



**HAL**  
open science

# Application de l'approche par fonctions transverses à la commande de véhicules non-holonomes manoeuvrants

Guillaume Artus

► **To cite this version:**

Guillaume Artus. Application de l'approche par fonctions transverses à la commande de véhicules non-holonomes manoeuvrants. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT: . tel-00009247

**HAL Id: tel-00009247**

**<https://pastel.hal.science/tel-00009247>**

Submitted on 12 May 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

préparée à

**L'INRIA Sophia Antipolis - Projet ICARE**

et présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE  
PARIS - SOPHIA ANTIPOLIS**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

Spécialité

**Informatique Temps Réel, Automatique et Robotique**

soutenue publiquement par

**Guillaume ARTUS**

Sujet de la thèse :

**Application de l'approche par fonctions transverses à  
la commande de véhicules non-holonomes  
manœuvrants**

le 9 Mai 2005 devant le jury composé de :

M.	<b>Yves</b>	<b>ROUCHALEAU</b>	Président
MM.	<b>Jean-Michel</b>	<b>CORON</b>	Rapporteurs
	<b>Bernard</b>	<b>ESPIAU</b>	
Mme	<b>Brigitte</b>	<b>d'ANDREA-NOVEL</b>	Examineurs
MM.	<b>Michel</b>	<b>PARENT</b>	Directeur de Thèse
	<b>Claude</b>	<b>SAMSON</b>	



# Remerciements

Je remercie tout d'abord Monsieur Yves Rouchaleau d'avoir accepté la présidence du jury, Messieurs Jean-Michel Coron et Bernard Espiau d'avoir été mes rapporteurs et Madame Brigitte d'Andréa-Novel d'avoir pris de son temps pour examiner ma thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Claude Samson, le directeur de cette thèse, qui a su se montrer attentif et patient durant ces trois années. Je remercie chaleureusement Monsieur Pascal Morin qui m'a permis de partager, certains diront envahir, son bureau, et avec qui mes relations professionnelles et personnelles furent toujours enrichissantes.

Je tiens également à remercier les autres membres permanents du projet ICARE que j'ai pu côtoyer et apprécier durant ces années : Agnès, Patricia, Ezio, et Patrick, ainsi que ceux de passage : Selim, Alexandre, Vincent, fx, Matthieu, Mauro, Christopher, Pierre, Géraldo, Nicolas et Alessandro. Je remercie particulièrement un ancien disparu trop tôt, Jean-Jacques, pour sa disponibilité et pour avoir pris le temps de répondre à mes questions singulières en matière de programmation. Je souhaite remercier aussi les nombreuses autres personnes que j'ai pu rencontrer au détour des couloirs ou de la machine à café, en particulier les membres du SEMIR, toujours prompts à discuter informatique avec moi.

Je veux remercier ici mes parents et ma petite sœur Lucile pour leur soutien infaillible durant toutes ces années.

Enfin, je remercie celle qui m'a supporté, dans les deux sens du dictionnaire, durant ces trois années et qui a quand même accepté de devenir ma femme, Laure.



# Notations

Tout au long de ce mémoire, les notations suivantes seront utilisées :

## Algèbre linéaire

- $I_n$  est la matrice identité associée à  $\mathbb{R}^n$ .
- $S$  est la matrice antisymétrique  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$  est la matrice diagonale de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dont la diagonale est constituée des  $k_i$ .
- $R(\theta)$  est la matrice de rotation dans le plan d'angle  $\theta$  :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## Géométrie différentielle

- $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .
- L'espace tangent d'une variété  $\mathcal{M}$  au point  $p$  est noté  $\mathcal{M}_p$ .
- La différentielle au point  $p$  d'une application  $f$  entre deux variétés est notée  $df(p)$ .
- $\mathbb{T}^k$  est le tore de dimension  $k$ , avec  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .
- $B_n(0, \varepsilon)$  est la boule fermée dans  $\mathbb{R}^n$ , centrée en 0 et de rayon  $\varepsilon$ .

## Groupes et algèbre de Lie

On rappelle quelques notations classiques des groupes de Lie qui seront utilisées par la suite — voir par exemple (Helgason, 1978; Warner, 1983) pour plus de détails.

- Dans un système de coordonnées arbitraire, le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X_i$  et  $X_j$  est défini par  $[X_i, X_j] = \frac{\partial X_j}{\partial x^i} X_i - \frac{\partial X_i}{\partial x^j} X_j$ .

- L'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  est notée

$$\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)$$

et

$$\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)(q) = \{X(q) : X \in \mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)\}$$

- $G$  est un groupe de Lie connexe de dimension finie, et  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie associée.
- L'élément neutre du groupe de Lie  $G$  est noté  $e$ .
- Si  $g \in G$ , alors  $g^{-1} \in G$  est l'inverse de  $g$  tel que  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ .
- Les translations à gauche et à droite,  $l$  et  $r$ , sur le groupe  $G$  sont définies par

$$\forall(\sigma, \tau) \in G^2, \quad l_\sigma(\tau) = r_\tau(\sigma) = \sigma\tau$$

- Un champ de vecteurs  $X$  sur un groupe de Lie  $G$  est dit invariant à gauche si, et seulement si,

$$\forall(\sigma, \tau) \in G^2, \quad dl_\sigma(\tau)X(\tau) = X(\sigma\tau)$$

- Par extension, le système

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(g)$$

est dit invariant à gauche si les champs  $X_1, \dots, X_m$  qui le composent, sont invariants à gauche.

- Si  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\exp tX \in G$  est la valeur à l'instant  $t$  de la solution de l'équation  $\dot{g} = X(g)$  avec  $g(0) = e$ .

# Table des matières

<b>Contexte et Positionnement du problème</b>	<b>1</b>
1 Vers la conduite automatique en zone urbaine . . . . .	1
2 Cadre applicatif et motivation de ce travail . . . . .	2
3 Repères bibliographiques sur la commande des robots mobiles . . . . .	3
4 Contributions . . . . .	6
5 Contenu des chapitres . . . . .	7
<b>1 Commande des véhicules non-holonomes</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Modélisation de la cinématique des véhicules sur roues . . . . .	10
1.2.1 Hypothèses de modélisation . . . . .	10
1.2.2 Roulement sans glissement et non-holonomie . . . . .	11
1.2.3 Le modèle cinématique des robots sur roues . . . . .	14
1.2.3.1 Le modèle cinématique du robot unicycle . . . . .	15
1.2.3.2 Le modèle cinématique du robot de type voiture . . . . .	17
1.2.4 Cinématique par rapport à un repère mobile . . . . .	19
1.3 Le problème de stabilisation de trajectoire . . . . .	21
1.3.1 Formulation du problème . . . . .	21
1.3.2 La stabilisation asymptotique de trajectoires admissibles . . . . .	22
1.3.2.1 Stabilisation de trajectoires sans contrôle de l'orientation . . . . .	24
1.3.2.2 Stabilisation asymptotique de trajectoires particulières . . . . .	27
1.4 Conclusion . . . . .	30
<b>2 Stabilisation pratique de trajectoires générales</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	32
2.2 Approche par fonctions transverses et stabilisation pratique . . . . .	32
2.3 Cas des systèmes invariants sur les groupes de Lie . . . . .	34



---

2.3.1	Modélisation sur un groupe de Lie . . . . .	34
2.3.2	Commande d'un système sur un groupe de Lie . . . . .	36
2.3.3	Application à la stabilisation de trajectoires non nécessairement réalisables . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Suivi d'un véhicule manœuvrant</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	42
3.2	Stabilisation pratique appliquée à l'unicycle . . . . .	42
3.2.1	Une première famille de lois de commande . . . . .	42
3.2.2	Influence des $\varepsilon_i$ sur la qualité du suivi . . . . .	51
3.2.3	Une nouvelle famille de fonctions transverses . . . . .	58
3.2.4	Réglage du transitoire via la résolution d'un problème d'optimisation	63
<b>4</b>	<b>Outils pour la commande et l'expérimentation</b>	<b>69</b>
4.1	Dispositif expérimental . . . . .	70
4.2	Reconstruction de la position relative du robot par rapport à la cible . .	71
4.3	Estimation de la vitesse de la cible . . . . .	74
4.3.1	Modèle de vitesse constante dans la base d'un repère fixe . . . . .	74
4.3.2	Modèle de vitesse constante dans la base du repère de la cible . .	78
4.4	Stabilité conjointe commande–estimateur . . . . .	81
4.5	Discrétisation et saturation . . . . .	82
4.5.1	Implémentation sur un robot . . . . .	82
4.5.1.1	Discrétisation de l'estimateur . . . . .	82
4.5.1.2	Discrétisation des fonctions transverses . . . . .	83
4.5.2	Saturation des commandes de l'unicycle . . . . .	84
4.6	Résultats expérimentaux . . . . .	85
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>89</b>
1	Contributions . . . . .	89
2	Poursuite des travaux . . . . .	90
<b>A</b>	<b>Résultats du chapitre 3</b>	<b>93</b>
A.1	Existence d'équilibres asymptotiquement stables pour la variable $\alpha$ . . .	93
A.1.1	Déplacement le long d'une ligne droite . . . . .	93
A.1.2	Déplacement le long d'un cercle « déporté » . . . . .	95
A.2	Preuve de la proposition 11 . . . . .	98
A.3	Preuve du lemme 3 . . . . .	100

---

A.4	Preuve de la proposition 12 . . . . .	101
<b>B</b>	<b>Résultats du chapitre 4</b>	<b>103</b>
B.1	Etude des conditions de stabilité des estimateurs . . . . .	103
B.1.1	Preuve de la proposition 13 . . . . .	103
B.1.2	Preuve de la proposition 13 appliquée à l'estimateur (4.17) . . . . .	106
B.2	Preuve du lemme 4 . . . . .	108
B.2.1	Estimation de l'orientation . . . . .	108
B.2.2	Estimation de la position . . . . .	109
B.3	Preuve de la proposition 14 . . . . .	111
B.4	Détails des calculs pour l'implémentation de la commande . . . . .	118
B.4.1	Discrétisation de l'estimateur (4.8) . . . . .	118
B.4.2	Discrétisation de l'estimateur (4.17) . . . . .	122
	<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>



# Table des figures

1.1	Robots de type « unicycle » et de type « voiture » . . . . .	11
1.2	Roulement sans glissement . . . . .	12
1.3	Variables de configuration de l'unicycle . . . . .	16
1.4	Variables de configuration de la voiture . . . . .	18
1.5	Configuration par rapport à un repère mobile . . . . .	20
1.6	Stabilisation de trajectoires admissibles . . . . .	22
1.7	Stabilisation sans contrôle d'orientation . . . . .	25
1.8	Analogie cinématique entre la voiture et l'unicycle équipé d'une remorque	26
1.9	Stabilisation de trajectoires non-admissibles . . . . .	29
3.1	Suivi de cible omnidirectionnelle : position cartésienne . . . . .	48
3.2	Suivi de cible omnidirectionnelle : courbes associées . . . . .	49
3.3	Influence du paramètre $\varepsilon_1$ sur le suivi de trajectoire non-admissible . . .	52
3.4	Influence du paramètre $\varepsilon_1$ sur la commande du robot « unicycle » . . . .	53
3.5	Amélioration du suivi avec l'augmentation de $\varepsilon_2$ . . . . .	54
3.6	Existence d'équilibre $\alpha_0$ lors du suivi de trajectoires non-admissibles . . .	54
3.7	Manœuvres parasites lors du passage marche-avant/marche-arrière . . . .	56
3.8	Erreurs de suivi lors du passage marche-avant/marche-arrière . . . . .	57
3.9	Amélioration de la précision du suivi : position cartésienne . . . . .	61
3.10	Amélioration de la précision du suivi : erreur de position $g$ . . . . .	62
3.11	Diminution des erreurs de suivi lors du passage marche-avant/marche-arrière	63
3.12	Réduction du nombre de manœuvres pendant la phase transitoire . . . . .	66
3.13	Réduction de l'effort de commande pendant la phase transitoire . . . . .	67
4.1	Le robot ANIS face à la cible omnidirectionnelle . . . . .	70
4.2	Reconstruction de la position de la caméra par rapport à la cible . . . . .	72
4.3	Interface pour la vision : trois fenêtres actives . . . . .	73
4.4	Reconstruction de la configuration du robot par rapport à la cible . . . . .	74

4.5	Estimateur (4.8) : vitesse d'une cible omnidirectionnelle . . . . .	78
4.6	Biais de l'estimateur (4.8) . . . . .	79
4.7	Estimateur (4.17) non biaisé . . . . .	80
4.8	Trajectoire cartésienne estimée du robot : $\varepsilon_2 = 0.3$ . . . . .	86
4.9	Evolution des variables d'état : $\varepsilon_2 = 0.3$ . . . . .	87
4.10	Trajectoire cartésienne estimée du robot : $\varepsilon_2 = 1$ . . . . .	87
4.11	Stabilisation d'une configuration fixe : trajectoire cartésienne . . . . .	88
A.1	Déplacement le long d'un cercle de rayon $\rho$ « déporté » de la distance $d$ .	96

# Contexte et Positionnement du problème

## 1 Vers la conduite automatique en zone urbaine

Le fil directeur de ce travail est l'application de nouvelles techniques de commande des systèmes non-linéaires en les adaptant au cadre applicatif particulier de la conduite automatisée de véhicules sur roues. Concrètement il s'agit de concevoir des méthodes et algorithmes de commande, et plus précisément des retours d'état, afin de réaliser des tâches de suivi de trajectoires de référence, celles-ci pouvant être prédéfinies ou produites en temps-réel par un autre véhicule.

Cette problématique apparaît dès le début des années soixante avec l'étude de la conduite automatique sur autoroute (Plotkin, 1969; Fenton, 1970). D'abord limitée au cadre d'infrastructures routières dédiées, elle a ensuite évolué pour se concentrer de nos jours sur la conduite automatique en milieu urbain. Cette évolution est illustrée par des projets de recherche ambitieux tels que les projets européens *CyberMove* et *CyberCars* dont a bénéficié le présent travail pour son financement. Le projet *CyberMove* vise à démontrer l'intérêt social et économique d'un nouveau concept de transport public, basé sur l'utilisation en libre service de petits véhicules électriques et automatiques, en complément des services de transport classiques — taxis et transports en commun. Il s'agit en particulier d'offrir une meilleure alternative, du point de vue économique et écologique, à l'utilisation de voitures individuelles privées. Pour une présentation plus approfondie, le lecteur intéressé pourra par exemple consulter (Parent, 1997; Alessandrini et Filippi, 2004). Le projet *CyberCars* est, quant à lui, axé sur l'étude des solutions technologiques permettant la réalisation des objectifs du projet *CyberMove*. Outre les problèmes liés à la localisation précise et sûre des véhicules, ou à l'optimisation de la gestion de flottes de véhicules en milieu urbain, le projet *CyberCars* aborde également ceux relevant de la commande « haut-niveau » : planification de chemin entre deux lieux d'une ville, déplacement ordonné d'un groupe de véhicules, reconnaissance et évitement d'obstacles...

## 2 Cadre applicatif et motivation de ce travail

Du point de vue de l'automaticien, les différentes tâches que le projet *CyberCars* vise à résoudre ont pour point commun de mettre en œuvre des techniques de commande permettant à un véhicule de suivre une trajectoire « donnée ». Une des principales difficultés sous-jacentes est la prise en compte des contraintes de déplacement auxquelles sont soumis de nombreux véhicules sur roues, en particulier, l'impossibilité de se déplacer latéralement sans recourir à des manœuvres. La sévérité de cette contrainte, sur le plan pratique, varie cependant en fonction de la tâche à accomplir.

Considérons tout d'abord le suivi d'un véhicule *leader*. Dans ce cas la trajectoire qu'il s'agit de suivre est généralement produite en temps-réel par le déplacement d'un repère associé à ce véhicule. Ce problème de suivi a depuis longtemps été résolu (Shladover et al., 1991; Daviet et Parent, 1995), aussi bien en théorie qu'en pratique, lorsque le véhicule *leader* avance avec une vitesse strictement positive (déplacement en *cruising mode* selon la terminologie anglaise). Dans ce cas, le suivi peut en effet être réalisé de façon simple en régulant à zéro une erreur de *position* entre les deux véhicules sans qu'il soit nécessaire de réguler activement l'orientation du véhicule commandé (voir par exemple (Morin et Samson, 2001b) pour plus de détails). Ceci permet d'utiliser des techniques d'automatique classiques basées sur la linéarisation (d'Andréa-Novel et al., 1995). Malheureusement, il est bien connu également que ces techniques ne sont pas adaptées aux cas où le véhicule *leader* est susceptible de s'arrêter, ou de faire des manœuvres impliquant des transitions marche avant/marche arrière. Un contrôle de la situation complète — position et orientation — du véhicule est alors nécessaire. Il semble de ce fait naturel de poser le problème de suivi comme celui de la régulation à zéro de l'erreur de situation entre deux repères, le premier rigidement lié au véhicule *leader* et le second au véhicule commandé. Cette objectif de commande n'est cependant atteignable que lorsque la trajectoire du repère lié au véhicule *leader* est réalisable par le véhicule commandé. Or, du fait de la nécessité de déporter ce repère par rapport au corps du véhicule *leader* afin que le suivi n'entraîne pas de collisions entre les deux véhicules, il ne suffit pas que le véhicule *leader* soit sujet aux mêmes contraintes de déplacement que le véhicule commandé pour que la trajectoire du repère déporté soit réalisable par celui-ci. La satisfaction de cette condition de réalisabilité de la trajectoire d'un repère déporté, indépendamment du mouvement du véhicule *leader*, est en soi un problème extrêmement difficile (et à notre connaissance non résolu).

Considérons maintenant le problème de stabilisation de trajectoire planifiée. Ce problème est généralement plus simple que le précédent puisque les trajectoires, issues d'un calcul, peuvent être connues — au moins partiellement — à l'avance, et déterminées de

façon à être réalisables. Il faut néanmoins remarquer qu'il peut être difficile de générer une trajectoire qui réponde à l'objectif de planification et qui soit en même temps réalisable par le véhicule commandé. Un résultat récent de (Lizárraga, 2004) montre que même dans ce cas, la synthèse d'une commande stabilisant asymptotiquement toutes les trajectoires réalisables d'un système non-holonome est généralement impossible. Ce résultat signifie qu'il peut être nécessaire d'utiliser des lois de commande différentes pour stabiliser asymptotiquement des trajectoires de référence réalisables différentes. Le problème de la synthèse de ces lois et de la stratégie de commutation entre elles reste posé.

En résumé, pour ces deux types d'application, la principale difficulté provient de l'impossibilité, théorique et pratique, de déterminer une commande permettant de stabiliser asymptotiquement l'erreur de suivi par rapport à une trajectoire de référence arbitraire, spécifiée à l'avance ou non, réalisable ou non. Toutefois, de nombreuses applications ne nécessitent pas une précision de suivi aussi parfaite et une commande garantissant une erreur de suivi faible et ajustable peut être suffisante en pratique. Les difficultés théoriques mentionnées précédemment, liées à la non-existence de retours d'état stabilisant asymptotiquement et génériquement des trajectoires de référence arbitraires, disparaissent dès lors que l'objectif de stabilisation asymptotique est abandonné au profit de l'objectif un peu moins ambitieux de *stabilisation pratique* (Morin et Samson, 2003).

Motivé par ce résultat, le travail présenté dans ce mémoire, et soutenu par le projet *CyberCars*, se place alors dans cette problématique aux retombées applicatives directes : comment commander un véhicule sur roues pour qu'il « suive », avec une précision donnée, une trajectoire arbitraire.

### 3 Repères bibliographiques sur la commande des robots mobiles

Afin de situer notre travail dans la littérature existante, nous faisons dans ce sous-chapitre un rappel chronologique des études consacrées à la commande des véhicules sur roues. Même si la commandabilité de ces systèmes est connue depuis longtemps comme une conséquence du théorème de Chow (Chow, 1939), l'étude de la commande de ce type de système est relativement récente. Une raison majeure de ce retard provient du fait que le linéarisé autour d'un point fixe du modèle de commande de ces véhicules n'est pas asymptotiquement stabilisable, et donc pas commandable. Les techniques de commande développées sont donc, généralement, basées sur les outils de l'automatique non-linéaire.

Nous ne nous attarderons pas ici sur la synthèse de commandes en boucle ouverte



pour les systèmes non-holonomes (voir par exemple (Gurvits et Li, 1992; Laumond, 1998) pour plus de détails). Mentionnons seulement que ces approches sont typiquement basées sur l'utilisation de commandes oscillantes (Sussmann et Liu, 1991; Murray et Sastry, 1993), sur des propriétés de platitude (Fliess et al., 1995b), ou sur des propriétés de nilpotence (Lafferriere et Sussmann, 1993).

Les techniques de commande en boucle fermée peuvent, quant à elles, être réparties selon trois problèmes principaux : le suivi de chemin, la stabilisation de trajectoire non-stationnaire, et la stabilisation de configuration fixe.

Le problème de suivi de chemin est sans doute chronologiquement le premier à avoir été étudié, en particulier dans le cadre de la conduite automatisée sur autoroute : étant données une courbe du plan et une vitesse d'avancement non nulle pour le véhicule commandé, il s'agit simplement d'annuler la distance d'un point du véhicule à cette courbe en commandant uniquement l'orientation du véhicule (pour un véhicule de type unicycle), ou l'angle volant (pour un véhicule de type voiture). Parmi les travaux précurseurs dans ce domaine, on peut citer (Dickmanns et Zapp, 1987; Nelson et Cox, 1988). Une étude plus détaillée de la synthèse de ce type de commande est donnée dans (Samson, 1995; Canudas de Wit et al., 1996).

Le problème de stabilisation de trajectoire non-stationnaire se distingue du précédent par le fait que la vitesse d'avancement n'est plus fixée à l'avance. Ceci revient essentiellement à définir un repère se déplaçant le long d'une courbe et à réguler l'erreur de situation entre ce repère et le véhicule commandé. En raison du fait que le linéarisé le long d'une trajectoire de référence des modèles de commande des véhicules non-holonomes est génériquement commandable (au sens de (Sontag, 1987) par exemple), de nombreuses trajectoires de référence peuvent être asymptotiquement stabilisées en utilisant des retours d'états « classiques », c'est-à-dire linéaires ou localement assimilables à des retours d'état linéaires. La plupart des résultats sur la stabilisation asymptotique de trajectoire (voir par exemple (Kanayama et al., 1990; Samson et Ait-Abderrahim, 1991; Fliess et al., 1995a)) consistent à utiliser de tels retours d'état. Toutefois, ces commandes n'assurent la convergence de l'erreur de suivi vers zéro que sous des conditions de non convergence de la trajectoire vers un point fixe (conditions aussi qualifiées « d'excitation persistante »). Il n'est donc pas possible de garantir une telle convergence sans connaissance *a priori* sur la trajectoire de référence.

Le problème de stabilisation de configuration fixe ne peut être résolu par des méthodes de linéarisation, du fait de la non commandabilité du linéarisé autour d'un point fixe. En outre, le théorème de (Brockett, 1983), une des contributions les plus marquantes dans ce domaine, implique qu'il n'existe pas de retour d'état continu et dépendant uni-

quement de l'état — retour d'état continu autonome — qui stabilise asymptotiquement la configuration des véhicules non-holonomes à une valeur de référence fixe. Différents types de retours d'état ont alors été proposés afin d'éviter cette difficulté. Les retours d'états instationnaires hybrides, c'est-à-dire continus par rapport au temps mais échantillonnés en l'état (Sørdalen et Egeland, 1995; Bennani et Rouchon, 1995), fournissent une première possibilité. L'utilisation de retours d'état discontinus a aussi été proposée (Canudas de Wit et Sørdalen, 1992), bien qu'elle ne permette pas de garantir une stabilité *asymptotique* (Bacciotti et Rosier, 2001). Une autre possibilité, proposée dans (Samson, 1990), consiste à utiliser des retours d'état réguliers instationnaires (périodiques par rapport au temps). Cette classe de commande, en relation avec les commandes développées dans ce manuscrit, est d'une portée très générale puisque (Coron, 1992) a montré l'existence de tels retours d'état stabilisant asymptotiquement un point fixe donné, pour tout système sans dérive commandable (et donc pour les véhicules sur roues en particulier). De nombreuses méthodes de synthèse de telles commandes ont été développées (voir par exemple (Pomet, 1992; Coron et d'Andréa-Novel, 1992; M'Closkey et Murray, 1997; Morin et al., 1999)) et testées expérimentalement (M'Closkey et Murray, 1994; Tsakiris et al., 1998; de Luca et al., 2001). Toutefois, quelque soit le type de retour d'état utilisé, il semble impossible de contourner le dilemme pratique suivant (voir (Morin et Samson, 2004b) pour plus de détails) : l'utilisation de retours d'état « réguliers » (au moins Lipschitz-continus) peut éventuellement permettre d'obtenir des propriétés de robustesse (aux dynamiques non-modélisées, aux retards, à l'échantillonnage...) satisfaisantes (Maini et al., 1999), mais conduit à des convergences lentes (de type polynomiale); à l'opposé, une convergence exponentielle peut être obtenue avec des retours d'état seulement continus (M'Closkey et Murray, 1997; Bennani et Rouchon, 1995; Morin et Samson, 1999), mais ce type de commande ne possède pas de bonnes propriétés de robustesse et conduit à une forte sensibilité aux bruits de mesure.

Le dilemme précédent est une première illustration des difficultés pratiques liées à la stabilisation *asymptotique* de certaines trajectoires, pour les véhicules non-holonomes. Une deuxième illustration est donnée par un résultat récent de (Lizárraga, 2004). La question abordée dans cet article est la suivante : existe-t-il un retour d'état régulier qui permette de stabiliser asymptotiquement toute trajectoire admissible d'un système non-linéaire? Evidemment, ce retour d'état peut dépendre de la trajectoire de référence, et il peut aussi être instationnaire (sinon, le théorème de Brockett impliquerait directement la non-existence de tels retours d'état puisque les configurations fixes ne pourraient être asymptotiquement stabilisées). Il est montré dans (Lizárraga, 2004) — modulo quelques hypothèses techniques assez faibles — que de tels retours d'état n'existent pas pour les

véhicules non-holonomes classiques (unicycle, voiture...). Ce résultat explique en particulier pourquoi, pour un même système de commande, différents retours d'état doivent être utilisés pour stabiliser asymptotiquement différentes trajectoires de référence.

Toutes ces difficultés de commande suggèrent que l'objectif de stabilisation asymptotique est sans doute trop contraignant pour la commande des véhicules sur roues. L'approche de commande développée dans (Morin et Samson, 2003) va dans ce sens en proposant le concept de *stabilisation pratique*. Il s'agit non plus d'annuler l'erreur de suivi, mais de borner la norme de cette erreur par un seuil arbitrairement petit mais non nul. Cette liberté dans le suivi peut alors être mise à profit pour le suivi de toute trajectoire de référence, qu'elle soit réalisable par le véhicule commandé ou non.

## 4 Contributions

La principale contribution de cette thèse est d'avoir fourni un travail important sur l'étude et l'utilisation d'une nouvelle approche de commande des systèmes non-linéaires, ainsi que le développement d'outils en vue de l'implémentation de ces commandes sur des systèmes physiques. Plus précisément, les principales contributions portent sur les points suivants.

- Apports conceptuels : nous avons étudié l'application de cette approche au cas de l'unicycle, en particulier au niveau de l'influence des paramètres de la commande sur le suivi. Nous avons ensuite proposé des améliorations à cette nouvelle méthode :
  1. la mise en place d'un système d'adaptation automatique de la précision du suivi a permis d'une part d'obtenir une meilleure précision lors de la stabilisation de trajectoires admissibles pour le système commandé, et d'autre part d'assurer une liberté suffisante au système pour que le « suivi » de trajectoires non admissibles n'entraîne pas trop de manœuvres.
  2. la minimisation de la norme des commandes appliquées lors des phases transitoires du suivi a permis de limiter le nombre de manœuvres nécessaires au système pour les phases d'approche de la cible, tout en garantissant de bonnes propriétés de convergence.

Ce travail a fait l'objet de la publication (Artus et al., 2004b) et du rapport de recherche (Artus et al., 2004a) ;

- Réalisation d'outils pour l'expérimentation : il s'agissait d'intégrer l'approche sur un système robotique existant. Nous nous sommes intéressés aux développements de techniques nécessaires à cette implémentation :

1. reconstruction de la position du robot par rapport à la cible avec le développement d'un capteur basé sur la caméra embarquée sur le bras du robot ;
2. synthèse d'estimateurs permettant d'obtenir la vitesse de la cible suivie à partir des données issues du capteur de position ;
3. preuve de la stabilité conjointe commande–estimateur.

Les résultats évoqués ci-dessus ont fait l'objet de la publication (Artus et al., 2003a) et du rapport de recherche (Artus et al., 2003b) ;

- Validation expérimentale : nous avons mis en œuvre cette commande sur le robot du laboratoire ICARE. Ces expérimentations ont permis de valider expérimentalement l'approche de commande par fonctions transverses appliquée à l'unicycle. De plus elles ont confirmé les résultats obtenus en simulation, en particulier le fait que le concept de *stabilisation pratique* permet de s'affranchir d'un certain nombre de limitations des approches des commandes classiques, comme l'impossibilité de suivre des trajectoires non réalisables pour le système étudié.

## 5 Contenu des chapitres

Outre cette introduction qui fait office à la fois de motivation et de présentation générale du problème, le manuscrit se compose de quatre chapitres organisés comme suit :

**Chapitre 1 :** Ce premier chapitre replace cette thèse dans le contexte actuel de la recherche sur la commande des véhicules sur roues, et plus particulièrement sur la commande des véhicules de type « unicycle » et de type « voiture ».

Après avoir présenté une modélisation de la cinématique de ces deux systèmes non-holonomes, nous introduisons le problème de stabilisation de trajectoire de référence pour ce type de véhicules. Nous rappelons ensuite quelques obstacles, aussi bien théoriques que pratiques, qui interdisent l'existence de lois de commande universelles permettant de résoudre ce problème indépendamment de la trajectoire de référence. Nous détaillons alors certaines techniques classiques utilisées pour apporter des solutions à ce problème pour des classes de trajectoires particulières.

**Chapitre 2 :** Dans ce chapitre, nous présentons les bases de l'approche de commande par *fonctions transverses*.

Cette nouvelle approche de commande, proposée dans (Morin et Samson, 2001a; Morin et Samson, 2003), généralise des travaux initiaux sur l'unicycle, présentés dans (Dixon et al., 2000), en les étendant au cas des systèmes non-linéaires sans dérive commandables. L'équivalence entre la commandabilité de tels systèmes et l'existence de fonctions transverses aux champs de commande du système (Morin et Samson, 2001a) permet la synthèse de retours d'état stabilisant un ensemble contenu dans un voisinage arbitrairement petit d'un point donné. Dans le cas des systèmes sur des groupes de Lie comme l'unicycle, les commandes ainsi obtenues permettent la *stabilisation pratique* de trajectoires arbitraires. Cette notion de *stabilisation pratique* est précisée dans ce chapitre.

**Chapitre 3 :** Dans ce chapitre, nous abordons l'étude des commandes par *fonctions transverses* appliquées au cas du robot unicycle.

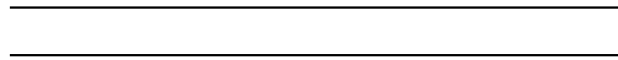
Nous mettons l'accent dans un premier temps sur une analyse de l'influence des différents paramètres des retours d'état obtenus. Cette analyse nous sert alors de support pour proposer, dans un second temps, des améliorations et des modifications de ces retours d'état, en particulier au niveau de la précision du suivi et du comportement du système lors des phases transitoires.

**Chapitre 4 :** Ce dernier chapitre est consacré à la présentation des outils développés et utilisés pour l'implémentation des commandes sur le système robotique du laboratoire ICARE.

Après une brève présentation de ce système robotique, nous introduisons une méthode de reconstruction géométrique de la position du robot par rapport à une cible. Basée sur l'utilisation d'une caméra monoculaire embarquée sur le robot, cette méthode permet d'obtenir cette position à cadence vidéo. Nous abordons ensuite le problème de l'estimation de la vitesse de cette cible au travers de la synthèse de deux estimateurs. Enfin nous nous intéressons à l'implémentation en temps discret des commandes et des estimateurs présentés. Afin de compléter et d'illustrer ces études, nous discutons finalement quelques résultats expérimentaux.

# Chapitre 1

## Commande des véhicules non-holonomes



## 1.1 Introduction

La commande des véhicules non-holonomes est un domaine de recherche très actif. Plusieurs raisons contribuent à cet engouement. La première est que les véhicules sur roues constituent de nos jours le moyen de transport individuel principal. Leur automatisation, précédemment limitée aux expérimentations en laboratoire et à des utilisations professionnelles — les chariots de manutention dans les usines par exemple —, est maintenant envisagée pour des applications grand public : convois de véhicules sur autoroute, systèmes de transport urbain intelligent... Ces nouvelles applications, qui nécessitent de coordonner les mouvements de plusieurs véhicules, donnent lieu à de nouveaux problèmes d'automatique. Une autre raison plus technique tient au fait que les équations régissant le déplacement des véhicules non-holonomes sont fortement non-linéaires et revêtent un intérêt théorique particulier dans le domaine de l'automatique non-linéaire.

L'objectif de ce chapitre est de présenter un certain nombre de caractéristiques spécifiques à la commande de ces systèmes. Nous nous intéresserons dans un premier temps à la modélisation de tels systèmes, en particulier sur le plan de leur cinématique. Puis nous rappellerons diverses méthodes de synthèse de lois de commande par retour d'état, développées afin d'apporter des solutions aux problèmes de stabilisation de trajectoire.

## 1.2 Modélisation de la cinématique des véhicules sur roues

### 1.2.1 Hypothèses de modélisation

La problématique de la commande des robots mobiles étant trop vaste pour pouvoir être présentée ici de façon exhaustive, nous introduisons dans cette partie un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- nous ne traitons que de la synthèse de lois de commande par retour d'état, en particulier les approches basées sur des commandes en boucle ouverte ne seront pas étudiées ;
- nous nous restreignons aux robots mobiles de type « unicycle » et de type « voiture » ;
- les véhicules sont considérés comme rigides et évoluant sur un sol plan ;
- les véhicules sont dotés de roues conventionnelles : le point de contact entre la roue et le sol est réduit à un point  $I$  et la roue est soumise à la contrainte de roulement sans glissement, qui se traduit par une vitesse nulle entre le point  $I$  et le sol.

D'un point de vue schématique, les deux type de robots mobiles que nous étudions sont composés :

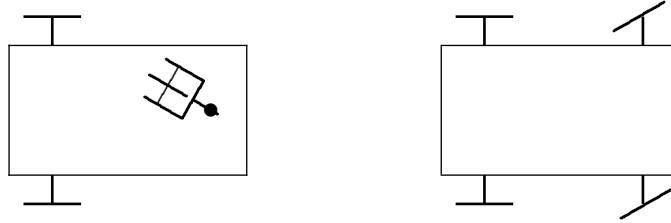


Figure 1.1 – Robots de type « unicycle » et de type « voiture »

- pour le robot de type « unicycle », de deux roues motrices coaxiales et indépendantes, et d'une ou plusieurs roue(s) folle(s), destinée(s) uniquement à assurer la stabilité statique du système.
- pour le robot de type « voiture », d'un couple de roues coaxiales, à l'arrière du corps du robot, et d'une ou plusieurs roue(s) directrice(s) à l'avant. Pour les besoins de cette étude, il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse sur la façon dont la motricité est répartie sur ces roues.

Le caractère non-holonyme de ces systèmes résulte de la contrainte de roulement sans glissement des roues.

### 1.2.2 Roulement sans glissement et non-holonomie

Les systèmes non-holonomes sont caractérisés par des contraintes cinématiques qui portent sur les dérivées de leurs paramètres de configuration : le système est dit « non-holonyme » lorsque ces contraintes sont sous la forme d'équations différentielles non complètement intégrables.

Dans le cas des véhicules sur roues, ces contraintes cinématiques résultent de l'hypothèse de roulement sans glissement. Considérons une roue verticale, qui roule sans glisser sur un sol plan — voir figure 1.2. Le repère  $\mathcal{R}_1$  est lié à la roue et le roulement sans glissement se traduit par la vitesse nulle du point I de la roue en contact avec le sol. Avec les notations de la figure 1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 \vec{V}(I/\mathcal{R}_0) &= 0 = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\omega}_{(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1 I} \\
 &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + (\dot{\theta}\vec{k} + \dot{\varphi}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})) \wedge (-r\vec{k}) \\
 &= (\dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{i} + (\dot{y} - r\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{j}
 \end{aligned}$$



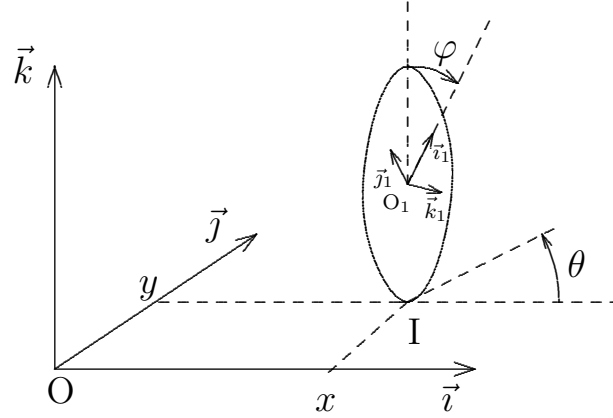


Figure 1.2 – Roulement sans glissement

avec  $r$  le rayon de la roue, et  $(x, y)$  les coordonnées du point  $O_1$  dans  $\mathcal{R}_0$ . On en déduit donc deux contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x} - r\dot{\phi} \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - r\dot{\phi} \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Une autre manière de décrire ces deux équations est :

$$\begin{cases} -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = r\dot{\phi} \end{cases}$$

Ce système d'équations traduit les deux propriétés suivantes :

**Propriété 1** *Le vecteur vitesse du centre de la roue est parallèle au plan de la roue.*

**Propriété 2** *L'intensité — signée — de la vitesse du centre de la roue est  $r\dot{\phi}$ .*

En introduisant  $u_1$  la vitesse de roulement de la roue, c'est-à-dire  $u_1 = r\dot{\phi}$ , et  $u_2$  sa vitesse de rotation autour de l'axe  $\vec{k}$ ,  $u_2 = \dot{\theta}$ , on forme le modèle de commande suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2 \quad (1.2)$$

Ce modèle non-linéaire, possède, du point de vue de la commande, deux propriétés importantes.

**Propriété 3** *Le linéarisé du système non-linéaire (1.2) autour d'un point d'équilibre n'est pas commandable.*

En effet, si on linéarise le système (1.2) au point  $q_0 = (x_0, y_0, \theta_0)^T$ , on obtient

$$\dot{q} = Bu \quad (1.3)$$

avec  $q = (x, y, \theta)^T$ ,  $u = (u_1, u_2)^T$  et

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice  $B$  étant inférieur à la dimension de l'état du système (1.3), le critère de commandabilité de Kalman n'est pas vérifié et le linéarisé (1.3) n'est donc pas commandable. Pourtant, en faisant appel aux critères de l'automatique non-linéaire, on montre que

**Propriété 4** *Le modèle cinématique de la roue (1.2) est — globalement — commandable.*

En effet, le système de commande (1.2) s'écrit aussi :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^2 u_i X_i(q) \quad (1.4)$$

avec  $q = (x, y, \theta)^T \in \mathcal{Q} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ ,  $X_1(q) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^T$  et  $X_2(q) = (0, 0, 1)^T$ . Le résultat suivant donne alors une condition suffisante<sup>1</sup> pour que le système (1.4) soit commandable, — voir, par exemple, (Nijmeijer et van der Schaft, 1991) pour une preuve.

**Théorème 1** (Chow, 1939) *On considère le système*

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(q) \quad (1.5)$$

avec  $q \in \mathcal{Q}$  où  $\mathcal{Q}$  est une variété différentielle de dimension  $n$ , et les  $X_i$  des champs de vecteurs réguliers sur  $\mathcal{Q}$ . Alors,

- si  $\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)(q_0) = \mathbb{R}^n$ , le système (1.5) est localement commandable au voisinage de  $q_0$ .

---

1. Cette condition devient aussi nécessaire si les champs de vecteurs sont analytiques

- si  $\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)(q_0) = \mathbb{R}^n$  pour tout  $q_0$  et si  $\mathcal{Q}$  est connexe, le système (1.5) est globalement commandable sur  $\mathcal{Q}$ .

La propriété 4 est un corollaire immédiat de ce théorème. En effet, il suffit de vérifier qu'en tout point  $q$ , les vecteurs  $X_1(q)$ ,  $X_2(q)$ , et  $[X_1, X_2](q)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.2.3 Le modèle cinématique des robots sur roues

La modélisation précédente peut s'étendre à tous les véhicules sur roues. Etant donné un espace de configuration initial  $\mathcal{Q}_0$ , correspondant à l'espace de configuration du système initial, en éliminant l'ensemble des contraintes complètement intégrables du système, on réduit  $\mathcal{Q}_0$  à une sous-variété  $Q$  :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{m < \dim(\mathcal{Q})} u_i X_i(q) \quad (1.6)$$

avec  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $X_i$  les champs de vecteurs du système, et  $u_i$  les vitesses associées aux degrés de liberté du système mécanique, assimilées à des variables de commande — voir ci-dessous. Le système (1.6) est une généralisation du modèle cinématique (1.2) de la roue soumise aux contraintes de roulement sans glissement.

Par construction, ce système possède les propriétés suivantes (Campion et al., 1991) :

**Propriété 5**  $m < n$ , avec  $n$  la dimension de  $\mathcal{Q}$  et  $(n - m)$  le nombre de contraintes cinématiques non complètement intégrables

**Propriété 6** Les  $X_i$  satisfont la « condition de rang de l'algèbre de Lie » en tout point  $q$  de  $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)(q) = \mathbb{R}^n$$

Avant d'étudier plus en avant le cas des robots de type « unicycle » et de type « voiture », arrêtons-nous un instant sur le choix de travailler par la suite à partir des modèles cinématiques de ces systèmes, plutôt qu'à partir de leurs modèles dynamiques. D'un point de vue général, les équations dynamiques d'un système non-holonyme s'écrivent, en utilisant le formalisme de Lagrange utilisé par exemple dans (Campion et al., 1991) :

$$\begin{cases} \dot{q} = X(q)u & (1.7a) \\ J(q)\dot{u} + g(q, u) = X^T(q)B(q)\Gamma & (1.7b) \end{cases}$$

L'équation (1.7a) n'est autre que le modèle cinématique (1.6). Dans le cas des robots mobiles que nous étudions, les termes  $B(q)$  et  $J(q)$  intervenant dans l'équation (1.7b) ont les propriétés suivantes :

- $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est inversible,
- $X^T(q)B(q)$  est inversible.

$\Gamma$  est le vecteur des forces ou des couples produits par les actionneurs — en général des moteurs électriques. Avec ces propriétés, on remarque que le système (1.7b) peut être linéarisé en utilisant la méthode des couples calculés. En effet, il suffit de poser

$$\Gamma = [X^T(q)B(q)]^{-1}[J(q)w + g(q, u)]$$

pour voir que l'équation (1.7b) s'écrit aussi  $\dot{u} = w$ . Le système complet (1.7) devient alors

$$\begin{cases} \dot{q} = X(q)u & (1.8a) \\ \dot{u} = w & (1.8b) \end{cases}$$

avec  $w$  le vecteur de commande de ce système. Etant donnée une commande en vitesse  $u^*(q, t)$  différentiable, définie à partir du modèle cinématique (1.8a), il n'est pas difficile de lui associer une commande en accélération  $w(q, u, t)$  dont l'application entraîne la convergence de  $u$  vers  $u^*$ . Par exemple, l'utilisation de

$$w(q, u, t) := -k(u - u^*(q, t)) + \frac{\partial u^*}{\partial q}(q, t)X(q)u + \frac{\partial u^*}{\partial t}(q, t)$$

donne en boucle fermée l'équation

$$\overbrace{(u - u^*)}^{\dot{\phantom{u - u^*}}} = -k(u - u^*)$$

et, par suite, la convergence exponentielle uniforme de  $(u - u^*)$  vers zéro. Ceci suffit généralement à préserver les propriétés que confère la commande « désirée »  $u^*$  au sous-système (1.8a), et justifie le principe de s'intéresser en premier lieu à ce sous-système. Ceci est également cohérent avec la pratique courante d'utiliser les asservissements en vitesse « bas niveau » livrés avec les moteurs électriques.

### 1.2.3.1 Le modèle cinématique du robot unicycle

On considère le robot mobile de type « unicycle » schématisé sur la figure 1.3. Ce robot est équipé de deux roues motorisées et indépendantes.

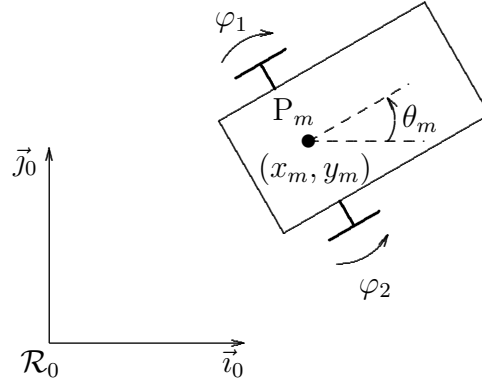


Figure 1.3 – Variables de configuration de l'unicycle

On note  $(x_m, y_m)$  l'abscisse et l'ordonnée du point  $P_m$  situé au milieu de l'axe des roues arrières,  $\theta_m$  l'orientation du robot,  $r$  le rayon des roues, et  $R$  la distance de  $P_m$  à chaque roue. En reprenant les équations (1.1), de la section 1.2.2, on montre aisément que les contraintes de roulement sans glissement de chacune des roues commandées s'écrivent :

$$\begin{array}{l}
 \text{– pour la roue gauche} \\
 \text{– pour la roue droite}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_m - R\dot{\theta}_m \sin \theta_m - r\dot{\varphi}_1 \cos \theta_m = 0 \\
 \dot{y}_m + R\dot{\theta}_m \cos \theta_m - r\dot{\varphi}_1 \sin \theta_m = 0 \\
 \dot{x}_m + R\dot{\theta}_m \cos \theta_m - r\dot{\varphi}_2 \cos \theta_m = 0 \\
 \dot{y}_m - R\dot{\theta}_m \sin \theta_m - r\dot{\varphi}_2 \sin \theta_m = 0
 \end{array} \right.$$

Soit,

$$\begin{cases}
 \dot{x}_m - R\dot{\theta}_m \cos \theta_m - r\dot{\varphi}_1 \cos \theta_m = 0 & (1.9a) \\
 \dot{y}_m - R\dot{\theta}_m \sin \theta_m - r\dot{\varphi}_1 \sin \theta_m = 0 & (1.9b) \\
 \dot{x}_m + R\dot{\theta}_m \cos \theta_m - r\dot{\varphi}_2 \cos \theta_m = 0 & (1.9c) \\
 \dot{y}_m + R\dot{\theta}_m \sin \theta_m - r\dot{\varphi}_2 \sin \theta_m = 0 & (1.9d)
 \end{cases}$$

On remarque que ces quatre contraintes ne sont pas indépendantes puisque la différence des membres de gauche des égalités (1.9a)–(1.9c) est proportionnelle à celle associée à (1.9b)–(1.9d). On peut donc omettre, par exemple, la dernière contrainte. On remarque

aussi l'existence d'une contrainte complètement intégrable. En effet,

$$(1.9a) \quad \text{et} \quad (1.9b) \implies \dot{x}_m \cos \theta_m + \dot{y}_m \sin \theta_m - R\dot{\theta}_m = r\dot{\varphi}_1$$

$$(1.9c) \quad \text{et} \quad (1.9d) \implies \dot{x}_m \cos \theta_m + \dot{y}_m \sin \theta_m + R\dot{\theta}_m = r\dot{\varphi}_2$$

d'où,

$$2R\dot{\theta}_m = r(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \implies \theta_m = \frac{r}{2R}(\varphi_2 - \varphi_1) + cste \quad (1.10)$$

Ceci conduit à éliminer, par exemple, la variable  $\varphi_2$ . Il ne reste donc plus que deux contraintes indépendantes, (1.9a) et (1.9b), dont une écriture équivalente est :

$$\begin{cases} \dot{x}_m = u_1 \cos \theta_m \\ \dot{y}_m = u_1 \sin \theta_m \\ \dot{\theta}_m = u_2 \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r}u_1 - \frac{R}{r}u_2 \end{cases}$$

avec :

- $u_1 = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$  la vitesse d'avancement du robot ;
- $u_2 = \frac{r}{2R}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$  sa vitesse de rotation instantanée.

Ce système est de la forme (1.6) et il est facile de vérifier, par application du théorème de Chow, qu'il est commandable. Cependant dans la mesure où le contrôle de la variable angulaire  $\varphi_1$  présente généralement peu d'intérêt en pratique, on ne gardera, pour l'étude de la commande, que le système réduit constitué des trois premières équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_m = u_1 \cos \theta_m \\ \dot{y}_m = u_1 \sin \theta_m \\ \dot{\theta}_m = u_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

En posant  $g_m = (x_m, y_m, \theta_m)^T$ , le système (1.11) s'écrit aussi :

$$\dot{g}_m = \sum_{i=1}^2 u_i X_i(g_m) \quad (1.12)$$

avec  $X_1(g_m) = (\cos g_{m,3}, \sin g_{m,3}, 0)^T$  et  $X_2(g_m) = (0, 0, 1)^T$ .

Le fait que ce système soit le même que le modèle (1.4) obtenu pour une roue unique, justifie l'appellation de système de type « unicycle » souvent employé dans la littérature.

### 1.2.3.2 Le modèle cinématique du robot de type voiture

Pour le robot de type « voiture », schématisé sur la figure 1.4, on introduit la notion de roue directrice centrale. Cette roue, virtuelle dans le cas d'une voiture, correspondrait à la roue directrice d'un tricycle équivalent. Son introduction permet de simplifier les équations en faisant abstraction du mécanisme de couplage des roues directrices servant à respecter les contraintes de roulement sans glissement, et en ne considérant alors qu'un seul angle de direction.

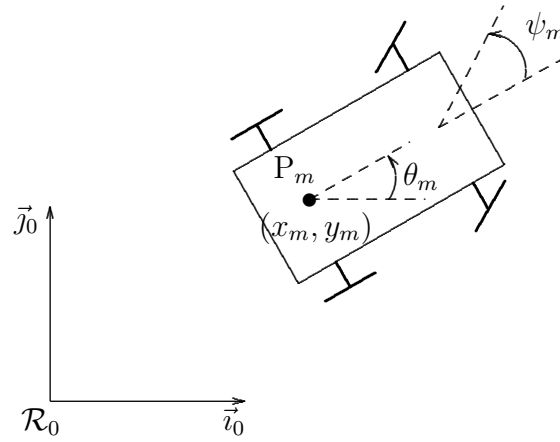


Figure 1.4 – Variables de configuration de la voiture

Le modèle cinématique retenu, à comparer avec celui de l'unicycle (1.11), est :

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= u_1 \cos \theta_m \\ \dot{y}_m &= u_1 \sin \theta_m \\ \dot{\theta}_m &= u_1 \frac{\tan \psi_m}{L} \\ \dot{\psi}_m &= u_\psi \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $\psi_m$  représente l'angle de braquage de la roue directrice du véhicule, et  $L$  la distance entre les axes des roues avant et arrière. La variable  $u_1$  correspond, comme pour le robot de type « unicycle », à la vitesse longitudinale du corps du robot, alors que  $u_\psi$  correspond maintenant à la vitesse angulaire, selon l'axe vertical, de la roue directrice par rapport au corps du robot. L'écriture du modèle cinématique (1.13) est encore simplifiée en utilisant le changement de variable suivant, défini pour  $\psi_m \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\psi_m \longmapsto \varphi_m := \frac{\tan \psi_m}{L}$$

ainsi que la nouvelle variable de commande

$$u_2 = \frac{1}{L \cos^2 \psi_m} u_\psi$$

En posant  $g_m = (x_m, y_m, \theta_m, \varphi_m)^T$ , le système (1.13) devient alors

$$\dot{g}_m = \sum_{i=1}^2 u_i X_i(g_m) \quad (1.14)$$

avec  $X_1(g_m) = (\cos g_{m,3}, \sin g_{m,3}, g_{m,4}, 0)^T$  et  $X_2(g_m) = (0, 0, 0, 1)^T$ .

Comme pour le robot de type « unicycle », on vérifie que le système (1.14) satisfait la propriété 6 de commandabilité. Il suffit pour cela de calculer les crochets de Lie

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](g) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ [X_1, [X_1, X_2]](g) &= \begin{pmatrix} -\sin g_3 & \cos g_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

et de vérifier que l'espace engendré en tout point  $g$  par  $X_1(g)$ ,  $X_2(g)$ ,  $[X_1, X_2](g)$  et  $[X_1, [X_1, X_2]](g)$  est  $\mathbb{R}^4$ .

### 1.2.4 Cinématique par rapport à un repère mobile

Les deux modèles cinématiques présentés dans les sections 1.2.3.1 et 1.2.3.2 correspondent à des équations de mouvement par rapport à un repère fixe  $\mathcal{R}_0 = (P_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ . Dans un contexte de commande plus général, on peut être amené à exprimer ces mouvements par rapport à un repère mobile (voir figure 1.5).

Soit  $\mathcal{R}_r = (P_r, \vec{i}_r, \vec{j}_r)$  un repère mobile, et  $(x, y, \theta)^T \in SE(2)$  la « situation » du repère  $\mathcal{R}_m$  par rapport à  $\mathcal{R}_r$  définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(-\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m - x_r \\ y_m - y_r \\ \theta_m - \theta_r \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Les variables  $x$  et  $y$  sont les coordonnées de  $\overrightarrow{P_m P_r}$  dans la base  $(\vec{i}_r, \vec{j}_r)$  et  $\theta$  est la différence d'orientation entre  $\mathcal{R}_m$  et  $\mathcal{R}_r$ .





Pour ce robot, l'équation (1.17) s'écrit donc aussi

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos \theta \\ u_1 \sin \theta \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

De la même façon, on obtient pour le robot de type « voiture » :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos \theta \\ u_1 \sin \theta \\ u_1 \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

Les équations (1.18) et (1.19) peuvent alors s'écrire sous forme condensée

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^2 u_i X_i(g) + P(g, t) \quad (1.20)$$

avec :

- pour le robot de type « unicycle »,  $g = (x, y, \theta)^T$  et les  $X_i$  définis par l'équation (1.12) ;
- pour le robot de type « voiture »,  $g = (x, y, \theta, \varphi)^T$  et les  $X_i$  définis par l'équation (1.14).

Le fait que les champs de vecteurs  $X_i$  sont les mêmes pour les équations du mouvement de nos robots par rapport à un repère fixe, ou par rapport à un repère mobile, n'est pas le fait du hasard. En effet, et nous y reviendrons dans le chapitre 2, ceci est une conséquence directe de la propriété d'invariance à gauche de ces systèmes sur le groupe de Lie  $SE(2)$ , le groupe des transformations rigides dans le plan.

## 1.3 Le problème de stabilisation de trajectoire

### 1.3.1 Formulation du problème

Considérons de façon générale un système de commande

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in \mathcal{Q} \quad (1.21)$$

avec  $\mathcal{Q}$  une variété de dimension  $n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , et  $f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  une application infiniment différentiable. On appelle trajectoire admissible — ou réalisable — du système (1.21) toute fonction  $q_r$  définie sur un intervalle de temps  $[0, T]$  pour laquelle il existe une fonction  $u^r$  définie sur ce même intervalle de temps telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad \dot{q}_r(t) = f(q_r(t), u^r(t))$$

Le problème de stabilisation de trajectoire est alors généralement posé comme suit : étant donné une trajectoire admissible  $q_r$  définie, pour simplifier, sur l'intervalle de temps  $[0, \infty[$ , et  $q_e := q - q_r$ , déterminer une commande par retour d'état  $u(q, q_r, t)$  telle que l'origine du « système d'erreur »

$$\dot{q}_e = f(q, u(q, q_r, t)) - f(q_r, u^r)$$

soit asymptotiquement stable.

Pour un robot de type « unicycle », par exemple, le problème est de stabiliser asymptotiquement à zéro l'erreur de situation entre le corps du robot et celui d'un robot de référence — virtuel —, comme cela est illustré sur la figure 1.6. Autrement dit, il s'agit d'asservir le repère  $\mathcal{R}_m$  lié au robot à un repère de référence  $\mathcal{R}_r$ .

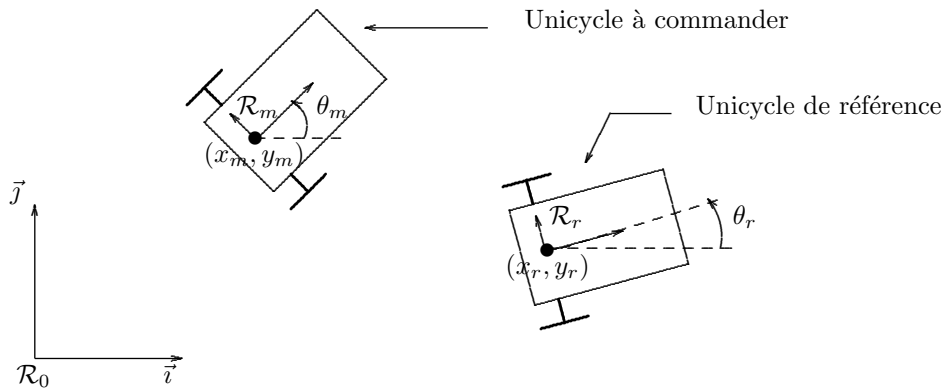


Figure 1.6 – Stabilisation de trajectoires admissibles

### 1.3.2 La stabilisation asymptotique de trajectoires admissibles

Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement à la stabilisation de trajectoires admissibles pour notre robot. Afin d'illustrer les difficultés induites par un tel but de commande, nous allons faire une analogie avec le cas des systèmes linéaires. On s'intéresse donc temporairement à la stabilisation de trajectoires admissibles pour un système linéaire

$$\dot{q} = Aq + Bu \quad (1.22)$$

où la paire  $(A, B)$  est commandable. Etant donnée une trajectoire admissible  $t \mapsto q_r(t)$  pour ce système, c'est-à-dire  $\dot{q}_r = Aq_r + Bu^r$ , on montre facilement, que le retour d'état

$$u(q, q_r, u^r) = u^r + K(q - q_r) \quad (1.23)$$

appliqué au système (1.22), entraîne, en posant  $q_e = q - q_r$  :

$$\dot{q}_e = (A + BK)q_e$$

Si la matrice  $K$  est telle que la matrice  $A + BK$  soit Hurwitz-stable, alors le retour d'état (1.23) stabilise asymptotiquement la trajectoire  $q_r(t)$ . Comme ce retour d'état est défini pour toute trajectoire  $q_r(t)$  admissible, on en déduit que toutes les trajectoires admissibles d'un système linéaire commandable sont asymptotiquement stabilisables par un retour d'état unique.

Cette propriété des systèmes linéaires ne se transpose malheureusement pas aux systèmes non-linéaires tels que le système (1.6). Une première difficulté provient du fait que dans le cas du système (1.6), et contrairement à un système linéaire commandable, la stabilisation asymptotique d'un point fixe ne peut être obtenue par un retour d'état continu dépendant uniquement de l'état.

**Théorème 2** (*Brockett, 1983*) *Soit un système de commande*

$$\dot{q} = f(q, u)$$

avec  $f : \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  régulière. On suppose que ce système possède un point d'équilibre en  $(q_0, u_0)$ , i.e.  $f(q_0, u_0) = 0$ . Alors une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état différentiable — ou seulement continu —  $u(q)$  qui rende le point d'équilibre  $(q_0, u_0)$  localement asymptotiquement stable est que l'image par  $f$  de tout voisinage de  $(q_0, u_0)$  soit un voisinage de 0.

Un corollaire immédiat de ce théorème est

**Corollaire 1** *Pour tout système (1.6) tel que les  $X_i$  soient linéairement indépendants en  $q_0$ , il n'existe pas de retour d'état  $u(q)$  continu permettant de stabiliser asymptotiquement  $q_0$ .*

Les retours d'état instationnaires continus, de la forme  $u(q, t)$ , ont été développés afin de contourner l'obstruction apportée par le théorème de Brockett, et afin d'apporter une solution au problème de stabilisation asymptotique d'un point fixe.

Il devient alors légitime de se demander si, à l'instar du retour d'état (1.23) pour les systèmes linéaires, des retours d'état continus instationnaires de la forme  $u(q, q_r, u^r, t)$  pourraient fournir une solution universelle<sup>2</sup> au problème de stabilisation de trajectoires admissibles pour nos systèmes. Un résultat récent apporte une réponse négative à cette question, en particulier pour les robots de type « unicycle » et « voiture » :

**Théorème 3** (*Lizárraga, 2004*) *Considérons le système (1.6) avec  $m = 2$ , ayant les propriétés 5–6. Si les champs  $X_i$  sont indépendants à l'origine, alors il n'existe pas de retours d'état continus dépendant du temps,  $u(q, q_r, u^r, t)$ , avec  $\partial u/\partial t$  et  $\partial^2 u/(\partial u^r \partial t)$  définis partout et bornés sur  $\{(q, q_r, u^r, t) : q = q_r, u^r = 0\}$ , qui stabilise asymptotiquement toute trajectoire admissible pour le système (1.6).*

L'objectif de stabiliser asymptotiquement, à l'aide d'un unique retour d'état continu, toutes les trajectoires admissibles du système (1.6) n'est donc pas réalisable. Ceci suggère de s'orienter vers des objectifs de commande moins ambitieux, compatibles avec une résolution « pratique » du problème de suivi de véhicule.

Deux possibilités ont été étudiées dans la littérature. D'une part, on peut chercher à ne contrôler qu'une partie de la configuration du système. D'autre part, on peut chercher à ne stabiliser que certaines trajectoires admissibles du système.

### 1.3.2.1 Stabilisation de trajectoires sans contrôle de l'orientation

Les techniques que l'on considère ici consistent à stabiliser la position du robot par rapport à une position de référence, sans chercher à stabiliser l'orientation du robot. Conceptuellement, cela revient à donner au véhicule à commander les propriétés d'une remorque « accrochée » de façon immatérielle au véhicule de référence. Cette approche est classiquement utilisée dans le cas d'applications de type convoi de véhicules, où le véhicule de tête suit une trajectoire sans point de rebroussement.

Le principe de cette approche consiste à commander, non pas le point  $P_m$  utilisé précédemment pour établir le modèle cinématique, mais un point  $P$  déporté par rapport à l'axe des roues, comme représenté sur la figure 1.7.

Dans le cas du robot de type « unicycle » (voir figure 1.7(a)), on considérera un point rigidement lié au corps du robot et non situé sur de l'axe des roues motrices. Dans le cas

---

2. universelle au sens de « pour toutes les trajectoires du système »

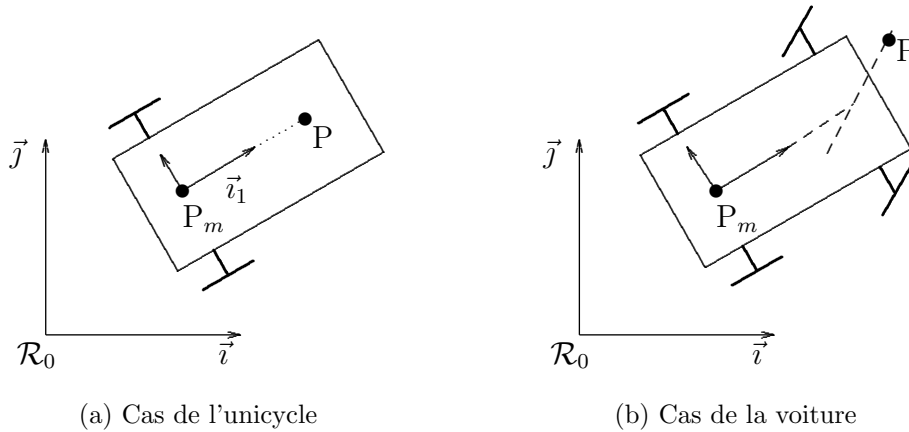


Figure 1.7 – Stabilisation sans contrôle d'orientation

du robot de type « voiture », figure 1.7(b), le point considéré sera lié à la roue directrice du robot, mais non confondu avec son centre.

Afin d'illustrer l'approche, on considère uniquement le cas du robot de type unicycle et, pour simplifier, on suppose que le point  $P$  est situé sur l'axe principal du robot, c'est-à-dire  $\overrightarrow{P_m P} = l\vec{i}_1$ , avec  $l > 0$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , les coordonnées du point  $P$  dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , et  $(x_r(t), y_r(t)) \in \mathbb{R}^2$  une trajectoire de référence pour ce point. On suppose, de plus, que cette trajectoire est différentiable.

L'erreur de suivi exprimée dans le repère de la cible  $\mathcal{R}_r$  est

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = R(-\theta_r) \begin{pmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{pmatrix}$$

et il s'agit de stabiliser asymptotiquement cette erreur à zéro. Le système d'erreur a pour équation

$$\dot{e} = R(-\theta_r)R(\theta) \begin{pmatrix} u_1 \\ lu_2 \end{pmatrix} - R(-\theta_r) \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix} - \dot{\theta}_r \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

En posant  $e_\theta = \theta - \theta_r$  et en introduisant les variables de commande intermédiaires  $(v_1, v_2)$  définies par

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = R(e_\theta) \begin{pmatrix} u_1 \\ lu_2 \end{pmatrix}$$

l'équation (1.24) devient

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - R(-\theta_r) \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix} - \dot{\theta}_r \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Cette équation suggère de choisir une commande proportionnelle avec précompensation :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = R(-\theta_r) \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix} + \dot{\theta}_r \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} + Ke$$

de sorte à obtenir en boucle fermée  $\dot{e} = Ke$ . La stabilisation asymptotique de  $e$  à zéro est alors obtenue en choisissant une matrice  $K$  Hurwitz-stable. Cette loi de commande peut bien évidemment être reformulée pour les composantes de la commande de départ  $u$  puisque l'application  $(u_1, u_2) \mapsto (v_1, v_2)$  est partout inversible.

La même technique s'étend au cas de la voiture. En effet, il suffit de remarquer l'analogie entre une voiture et un unicycle équipé d'une remorque, comme présentée sur la figure 1.8 : le problème de suivi de trajectoire, sans contrôle actif de l'orientation, se ramène à celui du suivi avec un robot de type « unicycle », qui aurait comme entrées de commande :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^c \cos \psi_m \\ u_1^c \frac{\tan \psi_m}{L} + u_\psi \end{pmatrix}$$

avec  $u_1^c$  la vitesse longitudinale du corps de la voiture et  $u_\psi = \dot{\psi}_m$  la vitesse angulaire de sa roue directrice.

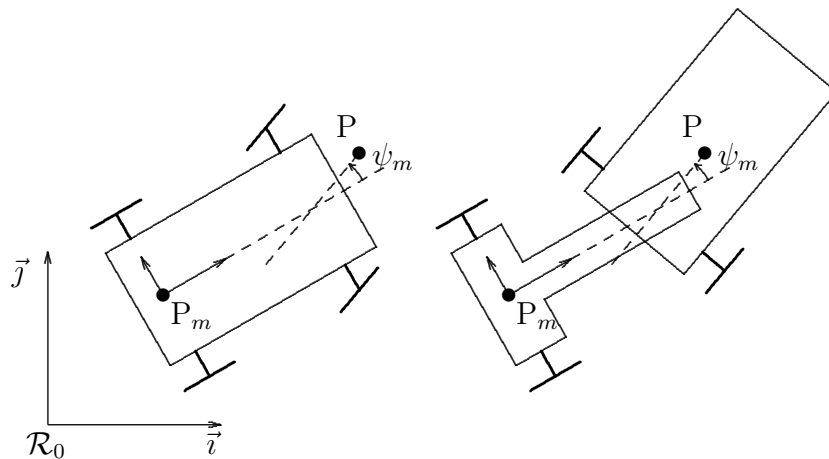


Figure 1.8 – Analogie cinématique entre la voiture et l'unicycle équipé d'une remorque

Cette approche s'applique bien tant que la vitesse longitudinale du véhicule de référence reste positive. Cette limitation résulte du fait que l'orientation  $\theta_m$ , et par suite la différence d'orientation  $e_\theta = \theta_m - \theta_r$  entre le véhicule contrôlé et le véhicule de référence, ne sont pas directement contrôlées. Intuitivement, la dynamique de cette variable est stable tant que le véhicule de référence avance. La différence d'orientation reste alors comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Si le véhicule de référence s'arrête puis recule, on montre que  $e_\theta$  tend à sortir de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  pour rejoindre une valeur proche de  $\pi$  (retournement de l'orientation). Le même effet se produit pour une remorque d'abord tractée, puis poussée. Pour l'éviter, il est nécessaire de commander et de stabiliser activement l'orientation du véhicule par d'autres techniques.

### 1.3.2.2 Stabilisation asymptotique de trajectoires particulières

La stabilisation simultanée de la position et de l'orientation implique de pouvoir contrôler l'évolution de l'état complet  $q$  du robot. Comme indiqué dans la section 1.3.2, il n'est pas possible de stabiliser asymptotiquement toutes les trajectoires d'un tel système avec une seule loi de commande. Néanmoins, la stabilisation asymptotique de certaines trajectoires demeure possible, en particulier, lorsque

1. la trajectoire de référence est réalisable par le véhicule commandé et la vitesse longitudinale du véhicule de référence ne tend pas vers zéro.
2. la trajectoire de référence est réduite à un point fixe. Ce second cas peut, par exemple, se présenter dans le cadre de l'automatisation de manœuvres de parking ;

**Stabilisation asymptotique de trajectoire admissible sans point fixe** Considérons un véhicule de type « unicycle ». Le point  $P_m$  est placé au milieu de l'axe des roues arrière, comme sur la figure 1.6. On suppose que la trajectoire de référence  $t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$  est réalisable, c'est-à-dire que le robot virtuel de référence de la figure (1.6) est sujet aux mêmes contraintes non-holonomes que le véhicule commandé :

$$\begin{cases} \dot{x}_r &= u_1^r \cos \theta_r \\ \dot{y}_r &= u_1^r \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r &= u_2^r \end{cases}$$

En reprenant les notations de la section 1.2.4, il s'agit de stabiliser asymptotiquement



à zéro l'erreur de suivi

$$g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(-\theta_r) \begin{pmatrix} x_m - x_r \\ y_m - y_r \end{pmatrix} \\ \theta_m - \theta_r \end{pmatrix}$$

Le calcul de la dérivée de l'erreur donne alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta + u_2^r y - u_1^r \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta - u_2^r x \\ \dot{\theta} = u_2 - u_2^r \end{cases} \quad (1.26)$$

Pour déterminer une commande  $(u_1, u_2)$  stabilisante, considérons le changement de coordonnées et de variables de commande :

$$(g, u_1, u_2) \longmapsto (z, w_1, w_2)$$

défini par

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = y \\ z_3 = \tan \theta \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = u_1 \cos \theta - u_1^r \\ w_2 = \frac{u_2 - u_2^r}{\cos^2 \theta} \end{cases}$$

Cette transformation n'étant définie que pour  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , l'erreur d'orientation relative initiale entre le robot et celui de référence doit être inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ .

Sous son action, le système (1.26), est transformé dans le système chaîné « perturbé » suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = w_1 + u_{2,r} z_2 \\ \dot{z}_2 = w_1 z_3 - u_{2,r} z_1 + u_{1,r} z_3 \\ \dot{z}_3 = w_2 \end{cases} \quad (1.27)$$

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 1** (Morin et Samson, 2001b) *La loi de commande*

$$\begin{cases} w_1 = -k_1 |u_1^r| (z_1 + z_2 z_3) & (k_1 > 0) \\ w_2 = -k_2 u_1^r z_2 - k_3 |u_1^r| z_3 & (k_2, k_3 > 0) \end{cases} \quad (1.28)$$

rend l'origine du système (1.27) globalement asymptotiquement stable si  $u_1^r$  est une fonction différentiable, bornée, de dérivée bornée, qui ne tend pas vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

La synthèse de la commande précédente est généralisable au cas des robots de type « voiture ».

Cette approche permet de stabiliser un grand nombre de trajectoires réalisables. Cependant, son application dans le cadre du suivi d'un véhicule réel n'est pas immédiate. En effet, afin d'éviter que le véhicule commandé ne s'entrechoque avec le véhicule de référence suivi, le repère  $\mathcal{R}_r$  doit être déporté à l'arrière du véhicule de référence, comme indiqué sur la figure 1.9. La nécessité de recourir à un repère déporté pose le problème du choix de ce repère. En effet, s'il est simplement choisi rigidement lié au véhicule de référence, son mouvement ne correspond plus nécessairement à une trajectoire admissible pour le robot suiveur. Il suffit par exemple, que le véhicule de référence de type « unicycle » de la figure 1.9 tourne sur place, pour que le repère  $\mathcal{R}_r$  suive une trajectoire non réalisable par le robot. Il faudrait donc dans ce cas déterminer le repère  $\mathcal{R}_r$  dynamiquement, de façon à assurer que la trajectoire de ce repère soit admissible pour le véhicule commandé. Ceci revient finalement à planifier dynamiquement une trajectoire admissible pour le véhicule commandé en fonction de la trajectoire, *a priori* inconnue, suivie par le véhicule de référence. Ceci n'étant clairement pas possible dans l'absolu, il convient alors d'évaluer la robustesse de la loi de commande en fonction du degré de violation de la propriété d'admissibilité de la trajectoire de référence.

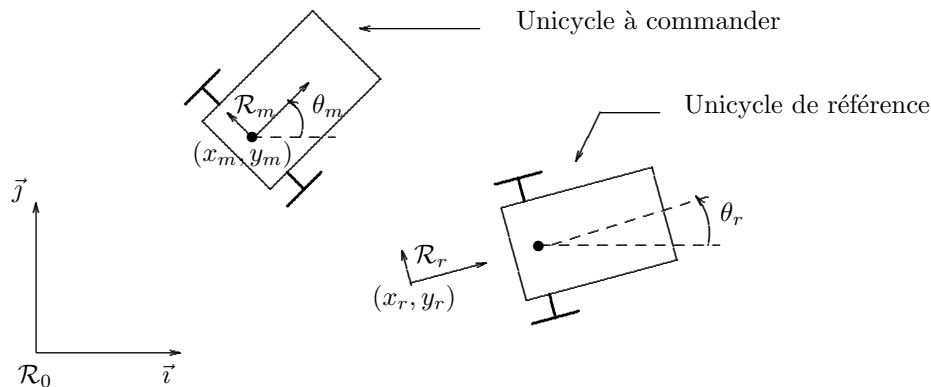


Figure 1.9 – Stabilisation de trajectoires non-admissibles

**Stabilisation asymptotique de configuration fixe** Considérons maintenant le problème de stabilisation asymptotique d'une position et d'une orientation de référence fixes. Dans ce cas  $u^r = 0$  et la commande de la proposition 1 ne résout pas le problème. Le théorème de Brockett, évoqué auparavant, permet d'autre part d'exclure tout retour d'état continu dépendant seulement de l'état.

Une possibilité consiste à considérer une classe de retours d'état plus grande, telle que celle des retours d'état continus « instationnaires », utilisant le temps comme variable complémentaire. Ce type de commande, proposé dans (Samson, 1990) pour la stabilisation d'un robot de type « unicycle », a été largement développé par la suite. Un des premiers résultats généraux d'existence de telles commandes stabilisantes est le suivant :

**Théorème 4** (Coron, 1992) *Considérons le système (1.6) et supposons que les  $X_i$  sont tels que  $\mathcal{L}ie(X_i)(q_0) = \mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $T > 0$ , il existe un retour d'état instationnaire régulier  $u(q, t)$ , périodique par rapport à  $t$  de période  $T$ , qui rend l'équilibre  $(q_0, 0)$  localement asymptotiquement stable. Si de plus  $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{L}ie(X_i)(q) = \mathbb{R}^n$  pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ , il existe un tel retour d'état qui rend l'équilibre  $(q_0, 0)$  globalement asymptotiquement stable.*

De nombreuses méthodes pour la synthèse de telles commandes ont aussi été développées. L'étude de ces méthodes a cependant également mis en évidence certaines limitations.

- les retours d'état instationnaires réguliers peuvent, éventuellement, posséder de bonnes propriétés de robustesse vis-à-vis des dynamiques non modélisées, et sont peu sensibles aux bruits de mesures. En contrepartie, ils ne garantissent pas la convergence rapide — exponentielle — de l'état du système vers l'origine ;
- la convergence exponentielle peut être obtenue avec des retours d'état continus, mais non Lipschitz continus, au prix d'une sensibilité importante vis-à-vis des bruits de mesures, et de problèmes de robustesse vis-à-vis de dynamiques non modélisées.

Une étude détaillée de ces aspects de compromis entre robustesse et performance a été faite dans (Morin et Samson, 2002).

## 1.4 Conclusion

La simplicité apparente des équations régissant le mouvement des robots mobiles sur roues masque la complexité des problèmes de commande sous-jacents. En particulier, il n'existe pas de solution globale — universelle — au problème de stabilisation asymptotique de points d'équilibre et de trajectoire admissibles. Il semble aussi qu'aucune solution ne soit complètement satisfaisante au niveau de la gestion du compromis entre robustesse et performance.

Par exemple le théorème 3 indique qu'il n'existe pas de retour d'état continu pouvant stabiliser asymptotiquement toutes les trajectoires réalisables du système. En pratique, ceci se traduit par la difficulté de choisir un retour d'état en l'absence de connaissances *a priori* sur la trajectoire de référence. De plus, même lorsque cette trajectoire est connue à l'avance, comme dans le cas d'une configuration fixe désirée, le compromis entre la

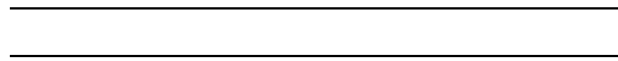
robustesse de la propriété de stabilité et le taux de convergence demeure problématique. Enfin, dans certains cas, tel que le suivi d'un véhicule de référence présenté en figure 1.9, on peut être amené à considérer le « suivi » de trajectoires non-admissibles. Dans ce cas, la stabilisation asymptotique est évidemment impossible.

Ces arguments mettent en évidence l'intérêt, à la fois conceptuel et d'ordre pratique, d'« assouplir » l'objectif de stabilisation asymptotique, soit parce qu'il n'est pas atteignable, soit encore parce qu'il ne l'est pas de façon efficace et robuste. Le but du chapitre suivant est de montrer qu'en substituant à l'objectif de stabilisation asymptotique un objectif de *stabilisation pratique*, les problèmes évoqués ci-dessus peuvent être contournés.



## Chapitre 2

# Stabilisation pratique de trajectoires générales



## 2.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la stabilisation asymptotique, qui plus est rapide et robuste, d'une trajectoire de référence admissible est un objectif inatteignable de façon générique. Nous pouvons de plus être amenés à considérer des trajectoires non-admissibles, pour lesquelles cet objectif de stabilisation asymptotique ne peut être atteint. Ces considérations conduisent à envisager un objectif de stabilisation moins contraignant, plus représentatif des possibilités de ces systèmes et prenant mieux en compte le fait que nombre d'applications s'accommodent d'erreurs de suivi non nulles pour peu qu'elles soient petites.

Pour qualifier cet objectif moins contraignant, moins ambitieux, mais plus général, nous parlerons par la suite de *stabilisation pratique*.

## 2.2 Approche par fonctions transverses et stabilisation pratique

Nous rappelons ici le résultat principal sur lequel est basée l'approche de commande dite par fonctions transverses. On s'intéresse aux propriétés des systèmes du type :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(q) \quad (2.1)$$

où les  $X_i$  sont des champs de vecteurs réguliers sur une variété  $\mathcal{Q}$ .

**Théorème 5** (Morin et Samson, 2001a, théorème 1) Soit  $X_1, \dots, X_m$  des champs de vecteurs réguliers sur une variété  $\mathcal{Q}$  de dimension  $n$ . On suppose que  $\text{Lie}(X_1, \dots, X_m)(q)$  est de dimension constante dans un voisinage de  $q_0$ . Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. la condition de rang de l'algèbre de Lie en  $q_0$  est satisfaite par les champs  $X_i$
2. il existe  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  et, pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $q_0$ , une fonction régulière  $f : \mathbb{T}^{\bar{n}-m} \mapsto \mathcal{U}$ , tels que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{T}^{\bar{n}-m}, \quad \mathcal{Q}_{f(\alpha)} = \text{span} \{X_1(f(\alpha)), \dots, X_m(f(\alpha))\} + df(\alpha)(\mathbb{T}_{\alpha}^{\bar{n}-m})$$

Dans le cas d'un système (2.1) commandable, au moins localement, ce théorème affirme l'existence d'une fonction régulière  $f$  telle qu'en tout point  $f(\alpha)$ , l'espace tangent  $\mathcal{Q}_{f(\alpha)}$  est

la somme de l'espace engendré par les vecteurs  $X_i$  et de l'espace image de la différentielle de la fonction  $f$ . Une telle fonction est appelée « fonction transverse » aux champs de vecteurs  $X_i$ , ou plus simplement « fonction transverse » s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

Afin de préciser l'intérêt des fonctions transverses pour la commande du système (2.1), considérons un système de coordonnées locales sur  $\mathcal{Q}$ , tel que  $q_0 \in \mathcal{Q}$  soit associé à zéro dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour simplifier les notations dans la suite de ce document, nous utiliserons les mêmes notations pour les champs de vecteurs et leurs expressions dans le système de coordonnées locales. Le théorème 5, devient alors

**Théorème 6** (Morin et Samson, 2001a) *Si l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m)(q)$  est de dimension constante, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. le système

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(q) \quad (2.2)$$

est localement commandable en  $q = 0$  ;

2. il existe  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  et une famille  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de fonctions  $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{\bar{n}-m}; B_n(0, \varepsilon))$ , telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\alpha = (\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{\bar{n}}) \in \mathbb{T}^{\bar{n}-m}$ , la matrice

$$H(\alpha) := \begin{pmatrix} X_1(f_\varepsilon(\alpha)) & \cdots & X_m(f_\varepsilon(\alpha)) & -\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \alpha_{m+1}}(\alpha) & \cdots & -\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \alpha_{\bar{n}}}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

soit de rang plein.

Une première loi de commande envisageable est donnée dans la proposition suivante

**Proposition 2** *Soit le système (2.2), supposé localement commandable en  $q = 0$ , et  $f_\varepsilon : \mathbb{T}^{\bar{n}-m} \mapsto B_n(0, \varepsilon)$ , une fonction transverse pour ce système. Soit le retour d'état dynamique*

$$(u, \dot{\alpha})^T = H(\alpha)^T (H(\alpha)H(\alpha)^T)^{-1} (K(q - f_\varepsilon(\alpha))) \quad (2.4)$$

avec  $H(\alpha)$  la matrice définie par (2.3), et  $K$  une matrice Hurwitz-stable. Ce retour d'état stabilise exponentiellement  $q - f_\varepsilon(\alpha)$  à zéro.

**Preuve :** Par hypothèse les champs de vecteurs  $g_i$  satisfont la condition de rang de l'algèbre de Lie à l'origine et le théorème 6 nous fournit l'existence de fonctions transverses  $f_\varepsilon$  pour



ce système. On pose alors  $z = q - f_\varepsilon(\alpha)$ , et on étudie la dérive de  $z$  par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{q} - \dot{f}_\varepsilon(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^m X_i(x)u_i - \sum_{i=m+1}^{\bar{n}} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \alpha_i}(\alpha)\dot{\alpha}_i \\ &= \sum_{i=1}^m X_i(f_\varepsilon(\alpha))u_i - \sum_{i=m+1}^{\bar{n}} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \alpha_i}(\alpha)\dot{\alpha}_i + \sum_{i=1}^m (X_i(x) - X_i(f_\varepsilon(\alpha)))u_i\end{aligned}$$

En posant

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_m, \dot{\alpha}_{m+1}, \dots, \dot{\alpha}_{\bar{n}})$$

on obtient

$$\dot{z} = H(\alpha)\bar{u} + \sum_{i=1}^m (X_i(q) - X_i(f_\varepsilon(\alpha)))u_i$$

avec  $H(\alpha)$  définie par (2.3). En appliquant le retour d'état (2.4), on trouve

$$\dot{z} = Kz + \sum_{i=1}^m (X_i(q) - X_i(f_\varepsilon(\alpha)))u_i \quad (2.5)$$

Comme les  $X_i$  sont réguliers, et  $f_\varepsilon$  est à valeur dans le compact  $B_n(0, \varepsilon)$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que

$$\|q - f_\varepsilon(\alpha)\| < \eta \implies \left\| \sum_{i=2}^m (X_i(q) - X_i(f_\varepsilon(\alpha))) \right\| < M\|q - f_\varepsilon(\alpha)\|$$

avec  $M > 0$ . En utilisant la définition (2.4) des  $u_i$ , on déduit

$$\|q - f_\varepsilon(\alpha)\| < \eta \implies \left\| \sum_{i=1}^m (X_i(q) - X_i(f_\varepsilon(\alpha)))u_i \right\| < M'\|q - f_\varepsilon(\alpha)\|^2 < M'\|z\|^2$$

D'après (2.5), on conclut alors que  $z = 0$  est stable et que  $z(t)$  converge uniformément et exponentiellement vers zéro si l'erreur initiale  $\|q(0) - f_\varepsilon(\alpha(0))\|$  est suffisamment petite. ■

Cette proposition illustre simplement comment le théorème 6 peut servir à définir un retour d'état continu rendant l'ensemble  $f_\varepsilon(\mathbb{T}^{\bar{n}-m})$  localement attractif pour les solutions du système commandé.

Néanmoins, la proposition 2 ne présente elle-même qu'un intérêt relatif car elle ne garantit même pas la bornitude des solutions ayant pour condition initiale  $x(0) = 0$ , même lorsque  $\varepsilon$  est très petit. Pour obtenir des lois de commandes qui stabilisent l'ensemble  $f_\varepsilon(\mathbb{T}^{\bar{n}-m})$  de façon plus globale, il convient de mieux utiliser les propriétés structurelles du système, en particulier celles résultant de sa commandabilité. Un cadre particulièrement favorable pour cela est celui des systèmes invariants sur les groupes de Lie.

## 2.3 Cas des systèmes invariants sur les groupes de Lie

### 2.3.1 Modélisation sur un groupe de Lie

Considérons le système suivant qui généralise le modèle cinématique (1.20) présenté dans la section 1.2.4 :

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(g) + P(g, t) \quad (2.6)$$

et faisons l'hypothèse que le système sans dérive associé

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(g) \quad (2.7)$$

est un système sur un groupe de Lie  $G$ , et que les  $X_i \in \mathfrak{g}$  sont invariants à gauche par rapport à la loi de composition interne de ce groupe. La notion de base graduée de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , définie ci-dessous, sera utilisée par la suite :

**Définition 1** Soit  $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$  des champs de vecteurs indépendants tels que  $\dim(\mathfrak{g}) = n$  avec  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(X_1, \dots, X_m)$ . On définit par récurrence  $\mathfrak{u}^k = \mathfrak{u}^{k-1} + [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}^{k-1}]$  avec  $\mathfrak{u} = \text{span}(X_1, \dots, X_m)$ , et on pose  $K = \min\{k : \mathfrak{u}^k = \mathfrak{g}\}$ . Une base graduée de  $\mathfrak{g}$  associée aux champs  $X_1, \dots, X_m$  est une base ordonnée  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $\mathfrak{g}$ , munie de deux applications  $\lambda, \rho : \{m+1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$ , et telle que :

1. pour tout  $k = 1, \dots, K$ ,  $\mathfrak{u}^k = \text{span}\{X_1, X_2, \dots, X_{\dim(\mathfrak{u}^k)}\}$ .
2. pour tout  $k \geq 2$  et pour tout  $i$  tel que  $\dim(\mathfrak{u}^{k-1}) < i \leq \dim(\mathfrak{u}^k)$ ,  $X_i = [X_{\lambda(i)}, X_{\rho(i)}]$  avec  $X_{\lambda(i)} \in \mathfrak{u}^a$ ,  $X_{\rho(i)} \in \mathfrak{u}^b$ , et  $a + b = k$ .

A chaque base graduée de  $\mathfrak{g}$ , on associe alors un vecteur de poids  $(r_1, \dots, r_n)$ , défini par

$$r_i = k \iff X_i \in \mathfrak{u}^k \setminus \mathfrak{u}^{k-1} \iff \dim(\mathfrak{u}^{k-1}) < i \leq \dim(\mathfrak{u}^k)$$

En remarquant que  $1 = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n = K$  et en utilisant la définition 1,

$$\forall i > m, r_i = r_{\lambda(i)} + r_{\rho(i)}$$

Avec cette définition, on obtient le résultat suivant qui précise le théorème 5 pour des systèmes invariants sur des groupes de Lie :

**Théorème 7** (Morin et Samson, 2003) Soient  $G$  un groupe de Lie de dimension  $n$ , et  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie associée. On suppose que les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  sont indépendants. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{L}ie(X_1, \dots, X_m) = \mathfrak{g}$
2. pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $e$  dans  $G$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n-m}; \mathcal{U})$  telle que pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}^{n-m}$ ,

$$G_{f(\alpha)} = \text{span}\{X_1(f(\alpha)), \dots, X_m(f(\alpha))\} \oplus df(\alpha)(\mathbb{T}_\alpha^{n-m}) \quad (2.8)$$

De plus, si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  forme une base graduée de  $\mathfrak{g}$ , un choix possible pour  $f$  est donné par

$$\forall \alpha = (\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^{n-m}, f(\alpha) = f_n(\alpha_n) f_{n-1}(\alpha_{n-1}) \cdots f_{m+1}(\alpha_{m+1}) \quad (2.9)$$

avec  $f_j : \mathbb{T} \mapsto G$  définie par

$$f_j(\alpha_j) = \exp(\varepsilon_j^{r_{\lambda(j)}} \sin \alpha_j X_{\lambda(j)} + \varepsilon_j^{r_{\rho(j)}} \cos \alpha_j X_{\rho(j)}) \quad (2.10)$$

pour des réels positifs  $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n$ , adéquatement choisis, et  $\lambda, \rho : \{m+1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$  les deux applications associées à la base graduée.

Comme pour le théorème 5, on peut spécifier un système de coordonnées sur  $G$  autour de  $e$ . En gardant, pour simplifier, les mêmes notations pour les champs de vecteurs dans  $G$  et leurs représentations dans  $\mathbb{R}^n$ , l'équation (2.8) signifie que la matrice

$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} X_1(f(\alpha)) \cdots X_m(f(\alpha)) & -\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m+1}}(\alpha) \cdots -\frac{\partial f}{\partial \alpha_n}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

est inversible. Le théorème 7 énonce l'équivalence, pour un système sur un groupe de Lie, entre la commandabilité du système et l'existence de fonctions transverses pour ce système. Par rapport au théorème 6, le théorème 7 apporte cependant deux précisions importantes :

- d'une part, la dimension de la variable  $\alpha$  dont dépend la fonction transverse. Cette dimension, égale à  $n - m$ , est clairement une borne inférieure pour la satisfaction de la propriété de transversalité ;
- d'autre part, l'expression d'une famille (2.9) de fonctions transverses pour le système (2.7).

### 2.3.2 Commande d'un système sur un groupe de Lie

La proposition 2 peut alors être modifiée afin d'obtenir une loi de commande un peu différente de (2.4) et conduisant à un résultat de convergence plus global.

Pour simplifier l'exposé, on suppose dans ce qui suit que le groupe  $G$  est globalement isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et que  $e = 0$  est l'élément neutre pour l'opération de groupe.

**Proposition 3** *Soit le système (2.6) sur le groupe de Lie  $G$ . On suppose que le système sans dérive associé (2.7) est commandable et invariant à gauche sur  $G$  et que la perturbation additive  $P$  est continue. Soit  $f : \mathbb{T}^{n-m} \mapsto G$  une fonction transverse au système (2.7). Alors le retour d'état dynamique défini par*

$$\begin{pmatrix} u \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = H(\alpha)^{-1} dl_{z^{-1}}(g) (dr_{f(\alpha)}(z)Z(z) - P(g, t)) \quad (2.12)$$

avec  $z = gf^{-1}(\alpha)$ ,  $H(\alpha)$  la matrice inversible définie par (2.11), et  $Z$  un champ de vecteurs quelconque, conduit à l'équation en boucle fermée

$$\dot{z} = Z(z) \quad (2.13)$$

Par conséquent, si  $Z$  est un champ de vecteurs qui stabilise asymptotiquement et globalement l'origine du système (2.13), toute solution du système (2.6) commandé par (2.12) converge vers l'ensemble  $f(\mathbb{T}^{n-m})$ .

**Preuve :** L'existence de familles de fonctions transverses au système (2.7) est immédiate par application du théorème 7. Soit  $f : \mathbb{T}^{n-m} \mapsto G$  une fonction transverse au système. La dérivée par rapport au temps de  $g = zf$  est donnée par :

$$\dot{g} = dr_f(z)\dot{z} + dl_z(f)\dot{f}$$

d'où,

$$\dot{z} = (dr_f(z))^{-1} \left( \sum_{i=1}^m u_i X_i(g) + P(g, t) - dl_z(f)\dot{f} \right)$$

En remarquant que :

$$(dr_f(z))^{-1} = dr_{f^{-1}}(g) \quad \text{et} \quad (dl_z(f))^{-1} = dl_{z^{-1}}(g)$$

on obtient

$$\dot{z} = dr_{f^{-1}}(g) dl_{z^{-1}}(g) \left( \sum_{i=1}^m u_i X_i(g) \right) - \dot{f} + dr_{f^{-1}}(g) P(g, t)$$

Les  $X_i$  étant invariants à gauche :

$$dl_{z^{-1}}(g) \left( \sum_{i=1}^m u_i X_i(g) \right) = \sum_{i=1}^m u_i X_i(z^{-1}g) = \sum_{i=1}^m u_i X_i(f)$$

d'où :

$$\dot{z} = dr_{f^{-1}}(g)(dl_z(f)H(\alpha)\bar{u} + P(g, t)) \quad (2.14)$$

avec  $H(\alpha)$  définie par (2.11) et  $\bar{u} := \left( u_1 \cdots u_m \quad \dot{\alpha}_1 \cdots \dot{\alpha}_p \right)^T$ . Comme  $H(\alpha)$  est une matrice inversible pour tout  $\alpha$ ,  $H(\alpha)^{-1}$  est bien définie, et il est facile de vérifier que l'application du retour d'état (2.12) donne

$$\dot{z} = Z(z)$$

■

Par rapport à la proposition 2, le domaine de convergence vers l'ensemble  $f(\mathbb{T}^{n-m})$  dépend seulement du choix de  $Z(z)$ . Par exemple,  $Z(z) = Kz$  avec  $K$  une matrice Hurwitz-stable, entraîne une convergence uniformément exponentielle et globale.

Notons que la loi de commande (2.12), avec  $Z(z)$  un champ de vecteurs stabilisant asymptotiquement l'origine, n'implique pas en général la stabilité asymptotique de l'ensemble  $f(\mathbb{T}^{n-m})$  pour le système en boucle fermée : supposons, en effet, que l'état initial  $g(0)$  du système (2.6) appartienne à l'ensemble  $f(\mathbb{T}^{n-m})$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha_0 \in \mathbb{T}^{n-m}$  tel que  $g(0) = f(\alpha_0)$ , et que  $\alpha(0)$  soit différent de  $\alpha_0$ . Avec de telles valeurs initiales, rien n'assure que  $g(t)$  va rester dans l'ensemble  $f(\mathbb{T}^{n-m})$ , on sait seulement que, asymptotiquement, l'état du système va converger vers cet ensemble. La stabilité de cet ensemble pour le système (2.6) peut cependant être obtenue par un choix adéquat de  $\alpha(0)$ .

**Proposition 4**  *$f(\mathbb{T}^{n-m})$  est asymptotiquement stable pour le système (2.6) contrôlé par le retour d'état (2.12), si  $\alpha(0) = \alpha^*(g(0))$  avec  $\alpha^*$  une application telle que*

$$d(g, f(\mathbb{T}^{n-m})) \longrightarrow 0 \implies d(g, f(\alpha^*(g))) \longrightarrow 0 \quad (2.15)$$

et  $d$  une distance sur  $G$ .

**Preuve :** On suppose, dans cette preuve, que  $Z(z)$  est un champ de vecteurs stabilisant asymptotiquement l'origine du système (2.13). La convergence asymptotique des trajectoires vers  $f(\mathbb{T}^{n-m})$  est déjà établie par la propriété 3. Il s'agit de montrer que

$$d(g(0), f(\mathbb{T}^{n-m})) \longrightarrow 0 \implies \sup_t d(g(t), f(\mathbb{T}^{n-m})) \longrightarrow 0 \quad (2.16)$$

où  $g(t)$  désigne la solution au temps  $t$  associée à la condition initiale  $g(0)$ , et  $d(g, f(\mathbb{T}^{n-m}))$  est la distance de  $g$  à l'ensemble  $f(\mathbb{T}^{n-m})$ . Par la définition (2.15) de l'application  $\alpha^*$

$$\begin{aligned} d(g(0), f(\mathbb{T}^{n-m})) \longrightarrow 0 &\implies d(g(0), f(\alpha^*(g(0)))) \longrightarrow 0 \\ &\implies d(g(0), f(\alpha(0))) \longrightarrow 0 \\ &\implies |z(0)| \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Puisque d'après la propositions 3,  $z = e$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable

de (2.14), on a

$$\begin{aligned} |z(0)| \longrightarrow 0 &\implies \sup_t |z(t)| \longrightarrow 0 \\ &\implies \sup_t d(g(t), f(\alpha(t))) \longrightarrow 0 \\ &\implies \sup_t d(g(t), f(\mathbb{T}^{n-m})) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'équation (2.16) découle de (2.17) et (2.18). ■

Un autre point remarquable est que la propriété de convergence est obtenue indépendamment du terme de perturbation  $P(g, t)$ . La stabilisation pratique de trajectoires quelconques — c'est-à-dire admissibles ou non — que nous allons maintenant aborder, exploite ce dernier point.

### 2.3.3 Application à la stabilisation de trajectoires non nécessairement réalisables

Soit un système commandable

$$\dot{g}_m = \sum_{i=1}^m u_i X_i(g_m)$$

invariant sur un groupe de Lie  $G$ , et  $g_r(t)$  une trajectoire de référence que l'on suppose dérivable. Alors  $g := g_r^{-1}g_m$  caractérise l'« erreur » de suivi. En effet, cette erreur est nulle si et seulement si  $g = e$ , l'élément neutre du groupe. Intéressons nous aux équations du « système d'erreur » associé.

Puisque  $g_m = g_r g$ ,

$$\dot{g}_m = dl_{g_r}(g)\dot{g} + dr_g(g_r)\dot{g}_r$$

Par conséquent

$$\dot{g} = (dl_{g_r}(g))^{-1} (\dot{g}_m - dr_g(g_r)\dot{g}_r)$$

En utilisant le fait que

$$(dl_{g_r}(g))^{-1} = dl_{g_r^{-1}}(g_m)$$

et la propriété d'invariance à gauche des champs  $X_i$ , on obtient :

$$\dot{g} = dl_{g_r^{-1}}(g_m) \left( \sum_{i=1}^m u_i X_i(g_m) - dr_g(g_r)\dot{g}_r \right)$$

soit encore :

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(g) + P(g, t) \quad (2.19)$$

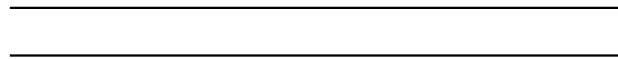
avec

$$P(g, t) = -dl_{g_r^{-1}}(g_m)dr_g(g_r)\dot{g}_r \quad (2.20)$$

Le système (2.19) étant de la forme (2.6), et  $P(g, t)$  étant continue dès lors que  $\dot{g}_r$  est continue, la proposition 3 s'applique directement en fournissant une loi de commande pour la stabilisation pratique d'une trajectoire de référence quelconque dont la dérivée est continue.

## Chapitre 3

# Suivi d'un véhicule manœuvrant





## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons à l'unicycle l'approche de commande par fonctions transverses présentée dans le chapitre précédent afin de suivre un autre véhicule susceptible de faire des manœuvres. Pour cela, on considère un repère de référence lié au véhicule que l'on souhaite suivre, comme par exemple le repère  $\mathcal{R}_r$  de la figure 1.5, et on se fixe pour objectif de stabiliser l'unicycle par rapport à ce repère de référence. Dans un premier temps, nous verrons comment une application quasi-directe de l'approche par fonctions transverses permet de fournir une première famille de lois de commande, relativement simples, permettant d'atteindre cet objectif. Cependant, comme nous l'illustrerons ensuite, les paramètres de commande associés à cette famille ne permettent pas toujours d'obtenir de bons résultats en terme de précision de suivi, de dynamique des entrées de commande, et de comportement transitoire du système. Ceci nous conduira à proposer de nouvelles lois de commandes, plus élaborées que les précédentes, qui permettent d'améliorer les caractéristiques en question.

## 3.2 Stabilisation pratique appliquée à l'unicycle

### 3.2.1 Une première famille de lois de commande

Rappelons que les équations cinématiques du robot unicycle par rapport à un repère fixe (voir équation (1.11)) s'écrivent sous la forme condensée

$$\dot{g}_m = \sum_{i=1}^2 u_i X_i(g_m) \quad (3.1)$$

avec  $g_m = (x_m, y_m, \theta_m)^T \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ ,  $X_1(g_m) = (\cos \theta_m, \sin \theta_m, 0)^T$  et  $X_2(g_m) = (0, 0, 1)^T$ . Considérons alors sur  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} \approx SE(2)$ , l'opération de groupe  $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$  définie par

$$\forall g_{i=1,2} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \in SE(2), \quad g_1 g_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + R(\theta_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

On a la propriété :

**Proposition 5** *Les champs de commande  $X_1(g) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^T$  et  $X_2(g) = (0, 0, 1)^T$  sont invariants à gauche par rapport à l'opération de groupe (3.2)*

**Preuve :** Il suffit de vérifier que pour tout couple  $(g_1, g_2)$  de  $SE(2) \times SE(2)$

$$dl_{g_1}(g_2)X(g_2) = X(g_1g_2)$$

Par définition

$$dl_{g_1}(g_2) = \frac{\partial (g_1g_2)}{\partial g_2}$$

donc, pour la loi de groupe (3.2) :

$$dl_{g_1}(g_2) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

D'où,

$$dl_{g_1}(g_2)X_1(g_2) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} = X_1(g_1g_2)$$

De même

$$dl_{g_1}(g_2)X_2(g_2) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_2(g_1g_2)$$

■

Les résultats de la section 2.3 sont donc directement applicables à l'unicycle pour la stabilisation pratique de trajectoires quelconques. Soit  $g_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T$  la configuration d'un repère de référence  $\mathcal{R}_r$  par rapport à un repère fixe  $\mathcal{R}_0$  — voir la figure 1.5 pour les notations. On déduit facilement, à partir de la définition de l'opération de groupe (3.2), que

$$g_r^{-1}g_m = \begin{pmatrix} R(-\theta_r) \begin{pmatrix} x_m - x_r \\ y_m - y_r \end{pmatrix} \\ \theta_m - \theta_r \end{pmatrix}$$

Au vu de (1.15), l'élément  $g := g_r^{-1}g_m$  de  $SE(2)$  caractérise la situation de l'unicycle par rapport au repère de référence. D'autre part, d'après (1.18), l'équation (2.19) est satisfaite avec  $m = 2$  et

$$P(g, t) = - \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La relation (3.4) n'est autre que la réécriture de la relation (2.20) dans le cas particulier de l'unicycle.

Une décomposition possible de la vitesse  $\dot{g}_r$  du véhicule de référence sur une base de l'algèbre de Lie du groupe  $SE(2)$  est :

$$\dot{g}_r = \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} = u_1^r \begin{pmatrix} \cos \theta_r \\ \sin \theta_r \\ 0 \end{pmatrix} + u_2^r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3^r \begin{pmatrix} -\sin \theta_r \\ \cos \theta_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\dot{g}_r = \sum_{i=1}^3 u_i^r X_i(g_r) \quad (3.5)$$

avec  $X_3 = [X_2, X_1]$ . La composante  $u_1^r$  est la vitesse « longitudinale » du repère,  $u_3^r$  la vitesse « latérale », et  $u_2^r$  la vitesse de rotation instantanée. Selon que la composante  $u_3^r$  de la vitesse est nulle ou non, la trajectoire de référence est, ou n'est pas, admissible pour l'unicycle. Nous verrons par la suite comment cette information peut être intégrée dans la loi de commande pour conférer certaines propriétés à la tâche de suivi.

D'après ce qui précède, l'équation du système d'erreur de suivi est

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^2 u_i X_i(g) + P(g, t) \quad (3.6)$$

avec

$$P(g, t) = - \begin{pmatrix} u_1^r - y u_2^r \\ u_3^r + x u_2^r \\ u_2^r \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

et il s'agit maintenant de stabiliser pratiquement le point  $e = 0$  pour ce système. Une solution de commande est fournie par la relation (2.12). La mise en œuvre de cette loi de commande nécessite de

1. déterminer une fonction transverse pour l'unicycle ;
2. choisir un champ de vecteur  $Z(z)$  pour la dynamique de  $z = g f^{-1}$  en boucle fermée ;
3. choisir la condition initiale  $\alpha(0)$  pour la variable exogène  $\alpha$ , de sorte, par exemple, à assurer la stabilité de l'ensemble  $f(\mathbb{T})$  pour le système commandé.

Considérons d'abord la détermination de fonctions transverses. Pour l'unicycle, les champs  $\{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}$  forment une base graduée de  $\mathfrak{g}$ , associée au vecteur de poids  $r = (1, 1, 2)$ . Une famille de fonctions transverses associée à cette base est donnée par le théorème 7, c'est-à-dire par les équations (2.9)– (2.10) :

$$f(\alpha) = \exp(\varepsilon \sin \alpha X_1 + \varepsilon \cos \alpha X_2)$$

Le calcul de cette expression donne

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon \sin(\alpha) \frac{\sin(\varepsilon \cos \alpha)}{\varepsilon \cos \alpha} \\ \varepsilon \sin(\alpha) \left( \frac{1 - \cos(\varepsilon \cos \alpha)}{\varepsilon \cos \alpha} \right) \\ \varepsilon \cos \alpha \end{pmatrix}$$

**Preuve :**  $f(\alpha)$  est la solution à l'instant  $t = 1$  du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \cos \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (0) = 0$$

Par intégration directe, on obtient :

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \varepsilon \cos \alpha t \\ x_2(t) &= \varepsilon \sin \alpha \int_0^t \sin(\varepsilon \cos \alpha s) ds = \varepsilon \sin \alpha \left( \frac{1 - \cos(\varepsilon \cos \alpha t)}{\varepsilon \cos \alpha} \right) \\ x_1(t) &= \varepsilon \sin \alpha \int_0^t \cos(\varepsilon \cos \alpha s) ds = \varepsilon \sin \alpha \left( \frac{\sin(\varepsilon \cos \alpha t)}{\varepsilon \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

■

On vérifie facilement que la condition de transversalité (2.3) est satisfaite pour  $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ . Une autre famille de fonctions transverses est donnée par le résultat suivant :

**Proposition 6** *Pour tout  $\varepsilon_1 > 0$  et pour tout  $\varepsilon_2 \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , la fonction  $f : \mathbb{T} \longrightarrow SE(2)$  définie par*

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sin \alpha \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \cos \alpha \sin \alpha \\ \varepsilon_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

*est une fonction transverse pour les champs de vecteurs  $X_i$  du système (3.6).*

**Preuve :** La fonction (3.8) est obtenue en posant

$$f(\alpha) = \exp(\varepsilon_1 \sin \alpha \bar{X}_1 + \varepsilon_2 \cos \alpha X_2)$$

avec  $\bar{X}_1(g) = (1, g_3, 0)^T$ , une approximation homogène autour de  $g = 0$  de  $X_1(g) = (\cos g_3, \sin g_3, 0)^T$ . La condition de transversalité est équivalente au fait que la matrice

$$H(\alpha) := \begin{pmatrix} X_1(f(\alpha)) & X_2 & -\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_2 \cos \alpha) & 0 & -\varepsilon_1 \cos \alpha \\ \sin(\varepsilon_2 \cos \alpha) & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\cos 2\alpha}{2} \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout  $\alpha$ . Un calcul simple donne

$$\det(H) = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \cos^2 \alpha \left( \frac{\sin(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{\varepsilon_2 \cos \alpha} - \frac{\cos(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{2} \right) + \sin^2 \alpha \frac{\cos(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{2} \right] \quad (3.9)$$

Pour  $\varepsilon_2 \in (0, \frac{\pi}{2}]$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{T}$ , on a

$$0 \leq \frac{\cos(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{2} \leq \frac{1}{2}$$

et

$$0 < \frac{\sin(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{\varepsilon_2 \cos \alpha} - \frac{\cos(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{2}$$

Par conséquent, pour tout  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\varepsilon_2 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$\forall \alpha, \quad \det H(\alpha) < 0$$

■

Dans la section suivante, nous discuterons de l'influence des paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sur le comportement de l'unicycle, notamment en terme de précision du suivi et de dynamique des commandes.

Posons  $f = (f_1, f_2, f_3)^T$  et utilisons l'opération de groupe (3.2) afin de calculer nos nouvelles variables de commande :

$$z := gf^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - R(\theta - f_3) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \\ \theta - f_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

La dérivée de l'état  $z$  est donnée par (2.14) :

$$\dot{z} = dr_{f^{-1}}(g) \left( dl_z(f) \begin{pmatrix} X_1(f(\alpha)) & X_2 & -\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix} \bar{u} + P(g, t) \right) \quad (3.11)$$

Puisque

$$dl_{g_1}(g_2) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad dr_{g_2}(g_1) = \begin{pmatrix} I_2 & R(\theta_1) \begin{pmatrix} -y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le retour d'état (2.12) s'écrit alors

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_\alpha \end{pmatrix} = H(\alpha)^{-1} dl_{z^{-1}}(f) (dr_f(z)Z(z) - P(g, t)) \quad (3.12)$$

$$= H(\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} R(-z_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} I_2 & R(z_3) \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z(z) - P(g, t) \right)$$

avec  $u_\alpha = \dot{\alpha}$  et

$$H(\alpha) := \begin{pmatrix} X_1(f(\alpha)) & X_2 & -\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

En appliquant le retour d'état (3.12) au système (3.11), on obtient en boucle fermée :

$$\dot{z} = Z(z) \quad (3.14)$$

Un choix possible pour le champ de vecteurs stabilisant  $Z(z)$  est  $Z(z) = Kz$  avec  $K$  une matrice Hurwitz-stable. Un cas particulier consiste à découpler l'évolution de chacune des composantes de  $z$  en prenant  $K$  diagonale.

**Proposition 7** *En prenant  $Z(z) = -Kz$ , avec  $K$  une matrice définie positive, dans la relation (3.12), la distance entre  $g(t)$  à  $f(\alpha(t))$  converge uniformément exponentiellement vers zéro.*

**Preuve :** Au vu de (3.10), le taux de convergence de  $g$  vers  $f(\alpha)$  est le même que celui de  $z$  vers  $e$ . En posant  $Z(z) = -Kz$ , le système en boucle fermée (3.14) devient  $\dot{z} = -Kz$ . Comme  $K$  est une matrice positive, la convergence de  $z$  vers  $e$  est uniformément exponentielle. ■

Il reste à considérer le choix de  $\alpha(0)$ . Afin d'obtenir la stabilité asymptotique de l'ensemble  $f(\mathbb{T})$  pour le système (3.6), et pas seulement la convergence de  $g$  vers cet ensemble, un choix possible est donné par

$$\alpha(0) = \arctan2 \left( \frac{x(0)}{\varepsilon_1}, \frac{\theta(0)}{\varepsilon_2} \right) \quad (3.15)$$

En effet, on a

**Proposition 8** *L'application  $\alpha^* : g \mapsto \arctan2 \left( \frac{x}{\varepsilon_1}, \frac{\theta}{\varepsilon_2} \right)$  satisfait la propriété (2.15).*

**Preuve :** On procède par contradiction. Supposons que (2.15) ne soit pas vérifiée. Il existe alors une suite  $g^n$  et  $\delta > 0$ , tels que  $d(g^n, f(\mathbb{T})) \rightarrow 0$  et  $d(g^n, f(\alpha^*(g^n))) \geq \delta$ . Comme l'ensemble  $f(\mathbb{T})$  est un compact, il possède un voisinage compact et donc il existe, dans ce voisinage compact, une sous-suite convergente  $g^k$  de  $g^n$  telle que  $g^k \rightarrow \bar{g} \in f(\mathbb{T})$ .

Puisque  $\bar{g} \in f(\mathbb{T})$ , il existe  $\bar{\alpha}$  tel que  $\bar{g} = f(\bar{\alpha})$ . En utilisant la définition (3.8),

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = f(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cos \bar{\alpha} \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} \\ \varepsilon_2 \sin \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que  $\bar{\alpha} = \arctan2 \left( \frac{\bar{x}}{\varepsilon_1}, \frac{\bar{\theta}}{\varepsilon_2} \right)$ , soit en utilisant la définition de  $\alpha^*$  de la proposition 8 :

$$\bar{\alpha} = \alpha^*(\bar{g})$$

On a donc extrait de la suite  $g^n$  une sous-suite  $g^k$  telle que  $d(g^k, f(\alpha^*(\bar{g}))) \rightarrow 0$  et donc telle que  $d(g^k, f(\alpha^*(g^k))) \rightarrow 0$  puisque  $\alpha^*$  est continue sur un voisinage de  $f(\mathbb{T})$ . Ceci est

en contradiction avec l'hypothèse initiale sur la suite  $g^n$ . ■

La simulation présentée sur les figures 3.1 et 3.2 illustre les résultats précédents.

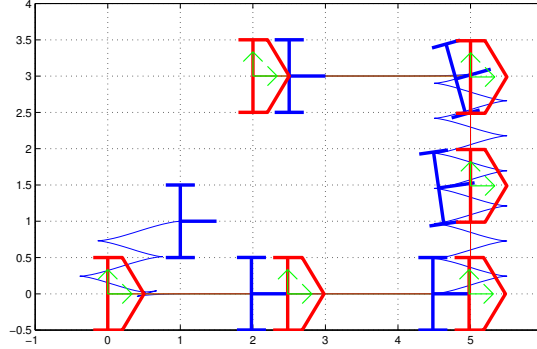


Figure 3.1 – Suivi de cible omnidirectionnelle : position cartésienne

Les paramètres du retour d'état (3.12) sont les suivants :

- la fonction  $f$  est donnée par l'équation (3.8) avec  $\varepsilon_1 = 0.5$  et  $\varepsilon_2 = 0.3$ ;
- le champ de vecteurs stabilisant  $Z(z)$  est choisi comme dans la proposition 7 avec  $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ ,  $k_{1,2,3} = 0.5$ ;
- la valeur initiale  $\alpha(0)$  de la fonction transverse  $f$  est déterminée par l'application  $\alpha^*$  de la proposition 8;
- le terme de perturbation  $P(g, t)$  est directement calculé à partir de la vitesse  $u^r$  appliquée au modèle cinématique de la cible (3.5).

Dans les simulations qui seront présentées par la suite, nous utiliserons toujours les mêmes conventions :

- le véhicule commandé, de type « unicycle » sur la figure 3.1, est représenté en bleu ;
- le repère  $\mathcal{R}_m$  associé au véhicule commandé n'est pas représenté car confondu avec le véhicule commandé ;
- le véhicule de référence, omnidirectionnel, est représenté en rouge ;
- le repère cible  $\mathcal{R}_r$ , rigidement lié au véhicule de référence, est représenté en vert.

C'est ce repère, appelé par la suite simplement la cible, que l'on cherche à stabiliser.

Durant la simulation représentée sur la figure 3.1, le véhicule de référence se déplace comme suit. Pendant les dix premières secondes, il est fixe et sa position correspond à  $(x_r, y_r, \theta_r) = (0, 0, 0)$  dans un repère fixe  $\mathcal{R}_0$ . Le robot de type « unicycle », initialement placé en  $(x_m, y_m, \theta_m) = (1, 1, 0)$ , effectue alors des manœuvres pour rejoindre la cible. On notera en particulier la décroissance exponentielle des trois composantes de la variable d'état  $z$  sur la figure 3.2(a), conformément au choix du champ de vecteur stabilisant  $Z(z)$ .

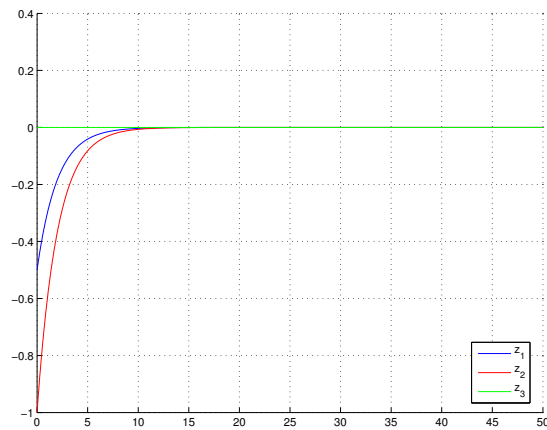
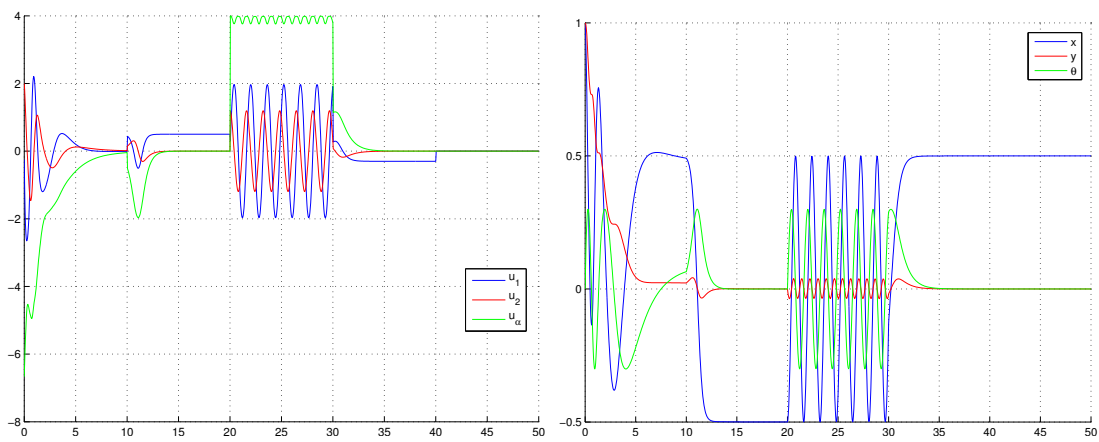
(a) Variable d'état  $z = gf^{-1}$ (b) Commandes  $\bar{u}$  de l'unicycle(c) Erreur en position  $g$ 

Figure 3.2 – Suivi de cible omnidirectionnelle : courbes associées



Après cette phase initiale, le véhicule de référence se déplace avec une vitesse longitudinale constante pendant dix secondes. Durant ce déplacement,  $\alpha$  tend vers  $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$ , de sorte que  $(x, y, \theta)$  tend alors vers  $(-\varepsilon_1, 0, 0)$ , — figure 3.2(c) pour  $t \in [10s, 20s[$ . La stabilité de l'équilibre de référence  $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$  pour la variable  $\alpha$  durant cette phase, est facilement démontrable — voir l'annexe A.1.1. Une meilleure précision de suivi durant cette phase peut être obtenue en diminuant la valeur du paramètre  $\varepsilon_1$ .

Pour  $t \in ]20s, 30s]$ , le véhicule de référence se déplace latéralement, en suivant donc une trajectoire non-admissible pour le robot de type « unicycle ». Celui-ci effectue alors des manœuvres afin de rester proche du véhicule de référence. Le nombre et la fréquence de ces manœuvres sont directement liés à la taille des  $\varepsilon_i$ . De façon générale, la réduction de ces paramètres améliore la précision de suivi au prix de manœuvres plus fréquentes.

A  $t = 30s$ , le véhicule de référence suit de nouveau une trajectoire réalisable par le robot, en reculant avec une vitesse longitudinale constante. Comme montré dans l'annexe A.1.1, il existe alors un nouveau point d'équilibre stable  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ , pour lequel la position relative entre le robot et la cible est  $(x, y, \theta) = (\varepsilon_1, 0, 0)$ . A partir de  $t = 40s$ , le véhicule de référence est arrêté. Tout point de  $f(\mathbb{T})$  est alors un point d'équilibre<sup>1</sup> pour le système (3.6) en boucle fermée. En l'absence de bruits de mesure, la position du robot n'évolue plus.

Terminons cette section par quelques remarques plus générales qui serviront de fil directeur pour développer des variantes de la version de base de l'approche de commande par fonctions transverses :

- la fonction transverse considérée ne s'annulant jamais, l'erreur de suivi  $g$  ne peut tendre vers zéro. Cependant, après la phase initiale correspondant à la convergence de la variable  $z$  vers zéro, chacune des composantes de  $g$  est bornée par une valeur indépendante de la trajectoire de référence. Cette valeur dépend uniquement des paramètres  $\varepsilon_i$  de la fonction transverse. Afin d'améliorer le suivi, on pourrait donc envisager de diminuer la valeur des  $\varepsilon_i$  et donc de contraindre  $g$  à être plus proche de zéro ;
- une difficulté porte alors sur le choix des paramètres de commande et le réglage du comportement sur la « zéro dynamique ». On appelle « zéro dynamique » le système dans la variable  $\alpha$  qui est obtenu lorsque l'équilibre stable  $z = 0$  est — quasiment — atteint. Puisque  $z = 0$  entraîne  $g = f(\alpha)$ , cette dynamique caractérise celle de l'erreur de suivi après extinction de la « phase transitoire », c'est-à-dire la phase pendant laquelle  $z$  n'est pas proche de zéro. En particulier, des variations périodiques rapides de la variable  $\alpha$  se traduisent par des comportements oscillatoires

---

1. non asymptotiquement stable par définition

de l'état du système avec la même fréquence. En pratique, de telles oscillations avec une fréquence élevée sont rarement souhaitables<sup>2</sup> ;

- enfin il s'agit de régler le transitoire de convergence de  $z$  vers zéro en jouant sur le choix de  $Z(z)$ . Il peut en particulier être souhaitable de minimiser l'effort de commande, ainsi que le nombre de manœuvres— ces deux aspects étant d'ailleurs liés — pendant la phase transitoire, lorsque l'erreur initiale  $g(0)$  est grande.

### 3.2.2 Influence des $\varepsilon_i$ sur la qualité du suivi

Dans la section précédente, nous avons illustré l'approche de commande par fonctions transverses par la simulation du suivi d'une cible omnidirectionnelle par un robot de type « unicycle ». Si globalement les choix initiaux des paramètres de la commande ont permis d'obtenir des résultats encourageants, un certain nombre de questions restent en suspens, en particulier concernant l'influence des paramètres de la commande sur la précision et la qualité du suivi.

La famille de fonctions transverses utilisée pour la simulation précédente 3.1 est donnée par l'équation (3.8) :

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sin \alpha \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \cos \alpha \sin \alpha \\ \varepsilon_2 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

A l'issue du transitoire initial correspondant à la convergence de la variable  $z$  vers zéro, on a  $g(t) = f(\alpha(t))$ , pour tout  $t$ . Chacune des coordonnées de l'erreur de suivi  $g$  est de ce fait ultimement asymptotiquement majorée par une valeur dépendant uniquement du choix des paramètres  $\varepsilon_i$  :

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \varepsilon_1 \\ \|y\| &\leq \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \\ \|\theta\| &\leq \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Ces inégalités montrent qu'il est possible de régler les erreurs maximales en position et en orientation via le choix des paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . S'il est tentant, à première vue, de choisir  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  très petits de sorte à beaucoup réduire les erreurs de suivi, il convient aussi de comprendre les inconvénients et limitations d'un tel choix.

Certaines limitations apparaissent déjà au regard de la relation donnant l'expression

---

2. Notons que dans certains cas, ces oscillations sont inévitables, comme dans l'exemple où on souhaite réaliser des déplacements dans la direction de l'essieu des roues arrières.

de la commande. En particulier, l'inverse de la matrice  $H$  intervient comme une « matrice de gains », dont la norme est minorable par un nombre inversement proportionnel à la valeur absolue du déterminant de  $H$ . Or, d'après (3.9) :

$$-\frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2 \leq \det(H) < 0$$

Il en résulte que si les  $\varepsilon_i$  sont trop faibles,

- la matrice  $H$  est mal conditionnée, conduisant à des problèmes numériques lors du calcul de son inverse ;
- les commandes peuvent prendre de très grandes valeurs lorsque  $P \neq 0$ .

En gardant ces considérations à l'esprit, examinons comment la modification des paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  affecte qualitativement le comportement du suivi. Nous nous intéressons dans un premier temps à l'influence du paramètre  $\varepsilon_1$ . Les simulations présentées sur la figure 3.3 correspondent à la partie de la simulation de la figure 3.1, où la cible passe d'un déplacement longitudinal admissible à un déplacement latéral non-admissible. Les paramètres de la commande — fonctions transverses, gains, vitesse de la cible... — sont les mêmes que pour la simulation précédente, seul le paramètre  $\varepsilon_1$  est modifié.

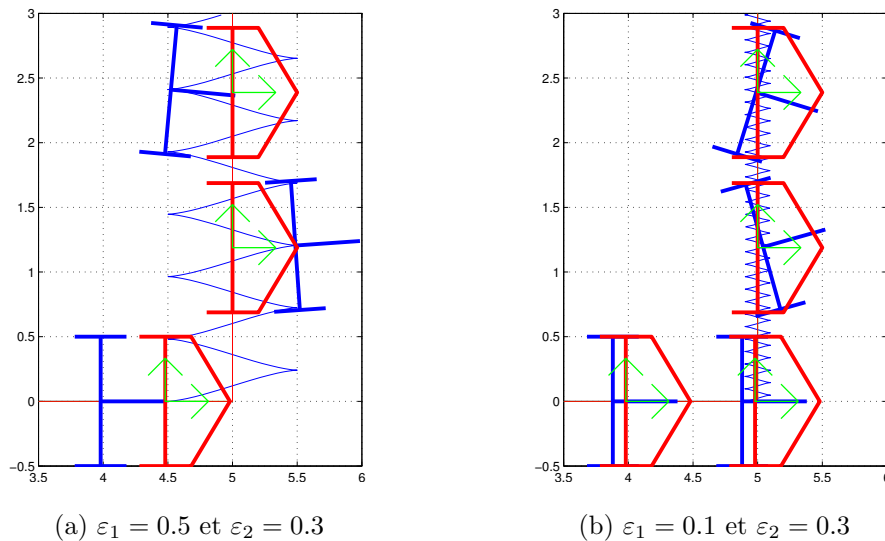


Figure 3.3 – Influence du paramètre  $\varepsilon_1$  sur le suivi de trajectoire non-admissible

La figure 3.3(a) correspond à la simulation initiale 3.1, c'est-à-dire que  $\varepsilon_1 = 0.5$ , alors que la figure 3.3(b) montre le comportement du robot pour  $\varepsilon_1 = 0.1$ . Comme les inégalités précédentes l'indiquent,  $\varepsilon_1$  influe en premier lieu sur l'erreur de position. Dans le cas d'une trajectoire réalisable, correspondant par exemple à la région inférieure des figures 3.3(a)

et 3.3(b), la réduction de  $\varepsilon_1$  entraîne celle de l'erreur de position sans nécessairement entraîner de manœuvres supplémentaires. Par contre, lorsque la trajectoire de référence n'est plus réalisable, le fait de contraindre le robot à être proche de la cible, entraîne logiquement un accroissement de la fréquence des manœuvres pour atteindre une telle précision — comme cela peut être observé sur la figure 3.3(b). Au niveau de la commande, cela se traduit par des valeurs de  $\dot{\alpha}$  élevées, qui elles-mêmes induisent des commandes  $u_{1,2}$  oscillant à fréquence élevée, comme le montre la figure 3.4. Sur le plan pratique, l'implémentation de telles commandes peut s'avérer problématique, notamment du fait des limitations des actionneurs.

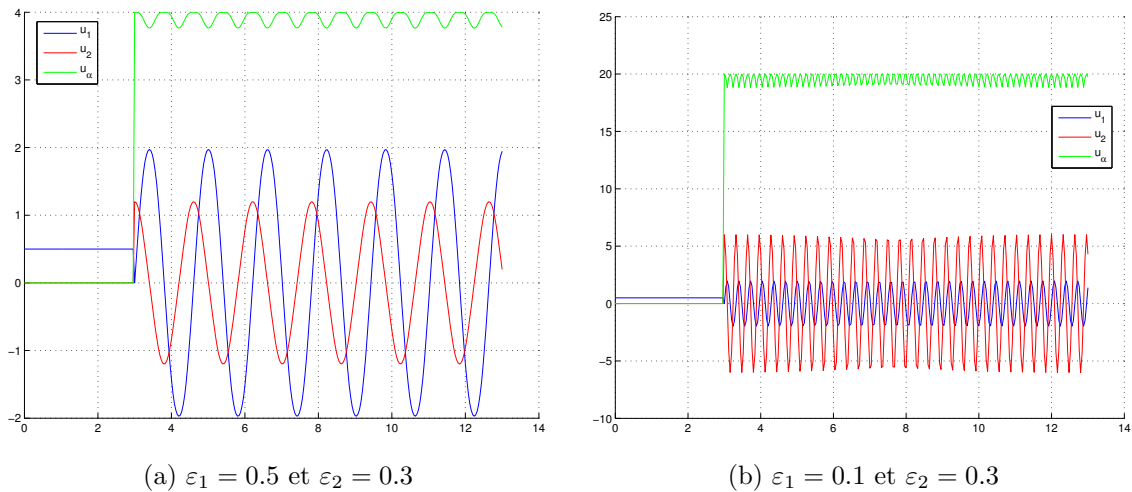
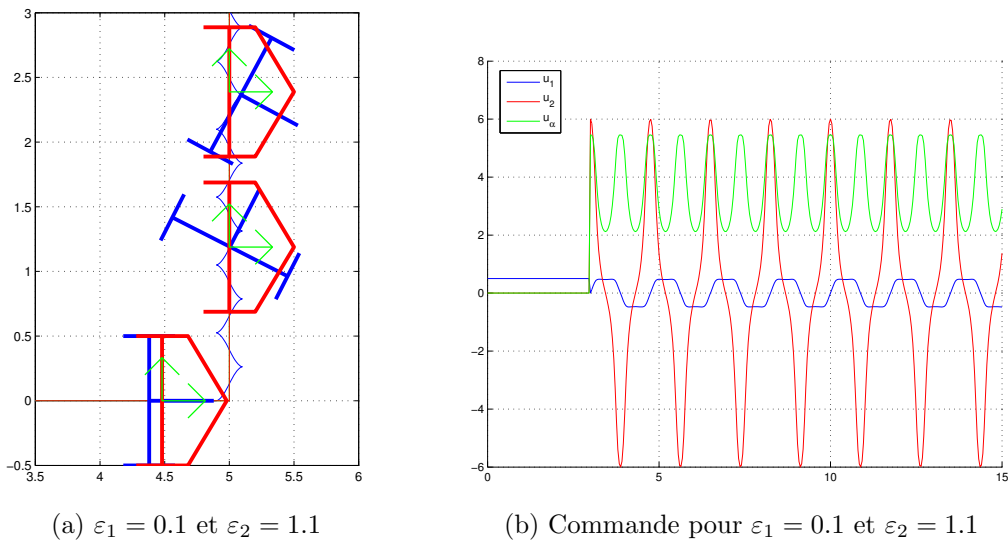
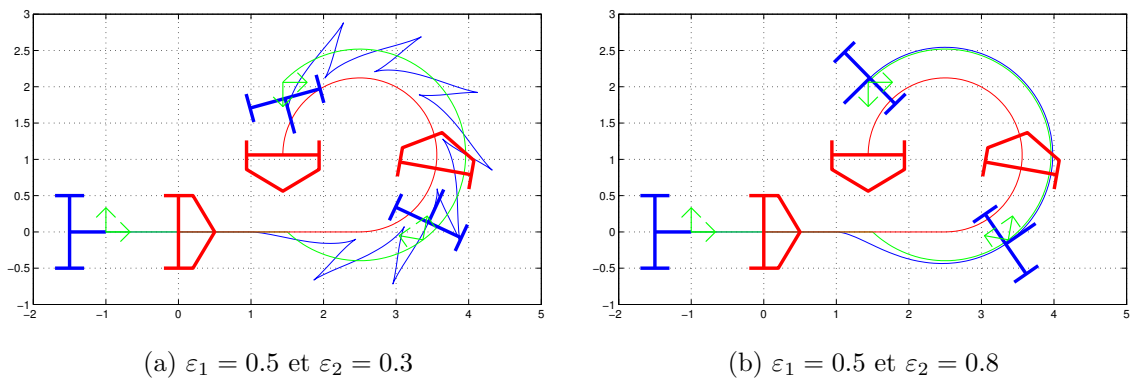


Figure 3.4 – Influence du paramètre  $\varepsilon_1$  sur la commande du robot « unicycle »

Une possibilité pour limiter ces dynamiques rapides consiste à augmenter le paramètre  $\varepsilon_2$  de sorte à réduire la précision en orientation sans pour autant trop dégrader la précision en position. La figure 3.5 représente le comportement du robot et des commandes dans le cas où  $\varepsilon_1 = 0.1$  et  $\varepsilon_2 = 1.1$ . Avec un tel choix de paramètres, le nombre de manœuvres nécessaires au suivi de la cible lorsqu'elle se déplace latéralement, est sensiblement réduit.

Les simulations précédentes concernent des mouvements rectilignes du repère de référence. La figure 3.6 illustre l'influence de  $\varepsilon_2$  lorsque la vitesse angulaire de ce repère est non nulle. Par rapport aux simulations précédentes, le repère  $\mathcal{R}_r$  qu'il s'agit de suivre est rigidement déporté à l'arrière du véhicule de référence. La trajectoire de ce véhicule se décompose comme suit : initialement positionné en  $(0, 0, 0)$ , le véhicule se déplace d'abord à vitesse constante  $v^r = (v_1^r, 0, 0)^T$  pendant cinq secondes, puis avec une vitesse constante  $v^r = (v_1^r, v_2^r, 0)$  jusqu'à la fin de la simulation. Il est important de remarquer que, bien

Figure 3.5 – Amélioration du suivi avec l'augmentation de  $\varepsilon_2$ Figure 3.6 – Influence du paramètre  $\varepsilon_2$  sur l'existence d'équilibre  $\alpha_0$  lors du suivi de trajectoires non-admissibles

que le véhicule de référence se déplace le long d'une trajectoire admissible pour le robot de type « unicycle »— puisque  $v_3^r \equiv 0$  durant toute la simulation —, la trajectoire du repère  $\mathcal{R}_r$  déporté n'est plus admissible lorsque la trajectoire du véhicule cible n'est pas rectiligne.

Dans la simulation 3.6(a),  $\varepsilon_2$  est trop faible pour permettre au robot de suivre le repère avec la précision désirée sans faire de manœuvre. En effet, il faudrait pour cela que l'erreur angulaire  $\theta$  entre le robot et le repère reste inférieure à  $\sup_\alpha |f_3(\alpha)| = \varepsilon_2$ . Cependant, en prenant  $\varepsilon_2$  suffisamment grand, et donc en acceptant une plus grande erreur d'orientation, le robot peut suivre le repère sans faire de manœuvres. Ce dernier cas illustre la possibilité de suivre « pratiquement » des trajectoires non-admissibles, sans effectuer de manœuvres.

Les conditions d'existence de points d'équilibre asymptotiquement stables de la variable exogène  $\alpha$  en fonction de certaines trajectoires suivies sont résumées sous la forme du lemme suivant :

**Lemme 2** *On s'intéresse au retour d'état (3.12) associé à la fonction transverse (3.8). On suppose de plus que le véhicule omnidirectionnel de référence se déplace :*

- a. *sur une ligne droite avec une orientation non nécessairement donnée par le vecteur directeur de cette droite. Dans ce cas le repère  $\mathcal{R}_r$  associé se déplace avec une vitesse  $u^r = (u_1^r, 0, u_3^r)^T$  constante. Alors, si  $u_1^r \neq 0$  et  $\arctan \left| \frac{u_3^r}{u_1^r} \right| < \varepsilon_2$ ,*

$$\alpha_0 = -\text{sign}(u_1^r) \arccos \left( \frac{\arctan \frac{u_3^r}{u_1^r}}{\varepsilon_2} \right)$$

*est un point d'équilibre asymptotiquement stable de la variable  $\alpha$  sur la zéro dynamique  $z = 0$  ;*

- b. *le long d'un cercle de rayon  $\rho$  avec une orientation donnée par la tangente au cercle (c'est-à-dire en respectant la contrainte de non-holonomie de l'unicycle). Dans ce cas le repère  $\mathcal{R}_r$  associé se déplace avec une vitesse  $u^r = (\rho u_2^r, u_2^r, -du_2^r)^T$  constante, où  $d$  correspond au déport entre le repère  $\mathcal{R}_r$  et le véhicule de référence. Alors, si  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont choisis tels que  $d > \varepsilon_1$  et  $\arctan \left( \frac{d}{\rho} \right) < \varepsilon_2 < \frac{4}{3} \frac{\rho}{\varepsilon_1}$ , il existe un point d'équilibre asymptotiquement stable de la variable  $\alpha$  sur la zéro dynamique  $z = 0$ .*

**Preuve :** La démonstration du lemme 2 est donnée dans l'annexe A.1. ■

**Remarque 1** Le point a) de ce lemme indique qu'une vitesse latérale non nulle du repère de référence n'entraîne pas nécessairement la réalisation de manœuvres par le véhicule

commandé suiveur. Tout dépend de l'erreur d'orientation maximale tolérée donnée par le paramètre  $\varepsilon_2$ , en relation avec l'angle de « dérapage » — égal à  $\arctan\left(\frac{u_2^r}{u_1^r}\right)$  — du repère de référence. Les conditions du point b) du lemme montrent essentiellement qu'en choisissant  $\varepsilon_1$  suffisamment petit, il est toujours possible de trouver une valeur de  $\varepsilon_2$  — inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  — au delà de laquelle le suivi peut être réalisé sans manœuvres. Elle montre aussi que cette valeur augmente avec la distance de déport du repère  $\mathcal{R}_r$  par rapport au véhicule de référence, ainsi qu'avec la courbure du chemin suivi par ce véhicule.

Les simulations précédentes illustrent le compromis inévitable entre la précision de suivi et la fréquence des manœuvres. En règle générale, et en l'absence de connaissance *a priori* sur la trajectoire de la cible :

- $\varepsilon_1$  suffisamment petit permet de garantir une faible erreur en position ;
- $\varepsilon_2$  suffisamment grand permet d'éviter, ou tout du moins réduire, le nombre et la fréquence des manœuvres nécessaires pour suivre la cible lorsque sa trajectoire n'est pas admissible pour le robot.

Toutefois, quelque soit les valeurs choisies pour ce couple de paramètres, certaines manœuvres non désirées (« parasites ») peuvent se produire, alors qu'elles ne semblent pas nécessaires au suivi. Les simulations représentées sur les figures 3.7(a) et 3.7(b) illustrent ce phénomène.

Il s'agit de suivre une cible effectuant un aller retour le long d'une ligne droite : durant la première partie de la simulation, non représentée sur les figures, la cible avance avec une vitesse constante  $u^r = (a, 0, 0)^T$ , puis, durant la deuxième partie de la simulation, la cible recule avec la vitesse  $u^r = (-a, 0, 0)$ .

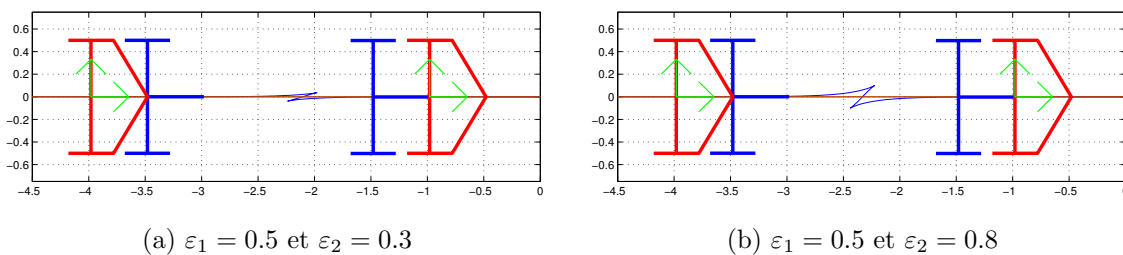


Figure 3.7 – Manœuvres parasites lors du passage marche-avant/marche-arrière

On montre que durant la première phase de la simulation,  $\alpha$  converge vers  $-\frac{\pi}{2}$  — voir le lemme 2. La vitesse longitudinale de la cible étant négative dans la deuxième partie de la simulation, cette valeur  $-\frac{\pi}{2}$  correspond alors à un équilibre instable pour la variable  $\alpha$ , alors que la valeur  $\frac{\pi}{2}$  devient un attracteur. Ce changement discontinu de la valeur

d'équilibre de la variable  $\alpha$  entraîne la convergence, continue, de  $\alpha$  vers la nouvelle valeur d'équilibre stable  $\frac{\pi}{2}$ . La dynamique de l'erreur  $g$  et celle de la variable  $\alpha$  étant liées, le robot effectue alors une manœuvre faisant passer l'erreur de position  $g$  de  $(-\varepsilon_1, 0, 0)^T$  — erreur à la fin de la première partie de la simulation —, à  $g = (\varepsilon_1, 0, 0)^T$ . L'amplitude de cette manœuvre, ainsi que celle des commandes associées, dépend directement des valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . La première décroît lorsque ces paramètres sont choisis plus petits. Ceci est illustré sur les figures 3.8(a) et 3.8(b), dans le cas du paramètre  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1$  étant gardé constant).

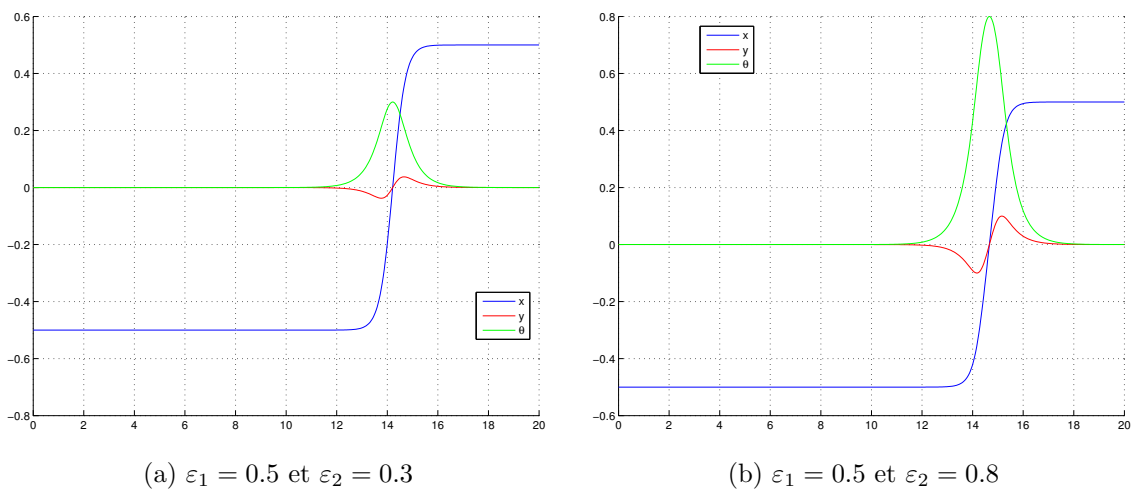


Figure 3.8 – Erreurs de suivi pour deux valeurs de  $\varepsilon_2$  lors du passage marche-avant/marche-arrière du repère de référence

Cet aspect, très lié à l'impossibilité de stabiliser asymptotiquement toutes les trajectoires réalisables d'un système avec une seule loi de commande — théorème 3, chapitre 1 — fait que pour certaines d'entre elles, le comportement du système est qualitativement moins satisfaisant que celui obtenu avec d'autres lois de commande conçues spécifiquement pour ces trajectoires. On se trouve ici face à un compromis qui semble inévitable. D'un côté, choisir  $\varepsilon_1$  petit — mais pas trop — et  $\varepsilon_2$  grand semble génériquement convenir à un objectif de suivi avec une faible erreur en position, tout en limitant le nombre de manœuvres nécessaires pour suivre des trajectoires non-admissibles. D'un autre côté, il est préférable de choisir  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  petits lorsque la trajectoire de référence est réalisable, afin de limiter certains effets « parasites » au passage de points de rebroussement. La gestion de ce compromis suggère de faire varier  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  en fonction des propriétés de la trajectoire de la cible. Néanmoins, le succès de toute solution de ce type est forcément limité dans le cas où on ne connaît pas *a priori* la trajectoire que va suivre



la cible. Une mise en œuvre de cette possibilité, reposant sur l'utilisation de variables complémentaires dont dépend la fonction transverse pour moduler la taille de cette fonction de façon « adaptative », plutôt que sur un mécanisme de variation des paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , est étudiée dans la section suivante.

### 3.2.3 Une nouvelle famille de fonctions transverses

Dans (Morin et Samson, 2004a), le concept de fonction transverse « généralisée » a été introduit, pour résoudre le problème de la stabilisation asymptotique de  $g$  à zéro lorsque la cible est fixe. L'idée sous-jacente, dans le cas particulier qui nous intéresse où  $m = n - 1$ , est d'utiliser une famille de fonctions transverses de deux variables  $\alpha$  et  $\beta$ , telle que  $\forall \beta \in \mathbb{T}$ ,  $f(0, \beta) = 0$ . Le degré de liberté supplémentaire associé à la deuxième variable  $\beta$  est alors utilisé pour faire tendre  $\alpha$  vers zéro et donc  $f(\alpha, \beta)$  vers zéro.

Puisque, dans notre cas, la cible est — ou peut être — en mouvement et que la stabilisation asymptotique de  $g$  à zéro est généralement impossible — par exemple lorsque la trajectoire n'est pas réalisable —, il est moins primordial que la fonction transverse s'annule lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. Il est préférable qu'elle devienne petite, sans s'annuler, dès lors que cela permet de modifier à volonté la valeur de  $\alpha$  via le choix de la variable de commande complémentaire  $\beta$ . Pour cette raison, nous nous intéressons à une extension d'une famille de fonctions transverses généralisées définie dans (Morin et Samson, 2004a).

**Proposition 9** *Pour tout  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , et pour tout  $\gamma \in [0, 1]$ ,  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow G$  définie par*

$$f = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \arctan \bar{f}_3)^T \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{pmatrix} (\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 (\sin(\alpha + \beta) - \gamma \sin \beta) \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} ((\sin(\alpha + \beta) - \gamma \sin \beta) (\cos(\alpha + \beta) - \gamma \cos \beta) - \gamma \sin \alpha) \\ \varepsilon_2 (\cos(\alpha + \beta) - \gamma \cos \beta) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

est une famille de fonctions transverses au système (3.6), par rapport à la dépendance en  $\alpha$ .

**Preuve :** La condition de transversalité par rapport à  $\alpha$  est équivalente au fait que la

matrice

$$H(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} X_1(f(\alpha, \beta)) & X_2 & -\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+f_3^2}} & 0 & -\varepsilon_1 \cos(\alpha + \beta) \\ \frac{f_3}{\sqrt{1+f_3^2}} & 0 & -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (-\gamma \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha + \beta) - \gamma \cos \beta) - \sin(\alpha + \beta)(\sin(\alpha + \beta) - \gamma \sin \beta))}{2} \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{1 + \varepsilon_2^2 (\cos(\alpha + \beta) - \gamma \cos \beta)^2} \end{pmatrix}$$

avec  $\bar{f}_3 = \varepsilon_2(\cos(\alpha + \beta) - \gamma \cos \beta)$ , soit inversible pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}$  et  $\gamma \in [0, 1]$ . Un calcul simple donne

$$\det H(\alpha, \beta) = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2\sqrt{1 + \varepsilon_2^2 (\cos(\alpha + \beta) - \gamma \cos \beta)^2}}$$

Donc pour  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , et pour  $\gamma \in [0, 1]$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^2, \quad \det H(\alpha, \beta) < 0$$

■

La variable  $\beta$  et le paramètre  $\gamma$  représentent des degrés de liberté supplémentaires qui peuvent être utilisés pour « contrôler » la taille de  $f(\alpha, \beta)$  et atteindre des objectifs de commande secondaires. Cette possibilité est illustrée dans la suite de l'exposé par deux propositions.

Remarquons auparavant que la dérivé de l'état  $z = gf^{-1}$  est donnée par — voir la preuve de la proposition 3 :

$$\dot{z} = dr_{f^{-1}}(g) \left( dl_z(f) \begin{pmatrix} X_1(f(\alpha)) & X_2 & -\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \bar{u} - dl_z(f) \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \dot{\beta} + P(g, t) \right) \quad (3.19)$$

On obtient alors le résultat suivant qui généralise la proposition 3 :

**Proposition 10** *Soit le système (3.6) sur le groupe de Lie  $G$ , tel que le système sans dérive associé soit commandable et le terme de dérive  $P$  soit continu. Soit  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow G$  une fonction transverse aux champs de vecteurs  $X_i$  du système (3.6). Alors le retour d'état dynamique défini pour tout  $\dot{\beta}$  régulier, par*

$$(u, \dot{\alpha})^T = H(\alpha, \beta)^{-1} dl_{z^{-1}}(g) \left( dr_f(z) Z(z) + dl_z(f) \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \dot{\beta} - P(g, t) \right) \quad (3.20)$$

avec  $z = gf^{-1}(\alpha, \beta)$  et  $H(\alpha, \beta)$  la matrice inversible définie par (3.18), appliqué au système (3.19), conduit à l'équation en boucle fermée

$$\dot{z} = Z(z) \quad (3.21)$$

Par conséquent, si  $Z(z)$  est un retour d'état qui stabilise asymptotiquement l'origine du système (3.21),  $z$  converge vers  $e$ , et donc  $g$  vers  $f(\alpha, \beta)$ .

**Preuve :** Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 3, en remarquant que

$$\dot{f}(\alpha, \beta) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta)\dot{\beta}$$

■

La proposition suivante indique comment le choix de  $\dot{\beta}$  permet de garantir des propriétés complémentaires.

**Proposition 11** *On suppose que le retour d'état  $\bar{u} = (u, \dot{\alpha})^T$ , défini par l'équation (3.20) et la donnée d'un champ  $Z(z)$  qui stabilise asymptotiquement l'origine du système  $\dot{z} = Z(z)$ , est appliqué au système (3.11), en utilisant une des fonctions transverses définies par les équations (3.16)–(3.17). Alors :*

1. Avec  $\gamma = 1$ ,  $\dot{\beta} = u_\beta = k \tan(\alpha/2)$  avec  $k$  positif,  $\alpha(0) = 0$ , et  $\beta(0)$  quelconque, le point d'équilibre  $g = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système (3.6) lorsque la cible est fixe.
2. Avec  $\gamma \in ]0, 1[$ ,  $k$  positif et quelque soit  $(\alpha(0), \beta(0)) \in ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{T}$

$$\dot{\beta} = u_\beta = \frac{k}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \alpha} \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\bar{f}_3(u_2^r \bar{f}_2 - u_1^r) + u_2^r \bar{f}_1}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \alpha} \quad (3.22)$$

$\alpha(t)$  converge exponentiellement vers zéro, lorsque la troisième composante  $u_3^r$  de la vitesse de la cible (3.5) est nulle, c'est-à-dire pour des trajectoires de référence admissibles. Dans ce cas, la convergence de  $g(t)$  vers  $f(\mathbb{T}^2)$  implique que la norme de l'erreur de suivi  $g$  est ultimement bornée par  $\max_\beta \|f(0, \beta)\| \leq (1 - \gamma) \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4})\|$ .

3. Quelque soit la loi de variation de  $\beta$  et la valeur de  $\gamma \in [0, 1]$ , la convergence de  $g(t)$  vers  $f(\mathbb{T}^2)$  entraîne que la norme de l'erreur de suivi  $g$  est ultimement majorée par  $\max_{(\alpha, \beta)} \|f(\alpha, \beta)\| \leq 2 \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2)\|$ .

**Preuve :** Voir l'annexe A.2

■

La première partie de cette proposition, avec  $\gamma = 1$ , correspond à la définition et à l'utilisation des familles de fonctions transverses généralisées présentées dans (Morin et Samson, 2004a). En choisissant  $\gamma = 1$ , on peut donc stabiliser asymptotiquement le repère de la cible lorsque celle-ci est fixe. La deuxième partie démontre la possibilité d'augmenter, de façon automatique, la précision du suivi lorsque la trajectoire de la cible est admissible pour le robot commandé. On rappelle en effet que la cible suit une trajectoire admissible pour le robot de type « unicycle » dès que  $u_3^r = 0$  dans l'équation (3.5). En choisissant  $\gamma$  proche de 1, des erreurs de suivi très faibles peuvent être obtenues. Lorsque la trajectoire

suivie n'est plus admissible, c'est-à-dire si  $u_3^r \neq 0$ , il est alors préférable de réduire la précision du suivi afin de diminuer la fréquence, et donc le nombre, des manœuvres. Dans ce cas, comme le montre la troisième partie de la proposition 11, l'erreur de suivi  $g$  reste majorée par un nombre dont la taille est toujours ajustable par le choix des paramètres  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ .

Les simulations présentées sur les figures 3.9 et 3.10 illustrent les performances de cette approche par rapport aux résultats obtenus avec une fonction transverse d'une seule variable  $f(\alpha)$ . Afin de pouvoir comparer le retour d'état (3.20) avec le retour d'état précédent (3.12), on utilise, lorsque c'est possible, les mêmes paramètres de commande. Les paramètres du retour d'état (3.20) sont donc les suivants :

- la fonction transverse  $f(\alpha, \beta)$  est donnée par l'équation (3.16) avec  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0.3$ , et  $\gamma = 0.9$  ;
- le champ stabilisant  $Z(z)$  est le même que celui de la simulation 3.1, c'est-à-dire  $Z(z) = -Kz$  avec  $K = 0.5I_3$  ;
- les valeurs initiales  $\alpha(0)$  et  $\beta(0)$  de la fonction transverse  $f$  sont respectivement  $\alpha(0) = 0$  et  $\beta(0) = \frac{\pi}{2}$  ;
- la commande complémentaire  $u_\beta = \dot{\beta}$  est donnée par l'équation (3.22) avec  $k = 2$ .

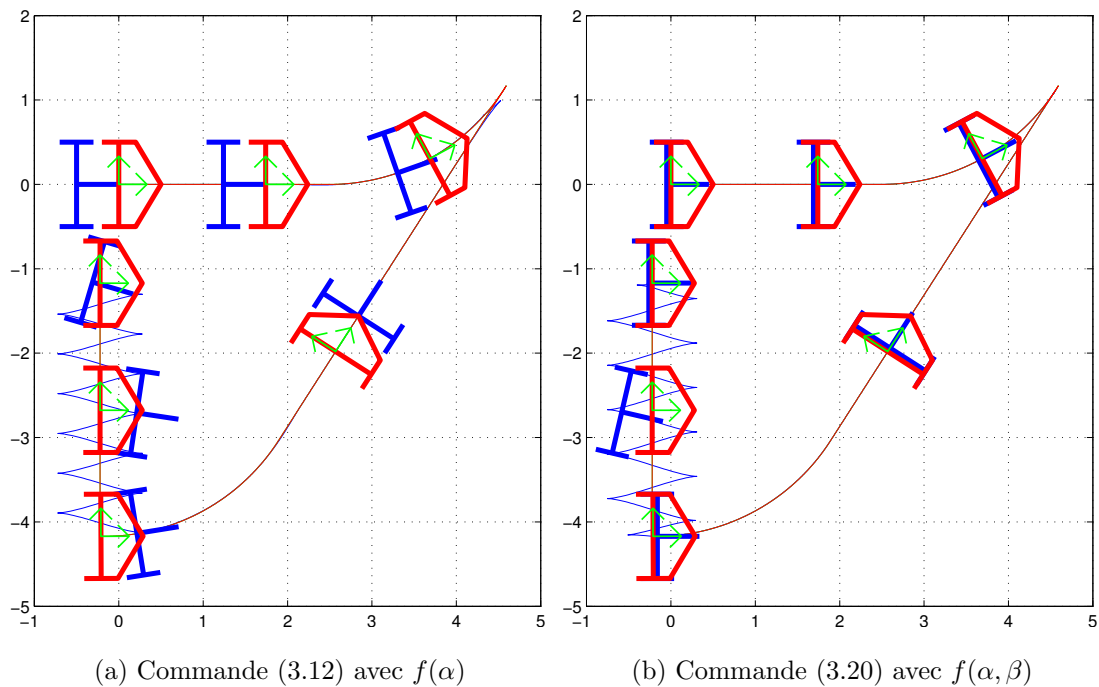


Figure 3.9 – Amélioration de la précision du suivi : position cartésienne

Dans ces deux simulations la cible se déplace d'abord en suivant une trajectoire admissible pour le robot de type « unicycle », c'est-à-dire  $u_3^r = 0$ , avec une vitesse longitudinale positive, puis avec une vitesse longitudinale négative. L'erreur de suivi est effectivement réduite sur la seconde figure grâce au mécanisme d'adaptation de la précision — comparer pour plus de détails les figures 3.10(a) et 3.10(b). Pendant la deuxième partie de la simulation, la cible se déplace latéralement, donc selon une trajectoire non réalisable par le robot. Celui-ci fait alors des manœuvres pour suivre la cible. Si la précision du suivi n'est pas modifiée dans le cas de la simulation 3.9(a), elle est automatiquement réduite dans le cas de la simulation 3.9(b), afin de limiter la fréquence des manœuvres du robot. La troisième partie de la simulation correspond finalement à la stabilisation pratique d'une configuration fixe. La vitesse de la cible étant nulle, le mécanisme d'adaptation de la précision permet d'obtenir une erreur finale réduite sur la figure 3.9(b) par rapport à la figure 3.9(a).

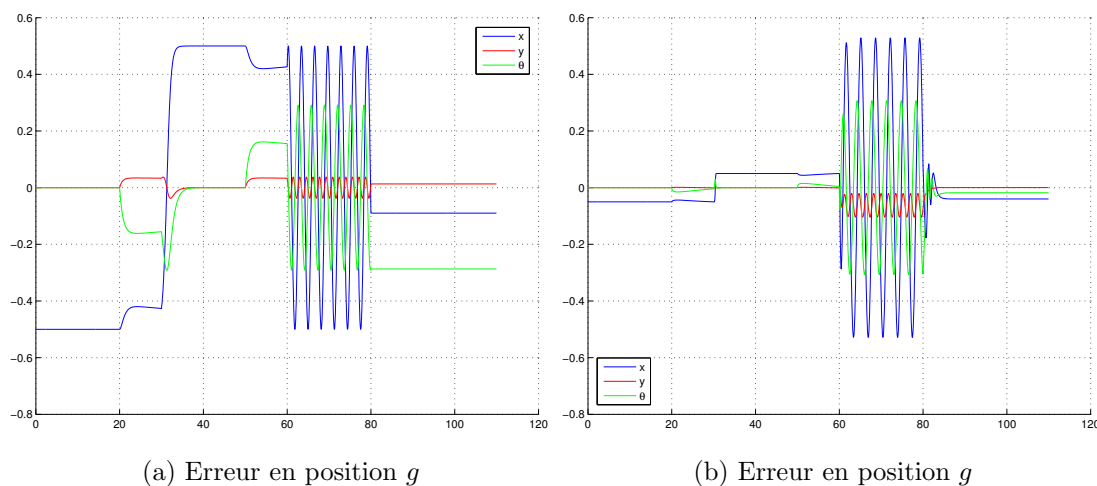


Figure 3.10 – Amélioration de la précision du suivi : erreur de position  $g$

Le mécanisme d'adaptation de la précision permet aussi de réduire fortement l'amplitude des manœuvres « parasites » aux points de rebroussement. Cette amélioration est illustrée sur les figures 3.11(a) et 3.11(b). Ces deux courbes correspondent à la simulation 3.7 où il s'agit de suivre une cible effectuant un aller retour le long d'une ligne droite. Les paramètres des fonctions transverses utilisées sont  $\varepsilon_1 = 0.5$  et  $\varepsilon_2 = 0.8$ . La figure 3.11(a) reprend les résultats obtenus précédemment avec une fonction transverse d'une seule variable  $\alpha$ . En comparaison, les résultats obtenus avec le mécanisme d'adaptation de la précision sur la figure 3.11(b) montrent la quasi suppression de la manœuvre « parasite ». Plus précisément, le fait que l'amplitude de la manœuvre soit dix fois plus

faible est une conséquence directe des choix des paramètres additionnels de la fonction transverse de deux variables utilisée pour le mécanisme d'adaptation :  $\gamma = 0.9$  et  $k = 2$ .

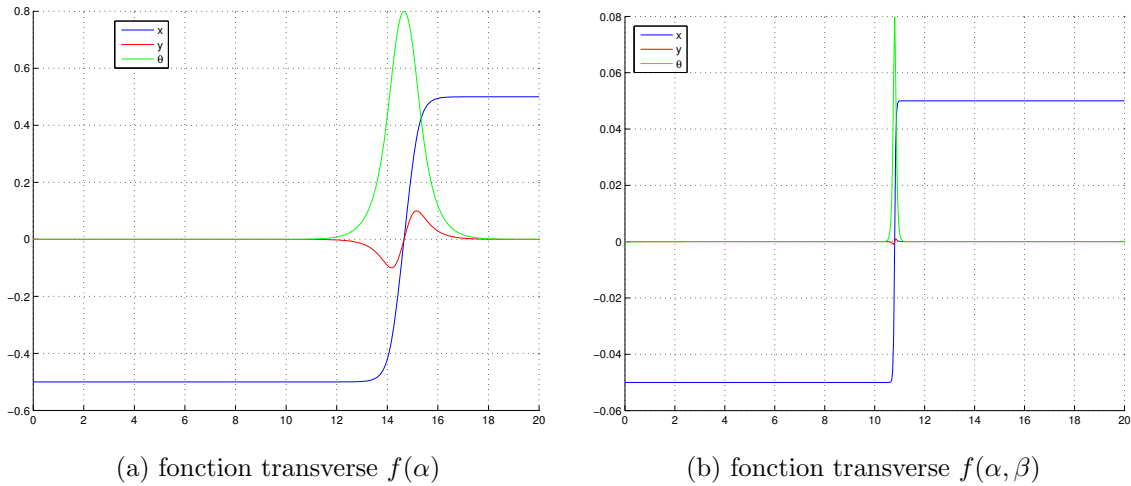


Figure 3.11 – Diminution des erreurs de suivi lors du passage marche-avant/marche-arrière du repère de référence avec le mécanisme d'adaptation de la précision

### 3.2.4 Réglage du transitoire via la résolution d'un problème d'optimisation

Dans ce qui suit, le champ  $Z(z)$  intervenant dans l'expression (3.20) de la commande est vu comme un vecteur de commande auxiliaire noté  $v$ . L'approche de commande par fonctions transverses permet de linéariser la dynamique de la variable  $z$  en  $\dot{z} = v$ , de sorte que tout retour d'état  $v = -Kz$ , avec  $(-K)$  une matrice Hurwitz-stable, peut être utilisé pour assurer la convergence exponentielle de  $z$  vers zéro. Néanmoins, rien ne permet d'affirmer que ce choix garantit des propriétés intéressantes à la trajectoire cartésienne du robot pendant la phase transitoire de convergence de  $z$  vers zéro. En fait, les simulations réalisées avec une matrice  $K$  diagonale indiquent que le choix d'une matrice constante n'est probablement pas le meilleur parce qu'il tend à produire un nombre important de manœuvres, dont la fréquence élevée va de pair avec de grandes entrées de commande. Afin d'améliorer cet aspect de la commande, nous proposons de choisir  $v$  de sorte à minimiser la norme du contrôle  $\bar{u} = (u, \dot{\alpha})^T$ , sous la contrainte de toujours obtenir une décroissance exponentielle de la norme de  $z(t)$  vers zéro.

Par soucis de concision d'écriture des équations, mais aussi par soucis de généralité, les systèmes (3.11) et (3.19) sont réécrits sous la forme suivante :

$$\dot{z} = \bar{H}\bar{u} - w \quad (3.23)$$

Avec

- pour le système (3.11) (avec une fonction transverse dépendant d'une seule variable)

$$\begin{aligned} \bar{H} &= dr_{f^{-1}}(g)dl_z(f)H(\alpha) \\ w &= -dr_f^{-1}(g)P(g, t) \end{aligned}$$

où la matrice  $H(\alpha)$  est définie par (3.13), et  $f$  par (3.8) ;

- pour le système (3.19) (avec une fonction transverse généralisée dépendant de deux variables)

$$\begin{aligned} \bar{H} &= dr_{f^{-1}}(g)dl_z(f)H(\alpha, \beta) \\ w &= dr_{f^{-1}}(g)dl_z(f) \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta} - dl_{z^{-1}}(g)P(g, t) \right) \end{aligned}$$

où la matrice  $H(\alpha, \beta)$  est définie par (3.18), et  $f$  par (3.16)–(3.17) ;

On considère alors le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{(u, \dot{\alpha})} J := \frac{1}{2} (\delta_1 \|u\|^2 + \delta_2 \dot{\alpha}^2) \\ z^T \dot{z} = -z^T K z \end{cases} \quad (3.24)$$

avec  $u := (u_1, u_2)$ ,  $\delta_1, \delta_2 > 0$ ,  $K$  une matrice définie positive, et  $\dot{z}$  donné par l'équation (3.23). La solution de ce problème s'obtient simplement en appliquant la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

**Lemme 3** *La solution au problème d'optimisation (3.24) est*

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \right\}^* = \bar{u}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\delta_1 \eta} (z^T K z - z^T w) \bar{H}_1^T z \\ -\frac{1}{\delta_2 \eta} (z^T K z - z^T w) \bar{H}_2^T z \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

avec

$$\eta = z^T (\delta_1^{-1} \bar{H}_1 \bar{H}_1^T + \delta_2^{-1} \bar{H}_2 \bar{H}_2^T) z \quad (3.26)$$

et  $\bar{H}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $\bar{H}_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  les matrices définies par  $\bar{H} = (\bar{H}_1, \bar{H}_2)$ .

**Preuve :** La preuve du lemme 3 est donné dans l'annexe A.3. ■

Lorsque  $w = 0$ , le retour d'état (3.25) reste défini en  $z = 0$  par continuité. Il est alors égal à zéro. Sinon ce retour d'état n'est pas défini en  $z = 0$ . Pour contourner cette difficulté, tout en gardant les qualités de la solution proposée par le lemme 3 lorsque  $|z|$  est grand, on propose de combiner linéairement le retour d'état (3.25) avec le retour d'état (3.20) — ou (3.12) — associé au choix  $Z(z) = -Kz$ .

Remarquons tout d'abord qu'en prenant  $Z(z) = -Kz$  comme champ de vecteurs stabilisant, les deux retours d'état (3.12) et (3.20) peuvent s'écrire

$$\bar{u}_{zl} = \bar{H}^{-1}(w - Kz) \quad (3.27)$$

avec l'indice  $zl$  rappelant que l'on obtient un système linéaire par rapport à la variable  $z$  en appliquant cette commande au système (3.23).

**Proposition 12** *Soit*

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{\eta}{\eta + \psi}\right) \bar{u}_{zl} + \frac{\eta}{\eta + \psi} \bar{u}^* \quad (3.28)$$

avec  $\bar{u}_{zl}$ ,  $\bar{u}^*$ , et  $\eta$  définis respectivement par (3.27), (3.25), et (3.26), et  $\psi$  une — petite — constante positive. Alors, le retour d'état (3.28) est défini partout, et l'origine  $z = 0$  du système en boucle fermée (3.23)–(3.28) est exponentiellement stable lorsque la matrice  $K$  est définie positive.

**Preuve :** La preuve de cette proposition est donnée dans l'annexe A.4. ■

Les figures 3.12(a) et 3.12(b) montrent les trajectoires suivies par le robot lorsque la cible est fixe et l'erreur de position initiale est grande. Le retour d'état utilisé est donné par l'équation (3.27) dans le cas de la figure 3.12(a), et par l'équation (3.28) dans le cas de la figure 3.12(b). Pour les deux simulations, la matrice  $K$  est choisie égale à la matrice identité  $I_3$ . Les paramètres du retour d'état (3.28) sont les suivants :  $\delta_1 = 1$ ,  $\delta_2 = 0.1$ , et  $\psi = 0.05$ . La fonction transverse — généralisée — utilisée est donnée par (3.16)–(3.17), avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0.3$ , et  $\gamma = 0.9$ . La commande complémentaire  $u_\beta = \dot{\beta}$  est donnée par l'équation (3.22) avec  $k = 3$ . Il apparaît, au vu des figures 3.12(a) et 3.12(b), que la commande (3.28) produit effectivement moins de manœuvres que la commande (3.27). De même les figures 3.13(a)–3.13(c) et 3.13(b)–3.13(d) montrent une nette diminution de l'effort de commande. On notera que par sa conception, la commande (3.28) se rapproche de la commande (3.27) lorsque  $z$  est proche de zéro.



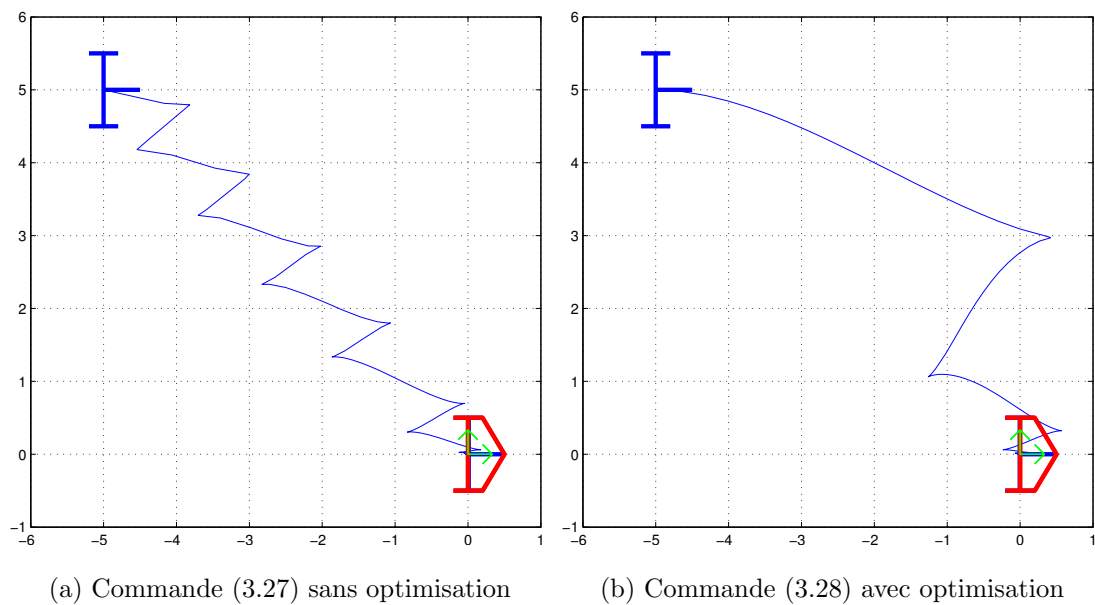


Figure 3.12 – Réduction du nombre de manœuvres pendant la phase transitoire : position cartésienne

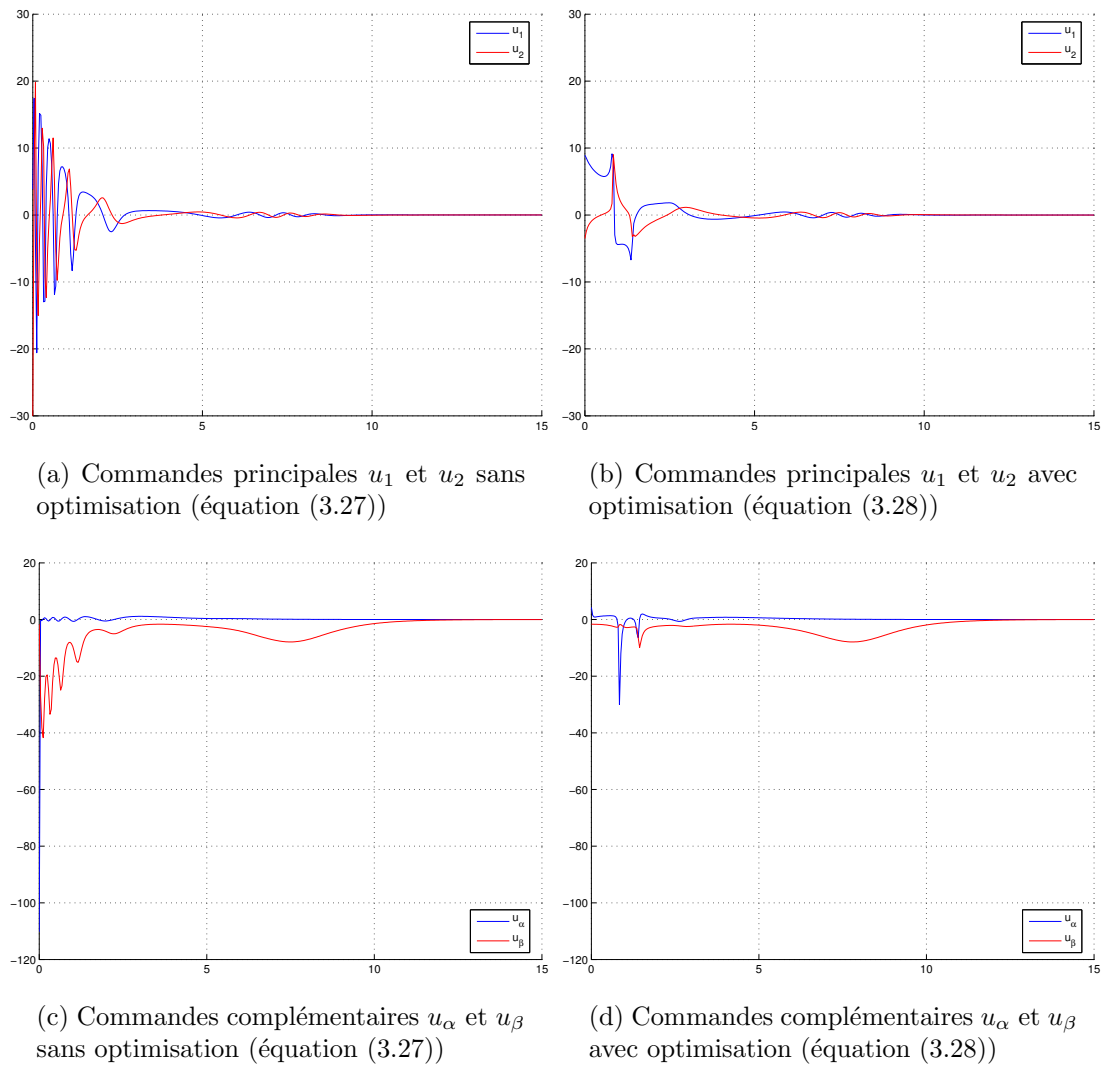
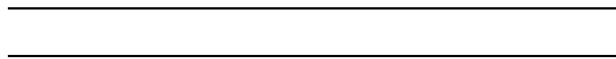


Figure 3.13 – Réduction de l'effort de commande pendant la phase transitoire



## Chapitre 4

# Outils pour la commande et l'expérimentation



## 4.1 Dispositif expérimental

L'objectif de ce chapitre est de fournir des outils pour la mise en œuvre des commandes présentées précédemment, et de présenter quelques résultats expérimentaux obtenus avec le système robotique du projet ICARE.

Ce système est composé de deux entités indépendantes :

- le robot ANIS ;
- un ordinateur dédié au traitement d'image.

Ces deux entités échangent des données au travers d'une liaison de type *ethernet*.

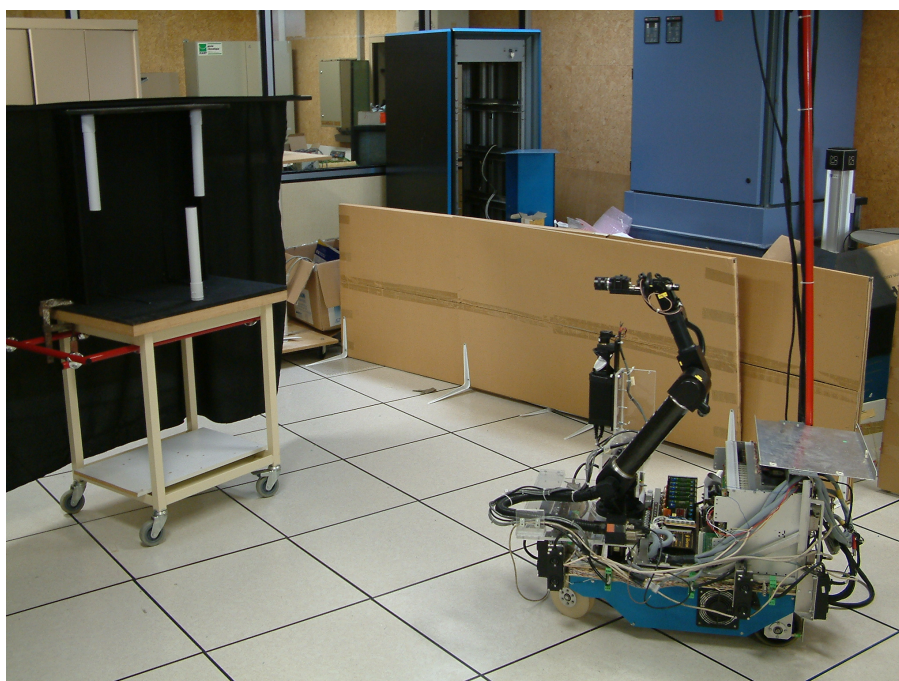


Figure 4.1 – Le robot ANIS face à la cible omnidirectionnelle

Le robot ANIS, à droite sur la figure 4.1, est constitué d'une base mobile de type « unicycle », sur laquelle est monté un bras manipulateur six axes. Une caméra, fixée sur le dernier axe, permet au robot d'observer son environnement. En plus de codeurs incrémentaux, permettant de connaître la position angulaire des différents axes du bras et des deux roues motrices de la base, le robot est équipé de différents capteurs extéroceptifs — laser à balayage horizontal, ceinture de capteurs ultra-sons... Toutefois ces capteurs supplémentaires ne sont pas utilisés pour nos expérimentations.

L'architecture dédiée à la commande, embarquée sur la base mobile, est construite autour d'un bus VME reliant trois cartes Motorola MVME 162. Chacune de ces cartes

possède son propre processeur et est dédiée à l'exécution d'une des tâches suivantes :

- asservissement bas-niveau des moteurs de la base et du bras, ainsi que gestion des mesures odométriques ;
- gestion des capteurs extéroceptifs ;
- calcul des commandes et gestion des tâches haut-niveau.

Comme cela est commenté dans la section 1.2.3, l'existence d'asservissements bas-niveau sur les moteurs justifie la focalisation de l'étude précédente sur la synthèse de lois de commande en vitesse. La commande est périodiquement calculée avec les moyens de calcul de la carte dédiée aux tâches haut-niveau. La réalisation des vitesses demandées est du ressort de la carte dédiée aux tâches d'asservissement bas-niveau qui calcule — à une fréquence plus élevée — les intensités de courant requises dans les moteurs.

La cible utilisée pour représenter le véhicule de référence qu'il s'agit de suivre est constituée d'un repère  $\mathcal{R}_r$  matérialisé par trois barres blanches verticales sur fond noir — à gauche sur la figure 4.1. Ce repère matériel est monté sur une plate-forme pouvant être déplacée librement dans le plan — cible « omnidirectionnelle ».

La suite de ce chapitre est organisée comme suit. Nous étudierons dans un premier temps une méthode de reconstruction de la position du robot par rapport à la cible, à partir des données fournies par la caméra embarquée. Nous présenterons ensuite des résultats sur la synthèse d'estimateurs de la vitesse de la cible. Puis nous décrirons comment la commande est implémentée en prenant en compte l'échantillonnage et les saturations des actionneurs. Enfin, nous présenterons quelques résultats expérimentaux.

## 4.2 Reconstruction de la position relative du robot par rapport à la cible

Afin d'estimer la situation relative du robot par rapport à la cible, on utilise la caméra embarquée sur le bras du robot ANIS. Le centre optique de celle-ci est l'origine C du repère  $\mathcal{R}_c$  caractérisant la situation de la caméra dans le plan (voir figure 4.2). La méthode de reconstruction géométrique utilisée est similaire à celle présentée dans (Sugihara, 1988) : une cible, composée de trois barres verticales L, M et R, est observée par une caméra et on extrait de l'image obtenue les amers correspondant aux projetés de ces barres sur le plan image de la caméra.

A partir des projections  $y_L$ ,  $y_M$ , et  $y_R$  associées à chacune des barres de la cible, il est possible d'estimer les angles  $\alpha_{LM}$ ,  $\alpha_{MR}$  et  $\alpha_{LR}$  correspondant respectivement aux angles  $\widehat{(\text{LCM})}$ ,  $\widehat{(\text{MCR})}$  et  $\widehat{(\text{LCR})}$ . La forme de la cible étant connue, la géométrie euclidienne

fournit des relations simples pour estimer la position et l'orientation du repère  $\mathcal{R}_c$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_r$ . En particulier, étant donné un segment AB, le lieu des points C tels que l'angle  $\alpha_{AB} = \widehat{ACB}$  est constant, correspond aux deux cercles de rayon  $\frac{|AB|}{2 \sin \alpha_{AB}}$  passant par les points A et B. Les équations des six cercles correspondant aux trois segments LM, MR, et LR peuvent donc être calculées à partir des angles  $\alpha$  correspondants et des coordonnées des points L, M, et R, exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_r$ . En utilisant le fait que la caméra est toujours placée de façon à voir la cible, c'est-à-dire que l'abscisse de C dans le repère  $\mathcal{R}_r$  est toujours négative, on peut éliminer les trois cercles ne correspondant pas à une telle configuration. Le point C se situe à l'intersection des trois cercles restants. L'orientation de l'axe optique  $\vec{v}_c$  de la caméra par rapport à l'axe  $\vec{v}_r$  de la cible est déduite à partir des coordonnées du point C.

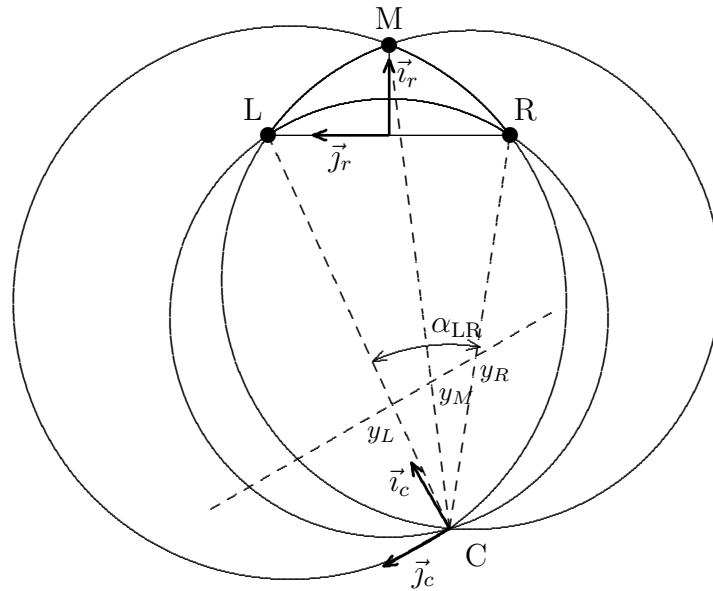


Figure 4.2 – Reconstruction géométrique de la position de la caméra par rapport à la cible : coupe horizontale

La reconstruction géométrique précédente est implémentée sur une machine de calcul dédiée aux traitements vidéo. Pour chaque barre, et dans le but de réduire la charge de calcul, une zone d'intérêt — fenêtre active dans l'image (Rives et al., 1993) — est définie — comme représenté sur la figure 4.3. A chaque nouvelle acquisition vidéo, les tâches suivantes sont exécutées pour chacune des fenêtres (assimilée à une image de dimension réduite) :

- a. seuillage de l'image ;
- b. calcul de l'abscisse du barycentre des points d'intensité lumineuse maximale ;

- c. déplacement du centre de la fenêtre active sur l'abscisse calculée.

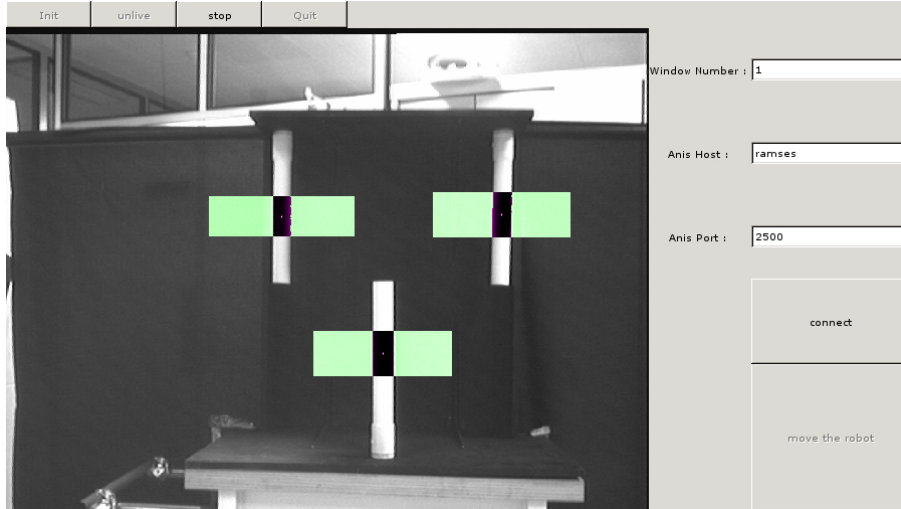


Figure 4.3 – Interface pour la vision : trois fenêtres actives

Les coordonnées des trois barycentres, dans le plan image, donnent une estimée des projections  $y_L$ ,  $y_M$ , et  $y_R$  associées à chacune des barres de la cible. A partir de ces données, la position de la caméra dans le repère  $\mathcal{R}_r$  est calculée puis transmise, via le lien *ethernet*, au système de commande embarqué sur le robot ANIS.

C'est au niveau de ce système qu'est calculée la situation de la base mobile par rapport à la cible. La caméra ayant un champ de vision réduit, le bras embarqué sur le robot ANIS est commandé de façon à centrer la barre M dans le plan image de la caméra, indépendamment des mouvements de la base mobile. Cet asservissement fait intervenir un seul degré de liberté du bras manipulateur et est réalisé par via un simple retour d'état proportionnel :

$$\dot{\theta}_C = ky_M$$

où  $k$  est une constante,  $\theta_C$  est l'angle entre le corps du robot et l'axe optique de la caméra, et  $y_M$  est la projection associée à la barre M de la cible dans le plan image de la caméra (voir figure 4.4). Il importe peu que le centrage de la cible dans l'image ne soit pas parfait.

Les coordonnées de l'origine  $P_m$  du repère de la base mobile exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_r$ , ainsi que l'orientation du robot par rapport à la cible, se déduisent alors des coordonnées du point C et de l'angle  $\widehat{(\vec{z}_c, \vec{z}_r)}$  obtenus par la vision, et de la mesure de l'angle  $\theta_C$  obtenu par lecture des codeurs incrémentaux du bras.



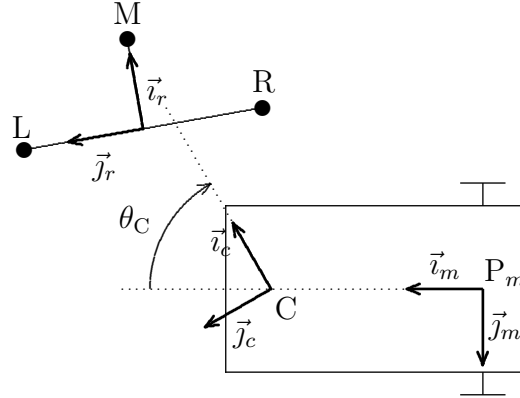


Figure 4.4 – Reconstruction géométrique de la configuration du robot par rapport à la cible

### 4.3 Estimation de la vitesse de la cible

Le calcul du retour d'état (3.28), nécessite de connaître la vitesse de la cible. Celle-ci n'étant pas mesurée directement, un estimateur de vitesse est construit à partir des mesures de l'erreur de position  $g(t)$ . Ces mesures, obtenues à partir des images prises par la caméra, étant entachées de bruit, l'estimateur de vitesse de la cible intègre un mécanisme de filtrage.

De façon générale, la conception d'un estimateur débute avec le choix d'un modèle de l'évolution des variables à estimer. Dans le cas présent, il s'agit d'estimer la vitesse  $u^r$  du repère  $\mathcal{R}_r$  rigidement lié à la cible — voir la figure 1.9.

#### 4.3.1 Utilisation d'un modèle de vitesse constante dans la base d'un repère fixe

Un modèle d'évolution simple correspond, par exemple, à un déplacement à vitesse — cartésienne et angulaire — constante du repère  $\mathcal{R}_r$  par rapport à un repère fixe  $\mathcal{R}_0$ . Ceci conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1^r &= u_2^r u_3^r \\ \dot{u}_2^r &= 0 \\ \dot{u}_3^r &= -u_2^r u_1^r \end{cases} \quad (4.1)$$

où les  $u_i^r$ , définis au chapitre 3, correspondent aux composantes de la vitesse de la cible exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_r$ .

La prise en compte de variations possibles de la vitesse du repère  $\mathcal{R}_r$  conduit à modifier (4.1) en

$$\begin{cases} \dot{u}_1^r &= u_2^r u_3^r + v_a \\ \dot{u}_2^r &= v_b \\ \dot{u}_3^r &= -u_2^r u_1^r + v_c \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $v_a$ ,  $v_b$ , et  $v_c$  représentent des accélérations bornées, *a priori* inconnues mais généralement petites.

Les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  du robot sont quant à elles mesurées en utilisant l'odométrie de la plate-forme mobile.

**Remarque 2** Bien que les entrées de commandes de la base mobile calculées à partir du retour d'état (3.28) représentent des vitesses « désirées » pouvant, à ce titre, être utilisées pour l'estimation des vitesses de la cible, les mesures odométriques leur sont, en général, préférées. En effet, elles sont souvent plus représentatives du comportement réel du robot, du fait de dynamiques non-modélisées.

Toutefois les informations issues des mesures odométriques ne sont pas non plus parfaites. En particulier, elles sont légèrement corrompues par des bruits et des retards inhérents aux traitements des signaux issus des capteurs. De plus, la satisfaction exacte de la contrainte de roulement sans glissement des roues correspond à une idéalisation. Dans la pratique, il convient de pouvoir réduire les effets d'écarts épisodiques entre les valeurs calculées à partir de l'hypothèse de satisfaction de cette contrainte et les mesures odométriques, et la vitesse réelle du corps du robot.

Notons  $u_1^o$  et  $u_2^o$  les mesures de vitesses issues de l'odométrie. Les remarques précédentes nous amènent à remplacer le système (3.6), utilisé pour modéliser la cinématique de la plate-forme mobile, par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (u_1^o + v_1) \cos \theta + u_2^r y - u_1^r \\ \dot{y} &= (u_1^o + v_1) \sin \theta - u_2^r x - u_3^r \\ \dot{\theta} &= (u_2^o + v_2) - u_2^r \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $v_1$  et  $v_2$  peuvent être interprétées comme de petites perturbations bornées, associées aux mesures odométriques.

Les mesures de  $p = (x, y)^T$  et  $\theta$ , obtenues par les données issues de la caméra, sont notées  $p^v$  et  $\theta^v$ . A cause des imperfections de la mesure, nous écrivons :

$$\begin{cases} p^v = p + v_p = p + (v_x, v_y)^T & (4.4a) \\ \theta^v = \theta + v_\theta & (4.4b) \end{cases}$$

où  $v_x$ ,  $v_y$ , et  $v_\theta$  représentent des erreurs de mesure bornées. Dans l'analyse suivante, on définit  $v_M = \max v_*$ , où  $v_*$  correspond à l'ensemble des termes  $v_a, v_b, v_c, v_1, v_2, v_x, v_y$ , et  $v_\theta$ .

Les six équations des modèles (4.2) et (4.3) sont regroupées dans le système

$$\begin{cases} \dot{X}_p = A_p(u_2^r)X_p + U_p(\theta) + V_p & (4.5a) \\ \dot{X}_\theta = A_\theta X_\theta + U_\theta + V_\theta & (4.5b) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} X_p &= (x, y, u_1^r, u_3^r)^T = (p^T, u_1^r, u_3^r)^T, & X_\theta &= (\theta, u_2^r)^T \\ U_p &= (u_1^o \cos \theta, u_1^o \sin \theta, 0, 0)^T, & U_\theta &= (u_2^o, 0)^T \\ V_p &= (v_1 \cos \theta, v_1 \sin \theta, v_a, v_b)^T, & V_\theta &= (v_2, v_c)^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

et

$$A_p(u_2^r) = \begin{pmatrix} -u_2^r S & -I_2 \\ 0_2 & -u_2^r S \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

où  $S$  est la matrice antisymétrique  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . La dynamique linéaire de  $X_\theta$ , et celle non-linéaire de  $X_p$ , apparaissent clairement dans l'équation (4.5). L'estimateur que nous proposons est le suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_p = A_p(\hat{u}_2^r)\hat{X}_p + U_p(\hat{\theta}) + D_p(p^v - \hat{p}) & (4.8a) \\ \dot{\hat{X}}_\theta = A_\theta \hat{X}_\theta + U_\theta + D_\theta(\theta^v - \hat{\theta}) & (4.8b) \end{cases}$$

où  $D_p$  et  $D_\theta$  sont des matrices de gains choisies pour assurer en premier lieu pour la stabilité de l'estimateur. L'étude de cette stabilité est résumée dans la proposition suivante, dont la démonstration est donnée dans l'annexe B.1.1.

**Proposition 13** (*Artus et al., 2003a*) *Soit*

$$D_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 \\ 0 & \lambda_p \\ -\beta_p & 0 \\ 0 & -\beta_p \end{pmatrix}, \quad D_\theta = \begin{pmatrix} \lambda_\theta \\ -\beta_\theta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

avec  $\lambda_p, \beta_p, \lambda_\theta, \beta_\theta > 0$ , et  $\tilde{X} := (X_p - \hat{X}_p, X_\theta - \hat{X}_\theta)$  l'erreur d'estimation. Il existe des constantes positives  $c_1, c_2$  et  $\gamma$  telles que, si les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  du véhicule commandé, et le vecteur d'état  $X_p$ , sont des fonctions bornées du temps, alors, pour tout  $t > 0$  :

$$\|\tilde{X}(t)\| \leq c_1 v_M + c_2 e^{-\gamma t} \|\tilde{X}(0)\|$$

Un moyen de préciser la valeur des composantes des gains  $D_p$  et  $D_\theta$  consiste à supposer que tous les termes  $v_i$  des équations précédentes sont des bruits blancs non-corrélés à moyenne nulle. On peut alors déterminer un « pseudo » gain de Kalman asymptotique associé à l'estimateur (4.8) prenant la forme d'une fonction des covariances des bruits.

Posons  $\omega_i = E[v_i^2]$ , la covariance du terme  $v_i$  de  $v_\star$ . Pour le sous-système linéaire (4.5b) associé aux variables d'orientation  $X_\theta$ , la détermination du gain optimal  $D_\theta$  est classique et ne pose pas de difficultés — voir, par exemple, la présentation du filtre de Kalman faite dans (Kwakernaak et Sivan, 1972, Sec. 4.4). Le cas du sous-système (4.5a) associé aux variables de position  $X_p$  est plus difficile du fait que ce système est non-linéaire. En supposant que le terme  $u_2^r$  intervenant au niveau de la matrice  $A_p(u_2^r)$  est constant, et en faisant l'hypothèse que  $v_1 = 0$  dans le terme  $V_p$ , le système (4.5a) devient linéaire et le calcul de l'estimateur optimal de Kalman associé à ce système devient possible. Les valeurs des gains ainsi obtenues continuent de présenter un intérêt pratique lorsque les hypothèses faites pour les obtenir ne sont pas grossièrement violées. Le lemme suivant basé sur des calculs présentés dans l'annexe B.2, précise ces valeurs de gain.

**Lemme 4** Avec  $\omega_2 \ll \sqrt{\omega_c \omega_\theta}$ , le gain de Kalman asymptotique  $D_\theta$  associé au système (4.4b)–(4.5b) est donné par la relation (4.9) avec

$$\lambda_\theta \approx \sqrt{2}(\omega_c/\omega_\theta)^{\frac{1}{4}}, \quad \beta_\theta \approx (\omega_c/\omega_\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

Le gain de Kalman asymptotique  $D_p$  associé au système (4.4a)–(4.5a), « linéarisé » en faisant l'hypothèse que l'argument  $u_2^r$  de la matrice d'état  $A_p$  est constante, et en supposant que  $\omega_x = \omega_y$ ,  $\omega_a = \omega_b$ , et  $\omega_1 = 0$ , est donné par la relation (4.9) avec

$$\lambda_p = \sqrt{2}(\omega_a/\omega_x)^{\frac{1}{4}}, \quad \beta_p = (\omega_a/\omega_x)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

**Remarque 3** Le lemme précédent suggère de choisir les composantes de  $D_p$  et  $D_\theta$  en respectant les contraintes de proportionnalités

$$\frac{\lambda_\theta^2}{\beta_\theta} = \frac{\lambda_p^2}{\beta_p} \approx 2$$

Cependant la notion de covariance appliquée aux vitesses de la cible ne traduit généralement pas bien la réalité physique. De ce fait, il convient de ne pas assimiler les relations (4.10) et (4.11) à des formules applicables directement pour déterminer entièrement les gains  $D_p$  et  $D_\theta$ . Pour cette raison, on posera par la suite  $\lambda_i = \sqrt{2}x_i$  et  $\beta_i = x_i^2$ ,  $x_i$  étant une variable dont il s'agit de préciser les valeurs en fonction de l'information dont on dispose à chaque instant sur les mouvements de la cible.

La figure 4.5 illustre les résultats obtenus avec l'estimateur (4.8). Cette figure correspond à l'estimation des vitesses de la cible lors de la simulation 3.1 présentée dans la section 3.2.1. Les vitesses réellement appliquées à la cible sont représentées en pointillé afin de pouvoir les comparer avec leurs valeurs estimées en traits pleins. Les gains  $\lambda_\theta$ ,  $\beta_\theta$ ,  $\lambda_p$ , et  $\beta_p$  de l'estimateur sont choisis conformément à la remarque 3 avec  $x_i = 2\sqrt{2}$ . Une valeur plus élevée permet une convergence plus rapide, au détriment du filtrage des bruits de mesure — ici non simulés —, et vice versa pour une valeur moins grande.

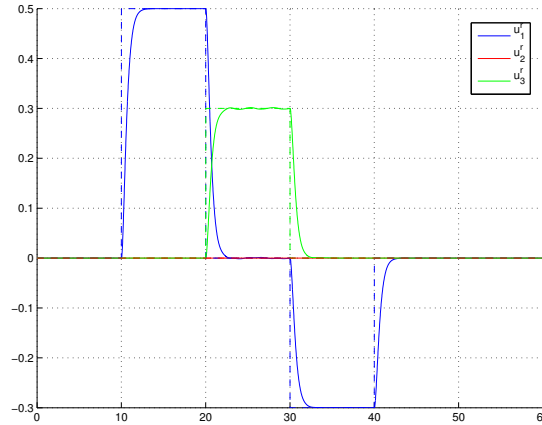


Figure 4.5 – Estimateur (4.8) : vitesse d'une cible omnidirectionnelle

### 4.3.2 Utilisation d'un modèle de vitesse constante dans la base du repère de la cible

Le modèle (4.1), que nous avons utilisé dans (Artus et al., 2003a) pour estimer la vitesse d'une cible omnidirectionnelle, n'est pas le mieux adapté dans certaines situations. En effet, dans le cas où le véhicule de référence est soumis à des contraintes non-holonomes équivalentes à celles du robot commandé, et si le repère  $\mathcal{R}_r$  est rigidement lié à une distance  $d$  derrière le véhicule, alors  $u_3^r = -du_2^r$ , et cette relation n'est compatible avec le modèle d'évolution (4.1) que lorsque  $u_2^r = \dot{u}_2^r = 0$  (vitesse de rotation nulle). De ce fait, si la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_r$  est différente de zéro, l'estimateur (4.8) fournit une estimée biaisée de la vitesse de la cible, comme illustré par les courbes 4.6. Ces courbes correspondent à l'estimation des vitesses du repère  $\mathcal{R}_r$  déporté par rapport au véhicule non-holonyme de référence qui est considéré dans la simulation 3.6 présentée en section 3.2.2 (suivi de cercle à vitesse longitudinale constante).

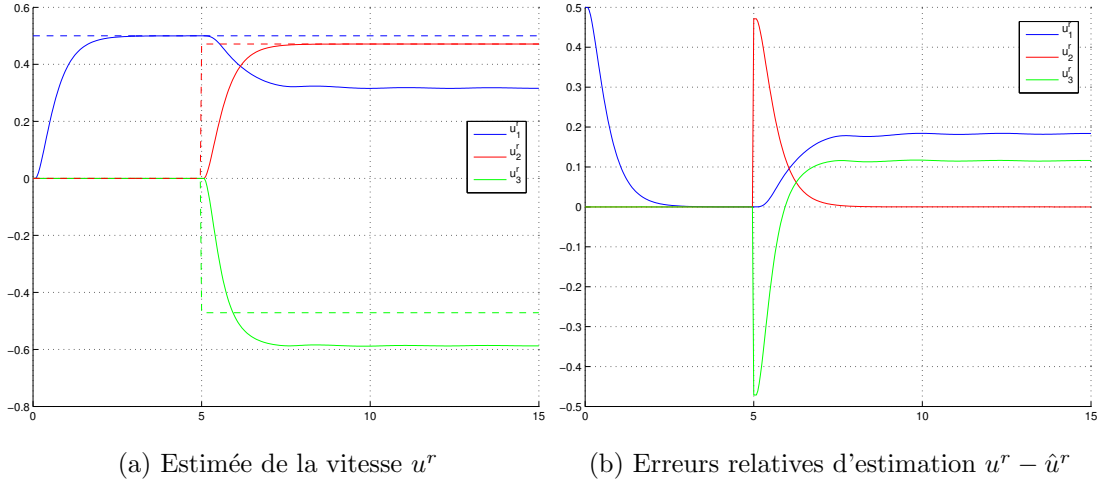


Figure 4.6 – Biais de l'estimateur (4.8). Le véhicule non-holonome de référence suit un cercle à vitesse longitudinale constante.

Un second modèle possible, mieux adapté aux particularités de ce type de suivi, est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1^r = 0 \\ \dot{u}_2^r = 0 \\ \dot{u}_3^r = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Ce modèle est par exemple compatible avec le cas d'un véhicule de référence non-holonome se déplaçant avec des vitesses longitudinales et angulaires constantes. Comme précédemment, on modifie ce modèle afin de prendre en compte des variations possibles sous la forme de perturbations bornées :

$$\begin{cases} \dot{u}_1^r = v_a \\ \dot{u}_2^r = v_b \\ \dot{u}_3^r = v_c \end{cases} \quad (4.13)$$

Puis on regroupe les six équations des modèles (4.3) et (4.13) :

$$\begin{cases} \dot{X}_p = A_p(u_2^r)X_p + U_p(\theta) + V_p \\ \dot{X}_\theta = A_\theta X_\theta + U_\theta + V_\theta \end{cases} \quad (4.14a)$$

$$(4.14b)$$

avec

$$\begin{aligned} X_p &= (x, y, u_1^r, u_3^r)^T = (p^T, u_1^r, u_3^r)^T, & X_\theta &= (\theta, u_2^r)^T \\ U_p &= (u_1^o \cos \theta, u_1^o \sin \theta, 0, 0)^T, & U_\theta &= (u_2^o, 0)^T \\ V_p &= (v_1 \cos \theta, v_1 \sin \theta, v_a, v_b)^T, & V_\theta &= (v_2, v_c)^T \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$A_p(u_2^r) = \begin{pmatrix} -u_2^r S & -I_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

La seule différence avec le modèle (4.5)–(4.6) se situe au niveau de la façon dont la fonction matricielle  $A_p(u_2^r)$  dépend de  $u_2^r$ . Un estimateur possible s'écrit encore sous forme (4.8) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_p = A_p(\hat{u}_2^r) \hat{X}_p + U_p(\hat{\theta}) + D_p(p^v - \hat{p}) \\ \dot{\hat{X}}_\theta = A_\theta \hat{X}_\theta + U_\theta + D_\theta(\theta^v - \hat{\theta}) \end{cases} \quad (4.17a)$$

$$(4.17b)$$

où  $D_p$  et  $D_\theta$  sont des matrices de gains, choisies pour assurer la stabilité de l'estimateur. A cet égard, on montre — voir annexe (B.1.2) — que la proposition 13, avec l'hypothèse supplémentaire que  $u_2^r$  est bornée, s'applique aussi à ce second estimateur. Il est donc possible d'utiliser les mêmes matrices de gains  $D_p$  et  $D_\theta$  pour les deux estimateurs, à condition de respecter la structure (4.9) de ces matrices.

Les courbes présentées sur la figure 4.7 permettent de comparer les estimées de vitesse obtenues avec le second estimateur et celles obtenues avec l'estimateur précédent — courbes 4.6 — en utilisant les mêmes gains.

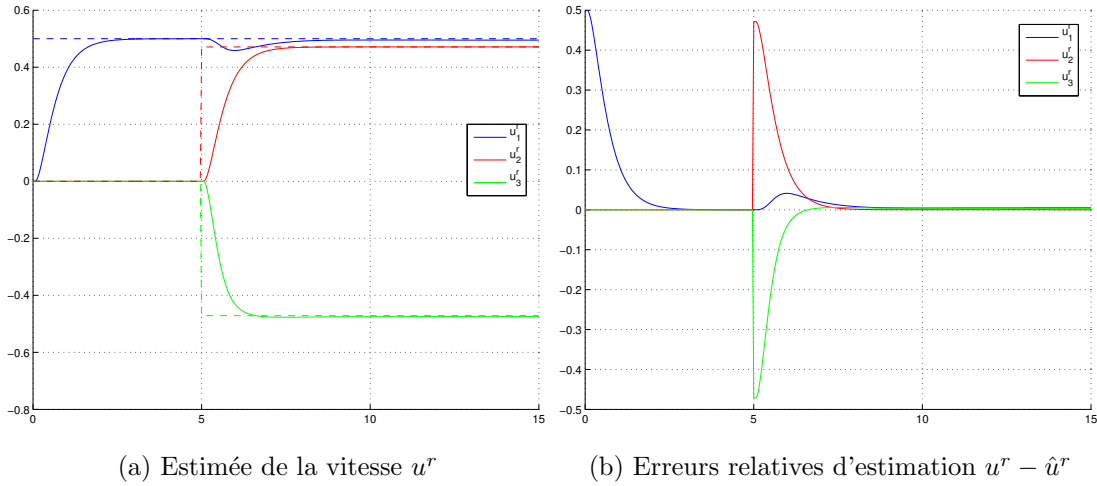


Figure 4.7 – Estimateur (4.17) non biaisé. Le véhicule non-holonyme de référence suit un cercle à vitesse longitudinale constante.

Dans la pratique, le choix entre les modèles de vitesse (4.1) et (4.12) et les estimateurs associés dépend de l'information *a priori* dont on dispose concernant les déplacements du repère de référence.

## 4.4 Stabilité conjointe commande–estimateur

Il convient de vérifier la stabilité conjointe de la commande et de l'estimateur lorsque les grandeurs estimées sont utilisées comme entrées des retours d'état. En effet, le principe de séparation des systèmes linéaires qui permet de conclure à la stabilité conjointe d'une commande et d'un estimateur à partir de leurs stabilités respectives, ne s'applique pas aux systèmes non-linéaires. Cette vérification, technique, est utile dans la mesure où le résultat n'est pas acquis d'avance. Une première preuve de stabilité ayant été proposée dans (Artus et al., 2003b) pour un couple commande–estimateur essentiellement équivalent au couple (3.12)–(4.8) basé sur le modèle de vitesse (4.1), nous vérifions uniquement ici la stabilité du couple (3.12)–(4.17) basé sur le modèle de vitesse (4.12).

Pour cette vérification, on introduit deux hypothèses supplémentaires :

1. la vitesse  $u^r$  du repère de référence  $\mathcal{R}_r$  est bornée ;
2. le champ stabilisant  $Z(z)$  est donné par  $Z(z) = -Kz$ , avec la matrice de gain  $K$  choisie diagonale par bloc, c'est-à-dire

$$K = \begin{pmatrix} K_p & 0 \\ 0 & k_\theta \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

où  $K_p$  est une matrice  $2 \times 2$ .

L'estimateur fournit des valeurs estimées  $\hat{g}$  et  $\hat{u}^r$  pour les variables  $g$  et  $u^r$ . Comme les valeurs mesurées par la vision  $g^v$  de  $g$  sont également disponibles, la commande peut être calculée en utilisant  $\hat{g}$  ou  $g^v$  — ou une combinaison des deux. En particulier, lorsque  $|\hat{g}_i - g_i^v| \geq 2v_M$ ,  $g_i^v$  est plus proche  $g_i$  que  $\hat{g}_i$  ne l'est, et est donc une meilleure estimée. La proposition suivante indique que la stabilité conjointe du couple commande–estimateur est garantie pour un large choix d'estimées de  $g$ , à condition bien sûr que les erreurs de mesure et de modélisation ne soient pas trop importantes.

**Proposition 14** *On considère le retour d'état  $\bar{u}(g, u^r, \alpha)$  donné par (3.12) et l'estimateur (4.17). Le champ stabilisant du retour d'état est  $Z(z) = -Kz$  où la matrice  $K$  est diagonale par blocs et définie positive. On suppose que la vitesse à estimer  $u^r$  est bornée, et que le retour d'état  $\bar{u}(g^e, \hat{u}^r, \alpha)$  est appliqué au système (3.6), avec  $g^e$  égal soit à  $\hat{g}$ , soit à  $g^v$ , soit à toute autre estimée de  $g$  telle que  $|g_i^e - g_i| \leq v_M$  avec  $i = 1, 2, 3$ . Alors si  $v_M$  est suffisamment petit, le système en boucle fermé système (3.6)–(3.12) avec l'estimateur (4.8) est stable et  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\|z(t)\| + \|\tilde{X}(t)\|) \leq cv_M$ , avec  $c$  une constante.*

**Preuve :** La preuve de la proposition 14 est donnée dans l'annexe B.3. ■



**Remarque 4** En pratique, le choix de faire plus confiance à la mesure directe (c'est-à-dire  $g^e = g^v$ ) sera typiquement préféré au choix de se fier à l'estimateur (c'est-à-dire  $g^e = \hat{g}$ ) lorsque les modèles sur lesquels est basé la construction de l'estimateur sont clairement inappropriés, par exemple lors de changements abrupts de la vitesse de la cible, ou dans le cas où la contrainte de roulement sans glissement des roues n'est plus assurée. Lorsque la vitesse estimée de la cible est constante, ou quasiment constante au sens du modèle (4.12), le choix inverse sera privilégié.

## 4.5 Discrétisation et saturation

Tout au long de ce sous-chapitre,  $T$  représente la période d'acquisition de données du système embarqué<sup>1</sup> et  $X[k] = X(kT)$  est la valeur de  $X$  à l'instant  $kT$  —  $k \in \mathbb{N}$ . Le vecteur de commande est mis à jour avec la période  $T$ , et il est gardé constant entre deux instants d'échantillonnage.

### 4.5.1 Implémentation sur un robot

#### 4.5.1.1 Discrétisation de l'estimateur

L'estimateur (4.8) est implémenté en temps discret avec deux étapes de calcul : prédiction-corréction. Avec  $\hat{u}_2^r$  et  $\hat{\theta}$  constants sur  $[kT, (k+1)T[$ , le système (4.8) est linéaire sur cet intervalle. L'intégration analytique de ce système linéaire donne — voir l'annexe B.4.1 pour les détails des calculs — la prédiction de  $X[k+1]$  juste avant que les données issues de la vision ne soient disponibles à l'instant  $(k+1)T$  :

$$\begin{cases} \hat{X}_p^-[k+1] = \begin{pmatrix} R_u[k] & -TR_u[k] \\ 0 & R_u[k] \end{pmatrix} \hat{X}_p[k] + \begin{pmatrix} R_\theta[k+1]\Delta p_r^o[k+1] \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.19a)$$

$$\begin{cases} \hat{X}_\theta^-[k+1] = \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{X}_\theta[k] + \begin{pmatrix} \Delta\theta_r^o[k+1] \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.19b)$$

avec :

- $R_u[k]$  la matrice de rotation d'angle  $-T\hat{u}_2^r[k]$  ;
- $R_\theta[k+1]$  la matrice de rotation d'angle  $\hat{\theta}^-[k+1]$  ;
- $\Delta p_r^o[k+1]$  le déplacement cartésien du robot, mesuré par odométrie, entre les instants  $kT$  et  $(k+1)T$ , et exprimé dans le repère  $\mathcal{R}_r$  à l'instant  $(k+1)T$  ;

---

1. qui correspond en particulier à la cadence vidéo de la caméra

- $\Delta\theta_r^o[k+1] = \theta_r[k+1] - \theta_r[k]$  le changement d'orientation du corps du robot entre les instants  $kT$  et  $(k+1)T$ , mesuré par odométrie.

Dans le cas du deuxième estimateur (4.17), la prédiction de  $X[k+1]$  est donnée par

$$\begin{cases} \hat{X}_p^-[k+1] = \begin{pmatrix} R_u[k] & -TR_u[k] \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \hat{X}_p[k] + \begin{pmatrix} R_\theta[k+1]\Delta p_r^o[k+1] \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.20a)$$

$$\begin{cases} \hat{X}_\theta^-[k+1] = \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{X}_\theta[k] + \begin{pmatrix} \Delta\theta_r^o[k+1] \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.20b)$$

avec les mêmes notations que (4.19).

L'estimation de  $X[k+1]$ , qui utilise les mesures de la vision à l'instant  $(k+1)T$ , est alors donnée pour les deux estimateurs par

$$\begin{cases} \hat{X}_p[k+1] = \hat{X}_p^-[k+1] + TD_p(p^v[k+1] - \hat{p}^-[k+1]) \end{cases} \quad (4.21a)$$

$$\begin{cases} \hat{X}_\theta[k+1] = \hat{X}_\theta^-[k+1] + TD_\theta(\theta^v[k+1] - \hat{\theta}^-[k+1]) \end{cases} \quad (4.21b)$$

#### 4.5.1.2 Discrétisation des fonctions transverses

Les variables exogènes  $\alpha$  et  $\beta$  de la fonction transverse utilisée dans la commande doivent être intégrées numériquement à partir de leurs dérivées temporelles, telles que spécifiées par le retour d'état. En remarquant que seuls les cosinus et sinus de ces variables sont utilisés, il suffit que l'intégration porte sur ces fonctions trigonométriques. Posons  $\eta_1 = \sin \alpha$  et  $\eta_2 = \cos \alpha$ . Puisque  $\dot{\eta}_1 = \dot{\alpha}\eta_2$  et  $\dot{\eta}_2 = -\dot{\alpha}\eta_1$ , la discrétisation de  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , lorsque  $\dot{\alpha}$  est constant sur  $[kT, (k+1)T)$ , entraîne

$$\Psi[k+1] = R(-T\dot{\alpha}[k])\Psi[k] \quad (4.22)$$

avec  $\Psi[k] = (\eta_1[k], \eta_2[k])^T$  et  $R(-T\dot{\alpha}[k])$  la matrice de rotation d'angle  $-T\dot{\alpha}[k]$ . Afin de garantir la stabilité numérique de  $\|\Psi[k]\| = 1$ , la version modifiée suivante de (4.22) sera implémentée :

**Proposition 15**  $\|\Psi[k]\| = 1$  est un équilibre localement asymptotiquement stable de l'intégrateur numérique

$$\Psi[k+1] = (1 + k_\alpha (\|\Psi[k]\|^2 - 1)) R(-T\dot{\alpha}[k])\Psi[k] \quad (4.23)$$

dès que  $k_\alpha \in (-1, 0)$ .

**Preuve :** D'après (4.23),

$$\|\Psi[k+1]\|^2 = (1 + k_\alpha (\|\Psi[k]\|^2 - 1))^2 \|\Psi[k]\|^2$$

En définissant  $\Delta_k := \|\Psi[k]\|^2 - 1$ , on a

$$\begin{aligned}\Delta_{k+1} &= (1 + k_\alpha \Delta_k)^2 (\Delta_k + 1) - 1 \\ &= (1 + 2k_\alpha) \Delta_k + k_\alpha (k_\alpha + 2) \Delta_k^2 + k_\alpha^2 \Delta_k^3\end{aligned}$$

si bien que  $\Delta = 0$  est un équilibre localement asymptotiquement stable pour ce système si  $k_\alpha \in (-1, 0)$ . Ceci est équivalent à la stabilité locale de  $\|\Psi[k]\| = 1$  pour le système (4.23).

■

La même procédure est appliquée pour le calcul des fonctions  $\cos \beta$  et  $\sin \beta$ .

## 4.5.2 Saturation des commandes de l'unicycle

Rappelons tout d'abord une propriété de « changement d'échelle de temps » pour les systèmes sans dérive (3.1). Formellement cette propriété peut s'énoncer comme suit.

**Proposition 16** *Soit une commande  $u(g_m, \tau)$  définie pour  $\tau \in [0, T]$ . Soit  $\kappa : [0, T'] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\forall t, \kappa(t) \geq 0$ , et  $T'$  tel que*

$$\int_0^{T'} \kappa(s) ds \leq T$$

*Alors, si la commande  $u'(g_m, t) = \kappa(t)u(g_m, \int_0^t \kappa(s) ds)$  est appliquée au système (3.1), à partir de la valeur initiale  $g_0$ , la solution du système commandé est donnée par*

$$g'_m(t) = g_m \left( \int_0^t \kappa(s) ds \right), \quad g_m(0) = g_0 \quad (4.24)$$

*où  $g_m(\tau)$  est la solution de (3.1) associée à la commande  $u(g_m, \tau)$ .*

**Preuve :** La preuve de ce résultat est immédiate : il suffit de dériver l'égalité (4.24) par rapport à  $t$ . ■

Ce résultat signifie simplement que toute trajectoire dans l'espace d'état qui correspond à une solution du système (3.1) peut être parcourue, par l'état de ce système, à une vitesse quelconque, grâce à un changement de variable temporelle revenant à introduire un facteur multiplicatif sur la commande. Une application possible de ce résultat concerne le mécanisme de saturation des entrées de commande pour prendre en compte le fait que les vitesses  $u_i$  sont généralement physiquement bornées en valeur absolue par une valeur  $u_{i,\max}$ . Considérons par exemple le système formé par l'équation (3.6) et la

commande (3.28) :

$$\begin{cases} \dot{g} &= \sum_{i=1}^2 \bar{u}_i(g, \alpha, \beta, t) X_i(g) + P(g, t) \\ \dot{\alpha} &= \bar{u}_\alpha(g, \alpha, \beta, t) \\ \dot{\beta} &= \bar{u}_\beta(g, \alpha, \beta, t) \end{cases} \quad (4.25)$$

Lorsque  $P(g, t) \equiv 0$ , c'est-à-dire lorsque la cible est fixe, le système (4.25) obtenu est un système sans dérive et la commande  $\bar{u}$  est une fonction de  $g$ ,  $\alpha$ , et  $\beta$  uniquement — elle ne dépend plus de la variable temporelle. La proposition 16 suggère de modifier la commande initiale  $\bar{u}$  de façon à ce que la nouvelle loi de commande  $\bar{u}'$  satisfasse toujours la condition  $|\bar{u}'_i| \leq u_{i,max}$ , en prenant  $\kappa(t) = 1/\max\{1, |\bar{u}_i(t)|/u_{i,max} \mid i = 1, \dots, m\}$ . L'effet de ce changement d'échelle de temps dépend du mouvement de la cible :

- si elle est fixe, le système (3.6) est un système sans dérive. Dans ce cas, la trajectoire parcourue par le robot n'est pas modifiée. Seule la vitesse de parcours de celle-ci l'est ;
- si elle est en mouvement, le mécanisme de saturation proposé garantit que les consignes de vitesses restent inférieures aux bornes spécifiées. Cependant, la convergence de  $g$  vers  $f(\alpha, \beta)$ , quelque soit le terme  $P(g, t)$ , ne peut bien sûr plus être garantie.

## 4.6 Résultats expérimentaux

Les différents retours d'états présentés au chapitre 3, ainsi que les estimateurs du chapitre 4 ont été implémentés sur le robot ANIS du laboratoire. Les expérimentations ainsi menées ont permis de valider les résultats théoriques obtenus dans les chapitres précédents pour un large échantillon de trajectoires de la cible. Toutefois, en l'absence de capteurs capables de fournir des mesures de la position absolue et de la vitesse de la cible, seuls des résultats expérimentaux obtenus avec une cible fixe sont présentés.

La première série d'expériences illustrent l'influence des paramètres  $\varepsilon_i$  de la fonction transverse sur le comportement du robot lorsque l'on utilise le retour d'état initial (3.12). On a  $\varepsilon_2 = 0.3$  pour la figure 4.8, et  $\varepsilon_2 = 1$  pour la figure 4.10. Dans ces deux cas,  $\varepsilon_1 = 0.5$  et  $Z(z) = -0.5 \mathbf{I}_3 z$ .

Les trajectoires cartésiennes du robot, sur les figures 4.8(a) et 4.10(a), sont obtenues à partir de l'estimation  $g^e = \hat{g}$  de  $g$ , fournie par l'estimateur (4.8). Elles ne correspondent donc pas exactement aux trajectoires suivies réellement par le robot, mais à des approximations de celles-ci. Pour chacune des expérimentations, les résultats de la simulation

correspondante, réalisée sans bruit sur la mesure, mais avec les mêmes paramètres de commande, d'estimation et de saturation, ainsi que les mêmes conditions initiales, sont aussi montrés à des fins de comparaison.

Les différences entre les résultats expérimentaux et ceux de simulation reflètent les effets des différentes simplifications effectuées sur le modèle considéré du robot, des effecteurs et des capteurs — frottements, perte d'adhérence des roues, dynamiques non-modélisées, retards inhérents aux traitements vidéo... En particulier, la configuration finale du robot physique est différente de celle prédite en simulation. Il y a deux raisons théoriques à cela :

1. la convergence de  $z$  vers zéro implique que  $g$  tend vers  $f(\theta)$ , et la convergence de  $\theta$  vers une certaine valeur, mais n'implique aucune contrainte sur la valeur asymptotique de  $\theta$ ,
2. les valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  de la fonction transverse  $f$  n'étant pas choisies petites,  $f(\theta_1)$  peut être assez différent de  $f(\theta_2)$  lorsque la différence d'angle  $\theta_1 - \theta_2$  n'est pas petite.

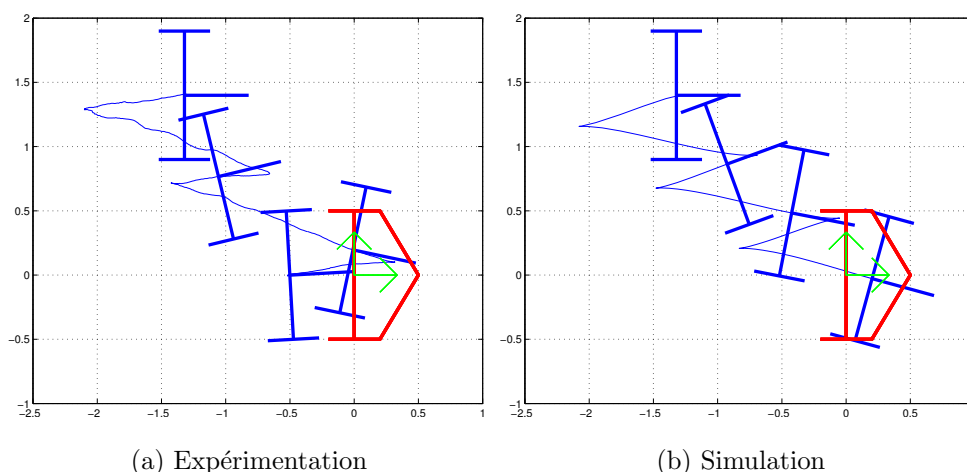
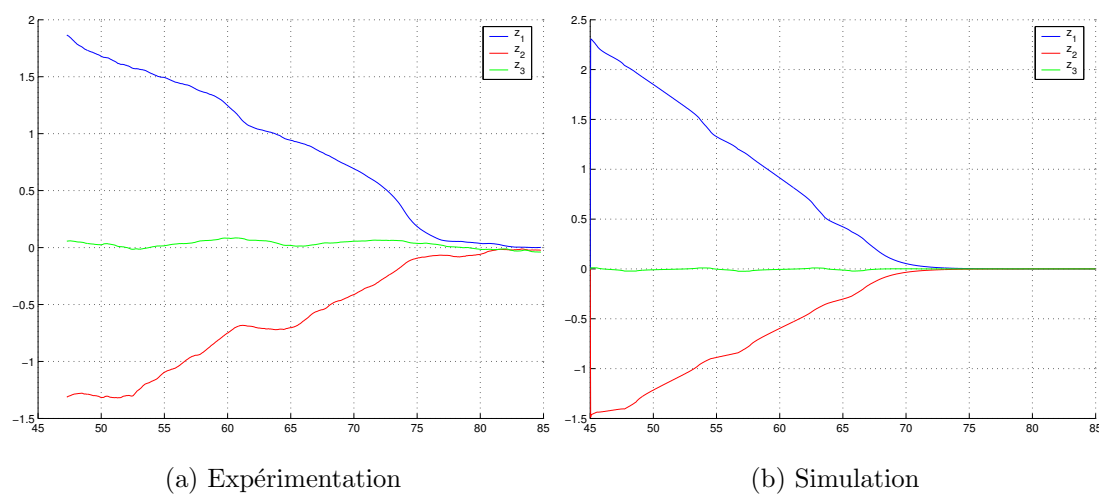


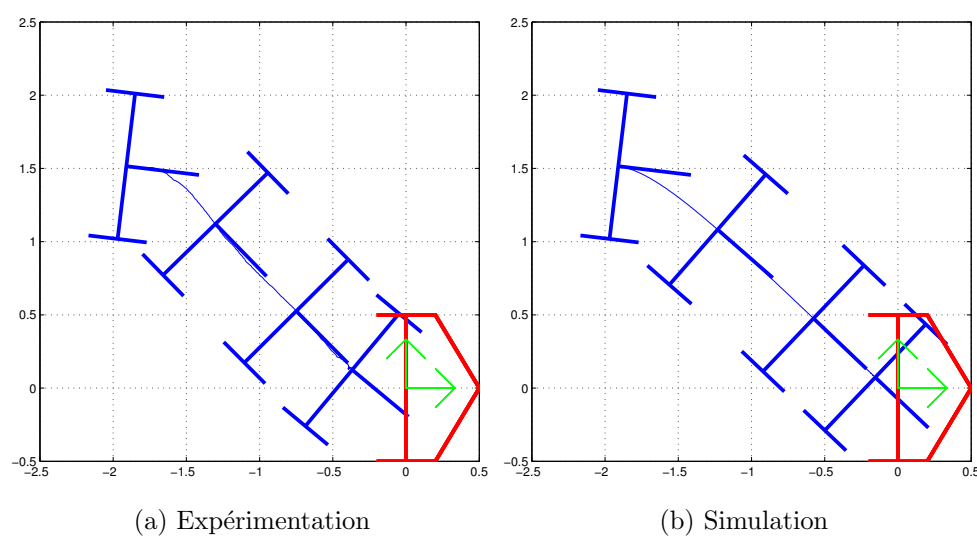
Figure 4.8 – Trajectoire cartésienne estimée du robot :  $\varepsilon_2 = 0.3$

La convergence vers zéro des trois composantes de  $z$  est montrée sur les figures 4.9(a) et 4.9(b), lorsque  $\varepsilon_2 = 0.3$ . Notons qu'elle n'est pas exponentielle au début du mouvement du robot. C'est une conséquence des saturations imposées aux entrées de commandes du robot.

Notons enfin que les différences ne sont pas systématiquement grandes, comme ceci est

Figure 4.9 – Evolution des variables d'état :  $\varepsilon_2 = 0.3$ 

illustré par les figures 4.10(a) et 4.10(b) qui montrent une bien meilleure correspondance entre simulation et expérimentation.

Figure 4.10 – Trajectoire cartésienne estimée du robot :  $\varepsilon_2 = 1$ 

Terminons ce sous-chapitre par une expérimentation utilisant toutes les améliorations proposées dans le chapitre 3. Cette expérience illustre le comportement obtenu avec le robot ANIS lorsque l'on utilise le retour d'état (3.28) avec une fonction transverse généralisée dépendant de deux variables. Les paramètres du retour d'état (3.28) sont les

suivants :

- les paramètres de la minimisation de l'effort de commande sont  $\delta_1 = 1$ ,  $\delta_2 = 0.1$ , et  $\psi = 0.01$  ;
- la fonction transverse  $f(\alpha, \beta)$  est donnée par l'équation (3.16)–(3.17) avec  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0.3$ , et  $\gamma = 0.8$  ;
- le champ de vecteurs stabilisant  $Z(z)$  est donné par  $Z(z) = -0.5 I_2 z$  ;
- les valeurs initiales  $\alpha(0)$  et  $\beta(0)$  de la fonction transverse  $f(\alpha, \beta)$  sont respectivement  $\alpha(0) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\beta(0) = 0$  ;
- la commande complémentaire  $u_\beta = \dot{\beta}$  est donnée par l'équation (3.22) avec  $k = 2$ .

Les gains de l'estimateur (4.17) sont  $x_p = x_\theta = \sqrt{2}$ . Comme pour les expériences précédentes, la trajectoire cartésienne du robot est obtenue à partir de l'estimation  $g^e = \hat{g}$  de  $g$  fournie par l'estimateur.

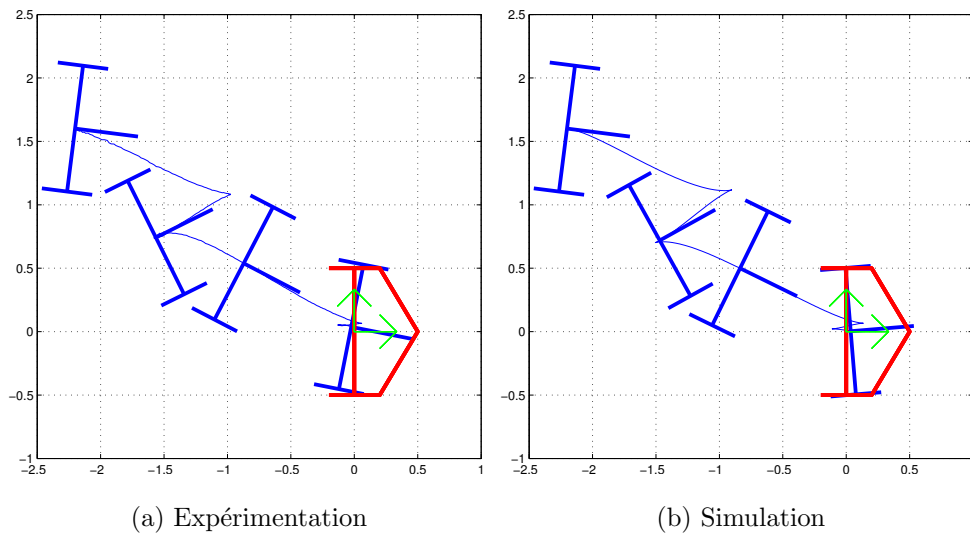


Figure 4.11 – Stabilisation d'une configuration fixe : trajectoire cartésienne

Les figures 4.11(a) et 4.11(b) illustrent l'action conjointe des deux retours d'état combinés linéairement dans (3.28). Pendant la phase d'« approche » de la cible,  $z$  est grand. L'action du retour d'état (3.25) est alors prépondérante et l'effort de commande est réduit : le nombre de manœuvres est limité en comparaison avec l'expérimentation 4.8(a). Lorsque le robot est proche de la cible, la commande (3.28) se rapproche de la commande (3.20), et l'erreur de position finale est sensiblement réduite. Notons enfin que la différence d'orientation finale entre les figures 4.11(a) et 4.11(b) s'explique en partie par l'absence de bruits de mesure dans la simulation.

# Conclusions et perspectives

## 1 Contributions

Notre objectif dans ce mémoire était l'étude et l'expérimentation d'une nouvelle approche de commande des systèmes non-linéaires en vue du suivi d'une cible, associée par exemple à un véhicule *leader*. L'originalité de ce travail tient au cadre dans lequel il se situe : contrairement aux études antérieures sur ce sujet, nous ne faisons aucune hypothèse sur le mouvement de cette cible. Il devient ainsi possible d'effectuer le suivi d'un véhicule *leader* quelque soit le mouvement de celui-ci (marche avant, marche arrière, manœuvres...). L'approche de commande étudiée ici est basée sur le concept de fonctions transverses proposé dans (Morin et Samson, 2003), et consiste à effectuer une *stabilisation pratique* du repère cible. Nous avons ainsi mis en évidence l'intérêt pratique de cette nouvelle forme de stabilisation.

Nous avons contribué au développement et à l'amélioration de cette approche dans deux directions principales :

- a. la mise en place d'un système d'adaptation à l'aide de *fonctions transverses généralisées* a permis de modifier automatiquement la précision du suivi en fonction de la capacité du robot à suivre exactement ou non la trajectoire de la cible. Ce mécanisme permet d'une part une meilleure précision lors de la stabilisation de trajectoire admissible, et d'autre part d'assurer une liberté suffisante au système pour la stabilisation *pratique* de trajectoire non admissible.
- b. la minimisation de la norme des commandes appliquées lors des phases transitoires du suivi a permis de limiter l'effort de commande lorsque l'erreur initiale est grande. En plus de diminuer l'amplitude du contrôle appliqué, cette minimisation permet de réduire fortement le nombre des manœuvres nécessaires au système lors des phases d'approche de la cible.

Notre travail a également comporté un aspect pratique. En effet, nous avons aussi réalisé les premières expérimentations de ces commandes sur un système physique. Pour



cela nous avons développé les outils et solutions techniques nécessaires en vue de l'implémentation des commandes obtenues sur le robot ANIS du projet ICARE :

- le développement d'un capteur basé sur la caméra embarquée sur le bras du robot a permis la reconstruction de la situation du robot par rapport à la cible.
- la synthèse d'estimateurs basés sur la fusion des données issues de la vision et de celles issues des mesures odométriques a permis d'obtenir la vitesse de la cible, tout en proposant un filtrage des données issues de la caméra ;
- la vérification technique de la stabilité conjointe commande–estimateur a aussi été réalisée.

La mise en œuvre de cette commande sur le robot ANIS du laboratoire ICARE a finalement permis de valider expérimentalement l'intérêt pratique de l'approche de commande par fonctions transverses. En particulier, la possibilité de s'affranchir d'un certain nombre des limitations des approches de commande classique, comme l'impossibilité de suivre des trajectoires non réalisables pour le système, permet d'envisager des perspectives de recherche intéressantes concernant la conduite automatique des robots mobiles sur roues.

## 2 Poursuite des travaux

A l'issue de ce travail de thèse, plusieurs problèmes demeurent toutefois en suspens et d'autres méthodes restent à développer. Nous présentons ici ce qui nous semble être le cadre d'investigations où des avancées importantes sont tout à fait envisageables.

L'extension de l'approche de commande par fonctions transverses au cas de la voiture est sans doute le problème auquel il faudrait porter un intérêt particulier. Partiellement commencée durant ce travail de thèse, l'application de cette approche au cas de la voiture n'a toutefois pu être suffisamment avancée pour une présentation dans ce manuscrit. En particulier, une première synthèse d'une commande de *stabilisation pratique* a été effectuée. La commande ainsi obtenue a donné des premiers résultats de simulation encourageants et conformes à ceux obtenus avec l'unicycle. La mise en place d'expérimentations sur le robot *CyCab* du projet ICARE n'a toutefois pas été finalisée. Deux raisons principales expliquent cela :

- les tests préliminaires de cette commande sur le *CyCab* ont mis à jour la nécessité de prendre en compte certains aspects dynamiques dans la synthèse de la commande : à la différence du robot ANIS — beaucoup plus léger —, les différents actionneurs et le poids du *CyCab* introduisent du « retard » dans l'application des commandes calculées. C'est en particulier le cas pour le vérin linéaire commandant

l'orientation des roues qui se comporte comme un filtre passe-bas vis-à-vis de la commande. Sans traitements particuliers (redimensionnement des actionneurs, modifications des asservissements bas-niveau ou de la commande elle-même...), ces retards conduisent généralement à des cycles limites dès lors que la fréquence des manœuvres augmente ;

- la reconstruction géométrique présentée dans ce manuscrit n'est pas adaptée aux conditions extérieures : en intérieur, avec des lumières artificielles et contrôlées, le choix de détecter des barres blanches sur fond noir permet de simplifier la détection des points d'intérêt dans l'image, tout en garantissant certaines propriétés de robustesse. Avec des conditions d'éclairage d'extérieur, moins uniformes, ce n'est plus le cas. L'utilisation de balises infrarouges à la place des barres blanches ou d'un autre type de capteur (basé sur une caméra ou non) est donc nécessaire afin de pouvoir continuer les expérimentations.

Indépendamment du cas de la voiture, d'autres problèmes nous semblent intéressants à traiter dans le prolongement de cette étude :

- choix du champ stabilisant dans les fonctions transverses : outre le mécanisme de minimisation, nous avons décidé d'utiliser des champs du type  $Z(z) = -Kz$  avec  $K$  une matrice diagonale constante. D'autres choix sont toutefois possibles, en particulier la création de couplage entre les composantes d'orientation et de position de l'état du système peut aider à limiter la fréquence des manœuvres ;
- amélioration de la gestion du transitoire : même si la minimisation des commandes appliquées a permis d'améliorer le comportement du robot lors des phases d'approche de la cible, nous n'avons pas étudié l'influence de cette minimisation sur le suivi pratique de la cible. En particulier, dû aux phases transitoires de l'estimation et aux bruits de mesure, la « zéro dynamique » du suivi est rarement atteinte en pratique ;
- synthèse d'autres familles de fonctions transverses afin de supprimer totalement les manœuvres « parasites » lors du suivi de certaines trajectoires avec points de rebroussement.
- extension à d'autres véhicules sur roues, ainsi qu'à d'autres types de systèmes : on pense en particulier aux véhicules multicorps sur roues : poids lourd, véhicule tractant une remorque... , mais aussi éventuellement aux systèmes mécaniques sous-actionnés : satellite sous-actionné, aéroglisseur, dirigeable...

Certaines extensions de cette étude, vers d'autres domaines de la commande, sont aussi à envisager :

- étude de la stabilité d'un ensemble de systèmes commandés couplés : dans le cadre

de convois de véhicules, le suivi pratique peut être utilisé afin de réaliser la jonction immatérielle entre ces véhicules. Toutefois, rien n'indique que le comportement global de l'ensemble soit satisfaisant ;

- utilisation de la stabilisation pratique pour la réalisation d'une planification « pratique » de trajectoires : en prenant en compte les libertés de position imposées par la stabilisation pratique de trajectoires, il est possible de planifier des trajectoires simples (arcs de cercle, droites...) ne tenant pas forcément compte des contraintes de déplacement du véhicule commandé. Cette simplification de l'étape de planification permet alors d'y intégrer plus facilement des objectifs secondaires comme des contraintes d'évitement d'obstacles, tout en garantissant que cette trajectoire, pas forcément réalisable par le véhicule, soit « suivie » par celui-ci.

# Annexe A

## Résultats du chapitre 3

### A.1 Existence d'équilibres asymptotiquement stables pour la variable $\alpha$

#### A.1.1 Déplacement le long d'une ligne droite

On suppose que le véhicule de référence, ainsi que le repère  $\mathcal{R}_r$ , se déplacent le long d'une ligne droite avec une vitesse

$$u^r = (a, 0, b)^T$$

où  $(a, b)$  sont deux constantes. Sur la zéro dynamique  $z \equiv 0$ , l'équation (3.12) devient

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = H(\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant (3.13) et (3.8),

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{u} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det H(\alpha)} \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \cos(2\alpha) & -\varepsilon_1 \cos \alpha & 0 \\ -\varepsilon_2 \sin(\varepsilon_2 \cos \alpha) \sin \alpha & \cos(\varepsilon_2 \cos \alpha) \varepsilon_2 \sin \alpha & \det H(\alpha) \\ \sin(\varepsilon_2 \cos \alpha) & -\cos(\varepsilon_2 \cos \alpha) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a \sin(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{\det H(\alpha)} - \frac{b \cos(\varepsilon_2 \cos \alpha)}{\det H(\alpha)} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

On suppose dans un premier temps que la cible se déplace latéralement, c'est-à-dire que  $a \equiv 0$  et  $b \neq 0$ . Comme  $\varepsilon_2 \in (0, \pi/2]$  — c'est une des conditions pour que  $f$  soit une fonction transverse —, il est facile de vérifier qu'il n'existe pas de point d'équilibre pour l'équation différentielle précédente. On suppose maintenant que  $a \neq 0$  et  $b = 0$ . Il est facile de vérifier, avec le même argument sur  $\varepsilon_2$  que précédemment, que les seuls points d'équilibre de l'équation différentielle (A.1) sont alors  $\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ . Le linéarisé de cette équation en chacun de ces points d'équilibre est

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{a\varepsilon_2 \cos(\varepsilon_2 \cos \alpha_0) \sin \alpha_0}{\det H(\alpha_0)} \tilde{\alpha}$$

avec  $\tilde{\alpha} := \alpha - \alpha_0$ . Par conséquent :

$$\dot{\tilde{\alpha}} \approx \begin{cases} -\frac{a\varepsilon_2}{\det H(\alpha_0)} \tilde{\alpha} & \text{si } \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \\ \frac{a\varepsilon_2}{\det H(\alpha_0)} \tilde{\alpha} & \text{si } \alpha_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Comme  $\det H(\alpha) < 0$  pour tout  $\alpha$ , on conclut que seul

$$\alpha_0 = -\text{sign}(a) \frac{\pi}{2}$$

est asymptotiquement stable sur la zéro dynamique du système.

Finalement, on considère le cas où ni  $a$  ni  $b$  ne sont nulles. Pour qu'il puisse exister des points d'équilibre, il faut que l'équation

$$a \sin(\varepsilon_2 \cos \alpha) = b \cos(\varepsilon_2 \cos \alpha) \quad (\text{A.2})$$

admette une solution, d'où la condition

$$\varepsilon_2 \geq \arctan \left| \frac{b}{a} \right| \quad (\text{A.3})$$

Si la condition (A.3) est remplie, alors les points d'équilibre de l'équation (A.1) sont

$$\alpha_0 = \pm \arccos \left( \frac{\arctan \frac{b}{a}}{\varepsilon_2} \right) \quad (\text{A.4})$$

Le linéarisé de cette équation en chacun de ces points d'équilibre est

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{a \cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right) + b \sin\left(\arctan\frac{b}{a}\right)}{\det H(\alpha_0)} \varepsilon_2 \sin(\alpha_0) \tilde{\alpha}$$

avec  $\tilde{\alpha} := \alpha - \alpha_0$ .

L'équation (A.2), combinée avec le fait que  $a$  et  $b$  sont différents de zéro, entraîne

$$a \cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right) + b \sin\left(\arctan\frac{b}{a}\right) \neq 0.$$

Par conséquent si  $\alpha_0 \neq k\pi$ , un des deux points d'équilibre donnée par l'équation (A.4) est asymptotiquement stable, alors que l'autre est instable.

Pour exclure le cas  $\alpha_0 = k\pi$ , il suffit d'imposer

$$\varepsilon_2 > \arctan\left|\frac{b}{a}\right|$$

qui est une condition légèrement plus forte que (A.3). Maintenant, puisque  $b \neq 0$ , on a

$$\begin{cases} a \cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right) + b \sin\left(\arctan\frac{b}{a}\right) > 0 & \text{si } a > 0 \\ a \cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right) + b \sin\left(\arctan\frac{b}{a}\right) < 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Comme  $\det H(\alpha) < 0$ , on déduit alors que seul

$$\alpha_0 = -\text{sign}(a) \arccos\left(\frac{\arctan\frac{b}{a}}{\varepsilon_2}\right)$$

est asymptotiquement stable sur la zéro dynamique du système.

Le point a du lemme 2 résume les résultats précédents.

### A.1.2 Déplacement le long d'un cercle « déporté »

On suppose que le véhicule de référence se déplace tangentiellement à un cercle de rayon  $\rho$  avec une vitesse angulaire  $c$  constante et on cherche à suivre un repère déporté de la distance  $d$ .

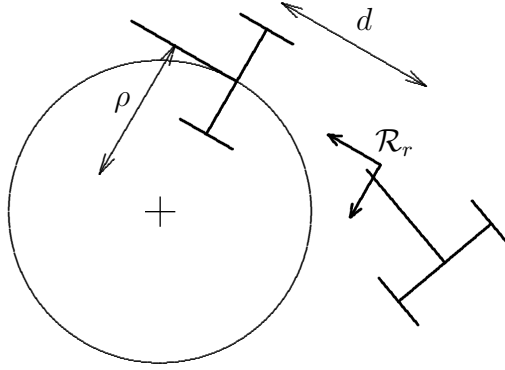


Figure A.1 – Déplacement le long d'un cercle de rayon  $\rho$  « déporté » de la distance  $d$

Avec un tel choix de trajectoire, la vitesse du repère cible  $\mathcal{R}_r$  est donnée par

$$(\rho c, c, -dc)^T$$

Sur la zéro dynamique  $z \equiv 0$ , l'équation (3.12) devient

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = H(\alpha)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho c \\ -dc \\ c \end{pmatrix}$$

En utilisant (3.13) et (3.8), on obtient que

$$\dot{\alpha} = \frac{c((\rho - f_2) \sin f_3 + (d - f_1) \cos f_3)}{\det H(\alpha)} \quad (\text{A.5})$$

avec  $f_1 = \varepsilon_1 \sin \alpha$ ,  $f_3 = \varepsilon_2 \cos \alpha$  et  $f_2 = \frac{f_1 f_3}{2}$ . Comme  $\varepsilon_2 \in (0, \pi/2]$ , il est facile de vérifier que les seuls points d'équilibre possibles pour l'équation différentielle précédente, sont ceux pour lesquels

$$\begin{cases} \tan f_3(\alpha_0) = -\frac{d-f_1(\alpha_0)}{\rho-f_2(\alpha_0)} & \text{si } \rho \neq f_2(\alpha_0) \\ d = f_1(\alpha_0) & \text{si } \rho = f_2(\alpha_0) \end{cases}$$

On suppose, pour simplifier l'étude, que  $\rho > \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}$ . Avec un tel choix,  $\rho > f_2$ , et une condition suffisante d'existence de points d'équilibre est

$$\tan \varepsilon_2 > \frac{d}{\rho} \quad (\text{A.6})$$

Lorsque (A.6) est vérifiée, on a :

$$\begin{aligned} \tan f_3(0) + \frac{d - f_1(0)}{\rho - f_2(0)} &= \tan \varepsilon_2 + \frac{d}{\rho} > 0 \\ \tan f_3(\pi) + \frac{d - f_1(\pi)}{\rho - f_2(\pi)} &= -\tan \varepsilon_2 + \frac{d}{\rho} < 0 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, et en utilisant la périodicité des fonctions  $f_i$ , on déduit

$$\begin{cases} \exists \alpha_1 \in [0, \pi] : \tan f_3(\alpha_1) = -\frac{d - f_1(\alpha_1)}{\rho - f_2(\alpha_1)} & \text{(A.7a)} \\ \exists \alpha_2 \in [\pi, 2\pi] : \tan f_3(\alpha_2) = -\frac{d - f_1(\alpha_2)}{\rho - f_2(\alpha_2)} & \text{(A.7b)} \end{cases}$$

On étudie alors l'existence de points d'équilibre asymptotiquement stables. Posons

$$h := (\rho - f_2) \sin f_3 + (d - f_1) \cos f_3$$

D'après (A.5),

$$\dot{\alpha} = \frac{ch(\alpha)}{\det H(\alpha)} \quad \text{(A.8)}$$

En notant  $h'$  la dérivée de  $h$  par rapport à  $\alpha$ ,

$$h' := -\sin f_3 (f_2' + (d - f_1) f_3') + \cos f_3 ((\rho - f_2) f_3' - f_1')$$

Si  $\alpha_0$  est un point d'équilibre,  $h(\alpha_0) = 0$ . Par conséquent

$$d - f_1(\alpha_0) = -(\rho - f_2(\alpha_0)) \tan f_3(\alpha_0)$$

On en déduit que

$$h'(\alpha_0) = -(\varepsilon_2 g_1(\alpha_0) \sin \alpha_0 + \varepsilon_1 g_2(\alpha_0) \cos \alpha_0)$$

avec

$$\begin{cases} g_1 &= \frac{\rho - f_2}{\cos f_3} - \frac{f_1}{2} \sin f_3 \\ g_2 &= \cos f_3 + \frac{f_3}{2} \sin f_3 \end{cases}$$

Puisque  $|f_3| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $g_2(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha$ . Par ailleurs, si  $\rho > \frac{3}{4}\varepsilon_1\varepsilon_2$ , alors  $g_1(\alpha) > 0$ . Dans





La relation entre  $\dot{\alpha}$  and  $\dot{\beta}$ , exprimée par l'équation (A.10), montre comment  $\dot{\beta}$  peut être utilisé pour contrôler  $\alpha$ .

**Point 1 de la proposition** Supposons que  $\gamma = 1$  et  $u^r \equiv 0$ , l'équation (A.10) devient

$$\dot{\alpha} = -2(1 - \cos \alpha) \dot{\beta} \quad (\text{A.11})$$

En choisissant  $\dot{\beta} := k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , on obtient

$$\dot{\alpha} = -2k(1 - \cos \alpha) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (\text{A.12})$$

Si  $k > 0$  et  $\alpha(0) \in ]-\pi, \pi[$ , il est facile de montrer que la solution de l'équation (A.12) converge vers zéro. De plus, avec  $\gamma = 1$ ,  $f(0, \beta) = 0$  pour tout  $\beta$ . Par suite,  $f(\alpha(t), \beta(t))$  converge aussi vers zéro. Puisque  $g = f(\alpha, \beta)$  sur la zéro dynamique  $z = 0$ , nous en déduisons que  $g(t)$  converge vers zéro, lorsque la commande (3.20) est appliquée au système (3.11). La stabilité asymptotique de  $g = 0$ , en prenant en compte la phase transitoire de convergence de  $z$  vers zéro, implique des arguments un peu plus techniques, détaillés dans (Morin et Samson, 2004a).

**Point 2 de la proposition** On suppose maintenant que  $u^r \neq 0$ , et  $\gamma \in (0, 1)$ . En choisissant

$$\dot{\beta} := \frac{k}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \alpha} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{\bar{f}_3 (u_2^r \bar{f}_2 - u_1^r) + u_2^r \bar{f}_1}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \alpha}$$

l'équation (A.10) devient :

$$\dot{\alpha} = -k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} u_3^r \quad (\text{A.13})$$

Si  $k > 0$  et  $u_3^r = 0$ , l'équation (A.13) entraîne que  $\alpha$  converge exponentiellement vers zéro. Comme  $g = f(\alpha, \beta)$  sur la zéro dynamique  $z = 0$ , on en déduit que  $g(t) - f(0, \beta(t))$  converge vers zéro et que  $\|g(t)\|$  est ultimement majorée par  $\max_{\beta} \|f(0, \beta)\|$ . On vérifie d'autre part, à partir de l'expression (3.16)–(3.17) de la fonction transverse, que :

$$f(0, \beta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 (1 - \gamma) \sin \beta \\ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} (1 - \gamma)^2 \sin \beta \cos \beta \\ \arctan(\varepsilon_2 (1 - \gamma) \cos \beta) \end{pmatrix}$$

et, par un calcul simple :

$$\max_{\beta} \|f(0, \beta)\| \leq (1 - \gamma) \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4})\|$$

**Point 3 de la proposition** Dans la troisième partie de la proposition 11, la convergence de  $g(t)$  vers l'ensemble  $f(\mathbb{T}^2)$ , indépendamment du choix de la dynamique  $\dot{\beta}$ , est aussi une conséquence directe de la proposition 3.12. Par conséquent  $\|g(t)\|$  est ultimement bornée par  $\max_{\alpha, \beta} \|f(\alpha, \beta)\|$ . Au vu de l'expression (3.16)–(3.17) de la fonction transverse :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^2, \begin{cases} \bar{f}_1(\alpha, \beta) \leq & 2\varepsilon_1 \\ \bar{f}_2(\alpha, \beta) \leq & 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ \arctan(\bar{f}_3(\alpha, \beta)) \leq \arctan(2\varepsilon_2) \leq & 2\varepsilon_2 \end{cases}$$

dont on déduit que  $\max_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^2} \|f(\alpha, \beta)\| \leq 2 \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2)\|$ .

### A.3 Preuve du lemme 3

On reprend les notations introduites dans le chapitre 3.2.4 avec lesquelles les systèmes (3.11) et (3.19) s'écrivent :

$$\dot{z} = \bar{H} \bar{u} - w \tag{A.14}$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{(u, \dot{\alpha})} J := \frac{1}{2} (\delta_1 \|u\|^2 + \delta_2 \dot{\alpha}^2) \\ z^T \dot{z} = -z^T K z \end{cases} \tag{A.15}$$

avec  $u := (u_1, u_2)$ ,  $\delta_1, \delta_2 > 0$ ,  $K$  une matrice définie positive, et  $\dot{z}$  donné par (A.14).

On pose  $\bar{H}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $\bar{H}_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , les matrices telles que  $\bar{H} = (\bar{H}_1, \bar{H}_2)$ . Le problème d'optimisation s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \min_{(u, \dot{\alpha})} J := \frac{1}{2} (\delta_1 \|u\|^2 + \delta_2 \dot{\alpha}^2) \end{cases} \tag{A.16a}$$

$$\begin{cases} z^T (\bar{H}_1 u + \bar{H}_2 \dot{\alpha} - w) = -z^T K z \end{cases} \tag{A.16b}$$

On définit le lagrangien associé à ce problème :

$$\mathcal{L} := J + \lambda (z^T (\bar{H}_1 u + \bar{H}_2 \dot{\alpha} - w) + z^T K z) \tag{A.17}$$

La solution au problème d'optimisation (A.15) satisfait les équations suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \delta_1 u^T + \lambda z^T \bar{H}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = -\frac{\lambda}{\delta_1} \bar{H}_1^T z \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \delta_2 \dot{\alpha} + \lambda z^T \bar{H}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha}^* = -\frac{\lambda}{\delta_2} \bar{H}_2^T z \quad (\text{A.18b})$$

En reportant les équations (A.18a) et (A.18b) dans l'équation (A.16b), le paramètre  $\lambda$  peut être éliminé :

$$\lambda z^T (\delta_1^{-1} \bar{H}_1 \bar{H}_1^T + \delta_2^{-1} \bar{H}_2 \bar{H}_2^T) z + z^T w = z^T K z$$

Soit

$$\lambda = \frac{z^T K z - z^T w}{z^T (\delta_1^{-1} \bar{H}_1 \bar{H}_1^T + \delta_2^{-1} \bar{H}_2 \bar{H}_2^T) z} \quad (\text{A.19})$$

Le lemme 3 se déduit des équations (A.15), (A.18) et (A.19).

Notons que, lorsque  $w = 0$ , le retour d'état (3.25) peut aussi être défini par continuité en  $z = 0$ , du fait de la bornitude uniforme de  $|\lambda|$  par un nombre fini dans ce cas.

## A.4 Preuve de la proposition 12

On combine les retours d'état (3.27) et (3.25) selon l'équation suivante :

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{\eta}{\eta + \psi}\right) \bar{u}_{zl} + \frac{\eta}{\eta + \psi} \bar{u}^* \quad (\text{A.20})$$

avec  $\bar{u}_{zl}$ ,  $\bar{u}^*$ , et  $\eta$  définis respectivement par (3.27), (3.25), et (3.26), et  $\psi$  une — petite — constante positive.

On vérifie tout d'abord que, grâce à la multiplication de  $\bar{u}^*$  par  $\frac{\eta}{\eta + \psi}$ , la fonction  $\bar{u}$  est bien définie partout.

Montrons ensuite que l'origine  $z = 0$  du système en boucle fermée (3.11)–(3.28) est exponentiellement stable. Posons

$$V := \frac{1}{2} z^T z \quad (\text{A.21})$$

Sur les trajectoires du système en boucle fermée (3.11)–(3.28), sa dérivée par rapport au

temps est  $\dot{V} = z^T \dot{z} = z^T (\bar{H}\bar{u} - w)$  avec  $\bar{u}$  défini par (A.20). On obtient alors

$$\begin{aligned} z^T (\bar{H}\bar{u} - w) &= z^T \left( \bar{H} \left( \left( 1 - \frac{\eta}{\eta + \psi} \right) \bar{u}_{zl} + \frac{\eta}{\eta + \psi} \bar{u}^* \right) - w \right) \\ &= \left( 1 - \frac{\eta}{\eta + \psi} \right) z^T (\bar{H}\bar{u}_{zl} - w) + \frac{\eta}{\eta + \psi} z^T (\bar{H}\bar{u}^* - w) \end{aligned}$$

Grâce à la définition de  $\bar{u}_{zl}$  et à la construction de  $\bar{u}^*$ , on déduit

$$\begin{cases} z^T (\bar{H}\bar{u}_{zl} - w) &= -z^T K z \\ z^T (\bar{H}\bar{u}^* - w) &= -z^T K z \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T (\bar{H}\bar{u} - w) \\ &= - \left( 1 - \frac{\eta}{\eta + \psi} \right) z^T K z + - \frac{\eta}{\eta + \psi} z^T K z \\ \dot{V} &= -z^T K z \end{aligned} \tag{A.22}$$

Au vu de (A.21) et (A.22), et en utilisant le fait que  $K$  est définie positive, on a  $\forall t \geq 0 : |z(t)| \leq |z(0)| e^{-\frac{\gamma}{2}t}$  avec  $\gamma > 0$  désignant la plus petite valeur singulière de  $K$ . Ceci démontre la stabilité exponentielle du point  $z = 0$ .

# Annexe B

## Résultats du chapitre 4

### B.1 Etude des conditions de stabilité des estimateurs

#### B.1.1 Preuve de la proposition 13

En définissant  $\tilde{X}_p = X_p - \hat{X}_p$  et  $\tilde{X}_\theta = X_\theta - \hat{X}_\theta$  et en utilisant les équations (4.4), (4.5), et (4.8), nous déduisons

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{X}}_p &= A_p(\hat{u}_2^r)\tilde{X}_p - D_p(p - \hat{p}) + U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta}) + V_p - D_p v_p + (A_p(u_2^r) - A_p(\hat{u}_2^r))X_p \\ \dot{\tilde{X}}_\theta &= A_\theta\tilde{X}_\theta - D_\theta(\theta - \hat{\theta}) + V_\theta - D_\theta v_\theta\end{aligned}\tag{B.1}$$

La définition (4.6) donne

$$p - \hat{p} = C_p\tilde{X}_p \quad \text{avec} \quad C_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tag{B.2}$$

$$\theta - \hat{\theta} = C_\theta\tilde{X}_\theta \quad \text{avec} \quad C_\theta = (1 \ 0)\tag{B.3}$$

et

$$A_p(u_2^r) - A_p(\hat{u}_2^r) = (u_2^r - \hat{u}_2^r)A_1 = \tilde{X}_\theta^T C_{u_2^r} A_1\tag{B.4}$$

avec  $C_{u_2^r}$  et  $A_1$  des matrices constantes. En utilisant alors les équations (B.1), (B.2), (B.3), et (B.4),

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}_p = (A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p)\tilde{X}_p + \tilde{X}_\theta^T C_{u_2^r} A_1 X_p + U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta}) + V_p - D_p v_p & \text{(B.5a)} \\ \dot{\tilde{X}}_\theta = (A_\theta - D_\theta C_\theta)\tilde{X}_\theta + V_\theta - D_\theta v_\theta & \text{(B.5b)} \end{cases}$$

Considérons, dans un premier temps, uniquement le système (B.5b). En utilisant les définitions (4.7), (4.9), et (B.3), il est immédiat de vérifier que la matrice  $A_\theta - D_\theta C_\theta$  est Hurwitz-stable. Soit  $W_\theta(X_\theta)$ , une fonction de Lyapunov, quadratique définie positive, pour le système

$$\dot{\tilde{X}}_\theta = (A_\theta - D_\theta C_\theta)\tilde{X}_\theta$$

Grâce à la définition de  $v_M$ , il découle de l'équation (4.6) qu'il existe une constante positive  $c_\theta$ , telle que

$$\|V_\theta - D_\theta v_\theta\| \leq c_\theta v_M$$

Il existe donc deux constantes positives  $\gamma$  et  $c'_\theta$  telle que la dérivée de  $W_\theta(X_\theta)$  le long des solutions du système (B.5b) satisfasse

$$\begin{aligned} \dot{W}_\theta(\tilde{X}_\theta) &\leq -\gamma W_\theta(\tilde{X}_\theta) + c_\theta v_M \|\nabla W_\theta(\tilde{X}_\theta)\| \\ &\leq -\frac{\gamma}{2} W_\theta(\tilde{X}_\theta) + c'_\theta v_M^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

On déduit de cette inégalité que le long des solutions de (B.5b)

$$W_\theta(\tilde{X}_\theta(t)) \leq \frac{2}{\gamma} c'_\theta v_M^2 + e^{-\frac{\gamma}{2}t} W_\theta(\tilde{X}_\theta(0))$$

Puisque  $W_\theta(\tilde{X}_\theta)$  est une fonction quadratique définie positive, il existe donc, d'après l'équation précédente, deux constantes positives  $d_\theta$  et  $d'_\theta$ , telles que

$$\|\tilde{X}_\theta(t)\| \leq d_\theta v_M + d'_\theta e^{-\frac{\gamma}{4}t} \|\tilde{X}_\theta(0)\| \quad (\text{B.7})$$

Par hypothèse,  $u_1^o$ ,  $u_2^o$ , et  $X_p$  sont bornés ; la définition (4.7) et l'équation (B.7) entraînent alors

$$\|\tilde{X}_\theta^T C_{u_2^r} A_1 X_p + U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta}) + V_p - D_p v_p\| \leq c_p v_M + c'_p e^{-\frac{\gamma}{4}t} \|\tilde{X}_\theta(0)\| \quad (\text{B.8})$$

Le lemme suivant est démontré plus bas.

**Lemme 5** *Il existe une matrice définie positive  $P$  et un scalaire  $\tau > 0$ , tels que, pour toute fonction  $\hat{u}_2^r(\cdot)$ , la dérivée de  $W_p := \frac{1}{2} \tilde{X}_p^T P \tilde{X}_p$  le long des solutions de*

$$\dot{\tilde{X}}_p = (A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p) \tilde{X}_p \quad (\text{B.9})$$

satisfasse

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) \leq -\tau W_p(\tilde{X}_p) \quad (\text{B.10})$$

En utilisant alors le même raisonnement que pour  $\tilde{X}_\theta$ , on déduit de (B.5a), (B.10), et (B.8) qu'il existe deux constantes positives  $d_p$  et  $d'_p$ , telles que le long des solutions du système (B.5a),

$$\|\tilde{X}_p(t)\| \leq d_p v_M + d'_p e^{-\frac{\tau}{4}t} \|\tilde{X}_p(0)\| \quad (\text{B.11})$$

La proposition 13 se déduit alors de (B.7) et de (B.11).

### Preuve du lemme 5

Les définitions (4.7), (4.9) et (B.2), donnent

$$A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p = \begin{pmatrix} -\lambda_p & \hat{u}_2^r & -1 & 0 \\ -\hat{u}_2^r & -\lambda_p & 0 & -1 \\ \beta_p & 0 & 0 & \hat{u}_2^r \\ 0 & \beta_p & -\hat{u}_2^r & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & p_3 \\ p_3 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

où  $p_1$ ,  $p_2$ , et  $p_3$  seront précisées ultérieurement. Avec un tel choix de matrice, la dérivée de  $W_p$  le long des solutions de (B.9) satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{W}_p(\tilde{X}_p) &= \tilde{x}_1^2 (-p_1 \lambda_p + p_3 \beta_p) - \tilde{x}_3^2 p_3 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 (p_2 \beta_p - p_1 - p_3 \lambda_p) \\ &\quad + \tilde{x}_2^2 (-p_1 \lambda_p + p_3 \beta_p) - \tilde{x}_4^2 p_3 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_4 (p_2 \beta_p - p_1 - p_3 \lambda_p) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Posons alors

$$p_1 := 2\beta_p, \quad p_3 := \lambda_p, \quad p_2 := \frac{p_1 + p_3 \lambda_p}{\beta_p} = 2 + \frac{\lambda_p^2}{\beta_p} \quad (\text{B.14})$$

Alors, d'après (B.13)

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) = -\lambda_p \beta_p (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) - \lambda_p (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2)$$

si bien que  $\dot{W}_p(\tilde{X}_p)$  est définie négative. Il reste à montrer que  $W_p$  est définie positive.



D'après (B.14)

$$\begin{aligned}\beta_p (p_1 \tilde{x}_1^2 + p_2 \tilde{x}_3^2 + 2p_3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3) &= 2\beta_p^2 \tilde{x}_1^2 + (2\beta_p + \lambda_p^2) \tilde{x}_3^2 + 2\lambda_p \beta_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 \\ &\geq 2\beta_p^2 \tilde{x}_1^2 + \lambda_p^2 \tilde{x}_3^2 + 2\lambda_p \beta_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 \\ &\geq \beta_p^2 \tilde{x}_1^2 + (\beta_p \tilde{x}_1 + \lambda_p \tilde{x}_3)^2\end{aligned}$$

$p_1 \tilde{x}_1^2 + p_2 \tilde{x}_3^2 + 2p_3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3$  est donc une forme quadratique en  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{x}_2$  définie positive. D'où, d'après (B.12)

$$W_p = (p_1 \tilde{x}_1^2 + p_2 \tilde{x}_3^2 + 2p_3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_3) + (p_1 \tilde{x}_2^2 + p_2 \tilde{x}_4^2 + 2p_3 \tilde{x}_2 \tilde{x}_4)$$

et  $W_p$  est bien définie positive. Ce qui conclut la preuve du lemme 5.

### B.1.2 Preuve de la proposition 13 appliquée à l'estimateur (4.17)

Du fait des similarités entre les équations de l'estimateur (4.8) et de l'estimateur (4.17), la preuve de stabilité de l'estimateur (4.17) est similaire à celle de l'estimateur (4.8) présentée dans l'annexe B.1.1. Toutefois, le lemme 5 doit y être modifié, afin d'obtenir la propriété de stabilité. On propose alors le lemme suivant

**Lemme 6** *Il existe une fonction  $W_p$  et un scalaire  $\tau > 0$  tels que la dérivé de  $W_p$  le long des solutions de*

$$\dot{\tilde{X}}_p = (A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p) \tilde{X}_p \quad (\text{B.15})$$

satisfasse

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) \leq -\tau W_p(\tilde{X}_p) \quad (\text{B.16})$$

qui permet de conclure la preuve.

#### Preuve du lemme 6

Les définitions (4.16), (4.9), et (B.2) donnent

$$A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p = \begin{pmatrix} -\lambda_p & \hat{u}_2^r & -1 & 0 \\ -\hat{u}_2^r & -\lambda_p & 0 & -1 \\ \beta_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$W_p(\tilde{X}_p) = \gamma (\beta_p (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) + \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) + \tilde{x}_2 \tilde{x}_4 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 \quad (\text{B.17})$$

où  $\gamma$  est une constante positive et  $\tilde{x}_i$  correspond à la  $i$ -ème coordonnée de  $\tilde{X}_p$ . La dérivée de  $W_p$  le long des solutions de (B.15) satisfait alors

$$\begin{aligned} \dot{W}_p(\tilde{X}_p) = & -2\gamma\beta_p\lambda_p(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) + \beta_p(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) - (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) \\ & - \lambda_p(\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + \tilde{x}_2\tilde{x}_4) - \hat{u}_2^r(\tilde{x}_1\tilde{x}_4 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3) \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, supposons que  $\gamma$  est telle que  $\gamma\lambda_p > 1$ . Alors,

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) \leq -\gamma\beta_p\lambda_p(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) - (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) - \lambda_p(\tilde{x}_1\tilde{x}_3 + \tilde{x}_2\tilde{x}_4) - \hat{u}_2^r(\tilde{x}_1\tilde{x}_4 - \tilde{x}_2\tilde{x}_3) \quad (\text{B.18})$$

Par hypothèse,  $u_2^r$  est bornée et donc d'après (B.7),  $\hat{u}_2^r$  est également bornée par une constante  $\mu$ . Par conséquent, en utilisant le fait que

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \|xy\| \leq \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 + (\varepsilon y)^2 \right)$$

on déduit de (B.18) que

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) \leq -\gamma\beta_p\lambda_p(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) - (\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) + \frac{1}{2}(\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) + c(\lambda_p, \mu)(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) \quad (\text{B.19})$$

avec  $c(\lambda_p, \mu)$  une constante positive, choisie en fonction de  $\lambda_p$  et  $\mu$ . Les équations (B.18) et (B.19) donnent finalement

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) \leq -(\gamma\beta_p\lambda_p - c(\lambda_p, \mu))(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) - \frac{1}{2}(\tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2) \quad (\text{B.20})$$

En prenant  $\gamma$  suffisamment grand dans les équations (B.17) et (B.20),  $W_p(\tilde{X}_p)$  est une forme quadratique définie positive et  $\dot{W}_p(\tilde{X}_p)$  est définie négative. Il existe alors une constante  $\tau$  positive, telle que

$$\dot{W}_p(\tilde{X}_p) \leq -\tau W_p(\tilde{X}_p)$$

Ce qui conclut la preuve du lemme 6.

## B.2 Preuve du lemme 4

### B.2.1 Estimation de l'orientation

Le gain de Kalman asymptotique pour l'estimateur linéaire (4.8b) est donné par — voir (Kwakernaak et Sivan, 1972, Sec. 4.4) pour plus de détails :  $D_\theta = \Sigma_\theta C_\theta^T \omega_\theta^{-1}$ , avec  $C_\theta = (1, 0)$  et  $\Sigma_\theta$  la matrice définie positive, solution de l'équation algébrique de Ricatti, associée au système (4.5b)–(4.4b) :

$$0 = A_\theta \Sigma_\theta + \Sigma_\theta A_\theta^T - \Sigma_\theta C_\theta^T \omega_\theta^{-1} C_\theta \Sigma_\theta + \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_c \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Puisque  $\Sigma_\theta$  est une matrice de covariance, elle est symétrique :

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

L'équation (B.21) est alors équivalente au système

$$\begin{cases} 2\Sigma_{12} + \frac{\Sigma_{11}^2}{\omega_\theta} - \omega_2 = 0 \\ \Sigma_{22} + \frac{\Sigma_{11}\Sigma_{12}}{\omega_\theta} = 0 \\ \frac{\Sigma_{12}^2}{\omega_\theta} - \omega_c = 0 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

En utilisant le fait que  $\Sigma_\theta$  doit être définie positive et que par hypothèses  $\omega_2 \ll \sqrt{\omega_c \omega_\theta}$ , on obtient la solution suivante du système (B.23)

$$\begin{cases} \Sigma_{11} = \sqrt{\omega_\theta(\omega_2 + 2\sqrt{\omega_c \omega_\theta})} \\ \Sigma_{12} = -\sqrt{\omega_c \omega_\theta} \\ \Sigma_{22} = \sqrt{\omega_c(\omega_2 + 2\sqrt{\omega_c \omega_\theta})} \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

Avec (B.22), (B.24), et la définition de  $D_\theta$ , on trouve

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_\theta} + 2\sqrt{\frac{\omega_c}{\omega_\theta}}} \\ -\sqrt{\frac{\omega_c}{\omega_\theta}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

Comme, par hypothèse,  $\omega_2 \ll \sqrt{\omega_c \omega_\theta}$ , la matrice  $D_\theta$  est alors approximée par

$$D_\theta \approx \begin{pmatrix} \sqrt{2}\lambda_\theta \\ -\lambda_\theta^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

avec  $\lambda_\theta = \sqrt[4]{\frac{\omega_c}{\omega_\theta}}$ .

### B.2.2 Estimation de la position

Considérons le gain de Kalman asymptotique  $D_p$  pour l'estimateur (4.8a) associé au système (4.5a)–(4.4a). Supposons que la vitesse  $u_2^r$  est constante et que  $\omega_1 \equiv 0$ , la matrice  $D_p$  est donnée par  $D_p = \Sigma_p C_p^T \omega_p^{-1}$ , avec  $C_p = (I_2, 0_2)$  et  $\Sigma_p$  la solution définie positive de l'équation de Riccati associée au système (4.5a)–(4.4a) :

$$0 = A_p \Sigma_p + \Sigma_p A_p^T - \Sigma_p C_p^T \omega_p^{-1} C_p \Sigma_p + V \quad (\text{B.27})$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_b \end{pmatrix} \quad \omega_p = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & \omega_y \end{pmatrix}$$

Considérons d'abord le cas  $u_2^r = 0$ . Alors,

$$A_p(\hat{u}_2^r) = A_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le système (4.5a)–(4.4a) définit deux systèmes découplés, similaires au système (4.5b)–(4.4b) lorsque  $\omega_2$  est négligé :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u}_1^r \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ u_1^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^o \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_a \end{pmatrix} \\ x^v = x + v_x \end{cases} \quad (\text{B.28a})$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{u}_3^r \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} y \\ u_3^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^o \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_b \end{pmatrix} \\ y^v = y + v_y \end{cases} \quad (\text{B.28b})$$

En utilisant les résultats de l'annexe B.2.1 donnés pour l'estimateur d'orientation, nous obtenons le gain de Kalman asymptotique  $D_p$  pour le système (4.5a)–(4.4a) :

$$D_p \approx \begin{pmatrix} \sqrt{2}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\lambda_2 \\ -\lambda_1^2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2^2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{\omega_a}{\omega_x}} \quad \lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{\omega_b}{\omega_y}} \quad (\text{B.29})$$

De même, en utilisant les équations (B.22) et (B.24)

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} \sqrt{2\omega_x\sqrt{\omega_a\omega_x}} & 0 & -\sqrt{\omega_a\omega_x} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\omega_y\sqrt{\omega_b\omega_y}} & 0 & -\sqrt{\omega_b\omega_y} \\ -\sqrt{\omega_a\omega_x} & 0 & \sqrt{2\omega_a\sqrt{\omega_a\omega_x}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\omega_b\omega_y} & 0 & \sqrt{2\omega_b\sqrt{\omega_b\omega_y}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Considérons maintenant le cas où  $u_2^r \neq 0$ . Nous allons montrer, sous l'hypothèse  $\omega_a = \omega_b$  et  $\omega_x = \omega_y$ , que  $\Sigma_p$  définie par (B.30) est aussi la solution définie positive de l'équation de Riccati associée au système (4.5a)–(4.4a), et donc que  $D_p$  définie par (B.29) est aussi le gain de Kalman asymptotique pour l'estimateur de position (4.8a).

En utilisant la définition (4.7) de  $A_p(\hat{u}_2^r)$ , l'équation de Riccati (B.27) est équivalente à

$$0 = \begin{pmatrix} -u_2^r S & -I_2 \\ 0_2 & -u_2^r S \end{pmatrix} \Sigma_p + \Sigma_p \begin{pmatrix} u_2^r S & 0_2 \\ -I_2 & u_2^r S \end{pmatrix} - \Sigma_p \begin{pmatrix} I_2 \\ 0_2 \end{pmatrix} \omega_p^{-1} \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \end{pmatrix} \Sigma_p + V \quad (\text{B.31})$$

avec  $S$  la matrice antisymétrique.

Décomposons  $\Sigma_p$  en :

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{B.32})$$

où chaque  $\Sigma_{ij}$  représente une matrice  $2 \times 2$ . L'équation (B.31) est alors équivalente au système

$$\begin{cases} u_2^r (\Sigma_{11} S - S \Sigma_{11}) - (\Sigma_{12} + \Sigma_{12}^T) - \Sigma_{11} \omega_p^{-1} \Sigma_{11} & = 0 \\ u_2^r (\Sigma_{12} S - S \Sigma_{12}) - \Sigma_{22} - \Sigma_{11} \omega_p^{-1} \Sigma_{12} & = 0 \\ u_2^r (\Sigma_{22} S - S \Sigma_{22}) - \Sigma_{12}^T \omega_p^{-1} \Sigma_{12} + \begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix} & = 0 \end{cases}$$

Soit, en identifiant la matrice (B.32) avec (B.30)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2^r \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\omega_y\sqrt{\omega_b\omega_y}} - \sqrt{2\omega_x\sqrt{\omega_a\omega_x}} \\ \sqrt{2\omega_y\sqrt{\omega_b\omega_y}} - \sqrt{2\omega_x\sqrt{\omega_a\omega_x}} & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ u_2^r \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\omega_a\omega_x} - \sqrt{\omega_b\omega_y} \\ \sqrt{\omega_a\omega_x} - \sqrt{\omega_b\omega_y} & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ u_2^r \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\omega_b\sqrt{\omega_b\omega_y}} - \sqrt{2\omega_a\sqrt{\omega_a\omega_x}} \\ \sqrt{2\omega_b\sqrt{\omega_b\omega_y}} - \sqrt{2\omega_a\sqrt{\omega_a\omega_x}} & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.33})$$

Donc, si  $\omega_a = \omega_b$  et  $\omega_x = \omega_y$ , l'équation (B.33) est satisfaite, ce qui conclue la preuve.

### B.3 Preuve de la proposition 14

**Remarque 5** Dans cette preuve, on trouve un certain nombre d'inégalités du type  $\|X\| \leq c_1 v_M^{p_1} + \dots + c_k v_M^{p_k}$  pour des constantes positives  $c_i$  et pour des entiers  $0 \leq p_1 < p_2 \dots < p_k$ . Comme la proposition 14 ne concerne que des valeurs de  $v_M$  « suffisamment » petites, ces inégalités seront, sans plus d'informations, simplifiées en  $\|X\| \leq c v_M^{p_1}$ .

D'après (3.11) :

$$\dot{z} = dr_{f^{-1}}(g) (dl_z(f)H(\alpha)\bar{u} + P(g, t)) \quad (\text{B.34})$$

et d'après (3.12), le retour d'état  $\bar{u}(g^e, \hat{u}^r, \alpha)$  est donné par

$$\bar{u}(g^e, \hat{u}^r, \alpha) = -H(\alpha)^{-1} dl_{(z^e)^{-1}}(g^e) \left( dr_f(z^e)Kz^e + \hat{P}(g^e, t) \right) \quad (\text{B.35})$$

avec  $z^e := g^e f(\alpha)^{-1}$  et

$$\hat{P}(g^e, t) = - \begin{pmatrix} \hat{u}_1^r - y^e \hat{u}_2^r \\ \hat{u}_3^r + x^e \hat{u}_2^r \\ \hat{u}_2^r \end{pmatrix}$$

En appliquant ce retour d'état au système (B.34), on obtient

$$\dot{z} = -dr_{f^{-1}}(g) dl_{z(z^e)^{-1}}(g) dr_f(z^e)Kz^e + dr_{f^{-1}}(g) \left( P(g, t) - dl_{z(z^e)^{-1}}(g^e) \hat{P}(g^e, t) \right)$$

soit

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -Kz + K(z - z^e) - \Gamma_1 Kz^e - \Gamma_2 \\ &= -Kz^e - \Gamma_1 Kz^e - \Gamma_2 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

avec

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &:= dr_{f^{-1}}(g)dl_{z(z^e)^{-1}}(g^e)dr_f(z^e) - I \\ \Gamma_2 &:= dr_{f^{-1}}(g) \left( P - dl_{z(z^e)^{-1}}(g^e)\hat{P}(g^e, t) \right)\end{aligned}\quad (\text{B.37})$$

D'après la loi de groupe (3.2), et en posant  $g_1 = (p_1, \theta_1)$  et  $g_2 = (p_2, \theta_2)$ , on a

$$dr_{g_2}(g_1) = \begin{pmatrix} I & SR(\theta_1)p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dl_{g_1}(g_2) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1^{-1} = \begin{pmatrix} -R(-\theta_1)p_1 \\ -\theta_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.38})$$

En utilisant (B.37), et (B.38), et le fait que la composante  $z_\theta$  correspondant à l'orientation dans  $z$  est donnée par  $z_\theta = \theta - f_\theta$ , on obtient

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \Gamma_{1,p} := R(\theta - \theta^e) - I_2 \quad (\text{B.39})$$

Considérons alors le terme  $\Gamma_2$  dans (B.37). D'après (3.7) et (B.38), on obtient :

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{2,p} \\ \Gamma_{2,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1^r - yu_2^r \\ u_3^r + xu_2^r \end{pmatrix} + R(\theta - \theta^e) \begin{pmatrix} \hat{u}_1^r - y^e \hat{u}_2^r \\ \hat{u}_3^r + x^e \hat{u}_2^r \end{pmatrix} + \tilde{u}_2^r SR(z_\theta) f_p \\ -\tilde{u}_2^r \end{pmatrix} \quad (\text{B.40})$$

D'après (4.18), (B.36), (B.39), et (B.40) :

$$\begin{cases} \dot{z}_p &= -K_p z_p + K_p(z_p - z_p^e) - \Gamma_{1,p} K_p z_p^e - \Gamma_{2,p} \\ \dot{z}_\theta &= k_\theta z_\theta - k_\theta(z_\theta - z_\theta^e) + \tilde{u}_2^r \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

avec  $z_p$  et  $z_\theta$  les composantes de position et d'orientation de  $z$ , c'est-à-dire  $z^T = (z_p^T, z_\theta)$ . D'après l'équation (B.41) et d'après (B.5) qui donne la dynamique de l'erreur d'estimation, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{z}_p &= -K_p z_p + K_p(z_p - z_p^e) - \Gamma_{1,p} K_p z_p^e - \Gamma_{2,p} \\ \dot{\tilde{X}}_p &= (A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p) \tilde{X}_p + \tilde{X}_\theta^T C_{u_2^r} A_1 X_p + U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta}) + V_p - D_p v_p \end{cases} \quad (\text{B.42})$$

et

$$\begin{cases} \dot{z}_\theta &= k_\theta z_\theta + \tilde{u}_2^r \\ \dot{\tilde{X}}_\theta &= (A_\theta - D_\theta C_\theta) \tilde{X}_\theta + V_\theta - D_\theta v_\theta \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

Le système (B.43) définit un système linéaire asymptotiquement stable — ce que l'on

peux vérifier facilement en utilisant le principe de séparation de la théorie des systèmes linéaires—, perturbé par le terme

$$(0, V_\theta - D_\theta v_\theta)^T$$

Puisque ce terme est borné en norme par  $c v_M$  où  $c$  est une constante positive, il existe une fonction de Lyapunov quadratique  $L_\theta(z_\theta, \tilde{X}_\theta)$  telle que, le long des trajectoires de (B.43),

$$\dot{L}_\theta \leq -2\tau_\theta L_\theta + c_\theta v_M^2 \quad (\tau_\theta > 0) \quad (\text{B.44})$$

Considérons maintenant le système (B.42) écrit sous la forme simplifiée

$$\begin{cases} \dot{z}_p &= -K_p z_p - \Delta_1 \\ \dot{\tilde{X}}_p &= (A_p(\hat{u}_2^r) - D_p C_p) \tilde{X}_p + \Delta_2 \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_1 &:= -K_p(z_p - z_p^e) + \Gamma_{1,p} K_p z_p^e + \Gamma_{2,p} \\ \Delta_2 &:= \tilde{X}_\theta^T C_{u_2} A_1 X_p + U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta}) + V_p - D_p v_p \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

La preuve du lemme technique suivant est donnée à la fin de cette annexe.

**Lemme 7** *Il existe une constante  $c$  telle que*

$$\begin{cases} \|\Delta_1\| \leq c(1 + \|z_p\|)(v_M + \sqrt{L_\theta} + L_\theta) + c\|\tilde{X}_p\|(1 + \sqrt{L_\theta} + L_\theta) \\ \|\Delta_2\| \leq c(1 + \|z_p\| + \|\tilde{X}_p\|)(v_M + \sqrt{L_\theta} + L_\theta) \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

Soit  $Q$  une matrice symétrique définie positive telle que

$$-(QK_p + K_p^T Q) \leq -2\gamma_o I \quad (\gamma_o > 0) \quad (\text{B.48})$$

Une telle matrice existe car  $-K$  est Hurwitz-stable si bien qu'en utilisant (4.18),  $-K_p$  est aussi Hurwitz-stable. Considérons la fonction

$$L_p(z_p, \tilde{X}_p) = z_p^T Q z_p + \beta W(\tilde{X}_p) \quad (\text{B.49})$$

avec  $\beta$  un paramètre positif qui sera spécifié plus bas, et  $W$  la fonction de Lyapunov du lemme 5. En dérivant  $L_p$  le long des trajectoires de (B.45), on obtient :

$$\dot{L}_p = -\frac{\partial L_p}{\partial z_p} K_p z_p + \frac{\partial L_p}{\partial \tilde{X}_p} (A_p(\hat{c}) + K_p C_p) \tilde{X}_p - \frac{\partial L_p}{\partial z_p} \Delta_1 + \frac{\partial L_p}{\partial \tilde{X}_p} \Delta_2 \quad (\text{B.50})$$



D'après (B.16) et (B.48) et le fait que  $Q$  est définie positive, on déduit de (B.50) que

$$\dot{L}_p \leq -3\gamma\|z_p\|^2 - 3\beta\gamma'\|\tilde{X}_p\|^2 + \left\| \frac{\partial L_p}{\partial z_p} \right\| \|\Delta_1\| + \left\| \frac{\partial L}{\partial \tilde{X}_p} \right\| \|\Delta_2\| \quad (\text{B.51})$$

pour deux constantes  $\gamma, \gamma' > 0$ . Il découle alors de (B.47) et (B.49) que pour une constante  $c$  positive,

$$\left\| \frac{\partial L_p}{\partial \tilde{X}_p} \right\| \|\Delta_2\| = \beta \left\| \frac{\partial W}{\partial \tilde{X}_p} \right\| \|\Delta_2\| \leq \beta c \|\tilde{X}_p\| \|\Delta_2\| \leq \beta \gamma' \|\tilde{X}_p\| \frac{c}{\gamma'} \|\Delta_2\| \leq \frac{\beta \gamma'}{2} \|\tilde{X}_p\|^2 + \frac{\beta c^2}{2\gamma'} \|\Delta_2\|^2 \quad (\text{B.52})$$

Avec des arguments similaires, on montre que pour une autre constante, encore notée  $c$ ,

$$\left\| \frac{\partial L_p}{\partial z_p} \right\| \|\Delta_1\| \leq \frac{\gamma}{2} \|z_p\|^2 + \frac{c^2}{2\gamma} \|\Delta_1\|^2 \quad (\text{B.53})$$

D'après (B.51), (B.52), et (B.53), on obtient

$$\dot{L}_p \leq -2\gamma\|z_p\|^2 - 2\beta\gamma'\|\tilde{X}_p\|^2 + \frac{c^2}{2\gamma} \|\Delta_1\|^2 + \frac{\beta c^2}{2\gamma'} \|\Delta_2\|^2 \quad (\text{B.54})$$

En utilisant (B.47) et (B.54), et une constante  $c$  positive

$$\begin{aligned} \dot{L}_p &\leq -2\gamma\|z_p\|^2 - 2\beta\gamma'\|\tilde{X}_p\|^2 + c(1 + \|z_p\|^2)(v_M^2 + L_\theta + L_\theta^2) \\ &\quad + c(1 + L_\theta + L_\theta^2)\|\tilde{X}_p\|^2 + \beta c(1 + \|z_p\|^2 + \|\tilde{X}_p\|^2)(v_M^2 + L_\theta + L_\theta^2) \\ &\leq -\|z_p\|^2 (2\gamma - c(1 + \beta)(v_M^2 + L_\theta + L_\theta^2)) \\ &\quad - \|\tilde{X}_p\|^2 (2\beta\gamma' - c(1 + L_\theta + L_\theta^2) - \beta c(v_M^2 + L_\theta + L_\theta^2)) + c(1 + \beta)(v_M^2 + L_\theta + L_\theta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Montrons alors la stabilité, pour  $v_M = 0$ , du couple commande–estimateur. Si  $v_M = 0$ , on déduit de (B.44) et (B.55) que

$$\dot{L}_\theta \leq -2\tau_\theta L_\theta \quad (\text{B.56a})$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_p &\leq -\|z_p\|^2 (2\gamma - c(1 + \beta)(L_\theta + L_\theta^2)) \\ &\quad - \|\tilde{X}_p\|^2 (2\beta\gamma' - c(1 + L_\theta + L_\theta^2) - \beta c(L_\theta + L_\theta^2)) \\ &\quad + c(1 + \beta)(L_\theta + L_\theta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.56b})$$

Donc, pour tout  $\beta > 0$  tel que  $\beta\gamma' > c$ , il existe  $l_m > 0$  tel que pour  $L_\theta \leq l_m$ ,

$$\dot{L}_p \leq -\tau_p L_p + \beta c(L_\theta + L_\theta^2) \quad (\tau_p > 0) \quad (\text{B.57})$$

La stabilité du système en boucle fermée découle des équations (B.56a) et (B.57).

Montrons enfin que  $\|z\| + \|\tilde{X}\|$  est ultimement bornée par une valeur proportionnelle à  $v_M$ , lorsque  $v_M$  est suffisamment petit. Considérons un  $\beta > 0$  satisfaisant  $\beta\gamma' > 2c$ . Alors, il existe une constante  $\bar{v} > 0$  telle que pour tout  $v_M \in [0, \bar{v}]$ ,

$$\begin{cases} \gamma \geq c(1 + \beta)\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \frac{c_\theta^2}{\tau_\theta^2}v_M^4 \\ \beta\gamma' \geq c\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \beta c\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \frac{c_\theta^2}{\tau_\theta^2}v_M^4 \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

où  $c_\theta$  et  $\tau_\theta$  sont définis par (B.44). D'après (B.44), on montre que le long des trajectoires du système en boucle fermée,

$$L_\theta(t) \leq L_\theta(0)e^{-2\tau_\theta t} + \frac{c_\theta}{2\tau_\theta}v_M^2$$

si bien qu'il existe un instant  $T$  tel que :

$$t \geq T \implies L_\theta(t) \leq \frac{c_\theta}{\tau_\theta}v_M^2 \quad (\text{B.59})$$

On déduit alors de (B.55) et (B.59) que

$$\begin{aligned} \dot{L}_p \leq & -\|z_p\|^2 \left( 2\gamma - c(1 + \beta)\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \frac{c_\theta^2}{\tau_\theta^2}v_M^4 \right) \\ & - \|\tilde{X}_p\|^2 \left( 2\beta\gamma' - c\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \frac{c_\theta^2}{\tau_\theta^2}v_M^4 \right) \\ & \quad + \beta c\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \frac{c_\theta^2}{\tau_\theta^2}v_M^4 \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

D'après (B.58) et (B.60),

$$\begin{aligned} t \geq T \implies \dot{L}_p & \leq -\gamma\|z_p\|^2 - \beta\gamma'\|\tilde{X}_p\|^2 + \beta c\left(1 + \frac{c_\theta}{\tau_\theta}\right)v_M^2 + \frac{c_\theta^2}{\tau_\theta^2}v_M^4 \\ & \leq -2\tau_p L_p + c_p v_M^2 \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

pour deux constantes  $\tau_p, c_p > 0$ . La bornitude de  $\|z\| + \|\tilde{X}\|$  par une valeur proportionnelle à  $v_M$ , découle de (B.59) et (B.61) en utilisant le fait que  $L_\theta$  and  $L_p$  sont deux fonctions quadratiques.

### Preuve du Lemme 7

D'après (3.2),

$$z = \begin{pmatrix} z_p \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - R(\theta - f_\theta)f_p \\ \theta - f_\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z^e = \begin{pmatrix} z_p^e \\ z_\theta^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^e - R(\theta^e - f_\theta)f_p \\ \theta^e - f_\theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.62})$$

On en déduit que

$$z - z^e = \begin{pmatrix} z_p - z_p^e \\ z_\theta - z_\theta^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - p^e + (R(\theta^e - \theta) - \text{I}_2) R(\theta - f_\theta) f_p \\ \theta - \theta^e \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

Pour les deux choix de  $g^e$ , c'est-à-dire  $g^e = \hat{g}$  et  $|g_i^e - g_i| \leq v_M$ , on remarque que

$$|\theta - \theta^e| \leq v_M + |\tilde{\theta}| \leq c(v_M + \sqrt{L_\theta}) \quad \text{et} \quad \|p - p^e\| \leq 2v_M + \|\tilde{p}\| \leq 2v_M + \|\tilde{X}_p\| \quad (\text{B.64})$$

D'après (B.63), et (B.64),

$$\begin{aligned} \|z_p - z_p^e\| &\leq \|p - p^e\| + c|\theta^e - \theta| \\ &\leq c(v_M + \sqrt{L_\theta}) + \|\tilde{X}_p\| \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Considérons maintenant le terme  $\Gamma_{1,p}K_p z_p^e = (R(\theta - \theta^e) - \text{I}_2)K_p z_p^e$  de l'équation (B.46).

$$\begin{aligned} \|(R(\theta - \theta^e) - \text{I}_2)K_p z_p^e\| &\leq |\theta - \theta^e| \|K_p z_p^e\| \\ &\leq |\theta - \theta^e| \|K_p z_p\| + |\theta - \theta^e| \|K_p(z_p - z_p^e)\| \\ &\leq c(v_M + \sqrt{L_\theta}) \left( \|z_p\| + c(v_M - \sqrt{L_\theta}) + \|\tilde{X}_p\| \right) \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Considérons enfin le terme  $\Gamma_{2,p}$  dans (B.46). Ce terme peut s'écrire comme suit :

$$\Gamma_{2,p} = - \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^r - y\tilde{u}_2^r - \tilde{y}^e \hat{u}_2^r \\ \tilde{u}_3^r + x\tilde{u}_2^r + \tilde{x}^e \hat{u}_2^r \end{pmatrix} + (R(\theta - \theta^e) - \text{I}_2) \begin{pmatrix} \hat{u}_1^r - y^e \hat{u}_2^r \\ \hat{u}_3^r + x^e \hat{u}_2^r \end{pmatrix} + \tilde{u}_2^r S R(z_\theta) f_p$$

d'où, en utilisant le fait que  $\|u^r\|$  est bornée et donc  $|\hat{u}_2^r| \leq c(1 + |\tilde{u}_2^r|)$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{2,p}\| &\leq c\|\tilde{X}_p\| + \|p\|\|\tilde{u}_2^r\| + c\|p - p^e\|(1 + |\tilde{u}_2^r|) \\ &\quad + c|\theta - \theta^e| \left( 1 + \|\tilde{X}_p\| + (1 + |\tilde{u}_2^r|) \left( 1 + \|\tilde{X}_p\| + \|p\| \right) \right) + c\|\tilde{u}_2^r\| \end{aligned}$$

D'après (B.64), et le fait que  $\|p\| \leq c + \|z_p\| \leq c(1 + \|z_p\|)$  :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{2,p}\| &\leq c \left[ \|\tilde{X}_p\| + (1 + \|z_p\|) \sqrt{L_\theta} + (v_M + \|\tilde{X}_p\|) \left(1 + \sqrt{L_\theta}\right) \right. \\ &\quad \left. + (v_M + \sqrt{L_\theta}) \left(1 + \|\tilde{X}_p\| + (1 + \sqrt{L_\theta}) \left(1 + \|\tilde{X}_p\| + \|z_p\|\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{L_\theta} \right] \\ &\leq c \|\tilde{X}_p\| \left(1 + \sqrt{L_\theta} + L_\theta\right) + c \left(v_M + \sqrt{L_\theta}\right) \left(1 + \sqrt{L_\theta}\right) (1 + \|z_p\|) \end{aligned} \quad (\text{B.67a})$$

La première inégalité de (B.47) découle de (B.65), (B.66), et (B.67a).

Montrons maintenant la seconde inégalité de (B.47). Il est immédiat de vérifier que

$$\|\tilde{X}_\theta^T C_{u_2^r} A_1 X_p\| \leq c(1 + \|z_p\|) \sqrt{L_\theta} \quad (\text{B.68})$$

et que, d'après (4.15),

$$\|V_p - D_p v_p\| \leq c v_M \quad (\text{B.69})$$

Il reste à considérer le terme  $U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta})$  dans (B.46). On dérive une borne maximale de  $\|\bar{u}\|$ , avec  $\bar{u}$  le retour d'état défini par (B.35). D'après (3.7) et (B.38),

$$\hat{P}(g^e, t) = \begin{pmatrix} -\hat{u}_1^r + y^e \hat{u}_2^r \\ -\hat{u}_3^r - x^e \hat{u}_2^r \\ -\hat{u}_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^r - u_1^r + y^e (u_2^r - \tilde{u}_2^r) \\ \tilde{u}_3^r - u_3^r - x^e (u_2^r - \tilde{u}_2^r) \\ \tilde{u}_2^r - u_2^r \end{pmatrix}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \|\hat{P}(g^e, t)\| &\leq c \left(1 + \|\tilde{X}_p\|\right) + c \|p^e\| + c |\tilde{u}_2^r| (1 + \|p^e\|) \\ &\leq c \left(1 + \|\tilde{X}_p\| + \|z_p\|\right) + c \sqrt{L_\theta} \left(1 + \|\tilde{X}_p\| + \|z_p\|\right) \\ &\leq c \left(1 + \sqrt{L_\theta}\right) \left(1 + \|\tilde{X}_p\| + \|z_p\|\right) \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|H^{-1}(\alpha) dl_{(z^e)^{-1}}(g_e) \hat{P}(g^e, t)\| \leq c \left(1 + \sqrt{L_\theta}\right) \left(1 + \|\tilde{X}_p\| + \|z_p\|\right)$$

Enfin

$$\begin{aligned} \|H^{-1}(\alpha)dl_{(z^e)^{-1}}(g_e)dr_f(z^e)Kz^e\| &\leq c(\|z_p^e\| + |z_\theta^e|) \\ &\leq c(\|z_p\| + \|z_p^e - z_p\| + |z_\theta^e|) \\ &\leq c\left(1 + \sqrt{L_\theta} + \|\tilde{X}_p\| + \|z_p\|\right) \end{aligned}$$

et

$$\|\bar{u}\| \leq c(1 + \|z_p\| + \|\tilde{X}_p\|)(1 + \sqrt{L_\theta}) \quad (\text{B.70})$$

En utilisant (4.15),

$$\|U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta})\| \leq |\theta - \hat{\theta}|\|u^o\| \leq |\tilde{\theta}|(\|\bar{u}\| + 2v_M) \quad (\text{B.71})$$

D'après (B.70) et (B.71), on obtient finalement

$$\|U_p(\theta) - U_p(\hat{\theta})\| \leq k\sqrt{L_\theta}(1 + \|z_p\| + \|\tilde{X}_p\|)(1 + \sqrt{L_\theta}) \quad (\text{B.72})$$

La seconde inégalité de (B.47) découle de (B.68), (B.69), et (B.72).

## B.4 Détails des calculs pour l'implémentation de la commande

### B.4.1 Discrétisation de l'estimateur (4.8)

#### Estimation de l'orientation

L'estimateur (4.8b) est implémenté sous forme discrète en utilisant deux étapes :

1. Intégration sur  $[kT, (k+1)T[$  de l'équation différentielle linéaire

$$\dot{\hat{X}}_\theta^- = A_\theta \hat{X}_\theta^- + U_\theta \quad (\text{B.73})$$

afin d'obtenir la prédiction  $\hat{X}_\theta^-[k+1]$ . Dans cette première étape, les mesures issues de l'odométrie sont utilisées afin de mieux évaluer la commande  $U_\theta$  réellement appliquée.

2. Correction utilisant les données issues de la vision aux instants  $(k+1)T$  afin d'obtenir l'estimée  $\hat{X}_\theta[k+1]$ .



avec

$$\hat{A}_p[k] := A_p(\hat{u}_2^r[k]), \quad \hat{p}^-[k+1] = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \end{pmatrix} \hat{X}_p^-[k+1] \quad \text{et} \quad \hat{U}_p = \begin{pmatrix} u_1^o \cos \hat{\theta}^- \\ u_1^o \sin \hat{\theta}^- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.80})$$

D'après (4.7),

$$A_p(c) = \begin{pmatrix} -cS & -I_2 \\ 0_2 & -cS \end{pmatrix}$$

$$\forall k > 0 \quad A_p^k(c) = \begin{pmatrix} (-1)^k c^k S^k & (-1)^k c^{k-1} S^{k-1} \\ 0_2 & (-1)^k c^k S^k \end{pmatrix}$$

et donc

$$\exp^{tA_p(c)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA_p(c))^k}{k!}$$

$$\exp^{tA_p(c)} = \begin{pmatrix} \exp^{-tcS} & -t \exp^{-tcS} \\ 0_2 & \exp^{-tcS} \end{pmatrix} \quad (\text{B.81})$$

Puisque  $\hat{A}_p[k] = A_p(\hat{u}_2^r[k])$ , on déduit de (B.81)

$$\exp^{t\hat{A}_p[k]} = \begin{pmatrix} \exp^{-t\hat{u}_2^r[k]S} & -t \exp^{-t\hat{u}_2^r[k]S} \\ 0 & \exp^{-t\hat{u}_2^r[k]S} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R(-t\hat{u}_2^r[k]) & -tR(-t\hat{u}_2^r[k]) \\ 0 & R(-t\hat{u}_2^r[k]) \end{pmatrix} \quad (\text{B.82})$$

A partir de (B.80) et de (B.82),

$$I[k+1] := \int_0^T \exp^{(T-s)\hat{A}_p[k]} \hat{U}_p(kT+s) ds = \begin{pmatrix} I_p[k+1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$I_p[k+1] := \int_0^T u_1^o(kT+s) R((s-T)\hat{c}[k]) \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta}^-(kT+s) \\ \sin \hat{\theta}^-(kT+s) \end{pmatrix} ds$$

Comme montré dans la section B.4.1, pour  $s \in [0, T]$ ,

$$\hat{\theta}^-(kT + s) = \hat{\theta}[k] - s\hat{u}_2^r[k] + \int_0^s u_2^o(kT + \tau) d\tau$$

d'où

$$\hat{\theta}^-[k + 1] = \hat{\theta}^-(kT + s) + (s - T)\hat{u}_2^r[k] + \int_s^T u_2^o(kT + \tau) d\tau$$

si bien que

$$I_p[k + 1] = \int_0^T u_1^o(kT + s) \begin{pmatrix} \cos \left( \hat{\theta}^-[k + 1] - \int_s^T u_2^o(kT + \tau) d\tau \right) \\ \sin \left( \hat{\theta}^-[k + 1] - \int_s^T u_2^o(kT + \tau) d\tau \right) \end{pmatrix} ds \quad (\text{B.83})$$

A partir de l'équation (3.1),

$$\int_s^T u_2^o(kT + \tau) d\tau = \theta_m[k + 1] - \theta_m(kT + s) \quad (\text{B.84})$$

et

$$\int_0^T \begin{pmatrix} u_1^o(kT + s) \cos \theta_m(kT + s) \\ u_1^o(kT + s) \sin \theta_m(kT + s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x_m[k + 1] - x_m[k] \\ y_m[k + 1] - y_m[k] \end{pmatrix} \quad (\text{B.85})$$

On déduit alors de (B.83), (B.84), et (B.85), que

$$I_p[k + 1] = R(\hat{\theta}^-[k + 1]) R(-\theta_m[k + 1]) \left( \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} [k + 1] - \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} [k] \right)$$

Donc

$$I[k + 1] = \begin{pmatrix} R(\hat{\theta}^-[k + 1]) \Delta p_m^o[k + 1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.86})$$

avec

$$\Delta p_m^o[k + 1] = R_{\theta_m}[k + 1] \left( \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} [k + 1] - \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} [k] \right) \quad (\text{B.87})$$

et où  $R_{\theta_m}[k + 1]$  est la matrice de rotation dans le plan d'angle  $-\theta_m[k + 1]$  et où,  $x_m$ ,  $y_m$ , et  $\theta_m$  sont mesurées par l'odométrie. En utilisant (B.82), (B.86), et (B.87), (B.79a) devient

$$\hat{X}_p^-[k + 1] = \begin{pmatrix} R_c[k] & -TR_c[k] \\ 0_2 & R_c[k] \end{pmatrix} \hat{X}_p[k] + \begin{pmatrix} R_{\theta}[k + 1] \Delta p_m^o[k + 1] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.88})$$



avec  $R_c[k]$  la matrice de rotation dans le plan d'angle  $-T\hat{c}[k]$  et  $R_\theta[k+1]$  celle d'angle  $\hat{\theta}^-[k+1]$ . Les équations (B.88) et (B.79b) correspondent alors aux équations (4.19a) et (4.21a).

## B.4.2 Discrétisation de l'estimateur (4.17)

Puisque les équations (4.8b) et (4.17b) sont équivalentes, la partie orientation de l'estimateur (4.17) est discrétisée en utilisant la méthode présentée dans l'annexe B.4.1.

La deuxième partie de l'estimateur (4.17) est discrétisée en remarquant que

$$A_p(c) = \begin{pmatrix} -cS & -I_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

donne, par récurrence

$$\forall k > 0 \quad (A_p(c))^k = \begin{pmatrix} (-1)^k c^k S^k & (-1)^k c^{k-1} S^{k-1} \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp^{tA_p(c)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA_p(c))^k}{k!} \\ \exp^{tA_p(c)} &= \begin{pmatrix} \exp^{-tcS} & -t \exp^{-tcS} \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

L'équation (B.88) devient donc pour l'estimateur (4.17)

$$\hat{X}_p^-[k+1] = \begin{pmatrix} R_c[k] & -TR_c[k] \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \hat{X}_p[k] + \begin{pmatrix} R_\theta[k+1] \Delta p_m^o[k+1] \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec les mêmes notations que l'équation (B.88).

# Bibliographie

- ALESSANDRINI, A. et FILIPPI, F. (2004). « Ex-ante Evaluation of Nine Cybernetic Transport Systems ». Dans *7<sup>th</sup> International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*.
- ARTUS, G., MORIN, P., et SAMSON, C. (2003a). « Tracking of an omnidirectional target with a nonholonomic mobile robot ». Dans *IEEE International Conference on Advanced Robotics*, volume 3, pages 1468–1473.
- ARTUS, G., MORIN, P., et SAMSON, C. (2003b). « Tracking of an omnidirectional target with a unicycle-like robot : control design and experimental results ». Rapport de recherche 4849, INRIA. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4849.html>.
- ARTUS, G., MORIN, P., et SAMSON, C. (2004a). « Control of a maneuvering mobile robot by the transverse function approach : control design and simulation results ». Rapport de recherche 5155, INRIA. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-5155.html>.
- ARTUS, G., MORIN, P., et SAMSON, C. (2004b). Control of a maneuvering mobile robot by the transverse functions. Dans LENARČIČ, J. et GALLETI, C., éditeurs, *On Advances in Robot Kinematics*, pages 459–468. Kluwer Academic Publishers. Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Symposium on Advances in Robot Kinematics.
- BACCIOTTI, A. et ROSIER, L. (2001). *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer.
- BENNANI, M. K. et ROUCHON, P. (1995). « Robust stabilization of flat and chained systems ». Dans *European Control Conference*, pages 2642–2646.
- BROCKETT, R. (1983). « *Differential Geometric Control Theory* », Chapitre *Asymptotic stability and feedback stabilization*. birkhauser.
- CAMPION, G., D'ANDRÉA-NOVEL, B., et BASTIN, G. (1991). « Modelling and state feedback control of non holonomic mechanical systems ». Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1184–1189.

- CANUDAS DE WIT, C., SICILIANO, B., et BASTIAN, G. (1996). *Theory of Robot Control*. Communication and Control Engineering Series. Springer-Verlag.
- CANUDAS DE WIT, C. et SØRDALEN, O. J. (1992). « Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11) :1791–1797.
- CHOW, W.-L. (1939). « Über Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ». *Math. Ann.*, 117 :98–105.
- CORON, J.-M. (1992). « Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift ». *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 5 :295–312.
- CORON, J.-M. et D'ANDRÉA-NOVEL, B. (1992). « Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems ». Dans *IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, pages 649–654.
- D'ANDRÉA-NOVEL, B., CAMPION, G., et BASTIN, G. (1995). « Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization ». *International Journal of Robotics Research*, 14 :543–559.
- DAVIET, P. et PARENT, M. (1995). « Platooning for Small Public Urban Vehicles. ». Dans *International Symposium on Experimental Robotics*, pages 345–354.
- DE LUCA, A., ORIOLO, G., et VENDITTELLI, M. (2001). « RAMSETE : Articulated and Mobile Robotics for Services and Technologies », volume 270 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Chapitre *Control of Wheeled Mobile Robots : An Experimental Overview*, pages 181–226. Springer-Verlag.
- DICKMANN, E. et ZAPP, A. (1987). « Autonomous high speed road vehicle guidance by computer vision ». Dans *IFAC World Congress*.
- DIXON, W., DAWSON, D., ZERGEROGLU, E., et ZHANG, F. (2000). « Robust tracking and regulation control for mobile robots ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10 :199–216.
- FENTON, R. (1970). « Automatic vehicle guidance and control – A state of the art survey ». *IEEE Transaction on Vehicular Technology*, 19(1) :153–161.
- FLISS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., et ROUCHON, P. (1995a). « Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems ». Dans *European Control Conference*, pages 1882–1887.
- FLISS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., et ROUCHON, P. (1995b). « Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples ». *International Journal of Control*, 61 :1327–1361.

- 
- GURVITS, L. et LI, Z. (1992). « *Nonholonomic motion planning* », Chapitre *Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning*. Kluwer.
- HELGASON, S. (1978). *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press, première édition.
- KANAYAMA, Y., KIMURA, Y., MIYAZAKI, F., et NOGUCHI, T. (1990). « A stable tracking control method for an autonomous mobile robot ». Dans *IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 384–389.
- KWAKERNAAK, H. et SIVAN, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience.
- LAFFERRIERE, G. et SUSSMANN, H. (1993). A differential geometric approach to motion planning. Dans LI, Z. et CANNY, J., éditeurs, *Nonholonomic motion planning*. Kluwer Academic Press.
- LAUMOND, J.-P., éditeur (1998). *Robot motion planning and control*, volume 229 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag.
- LIZÁRRAGA, D.-A. (2004). « Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems ». *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16 :255–277.
- MAINI, M., MORIN, P., POMET, J.-B., et SAMSON, C. (1999). « On the robust stabilization of chained systems by continuous feedback ». Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3472–3477.
- M’CLOSKEY, R. et MURRAY, R. M. (1994). « Experiments in exponential stabilization of a mobile robot towing a trailer ». Dans *American Control Conference*, volume 1, pages 988–993.
- M’CLOSKEY, R. et MURRAY, R. M. (1997). « Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback ». *IEEE Transaction on Automatic Control*, 42 :614–628.
- MORIN, P., POMET, J.-B., et SAMSON, C. (1999). « Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of Lie brackets in closed-loop ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38 :22–49.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (1999). « Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics ». *Control, Optimization & Calculus of Variations*, 4 :1–36.

- MORIN, P. et SAMSON, C. (2001a). « A characterization of the Lie Algebra Rank Condition by transverse periodic functions ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(4) :1227–1249.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2001b). « *La robotique mobile* », Chapitre *Commande des robots mobiles à roues*. Hermès Science Publications, première édition.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2002). « Feedback control of nonholonomic wheeled vehicles. A survey. ». *Archives of Control Sciences*, 12(1) :7–36.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2003). « Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach ». *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(9) :1496–1508.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2004a). « Practical and asymptotic stabilization of chained systems by the transverse function control approach ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1 :32–57.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2004b). « Trajectory tracking for non-holonomic vehicles : overview and case study ». Dans KOZŁOWSKI, K., éditeur, *4th International Workshop on Robot Motion Control*, pages 139–153.
- MURRAY, R. et SASTRY, S. (1993). « Nonholonomic motion planning : Steering using sinusoids ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 :700–716.
- NELSON, W. et COX, I. (1988). « Local path control for an autonomous vehicle ». Dans *IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 1504–1510.
- NIJMEIJER, H. et VAN DER SCHAFT, A. (1991). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, seconde édition.
- PARENT, M. (1997). « Automated Public Vehicles : A First Step Towards the Automated Highway ». Dans *4<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Transport Systems*.
- PLOTKIN, S. (1969). « Automation of the highways, an overview ». *IEEE Transaction on Vehicular Technology*, 18(2) :77–80.
- POMET, J.-B. (1992). « Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift ». *Systems & Control Letters*, 18 :467–473.
- RIVES, P., BORRELLY, J.-J., GALLICE, J., et MARTINET, P. (1993). « A versatile parallel architecture for vision based control applications ». Dans *Workshop on Computer Architectures for Machine Perception*.
- SAMSON, C. (1990). « Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart ». *International Workshop in Adaptive and Nonlinear Control : Issues in Robotics*. Voir aussi LNCIS, Vol. 162, Springer Verlag, 1991.

- 
- SAMSON, C. (1995). « Control of chained systems. Application to path following and time-varying point-stabilization ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 :64–77.
- SAMSON, C. et AIT-ABDERRAHIM, K. (1991). « Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space ». Dans *IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 1136–1141.
- SHLADOVER, S., DESOER, C., HEDRICK, J., TOMIZUKA, M., WALRAND, J., ZHANG, W.-B., MCMAHON, D., PENG, H., SHEIKHOESLAM, S., et MCKEOWN, N. (1991). « Automated vehicle control developments in the PATH program ». Dans *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, volume 40, pages 115–130.
- SONTAG, E. D. (1987). « Controllability and linearized regulation ». Dans *IEEE Transaction on Automatic Control*, volume 32, pages 877–888.
- SØRDALEN, O. J. et EGELAND, O. (1995). « Exponential stabilization of nonholonomic chained systems ». *IEEE Transaction on Automatic Control*, 40 :35–49.
- SUGIHARA, K. (1988). « Some location problems for robot navigation using a single camera ». *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 42(1) :112–129.
- SUSSMANN, H. et LIU, W. (1991). « Limits of highly oscillatory controls and approximation of general paths by admissible trajectories ». Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 437–442.
- TSAKIRIS, D., KAPellos, K., SAMSON, C., RIVES, P., et BORELLY, J.-J. (1998). Experiments in real-time vision-based point stabilization of a nonholonomic mobile manipulator. Dans CASALS, A. et de ALMEIDA, A., éditeurs, *Experimental Robotics V : The Fifth International Symposium*. Springer-Verlag.
- WARNER, F. W. (1983). *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Springer Verlag, première édition.







APPLICATION DE L'APPROCHE PAR FONCTIONS TRANSVERSES À LA COMMANDE DE  
VÉHICULES NON-HOLONOMES MANŒUVRANTS

Ce travail de thèse se place dans le cadre de la conduite automatisée des véhicules sur roues. Notre objectif est le développement et l'expérimentation d'une nouvelle approche de commande des systèmes non-linéaires en vue du suivi d'une cible, associée par exemple à un véhicule de référence. L'originalité de ce travail est que la cible n'est pas contrainte dans ces mouvements et peut donc suivre des trajectoires non réalisables par le véhicule commandé. Il devient ainsi possible d'effectuer le suivi d'un véhicule de référence quelque soit le mouvement de celui-ci (marche avant, marche arrière, manœuvres...).

L'approche de commande étudiée ici est basée sur le concept de fonction transverse, et consiste à effectuer une *stabilisation pratique* du repère cible. Dans un premier temps, nous analysons l'influence des paramètres de commande sur le suivi du repère. A partir de cette analyse, nous proposons ensuite de nouvelles commandes qui permettent d'améliorer la précision du suivi et le comportement du système lors des phases transitoires. Enfin, nous présentons des résultats d'expérimentations obtenus sur le système robotique du laboratoire ICARE. Cette phase expérimentale a nécessité de développer un estimateur de la vitesse de la cible. Celui-ci est basé sur la fusion des données issues de la vision et de celles issues des mesures odométriques.

**Mots-clés :** commande des robots mobiles, fonction transverse, stabilisation pratique, suivi de cible, système non-holonyme, estimateur de vitesse, expérimentation

APPLICATION OF THE TRANSVERSE FUNCTION APPROACH TO THE CONTROL OF  
MANEUVERING NONHOLONOMIC VEHICLE

This PhD Thesis concerns the automated guidance of wheeled vehicles. Our objective is the development and the experimentation of a new control approach for nonlinear systems in order to achieve the tracking of a moving target, associated, for example, with a reference vehicle. An original feature of this work is that the target is allowed to move freely in the plane and thus to perform motions which are not feasible by the controlled vehicle. It becomes thus possible to follow a reference vehicle independently of its motions (forward motion, backwards motion, maneuvers...).

The control approach is based on the transverse function framework, and consists to perform the *practical stabilization* of the target. First, we analyze the influence of the control parameters on the target tracking. Based on this analysis, we propose two extensions in order to improve the tracking precision and the system's behaviour during the transient phases. Finally, we present experimental results obtained with the robotic system of the ICARE laboratory. To this purpose, an estimator of the target's velocity has been developed. It is based on visual and odometry measurements.

**Keywords:** mobile robot control, transverse function, practical stabilization, target tracking, nonholonomic system, velocity estimator, experiment