Etude non linéaire et arithmétique de la synchronisation des systèmes : application aux fluctuations de basse fréquence des oscillateurs ultra-stables

dos Santos Serge

▶ **To cite this version:**

dos Santos Serge. Etude non linéaire et arithmétique de la synchronisation des systèmes : application aux fluctuations de basse fréquence des oscillateurs ultra-stables. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Franche-Comté, 1998. Français. NNT : . tel-00009255

HAL Id: tel-00009255

https://theses.hal.science/tel-00009255

Submitted on 13 May 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 690 **Année : 1998**

Étude non linéaire et arithmétique de la synchronisation des systèmes : application aux fluctuations de basse fréquence des oscillateurs ultra-stables

THÈSE

soutenue le 30 Novembre 1998

pour l'obtention du

Grade de Docteur de l'Université de Franche-Comté

(Spécialité Sciences Pour l'Ingénieur)

par

Serge Dos Santos

Composition du jury

Président :	Daniel Hauden	Professeur à l'ENSMM de Besançon
Rapporteurs :	Claude Audoin	Directeur de Recherche CNRS à l'Université d'Orsay-Paris XI
	Georges Kamarinos	Directeur de Recherche CNRS à l'Institut National Polytechnique (ENSERG) de Grenoble
Examinateurs :	Eva Bayer-Fluckiger	Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Franche-Comté
	Raymond J. Besson	Professeur à l'ENSMM de Besançon
	Michel Remoissenet	Professeur Émérite de l'Université de Bourgogne
Directeur de Thèse :	Michel Planat	HDR, Chargé de Recherche CNRS au LPMO à Besançon

UFR Sciences et Techniques
Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs
Centre National de la Recherche Scientifique

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

N° d'ordre : 690 **Année : 1998**

Étude non linéaire et arithmétique de la synchronisation des systèmes : application aux fluctuations de basse fréquence des oscillateurs ultra-stables

THÈSE

soutenue le 30 Novembre 1998

pour l'obtention du

Grade de Docteur de l'Université de Franche-Comté

(Spécialité Sciences Pour l'Ingénieur)

par

Serge Dos Santos

Composition du jury

Président :	Daniel Hauden	Professeur à l'ENSMM de Besançon
Rapporteurs :	Claude Audoin	Directeur de Recherche CNRS à l'Université d'Orsay-Paris XI
	Georges Kamarinos	Directeur de Recherche CNRS à l'Institut National Polytechnique (ENSERG) de Grenoble
Examinateurs :	Eva Bayer-Fluckiger	Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Franche-Comté
	Raymond J. Besson	Professeur à l'ENSMM de Besançon
	Michel Remoissenet	Professeur Émérite de l'Université de Bourgogne
Directeur de Thèse :	Michel Planat	HDR, Chargé de Recherche CNRS au LPMO à Besançon

UFR Sciences et Techniques
Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs
Centre National de la Recherche Scientifique

Mis en page avec la classe TheseCRIN.

Remerciements

Le travail qui suit est l'accomplissement de l'un de mes rêves de jeunesse.

Il est le fruit d'une passion pour les Sciences Physiques suscitée par les cours suivis durant ma formation universitaire.

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs du Centre National de la Recherche Scientifique localisé à Besançon.

Le sujet de thèse m'a été proposé par Michel Planat, Chargé de Recherche au LPMO, que je remercie vivement pour la confiance qu'il a eue en moi. Je le remercie en particulier pour les nombreuses discussions passionnées que nous avons eues ensemble au cours de ces trois années de recherche.

Ce travail n'aurait sans doute pas vu le jour sans la volonté du Professeur Daniel Hauden, Directeur du LPMO, qui a accepté de m'accueillir au sein de son laboratoire ; je lui exprime, dans ces lignes, toute ma gratitude.

Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail :

- Le Professeur Daniel Hauden, qui a accepté la présidence du jury.
- Messieurs Claude Audoin et Georges Kamarinos, Directeurs de Recherche CNRS, qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.
- Madame Eva Bayer-Fluckiger, directeur de Recherche CNRS au Département de Mathématique de l'Université de Besançon, est également remerciée pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail.
- Le Professeur Raymond Besson, qui a aimablement accepté de faire partie du jury.
- Que le Professeur Michel Remoissenet trouve ici toute ma reconnaissance pour m'avoir dirigé vers Michel Planat.

Mais ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien matériel de nombreuses autres personnes auxquelles je tiens aussi à manifester toute ma gratitude :

- Franck Lardet-Vieudrin, Ingénieur d'étude au LPMO, pour les judicieux conseils d'électronicien et son aide précieuse.

– Jacques Groslambert et Gilles Marianneau, Ingénieurs de Recherche au LPMO, pour m'avoir fait partager leurs grandes connaissances des oscillateurs et de leur mesure.

– David Howe, du NIST (Colorado) et François Vernotte de l'Observatoire de Besançon, d'avoir accepté d'examiner certains fichiers expérimentaux.

– Les Professeurs Vladimir Matveev, de l'Université de Bourgogne, et Philippe Bénilan de l'Université de Franche-Comté sont également remerciés de m'avoir consacré de leur temps à compléter mes connaissances mathématiques.

– Plus récemment est née une collaboration avec Jacky Cresson, Maître de Conférence au Laboratoire de Mathématique de Besançon. Les quelques discussions que l'on a abordées ont été très enrichissantes. Qu'il soit également remercié.

– Je tiens également à citer certaines personnes que je n'ai jamais vues mais qui, par l'usage du courrier électronique, ont bien voulu répondre à mes interrogations : T. Arrechi, P. Cvitanovic, G. Ruppeiner, L. Casetti, O. Babelon, V. Kroupa sont remerciés pour avoir contribué à l'élaboration de mon point de vue.

– Mesdames Anne Basrour et Corinne Martin ont participé, ainsi que mon épouse Marie-Hélène, à la dactylographie des documents préparatoires à l'élaboration de cette thèse. Je leur dois beaucoup pour la patience qu'elles ont eue à me déchiffrer. Qu'elles soient également remerciées.

Je tiens également à remercier tous les membres du laboratoire avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à discuter. Je garderai un excellent souvenir de l'ambiance sympathique qui règne au LPMO. Que Neila Kaou, Emmanuelle Henry-Briot, Bruno Piranda et surtout Laurent Couteleau me pardonnent pour les instants, certainement interminables pour eux, auxquels ils ont dû se soumettre pour me supporter.

Enfin, je témoigne de toute ma gratitude à Marie-Hélène, ma famille et mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté au cours de mes études.

À mes parents

À Marie-Hélène

Tout vrai chercheur oscille entre deux pôles contraires mais complémentaires :
l'inspiration, la fantaisie, la liberté d'une part ;
la discipline et les contraintes de l'autre.

Victor Vasarely
(1908-1997)

Table des matières

Introduction **1**

Partie I Les oscillateurs, leurs mesures et leurs propriétés de stabilité **9**

Chapitre 1 Fonctionnement d'un oscillateur **11**

1.1 Définition d'un système oscillant 11

1.2 Construction des systèmes oscillants : les oscillateurs 12

1.2.1 Description générale de l'oscillateur 13

1.2.2 Critère d'oscillation de Barkhausen 14

1.3 Les différents oscillateurs 16

1.3.1 L'oscillateur mécanique 16

1.3.2 Les oscillateurs électroniques 17

1.3.3 Les oscillateurs à relaxation 19

1.4 Conclusion 22

Chapitre 2 Propriétés et caractérisation des oscillateurs **23**

2.1 Propriétés des oscillateurs 23

2.1.1 Une fréquence de plus en plus précise... 23

2.1.2 ... à la base des unités de la Physique 23

2.1.3 Stabilité court terme : les oscillateurs à quartz 24

2.2 Caractérisation des oscillateurs 26

2.2.1 Mesures dans le domaine spectral 26

2.2.2 Mesures dans le domaine temporel 34

2.3 Les différents types de bruit 39

2.3.1 Les sources de bruit 39

2.3.2 Le bruit blanc (f^0) 40
2.3.3 Transformation du bruit dans les oscillateurs - Modèle de Leeson 46
2.3.4 Le bruit en $1/f$ (flicker de fréquence) 50
2.4 Conclusion 55

Chapitre 3 Méthodes de traitement du signal de l'oscillateur 57
3.1 Rappel des méthodes statistiques 57
3.1.1 Quelques définitions de base de la théorie des probabilités . . . 57
3.1.2 Cas particulier des processus gaussiens 59
3.1.3 Cas des variables indexées par le temps 61
3.2 Classes de processus 62
3.2.1 Processus stationnaires 62
3.2.2 Processus non stationnaires 65
3.3 Analyse de Fourier des signaux temporels 66
3.3.1 Théorème de Fourier 66
3.3.2 Transformation de Fourier 67
3.4 Conclusion 70

Partie II Propriétés générales des systèmes non linéaires 73

Chapitre 4 Introduction générale sur les systèmes non linéaires 75
4.1 Mise en évidence de la non-linéarité des oscillateurs 75
4.1.1 La non-linéarité du résonateur à quartz 75
4.1.2 Régime multimodes de l'oscillateur 77
4.1.3 Non-linéarités de l'amplificateur 79
4.1.4 Équation de base de l'oscillateur 80
4.2 Propriétés des systèmes non linéaires 83
4.2.1 Définition d'un système non linéaire 83
4.2.2 Linéarisation des systèmes linéaires 85
4.2.3 Systèmes non linéaires conservatifs 85
4.3 Perturbation des systèmes non linéaires 88
4.3.1 Perturbation d'un système intégrable à deux degrés de liberté . 88
4.3.2 Perturbation d'un système non intégrable à un degré de liberté 92
4.4 Notion de synchronisation 94

4.4.1 Sur la synchronisation des systèmes 96
4.4.2 Absence de synchronisation dans les systèmes linéaires 96
4.4.3 Couplage d'oscillateurs non linéaires : éléments de bibliographie 97
4.5 Conclusion 100

Chapitre 5 Caractérisation de la dynamique non linéaire 101
5.1 Méthodes classiques 101
5.1.1 Section de Poincaré 102
5.1.2 L'application standard 102
5.2 Notions d'invariance d'échelle 108
5.2.1 Introduction 108
5.2.2 Les fractals 108
5.3 Étude du mapping d'Arnold 110
5.3.1 Nombre de rotation 110
5.3.2 L'escalier du diable 111
5.3.3 Stabilité structurelle de la synchronisation 113
5.3.4 Dépendance en fonction du couplage non linéaire 116
5.3.5 Hiérarchie des langues 125
5.4 Une méthode originale : l'analyse diophantienne 128
5.4.1 L'arithmétique et la physique 128
5.4.2 Approximation des réels par les rationnels : analyse diophantienne 129
5.5 Conclusion 133

Partie III Expériences et mise en œuvre des méthodes 135

Introduction et historique 137

Chapitre 6 La boucle à verrouillage de phase en régime non linéaire 139
6.1 Description électronique détaillée de la PLL 140
6.1.1 Le filtre 140
6.1.2 L'amplificateur 141
6.1.3 L'oscillateur contrôlé en tension 141
6.1.4 Le modulateur en anneau ou mélangeur 142
6.2 Présentation des simulations numériques 145
6.3 La PLL dans les bancs de mesure de bruit 146

6.3.1 Mise en équation 146
6.3.2 Solution de l'équation d'Adler 146
6.3.3 Propriétés des solutions 147
6.4 Perturbation de la PLL par des harmoniques 158
6.4.1 Influence d'un harmonique sur la plage de synchronisation . . . 162
6.4.2 Vérifications numériques 164
6.5 Perturbation de la PLL par du bruit blanc 168
6.5.1 Désynchronisation par le bruit blanc 171
6.5.2 Vérification numérique du phénomène de désynchronisation . . 171
6.5.3 Transformation du bruit proche de la zone de synchronisation : apparition de bruit en $1/f$ 178
6.6 Influence du filtre passe-bas dans la PLL 186
6.6.1 L'hystérésis 186
6.6.2 Le régime transitoire 188
6.6.3 Simulations numériques 188
6.7 Propriétés arithmétiques de la PLL 191
6.7.1 Description générale 191
6.7.2 Prise en compte de la symétrie du mélangeur 196
6.7.3 Étude en fonction des paramètres 197
6.8 Résultats et interprétation 203

Chapitre 7 L'expérience de résonance porteuse-enveloppe 205
7.1 Dispositif électronique 205
7.1.1 Réponse impulsionnelle de la ligne 206
7.1.2 Propriétés du modulateur 208
7.1.3 Instrumentation et technique d'acquisition des données 209
7.2 La résonance porteuse-enveloppe et ses propriétés 210
7.2.1 Détails des paliers : observations d'un escalier du diable 211
7.2.2 Méthode de calcul de l'exposant de Hölder α 212
7.2.3 Influences des paramètres expérimentaux 215
7.2.4 Observation d'un mapping bidimentionnel expérimental 218
7.3 Modélisation de l'expérience 221
7.3.1 Équation de Schrödinger non linéaire 221
7.3.2 Modèle schématique de la boucle. 223

Conclusion **229**

Annexes **233**

Annexe A Évolution de la phase Φ **233**

A.1 Cas de la PLL simple 233

A.2 Cas de la PLL perturbée par des harmoniques 235

A.2.1 Propriété de symétrie de la solution 236

A.2.2 Équivalence de l'origine de la perturbation harmonique 237

Annexe B Listing des programmes utilisés **239**

B.1 Résolution numérique d'équation différentielle non linéaire 249

Annexe C Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation **255**

C.1 Calcul de la dissymétrie des droites proches du rationnel p/q 255

C.2 Pente de la droite f($\mu(\nu_G)$) 258

Annexe D Résolutions des équations par logiciel de calcul formel **261**

D.1 Résolution dans le cas synchronisé 261

D.2 Résolution dans le cas non synchronisé 262

D.3 Vérification de la propriété de symétrie 262

Annexe E Tableau numérique des valeurs **265**

Annexe F Conception électronique des circuits imprimés **267**

F.1 Composition électronique du mélangeur doublement équilibré. 267

F.1.1 Liste des composants 267

F.2 Composition électronique de l'amplificateur faible bruit. 268

F.2.1 Schémas électroniques 268

Table des figures **271**

Index **275**

Bibliographie **277**

Introduction

ECONNUE officiellement en 1971, la mesure des fluctuations de la fréquence des oscillateurs se réalise dans les deux domaines du temps-fréquence : le domaine temporel où l'on étudie la stabilité de la période par des méthodes statistiques, et le domaine fréquentiel où l'on mesure les propriétés spectrales de la fréquence.

Dans le domaine temporel, la valeur moyenne de cette fréquence est évaluée. Un intervalle de confiance est estimé par une certaine valeur de l'écart type appelé variance d'Allan. La stabilité de l'oscillateur est donnée en fonction du nombre de données sur lesquelles la statistique est effectuée. La stabilité relative d'un bon oscillateur électronique mesurée sur une seconde est de l'ordre de 10^{-13}. Si l'on était capable de maintenir la fréquence, la durée de vie et la stabilité d'une horloge construite à partir de cet oscillateur pendant 10^{+13}s, c'est-à-dire environ 300 siècles, celle-ci ne varierait pas plus d'une seconde au moment de sa dernière oscillation.

Dans le domaine spectral, la mesure des fluctuations de phase ou de fréquence est réalisée à partir d'un principe de démodulation avec suppression de la porteuse. L'étude des oscillateurs dans le domaine spectral consiste en l'étude de ces spectres de fluctuations de fréquence et de phase.

Une augmentation des fluctuations se traduit par une augmentation du niveau du spectre. L'électronicien s'est donc tourné vers l'étude de la forme avec laquelle cet augmentation se produit. Une certaine caractéristique de décroissance de la raie spectrale en loi puissance est observée. La loi s'écrit en $1/f^2$, $1/f$, f^0, f^1, f^2 où f est la fréquence de Fourier. Cette décroissance est systématiquement observée dans les oscillateurs.

Actuellement, les deux seules méthodes d'analyses spectrale et temporelle sont quasiment équivalentes, et à l'échelle de précision actuelle, donnent les mêmes résultats concernant les caractéristiques des oscillateurs. L'essentiel du travail de recherche en vue de l'obtention d'oscillateurs de plus en plus stables consiste en la réduction des fluctuations observées que ce soit dans le domaine temporel ou dans le domaine spectral.

Il se trouve que la limite de stabilité des oscillateurs dans le domaine temporel est

due aux fluctuations dont la densité spectrale est en $1/f$ dans le domaine spectral. Parmi les types de fluctuations, il est donc nécessaire d'apporter plus d'efforts sur la recherche de l'origine de ce bruit de fréquence en $1/f$, même si, bien évidemment, la réduction des autres bruits apporte elle aussi une contribution.

Malheureusement, le problème de la réduction du bruit en $1/f$ pose des difficultés à la hauteur de la méconnaissance de son origine. La fascination (ou le mépris) portée par les physiciens à son égard est amplifiée par sa propriété d'ubiquité. On peut étudier les fluctuations de n'importe quelle variable (physique, biologique ou économique) avec la méthode spectrale, et il se trouve que la caractéristique en $1/f$ apparaît dans les divers domaines (physique, biologie, écologie, etc.), mais aucune certitude quant à son origine n'émerge.

La propriété qui se cache derrière les fluctuations en $1/f$ peut être énoncée ainsi : lorsque la fréquence d'analyse diminue, la probabilité d'obtenir un événement augmente. En d'autres termes, plus on attend longtemps, plus on a de chances qu'un événement quelconque se produise. Déterminer l'origine de ce fait ne semble pas relever du domaine du physicien mais plutôt de celui du philosophe. Cependant, entre leurs deux centres d'intérêt, il existe certainement de nombreuses autres voies à explorer.

Déjà de nombreuses études ont été réalisées afin d'en comprendre un peu plus sur ce bruit en $1/f$. Depuis le modèle phénoménologique de Hooge jusqu'aux théories quantiques d'Handel, des chercheurs comme M. B. Weissmann, R. F. Voss ou P. H. Handel ont essayé, dans des articles devenus des références, de répertorier les grands domaines où apparaissent du bruit en $1/f$, ou du bruit en loi de puissance en $1/f^{\alpha}$ en général, avec α proche de 1. Malgré l'effort de ces chercheurs, il n'existe pas, à ce jour, d'explication précise de l'origine du bruit en $1/f$; on répertorie seulement les propriétés.

Signature d'un comportement collectif, processus à mémoire, conséquence d'effets dispersifs sont autant de causes difficilement connectables les unes aux autres, associées à la présence du bruit en $1/f$. Le comportement totalement opposé d'effets à la fois collectifs et dispersifs pourtant générateurs de bruit en $1/f$ est le signe de la grande difficulté d'ordre conceptuel pour son étude. Mais, en plus d'apparaître dans des systèmes que l'on estime plus ou moins aisés à étudier, il présente cette surprenante caractéristique : sa présence dans des systèmes très complexes. Toutefois, une certaine régularité est nécessaire dans cette complexité pour que le bruit en $1/f$ puisse émerger du bruit blanc, fluctuations sans corrélations. Le problème est complexe et ces faits nous aident à comprendre pourquoi sa modélisation est si difficile à établir.

Depuis l'avènement de l'informatique et de l'utilisation des méthodes numériques, la modélisation du comportement, de l'évolution et des propriétés des systèmes a fait prendre conscience au physicien de l'importance de la physique non linéaire. Cette nouvelle approche de la physique, déjà initiée par H. Poincaré au début du XX^{e} siècle, a permis de mettre à jour de nouveaux phénomènes comme le chaos, et d'en expliquer d'autres comme la turbulence, par exemple. Le succès dont bénéficie aujourd'hui la physique non linéaire est entretenu par la difficulté de ces méthodes d'analyse, combinée à la beauté des images et des phénomènes engendrés. Les phénomènes peuvent non seulement être d'une très grande régularité comme les solitons ou la tache de la planète Jupiter, mais aussi globalement imprévisibles comme la circulation atmosphérique.

Il est alors tentant d'établir une connexion entre la complexité de la non-linéarité et celle de l'origine du bruit en $1/f$. Elle n'a pas échappé à quelques chercheurs comme P. H. Handel, qui l'associe à la conséquence d'effets non linéaires d'origine quantique dans les systèmes présentant en outre une certaine homogénéité. Elle n'a pourtant pas fait l'unanimité auprès de la communauté scientifique car, elle aussi, ne se vérifie que dans le contexte restreint étudié par l'auteur.

Pourtant de nombreuses propriétés communes sont à constater comme la présence simultanée de régularité et de complexité, certaines propriétés de comportements collectifs, des conditions de seuil, des propriétés multiéchelles, etc. Il reste encore beaucoup de travail à fournir pour confirmer ou infirmer la corrélation du bruit en $1/f$ et de la non-linéarité.

Pour pouvoir effectuer un travail de qualité optimale, la présence d'un bon support et de bons outils facilite la tâche. Il n'est pas de domaine plus favorable que celui des oscillateurs pour l'étude des fluctuations en général et surtout du bruit en $1/f$ puisque c'est ce dernier qui limite leur stabilité. De plus, avec les qualités d'exactitude de la fréquence délivrée par les oscillateurs, qui en font d'elle la mesure physique réalisée avec le plus d'exactitude, on ne saurait trouver meilleurs candidats pour son étude.

En revanche, le choix de l'outil pose des problèmes. L'essentiel des résultats concernant les oscillateurs étant lié aux méthodes de mesures spectrale et temporelle, l'utilisation de nouveaux outils nécessite de nouveaux investissements et de nouvelles contraintes autant théoriques qu'expérimentales. La question est alors de se demander si ce choix est réellement indispensable pour continuer le développement de la recherche. Il existe malheureusement un fait indubitable : si l'on veut confirmer la corrélation entre la présence de bruit en $1/f$ et les effets non linéaires, la méthode spectrale de Fourier présentera un certain seuil de validité. Sachant qu'il est difficile à ce jour d'évaluer la position de ce seuil, nous ne sommes pas à l'abri d'une mauvaise interprétation liée à une mauvaise mesure

expérimentale.

Le regain d'intérêt vis-à-vis des phénomènes non linéaires a naturellement contribué à l'apparition de nouvelles méthodes d'analyse spécialement adaptées à ceux-ci. Elles sont établies en fonction des propriétés des systèmes non linéaires par la recherche de quantités invariantes, susceptibles de compléter, voire remplacer l'analyse spectrale des systèmes linéaires. Malheureusement, il n'existe pas, à ce jour, de méthode d'analyse non linéaire à la hauteur de l'analyse spectrale linéaire de Fourier. Chaque point de vue à adopter doit être pris en fonction du type de propriété recherchée, et du niveau de non-linéarité. Le cas de l'oscillateur ultra-stable est complexe. C'est un système non linéaire mais faiblement non linéaire.

En 1954, A. N. Kolmogorov présente un résultat qui allait devenir, quelques années plus tard le théorème KAM. Il se révèle aujourd'hui d'une grande utilité dans le cadre de la physique non linéaire. C'est un résultat relatif au système intégrable faiblement perturbé. Il confirme la présence d'invariants dans une dynamique faiblement non linéaire et l'associe à une propriété arithmétique entre les fréquences propres du système et celles de la perturbation.

De la complexité de ces systèmes ressort alors des invariants arithmétiques identifiant les résonances ; la qualité des résonances se mesure par les propriétés arithmétiques des variables. Le lien entre les phénomènes de résonance et l'arithmétique est alors préservé et intervient encore dans la mesure des propriétés des systèmes faiblement non linéaires.

Les méthodes de mesure et de caractérisation des oscillateurs doivent avoir une progression technologique parallèle à l'évolution de la performance des oscillateurs. Ce sont deux éléments devant évoluer en symbiose. Si l'on veut traiter l'influence des non-linéarités de l'oscillateur, il faut aussi réviser celles de leur méthode de mesure.

Comme toute méthode de mesure physique, celle de la fréquence des oscillateurs est basée sur un principe de comparaison, que ce soit dans le domaine spectral ou temporel. On mesure une quantité par rapport à une autre quantité que l'on suppose invariante au cours de la mesure. Cependant la référence utilisée pour la mesure des oscillateurs ultra-stables n'est que légèrement meilleure que l'oscillateur que l'on mesure. Pour esquiver le problème, on choisit de soumettre le système à mesurer et le système de mesure aux mêmes fluctuations par un processus d'asservissement. Nous sommes donc dans le cas où la méthode de mesure n'est plus négligeable et perturbe le système que l'on veut mesurer.

Étudier ce processus d'asservissement et ses effets non linéaires c'est étudier la classe des phénomènes de synchronisation. La synchronisation apparaît à tous les niveaux, non

seulement dans le principe même de la mesure du bruit où l'oscillateur à mesurer et l'oscillateur de référence sont couplés, mais aussi dans le fonctionnement interne de l'oscillateur où la réponse du résonateur est couplée à l'excitation extérieure. La signature de la synchronisation se mesure par la constance d'une certaine variable, ou la valeur nulle de sa dérivée, ce qui est équivalent. Le phénomène de synchronisation apparaît ainsi dans le système bouclé de la mesure du bruit, dans celui du fonctionnement de l'oscillateur, mais aussi dans n'importe quel système oscillant. Si nous voulons mesurer la synchronisation par la capacité d'adaptation d'un système à son environnement extérieur, nous sortons alors du contexte de la physique et nous traitons un problème bien plus général : quel type de fluctuation génère un système qui cherche une certaine synchronisation avec son environnement, et réagit-il linéairement face aux fluctuations de cet environnement ?

Nous nous proposons dans ce mémoire de confirmer la thèse selon laquelle certaines formes de fluctuations générées par un système résultent de la transformation de fluctuations internes issue de la réaction de ce système à son environnement. Cette réaction, limitée par un seuil de détection, un seuil de résolution et une forme de saturation, implique de ce fait la nécessité d'un comportement non linéaire du système.

Pour cela, nous exposerons dans une première partie l'objet sur lequel on travaille : l'oscillateur.

Nous insisterons tout d'abord sur ses propriétés d'existence et de fonctionnement dans le premier chapitre introductif. Nous rappellerons les propriétés des variables issues de la condition d'existence de l'oscillation. On insistera sur l'importance de la condition de phase nulle traduisant une « parfaite » réaction entre l'oscillateur et son environnement, cette réaction nécessitant un comportement non linéaire de systèmes bouclés.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, les propriétés générales des oscillateurs seront rappelées en insistant sur la grande précision de ces objets et leur importance dans la technologie moderne. Nous présenterons la caractéristique des fluctuations de fréquence. Un paragraphe sera consacré aux deux méthodes expérimentales actuelles : l'analyse spectrale et l'analyse temporelle. On rappellera l'importance de la propriété de comparaison utilisée pour la mesure des oscillateurs.

Enfin, nous aborderons dans le dernier chapitre de cette partie les propriétés des outils utilisés pour la caractérisation actuelle des oscillateurs, les hypothèses relatives aux traitements statistiques, et les propriétés de l'analyse spectrale linéaire. On évoquera également les conséquences d'hypothèses plus générales et notamment la présence de non-linéarités et les conséquences de non stationnarité. On en profitera pour rappeler le fait

que ces méthodes d'analyse résultent d'une certaine projection du signal compte tenu des hypothèses relatives à son comportement, et qu'elles ne sont, à ce titre, qu'un point de vue particulier de la caractérisation des oscillateurs.

La deuxième partie de ce mémoire sera consacrée à l'étude des propriétés des systèmes physiques non linéaires.

Le quatrième chapitre sera une introduction générale sur ces systèmes dans le cadre du fonctionnement d'un oscillateur. On rappellera les principales sources de non-linéarité dans les oscillateurs. Ensuite, après avoir défini « le système non linéaire », nous rappellerons ses différentes propriétés par rapport aux perturbations. La notion de synchronisation sera ensuite abordée et un système d'équations non linéaires modélisant la synchronisation dans l'oscillateur sera établi.

C'est dans le cinquième chapitre que nous développerons les méthodes non linéaires choisies pour traiter le problème de la synchronisation dans les oscillateurs. Après avoir rappelé quelques méthodes classiques, nous détaillerons la caractérisation du système non linéaire par la carte d'Arnold qui constitue un cas particulier de section de Poincaré de l'oscillateur. Nous définirons ensuite les propriétés générales de cette section de Poincaré en insistant sur celles relatives à l'arithmétique des paramètres. Enfin, un paragraphe consacré aux propriétés arithmétiques des réels sera proposé pour définir l'environnement dans lequel on exploitera les résultats expérimentaux.

La troisième partie traitera des expériences et des simulations numériques réalisées pour appuyer l'importance de cette étude dans la compréhension des phénomènes non linéaires présents dans les oscillateurs.

Dans le sixième chapitre, les propriétés de la boucle à verrouillage de phase seront rappelées dans le contexte de son utilisation dans les bancs de mesure du bruit. Nous développerons ensuite une étude globale de son fonctionnement par des expériences de mélange de fréquences. Nous proposerons un choix judicieux de paramètres expérimentaux pour que l'expérience puisse se modéliser par l'équation non linéaire étudiée théoriquement. Nous présenterons alors les méthodes expérimentales et numériques développées à cet effet, et nous étudierons également le comportement de la boucle lorsque celle-ci fonctionne proche de régimes très instables ou chaotiques. Nous présenterons les résultats relatifs à l'augmentation et la transformation du bruit présent dans le système. Enfin, nous aborderons les résultats expérimentaux originaux dans lesquels une très forte interdépendance entre certaines propriétés arithmétiques des frquences du système et le comportement global de la boucle a été dégagée.

Le septième et dernier chapitre sera consacré à la présentation d'une expérience de

résonance porteuse-enveloppe réalisée à partir d'un dispositif de modulation de fréquence. Les propriétés générales de l'électronique seront présentées et nous rapporterons l'observation expérimentale d'une caractéristique fréquence-amplitude ne pouvant s'expliquer que par les propriétés non linéaires du principe expérimental de modulation choisi. Les expériences réalisées en fonction des nombreux paramètres du système seront présentées, et l'on traitera dans un dernier paragraphe les tentatives de modélisation effectuées.

Une synthèse de ces travaux sera alors proposée et les perspectives d'étude envisagées dans une conclusion générale.

Notons enfin pour avertir le lecteur, que les thèmes abordés sont souvent très développés. C'est à bon escient que nous avons voulu rendre accessible notre travail à un large public composé d'électroniciens, de physiciens et de mathématiciens.

Première partie

Les oscillateurs, leurs mesures et leurs propriétés de stabilité

Chapitre 1

Fonctionnement d'un oscillateur

Dans la grande complexité de la nature et des phénomènes y évoluant, il existe une classe de systèmes particulièrement intéressants à étudier appelés systèmes oscillants. En reprenant la définition du Petit Robert, osciller consiste à :

> *Aller de part et d'autre d'une position moyenne par un mouvement alternatif plus ou moins régulier.*

Aussi surprenant que cela puisse paraître, la nature accepte facilement l'existence de ces systèmes. C'est certainement pour cette raison que cela a intrigué bon nombre de scientifiques en les poussant à étudier ces phénomènes qui ne cessent d'apporter et d'exhiber de nouvelles propriétés.

Nous nous proposons, dans ce premier chapitre, de revenir sur le fonctionnement de l'oscillateur, représentant à part entière des systèmes oscillants, en insistant sur les propriétés communes, observables dans n'importe quel domaine (physique, biologie, économie, sciences humaines, etc.).

1.1 Définition d'un système oscillant

Dans le contexte restreint de la physique et de l'électronique, un système oscillant sera représenté par la présence d'une variable physique (position, intensité, tension, etc.) possédant des propriétés oscillantes (Fig. 1.1).

C'est par cette information générée par le système que l'on repère un système oscillant. Il est capable de produire un signal possédant un mouvement alternatif plus ou moins régulier, pendant une durée suffisamment importante pour le considérer comme oscillant. On lui associe alors un intervalle de temps $T = [t_1, t_2]$, au bout duquel les propriétés physiques $x(t_2)$ à l'instant t_2 sont identiques à celles $x(t_1)$ de l'instant t_1. Cette durée T

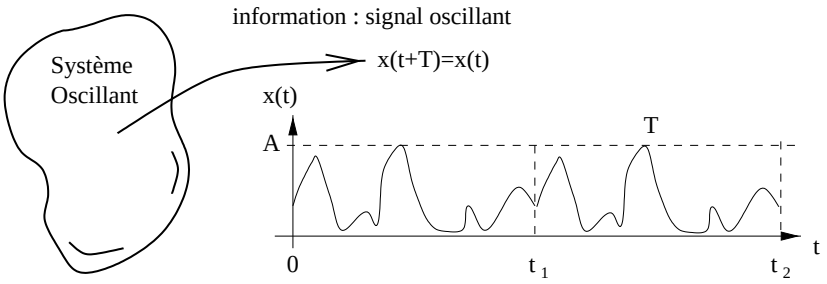


FIG. 1.1 – *Système générant un signal temporel oscillant de période T et d'amplitude A*

est appelée « période du système » (au lieu de période du signal émis par le système) et vérifie

$$x(t+T) = x(t), \forall t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

À partir de cette définition, on constate que l'existence d'un maximum d'oscillation devient nécessaire pour que le système puisse quitter et reprendre un état donné. Ce maximum d'oscillation est appelé amplitude maximale, et constitue une autre particularité des systèmes oscillants. L'amplitude et la période sont les deux principales propriétés d'un signal issu d'un système oscillant et c'est selon leur régularité que l'on classe les systèmes entre eux.

1.2 Construction des systèmes oscillants : les oscillateurs

De part leurs applications croissantes dans les divers domaines de la physique, les oscillateurs électroniques constituent la base de tout dispositif technologique nécessitant une base de temps. L'électronique numérique dépend souvent d'une horloge interne matérialisée par un oscillateur électronique. La fiabilité des moyens de communication par modulation et démodulation dépend de la fiabilité des oscillateurs générant les signaux utiles. La qualité et la vitesse de transmission des informations sont dépendantes des progrès réalisés dans la connaissance des mécanismes profonds caractérisant les oscillateurs.

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principes de base du fonctionnement d'un oscillateur quelconque. On observera également pourquoi les oscillateurs électroniques se dégagent de l'ensemble des oscillateurs présents dans la nature par leurs excellentes propriétés de régularité.

1.2.1 Description générale de l'oscillateur

Que ce soient des oscillateurs biologiques, écologiques, mécaniques ou électroniques, leur existence est conditionnée par la présence de deux éléments indispensables : un élément résonnant que l'on appellera résonateur et un système d'entretien avec apport d'énergie que l'on appellera amplificateur (Fig. 1.2). L'apport d'énergie confère à l'amplificateur

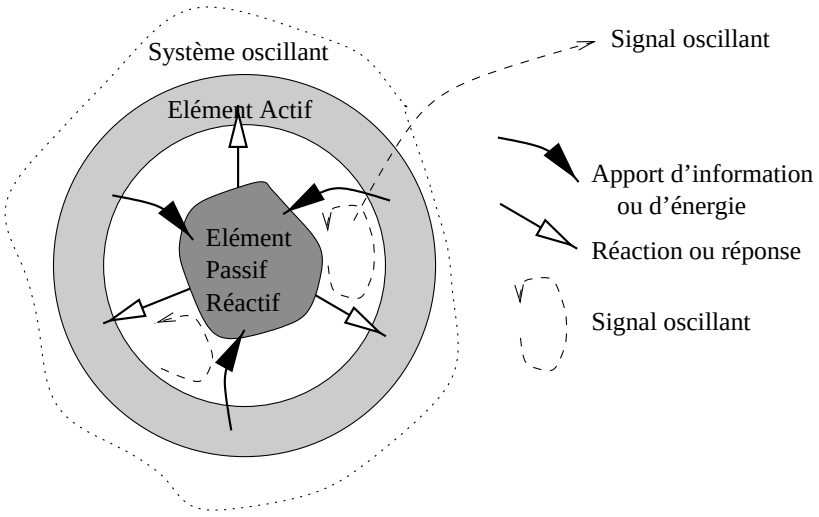


FIG. 1.2 – *Fonctionnement générique d'un système oscillant*

une propriété d'élément actif, contrairement au caractère passif du résonateur, plutôt demandeur et dissipateur d'énergie.

Dans le cas des oscillateurs électroniques, l'apport d'énergie peut se faire à partir d'un amplificateur opérationnel, ou même plus simplement à partir d'un transistor correctement polarisé. L'élément résonnant est formé d'un résonateur diélectrique constitué, dans le cas des oscillateurs à quartz par exemple, d'une lame de quartz dont on utilise les propriétés piézoélectriques : la sensibilité mécanique à une excitation électrique.

Dans le cas des oscillateurs mécaniques et biologiques, une analogie peut être effectuée pour le système d'entretien (apport d'énergie) et le résonateur (élément réagissant à une excitation, une information). En effet, pour le pendule pesant, l'oscillation entretenue n'existe que s'il y a apport d'énergie par une excitation qui peut être de nature diverse (excitation impulsionnelle à chaque passage par une certaine position, etc.), mais devant être effectuée judicieusement pour que le système réponde à cette excitation. Une excitation non adaptée ne sera pas reçue par le système. La qualité de la réponse du système résonnant est liée à l'excitation par l'apport d'énergie. C'est en fait une des conséquences des propriétés du résonateur ; la réponse de celui-ci est dépendante du type d'excitation. On parle alors de bande passante d'excitation.

Cette analogie peut également être effectuée dans le cas des oscillateurs biologiques où la réaction du ou des systèmes oscillants à des excitations extérieures est totalement dépendante des conditions générales d'excitation. Un apport d'information ou d'événements (l'analogue de l'énergie) sera interprété de façon différente suivant la réaction du système (l'analogue du résonateur). L'équilibre entre l'excitation et la réaction pourra provoquer une oscillation du système.

Ainsi, quel que soit l'oscillateur ou le système oscillant, sa condition d'existence (la présence de l'oscillation d'une de ses variables d'état) nécessite la présence d'un processus d'entretien (apport d'information, d'énergie, etc.) et d'un élément réagissant à cette excitation (résonateur) par la création d'une autre information (réponse).

L'élément actif et l'élément passif sont donc indispensables à l'existence de n'importe quel oscillateur qu'il soit biologique, électrique ou mécanique.

1.2.2 Critère d'oscillation de Barkhausen

La condition de base imposant la présence d'un élément actif et d'un élément résonnant constitue un modèle électronique bien connu de l'oscillateur appelé modèle de Barkhausen [Milsant 75].

Considérons l'oscillateur formé des deux éléments R (résonateur) et A (amplificateur) (Fig. 1.3). Si l'on suppose R et A caractérisés par une réponse impulsionnelle en amplitude et en phase, il vient

$$V_2 = \mid A \mid e^{i\phi_A} \quad V_1 \tag{1.2}$$

$$V_3 = \mid R \mid e^{i\phi_R} \quad V_2 \tag{1.3}$$

soit

$$V_3 = \mid A \mid\mid R \mid e^{i(\phi_R+\phi_A)} \quad V_1 \tag{1.4}$$

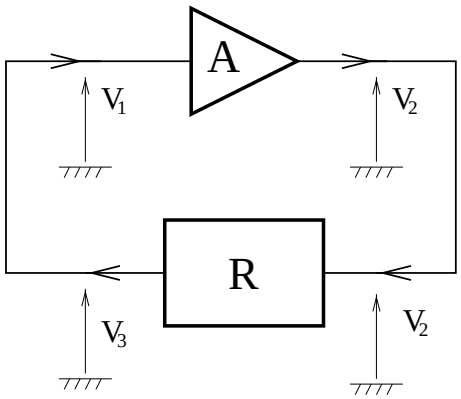


FIG. 1.3 – *Schéma de base de l'oscillateur*

Le fait d'imposer l'égalité de V_3 et V_1 conduit aux deux conditions d'amplitude et de phase du critère de Barkhausen :

$$\mid A \mid\mid R \mid = 1, \tag{1.5}$$

$$\phi_R + \phi_A = 0 + 2k\pi, \quad k \in Z. \tag{1.6}$$

Elles imposent un gain total unitaire et une condition de phase nulle dans la boucle. Lorsque le critère (1.6)-(1.5) est vérifié, il peut y avoir oscillation du signal V_1. Dans ce cas, par abus de langage, on dit que le « système oscille ».

Si $\mid A \mid\mid R \mid < 1$, les oscillations s'amortissent et on ne peut plus parler d'oscillateur ; de même que dans le cas $\mid A \mid\mid R \mid > 1$, les oscillations sont amplifiées et croissent indéfiniment. En réalité, on se place dans le cas $\mid A \mid\mid R \mid > 1$ pour que le système puisse démarrer, et on s'arrange expérimentalement pour qu'il y ait saturation de l'amplification afin de stopper la croissance. Une saturation de l'amplification nécessite un caractère non linéaire de l'élément actif A. On peut, cependant, concevoir que c'est le caractère non linéaire de l'élément R qui limite les oscillations, mais il reste négligeable par rapport à la non-linéarité de A dans la plupart des cas expérimentaux.

Les non-linéarités de l'élément actif ajustent le produit $\mid A \mid\mid R \mid$ à 1 et stabilisent les oscillations. Par principe même les oscillations résultent d'un processus non linéaire. De ce fait, l'étude des oscillateurs devrait tenir compte de cette propriété non linéaire, ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas étant donnée la grande difficulté de traitement et d'analyse des systèmes physiques non linéaires.

Remarque : En admettant la réalité de l'aspect non linéaire, il convient de revenir sur la fonction de transfert de l'amplificateur A donnée par la relation (1.2) qu'il faut alors remplacer par une fonction plus générale

$$V_2 = f(A, \phi_A) \;\; V_1, \tag{1.7}$$

où $f(A, \phi_A)$ traduit la non-linéarité par rapport à l'amplitude et au « déphasage ». Dans ce cas, la condition d'oscillation et d'existence de la périodicité de V_1 nous permet de développer celui-ci en séries de Fourier. De ce fait, la non-linéarité agissant sur les différentes composantes de Fourier rend donc impossible l'établissement d'un critère d'oscillation plus fin. On constate intuitivement qu'il nous faut une condition multicritère : imposer des conditions entre les phases et les amplitudes des différentes composantes de Fourier, même si *a priori*, l'oscillateur ne semble pas posséder d'harmoniques.

En tout état de cause, le critère de Barkhausen reste valable si l'on considère l'oscillateur à chaque instant t car le signal V_3 doit toujours être égal à V_1, en amplitude et en

phase. Cette dernière remarque permet d'insister sur l'importance de l'aspect temporel de l'étude des oscillateurs.

1.3 Les différents oscillateurs

Après avoir rappelé les propriétés classiques des oscillateurs (périodicité, amplitude) et les conditions d'existence de ceux-ci, nous allons dans ce paragraphe énumérer, de façon non exhaustive, quelques phénomènes oscillatoires génériques en dégageant pour chacun d'entre eux, l'équivalent de la condition de phase nulle du critère de Barkhausen. Il ne s'agit pas de traiter l'ensemble de tous les types d'oscillateurs, mais de dégager leurs fonctionnements communs.

1.3.1 L'oscillateur mécanique

Considérons le pendule pesant classique, sensible aux frottements visqueux de l'air (Fig. 1.4). L'angle θ, exprimant l'écart du pendule à la verticale, vérifie l'équation bien connue :

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \tag{1.8}$$

où ω_0 est la pulsation des oscillations de faible amplitude et α le coefficient d'amortissement visqueux. Une étude classique montre que ce système ne peut constituer un oscillateur compte tenu de son évolution temporelle qui tend vers l'état stationnaire

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} = \theta = 0. \tag{1.9}$$

En revanche, l'histoire du formidable développement des horloges à balancier et à contrepoids, références du temps au XIX^e siècle, montre que ce système peut néanmoins constituer un oscillateur dans le sens de la définition précédente, moyennant un système

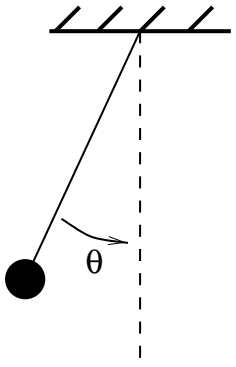


FIG. 1.4 – *Le pendule pesant*

d'entretien des oscillations [Chronos 91, Landes 87]. Sans entrer dans le détail, disons simplement que l'apport d'énergie peut se faire à chaque passage du balancier à une position θ qui peut être choisie délibérément. Ainsi, la pérennité des oscillations se trouve assurée par le système d'entretien si elle satisfait la condition d'amplification.

L'existence d'une condition de phase nulle dans ce système apparaît naturellement si l'on accepte le fait que l'excitation doit être réalisée « en phase » avec l'oscillation du pendule. L'excitation sera d'autant plus performante que la condition de phase sera respectée.

Profitons de l'apparente simplicité de cet oscillateur pour ajouter une remarque. Cet oscillateur fonctionne également si l'excitation est effectuée une fois sur deux (resp. une fois sur n). Ainsi, une excitation à la fréquence sous-harmonique $1/2$ (resp. $1/n$) sera alors suffisante (moyennant une amplitude adaptée) pour entretenir l'oscillateur. Mais, en tout état de cause, la condition de phase nulle traduisant la synchronisation de l'excitation avec l'oscillateur doit être réalisée quelle que soit cette fréquence. Notons dans ce cas la présence de la condition de phase quel que soit le sous-harmonique d'excitation, et l'importance du rapport rationnel entre la fréquence d'excitation et la fréquence d'oscillation.

1.3.2 Les oscillateurs électroniques

Les oscillateurs à quartz

La condition de phase nulle dans les oscillateurs à quartz constitue la clef de voûte des études relatives aux simulations du comportement non linéaire des oscillateurs, réalisées au sein de notre équipe [Blin 95, Couteleau 98]. Rappelons comment les conditions de Barkhausen sont exploitées dans ce cas particulier du traitement non linéaire de l'oscillateur.

Considérons le cas de l'oscillateur Colpitts normal simplifié (Fig. 1.5). On suppose l'admittance du quartz donnée par

$$Y_q = \frac{pC_q}{1 + \frac{p}{\omega_q Q_q} + \frac{p^2}{\omega_Q^2}}, \tag{1.10}$$

où p est la variable de Laplace, et ω_q et Q_q sont définis par

$$\omega_q^2 = \frac{1}{L_q C_q}, \quad Q_q = \frac{L_q \omega_q}{R_q}. \tag{1.11}$$

La condition d'oscillation s'écrit [Brendel 94] :

$$\Delta + Y_q \sigma + pC_2(y_i + Y_q) + pC_1(y_0 + Y_q) + p^2 C_1 C_2 = 0, \tag{1.12}$$

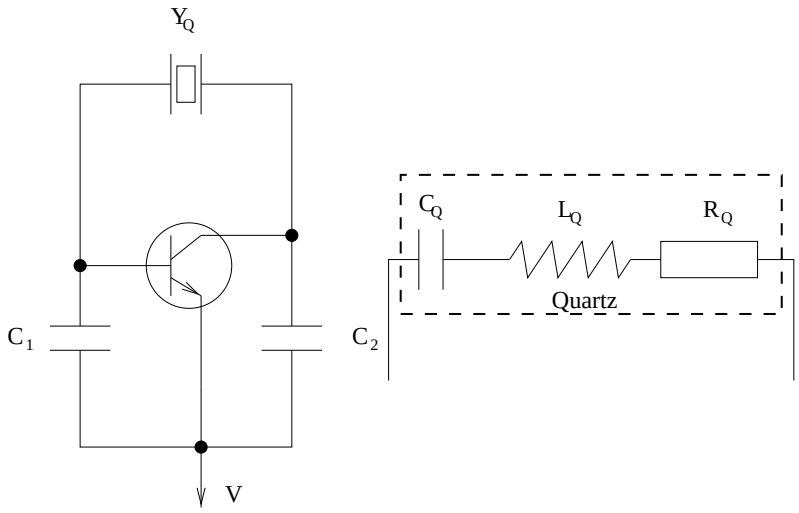


FIG. 1.5 – *Schéma de l'oscillateur Colpitts normal simplifié*

où Δ, σ, y_i, y_0 sont des paramètres du transistor.

Lorsque le régime d'oscillation est établi, on peut écrire $p = j\omega$, et le polynôme se scinde alors en deux parties réelle et imaginaire. On peut alors dans une première approximation accéder à l'amplitude de l'oscillation en annulant la partie réelle, et la fréquence d'oscillation en annulant la partie imaginaire. L'annulation des parties réelle et imaginaire est alors équivalente respectivement à la condition d'amplitude et de phase du critère de Barkhausen.

Les oscillateurs à ondes acoustiques de surface

Les oscillateurs à onde acoustique de surface ont pris, ces dernières années, une importance remarquable du fait de leur fonctionnement à haute fréquence nécessaire pour les applications telles que les transmissions des télécommunications [Hauden 93].

On décrit le fonctionnement de ce type d'oscillateur particulier dans ce chapitre parce qu'il est à la base du montage à injection étudié dans le chapitre 7.

Les oscillateurs acoustiques à ondes de surface (SAW pour Surface Acoustic Wave) font partie de la famille des oscillateurs régénératifs à impulsion [Gilden 75, Cutler 75]. Pour cette famille, la période d'oscillation dépend du retard imposé par la ligne insérée dans la boucle. La ligne à retard (SAW), caractérisée par ses pertes d'insertion P_{SAW} et son déphasage Φ_{SAW}, est montée en réaction sur un amplificateur d'entretien de gain G_A et de déphasage Φ_A (Fig. 1.6). Pour que les oscillations soient auto-entretenues, il est nécessaire d'une part de compenser les pertes soit

$$\mid G_A \mid\mid P_{SAW} \mid \geq 1, \tag{1.13}$$

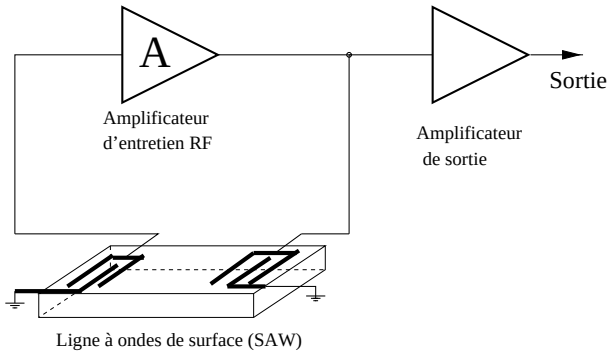


FIG. 1.6 – *L'oscillateur monochromatique à ondes de surface (SAW)*

et d'autre part que le déphasage total du montage en boucle ouverte soit nul (modulo 2π) soit

$$\Phi_{SAW} + \Phi_A = 2k\pi, k \in N. \tag{1.14}$$

Le prélèvement du signal dans la boucle se fait par l'intermédiaire d'un amplificateur d'isolation (amplificateur de sortie) possédant un gain de transfert inverse très faible de façon à isoler la boucle des variations de charge en sortie. En régime établi, l'amplitude qui résulte dans la boucle reste difficile à estimer et la condition de résonnance n'est vérifiée que pour une unique fréquence voisine de la fréquence de synchronisme de la ligne.

Contrairement à l'oscillateur monochromatique, un oscillateur MLSO (Mode Locked SAW Oscillator) s'obtient par l'excitation d'une bande de fréquence autour de la fréquence de synchronisme du dispositif SAW (Fig. 1.7). L'élément caractéristique de ce système est le modulateur qui a pour rôle de générer un signal en mode pulsé permettant l'excitation d'une large bande de fréquence.

Le fonctionnement de cette famille d'oscillateur à onde de surface est dépendant d'une condition de phase nulle dans la boucle fonction du retard imposé par la ligne SAW.

1.3.3 Les oscillateurs à relaxation

Quel que soit le type d'oscillateur, on peut toujours y définir une « partie résonnante » et une « partie entretien ». Il existe cependant une classe d'oscillateurs pour laquelle cette association ne semble pas, *a priori*, pouvoir être réalisée ; ce sont les oscillateurs paramétriques ou oscillateurs à relaxation.

Ces oscillateurs fonctionnent selon un mécanisme que l'on peut représenter par le dispositif expérimental du vase à siphon (Fig. 1.8). On dispose d'un récipient alimenté par une source continue de débit D_0. Dans ce récipient, on place un siphon de débit D (lorsqu'il est amorcé). En observant la variable $V(t)$ représentant le volume d'eau dans le

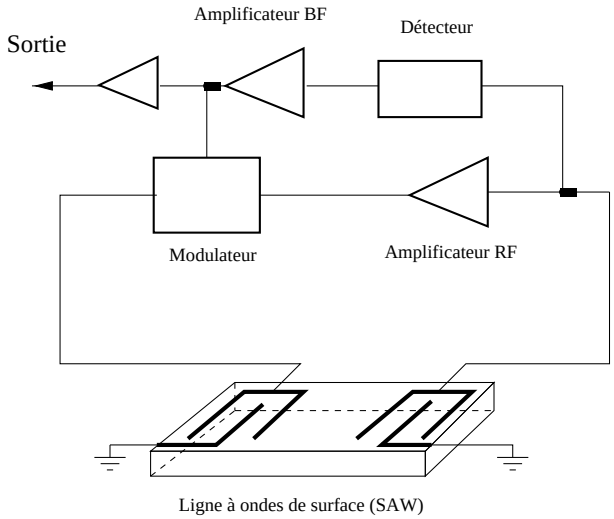


FIG. 1.7 – *Un exemple d'oscillateur MLSO actif.*

récipient, on constate que celle-ci varie entre V_0 et $V_0 + V_M$ avec une période :

$$T = V_M \left[\frac{1}{D - D_0} + \frac{1}{D_0} \right]. \tag{1.15}$$

Il s'agit d'un oscillateur à relaxation, système bi-instable à deux régimes de fonctionnement. Dans ce système, il n'y a pas de résonateur imposant sa fréquence ; celle-ci est conditionnée par les paramètres du système (V_M, D, D_0) d'où sa terminologie d'oscillateur paramétrique.

Il se trouve que la plupart des oscillateurs naturels possèdent une dynamique pouvant être décrite par un ou plusieurs oscillateurs paramétriques. Le cœur humain, oscillateur dont l'irrégularité est très surveillée, constitue un oscillateur paramétrique naturel [Van der Pol 30]. Le débit sanguin s'identifie à l'apport d'énergie ; les diastoles à l'amorçage et les systoles au vidage des ventricules. L'évolution de la population des proies et des prédateurs, étudiée par Volterra, s'apparente aussi à un système de deux oscillateurs à relaxation couplés [Volterra 31].

De manière générale, l'évolution des rythmes biologiques peut être décrite par des oscillateurs à relaxation dont la fréquence dépend très fortement de l'environnement, et pour lesquels l'étude de la synchronisation (ou des synchroniseurs) produit un sujet de recherche très important [Millet 91].

Propriétés des oscillateurs à relaxation

C'est la sensibilité aux paramètres extérieurs qui confère aux oscillateurs à relaxation une mauvaise stabilité en fréquence et qui exclut leur candidature à un rôle de référence

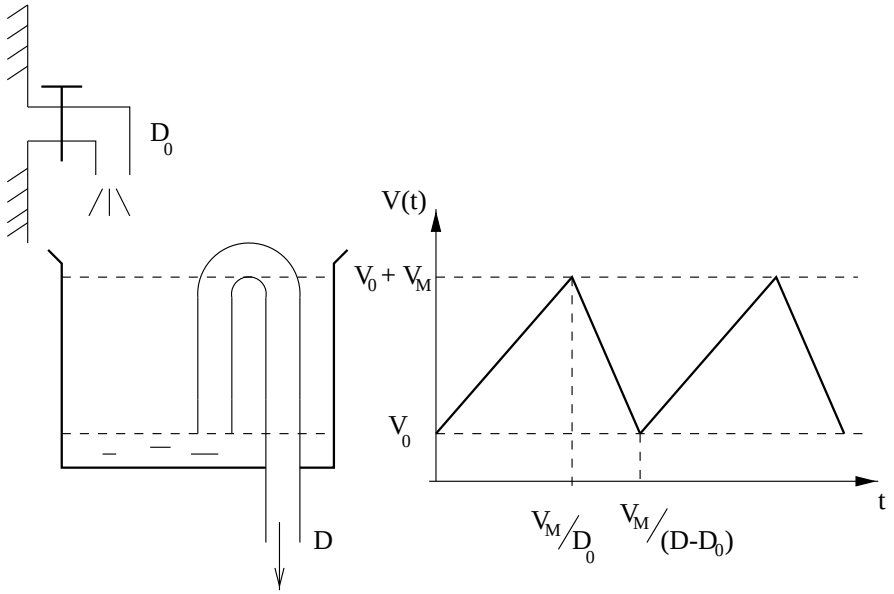


FIG. 1.8 – *Le vase à siphon : un exemple d'oscillateur à relaxation*

de fréquence. L'étude de l'origine de ses fluctuations est un problème complexe faisant intervenir de nombreux paramètres.

Reprenons en guise d'exemple le cas du vase à siphon. Considérons un autre type d'écoulement $D_0' = D_0[1 + \cos(2\pi \frac{t}{T_{mod}})]$, affecté d'une petite modulation de période T_{mod} (Fig. 1.9).

Pour que $V(t)$ soit périodique, il faut que la différence de marche δ (temps de vidage du vase) vérifie une condition de divisibilité entre la période de modulation T_{mod} et la période T. On montre ainsi qualitativement que ce type d'oscillateur peut se synchroniser facilement sur n'importe quel signal extérieur, pourvu que cette condition soit vérifiée. Ceci explique sa grande sensibilité.

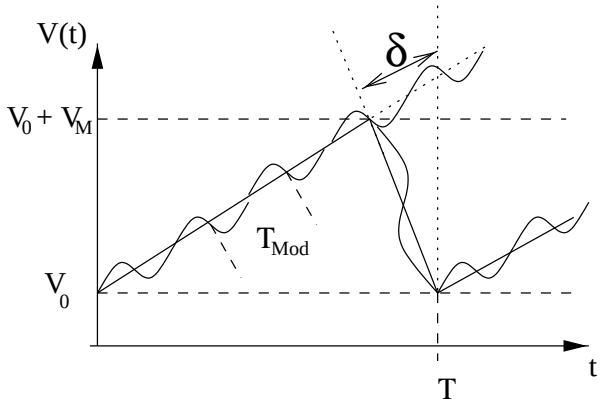


FIG. 1.9 – *Vase à siphon avec débit modulé*

La condition de synchronisation permet de faire ressortir une condition entre la phase de la modulation et la phase du signal $V(t)$. Cette condition de phase est, comme pour la fréquence, conditionnée par les paramètres extérieurs. Elle est de ce fait quasiment réalisée instantanément, d'où son apparente absence. Ce régime transitoire rapide caractérise les mauvais oscillateurs qui se synchronisent rapidement mais sur n'importe quel signal. À l'inverse, les oscillateurs ultra-stables possèdent un facteur de qualité plus élevé, et un régime transitoire long pendant lequel la condition de phase s'établit ou cherche à s'établir.

Les oscillateurs à relaxation peuvent donc, *a posteriori*, être considérés comme des oscillateurs normaux avec leurs « conditions de Barkhausen » et leurs conditions sur la phase[1]. Leurs inconvénients proviennent simplement du fait qu'ils possèdent une large bande de fonctionnement conduisant à un régime transitoire très court et, par conséquent, une condition de phase instantanément réalisée contrairement aux oscillateurs électroniques qui possèdent une bande étroite, un transitoire long et un régime où la condition de phase cherche à s'établir.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons insisté sur plusieurs points qui nous semblent indispensables pour appréhender la suite de cette étude :

- Le résonateur et l'apport d'énergie : deux éléments indispensables pour tout type d'oscillateur (avec notions de dissipation et d'entretien).
- L'existence des conditions de phase et de gain.

De plus, on évoque d'un point de vue qualitatif mais générique :

- l'importance de la non-linéarité de l'oscillateur,
- la recherche d'une certaine condition de phase nulle,
- une condition de divisibilité entre les périodes d'excitation et d'oscillation pour l'entretien du système oscillant,

le tout dans une optique plutôt temporelle. Ce sont des concepts généraux qui caractérisent tous les oscillateurs. Nous allons à présent insister sur leurs propriétés pour en extraire de nouvelles voies de caractérisation des fluctuations.

1. Notons qu'en 1930, Van der Pol établissait le même lien entre l'oscillateur quasi sinusoïdal et l'oscillateur à relaxation, comme deux cas limites d'un même objet plus général [Van der Pol 30].

Chapitre 2

Propriétés et caractérisation des oscillateurs

2.1 Propriétés des oscillateurs

Les propriétés des oscillateurs sont très nombreuses et leur importance dépend de l'application que l'on compte en faire. Dans les applications dites « temps-fréquence », c'est surtout la propriété de stabilité de fréquence qui émerge de toutes les autres.

2.1.1 Une fréquence de plus en plus précise...

La stabilité relative de fréquence est la propriété fondamentale des oscillateurs. Elle leur permet d'avoir un rôle de référence de temps dans les dispositifs électroniques usuels. Depuis l'apparition de la piézoélectricité en 1880 et de l'utilisation du quartz en résonateur (1920), les oscillateurs électroniques à quartz sont sans cesse de plus en plus performants (Fig. 1.1), malgré la concurrence des oscillateurs conçus à partir des résonances d'atomes tels que le rubidium ou le césium.

2.1.2 ... à la base des unités de la Physique

À l'heure actuelle, l'état de l'art en matière de stabilité de fréquence est obtenu à partir des horloges atomiques à jet de césium. Elles sont à la base de la définition de la seconde depuis 1967 :

> La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

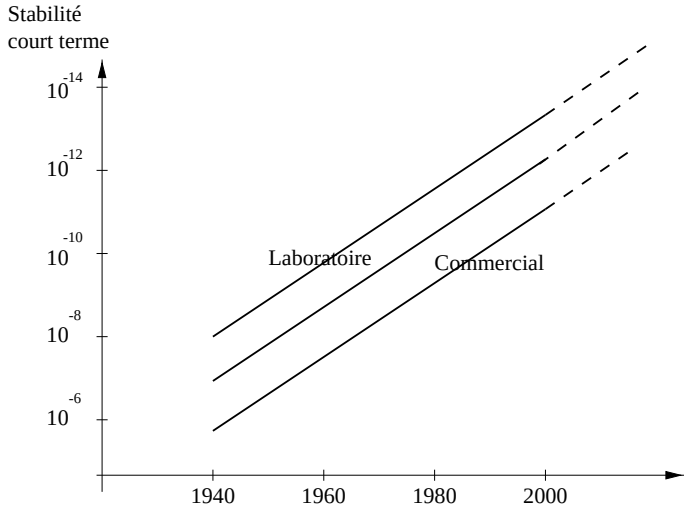


FIG. 2.1 – *Évolution de la stabilité des oscillateurs quartz [Chronos 91]*

À cette époque, l'inexactitude de la réalisation de la seconde était, en valeur relative, de l'ordre de 10^{-12}, alors qu'actuellement en 1998, la valeur de 3.10^{-15} obtenue au BNM-LPTF [2], lui confère la propriété suivante : c'est la quantité physique réalisée avec le plus d'exactitude. Elle est à la base de la définition d'autres unités et constantes du système international [Audoin 98, BNM 96].

Toute autre mesure du temps se fera alors par comparaison par rapport à cette horloge étalon (appelée étalon primaire). Il est bien évident que la nécessité de disposer de plusieurs horloges couvrant toute la surface terrestre relève d'une parfaite synchronisation de ces diverses horloges de référence. Avec cette parfaite synchronisation, on pourra accéder à une mesure aussi exacte que possible réalisée à partir d'une méthode de comparaison. Notons l'importance de deux principes fondamentaux pour l'accession à la précision de la mesure : la synchronisation des références et la comparaison des signaux. Un défaut de synchronisation ou une imperfection dans le principe de comparaison entraînera un biais dans la mesure. Notre travail s'inscrit dans cette optique et prétend apporter des informations par rapport à ces deux nécessités expérimentales.

2.1.3 Stabilité court terme : les oscillateurs à quartz

Lorsque l'on désire, pour des applications spatiales ou dans le domaine des télécommunications, des références stables sur le court terme (1 s $\rightarrow$ 1 000 s), les oscillateurs à quartz restent les meilleurs candidats. Des millions d'oscillateurs sont vendus chaque année, mais seulement quelques pour cents d'entre eux sont capables de tenir tête à la stabilité des

2. Bureau National de Métrologie - Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences.

oscillateur	$\sigma_y(\tau)$	$9.10^{-4} - 3.10^{-13}$
	pureté spectrale	-120 dBc/Hz @ 1 Hz
		-155 dBc/Hz @ 100 kHz
résonateur	vieillissement	- 5.10^{-11} - 5.10^{-12}/jour
	sensibilité en température	$<5.10^{-12}$/ C (-20+60 C)
	sensibilité en pression	5.10^{-11}/bar
	sensibilité aux champs magnétiques	3.10^{-11}/gauss

TAB. 2.1 – *Caractéristiques techniques d'un oscillateur à quartz à 10 MHz [Norton 93]*

références atomiques. Actuellement la stabilité relative des oscillateurs à quartz est comprise entre 10^{-5} et 10^{-13} alors que quelques unités ultra-stables frôlent le 10^{-12} - 10^{-14} [Norton 93] suivant les caractéristiques nominales. Mais, leur talon d'Achille se trouve dans la stabilité long terme (au-delà du jour), ou vieillissement, due à leur dépendance aux perturbations extérieures.

De façon générale, les paramètres essentiels définissant un oscillateur sont : la fréquence, le niveau et impédance de sortie, le vieillissement, le bruit de phase, la stabilité en température, le taux d'harmoniques et de sous harmoniques, la stabilité en fonction de la charge. Le tableau (Tab 2.1) reproduit, à titre d'exemple, les caractéristiques techniques d'un oscillateur à quartz à 10 MHz [Norton 93].

Stabilité long terme : les horloges atomiques

Les oscillateurs à quartz restent la référence court terme de stabilité. Par ailleurs, il existe les horloges atomiques qui possèdent des performances long terme à la hauteur de celles des oscillateurs à quartz dans le court terme.

Fonctionnement des horloges atomiques La définition de la seconde provient de la transition atomique du césium 133 utilisée pour la fabrication des meilleures horloges connues à ce jour en matière de stabilité long terme.

Le principe des horloges atomiques [Audoin 98] consiste à utiliser les propriétés spectroscopiques des atomes (Cs, H, Rb) ou des ions ($^{199}Hg^+$, $^{171}Yb^+$) alcalins. Ces éléments présentent la même propriété de ne posséder qu'un seul électron sur le dernier niveau d'énergie. Les niveaux d'énergie sont classés suivant les nombres quantiques n, l, m, respectivement nombre quantique principal, azimutal et magnétique. Ces niveaux sont répertoriés $S, P, D, F...$ pour des valeurs respectives de $l = 0, 1, 2, 3...$

Une première levée de dégénérescence des niveaux fait apparaître une structure fine résultant du couplage du moment cinétique $\overrightarrow{L}$ de l'atome et du spin $\overrightarrow{S}$ de l'électron

célibataire. Ces niveaux sont répertoriés S_J, P_J (avec $\mid l-s \mid \leq j \leq l+s$) où j est le nombre quantique associé au moment total $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{L}+\overrightarrow{S}$. Le couplage entre $\overrightarrow{J}$ et le moment de spin $\overrightarrow{I}$ du noyau fait apparaître une structure hyperfine. Les nombres quantiques F du moment total $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{J}+\overrightarrow{I}$ vérifient également la propriété $\mid j-i \mid \leq F \leq j+i$.

Dans le cas de l'atome de césium considéré dans son état fondamental $l=0$, $s=1/2$, $I=7/2$, on a $\mid 7/2-1/2 \mid \leq f \leq 7/2+1/2$, soit $F=3$ ou 4. La transition atomique servant à la définition de la seconde est l'énergie associée à la transition $(F=3) \rightarrow (F=4)$ du niveau fondamental de l'atome de césium. La fréquence du photon associé à cette énergie est de 9.192 631 770 GHz.

Propriété des horloges atomiques

Les horloges atomiques présentent une mauvaise stabilité court terme. En règle générale, elle résulte d'un bruit blanc de grenaille associé au jet de césium et l'écart-type d'Allan s'écrit alors [Chronos 91, p. 240] :

$$\sigma_y(\tau) = C\tau^{-1/2} \quad \text{avec} \quad C \sim 10^{-11}. \tag{2.1}$$

La stabilité long terme reste la propriété des horloges atomiques mais demeure dépendante de l'environnement macroscopique des atomes (induction magnétique, distribution de vitesse, température, vieillissement). La sensibilité par rapport à l'amplitude hyperfréquence est responsable d'une source d'instabilité long terme. De façon générale, la stabilité long terme des horloges se situe à l'heure actuelle en dessous de 10^{-14} pour τ>10 jours grâce, entre autre, à l'utilisation des méthodes d'asservissement [Audoin 98, p. 148].

2.2 Caractérisation des oscillateurs

La bonne régularité de la période des signaux issus des oscillateurs a naturellement engendré l'utilisation de mesures spectrales pour leur caractérisation.

2.2.1 Mesures dans le domaine spectral

Propriétés générales du spectre radio-fréquence Le spectre d'un oscillateur (ou spectre RF) possède une ou plusieurs raies correspondant aux différentes fréquences de résonance du système (Fig. 2.2). La caractérisation des propriétés des oscillateurs consiste en l'étude de la variation, du nombre et de la largeur des raies spectrales. On exigera suivant les applications, une bonne finesse (largeur), une bonne exactitude (position), ou

une bonne pureté spectrale (présence d'autres raies). Dans tous les cas, la méthode de caractérisation sera adaptée en fonction de la propriété recherchée.

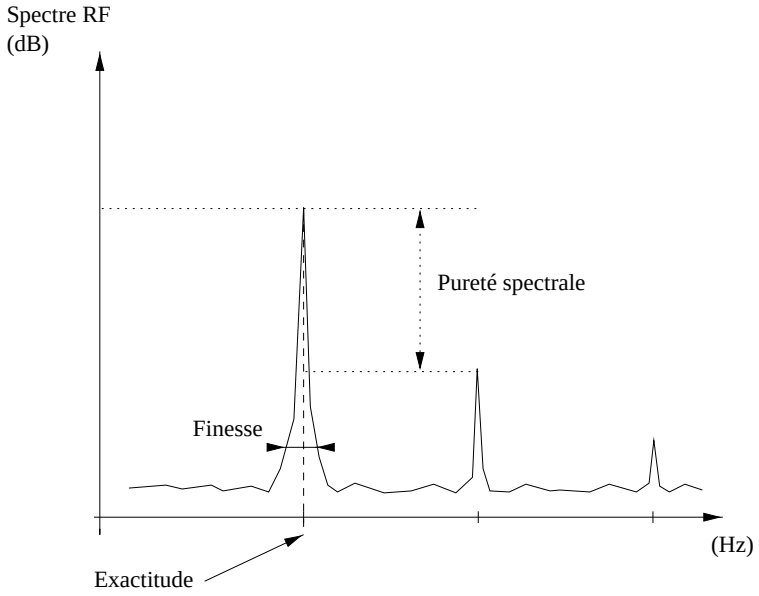


FIG. 2.2 – *Spectre radio-fréquence (spectre RF) d'un oscillateur*

Spectre des fluctuations de fréquence Pour les mesures de stabilité, on utilise une méthode de comparaison de fréquence par l'intermédiaire d'une référence plus stable. Pour pouvoir avoir accès à une mesure de la largeur de la raie spectrale de l'oscillateur, une méthode de démodulation est utilisée. On accède alors à la densité spectrale $S_y(f)$ des fluctuations relatives de fréquence $y(t)$ définie comme suit.

Supposons que le signal de sortie de l'oscillateur s'écrive (se reporter par exemple à la figure Fig. 1.5) :

$$V(t) = V_0(1 + \epsilon(t))(\sin(2\pi\nu_0 t + \Phi(t)), \tag{2.2}$$

que la fréquence moyenne ν_0 soit fixe et que les fluctuations d'amplitude ϵ soient négligeables. On a alors, en posant $y(t) = \frac{\Delta\nu(t)}{\nu_0}$:

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{dt} = \nu_0 + \Delta\nu(t) = \nu_0(1 + y(t)). \tag{2.3}$$

En admettant que $y(t)$ soit décrit par un processus stationnaire[3], la densité spectrale de puissance bilatérale $S_y^{(B)}(f)$ est donnée à partir du théorème de Wiener-Kintchine par

$$S_y^{(B)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau)e^{-2i\pi f\tau}d\tau, \tag{2.4}$$

3. *Infra.* Chapitre 3, paragraphe 3.2.1

où $P(\tau)$, fonction d'auto-corrélation du processus $y(t)$, est donnée par :

$$P(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(t-\tau)dt. \tag{2.5}$$

En pratique, les signaux étant des fonctions réelles du temps, $P(\tau)$ et $S_y^{(B)}(f)$ sont

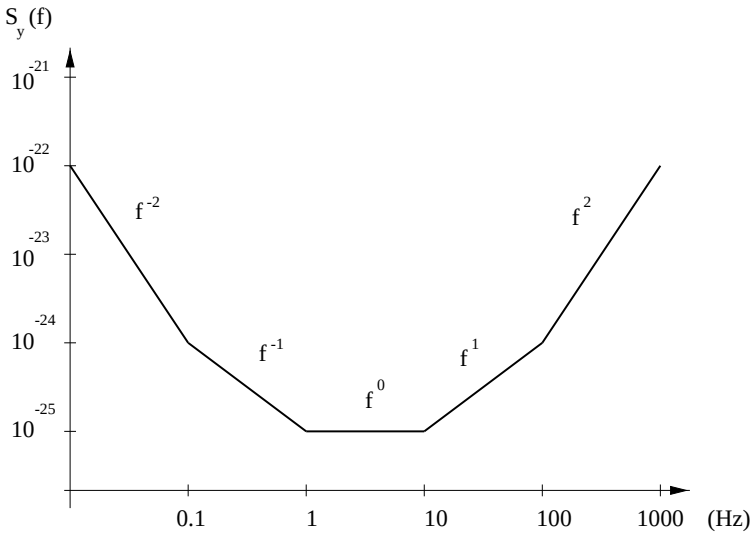


FIG. 2.3 – *Spectre typique en loi de puissance d'un oscillateur.*

également réelles et paires. De plus, le spectre réel n'étant pas défini pour les fréquences négatives, on arrive alors à la définition de la densité spectrale unilatérale, soit :

$$S_y(f) = 4\int_0^{\infty} P(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau. \tag{2.6}$$

Si nous notons $y(f)$ la transformée de Fourier de $y(t)$, le théorème de Parseval donne :

$$\int_0^{\infty} \mid y(f) \mid^2 df = \int_0^{\infty} \mid y(t) \mid^2 dt. \tag{2.7}$$

On définit également la puissance moyenne mesurée sur une durée T par

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \mid y(f) \mid^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^{(T)}(f)df, \tag{2.8}$$

où l'on détermine expérimentalement la densité spectrale par :

$$S_y(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{S_y^{(T)}(f)}{T}, \tag{2.9}$$

où $S_y^{(T)}(f)$ est la densité spectrale évaluée sur une période T. Cette définition de la densité spectrale donne depuis 1971 la mesure officielle des fluctuations de fréquence décidée par

le Technical Committee on Frequency and Time de l'IEEE [Barnes 71]. Cette mesure a été choisie pour la raison suivante : c'est une mesure des fluctuations relatives $y(t)$ et elle permet de comparer des oscillateurs de fréquence nominale différente.

Avec ce type d'analyse spectrale, la caractérisation des oscillateurs fait apparaître un comportement en loi de puissance (Fig. 2.3). Ainsi, $S_y(f)$ peut être donné par :

$$S_y(f) = \sum_\alpha h_\alpha f^\alpha, \tag{2.10}$$

avec $\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. On classe alors les bruits selon les terminologies suivantes :

- $1/f^2$: bruit de marche aléatoire de fréquence
- $1/f$: bruit de scintillation (ou flicker[4]) de fréquence
- f^0 : bruit de blanc de fréquence
- f^1 : bruit flicker de phase
- f^2 : bruit blanc de phase

On ne retrouve pas toujours « tous les bruits » dans les oscillateurs, mais il semble que le bruit en $1/f$ soit toujours présent dans les oscillateurs à quartz.

Spectre des fluctuations de phase La phase étant reliée à la fréquence par une intégration temporelle, on peut également définir la densité spectrale des fluctuations de phase $S_\Phi(f)$ par :

$$S_\Phi(f) = \mid \Phi(f) \mid^2, \tag{2.11}$$

$$S_\Phi(f) = \left| \int \Phi(t) e^{2i\pi f t} dt \right|^2 \tag{2.12}$$

$$S_\Phi(f) = \left| \frac{2\pi\nu_0}{2\pi i f} \int y(t) e^{2i\pi f t} dt \right|^2 \tag{2.13}$$

$$S_\Phi(f) = \frac{\nu_0^2}{f^2} S_y(f). \tag{2.14}$$

On constate que les fluctuations de $y(t)$ et de $\Phi(t)$ sont reliées dans le domaine de Fourier par un coefficient multiplicatif f^2. De façon générale, chaque opération de dérivation (resp. d'intégration) nième d'un signal engendre une multiplication (resp. division) de son spectre par f^{2n} soit :

$$S_{\frac{d^n y}{dt^n}}(f) = f^{2n} S_y(f). \tag{2.15}$$

4. L'origine de l'appellation "scintillation de fréquence" provient du spectre en $1/f$ de scintillation des étoiles.

Il se trouve que les bancs de mesure de bruit se sont également développés pour l'étude des fluctuations générées dans n'importe quel composant électronique (mélangeur de signaux, amplificateur, etc.). De ce fait, on prend également l'habitude de le caractériser par le bruit de phase $S_\Phi(f)$. On obtient alors le spectre de la figure Fig. 2.4.

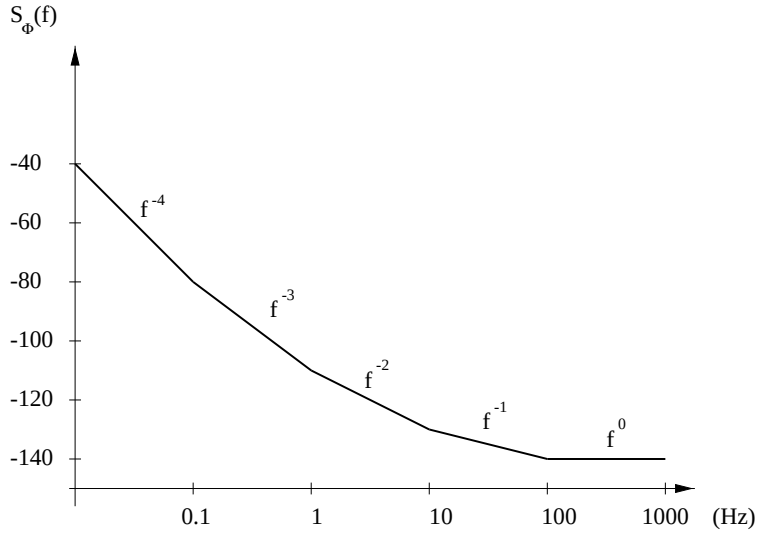


FIG. 2.4 – *Spectre de phase équivalent au spectre de fréquence de la figure Fig. 2.3*

Spectre normalisé $\mathcal{L}(f)$ On définit le spectre RF unilatéral, normalisé par la puissance de la porteuse et centré en l'origine par [Blair 74]

$$\mathcal{L}(f) = \frac{S_\nu(f+\nu_0)}{\frac{1}{2}V_0^2} = \frac{1}{2}S_\Phi(f), \tag{2.16}$$

où $S_\nu(f)$ est le spectre du signal de sortie donné par (2.2), V_0 son amplitude maximale et $S_\Phi(f)$ la densité spectrale des fluctuations de phase. L'unité de mesure est le dBc/Hz, et la caractérisation des oscillateurs se fait à une certaine distance f de la porteuse, appelée fréquence de Fourier. On parle alors de pureté spectrale de $-120dBc/Hz@1Hz$, ce qui signifie que le rapport de la puissance porteuse et de la modulation à 1 Hz est de $-120dBc/Hz$ (Fig. 2.5).

L'établissement de (2.16) suppose que la valeur quadratique moyenne $< \Phi(t)^2 >$ de la phase est beaucoup plus petite que l'unité, et que le bruit d'amplitude est négligeable. On constate toutefois d'après la figure Fig. 2.4 que la densité spectrale diverge pour $f = 0$ ce qui implique, d'après l'équivalence entre énergie spectrale et valeur quadratique moyenne (Eq. (2.7)), que celle-ci diverge également et contredit l'hypothèse de stationnarité. Ces remarques entretiennent le doute quant à l'hypothèse de stationnarité des variables. Nous

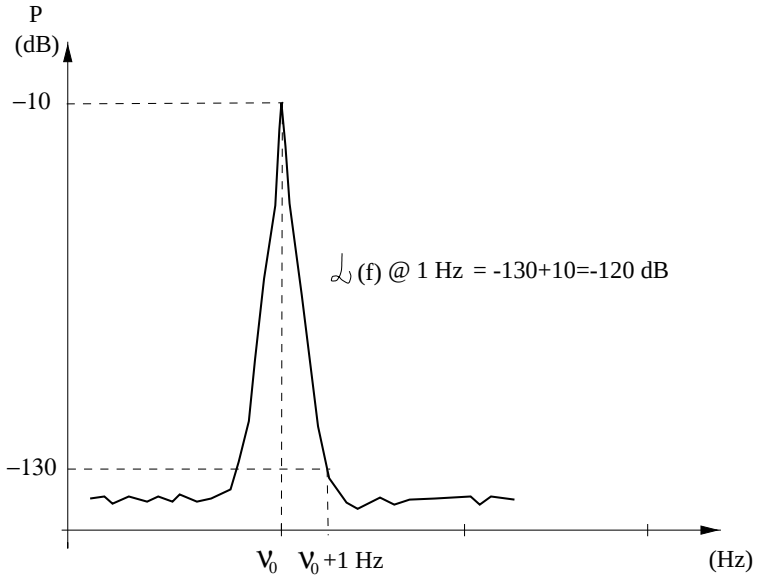


FIG. 2.5 – *Spectre radio-fréquence d'un oscillateur de fréquence* ν_0

allons voir, dans le prochain chapitre, que le doute sur la validité du modèle en loi de puissance provient des faiblesses de l'analyse de Fourier pour les signaux plus compliqués que ceux supposés ici.

Méthodes expérimentales de mesure dans le domaine spectral

Il existe deux méthodes fondamentales pour mesurer la stabilité de fréquence des oscillateurs : la démodulation de phase et celle de fréquence. Dans le premier cas, le signal utile est proportionnel à la phase $\Phi(t)$, et dans l'autre à la fréquence normalisée $y(t)$. D'autres techniques (que nous ne développerons pas ici) existent [Rutman 78], mais il semble que la démodulation par asservissement demeure aujourd'hui l'état de l'art en matière de mesure de bruit[5].

Description du banc de mesure L'idée fondamentale reste de comparer la fréquence f_1 à mesurer à une fréquence stable f_0. Pour cela, l'oscillateur à mesurer est asservi sur l'oscillateur de référence par l'intermédiaire d'une boucle à verrouillage de phase dite PLL (Phase Locked Loop) (Fig. 2.6). Lorsque son fonctionnement est linéaire, on montre que le signal de correction est proportionnel à la différence de phase des deux oscillateurs.

Si l'on appelle Φ_1 la phase de l'oscillateur à mesurer, et Φ_2 celle de l'autre signal d'entrée du mélangeur, la correction $u_4(t)$ de l'asservissement s'écrit :

$$u_4(t) = \mu G(\Phi_1 - \Phi_2), \tag{2.17}$$

5. Citons une méthode interférométrique récemment développée par E. Rubiola [Rubiola 98].

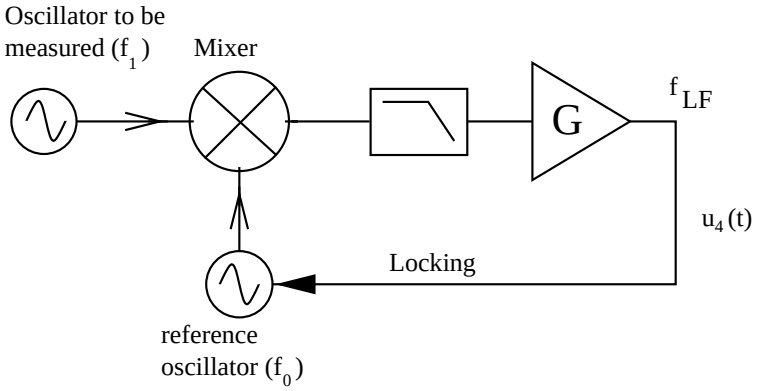


FIG. 2.6 – *Banc de mesure de bruit de phase*

où μ est la sensibilité du mélangeur exprimée en V.rad^{-1} et G le gain de l'amplificateur.

Le signal de sortie de l'oscillateur de référence asservi par $u_4(t)$ délivre une fréquence angulaire donnée par :

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{d\Phi_{ref}}{dt} + ku_4(t), \tag{2.18}$$

où k est un gain exprimé en rad.s^{-1}/V. Notons $< \omega_1 >=< \frac{d\Phi_1}{dt} >$ et $< \omega_{ref} >=< \frac{d\Phi_{ref}}{dt} >$ les fluctuations de fréquence angulaire associées aux phases Φ_1 et Φ_{ref}. En utilisant la variable de Laplace $p = d/dt$, on reporte (2.18) dans (2.17) pour obtenir :

$$u_4(p) = \frac{\mu G}{\mu Gk + p}(< \omega_1 > - < \omega_{ref} >) = T(p)(< \omega_1 > - < \omega_{ref} >). \tag{2.19}$$

On définit la bande passante d'asservissement par

$$K = \mu Gk, \tag{2.20}$$

(exprimée en Hz) et la fonction de transfert de l'asservissement par $T(p)$.

Transformation des fluctuations

La mesure des fluctuations de l'oscillateur à tester se fait à partir de la mesure du spectre de $u_4(t)$. La fonction de transfert $T(p)$ de la boucle montre la transformation des fluctuations d'entrée ; elle s'identifie à un filtrage passe-bas (Fig. 2.7). Si l'on suppose que les fluctuations de la référence sont négligeables par rapport à celles de l'oscillateur, on a alors :

$$u_4(p) = \frac{\mu G}{p} < \omega_1 > = \mu G\Phi_1 \quad \text{si} \quad \mid p \mid >> K, \tag{2.21}$$

$$u_4(p) = \frac{\mu G}{K} < \omega_1 > = \quad \text{si} \quad \mid p \mid << K, . \tag{2.22}$$

Si on appelle $S_{u_4(t)}$ le spectre de $u_4(t)$, il sera proportionnel au spectre de phase de l'oscillateur $S_\Phi(f)$ hors de la bande passante d'asservissement $\mid p \mid >> K$ et au spectre de fréquence $S_y(f)$ à l'intérieur de la bande passante $\mid p \mid << K$. Sachant que $S_\Phi(f)$ et $S_y(f)$ sont reliés par l'équation (2.14), on obtient le spectre de la figure Fig. 2.7 (pour un bruit blanc de fréquence en entrée). Pratiquement, on peut réaliser une correction de ce spectre pour obtenir le spectre $S_\Phi(f)$ (spectre de phase) ou $\mathcal{L}(f)$ (spectre normalisé), ce que réalisent la plupart des bancs de mesure de bruits commerciaux (séries HP E550 par exemple) [Hewlett Packard 97]. Les mesures spectrales de bruit de phase sont totalement dépendantes de la dynamique de la boucle d'asservissement, caractérisée par la fréquence de coupure K. La connaissance précise de cette quantité est alors indispensable.

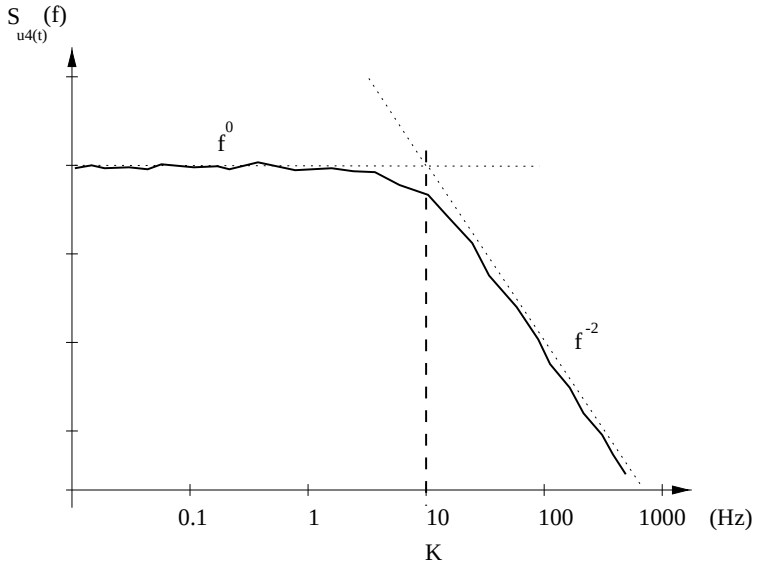


FIG. 2.7 – *Spectre du signal d'erreur $u_4(t)$ pour $K = 10$ Hz*

Inconvénients et avantages du banc

Le seul inconvénient majeur est que cette méthode requiert une référence d'une grande pureté spectrale par rapport à la méthode utilisant, par exemple, le discriminateur à ligne à retard. En revanche, ses avantages sont importants. On peut en citer quelques-uns [Hewlett Packard 97] :

- très bon plancher de bruit du dispositif complet
- large gamme de la fréquence de Fourier f : 0.01 Hz $\rightarrow$ 100 MHz
- large gamme de fréquence de fonctionnement ν_0 : 50 kHz $\rightarrow$ 26.5 GHz

- très bonne suppression des modulations d'amplitude (AM)
- bonne répétabilité des mesures
- bonne précision des mesures: $\simeq 2$ dB

2.2.2 Mesures dans le domaine temporel

La caractérisation des oscillateurs peut se faire par une étude statistique de la fréquence de l'oscillateur mesurée à partir d'un fréquence-mètre.

Méthodes expérimentales

Le compteur Le fréquence-mètre (ou compteur) est un appareil permettant d'évaluer l'intervalle de temps nécéssaire pour que le signal repasse par une position déterminée (position trigger) sur un front choisi (montant ou descendant). Cette durée est évaluée par rapport à une référence interne ou externe (si on utilise un asservissement extérieur).

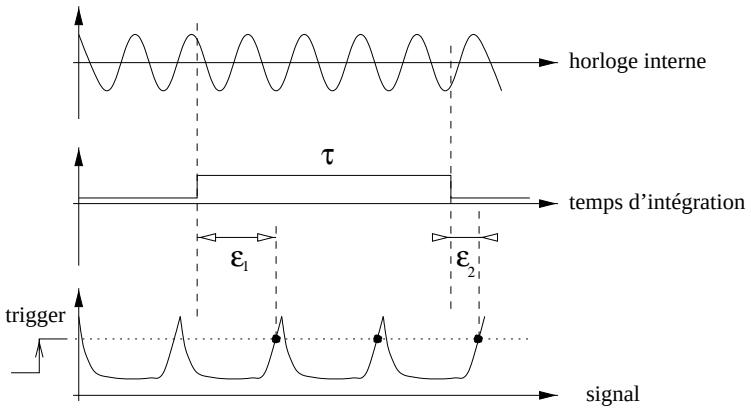


FIG. 2.8 – *Fonctionnement du compteur de fréquence*

On constate immédiatement que la position du trigger devra être optimisée pour limiter les erreurs systématiques ϵ_1 et ϵ_2 de déclenchement. Aujourd'hui, on utilise de plus en plus les compteurs réciproques permettant de s'affranchir de ces erreurs.

Un tel compteur réalise une mesure pendant une durée τ appelée temps d'intégration, pendant laquelle il détermine le nombre N_i de passage par la position trigger ; la fréquence sera alors donnée par :

$$f_i = \frac{N_i}{\tau}. \tag{2.23}$$

La précision de la mesure de la fréquence dépend bien sûr de la précision de l'horloge interne. Le compteur HP 5334B utilisé au cours de nos expériences garantit neuf chiffres significatifs pour $\tau = 1$ s ou plus, 8 pour $\tau = 0,1$ s, 7 pour 0,01 s, etc. Une bonne caractérisation pour $\tau = 0,01$ s serait alors impossible pour les oscillateurs stables à moins de 10^{-7} sans l'utilisation d'une méthode de battement.

La méthode de battement Pour mesurer la stabilité temporelle d'un oscillateur donné à 10^{-10} par exemple, la limitation en chiffres significatifs du compteur ne permet pas une statistique fiable. La méthode de battement consiste à éliminer la partie fixe de la fréquence et à ne compter que la partie fluctuante. On réalise expérimentalement cette opération en attaquant les deux entrées d'un mélangeur par le signal à mesurer et par un signal plus stable à une fréquence choisie pour avoir un battement réalisant un compromis entre la présence de deux ou trois chiffres constants et une bonne forme du signal de battement (Fig. 2.9).

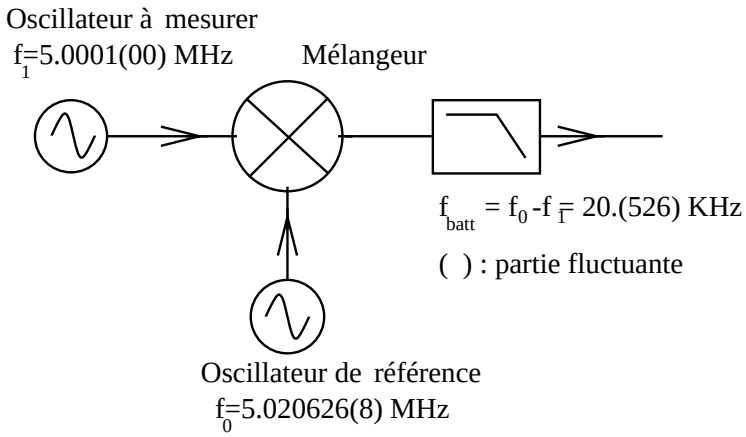


FIG. 2.9 – *Méthode de battement pour la mesure de la fréquence des oscillateurs*

Si on appelle $\frac{\delta f_{batt}}{f_{batt}}$ les fluctuations relatives de f_{batt}, on a

$$\frac{\delta f_{batt}}{f_{batt}} = \frac{\delta(f_0 - f_1)}{f_0 - f_1} = \frac{\delta f_1}{f_1}\frac{f_1}{f_{batt}}, \tag{2.24}$$

et les fluctuations de l'oscillateur à tester sont alors :

$$\frac{\delta f_1}{f_1} = \frac{f_{batt}}{f_1}\frac{\delta f_{batt}}{f_{batt}}. \tag{2.25}$$

Pratiquement, pour des oscillateurs 5 MHz, on utilise un battement dont la fréquence est de l'ordre du kHz ; on peut dans ces conditions mesurer des oscillateurs jusqu'à :

$$\frac{\delta f_1}{f_1} = 10^{-9}\frac{10^3}{5.10^6} = 2.10^{-13}. \tag{2.26}$$

On peut gagner par cette méthode un facteur 4 ou 5 suivant les dispositifs. Nous verrons dans le chapitre 7 que le battement est obtenu à partir de la mise en série d'un mélangeur doublement équilibré et d'un filtre passe-haut, et que la non-linéarité du mélangeur engendre des signaux parasites susceptibles de perturber le signal principal en modifiant sa fréquence. La mesure de la fréquence est perturbée par la méthode de mesure elle-même. L'étude précise de la dynamique complète du mélangeur trouve donc également son intérêt pour les mesures de fréquence par méthode de battement.

La variance d'Allan

Définition Une statistique est réalisée sur les N fréquences moyennées (sur une durée τ) $f_i, i = 1, N$ délivrées par le compteur (Eq. 2.23). L'estimation de l'écart type $\sigma^2(f_i)$ se fait par l'intermédiaire de la variance d'Allan [Allan 66] à deux échantillons $\sigma_y^2(f_i)$, qui a été recommandée par l'IEEE Committee comme étant la mesure standard de la stabilité des oscillateurs dans le domaine temporel [Barnes 71]. Elle est définie par :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} < (y_i - y_{i+1})^2 >, \tag{2.27}$$

où τ est le temps d'intégration du compteur, $y_i = f_i/\bar{f}$ et $\bar{f} = \frac{1}{N}\sum_i^N f_i$. La mesure de la stabilité relative de fréquence des oscillateurs est donnée par la racine carré de la variance appelée écart-type d'Allan $\sigma_y(\tau)$.

Propriétés

- Variance d'Allan d'une dérive en fréquence : $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

  On a :

  $$y_i - y_{i+1} = \frac{\alpha\tau}{\omega_0} \quad \text{et } \sigma_y^2(\tau) = \frac{\alpha^2\tau^2}{2\omega_0^2} \tag{2.28}$$

  Une dérive en fréquence produit une variance de pente 2 en échelle logarithmique.

- Marche aléatoire de fréquence (Bruit en $1/f^2$) : Un processus de marche aléatoire (ou mouvement Brownien) de fréquence consiste à incrémenter ou décrémenter (avec la même probabilité P) d'un pas $\delta\nu_0$ (cf Fig. 2.10 (a)). On peut alors écrire :

  $$\nu_0(t + dt) = \nu_0(t) + \epsilon\ \delta\nu_0 \quad \text{avec} P(\epsilon = -1) = P(\epsilon = +1) = \frac{1}{2}. \tag{2.29}$$

Type de bruit	Densité spectrale $S_y(f)$	Variance d'Allan [a] $\sigma_y^2(\tau)$
Marche aléatoire de fréquence	$h_{-2}f^{-2}$	$h_{-2}\frac{2}{3}\pi^2\tau$
Bruit flicker de fréquence	$h_{-1}f^{-1}$	$h_{-1}2\ln 2$
Bruit blanc de fréquence	$h_0 f^0$	$\frac{h_0}{2\tau}$
Bruit flicker de phase	$h_1 f^1$	$\frac{h_1}{4\pi^2}(1+3\ln^2\pi F_m\tau)\tau^{-2}$
Bruit blanc de phase	$h_{+2}f^{+2}$	$\frac{h_2}{4\pi^2}F_m\tau^{-2}$

TAB. 2.2 – *Correspondance Domaine Temporel - Domaine Spectral pour le bruit en loi de puissances*

[a] F_m représente la fréquence de coupure haute du bruit. On a supposé $2\pi F_M >> 1$

Si l'on utilise le résultat relatif à la diffusion des particules soumises à un mouvement Brownien unidimensionnel, à savoir :

$$< \nu_0^2(t) >= 2Dt, \tag{2.30}$$

avec D : coefficient de diffusion, on a alors :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} < (y_i - y_{i+1})^2 >= \frac{1}{2} < \nu_0^2(t) >\sim D\tau. \tag{2.31}$$

Le bruit de marche aléatoire de fréquence produit une pente $+1$ en échelle logarithmique (cf. Fig. 2.10 (c)).

La correspondance pour les autres types de bruit peut être calculée, elle est donnée par le tableau Tab. 2.2 :

Avantages de la Variance d'Allan

- Si le bruit de fréquence est blanc, il s'agit d'un estimateur non biaisé.
- Elle est rapide, pratique à mettre en oeuvre car elle nécessite la mesure de deux échantillons successifs seulement.
- Elle possède un bon intervalle de confiance [Lesage 73].

Défauts de la Variance d'Allan

- Même dépendance en τ^2 pour les bruits de fréquence en f^1 et f^2. Insensible aux fluctuations hautes fréquences.
- Non convergente pour les bruits en f^1 et f^2.

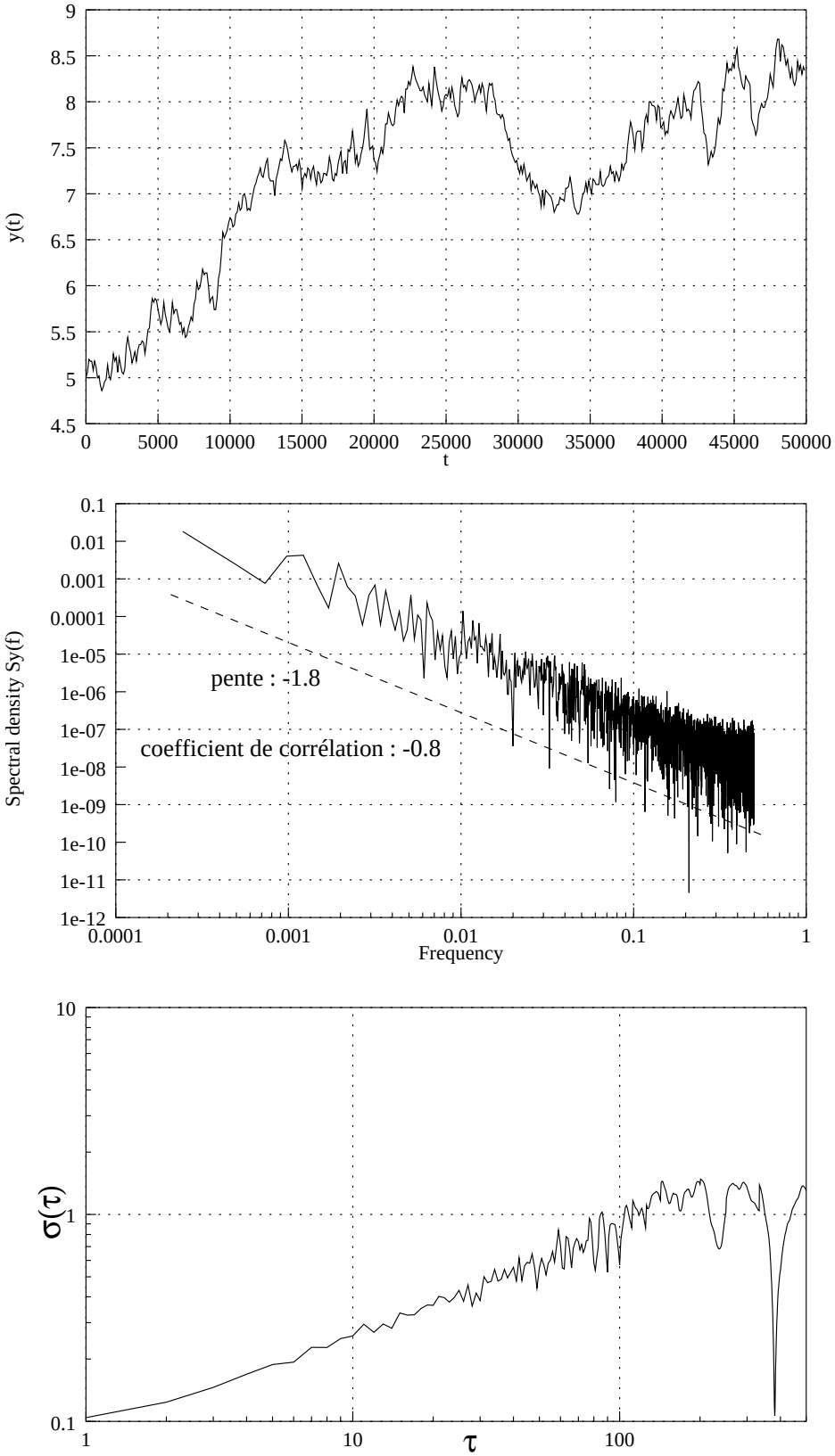


FIG. 2.10 – *Marche aléatoire de fréquence et ses propriétés.*

- Nécessite une propriété de stationnarité du signal.

- Sensibilité par rapport aux temps morts entre échantillons y_i (sauf pour le bruit blanc de fréquence).

De nombreuses méthodes statistiques dérivées de la variance d'Allan existent pour palier ces défauts. Citons par exemple les variances d'Allan modifiées, et de Picinbono qui permettent de lever l'indétermination par rapport aux bruits f^1 et f^2. Le lecteur pourra se référer aux travaux de F. Vernotte [Vernotte 91] et à l'article assez récent de D. Howe [Howe 97] présentant la variance d'Allan modifiée et ses propriétés.

2.3 Les différents types de bruit

Comme nous l'avons rappelé en (2.10), la mesure des fluctuations $S_y(f)$ dans les oscillateurs montre que celles-ci semblent suivre une loi de puissance donnée par :

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{2} h_\alpha f^\alpha \tag{2.32}$$

Le cas α=-3 a été observé dans les fluctuations des pulsars millisecondes [Bertotti 83]. L'origine serait attribuée à la fluctuation locale de la métrique espace-temps.

2.3.1 Les sources de bruit

Tous les composants électroniques présents dans l'oscillateur fournissent une contribution de bruit plus ou moins importante. Les effets physiques d'une fluctuation aléatoire auront également une influence différente suivant la localisation spectrale par rapport à la fréquence de la porteuse. Les composantes basses fréquences se traduisent par une modulation de la fréquence porteuse et les hautes fréquences par une modulation de phase.

Les composantes hautes fréquences interviennent également dans le cas d'un système qui présente des harmoniques. La bande latérale de chaque harmonique est transposée au niveau du bruit par un processus de conversion de fréquence[6] (Fig. 2.11). Cet effet est d'ailleurs à la base des méthodes de simulation numériques par « balance harmonique » qui sont utilisées pour l'étude du bruit dans les systèmes non linéaires, mais qui ont toutefois le défaut de considérer l'ensemble des harmoniques comme un système multi-fréquence linéaire.

6. On dit que c'est une source de bruit multiplicatif.

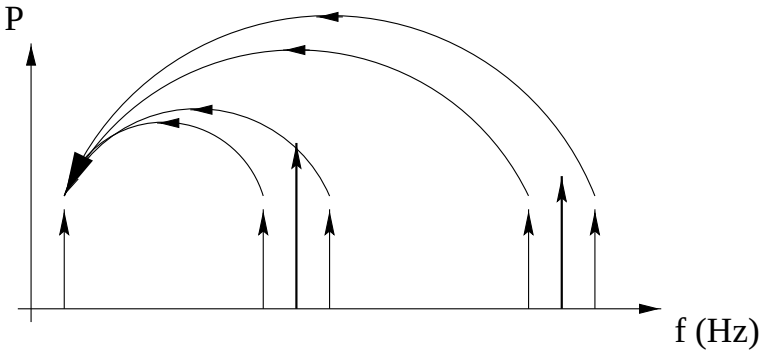


FIG. 2.11 – *Conversion de fréquence : une source de bruit.*

2.3.2 Le bruit blanc (f^0)

Phénomènes élémentaires de transport des particules

Nous nous sommes inspirés de l'ouvrage de Goldman [Goldman 48] et des articles de Chovet [Chovet 77b, Chovet 77a] pour cette étude. Considérons un système de N particules (les électrons) identiques, susceptibles de se mouvoir dans un matériau de volume $S \times L$. Supposons que ces particules évoluent dans l'ensemble de façon indépendante, et qu'elles ne soient pas dans un premier temps perturbées par les effets du réseau cristallin.

Définissons par $P(t)$ la probabilité pour qu'une particule n'ait subi aucun choc à l'instant t. On a

$$P(t=0) = 1, \tag{2.33a}$$

$$P(t=\infty) = 0. \tag{2.33b}$$

Soit ωdt la probabilité de collision entre t et $t+dt$. Dans ce cas, on peut écrire

$$P(t+dt) = P(t) \times (1 - \omega dt). \tag{2.34}$$

Or

$$P(t+dt) = P(t) + \frac{dP(t)}{dt}dt, \tag{2.35}$$

donc

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\omega P(t), \tag{2.36}$$

soit en utilisant (2.33a) :

$$P(t) = e^{-\omega t}. \tag{2.37}$$

Définissons par $Q(t)dt$ la probabilité pour qu'une particule n'ayant pas subi de choc à l'instant t en subisse un pendant l'intervalle dt. Alors,

$$Q(t)dt = P(t)\omega dt = \omega e^{-\omega t}dt, \tag{2.38}$$

soit

$$Q(t) = \omega e^{-\omega t}. \tag{2.39}$$

En utilisant (2.34) et (2.35), il vient

$$\int_0^\infty Q(t)dt = \int_0^\infty \frac{dP(t)}{dt}dt = 1. \tag{2.40}$$

On définit le temps moyen τ_0 entre deux chocs par

$$\tau_0 = \int_0^\infty tQ(t)dt = \int_0^\infty \omega t e^{-wt}dt = \frac{1}{\omega}. \tag{2.41}$$

De ce fait la quantité ω représente le nombre de collisions par unité de temps subies par une particule. Si l'on suppose les particules animées d'une vitesse moyenne $\overline{v}$, on peut alors définir le libre parcours moyen $\overline{l_0}$ par

$$\overline{l_0} = \overline{v}\tau_0. \tag{2.42}$$

Si l'on suppose que la vitesse des particules est régie par des lois probabilistes telles que (2.37) et (2.39), on peut alors associer au système thermodynamique une statistique de Boltzmann.

Thermodynamique de Boltzmann [Goldman 48]

Un système possédant une énergie totale U possède une énergie libre F (énergie utilisable mécaniquement) donnée par

$$F = U - TS, \tag{2.43}$$

où T est la température thermodynamique et S l'entropie du système.

Supposons que les fluctuations soient le résultat d'un grand nombre de processus aléatoires indépendants et que, selon le théorème de la limite centrale (cf. Chapitre 3), la probabilité suive une loi gaussienne :

$$P(x)dx = B\exp(-\alpha^2(x - x_0)^2)dx \quad \text{avec } x_0 = \overline{x}, \tag{2.44}$$

où α et B sont des constantes. L'hypothèse fondamentale de Boltzmann s'écrivant :

$$\Delta S = k_B \ln P(t) \quad \text{soit} \quad P = \exp(\frac{\Delta S}{k_B}), \tag{2.45}$$

avec k_B : constante de Boltzmann ; il vient de (2.44) et (2.45) :

$$-\alpha^2(x-x_0)^2 = \frac{S-S_0}{k_B}. \tag{2.46}$$

Si l'on suppose l'énergie libre F proportionnelle au carré des fluctuations, on a alors (avec $a = cte$) :

$$F = F_0 + a^2(x-x_0)^2, \tag{2.47}$$

donc

$$U - TS = F_0 + a^2(x-x_0)^2, \tag{2.48}$$

soit

$$S = \frac{-F_0 - a^2(x-x_0)^2 + U}{T}. \tag{2.49}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(x) &= Be^{-\alpha^2(x-x_0)^2} = Be^{\frac{S-S_0}{k_B}} && (2.50a)\\ &= Be^{\frac{1}{k_B}\frac{-F_0-a^2(x-x_0)^2+U-S_0}{T}} && (2.50b)\\ &= Be^{\frac{-a^2(x-x_0)^2}{k_BT}}. && (2.50c) \end{aligned}$$

En s'écrivant

$$\int_0^\infty P(t)dt = 1, \tag{2.51}$$

il vient

$$P_{x_0}(x)dx = \frac{a}{\sqrt{\pi k_B T}} e^{\frac{-a^2(x-x_0)^2}{k_BT}} dx. \tag{2.52}$$

On obtient bien une distribution Gaussienne des fluctuations autour de la valeur moyenne $x = \overline{x_0}$. La quantité $a^2(x-x_0)^2$ possède la dimension d'une énergie. L'énergie libre associée se calcule alors par :

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x-x_0)^2 P_{x_0}(x)dx, && (2.53a)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{\sqrt{\pi k_B T}}(x-x_0)^2 e^{\frac{-a^2(x-x_0)^2}{k_BT}} dx, && (2.53b)\\ &= \frac{k_BT}{2}. && (2.53c) \end{aligned}$$

Un système qui dépend de n variables d'état indépendantes x_i, produit une énergie libre de

$$F = \frac{nk_BT}{2}. \tag{2.54}$$

Un électron évoluant dans un volume est caractérisé par trois variables d'état. S'il obéit à la statistique de Boltzmann, son énergie libre est alors donnée par

$$F = \frac{3k_BT}{2} = \frac{m\overline{v^2}}{2}, \tag{2.55}$$

et il vient

$$\overline{v^2} = \frac{3k_BT}{m}. \tag{2.56}$$

Le courant créé par l'agitation des électrons est le résultat d'une certaine cohérence de leur mouvement. Calculons la fonction de corrélation de la vitesse des électrons pour en décrire celle sur le courant. L'intervalle de temps entre deux chocs successifs a une densité de probabilité donnée par (2.39).

$$Q(t) = \frac{1}{\tau_0} e^{-t/\tau_0}. \tag{2.57}$$

Après un choc, un électron animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ faisant un angle Φ avec l'axe d'étude change aléatoirement de direction ϕ avec une probabilité

$$P_\Phi(\phi) = \frac{1}{2}\sin\phi. \tag{2.58}$$

L'intensité du courant $i_e(t)$ suivant l'axe x issue de la vitesse de l'électron s'écrit alors

$$i_e(t) = q\frac{v_x}{L} = \frac{1}{L}qv\cos\phi, \tag{2.59}$$

où q est la charge de l'électron et L la longueur de l'échantillon. On peut alors supposer que l'intensité totale résulte de la somme des contributions individuelles agissant pendant le temps de corrélation τ_0, avant le choc. Il vient alors

$$I(t) = \frac{q}{L}\sum_{j=1}^{N} H(t - t_j), \tag{2.60}$$

où

$$H(t) = v\cos\Phi \quad \text{si} \quad 0 < t < \tau_0 \tag{2.61a}$$

$$= 0 \quad \text{sinon.} \tag{2.61b}$$

La fonction de corrélation $C_{I_e(t)}$ se calcule en utilisant (3.26) en supposant $I_e(t)$ stationnaire d'ordre 2 (cf. chapitre 3). Il faut également inclure la probabilité qu'il n'y ait aucun choc pendant l'intervalle t soit :

$$C_{I(t)} = E(I(\tau).I(\tau - t))P(t) = \overline{I(\tau).I(\tau - t)}P(t) = \frac{q^2}{L^2}\overline{v^2\cos^2\Phi}\exp(-t/\tau_0). \tag{2.62}$$

En considérant que le module et les directions des vitesses non corrélées, (2.62) donne

$$C_{I_e(t)} = \frac{q^2}{L^2}\overline{v^2}\ \overline{\cos^2\Phi}\exp(-t/\tau_0). \tag{2.63}$$

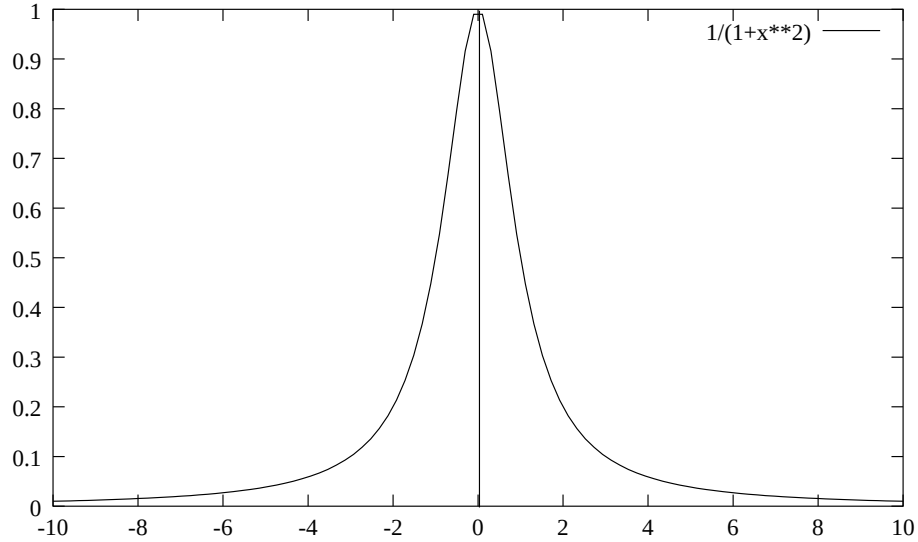


FIG. 2.12 – *Spectre Lorentzien de diffusion des électrons dans les solides.*

Or

$$\overline{\cos^2\Phi} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2\phi \sin\phi d\phi = 1/3, \tag{2.64}$$

et, selon (2.56),

$$\overline{v^2} = \frac{3k_BT}{m}. \tag{2.65}$$

Donc

$$C_{I(t)} = \frac{q^2}{L^2}\frac{k_BT}{m}e^{-t/\tau_0}. \tag{2.66}$$

Le spectre associé à (2.66) se calcule par le théorème de Wiener-Kintchine et donne

$$S_{I(t)}(f) = 4\int_0^\infty C_{I(t)}e^{-2i\pi tf}dt \tag{2.67a}$$

$$= \frac{4q^2k_BT}{L^2m}\frac{\tau_0}{1+4\pi^2f^2\tau_0^2} \tag{2.67b}$$

Le spectre Lorentzien de diffusion des n_0SL électrons (n_0 : densité de particule) est alors donné par (Fig. 2.12) :

$$S_{(f)} = 4\frac{k_BT}{R}\frac{1}{1+4\pi^2f^2\tau_0^2}, \tag{2.68}$$

où $R = \frac{L}{\sigma S}$ est la résistance de l'échantillon, $\sigma = \frac{n_0q^2\sigma_0}{m} = \frac{1}{\rho}$ sa conductivité exprimée en Sm^{-1} et ρ sa résistivité exprimée en Ωm. Le temps de relaxation introduit une fréquence de coupure dans le spectre de l'ordre de $f_c = 1/\tau_0$.

Propriétés physiques macroscopiques et microscopiques Calcul de f_c.

$$f_c = \frac{1}{\tau_0} = \frac{n_0 q^2}{m\sigma} \tag{2.69}$$

Pour les métaux, on a $\sigma \sim 10^8$ Sm^{-1}, et $n_0 = 10^{28}$. Avec $e = 1.6\ 10^{-19}$ C, $m = 9.31\ 10^{-31}$ kg, il vient :

$$f_c = 10^{12} \text{ Hz}. \tag{2.70}$$

Dans la plupart des cas d'analyse spectrale, le spectre de diffusion (2.68) peut être approximé par

$$S_I(f) = 4\frac{k_B T}{R}. \tag{2.71}$$

Le spectre des fluctuations de tension $S_V(f)$ peut alors se calculer en écrivant $i = V/R$ dans (2.59) pour obtenir

$$S_V(f) = 4k_B RT. \tag{2.72}$$

Expérimentalement, la mesure de ce spectre se fait dans une bande de fréquence Δf. La relation(2.72) donne alors

$$S_{V^2}(f) = 4k_B RT\Delta f, \tag{2.73}$$

qui constitue la relation de Nyquist.

Le bruit thermique apparaît comme la composante basse fréquence du bruit de diffusion des électrons. À notre échelle macroscopique d'observation où la fréquence d'analyse est toujours inférieure à la fréquence de coupure f_c, les fluctuations de diffusion des électrons sont totalement aléatoires. En revanche, pour les semi-conducteurs où la densité des porteurs est plus faible $n_0 \sim 10^{23}$, la fréquence de coupure est plus basse $f_c \sim 10^7$ et se rapproche du domaine d'analyse spectral courant. Étudier le bruit de diffusion à des échelles spectrales supérieures à f_c serait possible si l'on était capable d'échantillonner temporellement à $T_{ech} < \tau_0$ (ce qui constituerait une étude microscopique du système) et ferait apparaître un spectre en $1/f^2$ caractéristique d'un mouvement de marche aléatoire avec un pas de l'ordre du libre parcours moyen $l_0 = v\tau_0 = 3\ 10^{-4}$. L'étude de l'électron à une fréquence plus élevée que la fréquence de coupure permet de mettre en évidence le temps de cohérence τ_0 et le changement de direction après le choc.

Ce paragraphe était destiné à rappeler l'origine microscopique des fluctuations thermiques observées macroscopiquement et générant un bruit blanc de fréquence. Nous avons rappelé que le bruit blanc ne constitue en fait que la partie basse fréquence du phénomène de diffusion des électrons dans le conducteur. L'aspect aléatoire de la direction prise par

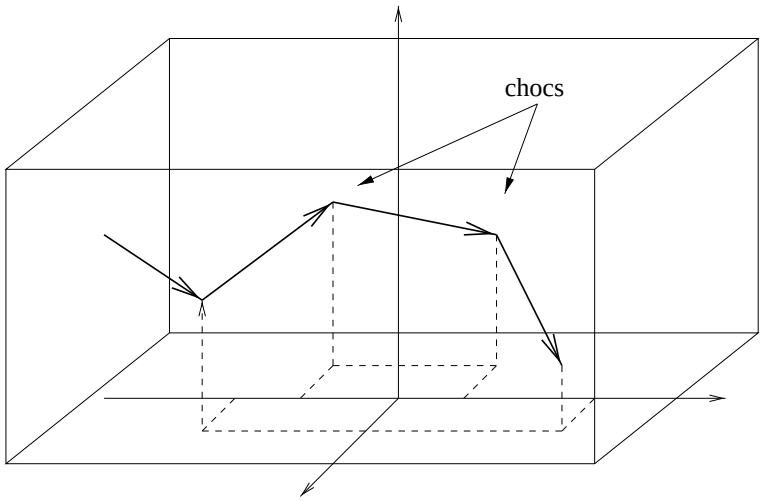


FIG. 2.13 – *Marche aléatoire tridimensionnelle*

les particules après les collisions nous apparaît macroscopiquement comme un bruit blanc parce que notre fréquence d'analyse ne nous permet pas de distinguer le comportement des particules entre chaque choc. On montre ainsi qu'à l'échelle microscopique, un phénomène de transformation des fluctuations existe.

On a porté sur la figure Fig. 2.14 les caractéristiques d'un bruit blanc généré à partir d'un générateur pseudo-aléatoire à valeur dans [0 ;1] (a). Il possède une fonction de corrélation singulière (d), nulle pour $t \neq 0$, ce qui veut dire que le bruit blanc est un processus sans mémoire. Le calcul de la variance d'Allan donne une courbe de pente τ^{-1}, soit de pente $\tau^{-1/2}$ pour l'écart-type d'Allan (c). On a porté en (b) la densité spectrale évaluée à partir d'une FFT calculée sur 4096 points.

2.3.3 Transformation du bruit dans les oscillateurs - Modèle de Leeson

Pour expliquer la présence de certains types de bruit dans les oscillateurs, il faut examiner le mécanisme interne du fonctionnement de l'oscillateur. Cette analyse se fait par le modèle de Leeson [Leeson 66], sur la base d'un raisonnement purement intuitif, en considérant le modèle de l'oscillateur bouclé en contre réaction, constitué d'un amplificateur G et d'un résonateur de facteur de qualité Q et de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_0}{2Q}$.

Les sources de bruit sont supposées provenir de l'élément actif. Étudions les fluctuations de fréquence suivant la gamme de fréquence. Pour les fréquences basses par rapport à la bande passante du résonateur, le temps de réponse est tel que le déphasage à l'intérieur de la boucle est toujours nul. Ces fluctuations de fréquence en sortie sont proportionnelles

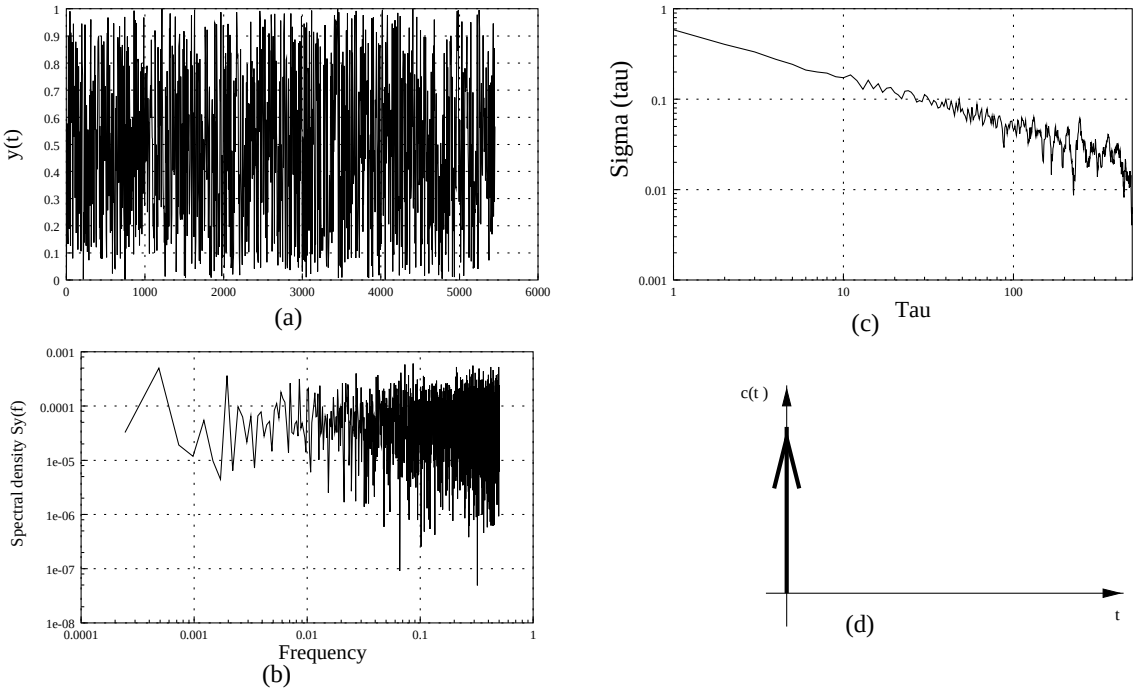


FIG. 2.14 – *Bruit blanc et ses propriétés temporelles et spectrales*

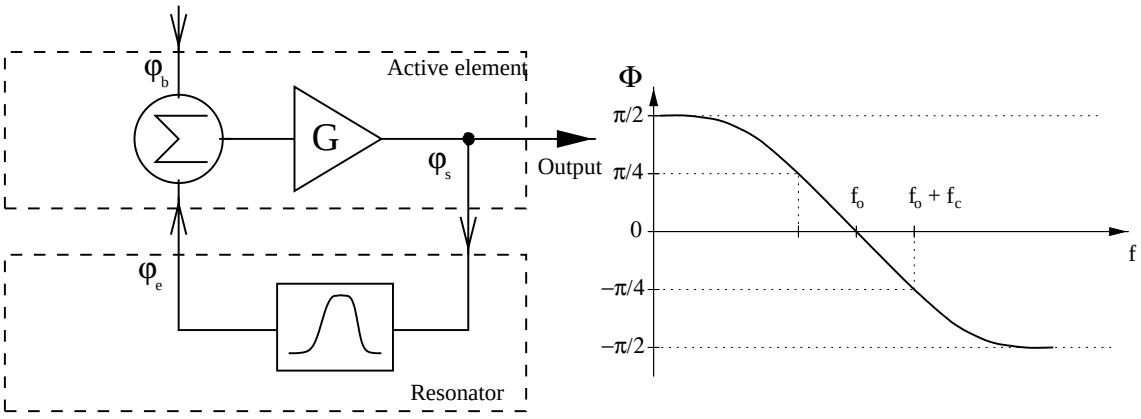


FIG. 2.15 – *(a) Modèle de Leeson - (b) Courbe phase-fréquence du résonateur*

aux fluctuations de phase de l'entrée (courbe phase fréquence) et inversement proportionnel au facteur de qualité. La boucle transforme le bruit de phase en bruit de fréquence. Pour les fréquences élevées, le temps de réponse de la contre réaction est trop lent et les fluctuations de phase de l'entrée ne sont pas modifiées. Sauvage [Sauvage 77] proposa le premier une démonstration du modèle de Leeson en calculant la fonction de transfert $T(p)$ du système.

En utilisant la notation de Laplace, on a :

$$\phi_s(p) = \phi_b(p) + \phi_e(p), \tag{2.74}$$

$$\phi_e(p) = H(p)\phi_s(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = -\frac{p}{f_c}. \tag{2.75}$$

Donc

$$T(p) = \frac{\phi_s(p)}{\phi_b(p)} = \frac{1}{1 - H(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{f_c}}, \tag{2.76}$$

ce qui confirme d'un point de vue spectral que :

$$S_{\phi_s}(f) = \left(1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right) S_{\phi_b}(f). \tag{2.77}$$

Si le bruit d'entrée est la somme d'un bruit blanc de phase et d'un bruit flicker de phase, on a (Fig. 2.16) :

$$S_{\phi_b}(f) = h_0 \left(1 + \frac{f_1}{f}\right), \tag{2.78}$$

et

$$S_{\phi_s}(f) = h_0 \left(1 + \frac{f_1}{f}\right) \left(1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right). \tag{2.79}$$

On constate l'apparition de bruits de phase en $1/f$ et $1/f^2$ suivant les valeurs des fréquences caractéristiques f_1 et f_c.

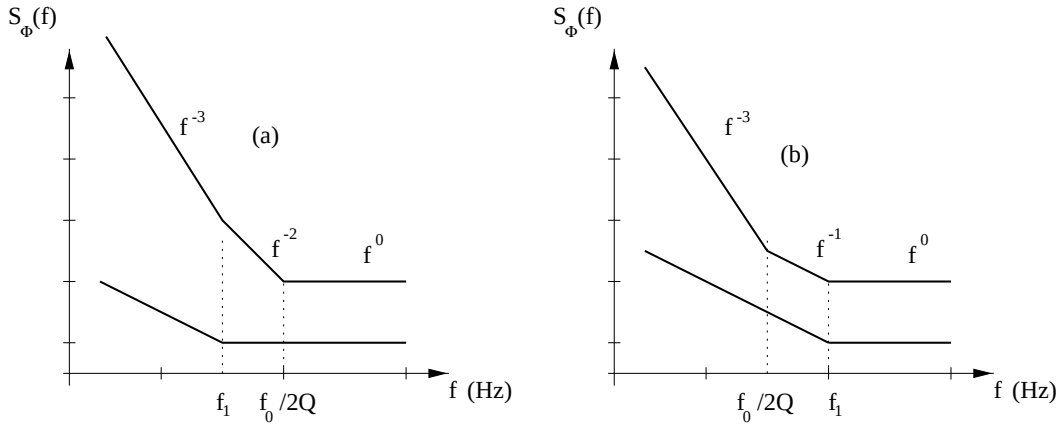


FIG. 2.16 – *Spectre de sortie d'un oscillateur de Leeson muni d'un amplificateur avec bruit blanc et bruit flicker de phase*

Les hypothèses de cette étude sont très restrictives mais le résultat est générique des systèmes bouclés. Il existe une transformation du bruit d'entrée suivant les éléments

électroniques en présence et suivant la rapidité des processus. Si l'on injecte un signal possédant de lentes variations temporelles, il sera d'autant plus sensible aux processus bouclés, et l'interaction du signal avec sa réponse, avec la réponse de la réponse, etc. peut conduire à des effets d'autant plus importants que les variations temporelles sont lentes par rapport aux constantes de temps. Cette interaction provoque alors une série de transformations du bruit conduisant à des spectres de phase en f^0, f^{-2}, f^{-4} etc. pour du bruit blanc de phase initiale et à des spectres en f^{-1}, f^{-3}, f^{-5} etc. pour du bruit flicker de phase initiale.

Il existe donc une explication simple sur l'origine du bruit de type f^{-2p} par des processus de dérivation ou d'intégration du bruit blanc thermique agissant sur la phase ou sur la fréquence. Le problème se pose pour les bruits à puissances impaires dont l'origine est inconnue mais pourrait être liée à un processus intermédiaire entre l'identité et la dérivation, peut-être une dérivation fractionnaire analogue aux filtres d'ordre fractionnaire.

Le bruit en $1/f^2$ (marche aléatoire de fréquence)

Nous avons vu que la variance d'Allan d'un processus de marche aléatoire de fréquence présente une pente en τ (cf. Tab 2.2). En reprenant l'équation (2.29), il vient :

$$\nu_0(t+dt) = \nu_0(t) + \epsilon\ \delta\nu_0 \quad \text{avec} P(\epsilon = -1) = P(\epsilon = +1) = \frac{1}{2}, \tag{2.80}$$

où

$$\nu_0(t+dt) - \nu_0(t) = \epsilon\ \delta\nu_0, \tag{2.81a}$$

$$\nu_0(t+dt) - \nu_0(t) = d\nu_0(t). \tag{2.81b}$$

En intégrant (2.81a), il vient

$$\int d\nu_0(t) = \delta\nu_0 \int \epsilon, \tag{2.82}$$

ou encore

$$\nu_0(t) = \delta\nu_0 \int \epsilon. \tag{2.83}$$

Si on suppose le processus ϵ aléatoire, on peut alors considérer le processus $\nu_0(t)$ comme représenté par l'intégration d'un bruit blanc qui produit selon (2.15) un spectre en $1/f^2$. Elle possède donc une valeur quadratique moyenne croissante en fonction du temps et proportionnelle au coefficient de diffusion D (Eq. 2.30). Ce n'est donc pas un processus stationnaire.

2.3.4 Le bruit en $1/f$ (flicker de fréquence)

Historique et Problématique

Selon Voss [Voss 79], c'est à Jonhson que l'on attribue la première mesure du bruit en $1/f$ en 1925, et c'est à Shottky que l'on doit une première explication de la remontée du spectre dans les basses fréquences : il associe sa présence aux conséquences d'un effet collectif des électrons [Chronos 91]. Depuis cette première observation, l'étude du bruit en $1/f$ n'a cessé de croître du fait de son extraordinaire propriété d'ubiquité. En effet, on observe du bruit en $1/f$ dans les domaines suivants : biologie, géologie, démographie, économie, linguistique, finance, musique, physique et électronique où il est à l'origine de l'instabilité des oscillateurs.

Pour ne citer que quelques exemples, retenons qu'il apparaît également dans les fluctuations du niveau du Nil [Dutta 81], des tremblements de terre [Carlson 89], des courants marins [Taft 74], du trafic autoroutier japonais [Muscha 77], des sonorités et des tonalités en musique [Voss 78], etc. Un signal musical présentant un spectre en $1/f$ sera perçu de la même manière quelque soit le défilement de la bande sonore. Il procure une meilleure sensation, alors que l'on ne détecte pas dans le son blanc les sensations agréables des fluctuations.

Le bruit en $1/f$ est rencontré dans une si grande variété des systèmes qu'il doit certainement exister un mécanisme générique caché derrière la génération de ce bruit. Pour une liste complète, on pourra consulter chaque introduction des articles référencés dans ce paragraphe. En plus d'être omniprésent, il reste inexpliqué par des méthodes spectrales classiques. Il est donc difficile d'en déterminer une origine puisque aucun modèle ne peut le vérifier. En effet, le problème posé par le bruit en $1/f$ est le suivant : si l'on admet que le bruit observé avec un appareil provient de la transformation d'un bruit blanc, le spectre sera alors proportionnel au carré du module de la fonction de transfert. Il faut alors une fonction en $1/\sqrt{f}$ pour avoir du bruit en $1/f$ en sortie. Or les équations différentielles ordinaires produisent des fonctions de transfert rationnelles en f. Seuls les phénomènes propagatifs peuvent produire une fonction de transfert en $1/\sqrt{f}$ [Planat 87]. Ainsi un phénomène de propagation complexe (guidé par plusieurs modes) peut créer autant de constantes de temps et engendrer un spectre en $1/f$. Nous venons de voir que le bruit en $1/f^2$ était un phénomène non stationnaire possédant une dérive proportionnelle au coefficient de diffusion. Le bruit blanc en f^0 est quant à lui stationnaire. L'une des principales controverses concerne la stationnarité du bruit en $1/f$. Stoisiek [Stoisiek 75] envisage sa possibilité alors que Keshner [Keshner 82] l'exclu. On pourra également consul-

ter [Chovet 77a, Dutta 81] qui en parle également. Sa propriété gaussienne étudiée dans [Weissmann 88] est également envisagée par Handel [Handel 80] et rejetée par Seidler [Seidler 96]. La problématique par rapport à ce bruit est donc très riche.

Propriétés du bruit en $1/f$

L'une des principales propriétés de la densité spectrale en $1/f$ est la divergence de l'intégrale de ce bruit (énergie ou valeur quadratique moyenne) en 0 et en $+\infty$, alors que tous les autres spectres $1/f^n$ possèdent au moins une limite finie.

L'étude de sa fonction d'auto-corrélation a été faite par Kechner [Keshner 82]. Il montre qu'elle possède une décroissance logarithmique plus lente que n'importe qu'elle autre fonction de puissance. C'est donc un phénomène à grande mémoire composé d'une infinité de constantes de temps à toutes les échelles. Il possède également cette propriété de fractalité dans le sens où toute sa structure est comprise dans n'importe quel échantillon. Elle est mise en relief par la variance d'Allan qui est constante quelque soit le nombre de points considérés pour le calcul.

Certains auteurs [Handel 80] étendent la définition du bruit en $1/f^\alpha$ avec un exposant α proche de 1 ($\alpha = 1 \pm 0.2$).

Principaux modèles

Le bruit en $1/f$ est un phénomène tellement général que de nombreux modèles essayant de le traiter ont vu le jour. Résumons en quelques lignes les principaux d'entre eux.

Approche empirique de Hooge Hooge a été le premier à lui associer des effets de volume [Hooge 94]. Il établit la relation empirique

$$S_v(f) = \frac{\alpha \overline{v^2}}{N_c f}, \tag{2.84}$$

où N_c est le nombre total de porteurs dans un échantillon et α un coefficient universel ($\alpha \sim 2\ 10^{-3}$ u. MKSA). Selon lui, l'idée selon laquelle le bruit en $1/f$ serait exclusivement dû à un effet semi-conducteur est réfutée. Il propose une origine liée aux modes de dispersion de réseau et l'associe à la fluctuation de mobilité des particules. Mais cette relation n'a selon Weissman [Weissmann 88] aucun sens significatif.

Modèle de Mc Whorter Ce modèle considère un spectre Lorentzien

$$S(f) = \frac{\tau}{1 + \tau^2 (2\pi f)^2}, \tag{2.85}$$

pour lequel il associe une fonction de distribution $g(\tau)d\tau \sim \frac{d\tau}{\tau}$. De ce fait l'intégrale $\int S(f)\frac{d\tau}{\tau}$ produit un bruit en $1/f$. Ce modèle est également critiqué par Weissman.

Modèle de Dutta-Horn Ce modèle est très intéressant car c'est un modèle où le système physique présente deux positions d'équilibre stables, séparées par une barrière de potentiel dont la stabilité est conditionnée par les fluctuations thermiques. Weissman présente ce modèle comme un processus non gaussien pouvant conduire dans le cas extrême à une évolution du type "signal du télégraphe" ou RTS (random telegraph signal) dans laquelle on observe deux ou plusieurs états clairement séparés. Il est intéressant de constater que ce modèle fait apparaître la nécessité de franchissement d'une barrière de potentiel. Or, nous verrons dans le chapitre 4 que si l'énergie totale est égale à cette barrière de potentiel, le système est très chaotique et sensible aux effets non linéaires. C'est le premier modèle ou la non-linéarité semble intervenir.

Le modèle quantique non linéaire du bruit en $1/f$ d'Handel Personne n'a autant qu'Handel associé la non-linéarité à l'origine du bruit en $1/f$ [Handel 93]:

> During the last three decades, we have claimed repeatedly that nonlinearity is a general cause of $1/f$ noise [...] nonlinearity always leads to $1/f$ spectrum if homogeneity is also present in the equation(s) of motion.

Ainsi, quelque soit le système chaotique, l'existence de la non-linéarité et de l'homogénéité garantit la présence de bruit en $1/f$. Il applique sa théorie dans le contexte de l'électrodynamique au cas de particules quantiques chargées en interaction avec leurs propres champs. C'est un phénomène à effet collectif à plusieurs entités qui s'identifie à une conséquence d'une interaction à grande distance avec l'environnement [Handel 80]. Il étudie d'ailleurs, dans son article, le cas de deux entités.

Non-linéarité du bruit en $1/f$

La relation étroite entre non-linéarité et bruit en $1/f$ a été envisagée parce qu'aucun modèle linéaire ne décrit le bruit en $1/f$. Pour Putterman [Putterman 77], le bruit en $1/f$ serait dû à un couplage non linéaire de fluctuations haute-fréquence, mais il ne sait pas quel type de couplage. Voss [Voss 79] envisage la possibilité de l'origine non linéaire du bruit en $1/f$. Yamaguchi [Yamaguchi 86] étudie le bruit en $1/f$ proche des séparatrices dans les régions très chaotiques avec de longs temps de corrélation. Arecchi [Arecchi 87] confirme que le bruit en $1/f$ provient d'une dynamique non linéaire possédant au moins

deux attracteur. Il montre que pour qu'il y ait du bruit en $1/f$ il faut :

- une coexistence d'au moins deux attracteurs (multi stabilité)
- la présence de bruit blanc
- certaines propriétés fractales de l'attracteur.

Il le vérifie expérimentalement dans une expérience optique et établit un lien avec des résultats analogues dans les jonctions Josephson. Le bruit en $1/f$ se traduirait par des sauts entre les différents attracteurs [Arecchi 83]. Takagi [Takagi 83] observe la transformation d'un bruit blanc en un bruit en $1/f$ après le passage dans une ligne de transmission non linéaire.

Pilgram [Pilgram 98] étudie les fluctuations du trafic autoroutier en considérant deux états : fluide et embouteillé, et le passage de l'un à l'autre (analogue au franchissement d'une barrière de potentiel). Il en profite aussi dans son article pour comparer les différentes estimations du bruit en $1/f$. Enfin Kawai [Kawai 93] démontre une propriété d'idempotence par rapport à la convolution ; propriété également observée par Handel : la somme et le produit de bruits en $1/f$ donnent du bruit en $1/f$. Le résultat sur la somme n'est pas surprenant car la somme de deux bruits est toujours constituée du bruit le plus important. En revanche, le résultat sur le produit est étonnant. En effet, le produit des signaux apparaît justement dans les systèmes non linéaires. Si le bruit en $1/f$ est invariant par rapport au produit, ce sera le seul qui restera en $1/f$. Il est donc sûr d'être conservé s'il est déjà présent. Il s'agit ainsi de l'état d'équilibre stable des fluctuations soumises à des conditions non linéaires. Cette propriété du bruit en $1/f$ explique sa présence dans les systèmes non linéaires.

Simulation numérique du bruit en $1/f$

Les courbes de la figure Fig. 2.17 représentent le bruit en $1/f$ réalisé à partir de la FFT inverse d'un spectre en $1/f$ idéal. Pour fabriquer le spectre (b), nous avons alors pris la moitié des échantillons crés par la FFT inverse du spectre idéal. L'augmentation de la dispersion pour les grandes valeurs de f provient de la précision de l'algorithme FFT. Le lecteur pourra consulter l'article de B. Pilgram [Pilgram 98] qui étudie certaines propriétés des estimateurs en $1/f$.

Une régression linéaire effectuée sur (b) donne une pente de -0.84 avec un coefficient de corrélation linéaire de $r = -0.53$. La variance d'Allan (c) calculée avec les mêmes données donne une bonne caractérisation en mettant en évidence la constance en fonction de τ.

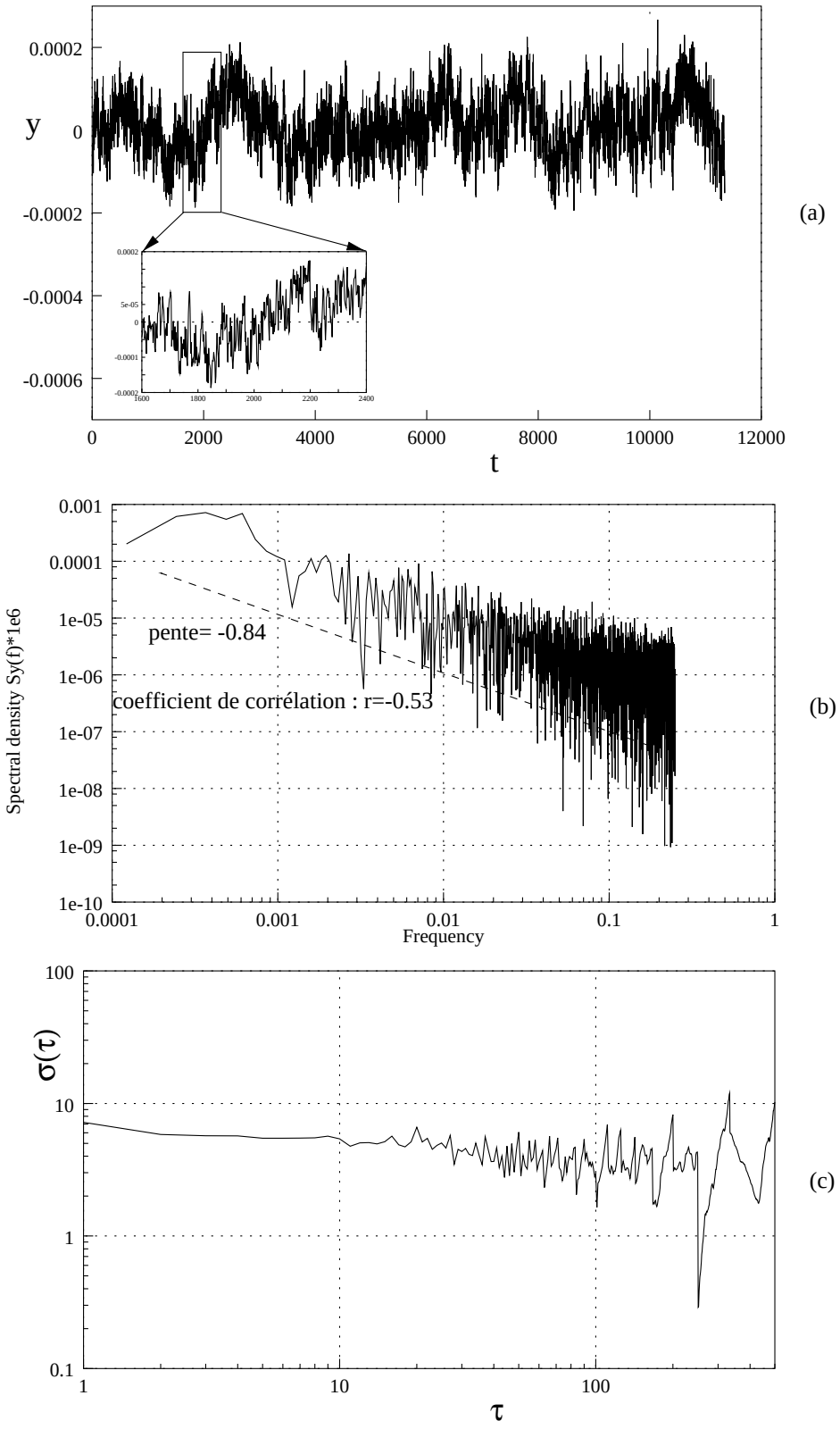


FIG. 2.17 – *Bruit en $1/f$: (a) domaine temporel; (b) domaine spectral; (c) écart-type d'Allan*

Les grandes fluctuations pour les grandes valeurs de N proviennent de la réduction du nombre de points dans le calcul et des limites de résolution numérique.

Bruit en f^1 et f^2

L'origine physique des bruits flicker de phase (f) et blanc de phase (f^2) est la même que pour les fluctuations de fréquence. Le bruit en f est attribué, selon J. Rutman [Rutman 78] à la présence d'une électronique bruitée, comme par exemple les amplificateurs de sortie (composant non linéaire) et les multiplicateurs de fréquence (effet non linéaire?). Il envisage l'origine du bruit en f^2 à la contribution externe d'un bruit additif. De toutes façons, l'origine du bruit en f et f^2 sera très étroitement liée à celle des bruits en f^{-1} et f^0.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rapporté des informations techniques relatives aux oscillateurs, décrit les méthodes de mesure utilisées et rappelé les résultats courants. Ces résultats s'appuient sur des dispositifs expérimentaux d'apparence assez simples mais régis par des comportements finalement complexes. Les processus de battement et de contre-réaction interviennent non seulement dans les méthodes de mesures, mais aussi dans le fonctionnement propre de l'oscillateur. Les méthodes de traitement du signal et de l'information sont adaptées aux hypothèses initiales, qui supposent une bonne régularité des signaux et une bonne linéarité des éléments en présence. Qu'en est-il si l'on suppose que les signaux ne vérifient plus ces hypothèses?

L'étude détaillée des méthodes doit être réalisée pour appréhender les limites de la caractérisation des oscillateurs. Ceci constitue l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Méthodes de traitement du signal de l'oscillateur

Le signal de sortie d'un oscillateur est la seule quantité physique intéressante pour accéder aux propriétés des oscillateurs. Même si on accède, par une modélisation aussi fidèle que possible, à son allure moyenne, il existera toujours une partie dont l'origine est, soit inconnue, soit indéterminable avec les moyens actuels. Elle sera alors traitée avec des méthodes statistiques qui, à défaut de nous lever l'indétermination, nous renseigneront de façon globale sur les propriétés recherchées. Nous rappelons dans ce chapitre les propriétés nécessaires à l'étude statistique des données.

3.1 Rappel des méthodes statistiques

3.1.1 Quelques définitions de base de la théorie des probabilités

Considérons un processus aléatoire ω décrit dans l'espace des épreuves Ω.

Définition 1 *On appelle : variable aléatoire discrète, l'application de Ω dans $\mathbb{Z}$ définie par :*

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{3.1a}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{Z} \tag{3.1b}$$

et variable aléatoire réelle, l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.2a}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R} \tag{3.2b}$$

Définition 2 *Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire discrète (resp. réelle).*

On appelle loi de X, la probabilité P_X définie sur $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{R}$) par la relation :

$$P_X(n) = P_X(X(\omega) = n) \tag{3.3a}$$

$$(resp.\ \ P_X(]-\infty, x]) = P_X(X(\omega) \leq x) \tag{3.3b}$$

Définition 3 *Moments d'une variable aléatoire. Soit*

$$X(\omega) : \Omega \longrightarrow E \quad E = \mathbb{R} \ \ ou \ \ \mathbb{N} \tag{3.4a}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega) = x \tag{3.4b}$$

une variable aléatoire et soit $p_x = P(X(\omega) = x)$ sa loi. Si on suppose que la série $x^r p_x$ (resp. que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r p_x dx$ est convergente), on appelle

$$E(X^m) = \sum_x x^m p_x \quad (resp. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p_x dx), \tag{3.5}$$

le moment d'ordre m de X.

Définition 4 *Moyenne de X ou espérance de X*

$$E(X) = \sum_x x p_x \ \ resp \ \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x dx \tag{3.6}$$

Définition 5 *Moment d'ordre 2*

$$E(X^2) = \sum_x x^2 p_x \ \ resp \ \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x dx \tag{3.7}$$

Définition 6 *Variance*

$$\sigma^2(x) = \sum_x (x - E(x))^2 p_x \ \ resp \ \ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 p_x dx \tag{3.8}$$

La racine carrée de $\sigma^2(x)$ est appelée écart-type de x. Si x a un moment d'ordre 2, on dit que x est de carré intégrable. Un signal temporel vérifiant cette propriété sera dit à « énergie finie ».

Note :

Afin d'indifférencier l'aspect discret de l'aspect continu des variables aléatoires, on utilisera la notation $< \ | \ >$ (notation de Dirac) réservée aux vecteurs d'un espace de Hilbert [Roddier 78] :

$$E(X) =< x|p_x >\equiv \sum_x xp_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xp_x dx, \tag{3.9}$$

de même

$$E(X^2) =< x^2|p_x >\equiv \sum_x x^2 p_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x dx. \tag{3.10}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned}
\sigma^2(x) &= < (x - E(x))^2|p_x > && \text{(3.11a)}\\
&= < x^2 - 2xE(x) + E(x)^2|p_x > && \text{(3.11b)}\\
&= < x^2|p_x > -2E(x) < x|p_x > +E(x)^2 < 1|p_x > && \text{(3.11c)}\\
&= < x^2|p_x > -2E(x)E(x) + E(x)^2 && \text{(3.11d)}\\
\sigma^2(x) &= E(x^2) - E(x)^2. && \text{(3.11e)}
\end{aligned}$$

Notons la propriété de la loi de la probabilité p_x par $< 1|p_x >= 1$. Cette notation a l'avantage de pouvoir traiter les densités de probabilités comme de distributions. La caractérisation des propriétés des variables décrivant des processus aléatoires se fait par l'intermédiaire de la loi de probabilité et ses moments.

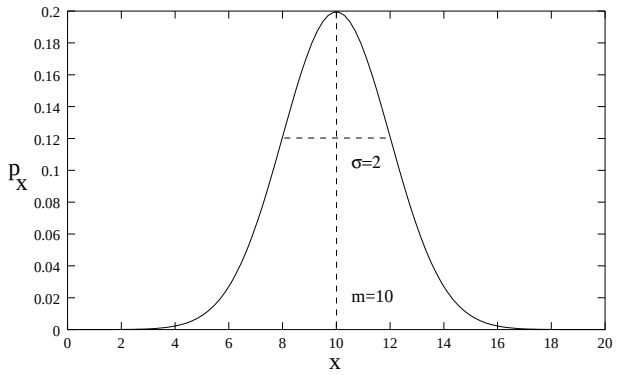


FIG. 3.1 – *Processus gaussien d'espérance $m = 10$ et d'écart type $\sigma = 2$*

3.1.2 Cas particulier des processus gaussiens

Définition 7 *Processus Gaussien Un processus aléatoire X sera dit gaussien si sa loi s'écrit (Fig. 3.1)*

$$p_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) \tag{3.12}$$

On montre que

$$E(X) = m, \tag{3.13a}$$
$$E(X^2) = \sigma^2 + m^2, \tag{3.13b}$$
$$\sigma^2(x) = \sigma^2, \tag{3.13c}$$

et que tous les moments d'ordre supérieur $E(X^m)$ s'expriment en fonction de $E(X)$ et $E(X^2)$, moments d'ordre 1 et 2. Il n'existe pas de processus dont les moments s'expriment en fonction du seul moment d'ordre 1. Ceci provient de la conséquence du théorème de limite centrale.

Théorème 1 *Théorème de limite centrale*

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et de même loi p_x avec

$$E(X_n) = \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.14a}$$
$$E(X^2) = \sigma^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.14b}$$

alors la loi $S_n = \sum_n X_n$ converge en un processus gaussien lorsque n tend vers l'infini.

Ce théorème explique pour une bonne part l'importance pratique des processus gaussiens. On remarque toutefois que ce théorème concerne la somme de variables aléatoires et qu'un résultat équivalent pour un produit n'existe pas de façon générale.

Afin de comparer les propriétés de plusieurs variables aléatoires et leur dépendance respective, on définit la covariance qui mesure le degré de corrélation.

Définition 8 *Covariance*

La covariance de deux variables X et Y de carré intégrable s'écrit :

$$E(\widetilde{X},\widetilde{Y}) =< \widetilde{X}|\widetilde{Y} >= E((X - E(X)).(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y), \tag{3.15}$$

où

$$E(\widetilde{X}) = X - E(X) \quad et \quad E(\widetilde{Y}) = Y - E(Y). \tag{3.16}$$

La covariance s'interprète donc comme un produit scalaire de deux vecteurs $|\widetilde{X}>$ et $|\widetilde{Y}>$ de $\mathcal{L}_0^2(\Omega, P)$, espace vectoriel des classes d'équivalence des variables aléatoires

centrées, de carré intégrable et de loi P. On rappelle que $\mathcal{L}_0^2(\Omega, P)$ est un espace de Hilbert pour la norme $||\sqrt{E(X^2)}||$ [Rienhard 86].

La covariance nulle de deux variables aléatoires indépendantes se traduit ici par une orthogonalité des vecteurs $|\widetilde{X}>$ et $|\widetilde{Y}>$ dans l'espace $\mathcal{L}_0^2(\Omega, P)$. On retrouve alors l'idée de décomposition spectrale de deux signaux sur des bases orthogonales pour laquelle les propriétés sont décorrélées.

Ainsi, à chaque fois que l'on dispose de n variables aléatoires et que l'on veut déterminer leurs propriétés, il faut construire une base de n « vecteurs orthogonaux » (variables aléatoires décorrélées) permettant d'annuler les $\frac{n(n-1)}{2}$ covariances. On effectue alors une transformation linéaire qui nous fait passer des variables initiales aux variables décorrélées. Cette opération s'identifie à une décomposition spectrale, la variance (valeur propre) s'identifiant à « l' énergie » de la variable aléatoire.

Malheureusement, cette méthode ne s'applique que pour des variables de carré intégrable. Pour une variable aléatoire quelconque, la connaissance précise de la loi de probabilité devient indispensable.

3.1.3 Cas des variables indexées par le temps

Définition 9 *Processus stochastique*

On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble T. Si $T \subset \mathbb{Z}$ (resp . $\mathbb{R}$), on note les variables X_n, $n \in \mathbb{Z}$ (resp. X_t, $t \in \mathbb{R}$).

Définition 10 *Processus du second ordre*

Un processus du second ordre possède un moment d'ordre 2 fini, i.e.

$$\forall u \in T, \quad < X_u | X_u >= E(X_u^2) < \infty. \tag{3.17}$$

Définition 11 *Fonction de corrélation*

On appelle fonction de corrélation du processus X_t la quantité $C(u, v)$ définie par :

$$C(u, v) =< X_u | X_v >= E(X_u.X_v). \tag{3.18}$$

Définition 12 *Fonction de covariance*

On appelle fonction de covariance la fonction $K(u, v)$ définie par :

$$K(u, v) =< \widetilde{X_u} | \widetilde{X_v} >= E((X_u - E(X_u)).(X_v - E(X_u))). \tag{3.19}$$

On ne peut simplifier la fonction de covariance $K(u, v)$ à partir de la simple hypothèse de stochasticité. On peut toujours supposer que $E(X_u) = E(X_v)$, de même que pour $E(E(X_u))$, etc.

Pour un signal dont la moyenne varie au cours du temps, ou dont la variance $\sigma^2(X_t)$ évolue, il n'est pas saugrenu de parler de « moyenne de variance » ou même de « variance de variance ». Dans ce cas, il faut savoir que l'on est en présence d'un signal stochastique sans aucune propriété de stationnarité.

3.2 Classes de processus

3.2.1 Processus stationnaires

En partant du principe que tout signal physique réel est indexé par le temps, il semble irréaliste de vouloir à tout prix connaître son évolution temporelle. En revanche, en supposant que certains de ces moments sont invariants par translation temporelle, on peut obtenir une classe de processus stochastiques appelés processus stationnaires.

Définition 13 *Processus stationnaire*

On appelle processus stationnaire d'ordre 2 (ou stationnaire au sens large) un processus du second ordre tel que :

$$\forall u, v, h \in T, \quad E(X_u) = \mu, \tag{3.20}$$

et

$$C(u, v) = C(u + h, v + h). \tag{3.21}$$

En posant $h = -v$, (3.21) devient

$$C(u, v) = C(u - v, 0), \tag{3.22}$$

traduisant le fait que la fonction de corrélation ne dépend pas du temps, mais de la durée. La variance définie par

$$\sigma^2(X_t^2) = E(X_t^2) - \mu^2, \tag{3.23}$$

est alors constante et vaut, en utilisant (3.18) : $C(t, t) - \mu^2 = C(0, 0) - \mu^2$. La constance de la variance est une conséquence de la propriété de stationnarité. En posant $u - v = \tau$ et $t = u$, les relations (3.22) et (3.18) donnent une définition plus générale et sans doute un peu plus physique de la fonction de corrélation par :

$$C(\tau, 0) = C(\tau) = E(X_t.X_{t-\tau}). \tag{3.24}$$

La fonction de corrélation établit un lien entre l'état du processus à l'instant t et son état antérieur à l'instant $t - \tau$. C'est une mesure d'un degré de « mémoire » du système.

Les propriétés générales des systèmes stationnaires sont nombreuses et le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de P. Flandrin [Flandrin 93] dans lequel il établit des résultats qui sortent du cadre de cette étude.

L'hypothèse ergodique

L'idée d'avoir un maximum d'information sur un phénomène $x(t)$ nous contraint à un maximum d'observations ou de réalisations. Pour qu'une moyenne temporelle donne un résultat satisfaisant, il faut attendre suffisamment longtemps pour que le phénomène puisse prendre toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire toutes celles que peuvent prendre $x(t_0)$ ou $x(t_i)$ avec $t_i \in T$. Parmi tous les processus stochastiques, on peut donc encore une fois classer les processus possédant ces caractéristiques, si on les suppose décrits par une certaine équation différentielle. Le calcul des moments associés à un tel processus

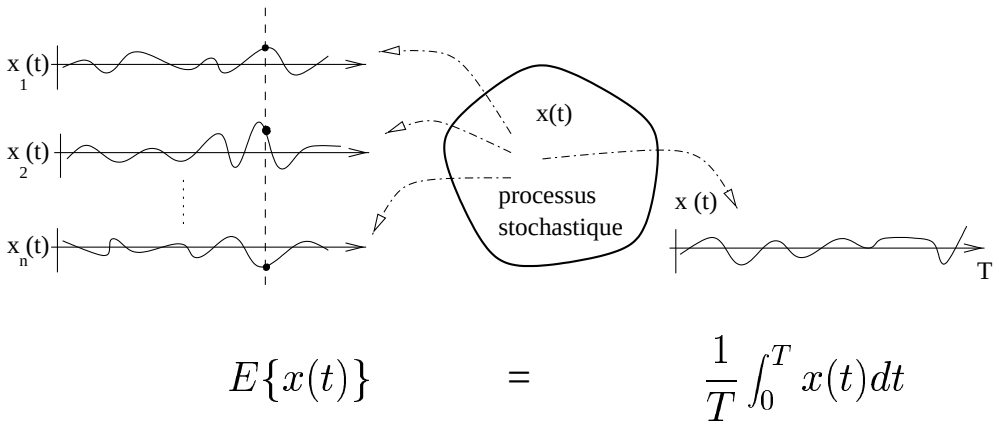


FIG. 3.2 – *Processus stochastique $x(t)$ supposé vérifier l'hypothèse ergodique*

peut se faire par moyennage temporel ou par moyennage d'un ensemble de processus à un instant donné. Un tel processus possède ce que l'on appelle une propriété d'ergodicité. L'hypothèse ergodique d'un processus $x(t)$ consiste à identifier la moyenne temporelle de la moyenne d'ensemble (Fig. 3.2), soit :

$$E\{(x(t)\} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt. \tag{3.25}$$

L'hypothèse ergodique suppose qu'il y a équivalence entre moyennes temporelles et d'ensemble en s'appuyant sur le fait que le système physique $x(t)$ décrira l'espace des phases au moins une fois lorsqu'on l'observe suffisamment longtemps. Cette hypothèse ne concerne finalement que très peu de systèmes : ceux dont le nombre de points de l'espace des phases est fini. On peut donc déjà éliminer tous les systèmes à nombre infini de degrés de liberté, comme les systèmes à retard. Il en est de même pour les systèmes non linéaires où l'on montre qu'il peut exister des parties invariantes dans l'espace des phases (les orbites stables) et des parties chaotiques, ce qui contredit l'hypothèse ergodique.

Le problème de l'ergodicité est un problème très ouvert, d'autant plus délicat qu'il est difficile à vérifier expérimentalement. Le lecteur pourra se référer aux ouvrages spécialisés afin de se convaincre de sa complexité [Dahan Dalmedico 92, De Coulon 86, Max 81, Lichtenberg 91] et au théorème ergodique énoncé par Birkhoff [Birkhoff 27].

Le théorème de Wiener-Kintchine

Considérons le signal stochastique $x(t)$ ergodique. L'ergodicité consiste à supposer que le système décrive au moins une fois l'espace des phases au cours du temps. Une notion de périodicité semble alors exister si l'on suppose que l'on observe le signal indéfiniment. En supposant que $x(t)$ est stationnaire du second ordre (pour qu'il soit à énergie finie), on peut mettre en relation la fonction de corrélation (3.24), l'hypothèse ergodique (3.25) et la décomposition spectrale (compte tenu de cette « périodicité »). On peut alors énoncer le théorème de Wiener-Kintchine.

Théorème 2 *Théorème de Wiener-Kintchine*

Soit

$$C(\tau) = E(x(t).x(t-\tau)) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{1}{T} x(\tau)x(t-\tau)dt, \tag{3.26}$$

la fonction de corrélation du signal $x(t)$. La densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$ est égale à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $C(\tau)$ du signal $x(t)$, i.e.

$$TF[C(\tau)] = TF[x(t) * x(t)] = x(\nu) \times x(\nu) = \mid x(\nu) \mid^2 = S_x(\nu). \tag{3.27}$$

Remarque importante : Ce théorème n'est valable que pour les processus ergodiques stationnaires d'ordre 2, c'est-à-dire une petite partie de l'ensemble des processus possibles. Il a toutefois le mérite de pouvoir relier expérimentalement les mesures statistiques temporelles et les mesures spectrales des signaux.

3.2.2 Processus non stationnaires

On ne pourrait arrêter ici la liste des processus aléatoires sans revenir sur le cas des processus non stationnaires qui semblent avoir leur importance dans l'étude du bruit des oscillateurs. Il semble naturel, en effet, de renoncer à la caractérisation des processus non stationnaires par des méthodes spectrales pures. La stationnarité étant mise en cause, on se doit de réintroduire le temps comme paramètre nécessaire à la description.

Rappelons que tout processus stationnaire $x(t)$ d'ordre 2 admet une décomposition harmonique (dite de Cramer) de la forme [Flandrin 93] :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\nu t} dX(\nu). \tag{3.28}$$

Cette décomposition s'apparente à une projection du signal $x(t)$ sur une base d'exponentielles (appelées exponentielles éternelles) [Lacoume 83], et possède une propriété de double orthogonalité dans le sens où

(i) les exponentielles sont orthogonales :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\nu t} e^{2i\pi\xi t} dt = < e^{2i\pi\nu t} | e^{2i\pi\xi t} > = \delta(\nu - \xi); \tag{3.29}$$

(ii) les incréments spectraux (ou bandes spectrales infinitésimales) $dX(\nu)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire défini par l'espérance mathématique[7] :

$$E\left(dX(\nu).dX(\xi)\right) = \delta(\nu - \xi)\Gamma_x(\nu) d\xi d\nu. \tag{3.30}$$

La propriété de stationnarité se traduit par cette double orthogonalité. L'interprétation physique est alors de constater que les bandes spectrales ne « partagent » pas d'énergie entre elles et que les propriétés statistiques mesurées pour chaque composante de Fourier seront décorrélées les unes des autres.

La propriété de non stationnarité « la plus faible » consisterait à lever l'une de ces deux orthogonalités. Dans ce cas, ou bien les bandes spectrales s'échangent de l'énergie et alors les composantes de Fourier ne sont plus constantes, ou bien la base des exponentielles éternelles ne constitue plus une « base intéressante » ou « base propre » permettant de diagonaliser les propriétés statistiques du signal. En tout état de cause, l'hypothèse de non stationnarité se doit de conduire à une révision de la méthode spectrale de l'étude des fluctuations.

7. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de P. Flandrin pour plus de détails concernant cette relation d'orthogonalité.

3.3 Analyse de Fourier des signaux temporels

L'étude du signal issu de l'oscillateur est actuellement le seul « cheval de Troie » du physicien pour permettre de décrire son fonctionnement. Si nous désirons caractériser au mieux ce signal et l'obliger à nous révéler tous ses secrets, il est clair que la durée du traitement et d'analyse est telle que l'on connaîtra très très bien un signal ... qui n'existera plus.

Les premières méthodes de traitement du signal ont pris en compte ce problème en essayant d'éliminer cet aspect temporel par l'utilisation de l'analyse de Fourier. Elle est née de la découverte du théorème de Fourier relatif aux fonctions périodiques.

3.3.1 Théorème de Fourier

Théorème 3 *Théorème de Fourier*

Soit $x(t)$ signal périodique de période T. On montre que :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \tag{3.31}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{3.32a}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \tag{3.32b}$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt. \tag{3.32c}$$

En utilisant la notation complexe, ces relations donnent

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\frac{2i\pi nt}{T}} \tag{3.33a}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{\frac{2i\pi nt}{T}}. \tag{3.33b}$$

On vérifie que $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$. Les quantités α_n s'appellent coefficient de Fourier et peuvent être vues comme une projection du signal $x(t)$ sur un « vecteur » exponentiel. Les α_n représentent alors les coordonnées du signal sur la base discrète infinie des exponentielles ; elles ont en plus le mérite de ne pas dépendre du temps et on peut écrire :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n |e_n(t) >, \tag{3.34}$$

dans laquelle les vecteurs $\{|e_n(t) >\} = \{\exp(\frac{2i\pi nt}{T})\}$ forment une base discrète infinie de l'espace associé à $x(t)$.

Il est important de se rappeler que la décomposition de Fourier n'est qu'une projection du signal réel dans un espace particulier qui permet de faire « ressortir » des propriétés physiques ou des invariants du signal (coefficients). Le produit scalaire de cet espace sera donné par les $\mid \alpha_i \mid^2$ qui représente une énergie. La métrique de l'espace est reliée aux propriétés physiques et on parle alors de contenu physique des propriétés métriques de l'espace [Lacoume 83].

Il est remarquable de constater que cette décomposition permet par ailleurs de déplacer la notion d'infini, présente dans l'aspect temporel du signal, et de la placer dans le vecteur de base de la représentation. Il y a une quantité énorme d'informations cachées dans les vecteurs et l'extraction de ces informations nécessite certainement une autre projection, surtout si le signal en question n'est plus tout à fait périodique.

3.3.2 Transformation de Fourier

Définition des espaces

L'espace dans lequel on peut définir la transformation de Fourier (TF) est appelé $\mathcal{L}^2(0,T)$, espace des signaux périodiques à temps continu.

Définition 14 *Un signal $f(t)$ est dit d'énergie finie si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, si*

$$< f(t)|f(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt < \infty. \tag{3.35}$$

Définition 15 *Un signal $f(t)$ est dit de puissance moyenne finie si $f \in \mathcal{L}^2(0;T)$, c'est-à-dire, si*

$$\frac{1}{T} < f(t)|f(t) >= \frac{1}{T} \int_{n=-\infty}^{+\infty} \mid f(t) \mid^2 dt < \infty. \tag{3.36}$$

Définition de la transformation de Fourier

Définition 16 *Soit $f(t)$ une fonction sommable (au sens de Lebesgue). On définit la fonctionnelle F, appelée transformation de Fourier (ou transformée de Fourier) par :*

$$F[f(t)] = f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \tag{3.37}$$

On utilise également la notation [Roddier 78] :

$$f(\nu) =< f(t)|e^{-2i\pi\nu t} >, \tag{3.38}$$

permettant de généraliser la notation au cas des distributions[8].

Propriétés de la transformation de Fourier

Rappelons les principales propriétés de la transformation de Fourier utilisée dans l'analyse spectrale des signaux.

(i) linéarité :

$$\left\langle \big(af(t)+bg(t)\big) \middle|\ e^{-2i\pi\nu t} \right\rangle = af(\nu)+bg(\nu) \tag{3.39}$$

(ii) translation temporelle :

$$\left\langle f(t-\tau) \middle|\ e^{-2i\pi\nu t} \right\rangle = e^{2i\pi\nu\tau} \left\langle f(t)|e^{-2i\pi\nu t} \right\rangle \tag{3.40}$$

(iii) dérivation temporelle :

$$\left\langle \frac{d^n f(t)}{dt^n}|e^{-2i\pi\nu t} \right\rangle = (2i\pi\nu t)^n \left\langle f(t)|e^{-2i\pi\nu t} \right\rangle \tag{3.41}$$

Ces propriétés expliquent pourquoi cette transformation a été largement utilisée pour l'analyse des signaux ; les opérations usuelles des systèmes électroniques se résument par une superposition de retard, dérivation et intégration. Le problème se pose alors pour le produit de signaux, qui reste intraitable par cette transformation.

C'est d'ailleurs ainsi que l'on peut définir la TF de la fonction $x(t) = \cos(2\pi/T)$ sur $\mathbb{R}$ (la fonction n'étant pas sommable sur $\mathbb{R}$), en la considérant comme une distribution à savoir :

$$x(t) = \cos(2\pi/T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) * f_T(t), \tag{3.42}$$

où * représente le produit de convolution et où

$$f_T(t) : [0,T] \longrightarrow [-1;1] \tag{3.43a}$$

$$t \longmapsto \cos(2\pi/T) \tag{3.43b}$$

La notation (3.38) permet de rappeler la propriété projective de la transformation de

8. Notons que cette notation a également été introduite dans le cas du traitement statistique des données.

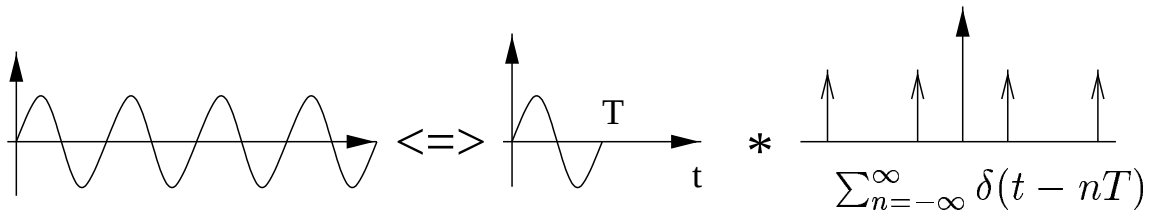


FIG. 3.3 – *Les fonctions périodiques doivent être traitées au sens des distributions pour que l'on puisse leur associer une transformation de Fourier*

Fourier. Ainsi, pour une famille de fonctions ou de distributions temporelles, elle réalise une projection dans un espace continu ($\nu \in]-\infty;\infty[$) où les vecteurs de base sont des exponentielles éternelles.

Toutefois, la transformation d'un produit existe et vaut

$$\left\langle f(t)\ .\ g(t) \middle|\ e^{-2i\pi\nu t} \right\rangle = f(\nu)\ *\ g(\nu), \tag{3.44}$$

qui représente le produit de convolution de $f(\nu)$ et $g(\nu)$. Il faut cependant qu'elles satisfassent la propriété d'être à support borné. Ce n'est pas le cas pour tous les spectres en loi de puissance.

En revanche, les fonctions périodiques qui ont des TF (fonctions de Dirac) dont les supports sont de mesures nulles rentrent *a fortiori* dans ces conditions. Dans ce cas, nous sommes toujours sûrs d'avoir l'existence du produit.

Exemple :

si $x(t) = \cos 2\pi\nu_0 t$ on a $x^2(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 4\pi\nu_0 t\right)$, et

$$x(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\right) \tag{3.45a}$$

$$x(\nu) * x(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left(\delta(\nu - 2\nu_0) + \delta(\nu + 2\nu_0)\right)\right) \tag{3.45b}$$

Comme le montre le petit schéma de la figure Fig. 3.4, la TF de signaux issus de produits (signaux non linéaires) existe si les signaux initiaux sont périodiques. Ceci amène deux remarques importantes. Premièrement, la TF devient difficilement utilisable pour d'autres signaux non linéaires (non issus d'une transformation linéaire). C'est une conséquence directe de la définition de la TF. Deuxièmement, on constate malgré tout qu'il existe une classe de signaux (les périodiques) pour lesquels la non-linéarité peut-être traitée à partir de la TF (fonctionnelle linéaire). C'est très encourageant pour l'étude des signaux non linéaires quelconques: il peut exister une fonctionnelle permettant de ramener le problème à une étude linéaire. C'est l'esprit même des calculs algébriques d'opé-

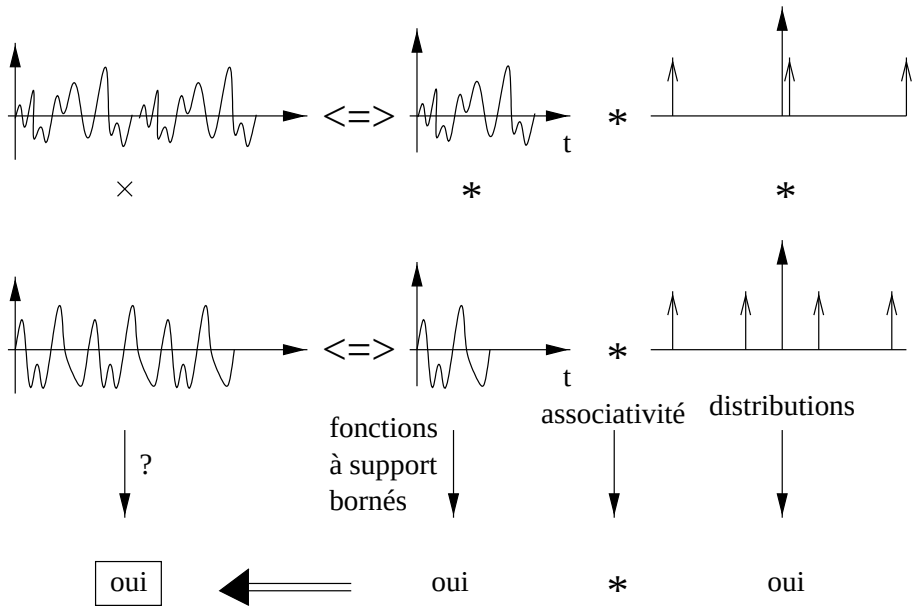


FIG. 3.4 – *La TF d'un produit de 2 fonctions existe pour les fonctions périodiques traitées au sens des distributions*

rateurs différentiels utilisés en dynamique non linéaire[9]. C'est aussi dans le même esprit que Gardner [Gardner 67] réussit à montrer que la résolution de l'équation non linéaire de Kortevreg de Vries (KdV) était possible par une succession de calculs linéaires.

3.4 Conclusion

Le but de ce chapitre était double. Dans un premier temps, il était de rappeler les concepts fondamentaux de la théorie du traitement du signal afin de bien comprendre le contexte dans lequel les résultats des études statistiques doivent être placés. Le deuxième objectif était de mettre en relief le fait qu'un petit écart par rapport aux hypothèses de stationnarité, d'ergodicité, de périodicité, de linéarité, etc. doit conduire à une révision de l'outil mathématique des méthodes de décompositions spectrales de Fourier.

En remarquant que la transformation de Fourier n'est finalement qu'une projection du signal dans un certain espace et qu'elle constitue à juste titre une bonne méthode d'analyse, on se doit à présent d'utiliser les méthodes de projection du signal rétablissant le paramètre fondamental qui décrit notre évolution, celui pour lequel on ne connaît

9. Le lecteur pourra consulter l'exemple de Neyfey dans lequel il utilise une transformation pour simplifier un système non linéaire en un système d'équations différentielles linéaires couplées [Neyfey 79, p. 41].

finalement rien, à part peut-être son irréversibilité et son inexorable défilement : le temps.

La question est maintenant de proposer une solution. L'éventail des possibilités est à la hauteur de la complexité du problème. Pour pouvoir établir une voie d'investigation, nous avons considéré le problème des oscillateurs en détaillant dans cette première partie l'objet que l'on manipule et les outils que l'on se donne. L'ère de la compréhension des phénomènes en jeu dans les oscillateurs avec des méthodes liées à l'approximation linéaire, qui ont certes fait leurs preuves, doit laisser place à l'ère de la précision des études par une prise en compte totale de tous les phénomènes, aussi compliqués soient-ils.

La deuxième partie de notre travail propose une voie d'investigation de l'étude des oscillateurs et des phénomènes de synchronisation.

Deuxième partie

Propriétés générales des systèmes non linéaires

Chapitre 4

Introduction générale sur les systèmes non linéaires

4.1 Mise en évidence de la non-linéarité des oscillateurs

Le modèle de base des oscillateurs décrit au chapitre 1 possède une conséquence fondamentale quant au fonctionnement de l'oscillateur : c'est un dispositif non linéaire. La seule possibilité pour qu'il puisse exister est qu'il possède une réponse qui dépend de l'amplitude d'oscillation. Si les oscillations s'amplifient, il faut les atténuer ; si elles s'atténuent, il faut alors les amplifier pour que globalement le gain reste égal à 1.

Compte tenu de cette évidence, il est assez surprenant de constater que l'oscillateur est encore étudié par des techniques spectrales linéaires. Bien sûr, l'argument selon lequel les oscillateurs ultra-stables délivrent une fréquence « presque » parfaite suffit (certainement à une certaine échelle) à les considérer périodiques et à utiliser de ce fait l'arsenal linéaire. Cette période apparente n'est-elle pas le régime permanent d'un système totalement non linéaire ou encore le régime transitoire d'un système doté de très grandes constantes de temps. Pour lever l'incertitude, une étude non linéaire de l'oscillateur et de ses composants peut permettre de nous renseigner et d'apporter des réponses sur l'origine du bruit en $1/f$, origine difficile à mettre en évidence avec des méthodes linéaires.

4.1.1 La non-linéarité du résonateur à quartz

Le résonateur constitue le cœur de l'oscillateur. Une première approximation montre que celui-ci peut se modéliser par un circuit RLC série en parallèle avec une capacité due aux électrodes de contact (Fig. 4.1). Les éléments motionnels du quartz sont les composants équivalents R_q, L_q, C_q et la capacité C_o, capacité parallèle due au diélectrique. L'ordre de grandeur des valeurs R_q, L_q, C_q, C_o sont pour un résonateur à quartz à 5 MHz

[Brendel 75, p. 55] :

$$R_q = 74.4\Omega \tag{4.1a}$$
$$L_q = 5H \tag{4.1b}$$
$$C_q = 2.\ 10^{-4}pF \tag{4.1c}$$
$$C_0 = 2pF \tag{4.1d}$$

soit avec ces valeurs :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_q C_q}} = 5,0329MHz, \tag{4.2a}$$
$$Q = \frac{L_q\omega_0}{R_q} = 2\ 10^6 \tag{4.2b}$$

représentant respectivement la fréquence de résonance et le facteur de qualité.

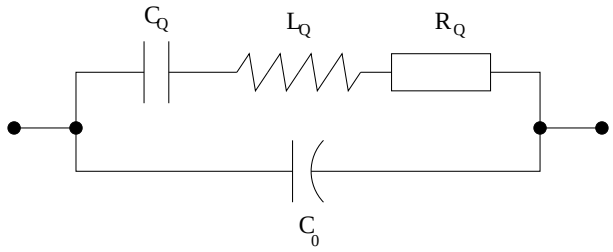


FIG. 4.1 – *Schéma équivalent du résonateur à quartz*

Le résonateur peut avoir un comportement non linéaire à forte puissance d'excitation, dû entre autre aux coefficients élastiques du 3e et 4e ordre, piézoélectriques du 3e ordre, ou polarisation électrique du 3e et 4e ordre [Gagnepain 72]. Dans ce cas, la fréquence propre du résonateur dépend de l'excitation et présente un défaut d'isochronisme (Fig. 4.2). Lorsque le régime d'oscillation est établi (amplitude constante), la puissance d'excitation du quartz est quasi constante et le défaut d'isochronisme est moins significatif. Dans ce cas, la non-linéarité du quartz est alors négligée. En revanche, pendant toute la durée du régime transitoire de l'oscillateur (qui est d'autant plus long que sa qualité est meilleure), la non-linéarité du résonateur est significative. Toute perturbation de ce régime transitoire freinera l'établissement du régime permanent. En extrapolant, on peut avancer que le régime permanent des oscillateurs ultra-stables sera de plus en plus long à obtenir et que cette difficulté sera proportionnelle à Q. L'hypothèse de stationnarité deviendra de plus en plus fragile.

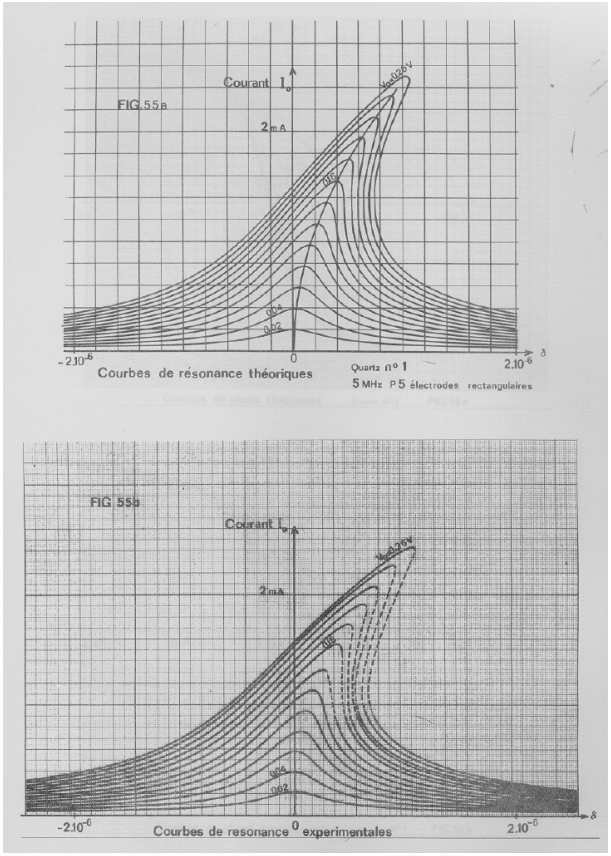


FIG. 4.2 – *Défaut d'isochronisme d'un quartz à 5 MHz [Gagnepain 72, p. 114]*

4.1.2 Régime multimodes de l'oscillateur

Le résonateur peut présenter plusieurs modes de vibrations qui peuvent être des modes de flexion, vibration longitudinale, cisaillement d'épaisseur, etc. En général, le mode d'excitation choisi est celui où les propriétés sont optimales. Malheureusement, la présence des modes parasites proches du mode principal entraîne des perturbations qui peuvent conduire à un fonctionnement multimodes de l'oscillateur [Chronos 91]. Pour un système bi-mode, on montre alors que le résonateur se comporte comme un système mécanique soumis à un double puits de potentiel séparé par une position d'équilibre instable définissant une séparatrice (Fig. 4.3).

Une particule de masse m soumise à ce type de potentiel $V(x)$ non quadratique est décrite par une équation différentielle non linéaire :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -(x-x_1)(x-x_2)^2 - (x-x_2)(x-x_1)^2, \tag{4.3}$$

pouvant conduire sous certaines conditions de perturbations et de conditions initiales à un comportement chaotique.

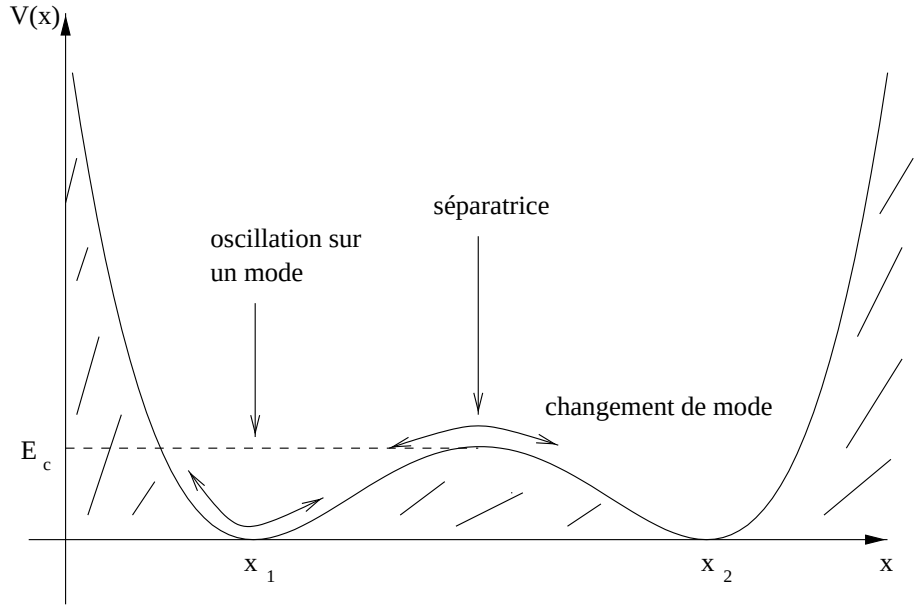


FIG. 4.3 – *Modèle du résonateur bi-modes :* $V(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)^2(x - x_2)^2$.

En effet, lorsque l'énergie totale E_{tot} est inférieure à E_c, le mode choisi sera une oscillation entre l'une des deux positions d'équilibre (x_1 ou x_2). Dans le cas où $E_{tot} = E_c$, une transition d'un mode à l'autre pourrait avoir lieu de manière chaotique sous l'influence d'une perturbation extérieure. Ce phénomène est comparable à l'instabilité modulationnelle observée dans les lignes de transmission non linéaires [Remoissenet 94] ou dans les systèmes discrets non linéaires [Dos Santos 95]. Une énergie initiale localisée sur un mode peut, par effets non linéaires et à partir d'un certain seuil, se délocaliser et affecter les autres modes du système.

Nous avons étudié [Marquié 95a, Marquié 95b] la délocalisation de l'énergie des modes par des méthodes numériques, et montré qu'elle était d'autant plus rapide que la non-linéarité était importante. L'absence de délocalisation observée pour des faibles valeurs de non-linéarité nous a conduit à supposer l'hypothèse d'un seuil, sans pour autant écarter l'éventualité de l'existence du phénomène pour des temps très longs, mais que nous n'avons pas observé faute de méthodes numériques efficaces.

Il est possible d'envisager l'existence de tels phénomènes dans le cas des oscillateurs à plusieurs modes de fonctionnement. Expérimentalement, on constate d'ailleurs fréquemment le démarrage des oscillateurs sur des modes parasites. L'excursion de l'oscillateur sur un mode parasite est certainement réalisée pendant des durées très courtes, ce qui fait que l'on considère cet effet comme un bruit. Insistons encore sur le fait que cet effet sera d'autant plus significatif que le transitoire sera long, c'est-à-dire que l'oscillateur sera de

très haute stabilité[10] . À notre connaissance, il n'existe pas dans le contexte des oscillateurs radiofréquences, d'études théoriques et surtout expérimentales de tels phénomènes compte tenu de la durée de régime transitoire très courte et des techniques d'acquisition des signaux trop lentes et trop imprécises. C'est un problème encore ouvert qui risque à l'avenir d'apporter, non seulement de nouvelles propriétés relatives aux oscillateurs, mais aussi des nouvelles formes d'utilisation des oscillateurs (échantillonnage rapide temporel).

4.1.3 Non-linéarités de l'amplificateur

La non-linéarité du système d'entretien constitue la clef de voûte de l'existence des oscillateurs. Elle se manifeste par un régime de saturation de l'amplification. Il s'agit d'une propriété reconnue par la communauté et elle donne lieu à un effort de recherche et de compréhension important [Ferre-Pikal 97, Prigent 96]. Certains industriels et fabricants de logiciels commencent également à considérer le problème de la non-linéarité des amplificateurs comme fondamental. De manière générale, la prise en compte des non-linéarités dans les simulateurs est très récente. De plus, la non-linéarité n'est traitée que partiellement ou complètement isolée des autres éléments linéaires[11]. Actuellement, il existe à notre connaissance[12] deux simulateurs non linéaires assez récents fonctionnant dans le domaine hyperfréquence : sérénade7 commercialisé par Compact Software INC [Serenade7 98] et Coplan proposé par IMST [IMST 98]. Ils sont tous les deux basés sur une méthode de balance harmonique et possèdent une limite de résolution qui ne permet pas de traîter le cas des oscillateurs ultra-stables (à 10^{-14}).

L'amplificateur est le poumon de l'oscillateur dans le sens où c'est lui qui fournit l'énergie au résonateur qui en est son cœur. Il est également établi que certaines de ces fluctuations seraient responsables des fluctuations (notamment celles en $1/f$) de l'oscillateur [Ferre-Pikal 97]. Même, Leeson dans son modèle initial, introduit un bruit en $1/f$ d'origine inconnue, mais certainement issu de l'amplificateur.

Ce phénomène est d'ailleurs amplifié dans le domaine des micro-ondes où les non-linéarités du résonateur sont quasi inexistantes, mais où celles de l'amplificateur conditionnent la stabilité des sources micro-ondes. La description détaillée des non-linéarités de l'amplificateur sort du cadre de cette étude ; le lecteur pourra consulter les travaux cités

10. Notons la situation paradoxale selon laquelle les effets non linéaires sont d'autant plus significatifs que la qualité de l'oscillateur est bonne ; oscillateur qui, dans ces conditions, est considéré harmonique c'est-à-dire linéaire.

11. Le lecteur pourra se référer aux travaux de T. Blin [Blin 95] qui passe en revue les divers simulateurs numériques spécialisés pour l'étude des oscillateurs à quartz.

12. Informations recueillies à l'occasion du Salon Hyper-RF, Paris, Janvier 1998.

en référence pour une meilleure appréciation du phénomène.

4.1.4 Équation de base de l'oscillateur

En prenant compte de la non-linéarité de l'amplificateur, le fonctionnement type d'un oscillateur à quartz est donné par une équation différentielle non linéaire [Brendel 75, p. 69].

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \left(\left(\gamma - 4x^2 \right) \ddot{x} - 8x\dot{x}^2 \right) \tag{4.4a}$$

$$+ \mu(\gamma 1 - 4x^2) \left(\frac{\dddot{x}}{\omega_0} + \omega_0 \dot{x} \right) - \frac{8\dot{x}}{\omega_0} \left(3\ddot{x}x + \dot{x}^2 \right), \tag{4.4b}$$

où l'ordre de grandeur des coefficients qui dépendent des caractéristiques de l'amplificateur (paramètres g du transistor) et du résonateur (ω_0, R_Q, C_Q, C_0) est : $\lambda = 10^{-7}$, $\varepsilon = 10^{-9}$, $\mu = 10^{-3}$ et $\gamma = 1$.

Lorsque l'on suppose la capacité parallèle du quartz C_0 nulle, l'équation (4.4) se réduit à une équation du type Van der Pol :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x}. \tag{4.5}$$

La partie droite de (4.5) correspond à un facteur d'amortissement pour lequel on constate que :

- si l'amplitude est petite, le terme $4x^2$ est négligeable par rapport à l'unité ; l'amortissement $\lambda\omega_0$ et la vitesse sont de même signe (amortissement négatif), conduisant à une augmentation de l'amplitude.
- si l'amplitude est grande, le terme $4x^2$ devient prépondérant, engendrant un amortissement positif et une diminution de l'amplitude.

Ceci suggère la possibilité d'un compromis entre ces deux états où l'amplitude n'augmente ni ne décroît. Il s'agit d'un cas particulier où le système est dit posséder un cycle limite (Fig. 4.4).

Lorsque la valeur de λ augmente (augmentation de la non-linéarité), le cycle limite s'identifie à un cycle d'hystérésis caractéristique des oscillateurs à relaxation. Van der Pol a d'ailleurs décrit avec ce formalisme les battements du cœur humain que nous avons donné en exemple dans le chapitre 1. Dans ces conditions les oscillations présentent un très fort taux de distorsion (Fig. 4.5), signe d'une très forte non-linéarité.

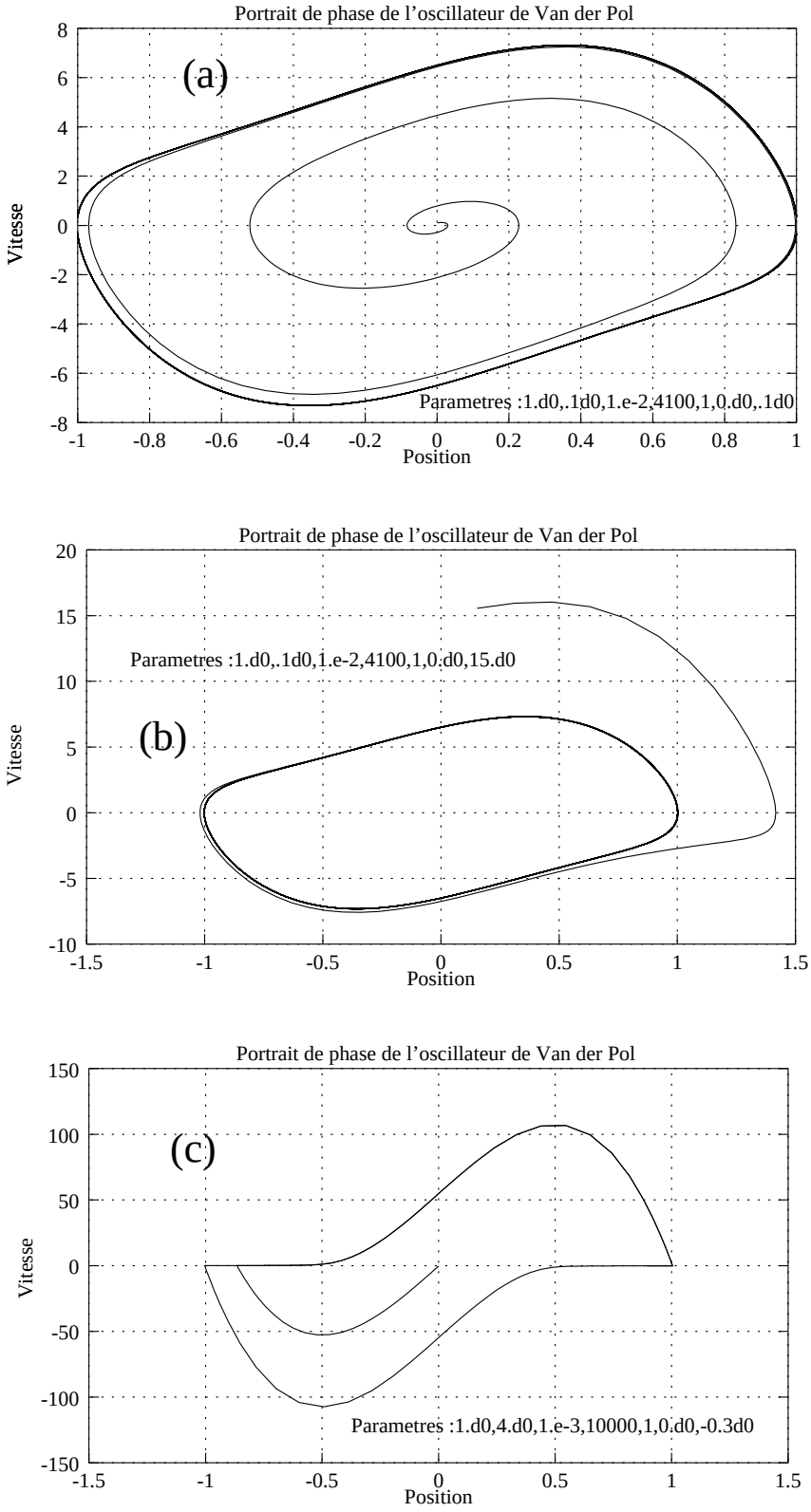


FIG. 4.4 – *Plan de phase de l'oscillateur de Van der Pol: (a) et (b) :* $\lambda = 0,1$ *; (c) :* $\lambda = 4$

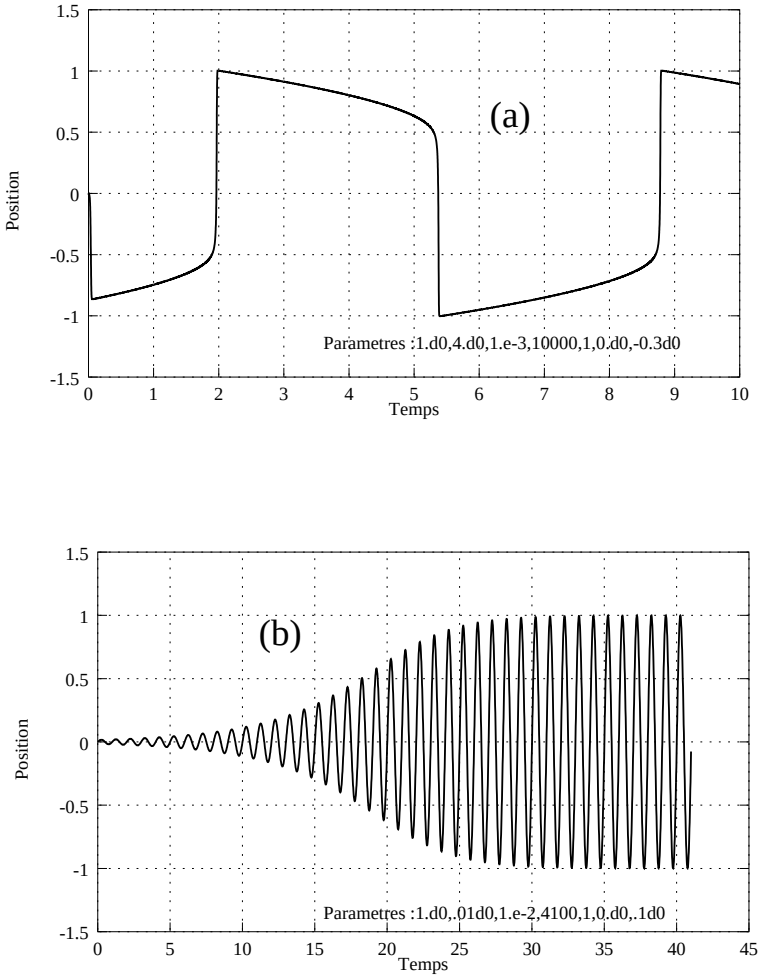


FIG. 4.5 – *Non-linéarité de l'oscillateur et distorsion du signal ; (a) :* $\lambda = 4$ *; (b) :* $\lambda = 0,01$

Sur la figure Fig. 4.6, nous avons réalisé une transformation de Fourier discrète ou FFT pour des valeurs de $\lambda = 0.01$ (faiblement linéaire), $\lambda = 0.1$, $\lambda = 4$. La transformation de Fourier discrète permet d'évaluer la transformée de Fourier à partir de données temporelles échantillonnées. On constate également l'évolution de la fréquence de la valeur de 1 Hz (fréquence dans la limite linéaire $\lambda = 0$), jusqu'à 0,3 Hz pour $\lambda = 4$, où l'on vérifie la décroissance en $\frac{1}{2p+1}$ de l'amplitude des harmoniques impairs et traduisant bien la tendance du système à délivrer un signal presque carré (cf. Fig. 4.5 (a)).

Il est clair que le cas $\lambda = 4$ est très loin de la réalité des oscillateurs ($\lambda = 10^{-7}$) mais il est remarquable de constater le phénomène suivant : si l'on admet que le résonateur possède une bande passante limitée, comment se fait-il qu'il puisse passer une gamme aussi large de fréquence que possède le signal carré. De plus, l'atténuation des composantes hors bande devrait être effective à chaque « passage » du signal dans le résonateur, ce qui n'est pas le cas puisqu'elles sont encore présentes. Il se produit donc des phénomènes d'une

extrême intensité capables de contrecarrer cette atténuation en permettant au signal de passer dans la bande. La non-linéarité du système est responsable de ce phénomène qui, par une multiplication (et certainement aussi une division) de fréquences, ramène le signal dans la bande passante du résonateur. Pour le cas de l'oscillateur à quartz réel ($\lambda = 10^{-7}$), ce phénomène existe également mais à plus faible échelle et surtout dans une échelle de temps très grande (de l'ordre de grandeur du régime transitoire) comparé à la période d'oscillation.

Cette remarque permet de mettre l'accent sur l'importance des échelles de temps multiples. Étant donné que les oscillateurs ultra-stables possèdent des constantes de temps importantes par rapport à leur période d'oscillation, ces effets non linéaires ne seront prépondérants que pour des basses fréquences. Sont-ils alors à l'origine des problèmes du bruit basse fréquence ?

4.2 Propriétés des systèmes non linéaires

4.2.1 Définition d'un système non linéaire

Un système est dit non linéaire si la réponse R à une excitation extérieure ne vérifie pas le principe de superposition, à savoir :

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = R(x_1) \\ y_2 = R(x_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow R(ax_1 + bx_2) \neq aR(x_1) + bR(x_2) \tag{4.6}$$

Exemple :

$$R(x_1) = x_1 + x_1^2 \tag{4.7a}$$

$$R(ax_1 + bx_2) = ax_1 + bx_2 + a^2x_1^2 + 2abx_1x_2 + b^2x_2^2 \neq aR(x_1) + bR(x_2) \tag{4.7b}$$

D'un point de vue mécanique, un système non linéaire est caractérisé par une force non proportionnelle à l'effet qui lui donne naissance. La loi de Hooke relative aux déplacements n'est dans ce cas pas vérifiée. De même, une équation différentielle non linéaire ne vérifie pas le principe de superposition des solutions. Par exemple, l'équation du pendule pesant non amorti est non linéaire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0. \tag{4.8}$$

La réponse du système au champ de pesanteur, matérialisée par la force $\overrightarrow{F} = mg\sin\theta\overrightarrow{z}$ est une réponse non linéaire par rapport à θ, l'angle d'élongation.

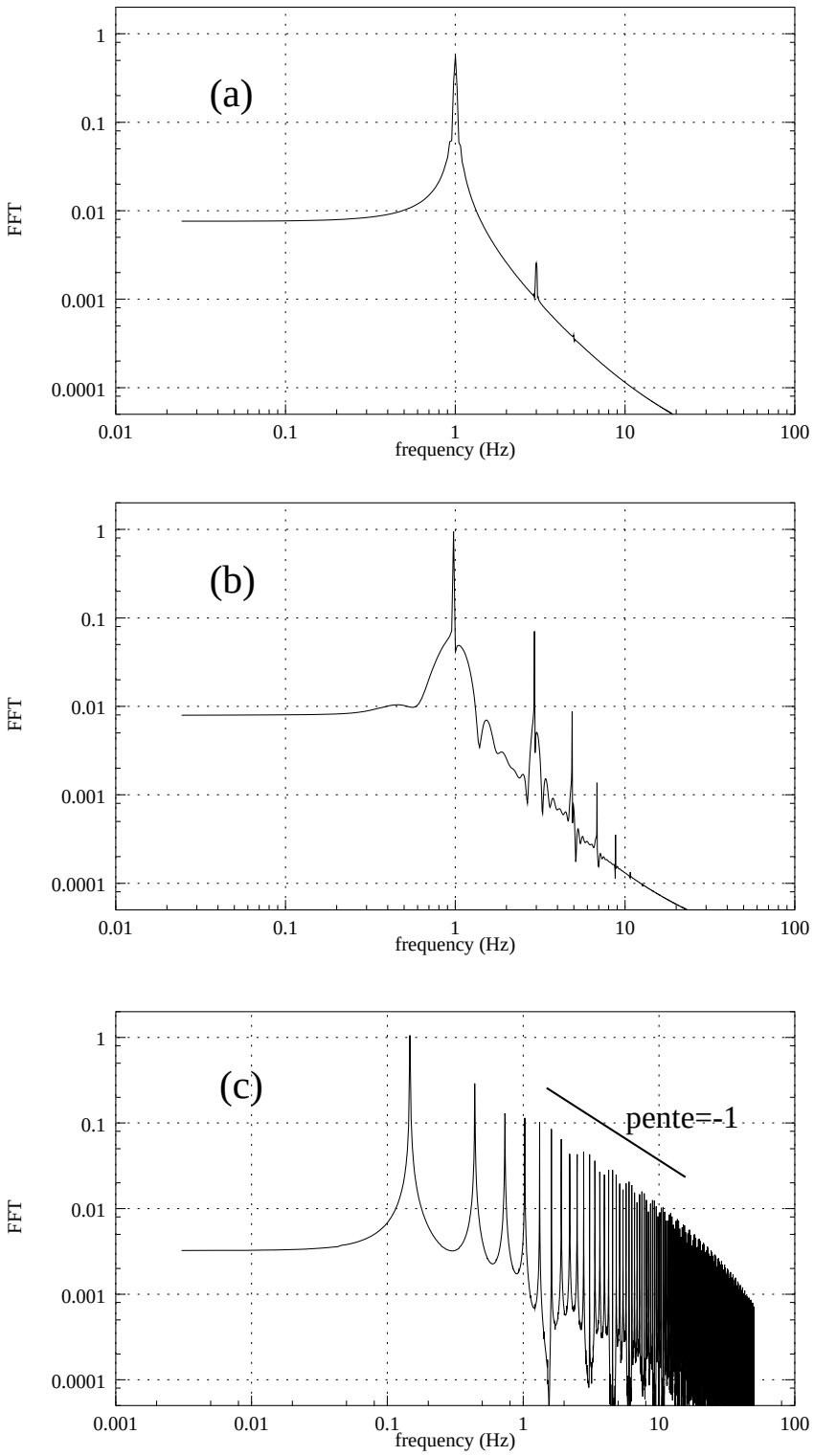


FIG. 4.6 – *Spectre FFT de l'oscillateur Van der Pol ; (a) :* $\lambda = 0,01$*, (b) :* $\lambda = 0,1$*, (c) :* $\lambda = 4$-$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1$

4.2.2 Linéarisation des systèmes linéaires

De nombreux systèmes non linéaires peuvent se ramener, sous certaines conditions, à un système linéaire (ici, le cas $\sin\theta \sim \theta$ conduit à la propriété d'isochronisme des petites oscillations). Toutefois, l'exemple du système soumis à un amortissement de type force de friction de Coulomb [Andronov 66] constitue l'exemple même du cas non linéarisable (Fig. 4.7). La linéarisation du modèle de l'oscillateur à clapet ne peut expliquer le fait, qu'indépendamment des conditions initiales, celui-ci tend vers un état d'oscillation. Ce modèle est également à la base de la modélisation des tremblements de terre [Carlson 89] dans laquelle intervient un réseau de N oscillateurs couplés et soumis à une force de friction de Coulomb. Ces auteurs obtiennent d'ailleurs un exemple de « Self organized criticality », qui est d'après Bak [Bak 87] une source de bruit en $1/f$. Le bruit en 1/f apparaîtrait-il dans les systèmes non linéarisables?

Dans ce modèle, on suppose une masse m soumise à un ressort et une force de friction f_o (supposée constante et inversement proportionnelle à la vitesse). Ainsi, la linéarisation de la force ne peut se faire sans perte de contenu physique du système.

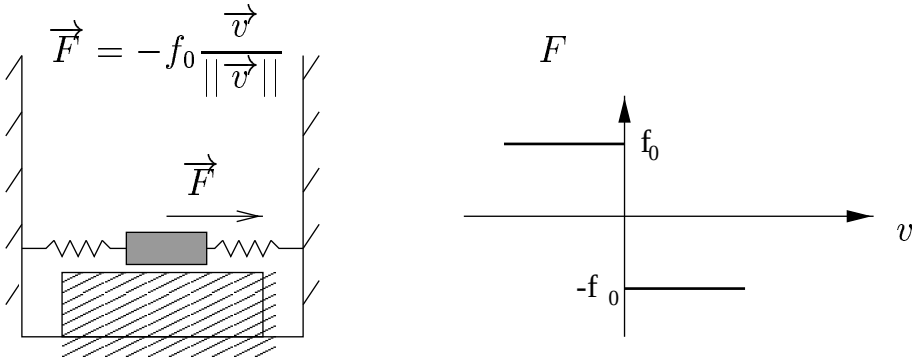


FIG. 4.7 – *Système non linéaire avec force de friction de Coulomb*

4.2.3 Systèmes non linéaires conservatifs

Les systèmes non linéaires conservatifs se dégagent par leur propriété de conservation d'énergie totale. Ils possèdent des propriétés qui dépendent du nombre de degrés de liberté.

Concept de degré de liberté [Andronov 66]

Le concept de degré de liberté est introduit dans la théorie des oscillations à partir de la mécanique, dans laquelle on entend par degré de liberté le nombre de coordonnées qui définit complètement l'espace de configuration du système mécanique (espace des phases).

Le pendule pesant sans amortissement possède un seul degré de liberté car il est complètement défini à partir de la seule connaissance de la variable θ (Fig. 1.4). Les équations différentielles décrivant les systèmes à un degré de liberté (au sens des oscillations) s'écrivent :

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \tag{4.9}$$

En multipliant (4.9) par $\dot{x}$ et en intégrant, on obtient :

$$\int \dot{x}\ddot{x}dt + \int \dot{x}f(x)dt = \mathcal{H}, \tag{4.10}$$

$$\int \dot{x}d\dot{x} + \int f(x)dx = \mathcal{H}, \tag{4.11}$$

soit :

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + F(x) = \mathcal{H}, \tag{4.12}$$

La quantité $\mathcal{H}$ est appelée énergie totale ou Hamiltonien et $F(x)$ énergie potentielle du système. Sachant que $\mathcal{H}$ est défini à partir de deux variables ($x, v = \dot{x}$ de l'espace des phases), et qu'il existe la relation (4.12) les reliant entre elles, on vérifie que l'on obtient un système à un degré de liberté. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de variables d'états de l'espace des phases diminué du nombre de quantités conservées au cours du mouvement (appelées intégrales premières). On parle alors de systèmes complètement intégrables si le nombre de quantités conservées est égal au nombre de degrés de liberté [Lichtenberg 91, p. 24].

Notion d'espace des phases [Neyfey 79]

L'équation (4.12) permet de relier les deux variables conjuguées v et x. On peut alors complètement décrire le système dans l'espace des phases (x, v). Dans le cas du pendule décrit par l'équation (4.8), on a :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 f(\theta) = 0, \quad \text{avec} \quad f(\theta) = \sin\theta \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \tag{4.13}$$

On a alors $F(\theta) = -\cos\theta$, et le plan de phase est alors donné par la figure Fig. 4.8. Le sens des flèches provient de l'évolution temporelle paramétrique des variables x et v au point considéré. Il existe deux évolutions différentes compte de tenu de l'énergie totale $\mathcal{H}$ associée aux conditions initiales :

- si $\mathcal{H} \leq E_s \longrightarrow$ oscillations autour de la position d'équilibre
- si $\mathcal{H} \geq E_s \longrightarrow$ rotation complète du pendule

La position $H = E_s$ délimite deux comportements différents du système et est appelée séparatrice. Elle se caractérise par un temps infini pour que le système puisse atteindre la position d'équilibre instable $\theta = \pm\pi$. En effet, on montre que la période s'écrit dans le cas $\mathcal{H} \leq E_s$:

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} d\theta, \tag{4.14}$$

où $k = \sin\frac{\theta_m}{2}$ avec θ_m l'élongation maximale. Cette intégrale elliptique de première espèce [Abramowitz 70] diverge pour $\theta_m = \pm\pi$.

L'espace des phases ou plan de phases permet d'éliminer la paramétrisation temporelle des systèmes dynamiques et de repérer les conditions critiques où le système peut posséder des variables divergentes (ici, la période T) associées à de grandes constantes de temps du système.

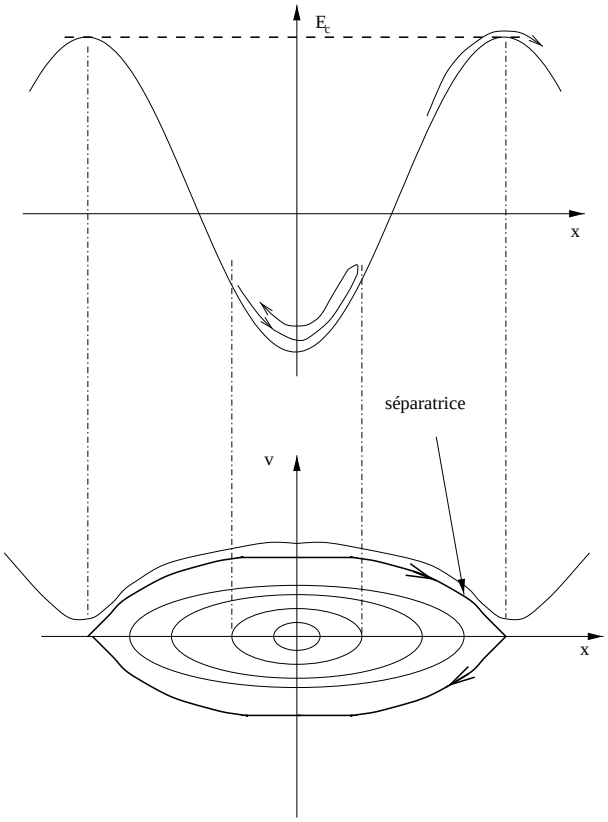


FIG. 4.8 – *Espace des phases ou plan de phase du pendule pesant non amorti*

4.3 Perturbation des systèmes non linéaires

L'étude de la perturbation des modèles a toujours été un moyen puissant pour comprendre les effets observés dans les expériences ; même si l'on ne connaît pas exactement les causes qui leurs ont donnés naissance. Dans le cas des oscillateurs, l'origine des perturbations peut être de nature variée mais que l'on peut classer en deux grands groupes : les perturbations aléatoires (bruit) et déterministes (signal dépendant du temps). L'étude de l'influence des perturbations aléatoires est difficile dans les systèmes non linéaires [Mortensen 69]. Pour quelques cas particuliers, et sous certaines conditions, l'équation de Fokker-Planck [Risken 89] permet de caractériser les variables par une densité de probabilité [13]. En revanche, pour les perturbations déterministes, de nombreuses méthodes existent ne donnant que rarement la solution exacte [14] du système ; elles apportent seulement des résultats qualitatifs.

4.3.1 Perturbation d'un système intégrable à deux degrés de liberté

Un système à deux degrés de liberté s'écrit comme une somme de deux systèmes totalement découplés. Dans le cas de deux oscillateurs, on a [Lichtenberg 91, p. 49] :

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \omega_1^2 q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \omega_2^2 q_2^2 \tag{4.15}$$

En posant :

$$p_i = J_i \sqrt{2m_i} \cos\theta_i, \tag{4.16a}$$

$$q_i = \frac{J_i}{\omega_i} \sin\theta_i, \tag{4.16b}$$

on obtient :

$$\mathcal{H}_0(J_1, J_2) = J_1^2 + J_2^2, \tag{4.17}$$

où les variables $(J_i, \theta_i)_{i=1,2}$ sont appelées variables d'angle-action.

On obtient un résultat général concernant les systèmes intégrables : l'Hamiltonien $\mathcal{H}_0$ ne dépend que des variables d'action (J_1, J_2). Ce modèle peut être celui d'un oscillateur à deux modes ou deux harmoniques supposés totalement découplés. L'espace de configuration d'un tel système est de dimension 3 : 4 variables d'angle-action $(J_i, \theta_i)_{i=1,2}$ moins une

13. Cette méthode possède toutefois l'inconvénient de ne traiter que les fluctuations aléatoires $\delta-$corrélées (bruit blanc).

14. Gonzales [Gonzalez 83] donne une solution exacte d'un oscillateur non linéaire excité périodiquement par une distribution d'impulsions.

due à l'intégrale première. Une façon commode de repérer les systèmes est la paramétrisation sur le tore dans laquelle les petits et les grands rayons correspondent aux actions J_1 et J_2 constantes (Fig. 4.9). Il est possible d'associer un domaine fondamental au tore. C'est un carré du plan dans lequel on identifie les côtés opposés. Les angles θ_i sont donnés par les axes x et y. Une trajectoire sur le tore est représentée par une droite d'équation $y = ax + b$.

Considérons maintenant le système soumis à une perturbation $\mathcal{H}_1$, tel que :

$$\mathcal{H}(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = \mathcal{H}_0(J_1, J_2) + \varepsilon \mathcal{H}_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \tag{4.18}$$

où $\mathcal{H}_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$ est une fonction périodique des θ_i.

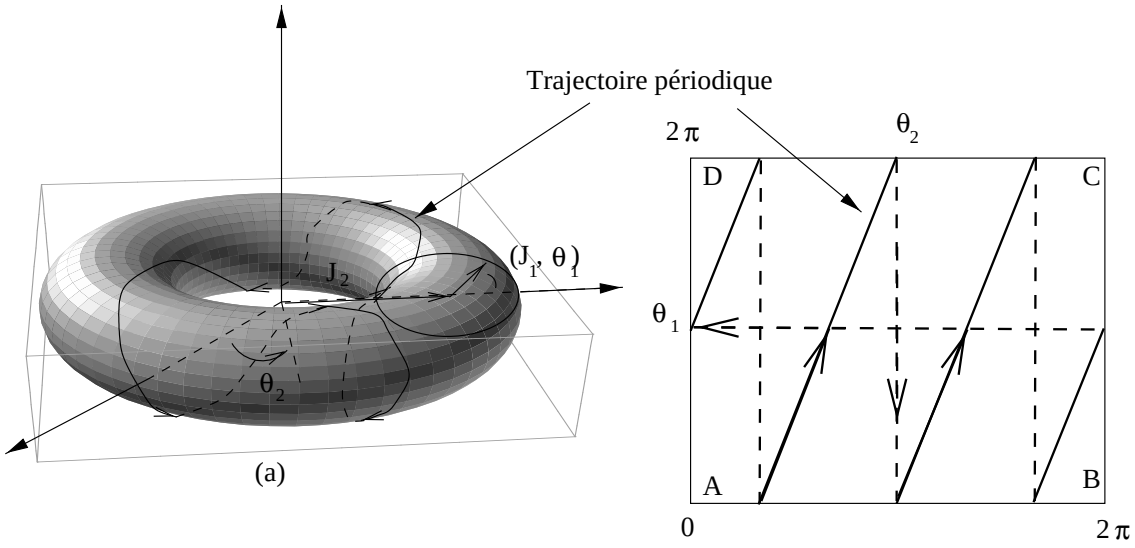


FIG. 4.9 – *Espace des phases d'un système intégrable à deux degrés de liberté : le tore $T^2 = C^1 \times C^2$, produit cartésien de deux cercles*

L'évolution générique d'un tel système est à présent bien connue grâce au théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). On montre [Lichtenberg 91] qu'une petite partie des trajectoires de l'espace des phases est régulière, dans le sens où elles sont liées aux constantes du mouvement. La partie complémentaire possède un comportement stochastique ou chaotique.

Les trajectoires régulières sont les invariants du problème, dans le même sens où les coefficients de Fourier sont les invariants d'un système périodique ; elles possèdent différentes propriétés (Fig. 4.10) suivant l'importance de la perturbation et des propriétés des paramètres :

– Si les fréquences sont incommensurables $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, la trajectoire remplit la surface

du tore (Fig. 4.10(a)). La dynamique est préservée.

- si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, les trajectoires sont fermées de période p en θ_1 et q en θ_2. Le tore est détruit (Fig. 4.10(b)). Ces résonances sont appelées résonances primaires. C'est un phénomène de synchronisation entre les deux oscillateurs. La perturbation provoque une dynamique périodique commune.

- Les trajectoires peuvent former des îlots de stabilité autour des résonances primaires (Fig. 4.10(c)). Les îlots sont des tores, reflètant une certaine régularité de la dynamique.

- Ces îlots ou petits tores peuvent à leur tour être détruits de la même manière que précédemment. Il s'agit du même phénomène mais à plus petite échelle. On obtient alors des résonances secondaires (Fig. 4.10(d)).

- Et ainsi de suite *ad infinitum.*

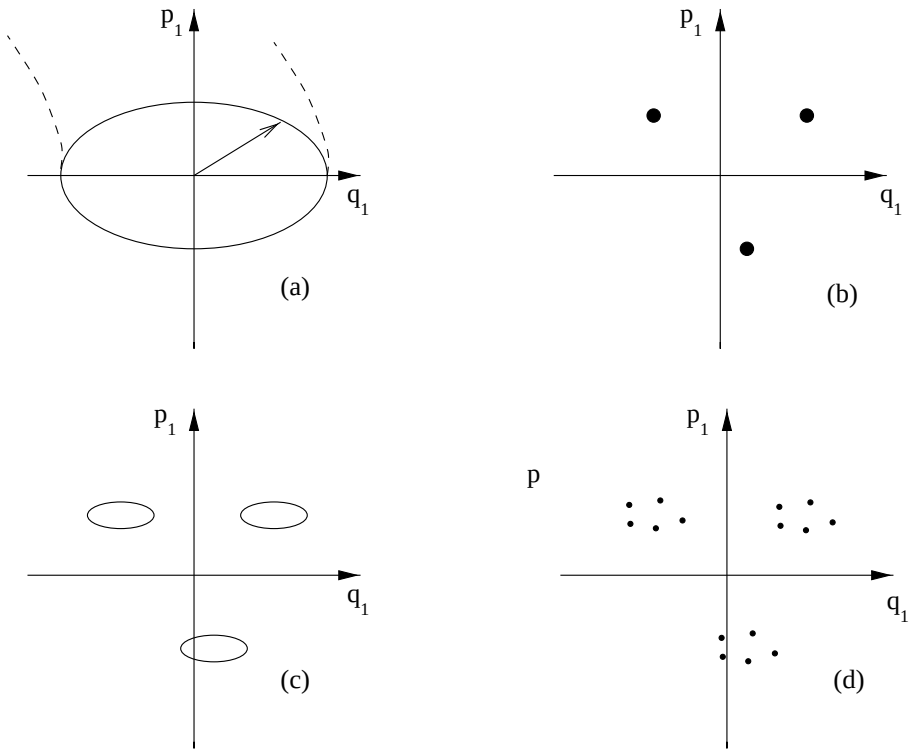


FIG. 4.10 – *Intersection de la trajectoire du système perturbé avec une surface $\theta_2 = cte$*

La perturbation a des effets différents suivant les propriétés des oscillateurs (fréquences incommensurables ou pas). Si le rapport est réel, les trajectoires ne sont pas modifiées et les

oscillateurs ne sont pas perturbés par le couplage. Les tores sont préservés et on retrouve un résultat classique selon lequel un oscillateur excité à une fréquence incommensurable avec sa fréquence propre ω_0, ne sera pas perturbé. Par contre, on constate qu'il peut exister toute une hiérarchie de phénomènes de résonances suivant le degré de rationalité des fréquences. Ceci est une conséquence du théorème KAM, qui associe cette hiérarchie aux problèmes de l'approximation des réels par les rationnels, et ici, on sent l'importance de cette propriété pour l'étude de l'effet des perturbations sur un système presque intégrable, « presque périodique » que constitue l'oscillateur ultra-stable.

Ce résultat, présenté dans le cas d'un système intégrable à deux degrés de liberté, est valable également pour les systèmes à un nombre quelconque de degré de liberté. L'étude en sera plus complexe, mais le critère de rationalité sera le même. Ce qui est fondamental dans ce problème, c'est qu'une perturbation infinitésimale (que l'on considère habituellement négligeable) d'un système où les rapports de fréquence sont rationnels peut avoir autant d'influence qu'une perturbation macroscopiquement visible d'un système où les rapports sont réels. Ceci est encore une conséquence du théorème KAM dans lequel la présence de petits dénominateurs dans une fraction définissant des coefficients de perturbation provoque une amplification infinie de la perturbation[15].

On a montré que les oscillateurs présentaient des comportements non linéaires conduisant entre autre à la génération d'harmoniques. Dans le cas des oscillateurs ultra-stables, on essaie, par des méthodes de filtrage et de sélection de modes, de réduire au maximum cette influence, ce qui est macroscopiquement réalisé compte tenu de leur pureté. Toutefois, l'étude précédente concernant les systèmes intégrables peut très bien constituer le modèle d'un oscillateur présentant deux modes (ou deux harmoniques) que l'on suppose souvent découplés. Ainsi, une perturbation (dans laquelle on peut englober tout le reste) provoquera alors la destruction de la dynamique (couplage) des deux modes ; surtout s'ils sont en rapport rationnel (ce qui est également souvent le cas).

À présent, le problème est de quantifier cette perturbation dans le sens où il faut lui donner une valeur concrète. Cette étude est d'ores et déjà vouée à l'échec puisque l'on ne sait pas exactement quelle perturbation sera prépondérante ; et surtout on ne peut pas la mesurer. En revanche, la seule chose que l'on sache concerne le critère qui va l'amplifier. Il s'agit d'un problème de petit dénominateur équivalent au fait qu'il existera un rapport rationnel ou presque rationnel entre les fréquences du système.

15. Le lecteur pourra consulter la partie relative du théorème KAM dans [Lichtenberg 92].

4.3.2 Perturbation d'un système non intégrable à un degré de liberté

C'est le type de perturbation que l'on retrouve lorsqu'un oscillateur décrit par l'équation de Van der Pol (4.5) est soumis à une perturbation périodique ω_s proche de sa fréquence de résonance ω_0. Dans ce cas, l'équation est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \sin \omega_s t. \tag{4.19}$$

Supposons :

$$x = A\cos(\omega_s t + \Phi), \tag{4.20a}$$
$$\dot{x} = -\omega_s A \sin(\omega_s t + \Phi). \tag{4.20b}$$

De ces deux équations (4.20a) et (4.20b), on tire :

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_s^2}}, \tag{4.21a}$$
$$\Phi = -\arctan\left(\frac{\dot{x}}{\omega_s x}\right). \tag{4.21b}$$

En dérivant les variables A et Φ, on obtient :

$$\dot{A} = -\frac{\sin(\omega_s t + \Phi)}{\omega_s}(\ddot{x} + \omega_s^2 x), \tag{4.22a}$$
$$\dot{\Phi} = -\frac{\cos(\omega_s t + \Phi)}{\omega_s A}(\ddot{x} + \omega_s^2 x). \tag{4.22b}$$

On peut alors réécrire (4.19) par

$$\ddot{x} + \omega_s^2 x = -2\omega_s \Delta x + \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \sin \omega_s t, \tag{4.23}$$

où

$$\Delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_s^2}{2\omega_s} \simeq \omega_0 - \omega_s. \tag{4.24}$$

En reportant (4.23) dans (4.22), on arrive à

$$\dot{A} = -\frac{\sin(\omega_s t + \Phi)}{\omega_s}(-2\omega_s \Delta x + \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \sin \omega_s t), \tag{4.25a}$$
$$\dot{\Phi} = -\frac{\cos(\omega_s t + \Phi)}{\omega_s A}(-2\omega_s \Delta x + \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \sin \omega_s t), \tag{4.25b}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\dot{A} &= 2\Delta x\sin(\omega_s t+\Phi)-\lambda(1-4x^2)\frac{\omega_0}{\omega_s}\dot{x}\sin(\omega_s t+\Phi)\\ &- \frac{\varepsilon}{\omega_s}\sin\omega_s t\sin(\omega_s t+\Phi), \qquad (4.26a)\\ \dot{\Phi} &= 2\frac{\Delta}{A}x\cos(\omega_s t+\Phi)+\frac{\lambda}{\omega_s A}(1-4x^2)\omega_0\dot{x}\cos(\omega_s t+\Phi)\\ &- \frac{\varepsilon}{\omega_s}\sin\omega_s t\sin(\omega_s t+\Phi), \qquad (4.26b)\end{aligned}$$

soit :

$$\dot{A} = -\frac{2\Delta}{\omega_s A}x\dot{x}+\frac{\lambda(1-4x^2)\omega_0\dot{x}^2}{\omega_s^2 A}-\frac{\varepsilon}{2\omega_s}\left(\cos(\omega_s t+\Phi)-\cos\Phi\right), \qquad (4.27a)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{2\Delta}{A^2}x^2+\frac{\lambda(1-4x^2)\omega_0 x\dot{x}}{\omega_s A^2}-\frac{\varepsilon}{2\omega_s A}\left(\sin(\omega_s t+\Phi)-\sin\Phi\right). \qquad (4.27b)$$

Les expressions de $\dot{A}$ et $\dot{\Phi}$ contiennent des termes en $\dot{x}^p x^q$ que l'on se propose de simplifier de la manière suivante. En se basant sur une technique basée sur la méthode multi-échelles développée dans [Neyfey 79] et dans [Stratanovich 67] pour laquelle on suppose A et Φ lentement variables par rapport à $\omega_s t$, on peut montrer que les termes peuvent être remplacés par leur moyenne temporelle.

On montre aisément que :

$$\overline{x}=\overline{\dot{x}}=0,\quad \overline{x^2}=\frac{A^2}{2},\quad \overline{\dot{x}^2}=\frac{\omega_s^2A^2}{2},\quad \overline{x^2\dot{x}^2}=\frac{\omega_s^2A^2}{2}, \qquad (4.28)$$

et que tous les autres termes intervenant dans (4.27) sont nuls. Après simplification, on a donc :

$$\dot{A} = \frac{\lambda\omega_0 A}{2}(1-4A^2)+\frac{\varepsilon}{2\omega_s}\cos\Phi, \qquad (4.29a)$$

$$\dot{\Phi} = \Delta+\frac{\varepsilon}{2\omega_s A}\sin\Phi. \qquad (4.29b)$$

Les deux variables A et Φ vérifient un système d'équations différentielles non linéaires, et il n'existe, à notre connaissance, aucune méthode permettant de résoudre analytiquement ce système. On peut néanmoins le caractériser lorsqu'un régime permanent est établi, *i.e.*

$$\dot{A}=\dot{\Phi}=0 \quad avec \quad \Phi=\Phi_0 \; et \; A=A_0. \qquad (4.30)$$

Dans ce cas (4.29) s'écrit :

$$\frac{\varepsilon}{2\omega_s}\cos\Phi_0 = -\frac{\lambda\omega_0 A_0}{2}(1-4A_0^2), \qquad (4.31a)$$

$$\frac{\varepsilon}{2\omega_s}\sin\Phi_0 = -A_0\Delta, \qquad (4.31b)$$

soit :

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\omega_s}\right)^2 = (\frac{\lambda\omega_0 A_0}{2})(1-4A_0^2))^2 + A_0^2\Delta^2 \tag{4.32a}$$

$$= A_0^2\left[\frac{\lambda\omega_0^2}{4}(1-4A_0^2)^2 + \Delta^2\right], \tag{4.32b}$$

ou encore

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\omega_s}\right)^2 \frac{4}{\lambda\omega_0^2} = A_0^2\left[(1-4A_0^2)^2 + \frac{4\Delta^2}{\lambda\omega_0^2}\right]. \tag{4.33}$$

En posant $x = A_0^2$, $a = \frac{\varepsilon^2}{\lambda\omega_0^2\omega_s^2}$, $b = \frac{4\Delta^2}{\lambda\omega_0^2}$ on obtient

$$a = x((1-4x)^2 + b). \tag{4.34}$$

Il s'agit alors de trouver x tel que :

$$a - bx = x(1-4x)^2. \tag{4.35}$$

Par une étude graphique (Fig. 4.11), nous constatons que, quelles que soient les valeurs de a et b, il existe au moins un point d'intersection (une valeur A_0). Ceci conduit à une valeur de Φ_0 en utilisant (4.31b) ; sous-entendu l'existence d'une certaine condition de synchronisation donnée par

$$-1 \leq -\frac{2\omega_s A_0\Delta}{\varepsilon} \leq 1. \tag{4.36}$$

Cette condition est fondamentale et existe pour une plage de variation des paramètres ω_s, A_0, Δ, et ε qui peut être importante. Remarquons qu'elle a d'autant plus de chance de se réaliser que la valeur de ε sera grande, c'est-à-dire que la perturbation sera importante. Inversement, l'oscillateur aura d'autant moins de chance de se synchroniser sur la perturbation que celle-ci sera petite. Le détail de l'équation (4.29b) sera largement étudié dans le prochain chapitre dans le cadre de l'étude PLL en régime non linéaire.

4.4 Notion de synchronisation

L'étude de la perturbation des systèmes non linéaires, et plus particulièrement des oscillateurs, effectuée dans les deux premiers paragraphes, a permis de mettre en évidence deux propriétés importantes :

- Le rapport de fréquence intervient dans la dynamique où se côtoient régularité et chaos.

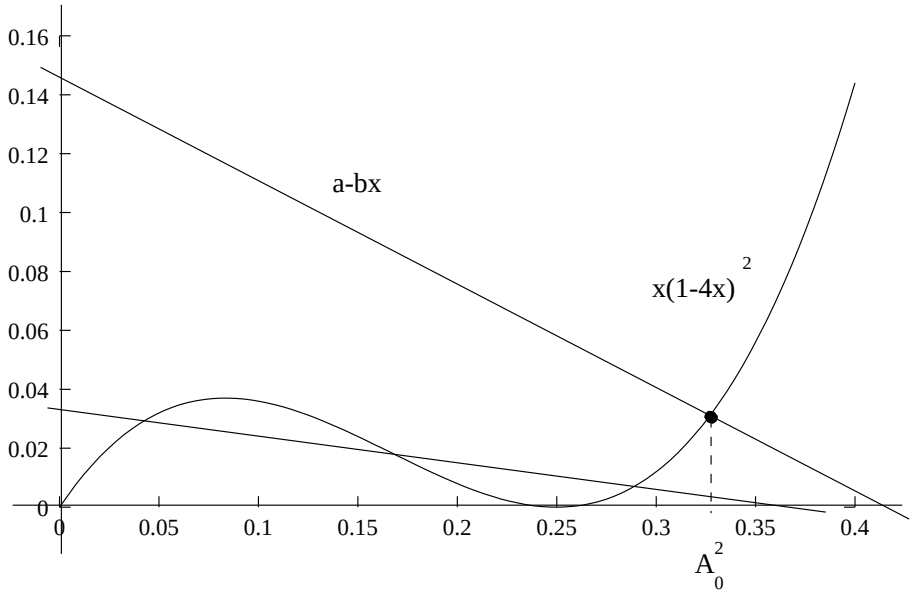


FIG. 4.11 – *Résolution graphique de la condition d'amplitude pour le régime permanent de l'oscillateur de Van der Pol perturbé.*

– La présence d'une zone dans laquelle s'effectue une synchronisation et pour laquelle il semble y avoir un comportement régulier.

De plus, ces résultats sont génériques dans le sens où ils interviennent quel que soit le degré de liberté du système. Il vient alors une question importante. La plage observée pour $\omega_s = \omega_0$ (cf. paragraphe 4.3.2) est-elle observable pour tous les rapports rationnels. Nous reviendrons sur cette question dans le prochain chapitre, en revanche il est établi qu'un oscillateur perturbé décrit par

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \sin \Omega t, \tag{4.37}$$

avec $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ (resp. $\Omega = 3\omega_0$) provoque une synchronisation que l'on appelle résonance sous harmonique (resp. sur-harmonique). De même que l'excitation par la somme de deux signaux de fréquence Ω_1 et Ω_2 peut conduire à des résonances si $\omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2$ ou $\omega_0 = \Omega_1 - \Omega_2$. Cette situation peut vite devenir non seulement très complexe mais aussi très riche de phénomènes multi-résonances à toutes les échelles [Neyfey 79].

Dans ce domaine de recherche, il existe des études portant justement sur des phénomènes de synchronisation entre oscillateurs non linéairement couplés ; voici un rappel bibliographique (non exhaustif) de récents travaux réalisés dans le domaine.

4.4.1 Sur la synchronisation des systèmes

Observation historique de Huygens

En 1665, le physicien, mathématicien, astronome hollandais Christian Huygens (1629-1695), à qui l'on attribue la découverte de l'horloge à balancier et du mécanisme à échappement, observe un phénomène bien « sympathique » que nous rapportons en ses propres termes (cité dans [Planat 96a]) :

> Being obliged to stay in my room for several days and also occupied in making observations on my two newly made clocks, I have noticed a remarkable effect which no one could have ever thought of. It is that these two clocks hanging next to one another separated by on or two feet keep an agreement so exact that the pendulums invariably oscillate together without variation. After admiring this for a while, I finally figured out that it occurs through a kind of sympathy : mixing up the swings of the pendulums, I have found that within a half hour they always return to consonance and remain so constantly afterwards as long as I let them go. I then separated them, hanging one at the end of the room and the other fifteen feet away, and noticed that in a day there was five seconds difference between them. Consequently, their earlier agreement must in my opinion have been caused by an imperceptible agitation of the air produced by the motion of the pendulums. The clocks are always shut in their boxes, each weighing a total of less than 100 pounds. When in consonance, the pendulums do not oscillate parallel to one another, but instead they approach and separate in opposite directions.

Il s'agit de l'une des premières observations de la synchronisation observée sur deux oscillateurs couplés. Rappelons que ces phénomènes de synchronisation sont étudiés depuis plus de soixante ans dans les domaines qui vont des oscillateurs RF [Adler 46], micro-ondes [Kurokawa 73], jusqu'aux sources laser [Buczek 73] et maser [Vanier 89]. Toutes ces études font appel à un modèle d'oscillateurs couplés.

4.4.2 Absence de synchronisation dans les systèmes linéaires

Le cas d'oscillateurs linéaires couplés linéairement, dans des conditions initiales non particulières, ne peut conduire à un phénomène de synchronisation, si ce dernier n'était pas présent dans les conditions initiales.

Exemple :

Considérons deux pendules pesants identiques, supposés linéaires de fréquence propre ω_0 et couplés linéairement par un ressort de raideur k (Fig. 4.12).

Soit x_1 et x_2 les déplacements algébriques des pendules 1 et 2 suivant l'axe x, par

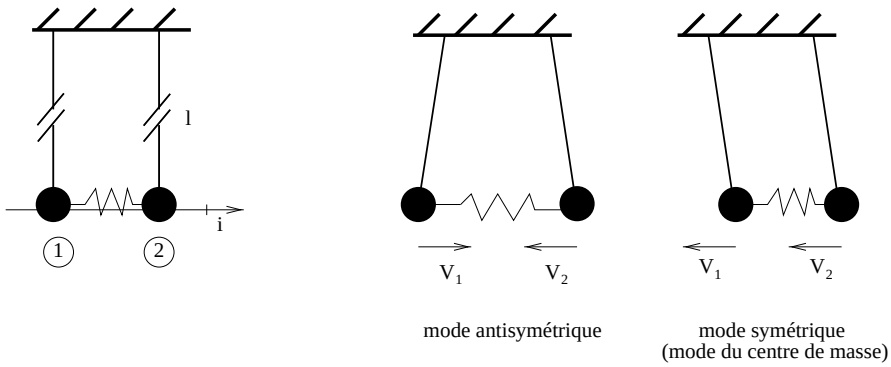


FIG. 4.12 – *Couplage linéaire de deux oscillateurs linéaires*

rapport à leur position d'équilibre. On montre alors que l'on a[16] :

$$\ddot{x_1} + \omega_0^2 x_1 = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2), \tag{4.38a}$$

$$\ddot{x_2} + \omega_0^2 x_2 = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1). \tag{4.38b}$$

Ce système linéaire se résout en posant $S = x_1 + x_2$ et $A = x_1 - x_2$ et devient alors totalement découplé compte tenu des propriétés de symétrie, soit :

$$\ddot{A} + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) A = 0, \tag{4.39a}$$

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0. \tag{4.39b}$$

L'évolution temporelle de chaque pendule[17] est une combinaison linéaire du mode symétrique S (mouvement du centre de masse) et du mode antisymétrique A (mouvement relatif par rapport au centre de masse). Les coefficients sont constants et dépendent des conditions initiales ce qui rend impossible la synchronisation de phase (sauf s'ils sont déjà en phase à l'instant initial !). La synchronisation nécessite une certaine non-linéarité des systèmes.

4.4.3 Couplage d'oscillateurs non linéaires : éléments de bibliographie

L'étude de la synchronisation d'oscillateurs non linéaires constitue un modèle de base pour l'étude des couplages de lasers, des réseaux de jonctions de Josephson, de réseaux de

16. On suppose que la longueur l est infiniment longue (rayon de courbure infini) pour considérer le déplacement selon x.

17. Notons que chaque pendule pris individuellement constitue un oscillateur périodique si $\frac{\omega_0^2}{\frac{2k}{m}} \in \mathbb{Q}$ et quasi périodique sinon.

neurones, de phénomènes à onde à densité de charge, de même que pour l'étude des systèmes biologiques, sans oublier les systèmes électroniques sur lesquels nous reviendrons[18].

Ces travaux sont surtout de nature numérique et expérimentale, en remarquant toutefois la présence de résultats théoriques pour quelques cas particuliers possédant certaines propriétés de symétrie. De Sousa [De Sousa Vieira 94] met en relief la synchronisation d'oscillateurs (de fréquences propres différentes) sur une fréquence commune moyennant un seuil de couplage. Elle l'applique d'ailleurs au cas de plusieurs PLL couplées qu'elle assimile à des oscillateurs. Pikovsky [Pikovsky 96] propose une étude d'oscillateurs couplés par un champ moyen. Il montre qu'il existe une synchronisation des phases à partir d'une valeur critique de l'intensité du champ, et observe un comportement chaotique de l'amplitude, comportement également remarqué dans [Lee 98]. Les résultats de Kocacev [Kocarev 96] montrent que cette synchronisation peut aussi bien être spatiale que temporelle. Il entend par synchronisation spatiale l'égalité des propriétés des oscillateurs i pour $i \in \{imin, imax\}$, et évoque la synchronisation par chaos, synchronisation générale et synchronisation de phase (Ref [5-11] dans son papier). On parle aussi des phénomènes de clusters (groupes d'oscillateurs possédant un comportement collectif). Aschwin [Aschwin 92] met en avant l'importance de la symétrie des réseaux d'oscillateurs dans la forme du couplage faible et dissipatif. La synchronisation par chaos a également fait l'objet de nombreuses études depuis l'article original de Pecorra et Caroll [Pecorra 90]. De Sousa [De Sousa Vieira 92] l'a également observée dans un réseau de DPLL (PLL discrète) et propose une application pour la sécurisation des données. Amengual [Amengual 97] observe une synchronisation STI (Spatio Temporal Intermitting) dans laquelle il observe des structures localisées dans le temps et dans l'espace, rapidement détruites dans le cas de fort couplage. Citons enfin pour terminer un article très récent de Lee [Lee 98] dans lequel les auteurs étudient la synchronisation de phase de deux oscillateurs de Rössler à travers une équation du type

$$\dot{\phi} + K \sin \Phi = \Delta\omega, \tag{4.40}$$

dans laquelle Φ représente la différence de phase des deux oscillateurs.

De façon générale, les modèles d'oscillateurs utilisés sont les suivants :

- Oscillateurs de Rössler [Pikovsky 96, Lee 98]. Chaque oscillateur est décrit par 3 variables :

18. Pour plus de détails, le lecteur se dirigera vers les références [1-10] citées dans [Pikovsky 96] qui exposent le champ d'application et d'observation des systèmes synchronisés.

$$\dot{x}_i = -\omega_i y_i - z_i - \varepsilon X, \tag{4.41a}$$
$$\dot{y}_i = \omega_i x_i + a y_i, \tag{4.41b}$$
$$\dot{z}_i = c_1 + z_i(x_i - c_2), \tag{4.41c}$$

où X représente le couplage entre les oscillateurs.

– Oscillateurs de Lorentz [Kocarev 96]

$$\dot{x}_i = \sigma(y_i - x_i) + \varepsilon f(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}), \tag{4.42a}$$
$$\dot{y}_i = r x_i - y_i - x_i z_i, \tag{4.42b}$$
$$\dot{z}_i = x_i y_i - b z_i, \tag{4.42c}$$

où $f(x_i, x_{i-1}, x_{i+1})$ représente le couplage entre les plus proches voisins.

Dans les deux cas, on définit la phase de l'oscillateur i par :

$$\phi_i(t) = \arctan\left(\frac{y_i(t)}{x_i(t)}\right), \tag{4.43}$$

et on considère son évolution en posant

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega_i + \varepsilon G(\{\phi_j\}), \tag{4.44}$$

où G est une fonction non linéaire des ϕ_j qui se trouve être souvent $G(\phi_i, \phi_j) = \sin(\phi_i - \phi_j)$ [Pikovsky 96, Lee 98]. Ceci permet de pour pouvoir modéliser certains dispositifs expérimentaux relatifs aux effets physiques cités en début de paragraphe.

Conséquences et questions nouvelles

À l'instar de ces nombreuses et récentes études concernant les systèmes non linéaires faiblement couplés, il semble qu'il y ait quelques questions apparemment sans réponses :

– Existe-t-il réellement certaines formes de synchronisation de phase, collective, localisée dans l'espace, temporellement, ou spatio-temporelle dans les oscillateurs ? Comment les observer, en extraire les propriétés et en proposer des applications ?

– Pourquoi cette importance de la phase par rapport à l'amplitude ? On observe plus de régularité et de fluctuations dans la phase que dans l'amplitude. Est-ce la raison pour laquelle les fluctuations de phase sont plus importantes que les fluctuations d'amplitude ?

– Le fait d'avoir des oscillateurs de plus en plus stables va-t-il amplifier les phénomènes de résonances harmoniques (condition de faible non-linéarité dans le théorème KAM) et de synchronisation (condition de faible couplage observée dans les simulations) ?

4.5 Conclusion

Après avoir rappelé la non-linéarité des oscillateurs et les propriétés des systèmes faiblement perturbés, on met en évidence :

– L'importance de la rationalité des fréquences d'autant plus significative que les oscillateurs sont stables.

– La présence d'une zone de synchronisation bien modélisée par une équation du type (4.40), et pour laquelle la phase est « constante ».

Il s'agit d'utiliser les méthodes adaptées aux systèmes non linéaires contenant ce type d'équation de phase que l'on se propose de décrire dans le chapitre suivant avant de les appliquer expérimentalement (3^{e} partie).

Chapitre 5

Caractérisation de la dynamique non linéaire

Les systèmes linéaires obéissent au principe de superposition, et possèdent une sorte de propriété de « conservation des fréquences ». Le signal de sortie ne contient jamais de « fréquences » non présentes en entrée.

Un processus non linéaire n'obéit pas à ce principe et ne possède pas cette propriété de « préserver » les fréquences. Il ne peut être complètement caractérisé par la réponse impulsionnelle et la réponse en fréquence des éléments.

Il s'agit alors de rechercher les lois de conservation des systèmes afin d'en extraire les propriétés et les appliquer. Mais, à l'heure actuelle, la puissance des méthodes décrivant les effets des systèmes linéaires sur les signaux dans les deux domaines temporel et fréquentiel n'a pas d'équivalent pour le traitement des processus non linéaires.

Quelques méthodes existent, elles s'appuient le plus souvent sur des considérations géométriques. Nous nous proposons de les décrire en les appliquant à notre contexte d'étude des oscillateurs et de la synchronisation.

5.1 Méthodes classiques

C'est souvent l'application concrète que l'on veut en tirer qui détermine la méthodologie d'étude et de caractérisation des systèmes non linéaires. Si l'on désire déterminer les propriétés des cycles limites, on choisira les méthodes asymptotiques. Si l'on veut le niveau de chaoticité et de stabilité d'un système, on utilisera une méthode basée sur le calcul des exposants de Liapunov. Notre choix d'étude étant basé sur les phénomènes de synchronisation et de périodicité, nous avons choisi celles adaptées que nous exposons dans ce paragraphe.

5.1.1 Section de Poincaré

On utilise la section de Poincaré [Guckenheimer 83, p. 23] et [Lichtenberg 92, p. 17] pour étudier les systèmes presque périodiques. Ces systèmes possèdent des quantités « presque » conservées qui permettent de réduire leur dimension d'étude. La section de Poincaré s'identifie à une projection de la trajectoire dans un espace de dimension inférieure mais possédant encore des propriétés initiales (Fig. 5.1).

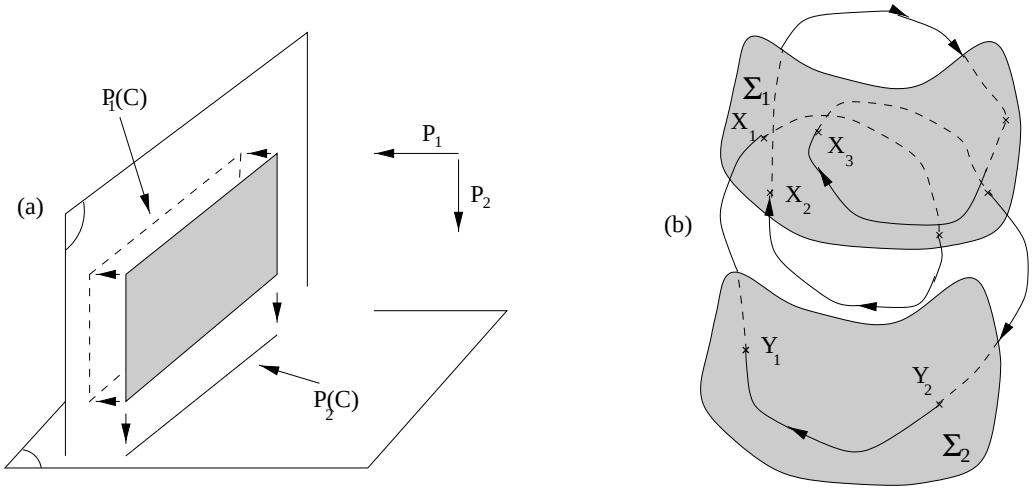


FIG. 5.1 – *(a) La projection $P_1(C)$ conserve toutes les propriétés de C, contrairement à $P_2(C)$. (b) Section de Poincaré d'un système de période 3. La section Σ_1 met en évidence cette période 3 ($X_{i+3n} = X_i$) , alors que Σ_2 ne montre qu'une certaine périodicité ($Y_{i+2n} = Y_i$)*

Par exemple, l'oscillateur de Lorentz (cf. chapitre 4) est un système à trois degrés de liberté, mais qui en fait est de dimension 2 [Bai-Lin 88, p. 331].

La section de Poincaré est construite en prenant une surface transverse à la trajectoire dans l'espace des phases. Elle remplace le système dynamique avec une variable temporelle continue en un système avec une variable discrète. C'est une visualisation stroboscopique par échantillonnage du système avec une paramétrisation qui doit être judicieusement choisie pour accéder au maximum d'informations. C'est une méthode très intéressante dans le domaine du temps-fréquence car elle permet d'observer les fluctuations de période (fluctuations des points de la section).

5.1.2 L'application standard

Cette application (Chirikov-Taylor mapping) a été étudiée par Chirikov [Chirikov 79] pour estimer la transition vers le chaos des systèmes réguliers (d'où son nom « carte standard »). Il s'agit d'une section de Poincaré du modèle de l' oscillateur conservatif.

Considérons l'équation

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0, \tag{5.1}$$

que l'on transforme en un système s'écrivant :

$$\dot{\theta} = I, \tag{5.2a}$$
$$\dot{I} = -\sin\theta. \tag{5.2b}$$

En posant

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{h}, \tag{5.3a}$$
$$\dot{I} = \frac{I_{n+1} - I_n}{h}, \tag{5.3b}$$

on trouve le modèle standard bi-dimensionnel :

$$I_{n+1} = I_n - h\sin\theta_n, \tag{5.4a}$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + hI_{n+1}, \tag{5.4b}$$

dans lequel I_n s'identifie aux variations de vitesse angulaire et θ_n aux variations de l'angle de rotation.

La limite $h \to 0$ donne le système différentiel (5.2) dont l'espace des phases est donné par la figure Fig. 4.8. Pour obtenir la carte standard, on trace $I_n = f(\theta_n)$ pour chaque n. La figure Fig. 5.2 présente la carte standard pour des petites valeurs de h : (a) h=0,01 ; (b) h=0,5. Pour $h = 0$, les trajectoires sont des droites $I_n = I_0 \ \forall \ n$. On les appelle tores invariants parce que la dynamique n'est pas perturbée par la non-linéarité. Lorsque h augmente (augmentation de la non-linéarité), les trajectoires forment des îlots autour des trajectoires périodiques. Sous certaines conditions, une sous-structure invariante apparaît et détruit la régularité. La figure Fig. 5.3 présente le système pour de grandes valeurs de h ((a) : h=1 ; (b) : h=1,32). L'augmentation de h engendre une destruction progressive de la régularité du système. Une grande richesse de structure apparaît à toutes les échelles. La distribution de points aléatoires proches des séparatrices est une signature des premières apparitions du chaos. C'est un résultat important relatif aux systèmes non linéaires. La figure (b) montre l'état de chaos généralisé issu de la destruction des sous-structures à toutes les échelles.

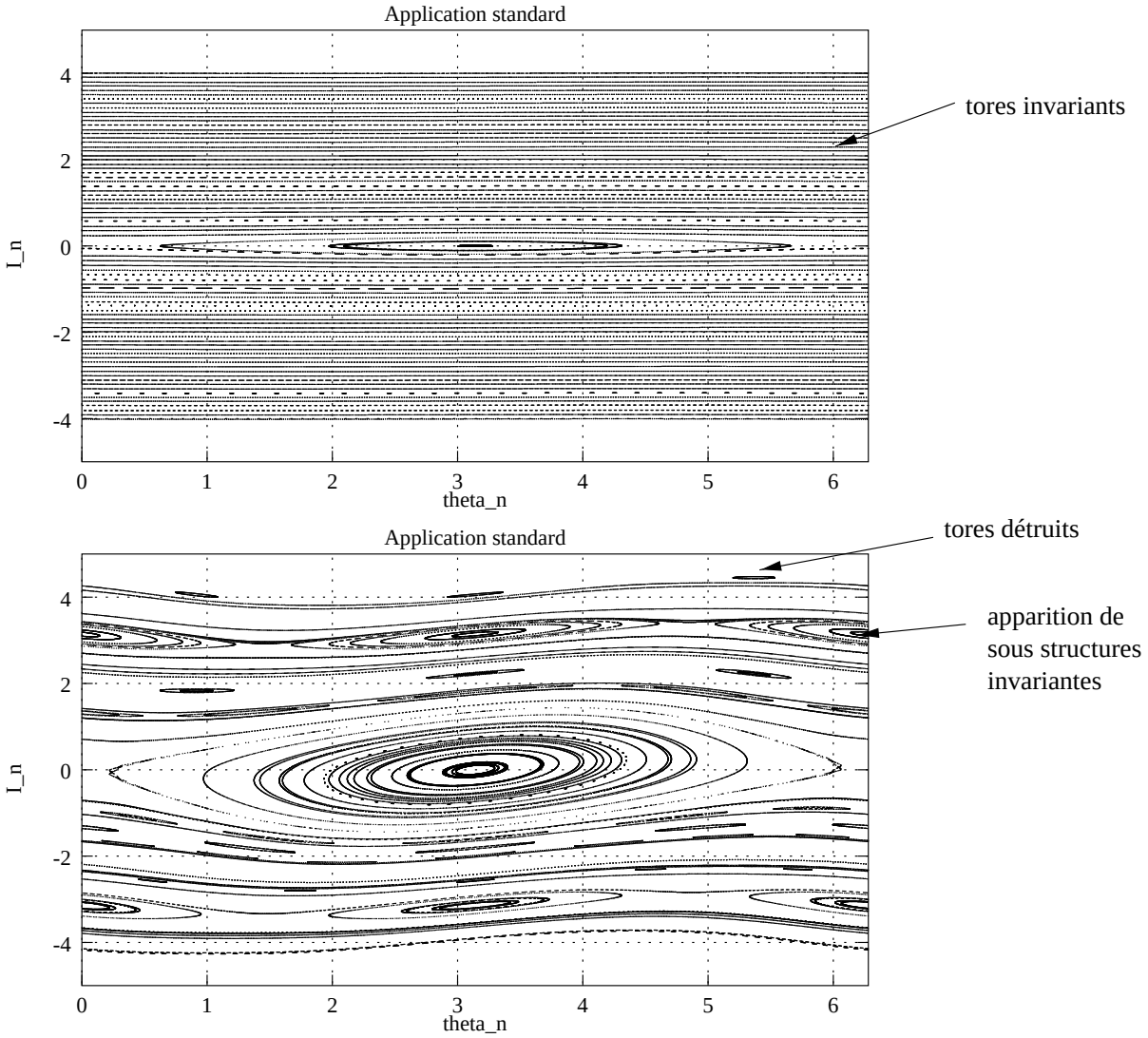


FIG. 5.2 – *Application standard : destruction des tores*

Cas particulier de l'oscillateur de Van der Pol perturbé

On peut établir [Planat 93] la carte de l'oscillateur de Van der Pol perturbé décrit par l'équation (4.19) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} + \varepsilon \sin \omega_s t. \tag{5.5}$$

La méthode consiste à établir une section de Poincaré sur le système (4.29) :

$$\dot{A} = \frac{\lambda \omega_0 A}{2}(1 - 4A^2) + \frac{\varepsilon}{2\omega_s} \cos \Phi, \tag{5.6a}$$

$$\dot{\Phi} = \Delta + \frac{\varepsilon}{2\omega_s A} \sin \Phi. \tag{5.6b}$$

En posant

$$\dot{\Phi} = \frac{\Phi_{n+1} - \Phi_n}{h}, \tag{5.7}$$

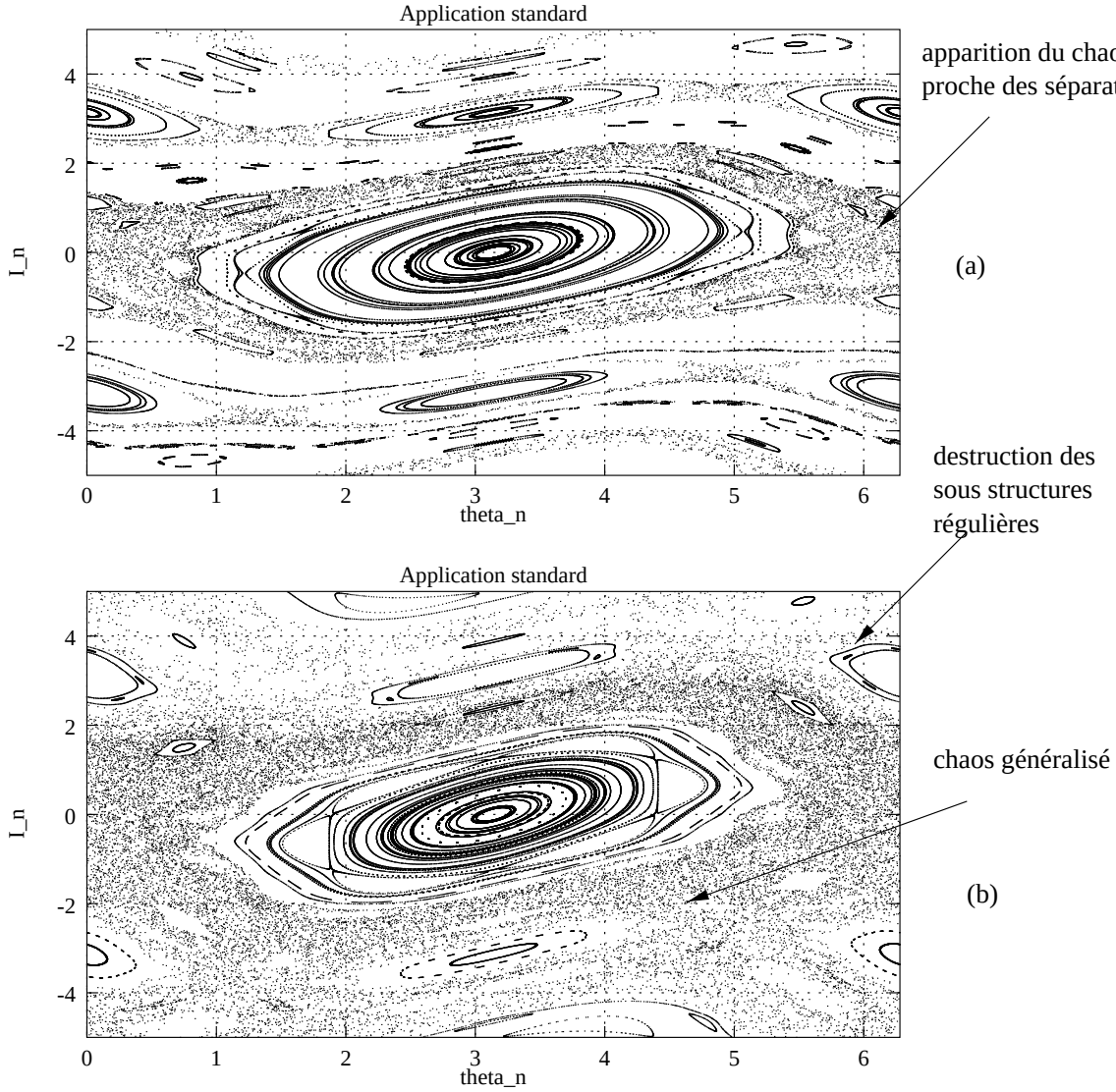


FIG. 5.3 – *Application standard : chaos et structure*

avec $h = \frac{2\pi}{\omega_s}$, la phase Φ_n lors du cycle limite ($A_0 = cte$) décrit, pour chaque pas h correspondant à la fréquence rapide ω_s, l'équation (modulo 2π) :

$$\frac{\Phi_{n+1} - \Phi_n}{\frac{2\pi}{\omega_s}} = \Delta + \frac{\varepsilon}{2\omega_s A} \sin \Phi_n, \tag{5.8}$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \frac{2\pi\omega_0}{\omega_s} + \frac{\pi\varepsilon}{\omega_s^2 A} \sin \Phi_n. \tag{5.9}$$

En posant

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\omega_s} \quad et \quad c = \frac{\pi\varepsilon}{\omega_s^2 A}, \tag{5.10}$$

il vient

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + 2\pi\Omega + c \sin \Phi_n. \tag{5.11}$$

Cette carte porte le nom de carte d'Arnold. Elle constitue un modèle générique des propriétés des « modelockings » [Jensen 84] et des phénomènes de synchronisation.

Autre critères de caractérisation des systèmes non linéaires

Citons pour information quelques critères de caractérisation que nous n'avons pas personnellement utilisés dans nos travaux mais qui l'ont été, entre autre, par C. Eckert [Eckert 96] et R. Nigmatullin [Nigmatullin 97] (dans le cadre d'une collaboration avec M. Planat) pour obtenir des propriétés relatives aux fluctuations de fréquence des oscillateurs.

L'exposant de Liapunov Les systèmes chaotiques possèdent la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Un système est chaotique si, partant de deux conditions initiales $x_1(0)$ et $x_2(0)$, il existe $\lambda > 0$ appelé exposant de Liapunov, tel que (Fig. 5.4) :

$$\mid x_2(t) - x_1(t) \mid = e^{\lambda t} \mid x_2(0) - x_1(0) \mid . \tag{5.12}$$

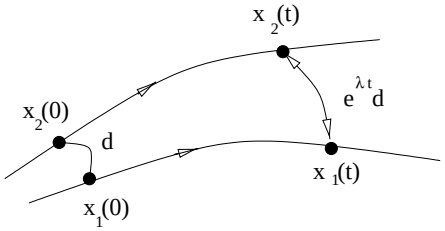


FIG. 5.4 – *Sensibilité aux conditions initiales d'une trajectoire chaotique mesurée via l'exposant de Liapunov* λ

Exemple : Considérons l'application X sur le cercle C^1 :

$$X : C^1 \longrightarrow C^1 \tag{5.13a}$$

$$\theta \longmapsto 2\theta \quad [2\pi] \tag{5.13b}$$

En prenant deux conditions initiales θ_0 et $\theta_0 + \varepsilon$, la $n$ième itération s'écrit

$$X^n = 2^n\theta_0 \quad ou \quad X^n = 2^n(\theta_0 + \varepsilon), \tag{5.14}$$

et, l'on a

$$\mid X^n(\theta_0 + \varepsilon) - X^n(\theta_0) \mid = 2^n\varepsilon = e^{\ln 2\ n}\varepsilon. \tag{5.15}$$

C'est une application chaotique avec exposant de Liapunov de $\lambda = \ln 2$.

Notion d'entropie Comme dans le cadre de la thermodynamique, cette notion est une mesure du degré de désordre dans le système [Gutzwiller 90, p. 148]. Le calcul de l'entropie se fait en considérant un volume V que l'on partitionne en A_i volumes disjoints suivant une application x. Une mesure probabiliste $\mu(A_i)$ des propriétés dans chaque volume élémentaire A_i permet de définir l'entropie h par :

$$h(x) = -\sum_i \mu(A_i)\ln(\mu(A_i)). \tag{5.16}$$

Prenons l'exemple de la figure Fig. 5.5, dans lequel on s'intéresse à la probabilité de présence de la particule dans chaque quadrant du carré. La notion de désordre est plus importante dans le cas (b) car l'entropie h est plus grande.

En appliquant cette méthode pour compter les points d'intersection de la trajectoire d'un système avec la section de Poincaré Σ (cf. Fig. 5.1), cette mesure permet d'évaluer l'entropie des attracteurs dans l'espace des phases. Elle renseigne sur la façon dont l'application de Poincaré divise l'espace des phases, c'est une information qui peut être reliée aux fluctuations de la périodicité de l'application.

La caractérisation des systèmes non linéaires peut également se faire par d'autres méthodes, comme la dimension de corrélation, dimension de Haussdorf, mais elles sont plutôt associées aux propriétés fractales des attracteurs relatives à l'étude des séries temporelles.

(a) (b)

$h\left(\alpha = \frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}\ln\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\ln\frac{1}{8} = 0.48 \qquad h\left(\alpha = \frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{8}\ln\frac{2}{8} - \frac{3}{8}\ln\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\ln\frac{1}{8} = 1.80$

FIG. 5.5 – *Mesure du désordre par le concept d'entropie. La configuration (b) possède une entropie plus élevée*

5.2 Notions d'invariance d'échelle

5.2.1 Introduction

Nous avons constaté que l'application standard possédait une structure similaire à toutes les échelles. Ce concept d'invariance d'échelle a pris une importance considérable depuis la découverte des fractals par B. Mandelbrot. En effet, plusieurs raisons ont fait prendre conscience de cette invariance dans les systèmes non linéaires :

- Les méthodes de traitement d'équations différentielles non linéaires peuvent se faire à partir d'une méthode d'échelle de temps multiples.
- Les îlots de stabilité dans les systèmes hamiltoniens perturbés sont donnés par une infinité de tores KAM à toutes les échelles dans l'espace de phases [Bai-Lin 88, p. 631].
- L'exposant de Liapunov est relié aux propriétés des fractals [Lichtenberg 92, p. 476].
- La notion de « Self Organized Criticality » serait à l'origine des structures fractales et du bruit en $1/f$ [Bak 88].

Le concept d'invariance d'échelle semble avoir un intérêt certain pour la compréhension du bruit en $1/f$. D'autant plus que la variance d'Allan $\sigma_y(\tau)$ présente un palier[19] pour le bruit en $1/f$. Cela veut dire que concrètement la caractérisation du palier ne dépend pas du temps de mesure τ, et qu'une partie du signal comprend autant d'information que la totalité. Les fractals possèdent ce type de propriété d'invariance d'échelle.

5.2.2 Les fractals

L'ensemble le plus simple de structure fractale est l'ensemble de Cantor dont la règle de construction est la suivante (Fig. 5.6).

- On choisit un segment de longueur 1.
- On coupe le segment en trois et on enlève le morceau central.
- On recommence l'opération pour chaque segment *ad infinitum*.

Soit m, le nombre de morceaux après opération et s le rapport de similitude entre la taille n et $n+1$. On définit alors la dimension fractale D par :

19. *Supra* Chapitre 2

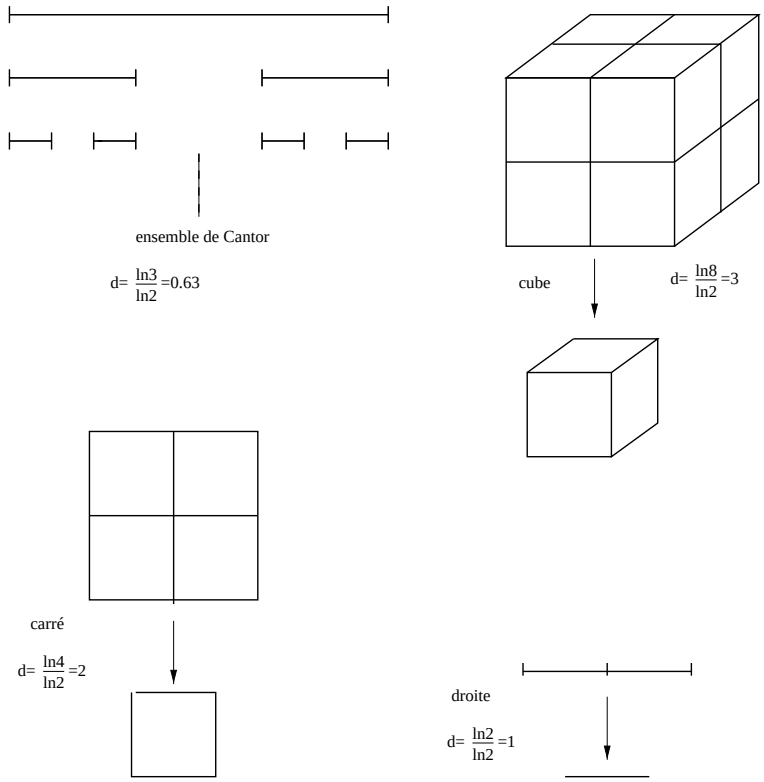


FIG. 5.6 – *Quelques objets et leurs dimensions fractales*

$$D = \frac{\ln m}{\ln s}. \tag{5.17}$$

Pour l'ensemble de Cantor, on a $D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63$. On vérifie que pour un cube, $D = 3$, pour un carré $D = 2$ et pour une droite $D = 1$. On peut également construire des courbes fractales comme la courbe de Koch (Fig. 5.7).

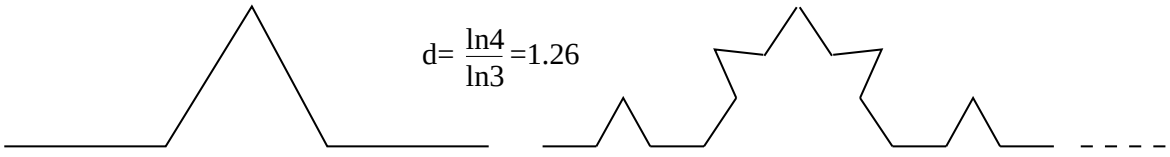


FIG. 5.7 – *Courbe de Koch*

La dimension fractale se calcule par le même principe et vaut $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$; on montre d'ailleurs que sa longueur tend vers l'infini.

Toutefois, si l'on possède une règle de longueur ε, on peut évaluer sa longueur et nous serons dans un cas très particulier d'une mesure où le résultat dépend de la longueur de la règle. Il s'agit en fait d'une propriété des objets fractals. La dimension fractale D d'une courbe de longueur L mesurée avec une règle de longueur ε est donnée par :

$$D = 1 + \rho = 1 - \frac{\ln L}{\ln \varepsilon}. \tag{5.18}$$

Cette méthode a été utilisée pour caractériser le bruit par une mesure de la dimension fractale des différents types de bruit [Vaterkowski 85]. De même Yasue [Yasue 96] propose une méthode numérique pour relier la dimension fractale et l'exposant d'une série temporelle en loi de puissance.

Toutefois, les auteurs sont restés réservés quant à la réelle utilité de cette forme de caractérisation des oscillateurs. En effet, même si l'on connaît la dimension fractale, on ne pourra en déduire une théorie du fonctionnement réel de l'oscillateur. Ce n'est pas dans le bruit qu'il faut rechercher les propriétés fractales mais dans le modèle utilisé pour l'étudier. C'est pour cette raison qu'il semble que l'étude du mapping d'Arnold et de ces zones de synchronisation mérite d'être présentée afin de mettre en évidence une certaine invariance d'échelle.

5.3 Étude du mapping d'Arnold

La carte d'Arnold, qui fait partie de la classe des applications du cercle (circle map), modélise une certaine vision stroboscopique de la phase $\Phi(t)$ liée, par exemple, à l'oscillateur de Van der Pol perturbé (4.19). La phase de correction $\Phi(t)$ est observée avec une fréquence d'échantillonnage ω_s liée à la fréquence de la perturbation. Le mapping est

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + 2\pi\Omega + c \sin \Phi_n, \tag{5.19}$$

où Ω et c sont donnés par l'équation (5.10).

L'étude de ce mapping va nous apporter une quantité importante d'informations relatives au fonctionnement de l'oscillateur perturbé, de la boucle de phase en régime non linéaire et de l'étude de la phase d'un oscillateur dans un réseau d'oscillateurs. En fait ces trois études possèdent des propriétés communes qu'il nous faut caractériser.

5.3.1 Nombre de rotation

On définit une quantité ν appelée nombre de rotation, valeur moyenne des variations de phase normalisées par 2π, par :

$$\nu = \lim_{n\to\infty} \nu(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n - \Phi_0}{2\pi n}. \tag{5.20}$$

Il s'agit d'un paramètre sans dimension qui possède suivant la valeur de c les propriétés suivantes :

- **cas** $c = 0$. On a $\nu = \Omega$. Si $\Omega = p/q \in \mathbb{Q}$, il s'agit d'un mapping périodique. Sinon il est dense et remplit tout le cercle $[0, 2\pi]$. Il s'agit de la même propriété que l'évolution de la trajectoire d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté cité au paragraphe 4.3.1 (cf. Fig. 4.9).

- **cas** $c < 1$ **:** Si $\Omega = p/q$, le mapping est convergent vers un unique q-cycle :

$$f_q(\Phi_i) = \Phi_i + p \quad \forall i = 0, ..., q-1. \tag{5.21}$$

- **cas** $c > 1$ **:** L'étude du cas $c > 1$ est un cas intéressant par sa complexité. Ici, le mapping n'est plus inversible. Les caractéristiques des paliers dépendent de la condition initiale Φ_0.

Pour étudier cette carte, considérons la fonction $f(\Phi) = \Phi + 2\pi\Omega - c\sin\Phi$ sur $[0, 2\pi]$ avec $\Omega \in [0, 1]$. On a $f'(\Phi) = 1 - c\cos\Phi$ qui peut être nulle si $\cos\Phi = 1/c < 1$. On peut alors étudier cette application par la méthode classique consistant à établir les termes successifs du mapping Φ_n par intersection de la courbe $f(\Phi)$ avec la droite $y = \Phi$ (Fig. 5.8). Lorsque $c < 1$, $f'(\Phi)$ n'est jamais nulle et le mapping est inversible. Dans ce cas, le nombre de rotation est unique et indépendant de la condition initiale Φ_0. Il y a donc une perte de mémoire du système. Si $\Omega = p/q \in \mathbb{Q}$, il s'agit d'une orbite périodique. Sinon, le rapport Ω doit satisfaire des conditions d'irrationalité pour que l'orbite soit dense, c'est-à-dire qu'elle prenne toutes les valeurs possibles. On présente sur la figure Fig. 5.8 le cas d'une application de période 3. La non-inversibilité du cas $c = 2.3$ est caractérisée par la présence de la dérivée nulle.

5.3.2 L'escalier du diable

Si l'on trace ν en fonction de Ω pour $c < 1$, il existe une petite région autour de chaque $\Omega = p/q$ où ν tend vers p/q, et dont la largeur dépend de p/q. On obtient alors un escalier appelé « escalier du diable » (Fig. 5.9).

Les régions où le nombre de rotation est constant sont appelées plages de synchronisation (ou mode lockings). Ce sont des valeurs constantes du nombre de rotation (valeur moyenne de $\Delta\Phi = \Phi_{n+1} - \Phi_n$), quelles que soient les petites variations autour de Ω. C'est un phénomène de synchronisation, muni d'une propriété de stabilité structurelle, c'est-à-dire d'une invariance par rapport au paramètre Ω. Étant donné qu'il y a une infinité de

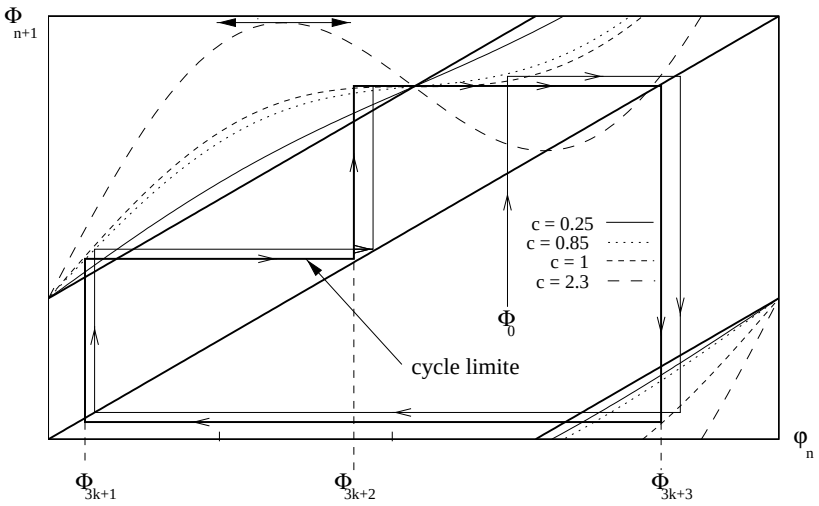


FIG. 5.8 – *Un exemple de cycle limite pour $c = 1$ tracé à partir d'une condition initiale Φ_0. Nous avons également porté la forme de la fonction $f(\Phi)$ pour différentes valeurs de c.*

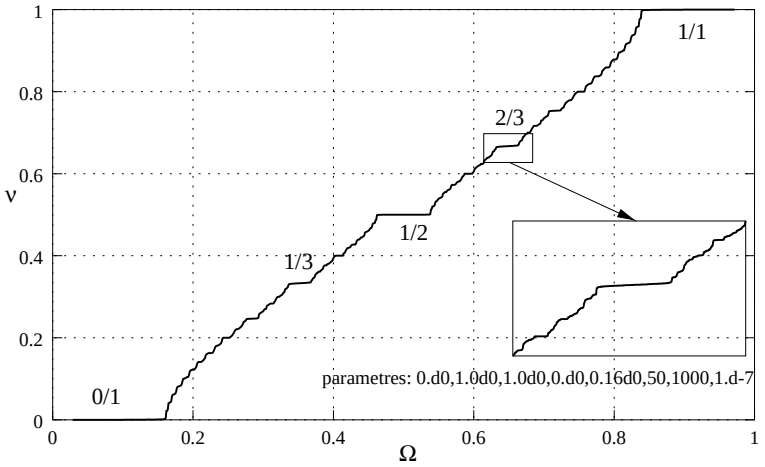


FIG. 5.9 – *L'escalier du diable*

rationnels entre chaque rationnel, il existe une propriété d'invariance d'échelle dans cette synchronisation (détail de Fig. 5.9).

Observation de l'escalier du diable en physique

Citons quelques expériences ayant mis en évidence ce phénomène [Bak 88].

- Caractéristique courant-tension d'une jonction Josephson
- Oscillation de réactions chimiques complexes
- ...

– Nous détaillerons également des escaliers du diable que nous avons obtenus avec des expériences de synchronisation (cf. paragraphe 7.2.1).

Propriété de l'escalier pour $c = 1$

La valeur critique c = 1 est très bien caractérisée. L'escalier est complet et correspond à un ensemble de Cantor de dimension fractale $D = 0,87$ [Jensen 84]. C'est une propriété d'universalité dans le sens où n'importe quel mapping

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + 2\pi\Omega + f(\Phi_n), \tag{5.22}$$

avec $f(\Phi_n)$ périodique, possédera les même caractéristiques. Cette propriété est à rapprocher de celle du modèle standard. On est en présence d'un phénomène universel puisque n'importe quelle fonction aussi compliquée soit-elle (ce peut être toutes les perturbations périodiques qui existent dans un oscillateur) donnera ces résultats.

5.3.3 Stabilité structurelle de la synchronisation

Nous avons étudié la stabilité structurelle des rapports en fonction d'une perturbation pour pouvoir évaluer son influence sur la dynamique complète. Dans le cas d'un cycle limite $\nu = p/q$, le mapping peut alors s'écrire

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi\nu + \varepsilon(n), \tag{5.23}$$

s'il est soumis à une petite perturbation $\varepsilon(n)$.

Cette application s'étudie graphiquement avec la fonction $y = x + 2\pi\nu + \varepsilon$. Considérons, sans perte de généralité du problème, le cas $\nu = 1/2$, cycle de période 2 (Fig. 5.10).

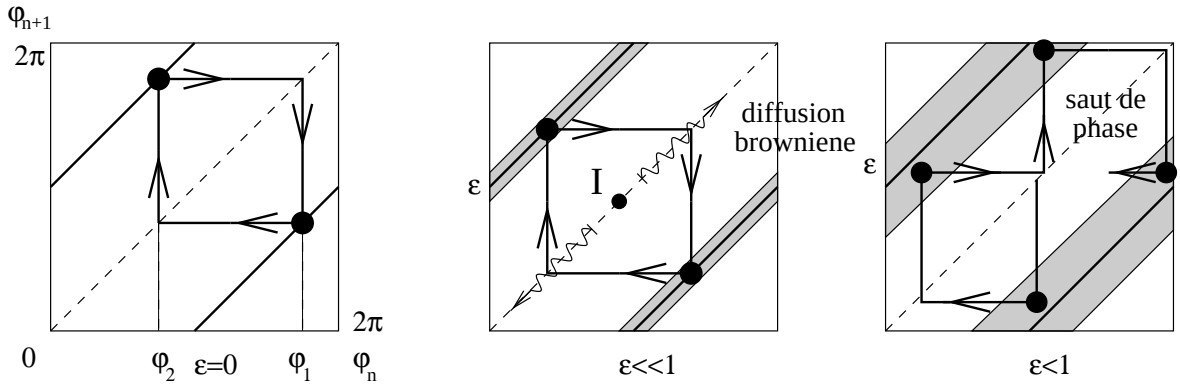


FIG. 5.10 – *Cycle limite et son évolution sous l'effet d'une perturbation*

Si on suppose $\varepsilon = 0$ (a), le 2-cycle est constant et les valeurs de ϕ_n sont alternativement ϕ_1, ϕ_2, ϕ_1, ϕ_2, etc. Le cycle matérialisé par le carré est fixe. Nous allons nous intéresser à son évolution, ou « évolution collective » des valeurs ϕ_1 et ϕ_2 du 2-cycle.

Supposons $\varepsilon << 1$ (b), l'effet de la perturbation se traduit par un déplacement global du cycle le long de la diagonale $y = x$. Si la suite ϕ_n est composée alternativement de $-\varepsilon$ et de $+\varepsilon$, une simple considération graphique montre que la valeur du nombre de rotation reste $\nu = 1/2$. Le système est stable structurellement.

Si on suppose que la suite $\varepsilon(n)$ possède des valeurs de $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$ chacune équiprobable, le cadre représentant le cycle limite peut alors se déplacer dans les deux sens le long de la diagonale. Le centre du cycle I effectue un mouvement brownien à une dimension. Ainsi rappelé dans le chapitre 4, la distance moyenne parcourue par une particule soumise à un mouvement brownien augmente. Il existe donc un instant où le cycle se trouvera proche de l'un des coins du carré. Il prendra la configuration (c) et fera apparaître une troisième valeur de la phase ϕ_3. Il apparaît un défaut analogue à un saut de phase, qui a nécessairement des conséquences dans la périodicité du système et dans la valeur du nombre de rotation.

Le problème est alors celui du mouvement brownien du centre I du cycle, qui est décrit dans un intervalle que l'on normalise à [0,1]. Nous avons étudié la propriété d'une telle marche aléatoire avec des valeurs différentes du pas ε. La figure Fig. 5.11 présente le spectre d'une telle marche pour différentes valeurs de ε. Si on a $\varepsilon << 1$, il s'agit d'une marche aléatoire normale ne comprenant que très peu de rotations de phase. Le spectre de fluctuation de la position I est conforme aux résultats de la figure Fig. 5.11(a) et présente une loi en $1/f^2$.

Lorsque le pas augmente, il existe une probabilité de plus en plus grande pour qu'il y ait le saut de phase, conduisant dans le cas limite à une valeur de I totalement aléatoire, résultat d'un saut de phase permanent. La figure Fig. 5.11(d) montre que le spectre tend vers un spectre blanc synonyme de cette dynamique aléatoire.

On peut proposer une interprétation physique de ce résultat dans le cas du bruit des oscillateurs. Il s'agit d'un résultat relatif à une perturbation du cycle limite de la synchronisation, c'est-à-dire du régime où il semble y avoir une certaine régularité. On montre qu'un bruit blanc provoque des fluctuations de type $1/f^2 \rightarrow f^0$ dans l'évolution du centre du cycle (évolution collective des différents points du cycle limite). Ces fluctuations passent d'une pente en $1/f^2$ en une pente en f^0 au fur et à mesure de l'augmentation du pas et à l'approche de la possibilité de saut de phase. Nous verrons dans le chapitre 6 que lorsqu'un système se situe près d'une zone de désynchronisation, des sauts de phase

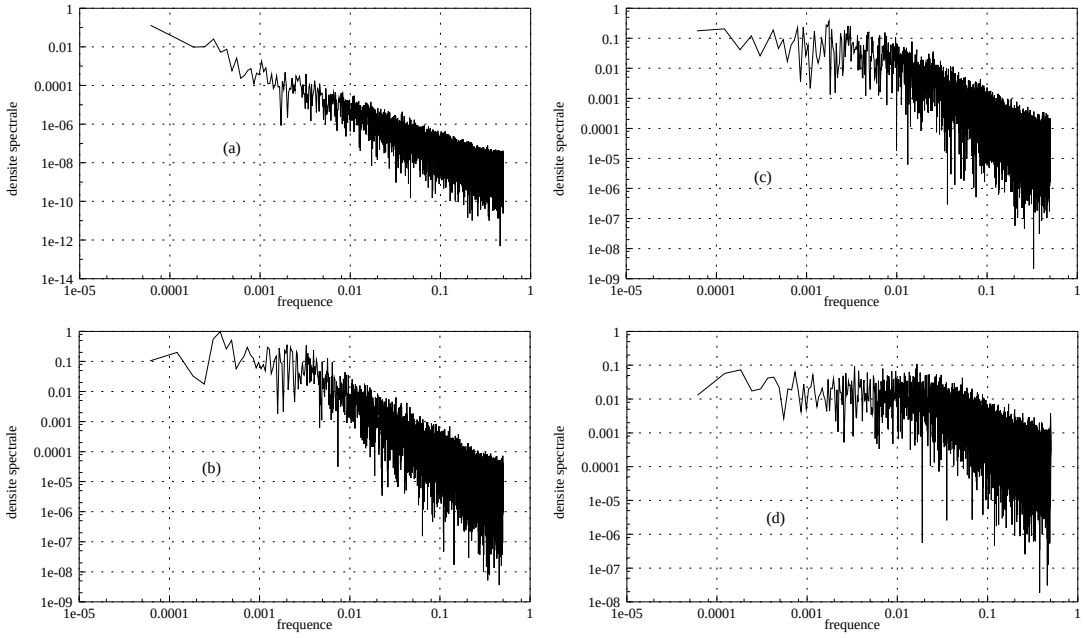


FIG. 5.11 – *Mouvement brownien pour* $I \in [0,1]$. *(a)* $\varepsilon = 0,01$ *; (b)* $\varepsilon = 0,3$ *; (c)* $\varepsilon = 0,6$ *; (d)* $\varepsilon = 1,5$

appelés « cycle skipping » peuvent également apparaître sous l'effet d'une perturbation. On conçoit que le bruit blanc nécessaire puisse être d'origine thermique et que sa valeur constante, à une température donnée, suffise à supposer l'existence de ce phénomène sur la phase de l'oscillateur. Cet effet reste malgré tout à montrer expérimentalement.

Il est envisageable de le mettre en évidence en regardant les fluctuations d'un système physique, proche de la limite d'une zone de synchronisation. En effet, puisque cet état physique des paramètres est équivalent à une grande valeur du pas, on doit pouvoir trouver un spectre différent des spectres en $1/f^2$ et f_0. Nous avons réalisé des expériences transformant les fluctuations de type bruit blanc en fluctuation en $1/f$. Nous les présenterons dans le cadre du chapitre 6 relatif à l'étude de la PLL en régime non linéaire.

Ce paragraphe destiné à caractériser la stabilité structurelle des rapports nous a permis de mettre à jour un résultat que nous estimons intéressant. La dynamique d'une variable donnée peut provoquer les transformations du bruit de marche aléatoire (en bruit blanc dans le cas limite), si une perte de stabilité structurelle peut intervenir. De même, la propriété bornée de la phase provoque une transformation des fluctuations. Le cas extrême de transformation se situe à la limite d'existence du cycle limite, c'est-à-dire limite d'existence du comportement collectif.

5.3.4 Dépendance en fonction du couplage non linéaire

Nous avons examiné la largeur des zones (ou plateaux) de synchronisation en fonction du couplage c. Il s'agit d'établir d'autres propriétés sur leur stabilité structurelle. Ceci peut s'étudier de la même manière que pour l'application logistique, en fonction des coefficients de non-linéarité. Les zones périodiques, zones de bifurcation, etc. sont caractérisées par un exposant appelé exposant de Hölder. Rappelons en quelques lignes ces concepts.

L'application logistique

L'application logistique est, en théorie des populations, le modèle le plus simple qui rende compte des effets de taux de natalité et de mortalité. Elle est définie par

$$y_{n+1} = \lambda y_n(1 - y_n), \tag{5.24}$$

où λ est appelé taux de croissance effectif. La valeur maximale de cette application étant

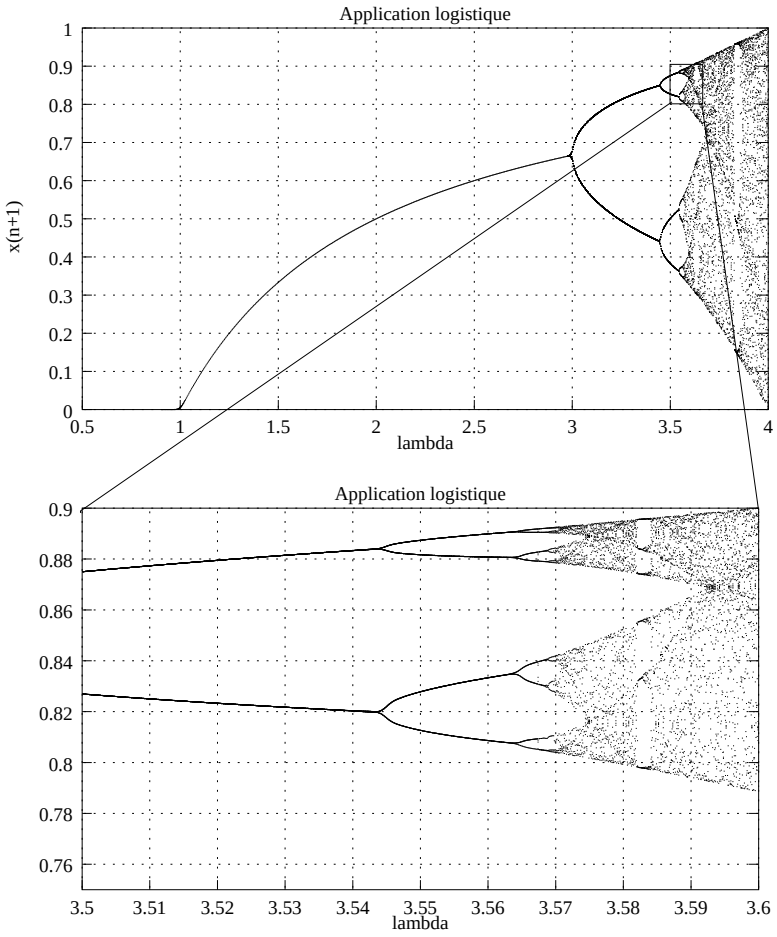


FIG. 5.12 – *L'application logistique*

donnée pour $y_n = 1/2$, il faut $\lambda \leq 4$ pour que sa valeur soit toujours inférieure à 1.

On a tracé $f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}$ et l'on constate les comportements suivants :

- $0 < \lambda < 1$, $f(\lambda) = 0$
- $1 < \lambda < 3$, $f(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda}$
- $3 < \lambda < 3,44$, il existe deux solutions stables données par les racines de $\lambda^2(1 - X)(1 - \lambda X(1 - X)) = 1$
- $3,44 < \lambda < 3,53$, on observe une bifurcation traduisant un phénomène de doublement de période, suivi d'une cascade de doublement et d'une dynamique totalement chaotique pour $\lambda > 3,53$.

L'évolution de l'application logistique en fonction de la non-linéarité se traduit par des zones de continuité, de bifurcation et de chaos. Les bifurcations se traduisent par un effet de doublement de période, génération de variables lentes, ou encore en terme spectral, génération de composantes basse fréquence, initialement absentes du système, mais révélées par la non-linéarité (coefficient λ). Ces effets doivent être évalués dans le cas des oscillateurs pour connaître leur poids dans les composantes de bruit basse fréquence. Nous les avons étudiés dans le cas de la carte d'Arnold *via* le concept d'exposant de Hölder.

L'exposant de Hölder

On peut évaluer la propriété du nombre de rotation ν en fonction de c et Ω [Planat 92, Planat 93, Planat 94]. Pour cela, il suffit de calculer l'exposant de Hölder α défini par

$$|| \nu(x) - \nu(y) ||=|| x - y ||^{\alpha}, \tag{5.25}$$

où x et y sont deux points de l'espace des paramètres (c, Ω). Les propriétés de l'exposant de Hölder sont :

- $\alpha > 1$: stabilité
- $\alpha < 1$: instabilité avec apparition éventuelle de comportement chaotique si $c > 1$.
- continuité dans les plages de synchronisation où $\Omega = p/q$. C'est un critère de connexité.

application	carte d'Arnold	$\Phi_{n+1} = \Phi_n + 2\pi\Omega + c\sin\Phi_n$
nombre d'itération	N	1000
variation de Ω	$0 \rightarrow 1$	pas : 0.001565
variation de c_0	$0 \rightarrow 2.5$	pas : 0.005
code des couleurs	vert : 2	$\mid \alpha_k - \alpha_{k-1} \mid < A$ et $\mid \alpha_k - 1 \mid < B$
	cyan clair : 9	$\mid \alpha_k - \alpha_{k-1} \mid < A$ et $\alpha_k > 1$
	bleu clair : 11	$\mid \alpha_k - \alpha_{k-1} \mid < A$ et $\alpha_k > C$
	magenta : 5	$\mid \alpha_k - 1 \mid < B$
	cyan : 3	$\alpha_k > 1$
	jaune : 14	sinon

TAB. 5.1 – *Propriétés des paramètres A, B, C, N et Ω et code de couleurs pour l'étude de la carte d'Arnold.*

Cartes à deux dimensions : les langues d'Arnold

Étude numérique et propriétés paramétriques Nous avons étudié les propriétés de l'exposant de Hölder en fonction des deux paramètres Ω et c (définis par l'équation (5.10)) par la construction d'une figure dans le plan (Ω, c) où chaque point donne les propriétés de α pour une simulation effectuée avec Ω et $c_0 = 2\pi c$. Ce mapping a été réalisé à partir du programme `sauv4.c` utilisant les librairies graphiques de Xwindows (cf Annexe B). On associe à chaque point un code de couleur correspondant à sa valeur et à sa continuité. La construction de la figure se fait par lignes successives ; pour chaque valeur de c_0, on calcule celles de ν et α en faisant varier Ω. Les critères et codes de couleurs dépendant des paramètres (A, B et C) sont présentés dans le tableau Tab. 5.1. Les paramètres de la figure principale Fig. 5.13 sont les suivants : $A = 10^{-2}$; $B = 4.10^{-2}$; $C = 2.41$. Le choix de ces valeurs dépend du nombre d'itérations choisi, de la précision désirée et du temps de calcul imposé. Pour pouvoir réunir de bonnes valeurs, nous avons choisi ces paramètres qui donnent un temps de calcul d'une heure pour une image inférieure à 1 Moctet.

Évolution du mapping en fonction de la non-linéarité Explicitons les propriétés du nombre de rotation ν, de α et de l'apparition des différentes couleurs en parcourant la figure Fig. 5.13 par valeurs croissantes de c_0 [20].

La région verte correspond à une valeur de α très proche 1 ce qui rend compte de la présence de la droite $\nu = \Omega$. La première modification de couleur (repérée par la flèche 1) identifie l'apparition du palier 1/2 (données 1 du tableau donné en Annexe E). La couleur magenta indique la modification significative de α autour de 1 ; la formation du palier se traduit par une augmentation locale de la pente à gauche et à droite du palier et une

20. Le lecteur peut consulter le tableau des données numériques placé en Annexe E.

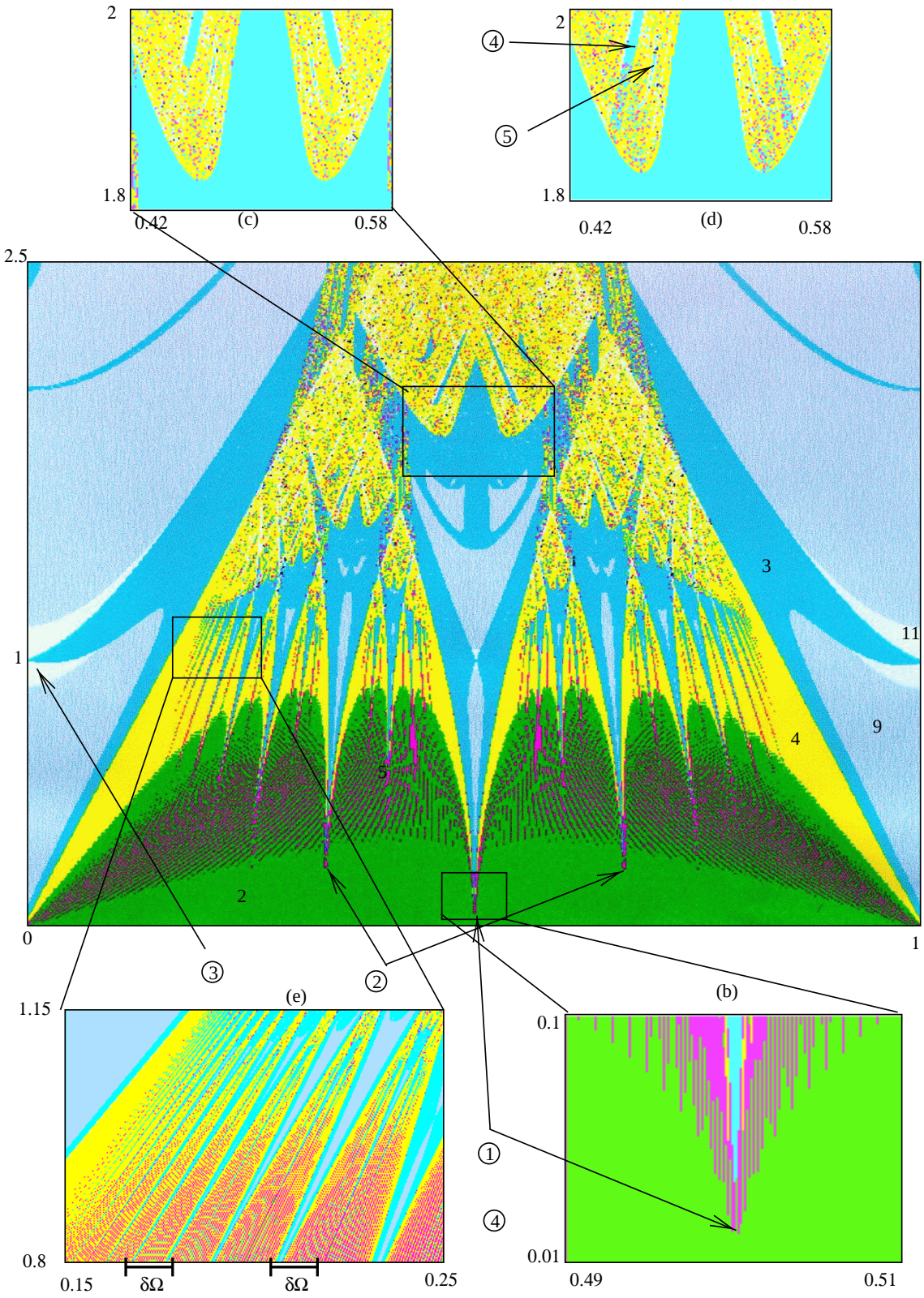


FIG. 5.13 – *La carte d'Arnold*

diminution au centre. Cette couleur indique la naissance d'une zone de synchronisation ou la présence d'un germe de synchronisation qui évoluera si les conditions sont favorables. Le détail (b) réalisé à partir de la même simulation mais dans la plage $\Omega \in [0,49; 0,51]$ montre l'évolution de la construction du palier 1/2 et l'apparition de couleur cyan pour $\alpha > 1$ (Tab 5.1, données 2) synonyme de stabilité. Le palier est matérialisé dans cette carte par la couleur bleue. L'apparition de la couleur jaune s'explique par le fait que le nombre d'itérations n'est pas suffisant pour atteindre le régime permanent de la carte. Ceci est cohérent avec les propriétés des régions proches des paliers ; elles possèdent de grandes constantes de temps (cf. chapitre 6).

Lorsque $c_0 = 0,23$, les paliers 1/3 et 2/3 apparaissent à leur tour avec la même caractéristique que pour le palier 1/2, l'apparition du magenta traduisant la modification locale de la dynamique (flèche 2). Ensuite, d'autres paliers se forment petit à petit et leur stabilité est de plus en plus importante (l'apparition du cyan indique la présence du bord des paliers).

Arrive ensuite une première zone de bifurcation à l'intérieur des paliers 1/1, 0/1 et 1/2 (données 4) analogue à celle observée pour l'application logistique. Elle se traduit par la modification du bleu (flèche 3). Celle-ci se produit dans une région où α est très grand ($\alpha > 2,41$) et où sa variation présente un point d'inflexion (minimum de *dal* pour $\alpha = 0,106416$). La bifurcation est bien visible sur le rapport 1/2 (flèche 4) où l'on observe la cascade de doublement de période et la zone de chaos, à partir de $c_0 = 1,91$. Toutefois, le cas $c_0 = 1,91$ correspond au cas $c = 1,91/2\pi = 0.303 < 1$; cas théoriquement non chaotique. En fait, il s'agit d'un chaos apparent dû au faible nombre d'itérations effectuées. Les détails (c) et (d) respectivement réalisés avec $N = 1000$ et $N = 10000$ montrent que le bleu à l'intérieur du jaune le remplace au fur et à mesure de l'itération, traduisant le fait que α tend vers une certaine synchronisation ou périodicité. Ce phénomène s'identifie à la rupture du tore par une perturbation périodique observée au chapitre 4. La dynamique irrégulière apparemment chaotique se trouve détruite par une perturbation extérieure et donne lieu à une synchronisation. La destruction progressive de cette région pseudo-chaotique se fera grâce à la contribution de toutes les bandes de synchronisation et on devine déjà la prochaine (flèche 5) issue de la langue $1/3+1/2 = 2/5$. D'ailleurs, la bande bleue (flèche 4) provient de la présence de bandes de synchronisation 1/3 et 2/3, régions les plus importantes après 1/2.

On a tracé le détail (e) d'une région proche de la plage de synchronisation 0/1. Il existe un très grand nombre de plages proches de la limite de ce palier principal ; ces langues sont de plus en plus écrasées à cette limite. Supposons un système où Ω décrit un

petit intervalle $\Omega + \delta\Omega$ (à c_0 constant), il sera d'autant plus sensible aux autres rapports qui seront proches du rapport principal. C'est un résultat que nous estimons important **plus on se trouve proche d'une zone de synchronisation, plus l'effet d'autres synchronisations est significatif et ce à toutes les échelles considérées.**

On comprend à présent un peu mieux le mécanisme conduisant à la synchronisation. Les paliers se forment ainsi par destructions successives de la dynamique irrégulière (elle peut être aléatoire, chaotique, ou apparemment régulière). L'autre résultat important concerne l'origine de ces destructions : elle provient d'une influence hiérarchique des autres synchronisations possibles du système, et nous verrons plus loin comment classer cette hiérarchie.

Pour revenir au cas de l'oscillateur, la force de sa synchronisation dépend donc de sa possibilité à se synchroniser sur un autre rapport, ce qui n'est *a priori* pas évident à intuiter. Il faut effectuer une étude globale de l'oscillateur pour accéder à ses propriétés de synchronisation.

Évolution du mapping en fonction des paramètres

Afin de compléter cette étude, nous avons traité la propriété du mapping en fonction des paramètres A, B, C, N et Ω. Les différents cas sont réunis dans le tableau Tab. 5.2 et sur la figure Fig. 5.14.

La figure (a) est réalisée avec les mêmes paramètres que la figure principale mais avec c_0 variant de 0 à 8, afin de montrer l'apparition de la zone chaotique visible à partir de $c = c_0/2\pi = 1$.

La figure (b) a été réalisée avec un plus grand nombre d'itérations et fait apparaître la hiérarchie des zones de synchronisation (par ordre croissant d'apparition au cours de l'itération) :

$$\left\{\frac{0}{1};\frac{1}{1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2} \longrightarrow \left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\} \longrightarrow \ldots \tag{5.26}$$

La couleur rouge indique la présence d'une zone possible de synchronisation.

En réduisant le nombre d'itérations ((c) ou (d)) ou en réduisant la valeur test A ((e) ou (f)), on montre que ces deux changements sont équivalents d'un point de vue résolution de l'image par les couleurs.

L'étude du paramètre B donne les figures (g) et (h) ; son augmentation fait apparaître les zones de synchronisation (symbolisées par la couleur bleu) mais possède l'inconvénient d'augmenter la largeur des plages principales ; ces dernières écrasant, lorsque c_0 augmente, les langues intermédiaires plus rapidement.

L'étude de l'influence de ces paramètres de simulation a permis de réaliser la figure Fig. 5.13, pour que celle-ci rende compte d'un maximum de propriétés. D'autres figures sont réalisables mais nous pensons que le résultat fondamental est atteint : le phénomène de synchronisation est un phénomène global où l'ensemble de la variation de tous les paramètres de la dynamique doit être considéré. C'est ce que nous appliquerons au cas de la PLL non linéaire.

figure	Ω	c	N	A	B	C
Fig. 5.13(a)	0 - 1	0 - 32.5	1000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.41
Fig. 5.13(b)	0.49 - 0.51	0.01 - 0.1	1000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.41
Fig. 5.13(c)	0.42 - 0.58	1.8 - 2	1000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.41
Fig. 5.13(d)	0.42 - 0.58	1.8 - 2	10000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.41
Fig. 5.13(e)	0.15 - 0.25	0.8 - 1.15	1000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.41
Fig. 5.14(a)	0 - 1	0 - 8	1000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.41
Fig. 5.14(b)	0 - 1	0 - 1	3000	10^{-2}	10^{-1}	2.3
Fig. 5.14(c)	0 - 1	0 - 5	200	10^{-2}	10^{-2}	2.3
Fig. 5.14(d)	0 - 1	0 - 1.1	10000	10^{-4}	10^{-3}	2.3
Fig. 5.14(e)	0 - 1	0 - 1.1	3000	10^{-3}	10^{-1}	2.3
Fig. 5.14(f)	0 - 1	0 - 1.1	200	10^{-3}	10^{-2}	1.8
Fig. 5.14(g)	0 - 1	0 - 0.9	1000	10^{-2}	10^{-2}	2.3
Fig. 5.14(h)	0 - 1	0 - 1.1	1000	10^{-2}	4.10^{-2}	2.3

TAB. 5.2 – *Paramètres des simulations pour l'étude du modèle d'Arnold*

Largeur des paliers

On peut établir la largeur des paliers $\Delta(p/q)$ pour les cas $c < 1$. Elle a été étudiée par Jensen [Jensen 84] qui a constaté cette propriété de self similarité à toutes les échelles (Fig. 5.15).

Pour $\Omega \in [0, 1]$, il a également montré que la longueur totale $S(r)$ des paliers possédant une largeur supérieure à r et le « nombre de trous » $N(r) = \frac{1-S(r)}{r}$ suivaient la loi :

$$N(r) = (1/r)^D, \tag{5.27}$$

avec $D = 0,8700 \pm 3,7.10^{-4}$ qui représente la dimension fractale de l'escalier.

Conclusion

Ce mapping à deux dimensions permet de constater la grande richesse de propriété de la phase $\Phi(t)$ de l'oscillateur qu'il est sensé modéliser. Mais, il faut se rappeler que dans le cas réel de l'oscillateur, la valeur de c est très petite, et que l'étude ne sera valable que

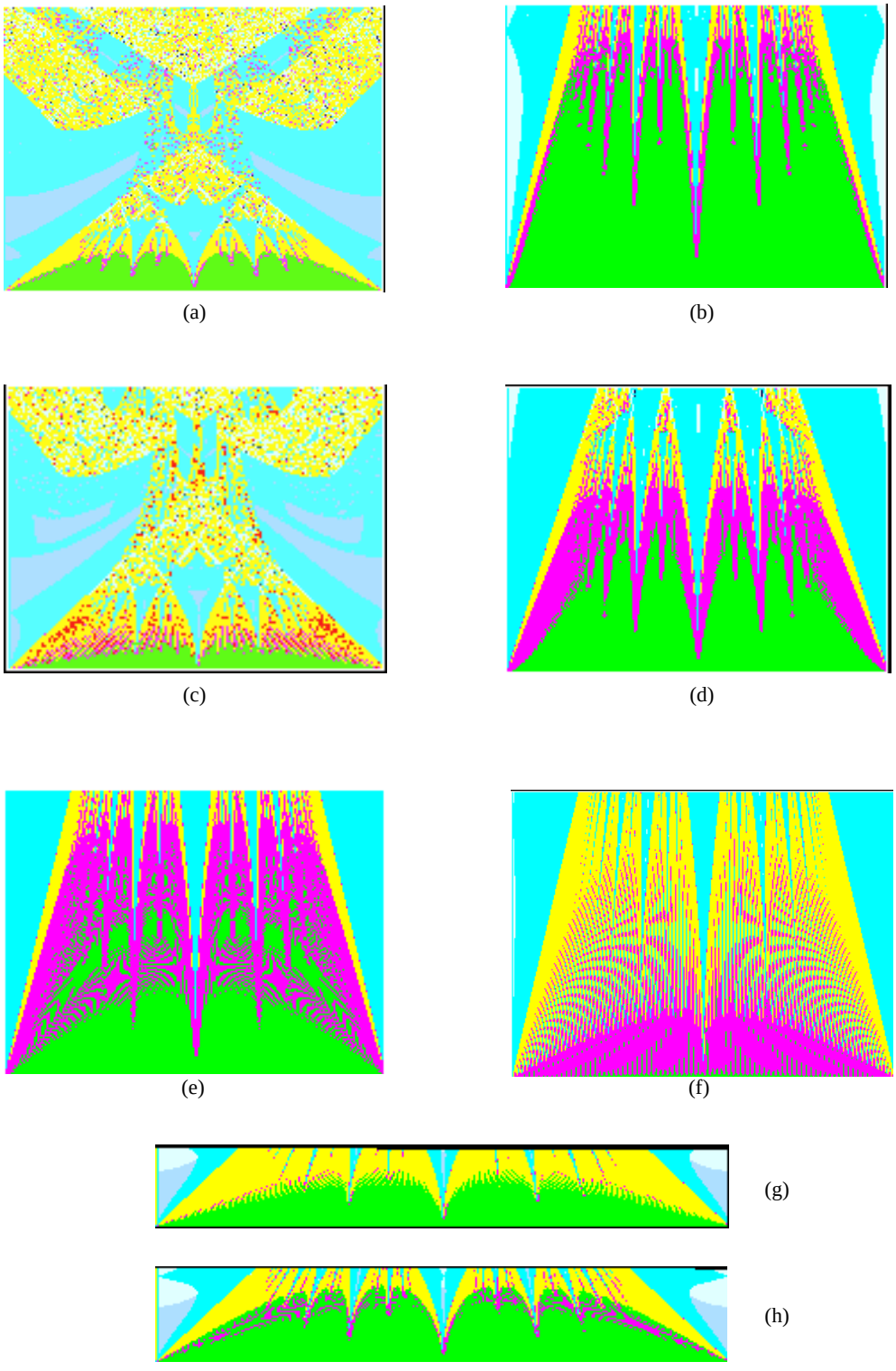


FIG. 5.14 – *Caractéristiques de la carte d'Arnold en fonction des paramètres*

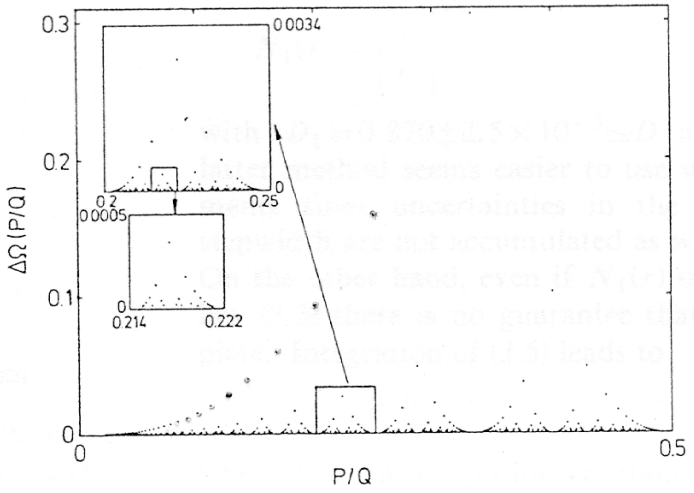


FIG. 5. $\Delta(P/Q)$ vs P/Q. Note the self-similarity of the diagram under scaling.

FIG. 5.15 – *Largeur des paliers $\Delta(p/q)$ en fonction de Ω qui jouit d'une propriété d'invariance d'échelle [Jensen 84]*

tout près du bord. Mais qu'importe, puisque l'on a une propriété de self similarité ; il est alors équivalent d'étudier le système à l'échelle la plus pratique.

Lorsque l'on se trouve proche de chaque zone de synchronisation, l'incrément $\Phi_{k+1} - \Phi_k$ devient infiniment petit, si bien que la carte peut être étudiée par une approximation continue : $\Phi_{k+1} = \Phi_k = \Phi$ et $\Phi_{k+1} - \Phi_k = \frac{d\Phi(t)}{dt}$. On arrive alors à l'équation différentielle

$$\dot{\Phi}(t) = 2\pi\Omega + c \sin \Phi(t), \tag{5.28}$$

qui est bien l'équation d'origine. Le mapping sera d'autant plus riche que l'on se situera près des zones de synchronisation. Nous montrerons d'ailleurs que l'hypothèse de la phase lentement variable est vérifiée analytiquement puisque la fréquence tend vers 0 lorsque l'on s'approche de la zone de synchronisation. Ceci explique l'allure de ν de part et d'autre de chaque palier (Fig. 5.16).

Mais la remarque est toujours la même, il existe des rationnels partout, le modèle est donc valable à chaque endroit et de façon universelle. Il suffit donc de trouver une méthode d'étude de l'escalier et des plages de synchronisation pour décrire complètement la dynamique, connaître à quelle condition le système change de palier, et si cela dépend du palier. Il faut établir une hiérarchie entre les paliers afin de leur donner un poids dans la dynamique.

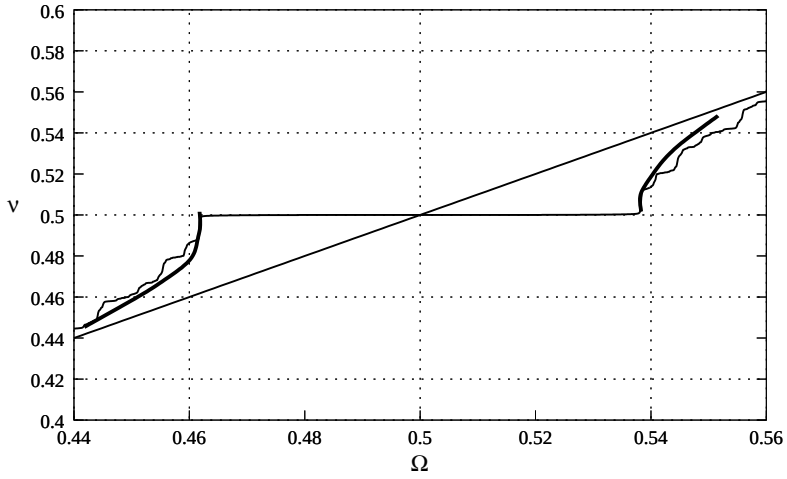


FIG. 5.16 – *Détail du mapping d'Arnold*

5.3.5 Hiérarchie des langues

Lorsque l'on considère le cas critique $c = 1$, le problème consistant à étudier les zones de locking dans $[0, 1]$ est équivalent à celui d'étudier l'organisation des rationnels p/q dans [0,1] (voir l'article de Cvitanovic dans [Waldschmidt 92]). Il s'agit d'un problème de théorie des nombres dans lequel on doit établir une hiérarchie dans les rationnels, hiérarchie qui sera équivalente à celle des zones de synchronisation. Inversement, si la synchronisation dans un oscillateur résulte d'une certaine hiérarchie de perturbations, ce sera une condition que l'on doit retrouver dans la théorie des nombres. Le problème consiste alors à rechercher les diverses formes de hiérarchie en théorie des nombres.

La partition de Farey

Définition 17 *La série de Farey F_q d'ordre q est la séquence des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 dont le dénominateur n'excède pas q. On a $p_i/q_i \in F_q$ si $0 < p_i < q_i$ et $q_i \wedge p_i = 1$ (p_i, q_i premiers entre eux).*

Exemple :

$$F_5 = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1} \right\} \tag{5.29}$$

Propriétés :

- $\forall \dfrac{p_i}{q_i}, \dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$, alors $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = 1$.
- Le nombre de terme $\Psi(q)$ de la série F_q est donné par $\Psi(q) = \sum_{n=1}^{q} \phi(q) = \frac{3q^2}{\pi^2} + \mathcal{O}(q \ln q)$, où $\phi(q)$ est la fonction d'Euler.

- Exemple : $\Psi(5) = 7 \pm 8$

- Pour information, la fluctuation des valeurs de $\Psi(q)$ est assez irrégulière et est appelée « bruit d'Euler ».

Il existe des motivations physiques qui nous poussent à étudier les séries de Farey. Elles répertorient toutes les zones possibles de synchronisation avec des petits dénominateurs. C'est cette hiérarchie qui est à l'origine de la rupture d'irrégularité des langues d'Arnold (cf. Fig. 5.13 (a) et (b)). De plus, la non-linéarité provoque la création d'harmoniques dont l'amplitude décroît avec l'ordre. Se limiter, pour des raisons physiques de sensibilité, à un certain ordre, c'est-à-dire supposer que l'amplitude d'une perturbation ne sera significative qu'à partir d'une certaine valeur de l'harmonique q_{max}, sera alors équivalent à considérer toutes les résonances données par la série de Farey $F_{q_{max}}$. C'est un raisonnement de ce type qui nous permettra de dégager certaines propriétés arithmétiques de la PLL non-linéaire (chapitre 6).

Partition des plages de synchronisation par les fractions continues

Pour le théoricien des nombres, la partition de l'intervalle [0,1] par les fractions continues est la meilleure classification des rationnels, déjà préférée par Gauss. Elle a été appliquée par Cvitanovic [Waldschmidt 92, p. 636] dans le cas de la carte d'Arnold. Elle est obtenue par coupure successive des zones de synchronisation correspondant aux fractions continues de largeur croissante (Fig. 5.17). Le premier niveau s'obtient par coupure de $\Delta_{[1]}, \Delta_{[1]}..., \Delta_{[a_1]}, ...$ zones de synchronisation ; la partie restante présente un ensemble d'intervalles de longueurs $l_1, l_2, ..., l_{a_1}, ...$ qui contiennent les nombres dont le développement en fraction continue de longueur minimale 2 commence avec a_1 ($[a1, ...]$). Le second niveau s'obtient en coupant les zones $\Delta_{[1,2]}, \Delta_{[1,3]}, \Delta_{[2,2]}, \Delta_{[2,3]}, ..., \Delta_{[n,m]}$, etc. Définissons alors le développement en fractions continues :

Définition 18 *Un nombre $x \in \mathbb{R}$ possède un unique développement en fractions continues donné par :*

$$x = a_0 + 1/\{a_1 + 1/\{a_2 + ... + 1/\{a_i + ...\}\}\}; \tag{5.30}$$

où les a_i sont des entiers positifs donnés par $a_0 = [x], \alpha_0 = \{x\}$ et si $i \geq 1$ $a_i = \left[1/\alpha_{i-1}\right], \alpha_i = \left\{1/\alpha_{i-1}\right\}$, où $[x]$ représente la partie entière de x et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire.

Il faut ensuite se donner une limite à la liste des points de chaque intervalle l_i. Prenons le palier 1/1 de largeur $2d$ avec $d << 1$. Le développement de d s'écrit $[a_d, a_2, ...]$ avec $a_d >> 1$. La valeur $d = 1/a_d$ devient alors une bonne approximation de d.

Le premier segment l_1 est donc l'ensemble des points compris entre $[1, 1]$ et $1 - d$, ou encore compris entre $[1, 1]$ et $[1, a_d]$ puisque $1 - d \sim [1, a_d]$. La limite supérieure $[1, a_d]$ étant celle de l_1, celle de l_2 sera alors $[2, a_d]$, celle de l_3 $[3, a_d]$, etc. On construit ainsi la hiérarchie donnée par la figure Fig. 5.17. À chaque itération, on construit des intervalles possédant la même structure que les zones de locking observées dans la carte d'Arnold.

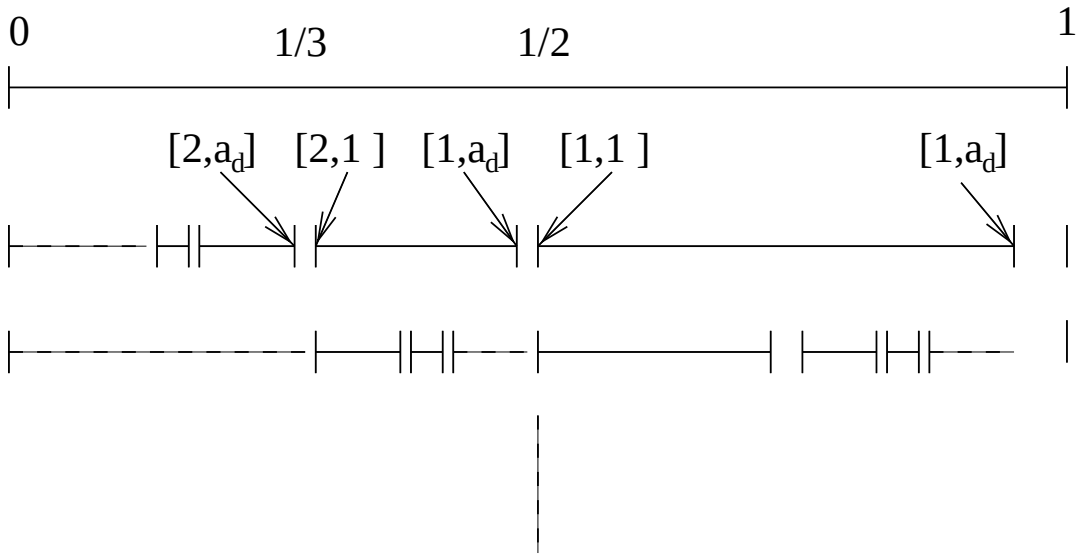


FIG. 5.17 – *Partitions des plages de synchronisation par les fractions continues*

Ces deux exemples de hiérarchie des résonances par les partitions de Farey (position des plages), d'une part, et celles des fractions continues (largeur des plages), d'autre part, s'appuient sur les considérations arithmétiques du nombre de rotation qui représente physiquement un rapport de fréquence. Nous avons vu également, au cours des précédents chapitres, l'importance que prend la notion d'arithmétique dans les phénomènes de synchronisation et de perturbation des systèmes non linéaires.

Nous avons utilisé avec succès les propriétés arithmétiques des fréquences dans nos expériences, pour en extraire des caractéristiques nouvelles. Nous estimons que les propriétés arithmétiques générales d'un système deviennent un nouveau moyen de caractérisation des systèmes non linéaires et justifient une étude plus approfondie. Ceci fait l'objet de ce dernier paragraphe qui rappelle les quelques résultats nécessaires à la compréhension des expériences du chapitre 6.

5.4 Une méthode originale : l'analyse diophantienne

5.4.1 L'arithmétique et la physique

La caractérisation des systèmes physiques par des méthodes issues des propriétés entières des variables n'est pas récente. Les cristallographes obtiennent des figures de diffraction par rayon X dont les règles de construction proviennent des propriétés arithmétiques simples des entiers h, k, l intervenant dans la loi de Bragg.

En optique, les franges d'interférence sont indicées par des entiers. Par exemple, la précision de la mesure de l'épaisseur d'une lame de verre dépend de la précision avec laquelle on connaît l'ordre d'interférence p_0 des franges. Si on a $p_0 = 10000 \pm 0.5$, alors on connaît parfaitement l'ordre $p_0 = 10000$, car c'est un entier. Les techniques numériques en général jouissent de cette propriété, ce qui les rend d'une grande précision. On arrive, grâce à la propriété de quantifications par bits, à s'affranchir des fluctuations, ce qui est une aubaine pour l'utilisateur.

En physique quantique et en physique des particules élémentaires, on utilise les représentations de groupes pour classer les états quantifiés ; leurs positions dans le spectre est indicée par des entiers. Rappelons également que c'est la quantification de la tension dans une jonction Josephson qui permet la définition de l'étalon de tension : le Volt. C'est également une propriété arithmétique qui intervient. La précision de la physique quantique provient de la propriété discrète des niveaux d'énergie ; elle est d'une telle importance que, dans la plupart des cas, on se contente d'une approche linéaire (voir perturbative si besoin est).

Par ailleurs, il semble qu'actuellement certaines propriétés de rationalité émergent à leurs tours des expériences physiques. À nos yeux, la plus importante de toutes se trouve attachée au théorème KAM cité précédemment. Nous avions alors évoqué l'existence d'une condition diophantienne sur les fréquences pour la rupture des tores invariants.

La propriété diophantienne des nombres est un gros chapitre de la théorie des nombres ; elle permet de mesurer l'approximation d'un réel par des rationnels. C'est un concept tout à fait intéressant pour le physicien : il permet en quelque sorte d'avoir une mesure de la position des variables par rapport aux rationnels où apparaissent les résonances. On n'est pas à la hauteur de la précision des entiers, ainsi exposés précédemment, ni de leurs applications physiques, mais on peut espérer s'y rapprocher en s'imprégnant de la propriété diophantienne des réels.

5.4.2 Approximation des réels par les rationnels : analyse diophantienne

Cette partie n'est pas destinée à présenter la théorie diophantienne complète ni de son cortège de théorèmes. Elle a pour objectif de présenter les résultats que l'on a utilisés et mis en évidence dans nos expériences.[21]

Les fractions continues

L'approximation des réels par les rationnels joue un rôle essentiel dans n'importe quel contexte (informatique par exemple). L'approximation la plus naturelle consiste à tronquer le réel à partir d'un certain nombre de décimales. Ainsi, pour π, on peut construire une suite alternée $\frac{P_n}{Q_n} = 3;\ 3.2;\ 3.14;\ 3.142; ...$, où, à chaque itération, on a

$$\pi > \frac{P_0}{Q_0} = 3; \pi < \frac{P_1}{Q_1} = 3.2; \pi > \frac{P_2}{Q_2} = 3.14; ... \tag{5.31}$$

On vérifie alors que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, (-1)^i \left(\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \frac{P_i}{Q_i} \right) \leq \frac{1}{Q_i}, \tag{5.32a}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \left| \pi - \frac{P_i}{Q_i} \right| \leq \frac{1}{Q_i}. \tag{5.32b}$$

Cette approximation s'appelle approximation décimale, et l'erreur converge en $\frac{1}{Q_i}$ (Eq. 5.32b). C'est l'approximation qu'utilisent implicitement tous les ordinateurs, puisque les nombres ne sont donnés qu'avec un nombre limité de chiffres significatifs.

Il existe cependant une autre approximation appelée approximation rationnelle. Elle est définie à partir du développement en fractions continues.

Théorème 4 *Tout nombre réel irrationnel $\gamma \in \mathbb{R}$ possède un unique développement infini en fractions continues.*

$$\gamma = [a_0, a_1, ...] = [a_i]_{i \in \mathbb{N}} = a_0 + 1/\{a_1 + 1/\{a_2 + ... + 1/\{a_i + ...\}\}\} \tag{5.33}$$

où

$$a_0 \in \mathbb{Z}, \quad et \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{N}^* \tag{5.34}$$

21. Pour un complément d'information à ce sujet, le lecteur pourra se diriger vers la thèse de S. Perrine [Perrine 88], ou vers l'ouvrage de M.Waldschmidt [Waldschmidt 92] réunissant un échantillon d'articles (plutôt mathématiques) proches de la physique et de la théorie des nombres.

On définit p_n/q_n la réduite d'ordre n par

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, ...a_n]. \tag{5.35}$$

Dans le cas du nombre π, on a :

$$\pi = 3.1415926 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...] \tag{5.36}$$

L'obtention des a_i peut simplement se faire à partir d'une calculatrice en effectuant les opérations :

$$\begin{aligned} \pi &\hookleftarrow 3.1415 \\ -3\ (a_0) &\hookleftarrow 0.1415 \\ 1/x &\hookleftarrow 7.0625 \\ -7\ (a_1) &\hookleftarrow 0.0625 \\ 1/x &\hookleftarrow 15.999 \\ &\vdots \end{aligned}$$

On peut ensuite calculer les réduites de π et on trouve la suite alternée

$$\frac{p_n}{q_n} = \{\frac{3}{1}; \frac{22}{7}^2; \frac{333}{106}; \frac{335}{113}; ...\}, \tag{5.38}$$

qui vérifie les propriétés :

$$\forall i \in \mathbb{N}, (-1)^i \left(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i}\right) = \frac{1}{q_i q_{i+1}} < \frac{1}{q_i^2}, \tag{5.39a}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \left|\pi - \frac{p_i}{q_i}\right| \leq \frac{1}{q_i^2}. \tag{5.39b}$$

L'approximation de π (ou de tout autre réel) par les fractions continues converge plus rapidement que l'approximation décimale. Il est d'ailleurs étonnant de constater que cela n'est pas utilisé par les ordinateurs, la raison provient certainement d'un autre problème qui nous échappe.

Propriétés et résultats généraux [Perrine 88]

Soit $\gamma = [a_0, a_1, ...]$, on a

2. Archimède propose cette approximation de π au II$^{\text{ième}}$ siècle avant J.C. [La Recherche 98].

$$\left|\gamma - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}. \tag{5.40}$$

Calculons le nombre $\rho > 0$ possédant le développement $\rho = [1, 1, 1, 1, ...]$:

$$\rho = [1, 1, ..., 1, ...] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}} = 1 + \frac{1}{\rho}. \tag{5.41}$$

Dans ce cas, ρ vérifie l'équation du second degré $\rho^2 - \rho - 1 = 0$, soit :

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : \quad \text{le nombre d'or} \tag{5.42}$$

Le nombre possédant la plus lente convergence est le nombre d'or pour lequel le développement s'écrit $\rho = [1, 1, 1, 1, ...] = \left[\overline{1}\right]$.

Les rationnels $p/q \in \mathbb{Q}$ possèdent un développement fini, *i.e.*

$$\forall\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \exists\ n_{max}\ / \frac{p}{q} = [a_0, a_1, ...a_{n_{max}}]. \tag{5.43}$$

Exemple : $\frac{5}{3} = [1, 1, 2]$

Note : Ces deux propriétés expliquent pourquoi les tores invariants de la théorie KAM les plus rapidement détruits sont ceux où le rapport de fréquence est proche d'un rationnel, le dernier tore détruit étant celui dont le rapport est le nombre d'or. La hiérarchie de destruction des trajectoires, c'est-à-dire la hiérarchie de l'effet d'une perturbation, est alors donnée par la théorie des fonctions continues.

L'équation (5.40) montre que l'on a souvent :

$$|\ \gamma - \frac{p_n}{q_n}\ | \leq \frac{1}{2q_n^2}. \tag{5.44}$$

On définit alors les constantes de Markoff $C(\gamma)$ par :

$$C(\gamma) = \lim_{n\to\infty} q_n^2 \left|\gamma - \frac{p_n}{q_n}\right|. \tag{5.45}$$

La constante de Markoff est réelle et unique pour chaque γ. Elle mesure la façon dont le nombre γ est approchable par des rationnels. Il s'agit d'une propriété importante et l'on montre que :

$$\forall\ \ \gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq C(\gamma) \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = C\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right). \tag{5.46}$$

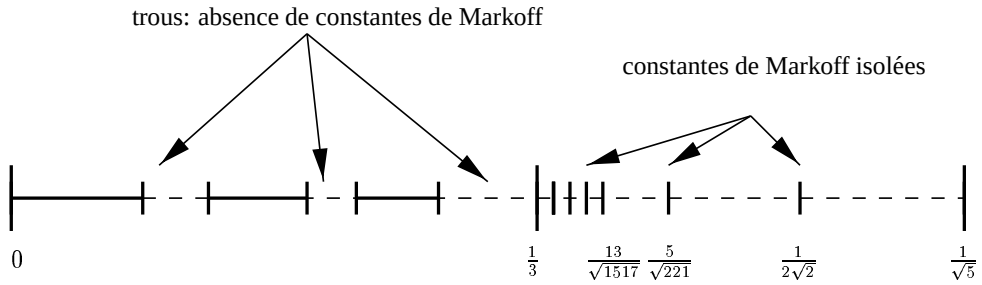


FIG. 5.18 – *Constantes de Markoff*

Les nombres très bien approximables par les rationnels ont une constante nulle (par exemple $e = 2,71...$) et les moins bons sont les réels quadratiques (solution d'une équation du second degré à coefficients entiers). La connaissance de toutes les constantes de Markoff reste un problème irrésolu, car en effet il existe des trous dans $[0, \frac{1}{\sqrt{5}}]$ ne comprenant pas de constantes (Fig. 5.18). Les valeurs intéressantes pour nous sont les constantes $C(\gamma) \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{5}}]$, constantes de Markoff des réels quadratiques.

On les connaît toutes et on a :

$$C(\gamma_m) = \frac{m}{\sqrt{9m^2 - 4}} \quad \text{avec } m = 1, 2, 5, 13, ... \tag{5.47}$$

Les nombres m sont construits à partir des solutions de l'équation diophantienne :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2, \tag{5.48}$$

où m,m_1,$m_2 \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de (5.48) sont infinies et elles sont données, à une permutation près de (m, m_1, m_2) à partir de la solution triviale (1,1,1) et de l'arborescence :

$$(m,m_1, m_2) \longrightarrow \begin{cases} 3mm_1 - m_2, m_1, m \longrightarrow \begin{cases} ... \\ ... \end{cases} \\ \\ 3mm_2 - m1, m, m_2 \longrightarrow \begin{cases} ... \\ ... \end{cases} \end{cases} \tag{5.49}$$

Les nombres réels γ_m possédant la constante $C(\gamma_m)$ sont donnés par

$$\gamma_m = \frac{3K - 3m + \sqrt{9m^2 - 4}}{2m}, \tag{5.50}$$

où K est donné par

$$m_1K = m_2 \bmod(m);\ 0 < K \leq m. \tag{5.51}$$

Par valeurs décroissantes de $C(\gamma_m)$, on a :

$$C(\gamma_m) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{221}}; \frac{13}{\sqrt{1517}}; ... \right\}. \tag{5.52}$$

Enfin, on montre que deux nombres γ_1 et γ_2 vérifient $C(\gamma_1) = C(\gamma_2)$, si

$$\exists\ a, b, c, d\ \in \mathbb{Z}, \text{avec } ad - bc = \pm 1, \tag{5.53}$$

tels que :

$$\gamma_2 = \frac{a\gamma_1 + b}{c\gamma_2 + d}. \tag{5.54}$$

Les nombres γ_1 et γ_2 sont alors donnés à une transformation matricielle près du groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ des matrices $2 * 2$ inversibles à coefficients entiers. C'est un groupe qui intervient dans de nombreux autres contextes de la physique (équations non linéaires aux dérivées partielles, kdV, Sine-Gordon [Das 89, p. 153]. L'arithmétique et l'étude des systèmes non linéaires sont de ce fait totalement connectées, car les invariants de ces équations se déduisent des propriétés de groupes liés à $GL(2, \mathbb{Z})$. Sachant que ce sont des quantités invariantes que nous recherchons (analogues à des coefficients de Fourier non linéaire), on comprend l'importance de la recherche de ces propriétés.

5.5 Conclusion

L'objet de ce chapitre était de pénétrer l'univers complexe des systèmes non linéaires et d'essayer d'appréhender les techniques récentes nées du travail effectué par les mathématiciens et physiciens au cours des dernières décennies.

Actuellement, la physique non linéaire n'a pas de méthode d'étude à la hauteur de l'analyse de Fourier surtout adaptée aux processus linéaires. Il semble toutefois, qu'à la vue des récents travaux réalisés dans le domaine, les méthodes géométriques et arithmétiques apparaissent d'une richesse supérieure aux méthodes analytiques, sans pour autant prétendre les remplacer.

On a montré que les modèles discrets révèlent une somme de propriétés nouvelles, non seulement de l'oscillateur idéal (application standard) mais aussi lorsqu'il est perturbé (modèle d'Arnold), à savoir :

- invariance d'échelle
- zones de synchronisation à toutes les échelles

- robustesse de la synchronisation
- dynamique locale dépendant fortement des propriétés globales (ou collectives) du système physique
- amplifications de cette propriété proche des zones de synchronisation

Il existe aussi des quantités invariantes (jusqu'à un certain ordre d'approximation) qui ne sont pas sensibles aux perturbations. Les propriétés des systèmes non linéaires semblent en bijection avec les rationnels, leur sensibilité se déduisant des règles arithmétiques de type diophantienne.

L'expérience doit être juge, ou au moins confirmer la piste. La partie expérimentale suivante nous apporte un certain nombre de faits qui confortent notre opinion.

Troisième partie

Expériences et mise en œuvre des méthodes

Introduction et historique

Dans cette partie, nous traitons les résultats expérimentaux de notre travail relatifs aux concepts développés précédemment. On accompagnera notre discussion de résultats de simulations numériques ou de résultats de calculs qui, le cas échéant, seront placés en annexe pour garder le caractère expérimental de cette partie.

Deux expériences ont été réalisées mettant en jeu des technologies différentes : l'expérience de systèmes en injection que l'on appelle « résonance porteuse-enveloppe » sera peu développée par rapport à l'étude de la boucle de phase (PLL) en régime non linéaire. Nous ne les avons pas exposées selon un critère historique compte tenu des concepts nécessaires pour la compréhension de l'expérience porteuse-enveloppe. Nous avons plutôt choisi de traiter, dans un premier temps, la PLL non linéaire et ensuite l'autre.

L'expérience de résonance porteuse-enveloppe, mise au point par M. Hoummady, F. Lardet-Vieudrin et G. Martin, et étudiée par M. Planat [Planat 95], eut pour but principal la propagation de solitons dans les lignes à ondes de surface (SAW). La faible non-linéarité des lignes dans les conditions expérimentales adoptées nécessitait alors l'utilisation d'une méthode de régénération d'impulsion par une forme de modulation. Cette expérience donna naissance à des phénomènes de synchronisation de fréquence d'une stabilité remarquable que nous avons alors étudiés. La deuxième phase d'exploration traita en détail les difficultés de modélisation et de compréhension que l'on avait rencontrées et qui conduisirent à l'étude d'un système analogue (PLL) dont les résultats linéaires étaient bien sûr déjà classiques, mais dont l'étude non linéaire restait à réaliser au laboratoire. Ce travail constitua le DEA de J.-F. Mougin [Mougin 96] et permit la mise en place de l'expérience de l'étude non linéaire de la PLL qui nous a apportée l'essentiel des résultats expérimentaux.

Une perspective de ces expériences est envisageable pour l'étude des fluctuations dans les oscillateurs par injection de sources bruitées à divers endroits du circuit. En effet, les caractéristiques des fluctuations et des modulations observées et étudiées par L. Couteleau [Couteleau 98] semblent décrire les mêmes phénomènes que ceux présents dans les systèmes en injection et les systèmes bouclés[22].

La grande similitude des effets présents dans les oscillateurs, de leur méthode de mesure, de leur méthode d'étude et, dans le cas général, de l'étude des systèmes bouclés, nous a alors poussés à étudier en détail le fonctionnement de la plus commune des méthodes de stabilisation des systèmes : le contrôle par asservissement.

22. Expérience réalisée en commun avec L. Couteleau en Mars 98.

Chapitre 6

La boucle à verrouillage de phase en régime non linéaire

L'étude expérimentale de la boucle à verrouillage de phase appelée PLL (Phase Locked Loop) présente un intérêt dont l'importance n'a cessé de nous apparaître au fur et à mesure de son étude. Nous nous sommes rendus compte que c'était un système d'une apparente simplicité mais présentant des propriétés d'une grande richesse.

Il se trouve qu'elle est à la base de n'importe quel dispositif de mesure de bruit utilisant une technique de démodulation. On accède actuellement aux mesures de bruit les plus précises par ce sésame.

D'après le modèle de Leeson, une condition de phase et une transformation du bruit existent également dans les oscillateurs. Nous allons voir que le verrouillage par la PLL impose aussi une condition de phase et engendre également une transformation du bruit. Les propriétés que l'on observera pour la PLL pourront être facilement retrouvées dans le cas de l'oscillateur. Les notions de régime transitoire et de bande passante pourront être identifiées. La présence d'harmoniques et leurs interactions mutuelles, que l'on suppose généralement négligeables, seront mises en évidence dans la PLL. Même si le détecteur de phase présent dans la PLL est considéré comme étant linéaire, nous allons montrer que le traiter tel qu'il est, c'est-à-dire non linéaire, apporte certes des difficultés supplémentaires, mais permet aussi de mieux appréhender ce dispositif expérimental à la base de l'étude du bruit de fréquence des oscillateurs.

Au cours de cette étude, la boucle de phase sera appelée PLL pour plus de simplicité. En fait, nous verrons qu'elle réalise un asservissement de fréquence et non un asservissement de phase, c'est-à-dire que la fréquence des deux oscillateurs sera égale, mais une différence de phase existera et sera constante. Un asservissement de phase, nécessitant la présence d'un intégrateur supplémentaire dans la boucle pour que les phases et *a for-*

tiori les fréquences soient identiques, n'a pas été étudié dans nos expériences. On appelle également PLL du n^{e} ordre le cas où la phase Φ du signal d'erreur vérifie une équation différentielle du n^{e} ordre.

6.1 Description électronique détaillée de la PLL

Le montage électronique (cf. Annexe F) constituant la PLL est présenté en figure Fig. 6.1. On peut identifier un mélangeur électronique doublement équilibré constitué de

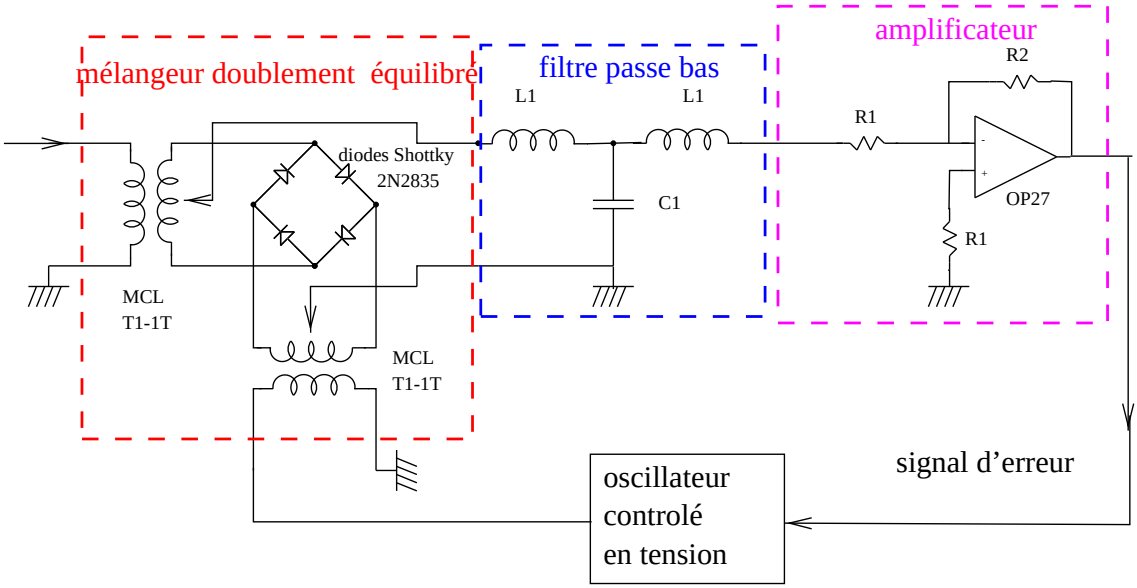


FIG. 6.1 – *Schéma électronique de la PLL*

quatre diodes Shottky 2N2835, d'un filtre passe bas et d'un amplificateur faible bruit. Le VCO (Voltage Controlled Oscillator) matérialisé par un synthétiseur, avec une entrée modulation de fréquence, est extérieur au dispositif électronique. Détaillons un peu plus le rôle précis de chaque élément.

6.1.1 Le filtre

Le filtre utilisé est un filtre de Butterworth du 3^{e} ordre adapté à 50 Ω. Au cours des expériences nous avons étudié l'effet du filtrage pour des valeurs de L_1 et C_1 données par le tableau Tab. 6.1 dont les fréquences de coupures ont été déterminées à l'analyseur de réseau. Son rôle est le filtrage des composantes hautes fréquences délivrées par le mélangeur. Dans les bancs de mesure de bruit de phase, sa valeur est d'environ 300 kHz, supérieure à la plus haute fréquence d'analyse.

L_1 (μ H)	22	47	220	470	4700
C_1 (nF)	15	36	150	330	1000
f_c (kHz)	375	300	58	35	3

TAB. 6.1 – *Filtres utilisés au cours des expériences*

6.1.2 L'amplificateur

L'amplificateur est constitué d'un circuit intégré OP37GP possédant un produit gain-bande de 8 MHz de façon à posséder un gain constant dans la bande passante du filtre passe-bas. Il sert à amplifier la basse fréquence de sortie du mélangeur pour que celle-ci puisse être suffisamment importante afin de balayer le condensateur à capacité variable (varicap) du VCO sur une plage maximale. La qualité de cet amplificateur doit être optimale. Nous avons utilisé un amplificateur faible bruit du type de ceux des bancs de mesure du LPMO (cf. Annexe F.2). Dans quelques cas particuliers, les valeurs des résistances R_1 et R_2 ont été changées pour pouvoir faire des essais à des amplitudes d'injection différentes, ce qui fait que le gain G n'a pas toujours été constant au cours de nos expériences.

6.1.3 L'oscillateur contrôlé en tension

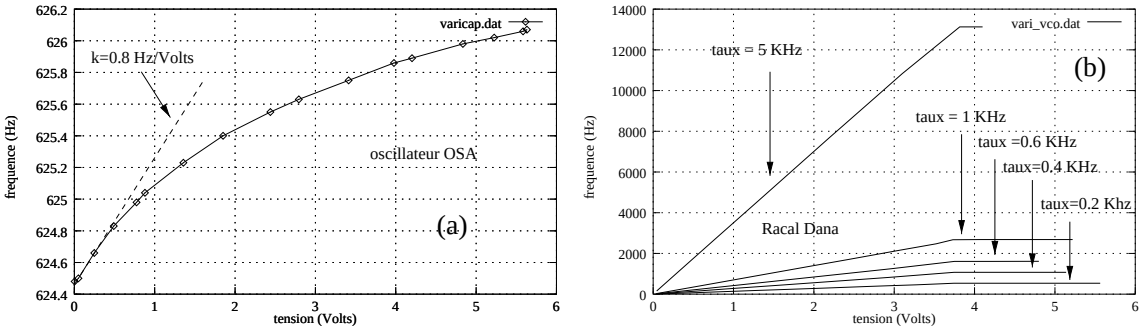


FIG. 6.2 – *Caractéristiques de la varicap de l'oscillateur OSA B5400 (a) et pour différents taux de modulation du Racal Dana (b).*

L'oscillateur contrôlé en tension ou VCO (pour Voltage Controlled Oscillator) est certainement avec le mélangeur l'élément le plus important de la PLL. C'est un oscillateur (supposé de bonne pureté spectrale) qui délivre une fréquence f_1 dont la valeur dépend d'une tension $u_4(t)$ que l'on appelle signal d'erreur. On a alors

$$f_1 = f_{vco} + k u_4(t), \tag{6.1}$$

où f_{vco} est appelé fréquence du VCO libre et k (exprimé en Hz/Volts) la sensibilité du VCO. D'un point de vue électronique cette opération est soit réalisée de façon analogique à partir d'une capacité variable ou soit numériquement à partir d'un convertisseur tension fréquence. Cette fonction réalise l'asservissement d'un oscillateur quelconque sur le VCO. Ainsi, tous les oscillateurs commercialisés, synthétiseurs de fréquence et appareils de mesure utilisant un oscillateur possèdent cette fonction (pilote extérieur de l'appareil). Nous avons étudié celle de l'oscillateur OSA B5400 commercialisé par Oscilloquartz et intervenant dans nos expériences, et celle du synthétiseur Racal Dana (Fig. 6.2). Pour l'oscillateur, la caractéristique est non linéaire (a) alors que celle du synthétiseur est linéaire jusqu'à 3.8 Volts de correction (b). Le VCO possède l'avantage de pouvoir faire varier la valeur de k par une fonction « taux de modulation ». Tout asservissement réalisé sur un oscillateur se fait alors par une variation non linéaire de la varicap.

6.1.4 Le modulateur en anneau ou mélangeur

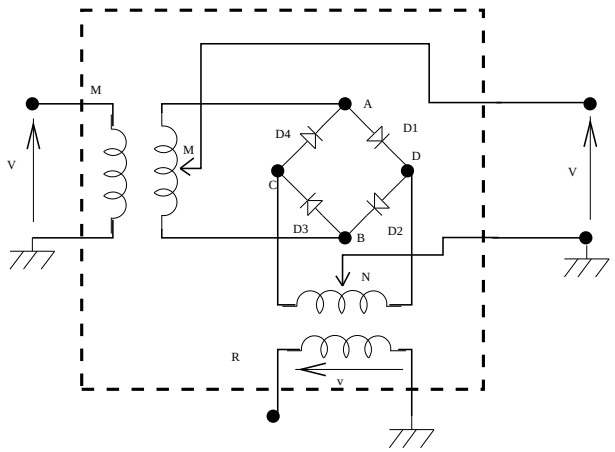


FIG. 6.3 – *Le mélangeur doublement équilibré ou modulateur en anneau.*

Le principe de la mesure de bruit est de comparer l'oscillateur à mesurer avec un oscillateur plus stable. Cette comparaison est effectuée avec un mélangeur qui réalise le produit des deux signaux d'entrée.

C'est un dispositif non linéaire provenant de la non-linéarité de la caractéristique courant-tension des 4 diodes Shottky montées en pont (Fig. 6.3). Pour étudier la forme du signal de sortie, une première approximation peut être effectuée en les supposant idéales. Dans un fonctionnement en tant que modulateur, une basse fréquence Ω et une haute fréquence ω_0 sont appliquées en entrées .

Considérons dans un premier temps une tension de basse fréquence Ω lentement va-

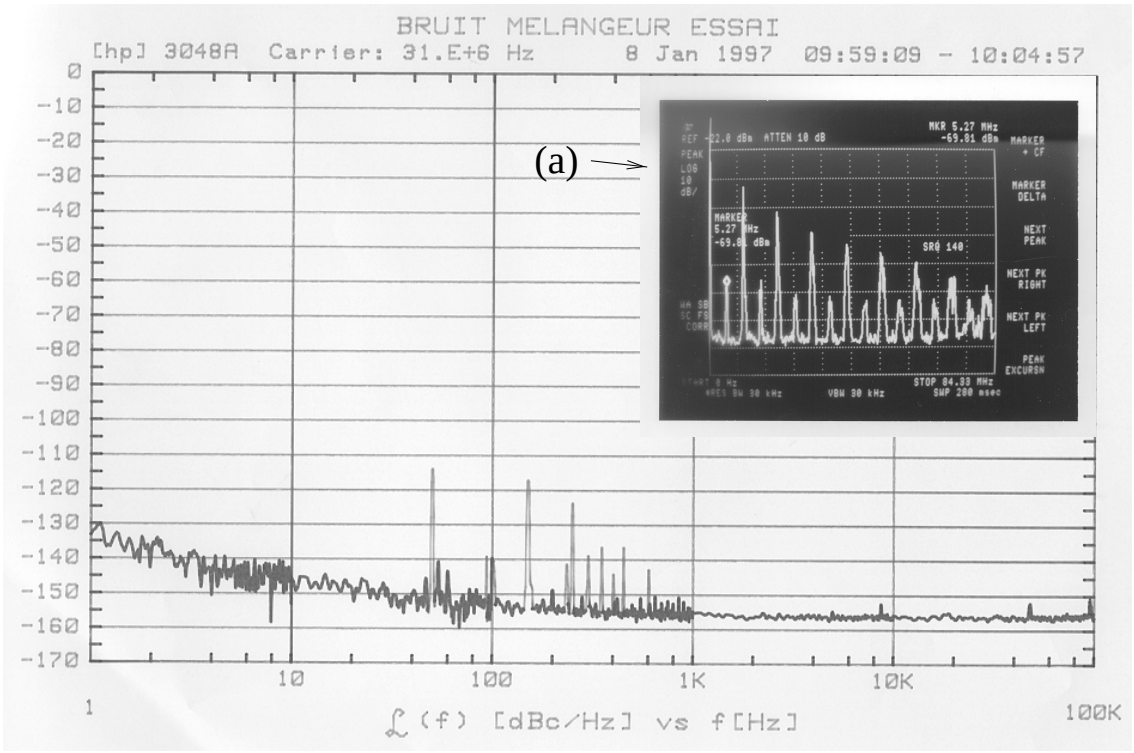


FIG. 6.4 – *Caractéristiques du mélangeur. (a) spectre de sortie (cf. Tab. 6.2). (b) bruit de phase (b)*

riable appliquée en R. Pendant l'alternance positive de la haute fréquence appliquée en M, les diodes D_1 et D_2 sont passantes ; on a alors $V_D = V_M$ et $V_N = V_C$, soit $V_{MN} = -V_{CD}$. Pendant l'alternance négative, D_3 et D_4 conduisent et $V_C = V_M$ et $V_D = V_N$, soit $V_{MN} = +V_{CD}$. La sortie génère ainsi un signal carré d'amplitude V_{CD} au rythme de la porteuse. On a alors, en développant le carré en séries de Fourier :

$$V_{MN}(t) = V_{CD} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)} \cos(2n+1)\omega_0 t. \tag{6.2}$$

Si $V_{CD} = A \cos \Omega t$, on a alors

$$V_{MN}(t) = A \cos \Omega t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2n+1)} \cos(2n+1)\omega_0 t, \tag{6.3}$$

$$V_{MN}(t) = \frac{A}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\cos\left(\Omega + (2n+1)\omega_0\right) t + \cos\left(\Omega - (2n+1)\omega_0\right) t \right). \tag{6.4}$$

Par une simple raison de symétrie du mélangeur (Voir Annexe F pour une description détaillée), on aurait pu faire le même raisonnement en considérant que la porteuse était située en R. Dans ce cas, quelle que soit l'affectation faite aux entrées, le fait que l'on

f (MHz)	5.27	10.33	15.6	20.45	25.9	30.5	35.8
A (dB)	-69.8	-34.7	-67.6	-49.4	-73	-50.9	-73.7
f (MHz)	40.9	46.5	50.8	56	61	66	
A (dB)	-55.3	-75.2	-58.3	-75	-61	-74	

TAB. 6.2 – *Amplitude des harmoniques de sortie du mélangeur attaqué par deux signaux de fréquence $f_0 = 5.020626$ MHz et $f_1 = 5.147743$ MHz et d'amplitudes $A = 8dB$, dont le spectre est donné par la figure Fig. 6.4(a).*

considère l'entrée BF ou l'entrée HF ne change rien dans le comportement de la sortie. Dans le cas idéal, on peut alors, par raison de symétrie, dire que le mélangeur ne génère que des composantes constituées d'une combinaison linéaire d'harmoniques impairs des signaux d'entrées, comme le montre la figure Fig. 6.4(a). Le point de vue précédent est toutefois bien trop simpliste pour rendre compte de la réelle dynamique ; le spectre expérimental montre que ça n'est pas tout à fait le cas et qu'il existe quelques composantes paires dont les valeurs sont données par le tableau Tab. 6.2.

Nous avons tenté de généraliser l'étude précédente au cas de signaux de même amplitude et de même fréquence. Même en supposant les diodes idéales et sans seuil, ceci conduisait à une schématisation trop complexe et guère exploitable concrètement. De façon générale, on supposera que le mélangeur ne génère que des harmoniques impairs, *i.e.*

$$V_{MN}(t) = \sum_{(p,q)} A_{p,q} \sin\left(p\omega_0 - q\omega_1\right) t + B_{p,q} \sin\left(p\omega_0 + q\omega_1\right) t, \tag{6.5}$$

où ω_0 et ω_1 sont les fréquences angulaires des deux signaux appliqués en entrée et où p, q sont impairs.

Grâce à ce mélangeur on peut générer un signal dont la fréquence est la somme ou la différence de celle des signaux d'entrées. C'est le dispositif utilisé pour effectuer le battement entre deux signaux périodiques et les conversions de fréquence comme celles utilisées dans le cas de la mesure de double battement que l'on présentera au paragraphe 7.1.3. Le mélangeur est un dispositif intervenant dans tous les systèmes nécessitant une modulation ou une démodulation [Dos Santos 98a]. Il intervient dans la plupart des bancs de mesure de bruit de phase [Klapper 72, Maas 86], son propre bruit de phase a été mesuré et présenté en Fig. 6.4(b).

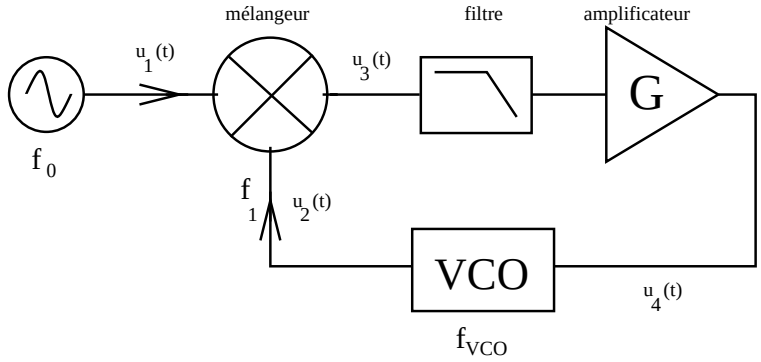


FIG. 6.5 – *Étude de la PLL du second ordre*

6.2 Présentation des simulations numériques

Devant l'impossibilité de résoudre certaines équations différentielles modélisant les expériences, nous les avons étudiées par simulations numériques. Un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) (Voir annexe B) a été choisi pour son excellente propriété de stabilité et de convergence rapide. Le choix du pas d'itération temporelle est un problème délicat pour les systèmes non linéaires. En effet, dans le cas linéaire, il doit toujours être inférieur à l'inverse de la plus haute fréquence présente dans le système et le choix d'un pas au mois 100 fois plus petit se révèle indispensable pour avoir une bonne stabilité de l'algorithme. En revanche, dans un système non linéaire où il n'y a pas de plus haute fréquence à cause de la multiplication non linéaire des fréquences, le choix du pas se fait un peu à l'intuition de façon à trouver un compromis entre rapidité et précision. De nombreuses simulations sont alors nécessaires pour faire ce choix.

L'idéal est alors de disposer de beaucoup de temps et de réaliser une simulation avec un pas très fin. On se heurte alors à un autre problème qui est lié à la convergence du résultat. En effet, RK4 n'est pas un algorithme symplectique. D'un point de vue de la théorie Hamiltonienne, il ne conserve pas le volume de l'espace des phases ; d'un point de vue numérique, il ne conserve pas l'énergie totale lors de la simulation d'un système conservatif. Cependant l'énergie totale sera d'autant plus conservée que le pas sera petit et que la simulation sera courte. Ainsi, si l'on effectue de longues simulations dans le cas des systèmes non linéaires, on n'est pas à l'abri d'erreurs systématiques introduites par la simulation elle-même.

Malgré la connaissance de ce problème lié aux systèmes non linéaires, nous avons choisi d'observer le comportement de la PLL par ce type de simulation.

6.3 La PLL dans les bancs de mesure de bruit

6.3.1 Mise en équation

L'évolution de la phase Φ du signal d'erreur corrigeant le VCO est donnée par l'équation (cf. Annexe A) :

$$\frac{1}{f_c}\ddot{\Phi}(t) + \dot{\Phi}(t) + K \sin \Phi(t) = \Delta\omega, \tag{6.6}$$

où f_c est la fréquence de coupure du filtre passe-bas, K la bande passante d'asservissement (cf. Eq. 2.20) et $\Delta\omega = \mid \omega_0 - \omega_1 \mid$ la différence de fréquence angulaire entre les deux oscillateurs (Fig. 6.5). L'évolution de la phase est alors identique à l'évolution du pendule pesant amorti soumis à une force d'excitation constante. Cette équation ne peut se résoudre analytiquement du fait de la présence du terme en $\dot{\Phi}$, synonyme d'amortissement. La non-linéarité de ce système est générée par le mélangeur et amplifiée par le VCO. Nous avons étudié les propriétés du signal d'erreur $u_4(t) = A \sin \Phi$ d'un point de vue expérimental et numérique en fonction des paramètres $f_c, K, \Delta\omega$. Les différentes valeurs des filtres ont été celles données par le tableau Tab. 6.1 et nous avons fait varier K et $\Delta\omega$ pour faire apparaître les différentes caractéristiques.

Dans les bancs de mesure de bruit de phase, la fréquence d'étude (ou de Fourier) peut aller jusqu'à 100 kHz. Aussi la fréquence de coupure f_c du filtre passe-bas doit-elle être supérieure afin de ne pas atténuer les fréquences que l'on analyse. Le choix d'un filtre de l'ordre de 300 kHz dans la plupart de nos expériences permet d'écrire (6.6) de la forme :

$$\dot{\Phi}(t) + K \sin \Phi(t) = \Delta\omega, \tag{6.7}$$

où K s'exprimera en Hz si $\Delta\omega$ est exprimé en Hz. Cette équation porte le nom d'équation d'Adler [Adler 46] qui est utilisée dans les systèmes à injection. Elle décrit également le blocage de mode des lasers [Cresser 82] et les oscillateurs quantiques [Vanier 89].

6.3.2 Solution de l'équation d'Adler

L'équation (6.7) possède une solution que l'on peut exprimer explicitement en fonction du temps ; on dit aussi que l'équation est intégrable. Ces solutions dépendent de la valeur ($u = \frac{\Delta\omega}{K}$) et s'écrivent (à une certaine phase Φ_0 près) :

$$\Phi(t) = 2 \arctan \left(u^{-1} \left(1 + 2Z/K \tan \left(Z(t - t_0) \right) \right) \right), \tag{6.8}$$

où $Z = \frac{K}{2}\sqrt{u^2 - 1}$. Elles ont été vérifiées à l'aide d'un logiciel de calcul formel (cf. Annexe D). On a porté sur la figure Fig. 6.6 les solutions du signal d'erreur $u_4(t) = \mu G \sin \Phi(t)$.

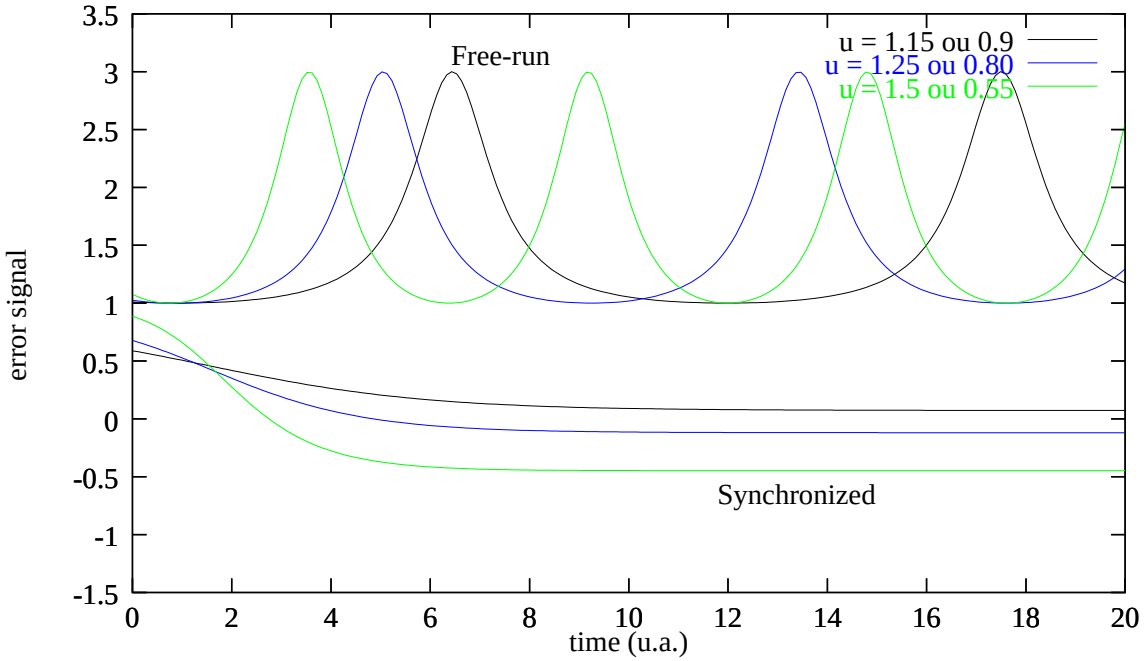


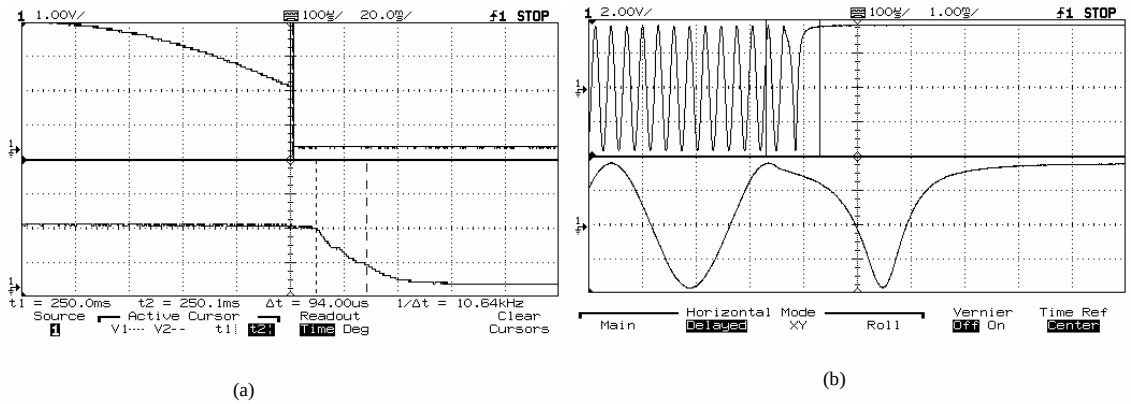
FIG. 6.6 – *Évolution du signal d'erreur en fonction de u.*

6.3.3 Propriétés des solutions

Suivant les valeurs de u, le signal d'erreur possède deux comportements totalement différents.

Cas synchronisé

Si $u < 1$, cette zone s'appelle la plage de synchronisation ou d'asservissement de la PLL. La différence de phase entre les deux oscillateurs tend vers une constante ϕ_∞ donnée par



(a) (b)

FIG. 6.7 – *Régime transitoire de l'asservissement pour* $\Delta\omega = 0$ *(a) et* $\Delta\omega = K$ *(b).*

$$\phi_\infty = 2\pi l + \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{K}\right), \quad l \text{ entier.} \tag{6.9}$$

où l est le nombre de rotations de phase effectuées avant le régime permanent.

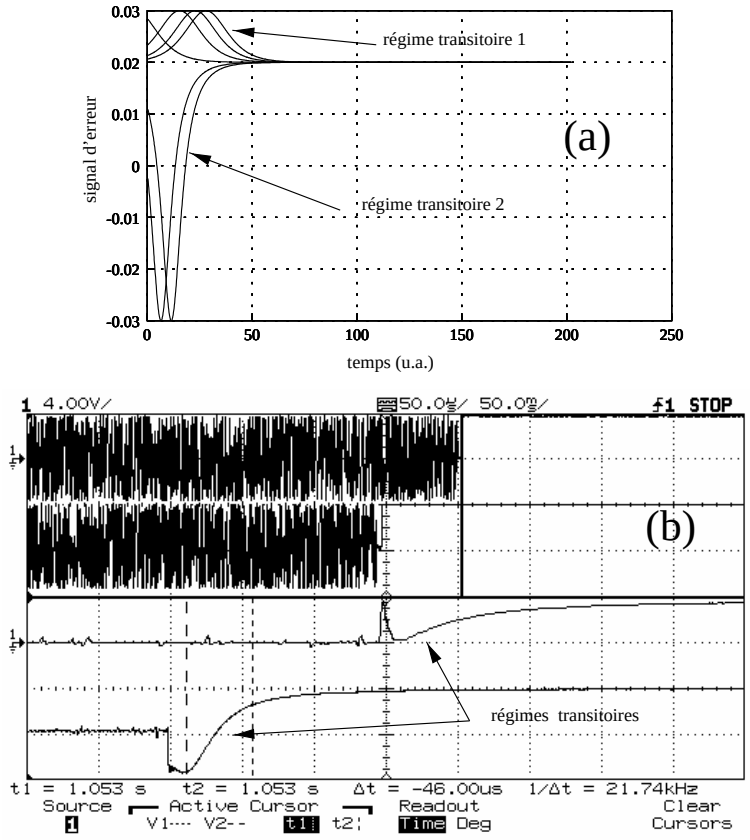


FIG. 6.8 – *Effet de la phase initiale sur le régime transitoire*

Les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ possédant alors la même fréquence, le signal de correction est un signal continu qui corrige la fréquence propre du VCO pour que celle-ci soit toujours identique à celle de l'oscillateur d'entrée. C'est le processus d'asservissement. Dans ce cas, le signal continu représente le sinus de l'écart de phase entre les deux oscillateurs. On a porté sur la figure Fig. 6.6 l'évolution de la phase en fonction de u. Celle-ci possède une constante de temps qui augmente à mesure de l'augmentation de u. Lorsque u est proche de 1, cette constante tend vers l'infini. Lorsque $u \to 0$, $\Delta\omega \to 0$ et (6.7) s'écrit

$$\dot{\Phi}(t) + K \sin \Phi(t) = 0, \tag{6.10}$$

dont la solution est

$$\Phi(t) = 2 \arctan \exp(-Kt), \tag{6.11}$$

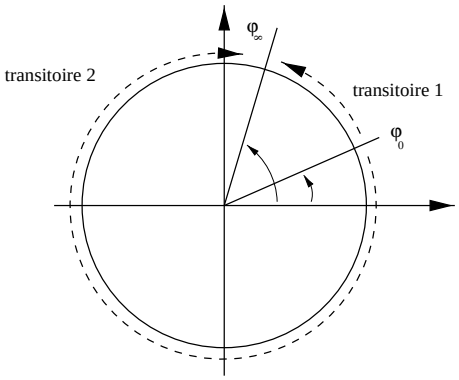


FIG. 6.9 – *Deux régimes transitoires différents suivant le sens de rotation de la phase*

de constante de temps proche de K. Cette constante de temps est égale à l'inverse de la fréquence de coupure de l'asservissement (cf. Chapitre 2).

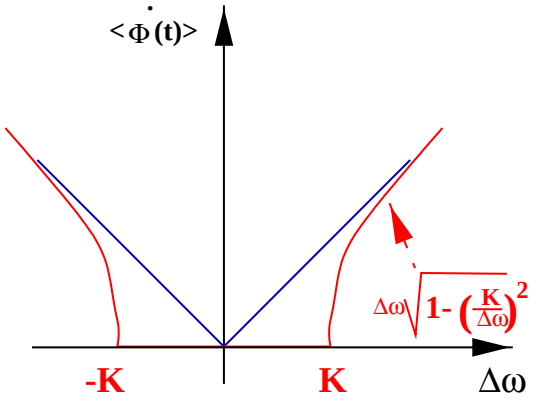


FIG. 6.10 – *Fréquence du signal d'erreur en fonction de $\Delta\omega$ à K constant*

La non-linéarité fait apparaître de plus grandes constantes de temps lorsque l'on s'approche de $u = 1$ comme le montrent les enregistrements expérimentaux de la figure Fig. 6.7. Ils montrent un régime transitoire observé à l'aide du nouvel oscilloscope numérique HP54645A. Cet appareil possède d'excellentes propriétés d'échantillonnage (200 Méch/s) qui permettent l'obtention d'une résolution temporelle proche de la nanoseconde. Pour la mesure du régime transitoire à $\Delta\omega = 0$ (a), nous avons ouvert la boucle (en déconnectant la correction de la varicap) ; ce qui a conduit à un régime de battement très lent puisque $\Delta\omega = 0$. Ensuite en refermant la boucle on mesure le temps de synchronisation *via* la fonction agrandissement. On mesure alors pour $\Delta\omega = 0$, une valeur d'environ 94 μs correspondant à une fréquence de coupure de l'ordre de K=10 kHz. Les conditions expérimentales choisies donnaient une valeur de K de 3401±1 Hz. La décroissance non exponentielle (cf. Eq. 6.11) et la précision de l'évaluation expliquent cette différence, mais

il s'agit ici de donner un ordre de grandeur de K. Proche de la zone limite $\Delta\omega = K$ (b) on observe un régime transitoire bien plus long (∼ms). L'établissement de ce régime transitoire est conforme aux simulations numériques.

L'effet de la phase initiale a été étudié et on observe numériquement (Fig. 6.8(a)) et expérimentalement (b) que le signal d'erreur peut posséder des dynamiques différentes suivant la valeur de la phase initiale. Ces deux évolutions possibles du signal d'erreur possèdent deux valeurs de tensions maximales différentes. Cette différence n'est pas gênante d'un point de vue spectral puisque le spectre n'est réalisé qu'après le régime transitoire ; cependant d'un point de vue temporel, la différence est nettement visible. Cette différence s'explique très bien en considérant la figure Fig. 6.9. Suivant les conditions initiales, la phase peut effectuer l rotations complètes avant d'atteindre l'état d'équilibre.

Cas non synchronisé

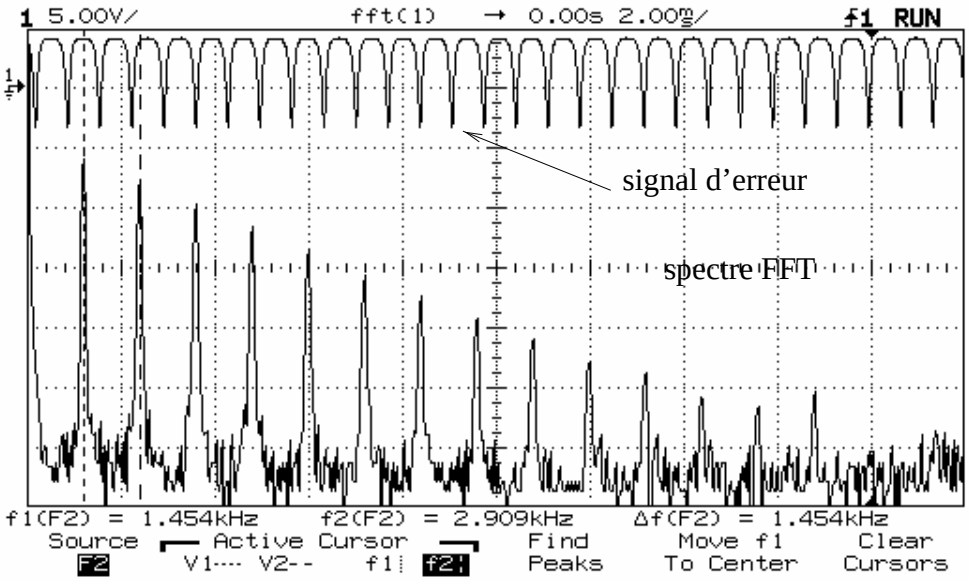


FIG. 6.11 – *Observation expérimentale du signal d'erreur.*

Lorsque $u > 1$, $u_4(t)$ donné par

$$u_4(t) = \mu G \sin \Phi(t), \tag{6.12}$$

est périodique de fréquence

$$< \dot{\Phi} >= f_{batt} = \frac{K\sqrt{u^2-1}}{2\pi}. \tag{6.13}$$

Lorsque $u \to \infty$, $\Delta\omega >> K$ et l'équation (6.7) s'écrit $\dot{\Phi} = \Delta\omega$. Donc $u_4(t)$ est périodique de fréquence $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$. Lorsque $u \to 1$, $\Delta\omega \sim K$ et $< \dot{\Phi} > \to 0$. Si on trace $< \dot{\Phi} >= f(u)$, on obtient la caractéristique classique de la fréquence du signal d'erreur en mode « free-run » (Fig. 6.10). La plage centrale correspond à la zone $\mid \omega_0 - \omega_{vco} \mid < K$ de largeur $2K$. Le signal d'erreur possède une forme sinusoïdale pour $\Delta\omega >> K$ et un taux de distorsion harmonique de plus en plus élevé lorsque $\Delta\omega \to K$. Ce signal étant périodique, il peut se développer en séries de Fourier. Cresser [Cresser 82] donne une méthode de calcul et montre que le coefficient α_n (cf. Eq. 3.33b) de la série s'écrit :

$$\mid \alpha_n \mid^2 = 2\pi \left(\frac{\sqrt{\Delta\omega^2 - K^2}}{K} \right) \left[\frac{\mid \Delta\omega \mid - \sqrt{\Delta\omega^2 - K^2}}{K} \right]^{2n} . \tag{6.14}$$

On a reproduit sur la figure Fig. 6.11 le spectre FFT du signal d'erreur obtenu avec l'oscilloscope. L'amplitude est en dB et on vérifie la dépendance linéaire de l'amplitude des harmoniques en fonction de la fréquence.

Effet de la phase initiale L'effet de la phase initiale a été observé numériquement pour $u > 1$. Supposons pour cela :

$$u_4(t) = \mu G \sin(\Phi(t) + \Phi_0). \tag{6.15}$$

Suivant la valeur de Φ_0, l'allure des courbes est différente et le niveau continu moyen n'est pas constant (Fig. 6.12). D'un point de vue expérimental on retrouve cette caractéristique en rétablissant le couplage continu de l'oscilloscope permettant de ne plus supprimer la valeur moyenne de la tension.

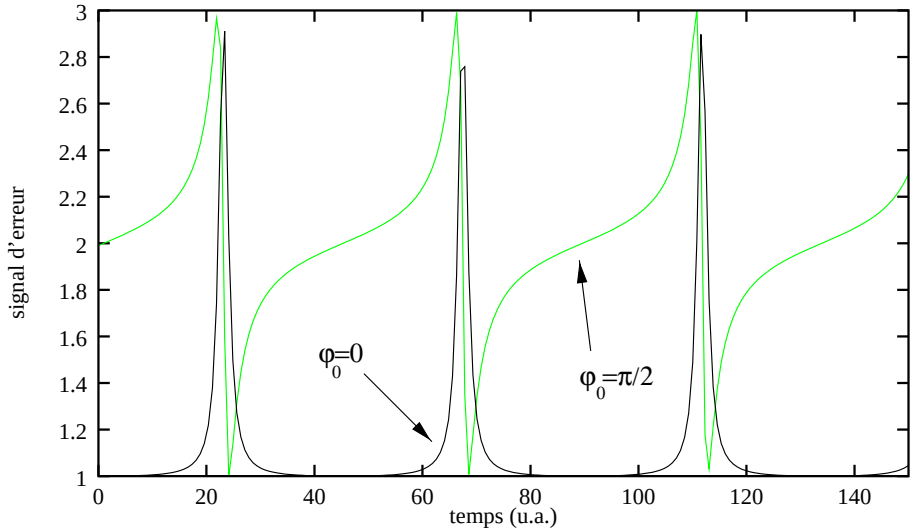


FIG. 6.12 – *Influence de la phase initiale pour $u > 1$*

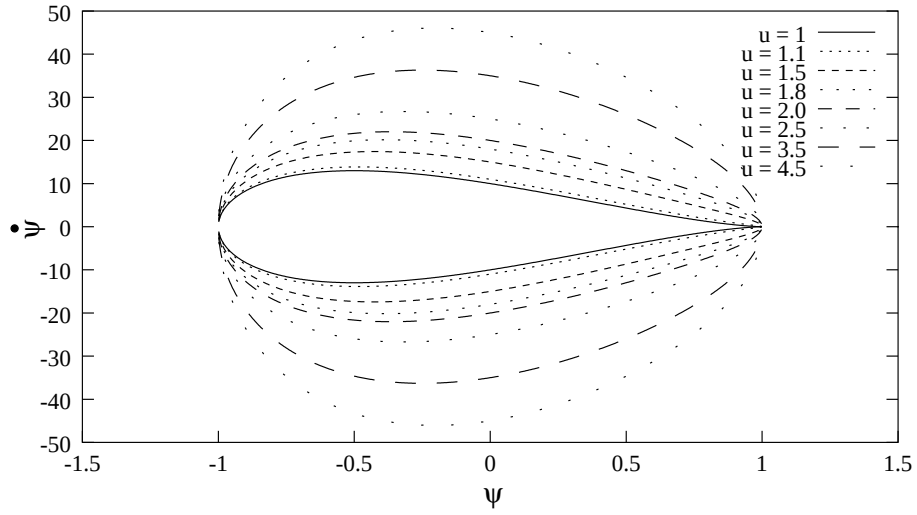


FIG. 6.13 – *Plan de phase de la PLL en régime périodique pour différentes valeurs de u*

Calcul d'un Hamiltonien dans le cas oscillant Comme dans tous les systèmes oscillant, on peut associer un Hamiltonien traduisant la conservation d'une certaine quantité [Dos Santos 97]. En dérivant (6.7) on a

$$\ddot{\Phi} = -K\dot{\Phi}\cos\Phi = -K(\Delta\omega - K\sin\Phi)\cos\Phi, \tag{6.16}$$

$$\ddot{\Phi} = -K\Delta\omega\cos\Phi + K^2\sin\Phi\cos\Phi. \tag{6.17}$$

L'évolution de la phase est donc équivalente à celle d'une particule dans un potentiel $V(\Phi)$ donné par

$$V(\Phi) = -\int \ddot{\Phi}d\Phi = K\Delta\omega\sin\Phi + \frac{K^2}{2}\cos^2\Phi + Cte. \tag{6.18}$$

L'énergie totale $\mathcal{H} = T(\dot{\Phi}) + V(\Phi)$ s'écrit alors

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{\Phi}^2 + K^2\cos^2\Phi) + K\Delta\omega\sin\Phi, \tag{6.19a}$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta\omega^2 + K^2) = E_{tot}. \tag{6.19b}$$

Cette quantité est bien constante puisqu'elle ne dépend ni de $\dot{\Phi}$ ni de Φ. Nous avons voulu vérifier expérimentalement cette propriété dans le cas de la PLL pour $u > 1$. La construction de l'espace de phase $(\Phi, \dot{\Phi})$ nécessite la mesure de la phase du signal d'erreur, ce qui est expérimentalement difficile par rapport à la mesure du signal d'erreur lui-même.

Établissons alors l'Hamiltonien $\mathcal{H}(\Psi, \dot{\Psi})$ associé à la variable $\Psi = \sin\Phi$ représentant le signal d'erreur. On pose alors $\Psi = \sin\Phi$ et $\dot{\Psi} = \dot{\Phi}\cos\Phi$, que l'on insère dans (6.19a), et qui donne

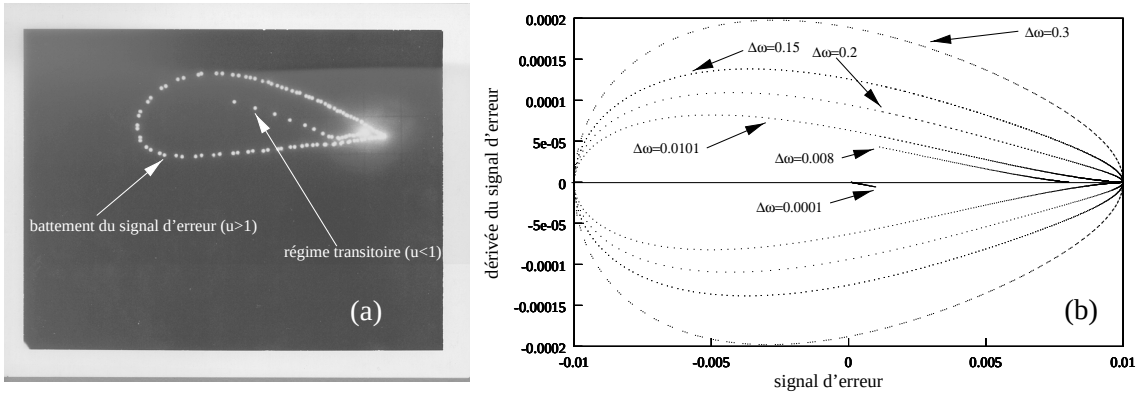


FIG. 6.14 – *Portrait de phase du système d'équations associé à la PLL*

$$\mathcal{H}(\Psi, \dot{\Psi}) = \frac{\dot{\Psi}^2 + K^2(1-\Psi^2)^2}{2(1-\Psi^2)} + \Delta\omega K\Psi. \tag{6.20}$$

Si on se place à $\mathcal{H}(\Psi, \dot{\Psi}) = \mathcal{H}_0$, on peut alors tracer le plan de phase $(\Psi, \dot{\Psi})$ en exprimant $\dot{\Psi}$ en fonction de Ψ, on a alors

$$2\mathcal{H}_0(1-\Psi^2) = \dot{\Psi}^2 + K^2(1-\Psi^2)^2 + 2\Delta\omega K\Psi(1-\Psi^2), \tag{6.21}$$

soit

$$\dot{\Psi} = \pm 2(1-\Psi^2)[\mathcal{H}_0 - \Delta\omega K\Psi - \frac{K^2}{2}(1-\Psi^2)]. \tag{6.22}$$

La figure Fig. 6.13 donne l'expression de $\dot{\Psi}$ pour différentes valeurs de $u = \frac{\Delta\omega}{K}$. La valeur $u = 1$ donne la courbe limite du plan de phase. On a alors $\mathcal{H}_0 = \Delta\omega^2$ et

$$\dot{\Psi} = \pm\Delta\omega^2(1-\Psi^2)(1-\Psi)^2. \tag{6.23}$$

Les courbes du plan de phase tendent vers une ellipse lorsque $\Delta\omega \to \infty$, signe d'une évolution sinusoïdale du signal d'erreur.

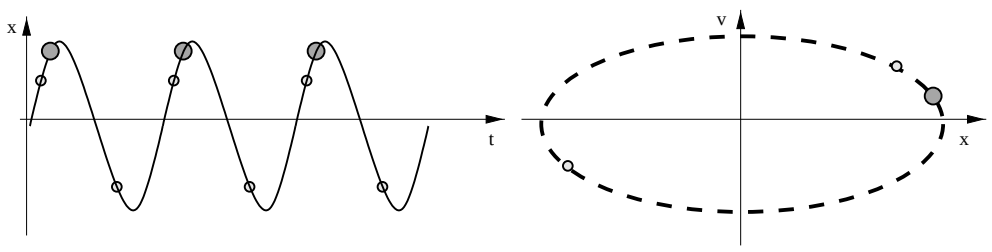


FIG. 6.15 – *Périodicité détectée par échantillonnage*

Étude des portraits de phase Les portraits de phase sont construits à partir des variables $\dot{\Psi}$ et Ψ issues des simulations. Celui de la figure Fig. 6.14(b) est associé à l'équation (6.7) pour différentes valeurs de $\Delta\omega$ et pour $K = 0,01$. À côté, en (a) nous avons la photo d'un portrait de phase réalisé à partir de l'expérience. Elle est obtenue en plaçant un oscilloscope numérique en mode Lissajoux et en plaçant sur la voie X le signal d'erreur et sur la voie Y la dérivée du même signal. L'avantage des portraits de phase par rapport au plan de phase est que l'on peut les obtenir expérimentalement (non sans difficultés) et numériquement même dans le cas synchronisé. Dans les deux cas (a) et (b), le régime transitoire est visible et tend vers l'état stable ($\dot{\Phi} = 0$, $\Phi = Cte$).

Pour construire les portraits de phase, on place dans le plan $(\Psi, \dot{\Psi})$ une série de n points correspondant à l'état du système aux instants ndt, où dt est le pas d'échantillonnage de la simulation ou de l'oscilloscope numérique. C'est une vision stroboscopique du système ; elle permet également de faire apparaître les périodicités. Ainsi, un plan de phase construit avec un échantillonnage correspondant à un multiple de la période du système présentera un point dans l'espace des phases (Fig. 6.15), alors qu'un échantillonnage avec un diviseur p de celle-ci donnera p points. En revanche, si l'échantillonnage T_{ech} est très proche de la période T, le point décrira l'espace des phases avec une évolution très lente correspondant au battement $\mid T - T_{ech} \mid$. Enfin, si les portraits présentent une région de points, c'est que l'on est proche d'un échantillonnage entier ou rationnel, mais que l'une des fréquences (T ou T_{ech}) est instable. Les portraits de phase sont donc un moyen très puissant pour détecter les périodicités dans les systèmes. On a porté sur la figure Fig. 6.16 trois portraits de phase construits par des échantillonnages différents. Nous avons choisi une simulation où la fréquence du signal d'erreur est

$$\omega_{batt} = \sqrt{\Delta\omega^2 - K^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}\ 10^{-2} = 4\ .10^{-2} Hz \tag{6.24}$$

soit une période de $T = 25$ s. Le pas de la simulation était de $dt = 0.01$ s. D'après la figure (a), on observe une périodicité de $n = 10$ points, en effectuant un échantillonnage de 25×0.01=0.25s. On a alors :

$$\frac{T}{n \times 0.25} = 10. \tag{6.25}$$

D'après la figure (b), un échantillonnage de $150\times$ 0.01=1.5 fait apparaître une périodicité de $n = 5$ points. On a alors :

$$\frac{T}{n \times 1.5} = \frac{10}{3}. \tag{6.26}$$

De façon générale, un échantillonnage effectué à T_{ech} faisant apparaître n points dans le

portrait de phase rend compte d'une période T du système donnée par :

$$\frac{T}{nT_{ech}} = \frac{p}{q}, \tag{6.27}$$

et la période se déduit de (6.27) par :

$$T = nT_{ech}\frac{p}{q}. \tag{6.28}$$

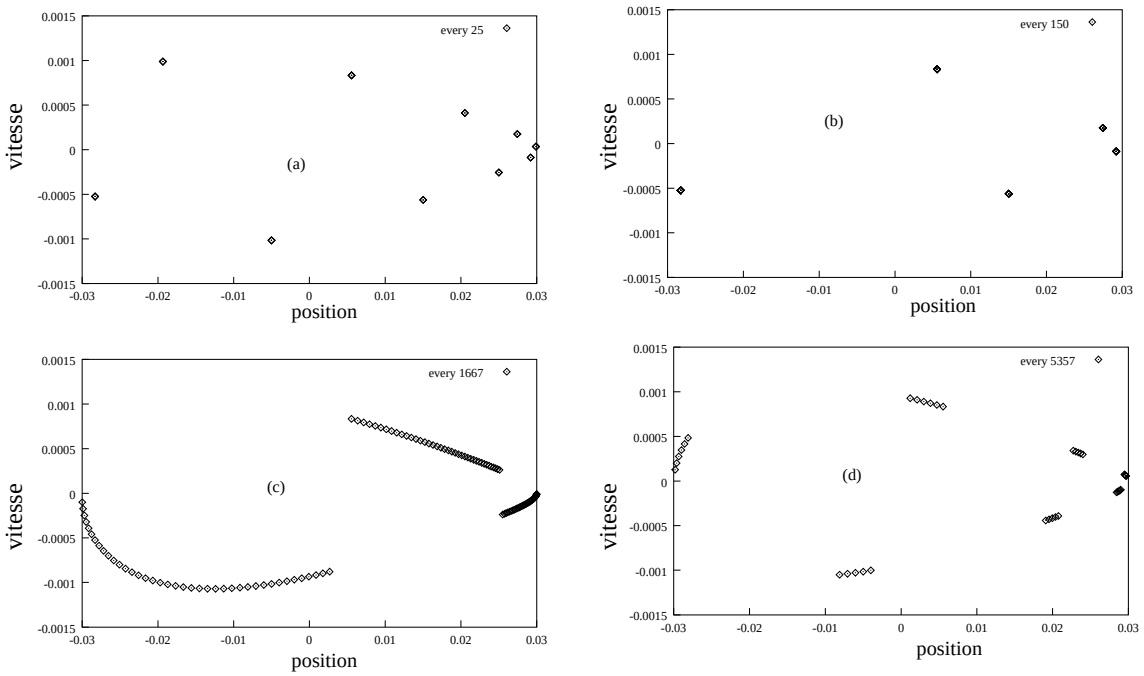


FIG. 6.16 – *Influence de l'échantillonnage T_{ech} pour la construction des portraits de phase- (a) $T_{ech} = 0,25s$, (b) $T_{ech} = 1,5s$, (c) $T_{ech} = 16,67s$, (d) $T_{ech} = 53,57s$*

Méthode pour déterminer les périodes

- on cherche une périodicité apparente dans le portrait de phase. Pour (a) on a $n = 10 = 2 \times 5$
- On multiplie la période d'échantillonnage par n : $T'_{ech} = nT_{ech}$. Si on a un point, alors $T_{ech} = pT$
- on divise alors l' échantillonnage T'_{ech} par les diviseurs d de n
  - si on a d points, d ne divise pas p
  - si on a encore un point, d divise p et on recommence avec p/d...

– ... et on recommence pour tous les diviseurs. La période du système sera la dernière.

Inversement, on peut déterminer l'échantillonnage qui nous fait apparaître une périodicité apparente. Dans le cas de la figure Fig. 6.16, on a $T = 25$. Si on veut faire apparaître 3 points, il faut que

$$3 = \frac{25}{0.01}\frac{p}{q}. \tag{6.29}$$

Le couple $(q = 1667, p = 2)$ sera très proche d'un bon échantillonnage comme le montre la figure (c). La figure (d) fait apparaître une période 7 avec le couple $(q = 5357, p = 15)$

Dans les deux cas, la taille des groupements rend compte de l'écart ε entre les périodes $\frac{T_{ech}}{T}$ et le couple (q, p) :

$$\varepsilon = \left| \frac{T_{ech}}{T} - \frac{p}{q} \right|. \tag{6.30}$$

Nous verrons dans le paragraphe 6.7 que cette relation est associée à un certain critère de résolution. Ici, la résolution est celle de notre capacité à voir les périodicités dans les portraits de phase.

Nous avons développé cette méthode d'analyse de la PLL car elle permet d'introduire les propriétés arithmétiques des fréquences par le biais de l'échantillonnage. Cet échantillonnage est une certaine forme de projection du signal comme nous l'avons présenté dans les chapitres 2 et 5. Il nous apporte des propriétés du signal par rapport au type de projection que l'on fait. Ainsi, la totale connaissance du signal temporel nécessite une infinité de projections. En revanche, si l'on montre que certaines sont équivalentes (d'un point de vue arithmétique), on peut alors en limiter le nombre sans pour autant perdre de l'information. Cette méthode apporte de l'importance à l'arithmétique et à l'aspect temporel du signal dans son analyse.

La puissance de cette méthode d'analyse réside aussi dans sa facilité à mettre en œuvre expérimentalement. En effet, le portrait de phase expérimental de la PLL non synchronisée obtenu en utilisant l'oscilloscope en mode Lissajoux (Fig. 6.14(a)) en est la preuve.

Ajoutons une parenthèse concernant l'importance que va prendre la qualité de la fréquence d'échantillonnage numérique. En effet, pour une telle étude, cette qualité doit être irréprochable. En fait, nous sommes dans le même cas que pour la mesure des oscillateurs : l'échantillonnage doit être meilleur que le système à étudier. Comme l'échantillonnage est réalisé à partir d'un oscillateur interne de grande stabilité, il est étonnant de constater que les oscilloscopes numériques actuels (tels que le HP54645A) ne possèdent pas d'entrée asservissement pour un pilote extérieur de meilleure qualité, même si leur pilote interne reste de très bonne qualité. Il se dessine alors une perspective d'étude des signaux par

échantillonnage utilisant la puissance des études spectrales actuelles, mais pouvant être adaptées aux systèmes non linéaires quelconques, si l'on accepte le traitement temporel.

Étude globale

Les mesures de bruit de phase classiques sont réalisées pour des conditions expérimentales proches de $\Delta\omega = 0$, et pour des valeurs de K de l'ordre du Hz. De cette manière, le spectre du signal d'erreur est directement proportionnel au spectre de phase et aucune correction n'est nécessaire (cf. chapitre 2). On a donc une plage de synchronisation très étroite, et une fluctuation au centième de Hz de l'une des fréquences (f_0 ou f_{vco}) change la valeur de u de 1% . Le système peut se retrouver proche de la valeur $u = 1$ (synonyme de forte non-linéarité) si l'on n'est pas au centre de la plage. Ce raisonnement peut être analogue pour une petite fluctuation de K pouvant provenir de μ , G ou k, d'autant plus que K n'est généralement donné qu'à 10% près ! Ainsi, l'étude de la zone complète $0 \leq u \leq 1$ trouve son utilité.

Cependant, l'essentiel des propriétés intéressantes de cette région se situe dans le régime transitoire ou dans le spectre puisqu'ensuite le signal est continu. Connaissant les limites de l'étude spectrale dans les conditions non linéaires et la difficulté à mesurer avec précision le régime transitoire, nous avons choisi de traiter globalement la dynamique de la PLL, c'est-à-dire pour $u \in [0, +\infty]$, en y recherchant des propriétés communes indépendantes de la valeur de u. Ainsi, on espère en étudiant le système pour $u > 1$, caractériser aussi celui-ci pour $u < 1$. C'est d'ailleurs dans cet esprit que devront être faites les mesures de bruit si l'on veut en extraire de nouvelles propriétés.

Pour cela, en posant $z = \frac{K\sqrt{u^2-1}}{2}$ avec $z \in \mathbb{C}$, on a déjà écrit la solution générale (6.8) par

$$\Phi(t) = 2 \arctan \left(u^{-1} \left(1 + 2Z/K \tan \left(Z(t - t_0) \right) \right) \right), \tag{6.31}$$

où z est réel si $u \geq 1$ et imaginaire sinon. Cette notation possède l'avantage de traiter la variable dans le plan complexe indépendamment de la valeur de u. La discontinuité de la solution présente pour $u = 1$, se trouve transposée sur la propriété de z. Ainsi, la quantité physique réelle représentée par la basse fréquence du signal d'erreur lorsque $u > 1$ reste une propriété physique correspondant à une fréquence mais imaginaire. En développant $\tan zt$, (6.8) devient

$$\Phi(t) = \left(u^{-1} \left(1 + 2Z/K \frac{e^{izt} - e^{-izt}}{e^{izt} + e^{-izt}} \right) \right), \tag{6.32}$$

et l'on constate que la solution s'écrit comme une fonction d'exponentielle quelque soit la valeur de u. On a alors dans les deux cas cette caractéristique physique qu'est la fréquence de battement.

Comme pour les ondes planes, le cas $z \in i\mathbb{R}$ donne une fréquence imaginaire qui correspond à un amortissement ou à une amplification. Si on a e^{izt} ce sera une oscillation si $z \in \mathbb{R}$, un amortissement si $z \in i\mathbb{R}$ et $Im(z) > 0$, et une amplification si $z \in i\mathbb{R}$ et $Im(\omega) < 0$.

Il faut maintenant essayer d'imaginer comment se comporte la solution par rapport à une perturbation. La moindre perturbation se traduit certainement par une propriété de z plus générale, avec éventuellement une présence dans tout le plan complexe. Nous serons donc en présence d'un système où se côtoient en permanence des processus d'amplification et d'amortissement exponentiels combinés à des comportements périodiques. Nous sommes exactement dans un cas de non-linéarité où se mêlent chaos et régularité. Dans le cas simple ci-dessus où la solution est connue, l'amortissement l'emporte pour $z \in i\mathbb{R}$ et l'oscillation également pour $z \in \mathbb{R}$.

L'étude générale de la boucle en utilisant cette propriété a été faite mais n'a pas apporté de propriétés intéressantes, peut-être par manque de persévérance. On a cependant constaté, *a posteriori*, que le changement de variable exponentiel permettait à Cresser [Cresser 82] de simplifier les calculs des coefficients de Fourier (6.14) de la solution en transformant l'équation non linéaire (6.7) en l'équation linéaire

$$\ddot{s} - i\Delta\omega\dot{s} - \frac{K^2}{4}s = 0, \tag{6.33}$$

par le changement de variable

$$e^{i\Phi} = -\frac{2\dot{s}}{Ks}. \tag{6.34}$$

Cet exemple montre une fois de plus que les problèmes non linéaires peuvent, dans certains cas, se résoudre par des méthodes linéaires. Il existe donc des systèmes non linéaires que l'on peut totalement caractériser par des méthodes linéaires. L'étude de la PLL du premier ordre en est un exemple.

6.4 Perturbation de la PLL par des harmoniques

L'origine de la perturbation du modèle précédent par des composantes harmoniques peut être due à leur présence dans le signal ω_0, dans le VCO ou à leur génération par le mélangeur (cf. Annexe A.2.2). On montre aussi en Annexe A que l'équation vérifiée par la phase Φ peut s'écrire (A.13) :

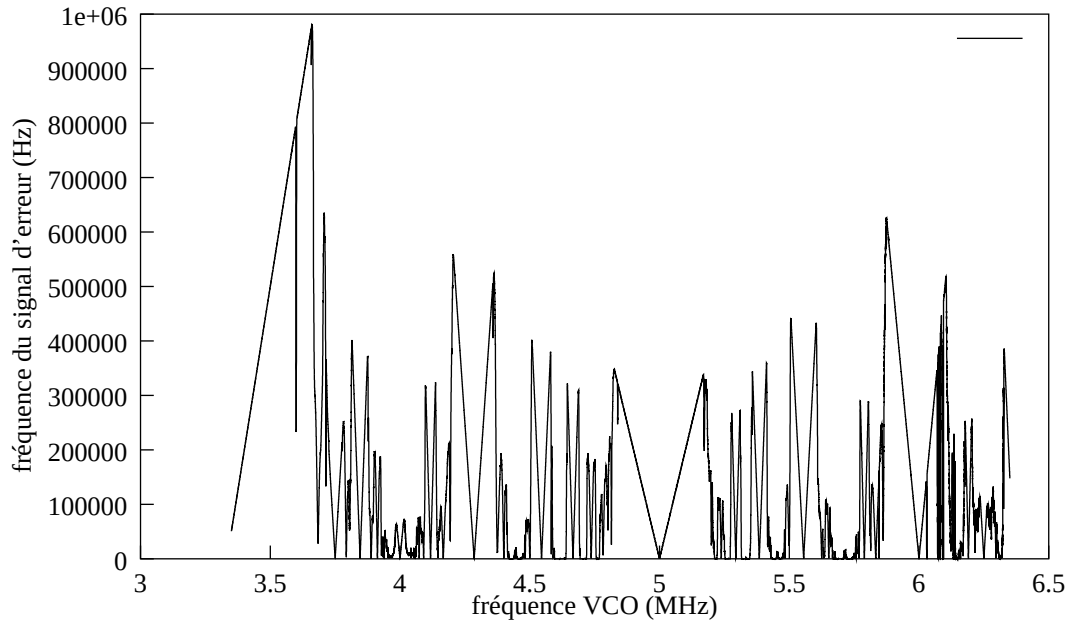


FIG. 6.17 – *Spectre d'intermodulation en fréquence de la PLL.*

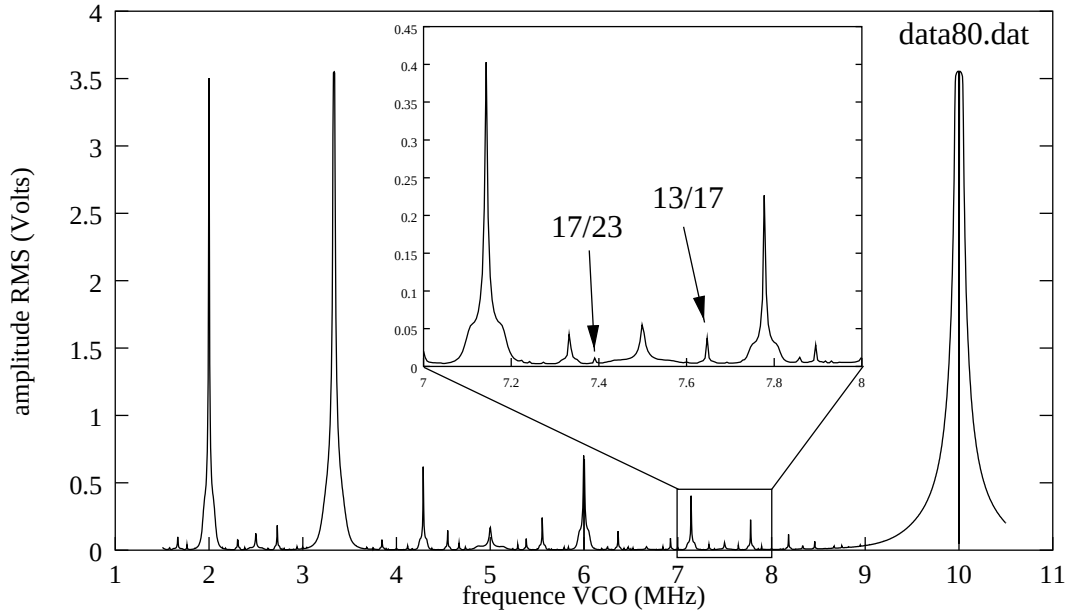


FIG. 6.18 – *Spectre d'intermodulation en amplitude de la PLL.*

$$\dot{\Phi} = \Delta\omega - k\sum_{(p,q)} A_{(p,q)} \sin(p\omega_0 - q\omega_1)t, \quad (p,q) \in N, \tag{6.35}$$

où ω_0 et ω_1 sont les fréquences angulaires des signaux en entrée du mélangeur (cf. Fig. 6.5). Les valeurs de p et q peuvent être quelconques dans le cas général. On montre en Annexe C que la solution de (6.35) possède une propriété de symétrie si q est impair.

De plus, on considère en général que les deux oscillateurs ω_0 et ω_1 génèrent un signal sinusoïdal et que l'essentiel des harmoniques proviennent du mélangeur et sont surtout impairs (voir Fig. 6.4). Nous avons donc étudié (6.35) avec p, q impairs mais il faut savoir que l'étude est équivalente avec p, q quelconques, provenant du mélangeur ou des signaux d'entrée (Cf. Annexe C).

Choisissons la perturbation du fondamental ($p = 1$, $q = 1$) par un seul harmonique ($p = 3$, $q = 1$). L'équation (6.35) s'écrit alors en utilisant (A.13)

$$\dot{\Phi} = \Delta\omega - kA_{11} \sin(\omega_0 - \omega_1)t - kA_{31} \sin(3\omega_0 - \omega_1)t, \tag{6.36}$$

soit

$$\dot{\Phi} = \Delta\omega - kA_{11} \sin\Phi - kA_{31} \sin(\Phi + 2\omega_0 t). \tag{6.37}$$

De la même manière que dans le cas général, cette équation peut être écrite en deux systèmes autonomes. En posant $\psi = \Phi + 2\omega_0 t$ et $\Delta\omega^{(p,q)} = p\omega_0 - q\omega_1$, on obtient :

$$\dot{\Phi} = \Delta\omega^{(1,1)} - K_1 \sin\Phi - K_2 \sin\psi, \tag{6.38}$$

$$\dot{\psi} = \Delta\omega^{(3,1)} - K_1 \sin\Phi - K_2 \sin\psi, \tag{6.39}$$

où $K_1 = kA_{11}$ et $K_2 = kA_{31}$. On a $K_1 = K$ et on rappelle que ce coefficient est proportionnel au gain de l'amplificateur lorsque l'on se trouve dans la bande passante du filtre. Expérimentalement, on a $\omega_0 \sim \omega_1 \sim 5$ MHz, soit $3\omega_0 - \omega_1 \sim 10$ MHz. Cette perturbation se trouve atténuée, donc négligeable.

Supposons maintenant $\omega_1 \sim 3\omega_0$, on a alors $\mid \omega_0 - \omega_1 \mid \sim 2\omega_0$ et $3\omega_0 - \omega_1 \sim 0$. La composante $\omega_0 - \omega_1$ est atténuée et l'autre non puisqu'elle est dans la bande passante du filtre. De ce fait, une deuxième plage de synchronisation pourra exister si $\Delta\omega^{(3,1)} < K_2$. Il existe d'ailleurs une plage de synchronisation à chaque fois que le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ est proche d'un rationnel p/q et on montre également que les plages où p et q sont pairs sont moins nombreuses. De chaque côté de la plage p/q, on observe le battement de $\Phi^{(p,q)}$ soit $\Delta\omega^{(p,q)} = p\omega_0 - q\omega_{vco}$.

À partir d'un compteur de fréquence, on peut mesurer la fréquence du signal d'erreur et obtenir la figure Fig. 6.17, en portant la fréquence du signal d'erreur en fonction de

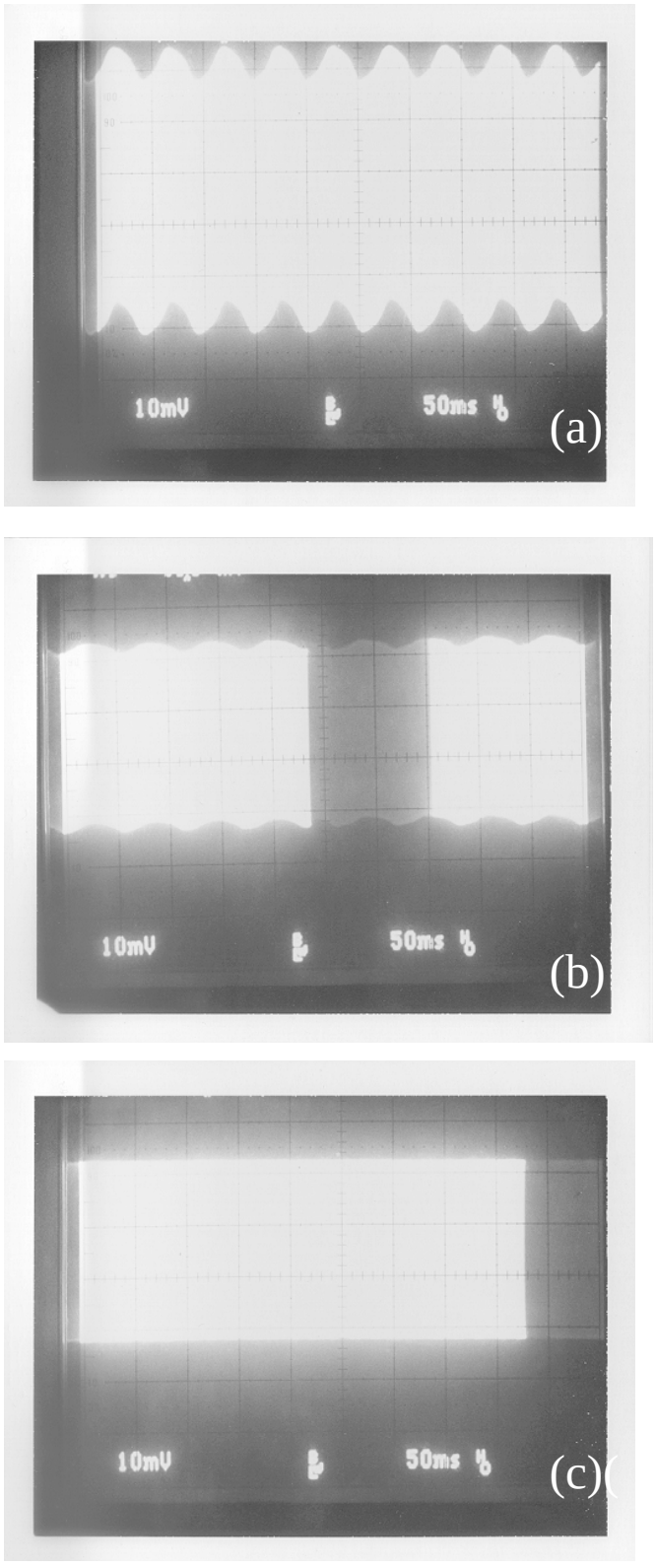


FIG. 6.19 – *Observation expérimentale de la synchronisation de l'enveloppe.*

ω_{vco} à ω_0 constant. Autour de chaque plage de synchronisation, un battement de grande amplitude apparaît et peut facilement être détecté avec un watt-mètre (Fig. 6.18). Cet enregistrement montre la possibilité de synchronisation où intervient un très grand nombre d'harmoniques (le 23^{e} harmonique est visible dans le détail).

Lorsque l'on fait évoluer la fréquence du VCO de 5 MHz à 0, le signal d'erreur possède une plage de synchronisation autour de 5 MHz et génère ensuite un battement de fréquence de plus en plus élevé qui se trouve atténué par le filtre lorsque celle-ci dépasse 300 kHz. Mais elle est encore comptée par le compteur jusqu'à ce que le signal d'erreur soit trop faible ($<$5 mV). Cette condition stoppe le comptage jusqu'à ce qu'une autre zone de synchronisation apparaisse et génère un signal de battement. Ceci explique donc l'allure des figures expérimentales que nous obtenons.

6.4.1 Influence d'un harmonique sur la plage de synchronisation

Nous avons montré que dans la plage $p/q = 1/1$, la perturbation par l'harmonique 3 n'était pas visible du fait de la faible valeur de K_2. Mais il existe des régions où les valeurs K_1 et K_2 de deux harmoniques possèdent environ la même amplitude. C'est le cas proche du rapport 6/7 c'est-à-dire lorsque $\frac{\omega_{vco}}{\omega_0} = \frac{4.303385}{5.020626}$. Dans ce cas, le signal d'erreur est de fréquence $f_0 - f_{vco} \sim 717$ kHz, mais modulé par un signal basse fréquence d'environ 60 Hz provenant de $6\omega_0 - 7\omega_{vco}$. Nous avons mesuré l'amplitude des raies à 717 kHz avec l'analyseur HP8591A et à 60Hz avec le NSC pour trouver un rapport d'amplitude $\frac{K_1}{K_2} = 12$. Nous avons ainsi étudié expérimentalement l'influence des harmoniques.

Les figures Fig. 6.19(a), (b) et (c) sont des photographies du signal d'erreur. La porteuse est d'environ 717 kHz. La figure Fig. 6.19(a) montre le signal d'erreur dans le cas de la PLL ouverte, c'est-à-dire où il n'y a pas de correction du VCO. La PLL agit comme un mélangeur et génère un signal de 717 kHz modulé par une enveloppe à 60 Hz. Lorsque l'on referme la boucle, l'équation de la phase est (6.38) puisque K_1 et K_2 sont du même ordre de grandeur. L'enveloppe possède le même comportement que le signal d'erreur lui-même lorsqu'il se trouve proche de sa zone de synchronisation (Fig. 6.6) ; elle possède une fréquence $f_{batt}^{(env)}$ donnée par (6.13) en remplaçant $\Delta\omega$ et K par les valeurs $\Delta\omega^{(6,7)}$ et $K^{(6,7)}$ issues de leur évaluation expérimentale. Dans cette expérience, nous avions $K^{(6,7)} = 58$ Hz. Or $\Delta\omega^{(6,7)} = 61$ Hz, donc $f_{bf} = 18.9$ Hz.

Calcul d'erreur. On a $K^{(6,7)} = 58 \pm 1$ Hz et $\Delta\omega = 61$ Hz. De (6.13) on tire

$$f_{batt}\delta f_{batt} = K\delta K + \Delta\omega\delta(\Delta\omega) = K\delta K, \tag{6.40}$$

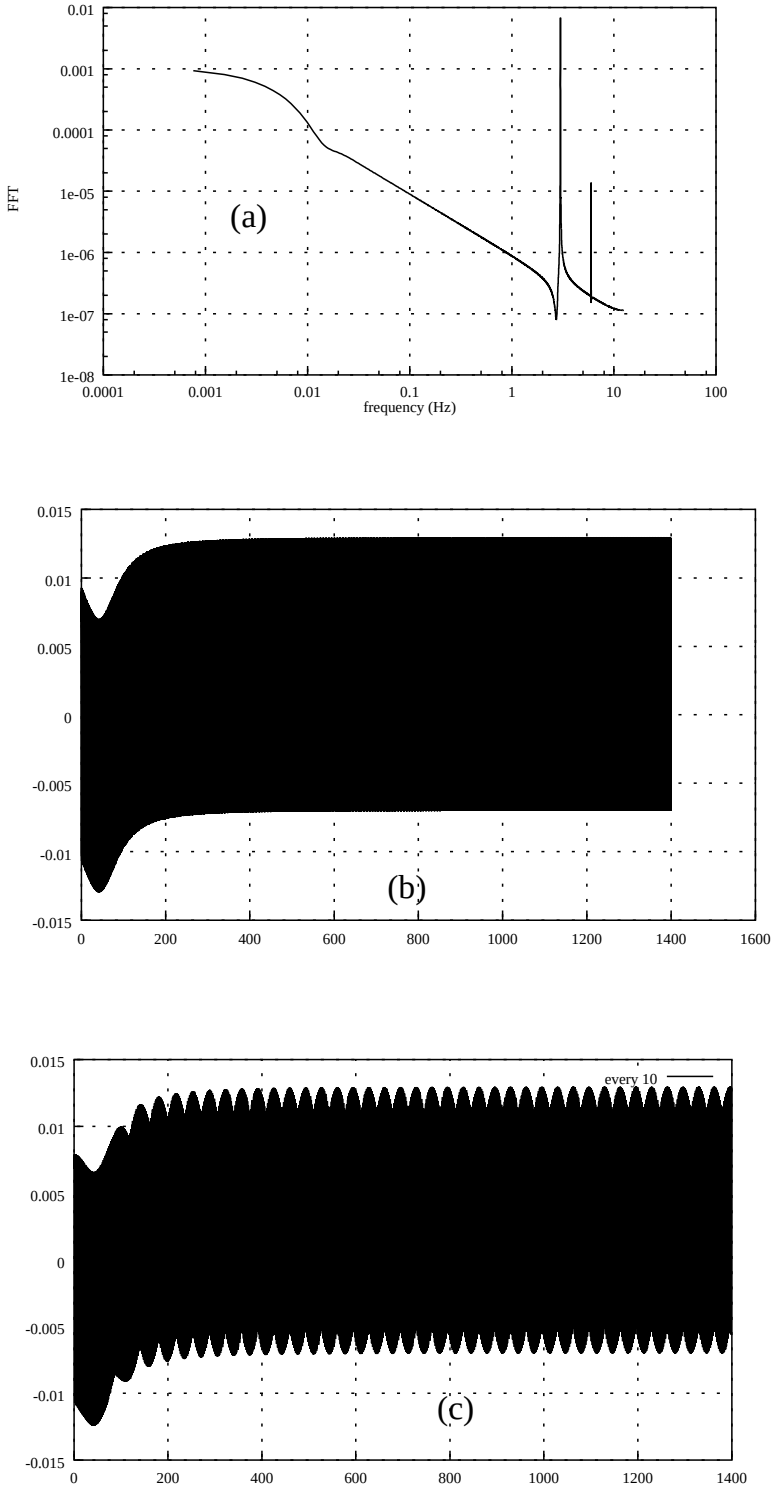


FIG. 6.20 – *Observation numérique de la synchronisation de l'enveloppe. (a) spectre FFT (b) synchronisation de l'enveloppe (c) modulation d'enveloppe secondaire observée par échantillonnage de période 10.*

car $\delta(\Delta\omega) \sim 10^{-10}$. Donc

$$\frac{\delta f_{batt}}{f_{batt}} = \delta K \frac{K}{\Delta\omega^2 - K^2}. \tag{6.41}$$

On constate que l'incertitude est amplifiée lorsque $\Delta\omega \to K$. On a alors $\frac{\delta f_{batt}}{f_{batt}} = 0.16$, soit

$$f_{batt} = 19 \pm 3Hz, \tag{6.42}$$

ce qui correspond à la période évaluée a partir de la figure Fig. 6.19. La basse fréquence de la modulation suit la loi (6.13) et rend compte d'un phénomène de synchronisation de la modulation.

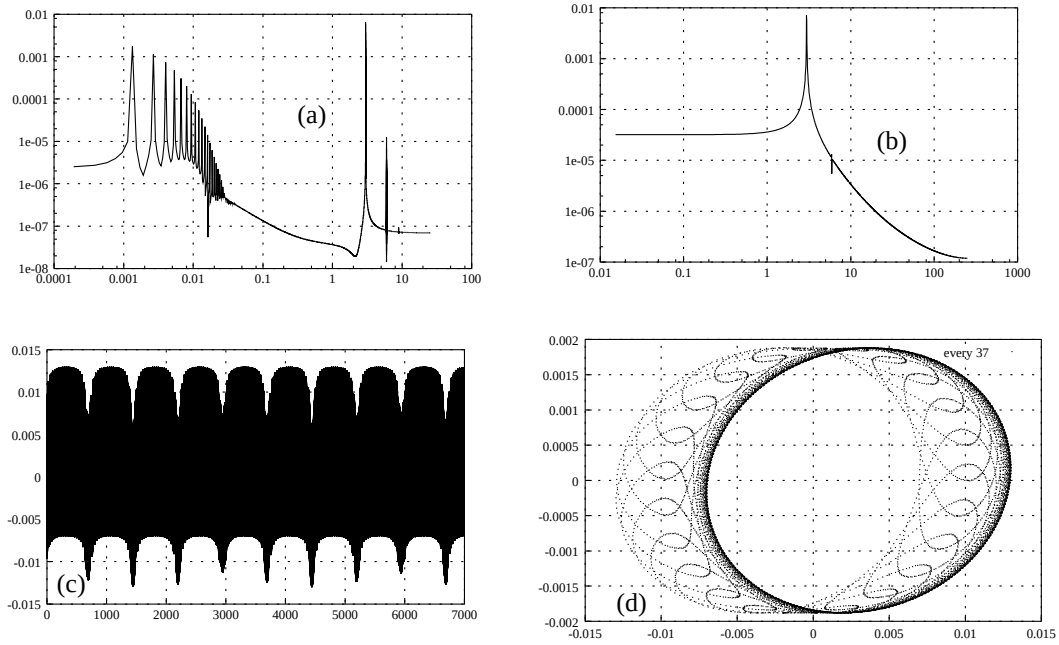


FIG. 6.21 – *Évolution du signal d'erreur proche de la plage de synchronisation secondaire 6/7.*

6.4.2 Vérifications numériques

Une résolution de l'équation (6.38) a été réalisée par le programme `arnold7.f` en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (cf. Annexe B). Les paramètres d'entrée du fichier `arnold7.fic` sont les suivants :

$$K_1, \omega_0, K_2, \omega_{vco}, dt, N, ech, trans, \Phi_0, \psi_0, taux, lev, eps \tag{6.43}$$

où dt est le pas d'intégration, N le nombre total d'itérations et ech la période d'échantillonnage pour le traçage de l'espace de phase et la réduction du nombre de points

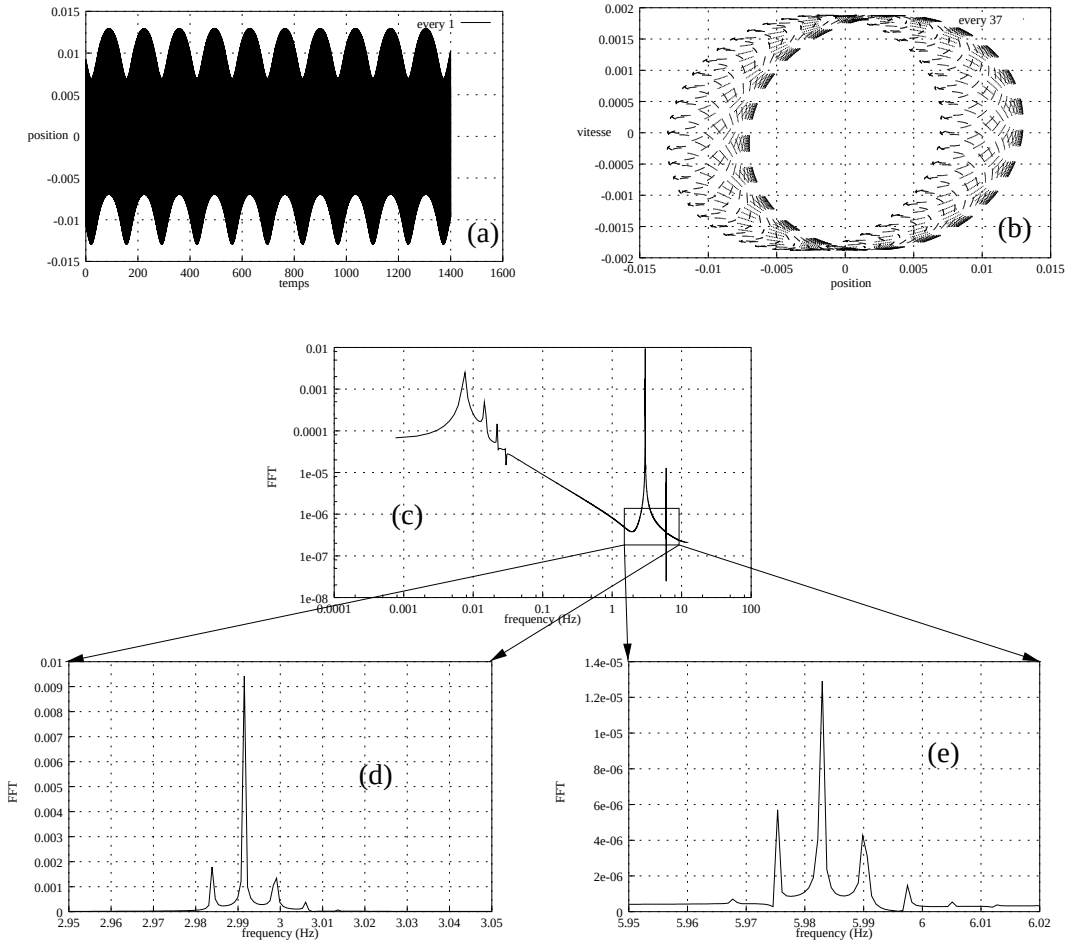


FIG. 6.22 – *Évolution du signal d'erreur loin de la plage de synchronisation secondaire 6/7.*

dans le calcul de la FFT (la fréquence de coupure haute est plus petite). Les paramètres $taux, lev, eps$ ne sont pas utilisés ici. Les figures Fig. 6.20(b), Fig. 6.21(c) et Fig. 6.22(a) redonnent les résultats observés expérimentalement. Une première simulation (Fig. 6.20) a été effectuée pour les valeurs

$$K_1 = 10^{-2}, \omega_0 = 18.003, K_2 = 10^{-3}, \omega_{vco} = 21. \tag{6.44}$$

Nous sommes donc à l'intérieur du palier de synchronisation 6/7. En effet $|\ \frac{6}{7}21 - 18.003\ | = 10^{-3} < K_2 = 10^{-3}$ et l'on est même au bord de la bande, ce qui explique le temps de synchronisation de l'enveloppe (b). Seules les simulations permettent d'observer ce phénomène. Le signal d'erreur est de fréquence $\omega_{BF} \sim 4Hz$ (comme le montre (a)). Le spectre basse fréquence de 0.001 à 0.01 reflète le régime transitoire de la synchronisation de l'enveloppe. La figure (c) montre l'importance du taux d'échantillonnage des points. Ce phénomène (équivalent au phénomène d'aliasing des oscilloscopes numériques) permet

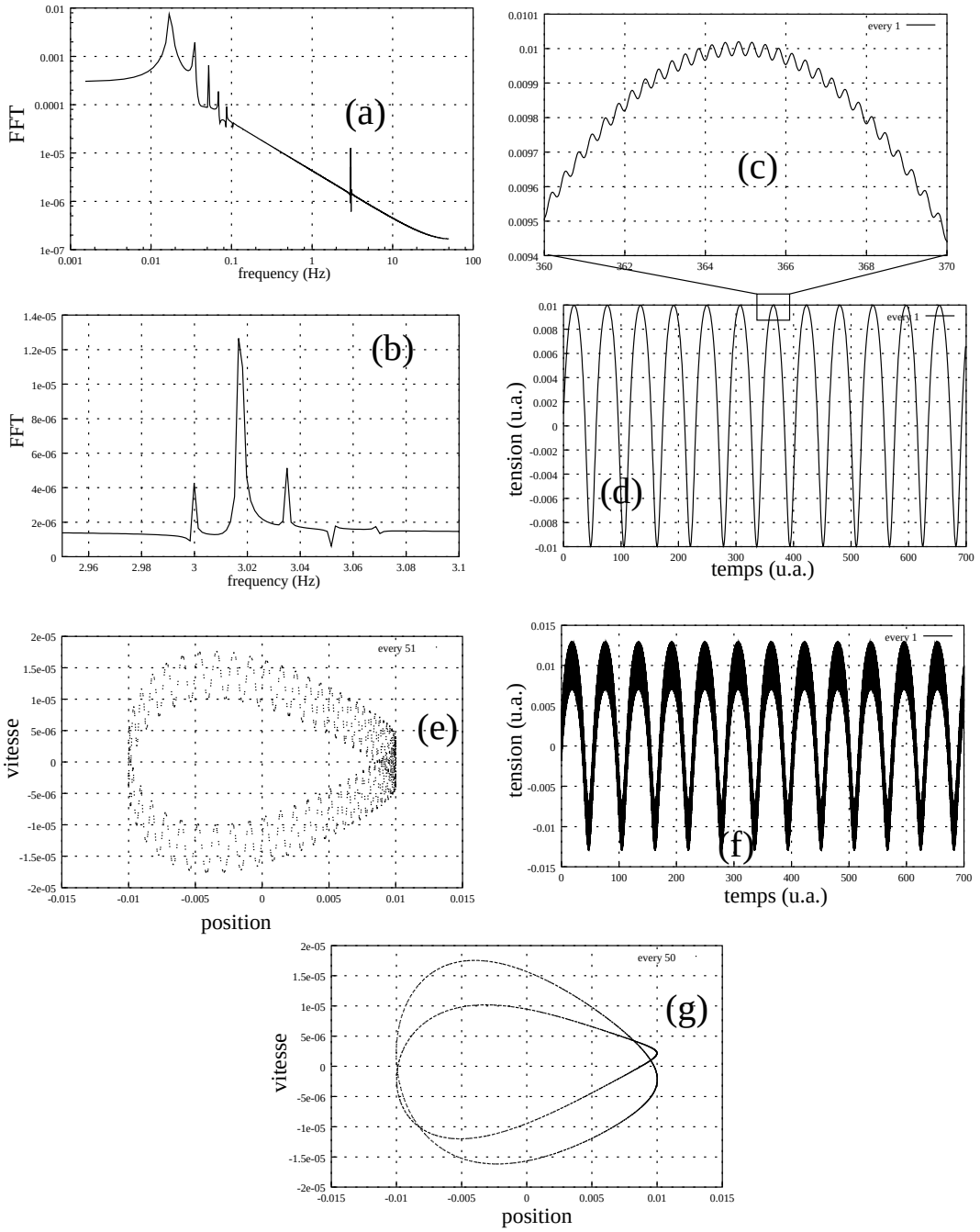


FIG. 6.23 – *Caractéristique du signal d'erreur proche de la plage 1/1 et soumis à une perturbation de l'harmonique 6/7.*

de faire apparaître une modulation de l'enveloppe d'un niveau plus faible. La courbe (c) est obtenue avec les mêmes données numériques que (b) mais affichées une fois sur 10.

Les courbes de la figure Fig. 6.21 sont réalisées pour $\omega_0 = 18.0033$ soit au bord de la plage 6/7. La forme de la modulation (c) est identique à celle de la figure Fig. 6.11 tradui-

sant la proximité de la plage de synchronisation. Le maximum de la modulation semble évoluer avec une très basse fréquence (1/1000) ; elle indique la présence de grandes variables temporelles. Cette remarque avait déjà été faite lors de l'étude du modèle d'Arnold. De grandes constantes de temps apparaissent près de la limite des plages. La simulation (b) effectuée avec $K_2 = 0$ permet de constater la modification du spectre avec l'apparition des composantes basses fréquences de la modulation. Le portrait de phase (d) montre l'oscillation principale de la porteuse matérialisée par le cercle plus foncé. Afin de mettre en évidence une période dans le système nous avons effectué un échantillonnage spécial.

La figure Fig. 6.22 montre le comportement du système lorsque nous nous éloignons de la plage 6/7 ; la fréquence de modulation d'environ 0.01 est plus grande (a) et plus pure (c) spectralement. Une modulation est maintenant bien visible (d) et (e) autour des harmoniques de la porteuse. Le système semble présenter plus de régularité comme le montre le plan de phase (b).

Nous présentons enfin ce dernier résultat (Fig. 6.23) obtenu pour

$$K_1 = 10^{-2}, \omega_0 = 21.02, K_2 = 10^{-5}, \omega_{vco} = 21, \tag{6.45}$$

pour lequel on a

$$\mid \omega_0 - \omega_{vco} \mid = 0.02 > K_1 \quad \text{et} \quad \mid 6/7\omega_0 - \omega_{vco} \mid = 3. \tag{6.46}$$

On se trouve proche de la plage principale 1/1 en présence d'une petite perturbation par l'harmonique 6/7. Le signal d'erreur (d) est un signal de fréquence ~ 0.01 Hz possédant une composante haute fréquence de 3 Hz bien visible sur (c). Une plus forte perturbation ($K_2 = 10^{-2}$) est visible sur (f). Les spectres FFT (a) et (b) confirment le fait qu'une perturbation du rapport 1/1 par l'harmonique 6/7 possède la même structure spectrale que la perturbation du rapport 6/7 avec l'harmonique 1/1 (Fig. 6.22(c) et Fig. 6.23 (a)). Avec une période d'échantillonnage de $T = 50dt = 0.5$, nous observons (g) deux figures séparées indiquant qu'il existe dans le système une fréquence propre f tel que $f = 2p/q$, avec $p, q \in N$ (cf. Eq. (6.27)) , et ce avec une très grande précision puisque la même simulation observée avec un pas de 51 est totalement différente (Fig. 6.22(e)).

Discussion

Ces différentes simulations ont permis de vérifier le comportement expérimental de la PLL proche des zones de synchronisation. On montre l'équivalence entre les comportements à l'intérieur des zones pour tous les rapports, de même que celui à l'extérieur. La

présence d'une synchronisation secondaire de la modulation est constatée et une augmentation des variables temporelles lentes apparaît lorsque l'on s'approche de la limite de la plage de synchronisation. Ainsi, en présence d'autres perturbations harmoniques, comme il en existe dans le mélangeur par exemple, de nombreuses zones de synchronisation seront également présentes mais à des échelles d'amplitude différentes.

De plus, on confirme l'importance des méthodes d'analyse temporelle du signal par échantillonnage. La période d'échantillonnage étant exacte (pas de l'algorithme), les périodes apparentes sont des périodes du système et on ne peut que constater la précision du procédé.

Cette simulation confirme la présence d'une structure multiéchelle de la synchronisation dans toute la gamme de fonctionnement de la PLL en régime non linéaire. Ainsi, les propriétés du bruit des oscillateurs que l'on observe dans le centre de la zone 1/1 sont la conséquence de phénomènes qui interviennent également dans les autres zones p/q cachées par le battement du signal principal. On doit donc trouver dans ce signal de battement ces propriétés et notamment les invariants périodiques que l'on peut observer et mesurer numériquement et expérimentalement avec des méthodes d'échantillonnage temporelles, moyennant une bonne régularité de cet échantillonnage, réalisé par exemple avec un oscillateur ultra-stable.

6.5 Perturbation de la PLL par du bruit blanc

C'est en observant l'allure du signal d'erreur lorsque l'on se trouve proche de $u = 1$ que nous avons choisi d'étudier l'influence du bruit sur la PLL. Nous avons alors choisi d'additionner une source de bruit blanc de fréquence au signal de fréquence ω_0 placé en entrée du mélangeur (Fig. 6.24). La source de bruit blanc provient d'un générateur de bruit pseudo-aléatoire SOLARTRON. Nous avons vérifié à l'analyseur de spectre sa forme et on peut garantir qu'il est blanc jusqu'à 10kHz. Ce sera donc la limite de nos

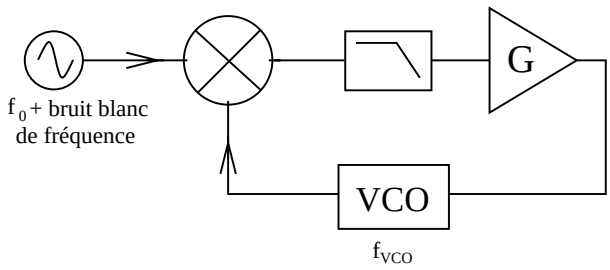


FIG. 6.24 – *La PLL perturbée par une source de bruit blanc*

études spectrales. Cette source de bruit blanc a été appliquée à l'entrée modulation de fréquence du Racal Dana que nous avons cette fois-ci utilisé en oscillateur principal, car la caractéristique de la varicap linéaire ne modifie pas l'allure du bruit (cf. Fig. 6.2) ; on retrouve donc un bruit blanc de fréquence associé à ω_0. Pour le VCO, nous avons utilisé soit un synthétiseur de fréquence ADRET, soit l'oscillateur OSA. Mais dans tous les cas, le taux de modulation de bruit blanc était largement supérieur au bruit de n'importe quel élément de la boucle (mélangeur, oscillateur, etc.). L'avantage d'utiliser des oscillateurs performants nous permet d'observer les phénomènes avec un niveau de modulation assez faible.

En présence de bruit blanc de fréquence $\Gamma(t)$ additionné à la fréquence ω_0, la phase $\Phi(t)$ du signal d'erreur vérifie :

$$\dot{\Phi}(t) + K \sin \Phi(t) = \omega_0 + \Gamma(t) - \omega_{vco} \tag{6.47}$$

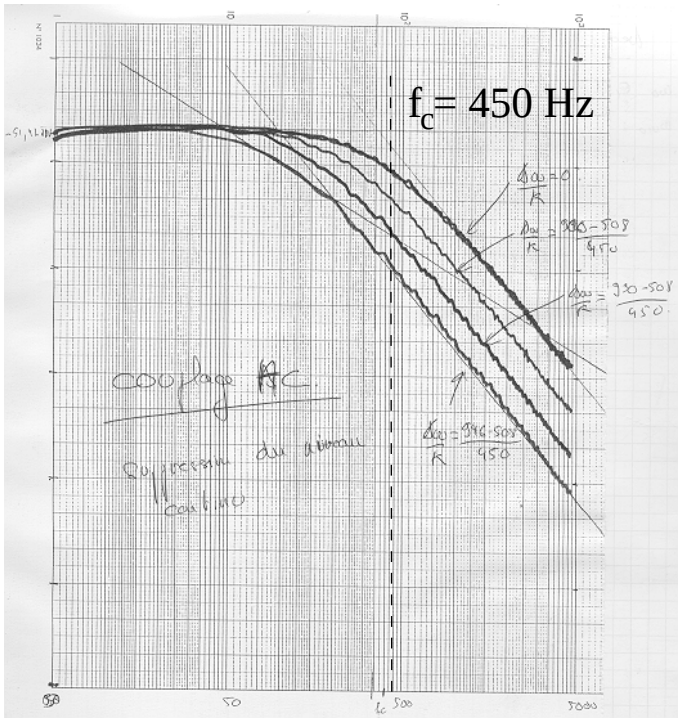


FIG. 6.25 – *Spectre du signal d'erreur d'une entrée modulée par du bruit blanc de fréquence mesurée avec l'analyseur en mode « couplage alternatif » ($K = f_c = 450Hz$)*

$$\dot{\Phi}(t) + K \sin \Phi(t) = \Delta\omega + \Gamma(t) \tag{6.48}$$

Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire comprenant des termes déterministes et stochastiques. La solution d'une telle équation ne peut être approchée que dans certains

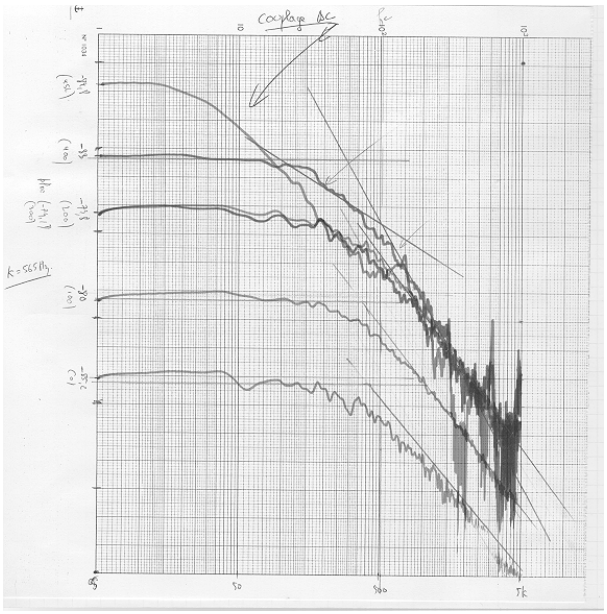


FIG. 6.26 – *Même mesure que celle de la figure Fig. 6.25 avec un couplage continu (DC).*

cas particuliers en utilisant l'équation de Fokker-Planck [Risken 89]. En revanche, dans le cas linéaire $\sin\Phi \sim \Phi$, elle peut être traitée par une équation de Langevin ou par la méthode de Laplace exposée au chapitre 2.

Nous avons montré que le spectre $S_{u_4(t)}(f)$ du signal d'erreur $u_4(t)$ est proportionnel au bruit de fréquence de ω_0 ($\Gamma(t)$ dans notre cas) pour $f << K$, et proportionnel au spectre de phase pour $f >> K$. Nous avons porté sur la figure Fig. 6.25 les différents spectres réalisés pour différentes valeurs de $\Delta\omega$ à K constant. Lorsque l'on s'approche de la zone limite $\Delta\omega = K$, une modification de la transformation du bruit autour de la fréquence de coupure $f_c = K$ apparaît. Cette courbe a été réalisée avec l'analyseur de spectre NSC, sur un moyennage de 100 enregistrements effectués dans la bande [5Hz ; 5kHz] en couplage alternatif (suppression du niveau continu du signal d'erreur). Nous avons effectué les mêmes mesures en couplage continu (Fig. 6.26), montrant l'augmentation du niveau de bruit lorsque l'on s'approche de la limite $\Delta\omega = K$. On vérifie également la modification de la valeur de la « fréquence de coupure ». En fait, une transformation du bruit a lieu dans cette région. Les photographies de la figure Fig. 6.27 montrent les spectres réalisés pour $\Delta\omega = 0$ et $\Delta\omega = 426$Hz pour une valeur de $K = 450$Hz. Dans ces conditions expérimentales, le spectre n'a pu être obtenu pour des valeurs de $\Delta\omega$ plus proche de 450 Hz.

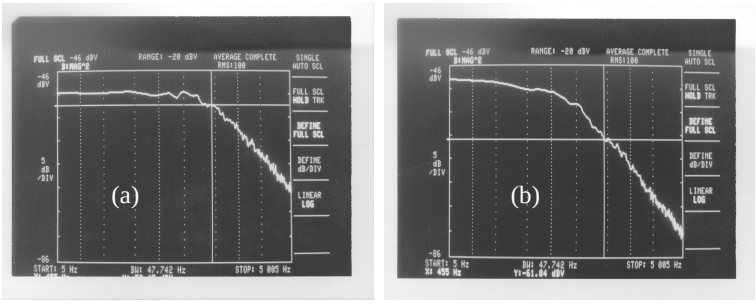


FIG. 6.27 – *Spectre du signal d'erreur avec $u = 0$ (a) et $u = 0.946$ (b)*

6.5.1 Désynchronisation par le bruit blanc

Les spectres réalisés pour des valeurs de $\Delta\omega$ plus proche de 450 Hz sont confrontés au problème de rupture de synchronisation. En effet, chaque enregistrement du spectre entre 5 Hz et 5 Khz nécessite au moins 0.2 seconde, multiplié par le nombre de moyennages effectués, soit 20 secondes. Si l'on s'approche de trop près de cette zone, il existe une probabilité croissante de l'apparition d'un battement, c'est à dire une rotation complète de la phase du signal d'erreur souvent appelée « cycle skipping ». Un tel phénomène se traduit concrètement par une augmentation du niveau de bruit rendant la mesure du spectre fausse. Plusieurs possibilités existaient comme la réduction du niveau de bruit ; dans ce cas, le phénomène apparaîssait plus loin. Si l'on réduisait le nombre de moyennages, la mesure était moins significative. Cette expérience nous a confirmé l'existence d'une zone très instable où les mesures spectrales sont à leur limite de validité.

6.5.2 Vérification numérique du phénomène de désynchronisation

Pour vérifier ce résultat, nous avons effectué deux simulations parallèles : l'une en présence de bruit et l'autre exempte. Le bruit, introduit à l'aide du générateur de bruit pseudo-aléatoire numérique, était appliqué à la fréquence ω_0 sous la forme

$$\omega_0(1 + taux(-0.5 + ran(1))), \tag{6.49}$$

où $ran(1)$ génère un réel equi-distribué dans $[0, 1]$. Ainsi, les fluctuations de fréquence sont centrées autour de ω_0. Le paramètre taux est donné par (6.43). Cette démodulation numérique est nécessaire pour étudier le bruit autour de la porteuse. L'étude des limites de notre procédé est présentée sur la figure Fig. 6.28. Les conditions sont $\omega_0 = 18.3$, $\omega_{vco} = 21$, $K_1 = 10^{-2}$, $K_2 = 0$ pour (a). Suivant le niveau du bruit blanc, l'évolution du spectre RF du signal bruité n'est pas visible ((b) $taux$=0,5 ; (c) $taux$=0,05), alors que les

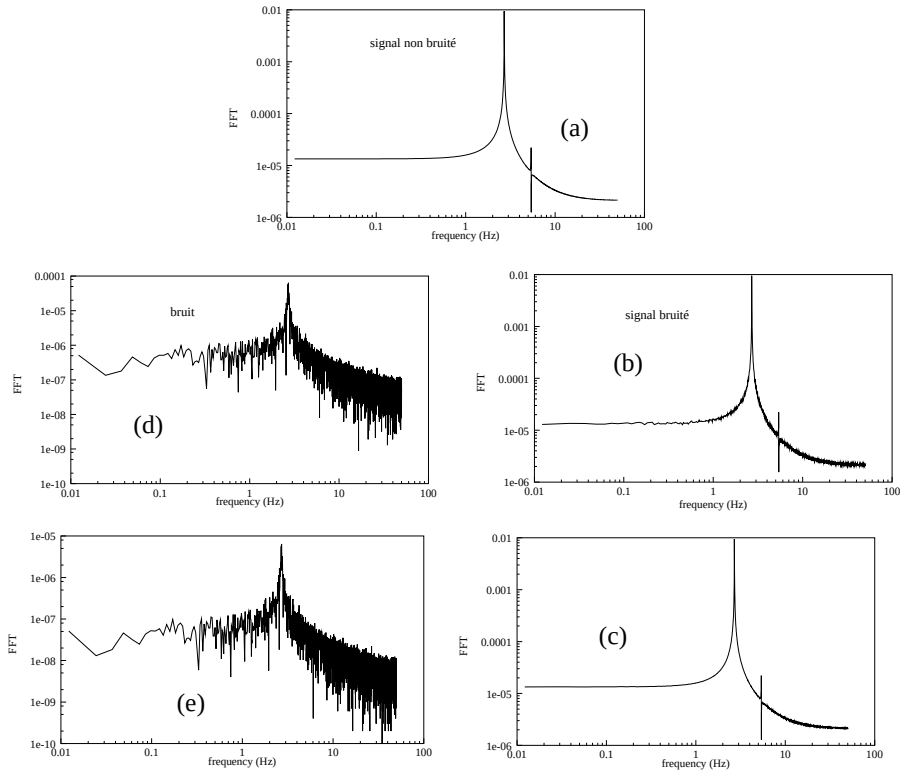


FIG. 6.28 – *Principe de démodulation numérique. La différence entre les spectres bruités (b) et (c) et le spectre non bruité (a) donne les spectres de bruit (d) et (e). (b)-(d) : $taux = 0,5$; (c)-(e) : $taux = 0,05$*

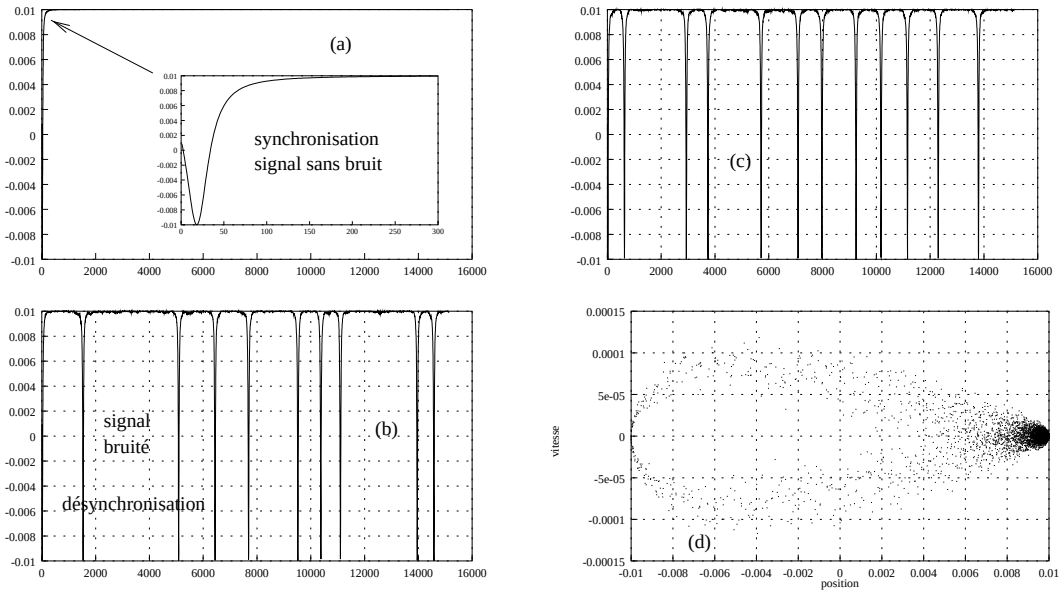


FIG. 6.29 – *Observation numérique de la désynchronisation*

bruits issus de la démodulation numérique ((d) et (e)) rendent compte de cette différence. Malheureusement, la porteuse n'est pas totalement éliminée.

L'évolution temporelle du signal d'erreur non bruité (a) et bruité (b) est donnée sur la figure Fig. 6.29. Les paramètres sont $K_2 = 10^{-2}$ et $\Delta\omega = 9.999\,10^3$. La courbe (a) montre la synchronisation alors que la courbe (b) met en évidence le phénomène de désynchronisation par le bruit ($taux = 10^{-3}$). Cette désynchronisation n'apparaît que très rarement alors que $\Delta\omega$ est toujours supérieur à K pour $ran(1) > 0.6$. En augmentant la valeur de $taux$ à 1.1 10^{-3}, on vérifie une augmentation du processus de désynchronisation (c). On note des zones de fluctuations irrégulières entre chaque pic. Le portrait de phase (d) présente la signature du bruit dans l'espace de phases : aucune périodicité n'apparaît.

Une autre simulation étudiée par FFT a été faite proche de $\Delta\omega = K$ à l'intérieur de la bande. La courbe (a) de la figure Fig. 6.30 représente le spectre du signal d'erreur calculé au centre de la plage, et le spectre (b) calculé en limite de zone. On note une remontée du niveau du bruit. Globalement, ces simulations à l'intérieur de la zone font apparaître le même phénomène de modification du spectre. En effet, on peut évaluer l'influence d'une variation infinitésimale $\delta\omega_0$ sur la phase Φ un effectuant un calcul d'erreur sur (6.9), soit

$$\delta\Phi = \delta(\arcsin\frac{\Delta\omega}{K}), \tag{6.50}$$

$$\delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta\omega}{K}\right)^2}}\delta\left(\frac{\Delta\omega}{K}\right), \tag{6.51}$$

ce qui donne

$$\delta\Phi = \frac{1}{K\sqrt{1-\left(\frac{\Delta\omega}{K}\right)^2}}\delta\omega_0. \tag{6.52}$$

Si $\Delta\omega \to K$, le dénominateur tend vers l'infini conduisant à une amplification des fluctuations de phases. L'amplification des fluctuations s'explique ainsi par la non-linéarité de la fonction $arcsin(u)$ lorsque $\Delta\omega \to K$. Nous avons étudié les effets d'une augmentation des fluctuations de phase dans le chapitre 5, sur la forme du spectre. Nous avons vu que la propriété bornée de la phase engendrait une modification de l'allure du spectre (Fig. 5.10). On retrouve ici expérimentalement le même phénomène. Nous avons poussé la simulation jusqu'au phénomène de désynchronisation (Fig. 6.31(a)) qui produit le spectre (b). Dans cette simulation, la fréquence de coupure est $K = 1$ Hz. La modification du spectre est importante.

Plaçons-nous dans le contexte des oscillateurs et interprétons ce spectre comme étant celui d'un oscillateur. Dans les basses fréquences, il est proportionnel au spectre de fréquence de l'oscillateur. Les détails (c) et (d) de la figure Fig. 6.30 (agrandissement des

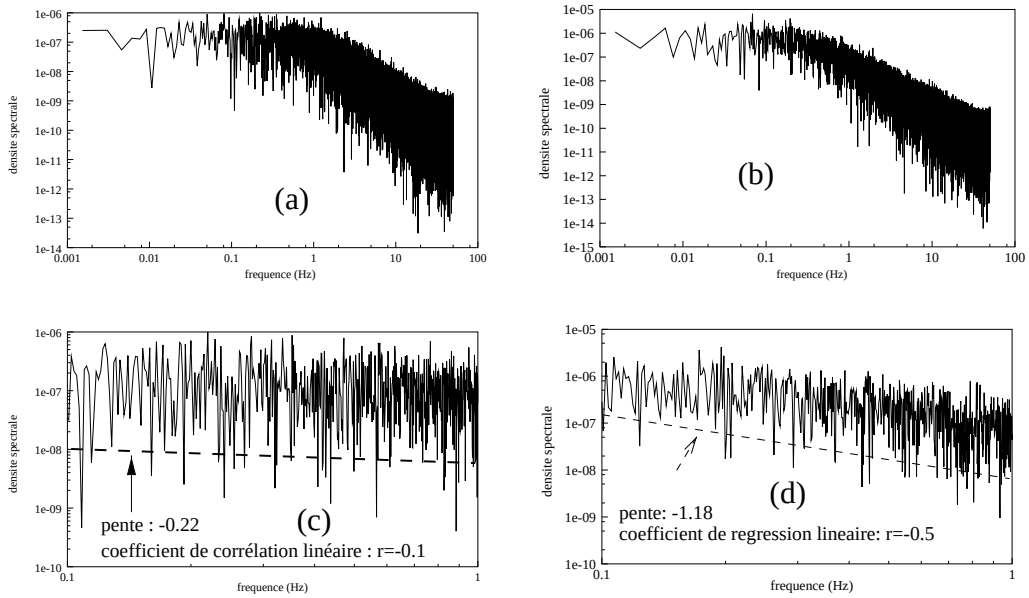


FIG. 6.30 – *Spectre FFT du signal d'erreur proche de la désynchronisation de la PLL*

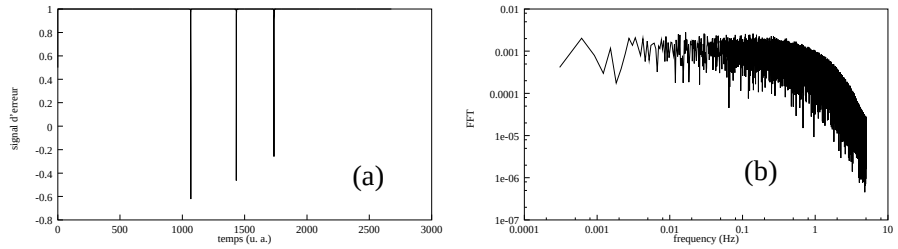


FIG. 6.31 – *Spectre FFT de la désynchronisation de la PLL*

spectres (a) et (b) pour $f \in [0,1 : 1]$) indiquent une diminution globale de la pente. Le spectre de fréquence, que l'on sait blanc, est alors transformé en spectre en $1/f^{\alpha}$ de fréquence avec $0 < \alpha < 2$, lorsque l'on s'approche de la fréquence caractéristique $f_c = K$. Effectuons le même raisonnement dans l'autre partie du spectre ($f > K$). Ici le spectre est proportionnel au spectre de phase de l'oscillateur, soit en $1/f^2$ puisque c'est du bruit blanc de fréquence. À l'approche de $f_c = K$, le spectre de phase présente une pente plus importante bien visible sur Fig. 6.31(b). De $1/f^2$, on passe à $1/f^{\alpha}$ avec $\alpha > 2$. Encore une fois, on constate une modification du bruit blanc de fréquence. Que l'on étudie le spectre de phase ou celui de fréquence, on observe la transformation du bruit blanc de fréquence vers un bruit en $1/f^{\alpha}$, avec $0 \leq \alpha \leq 2$.

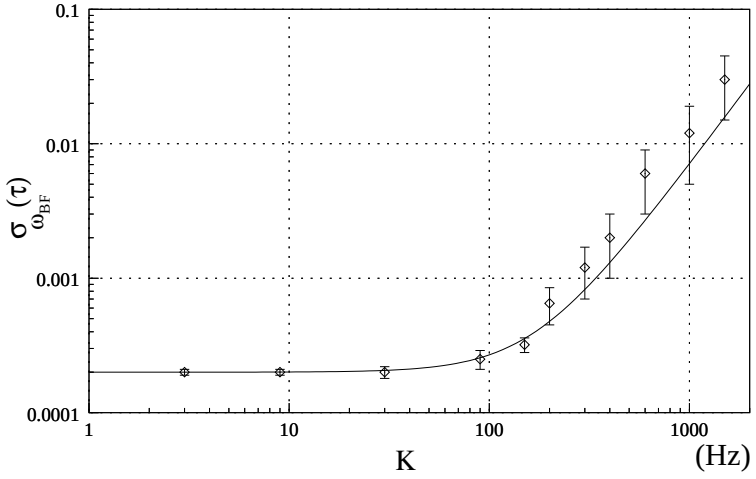


FIG. 6.32 – *Plancher de bruit du signal d'erreur en fonction de K pour* $\omega_{BF} = 170$ *Hz*

Étude du voisinage de la zone de synchronisation

Augmentation du niveau de bruit Après avoir observé, dans la zone synchronisée, l'augmentation du bruit lorsque l'on s'approche de la limite $\Delta\omega = K^-$, nous avons étudié l'approche par le versant situé de l'autre côté de la discontinuité: $\Delta\omega = K^+$. Ici, le signal d'erreur est périodique. Pour les mêmes raisons que pour les fluctuations de phase à l'intérieur de la plage, les fluctuations de fréquence s'écrivent :

$$\frac{\delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{\Delta\omega\delta(\Delta\omega)}{\Delta\omega^2 - K^2}. \tag{6.53}$$

Lorsque $\Delta\omega >> K$, la contre réaction de la boucle est négligeable et la PLL est réduite à un simple mélangeur. On retrouve les propriétés (Eq. (2.24)) énoncées au chapitre 2 :

$$\frac{\delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{\delta(\Delta\omega)}{\Delta\omega}. \tag{6.54}$$

Nous avons vérifié la relation (6.53) par une expérience en faisant varier K à ω_{BF} constant, et en faisant varier ω_{BF} à K constant.

Si on suppose $\delta(\Delta\omega) = \delta\omega_0$, on a

$$\frac{\delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{\Delta\omega\delta(\omega_0)}{\Delta\omega^2 - K^2} = \frac{\delta\omega_0}{\omega_0}\frac{\omega_0\Delta\omega}{\Delta\omega^2 - K^2}, \tag{6.55}$$

$$\frac{\delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(1 + \frac{K^2}{\Delta\omega^2 - K^2}\right)\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}. \tag{6.56}$$

Or $\omega_{BF}^2 = \Delta\omega^2 - K^2$, donc

$$\frac{\delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}\left(1 + \frac{K^2}{\omega_{BF}^2}\right). \tag{6.57}$$

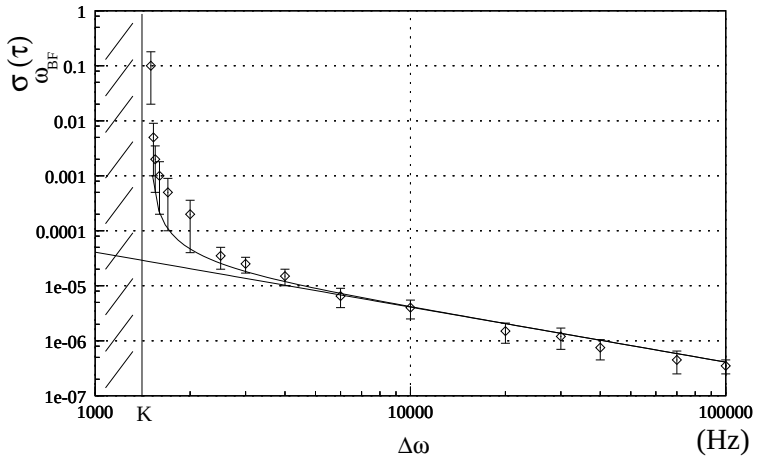


FIG. 6.33 – *Plancher de bruit du signal d'erreur en fonction de $\Delta\omega$ pour $K = 1,5$ kHz*

Les quantités $\frac{\delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}}$ et $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}$ sont des fluctuations relatives de fréquence que l'on évalue à partir d'un compteur et avec la variance d'Allan. Dans ce cas, on a

$$\sigma_{\omega_{BF}} = \sigma_{\omega_0}\omega_0 \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^2 - K^2}, \tag{6.58}$$

ou encore

$$\sigma_{\omega_{BF}} = \sigma_{\omega_0}\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(1 + \frac{K^2}{\omega_{BF}^2}\right). \tag{6.59}$$

Les courbes Fig. 6.32 et Fig. 6.33 donnent le niveau du bruit correspondant au palier de la variance d'Allan effectué sur la mesure de la fréquence du signal d'erreur. On vérifie la dépendance en K pour Fig. 6.32 et celle en $\Delta\omega$ pour Fig. 6.33. Les barres d'erreur sont évaluées en fonction de l'incertitude de mesure. Elles sont plus importantes lorsque K augmente à ω_{BF} constant, ou lorsque $\Delta\omega \to K$, ce qui revient au même. On vérifie alors l'augmentation de l'instabilité relative de fréquence lorsque $u \to 1$.

Les valeurs asymptotiques des courbes nous donnent une autre mesure de la stabilité de l'oscillateur. En effet, en utilisant Fig. 6.34, on a deux mesures indépendantes. Lorsque $K = 0$, cette mesure est équivalente à la mesure par battement soit

$$\sigma_{\omega_0} = \sigma_{\omega_{BF}}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sigma_{\omega_{BF}}\frac{\omega_{BF}}{\omega_0} = 2\ 10^{-4}\frac{170}{5\ 10^{-6}} = 6.8\ 10^{-9}, \tag{6.60}$$

avec pour incertitude

$$\frac{\Delta(\sigma_{\omega_0})}{\sigma_{\omega_0}} = \frac{\Delta\sigma_{\omega_{BF}}}{\sigma_{\omega_{BF}}} + \frac{\Delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}}, \tag{6.61a}$$

$$= \frac{\Delta\sigma_{\omega_{BF}}}{\sigma_{\omega_{BF}}} + \sigma_{\omega_{BF}}, \tag{6.61b}$$

$$= \frac{1.\ 10^{-5}}{2.\ 10^{-4} + 2\ 10^{-2}} \sim 5\ 10^{-2}, \tag{6.61c}$$

soit

$$\sigma_{\omega_0} = (6.8 \pm 0.4)\ 10^{-9}. \tag{6.62}$$

Lorsque $K \to \infty$, la pente est de 2 et on peut prendre par exemple la valeur de $\sigma_{\omega_{BF}}$ pour $K = 100$, soit (en utilisant (6.59)) :

$$\sigma_{\omega_0} = \frac{\sigma_{\omega_{BF}} \Delta\omega \omega_{BF}^2}{\omega_0 K^2}, \tag{6.63}$$

$$\sigma_{\omega_0} = 10^{-4} \frac{\omega_{BF}^2}{\omega_0 K} = 10^{-4} \frac{170^2}{5.10^8} = 5.78\ 10^{-9}. \tag{6.64}$$

L'erreur associée à $\frac{\Delta(\sigma_{\omega_0})}{\sigma_{\omega_0}}$ est celle associée aux coefficients de régression linéaire. Le fait de connaître la valeur $+2$ de la pente nous permet d'évaluer l'erreur de $\sigma_{\omega_{BF}}$ pour $K = 100$ à 10^{-5} soit

$$\frac{\Delta(\sigma_{\omega_0})}{\sigma_{\omega_0}} = \frac{\Delta(\sigma_{\omega_{BF}})}{\sigma_{\omega_{BF}}} + 2\omega_{BF} \frac{\Delta\omega_{BF}}{\omega_{BF}} = \frac{10^{-5}}{2.10^{-4}} + 2 \times 170 \times 2.\ 10^{-4} = 0,118, \tag{6.65}$$

ce qui donne

$$\sigma_{\omega_0} = (5.8 \pm 0.7)\ 10^{-9}. \tag{6.66}$$

En utilisant la figure Fig. 6.33, on a encore deux possibilités. Lorsque $\Delta\omega \to \infty$, on retrouve l'analyse par battement et l'on a

$$\sigma_{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sigma_{\omega_{BF}}. \tag{6.67}$$

Avec $\Delta\omega = 10^5$, on mesure $\sigma_{\omega_{BF}} = 3\ 10^{-7}$, ainsi

$$\sigma_{\omega_0} = \frac{10^5 3\ 10^{-7}}{5\ 10^6} = 6\ 10^{-9}, \tag{6.68}$$

avec

$$\frac{\Delta(\sigma_{\omega_0})}{\sigma_{\omega_0}} = \frac{3\ 10^{-8}}{3\ 10^{-7}} = 0.1, \tag{6.69}$$

d'où

$$\sigma_{\omega_0} = (6.0 \pm 0.6)\ 10^{-9}. \tag{6.70}$$

La deuxième méthode $\Delta\omega \to K$ est plus difficile à obtenir graphiquement puisqu'il n'existe pas de pente visible, mais avec un petit algorithme elle pourrait donner un autre résultat et ainsi augmenter la précision finale de la mesure.

En prenant les mesures (6.62) et (6.70), obtenues de façon classique, on détermine l'intervalle de σ_{ω_0} soit

$$\sigma_{\omega_0} = (6.5 \pm 0.1)\ 10^{-9}. \tag{6.71}$$

Mais si on lui rajoute la nouvelle mesure (6.66) déterminée grâce aux propriétés non linéaires de la basse fréquence proche de la zone de synchronisation on arrive à

$$\sigma_{\omega_0} = (6.3 \pm 0.1)\ 10^{-9}. \tag{6.72}$$

Nous mettons ainsi en évidence une méthode de mesure complémentaire à la méthode classique, utilisant la forme de la basse fréquence donnée par (6.13). La mesure effectuée ci-dessus pour la détermination de σ_{ω_0} pourrait très bien être appliquée pour la détermination de K. Cette méthode apporterait par exemple une précision supplémentaire de la valeur de K nécessaire pour un bon étalonnage des bancs de mesure de bruit de phase. Elle trouve donc sa place car une bonne précision de l'étalonnage n'est jamais un luxe dans le domaine du temps-fréquence.

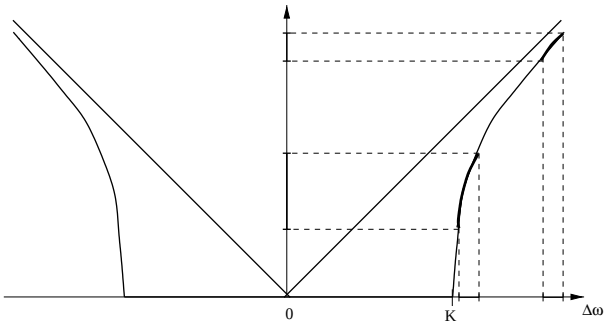


FIG. 6.34 – *Transformation du bruit proche de la zone seuil $\delta\omega = K$.*

6.5.3 Transformation du bruit proche de la zone de synchronisation : apparition de bruit en $1/f$

Le résultat précédent concernant l'augmentation du niveau de bruit s'explique assez simplement de par la forme de la fréquence du signal d'erreur. En effet, un petit écart de fréquence $\delta(\Delta\omega)$ de $\Delta\omega$ est transformé en un écart $\delta\omega_{BF}$, comme le montre la figure Fig. 6.34. Le problème se pose alors pour la région critique $\Delta\omega = K$, que nous avons appelée séparatrice et qui limite la zone de synchronisation principale du système. Dans cette configuration, le signal est très proche de la synchronisation, et génère une fréquence si basse que l'on peut éventuellement considérer que le système est synchronisé sur un certain intervalle de temps. Un observateur microscopique considérera le système synchronisé s'il l'observe pendant un temps court, alors qu'un même observateur macroscopique considérera qu'il n'est jamais synchronisé. La notion de synchronisation est un problème qu'il faut décrire par rapport à une échelle de temps. C'est un peu comme le problème de la stationnarité du bruit en 1/f: possède-t-il une dérive ou non?

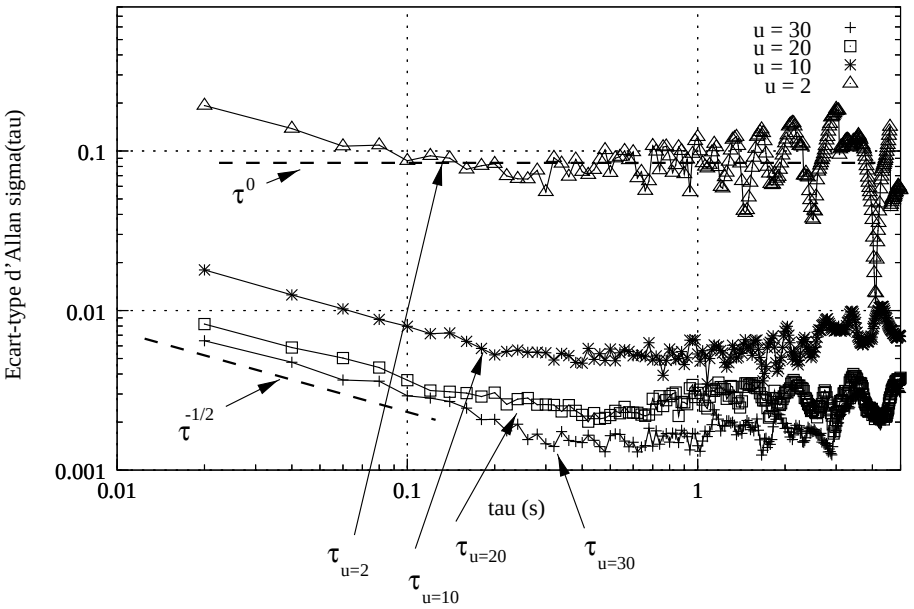


FIG. 6.35 – *Transformation du bruit blanc en bruit en 1/f (Domaine temporel).*

Lors des expériences décrites dans le paragraphe précédent, un phénomène étrange nous était apparu : il semblait que la variance d'Allan devenait de plus en plus plate à mesure que l'on se rapprochait de la valeur de $u = 1$. En fait, l'expérience consistait à mesurer le bruit de l'oscillateur OSA qui présente entre autre du bruit blanc et du bruit en $1/f$. De plus, la recherche bibliographique présentée au chapitre 2 nous indiquait que certains auteurs avaient observé des fluctuations en $1/f$ dans les systèmes non linéaires. M. Planat [Planat 92] observait, avec une carte d'Arnold dans laquelle il introduisait un paramètre perturbatif, la présence de bruit en $1/f$ dans des conditions de faible couplage non linéaire et proche des zones de synchronisation.

Enfin, les expériences réalisées dans le domaine spectral présentaient une certaine modification du spectre par la coloration du bruit blanc, certes guère significative, mais suffisamment pour éveiller notre attention. Ce sont toutes ces raisons qui nous ont poussés à effectuer des expériences que nous estimons fondamentales et qui nous permettent de valider l'ensemble de notre approche.

Le dispositif expérimental est le même que celui présenté lors de l'étude de la zone synchronisée. Le synthétiseur Racal Dana constitue l'oscillateur ω_0 modulé par une source de bruit blanc (Fig. 6.24). Le VCO est constitué de l'oscillateur OSA. La figure Fig. 6.35 présente l'écart-type d'Allan en fonction de τ pour des valeurs de $\Delta\omega$ de 45 Hz, 30 Hz, 15 Hz et 3 Hz, pour $K = 1.5$ Hz correspondant respectivement à des valeurs de $u = 30, 20, 10, 2$. Le comptage a été réalisé sur le HP 5334B (asservi sur césium) pour

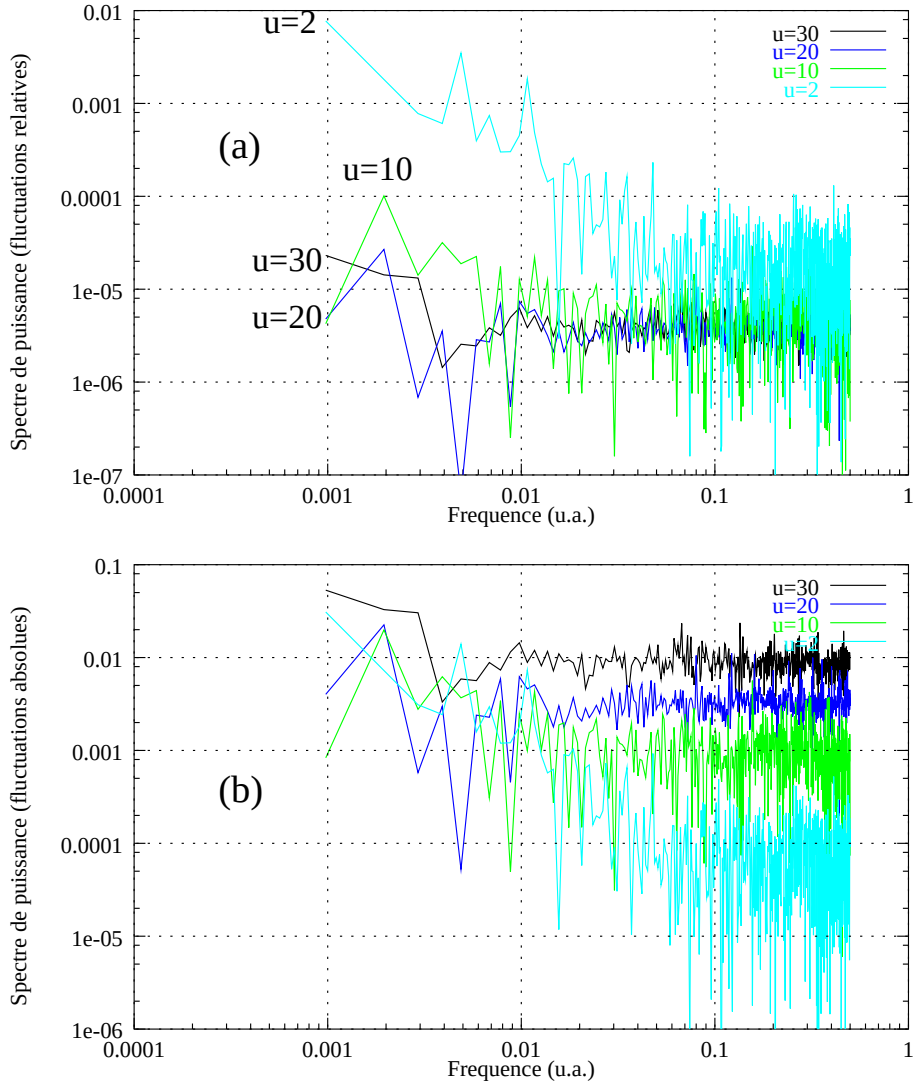


FIG. 6.36 – *Transformation du bruit blanc en bruit en 1/f (Domaine fréquentiel).*

un temps d'intégration $\tau = 0.02$ s. Chaque courbe est calculée sur $N = 2000$ mesures consécutives. Lorsque l'on est loin de la synchronisation ($u = 30$), l'écart-type rend compte de la présence du bruit blanc ($\tau^{-1/2}$) jusqu'à une valeur de $\tau = 0.7$s, ce qui correspond à un moyennage de 35 valeurs consécutives. Ensuite l'allure de la courbe présente une remontée du bruit, signature d'une dérive (τ^{+1}). Lorsque $u \to 1$, le niveau de bruit moyen augmente et la proportion de bruit blanc diminue et atteint sa limite à $\tau \sim 0.2$ pour $u = 2$ (a). La proportion de bruit blanc comprise entre $\tau \sim 0.2$ et $\tau \sim 0.7$ est alors transformée en bruit en $1/f$ caractérisé par le palier. Cette variation de pente a également été vérifiée par l'utilisation d'une FFT sur les données fréquentielles où l'on observe l'apparition de bruit en $1/f$ (Fig. 6.36). D'autres mesures ont pu être faites et de nombreuses expériences de

ce type ont mis en évidence l'apparition du bruit en $1/f$. Nous avons également transmis quelques fichiers à F. Vernotte pour qu'il applique sa méthode multi-variance [Vernotte 91] permettant de calculer les taux de bruit ; il a bien mis en évidence la disparition du bruit blanc mais, selon lui, le fichier ne correspondait pas à un bruit pouvant être décrit par un modèle en loi de puissance. Quelques fichiers ont été envoyés à D. Howe du NIST pour une confirmation de l'allure.

Nous avons aussi effectué des mesures comparatives en boucle ouverte et en boucle fermée (Fig. 6.37), faisant ressortir la transformation globale du bruit. De nombreuses mesures où nous changions de paramètres expérimentaux (comme le niveau de déclenchement du compteur par exemple) ont souvent mis en relief cette transformation du bruit blanc. La pente n'était pas toujours en $1/f$ mais souvent en $1/f^{\alpha}$ avec $\alpha \in [0.8; 1.2]$.

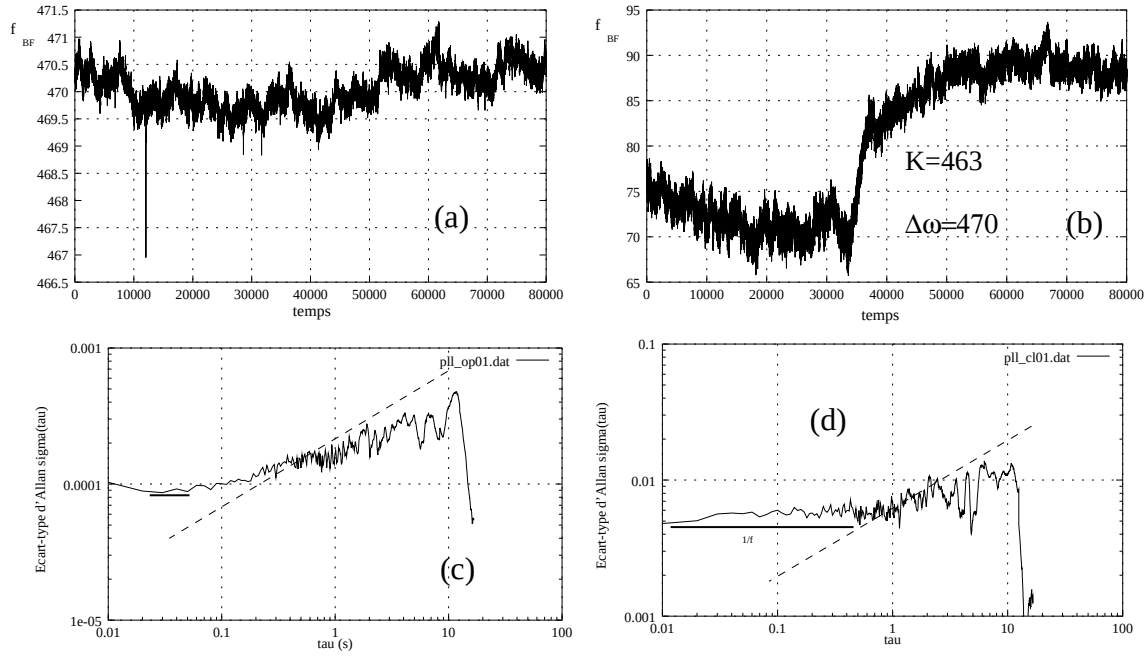


FIG. 6.37 – *Fluctuations du signal d'erreur : battement de basse fréquence (∼ 1 Hz). Boucle ouverte : (a), (c). Boucle fermée : (b), (d).*

L'ensemble des expériences réalisées en présence de bruit blanc sont dans le sens des résultats obtenus par T. Arecchi [23]. Un système non linéaire génère du bruit en $1/f$ lorsqu'il est proche d'un certain état synchronisé ou d'une région de discontinuité physique, où une certaine quantité de bruit blanc (seuil) est nécessaire pour lui donner la possibilité de se trouver momentanément synchronisé. Cette situation est à rapprocher du modèle de Dutta-Horn (cf. paragraphe 2.3.4) dans lequel il existe une barrière de potentiel qui sépare

23. Confirmés par lui-même au cours d'une communication privée.

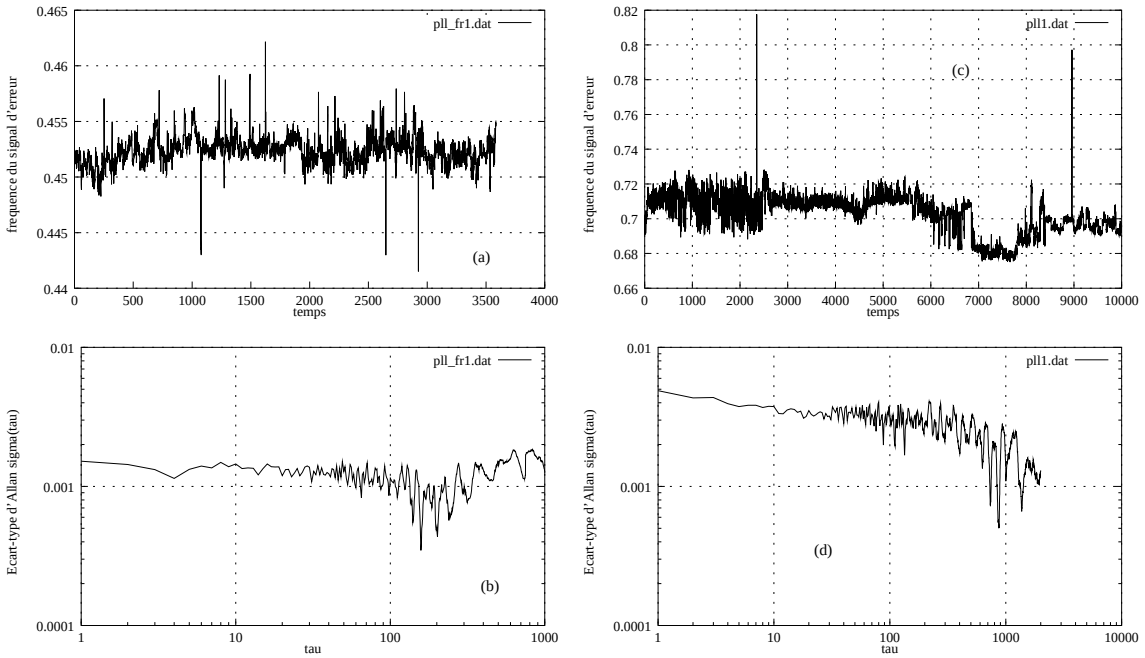


FIG. 6.38 – *Fluctuations en boucle ouverte (a) et en boucle fermée (c) avec les variances respectives.*

deux états distincts. Ici les deux états sont l'état synchronisé et l'état non synchronisé.

Perturbation par le bruit et les harmoniques

Résultats expérimentaux L'étude expérimentale de la PLL où interviennent deux harmoniques de façon significative a été réalisée proche du rapport $\frac{\omega_0}{\omega_{vco}} = \frac{6}{7}$. Le dispositif est le même: on module le signal ω_0 par un taux de bruit blanc et on observe la transformation du bruit. La mesure des fluctuations est alors délicate à réaliser. En effet, on ne peut utiliser la méthode spectrale car le signal d'erreur est principalement sinusoïdal. Il faudrait en fait utiliser un mélangeur ou même une deuxième PLL pour effectuer la démodulation du bruit. Le problème est alors celui d'un système de deux PLL couplées.

Les mesures temporelles ont été choisies aux mesures spectrales car l'influence de la modulation due à l'harmonique (Fig. 6.39 (a), (b) et (c)) peut être diminuée par le choix d'un niveau de déclenchement du compteur situé en dessous de la modulation (Fig. 6.40).

Ceci suppose évidemment un faible taux de modulation. Les courbes de la figure Fig. 6.39 présentent une mesure de la stabilité $\sigma_{\omega_{BF}}$ pour $\frac{\omega_0}{\omega_{vco}} = \frac{6}{7}$ en circuit ouvert (a), en circuit fermé (b) à l'intérieur de la plage secondaire (voir aussi Fig. 6.19(c)), et au bord de la plage secondaire (c) (voir aussi Fig. 6.19(b)). Il est important de rappeler que

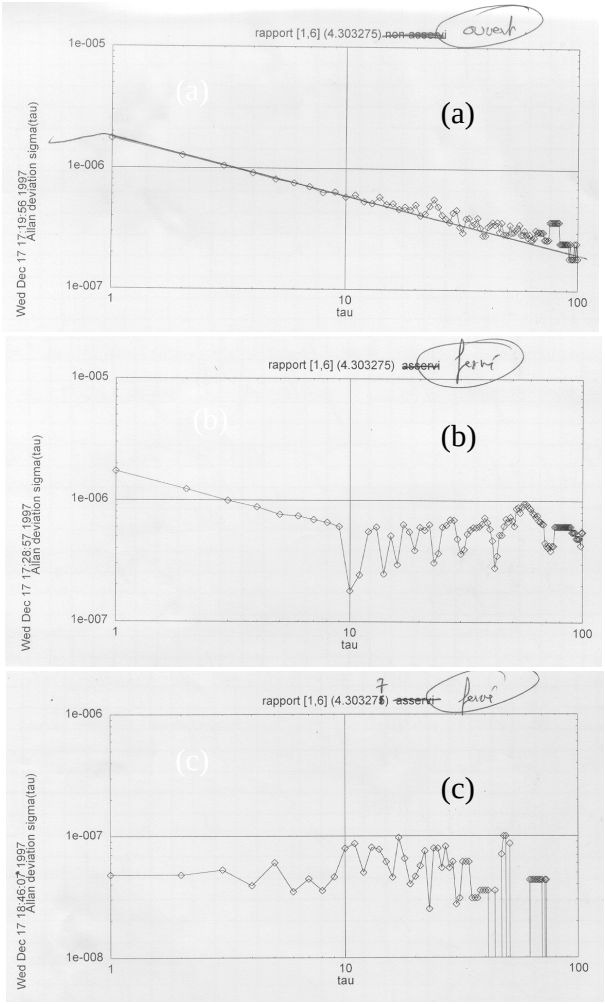


FIG. 6.39 – *Écart-type d'Allan de la fréquence du battement : (a)PLL en boucle ouverte. (b) et (c) PLL en boucle fermée.*

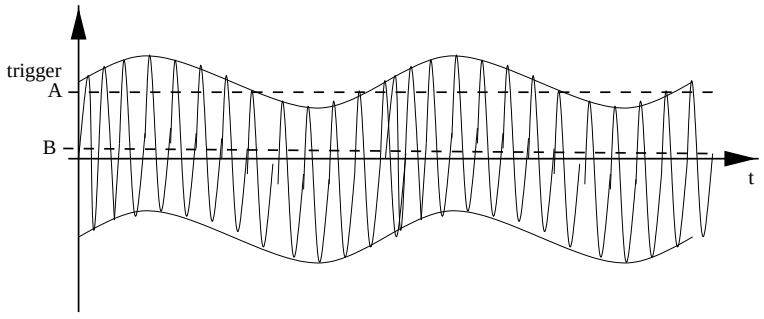


FIG. 6.40 – *Choix du niveau de déclenchement du compteur*

ces mesures ne peuvent être faites que parce que l'on dispose de très bons oscillateurs garantis au Hz. On vérifie la présence de bruit blanc dans le cas de la boucle ouverte (a). Lorsque l'on se trouve à l'intérieur de la bande secondaire 6/7, on note la présence d'une

modification de la pente (b) qui est clairement significative quand on se trouve proche de cette plage secondaire. Les mesures de variances n'ont été faites que sur 300 points car, ici aussi la désynchronisation secondaire peut apparaître assez rapidement et même plus facilement du fait de la finesse de cette plage. D'ailleurs, la courbe (b) présentant un palier est certainement la signature d'un battement secondaire que nous n'avons pas détecté à l'oscilloscope.

On constate également une augmentation du niveau de bruit entre l'état ouvert et fermé (τ : 10 $\rightarrow$ 100s) traduisant bien l'existence d'un couplage entre les deux harmoniques. On vérifie ainsi que dans le bruit, il existe une composante issue de l'interaction entre les harmoniques amplifiés par des conditions de rationalité des fréquences. En revanche, aucune raison apparente n'explique la diminution du niveau de bruit de la courbe (c) qui est d'un ordre de grandeur. Il semblerait qu'une stabilisation des fluctuations serait envisageable en se plaçant proche de la séparatrice de la synchronisation secondaire ; une sorte de stabilisation par chaos.

D'autres expériences ont été réalisées mais la difficulté de garantir la stabilité des paramètres rendait difficile l'établissement de résultats similaires dans d'autres régions.

Résultats numériques À l'inverse des méthodes expérimentales où le spectre est difficile à obtenir, pour les méthodes numériques, c'est l'équivalent de la variance d'Allan qui est difficile à simuler. Une méthode de simulation de comptage de période par le passage à une position de déclenchement est en cours (cf. Annexe B) mais n'a pas donné de résultats intéressants faute de nombre de points significatifs. En effet, si l'on veut simuler le comptage d'une fréquence, il faut que le signal présente un grand nombre d'oscillations pour effectuer une statistique fiable. Un grand nombre d'oscillations implique également de longues simulations (surtout si l'on regarde proche de $u = 1$). On revient alors sur le même problème de longueur de simulation.

En revanche, grâce à la méthode de démodulation numérique, on peut éliminer la porteuse et ne s'intéresser qu'aux fluctuations. Ainsi, la différence des deux signaux temporels donnera une information sur le bruit. Les paramètres de simulation sont ceux du programme `arnold4.f` (cf. Annexe B) où *taux* est le niveau de bruit blanc appliqué sur ω_0. Le système d'équation est donné par (6.38) et (6.39) additionné de bruit blanc de fréquence (6.48) :

$$\dot{\Phi} = \Delta\omega^{(1,1)} - K_1 \sin\Phi - K_2 \sin\psi + \Gamma(t), \tag{6.73}$$

$$\dot{\psi} = \Delta\omega^{(3,1)} - K_1 \sin\Phi - K_2 \sin\psi + \Gamma(t). \tag{6.74}$$

Désynchronisation de l'enveloppe par le bruit L'un des principaux résultats précédents de la perturbation de la PLL par un harmonique était la mise en relief d'une synchronisation secondaire caractérisée par l'évolution de l'enveloppe analogue à celle de la porteuse proche de la plage de synchronisation principale. Mais nous avions observé expérimentalement les difficultés à observer cette synchronisation compte tenu de son influence par rapport au bruit extérieur. La désynchronisation de l'enveloppe était beaucoup plus fréquente. Nous avons alors étudié l'influence du bruit sur la synchronisation de l'enveloppe. Pour cela, nous avons repris les paramètres de la simulation présentée en Fig. 6.20 (c) et étudié l'influence du bruit sur l'évolution de l'enveloppe. Les conditions expérimentales doivent être très fines. Il faut se placer à $\Delta\omega^{(6,7)}$ proche de K_2 mais légèrement inférieur pour ne pas avoir de battement. En fait, cette simulation combine les difficultés d'obtention des figures Fig. 6.20 et Fig. 6.29. Il faut une longue simulation pour faire apparaître la basse fréquence de l'enveloppe. Ce fut possible grâce à un calculateur Silicon Graphics de 1 Goctet de mémoire vive du centre de calcul de l'Université.

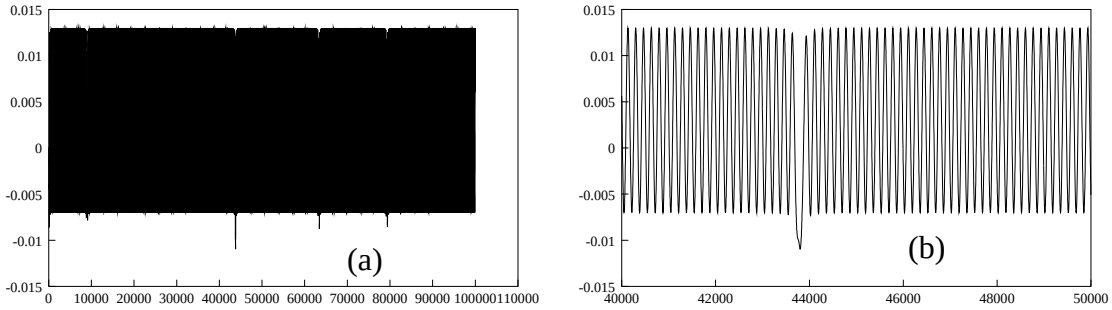


FIG. 6.41 – *Désynchronisation de l'enveloppe par le bruit*

La figure Fig. 6.41 présente le phénomène de désynchronisation de l'enveloppe par le bruit. Une simulation de 10 millions d'itérations a été nécessaire pour ne faire apparaître le phénomène que 4 fois!!! On constate que la distribution de la désynchronisation est aussi aléatoire que celle de la Fig. 6.29.

Le but de cette simulation était de mettre en relief l'existence du phénomène de désynchronisation secondaire par le bruit. Si techniquement il était possible de faire ressortir une synchronisation « de l'enveloppe de l'enveloppe » par la présence d'un troisième harmonique perturbateur, on observerait encore ce phénomène, et ceci entraînerait la présence de constantes de temps de plus en plus grandes, générant des fréquences caractéristiques encore plus basses. Si l'on prend en compte l'ensemble des harmoniques, on constate qu'il existe, à chaque choix de $\frac{\omega_0}{\omega_{vco}}$, une plage de synchronisation (voire plusieurs) d'un harmonique secondaire pouvant générer de grandes constantes de temps si l'on se trouve au

bord. Il existe ainsi une hiérarchie de constantes de temps $\tau_{p/q}$ analogues à la hiérarchie de l'influence des harmoniques. Dans le cas général, quelque soit le choix des paramètres de la PLL, il existe des zones de synchronisation à toutes les échelles engendrant des constantes de temps à toutes les échelles comme le montre la figure Fig. 6.42.

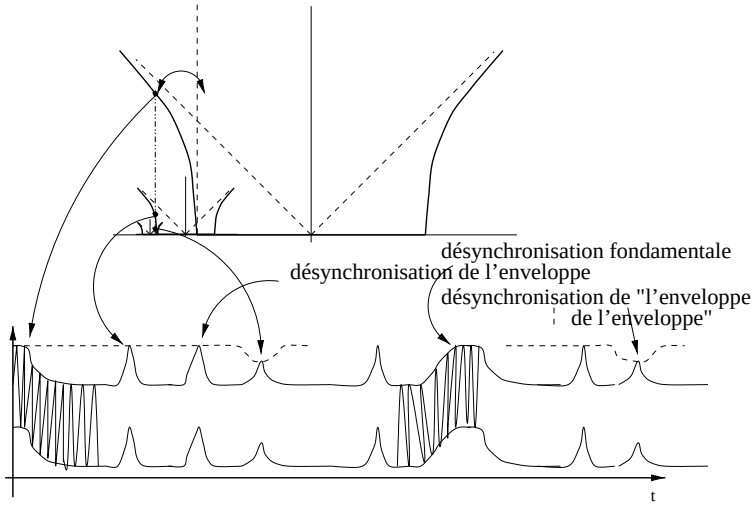


FIG. 6.42 – *Désynchronisation à toutes les échelles*

Cette simulation met en avant l'importance de traiter le problème de la synchronisation à toutes les échelles.

6.6 Influence du filtre passe-bas dans la PLL

Dans les bancs de mesure de bruit de phase, le filtre passe-bas destiné à supprimer la composante haute fréquence générée par le mélangeur est de l'ordre de 300 kHz. Cette grande valeur de la fréquence de coupure f_c permet de négliger le terme en $\ddot{\Phi}$ dans l'équation générale du second degré décrivant la phase du signal d'erreur (cf. Annexe A). Étudier l'influence du filtrage pour de faibles valeurs du filtre, c'est étudier l'influence du terme $\ddot{\Phi}$ dans l'équation

$$\frac{1}{f_c}\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} + K\sin\Phi = \Delta\omega. \tag{6.75}$$

6.6.1 L'hystérésis

Le dispositif expérimental est identique. On place l'oscillateur OSA en entrée et le Racal Dana en VCO. L'oscillateur OSA délivre une fréquence de $f_0 = 5.0206263$ MHz et l'on fait varier le VCO de 5.01 jusqu'à 5, 035 MHz. La figure Fig. 6.43(a) présente la fréquence du signal d'erreur mesurée au compteur. Deux enregistrements ont été nécessaires afin

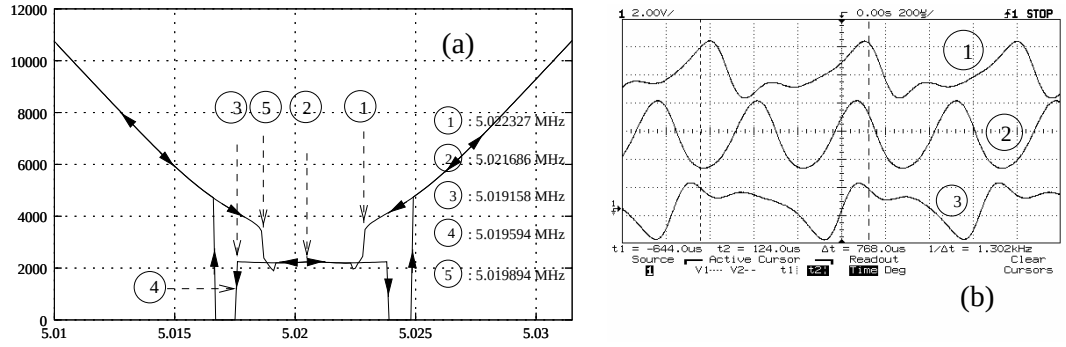


FIG. 6.43 – *Influence du filtre : $f_c = 3,3KHz$, $\delta\omega = 1,5KHz$.*

d'observer un phénomène d'hystérésis présent en bord de zone de synchronisation. On a placé les flèches correspondant au sens de variation de $\Delta\omega$. Les paramètres sont $f_c = 3.3$ kHz et $K = 1.5$ kHz. La zone centrale de synchronisation possède une composante de fréquence constante $f \sim \sqrt{f_c K}$. De part et d'autre de cette zone de résonance, il existe des zones de synchronisation visibles suivant le sens du parcours. On a relevé sur la figure Fig. 6.43(b) l'évolution temporelle des signaux suivant leur position par rapport à la plage.

Sur la figure Fig. 6.44, on a $K = 1.01$ kHz. La diminution de la valeur de K rétrécit la zone de résonance à $f \sim \sqrt{f_c K}$ et augmente la zone synchronisée $\dot{\Phi} = 0$. Les courbes 1 et 4 de (b) correspondent à la limite (au Hz près) du cycle d'hystérésis. On note une influence du filtre plus importante que dans le cas précédent. La figure Fig. 6.45 correspond à la

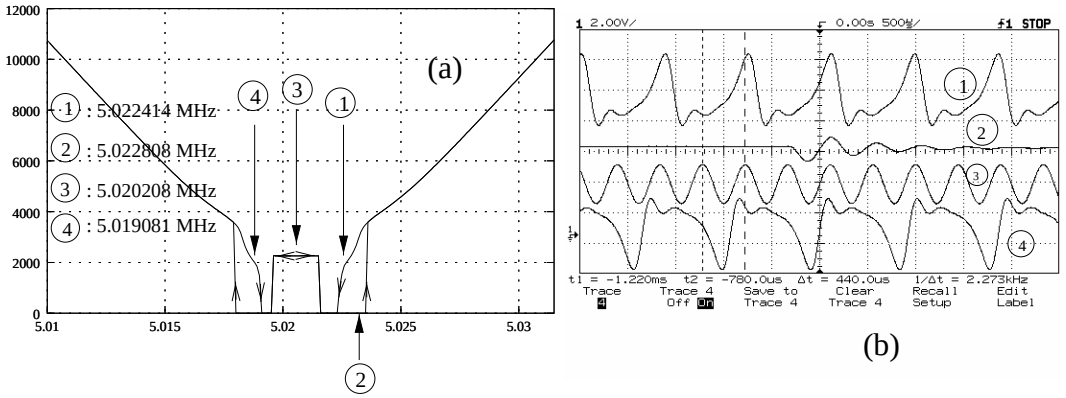


FIG. 6.44 – *Influence du filtre : $f_c = 3,3kHz$ et $\delta\omega = 1,01kHz$.*

même valeur de K mais avec un filtre dont la fréquence de coupure est de 10 kHz. Cette fois, la zone centrale n'existe plus et l'hystérésis est de plus en plus faible. Seules des irrégularités dans la courbe semblent rendre compte de la fréquence de coupure du filtre. La figure (b) présente le même enregistrement pour $K = 1.5$ kHz (à comparer avec la figure Fig. 6.43), et il faut un gain de $K = 2.32$ kHz (c) pour faire apparaître la résonance

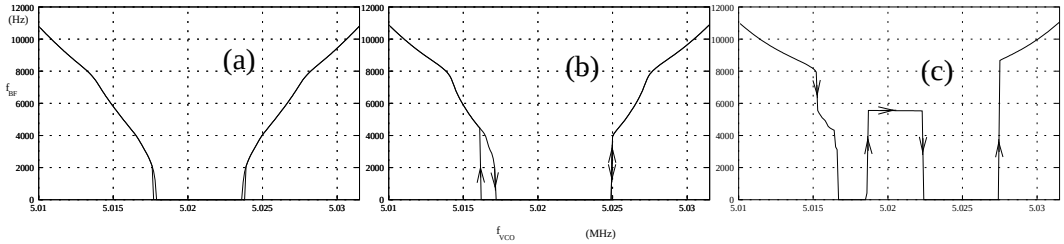


FIG. 6.45 – *Augmentation du filtre : $f_c = 10kHz$. (a) K =1,01 kHz; (b) K =1,5 kHz; (c) $K = 2,32$ kHz.*

à $\sqrt{f_c K} = 5.55$ kHz.

La figure Fig. 6.46 présente le régime transitoire à l'intérieur de la plage de synchronisation. L'énergie n'est pas assez importante pour entretenir les oscillations à $\sqrt{f_c K}$.

6.6.2 Le régime transitoire

Les différentes propriétés du régime transitoire à l'intérieur de la zone de synchronisation ont été enregistrées avec $K = 1.01$ kHz et $f_c = 3.3$ kHz. Pour effectuer cette mesure, on ouvre la boucle, le régime de battement apparaît, puis on referme en synchronisant l'oscilloscope sur cette partie de courbe. Plusieurs essais sont souvent nécessaires. On vérifie expérimentalement l'évolution de la durée du transitoire entre le cas où la résonance apparaît et le cas où elle est atténuée (Fig. 6.47). Dans le cas (a), le régime transitoire est long mais tend vers un signal continu. Aucune oscillation n'est détectée par le compteur. Dans le cas (b), le régime transitoire est encore plus long et une oscillation du signal d'erreur est détectée par le compteur.

6.6.3 Simulations numériques

Le programme `arnold10.f` (cf Annexe B) permet la modélisation de l'équation (6.75) par le système :

$$\dot{\Phi} = \Psi, \tag{6.76a}$$

$$\dot{\Psi} = -f_c(\Psi + K\sin\Phi - \Delta\omega). \tag{6.76b}$$

Les paramètres de simulation sont donnés par (6.43) auquel on a rajouté f_c en fin de liste. La figure Fig. 6.48 présente le signal d'erreur en fonction des paramètres donnés par le tableau Tab. 6.3.

À l'intérieur de la plage de synchronisation, les deux comportements asservi (a) et oscillant (b) sont observés. Les courbes (c), (d) et (e) sont effectuées en diminuant la

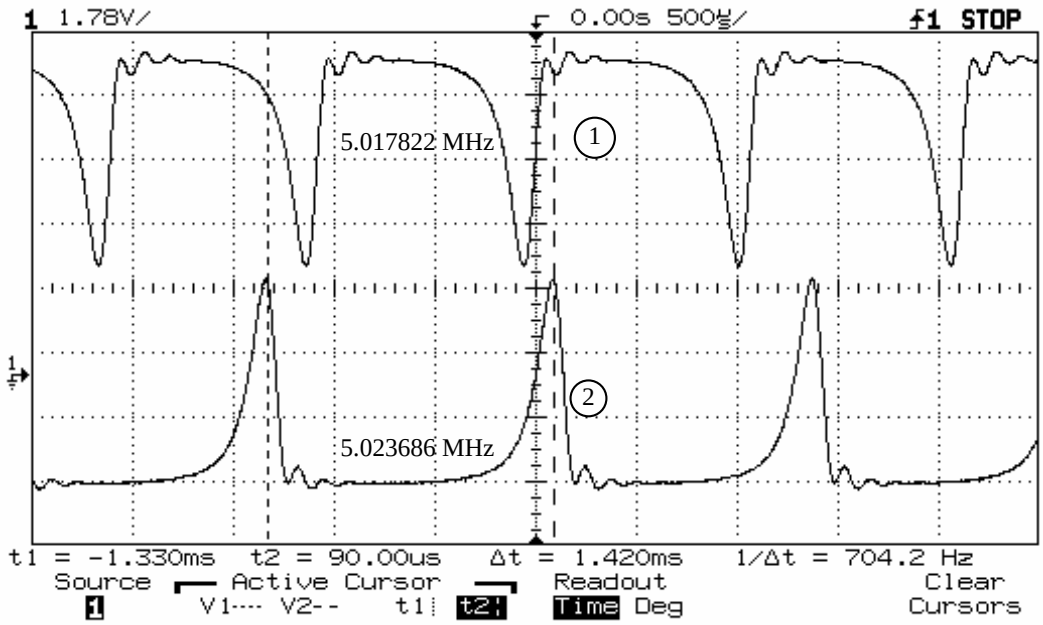
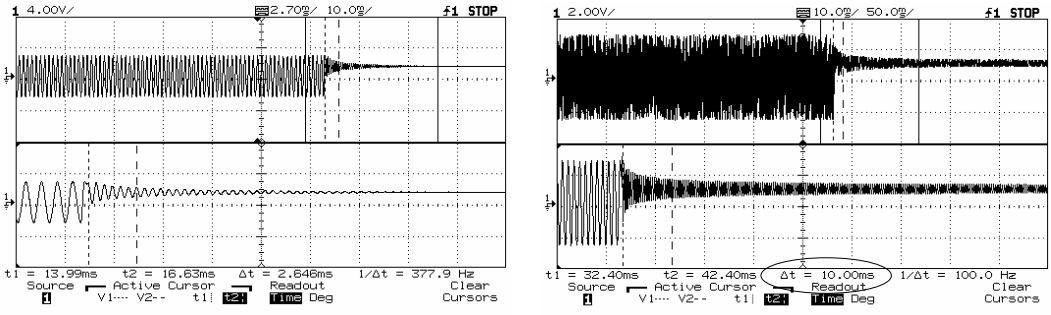


FIG. 6.46 – *Observation du régime transitoire en cas de non résonance à la fréquence* $\sqrt{K f_c}$. *(Fig. 6.45 (b)).*

valeur de $\Delta\omega$. On vérifie déjà avec (c) et (d) le rôle du filtre atténuant les plus hautes fréquences. Lorsque $\Delta\omega \to K$, l'amplitude augmente et lorsque $\Delta\omega \sim K$, on vérifie l'allure observée expérimentalement. On note l'influence du filtre également dans le régime transitoire asservi (f).

D'autres simulations numériques sont envisageables notamment en considérant les



(a) (b)

FIG. 6.47 – *Observation expérimentale du régime transitoire de la PLL avec* $f_c = 3,3$ *kHz et* $K = 1,01$ *kHz.*

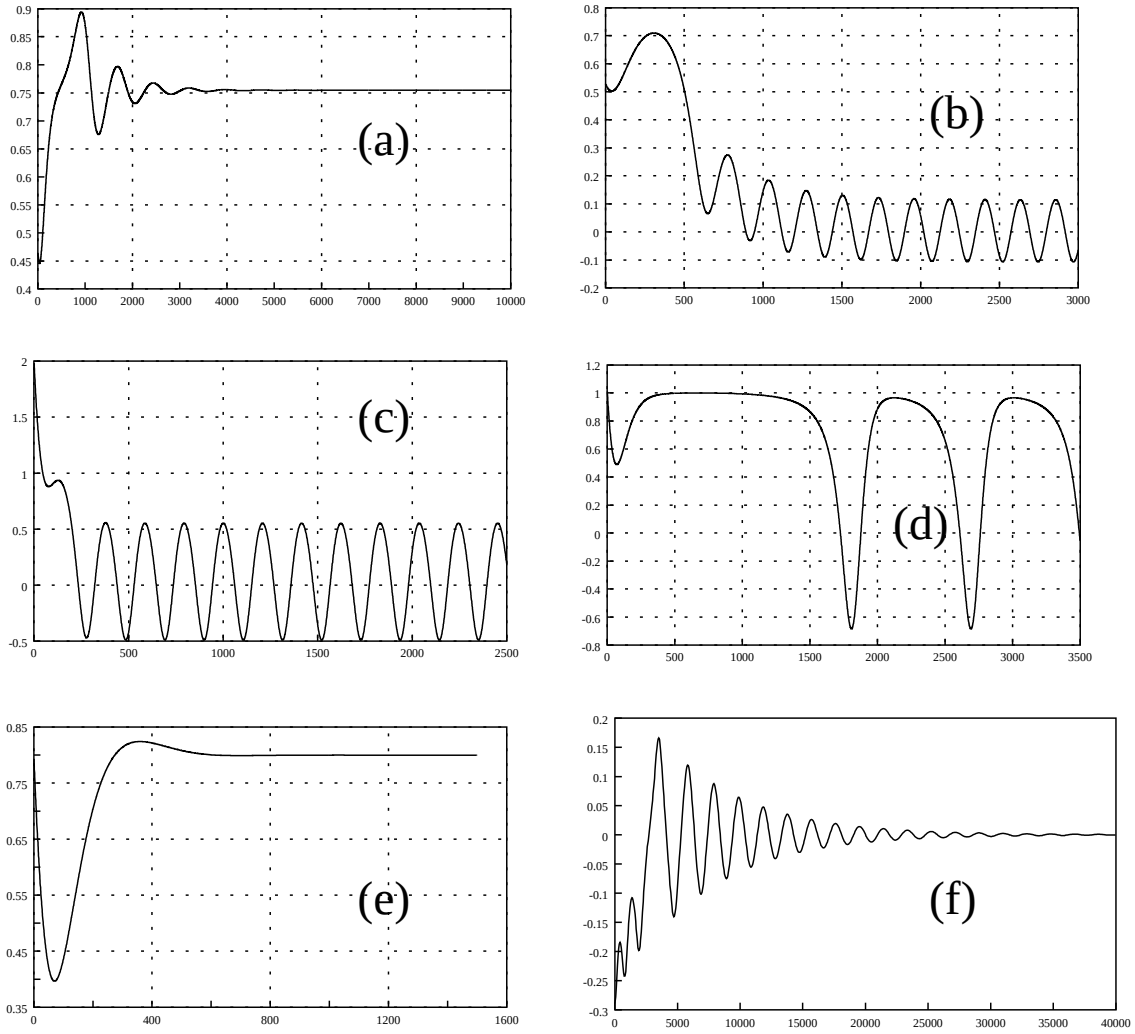


FIG. 6.48 – *Simulations numériques de l'évolution temporelle du signal dérreur (influence du filtre).*

harmoniques, le filtre et le bruit, mais nous pensons que le comportement global a été cerné. L'augmentation de la valeur de K, ou la diminution de celle de f_c est équivalente et fait apparaître une résonance de fréquence proche de $\sqrt{K f_c}$. Le seuil de détection du compteur étant limité à 5 mV la résonance n'apparaît que dans des cas particuliers. Si l'on était capable de mesurer la fréquence de façon plus précise avec un compteur plus sensible, le palier apparaîtrait plus souvent.

Il existe dans la plage de synchronisation, région où l'on mesure le bruit des oscillateurs, des composantes issues du comportement de la PLL. Ces composantes se rajoutent au bruit que l'on veut mesurer et constitue une perturbation due au système de mesure.

figure	f_c	K	$\Delta\omega$
(a)	5.10^{-4}	55.10^{-4}	10^{-4}
(c)	3.10^{-3}	25.10^{-4}	$5\ 10^{-3}$
(d)	3.10^{-3}	25.10^{-4}	$251.5\ 10^{-3}$
(e)	3.10^{-3}	25.10^{-4}	$20\ 10^{-3}$
(f)	5.10^{-5}	55.10^{-4}	0

TAB. 6.3 – *Paramètres des simulations de la figure Fig. 6.48*

Évidemment, dans le cas général $f_c \sim 300$ kHz $>> K \sim 3$ Hz, et l'on peut supposer que la composante est négligeable, mais elle existe, d'autant que l'on a montré qu'il existait des régions où les harmoniques pouvaient également perturber la dynamique en créant une modulation avec sa zone de synchronisation secondaire. Cette région où l'influence d'un harmonique a lieu est conditionnée par la valeur de la fréquence de coupure du filtre car c'est elle qui limite l'amplitude du fondamental $\mid \omega_0 - \omega_{vco} \mid$ proche de $\frac{\omega_0}{\omega_{vco}} = \frac{6}{7}$. Ainsi, le filtre intervient également dans la prise en compte des harmoniques puisqu'il en détermine les amplitudes. Il a donc une dynamique importante dans les plages de synchronisation et hors de celles-ci. Il faut donc traîter celui-ci de manière globale dans la PLL. Sur la base de l'étude théorique précédente, nous avons choisi une méthode originale pour caractériser la PLL dans son environnement systèmique : l'arithmétique des fréquences.

6.7 Propriétés arithmétiques de la PLL

6.7.1 Description générale

L'influence du filtrage a été étudiée de façon globale [Dos Santos 98c, Planat 98] en considérant le fonctionnement de la PLL pour des fréquences du VCO variant de 0 à 5 Mhz. Les figures Fig. 6.49 (a), (b) et (c) représentent la fréquence du signal d'erreur en fonction de la fréquence ω_{vco} pour des valeurs de f_c de 375, 30 et 3 kHz. Les trois

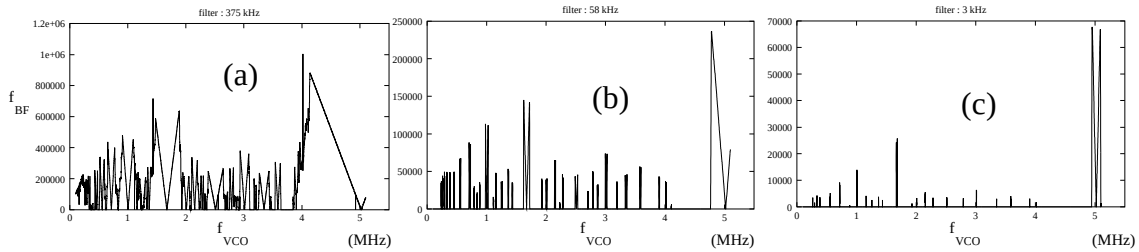


FIG. 6.49 – *Spectre d'intermodulation de la PLL en fonction du filtrage f_c*

enregistrements ont été effectués avec le compteur asservi sur césium avec un balayage

de 10000 points sur $\omega_{vco} \in [0.1; 5.1]$ MHz par pas de 500 Hz. Le temps d'intégration du compteur était de $\tau = 0.1$s en position trigger automatique verrouillée afin d'éviter les perturbations de celle-ci. Le choix du niveau de déclenchement du compteur fut de 0 Volt afin de mesurer le maximum d'oscillations. Rappelons aussi que la sensibilité du compteur ne permet pas de mesurer des signaux de moins de 5 mV d'amplitude crête-crête. Lorsque le système générait un tel signal, la fréquence du signal d'erreur était considérée nulle.

L'examen global des courbes montre le spectre d'intermodulation indiquant la présence des harmoniques. Autour de chaque palier de synchronisation $\frac{p}{q}$ (invisibles ici), le signal génère un battement de fréquence normalisé $\mu = \omega_{BF}/\omega_0$ donné par

$$\mu = \frac{1}{\omega_0} \mid p\omega_0 - q\omega_{vco} \mid = \left| p - q\frac{\omega_{vco}}{\omega_0} \right| = q \mid p/q - \nu \mid . \tag{6.77}$$

avec $\nu = \omega_{vco}/\omega_0$. Les droites autour de chaque rapport $\frac{\omega_{vco}}{\omega_0} = \frac{p}{q}$ sont alors de pente $\pm q$, jusqu'à ce que le niveau du signal d'erreur soit inférieur à 5 mV et que le compteur ne détecte plus rien. Ceci explique le fait que pour de faibles valeurs du filtre, le signal d'erreur soit atténué rapidement et atteigne les 5 mV limite du compteur pour une fréquence plus faible. De plus, les harmoniques étant davantage filtrés, les zones de synchronisation sont très réduites et le spectre d'intermodulation est appauvri.

Compte tenu de la symétrie du battement, on devrait s'attendre à ce que les deux droites situées de part et d'autre de chaque rapport $\frac{p}{q}$ atteignent le même maximum. On constate cependant une dissymétrie systématique du maximum de détection de la fréquence. Ceci veut dire que le signal d'erreur possède une amplitude différente suivant la position de ν par rapport à $\frac{p}{q}$.

Devant la difficulté d'y associer une quelconque origine physique ou expérimentale, c'est dans la propriété arithmétique de ν par rapport à $\frac{p}{q}$ que l'on a trouvé une explication. Dans la plupart des cas, le développement des quantités ν_G et ν_D (correspondant au rapport limite ν à droite et à gauche) s'écrit de la forme :

$$\{\nu_G; \nu_D\} = \{[a_0; a_1, a_2, ..., a_p, a_{max}]; [a_0; a_1, a_2, ..., a_p - 1, 1, a_{max}]\}, \tag{6.78}$$

où le développement de ν_i peut être soit le premier soit le deuxième, puisque la suite des réduites est alternée et qu'elle dépend du nombre de a_i.

L'amplitude du signal d'erreur est déterminée à partir d'un critère arithmétique associé à la propriété du rapport de fréquence ν par rapport aux harmoniques du système. En effet, les caractéristiques physiques du mélangeur montrent que celui-ci génère un signal complexe composé des harmoniques des deux signaux d'entrée. Le système choisit de

produire un signal composé d'une fréquence ω_{BF} vérifiant (6.77), mais également

$$q \mid p/q - \nu \mid < \epsilon, \tag{6.79}$$

traduisant le fait qu'il choisira le rapport harmonique le plus proche. Sachant qu'il existe beaucoup d'harmoniques générés, il est alors possible que la condition (6.79) soit vérifiée par plusieurs d'entre eux. Ce système physique doit donc faire un choix qui dépend de l'influence de chaque harmonique. L'énergie associée à chaque harmonique impair variant en $\frac{1}{(2p+1)^2}$, ce seront les composantes avec les plus petits dénominateurs qui seront favorisées par rapport aux autres. Le problème du système est de trouver un rationnel $\frac{p}{q}$ satisfaisant (6.79) avec le plus petit q possible, de façon à minimiser l'énergie à fournir pour entretenir l'oscillation.

La théorie des fractions continues exposée au chapitre 5 montre que le rationnel $\frac{p_n}{q_n}$ le plus proche de ν à une erreur ϵ près, et possédant de surcroît le plus petit couple (p_n, q_n) est donné par le développement en réduite

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, ..., a_n], \tag{6.80}$$

où $\nu = [a_1, a_2, ...]$. Inversement, si l'on se donne une valeur limite ϵ_{min} et un dénominateur q_{max} à ne pas dépasser (ce qui est physiquement réaliste puisque la résolution du système est limite), on peut alors tracer l'écart d'un réel par rapport à ces différentes approximations rationnelles. Cependant lorsque ν est très proche d'un rationnel $\frac{p}{q}$, son développement possède une valeur a_i très grande et l'écart entre l'approximation ϵ_{i-1} et ϵ_i est alors très grand. D'après (5.40) on a :

$$\left| \nu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}, \tag{6.81}$$

et pour une valeur très grande de a_{n+1}, on aura très rapidement :

$$\left| \nu - \frac{p}{q} \right| < \epsilon_{min}. \tag{6.82}$$

Exemple :

$\frac{2}{3} = [0, 1, 2]$
$\nu = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{314} = [0, 1, 10, 1, ...]$
$\frac{p_i}{q_i} = [0, 1, \frac{2}{3}, \frac{21}{31}, \frac{23}{34}, ...]$
$\epsilon_i = \mid \nu - \frac{p}{q} \mid = \{0.67, 0.323, 1.0\ 10^{-2}, 7.0\ 10^{-4}, 2.0\ 10^{-4}, ...\}$
$\frac{1}{a_{n+1} q_n^2} = \{1, 0.5, 1.1\ 10^{-2}, 1.0\ 10^{-3}, ...\}$.

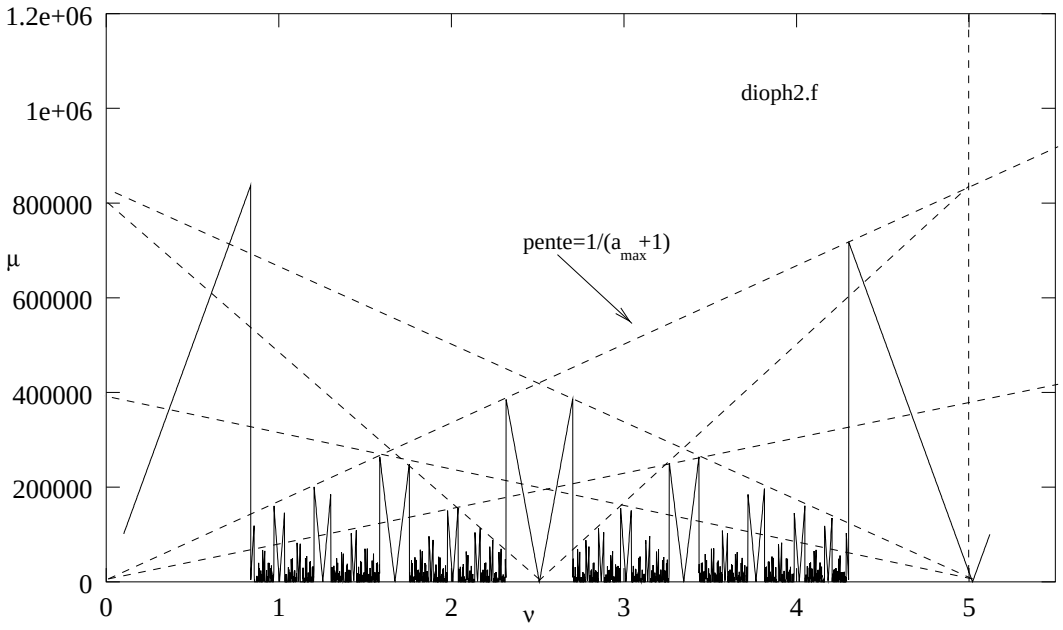


FIG. 6.50 – *Erreur d'approximation en fonction des critères (6.83).* $\epsilon_{min} = 1.5\ 10^{-5}$, $a_{max} = 5$, $q_{max} = 400$

Dès la présence dans le développement d'une grande valeur d'un des a_i (ici $a_i = 10$) indiquant la proximité du rationnel (ici $\frac{2}{3}$), l'erreur ϵ_i effectue un saut (14 fois plus petite pour $a_i = 10$) et peut se trouver très petite, aussi petite que a_i est grand. La limitation par un certain a_i doit également rendre compte de la limite de résolution du système physique. En tenant compte des critères de résolution :

$$\left|\frac{p_i}{q_i} - \nu\right| \leq \epsilon_{min}, \tag{6.83a}$$

$$q_i \geq q_{max}, \tag{6.83b}$$

$$a_i \geq a_{max}, \tag{6.83c}$$

la fréquence normalisée $\mu = \frac{\omega_{BF}}{\omega_0}$, s'écrit :

$$\mu = q_i \left|\frac{p_i}{q_i} - \nu\right| = q\epsilon. \tag{6.84}$$

La figure Fig. 6.50 donne la valeur de $q\epsilon\omega_0$ en fonction de $\nu\omega_0$, avec $\omega_0 = 5.020626$ MHz pour des valeurs de $\epsilon_{min} = 1.5\ 10^{-5}$, $q_{max} = 400$, $a_{max} = 5$ en faisant varier ν de 0.02 à 1.02001 par pas de $2\ 10^{-4}$. Cette figure a été construite en développant la quantité ν en fonctions continues jusqu'à ce que l'un des critères (6.83) ne soit pas vérifié. On garde alors le dernier terme $q\epsilon$ calculé. Cette courbe possède une certaine propriété d'invariance d'échelle, analogue à celle des fractals [Dos Santos 98b].

Ainsi lorsque l'on se trouve autour d'un rationnel, comme $\frac{2}{3}$ par exemple, le développement possédera un grand a_i et l'erreur $q\epsilon$ s'écrira :

$$q_i\epsilon = q_i \mid \frac{2}{3} - \nu \mid = \mid 2 - \frac{1}{3}\nu \mid . \tag{6.85}$$

La courbe $q_i\epsilon = f(\nu)$ sera alors deux droites de pente $\pm\frac{1}{3}$ centrées autour de $\frac{2}{3}$, jusqu'à ce que $a_i > a_{max}$, auquel cas le critère d'arrêt sera l'un des trois de (6.83). Le maximum d'excursion des deux droites situées autour de chaque $\frac{p}{q}$ rationnel sera alors donné par un développement dont le dernier a_n est égal à $a_{max}+1$. Pour chaque ν proche d'un rationnel $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, ..., a_n]$, son développement s'écrit soit

$$\nu = [a_0, a_1, ..., a_n, a_p, ...], \tag{6.86}$$

ou soit

$$\nu = [a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1, a_p, ...] \quad \text{avec} \quad a_p \text{ grand.} \tag{6.87}$$

Ainsi, par exemple les points ν_D et ν_G maximums du rapport $\frac{1}{2}$ s'écrivent (avec $a_p = 6$) :

$$\nu_G = [0, 2, 6] \quad \text{et} \quad \nu_D = [0, 1, 1, 6]. \tag{6.88}$$

De façon générale, les ν_D et ν_G des rapports $\frac{1}{n}$ s'écrivent :

$$\nu_G = [0, n, 6] \quad \text{et} \quad \nu_D = [0, n-1, 1, 6]. \tag{6.89}$$

Par un calcul que l'on présente en Annexe C, nous avons montré que tous les ν_G des rapports $\frac{1}{n}$ sont reliés par une droite de pente $\frac{1}{a_{max}+1}$ (Fig. 6.50). De nombreuses propriétés peuvent être extraites de cet arbre, mais la plus importante concerne la dissymétrie entre les maximums ν_G et ν_D. Nous avons montré que cette dissymétrie s'écrivait (cf. équations C.5, C.14) :

$$\mid \nu_D - \frac{p_i}{q_i} \mid \;=\; \frac{1}{q_i q_{i+1}}, \tag{6.90a}$$

$$\mid \nu_G - \frac{p_i}{q_i} \mid \;=\; \frac{1}{q_i(q_i a_{max} + q_i - q_{i-1})}. \tag{6.90b}$$

Cette dissymétrie est une propriété relative à la forme du développement (6.86) et (6.87) de ν_D et ν_G. C'est une propriété arithmétique et c'est elle qui explique la dissymétrie observée sur la figure Fig. 6.50.

6.7.2 Prise en compte de la symétrie du mélangeur

L'expérience étant réalisée avec un mélangeur équilibré, le poids des harmoniques pairs est inférieur à celui des impairs. Cette propriété étant uniquement due à la configuration du mélangeur, on a été obligé d'introduire artificiellement un critère sur la parité des rapports pour pouvoir rendre compte de la réalité physique. Le programme `dioph4.f` comprend un paramètre supplémentaire sur le a_{max} puisque c'est lui qui limite le maximun d'excursion des droites. La figure Fig. 6.51 donne le résultat de la simulation avec un a_{max} adapté à la parité des rapports soit $a_{max} = 1$ si p et q impairs, et $a_{max} = 7$ sinon. Cette modification

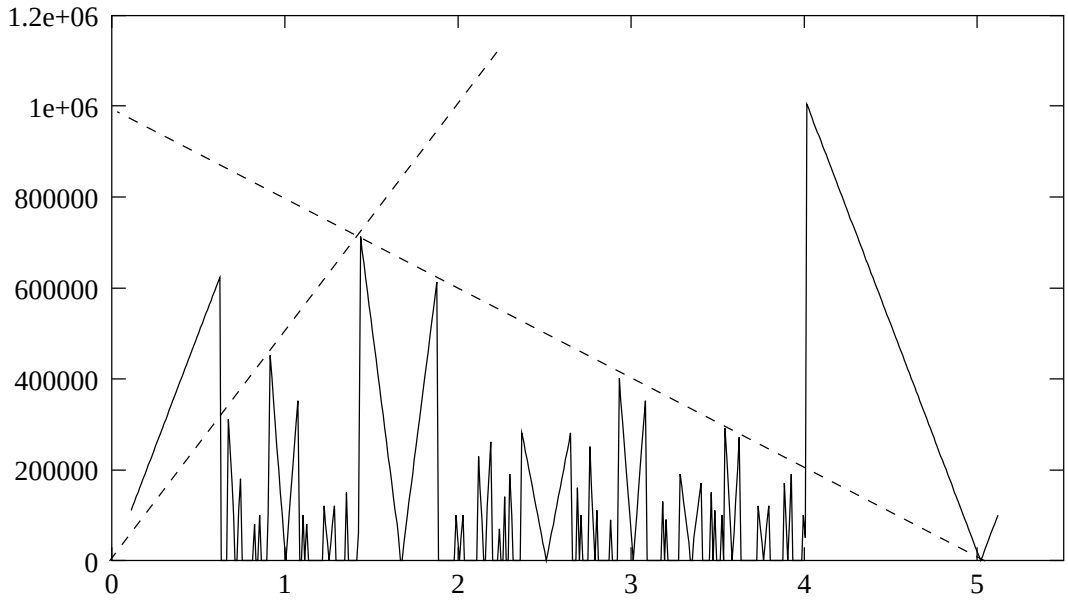


FIG. 6.51 – *Prise en compte de la physique du mélangeur pour le calcul de l'erreur d'approximation.*

permet d'introduire le poids des harmoniques impairs ; elle s'interprète exactement comme pour le cas général. L'énergie de l'harmonique impair étant plus grande, la limite de résolution sera plus longue à atteindre et de ce fait le développement convergera lentement, d'où la présence de petit a_i. Le raisonnement inverse est applicable pour les harmoniques pairs.

Avec cette modification, l'interprétation du spectre d'intermodulation a pu être réalisée avec les critères de résolution (6.83) et la comparaison entre expérience et propriétés arithmétiques est présentée sur les figures Fig. 6.52, Fig. 6.53, et Fig. 6.54. La valeur des paramètres nécessaires aux critères de résolution est placée en légende.

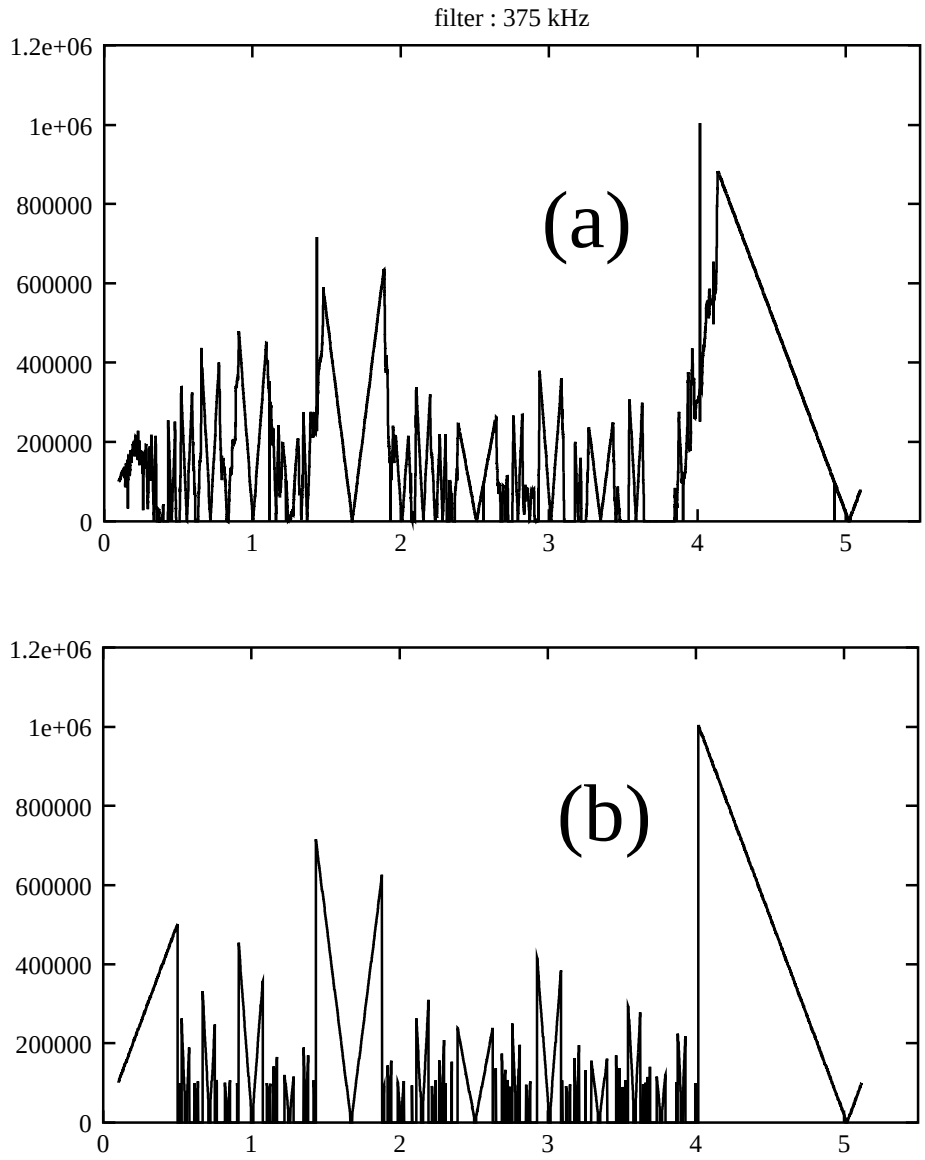


FIG. 6.52 – *Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation. (a) expériences avec* $f_c = 375kHz$. *(b) erreur arithmétique avec* a_{max}*=1 si p et q pairs et* a_{max}*=9 sinon ;* $\epsilon_{min} = 1,5\ 10^{-3}$, $q_{max} = 45$

6.7.3 Étude en fonction des paramètres

Les courbes de la figure Fig. 6.55 donnent l'évolution des propriétés en fonction des paramètres a_{max}, ϵ_{max} et q_{max}. Entre (a) et (b), seule la résolution ϵ_{max} est différente. Nous avons plus de structure lorsque ϵ diminue, ce qui correspond physiquement à une augmentation de la sensibilité du compteur. Une augmentation du seuil de déclenchement du compteur ne permet pas de détecter toutes les fréquences et présente un spectre d'intermodulation plus pauvre comme celui de (b). Ce paramètre est donc un paramètre lié

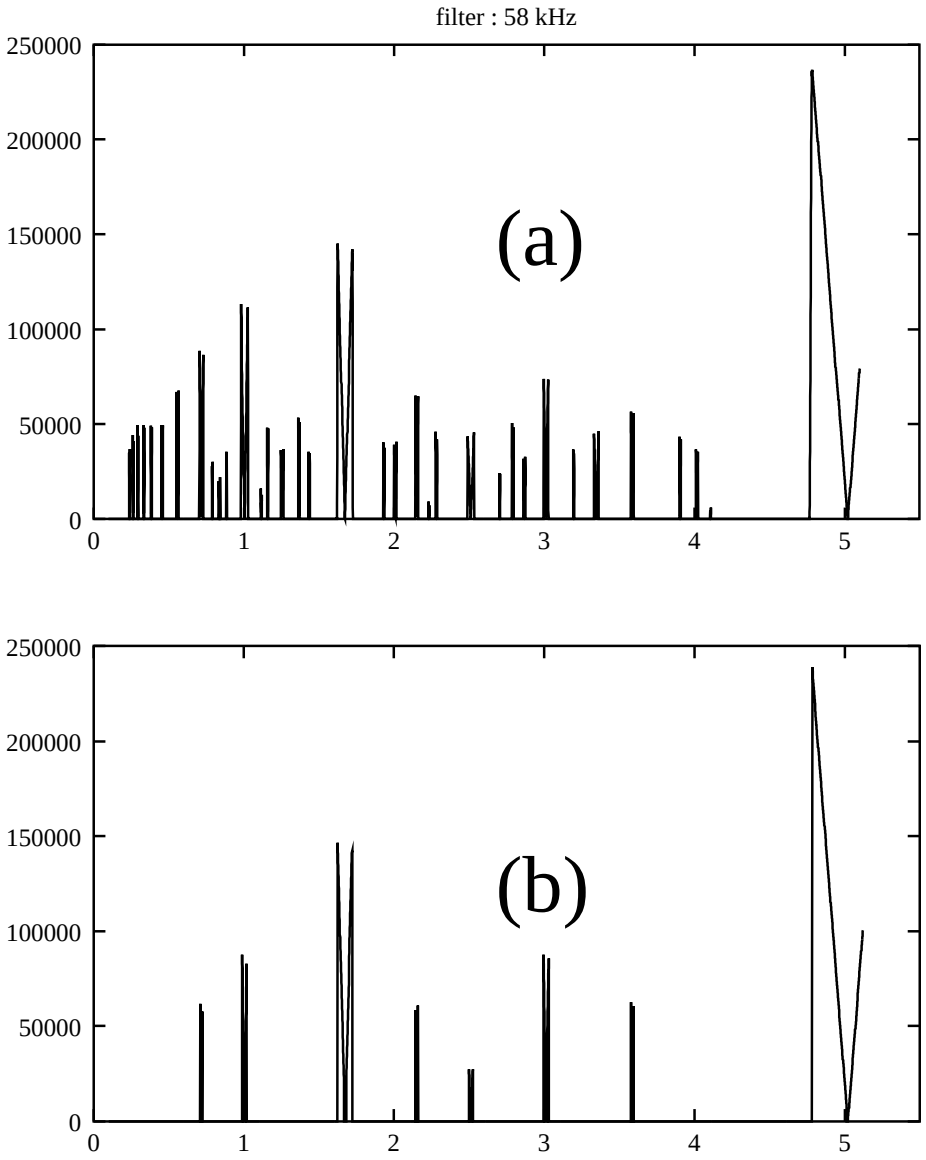


FIG. 6.53 – *Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation (a) expériences avec* $f_c = 58kHz$. *(b) erreur arithmétique avec* a_{max}*=10 si p et q pairs et* a_{max}*=90 sinon ;* $\epsilon_{min} = 1,5\ 10^{-3}$, $q_{max} = 450$

à la mesure de la fréquence.

Entre (c) et (d), seul a_{max} pair varie. Son augmentation provoque une diminution du bassin 1/2 par exemple. Cet effet permet de faire apparaître d'autres rapports (comme ceux proches de 2/3). Plus a_{max} est grand, plus les harmoniques interagissent entre eux. C'est donc un paramètre qui mesure le degré du mélange entre les harmoniques et leur interaction mutuelle. Son augmentation provoque une régularité par la synchronisation. Il s'agit de la même propriété que pour la résonance des tores KAM. Les résonances se

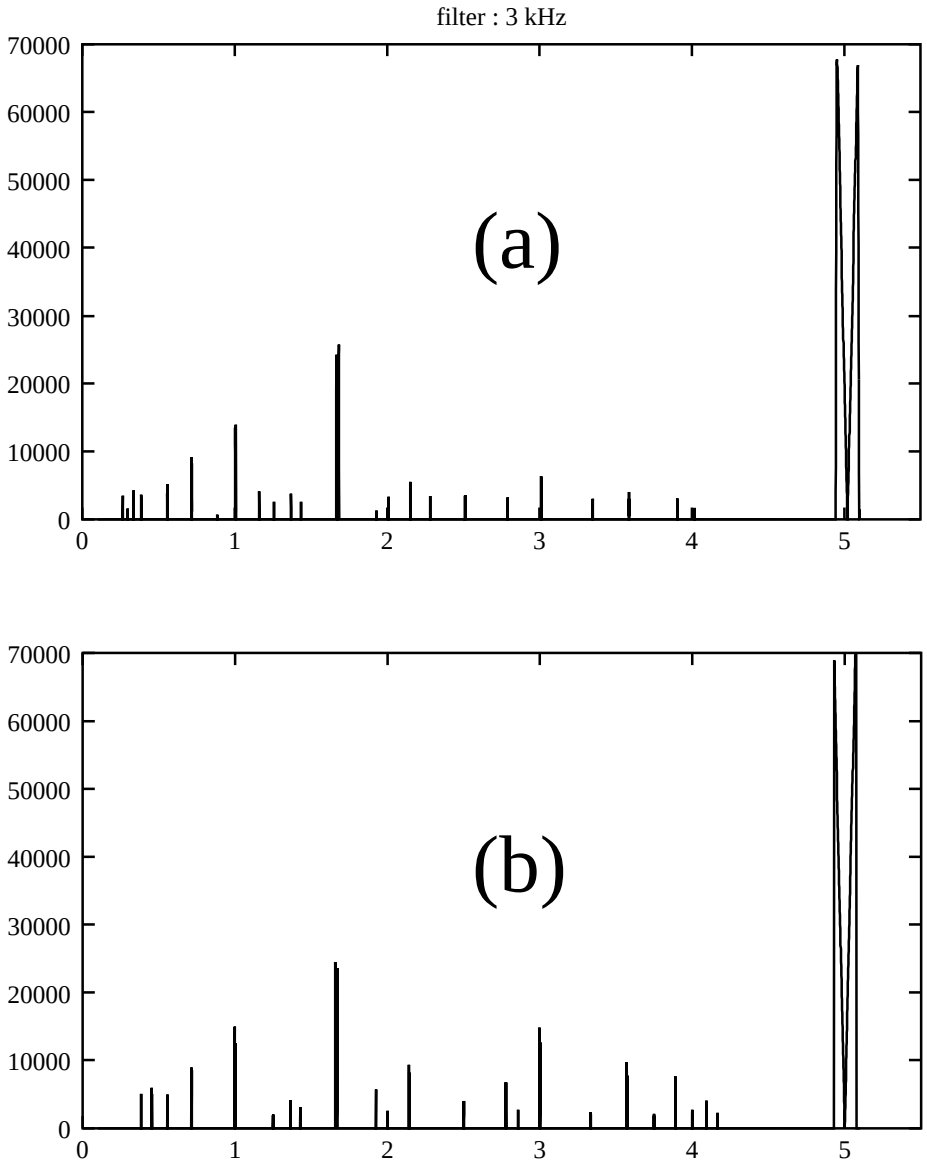


FIG. 6.54 – *Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation (a) expériences avec* $f_c = 3kHz$. *(b) erreur arithmétique avec* a_{max}=*65 si p et q pairs et* a_{max}=*550 sinon ;* $\epsilon_{min} = 7\ 10^{-5}$, $q_{max} = 1500$

situent pour des rapports rationnels des fréquences, rapports possédant de grands a_n dans leur développement en fraction continue. Pour de petites valeurs de a_{max}, la fréquence μ est indépendante de la variation de ν (même bassin). La dynamique est préservée comme dans le cas des tores KAM où la dynamique la plus régulière se situe pour des rapports rationnels de type Markoff ne possédant que des petits a_n dans leur développement.

L'influence du pas d'échantillonnage a été également étudiée car il s'identifie physiquement au pas de l'enregistrement expérimental. En effet, dans les deux cas, les courbes

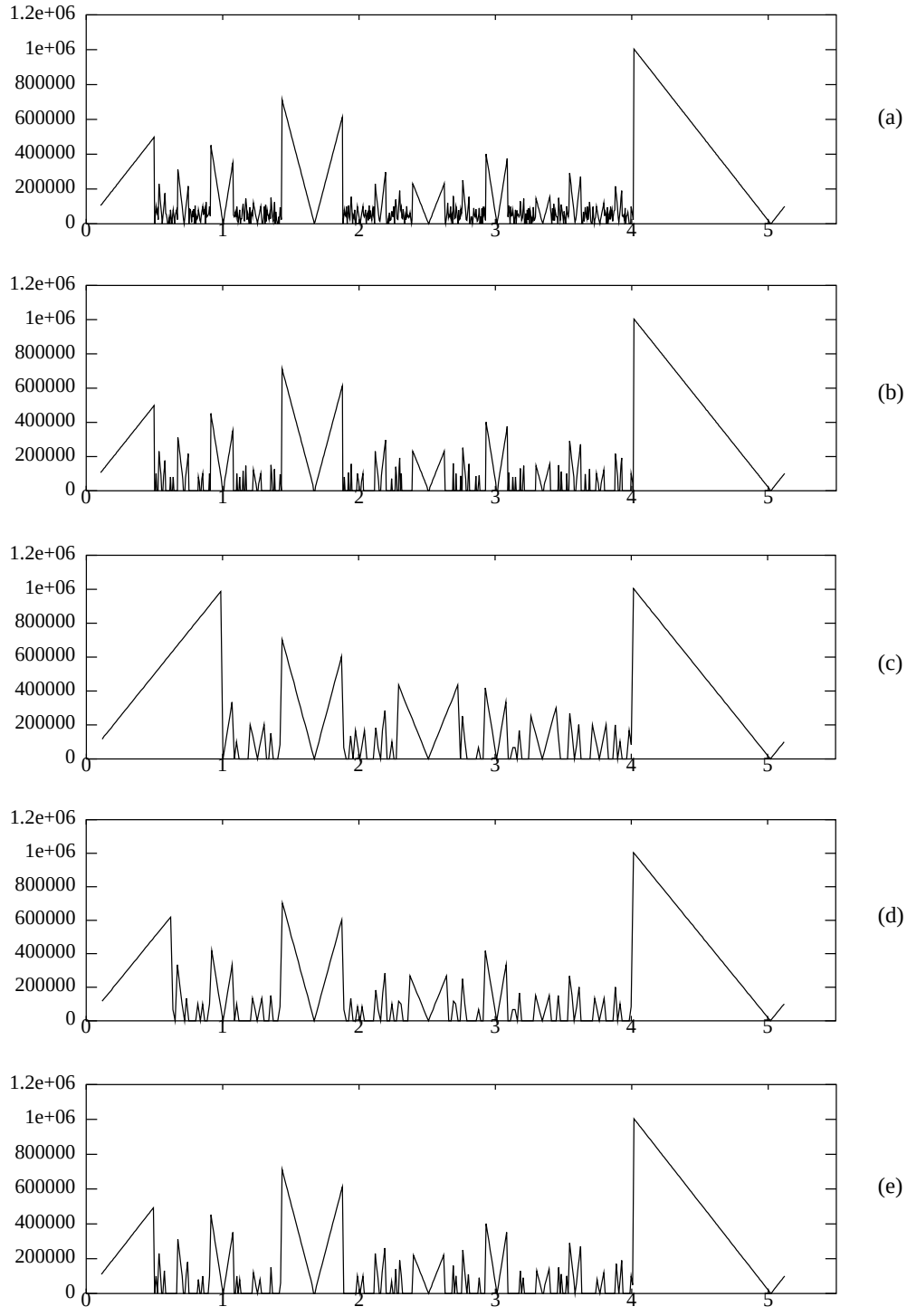


FIG. 6.55 – *Propriétés de l'erreur arithmétique en fonction des critères de résolution physiques. Les paramètres indiqués sur les courbes sont respectivement* ϵ_{min}, a_{max} *pair,* a_{max} *impair et* q_{max}

ne seront pas identiques car avec un pas fin on a tout simplement plus de chance de tomber sur un rationnel (comparer (b) et (e) construit avec un échantillonnage deux fois plus fin). D'autres critères interviennent également dans la construction de ces figures. De récentes études montrent qu'un certaine contrainte de résolution arithmétique semblerait également intervenir [Planat 99].

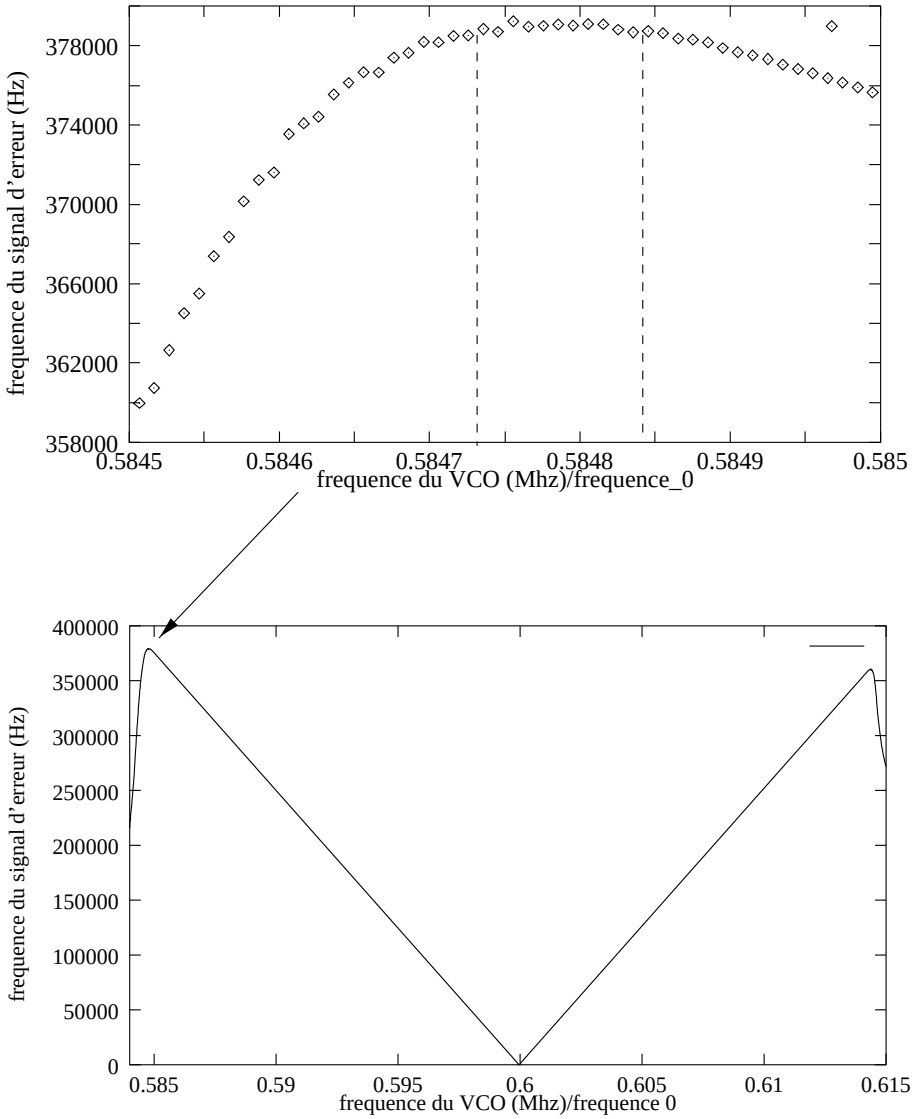


FIG. 6.56 – *Détail des maximums V_G et V_D du rapport $\frac{3}{5}$ du spectre expérimental de la figure Fig. 6.52.*

On peut donc de ce fait accéder à une plus grande précision en faisant varier expérimentalement la fréquence par pas de 1 Hz (limite actuelle de nos synthétiseurs). Les courbes de la figure Fig. 6.56 montrent un agrandissement de la région 3/5 de la figure Fig. 6.52 expérimentale. On vérifie la dissymétrie des droites et la mesure du maximum

peut être évaluée à partir du fichier et vaut

$$\nu_G = 0.58478 = [0, 1, 1, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 5], \tag{6.91}$$

avec une erreur :

$$\nu_G + \delta\nu = 0.584845 = [0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 2, 2], \tag{6.92a}$$
$$\nu_G - \delta\nu = 0.58473 = [0, 1, 1, 2, 2, 4, 1, 1, 4, 186]. \tag{6.92b}$$

Le développement de ν_G est donc assuré de commencer par

$$\nu_G = [0, 1, 1, 2, 2, 4, ...]. \tag{6.93}$$

De même $\nu_D = 0.6145 = [0, 1, 1, 1, 1, 2, 6, 3, 3, 2]$, avec la même erreur :

$$\nu_D + \delta\nu = 0.61455 = [0, 1, 1, 1, 1, 2, 6, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2], \tag{6.94a}$$
$$\nu_D - \delta\nu = 0.614435 = [0, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 5, 1, 1, 16, 1, 2, 1, 2], \tag{6.94b}$$

soit

$$\nu_D = [0, 1, 1, 1, 1, 2, ...]. \tag{6.95}$$

Pour le cas $p/q = 3/5 = [0, 1, 1, 2]$, on a donc $a_{max} = 2$.

L'étude du rapport 2/3 (avec la même précision) donne :

$$\nu_G = [0, 1, 1, 1, 6, 2 \pm 1, ...], \tag{6.96a}$$
$$2/3 = [0, 1, 2], \tag{6.96b}$$
$$\nu_D = [0, 1, 1, 1, 6, 2, 2 \pm 1, ...], \tag{6.96c}$$

et l'on trouve ici $a_{max} = 6$, suivi d'un éventuel $a^{(2)}_{max} = 2$. Une amélioration de l'étude en fonction du pas d'échantillonnage peut être envisagée en utilisant des oscillateurs et synthétiseurs plus précis. Le tableau Tab. 6.4 donne les valeurs des a_{max} expérimentaux obtenu pour $f_c = 375$, 58, et 3 Khz avec leur incertitude expérimentale. Seuls les harmoniques impairs ont été portés ici. Pour les rapports p/q avec p ou q pair, aucune règle n'est apparente.

Ces valeurs ont permis le choix des valeurs de a_{max} pair et impair pour l'établissement des figures Fig. 6.52, Fig. 6.53 et Fig. 6.54, et constituent notre meilleure interprétation du spectre d'intermodulation de la PLL non linéaire.

f_c ; p/q	1/1	1/3	1/5	1/7	1/9	3/5	3/7	5/9
375 kHz	-	2±1	2±1	2±1	2±1	2	2±1	2± 1
58 kHz	20± 1	10	7± 1	7±1	7±1	12	9±1	9
3 kHz	89±3	76±5	80±9	70±10	90±9	-	-	-

TAB. 6.4 – *Valeurs expérimentales de a_{max} pour les rapports $\frac{p}{q}$ impairs*

6.8 Résultats et interprétation

L'étude du fonctionnement global de la PLL a mis en relief une propriété de nature arithmétique imposée par les conditions physiques expérimentales de mesure. La propriété arithmétique des paramètres imposés dans la boucle conditionne son évolution et se trouve être une propriété invariante mise en évidence par la nature même de la mesure effectuée. Cette propriété possède une structure multi-échelles dans le sens où elle apparaît pour tous les rationnels p/q présents, quelle que soit l'amplitude de ceux-ci.

En revanche, l'amplitude joue un rôle dans la résolution du système, car c'est elle qui fixe la limite physique de l'observation du phénomène. Mais lorsque le phénomène est observable, il possède la même structure. La notion de seuil intervient également ici, elle est attribuée à la limitation due à la mesure.

Nous mettons en évidence expérimentalement le fonctionnement global de la PLL et la présence d'invariants de nature arithmétique. Cette expérience confirme les résultats théoriques décrits dans le chapitre 5 ; elle envisage la possibilité d'étudier la PLL ou n'importe quel autre système bouclé fonctionnant à partir d'un mélange de fréquence par des méthodes arithmétiques.

Ces méthodes arithmétiques ont également prouvé leur importance dans les méthodes d'échantillonnage des signaux. Elles permettent, entre autre, de caractériser les périodes des systèmes par des méthodes temporelles, et ce avec un dispositif expérimental très simple utilisant les propriétés des oscillateurs ultrastables. Cette étude présente donc une perspective tout à fait réaliste de l'utilisation de l'arithmétique pour la caractérisation des systèmes par échantillonnage.

Chapitre 7

L'expérience de résonance porteuse-enveloppe

Cette étude est née d'une expérience destinée à propager des solitons dans les lignes à ondes de surface [Planat 95]. Le dispositif électronique s'inspire de celui d'un oscillateur à onde de surface (cf. chapitre 1). La modification se traduit par l'introduction d'une source d'injection extérieure de fréquence angulaire ω_{HF}.

7.1 Dispositif électronique

La ligne à retard (SAW) de pertes d'insertion $P_{SAW} = -20$ dB et de fréquence de synchronisme d'environ 91,77 MHz est insérée dans une boucle comprenant un élément modulateur, un amplificateur haute fréquence large bande suivi d'un ensemble détection d'enveloppe et amplification basse fréquence (Fig. 7.1). La modulation s'effectue sur un signal de fréquence porteuse f_{HF} et d'amplitude u délivrée par un synthétiseur de fréquence. À partir de cet oscillateur forcé, nous avons étudié l'apparition des effets de blocage de modes sous-harmoniques obtenus à partir de l'amplitude u imposée par la source, lors d'un cas particulier qui correspond au fonctionnement à une période T_{BF} fixée par la durée de la réponse impulsionnelle de la ligne.

On réalise dans un premier temps une détection, puis une amplification de l'enveloppe et dans un deuxième temps, on élabore, à partir de celle-ci la durée θ de mise en conduction de la source d'injection en entrée du modulateur. Dès lors, en sortie du modulateur, la fréquence $f_{BF} = \frac{1}{T_{BF}}$ impose à la ligne un spectre de raies autour de la fréquence d'excitation, fonction de sa réponse précédente et ceci dans la bande de fréquence fixée par la durée θ d'injection (Fig. 7.1).

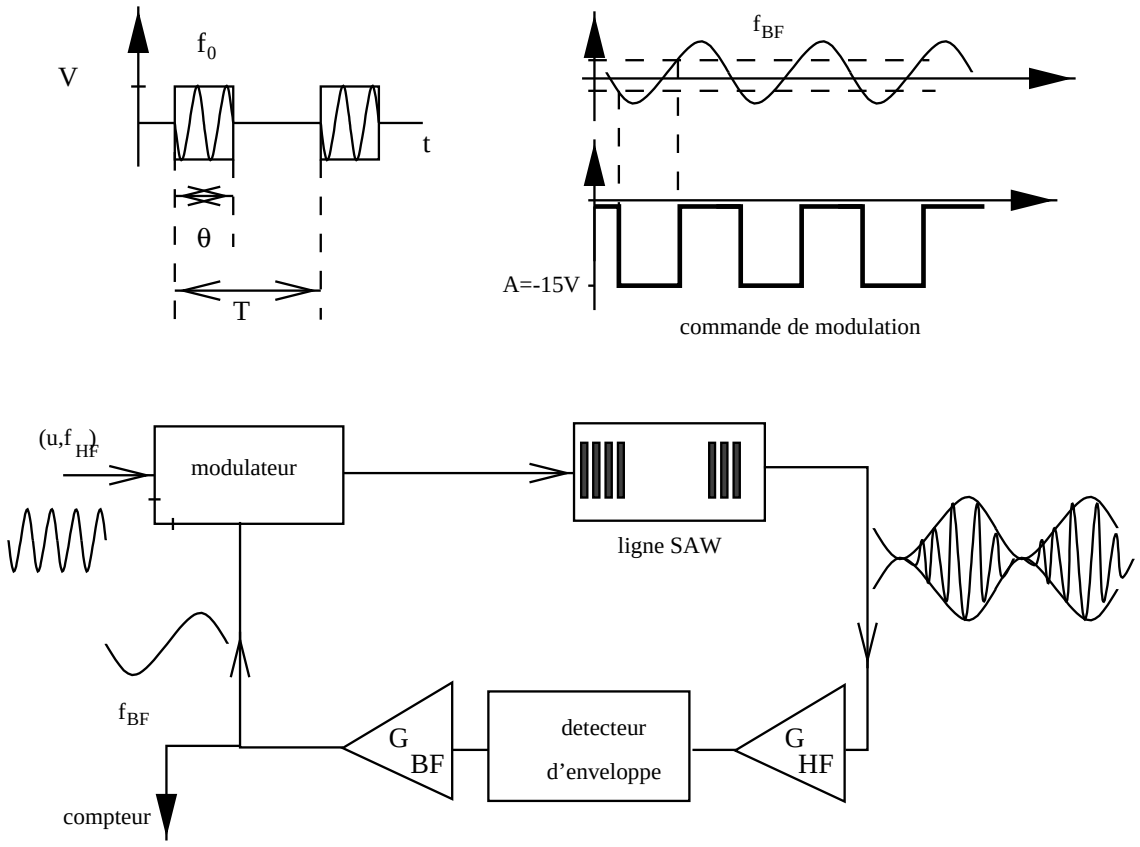


FIG. 7.1 – *Dispositif électronique de l'expérience de résonance porteuse-enveloppe.*

7.1.1 Réponse impulsionnelle de la ligne

Afin de comprendre le mécanisme de génération de la basse fréquence, l'étude de la réponse impulsionnelle de la ligne a été réalisée. On injecte des impulsions de fréquence f_0 et d'amplitude V_{RMS} de longueur θ à intervalles temps périodique T (Fig. 7.1).

Étude en fonction de f_{HF}

La ligne utilisée présente une fréquence de synchronisme (mesurée à l'analyseur de réseau) de 91.77 MHz. Nous avons reporté la réponse de la ligne sur la figure Fig. 7.2 pour différentes valeurs de la fréquence f_{HF} d'excitation. Nous avons également porté l'allure de la détection effectuée par le détecteur.

La réponse de la ligne dépend de la fréquence de synchronisme. Lorsque l'on se trouve loin de 91.77 MHz ($f_0 \leq 85{,}3$ MHz, et $f_0 \geq 132$ MHz) seule la réponse électromagnétique est présente. Autour de la fréquence 91,77 MHz, le recouvrement des réponses acoustiques et électromagnétiques engendre un signal de détection moins irrégulier. Enfin, à la fréquence de synchronisme, le retard et l'amplitude sont maximaux. Dans ce cas, les deux

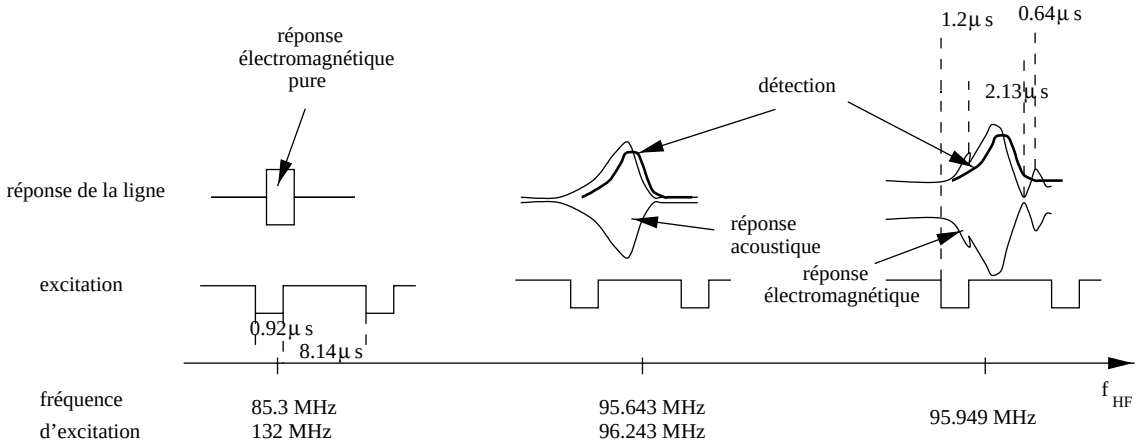


FIG. 7.2 – *Réponse de la ligne en fonction de f_{HF} à $T = 9,06\mu s$ et $\theta = 0,920\mu s$.*

réponses acoustiques et électromagnétiques sont séparées, mais la détection de l'enveloppe ne rend compte que légèrement de la présence de la réponse électromagnétique.

Étude en fonction de la période de répétition T à durée constante l.

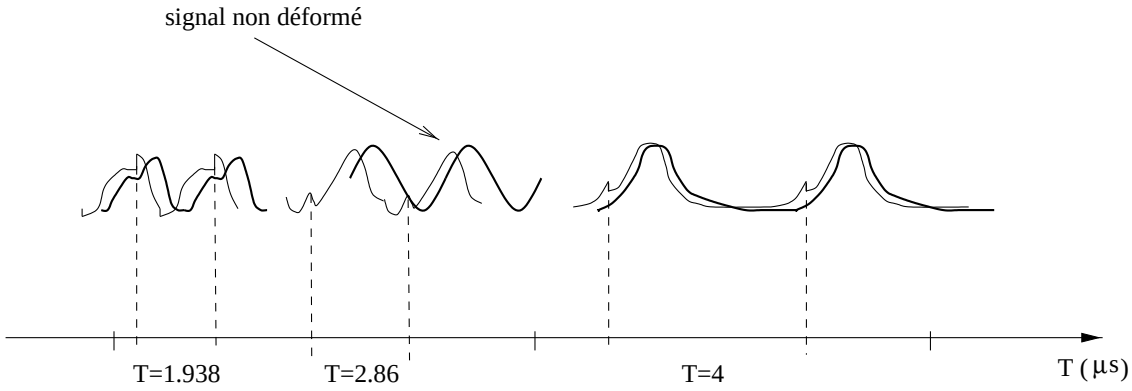


FIG. 7.3 – *Réponse de la ligne en fonction de T à $\theta = 0,920\mu s$.*

On se place à $V_{RMS} = 518$ mV et $\theta = 0{,}920$ μs (Fig. 7.3). On fait varier T de 1,938 μs $\sim 2\theta$ à 4 μs et on constate le chevauchement des réponses successives donnant lieu à un signal de détection quasi-sinusoïdal pour T = 2,86 μs.

Étude en fonction de θ et V_{RMS}.

L'étude en fonction de θ est équivalente à celle de fonction de T et celle en fonction de V_{RMS} a montré une linéarité de la réponse en fonction de l'amplitude d'excitation. La sensibilité de la ligne est donc surtout prépondérante par rapport aux variations de sa fréquence d'excitation et par rapport à la durée du rapport cyclique.

7.1.2 Propriétés du modulateur

La fonction du modulateur dans cette expérience est de générer une porteuse pendant une durée θ déterminée à partir de la basse fréquence selon le schéma de la figure Fig. 7.4.

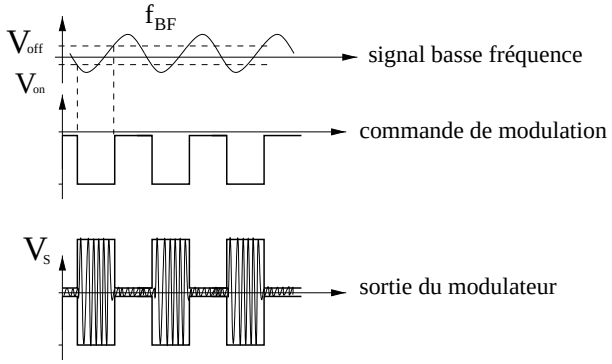


FIG. 7.4 – *Fonctionnement schématique du modulateur.*

La modulation dépend de deux tensions d'ouverture V_{ON} (∼-0,8 V) et de fermeture V_{OFF} (∼ 1,5 V) définissant la mise en conduction. L'amplitude de la porteuse V_S dans la plage de conduction dépend de l'amplitude du signal d'entrée u et présente une courbe de saturation donnée par la figure Fig. 7.5. La caractéristique présente une certaine saturation

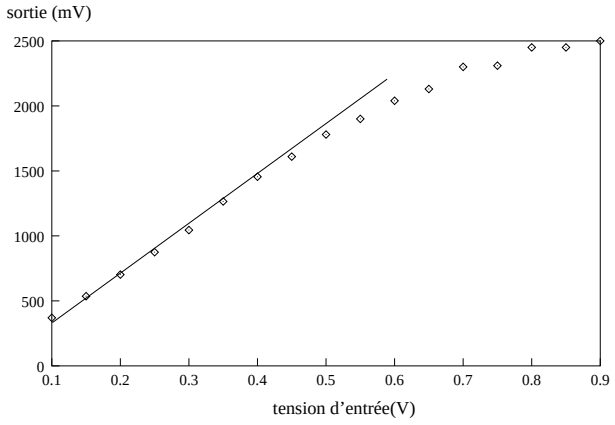


FIG. 7.5 – *Amplitude V_s de sortie du modulateur en fonction de l'amplitude de la porteuse.*

à partir d'une amplitude $u_{rms} \sim 0,9$ V que l'on s'est efforcé de ne pas dépasser. La valeur précise des tensions de déclenchement V_{ON} et V_{OFF} n'a pas été déterminée avec précision. On l'a simplement évaluée avec un oscilloscope. Nous allons voir que le fonctionnement général de cette expérience dépend assez significativement de ces deux variables V_{ON} et V_{OFF}.

7.1.3 Instrumentation et technique d'acquisition des données

Pour cette expérience, l'instrumentation utilisée fut la suivante :

- Générateur d'impulsion de démarrage
- Synthétiseur de fréquence Racal Dana
- Compteur de fréquence HP5334B
- Césium de référence et synthétiseur Fluke pour technique de battement
- Oscilloscopes et analyseur de spectre
- Modulation d'amplitude avec générateur de signaux basse fréquence

À l'époque, l'acquisition des données n'était effectuée qu'avec un PC 386 en mode DOS. Le traitement des données a été réalisé sur une station de travail HP.

La mesure de la fréquence a été faite avec une méthode de double battements (Fig. 7.6). Cette méthode permet de transposer la mesure de fréquence à 280 kHz à une mesure à 7.7

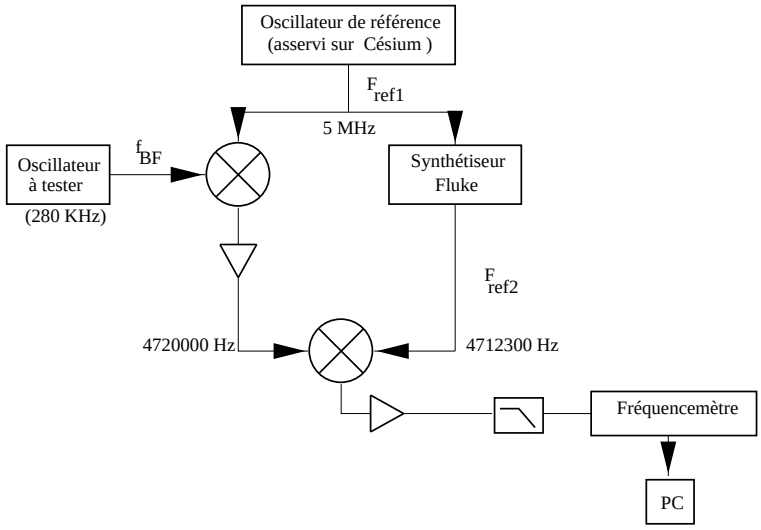


FIG. 7.6 – *Banc de mesure de la basse fréquence* f_{BF}

kHz, générant ainsi une mesure 36 fois plus précise (cf. chapitre 2). On réalise un premier battement entre le 280 kHz et le 5 MHz d'une référence asservie sur un césium donnant une fréquence de 4.72 MHz. Un second battement est effectué avec une référence à 4,7123 MHz pour obtenir une basse fréquence à 7.7 kHz qui sera comptée avec le compteur, pour des valeurs de τ variant de 0,01 (limite de la rapidité de la transmission IEEE et

celle de fonctionnement du PC) à quelques secondes. On a également étudié l'influence de l'option déclenchement automatique (auto-trigger) qui permet au compteur de déterminer sa position optimale de déclenchement. Il se trouve que pour ce faire, le compteur envoie un signal qui perturbe le signal mesuré (cette perturbation est d'ailleurs souvent visible à l'oscilloscope). De plus, cette fonction engendre un temps τ systématique d'environ 1s entre les mesures réalisées à $\tau < 1$s. C'est la raison pour laquelle les dernières mesures ont été systématiquement réalisées en l'absence de cette fonction auto-trigger, la position du déclenchement du trigger étant optimisée par un examen visuel du signal.

7.2 La résonance porteuse-enveloppe et ses propriétés

Nous avons effectué des enregistrements de la fréquence f_{BF} en fonction de l'amplitude u d'injection délivrée par le synthétiseur (rampe de variation d'environ 100 mV/h). La figure Fig. 7.7 donne l'évolution correspondante du rapport de fréquence $\Omega = \frac{f_{HF}}{f_{BF}}$. Nous avons observé pour la première fois [Lardet-Vieudrin 96a, Lardet-Vieudrin 96b, Planat 96c], un phénomène de synchronisation entre la porteuse et l'enveloppe d'un signal modulé, présentant une dynamique couvrant 8 rapports de fréquence différents. Les

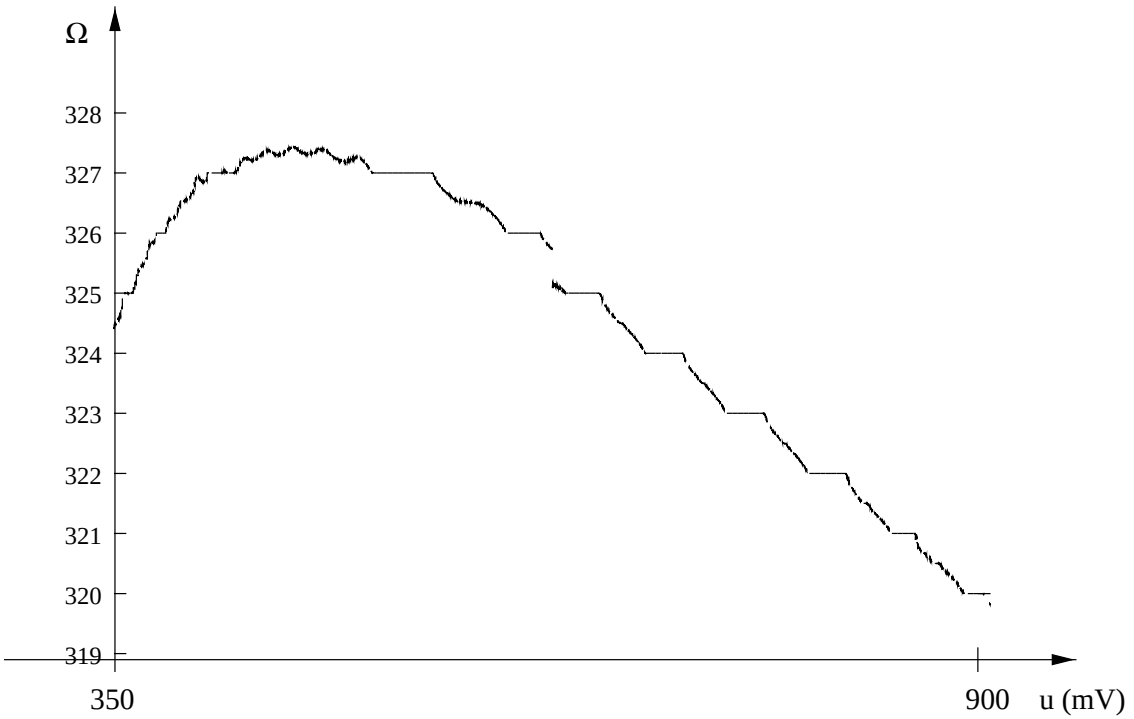


FIG. 7.7 – *Résonance porteuse-enveloppe dans une expérience de modulation par injection.*

paliers observés pour les rapports de fréquence Ω variant de 320 à 327 correspondent

au verrouillage de la boucle sur une fréquence f_{BF} correspondant à un diviseur de la fréquence d'injection. Leur largeur respective témoigne de la robustesse du verrouillage vis-à-vis des variations de l'amplitude d'injection[24].

Nous sommes donc en présence d'un phénomène d'une très grande stabilité structurelle où la non-linéarité est plus importante que dans le cas de la PLL non linéaire. Il s'agit bien d'une résonance de l'enveloppe sur la porteuse car nous avons vérifié que la fréquence de l'injection était constante, cette condition étant garantie par l'utilisation d'un amplificateur d'isolation en entrée du modulateur.

7.2.1 Détails des paliers : observations d'un escalier du diable

Nous avons porté sur la figure Fig. 7.8 le détail de la caractéristique et la valeur de l'exposant de Hölder α (cf. chapitre 5). Rappelons que les grandes valeurs de α indiquent une stabilité alors que les plus petites indiquent une instabilité locale.

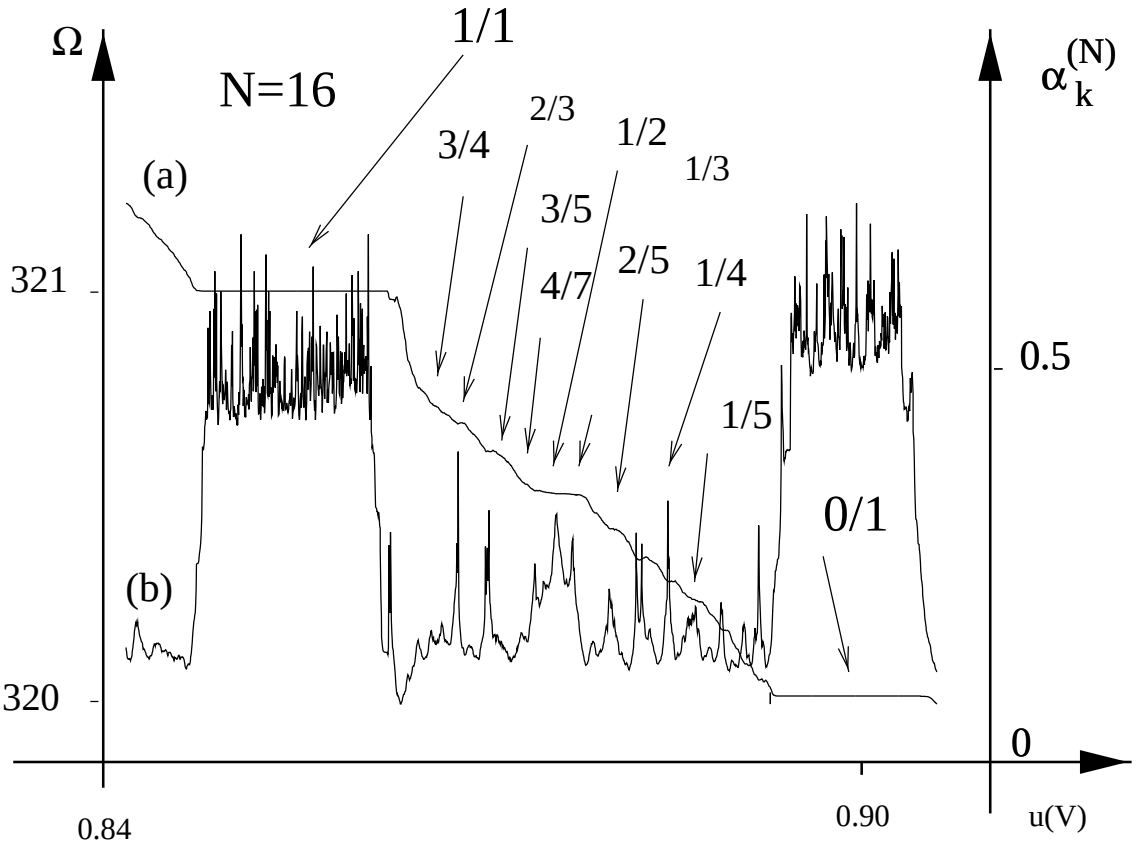


FIG. 7.8 – *Détails des résonances : un exemple d'escalier du diable expérimental.*

24. Nous n'avons pas observé de telle robustesse dans l'expérience de PLL non linéaire.

7.2.2 Méthode de calcul de l'exposant de Hölder α

Observation expérimentale de l'arbre de Farey

La détermination de α associé à cette expérience a été possible par l'utilisation d'une moyenne glissante développée et utilisée par M. Planat, pour détecter des corrélations dans le bruit [Planat 96b]. Cette moyenne glissante permet de réaliser un moyennage de N données et ainsi de faire apparaître des paliers invisibles sinon. La valeur N est à rapprocher du nombre d'itérations de la carte d'Arnold, où à mesure que celle-ci augmente, les paliers apparaissent. Il s'agit de ce fait d'une généralisation de la variance d'Allan, développée dans l'esprit de l'analyse de la convergence des séries au sens de Riemann.

À partir des données originales $\{\Omega_i = f_{HF}/f_{BF}^i \, ; \, i = 1, ..., N_{tot}\}$ issues du comptage de la fréquence f_{BF}, nous construisons $(N_{tot} - N)$ quantités $\{\Delta\Omega_k^{(N)} \, ; \, k = 1, ..., (N_{tot} - N)\}$ définis par (Fig. 7.9) :

$$\Delta\Omega_k^{(N)} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=N+1}^{i=2N} \Omega_{k+i} - \sum_{i=1}^{i=N} \Omega_{k+i}\right). \tag{7.1}$$

On peut facilement constater que, le cas $N = 1$, on retrouve le terme $\Delta\Omega_k^{(1)}$ pris en

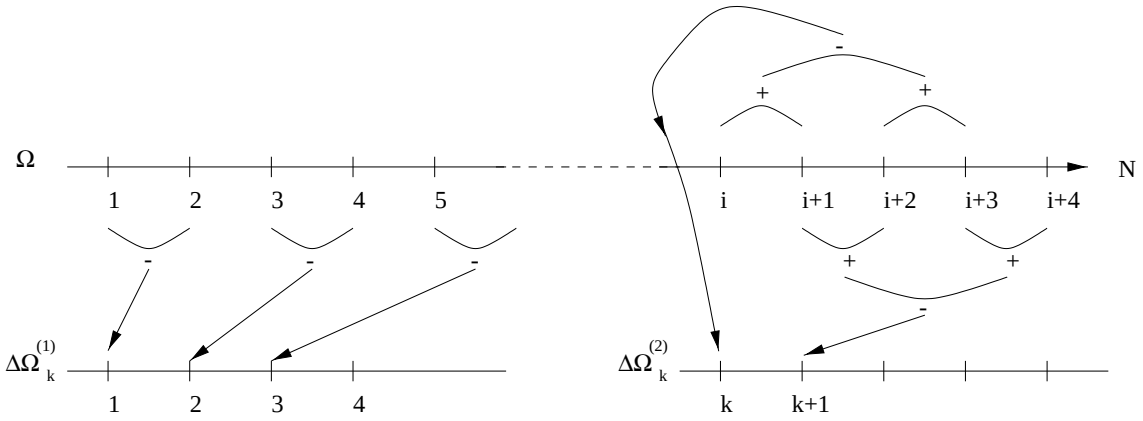


FIG. 7.9 – *Construction des données $\Delta\Omega_k^{(N)}$ par moyennages.*

compte pour le calcul de la variance d'Allan. L'exposant de Hölder est donné par :

$$\alpha_k^{(N)} = -\frac{\log \mid \Delta\Omega_k^{(N)} \mid}{\log(N\tau)}. \tag{7.2}$$

On vérifie que cette terminologie est en accord avec l'approche expérimentale selon laquelle les petites fluctuations des données expérimentales impliquent des petites valeurs de $\Delta\Omega_k^{(N)}$, une grande valeur de $\alpha_k^{(N)}$ et donc une convergence de la série si $\alpha_k^{(N)} > 1$. On

a porté sur la figure Fig. 7.8 l'exposant de Hölder et l'on constate l'apparition très nette des zones de synchronisation par la présence des pics ou $\alpha_k^{(N)}$ suit une hiérarchie de Farey (cf. paragraphe 5.3.5).

En effet, la valeur de $\alpha_k^{(N)}$ est maximale (par valeur décroissante) pour : $0/1; 1/1 \rightarrow 1/2 \rightarrow 2/3; 1/3 \rightarrow 2/5; 3/5, \rightarrow ....$ Nous appelons cette région structure de Farey parce qu'elle respecte la hiérarchie de Farey. La structure est visible vers une amplitude d'injection $u = 900mV$. Rappelons pour mémoire qu'elle a également été observée dans de nombreuses expériences [Gutzwiller 88] et notamment dans l'effet Josephson des diodes supraconductrices [Bai-Lin 88, p. 16]

Étude en fonction de N

Nous avons étudié l'influence du nombre N de moyennages effectués pour le calcul de α sur un enregistrement de 40000 comptages de la fréquence avec $\tau = 1$ s (position déclenchement automatique activée). Cette expérience a été réalisée avec une autre ligne SAW à une fréquence d'injection de $f_0 = 91.554$ MHz et une amplitude $u = 833$ mV (Fig. 7.10). Il se dégage nettement la structure de l'escalier du diable pour quelques paliers principaux.

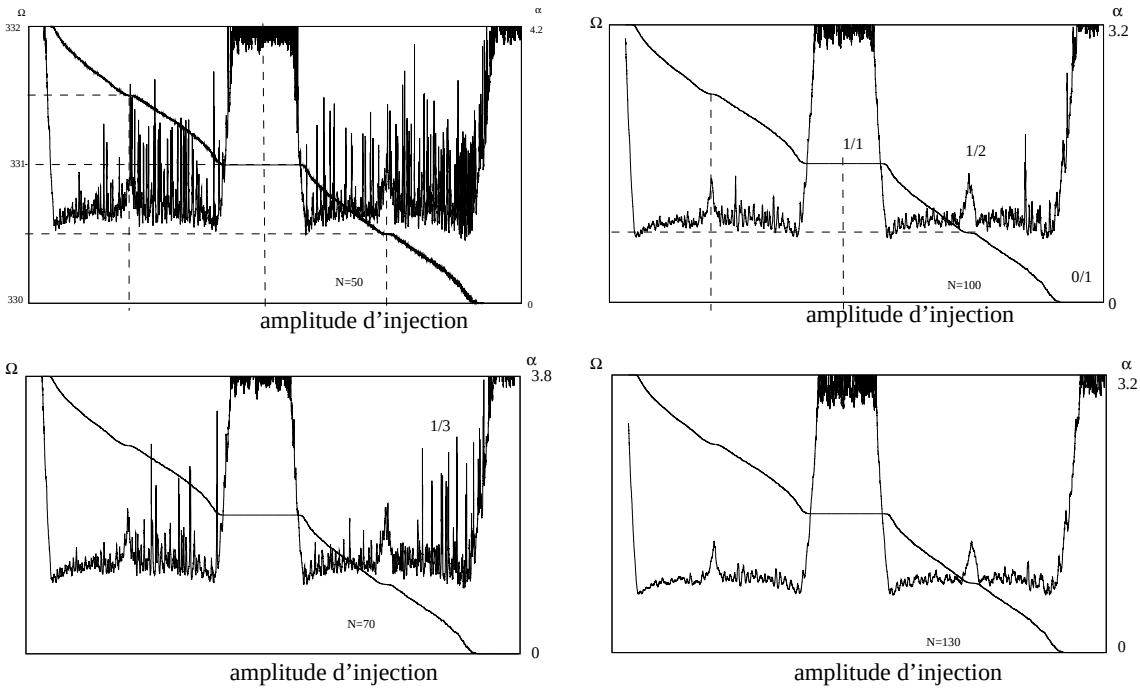


FIG. 7.10 – *Étude de l'exposant de Hölder en fonction de N.*

Le calcul de l'exposant de Hölder a été effectué avec $N = 50, 70, 100$ et 130. On constate qu'à mesure de l'augmentation de N, les paliers se forment en faisant apparaître

pour $\Omega = 1/2$ un pic important et une série de pics situés autour de $\Omega = 1/3$. Il nous a fallu moyenner sur $N = 130$ points pour faire apparaître la structure alors que pour la figure Fig. 7.8, une valeur de $N = 14$ était suffisante. En fait, ceci provient du fait que dans cette expérience, la rampe de variation de l'amplitude est plus lente. Il faut un moyennage qui couvre un intervalle de longueur suffisamment importante pour faire apparaître les paliers. Si l'expérience est réalisée avec une faible variation d'amplitude, il faudra plus de points pour que la structure apparaisse.

Cette étude montre que l'extraction de la propriété de l'exposant de Hölder nécessite un traitement multi-échelles dans lequel la propriété du système à l'instant t dépend de celles de l'instant passé et dont la méthode d'acquisition peut être influente pour son observation. La structure arithmétique apparaît dans ce cas ; elle semble alors directement liée aux phénomènes de mémoire. De plus, cette structure s'affine en résolution et en richesse lorsque N diminue alors qu'au contraire elle s'appauvrit par lissage.

La prise en compte de moyennage important affecte la quantité d'information présente dans ce système. Il est donc indispensable de réduire les moyennages dans les études.

Observation expérimentale de l'arbre de Markoff

Au cours du chapitre 5, nous avons rappelé les propriétés des nombres de Markoff. Ce sont des réels qui sont difficilement approchables par des rationnels au sens de l'analyse diophantienne. D'un point de vue expérimental, si on se donne une limite de résolution (comme celle que l'on s'est donnée pour la PPL non linéaire), ces nombres sont ceux qui sont les « plus éloignés » des rationnels. Ainsi, si l'expérience est favorable à la synchronisation sur des rationnels en faisant apparaître des paliers détectés par α, celle-ci sera *a contrario* défavorable aux nombres éloignés des réels : les irrationnels de Markoff. C'est donc dans la région présentant un maximum d'instabilité locale que l'on a repéré quelques nombres de la théorie de Markoff (Fig. 6.49).

Le maximum d'instabilité locale est déterminé à partir de $\Delta\Omega_k^{(N)}$et quelques maximums d'instabilité ont été observés pour des valeurs de $\Omega = \sqrt{2} - 1$, $\frac{\sqrt{221}-11}{10}$ et $\frac{\sqrt{1517}-29}{26}$.

Nous portons toutefois beaucoup de réserve par rapport à cette analyse pour les raisons suivantes. La première remarque est d'ordre expérimentale : à part le cas $\Omega = \frac{\sqrt{1517}-29}{26}$, les deux autres rationnels ne sont pas déterminés avec un grand pouvoir séparateur. Le cas de l'arbre de Farey est bien mieux résolu. La deuxième raison est purement théorique. Il existe une infinité de réels ν possédant la constante de Markoff $C(\nu) = \frac{\sqrt{5}}{221}$. Ces nombres

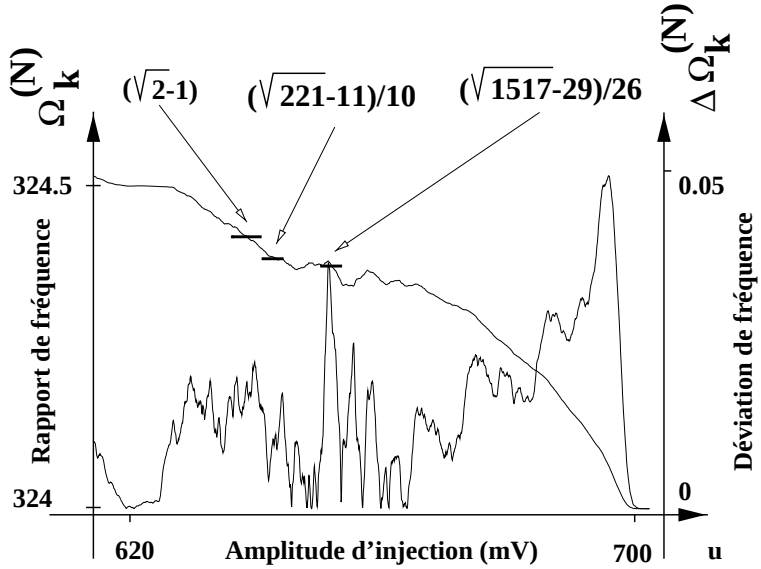


FIG. 7.11 – *Structure fine de type Markoff et ses principales zones identifiées.*

sont donnés par (5.54) :

$$C(\nu) = \frac{a\nu_0 + b}{c\nu_0 + d} \quad \text{avec} \quad \nu_0 = \frac{\sqrt{221} - 11}{10} \quad . \tag{7.3}$$

Nous ne comprenons pas pourquoi $\nu_0 = \frac{\sqrt{221}-11}{10} = [0, \overline{2,1,1,2}]$ apparaîtrait plutôt que $\nu_1 = \frac{\nu_0+1}{5\nu_0+6}$, où n'importe quel autre nombre compris dans cette région.

En fait, proche de $\nu_0 = 0.386$, les réels possèdent un développement qui commence par $[0, 2, 1, ...]$. Par exemple, le nombre

$$\nu_2 = [0, 2, 1, 3, \overline{2, 1, 1, 2}] = \frac{\nu_0 + 4}{3\nu_0 + 11} = 0,36074, \tag{7.4}$$

possède les mêmes propriétés arithmétiques et il est difficile à discerner des autres. La présence de ceux observés provient vraisemblablement d'une autre origine [Planat 97].

7.2.3 Influences des paramètres expérimentaux

Étude du retard imposé par la ligne.

Nous avons étudié l'apparition des paliers en l'absence de ligne à retard. Celle-ci a été remplacée par un simple cordon BNC de longueur variable. L'obtention de la basse fréquence était réalisée à partir d'une impulsion de démarrage de largeur suffisante. La détection et le filtrage de l'enveloppe généraient ensuite une commande suffisante pour entretenir le système. Les courbes (a) et (b) de la figure Fig. 7.12 correspondent respectivement à un cordon BNC de 50 cm et 8 m. La fréquence f_0 était de 100 MHz, pour

une amplitude variable de 500 à 1500 mV. Le retard le plus important occasionné possède un rapport Ω plus grand. Cette expérience confirme la proportionnalité du retard et du rapport Ω.

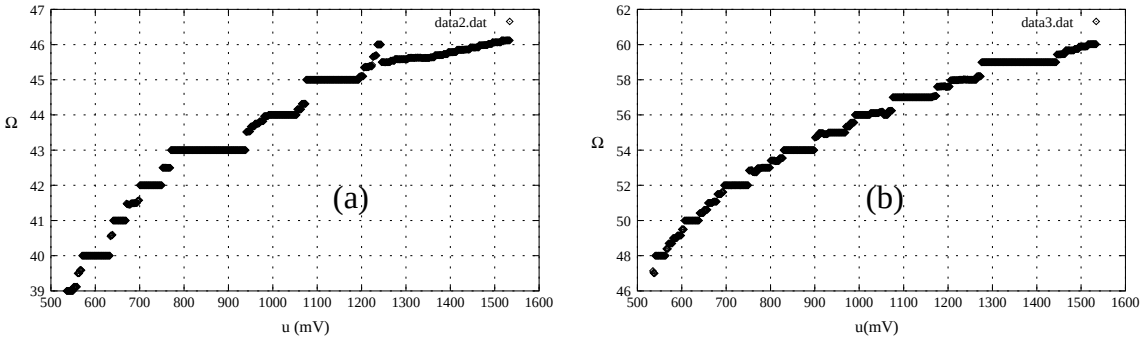


FIG. 7.12 – *Influence du retard introduit par un cordon BNC. (a) : 50cm (b) : 8m.*

Influence de l'impédance de la ligne.

Nous avons effectué des enregistrements en remplaçant la ligne SAW par une résistance, un condensateur et une bobine (Fig. 7.13). Les courbes (a) et (b) ont été réalisées en appliquant une modulation d'amplitude triangulaire de 500 secondes de période. La symétrie apparente est le reflet de cette modulation et permet de constater (surtout pour (b)) la présence d'hystérésis dans le comportement. Le remplacement par la bobine n'apporte pas de résultats intéressants.

Avec la résistance de 50 Ω (a), on devine les paliers et avec le condensateur (b), les rapports d'accrochage sont très rares (109 ; 109,5 ; 110) mais on devine tout de même l'influence des autres rapports (cf. détail (c) et (d)).

Influence du taux de modulation.

L'un des principaux soucis était d'évaluer le temps d'attente entre chaque changement d'amplitude. Si le système possède de grandes constantes de temps, il est alors nécessaire que celui-ci soit suffisamment stabilisé sur un cycle limite pour faire la mesure. Nous avons donc réalisé des enregistrements pour différents taux de modulation de la rampe. Pour la figure Fig. 7.14(b), nous augmentons la durée de la rampe à chaque passage sur le rapport 122 et l'on constate que des paliers apparaissent ; ceci a largement été confirmé par la courbe (a) où nous avons enregistré environ 2500 points entre les deux rapports 122 et 123. Ici, nous avons inséré un condensateur de 3,3 pF à la place de la ligne et travaillé à 272 MHz. On ne devine que les paliers 2/3 et 1/2 ; les autres sont invisibles.

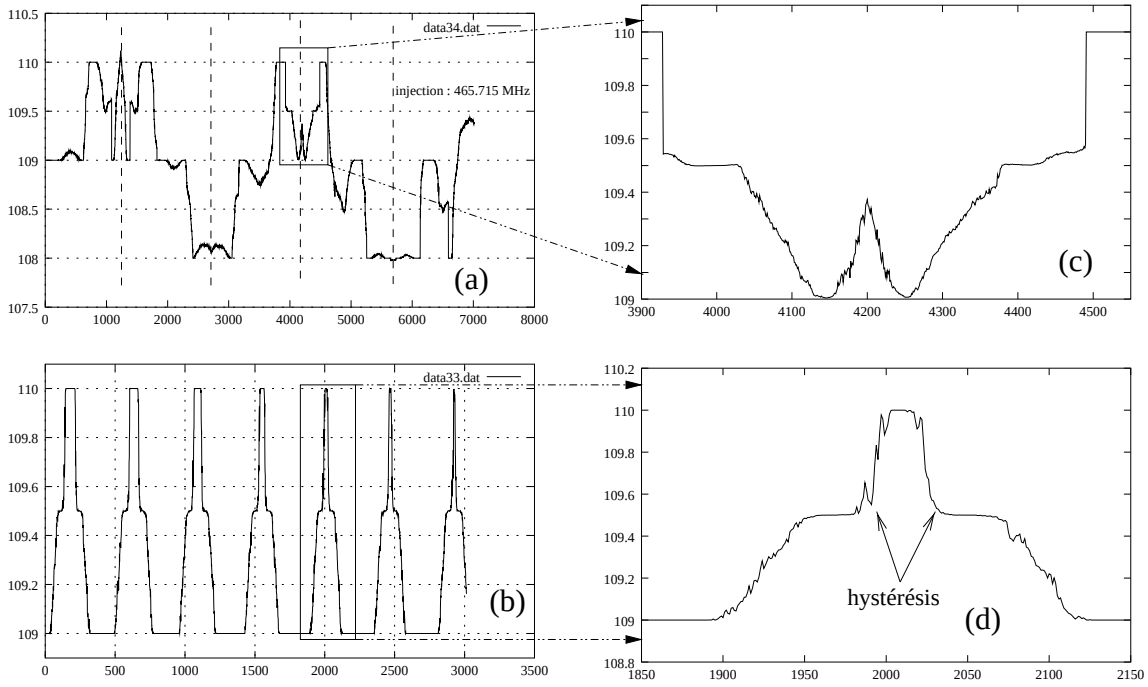


FIG. 7.13 – *Influence de l'impédance : (a) résistance* 50Ω, *(b) condensateur de 3.3 µF.*

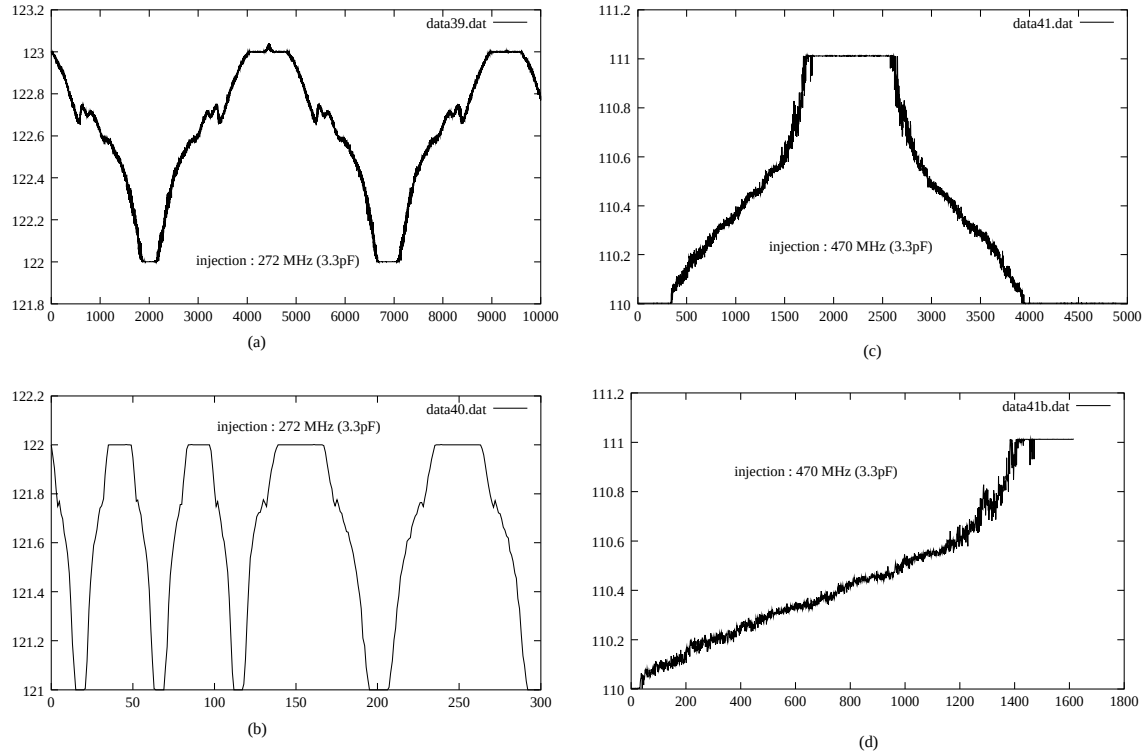


FIG. 7.14 – *Influence du taux de modulation dans le cas d'un condensateur.*

Les détails (c) et (d) montrent un enregistrement proche de chaque palier. La grande

stabilité des paliers est nettement visible par rapport à l'instabilité globale. Il existe également une très grande instabilité proche des bords du palier comme dans le cas de la PLL non linéaire. Notons aussi la forme générale de la « fréquence de battement » analogue à celle du régime « free-run » de la PLL (cf. Fig. 6.6). Nous avons également étudié le taux de modulation en présence de la ligne SAW avec une rampe (de symétrie apparente). On retrouve sur la figure Fig. 7.15 la caractéristique globale de la figure Fig. 7.7 avec les paliers de synchronisation.

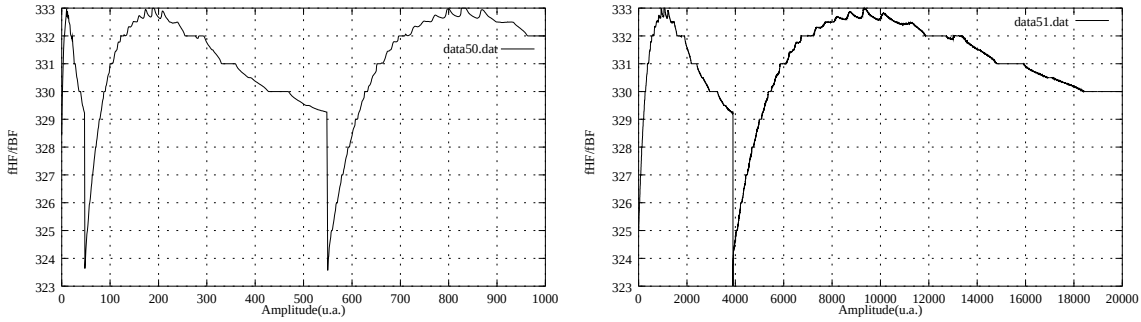


FIG. 7.15 – *Influence du taux de modulation dans le cas de la ligne.*

7.2.4 Observation d'un mapping bidimentionnel expérimental

L'observation de l'escalier du diable dans le cadre de cette expérience nous a alors incités à réaliser une expérience essayant de mettre en évidence un mapping de type Arnold. Rappelons que ce mapping consiste à construire une carte bidimentionnelle dans laquelle les propriétés de l'escalier du diable sont étudiés en fonction d'un paramètre de non-linéarité au moyen de propriétés de l'exposant de Hölder (cf. chapitre 5).

Il a donc fallu rechercher un paramètre expérimental analogue au c de la carte d'Arnold, susceptible de favoriser l'apparition des paliers de synchronisation. En se basant sur le fait que la variation de fréquence f_0 favorisait l'apparition de paliers avec une valeur de Ω plus importante et donc d'une plus grande richesse entre les différents paliers, nous avons voulu réaliser une expérience en faisant varier f_0 de 91,7715 à 91,780 MHz, par pas de 60Hz, centré autour de la fréquence de synchronisme de façon à obtenir 144 lignes. Cependant, cette expérience s'est stoppée à 91,77534 MHz générant ainsi 61 fichiers d'environ 71 koctets.

Chaque fichier comporte 2000 enregistrements de la fréquence comptée sur $\tau = 0.2$ s pour une amplitude u variant de telle sorte qu'elle fasse apparaître au moins deux fois les paliers $\Omega = 323; 324; 325; 326$. La rampe de l'amplitude, de forme triangulaire et de fréquence $f_{mod} = 1.5\ 10^{-3}$ Hz, était générée par un générateur WAVETEK. La figure

Fig. 7.16 présente tous les fichiers obtenus et met en évidence les 4 plages principales de synchronisation. On a porté la fréquence f_{BF} en fonction de l'amplitude pour différentes valeurs de f_0. La figure Fig. 7.17 présente les différentes cartes d'Arnold construites à partir de l'étude du coefficient de Hölder α.

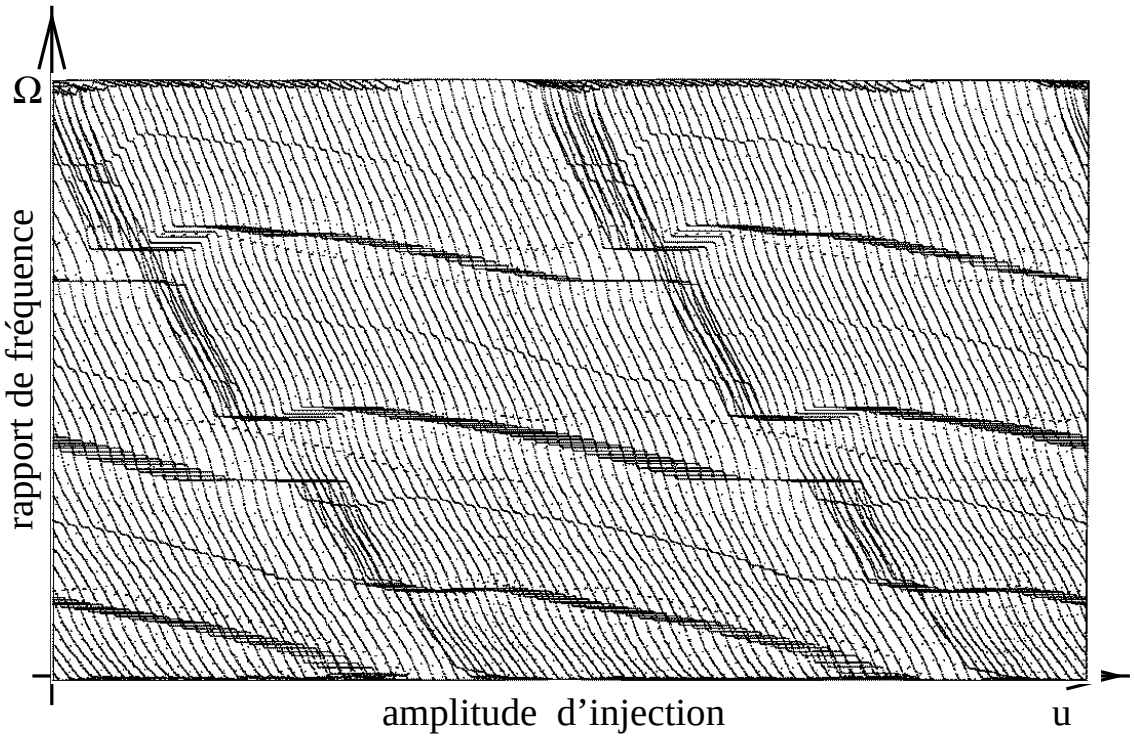


FIG. 7.16 – *Fréquence de l'enveloppe en fonction de u pour 59 valeurs de f_0 (un décalage des échelles est éffectué afin de faire apparaître les paliers)*

Méthode de traçage :

- Un premier programme `tracagefigure.f` détermine le nombre de rotation $\Omega(f_0, u)$, à partir des fréquences f_0 et f_{BF} et l'exposant $\alpha(f_0, u)$.
- Ensuite un deuxième programme `fonction.f` utilise les ressources graphiques de Xwindows pour le traçage de la figure, par l'attribution d'un code de couleur en fonction des propriétés de α.

Un code de couleur spécial a du être adapté au cas expérimental pour faire apparaître les structures. Un problème graphique qui n'a pu être résolu explique l'origine du parallélogramme obtenu. Les bandes rouges verticales expliquent le changement brutal de continuité dû à la modulation d'amplitude.

Cette expérience n'a pas été renouvelée faute de moyens informatiques suffisamment adaptés au traitement rapide des données. La lenteur de l'enregistrement (2 jours du 7 au

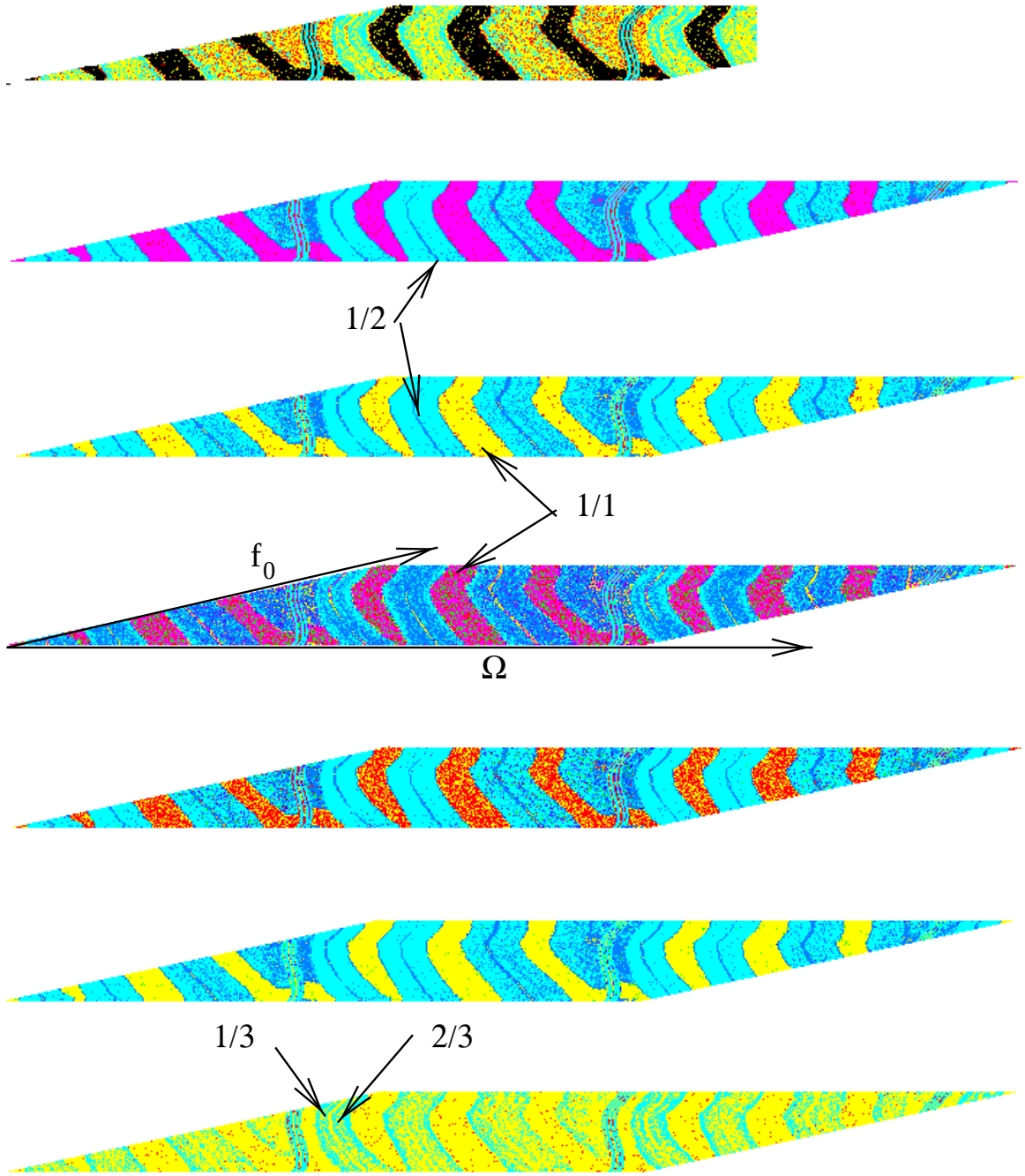


FIG. 7.17 – *Mapping bidimentionnel expérimental. Suivant les codes de couleur utilisés certaines régions synchronisées sont visibles.*

9 Mai 1996) laissait place à une influence possible des paramètres extérieurs. Elle a cependant mis en évidence une grande stabilité de la synchronisation, sa richesse structurelle, et a surtout permis de construire une carte d'Arnold à partir des données expérimentales.

7.3 Modélisation de l'expérience

Les principaux résultats expérimentaux concernent l'évolution de la fréquence f_{BF} du signal de commande de l'oscillateur en fonction de l'amplitude u de l'injection haute fréquence. Même si cette basse fréquence est reliée aux propriétés de la ligne SAW, il nous a été difficile de rendre compte de la structure de synchronisation en fonction des paramètres physiques du système. Voici les pistes exploitées.

7.3.1 Équation de Schrödinger non linéaire

C'est le premier modèle de l'expérience compte tenu de l'origine de cette expérience. Comme nous l'avons rappelé en introduction, il s'agit de faire propager des solitons dans les lignes à onde de surface. Comme l'évolution des solitons obéit dans certains cas à l'équation de Schödinger non linéaire (SNL), un modèle a donc été proposé [Planat 95].

Établissement de SNL.

L'étude de la propagation des paquets d'ondes modulés par une enveloppe lentement variable peut apparaître dans de nombreux contextes, comme la propagation des ondes hydrodynamiques en eau profonde ou encore la propagation d'information par fibre optique [Remoissenet 94]. Établissons SNL dans le premier cas.

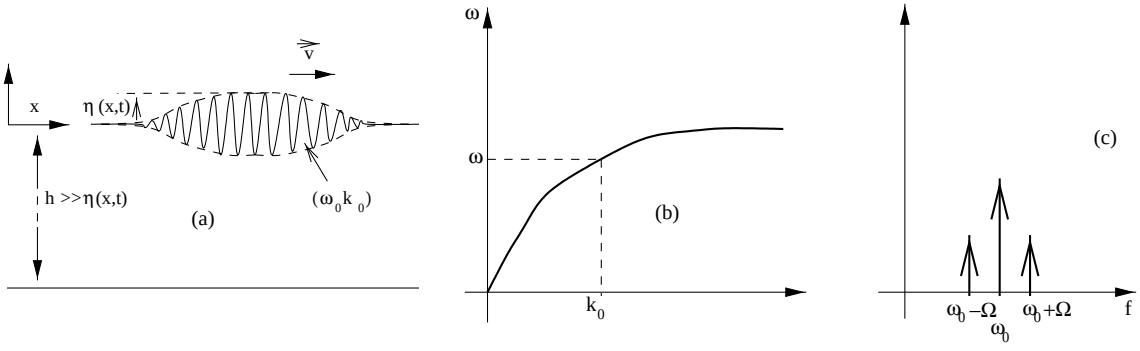


FIG. 7.18 – *Onde hydrodynamique en eau profonde.*

Considérons le cas d'une onde de gravité hydrodynamique (k_0, ω_0) évoluant dans une eau profonde (Fig. 7.18). On montre alors que la relation de dispersion s'écrit

$$\omega = f(k, A) = \sqrt{gk(1 + k^2A^2)}, \tag{7.5}$$

où A est l'amplitude maximale.

Si on suppose que la modulation est lentement variable et s'étend sur une grande distance, le spectre de Fourier sera concentré autour de la fréquence ω_0 de l'onde (Fig. 7.18). Dans ce cas, on peut développer la fréquence autour de ω_0 pour obtenir :

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k=k_0}(k - k_0) + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_{k=k_0}(k - k_0)^2 + ... \tag{7.6}$$

En posant $\Omega = \omega - \omega_0$, $K = k - k_0$ on a

$$\Omega = (v_g)_{k=k_0}K + P_{k=k_0}K^2 + ..., \tag{7.7}$$

où la vitesse de groupe v_g est la vitesse de propagation du paquet d'onde. L'équation (7.7) est la relation de dispersion de l'enveloppe, dont le profil $\eta(x,t)$ peut s'écrire :

$$\eta(x,t) = A(X,T)\cos(\omega_0 t - k_0 x), \tag{7.8}$$

$$\eta(x,t) = A(\epsilon x, \epsilon t)e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + c.c. \tag{7.9}$$

Les quantités X et T sont des quantités lentement variables dans le temps et dans l'espace. Si l'on associe les opérateurs définis par :

$$\Omega \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial T}, \tag{7.10a}$$

$$K \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial X}, \tag{7.10b}$$

l'inversion de la relation de dispersion (7.7), dans une première approximation linéaire, donne l'équation d'évolution de l'amplitude $A(X,T)$ et l'on obtient :

$$i\frac{\partial A}{\partial T} = -i(v_g)_{k=k_0}\frac{\partial A}{\partial X} - P_{k=k_0}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\right), \tag{7.11}$$

ou encore

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial T} + v_g\frac{\partial A}{\partial X}\right) + P_{k=k_0}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\right) = 0. \tag{7.12}$$

En posant $s = X - v_g t$, on obtient l'équation de Schrödinger linéaire (SL)

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right) + P_{k=k_0}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial s^2}\right) = 0, \tag{7.13}$$

modélisant l'équation de propagation linéaire de l'enveloppe lente

Si l'on considère le terme quadratique en k dans l'expression (7.6), on arrive alors à l'expression de SNL :

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right) + P_{k=k_0}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial s^2}\right) + Q \mid A \mid^2 A = 0, \tag{7.14}$$

où

$$Q = \left(-\frac{\partial \omega}{\partial \mid A \mid^2}\right)_{k=k_0}. \tag{7.15}$$

Solutions de SNL

Les solutions de cette équation sont de deux types.

- Solutions de type ondes planes instables dans lesquelles la phase de l'onde dépend de l'amplitude
- Solutions de type solitons données par :

$$\eta(x,t) = Ae^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + c.c. \tag{7.16}$$

$$\eta(x,t) = 2A_0 \mathrm{sech}[\sqrt{2}A_0 k_0^2 \epsilon(x - v_g t)] \cos((\omega_0 - 2QA_0^2)t - k_0 x), \tag{7.17}$$

dans laquelle la vitesse de l'onde $\omega_0 - 2QA_0^2$ dépend de l'amplitude A_0.

Nous avons donc un phénomène ou la phase dépend de l'amplitude. Dans notre expérience, c'est la fréquence de la modulation qui dépend de l'amplitude. On peut alors écrire [Planat 96d] le terme $S_{mod}(t)$ à la sortie du modulateur par :

$$S_{mod}(t) \sim \mid \Phi \mid^2 \Pi_A(t - \tau) u \cos(2\pi f_{HF} t + \Phi_0), \tag{7.18}$$

où $\mid \Phi \mid^2$ représente la détection d'amplitude, $\Pi_A(t-\tau)$ la modulation issue de la commande avec le retard $\tau \sim \frac{1}{f_{BF}}$.

Cette modélisation, qui s'appuyait sur un raisonnement phénoménologique n'a pas pu expliquer la présence des paliers de synchronisation.

7.3.2 Modèle schématique de la boucle.

Parallèlement à cette approche avec SNL, nous avons envisagé l'étude de ce système d'un point de vue numérique et purement schématique. En décrivant, par une variable précise, chaque opération réalisée par les éléments du montage, on arrive à établir un

algorithme discret de trois variables θ_n, T_n et A_n couplées non linéairement, qui semblent rendre compte de quelques phénomènes.

Dans un premier temps nous supposons que le détecteur d'enveloppe génère un signal sinusoïdal d'amplitude A_n donné par le fondamental du signal de sortie du modulateur. On suppose ici que la ligne n'est responsable que du retard. Il s'agit de calculer la première composante du signal $S(t)$ supposée s'écrire (Fig. 7.19) :

$$S(t) = A\cos\omega_0 t \quad \text{si} \quad -\frac{\theta}{2} < t < \frac{\theta}{2}, \tag{7.19a}$$

$$= 0 \quad \text{sinon}, \tag{7.19b}$$

sur une période T_{BF}. En décomposant en séries de Fourier, on a

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_{BF} t, \tag{7.20}$$

avec

$$A_n = \frac{2A}{T_{BF}} \int_{\frac{-\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \cos\omega_0 t \quad \cos n\omega_{BF} t \; dt. \tag{7.21}$$

$$A_n = \frac{2A}{T_{BF}} \int_{\frac{-\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \cos(\omega_0 - n\omega_{BF})t + \cos(\omega_0 + n\omega_{BF})t \quad dt, \tag{7.22}$$

$$A_n = \frac{2A}{T_{BF}} \left(\frac{\sin(\omega_0 - n\omega_{BF})\frac{\theta}{2}}{\omega_0 - n\omega_{BF}} + \frac{\sin(\omega_0 + n\omega_{BF})\frac{\theta}{2}}{\omega_0 + n\omega_{BF}} \right). \tag{7.23}$$

Après filtrage où l'on ne conserve que le premier terme $n = 1$, le fondamental possède une amplitude

$$A_1 = \frac{2A}{T_{BF}} \left(\frac{\sin(\omega_0 - \omega_{BF})\frac{\theta}{2}}{\omega_0 - \omega_{BF}} + \frac{\sin(\omega_0 + \omega_{BF})\frac{\theta}{2}}{\omega_0 + \omega_{BF}} \right). \tag{7.24}$$

On construit alors un processus itératif où l'incrément de n a lieu après chaque passage dans le modulateur (Fig. 7.20), et où les quantités θ_n et T_n définissant le temps de

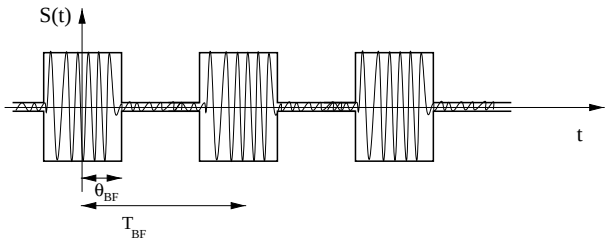


FIG. 7.19 – *Découpage de la porteuse.*

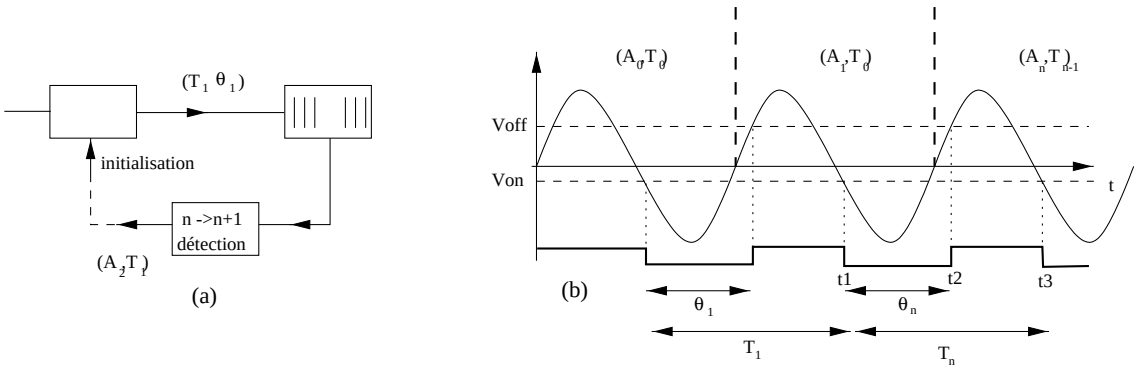


FIG. 7.20 – *Méthode de construction de l'algorithme*

conduction et la période basse fréquence sont définies suivant le schéma (b). L'amplitude A_n de la commande s'écrit alors en fonction de l'état $n-1$ soit :

$$A_n = \frac{2A}{T_{n-1}} \left(\frac{\sin(\omega_0 - \omega_{n-1})\frac{\theta_{n-1}}{2}}{\omega_0 - \omega_{n-1}} + \frac{\sin(\omega_0 + n\omega_{n-1})\frac{\theta_{n-1}}{2}}{\omega_0 + \omega_{n-1}} \right). \tag{7.25}$$

La durée θ_n se calcule en tenant compte des valeurs expérimentales de $V_{ON} < 0$ et $V_{OFF} > 0$, ($V_{ON} = -0,8\text{V}$, $V_{OFF} = 1,5\text{V}$).

D'après la figure (b), l'intervalle de conduction est donné par

$$\theta_n = t_2 - t_1 = T_{n-2} + \frac{1}{2\pi} T_{n-1} \arcsin\left(\frac{V_{OFF}}{A_n}\right) - \left(\frac{T_{n-2}}{2} - \frac{T_{n-2}}{2\pi} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_{n-1}}\right) \right), \tag{7.26}$$

soit

$$\theta_n = \frac{T_{n-2}}{2} + \frac{1}{2\pi} \left[T_{n-1} \arcsin\left(\frac{V_{OFF}}{A_n}\right) - T_{n-2} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_{n-1}}\right) \right]. \tag{7.27}$$

La valeur négative de V_{ON} explique le signe négatif de t_1. Le calcul de la période T_n se calcule de la même manière et donne

$$T_n = t_3 - t_1 = T_{n-2} + \frac{T_{n-1}}{2} - \frac{1}{2\pi} T_{n-1} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_n}\right) - \left(\frac{T_{n-2}}{2} - \frac{T_{n-2}}{2\pi} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_n}\right) \right), \tag{7.28}$$

soit

$$T_n = \frac{T_{n-2} + T_{n-1}}{2} - \frac{1}{2\pi} \left[T_{n-1} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_n}\right) - T_{n-2} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_{n-1}}\right) \right]. \tag{7.29}$$

Les équations (7.25), (7.27) et (7.29) donnent alors le système discret couplé :

$$A_n = \frac{2A}{T_{n-1}} \left(\frac{\sin(\omega_0 - \omega_{n-1})\frac{\theta_{n-1}}{2}}{\omega_0 - \omega_{n-1}} + \frac{\sin(\omega_0 + n\omega_{n-1})\frac{\theta_{n-1}}{2}}{\omega_0 + \omega_{n-1}} \right) \quad (7.30a)$$

$$\theta_n = \frac{T_{n-2}}{2} + \frac{1}{2\pi} \left[T_{n-1} \arcsin(\frac{V_{OFF}}{A_n}) - T_{n-2} \arcsin(\frac{V_{ON}}{A_{n-1}}) \right] \quad (7.30b)$$

$$T_n = \frac{T_{n-2} + T_{n-1}}{2} - \frac{1}{2\pi} \left[T_{n-1} \arcsin(\frac{V_{ON}}{A_n}) - T_{n-2} \arcsin\left(\frac{V_{ON}}{A_{n-1}}\right) \right] \quad (7.30c)$$

avec les conditions initiales $(A_0, T_0, = \theta_0 = T_0/2)$, $(A_1 = A_0, T_1 = T_0, \theta_1)$,...

Nous avons montré numériquement que ce système pouvait posséder une limite unique A_l ainsi qu'un phénomène de cascade de période (analogue à l'application logistique) suivant les valeurs de A_0, V_{OFF} et V_{ON}. La figure Fig. 7.21 donne le nombre de limites n_l de l'amplitude A_l en fonction du rapport de fréquence $\frac{\omega_{BF}}{\omega_0}$. Nous avons effectué une simulation en faisant varier f_{BF} de 1.54 jusqu'à 99 pour une fréquence f_0 de 100 (en unité arbitraire). Les paramètres $V_{OFF} = 1,5$ et $V_{ON} = -0,8$ étaient ceux de l'expérience, et l'amplitude était de A=15.

Dans le cas général l'algorithme ne possède qu'une limite. La valeur -1 est une valeur arbitraire qui est générée si la simulation n'a pas atteint un régime stationnaire faisant apparaître au moins une limite. En revanche, une dynamique plus riche existe près des rapports de fréquence $\frac{\omega_{BF}}{\omega_0}$=1/2 ; 1/3 ;1/4... (a) pouvant faire apparaître jusqu'à 15 limites différentes. La figure Fig. 7.21(b) représente un agrandissement de (a) autour de 1/2 et 1/3. On constate également une certaine propriété d'invariance d'échelle.

Quelque soit la complexité de la carte discrète modélisant le fonctionnement, on retrouve toujours cette propriété d'influence des harmoniques conduisant à une invariance d'échelle et à une structure complexe. D'autres études ont été faites en supposant la présence d'un harmonique supérieur, celle d'un filtrage de fréquence, etc., mais elles n'ont pas apporté de résultats supplémentaires satisfaisants, mais seulement plus de problèmes algorithmiques.

L'originalité de cette expérience se trouvait dans le fait que l'on a observé des zones de synchronisation sur des rapports entiers et rationnels jusqu'à un ordre élevé des harmoniques qui normalement ne sont pas transmis par la ligne.

Cette propriété est à rapprocher de celle énoncée dans le chapitre 2 concernant l'oscillateur de Van der Pol, des harmoniques qui sont sensés être filtrés par les éléments électroniques (traités de façon linéaire) arrivent malgré tout à intervenir dans la dynamique complexe de cette expérience à processus de bouclage de fréquence. Elle démontre,

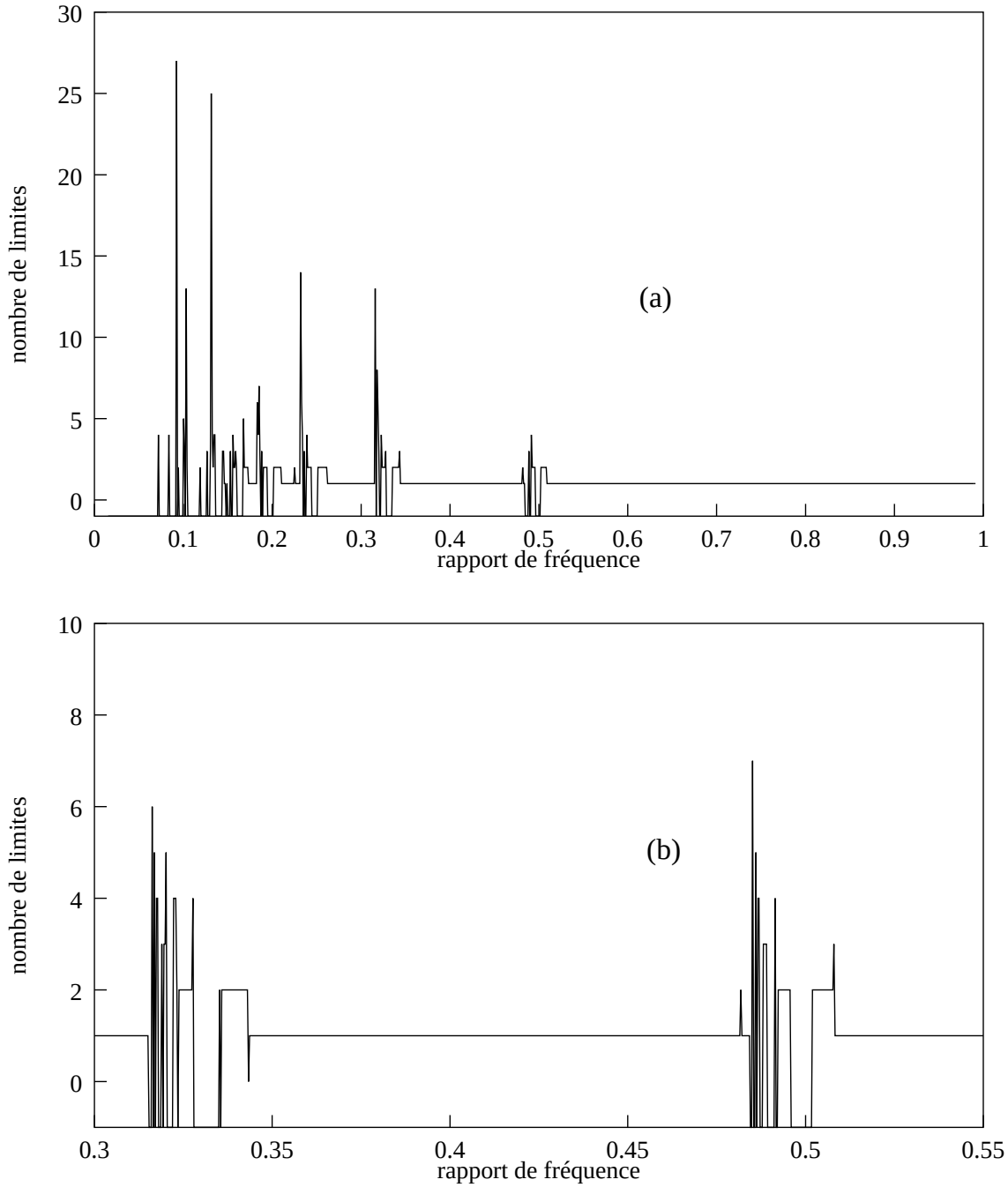


FIG. 7.21 – *Nombre de limites de (7.30) pour des rapports de fréquence de* $\frac{f_0}{f_{BF}} = \frac{T_l}{T_0}$

une fois de plus, l'extrême complexité de la dynamique intervenant dans ces systèmes bouclés où existent des conditions de synchronisation de phase et de fréquence.

Conclusion

À la lumière de nos résultats expérimentaux et de tous ceux qui furent dans le passé réalisés dans ce contexte, il existe un fait indubitable qui a constitué l'architecture de notre recherche : l'existence de l'oscillation du signal issu de l'oscillateur est conditionnée par des mécanismes non linéaires présents dans la nature des fluctuations de fréquence et intervenant à toutes les échelles .

Une étude théorique de cet oscillateur et de ses non-linéarités a montré qu'il existait une équation non linéaire (l'équation d'Adler) pouvant décrire l'évolution d'une phase du système oscillant. Cette phase peut, suivant certains paramètres, rester apparemment constante et ainsi définir une plage de synchronisation, ou alors posséder un comportement plus complexe.

Après avoir établi l'équivalence entre le modèle décrivant l'oscillateur et celui décrivant la boucle à verrouillage de phase, pièce maîtresse des bancs de mesure de bruit de phase, nous avons réalisé une étude expérimentale et théorique des propriétés de cette équation d'Adler. D'un point de vue théorique, une bonne connaissance des propriétés des applications de type « section de Poincaré » était nécessaire. Nous avons transposé les propriétés (relatives à la stabilité, à la bifurcation, à l'arithmétique, etc.) de cette application appelée carte d'Arnold au cas de la boucle de phase (ou PLL).

Nous avons ainsi pu mettre en évidence dans les deux expériences réalisées la plupart de ces propriétés théoriques relatives à la modélisation choisie et que nous avons présentées en deuxième partie de ce mémoire. Les fréquences harmoniques issues des non-linéarités de l'électronique de modulation ont été confirmées. La présence des plages de synchronisation attestait l'existence indiscutable de cette non-linéarité. La stabilité structurelle de la synchronisation était présente dans les deux expériences. De même, l'invariance d'échelle, déjà démontrée théoriquement, a été fréquemment observée de façon expérimentale et numérique, que ce soit dans le cadre de la synchronisation ou dans le cadre de la non synchronisation.

Nous avons également constaté l'importance de la transition d'état séparant les deux domaines de la synchronisation et de la non-synchronisation : de façon numérique pour la mise en place de résultats qualitatifs relatifs au phénomène lui-même, et de façon expérimentale pour l'étude du comportement des fluctuations d'un système se trouvant dans cette zone critique, frontière entre deux états physiques totalement différents.

Un résultat expérimental tout-à-fait intéressant a été obtenu dans l'étude de la PLL évoluant sous des conditions fortement non linéaires : celles-ci semblent engendrer une transformation du bruit blanc en bruit en $1/f$. Néanmoins, il ne s'agit pas d'un résultat original mais il confirme la tendance actuelle à associer le bruit en $1/f$ au phénomène non linéaire pourvu d'une certaine forme de régularité ; la régularité serait, dans ce cas, certainement associée à la synchronisation.

Enfin, nous avons proposé une approche originale du spectre d'intermodulation de la PLL. La conséquence des propriétés arithmétiques des rapports de fréquences confirme la nature multiéchelles de la synchronisation. Ce résultat rend compte également de l'importance de sa prise en compte globale et non locale des systèmes. Nous avons accompli un effort expérimental important pour pouvoir avoir accès aux diverses données et pour s'assurer de leur validité.

Parallèlement, nous avons essayé d'appliquer les résultats théoriques très récents de la physique non linéaire et même des mathématiques à ce contexte expérimental des oscillateurs. Cette approche du temps-fréquence initiée par M. Planat restait à valider expérimentalement en lui greffant l'aspect pratique qui lui faisait défaut. Nous n'avons appliqué que quelques résultats (mapping d'Arnold, arithmétique de fréquence) caractéristiques des systèmes non linéaires pour étudier les oscillateurs. Il en reste encore d'autres à considérer. Nous espérons que la voie ouverte par nos travaux trouvera son application pour la compréhension des mécanismes décrivant les systèmes oscillants.

Les résultats relatifs à la PLL en régime non linéaire et à l'expérience de résonance porteuse-enveloppe sont directement transposables au cas de l'oscillateur, et même de n'importe quel système bouclé pouvant présenter un signal oscillant. La diversité des phénomènes naturels impliquant une dynamique bouclée de systèmes auto-entretenus et en interaction avec leur environnement, laisse entrevoir le potentiel d'application de notre étude. Il se dessine ainsi une perspective riche de possibilités.

Au-delà de l'indispensable prise en compte des propriétés non linéaires dans les oscillateurs pour leur étude, il est nécessaire que ces propriétés non linéaires soient utilisées consciemment avec les méthodes de caractérisation développées.

Il est donc nécessaire d'effectuer, dans le domaine du temps-fréquence, une réelle étude du bruit en $1/f$ introduit par les transformations non linéaires d'autres fluctuations. Elles existent et nous l'avons confirmé expérimentalement. C'est un effort certes difficile à fournir compte tenu de la complexité des systèmes non linéaires, mais il n'y a aucune raison de penser que ce traitement n'apportera pas une quantité de résultats à la hauteur de la difficulté d'analyse.

L'oscillateur est un système complexe, donnons-nous les moyens susceptibles de percer les mystères de son évolution.

Annexe A

Évolution de la phase Φ dans la PLL du second ordre

A.1 Cas de la PLL simple

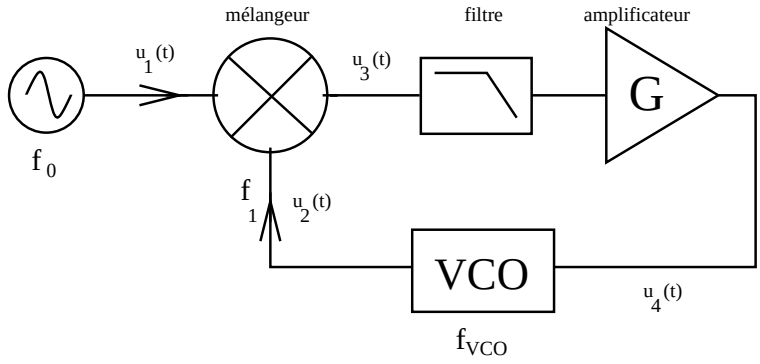


FIG. A.1 – *Étude de la PLL du second ordre*

Considérons la PLL du second ordre (Fig. A.1). On pose :

$$u_1(t) = \sqrt{2}\cos\theta(t), \quad \dot{\theta}(t) = \omega_0 \tag{A.1a}$$

$$u_2(t) = \sqrt{2}\sin\phi(t), \tag{A.1b}$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega_{vco} + k u_4(t). \tag{A.1c}$$

Le mélangeur de sensibilité μ effectue le produit des signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$. On a :

$$u_3(t) = 2\mu\cos\theta(t)\sin\phi(t), \tag{A.2a}$$

$$= \mu[\sin\left(\theta(t) - \phi(t)\right) + \sin\left(\theta(t) + \phi(t)\right), \tag{A.2b}$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega_{vco} + k u_4(t). \tag{A.2c}$$

Le deuxième terme de (A.2b) de fréquence toujours supérieur à f_c, fréquence de coupure du filtre, est atténué, si bien que :

$$u_3(t) = \mu \sin\big(\theta(t) - \phi(t)\big)\,. \tag{A.3}$$

Considérons l'effet d'un filtre du 1$^{\text{er}}$ ordre. On a alors

$$\frac{1}{f_c}\dot{u}_4(t) + u_4(t) = u_3(t). \tag{A.4}$$

Exprimons alors l'équation différentielle vérifiée par la phase $\Phi(t)$ donnée par :

$$\Phi(t) = \theta(t) - \phi(t) = (\omega_0 - \omega_1)t. \tag{A.5}$$

On a

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) &= \omega_0 - \dot{\phi}(t), && \text{(A.6a)}\\
&= \omega_0 - \omega_{vco} - k u_4(t), && \text{(A.6b)}\\
&= \Delta\omega - k\left[G u_3(t) - \frac{1}{f_c}\dot{u}_4(t)\right], && \text{(A.6c)}
\end{aligned}$$

où

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{vco}. \tag{A.7}$$

De (A.6b), on tire

$$\ddot{\Phi}(t) = -k\dot{u}_4(t), \tag{A.8}$$

que l'on injecte dans (A.6c) pour donner :

$$\frac{1}{f_c}\ddot{\Phi}(t) + \dot{\Phi}(t) + K \sin\Phi(t) = \Delta\omega, \tag{A.9}$$

où $K = \mu G k$ est le gain en boucle ouverte de la PLL.

Dans le cas particulier où $\frac{1}{f_c} >> 1$, $K >> 1$, et $\Delta\omega = 0$, on peut avoir un régime oscillant proche de la fréquence $\omega^2 = K f_c$.

Dans le cas particulier où $\frac{1}{f_c} << 1$, le terme $\ddot{\Phi}(t)$ devient négligeable et on arrive à l'équation d'Adler :

$$\dot{\Phi}(t) + K \sin\Phi = \Delta\omega. \tag{A.10}$$

A.2 Cas de la PLL perturbée par des harmoniques

Supposons

$$u_4(t) = \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(p\omega_0 - q\omega_1)t, \quad (p,q) \in \mathbb{N}, \quad (p,q) \text{ impairs.} \tag{A.11}$$

Dans ce cas, la correction de la fréquence du VCO est donnée par

$$\omega_1 = \omega_{vco} + k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(p\omega_0 - q\omega_1)t, \tag{A.12}$$

et de ce fait l'équation de la phase Φ peut s'écrire :

$$\dot{\Phi}(t) = \omega_0 - \omega_1 = \Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(p\omega_0 - q\omega_1)t. \tag{A.13}$$

En posant

$$\Phi^{(p,q)} = (p\omega_0 - q\omega_1)t, \tag{A.14}$$

on peut alors écrire $\Phi = \Phi^{(1,1)}$ en fonction des $\Phi^{(p,q)}$:

$$\dot{\Phi}^{(1,1)}(t) = \Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin \Phi^{(p,q)}. \tag{A.15}$$

De même que pour chaque phase $\Phi^{(p,q)}$, une équation différentielle peut être écrite par :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^{(p,q)}(t) &= p\omega_0 - q\omega_1, & \text{(A.16a)} \\ &= p\omega_0 - q\left(\omega_{vco} + k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(p\omega_0 - q\omega_1)t\right), & \text{(A.16b)} \end{aligned}$$

soit

$$\dot{\Phi}^{(p,q)}(t) = \Delta\omega^{(p,q)} - qk \sum_{(r,s)}^{\infty} A_{(r,s)} \sin \Phi^{(r,s)}, \tag{A.17}$$

en posant $\delta\omega^{(p,q)} = p\omega_o - q\omega_{vco}$. On obtient alors un système de pq équations couplées par un terme non linéaire. Dans notre cas particulier, le connaissance de l'évolution de la phase $\Phi^{(1,1)}$ est suffisante pour résoudre le système puisque l'évolution des autres termes $\Phi^{(p,q)}$ se déduit par

$$\Phi^{(p,q)} = q\Phi^{(1,1)} + (p-q)\omega_0 t + Cte. \tag{A.18}$$

Mais si on suppose un petite perturbation de ce modèle, l'étude de l'influence des harmoniques est équivalent à celle d'un réseau de pq oscillateurs couplés non-linéairement comme l'ont étudié par exemple Lee et Pikovsky [Lee 98, Pikovsky 96]. L'équation (A.17) est le même modèle de base de leur étude (cf Eq. 4.44). Toutes les propriétés que nous avons évoquées dans le chapitre 4 sont alors susceptibles d'être présentes.

A.2.1 Propriété de symétrie de la solution

Montrons que la solution $\Phi(t)$ de l'équation (A.13) possède la propriété de symétrie suivante :

$$\Phi(t) = \pi - \Phi(-t), \quad \text{si} \quad p, q \quad \text{impairs.} \tag{A.19}$$

Montrons que $\pi - \Phi(-t)$ vérifie également (A.13). On a

$$\dot{\Phi}(t) = \Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(p\omega_0 - q\omega_1)t, \tag{A.20a}$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(q\Phi(t) + (p-q)\omega_0 t), \tag{A.20b}$$

Remplaçons $\Phi(t)$ par $\pi - \Phi(-t)$ dans le second membre. On a :

$$\Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(q(\pi - \Phi(-t)) + (p-q)\omega_0 t) = \tag{A.21a}$$

$$\Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(q\pi - q\Phi(-t) + (p-q)\omega_0 t) \tag{A.21b}$$

Or $\sin(q\pi + x) = \sin(-x)$ si q impair. On a donc :

$$\Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(q\Phi(-t)) - (p-q)\omega_0 t). \tag{A.22}$$

En posant $u = -t$, ce terme est égal d'après (A.20b) à :

$$\Delta\omega - k \sum_{(p,q)}^{\infty} A_{(p,q)} \sin(q\Phi(u) + (p-q)\omega_0 u) = \frac{d\Phi(u)}{du}. \tag{A.23}$$

Or

$$\frac{d\big(\pi - \Phi(-t)\big)(t)}{dt} = -\frac{d\Phi(-t)}{dt} = \frac{d\Phi(-t)}{d(-t)} = \frac{d\Phi(u)}{du}, \tag{A.24}$$

donc $\pi - \Phi(-t)$ est également solution de (A.13). Cette solution s'écrit nécessairement :

$$\Phi(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} t^{2n+1}. \tag{A.25}$$

A.2.2 Équivalence de l'origine de la perturbation harmonique

Supposons :

$$u_1(t) = \sqrt{2}\cos\theta(t) + \sqrt{2}\cos 2\theta(t), \quad \dot{\theta}(t) = \omega_0, \tag{A.26a}$$

$$u_2(t) = \sqrt{2}\sin\phi(t), \tag{A.26b}$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega_{vco} + k u_4(t). \tag{A.26c}$$

Le mélangeur effectuant le produit, on a

$$u_3(t) = 2\mu\left(\cos\theta(t)\sin\phi(t) + \cos 2\theta(t)\sin\phi(t)\right), \tag{A.27a}$$

$$= \mu\left(\sin(\theta(t) - \sin\phi(t)\right) + \sin(\theta(t) + \sin\phi(t)) \tag{A.27b}$$

$$+ \mu\left(\sin(2\theta(t) - \sin\phi(t)) + \sin(2\theta(t) + \sin\phi(t))\right), \tag{A.27c}$$

ce qui donne après le filtre :

$$u_3(t) = \mu\sin(\theta(t) - \sin\phi(t)) + \sin(2\theta(t) - \sin\phi(t)). \tag{A.28}$$

Le résultat est le même que si l'harmonique est produit par le mélangeur. On peut également supposer que l'harmonique est crée par le VCO.

Le fait de considérer les harmoniques provenant du mélangeur englobe donc l'étude d'une perturbation harmonique dont l'origine peut être quelconque.

Annexe B

Listing des programmes utilisés

Programme utilisé pour le calcul de l'erreur arithmétique : `dioph2.f`

```
c---------------------------------------------------------------
c               Calcul de l'erreur arithmetique
c                              q|nu-p/q|
c---------------------------------------------------------------

      implicit none
        integer i,q,p,a,k,controle,a_max,q_max,kmax
        real*16 nu,nu_0,err,e_min,nu_ini,nu_max
        dimension a(5000),p(5000),q(5000),err(5000)
        character*8 arret

c
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c               DEBUT DU PROGRAMME PRINCIPAL
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

c       LECTURE DES PARAMETRES D'ENTREE
        open(unit=10,file='dioph2.fic')
          read(10,*)e_min,a_max,q_max,kmax,nu_ini,nu_max
        close(10)
c
        write(*,*)'****************************************'
        write(*,*)'**   CALCUL DE L''ERREUR ARITHMETIQUE    **'
        write(*,*)'**              q|nu-p/q|                **'
        write(*,*)'****************************************'
        write(*,*)'nombre de iterations :',kmax
        write(*,*)'plage de variation du rapport nu :'
        write(*,*)'   de ',nu_ini,' a',nu_max
        write(*,*)'criteres d''arret (err,qmax) :',e_min,q_max
        write(*,*)'criteres d''arret a_max  :',
     &  a_max
        write(*,*)'****************************************'

        open(unit=20,file='res2.dat')

c       write(*,*)'nombre?'
c       read(*,*)nu_0

        do k=1,kmax
          nu_0=nu_ini+k*(-nu_ini+nu_max)/kmax
c
c       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c       RECHERCHE DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUES
c       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
          nu=nu_0
```

```
          controle=0
ccccccccccccccccccccccccccccccc
c       cas i=1
ccccccccccccccccccccccccccccccc
          i=1
          a(1)=int(nu)
        p(1)=a(1)
          q(1)=1
          err=abs(nu_0-1.d0*p(1)/(q(1)*1.d0))
c         write(*,*)'a,p,q(',1,'),err',a(1),p(1),q(1),err
          err(1)=abs(nu_0-1.d0*p(1)/(q(1)*1.d0))
c
c         write(*,*)'a,p,q(',1,'),err',a(1),p(1),q(1),a_max
c
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
          call test(nu_0,a,p,q,i,err(1),controle,a_max,q_max,e_min,arret)
          if(controle.eq.1) then
c           write(*,*)'a,p,q(',i,'),err',a(i),p(i),q(i),err
            write(20,1000)arret,nu_0,err(i),a(i),q(i)
            goto 100
          else
          endif
c
ccccccccccccccccccccccccccccccc
c       cas i=2
ccccccccccccccccccccccccccccccc
          i=2
          nu=1./(nu-a(1))
          a(2)=int(nu)
        p(2)=p(1)*a(2)+1
          q(2)=a(2)
          err(2)=abs(nu_0-1.d0*p(2)/(q(2)*1.d0))
c         write(*,*)'a,p,q(',2,'),err',a(2),p(2),q(2),err
c
c         write(*,*)'a,p,q(',2,'),err',a(2),p(2),q(2),a_max
c
          call test(nu_0,a,p,q,i,err(2),controle,a_max,q_max,e_min,arret)
          if(controle.eq.1) then
c           write(*,*)'a,p,q(',i,'),err',a(i),p(i),q(i),err
            write(20,1000)arret,nu_0,err(1)*q(i-1),a(i-1),q(i-1)
            goto 100
          else
          endif
c
ccccccccccccccccccccccccccccccc
c       cas general
ccccccccccccccccccccccccccccccc
        do i=3,10
          if (mod(i,10).eq.0)then
c           write(*,*)"nu,i =",nu_0,i
          endif
          nu=1./(nu-a(i-1))
          a(i)=int(nu)
        p(i)=p(i-1)*a(i)+p(i-2)
          q(i)=q(i-1)*a(i)+q(i-2)
          err(i)=abs(nu_0-1.d0*p(i)/(q(i)*1.d0))
c         write(*,*)'a,p,q(',i,'),err',a(i),p(i),q(i),err
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
c         write(*,*)'a,p,q(',i,'),err',a(i),p(i),q(i),a_max
          call test(nu_0,a,p,q,i,err(i),controle,a_max,q_max,e_min,arret)
          if(controle.eq.1) then
c           write(*,*)'a,p,q(',i,'),err',a(i),p(i),q(i),err
            write(20,1000)arret,nu_0,err(i-1)*q(i-1),a(i-1),q(i-1)
            goto 100
          else
          endif
        enddo
```

```
          if (mod(k,2000).eq.0)then
            write(*,*)"k =",k
          endif
 100    enddo              !boucle sur nu_0
          close(20)
 1000   format(a8,f22.15,f22.15,i7,i7)
          end

c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
          subroutine test(nu_0,a,p,q,i,err,controle,a_max,q_max,e_min,arret)
c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
          implicit none
          integer a,p,q,i,controle,a_max,q_max
          real*16 nu_0,err,e_min
          dimension a(5000),p(5000),q(5000)
        character*8 arret

          if (a(i).gt.a_max) then
            controle=1
            arret="a_max"
c           write(*,*)'a(i) superieur a amax'
          else
          if (q(i).gt.q_max) then
            controle=1
            arret="q_max"
c           Write(*,*)'q(i) superieur a qmax'
          else
          if (err.lt.e_min) then
            controle=1
            q(i-1)=0.0
            arret="erreur"
c           write(*,*)'erreur inferieure a emin'
          else
          endif
          endif
          endif
          return
          end
```

Programme `sauv4.c` utilisé pour la construction des cartes d'Arnold (Fig. 5.13,5.14).

```
                        /***********************/
                        /* LANGUES D'ARNOLD    */
                        /* EXPOSANT DE HOLDER  */
                        /* VAN DER POL         */
                        /*                     */
                        /* SAUVEGARDE   ET/OU  */
                        /*   VISUALISATION     */
                        /***********************/

/* le fichier prend 2 fois plus de place qu'avec la version 3.0              */


#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "graphics.h"
#include <math.h>
```

```
#define pi2 6.28318530717958647692528 7
20
main()
{
  /****************/
  /* DECLARATIONS */
  /****************/
  double x, x0, xk;
  double deltap, deltaq ,p ,q;
  double al, zal, dnu, y, z;
  double eps, epso, s;
30
  float size;
  float pmax, pmin, qmax, qmin;

  int a, b, i, j, k, kmax ,n;
  int imax, jmax;
  int ecra, ecrb;
  int cart, choix, def, sauv, gra;

  char nomfich[21];
40
  FILE *flux;

  int graphicsdriver , graphicsmode;

  /************************/
  /* FIN DES DECLARATIONS */
  /************************/

  printf("\n         DEBUT DU PROGRAMME\n");
50
  /*******************************/
  /* CHOIX DE LA CARTE GRAPHIQUE */
  /*******************************/
  do { printf("\n* CHOISISSEZ VOTRE CARTE GRAPHIQUE :\n");
       printf("       1......Grande  : 786432 pixels (IMPOSSIBLE)\n");
       printf("       2......Moyenne : 307200 pixels\n");
       printf("       3......Petite  : 224000 pixels\n");
       printf("   Votre choix : ");
       scanf("%d",&cart);
60     }
     while ( cart!=2 && cart!=3);
  if (cart==1) { graphicsdriver=IBM8514;
                 graphicsmode=IBM8514HI;
                }
  if (cart==2) graphicsdriver=X11_SVGALO;
  if (cart==3) { graphicsdriver=EGA;
                 graphicsmode=EGAHI;
                }

70 /*******************/
  /* CHOIX DU GRAPHE */
  /*******************/
  do { printf("\n* FAITES VOTRE CHOIX :\n");
       printf("       1......Carte d'Arnold\n");
       printf("       2......Van der Pol\n");
       printf("   Votre choix : ");
       scanf("%d",&choix);
      }
     while ( choix!=1 && choix!=2);
80
  /*********************************/
  /* INITIALISATION DES CONSTANTES */
  /*********************************/
  printf("\n* CHOIX DES CONSTANTES :\n");
  printf("Tapez 1 pour les valeurs par defaut :");
  scanf("%d",&def);
```

```
      /* constante d'Arnold */
      epso = 0.;
90    if (choix==1) printf("Constante d'Arnold : %g\n",epso);

      /* constante de Van der Pol */
      s = 1.;
      if (choix==2) printf("Constante de Van der Pol : %g\n",s);

      /* precision: nombre d'iterations pour chaque valeur */
      if (def==1) kmax=1000;
         else { printf("\nNombre d'iterations : ");
                scanf("%d",&kmax);
100           }

      /* plage de balayage */
      if (def==1) {  if (choix==1)  { pmin = 0.;pmax = 1.;
                                      qmin = 0.;qmax = 5.; }
                               else { pmin = -0.2;pmax = 1.2;
                                      qmin = 0.0;qmax = 1.0;}
                  }
          else {  printf("\nRentrez les bornes :\n");
                  printf(" en x, pmin :");scanf("%f",&pmin);
110               printf(" en x, pmax :");scanf("%f",&pmax);
                  printf(" en y, qmin :");scanf("%f",&qmin);
                  printf(" en y, qmax :");scanf("%f",&qmax);
                }

      /* part de l'ecran utilisee */
      if (def==1) size=2.;
         else { printf("\nPart d'ecran a utiliser 1./ : ");
                scanf("%f",&size);
               }
120   if (size==0) size=1./4.;
         else { size=1./size; }

      /* pour la premiere serie de valeurs */
      al = 1.;
      y = 0.;

      /***********************************/
      /* INITIALISATION DU MODE GRAPHIQUE */
      /***********************************/
130   initgraph (&graphicsdriver, &graphicsmode, "");
      cleardevice ();
      setactivepage (0);
      setbkcolor (0);

      /* caracteristiques */
      a = getmaxx ();
      b = getmaxy ();
      printf("\n\n* DETECTION ECRAN : %d * %d = %d pixels\n",a+1,b+1,(a+1)*(b+1));

140   /* constantes de centrage */
      ecra = a * (1 - size) / 2;
      ecrb = -b * (1 - size) / 2;

      /* valeurs maximales */
      imax=a*size+1;
      jmax=b*size+1;

      /* pas en x et en y */
      deltap = (pmax - pmin) / (a * size);
150   deltaq = (qmax - qmin) / (b * size);

      /* ???????? */
      eps = ((pmax - pmin) * (pmax - pmin)) / (a * a);
      closegraph ();
```

```
      /**************/
      /* SAUVEGARDE */
      /**************/
      printf("\n* Tapez 1 pour faire une sauvegarde sur disque : ");
160   scanf("%d",&sauv);
      if (sauv==1)
          { printf("\n* SAUVEGARDE\n");
            printf("Nom du fichier a creer : ");
            scanf("%20s",nomfich);
            printf("\nTaper 1 pour afficher le graphe :");
            scanf("%d",&gra);
            if (gra!=1) closegraph();
            flux=fopen(nomfich,"w");
            if (flux==NULL)
170           { printf("ouverture impossible");
                exit(1);
              }
            fprintf(flux,"%d\n",cart);
            fprintf(flux,"%d\n",imax);
            fprintf(flux,"%d\n",jmax);
            fprintf(flux,"%d\n",kmax);
            fprintf(flux,"%f\n",pmin);
            fprintf(flux,"%f\n",pmax);
            fprintf(flux,"%f\n",qmin);
180         fprintf(flux,"%f\n",qmax);
           }
          else gra=1;

      /*****************************/
      /* AFFICHAGE DES CONSTANTES */
      /*****************************/
      printf("\n-------------------------------------------------\n");
      if (sauv==1) printf("* NOM DE SAUVEGARDE   : %20s\n\n",nomfich);
      if (gra==1)
190   printf("* DETECTION ECRAN     : %d * %d , %d pixels\n\n",a+1,b+1,(a+1)*(b+1));
      printf("* NOMBRE DE POINTS    : %d\n\n",imax*jmax);
      printf("* BORNES DU GRAPHE    : pmin=%g et pmax=%g\n",pmin,pmax);
      printf("                       qmin=%g et qmax=%g\n\n",qmin,qmax);
      printf("* NOMBRE D'ITERATIONS : %d",kmax);
      printf("\n-------------------------------------------------\n");

      /***********/
      /* CALCULS */
      /***********/
200   if (gra==1)
         { initgraph (&graphicsdriver, &graphicsmode, "");
           cleardevice ();
           setactivepage (0);
           setbkcolor (0);
           printf("\n%.3g pour cent de l'ecran sont utilises\n"
                   ,imax*jmax*100./(a*b*1.));
           printf("tracage en cours...\n");
          }

210   if (sauv==1) printf("\nSauvegarde en cours...");

      /*      printf("Nom du fichier des donnees : ");
            scanf("%20s",nomfich); */
            flux=fopen("test.dat","w");
            if (flux==NULL)
              { printf("ouverture impossible");
                exit(1);
               }

220   for (j = 0; j <= jmax-1; j++)
         { q = qmin + j * deltaq;
           for (i = 0; i <= imax-1; i++)
```

```
{ p = pmin + i * deltap;
  z = y;
  zal = al;
  k = 1;

  /* DONNEES INITIALES */
  if (choix==1) x = xk = p;
  if (choix==2) x = xk = 0.;
  x0 = x;
  do
   { x = xk;

     /* CARTE D'ARNOLD */
     if (choix==1) xk=(1.-epso)*x+p-(q/pi2)*sin(pi2*x);

     /* VAN DER POL */
     if (choix==2) xk=x+p+(q/pi2)*sin(pi2*x/s)/(1+q*cos(pi2*x/s)/s);
     k++;
    }
   while ( k <= kmax && xk < 1.e+10 );

   /* CALCUL DU NOMBRE DE ROTATION : y */
   y = (xk - x0) / k;
   if (sauv==1) fprintf(flux,"%22.20f:",y);

   /* CALCUL DE L'EXPOSANT DE HOLDER : al */
   dnu = fabs (z - y);
   if (dnu < 1.e-20) dnu = 1.e-20;
     else
       { dnu = dnu;}
   al = log (dnu) / log (deltap);

fprintf(flux,"%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n",xk,y,dnu,al);

        /* PREMIER CRITERE DE COULEUR */
/*   if (fabs (zal - al) < 1.e-2)
      n = BLACK;
     else
       {
         if (fabs (al - 1) < 1.e-1)
           n = RED;
     else
       {
         if (al > 1)
           n = GREEN;
     else
         {
           n = YELLOW;
                      }}}     */
   /* DEUXIEME CRITERE DE COULEUR */
   if (fabs (al) > 10.)
     n = BLACK;
     else
       {
         if (k < kmax - 1)
           n = BLACK;
     else
       {
         if (fabs (zal  - al) < 1.e-2 && fabs (al - 1) < 4.e-2)
           n = GREEN;
     else
       {
         if (fabs (zal - al) < 1.e-2 && al > 2.41)
           n = LIGHTCYAN;
     else
       {
         if (fabs (zal - al) < 1.e-2 && al > 1.)
           n = LIGHTBLUE;
```

```
                else
                  {
                    if (fabs (zal - al) < 1.e-2 && fabs (al - 0.5) <= 0.1)
                      n = LIGHTRED;
          /*      else
                  {
                    if (fabs (zal - al) < 1.e-2   && al < 1)
                      n = RED; */
                else
                  {
                    if (fabs (al - 1) < 4.e-2)
                      n = MAGENTA;
                else
                  {
                    if (al > 1)
                      n = CYAN;
                else
                  {
                    if (fabs (al - 0.5) < 0.1)
                      n = LIGHTCYAN;
                else
                  {
                      n = YELLOW;
                                  }}}}}}}}}
        /*    printf("omega=%lf,c=%lf ;nombre rot=%lf alpha = %lf  dnu = %lf %d \n"
               ,p,q,y,al,fabs(zal-al),n); */
             if (sauv==1) fprintf(flux,"%d\n",n);
             if (gra==1)
                { setcolor(n);
                  putpixel (i + ecra, b - j + ecrb, n);
                }
             }
        }


        printf("\n...fin de la sauvegarde");
        fclose(flux);


    if (gra==1)
       { setcolor(WHITE);
         rectangle ( ecra, b - b * size + ecrb, a * size + ecra, b + ecrb);
         printf("\n...fin du tracage\n");
        }

      printf("\n          FIN DU PROGRAMME\n");
      printf("taper un retour chariot\n");
      getchar ();getchar ();
  }
```

Programme `p_model.f` utilisé pour la modélisation de l'expérience en injection : (Eq. F.4).

```
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
c                     MODELISATION DU MONTAGE EN INJECTION
c
c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      implicit none
      integer i,imax,j,k,nombre,test,iBF,iBFMax
      real*16 pi,pi2,VON,VOFF,B,amplBF,frequenceBF,freqBFMax
      real*16 frequenceHF,TBF,omegaHF,TETA,diff,sum,freqBF0
      real*16 omegaBF,arcN,arcF,var1,var2,var3,var4,An,Bn
      real*16 G,THF,amplMEM,ampLIM,attente
      dimension amplMEM(30),amplim(200)
```

```
      open(unit=20,file='p_model.fic')
        read(20,*)VON,VOFF,frequenceHF,freqBF0,freqBFMax,G,imax,B
      close(20)
      write(*,*)'VON,VOFF,frequenceHF,freqBF0,freqBFMax,G,imax,B'
      write(*,*)VON,VOFF,frequenceHF,freqBF0,freqBFMax,G,imax,B
c     ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c
c     Ce programme effectue un algorithme qui modelise idealement
c     le montage numero 1. De plus il detecte les amplitudes BF
c     limites.
c     Dans ce modele, on suppose que la frequence BF est constante.
c     Il s'agit en fait de montrer qu'il peut exister des
c     amplitudes differentes pouvant ainsi generer des harmoniques
c     lors d'un comptage
c
c     ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      pi=4.d0*datan(1.d0)
      pi2=2.d0*pi
      iBFMax=100
      open(unit=20,file='data.dat')

      do iBF=0,iBFMax

        frequenceBF=freqBF0+(freqBFMax-freqBF0)*iBF*1.d0/(iBFMax*1.d0)

      amplBF=B
      TBF=1.d0/frequenceBF
      THF=1.d0/frequenceHF
      omegaHF=pi2*frequenceHF
      omegaBF=pi2*frequenceBF
      sum=omegaHF+omegaBF
      diff=omegaHF-omegaBF
      nombre=0
      test=1
      attente=1
      do i=1,30
        ampLIM(i)=0.d0
      enddo

      open(unit=10,file='p_model.dat')

c     ccccccccccccccccccccc
c     cas i=1
c     ccccccccccccccccccccc

      arcN=TBF/2./pi*qasin(VON/amplBF)
      arcF=TBF/2.*(1.-1./pi*qasin(VOFF/amplBF))
c     write(10,1100)1,amplBF
c     ccccccccccccccccccccc

      do i=2,imax

c       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c       CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA COMPOSANTE HARMONIQUE
c       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        var1=qsin(diff*arcF)/diff+qsin(sum*arcF)/sum
        var2=-qsin(diff*arcN)/diff-qsin(sum*arcN)/sum
        An=B*G/TBF*(var1+var2)
        var3=qcos(diff*arcF)/diff-qcos(sum*arcF)/sum
        var4=-qcos(diff*arcN)/diff+qcos(sum*arcN)/sum
        Bn=B*G/TBF*(var3+var4)

        amplBF=qsqrt(An**2+Bn**2)

c       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c       detection des amplitudes recurentes ...
c
c       Cette partie du programme permet de mettre
```

```
c         en evidence le nombre de valeurs differentes
c         d'amplitude de la BF qui apparaissent.
c
c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
          test=1
          amplMEM(30)=amplBF
          do j=2,30
90          amplMEM(j-1)=amplMEM(j)
c           write(*,*)j,amplMEM(j-1)
          enddo
          do j=1,27
            if (qabs(amplMEM(j)-amplBF).le.1e-9) then
c             write(*,*)i,amplMEM(j)
              if (nombre.eq.0) then
                ampLIM(1)=amplBF
                nombre=1
c               write(*,*)i,1
100             else
                do k=1,nombre
                  if (qabs(ampLIM(k)-amplBF).le.1e-6) then
                    test=0
                  else
                    test=test*1
                  endif
                enddo
                if (test.eq.1) then
                  nombre=nombre+1
110               ampLIM(nombre)=amplBF
c                 write(*,*)i,nombre
                  attente=0
                else
                  attente=attente+1
                  if (attente.eq.5*nombre*27) then
c             write(*,*)'STABILITE DU PROCESSUS'
c             write(*,*)'Le systeme possede',nombre, ' periodes'
                    goto 300
                  else
120               endif
                endif
               endif
            else
            endif
          enddo
          do k=1,20
c           write(*,*)k,ampLIM(k)
          enddo
c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
130
c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c                       CALCUL DE TETA
c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
          arcN=asin(VON/amplBF)
          arcF=asin(VOFF/amplBF)
c         write(*,*)'amplBF,VOFF/amplBF,arcF',amplBF,VOFF/amplBF,arcF
          if ((abs(VOFF/amplBF).ge.1).or.(abs(VON/amplBF).ge.1)) then
            write(10,1100)i,amplBF,TETA
c    write(*,*)'ARRET DU PROCESSUS'
140     write(*,*)'amplBF=',amplBF,':TROP FAIBLE pour la commande'
            nombre=-1
            goto 300
          else
          endif
          TETA=TBF/2.d0*(1.d0+1.d0/pi*(arcF+arcN))
          write(10,1100)i,amplBF,TETA

c         ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
150
```

```
 200      if(mod(i,100).eq.0) then
c    write(*,*)i
         endif

        enddo
c       write(*,*)'PAS DE CONVERGENCE'
        nombre=0
300     write(20,1300)i,frequenceBF,amplBF,TETA,nombre

160     if(mod(iBF,30).eq.0) then
          write(*,*)iBF
        endif
        enddo

 1100 format(i8,f20.15,f20.15)
 1000 format(i8,f30.10,f30.10,i6,f16.11)
 1300 format(i7,f18.10,f18.10,f16.11,i6)
 1500 format(i8,f20.10,f15.10,f15.10,i5)
        close(10)
170     close(20)
        end
```

B.1 Résolution numérique d'équation différentielle non linéaire

Fichier d'entrée `arnold7.fic` suivit du programme `arnold7.f`

```
1   3.0d-2,21.040d0,0.d-0,21.0d0,1.01d-1,2000,1,1,-3.9,-2.9d0,3.7e-2,-0.8d0,0.05d0
```

```
1   ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    c
    c       SIMULATION DU MODELE D'ARNOLD PAR RESOLUTION DE L'EQUATION
    c               DIFFERENTIELLE UTILISANT LA METHODE DE RUNGE-KUTTA
    c               AVEC ETUDE SUR DES FLUCTUATIONS ALEATOIRES
    c                     DE LA FREQUENCE FREQ1 (entree dans la pll)
    c               (version etude des fluctuations de frequence
    c               du signal de battement ver amelioree de
    c                       arnold7.f
10  c                       dU/dt+K1sin(U)+K2sin(V)=freq1
    c                       dV/dt+K1sin(U)+K2sin(V)=freq2
    c               (derniere modification : 5/11/1997 )
    c
    ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
           implicit none
           integer n1,runge,nmax,icnt,ech,iseed,i,trans,test,test_br
            real*8 u,dt,pi,pi2,w_ref,w_VCO,w1,w2,taux,alea,t_ant,tbr_ant
            real*8 t,f,K1,K2,err,err_br,err_ant,errbr_ant,ran00,lev,eps
            parameter(n1=8)
20          dimension f(8),u(8)

    c
    ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    c               DEBUT DU PROGRAMME PRINCIPAL
    ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
    c
    c       Ce programme effectue deux simulations paralleles:
    c          - une simulation non lineaire non bruite
    c          - la meme bruite
30  c       la difference des deux variables donne le bruit sans la porteuse
    c
    c
    c       LECTURE DES PARAMETRES D'ENTREE
            open(unit=10,file='arnold7.fic')
```

```
         read(10,*)K1,w_ref,K2,w_VCO,dt,nmax,
        &          ech,trans,u(1),u(2),taux,lev,eps
           close(10)

c
c       ECRITURE  DES CONDITIONS INITIALES
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
           u(3)=u(1)
           u(4)=u(2)
c          vitesse initiales nulles
           u(5)=6.0d0
           u(6)=0.0d0
           u(7)=0.0d0
           u(8)=0.0d0
           err_ant=0.d0
           test=0
           test_br=0

           do i=1,8
             f(i)=0.0d0
           enddo
c
         open(unit=20,file='data')
         open(unit=30,file='data_br')
         open(unit=40,file='bruit')
         open(unit=50,file='pl_phase')
         open(unit=60,file='pl_phase_br')
         open(unit=70,file='bat_err')
         open(unit=80,file='batbr_err')
         open(unit=81,file='plan')

c          DEBUT DE L'ITERATION
c
           pi=4.*atan(1.)
           pi2=2.*pi
           t=0.d0
           t_ant=0.d0
           tbr_ant=0.d0
c-------------------------------------------------------
           write(*,*)'****************************************'
           write(*,*)'****************************************'
           write(*,*)'*    SIMULATION DU MODELE DE ARNOLD    *'
           write(*,*)'*          par resolution de           *'
           write(*,*)'*            l''equation differentielle       *'
           write(*,*)'*        (prise en compte du bruit)    *'
           write(*,*)'****************************************'
           write(*,*)'nombre de iterations :',nmax
           write(*,*)'frequence 1 de reference :',w_ref
           write(*,*)'frequence 2 du VCO :',w_vco
           write(*,*)'valeur de K1 (couplage non lineaire) :',K1
           write(*,*)'valeur de K2 (couplage non lineaire) :',K2
c          write(*,*)'issu de la presence de l''harmonique 6*w_ref-7*w_vco'
           write(*,*)'issu de la presence de l''harmonique 1*w_ref-3*w_vco'
           write(*,*)'----------'
c
           write(*,*)'Entrer un entier pour initialiser'
           write(*,*)'le generateur aleatoire du bruit blanc'
           read(*,*)iseed
c          call srand(iseed)
c
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c                K1 et K2 aux dimensions d'une frequence
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
           K2=pi2*K2
           K1=pi2*K1

         do 500 icnt=1,nmax
c           write(*,*)u(1),u(3),u(2),u(4)
```

```
c
c       les variables u(1) et u(2) sont les variables non bruites
c       les variables u(3) et u(4) sont les variables bruites
c
c
 112      call rkutta(n1,runge,u,f,t,dt)
            f(1)=u(4+1)
110         f(2)=u(4+2)
            f(3)=u(4+3)
            f(4)=u(4+4)
c
c         CALCUL DE LA FORCE
cc
            alea=ran00(iseed)
c           write(*,*)alea
            call calc_force(u,f,K1,K2,w_ref,w_vco,t,alea,taux)

120         if(runge.ne.0) goto 112

          call affiche("icnt",icnt,nmax)

c       ------------------------------------------------
c       Valeur de la tension du signal d'erreur
c       ------------------------------------------------
          err_ant=err
          errbr_ant=err_br
          err=K1/pi2*sin(u(1))+K2/pi2*sin(u(2))
130       err_br=K1/pi2*sin(u(3))+K2/pi2*sin(u(4))
c
c
c       ------------------------------------------------
c       Simulation du comptage de la frequence par un compteur
c       ------------------------------------------------
c       la variable lev est le niveau de declanchement
c       la variable eps est la sensibilite du declanchement

          if (err.lt.(lev-eps)) then
140         test=1
          endif
          if ((err.gt.lev).and.(err_ant.lt.lev).and.
     &  (test.eq.1)) then
            if(t_ant.ne.(0.)) then
              write(70,1200)t,1.d0/(t-t_ant)
              test=0
            endif
            t_ant=t
          endif
150
          if (err_br.lt.(lev-eps)) then
            test_br=1
          endif
          if ((err_br.gt.lev).and.(errbr_ant.lt.lev).and.
     &  (test_br.eq.1)) then
            if(tbr_ant.ne.(0.)) then
                write(80,1200)t,1.d0/(t-tbr_ant)
                test_br=0
            endif
160         tbr_ant=t
          endif
c
c       ------------------------------------------------
c       Affichage des donnees
c       ------------------------------------------------
          if (mod(icnt,ech).eq.0) then
             if ((icnt.ge.trans).and.(icnt.ge.3)) then
               write(50,1200)err,err-err_ant
               write(60,1200)err_br,err_br-errbr_ant
170            write(81,1200)u(1),f(1)
```

```
                write(20,1200)t,err
                write(30,1200)t,err_br
                write(40,1200)t,err_br-err
               endif
            endif
c             write(*,*)t,err_br,test_br

  500 continue
c
 1100  format(f20.10,f20.10,f20.10,f20.10,f20.10)
 1200  format(f20.10,f20.10)
        close(20)
        close(30)
        close(40)
        close(60)
        close(50)
        close(70)
        close(80)
        close(81)
       end
c
c       ******************FIN DU PROGRAMME PRINCIPAL***************
c
c
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c       SOUS PROGRAMMES UTILISES DANS LE PROGRAMME PRINCIPAL
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c

              subroutine rkutta(n,runge,y,f,x,h)
c ********************************************************
c VERSION DOUBLE PRECISION. POUR PASSER EN SIMPLE PRECISION,
c CHANGER double precision EN real.
c ********************************************************
c Sous programme Runge Kutta
c Integration de dy(j)/dx = f(j), j=1 ... , n ( n<= 500)
c      implicit undefined (a-z)
       implicit none
       integer n,m,runge,j,idp
       parameter(idp=8)
       real*8  y(idp),f(idp),x,h,phi(idp),savey(idp)
       save m, savey,phi
       data m/0/
       m=m+1
       goto (1,2,3,4,5)m
c ----- Pass 1 -----
 1     runge=1
       return
c ----- Pass 2 -----
 2     do j=1,n
         savey(j)=y(j)
         phi(j)=f(j)
         y(j) = savey(j) + 0.5d0*h*f(j)
       enddo
       x=x+0.5d0*h
       runge=1
       return
c ----- Pass 3 -----
 3     do j=1,n
         phi(j)=phi(j)+2.0d0*f(j)
         y(j) = savey(j) + 0.5d0*h*f(j)
       enddo
       runge = 1
       return
c ----- Pass 4 -----
 4     do j=1,n
         phi(j)=phi(j)+2.d0*f(j)
         y(j)=savey(j)+h*f(j)
```

```
      enddo
      x=x+0.5d0*h
      runge=1
      return
c ----- Pass 5 -----
 5     do j=1,n
         y(j)=savey(j)+(phi(j)+f(j))*h/6.0d0
      enddo
      m=0
      runge=0
      return
      end


ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c       CALCUL DE LA FORCE ASSOCIEE AU POTENTIEL ETUDIE
ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
        subroutine calc_force(u,f,K1,K2,w_ref,w_vco,t,alea,taux)
        implicit none
        real*8 u,f,K1,K2,t,taux,ran00,alea,w_ref,w_vco,pi2
        dimension u(8),f(8)
c
        pi2=8.*atan(1.)
c

        f(1)=-K1*sin(u(1))-K2*sin(u(2))
     &          +pi2*abs((w_ref-w_vco))
c-----------------------------------------------------------------------
c               perturbation par l'harmonique 6/7
c
        f(2)=-K1*sin(u(1))-K2*sin(u(2))+pi2*abs((w_ref-6./7.*w_vco))
c-----------------------------------------------------------------------
c
c-----------------------------------------------------------------------
c               perturbation par l'harmonique 1/3
c
c       f(2)=-K1*sin(u(1))-K2*sin(u(2))+pi2*abs((w_ref-1./3.*w_vco))
c-----------------------------------------------------------------------

c        write(*,*)alea
        f(3)=-K1*sin(u(3))-K2*sin(u(4))
     &       +pi2*abs(w_ref*(1.0+taux*(-0.5+alea))-w_vco)
c
c-----------------------------------------------------------------------
c               perturbation par l'harmonique 6/7
c
        f(4)=-K1*sin(u(3))-K2*sin(u(4))
     &       +pi2*abs(w_ref*(1.0+taux*(-0.5+alea))-6./7.*w_vco)
c-----------------------------------------------------------------------
c
c-----------------------------------------------------------------------
c               perturbation par l'harmonique 1/3
c
c       f(4)=-K1*sin(u(3))-K2*sin(u(4))
c     &       +pi2*abs(w_ref*(1.0+taux*(-0.5+alea))-1./3.*w_vco)
c-----------------------------------------------------------------------
c
c       fonction cosinus
c       f(3)=-u(1)
c       f(4)=-u(2)
c
c        write(*,*)1.0+taux*(-0.5+alea)
c        write(*,1110)f(1),f(3),f(2),f(4)
c       pause
 1110  format(f20.10,f20.10,f20.10,f20.10)
        return
        end
```

```
      ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
      c       procedure d'affichage de la variable itere
310   ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
            subroutine affiche(nom_var,variable,variable_max)
      c
            implicit none
            integer variable,variable_max
            character*8 nom_var
      c
            if (variable.ne.1) then
                if (mod(variable,variable_max/10).eq.0) then
                  write(*,*)nom_var," =",variable
320             endif
            else
            endif
            return
            end
      ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

            FUNCTION RAN00(IDUM)
            INTEGER IDUM,IA,IM,IQ,IR,MASK
            REAL*8 RAN00,AM
330         PARAMETER (IA=16807,IM=2147483647,AM=1./IM,IQ=127773,IR=2836,
           *MASK=123459876)
            INTEGER K
            IDUM=IEOR(IDUM,MASK)
            K=IDUM/IQ
            IDUM=IA*(IDUM-K*IQ)-IR*K
            IF (IDUM.LT.0) IDUM=IDUM+IM
            RAN00=AM*IDUM
            IDUM=IEOR(IDUM,MASK)
            RETURN
340         END
      C  (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software
```

Annexe C

Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation

C.1 Calcul de la dissymétrie des droites proches du rationnel p/q

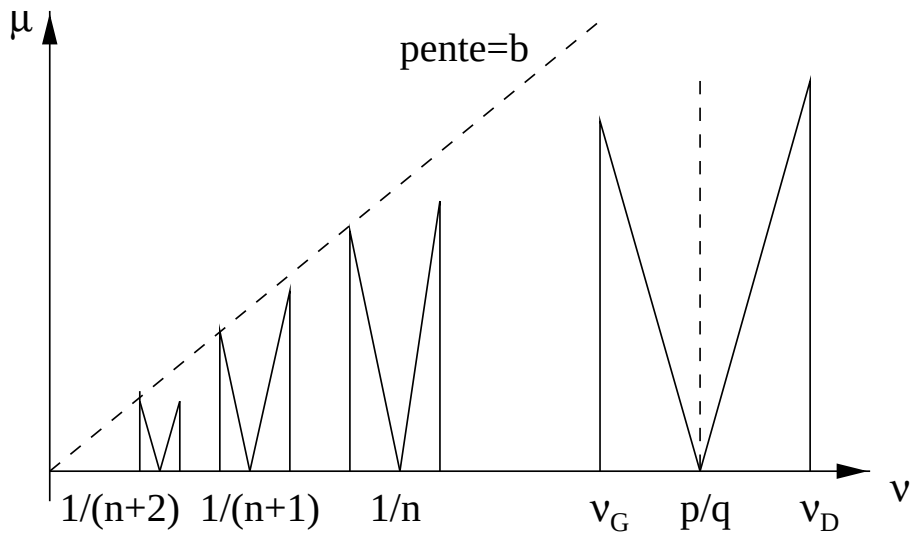


FIG. C.1 – *Propriétés arithmétiques de μ et ν*

Montrons que

$$\left|\nu_G - \frac{p}{q}\right| \neq \left|\nu_D - \frac{p}{q}\right|. \tag{C.1}$$

Supposons

$$\frac{p}{q} = [0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n], \tag{C.2a}$$

$$\nu_D = [0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{max}] = \left\{ \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right\}, \tag{C.2b}$$

$$\nu_G = [0, a'_1, a'_2, ..., a'_{n-1}, a_n - 1, 1, a_{max}] = \left\{ \frac{r_0}{s_0}, \frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_n}{s_n}, \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}}, \frac{r_{n+2}}{s_{n+2}} \right\}. \tag{C.2c}$$

Calculons $\varepsilon_D = \left| \nu_D - \frac{p}{q} \right|$.

On a

$$\left| \nu_G - \frac{p}{q} \right| = \left| \nu_G - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_{n+1}q_n} \right|. \tag{C.3}$$

Or, une propriétés des réduites s'écrit [Arnold 84, p. 113]:

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^{n-1}, \tag{C.4}$$

donc

$$\varepsilon_D = \frac{1}{q_{n+1}q_n}. \tag{C.5}$$

Calculons $\varepsilon_G = \left| \nu_G - \frac{p}{q} \right|$. Si $\frac{r_n}{s_n}$ est la réduite d'ordre n de ν_G, la réduite d'ordre $n+1$ s'écrit :

$$r_{n+1} = a'_{n+1} r_n + r_{n-1}, \tag{C.6a}$$

$$s_{n+1} = a'_{n+1} s_n + s_{n-1}, \tag{C.6b}$$

où a'_{n+1} est le $(n+1)^{\text{e}}$ a_i ; soit $a'_{n+1} = 1$. Tous les a_i de ν_G sont identiques à ceux de $\frac{p}{q}$ sauf $a'_{n+1} = 1$ et $a'_n = a_n - 1$.

En appliquant (C.6) à $\frac{r_n}{s_n}$, il vient :

$$r_n = a'_n r_{n-1} + r_{n-2}, \tag{C.7a}$$

$$s_n = a'_n s_{n-1} + s_{n-2}. \tag{C.7b}$$

Calculons ν_G. On a

$$\nu_G = \frac{r_{n+2}}{s_{n+2}} = \frac{r_{n+1}a_{max} + r_n}{s_{n+1}a_{max} + s_n}, \tag{C.8}$$

$$\nu_G = \frac{(r_n + r_{n-1})a_{max} + (a_n - 1)r_{n-1} + r_{n-2}}{(s_n + s_{n-1})a_{max} + (a_n - 1)s_{n-1} + s_{n-2}}, \tag{C.9a}$$

$$= \frac{[r_{n-1}(a_n - 1) + r_{n-2} + r_{n-1}]a_{max} + r_{n-1}a_n - r_{n-1} + r_{n-2}}{[s_{n-1}(a_n - 1) + s_{n-2} + s_{n-1}]a_{max} + s_{n-1}a_n - s_{n-1} + s_{n-2}}, \tag{C.9b}$$

$$= \frac{(r_{n-1}a_n + r_{n-2})a_{max} + r_{n-1}a_n - r_{n-1} + r_{n-2}}{(s_{n-1}a_n + s_{n-2})a_{max} + s_{n-1}a_n - s_{n-1} + s_{n-2}}. \tag{C.9c}$$

Les développements de ν_G, ν_D et $\frac{p}{q}$ coïncident jusqu'au rang $n-1$, donc

$$r_{n-1} = p_{n-1} \text{ et } r_{n-2} = p_{n-2}, \tag{C.10a}$$

$$s_{n-1} = q_{n-1} \text{ et } s_{n-2} = q_{n-2}. \tag{C.10b}$$

En appliquant (C.6) à $\frac{p}{q}$, on a

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \tag{C.11a}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \tag{C.11b}$$

En reportant les propriétés (C.10) et (C.11) dans (C.9c), il vient

$$\nu_G = \frac{p_n a_{max} + p_n - p_{n-1}}{q_n a_{max} + q_n - q_{n-1}}. \tag{C.12a}$$

La valeur de ε_G devient alors :

$$\varepsilon_G = \left| \nu_G - \frac{p}{q} \right|, \tag{C.13a}$$

$$= \left| \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n (q_n a_{max} + q_n - q_{n-1})} \right|, \tag{C.13b}$$

soit

$$\varepsilon_G = \frac{1}{q_n (q_n a_{max} + q_n - q_{n-1})} = \frac{1}{q_n s_{n+2}}. \tag{C.14}$$

On peut écrire (C.14) en fonction de q_{n+1} en utilisant (C.11) soit

$$q_{n+1} = a_{max} q_n + q_{n-1}. \tag{C.15}$$

On a alors

$$\varepsilon_G = \frac{1}{q_n (2 q_n a_{max} + q_n - q_{n+1})}. \tag{C.16}$$

De ce fait la dissymétrie s'écrit :

$$\varepsilon = \left| \varepsilon_D - \varepsilon_G \right|, \tag{C.17a}$$

$$= \left| \frac{1}{q_n q_{n+1}} - \frac{1}{q_n s_{n+2}} \right|, \tag{C.17b}$$

soit

$$\varepsilon = \left| \frac{s_{n+2} - q_{n+1}}{q_n q_{n+1} s_{n+2}} \right|. \tag{C.18}$$

Hormis quelques cas particuliers où $s_{n+2} = q_{n+1}$, la dissymétrie des rapports est toujours présente et reflète une propriété arithmétique des nombres ν_G et ν_D.

Exemple :

Pour $\frac{p}{q} = \frac{5}{3}$ et $a_{max} = 5$, on a $\nu_D = [0, 1, 1, 2, 5] = \frac{27}{16}$ et$\nu_G = [0, 1, 1, 1, 1, 5] = \frac{28}{17}$. La dissymétrie est alors :

$$\varepsilon = \left|\frac{5}{3} - \frac{27}{16}\right| - \left|\frac{5}{3} - \frac{28}{17}\right| = \frac{1}{3\ 16\ 17}. \tag{C.19}$$

C.2 Calcul de la pente de la droite reliant les $\mu(\nu_G)$ associé aux rapports $\frac{p}{q} = \frac{1}{n}$

Pour le rapport $\frac{p}{q} = \frac{1}{n}$, on a

$$\nu_G^{(n)} = [0, n, a_{max}] = \frac{a_{max} + 1}{(a_{max} + 1)n + 1}. \tag{C.20}$$

Pour le rapport $\frac{p}{q} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\nu_G^{(n+1)} = [0, n + 1, a_{max}] = \frac{a_{max} + 1}{(a_{max} + 1)(n + 1) + 1}. \tag{C.21}$$

La valeur de $\mu^{(n)}$ associée à $\nu_G^{(n)}$ est donnée par

$$\mu^{(n)} = \left|\frac{1}{n} - \nu_G^{(n)}\right| = \left|1 - \frac{n(a_{max} + 1)}{n(a_{max} + 1) + 1}\right| = \left|\frac{1}{n(a_{max} + 1) + 1}\right|, \tag{C.22}$$

et pour $\mu^{(n+1)}$, on a de même

$$\mu^{(n+1)} = (n+1)\left|\frac{1}{n+1} - \nu_G^{(n+1)}\right| = \left|1 - \frac{(n+1)(a_{max}+1)}{(n+1)(a_{max}+1)+1}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)(a_{max}+1)+1}\right| \tag{C.23}$$

La pente de la droite est alors donnée par :

$$b = \frac{\mu^{(n+1)} - \mu^{(n)}}{\nu_G^{(n+1)} - \nu_G^{(n)}}, \tag{C.24}$$

avec

$$\mu^{(n+1)} - \mu^{(n)} = \frac{1}{(n+1)(a_{max}+1)+1} - \frac{1}{n(a_{max}+1)+1}, \tag{C.25a}$$

$$= -\frac{a_{max}+1}{D}, \tag{C.25b}$$

où

$$D = [n(a_{max}+1)+1][(n+1)(a_{max}+1)+1]. \tag{C.26}$$

De même,

$$\nu_G^{(n+1)} - \nu_G^{(n)} = \frac{a_{max}+1}{(a_{max}+1)(n+1)+1} - \frac{a_{max}+1}{(a_{max}+1)n+1}, \tag{C.27a}$$

$$= -\frac{(a_{max}+1)^2}{D}, \tag{C.27b}$$

soit

$$b = \frac{1}{a_{max}+1}. \tag{C.28}$$

On montre ainsi que l'ensemble des ν_G des rapports $\frac{1}{n}$ sont alignés sur la droite $\mu = \frac{1}{a_{max}+1}\nu$.

Annexe D

Résolutions des équations par logiciel de calcul formel

Mapple V fut le logiciel utilisé.

D.1 Résolution dans le cas synchronisé

```
> int(1/(1-u*sin(teta)),teta);
```

$$2\,\frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\,\frac{-2\tan(\frac{1}{2}\,teta)+2\,u}{\sqrt{u^2-1}}\right)}{\sqrt{u^2-1}}$$

```
> phi(t,u) :=2*arctan(1/u*(u-sqrt(1-u^2)*tanh(sqrt(1-u^2)*t/2)));
```

$$\phi(t,\,u) := 2\arctan\left(\frac{u-\sqrt{1-u^2}\tanh(\frac{1}{2}\,\sqrt{1-u^2}\,t)}{u}\right)$$

```
> erreur(t,u) :=sin(phi(t,u)/2);
```

$$\mathrm{erreur}(t,\,u) := \frac{u-\sqrt{u^2-1}\tanh(\frac{1}{2}\,\sqrt{u^2-1}\,t)}{u\sqrt{1+\frac{(u-\sqrt{u^2-1}\tanh(\frac{1}{2}\,\sqrt{u^2-1}\,t))^2}{u^2}}}$$

D.2 Résolution dans le cas non synchronisé

```
> int(1/(u-sin(teta)),teta);
```

$$2\,\frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\,u\tan(\frac{1}{2}\,teta)-2}{\sqrt{u^2-1}}\right)}{\sqrt{u^2-1}}$$

```
> phi(t,u) :=2*arctan((1+sqrt(u^2-1)*tan(sqrt(u^2-1)*t/2))/u);
```

$$\phi(t,\,u) := 2\arctan\left(\frac{1+\sqrt{u^2-1}\tan(\frac{1}{2}\,\sqrt{u^2-1}\,t)}{u}\right)$$

```
> erreur(t,u) := sin(phi(t,u)/2);
```

$$\mathrm{erreur}(t,\,u) := \frac{1+\sqrt{u^2-1}\tan(\frac{1}{2}\,\sqrt{u^2-1}\,t)}{u\sqrt{1+\frac{(1+\sqrt{u^2-1}\tan(\frac{1}{2}\,\sqrt{u^2-1}\,t))^2}{u^2}}}$$

D.3 Vérification de la propriété de symétrie

```
> Order:=5;
```

$$Order := 5$$

```
> eq1:=diff(phi(t),t)+k1*sin(phi(t))=D;
```

$$eq1 := (\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(t)) + k1\,\sin(\phi(t)) = D$$

```
> dsolve({eq1,phi(0)=Pi/2},phi(t),type=series );
```

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\,\pi + (-k1+D)\,t + \frac{1}{6}\,k1\,(-k1+D)^2\,t^3$$

```
> eq2:=diff(phi(t),t)+k1*sin(phi(t))+k2*sin(phi (t)+2*w*t)=D;
```

$$eq2 := (\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(t)) + k1\,\sin(\phi(t)) + k2\,\sin(\phi(t)+2\,w\,t) = D$$

```
> dsolve({eq2,phi(0)=Pi/2},phi(t),type=series );
```

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\,\pi + (-k1 - k2 + D)\,t + \left(\frac{1}{6}\,k1\,(-k1 - k2 + D)^2 + \frac{1}{6}\,k2\,(-k1 - k2 + D + 2\,w)^2\right)t^3 + \mathrm{O}(t^5)$$

```
> eq3:=diff(phi(t),t)+k1*sin(phi(t))+k2*sin(phi (t)+2*w*t)
> +k3*sin(3*phi(t)-2*w*t)=D;
```

$$eq3 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(t)\right) + k1\,\sin(\phi(t)) + k2\,\sin(\phi(t) + 2\,w\,t) + k3\,\sin(3\,\phi(t) - 2\,w\,t) = D$$

```
> dsolve({eq3,phi(0)=Pi/2},phi(t),type=series );
```

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\,\pi + (-k1 - k2 + D + k3)\,t + \left(\frac{1}{6}\,k1\,(-k1 - k2 + D + k3)^2 + \frac{1}{6}\,k2\,(-k1 - k2 + D + k3 + 2\,w)^2 - \frac{1}{6}\,k3\,(-3\,k1 - 3\,k2 + 3\,D + 3\,k3 - 2\,w)^2\right)t^3 + \mathrm{O}(t^5)$$

```
> eq4:=diff(phi(t),t)+k1*sin(phi(t))+k2*sin(phi (t)+2*w*t)
> +k3*sin(3*phi(t)-2*w*t)+k4*sin(3*phi(t))=D;
```

$$eq4 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(t)\right) + k1\,\sin(\phi(t)) + k2\,\sin(\phi(t) + 2\,w\,t) + k3\,\sin(3\,\phi(t) - 2\,w\,t) + k4\,\sin(3\,\phi(t)) = D$$

```
> dsolve({eq4,phi(0)=Pi/2},phi(t),type=series );
```

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\,\pi + (-k1 - k2 + k4 + k3 + D)\,t + \left(\frac{1}{6}\,k1\,(-k1 - k2 + k4 + k3 + D)^2 + \frac{1}{6}\,k2\,(-k1 - k2 + k4 + k3 + D + 2\,w)^2 - \frac{1}{6}\,k3\,(-3\,k1 - 3\,k2 + 3\,k4 + 3\,k3 + 3\,D - 2\,w)^2 - \frac{1}{6}\,k4\,(-3\,k1 - 3\,k2 + 3\,k4 + 3\,k3 + 3\,D)^2\right)t^3 + \mathrm{O}(t^5)$$

```
> eq5:=diff(phi(t),t)+k1*sin(phi(t))+k2*sin(phi (t)+2*w*t)
> +k3*sin(3*phi(t)-2*w*t)+k4*sin(3*phi(t))+k5*sin(phi(t)+4*w*t )
> +k6*sin(5*phi(t)-4*w*t)=D;
```

$$\begin{aligned} eq5 := &(\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(t)) + k1\,\sin(\phi(t)) + k2\,\sin(\phi(t) + 2\,w\,t) \\ &+ k3\,\sin(3\,\phi(t) - 2\,w\,t) + k4\,\sin(3\,\phi(t)) \\ &+ k5\,\sin(\phi(t) + 4\,w\,t) + k6\,\sin(5\,\phi(t) - 4\,w\,t) = D \end{aligned}$$

```
> dsolve({eq5,phi(0)=Pi/2},phi(t),type=series );
```

$$\begin{aligned} \phi(t) = &\frac{1}{2}\,\pi + (-k1 - k2 + D + k4 + k3 - k6 - k5)\,t + (\\ &\frac{1}{6}\,k1\,(-k1 - k2 + D + k4 + k3 - k6 - k5)^2 \\ &+ \frac{1}{6}\,k2\,(-k1 - k2 + D + k4 + k3 - k6 - k5 + 2\,w)^2 - \frac{1}{6} \\ &k3\,(-3\,k1 - 3\,k2 + 3\,D + 3\,k4 + 3\,k3 - 3\,k6 - 3\,k5 - 2\,w)^2 \\ &- \frac{1}{6}\,k4\,(-3\,k1 - 3\,k2 + 3\,D + 3\,k4 + 3\,k3 - 3\,k6 - 3\,k5)^2 \\ &+ \frac{1}{6}\,k5\,(-k1 - k2 + D + k4 + k3 - k6 - k5 + 4\,w)^2 + \frac{1}{6} \\ &k6\,(-5\,k1 - 5\,k2 + 5\,D + 5\,k4 + 5\,k3 - 5\,k6 - 5\,k5 - 4\,w)^2) \\ &t^3 + \mathrm{O}(t^5) \end{aligned}$$

Annexe E

Tableau numérique des valeurs

`arnold7.fic` Valeurs numériques de la simulation donnant la figure Fig. 5.13.

```
1   1  omega=0.497653,c=0.062630 ;nombre rot=0.497171 alpha = 0.998616  dal = 0.001520 couleur = 2
       omega=0.499218,c=0.062630 ;nombre rot=0.498761 alpha = 0.997567  dal = 0.001049 couleur = 2
       omega=0.500782,c=0.062630 ;nombre rot=0.500240 alpha = 1.008767  dal = 0.011199 couleur = 5
       omega=0.502347,c=0.062630 ;nombre rot=0.501830 alpha = 0.997567  dal = 0.011199 couleur = 5
       omega=0.503912,c=0.062630 ;nombre rot=0.503409 alpha = 0.998616  dal = 0.001049 couleur = 2
       omega=0.505477,c=0.062630 ;nombre rot=0.504972 alpha = 1.000136  dal = 0.001520 couleur = 2

    2  omega=0.499218,c=0.109603 ;nombre rot=0.498900 alpha = 0.990979  dal = 0.003411 couleur = 2
       omega=0.500782,c=0.109603 ;nombre rot=0.500101 alpha = 1.040986  dal = 0.050006 couleur = 3
10     omega=0.502347,c=0.109603 ;nombre rot=0.501760 alpha = 0.990980  dal = 0.050006 couleur = 5
       omega=0.503912,c=0.109603 ;nombre rot=0.503382 alpha = 0.994390  dal = 0.003411 couleur = 2

    3  omega=0.333333,c=0.229645 ;nombre rot=0.331810 alpha = 0.996694  dal = 0.003257 couleur = 2
       omega=0.334898,c=0.229645 ;nombre rot=0.333285 alpha = 1.009244  dal = 0.012549 couleur = 5
       omega=0.336463,c=0.229645 ;nombre rot=0.334905 alpha = 0.994642  dal = 0.014601 couleur = 5
       omega=0.338028,c=0.229645 ;nombre rot=0.336524 alpha = 0.994724  dal = 0.000082 couleur = 2
       omega=0.665102,c=0.229645 ;nombre rot=0.665716 alpha = 0.994644  dal = 0.000081 couleur = 2
       omega=0.666667,c=0.229645 ;nombre rot=0.667191 alpha = 1.009242  dal = 0.014598 couleur = 5
       omega=0.668232,c=0.229645 ;nombre rot=0.668789 alpha = 0.996694  dal = 0.012548 couleur = 5
20     omega=0.669797,c=0.229645 ;nombre rot=0.670355 alpha = 0.999951  dal = 0.003257 couleur = 2

    4  omega=0.071987,c=1.012526 ;nombre rot=0.000002 alpha = 2.424475  dal = 0.009096 couleur = 11
       omega=0.073552,c=1.012526 ;nombre rot=0.000002 alpha = 2.415560  dal = 0.008914 couleur = 11
       omega=0.075117,c=1.012526 ;nombre rot=0.000002 alpha = 2.406814  dal = 0.008747 couleur = 9
       omega=0.076682,c=1.012526 ;nombre rot=0.000002 alpha = 2.398222  dal = 0.008592 couleur = 9
       omega=0.084507,c=1.012526 ;nombre rot=0.000003 alpha = 2.357196  dal = 0.007981 couleur = 9
       omega=0.090767,c=1.012526 ;nombre rot=0.000004 alpha = 2.326127  dal = 0.007654 couleur = 9
       omega=0.095462,c=1.012526 ;nombre rot=0.000005 alpha = 2.303511  dal = 0.007488 couleur = 9
       omega=0.098592,c=1.012526 ;nombre rot=0.000006 alpha = 2.288652  dal = 0.007412 couleur = 9
30     omega=0.103286,c=1.012526 ;nombre rot=0.000007 alpha = 2.266557  dal = 0.007348 couleur = 9
       omega=0.106416,c=1.012526 ;nombre rot=0.000008 alpha = 2.251876  dal = 0.007340 couleur = 9
       omega=0.112676,c=1.012526 ;nombre rot=0.000011 alpha = 2.222377  dal = 0.007411 couleur = 9
       omega=0.122066,c=1.012526 ;nombre rot=0.000015 alpha = 2.176789  dal = 0.007782 couleur = 9
       omega=0.129890,c=1.012526 ;nombre rot=0.000019 alpha = 2.136055  dal = 0.008445 couleur = 9
       omega=0.131455,c=1.012526 ;nombre rot=0.000020 alpha = 2.127420  dal = 0.008635 couleur = 9
       omega=0.133020,c=1.012526 ;nombre rot=0.000021 alpha = 2.118570  dal = 0.008850 couleur = 9

    5  omega=0.521127,c=1.915449 ;nombre rot=0.499596 alpha = 1.969848  dal = 0.109838 couleur = 3
       omega=0.522692,c=1.915449 ;nombre rot=0.520506 alpha = 0.598698  dal = 1.371150 couleur = 11
40     omega=0.524257,c=1.915449 ;nombre rot=0.531297 alpha = 0.701103  dal = 0.102405 couleur = 14
       omega=0.538341,c=1.915449 ;nombre rot=0.537491 alpha = 0.822848  dal = 0.042715 couleur = 14
       omega=0.539906,c=1.915449 ;nombre rot=0.546495 alpha = 0.729127  dal = 0.093721 couleur = 14
       omega=0.541471,c=1.915449 ;nombre rot=0.550788 alpha = 0.843779  dal = 0.114652 couleur = 14
       omega=0.543036,c=1.915449 ;nombre rot=0.549391 alpha = 1.017484  dal = 0.173705 couleur = 5
       omega=0.544601,c=1.915449 ;nombre rot=0.566077 alpha = 0.633630  dal = 0.383854 couleur = 14
       omega=0.547731,c=1.915449 ;nombre rot=0.658438 alpha = 0.533955  dal = 0.099959 couleur = 11
       omega=0.549296,c=1.915449 ;nombre rot=0.653671 alpha = 0.827574  dal = 0.293619 couleur = 14
```

```
omega=0.555556,c=1.915449 ;nombre rot=0.553528 alpha = 0.859896  dal = 0.501592 couleur = 14
omega=0.557120,c=1.915449 ;nombre rot=0.611254 alpha = 0.441501  dal = 0.418395 couleur = 11
omega=0.558685,c=1.915449 ;nombre rot=0.559487 alpha = 0.458368  dal = 0.016867 couleur = 11
omega=0.560250,c=1.915449 ;nombre rot=0.561536 alpha = 0.958344  dal = 0.499976 couleur = 14
omega=0.563380,c=1.915449 ;nombre rot=0.545681 alpha = 0.867400  dal = 0.184909 couleur = 14
omega=0.564945,c=1.915449 ;nombre rot=0.523472 alpha = 0.589370  dal = 0.278030 couleur = 11
```

Annexe F

Conception électronique des circuits imprimés

F.1 Composition électronique du mélangeur doublement équilibré.

F.1.1 Liste des composants

Bill of Materials MIX.PCB

Melangeur

Quantity	Type	Value	Ref Designators
58			C53,G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7, G8,G9,G10,G11,G12,G13,G14, G16,G18,G19,G20,G21,G22, G23,G24,G25,G26,G27,G28, G29,G30,G31,G32,G33,G34, G35,G36,G37,G38,G39,G40, G41,G42,G44,G45,G46,G47, G48,G49,G50,G51,G52,G53, G54,G55,G56,G57,N67,N68, N69
1	Ampli. Op. F.B	OP27GZ	IC1
1	Cap. MKT (150nF)	Court-circuit	C3
1	Capa. Ceramique	15nF	C1A
2	Capa. Ceramique	47nF	C4,C5
1	Capa. Ceramique	220pF	C1
1	Capa. Ceramique	Non monte	C2
2	Capa. Tantale	1uF/25V	C6,C7
4	Diode Shottky	HP 5082-2835	D1,D2,D3,D4
1	Res. Metal 1 %	20k	R2
2	Res. Metal 1 %	49.9	R1A,R3
1	Res. Metal 1%	Court-circuit	R31
2	Self	22uH	L1A,L2
2	Transfo. MCL	T1-1T	TR1,TR2

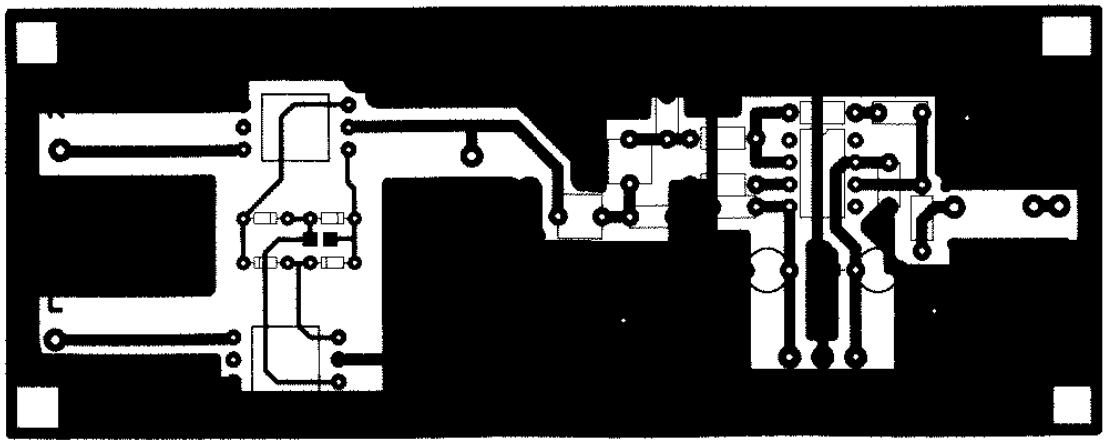


FIG. F.1 – *Mélangeur doublement équilibré. Détails des connexions.*

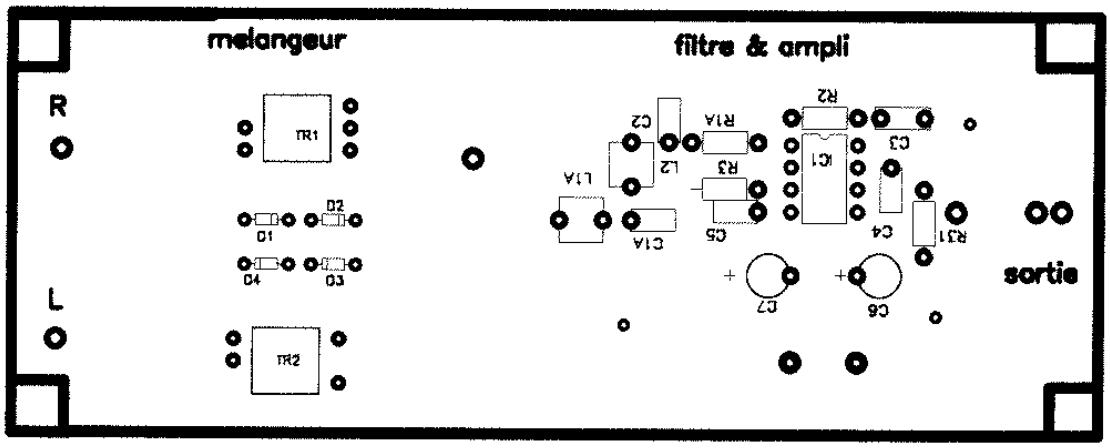


FIG. F.2 – *Mélangeur doublement équilibré. Composants utilisés.*

F.2 Composition électronique de l'amplificateur faible bruit.

F.2.1 Schémas électroniques

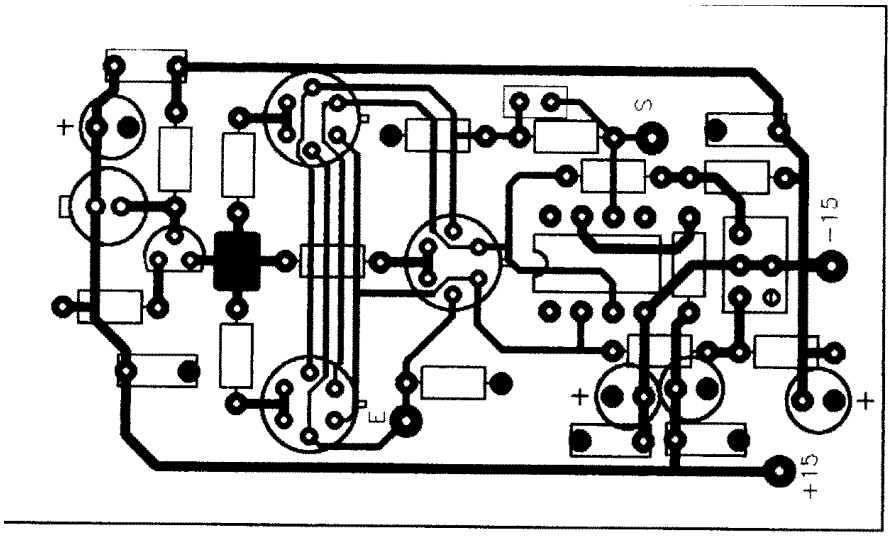


FIG. F.3 – *Amplificateur faible bruit : détail des connexions.*

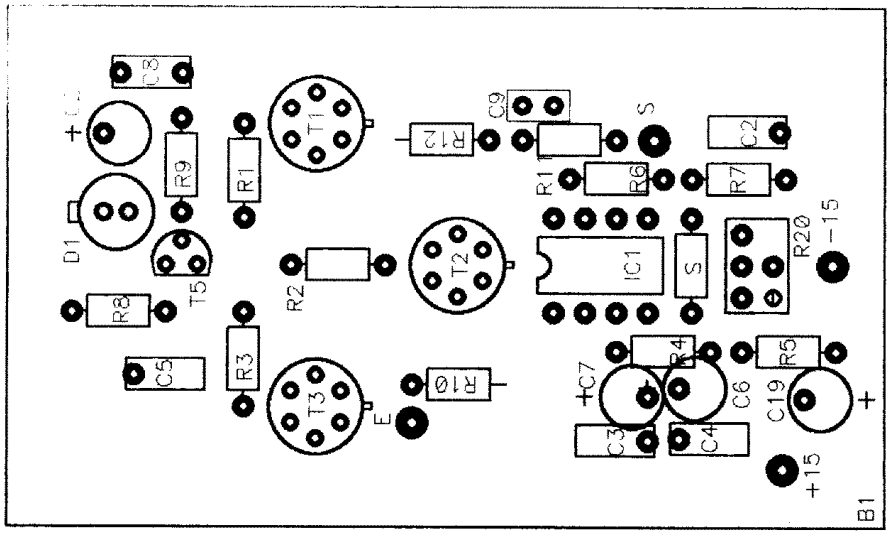


FIG. F.4 – *Amplificateur faible bruit : composants utilisés.*

Bill of Materials AMPL.PCB

Melangeur

Quantity	Type	Value	Ref Designators
1			B1
1	A.O.F.B	OP27GZ	IC1
1	Diode ref.	ICL8069CCSQ	D1
1	MKT	220nF	C8
1	PNP	2N4403	T5
3	Paire PNP	MAT03FH	T1,T2,T3
1	Strap	0	S
2	Tantale	0.47uF/35V	C6,C7
2	Tantale	10uF/35V	C19,C20
2	ceramique	10nF	C2,C3
1	ceramique	33pF	C9
2	ceramique	47nF	C4,C5
2	metal 1%	1.5k	R4,R6
1	metal 1%	4.99k	R11
2	metal 1%	22	R5,R7
1	metal 1%	47.5k	R9
2	metal 1%	49.9	R10,R12
1	metal 1%	100	R8
3	metal 1%	402	R1,R2,R3
1	multitour	0-100	R20

Table des figures

1.1 Système générant un signal temporel oscillant de période T et d'amplitude A 12
1.2 Fonctionnement générique d'un système oscillant 13
1.3 Schéma de base de l'oscillateur 14
1.4 Le pendule pesant 16
1.5 Schéma de l'oscillateur Colpitts normal simplifié 18
1.6 L'oscillateur monochromatique à ondes de surface (SAW) 19
1.7 Un exemple d'oscillateur MLSO actif. 20
1.8 Le vase à siphon : un exemple d'oscillateur à relaxation 21
1.9 Vase à siphon avec débit modulé 21

2.1 Évolution de la stabilité des oscillateurs quartz [Chronos 91] 24
2.2 Spectre radio-fréquence (spectre RF) d'un oscillateur 27
2.3 Spectre typique en loi de puissance d'un oscillateur. 28
2.4 Spectre de phase équivalent au spectre de fréquence de la figure Fig. 2.3 30
2.5 Spectre radio-fréquence d'un oscillateur de fréquence ν_0 31
2.6 Banc de mesure de bruit de phase 32
2.7 Spectre du signal d'erreur $u_4(t)$ pour $K = 10$ Hz 33
2.8 Fonctionnement du compteur de fréquence 34
2.9 Méthode de battement pour la mesure de la fréquence des oscillateurs 35
2.10 Marche aléatoire de fréquence et ses propriétés. 38
2.11 Conversion de fréquence : une source de bruit. 40
2.12 Spectre Lorentzien de diffusion des électrons dans les solides. 44
2.13 Marche aléatoire tridimensionnelle 46
2.14 Bruit blanc et ses propriétés temporelles et spectrales 47
2.15 (a) Modèle de Leeson - (b) Courbe phase-fréquence du résonateur 47
2.16 Spectre de sortie d'un oscillateur de Leeson muni d'un amplificateur avec bruit blanc et bruit flicker de phase 48
2.17 Bruit en $1/f$: (a) domaine temporel ; (b) domaine spectral ; (c) écart-type d'Allan 54

3.1 Processus gaussien d'espérance $m = 10$ et d'écart type $\sigma = 2$ 59
3.2 Processus stochastique $x(t)$ supposé vérifier l'hypothèse ergodique 63
3.3 Les fonctions périodiques doivent être traitées au sens des distributions pour que l'on puisse leur associer une transformation de Fourier 69
3.4 La TF d'un produit de 2 fonctions existe pour les fonctions périodiques traitées au sens des distributions 70

4.1 Schéma équivalent du résonateur à quartz 76
4.2 Défaut d'isochronisme d'un quartz à 5 MHz [Gagnepain 72, p. 114] 77
4.3 Modèle du résonateur bi-modes : $V(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)^2(x - x_2)^2$. 78
4.4 Plan de phase de l'oscillateur de Van der Pol : (a) et (b) : $\lambda = 0,1$; (c) : $\lambda = 4$ 81
4.5 Non-linéarité de l'oscillateur et distorsion du signal ; (a) : $\lambda = 4$; (b) : $\lambda = 0,01$ 82

4.6 Spectre FFT de l'oscillateur Van der Pol; (a): $\lambda = 0,01$, (b): $\lambda = 0,1$, (c): $\lambda = 4$- $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1$ 84
4.7 Système non linéaire avec force de friction de Coulomb 85
4.8 Espace des phases ou plan de phase du pendule pesant non amorti 87
4.9 Espace des phases d'un système intégrable à deux degrés de liberté : le tore $T^2 = C^1 \times C^2$, produit cartésien de deux cercles 89
4.10 Intersection de la trajectoire du système perturbé avec une surface $\theta_2 = cte$ 90
4.11 Résolution graphique de la condition d'amplitude pour le régime permanent de l'oscillateur de Van der Pol perturbé. 95
4.12 Couplage linéaire de deux oscillateurs linéaires 97

5.1 (a) La projection $P_1(C)$ conserve toutes les propriétés de C, contrairement à $P_2(C)$. (b) Section de Poincaré d'un système de période 3. La section Σ_1 met en évidence cette période 3 ($X_{i+3n} = X_i$) , alors que Σ_2 ne montre qu'une certaine périodicité ($Y_{i+2n} = Y_i$) 102
5.2 Application standard : destruction des tores 104
5.3 Application standard : chaos et structure 105
5.4 Sensibilité aux conditions initiales d'une trajectoire chaotique mesurée via l'exposant de Liapunov λ 106
5.5 Mesure du désordre par le concept d'entropie. La configuration (b) possède une entropie plus élevée 107
5.6 Quelques objets et leurs dimensions fractales 109
5.7 Courbe de Koch 109
5.8 Un exemple de cycle limite pour $c = 1$ tracé à partir d'une condition initiale Φ_0. Nous avons également porté la forme de la fonction $f(\Phi)$ pour différentes valeurs de c. 112
5.9 L'escalier du diable 112
5.10 Cycle limite et son évolution sous l'effet d'une perturbation 113
5.11 Mouvement brownien pour $I \in [0,1]$. (a) $\varepsilon = 0,01$; (b) $\varepsilon = 0,3$; (c) $\varepsilon = 0,6$; (d) $\varepsilon = 1,5$ 115
5.12 L'application logistique 116
5.13 La carte d'Arnold 119
5.14 Caractéristiques de la carte d'Arnold en fonction des paramètres 123
5.15 Largeur des paliers $\Delta(p/q)$ en fonction de Ω qui jouit d'une propriété d'invariance d'échelle [Jensen 84] 124
5.16 Détail du mapping d'Arnold 125
5.17 Partitions des plages de synchronisation par les fractions continues 127
5.18 Constantes de Markoff 132

6.1 Schéma électronique de la PLL 140
6.2 Caractéristiques de la varicap de l'oscillateur OSA B5400 (a) et pour différents taux de modulation du Racal Dana (b). 141
6.3 Le mélangeur doublement équilibré ou modulateur en anneau. 142
6.4 Caractéristiques du mélangeur. (a) spectre de sortie (cf. Tab. 6.2). (b) bruit de phase (b) 143
6.5 Étude de la PLL du second ordre 145
6.6 Évolution du signal d'erreur en fonction de u. 147
6.7 Régime transitoire de l'asservissement pour $\Delta\omega = 0$ (a) et $\Delta\omega = K$ (b). 147
6.8 Effet de la phase initiale sur le régime transitoire 148
6.9 Deux régimes transitoires différents suivant le sens de rotation de la phase 149
6.10 Fréquence du signal d'erreur en fonction de $\Delta\omega$ à K constant 149
6.11 Observation expérimentale du signal d'erreur. 150
6.12 Influence de la phase initiale pour $u > 1$ 151
6.13 Plan de phase de la PLL en régime périodique pour différentes valeurs de u 152
6.14 Portrait de phase du système d'équations associé à la PLL 153
6.15 Périodicité détectée par échantillonnage 153
6.16 Influence de l'échantillonnage T_{ech} pour la construction des portraits de phase-(a) $T_{ech} = 0,25$s, (b) $T_{ech} = 1,5$s, (c) $T_{ech} = 16,67$s, (d) $T_{ech} = 53,57$s 155

6.17 Spectre d'intermodulation en fréquence de la PLL. 159
6.18 Spectre d'intermodulation en amplitude de la PLL. 159
6.19 Observation expérimentale de la synchronisation de l'enveloppe. 161
6.20 Observation numérique de la synchronisation de l'enveloppe. (a) spectre FFT (b) synchronisation de l'enveloppe (c) modulation d'enveloppe secondaire observée par échantillonnage de période 10. 163
6.21 Évolution du signal d'erreur proche de la plage de synchronisation secondaire 6/7. 164
6.22 Évolution du signal d'erreur loin de la plage de synchronisation secondaire 6/7. 165
6.23 Caractéristique du signal d'erreur proche de la plage 1/1 et soumis à une perturbation de l'harmonique 6/7. 166
6.24 La PLL perturbée par une source de bruit blanc 168
6.25 Spectre du signal d'erreur d'une entrée modulée par du bruit blanc de fréquence mesurée avec l'analyseur en mode « couplage alternatif » ($K = f_c = 450$Hz) 169
6.26 Même mesure que celle de la figure Fig. 6.25 avec un couplage continu (DC). 170
6.27 Spectre du signal d'erreur avec $u = 0$ (a) et $u = 0.946$ (b) 171
6.28 Principe de démodulation numérique. La différence entre les spectres bruités (b) et (c) et le spectre non bruité (a) donne les spectres de bruit (d) et (e). (b)-(d) : $taux = 0,5$; (c)-(e) : $taux = 0,05$ 172
6.29 Observation numérique de la désynchronisation 172
6.30 Spectre FFT du signal d'erreur proche de la désynchronisation de la PLL 174
6.31 Spectre FFT de la désynchronisation de la PLL 174
6.32 Plancher de bruit du signal d'erreur en fonction de K pour $\omega_{BF} = 170$ Hz 175
6.33 Plancher de bruit du signal d'erreur en fonction de $\Delta\omega$ pour $K = 1,5$ kHz 176
6.34 Transformation du bruit proche de la zone seuil $\delta\omega = K$. 178
6.35 Transformation du bruit blanc en bruit en 1/f (Domaine temporel). 179
6.36 Transformation du bruit blanc en bruit en 1/f (Domaine fréquentiel). 180
6.37 Fluctuations du signal d'erreur : battement de basse fréquence ($\sim$ 1 Hz). Boucle ouverte : (a), (c). Boucle fermée : (b), (d). 181
6.38 Fluctuations en boucle ouverte (a) et en boucle fermée (c) avec les variances respectives. 182
6.39 Écart-type d'Allan de la fréquence du battement : (a)PLL en boucle ouverte. (b) et (c) PLL en boucle fermée. 183
6.40 Choix du niveau de déclenchement du compteur 183
6.41 Désynchronisation de l'enveloppe par le bruit 185
6.42 Désynchronisation à toutes les échelles 186
6.43 Influence du filtre : $f_c = 3,3$KHz, $\delta\omega = 1,5$KHz. 187
6.44 Influence du filtre : $f_c = 3,3$kHz et $\delta\omega = 1,01$kHz. 187
6.45 Augmentation du filtre : $f_c = 10$kHz. (a) K =1,01 kHz ; (b) K =1,5 kHz ; (c) $K = 2,32$ kHz. 188
6.46 Observation du régime transitoire en cas de non résonance à la fréquence $\sqrt{K f_c}$. (Fig. 6.45 (b)). 189
6.47 Observation expérimentale du régime transitoire de la PLL avec $f_c = 3,3$ kHz et $K = 1,01$ kHz. 189
6.48 Simulations numériques de l'évolution temporelle du signal dérreur (influence du filtre). . 190
6.49 Spectre d'intermodulation de la PLL en fonction du filtrage f_c 191
6.50 Erreur d'approximation en fonction des critères (6.83). $\epsilon_{min} = 1.5\ 10^{-5}$, $a_{max} = 5$, $q_{max} = 400$ 194
6.51 Prise en compte de la physique du mélangeur pour le calcul de l'erreur d'approximation. 196
6.52 Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation. (a) expériences avec $f_c = 375kHz$. (b) erreur arithmétique avec a_{max}=1 si p et q pairs et a_{max}=9 sinon ; $\epsilon_{min} = 1,5\ 10^{-3}$, $q_{max} = 45$ 197
6.53 Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation (a) expériences avec $f_c = 58kHz$. (b) erreur arithmétique avec a_{max}=10 si p et q pairs et a_{max}=90 sinon ; $\epsilon_{min} = 1,5\ 10^{-3}$, $q_{max} = 450$ 198

6.54 Propriétés arithmétiques du spectre d'intermodulation (a) expériences avec $f_c = 3kHz$. (b) erreur arithmétique avec a_{max}=65 si p et q pairs et a_{max}=550 sinon ; $\epsilon_{min} = 7\ 10^{-5}$, $q_{max} = 1500$ 199
6.55 Propriétés de l'erreur arithmétique en fonction des critères de résolution physiques. Les paramètres indiqués sur les courbes sont respectivement ϵ_{min}, a_{max} pair, a_{max} impair et q_{max} 200
6.56 Détail des maximums V_G et V_D du rapport $\frac{3}{5}$ du spectre expérimental de la figure Fig. 6.52. 201

7.1 Dispositif électronique de l'expérience de résonance porteuse-enveloppe. 206
7.2 Réponse de la ligne en fonction de f_{HF} à $T = 9,06\mu$s et $\theta = 0,920\mu$s. 207
7.3 Réponse de la ligne en fonction de T à $\theta = 0,920\mu$s 207
7.4 Fonctionnement schématique du modulateur. 208
7.5 Amplitude V_s de sortie du modulateur en fonction de l'amplitude de la porteuse. 208
7.6 Banc de mesure de la basse fréquence f_{BF} 209
7.7 Résonance porteuse-enveloppe dans une expérience de modulation par injection. 210
7.8 Détails des résonances : un exemple d'escalier du diable expérimental. 211
7.9 Construction des données $\Delta\Omega_k^{(N)}$ par moyennages. 212
7.10 Étude de l'exposant de Hölder en fonction de N. 213
7.11 Structure fine de type Markoff et ses principales zones identifiées. 215
7.12 Influence du retard introduit par un cordon BNC. (a) : 50cm (b) : 8m. 216
7.13 Influence de l'impédance : (a) résistance 50Ω, (b) condensateur de 3.3 μF. 217
7.14 Influence du taux de modulation dans le cas d'un condensateur. 217
7.15 Influence du taux de modulation dans le cas de la ligne. 218
7.16 Fréquence de l'enveloppe en fonction de u pour 59 valeurs de f_0 (un décalage des échelles est éffectué afin de faire apparaître les paliers) 219
7.17 Mapping bidimentionnel expérimental. Suivant les codes de couleur utilisés certaines régions synchronisées sont visibles. 220
7.18 Onde hydrodynamique en eau profonde. 221
7.19 Découpage de la porteuse. 224
7.20 Méthode de construction de l'algorithme 225
7.21 Nombre de limites de (7.30) pour des rapports de fréquence de $\frac{f_0}{f_{BF}} = \frac{T_1}{T_0}$ 227

A.1 Étude de la PLL du second ordre 233

C.1 Propriétés arithmétiques de μ et ν 255

F.1 Mélangeur doublement équilibré. Détails des connexions. 268
F.2 Mélangeur doublement équilibré. Composants utilisés. 268
F.3 Amplificateur faible bruit : détail des connexions. 269
F.4 Amplificateur faible bruit : composants utilisés. 269

Index

échantillonnage, 79, 110, 149, 153, 154, 157, 168, 203
échelles multiples, 83, 108, 121
équation d'Adler, 146, 234
équation de Fokker-Planck, 88, 170
équation de Schrödinger non linéaire, 221
étalon de tension, 128
étalonnage des bancs de mesure, 178
évolution collective, 52, 114

Adler, 146
aliasing, 165
application logistique, 116, 120, 226
application standard, 102
approximation décimale, 129
approximation des réels, 91, 129
approximation rationnelle, 129, 193
arbre de Farey, 125, 212
asservissement, 26, 148
attracteur, 53, 107

bancs de mesure de bruit, 33, 146
bande passante d'asservissement, 32, 146
Barkhausen, 14, 18, 22
bifurcation, 117
blocage de mode, 146, 205
bruit blanc, 29, 37, 115, 168
bruit d'amplitude, 30
bruit de marche aléatoire, 29
bruit de phase, 30
bruit de scintillation, 29
bruit en $1/f$, 79, 85, 108, 115, 178, 179, 181
bruit flicker, 29, 37, 48, 50, 55

cœur humain, 20, 80
carte d'Arnold, 106, 110, 127, 167, 212, 218
chaos, 89, 103, 117, 120
coefficient de diffusion, 49
compteur, 34, 160, 209
condition d'oscillation, 17
condition de phase nulle, 15, 17
condition diophantienne, 128
conditions d'irrationalité, 111
constantes de Markoff, 131
constantes de temps, 167, 216
conversion de fréquence, 39
critères de résolution, 194, 196
cycle limite, 80
cycle skipping, 115, 171

décomposition spectrale, 61
défaut d'isochronisme, 76
définition de la seconde, 23
démodulation, 27, 31, 144
désynchronisation, 171, 173, 184, 185
détection d'enveloppe, 205
degré de liberté, 85

densité spectrale, 27, 29, 37
densité spectrale unilatérale, 28
dimension fractale, 108, 113
discontinuité physique, 181
dissymétrie, 192, 195, 255
distribution, 59, 68
distribution Gaussienne, 42
domaine spectral, 26, 31
domaine temporel, 34
doublement de période, 120, 226
Dutta-Horn, 52, 181

entropie, 107
enveloppe, 162, 221
escalier du diable, 111, 211
espace des phases, 86, 145
exposant de Hölder, 117, 211, 218
exposant de Liapunov, 101, 106

FFT, 53, 165, 173
fonction de corrélation, 43, 61
fonction de covariance, 61
fréquence de coupure de l'asservissement, 149
fréquence de Fourier, 146
fréquence de synchronisme, 19, 205, 218
fréquence du signal d'erreur, 160
fréquence imaginaire, 157
fractals, 51, 53, 108, 194
fractions continues, 126, 129, 193, 199
free-run, 151, 218

Hamiltonien, 86, 108, 111, 152
hiérarchie de constantes de temps, 186
hiérarchie de la synchronisation, 121
hiérarchie des résonances, 91
hiérarchie des rationnels, 125
Hooge, 51
horloges, 16, 24, 25
Huygens, 96
hypothèse ergodique, 63
hystérésis, 80, 186, 216

idempotence, 53
instabilité locale, 211
instabilité modulationnelle, 78
intégrale première, 86
invariance d'échelle, 108, 194, 226
invariants, 89
invariants de nature arithmétique, 203
invariants périodiques, 168
irrationnels de Markoff, 199, 214

langues d'Arnold, 118
Leeson, 46, 79
libre parcours moyen, 41
lignes à ondes de surface, 205, 221

loi de puissance, 29, 110

mélangeur, 32, 36, 142, 144, 162, 196, 267
méthode de battement, 35, 209
méthode multi-échelles, 93, 214
marche aléatoire, 36, 37, 45, 49
Mc Whorter, 51
modèle standard, 113
mode lockings, 111
modulation, 142, 144, 166
mouvement Brownien, 36, 114
multi-variance, 181
multiplication de fréquences, 83

nombre d'or, 131
nombre de rotation, 110, 118
non-linéarité de l'élément actif , 15
non-linéarité de l'amplificateur, 79
non-linéarité du résonateur, 75
non-linéarité et bruit en $1/f$, 52
notation de Dirac, 58
Nyquist, 45

ondes hydrodynamiques, 221
oscillateur électronique, 17
oscillateur à ondes acoustiques de surface, 18, 205
oscillateur à relaxation, 19
oscillateur biologique, 13
oscillateur conservatif, 102
oscillateur interne, 156
oscillateur mécanique, 16
oscillateur monochromatique, 19
oscillateur multimodes, 77
oscillateur naturel, 20
oscillateur paramétrique, 20
oscillateurs couplés, 85, 95, 97, 110, 236
oscillateurs de Lorentz, 99, 102
oscillateurs de Rössler, 98

paliers de synchronisation, 147, 160, 162, 192, 213, 218
pendule pesant, 83, 86, 96
perturbation harmonique, 160, 162
perturbation par du bruit, 168
perturbations aléatoires, 88
perturbations déterministes, 88
petits dénominateurs , 91
piézoélectricité, 13, 23
Picinbono, 39
plan de phase, 153
PLL, 31, 110, 139, 157, 162, 167, 233
portrait de phase, 154, 167
processus Gaussien, 59
processus non stationnaires, 65
processus stationnaires, 62
processus stochastique, 61
projection du signal, 70, 102, 156
propriétés arithmétiques, 191, 196, 215

réduites, 130, 193
référence de temps, 23
régime transitoire, 22, 75, 149, 157, 188
régularité, 167
réponse électromagnétique, 207
réponse acoustique, 207
résonance porteuse-enveloppe, 205
résonance sous-harmonique, 95
résonateur, 14
rapport de fréquence, 94, 127, 131, 192
rapport rationnel, 17, 91, 160
rationalité des fréquences, 89, 100, 184
robustesse du verrouillage, 211
rotations de phase, 148
RTS, 52
Runge-Kutta, 145, 164

séparatrice, 52, 77, 87, 103, 178
séries de Fourier, 151
saturation, 15
SAW, 18, 205
section de Poincaré, 102, 104, 107
Self Organized Criticality, 85, 108
self similarité, 122, 124
sensibilité aux conditions initiales, 106
soliton, 205, 221, 223
spectre d'intermodulation, 192, 196
spectre de diffusion, 45
spectre de phase, 170
spectre FFT, 151
spectre Lorentzien, 44
spectre normalisé $\mathcal{L}(f)$, 30
spectre RF, 26, 171
stabilité de la synchronisation, 221
stabilité structurelle, 111, 113, 211
stationnarité, 39, 50, 178
stochastique, 89, 169
structure multiéchelle, 168
symétrie, 143, 160, 192, 236
synchronisation, 24, 90, 94, 106, 111, 120, 121, 178, 198
synchronisation à toutes les échelles, 186
synchronisation de la modulation, 164
synchronisation de phase, 98, 227
synchronisation secondaire, 168, 191
synchronisation spatiale, 98
système bouclé, 227
système conservatif, 85
système intégrable, 86
système oscillant, 11

temps d'intégration, 34
temps de corrélation, 43
temps de synchronisation, 149, 165
théorème de Fourier, 66
théorème de limite centrale, 41, 60
théorème de Parseval, 28
théorème de Wiener-Kintchine, 64
théorème KAM, 89, 108, 128, 131
tore, 89, 103, 108, 120, 128, 131, 198
transformation de Fourier, 67
transformation du bruit, 32, 46, 115, 170, 178, 182
trigger, 34, 210

Van der Pol, 22, 80, 92, 104, 110, 226
variable aléatoire, 57
variable de Laplace, 32, 47
variables d'angle-action, 88
variables lentes, 222
variance d'Allan, 36, 108, 176, 179
varicap, 141
vase à siphon, 19
VCO, 141, 146, 158, 235
Volterra, 20

Bibliographie

[Abramowitz 70] M. Abramowitz & I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions.* Dover publications, INC, New York, 1970.

[Adler 46] R. Adler. *A study of locking phenomena in oscillators.* Proc. IRE, vol. 34, page 351, 1946. Reprinted in Proc IEEE, 61, 1380 (1973).

[Allan 66] D. W. Allan. *Statistics of Atomic Frequency Standards.* IEEE Proceedings, vol. 54, page 221, 1966.

[Amengual 97] A. Amengual, E. Hernández-García, R. Montagne & M. San Miguel. *Synchronization of Spatiotemporal Chaos : The Regime of Coupled Spatiotemporal Intermittency.* Phys. Rev. Lett., vol. 78, page 4379, 1997.

[Andronov 66] A. A. Andronov, A. A. Vitt & S. E. Khaikin. *Theory of oscillators.* Pergamon Press, Oxford, 1966.

[Arecchi 83] Fortunato Tito Arecchi, Remo Badii & Antonio Politi. *1/f spectra in nonlinear systems with many attractors.* Noise in Physical systems and 1/f noise, page 127, 1983.

[Arecchi 87] F. T. Arecchi & A. Califano. *Noise-Induced Trapping at the Boundary between two Attractors : a Source of* $1/f$ *Spectra in Nonlinear Dynamics.* Europhysics Letters, vol. 3, page 5, 1987.

[Arnold 84] V. Arnold. *Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires.* Éditions Mir, Moscou, 1984.

[Aschwin 92] P. Aschwin & J. W. Swift. *The Dynamics of n Weakly Coupled Identical Oscillators.* J. Nonlinear Sci., vol. 2, page 69, 1992.

[Audoin 98] C. Audoin & B. Guinot. *Les fondements de la mesure du temps.* Masson, 1998.

[Bai-Lin 88] Hao Bai-Lin. *Directions in Chaos.* World Scientific, 1988.

[Bak 87] Per Bak, Chao Tang & Kurt Wiesenfeld. *Self-Organized Criticality : An Explanation of 1/f Noise.* Physical Review Letters, vol. 59, page 381, 1987.

[Bak 88] Per Bak, Chao Tang & Kurt Wiesenfeld. *Self-organized criticality.* Phys. Rev. A, vol. 38, page 364, 1988.

[Barnes 71] James A. Barnes, Andrew R. Chi, Leonard S. Cutler, Daniel J. Healey, David B. Leeson, Thomas E. McGunigal, James A. Mullen Jr, Warren L. Smith, Richard L. Sydnor, Robert F. C. Vessot & Gernot M. R. Winkler. *Characterization of Frequency Stability.* IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-20, page 105, 1971.

[Bertotti 83] B. Bertotti, B. J. Carr & M. J. Rees. *Limits from the timing of pulsars on the cosmic gravitational wave background.* Mon. Not. R. astr. Soc, vol. 203, page 945, 1983.

[Birkhoff 27] G. D. Birkhoff. *Dynamical Systems.* A.M.S. Publication, Providence, 1927.

[Blair 74] B. E. Blair. *Time and Frequency : Therory and Fundamentals.* NBS Monograph 140, Waschinton DC, USA, 1974.

[Blin 95] T. Blin. *Méthodologie de modélisation des oscillateurs à quartz : application aux oscillateurs ultra-stables pour applications spatiales.* PhD thesis, Thèse de 3ème cycle, Besançon, 1995.

[BNM 96] BNM. *Étalons et unités de mesure.* Bureau National de Métrologie, 1996.

[Brendel 75] R. Brendel. *Bruit interne des oscillateurs à quartz.* PhD thesis, Thèse de 3ème cycle, Besançon, 1975.

[Brendel 94] R. Brendel, T. Blin & G. Marianneau. *Modélisation non linéaire des oscillateurs à quartz ultra-stables pour application spatiales.* Rapport technique, Final Report contract #962/CNES/91/1476/00, 1994.

[Buczek 73] C. J. Buczek, R. J. Freiberg & M. L. Skolnick. Proc. of the IEEE, vol. 61, page 1411, 1973.

[Carlson 89] J. M. Carlson & J. S. Langer. *Properties of Earthquakes Generated by Fault Dynamics.* Physical Review Letters, vol. 62, page 2632, 1989.

[Chirikov 79] B. V. Chirikov. Phys. Rep., vol. 52, page 265, 1979.

[Chovet 77a] A. Chovet & P. Viktorovitch. *Le bruit électrique : aspects physiques.* L'onde électrique, vol. 57, page 773, 1977.

[Chovet 77b] A. Chovet & P. Viktorovitch. *Le bruit électrique : processus aléatoires.* L'onde électrique, vol. 57, page 699, 1977.

[Chronos 91] Chronos. *La mesure de la fréquence des oscillateurs.* Masson, 1991.

[Couteleau 98] L. Couteleau. *Modélisation automatique du comportement et du bruit des oscillateurs à quartz ultra-stables.* PhD thesis, Thèse de 3ème cycle, Besançon, 1998.

[Cresser 82] J. D. Cresser, W. H. Louisell, P. Meystre, W. Schleich & M. O. Scully. *Quantum noise in ring-laser gyros. I. Theoretical formulation of problem.* Physical Review A, vol. 25, page 2214, 1982.

[Cutler 75] C.C. Cutler. *The Regerative Pulse Generator.* proceedings of the I.R.E., page 140, 1975.

[Dahan Dalmedico 92] A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert & K. Chemla. *Chaos et déterminisme.* Editions du Seuil, 1992.

[Das 89] A. Das. *Integrable models*, volume 30. World Scientific Lectures Notes in Physics. World Scientific Publishing, Co-Singapore, 1989.

[De Coulon 86] F. De Coulon. *Signal theory and processing.* Artech House, 1986.

[De Sousa Vieira 92] M. De Sousa Vieira, P. Khoury, A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman & W. Wonchoba. *Numerical and Experimental Studies os Self-Synchronization and Synchronized Chaos.* Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 2, page 645, 1992.

[De Sousa Vieira 94] M. De Sousa Vieira, A. J. Lichtenberg & M. A. Lieberman. *Self-Synchronization of Many Coupled Oscillators.* Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 4, page 1563, 1994.

[Dos Santos 95] S. Dos Santos. *Instabilité modulationnelle dans les systèmes discrets de dimension finie.* DEA, Dijon, 1995.

[Dos Santos 97] S. Dos Santos, J.F. Mougin, F. Lardet-Vieudrin, J. Groslambert & M. Planat. *Non linear approach of the spectrum and stability of frequency lockings.* Proc. 11^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Neuchatel, Suisse, 1997.

[Dos Santos 98a] S. Dos Santos, Michel Planat & Franck Lardet-Vieudrin. $1/f$ *Spectrum in a Nonlinear Electronic Loop : Consequences in Frequency Standards and Signal Processing.* In Proc. of the conference : Transmission and Signal Processing in Nonlinear Electronics and Optics , Dijon, 1998.

[Dos Santos 98b] Serge Dos Santos & Michel Planat. *Arithmetical Fractals in an Electronic Loop.* In M. M. Novak, editeur, Fractals and Beyond, page 299. Word Scientific, 1998.

[Dos Santos 98c] Serge Dos Santos & Michel Planat. *Nonlinearly generated* $1/f$ *noise in modelockings.* Proc. 12^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Warsaw, Poland, 1998.

[Dutta 81] P. Dutta & P. M. Horn. *Low-frequency fluctuations in solids: 1/f noise.* Reviews of Modern Physics, vol. 53, page 497, 1981.

[Eckert 96] C. Eckert, M. Planat & J. A. Miehé. *Hidden order in the frequency noise of an electronic oscillator.* Phys. Rev. E, vol. 54, page 6093, 1996.

[Ferre-Pikal 97] Eva Ferre-Pikal, Fred L. Walls & Craig W. Nelson. *Guidelines for Designing BJT Amplifiers with Low 1/f AM and PM Noise.* IEEE Trans. on Ultras. Ferroelect. and Freq. Control, vol. 44, page 335, 1997.

[Flandrin 93] P. Flandrin. *Temps-Fréquence.* Hermes, 1993.

[Gagnepain 72] J.J. Gagnepain. *Mécanismes non linéaires dans les resonateurs à quartz, théorie, expériences et applications métrologiques.* PhD thesis, Thèse de $3^{ème}$ cycle, Besançon, 1972.

[Gardner 67] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal & R. M. Miura. *Method for solving the Korteveg de Vries equation.* Phys. Rev. Lett., vol. 19, page 1095, 1967.

[Gilden 75] M. Gilden, T.M. Reeder & A.J. DeMaria. *The Mode-Locked SAW Oscillator.* IEEE Ultrasonics Symposium proceedings, page 251, 1975.

[Goldman 48] S. Goldman. *Frequency analysis, modulation and noise.* McGraw-Hill, New-York, 1948.

[Gonzalez 83] D. L. Gonzalez & O. Piro. *Chaos in a Nonlinear Driven Oscillator with Exact Solution.* Phys. Rev. Lett., vol. 80, page 870, 1983.

[Guckenheimer 83] J. Guckenheimer & P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields.* Springer-Verlag, 1983.

[Gutzwiller 88] Martin C. Gutzwiller & Benoit B. Mandelbrot. *Invariant Multifractal Measures in Chaotic Hamiltonian Systems, and Related Structures.* Phys. Rev. Lett., vol. 60, page 673, 1988.

[Gutzwiller 90] Martin C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, New-York Inc., 1990.

[Handel 80] Peter H. Handel. *Quantum approach to* $1/f$ *noise.* Phys. Rev. A, vol. 22, page 745, 1980.

[Handel 93] P. H. Handel. *The Nature of Fundamental* $1/f$ *Noise.* In Noise in Physical Systems and $1/f$ fluctuations, page 162, Saint-Louis, 1993. Peter H. Handel and Alma L. Chung.

[Hauden 93] D. Hauden & E. Bigler. *Dispositifs à quartz de très haute fréquence et applications.* Revue Scientifique et Technique de la Défense, vol. 3, page 35, 1993.

[Hewlett Packard 97] Hewlett Packard. *Documentation technique 5965-7589E*, 1997.

[Hooge 94] F. N. Hooge. $1/f$ *Noise Sources.* IEEE Trans. Electr. Devices, vol. 41, page 1926, 1994.

[Howe 97] D. A. Howe. *Methods of improving the estimation of long-term frequency variance.* Proc. 11^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Neuchatel, Suisse, March 1997.

[IMST 98] IMST. *Coplan for Libra*^{TM}, 1998. Documentation technique.

[Jensen 84] Mogens Høgh Jensen, Per Bak & Tomas Bohr. *Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps.* Phys. Rev. A, vol. 30, page 1960, 1984.

[Kawai 93] Toshio Kawai & Yoshiro Mihira. *Basis of Universal Existence of $1/f$ Fluctuations.* In Noise in Physical Systems and $1/f$ fluctuations, page 639, Saint-Louis, 1993. Peter H. Handel and Alma L. Chung.

[Keshner 82] Marvin S. Keshner. *1/f Noise.* Proceedings of the IEEE, vol. 70, page 212, 1982.

[Klapper 72] J. Klapper & J. T. Frankle. *Phase-Locked and Frequency-Feedback systems.* Academic Press, New York, 1972.

[Kocarev 96] Ljupco Kocarev & Ulrich Parlitz. *Synchronizing Spatiotemporal Chaos in Coupled Nonlinear Oscillators.* Phys. Rev. Lett., vol. 77, page 2206, 1996.

[Kurokawa 73] K. Kurokawa. *Injection locking of microwave solid state oscillator.* Proc. of the IEEE, vol. 61, page 1386, 1973.

[La Recherche 98] La Recherche. *Les Eurêka d'Archimède de Syracuse*, volume 311. 1998.

[Lacoume 83] J.-L. Lacoume. *Théorie du signal.* PUF, 1983.

[Landes 87] D. S. Landes. *L'Heure qu'il est.* Gallimard, 1987.

[Lardet-Vieudrin 96a] F. Lardet-Vieudrin, G. Martin, S. Dos Santos, G. Marianneau & M. Planat. *Frequency Stability Control of Carrier-Envelope Resonance in a Surface Acoustic Wave Delay Line Oscillator.* Proc. 10^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Brighton, UK, 1996.

[Lardet-Vieudrin 96b] F. Lardet-Vieudrin, S. Dos Santos & M. Planat. *Blocage par injection de modes sous-harmoniques d'un oscillateur utilisant une ligne à retard à ondes de surface.* Special issue of Annals of Telecommunications, France, vol. 51, no. 7-8, page 330, 1996.

[Lee 98] Kyoung J. Lee, Yongho Kwak & Tong Kun Lim. *Phase Jumps near a Phase Synchronization Transition in Systems of two Coupled Chaotic Oscillators.* Phys. Rev. Lett., vol. 81, page 321, 1998.

[Leeson 66] D. B. Leeson. *A simple Model of Feedback Oscillator Noise Spectrum.* Proc. of the IEEE, vol. 54, page 329, 1966.

[Lesage 73] Lesage. *Characterization of frequency.* IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM 22, page 157, 1973.

[Lichtenberg 91] A. J. Lichtenberg & M. A. Liebermann. *Regular and Chaotic Dynamics.* Springer-Verlag, 1991.

[Lichtenberg 92] A. J. Lichtenberg & M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics.* Springer-Verlach, 1992. 2nd edition.

[Maas 86] S. A. Maas. *Microwave mixers.* Artech House, Inc, Norwood, 1986.

[Marquié 95a] P. Marquié, J.-M. Bilbault, B. Michaux & S. Dos Santos. *Modulational Instability in Real Discrete Systems.* In Word Scientific, editeur, Proceedings of the Euroconference : Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems, Theory and Applications, San Lorenzo de Escorial (Madrid), Spain, 1995.

[Marquié 95b] P. Marquié, J.-M. Bilbault, B. Michaux & S. Dos Santos. *Modulational Instability in Discrete Systems.* In Conference on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1995.

[Max 81] J. Max. *Traitement du signal et applications aux mesures physiques.* Masson, Paris, 1981.

[Millet 91] Millet. *Les rythmes biologiques.* Encyclopaedia Universalis, 1991.

[Milsant 75] F. Milsant. *Contre-réaction, oscillations, alimentation*, volume 4. Editions Eyrolles, 1975.

[Mortensen 69] Richard E. Mortensen. *Mathematical Problems of Modeling Stochastic Nonlinear Dynamic Systems.* Journal of Statistical Physics, vol. 1, page 271, 1969.

[Mougin 96] J.-F. Mougin. Processus de synchronisation d'une boucle d'asservissement de phase en vue d'applications en télécommunications. Master's thesis, Université de Franche-Comté, Besançon, 1996.

[Muscha 77] T. Muscha & H. Higuchi. Proc. of the Symposium on $1/f$ Fluctuations, page 187, 1977.

[Neyfey 79] A. H. Neyfey & D. T. Mook. *Nonlinear oscillators.* Wiley-interscience, 1979.

[Nigmatullin 97] R. Nigmatullin. *Fractal Noises in Spectroscopy and their Analysis.* 1997. Soumis à publication.

[Norton 93] Jerry R. Norton & Raymond J. Besson. *Tactical BVA Quartz Resonator Performance.* Proc. of the IEEE Intern. Freq. Contr. Symp., page 609, 1993.

[Pecorra 90] Pecorra & Caroll. Phys. Rev. Lett., 1990.

[Perrine 88] S. Perrine. *Approximations diophantiennes (Théorie de Markoff).* PhD thesis, Université de Metz, 1988.

[Pikovsky 96] A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum & J. Kurths. *Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators.* Europhysics Letters, vol. 34, page 165, 1996.

[Pilgram 98] Berndt Pilgram & Daniel T. Kaplan. *A comparison of estimation for 1/f noise.* Physica D, vol. 114, page 108, 1998.

[Planat 87] Michel Planat. *Bruit en 1/f et ondes dispersives.* C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 305, page 539, 1987.

[Planat 92] M. Planat. *Stability of nonlinear phase motion from the study of oscillator mappings.* Proceedings of the 6th European Frequency and Time Forum, Noordwijk, page 333, 1992.

[Planat 93] M. Planat & P. Koch. *Plurifractal Signature in the Study of Resonances of Dynamical Systems.* Fractals, vol. 1, page 727, 1993.

[Planat 94] M. Planat & P. Koch. *Synchronization of Oscillators through Nonlinear Resonance : Application to Wave Stability in Acoustic Resonators, Josephson Junctions and Biological Neurons.* Proc. 8^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Munich, Germany, page 821, 1994.

[Planat 95] M. Planat, F. Lardet-Vieudrin, G. Martin & M. Houmady. *Frequency stability enhancement measured in a soliton-locked type regime of a surface acoustic delay line oscillator.* Proc. of the Conference on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, Edinburgh, July 10-14, 1995.

[Planat 96a] M. Planat, editeur. Oscillators, volume 51, France, 1996. Special issue of Annals of Telecommunications.

[Planat 96b] M. Planat, V. Giordano, G. Marianneau, F. Vernotte, M. Mouret, C. Eckert & J. Miehe. *Is the Frequency Noise of an Oscillator of Deterministic Origin?* IEEE Trans. on Ultras. Ferroelect. and Freq. Control, vol. 43, page 326, 1996.

[Planat 96c] M. Planat, F. Lardet-Vieudrin, G. Martin, S. Dos Santos & G. Marianneau. *Frequency stability enhancement from carrier-envelope resonance in a surface acoustic wave delay line oscillator.* J. Appl. Phys., vol. 80, page 2509, 1996.

[Planat 96d] M. Planat, S. Dos Santos & F. Lardet-Vieudrin. *Carrier to envelope resonances, quasi-periodicity and* $1/f$ *frequency noise in an injection-locked oscillator.* IEEE International Frequency Control Symposium, 1996.

[Planat 97] M. Planat, S. Dos Santos & F. Lardet-Vieudrin. *A Teichmüller approach of a pulse oscillator : fine structure of carrier-envelope interactions.* In Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras, page 929, Singapore, 1997. edited by H. D. Doebner *et al.*, World Scientific.

[Planat 98] Michel Planat & Serge Dos Santos. *The Arithmetic of Frequency Mixing in an Electronic Loop.* Proc. 12^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Warsaw, Poland, 1998.

[Planat 99] Michel Planat, Serge Dos Santos, Nicolas Ratier, Jacky Cresson & Serge Perrine. *Close to resonance interaction of radiofrequency waves in a Schottky diode mixer : 1/f noise and number theory.* In Proc. of VII Van der Ziel Symposium on Quantum 1/f noise ,St Louis. AIP Press, 1999.

[Prigent 96] M. Prigent, J.-C. Nallatamby, E. Ngoya, R. Quéré & J. Obregon. *Simulation techniques of non-linear circuit dynamic behaviour.* Annales des Télécommunications, vol. 9-10, page 541, 1996.

[Putterman 77] Seth Putterman. *Mode-Coupled Fluctuations and 1/f noise.* Phys. Rev. Lett., vol. 39, page 585, 1977.

[Remoissenet 94] M. Remoissenet. *Waves Called Solitons.* Springer Verlag, 1994.

[Rienhard 86] H. Rienhard. *Cours de mathématiques du signal.* Dunod Université, 1986.

[Risken 89] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation.* Springer Verlag, Berlin, 1989.

[Roddier 78] F. Roddier. *Distributions et Transformation de Fourier.* Ediscience, 1978.

[Rubiola 98] E. Rubiola, V. Giordano & J. Groslambert. *Double correlating interferometer scheme for measuring PM and AM noise.* Electronics Letters, vol. 34, page 93, 1998.

[Rutman 78] Jacques Rutman. *Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress.* Proceedings of the IEEE, vol. 66, page 1048, 1978.

[Sauvage 77] Gérard Sauvage. *Phase Noise in Oscillators: A Mathematical Analysis of Leeson's Model.* IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-26, page 408, 1977.

[Seidler 96] G.T. Seidler, S.A. Solin & A.C. Marley. *Dynamical Current Redistribution and Non-Gaussian 1/f Noise.* Phys. Rev. Lett., vol. 76, page 3049, 1996.

[Serenade7 98] Serenade7. *Serenade7*, 1998. Documentation technique, Compact Software.

[Stoisiek 75] M. Stoisiek & D. Wolf. *Recent investigations on the stationarity of* $1/f$ *noise.* J. Appl. Phys., vol. 47, page 362, 1975.

[Stratanovich 67] R. L. Stratanovich. *Theory of random noise.* Gordon and Breach, New-York, 1967.

[Taft 74] T. Taft. Deap Sea. Res, vol. 21, page 403, 1974.

[Takagi 83] Keiji Takagi. *The Power Spectrum of a White Noise Passed through a Nonlinear Transmission Line.* Jpn. J. Appl. Phys., vol. 22, page 1446, 1983.

[Van der Pol 30] B. Van der Pol. *Le coeur considéré comme un oscillateur à relaxation.* L'Onde électrique, vol. 8, pages 365–392, 1930.

[Vanier 89] J. Vanier & C. Audoin. *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, volume 1 et 2. Adam Hilger, 1989.

[Vaterkowski 85] J.L. Vaterkowski, C. Roques-Carmes & J.J. Gagnepain. *Fractal dimension of* $1/f^{\alpha}$ *noises.* Elect. Letters, vol. 21, page 688, 1985.

[Vernotte 91] F. Vernotte. *Stabilité temporelle des oscilateurs : nouvelles varisnces, leurs propriétés, leurs applications.* PhD thesis, Thèse de 3ème cycle, Besançon, 1991.

[Volterra 31] V. Volterra. *Théories Mathématiques de la lutte pour la vie.* Gauthier-Villars, 1931.

[Voss 78] R. F. Voss & J. Clarke. Accoust. Soc. Am., vol. 63, page 258, 1978.

[Voss 79] Richard F. Voss. $1/f$ *(Flicker) Noise : a Brief Review.* In Proc. 33^{rd} Ann. Symp. Frequency Contr., page 40, Atlantic City, NJ, 1979.

[Waldschmidt 92] M. Waldschmidt, P. Moussa, J.M. Luck & C. Itzykson. *From Number Theory to Physics.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Weissmann 88] M.B. Weissmann. $1/f$ *noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter.* Rev. Mod. Phys., vol. 60, page 537, 1988.

[Yamaguchi 86] Yoshihiro Yamaguchi & Kazuo Sakai. $1/f$ *noise spectrum of the chaotic motion in a whisker mapping.* Physics Letters A, vol. 117, page 387, 1986.

[Yasue 96] Shinichi Yasue, Kazuoki Munakata, Masashige Kato & Satoru Mori. *Calculation of the Power Law Index for a Time Series by Means of its Fractal Dimension.* Fractals, vol. 4, page 265, 1996.

Publications relatives à la Thèse

- F. Lardet-Vieudrin, G. Martin, S. Dos Santos, G. Marianneau & M. Planat. *Frequency Stability Control of Carrier-Envelope Resonance in a Surface Acoustic Wave Delay Line Oscillator.* Proc. 10^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Brighton, UK, 1996.

- S. Dos Santos. *Instabilité modulationnelle dans les systèmes discrets de dimension finie.* DEA, Dijon, 1995.

- S. Dos Santos, J.F. Mougin, F. Lardet-Vieudrin, J. Groslambert & M. Planat. *Non linear approach of the spectrum and stability of frequency lockings.* Proc. 11^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Neuchatel, Suisse, 1997.

- S. Dos Santos, Michel Planat & Franck Lardet-Vieudrin. $1/f$ *Spectrum in a Nonlinear Electronic Loop : Consequences in Frequency Standards and Signal Processing.* In Proc. of the conference : Transmission and Signal Processing in Nonlinear Electronics and Optics , Dijon, 1998.

- Serge Dos Santos & Michel Planat. *Arithmetical Fractals in an Electronic Loop.* In M. M. Novak, editeur, Fractals and Beyond, page 299. Word Scientific, 1998.

- Serge Dos Santos & Michel Planat. *Nonlinearly generated* $1/f$ *noise in modelockings.* Proc. 12^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Warsaw, Poland, 1998.

- F. Lardet-Vieudrin, S. Dos Santos & M. Planat. *Blocage par injection de modes sous-harmoniques d'un oscillateur utilisant une ligne à retard à ondes de surface.* Special issue of Annals of Telecommunications, France, vol. 51, no. 7-8, page 330, 1996.

- P. Marquié, J.-M. Bilbault, B. Michaux & S. Dos Santos. *Modulational Instability in Real Discrete Systems.* In Word Scientific, editeur, Proceedings of the Euroconference : Nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger Systems, Theory and Applications, San Lorenzo de Escorial (Madrid), Spain, 1995.

- P. Marquié, J.-M. Bilbault, B. Michaux & S. Dos Santos. *Modulational Instability in Discrete Systems.* In Conference on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, Heriot-Watt University, Edinburgh, 1995.

- M. Planat, F. Lardet-Vieudrin, G. Martin, S. Dos Santos & G. Marianneau. *Frequency stability enhancement from carrier-envelope resonance in a surface acoustic wave delay line oscillator.* J. Appl. Phys., vol. 80, page 2509, 1996.

- M. Planat, S. Dos Santos & F. Lardet-Vieudrin. *Carrier to envelope resonances, quasi-periodicity and* $1/f$ *frequency noise in an injection-locked oscillator.* IEEE International Frequency Control Symposium, 1996.

– M. Planat, S. Dos Santos & F. Lardet-Vieudrin. *A Teichmüller approach of a pulse oscillator : fine structure of carrier-envelope interactions.* In Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras, page 929, Singapore, 1997. edited by H. D. Doebner *et al.*, World Scientific.

– Michel Planat & Serge Dos Santos. *The Arithmetic of Frequency Mixing in an Electronic Loop.* Proc. 12^{th} Ann. European Time and Frequency Forum EFTF, Warsaw, Poland, 1998.

– Michel Planat, Serge Dos Santos, Nicolas Ratier, Jacky Cresson & Serge Perrine. *Close to resonance interaction of radiofrequency waves in a Schottky diode mixer : 1/f noise and number theory.* In Proc. of VII Van der Ziel Symposium on Quantum 1/f noise ,St Louis. AIP Press, 1999.

Résumé

Nous traitons l'analyse du comportement non linéaire de systèmes électroniques tels que l'oscillateur ou la boucle à verrouillage de phase (PLL). Après un rappel de l'existence intrinsèque des non-linéarités de l'oscillateur, nous exposons les méthodes statistiques classiques de traitement du signal non linéaire (sections de Poincaré, espace des phases, mapping d'Arnold, arithmétique des résonances) sur le modèle de l'oscillateur de Van der Pol. Ce modèle (modèle d'Adler) permet l'étude de la PLL en régime non linéaire sur laquelle nous identifions des comportements multi-échelles de synchronisation et de régime transitoire à grande constantes de temps. L'étude expérimentale est réalisée à partir de l'asservissement non linéaire de deux oscillateurs ultra-stables radiofréquence de 5 MHz en présence de bruit blanc de fréquence et d'une perturbation périodique issue du modulateur. Une transformation du bruit blanc en bruit en 1/f (bruit flicker ou de scintillation) a lieu lorsque le système évolue dans un régime très non linéaire ; résultats confirmés par intégrations numériques (Runge-Kutta). La vérification expérimentale des propriétés multi-échelles révèle une structure diophantienne du spectre d'intermodulation issue des propriétés arithmétiques des fréquences. Cette approche arithmétique est également validée dans une expérience de résonance porteuse-enveloppe où l'on module une porteuse (97 MHz) à partir de la détection de la réponse acoustique (300 kHz) d'une ligne à ondes de surface à ondes acousiques de surface (SAW). Les mèmes propriétés non linéaires (chaos, synchronisation, escalier du diable, invariance d'échelle) du système sont identifiées.

Mots-clés : oscillateur, bruit en $1/f$, synchronisation, physique non linéaire, arithmétique, PLL, traitement du signal

Abstract

We study the nonlinear behavior of electronical systems such as oscillators or phase locked loops (PLL). After a brief sum-up of the existence of oscillator intrinsic nonlinearities, we recall classical statistical methods of signal processing and phase noise measurement. We adapt new modern tools of nonlinear signal processing (Poincaré sections, phase space, Arnold mapping, arithmetic) on the Van der Pol model of oscillator. This model (Adler's model) allow us to study the PLL under nonlinear behavior in which multiscale properties of synchronization and high transient time are identified. The experimental study is realized from the nonlinear synchronization of two ultrastable radiofrequency oscillators (5 MHz) perturbed with white frequency noise and periodic perturbations due to the modulator. A white frequency noise to 1/f frequency noise (flicker noise) transformation is observed when the system exhibits a high nonlinear behavior; results confirmed by numerical integration (Runge-Kutta). The experimental verification of multiscale properties exhibits a diophantine property of the intermodulation spectrum due to the arithmetical rules governing the frequencies. This arithmetical approach is again verified with a carrier-envelope experiment where a carrier (97 MHz) is modulated from the detection of an acoustic response (300 kHz) of a surface acoustic wave delay line. The same nonlinear properties (chaos, synchronization, devil staircase, scale invariance) of the system are identified.

Keywords: oscillator, $1/f$ noise, synchronization, nonlinear physics, arithmetic, PLL, signal processing