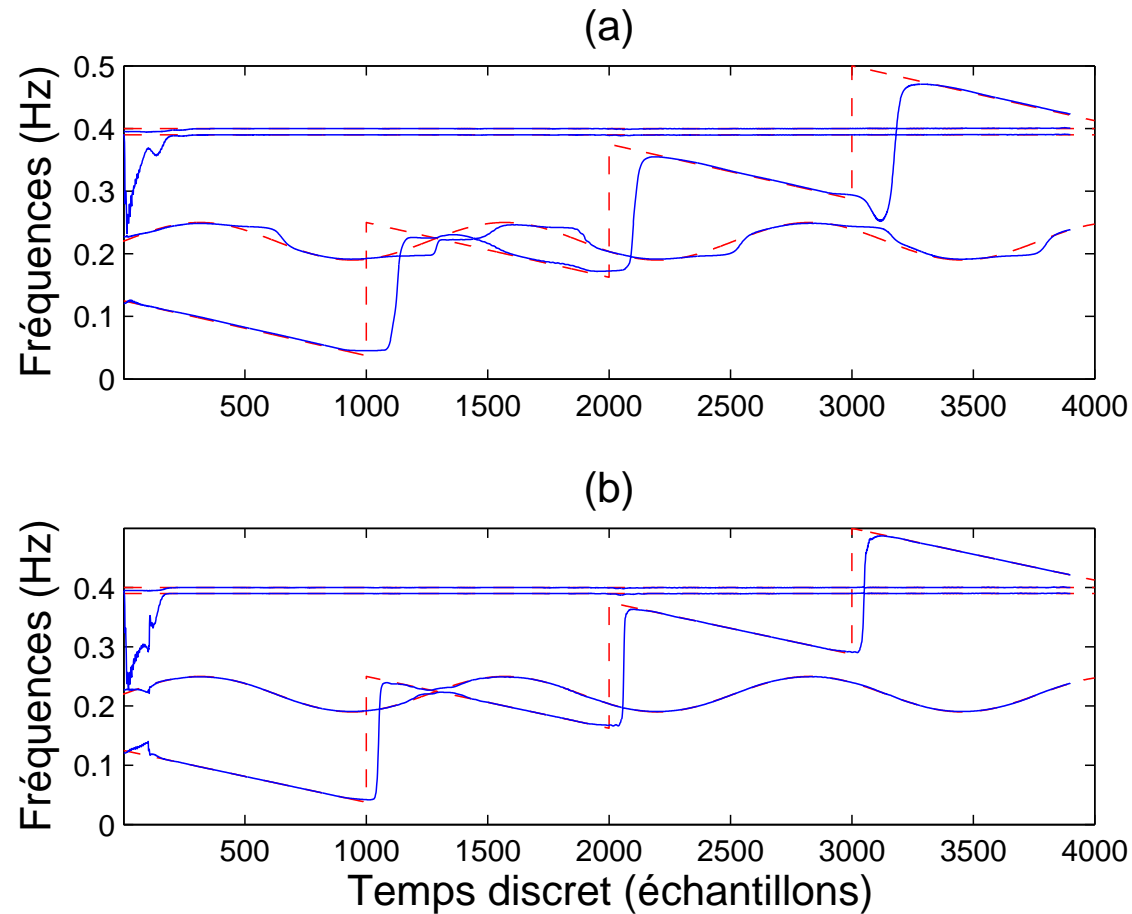
• Algorithme FAPI

• Algorithme YAST

• Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion



Fenêtre (a) exp., (b) glissante ($n = 80$, $l = 120$, $\beta = e^{-\frac{1}{l}}$)

Méthode des puissances itérées

- Algorithme itératif de calcul des r vecteurs propres dominants

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion



Méthode des puissances itérées

- Algorithme itératif de calcul des r vecteurs propres dominants
- Convergence globale et exponentielle vers l'espace signal

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion



Méthode des puissances itérées

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- **Algorithme FAPI**
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithme itératif de calcul des r vecteurs propres dominants
- Convergence globale et exponentielle vers l'espace signal
- Méthode des puissances itérées adaptative
 - ◆ **Compression des données** : $\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t - 1)$
 - ◆ **Orthonormalisation** : $\mathbf{W}(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{C}_{xy}(t)$



Méthode des puissances itérées

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- **Algorithme FAPI**
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithme itératif de calcul des r vecteurs propres dominants
- Convergence globale et exponentielle vers l'espace signal
- Méthode des puissances itérées adaptative
 - ◆ **Compression des données** : $\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t - 1)$
 - ◆ **Orthonormalisation** : $\mathbf{W}(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{C}_{xy}(t)$
- Réduction de la complexité de la méthode des puissances itérées en introduisant l'hypothèse $\text{Im}(\mathbf{W}(t)) \simeq \text{Im}(\mathbf{W}(t - 1))$



Méthode des puissances itérées

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- **Algorithme FAPI**
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithme itératif de calcul des r vecteurs propres dominants
- Convergence globale et exponentielle vers l'espace signal
- Méthode des puissances itérées adaptative
 - ◆ Compression des données : $\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t - 1)$
 - ◆ Orthonormalisation : $\mathbf{W}(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{C}_{xy}(t)$
- Réduction de la complexité de la méthode des puissances itérées en introduisant l'hypothèse $\text{Im}(\mathbf{W}(t)) \simeq \text{Im}(\mathbf{W}(t - 1))$
- Calcul de $\mathbf{C}_{xy}(t)$ et $\mathbf{W}(t)$ par mise à jour de rang faible



Méthode des puissances itérées

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- **Algorithme FAPI**
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithme itératif de calcul des r vecteurs propres dominants
- Convergence globale et exponentielle vers l'espace signal
- Méthode des puissances itérées adaptative
 - ◆ **Compression des données** : $\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t - 1)$
 - ◆ **Orthonormalisation** : $\mathbf{W}(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{C}_{xy}(t)$
- Réduction de la complexité de la méthode des puissances itérées en introduisant l'hypothèse $\text{Im}(\mathbf{W}(t)) \simeq \text{Im}(\mathbf{W}(t - 1))$
- Calcul de $\mathbf{C}_{xy}(t)$ et $\mathbf{W}(t)$ par mise à jour de rang faible
- L'algorithme **Fast Approximated Power Iteration (FAPI)** :
 - ◆ possède une complexité algorithmique semblable à PAST : $3nr$ en fenêtre exponentielle, $6nr + 4lr$ en fenêtre glissante
 - ◆ garantit l'orthonormalité de la matrice $\mathbf{W}(t)$
 - ◆ ne calcule pas les vecteurs propres



Méthode des puissances itérées

Introduction

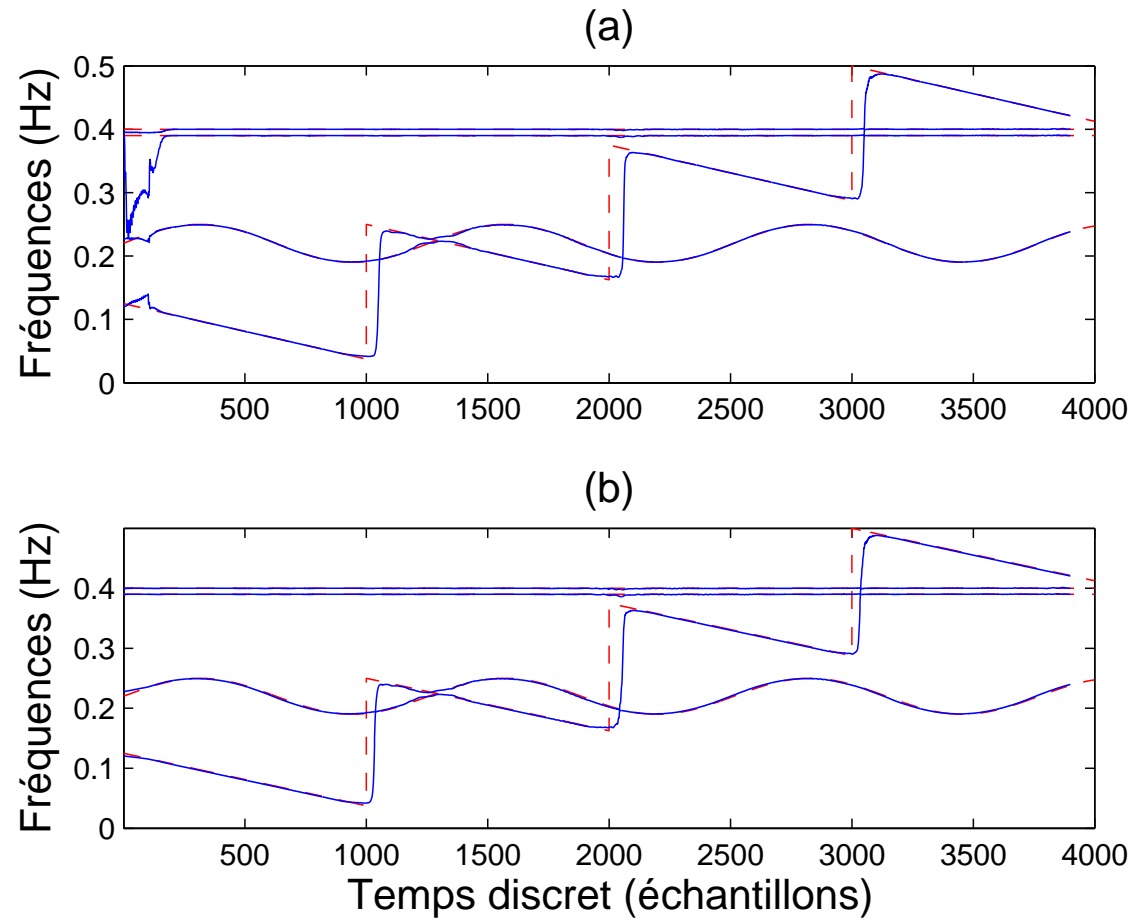
Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- **Algorithme FAPI**
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion



(a) PAST, (b) FAPI ($n = 80, l = 120$)



Yet Another Subspace Tracker

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- **Algorithme YAST**
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- [Davila, 2000] : une matrice orthonormée engendre l'espace signal ssi elle maximise $\mathcal{J}(\mathbf{W}(t)) = \text{tr}(\mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t))$

Yet Another Subspace Tracker

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- [Davila, 2000] : une matrice orthonormée engendre l'espace signal ssi elle maximise $\mathcal{J}(\mathbf{W}(t)) = \text{tr}(\mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t))$
- On limite l'optimisation à $\text{Im}(\mathbf{W}(t-1))$, augmenté de
 - ◆ $\mathbf{x}(t)$ (dans tous les cas)
 - ◆ $\mathbf{x}(t-l)$ (pour une fenêtre glissante)
 - ◆ $\mathbf{C}_{xx}(t-1) \mathbf{x}(t)$ (pour affiner éventuellement le résultat)

Yet Another Subspace Tracker

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- [Davila, 2000] : une matrice orthonormée engendre l'espace signal ssi elle maximise $\mathcal{J}(\mathbf{W}(t)) = \text{tr}(\mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t))$
- On limite l'optimisation à $\text{Im}(\mathbf{W}(t-1))$, augmenté de
 - ◆ $\mathbf{x}(t)$ (dans tous les cas)
 - ◆ $\mathbf{x}(t-l)$ (pour une fenêtre glissante)
 - ◆ $\mathbf{C}_{xx}(t-1) \mathbf{x}(t)$ (pour affiner éventuellement le résultat)
- Mise à jour de $\mathbf{W}(t)$ par addition d'une matrice de rang faible

Yet Another Subspace Tracker

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

- [Davila, 2000] : une matrice orthonormée engendre l'espace signal ssi elle maximise $\mathcal{J}(\mathbf{W}(t)) = \text{tr}(\mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t))$
- On limite l'optimisation à $\text{Im}(\mathbf{W}(t-1))$, augmenté de
 - ◆ $\mathbf{x}(t)$ (dans tous les cas)
 - ◆ $\mathbf{x}(t-l)$ (pour une fenêtre glissante)
 - ◆ $\mathbf{C}_{xx}(t-1) \mathbf{x}(t)$ (pour affiner éventuellement le résultat)
- Mise à jour de $\mathbf{W}(t)$ par addition d'une matrice de rang faible
- L'algorithme *Yet Another Subspace Tracker (YAST)* :
 - ◆ possède une complexité algorithmique semblable à PAST : $4nr$ en fenêtre exponentielle, et $8nr$ en fenêtre glissante
 - ◆ garantit l'orthonormalité de la matrice $\mathbf{W}(t)$
 - ◆ ne calcule pas les vecteurs propres



Yet Another Subspace Tracker

Introduction

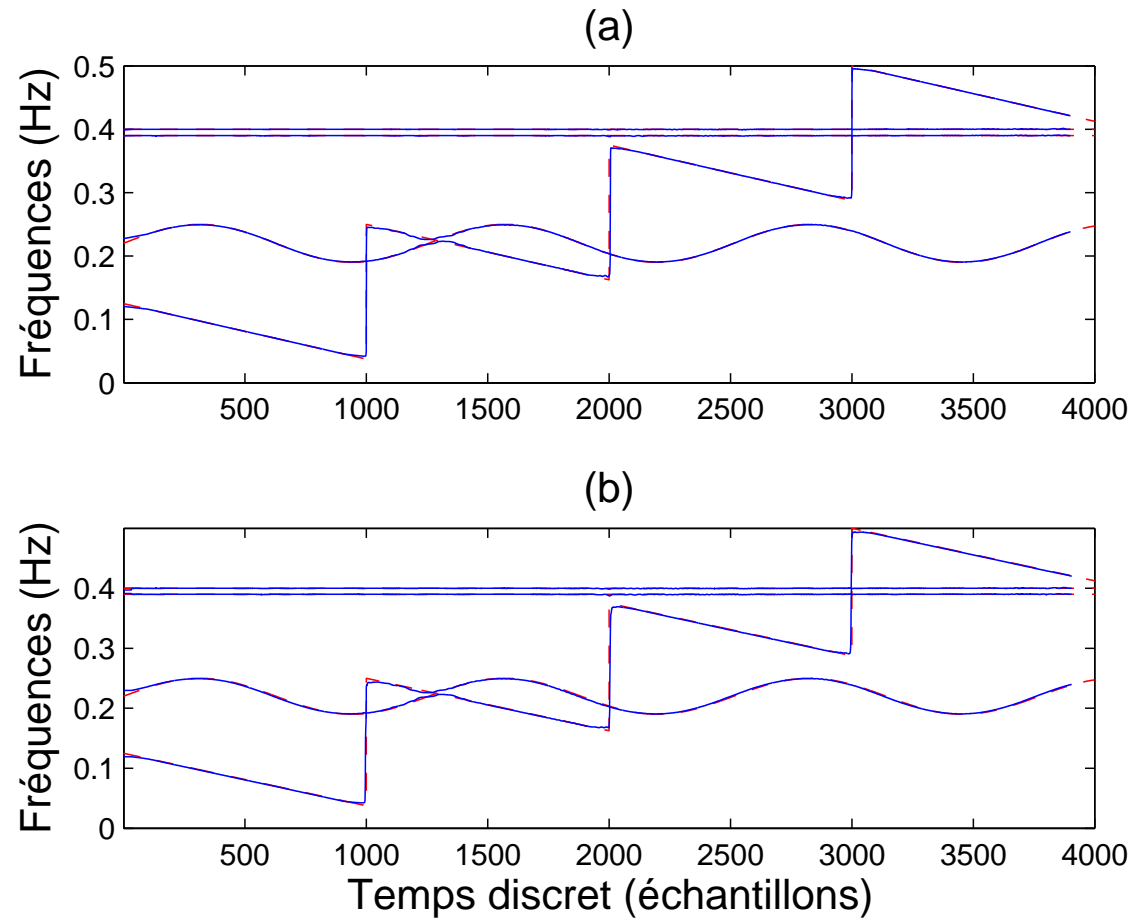
Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- **Algorithme YAST**
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion



(a) EVD, (b) YAST ($n = 80, l = 120$)

Poursuite des pôles et des amplitudes

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

Etape de l'algorithme	Méthode	Coût
Calcul de $\Phi(t)$	moindres carrés	$2nr^2$
Calcul des pôles	EVD	$O(r^3)$
Calcul des amplitudes	moindres carrés	Nr^2

Poursuite des pôles et des amplitudes

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

Etape de l'algorithme	Méthode	Coût
Calcul de $\Phi(t)$	moindres carrés	$2nr^2$
Calcul des pôles	EVD	$O(r^3)$
Calcul des amplitudes	moindres carrés	Nr^2

- **Implémentation rapide** des autres étapes de l'algorithme d'estimation **sans approximation supplémentaire**

Etape de l'algorithme	Méthode	Coût
Calcul de $\Phi(t)$	mise à jour de rang faible	$2nr$ ou $4nr$
Calcul des pôles	EVD récursive	$2r^3$
Calcul des amp.	structure Vandermonde	Nr

Poursuite des pôles et des amplitudes

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

- Optimisation
- Suivi de l'espace
- Algorithme FAPI
- Algorithme YAST
- Pôles et amplitudes

Signaux de musique

Conclusion

Etape de l'algorithme	Méthode	Coût
Calcul de $\Phi(t)$	moindres carrés	$2nr^2$
Calcul des pôles	EVD	$O(r^3)$
Calcul des amplitudes	moindres carrés	Nr^2

- **Implémentation rapide** des autres étapes de l'algorithme d'estimation **sans approximation supplémentaire**

Etape de l'algorithme	Méthode	Coût
Calcul de $\Phi(t)$	mise à jour de rang faible	$2nr$ ou $4nr$
Calcul des pôles	EVD récursive	$2r^3$
Calcul des amp.	structure Vandermonde	Nr

- Complexité globale de l'algorithme adaptatif : $O(Nr + r^3)$

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

Signaux de musique

Principales difficultés

- Difficultés liées à la nature de signal :
 - ◆ Le bruit n'est pas blanc
 - ◆ Le nombre de composantes sinusoïdales est inconnu
 - ◆ Ce nombre peut être élevé (dans le cas de sons graves)

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Principales difficultés

- Difficultés liées à la nature de signal :
 - ◆ Le bruit n'est pas blanc
 - ◆ Le nombre de composantes sinusoïdales est inconnu
 - ◆ Ce nombre peut être élevé (dans le cas de sons graves)
- Nécessité de prétraitements avant l'analyse HR

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

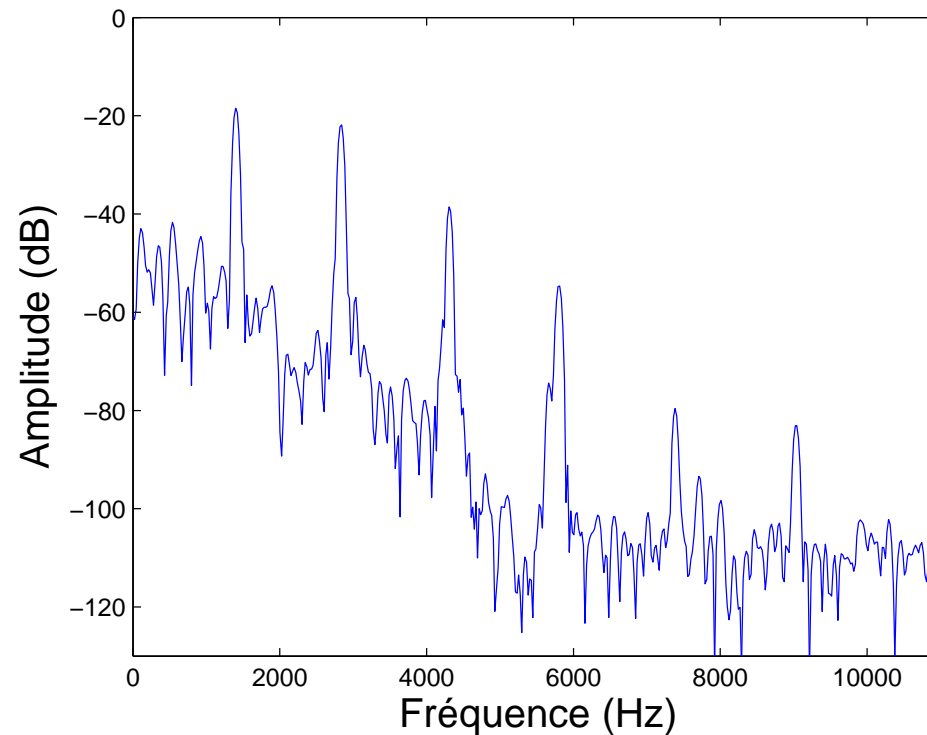
- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Estimation en présence d'un bruit coloré

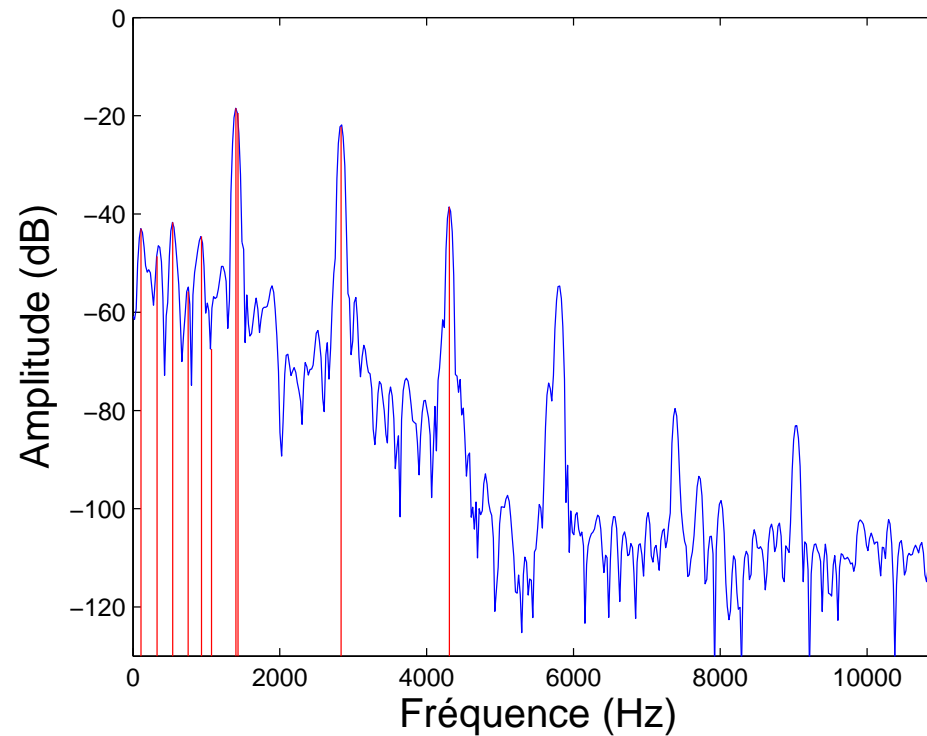
- Signal analysé : note de piano (Fa) échantillonnée à 22050 Hz



Périodogramme d'un segment de longueur $N = 512$ (23 ms)

Estimation en présence d'un bruit coloré

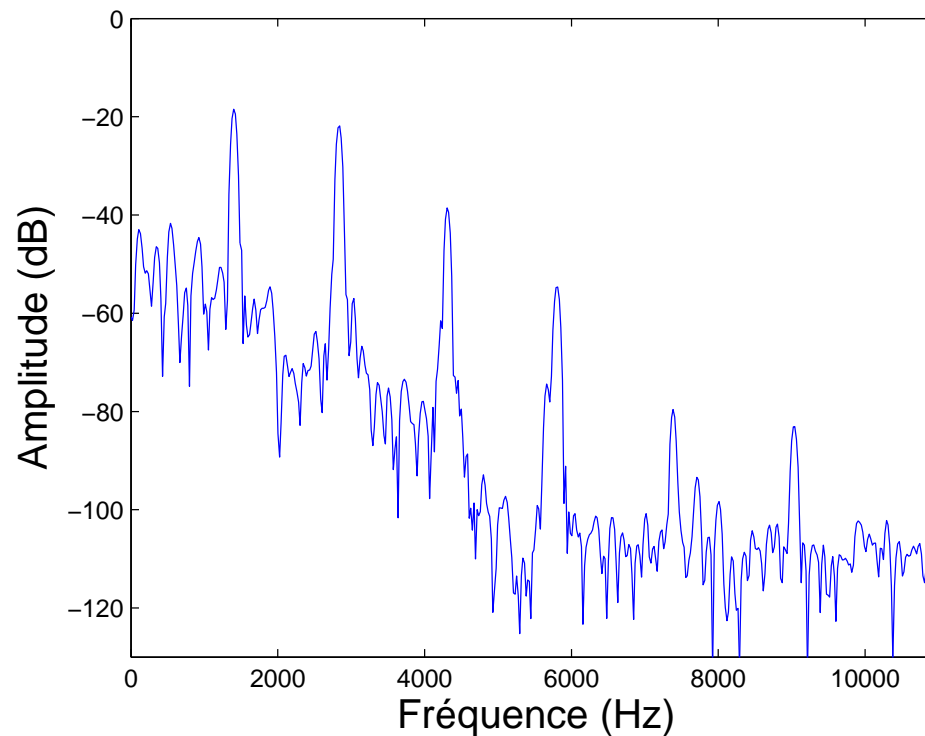
■ Estimation des fréquences par l'algorithme ESPRIT



Fréquences estimées ($n = 256, r = 20$)

Estimation en présence d'un bruit coloré

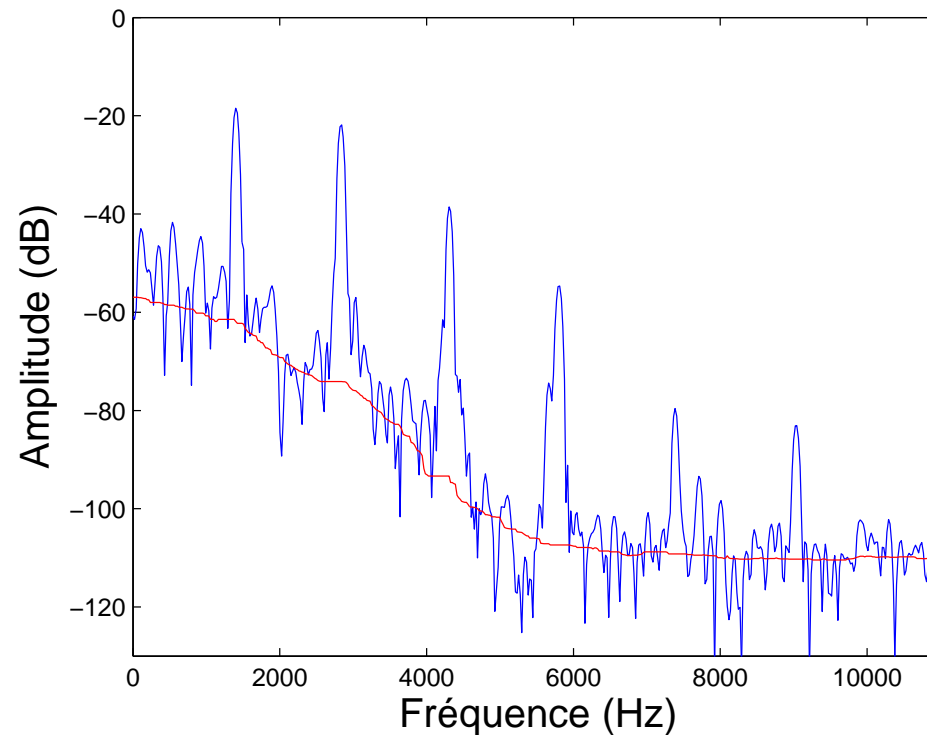
- Signal analysé : note de piano (Fa) échantillonnée à 22050 Hz



Périodogramme d'un segment de longueur $N = 512$ (23 ms)

Estimation en présence d'un bruit coloré

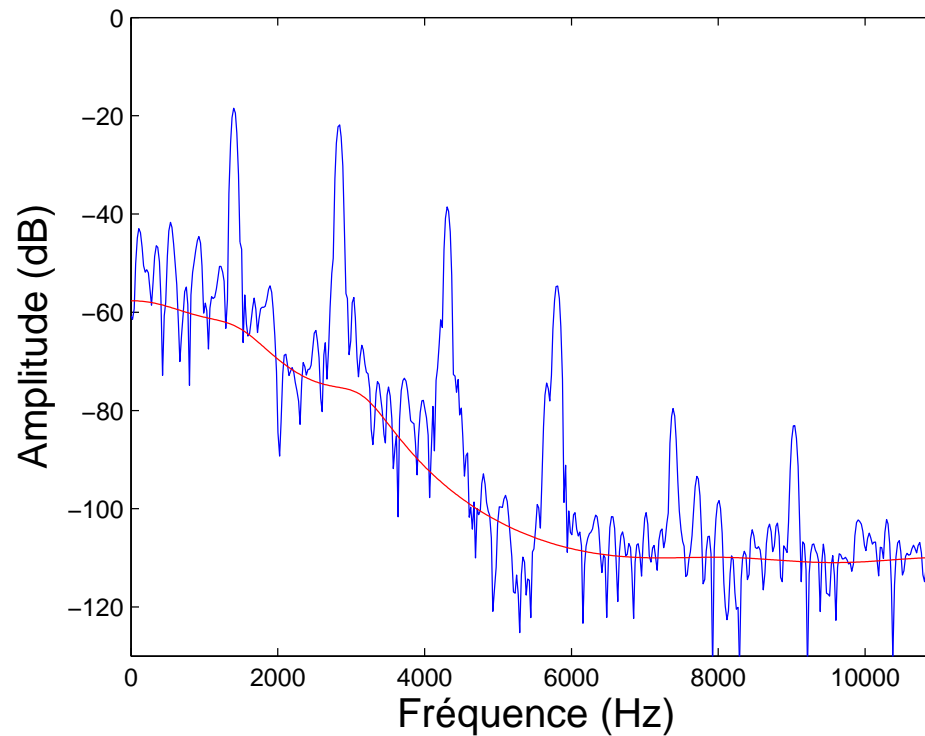
- Lissage du périodogramme à l'aide d'un filtre de rang



Périodogramme lissé (filtre de largeur 3000 Hz et d'ordre 1/3)

Estimation en présence d'un bruit coloré

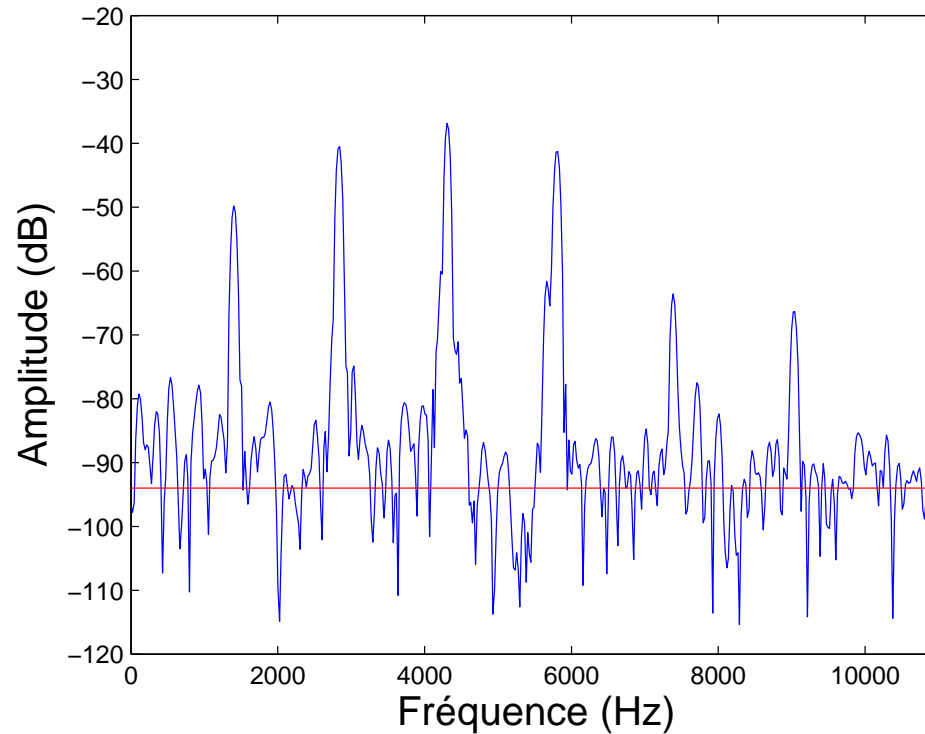
■ Modélisation auto-régressive du bruit



Réponse du filtre AR obtenu par prédiction linéaire à l'ordre 11

Estimation en présence d'un bruit coloré

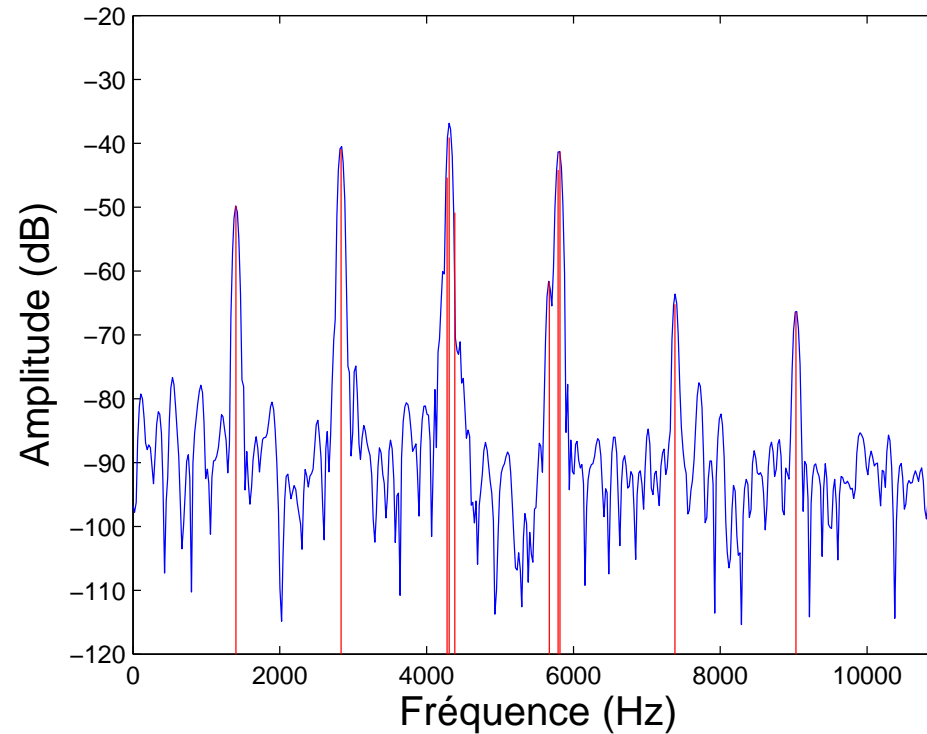
■ Blanchiment du bruit par filtrage



Périodogramme du signal blanchi par le filtre RIF estimé

Estimation en présence d'un bruit coloré

■ Estimation des fréquences par l'algorithme ESPRIT



Fréquences estimées ($n = 256, r = 20$)

Sélection de l'ordre de modélisation

- L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- **Sélection de l'ordre**
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

- L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**
- Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

● Blanchiment

● Sélection de l'ordre

● Banc de filtres

● Système complet

● Exemples sonores

Conclusion

- L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**
- Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions
- Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

● Blanchiment

● **Sélection de l'ordre**

● Banc de filtres

● Système complet

● Exemples sonores

Conclusion

- L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**
- Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions
- Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors
$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$
- Hypothèse : signal non bruité



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

■ L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**

■ Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions

■ Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$

■ Hypothèse : signal non bruité

$p \leq r$	$p = r$	$p > r$

Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

■ L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**

■ Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions

■ Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$

■ Hypothèse : signal non bruité

$p \leq r$	$p = r$	$p > r$
	$\ \mathbf{E}(r)\ = 0,$ $\{z_k\} = \text{eig}(\Phi(r))$	



Sélection de l'ordre de modélisation

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - Système complet
 - Exemples sonores
- Conclusion

- L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**
- Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions
- Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$
- Hypothèse : signal non bruité

$p \leq r$	$p = r$	$p > r$
	$\ \mathbf{E}(r)\ = 0,$ $\{z_k\} = \text{eig}(\Phi(r))$	$\ \mathbf{E}(p)\ > 0,$ $\{z_k\} \subset \text{eig}(\Phi(p))$



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

■ L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**

■ Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions

■ Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$

■ Hypothèse : signal non bruité

$p \leq r$	$p = r$	$p > r$
$\forall \hat{z} \in \text{eig}(\Phi(p)), \exists z_k :$ $ z_k - \hat{z} \leq \kappa_2 \ \mathbf{E}(p)\ _2$	$\ \mathbf{E}(r)\ = 0,$ $\{z_k\} = \text{eig}(\Phi(r))$	$\ \mathbf{E}(p)\ > 0,$ $\{z_k\} \subset \text{eig}(\Phi(p))$



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

- L'espace propre principal est engendré par des exponentielles ssi il satisfait la propriété d'**invariance rotationnelle**

- Idée : tester l'invariance des espaces de toutes dimensions

- Soient $\mathbf{W}(p)$ et $\Phi(p)$ obtenues à l'ordre p ; on pose alors

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Phi(p)$$

- Hypothèse : signal non bruité

$p \leq r$	$p = r$	$p > r$
$\forall \hat{z} \in \text{eig}(\Phi(p)), \exists z_k :$ $ z_k - \hat{z} \leq \kappa_2 \ \mathbf{E}(p)\ _2$	$\ \mathbf{E}(r)\ = 0,$ $\{z_k\} = \text{eig}(\Phi(r))$	$\ \mathbf{E}(p)\ > 0,$ $\{z_k\} \subset \text{eig}(\Phi(p))$

- Critère : chercher le minimum de la fonction $p \mapsto \|\mathbf{E}(p)\|_2$



Sélection de l'ordre de modélisation

- En présence de bruit, le minimum de la fonction $p \mapsto \|\mathbf{E}(p)\|_2$ peut être atteint pour une valeur de p inférieure à r

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• **Sélection de l'ordre**

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

- En présence de bruit, le minimum de la fonction $p \mapsto \|\mathbf{E}(p)\|_2$ peut être atteint pour une valeur de p inférieure à r
- En pratique, on cherche la plus grande valeur p pour laquelle la fonction $J(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}$ dépasse un certain seuil

Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

- En présence de bruit, le minimum de la fonction $p \mapsto \|\mathbf{E}(p)\|_2$ peut être atteint pour une valeur de p inférieure à r
- En pratique, on cherche la plus grande valeur p pour laquelle la fonction $J(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}$ dépasse un certain seuil
- Evaluation des performances du critère ESTER et de plusieurs critères de théorie de l'information
 - ◆ AIC [Akaike, 1973]
 - ◆ MDL [Schwartz, Rissanen, 1978]
 - ◆ EDC [Zhao *et al.*, 1986]



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

- En présence de bruit, le minimum de la fonction $p \mapsto \|\mathbf{E}(p)\|_2$ peut être atteint pour une valeur de p inférieure à r
- En pratique, on cherche la plus grande valeur p pour laquelle la fonction $J(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}$ dépasse un certain seuil
- Evaluation des performances du critère ESTER et de plusieurs critères de théorie de l'information
 - ◆ AIC [Akaike, 1973]
 - ◆ MDL [Schwartz, Rissanen, 1978]
 - ◆ EDC [Zhao *et al.*, 1986]
- Sommes de sinusoides non amorties et d'un bruit coloré



Sélection de l'ordre de modélisation

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

• Blanchiment

• Sélection de l'ordre

• Banc de filtres

• Système complet

• Exemples sonores

Conclusion

- En présence de bruit, le minimum de la fonction $p \mapsto \|\mathbf{E}(p)\|_2$ peut être atteint pour une valeur de p inférieure à r
- En pratique, on cherche la plus grande valeur p pour laquelle la fonction $J(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}$ dépasse un certain seuil
- Evaluation des performances du critère ESTER et de plusieurs critères de théorie de l'information
 - ◆ AIC [Akaike, 1973]
 - ◆ MDL [Schwartz, Rissanen, 1978]
 - ◆ EDC [Zhao *et al.*, 1986]
- Sommes de sinusoides non amorties et d'un bruit coloré
- Calcul du taux de succès moyenné sur 10000 réalisations



Performances

- Comparaison des performances pour divers N (RSB = 20dB) :

N	125	250	500
AIC	8 %	2 %	0 %
MDL	48 %	61 %	70 %
EDC	38 %	58 %	77 %
ESTER	48 %	63 %	76 %

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

Performances

- Comparaison des performances pour divers N (RSB = 20dB) :

N	125	250	500
AIC	8 %	2 %	0 %
MDL	48 %	61 %	70 %
EDC	38 %	58 %	77 %
ESTER	48 %	63 %	76 %

- Comparaison des performances pour divers RSB ($N = 250$) :

RSB	10 dB	20 dB	30 dB
AIC	3 %	2 %	2 %
MDL	45 %	61 %	65 %
EDC	18 %	58 %	77 %
ESTER	36 %	63 %	76 %

Introduction

Modèle et méthodes

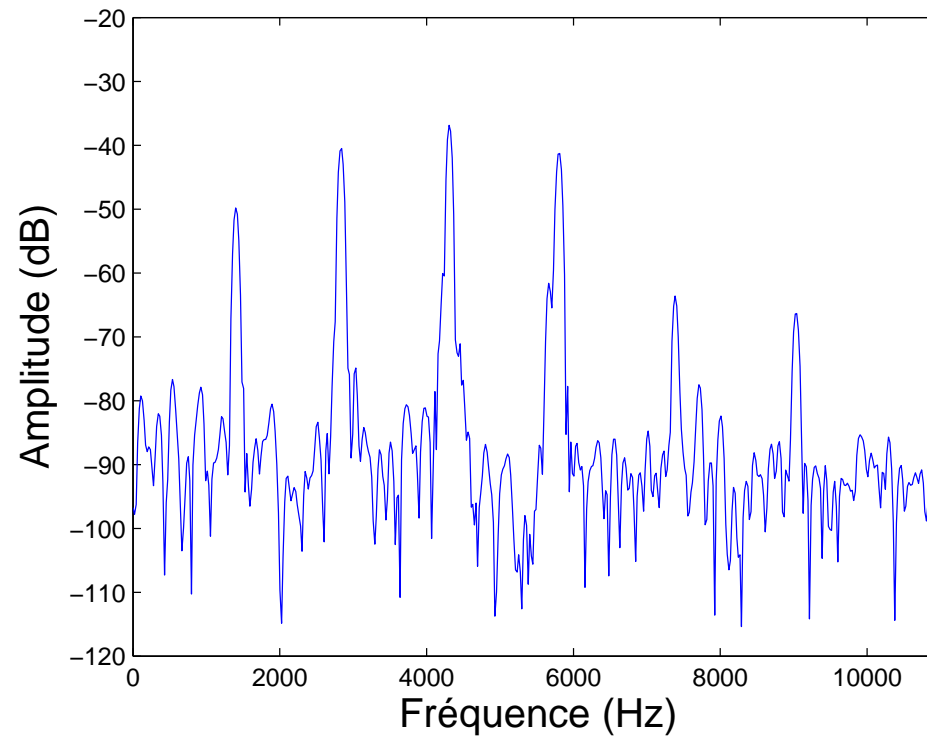
Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- **Sélection de l'ordre**
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

Signal analysé : note de piano (Fa) échantillonnée à 22050 Hz



Périodogramme du signal blanchi de longueur 23 ms

Performances

Introduction

Modèle et méthodes

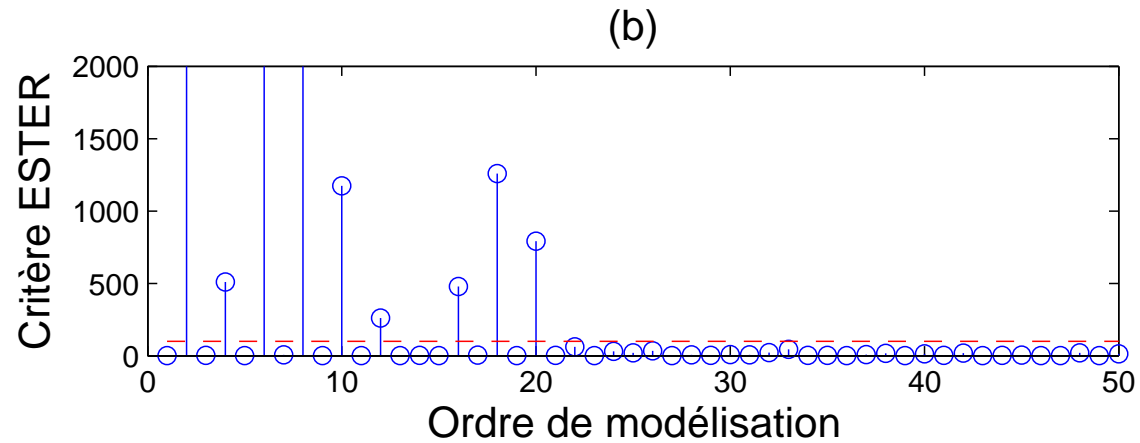
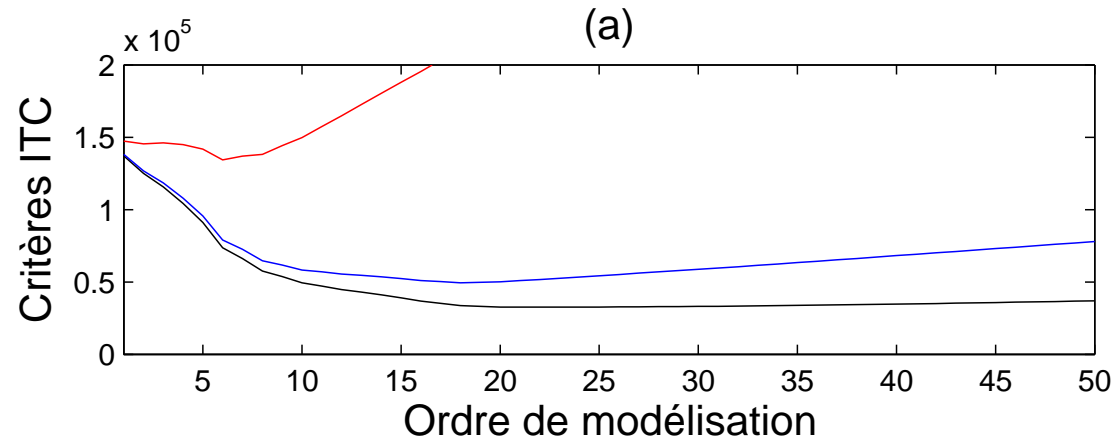
Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre

- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Estimation de l'ordre du modèle : (a) AIC, MDL, EDC (b) ESTER

Découpage en sous-bandes

- Nombres d'harmoniques souvent trop élevé dans le cas de sons graves ou polyphoniques

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- **Banc de filtres**
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Découpage en sous-bandes

- Nombres d'harmoniques souvent trop élevé dans le cas de sons graves ou polyphoniques
- Problèmes de complexité et de stabilité

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- **Banc de filtres**
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Découpage en sous-bandes

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- **Banc de filtres**
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

- Nombres d'harmoniques souvent trop élevé dans le cas de sons graves ou polyphoniques
- Problèmes de complexité et de stabilité
- Solution : utilisation d'un **banc de filtres avec décimation**

Découpage en sous-bandes

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- **Banc de filtres**
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

- Nombres d'harmoniques souvent trop élevé dans le cas de sons graves ou polyphoniques
- Problèmes de complexité et de stabilité
- Solution : utilisation d'un **banc de filtres avec décimation**
- Autres avantages liés à la décimation :
 - ◆ Blanchiment approximatif du bruit dans les sous-bandes
 - ◆ Amélioration de la résolution spectrale
 - ◆ Réduction de la charge de calculs



Découpage en sous-bandes

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

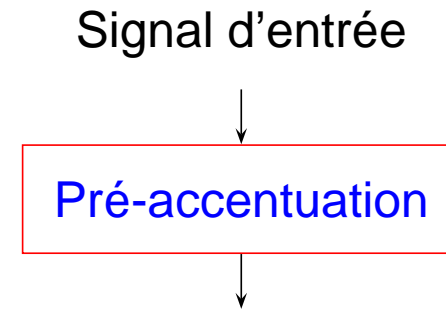
- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- **Banc de filtres**
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion

- Nombres d'harmoniques souvent trop élevé dans le cas de sons graves ou polyphoniques
- Problèmes de complexité et de stabilité
- Solution : utilisation d'un **banc de filtres avec décimation**
- Autres avantages liés à la décimation :
 - ◆ Blanchiment approximatif du bruit dans les sous-bandes
 - ◆ Amélioration de la résolution spectrale
 - ◆ Réduction de la charge de calculs
- Inconvénients :
 - ◆ Latence due au filtrage
 - ◆ Recouvrement spectral entre sous-bandes voisines



Schéma du système d'analyse



Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

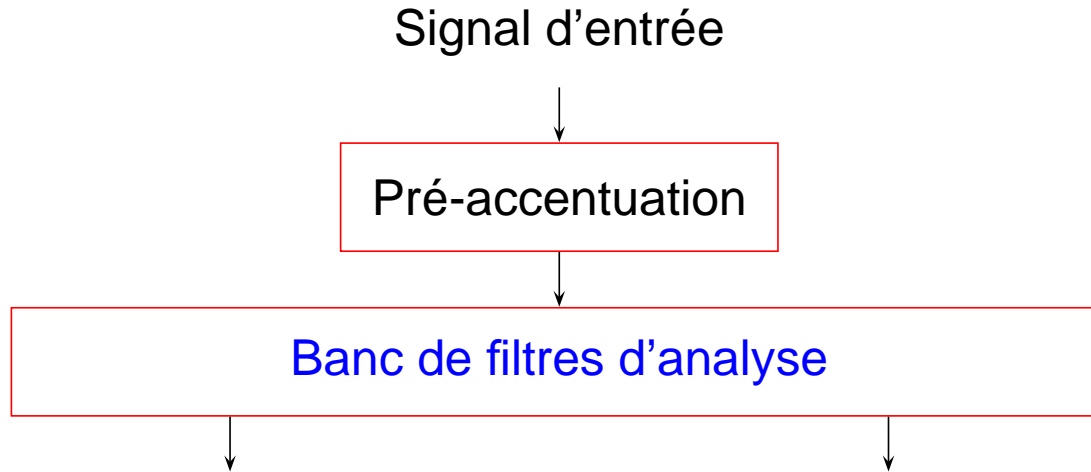
Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- **Système complet**
- Exemples sonores

Conclusion



Schéma du système d'analyse



Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- **Système complet**
- Exemples sonores

Conclusion

Schéma du système d'analyse

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - **Système complet**
 - Exemples sonores
- Conclusion

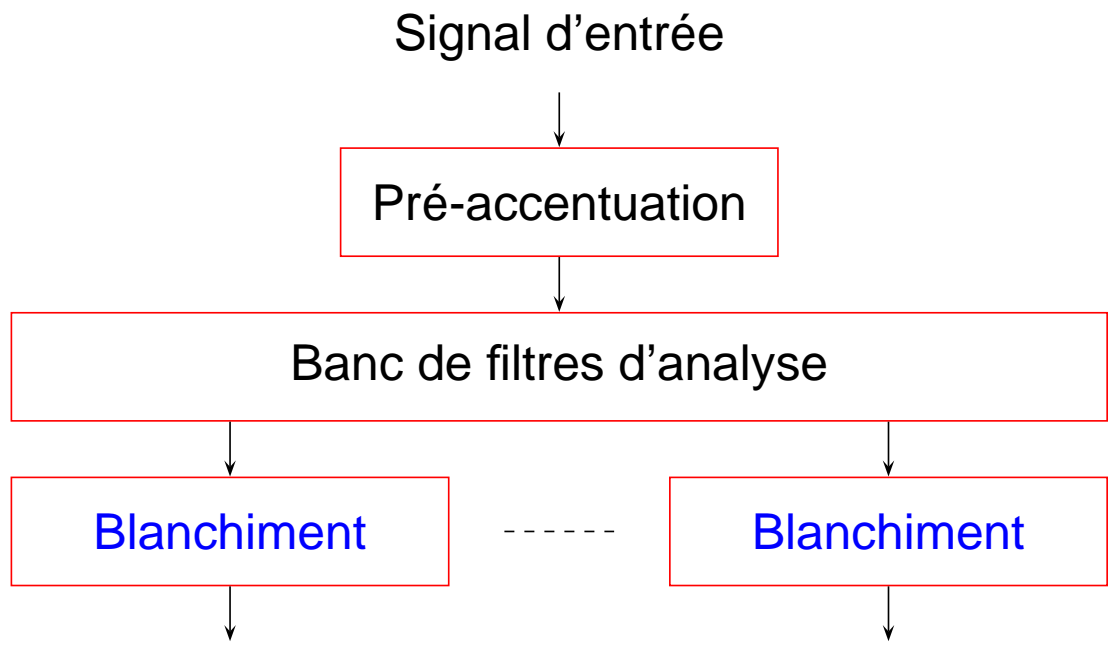


Schéma du système d'analyse

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - **Système complet**
 - Exemples sonores
- Conclusion

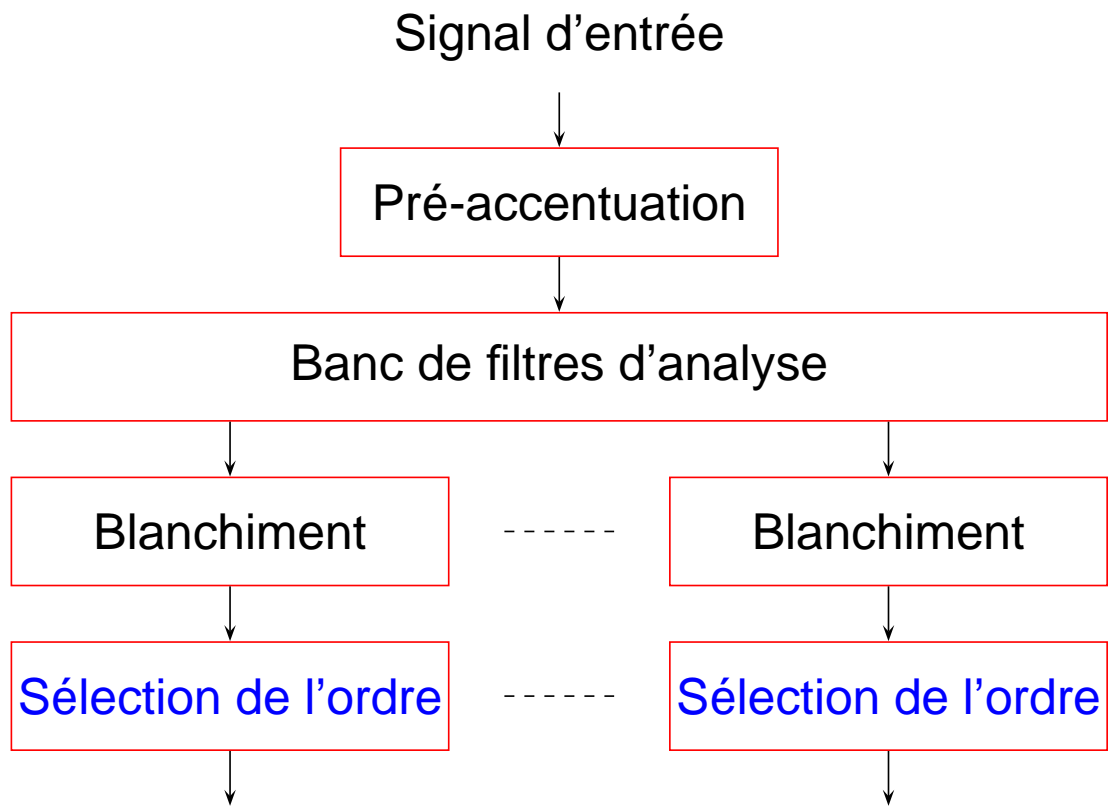
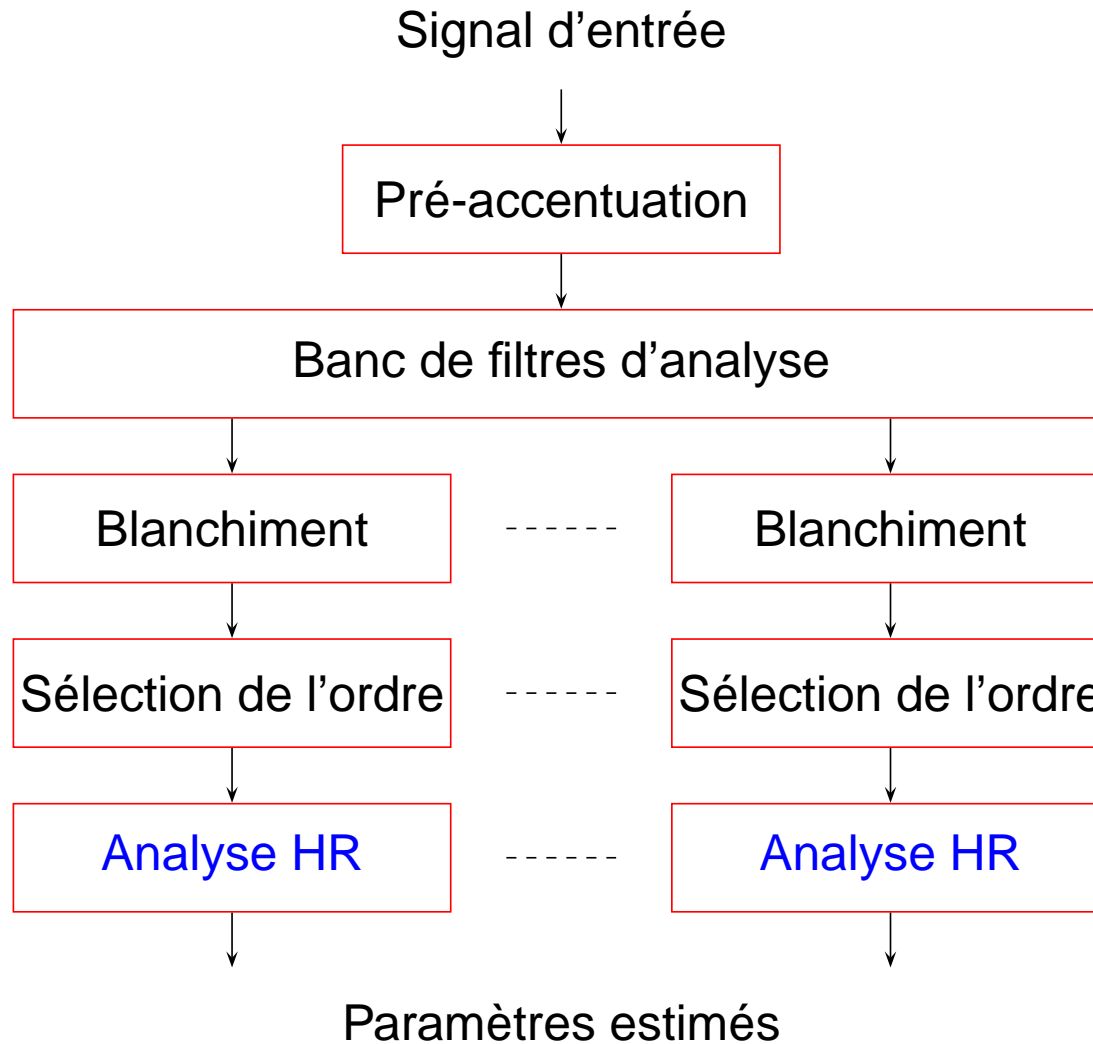
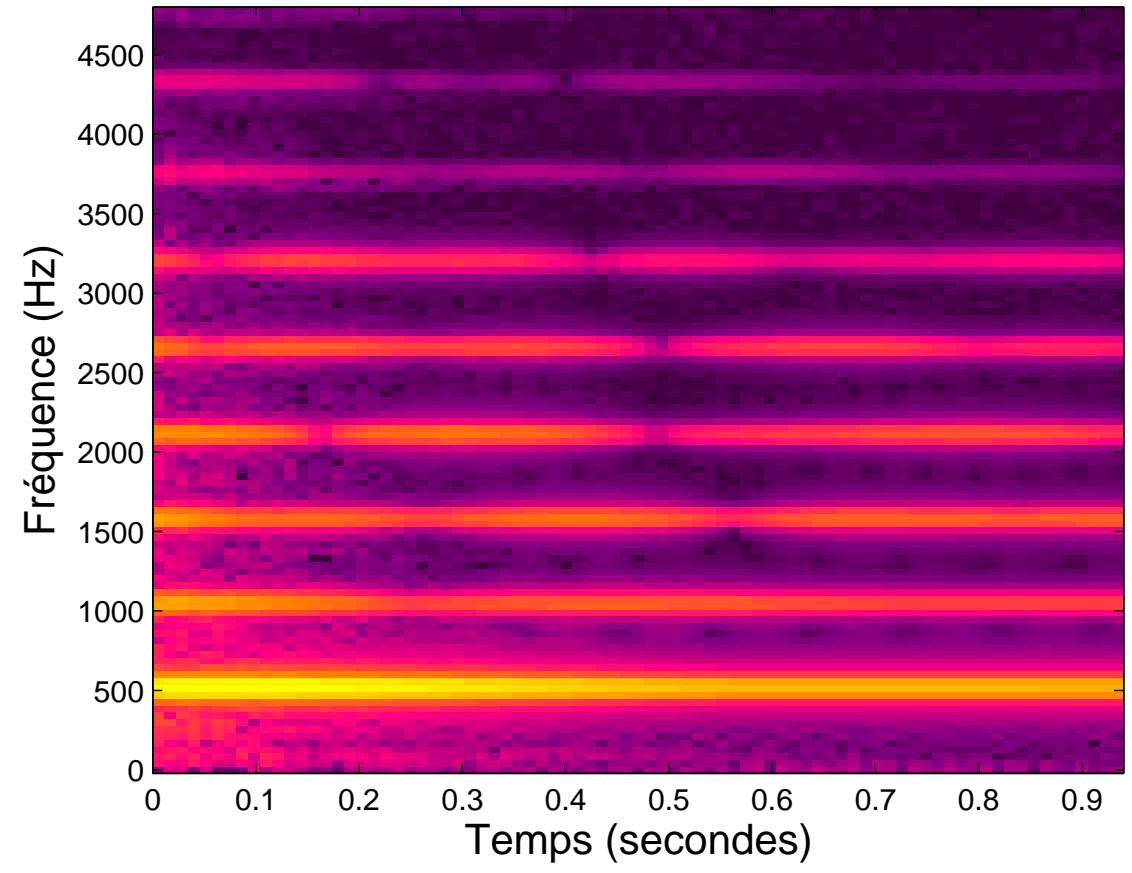



Schéma du système d'analyse



Séparation sinusoïdes et bruit

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - Système complet
 - Exemples sonores
- Conclusion

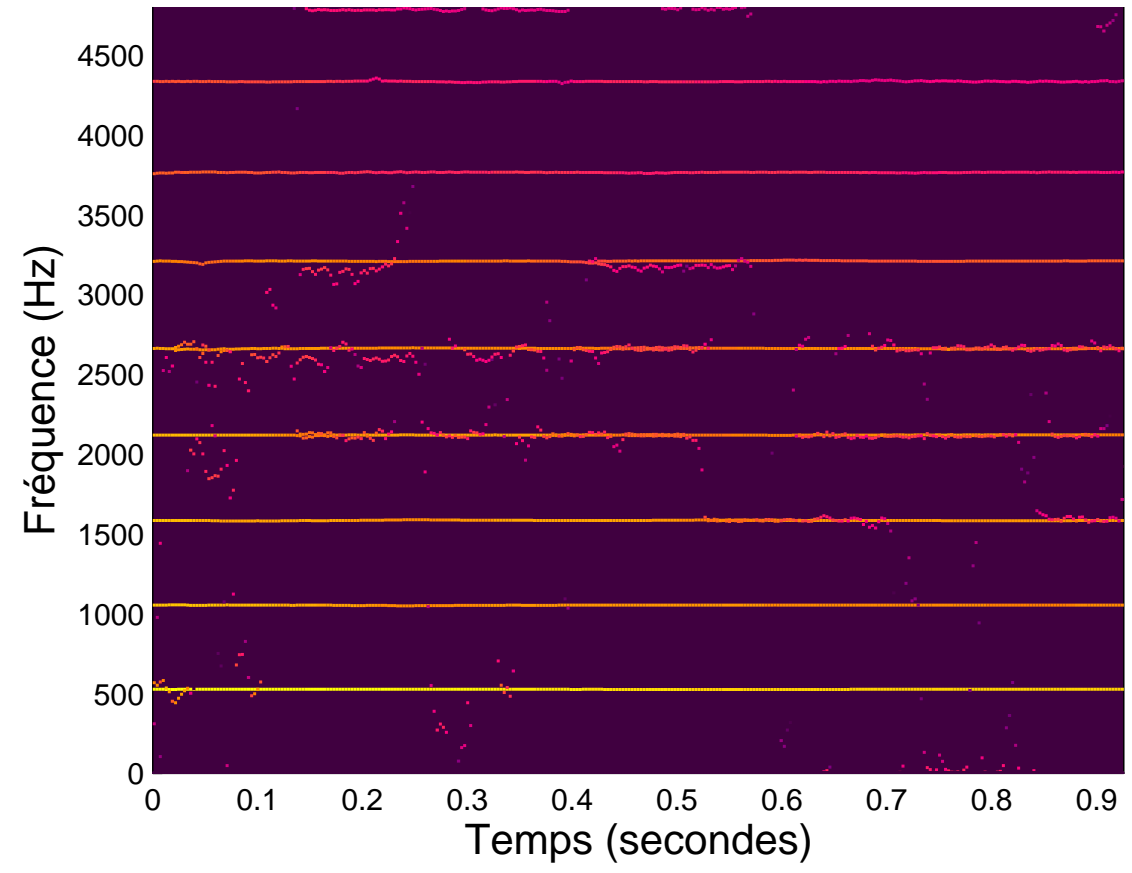


Piano : Spectrogramme ($N \sim 23ms$, Hanning) 



Séparation sinusoïdes et bruit

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - Système complet
 - Exemples sonores
- Conclusion

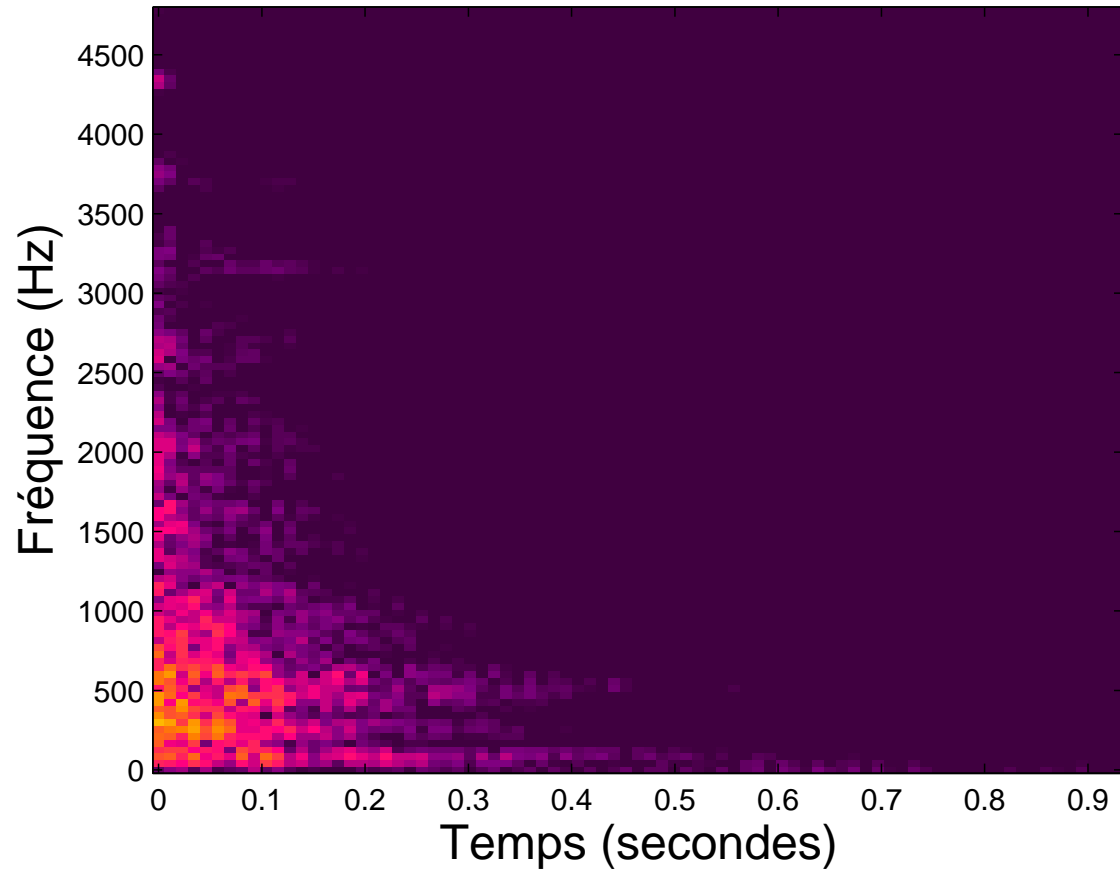


Piano : HR-ogram ($N \sim 23ms$) 



Séparation sinusoïdes et bruit

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - Système complet
 - Exemples sonores
- Conclusion



Piano : Spectrogramme ($N \sim 23ms$)  



Suivi de fréquences modulées

Introduction

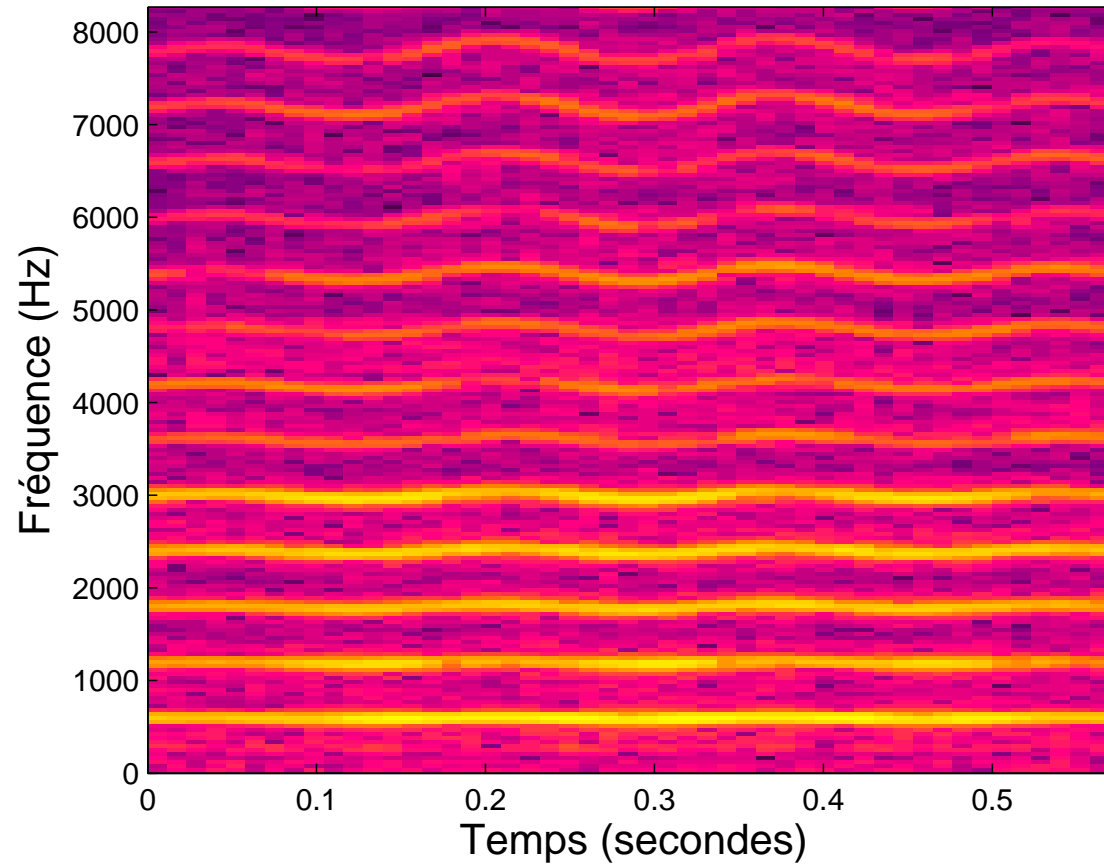
Modèle et méthodes


Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

Conclusion



Violon : Spectrogramme ($N \sim 23ms$, Hanning) 

Suivi de fréquences modulées

Introduction

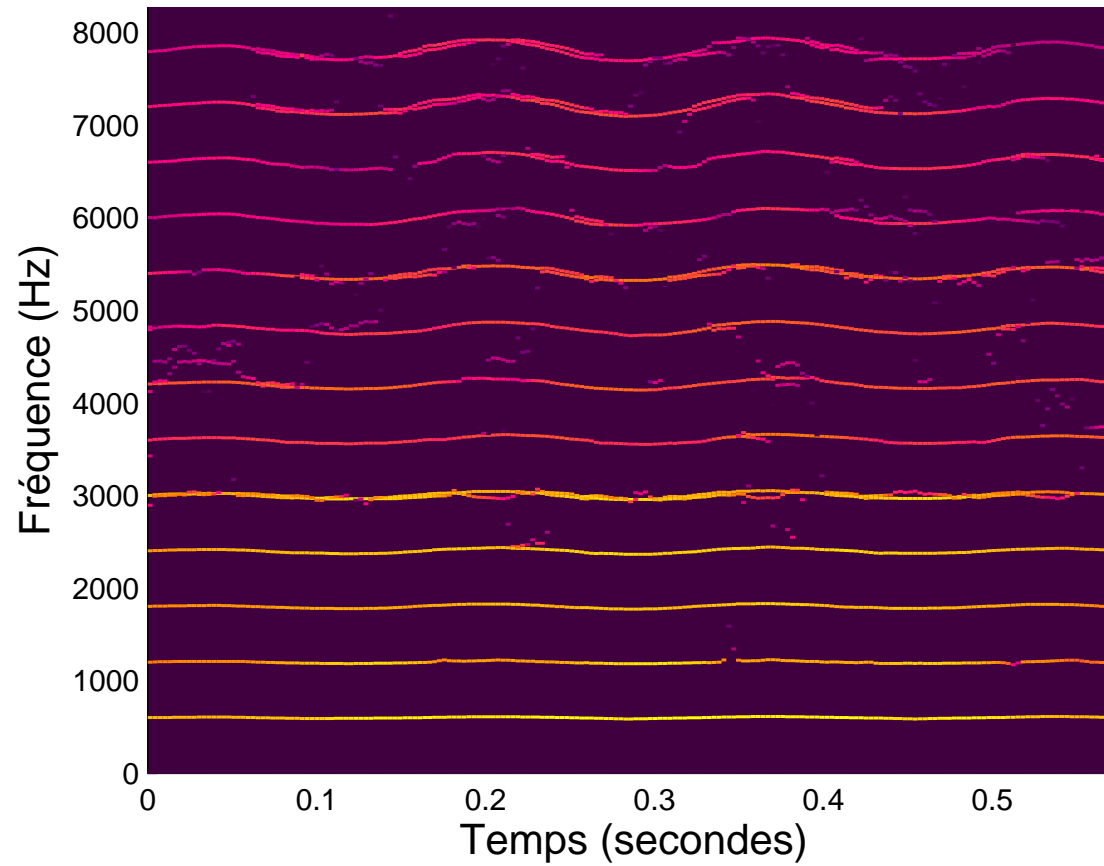
Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

- Blanchiment
- Sélection de l'ordre
- Banc de filtres
- Système complet
- Exemples sonores

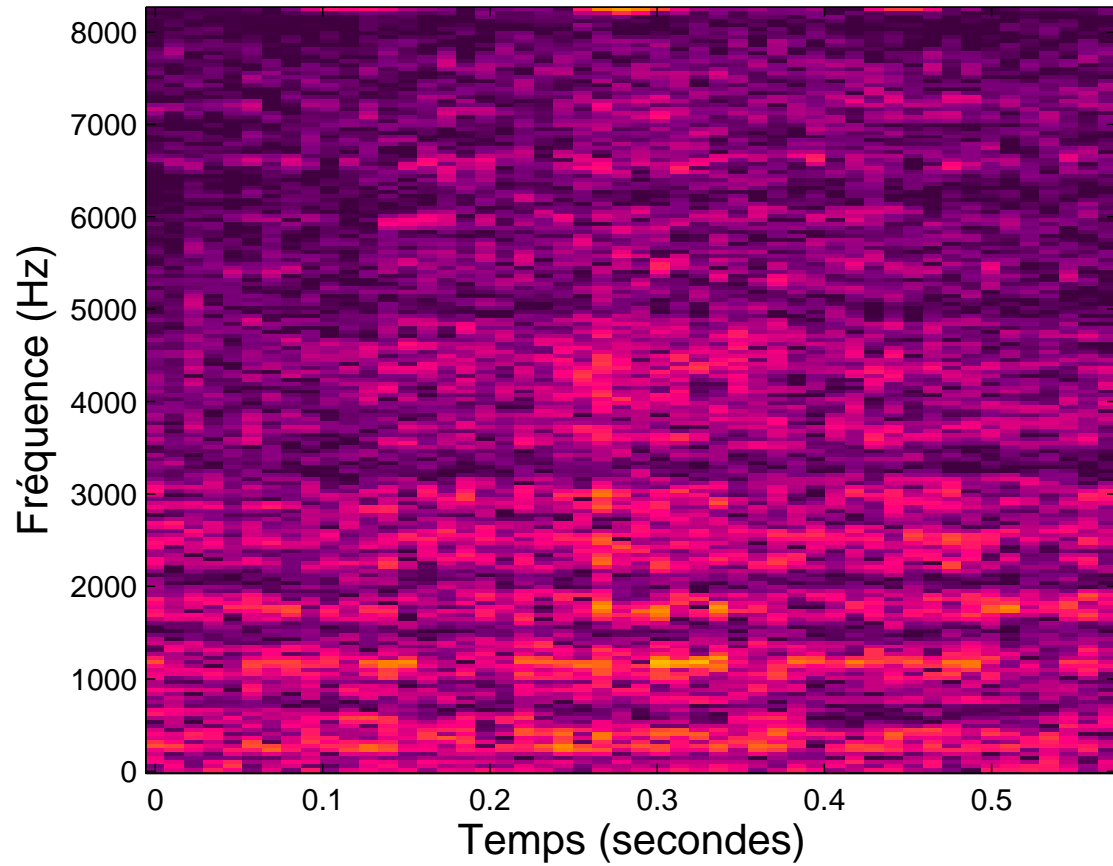
Conclusion



Violon : HR-ogram ($N \sim 23ms$) 

Suivi de fréquences modulées

- Introduction
- Modèle et méthodes
- Méthodes de suivi
- Signaux de musique
 - Blanchiment
 - Sélection de l'ordre
 - Banc de filtres
 - Système complet
 - Exemples sonores
- Conclusion



Violon : Spectrogramme ($N \sim 23ms$)  



Conclusion

- Algorithmes rapides de poursuite des paramètres
 - ◆ Réduction de la complexité de $O(N^3)$ à $O(Nr)$
 - ◆ Performances comparables à un calcul exact

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

Conclusion

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithmes rapides de poursuite des paramètres
 - ◆ Réduction de la complexité de $O(N^3)$ à $O(Nr)$
 - ◆ Performances comparables à un calcul exact
- Prétraitements
 - ◆ Décomposition du signal en sous-bandes
 - ◆ Blanchiment du bruit additif
 - ◆ Sélection de l'ordre de modélisation

Conclusion

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithmes rapides de poursuite des paramètres
 - ◆ Réduction de la complexité de $O(N^3)$ à $O(Nr)$
 - ◆ Performances comparables à un calcul exact
- Prétraitements
 - ◆ Décomposition du signal en sous-bandes
 - ◆ Blanchiment du bruit additif
 - ◆ Sélection de l'ordre de modélisation
- Applications
 - ◆ Codage, séparation des sinusoïdes et du bruit
 - ◆ Estimation de hauteurs multiples, séparation de sources

Conclusion

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion

- Algorithmes rapides de poursuite des paramètres
 - ◆ Réduction de la complexité de $O(N^3)$ à $O(Nr)$
 - ◆ Performances comparables à un calcul exact
- Prétraitements
 - ◆ Décomposition du signal en sous-bandes
 - ◆ Blanchiment du bruit additif
 - ◆ Sélection de l'ordre de modélisation
- Applications
 - ◆ Codage, séparation des sinusoïdes et du bruit
 - ◆ Estimation de hauteurs multiples, séparation de sources
- Perspectives
 - ◆ Etude statistique des performances de FAPI, YAST, ESTER
 - ◆ Reconstruction des trajectoires fréquentielles
 - ◆ Transformation de l'échelle fréquentielle ou temporelle



Bibliographie

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

























Signaux de musique

Conclusion

- Approximated power iterations for fast subspace tracking. Dans *ISSPA'03*, volume 2, pages 583–586, juillet 2003. IEEE.
- Yet Another Subspace Tracker. Dans *ICASSP'05*, volume 4, pages 329–332, mars 2005. IEEE.
- Adaptive ESPRIT algorithm based on the PAST subspace tracker. Dans *ICASSP'03*, volume 6, pages 229–232. IEEE.
- Selecting the modeling order for the ESPRIT high resolution method : an alternative approach. Dans *ICASSP'04*. IEEE.
- Paru et à paraître dans *IEEE Trans. Signal Processing* :
 - ◆ Sliding window adaptive SVD algorithms. Janvier 2004.
 - ◆ Fast approximated power iteration subspace tracking. 2005.
 - ◆ A new perturbation analysis for signal enumeration
 - ◆ High resolution spectral analysis of mixtures of complex exponentials modulated by polynomials.

Exemples sonores

Séparation des parties sinusoïdale et bruitée (méthode d'addition-recouvrement)

Instrument	original	sinusoïdes	bruit
Piano			 
Guitare			 
Violon			 
Flute			 
Saxophone			 
Cloche			 

Introduction

Modèle et méthodes

Méthodes de suivi

Signaux de musique

Conclusion