



**HAL**  
open science

# Ballotement des liquides dans les réservoirs cylindriques soumis à une oscillation harmonique: régimes d'onde non-linéaire et brisure

Aude Royon-Lebeaud

► **To cite this version:**

Aude Royon-Lebeaud. Ballotement des liquides dans les réservoirs cylindriques soumis à une oscillation harmonique: régimes d'onde non-linéaire et brisure. Mécanique [physics.med-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00009117

**HAL Id: tel-00009117**

**<https://theses.hal.science/tel-00009117>**

Submitted on 27 Apr 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UJF

Spécialité : Mécanique des fluides et transferts

Formation doctorale "Mécanique et Energétique"

## Ballottement des liquides dans les réservoirs cylindriques soumis à une oscillation harmonique

par

**Aude Royon-Lebeaud**

Directeurs de thèse : Emil J. Hopfinger Alain Cartellier

soutenue le 15 mars 2005

JURY

M. C. Baudet, Professeur, UJF	Président du Jury
M. A. Cartellier, Directeur de Recherche au CNRS	Co-directeur de thèse
M. C. Clanet, Professeur, Ecole Polytechnique	Rapporteur
M. F. Dias, Professeur, ENS Cachan	Rapporteur
M. E. Hopfinger, Directeur de Recherche émérite au CNRS	Directeur de thèse
M. B. Molin, Enseignant-Chercheur, EGIM	Examineur
M. B. Vieille, Ingénieur de Recherche, CNES	Examineur



Etude du ballonnement des liquides  
dans les réservoirs cylindriques  
soumis à une oscillation harmonique :  
Régimes d'ondes non-linéaires  
et brisure

Aude Royon-Lebeaud





## Des mercis pour vous...

Mes remerciements vont d'abord à Emil Hopfinger qui a encadré et suivi ce travail pendant plus de trois années. J'ai particulièrement apprécié son enthousiasme et sa soif toujours alimentée d'aller plus loin dans la compréhension des mécanismes physiques en jeu. C'est grâce à sa curiosité permanente que j'ai pu rebondir dans les moments de découragements. J'ai eu la chance d'avoir un directeur de thèse très présent et toujours intéressé par les petites avancées réalisées.

Alain Cartellier a également largement contribué à l'encadrement de cette thèse. Je le remercie pour son regard critique sur les résultats et pour m'avoir fait bénéficier, entre autres, de ces compétences dans le domaine expérimental. Je regrette de n'avoir pas plus souvent osé pousser sa porte !

Je n'oublie pas l'ensemble de mon jury, Christophe Clanet, Frédéric Dias, Christophe Baudet, Bernard Molin et Bruno Vieille, qui ont pris le temps d'évaluer ce travail. L'ensemble des questions posées pour ma soutenance sont autant de pistes nouvelles pour poursuivre l'analyse du ballottement et valoriser certains résultats, je l'espère, dans un article.

Cette thèse expérimentale n'aurait bien sûr pas pu exister sans le soutien technique de l'ensemble des poules du laboratoire. Un grand merci à Pierre dont les multiples compétences m'ont toujours épaulée et dépannée. Merci à Joseph pour toutes les réalisations mécaniques et pour son entrain. Je n'oublie pas Jean-Paul pour ces compétences électroniques et pour toutes les histoires racontées au coin de son bureau ! Je n'oublie pas non plus que j'ai grignotté à tous les rateliers en grapillant de l'aide auprès de Jean-Marc et Laurent. Je remercie également toutes les filles de l'administration, Loïc et ces prédécesseurs, François Bonnel auprès de qui j'ai moult fois fait le morpion pour ses conseils éclairés concernant la visualisation !

Je voudrais remercier l'ensemble de l'équipe Houle ou plutôt ceux qui transitent par le bureau de Jean-Marc pour un café, une petite pause. Eric, Hervé, Philippe, David depuis peu, Jean-Marc, Laurent (encore eux) et les thésards, Maryam, Rodrigo, Marie-Laure ont été ma petite famille d'adoption pendant ces trois années. Les déjeuners d'été sur l'herbe ou d'hiver au fin fond du GH ont été de joyeux moments de débats, de découvertes. Merci à tous pour votre ouverture, votre curiosité extra-scientifique.

Une petite mention spéciale à Yves Gagne... J'ai souvent poussé sa porte pour recharger mes batteries parfois à plat. Je lui suis très reconnaissante de son immense écoute et tout le réconfort qu'il a toujours pris le temps de m'apporter malgré un emploi du temps bien sûr constamment au bord de l'explosion.

Et puis, il y a tous mes compagnons de fortune, thésards anciens ou nouveaux... Je

pense en particulier à Benjamin avec qui j'ai partagé mes deux grosses années de manip'. J'en garde des souvenirs de chouettes moments d'amitiés et de francs coups de mains scientifiques. Je lui souhaite beaucoup de réussite! Je dois beaucoup à mon plus récent co-bureau, Thibaut, dont la disponibilité m'a été d'un grand secours depuis que je me suis installée à Lyon. Sa gentillesse m'épate toujours. Je remercierai enfin Philippe pour les coups de pouce sous linux ou latex et pour tous les moments de découragements et d'enthousiames partagés.

Je sors un peu du champ, mais une des plus jolies découvertes de ces trois années est la merveilleuse amitié avec Maud. Les couloirs du bâtiment A ont été un lieu de rencontre et de partage que je n'aurais pas imaginé. J'espère que tout cela durera dans d'autres lieux et pour d'autres aventures de nos vies. Merci aussi pour d'autres amitiés construites ces dernières années, un peu plus loin du GH, avec Céline, Barbara et Noémie.

Ma liste aurait pu s'arrêter là tellement ce dernier soutien a été l'évidence de ces presque quatre années. Pourtant, je dois beaucoup à la présence apaisante de Régis. Et, lui aussi ne doit pas être mécontent que la thèse soit bientôt emballée.

Un dernier merci à Valentine qui a décidément essayé bien des plâtres mais qui est sans comparaison possible ma plus belle réussite pour cette fin de thèse.

## RÉSUMÉ

Nous considérons le ballonnement des liquides dans les réservoirs cylindriques pour de forts taux de remplissage. Le système est soumis à une oscillation rectiligne horizontale et périodique de basse fréquence. Des visualisations ainsi que des mesures temporelles de la position de la surface libre par sonde capacitive ont permis de détailler les mouvements d'ondes ainsi que la déstabilisation du front. Trois régimes sont mis en évidence : un mode plan antisymétrique, un régime chaotique et un mode tournant. Le mode forcé est très bien modélisé par un pendule simple amorti. Ce modèle mécanique permet de prévoir la coexistence initiale du mode propre décroissant et du mode forcé et de déterminer l'amplitude stationnaire et le déphasage par rapport à l'excitation. La résonance est observée pour des fréquences inférieures à la fréquence propre linéaire du mode 1, la non linéarité est négative pour ces taux de remplissage. Le mode plan déferle alors et un régime pseudo périodique d'alternance entre les différents modes et de phases de brisure s'installe. L'étude détaillée de la brisure est réalisée en cuve carrée. Le front de l'onde à la paroi est déstabilisé par des ondes transverses de type Faraday. Cette instabilité donne lieu à une forte modification du profil de l'onde. Elle conduit également à une importante création de bulles entraînées et de gouttes par un phénomène de splashing. Pour des fréquences légèrement supérieures à la fréquence de résonance linéaire, le mode tournant, onde progressive azimutale, émerge. Ce mode existe pour des fréquences élevées par mise en rotation de la masse de fluide et effet Doppler. Il reste stable pour des amplitudes d'ondes très importantes.

## SUMMARY

We consider liquid sloshing in cylindrical reservoirs for high fill ratio. The system is subjected to a rectilinear horizontal, periodic forcing at low frequency. Image analysis as well as capacitance probe measurements of the time variation of the wave amplitude were conducted to determine the wave motions and wave front destabilization. Three regimes are found to exist : a plane antisymmetric mode, a chaotic regime and a swirling mode. The forced mode is well described by a damped simple pendulum. This mechanical model allows to predict the initial coexistence of the decaying natural mode and the forced mode and to determine the stationary amplitude and the phase-shift with the excitation. The resonance is observed for frequencies lower than the linear natural frequency of the first mode, the non linearity is negative for these fill ratios. So the plan mode breaks and a pseudo periodic regime which consists in an alternance of the different modes and of periods of breaking sets up. The detailed study of the breaking phenomena is realized in square tank. The wave front at the wall is destabilized by transverse waves of Faraday type. This instability leads to a strong modification of the wave profile. It leads also to an important creation of bubbles entrained and of drops by splashing phenomena. For frequencies just above resonance ; a swirling mode, progressive azimuthal wave, emerges. This mode exists for high frequencies thanks to a rotation of the fluid mass and Doppler effect. It is still stable with very large wave amplitudes

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>15</b>
1.1 Caractéristiques des ondes linéaires en réservoir cylindrique . . . . .	15
1.2 Le ballotement de larges amplitudes : un phénomène non-linéaire . . .	22
1.3 Mode tournant . . . . .	30
1.4 Objectifs de la thèse . . . . .	36
<b>2 Banc d'essai et méthodes expérimentales mises en œuvre</b>	<b>37</b>
2.1 Dispositif expérimental . . . . .	38
2.1.1 le dispositif de forçage . . . . .	38
2.1.2 le système forcé . . . . .	43
2.2 Méthodes de mesure . . . . .	44
2.2.1 Sonde optique de déplacement . . . . .	45
2.2.2 Sondes capacitives . . . . .	46
2.2.3 Visualisation . . . . .	48
<b>3 Régimes d'ondes</b>	<b>53</b>
3.1 Domaine d'existence des différents régimes . . . . .	55
3.2 Ballotement hors résonance . . . . .	58
3.2.1 Régime transitoire . . . . .	58
3.2.2 Régime stationnaire . . . . .	62
3.3 Comportement à résonance : approche du déferlement . . . . .	66
3.3.1 Observation de la croissance de l'onde à résonance . . . . .	66
3.3.2 Evolution de la forme de l'onde au cours d'un cycle en cuve carrée	70
3.3.3 Profils temporels d'altitude du front, de vitesse et d'accélération	75
3.3.4 Taux de croissance à la résonance . . . . .	81
3.3.5 Evolution de la phase . . . . .	86
3.4 Amortissement libre . . . . .	88

3.4.1	Définitions utilisées et contexte bibliographique . . . . .	88
3.4.2	Résultats expérimentaux en eau profonde . . . . .	89
3.4.3	Amortissement en eau peu profonde . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Mode tournant</b>	<b>93</b>
4.1	Existence du mode tournant . . . . .	93
4.1.1	Allure du mode tournant . . . . .	93
4.1.2	Domaine d'existence . . . . .	94
4.1.3	Déphasage du mode tournant . . . . .	99
4.1.4	Amplitude stationnaire du mode tournant . . . . .	100
4.1.5	Amortissement libre du mode tournant . . . . .	103
4.2	Transition du mode antisymétrique 1 vers le mode tournant en dehors de la résonance $\omega > \omega_{11}$ . . . . .	104
4.2.1	Diagramme de bifurcation . . . . .	104
4.2.2	Croissance du mode tournant . . . . .	106
4.2.3	Mise en place de la rotation . . . . .	108
4.2.4	Décroissance du mode . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Régime chaotique : brisure à résonance</b>	<b>111</b>
5.1	Description du régime chaotique . . . . .	111
5.1.1	Allure du régime chaotique . . . . .	112
5.1.2	Paramètres caractéristiques du régime chaotique . . . . .	117
5.1.3	Dépendance du régime chaotique en fonction de l'amplitude . . . . .	119
5.2	Description du déferlement . . . . .	122
5.2.1	Rappels sur le comportement à résonance avant déferlement . . . . .	122
5.2.2	Observation visuelle de la brisure . . . . .	123
5.3	Instabilité Rayleigh-Taylor . . . . .	126
5.3.1	Éléments de théorie . . . . .	126
5.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	129
5.4	Instabilité de Faraday . . . . .	132
5.4.1	Éléments de théorie . . . . .	132
5.4.2	Résultats expérimentaux . . . . .	135
5.4.3	Exploitation des résultats en terme d'instabilité de Faraday . . . . .	138
5.5	Augmentation de l'aire interfaciale et mélange . . . . .	139
5.5.1	Observations . . . . .	139
5.5.2	Comparaison avec les résultats de Jiang et al. [27] . . . . .	142
	<b>Conclusions générales</b>	<b>149</b>

<b>A</b>	<b>Calibration de sondes capacitive et résistive</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Effets de géométrie</b>	<b>159</b>
B.1	Effet d'un dome . . . . .	159
B.2	Effet d'un anneau anti-ballottant . . . . .	161





# Introduction

## CONTEXTE GÉNÉRAL

En vue du stockage ou du transport des fluides (cuves de méthaniers, de gaz liquide, réservoirs d'avion, de satellites ou de lanceurs spatiaux ...), une connaissance de l'état du fluide (pression, vitesse locale, température, position de la surface libre) en fonction des conditions d'environnement, est essentielle. En effet, de fortes fluctuations de pression ont été mesurées pendant les phases de vol.

L'étude présentée dans cette thèse s'inscrit, plus particulièrement, dans le cadre du projet franco-allemand COMPERE, COMportement des Ergols dans les REservoirs associant des organismes de recherche publics et des industriels. Le but de ce programme est de mettre au point un ou plusieurs modèles physiques et codes numériques pour prédire l'évolution des ergols contenus dans les réservoirs de lanceurs, soumis à des niveaux d'accélération et de flux de chaleur variables dans le temps, durant les différentes phases que sont la mise en froid des réservoirs LOX/LH<sub>2</sub>, la phase propulsée avec ou sans vidange, l'allumage et l'extinction des moteurs, le largage des charges utiles, la phase balistique.

Les principaux points critiques concernent :

- le ballonnement des ergols dans les réservoirs qui peuvent induire une instabilité du pilotage (efforts exercés sur les parois du réservoir par les ondes excitées) et une augmentation ou une chute de pression (augmentation d'échanges thermiques par augmentation de la surface d'échange - brisure d'interface),
- l'échauffement des ergols.

Le projet a pour but d'acquérir les connaissances nécessaires à la prédiction de :

- la position des ergols (aspect rallumage des moteurs),
- les pression et température dans les réservoirs (gestion des pressions et rallumage),
- les efforts sur les structures (pilotage, tenue des matériaux),
- les masses d'inconsommables (performance).

## DONNÉES DU PROBLÈME RÉEL

Les principales sollicitations extérieures imposées aux réservoirs sont dues à des vibrations de parois, aux effets du vent, à des variations de niveaux d'accélération latérales imposées par le pilotage, l'arrêt et le rallumage des moteurs, le largage des satellites. Les sollicitations peuvent être de haute fréquence ou de basse fréquence. ces dernières sont de l'ordre de 0.5 Hz, c'est-à-dire de l'ordre de la fréquence naturelle du premier mode.

Un schéma des réservoirs réels est donné en figure 1. Ces réservoirs comprennent généralement une zone cylindrique et une zone hémisphérique. On note par ailleurs la présence d'un anneau anti-ballottant. Les dimensions caractéristiques sont un rayon  $R$  de l'ordre du mètre et une hauteur  $H$  de l'ordre de 4 fois le rayon. Le taux de remplissage varie entre  $h/H = 0.05$  à  $0.9$ .

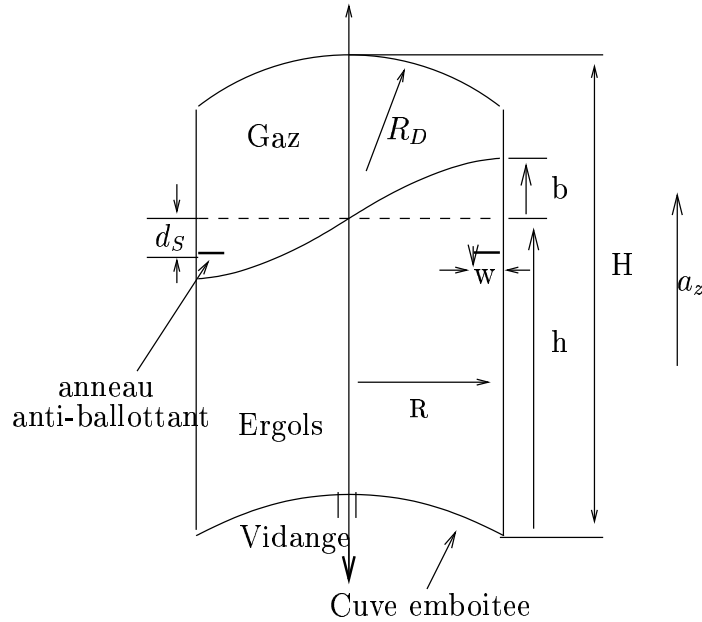


FIG. 1 – Schéma de principe du réservoir

Les ergols sont soumis, durant les différentes phases du vol, à une pesanteur variant de  $a_z = 10^{-6}g$  à  $4g$ , avec  $g$  gravité terrestre. Ces ergols sont soit des fluides cryogéniques, dioxygène ou du dihydrogène liquides LOX ( $O_2L$ ) et  $LH_2$  ( $H_2L$ ), soit des ergols stockables tels que  $N_2O_4$  et MMH. Les propriétés physiques sous 1 bar sont données dans la tableau 1. Nous ne considérons pas d'effet thermique.

#### ANALYSE DIMENSIONNELLE - SIMILITUDE

En phase de propulsion, dans le cas isotherme simplifié, les grandeurs caractéristiques sont :

	N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	MMH	O <sub>2</sub> L	H <sub>2</sub> L
viscosité cinématique $\nu$ ( $10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s)	0.28	0.95	0.17	0.19
tension superficielle cinématique $\sigma/\rho$ ( $10^{-6}$ m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> )	18	34	12	28

TAB. 1 – Propriétés physiques des ergols liquides à 1 bar.

- le rayon du réservoir  $R$ ,
- la profondeur du liquide  $h$ ,
- l'accélération axiale  $a_z$  agissant sur le réservoir,
- l'accélération de la perturbation transverse  $a_x$ ,
- la viscosité cinématique du liquide  $\nu$ ,
- la densité du liquide  $\rho$ ,
- la tension de surface du liquide  $\sigma$ .
- le temps caractérisant la sollicitation  $\tau$ .

D'après la théorème de Vachy-Buckingham, le problème dépend alors de  $8 - 3 = 5$  paramètres adimensionnels indépendants. On en déduit donc ces 5 paramètres de similitudes à respecter :

- le taux de remplissage :

$$N_1 = \frac{h}{R} \quad (1)$$

Dans le cas où  $h/R > 1$ , la profondeur du liquide n'est plus un paramètre déterminant et le taux de remplissage n'est plus un paramètre de similitude. Nous nous plaçons le plus souvent dans ce cadre. Nos résultats ne sont donc pas transposables au cas des faibles taux de remplissage des réservoirs.

- le rapport entre le temps caractéristique lié à l'accélération axiale et le temps caractérisant la sollicitation transverse :

$$N_2 = \frac{R/a_z}{\tau^2} \quad (2)$$

- le rapport entre une distance caractéristique induite par l'accélération transverse et le rayon <sup>1</sup> :

$$N_3 = \frac{a_x \tau^2}{R} \quad (3)$$

Dans le cas réel, les sollicitations sont de durée finie et peuvent être composées de plusieurs fréquences. Nous considérons, dans ces expériences, un forçage harmonique  $x = A_f \cos \omega t$ . L'accélération caractéristique est alors  $a_x = A_f \omega^2$  et le

---

<sup>1</sup>La conservation des nombres adimensionnels  $N_2$  et  $N_3$  implique la conservation du nombre de Froude  $Fr = V/\sqrt{gR}$ , avec  $V = A_f \omega$ , rapport entre la vitesse du fluide sur la vitesse de l'onde.

temps caractéristique est  $\tau = \omega^{-1}$ . Les nombres adimensionnels à respecter sont donc :

$$N_2 = \frac{R/g}{\tau^2} = \frac{\omega^2}{\omega_{nat}^2}. \quad (4)$$

C'est-à-dire que le ratio entre la fréquence de forçage et la fréquence naturelle des modes est déterminant (on reliera ce nombre adimensionnel aux problèmes de résonance). La gamme du paramètre  $N_2$  correspondant à la réalité est donc choisie telle que les fréquences de sollicitations soient autour de la fréquence propre du premier mode antisymétrique, par ailleurs le plus énergétique.

Il faut également conserver :

$$N_3 = \frac{a_x \tau^2}{R} = \frac{A_f}{R}. \quad (5)$$

L'amplitude de forçage relative est donc également un paramètre caractéristique du problème. Dans les expériences réelles, on mesure  $N_2 N_3 = a_x/a_z \approx 10^{-3}$ . On choisira donc une gamme d'amplitude relative d'excitation entre  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$ .

- le nombre de Bond qui est le rapport entre les forces gravitationnelles et les forces de tension de surface :

$$Bo = \frac{\rho a_z R^2}{\sigma} \quad (6)$$

- le nombre d'Ohnesorge qui est le rapport entre les forces visqueuses et les forces de tension de surface <sup>2</sup> :

$$Oh^2 = \frac{\rho \nu^2}{R \sigma} \quad (7)$$

En prenant  $R = 1$  m,  $a_z = g$  et les propriétés des ergols concernés, on trouve  $Bo \approx 10^6$  et  $Oh \approx 5 \cdot 10^{-5}$  <sup>3</sup>. Le ballottement pendant la phase propulsée ne dépend ni de la tension de surface, ni de la viscosité, sauf lorsqu'on s'intéresse à la brisure et à la tailles des gouttes d'une part et à l'amortissement des oscillations d'autre part.

Dans le cadre des expériences de laboratoire pour un réservoir de rayon de l'ordre de 10 cm rempli partiellement d'eau, on a  $Bo \approx 10^3$  et  $Oh \approx 3 \cdot 10^{-4}$ . Les conditions asymptotiques,  $Bo \gg 1$  et  $Oh \ll 1$ , sont donc respectées. Les résultats seront transposables. Lorsqu'on s'intéresse, en revanche, à la brisure et à l'amortissement, des précautions supplémentaires devront être prises.

L'adimensionnalisation des équations régissant le problème est réalisée complètement dans le rapport du programme COMPERE [6].

---

<sup>2</sup>Le rapport  $Bo/Oh^2$  donne un nombre de Reynolds  $Re_c$  basé sur la vitesse de propagation des ondes. Il est lié au nombre de Reynolds basé sur la vitesse du fluide  $Re = \rho V R/\nu$  par la relation  $Re = Re_c a_x/a_z$ , c'est-à-dire une combinaison des nombres adimensionnels précédemment définis.

<sup>3</sup>Ainsi on a  $Re_c \gg 1$  et, pour des forçage d'accélération non-négligeables qui nous concernent,  $Re \gg 1$ .

## PROBLÈME TRAITÉ

Il s'agit de comprendre le ballottement des ergols pendant la phase de propulsion. Nous nous plaçons sous gravité terrestre à température ambiante (sans considérer d'effets thermiques). Les excitations du réservoir, partiellement rempli de liquide (eau ou alcool), sont choisies horizontales et sinusoïdales. L'étude concerne les conditions d'existence et de déstabilisation du mode 1 antisymétrique.

## PLAN DE LA THÈSE

Le manuscrit propose, dans un premier temps, un bref état de l'art concernant les ondes d'inertie-gravité, le ballottement en tant que phénomène résonant non-linéaire et l'instabilité des ondes.

Par la suite, nous décrivons de façon détaillée le dispositif expérimental utilisé et les outils d'instrumentation mis en œuvre pour mener à bien cette étude.

L'ensemble des conditions du ballottement est exploré au chapitre 3. On détermine ainsi les conditions d'installation du mode forcé, l'installation du mode résonant et les conditions d'existence des différents régimes (mode antisymétrique 1 et mode tournant) sous la forme d'un diagramme amplitude-fréquence. Enfin, nous détaillons le problème de l'amortissement, particulièrement critique pour les applications.

Le chapitre 4 concerne le mode tournant. Ses principales caractéristiques sont détaillées. Nous discutons la nature de la transition du mode ballottant vers le mode tournant.

Le point critique de la brisure des ondes à résonance est abordé au chapitre 5. Le scénario du déferlement ainsi que les caractéristiques du régime chaotique alors en jeu sont détaillés. Un modèle pour chacune des déstabilisations observées est proposé en vue d'une extrapolation aux fluides cryogéniques et au cas des réservoirs de fusée.



# Chapitre 1

## Etat de l'art

Dans ce chapitre sont résumés les travaux antérieurs sur le mouvement d'un liquide dans un réservoir soumis à des forces extérieures. Ce mouvement est généralement appelé ballottement. Lorsque la cuve est soumise à des forces horizontales sinusoïdales dans une direction donnée, le ballottement consiste d'ondes planes stationnaires antisymétriques ou d'ondes azimutales.

Nous considérons, dans ce travail, des ondes gravitaires. Nous nous intéressons à l'évolution de ce mouvement de ballottement en se focalisant sur le premier mode antisymétrique et le comportement non-linéaire.

Nous présentons d'abord les ondes linéaires et la relation avec les oscillateurs harmoniques. Ensuite le comportement non-linéaire est discuté incluant la bifurcation vers un mode tournant appelé également swirl.

### 1.1 Caractéristiques des ondes linéaires en réservoir cylindrique

La relation de dispersion des ondes de surface sur un liquide de profondeur  $h$  est donnée par Lighthill [32] :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right) \tanh(kh), \quad (1.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d'onde,  $g$  l'accélération de la gravité et  $\sigma$  la tension superficielle.

Pour les ondes de gravité, cas des ondes en jeu dans notre étude, cette équation se réduit aux deux cas limites suivants :



- cas d'eau profonde (soit  $\lambda \ll h$ ), alors  $\omega^2 = gk$  et  $c = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ .  $c$  la célérité de l'onde est fonction de la longueur d'onde : les ondes sont dites dispersives,
- cas des ondes longues (soit  $\lambda \gg h$ ), alors  $\omega^2 = gk^2h$  et  $c = \sqrt{gh}$ . La célérité de l'onde est indépendante de la longueur d'onde : les ondes sont non-dispersives.

Dans notre étude, les taux de remplissage considérés permettent d'utiliser l'hypothèse d'eau profonde.

Dans le cas d'un réservoir cylindrique, les modes propres et la forme de la surface correspondante, donnée par la déformation de la surface libre par rapport à la position d'équilibre, ont été calculés par Lamb [28] :

$$\eta(r, \theta, t) = A_m J_m(k_{mn}r) \cos(\omega t \pm m\theta + \Phi), \quad (1.2)$$

$(r, \theta)$  sont les coordonnées planes (voir les conventions de la figure 1.1).  $J_m$  est la fonction de Bessel d'ordre  $m$ .  $m = 0$  correspond aux modes symétriques et  $m = 1$  aux modes antisymétriques.  $n$  désigne le mode.

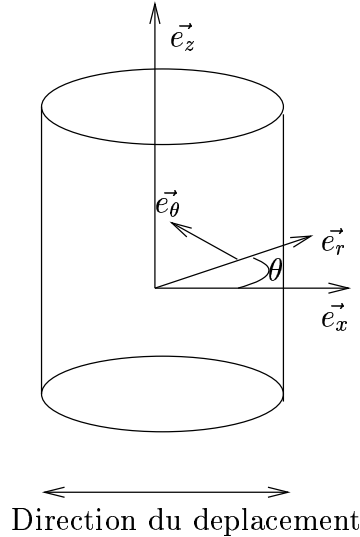


FIG. 1.1 – Convention de coordonnées

Pour les modes antisymétriques, qui apparaissent dans le cas des sollicitations sinusoïdales horizontales considérées dans cette étude, la surface libre prend alors la forme :

$$\eta(r, \theta, t) = A_1 J_1(k_{1n}r) \cos(\omega_n t + \Phi) \cos(\theta) \quad (1.3)$$

avec  $\omega_n$  la fréquence propre du nième mode antisymétrique.

La condition  $d\eta/dr = 0$  en  $r = R$  donne  $J'_{1n}(k_{1n}R) = 0$  en  $r = R$  d'où on obtient les valeurs de  $k_{1n}$  pour les différents modes antisymétriques d'ordre  $n$  :

$$\frac{k_{1n}R}{\pi} = 0.586, 1.697, 2.717 \quad (1.4)$$

pour respectivement  $n = 1, 2, 3$ .

La forme des deux premiers modes est présentée sur la figure 1.2.

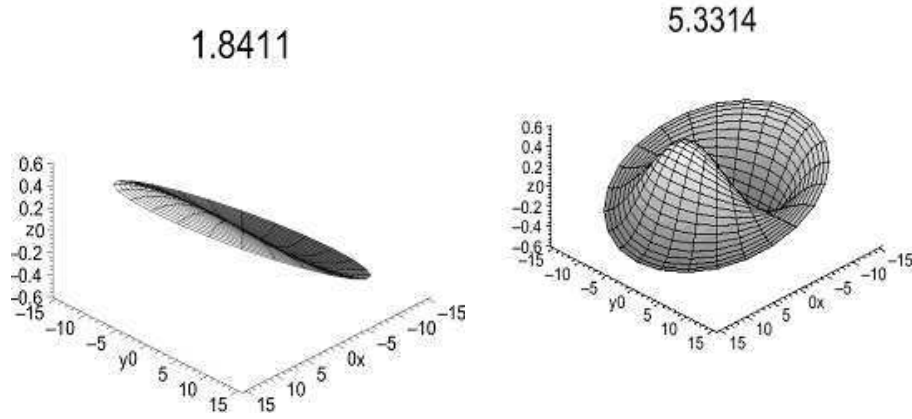


FIG. 1.2 – Formes des modes antisymétriques  $k_{11}R = 1.8411$  et  $k_{12}R = 5.3314$ .

Pour une cuve rectangulaire, de taille  $2L_x$  et  $2L_y$  suivant  $x$  et  $y$ , la forme de l'onde est donnée par Lamb :

$$\eta(x, y, t) = A_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{2L_x} \cos \frac{m\pi y}{2L_y} \quad (1.5)$$

Les nombres d'onde  $k_{m,n}$  valent :

$$k_{m,n}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{(2L_x)^2} + \frac{n^2}{(2L_y)^2} \right). \quad (1.6)$$

Ainsi, pour les géométries de cuves étudiées, les fréquences et modes propres linéaires du système sont connus.

Nous nous intéressons à présent à la réponse d'un liquide à une sollicitation extérieure. A partir des fréquences propres calculées précédemment, nous pouvons utiliser le modèle mécanique proposé par Dodge [14]. En raison de l'action de l'onde à la surface libre, Dodge montre que le liquide peut être représenté par un système associant un corps rigide et une infinité de masses oscillantes ou de pendules correspondant à chacun des modes normaux.

En effet, les équations qui gouvernent le système s'écrivent :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad , \quad \text{équation de Laplace,} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n \quad , \quad \text{condition aux limites aux parois,} \quad (1.8)$$

$$\ddot{\Phi} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad , \quad \text{condition aux limites à la surface libre,} \quad (1.9)$$

avec  $\Phi$  le potentiel de vitesse et  $V_n$  la vitesse normale à la paroi,  $g$  la gravité.

On peut écrire  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , avec :

- $\Phi_1$  le potentiel d'un liquide remplissant complètement un réservoir fermé de hauteur double et vérifiant uniquement les équations (1.7) et (1.8) ,
- $\Phi_2$  le potentiel d'un liquide dans un réservoir immobile dont la surface libre agit sur le corps du fluide à la pression instationnaire déterminée par  $\Phi_1$ .  $\Phi_2$  satisfait l'équation (1.7), ainsi qu'aux conditions  $\partial \Phi_2 / \partial n = 0$  à la paroi et  $\ddot{\Phi}_2 + g \partial \Phi_2 / \partial z = -\ddot{\Phi}_1 - g \partial \Phi_1 / \partial z$  à la surface libre.

Le mouvement du fluide dû à  $\Phi_1$  est directement proportionnel au déplacement  $x_0$  du réservoir. Par ailleurs, on peut écrire pour  $\Phi_2$  :

$$\Phi_2(t, r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{g}_n(t) \Phi_{2,n}(r, \theta, z) \quad (1.10)$$

où  $\Phi_{2,n}$  représente le nième mode propre de fréquence naturelle  $\omega_n$ . Les coefficients  $g_n$  vérifient quant à eux  $\ddot{g}_n + \omega_n^2 g_n = A_n \ddot{x}_0$ , équation typique d'un oscillateur.

**Modèle à une masse oscillante d'après Dodge [14]** L'idée est de déterminer les caractéristiques d'un système mécanique équivalent comprenant un corps rigide  $m_0$  et une unique masse oscillante  $m_1$  (fig. 1.3).

Hypothèses

- Le modèle développé ici ne s'applique qu'à un système linéaire et à un réservoir rigide.
- Le système ne peut être excité ni à la fréquence propre du premier mode (sinon un amortissement doit être pris en compte), ni aux fréquences propres des modes d'ordre supérieur (sinon un modèle plus complexe doit être mis en œuvre).
- Le modèle à une masse reste valable tant que les fréquences propres des modes supérieurs sont distinctes de celle du premier mode. Ce modèle, qui ne s'attache donc qu'au fondamental, reste alors pertinent car la taille de chaque pendule décroît rapidement pour un ordre de mode croissant.
- Le réservoir subit une translation  $x_0$  et un balancement  $\phi_0$ . Le modèle comporte une masse fixe  $m_0$  de moment d'inertie  $I_0$  et un pendule (masse ponctuelle)  $m_1$

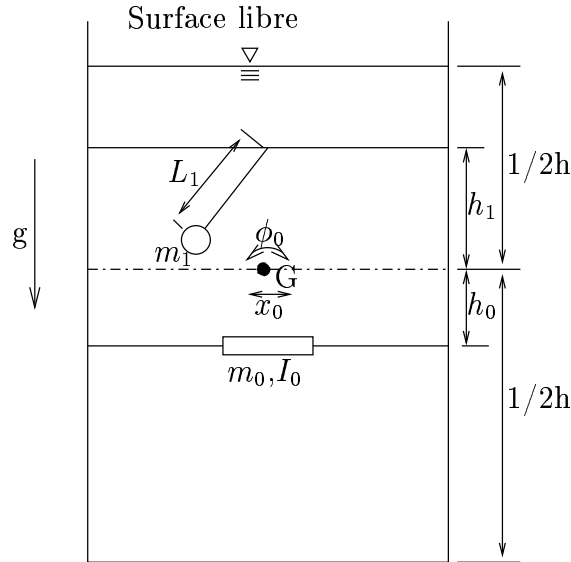


FIG. 1.3 – Schéma de principe du modèle à une masse oscillante

situés respectivement à  $h_0$  et  $h_1$  du centre de gravité de la masse liquide au repos (fig. 1.3).

Pour des réservoirs de géométrie simple, les expressions analytiques des paramètres du système mécanique peuvent être déterminées. On a pour un réservoir cylindrique :

$$m_1 = m_t \left( \frac{2R}{1.4h} \right) \tanh\left(3.68 \frac{h}{2R}\right) \quad (1.11)$$

$$L_1 = \frac{2R}{3.68} \coth 3.68 \frac{h}{2R} \quad (1.12)$$

$$m_0 = m_t - m_1 \quad (1.13)$$

$$h_1 = -\frac{2R}{7.36} \cosh 7.36 \frac{h}{2R} \quad (1.14)$$

$$h_0 = \frac{m_t}{m_0} \left( \frac{h}{2} - \frac{(2R)^2}{8h} \right) - \frac{m_1}{m_0} (l_1 + L_1) \quad (1.15)$$

où  $2R$  est le diamètre du réservoir cylindrique et  $h$  la hauteur d'eau.

A partir de ces résultats, on peut calculer les efforts et les moments induits par le ballonnement. On a, par exemple, la force  $F_{max}$  lors d'un arrêt instantané du réservoir soumis à une oscillation du type  $x_0 = X_0 \sin(\omega t)$  pour une fréquence de forçage  $\omega$  largement inférieure à la fréquence propre :

$$F_{max} = X_0 \frac{m_1}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{L_1}{g}} \quad (1.16)$$

**Propriétés exploitables des oscillateurs** On a vu qu'il est possible de transposer le problème du ballonnement d'un liquide dans un réservoir à celui d'un oscillateur

(pendule ou ressort). L'amplitude de l'onde étant analogue à l'amplitude de l'oscillateur associé, il s'agit maintenant de déduire des propriétés de ces oscillateurs harmoniques d'après Landau et Lifchitz [29] des résultats intéressants transposables à notre problématique.

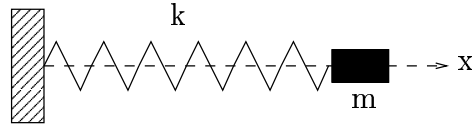


FIG. 1.4 – Oscillateur à un degré de liberté.  $\omega_{11} = \sqrt{k/m}$

On étudie les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre. L'équation différentielle associée au mouvement est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.17)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence propre indépendante des conditions initiales. La forme de la solution est :

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.18)$$

où  $a$  et  $\alpha$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales. Au voisinage de sa position d'équilibre stable, le système effectue un mouvement oscillatoire harmonique.

Lorsque le système subit une force extérieure  $F(t)$ , l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t). \quad (1.19)$$

Lorsque le forçage a la forme  $F(t) = f \cos(\omega t + \beta)$ <sup>1</sup>, la solution prend la forme :

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \beta). \quad (1.20)$$

Le mouvement est donc la *somme de deux oscillations*. On remarque que pour  $\omega < \omega_0$  la réponse est en phase avec l'excitation alors que, pour  $\omega > \omega_0$ , elle est en opposition de phase (retard de  $\pi$ ). Dans le cas de la résonance  $\omega = \omega_0$ , la solution 1.20 n'est plus valable et doit être réécrite :

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega_0} t \cos(\omega t + \beta). \quad (1.21)$$

A la résonance, l'amplitude des oscillations croît linéairement avec le temps.

---

<sup>1</sup>Il est toujours possible de décomposer un forçage quelconque en une somme de fonctions périodiques suivant le théorème de Fourier.

Lorsque le système est amorti par des forces de friction visqueuses de la forme  $f_f = -\zeta\dot{x}$ , l'équation du mouvement devient alors

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \kappa = \frac{\zeta}{2m}. \quad (1.22)$$

Les solutions sont :

- $\kappa < \omega_0$  : les oscillations sont amorties. La fréquence des oscillations  $\omega_1$  est plus faible que celle des oscillations libres non amorties  $\omega_0$  ( $\kappa \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_1 \simeq \omega_0$ ). Le taux de décroissance en amplitude est déterminé par  $\kappa$ , l'énergie décroît donc en  $\exp(-2\kappa t)$ . La solution s'écrit :

$$x = ae^{-\kappa t} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (1.23)$$

- $\kappa \geq \omega_0$  :  $x$  décroît sans oscillation, amortissement aperiodique.

Pour des oscillations forcées amorties, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t). \quad (1.24)$$

Et la solution, valable quelle que soit la fréquence de forçage  $\omega$ , s'écrit alors :

$$x = ae^{-\kappa t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + b \cos(\omega t + \delta) \quad (1.25)$$

$$\tan \delta = \frac{2\kappa\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (1.26)$$

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}} \quad (1.27)$$

$$\omega_{11} = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un amortissement négligeable, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \kappa \ll \omega_0 \\ \omega = \omega_0 + \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan \delta = \kappa/\epsilon \\ b = f/(2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \kappa^2}) \end{array} \right. \quad (1.29)$$

$\delta$  est toujours négatif, l'oscillation est en retard sur l'excitation.

Les différents comportements sont :

- $\omega \neq \omega_0$  : pour  $t \rightarrow \infty$ , la solution tend vers  $x = b \cos(\omega t + \delta)$ . Dans le cas  $\omega \rightarrow 0$  le déphasage  $\delta$  tend vers 0, pour  $\omega \rightarrow \infty$  le déphasage  $\delta$  tend vers  $-\pi$ .
- $\omega \rightarrow \omega_0$  :  $b$  atteint une limite finie pour  $\omega = \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$  et le déphasage  $\delta$  tend vers  $-\pi/2$ .

En l'absence d'amortissement, la variation de phase a lieu pour  $\omega = \omega_0$ , l'amortissement a pour effet d'élargir ce saut d'une largeur  $\kappa$ . L'ajout de la dissipation ne permet pas au système d'exploser comme dans le cas précédent, l'amplitude a une valeur maximale finie.

*En résumé, pour un oscillateur à un degré de liberté*

- en présence d’amortissement, pour un forçage hors résonance, le mouvement est initialement la superposition de deux oscillations, le mode propre décroît de façon exponentielle, le mode forcé subsiste,
- la réponse est en retard sur l’excitation, le déphasage tend vers 0 pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $-\pi$  pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,
- à résonance, si l’amortissement est négligeable, l’amplitude de l’onde croît linéairement avec le temps.

### Principaux résultats

1. La fréquence propre du premier mode antisymétrique pour un réservoir cylindrique en eau profonde est :

$$\omega_{11} = \sqrt{kg} \quad \text{avec} \quad k = \frac{1.84}{R} \quad (1.30)$$

2. Dans le cas des hypothèses linéaires, le comportement de l’onde autour de  $\omega_{11}$  peut être modélisé comme un oscillateur à un degré de liberté.

Les résultats de notre étude concernant en particulier les régimes transitoires (installation du régime forcé, croissance à résonance) sont donc, par la suite, exploités à la lumière des oscillateurs.

## 1.2 Le ballotement de larges amplitudes : un phénomène non-linéaire

Lorsqu’on excite le système au voisinage de la fréquence propre du mode 1, une forte augmentation de l’amplitude de l’onde est observée alors que la fréquence d’excitation est en-deçà de  $\omega_{11}$  (pour  $h/R > 1$ ).

Ainsi, dans le cas proche d’ondes stationnaires symétrique, les résultats de Taylor [54] sont, en ce sens, particulièrement intéressants. Les ondes sont générées par les oscillations de deux batteurs espacés d’une distance  $L \approx 33$  cm (fig. 1.5).

Les hauteurs de crête d’onde sont mesurées pour la gamme de fréquence  $0.85 \leq \omega/\omega_0 \leq 1.15$ , avec  $\omega_0 = (2\pi g/L)^{1/2}$ , fréquence propre du premier mode symétrique et  $\omega$  fréquence de l’excitation. Les résultats sont reportés sur le diagramme amplitude-fréquence (figure 1.6). Lorsque  $\omega/\omega_0$  augmente, depuis  $\omega/\omega_0 < 1$ , l’amplitude de l’onde  $H/L$  augmente graduellement et de plus en plus rapidement à mesure que l’on s’approche de la fréquence de résonance. Pour  $\omega/\omega_0 = 0.968$ , on observe un saut brusque d’amplitude accompagné d’une mise en opposition de la phase. L’onde se retrouve retardée de  $\pi$  par rapport à l’excitation, c’est-à-dire que la crête atteint son maximum au

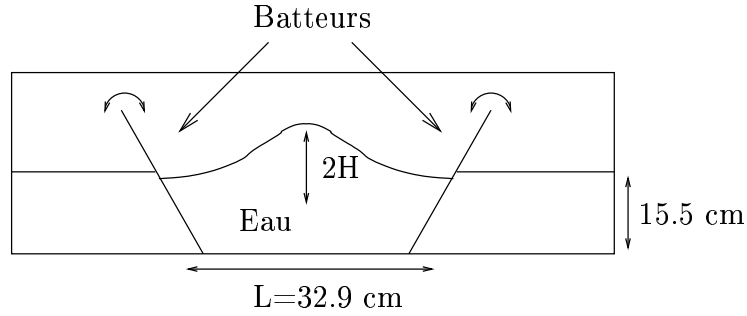


FIG. 1.5 – Schéma de principe du banc expérimental de Taylor

centre du canal quand les batteurs s'éloignent l'un de l'autre. Pour une augmentation supplémentaire de la fréquence, l'amplitude de la réponse diminue. Si on diminue à présent la fréquence (à partir de  $\omega/\omega_0 > 1$ ), l'amplitude de l'onde augmente jusqu'à  $\omega/\omega_0 = 0.953 < 0.968$ , valeur pour laquelle elle diminue brusquement.

La résonance, c'est-à-dire la brusque augmentation de l'amplitude, est donc observée pour une fréquence plus faible que la fréquence propre linéaire. Par ailleurs, un phénomène d'hystérésis apparaît.

La figure 1.6 donne également les résultats théoriques de Penney et Price [46] de calcul du mode propre. Dans cette théorie, la fréquence du premier mode symétrique linéaire  $f_0 = (g/2\pi L)^{1/2}$  est modifiée en introduisant un développement en fonction d'un paramètre  $P$  où  $P/\pi$  représente approximativement le rapport entre l'amplitude de l'onde et la longueur d'onde. Pour chaque valeur de  $P$ ,  $0 \leq P \leq 0.592$ , la nouvelle fréquence propre du mode libre et l'amplitude de l'onde correspondante sont déterminées (cf tableau 1.1). Le profil suivant Penney et Price donne :

$$\eta k = \left( P + \frac{1}{32}P^3 - \frac{47}{1344}P^5 \right) \cos kx + \left( \frac{1}{2}P^2 - \frac{79}{672}P^4 \right) \cos 2kx + \left( \frac{3}{8}P^3 - \frac{12563}{59136}P^5 \right) \cos 3kx + \frac{1}{3}P^4 \cos 4kx + \frac{295}{768}P^4 \cos 5kx \quad (1.31)$$

Ce qui donne pour la hauteur de l'onde à la paroi par rapport à la position au repos :

$$\frac{b_{max}}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \left( P + \frac{1}{2}P^2 + \frac{13}{32}P^3 + \frac{145}{672}P^4 + \frac{2021}{14784}P^5 \right) \quad (1.32)$$

La courbe de résonance tirée des expériences de Taylor s'organise autour de la courbe théorique des oscillations libres calculée par Penney et Price (fig. 1.6) de la même manière que la courbe de résonance classique pour les oscillations linéaires s'organise autour de la ligne verticale (qui représente le fait que, pour un système linéaire, toutes



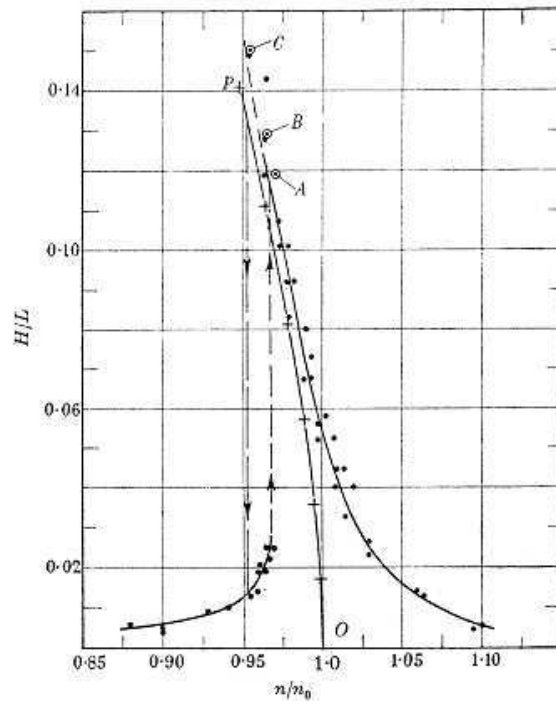


FIG. 1.6 – Courbe de résonance,+, résultats Penney et Price [46]; \*, expériences de Taylor [54].

$P$	$\omega_0^*/\omega_0$	$H/L$
0	1	0
0.1	0.9987	0.0168
0.2	0.9949	0.0356
0.3	0.9883	0.0570
0.4	0.9785	0.0816
0.5	0.9650	0.1103
0.592	0.9487	0.1411

TAB. 1.1 – Evaluation de la fréquence non-linéaire  $\omega_0^*$  et de l’amplitude de l’onde associée pour différentes valeurs du paramètre  $P$ . Résultats de Penney et Price [46]

les amplitudes sont possibles pour les oscillations libres non-amorties, et que toutes ont la même fréquence propre).

Il est intéressant de poursuivre l’analogie avec les oscillateurs menée dans le cadre de la théorie linéaire afin de déterminer sous quelles hypothèses un pendule simple peut modéliser le comportement des ondes, excitées par une oscillation horizontale, décrit par Taylor. Landau et Lifschitz [29] proposent d’écrire la fréquence de résonance non-linéaire comme  $\omega_0^* = \omega_0 + \chi b^2$  où  $\omega_0$  est la fréquence propre linéaire,  $b$  l’amplitude de l’onde (préfacteur de  $\cos(\omega t + \delta)$ ) et  $\chi$  marque le caractère anharmonique du système.

Pour déterminer alors la réponse à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , on utilise les expressions (1.29), obtenues dans le cas linéaire, de l’amplitude et de la phase d’un système amorti. La fréquence linéaire est simplement remplacée par l’expression non-linéaire nouvellement introduite. On conserve la notation  $\epsilon = \omega - \omega_0$ . On obtient alors la relation suivante entre  $\epsilon$  et  $b$  :

$$b^2((\epsilon - \chi b^2)^2 + \kappa^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (1.33)$$

Suivant l’intensité du forçage  $f$ , différents régimes sont observables.

–  $f \rightarrow 0$

Dans ce cas on peut supposer que  $b$  est petit comme l’est le forçage,  $b \ll 1$  et en ne gardant que les termes d’ordre 2, on a

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \kappa^2}}. \quad (1.34)$$

La courbe de résonance est symétrique comme dans le cas linéaire (fig 1.7.a).

–  $f \ll f_h$

En deçà d’une valeur limite de la force  $f_h$  :

$$f_h^2 = \frac{8m^2\omega_0^2\kappa^3}{|\chi|}, \quad (1.35)$$

la courbe de résonance devient asymétrique avec un maximum se déplaçant vers les valeurs négatives - pour  $\chi < 0$  - de  $\epsilon$  (fig 1.7.b).

$$b^2(\epsilon^2 - 2\chi b^2\epsilon + \kappa^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (1.36)$$

-  $f > f_h$

Au delà de  $f_h$ , le point d'inflexion se transforme et un phénomène d'hystérésis avec un saut brusque d'amplitude apparaît. C'est le cas tracé sur la figure 1.7.c. Les sauts d'amplitude sont marqués par les traits en pointillés. Lorsque la fréquence croît par exemple de A vers B, l'amplitude  $b$  augmente et la fréquence de résonance augmente suivant  $\omega = \omega_0 + \chi b^2$ . Lorsque le point B est atteint, l'amplitude chute brusquement (point D). Il est possible de montrer que la portion (DC) représente des états instables du système et que, pour cette gamme de forçage, seuls les états représentés par les portions (DE) et (BC) existent.

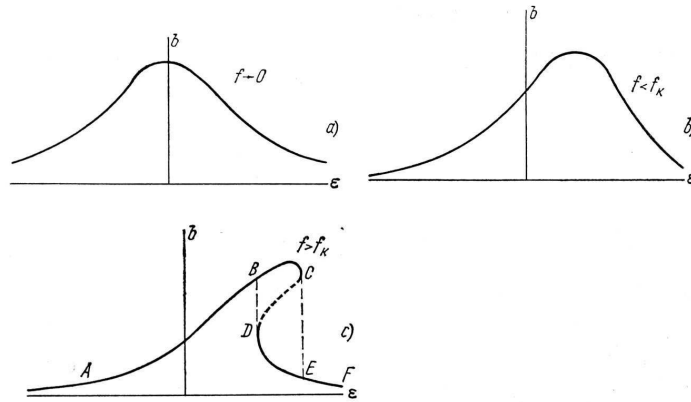


FIG. 1.7 – Diagrammes amplitude-fréquence des oscillations non-linéaires, de non-linéarité positive  $\chi > 0$ , pour différentes valeurs de l'intensité de forçage  $f$  : (a) ,  $f \ll 1$ ; (b)  $f \ll f_h$ ; (c)  $f > f_h$ .  $\epsilon = \omega - \omega_0$ , courbes d'après Landau et Lifschitz [29].

L'oscillateur non-linéaire à un degré de liberté est donc un modèle satisfaisant pour le mode symétrique 1 excité dans les expériences de Taylor pour une intensité de forçage supérieure à l'intensité critique  $f > f_h$  et avec une non-linéarité négative  $\chi < 0$ .

L'analyse non-linéaire de Miles [40] permet d'accéder à la non-linéarité négative du premier mode antisymétrique, avec  $h/R > 1$ , observée par Taylor. Il trouve en effet :

$$\frac{\omega}{\omega_{11}} = 1 - A \frac{\bar{\eta}^2}{\lambda} \quad (1.37)$$

où  $\bar{\eta}$  est la moyenne quadratique de la hauteur de la surface libre en temps et en espace et où est fonction de  $h/R$ . Le paramètre  $A$  est donné par la figure 1.8.

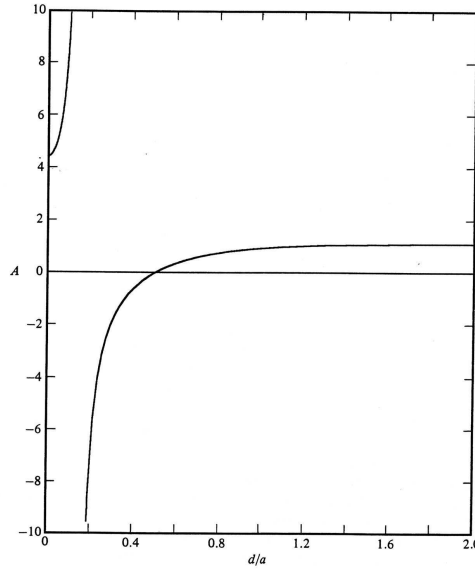


FIG. 1.8 – Paramètre  $A$  pour l’expression de la fréquence de résonance non-linéaire du premier mode symétrique d’après Miles [40].

On observe en fait que le signe de  $A$  change avec la profondeur. D’autres études numériques montrent également que les caractéristiques du comportement non-linéaire des ondes antisymétriques varient en fonction de la profondeur de liquide. Ockendon et Ockendon [44] considèrent le cas de petites oscillations horizontales bi-dimensionnelles pour un réservoir rectangulaire. Ils effectuent un développement en fonction de deux petits paramètres caractérisant d’une part l’amplitude de l’excitation et d’autre part l’écart à la résonance. Ils montrent que les équations obtenues sont analogues aux équations Duffing d’un oscillateur et obtiennent ainsi deux comportements distincts en fonction de la profondeur  $h$  du liquide (voir fig. 1.9) :

- $h < h_c$  : comportement du type ”hard-spring”, ressort dur, soit avec une non-linéarité positive,
- $h > h_c$  : comportement du type ”soft-spring”, ressort doux, soit avec une non-linéarité négative.

**Déstabilisation du premier mode symétrique** Penney et Price déterminent l’al-lure de l’onde stable d’amplitude maximale. La valeur de  $P = 0.592$  correspond à cette onde périodique la plus haute possible. Le profil est présenté en fig. 1.10.

Cette onde a les propriétés suivantes :

- la crête de l’onde atteint un angle de  $90^\circ$  (moins que les  $120^\circ$  pour les ondes progressives),

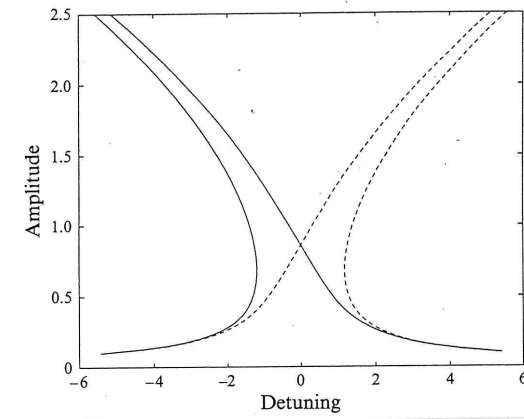


FIG. 1.9 – Courbes de résonance typiques pour les deux cas limites de remplissage d’après Ockendon et Ockendon [44]

- l’accélération, dirigée vers le bas à la crête de l’onde au point de hauteur maximale, est égale à  $g$ , accélération de la gravité.

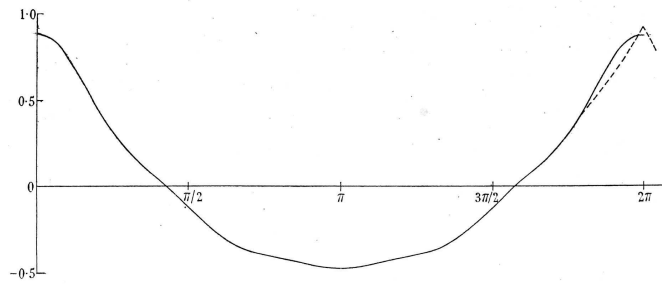


FIG. 1.10 – Profil de l’onde stationnaire stable d’amplitude maximale suivant Penney et Price [46].

Taylor [54] observe des ondes d’amplitudes supérieures à celle-ci et donc soumises à des niveaux d’accélération sur une portion de période supérieurs à l’accélération de la gravité. Ces ondes devraient donc être instables. Ses observations montrent que, pour certaines gammes d’amplitudes et de fréquences d’excitation, la crête de l’onde devient ondulante dans le sens transverse (figure 1.11.b). Au moment où l’instabilité apparaît, la crête devient conique. Le mouvement alterne entre une excroissance au centre de la crête sous la forme d’un cône puis sur les parois sous la forme de deux demi-cônes pour 2 périodes successives. La fréquence de la perturbation transverse de la crête de l’onde est donc la moitié de la fréquence de l’onde principale. D’après Taylor, lorsque la hauteur

à laquelle la région instable est projetée est suffisante, le mouvement semble être celui d'un corps libre (fig. 1.12). Projeté lors d'une oscillation, le paquet fluide rencontre à sa descente la crête montante, ce qui semblerait augmenter l'amortissement.



FIG. 1.11 – Développement d'instabilité de crête des ondes stationnaires d'après les expériences de Taylor [54]. Vues (a), longitudinale et (b), transverse.

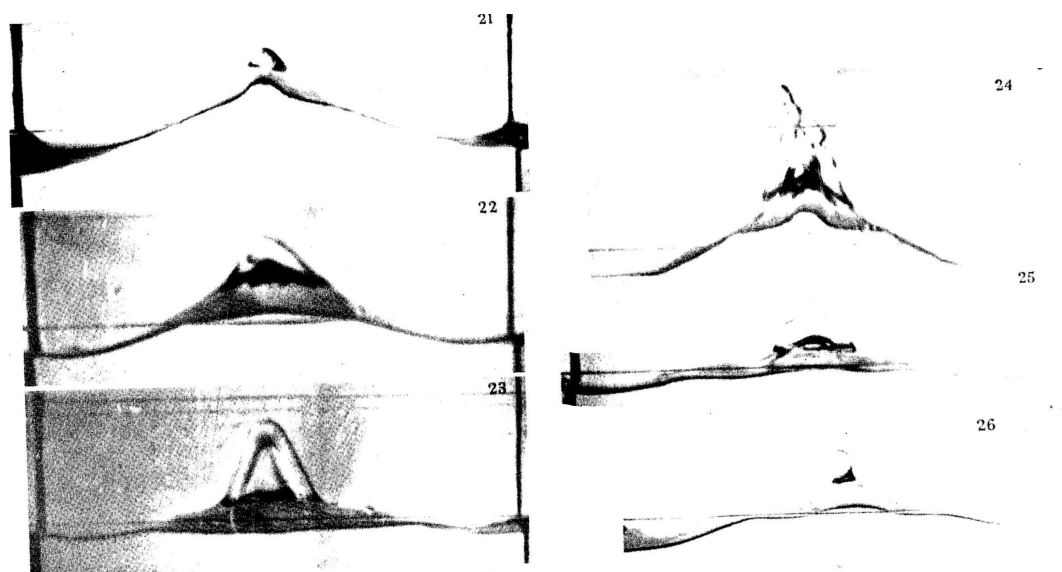


FIG. 1.12 – Développement d'instabilité de crête des ondes stationnaires d'après les expériences de Taylor [54].

### Principaux résultats

1. le premier mode asymétrique présente une non-linéarité négative pour des taux de remplissage supérieurs à  $h/R > 0.506$ . La non-linéarité est positive dans le cas contraire. Miles calcule la fréquence de résonance non-linéaire du premier mode.
2. Penney et Price calculent le profil de l'onde stationnaire la plus haute. La forme est validée par les expériences de Taylor. L'amplitude maximale avant déstabili-

sation de l'onde est  $b/\lambda = 0.14$  pour Penney et Price et  $b/\lambda = 0.15$  suivant les expériences de Taylor.

Nous vérifierons donc dans nos expériences la non-linéarité négative des ondes progressives dans un réservoir forcé horizontalement en eau profonde. Par ailleurs, nous chercherons également à identifier les mécanismes qui mènent à la brisure de l'onde.

### 1.3 Mode tournant

Abramson et al [1] observent une rotation de l'onde autour de l'axe vertical du réservoir dans un certain domaine de fréquence. Ce phénomène apparaît pour un forçage donné quelles que soient les conditions initiales (zone hachurée de la figure 1.13). L'initiation du mode tournant est concomitante à celle d'une force significative, normale à la direction de l'excitation. Les limites d'existence du mode tournant sont indiquées par la figure 1.13. Elles sont déterminées expérimentalement en augmentant progressivement l'amplitude de l'excitation à fréquence fixée. Elles dépendent des paramètres de forçage.

En mode tournant, le mouvement du liquide est déphasé d'environ  $\pi/2$  par rapport à l'excitation. Aux frontières d'existence du mode tournant, le mouvement est parfois plus complexe, sous forme d'une alternance entre mode tournant de direction variable et mode ballottant.

L'ensemble de ces observations est confirmé par les résultats théoriques de Hutton [25] et Miles [40]. Ils montrent que pour les oscillations non-linéaires des liquides dans un réservoir cylindrique, près de la fréquence propre du premier mode antisymétrique, le mouvement plan est instable. La théorie démontre que le mode rotatif du liquide se manifeste comme conséquence du couplage non-linéaire entre les mouvements du liquide parallèlement et perpendiculairement au plan d'excitation. Ce couplage a lieu à travers l'onde de surface. Miles obtient donc l'expression suivante :

$$\frac{\omega_{tn1}}{\omega_{11}} = 1 - \frac{1}{2} (A + B) \frac{\bar{\eta}^2}{\lambda} \quad (1.38)$$

où  $\bar{\eta}$  est la moyenne quadratique de la hauteur de la surface libre en temps et en espace. Le paramètre  $A + B$  est donné en figure 1.14.

Le mode tournant présente quelle que soit la profondeur de liquide une non-linéarité positive.

On remarquera que l'analogie avec un oscillateur à un degré de liberté comme le pendule est toujours vraie. En effet, dans ce cas mécanique simple, Dodge [14] montre que 3 régimes existent :

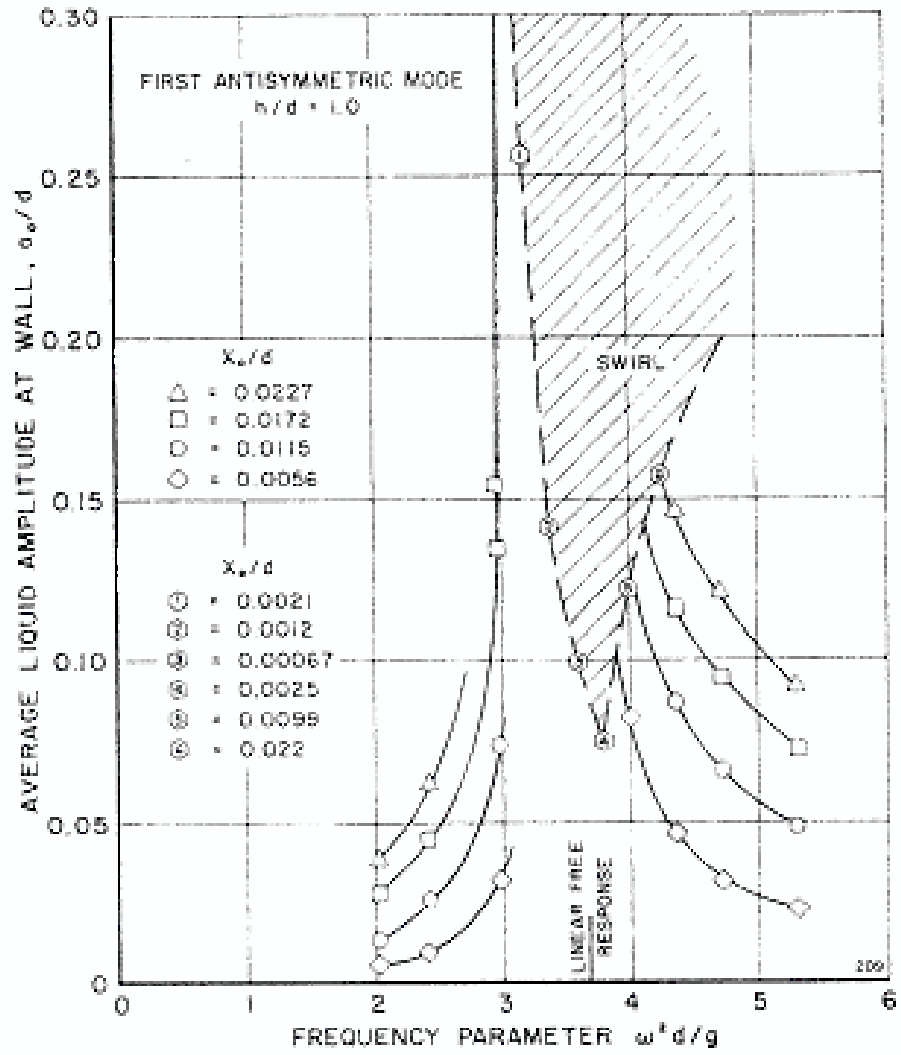


FIG. 1.13 – Limites d'existence d'un mode tournant (Abramson et al [1]),  $x_0$  amplitude d'excitation,  $d$  diamètre du réservoir.



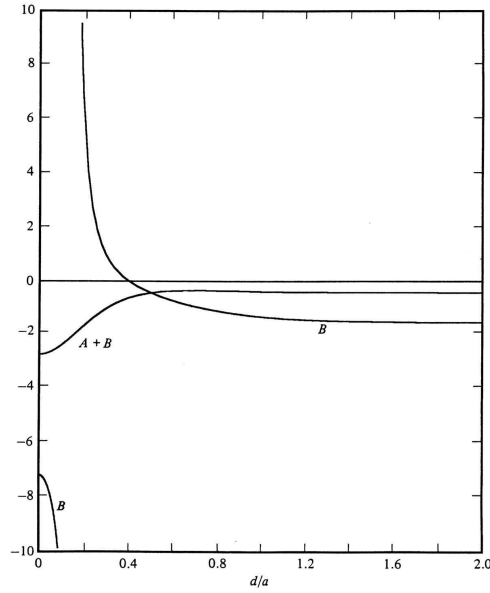


FIG. 1.14 – Paramètres  $B$  et  $A + B$  pour l’expression de la fréquence de résonance non-linéaire du mode tournant d’après Miles [40].

- mouvement plan stable excepté dans une étroite bande de fréquence autour de la fréquence propre,
- mouvement non-plan stable dans un étroit domaine de fréquence immédiatement au-dessus de la fréquence propre,
- mouvement instable (mode tournant pour lequel la direction de rotation du diamètre nodal change constamment) dans une étroite bande de fréquence au-dessous de celle pour laquelle le mouvement de type non-plan a lieu.

Pour des fréquences au-dessus de la fin du domaine de stabilité du mouvement non-plan stable, les mouvements plan et non-plan sont stables et s’installent selon les conditions initiales. La limite supérieure du domaine de stabilité des mouvements non-plan est fortement dépendante des imperfections de la géométrie du réservoir et de l’excitation. Pour des conditions de plus en plus parfaites, les domaines de stabilité pour le liquide en réservoir et ceux d’un pendule conique coïncident de mieux en mieux (voir fig. 1.15).

Plus généralement, Faltinsen et al [20] décrivent les mouvements du fluide dans un réservoir rectangulaire soumis à une oscillation horizontale. Le modèle développé ne permet pas de prendre en compte le déferlement des ondes et se base sur une théorie potentielle. L’équation de la surface libre est exprimée mathématiquement par :

$$z = f(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x, y) \tag{1.39}$$

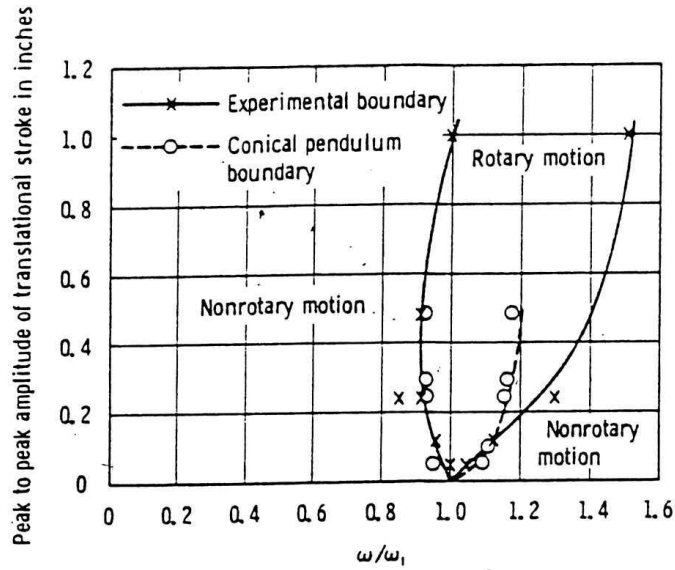


FIG. 1.15 – Comparaison des domaines de stabilité du mode tournant expérimentaux pour un liquide dans un réservoir et théoriques pour un pendule conique, d’après Dodge [14].

Un développement analogue pour le potentiel de vitesse est proposé. Les fonctions  $f_i$  peuvent être les modes normaux et s’obtiennent donc analytiquement pour des géométries simples de réservoirs (cylindrique ou rectangulaire, voir 1.1). Faltinsen et al poursuivent le développement mathématique en faisant l’hypothèse que le premier mode naturel domine et que seuls des couplages non-linéaires entre les trois premiers modes existent. Cette théorie donne également l’existence du mode tournant dans une cuve carrée. Ils réussissent à déterminer numériquement les domaines de stabilité des différents régimes en fonction des paramètres d’excitation, amplitude et fréquence. Un exemple de domaines de stabilité est présentée en fig. 1.16. Ces résultats numériques sont confirmés par leurs expériences.

Un résultat important est, par ailleurs, la génération d’une rotation du fluide par l’onde azimutale. Ainsi dans le cas de Faller [15] et [16], où le mode tournant est forcé par une rotation oscillante du réservoir (rotillation), l’onde créée originellement est irrotationnelle mais transporte un moment angulaire (proportionnel au carré de l’amplitude). Le liquide se met rapidement en rotation. La courbe amplitude-fréquence tirée de Faller [16] est donnée en figure 1.17. Aucune résonance n’est observée à la fréquence propre du premier mode  $\omega_{11}$ . Alors que la fréquence d’excitation augmente, l’amplitude augmente et ainsi la fréquence de résonance.  $\omega_{11}$  apparaît donc être fonction de la

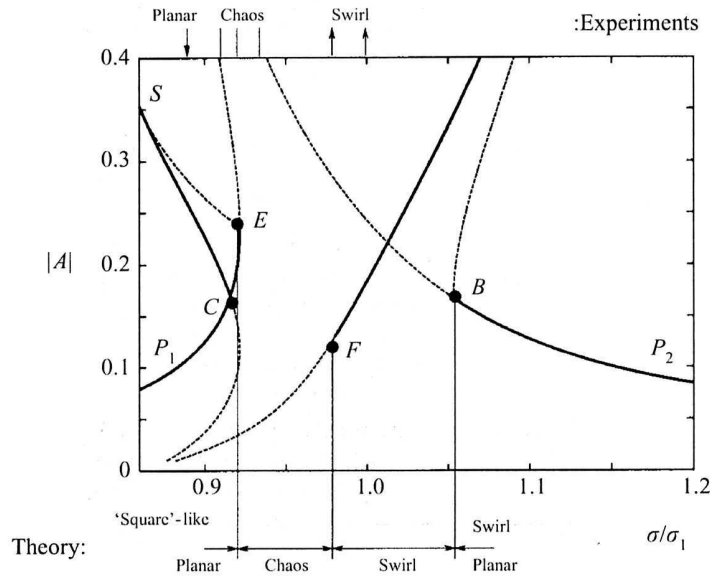


FIG. 1.16 – Domaine de stabilité des différents modes en cuve carrée d’après Faltinsen et al [20].

rotation du liquide et croît avec elle. A partir d’un point critique, il n’est plus possible de maintenir  $\omega_{11}(\Omega) > \omega$ , avec  $\Omega$  rotation solide du fluide. L’onde se brise, l’amplitude décroît rapidement et la phase s’oppose de  $-\pi$ . Il n’y a pratiquement plus de rotation solide et l’amplitude observée est approximativement identique à celle prédite par le modèle linéaire. Lorsqu’on diminue la fréquence d’excitation jusqu’à une nouvelle valeur critique, on observe un nouveau saut de phase de  $+\pi$  et une mise en rotation du fluide.

Stokes [53] montre qu’il existe un transport net de particules dans la direction de propagation des ondes. Hutton [26] propose d’appliquer la méthode analytique développée pour établir ce résultat au cas d’une onde azimutale afin de déduire la génération de moment angulaire en cuve cylindrique. La théorie est basée sur l’hypothèse d’un écoulement potentiel pour lequel le premier mode asymétrique domine. L’amplitude des ondes  $\eta$  est faible, le régime est permanent. La trajectoire des particules est déterminée par un passage en coordonnées lagrangiennes. Un développement en série de Taylor est effectué qui donne au premier ordre l’oscillation harmonique attendue. Au deuxième ordre apparaît la seconde harmonique mais également une vitesse de transport du fluide suivant la direction azimutale. Cette vitesse décroît rapidement avec la profondeur. Par ailleurs, elle atteint un maximum pour  $0 < r/R < 1$ , avec  $r$  position radiale d’une particule et  $R$  rayon de la cuve. La position du maximum s’éloigne du centre de la cuve pour

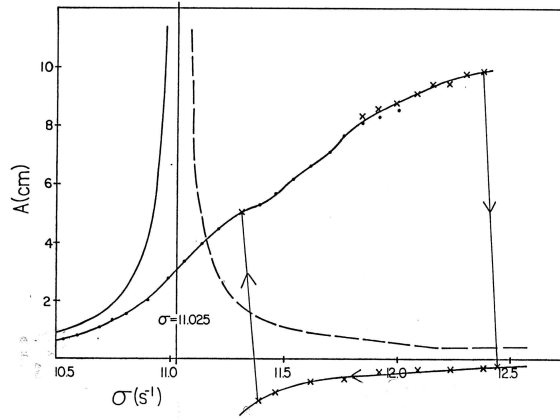


FIG. 1.17 – Courbe de résonance d’après Faller [16].  $\cdot$ ,  $\times$ , points expérimentaux obtenus pour des fréquences d’excitation respectivement croissantes et décroissantes. La courbe de résonance issue de la théorie linéaire est représentée en trait plein pour  $\omega = \sigma < \omega_{11}$  et en pointillés pour  $\omega > \omega_{11}$ .

des amplitudes d’onde croissantes. Les résultats ne sont que grossièrement confirmés par des expériences de ballottement en cuve cylindrique à  $\omega = 1.02\omega_{11}$ . Si l’existence d’un transport de l’ordre de grandeur de celui calculé est bien retrouvée, la variation attendue de la vitesse azimutale des particules avec la profondeur et le rayon est peu sensible. Hutton estime malgré tout un moment angulaire net  $H_1$  en considérant une vitesse uniforme sur la profondeur égale à la vitesse de transport maximale à la surface libre (hypothèse suggérée par les expériences). Il obtient :

$$\frac{H_1}{H_0} < 0.8\left(\frac{\eta}{R}\right)^2 \quad (1.40)$$

avec  $H_0 = \pi/2\rho R^4\omega h$  moment angulaire que le fluide aurait s’il tournait à la vitesse angulaire  $\omega$  comme un corps rigide,  $h$  profondeur de liquide. Ceci est conforme au résultat de Faller [15] d’un moment angulaire proportionnel au carré de l’amplitude de l’onde.

Des expériences menées par Faller (citées dans [17]) confirment l’existence d’une rotation du liquide. En revanche, elle apparaît comme un vortex avec des vitesses azimutales indépendantes de la position radiale.

### Principaux résultats

1. Le mode tournant est une onde azimutale qui apparaît comme le couplage des modes ballottants tournés de  $\pi/2$  d’après la théorie non-linéaire de Miles.

2. Son domaine de stabilité se situe au-dessus de la fréquence de résonance du mode asymétrique 1 et est déterminé par Abramson en cuve cylindrique et Faltinsen en cuve rectangulaire.
3. Le mode tournant entraîne la mise en rotation du liquide d'après Faller.
4. Il existe un domaine de fréquence pour lequel un régime chaotique est observé.

Nous chercherons à affiner la transition entre le mode ballottant et le mode tournant. Nous détaillerons également les caractéristiques du régime chaotique.

## 1.4 Objectifs de la thèse

Cette revue bibliographique montre bien le manque de connaissances du comportement non-linéaire du ballottement. Sur les conditions de brisure des ondes stationnaires notamment il y a absence total d'expériences quantitatives. Peu est connu sur les échelles de temps associées à ces phénomènes. Ainsi les objectifs de ce travail seront d'établir dans un premier temps les amplitudes et le temps d'établissement du mode antisymétriques hors résonance (chapitre 3). Il s'agira également de spécifier le domaine d'existence du mode tournant et de détailler la transition qui permet son installation (chapitre 4). Les conditions de brisure doivent être précisées. Les principales caractéristiques du régime chaotique doivent être détaillées afin de mettre en évidence les grandes lignes du scénario qui mène à l'effondrement du premier mode antisymétrique à résonance et à la création d'interface.

# Chapitre 2

## Banc d'essai et méthodes expérimentales mises en œuvre

Nos objectifs expérimentaux consistent à mettre en place un dispositif de forçage horizontal et sinusoïdal d'un réservoir rempli de liquide. Nous devons garantir un contrôle satisfaisant de l'ensemble des paramètres d'excitation : propreté du signal, contrôle précis de la fréquence et de l'amplitude. Le dispositif doit rester fiable sous une charge de l'ordre de 30 kg pour des fréquences variant de 0 à 5 Hz et pour des amplitudes allant de 0 à 10 mm. Les réservoirs utilisés, cylindriques en vue de l'extrapolation à la problématique des réservoirs de fusées, doivent permettre un taux de remplissage satisfaisant pour se placer également dans le cas des grandes profondeurs. Ils sont choisis transparents pour le besoin des visualisations. Concernant les liquides, il importe de les choisir économiques en raison des volumes importants utilisés (30 litres à renouveler régulièrement pour limiter la pollution par les poussières du laboratoire). Pour l'étude des phénomènes de brisure, différentes tensions de surface cinématique doivent être considérées.

En ce qui concerne les mesures, nous devons à la fois être capables de mesurer correctement le déplacement du système, de mesurer localement des amplitudes et également de mettre en place un système pertinent de visualisation globale des phénomènes.

Le chapitre qui suit présente l'ensemble des solutions apportées à cette problématique en décrivant dans une première partie le dispositif expérimental puis en détaillant l'ensemble des outils de mesure utilisés pour cette étude.

## 2.1 Dispositif expérimental

Le réservoir cylindrique de rayon  $R$  est maintenu fermement sur une table oscillant sinusoidalement avec une amplitude  $A_f$  et une pulsation  $\omega = 2\pi f$  (voir le schéma 2.1). Le déplacement de la table s'écrit donc  $x(t) = A_f \cos \omega t$ . Nous décrivons dans un premier temps le dispositif de forçage et ses propriétés, puis nous détaillons les liquides et les réservoirs utilisés.

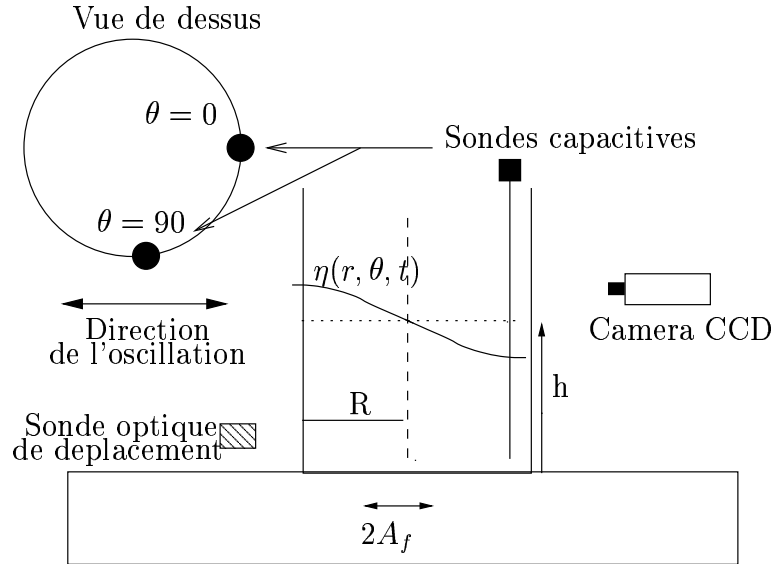


FIG. 2.1 – Descriptif du banc expérimental

### 2.1.1 le dispositif de forçage

Deux tables oscillantes sont utilisées successivement.

Pour les études préliminaires, le mouvement horizontal est produit par un système bielle-manivelle de rayon  $A_f$  et de longueur  $L$ . Le déplacement est, en conséquence, donné par  $x(t) = A_f \cos \omega t + (A_f^2/4L) \cos 2\omega t$ . Dans les expériences  $A_f/L$  est de l'ordre de  $10^{-2}$  de telle façon que le terme harmonique est négligeable en comparaison avec le fondamental. En réalité, les deux premières harmoniques ne sont pas négligeables et d'après l'analyse de Fourier proposée en fig. 2.2.a, le rapport d'amplitude entre le fondamental et les harmoniques est inférieur à  $10^2$ .

Les fluctuations d'amplitude et de fréquence, autour de la consigne, sont relativement faibles, inférieures à 1% sur l'ensemble de la gamme de paramètres utilisée. En revanche, le temps d'établissement du forçage est long. La figure 2.3 donne l'évolution

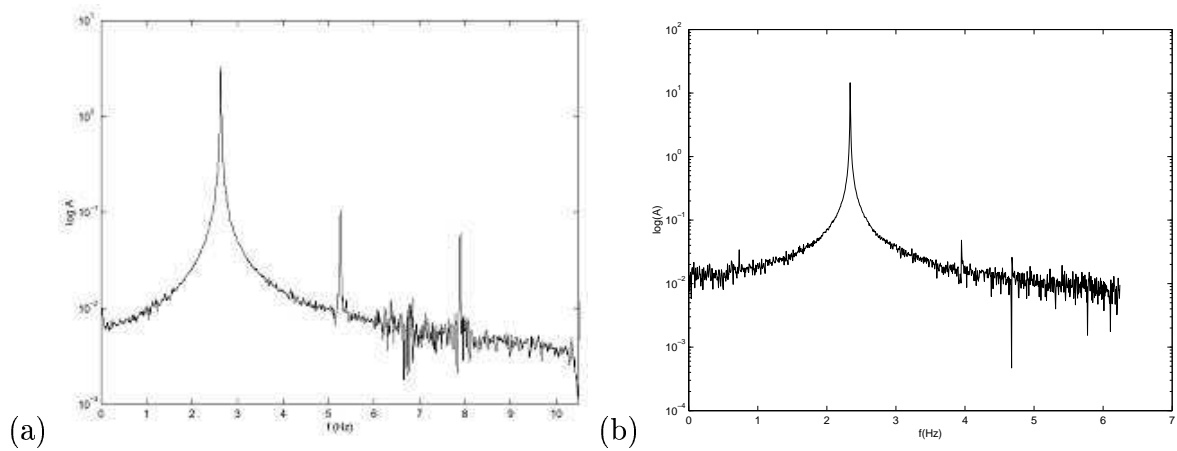


FIG. 2.2 – Spectre de puissance du forçage. (a), système bielle-manivelle ; (b), système moteur linéaire pour une fréquence  $f = 2.5$  Hz et une amplitude  $A_f = 3.5$  mm sous la charge d’une cuve cylindrique  $d = 300$  mm remplie d’eau  $h = 300$  mm, soit environ 25 kg.

de la fréquence lors d’un démarrage du moteur ou d’un ajustement de la fréquence. Pour un départ au repos, le système atteint rapidement, environ en 10 secondes, 70% de la fréquence de consigne, mais ne se stabilise complètement à  $f = 1.70$  Hz, consigne imposée, qu’après 18 minutes environ, soit environ 1300 périodes. Dans le cas d’une augmentation de fréquence de  $f_1 = 1.74$  Hz à  $f_2 = 2.86$  Hz, en une vingtaine de secondes le système atteint 90% de la fréquence de consigne, mais ne se stabilise qu’après environ 90 secondes, soit 230 périodes. Par ailleurs, ne disposant que d’un potentiomètre grossier, la sensibilité en fréquence du système est faible, le contrôle d’une augmentation progressive de celle-ci est quasiment impossible. Enfin, la variation de l’amplitude de forçage est réalisée par un changement de l’excentrique. Aucune expérience n’est donc possible avec ce système en faisant varier l’amplitude à fréquence d’excitation fixée.

En raison de l’ensemble de ces imperfections, une seconde table oscillante est mise en place (fig. 2.4 et 2.5) . Le système est, dans ce cas, entraîné par un moteur linéaire à contrôle électro-magnétique Rexroth INDRAMAT muni d’une règle optique Heidenhain. La puissance nominal du moteur est de 1100 N avec une puissance maximale ponctuelle de 2300 N. L’accélération maximale est de  $60 \text{ m/s}^2$  et la vitesse de pointe est de 200 m/min. Le variateur permet de générer un déplacement quelconque d’une simple impulsion à un système complexe d’oscillations harmoniques.

Dans cette thèse, nous n’utilisons que des excitations sinusoïdales. L’analyse de Fourier du déplacement de la table, en figure 2.2.b, montre qu’il s’agit bien d’un mouvement purement sinusoïdal (les amplitudes des harmoniques sont très faibles). Les paramètres



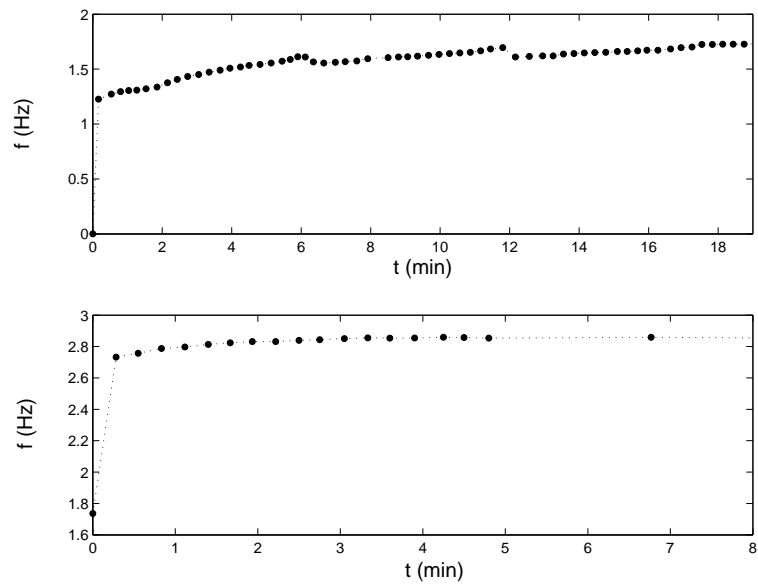


FIG. 2.3 – Temps de stabilisation de la fréquence pour le système bielle-manivelle. (a) mise en route directement à  $f = 1.70$  Hz; (b) augmentation brusque de la fréquence de  $f_1 = 1.74$  Hz à  $f_2 = 2.86$  Hz.

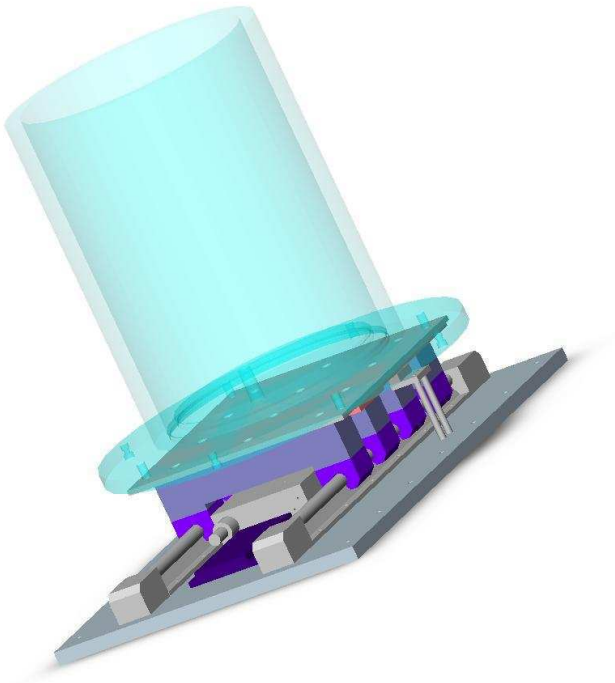


FIG. 2.4 – (a) Schéma du moteur linéaire.

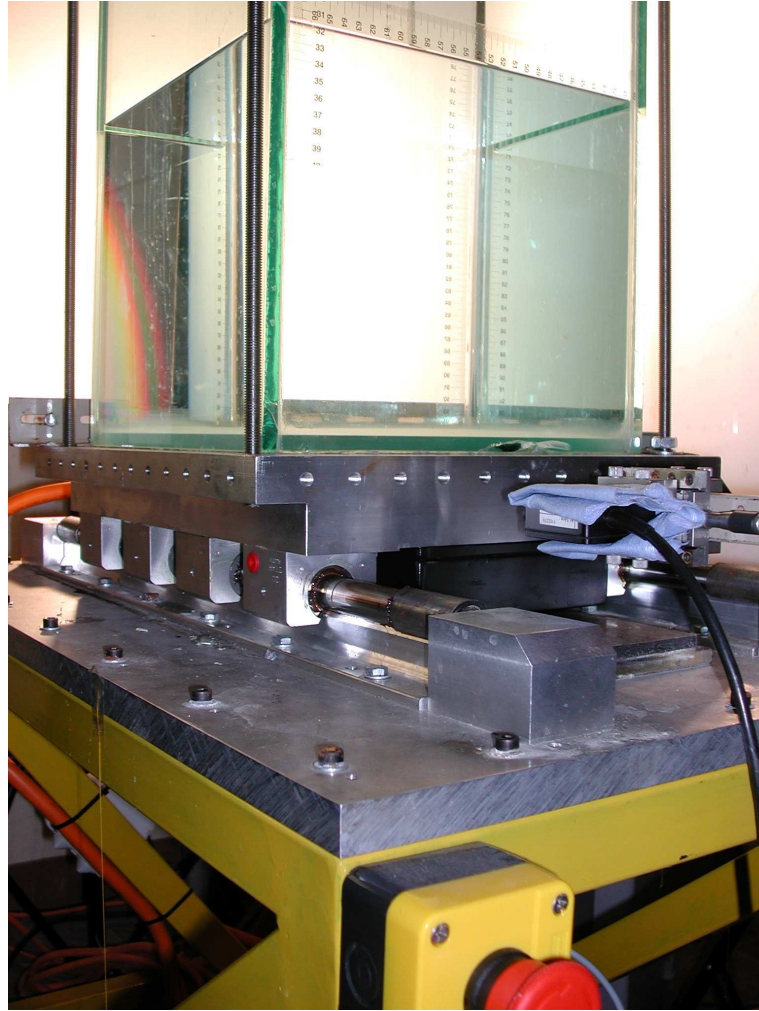


FIG. 2.5 – Banc d'essai réel muni du réservoir de la cuve carrée utilisée.

d'excitation, amplitude et fréquence, peuvent être imposés de façon numérique via un ordinateur ou un générateur de fonction. Ainsi, chacun des deux paramètres peut être augmenté ou diminué pas à pas.

L'établissement du régime est, dans le cas du moteur linéaire, très rapide ; les résultats pour des fréquences de consigne de 1, 2.5 et 1.5 Hz sont donnés à titre d'exemple sur la figure 2.6. Si nous imposons une fréquence à partir du repos, l'ajustement sur la consigne est quasiment immédiat (inférieur pour les trois fréquences proposées à 0.1 seconde). Ce temps dépend, en fait, essentiellement de la position de la table au démarrage. Ainsi la table se cale au démarrage sur la position imposée par la consigne quelle que soit sa position initiale. Ceci donne donc lieu à de forts niveaux d'accélération (respectivement 12, 35 et 28  $\text{m/s}^2$  pour chacun des trois cas de la figure 2.6) et peut donc avoir une influence sur les perturbations initiales imposées à l'onde lors du démarrage du forçage. Dans le cas d'une augmentation de fréquence, comme dans celui d'une augmentation d'amplitude, l'ajustement est instantané, et aucun mouvement brusque de la table n'est alors observé.

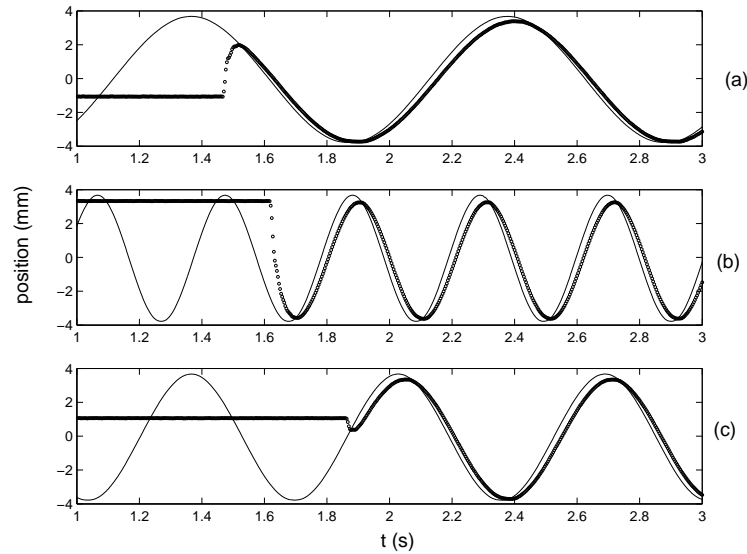


FIG. 2.6 – Temps de stabilisation de la fréquence pour le moteur linéaire avec départ au repos pour 3 fréquences différentes : (a)  $f = 1$  Hz ; (b)  $f = 2.5$  Hz ; (c)  $f = 1.5$  Hz. En trait fin, la consigne imposée ; en trait gras, la réponse de la table oscillante.

L'erreur en fréquence, mesurée pour l'ensemble de la gamme d'étude, est inférieure à 0.005 Hz avec des fluctuations inférieures à 0.002 Hz ( $\approx 0.3\%$ ). L'écart à la consigne reste inférieur à 0.05%.

En terme d'amplitude, on observe une erreur quasi systématique, l'amplitude du dé-

placement effectif de la table oscillante est toujours inférieure à celle imposée par la consigne. Cet écart augmente avec la fréquence (voir table 2.1) de 3 à 7% pour des fréquences allant de 0.6 à 2.6 Hz. Dans le cas d'une consigne imposée via la carte d'acquisition de l'ordinateur, à faible fréquence d'excitation  $f = 0.6$  Hz, on observe une fluctuation constante de l'amplitude de la consigne de l'ordre de 0.01 mm. Dans le cas de fréquences plus élevées,  $f = 1.6$  Hz et  $f = 2.6$  Hz, la fluctuation augmente avec l'amplitude et peut atteindre 0.4 mm à  $A_f = 9$  mm. Les mêmes fluctuations sont mesurées sur le déplacement de la table. On ne peut donc espérer une précision inférieure 0.5 mm à des fréquences et amplitudes élevées.

$f$ (Hz)	0.6	1.6	2.6
$(A_{f_{ef.}} - A_{f_{cnsq.}})/(A_{f_{cnsq.}})$	$\approx 3.4\%$	$\approx 4.9\%$	$\approx 7.4\%$

TAB. 2.1 – Ecart à la consigne du déplacement effectif de la table oscillante. Essai sous charge maximale imposée au moteur dans le cadre de cette étude : cuve cylindrique  $d = 300$  mm remplie d'eau  $h = 300$  mm, soit environ 25 kg.

Nous observons par ailleurs un retard de la réponse par rapport à la consigne, de l'ordre de 0.01 à 0.02 s. Ce retard reste, à consigne fixée, constant tout au long de l'expérience. Le déphasage diminue avec la vitesse maximale du système  $v_{max} = A_f \omega = A_f 2\pi f$  de  $10^\circ$  à  $20^\circ$  pour les fréquences présentées en figure 2.6. Aucun glissement en terme d'amplitude et de fréquence n'a été observé pour des temps de mesure de l'ordre de l'heure, durée largement supérieure au temps effectif des expériences.

Les paramètres de forçage varient suivant les gammes données dans le tableau 2.2. En ce qui concerne les variations de fréquence, nous excitons le système autour de la pulsation propre du mode 1, i.e.  $0.5\omega_{11} < \omega < 1.8\omega_{11}$ . Pour l'amplitude, on utilise des amplitudes relatives dans la gamme  $10^{-4} < A_f/R < 3 \cdot 10^{-2}$ .

	$f$ (Hz)	$A_f$ (mm)
Cuve en plexiglas $d = 300$ mm	0.8 - 3.2	0.15 - 4.5
Cuve en verre $d = 156$ mm	1.2 - 4.6	0.08 - 2.4

TAB. 2.2 – Gamme d'excitation, fréquence et amplitude.

### 2.1.2 le système forcé

Les liquides utilisés sont :

- l'eau du laboratoire ou plus rarement l'eau distillée,

– l'alcool éthylique à 90%

Nous avons choisi ces deux fluides pour étudier l'évolution des propriétés de brisure en fonction de la tension de surface (voir les caractéristiques résumées dans le tableau 2.3).

	Eau	Alcool
densité $\rho$ kg/m <sup>3</sup>	1000	789
viscosité cinématique $\nu$ (10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s)	1	2.2
tension superficielle dynamique $\sigma$ (10 <sup>-3</sup> N/m)	72	22
tension superficielle cinématique $\sigma/\rho$ (10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> )	72	28

TAB. 2.3 – Propriétés physiques des liquides utilisés en conditions ambiantes.

Les réservoirs utilisés sont principalement cylindriques. Il s'agit de :

- une cuve en plexiglas de diamètre  $d = 300$  mm  $\pm 4$  mm, de profondeur 600 mm, d'épaisseur 8 mm,
- une cuve en verre de diamètre  $d = 156$  mm  $\pm 1$  mm et de profondeur 250 mm, d'épaisseur 2 mm.

L'ensemble des mesures d'amplitudes d'onde, en particulier pour le tracé des diagrammes amplitude-fréquence ou l'évaluation des taux de croissance ou d'amortissement, est réalisé en cuve cylindrique. La seconde cuve est choisie en verre pour les expériences menées avec l'alcool. Ces deux tailles de réservoirs permettent d'étudier la dépendance de la largeur du front et des motifs de déstabilisation avec le rayon.

Une géométrie carrée est utilisée pour permettre une visualisation plus aisée des profils de l'onde en particulier à la paroi où la géométrie circulaire rend difficile l'exploitation des images. Le réservoir carré permet également d'observer les phénomènes de déstabilisation en s'affranchissant du phénomène de focalisation lié à la cuve cylindrique. Il s'agit d'un réservoir carré en verre de section 280  $\times$  280 mm et de 500 mm de profondeur, d'épaisseur 10 mm.

## 2.2 Méthodes de mesure

Les principales mesures effectuées sont :

- une mesure du déplacement de la table avec une sonde optique pour obtenir les paramètres d'excitation (fréquence, amplitude, qualité de la sinusoïde),
- une mesure de la position de la surface libre en un point du réservoir à l'aide d'une sonde capacitive pour obtenir l'amplitude et la nature de l'onde,

- des visualisations en lumière blanche de face ou de côté pour obtenir de façon essentiellement qualitative la forme du profil et les caractéristiques du déferlement et pour mesurer vitesses et accélérations du front.

### 2.2.1 Sonde optique de déplacement

Le capteur utilisé permet une mesure du déplacement de la table sans contact. Il s'agit d'un capteur à diode de type M5, de longueur d'onde infrarouge 900 nm, de l'entreprise Bullier International, disposant d'un émetteur et d'un récepteur disposé sur la tête de capteur. Le principe de fonctionnement est présenté par la figure 2.7. Les principales étapes sont :

- la LED émet un faisceau en direction de la table,
- la lumière est réfléchie en particulier dans la direction de la lentille convergente,
- l'information de la position du faisceau incident sur le capteur est transformé en variation de courant.

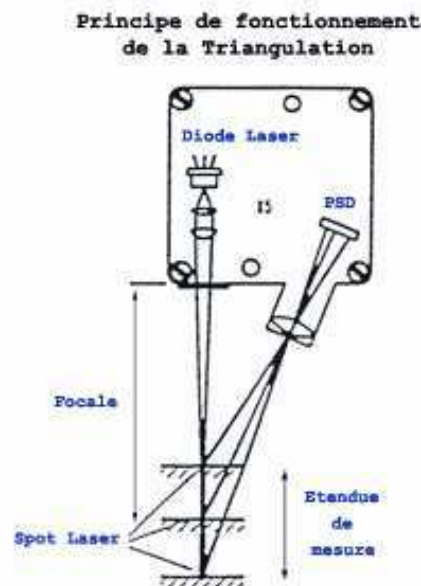


FIG. 2.7 – Principe de fonctionnement du capteur de déplacement.

L'étendue de mesure est de  $\pm 20$  mm avec une distance de travail de 65 mm. La sortie analogique est en  $\pm 10$  V. La résolution est meilleure que  $60 \mu\text{m}$ . La fréquence d'acquisition du capteur, 2.5 kHz, est nettement supérieure aux fréquences de travail de la table (0 – 5 Hz) et aux fréquences d'acquisition des signaux. La calibration est assurée par l'entreprise Bullier.

L'acquisition des signaux est réalisée par une carte d'acquisition KPCI le plus souvent sur 3000 points à une fréquence d'acquisition de 30 Hz soit 100 s. Un signal typique de déplacement est présenté sur la figure 2.8.a. A partir de celui-ci, une analyse de Fourier permet d'estimer la fréquence d'excitation et l'importance des harmoniques. L'amplitude du signal est également mesurée (détection des maxima et minima et mesure de l'amplitude crête à crête moyenne).

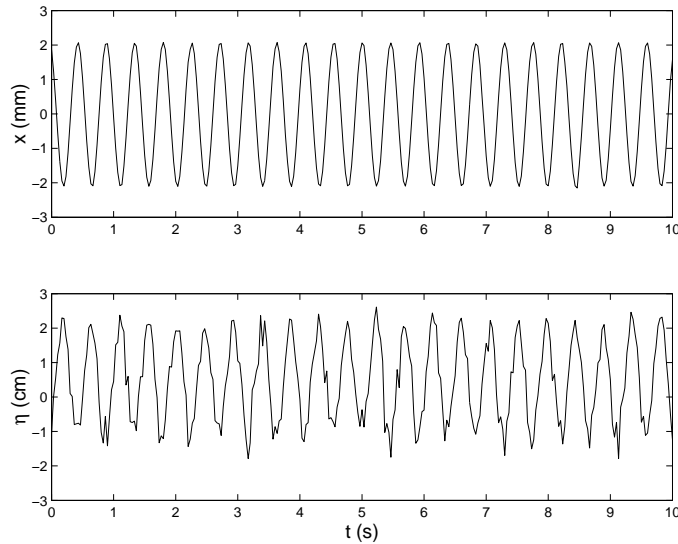


FIG. 2.8 – Signaux typiques. (a) capteur de déplacement ; (b) sonde capacitive pour une fréquence d'excitation de 2.2 Hz et une amplitude de déplacement de 2.1 mm. Cuve cylindrique de rayon 78 mm remplie d'eau à  $h = 14$  cm.

## 2.2.2 Sondes capacitives

Les sondes capacitives permettent de mesurer un niveau de liquide et en particulier les amplitudes des ondes. Elles sont largement utilisées au sein du LEGI. Le principe est le suivant : une variation du niveau d'eau est transformée par un transducteur en variation de capacité. L'électronique de mesure, à son tour, va transformer la variation de capacité en signal électrique exploitable.

Les étapes de transformation du signal sont les suivantes :

- La sonde, composée d'un fil à fort isolement parfaitement tendu, est immergée sur une partie de la hauteur, la partie immergée constitue un condensateur dont une des armatures est la masse d'eau environnante, l'autre armature est le fil de cuivre tendu. L'isolant est le vernis émaillé entourant le fil tendu. Les variations de la

hauteur d'immersion provoquent une variation linéaire de la capacité correspondante. La linéarité et la sensibilité dépendent essentiellement des caractéristiques géométriques du fil.

- La variation de capacité est transformée en variation de fréquence en agissant sur un oscillateur linéaire.
- Un ensemble intégrateur/échantillonneur transforme, grâce à un asservissement entre la fréquence d'échantillonnage et l'intégrateur périodique, la modulation de fréquence en signal électrique.

Les sondes sont disposées le plus souvent à  $\approx 1.5$  cm du bord de la cuve, dans le sens du déplacement  $\theta = 0^\circ$  et perpendiculairement à celui-ci  $\theta = 90^\circ$  (voir schéma de principe 2.1). Les sondes ont servi principalement à l'analyse de la croissance et de l'amortissement de l'onde, et à l'étude du mode tournant.

Des essais de validation ont été effectués dans un réservoir disposant d'une grille oscillante. La sonde est fixée à cette grille et subit un mouvement vertical dans le fluide au repos. Le mouvement imposé est sinusoïdal avec des caractéristiques analogues aux variations de niveaux mesurées dans nos expériences :

$$y = a \sin(\omega t)$$

où l'amplitude  $a$  est ici de l'ordre de 2.5 mm et la fréquence varie sur une gamme de  $0 < f = \omega/2\pi < 5$  Hz.

Le but de cette calibration, venant compléter des tests précédemment effectués (juin 1996 par H. Michallet et K. Guizien), est de déterminer :

- la précision pour de faibles amplitudes d'ondes,
- la réponse dynamique de la sonde,
- l'influence d'un prémouillage sur la qualité de la mesure

La sonde capacitive suit parfaitement la consigne pour de faibles fréquences et avec une légère surestimation, de l'ordre de 3 mm, de l'amplitude pour des fréquences plus élevées, l'erreur reste inférieure à 0.2 mm. La mesure d'amplitude de cet ordre ne pourra être réalisée avec une totale satisfaction (erreur maximale mesurée sur l'amplitude de l'ordre 15 % pour un déplacement de 2.5 mm). On observe une légère augmentation de l'erreur avec la fréquence. Il n'existe aucun déphasage entre l'excitation et la réponse de la sonde. Les sondes capacitatives seront donc utilisées sans correction pour mesurer le retard de l'onde sur le forçage. L'absence de prémouillage entraîne une apparition d'un déphasage initial. Toutefois ce phénomène disparaît dès la deuxième oscillation <sup>1</sup>.

Avant chaque expérience, la sonde est calibrée pour 5 hauteurs d'eau différentes. Les signaux des sondes (1 ou 2 suivant les cas) et du capteur sont enregistrés en parallèle

---

<sup>1</sup>Le rapport de calibration est présenté en détail en annexe A.



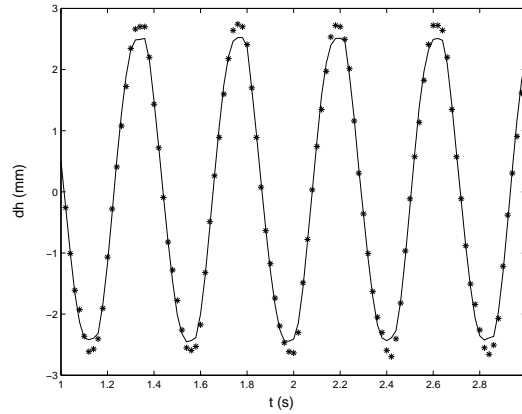


FIG. 2.9 – Essai de validation des sondes capacitatives : réponse de la sonde capacitive à un mouvement sinusoïdal  $f = 2.4$  Hz,  $A_f \approx 2.5$  mm. Le trait plein indique la consigne mesurée par le capteur de déplacement. ●, sonde capacitive.

comme sur la figure 2.8. Un ensemble de programmes simples sous MATLAB permet de mesurer pour des régimes stationnaires :

- l’amplitude moyenne sur chacune des deux sondes et la nature de l’onde en fonction du ratio de ces deux amplitudes,
- le déphasage par rapport à l’excitation,
- la composition en fréquence de la réponse.

Dans le cas de régimes instationnaires (amortissement, croissance à résonance), on mesure l’amplitude et la phase à chaque période.

### 2.2.3 Visualisation

L’écoulement est éclairé par un écran diffuseur derrière lequel se trouve une source lumineuse (fig. 2.10).

Une caméra CCD, de type jAI CV-A11, de définition 640 par 480 pixels (full frame) est le plus souvent utilisée. La fréquence d’acquisition maximale est de 30 Hz. Le temps de pause peut varier entre  $1/30^e$  et  $1/100000^e$  s. Pour l’étude présente, le temps de pause a été fixé à  $1/1000^e$  ou  $1/2000^e$  s, ce qui est satisfaisant pour des vitesses maximales de  $3 \text{ ms}^{-1}$ . L’éclairage est généralement constitué de lumière blanche continue de puissance 600 W. Les images sont prises dans le sens du déplacement ou perpendiculairement à celui-ci. On parlera de vues de côté et de vues de face suivant les conventions définies par le schéma 2.11.

Une caméra rapide a été mise en oeuvre de façon ponctuelle, pour des mesures plus

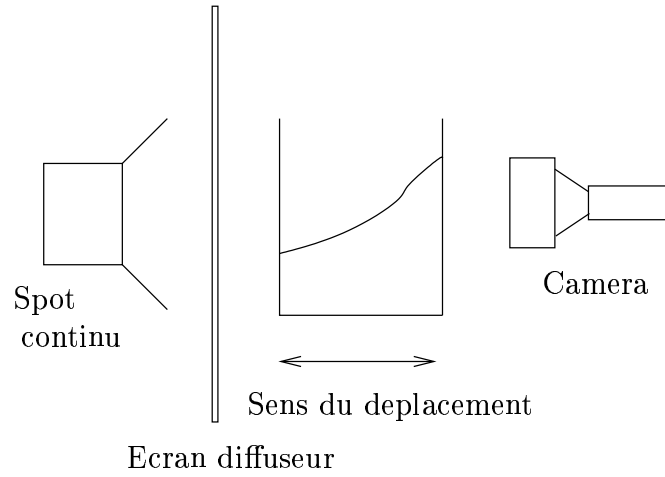


FIG. 2.10 – Descriptif du principe de visualisation.

précises de l'accélération et pour l'étude de la déformation du front. L'intérêt réside dans une très haute fréquence d'acquisition : pour ces expériences, elle a été fixée à  $f = 320$  Hz.

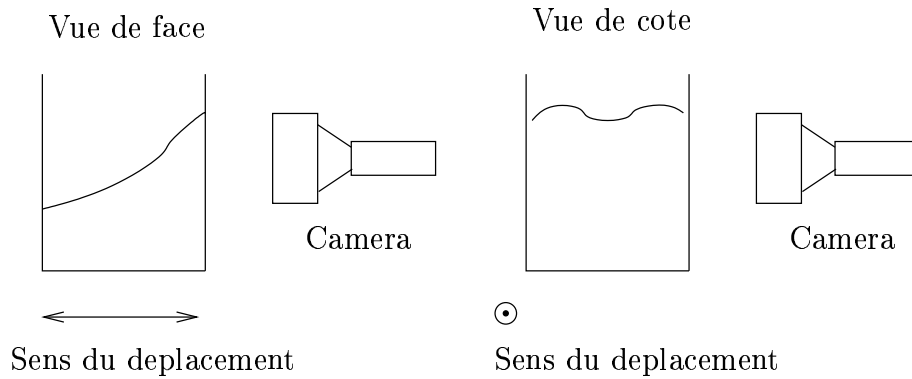


FIG. 2.11 – Convention du type de vue

Des images typiques en cuve ronde et en cuve carrée sont présentées en figure 2.12 et 2.13.

Nous avons réalisé l'ensemble des exploitations sur la forme du front en phase de montée. En effet, comme on peut le voir en comparant les images 2.14.a et b, lors de la redescente de l'onde un film mince se forme qui rend difficile la localisation exacte de la surface libre. En phase de montée donc, la résolution sur la position de l'interface (épaisseur de l'interface) est de 4 pixels pour les images prises par la caméra classique et de 9 pixels pour des images prises en caméra rapide. Cela implique une résolution

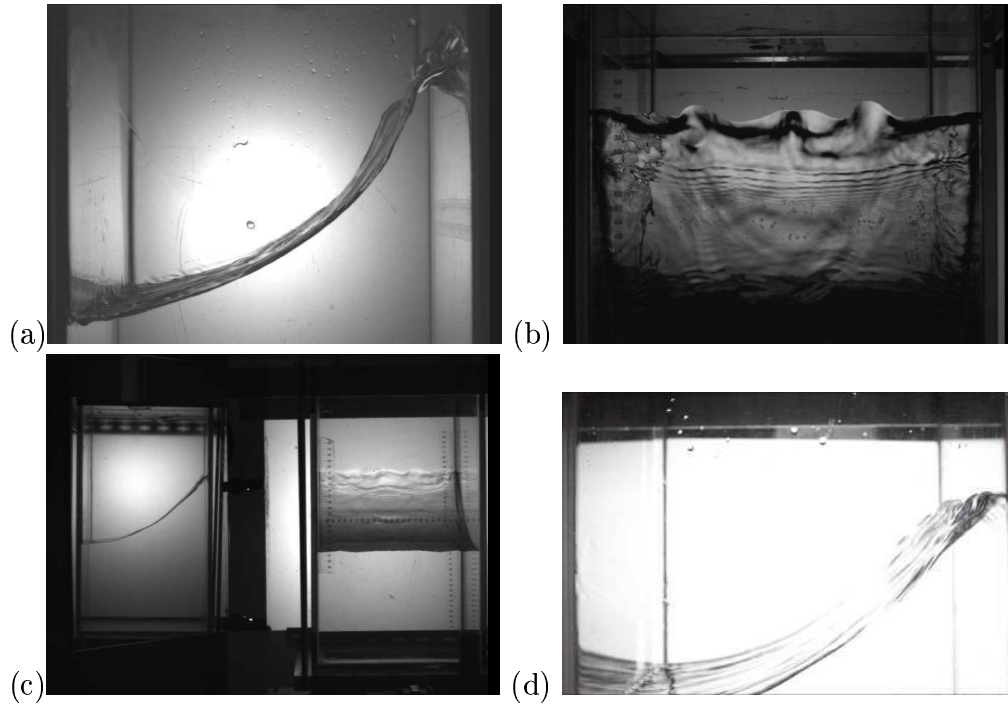


FIG. 2.12 – Images typiques en cuve carrée. (a) Vue de côté ; (b) Vue de face ; (c) Vues simultanées de côté et de face à l'aide d'un miroir à  $90^\circ$  ; (d) Image typique prise avec la caméra rapide en cuve carrée.

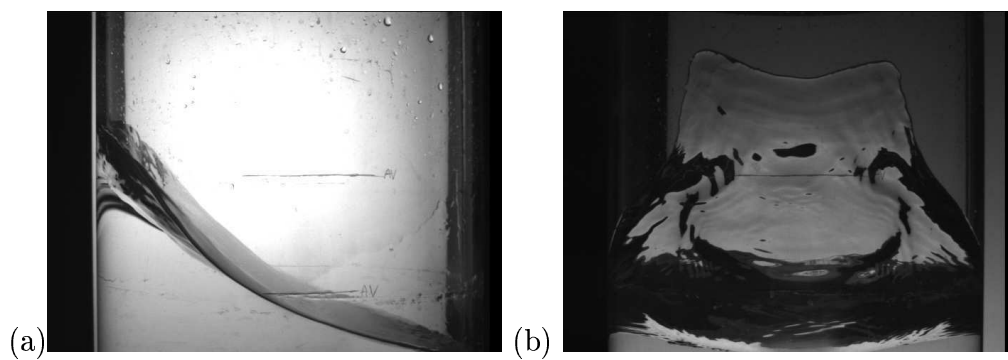


FIG. 2.13 – Images typiques en cuve ronde. (a) Vue de côté ; (b) Vue de face.

meilleure que 5 mm.

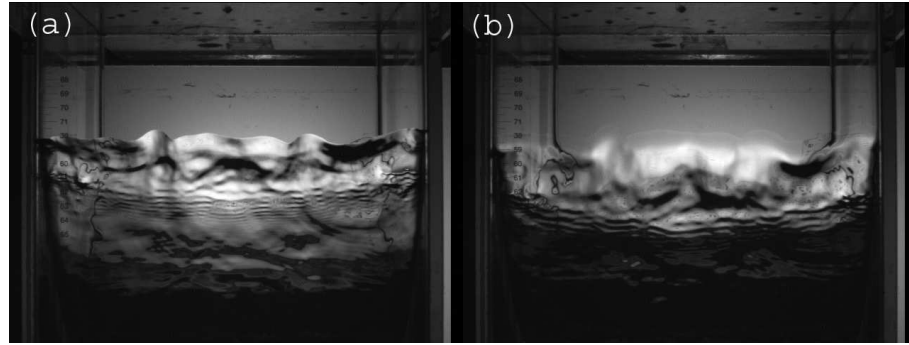


FIG. 2.14 – Comparaison entre la netteté du front pendant (a), une phase de montée et (b), une phase de descente de l'onde.

Pour le traitement des images, nous avons utilisé principalement 3 logiciels : WIMA développé à l'université de Saint-Etienne, NIH Images et Photoshop. Nous n'avons pas traité automatiquement l'ensemble des images en raison de fortes fluctuations de contraste, mais le traitement a toujours suivi une procédure assez simple illustrée figure 2.15 et comportant les étapes suivantes :

- détection des contours, i.e. repérage des gradients de niveaux de gris (voir 2.15.1),
- soustraction de l'image de référence (après détection de contour sur celle-ci aussi) de l'image à exploiter (voir 2.15.2),
- seuillage (voir 2.15.3),
- érosion afin de supprimer les pixels sombres isolés (voir 2.15.4).

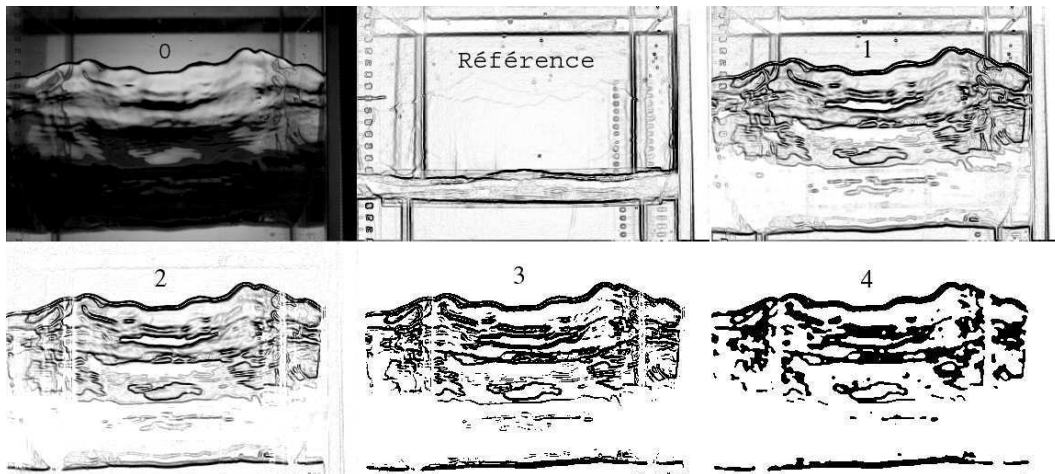


FIG. 2.15 – Principales étapes du traitement d'images.

Ainsi traitées, les images sont utilisées sous Matlab pour en extraire les profils, les allures du front et des positions moyennes de l'interface en vue de calcul de vitesse et d'accélération. Les images sont aussi exploitées sans traitement pour caractériser qualitativement les phénomènes de brisure.

Afin d'observer les trajectoires, quelques images ont également été réalisées en vue de dessous avec un appareil numérique permettant un temps d'obturation plus long, de l'ordre de la période  $t \approx 0.5$  s.

# Chapitre 3

## Régimes d'ondes

On rappelle qu'on s'intéresse à la réponse d'un liquide contenu dans un réservoir soumis à une oscillation horizontale unidirectionnelle en fonction des paramètres d'excitation que sont principalement fréquence et amplitude de forçage. La figure 3.1 donne un aperçu des principaux phénomènes observés. Il s'agit d'une série de vues de côté des mouvements d'onde observés en fonction de la fréquence d'excitation en cuve cylindrique. L'extension horizontale des images 3.1 correspond au diamètre du réservoir (ici 300 mm). Le liquide utilisé est l'eau. Le domaine de fréquence d'excitation représenté ici se situe autour des fréquences naturelles linéaires des modes asymétriques 1,  $\omega_{11}$ , et 2,  $\omega_{12}$ . Nous consacrerons l'ensemble du travail proposé dans cette thèse au premier mode asymétrique.

Pour des fréquences d'excitation inférieures à  $\omega_{11}$ , le mode qui se met en place est le premier mode antisymétrique forcé. C'est une onde plane stationnaire (3.1.a). Son amplitude augmente dans un premier temps avec la fréquence. Cette croissance devient très forte au voisinage de  $\omega_{11}$ . On atteint alors le mode résonant qui déferle (3.1.b). Il s'agit d'un régime chaotique. Pour des fréquences plus élevées, un mode tournant apparaît (3.1.c). L'onde, azimutale dans ce cas, se propage tout autour du réservoir. Enfin, pour une augmentation supplémentaire de la fréquence de forçage, le système revient au mode antisymétrique 1 forcé, analogue à 3.1.a mais avec un déphasage de  $\pi$  par rapport à l'excitation. L'amplitude décroît alors avec la fréquence. Pour des fréquences plus élevées, des phénomènes analogues apparaissent autour du mode 2.

Dans ce chapitre, nous discutons dans un premier temps de façon détaillée la courbe de résonance, organisée autour du mode 1, afin de mettre en évidence les domaines d'existence des différents régimes de ballottement. Nous nous intéressons ensuite à l'installation du mode forcé (aspect instationnaire) et à son amplitude maximale (aspect stationnaire). Nous donnons ensuite les caractéristiques de l'installation du mode

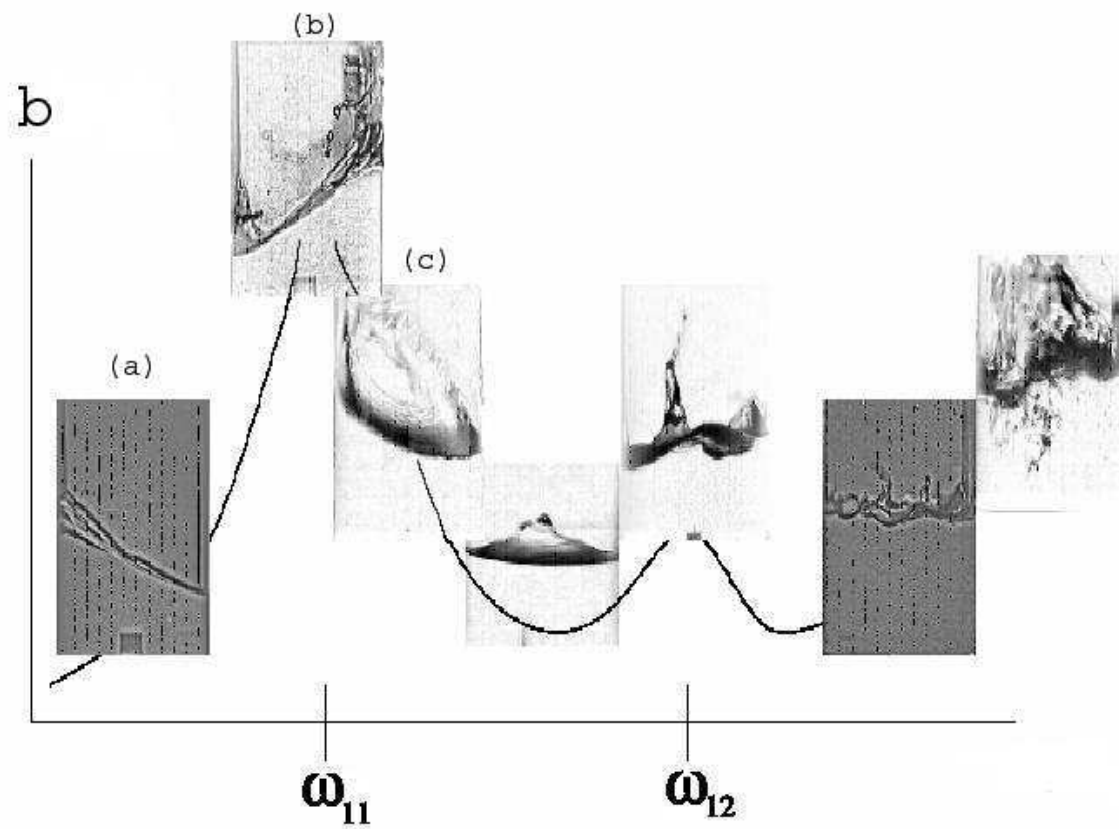


FIG. 3.1 – Evolution des mouvements du liquide en fonction de la fréquence d'excitation (vues de côté).

propre (croissance de l'onde à résonance, modification du profil de l'onde, point de rupture...). La brisure, à proprement parler, est discutée de façon approfondie au chapitre 5. De même, le mode tournant est détaillé au chapitre 4. Pour clore cette partie, nous discutons de l'amortissement libre du mode 1 : caractéristiques générales, variation avec la profondeur.

### 3.1 Domaine d'existence des différents régimes

La figure 3.2 nous donne en détails les domaines d'existence des trois principaux régimes observés au voisinage de la fréquence de résonance linéaire du premier mode asymétrique. Il s'agit :

- d'une onde plane, mode antisymétrique 1 forcé comme décrit au paragraphe 3.2,
- d'un mode tournant, onde azimutale se propageant tout autour du réservoir,
- d'un régime chaotique alternant entre une onde plane déferlant et une onde azimutale de sens variable.

Les mesures, présentées ici, ont été réalisées au moyen de deux sondes capacitives placées l'une dans le sens de l'excitation ( $\theta = 0$ ) et l'autre perpendiculairement à l'excitation ( $\theta = \pi/2$ ). On a pu ainsi déterminer le type de régime <sup>1</sup> et l'amplitude de celui-ci.

On représente en figure 3.2 l'amplitude de l'onde divisée par la longueur d'onde en fonction du ratio de la fréquence d'excitation à la fréquence propre du mode 1. Seuls les modes ballottant et tournant ont pu être représentés en figure 3.2. On peut dans ces cas, en effet, définir une amplitude stationnaire.

Les domaines d'existence de chacun des modes sont dépendants de l'amplitude d'excitation. Les expériences couvrent quatre amplitudes de forçage différentes.

De part et d'autre de la fréquence propre du mode 1, le mode forcé ballottant existe. L'amplitude stationnaire de l'onde augmente :

- lorsqu'on augmente l'amplitude d'excitation,
- lorsqu'on approche la résonance  $\omega/\omega_{11} \rightarrow 1$  avec  $\omega < \omega_{11}$  ou  $\omega > \omega_{11}$

Le domaine d'existence en fréquences du mode antisymétrique 1 forcé diminue avec l'amplitude d'excitation  $A_f$ . Autrement dit, quand  $A_f$  augmente, la bande de fréquence autour de la fréquence du mode propre, pour laquelle l'onde déferle ou tourne, augmente.

La phase de l'onde avec l'excitation est définie suivant la convention donnée par le schéma 3.3. L'onde est en phase lorsque le maximum de l'onde est sur la paroi de

---

<sup>1</sup>Une amplitude non nulle sera mesurée sur la sonde à  $\theta = \pi/2$  dans le cas du mode tournant.



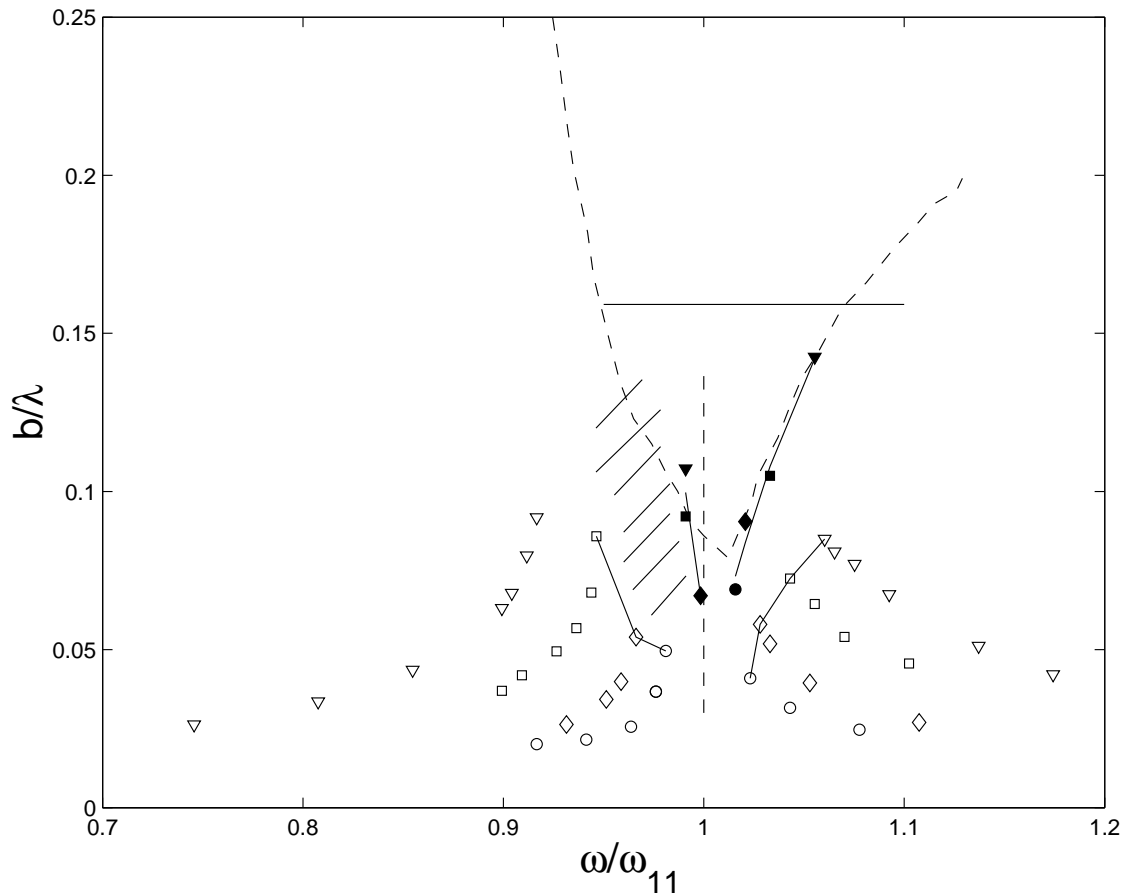


FIG. 3.2 – Diagramme amplitude fréquence pour des amplitudes de forçage différentes  $A_f/R$  en cuve en verre de rayon  $R = 78$  mm remplie d'eau ( $\lambda \approx 3.4R$ ) :  $\nabla$ , mode antisymétrique 1 ;  $\blacktriangledown$ , mode tournant pour  $A_f/R = 2.7 \cdot 10^{-2}$  ;  $\square$ , mode antisymétrique 1 ;  $\blacksquare$ , mode tournant pour  $A_f/R = 1.3 \cdot 10^{-2}$  ;  $\diamond$ , mode ballottant ;  $\blacklozenge$ , mode tournant pour  $A_f/R = 0.7 \cdot 10^{-2}$  ;  $\circ$ , mode antisymétrique 1 ;  $\bullet$ , mode tournant pour  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$ . On rappelle  $b_c/\lambda = 1/2\pi = 0.16$  ; —, limites d'existence du mode antisymétrique 1. La région hachurée indique les régimes chaotiques.

droite après un déplacement du réservoir de la gauche vers la droite. Il est hors phase dans le cas contraire. Dans le cas d'une opposition de phase, tout se passe comme si l'onde n'anticipait pas le déplacement, i.e. comme si le liquide voyait seulement une paroi se déplacer et par conséquent seule la solution de monter le long de la paroi existe. Pour  $\omega < \omega_{11}$ , le mouvement du liquide est en phase avec l'excitation. Il est en opposition de phase pour  $\omega > \omega_{11}$ . Cela est en parfait accord avec les oscillateurs linéaires forcés qui changent de phase au passage de la résonance (section 1.1).

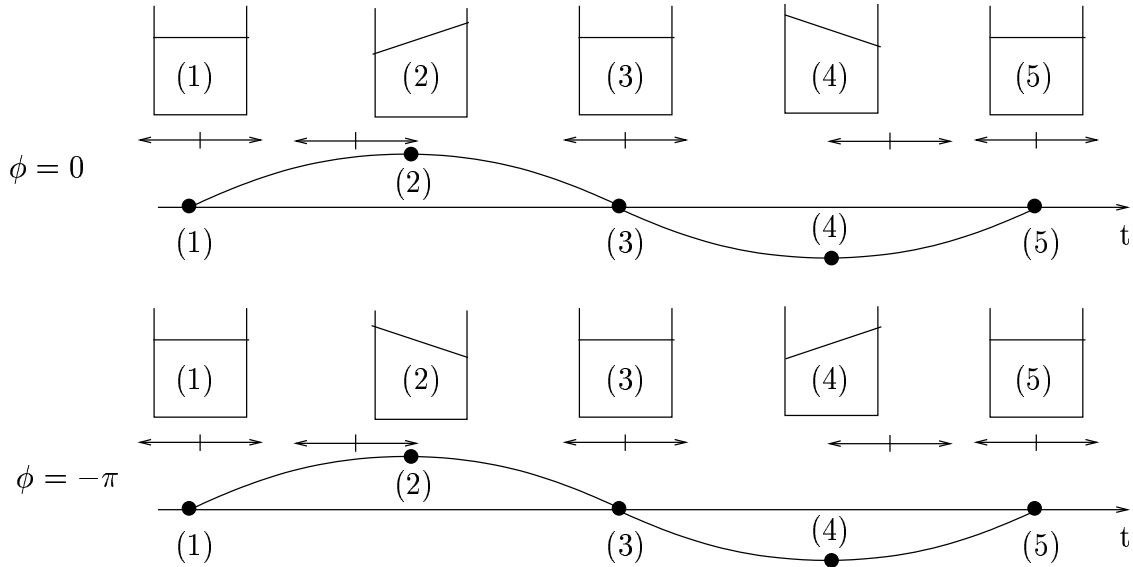


FIG. 3.3 – Définition de la convention concernant le déphasage de l'onde par rapport à l'excitation

La zone hachurée de la figure 3.2 correspond au régime chaotique pendant lequel on observe le déferlement de l'onde. Pour ces fréquences,  $\omega < \omega_{11}$ , l'amplitude des ondes augmente rapidement ce qui est en accord avec une non-linéarité négative. Cette observation concorde avec celle de Taylor [54] et rejoint également les résultats de Ockendon et Ockendon [44] et Miles [41] qui prévoient pour un taux de remplissage tel que  $h/R > 0.506$  en cuve cylindrique et 0.675 en cuve rectangulaire un comportement de type soft-spring ou une non-linéarité négative. Nous reprenons l'analyse de façon plus fine au chapitre 4. Les limites d'existence du mode tournant, discuté au chapitre 4, sont également déterminées. La zone en pointillés donne le domaine d'existence du mode tournant. Ce mode existe pour des fréquences égales ou supérieures à la fréquence du mode propre  $\omega_{11}$ .

## 3.2 Ballotement hors résonance

Nous nous intéressons ici au mode antisymétrique 1 forcé (onde plane) existant lorsque le système est excité en dehors de la fréquence propre du mode asymétrique 1 (voir domaine d'existence en fig. 3.2).

### 3.2.1 Régime transitoire

Le système est forcé à une fréquence  $\omega = K\omega_{11}$  ( $K \neq 1$ ). Ces expériences sont réalisées dans la cuve cylindrique en verre de diamètre 156 mm remplie d'eau. L'amplitude de l'onde est mesurée, dès le démarrage du forçage, à l'aide d'une sonde capacitive placée dans le sens du déplacement ( $\theta = 0$ ). Les signaux temporels obtenus sont donnés pour deux fréquences de forçage respectivement inférieure et supérieure à la fréquence de résonance linéaire  $\omega_{11}$ . La figure 3.4 représente le cas  $\omega = 0.86\omega_{11}$ , la figure 3.5 le cas  $\omega = 1.14\omega_{11}$  pour  $A_f/R = 4.5 \cdot 10^{-2}$ . Un battement à basse fréquence (celle de l'enveloppe du signal) apparaît clairement dans les deux cas présentés ici.

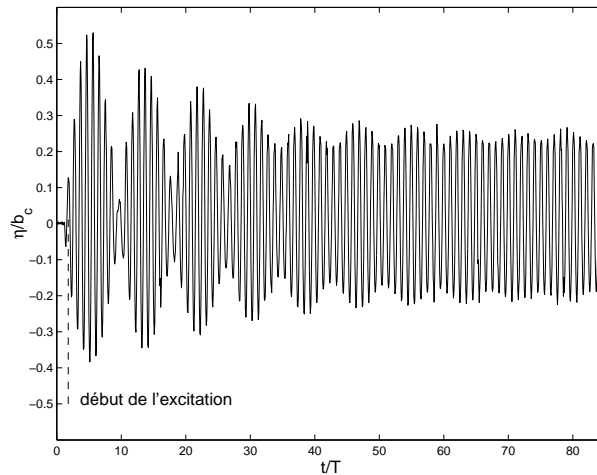


FIG. 3.4 – Evolution de l'amplitude adimensionnée de l'onde  $b/b_c$  ( $b_c = 1/k$ ) en fonction du temps adimensionné par la période de forçage  $t/T$ .  $\omega = 0.86\omega_{11}$ .

Une analyse spectrale de fenêtres temporelles successives de 10 périodes menée pour les cas  $\omega = 0.86\omega_{11}$  et  $\omega = 1.17\omega_{11}$  (figures 3.6 et 3.7) donne l'évolution de l'amplitude Fourier de chacune des fréquences contenues dans le signal en fonction du temps. On observe qu'initialement les composantes en fréquence essentielles sont :

- la fréquence du mode forcé,
- la fréquence naturelle du premier mode,

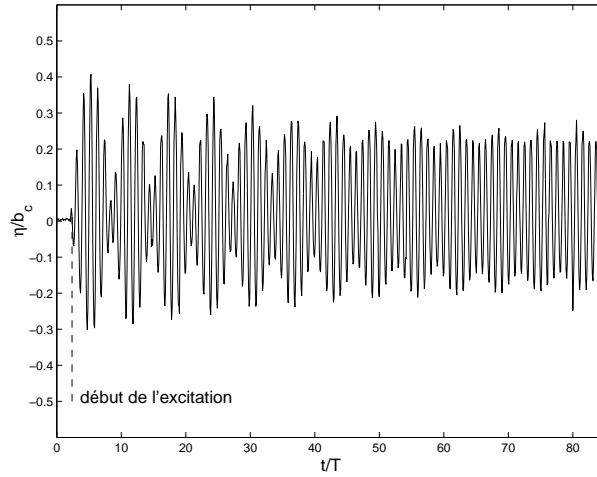


FIG. 3.5 – Evolution de l’amplitude adimensionnée de l’onde  $b/b_c$  ( $b_c = 1/k$ ) en fonction du temps adimensionné par la période de forçage  $t/T$ .  $\omega = 1.17\omega_{11}$ .

- la différence de fréquence entre le forçage et la fréquence naturelle du mode 1,
- la fréquence du mode 2.

Le battement correspond donc à la composition de deux fréquences proches : celle du forçage  $\omega$  et celle du système  $\omega_{11}$ . L’amplitude de la fréquence propre du mode 2 est très faible, l’excitation se situe en effet dans le bassin d’attraction du mode 1. Très rapidement ne subsistent que la fréquence du forçage et celle du mode 1. Par ailleurs, l’amplitude de Fourier du mode 1 décroît en temps jusqu’à être négligeable devant celle du mode forcé.

Nous avons extrait des diagrammes temps-fréquence l’information de l’évolution de l’amplitude de Fourier pour les modes les plus énergétiques que sont le mode forcé et le premier mode asymétrique. Les résultats sont donnés en figures 3.8 et 3.9 pour une excitation respectivement inférieure et supérieure à la résonance du mode 1. L’amplitude du mode forcé varie très peu au cours de l’ajustement du système sur l’excitation. Elle se stabilise quasiment instantanément sur l’amplitude stationnaire dont nous donnerons une expression au paragraphe suivant. Le mode 1, quant à lui, décroît exponentiellement quel que soit le forçage (inférieur ou supérieur à  $\omega_{11}$ ). Au terme d’une centaine de périodes, seul subsiste le mode forcé.

Ces résultats (mode forcé et mode propre initialement présents et décroissance exponentielle du mode 1) sont en accord avec les propriétés obtenues par analogie avec les oscillateurs forcés amortis donnant l’expression (1.25) de la réponse à l’excitation en :

$$x = ae^{-\kappa t} \cos(\omega_1 t + \alpha) + b \cos(\omega t + \delta) \quad (3.1)$$

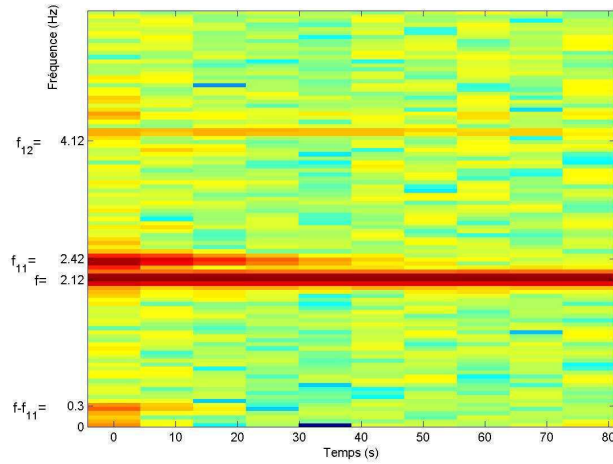


FIG. 3.6 – Diagramme fréquence-temps donnant l’amplitude du mode de Fourier correspondant. Cas  $\omega = 0.86\omega_{11}$ . Mesures effectuées en cuve cylindrique de diamètre  $d = 156$  mm. Les fréquences indiquées sont : la fréquence naturelle du mode 1  $f_{11} = 2.42$  Hz ; la fréquence de forçage  $f = 2.12$  Hz ; la fréquence du mode 2  $f_{12} = 4.12$  Hz ; la différence entre fréquence de forçage et fréquence du mode 1  $f_{11} - f = 0.3$  Hz.

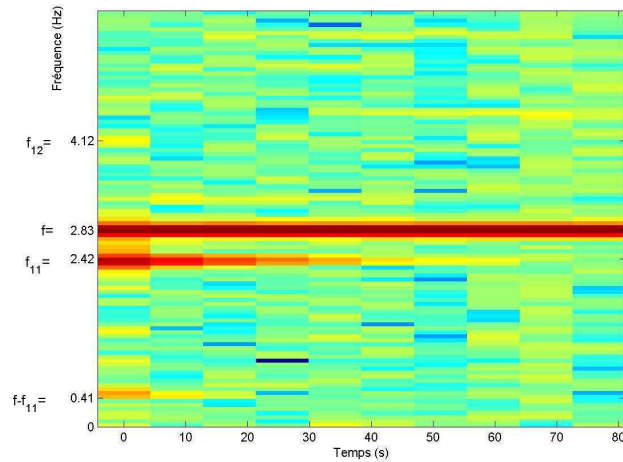


FIG. 3.7 – Diagramme fréquence-temps donnant l’amplitude du mode de Fourier correspondant. Cas  $\omega = 1.17\omega_{11}$ . Mesures effectuées en cuve cylindrique de diamètre  $d = 156$  mm. Les fréquences indiquées sont : la fréquence naturelle du mode 1  $f_{11} = 2.42$  Hz ; la fréquence de forçage  $f = 2.83$  Hz ; la fréquence du mode 2  $f_{12} = 4.12$  Hz ; la différence entre fréquence de forçage et fréquence du mode 1  $f - f_{11} = 0.41$  Hz.

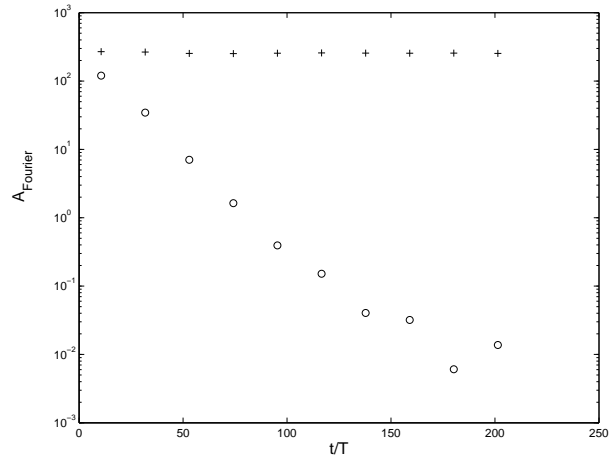


FIG. 3.8 – Evolution du logarithme de l’amplitude de Fourier des modes les plus énergétiques en fonction du temps adimensionné par la période du forçage  $t/T$  : +, mode forcé ; o, mode 1.  $\omega = 0.86\omega_{11}$

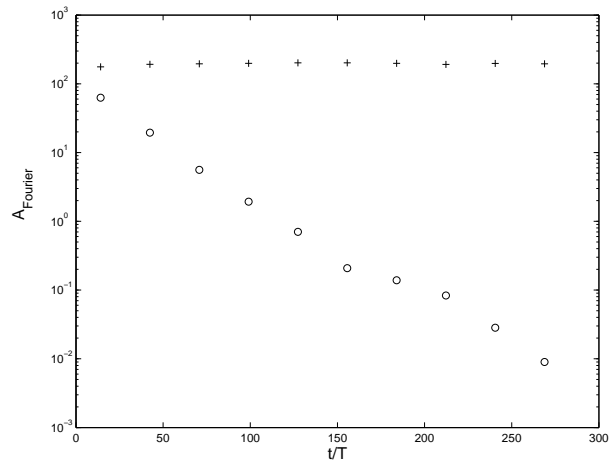


FIG. 3.9 – Evolution du logarithme de l’amplitude de Fourier des modes les plus énergétiques en fonction du temps adimensionné par la période du forçage  $t/T$  : +, mode forcé ; o, mode 1.  $\omega = 1.17\omega_{11}$

En revanche, la présence de la différence des fréquences découle d'effets non-linéaires non pris en compte dans cette théorie des oscillateurs.

Le taux d'amortissement a été mesuré par un ajustement linéaire de la décroissance de l'amplitude du mode de Fourier. Le taux d'amortissement de l'amplitude de l'onde  $\kappa$ . La décroissance en amplitude s'écrit  $b = b_0 e^{-\kappa t}$ . est la moitié de celui de l'amplitude de Fourier. Les résultats moyens obtenus sont donnés en table 3.1.

$\omega/\omega_{11}$	$\kappa$ (s <sup>-1</sup> )
0.68	0.10 ± 12%
0.86	0.07 ± 8%
1.05	0.07 ± 4%
1.14	0.06 ± 2%

TAB. 3.1 – Coefficients d'amortissement  $\kappa$  de l'amplitude du mode 1 (suivant l'expression (1.25)). La reproductibilité est indiquée dans ce tableau.

L'ordre de grandeur du coefficient d'amortissement  $\kappa \approx 0.05 - 0.1 \text{ s}^{-1}$  est conservé quel que soit le ratio fréquence d'excitation - fréquence propre. En revanche, on observe une décroissance de l'amortissement pour des fréquences de forçage croissante.

En conclusion, lorsque le système est forcé en dehors de la fréquence du mode propre 1, on observe initialement la superposition des modes forcé et résonant. Ce dernier décroît de façon exponentielle et, à l'état stationnaire, seul subsiste un mouvement d'amplitude constante à la fréquence d'excitation.

### 3.2.2 Régime stationnaire

On s'intéresse à présent à la partie stationnaire, c'est-à-dire une fois le mode propre amorti. Les expériences sont menées en petite cuve cylindrique en verre ( $d = 156 \text{ mm}$ ). Nous avons analysé les spectres de l'amplitude de l'onde, i.e. les spectres des signaux mesurés par une sonde capacitive placée dans le sens du déplacement (à 4 mm soit à  $0.05R$  de la paroi) pour 4 amplitudes relatives différentes ( $A_f/R = 2.7 \cdot 10^{-2}$ ,  $1.3 \cdot 10^{-2}$ ,  $0.7 \cdot 10^{-2}$ ,  $0.3 \cdot 10^{-2}$ ) et pour une gamme de fréquences allant de 0.7 à  $1.3\omega_{11}$ . D'une façon générale, le mouvement se compose principalement :

- de la fréquence d'excitation,
- des harmoniques 1 à 6 de la fréquence de forçage,
- de fréquences parasites.

Lorsque les amplitudes de l'onde sont faibles, le signal est particulièrement complexe en terme de fréquences comme on peut le voir en figure 3.10. Les intensités de chacune

des fréquences sont comparables. Il arrive que la première harmonique soit même plus forte que la fréquence de forçage (par exemple :  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$  et  $\omega/\omega_{11} = 0.9$ ;  $A_f/R = 0.7 \cdot 10^{-2}$  et  $\omega/\omega_{11} = 1.3$ ). En revanche pour des amplitudes d'onde supérieures à 1 cm ( $b/R = 0.13$ ), les fréquences parasites disparaissent et pour  $b > 1.5$  cm ( $b/R > 0.19$ ) les harmoniques sont d'amplitudes faibles devant la fréquence de forçage (voir figure 3.11).

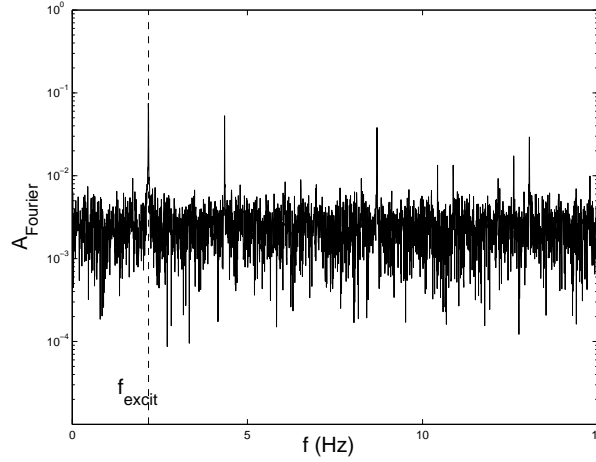


FIG. 3.10 – Analyse spectrale de l'amplitude de l'onde ( $b = 0.8$  cm).  $A_f/R = 7 \cdot 10^{-3}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.9$ .

Pour l'amplitude du mouvement, on a vu que, dans le cas des oscillateurs, on écrit pour une excitation à la fréquence  $\omega$  :

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_{11}^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2}}$$

où  $m$  est la masse de l'oscillateur,  $\kappa$  le coefficient d'amortissement,  $f$  le forçage. On suppose  $\kappa \ll |1 - K^2|/2K$ , c'est-à-dire que le forçage ne s'effectue pas au voisinage de la résonance et que l'amortissement est faible. On écrit par ailleurs l'amplitude de la force d'excitation sous la forme  $f = m_f A_f \omega^2$  où  $A_f$  est l'amplitude du déplacement et  $m_f$  la masse effectivement mise en mouvement (loi de Newton). On obtient alors :

$$\frac{b}{A_f} = \frac{m_f}{m} \frac{K^2}{|1 - K^2|} \quad (3.2)$$

On rappelle que  $K$  est l'écart à la résonance,  $K = \omega/\omega_{11}$ . Les données expérimentales  $b/A_f$  en fonction de  $K^2/|1 - K^2|$ , pour différentes amplitudes de forçage, sont reportées sur la figure 3.12. L'homothétie des courbes de résonance observée sur la figure 3.2 est bien en  $1/A_f$  comme le prévoit la théorie des oscillateurs.



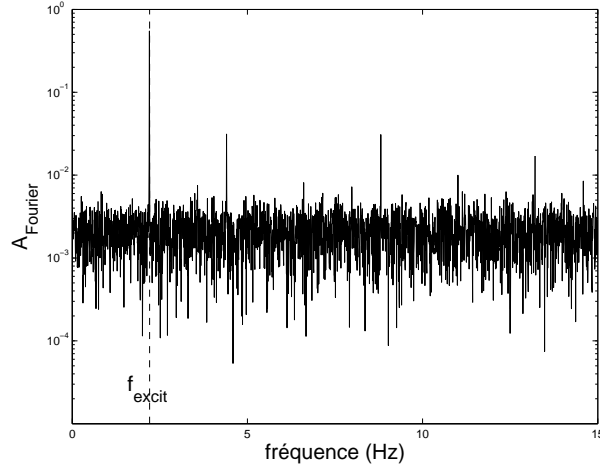


FIG. 3.11 – Analyse spectrale de l'amplitude de l'onde ( $b = 1.5$  cm).  $A_f/R = 2.7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.9$ .

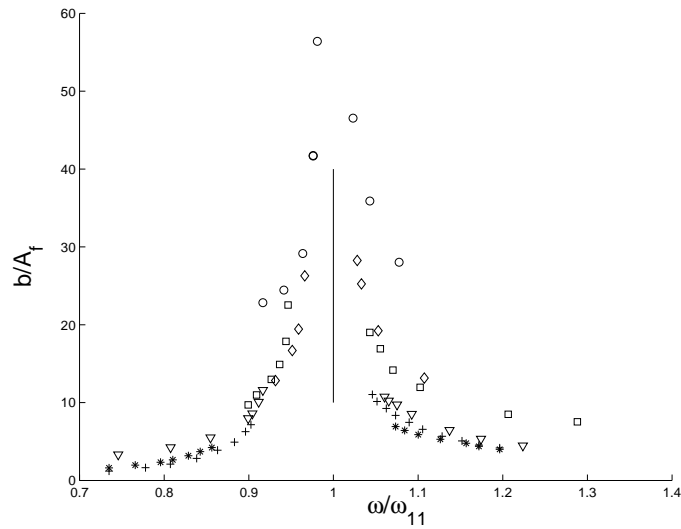


FIG. 3.12 – Diagramme amplitude-fréquence pour différentes amplitudes des forçage.  $\nabla$ ,  $A_f/R = 2.7 \cdot 10^{-2}$ ;  $\square$ ,  $A_f/R = 1.3 \cdot 10^{-2}$ ;  $\diamond$ ,  $A_f/R = 0.7 \cdot 10^{-2}$ ;  $\circ$ ,  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$ ;  $*$ , données d'Abramson [3]  $A_f/R = 4.5 \cdot 10^{-2}$ ;  $+$ , données d'Abramson [3]  $A_f/R = 2.3 \cdot 10^{-2}$ . Expériences en cuve cylindrique en verre  $d = 156$  mm remplie d'eau  $h/R \approx 1.5$ .

Pour ajuster cette expression sur les résultats expérimentaux, on trace le rapport entre l'amplitude adimensionnée  $b/A_f$  avec l'expression théorique  $K^2/|1 - K^2|$  en fonction de  $K$  en figure 3.13. Les valeurs restent relativement dispersées. Mais un coefficient 2 devant l'expression (3.2) permet une bonne approximation de l'amplitude stationnaire. Seul le cas d'une faible amplitude d'excitation s'écarte vraiment de cette valeur empirique. La complexité en fréquence du signal dans ce cas (faibles amplitudes) explique vraisemblablement cette différence. Les résultats d'Abramson, en revanche, sont plutôt centrés autour de 1.

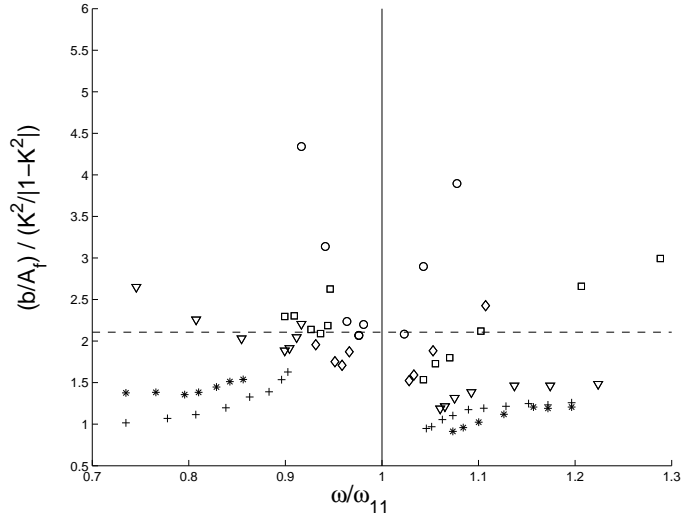


FIG. 3.13 – Ajustement de l'expression théorique (3.2) sur les données expérimentales.  $\nabla$ ,  $A_f/R = 2.7 \cdot 10^{-2}$ ;  $\square$ ,  $A_f/R = 1.3 \cdot 10^{-2}$ ;  $\diamond$ ,  $A_f/R = 0.7 \cdot 10^{-2}$ ;  $\circ$ ,  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$ ;  $*$ , données d'Abramson [3]  $A_f/R = 4.5 \cdot 10^{-2}$ ;  $+$ , données d'Abramson [3]  $A_f/R = 2.3 \cdot 10^{-2}$ .

En résumé, les expressions suivantes seront utilisées par la suite (lorsque  $A_f/R > 0.3 \cdot 10^{-2}$ ) :

$$\frac{b}{A_f} \approx 2 \frac{K^2}{|1 - K^2|}, \quad (3.3)$$

$$\text{ou } \frac{b}{R} \approx 2 \frac{K^2}{|1 - K^2|} \frac{A_f}{R}, \quad K = \frac{\omega}{\omega_{11}} \quad (3.4)$$

On remarque que l'amplitude stationnaire ne dépend que de l'écart à la résonance et de l'amplitude de forçage. En particulier, elle ne dépend pas du rayon. L'inclinaison de la surface libre dans sa position maximale  $b/R$ , en revanche, dépend bien de l'amplitude d'excitation relative, i.e. du rayon de la cuve. Par ailleurs, on rappelle que le domaine

de validité en fréquence de cette expression théorique dépend de l'amplitude relative du forçage. Lorsque  $A_f/R$  augmente, le domaine de validité est réduit (le domaine d'existence du mode forcé s'éloigne de la fréquence de résonance).

**En résumé lors d'un forçage hors de la résonance :**

- Mode 1 et mode forcé sont initialement en concurrence. Le mode 1 décroît exponentiellement et au terme d'une centaine de périodes, seul le mode forcé subsiste,
- En régime stationnaire, les harmoniques de la fréquence de forçage sont négligeables pour  $b/R > 0.13$ ,
- L'amplitude stationnaire est donnée par :

$$\frac{b}{A_f} \approx 2 \frac{K^2}{|1 - K^2|}.$$

### 3.3 Comportement à résonance : approche du déferlement

On s'intéresse à présent à la croissance du mode antisymétrique 1 à résonance. Comme nous l'avons vu sur le diagramme amplitude-fréquence 3.2, le domaine des fréquences pour lesquelles la résonance est atteinte se situe au voisinage de  $\omega_{11}$  avec  $\omega < \omega_{11}$  (rappelons que  $h/R > 1$ ). Pour cette gamme de fréquence d'excitation, l'amplitude de l'onde croît rapidement jusqu'au déferlement. On souhaite caractériser la croissance et la forme de l'onde pendant cette phase. On ne s'attachera pas ici aux phénomènes spécifiques liés à la brisure qui apparaît au terme de la croissance de l'onde à résonance. Ils seront détaillés au chapitre 5.

#### 3.3.1 Observation de la croissance de l'onde à résonance

Deux procédures pour approcher le déferlement ont été utilisées :

1. le déferlement est obtenu à partir de la position au repos, l'amplitude de départ étant nulle. Le réservoir, et donc le liquide, sont mis en mouvement brusquement. La fréquence de forçage se situe nécessairement dans une zone étroite autour de la fréquence de résonance pour que le déferlement ait lieu avec  $\omega < \omega_{11}$ . On choisit ici  $\omega = 0.97\omega_{11}$ .
2. le système est initialement forcé à une fréquence significativement inférieure à la fréquence de résonance. Après l'amortissement du mode 1, ne subsiste, comme on l'a vu précédemment, qu'un mouvement à la fréquence de forçage. Ce mouvement

est stable, d'amplitude de ballonnement faible. Cette méthode permet de se placer dans un cas où la décroissance du mode 1, caractérisée par  $\kappa$ , ne concurrence pas la croissance de la résonance. Une légère augmentation de la fréquence déclenche alors le déferlement. On passe ici de  $\omega = 0.92\omega_{11}$  à  $\omega = 0.93\omega_{11}$  (voir schéma 3.14).

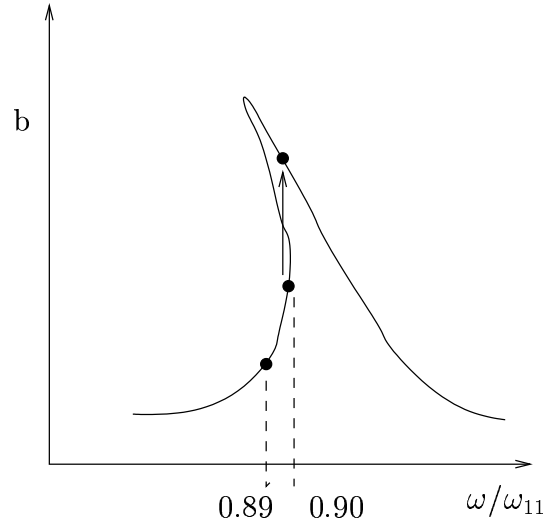


FIG. 3.14 – Schéma de la procédure 2 pour atteindre le déferlement.

**Observation de l'avant-déferlement en cuve cylindrique** Nous discutons ici des points communs de la croissance de l'onde résonante quelles que soient les conditions opérées pour atteindre le déferlement.

La figure 3.15 montre une succession d'images prises lorsque l'onde atteint sa position maximale et que le déferlement est approché depuis la position au repos en cuve cylindrique de rayon 150 mm excitée à  $0.94\omega_{11}$ . Les images sont espacées d'une période. Ce scénario est valable pour chacune des deux procédures. Deux phénomènes importants sont à noter :

- l'amplitude de l'onde croît d'une période à la suivante. Nous détaillons les caractéristiques de cette croissance dans la suite de ce chapitre.
- à partir de la onzième période, la forme du front et le profil de l'onde sont sensiblement modifiées (voir les images 3.15.12 à 14 et le schéma du profil de l'onde 3.16).

**Caractérisation quantitative** On définit  $b_c$ , amplitude pour laquelle l'accélération de la surface est égale à  $g$ , accélération de la gravité. Cette valeur est une valeur

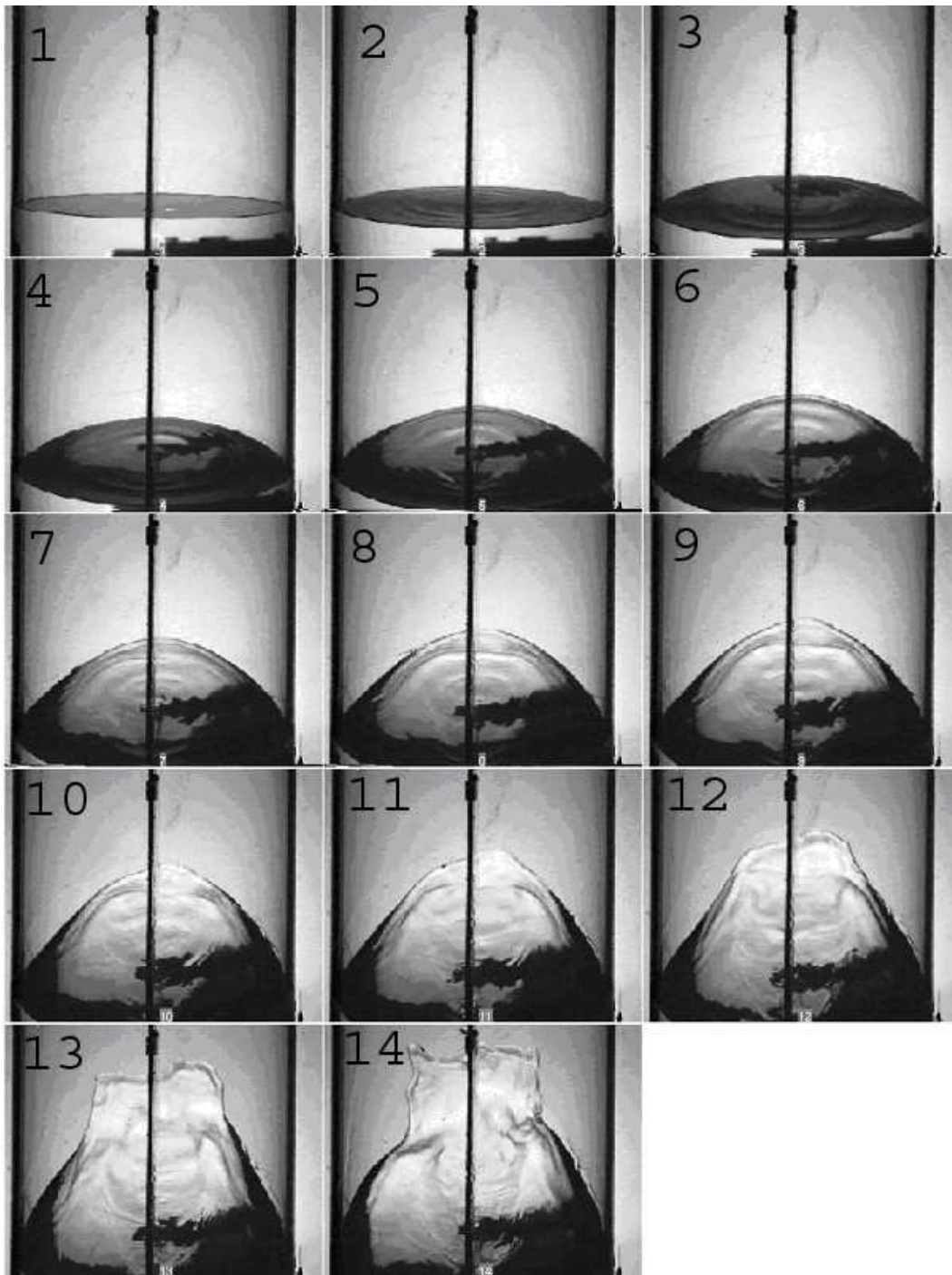


FIG. 3.15 – Vue de face de maxima successifs du front de l'onde. Cuve cylindrique en plexiglas  $d = 300$  mm remplie d'eau à  $h/R \approx 1.5$ . Mise en mouvement depuis le repos à un forçage de fréquence  $\omega = 0.94\omega_{11}$ . Images d'E. Gaudin [49].

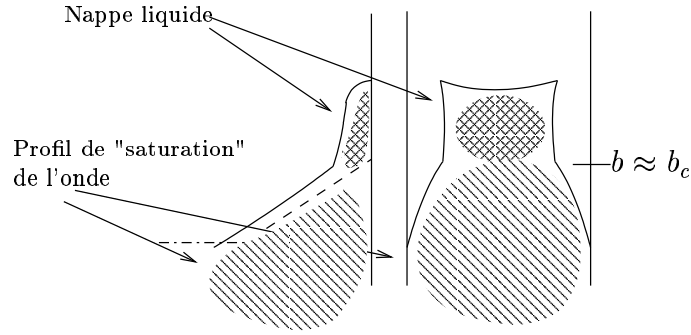


FIG. 3.16 – Schéma de la forme de la surface libre

critique intéressante puisqu'à partir de ce niveau d'accélération, la crête d'onde est susceptible de se fragmenter et de former des jets ou des gouttes (Taylor [54]). Il faut noter cependant que la tension de surface possède a priori un effet stabilisant. Si l'accélération maximale  $a_{max}$ , subie par la crête de l'onde, pour un mouvement à la pulsation  $\omega$ , est donnée par <sup>2</sup>  $a_{max} = b\omega^2$ , alors l'amplitude critique  $b_c$  vaut :

$$b_c = \frac{g}{\omega^2} = \frac{1}{k}, \quad (3.5)$$

soit pour une cuve cylindrique de rayon  $R$  :

$$b_c = \frac{R}{1.84}, \quad (3.6)$$

et pour une cuve carré de taille  $L$

$$b_c = \frac{L}{\pi}. \quad (3.7)$$

Ces valeurs restent une indication grossière. En effet, le profil n'est pas symétrique par rapport à la position au repos (voir Penney et Price [46] et les résultats concernant les profils réels mesurés dans nos expériences au paragraphe 3.3.2) ce qui met en défaut l'expression de l'accélération maximale atteinte. Par ailleurs, les expressions du nombre d'onde en cuve cylindrique ou carrée sont issues de la théorie linéaire.

La figure 3.17 relève les caractéristiques de l'onde associées à la modification de la forme du profil pour un départ depuis la position au repos. Ces caractéristiques, déterminées par des critères visuels subjectifs suivant le principe décrit par le schéma 3.16, sont :

- la hauteur  $h_1$  à la paroi de la partie principale de l'onde. Cette hauteur est déterminée par extrapolation linéaire des mesures de la hauteur d'eau par une sonde se trouvant à 15 mm du bord du récipient en supposant l'angle de la surface

---

<sup>2</sup>Conformément à ce qui a été vu au paragraphe précédent

liquide constant. On parlera de la hauteur caractéristique du profil de saturation de l'onde.

- l'élévation maximale  $h_2$  estimée à partir de séquences vidéo. Dans les dernières périodes avant brisure, cette hauteur est caractéristique de l'élévation maximale de la nappe liquide se formant à la paroi.
- l'angle  $\beta$  entre la surface de l'onde et l'horizontale pour le profil de saturation.

Dans un premier temps, les deux hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  sont identiques. La forme du profil reste analogue à celle de Penney et Price. La rupture de la forme de l'onde en deux parties de pentes différentes est observée lorsque l'amplitude de l'onde  $h_2$  est supérieure à  $b_c$ . La hauteur  $h_1$  sature alors lentement vers  $\approx 1.5b_c$ . De même,  $\beta$  se stabilise vers une valeur critique de l'ordre de  $40^\circ$ . En effet ces deux paramètres sont liés par la relation :

$$\tan \beta = \frac{h_1}{R} \quad (3.8)$$

Cependant, le forçage se poursuit et le mouvement reçoit toujours de l'énergie. C'est donc le liquide situé entre  $h_1$  et  $h_2$  qui absorbe celle-ci en augmentant son énergie potentielle.  $h_2$  continue de croître, mais seule une faible proportion du liquide atteint de telles hauteurs, la "majorité" du fluide sature vers  $h_1$ .

En conclusion, à résonance, l'amplitude de l'onde croît et la forme de l'onde se modifie laissant apparaître une nappe liquide épaisse qui, pour des amplitudes  $b > b_c = 1/k$ , semble tirer l'essentiel de l'énergie fournie par l'excitation.

### 3.3.2 Evolution de la forme de l'onde au cours d'un cycle en cuve carrée

Nous cherchons à décrire précisément l'évolution de la forme de l'onde au cours d'une période d'excitation. On comparera celle-ci en particulier au profil théorique proposé par Penney et Price [46].

Pour le profil théorique, ils obtiennent la hauteur de l'onde à la paroi par rapport à la position au repos :

$$\frac{b_{max}}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \left( P + \frac{1}{2}P^2 + \frac{13}{32}P^3 + \frac{145}{672}P^4 + \frac{2021}{14784}P^5 \right) \quad (3.9)$$

$P = 0.592$  donne l'onde stationnaire stable d'amplitude maximale. La visualisation étant particulièrement complexe en cuve cylindrique, nous avons réalisé des expériences en cuve carrée en verre de 300 mm de côté remplie d'eau afin d'observer la déformation du profil et de mesurer les niveaux d'accélération.

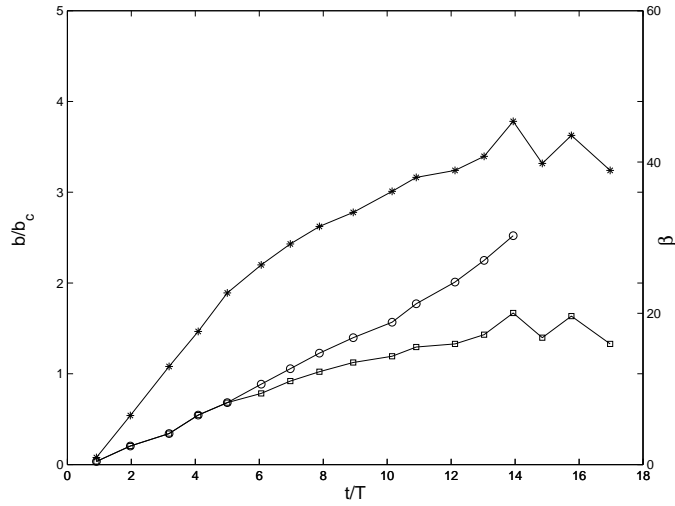


FIG. 3.17 – Croissance des paramètres caractéristiques du profil de l’onde à résonance. Mise en mouvement depuis le repos à un forçage de fréquence  $\omega = 0.94\omega_{11}$  d’une cuve cylindrique en plexiglas  $d = 300$  mm remplie d’eau.  $\square$ ,  $h_1$  amplitude du profil de saturation ;  $\circ$ ,  $h_2$  élévation maximale du front ;  $*$ , inclinaison moyenne  $\beta$  du profil de saturation.

Les profils expérimentaux relevés au début de la croissance de l’onde sont présentés en figure 3.18.a. Il s’agit des formes successives de l’onde au cours de la montée du front (un quart de cycle) pour une hauteur maximale atteinte de  $1.1b_c$ .

Pour comparer plus avant ces profils d’onde,  $\eta$  est adimensionné par l’altitude atteinte à la paroi au temps correspondant et la position  $x$  par la demi-longueur de la cuve  $L_x$ . Les résultats obtenus sont reportés en figure 3.18.b et superposés au profil théorique. Ainsi, les profils expérimentaux restent équivalents au profil théorique de Penney et Price et ce tout au long de la montée du front. On observe par contre un creusement plus important du profil expérimental que celui prévu par la théorie potentielle proposée. A la redescente du front, le profil n’est guère modifié sauf très faiblement au voisinage de la paroi en raison d’un phénomène de drainage (voir l’image 3.19).

Deux périodes plus tard, les profils sont à nouveau relevés et présentés en figure 3.20.a et b (après adimensionalisation). On rappelle qu’il s’agit des formes successives de l’onde au cours de la montée du front (un quart de cycle) pour une amplitude de  $1.4b_c$ . A cette amplitude, la forme ne semble pas avoir subi de modification conséquente par rapport au profil de Penney et Price. En cuve cylindrique, le profil paraît guère modifié au moins jusqu’à  $1.2b_c$ , ce qui est sensiblement du même ordre que dans le cas



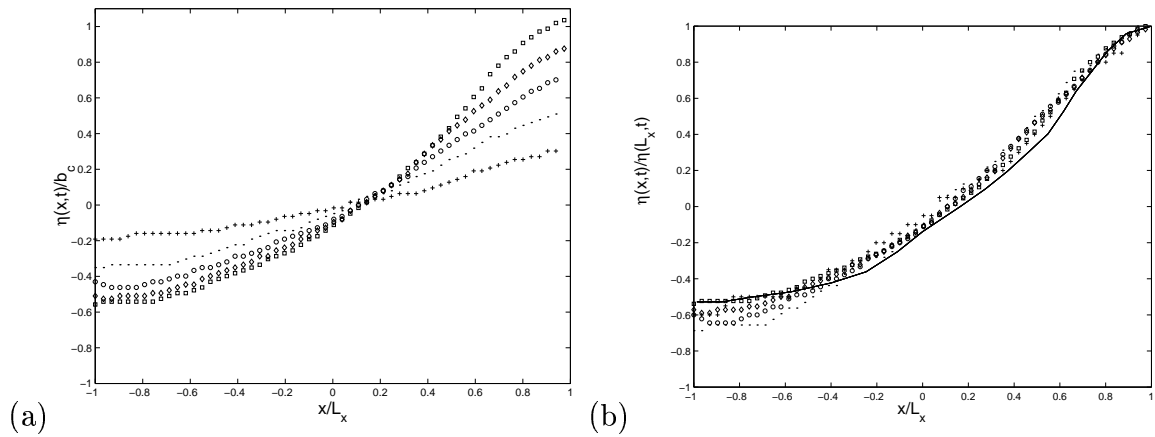


FIG. 3.18 – (a) Forme de l'onde au cours d'une montée du front adimensionnée par  $b_c$ . (b) Forme de l'onde adimensionnée par l'élévation  $\eta(L_x, t)$ . Le temps séparant deux positions successives du front est  $t = 360$  ms. Cuve carrée  $2L_x = 300$  mm,  $\omega/\omega_{11} = 0.99$ .



FIG. 3.19 – Allure typique du profil de l'onde au cours de la redescente du front.

de la cuve carrée.

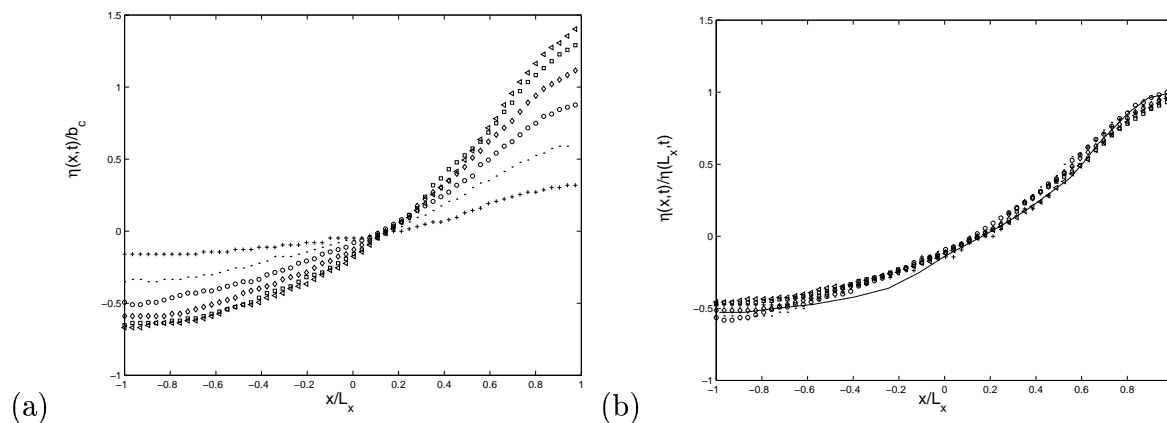


FIG. 3.20 – (a) Forme de l’onde au cours d’une montée du front adimensionalisée par  $b_c$ . (b) Forme de l’onde adimensionnée par l’amplitude au cours d’une montée du front. Le temps séparant deux positions successives du front est de 120 ms. Cuve carrée  $L = 300$  mm en eau  $\omega = 0.99\omega_{11}$ .

Pour des amplitudes supérieures à  $\approx 1.4b_c$ , la forme de la surface libre est altérée suivant le schéma 3.16. Le relevé des profils de l’onde, au quart de la largeur transversale de la cuve (voir les lignes verticales de la figure 3.24), à des périodes successives, montre leur modification progressive à résonance (fig. 3.22). Comme nous l’avons vu précédemment pour  $b \leq b_c$ , la forme du profil de l’onde est bien décrite par Penney et Price en ajustant l’amplitude sur l’altitude maximale atteinte. A partir de la quatrième période  $b = 1.7b_c$ , cet ajustement n’est plus satisfaisant. Comme on peut le voir sur les figures 3.23.a, b et c, la part la plus importante de la masse liquide sature sous un profil de type Penney et Price d’amplitude équivalente  $\approx 1.4b_c$ . Une épaisse nappe liquide se forme à la paroi. Sa croissance, période après période, est alimentée par le surplus d’énergie disponible. L’épaisseur de la nappe est de l’ordre du centimètre. Le dernier profil présenté, fig. 3.23.c, présente une épaisseur de la nappe liquide sensiblement plus élevée, de l’ordre de 3 centimètres. Ce phénomène est à relier à la tridimensionalisation de l’écoulement dans le sens transverse et donc à de fortes variations transversales de l’épaisseur.

La théorie de Penney et Price, reprise par Taylor [54] prévoit une amplitude maximale de  $0.88b_c$ , ce qui est en dessous de la réalité observée.

On remarque que le creux de l’onde sature également.

La modification du profil en cuve cylindrique, observée pour des élévations de l’ordre de  $1.1 - 1.2b_c$ , donc plus faibles que dans le cas du réservoir carré, est sans doute à

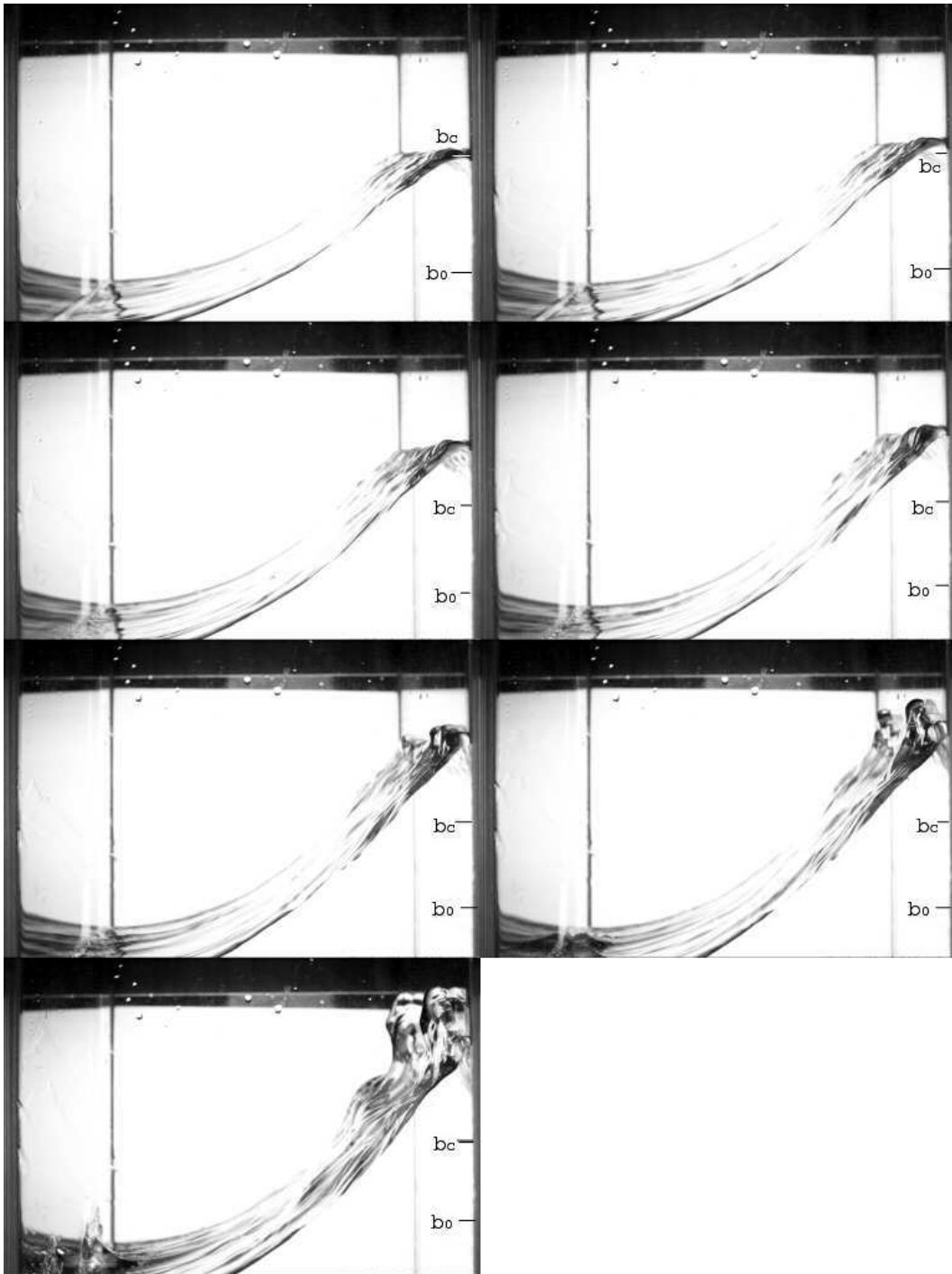


FIG. 3.21 – Vue de côté du profil de l'onde en cuve carrée  $L = 300$  mm à résonance. Le temps séparant deux images est de l'ordre de la période (au déphasage près). La position de l'onde sur chaque image est à son maximum au cours de la période concernée.

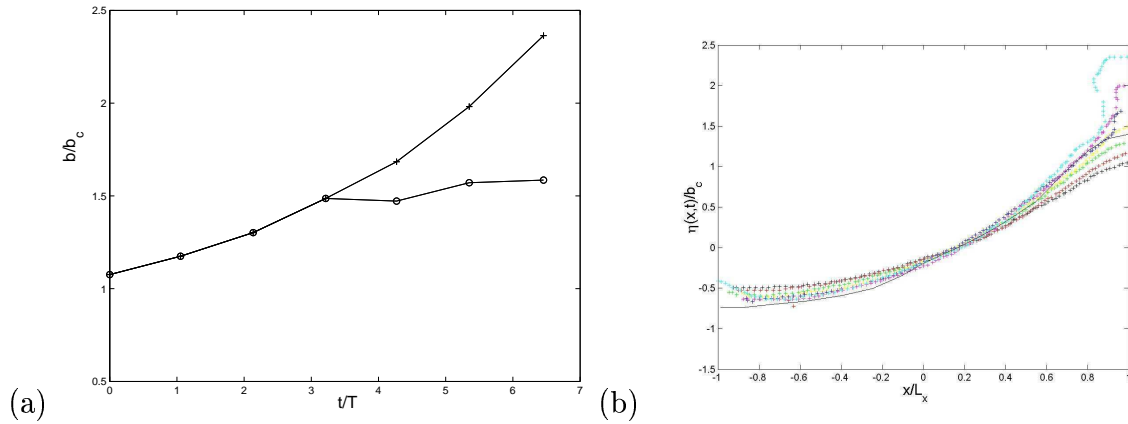


FIG. 3.22 – (a) Croissance des deux hauteurs caractéristiques du profil correspondant aux images de la figure 3.21 (b) Relevé des profils de l’onde aux positions maximales de périodes successives (correspondant aux photographies 3.21). Superposition du profil théorique associé à  $1.4b_c$ .

expliquer par la focalisation de l’onde due à la courbure du réservoir.

Afin de comprendre la modification de la forme de l’onde et la tridimensionnalisation de l’écoulement, nous allons évaluer les accélérations subies par les particules au front de l’onde.

### 3.3.3 Profils temporels d’altitude du front, de vitesse et d’accélération

Pour mesurer l’accélération subie par le front de l’onde au cours d’une montée (quart de période), nous avons réalisé des acquisitions d’images en caméra rapide avec une acquisition à 720 Hz. Les allures successives du front utilisées sont présentées sur la figure 3.24. L’amplitude maximale de l’onde se situe aux alentours de  $b_c$ . Cette amplitude maximale correspond à  $b/\lambda = 0.16$  et, suivant Penney et Price, l’accélération négative est dans ce cas égale à  $g$ . Les accélérations ont été mesurées en deux positions différentes du front, à un quart de longueur et à la moitié de la longueur (voir les lignes verticales sur la figure 3.24). Le front est assez homogène.

Pour réaliser deux dérivations successives de la position du front mesurée expérimentalement, nous avons effectué une moyenne glissante sur  $n$  points sur les données initiales afin de lisser les profils temporels d’altitude et de vitesse. Une comparaison de la taille du filtre utilisé a été réalisée. La figure 3.25 présente les résultats. L’augmentation de la taille du filtre a pour conséquence une diminution des fluctuations sur

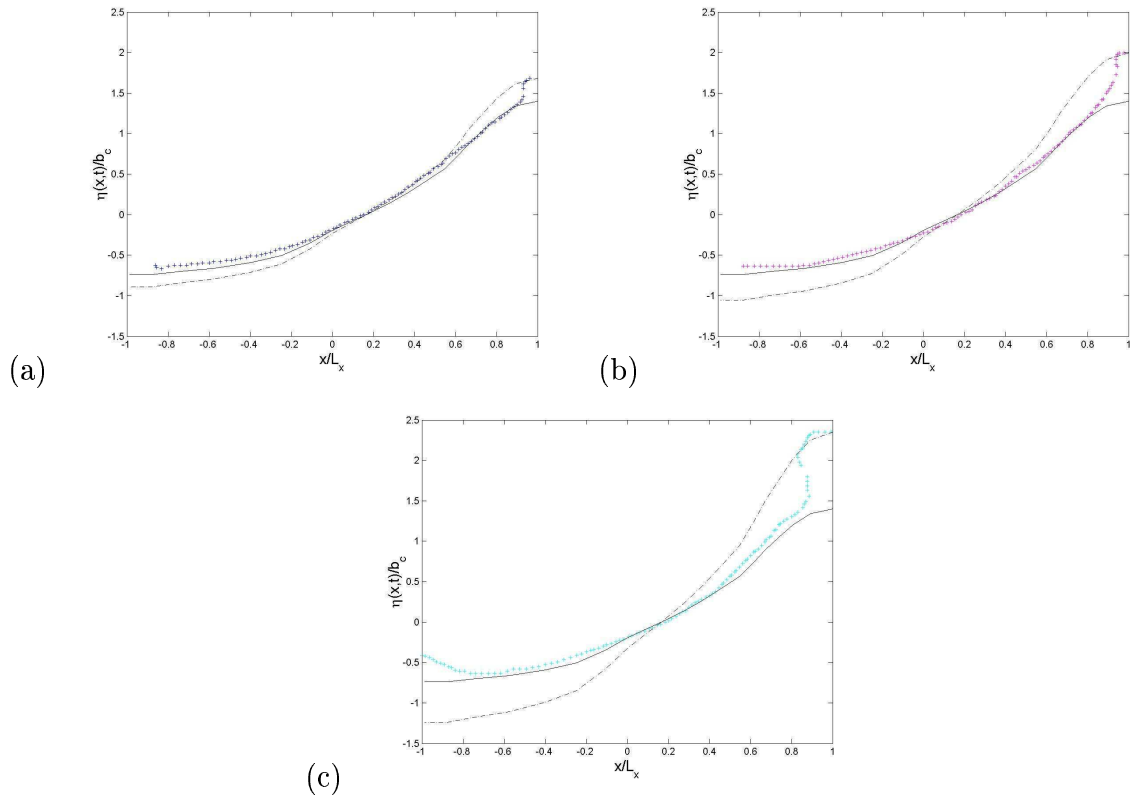


FIG. 3.23 – Relevé du profil de l’onde à sa position maximale (correspondant à la figure 3.22). Superposition des profils théoriques associés à l’amplitude et à l’amplitude du profil de saturation  $b = 1.4b_c$  pour (a), le cinquième profil ; (b), le sixième profil ; (c), le dernier profil. La région hachurée correspond à la nappe liquide.

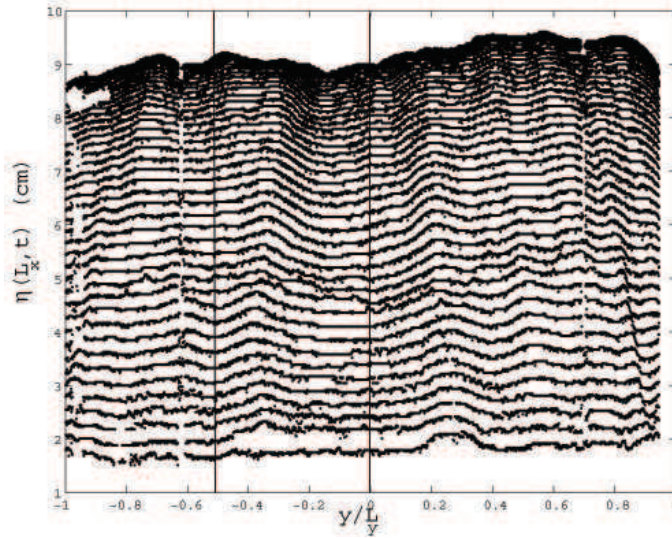


FIG. 3.24 – Positions successives du front sur un quart de période lors de la montée du front en cuve rectangulaire. Les lignes verticales indiquent les abscisses de calcul des profil d'altitude, vitesse et accélération. Cuve carrée  $2L_x = 300$  mm,  $\omega/\omega_{11} = 0.99$ .  $b/b_c \approx 0.9$ .

l'accélération. En revanche les résultats ne sont pas exploitables pour les  $n - 1$  premiers points pour la vitesse et les  $2n - 1$  premiers points pour l'accélération. Le nombre limité de points de mesure n'a pas permis d'atteindre exactement la convergence de l'accélération et la taille du filtre utilisé représente une part importante de la longueur du signal (21%). Les résultats sont cependant exploitables.

En effet, les expressions théoriques ajustées sur l'amplitude expérimentale mesurée, de l'altitude, de la vitesse et de l'accélération obtenues, par exemple, des oscillateurs<sup>3</sup> concordent avec les résultats expérimentaux au-delà de  $t/T \approx 0.05$  pour la vitesse et au-delà de  $t/T \approx 0.1$  pour l'accélération. (fig. 3.26). Par ailleurs, on observe que ces profils temporels d'altitude, de vitesse et d'altitude ne dépendent pas de l'abscisse du front pour laquelle les mesures sont réalisées. Toute particule fluide du front subit même vitesse et même accélération.

Nous avons renouvelé les mesures deux périodes plus tard. L'allure des profils successifs utilisés est présentée sur la figure 3.27. L'amplitude maximale de l'onde se situe aux alentours de  $1.5b_c$ . Le front est déjà très perturbé. Les accélérations ont été mesurées en deux positions différentes du front, à un maximum et à un minimum (voir les lignes verticales sur la figure 3.27).

<sup>3</sup>On a  $\eta = b\sin(\omega t)$ ;  $v = b\omega\cos(\omega t)$  et  $a = -b\omega^2\sin(\omega t)$

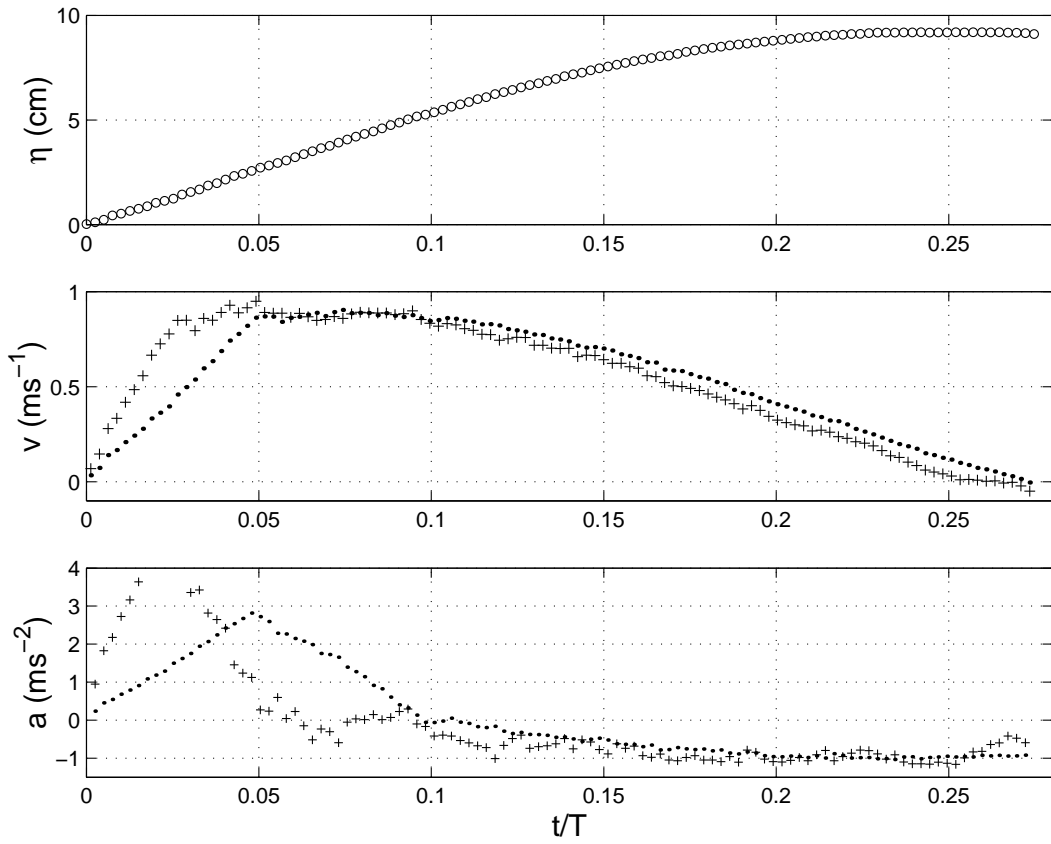


FIG. 3.25 – Influence de la taille du filtre sur le calcul de vitesse et d'accélération du front. +, moyenne glissante sur 10 points; ;, moyenne glissante sur 20 points.  $b/b_c \approx 0.9$ .

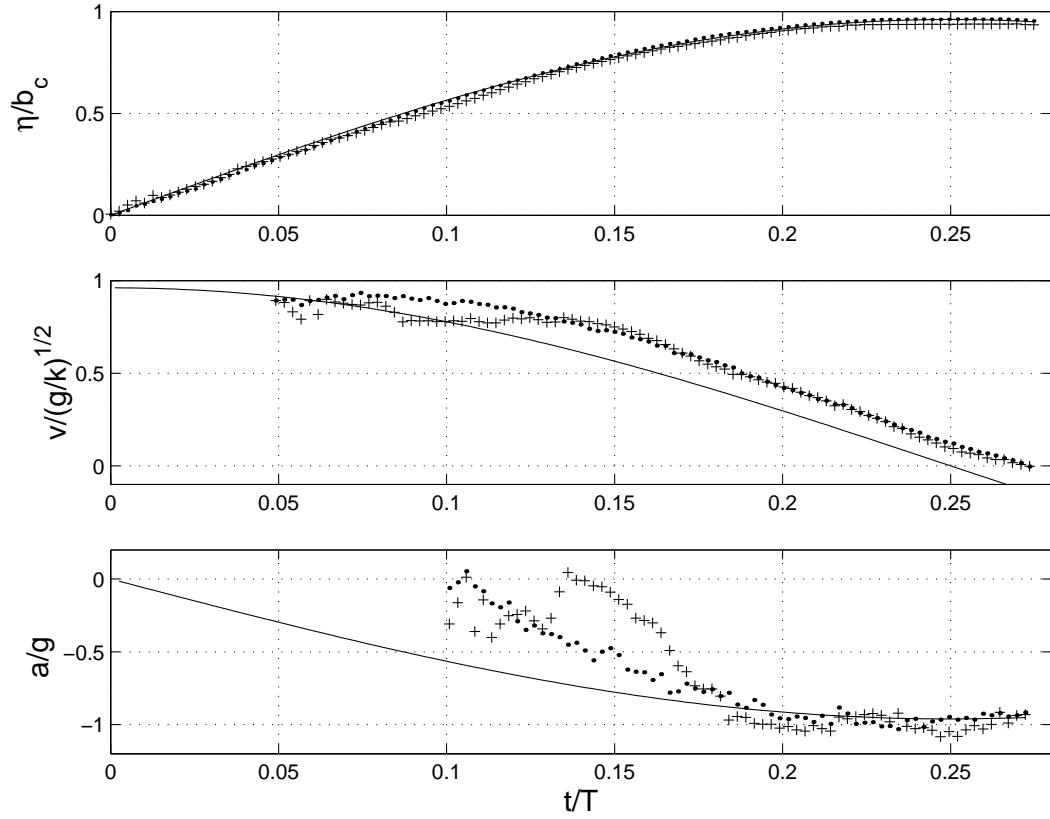


FIG. 3.26 – Comparaison de la position, de la vitesse et de l'accélération suivant la position en  $y$  le long du front. +, profils temporels d'altitude, vitesse et accélération à  $y = L_y/2$ ; •,  $y = L_y$ ; –, profils temporels théoriques ajustés sur l'amplitude expérimentale.  $b/b_c = 0.9$ . Moyenne glissante sur 20 points.



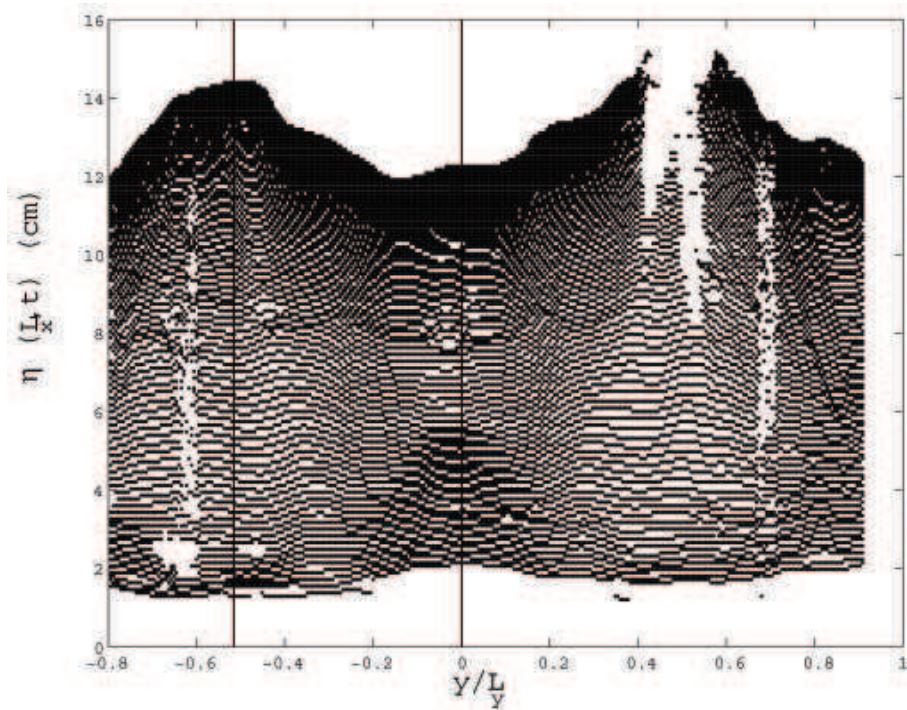


FIG. 3.27 – Positions successives en vue de face du front de l'onde. Temps entre deux positions successives  $t = 3.125$  ms.  $b/b_c \approx 1.5$ .

Deux choses intéressantes sont à observer concernant les résultats de profils temporels de vitesse et d'accélération :

- le point du front d'altitude maximale a une vitesse supérieure au point du front d'altitude minimale mais les accélérations sont sensiblement équivalentes. Les gradients de vitesse latéraux sont cohérents avec les gradients d'altitude atteinte,
- l'accélération semble saturer à  $1.1g$  et reste en-deçà des valeurs théoriques attendues  $a = b\omega^2$  dans le cas linéaire.

Un profil de l'onde de type Penney et Price ne peut être conservé qu'à condition que l'accélération suive l'expression  $a \approx b\omega^2$ . Dans le cas présenté ici, nous atteignons une élévation maximale de  $1.5b_c$ , ce qui devrait correspondre, suivant la théorie linéaire, à des niveaux d'accélération de  $1.5g$ . Hors, nous ne mesurons des accélérations seulement de l'ordre de  $1.1g$ , inférieures donc à la valeur "théorique". Le profil de l'onde doit donc logiquement être modifié, sinon l'onde ne pourrait conserver sa fréquence, suivre le forçage. Nous nous attendons par ailleurs à observer un retard de la nappe liquide sur l'onde. En effet le nappe liquide ne peut descendre à des accélérations nettement supérieures à la gravité puisqu'aucun gradient vertical n'existe.

### 3.3.4 Taux de croissance à la résonance

Après avoir détaillé l'évolution des profils longitudinaux de l'onde et des profils temporels de vitesse et d'accélération, nous nous intéressons à la croissance de l'amplitude de l'onde à résonance. La figure 3.29 donne la croissance de l'amplitude de l'onde mesurée à 4 mm de la paroi. Le forçage est initialement de  $\omega = 0.92\omega_{11}$  puis augmenté à  $\omega = 0.93\omega_{11}$ .

On observe que la croissance de l'onde est, avec une bonne approximation, linéaire en temps. Cela correspond aux prévisions données par analogie avec la théorie linéaire des oscillateurs forcés. On écrit :

$$b = b_i + \alpha t \tag{3.10}$$

Le taux de croissance de l'amplitude  $\alpha$  peut également être estimé. Il est directement proportionnel à l'amplitude d'excitation  $A_f$  si l'amortissement est faible, c'est-à-dire  $\kappa \ll \omega_{11}$ . Les expériences de ballotement s'insèrent dans ce cadre (on a  $\kappa \approx \omega_{11}/100$ ). L'équation (1.21) donne un taux de croissance de l'amplitude sous la forme :

$$\alpha = \frac{f}{2m\omega_0} \tag{3.11}$$

Comme dans le cas des oscillations forcées, on écrit l'amplitude de la force d'excitation sous la forme  $f = m_f A_f \omega^2$  où  $A_f$  est l'amplitude du déplacement et  $m_f$  la masse

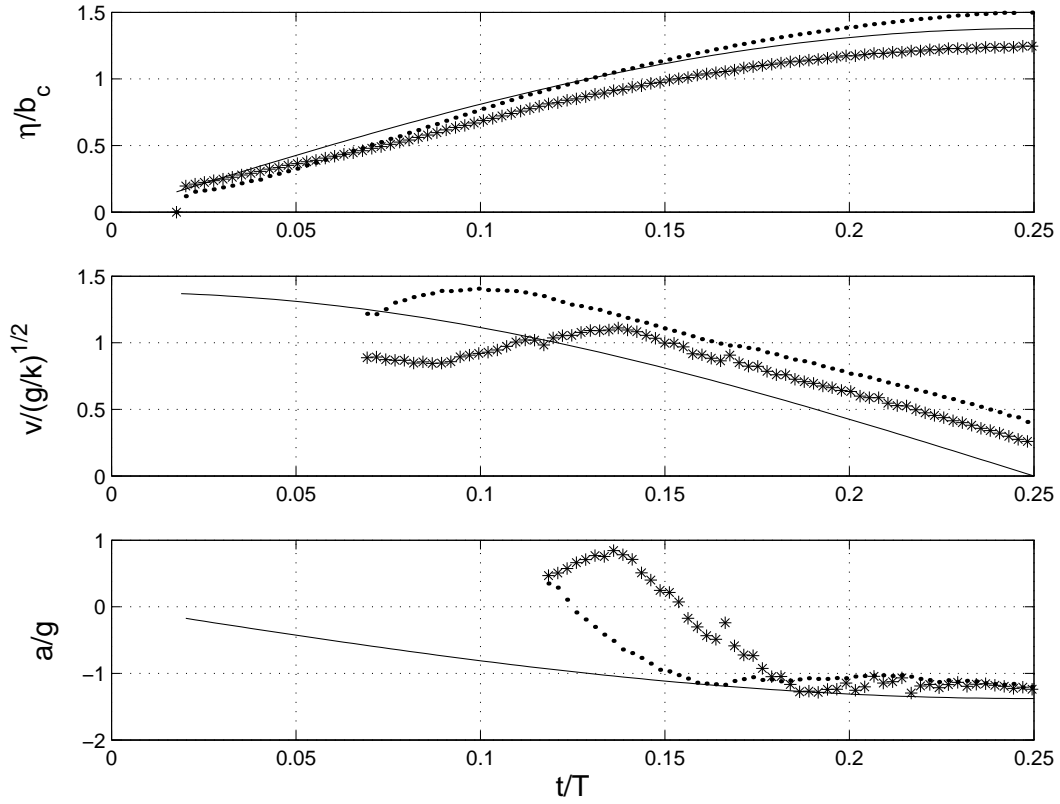


FIG. 3.28 – Variation des profils temporels d'altitude, de vitesse et d'accélération en fonction de l'abscisse le long du front. \*, profils temporels à  $x \approx L/2$ ; •, profils temporels à  $x = L/4$ .  $b/b_c \approx 1.5$ .

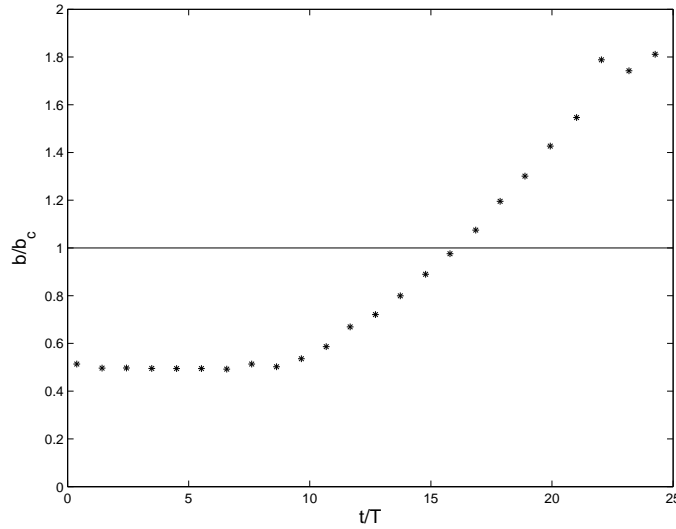


FIG. 3.29 – Amplitude maximale de l’onde à 4 mm de la paroi en fonction du temps  $t^* = t/T$ . Jusqu’à  $t^* < 9$  le forçage est  $\omega = 0.92\omega_{11}$ . Puis le forçage est augmenté brusquement à  $\omega = 0.93\omega_{11}$ . La ligne horizontale correspond à  $b_c$ . Cuve cylindrique en verre de diamètre  $d = 156$  mm remplie d’eau.  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-2}$ .

effectivement mise en mouvement (loi de Newton). On obtient alors

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{m_f \omega^2}{m \omega_0} A_f \approx \frac{1}{2} \frac{m_f}{m} \omega_0 A_f \quad (3.12)$$

Le tableau 3.2 donne les valeurs de la croissance linéaire de l’amplitude pour les deux cas proposés en variable adimensionnelle. On définit le taux de croissance comme :

$$\frac{b}{b_c} = \frac{b_i}{b_c} + \Upsilon \frac{t}{T} \quad (3.13)$$

$$\text{avec } \Upsilon = \alpha t/b_c = \pi \frac{m_f}{m} A_f k \quad (3.14)$$

Lorsque l’amplitude initiale est nulle, deux valeurs peuvent être obtenues à partir de l’ajustement de l’amplitude, la croissance la plus forte étant observée au début de l’expérience. Lorsque le système est stationnaire avec une amplitude finie, on observe une croissance qui se trouve être du même ordre de grandeur que la croissance finale de la première expérience.

Par analogie à l’expression théorique 3.14, on déduit le rapport  $m_e = m_f/m$ . Les résultats figurent en tableau 3.2.  $m$  représente la masse de l’oscillateur et  $m_f$  la masse effectivement forcée. Au démarrage, ce rapport est supérieur à 1 et, au cours de la croissance, ce rapport diminue autour de 0.6. On rappelle que, dans le cas du mode forcé,

	$b_i = 0$ 1 <sup>ère</sup> partie	$b_i = 0$ 2 <sup>ème</sup> partie	$b_i = 0.5b_c$
$\Upsilon$	$0.167 \pm 0.002$	$0.086 \pm 0.004$	$0.072 \pm 0.03$
$m_e = m_f/m$	1.2	0.6	0.6

TAB. 3.2 – Taux de croissance de l’amplitude à résonance pour deux conditions initiales différentes.

l’ajustement des expériences sur l’amplitude théorique donne  $m_e = 2$ . L’interprétation reste délicate mais on pourrait comprendre ce résultat en estimant qu’au démarrage toute la masse est mise en mouvement par l’excitation mais de façon non homogène <sup>(4)</sup>. En revanche, plus tard, quand ce rapport devient inférieur à 1, seule une proportion de la masse de liquide est impliquée dans le forçage ou la mise en mouvement du liquide. Ceci est à mettre en relation avec la masse de liquide qui sature à  $h_1$ .

**Taux de croissance pour différentes valeurs de  $\omega/\omega_{11}$**  Nous avons examiné le taux de croissance et l’amplitude atteinte lorsque la cuve est mise en mouvement à des valeurs de  $\omega$  proches de la résonance à partir du repos. L’amplitude de forçage est  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-2}$  et les fréquences varient entre  $0.93\omega_{11}$  et  $1.02\omega_{11}$ . A chaque fois, le déferlement est observé après une phase de croissance de l’amplitude de l’onde comme décrit précédemment. Les résultats sont reportés sur la figure 3.30.

$\omega$	$0.99\omega_{11}$	$0.95\omega_{11}$	$0.92\omega_{11}$	$0.90\omega_{11}$
$\Upsilon$	$0.186 \pm 0.001$	$0.200 \pm 0.006$	$0.181 \pm 0.004$	$0.133 \pm 0.001$

TAB. 3.3 – Taux de croissance de l’amplitude à résonance. Cas d’un démarrage au repos pour différentes fréquences de forçage.

On observe que le taux de croissance est sensiblement le même jusqu’à  $b_c$  pour toutes les fréquence de forçage (voir tableau 3.30). En revanche l’amplitude maximale atteinte dépend fortement de  $\omega$  (voir figure 3.30). A  $\omega = 0.99\omega_{11}$ , le déferlement a lieu pour  $b \approx b_c$  alors que pour  $\omega = 0.90\omega_{11}$  il est retardé jusqu’à  $b \approx 1.7b_c$ . On peut supposer que la croissance étant ralentie pour des fréquences d’excitation plus éloignées de la fréquence de forçage, les perturbations seront plus limitées ; les phénomènes en jeu dans le déferlement apparaîtront donc vraisemblablement plus tard (voir chap 5). Les taux de croissance avec un départ depuis un état stationnaire d’amplitude non nulle ont été mesurés pour des fréquences de forçage initiale différentes, le déferlement étant dans tous les cas atteint pour  $\omega = 0.92\omega_{11}$ . Les résultats sont reportés dans le tableau

<sup>4</sup>Ce qui pourrait justifier un rapport plus grand que 1.

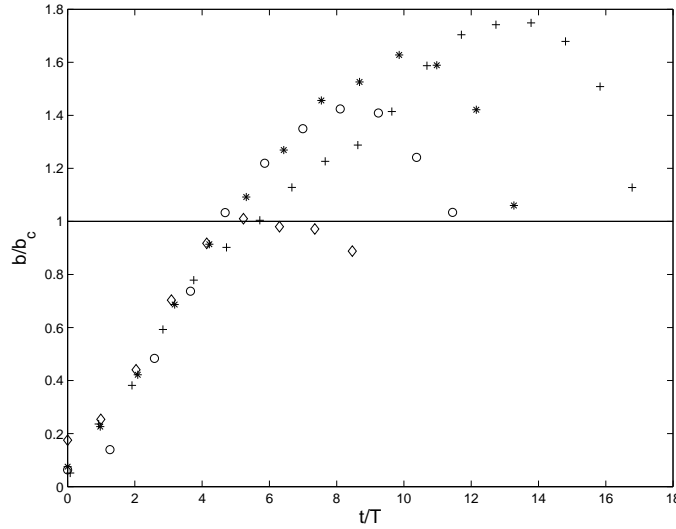


FIG. 3.30 – Croissance de l’onde à résonance avec un démarrage du forçage depuis la position au repos pour des fréquences d’excitation différentes.  $\diamond$ ,  $\omega = 0.99\omega_{11}$  ;  $\circ$ ,  $\omega = 0.95\omega_{11}$  ;  $*$ ,  $\omega = 0.92\omega_{11}$  ;  $+$ ,  $\omega = 0.90\omega_{11}$ .  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-2}$ .

3.4. Les fluctuations ne permettent pas de conclure quant à une variation du taux de croissance avec la fréquence de forçage initiale. On peut supposer que ces fluctuations sont dues à la façon dont le saut de fréquence est opéré <sup>5</sup>. En revanche, le taux de croissance est plus important dans le cas d’un départ depuis l’état au repos.

$\omega_{ini}$	$0.79\omega_{11}$	$0.88\omega_{11}$	$0.91\omega_{11}$
$\Upsilon$	0.042	0.063	0.081
	0.113	0.072	0.061
	0.058		0.099

TAB. 3.4 – Taux de croissance de l’amplitude à résonance. Cas d’un démarrage depuis un état stationnaire pour différentes fréquences de forçage initiale. Déferlement atteint à  $\omega = 0.92\omega_{11}$ .

En conclusion, la croissance de l’amplitude juste en dessous de la résonance (non-linéarité négative) jusqu’à la brisure est pratiquement linéaire et s’écrit :

$$\frac{\Delta(b/R)}{\Delta(t/T)} = C\pi \frac{A_f}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.15)$$

<sup>5</sup>La fréquence est ajustée à l’aide d’un potentiomètre et le temps nécessaire pour réaliser le  $\Delta\omega$  est imposé par l’opérateur et reste donc fortement variable.

où  $C \approx 1$  dépend de la façon dont le forçage à résonance est opéré pour atteindre le déferlement,  $0.3 < C < 1.5$ .

### 3.3.5 Evolution de la phase

On s'intéresse à présent à l'évolution du déphasage entre la consigne et l'onde au cours de la croissance à résonance. Une série temporelle typique de l'amplitude de l'onde et du forçage imposé obtenue dans le cas d'un départ depuis un état stationnaire d'amplitude faible est présentée par la figure 3.31. La mesure de la phase correspondante est donnée en figure 3.32.

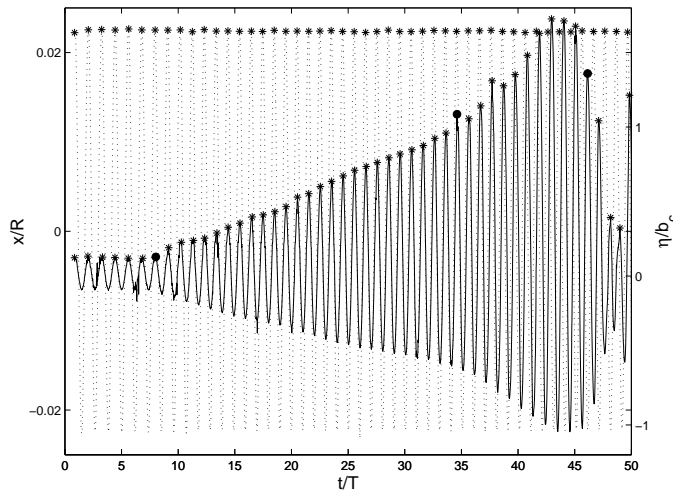


FIG. 3.31 – Croissance de l'amplitude de l'onde en fonction du temps adimensionnel  $t/T$ . Départ de l'état stationnaire à  $\omega = 0.89\omega_{11}$  puis augmentation de la fréquence d'excitation à  $\omega = 0.92\omega_{11}$  pour atteindre le déferlement. Trait plein continu, amplitude de l'onde mesurée par une sonde capacitive; trait pointillés, consigne (position de la table oscillante); ●, instants respectifs où la fréquence est augmentée, où l'amplitude critique  $b_c$  est atteinte et où le déferlement a lieu.  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-2}$ .

Initialement, à l'état stationnaire, la réponse est en phase avec l'excitation ( $\omega < \omega_{11}$  comme on l'a vu au paragraphe 3.1). Lorsque la fréquence de forçage est augmentée et que l'amplitude de l'onde croît, le déphasage évolue dans un premier temps très peu. En revanche, lorsque l'amplitude atteint l'amplitude critique  $b_c$  à  $t/T = 20$ , on observe une chute soudaine de la phase. Et lorsque  $b$  dépasse  $b_c$ , le système retarde de plus en plus sur la consigne jusqu'à être en opposition de phase sur celle-ci quand le déferlement a lieu. Ce même retard peut être observé sur le graphique 3.22. La modification de la forme du profil de l'onde est certainement à l'origine de cette évolution de la phase.

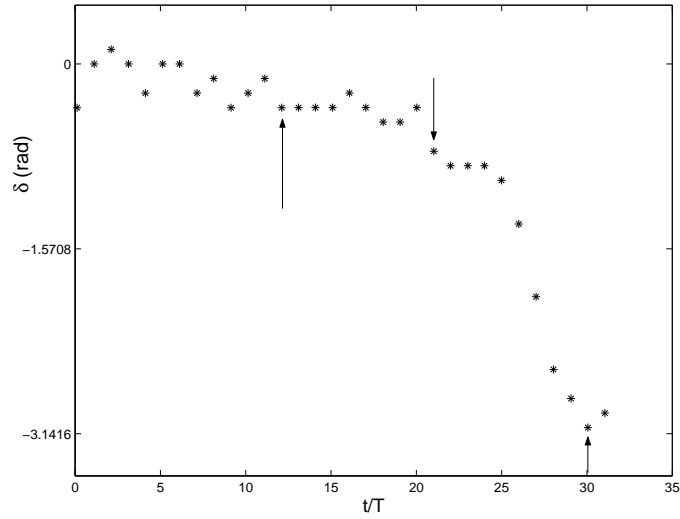


FIG. 3.32 – Evolution de la phase mesurée à partir des signaux temporels de la figure 3.31. Les flèches verticales correspondent respectivement aux instants où la fréquence est augmentée, l'amplitude critique  $b_c$  est atteinte et où le déferlement a lieu.

Par ailleurs, lorsque le déphasage est trop important, le système s'effondre, l'amplitude diminue soudainement.

### En résumé

- la résonance est atteinte pour  $\omega \approx \omega_{11}$ ,  $\omega < \omega_{11}$  en raison de la non-linéarité négative du mode antisymétrique 1 lorsque  $h/R > 1$ ,
- l'amplitude de l'onde croît linéairement en temps avec

$$\frac{\Delta(b/R)}{\Delta(t/T)} = C\pi \frac{A_f}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.16)$$

- la déphasage évolue de 0 à  $-\pi/2$  au cours de la brisure,
- l'accélération maximale subie par le front sature à  $\approx 1.1g$ ,
- le profil de l'onde sature à un profil théorique d'amplitude équivalente  $\approx 1.4b_c$  en cuve carrée. L'écoulement devient tridimensionnel et le surplus d'énergie à chaque cycle est stocké dans l'énergie potentielle d'une masse de fluide à la paroi d'altitude supérieure à l'amplitude équivalente du profil de saturation proposée, croissant à chaque cycle et de masse chaque fois plus importante.



## 3.4 Amortissement libre

On s'intéresse dans cette partie de façon détaillée à la valeur du coefficient d'amortissement du mouvement d'onde. Une méthode pour mesurer ce coefficient consiste à mesurer le temps de stabilisation du mode pour une fréquence qui n'est pas celle du mode propre, comme étudié au paragraphe 3.2. Une deuxième méthode consiste lors de l'arrêt brusque de l'excitation, à mesurer le temps de décroissance dès que le système se recalcule sur sa fréquence de résonance. C'est cette méthode expérimentale que nous utiliserons dans cette partie après avoir défini au préalable l'ensemble des conventions nécessaires.

### 3.4.1 Définitions utilisées et contexte bibliographique

L'amortissement décrit qu'une certaine quantité d'énergie est dissipée au cours des oscillations du fluide. S'il n'y a aucun apport d'énergie extérieure (mode libre), l'amplitude des oscillations décroît. Les sources de dissipation des ondes dans les canaux de grande dimension horizontale sont (Lighthill [32]) :

- le frottement sur le fond proportionnel à  $\delta_S/h$  où  $\delta_S = (\nu/\omega)^{1/2}$  est l'épaisseur de la couche limite de Stokes,
- la dissipation interne liée aux contraintes visqueuses proportionnelle à  $8\pi\nu k^2/\omega$ ,
- la dissipation de surface avec le gaz.

On définit un décrement logarithmique  $\Gamma$  indépendant de l'oscillation considérée :

$$\Gamma = \ln \frac{\text{Amplitude d'une oscillation}}{\text{Amplitude 1 cycle plus tard}} \quad (3.17)$$

En supposant que l'énergie totale d'une onde est proportionnelle au carré de l'amplitude, on a :

$$\Gamma = \ln \left( \frac{\text{Energie d'1 cycle}}{\text{Energie 1 cycle plus tard}} \right)^{1/2} \approx \frac{\Delta E}{2E}, \quad \text{si } \Delta E \ll E \quad (3.18)$$

Miles [38] montre que l'on peut écrire :

$$\gamma = -\frac{d\bar{E}/dt}{2\omega\bar{E}} \quad (3.19)$$

où  $d\bar{E}/dt$   $2\pi/\omega$  représente l'énergie perdue au cours d'une période  $T = 2\pi/\omega$ . La correspondance entre  $\Gamma$  et  $\gamma$  est obtenue de  $\Delta E = T d\bar{E}/dt$ , d'où  $\gamma = \Gamma/2\pi$ . La décroissance de l'énergie de l'onde  $E = m\omega_{11}k^2/2$  est donc exponentielle en  $2\gamma\omega t$  :

$$E = E_0 e^{-2\gamma\omega_{11}t}, \quad (3.20)$$

où  $\omega_{11}\gamma$  correspond à  $\kappa$  de l'équation différentielle régissant un oscillateur amorti. Une expression pour  $\gamma\omega_{11}$ , pour les ondes dans un réservoir en eaux profondes ( $h/R > 1$ ), est donnée par Miles ([38]) et Silverman et Abramson ([52]) sous la forme  $\gamma = C\nu^{1/2}R^{-3/4}g^{-1/4}$ , avec  $C$  de l'ordre de 1 déterminé par les expériences. Lorsqu'on exprime  $g$  en fonction de  $\omega_{11} = (1.841g/R)^{1/2}$ , on obtient l'expression suivante :

$$\gamma\omega_{11} = C1.841^{1/4} \frac{\nu}{R^2 (\nu/\omega_{11})^{1/2}}, \quad (3.21)$$

Cette relation montre clairement que le temps caractéristique d'amortissement  $(\gamma\omega)^{-1}$  est proportionnel au temps visqueux  $R^2/\nu$  multiplié par le rapport de  $\delta_S/R$ . Pour des faibles profondeurs ( $h/R < 1$ ) Mikishev [36] propose la relation suivante :

$$\gamma = C\nu^{1/2}R^{-3/4}g^{-1/4} \left[ 1 + \frac{0.318}{\sinh(1.84\frac{h}{R})} \left( \frac{1 - \frac{h}{R}}{\cosh(1.84\frac{h}{R})} + 1 \right) \right], \quad (3.22)$$

### 3.4.2 Résultats expérimentaux en eau profonde

Les figures 3.33 et 3.34 montrent des exemples typiques de la variation de l'amplitude de l'onde en fonction du temps au droit de la sonde (4 mm de la paroi) lorsque le forçage est soudainement stoppé. On remarque que lorsque le mouvement d'onde est généré par un forçage tel que  $\omega < \omega_{11}$ , l'oscillation se poursuit à l'amplitude initiale  $b_i$  pendant environ trois périodes et décroît ensuite soudainement à  $b_f$  (fig.3.33). A l'inverse, lorsque  $\omega > \omega_{11}$ , l'amplitude croît soudainement après trois périodes (fig.3.34). Le rapport entre énergie cinétique et énergie potentielle est conservé, en conséquence le rapport des amplitudes  $b_f/b_i$  est égal au carré du rapport des fréquences (voir tableau 3.5).

$b_i/b_f$	$\omega_{11}/\omega$	$(\omega_{11}/\omega)^2$
1.72	1.21	1.46
0.72	0.82	0.67
1.62	1.20	1.44
0.72	0.83	0.70
0.77	0.82	0.68
1.56	1.22	1.49
0.73	0.84	0.71
0.68	0.82	0.67

TAB. 3.5 – Comparaison entre le rapport des amplitudes d'onde et le rapport des fréquences lorsque le forçage est brusquement arrêté.

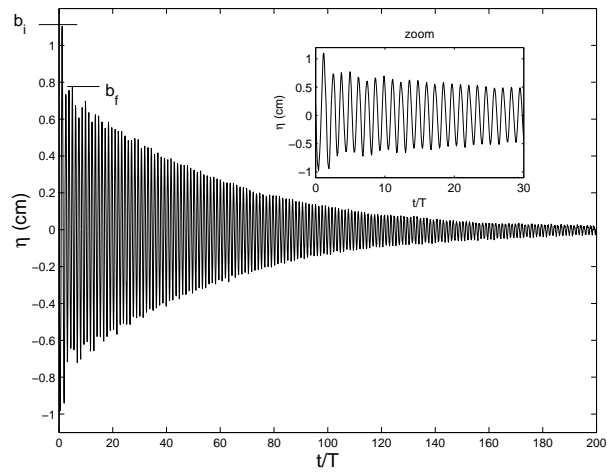


FIG. 3.33 – Comportement de l'amplitude de l'onde, mesurée par une sonde capacitive, en fonction du temps après arrêt brusque du forçage.  $\omega_f = 0.81\omega_{11}$ .

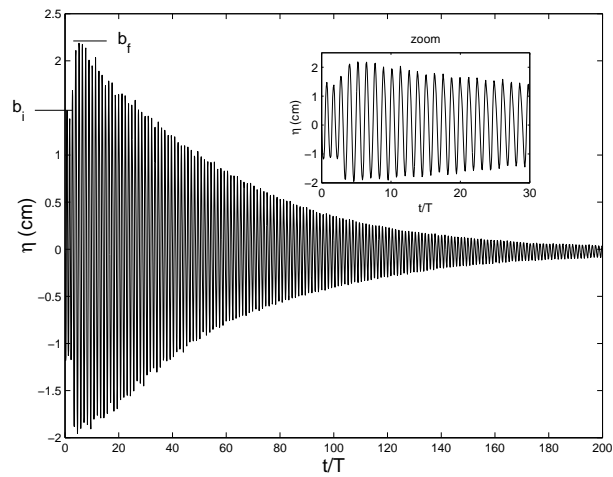


FIG. 3.34 – Comportement de l'amplitude de l'onde, mesurée par une sonde capacitive, en fonction du temps après arrêt brusque du forçage.  $\omega_f = 1.21\omega_{11}$ .

Le coefficient d'amortissement est calculé par extraction de l'enveloppe des séries temporelles. Le logarithme de l'enveloppe est alors considéré. La décroissance est ajustée par une méthode des moindres carrés. Cette méthode possède quelques limitations. En effet, en présence d'un signal composé de nombreuses fréquences, la moyenne faite à partir des points ne donne pas l'estimation de la décroissance d'un mode mais du mode le plus énergétique. Cependant le problème ne se pose pas ou peu étant donné que le mode 1 est dominant, on mesure donc ici toujours la décroissance du mode 1. La décroissance plus rapide peut s'expliquer par le transfert d'énergie entre le mode 1 dominant et d'autres modes plus rapides.

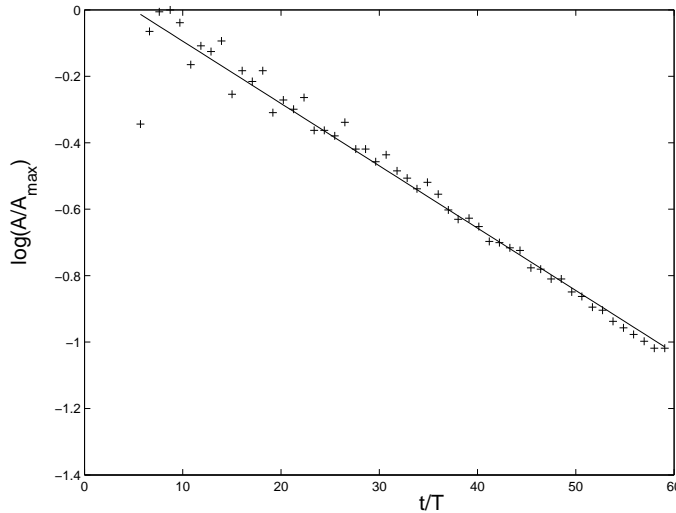


FIG. 3.35 – Décroissance de l'énergie de l'onde en fonction de  $t/T$ .

Pour calculer le coefficient d'amortissement, on impose un seuil minimale de 2 mm pour l'amplitude de l'onde, pour rester dans une gamme de mesures satisfaisantes pour la sonde capacitive. La valeur expérimentale du taux d'amortissement est  $\gamma\omega \approx 3.5 \cdot 10^{-2}$ . Cela correspond à  $C \approx 1.36$  de l'expression (3.21). Cette valeur est plus élevée que  $C \approx 0.83$  citée par Silverman et Abramson [52] (ce qui correspond à  $\gamma\omega \approx 2.1 \cdot 10^{-2}$ ). Le coefficient d'amortissement, calculé par décroissance du mode propre pour un forçage hors résonance, est nettement supérieur à celui mesuré pour un amortissement libre.

### 3.4.3 Amortissement en eau peu profonde

L'expression proposée,  $\gamma \approx 0.8\nu^{1/2}R^{-3/4}g^{-1/4}$ , n'est valable que pour de fortes profondeurs. Des expériences ont été réalisées en eau et en alcool à des taux de remplissage variables. Les résultats sont donnés par la figure (3.36). L'expression de la dépendance

du coefficient d'amortissement en fonction de la profondeur de liquide, en bon accord avec les expériences, est :

$$\gamma = \gamma_{prof} \tanh\left(1.84\frac{h}{R}\right)^{-1/2} \left(1 + 0.9\frac{1}{\sinh(1.84\frac{h}{R})}\right) \quad (3.23)$$

$$\gamma_{prof} = 1.36\frac{\nu^{1/2}}{R^{3/4}g^{1/4}}$$

Les expériences montrent une large dispersion du coefficient d'amortissement. Ceci ne peut être dû à des erreurs de mesure puisque des expériences de calibration ont montré que les sondes capacitatives peuvent être utilisées pour mesurer des variations de hauteur de 3 mm avec une précision supérieure à 10%. Les conditions d'angle de contact dynamique qui peuvent affecter l'amortissement, en particulier pour de faibles amplitudes de ballonnement, et la présence d'une composante de mode tournant peuvent être en partie responsables de la dispersion du facteur d'amortissement.

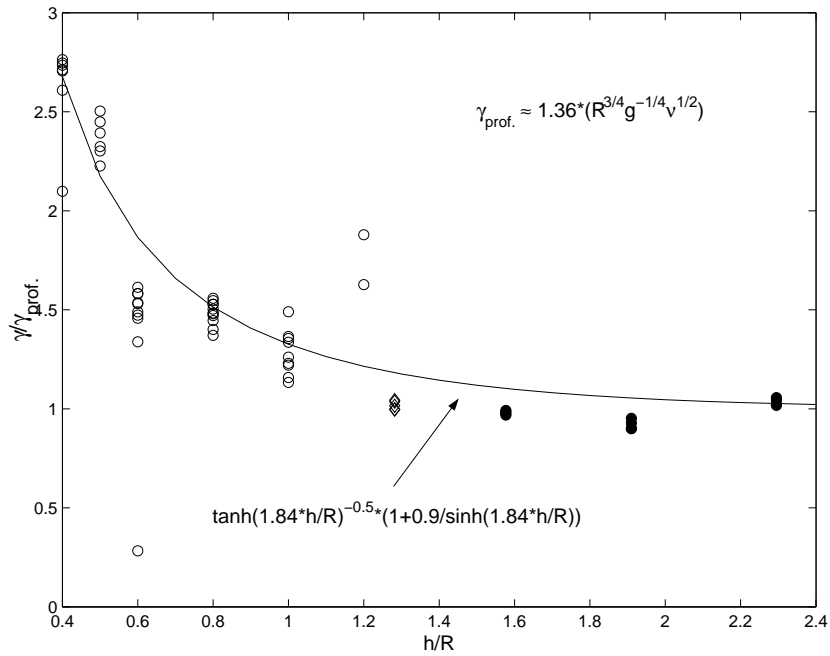


FIG. 3.36 – Coefficient d'amortissement en fonction de la profondeur : ●, Eau dans un réservoir de diamètre  $R = 78$  mm ; ◇, Alcool,  $R = 78$  mm ; ○, Eau  $R = 150$  mm.

# Chapitre 4

## Mode tournant

Au voisinage de la fréquence propre du premier mode antisymétrique, lorsque la fréquence de forçage est augmentée, le premier mode antisymétrique bifurque soudainement vers un mode tournant <sup>1</sup>. Ce dernier entraîne la mise en rotation du liquide et reste stable pour une large gamme de fréquence et pour des amplitudes étonnamment élevées.

### 4.1 Existence du mode tournant

On rappelle que Miles obtient l'existence du mode tournant comme le couplage non-linéaire des premiers modes antisymétriques de diamètre nodal tourné de  $\pi/2$  l'un par rapport à l'autre. En utilisant son expression pour la fréquence propre non-linéaire du mode tournant (1.38) et en calculant la moyenne quadratique  $\bar{\eta}^2$ , on a pour un mode tournant, en cuve cylindrique ou carrée, dans le cas des grandes profondeurs, cadre qui nous intéresse ici :

$$\frac{\omega_{tn1}}{\omega_{11}} \approx 1 + 0.05 \frac{b^2}{\lambda^2} \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Allure du mode tournant

La figure 4.1 présente une série typique de vues du mode tournant en cuve cylindrique ( $R = 78$  mm) au cours d'une période pour une amplitude d'onde environ égale à  $1.1b_c$ . Le mode tournant est une onde plane qui se propage dans la direction azimutale. Le sens de rotation est indéterminé a priori et nous avons pu observer avec une probabilité comparable des ondes se propageant dans le sens trigonométrique comme

---

<sup>1</sup>Voir le chapitre 1 pour une revue détaillée des résultats expérimentaux et théoriques issus de la littérature.

dans le sens opposé. L'histoire de l'apparition du mode, les imperfections du forçage ou celles de la cuve sont des éléments déterminants du sens de l'onde mais restent mal contrôlées. Le profil de l'onde reste inchangé au cours de la propagation. Il semble que la forme de l'onde soit globalement peu modifiée par rapport au cas du mode antisymétrique 1. Malgré de légères perturbations de la crête de l'onde, le mode est stable, aucune brisure n'a lieu.

Dans le cas de la cuve carrée de côté  $2L$ , le mode tournant existe également. Des vues typiques du mode tournant en cuve carrée sont présentées en figure 4.2. La rotation de l'onde est, dans ce cas, moins bien définie qu'en cuve cylindrique. En effet, dans la direction de la diagonale, la longueur caractéristique est augmentée ( $\sqrt{2} 2L$ ). Cette discontinuité (de longueur et donc de fréquence propre) a pour conséquence une tendance à une stagnation momentanée de l'onde dans les angles avant que la rotation ne se poursuive. Par ailleurs, la crête de l'onde apparaît moins stable.

### 4.1.2 Domaine d'existence

Les limites du domaine d'existence du mode tournant dépendent à la fois de l'amplitude et de la fréquence de forçage. Elles sont déterminées expérimentalement en fixant l'amplitude de forçage et en augmentant pas à pas la fréquence d'excitation. Les essais sont réalisés en cuve cylindrique en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm et en cuve cylindrique en verre de rayon  $R = 78$  mm et reportés sur la figure 4.3.

On rappelle qu'il existe une gamme de fréquences pour lesquelles le régime est chaotique (zone hachurée de la fig. 4.3). Au delà de ces fréquences, le mode tournant apparaît.

Le mode tournant, une fois établi, peut être maintenu jusqu'à des fréquences largement supérieures à la fréquence de résonance du mode 1 (voir fig.4.6). Le mode tournant a toutes les caractéristiques d'un oscillateur non-linéaire avec une non-linéarité positive. Ainsi lorsque l'amplitude de l'onde augmente, la fréquence de résonance non-linéaire augmente  $\omega_r = \omega_{11} + \chi b^2$  avec  $\chi > 0$ . Pour autant, cela ne suffit pas à expliquer la persistance du mode tournant pour des fréquences largement supérieures à la fréquence de résonance, jusqu'à  $1.3\omega_{11}$ . En effet, d'après Miles,  $\chi = 0.05$  et, pour les amplitudes observées ici, la fréquence non-linéaire du mode tournant doit être de l'ordre de  $\omega_{r1} \approx 1.005$ , ce qui reste largement inférieur aux fréquences imposées qui garantissent la stabilité du mode tournant dans ces expériences. En fait, nous observons une mise en rotation du liquide quasiment concomitante à l'apparition du mode tournant. Ainsi, par effet Doppler, la rotation du liquide augmente la fréquence apparente de l'onde. Le mode tournant existant à de très fortes amplitudes, y compris loin de la résonance, la fréquence de l'onde est donc nécessairement égale à la fréquence propre, quelle que

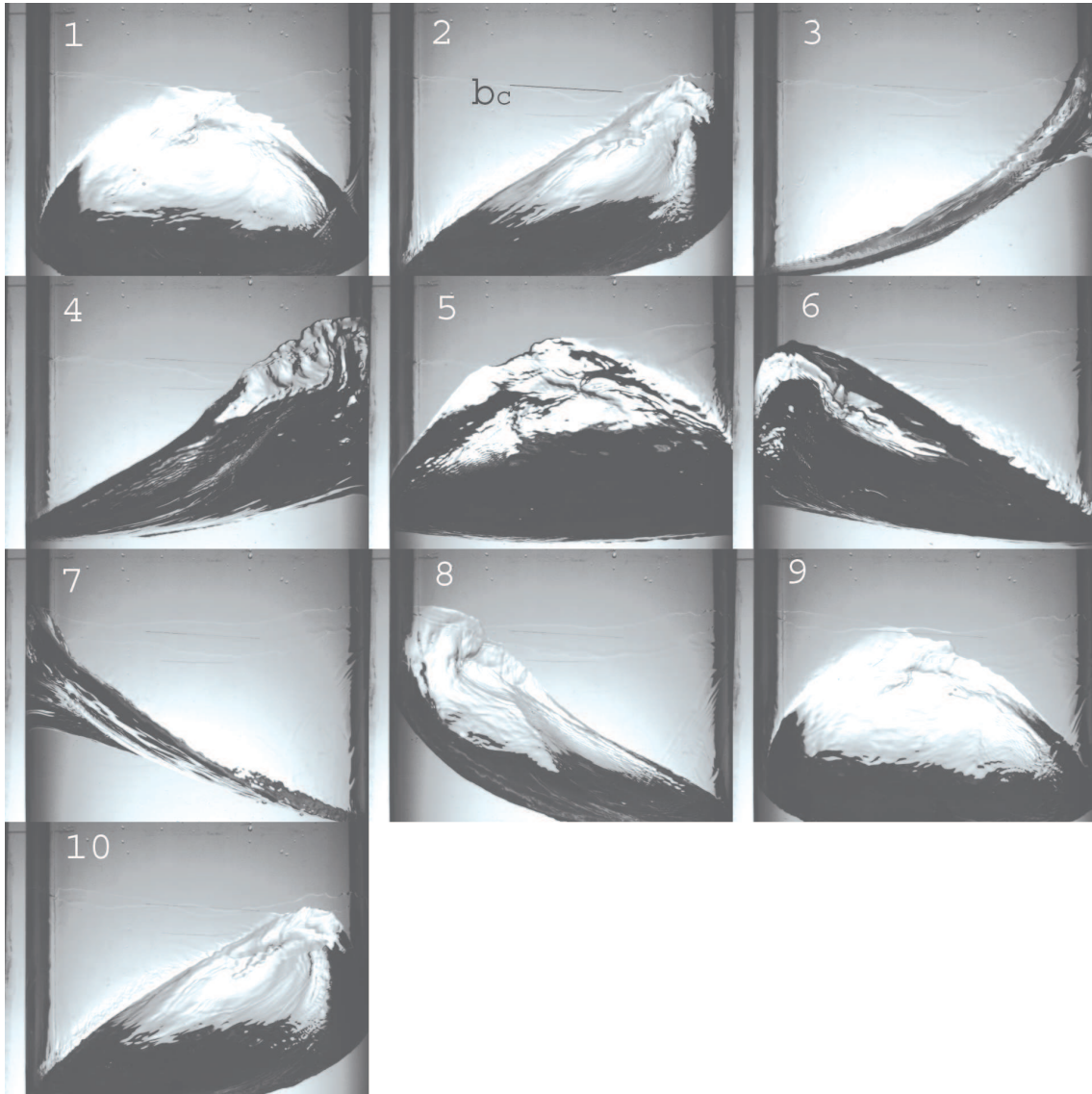


FIG. 4.1 – Allures typiques du mode tournant en cuve cylindrique en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm remplie d'eau : vues de face (dans la direction perpendiculaire à la direction du forçage). Le temps séparant deux clichés successifs est de 67 ms. L'ensemble des clichés donne un aperçu du mode sur une période. La ligne horizontale indique  $b_c$  sur la face avant du réservoir.  $h/R = 1.5$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.95$ ,  $A_f/R = 2.3 \cdot 10^{-2}$ . Sur la première image, le front est sur la face arrière, il est sur la face avant sur le cinquième cliché.



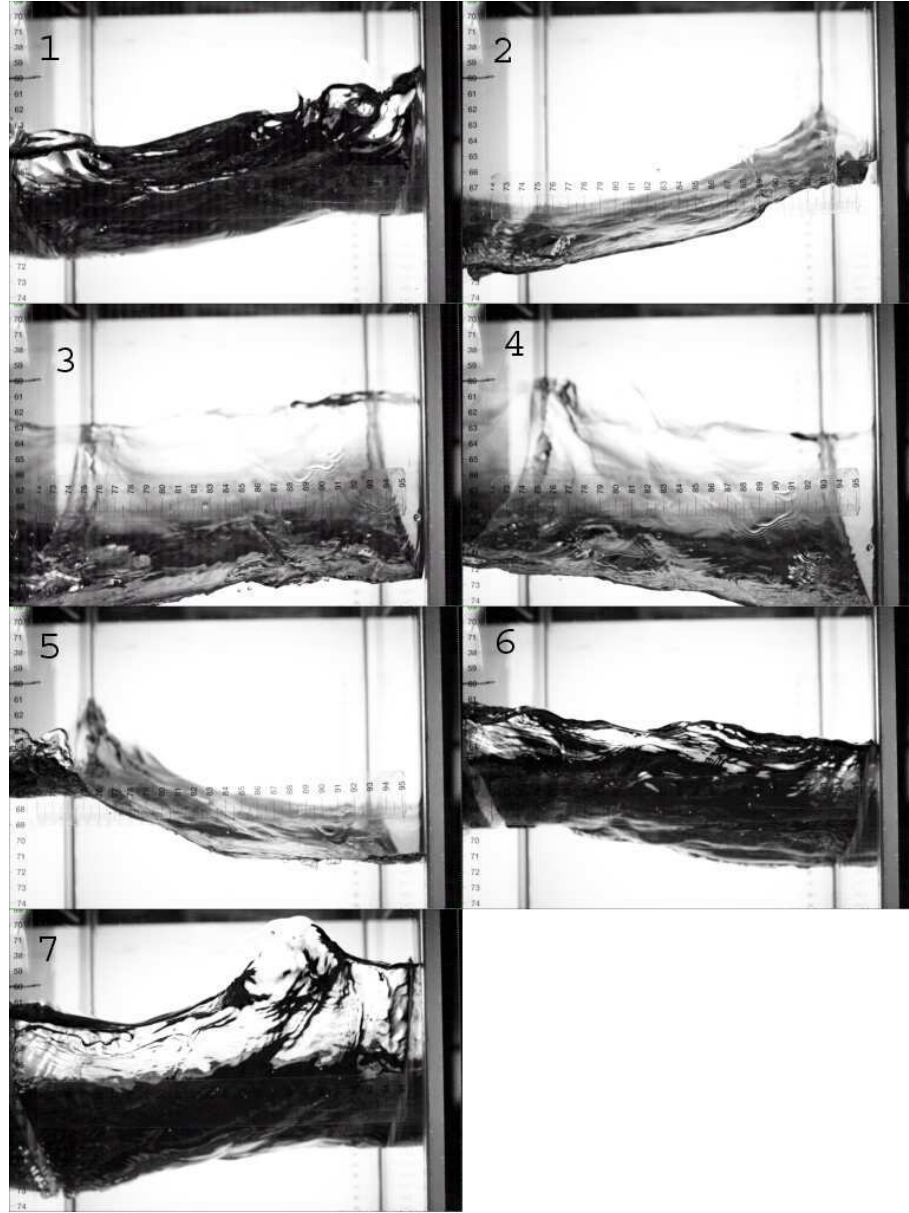


FIG. 4.2 – Allures typiques du mode tournant en cuve carrée en verre de largeur  $2L = 300$  mm remplie d'eau : vues de face (dans la direction perpendiculaire à la direction du forçage). Le temps séparant deux clichés successifs est de 94 ms. L'ensemble des clichés donne un aperçu du mode sur une période.  $h/R \approx 1.5$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.94$ ,  $A_f/R = 1.2 \cdot 10^{-3}$ . Sur la première image, le front est sur la face avant.

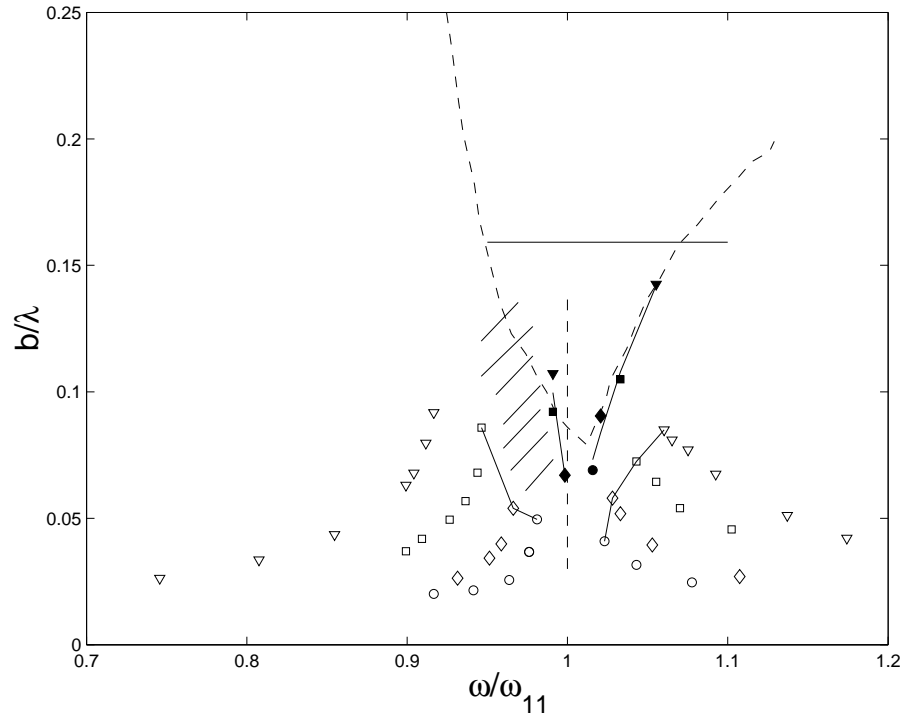


FIG. 4.3 – Diagramme amplitude-fréquence pour des amplitudes de forçage différentes  $A_f/R$  en cuve en verre de rayon  $R = 78$  mm remplie d'eau ( $\lambda \approx 3.4R$ ) :  $\nabla$ , mode antisymétrique 1 ;  $\blacktriangledown$ , mode tournant pour  $A_f/R = 2.7 \cdot 10^{-2}$  ;  $\square$ , mode antisymétrique 1 ;  $\blacksquare$ , mode tournant pour  $A_f/R = 1.3 \cdot 10^{-2}$  ;  $\diamond$ , mode ballottant ;  $\blacklozenge$ , mode tournant pour  $A_f/R = 0.7 \cdot 10^{-2}$  ;  $\circ$ , mode antisymétrique 1 ;  $\bullet$ , mode tournant pour  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$ . On rappelle  $b_c/\lambda = 1/2\pi = 0.16$  ;  $-$ , limites d'existence du mode antisymétrique 1. La région hachurée indique des fréquences pour lesquelles le mouvement du liquide alterne entre premier mode antisymétrique suivi de brisure et court mode tournant.

soit la fréquence de forçage. La rotation du liquide permet l'ajustement à la fréquence de forçage.

La figure 4.4 compare les résultats pour  $A_f/R = 1.3 \cdot 10^{-2}$  en cuve cylindrique au diagramme de stabilité issu de l'analyse multimodale réalisée par Faltinsen et al [19]. Les amplitudes de forçage de l'étude théorique et de nos expériences sont voisines. Et bien que l'analyse menée par Faltinsen ait été réalisée en cuve rectangulaire, cette étude théorique permet de valider grossièrement les domaines d'existence. Il est intéressant de noter en effet que le domaine d'existence des régimes chaotiques comme le domaine de stabilité du mode tournant, déterminés dans nos expériences, coïncident assez bien avec ceux calculés par Faltinsen et al.

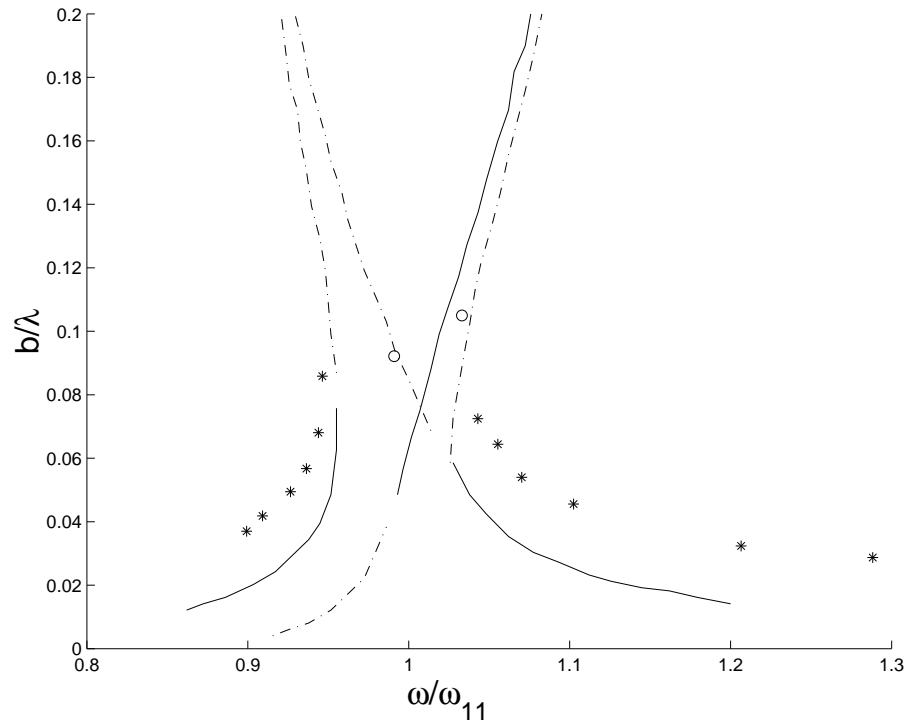


FIG. 4.4 – Comparaisons entre les domaines de stabilité issus de l'analyse multimodale de Faltinsen et al en cuve rectangulaire,  $A_f/L = 1.6 \cdot 10^{-2}$  ( $2L$  largeur) et les expériences en cuve cylindrique,  $A_f/R = 1.3 \cdot 10^{-2}$ . Les points expérimentaux sont :  $*$ , mode antisymétrique 1 ;  $\circ$ , premiers modes tournants obtenus par croissance et décroissance de la fréquence d'excitation. Résultats de Faltinsen et al : les domaines de stabilité des trois régimes ; en trait plein, les amplitudes stables des modes tournant et ballottant ; en trait discontinu, les amplitudes des modes instables.

Dans nos expériences, le mode tournant existe pour des fréquences allant de  $0.98\omega_{11}$

à  $1.35\omega_{11}$ . Ces points de mesure ont été obtenus par augmentation progressive de la fréquence à partir d'un mode tournant d'amplitude non nulle. Pour des fréquences supérieures à  $\approx 1.2\omega_{11}$ , ces régimes n'existent pas en partant de l'état au repos pour les gammes d'amplitude d'excitation étudiées. En revanche, on note que pour  $\omega > \omega_{11}$ , une fois le mode tournant accroché, il est relativement robuste et peut être maintenu pour des augmentations brusques de fréquences jusqu'à 25%. Ces résultats sont compatibles avec les analyses théoriques de Dodge [14] pour un pendule conique, qui montre qu'au-delà du domaine de stabilité du mode tournant, il existe une gamme de fréquences pour lesquelles mode antisymétrique 1 et mode tournant sont stables et s'installent suivant les conditions initiales.

Pour  $\omega \approx 1.3\omega_{11}$ , on atteint un déphasage de  $\pi/2$ , l'onde ne peut plus absorber l'énergie fournie par l'oscillation forcée et elle s'effondre brusquement. A cette fréquence, on est dans le domaine de stabilité du mode antisymétrique 1 qui se trouve en opposition de phase par rapport à l'excitation. Partant du mode antisymétrique 1 avec  $\omega > \omega_{11}$ , le mode tournant apparaît en diminuant la fréquence d'excitation. On observe une forte hystérésis (la fréquence de transition est en effet, dans ce dernier cas, largement inférieure à la fréquence d'effondrement du mode tournant). La fréquence de transition dépend de l'amplitude de forçage, mais dans tous les cas, elle est accompagnée d'une forte augmentation de l'amplitude. Nous détaillerons la transition dans la section suivante.

Les limites d'existence du mode tournant sont comparées aux transitions d'Abramson. Il faut noter qu'elle dépendent fortement des pas de fréquences opérés. Pour la limite inférieure, une très faible augmentation de la fréquence d'excitation peut engendrer le déferlement. En ce qui concerne la transition vers le mode tournant (à partir du mode chaotique pour  $\omega < \omega_{11}$  ou à partir du mode ballottant pour  $\omega > \omega_{11}$ ), elle semble très influencée par des imperfections de géométrie. Ces deux points peuvent expliquer la différence entre nos résultats et ceux d'Abramson.

### 4.1.3 Déphasage du mode tournant

Abramson note un déphasage de  $\pi/2$  entre l'onde azimutale et le forçage. Nos expériences montrent qu'en réalité cette phase évolue avec la fréquence. En effet, en se référant à la figure 4.5, on observe que, pour des fréquences voisines de la fréquence propre linéaire du mode 1 ( $\omega \approx \omega_{11}$ ), le mode tournant est en phase avec l'excitation. Lorsqu'on augmente la fréquence d'excitation  $\omega$ , le déphasage augmente progressivement jusqu'à  $\pi/2$ . Une fois ce retard atteint, le mode tournant se brise et le mouvement revient à un premier mode antisymétrique hors phase. Cette caractéristique est

également observée par Faller dans le cas d'un mouvement de rotation (forçage du réservoir par une rotation sinusoïdale). Sur son diagramme amplitude-fréquence (voir fig. 1.17), cet auteur note un saut de phase lorsque le mouvement de fortes amplitudes se brise. Cette propriété correspond à celle qui accompagne la résonance des oscillateurs mécaniques (le saut de phase s'effectue alors rapidement au voisinage de la résonance).

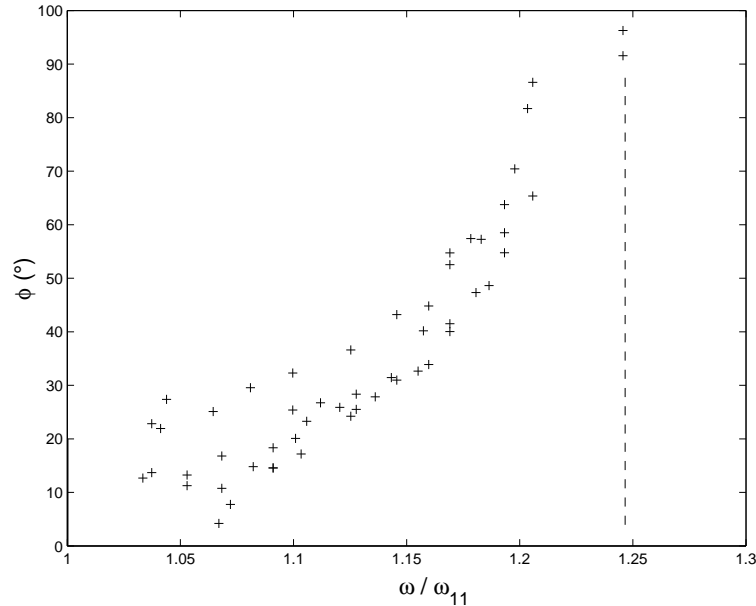


FIG. 4.5 – Déphasage entre le mode tournant et l'excitation. Mesures réalisées en cuve cylindrique de rayon  $R = 150$  mm remplie d'eau. La ligne verticale en pointillés indique le point de collapse du mode tournant.  $h/R = 1.2$ ,  $A_f/R = 2.3 \cdot 10^{-2}$ .

#### 4.1.4 Amplitude stationnaire du mode tournant

Les amplitudes des modes tournants stables sont détaillées sur la figure 4.6<sup>2</sup>. Les amplitudes mesurées sont, pour des fréquences légèrement plus élevées que la fréquence propre du mode 1, supérieures à  $b_c = 1/k$ , soit  $b_c/\lambda = 0.16$ .

L'amplitude stationnaire du mode tournant augmente linéairement avec la fréquence d'excitation selon Faltinsen. On retrouve ce résultat dans nos expériences (figures 4.3 et 4.6) pour des fréquences comprises entre  $0.96\omega_{11}$  et  $1.08\omega_{11}$ . L'amplitude du mode tournant dépend également de l'amplitude de forçage. Mais contrairement au cas du mode antisymétrique 1, la dépendance n'est pas linéaire (voir les résultats du

<sup>2</sup>Nous n'avons pas trouvé d'expériences dans la littérature auxquelles comparer directement ces résultats.

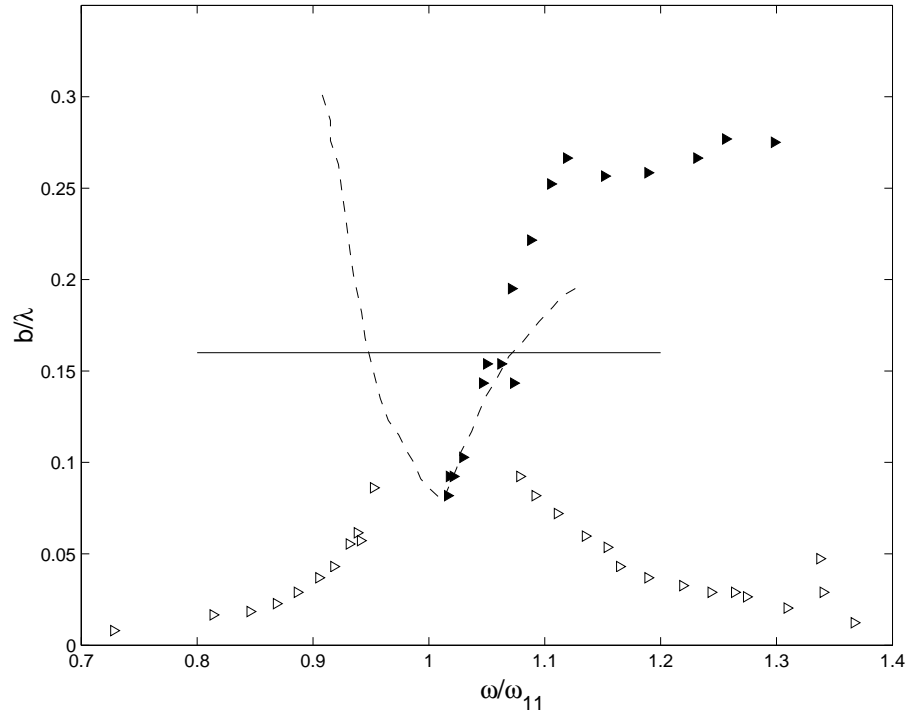


FIG. 4.6 – Diagramme amplitude-fréquence pour  $A_f/R = 2.3 \cdot 10^{-2}$  :  $\triangleright$ , mode antisymétrique 1 ;  $\blacktriangleright$ , mode antisymétrique 1 ;  $--$ , limites d'existence du mode tournant suivant Abramson. On rappelle  $b_c/\lambda = 1/2\pi = 0.16$ . Expériences en cuve en verre de rayon  $R = 150$ .

paragraphe suivant sur la transition, fig. 4.10).

Une estimation du taux de croissance de l'amplitude avec la fréquence, défini par :

$$\frac{b}{R} = \alpha_{tourn} \frac{\omega}{\omega_{11}}$$

a été effectuée lors d'expériences en cuve cylindrique pour  $A_f/R = 2.3 \cdot 10^{-2}$  (voir fig. 4.7). Le taux de croissance dans nos expériences est de l'ordre de celui issu des calculs théoriques de Faltinsen et al. On a :

- $\alpha_{tourn} \approx 5.4$  pour nos résultats expérimentaux en cuve cylindrique,
- $\alpha_{tourn} \approx 7.1$  d'après les résultats théoriques de Faltinsen en cuve rectangulaire.

Dans nos expériences, on observe une rupture de la croissance linéaire de l'amplitude en fonction de la fréquence pour des fréquences supérieures à  $1.1\omega_{11}$ . Par la suite, l'amplitude de l'onde n'augmente plus que légèrement avec la fréquence ( $\alpha_{tourn2} \approx 0.8$ ).

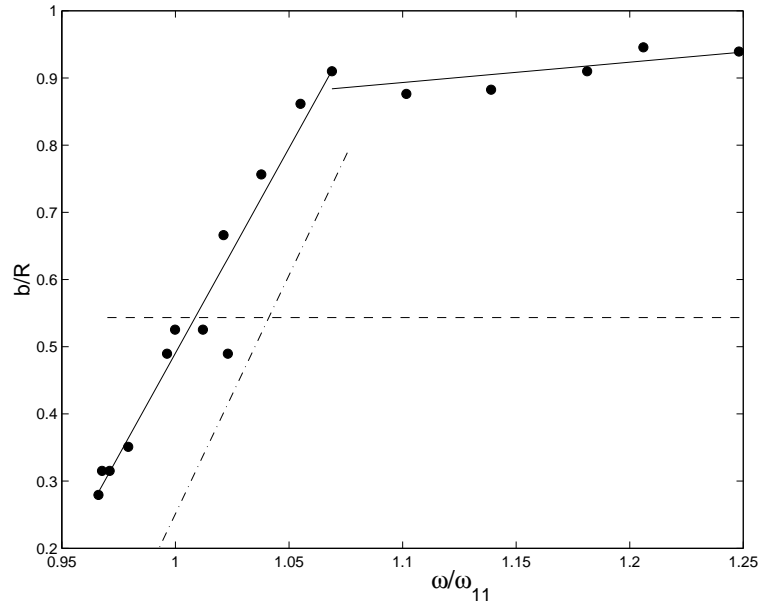


FIG. 4.7 – Amplitude du mode tournant par rapport à la surface libre en fonction de la fréquence d'excitation. Cuve en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm remplie d'eau.

L'amplitude du mode tournant peut atteindre des valeurs de  $2b_c$  sans brisure ( $b_c = g/\omega^2$ ). Pour de telles amplitudes, le premier mode antisymétrique se brise. On peut probablement expliquer ce comportement par l'augmentation de l'amortissement grâce à une augmentation de la surface de dissipation (couche limite de Stokes sur une surface plus grande). Par ailleurs, les trajectoires des particules fluides, dans le cas de cette onde progressive, ne sont plus rectilignes. Ainsi, l'excitation de type Faraday, à l'origine

de la déstabilisation du front de l'onde dans le cas du mode antisymétrique 1, n'existe pas ici (voir chapitre 5).

#### 4.1.5 Amortissement libre du mode tournant

Quelques expériences rapides ont montré que, lorsqu'on arrête le forçage une fois le mode tournant installé, celui-ci s'amortit sans repasser au mode antisymétrique 1. Un signal typique de l'amortissement est donné par la figure 4.8.

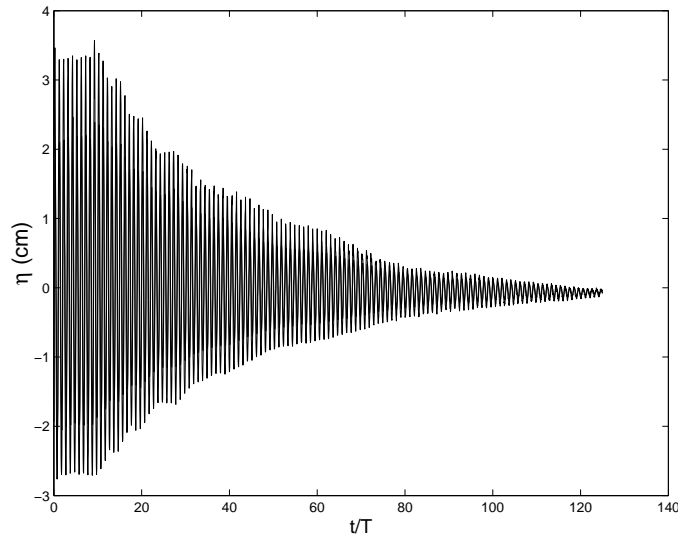


FIG. 4.8 – Série temporelle de l'amortissement libre du mode tournant. Essai en cuve cylindrique en verre  $R = 78$  mm remplie d'eau. Conditions initiales :  $\omega/\omega_{11} = 1.03$ ,  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-3}$ .

L'amortissement est exponentiel comme dans le cas du mode antisymétrique 1 (cf fig. 4.9). La décroissance en amplitude mesurée par chacune des sondes (à  $90^\circ$  et à  $0^\circ$ ) est identique, ce qui confirme qu'au cours de l'amortissement on conserve l'onde azimutale. Le taux d'amortissement est  $\gamma\omega_{11} \approx 8.0 \cdot 10^{-2}$ , c'est-à-dire plus de deux fois l'amortissement du mode antisymétrique 1. Là encore, la plus grande surface de dissipation peut expliquer la différence.

#### En résumé

- le mode tournant est une onde dont le diamètre nodal est en rotation d'axe vertical,
- le domaine d'existence dépend de l'amplitude de forçage et se situe au-dessus de  $\omega_{11}$ ,



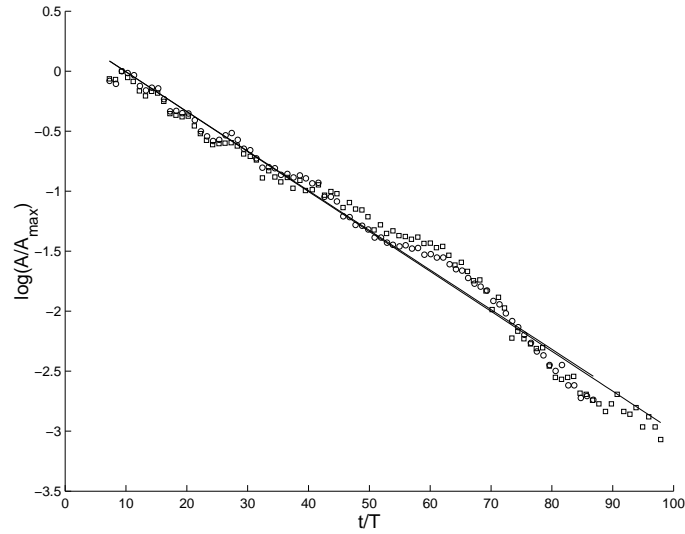


FIG. 4.9 – Décroissance logarithmique mesurée sur chacune des sondes.  $\square$ , sonde à  $0^\circ$  ;  $\circ$ , sonde à  $90^\circ$  correspondant aux séries temporelles de la figure 4.8.

- le mode tournant existe jusqu'à des fréquences  $\omega \approx 1.3\omega_{11}$  par effet Doppler (mise en rotation du fluide concomittante à l'apparition du mode tournant),
- les amplitudes peuvent atteindre  $2b_c$  sans brisure,
- le déphasage entre le mode tournant et l'excitation augmente de  $0$  à  $\pi/2$  quand on augmente la fréquence de forçage.

## 4.2 Transition du mode antisymétrique 1 vers le mode tournant en dehors de la résonance $\omega > \omega_{11}$

Lorsqu'on approche la résonance du mode 1 en diminuant la fréquence d'excitation, le mode antisymétrique 1, hors phase, bifurque vers un mode tournant en phase avec l'excitation. Cette transition s'effectue à une fréquence qui dépend de l'amplitude d'excitation. La transition du mode antisymétrique 1 vers le mode tournant est étudiée à une fréquence de forçage fixée. On augmente alors graduellement l'amplitude d'excitation.

### 4.2.1 Diagramme de bifurcation

Les paramètres d'excitation de la table oscillante (fréquence et amplitude) sont fixés depuis le PC. Les amplitudes sont mesurées au moyen de sondes capacitatives placées

dans la direction du forçage et perpendiculairement à celle-ci comme précédemment. La figure 4.10 décrit la bifurcation du mode ballottant vers le mode tournant à  $\omega = 1.07\omega_{11}$  en augmentant l'amplitude d'excitation. Près de la transition, l'amplitude est augmentée de  $\Delta A_f/R \approx 10^{-3}$ . L'intervalle de temps entre chaque incrément  $\Delta T$  est  $\approx 10$  min ou 1500 périodes. Le diagramme représente uniquement des états stationnaires, c'est-à-dire un régime ballottant ou tournant d'amplitude constante.

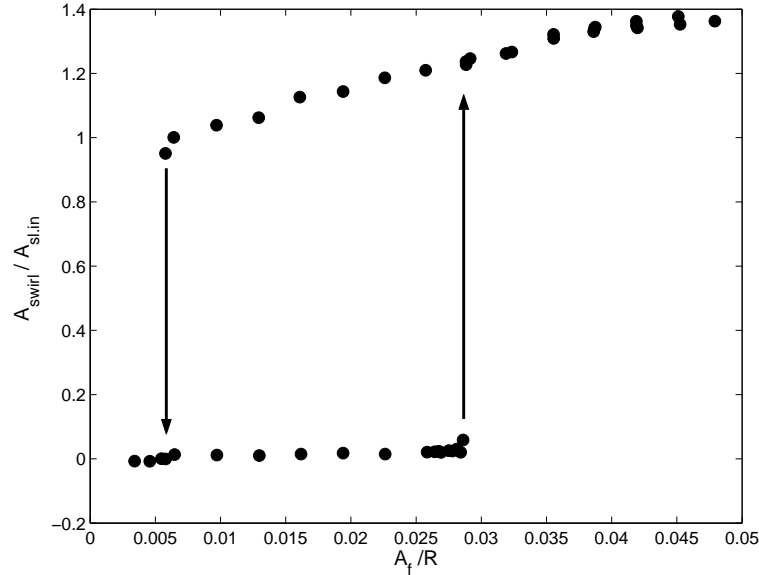


FIG. 4.10 – Bifurcation du mode antisymétrique 1 vers le mode tournant donnant l'amplitude du mode tournant, normalisée par  $A_{sl.in}$  l'amplitude du mode antisymétrique 1 à la bifurcation, en fonction de l'amplitude d'excitation  $A_f/R$ .  $A_{sl.in}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 1.07$ ,  $h/R = 1.6$ .

Initialement, le mouvement consiste en un pur mode antisymétrique 1. L'amplitude du mode tournant est nulle. L'amplitude du mode antisymétrique 1 n'apparaît pas sur le diagramme 4.10 mais elle augmente linéairement lorsqu'on augmente l'amplitude d'excitation (voir chapitre 3). Lorsque  $A_f/R$  atteint une valeur critique qui dépend de la fréquence d'excitation (pour  $\omega/\omega_{11} = 1.07$ ,  $A_{fc+}/R = 0.028$ ), le mode tournant s'installe soudainement. L'amplitude du mode tournant augmente rapidement vers de très fortes valeurs. L'onde azimutale transfère du moment cinétique au liquide qui se met alors progressivement en rotation. Une fois la rotation initiée, le mode tournant se maintient lorsqu'on diminue l'amplitude d'excitation jusqu'à de très faibles valeurs (pour  $\omega/\omega_{11} = 1.07$ ,  $A_{fc-}/R = 0.007 < A_{fc+}/R$ ). De façon analogue à la transition inverse, la disparition du mode tournant laisse un mode antisymétrique 1 de très faible

amplitude (correspondant à l'amplitude d'excitation). Nous observons donc une très importante hystérésis en grande partie due à la rapide génération de rotation du liquide à la bifurcation.

### 4.2.2 Croissance du mode tournant

On s'intéresse à présent à l'augmentation transitoire de l'amplitude du mode tournant à l'instant de la transition. On augmente brusquement l'amplitude de  $A_f$ , pour laquelle le mode est ballottant, à  $A_{fc+}$ , amplitude de transition vers le mode tournant pour la fréquence d'excitation considérée. La figure 4.11 représente le comportement transitoire mesuré par les deux sondes capacitives situées respectivement à  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ . La sonde située à  $\theta = 90^\circ$  mesure évidemment l'amplitude du mode tournant. La deuxième sonde à  $\theta = 0^\circ$  représente la somme algébrique de l'amplitude de chacun des deux modes, i.e. en tenant compte de la phase. En effet, les deux modes sont en opposition de phase. La fréquence d'excitation étant supérieure à la fréquence propre, le mode antisymétrique 1 est hors phase. Le mode tournant quant à lui est en phase. Ainsi, à la paroi, un mode est à son maximum quand l'autre est à son minimum. L'amplitude à  $\theta = 0^\circ$  reste pratiquement inchangée au cours de la croissance du mode antisymétrique 1, c'est-à-dire lorsque l'amplitude mesurée sur la sonde à  $\theta = 90^\circ$  croît. La transition se fait donc par l'intermédiaire de la superposition des deux modes, mode antisymétrique 1 décroissant et croissance de la composante tournante. Lorsque le mode tournant a atteint l'amplitude maximale, on observe une amplitude plus faible sur la sonde à  $\theta = 0^\circ$ . Il semble donc qu'un mode antisymétrique 1 subsiste.

L'observation de la superposition des deux modes est confirmée par les images 4.12. Ces images ont été prises par dessous avec éclairage en lumière blanche. Les particules<sup>3</sup> sont approximativement uniformément distribuées sur toute la profondeur du liquide et il est donc impossible de distinguer les particules du fond de celles de la surface libre. Le temps d'exposition est légèrement supérieur à une période pour obtenir les trajectoires complètes. L'image 4.12-1 montre les trajectoires correspondant au pur mode antisymétrique 1, état initial de la transition. Les trajectoires au centre sont des lignes horizontales tandis que sur les côtés on observe seulement une trace ponctuelle (compatible avec le déplacement vertical attendu). Lorsqu'on augmente l'amplitude d'excitation, clichés 4.12-2 à 4, les trajectoires au centre du réservoir, initialement rectilignes, deviennent ellipsoïdales. Le grand axe ne semble pas modifié alors que la longueur du petit axe croît. Ainsi se superpose au premier mode antisymétrique initial un mode azimutal d'amplitude croissante dont la trace est le petit axe de l'ellipse.

---

<sup>3</sup>Les particules utilisées sont en plexiglas. Elles ne sont pas calibrées en diamètre.

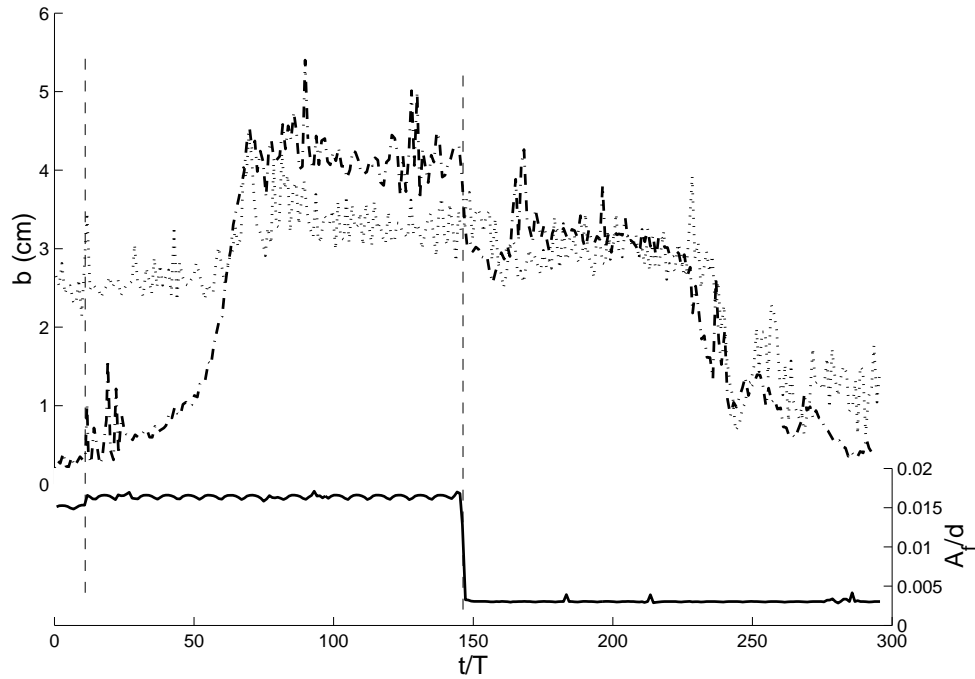


FIG. 4.11 – Comportement transitoire de l’amplitude du mode tournant et du mode antisymétrique 1 durant la bifurcation. La partie supérieure de la figure représente l’évolution temporelle de l’amplitude mesurée par chacune des sondes :—, sonde à  $90^\circ$  ;  $\cdots$  sonde à  $0^\circ$ . La partie inférieure du graphique représente la variation imposée de l’amplitude d’excitation relative  $A_f/d$ . Expériences en cuve cylindrique  $R = 78$  mm remplie d’eau,  $h/R = 1.6$ ,  $\omega/\omega_{11} = 1.07$ .

L'image 4.12-5 montre des trajectoires circulaires tout autour du périmètre indiquant que le mode tournant est alors dominant (même amplitude dans toutes les directions).

Pour vérifier l'hypothèse d'une amplification exponentielle du mode tournant observée sur la figure 4.11, la croissance de l'amplitude de l'onde azimutale est représentée en coordonnées log-linéaire sur la figure 4.13. Les résultats confirment le comportement exponentiel et ce pour trois incréments en amplitude d'excitation  $A_f - A_{fc+}$  légèrement différents.

### 4.2.3 Mise en place de la rotation

Sur la dernière image 4.12-6, on observe que le mode tournant génère une rotation du liquide (trajectoire en arc de cercle non fermée sur une période). Faller et Hutton, qui génèrent une onde azimutale par rotillation, ont montré de façon numérique et expérimentale la génération de moment angulaire. Phillips a établi [47] que le moment angulaire transporté par l'onde est proportionnel au carré de l'amplitude. Le temps entre l'apparition du mode tournant et la rotation complète du liquide  $\Omega$  n'a pas été déterminé précisément mais est de l'ordre de 80 – 100 s. Cela correspond plus ou moins au temps d'Eckman  $t_E$  :

$$t_E = \left( \frac{h^2}{\nu\Omega} \right)^{1/2} \approx 130\text{s} \quad (4.2)$$

### 4.2.4 Décroissance du mode

**Retour au ballottant** Une décroissance typique du mode tournant lors de la diminution de l'amplitude d'excitation est également visible sur la figure 4.11. Le temps de réaction est de 250 périodes pour une décroissance de 98% de l'amplitude d'excitation. A priori, ce temps dépend de l'incrément d'amplitude de forçage. La décroissance est très rapide suivie d'oscillations en amplitude jusqu'à stabilisation sur un mode antisymétrique 1 de faible amplitude.

#### En résumé :

- Le domaine d'existence du mode tournant se situe au voisinage de la fréquence de résonance du premier mode antisymétrique et au-delà jusqu'à  $\omega \approx 1.4\omega_{11}$ .
- Le déphasage du mode tournant avec l'excitation croît de 0 à  $\pi/2$  en augmentant la fréquence. Pour  $\Phi = \pi/2$  le mode tournant s'écroule.
- L'amplitude du mode tournant dépend approximativement linéairement de la fréquence de forçage. Contrairement au cas de l'onde plane, l'amplitude du mode

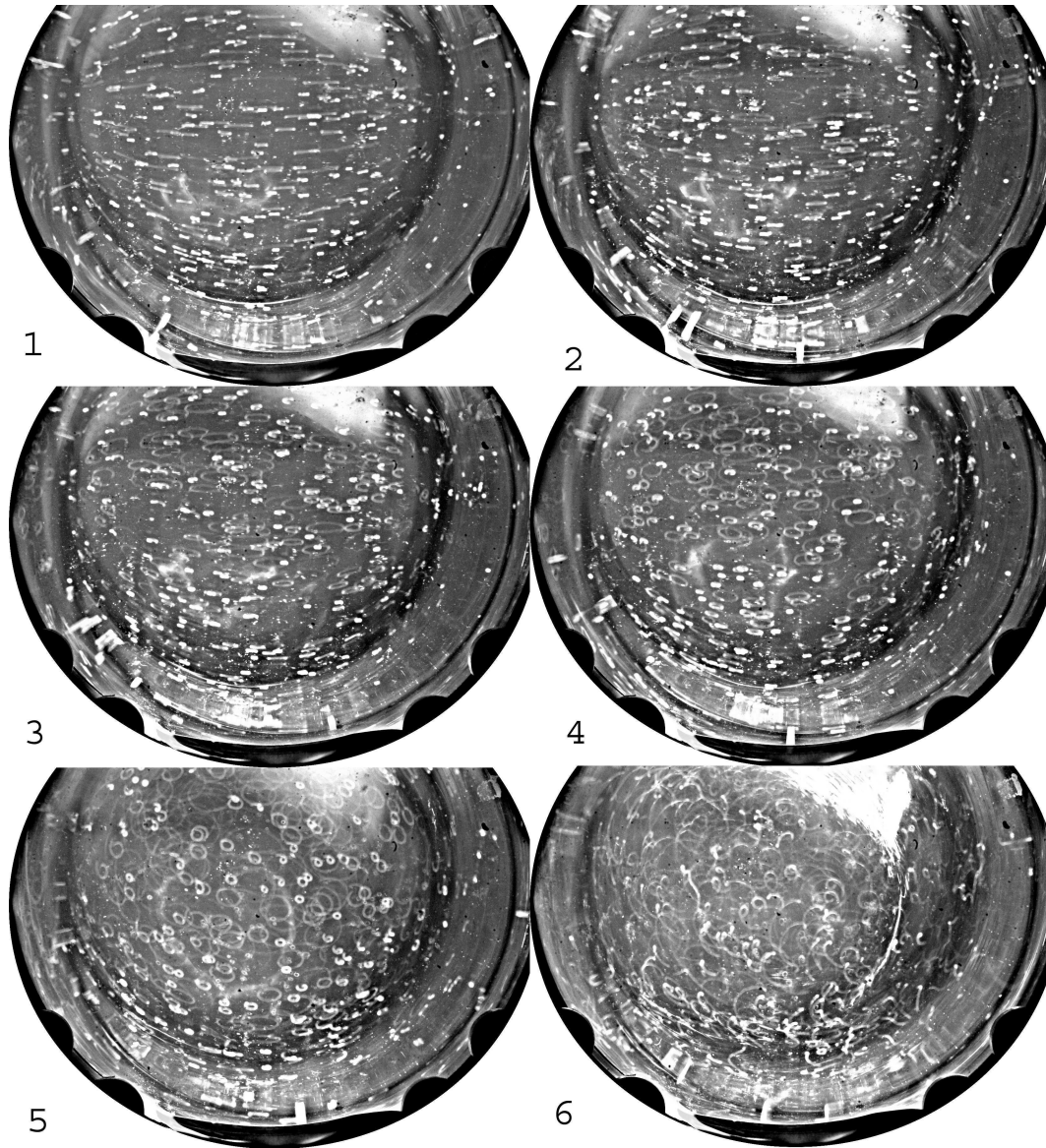


FIG. 4.12 – Vue de dessous de la cuve cylindrique en plexiglas  $R = 150$  mm remplie d'eau.  $A_f/R \approx 2.2 \cdot 10^{-2}$ .  $\omega_f/\omega_{11} = 1.07$ .  $h/R = 2.1$ . Temps d'exposition 0.4 s. Temps entre chaque image  $\approx 10 - 15$  s.

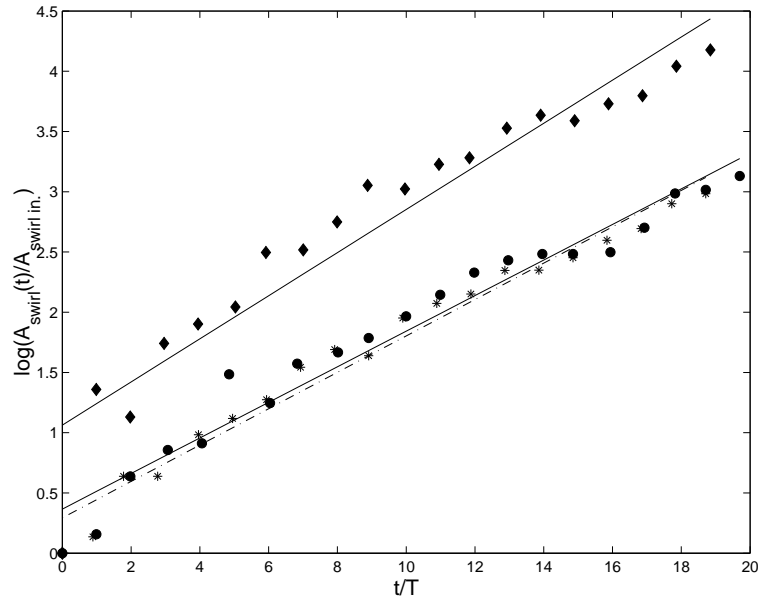


FIG. 4.13 – Croissance du mode tournant à  $\omega/\omega_{11} = 1.06$ ,  $\blacklozenge$ ,  $\Delta A_f/A_{fc} = 9.2\%$ ;  $\bullet$ ,  $\Delta A_f/A_{fc} = 8.1\%$ ;  $*$ ,  $\Delta A_f/A_{fc} = 8.0\%$

tournant ne dépend pas linéairement de l'amplitude d'excitation. Elle augmente cependant bien avec  $A_f$ .

- La transition du premier mode antisymétrique vers le mode tournant est sous-critique. La croissance de l'amplitude de l'onde azimutale est exponentielle à la transition. La mise en place du mode tournant s'accompagne d'une mise en rotation du fluide.

# Chapitre 5

## Régime chaotique : brisure à résonance

Si la fréquence est légèrement inférieure à la fréquence de résonance, un régime chaotique s'installe. Le déferlement a d'abord lieu depuis le premier mode antisymétrique. Il est suivi d'une alternance quasi-périodique entre des phases de croissance en amplitude, de brisure et de courtes périodes de rotation. Ce régime est intéressant en terme de création d'interface et est l'objet de l'analyse qui suit. Nous donnons dans un premier temps les principales caractéristiques du régime chaotique et étudions l'évolution de ce régime avec l'amplitude d'excitation. Par la suite, nous nous intéressons uniquement au scénario de brisure à proprement parler pour une amplitude relative  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-2}$ . Nous rappelons les conditions de croissance à résonance et nous proposons une description générale du scénario. Nous nous intéressons ensuite aux deux instabilités qui affectent le front de l'onde et à leur principale caractéristique. Enfin, nous considérons les évènements qui conduisent plus particulièrement à la création d'interface.

### 5.1 Description du régime chaotique

A  $\omega = \omega_{11} - \epsilon$ , la transition du mode antisymétrique 1, en augmentant l'amplitude d'excitation, vers le mode tournant se produit au travers d'une succession de modes transitoires. Le mouvement du liquide consiste en une alternance entre le premier mode antisymétrique et le mode tournant : premier mode antisymétrique d'amplitude croissante jusqu'à brisure suivi d'une soudaine décroissance de l'amplitude, bref mode tournant qui s'arrête dans une direction quelconque à laquelle le premier mode antisymétrique reprend, augmente et se brise à nouveau, un mode tournant dans l'autre direction suit. Il existe également un domaine de fréquences pour lequel le régime



chaotique persiste lorsqu'on augmente l'amplitude d'excitation (voir zone hachurée du diagramme amplitude-fréquence 4.3). Dans cette partie, nous décrivons d'abord de façon détaillée le régime chaotique, ensuite nous traitons l'évolution du régime chaotique en fonction de l'amplitude de forçage lorsque la fréquence d'excitation est très proche de la fréquence de résonance.

### 5.1.1 Allure du régime chaotique

Les caractéristiques tracées ici proviennent d'expériences réalisées à  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ . Elles sont identiques pour tous les modes chaotiques observés, c'est-à-dire pour des fréquences d'excitation allant de  $0.95\omega_{11}$  à  $\omega_{11}$ .

Les quatre séries d'images 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 donnent l'allure typique de l'onde au cours de ce régime. Il s'agit, pour ces clichés, de l'initiation du mode chaotique mais ce déroulement est repris ensuite de façon quasi-périodique comme l'indiquent les signaux de la figure 5.8. Les vues sont réalisées en cuve cylindrique de rayon  $R = 150$  mm remplie d'eau.

Initialement, on observe la croissance de l'amplitude de l'onde, images 5.1, associée à une modification progressive du profil, images 5.2, (voir chapitre 3). La brisure de l'onde (derniers clichés 5.2 et images 5.3) s'accompagne d'une dissymétrie de l'onde qui s'amplifie et amorce un mode tournant très instable. L'amplitude du mouvement décroît fortement et on observe un court instant de rotation. Ce dernier sera suivi d'une nouvelle période de croissance et ainsi de suite.

Des signaux typiques correspondant à ce régime, mesurés par les sondes capacitives à  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ , sont donnés en figures 5.5 et 5.6. Les signaux issus de chacune des sondes sont extrêmement bien corrélés. Le mouvement apparaît pseudo-périodique. En reprenant le scénario présenté au fil des images 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4, on observe :

- La croissance de l'amplitude mesurée à  $\theta = 0^\circ$  de  $t_1$  à  $t_2$  est pratiquement linéaire (voir aussi chap 3), l'amplitude mesurée à  $\theta = 90^\circ$  est faible. Il s'agit d'un mode antisymétrique 1 croissant.
- De  $t_2$  à  $t_3$ , l'amplitude à  $\theta = 0^\circ$  est constante, l'amplitude à  $\theta = 90^\circ$  croît exponentiellement jusqu'à atteindre environ celle mesurée à  $\theta = 0^\circ$ . Le mode tournant s'installe.
- A partir de  $t_3$  l'amplitude à  $\theta = 0^\circ$  décroît, le mode tournant se brise, l'amplitude est maximale suivant  $\theta = 90^\circ$ . Le régime est celui du premier mode antisymétrique. Au bout de quelques périodes, il se brise de nouveau.
- A  $t_4$  le cycle recommence.

Les deux modes intermittents, tournant et antisymétrique 1, se brisent toujours à

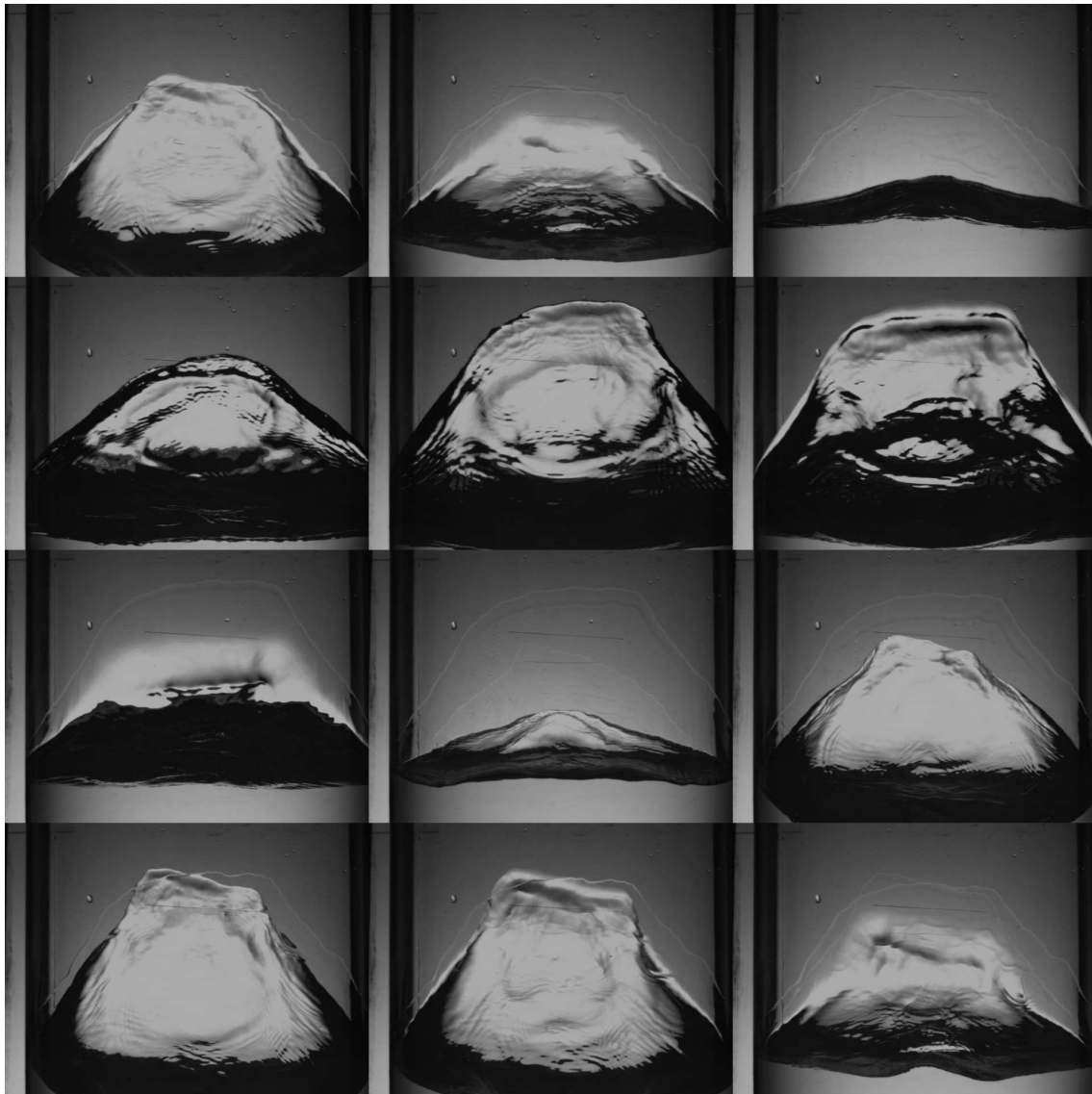


FIG. 5.1 – Installation du régime chaotique, croissance de l’onde : vues de face en cuve cylindrique en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm remplie d’eau. Le temps séparant deux clichés successifs est de 60 ms. Les lignes horizontales indiquent  $b_c$  sur chacune des faces du réservoir.  $h/R = 1.5$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ ,  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-3}$ .  $T \approx 600$  ms.



FIG. 5.2 – Installation du régime chaotique, croissance de l’onde : vues de face en cuve cylindrique en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm remplie d’eau. Le temps séparant deux clichés successifs est de 60 ms. Les lignes horizontales indiquent  $b_c$  sur chacune des faces du réservoir.  $h/R = 1.5$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ ,  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-3}$ .  $T \approx 600$  ms.

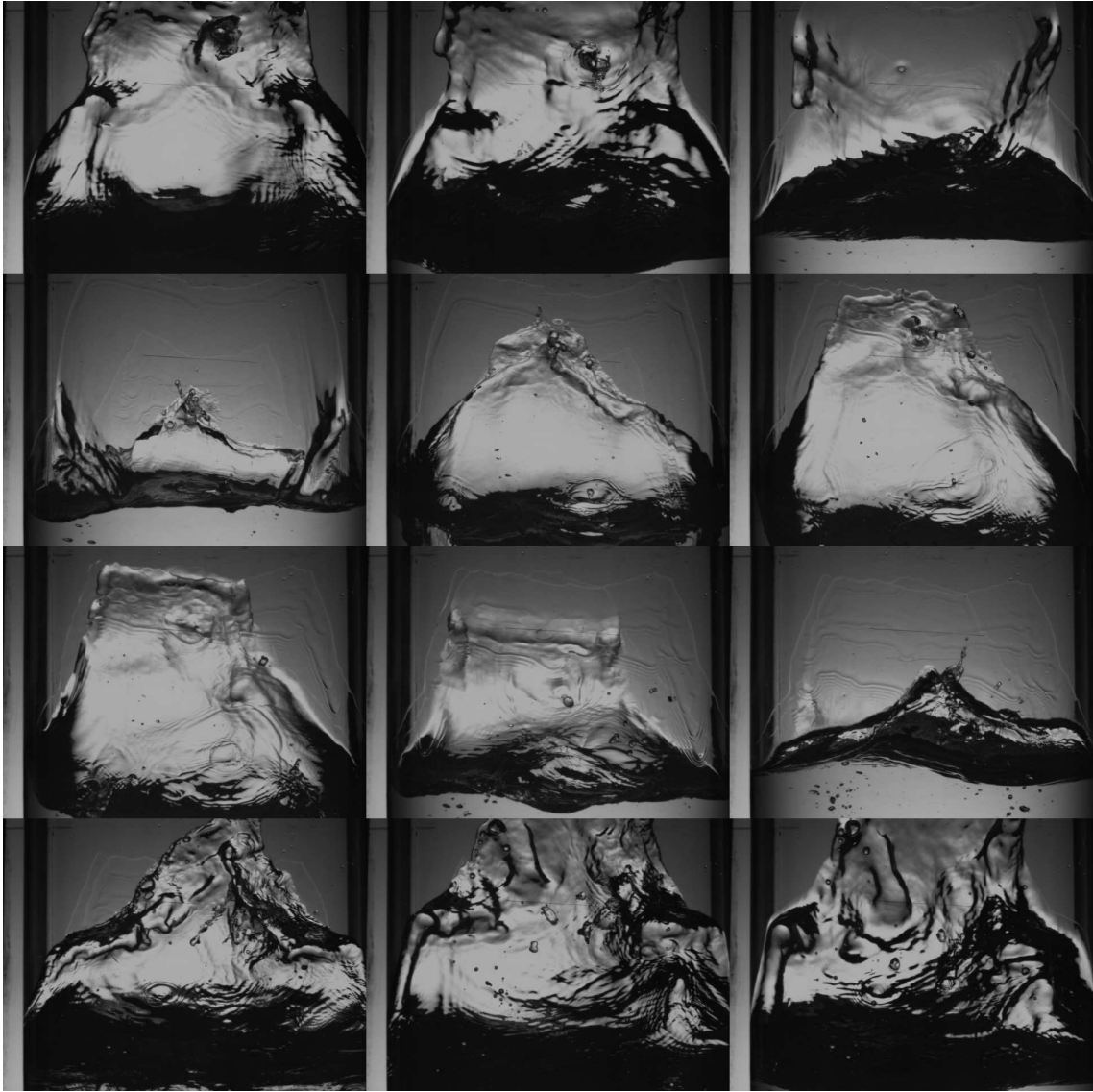


FIG. 5.3 – Installation du régime chaotique, déferlement : vues de face en cuve cylindrique en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm remplie d'eau. Le temps séparant deux clichés successifs est de 60 ms. Les lignes horizontales indiquent  $b_c$  sur chacune des faces du réservoir.  $h/R = 1.5$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ ,  $A_f/R = 2.2 \cdot 10^{-3}$ .  $T \approx 600$  ms.

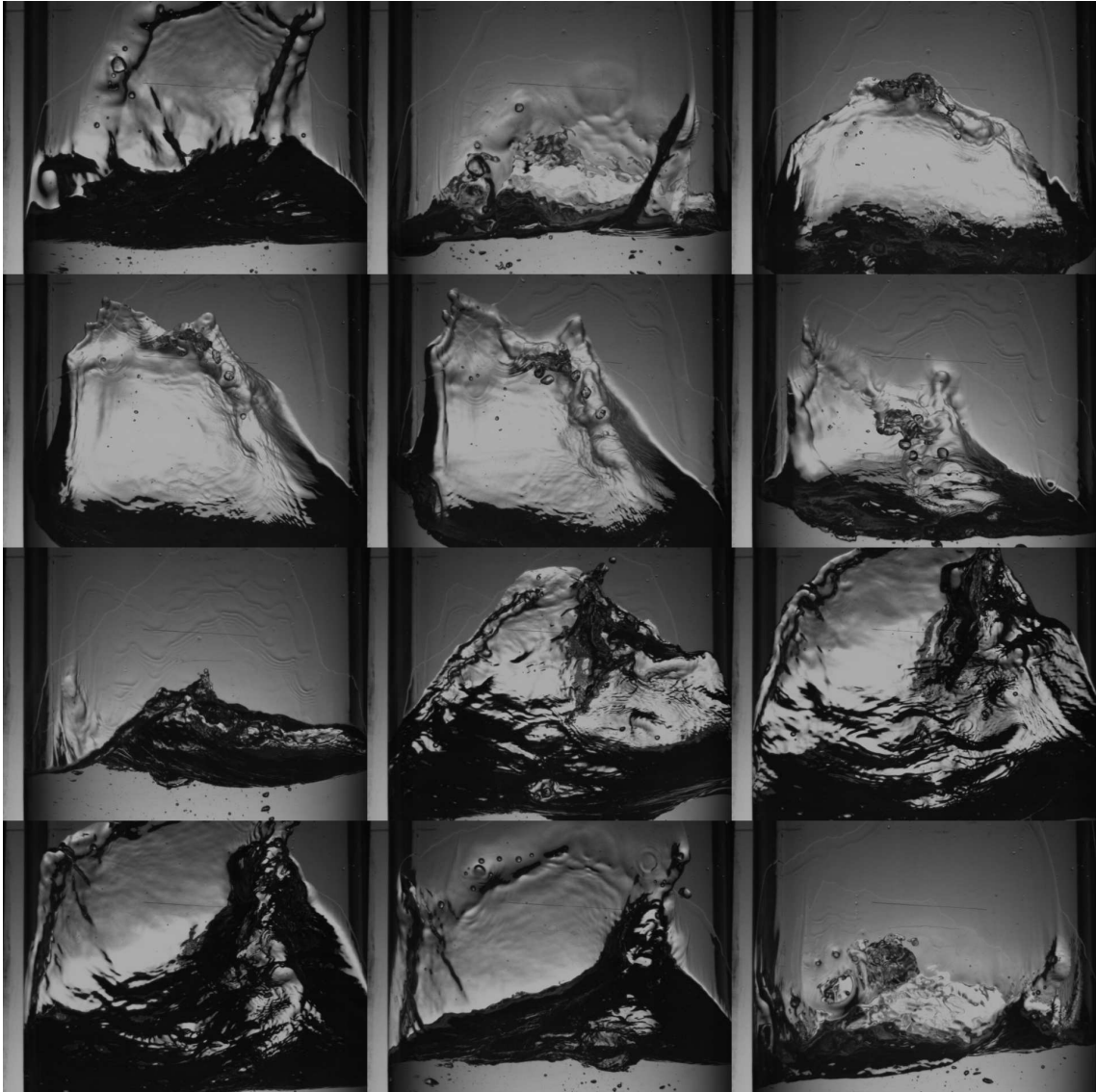


FIG. 5.4 – Installation du régime chaotique, initiation de la rotation de l’onde : vues de face en cuve cylindrique en plexiglas de rayon  $R = 150$  mm remplie d’eau. Le temps séparant deux clichés successifs est de 60 ms. Les lignes horizontales indiquent  $b_c$  sur chacune des faces du réservoir.  $h/R = 1.5$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ ,  $A_f/R = 2.2/10^{-3}$ .  $T \approx 600$  ms.

la même amplitude. Les signaux caractéristiques du régime chaotique, proposés par les figures 5.5 et 5.6, montrent en effet une amplitude avant brisure constante pour chacune des bouffées et pour chacune des deux sondes. Les amplitudes maximales atteintes croissent avec l'amplitude de forçage. L'amplitude maximale, atteinte avant brisure pour les deux sondes, est  $b_{max} \approx 0.6b_c$  pour  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ . Dans le cas  $A_f/R = 2.1 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ , l'amplitude maximale atteinte avant brisure est plus élevée sur la sonde à  $90^\circ$  :  $b_{max(90)} \approx 1.5b_c$ ,  $b_{max(0)} \approx 1b_c$ .

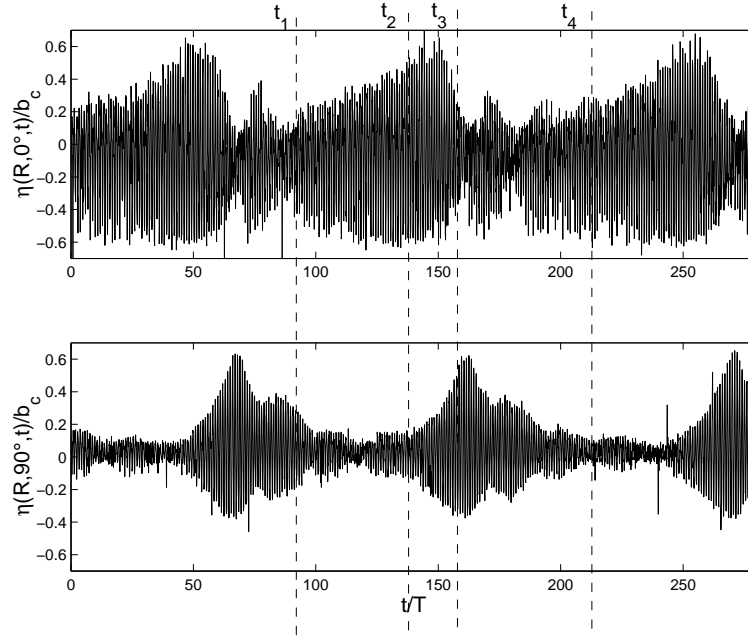


FIG. 5.5 – Signaux temporels des sondes capacitives à  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$  en cuve cylindrique en verre  $R = 78$  mm remplie d'eau.  $h/R \approx 1.5$ ,  $A_f/R = 0.3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ .

### 5.1.2 Paramètres caractéristiques du régime chaotique

Quatre paramètres caractérisent ce mouvement alternant :

- une amplitude caractéristique : l'amplitude moyenne mesurée par chacune des sondes <sup>1</sup>,
- une fréquence caractéristique : la fréquence des bouffées mesurée par chacune des sondes  $f_0$ ,  $f_{90}$ . Les deux signaux mesurés sont extrêmement bien corrélés

---

<sup>1</sup>On aurait pu compléter avec l'amplitude maximale atteinte.

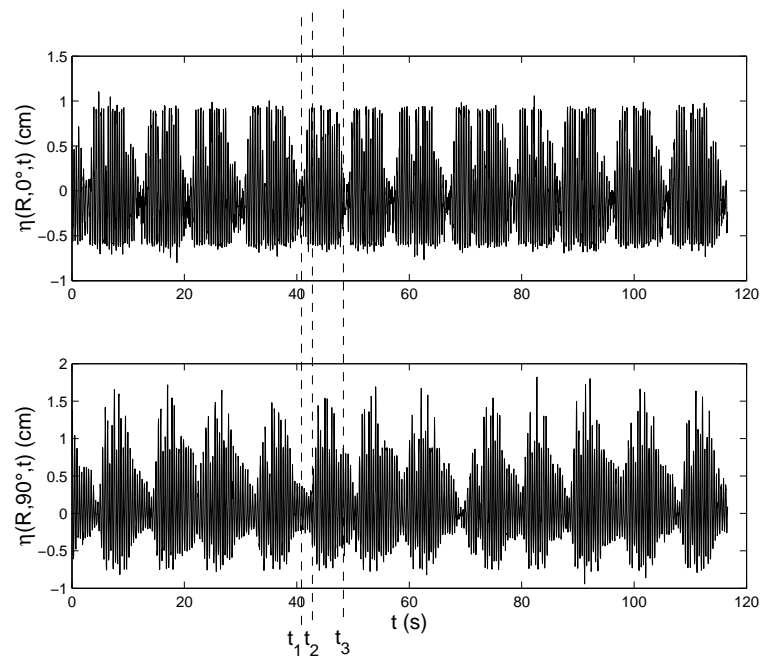


FIG. 5.6 – Signaux temporels des sondes capacitives à  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$  en cuve cylindrique en verre  $R = 78$  mm remplie d'eau.  $h/R \approx 1.5$ ,  $A_f/R = 2.1 \cdot 10^{-2}$ ,  $\omega/\omega_{11} = 0.98$ .

- et les deux fréquences sont égales.  $1/f$  représente le temps d'un cycle (mode antisymétrique 1 et mode tournant),
- domination du mode tournant : la fraction du mode tournant, c'est-à-dire la proportion du temps pendant lequel la même amplitude est mesurée par chacune des sondes,
  - l'amplitude du mode tournant, c'est-à-dire l'amplitude moyenne mesurée par les deux sondes lorsque la même amplitude est mesurée sur chacune d'elles.

Sur les signaux présentés en figure 5.5 et 5.6, nous notons que les amplitudes auxquels l'onde se brise augmentent avec l'amplitude d'excitation, que les fréquences des bouffées augmentent également. La proportion de mode tournant croît elle-aussi avec l'amplitude d'excitation. Le point important est que la brisure peut se produire pour  $b < b_c$  lorsque l'amplitude de forçage est faible. Ceci est contraire aux conclusions de Taylor [54]. En effet, l'onde plane ne se déstabilise, dans le cadre de ses expériences, uniquement pour  $b/\lambda > 0.15$ , soit  $b/b_c > 0.95$ . Il en conclut que la déstabilisation ne peut avoir lieu qu'à condition que l'accélération du front dépasse celle de la gravité. Ce qui est mis en défaut par nos expériences. En revanche, il est important de souligner que les amplitudes utilisées par Taylor sont relativement élevées ( $A_f = 2.8$  mm à 3.8 mm soit une amplitude relative équivalent  $A_f/R = 2.9 \cdot 10^{-2}$  à  $4.0 \cdot 10^{-2}$ ), régime pour lesquels nous avons également observé des déstabilisations pour des amplitudes seuils supérieures à  $b_c$ .

### 5.1.3 Dépendance du régime chaotique en fonction de l'amplitude

A fréquence d'excitation fixée, l'amplitude de forçage est augmentée graduellement et le régime chaotique est analysé grâce aux paramètres définies précédemment. Les résultats sont reportés sur les figures 5.7 et 5.8. Nous ne prenons pas en compte les résultats pour  $A_f/R < 0.2 \cdot 10^{-2}$  qui correspondent à des amplitudes mesurées trop faibles.

L'amplitude maximale atteinte avant brisure augmente graduellement avec l'amplitude d'excitation. Il en est de même pour l'amplitude du mode tournant discontinu (voir la figure 5.7.b). L'évolution est approximativement en racine carrée de l'amplitude de l'excitation (facteur multiplicatif de 1.5). L'amplitude moyenne mesurée à  $\theta = 0^\circ$  sature pour  $A_f/R = 10^{-2}$  à  $b/\lambda \approx 0.1$  alors que l'amplitude à  $\theta = 90^\circ$  croît continuellement (voir la figure 5.7.a). Ainsi, lorsque le mode tournant est atteint,  $A_f/R > 2.5 \cdot 10^{-2}$ , un mode antisymétrique 1 subsiste (amplitude plus faible à  $\theta = 0^\circ$  qu'à  $\theta = 90^\circ$ ).

La figure 5.8.a présente l'évolution de la fréquence des bouffées toujours en fonction du



forçage. Pour de faibles amplitudes d'excitation, le bruit est comparable à l'amplitude de l'onde, on ne peut mesurer une fréquence significative. A l'opposé, pour de grandes valeurs de fréquence d'excitation, le temps entre deux bouffées successives est trop faible pour distinguer une enveloppe claire dont la fréquence pourrait être déterminée. Pour une large plage d'amplitude d'excitation  $0.2 \cdot 10^{-2} < A_f/R < 1.3 \cdot 10^{-2}$ , la fréquence de ces bouffées augmente linéairement. La succession des cycles se fait de plus en plus rapidement.

Le temps du mode antisymétrique 1 décroît lorsque l'amplitude de forçage croît. Le mode transitoire a une asymptote à 80% de mode tournant (figure 5.8.b), ce qui, aux fréquences de bouffées correspondantes, est associé à 8 périodes de mode tournant avant la brisure. L'installation du pur mode tournant a lieu ensuite par un saut brusque de ce régime intermittent vers le régime d'onde azimutale.

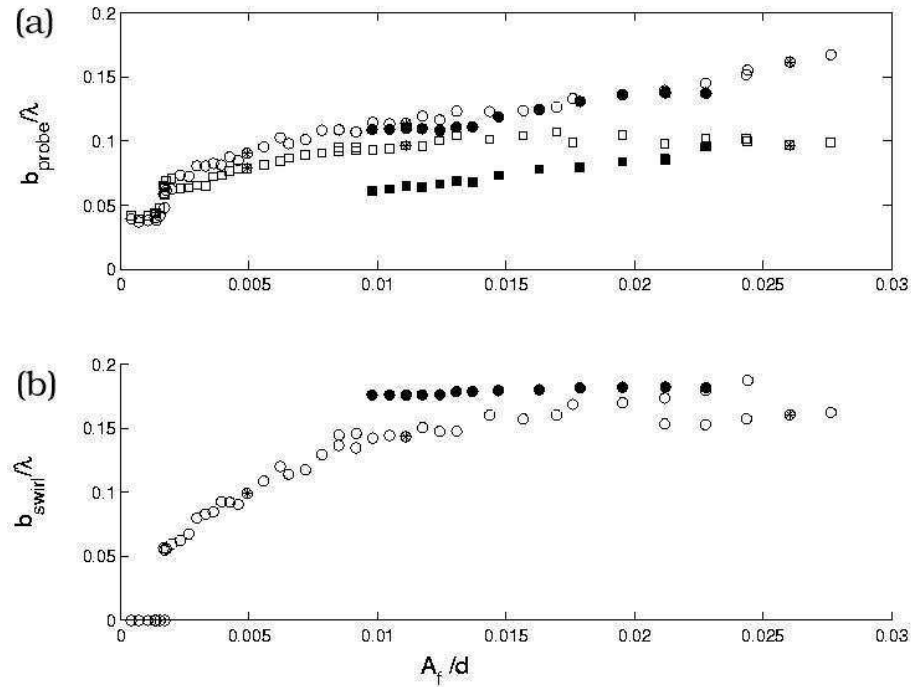


FIG. 5.7 – (a) Amplitude moyenne normalisée par  $\lambda \approx 3.4R$  mesurée par chacune des sondes en fonction de l'amplitude de forçage relative  $A_f/R$  à  $\omega = 0.98\omega_{11}$  :  $\square$ ,  $\blacksquare$ , sonde à  $0^\circ$  ;  $\circ$ ,  $\bullet$ , sonde à  $90^\circ$  ; respectivement pour des amplitudes d'excitation croissante et décroissante. (b) Amplitude du mode tournant discontinu normalisée par  $\lambda$  en fonction de l'amplitude de forçage relative à  $\omega = 0.98\omega_{11}$  :  $\circ$ , en augmentant l'amplitude d'excitation ;  $\bullet$ , en diminuant l'amplitude d'excitation.

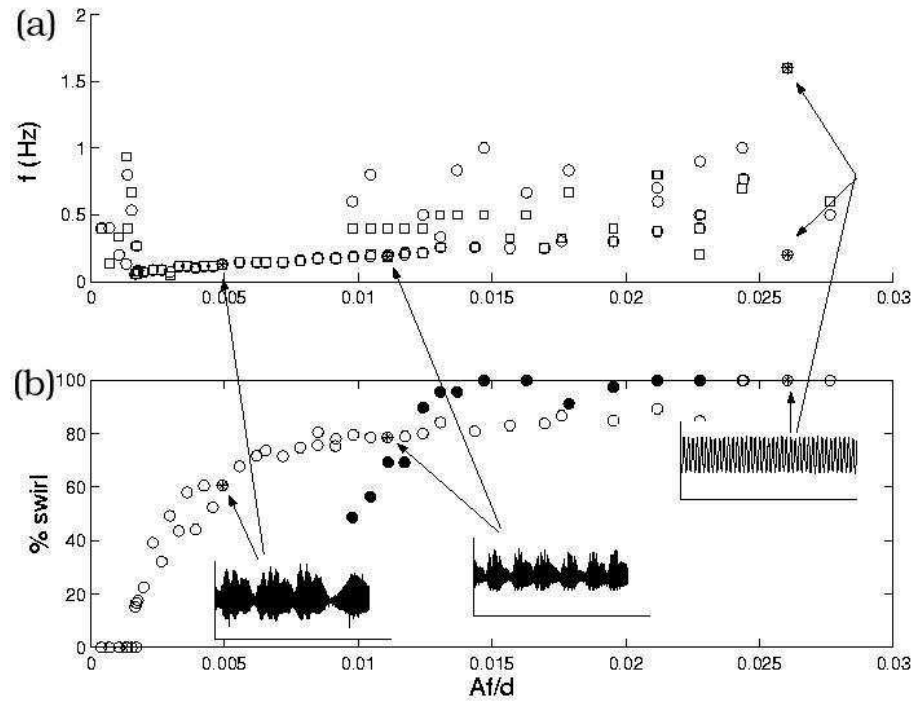


FIG. 5.8 – (a) Fréquence des bouffées en fonction de l’amplitude de forçage relative  $A_f/d$  à  $\omega = 0.98\omega_{11}$ .  $\square$ , sonde à  $\theta = 0^\circ$  ;  $\circ$ , sonde à  $\theta = 90^\circ$ . (b) Fraction du mode tournant dans le mouvement du fluide en fonction de l’amplitude de forçage relative à  $\omega = 0.98\omega_{11}$  (chaque sonde indique approximativement la même amplitude) ;  $\circ$ , en augmentant l’amplitude d’excitation ;  $\bullet$ , en diminuant l’amplitude d’excitation ;  $*$ , points caractéristiques indiquant la situation des diagrammes insérés (amplitude  $\theta = 90^\circ$  en fonction du temps).

## 5.2 Description du déferlement

### 5.2.1 Rappels sur le comportement à résonance avant déferlement

- Le déferlement est atteint pour  $\omega \approx \omega_{11}$  avec  $\omega < \omega_{11}$ <sup>2</sup>.
- A ces fréquences de forçage, l'amplitude de l'onde croît pratiquement linéairement en temps (voir fig. 5.9.a) et le taux de croissance est proportionnel à l'amplitude de forçage :

$$\frac{\Delta(b/R)}{\Delta(t/T)} = C\pi \frac{A_f}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.1)$$

- Le déphasage entre l'onde et le forçage augmente progressivement de 0 à  $-\pi/2$  au cours de la croissance de l'amplitude. Le déphasage de  $-\pi/2$  est atteint juste avant la brisure.
- L'accélération du front, de la position au repos  $\eta = 0$  à l'altitude maximale  $\eta = b$ , est dirigée dans le sens de la gravité. Elle croît également à chaque période jusqu'à dépasser  $g$ . Elle semble ensuite saturer aux alentours de  $\approx 1.1g$ .
- Une nappe liquide se forme à la paroi qui tire l'essentiel de l'énergie fournie par l'excitation quand le reste du liquide sature autour d'un profil théorique d'amplitude légèrement supérieure à  $b_c$  (voir fig. 5.9.b). L'écoulement devient alors tridimensionnel.

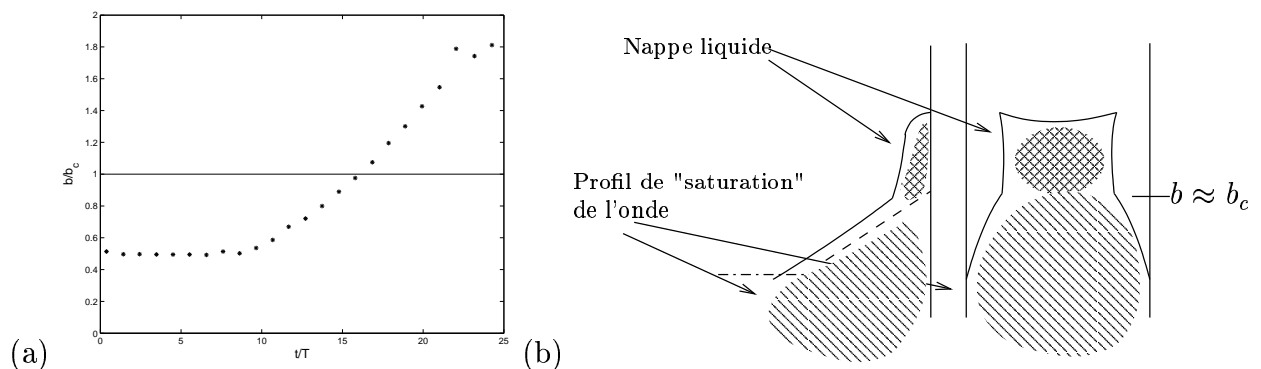


FIG. 5.9 – (a) Croissance typique de l'amplitude de l'onde à résonance. (b) Schéma de principe de la forme du profil pour  $b > b_c$ .

<sup>2</sup>On rappelle que le mode antisymétrique 1 présente en effet une non-linéarité négative dans le cas de profondeurs telles que  $h/R > 0.506$ .

## 5.2.2 Observation visuelle de la brisure

Les figures 5.10 montrent une succession de maxima en cuve cylindrique de rayon  $R = 78$  mm (les images sont espacées d'une période). La figure 5.11 donne une série de vues de côté dans la même cuve. Lorsque le profil de l'onde se modifie, nous constatons qu'à la paroi la forme du front est également changée. En effet, une nappe aux bords quasi verticaux se forme. La largeur de cette nappe est de l'ordre du rayon de la cuve<sup>3</sup>. Nous observons d'abord une légère déstabilisation du front. Puis une perturbation de plus grande longueur d'onde apparaît nettement. Elle se développe systématiquement sous la forme d'"oreilles" de part et d'autre du front. La perturbation est donc toujours de longueur d'onde de l'ordre du rayon. La taille des "oreilles" augmente à chaque période. Aux périodes suivantes, nous observons une importante création d'interface. Il s'agit d'abord d'un phénomène de "splashing" des paquets fluides provenant des "oreilles". On constate également un jet central émergeant quand le front est à sa position la plus basse. Ce jet est entraîné avec l'onde et alimenté pendant la phase d'ascension du front. Il se morcelle en gouttes et est à l'origine d'une importante création d'interface.

Pour simplifier le problème et en particulier s'affranchir des phénomènes de focalisation liés à la cuve cylindrique, nous nous plaçons dans une géométrie à deux dimensions. Des essais de déferlement sont réalisés en cuve carrée en verre,  $2L = 280$  mm, remplie d'eau. Une série de vues de face de l'allure du front de l'onde pour des périodes successives est présentée en figure 5.12. Ces clichés permettent de donner les principales caractéristiques du scénario qui mène au déferlement :

1. Une déstabilisation du front de l'onde apparaît dans un premier temps (fig.5.12.a) lorsque l'amplitude dépasse une amplitude seuil :

$$b > b_c = g/\omega_{11}^2,$$

donnant  $b_c = 0.54R$  pour un réservoir cylindrique et  $b_c = 0.64L$  pour un réservoir carré de longueur  $2L$  soit  $b_c/\lambda = 0.16$ . Cela correspond alors à une accélération du front supérieure à l'accélération de la gravité  $g$  ( $g = a_x$ , l'accélération axiale). Penney et Price [46] donnent  $b_c/\lambda = 0.14$  lorsque  $a_x = g$ . Taylor [54], quant à lui, obtient  $b_c/\lambda = 0.15$  pour l'amplitude de l'onde stationnaire stable la plus grande. La première déstabilisation est de courte longueur d'onde  $\lambda_{RT}$  et se développe pendant 3 à 4 périodes au maximum après que  $b_c$  a été atteint. Cela est attribué à une instabilité de type Rayleigh-Taylor.

---

<sup>3</sup>Nous avons comparé cette largeur de nappe en cuve cylindrique de rayon  $R = 150$  mm et  $R = 78$  et nous avons en effet constaté qu'elle est dans les deux cas de l'ordre du rayon.

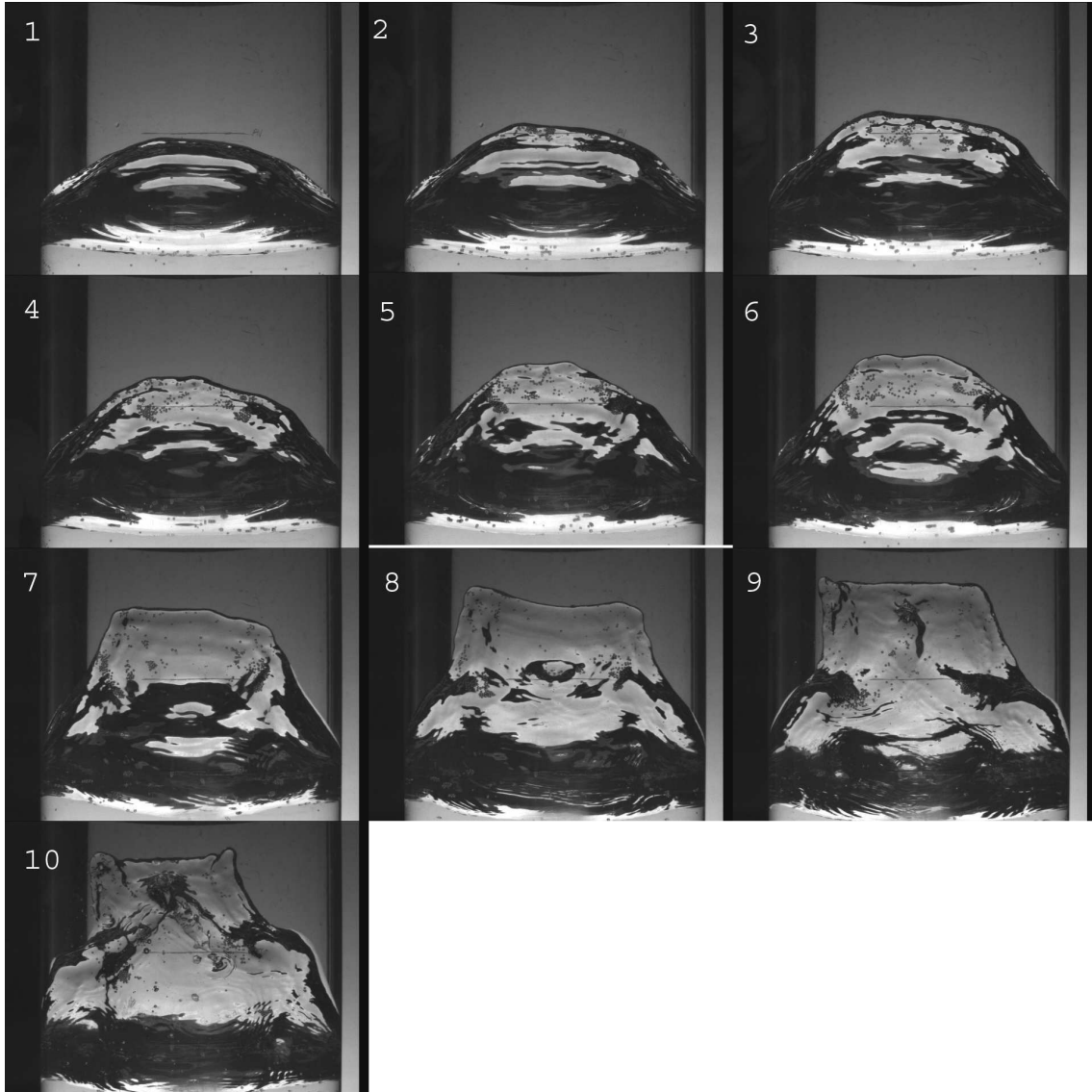


FIG. 5.10 – Vue de face de maxima successifs du front de l'onde. Cuve cylindrique en verre  $d = 158$  mm remplie d'eau à  $h/R \approx 1.5$ . Mise en mouvement depuis le repos à un forçage de fréquence  $\omega = 0.96\omega_{11}$ .



FIG. 5.11 – Vue de côté de la forme de l'onde. Cuve cylindrique en verre  $d = 158$  mm remplie d'eau à  $h/R \approx 1.5$ . Mise en mouvement depuis le repos à un forçage de fréquence  $\omega = 0.96\omega_{11}$ . Chaque ligne de clichés représente une période. Sur un même ligne, les clichés sont espacés de 66 ms, le dernier cliché de la ligne est la position maximale.

2. Une deuxième perturbation se superpose à la première (fig.5.12.c). Sa longueur d'onde  $\lambda_F$  peut être 4 fois supérieure à la plus courte longueur d'onde ( $\lambda_F \approx L$  or  $2L$ ). Après 2-3 périodes environ, la longueur d'onde courte disparaît (fig.5.12.e) et l'amplitude de la plus grande peut atteindre des valeurs de plusieurs centimètres. Cette longue longueur d'onde est de type Faraday.
3. L'augmentation d'aire interfaciale se produit principalement de deux manières différentes :
  - Production de gouttes due à une forte déformation du profil de l'onde suivi du déferlement,
  - Entraînement de bulles et production de gouttes du à la nappe chutant dans le creux de la vague.
 Nous discuterons dans ce chapitre successivement les trois principales phases qui conduisent à la brisure et à un fort mélange dans le réservoir.

## 5.3 Instabilité Rayleigh-Taylor

Comme mentionné auparavant, la croissance de la première perturbation de longueur d'onde courte est observée lorsque l'accélération du front est supérieure à celle de la gravité. L'accélération peut atteindre  $1.1g$  (voir fig. 3.28).

### 5.3.1 Éléments de théorie

L'instabilité Rayleigh-Taylor correspond à l'instabilité qui se développe à l'interface lorsqu'un fluide dense se trouve au-dessus d'un fluide moins dense (voir l'article de Taylor [55]). Plus généralement, ce phénomène concerne la stabilité d'une interface entre un fluide dense et un fluide moins dense accélérée vers l'un des deux fluides. Le principe de la déstabilisation est présenté succinctement sur la figure 5.13. La tension de surface a un effet stabilisant sur l'instabilité.

On considère le cas de la figure 5.13.a d'un fluide dense placé sous un fluide léger soumis à une accélération inférieure à la gravité. On perturbe l'interface vers le haut (dans le sens opposé à la gravité) avec une amplitude  $\Delta h$ . La pression dans le fluide le moins dense devient alors  $p_1 = p - \rho_1(g - a)\Delta h$ . De l'autre côté de l'interface, dans le fluide le plus dense, la pression devient  $p_2 = p - \rho_2(g - a)\Delta h$ . L'écart de pression de part et d'autre de l'interface vaut alors  $p_1 - p_2 = (\rho_2 - \rho_1)g\Delta h$ . Il est donc dirigé du fluide le moins dense vers le fluide le plus dense et tend à diminuer la perturbation. Pour une interface entre un fluide dense au-dessus d'un fluide moins dense, l'écart de pression

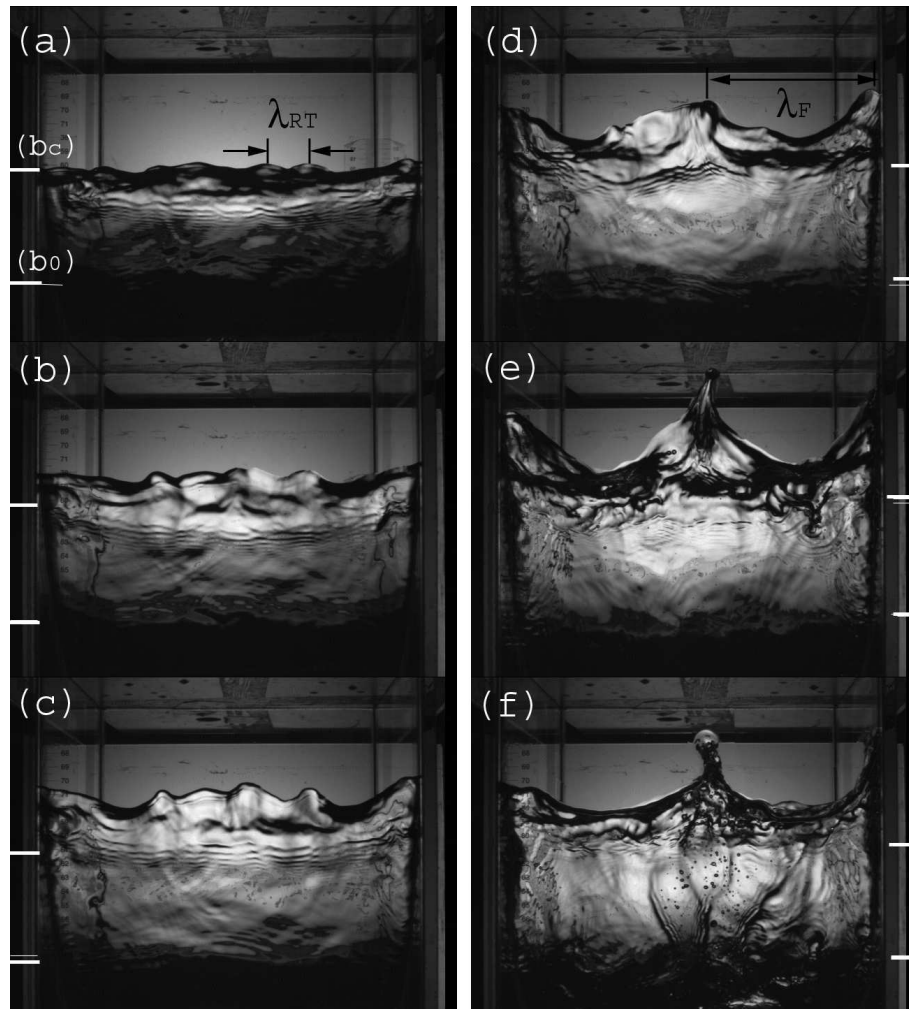


FIG. 5.12 – Perturbations du front de l’onde. Les images sont prises dans la direction du forçage pour des périodes successives et correspondant à la position maximale du front (toujours la même face du réservoir). Réservoir carré,  $L = 280$  mm ; temps entre deux images  $t \approx T = 2\pi/\omega$  ;  $A_f \approx 3.5$  mm



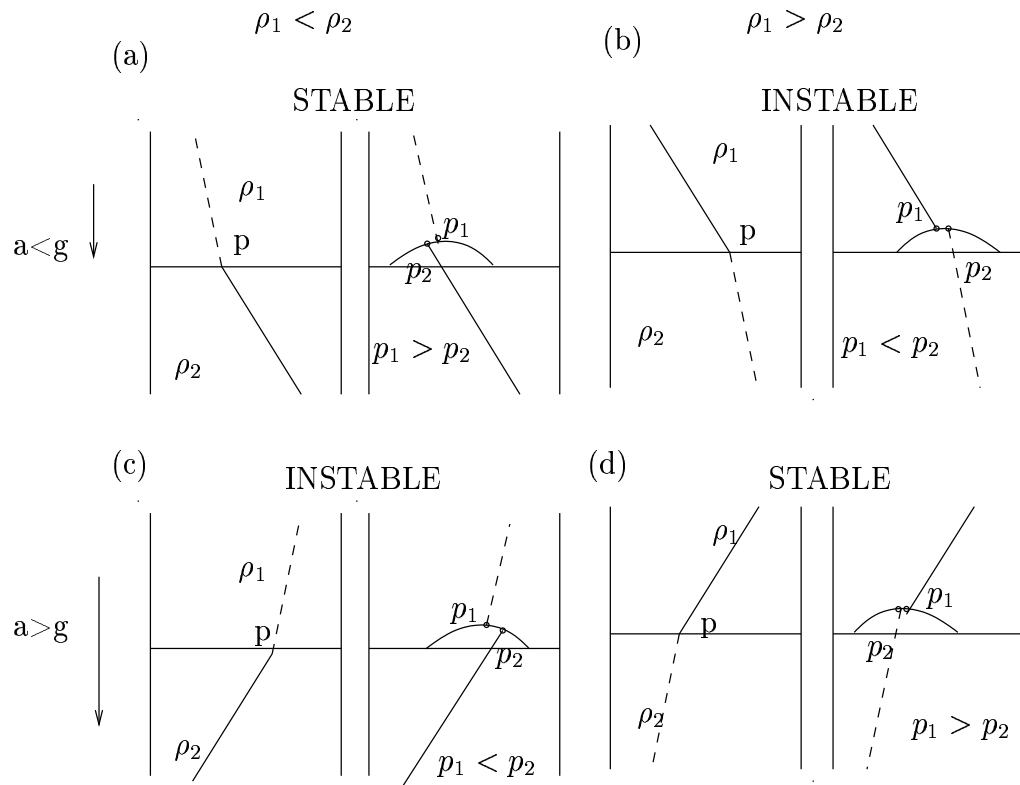


FIG. 5.13 – Principe de la déstabilisation.

tend, au contraire, à augmenter la perturbation. Si l'accélération est supérieure à  $g$ , la répartition de pression s'inverse. Dans ce cas (5.13.c et d), l'interface est stable lorsque cette interface est accélérée du fluide le plus dense vers le fluide le moins dense. L'interface est instable dans le cas contraire. Ainsi, l'interface entre l'air et l'eau deviendra instable si l'accélération qu'elle subit dirigée de l'air vers l'eau devient supérieure à la gravité.

Les expressions théoriques de la longueur d'onde la plus instable et du taux de croissance sont bien établies dans l'ouvrage de Chandrasekhar [11] avec une accélération constante. Dans le cas d'une interface air-eau accélérée à  $a > g$ , la longueur d'onde la plus instable s'écrit :

$$\lambda_{RT} = 2\pi \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho(a-g)}}, \quad (5.2)$$

et le taux de croissance associé

$$s_{RT} = \left( \frac{4}{27} \frac{(a-g)^3}{\sigma/\rho} \right)^{1/4}. \quad (5.3)$$

### 5.3.2 Résultats expérimentaux

**Observations** Les images 5.14 présentent le développement de l'instabilité de courte longueur d'onde observée le long de la crête de l'onde pour 4 périodes successives. A la redescente du front la déstabilisation est quasiment inexistante mais le phénomène garde le plus souvent la mémoire de la position des crêtes et creux. Comme le montre, le dernier cliché de cette série, cette instabilité peut donner lieu à la formation de "ligaments" de l'ordre du centimètre. Cette observation nous a incités à étudier en détail ce phénomène.

Nous avons cependant remarqué plus tard que cette déstabilisation disparaît avec la croissance des ondes de Faraday et n'explique pas le déferlement observé au terme de la croissance à résonance.

Les expériences sont conduites avec de l'eau et de l'alcool pour faire varier la tension superficielle cinématique  $\sigma/\rho$ , et en conséquence la longueur d'onde la plus instable. La figure 5.15 donne les longueurs d'ondes mesurées (voir par exemple les images 5.12.a et b).

A partir des résultats théorique de Taylor, la longueur d'onde la plus instable peut être estimée. Pour un niveau d'accélération de l'ordre de  $1.1 - 1.2g$ , la longueur d'onde attendue  $\lambda_{RT}$  est de l'ordre de 6 à 9 cm. Ceci correspond aux résultats expérimentaux

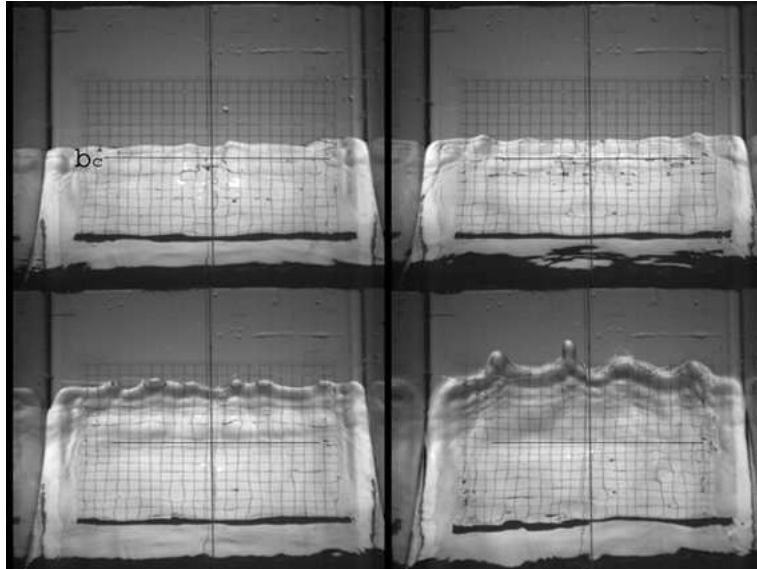


FIG. 5.14 – Cuve carrée en plexiglas  $2L = 340$  mm remplie d'eau.

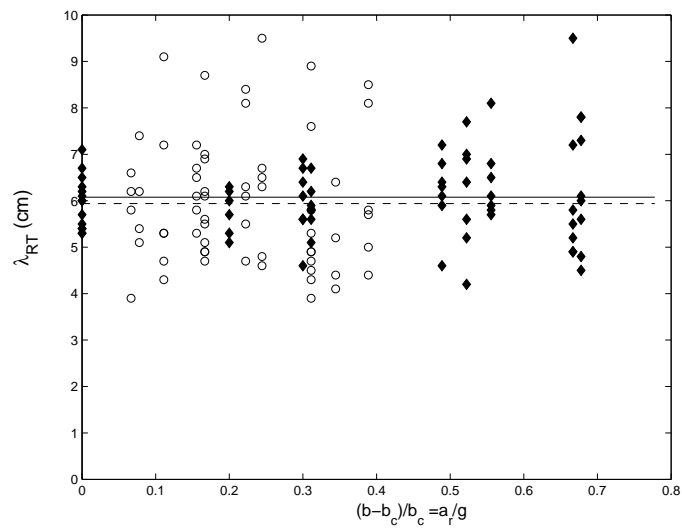


FIG. 5.15 – Longueurs d'onde en fonction de l'amplitude de l'onde au-dessus de  $b_c$ . ◆, eau ; ○, alcool. —, — —, valeurs moyennes expérimentales respectivement pour l'eau et l'alcool.

(fig. 5.15).

Le ratio théorique entre les longueurs d'onde les plus amplifiées pour l'eau et l'alcool est  $\lambda_{RTeau}/\lambda_{RTalcool} = 1.6$  en considérant une accélération résiduelle  $a - g$  moyennée sur un quart de période et identique pour les deux liquides. A partir de la valeur moyenne des longueurs d'onde mesurées pour l'eau, on obtient théoriquement pour l'alcool  $\lambda_{RTtheo} \approx 6/1.6 \approx 3.75$  cm ce qui est nettement inférieur à la valeur moyenne mesurée (sensiblement égale à celle de l'eau). Nous observons cependant une forte dispersion des valeurs. N'ayant pas obtenu la dépendance en  $\sigma/\rho$  attendue, nous ne pouvons conclure définitivement sur la nature de l'instabilité.

Plusieurs facteurs peuvent expliquer l'écart entre les résultats expérimentaux et les valeurs théoriques :

- l'accélération varie au cours de la montée du front. On ne peut envisager un ajustement instantané de la longueur d'onde sur l'accélération subie par le front. En fait, il existe vraisemblablement une accélération seuil  $a_s$  qui fixe une longueur d'onde de l'instabilité. Celle-ci s'amplifie ensuite avec un taux de croissance décroissant au cours de la période car la longueur d'onde fixée pour  $a_s$  diffère de plus en plus de la longueur d'onde la plus amplifiée (c'est-à-dire correspondant à une accélération augmentant peu à peu).
- le taux d'amplification de l'instabilité de Rayleigh-Taylor est "en cloche" : pour des longueurs d'onde variant entre 4 et 9 cm, l'amplification varie seulement d'environ  $\pm 20$  % pour les niveaux d'accélération existant. Il n'y a pas de forte sélection d'une longueur d'onde.
- la superposition de courtes et longues longueurs d'onde (type Faraday, voir plus loin) rend les mesures difficiles.

Pour prolonger la comparaison entre le cas de l'eau et celui de l'alcool, nous avons mesuré l'accélération du front de l'onde nécessaire à l'observation d'amplitude de perturbations de 1 cm. Malgré la forte dispersion des données expérimentales, le front de l'onde apparaît se déstabiliser plus rapidement (pour des accélérations plus faibles) dans le cas de l'alcool. Cette tendance est en accord qualitatif avec la comparaison des taux d'amplification théoriques de l'instabilité Rayleigh-Taylor qui décroissent avec la tension superficielle.

Lorsqu'on évalue le taux de croissance pour des niveaux d'accélération de  $1.5g$ , on trouve  $s \approx 0.02 \text{ s}^{-1}$ , ce qui donne un ratio de la perturbation finale à la perturbation initiale de 2.7 en intégrant sur un quart de période. Ceci maximise en fait la croissance de la perturbation puisque l'accélération est inférieure à  $1.5g$  et, en tout cas, n'est pas à ces niveaux durant le quart de période pendant lequel la déstabilisation est amplifiée. Ainsi, on conçoit que l'instabilité ne se développe pas au-delà d'environ 2

cm, ce qui est largement inférieur aux amplitudes des ondes de Faraday discutées ci-après. Si l'instabilité de Rayleigh-Taylor ne disparaît pas complètement au profit de la perturbation de plus longue longueur d'onde, elle contribue peu à la création d'interface.

## 5.4 Instabilité de Faraday

Comme mentionné auparavant, la deuxième perturbation de plus grande longueur d'onde apparaît 1 ou 2 périodes après l'apparition de l'instabilité de courte longueur d'onde. Les deux instabilités coexistent dans un premier temps. Au terme d'environ deux périodes supplémentaires, l'ensemble de l'énergie contribue seulement à augmenter l'amplitude de la grande longueur d'onde. Cette seconde instabilité est analysée plus en détail à la base d'images prises en cuve carrée.

### 5.4.1 Elements de théorie

Miles et Henderson [37] présentent une revue des ondes de surface forcées paramétriquement. On parle ainsi d'instabilité paramétrique lorsqu'on impose une variation d'un des paramètres gouvernant les ondes. On distingue alors :

- les ondes de Faraday : elles apparaissent lorsqu'on impose une variation périodiques de la gravité,
- les ondes transverses (cross waves) : elles sont typiquement produites par un batteur à houle lorsque la fréquence de forçage est approximativement deux fois une des fréquences propres des ondes stationnaires dans la direction transverse du canal. Les interactions nonlinéaires entre la surface libre et le batteur correspondent au cas des oscillations verticales d'un réservoir.
- les ondes de Stokes dans le cas d'ondes incidentes sur un plan incliné.

L'instabilité de grande longueur d'onde, observée ici, est interprétée comme des ondes forcées paramétriquement. En effet, on peut considérer que le mouvement induit par le premier mode antisymétrique 1 excite, par ce mouvement vertical du front, des ondes transverses le long de la crête de l'onde.

Une analogie des instabilités de Faraday est le pendule simple soumis à une oscillation verticale de son pivot (fig. 5.16). Dans le repère lié au pivot, le mouvement vertical du pivot est équivalent à une modulation de la gravité de la forme  $g(1 + \epsilon \cos \omega t)$  avec  $\epsilon = b\omega^2$ . La fréquence propre est par conséquent modulée par les oscillations verticales et l'équation du mouvement, appelée équation de Mathieu, s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \cos 2\omega t) \theta = 0, \quad (5.4)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

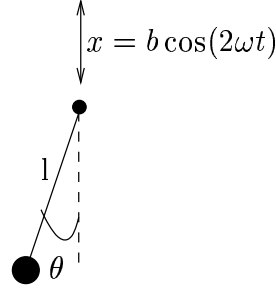


FIG. 5.16 – Pendule de Mathieu.

Les conditions de stabilité des ondes de Faraday régies par les équations de Mathieu ont été calculées par Benjamin et Ursell [5]. Leur théorie est potentielle (fluide non-visqueux) dans un réservoir de section constante rempli d'un fluide à une hauteur  $h$ , oscillant verticalement à fréquence  $\omega$  et amplitude d'excitation  $b$  fixées. L'angle de contact est fixé à  $90^\circ$ . La solution est développée en une série de modes propres orthogonaux. Ils obtiennent un système d'équations de Mathieu représentant chacune un mode. L'amplitude  $a_m$  du mode  $m$ , de nombre d'onde  $k_m$ , de pulsation propre  $\omega_m$  vérifie l'équation<sup>4</sup> :

$$\frac{d^2 a_m}{dT^2} + (p_m - 2q_m \cos 2T) a_m = 0 \quad (5.5)$$

avec les paramètres d'écart à la résonance  $p_m$  et de forçage  $q_m$  valant :

$$p_m = \frac{4k_m \tanh(k_m h)}{\omega^2} \left( g + \frac{k_m^2 \sigma}{\rho} \right) = \frac{4\omega_m^2}{\omega^2} \quad (5.6)$$

$$q_m = 2k_m b \tanh k_m h \quad (5.7)$$

Les expériences sont menées pour  $Bo \gg 1$ , c'est-à-dire que les effets de tension de surface peuvent être négligés. Le diagramme de stabilité correspond au comportement de l'amplitude  $a_m$  pour un temps  $T$  infini en fonction des valeurs de  $p_m$  et  $q_m$ . Les résultats sont reportés en figure 5.17. Les zones hachurées correspondent à des comportements instables (oscillations périodiques d'amplitude croissant exponentiellement). Les zones non-hachurées sont des domaines de stabilité (il ne s'agit pas nécessairement de solutions sinusoïdales).

---

<sup>4</sup> $T = 1/2\omega t$ .

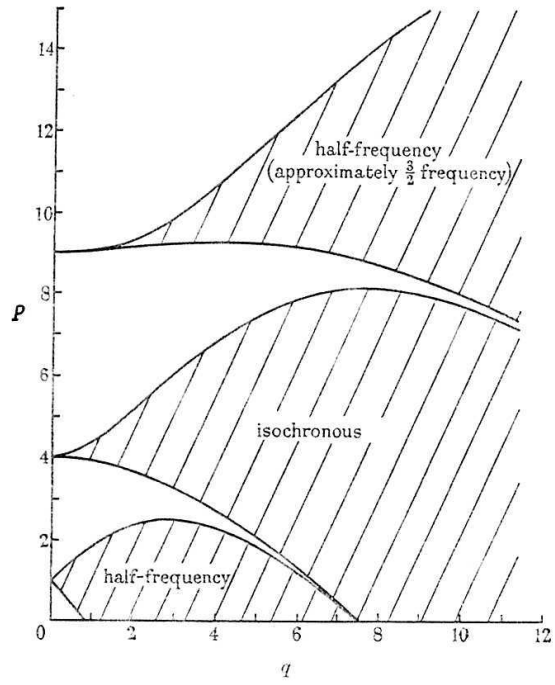


FIG. 5.17 – Diagramme de stabilité des équations de Mathieu. Résultats de Benjamin et Ursell [5].

## 5.4.2 Résultats expérimentaux

**Observation** Les longueurs d’onde principales observées pour la perturbation discutée ici sont :  $\lambda_F = L$  et  $\lambda_F = 2L$  où  $2L$  est le côté de la cuve carrée. Nous constatons que l’amplitude de la perturbation de type Faraday ne diminue pas au cours de la redescente du front.

**Seuil d’apparition** Nous avons évalué les amplitudes seuils de l’onde plane pour la manifestation de cette perturbation puis celles correspondant à la “disparition” de l’instabilité Rayleigh-Taylor. On notera qu’il ne faut peut-être pas parler de disparition mais plutôt évoquer le fait que l’énergie est au bout de quelques périodes stockée principalement dans l’augmentation en amplitude de l’instabilité de type Faraday. Les résultats sont reportés en table 5.1. Les expériences ont été menées en cuve carrée en verre remplie d’eau ou d’alcool et pour des augmentations progressives ou soudaines de la fréquence d’excitation de zéro à la fréquence de résonance du mode 1, plus exactement à  $(1 - \epsilon)\omega_{11}$  pour une amplitude de forçage donnée.

	Alcool	Eau
Augmentation pas à pas de 0 à $f_{11}$	$b_{s1}/b_c > 1.6 \pm 0.2$	$b_{s1}/b_c > 1.5 \pm 0.3$
	$b_{s2}/b_c > 2.2 \pm 0.2$	$b_{s2}/b_c > 2.3 \pm 0.3$
Augmentation brusque de 0 à $f_{11}$	$b_{s1}/b_c > 1.9 \pm 0.2$	$b_{s1}/b_c > 1.6 \pm 0.2$
	$b_{s2}/b_c > 2.2 \pm 0.2$	$b_{s2}/b_c > 2.3 \pm 0.3$

TAB. 5.1 – Valeurs de l’amplitude moyenne  $b_{s1}$  du front pour l’émergence d’une déstabilisation du front de l’onde de grande longueur d’onde et  $b_{s2}$  pour lesquelles l’instabilité de type Rayleigh-Taylor n’est plus visible.  $A_f/L = 2.2 \cdot 10^{-2}$

Pour un démarrage brusque de la position au repos directement à résonance, l’émergence des ondes de Faraday est obtenue pour des amplitudes plus grandes. Le taux de croissance linéaire de l’amplitude de l’onde plane est légèrement plus fort dans ce cas que pour une augmentation progressive. Ainsi, au terme du même nombre de périodes, l’amplitude atteinte est supérieure dans le cas d’une augmentation brusque.

**Longueurs d’onde et motifs** Les motifs de la perturbation sont les suivants :

- Motif 1 : la longueur d’onde est égale à la moitié de la largeur du réservoir avec trois maxima, deux maxima dans les coins et un maximum au centre (image 5.18.a),



- Motif 2 : la longueur d'onde est égale à la moitié de la largeur du réservoir avec deux maxima à  $L/2$  des côtés (image 5.18.b),
- Motif 3 : la longueur d'onde est égale à la largeur du réservoir avec un maximum au centre (image 5.18.c),
- Motif 4 : la longueur d'onde est égale à la largeur du réservoir avec deux maxima dans les coins (image 5.18.d).

Dans le cas de l'eau, le motif 1 n'a jamais été observé, ce qui peut être une conséquence d'un angle de contact pour l'eau plus important. Pour un démarrage brutal depuis le repos, les motifs 3 et 4 apparaissent alors qu'ils sont exceptionnels dans le cas d'une augmentation progressive de la fréquence. La longueur d'onde des ondes transverses est le plus souvent identique pour chacune des faces. Dans un cas sur 10 environ, on observe deux longueurs d'onde différentes sur chacune des faces.

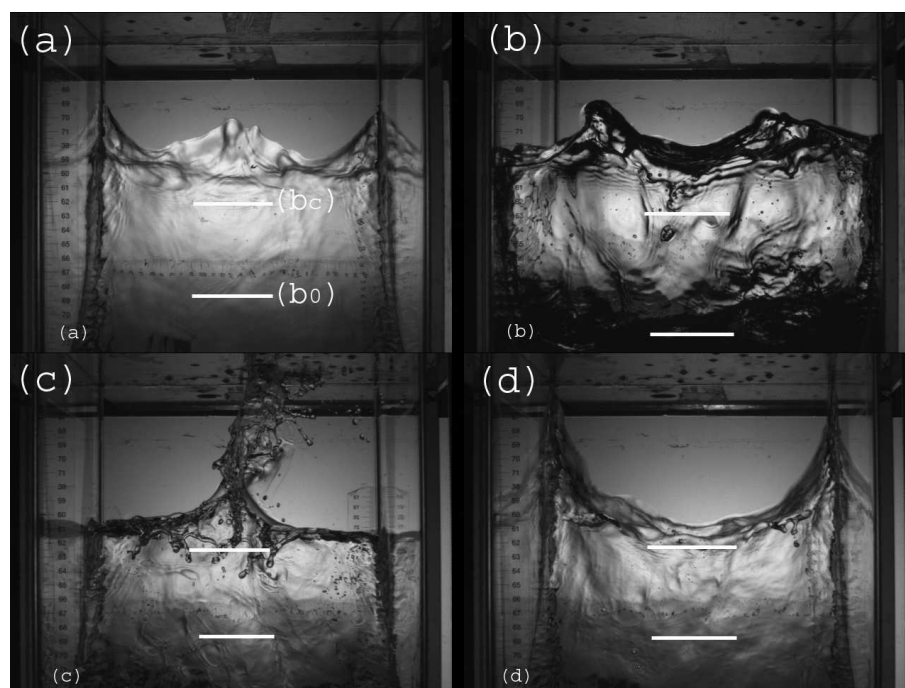


FIG. 5.18 – Motifs de déstabilisation du front. Images (prises dans la direction de forçage) du front de l'onde sur une des faces du réservoir, réservoir carré rempli d'alcool  $L = 28$  cm,  $A_f \approx 3.5$  mm.

Taylor [54] observe une déstabilisation transverse le long du front de l'onde dans les expériences d'ondes stationnaires générées par deux batteurs dans un canal de rapport d'aspect 2. Sur la ligne médiane de la cuve, entre les deux batteurs, un cône se forme au centre. Le long des batteurs, deux demi-cônes se forment au bord des parois. A la

période suivante, sur la ligne médiane deux demi-cônes se forment sur les parois. Le long des batteurs, le maximum est au centre de la cuve (motifs de type 3 et 4). Il s'agit d'un doublement de période.

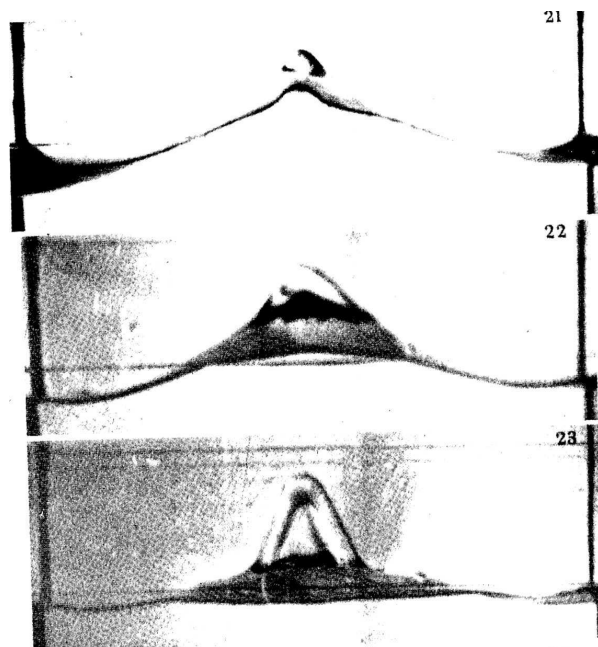


FIG. 5.19 – Images (prises dans la direction de forçage) du front de l'onde sur une des faces du réservoir, réservoir carré rempli d'alcool  $L = 28$  cm,  $A_f \approx 3.5$  mm.

**Pulsation** Pour mesurer la fréquence des ondes transverses, nous suivons ces perturbations d'une face à l'autre du réservoir et nous étudions l'alternance des motifs d'une demi-période à une autre. Prenons par exemple le cas où alternent d'une face à l'autre, c'est-à-dire d'une demi-période à la suivante, les motifs 1 et 2. On se reportera à la figure 5.20. La pulsation des ondes transverses est donc la pulsation de forçage du réservoir, c'est-à-dire  $(1 - \epsilon)\omega_{11} \approx \omega_{11}$ .

Les résultats les plus fréquents sont résumés par le tableau 5.2. Nous n'avons considéré que les cas où la même longueur d'onde est observée sur chacune des faces du réservoir, c'est-à-dire environ 9 cas sur 10. Lorsque deux longueurs d'onde différentes sont observées sur chacune des faces, l'analyse en terme de pulsation est beaucoup plus complexe.

Pour le dernier cas, on observe le motif 3 sur chacune des faces, puis le motif 4 à la période suivante de nouveau sur chacune des faces. Deux interprétations sont possibles, on peut considérer que la fréquence des ondes transverses est alors la moitié

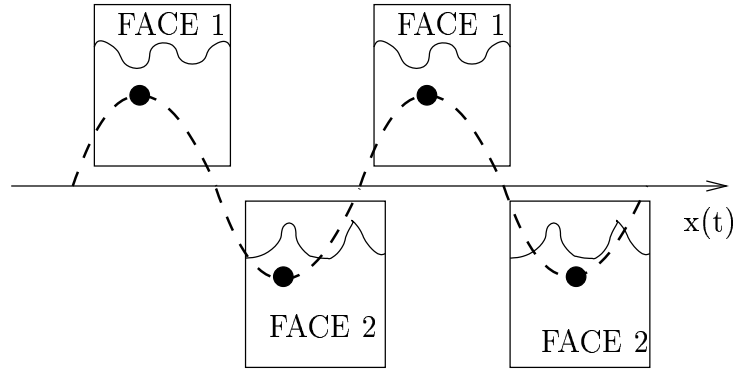


FIG. 5.20 – Détermination de la pulsation des ondes transverses.

Face 1	Face 2	Longueur d'onde	Pulsation
Motif 1	Motif 1	$L$	$2\omega_{11}$
Motif 1	Motif 2	$L$	$\omega_{11}$
Motif 3	Motif 4	$2L$	$\omega_{11}$
Motif 3 puis 4	Motif 3 puis 4	$2L$	$2\omega_{11}$

TAB. 5.2 – Pulsation effective des ondes transverses typiques.

de la fréquence de forçage du réservoir. Il est plus vraisemblable que l'alternance des motifs soit le signe d'un déphasage et que la pulsation réelle de ces ondes transverses soit  $2\omega_{11}$ .

### 5.4.3 Exploitation des résultats en terme d'instabilité de Faraday

Pour déterminer le paramètre d'écart à la résonance  $p$ , il faut connaître la fréquence de forçage des ondes transverses. Sur une demi-période de l'onde asymétrique, le front descend sur une face du réservoir et remonte sur l'autre. On considère donc que le système est équivalent à des vibrations verticales de fréquence  $\omega_{ftrans} \approx 2\omega_{11}$ <sup>5</sup>. L'onde transverse de longueur d'onde  $L$  a une fréquence propre  $\omega_L^2 = kg = 2\pi g/L$ . Donc le paramètre  $p$  vaut dans ce cas :

$$p = \frac{4\omega_L^2}{\omega_{ftrans}^2} \approx 4 \frac{2\pi g/L}{(2\omega_{11})^2} \approx \frac{2\pi g/L}{2\pi g/4L} \approx 4 \quad (5.8)$$

<sup>5</sup>La variation de l'accélération verticale s'effectue à la fréquence  $2\omega_{11}$ .

Par ailleurs, pour le paramètre  $q$  d'amplitude de forçage, en considérant des amplitudes de  $1.5b_c$  correspondant aux amplitudes de l'onde asymétrique pour lesquelles les ondes Faraday sont identifiables, on a :

$$q = 2bk_L \tanh(k_L h) \approx 3b_c k_L \approx 3 \frac{k_L}{k_{11}} \approx 12 \quad (5.9)$$

On s'attend d'après le diagramme de stabilité des équations de Mathieu (fig. 5.17) à observer des ondes synchrones, ce qui se produit dans un cas sur deux. Dans l'autre cas, nous observons des ondes transverses demi-synchrones.

La théorie de Benjamin et Ursell est inviscide. En prenant  $q = 3$  comme seuil d'instabilité des ondes transverses pour  $p = 4$ , pour prendre en compte l'amortissement visqueux, on obtient une amplitude d'onde seuil  $b = 3/4\pi L \approx 0.4b_c$ . Ceci nous autorise à envisager une déstabilisation pour des amplitudes inférieures à  $b_c$ . Il faut en revanche des amplitudes supérieures pour observer une manifestation importante de la déstabilisation du front.

Pour  $\lambda_F \approx 2L$ , on a  $p = 2$  et  $q = 6$ , calculé avec l'amplitude seuil évalué  $b = 1.5b_c$ . Dans ce cas, la théorie prévoit des ondes synchrones ou demi-synchrones avec l'excitation. On observe bien en effet que les motifs 3 et 4 sont de même pulsation que l'excitation ou de pulsation moitié dans nos expériences (voir tab. 5.2).

L'accord est globalement satisfaisant entre les expériences et la théorie de stabilité des ondes de Faraday. On notera cependant que l'onde transverse demi-synchrone la plus instable théoriquement, associée à  $p = 1$ , est de longueur d'onde  $4L$ , c'est-à-dire deux fois la largeur du réservoir et ne peut donc être observée.

## 5.5 Augmentation de l'aire interfaciale et mélange

Le ballottement de grandes amplitudes, et plus particulièrement le déferlement, conduisent à une augmentation substantielle de l'aire interfaciale. La figure 5.21 montre les principaux événements conduisant à la création d'interface.

### 5.5.1 Observations

Le scénario de la création d'interface est le suivant :

1. Le front de l'onde se déstabilise dans la direction transverse (Faraday).
2. L'amplitude de la déstabilisation transverse augmente considérablement.
3. Les paquets fluides des crêtes de l'onde transverse acquièrent une dynamique indépendante de l'onde plane (fig 5.21.a, b et fig 5.22.a, b et c). Ces paquets fluides

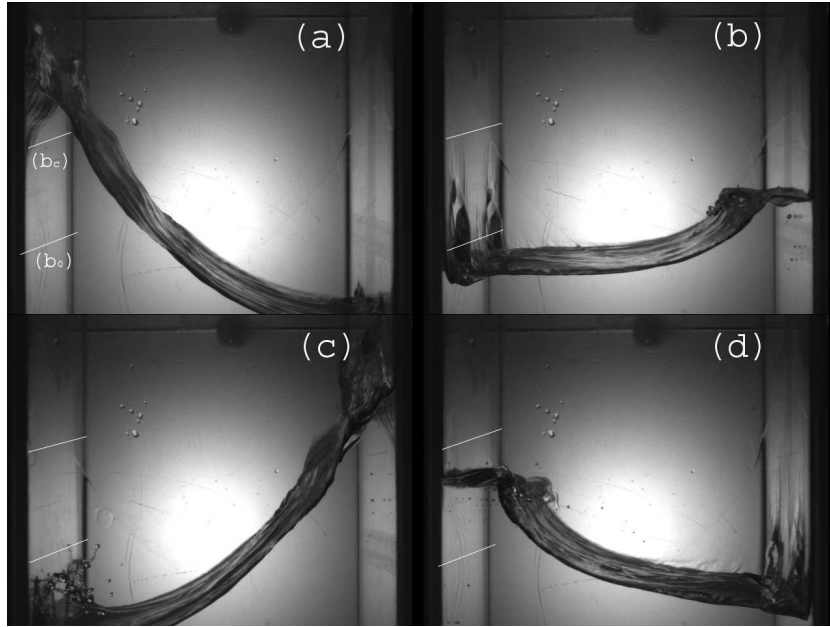


FIG. 5.21 – Vue de côté de la brisure à résonance. Le temps entre deux images est de 150 ms ( $T \approx 645$  ms). Réservoir carré rempli d'eau,  $L = 28$  cm,  $A_f \approx 3.5$  mm,  $\omega = 0.93\omega_{11}$ .

sont en retard et le déphasage augmente ainsi que leur masse (augmentation de l'amplitude de la perturbation). Le déphasage explique l'écart entre l'accélération mesurée à la crête de l'onde de l'ordre de  $g$  et celle attendue pour une onde plane d'amplitude supérieure à  $b > 1.5b_c$  ( $a > 1.5g$  en supposant  $a = b\omega_{11}$ ).

4. Les paquets fluides sont en chute libre.
5. On observe une collision entre les paquets fluides et l'onde plane (fig 5.21.c, fig 5.22.f et 5.23.a). Un calcul du temps de chute libre depuis  $\eta = 2b_c$  montre que les paquets fluides ont rejoint l'onde plane peu après la position au repos (temps de chute libre  $t = \sqrt{2\eta/g} = T/\pi \approx 0.3T$ , temps pour que l'onde retrouve la position au repos  $t \approx T/4$ ).
6. Un entrainement d'air et un jet de liquide suivent la collision (fig 5.21.d et fig 5.22.h and i)
7. La forme de l'onde plane est altérée et l'onde déferle (fig 5.21.d, fig 5.22.i et 5.23.b)
8. L'onde devient asymétrique et l'amplitude chute, on se retrouve dans le cas du régime chaotique décrit au chapitre 4.

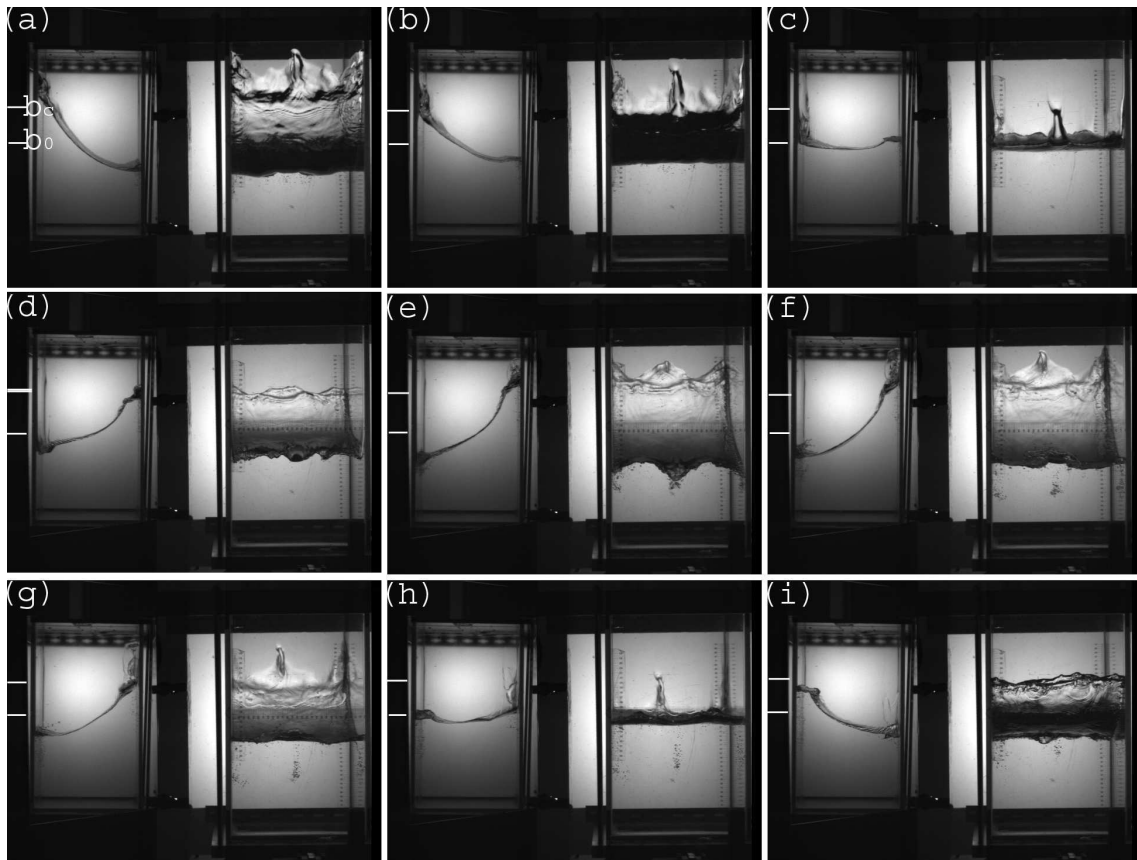


FIG. 5.22 – Vues simultanées de côté (gauche) et de face (droite) de la brisure à résonance. Les images sont prises dans la direction du déplacement avec un miroir placé à  $45^\circ$ . Le temps entre deux images est de 66 ms ( $T \approx 620$  ms). Réservoir carré rempli d'alcool,  $L = 280$  mm,  $A_f \approx 3.5$  mm,  $\omega = 0.97\omega_{11}$ .

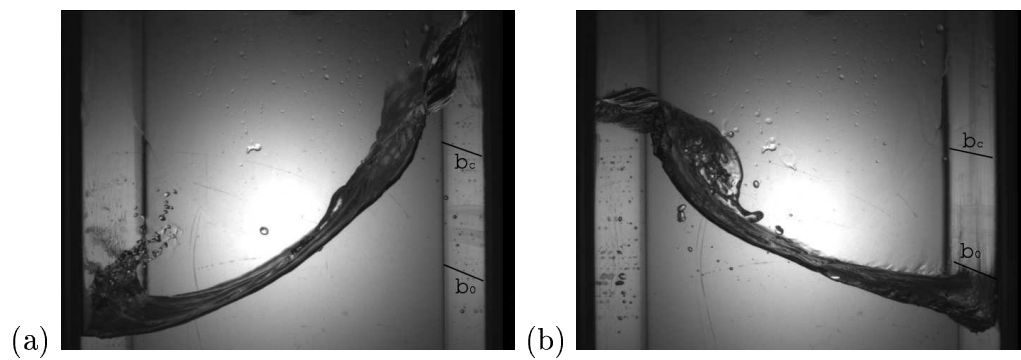


FIG. 5.23 – (a), splashing; (b), déferlement. Vue de côté. Réservoir carré rempli d'eau,  $L = 280$  mm,  $A_f \approx 3.5$  mm,  $\omega = 0.97\omega_{11}$ .

### 5.5.2 Comparaison avec les résultats de Jiang et al. [27]

Les expériences de Jiang et al.[27] ont été menées en canal étroit (rapport d'aspect 1 :10) soumis à une oscillation verticale (ondes de Faraday bidimensionnel). L'analyse des résultats expérimentaux conduit Jiang et al. à considérer une alternance entre 3 modes successifs et à ce qu'ils nomment un triplement de périodes. Les schémas de principe de ces trois modes sont reportés sur la figure 5.24. Le mode A est caractérisé par une amplitude très importante, un angle de crête aigu inférieur à  $30^\circ$ . Ce mode déferle très violemment. Un jet est émis à la crête de l'onde et forme une colonne de gouttes. Celle-ci s'écroule sur la surface du liquide et forme un cratère. Des bulles d'air sont entraînées et un jet secondaire rebondit. Les images de la figure 5.25.a et b présente une série de clichés au cours de la phase de montée et de descente du mode A. Le mode B apparaît à la période suivante. Il est en forme de chapeau et comprend 2 jets plongeant. Ces deux modes conduisent à une forte dissipation qui permet à la période suivante de retrouver un profil de type Penney et Price non déferlant (type C). Jiang et al estiment que les phénomènes de brisure doublent la dissipation, la brisure suivant le mode A étant la plus énergétique.

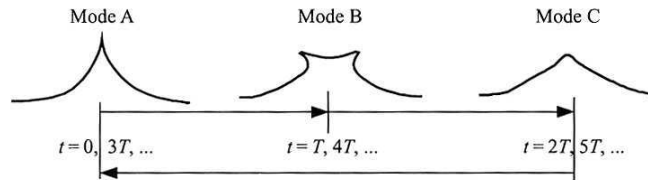


FIG. 5.24 – Triplement de périodes d'après Jiang et al. [27]

Dans certains cas, le triplement de période s'effectue avec une suite de mode analogue mais dissymétrique. Des images typiques sont présentées par les clichés 5.26. Le mode A émet un jet d'un côté ou d'un autre de façon arbitraire.

Dans nos expériences, le problème est tridimensionnel et comporte une paroi donc plus complexe, mais nous pouvons extraire du mécanisme proposé par Jiang et al des caractéristiques communes au cas bidimensionnel. Nous avons reporté sur la figure 5.27 le diagramme des cycles de croissance de l'amplitude de l'onde lorsque le forçage s'effectue proche de la résonance. Nous avons dessiné les allures typiques de la forme de la surface libre au cours de cette croissance. Nous en avons donné les périodes d'apparition successives. La forme de la surface libre est donnée un quart de période avant d'atteindre sa position la plus haute et également au moment où la position maximale est atteinte.

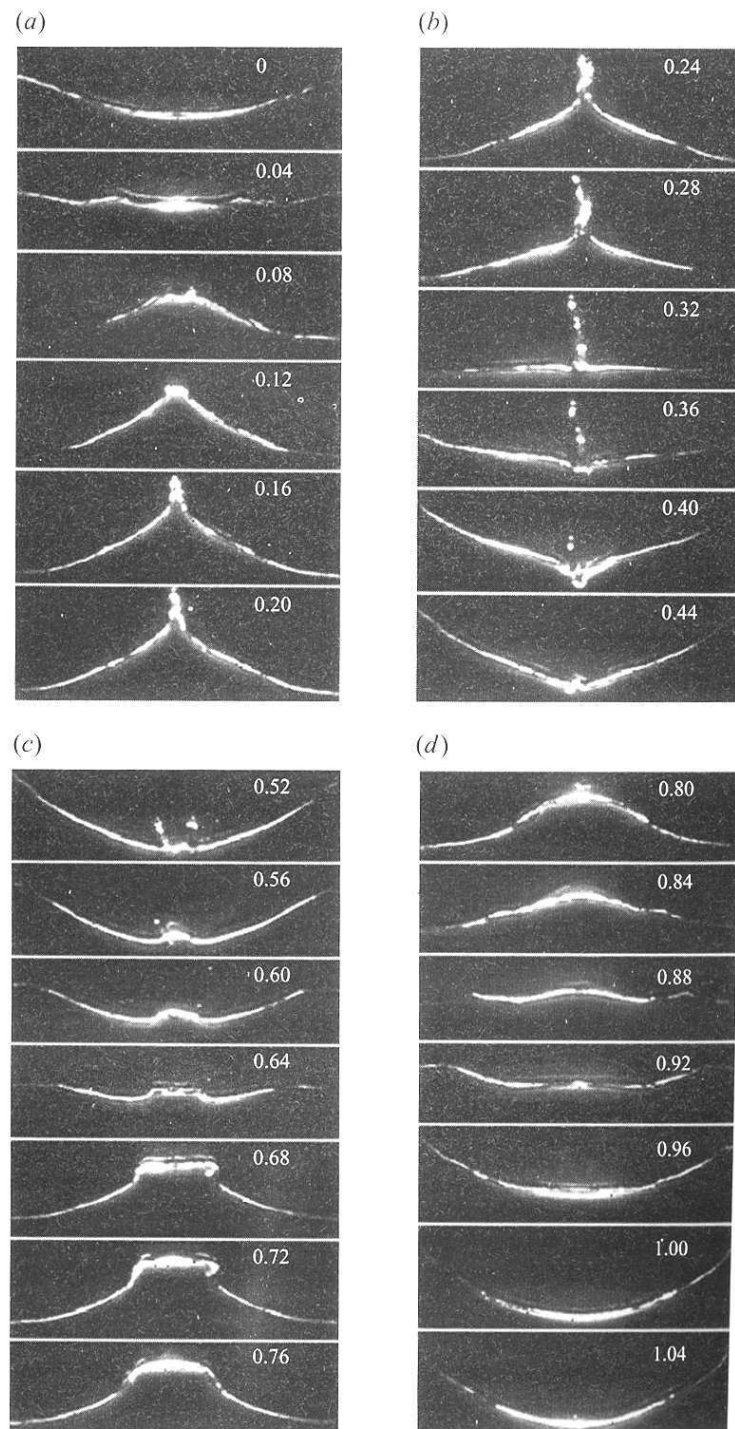


FIG. 5.25 – Séquence typique des mode A et B. (a) phase de montée; (b) phase de descente pour le mode A; (c) phase de montée; (d) phase de descente pour le mode B;. Expériences de Jiang et al [27]



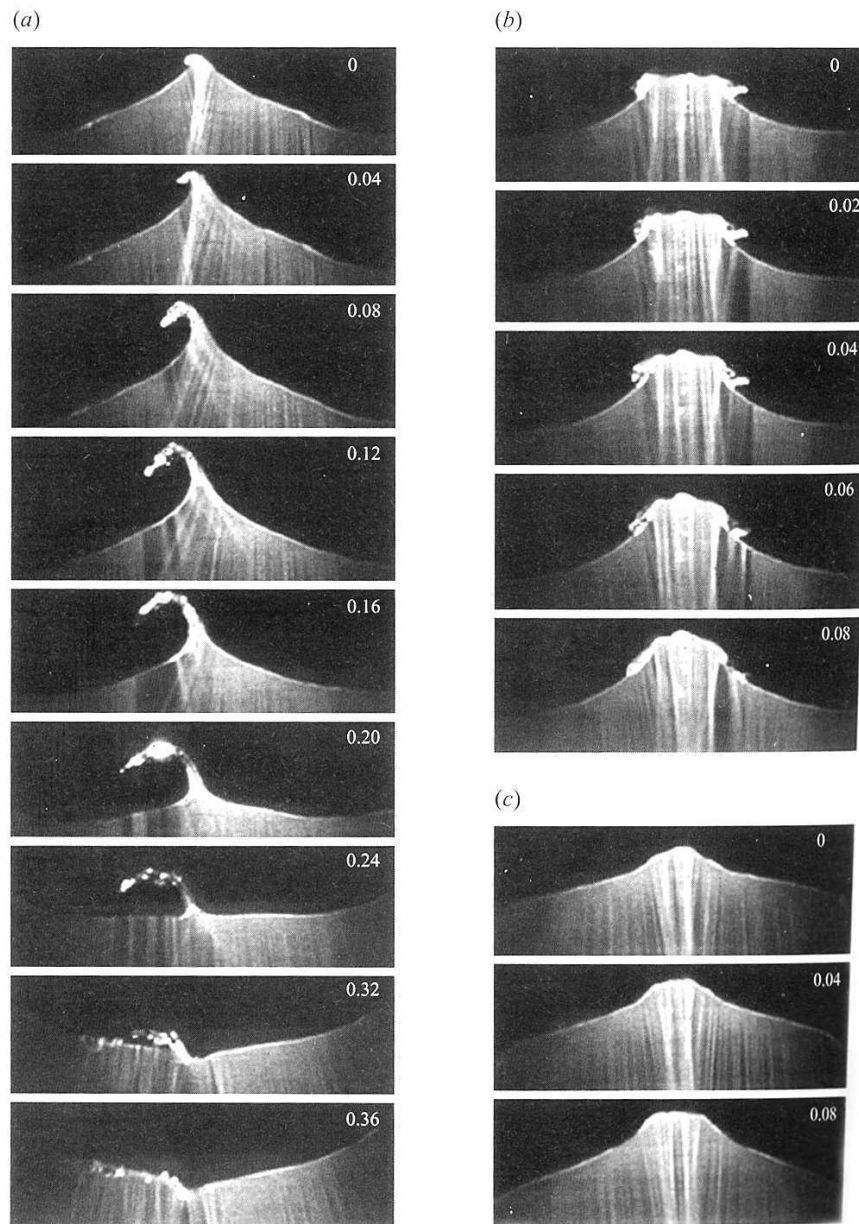


FIG. 5.26 – Séquence typique du triplement de période dans le cas de brisure asymétrique. (a) mode A ; (b) mode B ; (c) mode C. Expériences de Jiang et al [27]

Les premiers états sont représentés par l'allure S qui correspond au cas C de Jiang et al. Il s'agit d'un profil de type Penney et Price. L'écoulement est bien bidimensionnel et cela jusqu'à  $b_c$ . Après  $b_c$  le front est légèrement modulé dans le sens transverse, mais la forme demeure peu changée.

Puis nous observons pour deux-trois périodes successives un mode de type A. La nappe de liquide à la paroi est largement formée et les ondes de Faraday sont bien développées. Une modulation dans le sens transverse apparaît donc. Nous n'observons pas de colonnes de gouttes émergeant de ce mode, mais les paquets fluides, provenant de la modulation du front par les ondes de Faraday, conduisent à un phénomène de splashing : paquet fluide en retard interceptant le creux de l'onde, formation d'un cratère et entrainement d'air, émission d'un jet secondaire. L'ensemble de ces mécanismes sont décrits par les travaux de Oguz et Prosperetti [45], Zhu, Oguz et Prosperetti [57] et de Clanet et Lasheras [12].

Ceci conduit à une forte altération de la forme du profil et un mode de type B apparaît à la période suivante. Toutefois, il n'est observé qu'au cours de la remontée du fluide. Une émission de jet plongeant se poursuit. Il s'agit du jet secondaire émis par le splashing qui continue d'être alimenté pendant la montée de l'onde. Lorsqu'on observe les images de Jiang 5.25.b, on observe un fort débit de fluide au centre qui alimente seulement les jets plongeants. Dans le cas de nos expériences, le débit entrant contribue pour une petite part à la croissance du jet plongeant mais poursuit pour l'essentiel sa course le long de la paroi. Le profil en forme de chapeau ne persiste donc pas jusqu'à l'altitude maximale. Cette forme existe pour deux ou trois périodes successives. Par la suite, le système s'effondre complètement. On ne revient au type S ou C qu'après stabilisation, c'est-à-dire après une dizaine de périodes.

**En conclusion,** lorsqu'on force le système à une fréquence légèrement plus faible que la fréquence propre du premier mode symétrique, le scénario de déstabilisation peut être analysé de façon analogue au triplement de période mis en évidence par Jiang et al [27].

1. L'onde conserve un profil de type Penney et Price pendant une dizaine d'oscillations, l'amplitude augmente à chaque période jusqu'à une amplitude légèrement supérieure à  $b_c$ .
2. Le profil d'onde est par la suite altéré, formant une nappe liquide de largeur  $R$  à la paroi.
3. Une onde transverse de type Faraday, de longueur d'onde  $R$ , formant des "oreilles" de part et d'autre du front, s'amplifie. L'onde transverse est synchrone ou demi-

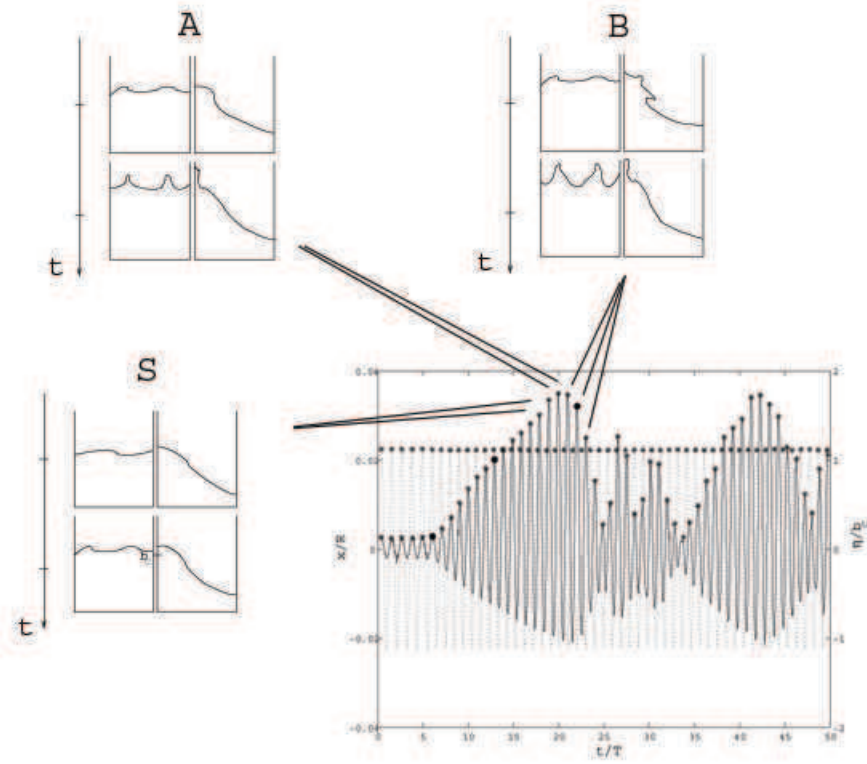


FIG. 5.27 – Allures typiques des fronts dans le cas tridimensionnel et historique de leur succession.

synchrone. Cette onde est bien instable suivant les résultats de Benjamin et Ursell. Le mode est du type A proposé par Jiang et de grande amplitude. Aucun jet n'émerge à ce stade. Cette allure est conservée pour deux ou trois périodes.

4. Les paquets fluide provenant des "oreilles" se trouvent en retard sur le mode antisymétrique 1 et entrent en collision avec le creux de l'onde, entraînant de l'air.
5. Un jet est produit. Il se morcelle en gouttes.
6. L'allure du profil se trouve en forme de chapeau (type B de Jiang) pendant la phase d'ascension, le jet est alimenté. Le surplus de liquide forme à nouveau une nappe liquide à la paroi.
7. Après deux ou trois périodes analogues, l'augmentation de la dissipation par les brisures successives entraîne l'effondrement du mode antisymétrique 1. Un nouveau cycle suit après une dizaine de périodes de stabilisation.



# Conclusions générales

Nous avons étudié le ballonnement de liquide dans un réservoir et plus particulièrement le cas réservoir cylindrique partiellement rempli de liquide,  $h/R > 1$ , soumis à une excitation horizontale harmonique effectuée au voisinage de la fréquence d'excitation du premier mode antisymétrique (le plus énergétique). L'étude expérimentale a permis de dégager les caractéristiques principales du comportement du liquide en fonction des deux paramètres que sont l'écart à la fréquence de résonance  $\omega/\omega_{11}$  et l'amplitude d'excitation relative  $A_f/R$ . L'influence du troisième paramètre qu'est le taux de remplissage  $h/R$  a été peu explorée. Les expériences ont été menées pour le cas asymptotique  $h/R > 1$ .

Lorsqu'on force le système en dehors de la résonance <sup>6</sup>, on observe initialement la superposition du mode forcé et du mode propre asymétrique 1 et donc un fort battement en amplitude. Après amortissement du mode propre, on atteint l'amplitude stationnaire. Le mode forcé est en phase avec l'excitation pour  $\omega < \omega_{11}$ , en opposition de phase pour des fréquences d'excitation  $\omega > \omega_{11}$ . L'ensemble de ces résultats confirme la possible modélisation du problème par un pendule simple.

La résonance est observée pour  $\omega = (1 - \epsilon)\omega_{11}$  pour  $h/R > 1$ . Ce résultat confirme la non-linéarité négative du mode antisymétrique 1 pour de forts taux de remplissage, c'est-à-dire le déplacement avec l'amplitude de la résonance vers des fréquences légèrement inférieures à la fréquence de résonance linéaire. Le régime observé est alors chaotique. Il consiste en une alternance quasi-périodique entre un mode antisymétrique 1 d'amplitude croissante qui se brise et un court mode tournant. La durée du mode tournant comme l'amplitude maximale atteinte avant brisure augmentent, à fréquence fixée, avec l'amplitude d'excitation. Le scénario qui mène à la brisure a été détaillé. Lorsque l'amplitude de l'onde dépasse  $b_c$  <sup>7</sup>, une nappe liquide, d'épaisseur de l'ordre du centimètre, se forme à la paroi. Elle est de largeur  $R$ . Une onde transverse (le long de la

---

<sup>6</sup>Les bornes, inférieure et supérieure, des fréquences d'excitation sont fonctions de l'amplitude d'excitation  $A_f/R$ .

<sup>7</sup>Une amplitude seuil de déstabilisation inférieure à  $b_c$  est observée pour des amplitudes de forçage faibles.

direction normale au forçage) de type Faraday, de longueur le rayon de la cuve, déstabilise la crête de l'onde et s'amplifie. Les paquets fluides, formés de part et d'autre du front, se trouvent en retard sur l'onde. Ils conduisent à la formation d'un jet se brisant en gouttes et à un entraînement de bulles dans le corps du liquide. Après deux ou trois périodes analogues, le mode antisymétrique 1 s'effondre.

Pour des fréquences égales et légèrement supérieures à  $\omega_{11}$ , il existe un domaine de stabilité pour une onde azimutale ou mode tournant qui présente une non-linéarité positive. Le mode tournant peut atteindre des amplitudes très élevées. Il est malgré tout stable <sup>8</sup>. Le phénomène d'excitation verticale, observé dans le cas du premier mode antisymétrique, n'existe pratiquement pas dans le cas du mode tournant ce qui peut expliquer la stabilité. La transition du mode antisymétrique 1 vers le mode tournant représente une hystérésis. La croissance en amplitude du mode tournant est exponentielle.

#### APPLICATION AUX RÉSERVOIRS DE FUSÉES

Les résultats obtenus dans cette thèse peuvent être extrapolés au cas des réservoirs de fusées, à condition de se placer dans une phase de propulsion ( $Bo \gg 1$ ) et pour des taux de remplissage tels que  $h/R > 1$ .

Pour des sollicitations hors résonance, l'amplitude stationnaire (atteinte seulement au bout d'une centaine de périodes) est :

$$\frac{b}{A_f} \approx \frac{K^2}{|1 - K^2|}, \quad K = \frac{\omega}{\omega_{11}} \quad (5.10)$$

Elle ne dépend pas du rayon du réservoir mais seulement de l'amplitude d'excitation et de l'écart à la résonance. Aucune création d'interface n'a lieu dans ce cas. Les efforts sur les parois pourront être déterminés par un modèle de pendule simple suivant les résultats de Dodge [14] (voir chap. 1).

Lorsque le mode tournant est excité ( $\omega > \omega_{11}$ ), les efforts engendrés peuvent être élevés en raison de fortes amplitudes d'onde. Une estimation de ceux-ci a été réalisée par EADS [22]. L'amplitude du mode tournant peut atteindre l'ordre du rayon.

Pour un forçage à résonance l'amplitude du mode propre croît approximativement linéairement avec le temps :

$$\frac{\Delta(b/R)}{\Delta(t/T)} \approx \pi \frac{A_f}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.11)$$

---

<sup>8</sup>La mise en place d'une rotation du fluide permet, par effet Doppler, l'ajustement sur la fréquence d'excitation

Ainsi pour une amplitude de forçage de l'ordre de 5 mm et un réservoir de 1 m de rayon, il faut une cinquantaine de périodes pour atteindre le début de la déstabilisation. En ce qui concerne la brisure, deux structures se forment de part et d'autre du front de largeur  $R$ . Des expériences complémentaires doivent être mises en oeuvre pour déterminer les grandeurs physiques gouvernant la taille des paquets fluides formés et leurs propriétés (état de la surface libre, vitesse relative entre ceux-ci et l'onde). Ces résultats devraient sans doute permettre d'accéder ensuite à une estimation de la quantité d'interface et de mélange créés en utilisant par exemple les travaux de Oguz et Prosperetti [45], Zhu, Oguz et Prosperetti [57] et de Clanet et Lasheras [12] sur les mécanismes de l'entraînement d'air par l'impact d'une goutte ou d'un jet sur une surface libre. Une discussion analogue à celle menée par Gaudin et al [21] sur la réorientation devraient permettre d'accéder au temps de dégazage (à partir d'une estimation de la vitesse de remontée des bulles en fonction de leur diamètre).

#### PERSPECTIVES

L'étude devrait être poursuivie en s'intéressant à l'évolution du comportement non-linéaire pour une diminution du taux de remplissage et éventuellement à des géométries non-cylindriques. Le diagramme amplitude-fréquence devra être tracé, la non-linéarité devrait être positive selon les calculs de Miles [40]. L'influence du taux de remplissage sur le scénario de brisure est également un point important. Par ailleurs, l'étude du comportement engendré par des excitations non-harmoniques, des impulsions par exemple, serait utile afin de compléter l'étude.





# Annexe A

## Calibration des sondes capacitive et résistive

### 1. Introduction

Les sondes capacitive et résistive permettent de mesurer un niveau de liquide et en particulier des amplitudes d'onde. Elles sont largement utilisées au sein du LEGI. Le but de cette calibration, venant compléter des tests précédemment effectués (juin 1996 par H. Michallet et K. Guizien), est de déterminer :

- la précision pour de faibles amplitudes d'ondes,
- la réponse dynamique des sondes,
- l'influence d'un prémouillage sur la qualité de la mesure

### 2. Description du dispositif expérimental

Les essais sont effectués dans un réservoir disposant d'une grille oscillante. Chaque des sondes est fixée à cette grille. La sonde subit un mouvement vertical dans le fluide au repos. Le mouvement imposé est sinusoïdal de type :

$$y = a \sin(\omega t)$$

où l'amplitude  $a$ , ici de l'ordre de 3 mm, et la fréquence  $0 < f = \omega/2\pi < 5$  Hz sont variables. L'étalonnage est effectué au moyen d'un capteur de déplacement laser de grande précision ( $\pm 60\mu m$ ). Le déplacement correspond à l'éloignement par rapport au capteur ; i.e. une augmentation du  $\Delta h$  mesuré, et porté en ordonnée sur les graphiques suivants, correspond aux sondes plongées dans le liquide, réciproquement retirées de l'eau pour une diminution.

### 3. Résultats

Les graphiques A.1, A.2, A.3, et A.4 permettent de comparer la réponse de chacune des trois sondes (deux capacitives de qualité de vernis différente et une

résistive) à la consigne imposée pour 4 fréquences différentes,  $f = 0.93; 2.39; 4.35$  et  $4.65$  Hz.

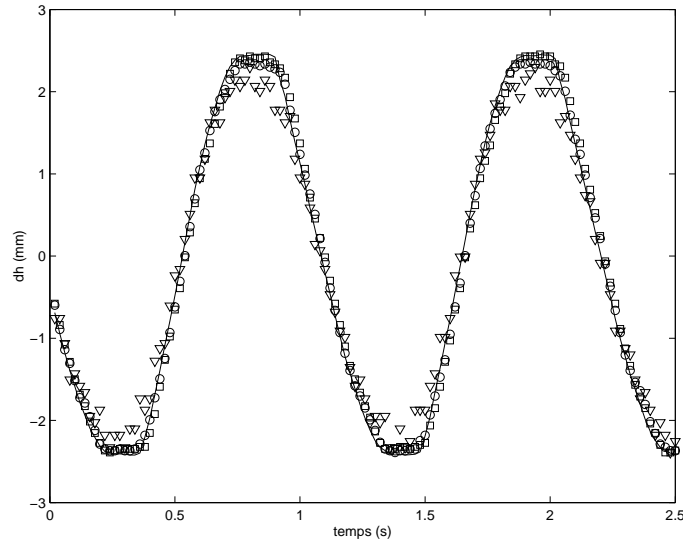


FIG. A.1 –  $f = 0.93$  Hz ; -, consigne (mesurée par le capteur de déplacement) ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives.

On observe que les sondes capacitives suivent parfaitement la consigne pour de faibles fréquences et avec une légère surestimation de l'amplitude pour des fréquences plus élevées. La sonde résistive, si elle reproduit de façon correcte l'amplitude, n'apparaît pas décrire très précisément les changements d'orientation du déplacement.

On observe (cf Fig. A.5) une augmentation de l'erreur avec la fréquence. L'erreur maximale mesurée sur l'amplitude est inférieure à 15 % pour un déplacement de 2.5 mm.

Le déphasage, mesurée au maximum et au minimum de déplacement, diminue avec l'augmentation de la fréquence (cf Fig. A.6; problème du ménisque moins sensible quand le fil est régulièrement mouillé?). Il s'agit pour la grande majorité d'un retard (déphasage positif) et il reste inférieur à  $20^\circ$  ( $\Delta t < 0.06$  s pour  $f = 0.93$  Hz)

L'absence de prémouillage entraîne une augmentation du déphasage par rapport à celui mesuré en continu pour des fréquences analogues (cf Fig. A.7 <sup>1</sup>, retard de  $30^\circ$  au lieu de  $20^\circ$ ). Toutefois ce phénomène disparaît très rapidement (dès la deuxième oscillation).

---

<sup>1</sup>La consigne sature, les amplitudes étant supérieures à la gamme de mesure du capteur de déplacement

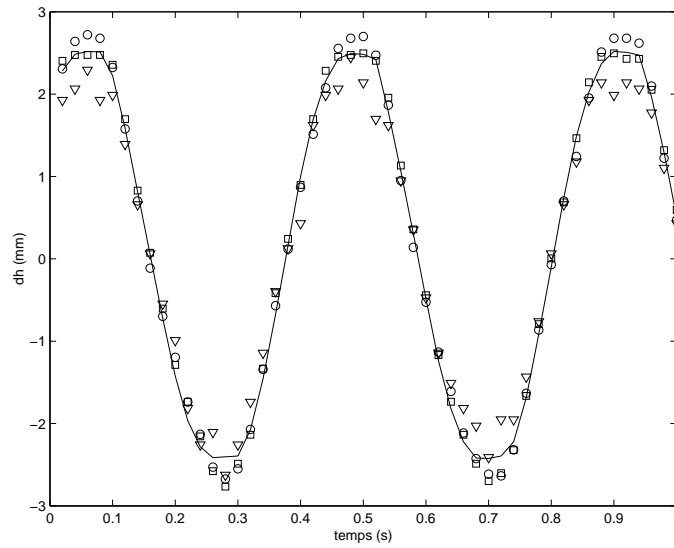


FIG. A.2 –  $f = 2.39$  Hz ; -, consigne (mesurée par le capteur de déplacement) ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives.

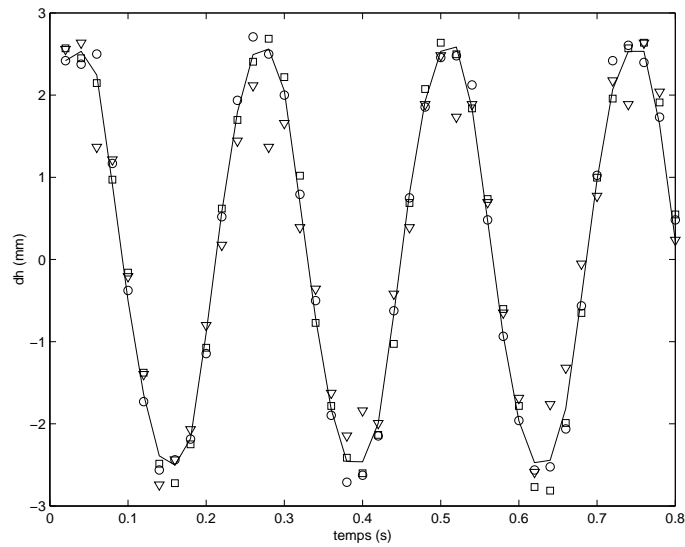


FIG. A.3 –  $f = 4.35$  Hz ; -, consigne (mesurée par le capteur de déplacement) ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives.

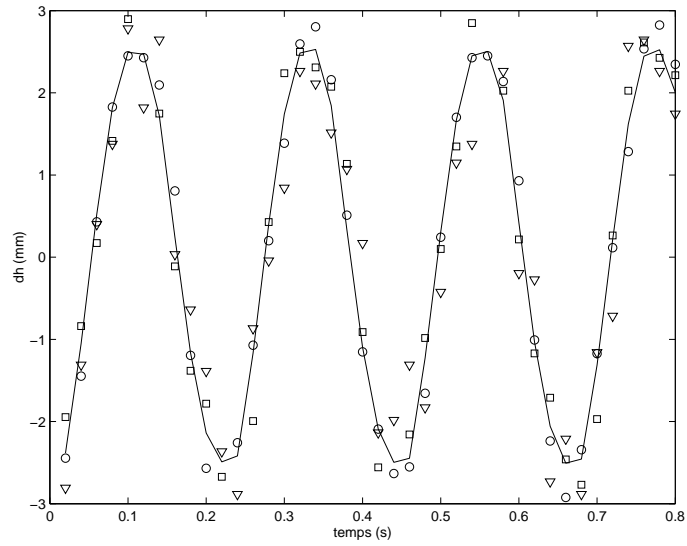


FIG. A.4 –  $f = 4.65$  Hz ; -, consigne (mesurée par le capteur de déplacement) ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives.

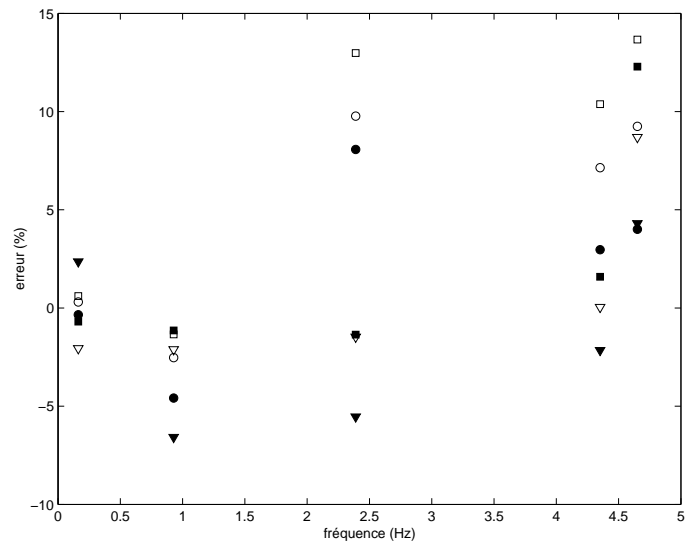


FIG. A.5 – Erreur relative en fonction de la fréquence d'excitation ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives, signe plein pour le maximum de  $\Delta h$ , signe creux pour le minimum.

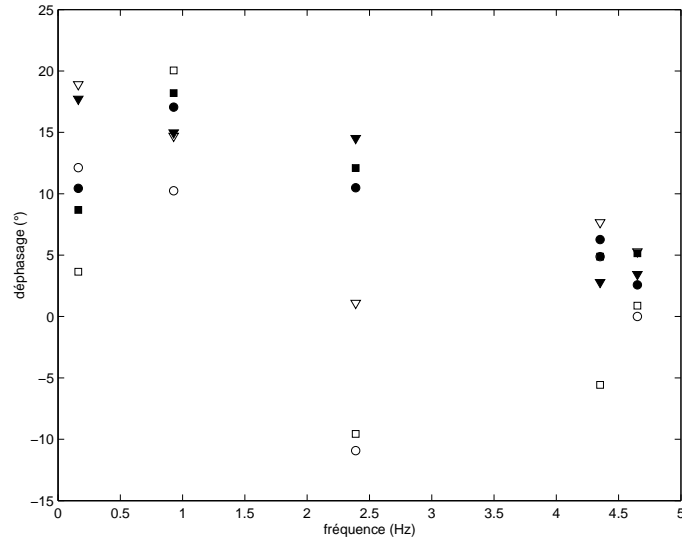


FIG. A.6 – Déphasage des sondes par rapport à la consigne ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives, signe plein pour le maximum de  $\Delta h$ , signe creux pour le minimum.

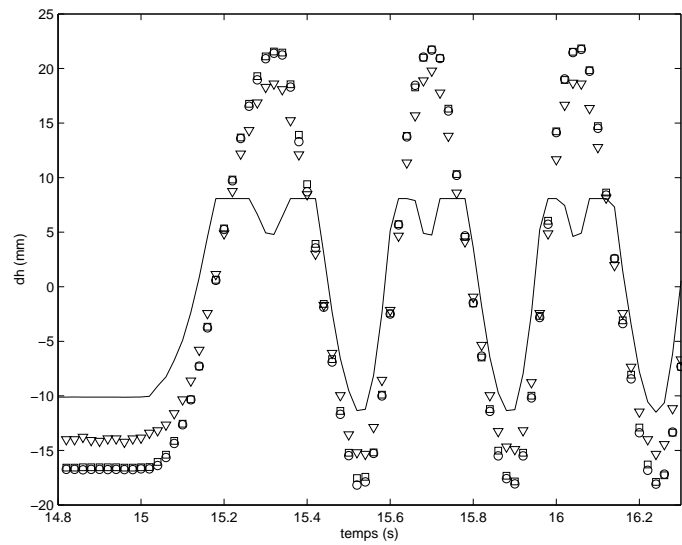


FIG. A.7 – Déphasage des sondes par rapport à la consigne pour un départ à sec ; -, consigne (mesurée par le capteur de déplacement ;  $\nabla$ , sonde résistive ;  $\circ$  et  $\square$ , sondes capacitives.



# Annexe B

## Effets de géométrie

### B.1 Effet d'un dome

L'effet d'un dome sur le mode 1 a brièvement été étudié pour différents taux de remplissage.

On considère dans un premier temps des faibles taux de remplissage : distance entre la surface au repos et le bas du dome de l'ordre de  $b_c$ . Les expériences montrent qu'en général le dome n'affecte pas l'amplitude maximale atteinte si elle est mesurée de façon curviligne le long de la surface du dome. La hauteur dans la direction de la gravité (verticale) est quant à elle réduite de telle manière que l'énergie potentielle associée au maximum d'amplitude serait moindre qu'en l'absence de dome. La plus faible hauteur verticale semble être compensée par une augmentation de la masse de film liquide qui se déplace le long de la surface du dome. A résonance, l'instabilité du front observée est de courte longueur d'onde. A la différence du cas étudié dans cette thèse, c'est-à-dire en l'absence de dome, l'instabilité de grande longueur d'onde de type Faraday ne semble pas exister. C'est une instabilité de type Rayleigh-Taylor qui se développe. La formation de ligaments est donc plus prononcée.

Dans le cas où le taux de remplissage est tel qu'au repos la surface liquide est quasiment au niveau du bas du dome, la longueur des ligaments semble être considérablement augmentée (voir les images B.2). Ceci s'explique parce qu'à résonance, dans le cas de la présence d'un dome, le ballonnement de larges amplitudes se poursuit en dépit de l'instabilité du front et de la formation des ligaments. L'amplitude de l'instabilité dispose donc de plusieurs périodes pour croître. On rappelle en effet qu'en l'absence de dome la brisure est suivie d'une soudaine disparition du ballonnement. Un entrainement d'air non-négligeable est observé lorsque les ligaments retombent dans le corps du liquide (voir par exemple l'image B.2.5).



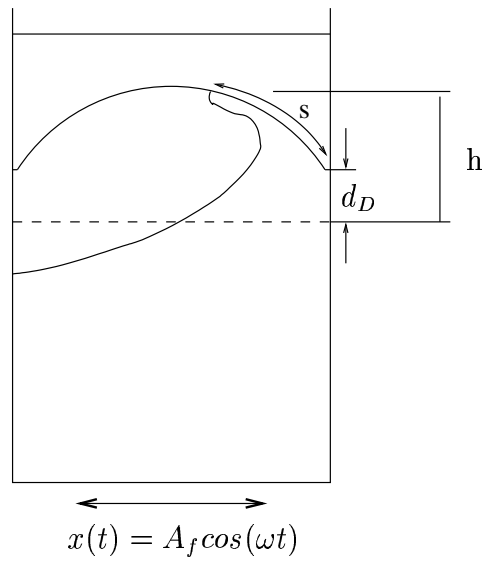


FIG. B.1 – Schéma de principe du dome

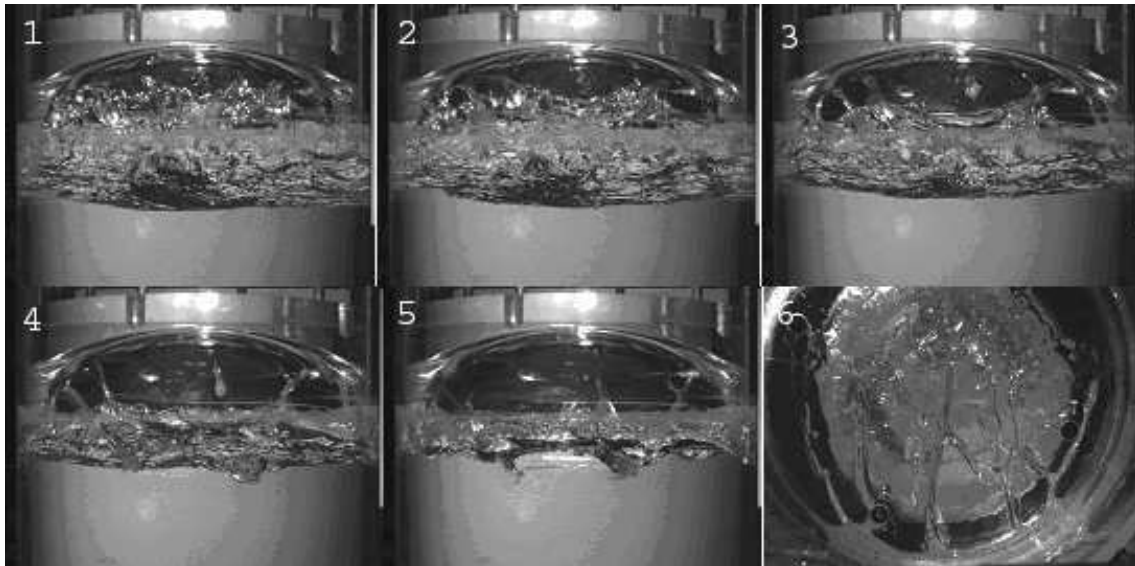


FIG. B.2 – Effet d'un dome sur la brisure. Les 5 premières images sont des vues de côté et l'image 6 est une vue de dessus. Ces photographies sont prises pour une surface au repos à 2 cm en dessous du bas du dome. Le temps entre chacune des 5 premières images est de 33 ms, le temps total d'acquisition est de  $\approx T/4$ .  $\omega = 0.93\omega_{11}$

## B.2 Effet d'un anneau anti-ballottant

L'effet d'un anneau anti-ballottant a été étudié dans le réservoir de rayon  $R = 78$  mm et pour une amplitude d'excitation  $A_f/R = 4.4 \cdot 10^{-2}$ . L'anneau anti-ballottant a une largeur de  $w = 10$  mm et sa position par rapport à l'interface au repos  $d_s$  peut varier.

Lorsque l'anneau est positionné juste en dessous de la surface libre au repos, les expériences montrent que l'amplitude maximale de l'onde des oscillations forcées est seulement très peu diminuée par rapport au cas sans anneau. A résonance l'amplitude est également légèrement diminuée mais l'onde atteint des amplitudes suffisamment importantes ( $b > b_c$ ) pour devenir instable et se briser (voir image B.3).

Lorsque l'anneau est placé juste au dessus de la surface libre au repos, le ballottement est pratiquement complètement inhibé mais l'interface se brise et il en résulte une production considérable de gouttes et bulles entraînées dans le corps du liquide. Lorsqu'on

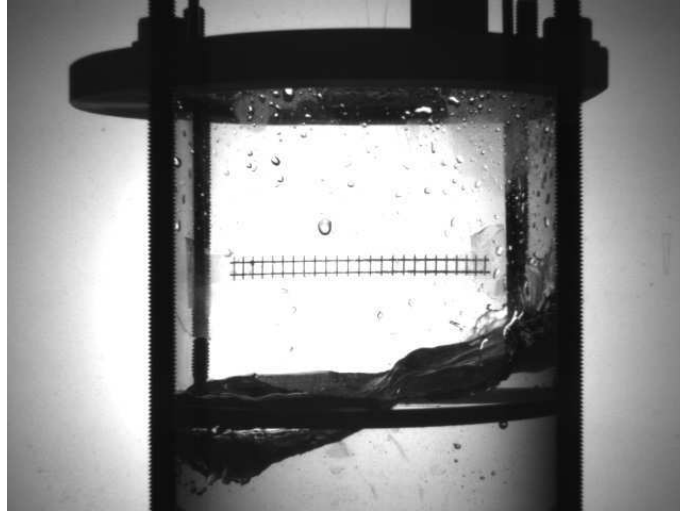


FIG. B.3 – Effet d'un anneau anti-ballottant placé à 2 cm en dessous de la surface libre.

arrête le forçage et que l'on s'intéresse à l'amortissement des oscillations, 2 périodes seulement sont nécessaires pour amortir le mouvement avec un anneau placé juste en dessous de la surface libre. Ce temps est 30 fois moins important qu'en l'absence d'anneau. On observe que l'amortissement décroît lorsque  $d_s/R$  croît. Ceci est en accord avec l'expression proposée par Miles [38] et Bravais et al [6] :

$$\gamma_a = C e^{-4.6 \frac{d_s}{R}} \left(\frac{b}{R}\right)^{1/2} \left(\frac{w}{R}\right)^{1/2} \quad (\text{B.1})$$

L'amortissement mesurée en présence d'anneau dans les expériences est  $\gamma_a \approx 0.16$  ce qui donne  $C \approx 0.6$  dans l'expression B.1. Miles donne  $C \approx 0.3$ .

En conclusion, un anneau anti-ballottant est très efficace pour amortir le ballonnement, mais de façon surprenante il n'évite pas le ballonnement de grandes amplitudes et peut même donner lieu à une forte création d'interface si il est placé juste au-dessus de la surface libre.

# Bibliographie

- [1] H.N. ABRAMSON. The dynamic behavior of liquids in moving container. Technical Report SP-106, NASA, 1966.
- [2] H.N. ABRAMSON, W.-H. CHU, and F.T. DODGE. Nonlinear effects in lateral sloshing. In *The dynamic behavior of liquids in moving containers*, pages 79–103. ed. H.N. Abramson, 1966.
- [3] H.N. ABRAMSON, W.-H. CHU, and D.D. KANA. Some studies of nonlinear lateral sloshing containers. *J. Applied Mech.*, pages 777–784, 1966.
- [4] H.N. ABRAMSON and L.R. GARZA. Some measurements of the effect of ring baffles in cylindrical tanks. *AIAA J. Spacecraft rockets*, 1 no 5 :560–562, 1964.
- [5] T.B. BENJAMIN and F. URSELL. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 225 :505–515, 1954.
- [6] P. BRAVAIS, E.J HOPFINGER, P. KUENTZMANN, and J. PAUCHET. Rapport d’expertise compere. Technical Report RT 75/6116 DEFA/Y, ONERA, 1999.
- [7] T.J. BRIDGES. Secondary bifurcation and change of type for three-dimensional standing waves in finite depth. *J. Fluid Mech.*, 179 :137–153, 1987.
- [8] P.J. Bryant. Nonlinear progressive free waves in a circular basin. *J. Fluid Mech.*, 205 :453–467, 1989.
- [9] A. CENEDESE. Experimental analysis of sloshing flow in circular cylindrical tank using the laser doppler velocimeter. *Archives of Mechanics*, 34 no 5-6 :563–579, 1982.
- [10] A. CENEDESE. Transition from laminar to turbulent flow inside an oscillating tank. *Meccanica*, 18 :217–224, 1983.
- [11] Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, 1961.
- [12] C. CLANET and J.C. LASHERAS. Depth of penetration of bubbles entrained by a plunging water jet. *Physics of Fluid*, 9, no 7 :1864–1866, 1997.

- [13] M.J. DAVIS and P.D. WEIDMAN. Asymptotic estimates for two-dimensional sloshing modes. *Physics of Fluid*, 12, no 5 :971–978, 2000.
- [14] F.T. DODGE. Analytical representation of lateral sloshing by equivalent mechanical models. In *The dynamic behavior of liquids in moving containers*, pages 199–223. ed. H.N. Abramson, 1966.
- [15] A.J. FALLER. The generation of swirl in a circular cylinder by rotation, part i : the gallon jug experiment. Technical Report Tech. Note BN-996, University of Maryland, USA, 1983.
- [16] A.J. FALLER. The generation of swirl in a circular cylinder by rotation, part ii : theory of rotation wave and boundary-layer pumping. Technical Report Tech. Note BN-998, University of Maryland, USA, 1983.
- [17] A.J. FALLER. The constant- $v$  vortex. *J. Fluid Mech.*, 434 :167–180, 2001.
- [18] O.M. FALTINSEN, O.F. ROGNEBAKKE, I.A. sc Lukovsky, and A.N. TIMOKHA. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. *J. Fluid Mech.*, 407 :201–234, 2000.
- [19] O.M. FALTINSEN, O.F. ROGNEBAKKE, and A.N. TIMOKHA. Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin. *J. Fluid Mech.*, 487 :1–42, 2003.
- [20] O.M. FALTINSEN and A.N. TIMOKHA. An adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in rectangular tank. *J. Fluid Mech.*, 432 :167–200, 2001.
- [21] E. GAUDIN, E.J. HOPFINGER, and A. CARTELLIER. Liquid reorientation : Geyser formation and gas entrainment. Technical Report RT-NT-22R2200-0201-LEGI-01, CNES, 2002.
- [22] S. HAAKE. Dreidimensionales flüssigkeitsschwappen in einem zylindrischen behälter bei lateraler anregung und grossen bond-zahlen. Technical report, EADS-ST, 2002.
- [23] S. HAMAYA, K.ARUGA, and T. WATANABE. Nonlinear responses of sloshing in rectangular tanks. *JSME*, 26, no 219 :1641–1648, 1983.
- [24] A.E. HOSOI and L. MAHADEVAN. Axial instability of a free-surface front in a partially filled horizontal rotating cylinder. *Physics of Fluid*, 11, no 1 :97–106, 1999.
- [25] R.E. HUTTON. An investigation of resonant nonlinear nonplanar free surface oscillations of a fluid. Technical Report TN D-1870, NASA, 1963.
- [26] R.E. HUTTON. Fluid-particle motion during rotary sloshing. *J. Applied Mech.*, 31, no 1 :123–130, 1964.

- [27] L. JIANG, M. PERLIN, and W.W. SCHULTZ. Period tripling and energy dissipation of breaking standing waves. *J. Fluid Mech.*, 369 :273–299, 1998.
- [28] Sir H. LAMB. *Hydrodynamics*. Dover, 1932.
- [29] L. LANDAU and E. LIFCHITZ. *Mécanique*. Editions Mir, 1966.
- [30] M. LA ROCCA, G. SCIORTINO, and M.A. BONIFORTI. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container. *Fluid Dynamics Research*, 27 :23–52, 2000.
- [31] M. LA ROCCA, G. SCIORTINO, and M.A. BONIFORTI. Interfacial gravity waves in a two-fluid system. *Fluid Dynamics Research*, 30 :31–63, 2002.
- [32] J. LIGHTHILL. *Waves in fluid*. Cambridge University Press, 1978.
- [33] P.L.-F. Liu, H.-W. Hsu, and M.H. Lean. Applications of boundary integral equation methods for two-dimensional non-linear water wave problems. *Int. J. for numerical methods in fluids*, 15 :1119–1141, 1992.
- [34] M.S. LONGUET-HIGGINS. Asymptotic forms for jets from standing waves. *J. Fluid Mech.*, 447 :287–297, 2001.
- [35] P. MARMOTTANT. *Atomisation d'un liquide par un courant gazeux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [36] G.N. MIKISHEV and N.Ya. DOROZHKIN. An experimental investigation of free oscillations of a liquid in containers (in russian). *Mekh. I Mashinostr*, 4 :48–33, 1961.
- [37] J. MILES and D. HENDERSON. Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :143–165, 1990.
- [38] J.W. MILES. On the sloshing of liquid in a cylindrical tank. Technical Report Rept. No. AM6-5, GM-TR-18, The Ramo-Wooldridge Corp., Guided missile Research Div., 1956.
- [39] J.W. MILES. Nonlinear surface waves in closed basins. *J. Fluid Mech.*, 75 :419–448, 1976.
- [40] J.W. MILES. Internally resonant surface waves in a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 149 :1–14, 1984.
- [41] J.W. MILES. Resonantly forced surface waves in a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 149 :15–31, 1984.
- [42] J.W. MILES and D. HENDERSON. A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 364 :319–323, 1998.
- [43] N.N MOISEYEV. On the theory of nonlinear vibrations of a liquid of finite volume. *Appl. Math. Mech. (PMM)*, 22, no 5 :860–870, 1958.

- [44] J.R. OCKENDON and H. OCKENDON. Resonant surface waves. *J. Fluid Mech.*, 59 :397–413, 1958.
- [45] H.N. OGUZ and A. PROSPERETTI. Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces. *J. Fluid Mech.*, 219 :143–179, 1990.
- [46] W.G. PENNEY and A.T. PRICE. Part ii. finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, CCXLIV :254–284, 1952.
- [47] O.M. Phillips. *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge University Press, 1977.
- [48] W.C. REYNOLDS and H.M. SATERLEE. Liquid propellant behavior at low or zero g. In *The dynamic behavior of liquids in moving containers*, pages 387–449. ed. H.N. Abramson, 1966.
- [49] A. ROYON, E. GAUDIN, A. CARTELLIER, and E.J. HOPFINGER. Sloshing and drop formation conditions in cylindrical liquid propellant tank. In *Proceedings of the 4th International conference on launcher technology*, 2002.
- [50] W.W. SCHULTZ, J.-M. VANDEN-BROECK, L. JIANG, and M. PERLIN. Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect. *J. Fluid Mech.*, 369 :253–272, 1998.
- [51] W.W. SCHULTZ, J.-M. VANDEN-BROECK, L. JIANG, and M. PERLIN. Nonlinear sloshing in zero gravity. *J. Fluid Mech.*, 464 :365–391, 2002.
- [52] S. SILVERMAN and H.N. ABRAMSON. Damping of liquid motions and lateral sloshing. In *The dynamic behavior of liquids in moving containers*, pages 105–143. ed. H.N. Abramson, 1966.
- [53] G.G. STOKES. On the theory of oscillatory waves. *Cambridge Philosophical Society*, 8 :441–455, 1847.
- [54] R. TAYLOR. An experimental study of standing waves. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, CCXVIII :44–59, 1953.
- [55] R. TAYLOR. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 201 :192–196, 1953.
- [56] D.D. WATERHOUSE. Resonant sloshing near a critical depth. *J. Fluid Mech.*, 281 :313–318, 1994.
- [57] Y. ZHU, H.N. OGUZ, and A. PROSPERETTI. On the mechanism of air entrainment by liquid jets at free surface. *J. Fluid Mech.*, 404 :151–177, 2000.