



HAL
open science

Méthodes analytiques pour le Risque des Portefeuilles Financiers

Jules Sadefo Kamdem

► **To cite this version:**

Jules Sadefo Kamdem. Méthodes analytiques pour le Risque des Portefeuilles Financiers. Mathématiques [math]. Université de Reims - Champagne Ardenne, 2004. Français. NNT : . tel-00009187

HAL Id: tel-00009187

<https://theses.hal.science/tel-00009187>

Submitted on 5 May 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes Analytiques pour le risque des Portefeuilles Financiers

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 Décembre 2004 à 15 H

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Reims Champagne-Ardenne
(spécialité mathématiques)

par

Jules SADEFO KAMDEM

Directeur de thèse

Professeur Raymond BRUMMELHUIS

Composition du jury

<i>Président :</i>	Prof. Jean NOURRIGAT	Université de Reims (FRANCE)
<i>Rapporteurs :</i>	Prof. Jean-Philippe BOUCHAUD	C.E.A Saclay et Science & Finance (FRANCE)
	Prof. Luis SECO	University of Toronto and RiskLaB (CANADA)
<i>Examineurs :</i>	Prof. Monique JEANBLANC	Université d'Evry Val d'essonne (FRANCE)
	Prof. Victor TCHOULAEVSKI	Université de Reims (FRANCE)

Remerciements

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce projet de thèse.

En particulier, je remercie le professeur Raymond Brummelhuis qui a dirigé ce projet de thèse avec beaucoup de sagesse et de responsabilité. Je lui adresse à l'occasion toute ma reconnaissance et mes respects sincères et distingués.

N'ayant bénéficié d'aucun financement spécifique pour aborder ce projet de thèse, j'ai toujours obtenu le soutien du professeur Raymond Brummelhuis, qui n'a jamais épargner ses efforts pour me recommander lorsqu'il fallait que je trouve des moyens financiers de survie. Je lui adresse une fois de plus toute ma reconnaissance.

Que soit remercié le Professeur Jean-Philippe BOUCHAUD d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail.

Que soit remercié le Professeur Luis SECO d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail.

Que soit remercié les Professeurs Jean-Philippe Bouchaud, Monique Jeanblanc, Jean Nourrigat et Victor Tchoulaevski pour avoir acceptés de faire partie du jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements aux membres du laboratoire de mathématiques pour l'accueil qu'ils m'ont accordé. En particulier, je remercie Pr. Jean Nourrigat, Pr. Victor Tchoulaevski et le Docteur Alain Ninet.

Un remerciement particulier au Professeur Monique Jeanblanc qui s'est toujours rendu disponible quand j'en avais besoin.

Je dédie cette thèse à mes parents : Feu Kamdem Daniel et Mabou Marie thérèse.

Table des matières

1	Préface	9
I	Estimation de la VaR et de L'ES d'un portefeuille "linéaire" lorsque le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques	17
Chapitre 1 Valeur à Risque et Expected Shortfall pour des Portefeuilles Affines		
1.1	Introduction	19
1.2	Portefeuille linéaire et distribution elliptique	21
1.2.1	Cas de la distribution multivariée t -Student	24
1.2.2	Cas d'une distribution Student généralisée "DSTG"	26
1.2.3	VaR linéaire avec la distribution de Laplace généralisée	29
1.3	VaR linéaire avec un mélange de distributions elliptiques	31
1.3.1	VaR linéaire avec le mélange de m distributions t -Student	33
1.3.2	Résultat numérique pour la <i>Delta-mixture Student</i> VaR	34
1.4	Expected Shortfall avec les distributions elliptiques	35
1.4.1	Application : Delta Student Expected Shortfall	37
1.4.2	Expected Shortfall pour un mélange de distributions elliptiques	38
1.4.3	Application : Expected-Shortfall linéaire et mélange de distributions Student	40
1.4.4	Quelques résultats pour la Delta ES sous le mélange de t -Student	40
1.5	Quelques secteurs d'applications	41
1.5.1	Approximation linéaire $\Delta - \Theta$ d'un portefeuille	42
1.5.2	Portefeuilles d'actions	43
1.5.3	Entreprise comme portefeuille d'unités d'affaires	43
1.5.4	Application pour la VaR incrémentale	44
1.5.5	Problème de l'agrégation du risque	45
1.5.6	Choix optimal de la stratégie du portefeuille	46

1.5.6.1	Application à un portefeuille du CAC 40	48
1.6	Conclusion	49
II	Estimation de la VaR et de L'ES d'un portefeuille "quadratique" lorsque le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques	51

<p>Chapitre 1 VaR Analytique d'un portefeuille quadratique $\Delta - \Gamma - \Theta$ elliptique</p>
--

1.1	Introduction	53
1.1.1	Portefeuilles contenant des options	54
1.1.2	Approximation quadratique avec des rendements logarithmiques . . .	55
1.1.3	Insuffisance de l'approximation quadratique de Taylor.	56
1.2	VaR analytique d'un portefeuille log-elliptique	57
1.3	Cas de la distribution de Laplace généralisée	61
1.4	Un rappel sur la VaR Monte-Carlo	62
1.4.1	Comment simuler une variation de prix $P\&L$	62
1.4.2	VaR Monte Carlo pour un Portefeuille d'options	63
1.5	Comment déterminer les paramètres d'un modèle log-elliptique	64
1.5.1	Comment déterminer DLG_ν marginale adapté pour chaque actif. . .	64
1.5.1.1	Application à un portefeuille d'actions du CAC 40, avec des marginales GLD.	64
1.6	Comment choisir les paramètres de la D.L.G pour un portefeuille donné	66
1.6.1	La matrice de variance-covariance EWMA de RiskMetrics	66
1.6.1.1	Volatilité EWMA d'un actif	66
1.6.1.2	Matrice de covariance EWMA d'un portefeuille d'actifs . . .	67
1.6.2	Determination du paramètre ν par le maximum de vraisemblance	67
1.6.3	Exploitation du Kurtosis d'une D.L.G pour déterminer ν	68
1.6.3.1	Calcul du kurtosis de la distribution multivariée de l'historique	69
1.6.3.2	Determination du paramètre ν en fonction du kurtosis . . .	69
1.7	Conclusion	69

<p>Chapitre 2 D.L.G VaR d'un portefeuille quadratique $\Gamma - \Theta$</p>

2.1	Introduction	71
-----	------------------------	----

2.2	Erreur analytique due à l'approximation de Taylor pour un portefeuille Δ-neutre	72
2.3	VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$	76
2.4	Une Estimation fine de l'intégrale de Laplace	82
2.5	Application pour une estimation de $I(\lambda)$	89
2.5.1	Estimation Asymptotique de $I_{\pm}(\lambda)$	89
2.5.2	Calcul de la composante principale due à $I_{\pm}(\lambda)$	94
2.5.3	Une estimation de l'erreur due à $I_0(\lambda)$:	96
2.6	Estimation de la VaR avec l'erreur totale	102
2.6.1	Choix d'un intervalle de la VaR pour $\alpha = 1.320$	107
2.6.1.1	Test Numérique pour $\alpha = 1.320$	107
2.6.1.2	Cas où $\alpha = 2$ et comparaison avec la Monte Carlo VaR	111
2.6.2	D'autres estimations de l'erreur	114
2.6.3	Estimation et test numérique I	117
2.6.3.1	Test Numérique I	119
2.6.4	Estimation et test numérique II	119
2.6.4.1	Test numérique II	122
2.6.5	Cas particulier de la distribution normale	124
2.6.5.1	Test numérique avec 2 portefeuilles du CAC 40	125
2.7	conclusion	126

Chapitre 3

VaR et ES quadratique d'un portefeuille d'actions log-elliptique

3.1	Introduction	129
3.1.1	Approximation quadratique d'un portefeuille d'actions	130
3.1.2	Interêt d'une approximation quadratique	132
3.2	Réduction du calcul de la VaR d'un portefeuille quadratique à l'estimation d'une intégrale sur un quadrique.	133
3.2.1	Comment estimer la VaR d'un portefeuille quadratique d'actions	133
3.3	Une approximation numérique de $J(r, R)$	136
3.3.1	Quelques règles d'interpolation sur S_{n-1}	136
3.3.2	Application pour une approximation de $J(r, R)$	137
3.3.3	Cas de la distribution normale	140
3.3.4	Application avec la t -Student distribution	141
3.3.5	Cas de la distribution de Laplace généralisée	142
3.4	Application avec le mélange de distributions elliptiques	143

3.4.1	Mélange de distributions elliptiques	143
3.4.2	Application d'un mélange de distributions t -Student	145
3.5	ES log-elliptique pour un portefeuille quadratique d'actions	145
3.5.1	ES d'un portefeuille quadratique d'actions avec la distribution normale	147
3.5.2	ES d'un portefeuille quadratique d'actions avec la distribution Student	148
3.6	Cas d'un portefeuille contenant des actions achetées à découvert	148
3.6.1	Cas où $v = 0$ ou $v \approx 0$	151
3.7	Conclusion	152

<p>Chapitre 4 VaR numérique d'un portefeuille quadratique elliptique.</p>
--

4.1	Introduction	155
4.2	Portefeuilles $\Gamma - \Theta$ contenant des options	155
4.3	Réduction à une intégrale sur une hyperboloïde	156
4.4	Approximation numérique d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde . .	157
4.4.1	Cas de la distribution gaussienne	157
4.4.2	Cas général	158
4.5	Exemples d'applications	159
4.5.1	Cas où $n_+ = 0$	160
4.5.2	Cas où $n_- > 0$ et $n_+ > 0$	161
4.6	L'algorithme Numérique de J. Sheil et O'Muircheartaigh	163
4.6.1	Algorithme théorique et numérique	163
4.7	Méthode d'approximation de A. Genz et J. Monohan	164
4.8	Conclusion	165

Conclusion	167
-------------------	------------

Bibliographie

Annexes

III Résumé de la Thèse	173
-------------------------------	------------

Liste des tableaux	183
---------------------------	------------

Table des figures	185
--------------------------	------------

1 Préface

De façon traditionnelle, on associe au risque financier l'incertitude statistique sur la variation du prix des actifs. Sa mesure canonique est la volatilité (i.e écart-type ou variance). Cette mesure est couramment utilisée par exemple dans la théorie du portefeuille de Markowitz. Elle n'est pourtant pas une mesure cohérente du risque. Par rapport à la moyenne, les gains et les pertes sont pris en compte de façon symétrique, ce qui ne correspond pas à la réalité. Cette mesure ne vérifie pas la condition de monotonie, ni celle d'invariance par translation, car si X est une variable aléatoire et b une constante réelle, on obtient l'égalité en volatilité suivante $\sigma(X + b) = \sigma(X)$. Hormis la facilité d'utilisation, l'argument principal en faveur de la volatilité repose sur le théorème central limite, qui par sa définition utilise la distribution gaussienne. En effet, Le théorème central limite dit que pour une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées on a :

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sigma(X_i) \sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1). \quad (1)$$

La démarche utilisant le théorème central limite sur un intervalle de temps $[0, T]$ est la suivante : En subdivisant l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles, on peut écrire le processus $X(T)$ comme suit :

$$X(T) = X(0) + \sum_{j=1}^{N-1} \delta X_j, \quad (2)$$

où $X_j = X(j\frac{T}{N})$, $\delta X_j = X_j \eta_j$ et η_j est tout simplement le rendement relatif instantané sur l'intervalle $[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$. Aussi on a que

$$\ln \left(\frac{X(T)}{X(0)} \right) = \sum_{j=1}^{N-1} \ln(1 + \eta_j) = \eta(T). \quad (3)$$

Si on suppose que les η_j sont des variables i.i.d ¹, on peut appliquer le théorème central limite (1), pour N tendant vers l'infini, alors $\eta(T)$ suit une loi gaussienne $N(mT, \sigma\sqrt{T})$ et

$$X(T) = X(0) \exp(mT + \sigma\sqrt{T} \xi) \quad \text{où} \quad \xi \sim N(0, 1).$$

Dans cette méthode il est clair que c'est σ qui caractérise le risque. Cependant cette interprétation n'est vraie que dans le cas où les accroissements sont indépendants, ce qui a été contredit par des nombreuses études économétriques. En outre dans la réalité, N est fini ; on ne peut donc pas sans risque d'erreur appliquer le théorème central limite. D'ailleurs Bouchaud et Potters [4](1997) critiquent cette vision gaussienne, en soulignant par exemple qu'un mois boursier correspond à $N \simeq 320$ intervalles de 30 minutes. Aussi la convergence utilisée dans le théorème central limite est une convergence en loi (qui n'est donc pas uniforme). Elle ne serait donc valable que dans une région centrée autour de la moyenne. Feller [15](1968) a montré que même si on considère une loi dont tous les moments existent, l'approximation n'est valable qu'autour de $n^{3/4}$ de la moyenne. Dans Boulier et al. [5], on trouve aussi des arguments allant dans ce sens.

¹signifie indépendante identiquement distribuées.

Cette approximation n'est donc valable pour les queues de distribution, là où se situent souvent les risques les plus importants. C'est pourquoi, la réglementation bancaire s'est attachée à l'utilisation d'autres mesures du risque (i.e VaR), plus apte à contrôler les événements extrêmes qui sont ceux qui font peser un réel danger sur les établissements financiers. Ce sentiment s'est accentué depuis plus d'une dizaine d'années, à cause du développement spectaculaire des produits dérivés et des désastres (comme la banque Baring, de Metallgesellschaft, la banque Daiwa, et le comté d'Orange aux U.S.A). C'est l'une des raisons majeures pour lesquelles, en juillet 1993, le Groupe des 30 (constitué des représentants de l'industrie financière et de l'autorité de surveillance), recommandait une mesure uniforme pour le risque de marché appelée Value-at-Risk. Rappelons que la VaR (Value-at-Risk) désigne la perte potentielle maximale sur un certain horizon T et pour un niveau de probabilité α . En quelques années la VaR est devenue quasiment un standard pour l'évaluation du risque de marché. Les événements qui suivent ont favorisé son adoption par une grande partie du marché financier.

Sur le plan historique, deux événements ont concouru à l'adoption généralisée de la VaR sur le secteur financier et un autre a favorisé son développement parmi les entreprises américaines.

- En 1994, la banque américaine JP Morgan a mis gratuitement son système RiskMetrics à la disposition de tous sur internet. RiskMetrics fournissait les données financières et la méthodologie nécessaires au calcul de la VaR d'un portefeuille. Les autres établissements financiers et les entreprises pouvaient utiliser le calculateur de VaR de RiskMetrics ou télécharger les données sur leurs propres systèmes de gestion de risques. Très vite sont apparus de nouveaux fournisseurs de programmes de gestion de risques exploitant la méthodologie RiskMetrics, et transformant cette méthodologie en référence quasi incontournable.
- En 1995, réunis en comité à la Banque des règlements à Bâle, les représentants des banques centrales de 10 grandes économies de l'occident ont proposé de nouvelles règles (amendant l'accord de Bâle 1988), imposant aux établissements financiers un niveau de fonds propres proportionnel aux risques résultant de leurs engagements. Officiellement adoptée en 1996, cette proposition a incité les banques à développer des systèmes internes sophistiqués pour calculer leur VaR. En effet, elles pouvaient ainsi espérer une diminution des fonds propres qu'elles devraient détenir par rapport aux banques qui se fondaient sur les normes édictées par les autorités de tutelle pour déterminer leurs besoins. Ainsi, on peut dire que la recherche d'un allègement des obligations réglementaires a été un facteur de croissance important de la VaR.
- L'un des événements majeurs est le fait que, en 1997 aux Etats-Unis, la Securities and Exchange commission (SEC), préoccupée des risques cachés derrière les instruments hors bilan, a émis des règles de communication relatives aux produits dérivés employés par les entreprises : tableau des valeurs de marché, mesure de sensibilité ou VaR. C'est la raison pour laquelle les rapports annuels de Microsoft, de Philip Morris et de bien d'autres grandes sociétés présentent maintenant des calculs de VaR .

En général, trois méthodes sont développées pour estimer la VaR :

1. **La VaR paramétrique (ou analytique)** : Cette approche consiste à représenter le gain algébrique d'un portefeuille comme combinaison linéaire de facteurs gaussiens. Si on note $P(t)$ la valeur du portefeuille à l'instant t , on a

$$P(t) = \theta^t F(t); \tag{4}$$

où $F(t)$ est vecteur colonne gaussien des facteurs de risque de loi $N(\mu, \Sigma)$ et θ le vecteur colonne de sensibilités à ces facteurs. En t , $P(t+1)$ est donc une variable aléatoire gaussienne de loi $N(\theta^t \mu, \theta^t \Sigma \theta)$. La valeur de la VaR pour un seuil de confiance α correspond alors à :

$$\text{Prob}\{P(t+1) - P(t) \geq -VaR_\alpha\} = \alpha, \quad (5)$$

d'où on obtient alors

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\theta^t \Sigma \theta}, \quad (6)$$

où Φ^{-1} est la fonction de repartition inverse d'une loi gaussienne. Cette estimation de la VaR est faite sous les hypothèses suivantes :

- (a) l'indépendance temporelle des variations de la valeur $P(t)$ du portefeuille ;
 - (b) la normalité des facteurs $F(t)$;
 - (c) la relation linéaire entre les facteurs et la valeur du portefeuille
2. **La VaR historique** : le calcul de la VaR historique consiste à obtenir une historique des variations des facteurs de risque à un horizon de temps donné et une distribution des variations de valeurs du portefeuille. De cette distribution, on peut extraire un quantile qui permet d'obtenir la VaR pour un seuil de confiance donné. Cette méthode relativement simple et qui a l'avantage de mieux simuler la distribution multivariée historique des facteurs de risque², présente un risque de mesure lié au risque dû au choix de l'échantillon historique. Risque qui varie en fonction de la longueur de l'échantillon historique. Si cette longueur est très courte, on s'expose à un risque lié au fait qu'on n'aura pas suffisamment de données pour estimer correctement le quantile à 99% (la variance de l'estimateur sera alors très grande). Et si la longueur est grande, on court le risque que la distribution des facteurs change, ce qui implique un risque sur l'estimation du quantile. Pour plus de détails sur une construction précise des simulations historiques, voir Butler et Schachter [8](1998).
3. **La VaR Monte Carlo** : cette méthode est une variation de la VaR historique dans le cas où la seule donnée est la matrice de variance-covariance. On génère alors par une simulation Monte Carlo des scénarios compatibles avec cette matrice. Un des inconvénients majeurs de cette méthode est qu'elle est coûteuse en temps, pour sa mise en pratique.

L'existence des ces trois méthodes basées sur des hypothèses discutables et pas souvent réalistes, a encouragé beaucoup de chercheurs scientifiques à s'y intéresser depuis un certain moment. C'est l'une des raisons pour laquelle la lettre d'information du CNRS intitulée CNRS info numéro 393 de Mai-Juin 2001, parlait de la Gestion mathématique des risques Financiers et de l'intérêt et l'enjeu de la recherche dans ce sens.

L'approche VaR popularisée par JP Morgan montre bien ses limites dans la pratique. En effet, la méthodologie RiskMetrics s'appuie sur une série d'hypothèses qui, certe simplifient le calcul de la VaR, mais ne tiennent pas toujours dans la pratique. Il est vraisemblable que ceux qui avaient mis au point cette méthodologie en avaient parfaitement conscience (pour plus de détails cf. les appendices de RiskMetrics, page 227-265). Aujourd'hui, la plupart des utilisateurs le savent sans doute aussi. Pourtant, ce modèle simple encore très utilisé, a cadré le débat sur la méthodologie de calcul de la VaR et a contribué à focaliser les efforts des professionnels du secteur et des milieux universitaires sur les principaux obstacles sur lesquels se heurte une estimation précise.

²Voir Mina et Xiao [29] pour plus de détails sur sa mise en oeuvre et son application dans la pratique.

Voici quelques hypothèses souvent utilisées, même si elles ne caractérisent pas avec une assez bonne précision la réalité du marché financier.

- Les marchés ne sont pas normaux comme le suppose la méthodologie RiskMetrics. En effet, un examen plus attentif révèle une déviation remarquablement cohérente des données de marché par rapport à l'idéal mathématique de la distribution normale. En fait, la courbe des rendements de la quasi-totalité des grands marchés et des grandes catégories d'actifs est qualifiée de "leptocurtique" par les statisticiens (et un nombre croissant de gestionnaire de risques). Cela signifie que de nombreuses observations interviennent près du centre de la distribution ; la courbe est trop pointue, mais ces valeurs proches de la moyenne s'accompagnent inévitablement d'un excès de "valeurs extrêmes". C'est l'une des raisons pour laquelle dans cette thèse, nous proposons plusieurs alternatives, en montrant comment estimer la VaR sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque joints suit un mélange de distributions elliptiques. En particulier, on illustre nos propositions, avec la distribution Student et la distribution de Laplace généralisée.
- Les portefeuilles ne sont pas forcément linéaires comme le suppose la méthodologie RiskMetrics. De nombreux calculs de VaR supposent que l'évolution de la valeur d'un portefeuille est exactement proportionnelle aux variations des marchés. C'est souvent exact. Si vous achetez 10 actions d'une société à 21 euros, une hausse de 1 euro de l'action augmente vos avoirs de 10 euros. De même, si l'action augmente de 2 euros, vous gagnez 20 euros. La relation entre la valeur du portefeuille et le prix du marché peut être représentée par une droite. Cependant, on constate que si le portefeuille contient des produits dérivés, alors cette relation linéaire ne se vérifie pas. Ainsi, une option d'achat sur une valeur peut augmenter de 0.38 euros lorsque l'action passe de 21 euros à 22 euros, puis de 0.42 euros lorsqu'elle passe de 22 euros à 23 euros. La relation entre le cours de la bourse et la valeur de l'option ne se représente plus par une droite. En gros, pour des portefeuilles intégrant d'importantes positions en options, une estimation de VaR qui ne rend pas compte de cet effet perd toute sa valeur. Les recherches menées conjointement par Glasserman, Philip Heidelberger de chez IBM et Perwez Shahabuddin de l'Université de Columbia rendent compte avec précision de l'impact non linéaire des options et du profil des rendements plus pointus que la normale. C'est pour les mêmes motivations que nous travaillons aussi avec des portefeuilles quadratiques dans les chapitres de la deuxième partie de ce mémoire de thèse.
- La volatilité n'est pas constante, comme le suppose la formule de Black and Scholes, publiée par les économistes Fisher Black et Myron Scholes en 1973. Ainsi, il est donc particulièrement difficile de calculer la VaR de portefeuilles comprenant des options avec une bonne fiabilité.
- Une mesure précise des corrélations de marchés est en fait essentielle à la gestion quantitative des risques ; presque toutes les méthodes de calcul de VaR s'appuient au moins implicitement sur des corrélations estimatives. Cependant, on admet largement aujourd'hui que dans le meilleur des cas, la corrélation statistique saisit imparfaitement l'imbrication des variations des marchés en cas d'importantes fluctuations.

Dans ce mémoire de thèse, on s'intéresse aux risques de portefeuilles financiers sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque joints suit une distribution elliptique, ou mieux encore

un mélange de distributions elliptiques. Une illustration de nos méthodes est faite avec les cas particuliers du mélange de distributions multivariées t -Student et de la distribution de Laplace généralisée.

L'Expected Shortfall que je noterais le plus souvent "ES", a été introduite par Artzner, Delbean, Eber et Heath (1999)[3], pour compléter la fiabilité de la VaR, car la VaR ayant cet inconvénient de ne pas être une mesure sous additive, contrairement à l'ES. Artzner et al démontre la limite de la VaR lorsqu'il s'agit de trouver la VaR de deux options digitales. Cependant, il faut noter que le calcul de l'Expected Shortfall nécessite la VaR. Dans cette thèse, on a proposé des méthodes analytiques, qui nous permettent d'estimer l'Expected Shortfall des portefeuilles linéaires ou affines. On a ainsi introduit les notions de "Delta Elliptic ES" et "Delta mixture Elliptic ES", avec des formules explicites qui permettent de calculer la "Delta Student ES" et la "Delta mixture Student ES". Aussi, au chapitre 3, de la deuxième partie, on utilise les fonctions spéciales dites "parabolique cylindrique" pour estimer l'Expected Shortfall d'un portefeuille quadratique d'actions, tel que nous l'avons introduit.

Le plan de cette thèse est présenté comme suit :

1. Dans la première partie, on propose des méthodes analytiques, qui permettent d'estimer la VaR paramétrique d'un portefeuille "linéaire ou affine". Sur le plan pratique, nous généralisons la notion de *Delta Normal VaR* introduite par RiskMetrics standard (1996), en introduisant les notions *Delta Elliptic VaR*, *Delta-Theta Elliptic VaR*, *Delta-Mixture Elliptic VaR*, *Delta-Theta-mixture Elliptic VaR*. Sous l'hypothèse, que le vecteur des facteurs de risque joints suit une distribution elliptique, ou mieux encore un mélange de distributions elliptiques, on introduit aussi les notions de *Delta Elliptic ES*, *Delta-Theta Elliptic ES*, *Delta mixture Elliptic ES* et de *Delta-Theta mixture Elliptic ES*.
 - Dans le chapitre 1, on complète la notion de Δ -Normal VaR introduite par RiskMetrics pour des Portefeuilles Linéaires. En effet, on substitue dans ce chapitre l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une distribution normale par la famille des distributions elliptiques. Ainsi, on introduit la notion de Δ -elliptic VaR par une méthode analytique. Pour illustrer notre étude, on donne des formules précises dans le cas où on travaille avec la distribution multivariée t -Student, d'où la notion de Δ -Student VaR en se servant de la fonction hypergéométrique. On donne aussi dans ce chapitre un espace d'applications de notre étude et on introduit la notion de Δ -elliptic ES pour des portefeuilles linéaires. Aussi, on introduit un théorème qui permet d'obtenir la VaR et L'ES d'un portefeuille linéaire, lorsque le vecteur facteurs de risque suit le mélange d'un nombre fini de distributions elliptiques. Une illustration est donnée, dans le cas particulier où on utilise un mélange de distributions multivariées t -Student.
2. Dans la deuxième partie, on étend les méthodes analytiques développées dans la première partie de cette thèse, en substituant l'approximation linéaire par une approximation quadratique de la fonction $P\&L$. On considère par exemple une approximation quadratique du $P\&L$ d'un portefeuille contenant des produits dérivés tels les options, et qu'on appelle dans la littérature financière portefeuille $\Delta - \Gamma$ ³. Dans la foulée on introduit la notion de portefeuille quadratique d'actifs de bases (i.e actions), dont le rendement absolu du prix du portefeuille est substitué par une approximation quadratique dû au développement de Taylor du second ordre.

³Nous l'appellerons portefeuille $\Delta - \Gamma - \Theta$ pour signifier que le facteur Θ s'apparente à un facteur de risque

Une historique sur le calcul de la VaR d'un portefeuille $\Delta - \Gamma - \Theta$ peut se résumer comme suit : en janvier 1996, Fallon [14] fait circuler une prépublication où il met en exergue la possibilité d'utiliser une approximation quadratique $\Delta - \Gamma - \Theta$ de la $P\&L$ d'un portefeuille contenant des options, mais sans plus de précisions. Onze mois après, en décembre 1996 Zangari publie la 4ème édition de RiskMetrics qui, en s'inspirant de Fallon (1996), décrit comment on pourrait utiliser une approximation $\Delta - \Gamma - \Theta$, mais la théorie reste incomplète car il n'y a pas de précision pratique sur comment l'utiliser ou comment l'implémenter. C'est Rouvinez [38](1997) qui fut le premier à proposer une solution assez complète et basée sur l'utilisation de la fonction caractéristique, sous l'hypothèse gaussienne des facteurs de risque et lorsque la matrice de covariance est définie positive. Huit mois après Rouvinez, Cardenas et al. [9](1997) a publié une solution similaire. Il en est de même pour Britten Jones et Shaeffer (1997), puis Jahel, Perraudin et Sellin (1997) qui proposent des solutions similaires à celles de Rouvinez en utilisant la notion d'approximation quadratique, même s'ils les abordent différemment. Mais la solution de Zangari a attiré plus d'attention grâce au fait qu'il travaille pour RiskMetrics (précurseur de la VaR). Notons que à cause des difficultés mathématiques beaucoup de papiers sur la VaR quadratique furent ignorés par les professionnels, qui préfèrent utiliser la VaR historique, la VaR Monte Carlo ou la VaR linéaire⁴. Récemment des auteurs tels que Duffie et Pan [11], Albanese et Seco [2], Glasserman et al.[21], Brummelhuis et al. [6], Albanese et Wiberg [1] ont proposés des méthodes pour implémenter la $\Delta - \Gamma - \Theta$ VaR, sous l'hypothèse des facteurs de risques gaussiens ou t-Student.

Pour calculer le risque d'un portefeuille quadratique $\Delta - \Gamma - \Theta$ avec facteurs de risque elliptiques, nous proposons l'esquisse d'une méthode analytique pour estimer une intégrale multiple sur une hyperboloïde, en utilisant la mesure de Liouville. Aussi, nous proposons un algorithme numérique qui permet d'obtenir sous certaines conditions, une bonne approximation d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde⁵. Dans cette même partie, nous introduisons la notion de portefeuille quadratique ne contenant que des sous-jacents (i.e actions), puis nous proposons une méthode numérique inspirée de Genz [17], pour résoudre le problème de l'estimation de la VaR, sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque joints suit une distribution elliptique.

- Nous proposons dans le chapitre 1, l'esquisse d'une méthode qui nous permettra d'estimer la VaR d'un portefeuille dit $\Delta - \Gamma - \Theta$. En plus la VaR quadratique est plus adaptée pour des portefeuilles contenant des instruments financiers non linéaires comme des options, afin de tenir compte de la convexité de la fonction $P\&L$. On se propose d'esquisser une méthode analytique, qui permettrait d'estimer la VaR d'un portefeuille $\Delta - \Gamma - \Theta$, sous l'hypothèse que les facteurs de risque joints suit une distribution elliptique. On rappelle quelques notions connues sur la méthode de Monte Carlo, puis on rappelle une alternative au caractère local de l'approximation de Taylor de la fonction $P\&L$. Etant donnée une historique, on montre comment estimer dans la pratique, la variance covariance EWMA, et on utilise le maximum de vraisemblance pour déterminer le paramètre ν de la distribution de Laplace généralisée $DLG(\mu, \Sigma, \nu)$. De même dans le cas où on détient un portefeuille avec des facteurs de risques indépendants et le facteur de risque i suit une distribution GED_{ν_i} , on montre comment à partir du kurtosis théorique et du kurtosis empirique on pourrait déterminer ν_i .

⁴d'où un intérêt supplémentaire de la première partie de cette thèse

⁵comme sous variété topologique de \mathbb{R}^n de codimension 1

- Dans le chapitre 2 de la deuxième partie, en suivant le schéma du chapitre 1, on s'intéresse au cas simple où ($\Delta = 0$). On propose 2 théorèmes qui permettent de façon assez globale de mesurer l'erreur qu'on fait lorsqu'on considère une approximation quadratique due à la méthode de Taylor de la fonction $P\&L$ d'un portefeuille Δ -neutre. Aussi, on propose une méthode analytique avec une bonne estimation de l'erreur qui permet d'estimer la VaR d'un portefeuille Δ -neutre, lorsque le vecteur des facteurs de risque joints suit une distribution de Laplace généralisée. Pour illustrer l'applicabilité de nos méthodes analytiques, on fera des tests numériques via le logiciel Matlab, avec des exemples vrais des portefeuilles Δ -neutre du marché financier de France CAC 40 et Monep. Par suite on fera une comparaison de nos résultats avec ceux obtenus via la méthode Monte Carlo avec approximation quadratique du $P\&L$ et la Monte Carlo complète (en utilisant les formules de Black & Sholes). Aussi, on compare en temps d'exécution et en fiabilité la méthode Monte Carlo à notre méthode analytique. Pour les calculs et les estimations, on s'inspire de la méthode de la phase stationnaire de Laplace, ce qui nécessite des techniques mathématiques d'estimations assez fines.

- Au chapitre 3 de la deuxième partie, on introduit la notion de portefeuille quadratique constitué d'actifs de bases (i.e actions). Aussi on introduit un algorithme pour évaluer la VaR d'un tel portefeuille lorsque le vecteur des rendements logarithmiques suit une distribution elliptique. On constate par exemple, que le calcul de la VaR d'un portefeuille quadratique ne contenant que des actions nécessite une fonction spéciale hypergéométrique, si le vecteur des facteurs de risque suit une distribution multivariée Student. On montre par suite comment déterminer l'Expected Shortfall d'un tel portefeuille quadratique en nécessitant la fonction spéciale parabolique cylindrique, sous l'hypothèse de la distribution normale. Aussi, dans le cas particulier où le portefeuille contient des actions achetées à découvert, le calcul de la VaR se réduit essentiellement à l'approximation d'une intégrale sur une hyperboloïde. Ainsi, lorsqu'on recherche la VaR d'un portefeuille quadratique ne contenant que des actions, tel que nous l'avons introduit, et que certaines actions sont achetées à découvert, on pourrait utiliser les méthodes analytiques du chapitre 1 et 3 de la deuxième partie de cette thèse, et des méthodes existantes dans la littérature pour estimer la VaR d'un portefeuille quadratique $\Delta - \Gamma - \Theta$ (voir par exemple Albanese et Seco [2], Albanese et Wiberg [1], Brummelhuis et al. [6] et leurs références).

- Dans le chapitre 4 de la deuxième partie, en s'inspirant des méthodes issues des articles de Genz [17], Genz et Monohan [18], Sheil et O'Muircheartaigh [39], nous introduisons un algorithme d'approximation numérique d'une intégrale sur une hyperboloïde. Aussi, on indique comment estimer la VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$ en se servant de notre algorithme numérique, lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution elliptique. En s'appuyant sur 2 portefeuilles du CAC 40, une illustration est donnée dans le cas où le vecteur des facteurs de risque joint suit une distribution multivariée normale.

Première partie

**Estimation de la VaR et de L'ES
d'un portefeuille "linéaire" lorsque le
vecteur des facteurs de risque suit un
mélange de distributions elliptiques**

Chapitre 1

Valeur à Risque et Expected Shortfall pour des Portefeuilles Affines

1.1 Introduction

La méthode paramétrique pour estimer la VaR d'un portefeuille financier fut à l'origine introduite par RiskMetrics. Elle est basée sur l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une distribution multivariée normale. Aussi, elle est adaptée pour le calcul de la VaR d'un portefeuille "linéaire" (il s'agit d'un portefeuille dont le rendement absolu du prix obtenu, par approximation ou non, peut s'écrire comme une combinaison linéaire des facteurs de risque du portefeuille). La méthode paramétrique a le grand avantage d'être facile à appliquer, contrairement à la méthode Monte Carlo, surtout lorsqu'on veut estimer la VaR d'un portefeuille contenant des produits dérivés tels que des options. En effet, même si la méthode Monte Carlo pour déterminer la VaR donne des résultats assez fiables lorsque le nombre de simulations utilisées est grand, il a l'inconvénient d'utiliser beaucoup de temps pour son exécution, contrairement à la méthode paramétrique. Une sérieuse alternative pour les praticiens du calcul du risque financier est l'utilisation de la Δ -normal VaR, valable pour des portefeuilles linéaires lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution normale. Notons que lorsqu'on considère une approximation linéaire ou affine d'un portefeuille contenant des instruments ayant pour prix une fonction non linéaire du prix du sous-jacent, il y a un risque de s'éloigner d'une estimation objective de la vraie VaR, à cause des pertes d'informations liées à la non considération des variations aléatoires du reste de l'approximation linéaire du portefeuille sur une période de temps $[0, t]$.

Le chapitre présent fait l'objet d'une généralisation patente de la méthode paramétrique pour les portefeuilles "linéaires", en remplaçant l'hypothèse de la loi normale par l'hypothèse de la famille des distributions dites "elliptiques" (notons que la distribution normale fait partie de la famille des distributions elliptiques). Mieux encore, sachant que l'une des limites de la distribution multivariée elliptique notée $N(\mu, \Sigma, \phi)$ ⁶ est le fait que ses distributions marginales ont la même fonction caractéristique ϕ , comme alternative pour palier à cette limite, nous

⁶pour une définition plus claire des distributions elliptiques cf. Embrechts et al. [13]. Aussi dans cette notation μ représente le vecteur espérance, Σ représente la matrice de variance covariance et ϕ est fonction caractéristique de la distribution elliptique.

introduirons des méthodes pour le calcul de la VaR et l'ES d'un portefeuille linéaire lorsque le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques.

Pour illustrer notre méthode, on s'inspirera des alternatives motivées, qui ont été proposées dans les appendices de Zangari [30](1996), puis de Mina et Xiao [29](2001). En effet, dans l'appendice B de [30], l'auteur motive les raisons pour lesquelles, le mélange de distributions normales ou la distribution de Laplace généralisée ⁷, pourrait substituer l'hypothèse de la distribution normale simple, puis il indique comment de telles alternatives pourraient permettre l'estimation de la VaR d'un instrument (i.e action, taux d'échange) linéaire du marché d'un pays émergent, afin de mieux tenir compte de leur spécificité. Aussi dans Mina et Xiao [29] (2001), qui est en outre une amélioration plus adaptée aux portefeuilles de Zangari [30], s'appuyant sur Koedjik, Huisman et Pownall [24](1998), les auteurs proposent comme alternatives à la distribution normale, la distribution *t*-Student, puis le mélange de distributions normales. Notons qu'une des limites de la distribution multivariée *t*-Student avec un degré de liberté ν est le fait que toutes les distributions marginales ont le même degré de liberté ν . Ainsi nous proposons comme alternative de proposer un modèle de VaR linéaire lorsque le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions *t*-Student. Il faut noter que des méthodes similaires avaient déjà été proposées par Subu-Vatakaramanan [47](1997), où il propose le mélange de distributions normales, comme alternative aux inconvénients de la distribution normale simple. Pour des détails sur la calibration des mélanges de distributions, voir McLachlan et Basford [27] (1987).

Bien que la VaR soit une mesure de risque assez fiable et de plus en plus utilisée dans l'industrie financière, Artzner, Delbean, Eber, et Health [3](1999) ont introduit une mesure de risque dite "cohérente" appelée Expected Shortfall. Evidemment, il faut noter que le calcul de l'Expected Shortfall nécessite l'obtention de la VaR. Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de Delta Elliptic Expected Shortfall notée "Delta-Elliptic ES", "Delta-Mixture-Elliptic ES" avec pour illustration lorsque la distribution elliptique est par exemple une Student, les notions de "Delta-Student-ES" et de "Delta-Mixture-Student ES".

Le reste de ce chapitre est organisé de façon suivante : Dans la section 2, nous analysons la VaR d'un portefeuille linéaire lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution elliptique. En s'appuyant sur les motivations de Zangari(1996), puis de Mina et Xiao (2001), nous étayons nos analyses avec les cas particuliers de la distribution *t*-Student. Par analogie, à l'appellation Δ -Normal VaR, nous introduisons la notion de Δ -Elliptic VaR, et en particulier de la Δ -Student VaR. Nous montrons par exemple comment réduire le problème du calcul de la Δ -Student VaR à la résolution d'une équation contenant une fonction spéciale à savoir la fonction hypergéométrique, et celle de la Δ -GLD VaR à la résolution d'une équation contenant des fonctions spéciales Γ -incomplètes. Dans la section 3, nous montrons comment étendre nos calculs si on travaille avec l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques (en anglais mixture of elliptic distributions). La section 4 traite de ce qu'on appelle en anglais l'Expected Shortfall pour des portefeuilles linéaires avec l'hypothèse dmélange de distributions elliptiques. Finalement en section 5, nous enonçons quelques domaines d'applications, en s'inspirant de Mina, J. et Yi Xiao, J. [29], puis nous introduisons la notion de frontière efficiente en relation avec la Δ -elliptic VaR comme mesure de risque du portefeuille.

⁷cette distribution est notée par GED (en anglais generalized error distribution) dans l'appendice B de [30]

1.2 Portefeuille linéaire et distribution elliptique

Dans ce chapitre on notera $x \cdot y = xy^t = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ le produit scalaire euclidien entre *vecteurs lignes* respectives $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Les vecteurs colonnes correspondants seront dénotés par x^t, y^t , le t en général est utilisé pour signifier la transposée d'une matrice ou d'un vecteur. En particulier, A va agir sur des vecteurs par une multiplication à gauche du vecteur colonne y^t et on obtiendra Ay^t , et à droite par le vecteur ligne x on obtiendra ainsi xA .

Un portefeuille ayant pour valeur $\Pi(t)$ à l'instant t , sera appelé portefeuille linéaire si le rendement absolu entre 0 et t du prix du portefeuille $\Delta\Pi(t) = \Pi(t) - \Pi(0)$ est une fonction linéaire des facteurs de risque $X_1(t), \dots, X_n(t)$ des produits que contient le portefeuille :

$$\Delta\Pi(t) = \delta_1X_1 + \delta_2X_2 + \dots + \delta_nX_n.$$

Ce sera par exemple le cas de simples portefeuilles ordinaires (i.e un portefeuille d'actions, lorsque les facteurs de risque sont des rendements absolus ou des rendements relatifs). On peut éviter d'écrire le t dans nos calculs et notations, puisqu'il est supposé fixé d'avance (par exemple $t=1$). Ainsi, nous écrirons simplement $X_j, \Delta\Pi$ au lieu de $X_j(t), \Delta\Pi(t)$ etc. Nous posons aussi

$$X = (X_1, \dots, X_n),$$

tel que $\Delta\Pi = \delta \cdot X = \delta X^t$.

Supposons que le vecteur des facteurs de risque $X = (X_1, \dots, X_n)$ suit une distribution elliptique notée $N(\mu, \Sigma, \phi)$ où μ est le vecteur espérance, $\Sigma = A^t A$ est la matrice de covariance et ϕ représente la fonction caractéristique, alors X admet pour fonction densité de probabilité

$$f_X(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t),$$

où $|\Sigma|$ désigne le déterminant de Σ , $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est telle que la transformée de Fourier de $g(|x|^2)$ comme une fonction sur \mathbb{R}^n , est égale à $\phi(|\xi|^2)$.⁸ Par définition, la Valeur à Risque notée VaR_α pour un taux de confiance $1 - \alpha$ est donnée par :

$$VaR_\alpha^{\Delta\Pi(t)} = \inf\{V : \text{Prob}[\Delta\Pi(t) \leq V] \geq \alpha\}. \quad (1.1)$$

Si g est continue et partout non nulle, alors VaR_α est obtenue comme étant la solution de l'équation suivante :

$$\text{Prob} \{\Delta\Pi(t) \leq -VaR_\alpha\} = \alpha. \quad (1.2)$$

Dans cette définition la VaR_α représente une quantité positive d'argent exprimée dans une monnaie précise.

Selon la donnée du paramètre g de la distribution elliptique, l'équation (1.2) s'écrit :

$$\alpha = |\Sigma|^{-1/2} \int_{\{\delta \cdot x \leq -VaR_\alpha\}} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t) dx. \quad (1.3)$$

⁸on utilise ϕ comme le paramètre de la classe des distributions elliptiques, dès lors qu'il est souvent défini comme une fonction continue : $\phi(|\xi|^2)$ est simplement la fonction caractéristique de $X \sim N(0, Id, \phi)$. Notons qu'en général, dans les applications, la fonction g sera choisie en fonction des données historiques utilisées, ou tout simplement donné.

En changeant de variable comme suit $y = (x - \mu)A^{-1}$, $dy = |A| dx$, où $\Sigma = A^t A$ est la décomposition de Cholesky de Σ , (1.3) s'écrit :

$$\alpha = \int_{\{\delta A \cdot y \leq -\delta \cdot \mu - VaR_\alpha\}} g(|y|^2) dy. \quad (1.4)$$

Soit R la rotation qui change δA en $(|\delta A|, 0, \dots, 0)$. Si on change de variable $y = zR$ dans (1.4), on obtient l'équation

$$\alpha = \int_{\{|\delta A| |z_1| \leq -\delta \cdot \mu - VaR_\alpha\}} g(|z|^2) dz. \quad (1.5)$$

Si nous écrivons que $|z|^2 = z_1^2 + |z'|^2$ avec $z' \in \mathbb{R}^{n-1}$ alors nous aurons montré que :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Prob} \{ \delta \cdot X < -VaR_\alpha \} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\frac{-\delta \cdot \mu - VaR_\alpha}{|\delta A|}} g(z_1^2 + |z'|^2) dz_1 \right] dz'. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ensuite, en utilisant le changement de variable sphérique $z' = r\xi$ avec $\xi \in S_{n-2}$, $dz' = r^{n-2} d\sigma(\xi) dr$, on obtient l'équation en VaR_α à résoudre :

$$\alpha = |S_{n-2}| \int_0^{+\infty} r^{n-2} \left[\int_{-\infty}^{\frac{-\delta \cdot \mu - VaR_\alpha}{|\delta A|}} g(z_1^2 + r^2) dz_1 \right] dr, \quad (1.7)$$

où $|S_{n-2}|$ est la mesure de la surface de l'hypersphère de \mathbb{R}^{n-1} explicitement connu comme suit :

$$|S_{n-2}| = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

En introduisant la fonction

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\infty}^{-s} \left[\int_0^{+\infty} r^{n-2} g(z_1^2 + r^2) dr \right] dz_1 \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_s^{-\infty} \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} g(u) du dz_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

où la seconde ligne est obtenue en faisant un changement de variable $u = r^2 + z_1^2$, si on remplace z_1 par $-z_1$, on aura prouvé le résultat suivant :

Théorème 1.2.1 *Supposons que le rendement absolu ou la fonction P&L du portefeuille sur $[0, t]$, admette une meilleure approximation donnée par $\Delta\Pi \simeq \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \dots + \delta_n X_n + \beta$. Supposons de plus que le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ des facteurs de risque sous-jacents suit une distribution elliptique avec pour fonction densité $f_X(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t)$, où μ est le vecteur espérance et Σ est la matrice de variance covariance et $g(s^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} , continue et partout non nulle. Alors la Valeur à Risque du portefeuille pour la confiance $1 - \alpha$ notée Delta-elliptic VaR_α s'écrit :*

$$VaR_\alpha = -\beta - \delta \cdot \mu + q_{\alpha,n}^g \cdot \sqrt{\delta \Sigma \delta^t},$$

où $s = q_{\alpha,n}^g$ est la solution positive unique de l'équation transcendantale

$$\alpha = G(s).$$

Remarque 1.2.1 Notons que $|\delta A|$ a une interprétation financière assez claire, parce que

$$|\delta A| = \sqrt{\delta \cdot \Sigma \cdot \delta^t}. \quad (1.9)$$

Cette quantité caractérise la volatilité définie comme la racine carrée de la variance du portefeuille.

Remarque 1.2.2 Remarquons que si on pose $q(r, z_1) = g(z_1^2 + r^2)$, et que $n \geq 2$, l'intégrale

$$q^*(n-1, z_1) = \int_0^{+\infty} r^{n-2} g(z_1^2 + r^2) dr$$

sera tout simplement la transformée de Mellin de la fonction $q(\cdot, z_1)$ en $n-1$. Ainsi l'intégrale (1.7) deviendra

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_s^\infty \left[\int_0^{+\infty} r^{n-2} g(z_1^2 + r^2) dr \right] dz_1 \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_s^\infty q^*(n-1, z_1) dz_1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour certains choix de g , il suffira d'utiliser des tables de transformées de Mellin pour certaines fonctions comme celles de Gradshteyn et Ryzhik [22].

Remarque 1.2.3 Pour la gestion du risque à court terme des portefeuilles linéaires, on pourra souvent supposer que $\mu \simeq 0$, et de plus si $\beta = 0$, on obtient que :

$$VaR_\alpha = \sqrt{\delta \Sigma \delta^t} \cdot q_{\alpha, n}^g, \quad (1.11)$$

ce qui est complètement analogue au résultat pour les portefeuilles linéaires ayant des facteurs de risque normalement distribués. La différence est que, par exemple pour $\alpha = 0.05$, le quantile de la loi normale à 5%, qui est approximativement 1.65, est maintenant remplacé par la constante $q_{0.05}^g$ qui dépend de g . Notons que $\sqrt{\delta \Sigma \delta^t}$ représente l'écart type de la variation du portefeuille et on peut l'assimiler à un risque de volatilité (par référence à la théorie du portefeuille de Markowitz). Une des principales difficultés de cette méthode sera de déterminer la matrice de variance covariance Σ . Notons que RiskMetrics propose une méthode (EWMA⁹) pour l'estimation de la matrice de variance covariance en y affectant un poids λ en fonction de la "longueur" des données historiques.

Remarque 1.2.4 on peut écrire l'intégrale (1.7) comme

$$G(s) = \int_s^\infty K(s, u) g(u) du, \quad (1.12)$$

où par Fubini le noyau K est donné par :

$$\begin{aligned} K(s, u) &= \frac{1}{2} |S_{n-2}| \int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{u}} (u - z_1)^{\frac{n-3}{2}} dz_1 \\ &= \frac{1}{4} |S_{n-2}| \int_s^u (u - y)^{\frac{n-3}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy \\ &= \frac{1}{4} |S_{n-2}| \int_0^{u-s} x^{\frac{n-3}{2}} (u - x)^{-\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

⁹c-à-d en anglais exponential weighted moving average

A ce stade, nous pourrions utiliser les intégrales abordées par Gradshteyn et Ryzhik [22] :

$$\int_0^u \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^\nu} dx = \frac{u^\mu}{\mu} {}_2F_1(\nu, \mu; \mu+1; -\beta u),$$

avec $\operatorname{Re} \mu > 0$ et $|\arg(1+\beta u)| < \pi$; cf. [22], formule 3.194(1). Il s'ensuit que

$$K(s, u) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} (u-s)^{\frac{n-1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}; u(u-s)\right). \quad (1.13)$$

Cependant, quand nous traiterons la distribution multivariée t -Student dans les paragraphes suivants, il sera plus commode de travailler directement avec (1.8) au lieu de (1.12) et 1.13.

1.2.1 Cas de la distribution multivariée t -Student

Nous considérons maintenant le cas d'un portefeuille tel que le vecteur X des facteurs de risque suit une multivariée t -Student. Par analogie à la Δ -Normal VaR, on l'appellera la *VaR* correspondante *Delta-Student* VaR. Rappelons que la fonction densité de X s'écrit :

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\nu/2) \cdot \sqrt{|\Sigma|} (\nu\pi)^n} \left(1 + \frac{(x-\mu)^t \Sigma^{-1} (x-\mu)}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+n)}{2}},$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $\nu > 2$, et la fonction g est donnée par

$$g(s) = C(\nu, n) (1+s/\nu)^{-\frac{(n+\nu)}{2}}, \quad s \geq 0,$$

où nous avons posé

$$C(\nu, n) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\nu/2) \sqrt{(\nu\pi)^n}}.$$

En remplaçant $g(s)$ donné ci-dessus dans (1.8), on obtient :

$$G(s) = \frac{\nu^{\frac{n+\nu}{2}}}{2} |S_{n-2}| C(\nu, n) \int_s^\infty I(z_1) dz_1, \quad (1.14)$$

où nous avons posé :

$$I(z_1) = \int_{z_1^2}^{+\infty} (u-z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} (\nu+u)^{-\frac{(n+\nu)}{2}} du. \quad (1.15)$$

La fonction $I(z_1)$ pourrait être évaluée en utilisant les formules intégrales de Gradshteyn et Ryzhik [22] :

Lemme 1.2.1 (Cf. [22], page 314.) Si $|\arg(\frac{u}{\beta})| < \pi$, et $\operatorname{Re}(\nu_1) > \operatorname{Re}(\mu) > 0$, alors

$$\int_w^{+\infty} (x-w)^{\mu-1} (\beta+x)^{-\nu_1} dx = (w+\beta)^{\mu-\nu_1} B(\nu_1-\mu, \mu), \quad (1.16)$$

avec $B(\alpha, \beta)$ est la fonction Beta d'Euler :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

En utilisant la formule (1.16) avec $\nu_1 = \frac{(n+\nu)}{2}$, $\mu = \frac{n-1}{2}$, $\beta = \nu$ et $w = z_1^2$, il s'ensuit que $\mu - \nu_1 = -\frac{1+\nu}{2}$ et $-\mu + \nu_1 = \frac{1+\nu}{2}$, puis en remplaçant on obtient

$$I(z_1) = (z_1^2 + \nu)^{-\frac{1+\nu}{2}} B\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{n-1}{2}\right). \quad (1.17)$$

Après, on devra intégrer par rapport à la variable z_1 dans (1.14) et évaluer

$$J(s, \nu) = \int_{-\infty}^{-s} (z_1^2 + \nu)^{-\frac{1+\nu}{2}} dz_1. \quad (1.18)$$

En changeant de variable dans l'intégrale (1.18) comme suit $u = z_1^2$, on obtient que

$$J(s, \nu) = \frac{1}{2} \int_{s^2}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} (u + \nu)^{-\frac{1+\nu}{2}} du. \quad (1.19)$$

Pour cette dernière intégrale, nous utiliserons une autre formule de Gradshtein et Ryzhik [22] :

Lemme 1.2.2 (cf. [22], formule 3.194(2)). Si $|\arg(\frac{u}{\beta})| < \pi$, et $\operatorname{Re}(\nu_1) > \operatorname{Re}(\mu) > 0$, alors

$$\int_u^{+\infty} x^{\mu-1} (1 + \beta x)^{-\nu_1} dx = \frac{u^{\mu-\nu_1} \beta^{-\nu_1}}{\nu_1 - \mu} {}_2F_1(\nu_1, \nu_1 - \mu; \nu_1 - \mu + 1; -\frac{1}{\beta \cdot u}). \quad (1.20)$$

Ici ${}_2F_1(\alpha; \beta, \gamma; w)$ est la fonction hypergéométrique.

Dans notre cas, $\nu_1 = \frac{1+\nu}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu_1 - \mu = \frac{\nu}{2}$, $\beta = \nu^{-1}$ et $u = s^2$. Si nous remplaçons dans (1.19), nous obtiendrons l'expression suivante :

$$J(s, \nu) = \frac{2}{\nu} s^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 1 + \frac{\nu}{2}; -\frac{\nu}{s^2}\right). \quad (1.21)$$

En rappelant (1.14), et après quelques calculs, nous avons que dans le cas t-Student ,

$$\begin{aligned} G(s) &= G_{\nu}^t(s) \\ &= \frac{1}{\nu} \nu^{\frac{n+\nu}{2}} |S_{n-2}| C(\nu, n) s^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 1 + \frac{\nu}{2}; -\frac{\nu}{s^2}\right) \\ &= \frac{1}{\nu \sqrt{\pi}} \left(\frac{\nu}{s^2}\right)^{\nu/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 1 + \frac{\nu}{2}; -\frac{\nu}{s^2}\right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nous avons prouvé le théorème suivant sur la Delta Student VaR :

Théorème 1.2.2 Si le rendement absolu d'un portefeuille s'écrit $\Delta\Pi \simeq \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \dots + \delta_n X_n$ sachant que (X_1, \dots, X_n) est un vecteur aléatoire suivant une distribution multivariée t-Student avec pour vecteur espérance μ , pour matrice de variance covariance Σ , alors la Value à Risque pour une confiance $1 - \alpha$ s'écrit :

$$\text{VaR}_{\alpha} = -\delta \cdot \mu + q_{\alpha, \nu}^t \cdot \sqrt{\delta \Sigma \delta^t},$$

où $s = q_{\alpha, \nu}^t$ est l'unique solution positive de l'équation transcendente

$$G_{\nu}^t(s) = \alpha,$$

avec G_{ν}^t définie par (1.22).

Remarque 1.2.5 La fonction Hypergéométrique ${}_2F_1$ a été longuement étudiée, et des programmes informatiques qui l'évalue existe sous Maple, Mathematica etc. Ainsi étant donné α , nous donnons dans les tableaux ci-dessous la solution positive $s = q_{\alpha, \nu}^t$ de l'équation $G(s) = \alpha$, obtenue avec l'aide du logiciel scientifique Mathematica 4, pour certaines valeurs ν fixées.

TAB. 1.1 – Quelques valeurs de $q_{\alpha,\nu}^t$.

ν	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_{0.00,\nu}^t$	613.229	126.18	43.9747	27.6506	20.3354	14.2738	12.3398	11.039
$q_{0.01,\nu}^t$	6.96456	4.54056	3.74695	3.36493	3.14267	2.99795	2.89646	2.8214
$q_{0.025,\nu}^t$	4.3026	3.18244	2.77644	2.57058	2.44691	2.36462	2.3060	2.26216
$q_{0.05,\nu}^t$	2.91999	2.35336	2.13185	2.01505	1.94318	1.89458	1.85955	1.81246

TAB. 1.2 – Quelques valeurs de $q_{\alpha,\nu}^t$.

ν	10	100	200	250	275	300	400	1000
$q_{0.00,\nu}^t$	11.039	5.0722	4.9286	4.90064	4.89053	4.88214	4.85916	4.81824
$q_{0.01,\nu}^t$	2.76377	2.36422	2.34135	2.34514	2.33998	2.33884	2.33571	2.33008
$q_{0.025,\nu}^t$	2.22814	1.98397	1.97189	1.96949	1.96862	1.9679	1.96591	1.96234
$q_{0.05,\nu}^t$	1.66023	1.66023	1.65251	1.65097	1.65041	1.64995	1.64867	1.64638

1.2.2 Cas d'une distribution Student généralisée "DSTG"

Dans cette section, nous introduisons une distribution de Student généralisée, en rajoutant un paramètre supplémentaire $\beta \geq 1$ dans l'expression de la densité de Student classique. Le nouveau paramètre sera un élément qui nous permettra d'une certaine façon de contrôler les queues de distributions. On propose ainsi la fonction densité de probabilité suivante, que nous appelons "Generalized Student t-distribution" et que nous notons $(GSTD(\beta))$.

$$f_X(x) = C(n, \beta, \nu, \lambda) |\Sigma|^{-1/2} \left[1 + \nu^{-1} \left(\frac{(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu)}{\lambda} \right)^\beta \right]^{\left(\frac{-\nu-n}{2} \right)} \quad (1.23)$$

où $C(n, \beta, \nu, \lambda)$ est la constante de normalisation telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$. Il faut aussi noter que μ est le vecteur espérance de $X = (X_1, \dots, X_n)$ et que Σ est la matrice de variance-covariance.

Si nous introduisons

$$I(\beta, n, \nu, \lambda) = |\Sigma|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + \nu^{-1} \left(\frac{(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu)}{\lambda} \right)^\beta \right]^{\left(\frac{-\nu-n}{2} \right)} dx,$$

en changeant de variable par $y = (x - \mu)A^{-1}$, $dy = |A| dx$, où $\Sigma = A^t A$ est la décomposition de Cholesky de la matrice Σ , on obtient

$$I(\beta, n, \nu, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + \nu^{-1} \left(\frac{\|y\|_2^2}{\lambda} \right)^\beta \right]^{\left(\frac{-\nu-n}{2} \right)} dx.$$

Par suite, avec un changement de variable sphérique $y = r\xi$ avec $\xi \in S_{n-1}$, $dy = r^{n-1} d\sigma(\xi) dr$, on a que

$$I(\beta, n, \nu, \lambda) = |S_{n-1}| \int_0^\infty r^{n-1} \left[1 + \frac{1}{\nu\lambda^\beta} \cdot r^{2\beta} \right]^{-\frac{\nu+n}{2}} dr,$$

où $|S_{n-1}|$ est l'aire de l'hypersphère $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ et

$$|S_{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Par un autre changement de variable $z = r^{2\beta}$, $2\beta \cdot du = z^{-1+\frac{1}{2\beta}} \cdot dz$, I devient

$$I(\beta, n, \nu, \lambda) = \frac{|S_{n-1}|}{2\beta} \int_0^\infty z^{\frac{n}{2\beta}-1} \left[1 + \frac{z}{\nu\lambda^\beta}\right]^{\left(\frac{-\nu-n}{2}\right)} dz.$$

On peut évaluer cette intégrale, en se servant du lemme suivant :

Lemme 1.2.3 (Cf. [22], page 314.) Si $|\arg(\beta_1)| < \pi$ et $\operatorname{Re}(\nu_1) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (1 + \beta_1 \cdot x)^{-\nu_1} dx = (\beta_1)^{-\alpha} B(\nu_1 - \alpha, \alpha), \quad (1.24)$$

où $B(a, b)$ est la fonction Beta d'Euler telle que

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Ce lemme implique que

$$I(\beta, n, \nu, \lambda) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} B\left(\frac{n}{2\beta}, \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\nu}{2}\right)}{2\beta\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(\nu\lambda^\beta)^{-\frac{n}{2\beta}}},$$

et par conséquent

$$C(n, \beta, \nu, \lambda) = \frac{\beta(\nu\lambda^\beta)^{-\frac{n}{2\beta}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)}{\pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2\beta}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\nu}{2}\right)}. \quad (1.25)$$

Remarque 1.2.6 Notons que notre distribution Student généralisée "DSTG" est telle que si on remplace $\beta = 1 = \lambda$, on obtiendra la distribution Student classique avec pour degré de liberté ν . On suppose de plus que $\frac{1}{n+\nu} < \beta$ avec $\nu > 2$.

Remarque 1.2.7 Il est immédiat de voir que $GSTD$ est une distribution elliptique, car elle admet une densité de la forme (3.11) avec

$$f_X(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t)$$

où

$$g(x) = \frac{\beta\nu^{-\frac{n}{2\beta}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)}{(\pi\lambda)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2\beta}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\nu}{2}\right)} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right]^{\left(\frac{-\nu-n}{2}\right)} \quad (1.26)$$

avec $\nu \geq 2$.

Pour estimer la VaR linéaire, on remplacera g comme définie en (1.26) dans le théorème (1.2.1). Pour nos calculs, on distinguera le cas où n est pair et le cas où n est impair. Si $n = 2p+1$ alors ($p \geq 1$), en changeant de variable dans (1.8) par $u = r^2 + z_1^2$, l'expression de G devient

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_s^\infty \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} g(u) du dz_1 \\ &= C(n, \beta, \nu, \lambda) \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_s^\infty \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^\beta\right]^{\left(\frac{-\nu-n}{2}\right)} du dz_1 \\ &= C(n, \beta, \nu, \lambda) \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_s^\infty J(z_1) dz_1, \end{aligned} \quad (1.27)$$

où nous posons

$$\begin{aligned}
 J(z_1) &= \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \left(1 + \frac{1}{\nu\lambda^\beta} u^\beta\right)^{-\frac{(n+\nu)}{2}} du \\
 &= \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j z_1^{n-3-2j} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \int_{z_1^2}^{+\infty} u^j \left(1 + \frac{1}{\nu\lambda^\beta} u^\beta\right)^{-\frac{(n+\nu)}{2}} du \\
 &= \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j z_1^{n-3-2j} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} I_j(z_1),
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

avec

$$I_j(z_1) = \int_{z_1^2}^{+\infty} u^j \left(1 + \frac{1}{\nu\lambda^\beta} u^\beta\right)^{-\frac{(n+\nu)}{2}} du. \tag{1.29}$$

En changeant de variable dans (1.29) comme suit $v = u^\beta$, on obtient

$$\begin{aligned}
 I_j(z_1) &= \frac{1}{\beta} \int_{z_1^{2\beta}}^{+\infty} v^{\frac{j}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\nu\lambda^\beta} v^\beta\right)^{-\frac{(n+\nu)}{2}} v^{\frac{1}{\beta}-1} dv \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_{z_1^{2\beta}}^{+\infty} v^{\frac{j+1}{\beta}-1} \left(1 + \frac{1}{\nu\lambda^\beta} v^\beta\right)^{-\frac{(n+\nu)}{2}} dv
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

par suite en appliquant le lemme (1.2.2), où $\nu_1 = \frac{n+\nu}{2}$, $\mu_1 = \frac{1+j}{\beta}$, $\alpha = \nu^{-1}\lambda^{-\beta}$ et $u = z_1^{2\beta}$, si on remplace dans (1.20), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 I_j(z_1) &= \frac{1}{\beta} \frac{z_1^{2\beta(\frac{1+j}{\beta} - \frac{n+\nu}{2})} (\nu\lambda^\beta)^{\frac{n+\nu}{2}}}{\frac{n+\nu}{2} - \frac{j+1}{\beta}} \\
 &\cdot {}_2F_1\left(\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta}; \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta} + 1; -\nu\lambda^\beta \cdot z_1^{-2\beta}\right).
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
 \int_s^\infty J(z_1) dz_1 &= \frac{(\nu\lambda^\beta)^{\frac{n+\nu}{2}}}{\beta} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \\
 &\cdot \int_s^\infty \frac{z_1^{n(1-\beta)-\nu\beta-1}}{\frac{n+\nu}{2} - \frac{j+1}{\beta}} {}_2F_1\left(\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta}; \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta} + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{z_1^{2\beta}}\right) dz_1 \\
 &= \frac{(\nu\lambda^\beta)^{\frac{n+\nu}{2}}}{\beta} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \frac{(-1)^j}{\frac{n+\nu}{2} - \frac{j+1}{\beta}} G_j(s),
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

où nous posons que

$$G_j(s) = \int_s^\infty z_1^{n(1-\beta)-\nu\beta-1} {}_2F_1\left(\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta}; \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta} + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{z_1^{2\beta}}\right) dz_1. \tag{1.33}$$

En introduisant dans (1.33), la variable $y = \frac{s^{2\beta}}{z_1^2}$, et en se servant de Mathematica on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 G_j(s) &= \frac{s^{n(1-\beta)-\nu\beta}}{2\beta} \int_0^1 y^{\frac{n+\nu}{2}-\frac{n}{2\beta}-1} {}_2F_1\left(\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta}; \frac{n+\nu}{2} - \frac{1+j}{\beta} + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}} \cdot y\right) dy \\
 &= \frac{\left(\frac{n}{2\beta} - b\right) {}_2F_1\left(b, b - c_j, b - c_j + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}}\right) + (b - c_j) {}_2F_1\left(b, b - \frac{n}{2\beta}, b - \frac{n}{2\beta} + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}}\right)}{s^{\nu\beta-n(1-\beta)} \cdot \left(2\beta\left(b - \frac{n}{2\beta}\right)\left(\frac{n}{2\beta} - c_j\right)\right)} \\
 &= \frac{(n - 2\beta \cdot b) {}_2F_1\left(b, b - c_j, b - c_j + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}}\right) + 2\beta(b - c_j) {}_2F_1\left(b, b - \frac{n}{2\beta}, b - \frac{n}{2\beta} + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}}\right)}{s^{\nu\beta-n(1-\beta)} \cdot \left((2\beta b - n)(n - 2\beta c_j)\right)} \\
 &= \frac{(n - 2\beta \cdot b) {}_2F_1\left(b, b - c_j, b - c_j + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}}\right) + 2\beta(b - c_j) {}_2F_1\left(b, b - \frac{n}{2\beta}, b - \frac{n}{2\beta} + 1; -\frac{\nu\lambda^\beta}{s^{2\beta}}\right)}{s^{\nu\beta-n(1-\beta)} \cdot \left((\beta(n + \nu) - n)(n - 2 - 2j)\right)}
 \end{aligned}$$

avec $b = \frac{n+\nu}{2}$, $c_j = \frac{1+j}{\beta}$.

1.2.3 VaR linéaire avec la distribution de Laplace généralisée

Dans ce cadre, on va estimer la VaR pour un portefeuille linéaire, lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution de Laplace généralisée notée $GED_n(\beta)$ ¹⁰. Pour estimer la VaR linéaire, il suffira de remplacer g dans l'équation (1.8). Aussi, dans le souci de faciliter les calculs, on distinguera le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Si nous supposons, que $n \geq 3$ est impair, d'après, (1.8), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 Q(s) &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_s^\infty \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} g(u) du dz_1 \\
 &= C(n, \beta, \lambda) \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_s^\infty \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \exp(-(x/\lambda)^\beta) du dz_1 \\
 &= C(n, \beta, \lambda) \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_s^\infty J(z_1) dz_1
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned}
 J(z_1) &= \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \exp(-(x/\lambda)^\beta) du \\
 &= \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^j z_1^{n-3-2j} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \int_{z_1^2}^{+\infty} u^j \exp(-(x/\lambda)^\beta) du \\
 &= \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^j \binom{\frac{n-3}{2}}{j} z_1^{n-3-2j} I_j(z_1),
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

¹⁰ pour chaque valeur de $0 < \beta \leq 2$ fixé, on obtient une distribution qui appartient à la famille des distributions elliptiques en dimension n .

avec

$$I_j(z_1) = \int_{z_1^2}^{+\infty} u^j \exp(-(u/\lambda)^\beta) du. \quad (1.36)$$

En changeant de variable dans (1.36) en posant $v = (u/\lambda)^\beta$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_j(z_1) &= \frac{\lambda^{1+j}}{\beta} \int_{\frac{z_1^{2\beta}}{\lambda^\beta}}^{+\infty} v^{\frac{j}{\beta}} v^{\frac{1}{\beta}-1} \exp(-v) dv \\ &= \frac{\lambda^{1+j}}{\beta} \int_{\frac{z_1^{2\beta}}{\lambda^\beta}}^{+\infty} v^{\frac{j+1}{\beta}-1} \exp(-v) dv \\ &= \frac{\lambda^{1+j}}{\beta} \Gamma\left(\frac{1+j}{\beta}, \frac{z_1^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

où $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt$ est la fonction Gamma incomplète comme définie dans [22]. En changeant de variable $u = (\frac{z_1^2}{\lambda})^\beta$, dans l'intégrale suivante, et en procédant à une intégration par parties convenable, on obtient :

$$\int_s^\infty J(z_1) dz_1 = \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^j \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \frac{(-1)^j \lambda^{1+j} \lambda^{\frac{n-2-2j}{2}}}{\beta} \int_{(\frac{s^2}{\lambda})^\beta}^\infty u^{\frac{n-2-2j}{2\beta}-1} \Gamma\left(\frac{1+j}{\beta}, u\right) du. \quad (1.38)$$

Pour $n = 2p + 1$, la formule (1.38) devient :

$$\begin{aligned} \int_s^\infty J(z_1) dz_1 &= \frac{\lambda^{\frac{n-2}{2}+1}}{\beta} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \int_{(\frac{s^2}{\lambda})^\beta}^\infty u^{\frac{n-2-2j}{2\beta}-1} \Gamma\left(\frac{1+j}{\beta}, u\right) du \\ &= \lambda^{\frac{n-2}{2}+1} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{(n-2-2j)} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2\beta}, \frac{s^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right) - \frac{s^{n-2-2j}}{\lambda^{\frac{n-2-2j}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-2-2j}{2\beta}, \frac{s^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right) \right), \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\frac{Q(s)}{C(n, \beta, \lambda)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \lambda^{\frac{n-2}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j}{(n-2-2j)} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2\beta}, \frac{s^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right) - \frac{s^{n-2-2j}}{\lambda^{\frac{n-2-2j}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-2-2j}{2\beta}, \frac{s^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right) \right).$$

Notons que la constante de normalisation C de la fonction densité de la distribution de Laplace généralisée notée $GED_n(\beta)$ est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} C(n, \beta, \lambda) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-(\|x\|_2^\beta/\lambda)^\beta) dx \right)^{-1} \\ &= \left(|S_{n-1}| \int_0^\infty r^{n-1} \exp(-(r/\lambda)^\beta) dr \right)^{-1} \\ &= \frac{\beta \lambda^{1-n-\beta} \Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2} \Gamma(n/\beta)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Si nous remplaçons $C(n, \beta, \lambda)$ dans (1.39), on obtient que

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\beta \cdot \Gamma(n/2) \lambda^{1-\frac{n}{2}-\beta}}{2\sqrt{\pi} \Gamma(n/\beta) \Gamma(\frac{n-1}{2})} \\ &\cdot \sum_{j=0}^{p-1} \binom{\frac{n-3}{2}}{j} \frac{(-1)^j}{(n-2-2j)} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2\beta}, \frac{s^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right) - \frac{s^{n-2-2j}}{\lambda^{\frac{n-2-2j}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-2-2j}{2\beta}, \frac{s^{2\beta}}{\lambda^\beta}\right) \right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Remarque 1.2.8 On pourra choisir le paramètre λ de tel sorte que la matrice de covariance soit égale à la matrice identité (voir chapitre 2 de la deuxième partie de cette thèse pour plus de détails.)

1.3 VaR linéaire avec un mélange de distributions elliptiques

Les mélanges de distributions peuvent être utilisés pour modéliser des situations, où l'ensemble des données historiques peut être subdivisées en plusieurs classes de populations, chaque classe représentant un sous ensemble d'historiques ayant des variations spécifiques ou défini par une "relation d'équivalence" donnée. Par exemple, dans le contexte du risque de marché, si nous divisons notre historique en deux classes, une des classes regroupant des données où les variations sont fortes (jours agités), l'autre représentant des données où les variations sont relativement faibles (jours modérés ou tranquilles), on pourra pour modéliser le risque choisir une distribution de probabilité qui est le mélange (ou combinaison linéaire convexe) de deux distributions elliptiques, l'une avec une volatilité forte correspondant aux jours agités, l'autre avec une volatilité plus faible correspondant aux jours modérés ou tranquilles. Une utilisation pratique du mélange de distributions gaussiennes pour modéliser la VaR peut-être trouvée dans Zangari [55](1996), Vantakaraman [47](1998), où un mélange de distributions normales est utilisé pour contrôler les queues épaisses, afin d'obtenir une VaR conséquente. Ici nous schématisons une généralisation de la section précédente à la situation où le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques (combinaison linéaire convexe de distributions elliptiques). En effet, une des limites de la distribution elliptique est que les distributions marginales ont toutes la même fonction caractéristique, ce qui pourrait nuire au calcul du risque d'un portefeuille financier, si le portefeuille est constitué de produits dont la dynamique historique des prix peut être décomposée en classe de dynamique ayant des comportements similaires sur des sous périodes. Le mélange de distributions elliptiques pourrait ainsi permettre un meilleur contrôle des queues de distributions. Des formules explicites sont ensuite données pour illustrer notre tentative de généralisation, dans le cas où on utilise un mélange de distributions t -Student.

Définition 1.3.1 Nous dirons que (X_1, \dots, X_n) est le mélange de m distributions elliptiques $N(\mu_j, \Sigma_j, \phi_j)$ ¹¹, avec les poids $\{\beta_j\}$ ($j=1, \dots, m; \beta_j > 0; \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$), si les fonctions de répartition peuvent s'écrire comme

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m \beta_j F_j(x_1, \dots, x_n)$$

avec $F_j(x_1, \dots, x_n)$ est la fonction de répartition de $N(\mu_j, \Sigma_j, \phi_j)$.

Remarque 1.3.1 Dans la pratique financière, d'aucun se limiterait au cas $m = 2$, afin de simplifier le problème d'estimation des paramètres β_j, μ_j, Σ_j et ϕ_j qui définiront le mélange de distribution (cf. Mina and Xiao [29], Zangari [30] et Dowd [12] pour plus de détails).

¹¹où $N(\mu_j, \Sigma_j, g_j)$ si nous paramétrisons notre distribution elliptique en utilisant g à la place de ϕ

Nous supposons que les distributions elliptiques $N(\mu_j, \Sigma_j, \phi_j)$ dans notre cas admettent des fonctions densités, telle que la j -ème fonction densité du mélange s'écrira comme suit :

$$f_j(x) = |\Sigma_j|^{-1/2} g_j((x - \mu_j)\Sigma_j^{-1}(x - \mu_j)^t). \quad (1.41)$$

où $\Sigma_j = A_j^t A_j$, par la décomposition de Cholesky de Σ_j . Aussi, la fonction densité de la distribution obtenue par mélange de m distributions elliptiques $N(\mu_j, \Sigma_j, \phi_j)$ ($j=1, \dots, m$) est donnée par

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(x).$$

Sachant que l'opération intégrale est linéaire, la VaR_α est solution de l'équation

$$\alpha = |S_{n-2}| \sum_{j=1}^m \beta_j |\Sigma_j|^{-1/2} \int_0^{+\infty} r^{n-2} \left[\int_{-\infty}^{\frac{-\delta \cdot \mu_j - VaR_\alpha}{|\delta A_j|}} g_j(z_1^2 + r^2) dz_1 \right] dr \quad (1.42)$$

$$= \sum_{j=1}^m \beta_j G_j(s_j), \quad (1.43)$$

où $s_j = \frac{\delta \cdot \mu_j^t + VaR_\alpha}{(\delta \Sigma_j \delta)^{1/2}}$. On a ainsi prouvé le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 Soit $\Delta\Pi = \delta_1 X_1 + \dots + \delta_n X_n$ avec (X_1, \dots, X_n) le mélange de m distributions elliptiques, admettant pour fonction densité

$$f(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j |\Sigma_j|^{-1/2} g_j((x - \mu_j)\Sigma_j^{-1}(x - \mu_j)^t) \quad (1.44)$$

avec μ_j le vecteur espérance, et Σ_j la matrice de variance covariance de la j -ème composante du mélange de distributions. On suppose que chaque g_j est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , et que (g_1, \dots, g_m) ne s'annule pas sur \mathbb{R}^m . Alors la Valeur à Risque où Delta mixture-elliptic VaR, au taux de confiance $1 - \alpha$ est donnée comme étant la solution positive de l'équation transcendante suivante

$$\alpha = \sum_{j=1}^m \beta_j G_j \left(\frac{\delta \mu_j^t + VaR_\alpha}{(\delta \Sigma_j \delta^t)^{1/2}} \right), \quad (1.45)$$

où G_j est définie par (1.22) avec $g = g_j$. Ici $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Remarque 1.3.2 On pourra tout de même dans certaines situations, faire un modèle avec le mélange de m distributions elliptiques, tel que les distributions aient la même matrice de variance-covariance et le même vecteur espérance. Nous obtiendrons par exemple un mélange des distributions avec des queues différentes en jouant avec les g_j . Dans ce cas la VaR s'obtient plus simplement par :

$$VaR_\alpha = -\delta \cdot \mu + q_\alpha^{ME} \sqrt{\delta \Sigma \delta^t},$$

avec q_α^{ME} l'unique solution de

$$\alpha = \sum_{j=1}^m \beta_j G_j(s).$$

Dans le cas du mélange de m Student t -distribution, notre remarque est bien applicable.

1.3.1 VaR linéaire avec le mélange de m distributions t-Student

Comme dans Mina [29] de RiskMetrics, beaucoup d'auteurs de la littérature financière, tels par exemple [32], [33], [31], ont proposé comme alternative à la distribution gaussienne, la distribution Student. Ce fut d'ailleurs la motivation initiale, pour qu'on introduise la Delta-Student VaR. Cependant, l'un des inconvénients majeurs de la distribution Student multivariée de degré de liberté ν , est que chaque distribution marginale possède le même degré de liberté ν . Dans cette partie, nous proposons une alternative sérieuse à l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une distribution Student, en introduisant un modèle sous l'hypothèse du mélange de distributions t-Student. Aussi, pour illustrer la méthode proposée ci-dessus, on se propose de choisir m distributions t-Student. Sans surprise par analogie avec l'appellation Delta normal VaR, on appellera la VaR obtenue "Delta mixture-Student VaR".

Dans ce cas, la fonction densité de probabilité du mélange de m distributions t-Student est donnée par :

$$h_X(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j \Gamma(\frac{\nu_j+n}{2})}{\Gamma(\nu_j/2) \cdot \sqrt{|\Sigma_j|} (\nu_j \pi)^n} \left(1 + \frac{(x - \mu_j)^t \Sigma_j^{-1} (x - \mu_j)}{\nu_j} \right)^{\frac{-(\nu_j+n)}{2}}, \quad (1.46)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $\nu_j > 2$. Aussi g_j est donnée par l'expression suivante :

$$g_j(s) = C(\nu_j, n) (1 + s/\nu_j)^{-\frac{(n+\nu_j)}{2}}, \quad s \geq 0,$$

où le constante de normalisation $C(\nu_j, n)$ est

$$C(\nu_j, n) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_j+n}{2})}{\Gamma(\nu_j/2) \sqrt{(\nu_j \pi)^n}}.$$

En remplaçant g dans (1.8) par l'expression de g_j , on obtient que

$$G_j(s) = \frac{\nu_j^{\frac{n+\nu_j}{2}}}{2} |S_{n-2}| C(\nu_j, n) \int_s^\infty I_j(z_1) dz_1, \quad (1.47)$$

avec

$$I_j(z_1) = \int_{z_1^2}^{+\infty} (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} (\nu_j + u)^{-\frac{(n+\nu_j)}{2}} du. \quad (1.48)$$

En s'inspirant de (1.17) et (1.22), introduisons l'expression de la fonction G_j suivante :

$$G_j(s) = \frac{1}{\nu_j \sqrt{\pi}} \left(\frac{\nu_j}{s^2} \right)^{\nu_j/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu_j+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_j}{2})} {}_2F_1 \left(\frac{1+\nu_j}{2}, \frac{\nu_j}{2}; 1 + \frac{\nu_j}{2}; -\frac{\nu_j}{s^2} \right). \quad (1.49)$$

Par suite, si on remplace l'expression de G_j dans (1.45), on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.3.2 *Etant donné le rendement absolu $\Delta\Pi = \delta_1 X_1 + \dots + \delta_n X_n$, comme fonction linéaire des facteurs de risque marginaux de X , telle que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire suivant le mélange de m distributions t-Student. Sachant que la fonction densité h_X de X est donné par (1.46), où μ_j est le vecteur espérance, et Σ_j est la matrice de variance-covariance de la j -eme distribution Student ($j=1, \dots, m$), alors pour un taux de confiance $1 - \alpha$, la Valeur*

à Risque appelée "Delta mixture-Student VaR" est la solution de l'équation transcendante suivante :

$$\alpha = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j \Gamma\left(\frac{\nu_j+1}{2}\right)}{\nu_j \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu_j}{2}\right)} \left(\frac{\nu_j(\delta \cdot \mu_j^t + VaR_\alpha)}{\delta \Sigma_j \delta^t} \right)^{\frac{\nu_j}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu_j}{2}, \frac{\nu_j}{2}; 1 + \frac{\nu_j}{2}; -\frac{\nu_j(\delta \cdot \mu_j^t + VaR_\alpha)}{\delta \Sigma_j \delta}\right) \quad (1.50)$$

où $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$.

Corollaire 1.3.1 Dans certaines situations, on pourra choisir le mélange de m distributions Student admettant toutes les mêmes espérances $\mu_j = \mu$ et les mêmes matrices de variance-covariance $\Sigma_j = \Sigma$. Dans ce cas, les m distributions Student mélangées ne seront différentes que par leurs degrés de libertés. Ainsi le mélange de distributions avec des degrés de libertés bien choisis, nous permettra de mieux contrôler les queues de distributions. On pourra ainsi jouer avec le choix des poids du mélange β_j et ν_j 's, afin d'obtenir des queues de distributions souhaitées. Dans ce cas, on obtient que

$$VaR_\alpha = -\delta \cdot \mu + q_\alpha^{MST} \sqrt{\delta \Sigma \delta^t},$$

avec q_α^{MST} comme étant la solution positive de l'équation transcendante suivante :

$$\alpha = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j \Gamma\left(\frac{\nu_j+1}{2}\right)}{\nu_j \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu_j}{2}\right)} \left(\frac{\nu_j(\delta \cdot \mu^t + VaR_\alpha)}{\delta \Sigma \delta^t} \right)^{\frac{\nu_j}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu_j}{2}, \frac{\nu_j}{2}; 1 + \frac{\nu_j}{2}; -\frac{\nu_j(\delta \cdot \mu^t + VaR_\alpha)}{\delta \Sigma \delta}\right).$$

Corollaire 1.3.2 Aussi on pourrait penser à un modèle qui suppose que le vecteur des facteurs de risque suit le mélange de m distributions Student ayant les mêmes degrés de libertés $\nu_j = \nu$, et différentes par leurs matrices de variance-covariances Σ_j , et leurs vecteurs espérances μ_j . Si on considère de plus que $\mu_j \approx 0$, alors on ne jouera qu'avec les matrices de covariances Σ_j . Dans ce cas, la Valeur à Risque sera donnée comme l'unique solution de l'équation suivante :

$$\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\nu \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\frac{\nu(VaR_\alpha)}{\delta \Sigma_j \delta} \right)^{\frac{\nu}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 1 + \frac{\nu}{2}; -\frac{\nu(VaR_\alpha)}{\delta \Sigma_j \delta}\right).$$

1.3.2 Résultat numérique pour la *Delta-mixture Student VaR*

Etant donné (ν_1, \dots, ν_m) , on va chercher un quantile comme solution de l'équation (1.45), qui permettra par suite de déterminer la VaR.

Pour plus de clarté, nous choisirons pour illustration lorsque $m = 2$, le mélange de 2 lois de distributions Student, d'espérance nulle et ayant la même matrice covariance, et affectées des coefficients $(\beta, 1-\beta)$, et admettant pour degrés de libertés respectifs ν_1, ν_2 . En introduisant la fonction F telle que,

$$F(s, \beta, \nu_1, \nu_2) = \beta \cdot G_1(s) + (1 - \beta) \cdot G_2(s) \quad (1.51)$$

où G_j est défini en (1.49), pour $j = 1, 2$, on se propose de donner un tableau des solutions $s = q_{\beta, \nu_1, \nu_2}$, selon les valeurs données de β , ν_1 et ν_2 , de l'équation transcendante

$$F(s, \beta, \nu_1, \nu_2) = \alpha,$$

qui permettra par suite d'obtenir la VaR, pour un taux de confiance $1 - \alpha$.

En utilisant le logiciel scientifique Mathematica 4, on obtient le tableau suivant :

TAB. 1.3 – Quelques valeurs de q_{β, ν_1, ν_2} lorsque $\alpha = 0.01$

(ν_1, ν_2)	(2,3)	(3,4)	(4,6)	(5,8)	(6,10)	(7, 15)	(8, 40)	(9, 16)
$q_{0.05, \nu_1, \nu_2}$	4.64839	3.78507	3.17184	3.91919	2.78228	2.62175	2.44602	2.59524
$q_{0.10, \nu_1, \nu_2}$	4.7586	3.82348	3.20124	2.94213	2.80092	2.64116	2.46906	2.60704
$q_{0.15, \nu_1, \nu_2}$	4.87115	3.86216	3.23086	2.9652	2.81965	2.6607	2.49235	2.61887
$q_{0.20, \nu_1, \nu_2}$	4.98587	3.9011	3.26066	2.98846	2.83846	2.68035	2.51586	2.63073
$q_{0.25, \nu_1, \nu_2}$	5.10258	3.94025	3.29063	3.01177	2.85734	2.70009	2.53957	2.64261
$q_{0.30, \nu_1, \nu_2}$	5.22106	3.97962	3.32075	3.03518	2.87629	2.71991	2.56344	2.65452
$q_{0.35, \nu_1, \nu_2}$	5.34113	4.01917	3.35100	3.05866	2.89528	2.7398	2.58744	2.66644
$q_{0.40, \nu_1, \nu_2}$	5.46259	4.05888	3.38136	3.08221	2.91432	2.75974	2.6115	2.67838
$q_{0.45, \nu_1, \nu_2}$	5.58523	4.09873	3.41180	3.10502	2.93339	2.77972	2.6357	2.69033
$q_{0.50, \nu_1, \nu_2}$	5.70886	4.13870	3.44231	3.12946	2.95248	2.79972	2.65989	2.70228

TAB. 1.4 – Quelques valeurs de q_{β, ν_1, ν_2} lorsque $\alpha = 0.001$.

(ν_1, ν_2)	(2,3)	(3,4)	(4,6)	(5,8)	(6,10)	(7, 15)	(8, 40)	(9, 16)
$q_{0.20, \nu_1, \nu_2}$	12.8878	7.84891	5.66393	4.82769	4.39245	3.98902	3.62286	3.82625
$q_{0.25, \nu_1, \nu_2}$	13.5577	8.01412	5.77451	4.90665	4.45334	4.05064	3.69896	3.86013
$q_{0.30, \nu_1, \nu_2}$	14.2205	8.17734	5.88317	4.98414	4.51241	4.11084	3.77242	3.89346
$q_{0.35, \nu_1, \nu_2}$	14.874	8.33840	5.98975	5.06004	4.57030	4.16948	3.84285	3.92621
$q_{0.40, \nu_1, \nu_2}$	15.5168	8.49717	6.09412	5.13427	4.62694	4.22648	3.91007	3.95838
$q_{0.45, \nu_1, \nu_2}$	16.1480	8.65357	6.19624	5.20677	4.68229	4.28179	3.97400	3.98993
$q_{0.50, \nu_1, \nu_2}$	16.7671	8.80753	6.29604	5.27752	4.73634	4.33537	3.03470	4.02087

1.4 Expected Shortfall avec les distributions elliptiques

L'Expected Shortfall est une mesure statistique sous-additive qui décrit la perte au delà de la VaR. Il permet aussi d'avoir une idée plus claire sur les valeurs extrêmes des pertes situées au dessus de la VaR. Nous évaluerons l'Expected Shortfall d'un portefeuille linéaire sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une distribution Elliptique. Mathématiquement, l'Expected Shortfall associé a une VaR donnée est définie comme suit :

$$\text{Expected Shortfall} = \mathbb{E}(-\Delta\Pi \mid -\Delta\Pi > VaR), \quad (1.52)$$

dans Mina et Xiao [29]. Si la distribution elliptique admet pour densité de probabilité $f(x) = |\Sigma|^{-1} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t)$, alors l'Expected Shortfall au taux de confiance $1 - \alpha$ est donné par

$$\begin{aligned} -ES_\alpha &= \mathbb{E}(\Delta\Pi \mid \Delta\Pi \leq -VaR_\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\Delta\Pi \cdot 1_{\{\Delta\Pi \leq -VaR_\alpha\}}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{\{\delta x^t \leq -VaR_\alpha\}} \delta x^t f(x) dx \\ &= |\Sigma|^{-1/2} \int_{\{\delta x^t \leq -VaR_\alpha\}} \delta x^t g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t) dx. \end{aligned}$$

TAB. 1.5 – Quelques valeurs de q_{β, ν_1, ν_2} lorsque $\alpha = 0.01$

(ν_1, ν_2)	(10,20)	(200, 300)	(250,50)	(275,15)	(300,55)	(400,10)	(1000,5)
$q_{0.05, \nu_1, \nu_2}$	2.53963	2.33916	2.40018	2.58957	2.39322	2.7432	3.3202
$q_{0.10, \nu_1, \nu_2}$	2.55132	2.33947	2.39709	2.57661	2.39036	2.72242	3.27401
$q_{0.15, \nu_1, \nu_2}$	2.56304	2.33978	2.39399	2.56359	2.38750	2.7014	3.22632
$q_{0.20, \nu_1, \nu_2}$	2.5748	2.3401	2.3909	2.55051	2.38464	2.68019	3.17715
$q_{0.25, \nu_1, \nu_2}$	2.58658	2.34041	2.3878	2.53738	2.38178	2.6588	3.12651
$q_{0.30, \nu_1, \nu_2}$	2.59838	2.34073	2.38471	2.52422	2.37892	2.63726	3.07446
$q_{0.35, \nu_1, \nu_2}$	2.6102	2.34104	2.38161	2.51102	2.37605	2.61559	3.02112
$q_{0.40, \nu_1, \nu_2}$	2.62204	2.34136	2.37851	2.49779	2.37319	2.59382	2.96663
$q_{0.45, \nu_1, \nu_2}$	2.63389	2.34167	2.37541	2.48455	2.37033	2.57198	2.91121
$q_{0.50, \nu_1, \nu_2}$	2.64574	2.34199	2.37232	2.4713	2.36746	2.55009	2.85513

Soit $\Sigma = A^t A$, transformée via la decomposition de Cholesky. En procédant aux changements de variables similaires à ceux de la section 2, on obtient que :

$$\begin{aligned} -ES_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \int_{\{|\delta A|z_1 \leq -\delta \cdot \mu - VaR_\alpha\}} (|\delta A|z_1 + \delta \cdot \mu) g(\|z\|^2) dz \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{\{|\delta A|z_1 \leq -\delta \cdot \mu - VaR_\alpha\}} |\delta A|z_1 g(\|z\|^2) dz + \delta \cdot \mu. \end{aligned}$$

En écrivant $\|z\|^2 = z_1^2 + \|z'\|^2$, puis en introduisant les coordonnées sphériques $z' = r\xi$ avec $\xi \in S_{n-2}$, on obtient :

$$-ES_\alpha = \delta \cdot \mu + \frac{|S_{n-2}|}{\alpha} \int_0^\infty r^{n-2} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{\delta \mu^t - VaR_\alpha}{|\delta A|}} |\delta A| z_1 g(z_1^2 + r^2) dz_1 \right] dr.$$

Dans un premier temps, on fait un changement de variable en remplaçant z_1 par $-z_1$, et par la suite on pose comme précédemment $u = z_1^2 + r^2$. Puisque d'après le théorème (1.2.1), on a :

$$q_{\alpha, n}^g = \frac{\delta \cdot \mu + VaR_\alpha}{|\delta A|}$$

où nous écrivons simplement q_α , en lieu et place de $q_{\alpha, n}^g$, on obtient :

$$\begin{aligned} ES_\alpha &= -\delta \cdot \mu + |\delta A| \frac{|S_{n-2}|}{\alpha} \cdot \int_{q_\alpha}^\infty \int_{z_1^2}^\infty z_1 (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} g(u) du dz_1 \\ &= -\delta \cdot \mu + |\delta A| \frac{|S_{n-2}|}{\alpha} \cdot \int_{q_\alpha^2}^\infty \frac{1}{n-1} (u - q_\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} g(u) du, \end{aligned}$$

car

$$\int_{q_\alpha}^{\sqrt{u}} z_1 (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} = \frac{1}{n-1} (u - q_\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.53)$$

Après la substitution de $|S_{n-2}|$ par sa valeur, et en utilisant l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, nous arrivons au résultat suivant :

Théorème 1.4.1 Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ les facteurs de risque d'un portefeuille linéaire : $\Delta\Pi = \delta \cdot X$ tel que $X \sim N(\mu, \Sigma, \phi)$ admet pour fonction densité de probabilité $f(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t)$. Si nous écrivons $q_\alpha = q_{\alpha, n}^g$, alors l'Expected Shortfall au taux de confiance $1 - \alpha$ sera donné par :

$$ES_\alpha = -\delta \cdot \mu + |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \int_{(q_{\alpha, n}^g)^2}^{\infty} (u - (q_{\alpha, n}^g)^2)^{\frac{n-1}{2}} g(u) du \quad (1.54)$$

$$= -\delta \cdot \mu + K_{ES}^g \cdot |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2}. \quad (1.55)$$

où

$$K_{ES}^g = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \int_{(q_{\alpha, n}^g)^2}^{\infty} (u - (q_{\alpha, n}^g)^2)^{\frac{n-1}{2}} g(u) du$$

1.4.1 Application : Delta Student Expected Shortfall

Dans le cas où on travaille avec la distribution t-Student, on a que $g(u) = C(\nu, n)(1 + u/\nu)^{-\frac{(n+\nu)}{2}}$, avec $C(\nu, n)$ donné en section 2. En écrivant momentanément q en lieu et place de $q_{\alpha, \nu}^t$, d'après la formule 1.24, on a que :

$$\int_{q^2}^{\infty} (u - q)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-\frac{n+\nu}{2}} du = \nu^{\frac{n+\nu}{2}} (q^2 + \nu)^{-\frac{(\nu-1)}{2}} B\left(\frac{\nu-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \quad (1.56)$$

Après une substitution dans (1.54) et quelques calculs, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.4.2 l'Expected Shortfall au taux de confiance $1 - \alpha$ pour un portefeuille linéaire avec pour perte ou profit $\delta \cdot X$ sous l'hypothèse de la distribution t-Student ayant pour fonction densité

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\nu/2) \cdot \sqrt{|\Sigma|} (\nu\pi)^n} \left(1 + \frac{(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu)}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+n)}{2}},$$

est donné par :

$$\begin{aligned} ES_{\alpha, \nu}^t &= -\delta \cdot \mu + |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \nu^{\nu/2} ((q_{\alpha, \nu}^t)^2 + \nu)^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \\ &= -\delta \cdot \mu + |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2} \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \nu^{\nu/2} \left(\left(\frac{\delta \cdot \mu + VaR_\alpha}{|\delta\Sigma\delta^t|^{1/2}} \right)^2 + \nu \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\ &= -\delta \cdot \mu + |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2} es_{\alpha, \nu}, \end{aligned}$$

avec

$$es_{\alpha, \nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \nu^{\nu/2} ((q_{\alpha, \nu}^t)^2 + \nu)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}.$$

L'Expected Shortfall pour un portefeuille linéaire sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit t-Student multivariée, est donné par une formule explicite, dès lors que la VaR est connue. On observe une similarité entre les formules de l'ES linéaire et la VaR linéaire, en effet la seule dépendance est liée à la dimension du portefeuille δ , l'espérance μ et la variance $\delta\Sigma\delta^t$ du portefeuille.

Remarque 1.4.1 Dans les tables de cette partie, pour un taux de confiance $1 - \alpha$ fixé, nous donnons quelques valeurs $e_{\alpha,\nu}^t$ qui permettront facilement de calculer la "Delta-Student ES".

TAB. 1.6 – Quelques valeurs de $e_{\alpha,\nu}^t$.

ν	2	3	4	5	6	7	8	9
$es_{0.01,\nu}^t$	5.5722	5.9309	5.7879	5.4555	5.0799	4.7160	4.3819	4.0818
$es_{0.025,\nu}^t$	8.6113	7.6777	6.8216	6.0676	5.4326	4.9032	4.4601	4.0862
$es_{0.05,\nu}^t$	11.7123	9.0750	7.4966	6.3797	5.5457	4.9007	4.3880	3.9711

TAB. 1.7 – Quelques valeurs de $e_{\alpha,\nu}^t$.

ν	10	100	200	250
$es_{0.01,\nu}^t$	3.8135	0.5157	0.2644	0.2086
$es_{0.025,\nu}^t$	3.7675	0.4577	0.2313	0.1854
$es_{0.05,\nu}^t$	3.6257	0.4073	0.2050	0.1642

1.4.2 Expected Shortfall pour un mélange de distributions elliptiques

Dans cette partie, étant donnée la VaR d'un portefeuille "linéaire" ou "affine" sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit le mélange de m distributions elliptiques, on se propose de calculer l'Expected Shortfall pour un taux de confiance $1 - \alpha$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 -ES_\alpha &= \mathbb{E}(\Delta\Pi \mid \Delta\Pi \leq -VaR_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\Delta\Pi \cdot 1_{\{\Delta\Pi \leq -VaR_\alpha\}}) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_{\{\delta x^t \leq -VaR_\alpha\}} \delta x^t f_X(x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{|\Sigma_i|^{-1/2}}{\alpha} \int_{\{\delta x^t \leq -VaR_\alpha\}} \delta x^t g_i((x - \mu_i)\Sigma_i^{-1}(x - \mu_i)^t) dx.
 \end{aligned}$$

Aussi Etant donné $\Sigma_i = A_i^t A_i$, en utilisant des changements de variables appropriés, on obtient :

$$\begin{aligned}
 -ES_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \beta_i \int_{\{|\delta A_i| z_1 \leq -\delta \cdot \mu_i - VaR_\alpha\}} (|\delta A| z_1 + \delta \cdot \mu_i) g_i(\|z\|^2) dz \\
 &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \beta_i \left[\int_{\{|\delta A| z_1 \leq -\delta \cdot \mu_i - VaR_\alpha\}} |\delta A_i| z_1 g_i(\|z\|^2) dz + \delta \cdot \mu_i \right].
 \end{aligned}$$

Aussi en écrivant $\|z\|^2 = z_1^2 + \|z'\|^2$ puis en introduisant les coordonnées sphériques $z' = r\xi$, $\xi \in S_{n-2}$, on a

$$-ES_\alpha = \sum_{i=1}^m \beta_i \delta \cdot \mu_i + \frac{|S_{n-2}|}{\alpha} \sum_{i=1}^m \beta_i \int_0^\infty r^{n-2} \left[\int_{-\infty}^{\frac{-\delta \mu_i^t - VaR_\alpha}{|\delta A_i|}} |\delta A_i| z_1 g_i(z_1^2 + r^2) dz_1 \right] dr.$$

En introduisant la variable $u = z_1^2 + r^2$, puis en rappelant 1.2.1, on a

$$q_{\alpha,i}^{g_i} = \frac{\delta \cdot \mu_i + VaR_{\alpha}}{|\delta A_i|}.$$

Notons $q_{\alpha,i}$ au lieu de $q_{\alpha,n}^{f_X}$, ainsi nous avons

$$\begin{aligned} ES_{\alpha} &= - \sum_{i=1}^m \beta_i \left[\delta \cdot \mu_i + |\delta A| \frac{|S_{n-2}|}{\alpha} \cdot \int_{q_{\alpha,i}}^{\infty} \int_{z_1^2}^{\infty} z_1 (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} g_i(u) du dz_1 \right] \\ &= - \sum_{i=1}^m \beta_i (\delta \cdot \mu) + \sum_{i=1}^m \beta_i |\delta A_i| \frac{|S_{n-2}|}{\alpha} \cdot \int_{q_{\alpha,i}^2}^{\infty} \frac{1}{n-1} (u - q_{\alpha,i}^2)^{\frac{n-1}{2}} g_i(u) du, \end{aligned} \quad (1.57)$$

puisque

$$\int_{q_{\alpha,i}}^{\sqrt{u}} z_1 (u - z_1^2)^{\frac{n-3}{2}} dz_1 = \frac{1}{n-1} (u - q_{\alpha,i}^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Théorème 1.4.3 *Etant donné un portefeuille linéaire ayant pour facteurs de risque $X = (X_1, \dots, X_n)$, et pour rendement absolu $\Delta\Pi = \delta \cdot X$. Si la fonction densité de probabilité de X est $f_X(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i |\Sigma_i|^{-1/2} g((x - \mu_i) \Sigma_i^{-1} (x - \mu_i)^t)$, alors en remplaçant q_{α} par sa valeur, l'Expected Shortfall au taux de confiance $1 - \alpha$ est :*

$$ES_{\alpha} = - \sum_{i=1}^m \beta_i (\delta \cdot \mu_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i |\delta \Sigma_i \delta^t|^{1/2} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \int_{(q_{\alpha,i}^g)^2}^{\infty} (u - (q_{\alpha,i}^g)^2)^{\frac{n-1}{2}} g_i(u) du. \quad (1.58)$$

Remarque 1.4.2 Si en particulier, on est dans une situation où $\mu = \mu_i$ et $\Sigma_i = \Sigma$ pour tout $i = 1, \dots, n$, dans ce cas $q_{\alpha,i}$ ne depend pas de i . En effet, $q_{\alpha,i} = q_{\alpha} = q_{\alpha}^{ME-VaR_{\alpha}}$ tel que

$$VaR_{\alpha} = -\delta \cdot \mu + q_{\alpha}^{ME-VaR_{\alpha}} \sqrt{\delta \Sigma \delta^t}.$$

D'où le corollaire qui suit :

Corollaire 1.4.1 *Supposons qu'un portefeuille linéaire $\Delta\Pi = \delta \cdot X$, tel que les facteurs de risque $X = (X_1, \dots, X_n)$ admet pour fonction densité de probabilité $f_X(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i |\Sigma|^{-1/2} g_i((x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu)^t)$. Si on remplace q_{α}^{ME-VaR} par sa valeur, l'Expected Shortfall pour un taux de confiance $1 - \alpha$ est donné par :*

$$ES_{\alpha} = -\delta \cdot \mu + q_{\alpha}^{ME-ES} \sqrt{\delta \Sigma \delta^t} \quad (1.59)$$

avec

$$q_{\alpha}^{ME-ES} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})} \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \int_{(q_{\alpha}^{ME-VaR})^2}^{\infty} (u - (q_{\alpha}^{ME-VaR})^2)^{\frac{n-1}{2}} g_i(u) du. \quad (1.60)$$

1.4.3 Application : Expected-Shortfall linéaire et mélange de distributions Student

Dans le cas où on travaille avec un mélange de distributions t-Student, il suffira de remplacer dans l'expression (1.57), $g_i(u) = C(\nu_i, n)(1 + u/\nu_i)^{-\frac{(n+\nu_i)}{2}}$, avec $C(\nu_i, n)$ définie précédemment. En substituant momentanément q par q_{α, ν_i}^t , et d'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} & \int_{q^2}^{\infty} (u - q)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{u}{\nu_i}\right)^{-\frac{n+\nu_i}{2}} du \\ &= \nu_i^{\frac{n+\nu_i}{2}} (q^2 + \nu_i)^{-\frac{(\nu_i-1)}{2}} B\left(\frac{\nu_i-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Si on pose :

$$q_{\alpha}^{MST-ES} = \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{\Gamma(\frac{\nu_i-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_i}{2})} \nu_i^{\nu_i/2} ((q_{\alpha, \nu_i}^t)^2 + \nu_i)^{\frac{1-\nu_i}{2}},$$

après certaines opérations sur les expressions de (1.54), on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.4.4 *Pour un taux de confiance de $1 - \alpha$, si le vecteur des facteurs de risque d'un portefeuille linéaire suit un mélange de distributions Student admettant pour fonction densité de probabilité*

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{\Gamma(\frac{\nu_i+n}{2})}{\Gamma(\nu_i/2) \cdot \sqrt{|\Sigma|} (\nu_i \pi)^n} \left(1 + \frac{(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu)}{\nu_i}\right)^{-\frac{(\nu_i+n)}{2}},$$

alors

$$\begin{aligned} ES_{\alpha, \nu}^t &= -\delta \cdot \mu \sum_{i=1}^m \beta_i + |\delta \Sigma \delta^t|^{1/2} \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_i-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_i}{2})} \nu_i^{\nu_i/2} ((q_{\alpha}^{MST-VaR})^2 + \nu_i)^{\frac{1-\nu_i}{2}} \\ &= -\delta \cdot \mu + |\delta \Sigma \delta^t|^{1/2} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu_i-1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_i}{2})} \nu_i^{\nu_i/2} \left(\left(\frac{\delta \cdot \mu + VaR_{\alpha}}{|\delta \Sigma \delta^t|^{1/2}} \right)^2 + \nu_i \right)^{\frac{1-\nu_i}{2}} \\ &= -\delta \cdot \mu + q_{\alpha}^{MST-ES} \sqrt{\delta \Sigma \delta^t}. \end{aligned}$$

1.4.4 Quelques résultats pour la Delta ES sous le mélange de t-Student

En se servant de Mathematica, nous obtenons quelques résultats numériques après application du corollaire 1.4.4 lorsque $m = 2$.

Etant donné $s = q_{\beta, \nu_1, \nu_2}^{MS-VaR}$, obtenu comme solution de

$$F(s, \beta, \nu_1, \nu_2) = \alpha,$$

on introduit la fonction H telle que

$$H(s, \beta, \nu_1, \nu_2) = \beta \cdot H_1(s) + (1 - \beta) \cdot H_2(s), \quad (1.61)$$

où

$$H_i(s) = \frac{\beta_i}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_i-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)} \nu_i^{\nu_i/2} (s^2 + \nu_i)^{\frac{1-\nu_i}{2}},$$

pour $i = 1, 2$. Etant donnés, β , ν_1 et ν_2 , on donne dans les tables suivantes quelques valeurs de $q_\alpha^{MST-ES} = H(q_\alpha^{MST-VaR}, \beta, \nu_1, \nu_2) = q_{\beta, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$.

TAB. 1.8 – Quelques valeurs de q_α^{MST-ES} pour $\alpha = 0.01$

(ν_1, ν_2)	(2,3)	(3,4)	(4,6)	(7,15)	(8,40)
$q_{0.25, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	6.36587	1.29375	0.243125	0.00290856	0.000681262
$q_{0.30, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	7.01881	1.41000	0.279435	0.00341273	0.000793844
$q_{0.35, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	7.64714	1.52252	0.31424	0.00389277	0.0008997532
$q_{0.40, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	8.25196	1.63141	0.34759	0.0043495	0.000997532
$q_{0.45, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	8.83444	1.73679	0.379538	0.00478369	0.00108926
$q_{0.50, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	9.3957	1.83877	0.410131	0.00519619	0.00117468

TAB. 1.9 – Quelques valeurs de q_α^{MST-ES} pour $\alpha = 0.001$.

(ν_1, ν_2)	(2,3)	(3,4)	(4,6)	(7,15)	(8,40)
$q_{0.25, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	20.8961	3.03289	0.576689	0.00661826	0.00164597
$q_{0.30, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	23.1642	3.32289	0.666054	0.0074621	0.00180969
$q_{0.35, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	25.2707	3.58757	0.716427	0.008196	0.00194229
$q_{0.40, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	27.239	3.83719	0.776394	0.00883632	0.00205071
$q_{0.45, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	29.0885	4.07077	0.830853	0.00939711	0.00214048
$q_{0.50, \nu_1, \nu_2}^{MST-ES}$	30.8351	4.28993	0.880508	0.00989055	0.00221577

1.5 Quelques secteurs d'applications

Dans cette partie, on donne quelques secteurs d'applications de nos résultats, tels qu'ils existent dans la littérature financière. On distinguera au moins sept exemples d'applications.

- Delta-approximation d'un portefeuille contenant des options.
- Portefeuille Linéaire d'actions.
- Entreprise comme portefeuille d'unités d'affaires.
- La VaR incrémentale
- Problème d'agrégation du risque.
- Choix de Stratégie optimale d'un portefeuille avec la VaR et ES linéaire.
- Quantile de couverture (en anglais quantile hedging).
Pour plus de détails consulter Fölmer et Leukert [16].
- Taux de change.
Pour plus de détails consulter RiskMetrics classic [30].

1.5.1 Approximation linéaire $\Delta - \Theta$ d'un portefeuille

Dans le cas où nous voulons estimer la VaR d'un portefeuille contenant des produits dérivés, on substituera la notion de "Delta portfolio approximation" connue dans la littérature financière par "Delta-Theta portfolio approximation".

En clair, supposons qu'on détient un portefeuille contenant des produits dérivés comme des options dont le risque dépend à son tour de facteurs de risque sous-jacents aux produits dérivés. Dans notre étude suivante sans perte de généralité¹², les facteurs de risque seront les rendements logarithmiques des actifs sous-jacents aux produits dérivés. On considère un portefeuille contenant des produits dérivés dépendant de n sous-jacents ayant pour prix joints $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$, et tels que les rendements logarithmiques $r_j = \log(X_j(t)/X_j(0))$ entre $[0, t]$ joints est un vecteur qui suit une distribution elliptique. De plus sachant que le prix du portefeuille à l'instant t est V , pour obtenir la VaR linéaire d'un tel portefeuille on pourra exprimer une approximation de 1^{er} ordre du rendement absolu du portefeuille en se servant de :

$$\begin{aligned} V(X(t), t) &\approx V(X(0), 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i}(X(0), 0)(X_i(t) - X_i(0)) + t \cdot \frac{\partial V}{\partial t}(X(0), 0) \\ &= V(X(0), 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i}(X(0), 0)X_i(0) (\exp(r_i) - 1) + \Theta \cdot t \\ &\approx V(X(0), 0) + \sum_{i=1}^n \delta_i r_i + \Theta \cdot t. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Ainsi, une approximation de la fonction Profit & Perte ΔV pourra s'écrire comme suit :

$$\Delta V \approx \delta \cdot r^t + \Theta t,$$

avec $r = (r_1, \dots, r_n)$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ tel que $\delta_i = X_i(0) \cdot \frac{\partial V}{\partial X_i}(X(0), 0)$.

Corollaire 1.5.1 *Supposons que la fonction Perte & Profit du portefeuille sur un intervalle de temps est approximativement $\Delta \Pi = \delta \cdot r^t + \Theta \cdot t$, avec pour poids joints $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, relatives à la composition du portefeuille. Supposons de plus que le vecteur aléatoire $r = (r_1, \dots, r_n)$ constitué des facteurs de risques des sous-jacents, suit une distribution elliptique admettant pour fonction densité de probabilité $f_r(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t)$ où μ est l'espérance et Σ est la matrice de variance covariance et que $g(s^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} , continue et partout non nulle. Alors la VaR_α du portefeuille notée Delta-Theta-elliptic VaR au taux de confiance $1 - \alpha$ est donnée par :*

$$VaR_\alpha = -\delta \cdot \mu^t + \Theta \cdot t + q_{\alpha, n}^g \cdot \sqrt{\delta \Sigma \delta^t},$$

où $s = q_{\alpha, n}^g$ est l'unique solution positive de l'équation transcendante

$$\alpha = G(q_{\alpha, n}^g).$$

Aussi, l'Expected Shortfall est donné par :

¹²on aurait pu très aisément utiliser comme facteurs de risque, les rendements absolus $(X_j(t) - X_j(0))_j$, ou des rendements relatifs $\left(\frac{X_j(t) - X_j(0)}{X_j(0)}\right)_j$

Corollaire 1.5.2 *Supposons que la fonction Perte & Profit du portefeuille sur un intervalle de temps intéressant est donnée par approximation comme suit : $\Delta\Pi = \delta \cdot r^t + \Theta \cdot t$, avec pour poids par rapports aux portefeuilles $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Supposons de plus que le vecteur aléatoire $r = (r_1, \dots, r_n)$ constitué des facteurs de risque des sous-jacents suit une distribution elliptique ayant pou densité de probabilité $f_r(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t)$, où μ est le vecteur l'espérance et Σ est la matrice de variance-covariance. Aussi supposons également que $g(s^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} , continue et partout non nulle, Alors sous ces hypothèses, la Delta-Theta Elliptic ES au taux de confiance $1 - \alpha$ est*

$$ES_\alpha = -\delta \cdot \mu^t + \Theta \cdot t + |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \int_{(q_{\alpha,n}^g)^2}^{\infty} (u - (q_{\alpha,n}^g)^2)^{\frac{n-1}{2}} g(u) du \quad (1.63)$$

$$= -\delta \cdot \mu^t + \Theta \cdot t + K_{ES,\alpha}^g \cdot |\delta\Sigma\delta^t|^{1/2}. \quad (1.64)$$

Remarque 1.5.1 Pour des intervalles d'exercice assez petits, on considère que $\mu \simeq 0$. Ainsi pour $t = 1$ on obtient :

$$VaR_\alpha = \Theta + q_{\alpha,n}^g \cdot \sqrt{\delta\Sigma\delta^t},$$

et

$$ES_\alpha = \Theta + K_{ES,\alpha}^g \cdot \sqrt{\delta\Sigma\delta^t}.$$

En particulier, lorsque la distribution elliptique est une t -Student, en s'inspirant des calculs précédents, on introduit la *Delta-Theta Student VaR* et la *Delta-Theta Student ES*. Remarquons aussi, qu'on peut trouver un résultat similaire, si on travaille avec le mélange de m distributions Elliptiques, ayant la même matrice de variance-covariance et la même espérance. Aussi, cette formule est applicable, si on travaille avec le mélange de m distributions Student.

1.5.2 Portefeuilles d'actions

Dans le cas où on a un portefeuille d'actions avec pour vecteur prix actions S_1, \dots, S_n , sans perte de généralité en utilisant les rendements logarithmiques¹³, on peut par approximation de Taylor l'ordre 1 obtenir que,

$$\Pi(t) - \Pi(0) = \sum_{i=1}^n w_i S_i(0) (S_i(t)/S_i(0) - 1) \quad (1.65)$$

$$\approx \sum_{i=1}^n w_i S_i(0) r_i(t) = \delta \cdot r^t. \quad (1.66)$$

Bien sûr puisqu'on utilise des rendements logarithmiques, cette approximation est valable pour $r_i(t)$ assez petit .

1.5.3 Entreprise comme portefeuille d'unités d'affaires

Un cas intéressant est de regarder une grande entreprise ou institution¹⁴, comme un portefeuille linéaire d'unités d'affaires. Ainsi la valeur d'une telle entreprise ou institution sera la

¹³On peut écrire aisement la fonction perte & profit d'un portefeuille d'actions de façon linéaire en fonction des rendements absolus, ou des rendements relatifs.

¹⁴Par exemple une multinationale ou une grande institution financière

somme des valeurs des unités d'affaires individuelles. Si X_j , est la variation de prix ou de rentabilité d'une unité d'affaire j dans une période, alors la variation de prix sera dans la même période

$$\Delta\Pi = X_1 + \dots + X_n.$$

L'institution entière est par conséquent regardée comme un portefeuille linéaire, avec $\delta = (1, 1, \dots, 1)$, pour lesquelles les résultats de ce papier sont applicables lorsque (X_1, \dots, X_n) suit une distribution elliptique, ou le mélange de distributions elliptiques. On pourra ainsi appliquer les modèles de ce papier, pour l'estimation de la VaR linéaire, la VaR incrémentale, l'Expected Shortfall, et même l'agrégation du risque, d'un portefeuille d'unités d'affaires. Voir pour plus détails Dowd [12] chapitre XI et Mina and Xiao [29].

1.5.4 Application pour la VaR incrémentale

La VaR incrémentale a pour but de définir la contribution de chaque actif à la VaR totale du portefeuille. Cet outil statistique permet au gérant d'évaluer si la transaction qu'il envisage va augmenter ou diminuer la VaR totale de son portefeuille. La VaR incrémentale est définie de telle sorte que la somme des VaR incrémentales soit égale à la VaR totale du portefeuille. La VaR incrémentale donne par conséquent une estimation du changement résultant de la VaR, après une décision de la direction. Les Résultats de Mina et Xiao [29] sont fait pour une VaR d'accroissement (incrémentale) sous l'hypothèse d'une distribution normale. Nous ferons de même, mais sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques de vecteur espérance nulle, et admettant les mêmes matrices de variance covariance. Si l'on désigne par $IVaR_i$ la VaR incrémentale pour l'actif i du portefeuille, et par θ_i le pourcentage d'échange dans la dimension de l'actif i du portefeuille, alors la VaR incrémentale du portefeuille est donnée par :

$$\Delta VaR = \sum_i \theta_i IVaR_i.$$

En utilisant la définition de $IVaR_i$ comme dans [29] (2001), on a que

$$IVaR_i = \omega_i \frac{\partial VaR}{\partial \omega_i} \tag{1.67}$$

avec ω_i est quantité investie dans l'actif i . Dans le cas d'un portefeuille d'actifs et sous l'hypothèse d'un mélange de distributions elliptiques des facteurs de risque, ayant les mêmes matrices de variance covariance Σ , puis en supposant que $\mu = 0$, on a que

$$VaR_\alpha = -q_{\alpha,n}^g \sqrt{\delta \Sigma \delta^t}.$$

On peut dès lors calculer ou estimer $IVaR_i$ pour le i -ème constituant du portefeuille comme

$$IVaR_i = \omega_i \frac{\partial VaR}{\partial \omega_i} = \omega_i \gamma_i$$

avec

$$\gamma = -q_{\alpha,n}^g \frac{\Sigma \omega}{\sqrt{\delta \Sigma \delta^t}}. \tag{1.68}$$

Le vecteur γ peut-être interprété comme le gradient du vecteur sensibilité de la VaR sous l'hypothèse des caractéristiques des facteurs de risque. C'est ce qui à été fait dans [29], sauf que le coefficient quantile de (1.68) dépend de g .

Si la VaR incrémentale d'un actif est positive, alors elle contribue à augmenter la VaR totale du portefeuille. Par contre, si la VaR incrémentale de l'actif est négative, son introduction dans le portefeuille diminuera la VaR totale. Si on veut diminuer la VaR d'un portefeuille, on pourra découper le portefeuille en un nombre fini de sous portefeuilles et on calcule la contribution de chaque sous portefeuille à la VaR totale du portefeuille. Une fois identifiée la partie du portefeuille qui contribue le plus à la VaR, on peut réaliser une analyse plus fine, actif par actif, de chaque sous portefeuille. On pourrait ainsi identifier les transactions à envisager pour réduire la VaR, et donc le risque du portefeuille.

1.5.5 Problème de l'agrégation du risque

Supposons qu'on détienne un portefeuille "linéaire" constitué de m sous portefeuilles "linéaires" distincts qui appartiennent à m marchés distincts. Sachant que sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque du sous-portefeuille linéaire i du marché M_i suit une *distribution elliptique*. On se propose d'estimer la VaR et l'Expected Shortfall du portefeuille global.

Pour être succinct et simple on va se limiter à $m = 2$, en considérant un portefeuille global constitué de 2 sous portefeuilles différents et appartenant à 2 marchés différents ayant respectivement pour poids dans le portefeuille global δ_1 et δ_2 . Ainsi, on mettra en exergue, la VaR du portefeuille global en fonction des VaRs des 2 *sous portefeuilles*, et de la corrélation entre les 2 marchés distincts.

Si Σ_1 représente la matrice de covariance du marché 1 et que Σ_2 représente la matrice de covariance du marché 2, on pourra écrire la matrice de corrélation du portefeuille global comme suit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^t & \Sigma_2 \end{pmatrix},$$

où Σ_{12} est la matrice de corrélation qui prend en compte l'interaction entre le marché \mathbf{M}_1 et le marché \mathbf{M}_2 . Si $\delta^t = (\delta_1, \delta_2)$, on a que

$$\delta^t \Sigma \delta = \delta_1^t \Sigma_1 \delta_1 + \delta_2^t \Sigma_2 \delta_2 + 2 \cdot \delta_1^t \Sigma_{12} \delta_2. \quad (1.69)$$

Et si de plus $\mu \approx 0$, on a que

$$VaR_\alpha = q_{\alpha,n}^g \cdot \sqrt{\delta^t \Sigma \delta^t},$$

et la VaR du portefeuille global sera

$$VaR_\alpha(\mathbf{M}) = \sqrt{\mathbf{VaR}_\alpha(\mathbf{M}_1)^2 + \mathbf{VaR}_\alpha(\mathbf{M}_2)^2 + 2[q_{\alpha,n}^g]^2 \delta_1^t \Sigma_{12} \delta_2}. \quad (1.70)$$

Notons qu'on pourra distinguer plusieurs cas suivant la forme que prend Σ_{12} . Aussi on obtient une interrelation comme suit :

$$\phi = \frac{\delta_1^t \Sigma_{12} \delta_2}{\sqrt{(\delta_1^t \Sigma_1 \delta_1)(\delta_2^t \Sigma_2 \delta_2)}} \quad (1.71)$$

avec $VaR_\alpha(\mathbf{M})$ est la VaR du portefeuille global tel que :

$$VaR_\alpha(\mathbf{M}) = \sqrt{[\mathbf{VaR}_\alpha(\mathbf{M}_1)]^2 + [\mathbf{VaR}_\alpha(\mathbf{M}_2)]^2 + 2\phi \mathbf{VaR}_\alpha(\mathbf{M}_1) \mathbf{VaR}_\alpha(\mathbf{M}_2)}. \quad (1.72)$$

Aussi pour $\mu \approx 0$,

$$ES_\alpha = K_{ES,\alpha}^g \sqrt{\delta^t \Sigma \delta^t},$$

par conséquent en s'inspirant des techniques utilisées pour l'agrégation de la VaR, l'Expected Shortfall du portefeuille global sera donné par :

$$ES_\alpha(\mathbf{M}) = \sqrt{\mathbf{ES}_\alpha(\mathbf{M}_1)^2 + \mathbf{ES}_\alpha(\mathbf{M}_2)^2 + 2[\mathbf{K}_{\mathbf{ES},\alpha}^g]^2 \delta_1^t \boldsymbol{\Sigma}_{12} \delta_2}. \quad (1.73)$$

Ce qui implique que

$$ES_\alpha(\mathbf{M}) = \sqrt{[\mathbf{ES}_\alpha(\mathbf{M}_1)]^2 + [\mathbf{ES}_\alpha(\mathbf{M}_2)]^2 + 2\phi_{\mathbf{ES}} \cdot \mathbf{ES}_\alpha(\mathbf{M}_1)\mathbf{ES}_\alpha(\mathbf{M}_2)}, \quad (1.74)$$

avec

$$\phi_{\mathbf{ES}} = \frac{\delta_1^t \boldsymbol{\Sigma}_{12} \delta_2}{\sqrt{(\delta_1^t \boldsymbol{\Sigma}_1 \delta_1)(\delta_2^t \boldsymbol{\Sigma}_2 \delta_2)}}. \quad (1.75)$$

1.5.6 Choix optimal de la stratégie du portefeuille

En s'inspirant du modèle mathématique de sélection de portefeuille de Markowitz, puisqu'on a prouvé que la VaR, ou l'ES d'un portefeuille linéaire ou affine, lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution elliptique, ou plus encore un mélange de distributions elliptiques avec $\Sigma_j = \Sigma$ et $\mu_j = \mu$, s'écrivent comme une combinaison linéaire de $\sqrt{\delta^t \Sigma \delta}$ et $\delta \cdot \mu$, il serait intéressant pour un investisseur de trouver la composition de tous les portefeuilles correspondant au critère d'efficience qu'il a défini. Aussi, pour un ensemble de titres donnés, on pourra construire la frontière efficiente correspondante. Compte tenu de la définition du rendement et de la VaR linéaire, il s'agit de minimiser la VaR linéaire pour un rendement donné. Puisque

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= -\delta \cdot \mu + q_{\alpha,n}^g \sqrt{\delta^t \Sigma \delta} \\ &= P(0) \left(-\omega \cdot \mu + q_{\alpha,n}^g \sqrt{\omega^t \Sigma \omega} \right) \end{aligned} \quad (1.76)$$

où $P(0)$ est prix du portefeuille à l'instant initial et $\omega \in \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n \omega_i = 1\}$ représente un portefeuille, il suffira pour l'investisseur de se mettre par exemple sous la contrainte d'une rentabilité espérée $\delta \cdot \mu = E$, pour déterminer la valeur $\delta = \delta_0$ qui rendra minimale la VaR_α . Il s'agit de choisir la stratégie qui permet d'obtenir le portefeuille le moins risqué et avec une rentabilité espérée et fixée par l'investisseur. On pourrait très facilement trouver l'ensemble des portefeuilles efficaces, en utilisant une méthode d'optimisation basée sur l'utilisation du Lagrangien. En effet, le modèle s'écrit :

$$\text{Minimiser} \quad -\omega \cdot \mu + q_{\alpha,n}^g \sqrt{\omega^t \Sigma \omega} \quad (1.77)$$

sous les conditions :

$$\omega \cdot \mu = \mu_p \quad (1.78)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = \omega \cdot \mathbf{1} = 1. \quad (1.79)$$

Notons qu'aucune restriction n'est faite sur les ω_i , ainsi les solutions pourront donc comporter des proportions d'actifs négatifs, ce qui correspond à une situation où les ventes à découvert

sont autorisées. Ce problème d'optimisation peut se réduire à déterminer

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & \frac{1}{2} \omega^t \Sigma \omega \\ \text{sous les conditions :} \quad & \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i = \mu_p \\ & \sum_{i=1}^n \omega_i = \omega \cdot \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \quad (1.80)$$

On définit le Lagrangien associé au problème, soit

$$L = \omega^t \Sigma \omega + \gamma_1 (\mu_p - \omega \cdot \mu) + \gamma_2 (1 - \omega \cdot \mathbf{1}) \quad (1.81)$$

où γ_1, γ_2 sont des multiplicateurs de Lagrange. Une solution vérifiée par la solution du problème est d'annuler les dérivées premières de L par rapport à chacune des variables. Si on note ω_{μ_p} le vecteur colonne représentant un portefeuille efficient, il sera solution de l'équation

$$0 = \frac{\partial}{\partial \omega} L(\omega, \gamma_1, \gamma_2) = 2 \Sigma \omega_{\mu_p} - \gamma_1 \mu - \gamma_2 \mathbf{1}. \quad (1.82)$$

Si Σ est une matrice non singulière, la solution est

$$\omega_{\mu_p} = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\gamma_1 \mu + \gamma_2 \mathbf{1}) = \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 \mathbf{1}), \quad (1.83)$$

où $\lambda_1 = \gamma_1/2$ et $\lambda_2 = \gamma_2/2$ sont les nouveaux multiplicateurs de Lagrange. En utilisant les contraintes, on a

$$\mu_p = \mu^t \omega_{\mu_p} = B \lambda_1 + A \lambda_2 \quad (1.84)$$

et

$$1 = \mathbf{1}^t \omega_{\mu_p} = A \lambda_1 + C \lambda_2, \quad (1.85)$$

où $A = \mu^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}$, $B = \mu^t \Sigma^{-1} \mu$, $C = \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}$. En posant $D = BC - A^2$, la solution du système à 2 équations linéaires

$$\begin{cases} \mu_p = B \lambda_1 + A \lambda_2 \\ 1 = A \lambda_1 + C \lambda_2, \end{cases}$$

est $(\lambda_1 = \frac{-A+C\mu_p}{D}, \lambda_2 = \frac{-A\mu_p+B}{D})$. Après des calculs simples, il s'ensuit que

$$\omega_{\mu_p} = \mathbf{g} + \mu_p \mathbf{h}, \quad (1.86)$$

où

$$\mathbf{g} = \frac{B \Sigma^{-1} \mathbf{1} - A \Sigma^{-1} \mu}{D}$$

et

$$\mathbf{h} = \frac{C \Sigma^{-1} \mu - A \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{D}.$$

Remarquons que \mathbf{g} et \mathbf{h} sont des vecteurs fixés qui ne dépendent pas de μ_p . De même les scalaires A, C, D ne dépendent pas de μ_p . Cette solution implique que la VaR linéaire du portefeuille optimal s'écrit :

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha, \mu_p}^g &= -\mu_p + q_{\alpha, n}^g \sqrt{\omega_{\mu_p}^t \Sigma \omega_{\mu_p}} \\ &= -\mu^t (\mathbf{g} + \mu_p \mathbf{h}) + q_{\alpha, n}^g \sqrt{(\mathbf{g} + \mu_p \mathbf{h})^t \Sigma (\mathbf{g} + \mu_p \mathbf{h})}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

TAB. 1.10 – Données de 11 actions distinctes du CAC 40.

k	Actions	$S_k(0)$	volatilité
1	Action-BNPPARIBAS	39.75	42.13
2	Action-BOUYGUES	27.30	41.87
3	Action-CAP GEMINI	24.00	66.36
4	Action-CREDIT AGRICOLE	14.80	37.41
5	Action-DEXIA	9.38	45.42
6	Action-LOREALL	62.90	37.07
7	Action-SOCIETEGENERALE	64.00	42.54
8	Action-TF1	22.02	44.10
9	Action-THOMSON	17.13	57.96
10	Action-VIVENDI	17.00	57.03
11	Action-AGF	19.00	61.92

Le rendement qui minimise la VaR linéaire (1.87) est solution de l'équation

$$\frac{d}{d\mu_p} VaR_{\alpha, \mu_p}^g = -1 + q_{\alpha, n}^g \frac{\mathbf{g}^t \Sigma \mathbf{h} + \mathbf{h}^t \Sigma \mathbf{h} \mu_p}{\sqrt{(\mathbf{g} + \mu_p \mathbf{h})^t \Sigma (\mathbf{g} + \mu_p \mathbf{h})}} = 0.$$

Sachant que $q_{\alpha, n}^g > 0$, lorsque

$$\mu_p \geq -\frac{\mathbf{g}^t \Sigma \mathbf{h}}{\mathbf{h}^t \Sigma \mathbf{h}},$$

le rendement μ_p^{min} qui minimise la VaR linéaire sera tout simplement une solution de l'équation du second degré

$$A_1 \mu_p^2 + 2B_1 \mu_p + C_1 = 0, \quad (1.88)$$

où $A_1 = (1 - q_{\alpha}^g)(\mathbf{h}^t \Sigma \mathbf{h})^2 \neq 0$, $B_1 = \mathbf{h}^t \Sigma \mathbf{g} - (\mathbf{g}^t \Sigma \mathbf{h})(\mathbf{h}^t \Sigma \mathbf{h})(q_{\alpha}^g)^2 = \mathbf{g}^t \Sigma \mathbf{h}(1 - (q_{\alpha}^g)^2 \mathbf{h}^t \Sigma \mathbf{h})$
 $C_1 = \mathbf{g}^t \Sigma \mathbf{g} - (q_{\alpha}^g)^2 (\mathbf{g}^t \Sigma \mathbf{h})^2$. L'équation (1.88) admet une solution réelle si son discriminant $\Delta = 4(B_1^2 - A_1 C_1) \geq 0$. Dans la suite, on va calculer μ_p^{min} et $VaR_{\alpha, \mu_p^{min}}^g$ de façon numérique en utilisant Matlab. Par suite on va déterminer les portefeuilles efficients lorsque

$$\mu_p^{min} \leq \mu_p \leq \max_{i=1}^n \mu_i.$$

1.5.6.1 Application à un portefeuille du CAC 40

Dans cette application g sera donné par la distribution multivariée t-Student avec pour degré de liberté 10, dans ce cas $q_{0.01, 10}^t = 2.76377$. La matrice EWMA Σ sera déterminée avec $\lambda = 0.8913$.

Nous considérons un portefeuille contenant 11 actions distinctes du CAC 40, ayant pour prix à l'instant $\Pi(t)$ à l'instant t . On se propose de choisir parmi les différents portefeuilles $\omega \in \mathbb{R}^{11}$ tels que $\sum_{i=1}^{11} \omega_i = 1$, ceux qui sont efficients et en particulier celui qui permet d'obtenir la VaR linéaire minimale pour une espérance de rendement fixée. Matlab nous permet d'obtenir

le portefeuille optimal suivant :

$$\omega_{min} = \begin{pmatrix} 0.0260 \\ 0.0659 \\ -0.1324 \\ 0.1412 \\ 0.0646 \\ -0.0932 \\ 0.1963 \\ 0.1017 \\ 0.0383 \\ 0.1588 \\ 0.0394 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

Pour un tel portefeuille le prix initial étant $P(0) = 14.1779$, la Delta Student VaR pour un taux de confiance de 99% et pour un degré de liberté $\nu = 10$ est

$$VaR_{0.01,10}^{min} = 0.2574.$$

La courbe indiquant la frontière efficiente est la suivante :

1.6 Conclusion

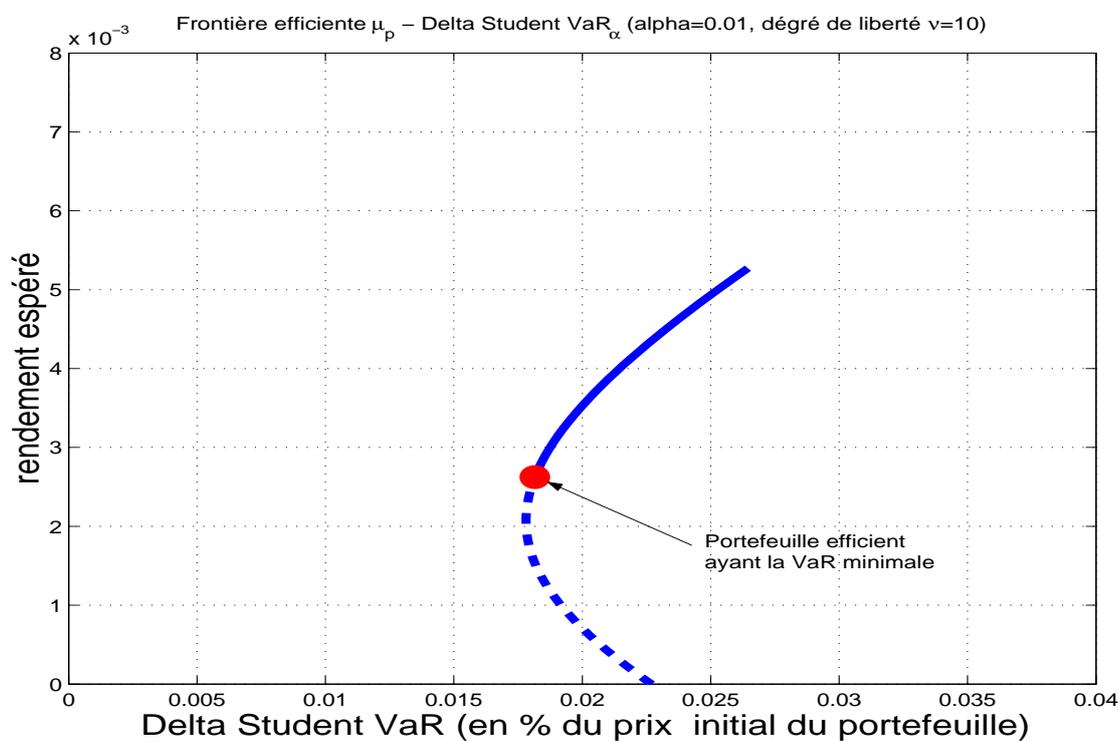
Dans ce chapitre, nous avons montré comment réduire l'estimation de la VaR pour un portefeuille linéaire sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une distribution elliptique, à l'évaluation d'une intégrale unidimensionnelle. Dans les cas particuliers où la distribution elliptique est une distribution multivariée t-Student, ou une distribution de Laplace généralisée, on introduit les équations transcendantales explicites dont les zéros permettent d'estimer la VaR linéaire. Ces équations s'écrivent en fonction de la fonction Γ -incomplète¹⁵, des fonctions spéciales hypergéométriques¹⁶. Aussi, nous montrons comment utiliser le mélange de distributions elliptiques pour estimer la VaR afin de suppléer les limites d'une distribution elliptique¹⁷. On propose aussi des calculs pour servir l'estimation de l'Expected Shortfall lorsque le vecteur des facteurs de risque suit un mélange convexe de distributions elliptiques. Des illustrations pour l'Expected Shortfall sont faites sous l'hypothèse d'un mélange de distributions multivariées t-Student. Enfin, nous enonçons quelques domaines d'applications de nos résultats pour la pratique financière. En somme dans ce chapitre, on a proposé des méthodes analytiques pour le calcul de la VaR et ES linéaire, lorsque le vecteur des facteurs de risque suit un mélange convexe de distributions elliptique. On introduit une esquisse montrant comment déterminer la frontière efficiente avec la Δ -elliptic, avec une illustration faite avec la Δ -Student VaR. Dans la partie suivante on va s'intéresser aux risques des portefeuilles "quadratiques".

¹⁵lorsqu'on utilise une distribution multivariée de Laplace généralisée ou leurs mélanges

¹⁶lorsqu'on utilise les distributions multivariées Student où leurs mélanges convexes.

¹⁷Une de ces limites est le fait que les marginales d'une distribution de probabilité elliptique, ont la même caractéristique

FIG. 1.1 – Courbe de la frontière efficiente (rendement espéré - Delta Student) lorsque $\alpha = 0.01$, et le degré de liberté est $\nu = 10$. $\mu_p \in [\min_{i=1}^n \mu_i, \max_{i=1}^n \mu_i]$ où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ est l'espérance des rendements historiques sur 3 mois.



Deuxième partie

Estimation de la VaR et de L'ES
d'un portefeuille "quadratique"
lorsque le vecteur des facteurs de
risque suit un mélange de
distributions elliptiques

Chapitre 1

VaR Analytique d'un portefeuille quadratique $\Delta - \Gamma - \Theta$ elliptique

1.1 Introduction

Dans la partie précédente, nous avons développé des méthodes de VaR et ES linéaires lorsque le vecteur des risques suit un mélange de distributions elliptiques. Cependant dans la pratique financière, lorsqu'on veut estimer la VaR d'un portefeuille contenant des produits compliqués tels des produits dérivés, dont les prix sont souvent des fonctions compliquées non linéaires des prix des sous-jacents, on s'interroge sur l'erreur commise lorsqu'on considère une approximation linéaire d'un tel portefeuille compliqué. Pire encore, même lorsqu'on veut travailler avec la Δ -VaR, on se trouve démuné lorsqu'on veut estimer le risque d'un portefeuille contenant des options et couvert ($\Delta = 0$)¹⁸. A la rencontre de telles limites, certains praticiens voudraient utiliser la méthode Monte-Carlo, qui consiste à simuler les variations possibles du portefeuille concerné. Mais, vu la lenteur, la lourdeur et l'imprécision de la méthode Monte Carlo, une solution souvent utilisée dans le cadre des méthodes paramétriques pour estimer la VaR est de considérer une approximation quadratique du portefeuille compliqué en fonction de ses "grecques".

Sous l'hypothèse des facteurs de risque gaussiens, des auteurs tels que Cardenas et al. [9] et Rouvinez [38] ont développé dans ce sens des approches analytiques rigoureuses en se servant de la fonction Fourier inverse, de la fonction caractéristique de la distribution gaussienne afin d'obtenir le quantile qui permet d'obtenir la VaR. Dans Duffie et Pan [11], les auteurs proposent un algorithme dans le même sens, mais qui prendrait en compte des sauts lors des variations des prix. Cependant, leur méthode marcherait difficilement avec des facteurs de risques suivant une loi de distribution elliptique non gaussienne (comme la distribution de Laplace généralisée), car il n'est pas facile de déterminer explicitement la fonction caractéristique de la loi de distribution de Laplace généralisée. Aussi, sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une t -Student, Glasserman, Heidelberger et Shahabuddin [21] propose une méthode basée sur l'exploitation de la fonction caractéristique. Mais, notons que dans l'appendice B de RiskMetricsTM [30], Zangari montre que la distribution de Laplace généralisée appelée "GED"¹⁹, est une alternative sérieuse à la distribution t -Student. D'où l'intérêt qu'on donne à cette distribution pour un meilleur contrôle des des valeurs extrêmes.

¹⁸En anglais Δ -hedged.

¹⁹Generalized exponential distribution

Dans ce chapitre, on va donner l'esquisse d'une méthode analytique pour estimer la VaR analytique d'un portefeuille d'options approximé quadratiquement en fonction de ses "grecques", lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution elliptique. Dans le cas particulier où la distribution elliptique est une distribution multivariée de Laplace généralisée $DLG(0, \Sigma, \nu)$, on montre comment à partir des données historiques d'un portefeuille du CAC 40, on pourrait déterminer les paramètres Σ et ν . On rappelle aussi l'algorithme de la méthode VaR Monte Carlo, puis les alternatives proposées dans la littérature financière pour pallier au caractère local de l'approximation quadratique due à Taylor.

1.1.1 Portefeuilles contenant des options

Les investissements financiers sont en général faits en forme de portefeuilles qui regroupent plusieurs produits financiers, des produits dérivés, comme des contrats futurs et des options. Un exemple de tels portefeuilles sont les SICAVes proposées par les banques à leurs clients. On s'intéresse plutôt aux risques inhérents à de tels portefeuilles, qu'aux risques présentés par les produits individuels. En fait, le risque d'un portefeuille n'est pas tout simplement la somme des risques des produits individuels qui la composent. Les portefeuilles contenant des options sont souvent constitués de façon à minimiser le risque couru.

Pour calculer la VaR d'un grand portefeuille avec des produits financiers modérément compliqués, on a besoin de vrais outils mathématiques et numériques, raison pour laquelle beaucoup de chercheurs en mathématiques s'intéressent actuellement à la finance mathématique.

Un portefeuille peut être regardé comme un vecteur $\theta \in \mathbb{R}^{n+1}$ ayant $n+1$ composantes, telles que la composante $\theta_i \in \mathbb{R}$ représente le nombre, non nécessairement entier, du i ème instrument dans le portefeuille. Le prix $\Pi(S(t), t)$ du portefeuille à l'instant t dépendra du prix $P_i(S(t), t)$ de chaque instrument à l'instant t , où $S(t) = (S_1(t), \dots, S_{n+1}(t))$ est le vecteur constitué des prix des actifs sous-jacents aux produits dérivés du portefeuille.

Etant donné les prix $S(t)$ des sous-jacents aux instruments que contient le portefeuille ayant pour prix à l'instant t

$$\Pi(S(t), t) = \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i P_i(S(t), t).$$

Rappelons que le prix d'une option dépend du prix de son sous-jacent. L'évaluation du prix d'un call ou d'un put Européen se fait avec la formule de Black et Scholes, qui suppose que la volatilité et le taux d'intérêt sont constants.

Il existe aujourd'hui beaucoup de littérature sur la théorie des options et la gestion du risque, où on montre comment évaluer le prix d'une option en fonction du comportement aléatoire du prix de sous-jacent ou des sous-jacents (lorsqu'il s'agit par exemple d'une option sur un panier de sous-jacents). Pendant que certains s'intéressent à la variation du prix d'un portefeuille de façon globale, d'autres étudieront les sensibilités des instruments individuels et les variations du prix des instruments par rapport aux prix des sous-jacents.

Mathématiquement, on définit le vecteur gradient appelé Δ comme suit :

$$\Delta = \nabla_S(\Pi) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial S_1}, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial S_{n+1}} \right) = (\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}).$$

Conformément au développement de Taylor à l'ordre 2, on peut considérer la deuxième sensi-

lité, Γ , comme une sensibilité qui permet de savoir comment varie les premières dérivées du prix du portefeuille par rapport aux sous-jacents. Γ est la matrice hessienne suivante :

$$\Gamma = (\Gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1} := \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j}(S(0)) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}, \quad (1.1)$$

et la sensibilité Θ s'écrit

$$\Theta := \frac{\partial \Pi}{\partial t}(0). \quad (1.2)$$

Pour éviter le problème dû à la fonction compliquée non linéaire $\Pi(S(t), t)$, on la remplace souvent par son "approximation $\Delta - \Gamma - \Theta$ ", ou approximation de Taylor d'ordre 2 en négligeant aussi les termes d'ordre t^2 , comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi(S(t), t) - \Pi(S(0), 0) &\approx \Theta t + \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_i (S_i(t) - S_i(0)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n+1} (S_i(t) - S_i(0)) \Gamma_{i, j} (S_j(t) - S_j(0)) + \Theta t \\ &= \Theta t + \langle \Delta, X(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle X(t), \Gamma X(t) \rangle, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $X(t) = (X_1(t), \dots, X_{n+1}(t))^t = (S(t) - S(0))^t$ ²⁰.

Remarque 1.1.1 Remarquons que dans l'expression (1.3), $X(t)$ est le vecteur colonne constitué des rendements absolus des actifs sous-jacents distincts du portefeuille. Aussi, sachant que $X(t) = (S_1(0)R_1(t), \dots, S_{n+1}(0)R_{n+1}(t))^t$, avec $R_i(t) = X_i(t)/S_i(0)$ est le rendement relatif du sous-jacent i pour la période $[0, t]$, on s'aperçoit bien qu'on peut déterminer la VaR $\Delta - \Gamma - \Theta$, en se donnant des hypothèses de loi de distribution sur les facteurs de risques joints tels les rendements absolus joints, les rendements relatifs joints, ou les rendements logarithmiques joints des sous-jacents.

Le cas où on utilise les rendements absolus ou des rendements relatifs dans l'expression 1.3 étant quasi trivial, en suivant [36] nous donnons dans ce qui suit un détail sur comment utiliser les rendements logarithmiques pour compléter l'approximation quadratique de (1.3), pour des petites variations des rendements.

1.1.2 Approximation quadratique avec des rendements logarithmiques

Par une autre approximation [?]), on a obtient

$$\begin{aligned} \Pi(S(t), t) &\approx \Pi(S(0), 0) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \Pi(S(0), 0)}{\partial S_i} (S_i(t) - S_i(0)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n+1} (S_i(t) - S_i(0)) \frac{\partial^2 \Pi(S(0), 0)}{\partial S_i \partial S_j} (S_j(t) - S_j(0)) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} t. \end{aligned} \quad (1.4)$$

²⁰Soit y un vecteur, la notation y^t signifie la transposée du vecteur y .

En posant $\Delta_0^i = \frac{\partial \Pi(S(0),0)}{\partial S_i}$ et $\Gamma_0^{i,j} = \frac{\partial^2 \Pi(S(0),0)}{\partial S_i \partial S_j}$, on va une fois de plus faire une approximation de Taylor de second ordre du rendement logarithmique de chaque actif sous-jacent du portefeuille dans $[0,t]$, t assez petit. Rappelons que le rendement logarithmique dans $[0, t]$ est donné par :

$$\log(S_i(t)/S_i(0)) = \eta_i(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} X_i(t) &= S_i(0) \left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)} - 1 \right) \\ &= S_i(0) (\exp(\eta_i(t)) - 1). \end{aligned}$$

Pour une période de variation assez petite, d'après une approximation de Taylor d'ordre 2 de la fonction $\exp(\eta_i(t))$ en $\eta_i(t)$ au voisinage de zéro, on obtient :

$$\exp(\eta_i(t)) - 1 \approx \eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2}.$$

En remplaçant dans 1.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi(S(t), t) - \Pi(S(0), 0) &\approx \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_0^i S_i(0) (\exp(\eta_i(t)) - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n+1} S_i(0) S_j(0) \Gamma_0^{i,j} (\exp(\eta_i(t)) - 1) (\exp(\eta_j(t)) - 1) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} t \\ &\approx \sum_{i=1}^{n+1} \Delta_0^i S_i(0) (\eta_i + \frac{1}{2} \eta_i^2) + \sum_{i,j=1}^{n+1} S_i(0) S_j(0) \Gamma_0^{i,j} \eta_i \eta_j + \frac{\partial \Pi}{\partial t} t. \end{aligned}$$

En posant $\Delta_i = S_i(0) \Delta_0^i$ et

$$\Gamma_i^j = \begin{cases} S_i(0)^2 \Gamma_0^{i,i} + \Delta_i & \text{if } i = j \\ S_i(0) S_j(0) \Gamma_0^{i,j} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

on obtient l'expression suivante :

$$\Pi(t) - \Pi(0) \approx \Delta \eta + \frac{1}{2} \eta \Gamma \eta^t + \frac{\partial \Pi}{\partial t} t, \quad (1.5)$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+1})$ suit une distribution multivariée elliptique ayant pour fonction densité $h(x)$. $\{\Delta \eta + \frac{1}{2} \eta \Gamma \eta^t \leq -VaR_\alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial t} t\}$ constitue ainsi l'ensemble des états du monde tels que la VaR_α constitue la perte minimale avec probabilité α du portefeuille.

1.1.3 Insuffisance de l'approximation quadratique de Taylor.

Même si l'approximation quadratique de Taylor permet dans certaines situations de pallier à la lourdeur et la lenteur de mise en oeuvre de la méthode Monte Carlo lorsqu'il s'agit d'estimer la VaR d'un portefeuille fortement non linéaire, elle a un caractère local, dans le sens qu'elle s'obtient avec l'hypothèse des rendements petits. Hypothèse qui dans la réalité n'est pas toujours vraie. Une solution proposée par Studer [46](1999) pour pallier à cette difficulté, consiste à

chercher les paramètres globaux (d, G) qui définissent une forme quadratique de la forme $Q(\omega) = \frac{1}{2}\omega^T G \omega + d^T \omega + c$, qui s'accorde avec les prix théoriques actuels pour un ensemble assez large de scénarios fixés. Mieux encore, Mina [28] complète l'approche de Studer(1999) en proposant un algorithme qui permet de trouver le couple (d, G) de façon à minimiser l'erreur d'approximation en utilisant les moindres carrés. En effet, étant donné une fonction Π dépendant de m facteurs de risque, on aimerait trouver une approximation quadratique en utilisant n scénarios d'après la méthode proposée par Studer. Si on note $\omega^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, n$, le vecteur des facteurs de risque joints donné par le scénario i et $\Pi(\omega^{(i)}) = \Pi^{(i)}$ la "vraie" valeur (où valeur sans approximation), puis $Q^{(i)} = Q(\omega^{(i)})$ la valeur obtenue via l'approximation quadratique donné par (d, G) , Mina [28] propose une solution pour minimiser

$$\sum_i^n [Q^{(i)} - \Pi^{(i)}]; \quad (1.6)$$

sous la contrainte que G est symétrique. Mina [28] va plus loin en étudiant la complexité de son algorithme et en faisant des tests concrets pour illustrer sa démarche.

Remarque 1.1.2 Puisque les méthodes analytiques qui seront présentées dans cette partie seront valables pour des approximations quadratiques, la méthode de Studer [46] est la bienvenue pour renforcer le cadre pratique de notre théorie, lorsqu'on traite des situations avec des grandes variations des rendements.

Notons qu'il existe dans la littérature d'autres méthodes d'approximations non nécessairement quadratiques des portefeuilles. Par exemple dans Wiener [51], l'auteur présente une méthode qui va au delà de l'approximation quadratique, en considérant la fonction $P\&L$ notée $\Pi(t, S)$ comme une fonction du vecteur des facteurs de risque S , où S est un processus stochastique, ainsi il propose une approximation via l'utilisation de la formule d'Itô en gardant les termes jusqu'en dt^2 au lieu de l'approximation de Taylor. En effet, dans le cas unidimensionnel on a l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} d\Pi &\simeq \frac{\partial \Pi}{\partial S} S dZ \quad (\text{terme en } O(dt^{1/2})) \\ &+ \frac{\partial \Pi}{\partial S} S \mu dt + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial S^3} S^3 dZ^3 \quad (\text{termes en } O(dt)) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} S^2 2 \mu dZ dt + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial S^3} S^3 dZ^3 \quad (\text{termes en } O(dt^{3/2})) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} S^2 \mu^2 dt^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial S^3} S^3 dZ^2 3\mu dt + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Pi}{\partial S^4} S^4 dZ^4. \quad (\text{termes en } O(dt^2)) \end{aligned}$$

En utilisant la relation stochastique $dS = S(\mu dt + dZ)$ qu'on remplace dans la formule précédente, on obtient :

$$d\Pi \simeq \frac{\partial \Pi}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} dS^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial S^3} S^3 (3\mu dt dZ^2 + dZ^3) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Pi}{\partial S^4} S^4 dZ^4. \quad (1.7)$$

1.2 VaR analytique d'un portefeuille log-elliptique

La VaR_α d'un portefeuille quadratique est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbb{P}rob\{\Theta + \Delta \cdot \eta^t + \frac{1}{2} \eta \Gamma \eta^t \leq VaR_\alpha\} = \alpha. \quad (1.8)$$

Dans ce chapitre, on suppose que les rendements joints $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1})$ suit une distribution elliptique admettant une fonction densité de la forme

$$h(x) = g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t) / \sqrt{\det(\mathbb{V})}, \quad (1.9)$$

où μ est le vecteur espérance et Σ est la matrice de variance covariance.

En écrivant (1.8) en fonction de (1.9), on obtient l'équation suivante :

$$\int_{\{\Theta + \Delta \cdot x + \frac{1}{2} x \Gamma x^t \leq VaR_\alpha\}} g((x - \mu)\mathbb{V}^{-1}(x - \mu)^t) \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{V})}} = \alpha \quad (1.10)$$

En utilisant une décomposition de Cholesky, on a que $\mathbb{V} = \mathbb{H}\mathbb{H}^t$. Si de plus on change de variable en posant $(x - \mu)\mathbb{H}^{-1} = y$, nous obtenons l'équation suivante

$$\int_{\{\Theta_1 + y \cdot \Delta_1 + \frac{1}{2} y \Gamma_1 y^t \leq -VaR_\alpha\}} g(|y|^2) dy = \alpha, \quad (1.11)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \Theta + \mu \cdot \Delta + \frac{1}{2} \mu \Gamma \mu^t, \\ \Delta_1 &= (\Delta + \mu \Gamma) \mathbb{H}^t, \\ \Gamma_1 &= \mathbb{H} \Gamma \mathbb{H}^t. \end{aligned}$$

On peut diagonaliser Γ_1 comme suit :

$$\Gamma_1 = \mathbb{P} \mathbb{D}_1 \mathbb{P}^t.$$

Par suite, par changement de variable si on pose $y \mathbb{P} = z$, on obtient l'équation suivante :

$$\int_{\{\Theta_1 + z \cdot \mathbb{P}^{-1} \Delta_1 + \frac{1}{2} z \mathbb{D}_1 z^t \leq -VaR_\alpha\}} g(|z|^2) dz = \alpha. \quad (1.12)$$

Sachant qu'on peut écrire

$$\Theta_1 + z \cdot \mathbb{P}^{-1} \Delta_1 + \frac{1}{2} \cdot z \mathbb{D}_1 z^t = T + \frac{1}{2} (z + v) \mathbb{D} (z + v)^t,$$

avec

$$v = \Delta_1 \mathbb{P} \mathbb{D}^{-1},$$

et

$$T = \Theta_1 - \frac{1}{2} v \mathbb{D} v^t,$$

on obtient l'intégrale

$$\int_{\{\frac{1}{2} \cdot z \mathbb{D}_1 z^t \leq -K\}} g(|z - v|^2) dz = \alpha \quad (1.13)$$

avec

$$VaR_\alpha = K - T$$

où la matrice \mathbb{D}_1 peut s'écrire dans une base bien choisie de vecteurs propres comme suit :

$$\mathbb{D}_1 = \begin{pmatrix} D_{n_+}^+ & 0 \\ 0 & -D_{n_-}^- \end{pmatrix}$$

sachant que

$$\mathbf{D}_{\mathbf{n}_\epsilon}^\epsilon = \begin{pmatrix} d_1^\epsilon & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & d_{n_\epsilon}^\epsilon \end{pmatrix}$$

pour $\epsilon = \pm 1$ avec tous les $d_j^+, d_j^- \geq 0$, et $-d_1^- \leq -d_2^- \leq \dots \leq -d_{n_-}^- \leq d_1^+ \leq \dots \leq d_{n_+}^+$.

En fait, on écrit $\mathbb{R}^{n+1} = E_+ \oplus E_-$, ainsi tout élément $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, va s'écrire $x = (x_+, x_-)$, avec E_-, E_+ respectivement les sous-espaces propres associés aux valeurs propres positives et aux valeurs propres négatives. Et dans cette base de décomposition de \mathbb{R}^{n+1} , Si on suppose de plus que $K = VaR_\alpha + T > 0$, alors en posant $R^2 = K$ l'intégrale (1.13) s'écrit :

$$I(R) = \int_{\{|x_-|^2 - |x_+|^2 \geq R^2\}} g((x - v_1) \cdot |\mathbb{D}_1|^{-1} \cdot (x - v_1)^t) dx. \quad (1.14)$$

En introduisant η une fonction de x suivante :

$$\eta(x) = \sqrt{|x_-|^2 - |x_+|^2}$$

définie sur $D\eta = \{x = (x_+, x_-) : |x_-|^2 - |x_+|^2 > 0\}$, si on utilise la forme différentielle de Liouville²¹ de degré n noté L_η relative à η qui vérifie

$$d\eta \wedge L_\eta = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}, \quad (1.15)$$

l'intégrale (1.14) pourra s'écrire de la façon suivante :

$$I(R) = \int_R^\infty dr \int_{\{\eta(x)=r\}} g((x - v_1) \cdot |\mathbb{D}_1|^{-1} \cdot (x - v_1)^t) L_\eta(x). \quad (1.16)$$

Remarque 1.2.1 Même si la forme de Liouville L_η n'est pas unique sa restriction aux surfaces du type $\{x \in D\eta : \eta(x) = r\}$ avec $r > 0$ l'est.

Par un changement de variable, en posant $x = r \cdot \xi$, où $r = \eta(x)$ et $\eta(\xi) = 1$, l'intégrale (1.16) devient :

$$I(R) = \int_R^\infty dr \int_{\{\eta(\xi)=1\}} g((r \cdot \xi - v_1) \cdot |\mathbb{D}_1|^{-1} \cdot (r \cdot \xi - v_1)^t) L_\eta(r \cdot \xi), \quad (1.17)$$

puisque L_η est une forme différentielle de degré n , on a que $L_\eta(r \cdot \xi) = r^n L_\eta(\xi)$, ainsi en remplaçant dans 1.17, on obtient

$$I(R) = \int_R^\infty r^n \int_{\{\eta(\xi)=1\}} g((r \cdot \xi - v_1) \cdot |\mathbb{D}_1|^{-1} \cdot (r \cdot \xi - v_1)^t) L_\eta(\xi) dr. \quad (1.18)$$

²¹Notons que L_η vérifiant 1.15 existe, mais n'est pas nécessairement unique.

Remarque 1.2.2 Sur l'ensemble $\{x \in D\eta : \eta(x) = r\}$ avec $r > 0$, la forme différentielle suivante

$$L_\eta(x) = \frac{1}{|\nabla \cdot \eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1}, \quad (1.19)$$

vérifie (1.15). Ici $|\nabla \cdot \eta|$ est la norme euclidienne du gradient de η et le symbole $[j]$ signifie que dx_j est supprimé.

Preuve. Il suffit de vérifier que (1.19) vérifie la relation (1.15). Ce qui est quasiment triviale, en effet sachant que

$$d\eta = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx_i,$$

si on passe au produit vectoriel avec l'expression de L_η donné en (1.19), on obtient :

$$\begin{aligned} d\eta \wedge L_\eta &= \frac{1}{|\nabla \cdot \eta|^2} \sum_{i,j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx_i \wedge [dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1}] \\ &= \left(\frac{1}{|\nabla \cdot \eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{2(j-1)} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \\ &= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j \wedge \dots \wedge dx_{n+1}, \end{aligned}$$

car $\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{2(j-1)} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right)^2 = |\nabla \cdot \eta|^2$.

QED

En introduisant la fonction $J(r)$ telle que

$$J(r) = \int_{\{\eta(x)=1\}=\Sigma} g((r \cdot \xi - v) \cdot |\mathbb{D}_1|^{-1} \cdot (r \cdot \xi - v)^t) L_\eta(\xi), \quad (1.20)$$

on aimerait déjà donner une estimation de $J(r)$, même s'il est clair qu'un tel processus va dépendre de la fonction g et de sa régularité. Rappelons que g sera donnée par le choix spécifique d'une distribution notée $N(\mu, \mathbb{V}, g)$ dans la famille des distributions elliptiques.

A ce niveau notre problème est réduite à la résolution de l'équation en R suivante :

$$I(R) = \int_R^\infty r^n J(r) dr = \alpha. \quad (1.21)$$

Une des premières difficultés sera de trouver explicitement $J(r)$, sinon de trouver son approximation avec éventuellement l'estimation d'une bonne précision de son erreur. Le calcul où l'estimation de $J(r)$ dépendra de la régularité de la fonction g . Dans le cas où g est une fonction qui décroît rapidement, en supposant que

$$-d_1^- < -d_2^- \leq \dots \leq d_{n-}^- < 0 \leq d_1^+ < \dots \leq d_{n+}^+, \quad (1.22)$$

et si de plus on suppose que $-d_1^-$ la plus petite valeur propre de \mathbb{D}_1 est de multiplicité 1 alors en considérant la théorie classique, la principale contribution de l'intégrale (1.20) quand $r \rightarrow \infty$, viendra des points de la surface $\{x : \eta(x) = 1\} = \Sigma$ où la fonction $\phi(\xi) = (r\xi - v_1) |\mathbb{D}_1|^{-1} (r\xi - v_1)^t$ admet son minimum absolu.

1.3 Cas de la distribution de Laplace généralisée

Il est clair que la distribution de Laplace généralisée est un cas particulier de la famille des distributions elliptiques. Dans cette section, nous considérons le g qui caractérise la fonction de Laplace généralisée. D'après Kotz et Balakrishnan [35], le g qui correspond à la loi de distribution de Laplace généralisée est donnée par :

$$g(x) = C \exp(-c x^{\frac{\nu}{2}}), \quad (1.23)$$

où $C = C(\nu, n+1)$, $c = c(\nu, n+1)$ sont des constantes de normalisation de la fonction densité h comme définit en (1.9). Ainsi, si on remplace g comme définit en (1.23) dans (1.20), puis en introduisant J_1 , $J(r)$ devient :

$$J_1(r) = C(\nu, n+1) \int_{\{\eta(\xi)=1\}} \exp\left(-c \left((r\xi - v) |\mathbb{D}_1|^{-1} (r\xi - v)^t\right)^{\frac{\nu}{2}}\right) L_\eta(\xi). \quad (1.24)$$

Dans la base constituée de vecteurs propres négatifs et positifs on écrira $v = (v_-^1, \dots, v_-^{n_-}, v_+^1, \dots, v_+^{n_+})$. Rappelons que $n_- + n_+ = n+1$. Soit aussi $(e_{1,-}, \dots, e_{n_-,-}, e_{1,+}, \dots, e_{n_+,+})$ la base dans laquelle on a exprimé la matrice \mathbb{D} , si on fixe un entier k tel que $d_{k+1,-} - d_{k,-} = \max_{j=1, \dots, n_-} (d_{j+1,-} - d_{j,-})$. Soit ζ fixé tel que $\zeta \in \Sigma_k = W_k \cap \Sigma$ où $W_k = [e_{1,-}, \dots, e_{k,-}] = \mathbb{R}^k$ et v_ζ la projeté orthogonal de v sur V_ζ sous espace engendré par $\{\zeta\} \cup (\Sigma_k \setminus W_k)^\perp$, et admettant comme base orthonormée $(\zeta/|\zeta|, e_{k+1,-}, \dots, e_{n_-,-}, e_{1,+}, \dots, e_{n_+,+})$. Si on définit la fonction

$$\phi_r(\xi) = \left(|\mathbb{D}_1|^{-\frac{1}{2}} (r\xi - v_\zeta)|^2 + |\mathbb{D}_1|^{-\frac{1}{2}} (v - v_\zeta)|^2 \right)^{\frac{\nu}{2}} - |\mathbb{D}_1|^{-\frac{1}{2}} (v_\zeta - v)^\nu. \quad (1.25)$$

définie dans un voisinage V_ζ de v_ζ , 1.20 pourra être subdivisé en deux intégrales comme suit :

$$J_1(r) = J_{11}(r) + J_{12}(r)$$

$$J_{11}(r) = C \exp(|\mathbb{D}_1|^{-\frac{1}{2}} (v_\zeta - v)^\nu) \int_{V_\zeta} \exp(-c \phi_r(\xi)) L_\eta(\xi) \quad (1.26)$$

et

$$J_{12}(r) = C \exp(|\mathbb{D}_1|^{-\frac{1}{2}} (v_\zeta - v)^\nu) \int_{\Sigma \setminus V_\zeta} \exp(-c \phi_r(\xi)) L_\eta(\xi). \quad (1.27)$$

Ensuite (1.21), compte résoudre l'équation

$$\int_R^\infty r^n J_{11}(r) dr + \int_R^\infty r^n J_{12}(r) dr = \alpha.$$

D'où la nécessité de trouver des estimations de J_{11} et J_{12} . Puisqu'on ne peut déterminer explicitement les intégrales qui sont dans (1.3), on compte donner leurs approximations avec une bonne estimation de l'erreur. Ce travail sera fait dans le chapitre suivant, dans le cas pratique et simplifié où on traite un portefeuille Δ -neutre. On aura quand même donné une esquisse sur la forme des calculs et des estimations nécessaires pour évaluer la VaR, d'un portefeuille quadratique, non nécessairement Δ -neutre ($\Delta = 0$), sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque joints suit une distribution elliptique.

1.4 Un rappel sur la VaR Monte-Carlo

La VaR Monte-Carlo est basée sur la simulation des facteurs du marché dont on se donne une loi de distribution a priori, de préférence compatible avec l'historique. Il faut noter que cette méthode nécessite un ordinateur très performant, car elle est coûteuse en temps de calcul (elle convient difficilement au calcul journalier d'une VaR pour un nombre trop grand d'actifs). Sans compter qu'en plus elle demande un effort important de modélisation car celle devra déterminer entièrement les trajectoires des facteurs de risque du marché que l'on utilise pour le calcul de la VaR.

Dans cette partie, notre but est d'esquisser en rappel, la méthodologie Monte Carlo pour estimer le VaR d'un portefeuille financier. En effet, une des raisons essentielles des méthodes analytiques qui sont développées dans cette thèse, est de pouvoir substituer la méthode de Monte Carlo, qui, bien que efficace nécessite beaucoup de temps de calcul. Dans le prochain chapitre on compte comparer notre VaR analytique avec la VaR Monte Carlo.

1.4.1 Comment simuler une variation de prix $P\&L$.

Dans cette section, on se propose d'esquisser l'algorithme qui nous permettra dans le prochain chapitre d'estimer la VaR Monte Carlo, afin de comparer à nos résultats analytiques dans le prochain chapitre.

Etant donné un portefeuille financier caractérisé par n facteurs de risque, tel que la valeur du sous-jacent i du portefeuille vérifie l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i, \quad (1.28)$$

où $Var(dW_t^i) = dt$, $Cov[dW_t^{(i)}, dW_t^{(j)}] = \rho_{i,j}$ est la corrélation entre le facteur risque i et le facteur de risque j . W_t^i est le mouvement brownien standard caractérisant le facteur de risque i . A partir de la formule (1.28), il s'ensuit que le rendement de l'actif i entre le t et le temps $t + T$ s'écrit :

$$r_{t,T}^{(i)} = \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) (T - t) + \sigma_i \varepsilon_i \sqrt{T - t}, \quad (1.29)$$

où $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$, et $Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \rho_{i,j}$.

Puisque par analogie à l'analyse en composantes principales, on peut écrire un ensemble de variables aléatoires corrélés comme étant une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes, la formule (1.28) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^n c_{ji} \cdot d\tilde{W}_t^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.30)$$

où les coefficients c_{ji} ne sont pas nécessairement uniques. Les \tilde{W}_t^i sont des processus browniens indépendants. Pour garder la notation vectorielle, on pourra écrire l'équation qui suit :

$$\frac{d\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_t} = \mu dt + C^\perp d\tilde{\mathbf{W}}_t, \quad (1.31)$$

où $\left(\frac{d\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_t} \right)_i = \frac{dP_t^{(i)}}{P_t^{(i)}} (i = 1, \dots, n)$, est un un vecteur colonne, $d\tilde{\mathbf{W}}$ est un vecteur constitué des increments browniens indépendants, et $C = [c_{ij}]$ est une matrice telle que la matrice de

covariance des rendements $\Sigma = C^\top C$. La formule (1.31) implique que

$$\mathbf{r}_{t,T} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + C^\top \mathbf{z} \sqrt{T - t}, \quad (1.32)$$

où $\mathbf{r}_{t,T}$ est le vecteur des rendements obtenus entre le temps t et le temps T , σ^2 est le vecteur correspondant à la diagonale de la matrice de covariance Σ et $\mathbf{z} \sim MVN(0, \mathbf{I})$ ²².

Si on suppose de plus que $\mu_i = \frac{\sigma_i^2}{2}$, $i = 1, \dots, n$, alors

$$r_{t,T} = C^\top \mathbf{z} \sqrt{T - t}. \quad (1.33)$$

En particulier le rendement pour un jour ($T-t=1$) suit une distribution multivariée normale notée $MVN(0, \Sigma)$. D'après (1.32) où (1.33) on s'aperçoit bien qu'on peut générer des scénarios via la distribution multivariée normale avec des marginales indépendantes, qu'on sait simuler avec plusieurs logiciels comme par exemple Matlab. Mais, il est nécessaire de déterminer C . Puisque $\Sigma = C^\top C$, Σ étant donné via les données historiques (par exemple en utilisant la méthode EWMA de RiskMetrics), il suffira de faire une décomposition de Cholesky de Σ si elle est définie positive, sinon il faut utiliser la décomposition en valeur singulière. La matrice Σ n'est souvent pas définie positive, lorsque le nombre de jours des données historiques utilisées pour calculer Σ est plus petit que le nombre de facteurs de risque.

Maintenant qu'on sait déjà générer les rendements, il est nécessaire de pouvoir simuler une fonction $P\&L$ ²³ des instruments financiers qu'on détient. Par exemple si nous détenons une option sur une action, la fonction perte & profit pour un rendement r d'un jour s'écrit :

$$P_1 - P_0 = P_0 (e^r - 1) \quad (1.34)$$

Remarque 1.4.1 Il faut noter que le choix de C n'est pas unique.

1.4.2 VaR Monte Carlo pour un Portefeuille d'options

En général, si on détient un portefeuille contenant M instruments financiers, tel que leurs prix actuelles sont une fonctions de n facteurs de risque $V_j(\mathbf{P})$, avec $j = 1, \dots, M$ et $\mathbf{P} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)})$, on peut générer par simulation des scénarios de la fonction $P\&L$ du portefeuille pour une période d'un jour via l'algorithme suivant :

- Générer un ensemble de \mathbf{z} , qui est un vecteur aléatoire normal centré réduit avec des marginales indépendantes.
- Transformer les n marginales indépendantes de \mathbf{z} en un ensemble de rendements $\mathbf{r} = (r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n)})$ correspondant à chaque facteur de risque en utilisant C . En d'autres termes, $\mathbf{r} = C^\top \mathbf{z}$.
- Obtenir par scénario le prix \mathbf{P}_1 de chaque facteur de risque pour demain (1 jour après aujourd'hui), sachant que le prix actuel est $\mathbf{P}_0 = (P_0^{(j)})_{j=1, \dots, n}$, en utilisant la formule $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 e^{\mathbf{r}}$.

²²MVN signifie en anglais multivariate normal.

²³fonction perte ou profit.

- Déterminer la fonction perte et profit ($P\&L$) du portefeuille comme étant

$$\sum_{j=1}^n (V_j(P_1) - V_j(P_0)).$$

- En générant $NSIM$ scénarios de la fonction $P\&L$, on ordonne de façon décroissante les $NSIM$ valeurs des $P\&L$ obtenues, qu'on note $\Delta V_{(1)}, \Delta V_{(2)}, \dots, \Delta V_{(NSIM)}$, et on définit la VaR Monte Carlo pour un taux de confiance $1 - \alpha$ comme étant

$$VaR_\alpha = -\Delta V_{(k)}, \quad (1.35)$$

où $k = NSIM * (1 - \alpha)$.

Remarque 1.4.2 La procédure VaR Monte Carlo précédente peut facilement être étendue pour T jours, en posant $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 e^{r\sqrt{T}}$. Dans ce cas, \mathbf{P}_1 sera le prix obtenu après T jours.

1.5 Comment déterminer les paramètres d'un modèle log-elliptique

Dans cette section, pour un portefeuille donné, on utilise des données historiques pour montrer comment dans la famille des distributions de Laplace généralisées, il faut choisir en fonction des statistiques des rendements historiques celle qui convient.

1.5.1 Comment déterminer DLG_ν marginale adapté pour chaque actif.

Etant donné un portefeuille financier contenant des actifs sous jacents. Si on suppose que l'actif sous-jacent i suit une distribution de Laplace généralisée notée GLD_{ν_i} où GED_{ν_i} , alors on aimerait à partir du kurtosis empirique, déterminer le paramètre ν adapté aux données historiques ν_i . Avec des calculs simples, la valeur de ν_i , pour l'actif i sera issue de la remarque suivante :

Remarque 1.5.1 Dans le cas où la loi de distribution marginale est une GED_ν , par des calculs simples, on montre que le kurtosis théorique de la distribution marginale GLD_ν est donné par

$$k(\nu) = k_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{\nu}\right) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right)^2. \quad (1.36)$$

Ainsi dans la table précédente, on a obtenu la valeur de ν qui caractérise la distribution de chaque actif sous-jacent, comme étant la solution de l'équation $k(\nu) = \kappa_i$, où κ_i représente le Kurtosis calculé à partir de la distribution historique sur 3 mois de l'action i .

1.5.1.1 Application à un portefeuille d'actions du CAC 40, avec des marginales GLD.

Nous considérons un portefeuille contenant 11 actions distinctes du *CAC 40*, puis en appliquant (1.36), on donne la valeur ν adaptée pour caractériser la distribution de chaque action du portefeuille. Le prix du portefeuille à l'instant t , est donné par :

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{11} \theta_i S_i(t).$$

où les θ_i sont positifs.

1.5. Comment déterminer les paramètres d'un modèle log-elliptique

TAB. 1.1 – Données de 11 actions distinctes du CAC 40.

k	Actions	$S_k(0)$	volatilité	θ_k
1	Action-BNPPARIBAS	39.75	42.13	5
2	Action-BOUYGUES	27.30	41.87	4
3	Action-CAP GEMINI	24.00	66.36	3
4	Action-CREDIT AGRICOLE	14.80	37.41	2
5	Action-DEXIA	9.38	45.42	2
6	Action-LOREALL	62.90	37.07	6
7	Action-SOCIETEGENERALE	64.00	42.54	1
8	Action-TF1	22.02	44.10	7
9	Action-THOMSON	17.13	57.96	2
10	Action-VIVENDI	17.00	57.03	3
11	Action-AGF	19.00	61.92	1

TAB. 1.2 – Statistiques historiques (sur 3 mois) des actions du portefeuille

k	Action	moyenne	écart-type	skewness	kurtosis	ν_k
1	BNPPARIBAS	0.0015	0.0280	- 0.1794	3.7810	0.8943
2	BOUYGUES	- 0.0010	0.0190	0.4010	3.2862	1.0381
3	CAP GEMINI	0.0013	0.0389	- 0.4820	2.9927	1.9844
4	CREDIT AGRICOLE	0.0033	0.0211	- 0.0296	2.9996	1.9992
5	DEXIA	0.0023	0.0313	- 0.6782	3.1415	1.1107
6	LOREALL	0.0024	0.0024	0.1282	2.1825	0.0236
7	SOCIETEGENERALE	- 0.0034	0.0337	- 0.6511	4.1129	0.8360
8	TF1	0.0034	0.0244	- 0.3580	3.2211	1.0677
9	THOMSON	- 0.0031	0.0390	0.0725	3.0470	1.1770
10	VIVENDI	- 0.0053	0.0496	- 0.6468	5.4571	0.7047
11	AGF	0.0023	0.0317	- 0.1049	3.6790	0.9165

1.6 Comment choisir les paramètres de la D.L.G pour un portefeuille donné

Etant donné un portefeuille financier, si on veut estimer la VaR lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution multivariée de Laplace généralisée $DMLG(\mu, \Sigma, \nu)$, il est nécessaire de choisir les paramètres (μ, Σ, ν) . Dans le cadre de notre étude dans le chapitre suivant on choisira $\mu = 0$. On déterminera la matrice de variance covariance Σ par la méthode EWMA de RiskMetrics qu'on décrira dans la section suivante :

1.6.1 La matrice de variance-covariance EWMA de RiskMetrics

Lorsqu'on travaille sous l'hypothèse d'une distribution elliptique $N(\mu, \Sigma, \phi)$ des facteurs de risque joints, une de nos limites est le choix d'une méthode viable et acceptable qui pourrait permettre d'estimer la matrice de covariance Σ ²⁴. Dans cette partie, nous comptons tout simplement utiliser la proposition de RiskMetrics qui permet pour une valeur $\lambda \in]0, 1]$, choisie en fonction de la longueur²⁵ des données historiques des actifs, de calculer une matrice de variance covariance. C'est la raison pour laquelle en s'inspirant de Zangari [55], puis de Mina and Xiao [29], nous donnerons dans les lignes qui suivent des indications sur cette méthode appelée approche moyenne mobile exponentielle (EWMA²⁶).

1.6.1.1 Volatilité EWMA d'un actif

Si on a les facteurs de risque observés pour $m + 1$ jours ($t = t_0, \dots, t_0 - m$) d'un actif (i.e action), avec l'hypothèse que l'expression théorique du facteur de risque est donnée par

$$r_{t_0, T} = \sigma_{t_0} \xi,$$

une question est de savoir comment estimer σ_{t_0} . La solution EWMA consiste à prendre

$$\sigma_{t_0} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^m} \sum_{i=1}^m \lambda^i r_{t_0-i}^2 = R^\top R, \quad (1.37)$$

où $0 < \lambda \leq 1$ est le paramètre de mobilité de la volatilité, r_{t_0} est le rendement entre t et $t + 1$ de l'actif, et

$$R = \sqrt{\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^m}} \begin{pmatrix} r_{t_0} \\ \sqrt{\lambda} r_{t_0-1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda^m} r_{t_0-m} \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

On peut aussi remarquer que plus la date d'observation est récente (m petit), plus le poids $\sqrt{\lambda^m}$ associé est important. Cette méthode donne ainsi plus d'importance aux informations les plus récentes de l'historique, pour construire la matrice de variance covariance. La valeur λ est souvent déterminée de façon à ce que 99.9% d'informations soient dans les observations

²⁴D'ailleurs aujourd'hui certains préfèrent des copules aux corrélations linéaires. Voir Embrechts et al.[13](1999) pour plus de détails.

²⁵par exemple le nombre de jours des données historiques utilisées.

²⁶En anglais ça signifie exponential weighted mean average.

1.6. Comment choisir les paramètres de la D.L.G pour un portefeuille donné

historiques d'au moins $\log(0.001)/\log(\lambda)$ jours. Par exemple, pour $\lambda = 0.94$, on aura 99.9% d'informations correspondant au 112 derniers jours de l'historique. Pour $\lambda = 0.97$ on aura 99.9% d'informations correspondant au 227 derniers jours de l'historique.

Si on s'intéresse au risque jour par jour, cette méthode est bien adaptée puisqu'il suffit d'ajouter le jour précédent parmi les dates historiques observées et par suite de supprimer la date la plus ancienne de l'historique. Sous cette hypothèse, par récurrence la formule (1.37) pourra s'écrire

$$\sigma_{t_0+1}^2 = \lambda\sigma_{t_0}^2 + (1-\lambda)r_{t_0+1}^2. \quad (1.39)$$

Il faut noter que cette méthode EWMA marche très bien lorsque la distribution des facteurs de risque est une distribution de Laplace généralisée. Pour plus de détails sur ce point voir l'appendice B de *RiskMetrics Classic* [30].

1.6.1.2 Matrice de covariance EWMA d'un portefeuille d'actifs

Supposons qu'on détient un portefeuille d'actifs caractérisé par n facteurs de risque. Si on note

$$X_{t_0}^{(i)} = \sigma_{t_0}^{(i)} \varepsilon_i,$$

le facteur de risque (comme par exemple le rendement) de l'actif i avec ε_i sa loi de distribution. Pour $m+1$ observations historiques de dates ($t = t_0, \dots, t_0 - m$), si on pose

$$R = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^m}} \begin{pmatrix} X_{t_0}^{(1)} & X_{t_0}^{(2)} & \dots & X_{t_0}^{(n)} \\ \sqrt{\lambda} X_{t_0-1}^{(1)} & \dots & \dots & \sqrt{\lambda} X_{t_0-1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\lambda^m} X_{t_0-m}^{(1)} & \sqrt{\lambda^m} X_{t_0-m}^{(2)} & \dots & \sqrt{\lambda^m} X_{t_0-m}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

la matrice $m \times n$, alors la matrice de variance covariance EWMA est le produit de la transposée de R et R , et il s'écrit :

$$\Sigma = R^\top R. \quad (1.41)$$

1.6.2 Détermination du paramètre ν par le maximum de vraisemblance

Etant donné $\Sigma = \mathbb{V}$ définie précédemment par la méthode EWMA, on se propose de déterminer le paramètre ν de la $MDLG(0, \Sigma, \nu)$. On va calculer $\nu = \nu_0$ en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Si on a les facteurs de risque observés pour $m+1$ jours précédents ($t = t_0, \dots, t_0 - m$) à partir du jour de date t_0 , on pose $n = m+1$ et

$$\mathbb{X}_1 = (X_{11}, \dots, X_{1q}), \mathbb{X}_2 = (X_{21}, \dots, X_{2q}), \dots, \mathbb{X}_n = (X_{n,1}, \dots, X_{nq}),$$

où X_{ij} est le rendement X_j au jour i et q désigne le nombre de facteurs de risque. Notre démarche consistera à estimer la valeur $\nu > 0$ tel que la fonction

$$L_{\mathbb{V}}(\nu) = \prod_{i=1}^n G_{\nu, \mathbb{V}}(\mathbb{X}_i), \quad (1.42)$$

avec la fonction

$$G_{\nu, \mathbb{V}}(\mathbb{X}_i) = \frac{C_{\nu, n}}{\sqrt{\det(\mathbb{V})}} \exp\left(-c_{\nu, n}(\mathbb{X}_i \mathbb{V} \mathbb{X}_i^t)^{\nu/2}\right), \quad (1.43)$$

où

$$c_{\nu, n} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{\nu}\right)}{n \Gamma\left(\frac{n}{\nu}\right)}\right)^{\nu/2}, \quad (1.44)$$

et

$$C_{\nu, n} = \frac{\nu}{2\pi^{n/2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{\nu}\right)}{n \Gamma\left(\frac{n}{\nu}\right)}\right)^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{\nu}\right)}, \quad (1.45)$$

sont des constantes de normalisations de (1.43) lorsque $\mathbb{V} = Id$, atteint son maximum. Dans la pratique on pourra se restreindre aux valeurs de $\nu \in]0, 2]$. Par équivalence, il suffit de maximiser en fonction de $\nu > 0$ la fonction

$$\begin{aligned} \log(L_{\mathbb{V}}(\nu)) &= \log\left(\prod_{i=1}^n G_{\nu, \mathbb{V}}(\mathbb{X}_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \log(G_{\nu, \mathbb{V}}(\mathbb{X}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\log(C_{\nu, n}) - \frac{1}{2} \log(\det(\mathbb{V})) - c_{\nu, n}(\mathbb{X}_i \mathbb{V} \mathbb{X}_i^t)^{\nu/2}\right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Puisque $\frac{1}{2} \log(\det(\mathbb{V}))$ ne depend pas de ν , il suffit de chercher la valeur ν qui maximise la fonction

$$\Phi(\nu) = \sum_{i=1}^n \left(\log(C_{\nu, n}) - c_{\nu, n}(\mathbb{X}_i \mathbb{V} \mathbb{X}_i^t)^{\nu/2}\right). \quad (1.47)$$

Même s'il est vrai qu'on aurait pû chercher les valeurs ν tel que $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$, nous nous proposons tout simplement d'estimer la valeur de ν en utilisant le logiciel Matlab, les données historiques sur 3 mois (décembre 2002, janvier 2003, février 2003), de 11 actions du CAC 40. Dans notre cas d'application $n = 63$ et $q = 11$.

Avec ces données historiques, si on utilise la fonction *fminbnd* de Matlab Toolbox, on trouve que la fonction $\Phi(\nu)$ atteint son maximum en $\nu = \nu_0 = 1.3820$. Pour \mathbb{V} donné, le maximum de vraisemblance est maximal en ν_0 . D'où si on veut estimer la VaR d'un tel portefeuille avec une $GLD(0, \mathbb{V}, \nu)$, sachant que \mathbb{V} est donné en fonction de $\lambda = \exp(\ln(0.001)/n) = 0.8929$ par la méthode EWMA, on devra choisir $\nu = 1.3820$.

Remarque 1.6.1 Il aurait été possible de choisir le paramètre g de la distribution elliptique $N(\mu, \Sigma, g)$, de tel sorte que la kurtosis de la distribution empirique soit égale au kurtosis de la distribution multivariée elliptique.

1.6.3 Exploitation du Kurtosis d'une D.L.G pour déterminer ν

Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire ayant pour loi de probabilité une distribution multivariée de Laplace généralisée notée $DLG_n(\mu, \Sigma, \nu)$. En introduisant $\tilde{X} = \Sigma^{-1/2}(\mathbb{X} - \mu)$, il

est clair que $\tilde{X} \sim DLG_n(0, \mathbb{I}, \nu)$ où \mathbb{I} représente la matrice identité. D'après Mardia [25], [26], le kurtosis de \tilde{X} est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_n(\nu) &= \mathbb{E}[\{(\tilde{X} - \mu)\Sigma^{-1}(\tilde{X} - \mu)^t\}^2] \\ &= \mathbb{E}[|\tilde{X}|_2^4] \\ &= C_{\nu,n} |S_{n-1}| \int_0^\infty r^{n+3} \exp(-c_{\nu,n} r^\nu) dr \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$= \frac{C_{\nu,n}}{c_{\nu,n}^{\frac{n+4}{\nu}}} |S_{n-1}| \Gamma\left(\frac{n+4}{\nu}\right) \quad (1.49)$$

$$= \frac{C_{\nu,n}}{c_{\nu,n}^{\frac{n+4}{\nu}}} \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \Gamma\left(\frac{n+4}{\nu}\right) \quad (1.50)$$

1.6.3.1 Calcul du kurtosis de la distribution multivariée de l'historique

Etant données m scénarios historiques $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$, le kurtosis historique s'écrit

$$\kappa_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^\top \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \right\}^2, \quad (1.51)$$

où $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i$ est l'espérance historique et

$$\mathbf{S} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^\top$$

est la matrice de variance covariance de la distribution historique.

1.6.3.2 Détermination du paramètre ν en fonction du kurtosis

Etant données des scénarios $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$ de $n+1$ actifs distincts, et si on veut modéliser un portefeuille contenant $n+1$ actifs distincts avec une $DLG_{n+1}(\mu, \Sigma, \nu)$, la valeur ν adaptée au kurtosis historique du portefeuille est obtenue comme étant la solution $\nu = \nu_m$ de l'équation

$$\begin{aligned} \kappa_m &= \frac{C_{\nu,n+1}}{c_{\nu,n+1}^{\frac{n+5}{\nu}}} \frac{2 \pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n+5}{\nu}\right) \\ &= \beta_{n+1}(\nu) \end{aligned} \quad (1.52)$$

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné l'esquisse d'une méthode analytique, pour estimer la VaR d'un portefeuille quadratique contenant des produits complexes tels des options, sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risques joints suit une distribution elliptique. Dans le cas particulier où la distribution elliptique est choisie dans la sous famille des distributions de Laplace généralisées, on a montré globalement comment estimer la VaR analytique d'un portefeuille contenant des options. L'esquisse d'une méthode qui donne l'estimation d'une intégrale multidimensionnelle sur une hyperboloïde a été mise en exergue via l'utilisation de la mesure de Liouville. On a rappelé

un algorithme qui sert le calcul de la VaR Monte Carlo. Aussi, on a montré comment estimer la matrice de variance covariance en utilisant la méthode EWMA de RiskMetrics. Dans le cas où on travaille sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une $DLG(0, \Sigma, \nu)$, on a montré comment utiliser les données historiques des actifs du portefeuille pour déterminer la matrice de covariance EWMA, puis comment déterminer la valeur du paramètre ν par la méthode du maximum de vraisemblance. On a aussi rappelé les travaux de Studer [46] et Mina [28], qui sont des alternatives bienvenues pour suppléer le caractère local de l'approximation quadratique dû à Taylor d'un portefeuille, lorsqu'il s'agit d'estimer la VaR. Pour illustrer ce chapitre, on donnera dans le prochain chapitre, des estimations explicites et détaillées pour servir les portefeuilles Δ -neutre.

Chapitre 2

D.L.G VaR d'un portefeuille quadratique $\Gamma - \Theta$

2.1 Introduction

Généralement les acteurs du marché choisissent de détenir un portefeuille de couverture moins risqué comme par exemple, des portefeuilles contenant aussi des options et leurs sous-jacents de telle sorte que le portefeuille soit Δ -neutre ($\Delta = 0$). C'est d'ailleurs l'une des raisons qui justifie une des limites de la Δ -normal VaR proposée par RiskMetrics, et aussi de la Δ -elliptic VaR que nous avons introduite au chapitre 1 de la première partie de cette thèse. En effet, pour un portefeuille contenant des produits dérivés avec un $\Delta = 0$, l'approximation linéaire ou affine pourra être constante ou nulle, et donc non aléatoire. Ainsi l'hypothèse faite sur les distributions des facteurs de risque s'avèrerait inutile. Par conséquent, pour estimer la VaR d'un tel portefeuille ayant une matrice $\Gamma \neq 0$, on pourra par exemple utiliser une approximation quadratique $\Gamma - \Theta$ en s'inspirant du chapitre précédent. Notons que l'intérêt majeur de ce chapitre est qu'il propose une méthode analytique ultrarapide en exécution contrairement à la méthode Monte Carlo, et sans perte de précisions en terme de fiabilité des résultats.

Dans ce chapitre, on propose deux théorèmes précis pour contrôler l'erreur due à une approximation de Taylor du second ordre de la fonction $P\&L$. En s'inspirant de l'article de Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco [6] nous proposons avec précisions des estimations qui permettent d'estimer la VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$ avec des facteurs de risques non gaussiens. Notons que dans [6], les auteurs traitent des facteurs de risques gaussiens. Aussi il n'y a pas une estimation explicite de l'erreur comme ce sera le cas dans ce chapitre. Notons qu'un intérêt financier majeur d'un modèle analytique sera de substituer la méthode Monte Carlo qui nécessite beaucoup plus de temps pour son exécution. Aussi, le choix de la distribution de Laplace généralisée (notée $GLD(0, \Sigma, \alpha)$) offre une plus grande flexibilité, via le choix d'un nouveau paramètre α choisi en fonction des données historiques des actifs portefeuille traité.

Pour illustrer les calculs faits dans le chapitre précédent, on se propose d'estimer la VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$, lorsque le vecteur des rendements suit une distribution de Laplace généralisée. Ainsi, il suffit de reprendre l'expression (1.10) avec $\Delta = 0$. Les estimations nécessaires pour le calcul de la VaR seront faites en se servant des techniques mathématiques de la phase stationnaire (pour plus détails, voir le livre de R.Wong [52]). Sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suit une distribution de Laplace généralisée, on utilise des techniques mathématiques

assez fines pour déterminer un intervalle dans lequel la VaR se trouvera, par suite on fait des tests numériques avec des portefeuilles pratiques du CAC 40.

2.2 Erreur analytique dûe à l'approximation de Taylor pour un portefeuille Δ -neutre

Bien que Studer [46] et Mina [28], proposent une alternative pour pallier aux limites de l'approximation de Taylor de la fonction $P\&L$, nous proposons dans la section suivante, deux théorèmes analytiques qui permettront d'avoir une idée assez précise de l'erreur due à l'approximation de Taylor du second ordre.

Pour servir le cadre d'étude de ce chapitre, les méthodes développées ici seront valables pour des portefeuilles $\Delta - neutre$.

Dans la littérature financière, il est vraisemblable que pour un interval assez petit $[0, t]$, la $\text{VaR}_p^{\Pi_t}$ est remplacée par la VaR quadratique approximative $\text{VaR}_p^{\Gamma_t}$. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature financière une analyse assez précise de l'erreur analytique commise, lorsqu'on adopte une approximation de Taylor du $P\&L$ d'un portefeuille. Ainsi, nous proposons dans les lignes qui suivent, deux théorèmes assez généraux, qui seront valables pour des portefeuilles Δ - neutre.

Théorème 2.2.1 *Supposons que le vecteur des facteurs de risque \mathbb{X}_t suit une distribution elliptique $E(0, \mathbb{V}_t, \phi)$ admettant des moments finis jusqu'à l'ordre 3 et une matrice de variance covariance \mathbb{V}_t linéaire (ou approximativement linéaire) en t . Soit $\Pi(x, t)$ la fonction $P\&L$ d'un portefeuille non-linéaire Δ -neutre satisfaisant*

$$\max_{|\alpha|=3} \sup_{(x,t)} |\partial_{x,t}^\alpha \Pi(x, t)| < \infty . \quad (2.1)$$

En supposant de plus que p est tel que $\text{VaR}_p^{\Gamma_t} > 0$ pour tout t suffisamment petit avec $t \leq t_0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\text{VaR}_{p+\varepsilon}^{\Pi_t}}{\text{VaR}_p^{\Gamma_t}} \leq 1 \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\text{VaR}_{p-\varepsilon}^{\Pi_t}}{\text{VaR}_p^{\Gamma_t}} . \quad (2.2)$$

Remarque 2.2.1 (i) Dans le théorème (2.2.1) on ne suppose pas que \mathbb{X}_t où chacun des deux portefeuilles concern es a une fonction densité de probabilité continue, voire 1-fois différentiable. Ce théorème est par conséquent applicable dans les situations où \mathbb{X}_t pourrait avoir des sauts ²⁷, où lorsque la distribution $E(0, I, \phi)$ des sous jacents est une distribution de Levy infiniment divisible.

(ii) Aussi, il n'est pas crucial de supposer que \mathbb{X}_t suit une distribution elliptique. Ce qui est important est que $\mathbb{X}_t =_d \sqrt{t}\mathbb{X}_1$ qui, dans notre cas, provient du fait que les distributions elliptiques ayant la même fonction caractéristique ϕ , sont différentes par leurs matrices de variance-covariance et par leurs vecteurs espérances. Notons que dans notre cas on suppose que l'esperance est nulle.

La preuve du théorème (2.2.1) sera basée sur le lemme suivant :

²⁷Voir par exemple Duffie et Pan [11](2001), où il y'a une application en relation avec le risque de crédit.

2.2. Erreur analytique due à l'approximation de Taylor pour un portefeuille Δ -neutre

Lemme 2.2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant respectivement pour fonctions de répartitions F_X et F_Y , et soit $\bar{F}_Y := 1 - F_Y$, alors pour tout λ tel que $0 < \lambda < 1$, on a :

$$F_X(x/\lambda) - \bar{F}_Y(-(1-\lambda)x/\lambda) \leq F_{X+Y}(x) \leq F_X(\lambda x) + F_Y((1-\lambda)x). \quad (2.3)$$

Preuve du lemme 2.2.1. Pour x réel, la relation $\{X + Y \leq x\} \subseteq \{X \leq \lambda x\} \cup \{Y \leq (1-\lambda)x\}$ est vérifiée. En effet, soit $\omega \notin \{X \leq \lambda x\} \cup \{Y \leq (1-\lambda)x\} \implies \omega \notin \{X \leq \lambda x\}$ et $\omega \notin \{Y \leq (1-\lambda)x\}$ d'où $X(\omega) > \lambda x$ et $Y(\omega) > (1-\lambda)x$. En faisant la somme membre à membre des deux inégalités, on a que $X(\omega) + Y(\omega) > x$ ce qui implique que $\omega \notin \{X + Y \leq x\}$ d'où la relation est vérifiée. Cette relation implique que $F_{X+Y}(x) \leq F_X(\lambda x) + F_Y((1-\lambda)x)$. Pour prouver l'inégalité à gauche de (2.3), il suffit d'écrire $X = (X + Y) + (-Y)$, d'après la relation établie au début de cette preuve, on a facilement que $F_{X+Y}(\lambda x) - F_{-Y}((1-\lambda)x) \geq F_X(x)$, reste à substituer x par x/λ , puis d'observer que $F_{-Y}(y) = \bar{F}_Y(-y)$, d'où $F_X(x/\lambda) - \bar{F}_Y(-(1-\lambda)x/\lambda) \leq F_{X+Y}(x)$. QED

Preuve du théorème 2.2.1. Si nous faisons une approximation de Taylor du second ordre de $\Pi(x, t)$, alors

$$\Pi(x, t) = \Theta t + \frac{1}{2} x \Gamma x^t + R(x, t),$$

avec

$$R(x, t) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j, t}^2 \Pi(0, 0) + \frac{1}{2} \partial_t^2 \Pi(0, 0) + \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!} \partial_{(x, t)}^\alpha \Pi(\theta_{x, t} x, \theta_{x, t} t),$$

où $\theta_{(x, t)} \in (0, 1)$. D'après l'hypothèse (2.1), si $t > 0$ est majoré, alors

$$\begin{aligned} |R(x, t)| &\leq C (|x|t + t^2 + (|x| + t)^3) \\ &\leq C (t^2 + |x|t + |x|^3), \end{aligned}$$

où C est une constante générique dont la valeur numérique peut changer quand on passe d'une ligne à l'autre. Si on pose

$$R_t := R(\mathbb{X}_t, t),$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|R_t|) &\leq C (\mathbb{E}(t^2) + t\mathbb{E}(|\mathbb{X}_t|) + \mathbb{E}(|\mathbb{X}_t|^3)) \\ &\leq C (t^2 + t\sqrt{t}C + t^{3/2}C) \\ &\leq C t^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

car $\mathbb{X}_t \sim E(0, \mathbb{V}_t, \phi)$ avec $\mathbb{V}_t = t\mathbb{V}_1$. On peut donc appliquer le lemme 2.2.1 avec $X = \Theta t + \frac{1}{2} \mathbb{X}_t \Gamma \mathbb{X}_t^t$, et $Y = R_t = \Pi_t - X$. Alors pour tout $V \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} F_{\Pi_t}(V) &\leq F_{\Gamma_t}(\lambda V) + F_{R_t}((1-\lambda)V) \\ &\leq F_{\Gamma_t}(\lambda V) + \frac{\mathbb{E}(|R_t|)}{(1-\lambda)V} \\ &\leq F_{\Gamma_t}(\lambda V) + \frac{Ct^{3/2}}{(1-\lambda)V} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Chebyshev et la formule (2.4). On note $q_X(p) := \inf\{x : F_X(x) \geq p\}$ le p -quantile de la variable aléatoire X (ainsi $\text{VaR}_p^X = -q_X(p)$). Par hypothèse,

$q_{\Gamma_t}(p)$ est strictement négative, et en particulier différent de 0, lorsque $t \leq t_0$. On considère maintenant $V = \lambda^{-1}q_{\Gamma_t}(p) - \eta|q_{\Gamma_t}(p)| = (\lambda^{-1} + \eta)q_{\Gamma_t}(p)$ avec $\eta > 0$ arbitraire, alors on obtient de (2.5) et de la définition du p -quantile de Γ_t que

$$F_{\Pi_t}((\lambda^{-1} + \eta)q_{\Gamma_t}(p)) < p + C \frac{t^{3/2}}{(1 - \lambda)(\lambda^{-1} + \eta)|q_{\Gamma_t}(p)|}.$$

(Si F_{Γ_t} était continue on pourrait simplement choisir $\eta = 0$, mais ça n'apporterait aucun changement fondamental pour la preuve de ce théorème.). Puisque la fonction F_{Π_t} est croissante, il s'ensuit que

$$q_{\Pi_t} \left(p + C \frac{t^{3/2}}{(1 - \lambda)(\lambda^{-1} + \eta)|q_{\Gamma_t}(p)|} \right) > (\lambda^{-1} + \eta)q_{\Gamma_t}(p). \quad (2.6)$$

Observons que la linéarité en t de \mathbb{V}_t implique que $\Theta t + \mathbb{X}_t \Gamma \mathbb{X}_t^t / 2 = t(\Theta + \mathbb{X}_1 \Gamma \mathbb{X}_1^t / 2)$ est identiquement distribué, par conséquent $q_{\Gamma_t}(p) = t q_{\Gamma_1}(p)$, où le quantile $q_{\Gamma_1}(p)$ ne dépend pas de t . Ainsi, (2.6) implique que

$$q_{\Pi_t} \left(p + C t^{1/2} \right) \geq \lambda^{-1} q_{\Gamma_t}(p) - \eta,$$

pour les nouvelles constantes $C = C(\lambda, \eta, p)$. Maintenant choisissons t suffisamment petit de tel sorte que $C t^{1/2} < \varepsilon$. Alors pour de telles valeurs t ,

$$q_{\Pi_t}(p + \varepsilon) \geq (\lambda^{-1} + \eta)q_{\Gamma_t}(p), \quad (2.7)$$

car q_X est une fonction croissante. En multipliant les deux membres de (2.13) par -1, on a que

$$-q_{\Pi_t}(p + \varepsilon) \leq (\lambda^{-1} + \eta)(-q_{\Gamma_t}(p)), \quad (2.8)$$

d'où

$$|\text{VaR}_{p+\varepsilon}^{\Pi_t}| \leq (\lambda^{-1} + \eta)|\text{VaR}_p^{\Gamma_t}|, \quad (2.9)$$

en divisant les deux membres de (2.9) par $|\text{VaR}_p^{\Gamma_t}|$, en faisant $t \rightarrow 0$ on conclut que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{|\text{VaR}_{p+\varepsilon}^{\Pi_t}|}{|\text{VaR}_p^{\Gamma_t}|} \leq \lambda^{-1} + \eta,$$

pour tout η positif et $0 < \lambda < 1$. En faisant $\lambda \rightarrow 1$ et $\eta \rightarrow 0$, on démontre ainsi l'inégalité gauche de (2.2).

Pour la preuve de l'inégalité droite (2.2), on utilisera le lemme 2.2.1, la relation (2.4) et l'inégalité de Chebyshev.

En effet, en utilisant l'inégalité gauche de la double inégalité (2.3) du lemme (2.2.1) avec $x = V$, $X = \Theta t + \frac{1}{2} \mathbb{X}_t \Gamma \mathbb{X}_t^t$, et $Y = R_t = \Pi_t - X$, on obtient l'inégalité

$$F_{\Pi_t}(V) \geq F_{\Gamma_t}(\lambda^{-1}V) - \bar{F}_{R_t}(-\lambda^{-1}(1 - \lambda)V). \quad (2.10)$$

Or d'après l'inégalité de Chebyshev on a que

$$-\bar{F}_{R_t}(-\lambda^{-1}(1 - \lambda)V) \geq -\lambda \frac{\mathbb{E}(|R_t|)}{(1 - \lambda)|V|},$$

2.2. Erreur analytique due à l'approximation de Taylor pour un portefeuille Δ -neutre

en tenant compte de l'inégalité (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} F_{\Pi_t}(V) &\geq F_{\Gamma_t}(\lambda^{-1}V) - \bar{F}_{R_t}(-\lambda^{-1}(1-\lambda)V) \\ &\geq F_{\Gamma_t}(\lambda^{-1}V) - \lambda \frac{\mathbb{E}(|R_t|)}{(1-\lambda)|V|} \\ &\geq F_{\Gamma_t}(\lambda^{-1}V) - Ct^{3/2}|V|^{-1}, \end{aligned}$$

avec λ est le paramètre défini en (2.4). En supposant que $t \leq t_0$, de tel sorte que $q_{\Gamma_t}(p) < 0$, si on choisit $V = \lambda q_{\Gamma_t}(p) + \eta |q_{\Gamma_t}(p)| = (\lambda - \eta)q_{\Gamma_t}(p)$ avec $0 < \eta < \lambda$ arbitraire, on obtient

$$q_{\Pi_t} \left(p - Ct^{-3/2}(\lambda - \eta)|q_{\Gamma_t}(p)|^{-1} \right) \leq (\lambda - \eta)q_{\Gamma_t}(p).$$

Rappelons que q_{Γ_t} est une fonction linéaire de t . Pour tout $\varepsilon > 0$ choisit suffisamment petit pour que $t < t(\varepsilon)$, on a que $q_{\Pi_t}(p - \varepsilon) \leq (\lambda - \eta)q_{\Gamma_t}$, par conséquent

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\text{VaR}_{p-\varepsilon}^{\Pi_t}}{\text{VaR}_p^{\Gamma_t}} \geq (\lambda - \eta),$$

d'où la preuve de l'inégalité gauche de (2.2), lorsque $\lambda \rightarrow 1$ et $\eta \rightarrow 0$. QED

Il est naturel de se poser la question de savoir comment s'y prendre pour utiliser à son avantage les fonctions de répartitions de Π_t et Γ_t , afin d'améliorer l'approximation quadratique. Par exemple, si on remplace $\varepsilon = 0$ dans (2.2), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{VaR}_p^{\Pi_t}}{\text{VaR}_p^{\Gamma_t}} = 1. \quad (2.11)$$

Nous supposons que (2.11) est possible si F_{Π_t} et F_{Γ_t} sont continues. Avec cette hypothèse, si on suppose de plus que Γ_t admet une fonction densité de probabilité continue, on pourra aiguïser le théorème 2.2.1 en proposant un taux de convergence.

Théorème 2.2.2 *Sous les mêmes hypothèses du théorème 2.2.1, si on suppose de plus que F_{Π_t} est strictement croissante et continue, et que F_{Γ_t} est strictement croissante et continûment différentiable, alors*

$$\left| \frac{\text{VaR}_p^{\Pi_t}}{\text{VaR}_p^{\Gamma_t}} - 1 \right| \leq C\sqrt{t}. \quad (2.12)$$

Preuve. Avec des arguments similaires à ceux utilisés pour la preuve du théorème 2.2.1, mais en échangeant le rôle Π_t et Γ_t , on montre que

$$p - C \frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|} \leq F_{\Gamma_t}(q_{\Pi_t}(p)) \leq p + C \frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|}.$$

En appliquant la fonction croissante $F_{\Gamma_t}^{-1}$, on obtient que

$$F_{\Gamma_t}^{-1} \left(p - C \frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|} \right) \leq q_{\Pi_t}(p) \leq F_{\Gamma_t}^{-1} \left(p + C \frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|} \right). \quad (2.13)$$

En utilisant la formule de Taylor et le théorème de la fonction inverse,

$$F_{\Gamma_t}^{-1} \left(p \pm C \frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|} \right) \simeq q_{\Gamma_t}(p) \pm \frac{C}{F'_{\Gamma_t}(q_{\Gamma_t}(p))} \frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|}. \quad (2.14)$$

Puisque $\Theta t + \frac{1}{2} \mathbb{X}_t \Gamma \mathbb{X}_t^t =_d t \left(\Theta + \frac{1}{2} \mathbb{X}_1 \Gamma \mathbb{X}_1^t \right)$, on a que $F_{\Gamma_t}(x) = F_{\Gamma_1}(x/t)$, lorsque $q_{\Gamma_t}(p) = t q_{\Gamma_1}(p)$. Par conséquent

$$F'_{\Gamma_t}(q_{\Gamma_t}(p)) = t^{-1} F'_{\Gamma_1}(q_{\Gamma_1}(p)),$$

et en utilisant (2.11), on a

$$\frac{t^{3/2}}{|q_{\Pi_t}(p)|} = \frac{t^{3/2}}{|q_{\Gamma_t}|} \frac{|q_{\Gamma_t}(p)|}{|q_{\Pi_t}(p)|} \leq C \frac{t^{1/2}}{|q_{\Gamma_1}|}.$$

En utilisant (2.11), (2.14) et (2.13) et le fait que $q_{\Gamma_1}(p) \neq 0$, pour une constante $C > 0$ bien choisie on obtient :

$$|q_{\Pi_t}(p) - q_{\Gamma_t}(p)| \leq C t^{3/2} |q_{\Gamma_1}(p)| = C t^{1/2} |q_{\Gamma_t}(p)|$$

d'où la preuve du théorème.

QED

2.3 VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$

Etant donné $\Pi = \Pi(x_1, \dots, x_{n+1}, t)$ la fonction $P\&L$ non linéaire d'un portefeuille donné, tel que le gradient $\nabla \Pi(0) = 0$. Soit

$$\Theta := \frac{\partial \Pi}{\partial t}(0), \quad (2.15)$$

le taux de variation du portefeuille par rapport au temps. La deuxième sensibilité Γ du portefeuille est

$$\Gamma = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}. \quad (2.16)$$

Si on veut déterminer la VaR d'un tel portefeuille, on a besoin de connaître la distribution de la fonction perte et profit $P\&L$. En particulier, on aimerait connaître la fonction de répartition de la fonction $P\&L$ qui se définit comme suit :

$$F_{\Pi}(x) = \mathbb{P}(\Pi(\mathbb{X}, t) < x), \quad (2.17)$$

où \mathbb{P} est la loi de probabilité de \mathbb{X} . Puisqu'une estimation analytique explicite de (2.17) est quasi impossible, surtout si n est grand et $\Pi(x, t)$ compliqué, en général devant de telles situations certains praticiens ont recours à la méthode Monte Carlo. Or la lenteur et la lourdeur de la méthode Monte Carlo font que les méthodes analytiques sont les bienvenues pour les suppléer. Pour un souci de gain de temps et de simplifications des calculs, on remplace souvent $\Pi(x, t)$ par son approximation quadratique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbb{X}) &\simeq \Theta t + \frac{1}{2} \mathbb{X} \Gamma \mathbb{X}^t \\ &= \Theta t + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Gamma_{ij} X_i X_j. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Par convention, on notera les vecteurs comme suit : $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ et $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ désigneront respectivement les vecteurs lignes et leurs transposées x^t et \mathbb{X}^t seront par conséquent des vecteurs colonnes. Dans ce chapitre, on supposera que \mathbb{X} suit une *distribution de Laplace généralisée centrée* ou DLG, avec un paramètre α . Ainsi \mathbb{X} aura une fonction densité de probabilité de la forme :

$$f_{\mathbb{X}_t}(x) = \frac{C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\det(\mathbb{V}(t))}} \exp\left(-c_{\alpha, n+1}(x\mathbb{V}(t)x^t)^{\alpha/2}\right), \quad (2.19)$$

où $C_{\alpha, n+1}$ et $c_{\alpha, n+1}$ sont des constantes de normalisations de $f_{\mathbb{X}}$ telles que, $\mathbb{V} = Id$ (la matrice identité). $\mathbb{V}(t)$ est la matrice de variance covariance du vecteur aléatoire \mathbb{X}_t .

Remarque 2.3.1 Les constantes de normalisations de (2.19) s'écrivent :

$$c_{\alpha, n+1} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{\alpha}\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)} \right)^{\alpha/2}, \quad (2.20)$$

et

$$C_{\alpha, n+1} = \frac{\alpha}{2\pi^{(n+1)/2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{\alpha}\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)} \right)^{(n+1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)}. \quad (2.21)$$

Preuve

$$f(x) = C \exp(-c|x|^\alpha),$$

où les constantes de normalisations $c = c_{\alpha, k}$ et $C = C_{\alpha, k}$ sont telles que

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} x_j^2 f(x) dx = 1. \quad (2.22)$$

par le fait que f invariante par une rotation, la dernière condition 2.22 est équivalente à $\int_{\mathbb{R}} |x|^2 f dx = k$. En changeant de variable $x \rightarrow c^{-1/\alpha}x$ et en introduisant les coordonnées polaires, on obtient le système d'équations en c et C suivant :

$$\begin{aligned} 1 &= c^{-k/\alpha} C |S_{k-1}| \int_0^\infty r^{k-1} e^{-r^\alpha} dr \\ &= \alpha^{-1} c^{-k/\alpha} C |S_{k-1}| \Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

et

$$\begin{aligned} k &= c^{-(k+2)/\alpha} C |S_{k-1}| \int_0^\infty r^{k+1} e^{-r^\alpha} dr \\ &= \alpha^{-1} c^{-(k+2)/\alpha} C |S_{k-1}| \Gamma\left(\frac{k+2}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Notons que $|S_{k-1}| = 2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ est la surface de l'hypersphère de rayon 1. En divisant (2.23) par (2.24), on obtient

$$c = c_{\alpha, k} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{\alpha}\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)} \right)^{\alpha/2}. \quad (2.25)$$

(Si $\alpha = 2$, on a que $c = 1/2$, ce qui semble régulier.) En substituant c dans (2.23) on obtient que

$$\begin{aligned} C &= \frac{\alpha c^{k/\alpha} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2\pi^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi^{k/2}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{\alpha}\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)} \right)^{k/2} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Puisqu'on traite un portefeuille contenant $n + 1$ actifs, il suffit de remplacer $k = n + 1$. QED

La Valeur à Risque pour un taux de confiance $1 - p$ est défini par :

$$\text{VaR}_p^{\Pi_t} = \sup\{V : F_{\Pi_t}(-V) \geq p\}; \quad (2.27)$$

Notons que le signe (-) devant le V signifie qu'on considère VaR_p comme une quantité positive, même si elle représente en réalité une perte financière. Si la fonction de répartition de $\Pi_t = \Pi(\mathbb{X}_t, t)$ est continue, et que de plus elle est strictement croissante alors nous avons tout simplement que $\text{VaR}_p^{\Pi_t} = -F_{\Pi_t}^{-1}(p)$. On va supposer qu'une approximation raisonnable de $\text{VaR}_p^{\Pi_t}$ pourra s'obtenir en considérant une approximation quadratique de la fonction Π_t . La VaR quadratique notée $\text{VaR}_p^{\Gamma_t}$, sera défini comme en (2.27), en substituant F_{Π_t} par F_{Γ_t} comme suit :

$$F_{\Gamma_t}(-V) = \mathbb{P}\left(\Theta t + \frac{1}{2}\mathbb{X}_t \Gamma \mathbb{X}_t^t \leq -V\right). \quad (2.28)$$

Puisque dans notre cas la fonction de repartition de F_{Γ} sera strictement croissante, alors la définition de Γ -VaR se résume à $F_{\Gamma_t}^{-1}(p)$. Notons qu'une approximation détaillée $\text{VaR}_p^{\Pi_t} \simeq \text{VaR}_p^{\Gamma_t}$ a été justifiée dans les théorèmes (2.2.1), (2.2.2). On démontre dans ces théorèmes que sous des hypothèses raisonnables sur le portefeuille $\Pi(x, t)$,

$$\text{VaR}_p^{\Pi_t} / \text{VaR}_p^{\Gamma_t} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow 0,$$

avec une erreur de l'ordre de $O(\sqrt{t})$. Aussi, observons que si par exemple $\Pi(x, t) \geq \Theta t + \frac{1}{2}x\Gamma x^t$ pour tout x , alors $\text{VaR}_p^{\Pi_t} \leq \text{VaR}_p^{\Gamma_t}$. Dans la suite, on choisira t le plus petit possible et fixé, et on ne fera plus de différence entre $\text{VaR}_p^{\Pi_t}$ et $\text{VaR}_p^{\Gamma_t}$, ceci dit nous supposons que $\Pi(x, t)$ est un portefeuille quadratique Δ -neutre. Aussi, pour un souci de simplification des notations, on va systématiquement ignorer t , et on écrira tout simplement \mathbb{X} au lieu de \mathbb{X}_t , F_{Γ} et VaR_p^{Γ} au lieu de F_{Γ_t} respectivement $\text{VaR}_p^{\Gamma_t}$, etc. On écrira tout simplement Θ au lieu de Θt .

Notre véritable souci ici, c'est de donner une estimation précise de $F_{\Gamma}(-V)$, ou son inverse. Ce qui n'est pas du tout évident, surtout si on s'intéresse à une solution analytique. Notre stratégie consistera à obtenir une approximation de $F_{\Gamma}(-V)$ pour des V grands²⁸, en proposant des expressions analytiques explicites du terme principal et de l'erreur. Par suite on compte proposer un intervalle dans lequel se trouvera la VaR.

Dans le cas où la distribution de probabilité de \mathbb{X} est continue, on pourra simplement calculer la VaR_p^{Γ} de l'approximation $\Gamma - \Theta$ du portefeuille, comme étant la solution de l'équation

$$F_{\Gamma}(-VaR_p^{\Gamma}) = p, \quad (2.29)$$

²⁸C'est le cas lorsqu'on traite de grands portefeuilles financiers.

où

$$F_{\Gamma}(-V) = C_{\alpha, n+1} \int_{\{\Theta+1/2X\Gamma X^t \leq -V\}} e^{-c_{\alpha, n+1} (x\mathbb{V}^{-1}x^t)^{\alpha/2}} \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{V})}}. \quad (2.30)$$

Si on suppose que la matrice de covariance \mathbb{V} est définie positive, Cholesky nous permet la décomposition suivante de \mathbb{V} :

$$\mathbb{V} = \mathbb{H}\mathbb{H}^t$$

avec \mathbb{H} est une matrice triangulaire inférieure ou supérieure. En introduisant une matrice de covariance ajustée par la matrice Γ suivante :

$$\mathbb{H}\Gamma\mathbb{H}^t,$$

puis en procédant à une diagonalisation on obtient :

$$\mathbb{H}\Gamma\mathbb{H}^t = \mathbb{O}\mathbb{A}\mathbb{O}^t,$$

où \mathbb{O} est une matrice orthogonale, et \mathbb{A} est une matrice diagonale. Observons que $\mathbb{H}\Gamma\mathbb{H}^t$ n'est pas nécessairement définie, sauf si Γ l'est, de même les informations sur \mathbb{O} dont les colonnes sont les vecteurs propres de Γ^t , ne nous intéresse pas dans la pratique. Après quelques transformations élémentaires, (successivement $x \rightarrow \mathbb{H}x$ et $x \rightarrow |\mathbb{A}|^{-1/2}x$), et ensuite avec un changement de variable adapté $x \rightarrow c_{\alpha, n+1}^{-1/\alpha} \cdot x$, l'expression (2.30) implique :

$$\begin{aligned} F_{\Gamma}(-V) &= C_{\alpha, n+1} \int_{\{\frac{1}{2}(|x_+|^2 - |x_-|^2) \leq -(V+\Theta)\}} e^{-c_{\alpha, n+1} \cdot (x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}} \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{A})}} \\ &= \int_{\{\frac{1}{2}(|x_+|^2 - |x_-|^2) \leq -c_{\alpha, n+1}^{\frac{2}{\alpha}}(V+\Theta)\}} \frac{e^{-(x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}}}{c_{\alpha, n+1}^{\frac{n+1}{\alpha}}} \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{A})}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

(Il faut noter que $\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{H}\Gamma\mathbb{H}^t) = \det(\Gamma)\det(\mathbb{V})$). Ici $x = (x_+, x_-)$ est la décomposition de \mathbb{R}^{n+1} en deux sous espaces propres E_+ et E_- respectivement associés aux valeurs propres positives et aux valeurs propres négatives de $\mathbb{H}\Gamma\mathbb{H}^t$. On supposera que

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} D_{n_+}^+ & 0 \\ 0 & D_{n_-}^- \end{pmatrix}$$

où

$$\mathbf{D}_{\mathbf{n}_\epsilon}^\epsilon = \begin{pmatrix} a_1^\epsilon & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_{n_\epsilon}^\epsilon \end{pmatrix}$$

pour $\epsilon = \pm 1$ où pour tous $a_j^+, a_j^- \geq 0$, et $-a_1^- \leq \dots \leq -a_{n_-}^- \leq a_1^+ \leq \dots \leq a_{n_+}^+$, et la plus petite valeur propre $-a_1^-$ est de multiplicité 1. Aussi, on suppose que $\mathbb{H}\Gamma\mathbb{H}^t$ est une matrice non singulière.

En faisant sortir la constante $c_{\alpha, n+1}$ de la fonction exponentielle de l'expression 2.31, on obtient l'expression suivante de F_{Γ} , qui sera le point de départ de notre méthode :

$$F_{\Gamma}(-V) = C' \int_{\{|x_-|^2 - |x_+|^2 \geq R_1^2\}} e^{-(x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}} dx \quad (2.32)$$

où

$$C' = c_{\alpha, n+1}^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot \frac{C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\det(\mathbb{A})}}. \quad (2.33)$$

De plus en supposant que $V + \Theta > 0$, on introduit R_1 telle que

$$R_1^2 = 2 c_{\alpha, n+1}^{2/\alpha} (V + \Theta). \quad (2.34)$$

Ensuite, on réécrit (2.32) comme une intégrale sur une hypersurface $\Sigma = \eta^{-1}(\{1\})$, avec Σ est une sous-variété différentielle de \mathbb{R}^{n+1} car 1 est une valeur régulière de η , telle que

$$\eta(x) = \sqrt{|x_-|^2 - |x_+|^2}$$

avec pour domaine de définition $D_\eta = \{|x_+| \leq |x_-|\}$. Observons que ce domaine contient le domaine d'intégration de (2.32) et que la topologie sur Σ sera induite par celle de la variété topologique \mathbb{R}^{n+1} . Soit L_η la forme différentielle de Liouville de η , définie comme suit :

$$d\eta \wedge L_\eta = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1},$$

si on change de variable en posant $x = r \cdot \xi$, telle que $\eta(x) = r$, et $\xi = \frac{x}{\eta(x)}$, puisque L_η est une forme différentielle d'ordre n , $L_\eta(x) = r^n L_\eta(\xi)$, et $dx = r^n L_\eta(\xi) dr$, d'où l'intégrale (2.32) pourra s'écrire :

$$F_\Gamma(-V) = C' \int_{R_1}^{\infty} r^n \left(\int_{\{\eta(\xi)=1\}} e^{-(r^2 \xi | \mathbb{A} |^{-1} \xi^t)^{\alpha/2}} L_\eta(\xi) \right) dr,$$

autrement dit

$$F_\Gamma(-V) = C' \int_{R_1}^{\infty} r^n \left(\int_{\{\eta(x)=1\}} e^{-(r^2 x | \mathbb{A} |^{-1} x^t)^{\alpha/2}} L_\eta(x) \right) dr, \quad (2.35)$$

où nous utilisons que L_η est une forme différentielle d'ordre n , telle que $\phi_r^*(L_\eta) = r^n L_\eta$ soit l'image de L_η par l'homéomorphisme réciproque de $\phi_r : (r, x) \rightarrow r.x$, avec $(r, x) \in]0, +\infty[\times \Sigma$ et L_η est donnée par la formule classique suivante

$$L_\eta = \frac{1}{|\nabla \cdot \eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1},$$

(avec $|\nabla \cdot \eta|$ la norme euclidienne du gradient de η , et le symbole $[j]$ signifie que le terme dx_j est supprimé). Bien que la mesure de liouville associée n'est pas unique, sa restriction sur un domaine $\{x : \eta(x) = r\}$ inclu dans η l'est ²⁹. Aussi rappelons que pour toute fonction intégrable $g = g(x)$, on a

$$\int_{\{\eta(x) \geq R\}} g(x) dx = \int_R^{\infty} \left(\int_{\{\eta=r\}} g(x) L_\eta(x) \right) dr.$$

Pour estimer $F_\Gamma(-V)$, on commencera par donner une estimation asymptotique de $I(\lambda)$, ensuite on intégrera par rapport à la variable r . En introduisant l'intégrale extraite de (2.35) suivante :

$$I(\lambda) = \int_{\{\eta(x)=1\}=\Sigma} e^{-\lambda(x | \mathbb{A} |^{-1} x^t)^{\alpha/2}} L_\eta(x), \quad (2.36)$$

²⁹La restriction de la n -forme différentielle de Liouville sera différente de la mesure euclidienne surfacique induite sur le domaine en question.

où $\lambda = r^\alpha$ est supposé assez grand ($\lambda \rightarrow \infty$), nous allons donner une formule précise de la composante principale et une formule asymptotique assez claire de l'erreur de $I(\lambda)$. Ceci nous permettra d'obtenir une formule asymptotique de (2.3) quand $R_1 \rightarrow \infty$, et en intégrant de R_1 à ∞ , on obtiendra une formule asymptotique $F_\Gamma(-V)$ avec une bonne estimation de l'erreur.

Rappelons l'hypothèse fondamentale suivante :

$$-a_1^- < -a_2^- \leq \dots \leq a_{n-}^- < 0 \leq a_1^+ < \dots \leq a_{n+}^+, \quad (2.37)$$

ceci dit, on supposera que $-a_1^-$, la plus petite valeur propre de \mathbb{A} , est de multiplicité 1.

En considérant la théorie classique [52](1989), la principale contribution de l'intégrale (2.36) quand $\lambda \rightarrow \infty$ viendra des points de la surface $\{x : \eta(x) = 1\} = \Sigma$ où la fonction $x|\mathbb{A}|^{-1}x^t$ admet son minimum absolu. Sous la condition (2.37), les deux points qui correspondent au minimum absolu sont $(\pm e_1^-, 0) \in \mathbb{R}^{n-} \times \mathbb{R}^{n+}$, remarquons que les deux points stationnaires de $x|\mathbb{A}|^{-1}x^t$ sur la surface Σ sont ceux pour lesquelles $x\mathbb{A}$ est un multiple de $\nabla\eta$. Nous allons subdiviser (2.36) en trois intégrales, en utilisant une partition C^2 de l'unité sur Σ :

$1 = \chi_+ + \chi_0 + \chi_-$ sur Σ tel que $0 \leq \chi_\pm, \chi_0 \leq 1$ avec $\chi_\pm = 1$ près de $(\pm e_1, 0)$, ainsi $(\pm e_1^-, 0) \notin \text{supp}(\chi_0)$ et on obtiendra la décomposition suivante :

$$I(\lambda) = I_-(\lambda) + I_0(\lambda) + I_+(\lambda)$$

avec

$$I_\nu(\lambda) = \int_\Sigma \chi_\nu(x) e^{-\lambda(x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}} L_\eta(x)$$

pour $\nu = \pm, 0$. Les supports des χ_ν seront choisis en fonction de la géométrie induite par la hessienne de la phase aux deux points critiques. Notre principale et première étape sera de déterminer la contribution des minimums absolus $(\pm e_1^-, 0)$. Par le fait de la symétrie, il suffira de déterminer la contribution de l'un de ces 2 points par exemple $(e_1^-, 0)$. Aussi on choisira χ_\pm de tel sorte que $\chi_+(x) = \chi_-(-x)$.

Introduisons les coordonnées locales

$$x_{1,-} = \sqrt{1 - x_{2,-}^2 - \dots - x_{n,-,-}^2 + x_{1,+}^2 + \dots + x_{n+,+}^2}$$

près de $(e_1^-, 0)$, observons qu'au voisinage du point $(e_1^-, 0)$, $\eta(x) = 1$. Puisque au voisinage de $(e_1^-, 0)$ on a que $\frac{\partial\eta}{\partial x_{1,-}} \neq 0$, alors L_η s'écrit simplement

$$\begin{aligned} L_\eta(x) &= \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_{1,-}} \right)^{-1} dx_{2,-} \wedge \dots \wedge dx_{n,-,-} \wedge dx_{1,+} \wedge \dots \wedge dx_{n+,+} \\ &= x_{1,-}^{-1} dx_{2,-} \wedge \dots \wedge dx_{n+,+} \\ &= x_{1,-}^{-1} dx', \end{aligned}$$

et on obtient que

$$I_+(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\chi}_+(x') e^{-\lambda(c_1 + q(x'))^{\alpha/2}} \left(1 - |x'_-|^2 + |x_+|^2 \right)^{-1/2} dx', \quad (2.38)$$

pour laquelle nous écrivons $x'_- = (x_{2,-}, \dots, x_{n,-,-})$, $x' = (x'_-, x_+)$ avec c_1 et $q(x')$ sont définis par :

$$c_1 = \frac{1}{a_1^-} \quad (2.39)$$

et

$$\begin{aligned} q(x') &= \left(\frac{1}{a_2^-} - \frac{1}{a_1^-}\right)x_{2,-}^2 + \dots + \left(\frac{1}{a_{n_-}^-} - \frac{1}{a_1^-}\right)x_{n_-,-}^2 + \\ &\quad \left(\frac{1}{a_1^+} + \frac{1}{a_1^-}\right)x_{1,+}^2 + \dots + \left(\frac{1}{a_{n_+}^+} + \frac{1}{a_1^-}\right)x_{n_+,+}^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

et avec $\widetilde{\chi}_+(x') = \chi_+(\sqrt{1 - |x'_-|^2 + |x_+|^2}, x'_-, x_+)$.

Dans la prochaine section, on fera une étude attentive et précise de l'estimation asymptotique de (2.38).

2.4 Une Estimation fine de l'intégrale de Laplace

Dans cette partie, en s'inspirant de la méthode d'estimation asymptotique de l'intégrale de Laplace (voir Wong [52] pour détails), on donnera une estimation précise de l'intégrale suivante :

$$J(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)e^{-\lambda\psi(x)} dx, \quad (2.41)$$

avec a et ψ des fonctions C^∞ (C^2 resp. C^4 devraient suffire), et satisfaisant les hypothèses suivantes :

- (i) $\psi(x) \geq 0$ et ψ admet un seul point minimum $x = 0$ sur $\text{supp}(a)$; de plus $\psi(0) = 0$.
- (ii) La matrice hessienne $Q = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ est non-dégénérée (de plus strictement positive).
- (iii) $\psi(x) = \frac{1}{2}xQx^t + R(x)$ avec $R(x) = O(|x|^4)$.
- (iv) $\nabla a(0) = 0$,

cette dernière hypothèse a été faite par nécessité, pour suffire à notre principale application. D'autres hypothèses sur le support de l'amplitude a de (2.38), suivront en fonction de nos besoins pour servir notre application. Nous allons le plus souvent écrire $Q(x)$ en lieu et place de xQx^t , par abus de notation pour simplifier les écritures.

Toutes les estimations et les calculs de ce cadre ont pour but de servir notre idée, qui consiste à écrire toutes les constantes et les hypothèses de nos estimations en fonction de Q et de sa géométrie, en nous servant de la distance associée $\sqrt{xQx^t}$. Le premier exemple sera l'hypothèse sur le support de l'amplitude a , qu'on va énoncer en (iv). Soit $\psi(x) = \frac{1}{2}xQx^t + R(x)$, comme donné ci-dessus, et soit $R_-(x) = \max(-R(x), 0)$, la partie négative du reste d'ordre 4. Si $0 < \gamma < 1$ est une constante choisie arbitrairement, alors il est clair que dans un voisinage de 0, $\frac{1}{2}xQx^t - R_-(x)$ dominera $(\gamma/2)xQx^t$. Nous quantifions précisément cette observation en introduisant

$$r_\gamma := \sup\{r : \frac{1}{2}xQx^t - R_-(x) \geq \frac{\gamma}{2}xQx^t, x \in B_Q(0, r)\}, \quad (2.42)$$

où $B_Q(0, r) = \{x : xQx^t \leq r^2\}$, est la Q-boule de rayon r. Par suite, rajoutons l'hypothèse finale suivante :

(v) $\text{supp}(a) \subseteq B_Q(0, r_\gamma)$.

Introduisons les 2 nombres $\|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma}$ et $\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}$ tel que

$$\|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} := \max_{B_Q(0, r_\gamma)} \left(\left| \frac{R(x)}{Q(x)^2} \right| \right), \quad (2.43)$$

et de façon similaire, si $\rho_2(x) = a(x) - a(0) - \nabla a(0)x^t$ est le reste du premier ordre de la formule de Taylor, on pose

$$\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma} := \max_{B_Q(0, r_\gamma)} \left(\left| \frac{\rho_2(x)}{Q(x)} \right| \right).$$

Observons que c'est une quantité finie, dès lors que $R(x) = O(|x|^2)$ et $\rho_2(x) = O(|x|^2)$, et que $Q(x)$ est définie positive.

Nous pouvons maintenant formuler le théorème principal de cette partie :

Théorème 2.4.1 *Etant donné γ tel que $0 < \gamma < 1$, sous les hypothèses (i)-(v), nous avons*

$$J(\lambda) = \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} + E(\lambda),$$

avec une estimation asymptotique de l'erreur suivante :

$$\begin{aligned} |E(\lambda)| &\leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \\ &\cdot \left\{ \frac{n\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left[1 - \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} - 2 \frac{\left(\frac{\lambda r_\gamma^2}{2} \right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)} \right] + \frac{n(n+2)\|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} \|a\|_\infty}{\lambda^2 \gamma^{\frac{n}{2}+2}} \right. \\ &\quad \left. + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right\}, \end{aligned}$$

où $\Gamma(z, w)$ est la fonction Γ -incomplète donné par (2.99).

Preuve

En écrivant $J(\lambda)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx + \int_{\mathbb{R}^n} a(x) (e^{-\lambda R(x)} - 1) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \\ &=: J_1 + J_2, \end{aligned} \quad (2.44)$$

nous estimerons séparément, J_1 et J_2 .

Estimation of J_1 . D'après un développement de Taylor de second ordre de la fonction amplitude $a(x)$ au voisinage de 0, on obtient :

$$a(x) = a(0) + \nabla a(0) x^t + \rho_2(x), \quad (2.45)$$

avec $|\rho_2(x)| \leq C|x|^2$ dans le support de a noté $\text{supp}(a)$. En remplaçant la fonction $a(x)$ comme donné en (2.45), et en remarquant que pour des puissances impaires de x l'intégrale est nulle et que

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0, r_\gamma)} a(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx = 0$$

car $\text{supp}(a) \subset B_Q(0, r_\gamma)$, et $x \notin \text{supp}(a)$ implique $a(x) = 0$ et $\rho_2(x) = -a(0)$ sur le complémentaire du support de a . Si de plus $\nabla a(0) = 0$, on obtiendra :

$$J_1(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{B_Q(0, r_\gamma)} (a(0) + \nabla a(0) \cdot x^t + \rho_2(x)) e^{-\lambda Q(x)/2} dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0, r_\gamma)} a(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \\ &= a(0) \int_{B_Q(0, r_\gamma)} e^{-\lambda Q(x)/2} dx + \int_{B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \quad (2.47) \\ &= a(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda Q(x)/2} dx - a(0) \int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0, r_\gamma)} e^{-\lambda Q(x)/2} dx + \int_{B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \\ &= \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} + \int_{B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx - \int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \\ &= \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} + E_1(\lambda). \end{aligned}$$

En effet, pour déterminer le premier terme de (2.47), on procède à un changement de variable en posant $y = \frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{2}} Q^{1/2} x$, par suite on procédera à un autre changement de variable sphérique en posant $y = r \cdot \xi$, et on obtient

$$\begin{aligned} a(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda Q(x)/2} dx &= \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{n/2} |S_{n-1}| \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dy \\ &= \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \end{aligned}$$

de même par des changements de variables analogues comme ci-dessus à savoir $y = Q^{1/2} x$ et un changement de variable sphérique, en se servant de (2.97), on obtient cette expression du dernier terme de (2.47) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx &= -a(0) \int_{\{x Q x^t \geq r_\gamma^2\}} e^{-\lambda \cdot Q(x)/2} dx \\ &= -\frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \int_{\{|y|^2 \geq r_\gamma^2\}} e^{-\lambda \cdot \frac{|y|^2}{2}} dy \\ &= -\frac{a(0) |S_{n-1}|}{\sqrt{\det(Q)}} \int_{r_\gamma}^\infty r^{n-1} e^{-\lambda \cdot \frac{r^2}{2}} dr \\ &= -\frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \quad (2.48) \end{aligned}$$

où $|S_{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ est le volume de l'hypersphère de \mathbb{R}^n et

$$\Gamma(z, w) = \int_w^\infty e^{-s} s^{z-1} ds,$$

est la fonction Γ -incomplète. On peut remarquer que la quantité (2.48) décroît exponentiellement en λ , comme la fonction $Const.(1/\lambda)e^{-\lambda r_\gamma^2/2}$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Par le fait qu'on intègre sur un domaine borné, en introduisant Q dans l'intégrale du second terme de (2.47), et en posant $x = \lambda^{-1/2}Q^{-1/2}y$, on obtient la majoration suivante du second terme de l'expression (2.47) :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{B_Q(0,r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right| &= \left| \int_{B_Q(0,r_\gamma)} Q(x) \frac{\rho_2(x)}{Q(x)} e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right| \\
 &\leq \max_{B_Q(0,r_\gamma)} \left(\frac{|\rho_2(x)|}{|Q(x)|} \right) \cdot \left| \int_{B_Q(0,r_\gamma)} Q(x) e^{-\lambda \cdot Q(x)/2} dx \right| \\
 &= \max_{B_Q(0,r_\gamma)} \left(\frac{|\rho_2(x)|}{|Q(x)|} \right) \cdot \left| \int_{\|y\| \leq r_\gamma} \|y\|^2 e^{-\frac{\lambda}{2}\|y\|^2} dy \right| \\
 &= \max_{B_Q(0,r_\gamma)} \left(\frac{|\rho_2(x)|}{|Q(x)|} \right) |S_{n-1}| \cdot \left(\int_0^{r_\gamma} r^{n+1} e^{-\frac{\lambda}{2}r^2} dr \right) \\
 &= \frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty,r_\gamma}}{\lambda\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\Gamma(n/2)} - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

En nous servant des relations $\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x}$ et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ lorsque $a > 0$ et $x > 0$, l'expression (2.49) devient

$$\left| \int_{B_Q(0,r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right| \leq \frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty,r_\gamma}}{\lambda\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \left(\frac{n}{2} - \frac{n\Gamma(\frac{n}{2}; \lambda r_\gamma^2/2)}{2\Gamma(n/2)} - \frac{(\frac{\lambda r_\gamma^2}{2})^{\frac{n}{2}} e^{-\lambda r_\gamma^2/2}}{\Gamma(n/2)} \right),$$

d'où d'après 2.49, on a l'estimation de $E_1(\lambda)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 |E_1(\lambda)| &= \left| \int_{B_Q(0,r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx - \int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0,r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right| \\
 &\leq \left| \int_{B_Q(0,r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right| + \left| \int_{\mathbf{R}^n \setminus B_Q(0,r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right| \\
 &\leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty,r_\gamma}}{\lambda} \left(\frac{n}{2} - \frac{n\Gamma(\frac{n}{2}; \lambda r_\gamma^2/2)}{2\Gamma(n/2)} - \frac{(\frac{\lambda r_\gamma^2}{2})^{\frac{n}{2}} e^{-\lambda r_\gamma^2/2}}{\Gamma(n/2)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right] \\
 &\leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty,r_\gamma}}{\lambda} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\Gamma(n/2)} - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right] \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

En conclusion, on obtient l'expression suivante de J_1 :

$$J_1(\lambda) = \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} + E_1(\lambda), \quad (2.51)$$

où

$$|E_1(\lambda)| \leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2\|\rho_2/Q^2\|_{\infty,r_\gamma}}{\lambda} \left(\frac{n}{2} - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right]. \quad (2.52)$$

Une Estimation de J_2 : En utilisant l'inégalité suivante $|e^y - 1| \leq |y| \max(e^y, 1)$ tel $y \in \mathbf{R}$, avec $y = \lambda R(x)$, on remarque que :

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \lambda \int_{B_Q(0, r_\gamma)} |a(x)| |R(x)| e^{-\lambda(Q(x)/2 - R_-(x))} dx \\ &\leq \lambda \|a\|_\infty \int_{B_Q(0, r_\gamma)} |R(x)| e^{-\lambda\gamma Q(x)/2} dx \end{aligned} \quad (2.53)$$

et puisque que le $\text{supp}(a) \subseteq B_Q(0, r_\gamma)$ et $Q(x)/2 - R_-(x) \geq (\gamma/2)Q(x)$ sur $B_Q(0, r_\gamma)$. si on multiplie et on divise par l'expression $Q(x)^2$, on obtient

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \|a\|_\infty \|R(x)/Q^2(x)\|_{\infty, r_\gamma} \int_{\mathbf{R}^n} Q(x)^2 e^{-\lambda\gamma Q(x)/2} dx \\ &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{n(n+2) \|a\|_\infty \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2} \sqrt{\det(Q)}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

En effet, en posant $y = \sqrt{Q(x)}$, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^n} Q(x)^2 e^{-\lambda\gamma Q(x)/2} dx = \frac{1}{\sqrt{Q}} \int_{\mathbf{R}^n} |y|^4 e^{-|y|^2/2} dy,$$

or on demontre aisement par un changement de variable sphérique que

$$\int_{\mathbf{R}^n} |y|^4 e^{-|y|^2/2} dy = (2\pi)^{n/2} \cdot (n^2 + n),$$

d'où en remplaçant dans (2.4), et par suite dans (2.54), on obtient une estimation de $J_2(\lambda)$. En conclusion, on obtient

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= J_1(\lambda) + J_2(\lambda) \\ &= \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} + E_1(\lambda) + J_2(\lambda) \\ &= \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} + E(\lambda), \end{aligned}$$

où en introduisant le complement de la fonction Γ -incomplète $\Omega(a, x)$ tel que, $\Omega(a, x) = \Gamma(a) - \Gamma(a, x)$, on a que

$$\begin{aligned} |E(\lambda)| &\leq \frac{2\|\rho_2/Q^2\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda \sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{\Omega(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{n(n+2) \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} \|a\|_\infty}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2} \sqrt{\det(Q)}} \\ &\leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \frac{\Omega(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} + \frac{n(n+2) \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} \|a\|_\infty}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2}} \right] \\ &+ |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \\ &\leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{n\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left[1 - \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} - 2 \frac{\left(\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)} \right] + \right. \\ &\left. \frac{n(n+2) \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} \|a\|_\infty}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2}} + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \end{aligned}$$

d'où la preuve du théorème 2.4.1.

QED

Corollaire 2.4.1 *Etant donné γ , tel que $0 < \gamma < 1$, sous les hypothèses (i)-(v) du théorème précédent, on obtient*

$$J(\lambda) = \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} + E(\lambda),$$

où une estimation de l'erreur est donné par :

$$|E(\lambda)| \leq \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{n \|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} + \frac{n(n+2) \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} \|a\|_\infty}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2}} + \frac{|a(0)| \Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right),$$

Preuve La preuve est similaire à celle du théorème (2.4.1), sauf que en posant

$$\Omega \left(\frac{n}{2} + 1; \lambda \frac{r_\gamma^2}{2} \right) = \Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right) - \Gamma \left(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2 / 2 \right) \quad (2.55)$$

$$\leq \Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right), \quad (2.56)$$

il est clair que

$$|E(\lambda)| \leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2 \|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \frac{\Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{\Gamma(n/2)} + \frac{n(n+2) \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma} \|a\|_\infty}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2}} + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2 / 2)}{\Gamma(n/2)} \right].$$

Puisque $\Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n}{2} \Gamma \left(\frac{n}{2} \right)$, en remplaçant dans (2.57), on obtient le résultat du corollaire. QED

Remarque 2.4.1 Une examination plus fine de la preuve du théorème 2.4.1 nous permettrait de borner assymétriquement $J(\lambda)$, si nous avons une information sur les signes de $a(0)$ et de $R(x)$. En particulier, si $a(0) > 0$, alors (2.48) sera négatif et cela nous permettrait d'avoir une borne supérieure de $J(\lambda)$, sans considerer la valeur absolue de (2.48). De façon similaire, si $a(x) \geq 0$ et $R(x) \leq 0$ (comme ça devrait être le cas dans notre application pour $I(\lambda)$), alors $\exp(-\lambda R(x)) - 1 > 0$ et $J_2(\lambda) \geq 0$, d'où on pourra se passer de $J_2(\lambda)$ dans l'estimation de la borne inférieure.

D'où le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.2 *(D'après la preuve du théorème 2.4.1) et sous les conditions du théorème 2.4.1, et si de plus $a(x) \geq 0$ et $R(x) \leq 0$ dans $B(0, r_\gamma)$, alors*

$$-E_L(\lambda) \leq J(\lambda) - \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \leq E_U(\lambda),$$

avec les expressions respectives de l'erreur superieur, et l'erreur inférieure suivantes :

$$E_U(\lambda) = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left[n - 2 \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right] + \frac{n(n+2) \|a\|_\infty \|R/Q^2\|_{\infty, r_\gamma}}{\gamma^{n/2+2} \lambda^2} \right),$$

et

$$E_L(\lambda) = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left[n - 2 \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right] + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right)$$

Preuve Si on suppose que $a(x) \geq 0$ et $R(x) < 0$ alors d'après la preuve du théorème (2.4.1), sachant que

$$J(\lambda) =: J_1 + J_2, \quad (2.57)$$

où

$$J_1(\lambda) = \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} + E_1(\lambda),$$

et puisque en particulier $a(0) \geq 0$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) &= \int_{B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx - \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \\ &\leq \int_{B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \\ &\leq \left| \int_{B_Q(0, r_\gamma)} \rho_2(x) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \right|. \end{aligned} \quad (2.58)$$

D'après l'hypothèse que $R(x) \leq 0$ et $a(x) \geq 0$, alors

$$J_2(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) (e^{-\lambda R(x)} - 1) e^{-\lambda Q(x)/2} dx \geq 0,$$

d'où

$$-|E_1(\lambda)| \leq E_1(\lambda) + J_2(\lambda) \leq E_1(\lambda) + |J_2|. \quad (2.59)$$

D'après les formules (2.49), (2.50), (2.54) et (2.59), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) + |J_2| &\leq \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left(\frac{n}{2} - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) + \frac{n(n+2) \|a\|_\infty \|R/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda^2 \gamma^{n/2+2}} \right] \\ &=: E_U(\lambda), \end{aligned}$$

aussi d'après (2.52), on obtient

$$-|E_1(\lambda)| \geq -\frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left[\frac{2\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left(\frac{n}{2} - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right],$$

d'où il suffit de choisir la borne inférieure comme suit :

$$E_L(\lambda) = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{\|\rho_2/Q\|_{\infty, r_\gamma}}{\lambda} \left[n - 2 \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right] + |a(0)| \frac{\Gamma(n/2; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right).$$

Enfin on obtient l'inégalité suivante :

$$-E_L(\lambda) \leq J(\lambda) - \frac{a(0)}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \leq E_U(\lambda).$$

QED

Remarque 2.4.2 Il est clair que le théorème 2.4.1 et le corollaire 2.4.2 sont valables si on remplace r_γ , par tout réel $R_\gamma < r_\gamma$.

2.5 Application pour une estimation de $I(\lambda)$

Dans cette section, on se propose d'utiliser le théorème 2.4.1, pour estimer les intégrales I_+ et I_- comme données en 2.3. Mais comme on l'a signifié précédemment, dû à l'effet de symétrie, il suffira d'estimer I_+ donnée en (2.38) et l'estimation de I_- , s'en déduira.

2.5.1 Estimation Asymptotique de $I_\pm(\lambda)$

En s'apercevant que l'intégrale (2.38) est du type 2.41, on appliquera les résultats de la section précédente pour estimer asymptotiquement $I_\pm(\lambda)$.

Pour des soucis de notations, nous posons $x = (x_-, x_+)$ en lieu et place de $x' = (x'_-, x'_+)$ définie dans l'expression q donnée en (2.40). Ce qui signifie clairement que $x \in \mathbb{R}^n$ au lieu de $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

D'après les expressions (2.38), (2.39) et 1.22, et par analogie à la forme de l'intégrale 2.41, on aura une phase stationnaire

$$\psi(x) = (c_1 + q(x))^{\alpha/2} - c_1^{\alpha/2},$$

et une amplitude

$$a(x) = \tilde{\chi}_+ (1 - |x_-|^2 + |x_+|^2)^{-1/2},$$

où $c_1 = (a_1^-)^{-1} > 0$ et $q(x)$ est la forme quadratique définie positive donnée en (2.40).

Si on introduit la fonction $f(y) = (c_1 + y)^{\alpha/2}$, alors

$$f(y) = c_1^{\alpha/2} + \frac{\alpha}{2} c_1^{\frac{\alpha}{2}-1} y + \frac{\alpha}{4} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) (c_1 + \theta_y y)^{\frac{\alpha}{2}-2} y^2$$

avec $0 < \theta_y < 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\alpha}{2} \cdot c_1^{\frac{\alpha}{2}-1} q(x) + R(x) \\ &= Q(x)/2 + R(x), \end{aligned}$$

où $Q(x) = \alpha c_1^{\frac{\alpha}{2}-1} q(x)$. Si de plus $\alpha \leq 4$,

$$\begin{aligned} |R(x)| &\leq \frac{|\alpha(\alpha-2)|}{8} c_1^{\frac{\alpha}{2}-2} q(x)^2 \\ &= \frac{|2-\alpha|}{8\alpha} c_1^{-\alpha/2} Q(x)^2. \end{aligned}$$

En observant que $R(x) \leq 0$, on a que $R = -R_-$, puis en choisissant $0 < \alpha < 2$ qui est une bande intéressante des valeurs de α applicables aux portefeuilles, si $\frac{1}{2}Q - R_- \geq \frac{\gamma}{2}Q$ cela implique que $0 \geq R \geq \frac{\gamma-1}{2}Q$, d'où $|R| \leq \frac{1-\gamma}{2}Q$, ainsi il suffira de choisir r_γ de tel sorte que

$$\frac{|2-\alpha|}{8\alpha} c_1^{-\alpha/2} Q(x)^2 \leq \frac{1-\gamma}{2} Q(x),$$

d'où

$$Q(x) \leq \frac{4\alpha(1-\gamma)}{|2-\alpha|} c_1^{\alpha/2} \leq r_\gamma^2,$$

par conséquent, il suffit de prendre

$$r_\gamma^2 = \frac{4\alpha(1-\gamma)}{|2-\alpha|} \cdot c_1^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (2.60)$$

Les estimations précédentes impliquent que

$$\|R/Q^2\|_\infty \leq \frac{|\alpha-2|}{8\alpha} c_1^{\frac{-\alpha}{2}}$$

uniformément sur \mathbf{R}^n . Par suite revenons à l'amplitude donnée en 2.5.1, pour préciser la fonction de troncature $\tilde{\chi}_+$ qu'on utilisera. En effet, on choisit la fonction de troncature de la forme

$$\tilde{\chi}_+(x) = g\left(\frac{Q(x)}{r_\gamma^2}\right),$$

où $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de troncature C^1 égale à 1 sur un voisinage de 0, et ayant son support dans $[0, 1]$.

Pour une programmation explicite, on pourra choisir g dans la famille des fonctions indexées par b et notée g_b , tel que $\|g'_b\|_\infty = \frac{2}{1-b}$. Ainsi, des calculs simples montrent que pour tout $0 < b < 1$, on pourrait choisir

$$g_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq b \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1-b}\right)^2 (x-b)^2 & \text{si } b \leq x \leq \frac{b+1}{2} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1-b}\right)^2 (x-1)^2 & \text{si } \frac{b+1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}. \quad (2.61)$$

Remarque 2.5.1 b est choisi de tel sorte que $g_b = 1$ dans $[0, b]$ et $\|g'_b\|_\infty = \frac{2}{1-b}$ représente la seule information dépendant de g dont on a besoin dans nos estimations. Pour $b = 0.5$, par exemple on a

$$g_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ 8(1-x)^2 & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1 \\ 1 - 2(2x-1)^2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \end{cases} \quad (2.62)$$

Le reste d'ordre 2 du développement de Taylor de l'amplitude $a(x)$ est $\rho_2(x) = a(x) - a(0) - \nabla a(0)x^t$ pour $a(x) = g(Q(x)/r_\gamma^2)h(1 - |x_-|^2 + |x_+|^2)$, où $h(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$. Puisque $\nabla a(0) = 0$, on obtient le reste de Taylor de $a(x)$ écrit en fonction de g_b et h suivant :

$$\begin{aligned} \rho_2(x) &= a(x) - 1 & (2.63) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{|x_-|^2 - |x_+|^2}{(1 - \theta(|x_-|^2 - |x_+|^2))^{3/2}} + \frac{Q(x)}{r_\gamma^2} g'_b\left(\theta' \frac{Q(x)}{r_\gamma^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{|x_-|^2 - |x_+|^2}{(1 - \theta(|x_-|^2 - |x_+|^2))^{3/2}} \cdot \frac{Q(x)}{r_\gamma^2} g'_b\left(\theta' \frac{Q(x)}{r_\gamma^2}\right), \end{aligned}$$

avec $\theta = \theta_x, \theta' = \theta'_x \in (0, 1)$ donnés convenablement. Il existe R_γ vérifiant $R_\gamma < r_\gamma$ et tel que $||x_-|^2 - |x_+|^2| \leq 1/2$. En effet, pour être plus explicite, en observant simplement que

$$||x_-|^2 - |x_+|^2| \leq |x|^2 \leq \frac{Q(x)}{\lambda_{\min}(Q)} \quad (2.64)$$

$$\leq \frac{r_\gamma^2}{\lambda_{\min}(Q)} \quad (2.65)$$

où $\lambda_{\min}(Q)$ est la plus petite valeur propre de la matrice Q qui définit la forme quadratique $Q(x) = xQx^t/2$, et si on décide à choisir r_γ^2 aussi petit de sorte que $||x_-|^2 - |x_+|^2| \leq 1/2$, d'après les inégalités établies en 2.65, il suffira de choisir

$$R_\gamma^2 = \min\left(r_\gamma^2, \frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\right). \quad (2.66)$$

Aussi, avec ce choix de R_γ on a :

$$\|a\|_\infty \leq \sup_{B(0, R_\gamma)} (1 - |x_-|^2 + |x_+|^2)^{-1/2} \leq \sqrt{2}.$$

Dans notre cas d'application, une expression explicite de λ_{\min} est

$$\lambda_{\min}(Q) := \frac{\alpha}{(a_1^-)^{\frac{\alpha}{2}}} \min\left(\frac{a_1^-}{a_2^-} - 1, \frac{a_1^-}{a_{n_+}^+} + 1\right). \quad (2.67)$$

Si de plus on prend en compte l'autre contrainte sur r_γ comme donnée en (2.60), on choisira R_γ^2 comme suit

$$R_\gamma^2 := \min\left(\frac{4\alpha(1-\gamma)}{2-\alpha} c_1^{\alpha/2}; \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2}\right). \quad (2.68)$$

Aussi en introduisant la fonction croissante $f(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\theta y}}$ pour $0 < y < 1/2$ et $0 < \theta < 1$, et puisque $|x_-|^2 - |x_+|^2 \leq 1/2$, on a que

$$f(|x_-|^2 - |x_+|^2) < f(1/2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\theta}} \leq \sqrt{2}$$

et du fait que $0 < \theta < 1$, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{|x_-|^2 - |x_+|^2}{\sqrt{1 - \theta(|x_-|^2 - |x_+|^2)}} &\leq |x|^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\theta}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_{\min}(Q)} Q(x) \end{aligned} \quad (2.69)$$

sous la contrainte du choix de r_γ comme indiqué en (2.65) et de la donnée de l'inégalité 2.69, une estimation de (2.63) divisé par $Q(x)$, implique :

$$\left\| \frac{\rho_2(x)}{Q(x)} \right\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_{\min}(Q)} \left(1 + \frac{\|g'\|_\infty}{r_\gamma^2} \right) + \frac{\|g'\|_\infty}{r_\gamma^2}. \quad (2.70)$$

En particulier pour $g = g_b$ on a

$$\|g'\|_\infty = \|g'_b\|_\infty = \frac{2}{1-b}$$

et

$$\left\| \frac{\rho_2(x)}{Q(x)} \right\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_{\min}(Q)} \left(1 + \frac{2}{(1-b)r_\gamma^2} \right) + \frac{2}{(1-b)r_\gamma^2}. \quad (2.71)$$

En introduisant les constantes $\widehat{K}_1^\pm, \widehat{K}_2^\pm$ comme suit :

$$\widehat{K}_1^\pm := \frac{\sqrt{2} n}{\lambda_{\min}(Q)} \left(1 + \frac{\|g'\|_\infty}{R_\gamma^2} \right) + \frac{\|g'\|_\infty}{R_\gamma^2} \quad (2.72)$$

et

$$\widehat{K}_2^\pm := \frac{n(n+2)}{\gamma^{\frac{n}{2}+2}} \frac{2-\alpha}{8\alpha} (a_1^-)^{\alpha/2}. \quad (2.73)$$

Soit la fonction

$$\begin{aligned} K_1^\pm(\lambda) &:= \widehat{K}_1^\pm \left[1 - \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} - 2 \frac{\left(\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)} \right] \\ &= \widehat{K}_1^\pm \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\Gamma(n/2)} - \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1; \lambda r_\gamma^2/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

et

$$\widehat{K}_2^\pm := \frac{n(n+2)}{\gamma^{\frac{n}{2}+2}} \frac{2-\alpha}{8\alpha} (a_1^-)^{\alpha/2}. \quad (2.75)$$

Si E_\pm est la partie "erreur" du théorème 2.4.1 appliqué à $I_\pm(\lambda)$, alors par l'effet de symétrie l'erreur dû à $I_\pm(\lambda)$ sera donnée par l'estimation suivante lorsque $\lambda \geq R_1^\alpha$:

$$\frac{2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{|E_+(\lambda) + E_-(\lambda)| \leq}{\widehat{K}_1^\pm \frac{\left[1 - \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} - 2 \frac{\left(\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)} \right]}{\lambda} + \frac{\widehat{K}_2^\pm}{\lambda^2} + \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right),$$

Remarquons que $\frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})}{\lambda \Gamma(\frac{n}{2})}$ est une fonction positive croissante en λ , comme produit de deux fonctions positives ($\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})$ et λ^{-1}), toutes les deux décroissantes en λ . Par conséquent si $\lambda \geq R_1^\alpha$, on a l'inégalité suivante :

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{R_1^\alpha \cdot r_\gamma^2}{2}\right)}{R_1^\alpha \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \geq -\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \lambda},$$

et le fait que $\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{\lambda r_\gamma^2}{2})$ soit décroissante en λ , implique la majoration suivante :

$$|E_+(\lambda) + E_-(\lambda)| \leq \frac{2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\widehat{K}_1^\pm \frac{\left[1 - 2 \frac{\left(\frac{\lambda \cdot r_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)}\right]}{\lambda} + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R_1^\alpha}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R_1^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} + \frac{\widehat{K}_2^\pm}{\lambda^2} \right).$$

Le théorème 2.4.1 implique le résultat intermédiaire suivant donné comme lemme pour de futures références :

Lemme 2.5.1 *Si $\lambda > R_1^\alpha$, alors*

$$I_+(\lambda) + I_-(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} + E_+(\lambda) + E_-(\lambda),$$

avec $E_+ + E_-$ majorée comme suit

$$|E_+(\lambda) + E_-(\lambda)| \leq \frac{2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\widehat{K}_1^\pm \frac{\left[1 - 2 \frac{\left(\frac{\lambda \cdot r_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda r_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)}\right]}{\lambda} + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R_1^\alpha}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R_1^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} + \frac{\widehat{K}_2^\pm}{\lambda^2} \right). \quad (2.76)$$

D'après (2.32), pour obtenir l'erreur finale due à E_\pm , on devra intégrer par rapport à R_1 , l'expression de l'erreur donnée par le lemme 2.76 ci-dessus. Soit ER_\pm une expression de cette erreur due à I_\pm , on pourra écrire

$$|ER_\pm| = C' \int_{R_1}^{\infty} r^n (E_+(r^\alpha) + E_-(r^\alpha)) \exp(-c_1^{\frac{\alpha}{2}} r^\alpha) dr,$$

ou mieux encore, en utilisant le plus souvent (2.97) pour le calcul des intégrales, on obtiendra l'estimation suivante :

$$|ER_\pm| \leq \frac{2C' (2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\widehat{K}_1^\pm \left[1 - 2 \frac{\left(\frac{R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}\right] \cdot E11 + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R_1^\alpha}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R_1^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot E12 + \widehat{K}_2^\pm \cdot E13 \right) \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} E11 &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} \frac{\left[1 - 2 \frac{\left(\frac{\lambda \cdot R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\lambda R_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)}\right]}{\lambda(1+n/2)} r^n dr \\ &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} \left[1 - 2 \frac{\left(\frac{r^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{r^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2}}}{n\Gamma(n/2)}\right] r^{-\alpha(1+n/2)} r^n dr \\ &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-r^\alpha c_1^{\alpha/2}} r^{n-\alpha(1+n/2)} dr - \frac{2 \left(\frac{R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \int_{R_1}^{\infty} e^{-r^\alpha (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2})} r^{n-\alpha} dr \\ &= E111 \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{2+n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) - E112 \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2}) \cdot R_1^\alpha\right), \end{aligned}$$

$$\text{où } E_{111} = \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{\alpha(2+n)}{4}}}{\alpha}, \quad E_{112} = \frac{2(c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2})^{1 - \frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2}}{n\alpha\Gamma(n/2)}.$$

$$\begin{aligned} E_{12} &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} \lambda^{-n/2} r^n dr \\ &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} r^{-n\alpha/2} r^n dr \\ &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-r^\alpha c_1^{\alpha/2}} r^{n-\alpha n/2} dr \\ &= \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{13} &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} \lambda^{-2 - \frac{n}{2}} r^n dr \\ &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} r^{-(4+n)\alpha/2} r^n dr \\ &= \int_{R_1}^{\infty} e^{-r^\alpha c_1^{\alpha/2}} r^{n-\alpha(n+4)/2} dr \\ &= \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{(n+4)\alpha}{4}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n+4}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \end{aligned}$$

Notons que E_{11} , E_{12} , E_{13} ont été calculés en se servant de (2.97). Ainsi, on pourra proposer le corollaire suivant obtenu après une intégration par rapport à la variable r de $I_-(\lambda) + I_+(\lambda)$, étant donné que $\lambda = r^\alpha$.

Corollaire 2.5.1 Une estimation de l'erreur de l'intégrale (2.3) dû à $I_-(\lambda)$ et $I_+(\lambda)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} |ER_\pm| &\leq \frac{2C'(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \cdot \left\{ \widehat{K}_1^\pm \left[1 - 2 \frac{\left(\frac{R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \right] \cdot \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{\alpha(2+n)}{4}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{2+n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \right. \\ &\quad - \frac{2(c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2})^{1 - \frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2}}{n\alpha\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2}) \cdot R_1^\alpha\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R_1^\alpha}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R_1^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \\ &\quad \left. + \widehat{K}_2^\pm \cdot \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{(n+4)\alpha}{4}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n+4}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

2.5.2 Calcul de la composante principale due à $I_\pm(\lambda)$

La composante principale due à $I_\pm(\lambda)$ sera obtenue en intégrant la composante principale de $I_+(\lambda) + I_-(\lambda)$ comme définie en (2.76), ainsi qu'en tenant compte de la symétrie des fonctions tronquées χ_+ et χ_- , on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 F_{pc} &= C' \frac{2(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \int_{R_1}^{\infty} r^{-n\alpha/2} r^n e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} dr \\
 &= C' \frac{2(2\pi)^{n/2}}{\alpha \sqrt{\det(Q)}} \int_{R_1}^{\infty} r^{n-\alpha(n/2)} e^{-\frac{\lambda}{(a_1^-)^{\alpha/2}}} dr \\
 &= \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha} \frac{2C' (2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \\
 &= A_{pc} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right),
 \end{aligned}$$

et puisque $C' = c^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot \frac{C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\det(\mathbb{A})}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 A_{pc} &= \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha} \frac{2C' (2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \\
 &= 2 \frac{(2\pi)^{n/2} (a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha} \frac{c^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\det(\mathbb{A}) \det(Q)}}.
 \end{aligned}$$

Donnons déjà une expression explicite de $\det(\mathbb{A})$, $\det(Q)$. En effet,

$$\begin{aligned}
 \det(Q) &= \alpha^n c_1^{n(\frac{\alpha}{2}-1)} \prod_{j=2}^{n-} \left(\frac{1}{a_j^-} - \frac{1}{a_1^-}\right) \prod_{i=1}^{n+} \left(\frac{1}{a_j^-} + \frac{1}{a_1^+}\right) \\
 &= \alpha^n c_1^{\frac{n\alpha}{2}} c_1^n \prod_{j=2}^{n-} \left(\frac{a_1^-}{a_j^-} - 1\right) \prod_{i=1}^{n+} \left(\frac{a_1^-}{a_j^+} + 1\right) \\
 \det(\mathbb{A}) &= a_1^- \prod_{j=2}^{n-} a_j^- \prod_{i=1}^{n+} a_i^+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\det(\mathbb{A}) \det(Q)} &= \alpha^{n/2} c_1^{\frac{n\alpha}{4} - \frac{1}{2}} \sqrt{\prod_{j=2}^{n-} |a_1^- - a_j^-| \prod_{i=1}^{n+} |a_1^- + a_j^+|} \\
 A_{pc} &= 2 \frac{(2\pi)^{n/2} \alpha^{-n/2} c_1^{-\frac{n\alpha}{4} + \frac{1}{2}} (a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha} \frac{c^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-} |a_1^- - a_j^-| \prod_{i=1}^{n+} |a_1^- + a_j^+|}} \\
 &= 2 \frac{\alpha^{-\frac{n+2}{2}} (a_1^-)^{\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-} |a_1^- - a_j^-| \prod_{i=1}^{n+} |a_1^- + a_j^+|}}.
 \end{aligned}$$

Théorème 2.5.1 *Etant donné le taux de confiance $1-p$, on pourra obtenir une VaR_{pc}^p approximative restreinte à la composante principale via la recherche de la solution R de l'équation en R_1 suivante :*

$$2 \frac{\alpha^{-\frac{n+2}{2}} (a_1^-)^{\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-} |a_1^- - a_j^-| \prod_{i=1}^{n+} |a_1^- + a_j^+|}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) = p, \quad (2.79)$$

où

$$VaR_{pc}^p = \frac{c^{-\frac{2}{\alpha}} R^2}{2} - \Theta.$$

Pour plus de simplification lors des tests numériques, écrivons aussi l'expression de l'erreur due à I_{\pm} , en fonction de A_{pc} .

Remarque 2.5.2 L'expression de l'erreur comme fonction de la constante A_{pc} est donnée par :

$$\begin{aligned} |ER_{\pm}| \leq & A_{pc} \cdot \left\{ \widehat{K}_1^{\pm} \cdot (a_1^-)^{-\frac{\alpha(2+n)}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{2+n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \right. \\ & - \frac{2(a_1^-)^{-\frac{(1+n)}{2}} (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2})^{1-\frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_{\gamma}^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2}) \cdot R_1^{\alpha}\right) \\ & + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R_1^{\alpha}}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R_1^{\alpha} \cdot R_{\gamma}^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (a_1^-)^{-\frac{n\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \\ & \left. + \widehat{K}_2^{\pm} \cdot (a_1^-)^{-\frac{(n+4)\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n+4}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.5.3 Une estimation de l'erreur due à $I_0(\lambda)$:

Pour compléter l'estimation de l'erreur, il reste à estimer l'erreur due à $I_0(\lambda)$. Ainsi nous allons estimer la contribution de

$$I_0(\lambda) = \int_{\Sigma} e^{-\lambda\varphi(x)} \chi_0(x) L_{\eta}(x), \quad (2.81)$$

pour laquelle la phase est donnée par la fonction

$$\varphi(x) = (x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}. \quad (2.82)$$

Rappelons que φ atteint son minimum absolu en $c_1^{\alpha/2}$ aux deux points $\pm e_1 := (\pm e_1^-, 0)$ de Σ , qui sont à l'extérieur du support de χ_0 . Notre but est de donner avec une bonne précision une estimation de I_0 . Une estimation de l'intégrale $I_0(\lambda)$ aurait été plus abordable, si Σ est un compact (c'est le cas dans notre application lorsque $n_+ = 0$), on aurait dans ce cas une majoration quasi-triviale comme suit :

$$|I_0(\lambda)| \leq \exp\left(-\lambda \min_{\text{supp}\chi_0} (\varphi - \varphi(e_1))\right) |S_{n-1}| e^{-\varphi(e_1)},$$

car la mesure de Liouville restreinte à l'hypersphère S_{n-1} est simplement la mesure surfacique de l'hypersphère. Cependant dans le cas général où ($n_+ \neq 0$ et $n_- \neq 0$), la mesure de Liouville de Σ serait infini, ainsi nous devons garder le caractère exponentiellement décroissant de l'expression à intégrer, pour que l'intégrale sur Σ soit convergente.

Etant donné $\varepsilon \in (0, 1)$, on a l'expression

$$\begin{aligned} e^{\lambda\varphi(e_1)} I_0(\lambda) &= \int_{\Sigma} e^{-\lambda(\varphi(x) - \varphi(e_1))} \chi_0 L_{\eta} \\ &\leq \max_{\text{supp}\chi_0} \exp(-\lambda(1 - \varepsilon)(\varphi - \varphi(e_1))) \\ &\quad \cdot \int_{\Sigma} e^{\varepsilon\lambda(\varphi - \varphi(e_1))} \chi_0 L_{\eta}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Etant donné λ_0 tel que $\lambda > \lambda_0$, en passant à la valeur absolue, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} e^{\lambda\varphi(e_1)} I_0(\lambda) &= \int_{\Sigma} e^{-\lambda(\varphi(x)-\varphi(e_1))} \chi_0 L_{\eta} \\ &\leq \max_{\text{supp } \chi_0} \exp(-\lambda(1-\varepsilon)(\varphi - \varphi(e_1))) \cdot \left| \int_{\Sigma} \exp(-\varepsilon\lambda(\varphi - \varphi(e_1))) \chi_0 L_{\eta} \right| \\ &\leq \exp\left(-\lambda(1-\varepsilon) \min_{\text{supp } \chi_0} (\varphi - \varphi_0)\right) \cdot e^{\lambda_0\varphi(e_1)} \cdot \int_{\Sigma} e^{-\varepsilon\lambda_0\varphi} |L_{\eta}|. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'estimation suivante pour $I_0(\lambda)$:

$$|I_0(\lambda)| \leq K_{\lambda_0, \varepsilon} e^{-\lambda(\varphi(e_1)+m_{\varepsilon})}, \quad (2.84)$$

où

$$m_{\varepsilon} = (1-\varepsilon) \min_{\text{supp } \chi_0} (\varphi - \varphi(e_1)) > 0, \quad (2.85)$$

et

$$K_{\lambda_0, \varepsilon} = e^{\varepsilon\lambda_0\varphi(e_1)} \int_{\Sigma} e^{-\varepsilon\lambda_0\varphi} |L_{\eta}| < \infty. \quad (2.86)$$

On s'aperçoit que $I_0(\lambda)$ est exponentiellement décroissante par rapport à $I_{\pm}(\lambda)$, quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Pour obtenir une forme quantitative précise de $I_0(\lambda)$, nous aurons besoin des estimations précises des deux paramètres constants m_{ε} et $K_{\varepsilon, \lambda_0}$, avec une attention spéciale sur le paramètre α de la distribution DLG_{α} et le choix du rayon R_{γ} défini dans l'estimation de $I_{\pm}(\lambda)$. On va d'abord faire une estimation de $K_{\varepsilon, \lambda_0}$, et par la suite on déterminera la valeur de m_{ε} .

Pour une estimation de $K_{\varepsilon, \lambda_0}$, on va utiliser le théorème de Stokes pour transformer l'intégrale sur l'hypersurface Σ , en une intégrale sur l'extérieur d'un domaine. Ainsi, on aura besoin d'explicitier la dérivée extérieure de L_{η} .

Lemme 2.5.2 *Soit $\eta = \eta(x)$ une fonction de classe C^2 et $v = v(x)$ de classe C^1 , toutes deux définies sur des ouverts de \mathbb{R}^{n+1} dans lesquels $\nabla\eta$ est partout non nulle, alors*

$$d(vL_{\eta}) = g(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1},$$

où

$$g(x) = \frac{1}{|\nabla\eta|^2} (\nabla v \cdot \nabla\eta + v\Delta\eta) - \frac{2v}{|\nabla\eta|^4} \sum_{j,k} \frac{\partial^2\eta}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial\eta}{\partial x_j} \frac{\partial\eta}{\partial x_k}.$$

Preuve En effet

$$\begin{aligned} d(vL_{\eta}) &= \left(\frac{v}{|\nabla\eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial\eta}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge [j] \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} \right) \\ &= d\left(\frac{v}{|\nabla\eta|^2} \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial\eta}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge [j] \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{v}{|\nabla\eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} d\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j} \right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge [j] \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} \end{aligned} \quad (2.87)$$

mais

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} d\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j^2} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} ((-1)^{j-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j^2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}) \\ &= \Delta \eta dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{v}{|\nabla \eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} d\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1} = \frac{v \Delta \eta}{|\nabla \eta|^2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Aussi

$$\begin{aligned} d\left(\frac{v}{|\nabla \eta|^2}\right) &= \frac{dv}{|\nabla \eta|^2} + v \cdot d\left(\frac{1}{|\nabla \eta|^2}\right) \\ &= \frac{dv}{|\nabla \eta|^2} - \frac{v}{|\nabla \eta|^4} d(|\nabla \eta|^2) \\ &= \frac{1}{|\nabla \eta|^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx_k - \frac{v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial |\nabla \eta|^2}{\partial x_k} dx_k \\ &= \frac{1}{|\nabla \eta|^2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx_k - \frac{v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{k,l=1}^{n+1} 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial \eta}{\partial x_l} dx_k. \end{aligned}$$

Maintenant calculons le produit exterieur suivant

$$\begin{aligned} d\left(\frac{v}{|\nabla \eta|^2}\right) \wedge \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge dx_{n+1} &= \\ \left(\frac{1}{|\nabla \eta|^2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - \frac{2v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{l,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_l \partial x_j} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_l}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} &= \\ \left(\frac{\nabla v \cdot \nabla \eta}{|\nabla \eta|^2} - \frac{2v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{l,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial \eta}{\partial x_l}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \end{aligned}$$

d'ou en conclusion

$$\begin{aligned} d(vL_\eta) &= \left(\frac{\nabla v \cdot \nabla \eta}{|\nabla \eta|^2} - \frac{2v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{l,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial \eta}{\partial x_l}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} + (\Delta \eta) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \\ &= \left(\frac{\nabla v \cdot \nabla \eta}{|\nabla \eta|^2} + \frac{v \Delta \eta}{|\nabla \eta|^2} - \frac{2v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{l,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial \eta}{\partial x_l}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \end{aligned}$$

d'où

$$g(x) = \frac{\nabla v \cdot \nabla \eta}{|\nabla \eta|^2} + \frac{v \Delta \eta}{|\nabla \eta|^2} - \frac{2v}{|\nabla \eta|^4} \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial \eta}{\partial x_l} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}.$$

Une application du lemme précédent se fera pour $\eta(x) = \sqrt{|x_-|^2 - |x_+|^2}$, par conséquent

$$\nabla\eta(x) = \eta(x)^{-1} (x_-, -x_+),$$

$$|\nabla\eta(x)|^2 = |x|^2/(|x_-|^2 - |x_+|^2) = |x|^2/\eta(x)^2.$$

Pour $\{\eta(x) \geq 1\}$, on a l'inégalité suivante :

$$|\nabla\eta(x)| \geq |x|,$$

et par conséquent, en utilisant Cauchy-Schwartz,

$$\frac{|\nabla v \cdot \nabla\eta|}{|\nabla\eta|^2} \leq \frac{|\nabla v|}{|x|}.$$

Aussi nous avons que

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x_j \partial x_k} = \epsilon_j \frac{\delta_{jk}}{\eta(x)} - \epsilon_j \epsilon_k \frac{x_j x_k}{\eta(x)^3},$$

où $\epsilon_j = 1$ si $1 \leq j \leq n_-$, et $\epsilon_j = -1$ si $n_- + 1 \leq j \leq n_- + n_+ = n + 1$. En particulier,

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_j \frac{1}{\eta(x)} - \frac{x_j^2}{\eta(x)^3} \\ &= \frac{(n_- - n_+)}{\eta} + \frac{|x|^2}{\eta^3} \end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2\eta}{\partial x_j \partial x_k} \right| &\leq \frac{1}{\eta} + \frac{|x_k||x_j|}{\eta^3} \\ &\leq (1 + |x|^2). \quad \eta(x) \geq 1 \end{aligned}$$

Or sachant que $\frac{\partial\eta}{\partial x_j} = \epsilon_j \frac{x_j}{\eta}$ nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2v}{|\nabla\eta|^4} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2\eta}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial\eta}{\partial x_j} \frac{\partial\eta}{\partial x_k} &= \frac{2v}{|\nabla\eta|^4} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (\epsilon_j \frac{\delta_{jk}}{\eta(x)} - \epsilon_j \epsilon_k \frac{x_j x_k}{\eta(x)^3}) \epsilon_j \frac{x_j}{\eta} \epsilon_k \frac{x_k}{\eta} \\ &= \frac{2v}{|\nabla\eta|^4} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (\epsilon_j \frac{x_j^2}{\eta^3} - \frac{1}{\eta^5} \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2) \right) \\ &= \frac{2v}{|\nabla\eta|^4} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{|x|^4}{\eta^5} \right). \end{aligned} \tag{2.88}$$

Puisque $\eta(x) \leq |x|$ on a que $|\nabla x| \geq 1$, ainsi en combinant les estimations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left| \frac{|\nabla v \cdot \nabla\eta|}{|\nabla\eta|^2} + \frac{v}{|\nabla\eta|^2} \left(\frac{n_- - n_+}{\eta} + \frac{|x|^4}{\eta^3} \right) - \frac{2v}{|\nabla\eta|^4} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{|x|^4}{\eta^5} \right) \right| \\ &\leq \frac{|\nabla v|}{|x|} + \frac{|v| \cdot \eta^2}{|x|^2} \left(\frac{|n_- - n_+|}{\eta} + \frac{|x|^2}{\eta^3} \right) + \frac{2|v|}{|\nabla x|^4} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{|x|^4}{\eta^5} \right) \\ &\leq \frac{|\nabla v|}{|x|} + |v| \left(\frac{|n_- - n_+|}{\eta} + \frac{1}{\eta} \right) + 4|v| \\ &\leq |\nabla v| + |v| (|n_- - n_+| + 5) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une majoration de la fonction g comme suit

$$|g(x)| \leq |\nabla v| + |v| (|n_- - n_+| + 5).$$

En posant $v(x) = \exp(-\varepsilon\lambda_0\varphi(x))$ avec $\varphi(x) = (x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}$, en appliquant le théorème de Stokes au domaine extérieur et en appliquant lemme 2.5.2, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Sigma} e^{-\varepsilon\lambda_0\varphi} L_{\eta} \right| = \left| \int_{\{\eta \geq 1\}} d(e^{-\varepsilon\lambda_0\varphi} L_{\eta}) \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\alpha \varepsilon\lambda_0 (x|\mathbb{A}|^{-1}x^t)^{\alpha/2-1} \left| |\mathbb{A}|^{-1}x \right| + (|n_- - n_+| + 5) \right) e^{-\varepsilon\lambda_0\varphi} dx. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Si on fait le changement de variable $y = (\varepsilon\lambda_0)^{-1/\alpha} |\mathbb{A}|^{1/2} x$, l'intégrale droite de l'inégalité précédente devient :

$$\frac{\sqrt{\det |\mathbb{A}|}}{(\varepsilon\lambda_0)^{n/\alpha}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left\{ \alpha |x|^{\alpha-2} \left| |\mathbb{A}|^{-1/2} x \right| + \frac{|n_- - n_+| + 5}{(\varepsilon\lambda_0)^{1/\alpha}} \right\} e^{-|x|^{\alpha}} dx.$$

Et puisque $\left| |\mathbb{A}|^{-1/2} x \right| \leq \left\| |\mathbb{A}|^{-1} \right\|^{1/2} |x|$, après un changement de variable sphérique $y = r\xi$, en se servant de (2.97) et du fait que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-|y|^{\alpha}} dx &= \frac{1}{\alpha} |S_n| \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) \\ &= \frac{2}{\alpha} \pi^{(n+1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |y|^{\alpha-1} e^{-|y|^{\alpha}} dx &= \frac{1}{\alpha} |S_n| \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \frac{2}{\alpha} \pi^{(n+1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

En collectant tous les termes, on a que $K_{\varepsilon, \lambda_0} \leq \widehat{K}_0(\varepsilon\lambda_0)$, où

$$\begin{aligned} \widehat{K}^0(\varepsilon\lambda_0) &:= \pi^{(n+1)/2} \sqrt{\det |\mathbb{A}|} \frac{e^{\varepsilon\lambda_0(a_1^-)^{-\alpha/2}}}{(\varepsilon\lambda_0)^{n/\alpha}} \\ &\cdot \left\{ 2 \left\| |\mathbb{A}|^{-1} \right\|^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} + \frac{2|n_- - n_+| + 10}{\alpha(\varepsilon\lambda_0)^{1/\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

(Rappelons que $n_- + n_+ = n + 1$). Le déterminant et les normes matricielles respectives de $\|\mathbb{A}\|$ et $\|\mathbb{A}^{-1}\|$ s'écrivent explicitement comme suit :

$$|\det (\mathbb{A})| = \prod_1^{n_-} a_j^- \cdot \prod_1^{n_+} a_j^{n_+},$$

et

$$\|\mathbb{A}\| = \max(a_1^-, a_{n_+}^+), \quad \|\mathbb{A}^{-1}\| = \max\left(\frac{1}{a_{n_-}^-}, \frac{1}{a_1^+}\right).$$

On a besoin de donner une estimation de m_ϵ donné dans notre application comme étant le minimum sur le support de $\chi_0(Q(x)/r_\gamma^2)$, de la fonction $m_\epsilon = (1 - \epsilon)[(c_1 + q(x))^{\alpha/2} - c_1^{\alpha/2}]$, où $q(x) \geq 0$. Dès lors que la fonction $(c_1 + y)^{\alpha/2}$ croît lorsque y positif croît aussi, m_ϵ atteint son minimum aux points où $q(x)$ est minimum sur $\text{supp}(\chi_0(Q(x)/r_\gamma^2))$, qui est inclut dans l'ensemble des x tel que $b \cdot r_\gamma^2 \leq Q(x) \leq r_\gamma^2$, ainsi il est clair que la valeur minimale de $Q(x)$ est $Q(x) = b \cdot r_\gamma^2$, et puisque $q(x) = \alpha^{-1} c_1^{1-\frac{\alpha}{2}} Q(x)$, nous obtenons

$$m_\epsilon = (1 - \epsilon)[(c_1 + \alpha^{-1} c_1^{1-\frac{\alpha}{2}} b \cdot r_\gamma^2)^{\alpha/2} - c_1^{\alpha/2}]. \quad (2.91)$$

En résumé, si on introduit la constante à droite de (2.90) comme étant $\widehat{K}_0 = \widehat{K}(\epsilon, \lambda_0)$, et en remplaçant dans l'inégalité 2.84, on obtient une estimation de $I_0(\lambda)$, donnée comme résultat dans le lemme suivant :

Lemme 2.5.3 *Pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,*

$$|I_0(\lambda)| \leq \widehat{K}^0(\epsilon \lambda_0) e^{-n_\epsilon \lambda},$$

avec

$$n_\epsilon := m_\epsilon + (a_1^-)^{-\alpha/2},$$

$\widehat{K}^0(\epsilon \lambda_0)$, m_ϵ sont données respectivement par (2.90) et (2.91).

Remarque 2.5.3 Pour $\lambda_0 > 0$ fixé, il serait intéressant de choisir $n_0 \geq 1$ et entier, afin de déterminer

$$\widehat{K}_0 = \min_{u \in [\frac{\lambda_0}{2^{n_0}}, \lambda_0]} \widehat{K}^0(u), \quad (2.92)$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{K}^0(u) &:= \pi^{(n+1)/2} \sqrt{\det |\mathbb{A}|} \frac{e^{u(a_1^-)^{-\alpha/2}}}{u^{n/\alpha}} \\ &\cdot \left\{ 2 \| |\mathbb{A}|^{-1} \|^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{n+\alpha}{\alpha})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{2|n_- - n_+| + 10}{u^{\frac{1}{\alpha}} \alpha} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \right\}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Puisque la fonction $\widehat{K}^0(u)$ est continue sur l'intervalle compact $[\frac{\lambda_0}{2^{n_0}}, \lambda_0]$, elle atteint son minimum en $u_{min} \in [\frac{\lambda_0}{2^{n_0}}, \lambda_0]$ et $\widehat{K}_0 = \widehat{K}^0(u_{min})$. Pour que dans notre modèle ce minimum soit atteint, on choisira

$$\epsilon = \frac{u_{min}}{\lambda_0}. \quad (2.94)$$

Lemme 2.5.4

$$|I_0(\lambda)| \leq \widehat{K}_0 e^{-\lambda (c_1^{\alpha/2} + m_\epsilon)},$$

avec m_ϵ donné par (2.91).

Remarque 2.5.4 Même si d'après (2.5.3), on peut choisir $\epsilon \lambda_0$ pour que $\widehat{K}^0(\epsilon \lambda_0)$ soit minimale, on peut de façon analytique chercher le minimum de la fonction en z de la forme

$$z \rightarrow (z^{-k} + C z^{-k-l}) e^{cz}, \quad (2.95)$$

où $k, l, c, C > 0$. Dans notre cas d'application, $z = \varepsilon\lambda_0 > 0$, $k = n/\alpha$ et $l = 1/\alpha$. les valeurs z qui annulent la dérivée sont solutions de l'équation

$$cz^{l+1} - kz^l + cCz - (k+l)C = 0,$$

qui en général ne peut être résolue explicitement. Dans le cas particulier où $l = 1$, ce qui correspond à choisir $\alpha = 1$, une solution positive est donné comme suit

$$z = (2c)^{-1} \left(k - cC + \sqrt{(k - cC)^2 + 4cC(k + 1)} \right) \simeq k/c,$$

pour k assez grand. Une majoration simple du minimum de $\widehat{K}^0(\varepsilon\lambda_0)$ peut s'obtenir exactement en minimisant tout simplement l'une des deux composantes de (2.95), ainsi il suffit de s'apercevoir qu'une fonction de la forme $z \rightarrow z^{-k}e^{cz}$ ($c > 0$) atteint son minimum $c^k k^{-k} e^k$ pour $z > 0$ au point $z = k/c$. Si on choisit $k = n/\alpha$ et $c = (a_1^-)^{-\alpha/2}$, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon\lambda_0} \widehat{K}^0(\varepsilon\lambda_0) &\leq \pi^{(n+1)/2} \sqrt{\det |\mathbb{A}|} (a_1^-)^{-n/2} \frac{e^{n/\alpha}}{(n/\alpha)^{n/\alpha}} \\ &\cdot \left\{ 2 \|\mathbb{A}\|^{-1} \left\| \frac{\Gamma(\frac{n+\alpha}{\alpha})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{2|n-n+|+10}{\alpha} (a_1^-)^{-1/2} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \right\} \right. \\ &= \widehat{K}_{01} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Dans ce cas il est raisonnable de choisir $\varepsilon\lambda_0 = n(a_1^-)^{\alpha/2}/\alpha$. Ainsi pour λ_0 donné, il suffira de choisir $\varepsilon = \frac{n(a_1^-)^{\alpha/2}}{\alpha\lambda_0}$ et par conséquent on pourra déduire la valeur n_ε définie en (2.5.3).

Lemme 2.5.5

$$|I_0(\lambda)| \leq \widehat{K}_{01} e^{-\lambda (c_1^{\alpha/2} + m_\varepsilon)},$$

avec m_ε donné par (2.91).

2.6 Estimation de la VaR avec l'erreur totale

Dans cette partie en tenant compte des erreurs d'approximations, on donne sous forme de théorèmes et de corollaires les équations explicites dont les solutions nous permettront d'obtenir un intervalle dans lequel la VaR se trouvera. Dans la pratique, malgré les complications théoriques apparentes de nos estimations, on constatera qu'il est possible de faire un programme qui permet d'obtenir la $\Gamma - \Theta$ VaR, en utilisant par exemple le logiciel Matlab. Notons qu'on aurait pu faire un programme en C++ pour déterminer la VaR avec la méthode proposée dans ce chapitre. Contrairement à Matlab, un programme C++ aurait permis un meilleur contrôle de la précision du code, afin d'affiner nos résultats et éventuellement la complexité du code. Etant donné λ_0 , on a indiqué dans la remarque (2.5.3) comment on pourrait éventuellement choisir de façon optimale le paramètre ε et par conséquent n_ε . De même, étant donné la matrice \mathbb{A} , on pourra choisir γ, λ_0 et b^{30} , de façon à obtenir les meilleures estimations possibles.

Les calculs qui suivront nécessiteront la formule suivante :

Remarque 2.6.1 Si $a \geq 0$, l'expression suivante est vérifiée :

$$F(a, b, \alpha) = \int_{R_1}^{\infty} r^a e^{-br^\alpha} dr = \alpha^{-1} b^{-\frac{a+1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{a+1}{\alpha}, b \cdot R_1^\alpha\right) \quad (2.97)$$

³⁰si nous limitons le choix de g dans la famille des g_b proposée en (2.61)

Aussi posons $n_\varepsilon = (a_1^-)^{\alpha/2} + m_\varepsilon$, avec m_ε donné en (2.91); En particulier, $n_\varepsilon > (a_1^-)^{\alpha/2}$. En introduisant l'expression suivante

$$K^0 = (a_1^-)^{-\frac{n-1+\alpha}{2}} n_\varepsilon^{-\frac{n+1}{\alpha}} K_{\varepsilon, \lambda_0}. \quad (2.98)$$

Avant tout calcul, rappelons la définition de la fonction Gamma incomplète qu'on utilisera souvent aux fins de nos estimations :

$$\Gamma(z, w) = \int_w^\infty e^{-s} s^{z-1} ds. \quad (2.99)$$

Théorème 2.6.1 *Supposons que $\alpha \leq 2$. Etant donné que $V > -\Theta$, Soit*

$$R^2 := 2c_{n+1, \alpha}^{2/\alpha} (V + \Theta) \quad (2.100)$$

alors

$$F_{\Gamma, \text{pc}}(R) - \mathcal{E}_L(R) \leq F_\Gamma(-V) \leq F_{\Gamma, \text{pc}}(R) + \mathcal{E}_U(R), \quad (2.101)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L(R) = & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ K_1^\pm \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right. \\ & \left. + (a_1^-)^{\frac{\alpha n}{4}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}, R)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$(2.103)$$

pour tout $R > 0$. De plus, si $R^\alpha \geq \lambda_0$, on pourra choisir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_U(R) = & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ K_1^\pm \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right. \\ & \left. + K_2^\pm \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 2, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right\} \\ & + K^0 \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, n_\varepsilon R^\alpha \right). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Preuve.

Si on remplace dans (2.4.2) la variable λ par r^α et on intègre par rapport à la variable r de R à ∞ en gardant $r^n dr$, en multipliant par $C' = c^{-(n+1)/\alpha} C \sqrt{\det|\mathbb{A}|}$ où $c = c_{\alpha, n+1}$, $C = C_{\alpha, n+1}$, on obtient des intégrales du type (2.3) qu'on devra estimer dans les lignes qui suivent. En observant que $\sqrt{\det|\mathbb{A}|}$ est au dénominateur de la constante C' , puis en tenant compte de (2.33), on obtient que

$$(|\det \mathbb{A}| \det Q)^{-1/2} = \alpha^{-n/2} (a_1^-)^{\frac{\alpha n}{4} - \frac{1}{2}} \Delta(\mathbb{A})^{-1/2},$$

où nous avons posé

$$\Delta(\mathbb{A}) := \prod_2^{n_-} (a_1^- - a_j^+) \prod_1^{n_+} (a_1^- + a_j^+).$$

(Rappelons que $Q = \alpha^{n/2} (a_1^-)^{-(\frac{\alpha}{2}-1)} q$, où q est donné par (2.40).) En utilisant (2.3), le terme principal de $I_+ + I_-$ dans (2.76) (qui est, $2(\det(Q))^{-1/2} (2\pi\lambda^{-1})^{n/2} \exp(-\lambda(a_1^-)^{-\alpha/2})$) donnera ce qu'on appellera la composante principale de $F_\Gamma(-V)$, et elle s'écrira

$$F_{\Gamma,\text{pc}}(-V) := 2\alpha^{-n/2} (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} C(a_1^-)^{\frac{\alpha n}{4} - \frac{1}{2}} (\Delta(\mathbb{A}))^{-1/2} \cdot \int_R^\infty r^{n(1-\frac{\alpha}{2})} \exp\left(- (a_1^-)^{-\alpha/2} r^\alpha\right) dr,$$

où $V = \frac{1}{2}c^{-2/\alpha}R - \Theta$. En utilisant (2.97), on obtient

$$F_{\Gamma,\text{pc}}(-V) = A_{\text{pc}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right), \quad (2.105)$$

où $A_{\text{pc}} = 2\alpha^{-\frac{n}{2}-1} (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} C(a_1^-)^{n/2} \Delta(\mathbb{A})^{-1/2}$, ce qui établit la composante principale (pour plus de détails voir la section 2.5.2).

Pour estimer la borne supérieure $\mathcal{E}_U(R)$ et la borne inférieure $\mathcal{E}_L(R)$, on utilisera des techniques d'intégrales similaires. Observons pour estimer $\mathcal{E}_L(R)$ on peut se passer du terme $I_0(\lambda)$, ainsi en utilisant le corollaire 2.4.2, on obtient

$$\begin{aligned} & F_\Gamma(-V) - F_{\Gamma,\text{pc}}(-V) \\ & \geq -C' \int_R^\infty r^n \widehat{E}_L(r^\alpha) dr \\ & = -2(2\pi)^{n/2} \frac{C'}{\sqrt{\det Q}} \left\{ \widehat{K}_1^\pm \int_R^\infty r^{n-\alpha(\frac{n}{2}+1)} \exp\left(-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}}\right) dr \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_R^\infty \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}R_\gamma^2 r^\alpha\right) \exp\left(-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}}\right) r^n dr \right\}. \end{aligned}$$

La première intégrale du coté droit s'évalue facilement en utilisant (2.97), ainsi on obtient

$$\widehat{K}_1^\pm \alpha^{-1} (a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{\alpha n}{4} - \frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right).$$

Pour estimer la deuxième intégrale, on utilise la définition de la fonction Γ -incomplète, puis en changeant la position des variables on obtient une intégrale double de la forme suivante

$$\frac{1}{\Gamma(n/2)} \int_R^\infty s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s} \int_R^{(2R_\gamma^{-2}s)^{1/\alpha}} r^n \exp\left(-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}}\right) dr ds. \quad (2.106)$$

Puisque cette intégrale double devient très petit lorsque R devient grand, nous allons majorer l'intégrale sur $[R, (2R_\gamma^{-2}s)^{1/\alpha}]$ avec une intégrale sur $[R, \infty)$. Ainsi en utilisant (2.97), l'intégrale double (2.106) est majoré par

$$\alpha^{-1} (a_1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, R\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right).$$

Finalement en reunissant tout les calculs et la constante multiplicative $2(2\pi)^{n/2}\alpha^{-n/2}c^{-(n+1)/\alpha}C$. $(a_1^-)^{\frac{\alpha n}{4}-\frac{1}{2}}\Delta(\mathbb{A})^{-1/2}$, on obtient la borne inférieure suivante :

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{E}_L(R) &:= -(a_1^-)^{-\alpha/2} A_{\text{pc}} \widehat{K}_1^\pm \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right) \\
 &\quad -(a_1^-)^{\frac{\alpha n}{4}} A_{\text{pc}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}, R)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right),
 \end{aligned}$$

ce qui prouve une partie du théorème 2.6.1.

L'erreur supérieure pourra se calculer en utilisant des techniques similaires. En effet, en utilisant la borne supérieure du corollaire (2.4.2), puis en intégrant par rapport à la variable r , si $R^\alpha \geq \lambda_0$, alors

$$F_\Gamma(-V) - F_{\Gamma,\text{pc}}(-V) \leq \mathcal{E}_U(R),$$

où

$$\mathcal{E}_U(R) := C' \int_R^\infty r^n \left(\widehat{E}_U(r^\alpha) + \widehat{K}^0(\varepsilon\lambda_0) e^{-n_\varepsilon r^\alpha} \right) dr.$$

Tout calcul fait en se servant de (2.97), on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_U(R) &= A_{\text{pc}} \cdot \sum_{j=1,2} (a_1^-)^{-j\alpha/2} \widehat{K}_j^\pm \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - j, \left(R/\sqrt{a_1^-}\right)^\alpha\right) \\
 &\quad + K^0(\varepsilon\lambda_0) \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, n_\varepsilon R^\alpha\right),
 \end{aligned}$$

avec

$$K^0(\varepsilon\lambda_0) = \alpha^{-1} |\det(\mathbb{A})|^{-1/2} (cn_\varepsilon)^{-\frac{n+1}{\alpha}} C \widehat{K}^0(\varepsilon\lambda_0).$$

ce qui complète la preuve du théorème 2.6.1.

QED

Remarque 2.6.2 Dans la pratique, notre programmation Matlab marcherait avec des conditions sur n de telle sorte que la fonction Γ -incomplète soit reconnue par Matlab. A cet effet, on utilisera un prolongement holomorphe de la fonction Γ -incomplète afin de construire un programme Matlab qui reconnait la fonction spéciale Γ -incomplète plus globalement. Sinon, on pourra proposer d'autres estimations de façon à pouvoir utiliser la fonction Γ -incomplète telle qu'elle est définie par Matlab. En effet, la fonction $\Gamma(x, a)$ est reconnue par Matlab que si $a > 0$.

Remarque 2.6.3 Bien que ce ne soit pas évident au premier coup, les fonctions Γ -incomplètes sont en fait des expansions asymptotiques. Ainsi pour tout z, w fixé

$$\Gamma(z, w) = w^{z-1} e^{-w} + O(w^{z-2} e^{-w}),$$

$w \rightarrow \infty$, tel que

$$\frac{\Gamma(z-k, w)}{\Gamma(z, w)} \simeq w^{-k} \rightarrow 0, \quad w \rightarrow \infty.$$

Ceci montre que le premier et le deuxième termes de l'erreur deviennent négligeables devant la composante principale avec des rapports respectifs of $(R/\sqrt{a_1^-})^{-1}$ et $(R/\sqrt{a_1^-})^{-2}$. Le troisième

terme décroît aussi rapidement. Si on garde seulement le terme principal, on obtient l'expression asymptotique suivante lorsque $R = c_{\alpha, n+1}^{1/\alpha} \sqrt{(V + \Theta)} \rightarrow \infty$, alors

$$\begin{aligned} F_{\Gamma}(-V) &\simeq A_{\text{pc}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \\ &= A_{\text{pc}} \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^{n+1 - \frac{n\alpha}{2}} e^{-(R/\sqrt{a_1^-})^\alpha}, \end{aligned}$$

Si $\alpha = 2$, alors

$$A_{\text{pc}, \alpha=2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(a_1^-)^{n/2}}{\sqrt{\Delta(\mathbb{A})}},$$

où nous posons

$$\Delta(\mathbb{A}) := \prod_2^{n_-} (a_1^- - a_j^-) \prod_1^{n_+} (a_1^- + a_1^+),$$

ainsi, dans le cas où les facteurs de risque suivent une distribution normale, on a

$$\begin{aligned} F_{\Gamma}(-V) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(a_1^-)^n}{\sqrt{\Delta(\mathbb{A})}} \Gamma \left(\frac{1}{2}, \frac{R^2}{a_1^-} \right) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(a_1^-)^{(n+1)/2}}{\sqrt{\Delta(\mathbb{A})}} \frac{e^{-R^2/a_1^-}}{R}, \quad R = \sqrt{V + \Theta}. \end{aligned}$$

Le théorème (2.6.1) peut être utilisé comme suit pour déterminer un intervalle dans lequel on déterminera la VaR_p^Γ . On définit la *composante principale* Γ -VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$ comme étant la solution unique $V = \text{VaR}_p^{\Gamma, \text{pc}}$ de l'équation

$$F_{\Gamma, \text{pc}} \left(c_{\alpha, n+1}^{1/\alpha} \sqrt{2(V + \Theta)} \right) = p. \quad (2.107)$$

Le théorème 2.6.1 propose

$$\text{VaR}_p^\Gamma \simeq \text{VaR}_p^{\Gamma, \text{pc}},$$

cette dernière relation est asymptotiquement intéressante lorsque $p \rightarrow 0$. Etant donné $p \in (0, 1)$, soient $R_L = R_L(p)$ et $R_U = R_U(p)$ les solutions respectives des équations

$$F_{\Gamma, \text{pc}}(R_L) - \mathcal{E}_L(R_L) = p, \quad (2.108)$$

et

$$F_{\Gamma, \text{pc}}(R_U) + \mathcal{E}_U(R_U) = p. \quad (2.109)$$

En écrivant

$$V_j(p) := \frac{1}{2} c_{\alpha, n+1}^{-2/\alpha} R_j(p)^2 - \Theta, \quad j = L, U. \quad (2.110)$$

Puisque (2.102) est vraie pour $R > 0$, nous aurons toujours que $V_L(p) \leq \text{VaR}_p^\Gamma$. D'autre part $\text{VaR}_p^\Gamma \leq V_U(p)$ ne sera vraie que si $c_{n+1, \alpha} 2^{\alpha/2} (\text{VaR}_p^\Gamma + \Theta)^{\alpha/2} \geq \lambda_0$. Cette dernière condition est atteinte si nous choisissons :

$$\lambda_0 = R_L(p)^\alpha \quad (2.111)$$

En Résumé, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.1 *Etant donnés les paramètres $p, a, \gamma \in (0, 1)$, soit $\lambda_0 = R_L(p)^\alpha$, où $R_L(p)$ est la solution de (2.108). De plus, étant donné $\varepsilon \in (0, 1)$, soit $R_U(p)$ la fonction (2.109), alors*

$$\text{VaR}_p^\Gamma \in [V_L(p), V_U(p)].$$

2.6.1 Choix d'un intervalle de la VaR pour $\alpha = 1.320$

Dans cette section en rappelant que $\alpha = 1.320$ a été trouvé via le maximum de vraisemblance, pour p donné et raisonnable, on montre comment lire dans le graphique la VaR_{UB} , VaR_{PC} et la VaR_{LB} . Notons aussi que le coefficient $\lambda = 0.8913$ correspondant à 61 jours de données historiques, nous permet d'estimer la matrice de variance covariance par la méthode EMWA de RiskMetrics. Les valeurs de $\varepsilon, n_\varepsilon$ sont donnés par 2.5.4 dès lors qu'on fixe $\lambda_0 = R^\alpha$, lorsque $p = 0.0001$. Voir 1.6.2 pour plus de détails sur le calcul de la matrice de variance covariance EWMA. Dans tous nos tests numériques, on va considérer $t = 1$.

2.6.1.1 Test Numérique pour $\alpha = 1.320$

Nous considérons un portefeuille contenant 6 options européennes d'achats (6 calls) ou de vente (5 puts) sur actions, ainsi le prix du portefeuille à l'instant t est donné par :

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^6 \left[\frac{\partial C_i}{\partial S_i}(0) S_i(t) - C_i(t, S_i(t)) \right] + \sum_{j=7}^{11} \left[P_j(t, S_j(t)) - \frac{\partial P_j}{\partial S_j}(0) S_j(t) \right].$$

Les prix des différents actifs du portefeuille du CAC 40 considéré dans notre application, sont donnés dans le tableau ci-dessous :

TAB. 2.1 – Données de 11 actifs du CAC 40 (5 Puts, 6 Calls et 11 actions sous-jacentes).

k	Actifs	E_k	taux	maturité	$S_k(0)$	volatilité
1	Call-BNPPARIBAS	30.00	0.02	3 mois	39.75	42.13
2	Call-BOUYGUES	19.00	0.02	3 mois	27.30	41.87
3	Call-CAP GEMINI	20.00	0.02	3 mois	24.00	66.36
4	Call-CREDIT AGRICOLE	10.50	0.02	3 mois	14.80	37.41
5	Call-DEXIA	9.00	0.02	3 mois	9.38	45.42
6	Call-LOREALL	40.00	0.02	3 mois	62.90	37.07
7	Put-SOCIETEGENERALE	50	0.02	3 mois	64.00	42.54
8	Put-TF1	18.00	0.02	3 mois	22.02	44.10
9	Put-THOMSON	9.00	0.02	3 mois	17.13	57.96
10	Put-VIVENDI	9.00	0.02	3 mois	17.00	57.03
11	Put-AGF	22.35	0.02	3 mois	19.00	61.92

Remarque 2.6.4 Ci dessous le graphique correspondant à certaines bornes supérieures de la VaR suivant le choix du taux de confiance $100(1 - p)\%$ lorsque $\alpha = 1.320$.

TAB. 2.2 – Intervalle du choix de la VaR via le corollaire 2.6.3 lorsque $p = 0.0001$, $\epsilon = 0.5720$, $b = 0.5$, $\gamma = 10e - 2$, $\lambda_0 = 2.0316$, $\Pi(0) = 66.825$ Euros, $\Theta = -1.9340$, $n_\epsilon = 6.6174$ et EWMA $\lambda = 0.8913$.

	Intervalle du choix de la VaR	VaR issue de la composante principale
α	$[VaR_{LB}^\Gamma, VaR_{UB}^\Gamma]$	VaR_{PC}^Γ
1.320	[2.2273, 3.6774]	2.3652
Temps-Exec	1 seconde 30	1 sec

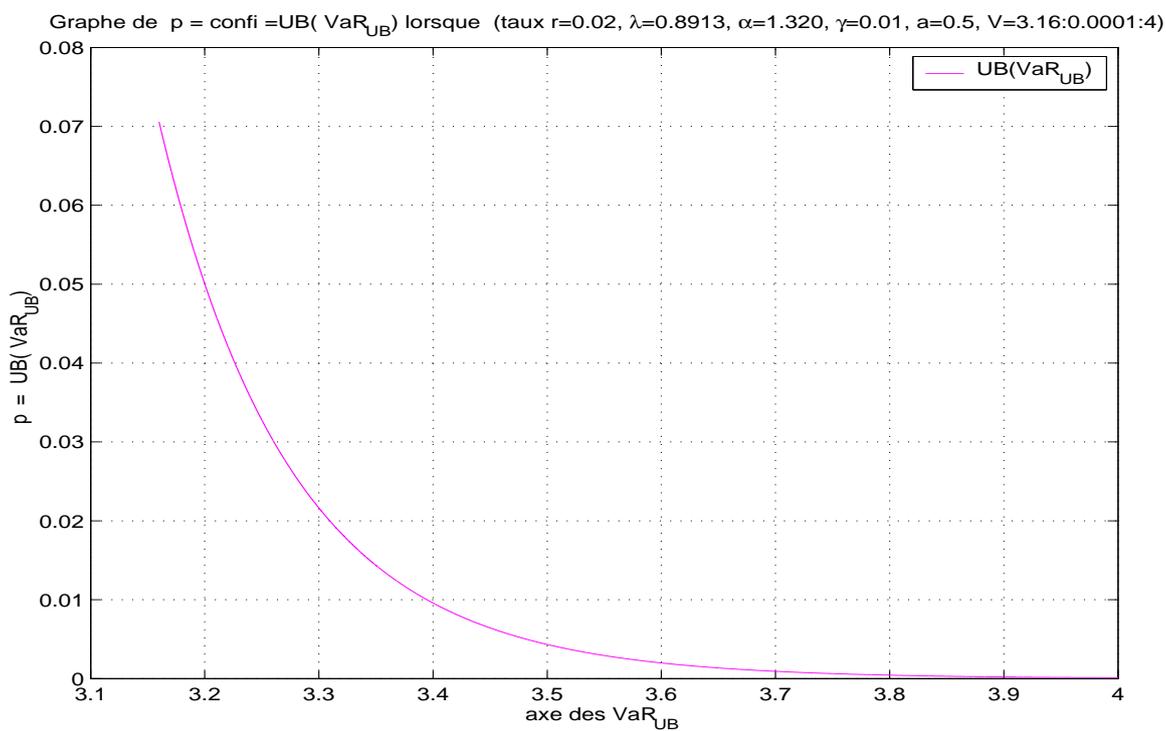


FIG. 2.1 – Graphe permettant de trouver VaR_{PC} en fonction de p , lorsque $\alpha = 1.320$.

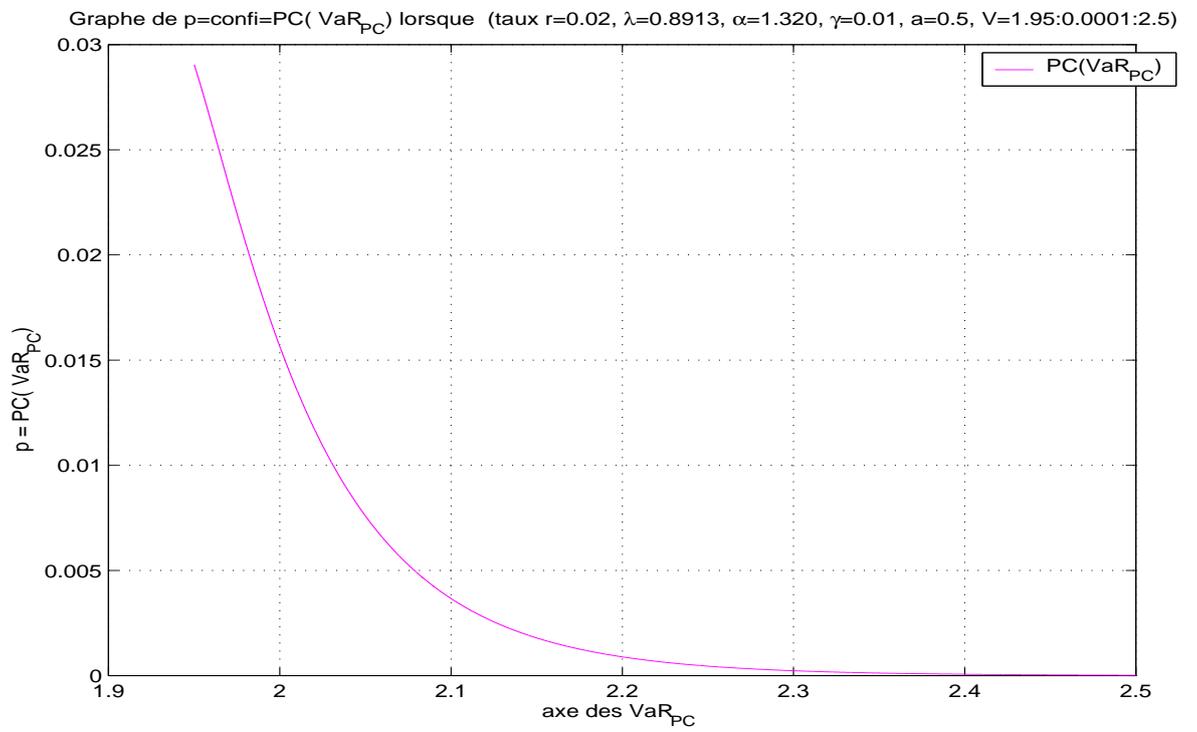
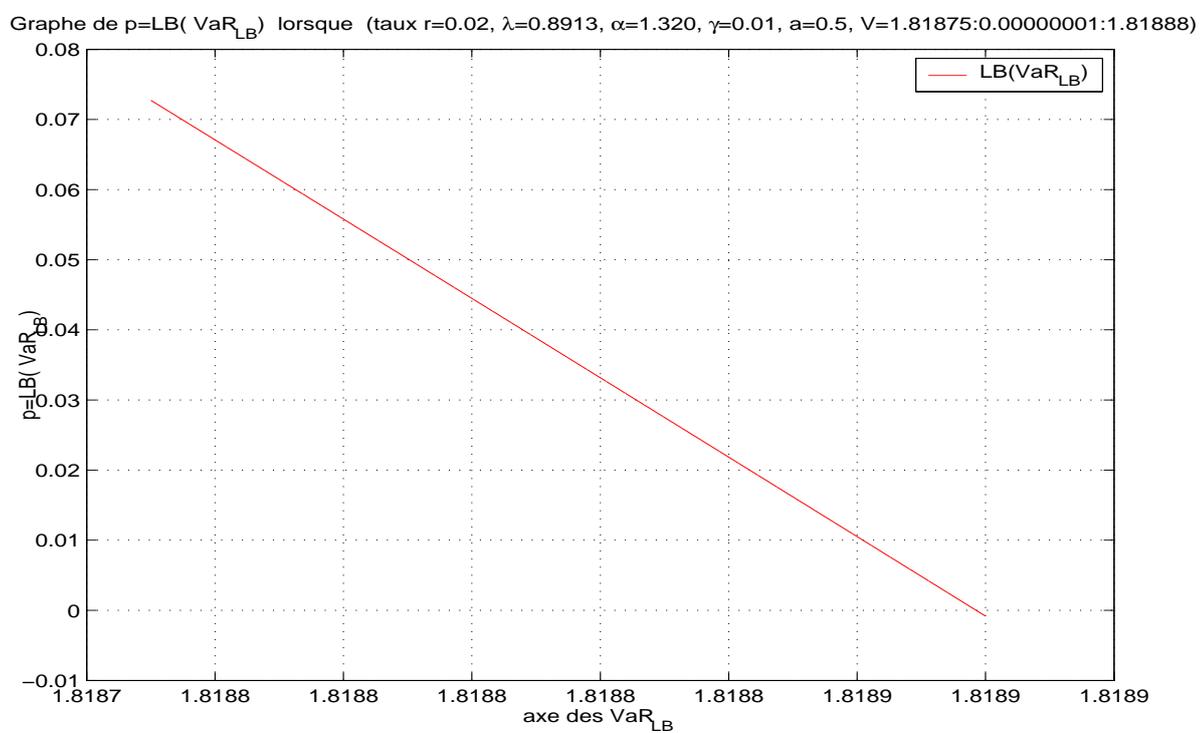


FIG. 2.2 – Graphe permettant de lire la VaR_{LB} en fonction de p , lorsque $\alpha = 1.320$.



2.6.1.2 Cas où $\alpha = 2$ et comparaison avec la Monte Carlo VaR

Remarque 2.6.5 Ci dessous le graphique correspondant à certaines bornes supérieures de la VaR suivant le choix du taux de confiance $100(1 - p)\%$ lorsque $\alpha = 2$ et $t = 1$.

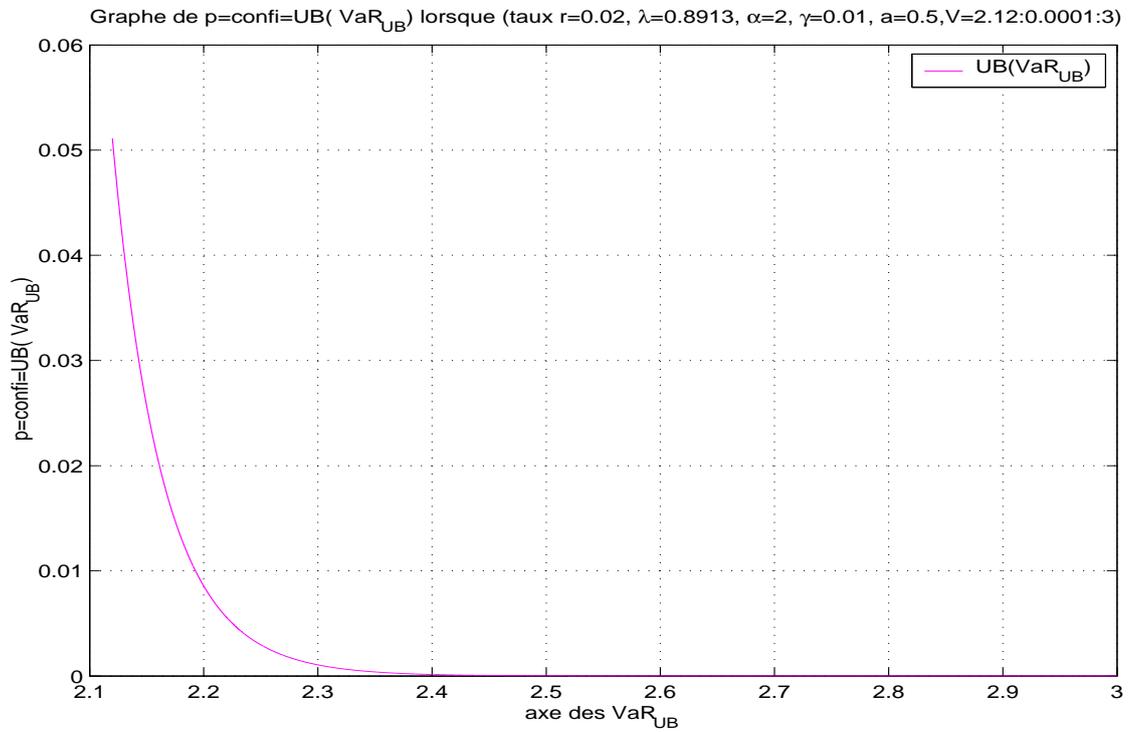


FIG. 2.3 – Graphe permettant de trouver VaR_{PC} en fonction de p , lorsque $\alpha = 1.320$.

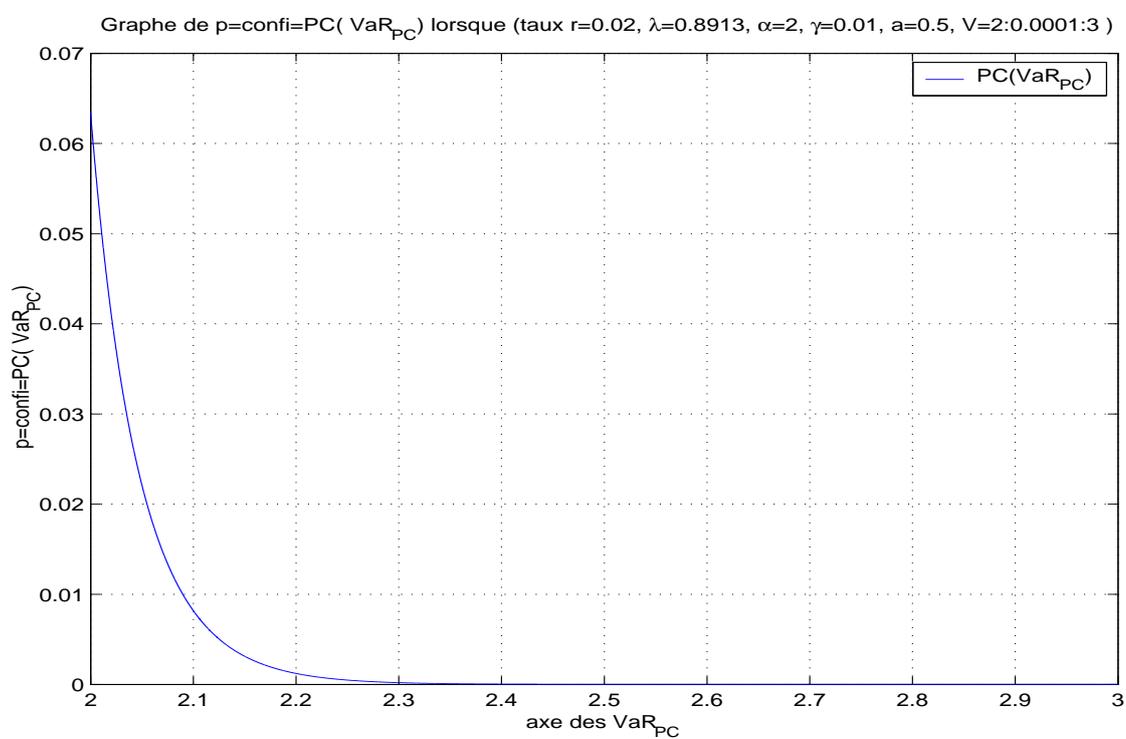
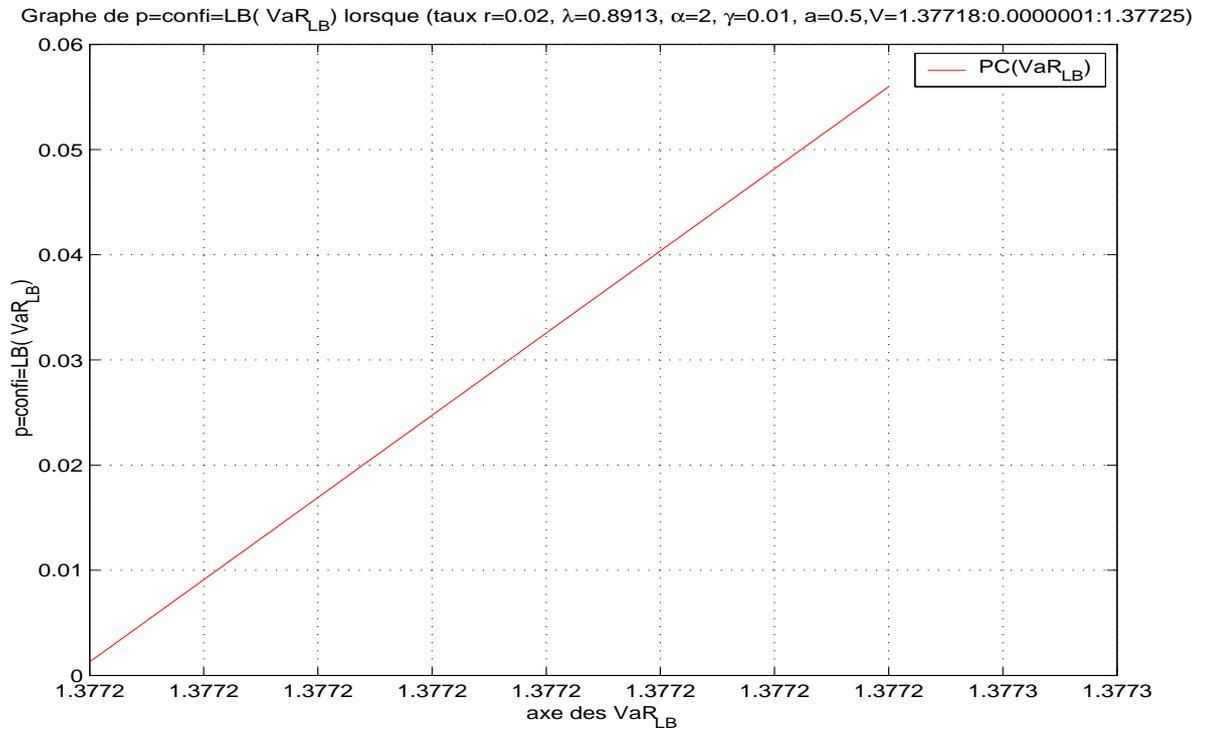


FIG. 2.4 – Graphe permettant de trouver VaR_{LB} en fonction de p , lorsque $\alpha = 2$.



TAB. 2.3 – Tableau de comparaison de la VaR analytique et la VaR Monte Carlo $\alpha = 2$, lorsque $t = 1$.

	$VaR_{MC(p)}^{\Gamma, NB-SIM}$	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, NB-SIM}$	$VaR_{MC(0.01)}^{\Pi, NB-SIM}$	Temps-Exec
1000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, 1000}$	1.7281	5.1129	55 secondes
1000 Simulations	$VaR_{MC(0.025)}^{\Gamma, 1000}$	1.7856	4.3946	55 secondes
1000 Simulations	$VaR_{MC(0.05)}^{\Gamma, 1000}$	1.7946	3.5809	55 secondes
10000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, 10000}$	1.8257		707 secondes
100000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, 100000}$	1.8164		8 h 13 min
	$VaR_{ANALYTIC(p)}^{\Gamma}$	$VaR_{ANALYTIC(0.01)}^{\Gamma}$		Temps-Exec
Méthode Analytique	$VaR_{ANALY(0.01)}^{\Gamma, UB}$	2.1805		0.50 seconde
Méthode Analytique	$VaR_{ANALY(0.01)}^{\Gamma, PC}$	2.0805		0.50 seconde
Méthode Analytique	Intervalle VaR	[1.3772, 2.1805]		1 seconde 30

Remarque 2.6.6 Dans nos tests numériques, les prix des options d'achats ou de ventes sont calculés par le modèle de Black et Scholes

2.6.2 D'autres estimations de l'erreur

D'après la remarque (2.6.2), on pourrait pallier au problème du choix de α en fonction de la dimension du portefeuille n , en proposons d'autres alternatives d'approximations des termes erreurs de façon à pouvoir utiliser la fonction Γ -incomplète comme définie par le logiciel matlab. Dans le souci de comparer nos résultats analytiques lorsque $\alpha = 2$, à la VaR obtenue par la méthode Monte Carlo, nous ferons des tests numériques sur des portefeuille constitués d'actifs du CAC 40. Aussi, nous donnerons des estimations explicites de l'erreur pour $\alpha = 2$, ce qui correspond au cas gaussien.

En combinant les erreurs et la composante principale dû à I_+ , I_- , I_0 , on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.6.2 *Etant donné $V > \Theta$, \mathbb{A} , $0 < \epsilon, b, \gamma < 1$ et $c_1 = 1/a_1^-$, tel que en posant :*

$$\begin{aligned}
 m_\epsilon &= (1 - \epsilon)c_1^{\alpha/2} \left[\left(1 + \frac{c_1^{-\alpha/2} r_\gamma^2}{2\alpha} \right)^{\alpha/2} - 1 \right] \\
 \lambda_{min}(Q) &= \alpha c_1^{\alpha/2} \min \left(\frac{a_1^-}{a_2^-} - 1, \frac{a_1^-}{a_{n+}^+} + 1 \right) \\
 A_{pc} &:= 2 \frac{\alpha^{-\frac{n+2}{2}} (a_1^-)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} \cdot C_{\alpha, n+1}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-} |a_1^- - a_j^-| \prod_{i=1}^{n+} |a_1^- + a_j^+|}} \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

$$R_\gamma^2 := \min\left(\frac{4\alpha(1-\gamma)}{2-\alpha}c_1^{\alpha/2}; \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2}\right).$$

$$R_1^2 := 2c_{n,\alpha}^{2/\alpha}(V + \Theta), \quad (2.113)$$

alors pour $R_1^\alpha > \lambda_0$,

$$F_\Gamma(-V) = A_{\text{pc}}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R_1}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right) + \mathcal{E}(R_1), \quad (2.114)$$

où le terme erreur est estimé comme suit

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}R_\pm(R_1)| \leq & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ \widehat{K}_1^\pm \cdot (a_1^-)^{-\frac{\alpha(2+n)}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{2+n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \right. \\ & - \frac{2(a_1^-)^{-\frac{(1+n)}{2}}(c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2})^{1-\frac{n+1}{\alpha}}\left(\frac{R_\gamma^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2}) \cdot R_1^\alpha\right) \\ & + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R_1^\alpha}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R_1^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (a_1^-)^{-\frac{n\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \\ & \left. + \widehat{K}_2^\pm \cdot (a_1^-)^{-\frac{(n+4)\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n+4}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^\alpha\right) \right\} \\ & + K^0 \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, n_\varepsilon R_1^\alpha\right). \end{aligned}$$

Remarque 2.6.7 Pour estimer la VaR, on se propose de donner une bande ou un intervalle dans lequel se trouvera la VaR. L'intervalle proposé dépendra de la qualité de la majoration, de la donnée du taux de confiance $1 - p$, du choix des paramètres d'entrée de notre algorithme, telles que ε , γ , b etc.

En effet, puisque

$$F_\Gamma(-V) = A_{\text{pc}}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right) + \mathcal{E}(R),$$

avec une estimation d'un majorant de la valeur absolue de $\mathcal{E}(R)$, qu'on notera $\mathcal{E}_{\text{est}}(R)$, cela implique que

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(R)| &= \left| F_\Gamma(-V) - A_{\text{pc}}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}}\right)^\alpha\right) \right| \\ &= |F_\Gamma(-V) - F_{\text{pc}}(-V)| \\ &\leq \mathcal{E}_{\text{est}}(R), \end{aligned} \quad (2.115)$$

d'où la double inégalité suivante :

$$F_{\text{pc}}(-V) - \mathcal{E}_{\text{est}}(R) \leq F_\Gamma(-V) \leq F_{\text{pc}}(-V) + \mathcal{E}_{\text{est}}(R). \quad (2.116)$$

Ainsi pour des fonctions respectives $F_{pc}(-V) - \mathcal{E}_{est}(R)$, $F_{pc}(-V) + \mathcal{E}_{est}(R)$, on se propose de chercher les solutions R_-, R_+ de ces fonctions respectives, en se servant des méthodes numériques connues, qui permettent de trouver les zéros d'une fonction non linéaire. Et puisque notre terme erreur contient des fonctions spéciales, pour lesquelles il n'est pas toujours facile d'implémenter la dérivée surtout avec Matlab, nous éviterons la méthode de Newton, pour adopter la méthode par dichotomie pour rechercher les zéros de $F_{pc}(-V) - \mathcal{E}_{est}(R)$ et $F_{pc}(-V) + \mathcal{E}_{est}(R)$. De plus, en introduisant $V_{\pm}(p)$ comme suit :

$$V_{\pm}(p) = \frac{1}{2}c_{\alpha, n+1}^{-2/\alpha} R_{\pm}^2 - \Theta, \quad (2.117)$$

où $R_{\pm} = R_{\pm}(p)$ est la solution de

$$A_{pc}\Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R_{\pm}}{\sqrt{a_1^-}} \right)^{\alpha} \right) \pm \mathcal{E}_{est}(R_{\pm}) = p. \quad (2.118)$$

Remarque 2.6.8 Dans la pratique, l'avantage de la méthode analytique et de l'algorithme qu'on propose est qu'on peut estimer la VaR_p^{Γ} , d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$ lorsque $p \rightarrow 0$. Notons que généralement dans la pratique, on considère que $p = 0.05, 0.025, 0, 01$.

On obtient ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.2 *A un taux de confiance $1 - p$, la Valeur en Risque $VaR_p^{\Gamma - \Theta}$ du portefeuille sera telle que :*

$$VaR_p^{\Gamma - \Theta} \in [V_-(p), V_+(p)],$$

où $V_{\nu}(p)$ avec $(\nu = +, -)$, sera la solution de l'équation :

$$V_{\nu}(p) = \frac{1}{2}c_{\alpha, n+1}^{-2/\alpha} R_{\nu}^2 - \Theta,$$

et telle que R_{\pm} est aussi solution, lorsqu'elle existe, de l'équation :

$$A_{pc}\Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R_{\pm}}{\sqrt{a_1^-}} \right)^{\alpha} \right) \pm \mathcal{E}_{est}(R_{\pm}) = p.$$

Notons que \mathcal{E}_{est} sera selon l'estimation faite, l'expression de l'erreur estimée.

Aussi on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.3 *Etant donné $V > -\Theta$, $0 < \epsilon, b, \gamma < 1$, $c_1 = 1/a_1^-$*

$$A_{pc} =: 2 \frac{\alpha^{-(1+n/2)} (2\pi a_1^-)^{n/2} (c_{n, \alpha})^{-\frac{n+1}{\alpha}} C_{n, \alpha}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-} (a_1^- - a_j^-) \prod_{j=1}^{n+} (a_1^- - a_j^-)}}$$

$$R^2 := 2c_{n, \alpha}^{2/\alpha} (V + \Theta).$$

Alors,

$$F_{\Gamma}(-V) = A_{pc}\Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha} \right) + \mathcal{E}(R),$$

où l'estimation de l'erreur est donné par

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}R_{\pm}(R)| \leq & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R^{\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right) \right. \\
 & - \frac{2(a_1^-)^{\frac{(1+n)}{2} - \frac{n\alpha}{4}} (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2})^{1 - \frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_{\gamma}^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2}) \cdot R^{\alpha}\right) \\
 & + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R^{\alpha}}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{R^{\alpha} \cdot R_{\gamma}^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right) \\
 & \left. + \frac{\widehat{K}_2^{\pm}}{R^{2\alpha}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right) \right\} \\
 & + K^0 \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, n_{\varepsilon} R^{\alpha}\right).
 \end{aligned}$$

Preuve Pour la preuve, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
 \int_R^{\infty} e^{-r^{\alpha} c_1^{\alpha/2}} r^{n - \frac{(n+4)\alpha}{2}} dr & \leq \int_R^{\infty} e^{-r^{\alpha} c_1^{\alpha/2}} r^{n - \frac{n\alpha}{2}} dr \\
 & \leq \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n\alpha}{4}}}{\alpha R^{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right). \quad (2.119)
 \end{aligned}$$

2.6.3 Estimation et test numérique I

Corollaire 2.6.4 *Etant donné $V > -\Theta$, et $0 < \epsilon, b, \gamma < 1$, $c_1 = 1/a_1^-$ et $V > -\Theta$, soit*

$$A_{\text{pc}} =: 2 \frac{\alpha^{-(1+n/2)} (2\pi a_1^-)^{n/2} (c_{\alpha, n})^{-\frac{n+1}{\alpha}} C_{\alpha, n}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-1} (a_1^- - a_j) \prod_{j=1}^{n+1} (a_1^- - a_j^-)}}$$

$$R^2 := 2c_{n, \alpha}^{2/\alpha} (V + \Theta).$$

Alors

$$F_{\Gamma}(-V) = A_{\text{pc}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right) + \mathcal{E}(R),$$

où une estimation du terme erreur est donnée par

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}(R)| \leq & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{K_1^{\pm}}{R^{\alpha}}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{R_{\gamma}^2}{2} R^{\alpha}\right)}{\Gamma(n/2)} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right) \right. \\
 & + (a_1^-)^{-\frac{\alpha}{2}} \left(K_1^{\pm} + \frac{K_2^{\pm}}{R^{\alpha}}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, c_1^{\alpha/2} \cdot R^{\alpha}\right) \\
 & - \frac{c_1^{\frac{\alpha}{2}} \left(1 + \frac{R_{\gamma}^2 (a_1^-)^{\alpha/2}}{2}\right)^{1 - \frac{n+1}{\alpha}}}{2^{\frac{n}{2} - 1}} \frac{K_1^{\pm} \cdot R_{\gamma}^n}{n\Gamma(n/2)} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + R_{\gamma}^2/2) \cdot R^{\alpha}\right) \left. \right\} \\
 & + K^0 \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, n_{\varepsilon} R^{\alpha}\right).
 \end{aligned}$$

Preuve

En effet, d'après (2.5.1), on a l'inégalité du terme erreur donné en (2.76), suivant :

$$|ER_{\pm}| \leq \frac{2C' (2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \left(\widehat{K}_1^{\pm} \left[1 - 2 \frac{\left(\frac{R_{\gamma}^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \right] \cdot E11 + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R_1^{\alpha}} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{R_1^{\alpha} \cdot R_{\gamma}^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot E12 + \widehat{K}_2^{\pm} \cdot E13 \right), \quad (2.120)$$

or peut majorer $E13$ de façon suivante :

$$\begin{aligned} E13 &= \int_{R1}^{\infty} e^{-r^{\alpha} c_1^{\alpha/2}} r^{n - \frac{\alpha(n+4)}{2}} dr \\ &\leq \int_{R1}^{\infty} e^{-r^{\alpha} c_1^{\alpha/2}} r^{n - \frac{\alpha(n+2)}{2}} dr \\ &= \frac{(a_1^-)^{\frac{n+1}{2} - \frac{(n+2)\alpha}{4}}}{\alpha R_1^{\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n+2}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \\ &= \frac{E13'}{R_1^{\alpha}} \end{aligned}$$

ainsi, en remplaçant $E13$, dans (2.120) par l'expression de son majorant $E13'$ donné en (2.121), on obtient la majoration suivante du terme Erreur :

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}R_{\pm}(R_1)| &\leq A_{pc} \cdot \left\{ \widehat{K}_1^{\pm} \cdot (a_1^-)^{-\frac{\alpha(2+n)}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{2+n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \right. \\ &\quad - \frac{2(a_1^-)^{\frac{(1+n)}{2}} (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2})^{1 - \frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_{\gamma}^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2}) \cdot R_1^{\alpha}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R_1^{\alpha}} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{R_1^{\alpha} \cdot R_{\gamma}^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot (a_1^-)^{-\frac{n\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \\ &\quad \left. + \frac{\widehat{K}_2^{\pm}}{R_1^{\alpha}} \cdot (a_1^-)^{-\frac{(n+2)\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n+2}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \right\} \\ &\quad + K^0 \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, n_{\varepsilon} R_1^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}R_{\pm}(R_1)| &\leq A_{pc} \cdot \left\{ \left(\widehat{K}_1^{\pm} + \frac{\widehat{K}_2^{\pm}}{R_1^{\alpha}} \right) \cdot (a_1^-)^{-\frac{\alpha(2+n)}{4}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{2+n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \right. \\ &\quad - \frac{2(a_1^-)^{\frac{(1+n)}{2}} (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2})^{1 - \frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_{\gamma}^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_{\gamma}^2}{2}) \cdot R_1^{\alpha}\right) \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R_1^{\alpha}} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{R_1^{\alpha} \cdot R_{\gamma}^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot (a_1^-)^{-\frac{n\alpha}{4}} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R_1^{\alpha}\right) \right\} \\ &\quad + K^0 \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}, n_{\varepsilon} R_1^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

TAB. 2.4 – Données de 11 actifs (Puts et Calls) du CAC40

k	actifs	E_k	Taux d'intérêt	Maturité	$S_k(0)$	volatilité
1	Call-BNPPARIBAS	30.00	0.05	3 mois	39.75	42.13
2	Call-BOUYGUES	19.00	0.05	3 mois	27.30	41.87
3	Call-CAP GEMINI	20.00	0.05	3 mois	24.00	66.36
4	Call-CREDIT AGRICOLE	10.50	0.05	3 mois	14.80	37.41
5	Call-DEXIA	9.00	0.05	3 mois	9.38	45.42
6	Call-LOREALL	40.00	0.05	3 mois	62.90	37.07
7	Put-SOCIETEGENERALE	50	0.05	3 mois	64.00	42.54
8	Put-TF1	18.00	0.05	3 mois	22.02	44.10
9	Put-THOMSON	9.00	0.05	3 mois	17.13	57.96
10	Put-VIVENDI	9.00	0.05	3 mois	17.00	57.03
11	Put-AGF	22.35	0.05	3 mois	19.00	61.92

2.6.3.1 Test Numérique I

Dans cette partie, nous allons illustrer le corollaire 2.6.5 ci-dessus en tenant compte de l'estimation de l'erreur 3.76, en proposant son application à un portefeuille financier du CAC 40 Français constitué d'options d'achats et d'options de ventes comme suit :

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^6 \left[\frac{\partial C_i}{\partial S_i}(0) S_i(t) - C_i(t, S_i(t)) \right] + \sum_{j=7}^{11} \left[P_j(t, S_j(t)) - \frac{\partial P_j}{\partial S_j}(0) S_j(t) \right].$$

Les prix des différents actifs du portefeuille du CAC 40 considérés sont donnés dans la table ci-dessous.

Remarque 2.6.9 Lorsqu'on utilise la méthode Monte Carlo avec 10000 simulations, le temps d'exécution est 707 secondes, c'est à dire plus de 500 fois le temps d'exécution de notre méthode analytique. Et pour une exécution Monte-Carlo avec 100000 simulations, il faut attendre environ 487 minutes, c-à-d plus de 8 heures et 12 min, ce qui est difficile surtout, si c'est pour le calcul de la VaR d'un portefeuille pour un horizon d'un jour.

Remarque 2.6.10 Pour éviter par exemple, que l'erreur estimée contiennent des divisions par zéro à cause de $(\frac{1}{R_1})$, on propose une autre estimation plus brutale dans un autre théorème donné ci-dessous.

2.6.4 Estimation et test numérique II

Théorème 2.6.3 Etant donné $V > -\Theta$, soit

$$R^2 := 2c_{n,\alpha}^{2/\alpha} (V + \Theta). \quad (2.121)$$

Alors pour pour $R^\alpha > \lambda_0$,

$$F_\Gamma(-V) = A_{\text{pc}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) + \mathcal{E}(R), \quad (2.122)$$

TAB. 2.5 – Intervalle de choix de la GLD_α VaR obtenue via le théorème 2.121, avec $p = 10e - 30$, EWMA $\lambda = 0.93$, $\epsilon = 10e - 40$, $b = 0.5$, $\gamma = 10e - 20$, $\lambda_0 = 1$, $\Pi(0) = 64.1808$ Euros, $\Theta = 2.2086$.

	Méthode par Dichotomie	Méthode par Dichotomie
	Intervalle pour la VaR	VaR issue de la composante principale
α	$[VaR_{LB}^\Gamma, VaR_{UB}^\Gamma]$	VaR_{PC}^Γ
0.727	[18.9548, 32.8342]	21.1889
0.999	[8.3598, 14.4304]	9.4741
1.005	[8.2332, 14.2137]	9.3348
1.10	[6.5347, 11.3116]	7.4674
1.20	[5.2111, 9.0560]	6.0177
1.30	[4.2046, 7.3400]	4.9212
1.35	[3.7874, 6.6271]	4.4692
1.40	[3.4149, 5.9897]	4.0678
1.45	[3.0801, 5.4155]	3.7092
1.50	[2.7769, 4.8949]	3.3873
1.55	[2.4998, 4.4197]	3.0966
1.60	[2.2442, 3.9834]	2.8329
1.65	[2.0051, 3.5804]	2.5926
1.70	[1.7766, 3.2062]	2.3725
1.75	[1.5484, 2.8570]	2.1699
1.80	[1.2862, 2.5298]	1.9826
Temps d'exécution	1 sec 30	1 sec

où le terme erreur est estimé comme suit

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}(R)| \leq & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ K_1^\pm \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right. \\
 & + K_2^\pm \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 2, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \\
 & + 2(a_1^-)^{\frac{\alpha n}{4}} \frac{\Gamma \left(\frac{n}{2}, \frac{R_\gamma^2}{2} R^\alpha \right)}{\Gamma \left(\frac{n}{2} \right)} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \left. \right\} \\
 & + K^0 \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, n_\varepsilon R^\alpha \right).
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

Preuve

Après une intégration par rapport à la variable r , en se servant de la formule (2.97), le terme principal (2.76) permettra d'obtenir la composante principale PCF de $F_\Gamma(-V)$ comme suit

$$\begin{aligned}
 CPF_\Gamma(-V) &= \alpha^{-n/2} (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} C (a_1^-)^{\frac{n\alpha}{4} - \frac{1}{2}} (\Delta(\mathbb{A}))^{-1/2} \cdot \int_R^\infty r^{n(1-\frac{\alpha}{2})} \exp \left(-(a_1^-)^{-\alpha/2} r^\alpha \right) dr \\
 &= A_{\text{pc}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right),
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

avec $A_{\text{pc}} = \alpha^{-\frac{n}{2}-1} (2\pi)^{n/2} c^{-\frac{n+1}{\alpha}} C \Delta(\mathbb{A})^{-1/2} (a_1^-)^{(\alpha-1)(n-2)/4}$. Pour $x > 0$ et $a > 0$, la fonction $\Gamma(a, x)$ décroît, et puisque $r^\alpha > R_1^\alpha$ on a que

$$\int_{R_1}^\infty \Gamma \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} R_\gamma^2 r^\alpha \right) \exp \left(-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}} \right) r^n dr \leq \Gamma \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} R_\gamma^2 R_1^\alpha \right) \int_{R_1}^\infty \exp \left(-\frac{r^\alpha}{(a_1^-)^{\alpha/2}} \right) r^n dr$$

ainsi en appliquant (2.97), on obtient l'inégalité suivante ;

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}_\pm(R_1)| \leq & \frac{2(2\pi)^{n/2}}{\alpha} \frac{C'}{\sqrt{\det Q}} \left\{ \widehat{K}_1^\pm (a_1^-)^{\frac{n}{2} - \frac{\alpha n}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 1, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right. \\
 & + \widehat{K}_2^\pm (a_1^-)^{\frac{n}{2} - \frac{\alpha n}{4} - \frac{2\alpha}{2} + \frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - 2, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \\
 & \left. + (a_1^-)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} r_\gamma^2 R_1^\alpha \right)}{\Gamma \left(\frac{n}{2} \right)} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right) \right\}
 \end{aligned}$$

En collectant certains termes dans les calculs, on obtient l'approximation suivante en fonction de A_{pc} :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}^\pm(R)| \leq & A_{\text{pc}} \left\{ \sum_{j=1,2} 2(a_1^-)^{-j\alpha/2} \widehat{K}_j^\pm \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - j, \left(R/\sqrt{a_1^-} \right)^\alpha \right) \right. \\
 & \left. + 2(a_1^-)^{\alpha n/4} \frac{\Gamma \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} R_\gamma^2 R_1^\alpha \right)}{\Gamma \left(\frac{n}{2} \right)} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(R/\sqrt{a_1^-} \right)^\alpha \right) \right\},
 \end{aligned}$$

qui correspondent aux trois premiers termes de l'estimation de l'erreur donné en (3.76), avec $K_j^\pm = 2(a_1)^{j\alpha/2} \widehat{K}_j^\pm$, for $j = 1, 2, \dots$, et

$$\widehat{K}_j^\pm \alpha^{-1} (a_1^-)^{\frac{n}{2} - \frac{\alpha n}{4} - \frac{j\alpha}{2} + \frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2} - j, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1^-}} \right)^\alpha \right).$$

2.6.4.1 Test numérique II

Dans cette partie on fait un test numérique sur le portefeuille précédent, mais cette fois-ci avec l'estimation de l'erreur (3.76) comme donné dans (2.6.3).

TAB. 2.6 – Données de 11 actifs (5 Puts et 6 Calls) du CAC 40.

k	actifs	Prix d'exercice	Taux d'interêt	Maturité	$S_k(0)$
1	Call-BNPPARIBAS	30.00	0.05	3 mois	39.75
2	Call-BOUYGUES	19.00	0.05	3 mois	27.30
3	Call-CAP GEMINI	20.00	0.05	3 mois	24.00
4	Call-CREDIT AGRICOLE	10.50	0.05	3 mois	14.80
5	Call-DEXIA	9.00	0.05	3 mois	9.38
6	Call-LOREALL	40.00	0.05	3 mois	62.90
7	Put-SOCIETEGENERALE	50	0.05	3 mois	64.00
8	Put-TF1	18.00	0.05	3 mois	22.02
9	Put-THOMSON	9.00	0.05	3 mois	17.13
10	Put-VIVENDI	9.00	0.05	3 mois	17.00
11	Put-AGF	22.35	0.05	3 mois	19.00

Remarque 2.6.11 Avec des tests numériques simples appliqués au portefeuille que nous avons constitué, on montre que plus on choisit b grand, γ grand, et ϵ grand, plus on obtient une borne supérieure de la VaR noté VaR^{UB} petite.

$$a_0 = 0.1015, c_1 = 1/a_0 = 9.8477, q = n + 1 = 11.$$

Remarque 2.6.12 On s'aperçoit que la borne supérieure de l'intervalle pour le choix de la VaR proposée dans la Table 2, croît lorsque α croît. Ainsi on pourrait par exemple choisir α de plus en plus petit lorsqu'on traite les actifs des pays émergents (Afrique du Sud ($\alpha = 0.727$), Bresil, Indonésie, etc pour plus de détails, voir l'appendice B, de RiskMetrics [30]). Notons aussi qu'en faisant varier α , on pourra adapter notre méthode pour contrôler le risque des portefeuilles choisis exceptionnellement selon les caractéristiques d'un secteur d'activité ³¹, dans des situations de marchés exceptionnelles (crise, terrorisme, instabilité économique, déclaration du gouverneur de la banque centrale etc).

Remarque 2.6.13 Notons que pour palier l'inconvénient dû au fait que les distributions marginales de la distribution de laplace généralisée DLG_α , garde la même caractéristique α , notre méthode est très facilement adaptable au cas où on travaille avec un mélange de distributions de Laplace généralisées.

³¹agriculture, textile, distribution, alimentation, etc.

TAB. 2.7 – Intervalle de choix de la GLD_α VaR obtenue via le théorème 2.6.3, avec $p = 0$, EWMA $\lambda = 0.93$, $\epsilon = 10e - 40$, $b = 0.5$, $\gamma = 10e - 20$, $\lambda_0 = 1$, $\Pi(0) = 64.1808$ Euros, $\Theta = 2.2086$.

	Méthode par Dichotomie	Méthode par Dichotomie
α	$[VaR_{pc}^\Gamma, VaR_{UB}^\Gamma]$	VaR_{pc}^Γ
0.727	[21.1889, 33.6781]	21.1889
0.999	[9.4741, 15.1737]	9.4741
1.005	[9.3348, 14.9575]	9.3348
1.10	[7.4674, 12.0748]	7.4674
1.15	[6.6893, 10.8790]	6.6893
1.20	[6.0177, 9.8533]	6.0177
1.25	[5.4334, 8.9649]	5.4334
1.30	[4.9212, 8.1897]	4.9212
1.35	[4.4692, 7.5087]	4.4692
1.40	[4.0678, 6.9069]	4.0678
1.45	[3.7092, 6.3720]	3.7092
1.50	[3.3873, 4.8949]	3.3873
Temps d'exécution	1 sec 30	1 sec

TAB. 2.8 – Variation de quelques constantes de notre modèle avec α

α	R_γ^2	c_q	C_q	K_0	K_1^\pm	K_2^\pm	$\lambda_{min}(Q)$
0.999	0.1251	1.27e+ 007	0.0116	30.5785	1.2860e+003	101.0912	5.5506
1.005	0.1275	1.7812e+ 007	0.0108	28.6404	1.2675e+003	100.5731	5.6224
1.100	0.1720	3.6308e+ 006	0.0041	11.6064	1.0113e+003	92.6526	6.8601
1.200	0.2367	1.1040e+ 006	0.0017	05.4449	800.1994	84.6415	8.3905
1.250	0.2784	6.8171e+ 005	0.0012	03.9591	711.4411	80.6602	9.2544
1.300	0.3285	4.0744e+ 005	8.2661e -004	2.9766	631.6526	76.6471	10.1910
1.400	0.4628	1.5376e+ 005	4.444e- 004	1.8321	494.0529	68.3981	12.3046
1.500	0.6671	6.1930e+ 004	2.609e- 004	1.2380	379.5533	59.6421	14.7808
1.550	0.8110	4.0169e+ 004	2.0436e- 004	1.0476	329.1940	55.0033	16.1722

TAB. 2.9 – Valeurs de quelques constantes du modèle

α	A_{pc}	n_ϵ	K_ϵ
0.999	7.9445e -005	1.5673	0.0460
1.005	8.9979e45e -005	1.5781	0.0454
1.100	5.0371e -004	1.7592	0.0317
1.200	0.0021	1.9724	0.0237
1.250	0.0037	2.0885	0.0210
1.300	0.0061	2.2114	0.0188
1.400	0.0145	2.4794	0.0157
1.500	0.0286	2.7801	0.0136
1.550	0.0381	2.9438	0.0128

Remarque 2.6.14 Ces tests numériques ont été fait à l'aide du logiciel Matlab, avec un ordinateur pentium IV (processor : 1.5 Ghz, RAM 256 Mhz). Notons qu'on devra juger le temps d'exécution de notre algorithme, en relation avec la puissance de l'ordinateur qu'on utilise. Il est pertinent de s'apercevoir qu'en terme de temps d'execution, notre méthode est largement plus performante comparativement à la methode Monte-Carlo, et ceci fait sans perte de fiabilité au niveau des résultats sur la VaR obtenue. Aussi, il faut noter que les données financières utilisées, pour la construction de la matrice de covariance que nous utilisons sont celles des 3 mois (décembre 2002, janvier 2003, février 2003), et ont été téléchargés sur le site du CAC 40 et du Monep via www.yahoo.fr

2.6.5 Cas particulier de la distribution normale

Corollaire 2.6.5 Si $\alpha = 2$, étant donné $V > -\Theta$, $0 < \epsilon, b, \gamma < 1$, $c_1 = 1/a_1^-$

$$A_{pc} =: \frac{(4\pi a_1^-)^{n/2} (c_{n,2})^{-\frac{n+1}{2}} C_{\alpha,n}}{\sqrt{\prod_{j=2}^{n-} (a_1^- - a_j^-) \prod_{j=1}^{n+} (a_1^- - a_j^-)}}$$

$$R^2 := 2c_{n,2} (V + \Theta).$$

Alors,

$$F_{\Gamma}(-V) = A_{pc} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{R^2}{a_1^-}\right) + \mathcal{E}(R),$$

où l'estimation de l'erreur est donné par :

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}R_{\pm}(R_1)| \leq & A_{pc} \cdot \left\{ \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R^2} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{R^2}{a_1^-}\right) \right. \\ & - \frac{2(a_1^-)^{\frac{1}{2}} (c_1 + \frac{R^2}{2})^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{R^2}{2}\right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, (c_1 + \frac{R^2}{2}) \cdot R^2\right) \\ & \left. + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^{\pm}}{R^2}\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R^2 \cdot R^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{R^2}{a_1^-}\right) \right\} \\ & + K^0 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}, n_{\epsilon} R^2\right). \end{aligned}$$

2.6.5.1 Test numérique avec 2 portefeuilles du CAC 40

Dans cette partie, dans le but de comparer les résultats de notre méthode avec celles issues, de la méthode Monte Carlo. Ainsi nous proposons une application de notre méthode sur 2 portefeuilles du CAC 40, lorsque les facteurs de risque suit une distribution normale ($\alpha = 2$).

– Portefeuille avec $\Theta > 0$ Les données qu'on utilisera sont dans le tableau suivant :

k	actifs	Prix d'exercice	Taux d'interêt	Maturité	$S_k(0)$
1	Call-BNPPARIBAS	30.00	0.05	3 mois	39.75
2	Call-BOUYGUES	19.00	0.05	3 mois	27.30
3	Call-CAP GEMINI	20.00	0.05	3 mois	24.00
4	Call-CREDIT AGRICOLE	10.50	0.05	3 mois	14.80
5	Call-DEXIA	9.00	0.05	3 mois	9.38
6	Call-LOREALL	40.00	0.05	3 mois	62.90
7	Put-SOCIETEGENERALE	50	0.05	3 mois	64.00
8	Put-TF1	18.00	0.05	3 mois	22.02
9	Put-THOMSON	9.00	0.05	3 mois	17.13
10	Put-VIVENDI	9.00	0.05	3 mois	17.00
11	Put-AGF	22.35	0.05	3 mois	19.00

TAB. 2.10 – Tableau de comparaison de la VaR analytique et la VaR Monte Carlo $\alpha = 2$.

	$VaR_{MC(p)}^{\Gamma, NB-SIM}$	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, NB-SIM}$	Temps-Exec
1000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, 1000}$	2.0252	55 secondes
1000 Simulations	$VaR_{MC(0.001)}^{\Gamma, 1000}$	1.9379	55 secondes
10000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, 10000}$	1.9257	707 secondes
10000 Simulations	$VaR_{MC(0.0001)}^{\Gamma, 10000}$	1.7070	707 secondes
100000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma, 100000}$	1.9051	8 h 13 min
	$VaR_{ANALYTIC(p)}^{\Gamma}$	$VaR_{ANALYTIC(0.01)}^{\Gamma}$	Temps-Exec
Méthode Analytique	$VaR_{ANALY(0.01)}^{\Gamma, UB}$	2.0968	0.50 seconde
Méthode Analytique	$VaR_{ANALY(0.01)}^{\Gamma, PC}$	1.715	0.50 seconds
Méthode Analytique	$VaR_{ANALY(0.01)}^{\Gamma, LB}$	1.3446	0.50 seconds
Méthode Analytique	Intervalle VaR	[1.3446, 2.0968]	0.50 seconds

– Portefeuille avec $\Theta < 0$ Les données qu'on utilisera sont dans le tableau suivant :

k	actifs	Prix d'exercice	Taux d'interêt	Maturité	$S_k(0)$
1	Call-BNPPARIBAS	30.00	0.05	3 mois	39.75
2	Call-BOUYGUES	19.00	0.05	3 mois	27.30
3	Call-CAP GEMINI	20.00	0.05	3 mois	24.00
4	Call-CREDIT AGRICOLE	10.50	0.05	3 mois	14.80
5	Call-DEXIA	9.00	0.05	3 mois	9.38
6	Put-LOREALL	40.00	0.05	3 mois	62.90
7	Put-SOCIETEGENERALE	50	0.05	3 mois	64.00
8	Put-TF1	18.00	0.05	3 mois	22.02
9	Put-THOMSON	9.00	0.05	3 mois	17.13
10	Put-VIVENDI	9.00	0.05	3 mois	17.00
11	Put-AGF	22.35	0.05	3 mois	19.00

TAB. 2.11 – Tableau de comparaison entre la VaR analytique et la VaR Monte Carlo lorsque $\alpha = 2$

	$VaR_{MC(p)}^{\Gamma,NB-SIM}$	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma,NB-SIM}$	Exec-Time
1000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma,1000}$	0.5134	55 s
10000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma,10000}$	0.5090	707 s
100000 Simulations	$VaR_{MC(0.01)}^{\Gamma,100000}$	0.5070	8 h 13 minutes
	$VaR_{ANALYT(p)}^{\Gamma}$	VaR_{ANALYT}^{Γ}	Exec-Time
Méthode Analytique	$VaR_{ANALYT,0.01}^{\Gamma,UB}$	2.5052	0.50 seconds
Méthode Analytique	$VaR_{ANALYT,0.01}^{\Gamma,PC}$	1.6509	0.50 seconds
Méthode Analytique	$VaR_{ANALYT,0.01}^{\Gamma,LB}$	0.4557	0.50 seconds
Méthode Analytique	$VaR_{ANALYT,0.01}^{\Gamma,LB}$	[0.4557, 2.5052]	0.50 seconds

2.7 conclusion

Dans ce chapitre, nous étendons largement et de façon très fine la méthode développée dans l'article de Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco [6]. Nous proposons une méthode pour substituer la méthode Monte-Carlo, lorsqu'il s'agit d'évaluer le risque des portefeuilles contenant des produits dérivés. Notre méthode est assez générale, car elle marche pour une famille de Distribution de Laplace généralisée DLG_{α} . Ainsi pour α donné, nous proposons un intervalle dans lequel on choisira la VaR. Pour réaliser cette méthode, nous avons utilisé des méthodes asymptotiques et d'autres notions mathématiques assez fines. Aussi, à la fin de ce chapitre, pour différentes estimations du terme erreur, nous proposons un test numérique pour illustrer notre méthode analytique et notre algorithme. En comparant notre méthode avec la méthode Monte Carlo, on s'aperçoit que le temps d'exécution de la méthode Monte Carlo est

très élevée. Par exemple pour 10000 simulations, le temps d'exécution de la VaR Monte Carlo est plus de 700 fois supérieure au temps d'exécution de notre VaR analytique. En utilisant Matlab, on a aussi eu besoin, dans nos algorithmes, de la méthode par dichotomie pour résoudre numériquement plusieurs équations non linéaires contenant des fonctions spéciales, telles les fonctions Γ -incomplètes.

Chapitre 3

VaR et ES quadratique d'un portefeuille d'actions log-elliptique

3.1 Introduction

Généralement dans la littérature financière, lorsqu'on veut estimer la VaR d'un portefeuille d'actions en utilisant les rendements logarithmiques, on utilise une approximation linéaire du rendement absolu du prix du portefeuille (comme par exemple en (1.66) du Chapitre 1, de la première partie de cette thèse.).

Dans ce chapitre, nous étendons la notion d'approximation linéaire d'un portefeuille ne contenant que des actifs de bases ou actifs sous jacents (exemple : portefeuilles d'actions), en introduisant la notion de portefeuille "quadratique" par une approximation de Taylor d'ordre 2 des facteurs de risque³² pour une variation de temps et de marché assez petite. De plus on s'attelle à évaluer la Valeur à Risque d'un tel portefeuille sous l'hypothèse que le vecteur des rendements logarithmiques joints des prix des actions sur $[0,t]$ suit une distribution elliptique notée $N(\mu, \Sigma, \phi)$, où μ , Σ , ϕ sont respectivement le vecteur espérance, la matrice de variance-covariance de la distribution, et la fonction caractéristique (pour détails cf. [13]). Nous montrons aussi que l'estimation de la VaR d'un tel portefeuille nécessite une approximation d'intégrale sur une hypersphère (voire une hyperboloïde lorsque le portefeuille contient par exemple des actions achetées à découvert), ce qui renforce l'intérêt mathématique d'un tel chapitre. Rappelons cependant que les intégrales de même type ont été abordés analytiquement pour servir l'estimation de la VaR par Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco dans [6], mais avec l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque suivait une distribution gaussienne. Notons que dans [6], l'analyse mathématique était faite pour servir l'estimation de la VaR d'un type de portefeuille $\Delta - \Gamma - \Theta$ ³³, bien connu dans la littérature financière. Notons aussi que l'approximation quadratique du rendement absolu des portefeuilles a été l'objet de plusieurs publications (mais ceux-ci étaient faits pour des Portefeuilles contenant des produits dérivés). Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur entre autres à Cadenas al.[9](1997), Albanese, Jackson, Wiberg [1], Glasserman, Heidelberger et Shahabuddin [21]. Aussi, on se sert d'une approche numérique extraite de Genz [17] 2003, pour proposer une méthode numérique qui nous permettrait d'estimer la Valeur à Risque pour des portefeuilles d'actions (même s'il est clair que certaines méthodes et techniques analy-

³²des exemples des facteurs de risques qui sont souvent utilisés dans la littérature financière sont les rendements logarithmiques des actions, dans le cas ou on travaille avec des actions.

³³il s'agit d'un portefeuille contenant aussi des produits dérivés comme par exemple des options.

tiques des chapitres 2, 3 et 4 de la deuxième partie de cette thèse, sont applicables pour estimer la VaR d'un portefeuille quadratique de sous-jacents (i.e actions) tel que nous l'introduisons).

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, nous introduisons la notion de portefeuille quadratique d'actions dû à l'approximation de Taylor d'ordre 2, avec l'hypothèse que le vecteur des rendements logarithmiques suit une distribution elliptique. Dans la section 3, on montre que le problème de l'estimation de la VaR pour un portefeuille quadratique se réduit à l'approximation d'une intégrale sur une hypersphère S_{n-1} , voire sur une hyperboloïde³⁴, qui sont des sous variétés de \mathbb{R}^n de codimension 1. Dans la section 4, on utilise des techniques d'intégration sur une hypersphère dues à Alan Genz [17] (2003), pour donner une approximation de notre intégrale. Dans la section 5, nous proposons en illustration de notre méthode, une application en choisissant comme exemple de distribution elliptique, la multivariée t-Student pour estimer la VaR. On s'aperçoit que sous l'hypothèse de la Student, l'équation obtenue qui permet de retrouver la VaR, s'exprime avec des fonctions spéciales, telle la fonction hypergéométrique. Pour illustration, on utilise aussi la distribution gaussienne pour estimer la VaR d'un portefeuille quadratique d'actions, tel que nous l'avons introduit.

3.1.1 Approximation quadratique d'un portefeuille d'actions

Un portefeuille contenant n actifs distincts est regardé comme un vecteur à n composantes θ_i représentant le nombre du i -ème instrument dans le portefeuille. Le prix d'un portefeuille contenant n actifs sous-jacents distincts³⁵ est donné par :

$$P(S(t), t) = \sum_{i=1}^n \theta_i S_i(t)$$

avec $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t))$ et le rendement absolu du portefeuille est

$$\begin{aligned} P(S(t), t) - P(S(0), 0) &= \sum_{i=1}^n \theta_i (S_i(t) - S_i(0)) \\ &= \sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \theta_i \cdot \left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si on utilise les rendements absolus, ou des rendements relatifs, alors il est clair qu'on obtient un portefeuille linéaire. Mais lorsqu'on travaille en temps continu pour des petites variations de temps, il serait nécessaire d'utiliser les rendements logarithmiques comme facteurs de risque. Par définition, le rendement logarithme sur un intervalle de temps $[0, t]$ est défini comme suit :

$$\log(S_i(t)/S_i(0)) = \eta_i(t). \quad (3.2)$$

Si on remplace dans (3.1), $S_i(t)/S_i(0)$ par sa valeur en (3.2), on obtient :

$$S_i(t) - S_i(0) = S_i(0) \left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)} - 1 \right) = S_i(0) (\exp(\eta_i(t)) - 1), \quad (3.3)$$

³⁴lorsqu'on traite un portefeuille d'actions, contenant des actions achetées à découvert.

³⁵par exemple un portefeuille contenant n actions distinctes.

d'où

$$S(t) = (S_1(0)\exp(\eta_1), \dots, S_n(0)\exp(\eta_n)).$$

Or pour des variations assez petites du rendement η_i , l'utilisation de l'approximation de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $\exp(\eta_i(t))$ appliqué en η_i au voisinage de zéro implique que

$$\exp(\eta_i(t)) - 1 \approx \eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2}. \quad (3.4)$$

Si on remplace 3.4 dans 3.3 et si on se sert de 3.1 on obtient :

$$\begin{aligned} P(t, S(t)) - P(0, S(0)) &= \sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \theta_i \cdot (\exp(\eta_i(t)) - 1) \\ &= \sum_{i=1}^n S_i(0) \theta_i \left(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sachant que la Valeur à Risque qu'on notera VaR_α mesure le montant minimum que le portefeuille peut perdre avec un certain seuil de probabilité noté α , mathématiquement elle vérifie l'équation suivante :

$$Prob\{|P(S(t), t) - P(S(0), 0)| \leq VaR_\alpha\} = \alpha. \quad (3.6)$$

Or dans un monde de perte on a que :

$$|P(S(t), t) - P(S(0), 0)| = -P(S(t), t) + P(S(0), 0),$$

d'où

$$Prob\{P(S(t), t) - P(S(0), 0) \geq -VaR_\alpha\} = \alpha. \quad (3.7)$$

Si on suppose de plus que le vecteur constitué des rendements logarithmiques joints $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ suit une loi de distribution multivariée elliptique admettant pour densité $h(x)$. En posant $\alpha_i = S_i(0) \frac{\theta_i}{2} \geq 0$, on a l'expression suivante :

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^n S_i(0) \theta_i \left(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2} \right) \geq -VaR_\alpha\right\} = \alpha.$$

Aussi en utilisant intuitivement la relation suivante :

$$\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2} = \frac{1}{2}((\eta_i(t) + 1)^2 - 1), \quad (3.8)$$

on obtient

$$Prob\left\{\sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \frac{\theta_i}{2} (\eta_i(t) + 1)^2 \geq -VaR_\alpha + \sum_{i=1}^p \alpha_i\right\} = \alpha. \quad (3.9)$$

Supposons que $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ suit une loi distribution multivariée elliptique admettant comme fonction densité $h(x)$. En posant $X = (\eta_1 + 1, \dots, \eta_n + 1)$ on a que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\eta_i(t) + 1)^2 = X \Lambda X^t = (X, \Lambda X),$$

où $\Lambda = (\alpha_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ est une matrice diagonale avec pour valeurs propres $\alpha_i = \alpha_{ii} > 0$.

Aussi une des propriétés sur les distributions elliptiques implique que $X = (\eta_1 + 1, \dots, \eta_m + 1)$ est une distribution elliptique comme combinaison linéaire de η , avec $X \sim N(\mu + \mathbf{1}, \Sigma, \phi')$. Ainsi, La fonction densité de la loi de X est $h_1(x) = h(x - \mathbf{1})$ et $\mu' = (\mu_1 + 1, \dots, \mu_n + 1) = \mu + \mathbf{1}$ est le vecteur espérance de X . L'équation (3.9) s'écrit :

$$Prob\{(X, \Lambda X) \geq k\} = \alpha, \quad (3.10)$$

où $k = -VaR_\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{P(0)}{2} - VaR_\alpha$. Si on suppose que $k > 0$, alors la valeur à Risque du portefeuille devra être inférieure à $P(0)/2$ pour un horizon fixé correspondant à l'intervalle de temps $[0, t]$, ce qui semble raisonnable pour des très petites variations des rendements logarithmiques.

Remarque 3.1.1 Dans ce chapitre, on considère une approximation quadratique des rendements logarithmiques, pour introduire la notion de portefeuilles quadratiques ne contenant que des sous-jacents, autrement dit ne contenant pas de produits dérivés. L'utilisation d'un portefeuille ne contenant que des actions n'est qu'une illustration, car on pourrait considérer un portefeuille contenant d'autres sous-jacents, comme par exemple les taux d'échanges de différentes devises.

3.1.2 Interêt d'une approximation quadratique

Dans cette section, on va mettre en exergue deux tableaux, qui nous permettront de comprendre pourquoi une approximation quadratique pourrait être préférée à une approximation linéaire, lorsqu'il s'agira d'estimer la VaR d'un portefeuille d'actifs de bases (i.e actions).

Nous considérons un portefeuille contenant des actions, ainsi le prix du portefeuille à l'instant t , est donné par :

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{11} \theta_i S_i(t).$$

où les θ_i sont réels. Les prix des différents actifs du portefeuille du CAC 40 considéré ci-bas, sont donnés dans le tableau suivant :

- Portefeuille contenant des actions achetées à découvert.

Table I11 : Données de 11 actions distinctes du CAC40.

k	Actions	$S_k(0)$	volatilité	θ_k
1	Action-BNPPARIBAS	39.75	42.13	-20
2	Action-BOUYGUES	27.30	41.87	-40
3	Action-CAP GEMINI	24.00	66.36	-70
4	Action-CREDIT AGRICOLE	14.80	37.41	-80
5	Action-DEXIA	9.38	45.42	-90
6	Action-LOREALL	62.90	37.07	40
7	Action-SOCIETEGENERALE	64.00	42.54	30
8	Action-TF1	22.02	44.10	-60
9	Action-THOMSON	17.13	57.96	-80
10	Action-VIVENDI	17.00	57.03	50
11	Action-AGF	19.00	61.92	90

3.2. Réduction du calcul de la VaR d'un portefeuille quadratique à l'estimation d'une intégrale sur un quadrique.

	Fonction Perte et profit après un jour (P(1) - P(0))
<i>P&L-LINEAIRE</i>	4.70995
<i>P&L-QUADRATIQUE</i>	4.09932
<i>P&L-QUADRATIQUE - P&L-LINEAIRE</i>	0.61063
$\frac{P&L-QUADRATIQUE - P&L-LINEAIRE}{P&L-LINEAIRE}$	14.8958 %

– Portefeuille ne contenant pas d'actions achetées à découvert.

Table I11 : Données de 11 actions distinctes du *CAC40*.

k	<i>Actions</i>	$S_k(0)$	<i>volatilité</i>	θ_k
1	<i>Action-BNPPARIBAS</i>	39.75	42.13	32
2	<i>Action-BOUYGUES</i>	27.30	41.87	65
3	<i>Action-CAP GEMINI</i>	24.00	66.36	42
4	<i>Action-CREDIT AGRICOLE</i>	14.80	37.41	69
5	<i>Action-DEXIA</i>	9.38	45.42	36
6	<i>Action-LOREAL</i>	62.90	37.07	48
7	<i>Action-SOCIETE GENERALE</i>	64.00	42.54	76
8	<i>Action-TF1</i>	22.02	44.10	68
9	<i>Action-THOMSON</i>	17.13	57.96	95
10	<i>Action-VIVENDI</i>	17.00	57.03	18
11	<i>Action-AGF</i>	19.00	61.92	15

alors

	Fonction Perte et profit après un jour (P(1) - P(0))
<i>P&L-LINEAIRE</i>	197.0299352
<i>P&L-QUADRATIQUE</i>	201.243951
<i>P&L-QUADRATIQUE - P&L-LINEAIRE</i>	4.214016
$\frac{P&L-QUADRATIQUE - P&L-LINEAIRE}{P&L-LINEAIRE}$	2.138769 %

Remarque 3.1.2 On s'aperçoit que pour le portefeuille contenant des actifs de bases achetés à découvert, il serait intéressant de considérer une approximation quadratique au lieu d'une approximation linéaire.

3.2 Réduction du calcul de la VaR d'un portefeuille quadratique à l'estimation d'une intégrale sur un quadrique.

3.2.1 Comment estimer la VaR d'un portefeuille quadratique d'actions

Puisque X suit une distribution elliptique, sa fonction densité si elle existe s'écrit sous la forme :

$$h_1(x) = h(x - \mathbf{1}),$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur unité³⁶ et h est la fonction densité de η qui s'écrit comme suit :

$$h(x) = g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t) / \sqrt{\det(\Sigma)}, \quad (3.11)$$

³⁶il s'agit d'un vecteur ayant comme composantes marginales que des 1

la VaR_α est solution lorsqu'elle existe de l'équation suivante :

$$Prob\{(X, \Lambda X) \geq k\} = \alpha \quad (3.12)$$

$$= \int_{\{(x, \Lambda x) \geq k\}} h_1(x) dx \quad (3.13)$$

$$=: I(k) \quad (3.14)$$

où $k = -VaR_\alpha + \sum_1^n \alpha_i$.

Si on remplace la fonction $h_1(x)$ dans l'intégrale (3.13), on obtient :

$$I(k) = \int_{\{(y, \Lambda y) \geq k\}} g((y - \mu - 1)^t \Sigma^{-1} (y - \mu - 1)) \frac{dy}{\sqrt{\det(\Sigma)}}. \quad (3.15)$$

Sachant que toutes les valeurs propres de la matrice diagonale Λ sont positives, si on remplace Λ par $\Lambda^{1/2} \cdot \Lambda^{1/2}$ dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} I(k) &= \int_{\{\langle \Lambda^{1/2}(Az + \mu + 1), \Lambda^{1/2}(Az + \mu + 1) \rangle \geq k\}} g(\|z\|^2) dz \\ &= \int_{\{\|\Lambda^{1/2}(Az + \mu + 1)\|_2^2 \leq k\}} g(\|z\|^2) dz. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En supposant que Σ est définie positive, une décomposition de Cholesky implique que $\Sigma = AA^t$, ainsi en procédant au changement de variable suivant $z = A^{-1}(y - \mu - 1)$, qui implique que $y = Az + \mu + 1$ et $dy = \sqrt{\det(\Sigma)} dz$, l'intégrale (3.16) s'écrit :

$$I(k) = \int_{(Az + \mu + 1)^t \Lambda (Az + \mu + 1) \geq k} g(\|z\|^2) dz, \quad (3.17)$$

de plus en écrivant

$$(Az + \mu + 1)^t \Lambda (Az + \mu + 1) = \langle z + v, D(z + v) \rangle,$$

où $D = A^t \Lambda A$, $v = A^{-1}(\mu + 1)$, des calculs simples impliquent que

$$I(k) = \int_{\{(z+v)^t D(z+v) \geq k\}} g(\|z\|^2) dz.$$

En posant $z + v = u$, on obtient

$$\int_{\{z^t D z \leq k\}} g(\|z - v\|^2) dz = 1 - \alpha. \quad (3.18)$$

Puisque par hypothèse $k > 0$, on posant $k = R^2 > 0$, le changement de variable sphérique $z = r \cdot \xi$ implique que

$$\begin{aligned} I(k) &= \int_{\{u^t D u \geq R^2\}} g(\|u - v\|^2) dz \\ &= \int_{\{\|z\| \geq 1\}} g(\|RD^{-\frac{1}{2}} z - v\|^2) \frac{dz}{\sqrt{\det(D)}} \\ &= \alpha \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$=: I(R), \quad (3.20)$$

3.2. Réduction du calcul de la VaR d'un portefeuille quadratique à l'estimation d'une intégrale sur un quadrique.

où $d\sigma(\xi)$ est un élément de surface au point $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de $S_{n-1} = \{\xi | \xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1\}$, $dz = r^{n-1} dr d\sigma(\xi)$ et

$$\begin{aligned} I(s)\sqrt{\det(D)} &= \int_1^\infty r^{n-1} \left[\int_{S_{n-1}} g(\|rsD^{-\frac{1}{2}}\xi - v\|^2) d\sigma(\xi) \right] dr \\ &= \int_1^\infty r^{n-1} J(r, s) dr \\ &=: H(s) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dans la section qui suivra, nous approximerons $J(r, R)$ en nous inspirant d'une méthode de A. Genz [17]. En effet,

$$J(r, R) = \int_{S_{n-1}} g(\|rRD^{-\frac{1}{2}}\xi - v\|^2) d\sigma(\xi). \quad (3.22)$$

Il nous paraît dès lors nécessaire de pouvoir d'estimer dans la mesure du possible l'intégrale suivante :

$$K(\xi, R) = \int_1^\infty r^{n-1} g(a(\xi, R).r^2 + b(\xi, R).r + c) dr$$

où c dépend de v , et on a que

$$I(R) = \int_{S_{n-1}} K(\xi, R) d\sigma(\xi).$$

On pourra distinguer deux approches pour y parvenir, une approche numérique ou une approche analytique. Nous choisirons dans ce chapitre une méthode inspirée de Alan Genz (2003)[17].

Remarque 3.2.1 Pour un taux de confiance $1 - \alpha$, notre problème sera réduit à la résolution d'une équation en R de la forme :

$$I(R) = \int_{S_{n-1}} K(\xi, R) d\sigma(\xi) = \alpha. \quad (3.23)$$

Pour parvenir à cette fin, à défaut d'une estimation explicite, nous aurons besoin d'une meilleure approximation de l'expression suivante :

$$\int_{S_{n-1}} K(\xi, R) d\sigma(\xi). \quad (3.24)$$

Remarque 3.2.2 En s'inspirant des méthodes Monte Carlo existantes dans la littérature financière, il est facile de construire une méthode Monte Carlo ou quasi Monte-Carlo pour déterminer la VaR d'un portefeuille quadratique de sous-jacents. Voir par exemple la méthode décrite dans Glasserman et al. [21].

On pourra penser à trois approches pour aborder ce problème, une approche numérique, une approche Monte Carlo, ou une approche analytique comme par exemple aux chapitres 1 et 2 de cette partie. Il est clair que le problème essentiel de l'estimation de la VaR d'un portefeuille d'actifs sous-jacents (i.e actions) tel que nous l'avons introduit, se réduit à l'approximation d'une intégrale multiple sur un quadrique. On rencontre ainsi un problème similaire au problème de l'estimation de la VaR d'un portefeuille "Δ - Γ", qui est la problématique de l'article de Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco [6] sous l'hypothèse gaussienne et du chapitre 2 de

cette thèse. Aussi plusieurs autres papiers dans la littérature financière tels [2], [11] proposent des méthodes de VaR $\Delta - \Gamma$.

Dans ce chapitre, en s'inspirant de certains résultats de Genz [17], on propose une approche numérique pour estimer la VaR d'un portefeuille quadratique d'actifs de bases tel que nous l'avons introduit. Rappelons, qu'en s'inspirant du chapitre 1 et 2 de cette partie, on pourrait proposer des méthodes d'estimations analytiques de la VaR lorsque le vecteur des rendements logarithmiques suit une loi de distribution multivariée de Laplace généralisée.

3.3 Une approximation numérique de $J(r, R)$

Dans cette section, nous utiliserons une approche numérique inspirée de la méthode de Alan Genz [17] pour approximer l'intégrale $J(r, R)$.

3.3.1 Quelques règles d'interpolation sur S_{n-1}

L'article de Alan Genz [17], propose une méthode que nous esquisserons dans cette partie pour approximer l'intégrale de la forme :

$$J(f) = \int_{S_{n-1}} f(z) d\sigma(z)$$

avec $d\sigma(z)$ un élément de surface de S_{n-1} , où $z = (z_1, \dots, z_n)$ et

$$S_{n-1} = \{z | z \in \mathbb{R}^n, z_1^2 + \dots + z_n^2 = 1\}.$$

En effet, soit le sous espace $T_{n-1} = \{x | x \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1\}$ de \mathbb{R}^{n-1} tel que pour $x \in T_{n-1}$, on définit $x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$. Etant donnés les points t_0, t_1, \dots, t_m tels que $|t_p| = \sum_{i=1}^n t_{p_i} = 1$ avec $\sum_{i=1}^n p_i = m$, $t_p = (t_{p_1}, \dots, t_{p_{n-1}})$ pour des entiers positifs p_1, \dots, p_n , alors la formule d'interpolation de Lagrange (cf. Silvester [48]) pour une fonction g sur T_{n-1} est donnée par

$$L^{(m, n-1)}(g, x) = \sum_{|p|=m} \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{p_i-1} \frac{x_i - t_j}{t_{p_i} - t_j} g(t_p).$$

$L^{(m, n-1)}(g, x)$ est l'unique polynôme d'interpolation de degré m qui interpole g sur tous les C_{m+n-1}^m points de l'ensemble $\{x | x = (t_{p_1}, \dots, t_{p_{n-1}}), |p| = m\}$. Silvester nous procure une famille de points qui satisfont la condition $|t_p| = 1$ lorsque $|p| = m$ en posant $t_i = \frac{i+\mu}{m+\theta n}$ pour $i = 0, 1, \dots, m$ où μ est réel. Si $0 \leq \theta \leq 1$, tous les points d'interpolation de $L^{(m, n-1)}(g, x)$ sont dans T_{n-1} . Ensuite, en posant $x_i = z_i^2$ et $t_i = u_i^2$ dans l'expression de $L^{(m, n-1)}(g, x)$, Alan Genz nous procure la fonction

$$M^{(m, n)}(f, z) = \sum_{|p|=m} \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{p_i-1} \frac{z_i^2 - u_j^2}{u_{p_i}^2 - u_j^2} f\{u_p\},$$

avec $f\{u\}$ une somme symétrique définie par

$$f\{u\} = 2^{-c(u)} \sum_s f(s_1 u_1, s_2 u_2, \dots, s_n u_n),$$

où $c(u)$ désigne le nombre de n -uplet (u_1, \dots, u_n) n'ayant aucune marginale nulle et telle que la somme \sum_s prend en considération toute combinaison de signe telle que $s_i = \pm 1$ pour tout i

avec $u_i \neq 0$. Ainsi, [17] propose une méthode pour approximer l'intégrale d'une fonction sur une hypersphère, par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Si*

$$w_p = J\left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{p_i-1} \frac{z_i^2 - u_j^2}{u_{p_i}^2 - u_j^2}\right),$$

alors

$$J(f) = R^{(m,n)}(f) = \sum_{|p|=m} w_p f\{u_p\} \quad (3.25)$$

est un polynôme d'interpolation de degré $2m+1$.

La preuve du théorème qui précède est donnée dans A. Genz [17](2003) comme suit :

Soit $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdot z_n^{k_n}$, J, R deux fonctionnelles linéaires, il suffit de montrer que $R^{(m,n)}(z^k) = J(z^k)$ lorsque $|k| \leq 2m+1$. Si k contient une composante k_i qui est impair, alors $J(z^k) = 0$ et $R^{(m,n)}(z^k) = 0$ parce que le terme pair u_q^k dans chaque somme symétrique $f\{u_p\}$ annule le terme u_q^k . Ainsi, les seuls monômes qu'on a besoin de considérer sont de la forme z^{2k} où $|k| \leq m$. L'unicité de $L^{(m,n-1)}(g, x)$ implique que $L^{(m,n-1)}(x^k, x) = x^k$ chaque fois que $|k| \leq m$, d'où $M^{(m,n)}(z^{2k}, z) = z^{2k}$ lorsque $|k| \leq m$. En combinant les résultats précédents on obtient :

$$\begin{aligned} J(f) &= M^{(m,n)}(f, z) = \sum_{|p|=m} w_p f\{u_p\} \\ &= R^{(m,n)}(z^k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

lorsque $f(z) = z^k$ avec $|k| \leq 2m+1$, $R^{(m,n)}(f)$ est un polynôme de degré $2m+1$.

Exemple 3.3.1 *Pour le choix particulier de $u_i = \sqrt{\frac{i+\mu}{m+\mu n}}$, les poids peuvent être déterminés comme suit en utilisant ([48], p.221),*

$$\int_{S_{n-1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot x_n^{k_n} d\sigma(x) = 2 \frac{\Gamma((k_1+1)/2)\Gamma((k_2+1)/2) \cdot \Gamma((k_n+1)/2)}{\Gamma((|k|+n)/2)}.$$

3.3.2 Application pour une approximation de $J(r, R)$

Rappelons que dans la section précédente notre but était d'estimer (3.22), ainsi nous comptons sur une application du théorème 3.3.1 à la fonction f telle que

$$f(z) = g(\|rRD^{-\frac{1}{2}}z - v\|^2),$$

pour y parvenir. Pour un point d'interpolation u_p choisi sur l'hypersphère, on définit une fonction de f comme suit :

$$f\{u_p\} = g(\|rRD^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)^t - v\|^2),$$

en introduisant la fonction approchée J_{u_p} de la fonction $J(r, R)$ qui dépend du choix des points d'interpolation u_p , l'expression de (3.22) devient

$$\begin{aligned} J(r, R) &\approx \sum_{|p|=m} \sum_s w_p g(\|rRD^{\frac{-1}{2}}(s.u_p) - v\|^2) \\ &:= J_{u_p}(r, R), \end{aligned} \quad (3.27)$$

où on note $s.u_p = (s_1u_1, \dots, s_nu_n)^t$.

Remarque 3.3.1 $J_{u_p}(r, R)$ est l'approximation numérique par interpolation de $J(r, R)$ comme définie en (3.27), et qui dépend du choix des points d'interpolation u_p sur l'hypersphère. Rappelons que $J(r, R)$ est une fonction qui dépend de R et de la fonction g spécifiant le choix d'une distribution elliptique.

En introduisant H_{u_p} qui sera la fonction approchée obtenue par une interpolation de la fonction H comme définie en (3.21) et qui s'exprime en fonction J_{u_p} comme suit :

$$\begin{aligned} H_{u_p}(s) &:= s^n \int_1^\infty r^{n-1} J_{u_p}(r, s) dr \\ &\approx H(s). \end{aligned} \quad (3.28)$$

En remplaçant $H(s)$ dans (3.21) par $H_{u_p}(s)$, on prouve le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 *Soit un portefeuille quadratique d'actions, tel que le rendement absolu (Perte & Profit) s'écrit $\Delta\Pi \approx \sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \theta_i(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2})$, avec les poids du portefeuille θ_i , $i = 1 \dots n$. Supposons que les rendements logarithmiques joints (η_1, \dots, η_n) suit une distribution elliptique continue ayant la fonction densité de probabilité donnée en (3.11), avec μ , Σ sont respectivement le vecteur espérance et la matrice de variance-covariance. Supposons aussi que $g(s^2)$ est intégrable, continue et non nulle sur \mathbb{R} . Alors la VaR_{α, u_p}^g log-elliptique pour un taux de confiance $(1 - \alpha)$ du portefeuille quadratique sera donnée par*

$$VaR_{\alpha, u_p}^g = \frac{P(0)}{2} - R_{g, u_p}^2 \quad (3.29)$$

où R_{g, u_p} est l'unique solution de l'équation

$$H_{u_p}(s) = (1 - \alpha) \cdot \sqrt{\det(D)} = \frac{(1 - \alpha)}{2^{n/2}} \sqrt{\det(\Sigma) \prod_{i=1}^n \theta_i \cdot S_i(0)}. \quad (3.30)$$

On suppose toujours de façon implicite que $VaR_{\alpha, u_p}^g \leq P(0)/2$. c'est-à-dire que pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, la perte ne saurait dépasser la moitié de la valeur du portefeuille en $t = 0$.

Remarque 3.3.2 Le théorème précédent nous procure une (VaR_{α, u_p}^g) approchée et définie relativement avec les choix de α , de la fonction g et du choix des points d'interpolation donnés par le vecteur u_p sur hypersphère. Ainsi il est clair que le choix des points d'interpolation u_p dépendra des caractéristiques de la fonction g comme définie dans l'expression (3.11).

Par des calculs simples, on obtient les remarques suivantes :

Remarque 3.3.3

$$J_{u_p}(r, R) = \sum_{|p|=m} w_p \sum_s g\left(a(s, u_p, R) \cdot r^2 - 2 \cdot b(s, u_p, R, D, v) \cdot r + c(v)\right) \quad (3.31)$$

tel que $a(s, u_p, R, D) = \|RD^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2$, $b(s, u_p, R, D, v) = R \langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle$, $c = \|v\|^2$. Le plus souvent pour certaines simplifications on notera a, b, c .

En utilisant l'inégalité de Schwartz, on obtient que $b^2 - ac > 0$, par suite en posant $b1 = b^2 - ac$, $u = r - \frac{b}{a}$, en introduisant $G^{j,g}$ for $j = 0, \dots, n-1$, et en utilisant le binôme de newton on obtient la remarque suivante :

Remarque 3.3.4

$$J(r, R) = \sum_{|p|=m} w_p \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (b/a)^{n-1-j} G_{u_p, s}^{j,g}(R) \quad (3.32)$$

avec

$$G_{u_p, s}^{j,g}(R) = \int_{1-\frac{b}{a}}^{\infty} z^j \cdot g(az^2 - b_1) dz, \quad (3.33)$$

où les fonctions a, b et c sont définies dans la remarque (3.3.3).

En remplaçant $d = b/a = \frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle}{R \|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2}$ dans (3.33), on obtient

$$G_{u_p, s}^{j,g}(R) = \int_{1-\frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle}{R \|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2}}^{\infty} z^j \cdot g\left(R^2 \cdot \|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2 z^2 - \frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle^2}{\|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2} + \|v\|^2\right) dz. \quad (3.34)$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 Soit un portefeuille quadratique d'actions tel que le rendement absolu (Perte & Profit) s'écrit comme $\Delta\Pi \approx \sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \theta_i(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2})$, où les θ_i , $i = 1 \dots n$, sont les quantités des différents actifs du portefeuille. Supposons que les rendements logarithmiques joints (η_1, \dots, η_n) suit une distribution elliptique continue ayant pour fonction densité de probabilité donnée en (3.11), où μ, Σ sont respectivement le vecteur espérance et la variance-covariance. Supposons aussi que $g(s^2)$ est intégrable, continue et non nulle sur \mathbb{R} . Alors la VaR_{α, u_p}^g log-elliptique pour un taux de confiance $(1 - \alpha)$ du portefeuille quadratique sera donnée par

$$VaR_{\alpha, u_p}^g = \frac{P(0)}{2} - R_{g, u_p}^2, \quad (3.35)$$

où R_{g, u_p} est l'unique solution positive de l'équation en R suivante :

$$\sum_{|p|=m} \frac{w_p}{1-\alpha} \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} R^{j+1} \left(\frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle}{\|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2} \right)^{n-1-j} G_{u_p, s}^{j,g}(R) = \sqrt{\frac{\det(\Sigma)}{2^n} \prod_{i=1}^n \theta_i \cdot S_i(0)}. \quad (3.36)$$

On suppose toujours de façon implicite que $VaR_{\alpha, u_p}^g \leq P(0)/2$, c'est-à-dire que pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, la perte ne saurait dépasser la moitié de la valeur du portefeuille en $t=0$.

Remarque 3.3.5 On a ainsi réduit l'estimation de la VaR d'un portefeuille quadratique d'actions telle que nous l'avons défini, à l'estimation d'une intégrale uni-dimensionnelle, et éventuellement dans certains cas à la recherche des zéros de certaines fonctions spéciales. Ainsi pour avoir une équation explicite à résoudre, nous avons besoin d'estimer la fonction $G_{u_p, s}^{j, g}(R)$ qui dépend de R , g , u_p , v et D .

Par conséquent, sous les hypothèses de la distribution normale, de la distribution t -Student ou de la distribution de Laplace généralisée, il suffira de remplacer g qui caractérise la distribution considérée dans l'expression (3.33), et par suite d'estimer l'intégrale (3.33).

3.3.3 Cas de la distribution normale

Si on travaille sous l'hypothèse de la distribution normale admettant pour fonction densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t\right) \quad (3.37)$$

avec la fonction spécifique g définie comme suit

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = C(n) \cdot e^{-\frac{x}{2}},$$

il suffit de remplacer g dans (3.33) pour obtenir

$$G_{u_p, s}^j(R) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{b_1}{2}} \int_{1-\frac{b}{a}}^{\infty} u^j e^{-\frac{au^2}{2}} du. \quad (3.38)$$

Si $1 - \frac{b}{a} > 0$, c'est le cas lorsque R est suffisamment grand de telle sorte que $|v| < R\|D^{\frac{-1}{2}}(s.u_p)\|$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G_{u_p, s}^j(R)}{\exp\left(-\frac{\|v\|^2}{2}\right)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}} &= \exp\left(\frac{\langle D^{\frac{-1}{2}}(s.u_p), v \rangle^2}{R\|D^{\frac{-1}{2}}(s^t u_p)\|^2}\right) (2/a)^{\frac{1+j}{2}} \\ &\cdot \Gamma\left(\frac{j+1}{2}, \frac{(R\|D^{\frac{-1}{2}}(s^t u_p)\|)^2}{2} \left(1 - \frac{\langle D^{\frac{-1}{2}}(s.u_p), v \rangle^2}{R\|D^{\frac{-1}{2}}(s^t u_p)\|^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

et puisque $a = (R\|D^{\frac{-1}{2}}(s.u_p)\|)^2$, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.3.4 Soit un portefeuille quadratique d'actions, tel que le rendement absolu (Perte & Profit) soit donné par $\Delta\Pi \approx \sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \theta_i(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2})$, avec les poids du portefeuille θ_i , $i = 1 \dots n$. Supposons que les rendements logarithmiques joints (η_1, \dots, η_n) suit une distribution normale continue ayant la fonction densité de probabilité donnée en (3.37). La VaR_{α, u_p} au taux de confiance $1 - \alpha$ est donnée par la formule suivante

$$R_{u_p, \alpha}^2 = -VaR_{\alpha, u_p} + \frac{P(0)}{2},$$

pour laquelle $R_{u_p, \alpha}$ est l'unique solution positive de l'équation transcendentale en R suivante :

$$2(1-\alpha) \frac{\sqrt{\det(D)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \sum_{|p|=m} w_p \sum_s \frac{\langle D^{\frac{-1}{2}}(s.u_p), v \rangle^{(n-j-1)}}{\|D^{\frac{-1}{2}}(s.u_p)\|^{(2n-1-j)}} e^{\frac{b_1}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \Gamma\left(\frac{j+1}{2}, \frac{a}{2} \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2\right), \quad (3.40)$$

où $b_1 = \frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle^2}{\|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2} - \|v\|^2$, $\frac{b}{a} = \frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle}{R\|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2}$, $a = R^2\|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2$. On suppose dans ce cas que $\text{VaR}_{\alpha; u_p} \leq P(0)/2$. Aussi la notation Γ représente la fonction gamma incomplète.

3.3.4 Application avec la t -Student distribution

Dans cette partie, nous illustrons les résultats précédents, en obtenant une expression explicite de l'équation dont la solution est la VaR lorsque le vecteur des rendements logarithmiques suit une distribution t -Student. En effet, la distribution Student, est souvent présentée comme étant plus adaptée que la distribution normale, pour caractériser les facteurs de risques du marché, car la variation de son degré de liberté permet un meilleur contrôle de ce qu'on appelle en anglais "kurtosis". Autrement dit, le libre choix du degré de liberté permettrait de mieux adapter les queues de distributions aux réalités financières. Pour plus de détails consulter [32],[21], [1], [31] leurs références.

Ainsi, si notre distribution elliptique est en particulier une distribution Student, avec pour fonction densité

$$g(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{(\nu\pi)^n}} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)^{\frac{-\nu-n}{2}}, \quad (3.41)$$

alors, en remplaçant g dans (3.36), on obtient l'équation

$$\sum_{|p|=m} w_p \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (b/a)^{n-1-j} \int_{1-\frac{b}{a}}^{\infty} u^j \left(1 + \frac{au^2 - b_1^2}{\nu}\right)^{\frac{-\nu-n}{2}} du = \frac{(1-\alpha)\sqrt{\det(D)}}{C(n, \nu)R^n}. \quad (3.42)$$

En posant $c_1 = \nu - b_1^2$, l'équation (3.32) s'écrit :

$$\sum_{|p|=m} w_p \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (b/a)^{n-1-j} \int_{1-\frac{b}{a}}^{\infty} u^j (au^2 + c_1)^{\frac{-\nu-n}{2}} du = \frac{(1-\alpha)\sqrt{\det(D)}}{\nu^{\frac{\nu+n}{2}} C(n, \nu)R^n}. \quad (3.43)$$

En changeant de variables dans cette intégrale comme suit $v = u^2$, puis en posant $\beta = \frac{a}{c_1}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\alpha)\pi^{n/2}\Gamma(\nu/2)\sqrt{\det(D)}}{\nu^{\frac{\nu+n}{2}}\Gamma(\frac{\nu+n}{2})} \\ &= R^n \sum_{|p|=m} w_p \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (b/a)^{n-1-j} c_1^{\frac{-n-\nu}{2}} \int_{(1-\frac{b}{a})^2}^{\infty} \frac{v^{\frac{j+1}{2}-1}}{(\beta v + 1)^{\frac{\nu+n}{2}}} dv. \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'intégrale qui est dans l'expression (3.44) peut être calculé grâce au lemme suivant extrait de [22] :

Lemme 3.3.1 (cf. [22], formule 3.194(2)). Si $|\arg(\frac{u}{\beta})| < \pi$, et $\text{Re}(\nu_1) > \text{Re}(\mu) > 0$, alors

$$\int_u^{+\infty} x^{\mu-1} (1 + \beta x)^{-\nu_1} dx = \frac{u^{\mu-\nu_1} \beta^{-\nu_1}}{\nu_1 - \mu} {}_2F_1(\nu_1, \nu_1 - \mu; \nu_1 - \mu + 1; -\frac{1}{\beta \cdot u}). \quad (3.45)$$

Ici ${}_2F_1(\alpha; \beta, \gamma; w)$ est la fonction hypergéométrique.

Dans notre cas, $\nu_1 = \frac{\nu+n}{2}$, $u = \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2$, $\nu_1 - \mu = \frac{n+\nu-j-1}{2}$, $\nu_1 - \mu + 1 = \frac{n+\nu-j+1}{2}$, et si on remplace dans (3.44), on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.3.5 Soit un portefeuille quadratique d'actions, tel que le rendement absolu (Perte & Profit) est donné par $\Delta\Pi \approx \sum_{i=1}^n S_i(0) \theta_i (\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2})$, où θ_i , $i = 1 \dots n$, est le nombre d'actifs "i". Supposons que les rendements logarithmiques joints (η_1, \dots, η_n) suit une distribution multivariée t-Student continue ayant pour fonction densité de probabilité (3.41), où μ , Σ sont respectivement le vecteur espérance et la matrice de variance-covariance, la VaR_{α, u_p} au taux de confiance $1 - \alpha$ est donnée par la formule suivante

$$R_{u_p, \alpha}^2 = -VaR_{\alpha, u_p} + \frac{P(0)}{2}$$

pour laquelle $R_{u_p, \alpha}$ est l'unique solution de l'équation transcendentale en R suivante :

$$\frac{(\pi/2)^{n/2} \Gamma(\nu/2)}{\nu^{\frac{\nu+n}{2}} \Gamma(\frac{\nu+n}{2})} = \frac{R^n}{(1-\alpha)} \cdot \sum_{|p|=m} w_p \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{(b/a)^{n-1-j}}{(\nu - b_1^2)^{\frac{-n-\nu}{2}}} \frac{{}_2F_1 \left[\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu-j-1}{2}, \frac{n+\nu-j+1}{2}; \frac{b_1^2-\nu}{a(1-\frac{b}{a})^2} \right]}{(n+\nu-j-1) \sqrt{\det(\Sigma)} \prod_{i=1}^n \theta_i \cdot S_i(0)} \quad (3.46)$$

tel que $b_1 = \frac{(\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle)^2}{\|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2} - \|v\|^2$, $\frac{b}{a} = \frac{\langle D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v \rangle}{R \|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2}$, $a = R^2 \|D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p)\|^2$. On suppose dans ce cas que $VaR_{\alpha; u_p} \leq P(0)/2$.

Remarque 3.3.6 Notons que la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ a été largement étudiée dans la littérature et des logiciels comme Mathematica et Maple l'évaluent assez bien.

3.3.5 Cas de la distribution de Laplace généralisée

Si la distribution elliptique $N(\mu, \Sigma, g)$ est la distribution de Laplace généralisée alors

$$g(x) = C(\nu, n) e^{-c(\nu, n) x^{\frac{\nu}{2}}},$$

en substituant g par sa valeur dans (3.36), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} I(R) &= C(\nu, n) \sum_{|p|=m} w_p \sum_s \int_1^\infty r^{n-1} e^{-\|rRD^{-\frac{1}{2}}(s^t u_p) - v\|^\nu} \frac{dr}{\det(D)} \\ &= C(\nu, n) \sum_{|p|=m} w_p \sum_s J(R, s, p), \end{aligned} \quad (3.47)$$

où

$$J(R, s, p) = \int_1^\infty r^{n-1} e^{-c(\nu, n) \|RrD^{-\frac{1}{2}}(s^t u_p) - v\|^\nu} \frac{dr}{\sqrt{\det(D)}} \quad (3.48)$$

3.4. Application avec le mélange de distributions elliptiques

$a = \|RD^{-\frac{1}{2}}(s^t u_p)\|^2$, $b = R < D^{-\frac{1}{2}}(s.u_p), v >$, $c = \|v\|^2$, en posant $u=r-b$ et $c_2 = \frac{b^2-ac}{a^2}$, $J(R, s, p)$ est réduit à l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} J(R, s, p) &= \int_{1-b/a}^{\infty} (u + b/a)^{n-1} e^{-c(\nu, n)(a(u^2+c_2^2))^{\nu/2}} du \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b^{n-1-j} \int_{1-b/a}^{\infty} u^j e^{-c(\nu, n)(a^2(u^2+c-b^2))^{\nu/2}} \frac{du}{\sqrt{\det(D)}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

En posant $z^2 = (u^2 + c_2^2)$, $zdz = u du$ on obtient

$$J(R, s, p) = \sum_{j=0}^{n-1} b^{n-1-j} \int_{\sqrt{(1-b/a)^2+c_2^2}}^{\infty} (z^2 - c_2^2)^{(j-1)/2} e^{-(az)^\nu} dz.$$

Dès lors que $R \gg c_2$, en utilisant l'approximation $(1 + z^{-1})^\alpha = 1 + \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + O(z^{-2})$, on obtient l'expression :

$$J(R, s, p) = \sum_{j=0}^{n-1} b^{n-1-j} \int_{\sqrt{(1-b/a)^2+c_2^2}}^{\infty} (1 + \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2}) z^{j-1} e^{-c(\nu, n)(az)^\nu} \frac{dz}{\sqrt{\det(D)}} + Rest$$

avec $\alpha = j - 1$, on peut comme dans Brummelhuus, Cordoba, Quintanilla et Seco [6](2002), se contenter de la donnée de la composante principale retrouver une approximation de la VaR. Pour retrouver, tout du moins la composante principale, il suffira de calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\sqrt{(1-b/a)^2+c_2^2}}^{\infty} (1 + (j-1)c_2 z^{-1} + \frac{(j-1)(j-2)}{2} c_2 z^{-2}) z^{j-1} e^{-c(\nu, n)(az)^\nu} dz.$$

Notons que des logiciels tels que Mathematica, Maple etc, calculent assez bien des intégrales du type 3.3.5.

3.4 Application avec le mélange de distributions elliptiques

Le mélange de distributions normales a été utilisée par exemple dans Subu Vantakaramanan [47](1997), et par d'autres auteurs comme une sérieuse alternative à la distribution normale, pour contrôler les queues de distributions des rendements d'actifs financiers. C'est dans le même ordre d'idées, que nous comptons généraliser notre méthode aux mélanges de distributions elliptiques. Une illustration utile, sera de considérer combinaison linéaire convexe de distributions t-Student.

3.4.1 Mélange de distributions elliptiques

Si (X_1, \dots, X_n) est le mélange de q distributions elliptiques $N_n(\mu_j, \Sigma_j, \phi_j)$ avec la fonction de répartition $\{F_j(x_1, \dots, x_n)\}$ affecté des poids $\{\beta_j\}$ ($j=1, \dots, q; \beta_j > 0; \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$)

Alors

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^q \beta_j F_j(x_1, \dots, x_n),$$

où X_j admet une fonction de répartition F_j et une fonction densité :

$$h_j(x) = g_j((x - \mu_j)^t \Sigma_j^{-1} (x - \mu_j)) / \sqrt{\det(\Sigma_j)}.$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= h_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\
 &= \sum_{j=1}^q \beta_j h_j(x_1, \dots, x_n) \\
 &= \sum_{j=1}^q \beta_j g_j((x - \mu_j)^t \Sigma_j^{-1} (x - \mu_j)) / \sqrt{\det(\Sigma_j)}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

h est la fonction densité de (X_1, \dots, X_n) .

$$\Sigma_j = A_j A_j^t.$$

Ainsi, on aura besoin d'une expression de la forme (4.2), pour résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \alpha R^{-n} &= \sum_{k=1}^q \int_1^\infty r^{n-1} \left[\int_{S_{n-1}} g_k(\|r R D_k^{-\frac{1}{2}} \xi - v_k\|^2) d\sigma(\xi) \right] \frac{dr}{\sqrt{\det(D_k)}} \\
 &= \sum_{k=1}^q \int_1^\infty r^{n-1} J_k(r, R) dr.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Théorème 3.4.1 *Etant donné un portefeuille d'actions, dont le vecteur des rendements logarithmiques joints suit le mélange de q distributions elliptiques ayant pour fonction densité (3.50), alors la VaR_α est obtenue via la solution de l'équation suivante :*

$$\alpha R^{-n} = \sum_{k=1}^q \int_1^\infty r^{n-1} \left[\int_{S_{n-1}} g_k(\|r R D_k^{-\frac{1}{2}} \xi - v_k\|^2) d\sigma(\xi) \right] \frac{dr}{\sqrt{\det(D_k)}} \tag{3.52}$$

et

$$R^2 = -VaR_\alpha + \frac{P(0)}{2}.$$

On suppose que la perte ne devra pas être supérieure à la moitié du prix du portefeuille.

Remarque 3.4.1 *Etant donné un portefeuille d'actions, dont les rendements logarithmiques des facteurs de risques joints est le mélange de q distributions elliptiques ayant pour fonction densité (3.50), la VaR_α est obtenue par la solution de l'équation suivante :*

$$\alpha R^{-n} = \sum_{k=1}^q \int_1^\infty r^{n-1} \left[\int_{S_{n-1}} g_k(a_k r^2 - 2b_k r + c_k) d\sigma(\xi) \right] \frac{dr}{\sqrt{\det(D_k)}} \tag{3.53}$$

$R^2 = -VaR_\alpha + \frac{P(0)}{2}$. $a_k = \|RD_k^{-\frac{1}{2}}(s^t u_p^{(k)})\|^2$, $b_k = R \langle D_k^{-\frac{1}{2}}(s.u_p^{(k)}), v_k \rangle$, $c_k = \|v_k\|^2$. Notons que $u_p^{(k)}$ est le point d'interpolation de la k^{ieme} densité de fonction dans la k^{ieme} intégrale de la somme.

3.4.2 Application d'un mélange de distributions t -Student

Dans cette partie, on considère en particulier le mélange de q t -distributions telles que la $k^{ième}$ fonction densité du mélange pour $i = 1, \dots, q$ soit définie via la donnée de

$$g_k(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu_k+n}{2})}{\Gamma(\nu_k/2) \cdot \pi^{n/2}} \left(1 + \frac{x}{\nu_k}\right)^{\frac{(-\nu_k-n)}{2}} = C(n, \nu_k) \left(1 + \frac{x}{\nu_k}\right)^{\frac{(-\nu_k-n)}{2}} \quad (3.54)$$

et $\Sigma_k = A_k^t A_k$. En remplaçant g_k par g dans (3.55) et en se servant du fait que l'opération intégrale est linéaire nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.4.2 *Soit un portefeuille d'actions tel que la fonction rendement absolu du portefeuille (fonction perte ou profit) dans un intervalle de temps assez petit est donnée par $\Delta\Pi \approx \sum_{i=1}^n S_i(0) \cdot \theta_i(\eta_i(t) + \frac{\eta_i(t)^2}{2})$, avec les poids du portefeuilles θ_i pour $i = 1, \dots, q$. Supposons que les rendements logarithmiques joints (η_1, \dots, η_n) suit le mélange q distributions t -Student multivariées, ayant pour fonction densité*

$$h(x) = \sum_{j=1}^q \beta_j |\Sigma_j|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu_j+n}{2})}{\Gamma(\nu_j/2) \cdot \pi^{n/2}} \left(1 + \frac{(x - \mu_j) \Sigma_j^{-1} (x - \mu_j)^t}{\nu_j}\right)^{-\frac{n+\nu_j}{2}}$$

où μ_j, Σ_j sont respectivement le vecteur espérance de la matrice de variance-covariance de la $j^{ième}$ composante du mélange de q distributions. On suppose aussi que g_j est une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ , et que les g_j joints ne s'annulent pas en un point de \mathbb{R}^m . Alors la valeur à risque notée VaR_α au taux de confiance $1 - \alpha$ est donnée par :

$$R_{u_p}^2 = -VaR_\alpha + \frac{P(0)}{2},$$

où R_{u_p} est l'unique solution positive de l'équation suivante

$$\frac{(1 - \alpha)}{(\pi/2)^{\frac{-n}{2}}} = \sum_{k=1}^q \sum_{|p|=m} \frac{w_p \Gamma(\frac{\nu_k+n}{2})}{\Gamma(\nu_k/2)} \sum_s \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{R^n (b_k/a_k)^{n-1-j}}{((\nu_k - b_{1k}^2)/\nu_k)^{\frac{-n-\nu}{2}}} \frac{{}_2F_1 \left[\frac{n+\nu_k}{2}, \frac{n+\nu_k-j-1}{2}, \frac{n+\nu_k-j+1}{2}, \frac{b_{1k}^2-\nu}{a_k(1-\frac{b_k}{a_k})^2} \right]}{(n + \nu_k - j - 1) \sqrt{|\Sigma_k|} \prod_{i=1}^n \theta_i \cdot S_i(0)}, \quad (3.55)$$

avec $b_{1k} = \frac{(\langle D_k^{-\frac{1}{2}}(s.u_{pk}), v_k \rangle)^2}{\|D_k^{-\frac{1}{2}}(s.u_{pk})\|^2} - \|v_k\|^2$, $\frac{b_k}{a_k} = \frac{\langle D_k^{-\frac{1}{2}}(s.u_{pk}), v_k \rangle}{R \|D_k^{-\frac{1}{2}}(s.u_{pk})\|^2}$, $a_k = R^2 \|D_k^{-\frac{1}{2}}(s.u_{pk})\|^2$ et $\det(\Sigma_k) = |\Sigma_k|$. Dans cette étude, on suppose implicitement que les pertes dans l'intervalle de temps donné précédemment ne saurait dépasser $P(0)/2$.

3.5 ES log-elliptique pour un portefeuille quadratique d'actions

L'ES (en anglais Expected Shortfall) est une mesure statistique sous-additive de risque qui décrit le comportement moyen du risque des pertes au delà de la VaR_α . Dans cette partie

nous proposons une méthode pour estimer l'ES pour un portefeuille quadratique d'actions log-elliptique. Il faut rappeler tout de même que l'estimation de l'ES nécessite la connaissance de la VaR_α .

Etant donné la VaR_α , l'Expected Shortfall est mathématiquement obtenu par la formule suivante :

$$\text{Expected Shortfall} = \mathbb{E}(-\Delta\Pi \mid -\Delta\Pi > VaR). \quad (3.56)$$

Pour plus de détails voir par exemple Mina [29](2001). Sachant que la fonction densité de probabilité d'une distribution elliptique est donnée par

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t),$$

l'Expected Shortfall au taux de confiance $1 - \alpha$ est donné par

$$\begin{aligned} -ES_\alpha &= \mathbb{E}(\Delta\Pi \mid \Delta\Pi \leq -VaR_\alpha) \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(\Delta\Pi \cdot 1_{\{\Delta\Pi \leq -VaR_\alpha\}}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{\{(x, \Lambda.x) - P(0)/2 \leq -VaR_\alpha\}} ((x, \Lambda.x) - P(0)/2) h_1(x) dx \\ &= \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{\alpha} \int_{\{(x, \Lambda.x) \leq -VaR_\alpha + P(0)/2\}} ((x, \Lambda.x) - P(0)/2) g((x - \mu - 1)\Sigma^{-1}(x - \mu - 1)^t) dx. \end{aligned}$$

En se servant de la définition de la VaR_α et en remplaçant $\Delta\Pi = (X, \Lambda X) - \frac{P(0)}{2}$ dans (3.56), avec X vecteur aléatoire défini en section 2,

$$ES_\alpha = \frac{P(0)}{2} - \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{\alpha} \int_{\{(x, \Lambda.x) \leq -VaR_\alpha + P(0)/2\}} (x, \Lambda.x) g((x - \mu - 1)\Sigma^{-1}(x - \mu - 1)^t) dx. \quad (3.57)$$

En utilisant certains changements de variables comme dans la section 2 et 3, on obtient

$$\begin{aligned} ES_\alpha &= \frac{P(0)}{2} - \frac{R^{n+2}|D|^{-1/2}}{\alpha} \int_0^1 r^{n+1} \left[\int_{S_{n-1}} g(\|rRD^{\frac{-1}{2}}\xi - v\|^2) d\sigma(\xi) \right] dr \\ &= \frac{P(0)}{2} - \frac{R^{n+2}|D|^{-1/2}}{\alpha} \int_0^1 r^{n+1} J(r, R) dr \\ &\approx \frac{P(0)}{2} - \frac{R^{n+2}|D|^{-1/2}}{\alpha} \int_0^1 r^{n+1} J_{u_p}(r, R) dr \\ &= \frac{P(0)}{2} - \frac{R^{n+2}|D|^{-1/2}}{\alpha} \sum_{|p|=m} \sum_s w_p \int_0^1 r^{n+1} g(\|rRD^{\frac{-1}{2}}(s.u_p)^t - v\|^2) dr., \end{aligned}$$

En introduisant la fonction $Q_{u_p, s}^g$ telle que

$$Q_{u_p, s}^g(R) = R^{n+2} \int_0^1 r^{n+1} g(\|rRD^{\frac{-1}{2}}(s.u_p)^t - v\|^2) dr, \quad (3.58)$$

on obtient le théorème suivant :

3.5. ES log-elliptique pour un portefeuille quadratique d'actions

Théorème 3.5.1 *Supposons qu'on detient un portefeuille d'actions ayant pour facteurs de risque joints $X = (X_1, \dots, X_n) : \Delta\Pi = (X, \Lambda \cdot X) - \frac{P(0)}{2}$. Si $X \sim N(\mu + 1, \Sigma, \phi)$ avec pour fonction densité $f_X(x) = |\Sigma|^{-1} g((x - \mu - 1)\Sigma^{-1}(x - \mu - 1)^t)$, étant donné la VaR_α , ES_α au taux de confiance $1 - \alpha$ s'écrit :*

$$ES_\alpha = \frac{P(0)}{2} - \frac{|D|^{-1/2}}{\alpha} \sum_{|p|=m} \sum_s w_p Q_{u_p, s}^g \left(\left(\frac{P(0)}{2} - VaR_\alpha \right)^{1/2} \right). \quad (3.59)$$

En introduisant I_1^g et I_2^g tels que

$$R^{-n-2} Q_{u_p, s}^g(R) = \int_0^1 r^{n+1} g(ar^2 - 2br + c) dr = \int_0^\infty - \int_1^\infty = I_{1, u_p, s}^g(R) - I_{2, u_p, s}^g(R),$$

puis en suivant l'intégrale (3.33),

$$I_{2, u_p, s}^g(R) = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (b/a)^{n+1-j} \cdot G_{u_p, s}^{j, g}(R)$$

avec a, b, c définis en (3.3.3) et

$$I_{1, u_p, s}^g(R) = \int_0^\infty r^{n+1} g(ar^2 - 2br + c) dr.$$

3.5.1 ES d'un portefeuille quadratique d'actions avec la distribution normale

Dans le cas ou on choisit comme distribution elliptique, une distribution normale avec une fonction densité sur la forme (3.37), où g est spécifiquement donné par

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = C(n) \cdot e^{-\frac{x}{2}},$$

il suffit de remplacer g dans (3.33) pour obtenir :

$$\begin{aligned} G_{u_p, s}^j(R) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{b^2 - ac}{2a}\right) \int_{1-\frac{b}{a}}^\infty u^j \exp\left(-\frac{au^2}{2}\right) du \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{b^2 - ac}{2a}\right) (2/a)^{\frac{1+j}{2}} \Gamma\left(\frac{j+1}{2}, \frac{a}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Ensuite en utilisant le lemme suivant

Lemme 3.5.1 (cf. [22], formule 3.462(1)). Si $Re(\nu) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ alors

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \exp(-\beta x^2 - \lambda x) dx = (2\beta)^{-\nu/2} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{\lambda^2}{8\beta}\right) \mathbb{D}_{-\nu}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad (3.60)$$

où $\mathbb{D}_{-\nu}$ est une fonction spéciale "fonction parabolique cylindrique" (en anglais on l'appelle parabolic cylinder function). Rappelons que

$$\mathbb{D}_{-\nu}(z) = 2^{\frac{-\nu}{2}} e^{\frac{-z^2}{2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1+\nu}{2})} \Phi\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}z}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \Phi\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right]$$

où Φ est "la fonction hypergéométrique confluyente" (en anglais confluent hypergeometric function, pour plus détails, voir Gradshteyn et Ryzhik [22] page 1018).

On obtient par suite que

$$I_{2,u_p,s}^g(R) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (b/a)^{n+1-j} \cdot \exp\left(\frac{b^2-ac}{4a}\right) (2/a)^{\frac{1+j}{2}} \Gamma\left(\frac{j+1}{2}, \frac{a}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^2\right)$$

et

$$\begin{aligned} I_{1,u_p,s}^g(R) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|v\|^2}{2}\right) \int_0^1 r^{n+1} \exp\left(-\frac{ar^2-2br}{2}\right) dr \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|v\|^2}{2}\right) a^{\frac{n+2}{2}} \Gamma(n+2) \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \mathbb{D}_{-n-2}\left(\frac{-b}{\sqrt{a}}\right) \end{aligned}$$

tel que \mathbb{D}_{-n-2} est la fonction parabolique cylindrique. On a ainsi prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.5.2 *Supposons qu'on détient un portefeuille quadratique d'actifs de bases ayant pour rendements logarithmiques $X = (X_1, \dots, X_n)$ d'actifs (i.e actions) comme définit précédemment avec pour rendement absolu $\Delta\Pi = (X, \Lambda \cdot X) - \frac{P(0)}{2}$ tel que X suit une distribution normale. Etant donné VaR_α , l'Expected Shortfall au taux de confiance $1 - \alpha$ est donné par :*

$$ES_\alpha = \frac{P(0)}{2} - \frac{R^{n+2}|D|^{-1/2}}{\alpha} \sum_{|p|=m} \sum_s w_p \left[I_{1,u_p,s}^g(R) - I_{2,u_p,s}^g(R) \right]. \quad (3.61)$$

tel que $R = \sqrt{\frac{P(0)}{2} - VaR_\alpha}$

On pourra très facilement faire une généralisation sous l'hypothèse d'un mélange de distributions normales.

3.5.2 ES d'un portefeuille quadratique d'actions avec la distribution Student

En suivant les sections 3, 4, 5 précédentes et en particulier le lemme (3.45), on peut estimer l'Expected Shortfall pour des portefeuilles quadratiques d'actions.

3.6 Cas d'un portefeuille contenant des actions achetées à découvert

Si on considère un portefeuille contenant n actions, avec $p \leq n$ actions achetées à découvert, le prix du portefeuille d'actions à l'instant t s'écrira :

$$P(S(t), t) = \sum_{i=1}^n \theta_i S_i(t)$$

où les θ_i pour $i = 1 \dots n$ ne sont plus tous positifs et $S(t) = (S_1, S_2, \dots, S_n)$. Ainsi l'analyse qui à été faite en section 1 changera. En effet, le rendement absolu du portefeuille sur $[0, t]$ est donné par

$$P(S(t), t) - P(S(0), 0) = \sum_{i=1}^p \theta_i (S_i(t) - S_i(0)) = \sum_{i=1}^p S_i(0) \cdot \theta_i \cdot \left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)} - 1 \right), \quad (3.62)$$

3.6. Cas d'un portefeuille contenant des actions achetées à découvert

et pour des petites variations de temps et du marché, le rendement logarithmique entre le temps 0 et t est

$$\log(S_i(t)/S_i(0)) = \eta_i(t), \quad (3.63)$$

en utilisant les mêmes approximations de Taylor d'ordre 2 comme en (3.4) et (3.8), on obtient :

$$\text{Prob}\left\{\sum_{i=1}^p S_i(0) \cdot \frac{\theta_i}{2} (\eta_i(t) + 1)^2 \geq -VaR_\alpha + P(0)/2\right\} = \alpha, \quad (3.64)$$

avec des θ_i positifs ou négatifs.

Soit la matrice diagonale \mathbb{B} , ayant pour valeurs diagonales $b_k = S_k(0) \frac{\theta_k}{2}$, pour $k = 1 \dots p$. Ainsi on obtient

$$\text{Prob}\left\{(X, \mathbb{B}X) \geq VaR_\alpha - \frac{P(0)}{2}\right\} = \alpha, \quad (3.65)$$

d'ou en se servant de la fonction densité de probabilité de X , on obtient

$$I_1(k) = \int_{\{x \mathbb{B}x^t \geq k\}} g((x - \mu - 1)\Sigma^{-1}(x - \mu - 1)^t) \frac{dy}{\sqrt{\det(\Sigma)}}. \quad (3.66)$$

Si on suppose que la matrice de covariance \mathbb{V} est définie positive, Cholesky nous permet la décomposition suivante :

$$\Sigma = \mathbb{H} \mathbb{H}^t,$$

avec \mathbb{H} est une matrice triangulaire inférieure ou supérieure.

Ainsi en procédant au changement de variable $x = z\mathbb{H}^t + \mu + 1$ et $dx = \sqrt{\det(\Sigma)}dz$, l'intégrale 3.66 devient :

$$I_1(VaR_\alpha) = \int_{\{(z\mathbb{H}^t + \mu + 1)\mathbb{B}(z\mathbb{H}^t + \mu + 1)^t \geq VaR_\alpha\}} g(\|z\|^2) dz, \quad (3.67)$$

or on montre aisément que

$$(z\mathbb{H}^t + \mu + 1)\mathbb{B}(z\mathbb{H}^t + \mu + 1)^t = (z + v)\mathbb{B}_1(z + v)^t,$$

où $v = (\mu + 1)(\mathbb{H}^{-1})^t$ et $\mathbb{B}_1 = \mathbb{H}^t \mathbb{B} \mathbb{H}$.

L'intégrale 3.67 s'écrit :

$$I_1(VaR_\alpha) = \int_{\{(z+v)\mathbb{B}_1(z+v)^t \geq -VaR_\alpha + \frac{P(0)}{2}\}} g(\|z\|^2) dz, \quad (3.68)$$

Après un changement de variable $u = z + v$, l'intégrale (3.69) s'écrit :

$$I_1(VaR_\alpha) = \int_{\{u \mathbb{B}_1 u^t \geq -VaR_\alpha + \frac{P(0)}{2}\}} g(\|u - v\|^2) dz, \quad (3.69)$$

Remarque 3.6.1 Lorsque g est donné par la distribution gaussienne, on retrouve le type d'intégrale qui fait l'objet d'une approximation analytique en s'inspirant de la méthode de la phase stationnaire de Laplace, dans l'article de Brummelhuus, Cordoba, Quintanilla et Seco (2002) [6]. Notons que dans Albanese et Seco (2001) [2], sous l'hypothèse gaussienne des facteurs de risque, on aborde l'approximation analytique d'une telle intégrale, en se servant de l'analyse harmonique et en particulier de la transformation de Fourier. Ainsi, si on détient un portefeuille d'actions,

telle que certaines actions pourraient être achetées à découvert, et dont les rendements logarithmiques suivent une distribution normale, nous conseillons le lecteur de consulter [6], surtout que dans cet article, on traite le cas $v \neq 0$.

Dans le cas où $v \approx 0$, on se trouve dans la situation qu'on traite dans le chapitre précédent, lorsque les rendements logarithmiques suivent une distribution de Laplace généralisée. Ainsi, dans ce cas où $v = 0$, on pourra proposer un intervalle, dans lequel se trouvera la VaR du portefeuille d'actions.

Si on procède à une diagonalisation de \mathbb{B}_1 , on obtient :

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{H}\mathbb{B}\mathbb{H}^t = \mathbb{O}\mathbb{D}\mathbb{O}^t, \quad (3.70)$$

avec \mathbb{O} est une matrice orthogonale et \mathbb{D} est une matrice diagonale. Observons que \mathbb{B}_1 n'est pas nécessairement définie, sauf si \mathbb{B} l'est, de même les informations sur \mathbb{O} dont les colonnes sont les vecteurs propres de \mathbb{B}_1^t , ne nous intéressent pas dans la pratique.

Lorsque qu'on considère un portefeuille contenant $n + 1$ actions, si $x = (x_+, x_-)$ est la décomposition de \mathbb{R}^{n+1} en 2 sous espaces propres E_+ et E_- respectivement associés aux valeurs propres positives et aux valeurs propres négatives de $\mathbb{H}\mathbb{B}\mathbb{H}^t$. On supposera que

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_{n_+}^+ & 0 \\ 0 & d_{n_-}^- \end{pmatrix}$$

où

$$\mathbf{D}_{n_\epsilon}^\epsilon = \begin{pmatrix} d_1^\epsilon & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & d_{n_\epsilon}^\epsilon \end{pmatrix}$$

pour $\epsilon = \pm 1$ où pour tous $d_j^+, d_j^- \geq 0$, et $-d_1^- \leq \dots \leq -d_{n_-}^- \leq d_1^+ \leq \dots \leq d_{n_+}^+$, et la plus petite valeur propre $-d_1^-$ est de multiplicité 1. Aussi, on suppose que $\mathbb{H}\mathbb{B}\mathbb{H}^t$ est une matrice non singulière. En restant dans la base de la décomposition $x = (x_-, x_+)$, et après une transformation élémentaire ($x \rightarrow |\mathbb{D}|^{-1/2} x$), on obtient l'intégrale suivante :

$$I(\text{VaR}_\alpha) = \int_{\{|x_+|^2 - |x_-|^2\} \geq -\text{VaR}_\alpha + \frac{P(0)}{2}} g((x - v) |\mathbb{D}|^{-1} (x - v)^t) \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{D})}}. \quad (3.71)$$

Théorème 3.6.1 *Si on détient un portefeuille d'actions contenant ou non des produits achetés à découvert, pour un taux de confiance $1 - \alpha$ donné, la VaR_α d'un tel portefeuille s'obtient comme étant la solution $x_0 = \text{VaR}_\alpha$ lorsqu'elle existe de l'équation :*

$$\int_{\{|x_+|^2 - |x_-|^2\} \geq -\text{VaR}_\alpha + \frac{P(0)}{2}} g((x - v) |\mathbb{D}|^{-1} (x - v)^t) \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{D})}} = 1 - \alpha, \quad (3.72)$$

où le vecteur constitué des rendements logarithmiques joints, suit une distribution elliptique notée $N_n(\mu, \Sigma, g)$.

Comme cela a été abordé dans le chapitre précédent, si on travaille avec l'hypothèse que \mathbb{X} suit une Distribution de Laplace généralisée, qui est un cas particulier de distribution elliptique, il suffira de remplacer dans l'expression du chapitre précédent

$$g(x) = C_{\alpha, n+1} \cdot \exp(-c_{\alpha, n+1} \cdot x^\alpha), \quad 0 \leq x.$$

3.6. Cas d'un portefeuille contenant des actions achetées à découvert

Par suite par un changement de variable adapté $x \rightarrow c^{-1/\alpha} \cdot x$, l'expression (3.71) implique :

$$\begin{aligned} GLD(R) &= C_{\alpha, n+1} \int_{\{|x_+|^2 - |x_-|^2 \geq -V + \frac{P(0)}{2}\}} e^{-c \cdot (x|\mathbb{D}|^{-1}x^t)^{\alpha/2}} \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{D})}} \\ &= C_{\alpha, n+1} \int_{\{|x_+|^2 - |x_-|^2 \geq c^{\frac{2}{\alpha}}(-V + \frac{P(0)}{2})\}} \frac{e^{-((x-v)|\mathbb{D}|^{-1}(x-v)^t)^{\alpha/2}}}{c^{\frac{n+1}{\alpha}}} \frac{dx}{\sqrt{\det(\mathbb{D})}} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Remarque 3.6.2 Si $v = 0$ ou $v \approx 0$, on se trouve dans la situation du chapitre précédent, ainsi il suffira de repliquer les mêmes techniques que dans le chapitre 2, sauf que la matrice \mathbb{B} jouera le rôle de la matrice hessienne Γ , lorsqu'on veut estimer la VaR d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$.

Remarque 3.6.3 Si on veut déterminer la VaR d'un portefeuille quadratique d'actions tel que nous l'avons défini, si certains actifs sont achetées à découvert, on aurait besoin comme précédemment lorsqu'on travaille avec des portefeuilles $\Delta - \Gamma - \Theta$, de pouvoir estimer une intégrale multiple sur une hyperboloïde. Ainsi, les calculs et estimations analytiques développés dans le chapitre 2 de la deuxième partie de cette thèse sont applicables pour déterminer la VaR d'un portefeuille d'actions telle qu'on l'a introduit, et lorsque certaines actions sont achetées à découvert. Les détails et les tests sur des portefeuilles concrets avec les méthodes analytiques seront l'objet d'un travail ultérieur. On peut aussi aborder un tel problème en s'inspirant des méthodes numériques du chapitre 4, de la deuxième partie de cette thèse.

Remarque 3.6.4 Dans le cas où on travaille avec des facteurs de risque qui suivent une distribution normale, en utilisant les techniques de l'article de Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco (2002) [6], on pourra obtenir des résultats explicites et programmables, lorsqu'on considère un portefeuille réaliste du CAC 40.

3.6.1 Cas où $v = 0$ ou $v \approx 0$

En reprenant presque totalement les notations du chapitre précédent, on pourra se permettre d'écrire sans preuve le théorème suivant :

Théorème 3.6.2 *Etant donné $P(0)/2 > VaR_\alpha$, soit*

$$R^2 := c_{n,\alpha}^{2/\alpha} \left(\frac{P(0)}{2} - VaR_\alpha \right). \quad (3.74)$$

Alors pour $R^\alpha > \lambda_0$,

$$GLD(-VaR_\alpha) = B_{pc} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{d_1}} \right)^\alpha \right) + \mathcal{E}(R), \quad (3.75)$$

où le terme erreur est estimé comme suit

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}(R)| \leq & B_{\text{pc}} \cdot \left\{ \frac{K_{11}^{\pm} e^{\alpha/2}}{R^{\alpha}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{d_1^-}} \right)^{\alpha} \right) \right. \\
 & + \frac{K_{12}^{\pm} e^{\alpha}}{R^{2\alpha}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{d_1^-}} \right)^{\alpha} \right) \\
 & + 2(d_1^-)^{\frac{\alpha n}{4}} \frac{\Gamma \left(\frac{n}{2}, \frac{R^2}{2} R^{\alpha} \right)}{\Gamma \left(\frac{n}{2} \right)} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, \left(\frac{R}{\sqrt{d_1^-}} \right)^{\alpha} \right) \left. \right\} \\
 & + K^{01} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, n_{\varepsilon} R^{\alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Remarque 3.6.5 Toutes les constantes $A_{\text{pc}}, K_1^{\pm}, K_1^{\pm}, c1, K^0$, qui s'écrivent fonctions des valeurs propres a_i^{\pm} de la matrice \mathbb{A} du chapitre précédent seront respectivement remplacées par $B_{\text{pc}}, K_{11}^{\pm}, K_{21}^{\pm}, c1, K^{01}$ qui eux s'exprimeront en fonction d_i^{\pm} au lieu de a_i^{\pm} pour les constantes du chapitre précédent.

Remarque 3.6.6 En s'inspirant du papier de Duffie et Pan [11], on pourrait estimer la VaR quadratique d'un portefeuille d'actions, en prenant en compte les *sauts* des distributions de probabilité des facteurs de risque.

Remarque 3.6.7 Il est clair que cette partie est intéressante pour des portefeuilles d'actions lorsque $v \neq 0$, ainsi il serait souhaitable dans le cas de la distribution normale de s'inspirer de la méthode donnée dans l'article de Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco (2002)[6], et dans le cas général de la distribution de Laplace généralisée, on compte le faire plus tard hors du cadre de ce projet de thèse.

Remarque 3.6.8 Un portefeuille contenant des actions achetées à découvert se rencontre souvent dans le cadre de la gestion alternative, où certains gérants font appels à des positions courtes, pour optimiser leurs stratégies. Les gestions "long-short" consistent à tirer profit des divergences constatées entre le cours des actions d'une société et le reste de son secteur. Le gérant se placera par exemple, acheteur d'une action d'un secteur et vendeur de l'action d'une société survalorisée de ce secteur. La vente de l'action par le hedge fund se fait en général à découvert .

3.7 Conclusion

Nous avons introduit pour la première fois une notion de portefeuille "quadratique" ne contenant pas de produits dérivés (comme par exemple un portefeuille d'actions), lorsque le vecteur des rendements logarithmiques suit un mélange de distributions elliptiques. Dans le cas où les portefeuilles contiennent des actions achetées à découvert, on montre la nécessité et l'efficacité de l'utilisation de notre méthode pour mesurer le risque. Notons que de tels portefeuilles sont souvent utilisés par des gérants des Hedge Funds³⁷. De plus, nous montrons que l'estimation de la VaR_{α} de tels portefeuilles se résume à la résolution d'une équation intégrale nécessitant

³⁷tels ceux qui utilisent des stratégies long-short equities.

une approximation d'intégrale sur une hyper sphère ou sur une hyperboloïde ³⁸. Par suite en utilisant les techniques inspirée de Genz [17], on réduit les intégrales sur des quadriques aux intégrales unidimensionnelles. Dans les cas particuliers, où la distribution est une *t*-Student où une loi de distribution normale, les intégrales unidimensionnelles s'expriment souvent avec les fonctions spéciales (i.e la fonction hypergéométrique, la fonction Γ -incomplète). Pour illustrer notre démarche, nous donnons explicitement l'équation à résoudre dans le cas du mélange de distributions Student, ou du mélange de lois de distributions normales. Notons que le logiciel Mathematica 4 nous permet d'obtenir certains calculs d'intégrales unidimensionnelles, tout du moins dans le cas Student ou de la normale. Evidemment, les équations proposées admettent des solutions numériques, car le programme en fortran de l'algorithme de la méthode de Genz qui permet de calculer les coefficients w_p existe sur son site internet, et plusieurs logiciels comme Maple ou Mathematica abordent assez bien la fonction hypergéométrique qui a été utilisée dans le cas du mélange de plusieurs distributions Student. On pourra appliquer cette méthode numérique inspirée des techniques de Alan Genz [18] aux portefeuilles contenant des produits complexes comme des produits dérivés [41]. Ce sera d'une part l'objet du prochain chapitre.

³⁸ lorsque le portefeuille contient par exemples des actions achetées à découvert.

Chapitre 4

VaR numérique d'un portefeuille quadratique elliptique.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode numérique pour estimer la VaR d'un portefeuille quadratique $\Gamma - \Theta$, lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution elliptique. La nouveauté mathématique sera mise en exergue par le fait que nous proposons une nouvelle méthode numérique qui donne une approximation à certaines conditions près, d'une intégrale sur une hyperboloïde. On illustre notre méthode numérique en faisant des tests avec deux portefeuilles d'options Δ -neutre du CAC 40 et du Monep, lorsque le vecteur des facteurs de risque suit une distribution multivariée normale.

La construction de l'algorithme permettant d'obtenir l'approximation d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde, se fait en combinant les techniques décrites par Genz et Monahan [18], puis Sheil et O'Muircheartaigh [39]. Cette méthode est très applicable surtout pour des portefeuilles dits Δ -neutre.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2 et 3, en s'inspirant du papier de Albanese et Seco (2001) [2], on réduit le problème de l'estimation de la VaR lorsque le vecteur des rendements suit une distribution elliptique, à l'approximation d'une équation nécessitant l'approximation d'une intégrale sur une hyperboloïde. En section 4, on propose une méthode numérique qui permet d'obtenir l'approximation d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde, en combinant les techniques utilisées par Genz [17], Genz and Monahan [18] et [39]. Pour illustrer nos résultats, on travaille avec l'intégrale d'une gaussienne sur une hyperboloïde. Dans la section 5, on choisit deux exemples pour montrer l'applicabilité de notre algorithme dans le domaine du risque management, et en particulier pour l'estimation de la VaR d'un portefeuille contenant des options. Dans la section 6, on donne une conclusion.

4.2 Portefeuilles $\Gamma - \Theta$ contenant des options

L'étude du risque des portefeuilles quadratiques a été l'objet de plusieurs publications dans la littérature de la finance mathématique. Dans notre cas, on considère la définition d'un portefeuille quadratique tel qu'il a été présenté par Quintanilla [36]. Si nous détenons un portefeuille contenant des actifs, y compris des produits dérivés, tels que les prix des n actifs sous-jacents

distincts à l'instant t soient donnés sous forme de vecteur par $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))$, alors en utilisant une approximation de Taylor du second ordre de $\exp(\eta_i) = \eta_i + \frac{1}{2}\eta_i^2$, où η_i est le rendement logarithmique de l'actif sous-jacent i , on obtient que l'approximation de la fonction perte ou profit du portefeuille sur $[0, t]$ est donnée par :

$$\Pi(t, S(t)) - \Pi(0, S(0)) \approx t\Theta + \Delta_1 \mathbb{X}^t + \mathbb{X} \cdot \Gamma_1 \cdot \mathbb{X}^t / 2,$$

où $\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}(0)$.

Notons que si \mathbb{X} est le vecteur des rendements logarithmiques, il sera possible d'écrire Δ_1 comme une fonction du vecteur Δ des sensibilités des actifs au temps 0, et la matrice Γ_1 s'écrit comme une fonction de la matrice Γ de sensibilité de 2^{nd} ordre au temps 0.

Après quelques calculs on obtient : $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$ pour lequel

$$\mathbb{X}_i = \log(S_i(t)/S_i(0)).$$

$\Delta_1 = (\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^n)$ avec

$$\Delta_1^i = S_i(0) \cdot \Delta^i$$

$\Gamma_1 = \left(\Gamma_1^{i,j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$ et $\Gamma = \left(\Gamma^{i,j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$

où

$$\Gamma_1^{i,j} = \begin{cases} S_i^2(0)\Gamma^{i,i} + \Delta_1^i & \text{si } i = j \\ S_i(0)S_j(0) \cdot \Gamma^{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Puisqu'on travaille avec un portefeuille Δ -neutre, on aura que $\Delta_1 = 0$. Notre but est de déterminer, la quantité V qui représente pour nous la VaR au taux de confiance $1 - \alpha$, comme étant la solution de l'équation

$$G_\Gamma(-V) = \mathbb{P}(\Theta + \mathbb{X}\Gamma\mathbb{X}^t/2 \leq -V) = \alpha. \quad (4.1)$$

Si nous supposons que le vecteur constitué des rendements logarithmiques \mathbb{X} suit une distribution elliptique d'espérance nulle, alors la solution de $G_\Gamma(-V)$ est donnée par :

$$G_\Gamma(-V) = \int_{\{\Theta + x\Gamma x^t/2 \leq -V\}} g(x\Sigma^{-1}x^t) \frac{dx}{\sqrt{\det(\Sigma)}} = \alpha. \quad (4.2)$$

Pour résoudre l'équation (4.2), il est déjà nécessaire d'estimer l'intégrale sur une quadrique, que contient l'expression de l'équation. L'intégrale $G_\Gamma(-V)$ fonction de V , sera transformée en une intégrale sur une hypersphère ou une hyperboloïde.

4.3 Réduction à une intégrale sur une hyperboloïde

Une décomposition de Σ en produit de deux matrices est donné par Cholesky comme suit : $\Sigma = \mathbb{C}\mathbb{C}^t$, où \mathbb{C} est une matrice triangulaire inférieure. Par suite, en utilisant le changement de variables suivant, $x = y\mathbb{C}^t$, on obtient :

$$G_\Gamma(-V) = \int_{\{\Theta + y\mathbb{C}^t\Gamma\mathbb{C}y^t/2 \leq -V\}} g(yy^t)dy. \quad (4.3)$$

4.4. Approximation numérique d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde

En supposant que la matrice de variance covariance ajustée, $\mathbb{C}^t \Gamma \mathbb{C}$, est diagonalisable, on a que $\mathbb{C}^t \Gamma \mathbb{C} = \mathbb{O} \mathbb{D} \mathbb{O}^t$, où \mathbb{O} est une matrice orthogonale et \mathbb{D} est une matrice diagonale. Comme dans le chapitre 3, on s'arrange pour obtenir la matrice diagonale suivante,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & -D_- \end{pmatrix},$$

où

$$D_\epsilon = \begin{pmatrix} d_1^\epsilon & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & d_{n_\epsilon}^\epsilon \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon = \pm 1$, tel que $d_j^+, d_j^- \geq 0$, et $-d_1^- \leq -d_2^- \leq \dots \leq -d_{n_-}^- \leq d_1^+ \leq \dots \leq d_{n_+}^+$.

Notons que cette matrice diagonale est écrite dans la base constituée des vecteurs propres associés aux valeurs propres négatives et des vecteurs propres associés aux valeurs propres positives. En introduisant le changement de variable $z = y\mathbb{O}$, on obtient

$$G_\Gamma(-V) = \int_{\{\Theta + z\mathbb{D}z^t/2 \leq -V\}} g(zz^t) dz.$$

En utilisant la transformation $w = |\mathbb{D}|^{1/2}z$, on obtient

$$G_\Gamma(-V) = \int_{\{|w_+|^2 - |w_-|^2 \leq -2(V+\Theta)\}} g(w|\mathbb{D}|^{-1}w^t) \frac{dw}{\sqrt{\det(|\mathbb{D}|)}}, \quad (4.4)$$

où $w = (w_+, w_-)$ est la décomposition de \mathbb{R}^n , comme somme de deux sous-espaces propres correspondant respectivement aux valeurs propres positives et aux valeurs propres négatives de $\mathbb{C}^t \Gamma \mathbb{C}$. En changeant le sens de l'inégalité dans le domaine d'intégration de 4.4, nous obtenons l'expression notée $G(R)$, qui sera le point de départ de notre méthode numérique.

$$G(R) = \int_{\{|w_-|^2 - |w_+|^2 \geq R^2\}} g(w|\mathbb{D}|^{-1}w^t) \frac{dw}{\sqrt{\det(|\mathbb{D}|)}}, \quad (4.5)$$

où $R^2 = 2(V + \Theta)$. La région d'intégration est une *hyperboloïde* définie par $|w_-|^2 - |w_+|^2 \geq R^2$. Notre but est d'obtenir R comme solution de l'équation $G(R) = \alpha$. Ainsi si nous obtenons R , on pourra obtenir une approximation de la VaR $V = R^2/2 - \Theta$.

4.4 Approximation numérique d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde

On se propose dans cette section, d'introduire une méthode numérique qui nous permettrait d'obtenir l'approximation d'une intégrale multiple sur une hyperboloïde comme donnée par exemple en 4.5.

4.4.1 Cas de la distribution gaussienne

Généralement dans la pratique financière, on étudie le risque des portefeuilles financiers, en se servant de la distribution normale. Dans ce cas, il suffira de remplacer dans 4.5, la fonction g par $g(x) = C \cdot \exp(-x/2)$ pour obtenir l'expression suivante :

$$G(R) = \int_{\{|w_-|^2 - |w_+|^2 \geq R^2\}} e^{-w|\mathbb{D}|^{-1}w^t/2} \frac{dw}{\sqrt{(2\pi)^n \det(|\mathbb{D}|)}}. \quad (4.6)$$

En séparant les variables w , on obtient que

$$G(R) = \int_{\{|w_+|^2 \geq 0\}} e^{-w_+ D_+^{-1} w_+^t / 2} \int_{\{|w_-|^2 \geq R^2 + |w_+|^2\}} e^{-w_- D_-^{-1} w_-^t / 2} \frac{dw_-}{\sqrt{(2\pi)^{n_-} \det(D_-)}} \frac{dw_+}{\sqrt{(2\pi)^{n_+} \det(D_+)}}. \quad (4.7)$$

Dans 4.7, l'intégrale correspondant à w_- peut-être retrouvée de façon efficace, en utilisant les algorithmes décrit par Sheil et O'Muircheartaigh [39], si on introduit la fonction $H(R, r)$, définie comme suit :

$$H(R, r) = \int_{\{|w_-|^2 \geq R^2 + r^2\}} e^{-w_- D_-^{-1} w_-^t / 2} \frac{dw_-}{\sqrt{(2\pi)^{n_-} \det(D_-)}}, \quad (4.8)$$

et si $w_+ = D_+^{\frac{1}{2}} z$, $G(R)$ s'écrit

$$G(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zz^t / 2} H(R, |z D_+ z^t|) \frac{dz}{\sqrt{(2\pi)^{n_+}}}. \quad (4.9)$$

Une intégrale de cette forme peut être approximée en utilisant les méthodes décrites par Genz et Monahan [18] (Voir (4.7) pour une description de la méthode proposée par Genz et Monahan).

4.4.2 Cas général

Dans cette section nous esquissons une méthode numérique qui permettra de réduire l'intégrale sur une hyperboloïde au calcul d'une intégrale double.

Théorème 4.4.1 *En s'inspirant du théorème (3.3.1), on obtient l'approximation suivante*

$$G(R) = \int_{\{|x-v_1|^2 - |y-v_2|^2 \leq R^2\}} \varphi(x, y) dx dy \quad (4.10)$$

$$= C \sum_{|p^1|=m_1} w_{p^1} \sum_{|p^2|=m_2} w_{p^2} \cdot \int_0^\infty r_2^{n_2-1} \int_0^{R+r^2} r_1^{n_1-1} \sum_{s^1} \sum_{s^2} \varphi(r_1 \cdot (s^1 \cdot u_{p^1})^t + v_1, r_2 \cdot (s^2 \cdot v_{p^2})^t + v_2) dr_1 dr_2 \quad (4.11)$$

où $C = 2^{-c(u)-c(v)}$ est une constante, $s^1 = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_{n_1}^1)$, $s^2 = (s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n_2}^2)$, $s_j^i = \pm 1$, $i=1,2$ et $j=1,2,\dots,n_i$. $c(u_{p^1})$ est le nombre de marginales non nulles de u_{p^1} , $c(v_{p^2})$ est le nombre de marginales non nulles de v_{p^2} .

Preuve : Soit à estimer l'intégrale suivante

$$G(R) = \int_{\{|x-v_1|^2 - |y-v_2|^2 \leq R^2\}} \varphi(x, y) dx dy \quad (4.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $y \in \mathbb{R}^{n_2}$. Si on procède aux changements de variables suivants $y = r_2 \xi_2$, $x = r_1 \xi_1$, où $r_2 = |y|$ et $r_1 = |x|$, où $\xi_i \in S_{n_i-1}$ avec $S_{n_i-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n_i} / \|x\| = 1\}$ pour $i = 1, 2$ et $n_1 + n_2 = n$, on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} G(R) &= \int_{\{|x-v_1|^2 - |y-v_2|^2 \leq R^2\}} \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_0^\infty r_2^{n_2-1} \int_{S_{n_2-1}} \int_{\{|x|^2 \leq R+r^2\}} \varphi(x + v_1, r_2 \cdot \xi_2 + v_2) dx d\sigma(\xi_2) dr_2 \\ &= \int_0^\infty r_2^{n_2-1} \int_{S_{n_2-1}} J(R, r_2, r, \xi_2) d\sigma(\xi_2) dr_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec

$$J(R, r_2, r, \xi_2) = \int_0^{R+r^2} r_1^{n_1-1} \int_{S_{n_1-1}} \varphi(r_1 \cdot \xi_1 + v_1, r_2 \cdot \xi_2 + v_2) d\sigma(\xi_1) dr_1.$$

Puisque $G(R)$ devient

$$G(R) = \int_0^\infty r_2^{n_2-1} \left[\int_0^{R+r^2} r_1^{n_1-1} \left[\int_{S_{n_2-1}} \left[\int_{S_{n_1-1}} \varphi(r_1 \cdot \xi_1 + v_1, r_2 \cdot \xi_2 + v_2) d\sigma(\xi_1) \right] d\sigma(\xi_2) \right] dr_1 \right] dr_2, \quad (4.14)$$

en appliquant le théorème (3.3.1) respectivement aux intégrales sur les hypersphères S_{n_1-1} , S_{n_2-1} , on obtient :

$$G(R) = C \sum_{|p^1|=m_1} w_{p^1} \sum_{|p^2|=m_2} w_{p^2} \cdot \int_0^\infty r_2^{n_2-1} \int_0^{R+r^2} r_1^{n_1-1} \sum_{s^1} \sum_{s^2} \varphi(r_1 (s^1 \cdot u_{p^1})^t + v_1, r_2 (s^2 \cdot v_{p^2})^t + v_2) dr_1 dr_2$$

où $C = 2^{-c(u)-c(v)}$ est une constante. $s^1 = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_{n_1}^1)$, $s^2 = (s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n_2}^2)$, $s_j^i = \pm 1$, $i=1,2$ et $j=1,2, \dots, n_i$. $c(u_{p^1})$ est le nombre de marginales non nulles de u_{p^1} , $c(v_{p^2})$ est le nombre de marginales non nulles de v_{p^2} .

QED

Remarque 4.4.1 Une approximation des intégrales radiales unidimensionnelles pourra se faire, mais elle dépendra de la régularité de la fonction φ à intégrer et en particulier de sa décroissance pour r_1 et r_2 assez grand.

Remarque 4.4.2 Remarquons qu'on peut utiliser le résultat du théorème (4.4.1), lorsqu'il s'agit de déterminer la VaR d'un portefeuille quadratique d'actifs pas nécessairement Δ -neutre.

4.5 Exemples d'applications

On va distinguer 3 cas dans notre analyse :

- (i) $n_- = 0$; si g est donné par la distribution normale d'après 3.11,

$$G(R) = \int_{\{|w_+|^2 \leq R^2\}} e^{-w_+ D_+^{-1} w_+^t / 2} \frac{dw_+}{\sqrt{(2\pi)^{n_+} \det(D_+)}}$$

et on obtient son approximation numérique en utilisant l'algorithme de Sheil et O'Muircheartaigh [39], par suite dès qu'on a retrouvé V tel que $R^2 = 2(V + \Theta) \geq 0$.

- (ii) $n_+ = 0$; si g est Normal,

$$G(R) = \int_{\{|w_-|^2 \geq R^2\}} e^{-w_- D_-^{-1} w_-^t / 2} \frac{dw_-}{\sqrt{(2\pi)^{n_-} \det(D_-)}}. \quad (4.15)$$

$G(R)$ peut être calculé en utilisant l'algorithme de Sheil et O'Muircheartaigh [39], qu'on décrit brièvement dans (4.6).

- (iii) n_- et n_+ sont non nuls ; g est issue de la distribution normale,

$$G(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zz^t/2} H(R, |zD_+ z^t|) \frac{dz}{\sqrt{(2\pi)^{n_+}}}. \quad (4.16)$$

Les intégrales de cette forme peuvent être calculées en utilisant une combinaison des méthodes de Sheil et O'Muircheartaigh [39] et l'algorithme de Genz et Monahan [18], qu'on décrit respectivement dans (4.6) et (4.7).

4.5.1 Cas où $n_+=0$

Nous considérons un portefeuille contenant des actifs et des produits dérivés sur ces actifs de telle sorte que le portefeuille soit Δ -neutre. On considère pour notre exemple que le vecteur des rendements logarithmiques des actifs \mathbb{X} suit une distribution normale. Ainsi le prix d'un tel portefeuille à un instant t peut s'écrire :

$$\Pi(t, S(t)) = \sum_{i=1}^9 [-C_i(t, S_i(t)) + \Delta_i \cdot S_i], \quad (4.17)$$

où $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))$ avec $S_i(t)$ est le prix de l'action i à l'instant t , et $C_i(t, S_i(t))$ est le prix de l'option européenne sur l'action i . Notons que Δ dans la littérature financière est donné comme un vecteur de sensibilité. Notre portefeuille a été choisi de telle sorte que $\Delta = 0$, avec $\Delta_i = \frac{\partial C_i}{\partial S_i}(S_i(0))$, $\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}(0)$, et $\Gamma = \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0) \right)_{i,j=1,\dots,n}$. On exprimera le vecteur

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \theta_i, \quad (4.18)$$

en fonction du vecteur de sensibilités $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, avec $\theta_i = \frac{\partial C_i}{\partial t}$. On prendra en exemple un portefeuille Δ -neutre. Nous prenons comme exemple d'application un portefeuille qui contient des options européennes sur actions, et des actions de telle sorte que le portefeuille soit Δ -neutre. Les prix des produits de notre portefeuille sont donnés par le tableau qui suit :

Noms des Actifs	prix d'exercice	taux d'intérêt	maturité	prix du sous-jacent
BNPPARIBAS	44.26	0.1	3 mois	39.75
BOUYGUES	23.49	0.1	3 mois	27.30
CAP GEMINI	34.71	0.1	3 mois	24.00
CREDIT AGRICOLE	17.36	0.1	3 mois	14.80
DEXIA	11.5	0.1	3 mois	9.38
LOREALL	61.85	0.1	3 mois	62.90
TF1	26.38	0.1	3 mois	22.02
THOMSON	15.22	0.1	3 mois	17.13
VIVENDI	16.19	0.1	3 mois	17.00

Dans cet exemple avec l'aide de Matlab et en utilisant, trois mois de données historiques de 9 actions du CAC 40 avec la moyenne exponentielle en mouvement chargée d'un poids (EWMA)

TAB. 4.1 – Quelques résultats numériques de la VaR notée V .

α	0.05	0.025	0.01
R	0.9160	1.0038	1.1128
V	31.6883	31.7727	31.8881

avec $\lambda = 0.94$ on obtient l'expression suivante donnée par la section 1.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0017 & -0.0001 & 0.0012 & 0.0005 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0002 & 0.0002 \\ -0.0001 & 0.0009 & 0.0005 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0006 & 0.0005 \\ 0.0012 & 0.0005 & 0.0038 & 0.0006 & 0.0011 & 0.0008 & 0.0014 & 0.0006 & 0.0007 \\ 0.0005 & -0.0001 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0008 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0002 & 0.0015 & 0.0007 & 0.0008 & 0.0000 & 0.0002 \\ 0.0008 & 0.0000 & 0.0008 & 0.0004 & 0.0007 & 0.0011 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0005 \\ 0.0008 & 0.0000 & 0.0014 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0013 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0019 & 0.0007 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0.0007 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0005 & 0.0001 & 0.0007 & 0.0029 \end{pmatrix}$$

la matrice Γ est diagonale et ses valeurs diagonales sont

$$d = (-116.4889, -33.4063, -11.8389, -21.1723, -11.9582, -161.2178, -34.7884, -19.7664, -27.2993)$$

et $\Theta = -31.2689$. Les valeurs propres de \mathbb{D} sont données par le vecteur

$$e = (-.05025, -.1456, -.0605, -.0424, -.0231, -.00053, -.0101, -.0154, -.0131).$$

La table suivante fournit certaines valeurs de R et V obtenues par une résolution numérique de l'équation $G(R) = \alpha$, pour α fixé.

4.5.2 Cas où $n_- > 0$ et $n_+ > 0$

Nous considérons un portefeuille qui contient des options et leurs sous-jacents qui dans notre cas seront des actions du CAC 40. On écrira que le prix du portefeuille au temps t s'écrit,

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^6 [C_i(t, S_i(t)) - \Delta^i S_i(t)] - \sum_{j=7}^{10} P_j(t, S_j(t)) - (\Delta^j - 1) S_j(t). \quad (4.19)$$

Dans cet exemple, en utilisant trois mois de données historiques de 9 actions du CAC 40 suivantes :

TAB. 4.2 – Quelques résultats numériques de la VaR notée V .

α	0.05	0.025	0.01
R	0.6069	0.7176	0.8455
V	4.0438	4.1171	4.2166

Noms des Actifs	prix d'exercice	taux d'intérêt	maturité	prix du sous-jacent
Call-BNPPARIBAS	30.00	0.05	3 mois	39.75
Call-BOUYGUES	19.00	0.05	3 mois	27.30
Call-CAP GEMINI	20.00	0.05	3 mois	24.00
Call-CREDIT AGRICOLE	10.50	0.05	3 mois	14.80
Call-DEXIA	9.00	0.05	3 mois	9.38
Call-LOREALL	40.00	0.05	3 mois	62.90
Put-SOCIETEGENERALE	50	0.05	3 mois	64.00
Put-TF1	18.00	0.05	3 mois	22.02
Put-THOMSON	9.00	0.05	3 mois	17.13
Put-VIVENDI	9.00	0.05	3 mois	17.00

on détermine la matrice de variance covariance par la méthode EWMA de RiskMetrics lorsque $\lambda = 0.94$, comme suit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0016 & -0.0001 & 0.0012 & 0.0005 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0008 & 0.0002 & 0.0002 \\ -0.0001 & 0.0008 & 0.0004 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & -0.0000 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0011 & 0.0004 & 0.0035 & 0.0006 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0004 & 0.0013 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0005 & -0.0001 & 0.0006 & 0.0005 & 0.0002 & 0.0004 & -0.0001 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0008 & 0.0000 & 0.0010 & 0.0002 & 0.0015 & 0.0007 & -0.0000 & 0.0008 & 0.0000 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0000 & 0.0007 & 0.0004 & 0.0007 & 0.0010 & -0.0002 & 0.0005 & 0.0003 & 0.0004 \\ -0.0000 & 0.0004 & 0.0004 & -0.0001 & -0.0000 & -0.0002 & 0.0015 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0001 \\ 0.0008 & -0.0000 & 0.0013 & 0.0003 & 0.0008 & 0.0005 & -0.0002 & 0.0012 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0.0006 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0008 & 0.0000 & 0.0018 & 0.0007 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0.0006 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0004 & -0.0001 & 0.0001 & 0.0007 & 0.0026 \end{pmatrix}.$$

La matrice Γ est diagonale et les éléments de la diagonale sont donnés par le vecteur

$$d = (24.186, 8.6269, 21.7320, 4.3111, 15.4949, -4.5815, -82.2915, -22.2079, -1.2957, -1.2822),$$

et $\Theta = -3.8596$, et les valeurs propres de la matrice \mathbb{D} sont données par le vecteur

$$e = (-0.1251, -0.0115, -0.0030, -0.0014, -0.0006, 0.0014, 0.0092, 0.0124, 0.0290, 0.1271).$$

La table suivante fournit quelques valeurs de R et V trouvées comme solutions numériques de l'équation $G(R) = \alpha$, pour certaines valeurs de α données.

Remarque 4.5.1 Notons que V représente la VaR pour le taux de confiance $1 - \alpha$ qu'on notera VaR_α .

4.6 L'algorithme Numérique de J. Sheil et O'Muircheartaigh

Dans cette partie, on énonce l'algorithme de J. Sheil et O'Muircheartaigh [39]. Soit un vecteur aléatoire z de dimension n , suivant une distribution normale ayant pour vecteur espérance μ et pour matrice de covariance inversible \mathbb{V} . L'algorithme suivant, proposé par Sheil et O'Muircheartaigh permet de modéliser la distribution de la fonction quadratique $(z + a)^t \mathbb{C}(z + a)$ où a est un vecteur fixé et \mathbb{C} est une matrice symétrique positive. Cette méthode permet d'écrire une forme quadratique comme étant une série infinie.

4.6.1 Algorithme théorique et numérique

On procède aux transformations linéaires suivantes

$$z - \mu = \mathbb{C}^t \mathcal{R}x, \quad a + \mu = \mathbb{L}^t \mathcal{R}b,$$

en sachant que Ruben(1962) a montré que

$$P\{(z + a)^t \mathbb{C}(z + a) \leq t\} = P\{(x + b)^t \mathbb{A}(x + b) \leq t\}, \quad (4.20)$$

où x est un vecteur aléatoire d'espérance nulle et ayant la matrice Identité comme matrice de variance covariance. \mathbb{L} est la matrice triangulaire supérieure obtenue par la décomposition de Cholesky $\mathbb{V} = \mathbb{L}^t \mathbb{L}$ et \mathcal{R} est la matrice ayant pour colonnes les vecteurs propres de $\mathbb{L}^t \mathbb{C} \mathbb{L}$ et $\mathbb{A} = \text{diag}(\alpha_i)$ est la matrice diagonale telle que les éléments diagonaux sont les valeurs propres α_i de $\mathbb{L}^t \mathbb{C} \mathbb{L}$.

Soient $f(n', y)$ la fonction densité de probabilité de la distribution χ^2 centrée ayant n' degrés de libertés et $F(n', y)$ la fonction de répartition correspondante, en combinant le résultat de Ruben(1962) et de Kotz (1967), on obtient

$$P\{(z + a)^t \mathbb{C}(z + a) \leq t\} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} c_k F(n' + 2k, t/\beta) & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

où β est une constante et n' est le rang de la matrice \mathbb{C} . Si $0 < \beta < 2 \min_i(\alpha_i)$, la série définie en (4.21) est absolument convergente, pour tout $t > 0$, avec $i = 1, \dots, n'$. Cet algorithme utilise $\beta = 0.90625 \alpha_{\min}$ qui permet d'utiliser la série 4.21 comme étant le mélange de fonctions de répartitions (Robbins et Pitman, 1949). Ainsi, on aura que $c_k > 0$ et $\sum_1^{\infty} c_k = 1$.

Par la propriété de monotonie décroissante de la fonction de répartition d'une distribution χ^2 , on a que pour tout k entier naturel tel que $N \leq k$, $F(n' + 2k, t/\beta) < F(n' + 2N, t/\beta)$. Ainsi, en se servant du fait que $\sum_1^{\infty} c_k = 1$, on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k F(n' + 2k, y/\beta) &\leq F(n' + 2N + 2, t/\beta) \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \\ &= F(n' + 2N + 2, y/\beta) \left(1 - \sum_{k=1}^N c_k\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les coefficients de la série sont évalués comme suit :

$$c_0 = A e^{-\lambda/2}, \quad c_k = k^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} g_{k-l} c_l,$$

où

$$A = \prod_{j=1}^{n'} \sqrt{\beta/\alpha_j}, \quad \lambda = \sum_{j=1}^{n'} b_j^2, \quad g_m = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{n'} b_j^2 \gamma_j^{m-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n'} (1 - mb_j^2) \gamma_j^m, \quad (m \geq 0)$$

4.7 Méthode d'approximation de A. Genz et J. Monohan

Lorsqu'on veut calculer l'espérance de la loi de distribution continue $g(\theta)$, on aimerait calculer ou estimer l'intégrale suivante :

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) p(\theta) d\theta, \quad (4.23)$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^t$. Une telle intégrale pourrait s'estimer en utilisant une méthode Monte Carlo.

Cependant A. Genz et J. Monohan [18] proposent la méthode suivante comme alternative à un algorithme Monte-Carlo (pour détails voir le livre de Davis et Rabinowitz, 1984, et des papiers plus récents de Evans et Swartz, 1992), pour estimer 4.23.

En particulier, ils s'intéressent au problème quand $p(\theta)$ est donné approximativement par une distribution normale ($\theta \sim N_m(\mu, \Sigma)$), ou par une distribution t-Student ($\theta \sim t_m(\mu, \Sigma)$). Leur méthode utilise un changement de variable sphérique, en posant $x = r\xi$ pour estimer l'intégrale

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \omega(x) dx \quad (4.24)$$

$$= \int_{\xi^t \xi = 1} \int_0^\infty \omega(r) r^{m-1} f(r\xi) dr d\xi \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\xi^t \xi = 1} \int_0^\infty \omega(r) r^{m-1} f(r\xi) dr d\xi. \quad (4.26)$$

Une approximation de l'intégrale 4.26 va se faire en utilisant des règles stochastiques d'intégration sur la sphère. En effet, on peut obtenir une approximation de l'intégrale sur la sphère comme suit :

$$S(s) = \int_{U_m} s(\xi) d\xi \quad (4.27)$$

$$\approx \sum_{j=1}^N \tilde{\omega} s(\xi_j), \quad (4.28)$$

avec $\xi_j^t \xi_j = 1$ pour tout j et $U_m = \{\xi \mid \xi^t \xi = 1\}$.

Soit Q une matrice orthogonale $m \times m$ telle que, en introduisant la fonction S_Q , et sachant que $|\xi| = \|\xi\|$, on obtient :

$$S_Q(s) = \sum_{j=1}^N \tilde{\omega} s(Q\xi_j) \\ \approx \int_{U_m} s(\xi) d\xi.$$

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit une méthode numérique pour estimer la VaR d'un portefeuille non linéaire en ses facteurs de risque lorsque le vecteur des rendements des sous jacents suit une distribution elliptique. Pour illustrer notre méthode on a calculé les VaRs de deux exemples de portefeuilles $\Gamma - \Theta$ constitués d'actifs du CAC 40, mais sous l'hypothèse de la distribution gaussienne. Une nouveauté mathématique dans ce chapitre, est l'introduction d'une méthode numérique inspirée des articles [17], [18] et [39] pour approximer une intégrale multiple sur une hyperboloïde.

Conclusion

En conclusion, dans la première partie de cette thèse, nous avons largement étendue la notion de Δ -Normal VaR introduite par RiskMetrics [30], aux distributions elliptiques et aux mélanges de distributions elliptiques. On a ainsi introduit la *Delta-Elliptic VaR*, la *Delta mixture Elliptic VaR* et en particulier la *Delta-Student VaR*, et la *Delta-Mixture Student VaR*. Comme illustration, nous avons donné des tableaux détaillés pour des quantiles, lorsqu'on travaille en particulier avec des distributions multivariées t-Student, ou le mélange de distributions Student. On a rappelé quelques domaines d'applications de nos résultats.

La Delta-Elliptic VaR étant connue, on a aussi donné des formules explicites pour retrouver ce que nous appelons *Delta-Elliptic ES*. On montre aussi, que de tels résultats sont extensibles lorsque le vecteur de facteurs de risque suit un mélange de distributions elliptiques. Aussi, nous avons introduit la *Delta-Mixture-Student ES*.

Dans la deuxième partie, on aborde le cas des portefeuilles dits quadratiques, pour suppléer les cas de portefeuilles dont la méthode proposée au chapitre 1 ne pourrait suffire pour évaluer le risque. En effet, les investisseurs préfèrent des portefeuilles contenant des produits complexes tels que les options, or ces portefeuilles étant non-linéaires en leurs facteurs de risques, il est nécessaire de penser à des nouvelles méthodes pour estimer la VaR. Surtout que la méthode Monte Carlo existante est lente et lourde à mettre en oeuvre. C'est la raison pour laquelle au chapitre 1 de la deuxième partie, on tente de faire une généralisation de la méthode introduite par Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco [6], sous l'hypothèse que le vecteur des facteurs de risque joints suit une distribution elliptique.

Au chapitre 2 de la deuxième partie, on illustre la tentative du chapitre 1, mais pour un portefeuille $\Gamma - \Theta$, sous l'hypothèse particulière que la distribution elliptique est choisie comme étant une distribution de Laplace généralisée. On a introduit deux théorèmes globaux qui permettent de contrôler la mesure de l'erreur due à l'approximation de Taylor. On a fait plusieurs tests numériques avec le logiciel Matlab, et on propose diverses estimations du terme erreur. En comparant notre méthode avec la méthode Monte Carlo, On s'aperçoit bien que le temps d'exécution de notre méthode analytique est infiniment petit par rapport au temps d'exécution de la Monte Carlo. De plus on ne perd pas la fiabilité des résultats, car la VaR Monte Carlo est dans l'intervalle du choix de la VaR que nous proposons.

Au chapitre 3 de la deuxième partie, on introduit une méthode pour estimer la VaR ou l'ES d'un portefeuille quadratique d'actifs de bases (i.e actions), sous l'hypothèse que le vecteur des rendements logarithmiques joints suit une distribution elliptique, ou un mélange de distributions elliptiques. On illustre notre méthode avec la distribution normale, la distribution Student et leurs mélanges.

Au chapitre 4 de la deuxième partie, en s'inspirant de Genz [17], Genz, Monohan [18], Sheil et O'Muircheartaigh [39], on introduit un algorithme qui nous permet de donner l'approximation d'une intégrale sur une hyperboloïde, on montre son application pour l'estimation de la VaR

Conclusion

d'un portefeuille $\Gamma - \Theta$. Une illustration et un test numérique avec Matlab est faite pour cette méthode, en utilisant des exemples des portefeuilles du *CAC 40*.

En somme, dans les deux parties de cette thèse, on a proposé plusieurs méthodes analytiques pour le calcul du risque des portefeuilles financiers dits "affines" ou "quadratiques", ce qui correspond bien aux objectifs de départ de ce projet de thèse.

Bibliographie

- [1] Albanese, C. and Wiberg, J. Dimension reduction in the computation of value-at-risk. *Journal of Risk Finance*, 3(4) : 41-53, Summer 2002.
- [2] Albanese, C., and L. Seco, (2001) "Harmonic Analysis in Value-at-Risk Calculations", *Revista Matematica Ibero Americana* 17(2), 2001
- [3] Artzner, P., Delbean, F., Eber, J. and Heath, D. (1999). Coherent measures of Risk, *Mathematical Finance* 9(3) : 203-228.
- [4] Bouchaud, J-P et M. Potters (1997), Théorie des Risques Financiers, Aléa Saclay, Diffusion Eyrolles, Paris.
- [5] Boulier, J-F, A. Brabant, R. Dalaud et A-L Dieu (1997), Risques de marchés : Vue de profil, Direction de la Recherche et de l'innovation, Crédit commercial de France, *Quants*, 28.
- [6] R. Brummelhuis, A. Cordoba, M. Quintanilla and L. Seco, Principal Component Value-at-Risk, *Mathematical Finance* 12, 2002, pp. 23-43.
- [7] J. Sadefo-Kamdem and R. Brummelhuis, VaR for quadratic portfolio with Generalized Laplace distributed returns. (Prépublication de l'université de Reims) 2003.
- [8] Butler, J. and Schachter, B.(1998). Estimating Value-at-Risk with a Precision Measure by Combining Kernel estimation with Historical Simulation, *Review of Derivatives Research* 1 : 371-390.
- [9] J. Cardenas, E. Fruchard, E. Koehler, C. Michel, and I. Thomaseau(1997) : VaR : One Step beyond, *RISK* 10(10), 72-75.
- [10] D. Duffie and J. Pan : An overview of value-at-risk. *Journal of Derivatives*, 4(3) :7-49,1997.
- [11] D. Duffie and J. Pan (2001) : Analytical value-at-risk with jumps and credit risk, *Finance and Stochastics*, 5, 155 - 180.
- [12] K. Dowd,(1998) Beyond Value-at-Risk : the new science of risk Management (Wiley series in Frontiers in Finance).
- [13] P. Embrechts, A. McNeil and D. Strauman . Correlation and dependance in Risk Management Properties and Pitfalls. In M.A.H. Dempster, editor, Risk Management : Value at Risk and Beyond, pages 176-223. Cambridge University Press, 1999.
- [14] Fallon, W. (1996), Calculating Value-at-Risk, *working paper*
- [15] Feller, W. (1998), An Introduction to Probability Theory and its Application, New York, John Wiley & Sons.
- [16] H. Föllmer, P. Leukert (1999) : Quantile Hedging *Finance Stochastics*, 3, 251-273.
- [17] A. Genz, Fully Symmetric Interpolatory Rules for Multiple Integrals over Hyper-Spherical Surfaces, *J. Comp. Appl. Math.* 157 (2003), pp. 187-195.
- [18] A. Genz and J. Monahan : Stochastic Integration Rules for Infinite Regions, *SIAM J. Sci. Com.* 19 (1998), pp. 426-439.
- [19] Glasserman, P., Heidelberger, P. and Shahabuddin, P. (2002) : Portfolio value-at-risk with heavy-tailed risk factors, *Math. Finance* 12 (3), 239 - 269.

- [20] Jahel, L. E., Perraudin, W. and Sellin, P. (1999) : Value at risk for derivatives, *J. Derivatives* **6** (3), 7 - 27.
- [21] P. Glasserman, P. Heidelberger and P. Shahabuddin : Portfolio Value-at-Risk with Heavy Yailed Risk Factors. *Mathematical Finance*, **12**(3) : 239-269, July 2002.
- [22] I.S Gradshteyn, I.M. Ryzhik, (2000) : Table of integrals, series, and products. Editor Alan Jeffrey.
- [23] J.C. Hull : Options, Futures and other derivatives. Prentice Hall, 4th edition,2000.
- [24] Koedjik, K., Huisman, R. and Powell, R. (1998) : VaR-x : Fat tails in Financial Risk Management, *Journal of Risk* **1**(1) : 47-61.
- [25] Mardia, K. V. (1970) : Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications, *Biometrika*, **57**, 519-530.
- [26] Mardia, K. V.,(1974) : Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis for testing normality and robustness study, *Sankhyā Series B*, **36**, 115-128.
- [27] McLachlan, G. J. and Basford, K. E. (1987) : Mixture Models : Inference and Applications to Clustering, Marcel Dekker, New york and Basel.
- [28] Jorge Mina (2000) : Calculating VaR through Quadratic Approximations. *RiskMetrics Journal*, **Volume 1**
- [29] Jorge Mina and Jerry Yi Xiao (2001) : Return to Riskmetrics : The Evolution of the standard (www.riskmetrics.com). 2001 RiskMetrics Group Inc.
- [30] J.P. Morgan/Reuters. *RiskMetrics-Technical Document*. J.P. Morgan, 4th edition 1996.
- [31] G.G-D. Layron, P. Gento-Marhuenda and J-F. Ortega-Dato(2001) : Normal Versus Student in Measuring Value at Risk : An Empirical Bayesian Overview. www.gloriamundi.org
- [32] P. Giot and S. Laurent(2001) : Modelling daily VaR using realized volatility and ARCH type models. www.gloriamundi.org
- [33] R. Huisman, K. Koedjijk, C. Kool, F. Palm(1998) : The Fat-Tailedness of FX Returns. www.gloriamundi.org
- [34] Lopez, J.A. and Walter, C.A.(2000). Evaluating covariance matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework, FRBSF working paper **2000-21**, Federal Reserve Bank of San Francisco
- [35] S. Kotz, N. Balahskrinan, Norman L. Johnson : Continuous Multivariate Distributions, Volume **1**, Models and Applications, 2nd Edition.
- [36] Quintanilla, M.(1997) :An asymptotic expansion of Value at Risk, M.Sc. thesis, University of toronto ; [http ://www-risklab.erin.utoronto.ca/research.htm](http://www-risklab.erin.utoronto.ca/research.htm).
- [37] G. Riboulet et T. Roncalli . Value at Risk (mesure de capital économique) : Cours de l'ensae sur Les Risques de Marché : gael.riboulet@creditlyonnais.fr or thierry.roncalli@creditlyonnais.fr
- [38] Rouvinez, C (1997) : Going Greek with VaR, *Risk* **10**, 57-65
- [39] I. O'Muircheartaigh and J. Sheil, Algorithm AS 106 : The Distribution of Non-negative Quadratic Forms in Normal Variables, *Applied Statistics* **26** (1977), pp. 92-98.
- [40] D. Ruppert, Statistics and Finance : An introduction, *Springer text in statistics*, 2004.
- [41] J. Sadefo-Kamdem and A. Genz (2003) : Approximation over hyperboloid with application to quadratic portfolio with options. Soumis pour publication. Prépublication de l'université de Reims.
- [42] J. Sadefo-Kamdem, Value-at-Risk and Expected Shortfall for Quadratic Portfolio of Securities (i.e Equities) with Mixture of Elliptic Distributions Risk Factors, Manuscript accepté pour une présentation à "International Conférence on computational Finance and it's applications 2004" du 21 au 23 Avril 2004. Ce manuscrit a été présenté le 9 juillet au "10th International conference on computing in economics and Finance",

qui s'est tenu du 8-10 juillet 2004 à l'université d'Amsterdam (Pays-Bas). A cette occasion, l'auteur fût le gagnant du prix "2004 STUDENT PRIZE (1000 Euros)" offert par "Society for Computational Economics".

- [43] J. Sadefo-Kamdem, Value-at-Risk and Expected Shortfall for Linear Portfolios with Elliptically Distributed Risk Factors. A paraître dans The *International journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF)*. Manuscript accepté pour présentation au *Third World Bachelier Congress (July 21-24, 2004, Chicago USA)*. (Cet article est téléchargeable sur www.gloriamundi.org)
- [44] J. Sadefo-Kamdem, VaR and ES for Linear Portfolios with mixture of Elliptically Distributed Risk Factors. To appear in the Proceedings of Bad Herrel nab Workshop of Financial Engeneering May 6-8, 2003 as a special issue of Springer *Journal of Computing and Vizualisation in science*.
- [45] J. Sadefo-Kamdem, VaR and ES for Linear Portfolios with mixture of generalized laplace distributed risk factors. This paper will be presented to the Eastern Finance association (EFA 2005) 41st Meeting to be held at Norfolk USA, April 20-23, 2005. Pour plus de details voir <http://www.easternfinance.org/meetings/>.
- [46] Studer, G. (1999). Market Risk Computation for Nonlinear Portfolios, *Journal of Risk*.
- [47] Venkataraman, S. (1997) : Value at risk for a mixture of normal distributions : The use of Quasi-Bayesian Estimation Techniques. Economic Perspectives, Federal Reserve Bank of Chicago March/April, 2-13.
- [48] P.Sylvester, Symmetric quadrature formulae for simplexes, *Math. Comp.* 24 (1970), pp.95-100.
- [49] N. Taleb : *Dynamic Hedging*. New York : Wiley.
- [50] VO-KHAC KHOAN : Distributions , Analyse de Fourier , Operateurs aux Dérivées Partielles . TOME 2
- [51] Zwi Wiener. (1999) : Comment on nonlinear Value-at-Risk. *European Finance Review*, 2 : 189-193.
- [52] Wong, R.(1989) : *Asymptotic Approximation of Integrals*.*New York : Academic Press*
- [53] Y. Xu, Orthogonal polynomials and cubature formulae on spheres and simplices, *Methods and applications of analysis* 5 (1998), pp. 169-184.
- [54] Yasuhiro and Toshinao Yoshiba, (2002) : On the validity of Value-at-Risk : Comparative analysis with Expected Shortfall
- [55] Zangari, P. (1996) : An Improved Methodology for Measuring VaR, *RiskMetrics Monitor*, 2nd quarter 1996, pp.7-25. <http://www.riskmetrics.com/research/journals>

Troisième partie

Résumé de la Thèse

Résumé

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Cette thèse se situe dans les mathématiques financières et elle est consacrée au calcul efficace du risque financier de grands portefeuilles d'actifs financiers à l'aide de méthodes analytiques. Ici, il peut s'agir d'actifs traditionnels, comme les actions ou les obligations, mais également de produits dérivés, comme des options de vente ou d'achat.

Le cadre général de cette thèse est le suivant : on se donne un portefeuille d'actifs, dont le prix Π_t s'écrit comme fonction du temps t et d'un vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ de *facteurs de risque* sous-jacent au portefeuille :

$$\Pi_t = \Pi(X_1, \dots, X_n, t). \quad (1)$$

Un des exemples typiques de tels facteurs de risque est le rendement des actions ou des obligations qui constituent le portefeuille ou qui sont sous-jacentes aux produits dérivés contenus dans le portefeuille. Le prix évoluant dans un futur inconnu, ces facteurs de risque sont des variables aléatoires, ayant une distribution de probabilité qui, elle aussi, va en général dépendre du temps. En supposant, sans perte de généralité, qu'aujourd'hui correspond à $t = 0$, le prix futur Π_t , à $t > 0$, va lui-aussi être aléatoire, ainsi que la fonction de profit $\Pi_t - \Pi_0$. Ce dernier peut, bien entendu, avoir une valeur négative, avec une probabilité positive, ce qui correspond à un risque de perte financière. Le problème qui se pose alors est de quantifier ce risque par un, ou plusieurs, nombres pouvant se calculer à $t = 0$.

Traditionnellement on choisissait en finance la moyenne et la variance (ou sa racine carrée, l'écart type) comme indicateurs de risque. Celles-ci ayant un certain nombre de défauts (par exemple, de traiter les pertes et les gains par rapport à la moyenne de façon symétrique et, plus sérieusement, de conduire à des problèmes d'interprétation), elles ont été remplacées, depuis le milieu des années 90, par une autre mesure de risque, la *Valeur à Risque* ou VaR, définie comme suit : on se donne un nombre $p \in (0, 1)$ (souvent $p = 0,05$ ou $p = 0,01$). Alors la Valeur à Risque avec seuil de confiance $1 - p$ sur la période $[0, t]$ est définie par :

$$-VaR_p = \inf\{V : \text{Prob}(\Pi_t - \Pi_0 \leq V) > p\}. \quad (2)$$

Autrement dit, avec une probabilité de $1 - p$, la perte (exprimée sous forme d'un nombre positif) va être majorée par VaR_p . Par rapport au couple

moyenne et variance, la VaR a donc l'avantage d'avoir une interprétation financière simple et claire. En plus, dans le cas où Π est une fonction affine de $X = (X_1, \dots, X_n)$, et où, de plus X suit une distribution gaussienne multi-variée, il existe une relation simple entre la VaR et la moyenne et la variance de Π_t . Cette observation est souvent exploitée dans la pratique en remplaçant Π_t par son approximation de Taylor d'ordre 1 en $t = 0, X = 0$, pour des t petits (t est mesuré en finance en termes de fraction d'une année). Par contre, il existe des situations importantes où cette approximation s'avère insuffisante : on pense à des portefeuilles qui sont " Δ -hedged", et en particulier à l'importante classe des portefeuilles construits pour couvrir le risque couru par un vendeur d'options. Aussi, dans la pratique le vecteur de risque X suit très souvent une distribution qui est loin d'être gaussienne. Une alternative est de donner une approximation de la VaR numériquement sur ordinateur, en employant des méthodes Monte Carlo, pour déterminer la distribution de probabilités de Π_t en simulant les X et en calculant, pour chaque réalisation \hat{X} de X , la valeur $\hat{\Pi} = \Pi(t, \hat{X})$. Cette approche Monte Carlo, quoique "universelle", présente néanmoins de sérieux désavantages. D'abord, pour des n grands (facilement d'ordre de 50 - 100 dans la pratique) elle est lente, surtout si la fonction (1) est une fonction non-linéaire compliquée et coûteuse à calculer numériquement. De plus, dans bien des applications, cette fonction n'est pas connue explicitement, au plus connaît-on une procédure (souvent elle-même de type Monte-Carlo) pour la calculer. Pour éviter le problème dû à la fonction non-linéaire $\Pi(t, X)$, on la remplace souvent par son "approximation $\Gamma - \Delta$ " ou approximation de Taylor d'ordre 2,

$$\Pi(t, X) \simeq \Pi(0, 0) + \Theta t + \langle \Delta, X \rangle + \frac{1}{2} \langle X, \Gamma X \rangle, \quad (3)$$

où Θ est la dérivée de Π par rapport à t , Δ le gradient par rapport à X , et Γ la matrice hessienne, ou la matrice des dérivées secondes par rapport aux X_j . Ensuite on évalue la VaR de cette approximation quadratique, en général par Monte Carlo. (On note entre parenthèses que, pour des portefeuilles quadratiques (3), de nombreuses alternatives à Monte Carlo ont été proposées dans la littérature de la finance quantitative, malheureusement très souvent inexactes.) Pour des X gaussiennes il existe depuis récem-

ment une méthode passant par Fourier, mais qui ne se généralise pas au cas non-gaussien).

Dans cette thèse, on a développé des *méthodes analytiques* pour calculer la VaR d'un portefeuille du type (3), pour plusieurs classes de distributions non-gaussiennes. On donne soit des formules exactes (dans le cas de l'approximation Δ , ce qui correspond à $\Gamma = \Theta = 0$ ³⁹), soit des approximations contrôlées avec estimation d'erreur (si $\Gamma \neq 0$). Dans le premier cas, on a étudié les X suivant une distribution *elliptique générale*, pour lesquelles la densité de probabilité s'exprime comme

$$(\det \mathbb{V})^{-1/2} g(\langle x, \mathbb{V}^{-1}x \rangle), \quad (4)$$

\mathbb{V} étant la matrice de variance-covariance (on s'est limité aux distributions ayant un moment d'ordre 2 fini). On a réduit le calcul de la $\Delta - VaR_p$ à la solution d'une équation transcendente ne faisant intervenir que p ; dans des cas particuliers, comme celui d'une distribution Student multi-variée, cette équation s'écrit en termes de fonctions spéciales ${}_2F_1$.

Si $\Gamma \neq 0$, alors pour un portefeuille qui est Δ -hedged avec des facteurs de risque suivant une *distribution de Laplace généralisée* (ce qui correspond à prendre $g(s) = C \exp(-cs^{\alpha/2})$ dans (4), avec $0 \leq \alpha \leq 2$) on se donne une formule asymptotique pour $F(-V) := \text{Prob}(\Pi_t - \Pi_0 \leq -V)$: si on pose

$$R^2 := 2c^{-2/\alpha} (V + \Theta). \quad (5)$$

alors pour $R^\alpha \geq \lambda_0 > 0$,

$$F(-V) = A_{\text{pc}} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, \left(\frac{R}{\sqrt{a_1}} \right)^\alpha \right) + \mathcal{E}(R), \quad (6)$$

où le terme d'erreur peut être estimé par

³⁹sous des hypothèses raisonnables sur la dépendance de la distribution de X sur t , le terme avec Δ représente une approximation d'ordre $t^{1/2}$, et les deux autres le terme d'ordre t

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}(R)| \leq & A_{\text{pc}} \cdot \left\{ \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R^\alpha} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^\alpha \right) \right. \\
& - \frac{2(a_1^-)^{\frac{(1+n)}{2} - \frac{n\alpha}{4}} (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2})^{1 - \frac{n+1}{\alpha}} \left(\frac{R_\gamma^2}{2} \right)^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - 1, (c_1^{\alpha/2} + \frac{R_\gamma^2}{2}) \cdot R^\alpha \right) \\
& + \left(1 - \frac{\widehat{K}_1^\pm}{R^\alpha} \right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}; \frac{R^\alpha \cdot R_\gamma^2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^\alpha \right) \\
& + \frac{\widehat{K}_2^\pm}{R^{2\alpha}} \cdot \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{n}{2}, c_1^{\alpha/2} \cdot R^\alpha \right) \left. \right\} \\
& + K^0 \Gamma \left(\frac{n+1}{\alpha}, n_\varepsilon R^\alpha \right),
\end{aligned}$$

où $\Gamma(z, w)$ est la fonction Gamma incomplète, et les constantes a_1^- , A_{pc} , E_0, E_1, E_2 et $n_\varepsilon > (a_1^-)^{-1/2}$ peuvent toutes être calculées de façon explicite à partir de la matrice $\mathbb{V}^{1/2} \Gamma \mathbb{V}^{1/2}$ et de λ_0 ; en fait, $-a_1^-$ est simplement la plus petite valeur propre négative de cette matrice. Dans le cas gaussien, correspondant à $\alpha = 2$, cette formule généralise une formule asymptotique de Brummelhuis, Cordoba, Quintanilla et Seco de 2001 (mais qui ne donnaient pas d'estimation d'erreur aussi précise, même dans ce cas le plus simple parmi les distributions de Laplace généralisées).

En inversant (numériquement) l'approximation principale \pm l'erreur, on trouve un intervalle $[VaR_p^-, VaR_p^+]$ dans lequel la vraie VaR du portefeuille (3) se situe, et dont la taille tend vers 0 avec p . Dans la dernière partie de cette thèse, on a fait des expériences numériques pour des portefeuilles assez grands, pour comparer les valeurs des VaR trouvées avec cette méthode avec celles calculées par Monte Carlo, aussi bien en ce qui concerne la précision que la rapidité du calcul (pour laquelle la nouvelle méthode est nettement supérieure).

Finalement, la VaR comme mesure de risque représente quelques désavantages théoriques, dont le plus important est de ne pas être *sub-additive* : la VaR d'une somme de deux portefeuilles peut être plus grand que la somme des VaR, ce qui va à l'encontre de l'idée intuitive que la diversification doit conduire à une diminution (ou, au moins, pas à une augmentation) du risque financier. Dans la terminologie introduite par Artzner, Delbaen,

Eber et Heath (1999), la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente. Pour cela, des théoriciens ont proposé de la remplacer par d'autres mesures de risque, notamment par le "Expected Shortfall" ou ES, définie par

$$ES_p = -\mathbb{E}(\Pi_t - \Pi_0 \mid \Pi_t - \Pi_0 < -VaR_p),$$

c'est à dire, l'espérance de la perte si celle-ci dépasse la VaR ; ES_p est une mesure de risque cohérente si on se limite aux distributions de probabilité ayant une densité continue. Dans cette thèse on a aussi calculé le ES_p dans les cas évoqués ci-dessus. Néanmoins, malgré certains avantages de "ES", la VaR reste pour le moment la mesure de risque préférée pour les banques (et autres praticiens de la finance), ce qui justifie l'attention qu'on lui a accordée dans cette thèse. Notons qu'en plus, le calcul de l'ES nécessite préalablement le calcul de la VaR. En s'inspirant de Genz [17](2003), on a aussi proposé des méthodes numériques pour l'estimation de la VaR et de l'ES pour des portefeuilles $\Gamma - \Delta$, ou des portefeuilles quadratiques de sous-jacents tel que nous l'avons introduit.

Mots-clés: Estimation asymptotique, Approximation d'intégrale multiple, Risque des portefeuilles Financiers, Valeur à Risque, Expected Shortfall

Abstract

Keywords: Asymptotic analysis, Approximation of multiple integral, Risk Management, Value-at-Risk, Expected Shortfall

Liste des tableaux

1.1	Quelques valeurs de $q_{\alpha,\nu}^t$	26
1.2	Quelques valeurs de $q_{\alpha,\nu}^t$	26
1.3	Quelques valeurs de q_{β,ν_1,ν_2} lorsque $\alpha = 0.01$	35
1.4	Quelques valeurs de q_{β,ν_1,ν_2} lorsque $\alpha = 0.001$	35
1.5	Quelques valeurs de q_{β,ν_1,ν_2} lorsque $\alpha = 0.01$	36
1.6	Quelques valeurs de $e_{\alpha,\nu}^t$	38
1.7	Quelques valeurs de $e_{\alpha,\nu}^t$	38
1.8	Quelques valeurs de q_{α}^{MST-ES} pour $\alpha = 0.01$	41
1.9	Quelques valeurs de q_{α}^{MST-ES} pour $\alpha = 0.001$	41
1.10	Données de 11 actions distinctes du <i>CAC 40</i>	48
1.1	Données de 11 actions distinctes du <i>CAC 40</i>	65
1.2	Statistiques historiques (sur 3 mois) des actions du portefeuille	65
2.1	Données de 11 actifs du <i>CAC 40</i> (<i>5 Puts, 6 Calls et 11 actions sous-jacentes</i>).	107
2.2	Intervalle du choix de la VaR via le corollaire 2.6.3 lorsque $p = 0.0001$, $\epsilon = 0.5720$, $b = 0.5$, $\gamma = 10e-2$, $\lambda_0 = 2.0316$, $\Pi(0) = 66.825$ Euros, $\Theta = -1.9340$, $n_{\epsilon} = 6.6174$ et EWMA $\lambda = 0.8913$	108
2.3	Tableau de comparaison de la VaR analytique et la VaR Monte Carlo $\alpha = 2$, lorsque $t = 1$	114
2.4	Données de 11 actifs (Puts et Calls) du <i>CAC40</i>	119
2.5	Intervalle de choix de la GLD_{α} VaR obtenue via le théorème 2.121, avec $p = 10e-30$, EWMA $\lambda = 0.93$, $\epsilon = 10e-40$, $b = 0.5$, $\gamma = 10e-20$, $\lambda_0 = 1$, $\Pi(0) = 64.1808$ Euros, $\Theta = 2.2086$	120
2.6	Données de 11 actifs (5 Puts et 6 Calls) du <i>CAC 40</i>	122
2.7	Intervalle de choix de la GLD_{α} VaR obtenue via le théorème 2.6.3, avec $p = 0$, EWMA $\lambda = 0.93$, $\epsilon = 10e-40$, $b = 0.5$, $\gamma = 10e-20$, $\lambda_0 = 1$, $\Pi(0) = 64.1808$ Euros, $\Theta = 2.2086$	123
2.8	Variation de quelques constantes de notre modèle avec α	123
2.9	Valeurs de quelques constantes du modèle	123
2.10	Tableau de comparaison de la VaR analytique et la VaR Monte Carlo $\alpha = 2$	125
2.11	Tableau de comparaison entre la VaR analytique et la VaR Monte Carlo lorsque $\alpha = 2$	126
4.1	Quelques résultats numériques de la VaR notée V.	161
4.2	Quelques résultats numériques de la VaR notée V.	162

Table des figures

1.1	Courbe de la frontière efficient (rendement espéré - Delta Student) lorsque $\alpha = 0.01$, et le degré de liberté est $\nu = 10$. $\mu_p \in [\min_{i=1}^n \mu_i, \max_{i=1}^n \mu_i]$ où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ est l'espérance des rendements historiques sur 3 mois.	50
2.1	Graphe permettant de trouver VaR_{PC} en fonction de p , lorsque $\alpha = 1.320$	109
2.2	Graphe permettant de lire la VaR_{LB} en fonction de p , lorsque $\alpha = 1.320$	110
2.3	Graphe permettant de trouver VaR_{PC} en fonction de p , lorsque $\alpha = 1.320$	112
2.4	Graphe permettant de trouver VaR_{LB} en fonction de p , lorsque $\alpha = 2$	113