



HAL
open science

Hamiltoniens quantiques et symétries

Roch Cassanas

► **To cite this version:**

Roch Cassanas. Hamiltoniens quantiques et symétries. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2005. Français. NNT: . tel-00009289

HAL Id: tel-00009289

<https://theses.hal.science/tel-00009289>

Submitted on 20 May 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE · SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2005

N° B.U. :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

HAMILTONIENS QUANTIQUES ET SYMÉTRIES

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques et applications

Présentée et soutenue publiquement par

Roch CASSANAS

le 13 Mai 2005, devant le jury ci-dessous

<i>Président</i>	: Bernard HELFFER	Professeur (Université Paris-Sud)
<i>Rapporteurs</i>	: Thierry PAUL	D. R. CNRS (ENS Paris)
	San VŨ NGOC	C. R. CNRS (Institut Fourier)
<i>Examineurs</i>	: Gilles CARRON	Professeur (Université de Nantes)
	Monique COMBESCURE	D. R. CNRS (IPNL Lyon)
	Didier ROBERT	Professeur (Université de Nantes)
<i>Invités</i>	: François LAUDENBACH	Professeur (Université de Nantes)
	Georgi POPOV	Professeur (Université de Nantes)

Directeur de Thèse : **Didier ROBERT** (Université de Nantes)

Remerciements

Du fond du cœur, je voudrais remercier Didier Robert pour son constant intérêt à mon travail, l'ensemble des connaissances qu'il m'a transmises, sa gentillesse et sa simplicité, ainsi que pour m'avoir offert l'opportunité de travailler sur un sujet passionnant aux multiples facettes mathématiques, qui m'a permis d'ajouter à l'analyse spectrale un peu de théorie des groupes et de dynamique classique.

San Vũ Ngọc et Thierry Paul ont eu la patience de rapporter cette thèse. J'en suis très honoré, et je les remercie pour leurs conseils et remarques diverses, ainsi que pour leur participation au jury.

Je dois aussi beaucoup de choses à Bernard Helffer, qui, le premier, m'a orienté vers Nantes, et a maintes fois soutenu son ancien élève dans de nombreuses démarches de façon bienveillante. C'est pour moi un grand plaisir de le voir présider ce jury.

N'espérez pas vous endormir dans le bureau de Gilles Carron ! Son énergie communicative et sa vivacité d'esprit vous réveillent aussitôt. Merci, Gilles pour ces stimulantes discussions mathématiques qui m'ont plusieurs fois sorti de l'embarras, et pour ta présence dans le jury.

Pour leur présence dans ce jury, leur gentillesse, et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, je remercie sincèrement Monique Combescure et Georgi Popov.

Dès mon arrivée à Nantes, j'ai été frappé par l'investissement de François Laudenbach auprès des thésards et A.T.E.R. du laboratoire, dans sa participation au séminaire des apprentis, mais aussi par ses petites questions de couloir faussement naïves, invitations subtiles à des réflexions bien plus profondes. Merci aussi, François, de m'avoir si souvent répondu et de me faire l'honneur d'être dans ce jury.

Cette thèse n'aurait certainement pas abouti sans les conseils judicieux et les discussions fructueuses que j'ai eues avec de nombreux membres du laboratoire de Nantes, en particulier avec François Nicoleau, tant au point de vue mathématique que sportif ou amical ! Il en va de même pour l'équipe dynamique des thésards et anciens thésards Nantais, pour certains maintenant exilés dans de lointaines contrées, avec qui j'ai eu le plaisir de partager ces quatre années de recherche, d'enseignement, et de sincère amitié qui m'ont beaucoup appris.

Pour leur bonne humeur et les services rendus avec efficacité, je remercie aussi Saïd El Ma-

mouni, Claude Jouault, Annick Egurbide, Brigitte Joubert et Martine Coignac, Colette Boulard, et bien sûr Danielle.

C'est avec une certaine émotion que je dédie cette thèse à la personne qui, avec son collègue Michel Alessandri, m'a donné (ainsi qu'à beaucoup d'autres), le goût et le plaisir des mathématiques, grâce à ses cours passionnants et l'étendue pharaonique de ses connaissances. C'est aussi lui qui, par sa pédagogie hors du commun et son énergie débordante, m'a transmis l'envie d'enseigner les mathématiques à mon modeste niveau. J'espère que le travail qui suit et mes cours à venir ne trahiront pas de trop l'esprit et les conseils bienveillants du 'Papex', mathématicien pédagogue (et non pas l'inverse), professeur de CPGES au lycée Joffre de Montpellier.

Last but not least, pour leurs encouragements et leur soutien sans faille, je remercie mes supporters inconditionnels : mes parents Geneviève et Henri et bien sûr ma Céline.

À la mémoire de Jean-Marie Exbrayat.

Roch Cassanas

HAMILTONIENS QUANTIQUES ET SYMÉTRIES

Roch Cassanas

Laboratoire de Mathématiques Jean LERAY (UMR CNRS 6629),
Université de Nantes, Faculté des Sciences et Techniques,
2, Rue de la Houssinière, BP 92208,
44322 Nantes Cedex 3, France.

Mots clefs – Symétrie, réduction quantique, analyse semi-classique, formule de Gutzwiller, états cohérents.

Résumé

On étudie le comportement semi-classique d'hamiltoniens quantiques dont le symbole de Weyl est invariant par un groupe de symétries. La réduction quantique consiste à restreindre le hamiltonien aux sous-espaces de symétrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ donnés par la décomposition de Peter-Weyl. Les opérateurs restreints sont appelés *hamiltoniens quantiques réduits*.

Pour un groupe fini, on donne une formule de Gutzwiller pour le hamiltonien réduit qui fait intervenir la symétrie d'orbites périodiques classiques du niveau d'énergie étudié. On l'interprète dans l'espace de phase réduit lorsque le groupe agit librement.

Pour un groupe de Lie compact, on donne une asymptotique de Weyl de la fonction de comptage des valeurs propres du hamiltonien réduit. On interprète géométriquement le premier terme. On obtient ici aussi une formule de type Gutzwiller impliquant des orbites périodiques de l'espace de phase réduit qui correspondent à des orbites quasi-périodiques de \mathbb{R}^{2n} .

Abstract

We study the semi-classical behavior of a quantum Hamiltonian whose Weyl symbol has some symmetries coming from a compact group G . The quantum reduction is done by restricting the operator to subspaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$ called symmetry subspaces, coming from the Peter-Weyl decomposition. The restrictions are called the *reduced quantum Hamiltonians*.

For a finite group, we give a Gutzwiller formula for the reduced Hamiltonian, involving the symmetry of periodic orbits of the energy shell. We interpret this formula in the classical reduced space when G acts freely.

For a compact Lie group, we give a Weyl asymptotic formula of the eigenvalue counting function of the reduced Hamiltonian, for which we calculate the first term. Oscillations of the spectral density are also described by a Gutzwiller formula involving periodic orbits of the reduced space, corresponding to quasi-periodic orbits of \mathbb{R}^{2n} .

Table des matières

Introduction	xiii
1 Opérateurs pseudo-différentiels et symétries	1
1.1 Représentations et espaces de symétrie	1
1.1.1 Actions sur \mathbb{R}^d , \mathbb{R}^{2d} et $L^2(\mathbb{R}^d)$	1
1.1.2 Sous-espaces de symétrie	2
1.1.3 Exemples de groupes G , représentations \tilde{M} , et $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ associés	5
1.2 Opérateurs présentant des symétries	8
1.2.1 Restriction, calcul fonctionnel et formules de trace	8
1.2.2 Quelques conséquences directes des symétries sur le spectre de \hat{H}	14
1.2.3 Fonctions de comptage des valeurs propres et de décalage spectral	15
1.2.4 Quelques exemples	19
2 Le cas d'un groupe fini	25
2.1 Asymptotiques faibles	25
2.1.1 Décor et résultat principal	25
2.1.2 Preuve du théorème 2.1.1	30
2.2 Formule de trace de Gutzwiller avec symétries	41
2.2.1 Hypothèses	41
2.2.2 Notations sur le système hamiltonien classique.	43
2.2.3 Exemples	45
2.2.4 Asymptotiques à g fixé	47
2.2.5 Formules de Weyl réduites	53
2.2.6 Formules de Gutzwiller réduites	54
2.3 Preuve des théorèmes de la section précédente	61
2.3.1 Réduction à un problème de phase stationnaire via les états cohérents	61
2.3.2 Analyse du problème de phase stationnaire : notion de flot g -propre	74
2.3.3 Preuve du théorème 2.2.5	78
2.3.4 Preuve du théorème 2.2.7	84

3	Le cas d'un groupe de Lie	91
3.1	Hamiltoniens classiques et symétries	91
3.1.1	Les symétries créent des intégrales premières	92
3.1.2	Espace réduit. Réduction symplectique	92
3.1.3	Exemples	97
3.1.4	Points d'équilibre et points périodiques relatifs	98
3.2	Asymptotique faible réduite	101
3.2.1	Résultat	101
3.2.2	Réduction à un problème de phase stationnaire via les états cohérents . .	103
3.2.3	Analyse de phase	105
3.2.4	Calcul du terme dominant	109
3.3	Formule de Gutzwiller réduite	118
3.3.1	Asymptotiques de Weyl réduites	118
3.3.2	Termes oscillants	121
3.4	Analyse du problème de phase stationnaire : notion de flot G -propre	123
3.4.1	Calcul de l'ensemble critique $\mathcal{C}_{E,T}$	123
3.4.2	Calcul de la hessienne $\text{Hess } \varphi_E(t, z, g)$	125
3.4.3	Calcul du noyau réel de la hessienne et flot G -propre	128
3.5	Cas où \hat{f} est supportée près de zéro	132
3.5.1	Le flot est toujours G -propre près de zéro	132
3.5.2	Calcul du terme de Weyl	133
3.6	Cas où les orbites périodiques de l'espace réduit sont non-dégénérées	141
3.6.1	Flot G -propre sous hypothèse de non-dégénérescence dans l'espace réduit	141
3.6.2	Calcul des premiers termes oscillants	145
4	Appendices	147
4.1	Appendice 1 : Divers théorèmes du cylindre	147
4.1.1	Théorème sans symétrie	147
4.1.2	Preuve du théorème du cylindre avec symétries	149
4.2	Appendice 2 : Vade mecum sur les états cohérents	155
4.2.1	Notations sur les états cohérents	155
4.2.2	Transformée de Wigner	156
4.2.3	Une formule de trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ via les états cohérents	157
4.3	Appendice 3 : Phase stationnaire généralisée avec phase complexe	161
4.4	Appendice 4 : Un théorème d'intégration par tranches via une submersion	167
4.5	Appendice 5 : Notations, formulaire	170

Introduction

La principale motivation de cette thèse peut s'énoncer comme suit :

Soit $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien lisse et G un sous-groupe compact du groupe orthogonal $O(d)$ tel que H soit G -invariant, i.e. :

$$\forall g \in G, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad H(gx, g\xi) = H(x, \xi).$$

En faisant les hypothèses qu'il faut sur H , on peut aborder l'étude spectrale de son quantifié de Weyl, \widehat{H} , opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ défini pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\widehat{H}u(x) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_\xi^d \times \mathbb{R}_y^d} e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} H\left(\frac{x+y}{2}; \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

La question est : "Quelles informations spectrales supplémentaires sur \widehat{H} apporte l'hypothèse de G -invariance de H ?"

Bref aperçu historique Du point de vue mathématique, les premières études quantiques des problèmes avec symétries ont été effectuées sur des variétés riemanniennes compactes. C'est le cas de l'article de **A. Donnelly** ([Don]), en 1978, l'opérateur considéré étant le laplacien. Il donne en particulier des asymptotiques de Weyl sur M/G lorsque le groupe compact G agit sur la variété M (compacte riemannienne) par isométries. Simultanément, **J. Brüning** et **E. Heintze** (cf [B-H]) obtiennent un résultat identique pour les opérateurs elliptiques dans le même cadre pour un groupe de Lie compact. Dans ces deux cas, on obtient le comportement asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres, et les méthodes employées se fondent sur une étude du *noyau de la chaleur*.

Cependant, dès le début des années 70, sans symétries, Hörmander a développé la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (cf [Ho1]-1968 et [Ho2]-1971) qui permet d'utiliser de façon rigoureuse la *méthode BKW* sur une variété compacte (voir aussi les travaux de Duistermaat-Guillemin sur le sujet [D-G]-1975). Ainsi, c'est via cette méthode qu'une étude des symétries quantiques adaptée à \mathbb{R}^d est effectuée au début des années 80 par **B. Helffer** et **D. Robert** (cf [He-Ro 2] (1984) pour les groupes finis, et [He-Ro 3] (1986) pour les groupes de Lie compacts), toujours dans le cadre d'asymptotiques à haute énergie, pour la fonction de comptage d'un

opérateur pseudo-différentiel (transversalement) elliptique sur \mathbb{R}^d . La méthode BKW, plus performante, permet d'obtenir de meilleurs restes, et fait apparaître l'importance du flot classique. Ces travaux sont suivis de la version semi-classique avec **Z. El-Houakmi** (cf [El.H] 1984 et [El.H-He] 1991), où le calcul fonctionnel permet de localiser en énergie, et d'estimer la fonction de comptage des valeurs propres dans une intervalle donné, lorsque le paramètre semi-classique h tend vers zéro.

Peu après, une autre série d'études sur des variétés compactes est accomplie par **V. Guillemin** et **A. Uribe**, reliant des formules asymptotiques de trace aux orbites périodiques sur M/G , mais cette fois-ci en couplant le paramètre semi-classique aux caractères du groupe G (voir [G-U 1] 1987, [G-U 2] 1989, [G-U 3] 1990). Ici, l'importance du flot classique apparaît encore plus clairement dans le résultat, via les orbites périodiques.

Enfin, **D. Borthwick**, **T. Paul** et **A. Uribe** ([B-P-U] 1998), puis **L. Charles** ([Ch1] (2000) et [Ch2] (2004)) ont adopté une autre vision des choses en quantifiant directement les hamiltoniens sur les espaces réduits, l'espace des phases n'étant plus forcément un cotangent, mais plutôt une variété Kählerienne. Grâce à la théorie des *opérateurs de Toeplitz*, ils trouvent ainsi des formules de Gutzwiller dans M/G lorsque G est compact, Lie, semi-simple. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre des études de quantification géométrique et réduction symplectique, initiées par B. Kostant et J.M. Souriau au début des années 70, et poursuivies par V. Guillemin, S. Sternberg, E. Meinrenken et bien d'autres.

Dans cette thèse, la méthode employée sera celle des *états cohérents*, que l'on utilisera en représentation de Schrödinger.

Problématique Le point de vue adopté dans cette thèse est résolument celui de B. Helffer et D. Robert : l'étude se fait sur \mathbb{R}^d , les symétries sont données dans l'espace des configurations. Elles correspondent à des sous-groupes compacts du groupe orthogonal de \mathbb{R}^d . Le groupe G agit également sur l'espace des phases \mathbb{R}^{2d} via :

$$M(g)(x, \xi) := (gx, g\xi), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall g \in G.$$

On n'étudie pas vraiment \widehat{H} mais sa restriction aux espaces de symétrie de Peter-Weyl qui sont construits ainsi : l'action de G sur l'espace des configurations \mathbb{R}^d et l'espace des phases \mathbb{R}^{2d} se transmet à l'espace quantique $L^2(\mathbb{R}^d)$ via $\tilde{M}(g) : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$, définie pour $g \in G$ par :

$$\tilde{M}(g)f(x) := f(g^{-1}x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Soit \widehat{G} l'ensemble des caractères des représentations finies complexes irréductibles de G . Si $\chi \in \widehat{G}$, on définit :

$$P_\chi := d_\chi \int_G \overline{\chi(g)} \tilde{M}(g) dg.$$

où $d_\chi = \chi(Id)$, et dg est la mesure de Haar de G (discrète pour les groupes finis). P_χ est un projecteur orthogonal et l'espace de symétrie de Peter-Weyl associé à χ est $L_\chi^2(\mathbb{R}^d) := P_\chi(L^2(\mathbb{R}^d))$. On a alors :

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \overline{\bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} L_\chi^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Par exemple, pour $G = \{\pm Id_{\mathbb{R}^d}\}$, il y a deux caractères χ_+ et χ_- . $L_{\chi_+}^2(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions paires de carré intégrable, et $L_{\chi_-}^2(\mathbb{R}^d)$ celui des fonctions impaires. Pour $G = SO(d)$, on trouve des $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ faisant intervenir des fonctions de type radial. On peut penser $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ comme un espace de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ ayant certaines symétries liées à G et à χ . Le fait que H soit G -invariant se traduit par une relation de commutation entre \widehat{H} et $\widetilde{M}(g)$ pour $g \in G$, et donc entre \widehat{H} et P_χ , si bien que $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ est stable par \widehat{H} ; d'où \widehat{H}_χ la restriction de \widehat{H} à $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$, appelée *hamiltonien (quantique) réduit*. On montre alors que \widehat{H}_χ est un opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$. Notre principal objectif est d'obtenir des formules de trace concernant les \widehat{H}_χ .

Plan de la thèse Le premier chapitre de la thèse est consacré à une présentation rigoureuse de \widehat{H}_χ et doté de plusieurs exemples de symétries pour des groupes finis et des groupes de Lie compacts, ainsi que des hamiltoniens correspondant à ces symétries. On y décrit l'intérêt de l'étude de \widehat{H}_χ qui donne en particulier des informations sur la multiplicité des valeurs propres de \widehat{H} (cf proposition 1.2.4), et sur les symétries que possèdent les fonctions propres associées. Enfin, on examine les relations entre la fonction de comptage des valeurs propres de \widehat{H} dans un intervalle I , et celle de \widehat{H}_χ lorsque le spectre de \widehat{H} est discret dans I . Une étude analogue est faite du point de vue de la diffusion pour la fonction de décalage spectral.

Les deuxième et troisième chapitres s'inscrivent dans le cadre de l'*analyse semi-classique* : on étudie les asymptotiques de diverses formules de trace liées à l'opérateur \widehat{H}_χ lorsque le paramètre h (la "constante" de Planck) tend vers zéro :

1. Les asymptotiques dites "faibles" avec la trace $\text{Tr}(f(\widehat{H}_\chi))$ (où $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$).
2. Celles de type Weyl, ou Gutzwiller pour la trace $\mathcal{G}_\chi(h) := \text{Tr}(\psi(\widehat{H}_\chi)f(\frac{E-\widehat{H}_\chi}{h}))$, appelée **densité spectrale régularisée**, selon le support de $\hat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, où ψ est localisée près de l'énergie $E \in \mathbb{R}$.

Les asymptotiques de type Weyl ont pour corollaire (comme dans le cas sans symétrie) des asymptotiques des fonctions de comptage de valeurs propres de \widehat{H}_χ dans un intervalle. Des efforts sont faits en particulier pour le calcul des premiers termes. C'est l'occasion de prouver une conjecture émise par B. Helffer et D. Robert (cf [He-Ro 3]) dans le cas d'un groupe de Lie. Le chapitre 2 traite des groupes finis, et le chapitre 3 des groupes de Lie compacts. On trouvera

en appendices un vade mecum sur les états cohérents tels qu'ils sont traités dans les travaux de M. Combes et D. Robert, ainsi qu'une version robuste du théorème de la phase stationnaire généralisée (avec variété de points critiques et phase complexe). Ce texte montre combien l'utilisation d'états cohérents va de pair avec ce dernier théorème sous sa forme la plus générale. Enfin on trouvera aussi en appendices la preuve d'un lemme général d'intégration par tranches via une submersion ainsi que celle du théorème de mécanique classique dit "du cylindre", qui intervient de façon récurrente dans ce texte lorsque l'on parle d'orbites périodiques non-dégénérées dans les formules de type Gutzwiller.

Résultats principaux Une idée récurrente est présente dans les divers résultats obtenus : pour l'étude semi-classique de \widehat{H} sans symétrie, le *principe de correspondance* dit que lorsque l'on fait tendre le paramètre h vers zéro, on doit retrouver dans les coefficients de l'asymptotique des formules de traces, des quantités provenant de la dynamique classique associée au hamiltonien H sur \mathbb{R}^{2d} :

$$\dot{z}(t) = J\nabla H(z(t)), \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

On dira grossièrement que le système dynamique de H sur \mathbb{R}^{2d} est la limite semi-classique de celui donné par l'équation de Schrödinger de \widehat{H} sur $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$ih \partial_t \Psi_t = \widehat{H} \Psi_t,$$

lorsque h tend vers zéro. Les théorèmes suivants montrent qu'en ce sens, la limite semi-classique de \widehat{H}_χ sur $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ est un système dynamique sur un certain espace réduit Ω_{red} défini comme suit : $\Omega_{red} = \Sigma_E/G$ pour les groupes finis (où $\Sigma_E := \{H = E\}$ lorsque l'on étudie le spectre au voisinage d'une énergie E), et $\Omega_{red} = \Omega_0/G$ pour un groupe de Lie compact, où Ω_0 est le niveau zéro de l'application moment de G . Si G vérifie certaines hypothèses propices à la réduction hamiltonienne (voir plus loin), le système dynamique sur Ω_{red} est alors celui du *hamiltonien réduit (classique)* \widetilde{H} défini par :

$$\widetilde{H}(\pi(z)) = H(z), \text{ si } z \in \Omega_0 \text{ ou } \Sigma_E.$$

où $\pi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{red}$ est la projection canonique sur l'ensemble des orbites de G . Cette idée, déjà présente chez A. Donnelly et en conjecture chez B. Helffer et D. Robert, se trouve ici confirmée par des formules typiquement semi-classiques du même genre que la formule de Gutzwiller. En ce sens, on peut parler de "**réduction quantique**".

Pour les groupes finis, le but de l'asymptotique faible étant le calcul des coefficients de l'asymptotique de la densité spectrale, on précise le calcul de ceux de $\text{Tr}(Op_h^w(a)\widetilde{M}(g))$, à g fixé dans $O(d)$, le symbole a étant sans symétrie particulière (voir théorème 2.1.1) et vérifiant

des hypothèses de décroissance polynômiale. On applique ceci à $f(\widehat{H})\tilde{M}(g)$ lorsque f est lisse à support compact. Puis, pour la densité spectrale régularisée, on introduit l'ensemble suivant pour g fixé (Φ_t est le flot du système hamiltonien) :

$$\mathcal{L}_{E,g} := \{t \in \mathbb{R} : \exists z \in \Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

On obtient alors un résultat qui affine légèrement celui de la thèse de Z. El Houakmi :

Théorème 1 *On a $\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} I_{g,E}(h)$. où $I_{g,E}(h) := \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}) f \left(\frac{E-\widehat{H}}{h} \right) \tilde{M}(g) \right)$.*

Pour g dans G on note :

$$\nu_g := \dim \ker(g - Id_{\mathbb{R}^d}), \quad F_g := \ker(M(g) - Id_{\mathbb{R}^{2d}}) \quad \text{et} \quad \tilde{F}_g := \ker(g - Id_{\mathbb{R}^d}).$$

Alors, sous les hypothèses précédentes, on a : si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \emptyset$, alors $I_{g,E}(h) = O(h^{+\infty})$.

Si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$ alors on a l'asymptotique suivante modulo $O(h^{+\infty})$:

$$I_{g,\lambda}(h) \asymp h^{1-\nu_g} \sum_{k \geq 0} c_k(\hat{f}, g) h^k, \quad \text{as } h \rightarrow 0^+. \quad (1)$$

uniformément en λ dans un petit voisinage de E , où les $c_k(\hat{f}, g)$ sont des distributions en \hat{f} avec support dans $\{0\}$, et, si $d(\Sigma_\lambda \cap F_g)$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\Sigma_\lambda \cap F_g$, on a :

$$c_0(\hat{f}, g) = \psi(\lambda) \hat{f}(0) \frac{(2\pi)^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp})} \int_{\Sigma_\lambda \cap F_g} \frac{d(\Sigma_\lambda \cap F_g)(z)}{|\nabla H(z)|}. \quad (2)$$

Signalons que l'on peut *calculer* avec notre méthode tous les termes de cette asymptotique en utilisant l'asymptotique faible (théorème 2.1.4). Par ailleurs la condition $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$ est automatiquement satisfaite lorsque \hat{f} est supportée suffisamment près de zéro. On déduit de ce théorème une asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres de \widehat{H}_χ , $N_{I,\chi}(h)$, dans un intervalle compact I dont les extrémités sont non critiques pour H et tel que $H^{-1}(I)$ soit compact (voir théorème 2.2.11) :

$$N_{I,\chi}(h) = \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi h)^{-d} \text{Vol}[H^{-1}(I)] + O(h^{1-d}), \quad \text{quand } h \rightarrow 0^+.$$

Ce résultat était déjà présent dans la thèse de Z. El Houakmi, obtenu via une méthode BKW.

L'étude de la partie oscillante de la densité spectrale régularisée est l'asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ lorsque $0 \notin \text{Supp}(\hat{f})$: si $g \in G$ et γ est une orbite périodique de Σ_E globalement stable par $M(g)$, on pose :

$$\mathcal{L}_{g,\gamma} := \{t \in \text{Supp} \hat{f} : \exists z \in \gamma : M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

Si $t_0 \in \mathcal{L}_{g,\gamma}$, $z \in \gamma$, alors P_{γ,g,t_0} désigne l'application de Poincaré de γ entre z et $M(g^{-1})z$ au temps t_0 , restreinte à Σ_E .

Théorème 2 *Sous les hypothèses précédentes, supposons que $0 \notin \text{Supp} \hat{f} \subset]-T, T[$, où $T > 0$. On fait l'hypothèse suivante de non-dégénérescence : si $\gamma \subset \Sigma_E$, est tel que $\exists g \in G$ et $\exists t_0 \in \mathcal{L}_{g,\gamma}$, $t_0 \neq 0$, alors 1 n'est pas une valeur propre de $M(g)dP_{\gamma,g,t_0}$. Alors l'ensemble de tels γ est fini et on a l'asymptotique suivante modulo $O(h^{+\infty})$, lorsque $h \rightarrow 0^+$:*

$$\mathcal{G}_\chi(h) \asymp \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{\substack{\gamma \text{ orbite} \\ \text{périodique de } \Sigma_E}} \sum_{\substack{g \in G \text{ t.q.} \\ M(g)\gamma = \gamma}} \overline{\chi(g)} \sum_{\substack{t_0 \in \mathcal{L}_{g,\gamma} \\ t_0 \neq 0}} e^{\frac{i}{h} S_\gamma(t_0)} \sum_{k \geq 0} d_k^{\gamma,g,t_0}(\hat{f}) h^k.$$

Les $d_k^{\gamma,g,t_0}(\hat{f})$ sont des distributions en \hat{f} à support dans $\{t_0\}$, $S_\gamma(t_0) := \int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds$, $((q_s, p_s) := \Phi_s(z))$, et :

$$d_0^{\gamma,g,t_0}(\hat{f}) = \frac{T_\gamma^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma_\gamma(g,t_0)}}{2\pi |\det(M(g)dP_{\gamma,g,t_0} - Id)|^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(t_0) \psi(E).$$

où T_γ^* est la période primitive de γ et $\sigma_\gamma(g, t_0) \in \mathbb{Z}$ est un indice de Maslov de γ .

Si on omet l'hypothèse de non-dégénérescence, on obtient, sous des conditions assez générales dites de "flot G -propre" une asymptotique de la même quantité, pour laquelle nous donnons une expression analytique des premiers termes, dépendant des composantes connexes des ensembles suivants (pour $g \in G$) (voir théorème 2.2.14) :

$$C_{E,g} := \{(t, z) \in]-T, T[\times \Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\} \quad (3)$$

L'interprétation géométrique de ces termes reste à faire, même dans le cas sans symétrie (voir par exemple [P-U2] ou [Do]).

Corollaire *Sous les hypothèses précédentes, supposons de plus que $g = Id_{\mathbb{R}^d}$ est le seul élément de G à avoir des points fixes sur Σ_E . Alors l'espace réduit Σ_E/G hérite d'une structure de variété lisse telle que la dynamique de H sur Σ_E passe au quotient dans $\Omega_{red} := \Sigma_E/G$. Par ailleurs, si π désigne la projection sur le quotient et $\bar{\gamma}$ est une orbite périodique dans Σ_E/G , si $\pi(\gamma) = \bar{\gamma}$, alors, il existe un seul g_γ dans G tel que, $\forall z \in \gamma$, $M(g_\gamma)\Phi_{T_\gamma^*}(z) = z$. Si $\pi(\gamma_1) = \pi(\gamma_2)$ alors g_{γ_1} and g_{γ_2} sont conjugués dans G , et on note $\chi(g_{\bar{\gamma}})$ la quantité $\chi(g_{\gamma_1}) = \chi(g_{\gamma_2})$. On a alors lorsque $h \rightarrow 0^+$:*

$$\mathcal{G}_\chi(h) = d_\chi \sum_{\substack{\bar{\gamma} \text{ orbite} \\ \text{périodique de } \Sigma_E/G}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \text{ t.q.} \\ nT_{\bar{\gamma}}^* \in \text{Supp} \hat{f}}} \hat{f}(nT_{\bar{\gamma}}^*) \overline{\chi(g_{\bar{\gamma}}^n)} e^{\frac{i}{h} n S_{\bar{\gamma}}} \frac{T_{\bar{\gamma}}^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma_{\bar{\gamma},n}}}{2\pi |\det((dP_{\bar{\gamma}})^n - Id)|^{\frac{1}{2}}} + O(h).$$

où $S_{\bar{\gamma}} := \int_0^{T_{\bar{\gamma}}^*} p_s \dot{q}_s ds$, $P_{\bar{\gamma}}$ est l'application de Poincaré de $\bar{\gamma}$ dans Σ_E/G , et $\sigma_{\bar{\gamma},n}$ est un indice de Maslov de $\bar{\gamma}$.

Notons que ces théorèmes ont fait l'objet d'une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences acceptée le 10/11/2004. Ce résultat corrobore les recherches et donne une justification mathématique des travaux des physiciens **B. Lauritzen**, **J.M. Robbins** et **N.D. Whelan**

(cf [L], [L-W] et [R]) effectués au début des années 1990, ce qui était à l'origine la principale motivation de cette thèse.

Pour les groupes de Lie, on se place dans un cadre un peu moins général que pour les groupes finis, mais pour lequel on dispose de théorèmes de réduction symplectique plus souples au niveau de la mécanique classique : l'action considérée étant linéaire, on envisage l'application moment $\mathbb{F} = (F_{A_1}, \dots, F_{A_p})$, où (A_1, \dots, A_p) est une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G , et pour $A \in \mathcal{G}$, $F_A : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$F_A(z) := \frac{1}{2} \langle JAz, z \rangle .$$

\mathbb{F} est une intégrale première du mouvement, et son niveau zéro $\mathbb{F}^{-1}(\{0\})$, noté Ω_0 , est stable par G . Une généralisation d'un théorème de réduction de Marsden et Weinstein implique que si U est un ouvert de \mathbb{R}^{2d} , G -stable, tel que tous les stabilisateurs de $\Omega_0 \cap U$ sont conjugués dans G , alors $\Omega_0 \cap U$ est une sous-variété de \mathbb{R}^{2d} , et $(\Omega_0 \cap U)/G \subset \Omega_{red}$ hérite d'une structure symplectique qui réalise la réduction au niveau de la mécanique classique. On peut donc envisager le hamiltonien réduit \tilde{H} lisse sur $(\Omega_0 \cap U)/G$, et les trajectoires de \tilde{H} sont les projections dans Ω_{red} des trajectoires de H dans $\Omega_0 \cap U$. Ainsi, sur $\Omega_0 \cap U$, les G -orbites ont toutes même dimension, notée k , et pour des raisons techniques, on supposera que l'on a $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - k$, ce qui est vérifié au moins dans le cas du groupe $G = SO(d)$ dès que U ne rencontre pas zéro. Notons enfin que, $(\Omega_0 \cap U)/G$ étant muni d'une structure symplectique, il hérite d'une forme volume naturelle.

En faisant ces hypothèses de réduction sur un voisinage tubulaire U de $\text{Supp}(a)$, on obtient, lorsque $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, une asymptotique de $\text{Tr}(\widehat{A}_\chi)$ qui est un analogue dans Ω_{red} de la formule exacte de la trace $\text{Tr}(Op_h^w(a))$ dans \mathbb{R}^{2d} (cf théorème 3.2.1). On en déduit immédiatement l'asymptotique de $\text{Tr}(f(\widehat{H}_\chi))$ pour $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (cf théorème 3.2.2). Pour la densité spectrale régularisée $\mathcal{G}_\chi(h)$, on définit pour E dans \mathbb{R} :

$$\widetilde{\Sigma}_E := \{\tilde{H} = E\} \subset \Omega_{red}. \quad (4)$$

On pose :

$$\mathcal{L}_{red}(E) := \{t \in \mathbb{R} : \exists x \in \widetilde{\Sigma}_E : \tilde{\Phi}_t(x) = x.\} \quad (5)$$

i.e. $\mathcal{L}_{red}(E)$ est l'ensemble des périodes des orbites périodiques de $\widetilde{\Sigma}_E \subset \Omega_{red}$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3 *Si $U := H^{-1}(]E - \varepsilon, E + \varepsilon[)$ vérifie les hypothèses de réduction symplectique, si $H^{-1}([E - \varepsilon, E + \varepsilon])$ est compact et sans point critique pour $H|_{\Omega_0 \cap \Sigma_E}$, si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{red}(E) = \emptyset$, alors on a : $\mathcal{G}_\chi(h) = O(h^{+\infty})$ quand $h \rightarrow 0^+$. Si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{red}(E) = \{0\}$, alors on a une asymptotique complète de $\mathcal{G}_\chi(h)$ en puissances de h , dont les coefficients sont des distributions en \hat{f} à*

support dans $\{0\}$, avec en particulier :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = (2\pi h)^{k-d+1} \hat{f}(0) \psi(E) \frac{d_\chi}{2\pi} \int_{\widetilde{\Sigma}_E} dL_{\tilde{H},E} \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right] + O(h^{k-d+2}). \quad (6)$$

où $dL_{\tilde{H},E} = \frac{d\widetilde{\Sigma}_E}{d\tilde{H}}$ est la "mesure de Liouville" associée à \tilde{H} sur Ω_{red} .

Dans ce théorème, $\left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right]$ est un entier : c'est le nombre de fois que la représentation triviale $\mathbb{1}$ est contenue dans ρ_χ restreinte à H_0 (quelconque stabilisateur de $\Omega_0 \cap U$), où ρ_χ est une représentation de caractère χ . Notons que ce type de résultat avait été conjecturé dans [He-Ro 3].

On déduit de ce théorème une asymptotique de la fonction de comptage $N_{I,\chi}(h)$ de \widehat{H}_χ dans un intervalle compact $I = [E_1, E_2]$ lorsque $H^{-1}([E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon])$ est compact (où $\varepsilon > 0$). On suppose satisfaites les hypothèses de réduction symplectique dans $H^{-1}([E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon])$, et si E_1 et E_2 ne sont pas des valeurs critiques de $H|_{\Omega_0 \cap U}$, on a le théorème suivant (cf théorème 3.3.2) :

Théorème 4 *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$N_{I,\chi}(h) = (2\pi h)^{k-d} d_\chi \text{Vol}_{red}(\tilde{H}^{-1}(I)) \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right] + O(h^{k-d+1}).$$

Dans ce théorème, la mesure sur $\widetilde{\Sigma}_E$ est celle issue de la forme symplectique sur $(\Omega_0 \cap U)/G$. C'est un résultat très proche de celui de A. Donnelly ([Don]) pour les variétés riemanniennes.

Sans restriction sur le support de \hat{f} , on obtient une asymptotique théorique sous une certaine condition de **flot G -propre** (voir théorème 3.4.7 et définition 3.4.5) qui fait intervenir les composantes connexes de l'ensemble :

$$\mathcal{C}_{E,T} = \{(t, z, g) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} \times G : z \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E), M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

Enfin, on montre que, si l'on fait l'hypothèse que les orbites périodiques du système dynamique sur l'espace réduit sont non-dégénérées dans $\widetilde{\Sigma}_E$ lorsqu'elles ont une période rencontrant $\text{Supp}(\hat{f})$, alors le flot est G -propre et on donne une asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ lorsque $0 \notin \text{Supp}(\hat{f})$. Cette asymptotique implique une somme sur les orbites périodiques de $\widetilde{\Sigma}_E \subset \Omega_{red}$ (cf théorème 3.3.4). Cependant, le calcul précis des coefficients demandant une certaine dextérité reste ici inachevé, mais il est naturel de faire la conjecture suivante inspirée des résultats précédents et de ceux de [B-P-U], ainsi que du physicien **S.C. Creagh** (voir [Cr]) :

Conjecture *Sous les hypothèses du théorème 3, si l'on suppose de plus que les orbites périodiques du système réduit ayant une période rencontrant $\text{Supp}(\hat{f})$ sont non-dégénérées, alors on a une asymptotique complète de $\mathcal{G}_\chi(h)$ en puissance de h dont les coefficients sont des distributions en \hat{f} à support dans $\mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp}\hat{f}$ (avec des termes oscillants du type $e^{\frac{i\alpha}{h}}$) et dont le premier terme est donné par :*

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \psi(E) d_\chi \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp}\hat{f}} \hat{f}(t_0) \sum_{\tilde{\gamma} \in P_{red}(E, t_0)} e^{\frac{i}{h} S_{\tilde{\gamma}}(t_0)} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\frac{i}{h} S_{\tilde{\gamma}}(t_0)} T_{\tilde{\gamma}}^* e^{i\frac{\pi}{2}\sigma(\tilde{\gamma}, t_0)}}{|\det(dP_{\tilde{\gamma}}(t_0) - I)|^{\frac{1}{2}}} W_{\chi, \tilde{\gamma}, t_0} + O(h).$$

avec des notations analogues à celles de la formule de Gutzwiller sans symétries.

$P_{red}(E, t_0)$ est l'ensemble des orbites périodiques de $\widetilde{\Sigma}_E$ ayant t_0 pour période. $W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0}$ est un terme que nous connaissons mal et qui reste à déterminer. Dans le cas d'un groupe fini, pour $t_0 = nT_{\bar{\gamma}}^*$, il est égal à $\overline{\chi(g_{\bar{\gamma}}^n)}$ (voir le corollaire du théorème 2).

La méthode Au lieu d'utiliser une traditionnelle méthode BKW avec opérateurs intégraux de Fourier, et pour éviter les problèmes de caustiques, on a préféré utiliser les travaux de M. Combescure et D. Robert sur les **états cohérents**. On suit en particulier une démarche analogue à celle de leur article avec J. Ralston ([CRR]). Les gaussiennes étant radiales, les états cohérents ont en effet un comportement agréable vis-à-vis des symétries envisagées dans cette thèse qui proviennent du groupe orthogonal. Si φ_α est l'état cohérent centré en $\alpha \in \mathbb{R}^{2d}$, on a :

$$\tilde{M}(g)\varphi_\alpha = \varphi_{M(g)\alpha}.$$

Comme dans l'article [CRR], on aboutit alors à des problèmes de phase stationnaire avec phase complexe et ensemble critique donné par :

$$\mathcal{C}_{E,T} = \{(t, z, g) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} \times G : z \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E), M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

Le théorème s'applique lorsque l'ensemble critique est une union finie de variétés telle que le hessien transverse de la phase soit non-dégénéré sur l'espace normal à cet ensemble. On parle alors de condition de flot G -propre. Lorsque G est un groupe de Lie, contrairement au cas sans symétrie (cf [CRR]), cet ensemble ne fait pas apparaître des points "z" périodiques pour le système dynamique issu de H . Les orbites de ces points sont en effet quasi-périodiques, c'est à dire "denses dans un tore". Quand le tore n'est pas de dimension 1, on voit bien que ces points ne sont pas périodiques! (voir aussi le chapitre 3.1.4) Cependant, ils correspondent à des points périodiques de Ω_{red} . On dit que ce sont des points périodiques relatifs.

Conclusion On espère avoir convaincu le lecteur que la limite semi-classique du hamiltonien quantique réduit \widehat{H}_χ est le système dynamique réduit de \widetilde{H} sur Ω_{red} , même s'il serait certainement souhaitable de prouver la conjecture annoncée. Par ailleurs, les hypothèses de réduction symplectique sont en défaut lorsque $0 \in \Sigma_E$, et une étude plus poussée mérite d'être faite dans cette direction, comme cela a déjà été entrepris pour le terme de Weyl à la fin de l'article [El.H-He]. On peut aussi essayer d'élargir l'étude au cas de symétries données directement dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2d} . Un travail de quantification méta-plectique est alors nécessaire pour définir un analogue de \tilde{M} comme morphisme de groupe de G dans l'ensemble des opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Enfin, on espère vivement que ce travail ouvrira la voie de l'étude d'une **brisure de symétrie**,

consistant à perturber un système possédant des symétries par une petite perturbation ayant moins de symétries.

Chapitre 1

Opérateurs pseudo-différentiels et symétries

1.1 Représentations et espaces de symétrie

1.1.1 Actions sur \mathbb{R}^d , \mathbb{R}^{2d} et $L^2(\mathbb{R}^d)$

Comme souvent en mathématiques, les symétries sont décrites par des groupes. On utilisera donc ici le langage des représentations linéaires de groupes (voir [Se], [Si], [Pi], [W]). On rappelle qu'une représentation ρ d'un groupe G sur un espace vectoriel E réel ou complexe est la donnée d'un morphisme de groupe de G dans $GL(E)$, l'ensemble des applications linéaires continues inversibles de E dans lui-même. La représentation est dite "complexe" (resp. "réelle") si E est espace vectoriel sur \mathbb{C} (resp \mathbb{R}). Elle est dite "finie" si E est de dimension finie. Si E est muni d'une structure d'espace de Hilbert, elle est dite "unitaire" si elle est à valeurs dans les opérateurs unitaires de E . Enfin, elle est dite "fortement continue" si pour tout x dans E , l'application $g \mapsto \rho(g)(x)$ est continue. Le "degré" d'une représentation est la dimension de l'espace vectoriel sur lequel elle est définie.

Dans toute la suite de la thèse, G désigne un sous-groupe compact de $O(d)$.

Définition 1.1.1 *On associe à G les représentations suivantes :*

► M représentation de G sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ définie par :

$$M(g).(x, \xi) := (g.x, g\xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

► \tilde{M} représentation de G sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ définie par :

$$(\tilde{M}(g).f)(x) := f(g^{-1}.x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Ainsi, se donnant une symétrie sur l'espace des configurations \mathbb{R}^d , on lui associe une symétrie sur l'espace des phases \mathbb{R}^{2d} et une autre sur l'espace quantique $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous verrons au chapitre 1.2 que ces représentations sont naturelles pour une correspondance entre symétries classiques et symétries quantiques. Pour éviter les lourdeurs d'écriture, on notera souvent de la même manière, pour z dans \mathbb{R}^{2d} , $M(g)(z) = "g.z"$ ou gz (on se référera au contexte).

Proposition 1.1.2 \tilde{M} est une représentation unitaire fortement continue de G sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Preuve de la proposition : soit $g \in G$, $\tilde{M}(g)$ est clairement un isomorphisme sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $[\tilde{M}(g)]^{-1} = \tilde{M}(g^{-1})$. $\tilde{M}(g)$ est une isométrie car $|\det g| = 1$ pour tout g dans G . Reste à voir que \tilde{M} est fortement continue (pas forcément continue) : par densité des fonctions continues à support compact dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit de vérifier que, si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{M}(g)u \rightarrow u$ quand g tend vers l'unité de G .

$$\left\| (\tilde{M}(g) - Id)u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |u(g^{-1}.x) - u(x)|^2 dx.$$

Soit $K := \{g.x : x \in \text{Supp}(u), g \in G\}$. On vérifie facilement que K est compact et si $x \in \mathbb{R}^d$, $|u(g^{-1}.x) - u(x)|^2 \leq 2 \mathbb{1}_K(x) \|u\|_\infty^2$, d'où le résultat par convergence dominée. ■

1.1.2 Sous-espaces de symétrie

Soit ρ une représentation du groupe G sur un espace vectoriel E .

- Un sous-espace vectoriel F de E est dit "invariant" par ρ , si

$$\forall g \in G, \quad \rho(g)F \subset F.$$

Une représentation est dite "irréductible" si ses seuls sous-espaces invariants fermés sont $\{0\}$ et E .

- Deux représentations (ρ_1, E_1) et (ρ_2, E_2) sont dites "isomorphes" s'il existe γ isomorphisme linéaire de E_1 dans E_2 tel que :

$$\gamma \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \gamma.$$

- A toute représentation finie ρ , on associe un **caractère** $\chi = \chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ défini par :

$$\chi(g) := Tr(\rho(g)), \quad \forall g \in G.$$

Par ailleurs, deux représentations finies sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère, et toute représentation finie (ρ, E) se décompose en une somme directe (finie!) de représentations irréductibles (éventuellement répétées), ce qui signifie que E se décompose en une somme directe de sous-espaces invariants sur lesquels la restriction de ρ est irréductible([Se]).

Par la suite, on notera $\widehat{\mathbf{G}}$ l'ensemble des caractères des représentations complexes finies irréductibles. Si G est compact, \widehat{G} est dénombrable ([Si]). On parlera donc de "**la**" suite (χ_n) **des caractères irréductibles de \mathbf{G}** , cette suite pouvant être finie, et comportant un et un seul des caractères de \widehat{G} (ce qui revient à ordonner \widehat{G}). Le degré de la représentation irréductible correspondant au caractère χ sera noté \mathbf{d}_χ ($d_\chi = \chi(Id)$).

Comme nous l'avons vu, nous nous intéressons aussi à une représentation complexe INFINIE (sur $L^2(\mathbb{R}^d)$). Celle-ci (\tilde{M}), n'est donc pas forcément décomposable en un nombre fini de représentations irréductibles, mais, comme on peut le voir dans [Pi] et [Si], toute représentation unitaire fortement continue sur un espace de Hilbert séparable peut se décomposer en une somme directe hilbertienne de représentations irréductibles finies, chacun des éléments de \widehat{G} pouvant intervenir une infinité de fois. $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'écrit donc comme une somme directe (orthogonale) hilbertienne de sous-espaces vectoriels de dimension finie qui sont invariants pour \tilde{M} , et où la restriction de \tilde{M} est irréductible finie.

On se propose de recoller chacun de ces espaces correspondant à la même représentation irréductible en un même espace que l'on appellera ici "**sous-espace de symétrie**" : la proposition suivante construit les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces de symétrie.

Classiquement, le groupe compact G est muni de sa **mesure de Haar** normalisée "**dg**" qui est invariante par translation à droite et à gauche.¹ On rappelle qu'une fonction complexe f sur G est dite *centrale* si elle est constante presque partout sur les classes de conjugaison par automorphisme intérieur de G , i.e. :

$$\forall h \in G, \quad pp - g \in G, \quad f(hgh^{-1}) = f(g).$$

Cette notion se transcrit clairement sur l'espace $L^2(G)$ et on note $L^2_{\mathfrak{q}}(G)$ l'ensemble des fonctions centrales de $L^2(G)$. $L^2_{\mathfrak{q}}(G)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$, et on trouvera dans [Pi] (p.105 exercice) et ([Si] (p.159 Corollary VII.10.3) la preuve de l'assertion suivante :

$$(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une base hilbertienne de } L^2_{\mathfrak{q}}(G) .$$

Cette remarque peut être utile pour trouver les caractères irréductibles des certains groupes (comme $SO(3)$). En particulier,

$$\int_G \chi_n(g) \overline{\chi_m(g)} dg = \delta_n^m .$$

¹Pour G fini, $\int_G f(g) dg = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$.

Une représentation finie d'un groupe compact est équivalente à une représentation unitaire (cf [Pi] p.91 Proposition 3). Ainsi, on aura :

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \quad \forall g \in G, \quad \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}.$$

Si Φ est une application fortement continue de G dans l'ensemble $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , alors, on désigne par $\int_G \Phi(g)dg$ (intégration hilbertienne) l'opérateur sur \mathcal{H} défini via le théorème de Riesz par :

$$\left(\int_G \Phi(g)dg \quad u; v \right) := \int_G (\Phi(g)u; v)dg \quad , \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Proposition 1.1.3 Soient G un sous-groupe compact de $O(d)$ et $\chi \in \widehat{G}$. Posons, avec les notations précédentes :

$$P_\chi := d_\chi \int_G \overline{\chi(g)} \tilde{M}(g) dg.$$

Alors les P_χ sont des projecteurs orthogonaux sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que $P_{\chi_i} \circ P_{\chi_j} = \delta_i^j P_{\chi_i}$ et $\sum_{\chi \in \widehat{G}} P_\chi = Id_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ (au sens de la convergence forte dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ si \widehat{G} est infini).

Ainsi, si $L_\chi^2(\mathbb{R}^d) := P_\chi(L^2(\mathbb{R}^d))$ (espaces de symétrie), on a :

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \overline{\bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} L_\chi^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(somme hilbertienne), et la restriction de \tilde{M} à $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ est somme (éventuellement infinie) de représentations irréductibles finies de même caractère χ . Par ailleurs, toute sous-représentation irréductible de \tilde{M} sur $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ est de caractère χ , et une décomposition de $L^2(\mathbb{R}^d)$ ayant cette propriété est unique.

On dit qu'on a décomposé $(\tilde{M}, L^2(\mathbb{R}^d))$ en composantes isotypiques.

Preuve de la proposition :

Cette proposition découle d'un théorème plus général de "Peter-Weyl" sur les représentations unitaires fortement continues sur un espace de Hilbert séparable. On renvoie à [Pi], p.106, théorème 3, ainsi qu'à [Si] p.162, theorem VII.10.8. Pour l'unicité de la décomposition, voir [Se], chapitre sur les groupes compacts . ■

Il existe un cas où les $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ ont une interprétation simple :

Lemme 1.1.4 Soit χ un caractère de G de degré 1.

Alors $L^2_\chi(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \forall g \in G, \quad pp - x \in \mathbb{R}^d : f(g^{-1}.x) = \chi(g).f(x)\}$.

Preuve du lemme :

L'inclusion "⊃" est claire ($\int_G |\chi(g)|^2 dg = 1$ lorsque χ est irréductible).

Puis, si $P_\chi(f) = f$ alors $pp - x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = \int_G \overline{\chi(g)} f(g^{-1}.x) dg$, donc :

$$pp - x \in \mathbb{R}^d, \quad f(g_0^{-1}x) = \int_G \overline{\chi(g)} f((g_0g)^{-1}.x) dg = \int_G \overline{\chi(g_0^{-1}g)} f(g^{-1}.x) dg = \chi(g_0) f(x).$$

En effet, χ est multiplicatif puisqu'on a affaire à une représentation de degré 1.

Ceci achève la preuve du lemme. ■

Ce résultat s'applique en particulier aux groupes commutatifs pour lesquels les représentations irréductibles sont de degré 1 (cf [Se]). Par ailleurs, pour un groupe compact G quelconque, on a toujours un caractère de degré 1 : c'est le caractère χ_0 de la **représentation triviale** $\mathbb{1} : G \rightarrow \mathbb{C}$ constante égale à Id . Bien sûr $\chi_0 = 1$. On a donc :

$$L^2_{\chi_0}(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)^G = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \forall g \in G, \quad pp - x \in \mathbb{R}^d : f(g^{-1}.x) = \chi(g).f(x)\}.$$

Pour les caractères de degré supérieur à 2, on n'a pas de description aussi agréable (l'identité " $f(g^{-1}.x) = \chi(g).f(x)$ " implique que χ est multiplicatif). Pour un exemple avec des caractères de degré quelconque, voir le cas de $G = SO(3)$ développé ci-après.

1.1.3 Exemples de groupes G , représentations \tilde{M} , et $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ associés

► $G = \{\pm Id_{\mathbb{R}^d}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

Ainsi, $\tilde{M}(1) = Id_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, et $\tilde{M}(-1) : f \mapsto \check{f}$. (où $\check{f}(x) := f(-x)$)

Ici, on a deux caractères, tous deux de degré 1 : χ_+ , le caractère trivial, et χ_- défini par :

$$\chi_-(1) = 1 \text{ et } \chi_-(-1) = -1.$$

On en déduit que, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors :

$P_+(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, et $L^2_+(\mathbb{R}^d) = \{\text{fonctions paires de } L^2(\mathbb{R}^d)\}$.

$P_-(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, et $L^2_-(\mathbb{R}^d) = \{\text{fonctions impaires de } L^2(\mathbb{R}^d)\}$.

$$L^2(\mathbb{R}^d) = L^2_+(\mathbb{R}^d) \oplus L^2_-(\mathbb{R}^d).$$

C'est l'unique groupe de symétrie envisageable dans notre cadre lorsque $d = 1$!

► $G \simeq \sigma_d$: (le groupe symétrique) agit sur \mathbb{R}^d via les matrices de permutations :

$$P_\sigma(x_1, \dots, x_d) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(d)}).$$

Les caractères de degré 1 sont le caractère trivial χ_1 et la signature χ_2 (voir [Se]).

Selon le lemme 1.1.4, on a :

$$L_{\chi_1}^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \forall \sigma \in \sigma_d, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) = f(x_1, \dots, x_d)\}.$$

$$L_{\chi_2}^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \forall \sigma \in \sigma_d, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_d)\}.$$

” ε ” désignant la signature.

► $G = SO(2)$:

$SO(2)$ est un groupe commutatif, donc toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1 (cf [Se]). De façon générale, lorsque G est un groupe de Lie, on a tous les éléments de \widehat{G} lorsque l'on a trouvé une suite de caractères irréductibles dense dans l'ensemble $L_{\#}^2(G)$ des fonctions centrales de carré intégrable sur G (\widehat{G} est une base hilbertienne de $L_{\#}^2(G)$ selon [Se] Corollary VII.10.3 p.159). La rotation vectorielle directe d'angle θ du plan sera notée R_θ , que l'on confondra à loisir avec sa matrice dans la base canonique : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Notation : Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on note son expression en coordonnées polaires :

$$\tilde{f}(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi], r dr d\theta)). \quad (1.1)$$

Lemme 1.1.5 *La mesure de Haar sur $SO(2) \simeq \mathbb{S}^1$ est $dg = \mathbb{1}_{[0, 2\pi]} \frac{d\theta}{2\pi}$.*

La suite des caractères irréductibles est donnée par $(\tilde{\chi}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où si $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\tilde{\chi}_n(R_\theta) := \chi_n(\theta) := e^{in\theta}$$

$$\text{et } L_{\chi_n}^2(\mathbb{R}^2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \tilde{f}(r, \theta) = e^{-in\theta} \cdot g(r), g \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)\}.$$

Preuve du lemme :

Pour tout k dans \mathbb{Z} , $\rho_k : R_\theta \mapsto (z \mapsto e^{ik\theta} z)$ est une représentation complexe de degré 1 sur \mathbb{C} , donc irréductible. Ici, $L_{\#}^2(G) = L^2(\mathbb{S}^1) \simeq L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$, et comme $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de l'ensemble des fonctions 2π -périodiques de carré intégrable, on a tous les caractères de $SO(2)$.

Pour la description de $L_{\chi_n}^2(\mathbb{R}^2)$, l'inclusion ” \supset ” est claire. D'après le lemme 1.1.4, si $f \in L_{\chi_n}^2(\mathbb{R}^2)$, alors $\forall \theta_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(r, \theta - \theta_0) = e^{in\theta_0} \tilde{f}(r, \theta)$, $pp - (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$.

Posons $h(r, \theta) := e^{in\theta} \tilde{f}(r, \theta)$. on a :

$$\forall \theta_0 \in \mathbb{R}, \quad pp - (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi], \quad h(r, \theta + \theta_0) = h(r, \theta).$$

D'où h_0 dans $L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$ telle que $h(r, \theta) = h_0(r)$, $pp - (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$, ce qui achève la preuve de ce lemme. ■

► $G = SO(3)$:

$SO(3)$ n'est pas commutatif, et les réalisations de ses représentations irréductibles ne sont pas triviales. On pourra consulter [Si] p.205 ch.9 , ou [Pi] p.209 ch. IV.1, de même que pour la formule donnant les caractères . Ici, les classes de conjugaison sont données par les rotations de même angle (axe orienté quelconque). On note \tilde{R}_θ la rotation vectorielle dont la matrice dans la base canonique orientée de \mathbb{R}^3 est : $\tilde{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Notation : Si $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, on note son expression en coordonnées sphériques :

$$\tilde{f}(r, \theta, \varphi) := f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad (\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi)).$$

Lemme 1.1.6 La suite des caractères irréductibles de $SO(3)$ est donné par $(\tilde{\chi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où :

$$\tilde{\chi}_n(\tilde{R}_\theta) =: \chi_n(\theta) := \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \frac{\sin((2n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\text{et } L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) : \tilde{f}(r, \theta, \varphi) = g(r) \sum_{k=-n}^n \lambda_k Y_{n,k}(\theta, \varphi), \quad g \in L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)\}.$$

En particulier, la représentation irréductible correspondant au caractère χ_n est de degré $d_{\chi_n} = 2n + 1$. L'entier n est souvent appelé le **nombre quantique azimuthal**. Dans la description de $L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^3)$, on utilise les fonctions $(Y_{n,k})$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{-n, \dots, n\}$, qui sont les **harmoniques sphériques**. Ce sont les fonctions propres du laplacien sur la sphère de \mathbb{R}^3 , Δ_{sph} :

$$-\Delta_{\text{sph}} Y_{n,k} = n(n+1) Y_{n,k}.$$

On pourra trouver une définition précise dans [Pi] p. 116 ou [AJS] 11.5 p. 495, et leurs multiples propriétés sont détaillées dans de nombreux ouvrages.

Preuve du lemme : Pour le calcul des caractères, on renvoie encore à [Si] p.205, ou à [Pi] p.112, 113). Pour le calcul des $L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^3)$, on peut procéder directement : on sait que les fonctions du type $g(r) \otimes Y_{n,k}(\theta, \varphi)$ sont denses dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi)$. Donc, il suffit de montrer qu'elles sont dans $L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^3)$. On doit donc vérifier que $P_{\chi_n}[g(r) \otimes Y_{n,k}(\theta, \varphi)] = g(r) \otimes Y_{n,k}(\theta, \varphi)$. On peut pour cela paramétrer classiquement $SO(3)$ par les angles d'Euler et utiliser les formules sur les $Y_{n,k}$ telles que $Y_{n,k}(\theta, \varphi + \alpha) = e^{i\alpha} Y_{n,k}(\theta, \varphi)$, ou encore les formules de récurrence. Ce calcul est, somme toute, assez fastidieux.

Une autre méthode consiste à aborder le problème de façon plus globale, en utilisant l'unicité de la décomposition en composantes isotypiques dans le théorème 1.1.3 de Peter-Weyl. Notons

toujours \tilde{M} l'action de G sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^2) \simeq L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes L^2(\mathbb{S}^2)$. On remarque que \tilde{M} n'agit pas sur $L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$. Notons ρ la restriction de \tilde{M} à $L^2(\mathbb{S}^2)$. Notons aussi :

$$V_n := \text{Vect}\{Y_{n,k}, \quad k = -n, \dots, n\}, \quad \text{et} \quad W_n := L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes V_n.$$

On montre dans [Pi], p.115-116 que l'on a $L^2(\mathbb{S}^2) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ (somme hilbertienne), que chaque V_n est ρ -invariant, et que $\rho|_{V_n}$ est irréductible de degré $2n + 1$, de caractère χ_n . Si on introduit $U : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi)$, défini par $U(f) = \tilde{f}$, et si l'on note $\Gamma_n := U^{-1}(W_n)$, alors, on a : $L^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ (somme hilbertienne). Par ailleurs, selon ce qui a été dit sur les V_n , toute sous-représentation irréductible de \tilde{M} dans Γ_n est de caractère χ_n . Ainsi, par unicité de la décomposition isotypique, on a : $\Gamma_n = L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^3)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

1.2 Opérateurs présentant des symétries

Après ces considérations de type algébrique, nous en venons à décrire le décor quantique : étant donné un hamiltonien classique G -invariant H , nous allons le quantifier en \hat{H} , opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Puis nous allons le décomposer selon les $L^2_{\chi}(\mathbb{R}^d)$ en opérateurs \hat{H}_{χ} appelés "hamiltoniens quantiques réduits".

1.2.1 Restriction, calcul fonctionnel et formules de trace

Quantification de Weyl :

Introduisons tout d'abord des hypothèses pour définir les opérateurs pseudo-différentiels et pour pouvoir faire du calcul fonctionnel avec. On note $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ le crochet japonais.

Soit $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$, lisse. H est le **hamiltonien classique**. On fait les hypothèses suivantes :

(H.0) Il existe $C > 0$, $C_{\alpha} > 0$, $m > 0$ tels que :

$$\langle H(z) \rangle \leq C \langle H(z') \rangle \cdot \langle z - z' \rangle^m, \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^{2d}.$$

$$|\partial_z^{\alpha} H(z)| \leq C_{\alpha} \langle H(z) \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2d}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}. \quad (1.2)$$

H est minorée sur \mathbb{R}^{2d} .

Sous l'hypothèse **(H.0)**, $\langle H \rangle$ est un poids σ -tempéré et $H \in S(\langle H \rangle, g_0)$ au sens de **[He-Ro1]**. On peut alors définir le h -quantifié de Weyl de H , pour u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$Op_h^w(H)u(x) := (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_y^d} e^{\frac{i}{h}(x-y) \cdot \xi} H\left(\frac{x+y}{2}; \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Toujours selon **[He-Ro1]**, $Op_h^w(H)$ est essentiellement autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour h suffisamment petit. On note $D(\hat{H})$, \hat{H} son unique extension autoadjointe.

On appelle \widehat{H} le **hamiltonien quantique**. Notons que **(H.0)** est par exemple vérifiée si H et ses dérivées partielles sont bornés sur \mathbb{R}^{2d} .

Quelques rappels sur la représentation métaplectique :

On peut trouver par exemple dans [Fo] le résultat suivant (combinaison des propositions (4.28) p.180 et (2.5) p.81) : soit

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{A} \in Sp(d, \mathbb{R}) := \{M \in GL(2d, \mathbb{R}) : {}^t M J M = J\}$, alors il existe un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ noté $\mu(\mathcal{A})$ tel que pour tout H vérifiant **(H.0)**, on ait :

$$Op_h^w(H \circ \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A})^* Op_h^w(H) \mu(\mathcal{A}). \quad (1.3)$$

$\mu(\mathcal{A})$ n'est bien sûr pas unique (multiplier par un complexe de module 1²). Cependant, dans [Fo](p.178), on montre que l'on peut choisir μ telle que

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in Sp(d, \mathbb{R}), \quad \mu(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \pm \mu(\mathcal{A})\mu(\mathcal{B}).$$

Ici, on applique ceci à la matrice symplectique $\mathcal{A} = M(g)$, et on a alors $\mu(\mathcal{A}) = \widetilde{M}(g)$. (voir formule [Fo] (4.24) p.179). On remarque donc que la restriction de μ aux matrices symplectiques du type $M(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ forme un morphisme de groupe bien défini et fortement continu de l'ensemble de ces matrices dans les opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Choisir de considérer les symétries sur l'espace des configurations (\mathbb{R}^d) n'est donc pas anodin. Pour prendre en compte directement des symétries sur l'espace des phase, il aurait fallu trouver une définition précise de μ qui en fasse un morphisme de groupe défini par exemple sur $Sp(d, \mathbb{R}) \cap O(2d)$.

La représentation métaplectique μ interviendra aussi lorsqu'on donnera les résultats de M. Combes et D. Robert sur la propagation des états cohérents. Pour ce qui est de la propriété (1.3), nous la redémontrons pour $\mathcal{A} = M(g)$ dans les lignes qui suivent.

Notation : Si B est un opérateur borné et $D(T), T$ un opérateur non borné sur le même espace de Hilbert, on dit que B et T **commutent**, on écrit " $[B, T] = 0$ " si et seulement si on a :

$$\forall x \in D(T), \quad Bx \in D(T) \quad \text{et} \quad TBx = BTx.$$

Proposition 1.2.1 Propriété de commutation :

Soient $g \in O(d)$, et $z \mapsto H(z)$ un hamiltonien vérifiant **(H.0)**. Alors, on a :

$$H \circ M(g) = H \text{ sur } \mathbb{R}^{2d} \iff [\widehat{H}, \widetilde{M}(g)] = 0. \quad (1.4)$$

²Dans [Hö III] p.158, Theorem 18.5.9, on montre qu'un tel opérateur unitaire $\mu(\mathcal{A})$ est unique à un complexe (constant) de module 1 près.

Preuve de la proposition :

Clairement, si $g \in GL(\mathbb{R}^d)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto u(g.x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est invariant sous l'action \tilde{M} de G . Soient $g \in G$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On va effectuer des changements variables directement sur les intégrales oscillantes. Ceux-ci se justifient en faisant des changements de variables classiques, et en passant à la limite. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Posons $x = g.\alpha$. On a :

$$\begin{aligned} Op_h^w(H)(\tilde{M}(g)u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y).\xi} H\left(\frac{x+y}{2}; h\xi\right) u(g^{-1}y) \frac{d\xi dy}{(2\pi)^d} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-g.s).\xi} H\left(\frac{x+g.s}{2}; h\xi\right) u(s) \frac{d\xi ds}{(2\pi)^d}. \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(g.\alpha-g.s).t} g^{-1}\beta H\left(\frac{g.\alpha+g.s}{2}; h^t g^{-1}\beta\right) u(s) \frac{d\beta ds}{(2\pi)^d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(\alpha-s).\beta} [H \circ M(g)]\left(\frac{\alpha+s}{2}; h\beta\right) u(s) \frac{d\beta ds}{(2\pi)^d}. \end{aligned}$$

Ainsi, sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\tilde{M}(g)^{-1} Op_h^w(H) \tilde{M}(g) = Op_h^w(H \circ M(g)). \quad (1.5)$$

On en déduit immédiatement le sens " \Leftarrow " par unicité du symbole d'un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour " \Rightarrow ", si on a $H \circ M(g) = H$ sur \mathbb{R}^{2d} , donnons-nous u dans $D(\hat{H})$. D'où u_n suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{H}(u_n)$ vers $\hat{H}(u)$. On a $\hat{H}(\tilde{M}(g)u_n) = \tilde{M}(g)\hat{H}(u_n) \rightarrow \tilde{M}(g)\hat{H}(u)$ et $\tilde{M}(g)u_n \rightarrow \tilde{M}(g)u$. Donc $\tilde{M}(g)u \in D(\hat{H})$ et $\hat{H}(\tilde{M}(g)u) = \tilde{M}(g)\hat{H}(u)$. ■

On peut maintenant décomposer un o.p.d. de symbole G -invariant en "opérateurs symétriques" :

Proposition 1.2.2 Restriction, calcul fonctionnel avec symétries :

Soient $G \subset O(d)$ et $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant **(H.0)** tel que $\forall g \in G$, $H \circ M(g) = H$.

On pose :

$$D(\hat{H}_\chi) := L_\chi^2(\mathbb{R}^d) \cap D(\hat{H}).$$

Alors :

► Pour tout χ dans \hat{G} , $[\hat{H}, P_\chi] = 0$, et \hat{H} envoie $D(\hat{H}_\chi)$ dans $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$. On note alors $\boxed{\hat{H}_\chi}$ la restriction de \hat{H} à $D(\hat{H}_\chi)$. L'opérateur \hat{H}_χ de domaine $D(\hat{H}_\chi)$ est un opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$.

► Pour tout χ dans \hat{G} , pour toute fonction borélienne f sur \mathbb{R} , $[f(\hat{H}), P_\chi] = 0$, $D(f(\hat{H}_\chi)) = D(f(\hat{H})) \cap L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$, et $f(\hat{H}_\chi)$ est la restriction de $f(\hat{H})$ à $D(f(\hat{H}_\chi))$.

► $\forall u \in D(f(\hat{H}))$, $f(\hat{H})u = \sum_{\chi \in \hat{G}} f(\hat{H}_\chi) P_\chi u$, au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ si \hat{G} n'est pas fini. De plus, on a $\bigcup_{\chi \in \hat{G}} \sigma(\hat{H}_\chi) \subset \sigma(\hat{H})$ avec égalité si \hat{G} est fini, ou si $\sigma(\hat{H})$ est formé de valeurs propres.

Les \hat{H}_χ sont appelés les **hamiltoniens quantiques réduits**.

Preuve de la proposition :

► Soit $u \in D(\widehat{H})$, montrons que $P_\chi u \in D(\widehat{H}) = D(\widehat{H}^*)$. Or :

$$D(\widehat{H}^*) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^d) : \exists C > 0, \forall w \in D(\widehat{H}), |(\widehat{H}w; v)| \leq C \|w\|\}.$$

Soit $w \in D(\widehat{H})$.

$$|(\widehat{H}w; P_\chi u)| = |d_n \int_G \chi(g)(\widehat{H}w; \tilde{M}(g)u) dg| \leq d_\chi \int_G |\chi(g) \cdot (\tilde{M}(g^{-1})w; \widehat{H}u)| dg,$$

car $[\widehat{H}, \tilde{M}(g)] = 0$. Donc $|(\widehat{H}w; P_\chi u)| \leq d_\chi \int_G |\chi(g)| dg \|\widehat{H}u\| \cdot \|w\|$.

Par le même raisonnement, on montre que si $u \in D(\widehat{H})$, $(\widehat{H}P_\chi u, w) = (P_\chi \widehat{H}u; w)$ pour tout w dans $D(\widehat{H})$, donc pour tout w dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par densité. Ainsi $[\widehat{H}, P_\chi] = 0$.

\widehat{H}_χ est clairement symétrique, puis, si $u \in D(\widehat{H}_\chi^*)$, on sait qu'il existe v dans $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ tel que $(\widehat{H}_\chi w, u) = (w, v)$ pour tout w dans $D(\widehat{H}_\chi)$.

Si $x \in D(\widehat{H})$,

$$(\widehat{H}x, u) = (\widehat{H}x, P_\chi u) = (\widehat{H}_\chi P_\chi x, u) = (P_\chi x, v) = (x, P_\chi v).$$

Donc $u \in D(\widehat{H}^*) = D(\widehat{H})$, ce qui prouve que \widehat{H}_χ est autoadjoint sur $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$.

► Montrons que $[f(\widehat{H}), P_\chi] = 0$: soit $u \in D(f(\widehat{H}))$, i.e., si E désigne la mesure spectrale de \widehat{H} , $\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 dE_{u,u}(\lambda) < \infty$. On sait, selon [Ru] p.351 que E commute avec tout opérateur qui commute avec \widehat{H} , donc $[P_\chi, E(\Omega)] = 0$, pour tout Ω borélien de \mathbb{R} . Ainsi :

$$E_{P_\chi u, P_\chi u}(\Omega) = \|E(\Omega)P_\chi u\|^2 = \|P_\chi E(\Omega)u\|^2 \leq E_{u,u}(\Omega).$$

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 dE_{P_\chi u, P_\chi u}(\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 dE_{u,u}(\lambda) < \infty.$$

et $P_\chi u \in D(f(\widehat{H}))$.

De même, on a : $\forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $E_{u, P_\chi v} = E_{P_\chi u, v}$. Donc, si $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et si $u \in D(f(\widehat{H}))$, on a :

$$(f(\widehat{H})P_\chi u; v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_{P_\chi u, v}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_{u, P_\chi v}(\lambda) = (f(\widehat{H})u; P_\chi v) = (P_\chi f(\widehat{H})u; v).$$

Donc $[f(\widehat{H}), P_\chi] = 0$ et $f(\widehat{H}) = f(\widehat{H}_\chi)$ sur $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ (mêmes mesures spectrales).

► La formule énoncée ensuite est claire en passant à la limite et en utilisant la proposition 1.1.3. Il est enfin aisé de prouver $\rho(\widehat{H}) \subset \bigcap_{\chi \in \widehat{G}} \rho(\widehat{H}_\chi)$, et si $\lambda \in \bigcap_{\chi \in \widehat{G}} \rho(\widehat{H}_\chi)$, alors $\widehat{H} - \lambda$ est clairement injectif. Recoller les $(\widehat{H}_\chi - \lambda)^{-1}$ en un inverse sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour $\widehat{H} - \lambda$ se fait aisément lorsque \widehat{G} est fini, sinon, ce n'est pas si évident. ■

Donnons un contre-exemple pour montrer que l'inclusion $\bigcup_{\chi \in \widehat{G}} \sigma(\widehat{H}_\chi) \subset \sigma(\widehat{H})$ n'est pas une égalité en général :

On prend $d = 2$, $G = SO(2)$. On identifie $L^2(\mathbb{R}^2)$ et $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1, r dr d\theta)$ via le passage en coordonnées polaires : $U : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1, r dr d\theta)$ défini par $U(f) = \tilde{f}$ (cf (1.1)). L'opérateur différentiel $x\partial_y - y\partial_x$ (moment angulaire) est unitairement semblable via U à l'opérateur ∂_θ sur $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$. Il existe $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ lisse tel que :

$$U\widehat{H}U^{-1} = (-\partial_\theta^2 + 1)^{-1}.$$

Il est clair que $[\tilde{M}(g), \partial_\theta] = 0, \forall g \in SO(2)$ (car $\partial_\theta(\tilde{f}(r, \theta - \theta_0)) = (\partial_\theta \tilde{f})(r, \theta - \theta_0)$). Ainsi, d'après la proposition 1.2.1, H est $SO(2)$ -invariant. On a vu que :

$$\widetilde{L^2_{\chi_n}} := U[L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^2)] = \{\tilde{f} : \tilde{f}(r, \theta) = e^{in\theta}g(r), \quad g \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)\}.$$

On constate donc que :

$$(-\partial_\theta^2 + 1)^{-1}|_{\widetilde{L^2_{\chi_n}}} = \frac{1}{n^2 + 1} Id_{\widetilde{L^2_{\chi_n}}}.$$

Ainsi, chaque \widehat{H}_{χ_n} est inversible sur $L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^2)$ et pour tout n dans \mathbb{Z} , 0 n'est pas dans le spectre de \widehat{H}_{χ_n} .

Cependant, $(-\partial_\theta^2 + 1)^{-1}$ n'est pas surjectif, car ∂_θ^2 est un opérateur non-borné (et $(-\partial_\theta^2 + 1)^{-1}$ est donc à valeur dans les fonctions H^2 en θ). D'où $0 \in \sigma(\widehat{H})$, mais $0 \notin \bigcup_{\chi \in \widehat{G}} \sigma(\widehat{H}_\chi)$.

Il convient de donner des exemples où l'on peut visualiser les \widehat{H}_χ :

- Opérateur de Schrödinger avec $G = SO(2)$: on rappelle l'expression du laplacien en coordonnées polaires :

$$(\Delta f)(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \tilde{f}) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \tilde{f}.$$

D'après le lemme 1.1.5, on voit en prenant f dans $L^2_{\chi_n}(\mathbb{R}^2)$, que (pour $h = 1$) :

$$-\Delta_{\chi_n} \sim -\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + \frac{n^2}{r^2} \text{ sur } L^2(\mathbb{R}_+, r dr).$$

(au sens où ces deux opérateurs sont unitairement semblables). On aura donc pour V réel semi-borné sur \mathbb{R}^2 tel que $V(x) = V_0(|x|)$:

$$(-\Delta + V)_{\chi_n} \sim -\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + \frac{n^2}{r^2} + V_0(r)$$

- Opérateur de Schrödinger avec $G = SO(3)$: on rappelle l'expression du laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \partial_r^2 \tilde{f} + \frac{2}{r} \partial_r \tilde{f} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \tilde{f}.$$

D'après le lemme 1.1.6, nous voyons donc en examinant l'action de Δ sur des fonctions du type : $\tilde{f}(r, \theta, \varphi) = g(r) \cdot Y_{n,k}(\theta, \varphi)$, que l'on a (toujours pour $h = 1$) :

$$-\Delta_{\chi_n} \sim -\partial_r^2 - \frac{2}{r} \partial_r + \frac{n(n+1)}{r^2} \text{ sur } L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr).$$

Et on rajoute un $V_0(r)$ pour l'opérateur de Schrödinger avec symétrie sphérique. On remarque que c'est exactement le résultat obtenu par une classique réduction radiale (voir par exemple [AJS] p.475 où $-\Delta_{\chi_n} = K_{0,n}$).

Examinons maintenant comment se comporte la trace avec les symétries :

Lemme 1.2.3 Trace et restriction :

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, $V \subset \mathcal{H}$ un sous espace fermé, et π la projection orthogonale sur V . Soit A un opérateur autoadjoint à trace sur \mathcal{H} , tel que V soit stable par A . On note \tilde{A} la restriction de A à V .

Alors \tilde{A} est autoadjoint à trace sur V , $\|A \circ \pi\|_{Tr} = \|\tilde{A}\|_{Tr}$ et $Tr(A \circ \pi) = Tr(\tilde{A})$.

Preuve du lemme :

$A \circ \pi$ est autoadjoint car $[A, \pi] = 0$. Montrons que \tilde{A} est à trace sur V : \tilde{A} étant clairement autoadjoint, il suffit de montrer que $|\tilde{A}|^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Si e_j ($j \in \mathbb{N}$) est une base hilbertienne de V , en la complétant en une base hilbertienne f_j de \mathcal{H} , on obtient :

$$\sum_{j \geq 0} \left\| |\tilde{A}|^{\frac{1}{2}} e_j \right\|^2 = \sum_{j \geq 0} \left\| |A|^{\frac{1}{2}} e_j \right\|^2 \leq \sum_{j \geq 0} \left\| |A|^{\frac{1}{2}} f_j \right\|^2 = \left\| |A|^{\frac{1}{2}} \right\|_{HS}^2 = \|A\|_{Tr} < \infty.$$

ce qui prouve que \tilde{A} est à trace sur V . Puis, remarquons que :

$$Tr(\tilde{A}) = \sum_{\lambda \in \sigma(\tilde{A}) - \{0\}} \dim(Ker(\tilde{A} - \lambda)) \lambda, \text{ et que } Tr(A \circ \pi) = \sum_{\lambda \in \sigma(A \circ \pi) - \{0\}} \dim(Ker(A \circ \pi - \lambda)) \lambda.$$

Par ailleurs, si $\lambda \neq 0$, $Ker(A \circ \pi - \lambda) = Ker(\tilde{A} - \lambda)$, ce qui montre en particulier que $\sigma(\tilde{A}) - \{0\} = \sigma(A \circ \pi) - \{0\}$, et que : $Tr(A \circ \pi) = Tr(\tilde{A})$.

$$\begin{aligned} \text{Enfin : } \|\tilde{A}\|_{Tr} &= Tr(|\tilde{A}|) = \sum_{\lambda \in \sigma(\tilde{A}) - \{0\}} \dim(Ker(\tilde{A} - \lambda)) |\lambda| = \sum_{\lambda \in \sigma(A \circ \pi) - \{0\}} \dim(Ker(A \circ \pi - \lambda)) |\lambda| \\ &= Tr(|A \circ \pi|) = \|A \circ \pi\|_{Tr}. \end{aligned}$$

Ceci s'achève la preuve du lemme. ■

Ainsi, avec le même décor que pour les propositions précédentes, si f est borélienne, et si $f(\hat{H})$ est à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $f(\hat{H}_\chi)$ l'est sur $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$, et :

$$\boxed{Tr(f(\hat{H}_\chi)) = Tr(f(\hat{H})P_\chi)}.$$

Nous utiliserons fréquemment cette formule par la suite.

1.2.2 Quelques conséquences directes des symétries sur le spectre de \widehat{H}

► Conséquences sur la multiplicité des valeurs propres de \widehat{H} :

Des considérations de type algébrique nous disent que :

Proposition 1.2.4 *Multiplicité des valeurs propres de \widehat{H}_χ :*

Si $\chi \in \widehat{G}$, les valeurs propres de \widehat{H}_χ sont de multiplicité proportionnelle à d_χ .

Remarquons, que pour parler de valeurs propres de \widehat{H}_χ , il faut déjà que $L_\chi^2(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$. Si c'est le cas, nous voyons que l'opérateur \widehat{H}_χ nous permet en particulier de minorer la multiplicité de certaines valeurs propres de \widehat{H} (par d_χ).

Preuve de la proposition : Si $F \neq \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ qui est \widetilde{M} -invariant, alors F est somme d'espaces vectoriels de dimension d_χ : en effet, il suffit pour cela de décomposer la restriction de \widetilde{M} à F en représentations irréductibles. Par construction des $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$, via le théorème 1.1.3 de Peter-Weyl, les seules représentations intervenant sont toutes isomorphes de caractère χ . Par ailleurs, si λ est valeur propre de \widehat{H}_χ , on peut appliquer cette remarque à $F = \ker(\widehat{H}_\chi - \lambda Id) \neq \{0\}$ qui est \widetilde{M} -invariant car $[\widetilde{M}(g), \widehat{H}] = 0$ pour tout g dans G . ■

► Conséquences sur la symétrie des fonctions propres de \widehat{H} :

Soit A un opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ de domaine $D(A)$, qui commute avec tous les P_χ . Si λ est une valeur propre de A , on note $E_\lambda := \ker(A - \lambda Id)$ l'espace propre associé. Soit φ une fonction propre pour λ . On note $\varphi_\chi := P_\chi \varphi$.

$$A\varphi = \lambda\varphi \implies \forall \chi \in \widehat{G}, \quad A\varphi_\chi = \lambda\varphi_\chi \quad (\text{composer par } P_\chi).$$

Comme $\varphi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \varphi_\chi$, il existe un φ_{χ_0} non nul, et donc E_λ possède une fonction propre qui a la symétrie de χ_0 . Cette remarque théorique (on ne connaît pas le χ_0 !) s'illustre pleinement lorsque le groupe est $G = \{\pm Id\}$. C'est par exemple le cas lorsque $d = 1$ (voir les exemples de "double puits" ou "puits dans une île" infra) : tout espace propre contient une fonction propre paire ou impaire. Par ailleurs, lorsque les espaces propres sont de dimension 1, ils sont composés soit de fonctions propres paires, soit de fonctions propres impaires. C'est ce qui se passe pour un potentiel du type "double puits", avec de plus une alternance régulière paire/impair, qui marque le début de l'**effet tunnel** : moralement, la parité du potentiel permet à la particule de "passer outre les barrières de potentiel" (voir [Ro2]).

1.2.3 Fonctions de comptage des valeurs propres et de décalage spectral

Dans tout ce qui suit, on suppose que H admet G comme symétrie, i.e.

$$\forall g \in G, \quad H \circ M(g) = H.$$

On dit aussi que H est G -invariant.

• **Fonctions de comptage des valeurs propres partielles :**

Supposons tout d'abord que le spectre de \widehat{H} soit discret dans un intervalle fermé I de \mathbb{R} . On note alors $N(I)$ le nombre de valeurs propres de \widehat{H} dans I , répétées avec ordre de multiplicité géométrique. Ainsi, $\mathbb{1}_I(\widehat{H})$ est à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $N(I) = \text{Tr}[\mathbb{1}_I(\widehat{H})]$. D'après ce qui précède, le spectre de \widehat{H}_χ est aussi discret dans I , et l'on note donc de même $N_\chi(I)$ la fonction de comptage des valeurs propres de \widehat{H}_χ dans I . Les $N_\chi(I)$ seront ici appelées les **fonctions de comptage partielles** (ou fonctions de comptage de symétrie).

On peut interpréter $N_\chi(I)$ comme étant le nombre de valeurs propres de \widehat{H} dans I qui ont une fonction propre dans $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ "en tenant compte des multiplicités". Mais attention, malgré les symétries, une même valeur propre peut a priori avoir des fonctions propres dans des $L^2_\chi(\mathbb{R}^d)$ différents ! (c'est bien sûr le cas lorsque \widehat{H} est une homothétie). Ainsi, si on oublie les multiplicités, on arrive vite à une contradiction. L'interprétation rigoureuse s'écrit :

$$N_\chi(I) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(\widehat{H}) \cap I \text{ ayant une} \\ \text{fonction propre dans } L^2_\chi(\mathbb{R}^d)}} \dim E_\chi(\lambda).$$

où $E_\chi(\lambda)$ est l'espace propre pour \widehat{H}_χ associé à λ (éventuellement réduit à zéro).

On peut interpréter le quotient $\frac{N_\chi(I)}{N(I)}$ comme la proportion des fonctions propres de symétrie χ parmi les fonctions propres correspondant aux valeurs propres de \widehat{H} dans I (voir [He-Ro2], 7.1, p.1225).

Pour des χ de degré > 1 , les N_χ fournissent des informations sur la multiplicité des valeurs propres de \widehat{H} (voir chapitre précédent).

Enfin, intéressons-nous aux relations entre $N(I)$ et les $N_\chi(I)$. Dans le cas où \widehat{G} est fini, nous avons directement la relation :

$$N(I) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} N_\chi(I).$$

Dans le cas où \widehat{G} est infini, si l'on note $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des caractères irréductibles de G , on a :

$$\sum_{k=0}^n N_{\chi_k}(I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N(I).$$

C'est une conséquence immédiate du fait que $N_\chi(I) = \text{Tr}[\mathbb{1}_I(\widehat{H})P_\chi]$ et du lemme suivant :

Lemme 1.2.5 *Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, H un opérateur à trace sur \mathcal{H} , (T_n) une suite d'opérateurs bornés sur \mathcal{H} telle que :*

$$\exists s - \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n =: T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

On suppose aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $[H, T_n] = 0$.

Alors $HT_n \rightarrow HT$ en norme trace (et donc $\text{Tr}(HT_n) \rightarrow \text{Tr}(HT)$).

Preuve du lemme :

Selon le théorème de Banach-Steinhaus, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (l'ensemble des opérateurs bornés sur \mathcal{H}) et

on a : $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n - T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \infty$.

La décomposition polaire de H nous donne U opérateur borné tel que : $H = U|H|$.

Ainsi, $H(T_n - T)$ est à trace et :

$$\|H(T_n - T)\|_{Tr} \leq \|U\| \| |H|(T_n - T) \|_{Tr} \leq \left\| |H|^{\frac{1}{2}} \right\|_{HS} \left\| |H|^{\frac{1}{2}}(T_n - T) \right\|_{HS}.$$

Par ailleurs, si (e_p) est une base hilbertienne de \mathcal{H} , $\left\| |H|^{\frac{1}{2}}(T_n - T) \right\|_{HS}^2 = \sum_{p \geq 0} \left\| |H|^{\frac{1}{2}}(T_n - T)e_p \right\|^2$.

On a : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\left\| |H|^{\frac{1}{2}}(T_n - T)e_p \right\|^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En outre, $[|H|^{\frac{1}{2}}, T_n - T] = 0$ (procéder de même que dans la proposition 1.2.2).

Donc $\left\| |H|^{\frac{1}{2}}(T_n - T)e_p \right\|^2 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n - T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \left\| |H|^{\frac{1}{2}}e_p \right\|^2$, avec $\sum_{p \geq 0} \left\| |H|^{\frac{1}{2}}e_p \right\|^2 < \infty$.

D'où le résultat par convergence dominée. ■

$\sum_{k=0}^n N_{\chi_k}(I)$ étant une suite convergente d'entiers, elle stationne, et ainsi,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n_0} N_{\chi_k}(I) = N(I), \quad \text{et pour } n > n_0, \quad N_{\chi_n}(I) = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des fonctions propres correspondant aux valeurs propres de \widehat{H} dans I ont toutes certaines symétries, au sens où elles sont toutes dans $\bigoplus_{k=0}^{n_0} L_{\chi_k}^2(\mathbb{R}^d)$. Evidemment, c'est un résultat très théorique, puisqu'on ne connaît a priori aucune information sur "n₀".

• Fonctions de décalage spectral partielles :

On peut aussi envisager le cas d'une étude d'une perturbation \widehat{H}_2 d'un opérateur \widehat{H}_1 : Ici, les opérateurs associés ont éventuellement du spectre essentiel. L'analogue de la fonction de comptage est classiquement, la **fonction de décalage spectral** (en abrégé **FDS**), notée ξ , définie

à une constante près dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par :

$$\left\langle \frac{d\xi}{d\lambda}, f \right\rangle := \text{Tr}[f(\widehat{H}_2) - f(\widehat{H}_1)] \quad , \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

où \widehat{H}_2 et \widehat{H}_1 sont des opérateurs autoadjoints de même domaine, la formule ci-dessus ayant un sens dès que :

$$\exists E \in \mathbb{R} \cap [\sigma(\widehat{H}_2) \cup \sigma(\widehat{H}_1)]^c, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad (\widehat{H}_2 - E)^{-N} - (\widehat{H}_1 - E)^{-N} \text{ est de classe trace.}$$

(et alors, pour toute f dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $f(\widehat{H}_2) - f(\widehat{H}_1)$ est à trace et $f \mapsto \text{Tr}[f(\widehat{H}_2) - f(\widehat{H}_1)]$ définit une distribution sur \mathbb{R} , qui est en fait un élément de $L^1(\mathbb{R}, \langle \lambda \rangle^{-N-1} d\lambda)$). Pour une construction théorique détaillée de la FDS, voir [Y].

Cette dernière condition est par exemple vérifiée dans le cadre : $\widehat{H}_1 = -\Delta$, $\widehat{H}_2 = -\Delta + V(x)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$ sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$, du moment que le potentiel V vérifie :

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\rho} \quad \text{avec } \rho > d.$$

On peut maintenant définir les **FDS partielles** (ou FDS de symétrie) :

Proposition 1.2.6 Définition des FDS partielles :

Soient $\widehat{H}_2, \widehat{H}_1$ des extensions autoadjointes d'o.p.d. de symboles de Weyl H_2, H_1 (resp.) réels, G -invariants. On suppose $\widehat{H}_2, \widehat{H}_1$ semibornés inférieurement et

$$\exists E \in \mathbb{R} \cap [\sigma(\widehat{H}_2) \cup \sigma(\widehat{H}_1)]^c, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad (\widehat{H}_2 - E)^{-N} - (\widehat{H}_1 - E)^{-N} \text{ est à trace sur } L^2(\mathbb{R}^d).$$

On peut alors définir la FDS $\xi = \xi_{\widehat{H}_2, \widehat{H}_1}$. On peut aussi introduire les restrictions de \widehat{H}_2 et \widehat{H}_1 aux $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$, que l'on notera sans ambiguïté $(\widehat{H}_{2,\chi})_{\chi \in \widehat{G}}$ et $(\widehat{H}_{1,\chi})_{\chi \in \widehat{G}}$. Alors :

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \quad \forall z \in [\sigma(\widehat{H}_{2,n}) \cup \sigma(\widehat{H}_{1,n})]^c, \quad (\widehat{H}_{2,\chi} - z)^{-N} - (\widehat{H}_{1,\chi} - z)^{-N} \text{ est à trace sur } L_\chi^2(\mathbb{R}^d),$$

ce qui nous permet de définir les $\xi_\chi := \xi_{\widehat{H}_{2,\chi}, \widehat{H}_{1,\chi}}$, que l'on nommera "**FDS partielles**".

Enfin, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\langle \xi'_\chi, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = \text{Tr}[(\varphi(\widehat{H}_2) - \varphi(\widehat{H}_1))P_\chi].$$

Preuve de la proposition :

Par restriction, les $\widehat{H}_{j,\chi}$ sont semibornés, et il suffit ensuite d'appliquer le lemme 1.2.3 avec $A := (\widehat{H}_2 - \alpha)^{-N} - (\widehat{H}_1 - \alpha)^{-N}$ et $V := L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Jusqu'à la fin de cette section, on s'intéresse aux relations entre la FDS "globale" ξ et ses FDS "partielles" ξ_χ ($\chi \in \widehat{G}$) :

Proposition 1.2.7 Soient $\widehat{H}_2, \widehat{H}_1$ comme dans la proposition 1.2.6.

- Supposons G fini. Alors $\xi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \xi_\chi$ (somme finie!).
- Supposons G infini. Si $(\chi_n)_{\{n \in \mathbb{N}\}}$ est la suite des caractères irréductibles de G , alors,

$$\sum_{k=0}^n \xi_{\chi_k} \longrightarrow \xi \text{ dans } L^1(\mathbb{R}, \langle \lambda \rangle^{-(N+1)} d\lambda) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Preuve de la proposition :

Pour plus de lisibilité, on note ici ξ_k à la place de ξ_{χ_k} et P_k pour P_{χ_k} . Selon la proposition 1.2.6 :

$$\sum_{k=0}^n \langle \xi'_k, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} = \text{Tr}[(\varphi(\widehat{H}_2) - \varphi(\widehat{H}_1)) \sum_{k=0}^n P_k]. \quad (1.6)$$

Ceci prouve le cas G fini.

Plaçons-nous dans le cas G infini : en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (1.6), via la proposition 1.1.3 et le lemme 1.2.5, on obtient que $\sum_{k=0}^n \xi'_{\chi_k} \rightarrow \xi'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La convergence dans $L^1(\mathbb{R}, \langle \lambda \rangle^{-(N+1)} d\lambda)$ nécessite un lemme général sur la FDS :

Lemme 1.2.8 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, A_1, A_2 des opérateurs autoadjoints semibornés inférieurement de même domaine vérifiant $\exists E \in \mathbb{R} \cap \rho(A_2) \cap \rho(A_1)$ tel que :

$$A_1 \geq E, A_2 \geq E, \quad \exists N \in \mathbb{N}^*, \quad (A_2 - E)^{-N} - (A_1 - E)^{-N} \text{ est à trace sur } \mathcal{H}.$$

Alors la FDS "ξ" associée au couple (A_1, A_2) existe et vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(\lambda)| \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda|)^{N+1}} \leq \frac{1 + |E|}{N} \cdot \|(A_2 - E)^{-N} - (A_1 - E)^{-N}\|_{\text{Tr}}$$

Preuve du lemme :

Posons $a_j := (A_j - E)^{-N}$ pour $j = 1, 2$. On sait, via [Y] (p.306) que si on note ξ_0 la FDS associée au couple (a_1, a_2) , on a :

$$\xi(\lambda) = -\mathbb{1}_{]E; +\infty[}(\lambda) \cdot \xi_0\left(\frac{1}{(\lambda - E)^N}\right).$$

et toujours, via [Y] (p.272) :

$$\|\xi_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|a_2 - a_1\|_{\text{Tr}}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(\lambda)| \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda|)^{N+1}} = \int_E^{+\infty} |\xi_0\left(\frac{1}{(\lambda - E)^N}\right)| \frac{(\lambda - E)^{N+1}}{N(1 + |\lambda|)^{N+1}} \frac{Nd\lambda}{(\lambda - E)^{N+1}}.$$

Or

$$\left| \frac{\lambda - E}{1 + |\lambda|} \right| \leq \frac{|\lambda| + |E|}{1 + |\lambda|} \leq 1 + \frac{|E|}{1 + |\lambda|} \leq 1 + |E|.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(\lambda)| \frac{d\lambda}{(1+|\lambda|)^{N+1}} \leq \frac{1+|E|}{N} \int_E^{+\infty} |\xi_0(\frac{1}{(\lambda-E)^N})| \frac{Nd\lambda}{(\lambda-E)^{N+1}} = \frac{1+|E|}{N} \int_0^{+\infty} |\xi_0(\lambda)| d\lambda$$

Finalement

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi(\lambda)| \frac{d\lambda}{(1+|\lambda|)^{N+1}} \leq \frac{1+|E|}{N} \|\xi_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

car $a_j \geq 0$ pour $j = 1, 2$, ce qui implique $\text{supp}(\xi_0) \subset \mathbb{R}_+$. Ceci achève la preuve du lemme.

Retour à la preuve de la proposition :

Soient $p \leq q$ dans \mathbb{N} , notons $A_{j,p,q}$ la restriction de \widehat{H}_j à $\bigoplus_{n=p}^q L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ pour $j = 1, 2$. De même que supra, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=p}^q \xi_n(\lambda) \right| \frac{d\lambda}{(1+|\lambda|)^{N+1}} &\leq C_{N,E} \cdot \left\| (A_{2,p,q} - E)^{-N} - (A_{1,p,q} - E)^{-N} \right\|_{Tr} \\ &= C_{N,E} \cdot \left\| \left[(\widehat{H}_2 - E)^{-N} - (\widehat{H}_1 - E)^{-N} \right] \sum_{n=p}^q P_n \right\|_{Tr}, \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.2.8. ($\sum_{n=p}^q P_n$ est le projecteur orthogonal sur $\bigoplus_{n=p}^q L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$).

Or $s - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n P_k \right) = Id_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, donc, selon le lemme 1.2.5, $\sum_{k=0}^n \xi_k$ est de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}, \langle \lambda \rangle^{-(N+1)} d\lambda)$, donc converge vers $\eta := \sum_{n \geq 0} \xi_n \in L^1(\mathbb{R}, \langle \lambda \rangle^{-(N+1)} d\lambda)$.

Or, on a vu supra que $\sum_{k=0}^n \xi'_k$ converge vers ξ' dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Donc $\eta = \xi + Cste$.

Or les $\xi_n(\lambda)$ et $\xi(\lambda)$ sont nulles pour $\lambda < \inf[\sigma(\widehat{H}_1) \cup \sigma(\widehat{H}_2)]$, il en va de même pour η , et la constante est donc nulle, ce qui achève la preuve de la proposition. \blacksquare

Pour les problèmes de diffusion quantique avec symétrie radiale ($G = SO(3)$), on pourra consulter l'excellent [AJS]. On pourra en particulier utiliser la proposition 12.11 p.522 pour montrer une asymptotique à haute énergie de ξ_{χ_n} pour les opérateurs $\widehat{H}_1 = -\Delta$ et $\widehat{H}_2 = -\Delta + V(x)$ lorsque $V(x) = V_0(|x|)$.

1.2.4 Quelques exemples

Pour un hamiltonien H donné, on désignera par :

$$G_{max} := \{g \in O(d) : \forall z \in \mathbb{R}^{2d}, \quad H[M(g)(z)] = H(z)\}.$$

On peut considérer des hamiltoniens de Schrödinger :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + V(q).$$

Dans ce cas-là, c'est le potentiel qui dicte les symétries. On reprend les exemples de groupes de symétrie de la section 1.1.3 en donnant des hamiltoniens dont c'est le G_{max} :

• Exemple 1 : $G = \{\pm Id\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Pour $d = 1$, on a affaire à des potentiels pairs tels qu'un potentiel à *double puits* du type : $V(q) = (q^2 - 1)^2$, où même à *4 puits* du type : $V(q) = ((q^2 - 1)^2 - \frac{1}{2})^2$, des potentiels du type *oscillateur harmonique ou quartique* : $V(q) = q^2$ ou q^4 , ou encore du type "*puits dans une île*" : $V(q) = (q^2 + a)e^{-q^2}$ ($a > 0$) ...etc (voir figure 1.1).

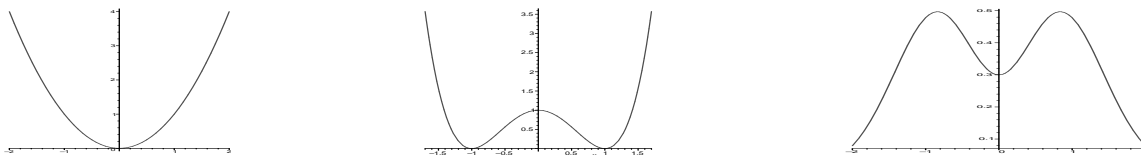


FIG. 1.1 – Potentiels harmonique, double puits et puits dans une île

Les potentiels envisagés étant positifs, $Op_h^w(H)$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dans ces exemples, $V(q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} +\infty$, donc \widehat{H} est à resolvente compacte (sauf pour le puits dans une île).

• Exemple 2 : $G \simeq \sigma_d$:

On peut par exemple considérer des potentiels pour $d = 2$ vérifiant :

$$V(x, y) = V(y, x).$$

• Exemple 3 : Groupe des isométries du triangle :

Un hamiltonien familier des physiciens en dimension $d = 2$ est le hamiltonien de **Hénon-Heiles** (voir [A], [L-W]). Ce hamiltonien sert notamment à modéliser le mouvement d'une étoile dans une galaxie cylindrique. En choisissant un paramètre adéquat, il présente des symétries. Il est alors donné par :

$$H(p, q) := \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$$

où

$$V(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

i.e. en coordonnées polaires, si $\tilde{V}(r, \theta) := V(r \cos \theta, r \sin \theta)$,

$$\tilde{V}(r, \theta) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \cos(3\theta).$$

Notons R_α la rotation du plan d'angle α dans le sens trigonométrique, et S_α la symétrie d'axe Δ_α , où Δ_α est la droite du plan faisant un angle α avec l'axe des x positifs. Ainsi, V est stable

par R_α si et seulement si, pour tout θ , $\tilde{V}(r, \theta) = \tilde{V}(r, \theta + \alpha)$ et V est stable par S_α si et seulement si pour tout θ , $\tilde{V}(r, \theta) = \tilde{V}(r, 2\alpha - \theta)$. On montre alors facilement que :

$$G_{max} = \{Id_{\mathbb{R}^2}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, S_0, S_{\frac{\pi}{3}}, S_{\frac{2\pi}{3}}\} \simeq \sigma_3 .$$

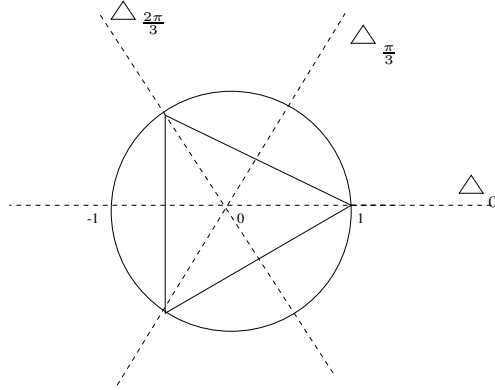


FIG. 1.2 – Symétries du triangle

Cependant, on remarque sur la formule que ce potentiel n'est pas minoré. Donc, on ne peut pas directement affirmer que son équivalent quantique est un opérateur essentiellement autoadjoint³.

On peut cependant considérer un hamiltonien semblable, qui, lui, est semi-borné inférieurement et possède les mêmes symétries en prenant plutôt le potentiel :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - xy^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

i.e. en coordonnées polaires, si $\tilde{V}(r, \theta) := V(r \cos \theta, r \sin \theta)$,

$$\tilde{V}(r, \theta) = \frac{1}{2}r^4 + \frac{1}{3}r^3 \cos(3\theta).$$

On a $\tilde{V}(r, \theta) \geq \frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{3}r^3$, donc V est minoré, et $Op_h^w(H)$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. De plus, $H(q, p) \geq \frac{1}{2}(|p|^2 + |q|^2) + C$, où C est une constante. Donc H est une application propre et \hat{H} est à résolvante compacte. Bien entendu, on a perdu le sens physique qu'avait le hamiltonien de Hénon-Heiles.

• Exemple 4 : Groupe des isométries du carré :

On considère, toujours pour $d = 2$, un hamiltonien de Schrödinger de potentiel :

$$V(x, y) := \frac{1}{2}x^2y^2.$$

³Question : l'opérateur $-\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ est-il essentiellement autoadjoint ?

On vérifie facilement que pour tel H , G_{max} est le groupe des isométries d'un carré,

$$G_{max} = \{\pm Id_{\mathbb{R}^2}, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{-\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{\pi}{4}}, S_{\frac{\pi}{2}}, S_{\frac{3\pi}{4}}, S_0\}$$

Par ailleurs, $Op_h^w(H)$ est essentiellement autoadjoint et on peut montrer que \widehat{H} est à résolvante compacte (voir B. Helffer, cours de DEA, <http://www.math.u-psud.fr/~helffer/>). Cet hamiltonien est réputé très chaotique, au sens où une petite perturbation sur la condition initiale peut entraîner de grands changements dans l'évolution du système dynamique associé (voir l'article de M. Lübcke sur <http://www.teorfys.uu.se/courses/exjobb/gutz.pdf>).

• Exemple 5 : Oscillateurs harmoniques à fréquences distinctes : $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$

Considérons le hamiltonien à potentiel quadratique suivant :

Lemme 1.2.9 Soit $S \gg 0$ une matrice réelle symétrique définie positive de taille $d \times d$ dont les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes. Pour q et p appartenant à \mathbb{R}^d , on pose :

$$V(q) := \langle Sq; q \rangle_{\mathbb{R}^d} \quad , \quad H(q, p) := |p|^2 + V(q).$$

Soit $O \in O(d)$ telle que $S = {}^t O.D.O$ avec D diagonale.

Alors pour H ainsi défini,

$$G_{max} = {}^t O.\{diag(\pm 1)\}.O \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$$

où $diag(\pm 1)$ désigne une matrice diagonale dont les termes sont 1 ou -1.

Idée de la preuve :

$$g \in O(d) \text{ est une symétrie pour } H \iff \forall x \in \mathbb{R}^d, \langle (S - g^{-1}Sg)x, x \rangle = 0$$

i.e. $S - g^{-1}Sg$ est à la fois symétrique et antisymétrique, donc nulle, i.e. $[S, g] = 0$. En diagonalisant S en base orthonormée, on se ramène aisément au cas où S est diagonale. Puis, si les g_{ij} sont les coefficients de la matrice de g dans la base canonique de \mathbb{R}^d , et si $S = diag(a_1, \dots, a_d)$, alors on a :

$$[S, g] = 0 \iff a_i g_{ij} = a_j g_{ij}.$$

Donc, $a_i \neq a_j \Rightarrow g_{ij} = 0$. ■

V étant continu et positif, $Op_h^w(H)$ est essentiellement autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. En outre, $V(q) \xrightarrow{|q| \rightarrow +\infty} +\infty$, donc \widehat{H} est positif à résolvante compacte.

Cet exemple est intéressant, car c'est un des rares cas où l'on peut, pour $d \geq 2$, calculer

effectivement les orbites périodiques du système hamiltonien classique :

$$\dot{z}(t) = J\nabla H(z(t)). \quad (1.7)$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$$

On verra, lorsqu'on abordera la formule de trace de Gutzwiller que les asymptotiques des formules de trace que nous allons étudier sont souvent liées aux orbites périodiques de ce système.

• Exemple 6 : Oscillateurs harmoniques plus généraux :

On obtient des symétries avec des groupes de Lie isomorphes à des groupes orthogonaux en prenant des fréquences égales :

-L'exemple le plus simple est celui de l'oscillateur harmonique de base en dimension d :

$$H(q, p) = |p|^2 + |q|^2$$

pour lequel $G_{\max} = O(d)$, à résolvante compacte, dont on connaît le spectre (**symétrie sphérique**).

-Si on prend par exemple avec $d = 3$; $H(q, p) = |p|^2 + V(q)$ où :

$$V(x, y, z) = x^2 + 2(y^2 + z^2)$$

on obtient $G_{\max} = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & SO(2) \end{array} \right)$ (voir preuve dans l'exemple 5), ce qui nous donne un cas de **symétrie cylindrique**.

Chapitre 2

Le cas d'un groupe fini

2.1 Asymptotiques faibles

Si un opérateur autoadjoint A , semiborné inférieurement, est à résolvante compacte, et si l'on note $\{\lambda_j : j \geq 0\}$ la suite de ses valeurs propres répétées avec ordre de multiplicité géométrique (avec $\lambda_j \rightarrow +\infty$), alors la **fonction de comptage** associée à A est, comme on l'a vu précédemment :

$$N_A(\lambda) := \sum_{j \geq 0} \mathbb{1}_{\{\lambda_j \leq \lambda\}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

$N_A(\cdot)$ est en particulier une distribution sur \mathbb{R} , et si f est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \frac{dN_A}{d\lambda}, f \rangle = - \int_{\mathbb{R}} N_A(\lambda) f'(\lambda) d\lambda = - \sum_{j \geq 0} \int_{\lambda_j}^{+\infty} f'(\lambda) d\lambda = \sum_{j \geq 0} f(\lambda_j) = \text{Tr}(f(A)).$$

Cette dernière formule montre comment le comportement de N_A est lié à la trace $\text{Tr}(f(A))$. Dans ce chapitre on s'intéresse à l'opérateur $A = \widehat{H}_\chi$ sur $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$. Nous allons voir comment, en considérant des fonctions " f " bien choisies, on peut décrire le comportement asymptotique semi-classique des fonctions de comptage partielles $N_\chi(I)$ évoquées dans le chapitre précédent, lorsque h tend vers zéro, grâce à des formules de trace.

2.1.1 Décor et résultat principal

Motivation : Lorsque H est un hamiltonien vérifiant **(H.0)** et ayant pour groupe de symétrie un groupe fini G , on veut donner, pour $\chi \in \widehat{G}$ et f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, une asymptotique semi-classique de la quantité $\text{Tr}[f(\widehat{H}_\chi)]$ lorsque $f(\widehat{H})$ est de trace classe. On écrit donc :

$$\text{Tr}[f(\widehat{H}_\chi)] = \text{Tr}[f(\widehat{H})P_\chi] = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \text{Tr}[f(\widehat{H})\tilde{M}(g)]. \quad (2.1)$$

Puis, on utilise le calcul fonctionnel développé par Helffer et Robert dans [**He-Ro1**], qui permet de décrire $f(\widehat{H})$ (voir aussi [Ro] Théorème (III-11), p.143) :

Il existe $h_0 > 0$, une suite $(a_j) \in S(\langle H \rangle, g_0)^1$ et une suite $R_N(h)$ ($N \geq N_0$) tels que :

$$f(\widehat{H}) = \sum_{j=0}^N h^j \widehat{a}_j + h^{N+1} R_{N+1}(h), \quad (2.2)$$

- avec
- ▶ $\sup_{0 < h \leq h_0} \|R_{N+1}(h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} < +\infty$.
 - ▶ $a_j(z) = \sum_{k=1}^{2j-1} \frac{d_{j,k}(z)}{k!} f^{(k)}(H(z))$.
 - ▶ $a_0(z) = f(H(z))$ et $|\partial^\alpha d_{j,k}(z)| \leq C_\alpha \langle H(z) \rangle^k$.

On voit clairement sur ces formules que, pour l'asymptotique de $\text{Tr}[f(\widehat{H}_\chi)]$, on est ramené ² à étudier des termes de la forme :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)).$$

Ainsi, dans la suite on va commencer par considérer un hamiltonien $a(z)$ sans symétrie et un g fixé dans $O(d)$. On se donne :

$$a : z \mapsto a(z)$$

une fonction réelle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, vérifiant : $\forall z \in \mathbb{R}^{2d}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}$,

$$\boxed{|\partial_z^\alpha a(z)| \leq C_\alpha \langle z \rangle^{-\rho}, \text{ où } \rho > 2d.} \quad (2.3)$$

On lui associe l'opérateur h -pseudodifférentiel $A := Op_h^w(a)$ défini pour ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, par :

$$Op_h^w(a)\psi(x) := (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d} e^{\frac{i(x-y)\cdot\xi}{h}} a\left(\frac{x+y}{2}; \xi\right) \psi(y) d\xi dy.$$

ou de façon duale par :

$$\langle Op_h^w(a)\phi; \psi \rangle_{L^2} = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_{\phi, \psi}(z) a(z) dz. \quad (2.4)$$

où ϕ et ψ sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et $W_{\phi, \psi}$ est la h -transformée de Wigner :

$$W_{\phi, \psi}(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{h} y \xi} \phi\left(x + \frac{y}{2}\right) \overline{\psi\left(x - \frac{y}{2}\right)} dy.$$

(voir [Fo], p.56, et proposition 2.5 p.81). On sait (voir [Ro], Théorème (II-53) p.105) que (2.3) assure le fait que $Op_h^w(a)$ est un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On dispose d'ailleurs d'une formule exacte pour la trace de $A := Op_h^w(a)$ (cf infra). Cependant, il est important de noter que $Op_h^w(a)\tilde{M}(g)$ n'est pas en général un opérateur pseudo-différentiel. Ainsi le résultat que nous allons obtenir n'est pas une formule exacte, mais un développement asymptotique en puissances

¹Au sens de [He-Ro 1].

²Sur la formule donnée, il n'est pas clair que le reste est à trace, mais une astuce classique (toujours [He-Ro1] ou [Ro] proposition III.16 p.150) permet d'éviter cet écueil.

de h . Dans le théorème suivant, on ne suppose pas que le symbole a est invariant par $M(g)$:

Théorème 2.1.1 *On fixe g dans $O(d)$, et on pose :*

$$\nu_g := \dim \ker(g - Id_{\mathbb{R}^d}), \quad F_g := \ker(M(g) - Id_{\mathbb{R}^{2d}}) \quad \text{et} \quad \tilde{F}_g := \ker(g - Id_{\mathbb{R}^d}).$$

Alors, sous les hypothèses ci-dessus, on a, pour tout N dans \mathbb{N}^ , lorsque $h \rightarrow 0^+$:*

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-\nu_g} \sum_{k=0}^{N-1} h^k c_k(a, g) + O(h^{N-\nu_g}). \quad (2.5)$$

où les $c_k(a, g)$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients dépendant de g) d'éléments de la forme $\int_{F_g} \partial^\alpha a(z) d\sigma_g(z)$.

En particulier :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = \frac{(2\pi h)^{-\nu_g}}{\det[(Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp}]} \int_{F_g} a(z) d\sigma_g(z) + O(h^{1-\nu_g}), \quad \text{quand } h \rightarrow 0^+ \quad (2.6)$$

où $d\sigma_g$ est la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel F_g .

Enfin on a :

$$c_k(a, g) = (2\pi)^{-d+\nu_g} \sum_{|\gamma+\beta|=2k} \sum_{\nu \leq \gamma} \frac{c_{\gamma,\nu}}{\gamma!\beta!} \int_{F_g} \partial^{\gamma+\beta} a d\sigma_{F_g} \cdot \int_{F_g^\perp} e^{i\langle Ax, x \rangle} [J(I-g^{-1})x]^\nu \left[\frac{I+g^{-1}}{2}\right]^\beta d\sigma_{F_g^\perp}. \quad (2.7)$$

où

$$A := \frac{1}{4}J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{i}{4}(I - M(g))(I - M(g^{-1})),$$

et les $c_{\gamma,\nu}$ sont des constantes universelle données par $P_\gamma(z) = \sum_{\nu \leq \gamma} c_{\nu,\gamma} z^\nu$, ($z \in \mathbb{R}^{2d}$) où :

$$D^\gamma [\exp(-\frac{|z|^2}{4})] = P_\gamma(z) \exp(-\frac{|z|^2}{4}).$$

Commentaires :

- Les intégrales sur F_g n'ont de sens que si chaque $\partial^\alpha a$ décroît dans la direction de F_g , ce qui est assuré par (2.3).
- Pour $g = \pm Id_{\mathbb{R}^d}$, on (re)trouve des formules exactes (voir preuve) :

$$\tilde{M}(Id) = Id_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et} \quad (\tilde{M}(-Id)f)(x) = f(-x).$$

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) dz, \quad \text{et} \quad \text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(-Id)) = 2^{-d}a(0).$$

- On constate que plus g a de points fixes, plus le comportement en h de la formule de trace est divergent.

Corollaire 2.1.2 Soient G un sous-groupe fini de $O(d)$, $\chi \in \widehat{G}$ et A un opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl $a(\cdot)$ G -invariant, et $\chi \in \widehat{G}$. Alors, $\text{Tr}(A_\chi)$ admet un développement asymptotique à tout ordre en puissances de h ,

$$(2\pi h)^d \cdot \text{Tr}(A_\chi) = \frac{d_\chi^2}{|G|} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) dz + O(h), \quad \text{quand } h \rightarrow 0^+.$$

et donc

$$\text{Tr}(A_\chi) = \frac{d_\chi^2}{|G|} \text{Tr}(A) + O(h^{-d+1}), \quad \text{quand } h \rightarrow 0^+.$$

Preuve du corollaire : l'élément dominant est l'élément neutre "Id" de G , et $\overline{\chi(\text{Id})} = d_\chi$. ■

On constate que plus le degré de χ est important, plus $\text{Tr}(A_\chi)$ contribue à $\text{Tr}(A)$.

Corollaire 2.1.3 Soient G un groupe fini de $O(d)$, $\chi \in \widehat{G}$ et H un hamiltonien vérifiant **(H.0)** et ayant G pour groupe de symétrie. On se donne $a < b$ dans \mathbb{R} , on note $I := [a, b]$ et on suppose de plus que $H^{-1}(I)$ est compact.

Alors, $\forall f \in C_0^\infty(I)$, $f(\widehat{H}_\chi)$ est de classe trace et $\text{Tr}(f(\widehat{H}_\chi))$ admet un développement asymptotique à tout ordre en puissances de h quand h tend vers zéro tel que :

$$\text{Tr}(f(\widehat{H}_\chi)) = \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(H(z)) dz + O(h^{1-d}), \quad \text{quand } h \rightarrow 0^+. \quad (2.8)$$

Par ailleurs, le spectre de \widehat{H}_χ est discret dans I et si $\text{Vol}_{\mathbb{R}^{2d}}(H^{-1}(\partial I)) = 0$, alors on a :

$$(2\pi h)^d N_\chi(I) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{d_\chi^2}{|G|} \text{Vol}(H^{-1}(I)). \quad (2.9)$$

Remarques : **(1)** Lorsque $H^{-1}(I)$ est compact, le spectre de \widehat{H} est aussi discret dans I . Ainsi, (2.9) s'écrit :

$$\frac{N_\chi(I)}{N(I)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{d_\chi^2}{|G|},$$

ce qui peut s'interpréter en disant qu'à la limite semi-classique, la proportion de valeurs propres de \widehat{H} ayant une fonction propre dans $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ est de $\frac{d_\chi^2}{|G|}$. En particulier, une proportion d'au moins $\frac{d_\chi^2}{|G|}$ des valeurs propres de \widehat{H} ont une multiplicité supérieure à d_χ lorsque h tend vers zéro (cf paragraphe 1.2.2), et plus le degré de χ est élevé, plus $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ participe au spectre de \widehat{H} dans I .

(2) La formule (2.9) sera améliorée dans le chapitre suivant, où l'on donnera une estimation du reste $R(h) := N_\chi(I) - \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi h)^{-d} \text{Vol}(H^{-1}(I))$.

(3) Dans sa thèse, Z. El Houakmi donne une preuve de (2.8) en passant par le noyau de Schwartz $K(x, y)$ de l'opérateur $T_K := f(\widehat{H})P_\chi$ et en utilisant une formule du type :

$$\mathrm{Tr}(T_K) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, x) dx.$$

Ce type de formule est assez long à justifier en général car il faut des informations sur la régularité du noyau $K(x, y)$ (voir [El-H] ou [Ro]).

(4) $\mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^{2d}}(H^{-1}(\partial I)) = 0$ lorsque $\{H = a\}$ et $\{H = b\}$ sont des niveaux d'énergie non critiques.

Preuve du corollaire :

• Soit $f \in C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$. On peut améliorer (2.2) en affirmant que

$$\|R_{N+1}(h)\|_{\mathrm{Tr}} = O(h^{-d}).$$

(voir [Ro] p.250 Théorème V-4). Ainsi, $\mathrm{Supp} a_j \subset \mathrm{Supp} (f \circ H) \subset H^{-1}(I)$ est compact, $f(\widehat{H})$ est à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f(\widehat{H}_\chi)$ aussi. L'asymptotique théorique en puissances de h découle donc des réductions de (2.1) et du théorème 2.1.1. Le premier terme est celui de $\mathrm{Tr}(Op_h^w[f(H(z))]P_\chi)$, qui est donc : $\frac{d_\chi^2}{|G|}(2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(H(z)) dz$, selon le corollaire précédent.

• Pour la limite de la fonction de comptage partielle, fixons ε petit et considérons des fonctions φ_ε et ψ_ε à valeurs dans $[0, 1]$, à support compact dans \mathbb{R} et vérifiant :

$$\mathrm{Supp} \varphi_\varepsilon \subset]a, b[\text{ et } \varphi_\varepsilon = 1 \text{ sur } [a + \varepsilon, b - \varepsilon].$$

$$\mathrm{Supp} \psi_\varepsilon \subset]a - \varepsilon, b + \varepsilon[\text{ et } \psi_\varepsilon = 1 \text{ sur } [a, b].$$

Ainsi, sur \mathbb{R} :

$$\varphi_\varepsilon \leq \mathbb{1}_{[a, b]} \leq \psi_\varepsilon$$

et donc :

$$(2\pi h)^d \mathrm{Tr}[\varphi_\varepsilon(\widehat{H}_\chi)] \leq (2\pi h)^d N_\chi(I) \leq (2\pi h)^d \mathrm{Tr}[\psi_\varepsilon(\widehat{H}_\chi)].$$

ainsi :

$$\frac{d_\chi^2}{|G|} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbb{1}_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}(H(z)) dz \leq \frac{d_\chi^2}{|G|} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(H(z)) dz \leq \liminf_{h \rightarrow 0^+} \left((2\pi h)^d N_\chi(I) \right).$$

et de même :

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \left((2\pi h)^d N_\chi(I) \right) \leq \frac{d_\chi^2}{|G|} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbb{1}_{[a-\varepsilon, b+\varepsilon]}(H(z)) dz.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient :

$$\frac{d_\chi^2}{|G|} \mathrm{Vol}(H^{-1}(]a, b[)) \leq \liminf_{h \rightarrow 0^+} \left((2\pi h)^d N_\chi(I) \right) \leq \limsup_{h \rightarrow 0^+} \left((2\pi h)^d N_\chi(I) \right) \leq \frac{d_\chi^2}{|G|} \mathrm{Vol}(H^{-1}([a, b]))$$

L'hypothèse $Vol_{\mathbb{R}^{2d}}(H^{-1}(\partial I)) = 0$ assure que $Vol(H^{-1}([a, b])) = Vol(H^{-1}(]a, b[))$.

Ceci achève la preuve du corollaire. ■

Enfin, à titre d'illustration supplémentaire, nous donnons une asymptotique faible de la FDS dans le cadre de la diffusion avec deux opérateurs ayant le même groupe de symétries. Cette formule peut servir à calculer les coefficients d'une éventuelle asymptotique forte de la FDS.

Corollaire 2.1.4 *Sous les hypothèses de la proposition 1.2.6, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\langle \xi'_x; \varphi \rangle$ admet une asymptotique en puissance de h quand h tend vers zéro, dont le premier terme est donné par :*

$$\langle \xi'_x; \varphi \rangle = \frac{d_x^2}{|G|} \langle \xi'; \varphi \rangle + O(h^{1-d}).$$

On peut cependant remarquer que les termes suivants le premier peuvent être assez différents de ceux de la FDS sans symétries : par exemple, on sait que dans le cas $H_1 = -h^2\Delta$, $H_2 = -h^2\Delta + V(x)$, la FDS sans symétries ne fait apparaître que des puissances paires de h . Il n'en est rien pour la FDS avec symétries.

2.1.2 Preuve du théorème 2.1.1

On va utiliser ici une formule de trace pour les opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ faisant intervenir les états cohérents (voir Appendice 4.2.3 pour la preuve) : si A est un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors³

$$\mathrm{Tr}(A) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \langle A\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha.$$

Donc, comme $\tilde{M}(g)\varphi_\alpha = \varphi_{M(g)\alpha}$ (cf 4.2.1) :

$$\mathrm{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = \mathrm{Tr}(\tilde{M}(g)Op_h^w(a)) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \langle Op_h^w(a)\varphi_\alpha; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle d\alpha.$$

En utilisant (2.4), on a :

$$\mathrm{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-2d} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z)W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) dz d\alpha. \quad (2.10)$$

³Le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ sera ici pris antilinéaire de second membre

Lemme 2.1.5 La h -transformée de Wigner du couple $(\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha})$ est : $W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) = 2^d \exp\left[\frac{i}{h} \langle J(I - M(g^{-1}))\alpha, z \rangle\right] \cdot \exp\left[-\frac{i}{2h} \langle J\alpha, M(g^{-1})\alpha \rangle\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{h}|z - \left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)\alpha|^2\right]$.

où :

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2d}(\mathbb{R}).$$

Preuve du lemme : on pose $z = (x, \xi)$ et $\alpha = (q, p)$.

$$W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) = (\pi h)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{i}{h}x \cdot (p - g^{-1}p)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{h}y \cdot \xi} e^{-\frac{1}{2h}(|x + \frac{y}{2} - q|^2 + |x - \frac{y}{2} - g^{-1}q|^2)} \cdot e^{(\frac{i}{2h}y \cdot (p + g^{-1}p))} dy.$$

D'après l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) &= (\pi h)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{i}{h}x \cdot (p - g^{-1}p)} e^{\frac{1}{h}|x - \frac{(q + g^{-1}q)}{2}|^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{h}y \cdot \frac{(\xi - (p + g^{-1}p))}{2}} e^{\frac{|y - (q - g^{-1}q)|^2}{4h}} dy. \\ &= (\pi h)^{-\frac{d}{2}} e^{\frac{i}{h}x \cdot (p - g^{-1}p)} e^{-\frac{1}{h}|x - \frac{(q + g^{-1}q)}{2}|^2} e^{\frac{i}{2h}(q - g^{-1}q) \cdot (p + g^{-1}p)} \cdot e^{-\frac{i}{h}\xi \cdot (q - g^{-1}q)} \mathcal{F}_{y \rightarrow \xi} \left(e^{-\frac{|y|^2}{4h}} \right) \left(\frac{\xi}{h} - \frac{p + g^{-1}p}{2h} \right). \\ &= 2^d e^{\frac{i}{h}x \cdot (p - g^{-1}p)} e^{-\frac{1}{h}|x - \frac{(q + g^{-1}q)}{2}|^2} e^{\frac{i}{2h}(q - g^{-1}q) \cdot (p + g^{-1}p)} \cdot e^{-\frac{i}{h}\xi \cdot (q - g^{-1}q)} e^{-\frac{1}{h}|\xi - \frac{(p + g^{-1}p)}{2}|^2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de constater que $(q - g^{-1}q) \cdot (p + g^{-1}p) = - \langle J\alpha; M(g^{-1})\alpha \rangle_{\mathbb{R}^{2d}}$, ce qui achève la preuve du lemme. ■

Cette formule se simplifie pour le cas où $g = \pm Id_{\mathbb{R}^d}$:

Corollaire 2.1.6 On a les formules exactes :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) dz \quad \text{et} \quad \text{Tr}(Op_h^w(a) \tilde{M}(-Id)) = 2^{-d} a(0).$$

Preuve du corollaire :

• Pour $g = +Id_{\mathbb{R}^d}$, $W_{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha}(z) = 2^d \exp(-\frac{1}{h}|z - \alpha|^2)$.

Donc :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle Op_h^w(a) \varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle d\alpha = (2\pi h)^{-2d} 2^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) e^{-\frac{1}{h}|z - \alpha|^2} dz d\alpha$$

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)) = (2\pi h)^{-2d} 2^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) dz \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-|\alpha|^2} d\alpha h^d = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) dz.$$

• Pour $g = -Id_{\mathbb{R}^d}$, $W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) = 2^d \exp(\frac{i}{h} \langle 2J\alpha, z \rangle) e^{-\frac{|z|^2}{h}}$.

Donc :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a) \tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-2d} 2^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \exp(\frac{i}{h} \langle 2J\alpha, z \rangle) e^{-\frac{|z|^2}{h}} a(z) dz d\alpha.$$

$$\text{Tr}(Op_h^w(a) \tilde{M}(g)) = h^{-2d} 2^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{F}_{z \rightarrow \alpha}^{-1} [e^{-\frac{|z|^2}{h}} a(z)] \left(\frac{2J\alpha}{h} \right) d\alpha = 2^{-d} a(0).$$

Ceci achève la preuve du corollaire. ■

Cependant, dans le cas général, le calcul n'est pas si aisé, d'autant que l'intégrale "double" dans (2.10) est oscillante comme on a pu le constater pour le cas $g = -Id$ (en fait dès que $\ker(Id + g) \neq 0$). Remarquons que la gaussienne $z \mapsto W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z)$ est centrée en $\frac{I+M(g^{-1})}{2}\alpha$. Pour rendre convergente l'intégrale "en α ", on peut donc utiliser la formule vectorielle de Taylor avec reste intégral entre z et $\frac{I+M(g^{-1})}{2}\alpha$ pour N entier non nul :

$$(2\pi h)^{2d} \cdot \text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \partial^\gamma a\left(\left(\frac{I+g^{-1}}{2}\right)\alpha\right) m_{\gamma,h}(\alpha) d\alpha + \int_0^1 (1-t)^{N-1} \sum_{|\gamma|=N} \frac{N}{\gamma!} \int_{\mathbb{R}^{2d}} R_{\gamma,h,t}(\alpha) d\alpha dt. \quad (2.11)$$

où :

$$\boxed{m_{\gamma,h}(\alpha)} := \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) (z - \left(\frac{I+g^{-1}}{2}\right)\alpha)^\gamma dz. \quad (2.12)$$

$$\boxed{R_{\gamma,h,t}(\alpha)} := \int_{\mathbb{R}^{2d}} (\partial^\gamma a)(tz + (1-t)\left(\frac{I+g^{-1}}{2}\right)\alpha) W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) (z - \left(\frac{I+g^{-1}}{2}\right)\alpha)^\gamma dz. \quad (2.13)$$

Remarque : les intégrales dans (2.12) et (2.13) sont absolument convergentes car $\partial^\gamma a(\cdot)$ est bornée et

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |W_{\varphi_\alpha, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) (z - \left(\frac{I+g^{-1}}{2}\right)\alpha)^\gamma| dz = 2^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-\frac{|z|^2}{h}} |z^\gamma| dz < +\infty.$$

Proposition 2.1.7 *Uniformément en $t \in [0, 1]$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |R_{\gamma,h,t}(\alpha)| d\alpha = O(h^{\frac{N}{2}} h^d) \text{ quand } h \rightarrow 0^+.$$

Preuve de la proposition :

Afin d'éviter les lourdeurs d'écriture, la lettre "C" désignera un $O(1)$ universel.

On a :

$$R_{\gamma,h,t}(\alpha) = C \int_{\mathbb{R}^{2d}} z^\gamma e^{-\frac{|z|^2}{h}} e^{\frac{i}{h} \langle J(I-M(g^{-1}))\alpha; z \rangle} (\partial^\gamma a)(tz + \left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)\alpha) dz.$$

Si on majore directement par inégalité triangulaire sous l'intégrale, on perd la dépendance en α (par exemple pour $g = -Id$). On va donc faire des **intégrations par parties** pour profiter de la phase : $e^{\frac{i}{h} \langle J(I-M(g^{-1}))\alpha; z \rangle}$, mais il faudra d'abord décomposer chaque intégrale sur \mathbb{R}^{2d} en deux intégrales sur F_g et F_g^\perp (rappelons que $F_g = \ker(Id_{\mathbb{R}^{2d}} - M(g))$).

• Notons $k := \dim F_g$. On commence par faire un changement de variable sur \mathbb{R}^{2d} :

Soient (e_1, \dots, e_{2d}) la base canonique de \mathbb{R}^{2d} .

(f_1, \dots, f_k) une base orthonormée de F_g et (f_{k+1}, \dots, f_{2d}) une base orthonormée de F_g^\perp .

$U \in O(2d)$ tel que $\forall j = 1, \dots, 2d, U(e_j) = f_j$.

On fait alors les changement de variables $\alpha \leftarrow U(\alpha)$ et $z \leftarrow U(z)$. Puis on écrit :

$$\alpha = (\alpha', \alpha'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2d-k} \text{ et } z = (z', z'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2d-k}.$$

et on remarque que :

$\langle U(I-M(g^{-1}))U(\alpha); U(z) \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle {}^t UJ(I-M(g^{-1}))U(0, \alpha''); (0, z'') \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle A\alpha''; z'' \rangle_{\mathbb{R}^{2d-k}}$,
où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2d-k})$ est *bijective*.

$\triangleright [U(z)]^\gamma$ est un polynôme homogène en la variable z de degré $|\gamma| = N$. Ainsi, on doit montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\tilde{R}_{\gamma, h, t}(\alpha)| d\alpha = O(h^d h^{\frac{N}{2}}),$$

où

$$\tilde{R}_{\gamma, h, t}(\alpha) = C \int_{\mathbb{R}_{z'}^k} (z')^{\nu_1} e^{-\frac{|z'|^2}{h}} \int_{\mathbb{R}_{z''}^{2d-k}} e^{\frac{i}{h} \langle A\alpha'', z'' \rangle} e^{-\frac{|z''|^2}{h}} (z'')^{\nu_2} v(z'') dz'' dz'. \quad (2.14)$$

et

$$v(z'') := (\partial^\gamma a)[U(tz' + \alpha', 0) + tU(0, z'') + (\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')]$$

avec $\nu := (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^{2d-k}$ et $|\nu| = N = |\nu_1| + |\nu_2|$.

Pour pouvoir faire proprement les intégrations par parties, on se donne une fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k})$ telle que $\chi(\alpha'') = 1$ dès que $|\alpha''| \leq 1$ et on écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\tilde{R}_{\gamma, h, t}(\alpha)| d\alpha = K_{h, t} + L_{h, t}.$$

où :

$$K_{h, t} := \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\chi(\alpha'')| |\tilde{R}_{\gamma, h, t}(\alpha)| d\alpha \text{ et } L_{h, t} := \int_{\mathbb{R}^{2d}} |(1 - \chi(\alpha''))| |\tilde{R}_{\gamma, h, t}(\alpha)| d\alpha.$$

• Estimation de $K_{h, t}$:

On remarque que $U(tz' + \alpha', 0)$ et $tU(0, z'') + (\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')$ sont orthogonaux, donc selon (2.3), on a :

$$\begin{aligned} K_{h, t} &\leq C \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d}} |\chi(\alpha'')| \int_{\mathbb{R}_{z'}^k} |z'|^{|\nu_1|} e^{-\frac{|z'|^2}{h}} \int_{\mathbb{R}_{z''}^{2d-k}} e^{-\frac{|z''|^2}{h}} |z''|^{|\nu_2|} dz'' \langle tz' + \alpha' \rangle^{-\rho} dz' d\alpha. \\ &\leq Ch^{\frac{|\nu_2|}{2}} h^{\frac{2d-k}{2}} \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} |\chi(\alpha'')| d\alpha'' \cdot \int_{\mathbb{R}_{z'}^k} |z'|^{|\nu_1|} e^{-\frac{|z'|^2}{h}} \int_{\mathbb{R}_{\alpha'}^k} \langle tz' + \alpha' \rangle^{-\rho} d\alpha' dz'. \\ &\leq C.h^{\frac{N}{2}} h^d. \end{aligned}$$

et cette dernière estimation est uniforme en $t \in [0, 1]$ et en $g \in O(d)$.

• Estimation de $L_{h, t}$:

On fait les changements de variable : $\frac{z''}{\sqrt{h}} \leftarrow z''$ et $\frac{\alpha''}{\sqrt{h}} \leftarrow \alpha''$:

$$L_{h, t} = C.h^{\frac{|\nu_2|}{2}} h^{2d-k} \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d}} |(1 - \chi(\sqrt{h}\alpha''))| \int_{\mathbb{R}_{z'}^k} (z')^{\nu_1} e^{-\frac{|z'|^2}{h}} V_{h, t}(\alpha, z') dz' d\alpha.$$

où $V_{h,t}(\alpha, z') :=$

$$\int_{\mathbb{R}_{z''}^{2d-k}} e^{i\langle A\alpha'', z'' \rangle} e^{-|z''|^2} (z'')^{\nu_2} (\partial^\gamma a) [U(tz' + \alpha', 0) + t\sqrt{h}U(0, z'') + \sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')] dz''$$

On peut alors procéder à une intégration par parties dans $V_{h,t}(\alpha, z')$, via l'opérateur :

$$L := \frac{1}{i} \frac{A\alpha''}{|A\alpha''|^2} \cdot \nabla_{z''}$$

qui est bien défini pour α'' dans le support de $1 - \chi$. On a bien sûr :

$$L(e^{i\langle A\alpha'', z'' \rangle}) = e^{i\langle A\alpha'', z'' \rangle},$$

et si $k_0 \in \mathbb{N}^*$,

$$L^{k_0} \left[e^{-|z''|^2} (z'')^{\nu_2} (\partial^\gamma a) [U(tz' + \alpha', 0) + t\sqrt{h}U(0, z'') + \sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')] \right]$$

est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$O \left(\frac{1}{|A\alpha''|^{k_0}} \right) (t\sqrt{h})^* \cdot f(z'') (\partial^\beta a) [U(tz' + \alpha', 0) + t\sqrt{h}U(0, z'') + \sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')].$$

uniformément en $t \in [0, 1]$ et en $g \in O(d)$, où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d-k})$ et $*$ est un entier positif. Donc en majorant $t\sqrt{h}$ par 1, on a :

$$\begin{aligned} L_{h,t} &\leq C \cdot h^{\frac{\nu_2}{2}} h^{2d-k} \cdot \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} \frac{|1 - \chi(\sqrt{h}\alpha'')|}{|A\alpha''|^{k_0}} d\alpha'' \cdot \int_{\mathbb{R}_{z'}^k} |z'|^{\nu_1} e^{-\frac{|z'|^2}{h}} \int_{\mathbb{R}_{z''}^{2d-k}} |f(z'')| \int_{\mathbb{R}_{\alpha'}^k} \langle tz' + \alpha' \rangle^{-\rho} d\alpha' dz'' dz'. \\ &\leq C \cdot h^{\frac{\nu_2}{2}} h^{2d-k} \cdot \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} \frac{|1 - \chi(\sqrt{h}\alpha'')|}{|A\alpha''|^{k_0}} d\alpha'' \cdot h^{\frac{\nu_1}{2}} h^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

et pour k_0 assez grand,

$$\int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} \frac{|1 - \chi(\sqrt{h}\alpha'')|}{|A\alpha''|^{k_0}} d\alpha'' \leq 2h^{\frac{k_0}{2}} h^{\frac{k}{2}-d} \text{Max}(1, \|\chi\|_\infty) \int_{|\alpha''| \geq 1} \frac{d\alpha''}{|A\alpha''|^{k_0}} < +\infty.$$

Remarque Si on garde à l'esprit le projet d'adapter ce résultat pour les groupes de Lie, on constate que le terme $\int_{|\alpha''| \geq 1} \frac{d\alpha''}{|A\alpha''|^{k_0}}$ n'est pas en général borné uniformément en $g \in O(d)$. En effet, pour $d = 2$, il est égal à $\frac{C}{(1 - \cos \theta)^{\frac{k_0}{2}}} \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^{k_0}}$ (où θ est l'angle de la rotation g). En fait pour les groupes de Lie, nous utiliserons des méthodes différentes et supposerons que a est à support compact.

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

On a donc :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-2d} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \partial^\gamma a \left(\left(\frac{I+M(g^{-1})}{2} \right) \alpha \right) m_{\gamma,h}(\alpha) d\alpha + O(h^{\frac{N}{2}} h^{-d}). \quad (2.15)$$

On va tout d'abord calculer $m_{\gamma,h}(\alpha)$:

Proposition 2.1.8 Soit P_β le polynôme réel de degré $|\beta|$ tel que :

$$D^\beta[\exp(-\frac{|z|^2}{4})] = P_\beta(z) \exp(-\frac{|z|^2}{4}). \quad (2.16)$$

Alors on a :

$$m_{\gamma,h}(\alpha) = (2\pi h)^d \cdot \exp[\frac{i}{h}\Phi(\alpha)] \cdot h^{\frac{\gamma}{2}} P_\gamma\left(\frac{J(I-M(g^{-1}))\alpha}{\sqrt{h}}\right). \quad (2.17)$$

où :

$$\phi(\alpha) := \frac{1}{2} \langle J\alpha, M(g^{-1})\alpha \rangle + \frac{i}{4} |(I-M(g^{-1}))\alpha|^2 \quad (2.18)$$

Preuve de la proposition : Selon le lemme 2.1.5, $m_{\gamma,h}(\alpha) =$

$$2^d e^{-\frac{i}{2h}\langle J\alpha, M(g^{-1})\alpha \rangle} \cdot e^{\frac{i}{h}\langle J(I-M(g^{-1}))\alpha, (\frac{I+M(g^{-1})}{2})\alpha \rangle} \int_{\mathbb{R}^{2d}} z^\gamma e^{-\frac{|z|^2}{h}} \cdot e^{\frac{i}{h}\langle J(I-M(g^{-1}))\alpha; z \rangle} dz.$$

Or, comme $M(g^{-1}) \in O(2d)$ et que $[J, M(g^{-1})] = 0$, on a :

$$\langle J(I-M(g^{-1}))\alpha, (\frac{I+M(g^{-1})}{2})\alpha \rangle = \langle J\alpha; M(g^{-1})\alpha \rangle.$$

Ainsi

$$m_{\gamma,h}(\alpha) = 2^d e^{\frac{i}{2h}\langle J\alpha, M(g^{-1})\alpha \rangle} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} z^\gamma e^{-\frac{|z|^2}{h}} \cdot e^{\frac{i}{h}\langle J(I-M(g^{-1}))\alpha; z \rangle} dz.$$

$$m_{\gamma,h}(\alpha) = 2^d e^{\frac{i}{2h}\langle J\alpha, M(g^{-1})\alpha \rangle} h^{\frac{|\gamma|}{2}} h^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} z^\gamma e^{-|z|^2} \cdot e^{i\langle \frac{J(I-M(g^{-1}))\alpha}{\sqrt{h}}; z \rangle} dz.$$

Or pour ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, X dans \mathbb{R}^{2d} :

$$(2\pi)^{-2d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{iXz} \hat{\psi}(z) z^\gamma dz = D^\gamma \psi(X).$$

Donc, avec ici $\hat{\psi}(z) := e^{-|z|^2}$ et $X := \frac{J(I-M(g^{-1}))\alpha}{\sqrt{h}}$, on a :

$$m_{\gamma,h}(\alpha) = 2^d e^{\frac{i}{2h}\langle J\alpha, M(g^{-1})\alpha \rangle} h^{\frac{|\gamma|}{2}} h^d (2\pi)^{2d} (4\pi)^{-d} P_\gamma\left(\frac{J(I-M(g^{-1}))\alpha}{\sqrt{h}}\right) e^{-\frac{(I+M(g^{-1}))\alpha|^2}{4h}}.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

Remarque : $z \mapsto \exp(-\frac{|z|^2}{4})$ étant une fonction paire, on a :

$$P_\alpha(-z) = (-1)^\alpha P_\alpha(z).$$

Ainsi $P_\alpha(z) = \sum_{\nu \leq \alpha} c_\nu z^\nu$, avec $c_\nu = 0$ lorsque $|\nu|$ n'a pas la même parité que $|\alpha|$.

Donc :

$$h^{\frac{|\alpha|}{2}} P_\alpha\left(\frac{z}{\sqrt{h}}\right) = \sum_{\nu \leq \alpha} c_\nu z^\nu h^{\frac{|\alpha|-|\nu|}{2}}.$$

$h^{\frac{|\alpha|-|\nu|}{2}}$ étant une puissance entière de h lorsque $c_\nu \neq 0$.

On a alors, selon (2.17) :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \partial^\gamma a\left(\left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)\alpha\right) m_{\gamma,h}(\alpha) d\alpha = (2\pi h)^d \sum_{\nu \leq \gamma} c_\nu h^{\frac{|\gamma|-|\nu|}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha)} \partial^\gamma a\left(\left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)\alpha\right) \cdot [J(I-M(g^{-1}))\alpha]^\nu d\alpha$$

Finalement, selon (2.15), on obtient :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-d} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} \sum_{\nu \leq \gamma} c_\nu h^{\frac{|\gamma|-|\nu|}{2}} I_{\gamma,\nu}(h) + O(h^{\frac{N}{2}} h^{-d}). \quad (2.19)$$

où

$$I_{\gamma,\nu}(h) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}\phi(\alpha)} \partial^\gamma a\left(\left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)\alpha\right) \cdot [J(I-M(g^{-1}))\alpha]^\nu d\alpha \quad (2.20)$$

Notation : lorsque A est une matrice complexe, on note, pour $z \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$\langle Az, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} := \langle \Re(A)z, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} + i \langle \Im(A)z, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}}.$$

Un calcul rapide montre que :

$$\phi(\alpha) = \langle A\alpha, \alpha \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} \quad \text{où} \quad A := \frac{1}{4}J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{i}{4}(I - M(g))(I - M(g^{-1})). \quad (2.21)$$

Remarquons que :

$$\ker_{\mathbb{R}}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : A(x) = 0\} = \ker \Re(A) \cap \ker \Im(A) = F_g.$$

Obtenir un développement asymptotique de chaque $I_{\gamma,\nu}(h)$, revient à donc appliquer le théorème de la phase stationnaire avec phase complexe quadratique et un espace vectoriel de points critiques. On fait le même changement de variable que dans la preuve de la proposition 2.1.7, via $U \in O(2d)$ qui envoie \mathbb{R}^k sur F_g et \mathbb{R}^{2d-k} sur F_g^\perp ($k := 2\nu_g$). On constate que :

$$\phi(U(\alpha)) = \langle {}^t UAU(0, \alpha''), (0, \alpha'') \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle \tilde{A}\alpha'', \alpha'' \rangle_{\mathbb{R}^{2d-k}}$$

où $\tilde{A} := {}^t UAU|_{\mathbb{R}^{2d-k}}^{\mathbb{C}^{2d-k}}$ ($\Re(A)$ et $\Im(A)$ envoient F_g^\perp dans F_g^\perp). On note que $\Im \tilde{A} \gg 0$: en effet $\ker \Im A = F_g$ et $\Im A \geq 0$.

Ainsi :

$$I_{\gamma,\nu}(h) = \int_{\mathbb{R}^k_{\alpha'}} \int_{\mathbb{R}^{2d-k}_{\alpha''}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} (\partial^\gamma a)[U(\alpha'; 0) + \left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)U(0, \alpha'')] \cdot [J(I-M(g^{-1}))U(0; \alpha'')]^\nu d\alpha' d\alpha''.$$

On fait ensuite le changement de variable $\frac{\alpha''}{\sqrt{h}} \leftarrow \alpha'' : I_{\gamma,\nu}(h) =$

$$h^{\frac{|\nu|}{2}} h^{\frac{2d-k}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^k_{\alpha'}} \int_{\mathbb{R}^{2d-k}_{\alpha''}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} (\partial^\gamma a)[U(\alpha'; 0) + \sqrt{h}\left(\frac{I+M(g^{-1})}{2}\right)U(0, \alpha'')] \cdot [J(I-M(g^{-1}))U(0; \alpha'')]^\nu d\alpha' d\alpha''.$$

On peut alors appliquer la formule de Taylor avec reste intégral dans $\partial^\gamma a(\dots)$ entre $U(\alpha'; 0)$ et $U(\alpha'; 0) + \sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')$: si $N_0 \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \partial^\gamma a[U(\alpha'; 0) + \sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')] &= \sum_{q=0}^{N_0-1} \sum_{|\beta|=q} \frac{h^{\frac{q}{2}}}{\beta!} [(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')]^\beta (\partial^{\gamma+\beta} a)[U(\alpha', 0)] \\ &+ \int_0^1 (1-t)^{N_0-1} \sum_{|\beta|=N_0} \frac{N_0}{\beta!} h^{\frac{N_0}{2}} [(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')]^\beta (\partial^{\gamma+\beta} a)[U(\alpha', 0) + t\sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')] dt. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_{\gamma, \nu}(h) = h^{\frac{2d-k}{2}} \sum_{q=0}^{N_0-1} \sum_{|\beta|=q} \frac{h^{\frac{q+|\nu|}{2}}}{\beta!} d_{\beta, \nu, \gamma} + h^{\frac{2d-k}{2}} h^{\frac{N_0+|\nu|}{2}} \int_0^1 (1-t)^{N_0-1} \sum_{|\beta|=N_0} \frac{N_0}{\beta!} \mathcal{R}_{\gamma, \nu, \beta, t}(h) dt. \quad (2.22)$$

où :

$$d_{\beta, \nu, \gamma} := \int_{\mathbb{R}_{\alpha'}^k} (\partial^{\gamma+\beta} a)[U(\alpha', 0)] d\alpha'. \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} [J(I - M(g^{-1}))U(0; \alpha'')]^\nu [(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')]^\beta (\partial^{\gamma+\beta} a) da''. \quad (2.23)$$

et $\mathcal{R}_{\gamma, \nu, \beta, t}(h) :=$

$$\int_{\mathbb{R}_{\alpha}^{2d}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} [J(I - M(g^{-1}))U(0; \alpha'')]^\nu [(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')]^\beta (\partial^{\gamma+\beta} a) [U(\alpha', 0) + t\sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')] da. \quad (2.24)$$

Lemme 2.1.9 *Uniformément en $t \in [0, 1]$, on a, lorsque $h \rightarrow 0^+$:*

$$\mathcal{R}_{\gamma, \nu, \beta, t}(h) = O(1)$$

Preuve du lemme : $U(\alpha', 0)$ et $U(0, \alpha'')$ sont orthogonaux, donc, selon (2.3) :

$$|(\partial^{\gamma+\beta} a) [U(\alpha', 0) + t\sqrt{h}(\frac{I+M(g^{-1})}{2})U(0, \alpha'')] | \leq C \langle \alpha' \rangle^{-\rho}.$$

où C est une constante indépendante de $t \in [0, 1]$ et $g \in O(d)$.

Donc

$$|\mathcal{R}_{\gamma, \nu, \beta, t}(h)| \leq C \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} e^{-\langle \mathfrak{S}\tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} |\alpha''|^* d\alpha''.$$

où "*" est un entier positif, la constante étant toujours indépendante de $t \in [0, 1]$ et $g \in O(d)$.

Ceci achève la preuve du lemme car $\mathfrak{S}\tilde{A} \gg 0$. ■

Dans $d_{\beta, \nu, \gamma}$, comme $\mathfrak{S}\tilde{A} \gg 0$, l'intégrale en α'' est absolument convergente et le changement de variable $\alpha'' \leftarrow (-\alpha'')$ montre que cette quantité est nulle lorsque $q + |\nu|$ est impair. Donc, on a :

$$d_{\beta, \nu, \gamma} = C_{\beta, \nu} \times \int_{F_g} \partial^{\gamma+\beta} a(X) d\sigma_g(X).$$

où $C_{\beta,\nu}$ est une quantité indépendante de $a(\cdot)$, ne dépendant que de g et nulle lorsque $q + |\nu|$ est impair. Ainsi :

$$I_{\gamma,\nu}(h) = h^{d-\nu_g} \sum_{\frac{|\nu|}{2} \leq q \leq \frac{N_0-1+|\nu|}{2}} b_q h^q + O\left(h^{\frac{N_0+|\nu|}{2}} h^{d-\nu_g}\right). \quad (2.25)$$

où chaque b_q est une combinaison linéaire (à coefficients dépendant de g) de termes de la forme $\int_{F_g} \partial^* a(X) d\sigma_g(X)$. Par ailleurs, pour $\gamma = \nu = 0$, on a :

$$b_0 = \int_{F_g} a(X) d\sigma_g(X) \cdot \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} d\alpha''. \quad (2.26)$$

Ainsi, selon (2.19), on a :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} h^{d-\nu_g} \sum_{q \geq 0} \tilde{c}_q \cdot h^q. \quad (2.27)$$

Selon (2.27), on a donc une asymptotique de $\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g))$ en puissances de h quand h tend vers zéro, avec les coefficients de la forme annoncée dans le théorème.

Reste à trouver le premier coefficient : selon (2.19),

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) &\underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} (2\pi h)^{-d} \cdot I_{0,0}(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} (2\pi h)^{-d} h^{d-\nu_g} \int_{F_g} a(X) d\sigma_g(X) \cdot \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} d\alpha'' \text{ selon (2.25) et (2.26)}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\langle (A+i\Pi_{F_g})\alpha, \alpha \rangle} d\alpha = \int_{\mathbb{R}_{\alpha'}^k \times \mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} e^{i\langle {}^t UAU(0, \alpha''), (0, \alpha'') \rangle} e^{-|\alpha''|^2} d\alpha'' d\alpha' = \pi^{\nu_g} \int_{\mathbb{R}_{\alpha''}^{2d-k}} e^{i\langle \tilde{A}\alpha''; \alpha'' \rangle} d\alpha''.$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à prouver le

Lemme 2.1.10

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\langle (A+i\Pi_{F_g})z, z \rangle} dz = \frac{(2\pi)^d 2^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp})}.$$

En effet, on aura alors :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{(2\pi h)^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp})} \cdot \int_{F_g} a(X) d\sigma_g(X).$$

Preuve du lemme :

$$A := \left(\begin{array}{c|c} \frac{i}{4}(2Id - g - {}^t g) & \frac{1}{4}(g - {}^t g) \\ \hline -\frac{1}{4}(g - {}^t g) & \frac{i}{4}(2Id - g - {}^t g) \end{array} \right).$$

Il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^d telle que (la matrice de) g (dans cette base) soit :

$$g := \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & \\ & -I_{p_2} & & 0 & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

où les θ_j ne sont pas dans $\pi\mathbb{Z}$, et

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Quitte à faire un changement de variable, on peut toujours se ramener à ce cas-là.

• Notons $\tilde{F} := \ker(Id_{\mathbb{R}^d} - g)$ et $\Pi_{\tilde{F}}$ le projecteur orthogonal sur \tilde{F} . On a :

$$D_0 := \frac{1}{4}(2I_d - g - {}^t g) + \Pi_{\tilde{F}} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & \\ & I_{p_2} & & 0 & \\ & & \sin^2(\frac{\theta_1}{2})I_2 & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & \sin^2(\frac{\theta_r}{2})I_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\Pi_F = \begin{pmatrix} \Pi_{\tilde{F}} & 0 \\ 0 & \Pi_{\tilde{F}} \end{pmatrix}$, on a $\Im(A + i\Pi_{F_g}) = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}$.

• Par ailleurs, si $z = (x, \xi)$, alors

$$\langle \Re(A + i\Pi_{F_g})z, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \frac{1}{2} \langle ({}^t g - g)x, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d} = - \sum_{j=1}^r \langle V_{\theta_j} x_{\theta_j}, \xi_{\theta_j} \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

où l'on a noté $x = (x_{p_1}, x_{p_2}, x_{\theta_1}, \dots, x_{\theta_r})$ avec x_{p_1} dans \mathbb{R}^{p_1} , x_{p_2} dans \mathbb{R}^{p_2} , les x_{θ_j} dans \mathbb{R}^2 , de même pour ξ , et $V_\theta := \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\langle \Re(A + i\Pi_{F_g})z, z \rangle = - \sum_{j=1}^r (\sin \theta_j)(x_{\theta_j}^1 \xi_{\theta_j}^2 - x_{\theta_j}^2 \xi_{\theta_j}^1).$$

• $\langle \Im(A + i\Pi_F)z, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle D_0 x, x \rangle_{\mathbb{R}^d} + \langle D_0 \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}$, avec :

$$\langle D_0 x, x \rangle = |x_{p_1}|^2 + |x_{p_2}|^2 + \sum_{j=1}^r \sin^2(\frac{\theta_j}{2}) |x_{\theta_j}|^2.$$

• Ainsi : $\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\langle (A+i\Pi_{F_g})z, z \rangle} dz =$

$$(\sqrt{\pi})^{2(p_1+p_2)} \prod_{j=1}^r \int_{\mathbb{R}_{x_{\theta_j}}^2} \int_{\mathbb{R}_{\xi_{\theta_j}}^2} \exp\left(-i \sin \theta_j \langle x_{\theta_j}, J \xi_{\theta_j} \rangle - \sin^2(\frac{\theta_j}{2})[|x_{\theta_j}|^2 + |\xi_{\theta_j}|^2]\right) d\xi_{\theta_j} dx_{\theta_j}.$$

Pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_x^2} e^{-|\sin(\frac{\theta}{2})x|^2} \int_{\mathbb{R}_\xi^2} e^{i\langle \xi, (\sin \theta)Jx \rangle} e^{-|\sin(\frac{\theta}{2})\xi|^2} d\xi dx &= \int_{\mathbb{R}_x^2} e^{-|\sin(\frac{\theta}{2})x|^2} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}(e^{-|\sin(\frac{\theta}{2})\xi|^2})(-\sin \theta Jx) dx. \\
&= \frac{\pi}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \int_{\mathbb{R}_x^2} e^{-\cos^2(\frac{\theta}{2})|x|^2} e^{-|\sin(\frac{\theta}{2})x|^2} dx \\
&= \frac{\pi^2}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}\langle (A+i\Pi_{F_g})z, z \rangle} dz = \pi^d \left[\prod_{j=1}^r \sin^2\left(\frac{\theta_j}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (2.28)$$

Enfin,

$$\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp}) = \det \begin{pmatrix} 2I_{p_2} & & 0 & \\ & I_2 - R_{\theta_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & I_2 - R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

Or $\det(I_2 - R_\theta) = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2(\frac{\theta}{2})$, ce qui implique que :

$$\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp}) = 2^{p_2} 2^{2r} \prod_{j=1}^r \sin^2\left(\frac{\theta_j}{2}\right) = 2^{d-\nu_g} \prod_{j=1}^r \sin^2\left(\frac{\theta_j}{2}\right).$$

Ce qui achève la preuve du lemme. ■

On peut aussi calculer tous les termes suivants :

Selon ce qui précède, pour tout $N_0 \geq 1$, on a, lorsque $h \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned}
I_{\gamma, \nu}(h) &= h^{d-\nu_g} \sum_{q=0}^{N_0-1} \sum_{|\beta|=q} \frac{h^{\frac{q+|\nu|}{2}}}{\beta!} \int_{F_g} \partial^{\alpha+\beta} a d\sigma_{F_g} \cdot \int_{F_g^\perp} e^{i\langle Ax, x \rangle} [J(I - g^{-1})x]^\nu \left[\frac{I+g^{-1}}{2}(x)\right]^\beta d\sigma_{F_g^\perp}(x) \\
&\quad + O(h^{d-\nu_g} h^{\frac{N_0+|\nu|}{2}}),
\end{aligned}$$

où A est donnée par (2.21). En utilisant (2.19) et (2.20), et en combinant avec la formule précédente, on obtient le calcul des coefficients annoncé. ■

2.2 Formule de trace de Gutzwiller avec symétries

En 1971, M.C. Gutzwiller publia pour la première fois sa formule de trace reliant de façon semi-classique le spectre d'un hamiltonien quantique \widehat{H} près d'une énergie E aux orbites périodiques du système hamiltonien classique situées dans le niveau d'énergie E . Depuis des preuves mathématiquement rigoureuses ont été données (voir [CRR] pour un historique détaillé), utilisant des techniques variées (équation des ondes, de la chaleur, analyse microlocale, paquets d'ondes etc...).

Ici, il s'agit d'établir une telle formule pour les \widehat{H}_χ , en présence de symétries, pour un groupe fini (le cas plus général des groupes de Lie compacts est étudié aux chapitre 3). La méthode choisie est celle de [CRR], qui fait maint usage des états cohérents (ou paquets d'ondes). Outre la simplicité de cette méthode, la raison en est que les états cohérents utilisés se comportent de façon agréable avec nos symétries. L'objectif principal est de montrer que le système dynamique classique sous-jacent aux \widehat{H}_χ est un système dynamique sur 'l'espace réduit', i.e. l'espace \mathbb{R}^{2d}/G des G -orbites.

2.2.1 Hypothèses

Hypothèses spectrales :

Le hamiltonien classique :

$$H : (q, p) \mapsto H(q, p),$$

est une fonction réelle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, vérifiant **(H.0)** ainsi que les hypothèses suivantes :

(H.1) E est fixé dans \mathbb{R} . Il existe $\delta E > 0$ tel que :

$$\boxed{\Lambda_E := H^{-1}([E - \delta E, E + \delta E])}$$
 est compact dans \mathbb{R}^{2d} et sans point critique pour H ,

i.e. $\forall z \in \Lambda_E, \quad \nabla H(z) \neq 0$.⁴

(H.2) $T > 0$ est fixé et :

- f est une fonction réelle de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Supp}(\hat{f}) \subset]-T, T[$ (troncature en temps).
- ψ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est réelle positive, à support compact dans $]E - \delta E, E + \delta E[$ (troncature en énergie).

Selon l'hypothèse **(H.1)**, pour h suffisamment petit, $\psi(\widehat{H})$ est un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et le spectre de \widehat{H} est discret dans $]E - \delta E, E + \delta E[$ (voir par exemple [Ro] Proposition (III-16) p.149 ou [He-Ro 1]). Selon cette même hypothèse, les trajectoires du système hamiltonien classique associé à H -voir (1.7)- issues de Λ_E sont définies sur \mathbb{R} , bornées et sans point d'équilibre.

⁴Quitte à réduire δE , pour avoir **(H.1)**, il suffit de supposer Λ_E compacte et $\Sigma_E := \{z \in \mathbb{R}^{2d} : H(z) = E\}$ sans point critique!

Hypothèses de symétrie :

Le cadre dans lequel on se place est essentiellement le même que dans [He-Ro 2] et [El.H], [El.H-He]. On suppose que :

G est un sous-groupe fini de $O(d)$.

On fait dorénavant l'hypothèse que H admet G comme groupe de symétrie :

$$(H.3) \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2d}, \quad H(M(g)(z)) = H(z).$$

Objectifs : Le but dans cette partie est de donner, pour tout χ dans \widehat{G} , une asymptotique quand $h \rightarrow 0^+$ de la trace suivante (avec les notations du premier chapitre) :

$$\boxed{\mathcal{G}_\chi(h) := \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}_\chi) f \left(\frac{E - \widehat{H}_\chi}{h} \right) \right)}.$$

Comme on l'a vu précédemment, l'opérateur dont on prend la trace est bien à trace puisque $\mathcal{G}_\chi(h) = \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}) f \left(\frac{E - \widehat{H}}{h} \right) P_\chi \right)$ et que $f \left(\frac{E - \widehat{H}}{h} \right)$ et P_χ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On introduit la notation :

$$\Sigma_E := \{z \in \mathbb{R}^{2d} : H(z) = E\}.$$

Le cas sans symétrie ($G = \{Id\}$) apparaît déjà dans [He-Ro 1] (1983) dans le cadre plus général des opérateurs h -admissibles, pour des fonctions f telles que le support de \hat{f} ne contienne pas de période d'orbite périodique de Σ_E hormis la période nulle. Dans [El.H] (1984), on donne sous cette même hypothèse une version avec symétries pour les groupes finis. Dans les deux cas, la méthode utilisée consiste à approcher $e^{-\frac{i\hbar}{h}\widehat{H}}$ par un opérateur de Fourier intégral. Mais la méthode BKW engendre des problèmes de caustiques lorsqu'on travaille pour des temps longs. Puis en 1999, dans [CRR], dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels, une autre méthode utilisant les états cohérents permet, dans le cas sans symétries, de donner une asymptotique pour des fonctions f dont le support de \hat{f} contient éventuellement des périodes d'orbites périodiques de Σ_E . Ici, on se propose d'adapter la méthode de [CRR] au cadre avec symétries.

Dans un premier temps, grâce aux états cohérents, on va réduire le problème à une application du théorème de la phase stationnaire généralisé. Puis, on cherchera les hypothèses minimales pour pouvoir appliquer ce théorème. En particulier celles qui pourront assurer le fait que ladite phase soit de hessien transverse non dégénéré seront appelée "condition de flot G -propre". Il faudra ensuite faire en sorte de trouver une hypothèse supplémentaire *naturelle* sur H qui garantira cette condition de flot G -propre (voir hypothèse (H.4)).

2.2.2 Notations sur le système hamiltonien classique.

Le lecteur familier avec la dynamique hamiltonienne et pressé d'en finir avec les résultats quantiques pourra passer directement au paragraphe suivant en première lecture. Considérons le système hamiltonien classique suivant :

$$\dot{z}(t) = J\nabla H(z(t)). \quad (2.29)$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$$

Si z est dans \mathbb{R}^{2d} , la solution du système hamiltonien (2.29) au temps t de condition initiale z sera notée $\Phi_t(z)$. L'orbite de $z \in \mathbb{R}^{2d}$ par le flot Φ_t de H sera notée $O(z)$ (ne pas confondre avec l'orbite de z par l'action du groupe $G!$). Si $O(z) =: \gamma$ est périodique non stationnaire, on notera $\underline{T_\gamma^*} > 0$ sa plus petite période strictement positive, appelée période primitive de γ .

Notons que l'hypothèse de symétrie **(H.3)** engendre les relations suivantes pour g dans G , z dans \mathbb{R}^{2d} et t réel :

$$M(g)\nabla H(z) = \nabla H(M(g)z) \text{ et } M(g)J\nabla H(z) = J\nabla H(M(g)z). \quad (2.30)$$

$$\Phi_t(M(g)z) = M(g)\Phi_t(z). \quad (2.31)$$

On montre facilement via (2.31) que, si $g \in G$, $M(g)$ envoie une orbite de Σ_E sur une autre orbite de Σ_E , une orbite périodique sur une autre orbite périodique de même période primitive.

Comme le fait présager le "**Principe de Correspondance**", notre étude semi-classique va nous donner une asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ dont les termes font intervenir des quantités du système classique. Plus précisément, les orbites γ qui interviennent sont celles de Σ_E pour lesquelles on a un élément g de G et un réel t_0 tels que :

$$\forall z \in \gamma, \quad M(g)\Phi_{t_0}(z) = z. \quad (2.32)$$

- Définissons des périodes minimales pour les orbites périodiques de Λ_E et Σ_E :

Lemme 2.2.1 *Il existe une période minimale pour les orbites périodiques de Λ_E .*

Preuve du lemme : En effet, dans le cas contraire, on a des suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Λ_E et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}_+^* telle que $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\Phi_{T_n}(z_n) = z_n$. Quitte, à extraire, Λ_E étant compacte, on peut supposer $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z \in \Lambda_E$. Donc, si $t \in \mathbb{R}$, et si N_n désigne la partie entière de $\frac{t}{T_n}$, on a :

$$\Phi_t(z_n) = \Phi_{t - N_n \cdot T_n}(z_n)$$

ce qui donne, en faisant tendre n vers l'infini : $\Phi_t(z) = z$ pour tout t . Autrement dit, z est un point d'équilibre sur Λ_E , ce qui est exclu. ■

On note $\boxed{\tilde{T}_E > 0}$ la période minimale sur Λ_E . De même, il existe une période minimale pour les orbites de Σ_E que l'on notera $\boxed{T_E > 0}$. Le lemme suivant explique l'apparition de la quantité $\frac{T_E}{|G|}$ dans les lignes ultérieures (voir remarques après le théorème 2.2.5) :

Lemme 2.2.2 *Soit $t \neq 0$ tel que :*

$$\exists g \in G, \exists z \in \Sigma_E \text{ tels que } M(g)\Phi_t(z) = z.$$

Alors $O(z)$ est périodique, $|G|t$ en est une période, et $|t| \geq \frac{T_E}{|G|}$.

Preuve du lemme : En itérant et en utilisant (2.31), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad M(g)^k \cdot \Phi_{kt}(z) = z.$$

En particulier, $\Phi_{|G|t}(z) = z$, avec $t \neq 0$, et comme $z \in \Sigma_E$, z n'est pas un point critique de H . Donc $O(z)$ est périodique et $t|G|$ en est une période. ■

- Un peu de vocabulaire dans la situation (2.32) :

Si $g \in G$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, soit :

$$\boxed{\Gamma_{E,g,t_0}} := \{\gamma \text{ orbite périodique de } \Sigma_E : \exists z \in \gamma : M(g)\Phi_{t_0}(z) = z\}. \quad (2.33)$$

Définitions 2.2.3 .

- Si $\gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}$, on dira que t_0 est une *g-période* pour γ .
- Une orbite γ du système hamiltonien issu de H est dite *g-invariante* si elle est globalement stable par $M(g)$.

Par ailleurs, une orbite γ est *g-invariante* si et seulement s'il existe $z \in \gamma$ tel que $M(g)z \in \gamma$ (grâce à la relation (2.31)).

A priori, si on ne fait que les hypothèses **(H.0)** à **(H.3)**, il peut y avoir dans Σ_E des phénomènes d'accumulation d'orbites périodiques. L'hypothèse spectrale du lemme suivant vise à éviter ce cas de figure dans une certaine mesure :

Lemme 2.2.4 *Théorème du cylindre* (avec symétries) :

Soient $g \in G$, γ une orbite périodique g -invariante de Σ_E , z_0 un point de γ , et t_0 une g -période non nulle de γ . On suppose que 1 n'est pas valeur propre de $M(g)d_z P_0$ où P_0 est l'application de Poincaré sur γ entre z_0 et $M(g^{-1})z_0$ au temps t_0 restreinte à Σ_E .

Alors, il existe un voisinage tubulaire \mathcal{T} de γ , il existe $\varepsilon_1 > 0$ tels que si $|t_1 - t_0| < \varepsilon_1$ et si $\exists z_1 \in \Sigma_E \cap \mathcal{T}$ tel que $M(g)\Phi_{t_1}(z_1) = z_1$, on ait : $O(z_1) = \gamma$ et $t_1 = t_0$.

Par ailleurs, si $d > 1$, il existe $Y :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{2d}$, \mathcal{C}^∞ telle que $Y(0) = z_0$, $\forall \lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $Y(\lambda) \in \Sigma_{E-\lambda}$ et $O(Y(\lambda))$ est une orbite périodique g -invariante. (pas forcément de g -période égale à t_0).

Preuve du lemme : voir Appendice 4.1, chapitre 4.1.2.

Ce théorème n'a de symplectique que le fait que (2.29) admette une intégrale première (H). Nous pouvons donc faire une figure en dimension 3 :

Attention : Des orbites périodiques de période croissante peuvent s'accumuler autour de γ !

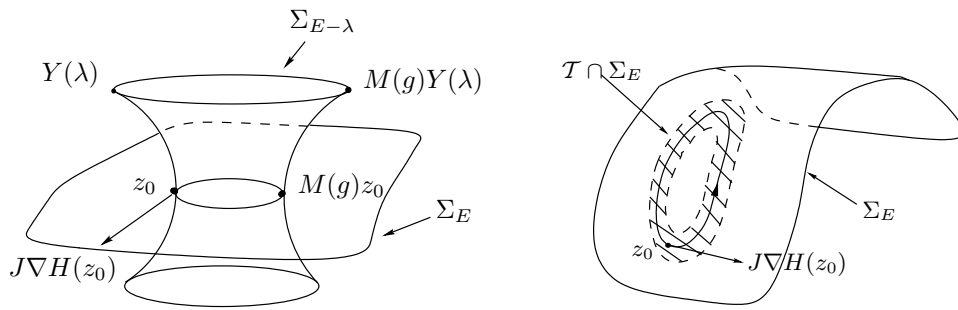


FIG. 2.1 – Cylindre d'orbites g -invariantes. A droite, la seule orbite périodique ayant une g -période proche de t_0 et rencontrant $\mathcal{T} \cap \Sigma_E$ est γ .

2.2.3 Exemples

Reprenons les exemples du paragraphe 1.2.4 :

On rappelle que ces exemples correspondent à des hamiltoniens de Schrödinger :

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q).$$

On a vu dans la section 1.2.4 que les opérateurs associés sont essentiellement autoadjoints, ce qui permet de se passer de l'hypothèse **(H.0)**.

• Exemple 1 : $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $d = 1$:

▷ *Potentiel à double puits* : $V(q) = (q^2 - 1)^2$.

Les seuls points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, qui correspondent aux énergies $E = 0$ et $E = 1$. H est une application propre, donc **(H.1)** est vérifiée pour tout E différent de 0 ou 1. On peut d'ores et déjà remarquer que cet hamiltonien possède des trajectoires périodiques stables sous $(q, p) \rightarrow -(q, p)$ (celles d'énergie > 1), et d'autres non (voir figure 2.2).

Dans le même ordre d'idée, pour un potentiel à 4 puits du type $V(q) = ((q^2 - 1)^2 - \frac{1}{2})^2$, on a 7 points critiques correspondant aux énergies $E = 0$ et 1, **(H.1)** est toujours vérifiée en dehors de ces énergies.

▷ *Potentiel du type oscillateur harmonique ou quartique* : $V(q) = q^2$ ou q^4 .

La seule énergie critique est $E = 0$, et H est aussi une application propre, donc on est bien dans le cadre de **(H.1)**.

▷ *Potentiel à "puits dans une île"* : $V(q) = (q^2 + a)e^{-q^2}$, $(0 \leq a < 1)$.

Voici un potentiel qui a la bonne symétrie mais ne rentre pas dans le cadre de **(H.1)** même s'il possède des trajectoires bornées. En effet, tout niveau d'énergie Σ_E non vide possède une composante connexe non bornée (car $0 \leq V(q) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$). Les énergies critiques sont $E = a$ et $E = e^{a-1}$ (voir figure 2.2).

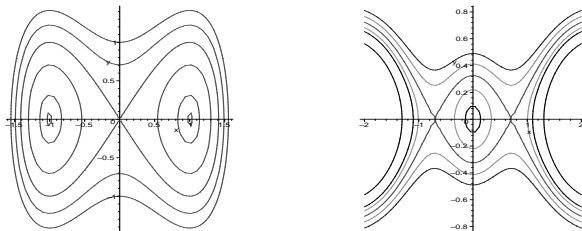


FIG. 2.2 – Trajectoires classiques pour des potentiels du type double puits et puits dans une île

• Exemple 3 : $G \simeq \sigma_3$, $d = 2$, $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{3}x^3 - xy^2$:

On a déjà vu que H est une application propre. Après un bref calcul, les points critiques de H sont obtenus pour $q = (0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ et $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4})$. La seule énergie critique est $E = -\frac{1}{96}$. Donc, pour toute E différente, l'hypothèse **(H.1)** est satisfaite.

• Exemple 4 : *Groupe des isométries du carré*, $d = 2$, $V(x, y) := x^2y^2$:

Cet exemple montre qu'il ne suffit pas d'être à spectre discret pour rentrer dans le cadre de l'hypothèse **(H.1)** : $\nabla H(q, p) = 0$ si et seulement si $p = (0, 0)$, et $q = (x, 0)$ ou $q = (0, y)$ pour

tout x, y réel. La seule énergie critique est donc $E = 0$. Cependant, toute surface d'énergie Σ_E est non bornée (Si $E \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $H((0, n); (\sqrt{2E}, 0)) = E$). Ainsi, l'hypothèse **(H.1)** n'est jamais vérifiée.

- Exemple 5 : $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$, $V(q) := \langle Sq; q \rangle_{\mathbb{R}^d}$, $S \gg 0$:

Le seul point d'équilibre de (2.29) est $z = 0$, ce qui est réalisé uniquement pour $E = 0$. $S \gg 0$, donc $H(q, p) \geq |p^2| + C|q|^2$, ce qui prouve que H est une application propre. Ainsi, **(H.1)** est vérifiée dès que $E \neq 0$.

2.2.4 Asymptotiques à g fixé

Le groupe G considéré étant fini, on pose pour g dans G :

$$\boxed{I_{g,E}(h) := \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}) f \left(\frac{E - \widehat{H}}{h} \right) \tilde{M}(g) \right)}. \quad (2.34)$$

d'où

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} I_{g,E}(h). \quad (2.35)$$

On étudie alors le comportement asymptotique de $I_{g,E}(h)$ lorsque h tend vers zéro. Plusieurs cas se présentent alors selon la localisation du support de \hat{f} .

Asymptotique du terme de Weyl :

Pour g dans $O(d)$, on introduit l'ensemble :

$$\boxed{\mathcal{L}_{E,g}} := \{t \in]-T, T[: \exists z \in \Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\}. \quad (2.36)$$

Le théorème suivant donne l'asymptotique de $I_{g,E}(h)$ quand $h \rightarrow 0^+$, sous une condition dite "de type Weyl".

Théorème 2.2.5 *On pose pour g dans G :*

$$\nu_g := \dim \ker(g - Id_{\mathbb{R}^d}), \quad F_g := \ker(M(g) - Id_{\mathbb{R}^{2d}}) \quad \text{et} \quad \tilde{F}_g := \ker(g - Id_{\mathbb{R}^d}).$$

On fait les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2), (H.3) :

► $Si \text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \emptyset$, alors :

$$I_{g,E}(h) = O(h^{+\infty}).$$

► $Si \text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$, alors :

Si Σ_E ne contient pas de point fixe de $M(g)$ (e.g. si $\nu_g = 0$), alors $I_{g,E}(h) = O(h^{+\infty})$, et sinon :

$$I_{g,\lambda}(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\asymp} h^{1-\nu_g} \sum_{k \geq 0} c_k(\hat{f}, g) h^k. \quad (2.37)$$

uniformément en λ dans un petit voisinage de E , où les $c_k(\hat{f}, g)$ sont des distributions en \hat{f} à support dans $\{0\}$, que l'on peut calculer via l'asymptotique faible du théorème 2.1.1 et :

$$c_0(\hat{f}, g) = \psi(\lambda) \hat{f}(0) \frac{(2\pi)^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp})} \int_{\Sigma_\lambda \cap F_g} \frac{d(\Sigma_\lambda \cap F_g)(z)}{|\nabla H(z)|}. \quad (2.38)$$

où $d(\Sigma_\lambda \cap F_g)$ est la mesure euclidienne sur $\Sigma_\lambda \cap F_g$.

Ce théorème est prouvé au chapitre 2.3 et plus précisément au paragraphe 2.3.3.

Remarques :

- (2.38) est bien connue pour $g = Id_{\mathbb{R}^d}$ depuis l'article [He-Ro 1] (1983) dans le cadre plus général des opérateurs admissibles. Le développement (2.37) a déjà été obtenu dans ce même cadre, avec symétries dans [El.H] en 1984. Dans les deux cas, le principe de la preuve consiste à utiliser un résultat d'approximation du propagateur semi-classique par un OFI. Ici, on procède différemment, via les états cohérents.
- La situation "Supp $\hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$ " est effective lorsque Supp $\hat{f} \subset]-\frac{T_E}{|G|}, \frac{T_E}{|G}[$ (cf lemme (2.2.2)).
- Si on suppose de plus que $\forall \lambda \in [E - \delta E, E + \delta E]$, Supp $\hat{f} \cap \mathcal{L}_{\lambda,g} = \{0\}$ (et c'est le cas si Supp $\hat{f} \subset]-\frac{\tilde{T}_E}{|G|}, \frac{\tilde{T}_E}{|G}[$ où \tilde{T}_E est la période minimale sur Λ_E), alors le résultat est encore vrai et uniforme dans $[E - \delta E, E + \delta E]$ (voir asymptotique de Weyl de la fonction de comptage des valeurs propres de \hat{H}_χ dans un intervalle, chapitre 2.2.5).

Asymptotique de la partie oscillante :

Lorsque le support de \hat{f} rencontre un élément non nul de $\mathcal{L}_{E,g}$, on va voir que certaines orbites périodiques de Σ_E interviennent dans l'asymptotique de $I_{g,E}(h)$. Dans les lignes qui suivent, g

désigne un élément du groupe fini G . Dans un premier temps, nous introduisons quelques notions liées au système dynamique classique, et qui serviront à énoncer la dynamique quantique :

Lemme 2.2.6 Soient γ une orbite de Σ_E ayant t_0 pour g -période, et $z \in \gamma$. On note $\Phi_s(z) = (q_s, p_s)$. Alors $\int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds$ est indépendant de $z \in \gamma$. On note cette quantité $S_\gamma(t_0)$.

Preuve du lemme : Pour k dans \mathbb{Z} , on a :

$$\int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds = \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} p_s \dot{q}_s ds. \quad (*)$$

En effet, notons $\gamma(t) := \Phi_t(z)$, $f(q, p) := (p, 0)$ de telle sorte que l'on ait :

$$\int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds = \int_0^{t_0} f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds, \text{ et } f(M(g)z) = M(g)f(z).$$

Puis, on pose $t := s + kt_0$, et selon ce qui précède, $\gamma(s) = M(g)^k \gamma(t)$ et $\gamma'(s) = M(g)^k \gamma'(t)$. Ainsi, g étant une isométrie, $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)$, et ce changement de variable prouve (*).

On sait que $|G|t_0 = k_0 T_\gamma^*$ où $k_0 \in \mathbb{Z}$ et T_γ^* est la période primitive de γ (cf lemme 2.2.2).

Donc, si l'on note $S_\gamma := \oint_\gamma p dq$,

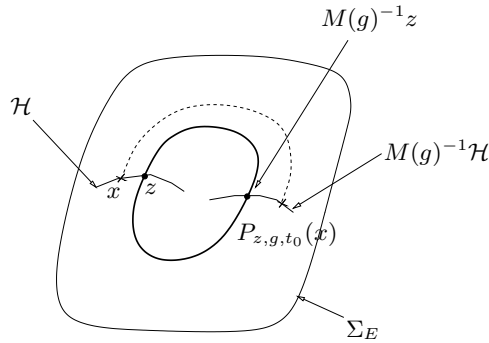
$$k_0 S_\gamma = \int_0^{k_0 T_\gamma^*} p_s \dot{q}_s ds = \sum_{k=0}^{|G|-1} \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} p_s \dot{q}_s ds = |G| S_{\gamma, g}(t_0).$$

Ainsi on a k_0 indépendant de z tel que $S_{\gamma, g}(t_0) = \frac{k_0}{|G|} S_\gamma$, ce qui prouve bien que $S_\gamma(t_0)$ est indépendant de $z \in \gamma$ puisque S_γ l'est. ■

Soient $g \in G$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \Gamma_{E, g, t_0}$. Si $z \in \gamma$, on a donc $\Phi_{t_0}(z) = M(g^{-1})z$. On note alors P_{z, g, t_0} l'application de Poincaré sur γ entre z et $M(g^{-1})z$ au temps t_0 restreinte à Σ_E (voir figure 2.3).

Le polynôme caractéristique de $d_z P_{z, g, t_0}$ ne dépend pas de $z \in \gamma$, ni des hypersurfaces transverses à γ dans Σ_E en z et $M(g^{-1})z$ choisies pour la construction de P_{z, g, t_0} (voir Appendice 4.1). On notera donc " dP_{γ, g, t_0} " lorsqu'on n'évoquera que des quantités relatives aux valeurs propres de $d_z P_{z, g, t_0}$.

Dans le théorème suivant le support de \hat{f} rencontre une g -période de Σ_E :

FIG. 2.3 – Application de Poincaré entre z et $M(g^{-1})z$.

Théorème 2.2.7 On fait les hypothèses **(H.0)**, **(H.1)**, **(H.2)**, on se donne $t_0 \neq 0$ dans $] -T, T[$ et g fixé dans G . On suppose :

$$\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{t_0\}.$$

Enfin, on fait l'hypothèse de "non dégénérescence" suivante :

$$\forall \gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}, 1 \text{ n'est pas une valeur propre de } M(g)dP_{\gamma,g,t_0}. \quad (2.39)$$

Alors Γ_{E,g,t_0} est fini et :

$$I_{g,E}(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \sum_{\gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}} e^{\frac{i}{h} S_\gamma(t_0)} \sum_{k \geq 0} d_k^{\gamma,t_0}(\hat{f}, g) h^k. \quad (2.40)$$

où Γ_{E,g,t_0} est l'ensemble des orbites périodiques g -invariantes de Σ_E qui admettent t_0 pour g -période, $S_\gamma(t_0) = \int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds$, les $d_k^{\gamma,t_0}(\hat{f}, g)$ sont des distributions en \hat{f} à support dans $\{t_0\}$ et :

$$d_k^{\gamma,t_0}(\hat{f}, g) = \frac{T_\gamma^* \psi(E) \hat{f}(t_0) e^{i \frac{k\pi}{2}}}{2\pi |\det(M(g)dP_{\gamma,g,t_0} - Id)|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.41)$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est un indice de Maslov de γ .

Ce théorème est prouvé au chapitre 2.3, plus précisément au paragraphe 2.3.4.

Remarque : ici, contrairement au terme de Weyl de $I_{g,E}(h)$, le terme dominant est en h^0 , et on constate par ailleurs l'apparition du terme oscillant $e^{\frac{i}{h} S_\gamma(t_0)}$. Si l'on compare au cas sans symétrie (voir [**CRR**]), on s'aperçoit que seules interviennent dans l'asymptotique de $I_{g,E}(h)$ des orbites périodiques stables par g .

• **Comment s'assurer que l'hypothèse (2.39) est satisfaite dans la pratique :**

On introduit pour $z \in \mathbb{R}^{2d}$ et t réel tel que $\Phi_t(z)$ existe, la matrice :

$$F_z(t) := \frac{\partial \Phi_t}{\partial z}(z). \quad (2.42)$$

$F_z(t)$ est solution du système linéarisé en z :

$$\begin{cases} \dot{F}_z(t) = JH''(\Phi_t(z)) \cdot F_z(t). \\ F_z(0) = I_{2d}. \end{cases} \quad (2.43)$$

où H'' désigne la hessienne de H . La matrice $F_z(t)$ est donc réelle symplectique de taille $2d$. C'est en fait la résolvante du système linéarisé en z . Le système (2.43) étant linéaire, $F_z(t)$ existe pour tout t tel que $\Phi_t(z)$ soit défini. J'affirme que l'on a :

$$(2.39) \iff \forall \gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}, \quad \forall z \in \gamma, \quad \dim \ker[(M(g)F_z(t_0) - Id)^2] \leq 2 \quad (2.44)$$

C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.2.8 *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $g \in G$ et $\gamma \in \Sigma_E$ tels que $\forall z \in \gamma$, $M(g)\Phi_{t_0}(z) = z$. Il existe une base β de \mathbb{R}^{2d} et une base β' de l'espace tangent au domaine de définition de P_{z,g,t_0} telles que :*

$$[M(g)F_z(t_0)]_\beta = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & & * \\ 0 & 1 & & * \\ \hline 0 & 0 & & [M(g)d_z P_{z,g,t_0}]_{\beta'} \end{array} \right). \quad (2.45)$$

Preuve du lemme : Voir Appendice 4.1.

Notation : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\boxed{E_\lambda(z)} := \sum_{k=1}^{2d} \ker([M(g)F_z(t_0) - \lambda Id]^k)$ (le sous-espace propre algébrique associé à λ), et $\boxed{V_z := \bigoplus_{\lambda \neq 1} E_\lambda(z)}$. On a bien sûr : $\mathbb{R}^{2d} = E_1(z) \oplus V_z$ et $E_1(z)$ et V_z sont stables par $M(g)F_z(t_0)$. Ainsi, sous l'hypothèse (2.39), on a $\dim E_1(z) = 2$, d'où :

$$\det(M(g)dP_{\gamma,g,t_0} - Id) = \det([M(g)F_z(t_0) - Id_{\mathbb{R}^{2d}}]_{|_{V_z}}). \quad (2.46)$$

• **Donnons des exemples où la condition (2.39) est vérifiée :**

- Dans le cas $d = 1$, pour des contraintes de dimension, (2.39) est toujours vérifiée.
- Pour des dimensions supérieures, dans le cas d'un hamiltonien de Schrödinger avec potentiel quadratique $V(x) = \langle Sx, x \rangle$, où $S \gg 0$ (voir lemme 1.2.9), l'équation (2.29) est alors linéaire et se résume à $\dot{z}_t = Az_t$ où $A := 2 \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -S & 0 \end{pmatrix}$. Donc, si $z \in \mathbb{R}^{2d}$, alors

$F_z(t) = e^{tA}$. On peut ainsi calculer précisément $F_z(t)$, qui est indépendante de z , et expliciter les z (conditions initiales) qui vont donner des orbites périodiques ainsi que leur période. On s'aperçoit alors que la condition (2.39) n'est pas toujours vérifiée, mais qu'elle l'est dans certains cas :

Lemme 2.2.9 *Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ le spectre étendu de S (i.e. chaque valeur propre est répétée autant de fois que sa multiplicité algébrique). On fait alors l'hypothèse suivante :*

$$\forall j, k \in \{1, \dots, d\}, \quad j \neq k \Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_k}} \notin \mathbb{Q}. \quad (2.47)$$

Alors, l'ensemble des points périodiques est une union de d plans deux à deux orthogonaux P_1, \dots, P_d . Par ailleurs, la période primitive de $z \in P_{j_0}$ est alors $T_{j_0}^* = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{j_0}}}$, le spectre de $F_z(nT_{j_0}^*)$ ($n \in \mathbb{Z}$), est $\{e^{\pm 2\pi ni \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}}}} : j = 1, \dots, d\}$ et donc pour tout n dans \mathbb{Z}^* , 1 est valeur propre de $F_z(nT_{j_0}^*)$ de multiplicité algébrique égale à 2.

Preuve du lemme : quitte à faire un changement de base orthonormée, on peut supposer que S est une matrice diagonale. Puis, en notant $z = (x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d)$, le système $\dot{z}_t = Az_t$ équivaut à d systèmes $(S_1), \dots, (S_d)$ où (S_j) est le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = 2\xi_j(t). \\ \dot{\xi}_j(t) = -2\lambda_j x_j(t). \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x}_j(t) = -4\lambda_j x_j(t). \\ \xi_j(t) = \frac{1}{2}\dot{x}_j(t). \end{cases} \iff \begin{cases} x_j(t) = x_j^0 \cos(2\sqrt{\lambda_j}t) + \frac{\xi_j^0}{\sqrt{\lambda_j}} \sin(2\sqrt{\lambda_j}t). \\ \xi_j(t) = \frac{1}{2}\dot{x}_j(t). \end{cases} \quad (2.48)$$

Etant donnée (2.47), les $x_j(t)$ n'ont aucune période en commun, d'où les orbites périodiques et les périodes annoncées. On écrit $A = 2\tilde{A}$ où $\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -S & 0 \end{pmatrix}$, et on remarque que si $\lambda \neq 0$, alors :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}I_d & 0 \\ S & -\lambda I_d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda I_d & I_d \\ -S & -\lambda I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_d & -\frac{1}{\lambda}I_d \\ 0 & S + \lambda^2 I_d \end{pmatrix}.$$

donc on a :

$$\sigma(\tilde{A}) = \{\pm i\sqrt{\lambda_j} : j = 1, \dots, d\} \text{ et } \sigma[F_z(T_{j_0}^*)] = \sigma(e^{\frac{2\pi n}{\sqrt{\lambda_{j_0}}}\tilde{A}}) = \{e^{\pm i2\pi n \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}}}} : j = 1, \dots, d\}.$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

Contre-exemple : si $S := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $V(x, y) = 4x^2 + 9y^2$, nous avons $\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, et

$F_z(T_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cependant $F_z(2T_1^*) = I_4$, donc (2.39) est vérifiée pour $t_0 = T_1^*$, mais n'est pas vérifiée pour $t_0 = 2T_1^*$.

- Dans les autres exemples où le hamiltonien n'est pas quadratique, il est difficile en pratique de vérifier (2.39), même en se restreignant à une surface d'énergie donnée. On a cependant dans ce sens des résultats génériques.⁵

2.2.5 Formules de Weyl réduites

Dans cette partie, via (2.35), on va utiliser les résultats obtenus à g fixé au théorème 2.2.5, pour décrire le comportement asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ pour des fonctions f telles que $\text{Supp}\hat{f}$ est (moralement) proche de zéro. Puis on en déduira le comportement asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propre de \widehat{H}_χ dans un intervalle donné.

Soit :

$$\boxed{\mathcal{L}_{red}} := \{t \in \text{Supp}\hat{f} : \exists z \in \Sigma_E, \exists g \in G : M(g)\Phi_t(z) = z\}. \quad (2.49)$$

• Terme de Weyl :

Théorème 2.2.10 *Sous les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2), (H.3), si $\mathcal{L}_{red} = \{0\}$ alors, pour tout $\chi \in \widehat{G}$, $\mathcal{G}_\chi(h)$ admet un développement asymptotique à tout ordre en puissances de h quand $h \rightarrow 0^+$, et :*

$$\mathcal{G}_\chi(h) = h^{1-d} \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi)^{-d} \psi(E) \hat{f}(0) \int_{\Sigma_E} \frac{d\Sigma_E(z)}{|\nabla H(z)|} + O(h^{2-d}) \text{ quand } h \rightarrow 0^+.$$

où $d\Sigma_E$ est la mesure naturelle sur Σ_E . Par ailleurs, on peut calculer tous les termes suivants en utilisant l'asymptotique faible donnée par le théorème 2.1.1 (voir fin de preuve).

Preuve du théorème : le fait que $\mathcal{L}_{red} = \{0\}$ assure que pour tout g dans G , $\text{Supp}\hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$ car : $\mathcal{L}_{red} = \bigcup_{g \in G} (\mathcal{L}_{E,g} \cap \text{Supp}\hat{f})$. La preuve découle alors du théorème 2.2.5 et de (2.35). ■

Remarque : Plus généralement, selon le théorème 2.2.5, chaque élément g de G intervient graduellement dans le développement asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ selon la dimension de l'ensemble \tilde{F}_g de ses points fixes. Plus g a de points fixes, plus il intervient tôt dans l'asymptotique. Nous donnons en fin de preuve le calcul du deuxième terme de l'asymptotique dans le cas où $G \subset SO(d)$. Le seul g intervenant ici est $g = Id_{\mathbb{R}^d}$ (car $\nu_g = d - 1$ n'est jamais réalisé), et on obtient :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi^2}{|G|} \left[h^{1-d} (2\pi)^{-d} \psi(E) \hat{f}(0) \Gamma(E) - h^{2-d} i(\hat{f})'(0) (2\pi)^{-d} \frac{d}{dE} (\psi \Gamma)(E) \right] + O(h^{3-d}).$$

où

$$\Gamma(E) := \int_{\Sigma_E} \frac{d\Sigma_E}{|\nabla H|}.$$

⁵Si $T > 0$, M est une variété compacte sans bord, alors, génériquement sur X champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sans zéro sur M , les orbites périodiques de période primitive dans $] -T, T[$ sont en nombre fini.

Notons que si $\mathcal{G}(h) := \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}) f \left(\frac{E - \widehat{H}}{h} \right) \right)$, alors on a : $\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi^2}{|G|} \mathcal{G}(h) + O(h^{2-d})$. Cependant, cette relation ne perdure pas a priori pour les termes d'ordre supérieur (sauf à l'ordre 2 lorsque $G \subset SO(d)$).

• **Asymptotique de la fonction de comptage** :

On déduit classiquement du théorème 2.2.10 l'asymptotique au premier ordre de la fonction de comptage de \widehat{H}_χ dans un intervalle I borné, pourvu que ses extrémités ne soient pas des points critiques de H . Notons que si l'on désire seulement obtenir un équivalent de cette fonction de comptage, l'asymptotique faible du théorème 2.1.4 y suffit. L'apport du théorème suivant se situe donc dans l'approximation du reste. Ici, $N_{I,\chi}(h)$ désigne le nombre de valeurs propres de \widehat{H}_χ dans I comptées avec multiplicité.

Théorème 2.2.11 *Soient G un sous-groupe fini de $O(d)$, $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien lisse G -invariant vérifiant **(H.0)**.*

On se donne $E_1 < E_2$ dans \mathbb{R} , $I := [E_1, E_2]$, et on suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$H^{-1}([E_1 - \epsilon, E_2 + \epsilon]) \text{ est compact.}$$

Par ailleurs, on suppose que E_1 et E_2 ne sont pas des valeurs critiques de H .

Alors, si $\chi \in \widehat{G}$, le spectre de \widehat{H}_χ est discret dans I , et on a :

$$N_{I,\chi}(h) = \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi h)^{-d} \text{Vol}[H^{-1}(I)] + O(h^{1-d}).$$

Preuve du théorème : Utiliser le théorème 2.2.10 pour reprendre exactement la même preuve que dans [Ro] V.4, en usant d'un théorème taubérien. ■

On renvoie au chapitre sur les asymptotiques faibles pour les interprétations de ce résultat en termes de proportion des valeurs propres de \widehat{H} dont des fonctions propres ont la symétrie $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$, et en termes de multiplicité des valeurs propres de \widehat{H} .

2.2.6 Formules de Gutzwiller réduites

• **Terme oscillant** (sous hypothèse de non-dégénérescence) :

Comme dans le chapitre précédent, on suppose que H est un hamiltonien G -invariant. On considère l'espace réduit Σ_E/G défini comme espace topologique quotient. Σ_E/G est com-

pact. On note alors

$$\pi : \Sigma_E \twoheadrightarrow \Sigma_E/G. \quad (2.50)$$

la projection canonique, qui est continue. On peut définir sur Σ_E/G un "flot topologique"

$\tilde{\Phi}_t : \Sigma_E/G \rightarrow \Sigma_E/G$, pour $t \in \mathbb{R}$, en posant :

$$\forall z \in \Sigma_E, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\Phi}_t(\pi(z)) := \pi(\Phi_t(z)). \quad (2.51)$$

$\tilde{\Phi}$ est bien défini (grâce à (2.31)), continu, et vérifie pour tout x dans Σ_E/G :

$$\tilde{\Phi}_{t_1+t_2}(x) = \tilde{\Phi}_{t_1}(\tilde{\Phi}_{t_2}(x)) \text{ et } \tilde{\Phi}_0 = Id_{\Sigma_E/G}.$$

Ainsi, on appelle "orbite de l'espace réduit" l'image de $t \mapsto \tilde{\Phi}_t(x)$ pour un x dans Σ_E/G , de sorte que les orbites de l'espace réduit sont les images par π des orbites de Σ_E .

Attention : Σ_E/G n'est pas en général une variété lisse, et les "orbites" de Σ_E/G ne viennent pas forcément d'un éventuel système dynamique sur l'espace réduit !

Ceci-dit, cette terminologie nous permet de définir une notion d'orbite périodique sur Σ_E/G : on dira que $x \in \Sigma_E/G$ définit une orbite périodique (non stationnaire) dans l'espace réduit si la fonction $t \mapsto \tilde{\Phi}_t(x)$ est périodique (resp. non constante). D'où la notion de période sur l'espace réduit. On peut ainsi interpréter \mathcal{L}_{red} : c'est l'ensemble des périodes des orbites périodiques de l'espace réduit qui sont dans le support de \hat{f} .

Théorème 2.2.12 On suppose ici que $0 \notin \text{Supp} \hat{f}$. On fait les hypothèses (H.0), (H.1), (H.2), (H.3) ainsi que :

$$(H.4) \left\{ \begin{array}{l} \forall t_0 \in \mathcal{L}_{red}, t_0 \neq 0, \quad \forall \gamma \subset \Sigma_E \text{ telle que } \pi(\gamma) \text{ est périodique,} \\ \forall g \in G \text{ t.q. } M(g)\Phi_{t_0}(z) = z, \quad 1 \text{ n'est pas valeur propre de } M(g)dP_{\gamma,g,t_0}. \end{array} \right.$$

Alors l'ensemble de telles orbites est fini et on a l'asymptotique suivante modulo $O(h^{+\infty})$:

$$\mathcal{G}_\chi(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\asymp} \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}} \sum_{\substack{\gamma \subset \Sigma_E, g \in G \text{ t.q.} \\ M(g)\Phi_{t_0}(z) = z, \forall z \in \gamma}} \overline{\chi(g)} e^{\frac{i}{h} S_\gamma(t_0)} \sum_{k \geq 0} d_k^{\gamma,g,t_0}(\hat{f}) h^k. \quad (2.52)$$

où $d_k^{\gamma,g,t_0}(\hat{f})$ est une distribution en \hat{f} à support dans $\{t_0\}$, $S_\gamma(t_0) := \int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds$, et :

$$d_0^{\gamma,g,t_0}(\hat{f}) = \frac{T_\gamma^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma_\gamma(g,t_0)} \psi(E)}{2\pi |\det(M(g)dP_{\gamma,g,t_0} - Id)|^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(t_0). \quad (2.53)$$

où $\sigma_\gamma(g, t_0) \in \mathbb{Z}$ est un indice de Maslov de γ .

Preuve du théorème :

\mathcal{L}_{red} est fermé dans \mathbb{R} , car Σ_E est compact. Par ailleurs, selon le théorème du cylindre 2.2.4, sous l'hypothèse de non-dégénérescence, \mathcal{L}_{red} est discret (procéder par l'absurde). Ainsi, \mathcal{L}_{red} est fini. On note donc $\mathcal{L}_{red} = \{t_1, \dots, t_m\}$ ($t_j \in \mathbb{R}^*$). On construit alors une partition de l'unité χ_1, \dots, χ_m de fonctions dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall j, \quad \text{Supp}\chi_j \cap \mathcal{L}_{red} = \{t_j\}, \quad \sum_{j=1}^m \chi_j = 1 \text{ sur } \text{Supp}\hat{f} \text{ et } \text{Supp}\chi_j \subset]-T, T[.$$

Ainsi, on a $\hat{f} = \sum_{j=1}^m \hat{f}_j$ où $\hat{f}_j = \chi_j \hat{f}$. On écrit :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \sum_{j=1}^m \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}) f_j \left(\frac{E - \hat{H}}{h} \right) \tilde{M}(g) \right)$$

Et pour tout g dans G , $\mathcal{L}_{E,g} \cap \text{Supp}\hat{f}_j = \{t_j\}$ ou \emptyset . Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.2.7 à chaque f_j et de re-sommer le tout :

$$\sum_{g \in G} \sum_{j=1}^m \sum_{\gamma \in \Gamma_{E,g,t_j}} \dots = \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}} \sum_{\substack{\gamma \subset \Sigma_E, g \in G \text{ t.q.} \\ M(g)\Phi_{t_0}(z) = z \forall z \in \gamma}} \dots$$

ce qui achève la preuve du théorème . ■

Remarques :

- Contrairement au terme de Weyl, des éléments de G différents de l'identité interviennent dès le premier terme dans l'asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$.
- L'hypothèse **(H.4)** est déjà adoptée pour le cadre sans symétrie ($G = \{Id\}$) dans **[CRR]**.

• Asymptotique théorique sous condition de flot G -propre :

Le théorème 2.2.12 s'étend à une condition plus générale que **(H.4)**, mais nous n'avons pas calculé les premiers termes de l'asymptotique :

Soient $g \in G$ et $\Psi_g := \begin{cases}]-T, T[\times \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (t, z) \mapsto M(g)\Phi_t(z) - z \end{cases}$

Définition 2.2.13 On dit que le flot est g -propre sur $]-T, T[\times \Sigma_E$ si zéro est une valeur faiblement régulière de Ψ , i.e. :

- $\Psi_g^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{C}_{E,T,g}$ est une union finie de sous-variétés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}$.
- $\forall (t, z) \in \mathcal{C}_{E,T,g}, \quad T_{(t,z)}\mathcal{C}_{E,T,g} = \ker d_{(t,z)}\Psi_g$.

On dit que le flot est G -propre sur $]-T, T[\times \Sigma_E$ s'il est g -propre pour tout g dans G .

Pour l'étude de $\mathcal{G}_\chi(h)$ avec une fonction f telle que le support de \hat{f} est quelconque dans $] - T, T[$, cette notion est la condition nécessaire et suffisante pour appliquer le théorème de la phase stationnaire généralisé dans la preuve que nous allons donner.

Théorème 2.2.14 *On fait les hypothèses (H.0) , (H.1) , (H.2) et (H.3) et on suppose que le flot est G -propre sur $] - T, T[\times\Sigma_E$. Soit :*

$$\mathcal{C}_{E,T,g} := \{(t, z) \in] - T, T[\times\Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

Alors on a une asymptotique complète de $\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} I_{g,E}(h)$ en puissances de h avec des termes oscillants. Si $[\mathcal{C}_{E,T,g}]$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T,g}$ alors la quantité $\int_0^t p_s q_s ds$ est constante sur chaque élément Y de $[\mathcal{C}_{E,T,g}]$, notée $S_{Y,g}$, et on a l'asymptotique :

$$I_{g,E}(h) = \sum_{Y \in [\mathcal{C}_{E,T,g}]} (2\pi h)^{\frac{1-\dim Y}{2}} e^{\frac{i}{h} S_{Y,g}} \frac{\psi(E)}{2\pi} \left(\int_Y \hat{f}(t) d_g(t, z) d\sigma_Y(t, z) + \sum_{j \geq 1} h^j a_{j,Y} \right) + O(h^{+\infty})$$

où la densité $d_g(t, z)$ est définie par :

$$d_g(t, z) := \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_{E,g}''(t, z)|_{\mathcal{N}_{(t,z)} Y}}{i} \right) \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A + iB - i(C + iD)}{2} \right).$$

où $\varphi_{E,g}$ et A, B, C, D sont donnés dans la preuve de ce théorème (cf lemme 2.3.8 et (2.70)).

Ce théorème est prouvé au chapitre 2.3, plus précisément au paragraphe 2.3.2.

Cette asymptotique, faisant intervenir une somme sur les composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T,g}$, est semblable à celles sans symétries obtenues dans les articles de T. Paul et A. Uribe (cf [P-U] et [P-U2]) ou la thèse de S. Dozias (cf [Do]). Sous l'hypothèse (H.4), les orbites périodiques de Σ_E sont isolées dans Σ_E et la condition de flot G -propre est vérifiée : les composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T,g}$ sont $\{0\} \times (\Sigma_E \cap F_g)$ ($g \in G$) et les $\{t_0\} \times \gamma$ où γ est une orbite périodique g -invariante de Σ_E et t_0 est une g -période de γ dans $] - T, T[$.

• Formule de Gutzwiller dans l'espace réduit :

Introduisons une hypothèse supplémentaire :

$Id_{\mathbb{R}^d}$ est l'unique élément de G à avoir un point fixe sur Σ_E .

(H.5)

Cela signifie que l'on suppose que G agit *librement* sur Σ_E . Dans ce cas-là, on sait que l'espace quotient Σ_E/G (espace réduit), hérite d'une unique structure de variété lisse qui rend lisse la

projection :

$$\pi : \Sigma_E \rightarrow \Sigma_E/G. \quad (2.54)$$

Il est alors bien connu que le système dynamique induit par H sur Σ_E passe au quotient en un système dynamique sur Σ_E/G : la relation

$$X(\pi(z)) := d_z\pi(J\nabla H(z)) \quad (2.55)$$

définit l'unique champ de vecteur lisse X sur la variété Σ_E/G tel que, si l'on note $\tilde{\Phi}$ le flot associé à X , on ait :

$$\forall z \in \Sigma_E, \forall t \in \mathbb{R}, \exists \tilde{\Phi}_t(\pi(z)) = \pi(\Phi_t(z)). \quad (2.56)$$

Nb : X n'est pas forcément un champ de vecteur hamiltonien, la variété Σ_E/G n'étant, en général, pas symplectique.

Lemme 2.2.15 *Si $\bar{\gamma}$ est une orbite périodique de X dans Σ_E/G de période $T_{\bar{\gamma}}^*$, alors :*

– *Pour toute γ orbite périodique de Σ_E telle que $\pi(\gamma) = \bar{\gamma}$, $\exists! g_\gamma \in G$ tel que :*

$$\forall z \in \gamma, M(g_\gamma)\tilde{\Phi}_{T_{\bar{\gamma}}^*}(z) = z.$$

– *Si γ_1 et γ_2 sont des orbites périodiques de Σ_E telles que $\pi(\gamma_1) = \pi(\gamma_2) = \bar{\gamma}$, alors g_{γ_1} et g_{γ_2} sont conjugués dans G , de sorte que, si $\chi \in \hat{G}$, on note :*

$$\boxed{\chi(g_{\bar{\gamma}})} := \chi(g_{\gamma_1}) = \chi(g_{\gamma_2}). \quad (2.57)$$

La preuve de ce lemme est claire.

On en déduit alors le corollaire suivant de théorème 2.2.12 :

Corollaire 2.2.16 *Formule de Gutzwiller dans l'espace réduit :*

Sous les hypothèses du théorème 2.2.12, on suppose de plus que (H.5) est vérifiée et que $\psi(E) = 1$. Alors on a l'asymptotique suivante lorsque $h \rightarrow 0^+$:

$$\mathcal{G}_\chi(h) = d_\chi \sum_{\substack{\bar{\gamma} \text{ orbite} \\ \text{périodique de } \Sigma_E/G}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \text{ t.q.} \\ nT_{\bar{\gamma}}^* \in \text{Supp} \hat{f}}} \hat{f}(nT_{\bar{\gamma}}^*) \overline{\chi(g_{\bar{\gamma}}^n)} e^{\frac{i}{h} n S_{\bar{\gamma}}} \frac{T_{\bar{\gamma}}^* e^{i \frac{\pi}{2} \sigma_{\bar{\gamma}, n}}}{2\pi |\det((dP_{\bar{\gamma}})^n - Id)|^{\frac{1}{2}}} + O(h).$$

où $S_{\bar{\gamma}} := \int_0^{T_{\bar{\gamma}}^*} p_s \dot{q}_s ds$, $P_{\bar{\gamma}}$ est l'application de Poincaré de $\bar{\gamma}$ dans Σ_E/G , et $\sigma_{\bar{\gamma}, n}$ est un indice de Maslov de $\bar{\gamma}$.

Ce résultat corrobore les travaux des physiciens **B. Lauritzen**, **J.M. Robbins** et **N.D. Whelan** (voir [R], [L] et [L-W]) sur le sujet.

Preuve du corollaire : Selon le théorème 2.2.12, on a donc, sous l'hypothèse **(H.5)** :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}} \hat{f}(t_0) \sum_{\substack{\gamma \subset \Sigma_E: \pi(\gamma) \text{ périodique} \\ \text{avec } t_0 \text{ pour période}}} \frac{\chi(g_{\pi(\gamma)}(t_0))}{2\pi |\det(M(g)dP_{\gamma, g_{\pi(\gamma)}(t_0), t_0} - Id)|^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} S_\gamma(t_0)} T_\gamma^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma_\gamma(g_{\pi(\gamma)}(t_0), t_0)}}{\chi(g_{\pi(\gamma)}(t_0))} + O(h).$$

où $g_\gamma(t_0) = g_{\pi(\gamma)}(t_0)$ est l'unique élément de G tel que $M(g_\gamma(t_0))\Phi_{t_0}(z) = z$ pour tout z dans γ . (même chose que pour le lemme 2.2.15 : $\chi(g_\gamma(t_0))$ ne dépend que de $\pi(\gamma)$ et t_0). Remarquons que G agit naturellement sur l'ensemble des orbites périodiques de Σ_E . On note donc, pour γ orbite périodique de Σ_E :

$$Stab(\gamma) := \{g \in G : M(g)\gamma = \gamma\}.$$

$Stab(\gamma)$ est un sous-groupe de G . On a alors le lemme suivant, qui s'illustre par exemple sur le portrait de phase d'un hamiltonien du type "double puits" (cf figure 2.2) :

Lemme 2.2.17 *Si γ est une orbite de Σ_E telle que $\pi(\gamma)$ soit périodique, alors*

$$Stab(\gamma) = \langle g_\gamma \rangle, \gamma \text{ est périodique, et } T_{\pi(\gamma)}^* = \frac{T_\gamma^*}{|Stab(\gamma)|}.$$

Preuve du lemme : Bien sûr, on a $\langle g_\gamma \rangle \subset Stab(\gamma)$. Si $g_\gamma = \gamma$ et si $z \in \gamma$, alors, il existe t_1 dans \mathbb{R} tel que $M(g)z = \Phi_{t_1}(z)$, donc $\pi(z) = \tilde{\Phi}_{t_1}(\pi(z))$, donc $t_1 = kT_{\pi(\gamma)}^*$ (où $k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, $M(g)z = \Phi_{kT_{\pi(\gamma)}^*}(z) = M(g_\gamma^{-k})z$, donc, selon **(H.5)**, $g = g_\gamma^{-k}$. Nous avons donc prouvé que $Stab(\gamma) = \langle g_\gamma \rangle$.

Notons $\varpi(g_\gamma)$ l'ordre de g_γ dans G ($\varpi(g_\gamma) = |Stab(\gamma)|$). Si $z \in \gamma$, on a $\tilde{\Phi}_{T_\gamma^*}(\pi(z)) = \pi(z)$, d'où $k \in \mathbb{N}$ tel que $T_\gamma^* = kT_{\pi(\gamma)}^*$. Puis, $z = \Phi_{kT_{\pi(\gamma)}^*}(z) = g_\gamma^{-k}z$, donc, selon **(H.5)**, $g_\gamma^{-k} = Id$ et ainsi $\varpi(g_\gamma) \mid k$. Par ailleurs, $\tilde{\Phi}_{\varpi(g_\gamma)T_{\pi(\gamma)}^*}(z) = z$, d'où $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varpi(g_\gamma)T_{\pi(\gamma)}^* = k_0T_\gamma^*$, i.e. $\varpi(g_\gamma) = k_0$. Donc $k \mid \varpi(g_\gamma)$, donc $k = \varpi(g_\gamma)$ et $T_\gamma^* = \varpi(g_\gamma)T_{\pi(\gamma)}^*$ ■

De par l'action de G sur l'ensemble des orbites périodiques de Σ_E , on a, pour γ telle orbite :

$$|G|/|Stab(\gamma)| = N_{\pi(\gamma)} := \text{nombre d'orbites d'image } \pi(\gamma) \text{ par } \pi.$$

Ainsi, on a :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = d_\chi \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}} \hat{f}(t_0) \sum_{\substack{\gamma \subset \Sigma_E: \pi(\gamma) \text{ périodique} \\ \text{avec } t_0 \text{ pour période}}} \frac{\chi(g_{\pi(\gamma)}(t_0))}{N_{\pi(\gamma)}} \frac{T_{\pi(\gamma)}^*}{2\pi |\det(dP_{\gamma, g_\gamma, t_0} - Id)|^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} S_\gamma(t_0)} e^{i\frac{\pi}{2} \sigma_\gamma(g_\gamma, t_0)}}{\chi(g_{\pi(\gamma)}(t_0))} + O(h). \quad (2.58)$$

Le lemme suivant montre que les quantités intervenant dans la somme précédente ne dépendent que de $\pi(\gamma)$:

Lemme 2.2.18 $S_\gamma(t_0)$ ne dépend que de $\pi(\gamma)$ et de t_0 . Par ailleurs, sous l'hypothèse (H.5), si $P_{\pi(\gamma),\pi(z)}(t_0)$ désigne l'application de Poincaré de $\pi(\gamma)$ dans Σ_E/G au point $\pi(z)$ au temps t_0 , on a :

$$\det(M(g)d_z P_{\gamma,g_\gamma,t_0} - Id) = \det(d_{\pi(z)} P_{\pi(\gamma),\pi(z)}(t_0) - Id). \quad (2.59)$$

Preuve du lemme : cf infra.

Ainsi, si \mathcal{P}_{red} désigne l'ensemble des orbites périodiques de X dans Σ_E/G ayant une période dans $\text{Supp} \hat{f}$ on obtient :

$$\mathcal{G}_\chi^{osc}(h) = d_\chi \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}} \hat{f}(t_0) \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{P}_{red}} \overline{\chi(g_{\bar{\gamma}}(t_0))} T_{\bar{\gamma}}^* \frac{e^{\frac{i}{h} S_{\bar{\gamma}}(t_0)} e^{i \frac{\pi}{2} \sigma_{\bar{\gamma}}(t_0)}}{2\pi |\det(dP_{\bar{\gamma}}(t_0) - Id)|^{\frac{1}{2}}} + O(h). \quad (2.60)$$

Enfin, remarquons que, si $t_0 = nT_\gamma^*$ alors, selon (*) dans la preuve du lemme 2.2.6, nous avons :

$$S_\gamma(t_0) = \int_0^{t_0} p_s \dot{q}_s ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT_\gamma^*}^{(k+1)T_\gamma^*} p_s \dot{q}_s ds = n S_\gamma(T_\gamma^*).$$

Vu que $dP_{\bar{\gamma}}(t_0) = (dP_{\bar{\gamma}}(T_\gamma^*))^n$, et que $\chi(g_{\bar{\gamma}}(t_0)) = \chi(g_{\bar{\gamma}}^n)$, on obtient alors la formule énoncée dans le corollaire.

Reste à prouver le lemme 2.2.18 : le fait que $S_\gamma(t_0)$ ne dépende que de $\pi(\gamma)$ et t_0 est laissé à titre d'exercice (voir aussi le lemme 3.6.6). Pour l'application de Poincaré, dérivons l'identité suivante en $z \in \Sigma_E$:

$$\pi(M(g)\Phi_{t_0}(z)) = \tilde{\Phi}_{t_0}(\pi(z)).$$

On obtient l'égalité suivante sur Σ_E :

$$d_z \pi \circ M(g)F_z(t_0) = \tilde{F}_{\pi(z)}(t_0) \circ d_z \pi,$$

où $\tilde{F}_{\pi(z)}(t_0)$ est la différentielle de $x \mapsto \tilde{\Phi}_{t_0}(x)$ au point $\pi(z)$. Par ailleurs, le groupe agissant librement sur Σ_E , π est une submersion, et par le jeu des dimensions, c'est donc une immersion, ce qui achève la preuve du lemme et celle du corollaire. ■

Remarque technique :

Une condition usuelle pour que Σ_E/G hérite d'une structure naturelle de variété lisse serait de supposer que **les stabilisateurs sont conjugués dans G sur Σ_E** (cf [K]). C'est d'ailleurs l'hypothèse que nous ferons dans le chapitre 3 qui concerne les groupes de Lie. Cependant, pour

une action linéaire comme la notre, dans le cas d'un groupe fini, cela revient à supposer que ces stabilisateurs sont égaux à $\{Id_{\mathbb{R}^d}\}$:

En effet, si les stabilisateurs sont différents de $\{Id_{\mathbb{R}^d}\}$, si $z \in \Sigma_E$ et $M(g) \in Stab(z)$, alors $z \in \ker(M(g) - Id_{\mathbb{R}^{2d}})$. Donc $\Sigma_E \subset \bigcup_{g \neq Id} \ker(M(g) - Id_{\mathbb{R}^{2d}})$. Or, on voit facilement que, si $g \neq Id_{\mathbb{R}^d}$, alors $\dim \ker(M(g) - Id_{\mathbb{R}^{2d}}) = 2 \dim(\ker(g - Id_{\mathbb{R}^d})) \leq 2d - 2$. Ainsi, une telle union (finie!) ne peut contenir une hypersurface de \mathbb{R}^{2d} telle Σ_E .

Les sections suivantes sont consacrées à la preuve des théorèmes 2.2.5 et 2.2.7.

2.3 Preuve des théorèmes de la section précédente

Jusqu'au paragraphe 2.3.2, on travaille à g fixé d'ordre fini dans $O(d)$. On pourra donc supposer que g est dans un groupe fini noté G . On désire prouver les théorèmes 2.2.5 et 2.2.7. On n'utilisera pas **(H.3)** avant le paragraphe 2.3.2 .

2.3.1 Réduction à un problème de phase stationnaire via les états cohérents

On cherche l'asymptotique lorsque $h \rightarrow 0$ de :

$$I_g(h) = Tr \left(\psi(\widehat{H}) f\left(\frac{E-\widehat{H}}{h}\right) \tilde{M}(g) \right).$$

Via la transformée de Fourier, on écrit :

$$f\left(\frac{E-\widehat{H}}{h}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{tE}{h}} \hat{f}(t) \cdot U_h(t) dt,$$

où l'on fait apparaître le h -groupe unitaire quantique :

$$U_h(t) := e^{-i\frac{t}{h}\widehat{H}}.$$

On a :

$$I_g(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{tE}{h}} \hat{f}(t) \cdot Tr \left(\psi(\widehat{H}) U_h(t) \tilde{M}(g) \right) dt. \quad (2.61)$$

On va utiliser ici une formule de trace pour les opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ faisant intervenir les états cohérents (voir Appendice 4.2.3 pour la preuve). Si A est un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ ⁶, alors :

$$Tr(A) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle A\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha.$$

Donc, par cyclicité de la trace : $Tr \left(\psi(\widehat{H}) U_h(t) \tilde{M}(g) \right) =$

$$Tr \left(\tilde{M}(g) \psi(\widehat{H}) U_h(t) \right) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle \tilde{M}(g) \psi(\widehat{H}) U_h(t) \varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha.$$

⁶Le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ sera ici pris antilinéaire de second membre

Finalement,

$$I_g(h) = \frac{h^{-d}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\frac{tE}{h}} \cdot \hat{f}(t) \cdot m_h(\alpha, t, g) d\alpha dt. \quad (2.62)$$

où

$$m_h(\alpha, t, g) := \langle U_h(t)\varphi_\alpha; \psi(\widehat{H})\varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.63)$$

Voici une proposition qui va permettre d'éviter de se préoccuper des problèmes d'intégrabilité en α :

Proposition 2.3.1 *Il existe un compact K dans \mathbb{R}^{2d} tel que, si*

$$m_h(\alpha, t, g) = \langle U_h(t)\varphi_\alpha; \psi(\widehat{H})\varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^{2d} \setminus K} |m_h(\alpha, t, g)| d\alpha = O(h^{+\infty}).$$

uniformément en $g \in O(d)$ et en $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, quitte à prendre K plus grand, on peut supposer que $\Sigma_E \subset K$, et on introduit alors $\chi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ telle que $\chi_2(\alpha) = 1, \forall \alpha \in K$, de sorte qu'en écrivant $1 = \chi_2 + (1 - \chi_2)$, on obtient :

$$I_g(h) = \frac{h^{-d}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot e^{i\frac{tE}{h}} \cdot m_h(\alpha, t, g) d\alpha dt + O(h^{+\infty}). \quad (2.64)$$

Preuve de la proposition : Soit $g \in G$.

Soit $\psi_1 := \sqrt{\psi}$.

$$|m_h(\alpha, t, g)| \leq \left\| \psi_1(\widehat{H})\varphi_\alpha \right\|_{L^2} \cdot \left\| \psi_1(\widehat{H})\varphi_{g^{-1}\alpha} \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \left[\left\| \psi_1(\widehat{H})\varphi_\alpha \right\|_{L^2}^2 + \left\| \psi_1(\widehat{H})\varphi_{g^{-1}\alpha} \right\|_{L^2}^2 \right].$$

Selon **(H.1)**, et suivant le calcul fonctionnel h-pseudodifférentiel, (voir [**Ro**] pp.150-151) on peut écrire pour tout N dans \mathbb{N} :

$$\psi(\widehat{H}) = \widehat{A}_{N,h} + h^{N+1} \cdot R_{N+1}(h).$$

avec $\blacktriangleright A_{N,h}(z) = \sum_{k=0}^N h^k a_k(z)$ où $\text{Supp}(a_k) \subset H^{-1}(|E - \delta E, E + \delta E|)$.

$\blacktriangleright \sup_{0 < h \leq 1} \|R_{N+1}(h)\|_{\text{Tr}} \leq C \cdot h^{-d}$.

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \psi_1(\widehat{H})\varphi_{g^{-1}\alpha} \right\|_{L^2}^2 &= \langle \psi(\widehat{H})\varphi_{g^{-1}\alpha}; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2} \\ &= \langle \widehat{A}_{N,h}\varphi_{g^{-1}\alpha}; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle + h^{N+1} \langle R_{N+1}(h)\varphi_{g^{-1}\alpha}; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

• Ecrivons la décomposition polaire de l'opérateur $R_{N+1}(h)$: il existe un opérateur borné $U(h)$ de norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ inférieure à 1, tel que $R_{N+1}(h) = A_2^*(h)A_1(h)$ avec $A_2^*(h) = U(h)|R_{N+1}(h)|^{\frac{1}{2}}$ et $A_1(h) = |R_{N+1}(h)|^{\frac{1}{2}}$. Nous avons donc, en appliquant plusieurs fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} | \langle R_{N+1}(h)\varphi_{g^{-1}\alpha}; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2} | d\alpha &= \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} | \langle R_{N+1}(h)\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2} | d\alpha. \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \|A_1(h)\varphi_\alpha\|_{L^2} \|A_2(h)\varphi_\alpha\|_{L^2} d\alpha. \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \|A_1(h)\varphi_\alpha\|_{L^2}^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \|A_2(h)\varphi_\alpha\|_{L^2}^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}. \\ &= (2\pi h)^d \|A_1(h)\|_{HS} \|A_2(h)\|_{HS} \text{ (cf Appendice 4.2.3)}. \\ &\leq (2\pi h)^d \left\| |R_{N+1}(h)|^{\frac{1}{2}} \right\|_{HS}^2 = (2\pi h)^d \|R_{N+1}(h)\|_{\text{Tr}} = O(1). \end{aligned}$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$.

• Notons $W_{\varphi_{g^{-1}\alpha}, \varphi_{g^{-1}\alpha}}$ la h -transformée de Wigner de $(\varphi_{g^{-1}\alpha}, \varphi_{g^{-1}\alpha})$. On a (cf Appendice 4.2.2) :

$$\langle \widehat{a}_k \varphi_{g^{-1}\alpha}; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2} = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_{\varphi_{g^{-1}\alpha}, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) a_k(z) dz.$$

Or un rapide calcul montre que (cf lemme 2.1.5) :

$$W_{\varphi_{g^{-1}\alpha}, \varphi_{g^{-1}\alpha}}(z) = 2^d \cdot e^{-\frac{|z-g^{-1}\alpha|^2}{h}}.$$

Ainsi, si $H^{-1}(|E - \delta E, E + \delta E|) \subset \overline{B(0, R-1)}$, alors :

$$| \langle \widehat{a}_k \varphi_{g^{-1}\alpha}; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2} | \leq (\pi h)^{-d} \|a_k\|_\infty \int_{|z| \leq R-1} e^{-\frac{|z-g^{-1}\alpha|^2}{h}} dz.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le lemme :

Lemme 2.3.2 *Il existe $C > 0, c > 0$ tels que :*

$$\int_{|\alpha| \geq R} \int_{|z| \leq R-1} e^{-\frac{|z-g^{-1}\alpha|^2}{h}} dz d\alpha \leq C \cdot e^{-\frac{c}{h}}.$$

En effet, si $|z| \leq R-1$ et $|\alpha| \geq R$, alors $|z - \alpha| \geq 1$, donc, pour $0 < h \leq 1$:

$$\int_{|\alpha| \geq R} \int_{|z| \leq R-1} e^{-\frac{|z-\alpha|^2}{h}} dz d\alpha \leq e^{-\frac{1}{2h}} \cdot \int_{|\alpha| \geq R} \int_{|z| \leq R-1} e^{-\frac{|z-\alpha|^2}{2h}} dz d\alpha \leq e^{-\frac{1}{2h}} \cdot C_R \cdot \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} d\alpha.$$

Bien sûr, C ne dépend ni de t ni de g , et ceci achève la preuve en prenant $K := \overline{B(0, R)}$. ■

Finalement, on dispose de $R > 1$ tel que $\Sigma_E \subset B(0, R-1)$, $\chi_2 = 1$ sur $\overline{B(0, R-1)}$ et $\text{Supp} \chi_2 \subset B(0, R)$. On peut ensuite décrire $\psi(\widehat{H})$ via le **calcul fonctionnel** de [He-Ro 1] :

$$\psi(\widehat{H}) = \sum_{k=0}^N h^k \text{Op}_h^w(a_k) + h^{N+1} \cdot R_{N+1}(h). \quad (2.65)$$

où $\text{Supp}(a_k) \subset H^{-1}(]E - \delta E, E + \delta E[)$, $a_0(z) = \psi(H(z))$ et les a_k sont décrits en (2.2), ou plus précisément dans l'article fondateur [He-Ro 1]. Enfin $\sup_{0 < h \leq 1} \|R_{N+1}(h)\|_{\text{Tr}} \leq C.h^{-d}$.

Ainsi, on obtient :

$$I_g(h) = \sum_{j=0}^{N_0} h^j I_g^j(h) + O(h^{-d} h^{N_0+1}). \quad (2.66)$$

On est donc ramené à donner une asymptotique complète à j_0 fixé dans \mathbb{N} de :

$$I_g^{j_0}(h) = \frac{h^{-d}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\frac{tE}{h}} \cdot \hat{f}(t) m_h^{j_0}(\alpha, t, g) d\alpha dt,$$

avec

$$m_h^{j_0}(\alpha, t, g) := \langle U_h(t) \varphi_\alpha; Op_h^w(a_{j_0}) \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour étudier le comportement de $Op_h^w(a_{j_0}) \varphi_{g^{-1}\alpha}$, on va utiliser le fait général suivant :

Proposition 2.3.3 *Effet d'un pseudo sur un état cohérent :*

Soit $a(\cdot)$ un symbole de Weyl dont toutes les différentielles partielles sont bornées sur \mathbb{R}^{2d} .

Alors, $\exists \delta(d) > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_{d,N} > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$\left\| Op_h^w(a) \varphi_\alpha - \sum_{k=0}^N h^{\frac{k}{2}} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \frac{\partial^\gamma a(\alpha)}{\gamma!} \cdot \Psi_{\gamma,\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{d,N} \cdot h^{\frac{N+1}{2}}.$$

où

$$\boxed{\Psi_{\gamma,\alpha}} := \mathcal{T}_h(\alpha) \Lambda_h Op_1^w(z^\gamma) \tilde{\psi}_0.$$

(en anglais : "squeezed state" -état compressé-)

Preuve de la proposition :

On utilise les formules de l'Appendice 4.2.2. Selon (4.18),

$$Op_h^w(a) \varphi_\alpha = Op_h^w(a) \mathcal{T}_h(\alpha) \psi_0 = \mathcal{T}_h(\alpha) Op_h^w(a(\alpha + z)) \psi_0.$$

Puis on écrit la formule de Taylor entre α et $z + \alpha$ pour $a(z + \alpha)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} Op_h^w(a) \varphi_\alpha &= \sum_{k=0}^N \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \frac{\partial^\gamma a(\alpha)}{\gamma!} \cdot \mathcal{T}_h(\alpha) Op_h^w(z^\gamma) \psi_0 \\ &+ \int_0^1 (1-t)^N \sum_{|\gamma|=N+1} \frac{N+1}{\gamma!} \mathcal{T}_h(\alpha) Op_h^w(z^\gamma \partial^\gamma a(tz + \alpha)) \psi_0 dt. \end{aligned}$$

On obtient les termes du développement en remarquant que, selon (4.19) :

$$Op_h^w(z^\gamma) \psi_0 = h^{\frac{|\gamma|}{2}} \Lambda_h Op_1^w(z^\gamma) \tilde{\psi}_0$$

Pour l'estimation du reste, on écrit, selon (4.19) :

$$Op_h^w(z^\gamma \partial^\gamma a(tz + \alpha))\psi_0 = h^{\frac{|\gamma|}{2}} \Lambda_h Op_1^w(z^\gamma \partial^\gamma a(t\sqrt{h}z + \alpha))\tilde{\psi}_0.$$

Puis il reste à utiliser l'estimation de Calderon-Vaillancourt pour un symbole de Weyl b :

$$\exists k(d) \in \mathbb{N}, \quad \|Op_1^w(b)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq C_d \sup_{\beta \leq k(d)} \|\partial^\beta b\|_\infty$$

dont on peut trouver une preuve par exemple dans [Ro] Théorème (II-36) p.84 ou [Hö III] Theorem 18.6.3 p.164. ■

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a donc, selon (2.62), (2.63), et la proposition précédente, quand $h \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} I_g^{j_0}(h) &= \frac{h^{-d}}{(2\pi)^{d+1}} \sum_{k=0}^{2N} h^{\frac{k}{2}} \sum_{|\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} e^{i\frac{tE}{h}} \cdot \hat{f}(t) \chi_2(\alpha) \partial^\gamma a_{j_0}(g^{-1}\alpha) \langle U_h(t)\varphi_\alpha; \Psi_{\gamma, g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha dt \\ &\quad + h^{-d} h^{\frac{2N+1}{2}} O\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} |\hat{f}(t) \chi_2(\alpha)| d\alpha dt \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

car $\|U_h(t)\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$.

On est ainsi ramené à l'étude de $\langle U_h(t)\varphi_\alpha; \Psi_{\gamma, g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Pour $U_h(t)\varphi_\alpha$, on va utiliser un résultat dû à M. Combes et D. Robert sur la propagation semi-classique des états cohérents. On peut en trouver une preuve dans [CR], ou une version remaniée dans [Ro1]. Le principe consiste à calculer la propagation des états cohérents pour des hamiltoniens quadratiques dépendant du temps, puis de s'y ramener pour les hamiltoniens généraux via un développement de Taylor, en utilisant la formule de Duhamel. Remarquons que ce résultat est obtenu sous des hypothèses plus faibles -voir (2.71)- que l'hypothèse (H.0) nécessaire pour obtenir un calcul fonctionnel du type Helffer-Robert (transformée de Mellin) ou Helffer-Sjöstrand (fonctions presque-analytiques), dont les preuves sont fondées sur l'existence d'une parametrix.

Pour $z = (q, p)$, $z_t = (q_t, p_t) := \Phi_t(z)$, on introduit les notations :

$$S(t, z) := \int_0^t (p_s \cdot \dot{q}_s - H(z_s)) ds \quad (2.68)$$

$$\delta(t, z) := S(t, z) - \frac{q_t p_t - q p}{2}. \quad (2.69)$$

On rappelle que $F_\alpha(t) = \partial_z \Phi_t(\alpha) \in Sp(d, \mathbb{R})$. Notons :

$$F_\alpha(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A, B, C, D \in M_d(\mathbb{R}). \quad (2.70)$$

Théorème 2.3.4 Propagation semi-classique de états cohérents :

Soit $T > 0$. Soit $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien lisse vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2d}$:

$$|\partial^\alpha H(z)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{m_\alpha}, \quad \text{où } m_\alpha > 0. \quad (2.71)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{2d}$ tel que la solution de condition initiale α du système $\dot{z}_t = J\nabla H(z_t)$ soit définie pour $t \in]-T, T[$. On note $U_h(t) := e^{-i\frac{t}{h}\hat{H}}$ le propagateur quantique.

Alors, $\forall M \in \mathbb{N}$, $\exists C_{M,T}(\alpha) > 0$, indépendant de h et de $t \in]-T, T[$ tels que :

$$\left\| U_h(t)\varphi_\alpha - e^{i\frac{\delta(t,\alpha)}{h}} \mathcal{T}_h(\alpha_t) \Lambda_h \left[\sum_{j=0}^M h^{\frac{j}{2}} \cdot b_j(t, \alpha)(x) \cdot e^{\frac{j}{2}\langle M_0 x, x \rangle} \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{M,T}(\alpha) \cdot h^{\frac{M+1}{2}}.$$

où $\boxed{M_0} := (C + iD)(A + iB)^{-1}$, pour tout $t \in]-T, T[$, $b_j(t, \alpha) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est un polynôme indépendant de h , de degré inférieur à $3j$, ayant la même parité que j , et dépendant de façon C^∞ de (t, α) . En particulier, $b_0(t, \alpha)(x) = \pi^{-\frac{d}{4}} (\det(A + iB))_c^{-\frac{1}{2}}$.

Par ailleurs, si les solutions du système hamiltonien classique sont définies sur $] - T, T[$ pour des conditions initiales α dans un compact K , alors $\alpha \mapsto C_{M,T}(\alpha)$ est majorée sur K par $\tilde{C}_{M,T,K}$ indépendante de $\alpha \in K$.

Nb : $F_z(t)$ étant symplectique, $A + iB$ est inversible (cf [Fo])

On voit donc apparaître ici de nombreuses quantités liées au système dynamique classique !

Justification de l'énoncé :

Reprenons l'énoncé original de l'article [CRR]. On a, avec les mêmes notations, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| U_h(t)\varphi_\alpha - e^{i\frac{\delta(t,\alpha)}{h}} \mathcal{T}_h(\alpha_t) \Lambda_h \mu(F_\alpha(t)) \left(I + \sum_{(k,j) \in I_N} h^{\frac{k}{2}-j} p_{k,j}^w(x, D_x, t) \right) \tilde{\psi}_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,T}(\alpha) \cdot h^N.$$

où $I_N = \{(k, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq j \leq 2N-1, k \geq 3j, 1 \leq k-2j < 2N\}$, et $\mu : Sp(d, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$, est à valeur dans l'ensemble des opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. C'est la représentation métaplectique (voir (1.3)), qui vérifie pour $A \in Sp(d, \mathbb{R})$, et H symbole de Weyl :

$$Op_h^w(H \circ A) = \mu(A)^* Op_h^w(H) \mu(A), \quad (2.72)$$

$$\mu(F_\alpha(t)) \tilde{\psi}_0(x) = \pi^{-\frac{d}{4}} \det(A + iB)_c^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{j}{2}\langle M_0 x, x \rangle}.$$

(voir aussi [Ro1] énoncés (12) et (13)). On re-somme en posant $m = k - 2j$, pour obtenir :

$$\left\| U_h(t)\varphi_\alpha - e^{i\frac{\delta(t,\alpha)}{h}} \mathcal{T}_h(\alpha_t) \Lambda_h \mu(F_\alpha(t)) \left(I + \sum_{m=1}^{2N-1} h^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^m p_{m+2j,j}^w(x, D_x, t) \right) \tilde{\psi}_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{N,T}(\alpha) \cdot h^N.$$

On en déduit $b_0(t, \alpha)$.

On pose alors $B_m(t, \alpha) := \sum_{j=1}^m p_{m+2j,j}^w(x, D_x, t)$, et on note $\tilde{b}_m(t, \alpha) : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$ le polynôme

tel que $B_m(t, \alpha)\tilde{\psi}_0 = \tilde{b}_m(t, \alpha).\tilde{\psi}_0$. Selon [CRR], on a $\tilde{b}_m(t, \alpha) = \sum_{j=1}^m Q_{m+2j,j}$ avec $d^\circ(Q_{k,j}) \leq k$ et

$Q_{k,j}$ est un polynôme de même parité que k . Ainsi, pour $t \in]-T, T[$, $\tilde{b}_m(t, \alpha)$ est un polynôme de même parité que m et de degré inférieur à $3m$. Enfin, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\tilde{b}_m(t, \alpha).u = Op_1^w(\tilde{b}_m(t, \alpha))u$, donc, selon (2.72), on a :

$$\mu(F_\alpha(t))\tilde{b}_m(t, \alpha) = Op_1^w \left[\tilde{b}_m(t, \alpha)({}^t D_x - {}^t B\xi) \right] \mu(F_\alpha(t)).$$

Soit $b_m(t, \alpha)$ le polynôme tel que $Op_1^w(\tilde{b}_m(t, \alpha)[{}^t D_x - {}^t B\xi])\tilde{\psi}_0(x) = b_m(t, \alpha)(x).e^{\frac{i}{2}\langle M_0x, x \rangle}$. On a alors le résultat annoncé (quitte à modifier les b_m par une constante multiplicative).

Pour obtenir la parité des $b_m(t, \alpha)$, remarquons que, si Σ désigne l'opérateur de parité $\Sigma u(x) := u(-x)$, alors, si a est un symbole de Weyl pair ou impair sur \mathbb{R}^{2d} , on a formellement (cf par exemple (1.5)) :

$$Op_1^w(a)\Sigma = (-1)^\varepsilon \Sigma Op_1^w(a), \text{ où } \varepsilon = 1 \text{ si } a \text{ est impair et } \varepsilon = 2 \text{ si } a \text{ est pair.} \quad (2.73)$$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$b_m(t, \alpha)(-x)e^{\frac{i}{2}\langle M_0x, x \rangle} = \Sigma Op_1^w(\tilde{b}_m(t, \alpha)[{}^t D_x - {}^t B\xi])e^{\frac{i}{2}\langle M_0x, x \rangle} = (-1)^m b_m(t, \alpha)(x)e^{\frac{i}{2}\langle M_0x, x \rangle}$$

et on obtient bien $b_m(t, \alpha)(-x) = (-1)^m b_m(t, \alpha)(x)$. ■

Dans (2.67), pour chaque k , on développe $\langle U_h(t)\varphi_\alpha; \Psi_{\gamma, g^{-1}\alpha} \rangle$ (où $|\gamma| = k$) jusqu'à atteindre h^{N-d} , en utilisant le théorème 2.3.4 avec $M = M(k) = 2N - k$:

$$\langle U_h(t)\varphi_\alpha; \Psi_{\gamma, g^{-1}\alpha} \rangle = e^{i\frac{\delta(t, \alpha)}{h}} \sum_{j=0}^M h^{\frac{j}{2}} \langle \mathcal{T}_h(\alpha_t)\Lambda_h b_j(t, \alpha)e^{i\frac{M_0x \cdot x}{2}}; \Psi_{\gamma, g^{-1}\alpha} \rangle + O(h^{\frac{M+1}{2}}),$$

le $O(\cdot)$ étant universel en $t \in [-T, T]$, $g \in O(d)$, et $\alpha \in \overline{B(0, R)}$, car $\|\Psi_{\gamma, g^{-1}\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ qui est indépendant de h et t . Selon (2.67), on a donc :

$$I_g^{j_0}(h) = \frac{h^{-d}}{(2\pi)^{d+1}} \sum_{k=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N-k} h^{\frac{k}{2}} h^{\frac{j}{2}} \sum_{|\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{f}(t)\chi_2(\alpha)\partial^\gamma a_{j_0}(g^{-1}\alpha)e^{i\frac{tE}{h}} e^{i\frac{\delta(t, \alpha)}{h}} \Upsilon_{j, \gamma}(\alpha, t, g, h) d\alpha dt + O(h^{-d}h^{\frac{2N+1}{2}}). \quad (2.74)$$

où

$$\Upsilon_{j, \gamma}(\alpha, t, g, h) := \langle \mathcal{T}_h(\alpha_t)\Lambda_h b_j(t, \alpha)(x).e^{i\frac{M_0x \cdot x}{2}}; \mathcal{T}_h(g^{-1}\alpha)\Lambda_h Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Lemme 2.3.5

$$e^{\frac{itE}{\hbar}} \cdot e^{\frac{i\delta(t,\alpha)}{\hbar}} \Upsilon_{j,\gamma} = \frac{h^{-\frac{d}{2}}}{\pi^{\frac{d}{4}}} \int_{\mathbb{R}^d} b_j\left(\frac{y-qt}{\sqrt{h}}\right) \cdot Q_\gamma\left(\frac{y-g^{-1}q}{\sqrt{h}}\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Phi_E(t, \alpha, y, g)\right) dy. \quad (2.75)$$

où Q_γ est un polynôme ne dépendant que de γ tel que $Q_\gamma(x)\tilde{\psi}_0(x) := Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0(x)$, et

$$\Phi_E(t, \alpha, y, g) :=$$

$$S(\alpha, t) + q.p + (y - qt).p_t + \frac{1}{2} \langle M_0(y - qt); y - qt \rangle + \frac{i}{2} |y - g^{-1}q|^2 - y.g^{-1}p + Et. \quad (2.76)$$

Preuve du lemme :

D'après les formules sur les états cohérents (cf Appendice 4.2.2),

$$\Upsilon_{j,\gamma} = e^{-\frac{i}{2\hbar} \langle JM(g^{-1})\alpha; \alpha_t \rangle} \cdot \langle b_j(x) e^{i\frac{M_0x.x}{2}}; \mathcal{T}_1\left(\frac{g^{-1}\alpha - \alpha_t}{\sqrt{h}}\right) Q_\gamma \tilde{\psi}_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}^7.$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{j,\gamma} &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar} \langle JM(g^{-1})\alpha; \alpha_t \rangle}}{\pi^{\frac{d}{4}}} \int_{\mathbb{R}^d} b_j(x) \cdot Q_\gamma\left(x + \frac{qt}{\sqrt{h}} - \frac{g^{-1}q}{\sqrt{h}}\right) \times \\ &\exp\left(i\frac{M_0x.x}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left|x + \frac{qt}{\sqrt{h}} - \frac{g^{-1}q}{\sqrt{h}}\right|^2\right) \cdot \exp\left(i\left(\frac{p_t - g^{-1}p}{\sqrt{h}}\right)\left(x + \frac{qt}{2\sqrt{h}} - \frac{g^{-1}q}{2\sqrt{h}}\right)\right) dx. \end{aligned}$$

On pose $y = \sqrt{h}x + qt$.

$$\begin{aligned} \Upsilon_{j,\gamma} &= e^{-\frac{i}{2\hbar} \langle JM(g^{-1})\alpha; \alpha_t \rangle} \frac{h^{-\frac{d}{2}}}{\pi^{\frac{d}{4}}} \int_{\mathbb{R}^d} b_j\left(\frac{y-qt}{\sqrt{h}}\right) \cdot Q_\gamma\left(\frac{y-g^{-1}q}{\sqrt{h}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2h} |y - g^{-1}q|^2\right) \times \\ &\exp\left(i\frac{M_0(y-qt).(y-qt)}{2h}\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{h} (p_t - g^{-1}p)y\right) \cdot \exp\left[-\frac{i}{2h} (p_t - g^{-1}p)(qt + g^{-1}q)\right] dy. \end{aligned}$$

Or $\langle JM(g^{-1})\alpha, \alpha_t \rangle = g^{-1}p.q_t - g^{-1}q.p_t$

et $(p_t - g^{-1}p)(qt + g^{-1}q) = q_t p_t - qp - (g^{-1}p.q_t - g^{-1}q.p_t)$.

D'où le résultat. ■

Finalement, d'après (2.75) et (2.74), pour tout N dans \mathbb{N} , on a :

$$I_g^{j_0}(h) = \frac{h^{-\frac{3d}{2}}}{(2\pi)^{d+1} \pi^{\frac{d}{4}}} \sum_{k=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N-k} \sum_{|\gamma|=k} K_{g,\gamma,j}(h) + O(h^{-d} h^{N+\frac{1}{2}}). \quad (2.77)$$

avec :

$$K_{g,\gamma,j}(h) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} \Phi_E(t,\alpha,y,g)} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot \frac{\partial^\gamma a_{j_0}(g^{-1}\alpha)}{\gamma!} \cdot h^{\frac{j}{2}} \cdot b_j\left(\frac{y-qt}{\sqrt{h}}\right) \cdot h^{\frac{k}{2}} \cdot Q_\gamma\left(\frac{y-g^{-1}q}{\sqrt{h}}\right) dy d\alpha dt \quad (2.78)$$

⁷ $\langle, \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ est supposé ici antilinéaire du second membre

Remarquons que, selon (2.73), Q_γ est un polynôme en $x \in \mathbb{R}^d$, de degré inférieur à $|\gamma|$ et de même parité que $|\gamma|$. Donc, si pour $x \in \mathbb{R}^d$ on écrit :

$$Q_\gamma(x) = \sum_{|\mu| \leq |\gamma|} \kappa_{\mu,\gamma} x^\mu \quad \text{et} \quad b_j(t, \alpha)(x) = \sum_{|\nu| \leq 3j} c_{\nu,j}(t, \alpha) x^\nu$$

(les c_ν étant \mathcal{C}^∞ en t, α), on a :

$$h^{\frac{|\gamma|}{2}} \cdot Q_\gamma\left(\frac{y - g^{-1}q}{\sqrt{h}}\right) = \sum_{|\mu| \leq |\gamma|} \kappa_{\mu,\gamma} (y - g^{-1}q)^\mu h^{\frac{|\gamma|-|\mu|}{2}} \quad (2.79)$$

$$h^{\frac{j}{2}} \cdot b_j\left(\frac{y - q_t}{\sqrt{h}}\right) = \sum_{|\nu| \leq 3j} c_{\nu,j}(t, \alpha) (y - q_t)^\nu h^{\frac{j-|\nu|}{2}} \quad (2.80)$$

Par ailleurs, $\kappa_{\mu,\gamma} = 0$ lorsque $|\mu|$ n'est pas de la même parité que $|\gamma|$. Ainsi, dans l'écriture (2.79), lorsque $\kappa_{\mu,\gamma}$ est non nul, $h^{\frac{|\gamma|-|\mu|}{2}}$ est une puissance ENTIÈRE de h inférieure à $|\gamma|$.

Le même phénomène se produit pour b_j , avec des entiers relatifs. On a alors :

$$I_g^{j_0}(h) = \frac{(2\pi h)^{-d} h^{-\frac{d}{2}}}{2\pi \cdot \pi^{\frac{d}{4}}} \sum_{k=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2N-k} \sum_{|\gamma|=k} \sum_{|\nu| \leq 3j} \sum_{|\mu| \leq k} h^{\frac{j-|\nu|}{2}} h^{\frac{k-|\mu|}{2}} \frac{\kappa_{\mu,\gamma}}{\gamma!} L_{\nu,\mu,\gamma,j}(h) + O(h^{-d} h^{N+\frac{1}{2}}). \quad (2.81)$$

où

$$L_{\nu,\mu,\gamma,j}(h) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot \partial^\gamma a_{j_0}(g^{-1}\alpha) c_{\nu,j}(t, \alpha) \int_{\mathbb{R}_y^d} e^{\frac{i}{h} \Phi_E(t, \alpha, y, g)} (y - g^{-1}q)^\mu (y - q_t)^\nu dy d\alpha dt \quad (2.82)$$

• Enfin, on va calculer l'intégrale en y :

Pour cela, on sort de la phase les éléments ne faisant pas intervenir y et on pose $x := \frac{y - q_t}{\sqrt{h}}$.

$$L_{\nu,\mu,\gamma,j}(h) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot \partial^\gamma a_{j_0}(g^{-1}\alpha) c_{\nu,j}(t, \alpha) e^{\frac{i}{h} [S(\alpha, t) + qp + Et]} h^{\frac{|\nu|+d}{2}} \times \\ \int_{\mathbb{R}_x^d} x^\nu (\sqrt{h}x + q_t - g^{-1}q)^\mu e^{\frac{i}{h} [\sqrt{h}xp_t + \frac{h}{2} \langle M_0 x, x \rangle + \frac{i}{2} |\sqrt{h}x + q_t - g^{-1}q|^2 - (\sqrt{h}x + q_t)g^{-1}p]} dx d\alpha dt.$$

On regroupe les termes dans la phase de telle sorte que :

$$L_{\nu,\mu,\gamma,j}(h) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot \partial^\gamma a_{j_0}(g^{-1}\alpha) c_{\nu,j}(t, \alpha) e^{\frac{i}{h} [S(\alpha, t) + qp + Et + \frac{i}{2} |q_t - g^{-1}q|^2 - q_t g^{-1}p]} h^{\frac{|\nu|+d}{2}} \times \\ \int_{\mathbb{R}_x^d} e^{-\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + x\beta} x^\nu (\sqrt{h}x + a)^\mu dx d\alpha dt.$$

où $a := q_t - g^{-1}q$, $A := (I - iM_0)$ et $\beta := [i(p_t - g^{-1}p) - (q_t - g^{-1}q)]/\sqrt{h}$.

On utilise alors la formule du binôme et le lemme suivant :

Lemme 2.3.6 Soient $A \in M_d(\mathbb{C})$ telle que ${}^t A = A$, et $\Re A \gg 0$

$\beta \in \mathbb{C}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Alors A est inversible et

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \beta x} x^\alpha dx = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \det_+^{-\frac{1}{2}}(A) e^{\frac{1}{2}\langle A^{-1}\beta, \beta \rangle} \sum_{\eta \leq \alpha} (A^{-1}\beta)^\eta P_\eta(A)$$

où $P_\eta(A)$ ne dépend pas de β et $P_0(A) = 1$ (pour la définition de $\det_+^{-\frac{1}{2}}$, voir l'appendice sur la phase stationnaire).

Preuve du lemme : pour $\alpha = 0$, c'est le calcul d'une gaussienne (voir [Ho] ch.3.4 p.84-85, et Theorem 7.6.1 p.206), et on s'y ramène via la ruse suivante : si

$$I(a) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + x\beta} e^{ax} dx,$$

alors,

$$\partial_a^\alpha I(a) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + x\beta} x^\alpha e^{ax} dx.$$

Notre intégrale est donc $\partial_a^\alpha I(0)$ avec $I(a) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot \det_+^{-\frac{1}{2}}(A) \cdot e^{\frac{1}{2}\langle A^{-1}(\beta+a), (\beta+a) \rangle}$. ■

Pour appliquer ce dernier lemme, il faut faire les vérifications nécessaires sur $A = I - iM_0$ où, avec les notations symplectiques précédentes,

$$M_0 = (C + iD)(A + iB)^{-1}.$$

Lemme 2.3.7 $\forall X \in \mathbb{R}^d$, $\Im({}^t X.M_0 X) = |(A + iB)^{-1} X|_{\mathbb{C}^d}^2$.

Preuve du lemme :

A et B étant réelles $A - iB = \overline{A + iB}$ est inversible.

$${}^t X.M_0 X = \langle (A - iB)^{-1}(A - iB)({}^t C + i{}^t D)X; (A + iB)^{-1} X \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Or $(A - iB)({}^t C + i{}^t D) = (A{}^t C + B{}^t D) + iI_d$, car, $F_\alpha(t)$ étant symplectique, on a $A{}^t D - B{}^t C = I_d$ (cf [Fo] p.171).

$${}^t X.M_0 X = i \langle (A - iB)^{-1} X; (A + iB)^{-1} X \rangle_{\mathbb{R}^d} + \langle (A - iB)^{-1}(A{}^t C + B{}^t D)X; (A + iB)^{-1} X \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

$${}^t X.M_0 X = i|(A + iB)^{-1} X|_{\mathbb{C}^d}^2 + \langle [(A - iB)({}^t A + i{}^t B)]^{-1}(A{}^t C + B{}^t D)X; X \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Toujours en utilisant le fait que $F_\alpha(t)$ est symplectique, on a $A{}^t B = B{}^t A$ et donc :

$$(A - iB)({}^t A + i{}^t B) = A{}^t A + B{}^t B$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

Ainsi, on sait déjà que ${}^tM_0 = M_0$, et on a bien $\Re A \gg 0$ car, si $X \in \mathbb{R}^d$, alors :

$$\Re \langle AX, X \rangle = |X|^2 + |(A + iB)^{-1}X|^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} L_{\nu, \mu, \gamma, j}(h) &= \sum_{\eta \leq \mu} \sum_{\sigma \leq \eta + \nu} \binom{\mu}{\eta} h^{\frac{d}{2}} h^{\frac{|\eta| + |\nu| - |\sigma|}{2}} (2\pi)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot (\partial^\gamma a_{j_0})(g^{-1}\alpha) c_{\nu, j}(t, \alpha) \times \\ &\exp\left(\frac{i}{h} \varphi_E(t, \alpha, g)\right) (q_t - g^{-1}q)^{\mu - \eta} [(I - iM_0)^{-1}(i(p_t - g^{-1}p) - (q_t - g^{-1}q))]^\sigma \det_+^{-\frac{1}{2}}(I - iM_0) P_\sigma(I - iM_0) d\alpha dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_E(t, \alpha, g) &= S(\alpha, t) + qp + Et + \frac{i}{2}|q_t - g^{-1}q|^2 - q_t g^{-1}p \\ -\frac{i}{2} &\langle (I - iM_0)^{-1}[i(p_t - g^{-1}p) - (q_t - g^{-1}q)], [i(p_t - g^{-1}p) - (q_t - g^{-1}q)] \rangle. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Lemme 2.3.8 On a $\varphi_E = \varphi_1 + i\varphi_2$, où :

$$\varphi_1(t, \alpha, g) := (E - H(\alpha))t + \frac{1}{2}M(g^{-1})\alpha J\alpha - \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha_s - M(g^{-1})\alpha) J \dot{\alpha}_s ds \quad (2.85)$$

$$\varphi_2(t, \alpha, g) := \frac{1}{4} \langle (I - \widehat{W}_t)(\alpha_t - M(g^{-1})\alpha); (\alpha_t - M(g^{-1})\alpha) \rangle \quad (2.86)$$

où $\widehat{W}_t := \begin{pmatrix} W_t & -iW_t \\ -iW_t & -W_t \end{pmatrix}$ avec $\frac{1}{2}(I + W_t) := (I - iM_0)^{-1}$. Par ailleurs, on a :

$$\|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1.$$

Preuve du lemme :

Avec les notations introduites, on a :

$$\varphi_E = S(\alpha, t) + Et + qp - q_t g^{-1}p - \frac{1}{2}(q_t - g^{-1}q)(p_t - g^{-1}p) + \frac{i}{4}[|\alpha_t - M(g^{-1})\alpha|^2 - \langle W_t \beta, \beta \rangle]$$

où $\beta := (q_t - g^{-1}q) - i(p_t - g^{-1}p)$. Par ailleurs, on montre aisément que :

$$\langle \widehat{W}_t(a, b); (a, b) \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle W_t(a - ib); (a - ib) \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

De sorte que nous avons $\varphi_E = \varphi_1 + i\varphi_2$ avec φ_2 comme voulue et :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \alpha, g) &= S(\alpha, t) + Et + qp - q_t g^{-1}p - \frac{1}{2}(q_t - g^{-1}q)(p_t - g^{-1}p) \\ &= S(\alpha, t) + Et - \frac{1}{2}(q_t - g^{-1}q)(p_t + g^{-1}p). \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que :

$$-\frac{1}{2} \int_0^t (\alpha_s - M(g^{-1})\alpha) J \dot{\alpha}_s ds = S(\alpha, t) + tH(\alpha) - \frac{1}{2} M(g^{-1})\alpha J \alpha - \frac{1}{2} (q_t - g^{-1}q)(p_t + g^{-1}p).$$

Donc, φ_1 est bien de la forme désirée. Puis, comme dans [Fo], on introduit le demi-plan de Siegel :

$$\Sigma_d := \{A \in M_d(\mathbb{C}) : \Im A = A, \Re A \gg 0\}$$

Lemme 2.3.9 *Si $Z \in \Sigma_d$, alors $\|(I - iZ)^{-1}(I + iZ)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1$.*

(voir [Fo] pp.202, 203). On prend ici $Z = M_0 \in \Sigma_d$ (selon le lemme 2.3.7) et on a :

$$(I - iM_0)^{-1}(I + iM_0) = (I - iM_0)^{-1}(2I + (iM_0 - I)) = 2(I - iM_0)^{-1} - I = W_t.$$

Donc $\|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1$. Ceci achève la preuve du lemme. ■

On voit que l'on a affaire à un problème de **phase stationnaire** dont la résolution utilise le théorème qui va suivre. On renvoie à l'appendice 4.3 pour une description plus détaillée de ce théorème. Notons toutefois que la phase est complexe et l'ensemble critique est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Les termes en $F_1(x)^\mu F_2(x)^\nu$ assurent le fait que l'asymptotique en puissances de h est décalée, et ceci provient de la forme générale des coefficients $L_j(a, f)$. Ce décalage est ici indispensable : il compense le fait que, dans la somme (2.81), les termes en $h^{\frac{j-\nu}{2}}$ peuvent a priori donner des puissances négatives de h . Ces termes-là sont en fait nuls. En effet, on a ici :

$$F_1(x) \leftarrow q_t - g^{-1}q, \quad \mu \leftarrow \mu - \nu.$$

$$F_2(x) \leftarrow (I - iM_0)^{-1}(i(p_t - g^{-1}p) - (q_t - g^{-1}q)), \quad \nu \leftarrow \sigma.$$

Si les hypothèses du théorème de la phase stationnaire sont bien vérifiées, selon (2.83), l'asymptotique en puissances de h de $L_{\nu, \mu, \gamma, j}(h)$ commence en $h^{\frac{d}{2} + \frac{|\nu| + |\mu|}{2}} \cdot h^c$, où c est une constante positive.

Théorème 2.3.10 (*Phase stationnaire avec phase complexe et variété critique*)

Soit f une fonction C^∞ complexe définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n .

Soit a une fonction C^∞ complexe à support compact dans \mathcal{O} .

Soient F_1 et F_2 des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, μ et ν dans \mathbb{N}^n . On pose :

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{O} : \nabla f(x) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(f(x)) = 0\}.$$

et on suppose :

1. $\operatorname{Im}(f) \geq 0$ sur \mathcal{O} .
2. \mathcal{M} est une sous-variété connexe de dimension p de \mathbb{R}^n .
3. Pour tout x dans \mathcal{M} , la restriction de $f''(x)$ à $N_x\mathcal{M} := (T_x\mathcal{M})^\perp$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $N_x\mathcal{M} \times N_x\mathcal{M}$.
4. F_1 et F_2 sont nulles sur \mathcal{M} .

Alors :

- f est constante sur \mathcal{M} .
- $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C = C_{a,f,N}$ tel que pour tout $h > 0$:

$$\left| \int_{\mathcal{O}} e^{i\frac{f(x)}{h}} a(x) F_1(x)^\mu F_2(x)^\nu dx - (2\pi h)^{\frac{n-p}{2}} e^{i\frac{f(x_0)}{h}} \sum_{\frac{|\mu|+|\nu|}{2} \leq j \leq N} L_j(a, f) h^j \right| \leq C.h^{\frac{n-p}{2}+N+1}.$$

où x_0 est quelconque dans \mathcal{M} , les $L_j(a, f)$ sont des coefficients complexes, et en particulier, si $\nu = \mu = 0$:

$$L_0(a, f) = \int_{\mathcal{M}} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f''(x)|_{N_x\mathcal{M}}}{i} \right) .a(x) d\sigma_{\mathcal{M}}(x).$$

où $d\sigma_{\mathcal{M}}$ est la mesure de Lebesgue sur la sous-variété \mathcal{M} .

Remarque : jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse **(H.3)**. Cependant dans la suite de la preuve, il n'est pas évident que l'on puisse s'en passer. Nous allons donc nous en servir, en particulier pour pouvoir utiliser (plusieurs fois) les relations (2.30) et (2.31).

Dans la décomposition de $\psi(\widehat{H})$ en une série d'opérateurs h -pseudodifférentiels (cf (2.65), (2.2)), les a_j ne sont pas forcément G -invariants (hormis a_0). Cependant, pour vérifier les hypothèses du théorème de la phase stationnaire, nous n'utilisons des a_j que le fait qu'ils soient à support compact dans $H^{-1}(|E - \delta E, E + \delta E|)$.

2.3.2 Analyse du problème de phase stationnaire : notion de flot g -propre

- Calcul de l'ensemble critique $\mathcal{C}_{E,T,g}$

Soit $\boxed{\mathcal{C}_{E,T,g}} := \{a := (t, z) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} : \Im(\varphi_{E,g}(a)) = 0, \nabla_{t,\alpha} \varphi_{E,g}(a) = 0\}$.

Proposition 2.3.11 *L'ensemble critique est :*

$$\mathcal{C}_{E,T,g} = \{(t, z) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} : z \in \Sigma_E, M(g)\Phi_t(z) = z\}. \quad (2.87)$$

Preuve de la proposition :

$$\Im \varphi_E(t, z, g) = \Re \varphi_2(t, z, g) = \frac{1}{4} |z_t - M(g^{-1})z|^2 - \frac{1}{4} \Re \langle \widehat{W}_t(z_t - M(g^{-1})z); z_t - M(g^{-1})z \rangle .$$

$$\Im \varphi_E(t, z, g) = 0 \iff |z_t - M(g^{-1})z|^2 = \Re \langle \widehat{W}_t(z_t - M(g^{-1})z); \overline{z_t - M(g^{-1})z} \rangle_{\mathbb{C}^{2d}} .$$

Or $\Re \langle \widehat{W}_t(z_t - M(g^{-1})z); \overline{z_t - M(g^{-1})z} \rangle_{\mathbb{C}^{2d}} = \Re \langle W_t \beta, \bar{\beta} \rangle_{\mathbb{C}^d}$, où

$$\beta := (g^{-1}q - qt) - i(g^{-1}p - pt).$$

Ainsi : $\Im \varphi_E(t, z, g) = 0 \implies |z_t - M(g^{-1})z|^2 \leq \|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} |\beta|_{\mathbb{C}^d} |\bar{\beta}|_{\mathbb{C}^d} = \|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} |z_t - M(g^{-1})z|_{\mathbb{R}^{2d}}^2$

Or $\|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1$, donc $\boxed{\Im \varphi_E(t, z, g) = 0 \iff \Phi_t(z) = M(g^{-1})z}$.

- *Calcul du gradient de φ_0 :*

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_0(t, z, g) = E - H(z) - \frac{1}{2} \langle (z_t - M(g^{-1})z); J \dot{z}_t \rangle \\ \nabla_z \varphi_0(t, z, g) = \frac{1}{2} (M(g) + {}^t F_z(t)) J (z_t - M(g^{-1})z) \end{cases}$$

- *Calcul du gradient de φ_1 :*

$$\begin{cases} 4\partial_t \varphi_1(t, z, g) = 2 \langle (I - \widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z); \dot{z}_t \rangle - \langle \partial_z(\widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z); (z_t - g^{-1}z) \rangle \\ 4\nabla_z \varphi_1(t, z, g) = 2({}^t F_z(t) - M(g))(I - \widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z) - {}^t [\partial_z(\widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z)](z_t - g^{-1}z) \end{cases}$$

Ainsi, on constate que $(t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$ si et seulement si $\Phi_t(z) = M(g^{-1})z$ et $H(z) = E$. ■

- Calcul de la hessienne $\text{Hess } \varphi_{E,g}(t, z)$

Proposition 2.3.12 $\text{Hess } \varphi_{E,g}(t, z) =$

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{i}{2} \langle g(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H(z); J\nabla H(z) \rangle & -{}^t \nabla H(z) \\ \hline + \frac{i}{2} {}^t [({}^t F_z(t) - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H(z)] & \\ \hline -\nabla H(z) & \frac{1}{2} [JgF_z(t) - {}^t (gF_z(t))J] \\ + \frac{i}{2} ({}^t F_z(t) - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H(z) & + \frac{i}{2} ({}^t F_z(t) - g)(I - \widehat{W}_t)(F_z(t) - g^{-1}) \end{array} \right).$$

Preuve de la proposition : cette proposition sera démontrée lors du cas de l'étude d'une symétrie liée à groupe de Lie, dans un calcul bien plus général. On renvoie donc le lecteur au chapitre suivant. ■

• Calcul du noyau réel de la hessienne

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors on définit $\ker_{\mathbb{R}}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : A(x) = 0\} = \ker(\Re(A)) \cap \ker(\Im(A))$.

Proposition 2.3.13 Soit $(t, z) \in \mathcal{C}_{E,T,g}$. Le noyau réel de la hessienne est :

$$\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t, z) =$$

$$\{(\tau, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} : \alpha \perp \nabla H(z), \tau J \nabla H(z) + (M(g)F_z(t) - Id)\alpha = 0\}. \quad (2.88)$$

Preuve de la proposition :

En séparant partie réelle et imaginaire, on écrit $\widehat{W}_t = \widehat{W}_1 + i\widehat{W}_2$, où \widehat{W}_1 et \widehat{W}_2 sont symétriques, et $(\tau, \alpha) \in \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t, z)$ si et seulement si ⁸ :

$$\tau \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z); J \nabla H(z) \rangle - 2 \langle \nabla H(z); \alpha \rangle + \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z); (gF - I)\alpha \rangle = 0. \quad (\heartsuit)$$

$$-2\tau \langle \nabla H(z); \alpha \rangle + [JgF - {}^t(gF)J]\alpha + ({}^tF - g)\widehat{W}_2(F - g^{-1})\alpha + \tau({}^tF - g)\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z) = 0. \quad (\spadesuit)$$

Pour la partie imaginaire :

$$\tau \langle g(I - \widehat{W}_1)g^{-1} J \nabla H(z); J \nabla H(z) \rangle + \langle g(I - \widehat{W}_1)g^{-1} J \nabla H(z); (gF - I)\alpha \rangle = 0 \quad (\diamondsuit).$$

$$({}^tF - g)(I - \widehat{W}_1)g^{-1}[\tau J \nabla H(z) + (gF - I)\alpha] = 0 \quad (\clubsuit)$$

On pose

$$x := \tau J \nabla H(z) + (gF - I)\alpha.$$

Ainsi, en utilisant le fait que \widehat{W}_1 et \widehat{W}_2 sont symétriques, on a :

$$(\heartsuit) \iff \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z); x \rangle = 2 \langle \nabla H(z); \alpha \rangle$$

$$(\diamondsuit) \iff \langle g(I - \widehat{W}_1)g^{-1} J \nabla H(z); x \rangle = 0$$

$$(\clubsuit) \iff ({}^tF - g)(I - \widehat{W}_1)g^{-1}x = 0$$

(\spadesuit) s'exprime aussi en fonction de x : rappelons que l'on a

$$M(g)FJ \nabla H(z) = J \nabla H(z).$$

⁸Dans ce calcul on note F pour $F_z(t)$.

(dériver en $s = 0$ l'identité : $M(g)\Phi_t(\Phi_s(z)) = \Phi_s(z)$). Par ailleurs, gF et Fg sont des matrices symplectiques, donc $gFJ^t(gF) = J$ et $FgJ^t(Fg) = J$. Enfin, $[g, J] = 0$ et $\widehat{W}_2 = J\widehat{W}_1$. On multiplie alors (♠) par gFJ pour obtenir :

$$-2\tau J\nabla H(z) + (gF - I)g\widehat{W}_1g^{-1}x - gFgF\alpha + \alpha = 0.$$

$$-\tau J\nabla H(z) + (gF - I)g\widehat{W}_1g^{-1}x - gFgF\alpha - (\tau J\nabla H(z) + (gF - I)\alpha) + (gF - I)\alpha + \alpha = 0.$$

Or $\tau J\nabla H(z) = \tau gFJ\nabla H(z)$, donc :

$$(\spadesuit) \iff (gF - I)g\widehat{W}_1g^{-1}x - x - gFx = 0.$$

Ainsi $\boxed{(\spadesuit) \iff (gF - I)(I - g\widehat{W}_1g^{-1})x = -2x}$.

Posons

$$y := (I - g\widehat{W}_1g^{-1})x.$$

$$(\clubsuit) \iff y \in \ker[^t(gF) - I] = \text{Im}(gF - I)^\perp$$

et

$$(\spadesuit) \iff (gF - I)y = -2x.$$

Si $(\tau, \alpha) \in \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t, z)$ alors $x \perp y$, i.e.

$$\langle (I - g\widehat{W}_1g^{-1})x; x \rangle = 0, \text{ i.e. } |x|^2 = \langle \widehat{W}_1g^{-1}x; g^{-1}x \rangle.$$

Par ailleurs, comme $\|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1$, on a aussi $\|\widehat{W}_1\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1$. Donc, si $x \neq 0$, on a $|x|^2 < |x|^2$, d'où $\boxed{x = 0}$ et alors $(\heartsuit) \Rightarrow \boxed{\alpha \perp \nabla H(z)}$.

La réciproque est claire. ■

• Preuve du théorème 2.2.14 : flot g -propre

On rappelle que $\Psi_g := \begin{cases}] - T, T[\times \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (t, z) \mapsto M(g)\Phi_t(z) - z \end{cases}$. L'hypothèse de flot g -propre est en fait la bonne pour pouvoir appliquer correctement le théorème de la phase stationnaire :

Proposition 2.3.14 *Si $\mathcal{C}_{E,T,g}$ est une union finie de sous-variétés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}$, alors le hessien transverse de $\varphi_{E,g}$ est non dégénérée sur $\mathcal{C}_{E,T,g}$ si et seulement si le flot est g -propre sur $] - T, T[\times \Sigma_E$.*

NB : on peut se restreindre via le théorème de la phase *non* stationnaire aux $(t, z) \in \mathcal{C}_{E,T,g}$ tels que $t \in \text{Supp } \hat{f}$.

Preuve de la proposition :

On sait que le hessien transverse de $\varphi_{E,g}$ est non dégénéré sur $\mathcal{C}_{E,T}$ si et seulement si pour tout (t, z) dans $\mathcal{C}_{E,T,g}$ on a $\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t, z) = T_{(t,z)}\mathcal{C}_{E,T,g}$. Il n'y a donc qu'à montrer que :

$$\ker d_{(t,z)}\Psi_g = \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess}\varphi_{E,g}(t, z).$$

Soient $(t, z) \in \mathcal{C}_{E,T,g}$, et $(\tau, \beta) \in T_{(t,z)}([\] - T, T[\times\Sigma_E])$, i.e. $\tau \in \mathbb{R}$ et $\beta \perp \nabla H(z)$. On a :

$$d_{(t,z)}\Psi_g(\tau, \beta) = \tau\partial_t\Psi_g + \partial_z\Psi_g(\beta) = \tau J\nabla H(z) + (M(g)F_z(t) - Id_{\mathbb{R}^{2d}})\beta.$$

D'après la proposition 2.3.13, ceci achève la preuve de la proposition. ■

Nous voyons donc que, via le théorème de la phase stationnaire généralisé, on obtient un développement asymptotique de la forme voulue, et il nous reste à calculer le premier terme. Celui-ci est donné par :

$$I_g(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{(2\pi h)^{-d}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \chi_2(\alpha) \hat{f}(t) a_0(g^{-1}\alpha) \det_+^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{A + iB - i(C + iD)}{2}\right) e^{\frac{i}{h}\varphi_{E,g}(t,z)} dt dz.$$

Or, on sait que $a_0(\alpha) = \psi(H(\alpha))$, de sorte qu'en utilisant **(H.3)**, on a :

$$I_g(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{(2\pi h)^{-d}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \chi_2(\alpha) \hat{f}(t) \psi(H(\alpha)) \det_+^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{A + iB - i(C + iD)}{2}\right) e^{\frac{i}{h}\varphi_{E,g}(t,z)} dt dz.$$

Soit $[\mathcal{C}_{E,T,g}]$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T,g}$. Vue la définition de $\mathcal{C}_{E,T,g}$, $\varphi_{E,g}$ est constante sur les composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T,g}$, égale à :

$$\varphi_{E,g}(t, \alpha) = S(\alpha, t) + Et = \int_0^t p_s \dot{q}_s ds \quad \text{où } (q_s, p_s) = \Phi_s(\alpha).$$

Pour $Y \in [\mathcal{C}_{E,T,g}]$, notons $S_{Y,g}$ cette quantité. Le théorème de la phase stationnaire généralisé (cf appendice 4.3) donne alors l'asymptotique :

$$I_g(h) = \sum_{Y \in [\mathcal{C}_{E,T,g}]} (2\pi h)^{\frac{1-\dim Y}{2}} e^{\frac{i}{h}S_{Y,g}} \frac{\psi(E)}{2\pi} \left(\int_Y \hat{f}(t) d_g(t, z) d\sigma_Y(t, z) + \sum_{j \geq 1} h^j a_{j,Y} \right) + O(h^{+\infty})$$

où la densité $d(t, z)$ est définie par :

$$d_g(t, z) := \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi''_{E,g}(t, z)|_{\mathcal{N}_{(t,z)}Y}}{i} \right) \cdot \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A + iB - i(C + iD)}{2} \right). \quad (2.89)$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.2.14. ■

2.3.3 Preuve du théorème 2.2.5

Le cas $\text{Supp}\hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \emptyset$ se règle aisément en utilisant le théorème de la phase *non* stationnaire. Il est clair que, sous l'hypothèse $\text{Supp}\hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$, on a :

$$(\text{Supp}\hat{f} \times \mathbb{R}^{2d}) \cap \mathcal{C}_{E,T,g} = \{0\} \times (F_g \cap \Sigma_E).$$

Remarquons ensuite que Σ_E et F_g sont des sous-variétés transverses de \mathbb{R}^{2d} : en effet, si $z \in F_g \cap \Sigma_E$, on a $\nabla H(z) \in F_g$ (via **(H.3)** et (2.30)). Donc $F_g + [\mathbb{R}\nabla H(z)]^\perp = \mathbb{R}^{2d}$, et le cas $F_g \cap \Sigma_E = \emptyset$ est entendu.

Donc, si $z \in F_g \cap \Sigma_E$, alors $\mathcal{T}_{(0,z)}\mathcal{C}_{E,T,g} = \{0\} \times [F_g \cap [\mathbb{R}\nabla H(z)]^\perp]$. Par ailleurs, si $(\tau, \alpha) \in \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_E(0, z)$ alors, selon la proposition 2.3.13, $\tau J\nabla H(z) + (M(g) - I_{2d})\alpha = 0$ et en prenant le produit scalaire de cette dernière égalité avec $J\nabla H(z)$ on obtient $\tau |\nabla H(z)|^2 = 0$, donc $\tau = 0$. Ainsi, $\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_E(0, z) = \mathcal{T}_{(0,z)}\mathcal{C}_{E,T,g}$ et on peut toujours appliquer le théorème de la phase stationnaire si $\text{Supp}\hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$.

Il faut maintenant calculer le premier coefficient de l'asymptotique de $I_{g,E}(h)$. Nous commençons par le faire directement en utilisant le théorème de la phase stationnaire. Puis, nous donnerons une autre méthode (classique!), qui permettra de calculer les termes suivants.

Calcul direct via la phase stationnaire :

On se donne z dans $\Sigma_E \cap F_g$. La matrice hessienne se simplifie car $t = 0$, donc $F_z(0) = I_{2d}$, $M_0 = iI_d$, W_t et \widehat{W}_t sont nuls. Donc, si $M(g)z = z$, on obtient, selon la proposition 3.4.2 :

$$\text{Hess } \varphi_E(0, z) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{i}{2} |\nabla H(z)|^2 & -{}^t \nabla H(z) \\ \hline -\nabla H(z) & \frac{1}{2} J(g - g^{-1}) + \frac{i}{2} (I - g)(I - g^{-1}) \end{array} \right).$$

On a $\mathcal{N}_{(0,z)}\mathcal{C}_{E,T,g} = \mathbb{R} \times [F_g^\perp + \mathbb{R}\nabla H(z)]$. Soit β_0 une base de F_g^\perp . On note :

$$e_0 = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0), \quad \varepsilon_0 := \nabla H(z)$$

et β la base de $\mathcal{N}_{(0,z)}\mathcal{C}_{E,T,g}$ formée (dans l'ordre) de e_0 , de ε_0 et des vecteurs de β_0 .

Notons $\mathcal{A} := \text{Hess } \varphi_E(0, z)$. On a : $\mathcal{A}(e_0) = \frac{i}{2} |\nabla H(z)|^2 e_0 - \varepsilon_0$, $\mathcal{A}(\varepsilon_0) = -|\nabla H(z)|^2 e_0$, car $\nabla H(z) \in F_g$, et si $x \in \beta_0$, alors $[\frac{1}{2} J(g - g^{-1}) + \frac{i}{2} (I - g)(I - g^{-1})](x) \in F_g^\perp$ (car $M(g)$ laisse F_g^\perp invariant) et $\mathcal{A}(x) = (0, [J(g - g^{-1}) + \frac{i}{2} (I - g)(I - g^{-1})](x))$.

Donc si $\tilde{\mathcal{A}}$ désigne la restriction de $\text{Hess } \varphi_E(0, z)$ à $\mathcal{N}_{(0,z)}\mathcal{C}_{E,T,g}$, on a :

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\mathcal{A}} \\ i \end{array} \right]_{\beta} = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} |\nabla H(z)|^2 & i |\nabla H(z)|^2 & 0 \\ \hline i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & [\frac{1}{2i} J(g - g^{-1}) + \frac{1}{2} (I - g)(I - g^{-1})]_{F_g^\perp} \end{array} \right).$$

Donc

$$\det \left[\frac{\tilde{\mathcal{A}}}{i} \right]_{\beta} = |\nabla H(z)|^2 \det \left[\frac{1}{2i} J(g - g^{-1}) + \frac{1}{2} (I - g)(I - g^{-1}) \right]_{F_g^{\perp}}.$$

Par ailleurs, on a $\det \left[\frac{1}{2i} J(g - g^{-1}) + \frac{1}{2} (I - g)(I - g^{-1}) \right]_{F_g^{\perp}} =$

$$\det \left[\frac{1}{2i} J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{1}{2} (I - M(g))(I - M(g^{-1})) + \Pi_g \right]$$

où Π_g est le projecteur orthogonal sur F_g . Par ailleurs :

$$\frac{1}{2i} J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{1}{2} (I - M(g))(I - M(g^{-1})) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(I_d - g)(I_d - g^{-1}) & \frac{1}{2i}(g - g^{-1}) \\ \hline -\frac{1}{2i}(g - g^{-1}) & \frac{1}{2}(I_d - g)(I_d - g^{-1}) \end{array} \right).$$

Il existe une base de \mathbb{R}^d telle que la matrice de g dans cette base soit de la forme :

$$g := \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & \\ & -I_{p_2} & & 0 & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

où les θ_j ne sont pas dans $\pi\mathbb{Z}$, et

$$R_{\theta} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le projecteur orthogonal $\tilde{\Pi}_g$ sur \tilde{F}_g a alors pour matrice dans cette base : $\left(\begin{array}{c|c} I_{p_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, et on a

$$\Pi_g = \begin{pmatrix} \tilde{\Pi}_g & 0 \\ 0 & \tilde{\Pi}_g \end{pmatrix}. \text{ Donc : } \left[\frac{1}{2i} J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{1}{2} (I - M(g))(I - M(g^{-1})) + \Pi_g \right] =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(I_d - g)(I_d - g^{-1}) + \tilde{\Pi}_g & \frac{1}{2i}(g - g^{-1}) \\ \hline -\frac{1}{2i}(g - g^{-1}) & \frac{1}{2}(I_d - g)(I_d - g^{-1}) + \tilde{\Pi}_g \end{array} \right).$$

On rappelle que pour 4 blocs matriciels de même taille A, B, C, D , tels que C et D commutent, on a :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Ici, $[g, \tilde{\Pi}_g]$ et $[g^{-1}, \tilde{\Pi}_g] = 0$ donc on a :

$$\det \left[\frac{\tilde{\mathcal{A}}}{i} \right]_{\beta} = |\nabla H(z)|^2 \det \left(\left[\frac{1}{2}(I_d - g)(I_d - g^{-1}) + \tilde{\Pi}_g \right]^2 - \frac{1}{4}(g - g^{-1})^2 \right).$$

Dans une base adéquate :

$$\frac{i}{2}(I_d - g)(I_d - g^{-1}) + \tilde{\Pi}_g = \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & \\ & 2I_{p_2} & & 0 & \\ & & 2\sin^2(\frac{\theta_1}{2})I_2 & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & 2\sin^2(\frac{\theta_r}{2})I_2 \end{pmatrix}.$$

et

$$(g - g^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 2V_{\theta_1} & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & 2V_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

où $V_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $V_\theta^2 = -\sin^2\theta I_2$, et on a :

$$(2\sin^2(\frac{\theta}{2}))^2 + \sin^2\theta = (1 - \cos\theta)^2 = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2(\frac{\theta}{2}).$$

D'où :

$$\det \left[\frac{\tilde{\mathcal{A}}}{i} \right]_\beta = |\nabla H(z)|^2 4^{p_2} 4^{2r} \left(\prod_{j=1}^r \sin^2(\frac{\theta_j}{2}) \right)^2.$$

Par ailleurs, on montre facilement que :

$$\det \left[(I_d - g) \Big|_{\bar{F}_g^\perp} \right] = \det(I_d - g + \tilde{\Pi}_g) = 2^{d-\nu_g} \prod_{j=1}^r \sin^2(\frac{\theta_j}{2}).$$

Donc :

$$\det \left[\frac{\tilde{\mathcal{A}}}{i} \right]_\beta = |\nabla H(z)|^2 (2^{d-\nu_g})^2 \left(\det \left[(I_d - g) \Big|_{\bar{F}_g^\perp} \right] 2^{\nu_g-d} \right)^2.$$

Ainsi, comme sait que $[\det_+^{-\frac{1}{2}}]^2 = \det$, on a :

$$\det_+^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\tilde{\mathcal{A}}}{i} \right]_\beta = \pm |\nabla H(z)| |\det(I_d - g) \Big|_{\bar{F}_g^\perp}|.$$

Enfin, on a :

$$I_g(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{(2\pi h)^{-d} (2\pi)^{\frac{d}{2}}}{2\pi \cdot \pi^{\frac{d}{4}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_2(\alpha) \cdot \hat{f}(t) \cdot a_0(g^{-1}\alpha) \exp\left(\frac{i}{h} \varphi_E(t, \alpha, g)\right) \det_+^{-\frac{1}{2}}(I - iM_0) d\alpha dt.$$

Ici $\det_+^{-\frac{1}{2}}(I - iM_0) = 2^{-d}$, $\dim \mathcal{C}_{E,T,g} = 2\nu_g - 1$, $c_0(t, z) = b_0(t, z) = \pi^{-\frac{d}{4}}$, $a_0(\cdot) = \psi(E)$ sur $\mathcal{C}_{E,T,g}$, et φ_E est nulle sur $\mathcal{C}_{E,T,g}$. Donc, d'après le théorème de la phase stationnaire, on a :

$$I_g(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\psi(E)}{2\pi} (2\pi h)^{1-\nu_g} \hat{f}(0) \int_{\Sigma_E \cap F_g} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{\tilde{A}}{i} \right]_{\beta} \right) d(\Sigma_E \cap F_g).$$

$$I_g(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\psi(E)}{2\pi} (2\pi h)^{1-\nu_g} \hat{f}(0) \int_{\Sigma_E \cap F_g} \frac{\pm 1}{|\det((Id - g)|_{\tilde{F}_g^\perp})|} \frac{d(\Sigma_E \cap F_g)(z)}{|\nabla H(z)|}.$$

On peut en fait montrer que le "±1" est toujours égal à 1 (et $\det[(Id - g)|_{\tilde{F}_g^\perp}] \geq 0$), soit en calculant précisément le $\det_+^{-\frac{1}{2}}$ via la définition par les intégrales de gaussiennes, soit en utilisant les lignes qui suivent. ■

Termes suivants : utilisation de l'asymptotique faible :

Pour prouver le théorème 2.2.5, on peut aussi utiliser l'asymptotique de $\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g))$ (voir théorème 2.1.1) et calculer tous les coefficients du développement asymptotique de $I_g(h)$.

Lemme 2.3.15 *Les $c_k(\hat{f}, g)$ sont des distributions en \hat{f} à support dans $\{0\}$ et*

$$c_0(\hat{f}, g) = \psi(E) \hat{f}(0) \frac{(2\pi)^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\tilde{F}_g^\perp})} \int_{\Sigma_E \cap F_g} \frac{d(\Sigma_E \cap F_g)(z)}{|\nabla H(z)|}.$$

Preuve du lemme : On va se ramener au théorème 2.1.1 en regardant l'asymptotique de

$$G(\lambda) := \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}) f \left(\frac{\lambda - \hat{H}}{h} \right) \tilde{M}(g) \right),$$

non plus ponctuellement en λ , mais dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\lambda)$. Soit donc φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ avec un support près de E .

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) G(\lambda) d\lambda = h \int_{\mathbb{R}} f(\mu) \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}) \varphi(h\mu + \hat{H}) \tilde{M}(g) \right) d\mu.$$

(en effet, il suffit de faire le changement de variable $\mu \leftarrow \frac{\lambda - t}{h}$ à t fixé sur $\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) \psi(t) f \left(\frac{\lambda - t}{h} \right) d\lambda$!)

D'après le théorème de Taylor (version ponctuelle) et le théorème spectral, pour tout entier N :

$$\left\| \varphi(h\mu + \hat{H}) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k \mu^k}{k!} \varphi^{(k)}(\hat{H}) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{h^N \mu^N}{N!} \left\| \varphi^{(N)} \right\|_{\infty}.$$

Donc, comme de façon générale $\|AB\|_{\text{Tr}} \leq \|A\|_{\text{Tr}} \|B\|_{\mathcal{L}(L^2)}$, on a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(\mu) \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}) \varphi(h\mu + \hat{H}) \tilde{M}(g) \right) d\mu - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} f(\mu) \mu^k \text{Tr}[\psi(\hat{H}) \varphi^{(k)}(\hat{H}) \tilde{M}(g)] d\mu \right|$$

$$\leq \left\| \psi(\widehat{H}) \right\|_{\text{Tr}} \frac{h^N}{N!} \int_{\mathbb{R}} |f(\mu)\mu^N| d\mu \left\| \varphi^{(N)} \right\|_{\infty}.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) G(\lambda) d\lambda = h \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!} i^k \left(\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \hat{f} \right)(0) \text{Tr}[\psi(\widehat{H}) \varphi^{(k)}(\widehat{H}) \tilde{M}(g)] + O(h^{1-d} h^N). \quad (2.90)$$

Nous voici donc ramenés au théorème 2.1.1 qui donne le premier terme de

$$\text{Tr}[\psi(\widehat{H}) \varphi(\widehat{H}) \tilde{M}(g)] = \frac{(2\pi h)^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{F_g^\perp})} \int_{F_g} (\psi\varphi)[H(z)] dF_g(z) + O(h^{1-\nu_g}).$$

En utilisant la propriété $H(M(g)z) = H(z)$, une formule d'intégration par tranches sur F_g nous donne (cf lemme 4.4.1) :

$$\int_{F_g} (\psi\varphi)[H(z)] dF_g(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) \psi(\lambda) \int_{\Sigma_\lambda \cap F_g} \frac{d(\Sigma_\lambda \cap F_g)(z)}{|\nabla H(z)|} d\lambda.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) G(\lambda) d\lambda = h^{1-\nu_g} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) \tilde{c}_0(\lambda) d\lambda + O(h^{2-\nu_g}).$$

où

$$\tilde{c}_0(\lambda) := \psi(\lambda) \hat{f}(0) \frac{(2\pi)^{-\nu_g}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{F_g^\perp})} \int_{\Sigma_\lambda \cap F_g} \frac{d(\Sigma_\lambda \cap F_g)(z)}{|\nabla H(z)|}.$$

Par ailleurs, **(H.0)**, **(H.2)**, **(H.3)** ne dépendent pas de E , et **(H.1)** est encore vrai pour λ dans un voisinage de E . Pour avoir une asymptotique théorique ponctuelle de $G(\lambda)$ quand h tend vers zéro, il suffit donc de prouver le lemme suivant :

Lemme 2.3.16 *Si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$, alors $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{\lambda,g} = \{0\}$ pour λ dans un voisinage de E dans $] -T, T[$.*

Preuve du lemme : Rappelons d'abord que :

$$\mathcal{L}_{\lambda,g} = \{t \in] -T, T[: \exists z \in \Sigma_\lambda, M(g)\Phi_t(z) = z\}. \quad (2.91)$$

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite (λ_n) de réels tendant vers E , (t_n) suite dans $\mathbb{R}^* \cap \text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{\lambda_n,g}$, et (z_n) une suite dans Σ_{λ_n} telle que :

$$M(g)\Phi_{t_n}(z_n) = z_n.$$

Par extractions successives dans $\Lambda_E = H^{-1}([E - \delta E, E + \delta E])$ compact, il existe t dans $\text{Supp} \hat{f}$ tel que $t_n \rightarrow t$, $z \in \Sigma_E$ tel que $z_n \rightarrow z$, avec $M(g)\Phi_t(z) = z$. Ainsi, comme $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{0\}$, on a $t = 0$. Or, selon le lemme 2.2.2, les $|G|_{t_n}$ sont des périodes aussi petites que voulues d'orbites périodiques de Λ_E . Ceci contredit l'existence d'une période minimale sur Λ_E (cf lemme 2.2.1). ■

Ainsi, pour λ dans $[E - \delta E, E + \delta E]$, on a :

$$G(\lambda) = h^{1-\nu_g} c_0(\lambda) + O(h^{2-\nu_g}),$$

le $O(\cdot)$ étant uniforme sur $[E - \delta E, E + \delta E]$. Par continuité de $c_0(\cdot)$ et $\tilde{c}_0(\cdot)$ près de E , en prenant des φ à support dans $]E - \delta E, E + \delta E[$, on obtient $c_0(\lambda) = \tilde{c}_0(\lambda)$.

De même, on peut calculer les $c_k(\hat{f}, g)$ en faisant l'identification avec le théorème 2.1.1 et, selon (2.90), les $c_k(\hat{f}, g)$ sont des distributions en \hat{f} à support dans $\{0\}$. ■

Ceci achève la preuve du théorème 2.2.5. ■

Remarque : Dans (2.90), pour avoir le premier terme, il suffit simplement d'utiliser les accroissements finis ! Mais on remarque qu'en utilisant la formule de Taylor, on peut calculer effectivement tous les coefficients de $I_{g,E}(h)$, via l'asymptotique complète de $\text{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g))$ donnée par le théorème 2.1.1, et le calcul fonctionnel de [He-Ro 1].

Calculer le deuxième terme de $I_g(h)$ serait un peu fastidieux (quoique tout à fait faisable !) Pour illustrer la remarque précédente, on va plutôt **calculer le deuxième terme de $\mathcal{G}_\chi(h)$** dans le théorème 2.2.10 :

Si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on note $(b_j(f))_{j \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement :

$$\text{Tr}(f(\hat{H}_\chi)) = h^{-d} \sum_{j=0}^M b_j(f) h^j + O(h^{-d} h^{M+1}).$$

Les $b_j(f)$ sont calculés via le calcul fonctionnel et l'asymptotique faible. Ainsi, en remplaçant $\tilde{M}(g)$ par P_χ dans (2.90), on obtient pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) \mathcal{G}_{\chi,h}(E) dE = h^{-d+1} \sum_{r=1}^N h^r \sum_{k=0}^r i^k \frac{\partial^k(\hat{f})(0)}{k!} b_{r-k}(\psi\varphi^{(k)}) + O(h^{1-d} h^{N+1}).$$

Si l'on écrit :

$$\mathcal{G}_{\chi,h}(E) = h^{1-d} \sum_{r=0}^N a_r(E) h^r + O(h^{1-d} h^{N+1}),$$

alors, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a_r(E) dE = \sum_{k=0}^r i^k \frac{\partial^k(\hat{f})(0)}{k!} b_{r-k}(\psi\varphi^{(k)}).$$

Pour $r = 0$: $\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a_0(E) dE = \hat{f}(0) b_0(\psi\varphi)$.

Pour $r = 1$: $\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a_1(E) dE = \hat{f}(0) b_1(\psi\varphi) + i(\hat{f})'(0) b_0(\psi\varphi')$.

Calculons b_0 et b_1 :

On sait ([He-Ro 1]) que lorsque $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $f(\hat{H}) = Op_h^w(f \circ H) + O_{Tr}(h^{2-d})$. Ainsi nous avons à l'ordre 1 :

$$\text{Tr}(f(\hat{H}_\chi)) = \text{Tr}(f(\hat{H})P_\chi) = \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \text{Tr}(Op_h^w(f \circ H)\tilde{M}(g)) + O(h^{2-d}).$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(f(\widehat{H}_\chi)) &= \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(H(z)) dz \\ &+ \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G, \nu_g = d-1} \overline{\chi(g)} \frac{(2\pi h)^{-d+1}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\widehat{F}_g^\perp})} \int_{F_g} f(H(z)) d\sigma_{F_g}(z) + O(h^{2-d}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} b_0(f) &= \frac{d_\chi^2}{|G|} (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(H(z)) dz. \\ b_1(f) &= \frac{d_\chi}{|G|} \sum_{g \in G, \nu_g = d-1} \overline{\chi(g)} \frac{(2\pi)^{-d+1}}{\det((Id_{\mathbb{R}^d} - g)|_{\widehat{F}_g^\perp})} \int_{F_g} f(H(z)) d\sigma_{F_g}(z). \end{aligned}$$

Nous voyons que, si $G \subset SO(d)$, alors $b_1(f) = 0$ (car $\nu_g = d-1$ n'est jamais réalisé). Finalement, si $G \subset SO(d)$, on trouve :

$$\begin{aligned} a_0(E) &= \widehat{f}(0) (2\pi)^{-d} \frac{d_\chi^2}{|G|} \psi(E) \Gamma(E). \\ a_1(E) &= -i(\widehat{f})'(0) (2\pi)^{-d} \frac{d_\chi}{|G|} \frac{d}{dE} (\psi \Gamma)(E). \end{aligned}$$

où

$$\Gamma(E) := \int_{\Sigma_E} \frac{d\Sigma_E}{|\nabla H|}.$$

Par contre, si on n'a pas $G \subset SO(d)$, ou si on va plus loin dans le développement, alors les coefficients font intervenir des $\chi(g)$ différents de d_χ .

2.3.4 Preuve du théorème 2.2.7

On travaille toujours à g fixé. On se donne $t_0 \neq 0$ et f telle que $\text{Supp} \widehat{f} \cap \mathcal{L}_{E,g} = \{t_0\}$.

La première chose à voir est que le flot est g -propre sous l'hypothèse (2.39).

Proposition 2.3.17 *Supposons :*

$$\forall \gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}, \quad \forall z \in \gamma, \quad \dim \ker[(M(g)F_z(t_0) - Id)^2] \leq 2.$$

Alors Γ_{E,g,t_0} est fini, t_0 est isolé dans $\mathcal{L}_{E,g}$, et les composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T,g} \cap (\text{Supp} \widehat{f} \times \mathbb{R}^{2d})$ sont les (t_0, γ) où $\gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}$. Par ailleurs, si z est un point d'une telle orbite, alors on a :

$$T_{(t_0,z)} \mathcal{C}_{E,T,g} = \{0\} \times \mathbb{R} J \nabla H(z) = \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t_0, z).$$

Preuve de la proposition

Le fait que Γ_{E,g,t_0} soit fini et la structure de $\mathcal{C}_{E,T,g} \cap (\text{Supp} \widehat{f} \times \mathbb{R}^{2d})$ sont donnés par le **théorème du cylindre** démontré en Appendice 4.1 (cf théorème 4.1.4). Reste à montrer que, si $\gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}$

et si $z \in \gamma$, alors $\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t_0, z) \subset \{0\} \times \mathbb{R}J\nabla H(z)$ (l'autre inclusion est automatique).

Soit donc $(\tau, \alpha) \in \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_{E,g}(t_0, z)$, i.e., selon la proposition 2.3.13 : $\alpha \perp \nabla H(z)$ et

$$\tau J\nabla H(z) + (M(g)F_z(t_0) - I)\alpha = 0. \quad (2.92)$$

On note $E_1 := \ker(M(g)F_z(t_0) - I)^2 \subset E_1$. Rappelons que $J\nabla H(z) \in \ker(M(g)F_z(t_0) - I)$: pour cela, γ étant périodique, il suffit de dériver en $s = 0$ l'identité :

$$M(g)\Phi_{t_0}(\Phi_s(z)) = \Phi_s(z).$$

Par ailleurs, selon [Ab-Ma] p.573, Prop. 8.1.1, on sait que E_1 est de dimension paire car $M(g)F_z(t_0)$ est symplectique. Ainsi, $\dim E_1 \geq 2$, donc ici $\dim E_1 = 2$. Soit $u_2 \in E_1$ tel que $(J\nabla H(z), u_2)$ soit une base de E_1 . Selon (2.92), $\alpha \in E_1$, d'où λ_1 et λ_2 réels tels que $\alpha = \lambda_1 J\nabla H(z) + \lambda_2 u_2$. On a donc :

$$0 = \langle \alpha, \nabla H(z) \rangle = 0 + \lambda_2 \langle u_2, \nabla H(z) \rangle.$$

J'affirme que $\langle u_2, \nabla H(z) \rangle \neq 0$. (ainsi $\alpha \in \mathbb{R}J\nabla H(z)$ et en reportant dans (2.92), $\tau = 0$). En effet, dans le cas contraire, $Ju_2 \perp J\nabla H(z)$. Or on a déjà $Ju_2 \perp u_2$. Donc $Ju_2 \perp E_1$. Nous avons donc $u_2 \in (JE_1)^\perp = V_z$ (voir lemme suivant) et $u_2 \in E_1$ avec $E_1 \oplus V_z = \mathbb{R}^{2d}$. Donc $u_2 = 0$, ce qui est exclu et achève la preuve de la proposition. \blacksquare

Pour utiliser le fait que $(JE_1)^\perp = V_z$, on a utilisé le lemme suivant :

Lemme 2.3.18 Soient λ et μ des réels non nuls tels que $\lambda\mu \neq 1$. Si $F \in Sp(n, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{E}_k(\lambda, F) := \ker((F - \lambda I_{2n})^k)$ et pour x et y dans \mathbb{R}^{2n} , on note

$$w(x, y) := \langle x, Jy \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, on a : $w(\mathcal{E}_k(\lambda, F), \mathcal{E}_k(\mu, F)) = 0$.

Preuve du lemme : on procède par récurrence sur k . Le résultat est trivial pour $k = 0$. Supposons-le acquis au rang k .

Première étape : on montre que $w(\mathcal{E}_{k+1}(\lambda, F), \mathcal{E}_k(\mu, F)) = 0$.

Soient $u \in \mathcal{E}_{k+1}(\lambda, F)$, et $v \in \mathcal{E}_k(\mu, F)$. On a donc :

$$0 = w(u, (F - \mu I)^k v) = w(u, \left([F - \frac{1}{\lambda} I] + [\frac{1}{\lambda} - \mu] I \right)^k v) = \sum_{j=0}^k C_k^j [\frac{1}{\lambda} - \mu]^{k-j} w(u, [F - \frac{1}{\lambda} I]^j v).$$

Rappelons que, F étant symplectique, pour x et y dans \mathbb{R}^{2n} , on a $w(x, Fy) := w(F^{-1}x, y)$.

D'où :

$$0 = \sum_{j=0}^k C_k^j [\frac{1}{\lambda} - \mu]^{k-j} w\left(\left[F^{-1} - \frac{1}{\lambda} I \right]^j u, v \right).$$

Par ailleurs, comme pour tout j , $\mathcal{E}_j(\lambda, F) = \mathcal{E}_j(\frac{1}{\lambda}, F^{-1})$, on a $u \in \mathcal{E}_{k+1}(\frac{1}{\lambda}, F^{-1})$. Donc, pour tout $j \geq 1$, on a : $[F^{-1} - \frac{1}{\lambda}I]^j u \in \mathcal{E}_k(\frac{1}{\lambda}, F^{-1}) = \mathcal{E}_k(\lambda, F)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, tous les termes de la somme sont nuls sauf pour $j = 0$. D'où $w(u, v) = 0$.

Deuxième étape : on montre que $w(\mathcal{E}_{k+1}(\lambda, F), \mathcal{E}_{k+1}(\mu, F)) = 0$.

Si $u \in \mathcal{E}_{k+1}(\lambda, F)$, et $v \in \mathcal{E}_{k+1}(\mu, F)$, alors, on a de même :

$$0 = w(u, (F - \mu I)^{k+1}v) = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j \left[\frac{1}{\lambda} - \mu \right]^{k+1-j} w\left(\left[F^{-1} - \frac{1}{\lambda}I \right]^j u, v \right).$$

Ici, si $j \geq 1$, alors $[F^{-1} - \frac{1}{\lambda}I]^j u \in \mathcal{E}_k(\lambda, F)$ et $v \in \mathcal{E}_{k+1}(\mu, F)$. Donc, d'après la première étape, tous les termes de la somme sont nuls sauf pour $j = 0$, ce qui donne à nouveau $w(u, v) = 0$. ■

Selon le théorème de la phase stationnaire généralisé, on obtient une asymptotique donnée par la formule générale du théorème 2.2.14, que nous pouvons expliciter ici :

Etant donné le support de \hat{f} , les seules composantes connexes que nous considérons ici sont les $Y = (t_0, \gamma)$ où $\gamma \in \Gamma_{E,g,t_0}$. On fixe (t_0, z) dans $\mathcal{C}_{E,T,g}$ et on veut calculer $\det_{+\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi''_{E,g}(t_0, z)|_{\mathcal{N}(t_0, z)Y}}{i} \right)$.

Soit $\boxed{\Pi}$ le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}J\nabla H(z)$. On allège un peu les notations en écrivant

$$\boxed{F := M(g)F_z(t_0)} \text{ et } \boxed{W := M(g)\widehat{W}_{t_0}M(g^{-1})}. \text{ On a } \det \left(\frac{\varphi''_{E,g}(t_0, z)|_{\mathcal{N}(t_0, z)Y}}{i} \right) =$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \langle (I - W)J\nabla H(z); J\nabla H(z) \rangle & \begin{array}{c} -\frac{1}{i} {}^t \nabla H(z) \\ +\frac{1}{2} {}^t [({}^t F - I)(I - W)J\nabla H(z)] \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -\frac{1}{i} \nabla H(z) \\ +\frac{1}{2} ({}^t F - I)(I - W)J\nabla H(z) \end{array} & \begin{array}{c} \frac{1}{2i} [JF + {}^t (JF)] \\ +\frac{1}{2} ({}^t F - I)(I - W)(F - I) + \Pi \end{array} \end{array} \right).$$

Remarquons que, F étant symplectique, on a $JF + {}^t (JF) = ({}^t F + I)J(F - I)$. Notons

$$\boxed{K := \frac{1}{2i} ({}^t F + I)J + \frac{1}{2} ({}^t F - I)(I - W)}. \quad (2.93)$$

Ainsi le quatrième bloc est égal à $K(F - I) + \Pi$.

Par ailleurs, remarquons que ${}^t F \nabla H(z) = \nabla H(z)$ (car $FJ\nabla H(z) = J\nabla H(z)$ et F est symplectique). Ainsi, le troisième bloc est égal à $KJ\nabla H(z)$. Posons alors

$$\boxed{X_1 := \frac{1}{2}(I - W)J\nabla H(z)}. \quad (2.94)$$

On a ainsi :

$$\det \left(\frac{\varphi''_{E,g}(t_0, z)|_{\mathcal{N}(t_0, z)Y}}{i} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} {}^t X_1 J\nabla H(z) & i {}^t \nabla H(z) + {}^t X_1 (F - I) \\ \hline KJ\nabla H(z) & K(F - I) + \Pi \end{array} \right)$$

Le lemme suivant est issu de notes de M. Combescuré :

Lemme 2.3.19 On note $F = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$. Alors K est inversible,

$$K^{-1} = \frac{1}{2}[(F - I) + i(F + I)J] \text{ et } \det(K) = (-1)^d \det\left(\frac{1}{2}(\tilde{A} + i\tilde{B} - i(\tilde{C} + i\tilde{D}))\right)^{-1}.$$

Preuve du lemme :

$$2K = {}^t F(I - W - iJ) + (W - I - iJ).$$

Posons $\tilde{M} := (\tilde{C} + i\tilde{D})(\tilde{A} + i\tilde{B})$ et $\tilde{W} := g W_{t_0} g^{-1}$. On vérifie facilement que l'on a :

$$gM_0g^{-1} = \tilde{M}, \quad I + \tilde{W} = 2(I - i\tilde{M})^{-1}, \text{ et } I - \tilde{W} = -2i\tilde{M}(I - i\tilde{M})^{-1}.$$

Ainsi, on obtient :

$$2K = \left(\begin{array}{c|c} {}^t\tilde{A}(I - \tilde{W}) + i{}^t\tilde{C}(I + \tilde{W}) - (I - \tilde{W}) & -i{}^t\tilde{A}(I - \tilde{W}) + \tilde{C}(I + \tilde{W}) - i(I + \tilde{W}) \\ \hline {}^t\tilde{B}(I - \tilde{W}) + i{}^t\tilde{D}(I + \tilde{W}) + i(I - \tilde{W}) & -i{}^t\tilde{B}(I - \tilde{W}) + {}^t\tilde{D}(I + \tilde{W}) - (I + \tilde{W}) \end{array} \right).$$

$$2K = \left(\begin{array}{c|c} (-2i{}^t\tilde{A}\tilde{M} + 2i{}^t\tilde{C} + 2i\tilde{M})(I - i\tilde{M})^{-1} & (-2i{}^t\tilde{A}\tilde{M} + 2i{}^t\tilde{C} - 2iI)(I - i\tilde{M})^{-1} \\ \hline (-2i{}^t\tilde{B}\tilde{M} + 2i{}^t\tilde{D} + 2\tilde{M})(I - i\tilde{M})^{-1} & (-2i{}^t\tilde{B}\tilde{M} + 2i{}^t\tilde{D} - 2I)(I - i\tilde{M})^{-1} \end{array} \right).$$

F étant symplectique, on a (voir [Fo]) :

$${}^t\tilde{D} - {}^t\tilde{B}\tilde{M} = (\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1} \quad \text{et} \quad {}^t\tilde{C} - {}^t\tilde{A}\tilde{M} = -i(\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1}$$

D'où :

$$K = \left(\begin{array}{c|c} (\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1} + i\tilde{M} & -i(\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1} - iI \\ \hline i(\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1} + \tilde{M} & (\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1} - I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (I - i\tilde{M})^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (I - i\tilde{M})^{-1} \end{array} \right).$$

Soient $U := \tilde{A} + i\tilde{B}$ et $V := \tilde{C} + i\tilde{D}$. On a :

$$K = \left(\begin{array}{c|c} I + iV & -iI - iU \\ \hline iI + V & I - U \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} (\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1}(I - iM)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (\tilde{A} + i\tilde{B})^{-1}(I - iM)^{-1} \end{array} \right)$$

$$K = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -iI & I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} iV - U & -iI - iU \\ \hline 0 & 2I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline iI & I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} Y^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array} \right).$$

où $Y := U - iV$.

Ainsi

$$\det K = (-1)^d \det(Y^{-1})2^d,$$

et

$$K^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -iI & I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} -Y^{-1} & -\frac{i}{2}Y^{-1}(I + U) \\ \hline 0 & \frac{1}{2}I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline iI & I \end{array} \right).$$

Après calcul,

$$K^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} U - I & -i(I + U) \\ \hline iI + V & -(I + iV) \end{array} \right) = \frac{1}{2} [(F - I) + i(F + I)J].$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

Reprenons le calcul du hessien transverse :

$$\det \left(\frac{\varphi''_{E,g}(t_0, z)|_{\mathcal{N}(t_0, z)^Y}}{i} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & K \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} {}^t X_1 J \nabla H(z) & i^t \nabla H(z) + {}^t X_1 (F - I) \\ \hline J \nabla H(z) & (F - I) + K^{-1} \Pi \end{array} \right).$$

Or

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gA & gB \\ gC & gD \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det(K) = (-1)^d \det(g^{-1}) \det\left(\frac{1}{2}(A + iB - i(C + iD))\right)^{-1}.$$

Ainsi

$$d_g(t, z)^2 = (-1)^d \det(g^{-1}) \det \left(\begin{array}{c|c} {}^t X_1 J \nabla H(z) & i^t \nabla H(z) + {}^t X_1 (F - I) \\ \hline J \nabla H(z) & (F - I) + K^{-1} \Pi \end{array} \right). \quad (2.95)$$

où d_g est donnée par (3.100).

On note $\alpha := {}^t X_1 J \nabla H(z)$ ⁹ et on fait $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{\alpha} J \nabla H(z) L_1$, ce qui donne :

$$d_g(t, z)^2 = (-1)^d \alpha D \quad (2.96)$$

où

$$D := \det \left((F - I) + K^{-1} \Pi - \frac{1}{\alpha} J \nabla H(z) [i^t \nabla H(z) + {}^t X_1 (F - I)] \right).$$

On calcule ensuite D dans la base $\beta_0 := (v_1, \dots, v_{2d})$ où $v_1 := J \nabla H(z)$, v_2 est tel que $v_2 \perp J \nabla H(z)$ et (v_1, v_2) est une base de $\ker(F - I)^2$. Enfin (v_3, \dots, v_{2d}) est une base de V_z .

Notons $w := \frac{i}{2}(F + I) \nabla H(z)$. On a :

$$\left((F - I) + K^{-1} \Pi - \frac{1}{\alpha} J \nabla H(z) [i^t \nabla H(z) + {}^t X_1 (F - I)] \right) v_1 = -w. \quad (2.97)$$

$$((F - I) + K^{-1} \Pi) v_2 = (F - I) v_2. \quad (2.98)$$

$$\frac{1}{\alpha} J \nabla H(z) [i^t \nabla H(z) + {}^t X_1 (F - I)] v_2 = \frac{1}{\alpha} (i \langle \nabla H(z), v_2 \rangle + \langle X_1, (F - I) v_2 \rangle) J \nabla H(z). \quad (2.99)$$

⁹NB : $\alpha \neq 0$ car $I - W$ est inversible et $J \nabla H(z) \neq 0$.

Or $(F - I)v_2 \in \ker(F - I)^2$, d'où λ_1 et λ_2 tels que :

$$(F - I)v_2 = \lambda_1 J\nabla H(z) + \lambda_2 v_2$$

On prend le produit scalaire de cette dernière égalité avec $\nabla H(z)$, ce qui donne :

$$\lambda_2 \langle v_2, \nabla H(z) \rangle = 0,$$

car ${}^t F \nabla H(z) = \nabla H(z)$. Or, on a déjà vu que $\langle v_2, \nabla H(z) \rangle \neq 0$ (cf preuve de la proposition 2.3.17). Donc $\lambda_2 = 0$, de sorte que $(F - I)v_2 = \lambda_1 J\nabla H(z)$. (avec λ_1 éventuellement nul)

Ainsi

$$\langle X_1, (F - I)v_2 \rangle = \lambda_1 \alpha. \quad (2.100)$$

On obtient, selon (2.98), (2.99) et (2.100) :

$$\left((F - I) + K^{-1}\Pi - \frac{1}{\alpha} J\nabla H(z)[i^t \nabla H(z) + {}^t X_1(F - I)] \right) v_2 = -\frac{i}{\alpha} \langle \nabla H(z), v_2 \rangle J\nabla H(z). \quad (2.101)$$

Remarquons que $(F - I)V_z \subset V_z$. Par ailleurs $K^{-1}\Pi$ est de rang 1. Donc, comme son image est égale à $K^{-1}\Pi v_1 = -w$, on peut enlever dans le déterminant que l'on va obtenir dans β_0 des multiples de la première colonne (égale à $-w$) aux autres colonnes, de sorte que $K^{-1}\Pi$ n'intervient que dans la première colonne.

La même idée peut être appliquée à $\frac{1}{\alpha} J\nabla H(z)[i^t \nabla H(z) + {}^t X_1(F - I)]$ qui est aussi de rang 1. Comme $\frac{1}{\alpha} J\nabla H(z)[i^t \nabla H(z) + {}^t X_1(F - I)]v_2 \neq 0$, on peut négliger son intervention dans les colonnes du déterminant D différentes de la deuxième colonne. Ainsi :

$$D = \det \left(\begin{array}{cc|c} -w_1 & -\frac{i}{\alpha} \langle \nabla H(z), v_2 \rangle & 0 \\ -w_2 & 0 & \\ \hline -w_3 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ -w_{2d} & 0 & (F - I)|_{V_z} \end{array} \right)$$

où (w_1, \dots, w_{2d}) sont les coordonnées de w dans la base β_0 .

D'où $D = -\frac{i}{\alpha} w_2 \langle \nabla H(z), v_2 \rangle \det((F - I)|_{V_z})$.

On écrit

$$w = \frac{i}{2}(F + I)\nabla H(z) = w_1 J\nabla H(z) + w_2 v_2 + v$$

où $v \in V_z$, puis on prend le produit scalaire avec $\nabla H(z)$. On rappelle que, selon le lemme 2.3.18, on a : $E_1 = (JV_z)^\perp$. Donc $\langle v, \nabla H(z) \rangle = \langle Jv, J\nabla H(z) \rangle = 0$. D'où :

$$i|\nabla H(z)|^2 = w_2 \langle v_2, \nabla H(z) \rangle.$$

On en tire l'expression de w_2 et donc :

$$D = \frac{1}{\alpha} |\nabla H(z)|^2 \det((F - I)|_{V_z}).$$

Donc, selon (2.96)

$$\boxed{d_g(t, z)^2 = (-1)^d |\nabla H(z)|^2 \det((F - I)|_{V_z}) \det(g^{-1})}. \quad (2.102)$$

Ainsi, comme $\det(g^{-1}) = \pm 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$, dépendant de g , tel que :

$$d_g(t, z) = \frac{e^{ik\frac{\pi}{2}}}{|\nabla H(z)| |\det((F - I)|_{V_z})|^{\frac{1}{2}}}.$$

Par ailleurs, d_g étant continue, k ne dépend pas de $z \in \gamma$ (et $\det((F - I)|_{V_z})$ aussi). Ainsi, selon le théorème 2.2.14, on a :

$$I_g(h) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{E, g, t_0}} e^{\frac{i}{h} S_\gamma(t_0)} \frac{\psi(E) \hat{f}(t_0) e^{ik\frac{\pi}{2}}}{2\pi |\det((F - I)|_{V_z})|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_\gamma \frac{d\gamma}{|\nabla H|} + \sum_{j \geq 1} h^j a_{j, \gamma} \right) + O(h^{+\infty}).$$

Enfin, si $z \in \gamma$,

$$\int_\gamma \frac{d\gamma}{|\nabla H|} = \int_0^{T_\gamma^*} |J\nabla H(\phi_t(z))| \frac{dt}{|\nabla H(\phi_t(z))|} = T_\gamma^*.$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.2.7. ■

Chapitre 3

Le cas d'un groupe de Lie

Un groupe fini G est un groupe de Lie de dimension zéro avec $|G|$ composantes connexes. On pourrait donc s'attendre à ce que ce chapitre englobe le précédent. Cependant, l'étude des groupes de Lie étant plus générale, nous allons être obligés de faire des restrictions sur l'action du groupe de Lie (en particulier sur les stabilisateurs), chose que nous n'avions pas exigée dans le cas des groupes finis. Ce chapitre ne nie donc pas la raison d'être du chapitre précédent.

Comme dans le cas des systèmes hamiltoniens complètement intégrables, un hamiltonien ayant des symétries issues d'un groupe de Lie possède des intégrales premières. On sera certainement tenté de rapprocher l'étude faite ici à celle du spectre conjoint d'hamiltoniens qui commutent, et aux travaux de Y. Colin de Verdière, A. M. Charbonnel ou San Vũ Ngọc sur les hamiltoniens complètement intégrables. Cependant, remarquons qu'ici, nous ne faisons pas l'hypothèse de commutation sur les hamiltoniens quantiques, au sens où, si \hat{H} commute avec les $\tilde{M}(g)$, les $\tilde{M}(g)$ ne commutent pas entre eux.

3.1 Hamiltoniens classiques et symétries

On rappelle quelques propriétés bien connues des systèmes hamiltoniens avec symétries. Pour les références, voir [Or], [K], [Li-Ma], [Me1], [Ab-Ma] ou [Ar]. Dans ce chapitre uniquement, on note g pour $M(g)$, pour simplifier les notations, si bien que G est un sous-groupe compact de $Sp(d) \cap O(2d)$.¹

¹Le fait que G soit formé d'isométries n'interviendra pas pour la réduction symplectique et le théorème 3.1.3. Il n'apparaît que pour le transport de la structure riemannienne sur le quotient (voir lemme 3.1.5). Cependant nous nous servons de cette orthogonalité lors de l'étude quantique.

3.1.1 Les symétries créent des intégrales premières

Soit G un sous-groupe de Lie compact de dimension p de $Sp(d)$. Un hamiltonien lisse $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dit **G -invariant** si pour tout z dans \mathbb{R}^{2d} , pour tout g dans G on a :

$$H(gz) = H(z).$$

(Pour simplifier le discours, on supposera que le système dynamique hamiltonien issu de H est complet, i.e. $\Phi_t(z)$ est défini pour tout t dans \mathbb{R} et tout z dans \mathbb{R}^{2d}).

Une telle situation est agréable car elle confère au hamiltonien un certain nombre d'intégrales premières associées au système :

$$\dot{z}_t = J\nabla H(z_t),$$

C'est ce que dit le théorème de **E. Noether**, très simple pour notre type d'action :

Proposition 3.1.1 *Soit G un sous-groupe de Lie de dimension p de $Sp(d)$. Notons \mathcal{G} l'algèbre de Lie de G . Alors, pour tout $A \in \mathcal{G}$ la fonction :*

$$F_A(z) := \frac{1}{2} \langle Az, Jz \rangle$$

est une intégrale première de tout hamiltonien G -invariant.

Preuve de la proposition : G étant symplectique, A est hamiltonienne, i.e. JA est symétrique, donc si $z \in \mathbb{R}^{2d}$, alors $\nabla F_A(z) = -JAz$ et :

$$\{H, F_A\}(z) = \langle J\nabla H(z), \nabla F_A(z) \rangle = - \langle \nabla H(z), Az \rangle.$$

Puis, en dérivant en $t = 0$ l'identité : $H(e^{tA}z) = H(z)$, on obtient $\{H, F_A\} = 0$. ■

3.1.2 Espace réduit. Réduction symplectique

Soit (A_1, \dots, A_p) une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G . On note $\mathbb{F} : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^p$ la fonction définie par :

$$\mathbb{F} := (F_{A_1}, \dots, F_{A_p})$$

appelée **application moment**. Le niveau zéro de cette fonction est :

$$\boxed{\Omega_0} := \mathbb{F}^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{A \in \mathcal{G}} F_A^{-1}(\{0\}). \quad (3.1)$$

On peut remarquer que $0 \in \Omega_0$, et que Ω_0 est un cône, i.e. stable par les dilatations $z \mapsto tz$, ($t \in \mathbb{R}$). Cependant, ces propriétés sont bien sûr liées au caractère linéaire de notre action, et ne seraient pas de mise si l'on considérait une action plus générale ou si l'on travaillait sur une variété quelconque. Nous verrons que cet ensemble intervient dans le calcul de l'ensemble critique du problème de phase stationnaire pour la formule de Gutzwiller réduite avec symétries.

Lemme 3.1.2 Ω_0 est stable par G .

Preuve du lemme : Remarquons que, comme l'action de G sur \mathbb{R}^{2d} est symplectique, on a pour tout g dans G : ${}^t g J g = J$. Soit $z \in \Omega_0$. Si $A \in \mathcal{G}$,

$$2F_A(gz) = \langle Agz, Jgz \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = - \langle {}^t g J g . g^{-1} Agz, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = - \langle J . g^{-1} Agz, z \rangle_{\mathbb{R}^{2d}},$$

et comme $g^{-1} Ag \in \mathcal{G}$ on a $F_A(gz) = 0$. Donc, on a $gz \in \Omega_0$. ■

Ainsi, G agit sur Ω_0 et on peut définir l'**espace réduit** comme le quotient topologique :

$$\boxed{\Omega_{red} := \Omega_0 / G.} \quad (3.2)$$

On note :

$$\pi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{red} \quad (3.3)$$

la projection canonique.

Si $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ est un hamiltonien lisse et G -invariant, on peut définir à juste titre le **hamiltonien réduit** (classique) $\tilde{H} : \Omega_{red} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\tilde{H}(\pi(z)) = H(z). \quad (3.4)$$

Par définition de \mathbb{F} , toute courbe intégrale de H rencontrant Ω_0 est en fait dessinée dans Ω_0 . On s'attend donc à ce que le système dynamique 'descende' sur l'espace réduit. En effet, selon (2.31), on peut définir sans ambiguïté le flot topologique :

$$\tilde{\Phi}_t(\pi(z)) := \pi(\Phi_t(z)). \quad (3.5)$$

On vérifie que $\tilde{\Phi}_t : \Omega_{red} \rightarrow \Omega_{red}$ satisfait pour t, s dans \mathbb{R} , $\tilde{\Phi}_t \circ \tilde{\Phi}_s = \tilde{\Phi}_{t+s}$. Ainsi, "deux courbes intégrales qui se croisent sont égales"². Cependant rien ne dit que l'on peut définir une structure symplectique sur Ω_{red} telle que ce système réduit soit hamiltonien. Pour cela, il faudrait déjà que Ω_0 et Ω_{red} héritent d'une structure de variété lisse telle que π soit une submersion. Pour cela, une condition suffisante est que Ω_0 soit une variété et que les stabilisateurs des points de Ω_0 soient tous conjugués dans G (voir par exemple [K], Theorem 4.18 p.196). Cependant, ici, notre action étant linéaire, on a toujours : $0 \in \Omega_0$. Donc, le stabilisateur de 0 étant égal à G , faire l'hypothèse sur Ω_0 tout entier reviendrait à supposer que G n'agit pas sur Ω_0 ! Une autre idée consiste à supposer que $\Omega_0 \setminus \{0\}$ est une variété où tous les stabilisateurs sont conjugués, mais cette hypothèse écarterait le cas d'une symétrie cylindrique, comme nous le verrons sur

² $\tilde{\Phi}_{t_1}(z_1) = \tilde{\Phi}_{t_2}(z_2) \Rightarrow z_2 = \tilde{\Phi}_{t_1-t_2}(z_1)$.

les exemples. Une hypothèse moins restrictive consiste à supposer qu'il existe une structure de variété lisse uniquement sur *une partie* de Ω_{red} , ce qui nous suffira pour l'étude quantique. On peut pour cela supposer que les stabilisateurs sont conjugués uniquement sur une partie de Ω_0 stable par l'action de G . C'est le but du théorème qui va suivre.

Si $z \in \mathbb{R}^{2d}$ on définit le **sous-groupe d'isotropie** (ou **stabilisateur**) de z par :

$$Stab(z) := \{g \in G \mid gz = z\},$$

$Stab(z)$ est un sous-groupe de G .

Théorème 3.1.3 Réduction symplectique

Soit G un sous-groupe de Lie compact de $Sp(d)$, et U un ouvert de \mathbb{R}^{2d} stable par G tel que tous les stabilisateurs sont conjugués sur $U \cap \Omega_0$.

Alors, $U \cap \Omega_0$ est une sous-variété de \mathbb{R}^{2d} , et il existe une unique structure de variété lisse sur $(\Omega_0 \cap U)/G \subset \Omega_{red}$ telle que la restriction de π à $(\Omega_0 \cap U)$ soit une submersion. Par ailleurs, il existe une unique forme symplectique ω_{red} sur $(\Omega_0 \cap U)/G$ telle que π^ω_{red} soit la restriction de $\langle J, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2d}}$ à $\Omega_0 \cap U$. Enfin, si H est un hamiltonien G -invariant sur U , alors $\tilde{H} : (\Omega_0 \cap U)/G \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, et π envoie les courbes intégrales de H sur celles du système réduit associé à \tilde{H} dans Ω_{red} . Si on note $\tilde{\Phi}_t$ le flot de \tilde{H} , alors on a :*

$$\forall z \in U \cap \Omega_0, \quad \tilde{\Phi}_t(\pi(z)) = \pi(\Phi_t(z)). \quad (3.6)$$

Il s'agit d'une extension d'un théorème de **Marsden** et **Weinstein** (cf [M-W]) qui considèrent le cas d'une action libre. Une preuve de ce résultat peut être trouvée dans la thèse de J.P. Ortega ([Or] Theorem 2.4.1 p.78 et 79), ou dans le livre de J.P. Ortega et T.S. Ratiu ([Or-Ra] Theorem 8.1.1 p.302-303 : Singular symplectic point strata). La situation linéaire symplectique assure le fait que G agit sur U variété symplectique de façon globalement hamiltonienne et \mathbb{F} est une application moment équivariante. Le fait que G soit compact assure que l'action est propre. Ces hypothèses suffisent à appliquer les théorèmes cités dans ces ouvrages à notre situation. ■

Remarquons que l'hypothèse sur les stabilisateurs assure à elle seule le fait que $\Omega_0 \cap U$ soit une sous-variété de \mathbb{R}^{2d} (pas forcément symplectique). Par ailleurs, si $z \in \Omega_0 \cap U$, comme $G(z) \simeq G/Stab(z)$, toutes les G -orbites dans $\Omega_0 \cap U$ ont même dimension. En pratique, on aura déjà H hamiltonien G -invariant sur \mathbb{R}^{2d} , et on prendra pour ouvert de \mathbb{R}^{2d} G -stable l'ensemble $U := H^{-1}(I)$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Notons que, comme on l'a remarqué précédemment, si $0 \in H^{-1}(I)$, comme $0 \in \Omega_0$, sous l'hypothèse de ce théorème de réduction, G ne pourra agir que trivialement sur $\Omega_0 \cap U$. Donc ce théorème n'est pas pertinent lorsque $0 \in U$ (ou $H^{-1}(I)$).

Nous allons introduire un vocabulaire qui sera le contexte général de réduction symplectique que nous utiliserons dans notre étude quantique :

Définition 3.1.4 *Si U est un ouvert G -stable de \mathbb{R}^{2d} , on dira que "les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$ " si $U \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ et si :*

- Les stabilisateurs de $\Omega_0 \cap U$ sont conjugués dans G .
- $\forall z \in \Omega_0 \cap U$, $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - \dim(G(z))$.

Par ailleurs, $\boxed{H_0} \subset G$ désignera alors le stabilisateur d'un point quelconque de $\Omega_0 \cap U$, et, si $z \in \Omega_0 \cap U$, $\boxed{k} = \dim G(z)$ désignera la dimension commune aux G -orbites de $\Omega_0 \cap U$.

Remarque : il se peut que le deuxième point soit automatique dès que l'on suppose le premier : on sait selon l'article de Donnelly (cf [Don] Theorem 2.1, ou [Br] p.179-309) que l'ensemble des points de $\Omega_0 \cap U$ ayant un stabilisateur dit "de type d'orbite maximal" est dense dans Ω_0 . Ainsi, $U \cap \Omega_0$ étant un ouvert de Ω_0 , les stabilisateurs des points de $\Omega_0 \cap U$ sont donc de ce type. Dans cette situation, on peut se demander si la condition $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - \dim(G(z))$ n'est pas alors automatiquement vérifiée sur $\Omega_0 \cap U$. C'est par exemple le cas pour une symétrie cylindrique (voir exemples ci-dessous).

Enfin, notons que le second point assure le fait que :

$$\forall z \in \Omega_0 \cap U, \quad T_z \Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp. \quad (3.7)$$

En effet, on a toujours $T_z \Omega_0 \subset \ker d_z \mathbb{F} = (J\mathcal{G}z)^\perp$. Si de plus on a $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - \dim G(z)$, alors, $T_z \Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp$, pour des raisons de dimension. Par ailleurs, on a :

$$\dim[(\Omega_0 \cap U)/G] = 2d - 2k. \quad (3.8)$$

En effet, si $z \in \Omega_0$, π est une submersion en z . Donc, comme $G(z) = \pi^{-1}(\{\pi(z)\})$, on a $\ker(d_z \pi) = T_z G(z) = \mathcal{G}z$, et :

$$\dim[(\Omega_0 \cap U)/G] = \dim(\Omega_0 \cap U) - \dim(\ker d_z \pi) = \dim(\Omega_0 \cap U) - \dim(\mathcal{G}z) = 2d - 2k.$$

Transport de la structure riemannienne sur le quotient :

Le fait que tous les stabilisateurs soient conjugués sur $U \cap \Omega_0$ assure que la projection π restreinte à $U \cap \Omega_0$ est une submersion. Le lemme suivant permet alors de transporter de façon naturelle la structure riemannienne de $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{2d}$ sur $(U \cap \Omega_0)/G$ (que nous nommerons ici Ω_{red} pour simplifier les notations), π devenant ainsi une submersion riemannienne. Cependant, il nécessite a priori que G agisse par *isométries* (ce sera toujours le cas lorsque la symétrie viendra de l'espace des configurations via un sous-groupe du groupe orthogonal). Ce transport de structure donne une mesure naturelle sur Ω_{red} . C'est elle qui interviendra lorsque nous allons

donner des formules de Weyl et Gutzwiller associées aux \widehat{H}_χ , et qui feront intervenir des quantités géométriques de Ω_{red} (cf théorèmes 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2 ou 3.3.4). Tout procède du lemme suivant qui généralise celui d'une action libre donné dans [G-H-L] (p.61, Proposition 2.28) :

Lemme 3.1.5 *Soit (M, g) une variété riemannienne, et G un groupe agissant sur M par isométries. On suppose qu'il existe sur M/G une structure de variété faisant de la projection $\pi : M \rightarrow M/G$ une submersion.*
Alors il existe sur M/G une unique structure riemannienne faisant de π une submersion riemannienne.

Décrivons la métrique δ obtenue sur M/G : si $x \in M/G$, et si \bar{u} et \bar{v} sont dans $T_x(M/G)$, si $z \in M$ est tel que $\pi(z) = x$, et u et v sont dans $(\ker(d_z\pi))^{\perp T_z M}$ tels que $d_z\pi(u) = \bar{u}$ et $d_z\pi(v) = \bar{v}$, alors :

$$\delta_x(\bar{u}, \bar{v}) = g_z(u, v). \quad (3.9)$$

Preuve du lemme : Pour que π soit une submersion riemannienne, $d_z\pi$ doit être une isométrie entre $(\ker(d_z\pi))^{\perp T_z M}$ et $T_{\pi(z)}M$. Il est donc clair que la formule (3.9) donnant la métrique sur Ω_{red} est la seule possible ! Montrons que cette formule définissant δ a un sens : soit $z_0 \in \Omega_0 \cap U$ tel que $\pi(z) = \pi(z_0) = x$. Soient α et β dans $(\ker(d_{z_0}\pi))^{\perp T_{z_0}M}$ tels que $d_{z_0}\pi(\alpha) = \bar{u}$ et $d_{z_0}\pi(\beta) = \bar{v}$. On doit montrer que $g_z(u, v) = g_{z_0}(\alpha, \beta)$.

Soit $\gamma \in G$ tel que $\gamma(z) = z_0$; d'où α_1 et β_1 dans $T_z M$ tels que $d_z\gamma(\alpha_1) = \alpha$ et $d_z\gamma(\beta_1) = \beta$. Or, γ étant une isométrie, on a :

$$g_{z_0}(\alpha, \beta) = g_{\gamma(z)}(d_z\gamma(\alpha_1), d_z\gamma(\beta_1)) = g_z(\alpha_1, \beta_1),$$

Par ailleurs, en différentiant l'identité $\pi(\gamma(z)) = \pi(z)$ pour $z \in \Omega_0 \cap U$, on obtient :

$$\forall z \in \Omega_0 \cap U, \quad d_{\gamma(z)}\pi \circ d_z\gamma = d_z\pi.$$

Ainsi $d_z\gamma(\ker(d_z\pi)) = \ker(d_{\gamma(z)}\pi)$, et, γ étant une isométrie, $d_z\gamma(\ker(d_z\pi)^\perp) = \ker(d_{\gamma(z)}\pi)^\perp$. Ainsi, α_1 et β_1 sont dans $(\ker(d_z\pi))^\perp$. Par ailleurs, $u - \alpha_1$ et $v - \beta_1$ sont dans $\ker(d_z\pi)$, donc on a $\alpha_1 = u$, $\beta_1 = v$ et finalement $g_z(u, v) = g_{z_0}(\alpha, \beta)$. Ainsi, la métrique δ est bien définie. On montre comme dans [G-H-L] qu'elle est lisse, et comme on l'a déjà remarqué, c'est la seule faisant de π une submersion riemannienne. ■

NB : on peut remarquer qu'en utilisant le théorème de réduction symplectique, la forme volume $\int \omega_{red}^{d-k}$ fait de Ω_{red} une variété orientée. La question se pose alors de savoir si cette forme volume correspond bien à la mesure riemannienne que nous venons de définir. On laisse le soin au lecteur d'apprécier cette idée. (Une piste serait de regarder la valeur de $\int \omega_{red}^{d-k} < \cdot, J >$

sur les bases orthonormée directes de l'orthogonal de $\ker(d_z\pi) = \mathcal{G}z$ dans $T_z\Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp$, pour z dans $\Omega_0 \cap U$). Notons toutefois que la mesure qui interviendra naturellement dans notre étude quantique sera celle provenant de la structure riemannienne. En particulier, via le lemme d'intégration par tranches de l'Appendice 4, π étant une submersion riemannienne, on aura la formule, pour f lisse à support compact de Ω_{red} dans \mathbb{C} :

$$\int_{\Omega_{red}} f(x) d\sigma_{red}(x) = \int_{\Omega_0} f(\pi(z)) \frac{d\sigma_{\Omega_0}(z)}{Vol(G(z))} \quad (3.10)$$

où σ_{red} et σ_{Ω_0} sont les mesures riemanniennes sur Ω_{red} et Ω_0 (respectivement), et $Vol(G(z))$ est le volume riemannien de l'orbite de z par le groupe G .

3.1.3 Exemples

On revient ici au cas où $G \subset O(d)$ s'identifie à un sous-groupe de $O(2d) \cap Sp(d)$, via la représentation $M : G \hookrightarrow O(2d) \cap Sp(d)$ définie par $M(g) := \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. On confondra de même $A \in \mathcal{G}$ et $M(A) := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Ainsi, pour x et ξ dans \mathbb{R}^d , on a :

$$F_{M(A)}(x, \xi) = F_A(x, \xi) = \langle Ax, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}. \quad (3.11)$$

► Symétrie sphérique :

Pour $G = SO(d)$, on a $p = \frac{d(d-1)}{2}$ et :

$$\Omega_0 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : \text{la famille } (x, \xi) \text{ est liée}\}.$$

En effet, on a : $\forall A \in \mathcal{G}, F_A(x, \xi) = 0 \iff \xi \perp \mathcal{G}x$. Si $(x, \xi) \in \Omega_0$, alors, soit $x = 0$ auquel cas (x, ξ) est liée, soit $x \neq 0$ et alors $\mathcal{G}x = (\mathbb{R}x)^\perp$ (l'inclusion ' \subset ' vient du fait que ${}^tA = -A$ et comme $\mathcal{G}x = T_x(S(0, \|x\|))$, on a égalité pour des raisons de dimension). Ainsi, (x, ξ) est liée. Réciproquement, si (x, ξ) est liée et si ${}^tA = -A$, alors on a $\langle Ax, \xi \rangle = 0$.

▷ Les stabilisateurs sont conjugués sur $\Omega_0 \setminus \{0\}$:

En effet, si $(x, \xi) \in \Omega_0$ et si (par exemple) $x \neq 0$, alors $\text{Stab}(x, \xi) = \text{stab}^3(x) = \text{stab}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ car les actions de G sur \mathbb{R}^d et \mathbb{R}^{2d} sont linéaires. Par ailleurs, si $g \in G$, $\text{stab}\left(g\frac{x}{\|x\|}\right) = g\text{stab}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)g^{-1}$. Enfin, $SO(d)$ agit transitivement sur la sphère de \mathbb{R}^d , et ainsi, tous les sous-groupes d'isotropie de $\Omega_0 - \{0\}$ sont conjugués.

▷ On montre facilement que $\Omega_0 - \{0\}$ est sous-variété de \mathbb{R}^{2d} (théorème de réduction) de dimension $d + 1$ (utiliser des paramétrages de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\Omega_0 - \{0\}$ du type $(\lambda, x) \mapsto (x, \lambda x)$). On a donc $\dim(\Omega_0 - \{0\}) = 2d - \dim G(z)$.

³ *stab* désigne ici le stabilisateur pour l'action naturelle de G sur \mathbb{R}^d .

Ainsi, si U est un ouvert G -stable de \mathbb{R}^{2d} tel que $\Omega_0 \cap U \neq \emptyset$, les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $\Omega_0 \cap U$ dès que $0 \notin U$.

► **Symétrie cylindrique :**

Pour $d = 3$, on envisage le groupe $G := \left(\begin{array}{c|c} SO(2) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ des rotations de l'espace autour de l'axe (Oz) . Il est aisé de montrer que :

$$\Omega_0 = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \text{ et } (\xi_1, \xi_2) \text{ sont colinéaires}\}.$$

où l'on a noté $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Par ailleurs, Ω_0 est union disjointe de deux ensembles Ω_1 et Ω_2 définis par :

$$\begin{cases} \Omega_1 := \{(0, 0, x_3; 0, 0, \xi_3) : x_3 \in \mathbb{R}, \xi_3 \in \mathbb{R}\}. \\ \Omega_2 := \{(x', x_3; \xi', \xi_3) : (x', \xi') \text{ liée dans } \mathbb{R}^2, \text{ et } (x', \xi') \neq 0\}. \end{cases}$$

Sur Ω_1 , les stabilisateurs sont conjugués à G et sur Ω_2 ils sont conjugués à $\{Id_{\mathbb{R}^3}\}$. Par ailleurs, Ω_1 est un plan de \mathbb{R}^6 et Ω_2 une hypersurface de \mathbb{R}^6 (utiliser la submersion $(x, \xi) \mapsto x_1\xi_2 - x_2\xi_1$ définie sur $\mathbb{R}^6 \setminus \Omega_1$). Ainsi, $\dim(\Omega_2) = 5 = 2d - \dim G(z)$, pour z dans Ω_2 .

On voit donc que, si U est un ouvert G -stable de \mathbb{R}^{2d} tel que $\Omega_0 \cap U \neq \emptyset$, les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $\Omega_0 \cap U$ si et seulement si $U \cap \Omega_1 = \emptyset$.

3.1.4 Points d'équilibre et points périodiques relatifs

Dans ce paragraphe, on se donne U ouvert G -stable de \mathbb{R}^{2d} tel que les stabilisateurs de $\Omega_0 \cap U$ sont conjugués. $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ est un hamiltonien G -invariant sur U .

Définition 3.1.6

- On dit que $z \in \Omega_0 \cap U$ est un **point d'équilibre relatif (PER)** pour H si $\pi(z)$ est un point d'équilibre pour \tilde{H} .
- On dit que $z \in \Omega_0 \cap U$ est un **point périodique relatif (PPR)** pour H si $\pi(z)$ est un point périodique pour \tilde{H} .

Les notions de PER et PPR sont bien sûr topologiques : on peut les définir de manière évidente via le flot topologique $\tilde{\Phi}_t$, sans avoir recours à une structure de variété lisse sur Ω_{red} . Un (PPR) est un point dont la courbe intégrale repasse par une position symétrique à celle dont elle est issue. Les (PER) admettent des courbes intégrales qui sont inscrites dans les orbites de G :

Proposition 3.1.7 Soit $z \in \Omega_0 \cap U$. On a :

- z (PER) $\iff J\nabla H(z) \in \mathcal{G}z$. Dans ce cas, il existe A dans \mathcal{G} tel que $\Phi_t(z) = e^{tA}z$.
Par ailleurs, si $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - \dim G(z)$, alors z (PER) $\iff z$ est un point critique de la restriction de H à Ω_0 .
- z est un (PPR) si et seulement si $\exists T > 0, \exists g \in G$ tel que $g\Phi_T(z) = z$.

Preuve de la proposition :

Si z est un (PER), on a clairement pour tout $t : \Phi_t(z) \in G(z)$. Donc $J\nabla H(z) \in T_z[G(z)] = \mathcal{G}z$. Inversement, si $J\nabla H(z) \in \mathcal{G}z$, soit $A \in \mathcal{G}$ tel que $J\nabla H(z) = Az$. Alors $\gamma(t) := e^{tA}z$ vérifie, selon (2.30) :

$$\dot{\gamma}(t) = e^{tA}Az = e^{tA}J\nabla H(z) = J\nabla H(e^{tA}z) = J\nabla H(\gamma(t)).$$

et $\gamma(0) = z$. Donc $\Phi_t(z) = e^{tA}z$ et z est un (PER).

Soient H_1 la restriction de H à $\Omega_0 \cap U$ et $t \mapsto \gamma(t)$ un chemin dans $\Omega_0 \cap U$ tel que $\gamma(0) = z$. Alors $d_z H_1 : T_z(\Omega_0 \cap U) \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$d_z H_1(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (H(\gamma(t))) = \langle \nabla H(z), \gamma'(0) \rangle .$$

Ainsi $d_z H_1 = 0$ si et seulement si $\nabla H(z) \in (T_z(\Omega_0 \cap U))^\perp$. Si on a $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - \dim G(z)$, alors, selon (3.7), $T_z \Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp$, et donc $d_z H_1 = 0$ si et seulement si $\nabla H(z) \in J\mathcal{G}z$, i.e. $J\nabla H(z) \in \mathcal{G}z$. ■

Lemme 3.1.8 Soit $E \in \mathbb{R}$ tel que $\Sigma_E := \{H = E\}$ soit un niveau d'énergie non critique (i.e. $\nabla H(z) \neq 0, \forall z \in \Sigma_E$) et tel que $\Sigma_E \subset U$. Supposons par ailleurs que pour tout z dans $\Omega_0 \cap U$, on a $\dim(\Omega_0 \cap U) = 2d - \dim G(z)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\Omega_0 \cap U$ et Σ_E sont des variétés transverses de \mathbb{R}^{2d} .
- (2) Il n'y a pas d'équilibre relatif sur $\Omega_0 \cap \Sigma_E$.
- (3) Il n'y a pas d'équilibre sur $\tilde{\Sigma}_E := \{\tilde{H} = E\} \subset \Omega_{red}$.

Preuve du lemme : (1) $\iff \forall a \in (\Omega_0 \cap U) \cap \Sigma_E, T_a \Omega_0 + T_a \Sigma_E = \mathbb{R}^{2d}$.

Nier (1) revient à dire : $\exists a \in (\Omega_0 \cap U) \cap \Sigma_E, T_a \Omega_0 \subset (\mathbb{R}\nabla H(a))^\perp$, ce qui signifie (comme $(J\mathcal{G}a)^\perp = T_a \Omega_0$) que $(J\mathcal{G}a)^\perp \subset (\mathbb{R}\nabla H(a))^\perp$ i.e. $\mathbb{R}\nabla H(a) \subset J\mathcal{G}a$ ou $J\nabla H(a) \in \mathcal{G}a$. ■

Un exemple de (PPR) qui n'est pas un point périodique

On donne ci-dessous un exemple où des (PPR) ne sont pas des points périodiques pour un hamiltonien quadratique. Ces points engendrent des orbites "quasi-périodiques" non périodiques, i.e. chacune d'entre elles est dense dans un tore de dimension > 1 :

Soit $H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$H(x, \xi) := |\xi|^2 + V(x) \text{ où } V(x) := \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

On choisit $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 \neq \lambda_3 \text{ et } \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Ainsi, H admet une symétrie cylindrique. On montre alors que les seuls points périodiques dans \mathbb{R}^6 sont de la forme $(*, *, 0, *, *, 0)$ et $(0, 0, *, 0, 0, *)$. Enfin, si $(x_3, \xi_3) \neq (0, 0)$ et si $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, on peut montrer que des points de la forme $(x_1, x_2, x_3, \pm\sqrt{\lambda_1}x_2, \mp\sqrt{\lambda_1}x_1, \xi_3)$ sont des (PPR) non périodiques (on peut cependant remarquer que ces points ne sont pas dans Ω_0).

3.2 Asymptotique faible réduite

3.2.1 Résultat

Comme dans le cas d'un groupe fini, nous commençons par étudier l'asymptotique dite "faible", i.e. l'asymptotique de la trace d'un hamiltonien quantique "réduit".

Théorème 3.2.1 *Soient G un sous-groupe de Lie de $O(d)$ de dimension p et $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, réel, un hamiltonien G -invariant. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $U := \{z \in \mathbb{R}^{2d} : \text{dist}(z, \text{Supp}(a)) < \varepsilon\}$, alors les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$.*

Alors $Op_h^w(a) = \widehat{A}$ est à trace, pour tout χ dans \widehat{G} , $\text{Tr}(\widehat{A}_\chi)$ admet une asymptotique complète en puissances de h quand $h \rightarrow 0^+$, et on a :

$$\text{Tr}(\widehat{A}_\chi) = (2\pi h)^{k-d} d_\chi \int_{\Omega_{red}} \tilde{a}(x) d\sigma_{red}(x) \cdot [\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] + O(h^{k-d+1}). \quad (3.12)$$

où \tilde{a} est le hamiltonien réduit classique ($\tilde{a}(\pi(z)) = a(z)$). Par ailleurs, la mesure $d\sigma_{red}$ est la mesure riemannienne sur Ω_{red} . Rappelons que k est la dimension des G -orbites sur $\Omega_0 \cap U$.

Remarquons que U est bien G -stable.

► Comparaison : Sans symétrie, rappelons que l'on a la formule exacte :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) dz. \quad (3.13)$$

► $[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}]$ est le nombre de fois que la représentation triviale $\mathbb{1}$ est contenue dans ρ_χ restreinte à H_0^4 , où ρ_χ est une quelconque représentation de caractère χ . On a :

$$[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] = \int_{H_0} \overline{\chi(h)} dh = [L^2(G/H) : \rho_\chi]. \quad (3.14)$$

où dh est la mesure de Haar normalisée sur H_0 , $[L^2(G/H) : \rho_\chi]$ est le nombre de fois que ρ_χ est contenue dans la représentation régulière de G sur $L^2(G/H)$ (cf [Pi] p.100 et 108). Ainsi, $[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}]$ est un entier compris entre 0 et d_χ . Par ailleurs, si $H_0 = \{Id\}$, i.e. si G agit librement sur $\Omega_0 \cap U$, alors $[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] = d_\chi$.

► Lorsque $G = SO(d)$, les hypothèses du théorème sur le groupe G sont vérifiées si et seulement si $0 \notin \text{Supp}(a)$. Pour le cas d'une symétrie cylindrique, elle sont satisfaites si et seulement si

⁴Rappelons que les stabilisateurs de points de $\Omega_0 \cap U$ sont tous conjugués à H_0 .

$\Omega_1 \cap \text{Supp}(a) = \emptyset$ (voir le chapitre 3.1.3).

Le but d'une telle formule de trace est avant tout de servir à prouver une asymptotique de type Weyl sur la fonction de comptage de valeurs propres d'un hamiltonien quantique réduit.

Corollaire 3.2.2 *Soient G un sous-groupe de Lie de $O(d)$ de dimension p , $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien G -invariant qui vérifie **(H.0)** et $E_1 < E_2$ dans \mathbb{R} . On note $I := [E_1, E_2]$ et on suppose de plus que :*

$$H^{-1}(I) \text{ est compact.} \quad (3.15)$$

Enfin, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $U := H^{-1}(]E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon[)$, alors les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$.

Alors, $\forall \chi \in \hat{G}$, $\forall f \in C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$, $f(\hat{H}_\chi)$ est de classe trace et $\text{Tr}(f(\hat{H}_\chi))$ admet un développement asymptotique à tout ordre en puissances de h quand h tend vers zéro tel que :

$$\text{Tr}(f(\hat{H}_\chi)) = (2\pi h)^{k-d} d_\chi \int_{\Omega_{red}} f(\tilde{H}(x)) d\sigma_{red}(x) \cdot [\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] + O(h^{k-d+1}). \quad (3.16)$$

Par ailleurs, le spectre de \hat{H}_χ est discret dans I et, si $\text{Vol}_{red}(\tilde{H}^{-1}(\partial I)) = 0$, alors on a :

$$(2\pi h)^{d-k} N_\chi(I) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} d_\chi \text{Vol}_{red}(\tilde{H}^{-1}(I)) [\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}]. \quad (3.17)$$

où \tilde{H} est le hamiltonien classique réduit ($\tilde{H}(\pi(z)) = H(z)$), et Vol_{red} désigne le volume riemannien sur Ω_{red} .

Preuve du lemme : d'après le calcul fonctionnel ([**He-Ro 1**]), $f(\hat{H})$ est opérateur h -pseudo-différentiel de symbole principal $f(H(z))$. Toujours selon [**He-Ro 1**], comme $f \in C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$ et comme $H^{-1}(I)$ est compact, $f(\hat{H})$ est à trace et donc $f(\hat{H}_\chi)$ aussi. Par ailleurs, on peut écrire $f(\hat{H})$ comme une série formelle d'opérateurs pseudo-différentiels à symboles dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ à support dans $H^{-1}(\overset{\circ}{I})$ (techniques Helffer-Robert), i.e. pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$f(\hat{H}) = \sum_{k=0}^N h^k \text{Op}_h^w(a_k) + O_{Tr}(h^{N+1-d}).$$

Or, pour g dans G , on a $[\hat{H}, \tilde{M}(g)] = 0$. Donc $\tilde{M}(g)$ commute avec tout $P(\hat{H})$, où P est un polynôme. Si $f \in C_0^\infty(\overset{\circ}{I})$, on approche f uniformément par une suite de polynômes sur I via le théorème de Stone-Weirstrass, et on a donc $[f(\hat{H}), \tilde{M}(g)] = 0$ pour tout g . Ainsi,

$$f(\hat{H}) = \sum_{k=0}^N h^k \tilde{M}(g) \text{Op}_h^w(a_k) \tilde{M}(g^{-1}) + O_{Tr}(h^{N+1-d}).$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall g \in G$, on a : $[Op_h^w(a_k), \tilde{M}(g)] = 0$. Le théorème 3.2.1 donne donc (3.16).

Pour obtenir (3.17), on procède exactement comme dans le cas des groupes finis, en encadrant $\mathbb{1}_I$ par des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ qui se rapprochent de $\mathbb{1}_I$. \blacksquare

Les trois paragraphes suivant sont consacrés à la preuve du théorème 3.2.1.

3.2.2 Réduction à un problème de phase stationnaire via les états cohérents

Soit $g \in G$. On a, d'après les formules de trace sur les états cohérents (cf appendice 4.2) :

$$\mathrm{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle \hat{A}\varphi_\alpha; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha. \quad (3.18)$$

La proposition suivante est validée par la même preuve que la proposition 2.3.1. Notons que pour la prouver, on utilise ici le fait que a est à support compact. Par cette méthode, on n'a pas a priori le résultat si a vérifie des conditions de décroissance polynômiales du type de celles que l'on a faites pour l'asymptotique faible dans le cas d'un groupe fini :

Proposition 3.2.3 *Il existe un compact K dans \mathbb{R}^{2d} tel que, Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d} \setminus K} |\langle \hat{A}\varphi_\alpha; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| d\alpha = O(h^\infty).$$

uniformément en $g \in G$.

Ainsi, si $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ est telle que $\chi_1 = 1$ sur K , on a, en écrivant $1 = \chi_1(\alpha) + (1 - \chi_1(\alpha))$:

$$\mathrm{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_1(\alpha) \langle \hat{A}\varphi_\alpha; \varphi_{g^{-1}\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha + O(h^\infty). \quad (3.19)$$

Puis, on utilise la proposition 2.3.3 donnant l'effet d'un opérateur pseudo-différentiel sur un état cohérent pour écrire pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| Op_h^w(a)\varphi_\alpha - \sum_{k=0}^N h^{\frac{k}{2}} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \frac{\partial^\gamma a(\alpha)}{\gamma!} \Psi_{\gamma,\alpha} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{d,N} \cdot h^{\frac{N+1}{2}}.$$

où $\Psi_{\gamma,\alpha} = \mathcal{T}_h(\alpha)\Lambda_h Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0$. Par ailleurs, on peut choisir K suffisamment grand pour contenir le support de a , ce qui explique la disparition de χ_1 dans les lignes qui suivent. On obtient alors $\mathrm{Tr}(Op_h^w(a)\tilde{M}(g)) =$

$$(2\pi h)^{-d} \sum_{k=0}^N h^{\frac{k}{2}} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\partial^\gamma a(\alpha)}{\gamma!} \langle \mathcal{T}_h(\alpha)\Lambda_h Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0; \mathcal{T}_h(g^{-1}\alpha)\Lambda_h\tilde{\psi}_0 \rangle d\alpha + O(h^{\frac{N+1}{2}-d}). \quad (3.20)$$

D'après l'appendice sur les états cohérents, en écrivant que $Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0 = Q_\gamma\tilde{\psi}_0$, on a :

$$(\star) := \langle \mathcal{T}_h(\alpha)\Lambda_h Op_1^w(z^\gamma)\tilde{\psi}_0; \mathcal{T}_h(g^{-1}\alpha)\Lambda_h\tilde{\psi}_0 \rangle = e^{-\frac{i}{2h}\langle Jg^{-1}\alpha, \alpha \rangle} \langle \mathcal{T}_1\left(\frac{\alpha - g^{-1}\alpha}{\sqrt{h}}\right) Q_\gamma(x)\tilde{\psi}_0; \tilde{\psi}_0 \rangle.$$

On a vu dans le cas des groupes finis que Q_γ est un polynôme de degré inférieur à $|\gamma|$ ayant la même parité que $|\gamma|$. On note $\alpha = (q, p)$. Alors, on a :

$$(\star) = e^{-\frac{i}{2h}\langle Jg^{-1}\alpha, \alpha \rangle} \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{2}} e^{i\frac{(I-g^{-1})p}{\sqrt{h}}(x - \frac{1}{2}\frac{(I-g^{-1})q}{\sqrt{h}})} Q_\gamma \left(x - \frac{(I-g^{-1})q}{\sqrt{h}} \right) e^{-\frac{1}{2}|x - \frac{(I-g^{-1})q}{\sqrt{h}}|^2} dx.$$

On fait le changement de variable $y = \sqrt{h}x - (I-g^{-1})q$, ce qui donne après calcul :

$$\begin{aligned} (\star) &= \frac{h^{-\frac{d}{2}}}{\pi^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{i}{2h}\langle Jg^{-1}\alpha, \alpha \rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle (I-g^{-1})p, (I-g^{-1})q \rangle} e^{-\frac{1}{2h}|(I-g^{-1})q|^2} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y|^2}{h}} e^{\frac{i}{h}\langle (I-g^{-1})q + (I-g^{-1})p; y \rangle} Q_\gamma \left(\frac{y}{\sqrt{h}} \right) dy. \end{aligned}$$

Comme dans le cas des groupes finis, la parité de Q_γ implique que seules les puissances ENTIERES de h vont intervenir dans le développement asymptotique. Puis, en faisant le changement de variable $y' = \frac{y}{\sqrt{h}}$, on constate que :

$$(\star) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{i}{2h}\langle Jg^{-1}\alpha, \alpha \rangle} e^{\frac{i}{2h}\langle (I-g^{-1})p, (I-g^{-1})q \rangle} e^{-\frac{1}{2h}|(I-g^{-1})q|^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2} e^{\frac{\beta_0}{\sqrt{h}} \cdot y} Q_\gamma(y) dy.$$

où

$$\beta_0 := i[i(I-g^{-1})q + (I-g^{-1})p]. \quad (3.21)$$

Puis, on écrit :

$$Q_\gamma(x) = \sum_{|\mu| \leq |\gamma|} \kappa_{\mu, \gamma} x^\mu.$$

De sorte que, en utilisant le calcul de gaussienne du lemme 2.3.6, on a :

$$(\star) = e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha, g)} \sum_{|\mu| \leq |\gamma|} \kappa_{\mu, \gamma} \sum_{\eta \leq \mu} h^{-\frac{\eta}{2}} \left(\frac{1}{2} \beta_0 \right)^\eta P_\eta(2I_d), \quad (3.22)$$

où P_η (donné dans le lemme 2.3.6) est indépendant de h , α et g , et :

$$\boxed{\Phi(\alpha, g)} := \langle B\alpha, \alpha \rangle \quad \text{avec} \quad \boxed{B = \frac{1}{4}J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{i}{4}(I - M(g))(I - M(g^{-1}))}. \quad (3.23)$$

Les différents restes étant uniformes en $g \in G$, on obtient finalement :

$$\text{Tr}(Op_h^w(a)P_\chi) = (2\pi h)^{-d} d_\chi \sum_{k=0}^N h^{\frac{k}{2}} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{2d}, |\gamma|=k} \sum_{|\mu| \leq |\gamma|} \sum_{\eta \leq \mu} \frac{\kappa_{\mu, \gamma}}{\gamma!} P_\eta(2I_d) h^{-\frac{|\eta|}{2}} I_{\gamma, \eta}(h) + O(h^{\frac{N+1}{2}-d}). \quad (3.24)$$

avec :

$$I_{\gamma, \eta}(h) := \int_G \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}\Phi(\alpha, g)} \overline{\chi(g)} \partial^\gamma a(\alpha) F(\alpha, g)^\eta d\alpha dg \quad (3.25)$$

et

$$F(\alpha, g) := \frac{i}{2}[i(I-g^{-1})q + (I-g^{-1})p]. \quad (3.26)$$

Nous verrons par la suite que F est nulle sur les points critiques de la phase Φ , ce qui fait que l'asymptotique de chacun des termes $I_{\gamma, \eta}(h)$ relève du théorème 2.3.10 et commence avec des termes en $h^{\frac{|\eta|}{2}}$. Dans le chapitre qui suit, nous vérifions que les hypothèses de ce théorème sont bien validées dans notre cas.

3.2.3 Analyse de phase

Remarquons tout d'abord que, si $(z, g) \in \mathbb{R}^{2d} \times G$, alors $\Im\Phi(z, g) = \frac{1}{4}|(I - M(g^{-1}))z|^2 \geq 0$.

• **Calcul de l'ensemble critique :**

$$\Im\Phi(z, g) = 0 \iff (I - M(g^{-1}))z = 0 \iff M(g)z = z.$$

$$\partial_z\Phi(z, g) = 0 \iff 2Bz = 0 \iff M(g)z = z.$$

Si $A \in \mathcal{G}$, notons g pour $M(g)$ et A pour $M(A)$ pour éviter les lourdeurs d'écriture :

$$\begin{aligned} 4\partial_g\Phi(z, g)(Ag) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle [J(e^{tA}g - g^{-1}e^{-tA}) + i(I - e^{tA}g)(I - g^{-1}e^{-tA})]z; z \rangle \\ &= \langle [J(Ag + g^{-1}A) - iAg(I - g^{-1}) + i(I - g)g^{-1}A]z, z \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, nous remarquons que si $\partial_z\Phi(z, g) = 0$, alors :

$$\partial_g\Phi(z, g)(Ag) = 0 \iff 2 \langle JAz; z \rangle = 0 \iff z \in \Omega_0.$$

Nous avons donc prouvé que l'ensemble critique est :

$$\boxed{\Gamma_0} := \{(z, g) \in \Omega_0 \times G : M(g)z = z \text{ et } z \in U\}. \quad (3.27)$$

• Le lemme suivant donne la structure de variété lisse de Γ_0 :

Lemme 3.2.4 *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^{2d} G -stable tel que tous les stabilisateurs sont conjugués sur $U \cap \Omega_0$. Pour $z \in \Omega_0 \cap U$, on note $k = \dim(G(z))$, et on suppose que $\dim(\Omega_0) = 2d - k$. Alors Γ_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d} \times G$ de dimension $\dim \Gamma_0 = 2d - 2k + p$. Par ailleurs, si $(z, g) \in \Gamma_0$, alors*

$$T_{(z,g)}\Gamma_0 = \{(\alpha, Ag) : \alpha \in T_z\Omega_0, A \in \mathcal{G} \text{ et } (M(g) - I)\alpha + Az = 0\}. \quad (3.28)$$

Preuve du lemme : Si X est une variété lisse, on note :

$$\text{diag}(X) := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X.$$

Clairement, $\text{diag}(X)$ est une sous-variété de $X \times X$ de même dimension que X , d'espace tangent :

$$T_{(x,x)}(\text{diag}X) = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in T_xX\}.$$

Soit

$$R_0 := \{(z, M(g)z) : z \in \Omega_0 \cap U, g \in G\}. \quad (3.29)$$

Remarquons que $R_0 = (\pi \times \pi)^{-1}(\text{diag}[(\Omega_0 \cap U)/G])$. Ainsi, selon le théorème de réduction 3.1.3, $\pi \times \pi$ est une submersion ⁵ sur $(\Omega_0 \cap U)^2$, R_0 est une sous-variété de $(\Omega_0 \cap U) \times (\Omega_0 \cap U)$ de dimension $\dim R_0 = 2d$, et si $M(g)z = z$, on a :

⁵où π est la projection dans Ω_{red} de (3.3)

$$\begin{aligned} T_{(z,z)}R_0 &= [d_{(z,z)}(\pi \times \pi)]^{-1}(T_{(\pi(z),\pi(z))}(\text{diag}(\Omega_{red}))). \\ &= \{(\alpha, \beta) \in T_z\Omega_0 \times T_z\Omega_0 : d_z\pi(\alpha) = d_z\pi(\beta)\}. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.5 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^{2d} G -stable tel que les stabilisateurs sont conjugués sur $\Omega_0 \cap U$. Alors :

- $\forall z \in (\Omega_0 \cap U)$, $\ker d_z\pi = \mathcal{G}z$
- Si de plus $M(g)z = z$, alors $\forall \alpha \in T_z\Omega_0$, $(M(g) - I)\alpha \in \mathcal{G}z$

Preuve du lemme : Selon le théorème de réduction 3.1.3, π est une submersion en z , donc, comme $G(z) = \pi^{-1}(\{\pi(z)\})$, on a $\ker d_z\pi = T_zG(z) = \mathcal{G}z$.

Pour le second point, différentions par rapport à $x \in \Omega_0$ l'identité $\pi(M(g)x) = \pi(x)$. On obtient :

$$\forall \alpha \in T_z\Omega_0, \quad d_{M(g)x}\pi(M(g)\alpha) = d_x\pi(\alpha).$$

Donc, si $M(g)z = z$, et $\alpha \in T_z\Omega_0$, alors on a $(M(g) - I)\alpha \in \ker(d_z\pi)$. Ainsi, pour tout $\alpha \in T_z\Omega_0$, on a $(M(g) - I)\alpha \in \mathcal{G}z$. ■

Ainsi, selon le lemme 3.2.5, on a, si $M(g)z = z$, $d_z\pi(\alpha) = d_z\pi(\beta) \iff d_z\pi(M(g)\alpha) = d_z\pi(\beta)$:

$$T_{(z,z)}R_0 = \{(\alpha, M(g)\alpha + Az) : \alpha \in T_z\Omega_0, A \in \mathcal{G}\}. \quad (3.30)$$

Soit $\varphi_0 : \begin{cases} \Omega_0 \times G \rightarrow R_0 \\ (z, g) \mapsto (z, M(g)z) \end{cases}$ On a $\text{diag}(\Omega_0 \cap U) \subset R_0$, et :

$$\Gamma_0 = \varphi_0^{-1}(\text{diag}(\Omega_0 \cap U)).$$

Soit $(z, g) \in \Gamma_0$. Si $\alpha \in T_z\Omega_0$ et $A \in \mathcal{G}$, on a :

$$d_{(z,g)}\varphi_0(\alpha, Ag) = (\alpha, M(g)\alpha + Az).$$

Ainsi, selon (3.30), $\text{Im}(d_{(z,g)}\varphi_0) = T_{(z,gz)}R_0$, et φ_0 est une submersion en (z, g) . Donc Γ_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d} \times G$, $\dim \Gamma_0 = 2d - 2k + p$, et

$$T_{(z,g)}\Gamma_0 = \{(\alpha, Ag) : \alpha \in T_z\Omega_0, A \in \mathcal{G} \text{ et } \alpha = M(g)\alpha + Az\}.$$

ceci achève la preuve du lemme. ■

• Calcul de la hessienne en un point de Γ_0 :

Le point sur la méthode :

Soit $(z_0, g_0) \in \Gamma_0$. La hessienne $\Phi''(z_0, g_0)$ est alors une forme bilinéaire symétrique sur l'espace tangent $\mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g_0$, à valeurs complexes. On munit $E := \mathbb{R}^{2d} \times M_d(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace

vectorel euclidien de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ défini pour z_1, z_2 dans \mathbb{R}^{2d} et A et B matrices de taille $d \times d$, par $\langle (z_1, A); (z_2, B) \rangle_E := \langle z_1; z_2 \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} + \langle \langle A, B \rangle \rangle$ où :

$$\langle \langle A, B \rangle \rangle := \text{Tr}({}^t AB). \quad (3.31)$$

En appliquant le théorème de Riesz à $\Re\Phi''(z_0, g_0)$ et $\Im\Phi''(z_0, g_0)$, on obtient $L := L_1 + iL_2$, où L_1 et L_2 sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g_0)$, telles que, si u et v sont dans $\mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g_0$, alors :

$$\Phi''(z_0, g_0)(u, v) = \langle L(u), v \rangle_E = \langle L_1(u), v \rangle_E + i \langle L_2(u), v \rangle_E.$$

D'après la définition de Φ et de son ensemble critique Γ_0 , on constate que (cf Appendice 4.3) :

$$\Phi''(z_0, g_0)|_{\mathcal{N}_{(z_0, g_0)}\Gamma_0} \text{ est non dégénérée} \iff \ker_{\mathbb{R}} L \subset T_{(z_0, g_0)}\Gamma_0,$$

où $\ker_{\mathbb{R}} L := \ker L_1 \cap \ker L_2$. Par ailleurs, soit $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \times G$ la carte locale en (z_0, g_0) définie pour $(z, s) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p$, par :

$$\varphi(z, s) := (z, \exp(\sum_{i=1}^p s_i A_i) g_0). \quad (3.32)$$

où (A_1, \dots, A_p) est une base de \mathcal{G} que nous choisirons subtilement plus tard. Si l'on note :

$$\mathcal{A} := \left(\frac{\partial^2(\Phi \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j} (z_0, 0) \right)_{1 \leq i, j \leq 2d+p} \quad (3.33)$$

la matrice dans la base canonique de la hessienne de $\Phi \circ \varphi$, on sait alors (cf [Laud] p.88, proposition III.4.3) que si u et v sont dans $\mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g_0$, alors :

$$\Phi''(z_0, g_0)(u, v) = \langle \mathcal{A}(d_{(z_0, 0)}\varphi)^{-1}(u), (d_{(z_0, 0)}\varphi)^{-1}(v) \rangle_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p}. \quad (3.34)$$

Cette formule montre clairement que l'on a :

$$\ker_{\mathbb{R}} L = d_{(z_0, 0)}\varphi(\ker_{\mathbb{R}} \mathcal{A}).$$

Ainsi, $\Phi''(z_0, g_0)|_{\mathcal{N}_{(z_0, g_0)}\Gamma_0}$ est non dégénérée si et seulement si $d_{(z_0, 0)}\varphi(\ker_{\mathbb{R}} \mathcal{A}) \subset T_{(z_0, g_0)}\Gamma_0$. Pour simplifier les notations, on confondra par la suite abusivement $\ker_{\mathbb{R}} \mathcal{A}$ et $\ker_{\mathbb{R}} L$, et on ne parlera plus de L mais de \mathcal{A} , qui sera aussi notée $\boxed{\text{Hess } \Phi(z_0, g_0)}$.

Rappelons l'expression de la phase :

$$\Phi(z, g) = \langle Bz, z \rangle \quad \text{avec} \quad B = \frac{1}{4}J(M(g) - M(g^{-1})) + \frac{i}{4}(I - M(g))(I - M(g^{-1})). \quad (3.35)$$

On obtient, en notant g pour $M(g)$ et en répétant p fois dans le sens des lignes chaque bloc ayant un indice ' i ', p fois dans le sens des colonnes chaque bloc ayant un indice ' j ', pour $(z, g) \in \Gamma_0$:

$$\text{Hess } \Phi(z, g) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}J(g - g^{-1}) + \frac{i}{2}(I - g)(I - g^{-1}) & \frac{1}{2}[J(I + g^{-1}) + i(g^{-1} - I)]A_j z \\ \hline \frac{1}{2}[(J(I + g^{-1}) + i(g^{-1} - I))A_i z] & \frac{i}{2} \langle A_i z, A_j z \rangle \end{array} \right). \quad (3.36)$$

(utiliser le lemme 3.4.3).

Les formules suivantes nous seront utiles dans tout le reste de la thèse :

$$\forall A \in \mathcal{G}, \forall z \in \Omega_0, \quad \langle Az, \nabla H(z) \rangle = 0. \quad (3.37)$$

$$\forall A \in \mathcal{G}, \forall B \in \mathcal{G}, \forall z \in \Omega_0, \quad \langle Az, JBz \rangle = 0. \quad (3.38)$$

La formule (3.37) revient à dire que $\{H, F_A\} = 0$. La formule (3.38) vient du fait que Ω_0 est stable par G et s'obtient en dérivant par rapport à t en $t = 0$ l'identité $F_A(e^{tB}z) = 0$.

• **Calcul du noyau de la hessienne en un point de Γ_0 :**

Si on note pour $\alpha \in \mathbb{R}^{2d}$, $s \in \mathbb{R}^p$, $A := \sum_{i=1}^p s_i A_i$, en prenant partie réelle et imaginaire, on a :

$$(\alpha, s) \in \ker_{\mathbb{R}} \mathcal{A} \iff \begin{cases} J(g - g^{-1})\alpha + (I + g^{-1})JAz \\ \langle (I + g^{-1})JA_j z; \alpha \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p \\ (I - g)(I - g^{-1})\alpha + (g^{-1} - I)Az = 0 \\ \langle (g^{-1} - I)A_j z; \alpha \rangle + \langle A_j z, Az \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p \end{cases}$$

Donc, si l'on note $x := (g - I)\alpha + Az$, et si l'on remarque que $(g^{-1} + I)(g - I) = g - g^{-1}$, alors

$$(\alpha, s) \in \ker_{\mathbb{R}} \mathcal{A} \iff \begin{cases} (I + g^{-1})x = 0 \\ \langle (I + g^{-1})JA_j z; \alpha \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p \\ (g^{-1} - I)x = 0 \\ \langle A_j z; x \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (3.39)$$

ce qui équivaut à $x = 0$ et $(I + g)\alpha \in (J\mathcal{G}z)^\perp$. Or $x = 0 \iff (g - I)\alpha = -Az$, et, selon (3.38), $Az \perp J\mathcal{G}z$. Donc (3.39) $\iff x = 0$ et $\alpha \in (J\mathcal{G}z)^\perp$. Ainsi, on a prouvé :

$$\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \Phi(z, g) = \{(\alpha, Ag) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g : (M(g) - I)\alpha + Az = 0 \text{ et } \alpha \in (J\mathcal{G}z)^\perp\}. \quad (3.40)$$

Ainsi, d'après la proposition 3.2.4, on a :

$$\boxed{\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \Phi(z, g) = T_{(z, g)}\Gamma_0.} \quad (3.41)$$

Nous venons donc de montrer que le hessien transverse de Φ est toujours non dégénéré, ce qui prouve que l'on peut appliquer le théorème de la phase stationnaire. On obtient ainsi une asymptotique théorique de $\text{Tr}(\widehat{A}_\chi)$ en puissances de h . Dans le chapitre suivant, nous calculons le terme dominant de cette asymptotique.

NB : Jusqu'ici, on a seulement utilisé le fait que π est une submersion sur $\Omega_0 \cap U$, et ce, uniquement dans le lemme 3.2.4!

3.2.4 Calcul du terme dominant

Comme $\kappa_{0,0} = 1$ et $P_0 = 1$, selon (3.24), le terme dominant de $\text{Tr}(\widehat{A}_\chi)$ est celui de :

$$I(h) := (2\pi h)^{-d} d_\chi \int_G \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{h}\Phi(z,g)} \overline{\chi(g)} a(z) dz dg. \quad (3.42)$$

Le théorème de la phase stationnaire nous dit donc que :

$$\text{Tr}(\widehat{A}_\chi) = (2\pi h)^{k-d} d_\chi \int_{\Gamma_0} \frac{\overline{\chi(g)} a(z)}{\det_+^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Phi''(z,g)}{i} |_{\mathcal{N}(z,g)\Gamma_0} \right)} d\sigma_{\Gamma_0}(z,g) + O(h^{k-d+1}). \quad (3.43)$$

• **Calcul du déterminant de la hessienne $\Phi''(z,g)|_{\mathcal{N}(z,g)\Gamma_0}$:**

Nous allons imposer une restriction au choix des A_i comme base de \mathcal{G} . Cette restriction dépend de z et g (et donc les A_i aussi!) : on choisit A_1, \dots, A_p tels que :

$$A_1, \dots, A_k \text{ est une base orthonormée de } (T_{Id} \text{Stab}(z))^\perp \text{ pour } \langle\langle ; \rangle\rangle. \quad (3.44)$$

$$A_{k+1}, \dots, A_p \text{ est une base orthonormée de } T_{Id} \text{Stab}(z) \text{ pour } \langle\langle ; \rangle\rangle. \quad (3.45)$$

On rappelle que $k = \dim G(z)$. Il est alors essentiel de noter que, pour $A \in T_{Id} \text{Stab}(z)$, en dérivant en $t = 0$ l'identité $e^{tA} z = z$, on obtient :

$$\forall A \in T_{Id} \text{Stab}(z), \quad Az = 0. \quad (3.46)$$

c'est en particulier le cas de A_{k+1}, \dots, A_p .

On rappelle que :

$$T_{(z,g)}\Gamma_0 = \{(\alpha, Ag) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g : (M(g) - Id)\alpha + Az = 0, \alpha \in T_z\Omega_0\}.$$

$\mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0$ est l'orthogonal de $T_{(z,g)}\Gamma_0$ dans $\mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g$ pour le produit scalaire défini précédemment sur $\mathbb{R}^{2d} \times M_d(\mathbb{R})$.

$$\det \left(\Phi''(z,g)|_{\mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0} \right) = \det((\Phi''(z,g)(\mu_i, \mu_j))_{1 \leq i, j \leq 2k})$$

où (μ_1, \dots, μ_{2k}) est une base orthonormée de $\mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0$. Or pour la carte choisie φ (cf (3.32) (3.44) et (3.45)), $d_{(z,0)}\varphi$ est une isométrie. En effet :

$$d_{(z,0)}\varphi(\alpha, s) = \left(\alpha, \sum_{i=1}^p s_i A_i g \right),$$

et (A_1, \dots, A_p) est une base orthonormée de \mathcal{G} . On note :

$$\mathcal{F} := \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p : (M(g) - Id)\alpha + \sum_{i=1}^p s_i A_i z = 0, \alpha \in T_z\Omega_0\} \subset \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p. \quad (3.47)$$

On a $\mathcal{F} = (d_{(z,0)}\varphi)^{-1}(T_{(z,g)}\Gamma_0)$. Ainsi, si $\varepsilon_i := (d_{(z,0)}\varphi)^{-1}(\mu_i)$, alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k})$ est une base orthonormée de $(d_{(z,0)}\varphi)^{-1}(\mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0) = \mathcal{F}^\perp$, car $d_{(z,0)}\varphi$ est une isométrie. On a clairement, par définition de \mathcal{A} :

$$\det \left(\Phi''(z, g)|_{\mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0} \right) = \det \left((\langle \mathcal{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2k} \right)$$

Enfin, on remarque que $\mathcal{A}(\mathcal{F}^\perp) \subset \mathcal{F}^\perp + i\mathcal{F}^\perp$: en effet, si $u \in \mathcal{F}^\perp$ et $v \in \mathcal{F}$ alors :

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \Phi''(z, g)(d_{(z,0)}\varphi(u), d_{(z,0)}\varphi(v)) = 0$$

car, si $x \in \mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0$ et $y \in \mathcal{T}_{(z,g)}\Gamma_0$, alors $\Phi''(x, y) = 0$, par définition de Φ .

Ainsi, si $\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp}$ désigne la matrice de \mathcal{A} dans une base quelconque de \mathcal{F}^\perp , alors, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ étant orthonormée, on a $\det((\langle \mathcal{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2k}) = \det \left(\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp} \right)$ et donc :

$$\det \left(\frac{\Phi''(z, g)|_{\mathcal{N}_{(z,g)}\Gamma_0}}{i} \right) = \det \left(\frac{\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp}}{i} \right). \quad (3.48)$$

Le lemme suivant exhibe une base de \mathcal{F}^\perp :

Lemme 3.2.6 *Soit (B_1z, \dots, B_kz) une base de $\mathcal{G}z$. Avec les A_i choisis plus haut (cf (3.44) et (3.45)), on note dans $\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p$, pour $j = 1, \dots, k$:*

$$\varepsilon_j := (JB_jz, 0), \quad \varepsilon'_j := ((M(g^{-1}) - I)B_jz, \langle A_jz, B_jz \rangle, 0).$$

Alors $\mathcal{B} := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k)$ est une base de \mathcal{F}^\perp .

Preuve du lemme : ε_j et ε'_j ($j = 1, \dots, k$) sont clairement dans \mathcal{F}^\perp . Puis, il est clair que $\varepsilon_j \perp \varepsilon'_i \forall i, j$ car $\mathcal{G}z \perp J\mathcal{G}z$ (cf (3.38)). Par ailleurs, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est libre. Il en va de même pour la famille $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k)$ en utilisant que le fait que (B_1z, \dots, B_kz) et (A_1z, \dots, A_kz) sont des bases de $\mathcal{G}z$. ■

Dans les lignes qui suivent, on confond g et $M(g)$. Supposons de plus que (B_1z, \dots, B_kz) est orthonormée. Si $A \in \mathcal{G}$, comme $Az = \sum_{i=1}^k \langle Az, B_i z \rangle B_i z$, on a :

$$\begin{cases} (JAz; 0) = \sum_{i=1}^k \langle Az, B_i z \rangle \varepsilon_i. \\ ((g^{-1} - I)Az; \langle A_i z, Az \rangle, 0) = \sum_{i=1}^k \langle A_i z, B_i z \rangle \varepsilon'_i. \end{cases}$$

Ainsi, comme $g^{-1} - g = (g^{-1} - I)(I + g)$, on a :

$$\mathcal{A}(\varepsilon_j) = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^k \langle (I - g)(I - g^{-1})B_j z, B_i z \rangle \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle (I + g)B_j z, B_i z \rangle \varepsilon'_i.$$

De même, on a : $\mathcal{A}(\varepsilon'_j) = \sum_{i=1}^k (a_{i,j} + b_{i,j}) \varepsilon_i + \sum_{i=1}^k (c_{i,j} + d_{i,j}) \varepsilon'_i$, où :

$$a_{i,j} = \frac{1}{2} \langle (g - g^{-1})(g^{-1} - I)B_j z, B_i z \rangle, \quad b_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \langle B_i z, (I + g^{-1})A_r z \rangle \langle A_r z, B_j z \rangle .$$

$$c_{i,j} = \frac{i}{2} \langle (g - I)(g^{-1} - I)B_j z, B_i z \rangle, \quad d_{i,j} = \frac{i}{2} \sum_{r=1}^k \langle B_i z, A_r z \rangle \langle A_r z, B_j z \rangle .$$

On note \boxed{M} la matrice de taille $k \times k$ de terme général en i, j : $\langle B_i z, A_j z \rangle$, et $\boxed{g_0}$ la matrice de la restriction de g à $\mathcal{G}z$ dans la base $(B_1 z, \dots, B_k z)$. Ainsi, $a_{i,j}$ est le terme général en i, j de $(I + g_0^{-1})(g_0 - I)(g_0^{-1} - I)$, $c_{i,j}$ est celui de $\frac{i}{2}(g_0 - I)(g_0^{-1} - I)$, $d_{i,j}$ est celui de $\frac{i}{2}M^t M$, et $b_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k (\sum_{q=1}^k \langle (I + g^{-1})B_q z, B_i z \rangle \langle A_r z, B_q z \rangle) \langle A_r z, B_j z \rangle$ est celui de $\frac{1}{2}(I + g_0^{-1})M^t M$. Donc,

$$\det \left(\frac{\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp}}{i} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) & \frac{1}{2i}(I + g_0^{-1})(g_0 - I)(g_0^{-1} - I) + \frac{1}{2i}(I + g_0^{-1})M^t M \\ \hline \frac{1}{2}(I + g_0) & \frac{1}{2}(g_0 - I)(g_0^{-1} - I) + \frac{1}{2}M^t M \end{array} \right).$$

On fait l'opération sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{i}(I + g_0^{-1})L_2$, ce qui donne :

$$\det \left(\frac{\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp}}{i} \right) = \det[(I - g_0)(I - g_0^{-1}) + M^t M]. \quad (3.49)$$

Enfin, notons $f : \mathcal{G}z \rightarrow \mathcal{G}z$ l'application linéaire définie par :

$$\boxed{f(x) := \sum_{r=1}^k \langle A_r z, x \rangle A_r z, \quad \forall x \in \mathcal{G}z.} \quad (3.50)$$

On a :

$$f(B_j z) = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^k \langle B_i z, A_r z \rangle \langle A_r z, B_j z \rangle B_i z.$$

Ainsi, la matrice de f dans $(B_1 z, \dots, B_k z)$ est égale à ${}^t M M$. Nous avons donc montré que :

$$\boxed{\det \left(\frac{\Phi''(z,g)}{i} \Big|_{\mathcal{N}_{(z,g)} \Gamma_0} \right) = \det[(I - M(g))(I - M(g)^{-1})|_{\mathcal{G}z} + f].} \quad (3.51)$$

• **Formule d'intégration sur Γ_0 :**

Soit

$$\pi_1 : \Gamma_0 \rightarrow \Omega_0 \cap U \text{ définie par } \pi_1(z, g) = z. \quad (3.52)$$

J'affirme que π_1 est une submersion :

Rappelons que $T_{(z,g)} \Gamma_0 = \{(\alpha, Ag) : \alpha \in T_z \Omega_0, A \in \mathcal{G} \text{ et } (M(g) - I)\alpha + Az = 0\}$. Si $(z, g) \in \Gamma_0$, alors $d_{(z,g)} \pi_1(\alpha, Ag) = \alpha$, pour tout $\alpha \in T_z \Omega_0$, et tout A dans \mathcal{G} . Selon le lemme 3.2.5, si $\alpha \in T_z \Omega_0$, il existe A dans \mathcal{G} tel que $(M(g) - I)\alpha = -Az$, i.e. tel que $d_{(z,g)} \pi_1(\alpha, Ag) = \alpha$, et

donc $d_{(z,g)}\pi_1$ est surjective, ce qui assure le fait que π_1 est une submersion en chacun de ses points.

Nous utilisons ensuite un lemme d'intégration par tranches pour les submersions riemanniennes, dont la démonstration pourra être trouvée en Appendice :

Lemme 3.2.7 Intégration par tranches via une submersion :

Soient M et N deux variétés riemanniennes, et $F : M \rightarrow N$ une submersion lisse. Soit φ lisse à support compact sur M . Alors on a :

$$\int_M \varphi(x) d\sigma_M(x) = \int_N \left[\int_{\Sigma_n} \varphi(y) \frac{d\sigma_{\Sigma_n}(y)}{|\det(d_y F^t(d_y F))|^{\frac{1}{2}}} \right] d\sigma_N(n). \quad (3.53)$$

où $\Sigma_n := F^{-1}(\{n\})$ (sous-variété de M), et $d\sigma_{\Sigma_n}$ est la mesure riemannienne induite par celle de M sur Σ_n .

Rappelons que ${}^t(d_y F) : T_{F(y)}N \rightarrow T_y M$ est définie par :

$$\forall x \in T_y M, \quad \forall z \in T_{F(y)}N, \quad \langle d_y F(x), z \rangle_{|T_{F(y)}N} = \langle x, {}^t(d_y F)(z) \rangle_{|T_y M}. \quad (3.54)$$

Nous allons appliquer ce théorème avec $M = \Gamma_0$, $N = \Omega_0 \cap U$ munies de leur structure riemannienne définie par les produits scalaires précédents, et $F = \pi_1$ qui est bien une submersion : si $d\tilde{\sigma}_{\Gamma_0}$ est la mesure sur Γ_0 issue de la structure riemannienne de $\mathbb{R}^{2d} \times M_d(\mathbb{R})$ donnée par (3.31), et $d\tilde{g}$ est la mesure riemannienne pour $\langle \langle, \rangle \rangle$ sur G , alors on a $dg = \frac{d\tilde{g}}{\text{Vol}(G)}$. D'où, la formule pour φ lisse à support compact dans Γ_0 :

$$\int_{\Gamma_0} \varphi(z, g) d\sigma_{\Gamma_0}(z, g) = \frac{1}{\text{Vol}(G)} \int_{\Omega_0} \left[\int_{H_z} \varphi(z, y) \frac{d\tilde{\sigma}_{H_z}(y)}{|\det(d_{(z,y)}\pi_1 \cdot {}^t(d_{(z,y)}\pi_1))|^{\frac{1}{2}}} \right] d\sigma_{\Omega_0}(z). \quad (3.55)$$

où $[H_z] := \text{Stab}(z)$. Ici $\tilde{\sigma}_{H_z}$ est la mesure sur H_z pour le produit scalaire (3.31). Par ailleurs, le lemme suivant permet de se ramener d'une intégrale sur H_z à une intégrale sur H_0 .

Lemme 3.2.8 Si $u \in C^\infty(H_z)$, et si $g_z \in G$ est tel que $g_z H_0 g_z^{-1} = H_z$, alors on a :

$$\int_{H_z} u(h) d\sigma_{H_z}(h) = \int_{H_0} u(g_z h g_z^{-1}) d\sigma_{H_0}(h).$$

où $d\sigma_{H_z}$ et $d\sigma_{H_0}$ sont les mesures de Haar normalisées sur H_z et H_0 .

Preuve du lemme On définit une mesure régulière ν sur H_z par :

$$\int_{H_z} u(h) d\nu(h) := \int_{H_0} u(g_z h g_z^{-1}) d\sigma_{H_0}(h).$$

On a $\nu(H_z) = \sigma_{H_0}(H_0) = 1$. Pour conclure, il suffit de montrer que ν est invariante par transla-

tion à gauche : si $h_1 \in H_z$,

$$\int_{H_z} u(h_1 h) d\sigma_{H_z}(h) = \int_{H_0} u(g_z(g_z^{-1} h_1 g_z) h g_z^{-1}) d\sigma_{H_0}(h).$$

Comme $g_z^{-1} h_1 g_z \in H_0$ et comme σ_{H_0} est invariante par translation à gauche, on a :

$$\int_{H_z} u(h_1 h) d\sigma_{H_z}(h) = \int_{H_0} u(g_z h g_z^{-1}) d\sigma_{H_0}(h) = \int_{H_z} u(h) d\nu(h).$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

Finalement, on a pour φ lisse à support compact dans Γ_0 :

$$\int_{\Gamma_0} \varphi(z, g) d\sigma_{\Gamma_0}(z, g) = \int_{\Omega_0} \frac{Vol(H_0)}{Vol(G)} \left[\int_{H_0} \varphi(z, g_z h g_z^{-1}) \frac{d\sigma_{H_0}(h)}{|\det(d_{(z, g_z h g_z^{-1})} \pi_1 \cdot {}^t(d_{(z, g_z h g_z^{-1})} \pi_1)|^{\frac{1}{2}})} \right] d\sigma_{\Omega_0}(z). \quad (3.56)$$

car on a : $\tilde{\sigma}_{H_z} = Vol(H_z) \sigma_{H_z}$, où $Vol(H_z)$ est le volume de H_z pour la structure riemannienne issue du produit scalaire (3.31), et $Vol(H_z) = Vol(H_0)$ car les sous-groupes d'isotropie sont conjugués sur $\Omega_0 \cap U$ et les isométries conservent le volume donné par la mesure riemannienne issue de $\langle\langle, \rangle\rangle$.

Lemme 3.2.9 *Pour tout z dans $\Omega_0 \cap U$ et tout $g \in G$ vérifiant $M(g)z = z$, on a :*

$$\det [d_{(z, g)} \pi_1 \cdot {}^t(d_{(z, g)} \pi_1)]^{-1} = \det^{-1}(f) \det[(I - g)(I - g^{-1})|_{\mathcal{G}z} + f]. \quad (3.57)$$

où f , donnée par (3.50), ne dépend pas de g .

Preuve du lemme • On prouve tout d'abord que $M(g) = Id$ sur $\mathcal{F} := (\mathcal{G}z)^{\perp T_z \Omega_0}$:

en effet, si $g \in G$, alors $M(g)$ stabilise $T_z \Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^{\perp}$ (car si $\alpha \in T_z \Omega_0$, si $A \in \mathcal{G}$, alors $\langle M(g)\alpha, JAz \rangle = \langle \alpha, JM(g)AM(g^{-1})z \rangle$ et $M(g)AM(g^{-1}) \in \mathcal{G}$). De même, $M(g)$ stabilise \mathcal{F} . Donc, si $\alpha \in \mathcal{F}$, alors $(M(g) - I)\alpha \in \mathcal{F}$. Or, on a vu au lemme 3.2.5 que $(M(g) - I)\alpha \in \mathcal{G}z$. Donc $(M(g) - I)\alpha = 0$.

• Par ailleurs, selon (4.27), si $\alpha \in T_z \Omega_0$, alors ${}^t d_{(z, g)} \pi_1(\alpha)$ est l'unique $(\alpha_0, A_0 g)$ de $T_{(z, g)} \Gamma_0$ vérifiant pour tout $(\beta, Ag) \in T_{(z, g)} \Gamma_0$:

$$\langle \beta, \alpha \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle \beta, \alpha_0 \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} + \langle\langle A, A_0 \rangle\rangle = 0. \quad (3.58)$$

Si de plus $\alpha \in \mathcal{F}$, comme $M(g)\alpha = \alpha$, on a $(\alpha, 0) \in T_{(z, g)} \Gamma_0$. On a donc : ${}^t d_{(z, g)} \pi_1(\alpha) = (\alpha, 0)$. Ainsi, on vient de montrer que $d_{(z, g)} \pi_1 \cdot {}^t d_{(z, g)} \pi_1 = Id$ sur \mathcal{F} . D'où :

$$\det(d_{(z, g)} \pi_1 \cdot {}^t d_{(z, g)} \pi_1) = \det(d_{(z, g)} \pi_1 \cdot {}^t d_{(z, g)} \pi_1|_{\mathcal{G}z}). \quad (3.59)$$

• On va montrer que $d_{(z, g)} \pi_1 \cdot {}^t d_{(z, g)} \pi_1|_{\mathcal{G}z} = (f + (I - M(g))(I - M(g^{-1})))^{-1} \circ f$ ⁶, ce qui achèvera la preuve du lemme. Pour cela, soit $\alpha \in \mathcal{G}z$. On note $(\alpha_0, A_0 g) := {}^t d_{(z, g)} \pi_1(\alpha)$. Il suffit de montrer

⁶Notons que $f + (I - M(g))(I - M(g^{-1}))$ est bien inversible sur $\mathcal{G}z$ car si $x \in \mathcal{G}z$, alors :

$\langle [f + (I - M(g))(I - M(g^{-1}))]x, x \rangle = \sum_{i=1}^k \langle A_i z, x \rangle^2 + \|(I - M(g))x\|^2$.

que :

$$f(\alpha) = (f + (I - M(g^{-1}))(I - M(g)))\alpha_0. \quad (3.60)$$

Pour simplifier les notations, on va noter g pour $M(g)$. Il est aisé de vérifier que si $A \in \mathcal{G}$, alors, $(Az, [A - gAg^{-1}]g) \in T_{(z,g)}\Gamma_0$. Selon (3.58), on a en particulier :

$$\forall A \in \mathcal{G}, \langle Az, \alpha - \alpha_0 \rangle = \langle (A - gAg^{-1}), A_0 \rangle. \quad (3.61)$$

Il faut montrer que pour tout A dans $[T_{Id}Stab(z)]^\perp$, on a :

$$\langle Az, f(\alpha - \alpha_0) - (I - g^{-1})(I - g)\alpha_0 \rangle = 0. \quad (3.62)$$

Ou encore, (A_1, \dots, A_k) étant une base de $[T_{Id}Stab(z)]^\perp$, que cette égalité est vérifiée pour $A = A_i$ pour tout i entre 1 et k . Donnons-nous un tel i :

$$\langle A_i z, f(\alpha - \alpha_0) \rangle = \sum_{j=1}^k \langle A_i z, A_j z \rangle \langle \alpha - \alpha_0, A_j z \rangle.$$

Selon (3.61), on a :

$$\langle A_i z, f(\alpha - \alpha_0) \rangle = \sum_{j=1}^k \langle A_i z, A_j z \rangle \langle (A_j - gA_jg^{-1}), A_0 \rangle. \quad (3.63)$$

En outre,

$$\langle A_i z, (I - g^{-1})(I - g)\alpha_0 \rangle = \langle A_i z, (I - g^{-1})A_0 z \rangle = \langle A_i z, (A_0 - g^{-1}A_0g)z \rangle.$$

Or, (A_1, \dots, A_k) étant une base orthonormée de $[T_{Id}Stab(z)]^\perp$, on a :

$$A_0 - g^{-1}A_0g = \sum_{j=1}^k \langle (A_0 - g^{-1}A_0g), A_j \rangle A_j.$$

D'où :

$$\langle A_i z, (I - g^{-1})(I - g)\alpha_0 \rangle = \sum_{j=1}^k \langle A_i z, A_j z \rangle \langle A_0 - g^{-1}A_0g, A_j \rangle.$$

D'après cette dernière égalité et (3.63), on a bien (3.62) pour tout A dans \mathcal{G} . ■

On applique le lemme et (3.56) à $\varphi(z, g) := \overline{\chi(g)}a(z)\det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\Phi''(z,g)}{i}\Big|_{\mathcal{N}(z,g)\Gamma_0}\right)$. D'où :

$$\int_{\Gamma_0} \overline{\chi(g)}a(z)\det^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\Phi''(z,g)}{i}\Big|_{\mathcal{N}(z,g)\Gamma_0}\right) d\sigma_{\Gamma_0}(z, g) = \frac{Vol(H_0)}{Vol(G)} \int_{\Omega_0} \frac{a(z)}{\det^{\frac{1}{2}}(f)} d\sigma_{\Omega_0}(z) \cdot \int_{H_0} \overline{\chi(h)} d\sigma_{H_0}(h). \quad (3.64)$$

Lemme 3.2.10 $\det^{\frac{1}{2}}(f) = \text{Vol}(G(z)) \frac{\text{Vol}(H_0)}{\text{Vol}(G)}$, où $\text{Vol}(G)$ et $\text{Vol}(H_0)$ sont calculés comme volumes riemanniens pour le produit scalaire $\langle\langle A, B \rangle\rangle = \text{Tr}({}^t AB)$.

Je remercie vivement **Gilles Carron** qui m'a donné la preuve de ce lemme.

Preuve du lemme Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ une base orthonormée de $\mathcal{G}z$. Si $j \in \{1, \dots, k\}$, on a :

$$f(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^k \langle \varepsilon_j, A_r z \rangle \langle A_r z, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i.$$

Donc

$$\det(f) = \det[\langle\langle A_i z, \varepsilon_j \rangle\rangle_{(1 \leq i, j \leq k)}]^2. \quad (3.65)$$

Fixons z dans Ω_0 . Notons $H = H_z$ le stabilisateur de z . On munit G et H de la structure riemannienne issue de $\langle\langle . \rangle\rangle$. Il est clair que, selon l'invariance de ce produit scalaire par les isométries, et comme tous les stabilisateurs sont conjugués sur Ω_0 , on a $\text{Vol}(H_z) = \text{Vol}(H_0)$. Notons \mathcal{H} l'algèbre de Lie de H . Pour simplifier les notations, on notera e l'identité du groupe G .

Transport de la structure riemannienne sur G/H : selon [G-H-L] p.61, prop 2.28, il existe une unique structure riemannienne sur G/H telle que la submersion $\pi : G \rightarrow G/H$ (projection canonique) soit riemannienne. Par ailleurs, si $g \in G$, on désigne par ψ_g la réciproque de la restriction de $d_g \pi$ à $(\ker(d_g \pi))^\perp$. D'où :

$$\psi_g : T_{\pi(g)}(G/H) \rightarrow (g\mathcal{H})^\perp \text{ telle que } d_g \pi \circ \psi_g = \text{Id}_{T_{\pi(g)}(G/H)}. \quad (3.66)$$

Par ailleurs, la métrique δ sur G/H est définie par :

$$\forall g \in G, \forall u, v \in T_{\pi(g)}(G/H), \quad \delta_{\pi(g)}(u, v) = \langle\langle \psi_g(u), \psi_g(v) \rangle\rangle.$$

Si $g \in G$, soit $L_g : G/h \rightarrow G/H$ définie par $L_g(g_0 H) = gg_0 H$. Une forme volume α sur G/H est dite G -invariante si : $\forall g \in G, L_g^* \alpha = \alpha$. On note $\Omega^k(G/H)^G$ l'ensemble des formes volumes G -invariantes sur G/H .

Lemme 3.2.11 L'application $\alpha \mapsto \alpha(eH)$ de $\Omega^k(G/H)^G$ dans $\Lambda^k(T_{eH}(G/H))$ est un isomorphisme. En particulier $\dim(\Omega^k(G/H)^G) = 1$.

Ce lemme est de facture classique.

Lemme 3.2.12 La forme volume ω issue de la structure riemannienne de G/H est l'unique élément de $\Omega^k(G/H)^G$ tel que :

$$\omega(eH)(\psi_e^{-1}(A_1), \dots, \psi_e^{-1}(A_k)) = 1.$$

Par ailleurs, $\int_{G/H} \omega = \frac{VolG}{VolH}$, où $Vol(G)$ et $Vol(H)$ sont calculés comme volumes riemanniens pour le produit scalaire $\langle\langle A, B \rangle\rangle = Tr({}^tAB)$.

Preuve du lemme : l'unicité vient du fait que $\dim(\Omega^k(G/H)^G) = 1$.

a) Montrons que ω est G -invariante : d'après la définition de la métrique sur G/H , π étant une submersion riemannienne, on a pour tout g dans G : $d_g\pi {}^t d_g\pi = Id_{T_{\pi(g)}(G/H)}$. Ainsi, selon la formule d'intégration par tranches de l'appendice 4 -théorème 4.4.1-, on a (si $d\tilde{g}$ est la mesure riemannienne pour $\langle\langle . \rangle\rangle$ sur G) :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(G), \quad \int_G f d\tilde{g} = \int_{G/H} \int_{\pi^{-1}(\{x\})} f d\sigma_{\pi^{-1}(\{x\})} \omega.$$

Ainsi, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(G/H)$, avec $f = \varphi \circ \pi$, on obtient :

$$\int \varphi \circ \pi d\tilde{g} = Vol(H) \int_{G/H} \varphi w.$$

D'où $\int_{G/H} \omega = \frac{VolG}{VolH}$, et comme $d\tilde{g}$ est proportionnelle à la mesure de Haar sur G , elle est invariante à gauche et la G -invariance de ω est donnée par le fait qu'on a :

$$\forall g \in G, \quad \int_{G/H} \varphi \circ L_g w = \int_{G/H} \varphi w.$$

b) Etant donné la définition de la structure riemannienne sur G/H , ψ_e est une isométrie. Comme (A_1, \dots, A_k) est une base orthonormée de \mathcal{H}^\perp , $(\psi_e^{-1}(A_1), \dots, \psi_e^{-1}(A_k))$ en est une de $T_{eH}(G/H)$. Ceci explique la formule annoncée. ■

Soit $\Phi : G/H \rightarrow G(z)$ définie par $\Phi(gH) = gz$; Soit μ la forme volume sur la variété orientée $G(z)$ (μ correspond à la mesure de Lebesgue sur $G(z)$).

$\Phi^*\mu$ est G -invariante : en effet, pour tout g dans G , $\Phi \circ L_g = g \cdot \Phi$, donc :

$$L_g^*(\Phi^*\mu) = (\Phi \circ L_g)^*\mu = (g \cdot \Phi)^*\mu = \Phi^*(g\mu) = \Phi^*\mu.$$

car μ est G -invariante. D'où $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi^*\mu = \lambda w$. Ainsi :

$$Vol(G(z)) = \int_{G/H} \Phi^*\mu = \lambda \int_{G/H} w = \lambda \frac{Vol(G)}{Vol(H)}.$$

Par ailleurs, selon le lemme 3.2.12 :

$$\lambda = \Phi^*\mu(eH)(\psi_e^{-1}(A_1), \dots, \psi_e^{-1}(A_k)) = \mu(z)(d_{eH}\Phi(\psi_e^{-1}(A_1)), \dots, d_{eH}\Phi(\psi_e^{-1}(A_k))).$$

Par ailleurs, on a $d_{eH}\Phi(\psi_e^{-1}(A_i)) = A_i z$, car $\psi_e^{-1}(A_i) = d_e\pi(A_i)$, et $\Phi \circ \pi(g) = gz$. Enfin, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ étant une base orthonormée de $\mathcal{G}z$, on a :

$$\forall u_1, \dots, u_k \in \mathcal{G}z, \quad \mu(z)(u_1, \dots, u_k) = \det(\varepsilon_i, u_j).$$

(en effet le membre de gauche définit une forme k -linéaire sur $\mathcal{G}z$ égale à 1 sur $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$).

D'où : $\lambda = \det(\varepsilon_i, A_j z) = \frac{Vol(H)}{Vol(G)} Vol(G(z))$. ■

Ainsi, selon (3.43) :

$$\mathrm{Tr}(\widehat{A}_\chi) = (2\pi h)^{k-d} d_\chi \int_{\Omega_0} a(z) \frac{d\sigma_{\Omega_0}(z)}{Vol(G(z))} \int_{H_0} \overline{\chi(h)} dh + O(h^{k-d+1}). \quad (3.67)$$

où dh est la mesure de Haar sur H_0 . La preuve est complète lorsqu'on remarque que : pour tout $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{red})$, on a, d'après (3.10) :

$$\int_{\Omega_{red}} v(x) d\sigma_{red}(x) = \int_{\Omega_0} v(\pi(z)) \frac{d\sigma_{\Omega_0}(z)}{Vol(G(z))}. \quad (3.68)$$

3.3 Formule de Gutzwiller réduite

3.3.1 Asymptotiques de Weyl réduites

Dans ce chapitre, on se donne un caractère χ de \hat{G} . On définit pour E dans \mathbb{R} :

$$\widetilde{\Sigma}_E := \{\tilde{H} = E\} \subset \Omega_{red}. \quad (3.69)$$

On pose :

$$\mathcal{L}_{red}(E) := \{t \in \mathbb{R} : \exists x \in \widetilde{\Sigma}_E : \tilde{\Phi}_t(x) = x.\} \quad (3.70)$$

i.e. $\mathcal{L}_{red}(E)$ est l'ensemble des périodes des orbites périodiques de $\widetilde{\Sigma}_E \subset \Omega_{red}$.

Rappelons qu'avec les notations précédentes :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = Tr \left(\psi(\hat{H}_\chi) f \left(\frac{E - \hat{H}_\chi}{h} \right) \right). \quad (3.71)$$

Théorème 3.3.1 Asymptotique de Weyl réduite

Soient G un sous-groupe de Lie de $O(d)$ de dimension p , $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien G -invariant et $E \in \mathbb{R}$ tel que H vérifie **(H.0)**, et **(H.1)**. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $U := H^{-1}(]E - \varepsilon, E + \varepsilon[)$, alors les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$. On suppose aussi qu'il n'y a pas d'équilibre relatif sur $\Omega_0 \cap U$. Soient enfin f et ψ des fonctions réelles vérifiant **(H.2)**.

Si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{red}(E) = \emptyset$, alors on a $\mathcal{G}_\chi(h) = O(h^{+\infty})$ quand $h \rightarrow 0^+$.

Si $\text{Supp} \hat{f} \cap \mathcal{L}_{red}(E) = \{0\}$, alors on a une asymptotique à toute ordre de $\mathcal{G}_\chi(h)$ en puissances de h , dont les coefficients sont des distributions en \hat{f} à support dans $\{0\}$, avec en particulier :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = (2\pi h)^{k-d+1} \hat{f}(0) \psi(E) \frac{d_\chi}{2\pi} \int_{\widetilde{\Sigma}_E} dL_{\tilde{H},E} \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right] + O(h^{k-d+2}). \quad (3.72)$$

où $dL_{\tilde{H},E} = \frac{d\widetilde{\Sigma}_E}{d\tilde{H}}$ est la "mesure de Liouville" associée à \tilde{H} sur Ω_{red} . Rappelons que k est la dimension des G -orbites sur $\Omega_0 \cap U$. Par ailleurs, si les hypothèses sont satisfaites pour des énergies λ voisines de E , alors le résultat est uniforme dans un voisinage de E .

La preuve de ce théorème constitue le chapitre 3.5.

► La "mesure de Liouville" sur $\widetilde{\Sigma}_\lambda$ est ici définie comme la mesure $d\sigma_\lambda$ sur $\widetilde{\Sigma}_\lambda$ telle que, pour toute fonction f lisse à support compact dans $(\Omega_0 \cap U)/G \subset \Omega_{red}$, on a :

$$\int_{\Omega_{red}} f(x) d\sigma_{\Omega_{red}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\widetilde{\Sigma}_\lambda} f(x) d\sigma_\lambda(x) d\lambda. \quad (3.73)$$

Elle peut s'exprimer en fonction de la mesure de Lebesgue sur $\Sigma_E \cap \Omega_0$: si f est lisse à support compact dans $(\Omega_0 \cap U)/G \subset \Omega_{red}$, alors on a :

$$\int_{\widehat{\Sigma}_E} f(x) dL_{\widehat{H}, E} = \int_{\Sigma_E \cap \Omega_0} \frac{f(\pi(z))}{Vol(G(z))} \frac{d\sigma_{\Sigma_E \cap \Omega_0}(z)}{\|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|_{\mathbb{R}^{2d}}}. \quad (3.74)$$

où $d\sigma_{\Sigma_E \cap \Omega_0}$ est la mesure de Lebesgue sur $\Sigma_E \cap \Omega_0$, et $\Pi_{T_z \Omega_0}$ est le projecteur orthogonal sur $T_z \Omega_0$ dans \mathbb{R}^{2d} . En effet, il suffit de vérifier que la mesure sur $\widehat{\Sigma}_\lambda$ définie par le membre de droite de (3.74) satisfait (3.73), ce que l'on montre en utilisant (3.68) et le théorème d'intégration par tranches de l'Appendice 4.

► Comparaison : sans symétrie, si on note $\mathcal{L}(E) := \{t \in \mathbb{R} : \exists z \in \Sigma_E : \Phi_t(z) = z\}$, et si $\mathcal{L}(E) \cap \text{Supp} \hat{f} = \{0\}$, alors, on a :

$$\text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}) f \left(\frac{E - \widehat{H}}{h} \right) \right) = (2\pi h)^{-d+1} \hat{f}(0) \psi(E) \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_E} \frac{d\Sigma_E}{|\nabla H|} + O(h^{-d+2}). \quad (3.75)$$

► Lorsque $G = SO(d)$, les hypothèses de réduction symplectique du théorème sur le groupe G sont vérifiées si et seulement si $0 \notin \Sigma_E$. Pour le cas d'une symétrie cylindrique, elle sont satisfaites si et seulement si $\Omega_1 \cap \Sigma_E = \emptyset$ (voir le chapitre 3.1.3).

Fonction de comptage :

Si I est un intervalle compact de \mathbb{R} tel que le spectre de \widehat{H}_χ soit discret dans I , alors on note $N_{I, \chi}(h) := \text{Tr}(\mathbb{1}_I(\widehat{H}_\chi))$, la fonction de comptage de valeurs propres de \widehat{H}_χ dans I comptées avec multiplicité. Remarquons que le résultat suivant peut être utilisé pour l'étude de certains opérateurs de Schrödinger ayant une singularité de type Coulomb (cf [HKS_W]).

Théorème 3.3.2 (Asymptotique de la fonction de comptage réduite)

Soient $E_1 < E_2$ dans \mathbb{R} , G un sous-groupe de Lie compact de $O(d)$ de dimension p , $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien lisse G -invariant, vérifiant **(H.0)**, tel que $H^{-1}([E_1 - \epsilon_0, E_2 + \epsilon_0])$ soit compact (où $\epsilon_0 > 0$). On suppose par ailleurs que E_1 et E_2 ne sont pas des valeurs critiques de $H|_{\Omega_0}$. Si $U := H^{-1}([E_1 - \epsilon_0, E_2 + \epsilon_0])$, on suppose que les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$. Alors le spectre de \widehat{H}_χ est discret dans $I := [E_1, E_2]$, et on a :

$$N_{I, \chi}(h) = (2\pi h)^{k-d} d_\chi Vol_{red}(\widetilde{H}^{-1}(I)) \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right] + O(h^{k-d+1}). \quad (3.76)$$

où \widetilde{H} est le hamiltonien classique réduit ($\widetilde{H}(\pi(z)) = H(z)$), et Vol_{red} désigne le volume riemannien sur Ω_{red} .

► La preuve de ce théorème à partir du théorème 3.3.1 diffère peu du cas sans symétries,

et est très proche de celle du livre [Ro], Théorème (V-11) p.273 : la recette est toujours convolution, régularisation, théorème taubérien ([Ro] Théorème (V-13)) et intégration par tranches, en utilisant (3.74).

► Comparaison : sans symétrie, on a en supposant que E_1 et E_2 ne sont pas des valeurs critiques de H :

$$N_I(h) := \text{Tr}(\mathbb{1}_I(\hat{H})) = (2\pi h)^{-d} \text{Vol}(H^{-1}(I)) + O(h^{-d+1}). \quad (3.77)$$

► Lorsque $G = SO(d)$, les hypothèses sur le groupe G du théorème sont vérifiées si et seulement si $0 \notin H^{-1}([E_1, E_2])$. Pour le cas d'une symétrie cylindrique, elle sont satisfaites si et seulement si $\Omega_1 \cap H^{-1}([E_1, E_2]) = \emptyset$ (voir le chapitre 3.1.3).

► Lorsque G est un groupe fini, sous les hypothèses du théorème, on a $\Omega_0 = \mathbb{R}^{2d}$, selon la remarque technique de la fin du paragraphe 2.2, $H_0 = \{Id_{\mathbb{R}^d}\}$, et $p = k = 0$. Comme $[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] = d_\chi$, et (pour $A \subset \Omega_{red}$), $\text{Vol}_{red}(A) = \frac{1}{|G|} \text{Vol}(\pi^{-1}(A))$, on retrouve le théorème 2.2.11.

Corollaire 3.3.3 Multiplicité des valeurs propres et symétrie des vecteurs propres de \hat{H} : Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, si $H^{-1}(I) \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ et si χ est un caractère irréductible tel que $\int_{H_0} \overline{\chi(h)} dh \neq 0$, alors, pour h suffisamment petit, il existe dans I des valeurs propres de \hat{H} ayant des vecteurs propres possédant la symétrie $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ et donc de multiplicité supérieure à d_χ .

Preuve du corollaire : E_1 et E_2 n'étant pas des valeurs critiques de $H|_{\Omega_0}$, on a $\text{Vol}_{red}(\tilde{H}^{-1}(I)) \neq 0 \iff \tilde{H}^{-1}(I) \neq \emptyset \iff H^{-1}(I) \cap \Omega_0 \neq \emptyset$. Ainsi, selon le théorème précédent, si $\int_{H_0} \overline{\chi(h)} dh \neq 0$, alors, pour h petit, $N_{I,\chi}(h) \neq 0$. Par ailleurs, on a vu dans le premier chapitre de la thèse que les valeurs propres de \hat{H}_χ sont de multiplicité proportionnelle à d_χ (cf Proposition 1.2.4). ■

En termes de proportions, on peut interpréter plus précisément le corollaire précédent en écrivant :

$$\frac{N_{I,\chi}(h)}{N_I(h)} = (2\pi h)^k \frac{\text{Vol}_{red}(\tilde{H}^{-1}(I))}{\text{Vol}(H^{-1}(I))} d_\chi [\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] + O(h^{k+1}). \quad (3.78)$$

En particulier, la proportion de valeurs propres de \hat{H} ayant des fonctions propres de symétrie $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ diminue avec h , ce qui n'est pas le cas pour les groupes finis.

Une autre illustration : Avec $G = SO(3)$, si $0 \notin H^{-1}(I)$, alors les hypothèses des théorèmes précédents sont satisfaites (cf supra), et on peut prendre $H_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & SO(2) \end{array} \right) = \text{Stab}(e_1, 0)$. Puis,

on utilise la formule des caractères du premier chapitre de la thèse (cf lemmes 1.1.5 et 1.1.6) pour écrire, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{H_0} \overline{\tilde{\chi}_n(h)} dh = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\tilde{\chi}_n(\tilde{R}_\theta)} d\theta = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta = 1.$$

Ainsi, pour tout n dans \mathbb{N} , comme $d_{\chi_n} = 2n + 1$, on en déduit que si $H^{-1}(I) \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, alors, $\sigma(\hat{H}) \cap I$ engendre des espaces propres de dimension de plus en plus grande lorsque h tend vers zéro.

3.3.2 Termes oscillants

On définit pour E et t_0 dans \mathbb{R}^* , $\boxed{P_{red}(E, t_0)}$ l'ensemble des orbites périodiques de $\widetilde{\Sigma}_E$ ayant t_0 pour période. Le théorème suivant donne une formule de Gutzwiller pour \hat{H}_χ dans l'espace réduit lorsqu'on suppose que les orbites périodiques sont non-dégénérées dans $\widetilde{\Sigma}_E$ (voir définition 4.1.1) :

Théorème 3.3.4 Formule de Gutzwiller réduite

Soient G un sous-groupe de Lie de $O(d)$ de dimension p , $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien G -invariant et $E \in \mathbb{R}$ tel que H vérifie **(H.0)**, et **(H.1)**. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $U := H^{-1}(]E - \varepsilon, E + \varepsilon[)$, alors les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$. On suppose aussi qu'il n'y a pas d'équilibre relatif sur $\Omega_0 \cap U$. Soient enfin f et ψ des fonctions réelles vérifiant **(H.2)**.

On suppose que les orbites périodiques de $\widetilde{\Sigma}_E \subset \Omega_{red}$ ayant une période dans $\mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp} \hat{f}$ sont non-dégénérées pour ces périodes. Si $\boxed{0 \notin \text{Supp} \hat{f}}$, alors on a une asymptotique à toute ordre de $\mathcal{G}_\chi(h)$ en puissances de h (avec des termes oscillants du type $e^{\frac{i\alpha}{h}}$), dont les coefficients sont des distributions en \hat{f} à support dans $\mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp} \hat{f}$, avec en particulier :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}_\chi) f \left(\frac{E - \hat{H}_\chi}{h} \right) \right) =$$

$$\psi(E) d_\chi \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp} \hat{f}} \hat{f}(t_0) \sum_{\bar{\gamma} \in P_{red}(E, t_0)} e^{\frac{i}{h} S_{\bar{\gamma}}(t_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}} \overline{\chi(g)} d(t_0, z, g) d\sigma_{\Lambda_{\bar{\gamma}}}(z, g) + O(h). \quad (3.79)$$

où la densité $d(t_0, z, g)$ est donnée dans le théorème 3.4.7,

$$\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : z = M(g)\Phi_{t_0}(z) \text{ et } \pi(z) \in \bar{\gamma}\}. \quad (3.80)$$

$d\sigma_{\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}}$ est la mesure de Lebesgue sur $\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}$, et $S_{\bar{\gamma}}(t_0) = \int_0^{t_0} p_t(z) \dot{q}_t(z) dt$ ne dépend pas du point z de tel que $\pi(z) \in \bar{\gamma}$ (où $\Phi_t(z) = (q_t(z), p_t(z))$).

La preuve de ce théorème constitue le chapitre 3.6.

► Lorsque $\dim(\Omega_{red}) = 2$, i.e. lorsque $d = k + 1$, les orbites périodiques sont automatiquement non-dégénérées pour des questions de dimension. C'est le cas pour $G = SO(d)$.

► Comparaison : sans symétrie, en supposant que les orbites périodiques dont une période rencontre $\text{Supp}\hat{f}$ sont non-dégénérées, et si $0 \notin \text{Supp}\hat{f}$, on a :

$$\text{Tr} \left(\psi(\hat{H}) f \left(\frac{E - \hat{H}}{h} \right) \right) = \psi(E) \sum_{t_0 \in \mathcal{L}(E) \cap \text{Supp}\hat{f}} \hat{f}(t_0) \sum_{\gamma \in P(E, t_0)} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\frac{i}{h} S_\gamma(t_0)} T_\gamma^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma(\gamma, t_0)}}{|\det(F_z(t_0)|_{V_z} - I)|^{\frac{1}{2}}} + O(h) \quad (3.81)$$

► Il est donc naturel de prévoir que :

$$\int_{\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}} \overline{\chi(g)} d(t_0, z, g) d\sigma_{\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}}(z, g) = \frac{T_{\bar{\gamma}}^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma(\bar{\gamma}, t_0)}}{|\det(d\tilde{F}_x(t_0)|_{V_x} - I)|^{\frac{1}{2}}} W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0}. \quad (3.82)$$

où $T_{\bar{\gamma}}^*$ est la période primitive de $\bar{\gamma}$, $\sigma(\bar{\gamma}, t_0) \in \mathbb{N}$, $\tilde{F}_x(t)$ désigne la différentielle de $x \mapsto \tilde{\Phi}_t(x)$ à t fixé, et $V_x \subset T_x \Omega_{red}$ est l'orthogonal symplectique pour ω_{red} de $\tilde{E}_1 := \cup_{k \geq 0} \ker(d\tilde{F}_x(t_0) - Id)^k$. Le terme $W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0}$ ne dépend que de χ , $\bar{\gamma}$, et t_0 (ce qui fait que notre conjecture ne signifie pas grand chose). Le tout est donc d'identifier ce terme. Au vu des formules de Weyl, il paraît naturel de penser que $W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0} = [\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}]$. Ceci dit, il faut que notre formule fonctionne pour le cas d'un groupe fini lorsque $H_0 = \{Id_{\mathbb{R}^d}\}$ (voir théorème 2.2.16), où l'on a $\Omega_0 = \mathbb{R}^{2d}$. Dans ce cas-là, nous voyons que $W_{\chi, \bar{\gamma}, nT_{\bar{\gamma}}^*} = \overline{\chi(g_{\bar{\gamma}}^n)}$, et comme $[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1}] = d_\chi$, on se rend compte que $W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0}$ est plus compliqué que ça.

Ainsi, on obtiendrait avec symétries la **conjecture** :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = d_\chi \psi(E) \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp}\hat{f}} \hat{f}(t_0) \sum_{\bar{\gamma} \in P_{red}(E, t_0)} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{\frac{i}{h} S_{\bar{\gamma}}(t_0)} T_{\bar{\gamma}}^* e^{i\frac{\pi}{2} \sigma(\bar{\gamma}, t_0)}}{|\det(d\tilde{F}_x(t_0)|_{V_x} - I)|^{\frac{1}{2}}} W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0} + O(h). \quad (3.83)$$

Cependant le calcul de $d(t_0, z, g)$ étant trop complexe nous n'avons pour l'instant pu trouver la forme de $W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0}$.

► Les travaux du physicien **S.C. Creagh** approchent ce type de résultat (cf [Cr]-1993). Cependant, dans ses articles il se restreint à des symétries abéliennes ou au cas $SO(3)$ (dans ce cas-là, il semblerait que $W_{\chi, \bar{\gamma}, t_0} = 1$). Un papier des physiciens Pal et Biswas (cf [B-P]-1998) étudie le cas d'une symétrie cylindrique. Il existe encore d'autres papiers spécialisés (toujours de physique) dans le cas de telle ou telle symétrie, mais *pas de résultat global* (pour une symétrie quelconque) à ma connaissance. Par ailleurs, ces articles de physique utilisent des approximations du type "formule de Van Vleck" qui méritent des justifications mathématiques.

► Si l'on ne suppose pas que les orbites périodiques du système réduit sont non-dégénérées dans

$\widetilde{\Sigma}_E$, on dispose, sous une certaine **condition de flot G -propre**, d'une asymptotique théorique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ faisant intervenir les composantes connexes de l'ensemble :

$$\mathcal{C}_{E,T} = \{(t, z, g) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} \times G : z \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E), M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

Voir la définition 3.4.5 et le théorème 3.4.7.

3.4 Analyse du problème de phase stationnaire : notion de flot G -propre

Dans ce paragraphe on amorce la preuve des théorèmes 3.3.4 et 3.3.1. Nous nous servons de l'étude qui a été faite sur les groupes finis et la reprenons au stade de 2.3.8. On doit appliquer le théorème de la phase stationnaire à des termes de la forme :

$$\int_G \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(t, z, g) e^{\frac{i}{h}\varphi_E(t, z, g)} dz dt dg. \quad (3.84)$$

où $a(t, z, g)$ est à support compact, et φ_E est donnée dans le lemme 2.3.8.

Dans un premier temps, on va établir une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir appliquer ce théorème, que nous appellerons "condition de flot G -propre". Puis on en déduira une asymptotique théorique pour $\mathcal{G}_\chi(h)$ (voir le théorème 3.4.7). Ensuite, on va *calculer* le premier terme de cette asymptotique lorsque \hat{f} est supportée près de zéro (terme dit "de Weyl", voir chapitre 3.5 et théorème 3.3.1). Enfin, en supposant de plus que les orbites périodiques de l'espace réduit vérifient une hypothèse de non-dégénérescence, pour \hat{f} à support compact sans restriction, on donnera une formule de Gutzwiller pour \widehat{H}_χ qui fait la correspondance entre des objets quantiques de $L_\chi^2(\mathbb{R}^d)$ et des quantités classiques du système dans l'espace réduit (voir chapitre 3.6).

3.4.1 Calcul de l'ensemble critique $\mathcal{C}_{E,T}$

Soit $\boxed{\mathcal{C}_{E,T}} := \{a := (t, z, g) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} \times G : \Im(\varphi_E(a)) = 0, \nabla_{t, \alpha, g} \varphi_E(a) = 0\}$.

Proposition 3.4.1 *L'ensemble critique est :*

$$\mathcal{C}_{E,T} = \{(t, z, g) \in]-T, T[\times \mathbb{R}^{2d} \times G : z \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E), M(g)\Phi_t(z) = z\}. \quad (3.85)$$

Preuve de la proposition :

• *Calcul de $\Im\varphi_E$:* φ_1 étant réelle, on a :

$$\Im\varphi_E(t, z, g) = \Re\varphi_2(t, z, g) = \frac{1}{4}|z_t - M(g^{-1})z|^2 - \frac{1}{4}\Re \langle \widehat{W}_t(z_t - M(g^{-1})z); z_t - M(g^{-1})z \rangle .$$

$$\Im\varphi_E(t, z, g) = 0 \iff |z_t - M(g^{-1})z|^2 = \Re \langle \widehat{W}_t(z_t - M(g^{-1})z); \overline{z_t - M(g^{-1})z} \rangle_{\mathbb{C}^d} .$$

Or, selon le lemme 2.3.8, $\|W_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)} < 1$, donc $\boxed{\Im\varphi_E(t, z, g) = 0 \iff \Phi_t(z) = M(g^{-1})z}$.

• *Calcul du gradient de φ_1* : (voir justification infra) Pour $A \in \mathcal{G}$, on a :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_1(t, z, g) = E - H(z) - \frac{1}{2} \langle (z_t - M(g^{-1})z); J\dot{z}_t \rangle \\ \nabla_z \varphi_1(t, z, g) = \frac{1}{2}(M(g) + {}^t F_z(t))J(z_t - M(g^{-1})z) \\ \partial_g \varphi_1(t, z, g)(Ag) = \frac{1}{2} \langle JAz; gz_t \rangle \end{cases} \quad (3.86)$$

• *Calcul du gradient de φ_2* : (voir justification infra)

$$\begin{cases} 4\partial_t \varphi_2(t, z, g) = 2 \langle (I - \widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z); \dot{z}_t \rangle - \langle \partial_z(\widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z); (z_t - g^{-1}z) \rangle \\ 4\nabla_z \varphi_2(t, z, g) = 2({}^t F_z(t) - M(g))(I - \widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z) - {}^t [\partial_z(\widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z)](z_t - g^{-1}z) \\ 4\partial_g \varphi_2(t, z, g)(Ag) = 2 \langle (I - \widehat{W}_t)M(g^{-1})Az; (z_t - g^{-1}z) \rangle, \quad \text{si } A \in \mathcal{G} \end{cases} \quad (3.87)$$

Ainsi, on constate que $(t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$ si et seulement si $\Phi_t(z) = M(g^{-1})z$, $H(z) = E$ et pour tout A dans \mathcal{G} , $\langle JAz; z \rangle = 0$, i.e. $z \in \Omega_0$, ce qui achève la preuve de la proposition.

• *Justification des calculs de gradients* : les calculs de $\partial_t \varphi_1$, $\partial_t \varphi_2$, $\partial_g \varphi_1$ et $\partial_g \varphi_2$ ne présentent pas de difficulté. On rappelle quelques formules classiques de calcul différentiel dans \mathbb{R}^n qui serviront aussi pour le calcul de la hessienne : pour $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $H_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, et $A : \mathbb{R}^m \rightarrow M_p(\mathbb{C})$:

$$\nabla(\langle f(z), g(z) \rangle) = {}^t (d_z f)g(z) + {}^t (d_z g)f(z). \quad (3.88)$$

$$\nabla(H_0(f(z))) = {}^t (d_z f)(\nabla H_0)(f(z)). \quad (3.89)$$

$$d_z(A(z)f(z)) = (d_z A)(f(z)) + A(z).d_z f. \quad (3.90)$$

En utilisant (3.88) et (3.90), on obtient facilement $\nabla_z \varphi_2(t, z, g)$. Reste à calculer $\nabla_z \varphi_1(t, z, g)$. Pour simplifier les notations, on note g pour $M(g)$. Selon (3.88), on a :

$$\nabla_z \varphi_1(t, z, g) = -{}^t \nabla H(z) + \frac{1}{2}(gJ + {}^t (gJ)) - \frac{1}{2} \int_0^t {}^t d_z(\Phi_s(z) - g^{-1}z)J\dot{z}_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t {}^t (Jd_z(\dot{z}_s))(z_s - g^{-1}z) ds.$$

Or $d_z(\dot{z}_s) = \partial_z \partial_t(\Phi(s, z)) = \frac{d}{ds}(F_z(s))$. Par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t {}^t (Jd_z(\dot{z}_s))(z_s - g^{-1}z) ds &= - \int_0^t \frac{d}{ds}({}^t F_z(s))J(z_s - g^{-1}z) ds. \\ &= - [{}^t F_z(s)J(z_s - g^{-1}z)]_0^t + \int_0^t {}^t F_z(s)J\dot{z}_s ds. \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla_z \varphi_1(t, z, g) = -{}^t \nabla H(z) + \frac{1}{2}J(g - g^{-1})z - \frac{1}{2} \int_0^t ({}^t F_z(s) - g)J\dot{z}_s ds$

$$+ \frac{1}{2}({}^t F_z(t)J(z_t - g^{-1}z)) - \frac{1}{2}J(I - g^{-1})z - \frac{1}{2} \int_0^t {}^t F_z(s)J\dot{z}_s ds.$$

Or ${}^t F_z(s)J\dot{z}_s = -{}^t F_z(s)\nabla H(\Phi_s(z)) = -\nabla(H(\Phi_s(z)))$, selon (3.89), de sorte que par conservation de l'énergie, on a ${}^t F_z(s)J\dot{z}_s = -\nabla H(z)$. Donc, $\nabla_z \varphi_1(t, z, g) =$

$$\begin{aligned} & -t\nabla H(z) + \frac{1}{2}J(g - g^{-1})z + \frac{1}{2}gJ(z_t - z) + \frac{1}{2}({}^t F_z(t)J(z_t - g^{-1}z)) - \frac{1}{2}J(I - g^{-1})z + t\nabla H(z) \\ & = \frac{1}{2}{}^t F_z(t)J(z_t - g^{-1}z) + \frac{1}{2}gJ(z_t - g^{-1}z). \end{aligned}$$

D'où le calcul de $\nabla_z \varphi_1$. ■

3.4.2 Calcul de la hessienne Hess $\varphi_E(t, z, g)$

Afin d'alléger les notations, nous noterons dans toute la suite de la même manière (sauf mention du contraire) l'élément de l'algèbre de Lie $A \in \mathcal{G} \subset M_d(\mathbb{R})$ et l'élément de $M_{2d}(\mathbb{R})$:

$$M(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (M(e^{tA})) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Rappelons que si M est une sous-variété de dimension p_0 d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie (E, \langle, \rangle_E) , si $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ est C^2 , si $x_0 \in M$, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{p_0} \rightarrow M$ est une carte locale avec $\varphi(0) = x_0$, et enfin si $d_{x_0}f = 0$, alors on définit la *matrice hessienne* de f en x_0 (associée à la carte φ) par :

$$\text{Hess } f(x_0) := \left(\left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right) \right)_{1 \leq i, j \leq p} \in M_{p_0}(\mathbb{R}).$$

La forme bilinéaire hessienne de f en x_0 est alors définie sur $T_{x_0}M$ par :

$$f''(x_0)(u, v) := \langle \text{Hess } f(x_0)(d_0\varphi)^{-1}(u); (d_0\varphi)^{-1}(v) \rangle_{\mathbb{R}^{p_0}}.$$

A priori, la matrice complexe dépend de la carte choisie, mais pas $f''(x_0)$. (cf [Laud] p.88 Proposition III.4.3).

On applique ceci à $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times M_d(\mathbb{R})$, en prenant pour produit scalaire sur $M_d(\mathbb{R})$:

$$\langle\langle A, B \rangle\rangle := \text{Tr}({}^t AB). \quad (3.92)$$

Notons que ce produit scalaire munit tout sous-groupe de $O(d)$ d'une métrique riemannienne telle que la mesure associée est proportionnelle à la mesure de Haar du sous-groupe (il suffit de vérifier qu'elle est régulière et invariante par translation à gauche). Par ailleurs, on prend ici $f \leftarrow \varphi_E$ en $x_0 \leftarrow (t_0, z_0, g_0) \in \mathcal{C}_{E,T}$, en choisissant la carte :

$$\varphi_{(t_0, z_0, g_0)} = \varphi : \begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times G \\ (t, z, s) \mapsto (t, z, \exp(\sum_{i=1}^p s_i A_i) \cdot g_0). \end{cases} \quad (3.93)$$

où (A_1, \dots, A_p) est une base (orthonormée) de \mathcal{G} choisie en fonction de g_0 et z_0 de la façon suivante :

$$(A_1, \dots, A_k) \text{ est une base orthonormée de } [T_{Id}(Stab(z_0))]^\perp. \quad (3.94)$$

$$(A_{k+1}, \dots, A_p) \text{ est une base orthonormée de } T_{Id}(Stab(z_0)). \quad (3.95)$$

(on rappelle que $k = 2d - \dim(\Omega_0 \cap U)$).

$\text{Hess}\varphi_E(t, z, g)$ est alors constituée de blocs carrés représentés dans l'ordre suivant sur une même ligne : 1 bloc 1×1 , puis 1 bloc $2d \times 2d$, puis k blocs 1×1 et 1 blocs $(p - k) \times (p - k)$ nul. Lorsqu'apparaît un indice "i", il faut répéter "k" fois le même bloc dans le sens des lignes, en faisant varier i de 1 à k, et lorsqu'apparaît un indice "j" on répète "k" fois le bloc dans le sens des colonnes en faisant varier j de 1 à k (voir la proposition ci-après).

Proposition 3.4.2 *Soit $(t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$. Alors $\text{Hess}\varphi_E(t, z, g) =$*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{i}{2} \langle g(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H; J\nabla H \rangle & \begin{array}{c} -{}^t\nabla H \\ +\frac{i}{2} {}^t[({}^tF - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H] \end{array} & \frac{i}{2} \langle J\nabla H; g(I - \widehat{W}_t)g^{-1}A_j z \rangle & 0 \\ \hline -\nabla H & \frac{1}{2}[JgF - {}^t(gF)J] & \frac{1}{2}({}^tF + g)Jg^{-1}A_j z & 0 \\ \hline +\frac{i}{2}({}^tF - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H & +\frac{i}{2}({}^tF - g)(I - \widehat{W}_t)(F - g^{-1}) & +\frac{i}{2}({}^tF - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}A_j z & 0 \\ \hline \frac{i}{2} \langle J\nabla H; g(I - \widehat{W}_t)g^{-1}A_i z \rangle & \begin{array}{c} \frac{1}{2} [({}^tF + g)Jg^{-1}A_i z] \\ +\frac{i}{2} {}^t[({}^tF - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}A_i z] \end{array} & \frac{i}{2} \langle g(I - \widehat{W}_t)g^{-1}A_i z; A_j z \rangle & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

où l'on a noté g pour $M(g)$, F pour $F_z(t)$, et ∇H pour $\nabla H(z)$.

Preuve de la proposition :

Notons $((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq 4}$ les blocs de la matrice de l'énoncé. Gardons en mémoire les formules (3.37) et (3.38). On utilise les calculs de (3.86) et (3.87) : on a clairement $\partial_t^2 \varphi_1(t, z, g) = 0$. Puis, comme $\dot{z}_t = g^{-1}J\nabla H(z)$, on a :

$$\partial_t^2 \varphi_1(t, z, g) = \frac{1}{2} \langle (I - \widehat{W}_t)\dot{z}_t, \dot{z}_t \rangle = \frac{1}{2} \langle g(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H(z), J\nabla H(z) \rangle.$$

D'où $a_{1,1}$.

$$\partial_t \partial_z \varphi_1(t, z, g) = \frac{1}{2} (g + {}^tF)J\dot{z}_t = -\frac{1}{2} (I + {}^tFg^{-1})\nabla H(z) = -\nabla H(z),$$

car on a ${}^tFg^{-1}\nabla H(z) = \nabla H(z)$. Par ailleurs, $4\partial_t \partial_z \varphi_2(t, z, g) = 2({}^tF - g)(I - \widehat{W}_t)g^{-1}J\nabla H(z)$.

D'où $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$.

$$\partial_t \partial_{s_i} \varphi_1(t, z, g) = \frac{1}{2} \langle JA_i z, J\nabla H(z) \rangle = 0,$$

selon (3.37). Par ailleurs, $\partial_t \partial_{s_i} \varphi_2(t, z, g) = \frac{1}{2} \langle (I - \widehat{W}_t)g^{-1}A_i z, g^{-1}J\nabla H(z) \rangle$. D'où $a_{1,3}$ et $a_{3,1}$. Puis, (3.46) donne $a_{1,4}$ et $a_{4,1}$.

Selon (3.90), on a :

$$\partial_z^2 \varphi_1(t, z, g) = \frac{1}{2} (g + {}^tF)J(F - g^{-1}) = \frac{1}{2} (JgF - {}^t(gF)J).$$

$$4\partial_z^2 \varphi_2(t, z, g) = 2({}^t F - g)(I - \widehat{W}_t)(F - g^{-1}).$$

On obtient ainsi $a_{2,2}$. On rappelle que $[A, J] = 0$ et que ${}^t A = -A$. D'où, selon (3.89) :

$$\partial_z \partial_{s_i} \varphi_1(t, z, g) = \frac{1}{2}(-{}^t A_i J g z_t + ({}^t F g^{-1}) J A_i z) = \frac{1}{2}({}^t F + g) J g^{-1} A_i z.$$

Toujours selon (3.89), on a :

$$4\partial_z \partial_{s_i} \varphi_2(t, z, g) = 2({}^t F - g)(I - \widehat{W}_t) g^{-1} A_i z.$$

On en déduit $a_{2,3}$, $a_{3,2}$, $a_{2,4}$ et $a_{4,2}$.

Reste à calculer $\partial_{s_i} \partial_{s_j} \varphi_E$:

Lemme 3.4.3

$$\frac{\partial^2}{\partial_{s_i} \partial_{s_j}} (e^{\sum_{r=1}^p s_r A_r})|_{s=0} = \frac{1}{2}(A_i A_j + A_j A_i).$$

Preuve du lemme : On rappelle que si X et Y sont dans $M_N(\mathbb{R})$, alors

$$d_Y(\exp)(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Y^k X Y^{n-1-k} \right).$$

Ainsi, si $\varphi(s_i) := s_i A_i + s_j A_j$, alors

$$\frac{d}{ds_i}|_{s_i=0} (e^{\varphi(s_i)}) = d_{\varphi(0)}(\exp)(\varphi'(0)) = \sum_{n \geq 1} \frac{s_j^{n-1}}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_j^k A_i A_j^{n-1-k} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial_{s_i} \partial_{s_j}} (e^{\sum_{r=1}^p s_r A_r})|_{s=0} &= \frac{d}{ds_j}|_{s_j=0} \left[\frac{d}{ds_i}|_{s_i=0} (\exp(s_i A_i + s_j A_j)) \right] \\ &= \frac{d}{ds_j}|_{s_j=0} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{s_j^{n-1}}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_j^k A_i A_j^{n-1-k} \right) \right] = \frac{1}{2}(A_i A_j + A_j A_i) \end{aligned}$$

par dérivation sous le signe somme. ■

On rappelle que :

$$\varphi_1(t, z, g) = (E - H(z))t + \frac{1}{2}M(g^{-1})zJz - \frac{1}{2} \int_0^t (z_s - M(g^{-1})z)J\dot{z}_s ds$$

Donc, selon le lemme qui précède :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial_{s_i} \partial_{s_j}} \varphi_1(t, z, g) &= \frac{1}{4} \langle z; J(A_i A_j + A_j A_i)gz \rangle + \frac{1}{4} \int_0^t g^{-1}(A_i A_j + A_j A_i)J\dot{z}_s ds \\ &= \frac{1}{4} \langle (A_i A_j + A_j A_i)z, Jz \rangle = -\frac{1}{2} \langle A_j z, J A_i z \rangle = 0 \end{aligned}$$

selon (3.38). Par ailleurs, rappelons que :

$$\varphi_2(t, z, g) = \frac{1}{4} \langle (I - \widehat{W}_t)(z_t - M(g^{-1})z); (z_t - M(g^{-1})z) \rangle$$

Selon le même lemme : $4 \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} \varphi_2(t, z, g) =$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds_j} \Big|_{s_j=0} \left[\langle (I - \widehat{W}_t) \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} (z_t - g^{-1}z); z_t - g^{-1}z \rangle + \langle (I - \widehat{W}_t)(z_t - g^{-1}z); \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} (z_t - g^{-1}z) \rangle \right] \\ & = \langle (I - \widehat{W}_t) \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} (z_t - g^{-1}z); \frac{d}{ds_j} \Big|_{s_j=0} (z_t - g^{-1}z) \rangle + \langle (I - \widehat{W}_t) \frac{d}{ds_j} \Big|_{s_j=0} (z_t - g^{-1}z); \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} (z_t - g^{-1}z) \rangle \\ & = 2 \langle (I - \widehat{W}_t) g^{-1} A_i z, g^{-1} A_j z \rangle . \end{aligned}$$

On en déduit $a_{4,3}$, $a_{3,4}$, $a_{4,4}$ et $a_{3,3}$, et ceci achève la preuve la proposition. \blacksquare

3.4.3 Calcul du noyau réel de la hessienne et flot G -propre

On rappelle que le noyau réel de la matrice hessienne est ici défini comme l'ensemble des $(\tau, \alpha, Ag) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}$ tels que $A = \sum_{i=1}^p s_i A_i$ ($s_i \in \mathbb{R}$) et $(t, z, s_1, \dots, s_p) \in \ker(\text{Hess} \varphi_E(t, z, g))$.

Proposition 3.4.4 Soit $(t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$. Le noyau réel de la hessienne est :

$$\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess} \varphi_E(t, z, g) =$$

$$\{(\tau, \alpha, Ag) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G} : \alpha \perp \nabla H(z), \alpha \perp J(\mathcal{G}z), \tau J \nabla H(z) + (M(g)F_z(t) - Id)\alpha + Az = 0\}. \quad (3.96)$$

Preuve de la proposition : Rappelons que (t, z, g) étant fixé, A_1, \dots, A_p est une base de \mathcal{G} dépendant de (t, z, g) , telle que A_1, \dots, A_k est une base orthonormée de $(T_{Id}(\text{Stab}(z)))^\perp$ et $A_{k+1} \dots A_p$ est une base de $T_{Id}(\text{Stab}(z))$. Donc, $A \in \mathcal{G}$ s'écrit $A = \sum_{i=1}^p s_i A_i$ où $s_i \in \mathbb{R}$. Ainsi, en séparant partie réelle et imaginaire, on écrit $\widehat{W}_t = \widehat{W}_1 + i\widehat{W}_2$, où \widehat{W}_1 et \widehat{W}_2 sont symétriques, et $(\tau, \alpha, Ag) \in \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess} \varphi_E(t, z, g)$ si et seulement si ⁷ :

$$\left. \begin{aligned} & \tau \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z); J \nabla H(z) \rangle - 2 \nabla H(z) \alpha + \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z); (gF - I)\alpha \rangle \\ & \quad + \langle J \nabla H(z); g\widehat{W}_2 g^{-1} Az \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\heartsuit)$$

$$\left. \begin{aligned} & -2\tau \nabla H(z) + [JgF - {}^t(gF)J]\alpha + ({}^tF - g)\widehat{W}_2[(F - g^{-1})\alpha + Az] \\ & \quad + \tau({}^tF - g)\widehat{W}_2 g^{-1} J \nabla H(z) + ({}^tF + g)Jg^{-1}Az = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\spadesuit)$$

Pour tout i entre 1 et k :

$$\left. \begin{aligned} & \tau \langle J \nabla H(z); g\widehat{W}_2 g^{-1} A_i z \rangle + \langle Jg^{-1} A_i z; (F + g^{-1})\alpha \rangle \\ & \quad + \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} A_i z; (gF - I)\alpha \rangle + \langle g\widehat{W}_2 g^{-1} A_i z; Az \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad (G_i^1)$$

⁷Dans ce calcul on note F pour $F_z(t)$.

Pour la partie imaginaire :

$$\left. \begin{aligned} \tau < g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}J\nabla H(z); J\nabla H(z) > + < g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}J\nabla H(z); (gF - I)\alpha > \\ + < J\nabla H(z); g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}Az > = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\diamond)$$

$$\tau({}^tF - g)(I - \widehat{W}_1)g^{-1}[J\nabla H(z) + (gF - I)\alpha] + ({}^tF - g)(I - \widehat{W}_1)g^{-1}Az = 0 \quad (\clubsuit)$$

Pour tout i entre 1 et k :

$$\tau < J\nabla H(z); g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}A_i z > + < g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}A_i z; (gF - I)\alpha + Az > = 0 \quad (G_i^2)$$

On pose

$$x := \tau J\nabla H(z) + (gF - I)\alpha + Az. \quad (3.97)$$

Ainsi, en utilisant le fait que \widehat{W}_1 et \widehat{W}_2 sont symétriques, on a :

$$\boxed{(\heartsuit) \iff < g\widehat{W}_2g^{-1}J\nabla H(z); x > = 2 < \nabla H(z); \alpha >}$$

$$\boxed{(\diamond) \iff < g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}J\nabla H(z); x > = 0}$$

$$\boxed{(\clubsuit) \iff ({}^tF - g)(I - \widehat{W}_1)g^{-1}x = 0}$$

$$\boxed{(G_i^1) \iff < g\widehat{W}_2g^{-1}A_i z; x > + < JA_i z; (gF + I)\alpha > = 0}$$

$$\boxed{(G_i^2) \iff < g(I - \widehat{W}_1)g^{-1}A_i z; x > = 0}$$

(♠) s'exprime aussi en fonction de x : rappelons que l'on a

$$M(g)F_z(t)J\nabla H(z) = J\nabla H(z).$$

(dériver en $s = 0$ l'identité : $M(g)\Phi_t(\Phi_s(z)) = \Phi_s(z)$). Par ailleurs, gF et Fg sont des matrices symplectiques, donc $gFJ^t(gF) = J$ et $FgJ^t(Fg) = J$. Enfin, $[g, J] = 0$ et $\widehat{W}_2 = J\widehat{W}_1$. On multiplie alors (♠) par gFJ pour obtenir :

$$-2\tau\nabla H(z) + (gF - I)g\widehat{W}_1g^{-1}x - gFgF\alpha - (I + gF)Az + \alpha = 0.$$

$$\begin{aligned} -\tau J\nabla H(z) + (gF - I)g\widehat{W}_1g^{-1}x - gFgF\alpha - (\tau\nabla H(z) + (gF - I)\alpha + Az) \\ -(I + gF)Az + (gF - I)\alpha + Az + \alpha = 0. \end{aligned}$$

Or $\tau J\nabla H(z) = \tau gFJ\nabla H(z)$, donc :

$$(gF - I)g\widehat{W}_1g^{-1}x - x - gFx = 0.$$

Ainsi $\boxed{(\spadesuit) \iff (gF - I)(I - g\widehat{W}_1g^{-1})x = -2x}$.

Posons $y := (I - g\widehat{W}_1g^{-1})x$. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} (\clubsuit) \iff y \in \ker[^t(gF) - I] = \text{Im}(gF - I)^\perp \\ (\spadesuit) \iff (gF - I)y = -2x \end{cases}$$

Si $(\tau, \alpha, gA) \in \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_E(t, z, g)$ alors $x \perp y$, i.e.

$$\langle (I - g\widehat{W}_1g^{-1})x; x \rangle = 0, \quad \text{i.e. } |x|^2 = \langle \widehat{W}_1g^{-1}x; g^{-1}x \rangle.$$

Si $x \neq 0$, on a $|x|^2 < |x|^2$, donc $\boxed{x = 0}$ et alors $(\heartsuit) \Rightarrow \boxed{\alpha \perp \nabla H(z)}$.

Donc d'après (G_i^1) , on a

$$(gF + I)\alpha \in J(\mathcal{G}z)^\perp. \quad (3.98)$$

Or d'après (3.37) et (3.38) $J\nabla H(z)$ et Az sont dans $(J\mathcal{G}z)^\perp$, et $x = 0$, donc :

$$(gF - I)\alpha \in (J\mathcal{G}z)^\perp. \quad (3.99)$$

D'après (3.98) et (3.99), on a $\alpha \in (J\mathcal{G}z)^\perp$.

La réciproque est claire. ■

Dans ce qui suit, nous donnons un critère géométrique simple pour obtenir une asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ par notre méthode :

$$\text{Soit } \Psi := \begin{cases}] - T, T[\times (\Sigma_E \cap \Omega_0) \times G \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (t, z, g) \mapsto g\Phi_t(z) - z \end{cases}$$

Définition 3.4.5 On dit que le flot est G -propre sur $] - T, T[\times (\Sigma_E \cap \Omega_0)$ si zéro est une valeur faiblement régulière de Ψ , i.e. :

- $\Psi^{-1}(\{0\}) = \mathcal{C}_{E,T}$ est une union finie de sous-variétés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times G$
- $\forall (t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$, on a $T_{(t,z,g)}\mathcal{C}_{E,T} = \ker d_{(t,z,g)}\Psi$

L'hypothèse de flot G -propre est en fait la bonne pour pouvoir appliquer correctement le théorème de la phase stationnaire :

Proposition 3.4.6 *Le flot est G -propre sur $] - T, T[\times (\Sigma_E \cap \Omega_0)$ si et seulement si $\mathcal{C}_{E,T}$ est une union finie de sous-variétés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times G$ et si le hessien transverse de φ_E est non dégénérée sur $\mathcal{C}_{E,T}$.*

Preuve de la proposition : on sait que le hessien transverse de φ_E est non dégénéré sur $\mathcal{C}_{E,T}$ si

et seulement si pour tout (t, z, g) dans $\mathcal{C}_{E,T}$ on a $\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess}\varphi_E(t, z, g) = T_{(t,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$. Il n'y a donc qu'à montrer que :

$$\ker d_{(t,z,g)}\Psi = \ker_{\mathbb{R}} \text{Hess}\varphi_E(t, z, g).$$

Soient $(t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$, et $(\tau, \beta, Ag) \in T_{(t,z,g)}(]-T, T[\times (\Sigma_E \cap \Omega_0) \times G)$, i.e. $\tau \in \mathbb{R}$, $\beta \in T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E)$ and $A \in \mathcal{G}$. Comme Σ_E et Ω_0 sont transverses, on a $T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E) = T_z\Omega_0 \cap T_z\Sigma_E$, de sorte que $\beta \perp \nabla H(z)$ et $J\beta \perp \mathcal{G}z$ (car $T_z\Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp$).

$$\begin{aligned} d_{(t,z,g)}\Psi(\tau, \beta, Ag) &= \tau \partial_t \Psi + \partial_z \Psi(\beta) + \partial_g \Psi(Ag) \\ &= \tau M(g)J\nabla H(\Phi_t(z)) + (M(g)F_z(t) - Id_{\mathbb{R}^{2d}})\beta + \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} [e^{sA}M(g)\Phi_t(z)] \\ &= \tau J\nabla H(z) + (M(g)F_z(t) - Id_{\mathbb{R}^{2d}})\beta + Az. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.4.4, ceci achève la preuve de la proposition. ■

Théorème 3.4.7 *Soient G un sous-groupe de Lie de $O(d)$ de dimension p , $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien G -invariant et $E \in \mathbb{R}$ tel que H vérifie **(H.0)**, et **(H.1)**. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $U := H^{-1}(]E - \varepsilon, E + \varepsilon[)$, alors les hypothèses de réduction symplectique sont satisfaites sur $U \cap \Omega_0$. On suppose aussi qu'il n'y a pas d'équilibre relatif sur $\Omega_0 \cap U$. Soient enfin f et ψ des fonctions réelles vérifiant **(H.2)**. On suppose par ailleurs que $\mathcal{C}_{E,T}$ est compact et que la **condition de flot G-propre** est satisfaite sur $]-T, T[\times (\Omega_0 \cap \Sigma_E)$. Alors on a une asymptotique de $\mathcal{G}_\chi(h)$ en puissances de h avec des termes oscillants. Si $[\mathcal{C}_{E,T}]$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T}$ alors la quantité $\int_0^t p_s q_s ds$ est constante sur chaque élément Y de $[\mathcal{C}_{E,T}]$, notée S_Y et l'asymptotique est donnée modulo $O(h^{+\infty})$ par :*

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \sum_{Y \in [\mathcal{C}_{E,T}]} (2\pi h)^{\frac{1-\dim Y+p}{2}} e^{i S_Y} \psi(E) \frac{d_\chi}{2\pi} \left(\int_Y \hat{f}(t) d(t, z, g) d\sigma_Y(t, z, g) + \sum_{j \geq 1} h^j a_{j,Y} \right).$$

où la densité $d(t, z)$ est définie par :

$$d(t, z, g) := \overline{\chi(g)} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_E''(t, z, g)|_{\mathcal{N}_{(t,z,g)}Y}}{i} \right) \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A + iB - i(C + iD)}{2} \right).$$

Rappelons que $\varphi_E''(t, z, g)$ est donnée par la proposition 3.4.2 et que A, B, C, D sont donnés par : $F_z(t_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Preuve du théorème :

Rappelons que $\mathcal{G}_\chi(h) = d_\chi \int_G \overline{\chi(g)} I_{g,E}(h) dg$. Comme dans le cas d'un groupe fini, en utilisant la proposition 3.4.6, via le théorème de la phase stationnaire généralisé, on obtient un

développement asymptotique de la forme voulue, et il nous reste à calculer le premier terme. Celui-ci est donné par :

$$\mathcal{G}_\chi(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} d_\chi \frac{(2\pi h)^{-d}}{2\pi} \int_G \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \overline{\chi(g)} \chi_2(\alpha) \hat{f}(t) a_0(g^{-1}\alpha) \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A+iB-i(C+iD)}{2} \right) e^{\frac{i}{h} \varphi_{E,g}(t,z)} dt dz dg.$$

On sait que $a_0(\alpha) = \psi(H(\alpha))$, de sorte qu'en utilisant la G -invariance de H , on a :

$$\mathcal{G}_\chi(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} d_\chi \frac{(2\pi h)^{-d}}{2\pi} \int_G \int_{\mathbb{R}_t} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \overline{\chi(g)} \chi_2(\alpha) \hat{f}(t) \psi(H(\alpha)) \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A+iB-i(C+iD)}{2} \right) e^{\frac{i}{h} \varphi_{E,g}(t,z)} dt dz dg.$$

Soit $[\mathcal{C}_{E,T}]$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T}$. D'après le calcul de $\mathcal{C}_{E,T}$, φ_E est constante sur les composantes connexes de $\mathcal{C}_{E,T}$, égale à :

$$\varphi_E(t, \alpha, g) = S(\alpha, t) + Et = \int_0^t p_s \dot{q}_s ds \quad \text{où } (q_s, p_s) = \Phi_s(\alpha).$$

Pour $Y \in [\mathcal{C}_{E,T}]$, notons S_Y cette quantité. Le théorème de la phase stationnaire généralisé (cf appendice 4.3) donne alors l'asymptotique :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \sum_{Y \in [\mathcal{C}_{E,T}]} (2\pi h)^{\frac{1-\dim Y+p}{2}} e^{\frac{i}{h} S_Y} \frac{\psi(E)}{2\pi} \left(\int_Y \hat{f}(t) d(t, z, g) d\sigma_Y(t, z, g) + \sum_{j \geq 1} h^j a_{j,Y} \right) + O(h^{+\infty})$$

où la densité $d(t, z, g)$ est définie par :

$$d(t, z, g) := \overline{\chi(g)} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi''_{E,g}(t, z)|_{\mathcal{N}_{(t,z)} Y}}{i} \right) \cdot \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A+iB-i(C+iD)}{2} \right). \quad (3.100)$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.4.7. ■

3.5 Cas où \hat{f} est supportée près de zéro

3.5.1 Le flot est toujours G -propre près de zéro

On note :

$$\mathcal{L}_{red}(E) = \boxed{\mathcal{L}_{red}} := \{t \in \mathbb{R} : \exists g \in G, \exists z \in \Omega_0 \cap \Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\}. \quad (3.101)$$

$$\boxed{W_0} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : M(g)z = z\}. \quad (3.102)$$

\mathcal{L}_{red} est exactement l'ensemble des périodes des orbites périodiques d'énergie E de l'espace réduit.

Proposition 3.5.1 *On fait les hypothèses du théorème 3.3.1. Alors, 0 est isolé dans \mathcal{L}_{red} . Par ailleurs, si $T_{min} > 0$ désigne la période minimale d'une orbite périodique d'énergie E du système réduit sur $\tilde{\Sigma}_E = \pi(\Sigma_E \cap \Omega_0)$, si $T < T_{min}$, alors $\mathcal{C}_{E,T} = \{0\} \times W_0$.*

Preuve de la proposition : $\tilde{\Sigma}_E$ est compact et sans point d'équilibre pour \tilde{H} , car $\Sigma_E \cap \Omega_0$ ne contient pas de (PER). Il est alors bien connu qu'il existe une période minimale ($T_{\min} > 0$) pour les orbites périodiques de $\tilde{\Sigma}_E$. Ainsi, si $M(g)\Phi_t(z) = z$ avec $|t| < T_{\min}$, alors $\tilde{\Phi}_t(z) = z$ et $t = 0$. Donc 0 est bien isolé dans \mathcal{L}_{red} . Si $T < T_{\min}$, on a $\mathcal{C}_{E,T} = \{0\} \times W_0$. ■

Proposition 3.5.2 W_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d} \times G$, $\dim W_0 = 2d - 2k + p - 1$ et si $(z, g) \in W_0$, alors

$$T_{(z,g)}W_0 = \{(\alpha, Ag) : (M(g) - I)\alpha + Az = 0, \alpha \perp \nabla H(z) \text{ et } \alpha \in T_z\Omega_0\}. \quad (3.103)$$

Preuve de la proposition :

On reprend la notation Γ_0 de l'asymptotique faible (cf (3.27)), avec cette fois-ci U comme dans les hypothèses du théorème 3.3.1. Comme $W_0 = \Gamma_0 \cap [(\Sigma_E \cap \Omega_0) \times G]$, il suffit de montrer que Γ_0 et $(\Sigma_E \cap \Omega_0) \times G$ sont des variétés transverses de $(\Omega_0 \cap U) \times G$: dans le cas contraire, $\Sigma_E \cap \Omega_0$ étant une hypersurface de $\Omega_0 \cap U$, soit $(z, g) \in W_0$ tel que $T_z\Gamma_0 \subset (T_z\Sigma_E \cap T_z\Omega_0) \times \mathcal{G}g$.

Si $\alpha \in T_z\Omega_0$, on a vu au lemme 3.2.5, que $(M(g) - I)\alpha \in \mathcal{G}z$. D'où $A \in \mathcal{G}$ tel que $(\alpha, Ag) \in T_{(z,g)}\Gamma_0$. Ainsi, on vient de montrer que $T_z\Omega_0 \subset T_z\Sigma_E$, ce qui est en contradiction avec le fait que Σ_E et $\Omega_0 \cap U$ soient transverses et le lemme 3.1.8 . ■

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.5.3 Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, pour T petit, le flot est G -propre.

Preuve du théorème : on sait que $\mathcal{C}_{E,T}$ est sous-variété de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times G$ selon les propositions 3.5.1 et 3.5.2. Reste à montrer que si $(0, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$ alors $\ker_{\mathbb{R}} \text{Hess } \varphi_E(0, z, g) \subset T_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$: Si $\tau \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{2d}$ et $A \in \mathcal{G}$ vérifient $\alpha \perp \nabla H(z)$, $\alpha \in (J\mathcal{G}z)^\perp = T_z\Omega_0$ et

$$\tau J\nabla H(z) + (M(g) - I)\alpha + Az = 0, \quad (3.104)$$

alors, il faut montrer que $\tau = 0$. Or selon le lemme 3.2.5, comme $M(g)z = z$, on a $(M(g) - I)\alpha \in \mathcal{G}z$. Donc, si $\tau \neq 0$, alors $J\nabla H(z) \in \mathcal{G}z$, z est un point d'équilibre du système réduit, ce qui est exclu. Ainsi, $\tau = 0$, et selon (3.104) et la proposition 3.5.2, $(\alpha, Ag) \in T_{(z,g)}W_0$. ■

3.5.2 Calcul du terme de Weyl

Au chapitre précédent, nous avons obtenu une asymptotique théorique de la quantité $\mathcal{G}_\chi(h)$ lorsque h tend vers zéro lorsque $\text{Supp}(\hat{f}) \cap \mathcal{L}_{red}(E) = \{0\}$. On désire dans ce chapitre, sous les mêmes hypothèses, faire le calcul du premier terme de ce développement. Pour cela, deux

méthodes s'offrent à nous : un calcul direct via le théorème de la phase stationnaire, ou un calcul utilisant le résultat de l'asymptotique faible du théorème 3.2.1 :

Calcul direct via la phase stationnaire :

On suppose ici que $0 < T < T_{\min}^8$. On a donc $\mathcal{C}_{E,T} = \{0\} \times W_0$, et si $(t, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$, alors $t = 0$, $M(g)z = z$ et $F_z(0) = I_{2d}$. Pour tout Y dans $[\mathcal{C}_{E,T}]$, on a $S_Y = 0$, et $\dim Y = \dim W_0 = \dim \Gamma_0 - 1 = 2d - 2k + p - 1$. Ainsi, en appliquant le théorème 3.4.7, on obtient :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = (2\pi h)^{1-d+k} \frac{d\chi}{2\pi} \hat{f}(0) \psi(E) \int_{W_0} \overline{\chi(g)} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_E''(0, z, g)|_{\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}}}{i} \right) d\sigma_{W_0}(z, g) + O(h^{2-d+k}). \quad (3.105)$$

La matrice hessienne se simplifie car $M_0 = iI_{2d}$, W_t et \widehat{W}_t sont nuls. Donc, si $M(g)z = z$, on obtient, selon la proposition 3.4.2 : $\text{Hess } \varphi_E(0, z, g) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \langle J\nabla H(z); J\nabla H(z) \rangle & -t\nabla H(z) & \frac{i}{2} \langle J\nabla H(z); A_j z \rangle & 0 \\ -\nabla H(z) & \frac{1}{2}J(g - g^{-1}) + \frac{i}{2}(I - g)(I - g^{-1}) & \frac{1}{2}(g^{-1} + I)JA_j z + \frac{i}{2}(g^{-1} - I)A_j z & 0 \\ \frac{i}{2} \langle J\nabla H(z); A_i z \rangle & \frac{1}{2}{}^t[(g^{-1} + I)JA_j z] + \frac{i}{2}{}^t[(g^{-1} - I)A_j z] & \frac{i}{2} \langle A_i z; A_j z \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $M(g)z = z$, on rappelle que :

$$T_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T} = \{0\} \times \{(\alpha, Ag) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g : (M(g) - Id)\alpha + Az = 0, \alpha \perp J\mathcal{G}(z), \alpha \perp \nabla H(z)\}.$$

$\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$ est l'orthogonal de $T_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathcal{G}g$ pour le produit scalaire défini précédemment sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times M_d(\mathbb{R})$ (cf (3.92)).

$$\det \left(\varphi_E''(0, z, g)|_{\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}} \right) = \det((\varphi_E''(0, z, g)(\mu_i, \mu_j)))_{1 \leq i, j \leq 2k+2}$$

où $(\mu_1, \dots, \mu_{2k+2})$ est une base orthonormée de $\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$. Or pour la carte choisie φ (cf (3.93)) $d_{(t,z,0)}\varphi$ est une isométrie. En effet :

$$d_{(t,z,0)}\varphi(\tau, \alpha, \eta) = (\tau, \alpha, \sum_{r=1}^p \eta_r A_r g)$$

et (A_1, \dots, A_p) est une base orthonormée de \mathcal{G} .

On note :

$$\boxed{\mathcal{F}} := \{0\} \times \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p : (M(g) - Id)\alpha + \sum_{i=1}^k s_i A_i z = 0, \alpha \perp J\mathcal{G}(z), \alpha \perp \nabla H(z)\}. \quad (3.106)$$

⁸Plus généralement, on peut supposer $Supp \hat{f} \cap \mathcal{L}_{red}(E) = \{0\}$

On a $\mathcal{F} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p$, et $\mathcal{F} = (d_{(t,z,0)}\varphi)^{-1}(T_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T})$. Ainsi, si $\varepsilon_i := (d_{(t,z,0)}\varphi)^{-1}(\mu_i)$ alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k+2})$ est une base orthonormée de $(d_{(t,z,0)}\varphi)^{-1}(\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}) = \mathcal{F}^\perp$.

Notons

$$\mathcal{A} := \text{Hess } \varphi_E(0, z, g). \quad (3.107)$$

On a clairement, par définition de \mathcal{A} :

$$\det \left(\varphi_E''(0, z, g)|_{\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}} \right) = \det \left((\langle \mathcal{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2k+2} \right)$$

Enfin, on remarque que $\mathcal{A}(\mathcal{F}^\perp) \subset \mathcal{F}^\perp + i\mathcal{F}^\perp$: en effet, si $u \in \mathcal{F}^\perp$ et $v \in \mathcal{F}$ alors :

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \varphi_E''(0, z, g)(d_{(t,z,0)}\varphi(u), d_{(t,z,0)}\varphi(v)) = 0$$

car, si $x \in \mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$ et $y \in \mathcal{T}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}$, alors $\varphi_E''(x, y) = 0$, par définition de φ_E .

Ainsi, si $\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp}$ désigne la matrice de \mathcal{A} dans une base quelconque de \mathcal{F}^\perp , alors on a :

$$\det \left(\frac{\varphi_E''(0, z, g)|_{\mathcal{N}_{(0,z,g)}\mathcal{C}_{E,T}}}{i} \right) = \det \left(\frac{\mathcal{A}|_{\mathcal{F}^\perp}}{i} \right). \quad (3.108)$$

Le lemme suivant exhibe une base de \mathcal{F}^\perp :

Lemme 3.5.4 Soit (B_1z, \dots, B_kz) une base orthonormée de $\mathcal{G}z$. Avec les A_i choisis plus haut (cf (3.94) et (3.95)), on note dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p$, pour $j = 1, \dots, k$:

$$e_0 := \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_0 := (0, -\nabla H(z), 0).$$

$$\varepsilon_j := (0, JB_jz, 0), \quad \varepsilon'_j := (0, (M(g^{-1}) - I)B_jz, \langle A_jz, B_jz \rangle, 0).$$

Alors $\mathcal{B} := (e_0, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_k)$ est une base de \mathcal{F}^\perp .

Preuve du lemme : $e_0, \varepsilon_0, \varepsilon_j$ ($j = 1, \dots, k$) sont clairement dans \mathcal{F}^\perp , car $T_z\Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp$.

Par ailleurs, si $(0, \alpha, s) \in \mathcal{F}$, alors :

$$\langle \varepsilon'_j, (0, \alpha, s) \rangle = \langle A_jz, (M(g) - I)\alpha \rangle + \sum_{i=1}^k s_i \langle A_i z, B_j z \rangle = 0$$

Donc $\varepsilon'_j \in \mathcal{F}$ ($j = 1, \dots, k$). En outre, e_0 est orthogonal à tous les autres vecteurs de \mathcal{B} . Comme $M(g^{-1})B_jz = M(g^{-1})B_jM(g)z$ et comme $M(g^{-1})B_jM(g) \in \mathcal{G}$, on a $(M(g^{-1}) - I)B_jz \in \mathcal{G}z$, et, selon 3.37, on a $\langle \varepsilon_0, \varepsilon'_j \rangle = 0$ pour $j = 1, \dots, k$. De même, selon 3.38, on a $\langle \varepsilon_i, \varepsilon'_j \rangle = 0$ pour $i, j = 1, \dots, k$. Enfin, montrons que la famille $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est libre : soient $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ dans \mathbb{R} tels que $\sum_{i=0}^k \lambda_i \varepsilon_i = 0$. Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $J\nabla H(z) \in J\mathcal{G}z$, ce qui est exclu par l'hypothèse que z

n'est pas un PER de Ω_0 . Puis les $B_i z$ formant une famille orthonormée, on obtient la nullité de tous les λ_i . Ainsi, \mathcal{B} est une base de \mathcal{F}^\perp . ■

Afin de simplifier les notations, dans les calculs qui suivent, nous allons noter g pour $M(g)$. Nous commençons par calculer l'image de \mathcal{B} par \mathcal{A} : l'écriture des vecteurs se fait en longueur selon la règle suivante : entre deux ' $'$ ' on met les composantes des vecteurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^p$. Entre deux ' $'$ ' on met les composantes réelles du vecteur dans la base canonique lorsqu'on veut détailler. Lorsqu'un terme muet en ' i ' est donné, il faut répéter k fois le terme dans le sens des lignes :

Tout d'abord :

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{i}e_0\right) = \frac{1}{2}|\nabla H(z)|^2 e_0 + \frac{1}{i}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}(0; 0; \langle J\nabla H(z), A_i z \rangle, 0)$$

Lemme 3.5.5 Si $\Pi_{\mathcal{G}z}$ désigne le projecteur orthogonal sur $\mathcal{G}z$, on a $[\Pi_{\mathcal{G}z}, M(g)] = 0$.

Preuve du lemme : si $x \in \mathbb{R}^{2d}$, il faut montrer que $\Pi_{\mathcal{G}z}(M(g)x) = M(g)\Pi_{\mathcal{G}z}(x)$. Or $\mathcal{G}z$ est stable par $M(g)$. Donc il suffit de montrer que $[M(g)x - M(g)\Pi_{\mathcal{G}z}(x)] \perp \mathcal{G}z$. Or, si $A \in \mathcal{G}$ alors :

$$\langle M(g)(x - \Pi_{\mathcal{G}z}(x)), Az \rangle = \langle (x - \Pi_{\mathcal{G}z}(x)), M(g)AM(g^{-1})z \rangle = 0$$

car $M(g)AM(g^{-1}) \in \mathcal{G}$. Ce qui achève la preuve du lemme. ■

• Digression 1 : si $x \in \mathcal{G}z$, alors

$$(0; (g^{-1} - I)x; \langle A_i z, x \rangle, 0) = \sum_{i=1}^k \langle x, B_i z \rangle \varepsilon'_i \quad (3.109)$$

Comme $gz = z$, selon le lemme 3.5.5, on a $(g^{-1} - I)\Pi_{\mathcal{G}z}(J\nabla H(z)) = 0$.

Par ailleurs, $\langle A_i z, \Pi_{\mathcal{G}z}(J\nabla H(z)) \rangle = \langle A_i z, J\nabla H(z) \rangle$, donc, selon la digression 1, on a :

$$\begin{aligned} (0; 0; \langle J\nabla H(z), A_i z \rangle, 0) &= (0; (g^{-1} - I)\Pi_{\mathcal{G}z}(J\nabla H(z)); \langle \Pi_{\mathcal{G}z}J\nabla H(z), A_i z \rangle, 0) \\ &= \sum_{i=1}^k \langle \Pi_{\mathcal{G}z}J\nabla H(z), B_i z \rangle \varepsilon'_i = \sum_{i=1}^k \langle J\nabla H(z), B_i z \rangle \varepsilon'_i. \end{aligned}$$

D'où :

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{i}e_0\right) = \frac{1}{2}|\nabla H(z)|^2 e_0 + \frac{1}{i}\varepsilon_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \langle B_i z; J\nabla H(z) \rangle \varepsilon'_i \quad (3.110)$$

• De même, on a $\frac{\mathcal{A}}{i}\varepsilon_0 = (\frac{1}{i}|\nabla H(z)|^2; 0; \frac{1}{i} \langle A_i z, J\nabla H(z) \rangle, 0)$, de sorte que, selon la digression 1, on a :

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{i}\varepsilon_0\right) = \frac{1}{i}|\nabla H(z)|^2 e_0 + \frac{1}{i} \sum_{i=1}^k \langle B_i z; J\nabla H(z) \rangle \varepsilon'_i \quad (3.111)$$

• Digression 2 : si $x \in \mathcal{G}z$, alors

$$(0; Jx; 0) = \sum_{i=1}^k \langle B_i z, x \rangle \varepsilon_i. \quad (3.112)$$

• Par ailleurs, pour $j \in \{1, \dots, k\}$ on a :

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{i} \varepsilon_j \right) = \left(\frac{1}{i} \langle J\nabla H(z), B_j z \rangle; -\frac{1}{2i}(g-g^{-1})B_j z + \frac{1}{2}(I-g)(I-g^{-1})JB_j z; \frac{1}{2i} \langle (g^{-1}+I)A_i z, B_j z \rangle, 0 \right).$$

Remarquons que $(g^{-1} - I)(g + I) = -(g - g^{-1})$. Ainsi, selon les digression 1 et 2, on a :

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{i} \varepsilon_j \right) = \frac{1}{i} \langle J\nabla H(z), B_j z \rangle e_0 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \langle B_i z; (I-g)(I-g^{-1})B_j z \rangle \varepsilon_i + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i} \langle B_i z; (g+I)B_j z \rangle \varepsilon'_i \quad (3.113)$$

• Enfin, on obtient de même :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{A}}{i} \varepsilon'_j \right) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \langle A_r z, B_j z \rangle \langle J\nabla H(z), A_r z \rangle e_0 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i} \langle B_i z, (g - g^{-1})(g^{-1} - I)B_j z \rangle \varepsilon_i \\ &+ \frac{1}{2i} \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^k \langle B_i z, (g^{-1} + I)A_r z \rangle \langle A_r, B_j z \rangle \varepsilon_i + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \langle (I - g)(I - g^{-1})B_j z, B_i z \rangle \varepsilon'_i \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \langle A_r z, B_j z \rangle \langle A_r z, B_i z \rangle \varepsilon'_i. \end{aligned} \quad (3.114)$$

On constate que $\sum_{r=1}^k \langle A_r z, B_j z \rangle \langle A_r z, B_i z \rangle$ est le terme général en (i, j) de $M^t M$, où

$$\boxed{M} := ((\langle B_i z, A_j z \rangle))_{1 \leq i, j \leq k} \in M_k(\mathbb{R}). \quad (3.115)$$

De même, $\sum_{r=1}^k \langle B_i z, (g^{-1} + I)A_r z \rangle \langle A_r, B_j z \rangle = \sum_{r=1}^k \sum_{q=1}^k \langle A_r z, B_q z \rangle \langle B_i z, (g^{-1} + I)B_q z \rangle \langle A_r, B_j z \rangle$ est le terme général en (i, j) de $(g_0^{-1} + I)M^t M$ où $\boxed{g_0}$ est la matrice de la restriction de $M(g)$ à $\mathcal{G}z$ ($M(g)\mathcal{G}z \subset \mathcal{G}z$) dans la base orthonormée $(B_1 z, \dots, B_k z)$.

On obtient, via (3.110), (3.111), (3.113) et (3.114) la matrice de $\mathcal{A}|_{F^\perp}$ dans la base \mathcal{B} dont développe le déterminant par rapport à la deuxième ligne pour obtenir : $\det\left(\frac{\mathcal{A}}{i}|_{F^\perp}\right) =$

$$\det \left(\begin{array}{c|c|c} |\nabla H(z)|^2 & \frac{1}{i} \langle J\nabla H(z), B_j z \rangle & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \langle A_r z, B_j z \rangle \langle J\nabla H(z), A_r z \rangle \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) & \frac{1}{2i}(g_0 - g_0^{-1})(g_0^{-1} - I) + \frac{1}{2i}(g_0^{-1} + I)M^t M \\ \hline \langle B_i z, J\nabla H(z) \rangle & \frac{1}{2i}(g_0 + I) & \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) + \frac{1}{2}M^t M \end{array} \right).$$

Pour $i = 1, \dots, k$, on fait l'opération élémentaire sur les lignes (avec des notations évidentes) : $L'_i \leftarrow L'_i - \frac{\langle B_i z, J\nabla H(z) \rangle}{|\nabla H(z)|^2} L_0$. Puis on développe par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$\det(\mathcal{A}|_{F^\perp}) = -|\nabla H(z)|^2 \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) & \frac{1}{2i}(g_0 - g_0^{-1})(g_0^{-1} - I) + \frac{1}{2i}(g_0^{-1} + I)M^t M \\ \hline \frac{1}{2i}(g_0 + I) - \frac{1}{i} \frac{|x_0|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 & \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) + \frac{1}{2}M^t M - \frac{1}{2}B_0 \end{array} \right).$$

où : x_o est le projeté orthogonal de $J\nabla H(z)$ sur $\mathcal{G}z$, $\alpha_{i,j} := \frac{\langle J\nabla H(z), B_j z \rangle \langle J\nabla H(z), B_i z \rangle}{|x_o|^2}$, U_0 est la matrice de terme général $\alpha_{i,j}$, et B_0 est la matrice de terme général :

$$\beta_{i,j} := \frac{1}{|\nabla H(z)|^2} \sum_{r=1}^k \langle A_r z, J\nabla H(z) \rangle \langle J\nabla H(z), B_i z \rangle \langle A_r z, B_j z \rangle$$

Soit U le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}x_o$ dans $\mathcal{G}z$. Comme $\alpha_{i,j} = \frac{\langle x_o, B_j z \rangle \langle x_o, B_i z \rangle}{|x_o|^2}$ et $U = \frac{x_o^t x_o}{|x_o|^2}$, il est clair que U_0 est la matrice de U dans la base orthonormée (B_1, \dots, B_k) de $\mathcal{G}z$. Par ailleurs,

$$\beta_{i,j} = \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} \sum_{q=1}^k \alpha_{i,q} \sum_{r=1}^k \langle B_q z, A_r z \rangle \langle A_r z, B_j z \rangle .$$

Ainsi, on a $B_0 = \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 M^t M$, et $\det(\mathcal{A}|_{F^\perp}) =$

$$-|\nabla H(z)|^2 \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) & \frac{1}{2i}(g_0 - g_0^{-1})(g_0^{-1} - I) + \frac{1}{2i}(g_0^{-1} + I)M^t M \\ \hline \frac{1}{2i}(g_0 + I) - \frac{1}{i} \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 & \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) + \frac{1}{2}M^t M - \frac{1}{2} \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 M^t M \end{array} \right) .$$

Lemme 3.5.6 Sur $\mathcal{G}z$, on a : $Ug = gU = U$.

Preuve du lemme : selon le lemme 3.5.5, on a $gx_o = x_o$, donc $U(gx) = \frac{\langle x_o, gx \rangle}{|x_o|^2} x_o = U(x)$. ■

On effectue l'opération suivante sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{i}(g_0^{-1} + I)L_2$, en remarquant que $(g_0 - g_0^{-1})(g_0^{-1} - I) = (g_0^{-1} + I)(I - g_0)(I - g_0^{-1})$. On obtient alors : $\det(\mathcal{A}|_{F^\perp}) =$

$$-|\nabla H(z)|^2 \det \left(\begin{array}{c|c} 2I_k - \frac{2}{i} \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 & \frac{1}{i} \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 M^t M \\ \hline \frac{1}{2i}(g_0 + I) - \frac{1}{i} \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 & \frac{1}{2}(I - g_0)(I - g_0^{-1}) + \frac{1}{2}M^t M - \frac{1}{2} \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0 M^t M \end{array} \right) .$$

Puis, on fait : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4i}(g_0 + I)L_1$ pour obtenir :

$$\det(\mathcal{A}|_{F^\perp}) = |\nabla H(z)|^2 \det(2(I_k - \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U_0)) \det(\frac{1}{2}((I - g_0)(I - g_0^{-1}) + M^t M)).$$

Or, comme $U(x_o) = x_o$, et U étant de rang 1, on connaît le spectre de U et $\det(Id - \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2} U) = 1 - \frac{|x_o|^2}{|\nabla H(z)|^2}$. Ainsi, on a :

$$\det(\mathcal{A}|_{F^\perp}) = (|\nabla H(z)|^2 - |x_o|^2) \det(\frac{1}{2}((I - g_0)(I - g_0^{-1}) + M^t M)).$$

Or $|\nabla H(z)|^2 - |x_o|^2 = \text{dist}^2(J\nabla H(z), \mathcal{G}z) = \text{dist}^2(\nabla H(z), J\mathcal{G}z) = \|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|^2$, car $T_z \Omega_0 = (J\mathcal{G}z)^\perp$. Donc

$$\det(\mathcal{A}|_{F^\perp}) = \|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|^2 \det((I - g_0)(I - g_0^{-1}) + M^t M). \quad (3.116)$$

On obtient donc :

Proposition 3.5.7 *Soient $z \in \Omega_0 \cap \Sigma_E$ et $g \in G$ tels que $M(g)z = z$. Alors, on a :*

$$\det \left(\frac{\varphi''_E(0, z, g)|_{\mathcal{N}_{(0, z, g)} c_{E, T}}}{i} \right) = \|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|^2 \det((I - g_0)(I - g_0^{-1}) + M^t M). \quad (3.117)$$

où, g_0 est la matrice de la restriction de $M(g)$ à $\mathcal{G}z$ dans une base orthonormée de $\mathcal{G}z$ et M est la matrice des vecteurs $(A_1 z, \dots, A_k z)$ dans cette même base.

Enfin, on achève la preuve du théorème 3.3.1 via (3.105), en montrant une formule d'intégration sur W_0 tout à fait semblable à celle de l'asymptotique faible (cf (3.56)) sur Γ_0 .

Calcul via l'asymptotique faible :

Comme annoncé, on donne maintenant une autre méthode de calcul du premier terme de l'asymptotique, utilisant l'asymptotique faible du théorème 3.2.1.

On note ici $\mathcal{G}_{\chi, h}(E) := \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}_\chi) f \left(\frac{E - \hat{H}_\chi}{h} \right) \right)$. On sait via les théorèmes 3.5.3 et 3.4.7 qu'il existe une fonction $a(E)$ telle que :

$$\mathcal{G}_{\chi, h}(E) = a(E) h^{k-d+1} + O(h^{k-d+2}),$$

où le $O(\cdot)$ est uniforme en E . Par ailleurs, $E \mapsto \mathcal{G}_{\chi, h}(E)$ étant continue, on peut choisir $a(E)$ continue. En outre, il est clair que les hypothèses sur E faites dans le théorème 3.3.1 s'étendent à un petit voisinage de E . Soit φ une fonction lisse à support compact dans ce voisinage. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) \mathcal{G}_{\chi, h}(E) dE = h^{k-d+1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a(E) dE + O(h^{k-d+2}). \quad (3.118)$$

Par ailleurs, si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) f \left(\frac{E - x}{h} \right) dE = h \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + \lambda h) f(\lambda) d\lambda.$$

Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) \mathcal{G}_{\chi, h}(E) dE = h \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}_\chi) \int_{\mathbb{R}} \varphi(\hat{H}_\chi + \lambda h) f(\lambda) d\lambda \right) = h \int_{\mathbb{R}} \text{Tr} \left(\psi(\hat{H}_\chi) \varphi(\hat{H}_\chi + \lambda h) \right) f(\lambda) d\lambda. \quad (3.119)$$

Si x et λ sont dans \mathbb{R} , on a :

$$|\varphi(x + \lambda h) - \varphi(x)| \leq \|\varphi'\|_{\infty} |\lambda h|.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left| \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}_\chi) [\varphi(\widehat{H}_\chi + \lambda h) - \varphi(\widehat{H}_\chi)] \right) \right| &\leq \left\| \psi(\widehat{H}_\chi) [\varphi(\widehat{H}_\chi + \lambda h) - \varphi(\widehat{H}_\chi)] \right\|_{\text{Tr}} \\
&\leq \left\| \psi(\widehat{H}_\chi) \right\|_{\text{Tr}} \left\| \varphi(\widehat{H}_\chi + \lambda h) - \varphi(\widehat{H}_\chi) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \\
&\leq \left\| \psi(\widehat{H}_\chi) \right\|_{\text{Tr}} \|\varphi'\|_\infty |\lambda h|
\end{aligned}$$

Or, ψ étant positive, on a $\left\| \psi(\widehat{H}_\chi) \right\|_{\text{Tr}} = \text{Tr}(\psi(\widehat{H}_\chi)) = O(h^{k-d})$ selon l'asymptotique faible (théorème 3.2.1). Ainsi, on a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}_\chi) [\varphi(\widehat{H}_\chi + \lambda h) - \varphi(\widehat{H}_\chi)] \right) f(\lambda) d\lambda \right| \leq \|\varphi'\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |\lambda f(\lambda)| d\lambda O(h^{k-d+1}).$$

Selon 3.119, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) \mathcal{G}_{\chi, h}(E) dE &= h \int_{\mathbb{R}} \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}_\chi) \varphi(\widehat{H}_\chi) \right) f(\lambda) d\lambda + O(h^{k-d+2}) \\
&= h \hat{f}(0) \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}_\chi) \varphi(\widehat{H}_\chi) \right) + O(h^{k-d+2}).
\end{aligned}$$

Donc selon l'asymptotique faible (théorème 3.2.2), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) \mathcal{G}_{\chi, h}(E) dE = h^{k-d+1} (2\pi)^{k-d} d_\chi \hat{f}(0) \int_{\Omega_{red}} (\psi\varphi)(\tilde{H}(x)) d\sigma_{red}(x) \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right] + O(h^{k-d+2}).$$

Selon (3.118), on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a(E) dE = (2\pi)^{k-d} d_\chi \hat{f}(0) \int_{\Omega_{red}} (\psi\varphi)(\tilde{H}(x)) d\sigma_{red}(x) \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right].$$

Donc, d'après 3.68 :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a(E) dE = (2\pi)^{k-d} d_\chi \hat{f}(0) \int_{\Omega_0} \frac{(\psi\varphi)(H(z))}{\text{Vol}(G(z))} d\sigma_{\Omega_0}(x) \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right]. \quad (3.120)$$

Lemme 3.5.8 Soit f lisse à support compact dans $\Omega_0 \cap U$. On a :

$$\int_{\Omega_0} f(z) d\sigma_{\Omega_0}(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega_0 \cap \Sigma_E} f(z) \frac{d\sigma_{\Omega_0 \cap \Sigma_E}(z)}{\|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|_{\mathbb{R}^{2d}}} dE.$$

Preuve du lemme :

On utilise le théorème d'intégration par tranches de l'appendice 4 avec la submersion $H_1 := H|_{\Omega_0 \cap U} : \Omega_0 \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ (via le lemme 3.1.8, H_1 est bien une submersion). Il suffit de montrer que :

$$\forall z \in \Sigma_E \cap \Omega_0, \quad \det(d_z H_1 \cdot {}^t d_z H_1) = \|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|_{\mathbb{R}^{2d}}^2$$

Si $\alpha \in T_z \Omega_0$, on a bien sûr $d_z H_1(\alpha) = \langle \nabla H(z), \alpha \rangle_{\mathbb{R}^{2d}}$. Par ailleurs, ${}^t d_z H_1 : \mathbb{R} \rightarrow T_z \Omega_0$ est déterminé pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$x \langle \nabla H(z), \alpha \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} = \langle \alpha, {}^t d_z H_1(x) \rangle_{\mathbb{R}^{2d}}, \quad \forall \alpha \in T_z \Omega_0.$$

Ainsi ${}^t d_z H_1(x) - x \nabla H(z) \in (T_z \Omega_0)^\perp$. Donc, $\Pi_{T_z \Omega_0}({}^t d_z H_1(x) - x \nabla H(z)) = 0$, et comme ${}^t d_z H_1(x) \in T_z \Omega_0$, on a :

$${}^t d_z H_1(x) = x \Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z)).$$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$, $(d_z H_1 \cdot {}^t d_z H_1)(x) = x \langle \nabla H(z), \Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z)) \rangle = x \|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|^2$, ce qui achève la preuve du lemme. \blacksquare

D'après (3.120), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E) a(E) dE = (2\pi)^{k-d} d_\chi \hat{f}(0) \left[\rho_{\chi|_{H_0}} : \mathbb{1} \right] \int_{\mathbb{R}} \varphi(E) \psi(E) \int_{\Omega_0} \frac{1}{\text{Vol}(G(z))} \frac{d\sigma_{\Omega_0 \cap \Sigma_E}(z)}{\|\Pi_{T_z \Omega_0}(\nabla H(z))\|_{\mathbb{R}^{2d}}} dE,$$

ce qui donne $a(E)$. Selon la formule (3.74), ceci achève la preuve du théorème 3.3.1. \blacksquare

3.6 Cas où les orbites périodiques de l'espace réduit sont non-dégénérées

Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème 3.3.4.

3.6.1 Flot G -propre sous hypothèse de non-dégénérescence dans l'espace réduit

Dans ce paragraphe, on fait l'hypothèse que les orbites périodiques de l'espace réduit sont non-dégénérées dans $\tilde{\Sigma}_E := \{x \in \Omega_{red} : \tilde{H}(x) = E\}$ sur $[-T, T]$, i.e., on suppose que, si $x \in \Omega_{red}$, si $\boxed{\tilde{F}_x(t)}$ désigne la différentielle de $x \mapsto \tilde{\Phi}_t(x)$ à t fixé, alors, pour toute orbite périodique $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\Sigma}_E$ ayant une période \tilde{T} dans $[-T, T]$, on a :

$$\forall x \in \tilde{\gamma}, \quad \dim \ker[(\tilde{F}_x(\tilde{T}) - Id_{\Omega_{red}})^2] \leq 2. \quad (3.121)$$

On rappelle que $\tilde{\Sigma}_E$ est compacte sans point critique pour \tilde{H} . Ainsi, d'après le **théorème du cylindre** 4.1.2 (Appendice 4.1) appliqué dans Ω_{red} , les orbites périodiques de $\tilde{\Sigma}_E$ ayant une période dans $[-T, T]$ sont en nombre fini et $\mathcal{L}_{red} \cap]-T, T[$ est lui aussi fini. Soit :

$$\boxed{W_{t_0}} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : z = M(g)\Phi_{t_0}(z)\}. \quad (3.122)$$

On a donc, d'après la proposition 3.4.1 :

$$\mathcal{C}_{E,T} = \bigcup_{t_0 \in \mathcal{L}_{red} \cap]-T, T[} \{t_0\} \times W_{t_0} \quad (3.123)$$

La proposition suivante montre que $\mathcal{C}_{E,T}$ est alors une union finie de sous-variétés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \times G$:

Proposition 3.6.1 *On fait l'hypothèse que les orbites périodiques de l'espace réduit sont non-dégénérées dans $\tilde{\Sigma}_E := \{x \in \Omega_{red} : \tilde{H}(x) = E\}$ sur $[-T, T]$. Soit $t_0 \in \mathcal{L}_{red} \cap]-T, T[$, $t_0 \neq 0$. Alors W_{t_0} est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d} \times G$, $\dim W_{t_0} = p + 1$, et si $(z, g) \in W_{t_0}$, l'espace tangent en (z, g) à W_{t_0} est donné par :*

$$T_{(z,g)}W_{t_0} = \{(\alpha, Ag) \in T_z\Omega_0 \times \mathcal{G}g : \alpha \in \mathbb{R}J\nabla H(z) + \mathcal{G}z \text{ et } (M(g)F_z(t_0) - I)\alpha + Az = 0\}. \quad (3.124)$$

Preuve de la proposition :

Lemme 3.6.2 *Soit π_1 la restriction de π à $\Sigma_E \cap \Omega_0$. Alors $\pi_1 : \Omega_0 \cap \Sigma_E \rightarrow \tilde{\Sigma}_E$ est une submersion.*

Preuve du lemme :

Soit $z \in \Omega_0 \cap \Sigma_E$. $d_z\pi_1 : T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E) \rightarrow T_{\pi(z)}\tilde{\Sigma}_E$. Soit $u \in T_{\pi(z)}\tilde{\Sigma}_E$. Selon le théorème de réduction 3.1.3, la restriction de π à $\Omega_0 \cap U$ est une submersion, et $\Sigma_E \cap \Omega_0 \subset U \cap \Omega_0$. D'où $\alpha \in T_z\Omega_0$ tel que $u = d_z\pi(\alpha)$. Or $T_{\pi(z)}\tilde{\Sigma}_E = \ker d_{\pi(z)}\tilde{H}$, et, toujours selon le théorème de réduction,

$$d_{\pi(z)}\tilde{H}(d_z\pi(\alpha)) = \omega_{red}(\pi(z))(d_z\pi(\alpha), X_{\tilde{H}}(\pi(z))) = \langle J\alpha, J\nabla H(z) \rangle .$$

Ainsi, $\alpha \perp \nabla H(z)$, donc $\alpha \in (T_z\Omega_0) \cap (T_z\Sigma_E) = T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E)$, et $u = d_z\pi(\alpha) = d_z\pi_1(\alpha)$. Donc π_1 est une submersion en z . ■

Lemme 3.6.3 *Pour tout z dans $\Omega_0 \cap U$, on a :*

$$d_z\pi(J\nabla H(z)) = X_{\tilde{H}}(\pi(z)). \quad (3.125)$$

Par ailleurs, si $z = M(g)\Phi_{t_0}(z)$, alors $M(g)F_z(t_0)T_z\Omega_0 \subset T_z\Omega_0$, et, sur $T_z\Omega_0$, on a :

$$d_z\pi \circ M(g)F_z(t_0) = \tilde{F}_{\pi(z)}(t_0) \circ d_z\pi. \quad (3.126)$$

Preuve du lemme : pour le premier point, il suffit, pour $z \in \Omega_0$ fixé, de dériver en $t = 0$ l'identité :

$$\tilde{\Phi}_t(\pi(z)) = \pi(\Phi_t(z)).$$

Pour le second point, en différentiant par rapport à $z \in \Omega_0$, à t_0 et g fixés, l'identité :

$$\pi(M(g)\Phi_{t_0}(z)) = \tilde{\Phi}_{t_0}(\pi(z)),$$

on obtient $(d_{M(g)\Phi_{t_0}(z)}\pi) \circ M(g)F_z(t_0) = \tilde{F}_{\pi(z)}(t_0) \circ d_z\pi$, ce qui donne le résultat escompté lorsque $z = M(g)\Phi_{t_0}(z)$. ■

Lemme 3.6.4 *Soit*

$$R_{t_0} := \{(z, M(g)\Phi_{t_0}(z)) : z \in \Sigma_E \cap \Omega_0, g \in G\} \quad (3.127)$$

R_{t_0} est une sous-variété de $(\Sigma_E \cap \Omega_0)^2$, $\dim R_{t_0} = 2d - 1$ et, si $z = M(g)\Phi_{t_0}(z)$, alors

$$T_{(z,z)}R_{t_0} = \{(\alpha, M(g)F_z(t_0)\alpha + Az) : \alpha \in T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E) \text{ et } A \in \mathcal{G}\}. \quad (3.128)$$

Preuve du lemme : Soit

$$\mathcal{A}_{t_0} := \{(x, \tilde{\Phi}_{t_0}(x)) : x \in \tilde{\Sigma}_E\}. \quad (3.129)$$

\mathcal{A}_{t_0} est une sous-variété de $[(\Omega_0 \cap U)/G]^2$ (c'est le graphe de l'application $\tilde{\Phi}_{t_0}$ restreinte à $\tilde{\Sigma}_E$), et $\dim \mathcal{A}_{t_0} = \dim \tilde{\Sigma}_E = 2d - 2k - 1$. Par ailleurs, on a $R_{t_0} = (\pi_1 \times \pi_1)^{-1}(\mathcal{A}_{t_0})$. Ainsi, $\pi_1 \times \pi_1$ étant une submersion, R_{t_0} est une sous-variété de $(\Omega_0 \cap U)^2$ et $\dim R_{t_0} = 2d - 1$.

En outre,

$$T_{(x, \tilde{\Phi}_{t_0}(x))}\mathcal{A}_{t_0} = \{(u, \tilde{F}_x(t_0)u) : u \in T_x\tilde{\Sigma}_E\}.$$

Donc, si $z = M(g)\Phi_{t_0}(z)$, alors :

$$T_{(z,z)}R_{t_0} = \{(\alpha, \beta) \in T_{(z,z)}(\Omega_0 \cap \Sigma_E)^2 : d_z\pi(\beta) = \tilde{F}_{\pi(z)}(t_0)d_z\pi(\alpha)\}.$$

Selon le lemme 3.6.3, $\tilde{F}_{\pi(z)}(t_0)d_z\pi(\alpha) = d_z\pi(M(g)F_z(t_0)\alpha)$ et la preuve du lemme s'achève en rappelant que $\ker d_z\pi = \mathcal{G}z$. ■

$$\text{Soit } \varphi_0 : \begin{cases} (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G \rightarrow R_{t_0} \\ (z, g) \mapsto (z, M(g)\Phi_{t_0}(z)) \end{cases}$$

On a :

$$W_{t_0} = \bigsqcup_{\bar{\gamma} \in \mathcal{P}_{red}(E, t_0)} \Lambda_{\bar{\gamma}}. \quad (3.130)$$

où

$$\Lambda_{\bar{\gamma}} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : z = M(g)\Phi_{t_0}(z) \text{ et } \pi(z) \in \bar{\gamma}\}. \quad (3.131)$$

Soit $\bar{\gamma} \in \mathcal{P}_{red}(E, t_0)$. On a $\Lambda_{\bar{\gamma}} = \varphi_0^{-1}(P_{\bar{\gamma}})$, où

$$P_{\bar{\gamma}} := \{(z, z) \in (\Sigma_E \cap \Omega_0)^2 : \pi(z) \in \bar{\gamma}\} \subset R_{t_0}. \quad (3.132)$$

• $P_{\bar{\gamma}} = \text{diag}(\pi_1^{-1}(\bar{\gamma}))$, donc, π_1 étant une submersion, $P_{\bar{\gamma}}$ est une sous-variété de R_{t_0} , $\dim(P_{\bar{\gamma}}) = k + 1$, et $T_{(z,z)}P_{\bar{\gamma}} = (\mathcal{G}z + \mathbb{R}J\nabla H(z))^2$, car

$$T_z(\pi_1^{-1}(\bar{\gamma})) = (d_z\pi)^{-1}(\mathbb{R}X_{\tilde{H}}(\pi(z))) = (d_z\pi)^{-1}[\mathbb{R}d_z\pi(J\nabla H(z))],$$

et $\ker d_z \pi = \mathcal{G}z$ selon le lemme 3.2.5.

• φ_0 est une submersion en tout point de W_{t_0} : en effet, si $(z, g) \in W_{t_0}$ alors $\varphi_0(z, g) = (z, z)$, et si $A \in \mathcal{G}$, $\alpha \in (T_z \Omega_0) \cap (T_z \Sigma_E)$, alors :

$$d_{(z,g)} \varphi_0(\alpha, Ag) = (\alpha, M(g)F_z(t_0)\alpha + Az).$$

Ainsi, selon le lemme 3.6.4, $d_{(z,g)} \varphi_0(T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times \mathcal{G}g) = T_{\varphi_0(z,g)} R_{t_0}$.

• Ainsi $\Lambda_{\bar{\gamma}} = \varphi_0^{-1}(P_{\bar{\gamma}})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d} \times G$, $\dim(\Lambda_{\bar{\gamma}}) = p + 1$, et, si $(z, g) \in \Lambda_{\bar{\gamma}}$, alors $T_{(z,g)} \Lambda_{\bar{\gamma}}$ est l'ensemble des (α, Ag) de $T_z \Omega_0 \times \mathcal{G}g$ tels que $\alpha = \lambda J \nabla H(z) + Bz$ et $M(g)F_z(t_0)\alpha + Az = \lambda J \nabla H(z) + Bz$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{G}$. Ceci achève la preuve du lemme. ■

Théorème 3.6.5 *Soit G un sous-groupe de Lie de $SO(d)$ et H un hamiltonien G -invariant vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.4. On suppose que les orbites périodiques de l'espace réduit sont non-dégénérées dans $\tilde{\Sigma}_E := \{x \in \Omega_{red} : \tilde{H}(x) = E\}$ sur $[-T, T]$. Alors, le flot est G -propre sur $]-T, T[\times (\Sigma_E \cap \Omega_0)$.*

Une remarque instructive : les orbites périodiques de l'espace réduit sont non-dégénérées dans $\tilde{\Sigma}_E$ si $\dim(\Omega_{red}) = 2$, i.e. si $d = k + 1$. C'est en particulier le cas lorsque $G = SO(d)$.

Preuve du théorème : Selon (3.123) et la proposition 3.6.1, $\mathcal{C}_{E,T}$ est une union finie de sous-variétés. Le cas $t_0 = 0$ étant réglé à la section précédente, on suppose que $t_0 \neq 0$, $(t_0, z, g) \in \mathcal{C}_{E,T}$ et on veut montrer que $T_{(t_0,z,g)} \mathcal{C}_{E,T} = \ker d_{(t_0,z,g)} \Psi$. Soient donc $\tau \in \mathbb{R}$, $\alpha \in T_z(\Omega_0 \cap \Sigma_E)$, et $A \in \mathcal{G}$ tels que :

$$\tau J \nabla H(z) + (M(g)F_z(t_0) - Id)\alpha + Az = 0. \quad (3.133)$$

L'image de cette relation par $d_z \pi$ donne, grâce au lemme 3.6.3 :

$$\tau X_{\tilde{H}}(\pi(z)) + (\tilde{F}_{\pi(z)}(t_0) - Id_{\Omega_{red}})d_z \pi(\alpha) = 0. \quad (3.134)$$

Ainsi, $d_z \pi(\alpha) \in \ker(\tilde{F}_{\pi(z)}(t_0) - Id_{\Omega_{red}})^2$. Comme pour le cas des groupes finis, sous l'hypothèse de non-dégénérescence, $\ker(\tilde{F}_{\pi(z)}(t_0) - Id_{\Omega_{red}})^2$ est de dimension 2, et, selon le **théorème du cylindre** appliqué dans Ω_{red} (cf théorème 4.1.2 Appendice 4.1), une base en est donnée par (u_1, u_2) , où

$$u_1 = X_{\tilde{H}}(\pi(z)) \text{ et } w_{red}(\pi(z))(u_1, u_2) \neq 0. \quad (3.135)$$

D'où λ_1 et λ_2 réels tels que :

$$d_z \pi(\alpha) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2. \quad (3.136)$$

Or,

$$w_{red}(\pi(z))(d_z \pi(\alpha), u_1) = d_{\pi(z)} \tilde{H}(d_z \pi(\alpha)) = \langle \nabla H(z), \alpha \rangle = 0.$$

Donc, via (3.136), on a $\lambda_2 = 0$ et $d_z\pi(\alpha) = \lambda_1 u_1$. En ré-injectant cette information dans (3.134), on obtient : $\tau X_{\tilde{H}}(\pi(z)) = 0$, i.e. $\tau = 0$ (car z n'est pas un (PER)), et $\alpha \in \mathbb{R}J\nabla H(z) + \mathcal{G}z$, donc $(\alpha, Ag) \in T_{(z,g)}W_{t_0}$, ce qui achève la preuve du théorème . \blacksquare

3.6.2 Calcul des premiers termes oscillants

Comme on sait que le flot est G -propre sur $] -T, T[\times (\Sigma_E \cap \Omega_0)$, on peut appliquer le théorème 3.4.7, sachant que :

$$\mathcal{C}_{E,T} = \bigsqcup_{t_0 \in \mathcal{L}_{red} \cap] -T, T[} \{t_0\} \times W_{t_0}. \quad (3.137)$$

Par ailleurs, on a :

$$W_{t_0} = \bigsqcup_{\bar{\gamma} \in \mathcal{P}_{red}(E, t_0)} \Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}. \quad (3.138)$$

où

$$\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : z = M(g)\Phi_{t_0}(z) \text{ et } \pi(z) \in \bar{\gamma}\}. \quad (3.139)$$

Enfin, à défaut de montrer que chaque $\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}$ est connexe (il faudrait probablement pour cela supposer au moins que G est connexe), montrons que $S(t_0)(z) := \int_0^{t_0} pdq$ est indépendant de $z \in \pi^{-1}(\bar{\gamma})$.

Lemme 3.6.6 $S(t_0)(z) := \int_0^{t_0} pdq$ ne dépend pas de $z \in \pi^{-1}(\bar{\gamma})$.

Preuve du lemme : Soit $z \in \Omega_0$ tel que $\pi(z) \in \bar{\gamma}$. d'où $g \in G$ tel que $M(g)\Phi_{t_0}(z) = z$. On note $\Phi_t(z) = (q_t(z), p_t(z))$. Soit $\varphi(t) := \langle p_t(z), \dot{q}_t(z) \rangle_{\mathbb{R}^d}$. J'affirme que φ est t_0 -périodique : en effet, selon (2.31), on a pour t réel : $\Phi_{t+t_0}(z) = M(g^{-1})\Phi_t(z)$, ce qui se traduit par $q_{t+t_0}(z) = g^{-1}q_t(z)$ et $p_{t+t_0}(z) = g^{-1}p_t(z)$. Ainsi :

$$\varphi(t + t_0) = \langle p_{t+t_0}(z), \dot{q}_{t+t_0}(z) \rangle = \langle g^{-1}p_t(z), g^{-1}\dot{q}_t(z) \rangle = \varphi(t).$$

Soient maintenant h dans G , t_1 dans \mathbb{R} et $z_1 = M(h)\Phi_{t_1}(z)$ (i.e. $z_1 \in \Omega_0$ et $\pi(z_1) \in \bar{\gamma}$). On veut montrer que $S(t_0)(z) = S(t_0)(z_1)$. Or, comme $\Phi_t(z_1) = M(h)\Phi_{t+t_1}(z)$, on a $q_t(z_1) = hq_{t+t_1}(z)$ et $p_t(z_1) = hp_{t+t_1}(z)$. Donc :

$$S(t_0)(z_1) = \int_0^{t_0} \langle p_t(z_1), \dot{q}_t(z_1) \rangle dt = \int_0^{t_0} \langle hp_{t+t_1}(z), h\dot{q}_{t+t_1}(z) \rangle dt = \int_{t_1}^{t_1+t_0} \varphi(t) dt.$$

D'où le résultat par intégrale de période. \blacksquare

Puis, nous avons $\dim \Lambda_{\bar{\gamma}, t_0} = \dim W_{t_0} = p + 1$. D'où, via le théorème 3.4.7 :

$$\mathcal{G}_\chi(h) = \psi(E)d_\chi \sum_{t_0 \in \mathcal{L}_{red}(E) \cap \text{Supp} \hat{f}} \hat{f}(t_0) \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{P}_{red}(E, t_0)} e^{\frac{i}{h} S_{\bar{\gamma}}(t_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda_{\bar{\gamma}, t_0}} \overline{\chi(g)} d(t_0, z, g) d\sigma_{\Lambda_{\bar{\gamma}}}(z, g) + O(h). \quad (3.140)$$

Nous avons donc prouvé le théorème 3.3.4. ■

Remarque quant à la conjecture annoncée :

Notons que pour poursuivre le calcul des coefficients et prouver la conjecture (3.83), il faudrait arriver à calculer $d(t_0, z, g)$ dans notre cas et le mettre sous la forme d'une quantité faisant intervenir des données classiques du système réduit (determinant de la différentielle de l'application de Poincaré de $\bar{\gamma}$, période primitive de $\bar{\gamma}$, etc...). Nous ne savons pas faire ceci pour le moment.

Chapitre 4

Appendices

4.1 Appendice 1 : Divers théorèmes du cylindre

4.1.1 Théorème sans symétrie

On commence par énoncer un théorème bien connu de mécanique hamiltonienne dans le cadre d'une variété symplectique quelconque (M, w) . Le but est ici d'appliquer tout cela lors de l'étude quantique pour un **groupe de Lie**, lorsque l'on supposera que les orbites périodiques sont non-dégénérées dans l'espace réduit pour prouver le théorème 3.3.4 (cf chapitre 3.6). Pour le cas d'un groupe fini, on utilisera une version dans \mathbb{R}^{2d} légèrement améliorée.

Soit (M, w) une variété symplectique¹ et $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse sur M (le hamiltonien). On définit alors le champ de vecteurs $X_H : M \rightarrow TM$ tel que : $\forall z \in M, \forall \alpha \in T_x M$, on a :

$$w_z(X_H(z), \alpha) = d_z H(\alpha). \quad (4.1)$$

L'équation différentielle :

$$\dot{z}_t = X_H(z_t), \quad (4.2)$$

définit alors un système dynamique hamiltonien dont le flot sera classiquement noté Φ_t .²

Soit $z_0 \in M$ un point périodique de (4.2) et $T_0 \neq 0$ une période de $O(z_0)$ (pas forcément la période primitive). On définit alors la **matrice de monodromie** :

$$F_{z_0}(T_0) := \partial_z \Phi_{T_0}(z_0). \quad (4.3)$$

Si P désigne l'**application de retour de Poincaré** en (z_0, T_0) , et P_0 désigne la même application restreinte au niveau d'énergie de H en z_0 , alors les spectres de $F_{z_0}(T_0)$, $d_{z_0} P$ et $d_{z_0} P_0$ sont

¹i.e. M est une variété et w est une 2-forme différentielle réelle telle que, pour tout z dans M , $w_z : T_z M \times T_z M \rightarrow \mathbb{R}$ est alternée non dégénérée.

² $\Phi_t(z)$ est la solution au temps t de (4.2) avec condition initiale z en $t = 0$.

reliés comme suit (cf [Ab-Ma] Prop. 7.14 p.524) : si $C_A(X)$ désigne le polynôme caractéristique de la matrice A , on a :

$$C_{F_{z_0}(T_0)}(X) = (X - 1)C_{d_{z_0}P}(X) = (X - 1)^2 C_{d_{z_0}P_0}(X). \quad (4.4)$$

On désire étudier la présence d'orbites périodiques au voisinage de $O(z_0)$. On est ainsi naturellement amené à étudier les points fixes de l'application de Poincaré. C'est donc la valeur propre 1 de $F_{z_0}(T_0)$ qui joue un rôle prépondérant. Remarquons qu'en dérivant en $t = 0$ l'identité $\Phi_{T_0}(\Phi_t(z_0)) = \Phi_t(z_0)$, on obtient déjà :

$$(F_{z_0}(T_0) - Id)X_H(z_0) = 0 \quad (4.5)$$

Ainsi, 1 est valeur propre de $F_{z_0}(T_0)$, et dans le contexte hamiltonien, sa multiplicité algébrique étant paire (cf [Ab-Ma] Prop. 8.1.1 p.573), 1 est valeur propre de $F_{z_0}(T_0)$ de multiplicité algébrique supérieure ou égale à 2. Si on suppose que cette multiplicité est *égale* à 2, alors, selon (4.4), 1 n'est pas valeur propre de $d_{z_0}P_0$. Ainsi, P_0 n'a qu'un seul point fixe (z_0) dans un voisinage de z_0 (par inversion locale). Il est donc naturel de s'attendre à ce que $O(z_0)$ soit plus ou moins "isolée" dans son niveau d'énergie parmi les orbites périodiques proche de z_0 ayant une période proche de T_0 .

Définition 4.1.1 *On dit que (z_0, T_0) est **non-dégénérée** si 1 est valeur propre de la matrice de monodromie $F_{z_0}(T_0)$ de multiplicité algébrique égale à 2.*

Ceci équivaut à dire que 1 est valeur propre de $d_{z_0}P$ de multiplicité égale à 1 ou encore que 1 n'est pas valeur propre de $d_{z_0}P_0$.

Théorème 4.1.2 Théorème du cylindre

Soient $E \in \mathbb{R}$, (M, w, H) un système hamiltonien, $\Sigma_E := \{H = E\}$. On suppose que $\dim(M) = 2d$ et que Σ_E ne contient pas de points critiques de H .

Soient $z_0 \in M$, $T_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $\Phi_{T_0}(z_0) = z_0$ et (z_0, T_0) est non-dégénérée. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, \mathcal{T} un voisinage tubulaire de $O(z_0)$, tels que :

- (1) Si $d > 1$, $\exists \eta > 0$, $Y :] - \eta, \eta[\rightarrow M$, tels que $Y(0) = z_0$, et $\forall \lambda \in] - \eta, \eta[$, $O(Y(\lambda))$ est une orbite périodique de $\Sigma_{E-\lambda}$.
- (2) Si $z \in \mathcal{T} \cap \Sigma_E$, et $t \in]T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon[$ sont tels que $\Phi_t(z) = z$, alors $z \in O(z_0)$ et $t = T_0$.
- (3) Il existe une base de $\ker(F_{z_0}(T_0) - Id)^2$ donnée par (u_1, u_2) où $u_1 := X_H(z_0)$ et u_2 est tel que :

$$w_{z_0}(u_2, X_H(z_0)) \neq 0.$$

Preuve du théorème : Pour les deux premiers points, on trouvera des démonstrations dans [Ab-Ma], Prop. 8.2.2 p.576, [Me1] Theorem 6.5.2 p.82 ou [Me2] Theorem 10, p.136. L'idée

est d'appliquer le théorème des fonctions implicites à P_0 après avoir redressé le champ et les niveaux d'énergie. Dans le chapitre suivant, on prouvera un théorème plus général dans le cas $M = \mathbb{R}^{2d}$. La démonstration est analogue. Pour le troisième point, on a déjà vu que $X_H(z_0) \in \ker(F_{z_0}(T_0) - Id)$. On prend alors $u_2 = Y'(0)$, et on dérive en $\lambda = 0$ l'identité :

$$H(Y(\lambda)) = E - \lambda$$

pour obtenir $w_{z_0}(X_H(z_0), u_2) = -1$, ce qui assure aussi le fait que $(X_H(z_0), u_2)$ est libre. Si l'on note θ le temps de retour de Poincaré tel que $\theta(z_0) = T_0$, on déduit des points (1) et (2) que :

$$\Phi_{\theta(\lambda)}(Y(\lambda)) = Y(\lambda).$$

On dérive en $\lambda = 0$ pour obtenir :

$$(F_{z_0}(T_0) - Id)Y'(0) = \lambda_0 X_H(z_0)$$

où λ_0 est dans \mathbb{R} . Donc, u_2 est dans $\ker(F_{z_0}(T_0) - Id)^2$. ■

4.1.2 Preuve du théorème du cylindre avec symétries

Dans les lignes qui suivent, on va prouver le théorème du cylindre avec symétries 2.2.4 qui nous a servi pour notre analyse quantique dans le cas des **groupes finis**. Pour simplifier le tout, et comme nous n'en n'avons pas besoin, on oublie le cadre (M, w) d'une variété symplectique quelconque et on suppose que $M = \mathbb{R}^{2d}$, et $w = \langle \cdot, J \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2d}}$. $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse et $E \in \mathbb{R}$ est tel que Σ_E soit non critique. G est un sous-groupe fini de $O(d)$. On suppose que H est G -invariant.

Quelques propriétés de $F_z(t)$:

Si $z \in \mathbb{R}^{2d}$, $g \in G$ et si $\Phi_{t+t_1}(z)$ et $\Phi_t(z)$ existent, en différentiant par rapport à z les identités : $\Phi_{t+t_1}(z) = \Phi_{t_1}(\Phi_t(z))$ et $M(g)\Phi_t(z) = \Phi_t(M(g)z)$, on obtient les relations :

$$F_z(t+t_1) = F_{\Phi_t(z)}(t_1) \cdot F_z(t). \quad (4.6)$$

$$M(g)F_z(t) = F_{M(g)z}(t) \cdot M(g). \quad (4.7)$$

Lemme 4.1.3 *Soit γ une orbite g -invariante admettant t_0 pour g -période et z dans γ . On note $z_t = \Phi_t(z)$. Alors :*

$$M(g)F_{z_t}(t_0) = F_z(t) \cdot [M(g)F_z(t_0)] \cdot (F_z(t))^{-1}.$$

En particulier, les valeurs propres de $M(g)F_z(t_0)$ avec multiplicité algébrique ne dépendent pas du point z de γ .

Preuve du lemme : Selon la formule (4.6), on a :

$$F_{z_t}(t_0)F_z(t) = F_z(t_0 + t) = F_{z_{t_0}}(t)F_z(t_0).$$

$F_z(t)$ étant symplectique, elle est inversible et :

$$F_{z_t}(t_0) = F_{z_{t_0}}(t)F_z(t_0)[F_z(t)]^{-1}.$$

Ainsi, selon la formule (4.7), comme $M(g)z_{t_0} = z$, on a :

$$M(g)F_{z_t}(t_0) = F_z(t)M(g)F_z(t_0)[F_z(t)]^{-1}$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

Théorème du cylindre avec symétries

Rappelons que $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ est un hamiltonien lisse G -invariant, et que Σ_E est un niveau d'énergie compact sans point critique pour H . Nous commençons par énoncer un théorème plus général que le théorème du cylindre 2.2.4 :

Proposition 4.1.4 :

Soient $g \in G$, γ une orbite périodique g -invariante de Σ_E , z_0 un point de γ , et t_0 une g -période non nulle de γ . On suppose :

$$\dim \ker[(M(g)F_{z_0}(t_0) - Id)^2] = 2.$$

Alors, il existe un voisinage tubulaire \mathcal{T} de γ , il existe $\varepsilon_1 > 0$ tels que si $|t_1 - t_0| < \varepsilon_1$ et si $\exists z_1 \in \Sigma_E \cap \mathcal{T}$ tel que $M(g)\Phi_{t_1}(z_1) = z_1$, on ait : $O(z_1) = \gamma$ et $t_1 = t_0$.

Par ailleurs, si $d > 1$, il existe $Y :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{2d}$, \mathcal{C}^∞ telle que $Y(0) = z_0$, $\forall \lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $Y(\lambda) \in \Sigma_{E-\lambda}$ et $O(Y(\lambda))$ est une orbite périodique g -invariante. (pas forcément de g -période égale à t_0).

En particulier, γ est la seule orbite g -invariante de Σ_E admettant t_0 pour g -période qui rencontre \mathcal{T} . Rappelons que :

$$\Gamma_{E,g,t_0} := \{\gamma \text{ orbite périodique de } \Sigma_E : \exists z \in \gamma : M(g)\Phi_{t_0}(z) = z\}.$$

$$\mathcal{L}_{E,g} := \{t \in]-T, T[: \exists z \in \Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\}.$$

Corollaire 4.1.5 Soient $g \in G$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$.

Supposons que l'hypothèse de la proposition précédente est vérifiée pour toute orbite γ de Γ_{E,g,t_0} . Alors, Γ_{E,g,t_0} est fini, t_0 est isolé dans $\mathcal{L}_{E,g}$.

Preuve du corollaire :

Le théorème précédent et la compacité de Σ_E assurent que $\Gamma_{g,t_0,E}$ est fini. Par ailleurs, si $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t_0$ avec z_n dans Σ_E tel que $M(g)\Phi_{t_n}(z_n) = z_n$, alors, quitte à extraire, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \in \Sigma_E$, et $M(g)\Phi_{t_0}(z) = z$. Comme $\dim \ker[(M(g)F_z(t_0) - Id)^2] = 2$, le théorème précédent s'applique, et $t_n = t_0$ pour n grand. ■

Preuve de la proposition 4.1.4

On va reprendre le théorème du cylindre de [M-H] avec une temps de retour de Poincaré entre un hyperplan transverse à Σ_E en z_0 et son translaté en $M(g^{-1})z_0$. Puis, on appliquera plusieurs fois le théorème des fonctions implicites. La preuve se fait par étapes :

Rappelons que, selon (4.5), on a :

$$(M(g)F_{z_0}(t_0) - Id)J\nabla H(z_0) = 0. \quad (4.8)$$

Etape 1 : Redressement hamiltonien : on note (e_1, \dots, e_{2d}) la base canonique de \mathbb{R}^{2d} .

Soit \mathcal{H} un hyperplan affine contenant z_0 et transverse à γ en z_0 (i.e. tel que $J\nabla H(z_0) \notin \mathcal{H}$).

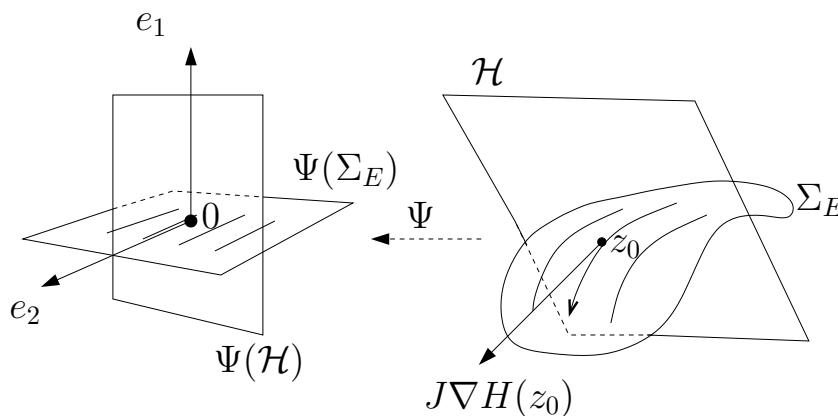


FIG. 4.1 – Redressement du champ et des surfaces d'énergie

Alors, il existe U ouvert de \mathbb{R}^{2d} contenant z_0 , et Ψ , C^∞ -difféomorphisme de U sur \tilde{U} , ouvert de \mathbb{R}^{2d} contenant zéro, tel que :

- $\Psi(z_0) = 0$, et $\Psi * J\nabla H$ est le champ constant égal à e_1 sur \tilde{U} .
- $\Psi(\mathcal{H} \cap U) = \tilde{\mathcal{H}} \cap \tilde{U}$ où $\tilde{\mathcal{H}} := (\mathbb{R}e_1)^\perp$.
- Si λ est proche de E dans \mathbb{R} , alors $z \in U \cap \Sigma_\lambda \iff \Psi(z) = (\lambda - E)e_2 + y$ où $y \perp e_2$. (♣)

Pour l'obtention d'un tel difféomorphisme, nous renvoyons à [M-H] : il s'agit de déformer localement le champ de vecteur $J\nabla H$ en un champ constant en déformant les surfaces d'énergie en des hyperplans parallèles (sorte de "flow box lemma" amélioré).

Etape 2 : Temps de passage en $M(g^{-1})\mathcal{H}$:

Quitte à restreindre U , il existe $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$, lisse, telle que :

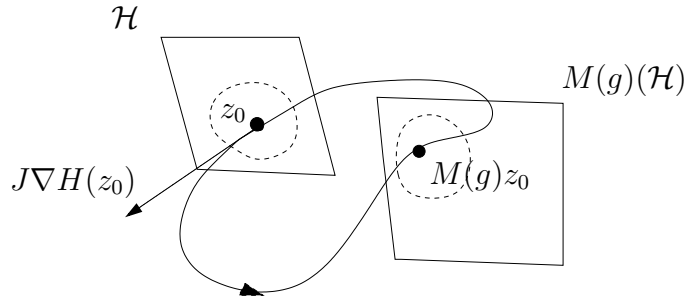


FIG. 4.2 – Application de Poincaré

$$\theta(z_0) = t_0 \text{ et } \forall z \in U, \quad \Phi_{\theta(z)}(z) \in M(g^{-1})\mathcal{H}.$$

Pour cela, si $\mathcal{H} = z_0 + (\mathbb{R}\alpha)^\perp$, où $\langle \alpha, J\nabla H(z_0) \rangle \neq 0$, classiquement, il suffit pour trouver θ d'appliquer le théorème des fonctions implicites à $F : (t, z) \mapsto \langle \alpha, M(g)\Phi_t(z) - z_0 \rangle$ en remarquant que $\frac{\partial F}{\partial t}(t_0, z_0) = \langle \alpha, J\nabla H(z_0) \rangle \neq 0$ et $F(t_0, z_0) = 0$.

Remarquons par ailleurs que, si (t, z) est assez proche de (t_0, z_0) , avec $M(g)\Phi_t(z) \in \mathcal{H}$, alors $z \in U$ et $t = \theta(z)$. ♠

Etape 3 : Paramétrisation par l'énergie d'un cylindre d'orbites g -invariantes :

Soient $V_{z_0} := U \cap \mathcal{H}$ et $P : V_{z_0} \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ définie par :

$$P(z) = M(g)\Phi_{\theta(z)}(z).$$

P est lisse et quitte à réduire V_{z_0} , on peut supposer que $P(V_{z_0}) \subset U$ (car $P(z_0) = z_0$). On définit alors $\tilde{V}_{z_0} := \Psi(V_{z_0})$ ouvert de $\tilde{\mathcal{H}}$ contenant zéro et $\tilde{P} : \tilde{V}_{z_0} \rightarrow \tilde{U} \cap \tilde{\mathcal{H}}$, $\tilde{P} := \Psi P \Psi^{-1}$. On a $\tilde{P}(0) = 0$.

Si $d > 1$, on note $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d-2}$ un élément générique de $\tilde{\mathcal{H}}$. H étant une intégrale première du mouvement, d'après (♣), il existe $Q : \tilde{V}_{z_0} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d-2}$ telle que $\tilde{P}(\lambda, y) = (\lambda, Q[\lambda, y])$. Ainsi, la jacobienne de \tilde{P} en zéro est de la forme :

$$\text{Jac}\tilde{P}(0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial Q}{\partial y}(0) \end{array} \right). \quad (4.9)$$

Lemme 4.1.6 1 est valeur propre de multiplicité algébrique égale à 1 de $P'(z_0)$.

Preuve du lemme : De même que dans [Ab-Ma] p. 524, on montre que l'on a : $\text{mult}(1, P'(z_0)) = \text{mult}(1, M(g)F_{t_0}(z_0)) - 1 = 1$. ■

$\tilde{P}'(0)$ et $P'(0)$ étant conjuguées, 1 n'est pas valeur propre de $\frac{\partial Q}{\partial y}(0)$. Par ailleurs, $Q(0) = 0$, donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $\varepsilon > 0$ et W voisinage ouvert de zéro dans $(\mathbb{R}e_2)^{\perp \tilde{\kappa}}$, et $\tilde{\varphi} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow W$, \mathcal{C}^∞ , tels que $\tilde{\varphi}(0) = 0$:

$$|\lambda| < \varepsilon, y \in W \text{ et } Q(\lambda, y) = y \iff |\lambda| < \varepsilon \text{ et } y = \tilde{\varphi}(\lambda).$$

Posons alors $Y(\lambda) := \Psi^{-1}[0, \lambda, \tilde{\varphi}(\lambda)]$, $Y :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{2d}$. On a alors $Y(E) = z_0$ et :

$$\begin{cases} M(g)\Phi_{\theta(Y(\lambda))}(Y(\lambda)) = Y(\lambda). \\ H(Y(\lambda)) = \lambda + E. \end{cases} \quad (4.10)$$

On peut interpréter ces deux dernières égalités en disant que l'on a “paramétré par l'énergie” un cylindre d'orbites périodiques g -invariantes dans un voisinage de $O(z_0)$.

On peut construire un voisinage tubulaire \mathcal{T} de γ tel que toute orbite passant par \mathcal{T} traverse $\text{dom}(P)$ (cf plus bas, lemme 4.1.7). Soit γ_1 une orbite g -invariante ayant $t_1 \in \mathbb{R}^*$ comme g -période et passant par \mathcal{T} . Elle coupe $\text{dom}(P)$ en un point z_1 tel que $M(g)\Phi_{t_1}(z_1) = z_1$. Selon (♠) (définition de θ), si t_1 est suffisamment proche de t_0 et \mathcal{T} suffisamment fin, $z_1 \in U$ et $t_1 = \theta(z_1)$. Du coup, $M(g)\Phi_{\theta(z_1)}(z_1) = z_1$. Mais selon le théorème des fonctions implicites appliqué à $(\lambda, y) \mapsto Q(\lambda, y) - y$, si z_1 est suffisamment proche de z_0 , alors $z_1 = Y(\lambda_1)$, où $\lambda_1 = H(z_1)$. donc, si γ_1 est d'énergie égale à E , alors $z_1 = z_0$.

Reste à prouver le :

Lemme 4.1.7 *Il existe $\eta > 0$ tel que si $\text{dist}(x, O(z_0)) < \eta$, alors $O(x)$ rencontre $\text{dom}(P)$.*

Preuve du lemme : Soit \tilde{U} un voisinage ouvert de z_0 dans \mathbb{R}^{2d} et $S : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\text{dom}(P) = \{S = 0\}$. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant zéro, définie par $\varphi(t) := S(\Phi_t(z_0))$. On a : $\varphi'(0) = d_{z_0}S(J\nabla H(z_0)) \neq 0$. Donc φ change de signe en $t = 0$. D'où w_1 et w_2 dans $\tilde{U} \cap O(z_0)$ tels que $S(w_1) > 0$ et $S(w_2) < 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in B(w_1, \varepsilon), \quad x \in \tilde{U} \text{ et } S(x) > 0.$$

$$\forall x \in B(w_2, \varepsilon), \quad x \in \tilde{U} \text{ et } S(x) < 0.$$

Soit K une boule compacte recouvrant $O(z_0)$. On note T la période primitive de $O(z_0)$. Le flot Φ étant uniformément continu sur $[-2T, 2T] \times K$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x_1, x_2 \in K, \quad \forall t \in [-2T, 2T], \quad \|x_1 - x_2\| \leq \eta \Rightarrow \|\Phi_t(x_1) - \Phi_t(x_2)\| \leq \varepsilon.$$

Le tube considéré est alors de taille η : si $\text{dist}(x, O(z_0)) < \eta$, alors il existe $x^* \in O(z_0)$ tel que $\|x - x^*\| < \eta$. Soient alors t_1 et t_2 dans \mathbb{R} tels que $w_1 = \Phi_{t_1}(x^*)$ et $w_2 = \Phi_{t_2}(x^*)$. Ainsi, $\Phi_{t_1}(x) \in B(w_1, \varepsilon)$ et donc $S(\Phi_{t_1}(x)) > 0$. De même, $S(\Phi_{t_2}(x)) < 0$. On peut toujours supposer que pour tout t entre t_1 et t_2 , $\Phi_t(x)$ est dans \tilde{U} . Alors par théorème des valeurs intermédiaires, il existe t entre t_1 et t_2 tel que $S(\Phi_t(x)) = 0$, et $O(x)$ rencontre $\text{dom}(P)$. ■

Ceci achève la preuve du théorème . ■

4.2 Appendice 2 : Vade mecum sur les états cohérents

La présentation qui suit se fait dans l'esprit des travaux conjoints de Monique Combescure et Didier Robert. Par ailleurs, une référence utile pour les transformées de Wigner et gaussiennes en général est le livre de G.B. Folland [Fo].

4.2.1 Notations sur les états cohérents

Soient :

- $\Lambda_h : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\Lambda_h \psi(x) = \frac{1}{h^{\frac{d}{4}}} \psi\left(\frac{x}{h^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Λ_h est l'opérateur unitaire de **changement d'échelle**.

- Si $\alpha = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$\mathcal{T}_h(\alpha) := \exp\left[\frac{i}{h}(px - q \cdot hD_x)\right]$$

$\mathcal{T}_h(\alpha)$ est l'opérateur unitaire de **translation dans l'espace des phases**.

Lemme 4.2.1 Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\mathcal{T}_h(\alpha) f(x) = \exp\left(i\frac{p}{h}\left(x - \frac{q}{2}\right)\right) \cdot f(x - q). \quad (4.11)$$

Preuve du lemme : soit $(q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$. Notons A l'extension autoadjointe de l'opérateur $qx + pD_x$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, si $t \in \mathbb{R}$, e^{itA} l'opérateur unitaire tel que, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $t \mapsto e^{-itA}$ est la solution $C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap C(\mathbb{R}, D(A))$ du problème :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) = Au(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u(t, x)$ est en fait solution de (4.12) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et $(t, x) \mapsto u(t, x)$ admet des dérivées partielles en t et x à l'ordre 1. On applique alors la méthode dite "des caractéristiques" en cherchant un chemin C^1 $\gamma(s) = (t(s), x(s))$ donnant u le long du chemin γ . Comme $\frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = \partial_t u(\gamma(s))t'(s) + \partial_x u(\gamma(s))x'(s)$, si l'on pose $t(s) = s + t_0$ et $x(s) = sp + x_0$, on obtient : $\frac{d}{ds}u(\gamma(s)) = -i \langle q, x(s) \rangle u(\gamma(s))$.

D'où : $u(s + t_0, sp + x_0) = u(t_0, x_0)e^{-\frac{i}{2}s^2qp - isqx_0}$, et en choisissant $s = -t_0$, on obtient :

$$u(t, x) = e^{\frac{i}{2}qpt^2} e^{-itqx} f(x - tp).$$

On en déduit le résultat pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en prenant $t = -\frac{1}{h}$, $q \leftarrow p$, et $p \leftarrow -hq$. Le résultat pour f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'en déduit par densité. ■

On vérifie alors facilement que :

$$\mathcal{T}_h(\alpha)^* = \mathcal{T}_h(\alpha)^{-1} = \mathcal{T}_h(-\alpha).$$

- Soit $\tilde{\psi}_0(x) := \frac{1}{\pi^{\frac{d}{4}}} \exp(-\frac{|x|^2}{2})$. On note :

$$\psi_0(x) := \Lambda_h \tilde{\psi}_0(x) = \frac{1}{(h\pi)^{\frac{d}{4}}} \exp(-\frac{|x|^2}{2h}). \quad (4.13)$$

ψ_0 est l'état fondamental de l'oscillateur harmonique $-h^2\Delta + |x|^2$.

- L'état **cohérent** centré en $\alpha = (q, p)$ est donné par :

$$\boxed{\varphi_\alpha} := \mathcal{T}_h(\alpha)\psi_0.$$

Par construction, on a $\|\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ pour tout α dans \mathbb{R}^{2d} . Par ailleurs, d'après (4.11), on a :

$$\boxed{\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{(h\pi)^{\frac{d}{4}}} \exp\left(i\frac{p}{h}\left(x - \frac{q}{2}\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{|x - q|^2}{2h}\right)}. \quad (4.14)$$

Cette formule nous permet de remarquer un comportement agréable des états cohérents vis-à-vis des symétries provenant du groupe orthogonal. Pour g dans $O(d)$ et α dans \mathbb{R}^{2d} , on a :

$$\tilde{M}(g)\varphi_\alpha = \varphi_{M(g)\alpha}. \quad (4.15)$$

- On déduit facilement de la formule (4.11) les formules suivantes :

$$\Lambda_h^* \mathcal{T}_h(\alpha) \Lambda_h = \mathcal{T}_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{h}}\right). \quad (4.16)$$

$$\mathcal{T}_h(\alpha) \mathcal{T}_h(\beta) = e^{\frac{i}{2h} \langle J\alpha, \beta \rangle} \mathcal{T}_h(\alpha + \beta). \quad (4.17)$$

$$\mathcal{T}_h(\alpha)^* \mathcal{O}p_h^w(a) \mathcal{T}_h(\alpha) = \mathcal{O}p_h^w[a(\alpha + \cdot)]. \quad (4.18)$$

$$\mathcal{O}p_h^w(a) \Lambda_h = \Lambda_h \mathcal{O}p_1^w(a_h), \quad \text{où } a_h(z) := a(\sqrt{h}z). \quad (4.19)$$

4.2.2 Transformée de Wigner

- Si ϕ et ψ sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on définit la h -transformée de Wigner de (ϕ, ψ) par :

$$W_{\phi, \psi}(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{h}y\xi} \phi\left(x + \frac{y}{2}\right) \overline{\psi\left(x - \frac{y}{2}\right)} dy.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $W_{\phi, \psi}$ est bornée sur \mathbb{R}^{2d} et l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{R}^{2d}, \quad |W_{\phi, \psi}(z)| \leq 2^d \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (4.20)$$

Par ailleurs, on a : $W_{\phi,\psi}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{2i}{h}(x-u)\xi} \phi(2x-u) \overline{\psi(u)} du$. Ainsi, par convergence dominée, si ϕ et ψ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $z \mapsto W_{\phi,\psi}(z)$ est continue sur \mathbb{R}^{2d} . Ce résultat est encore vrai pour ϕ et ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, en utilisant (4.20).

On constate aussi que, si $\mathcal{F}_{y \rightarrow \xi}$ désigne la transformée de Fourier partielle, alors on a :

$$W_{\phi,\psi}(x, \xi) = \mathcal{F}_{y \rightarrow \xi} \left(y \mapsto \phi\left(x + \frac{y}{2}\right) \overline{\psi\left(x - \frac{y}{2}\right)} \right) \left(\frac{\xi}{h} \right).$$

Ainsi, on a : $\|W_{\phi,\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 = (2\pi h)^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\phi(x + \frac{y}{2})|^2 |\psi(x - \frac{y}{2})|^2 dx dy$, d'où par changement de variable, on conclut que si ϕ et ψ sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $W_{\phi,\psi} \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ et :

$$\|W_{\phi,\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = (2\pi h)^{\frac{d}{2}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (4.21)$$

• La même transformée de Fourier montre que si ϕ et ψ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $W_{\phi,\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Supposons alors que $a : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$|\partial^\alpha a(z)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{m_\alpha}, \quad \text{où } m_\alpha > 0.$$

Si ϕ et ψ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors on a :

$$\langle Op_h^w(a)\phi; \psi \rangle_{L^2} = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d} W_{\phi,\psi}(z) a(z) dz. \quad (4.22)$$

Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème Fubini dans les intégrales oscillantes et d'écrire :

$$\langle Op_h^w(a)\phi; \psi \rangle_{L^2} = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{3d}} e^{\frac{i}{h}(u-v)\xi} a\left(\frac{u+v}{2}, \xi\right) \phi(v) \overline{\psi(u)} dv d\xi du.$$

Puis on fait le changement de variable $u = x - \frac{y}{2}$, $v = x + \frac{y}{2}$.

Proposition 4.2.2 Transformée de Wigner d'états cohérents

Soient α_1 et α_2 dans \mathbb{R}^{2d} . Alors, on a pour z dans \mathbb{R}^{2d} :

$$W_{\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}}(z) = 2^d \exp \left[\frac{i}{h} \left(\langle z, J(\alpha_1 - \alpha_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle \alpha_1, J\alpha_2 \rangle \right) \right] \exp \left(-\frac{1}{h} \left| z + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|^2 \right). \quad (4.23)$$

Preuve de la proposition : il s'agit essentiellement de calculer la transformée de Fourier d'une gaussienne. Faire de même que pour le lemme 2.1.5. ■

4.2.3 Une formule de trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ via les états cohérents

On introduit la transformée de Bargmann pour f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et α dans \mathbb{R}^{2d} :

$$\mathcal{B}f(\alpha) := \langle f; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposition 4.2.3 Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{B}f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, est continue et bornée et

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi h)^{-d} \|\mathcal{B}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^{2d}, \quad |\mathcal{B}f(\alpha)| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Enfin, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{B}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, et on a la formule d'inversion :

$$f(x) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle f; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \varphi_\alpha(x) d\alpha.$$

Concernant la dernière formule, on dit que les états cohérents forment une base surcomplète de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Preuve de la proposition : le théorème de Cauchy-Schwarz donne directement $|\mathcal{B}f(\alpha)| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ pour tout α dans \mathbb{R}^{2d} . Pour la continuité, remarquons que, si $\alpha = (q, p)$, alors :

$$\mathcal{B}f(\alpha) = (h\pi)^{-\frac{d}{4}} e^{\frac{i}{2h}pq} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{h}px} e^{-\frac{1}{2h}|x-q|^2} f(x) dx.$$

Ainsi, $\mathcal{B}f$ est continue pour f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par convergence dominée, et le résultat s'étant facilement à $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Montrons que $\mathcal{B}f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\mathcal{B}f(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} |\langle \mathcal{T}_h(-\alpha)f; \psi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 dp dq.$$

Or

$$|\langle \mathcal{T}_h(-\alpha)f; \psi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{p}{h}x} f(x-q) \psi_0(x) dx \right|^2 = |\mathcal{F}_p(f(\cdot - q)\psi_0(\cdot))\left(\frac{p}{h}\right)|^2.$$

Donc, par le théorème de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\mathcal{B}f(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{\mathbb{R}^q} (2\pi h)^d \|f(\cdot - q)\psi_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dq = (2\pi h)^d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Et on conclut en remarquant que $\|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Supposons que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $\mathcal{B}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Comme

$$\mathcal{B}f(\alpha) = (h\pi)^{-\frac{d}{4}} e^{\frac{i}{2h}pq} \mathcal{F}_{y \rightarrow p} \left(y \mapsto e^{-\frac{1}{2h}|y-q|^2} f(y) \right) \left(\frac{p}{h} \right),$$

il suffit de montrer que $(y, q) \mapsto e^{-\frac{1}{2h}|y-q|^2} f(y)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, ce qui est le cas. La formule d'inversion a bien alors un sens, puisque, pour tout x dans \mathbb{R}^d , $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(x)$ est bornée. Pour prouver cette formule d'inversion, remarquons qu'en dépolarisant la formule donnant $\|\mathcal{B}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2$ (exprimer le produit scalaire en fonction de la norme), on obtient pour u et v dans $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi h)^{-d} \langle \mathcal{B}u, \mathcal{B}v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

Pour u et v dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut alors appliquer à juste titre le théorème de Fubini dans le membre de droite de cette dernière équation et obtenir la formule désirée. ■

On donne une formule dans le cadre Hilbert-Schmidt :

Proposition 4.2.4 *Soit A un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors A est de classe Hilbert-Schmidt si et seulement si*

$$\|A\|_{HS}^2 = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|A\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\alpha < +\infty.$$

Preuve de la proposition : Soit $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{j \geq 0} \|Ae_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{j \geq 0} (2\pi h)^{-d} \|\mathcal{B}(Ae_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2.$$

Or

$$\|\mathcal{B}(Ae_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle e_j; A^* \varphi_\alpha \rangle|^2 d\alpha.$$

Donc

$$\|A\|_{HS}^2 = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|A^* \varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\alpha.$$

et on achève la preuve en rappelant que $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$. ■

Proposition 4.2.5 *Soit A un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle A\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| d\alpha < +\infty$$

et

$$\text{Tr}(A) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle A\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha.$$

Preuve de la proposition :

- A étant à trace, il s'écrit $A = A_1.A_2$ avec A_1 et A_2 de classe Hilbert-Schmidt.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle A\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| d\alpha &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle A_2\varphi_\alpha; A_1^*\varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| d\alpha \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|A_2\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|A_1^*\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} \|A_2\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} \|A_1^*\varphi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2\pi h)^d \|A_2\|_{HS} \|A_1^*\|_{HS} < +\infty. \end{aligned}$$

- Le reste de la preuve s'effectue par dépolarisation de la proposition précédente :
Pour cela, donnons-nous A et B des opérateurs de classe Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On note $|A|^2 := A^*A$, et l'on constate que $\text{Tr}(|A|^2) = \|A\|_{HS}^2$.

En outre,

$$AB = \frac{1}{4} [|A + B^*|^2 - |A - B^*|^2 - i|iA + B^*|^2 + i|iA - B^*|^2].$$

On prend la trace dans cette formule, et on applique la proposition précédente :

$$\text{Tr}(AB) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \|(A + B^*)\varphi_\alpha\|_{L^2}^2 - \|(A - B^*)\varphi_\alpha\|_{L^2}^2 - i\|(iA + B^*)\varphi_\alpha\|_{L^2}^2 + i\|(iA - B^*)\varphi_\alpha\|_{L^2}^2 \frac{d\alpha}{(2\pi h)^d}.$$

Or pour f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{4} \left[\|f + g\|_{L^2}^2 - \|f - g\|_{L^2}^2 - i\|if + g\|_{L^2}^2 + i\|if - g\|_{L^2}^2 \right].$$

Donc

$$\text{Tr}(AB) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \langle A\varphi_\alpha; B^*\varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha$$

et par cyclicité de la trace, si A et B sont de classe Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\text{Tr}(AB) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}_\alpha^{2d}} \langle AB\varphi_\alpha; \varphi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\alpha.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

4.3 Appendice 3 : Phase stationnaire généralisée avec phase complexe

Comme on l'a vu précédemment, l'usage d'états cohérents en théorie semi-classique requiert des versions robustes du théorème de la phase stationnaire.

Rappelons d'abord le lemme de la phase *non* stationnaire. Il est en général énoncé dans la littérature pour une phase réelle. Ici, on adapte le cas d'une phase complexe :

Lemme 4.3.1 (*Phase non stationnaire avec phase complexe*)

Soit f une fonction \mathcal{C}^∞ complexe définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n .

Soit a une fonction \mathcal{C}^∞ complexe à support compact dans \mathcal{O} . On suppose :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \nabla f(x) = 0 \Rightarrow \Im f(x) > 0.$$

Alors :

$$I(h) := \int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{h}f(x)} a(x) dx = O(h^\infty) \text{ quand } h \rightarrow 0^+.$$

Preuve du lemme : Notons $f = f_1 + if_2$, avec f_1 et f_2 réelles. Soient :

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \nabla f(x) = 0\} \text{ et } K := \mathcal{M} \cap \text{Supp}(a).$$

K est un compact inclu dans \mathcal{O} , et on sait que $f_2 > 0$ sur K . Soit

$$C := \min_K f_2 > 0.$$

Soient V un ouvert de \mathcal{O} contenant K tel que $f_2 \geq \frac{C}{2}$ sur V , et χ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans \mathcal{O} telle que $\chi = 1$ sur un voisinage ouvert de K et $\text{Supp}\chi \subset V$. On écrit :

$$\int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{h}f(x)} a(x) dx = \int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{h}f(x)} \chi(x) a(x) dx + \int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{h}f(x)} a(x) (1 - \chi(x)) dx.$$

Sur $\text{Supp}\chi$:

$$|e^{\frac{i}{h}f(x)}| \leq e^{-\frac{C}{2h}}.$$

Donc :

$$\int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{h}f(x)} a(x) dx = \int_{\mathcal{O}} e^{\frac{i}{h}f(x)} \tilde{a}(x) dx + O(h^\infty) \text{ quand } h \rightarrow 0^+.$$

où

$$\tilde{a} := (1 - \chi).a$$

ainsi $\tilde{a} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall x \in \text{Supp}(\tilde{a}), \nabla f(x) \neq 0$, ce qui est encore vrai sur un voisinage ouvert U de $\text{Supp}(\tilde{a})$. On est donc ramené au cas où $\forall x \in U, \nabla f(x) \neq 0$, et on envisage classiquement l'opérateur différentiel sur U :

$$L := \frac{1}{|\nabla f|^2} \overline{\nabla f} \cdot \nabla.$$

qui vérifie pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$L^N(e^{\frac{i}{h}f}) = \frac{i^N}{h^N} e^{\frac{i}{h}f}.$$

D'où pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$I(h) = \frac{h^N}{i^N} \int_U e^{\frac{i}{h}f} ({}^t L)^N(\tilde{a}) dx + O(h^\infty), \quad \text{quand } h \rightarrow 0^+.$$

ce qui achève la preuve de ce lemme. ■

Pour énoncer le théorème de la phase stationnaire avec phase *complexe*, on doit d'abord définir une quantité qui interviendra dans le calcul du coefficient du premier terme de l'asymptotique. Il s'agit d'une 'racine complexe' du déterminant, notée ' $\det_+^{-\frac{1}{2}}(\cdot)$ ', que nous commençons par définir sur une certaine classe de matrices symétriques à coefficients complexes. Si x et y sont dans \mathbb{C}^n , on note :

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Soit :

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : {}^t A = A \text{ et } \Re A \gg 0\}.$$

On définit la fonction $\det_+^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{S}_n^+(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\det_+^{-\frac{1}{2}}(A) := \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle_{\mathbb{R}^n}} dx,$$

l'intégrale étant bien absolument convergente pour A dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{C})$. On vérifie facilement que si $A \gg 0$, alors $\det_+^{-\frac{1}{2}}(A) = \frac{1}{\sqrt{\det A}}$. Selon [Ho] p.85, si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{C})$ alors A est inversible, et on trouvera dans cette même référence les éléments pour la preuve du lemme suivant :

Lemme 4.3.2 *Il existe un unique prolongement continu de $\det_+^{-\frac{1}{2}}$ à :*

$$\mathbb{D}_n^+ := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : {}^t A = A, \quad \Re A \geq 0 \quad \text{et} \quad \det A \neq 0\},$$

Par ailleurs, pour tout A dans \mathbb{D}_n^+ , on a : $[\det_+^{-\frac{1}{2}}(A)]^2 = \frac{1}{\det A}$.

Un cas particulier important faisant apparaître un élément de \mathbb{D}_n^+ qui n'est pas dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{C})$ est celui d'une matrice $A = iB$ où $B \in GL_n(\mathbb{R})$ est telle que ${}^t B = B$. On a alors :

$$\det_+^{-\frac{1}{2}}(A) = |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign}(B)},$$

où $\text{sign}(B)$ est le nombre de valeurs propres positives de B moins le nombre de valeurs propres négatives (comptées avec multiplicité algébrique). Pour prouver ceci, et de manière générale

pour se ramener à un calcul dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{C})$, on procède en remarquant que, si $A \in \mathbb{D}_n^+$, alors pour p grand, $A_p := A + \frac{1}{p}I_n$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{C})$. On calcule donc $\det_+^{-\frac{1}{2}}(A_p)$ pour p grand et on a alors :

$$\det_+^{-\frac{1}{2}}(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \det_+^{-\frac{1}{2}}(A_p).$$

- Extension de $\det_+^{-\frac{1}{2}}$ aux formes quadratiques :

Remarquons tout d'abord que, si $A \in \mathbb{D}_n^+$ et si ${}^tO = O^{-1}$, alors ${}^tOAO \in \mathbb{D}_n^+$ et $\det_+^{-\frac{1}{2}}({}^tOAO) = \det_+^{-\frac{1}{2}}(A)$ (passer à la limite via $A_p = A + \frac{1}{p}I_n$). Soit (E, \langle, \rangle) un espace vectoriel euclidien réel de dimension n . Soit alors $\mathcal{D}^+(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques complexes L sur E telles que $\Re(L) \geq 0$ et L est non-dégénérée. Si $L \in \mathcal{D}^+(E)$ et si A désigne la matrice de L dans une quelconque base orthonormée de E , alors on a clairement $A \in \mathbb{D}_n^+$. On définit $\det_+^{-\frac{1}{2}}(L) := \det_+^{-\frac{1}{2}}(A)$. D'après la remarque précédente, cette définition ne dépend pas de la base orthonormée choisie, d'où :

$$\det_+^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{D}^+(E) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

- Notations sur les formes quadratiques :

Si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^n . Si $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ est C^2 , alors, pour x dans \mathcal{O} , on notera $\boxed{f''(x)}$ la *forme bilinéaire* symétrique complexe ($f''(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$), et $\boxed{\text{Hess}f(x) \in M_n(\mathbb{C})}$ la matrice hessienne complexe $\text{Hess}f(x) = ((f''(e_i, e_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . On confond un vecteur de \mathbb{R}^n et son vecteur colonne dans la base canonique de \mathbb{R}^n , et si $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$\ker_{\mathbb{R}}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \ker(\Re(A)) \cap \ker(\Im(A)).$$

Le lemme ci-après permet d'énoncer proprement le théorème de la phase stationnaire qui suivra :

Lemme 4.3.3 Soient \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$, C^2 , telle que $\Im f \geq 0$ sur \mathcal{O} , et soit x_0 dans \mathcal{O} tel que :

$$f'(x_0) = 0 \text{ et } \Im(f(x_0)) = 0.$$

Alors $\Im(\text{Hess}f(x_0)) \geq 0$ (i.e. la forme bilinéaire symétrique $\Im(f''(x_0))$ est positive).

Preuve du lemme : écrivons $f = f_1 + if_2$, avec f_1 et f_2 réelles.

Le développement de Taylor de f à l'ordre 2 en x_0 donne pour y dans \mathbb{R}^n , h réel proche de zéro :

$$f(x_0 + hy) = f_1(x_0) + \frac{h^2}{2} \langle \text{Hess}f(x_0)y, y \rangle + h^2|y|^2\varepsilon(h).$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. En prenant la partie imaginaire, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \text{ pour } h \text{ petit} : 0 \leq f_2(x_0 + hy) = \frac{h^2}{2} \langle \text{Hess}f_2(x_0)y, y \rangle + h^2|y|^2\varepsilon(hy).$$

On divise par h^2 , et le résultat s'en déduit en faisant tendre h vers zéro. ■

Théorème 4.3.4 (*Phase stationnaire avec phase complexe et variété critique*)

Soit f une fonction C^∞ complexe définie sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n .

Soit a une fonction C^∞ complexe à support compact dans \mathcal{O} . On pose :

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{O} : \nabla f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \Im(f(x)) = 0\}.$$

et on suppose :

- (a) $\Re(f) \geq 0$ sur \mathcal{O} .
- (b) \mathcal{M} est une sous-variété connexe de dimension p de \mathbb{R}^n .
- (c) Pour tout x dans \mathcal{M} , la restriction de $f''(x)$ à $N_x\mathcal{M} := (T_x\mathcal{M})^\perp$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $N_x\mathcal{M} \times N_x\mathcal{M}$.

Alors :

- f est constante sur \mathcal{M} .
- $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C = C_{a,f,N}$ tel que pour tout $h > 0$:

$$\left| \int_{\mathcal{O}} e^{i\frac{f(x)}{h}} a(x) dx - (2\pi h)^{\frac{n-p}{2}} e^{i\frac{f(x_0)}{h}} \sum_{j=0}^N L_j(a, f) h^j \right| \leq C h^{\frac{n-p}{2} + N + 1}.$$

où x_0 est quelconque dans \mathcal{M} , les $L_j(a, f)$ sont des coefficients complexes, et en particulier :

$$L_0(a, f) = \int_{\mathcal{M}} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f''(x)|_{N_x\mathcal{M}}}{i} \right) . a(x) d\sigma_{\mathcal{M}}(x).$$

où $d\sigma_{\mathcal{M}}$ est la mesure de Lebesgue sur la sous-variété \mathcal{M} .

Pour une preuve de ce théorème , on renvoie à [CRR].

Remarques :

- Sous l'hypothèse (b), on a automatiquement :

$$\forall x \in \mathcal{M}, \quad T_x\mathcal{M} \subset \ker_{\mathbb{R}}(\text{Hess}f(x)).$$

En effet, si γ est un chemin C^1 à valeurs dans \mathcal{M} , tel que $\gamma(0) = x$, alors $f'(\gamma(t)) = 0$ pour tout t , et si on dérive $\partial_{x_j} f(\gamma(t)) = 0$ en $t = 0$, on obtient $\langle \gamma'(0); \partial_{x_j} \nabla f(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$, et donc $\gamma'(0) \in \ker(\text{Hess}f(x))$. Ainsi, on a, pour $x \in \mathcal{M}$, $\text{Hess}f(x)(\mathcal{N}_x\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}_x\mathcal{M} + i\mathcal{N}_x\mathcal{M}$ et

$$\forall u \in T_x\mathcal{M}, \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad f''(x)(u, v) = 0.$$

- Sous les hypothèses (a) et (c), via le lemme 4.3.3, on a bien $\frac{f''(x)|_{N_x\mathcal{M}}}{i} \in \mathcal{D}^+(N_x\mathcal{M})$.

Pour vérifier (c), on est confronté au calcul de la restriction de $f''(x)$ à $N_x\mathcal{M}$. Le lemme suivant permet à la fois de vérifier (c), et de calculer $\det_+^{-\frac{1}{2}}(\cdot)$ dans la pratique :

Lemme 4.3.5 *Supposons uniquement (a) et (b) dans le théorème précédent. Alors :*

$$(c) \iff \forall x \in \mathcal{O}, \quad \ker_{\mathbb{R}}[\text{Hess}f(x)] \subset T_x\mathcal{M}.$$

Par ailleurs, si $x \in \mathcal{M}$, et si $\Pi_{T_x\mathcal{M}}$ désigne la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n du projecteur orthogonal sur $T_x\mathcal{M}$, si on pose $A := \text{Hess}f(x) + i\Pi_{T_x\mathcal{M}}$, alors ${}^tA = A$, $\Im A \geq 0$, $\det A \neq 0$ et

$$\det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f''(x)|_{N_x\mathcal{M}}}{i} \right) = \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{Hess}f(x) + i\Pi_{T_x\mathcal{M}}}{i} \right). \quad (4.24)$$

Enfin

$$\det(f''(x)|_{N_x\mathcal{M}}) = \det(\text{Hess}f(x) + \Pi_{T_x\mathcal{M}}). \quad (4.25)$$

Preuve du lemme :

► Fixons x dans \mathcal{M} . Supposons que $\ker_{\mathbb{R}}(\text{Hess}f(x)) \subset T_x\mathcal{M}$. Selon la remarque précédente, nous avons pour des raisons de dimension : $\ker_{\mathbb{R}}(\text{Hess}f(x)) = T_x\mathcal{M}$. Notons $B := \text{Hess}f(x)$, $B_1 := \Re[\text{Hess}f(x)]$ et $B_2 := \Im[\text{Hess}f(x)]$. On a donc $\ker_{\mathbb{R}}[B] = \ker_{\mathbb{R}}(B_1) \cap \ker_{\mathbb{R}}(B_2)$. Si $u \in N_x\mathcal{M}$ vérifie : $\forall v \in N_x\mathcal{M}, \quad f''(x)(u, v) = 0 = \langle Bu, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$, alors en prenant parties réelles et imaginaires, $B_1u \in T_x\mathcal{M} \subset \ker_{\mathbb{R}}(B_1)$ et $B_2u \in T_x\mathcal{M} \subset \ker_{\mathbb{R}}(B_2)$. Mais pour $j = 1, 2$, $\Im(B_j) = (\ker_{\mathbb{R}}(B_j))^{\perp}$. Donc $B_1(u)$ et $B_2(u)$ sont nuls. Ainsi $Bu = 0$ et $u \in T_x\mathcal{M} \cap N_x\mathcal{M} : u = 0$. La restriction de $f''(x)$ à $N_x\mathcal{M}$ est donc bien non-dégénérée et on a (c).

► Réciproquement, si on a (c), et (avec les mêmes notations) si $u \in \mathbb{R}^n$ est tel que $Bu = 0$, on note $u = u_T + u_N$ où $u_T \in T_x\mathcal{M}$ et $u_N \in N_x\mathcal{M}$. Comme $T_x\mathcal{M} \subset \ker(B)$, on a $Bu_N = 0$, et $\forall v \in N_x\mathcal{M}, \langle Bu_N, v \rangle = 0 = f''(x)(u_N, v)$. Ainsi, d'après (c), $u_N = 0$ et $u \in T_x\mathcal{M}$.

► Selon un lemme précédent, on sait que $\Im(\text{Hess}f(x)) \geq 0$, donc ${}^tA = A$ et $\Im(A) \geq 0$. Montrons que $\det A \neq 0$: remarquons que si $D \in M_n(\mathbb{R})$ est telle que ${}^tD = D$, si $y = y_1 + iy_2 \in \mathbb{C}^n$, alors :

$$\langle Dy, \bar{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle Dy_1, y_1 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Dy_2, y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}.$$

Soit $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ay = 0$:

$$0 = \Im(\langle Ay, \bar{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}) = \Im[\langle \text{Re}(A)y, \bar{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} + i \langle \Im(A)y, \bar{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}]$$

$$= \langle \Im(A)y, \bar{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \Im(A)y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \Im(A)y_2, y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Comme $\Im A \geq 0$, on a pour $j = 1, 2$, $\langle \Im(A)y_j, y_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$, donc $\sqrt{\Im(A)}y_j = 0$, et $\Im(A)y_j = 0$. Ainsi $(B_2 + \Pi_{T_x\mathcal{M}})y_j = 0$, donc, comme $B_2 \geq 0$, $y_j \in N_x\mathcal{M}$ et $B_2y_j = 0$. Enfin, on a aussi $(\Re A)y = 0$, donc $B_1y_j = 0$. Ainsi $\text{Hess}f(x)y_j = 0$ et $y_j \in T_x\mathcal{M} \cap N_x\mathcal{M} = \{0\}$, et donc $y = 0$.

► Reste à prouver (4.24) :

Supposons pour simplifier que $\Im A \gg 0$. Alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{C})$, donc :

$$\det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{i} \right) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle \text{Hess} f(x) + i \Pi_{T_x \mathcal{M}} \rangle y, y \rangle_{\mathbb{R}^n}} dy.$$

Soient (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , $p := \dim T_x \mathcal{M}$, et U une isométrie linéaire qui envoie $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ sur $T_x \mathcal{M}$ et $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sur $N_x \mathcal{M}$. Ainsi, si l'on note $y = (y', y'') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, on a :

$$\Pi_{T_x \mathcal{M}} U(y) = U(y', 0), \text{ et } \langle (\text{Hess} f(x)) U y, U y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle (\text{Hess} f(x)) U(0, y''), U(0, y'') \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Ainsi en faisant le changement de variable $y \leftarrow U y$, on obtient :

$$\begin{aligned} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{i} \right) &= \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}_{y'}^p} \int_{\mathbb{R}_{y''}^{n-p}} e^{i \langle (\text{Hess} f(x)) U(0, y''), U(0, y'') \rangle_{\mathbb{R}^n}} e^{-|y'|^2} dy' dy'' \\ &= \pi^{-\frac{(n-p)}{2}} \int_{\mathbb{R}_{y''}^{n-p}} e^{i \langle (\text{Hess} f(x)) U(0, y''), U(0, y'') \rangle_{\mathbb{R}^n}} dy'' = \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{f''(x)|_{N_x \mathcal{M}}}{i} \right). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme.

► Pour prouver 4.25, on peut soit procéder directement, soit utiliser le fait que

$$[\det_+^{-\frac{1}{2}}(\cdot)]^{-2} = \det(\cdot)$$

et le calcul précédent. ■

quitte à restreindre U_a , que $\partial_{y''}F(x)$ est inversible pour tout x dans U_a (où $y'' \in \mathbb{R}^q$).

Cette construction étant faite pour tout a dans U , on a $\text{Supp } \varphi \subset \bigcup_{a \in \text{Supp } \varphi} U_a$, avec $\text{Supp } \varphi$ compact, ce qui permet d'extraire un recouvrement fini, $(U_{a_1}, \dots, U_{a_r})$, et une partition de l'unité χ_1, \dots, χ_r (fonctions lisses à support compact) tels que $\text{Supp } \varphi \subset \bigcup_{i=1}^r U_{a_i}$, $\text{Supp } \chi_i \subset U_{a_i}$ et $\sum_{i=1}^r \chi_i = 1$ sur $\text{Supp } \varphi$. Il est alors aisé de montrer qu'il suffit de prouver le théorème avec $U = U_a$, ce que nous allons faire dans les lignes qui suivent :

Ecrivons la formule de changement de variable :

$$\int_{U_a} \varphi(x) dx = \int_{V_a} \varphi(h^{-1}(y)) |\det(dy h^{-1})| dy.$$

Notons : $y = (y', y'') \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q}$. D'après la forme de h , il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que : $h^{-1}(y) = (\Phi(y), y'')$. On vérifie facilement que l'on a : $\det(dy h^{-1}) = \det(\partial_{y'} \Phi(y))$, pour $y \in V_a$. Puis, comme on a : $h(h^{-1}(y)) = y$, on en déduit que :

$$F(\Phi(y), y'') = y'.$$

Ainsi, en différentiant cette formule par rapport à y' , on obtient : $\partial_{y'} \Phi(y) = [\partial_{y'} F(\Phi(y), y'')]^{-1}$. On en déduit donc que :

$$\int_{U_a} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{V_a}(y) \varphi(h^{-1}(y)) \frac{dy}{|\det(\partial_{y'} F(\Phi(y), y''))|} =$$

Si on pose $y = (\lambda, y'')$, et si on note :

$$W_\lambda := \{y'' \in \mathbb{R}^{p-q} : (\lambda, y'') \in V_a\} \subset \mathbb{R}^{p-q},$$

on a :

$$\int_{U_a} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{W_\lambda} \varphi(h^{-1}(\lambda, y'')) \frac{dy''}{|\det(\partial_{y'} F(\Phi(\lambda, y''), y''))|} d\lambda.$$

Paramétrisation de Σ_λ : si $\lambda \in \mathbb{R}^q$, on montre facilement que $\psi_\lambda : W_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^p$, définie par :

$$\psi_\lambda(y'') := (\Phi(\lambda, y''), y''), \quad (4.28)$$

est une immersion injective d'image $\Sigma_\lambda \cap U_a$, ce qui nous permet de paramétrer Σ_λ . Par ailleurs :

$$\int_{U_a} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{W_\lambda} \varphi(\psi_\lambda(y'')) \frac{dy''}{|\det(\partial_{y'} F(\psi_\lambda(y''))) |} d\lambda.$$

Or, d'après notre paramétrisation :

$$\int_{\Sigma_\lambda} \varphi(x) \frac{d\sigma_{\Sigma_\lambda}(x)}{|\det(d_x F^t(d_x F))|^{\frac{1}{2}}} = \int_{W_\lambda} \varphi(\psi_\lambda(y'')) \frac{g_{\psi_\lambda}^{1/2}(y'') dy''}{|\det(d_{\psi_\lambda(y'')} F^t(d_{\psi_\lambda(y'')} F))|^{\frac{1}{2}}},$$

où :

$$g_{\psi_\lambda}(y'') := \det(\langle \partial_{y'_i} \psi_\lambda; \partial_{y'_j} \psi_\lambda \rangle_{\mathbb{R}^p}). \quad (4.29)$$

Ainsi, il nous reste à montrer que :

$$\det[\partial_{y'} F(\psi_\lambda(y''))]^2 g_{\psi_\lambda}(y'') = \det(d_{\psi_\lambda(y'')} F^t(d_{\psi_\lambda(y'')} F)) \quad (4.30)$$

D'après (4.28) , on a :

$$g_{\psi_\lambda}(y'') = \det(\delta_{ij} + \langle \partial_{y'_i} \Phi(\lambda, y''); \partial_{y'_j} \Phi(\lambda, y'') \rangle_{\mathbb{R}^q}).$$

Puis en dérivant par rapport à y'_i l'identité : $F(\Phi(\lambda, y''), y'') = \lambda$, on obtient :

$$\partial_{y'_i} \Phi(\lambda, y'') = -[\partial_{y'} F(\psi_\lambda(y''))]^{-1} \partial_{y'_i} F(\psi_\lambda(y'')),$$

de sorte que :

$$g_{\psi_\lambda}(y'') = \det(\delta_{ij} + \langle [\partial_{y'} F(\psi_\lambda(y''))]^{-1} \partial_{y'_i} F(\psi_\lambda(y'')); [\partial_{y'} F(\psi_\lambda(y''))]^{-1} \partial_{y'_j} F(\psi_\lambda(y'')) \rangle).$$

On note donc $A := \partial_{y'} F(\psi_\lambda(y''))$, $x_i := \partial_{y'_i} F(\psi_\lambda(y''))$ et B la matrice $q \times (p - q)$ de vecteurs colonnes les x_j . On constate alors que :

$$(\langle A^{-1} x_i, A^{-1} x_j \rangle) = {}^t B^t A^{-1} A^{-1} B.$$

Par ailleurs, la matrice jacobienne de F en (λ, y'') est égale à $\left(A \mid B \right)$. D'où :

$$\det(d_{\psi_\lambda(y'')} F^t(d_{\psi_\lambda(y'')} F)) = \det(A^t A + B^t B).$$

Pour obtenir (4.30), il reste donc à prouver le lemme suivant :

Lemme 4.4.2 Soient A une matrice inversible de taille $q \times q$, et B une matrice de taille $q \times (p - q)$ (où $p \leq q$). Alors, on a :

$$\det(A^2) \det(I_{p-q} + {}^t B^t A^{-1} A^{-1} B) = \det(A^t A + B^t B)$$

Preuve du lemme : On envisage spontanément les matrices :

$$M_1 := \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_{p-q} \end{array} \right), \quad M_2 := \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} {}^t A^{-1} & 0 \\ \hline -{}^t B^t A^{-1} & I_{p-q} \end{array} \right), \quad \text{et } M_3 := \left(\begin{array}{c|c} {}^t A & -A^{-1} B \\ \hline {}^t B & I_{p-q} \end{array} \right).$$

Puis on définit la matrice $M := M_1 M_2 M_3$, et on décide de calculer $\det(M)$ de deux façons différentes :

1ère méthode : En calculant $M_4 := M_1 M_2$ puis $M_4 M_3$, on trouve :

$$\det(M) = \det(I_{p-q} + {}^t B^t A^{-1} A^{-1} B).$$

2ème méthode : En calculant $M_5 := M_1 M_3$, puis en écrivant $\det(M) = \det(M_2) \det(M_5)$,

on trouve :

$$\det(M) = \det(A^{-2}) \det(A^t A + B^t B).$$

Ceci achève la preuve du lemme, et donc du théorème . ■

4.5 Appendice 5 : Notations, formulaire

G =groupe de Lie.

p =dimension de G .

\mathcal{G} = algèbre de Lie du groupe G .

$M(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ si $g \in G$ (Même chose pour $M(A)$ lorsque $A \in \mathcal{G}$).

$Stab(z) := \{g \in G \text{ s.t. } gz = z\}$ (pour $z \in \mathbb{R}^{2d}$) (parfois noté H_z).

H_0 =sous-groupe auquel sont conjugués les sous groupes d'isotropie sous l'hypothèse **(Lie.2)**.

$F_A(z) := \frac{1}{2} \langle Az, Jz \rangle$ (si $A \in \mathcal{G}$).

$\Omega_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{G}} F_A^{-1}(\{0\})$.

$\Omega_{red} = \Omega_0/G$.

$\pi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_{red}$: projection canonique sur Ω_{red} .

$\tilde{H} : \Omega_{red} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par $\tilde{H}(\pi(z)) = H(z)$.

$\tilde{\Phi}_t(x) = \text{flot de } \tilde{H}$.

$\tilde{\Sigma}_E := \{\tilde{H} = E\} \subset \Omega_{red}$.

$\mathcal{C}_{E,T} = \{(t, z, g) \in -T, T \times \mathbb{R}^{2d} \times G : z \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E), M(g)\Phi_t(z) = z\}$.

$\Phi_t(x) = \text{flot de } H$.

$F_t(z)$ =différentielle de $t \mapsto \Phi_t(z)$.

A, B, C, D sont tels que $F_t(z) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

$M_0 = (C + iD)(A + iB)^{-1}$

$W_t = (I - iM_0)^{-1}(I + iM_0)$ ou encore $\frac{1}{2}(I + W_t) = (I - iM_0)^{-1}$. On a $\|W_t\| < 1$.

$\widehat{W}_t := \begin{pmatrix} W_t & -iW_t \\ -iW_t & -W_t \end{pmatrix}$.

$\varphi_E = \varphi_1 + i\varphi_2$.

$\varphi_1(t, \alpha, g) := (E - H(\alpha))t + \frac{1}{2}M(g^{-1})\alpha J\alpha - \frac{1}{2} \int_0^t (\alpha_s - M(g^{-1})\alpha) J\dot{\alpha}_s ds$.

$\varphi_2(t, \alpha, g) := \frac{1}{4} \langle (I - \widehat{W}_t)(\alpha_t - M(g^{-1})\alpha); (\alpha_t - M(g^{-1})\alpha) \rangle$.

$d(t, z, g) := \overline{\chi(g)} \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi_E''(t, z, g)|_{\mathcal{N}(t, z, g)^Y}}{i} \right) \det_+^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{A+iB-i(C+iD)}{2} \right)$.

$\mathcal{L}_{red} := \{t \in \mathbb{R} : \exists g \in G, \exists z \in \Omega_0 \cap \Sigma_E : M(g)\Phi_t(z) = z\}$.

$\Gamma_0 := \{(z, g) \in \Omega_0 \times G : M(g)z = z\}$.

$W_0 := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : M(g)z = z\}$.

$\tilde{F}_x(t) = \text{différentielle de } x \rightarrow \tilde{\Phi}_t(x)$.

$W_{t_0} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : z = M(g)\Phi_{t_0}(z)\}$.

$N_{I, \chi}(h) := \text{Tr}(\mathbb{1}_I(\widehat{H}_\chi)) = \text{fonction de comptage des valeurs propres de } \widehat{H}_\chi$.

$\mathcal{G}_\chi(h) = \text{Tr} \left(\psi(\widehat{H}_\chi) f \left(\frac{E - \widehat{H}_\chi}{h} \right) \right) = \text{densité spectrale régularisée de } \widehat{H}_\chi$.

$\Lambda_{\bar{\gamma}} := \{(z, g) \in (\Omega_0 \cap \Sigma_E) \times G : z = M(g)\Phi_{t_0}(z) \text{ et } \pi(z) \in \bar{\gamma}\}$.

$P_{red}(E, t_0) = \text{l'ensemble des orbites périodique de } \widetilde{\Sigma}_E \text{ ayant } t_0 \text{ pour période}$.

$S_\gamma(t_0) = \int_0^{t_0} pdq$.

Hypothèses principales

(H.0) Il existe $C > 0$, $C_\alpha > 0$, $m > 0$ tels que H est minorée sur rdd et

$$\langle H(z) \rangle \leq C \langle H(z') \rangle + \langle z - z' \rangle^m, \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^{2d}.$$

$$|\partial_z^\alpha H(z)| \leq C_\alpha \langle H(z) \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2d}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2d}.$$

(H.1) E est fixé dans \mathbb{R} . Il existe $\delta E > 0$ tel que $\Lambda_E := H^{-1}([E - \delta E, E + \delta E])$ est compact dans \mathbb{R}^{2d} et sans point critique pour H .

(H.2) $T > 0$ est fixé et f est une fonction réelle de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Supp}(\hat{f}) \subset]-T, T[$, ψ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est réelle positive, à support compact dans $]E - \delta E, E + \delta E[$.

Formulaire

$$\forall A \in \mathcal{G}, \forall z \in \Omega_0, \quad \langle Az, \nabla H(z) \rangle = 0. \quad (4.31)$$

$$\forall A \in \mathcal{G}, \forall B \in \mathcal{G}, \forall z \in \Omega_0, \quad \langle Az, JBz \rangle = 0. \quad (4.32)$$

Si $M(g)\Phi_t(z) = z$, alors $M(g)F_z(t)J\nabla H(z) = J\nabla H(z)$ et ${}^t[M(g)F_z(t)]\nabla H(z) = \nabla H(z)$. (4.33)

$$\dim \Omega_0 = 2d - k, \quad \dim \Omega_{red} = 2d - 2k. \quad (4.34)$$

$$\dim \Gamma_0 = 2d - 2k + p, \quad \dim W_0 = 2d - 2k + p - 1, \quad \dim W_{t_0} = p + k + 1. \quad (4.35)$$

$$d_z \pi(J\nabla H(z)) = X_{\tilde{H}}(\pi(z)). \quad (4.36)$$

$$\forall z \in \Omega_0, \quad \ker d_z \pi = \mathcal{G}z. \quad (4.37)$$

Si $z = M(g)\Phi_{t_0}(z)$, alors $M(g)F_z(t_0)T_z\Omega_0 \subset T_z\Omega_0$, et, sur $T_z\Omega_0$, on a :

$$d_z \pi \circ M(g)F_z(t_0) = \tilde{F}_{\pi(z_0)}(t_0) \circ d_z \pi. \quad (4.38)$$

Bibliographie

- [AJS] W. O. Amrein, J.M. Jauch, K.B. Sinha (1977) : *Scattering theory in quantum mechanics. Physical principles and mathematical methods*, Lecture Notes and Supplements in Physics, 16. London etc. : W. A. Benjamin, Inc. XXIII.
- [A] M. Audin (2001) : *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours spécialisés, 8, Société Mathématiques de France & EDP Sciences.
- [Ab-Ma] R. Abraham, J.E. Marsden (1978) : *Foundations of mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.
- [Ar] V.I. Arnold (1978) : *Mathematical methods of classical mechanics*, The Springer-Verlag, New York Inc.
- [B] A.F. Beardon (1983) : *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, New York.
- [BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet (1971) : *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, 194. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. VII.
- [B-P] D. Biswas, S. Pal (1998) : *Symmetry reduction and semiclassical analysis of axially symmetric systems*, Phys. Rev. E57, 1475.
- [B-P-U] D. Borthwick, T. Paul, A. Uribe (1998) : *Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators*, Ann. Inst. Fourier 48, No.4, 1189-1229.
- [Br] G.E. Bredon (1972) *Introduction to compact transformation groups* Pure and Applied Mathematics. Vol. 46. New York-London : Academic Press. XIII, 459 p.
- [B-H] J. Brüning, E. Heintze (1979) *Representations of compact Lie groups and elliptic operators*, Invent. Math. 50, 169-203.
- [Ch1] L. Charles (2000) : *Aspects semi-classiques de la quantification géométrique*, Thèse de doctorat, Université Paris IX.
- [Ch2] L. Charles (2004) : *Toeplitz operators and Hamiltonian Torus Action*, Preprint, 2004.
- [CRR] M. Combescure, J. Ralston, D. Robert (1999) : *A proof of the Gutzwiller semiclassical trace formula using coherent states decomposition*, Commun. Math. Phys., **202**, 463-480

- [CR] M. Combes, D. Robert (1997) : *Semiclassical spreading of quantum wave packets and applications near unstable fixed point of the classical flow*, Asymptotic Anal. **14**,377-404
- [Cr] S.C. Creagh (1993) *Semiclassical mechanics of symmetry reduction*, J. Phys. A, Math. Gen. **26**, No.1, 95-118.
- [Do] S. Dozias, (1994) *Opérateurs h -pseudodifférentiels à flot périodique*, Thèse de doctorat, Paris XIII.
- [Don] H. Donnelly (1978) *G-spaces, the asymptotic splitting of $L^2(M)$ into irreducibles*, Math. Ann. **237**, pp.23-40.
- [D-G] J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin (1975) *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics* Invent. Math. **29**, 39-79.
- [El.H] Z. El Houakmi (1984) : *Comportement semi-classique du spectre en présence de symétries : Cas d'un groupe fini*, Thèse de 3ème cycle et Séminaire de Nantes.
- [El.H-He] Z. El Houakmi, B. Helffer (1991) : *Comportement semi-classique en présence de symétries. Action d'un groupe compact*, Wissenschaftskolleg, Institute for advanced study, ZU Berlin, ou Asymptotic Anal. **5**, No.2, 91-113 (1991).
- [Fo] G.B. Folland (1989) : *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, New Jersey
- [G-H-L] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine (1987) : *Riemannian geometry*, Universitext. Berlin Springer-Verlag. XI, 248 p.
- [G-U 1] V. Guillemin, A. Uribe (1987) : *Reduction, the trace formula, and semiclassical asymptotics* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **84**, 7799-7801.
- [G-U 2] V. Guillemin, A. Uribe (1989) *Circular symmetry and the trace formula*, Invent. Math. **96**, No.2, 385-423.
- [G-U 3] V. Guillemin, A. Uribe (1990) *Reduction and the trace formula*, J. Differ. Geom. **32**, No.2, 315-347.
- [He] B. Helffer : *Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs elliptiques*, Astérisques
- [He-Ro 1] B. Helffer et D. Robert (1983) : *Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin*, J. Funct. Anal, **53**, 246-268.
- [He-Ro 2] B. Helffer et D. Robert (1984) : *Etude du spectre pour un opérateur globalement elliptique dont le symbole de Weyl présente des symétries I : Action des groupes finis.*, Am. J. Math. **106**, 1199-1236.
- [He-Ro 3] B. Helffer et D. Robert (1986) : *Etude du spectre pour un opérateur globalement elliptique dont le symbole de Weyl présente des symétries II : Action des groupes de Lie compacts.*, Amer. J. of Math., **108**, 973-1000.

- [HKSW] B. Helffer, a. Knauf, H. Siedentop, R. Weikard (1992) : *On the absence of a first order correction for the number of bound states of a Schrödinger operator with Coulomb singularity*, Commun. Partial Differ. Equations 17, No.3/4, 615-639.
- [Ho] L. Hörmander (1983) : *The analysis of linear partial differential operators vol.I* Springer-Verlag.
- [Ho1] L. Hörmander (1968) : *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121, 193-218.
- [Ho2] L. Hörmander (1971) : *Fourier integral operators. I*, Acta Math. 127, 79-183.
- [K] K. Kawakubo (1991) : *The theory of transformation groups*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- [Laud] F. Laudenbach (2000) : *Calcul différentiel et intégral* Publications Ecole Polytechnique.
- [L] B. Lauritzen (1991) : *Discrete symmetries and the periodic-orbit expansions* Phys. Rev. A, Vol 43, number 1 603-606.
- [L-W] B. Lauritzen, N.D. Whelan (1995) : *Weyl expansion for symmetric potentials*, Ann. Phys. 244, No.1, 112-135.
- [Li-Ma] P. Libermann, C.M. Marle (1986) : *Géométrie symplectique. Bases théoriques de la mécanique*, Tome II et III, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 21. Paris : U.E.R. de Mathématiques.
- [M-W] J. Marsden et A. Weinstein (1974) : *reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Mathematical Phys. 5, pp.121-130.
- [Me1] K.R. Meyer (1999) : *Periodic solutions of the N-body problem*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
- [Me2] K.R. Meyer (1973) : *Symmetries and integrals in mechanics, Dynamical Systems*, Academic Press, New-York, 259-72
- [M-H] K.R. Meyer et G.R. Hall (1991) : *Introduction to hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag.
- [Mn-Te] R. Mneimé, F. Testard (1986) : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann.
- [Or] J.P. Ortega (1998) : *Symmetry, Reduction, and Stability in Hamiltonian Systems*, Ph.D. Thesis. University of California, Santa Cruz. Disponible à l'adresse internet : <http://www.inln.cnrs.fr/~ortega/books/books.html>
- [Or-Ra] J.P. Ortega, T.S. Ratiu (2004) *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, Progress in Math., vol.222, Birkhäuser (Boston, Mass.).
- [P-U] T. Paul, A. Uribe (1991) : *Sur la formule semi-classique des traces* C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 313, No.5, 217-222.

- [P-U2] T. Paul, A. Uribe (1995) : *The semi-classical trace formula and propagation of wave packets*, J. Funct. Anal. 132, No.1, 192-249.
- [Pi] G. Pichon (1973) : *Groupes de Lie. Représentations linéaires et applications*, Hermann, Paris.
- [R] J.M. Robbins (1989) : *Discrete symmetries in periodic-orbit theory*, Phys. Rev. A, Vol 40, number 4, 2128-2136.
- [Ro] D. Robert (1987) : *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Math., vol.68, Birkhäuser, Basel.
- [Ro1] D. Robert (2001) : *Remarks on Asymptotic solutions for time dependent Schrödinger equations*, Optimal Control and Partial Differential Equations, IOS Press p.188-197.
- [Ro2] D. Robert (1987) : *Analyse semi-classique de l'effet tunnel [d'après B. Helffer et J. Sjöstrand]*, Sémin. Bourbaki, 38ème année, Vol. 1985/86, Exp. No.665, Astérisque 145/146, 257-281.
- [Ru] W. Rudin (1973) : *Functional Analysis*, MacGraw-Hill, Paris.
- [S-Z] J. Sjostrand, M. Zworski : *Quantum monodromy and semi-classical trace formulae*, J. Math. Pures Appl., IX. Sér. 81, No.1, 1-33 (2002).
- [Se] J.P. Serre (1967) : *Représentations linéaires de groupes finis*, Hermann, Paris.
- [Si] B. Simon (1996) : *Representations of finite and compact groups*, Graduate Studies in Math., Amer. Math. Soc.
- [W] H. Weyl (1947) : *The theory of groups and quantum mechanics*, New York : Dover Publications. XVII.
- [Y] D. Yafaev (1992) : *Mathematical scattering theory. General theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.