Structures de Nambu et super-théorème d'Amitsur-Levitzki

Pierre-Alexandre Gié

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE

THÈSE

présentée par

Pierre-Alexandre GIÉ

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Discipline : MATHÉMATIQUES

NOUVELLES STRUCTURES DE NAMBU ET SUPER-THÉORÈME D'AMITSUR-LEVITZKI

Thèse soutenue publiquement le 19 novembre 2004 devant le jury composé de :

Jacques ALEV	Université de Reims-Champagne-Ardenne	Président du jury
Didier ARNAL	Université de Bourgogne	Examinateur
Caroline GRUSON	Université Henri Poincaré (Nancy 1)	Rapporteur
Dominique MANCHON	Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand)	Rapporteur
Olivier MATHIEU	Université Claude Bernard (Lyon I)	Examinateur
Georges PINCZON	Université de Bourgogne	Co-directeur de thèse
Rosane USHIROBIRA	Université de Bourgogne	Co-directrice de thèse

Remerciements

Je remercie Georges PINCZON pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe de Mathématique-Physique de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne et pour m'avoir proposé un sujet de thèse dans mon domaine de prédilection des mathématiques : l'algèbre. J'associe à ces remerciements Rosane USHIROBIRA qui a d'abord encadré mon stage de D.E.A. sous la bienveillance de Georges PINCZON et qui a accepté de co-diriger cette thèse à ses côtés. J'ai pu apprendre énormément et continuer à progresser pendant ma préparation de thèse, grâce aux grandes connaissances de mes deux directeurs. Je remercie tout particulièrement Georges PINCZON pour son infinie patience à mon égard, et sa très grande disponibilité durant les trois années de ma préparation. Et je remercie Rosane USHIROBIRA pour son fort soutien durant les nombreuses périodes de doutes, pour notre fructueux travail de fond, et nos intéressants échanges extra-universitaires.

Je suis très reconnaissant envers Caroline GRUSON et Dominique MANCHON d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs commentaires et leurs questions m'ont permis de clarifier ma rédaction et m'ont donné de nouvelles pistes de réflexion. Je remercie vivement Jacques ALEV, Didier ARNAL et Olivier MATHIEU de me faire l'honneur de participer à mon jury de soutenance de thèse, ainsi que mes deux rapporteurs.

Je remercie l'ensemble des membres du Département de Mathématiques de l'Université de Bourgogne qui m'ont suivi pendant toutes ces années : ils m'ont formé et éveillé aux mathématiques modernes au fur et à mesure de mon parcours à l'Université. Mes remerciements vont également à Yvan GOZARD et Jean-Louis LAMARD qui m'ont apporté de solides bases par leur enseignement pendant mes deux années de classes préparatoires. Je terminerai en remerciant également Michel JOLIVOT pour son enseignement des mathématiques pendant mes trois années passées au lycée, car cet enseignement m'a donné envie de poursuivre dans la voie des mathématiques.

Je tiens à remercier Sylvie VOTTIER et Jean-Pierre TROALEN pour leur aide et leur disponibilité pour répondre à toutes les questions informatiques, mais également pour les échanges que nous avons pu avoir sur ce sujet ou d'autres. Mes remerciements vont également à Florence GADENNE pour ses conseils bienveillants, et à Laurence FLACHET et Béatrice CASAS pour leur soutien administratif. Enfin je remercie Jacqueline ALEXANDRE pour son impeccable travail de reprographie, pour cette thèse, mais aussi pour les nombreux documents, relatifs à l'enseignement, que j'aie pu lui apporter pendant ces trois années.

Je remercie également l'ensemble des doctorants que j'ai croisés pendant ces trois années au Département de Mathématiques, pour les échanges fructueux que nous avons pu avoir et la saine ambiance de travail qui règne dans les bureaux.

Je terminerai en remerciant ma famille qui m'a toujours soutenu dans le choix de mes études et qui a accompagné avec patience ma préparation de thèse.

Table des matières

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la combinatoire non commutative. Nous recherchons des structures vérifiant des identités polynomiales particulières dans les domaines des algèbres associatives, des algèbres de Lie et des superalgèbres de Lie. Dans un premier temps, nous souhaitons déterminer de nouvelles structures multilinéaires antisymétriques (généralisant les crochets de Jacobi sur une algèbre de Lie) vérifiant l'Identité Fondamentale de la Mécanique de Nambu. Nous nous posons également la question de la quantification d'une structure de Nambu en particulier. Nous cherchons enfin à déterminer l'existence d'un théorème du type Amitsur-Levitzki sur les superalgèbres de Lie classiques.

Historiquement, les **structures de Nambu** sont apparues en mécanique en 1973 lorsque Y. Nambu a proposé un formalisme à plusieurs hamiltoniens [Nam73]. Dans un tel formalisme (rigoureusement développé par L. Takhtajan [Tak94]), le crochet de Poisson est remplacé par un multi-crochet antisymétrique, vérifiant l'identité de Leibniz par rapport à chaque argument, et une **Identité Fondamentale** (pour la mécanique associée [Tak94]) qui généralise l'Identité de Jacobi ; un tel multi-crochet est alors appelé **crochet de Nambu-Poisson**.

Précisément, un k-crochet de Nambu-Poisson sur une algèbre associative et commutative A est une application k-linéaire $(f_1,\ldots,f_k)\in A^k \mapsto \{f_1,\ldots,f_k\}\in A$ vérifiant :

(i) le **critère d'antisymétrie** :

$$\{f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(k)}\}=\varepsilon(\sigma)\{f_1,\ldots,f_k\}$$

pour toute permutation σ élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$,

(ii) l'**Identité de Leibniz** :

$$\{f_1,\ldots,f_{k-1},fg\}=\{f_1,\ldots,f_{k-1},f\}g+f\{f_1,\ldots,f_{k-1},g\},$$

(iii) et l'**Identité Fondamentale** :

$$\{f_1,\ldots,f_{k-1},\{g_1,\ldots,g_k\}\}=\sum_{i=1}^{k}\{g_1,\ldots,g_{i-1},\{f_1,\ldots,f_{k-1},g_i\},g_{i+1},\ldots,g_k\},$$

pour tous éléments $f_1,\ldots,f_k,g_1,\ldots,g_k,f,g$ de l'algèbre A.

Avec cette définition, on retrouve la notion de crochet de Poisson en faisant $k=2$.

L'idée de l'Identité Fondamentale est due à M. Flato et C. Fronsdal [FF92], qui ont également redécouvert l'exemple du jacobien sur l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$\{f_1,\ldots,f_n\} := \frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$$

dû à V.T. Filippov [Fil85]. Pour être complet, nous présentons une démonstration rapide de l'Identité Fondamentale dans ce cas.

Répondant à une conjecture de L. Takhtajan [Tak94], P. Gautheron a prouvé que l'exemple du jacobien est le cas général [Gau96], puisqu'un crochet de Nambu-Poisson, au voisinage d'un point non singulier, est un fait un jacobien dans un système de coordonnées bien choisi. La classification des structures de Nambu-Poisson linéaires (sur l'espace $\mathbb{R}^n$) a été obtenue quelques années après par J.-P. Dufour et N.T. Zung [DZ99]. Nous rappelons complètement ces résultats au début du premier chapitre, car nous les utilisons par la suite.

La théorie des structures de Nambu ne s'arrête pas aux structures de Nambu-Poisson. En effet, dès le début a été dégagée la notion de **structure de Nambu-Lie** [Fil85, Tak94, Gau96], généralisant la notion d'algèbre de Lie : une structure de Nambu-Lie vérifie l'Identité Fondamentale mais pas nécessairement l'Identité de Leibniz. Comme l'a justement remarqué L. Takhtakan [Tak94], et contrairement à ce qui se passe pour les algèbres de Lie, **une structure de Nambu-Lie ne définit pas toujours une structure de Nambu-Poisson linéaire sur l'espace dual**. La classification [DZ99] de J.-P. Dufour et N.T. Zung n'est donc pas équivalente à la classification des structures de Nambu-Lie, contrairement à ce qui a été écrit quelquefois [DZ99, Vai99]. Mais l'absence d'exemple est flagrante, puisque toutes les structures de Nambu-Lie que l'on rencontre dans la littérature proviennent de structures de Nambu-Poisson. C'est dans cette optique que s'inscrivent nos travaux : nos premiers efforts se sont consacrés à combler ce vide d'exemples.

Tout d'abord, en généralisant la méthode de P. Gautheron [Gau98] pour la classification des 3-structures de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, nous déterminons toutes les $(n-1)$-structures de Nambu-Lie définies sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Ceci a été fait par V.T. Filipov [Fil85], mais P. Gautheron l'ignorait quand il s'intéressa au cas de l'espace $\mathbb{R}^4$. La généralisation de sa méthode conduit à une démonstration très simple. Le produit mixte de $n-1$ vecteurs $X_2\ldots,X_n$ de l'espace $\mathbb{R}^n$, noté $[X_2,\ldots,X_n]$ et défini par :

$$\langle X_1|[X_2,\ldots,X_n]\rangle = \det(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

(pour tout $X_1\in\mathbb{R}^n$) est l'exemple fondamental, à partir duquel nous déduisons tous les $(n-1)$-crochets sur l'espace $\mathbb{R}^n$:

Théorème 1. *Soit M une application $(n-1)$-linéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (non nulle). Alors :*

1. *il existe un endomorphisme m de $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$M(X_1,\ldots,X_{n-1}) = m([X_1,\ldots,X_{n-1}])$$

pour tous $X_1,\ldots,X_{n-1} \in \mathbb{R}^n$;

2. *le $(n-1)$-crochet sur $\mathbb{R}^n$ défini par M vérifie l'Identité Fondamentale si, et seulement si, m est auto-adjoint ou de rang 1 ou 2.*

Nous proposons ensuite des formules définissant des structures de Nambu-Lie construites à partir d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur le corps $\mathbb{C}$. Nous considérons les super-dérivations de la forme $\lambda \wedge d$ de l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}$, où λ est une $(k-1)$-forme multilinéaire antisymétrique et d désigne la différentielle extérieure (qui est elle-même une super-dérivation de degré 1). Cette super-dérivation $\lambda \wedge d$ (de degré k) définit de manière unique une $(k+1)$-structure antisymétrique : en effet, il existe des uniques éléments $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ de degré $k+1$ dans l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}$ tels que :

$$\lambda \wedge d = \sum_{r=1}^{n} \Omega_r \wedge i_{X_r},$$

où $\{X_1,\ldots,X_n\}$ désigne une base de l'algèbre $\mathfrak{g}$. La structure associée a alors pour expression :

$$[Y_1,\ldots,Y_{k+1}] := (-1)^k \sum_{r=1}^{n} \Omega_r(Y_1,\ldots,Y_{k+1})X_r,$$

pour tous $Y_1,\ldots,Y_{k+1} \in \mathfrak{g}$.

En utilisant le formalisme de A. Nijenhuis et R. W. Richardson [NR66], nous énonçons un critère qui permet de vérifier qu'une structure définie par une super-dérivation vérifie l'Identité Fondamentale :

Proposition 1. *Soit D une super-dérivation de degré k. Le $(k+1)$-crochet défini à partir de la super-dérivation D vérifie l'Identité Fondamentale si, et seulement si :*

$$[[i_{Y_k},[i_{Y_{k-1}},\ldots[i_{Y_1},D]\ldots]],D] = 0$$

pour tous $Y_1,\ldots,Y_k \in \mathfrak{g}$, où le super-crochet utilisé est celui défini sur la superalgèbre de Lie des super-dérivations.

On dit qu'une k-forme multilinéaire λ vérifie :

- la **condition de décomposabilité** si :

$$\lambda \wedge (i_A\lambda) = 0,$$

- la **condition de Frobenius** si :

$$\lambda \wedge (d \circ (i_A\lambda)) = 0,$$

pour tout $(k-1)$-vecteur A de l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}$.

Utilisant ce vocabulaire et la proposition 1, nous rappelons la proposition :

Proposition 2. *Soit λ une k-forme multilinéaire sur $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions de décomposabilité et de Frobenius. Alors :*

1. *La k-forme λ est décomposable : il existe des formes linéaires $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathfrak{g}^*$ linéairement indépendantes telles que $\lambda = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$;*
2. *Le sous-espace $\mathfrak{h} := \bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(\omega_j)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Ce type de forme permet de construire des structures de Nambu-Lie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:

Théorème 2. *Soit λ une k-forme linéaire antisymétrique sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions de décomposabilité et de Frobenius. Alors le crochet défini à partir de la super-dérivation $\lambda \wedge d$ vérifie l'Identité Fondamentale.*

Comme exemple du théorème 2, nous nous plaçons sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ des matrices carrées de taille n, et la forme linéaire trace vérifie nos deux conditions. Nous trouvons alors que le 3-crochet défini sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ par l'expression :

$$[X,Y,Z] := \operatorname{tr}(X)[Y,Z] + \operatorname{tr}(Y)[Z,X] + \operatorname{tr}(Z)[X,Y]$$

vérifie l'Identité Fondamentale. Mais la structure canoniquement associée, définie sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de la manière suivante :

$$\{F,G,H\}_\varphi := (\varphi | [dF_\varphi, dG_\varphi, dH_\varphi])$$

(pour $\varphi \in \mathfrak{g}^*,\ F,G,H \colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{C}$) n'est pas une structure de Nambu-Poisson. En effet, dans la distribution engendrée par les adjoints $\{F,G,.\}$, nous reconnaissons les orbites coadjointes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ainsi, s'il s'agissait d'une structure de Nambu-Poisson, on obtiendrait, en utilisant le résultat de P. Gautheron [Gau96], que toutes les orbites coadjointes devraient être de dimension au plus égale à 2, ce qui n'est pas le cas lorsque n est supérieur ou égal à 3.

La quantification des structures de Nambu pose beaucoup de problèmes (voir [DFST97]), et il y a eu beaucoup de tentatives, qui conduisent à envisager ce que l'on appelle (en théorie des PI-algèbres) les **polynômes standards**, c'est-à-dire, étant donné une algèbre associative, les k-structures définies par

$$P_k(a_1, \ldots, a_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(k)}.$$

Si k est un entier pair, on sait d'ores et déjà que les structures définies par le polynôme standard P_k vérifient automatiquement une identité qui est l'**antisymétrisée** de l'Identité Fondamentale (c'est-à-dire $[D,D]=0$ où D est la dérivation associée à la structure). Malheureusement, en règle générale, l'Identité Fondamentale n'est pas vérifiée. Mais cela n'est peut-être pas si grave, puisque l'on peut voir les quantifications d'une structure de Nambu-Lie $[.,\ldots,.]$ sur un espace V comme la recherche de ses enveloppes associatives, c'est-à-dire d'algèbres associatives A telles que l'espace V soit inclus dans l'algèbre A et $[X_1,\ldots,X_k]$ soit égal à $P_k(X_1,\ldots,X_k)$, pour tous $X_1,\ldots,X_k$ éléments de V. Dans cette optique, nous montrons que la $(n+1)$-structure définie sur l'espace $\mathbb{C}^{n+2}$ en localisant (c'est-à-dire en fixant l'un des paramètres) le jacobien sur la fonction :

$$(x_1,\ldots,x_{n+2}) \longmapsto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2$$

est quantifiable par l'algèbre de Clifford $\mathscr{C}_n$, quand n est pair :

Théorème 3. *Soit n un entier pair, et considérons l'algèbre de Clifford $\mathscr{C}_n$. Notons $\{E_1,\ldots,E_n\}$ la base canonique, et deux éléments particuliers de l'algèbre : $E_{n+1} := E_1 \ldots E_n$ et $E_{n+2} := 1$. Alors :*

- *le polynôme P_{n+1} munit le sous-espace $\mathrm{Vect}(E_1,\ldots,E_{n+2})$ d'une structure de $(n+1)$-gèbre de Nambu-Lie ;*
- *le polynôme P_n munit le sous espace $\mathrm{Vect}(E_1,\ldots,E_{n+1})$ d'une structure de n-gèbre de Nambu-Lie.*

En particulier, quand $n=2$, nous obtenons une 3-structure de Nambu-Lie sur l'algèbre des quaternions $\mathscr{C}_2 = \mathbb{H}$ toute entière.

Lorsque l'on cherche à établir des identités polynomiales, le **Théorème d'Amitsur-Levitzki** apparaît naturellement. Il donne une identité sur l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n, construite à partir du polynôme standard. C'est une sorte de ⟪mesure⟫ de la non-commutativité de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Son énoncé est remarquable de simplicité :

Théorème (Amitsur & Levitzki). *Le polynôme standard P_{2n} est identiquement nul sur l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*

Ajoutons que c'est le meilleur indice, puisque l'on démontre facilement que le polynôme standard P_{2n-1} n'est pas identiquement nul sur l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en l'évaluant sur des matrices bien choisies de la base canonique.

Bien que le théorème soit simple à énoncer, c'est, comme le remarque B. Kostant, un théorème difficile. La démonstration originale du théorème [AL50] (voir aussi [Jac75]) ne montre pas réellement pourquoi cette identité existe. Huit années après J. Amitsur et S.A. Levitzki, B. Kostant publie une nouvelle preuve du théorème, basée sur la cohomologie des algèbres de Lie [Kos58], avec une nouvelle identité pour l'algèbre $\mathfrak{so}(2n)$. Une autre preuve de ce dernier résultat est obtenue par L.H. Rowen par une méthode directe, mais avec quelques difficultés [Row80]. Et il faut attendre vingt six ans pour obtenir une démonstration rapide, basée sur le théorème de Cayley-Hamilton, proposée par S. Rosset [Ros76] (voir appendice). Finalement, en 1981, B. Kostant [Kos81] apporte un point final au sujet en donnant une interprétation du théorème dans le cadre de la théorie des représentations et en le généralisant à toutes les sous-algèbres semi-simples de $\mathfrak{gl}(n)$.

Dans ses articles [Kos58] et [Kos81], B. Kostant se pose en fait le problème suivant : étant donné une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(n)$, à partir de quel indice k (minimal si possible) le polynôme standard d'ordre k s'annule-t-il sur $\mathfrak{h}$? C'est la généralisation naturelle du théorème d'Amitsur-Levitzki (qui donne l'indice $k = 2n$ dans le cas $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n)$). Dans [Kos58], en utilisant le théorème de Chevalley sur les invariants, la transgression de Cartan-Chevalley et le théorème de Hopf-Koszul-Samelson, il donne la réponse pour $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n)$ ou $\mathfrak{sl}(n)$ avec $k = 2n$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2n+1)$ avec $k = 4n+2$ et surtout $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2n)$ avec $k = 4n-2$, et non pas $4n$. Le dernier cas est remarquable : la différence s'explique par la structure particulière des invariants de l'algèbre $\mathfrak{so}(2n)$ due à l'existence du Pfaffien. Vingt trois ans plus tard, il résout également complètement le cas des sous-algèbres semi-simples $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(n)$ [Kos81], en utilisant son Théorème de Séparation des Variables [Kos63], au lieu de la stratégie cohomologique qu'il avait développée en 1958 [Kos58]. La structure polynomiale des invariants de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est un argument indispensable dans ses deux démonstrations, et ce sera un point-clé de notre propre démonstration.

Dans la continuité de ces travaux, nous nous sommes posé la question de chercher s'il existait un tel indice (et si oui, lequel) sur les superalgèbres de Lie classiques. Nous devons pour cela définir un super-analogue du polynôme standard dans le cas des super-espaces vectoriels. Nous prenons la définition suivante :

$$A_k(a_1,\dots,a_k) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma;a_1,\dots,a_k)a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(k)}$$

avec $\varepsilon(\sigma;a_1,\dots,a_k)$ une **super-signature** dépendant du degré des éléments $a_1,\dots,a_k$ appartenant à la superalgèbre associative A, et qui vérifie notamment :

$$\varepsilon(\sigma;a_1,\dots,a_k) = 1$$

quand les degrés sont pairs et :

$$\varepsilon(\sigma;a_1,\dots,a_k) = \varepsilon(\sigma)$$

quand les degrés sont impairs. Pour $k = 2$, on retrouve le super-crochet associé à la structure associative (c'est-à-dire le super-crochet $[X,Y] = XY - (-1)^{xy}YX$ pour $X \in A_x$ et $Y \in A_y$), et en général, on obtient un invariant (pour l'action adjointe de A). Pour de multiples raisons, ce «super-polynôme» est la généralisation naturelle du polynôme standard du cas classique (par exemple, évalué sur des éléments pairs, il coïncide avec le polynôme P_k compte-tenu des propriétés de la super-signature).

La première superalgèbre de Lie où étudier la possibilité d'une super-identité est $\mathfrak{gl}(p,q)$ toute entière (avec $pq \neq 0$). Mais, d'après les propriétés de la super-signature, on peut évaluer A_k sur un même élément X de degré impair, et on obtient :

$$k!X^k = A_k(X,\dots,X).$$

Ainsi l'écriture d'une super-identité d'Amitsur-Levitzki sur $\mathfrak{gl}(p,q)$ bute sur un premier écueil : si une telle identité existait, alors tous les éléments de degré impair de $\mathfrak{gl}(p,q)$ devraient être nilpotents. C'est manifestement faux, par exemple pour la matrice suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(p,q)_{\bar{1}}.$$

Il reste à savoir si la super-identité peut être satisfaite par des sous-algèbres de $\mathfrak{gl}(p,q)$ mais, à première vue, le critère de nilpotence laisse peu d'espoirs. Néanmoins, il ne s'applique pas à la super-algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$, puisque nous montrons que tous les éléments de degré impair de $\mathfrak{osp}(1,2n)$ sont nilpotents d'ordre au plus égal à 3 (comme éléments de $\mathfrak{gl}(1,2n)$). Un des principaux résultats que nous obtenons alors est une super-version du théorème d'Amitsur-Levitzki pour $\mathfrak{osp}(1,2n)$:

Théorème 4. *Pour tous $X_1,\dots,X_{4n+2} \in \mathfrak{osp}(1,2n)$, nous avons :*

$$A_{4n+2}(X_1,\dots,X_{4n+2}) = 0.$$

Pour démontrer ce résultat, nous suivons une stratégie proche de celle de B. Kostant en 1958, en faisant néanmoins l'économie d'un théorème de type Hopf-Koszul-Samelson. Nous utilisons donc la structure polynomiale de l'algèbre des invariants de $\mathfrak{osp}(1,2n)$ (voir, par exemple, [Ser99]). De bons générateurs (pour cette algèbre de polynômes à n indéterminées) sont donnés par les super-traces des super-polynômes S_k, avec k pair, les super-polynômes S_k étant définis par :

$$S_k(a_1,\dots,a_k) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma;a_1,\dots,a_k)a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(k)}.$$

Nous construisons ensuite un opérateur de **transgression** sur une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, généralisant celui de H. Cartan [Car51] et C. Chevalley [Che52] :

$$t(P) := \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \wedge \frac{\partial P}{\partial \varphi_i}(d\varphi_1,\dots,d\vartheta_q) + \sum_{j=1}^{q} \vartheta_j \wedge \frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}(d\varphi_1,\dots,d\vartheta_q),$$

pour tout polynôme P sur $\mathfrak{g}$, où $\{\varphi_1,\dots,\varphi_p\}$ est une base de l'espace $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$, $\{\vartheta_1,\dots,\vartheta_q\}$ une base de l'espace $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^*$ et d la différentielle super-extérieure.

Nous démontrons une super-version du théorème de Dynkin [Dyn59] :

Théorème 5. *Soit $k \geqslant 1$. Alors :*

$$t(s_k) = (-1)^{k-1} k\, a_{2k-1},$$

où $s_k = \mathrm{str}(S_k)$, $a_k = \mathrm{str}(A_k)$, l'opérateur str *désignant la super-trace sur la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(1,2n)$.*

Nous concluons alors la démonstration du théorème 4 grâce à la généralisation du théorème de Dynkin, aux propriétés de l'opérateur généralisé de transgression et à quelques identités sur les polynômes A_k et S_k.

Cependant, avant de pouvoir démontrer ces résultats, nous devons formaliser nos outils. Nous travaillons dans les algèbres super-extérieures et super-symétriques des super-espaces vectoriels : ces algèbres sont définies en termes de formes multilinéaires respectivement super-antisymétriques et super-symétriques. Nous rappelons ensuite la théorie cohomologique des superalgèbres de Lie, introduite par D. Leites [FL84]. Nous adaptons le matériel présent dans la thèse de J.-L. Koszul [Kos50] (dérivée de Lie, formule de Cartan,...), ce qui permet d'établir le théorème 6, le principal argument pour le démontrer étant le caractère complètement réductible de l'extension de la représentation adjointe de $\mathfrak{osp}(1,2n)$ à son algèbre super-extérieure :

Théorème 6. *Soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1,2n)$. *L'algèbre de cohomologie* $H(\mathfrak{g})$ *est isomorphe à la sous-algèbre de ses cochaînes invariantes* $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

Nous présentons les superalgèbres de Lie orthosymplectiques $\mathfrak{osp}(1,2n)$ dans le cadre de la quantification. Cette présentation a été introduite par M. Flato et C. Fronsdal dans le cadre de leur théorie des singletons Anti-de Sitter. Nous lui apportons une petite amélioration (qui s'avère bien utile) en utilisant une action adjointe tordue pour parachever la réalisation de la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ dans l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n$. Une application immédiate consiste à prouver que tous les éléments impairs de la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ (considérés comme éléments de $\mathfrak{gl}(1,2n)$) sont nilpotents d'ordre 3 (comme nous l'avons dit plus haut), ce qui n'a rien d'évident à priori. Nous démontrons également :

Proposition 3. *Soit* π *une représentation de dimension finie de la superalgèbre de Lie* $\mathfrak{osp}(1,2n)$. *Si* X *appartient à* $\mathfrak{osp}(1,2n)_{\bar{1}}$, *alors* $\pi(X)$ *est nilpotent.*

Après ces trois premières parties, nous définissons précisément les polynômes A_k et S_k (sous les formes énoncées plus haut) et donnons leurs propriétés. B. Kostant utilise plusieurs identités sur le polynôme standard P_k, et nous établissons les super-identités, analogues des siennes, et qui constituent les dernier outils requis pour la démonstration des théorèmes 5 puis 4.

✠

Au terme de cette étude, nous dénombrons effectivement de nouveaux exemples de structures de Nambu. Mais, mis-à-part les $(n-1)$-structures sur l'espace $\mathbb{R}^n$ qui sont complètement déterminées grâce à la classification que nous en donnons, nous imaginons qu'il existe de nombreux autres exemples que ceux que nous avons présenté ici. De plus, nous confirmons par un exemple concret qu'il existe de nombreuses structures de Nambu-Lie ne définissant pas de structures de Nambu-Poisson, donc échappant à la classification réalisée par J.-P. Dufour et N. T. Zung [DZ99]. Nous ouvrons en réalité le champ d'investigation pour la recherche de nouveaux exemples car la liste que nous trouvons n'est en aucun cas exhaustive, et nous pensons que la recherche dans ce domaine peut amener de nouveaux résultats, avant de se poser la question de classifier les structures de Nambu-Lie.

Notamment, la quantification des structures de Nambu-Lie est à poursuivre. Nous résolvons ici le cas de la quantification des $(n-1)$-structures sur $\mathbb{C}^n$ grâce aux algèbres de Clifford d'indice pair, mais nous n'avons pas étudié la quantification des autres structures que nous obtenons.

En ce qui concerne les identités du type Amitsur-Levitzki sur les superalgèbres de Lie, nous répondons dans les cas des superalgèbres de Lie $\mathfrak{gl}(p,q)$ (négativement, pour $pq \neq 0$) et $\mathfrak{osp}(1,2n)$ (positivement) pour la représentation canonique dans $\mathfrak{gl}(1,2n)$. Tenant compte de la forme très précise des invariants de $\mathfrak{osp}(1,2n)$, nous pensons que seule la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ peut vérifier une identité du type Amitsur-Levitzki. En effet, grâce à la présence d'un zéro en premier coefficient de la première ligne des éléments de $\mathfrak{osp}(1,2n)$, la super-trace n'est pas réellement une super-trace, mais simplement l'opposé de la trace du bloc appartenant à l'algèbre $\mathfrak{sp}(2n)$. Ceci permet d'affirmer que l'algèbre des invariants est finiment engendrée (c'est un argument essentiel des démonstrations de B. Kostant), ce qui n'est pas le cas, en général, lorsque la super-trace présente la différence de deux traces. Ceci étant, il serait intéressant d'avoir un résultat concernant les autres superalgèbres de Lie classiques, fut-il négatif ou positif.

Sans aller aussi loin, notre travail sur l'établissement d'une super-version du théorème d'Amitsur-Levitzki sur $\mathfrak{osp}(1,2n)$ nous laisse un petit goût d'inachevé. En effet, nous ne sommes pas parvenus à démontrer que l'indice $4n+2$ est le meilleur, en dehors des cas $n=1,2$ et 3. Nous pensons cependant que cet indice $4n+2$ est minimal (car il est identique à l'indice du cas classique, pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(1+2n)$), et nous donnons un candidat pour démontrer que A_{4n+1} n'est pas identiquement nul. Mais cette minimalité reste donc un travail à poursuivre, pour énoncer un résultat vraiment analogue au cas classique, et aux travaux de B. Kostant qui a recherché systématiquement à la démontrer afin d'obtenir des énoncés complets.

Enfin, une fois l'énoncé du théorème clarifié pour la représentation canonique de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$, il est naturel de se poser la même question que B. Kostant : qu'en est-il des représentations de dimension finie ? Observant la proposition 3 et le critère de nilpotence, nous espérons que l'identité obtenue n'est pas seulement vraie dans notre cas mais qu'elle existe aussi pour chacune de ces représentations. Mais c'est une étude qu'il reste à mener.

✠

Notations

Nous désignons respectivement par les lettres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des entiers naturels, l'anneau des entiers relatifs, le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes. Un ensemble d'entiers naturels ou relatifs $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$ ($a, b \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, $a < b$) est noté $[\![a, b]\!]$. L'anneau des classes d'entiers relatifs modulo 2 est noté $\mathbb{Z}_2$ et ses éléments sont $\overline{0}$ et $\overline{1}$. Si $p \in \mathbb{Z}$, la notation $\overline{p}$ désigne sa classe de congruence modulo 2. Enfin, le **groupe symétrique** d'indice $n \geqslant 2$, c'est-à-dire le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathfrak{S}_n$ et la signature d'une permutation est notée $\varepsilon(\sigma)$.

Si E est un ensemble non vide et $n \geqslant 2$ un entier, nous notons $\times_n E$ l'ensemble des n-uplets d'éléments de E et, pour $a, b \in E$ et $i \in [\![1, n]\!]$ nous désignons par $(a, \ldots, a, b_i, a, \ldots, a)$ le n-uplet particulier de E dont toutes les entrées sont égales à a sauf la i-ème qui vaut b.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle $\mathbb{K}$, la notation $\mathrm{End}(V)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de V et V^* est l'espace vectoriel dual de V, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires de V dans $\mathbb{K}$. Le crochet de dualité défini sur $V^* \times V$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $(.|.)$. Rappelons qu'il est défini par :

$$(\alpha | X) = \alpha(X)$$

pour $\alpha \in V^*$ et $X \in V$.

La notation $T(V)$ désigne l'**algèbre tensorielle** de V, le sous-espace $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ fois}}$ des tenseurs homogènes de degré n étant noté $T^n(V)$. L'algèbre $T(V)$ est $\mathbb{Z}$-graduée et nous notons $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} T^n(V)$ avec $T^0(V) = \mathbb{K}$ et $T^n(V) = \{0\}$ si n est négatif.

L'**algèbre extérieure** ou algèbre de Grassmann de V est notée $\bigwedge(V)$. Cette algèbre est $\mathbb{Z}$-graduée et nous notons $\bigwedge^n(V)$ le sous-espace des tenseurs antisymétriques homogènes de degré n. Nous notons $\bigwedge(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigwedge^n(V)$ avec $\bigwedge^n(V) = \{0\}$ si $n \notin [\![0, \dim(V)]\!]$. Le crochet de dualité est étendu aux algèbres extérieures de V et V^* (via le déterminant) avec la même notation.

Enfin l'**algèbre symétrique** de V est notée $\mathrm{S}(V)$ et $\mathrm{S}^n(V)$ désigne le sous-espace des tenseurs symétriques de homogènes de degré n. Par conséquent, $\mathrm{S}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{S}^n(V)$ avec $\mathrm{S}^n(V) = \{0\}$ si n est négatif.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices complexes de taille n est notée $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ lorsqu'elle est munie de sa structure d'algèbre de Lie. Sur cette algèbre, nous disposons de la forme linéaire **trace** notée tr et de la forme n-linéaire antisymétrique **déterminant** notée det. La notation $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ désigne l'algèbre de Lie des matrices complexes de trace nulle :

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) := \{M \in \mathfrak{gl}(n) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\},$$

la notation $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques complexes :

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) := \{M \in \mathfrak{gl}(n) \mid {}^tM = -M\},$$

et enfin la notation $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie des matrices symplectiques complexes :

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) := \{M \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid {}^tMJ + JM = 0\}$$

où $J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n)$, la matrice I_n désignant l'identité de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Rappelons :

$$\dim(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})) = n^2,\ \dim(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})) = n^2 - 1,$$
$$\dim(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } \dim(\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})) = 2n^2 + n.$$

Enfin, si M est une $\mathscr{C}^\infty$-variété de dimension $n \geqslant 1$, nous désignons par TM l'espace tangent à la variété M. Rappelons que TM est la collection des espaces vectoriels T_xM de dimension n pour x parcourant M. D'autre part, si M est un espace vectoriel, alors T_xM est égal à M pour tout x de M.

✠

Chapitre I

Structures de Nambu : quelques exemples

Dans ce premier chapitre, nous abordons l'étude des structures de Nambu, c'est-à-dire des produits de plusieurs variables vérifiant une identité de dérivation généralisant l'identité de Jacobi sur les crochets de Lie. Cette étude consiste en la recherche de nouveaux exemples de telles structures car il existe peu d'exemples explicites.

Pour présenter nos travaux, nous commençons par rappeler quelques résultats essentiels découverts récemment ([Gau96, DZ99]) et le premier exemple historique, présenté avec une démonstration indépendante. Nous donnons ensuite de nouveaux exemples de structures de Nambu sur $\mathbb{R}^n$, sur l'algèbre des matrices $\mathfrak{gl}(2)$, sur une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{g}$ de dimension finie, sur l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ et plus généralement sur les algèbres de Clifford d'indice pair $\mathscr{C}_{2n}$.

Nous examinons également les structures de Poisson canoniquement associées aux crochets de Nambu construits sur une algèbre de Lie pour les relier aux orbites coadjointes des algèbres de Lie.

I.1 Généralités et résultats acquis

Commençons par donner la définition d'une structure de Nambu et les principaux résultats connus à ce jour et utilisés dans la suite. Nous donnons également un premier exemple déjà cité [Gau96] et démontré ici de manière indépendante.

I.1.a Définitions

Soit V un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$ un entier.

Définition I.1.1. Nous appelons k-**crochet** toute application k-linéaire antisymétrique de $\times_k V$ dans V. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté ou lorsque nous omettons de préciser le nombre de variables, nous parlons simplement de **crochet**.

Définition I.1.2. Considérons un k-crochet noté $[.,\ldots,.]$. La relation :

$$[X_1,\ldots,X_{k-1},[Y_1,\ldots,Y_k]] = \sum_{i=1}^{k}[Y_1,\ldots,Y_{i-1},[X_1,\ldots,X_{k-1},Y_i],Y_{i+1},\ldots,Y_k] \qquad (\dagger)$$

pour tous $X_1,\ldots,X_{k-1},Y_1,\ldots,Y_k \in \mathfrak{g}$ est appelée **identité fondamentale de Nambu**. Le crochet est alors appelé k-**crochet de Nambu** ou Nambu-Lie.

Définition I.1.3. Un espace vectoriel muni d'un k-crochet vérifiant l'identité (†) est appelé une k-**gèbre de Nambu** ou **Nambu-Lie**.

Exemple I.1.4. Dans le cas des 2-crochets, l'identité fondamentale de Nambu n'est autre que l'identité de Jacobi :

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$$

(pour tous $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$). En conséquence, toute algèbre de Lie est une 2-gèbre de Nambu.

Définition I.1.5. Soit $[.,\ldots,.]$ un k-crochet de Nambu sur V. Pour tout $(k-1)$-uplet $(X_1,\ldots,X_{k-1})$ de vecteurs de V, on appelle **endomorphisme adjoint** l'application $\mathrm{ad}_{X_1,\ldots,X_{k-1}} : V \to V$ définie par

$$X \mapsto [X_1,\ldots,X_{k-1},X].$$

Remarque I.1.6. Pour tout $(k-1)$-uplet de vecteurs $(X_1,\ldots,X_{k-1})$ de vecteurs de V, l'application adjointe $\mathrm{ad}_{X_1,\ldots,X_{k-1}}$ est une dérivation du k-crochet $[.,\ldots,.]$. C'est en ce sens que l'identité (†) généralise l'identité de Jacobi.

Définition I.1.7. Soit A une algèbre. Nous appelons k-**crochet de Leibniz** sur A tout k-crochet $\{.,\ldots,.\}$ vérifiant l'identité de Leibniz sur chacune de ses variables : pour tous $X_1,\ldots,X_{k-1},X,Y \in A$, nous avons la relation :

$$\{X_1,\ldots,X_{k-1},XY\} = \{X_1,\ldots,X_{k-1},X\}Y + X\{X_1,\ldots,X_{k-1},Y\}.$$

Définition I.1.8. Un k-**crochet de Nambu-Poisson** est un k-crochet de Leibniz vérifiant l'identité fondamentale de Nambu. Une algèbre munie d'une telle structure est appelée k-**gèbre de Nambu-Poisson**.

Exemple I.1.9. Rappelons qu'un crochet de Poisson est une application bilinéaire antisymétrique vérifiant l'identité de Jacobi et l'identité de Leibniz par rapport à chacune de ses variables. C'est donc également un 2-crochet de Nambu-Poisson. La terminologie choisie en découle.

Étant donné k-crochet sur l'espace V, il existe une manière de définir un k-crochet de Leibniz associé sur l'algèbre de fonctions $\mathscr{A} := \mathscr{C}^\infty(V^*,\mathbb{R})$:

Définition I.1.10. Soit un k-crochet sur V. Rappelons que l'espace vectoriel V^{**} est isomorphe à V (l'espace V étant supposé de dimension finie). Pour $F_1,\ldots,F_k \in \mathscr{A}$, nous définissons $\{F_1,\ldots,F_k\} \in \mathscr{A}$ par la formule :

$$\{F_1,\ldots,F_k\}_\varphi = (\varphi|[(dF_1)_\varphi,\ldots,(dF_k)_\varphi])$$

où $\varphi \in V^*$et dF_φ désigne la différentielle usuelle de l'application F évaluée au point φ.

Remarque I.1.11. Le k-crochet obtenu sur l'algèbre $\mathscr{A}$ de cette manière vérifie l'identité de Leibniz. Mais si le crochet sur l'espace V vérifie l'identité (†), ce n'est pas toujours le cas pour le crochet associé sur $\mathscr{A}$ comme nous le verrons dans la partie I.3.e.

Si $k \geqslant 3$ et si nous disposons d'un k-crochet de Nambu, Leibniz ou Nambu-Poisson, il existe un procédé simple pour obtenir des ℓ-crochets ayant les mêmes propriétés, avec $2 \leqslant \ell \leqslant k$. Ces crochets sont appelés des **localisés** du crochet initial.

Proposition I.1.12 (Localisation). *Supposons donné un k-crochet de Nambu $[.,\dots,.]$ sur un espace vectoriel V avec $k \geqslant 3$. Notons $\ell = k-2 \geqslant 1$ et soit $X_1,\dots,X_\ell \in V$ fixés. Alors le $(k-\ell)$-crochet $[.,\dots,.]'$ défini par :*

$$[Z_1,\dots,Z_{k-\ell}]' := [X_1,\dots,X_\ell,Z_1,\dots,Z_{k-\ell}]$$

($Z_1,\dots,Z_{k-\ell} \in V$) vérifie l'identité (†).

Preuve. C'est un corollaire immédiat de l'antisymétrie des crochets. □

I.1.b Un premier exemple

Donnons un premier exemple non trivial de crochet de Nambu-Poisson. Mais avant cela, rappelons quelques méthodes de calcul dans l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel V de dimension finie.

Rappel I.1.13. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle, V^* son espace dual, $\bigwedge(V)$ et $\bigwedge(V^*)$ leur algèbre extérieure respective. Pour $\alpha \in V^*$ et $\beta \in \bigwedge^p(V^*)$ ($p \in [\![1,n]\!]$), le produit extérieur de α et β a pour expression :

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \alpha(X_k) \beta(X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_k} \wedge \dots \wedge X_{p+1})$$

(pour tous $X_1,\dots,X_{p+1} \in V$), $\widehat{X_k}$ signifiant que le terme X_k est omis.

Soit $X \in \bigwedge(V)$ et $\varepsilon(X)$ l'endomorphisme de $\bigwedge(V)$ défini par $\varepsilon(X)(Y) = X \wedge Y$ pour tout $Y \in \bigwedge(V)$. Nous désignons par i_X l'application transposée de $\varepsilon(X)$. Nous avons : $\varepsilon(X)\varepsilon(X') = \varepsilon(X \wedge X')$ et par conséquent :

$$i_{X\wedge X'} = i_{X'} \circ i_X$$

pour tous $X, X' \in \bigwedge(V)$.

L'application linéaire i_X vérifie, pour $X \in \bigwedge^k(V)$:

$$(i_X \alpha)(X_{k+1} \wedge \dots \wedge X_p) = \alpha(X \wedge X_{k+1} \wedge \dots \wedge X_p)$$

pour tout $\alpha \in \bigwedge^p(V^*)$ et $X_{k+1},\dots,X_p \in V$. D'autre part :

$$(i_X \lambda | Y) = (\lambda | X \wedge Y) = \lambda(X \wedge Y)$$

pour $\lambda \in \bigwedge^p(V^*)$, $X \in \bigwedge^k(V)$ et $Y \in \bigwedge^{p-k}(V)$.

Si $X \in V$, alors i_X est une dérivation graduée i.e. si $\alpha \in \bigwedge^p(V^*)$ et $\beta \in \bigwedge(V^*)$, alors :

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X\beta).$$

Nous aurons l'occasion de généraliser ces méthodes de calcul au cas des espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués dans le second chapitre.

Ces rappels étant effectués, nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Proposition I.1.14. *Soit $n \geqslant 1$ et $\mathscr{A} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $G \in \mathscr{A}$ fixée. Alors le n-crochet défini sur $\mathscr{A}$ par :*

$$\{F_1, \ldots, F_n\} = G \operatorname{Jac}(F_1, \ldots, F_n) = G \det(dF_1, \ldots, dF_n)$$

est un n-crochet de Nambu-Poisson.

Preuve. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$. Par commodité d'écriture, une application :

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \exp(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)$$

sera notée $F(X) = e^{\Lambda.X}$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et la notation simplifiée $\Lambda.X$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

Commençons par remarquer que d'après les propriétés de la différentielle d, le n-crochet ainsi défini vérifie l'identité de Leibniz par rapport à chacune de ses coordonnées. Montrons alors qu'il vérifie également l'identité (†).

Par densité de l'espace des polynômes dans $\mathscr{A}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (d'après le théorème de Stone-Weierstraß) et par densité des applications exponentielles dans l'espace des séries formelles, espace dual de l'espace des polynômes (grâce à la formule de Leibniz sur les polynômes), il suffit de démontrer l'identité de Nambu pour des fonctions exponentielles $F_i(X) = e^{\Lambda_i.X}$, $G_j(X) = e^{\Theta_j.X}$ et $G(X) = e^{\Lambda.X}$ où $\Lambda_i, \Theta_j, \Lambda$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($i \in [\![1,n]\!],\ j \in [\![1,n-1]\!]$).

Notons $\Xi = \Lambda + \sum_{j=1}^{n-1} \Theta_j + \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \mathbb{R}^n$. Calculons :

$$\{F_1, \ldots, F_n\} = \exp\left(\left(\Lambda + \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i\right).X\right) \det(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$$

d'où :

$$\{G_1, \ldots, G_{n-1}, \{F_1, \ldots, F_n\}\} = e^{\Xi.X} \det(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \det\left(\Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1}, \Lambda + \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i\right)$$

et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\{G_1,\dots,G_{n-1},F_k\} = \exp\left(\left(\Lambda+\Lambda_k+\sum_{j=1}^{n-1}\Theta_j\right).X\right)\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda_k)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&\{F_1,\dots,F_{k-1},\{G_1,\dots,G_{n-1},F_k\},F_{k+1},\dots,F_n\}\\
= \;& e^{\Xi.X}\det\left(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{k-1},\Lambda+\Lambda_k+\sum_{j=1}^{n-1}\Theta_j,\Lambda_{k+1},\dots,\Lambda_n\right)\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda_k).
\end{aligned}$$

Notons Δ la différence :

$$\Delta := \{G_1,\dots,G_{n-1},\{F_1,\dots,F_n\}\} - \sum_{k=1}^{n}\{F_1,\dots,F_{k-1},\{G_1,\dots,G_{n-1},F_k\},F_{k+1},\dots,F_n\}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\Delta &= e^{\Xi.X}\Bigg[\det(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\left(\sum_{i=1}^{n}\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda_i)+\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda)\right)\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda_k)\Bigg(\det(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)+\det(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{k-1},\Lambda,\Lambda_{k+1},\dots,\Lambda_n)+\\
&\quad \sum_{j=1}^{n-1}\det(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{k-1},\Theta_j,\Lambda_{k+1},\dots,\Lambda_n)\Bigg)\Bigg]\\
&= e^{\Xi.X}\Bigg[\det(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda)\\
&\quad -\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda_k)\det(\Theta_j,\Lambda_1,\dots,\widehat{\Lambda_k},\dots,\Lambda_n)\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda_k)\det(\Lambda,\Lambda_1,\dots,\widehat{\Lambda_k},\dots,\Lambda_n)\Bigg]\\
&= e^{\Xi.X}\Bigg[\det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda)\det(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)-\sum_{j=1}^{p-1}(i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det\wedge i_{\Theta_j}\det)(\Lambda_1\wedge\dots\wedge\Lambda_n)\\
&\quad -(i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det\wedge i_{\Lambda}\det)(\Lambda_1\wedge\dots\wedge\Lambda_n)\Bigg],
\end{aligned}$$

où nous avons employé les notations du rappel I.1.13 avec l'espace vectoriel $V=\mathbb{R}^n$ en ayant considéré la forme déterminant comme une forme linéaire sur $\bigwedge(V)$.

Soit $j\in[\![1,n-1]\!]$. Remarquons que :

$$i_{\Theta_j}((i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det)\wedge\det) = (\underbrace{i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}\wedge\Theta_j}}_{0}\det)\wedge\det-(i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det)\wedge(i_{\Theta_j}\det)$$

donc $(i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det)\wedge i_{\Theta_j}\det=0$ car $\bigwedge^{n+1}((\mathbb{R}^n)^*)=\{0\}$.

De même :

$$\begin{aligned}
0 &= i_\Lambda((i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det)\wedge\det)\\
&= (i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}\wedge\Lambda}\det)\wedge\det-(i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det)\wedge(i_\Lambda\det)\\
&= \det(\Theta_1,\dots,\Theta_{n-1},\Lambda)\det-(i_{\Theta_1\wedge\dots\wedge\Theta_{n-1}}\det)\wedge(i_\Lambda\det).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons finalement : $\Delta = 0$. $\square$

Remarque I.1.15. Ce résultat est un corollaire du théorème I.1.18 démontré dans [Gau96] et que nous allons énoncer dans la prochaine partie mais sa démonstration est indépendante.

I.1.c Résultats de structure connus

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre plus général des variétés lisses de dimension finie et nous ne faisons qu'énoncer trois théorèmes connus. Dans toute la suite, M désigne une variété lisse de dimension n.

Définition I.1.16.

- Une p-forme différentielle antisymétrique α sur M est un champ d'applications p-linéaires antisymétriques α_x de $\bigwedge^p(T_xM)$ dans $\mathbb{R}$ ($x \in M$).
- Une p-coforme différentielle antisymétrique Π sur M est un champ d'applications p-linéaires antisymétriques Π_x de $\bigwedge^p(T_xM^*)$ dans $\mathbb{R}$ ($x \in M$).

Remarque I.1.17. Puisqu'un k-crochet de Poisson vérifie l'identité de Leibniz et est antisymétrique, il existe une p-coforme antisymétrique Π telle que :

$$\{F_1,\ldots,F_k\}_x = \Pi_x((dF_1)_x \wedge \ldots \wedge (dF_k)_x)$$

pour tout $x \in M$, où $F_1,\ldots,F_k$ sont des fonctions lisses de M dans $\mathbb{R}$. Nous disons que la k-coforme Π est le **tenseur** définissant le k-crochet de Poisson. Dans le cas où le k-crochet de Poisson vérifie l'identité (†), Π est appelé **tenseur de Nambu-Poisson**.

Nous disposons de deux résultats de structure concernant les crochets de Nambu-Poisson dus à P. Gautheron [Gau96]. Notons $\mathscr{A}$ l'algèbre des fonctions lisses de M dans $\mathbb{R}$.

Théorème I.1.18. *Soit M une variété lisse de dimension n, et α une n-coforme sur M. Alors le n-crochet défini par :*

$$\{F_1,\ldots,F_n\} = \alpha(dF_1,\ldots,dF_n)$$

($F_1,\ldots,F_n \in \mathscr{A}$) est un n-crochet de Nambu-Poisson sur $\mathscr{A}$ ou, de manière équivalente, la n-coforme α est un tenseur de Nambu-Poisson sur M.

Remarque I.1.19. Ce théorème généralise l'exemple de la proposition I.1.14.

Théorème I.1.20. *Soit M une variété lisse de dimension $n \geqslant 3$ munie d'un k-crochet de Nambu-Poisson avec $n \geqslant k \geqslant 3$. Soit x_0 un point de M en lequel le crochet est non nul (c'est-à-dire qu'il existe k fonctions $F_1,\ldots,F_k \in \mathscr{A}$ telles que la fonction $\{F_1,\ldots,F_k\}_{x_0}$ soit non nulle). Alors :*

(i) Il existe un voisinage U de x_0 et un feuilletage local de M dans U par des variétés V_λ de dimension k ;

(ii) Il existe une k-coforme α sur M telle que le crochet $\{F_1,\ldots,F_n\}$ coïncide avec le k-crochet sur V_λ induit par α :

$$\{F_1,\ldots,F_k\}_x = \alpha_x(d\overline{F_1}(x),\ldots d\overline{F_k}(x))$$

pour tout $x \in V_\lambda$, où $d\overline{F_i}$ désigne la restriction de F_i à V_λ.

Ces résultats sont complétés par le théorème de classification des *n*-structures de Nambu-Poisson linéaires dus à J.-P. Dufour et N. T. Zung [DZ99].

Théorème I.1.21 (Dufour & Tien Zung). *Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit α un tenseur de Nambu-Poisson d'ordre $k = n - \ell \geqslant 3$ linéaire sur V. Alors alors il existe un système de coordonnées linéaires $(x_1,\ldots,x_n)$ sur V tel que α soit de l'un des deux types suivants :*
Type 1 : $\alpha_x = \sum_{j=1}^{r+1} \pm x_j \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \sum_{j=1}^{s} \pm x_{k+1+j} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{r+j+1}}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}$ *où* $-1 \leqslant r \leqslant k$ *et* $0 \leqslant s \leqslant \min(\ell-1, k-r)$
Type 2 : $\alpha_x = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{k-1}} \wedge \left(\sum_{i,j=k}^{n} b^i_j x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$.

I.2 Classification des $(n-1)$-structures de Nambu sur l'espace $\mathbb{R}^n$

Soit $n \geqslant 4$. Dans cette partie, nous donnons des exemples de structures de Nambu construites sur $\mathbb{R}^n$ à partir du produit mixte en généralisant un résultat de P. Gautheron sur les 3-crochets de $\mathbb{R}^4$ [Gau98]. Nous obtenons ainsi tous les $(n-1)$-crochets de Nambu sur $\mathbb{R}^n$ et sur tout espace vectoriel réel de dimension n.

I.2.a Produit mixte de l'espace $\mathbb{R}^n$

Définition I.2.1. Si $X_2,\dots,X_n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on appelle **produit mixte** de la famille de vecteurs $\{X_2,\dots,X_n\}$, et on note $[X_2,\dots,X_n]$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\langle X_1|[X_2,\dots,X_n]\rangle = \det(X_1,X_2,\dots,X_n)$$

pour tout $X_1 \in \mathbb{R}^n$, où nous avons noté $\langle .|.\rangle$ le produit scalaire euclidien de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Remarque I.2.2. D'après la définition, si $\{E_1,\dots,E_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, nous avons :

$$E_i' := [E_1,\dots,\widehat{E_i},\dots,E_n] = (-1)^{i+1}E_i$$

(il suffit en effet de calculer les coefficients $\langle E_i|E_i'\rangle$ du vecteur E_i' sur la base donnée).

Proposition I.2.3. *Le produit mixte est $(n-1)$-linéaire et antisymétrique.*

Preuve. C'est un corollaire immédiat des propriétés du déterminant. □

Nous allons montrer que le produit mixte munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure de $(n-1)$-gèbre de Nambu.

Lemme I.2.4. *Soit $X_1,\dots,X_n \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} \det(X_1\dots,X_{i-1},A(X_i),X_{i+1},\dots,X_n) = \mathrm{tr}(A)\det(X_1,\dots,X_n).$$

Preuve. Notons $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit F la fonction définie sur $\times_n\mathbb{R}^n$ par :

$$F(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(X_1\dots,X_{i-1},A(X_i),X_{i+1},\dots,X_n)$$

pour tous $X_1,\dots,X_n \in \mathbb{R}^n$. D'après les propriétés du déterminant, l'application F est une forme n-linéaire alternée donc élément du sous-espace $\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)^*$ de dimension 1, une base étant donnée par le déterminant. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$F(X_1,\dots,X_n) = \lambda\det(X_1,\dots,X_n)$$

pour tous $X_1,\dots,X_n \in \mathbb{R}^n$. Pour déterminer le réel λ, prenons par exemple le n-uplet $\{X_1,\dots,X_n\}$ égal à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $\det(X_1,\dots,X_n) = 1$ et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le vecteur $A(X_i)$ est égal au i-ème vecteur colonne de la matrice de A, d'où :

$$\det(X_1,\dots,X_{i-1},AX_i,X_{i+1},\dots,X_n) = a_{ii}.$$

Nous obtenons alors $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A)$. □

Corollaire I.2.5. *Le produit mixte défini sur l'espace $\mathbb{R}^n$ est un $(n-1)$-crochet de Nambu sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Soit $X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_1, \ldots, Y_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit de démontrer l'égalité :

$$[X_1, \ldots, X_{n-2}, [Y_1, \ldots, X_{n-1}]] = \sum_{i=1}^{n-1} [Y_1, \ldots, Y_{i-1}, [X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_i], Y_{i+1}, \ldots, X_{n-1}].$$

Notons $A = A_{X_1,\ldots,X_{n-2}}$ l'endomorphisme adjoint $X \mapsto [X_1, \ldots, X_{n-2}, X]$. Pour tous $X_{n-1}, X_n \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle A(X_{n-1}) | X_n \rangle &= \langle [X_1, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}] | X_n \rangle \\
&= \det(X_1, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) \\
&= -\det(X_1, \ldots, X_{n-2}, X_n, X_{n-1}) \\
&= -\langle [X_1, \ldots, X_{n-2}, X_n] | X_{n-1} \rangle \\
&= -\langle A(X_n) | X_{n-1} \rangle \\
&= -\langle X_{n-1} | A(X_n) \rangle.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'endomorphisme A est antisymétrique, donc de trace nulle. Alors d'après le lemme I.2.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \det(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, A(Y_i), Y_{i+1}, \ldots, Y_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle [Y_1, \ldots, Y_{i-1}, A(Y_i), Y_{i+1}, \ldots, Y_{n-1}] | Y_n \rangle + \langle [Y_1, \ldots, Y_{n-1}] | A(Y_n) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle [Y_1, \ldots, Y_{i-1}, A(Y_i), Y_{i+1}, \ldots, Y_{n-1}] | Y_n \rangle + \langle {}^t\!A([Y_1, \ldots, Y_{n-1}]) | Y_n \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle [Y_1, \ldots, Y_{i-1}, A(Y_i), Y_{i+1}, \ldots, Y_{n-1}] | Y_n \rangle - \langle A([Y_1, \ldots, Y_{n-1}]) | Y_n \rangle
\end{aligned}$$

Ceci valant pour tout vecteur $Y_n \in \mathbb{R}^n$, nous en déduisons l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n-1} [Y_1, \ldots, Y_{i-1}, [X_1, \ldots, X_{n-2}, Y_i], Y_{i+1}, \ldots, Y_{n-1}] - [X_1, \ldots, X_{n-2}, [Y_1, \ldots, Y_{n-1}]] = 0$$

qui est le résultat cherché. □

I.2.b Les $(n-1)$-structures de Nambu sur l'espace $\mathbb{R}^n$

Les $(n-1)$-crochets de Nambu sur l'espace $\mathbb{R}^n$ sont entièrement déterminés par le théorème suivant, qui est une généralisation à n quelconque de la démonstration proposée par P. Gautheron [Gau98].

Théorème I.2.6. *Soit M une application $(n-1)$-linéaire alternée du produit $\times_{n-1}\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (non nulle). Alors :*

1. *il existe un endomorphisme m de $\mathbb{R}^n$ tel que*
$$M(X_1,\dots,X_{n-1}) = m([X_1,\dots,X_{n-1}])$$
pour tous $X_1,\dots,X_{n-1}\in\mathbb{R}^n$;

2. *le $(n-1)$-crochet sur $\mathbb{R}^n$ défini par M vérifie l'identité fondamentale de Nambu si, et seulement si, m est auto-adjoint ou de rang 1 ou 2.*

Avant de démontrer ce théorème, énonçons un lemme donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un crochet du type $m([X_1,\dots,X_{n-1}])$ vérifie l'identité (†).

Lemme I.2.7. *Soit $m\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ et $(X_1,\dots,X_{n-1})\mapsto m([X_1,\dots,X_{n-1}])$ un $(n-1)$-crochet sur $\mathbb{R}^n$. Alors ce crochet vérifie l'identité (†) si, et seulement si :*
$$m\circ A\circ(m-{}^tm)-\mathrm{tr}(m\circ A)m=0 \tag{I.1}$$
pour tout $A\in\mathfrak{so}(n)$ (algèbre de Lie des matrices antisymétriques réelles).

Preuve. Soit $X_1,\dots,X_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ et, comme précédemment, notons $A=A_{X_1,\dots,X_{n-2}}$ l'endomorphisme adjoint : $X\mapsto[X_1,\dots,X_{n-2},X]$. Pour $Y_1,\dots,Y_{n-1}\in\mathbb{R}^n$, nous avons :
$$\begin{aligned}
& m([X_1,\dots,X_{n-2},m([Y_1,\dots,Y_{n-1}])]) = \sum_{i=1}^{n-1} m([Y_1,\dots,Y_{i-1},m([X_1,\dots,X_{n-2},Y_i]),Y_{i+1},\dots,Y_{n-1}])\\
\iff\ & \langle m\circ A\circ m([Y_1,\dots,Y_{n-1}])|Z\rangle = \sum_{i=1}^{n-1}\langle m([Y_1,\dots,Y_{i-1},m\circ A(Y_i),Y_{i+1},\dots,Y_{n-1}])|Z\rangle,\quad \forall\, Z\in\mathbb{R}^n\\
\iff\ & \langle [Y_1,\dots,Y_{n-1}]|{}^t(m\circ A\circ m)(Z)\rangle = \sum_{i=1}^{n-1}\langle [Y_1,\dots,Y_{i-1},m\circ A(Y_i),Y_{i+1},\dots,Y_{n-1}]|{}^tm(Z)\rangle,\quad \forall\, Z\in\mathbb{R}^n\\
\iff\ & -\det(Y_1,\dots,Y_{n-1},{}^tm\circ A\circ{}^tm(Z)) = \sum_{i=1}^{n-1}\det(Y_1,\dots,Y_{i-1},m\circ A(Y_i),Y_{i+1},\dots,Y_{n-1},{}^tm(Z)),\\
& \forall\, Z\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme I.2.4, nous avons :
$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1}\det(Y_1,\dots,Y_{i-1},m\circ A(Y_i),Y_{i+1},\dots,Y_{n-1},{}^tm(Z))+\det(Y_1,\dots,Y_{n-1},m\circ A\circ{}^tm(Z))\\
=\ & \mathrm{tr}(m\circ A)\det(Y_1,\dots,Y_{n-1},{}^tm(Z))
\end{aligned}$$

Par conséquent, notre crochet vérifie l'identité (†) si, et seulement si, pour tout vecteur $Z\in\mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}
-\det(Y_1,\dots,Y_{n-1},{}^tm\circ A\circ{}^tm(Z)) &= \mathrm{tr}(m\circ A)\det(Y_1,\dots,Y_{n-1},{}^tm(Z))\\
&\quad -\det(Y_1,\dots,Y_{n-1},m\circ A\circ{}^tm(Z))
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{tr}(m\circ A)\langle m([Y_1,\ldots,Y_{n-1}])|Z\rangle = \langle [Y_1,\ldots,Y_{n-1}]|(m-{}^tm)\circ A\circ {}^tm(Z)\rangle$$

donc si, et seulement si :

$$\mathrm{tr}(m\circ A)m([Y_1,\ldots,Y_{n-1}]) = m\circ A\circ(m-{}^tm)([Y_1,\ldots,Y_n]).$$

Ceci valant pour tout $(n-1)$-uplet $(Y_1,\ldots,Y_{n-1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, nous en déduisons la condition nécessaire et suffisante de l'énoncé :

$$m\circ A\circ(m-{}^tm)-\mathrm{tr}(m\circ A)m = 0.$$

Il reste à remarquer que lorsque les vecteurs $X_1,\ldots,X_{n-2}$ parcourent $\mathbb{R}^n$, les endomorphismes $A_{X_1,\ldots,X_{n-2}}$ parcourent $\mathfrak{so}(n)$ dans son intégralité. Soit $\{C_1,\ldots,C_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et notons pour simplifier :

$$A_{i,j} := (-1)^{i+j}A_{C_1,\ldots,\widehat{C_i},\ldots,\widehat{C_j},\ldots,C_n}$$

$(1\leqslant i<j\leqslant n)$. Alors $A_{i,j}(C_k)=0$ pour $k\neq i$ et $k\neq j$, $A_{i,j}(C_i)=-C_j$ et $A_{i,j}(C_j)=C_i$. Donc l'ensemble $\{A_{i,j}, 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ est en fait la base canonique de $\mathfrak{so}(n)$. D'où la conclusion. □

Nous pouvons désormais rédiger la démonstration du théorème I.2.6.

Démonstration.

1. Fixons une base $\{E_1,\ldots,E_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. L'application M étant $(n-1)$-linéaire alternée, nous pouvons la considérer sur l'algèbre extérieure de $\mathbb{R}^n$. Notons $\widetilde{E_i} := E_1\wedge\ldots\wedge\widehat{E_i}\wedge\ldots\wedge E_n$ pour $i\in[\![1,n]\!]$. Alors la famille $\{\widetilde{E_1},\ldots,\widetilde{E_n}\}$ est une base de l'espace $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ qui permet de l'identifier à $\mathbb{R}^n$. Cette identification étant effectuée, nous pouvons définir la matrice de M dans les bases $\{\widetilde{E_1},\ldots,\widetilde{E_n}\}$ et $\{E_1,\ldots,E_n\}$; notons la $(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors :

$$M(\widetilde{E_j}) = \begin{pmatrix} m_{1j}\\ \vdots\\ m_{nj}\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n m_{ij}E_i$$

pour tout $j\in[\![1,n]\!]$.

D'autre part, nous avons vu que $[E_1,\ldots,\widehat{E_j},\ldots,E_n] = (-1)^{j+1}E_j$ pour tout $j\in[\![1,n]\!]$. Par conséquent, si nous notons m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $((-1)^{j+1}m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, nous avons :

$$m(E_j) = (-1)^{j+1}\begin{pmatrix} m_{1j}\\ \vdots\\ m_{nj}\end{pmatrix} = (-1)^{j+1}\sum_{i=1}^n m_{ij}E_i$$

donc :

$$M(E_1\wedge\ldots\wedge\widehat{E_j}\wedge\ldots\wedge E_n) = m([E_1,\ldots,\widehat{E_j},\ldots,E_n])$$

pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui montre le premier point.

2. Montrons maintenant le résultat essentiel du théorème. Nous allons résoudre l'équation donnée par le lemme I.2.7.

Supposons que m vérifie l'équation (I.1) pour tout $A \in \mathfrak{so}(n)$. Fixons un endomorphisme A de la base canonique de $\mathfrak{so}(n)$ (en reprenant les notations de la preuve du lemme I.2.7, $A = A_{i,j}$). Alors $\mathrm{rg}(A) = 2$. Par conséquent :

$$\mathrm{rg}(m \circ A \circ (m - {}^t m)) \leqslant 2$$

d'où :

$$\mathrm{rg}(\mathrm{tr}(m \circ A)m) \leqslant 2.$$

<u>Premier cas :</u> Supposons $\mathrm{tr}(m \circ A) = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{so}(n)$. Nous avons $\mathrm{tr}(m \circ A) = -(m,A)$ où $(A,B) := \mathrm{tr}({}^t AB)$ est un produit scalaire sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathrm{tr}(m \circ A) = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{so}(n)$ est équivalent à dire que m est orthogonal à l'espace des endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^n$, i.e. m est symétrique.
<u>Deuxième cas :</u> Dans le cas contraire, l'endomorphisme m n'est pas symétrique, i.e. il existe $A \in \mathfrak{so}(n)$ tel que $\mathrm{tr}(m \circ A) \neq 0$. Alors $\mathrm{rg}(m) \leqslant 2$ i.e. le rang de l'endomorphisme m est égal à 1 ou à 2.

Réciproquement, montrons que si m est symétrique ou de rang égal à 1 ou 2, l'équation (I.1) est vérifiée.
<u>Premier cas :</u> Supposons que le rang de m soit égal à 1. Alors il existe deux vecteurs non nuls V et $W \in \mathbb{R}^n$ tels que $m(X) = \langle V|X\rangle W$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Il vient :

$$\langle X|{}^t m(Y)\rangle = \langle m(X)|Y\rangle = \langle V|X\rangle\langle W|Y\rangle = \langle X|\langle W|Y\rangle V\rangle$$

pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Donc ${}^t m(Y) = \langle W|Y\rangle V$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, l'équation (I.1) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & m \circ A(\langle V|X\rangle W - \langle W|X\rangle V) - \mathrm{tr}(m \circ A)\langle V|X\rangle W = 0,\ \forall\, X \in \mathbb{R}^n \\ \Longleftrightarrow\quad & \langle V|X\rangle\langle V|A(W)\rangle W - \langle W|X\rangle\langle V|A(V)\rangle W - \mathrm{tr}(m \circ A)\langle V|X\rangle W = 0,\ \forall\, X \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Calculons la trace de $m \circ A$:

$$\mathrm{tr}(m \circ A) = \mathrm{tr}(A \circ m) = \sum_{i=1}^{n} \langle E_i|\langle V|E_i\rangle A(W)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle E_i|A(W)\rangle\langle E_i|V\rangle = \langle A(W)|V\rangle.$$

Ainsi l'équation (I.1) se réduit à :

$$\langle W|X\rangle\langle A(V)|V\rangle = 0$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, pour tout $A \in \mathfrak{so}(n)$. Mais A est antisymétrique donc :

$$\langle A(V)|V\rangle = -\langle V|A(V)\rangle = -\langle A(V)|V\rangle$$

et par conséquent, $\langle A(V)|V\rangle = 0$, donc l'équation (I.1) est vérifiée.

<u>Deuxième cas :</u> Supposons que le rang de m soit supérieur ou égal à 2. Nous avons également $\mathrm{rg}({}^t m) \geqslant 2$. Rappelons la décomposition de Fredholm en sommes directes orthogonales de l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(m) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}({}^t m) = \mathrm{Ker}({}^t m) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(m).$$

Nous allons montrer que $\mathrm{Ker}(m) = \mathrm{Ker}({}^t m)$ et $\mathrm{Im}(m) = \mathrm{Im}({}^t m)$. Soit $X \in \mathrm{Ker}(m)$. Alors l'équation (I.1) évaluée en X équivaut à :

$$m \circ A \circ {}^t m(X) = 0 \tag{I.2}$$

pour tout $A \in \mathfrak{so}(n)$.

Supposons ${}^t m(X) \neq 0$. Alors il existe un endomorphisme antisymétrique $R \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ appliquant $\mathrm{Im}({}^t m)$ sur lui même et tel que $R({}^t m(X)) \neq 0$. En effet, pour construire R, nous procédons de la sorte : une base orthonormale $\{E'_1, \ldots, E'_p\}$ de $\mathrm{Im}({}^t m)$ de premier vecteur $E'_1 = \lambda {}^t m(X)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) étant donnée (nous avons $p \geqslant 2$ par hypothèse et une telle base existe d'après le théorème de la base incomplète et le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt), nous posons $R(E'_1) = -E'_2$, $R(E'_2) = E'_1$, $R(E'_i) = 0$ pour $i \in [\![3, p]\!]$ et R est prolongé à $\mathbb{R}^n$ par 0.

Puisque l'équation (I.2) est valable pour tout endomorphisme antisymétrique, il vient : $R({}^t m(X)) \in \mathrm{Ker}(m)$. Mais $R({}^t m(X)) \in \mathrm{Im}({}^t m)$, donc $R({}^t m(X)) = 0$ compte-tenu de la décomposition de Fredholm. Ceci est en contradiction avec la construction de R. Ainsi ${}^t m(X) = 0$. Ceci démontre l'inclusion $\mathrm{Ker}(m) \subseteq \mathrm{Ker}({}^t m)$. Mais nous avons l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(m) = \mathrm{rg}({}^t m)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(m)) = \dim(\mathrm{Ker}({}^t m))$ d'où l'égalité :

$$\mathrm{Ker}(m) = \mathrm{Ker}({}^t m).$$

Nous obtenons ensuite :

$$\mathrm{Im}(m) = \mathrm{Ker}({}^t m)^\perp = \mathrm{Ker}(m)^\perp = \mathrm{Im}({}^t m)$$

d'où :

$$\mathrm{Im}(m) = \mathrm{Im}({}^t m)$$

et la décomposition de Fredholm se réécrit :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(m) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(m).$$

Soit m' l'endomorphisme induit sur le sous-espace (stable) $\mathrm{Im}(m)$; c'est un automorphisme de $\mathrm{Im}(m)$ et l'endomorphisme transposé de m' est égal à l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}(m) = \mathrm{Im}({}^t m)$ par ${}^t m$, ce que nous pouvons écrire :

$${}^t(m') = ({}^t m)'.$$

Nous écrirons donc ${}^t m'$ sans ambiguïté.

Soit R un endomorphisme antisymétrique appliquant $\mathrm{Ker}(m)$ sur $\{0\}$ et $\mathrm{Im}(m)$ sur lui-même. Notons R' l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}(m)$. Nous avons $\mathrm{tr}(m \circ R) = \mathrm{tr}(m' \circ R')$ donc l'équation (I.1) devient :

$$m' \circ R' \circ (m' - {}^t m') - \mathrm{tr}(m' \circ R') m' = 0$$

ceci valant en fait pour tout endomorphisme antisymétrique R' de l'espace $\mathrm{Im}(m)$. Vu le caractère bijectif de m', l'équation précédente implique :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{tr}(m'^{-1} \circ m' \circ R' \circ (m' - {}^t m')) - \mathrm{tr}(m' \circ R')\,\mathrm{tr}(m'^{-1} \circ m') = 0 \\
\iff \quad & \mathrm{tr}(R' \circ m') - \mathrm{tr}(R' \circ {}^t m') - \mathrm{rg}(m)\,\mathrm{tr}(m' \circ R') = 0 \\
\iff \quad & (\mathrm{rg}(m) - 2)\,\mathrm{tr}(m' \circ R') = 0
\end{aligned}$$

pour tout endomorphisme antisymétrique R' de $\mathrm{Im}(m')$.

Par conséquent, si le rang de m vaut 2, alors tout endomorphisme m convient et si le rang de m est strictement supérieur à 2, l'application m' est orthogonale à tout endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im}(m')$, donc est symétrique, donc l'endomorphisme m lui-même est symétrique. $\square$

I.3 Crochets de Nambu sur une algèbre de Lie

Dans toute cette partie (sauf la première section ci-dessous), $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathfrak{g}^*$ son espace dual.

I.3.a À propos de la décomposabilité des p-vecteurs

Nous débutons cette partie par quelques rappels et compléments quant à la décomposabilité des p-vecteurs dans l'algèbre extérieure. Pour des raisons d'écriture, nous considérons une k-forme antisymétrique non nulle λ sur un espace vectoriel V de dimension $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $\lambda \in \bigwedge^k(V)$ avec $2 \leqslant k \leqslant n$. Toutes les notations utilisées et méthodes de calcul dans l'algèbre extérieure ont été rappelées dans I.1.13.

Lemme I.3.1. *Soit $\ell \leqslant k$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ des formes linéaires constituant une famille libre et vérifiant $\alpha_j \wedge \lambda = 0$ pour tout $j \in [\![1, \ell]\!]$. Alors :*

1. *si $\ell \leqslant k-1$, il existe une forme $\beta \in \bigwedge^{k-\ell}(V^*)$ telle que $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_\ell \wedge \beta$;*
2. *si $\ell = k$, il existe un scalaire ξ non nul tel que $\lambda = \xi \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.*

Preuve. La famille $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ est libre donc peut être complétée en une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V^*. Nous pouvons écrire la décomposition formelle de λ sur la base correspondante de $\bigwedge^k(V^*)$: il existe des scalaires ξ_J tels que :

$$\lambda = \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ |J| = k}} \xi_J \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k},$$

la sommation étant effectuée sur les multi-indices de longueur k ordonnés : $J = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^k$ avec $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$.

Nous avons $\alpha_1 \wedge \lambda = 0$ donc les scalaires ξ_J sont nuls si $j_1 \neq 1$ (en effet, dans le cas contraire, nous obtiendrions une combinaison linéaire nulle d'éléments de la base de l'algèbre $\bigwedge^k(V)$). Il reste donc :

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \sum_{2 \leqslant j_2 < \ldots < j_k \leqslant n} \xi_{1, j_2, \ldots, j_k} \alpha_{j_2} \wedge \ldots \wedge j_k.$$

De même, nous avons $\alpha_2 \wedge \lambda = 0$ donc les scalaires ξ_J sont nuls si $j_2 \neq 2$. Il reste :

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \sum_{3 \leqslant j_3 < \ldots < j_k \leqslant n} \xi_{1,2,j_3,\ldots,j_k} \alpha_{j_3} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k}.$$

Nous continuons le raisonnement successivement avec $\alpha_3, \ldots, \alpha_\ell$ et nous obtenons, si $\ell \leqslant k-1$:

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_\ell \wedge \left(\sum_{\ell+1 \leqslant j_{\ell+1} < \ldots < j_k \leqslant n} \xi_{1,\ldots,\ell,j_{\ell+1},\ldots,j_k} \alpha_{j_{\ell+1}} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k} \right),$$

le terme entre parenthèses étant éventuellement réduit à un élément de V^* si $\ell = k-1$.

Si $\ell = k$, nous obtenons à la $(k-1)$-ème étape :

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \sum_{k-1 \leqslant j_k \leqslant n} \xi_{1,\ldots,k-1,j_k} \alpha_{j_k}.$$

Mais $\alpha_k \wedge \lambda = 0$ donc les scalaires ξ_J sont nuls si $j_k \neq k$. La décomposition de λ se ramène alors à l'expression suivante : $\lambda = \xi \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ (en ayant noté $\xi = \xi_{1,\ldots,k}$ nécessairement non nul). □

Lemme I.3.2. *Notons $E_\lambda := \{\alpha \in V^* \mid \alpha \wedge \lambda = 0\}$. L'ensemble E_λ est un sous-espace vectoriel de V^* de dimension inférieure ou égale à k. De plus, la k-forme λ est décomposable si, et seulement si, la dimension du sous-espace E_λ est égale à k.*

Preuve. Supposons $\dim(E_\lambda) \geqslant k+1$. Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}\}$ une base de E_λ. Appliquons le lemme I.3.1 avec les formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Nous avons donc l'existence d'un scalaire ξ non nul tel que :

$$\lambda = \xi \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k.$$

Or, $\alpha_{k+1} \wedge \lambda = 0$ i.e. $\xi \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \wedge \alpha_{k+1} = 0$. Ceci implique $\xi = 0$. Contradiction. Donc $\dim(E_\lambda) \leqslant k$.

Supposons λ décomposable. Il existe k formes linéaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ telles que $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$. La k-forme λ est non nulle donc la famille $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ est libre ; elle peut être complétée en une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V^*. Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \in E_\lambda$. Nous obtenons $\xi_j = 0$ si $j \geqslant k+1$ donc $E_\lambda = \mathrm{Vect}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et $\dim(E_\lambda) = k$.

Réciproquement, supposons que la dimension de E_λ soit égale à k. Prenons une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V^* telle que la famille $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ soit une base de E_λ. Alors d'après le lemme I.3.1, nous pouvons factoriser successivement par $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ la décomposition formelle de λ sur la base de $\bigwedge^k(V^*)$ et nous obtenons finalement $\lambda = \xi \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ avec ξ un scalaire non nul. Donc λ est décomposable. □

Remarque I.3.3. Nous pouvons compléter le lemme précédent en remarquant que le sous-espace E_λ n'est jamais de dimension égale à $k-1$. En effet, si $\dim(E_\lambda) = k-1$, soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ une base. Alors $\alpha_j \wedge \lambda = 0$ pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$ donc, d'après le lemme I.3.1, il existe $\beta \in V^*$ telle que $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \beta$. Mais alors $\beta \wedge \lambda = 0$ donc $\beta \in E_\lambda$ et $\lambda = 0$: contradiction.

Proposition I.3.4. *La k-forme linéaire antisymétrique λ est décomposable si, et seulement si :*

$$i_A \lambda \wedge \lambda = 0$$

pour tout $A \in \bigwedge^{k-1}(V)$.

Preuve. Notons $n = \dim(V)$ et supposons λ décomposable. Alors il existe k formes linéaires non nulles et linéairement indépendantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ telles que $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$. Complétons $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ en une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V^* et considérons la base duale (également base de V) notée $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Soit $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in V$. S'il existe un indice $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $Y_j \in \mathrm{Vect}\{X_{k+1}, \ldots, X_n\}$, alors $i_{Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{k-1}}(\lambda) = 0$. Nous pouvons donc supposer que $\{Y_j, j \in [\![1, k-1]\!]\} \subset \mathrm{Vect}\{X_1, \ldots, X_k\}$. Mais $i_{X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_j} \wedge \ldots \wedge X_k} \lambda = \pm \alpha_j$, donc :

$$(i_{Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{k-1}} \lambda) \wedge \lambda = 0$$

pour tous $Y_1,\dots,Y_{k-1}\in V$.

Supposons λ non décomposable. Comme λ n'est pas décomposable, $\dim(E_\lambda)\leqslant k-2$ d'après le lemme I.3.2 et la remarque I.3.3.

Supposons $\dim(E_\lambda)=0$ et soit $X_1,\dots,X_{k-1}\in V$ fixés. Comme $i_{X_1\wedge\dots\wedge X_{k-1}}(\lambda)\in E_\lambda$ par hypothèse, nous en déduisons que $i_{X_1\wedge\dots\wedge X_{k-1}}(\lambda)=0$. Ceci valant pour tous $X_1,\dots,X_{k-1}\in V$, nous obtenons $\lambda=0$. Contradiction.

Par conséquent, nous avons $r=\dim(E_\lambda)\geqslant 1$. Soit $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ une base de V^* telle que la sous-famille $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ soit une base de E_λ. Notons $\{X_1,\dots,X_n\}$ la base duale. Alors d'après le lemme I.3.1, il existe $\beta\in\bigwedge(V^*)$ tel que :

$$\lambda=\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_r\wedge\beta.$$

Nous avons $\dim(E_\beta)=0$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe $\mu\in V^*$ et $\nu\in\bigwedge(V^*)$ tels que $\beta=\mu\wedge\nu$ et alors $\lambda=\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_r\wedge\mu\wedge\nu$ donc $\lambda=0$ si $\mu\in E_\lambda$ ou $\dim(E_\lambda)\geqslant r+1$ dans le cas contraire, chacun de ces deux cas étant finalement absurdes.

Nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité, que $\beta\in\bigwedge^\ell(\mathrm{Vect}\{\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n\})$ ($\ell=k-r\geqslant 1$). Si $i_{Y_1\wedge\dots\wedge Y_{\ell-1}}(\beta)=0$ pour tous $Y_1,\dots,Y_{\ell-1}\in V$, alors $\beta=0$ d'où $\lambda=0$: contradiction. Donc il existe $Y_1,\dots,Y_{\ell-1}\in V$ linéairement indépendant tels que $i_{Y_1\wedge\dots\wedge Y_{\ell-1}}(\beta)\neq 0$. Les vecteurs $Y_1,\dots,Y_{\ell-1}$ sont nécessairement dans le sous-espace $\mathrm{Vect}(X_{r+1},\dots,X_n)$. Notons :

$$\alpha=i_{Y_1\wedge\dots\wedge Y_{\ell-1}}(\beta)=\pm i_{Y_1\wedge\dots\wedge Y_{\ell-1}\wedge X_1\wedge\dots\wedge X_r}(\lambda).$$

Alors $\alpha\in\mathrm{Vect}(\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n)$ et $\alpha\neq 0$. Si $\alpha\wedge\lambda=0$, alors $\alpha\in E_\lambda=\mathrm{Vect}\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ donc $\alpha=0$: contradiction. Donc $\alpha\wedge\lambda\neq 0$. □

Remarque I.3.5. Ce résultat est classique et nous en trouvons également une démonstration dans [Bou48], paragraphe 11, n° 13, proposition 16.

Plusieurs sous-ensembles de V^* (du même type que le sous-espace E_λ ci-dessus) peuvent être associés à une même k-forme $\lambda\in\bigwedge^k(V^*)$ ([DZ99]). Examinons les plus attentivement.

L'**orthogonal** d'une partie de $\bigwedge(V)$ (ou $\bigwedge(V^*)$) est définie ainsi : si $\Lambda\subset\bigwedge(V)$, alors :

$$\Lambda^\perp:=\{\alpha\in V^*\mid(\alpha|X)=0\ \forall\, X\in W\}$$

et la définition est identique si $\Lambda\subset\bigwedge(V^*)$.

Nous rappelons la définition de $E_\lambda=\{\alpha\in V^*\mid\alpha\wedge\lambda=0\}$ et nous notons :

$$F_\lambda:=\mathrm{Vect}(\{i_A\lambda,\ A\in\bigwedge^{k-1}(V)\})\qquad\text{et}\qquad G_\lambda:=\{X\in V\mid i_X\lambda=0\}^\perp.$$

Ce sont également des sous-espaces vectoriels de V^*.

Proposition I.3.6.

1. *Nous avons $F_\lambda=G_\lambda$ et $E_\lambda\subseteq F_\lambda=G_\lambda$.*

2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   (a) *Les sous-espaces vectoriels E_λ et F_λ sont égaux ;*

   (b) *La dimension de E_λ est égale à k ;*

   (c) *La dimension de F_λ est égale à k ;*

   (d) *La k-forme λ est décomposable.*

Preuve. 1. Montrons que F_λ est inclus dans G_λ. Soit $X \in V$ tel que $i_X\lambda = 0$. Si $A \in \bigwedge^{k-1}(V)$, il vient :

$$(i_A\lambda|X) = (\lambda|A \wedge X) = (-1)^{k-1}(\lambda|X \wedge A) = (-1)^{k-1}(i_X\lambda|A) = 0.$$

Par conséquent, tout élément de la forme $i_A\lambda$ appartient à G_λ : $F_\lambda \subseteq G_\lambda$.

Montrons que $F_\lambda^\perp$ est inclus dans $G_\lambda^\perp$. Nous aurons alors l'égalité $F_\lambda = G_\lambda$. Soit $X \in F_\lambda^\perp$ et montrons que $i_X\lambda = 0$. Soit $A \in \bigwedge^{k-1}(V)$. Nous avons $(i_A\lambda|X) = 0$ (car $X \in F_\lambda^\perp$) c'est-à-dire $(i_X\lambda|A) = 0$ compte-tenu du calcul précédent. Ceci étant valable pour tout $A \in \bigwedge^{k-1}(V)$, nous en déduisons $i_X\lambda = 0$. Donc $X \in G_\lambda^\perp$.

Montrons que E_λ est inclus dans G_λ. Soit $\alpha \in E_\lambda$ tel que $\alpha \wedge \lambda = 0$ et $X \in V$ tel que $i_X\lambda = 0$. Alors :

$$0 = i_X(\alpha \wedge \lambda) = (i_X\alpha) \wedge \lambda - \alpha \wedge i_X\lambda = (\alpha|X)\lambda$$

i.e. $\alpha \in G_\lambda$: $E_\lambda \subseteq G_\lambda$.

2. Nous avons déjà vu dans le lemme I.3.2 que $\dim(E_\lambda) = k$ équivaut à la décomposabilité de λ.

Supposons que $E_\lambda = F_\lambda$. Alors tout élément de la forme $i_A\lambda$ appartient à E c'est-à-dire $i_A\lambda \wedge \lambda = 0$ pour tout $A \in \bigwedge^{k-1}(V)$. Donc, d'après le lemme I.3.4, la k-forme λ est décomposable.

Supposons maintenant λ décomposable : il existe des formes linéaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ telles que $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$. La k-forme λ est non nulle donc la famille $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ est libre ; elle peut être complétée en une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V^*. Nous trouvons alors immédiatement :

$$E_\lambda = \mathrm{Vect}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Notons $\{X_1, \ldots, X_n\}$ la base duale (c'est une base de V). Les générateurs de F_λ sont alors :

• $i_{A_j}\lambda = \pm\alpha_j$ où $A_j = X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_j} \wedge \ldots \wedge X_k \in \bigwedge^{k-1}(V)$, pour $1 \leqslant j \leqslant k$;

• $i_{A_J}\lambda = 0$ où $A_J = X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_{j_{n-k+1}}} \wedge \ldots \wedge X_n \in \bigwedge^{k-1}(V)$ avec $J = (j_1, \ldots, j_{n-k+1})$ et $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant k < j_3 < \ldots < j_{n-k+1} \leqslant n$.

Par conséquent nous avons également $F_\lambda = \mathrm{Vect}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ d'où l'égalité $E_\lambda = F_\lambda$.

Si λ est décomposable et s'écrit $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$, nous avons vu ci dessus que :

$$F_\lambda = \mathrm{Vect}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

donc $\dim(F_\lambda) = k$.

Supposons $\dim(F_\lambda) = k$. Supposons λ non décomposable i.e. $r := \dim(E_\lambda) \leqslant k-2$ (d'après le lemme I.3.2 et la remarque I.3.3). Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une base de E_λ que nous complétons en une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V^*. D'après le lemme I.3.2, il existe une $(k-r)$-forme β telle que $\lambda = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r \wedge \beta$, et nous pouvons écrire :

$$\beta = \sum_{r+1 \leqslant j_{r+1} < \ldots < j_k \leqslant n} \xi_{j_{r+1},\ldots,j_k} \alpha_{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k} = \sum_J \xi_J \alpha_J.$$

Cherchons un système de générateurs de F_λ. Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ la base duale de V. Soit J tel que $\xi_J \neq 0$. Alors :

- si $A = X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_s} \wedge \ldots \wedge X_r \wedge X_{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge X_{j_k} \in \bigwedge^{k-1}(V)$, nous avons $i_A\lambda = \pm \xi_J \alpha_s \in F_\lambda$ $(1 \leqslant s \leqslant r)$;
- si $A = X_1 \wedge \ldots \wedge X_r \wedge X_{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_{j_{r+s}}} \wedge \ldots \wedge X_{j_k}$, nous avons $i_A\lambda = \pm \xi_J \alpha_{j_{r+s}} \in F_\lambda$ donc $\alpha_{j_{r+s}} \in F_\lambda$ $(1 \leqslant s \leqslant k-r)$.

Supposons qu'il existe deux multi-indices J et J' distincts tels que $\xi_J \neq 0$ et $\xi_{J'} \neq 0$. Alors, comme :

$$\operatorname{card}(\{j_{r+1}, \ldots, j_k\} \cup \{j'_{r+1}, \ldots, j'_k\}) \geqslant k-r+1,$$

nous aurions une famille libre de $r + (k-r+1) = k+1$ formes linéaires dans F_λ de dimension k. Cette situation est impossible. Par conséquent, il n'existe qu'un multi-indice J tel que ξ_J soit non nul. Mais cela revient à dire que λ est décomposable (car β l'est). Contradiction. Donc l'hypothèse de départ est fausse : la k-forme λ est décomposable. □

Exemple I.3.7. Supposons $k = 2$ et $n \geqslant 4$. Notons $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de V, et $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ la base duale. Considérons la 2-forme $\lambda = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4$. Nous avons $i_{X_1}\lambda \wedge \lambda = \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \neq 0$ donc λ n'est pas décomposable en vertu du lemme I.3.4.

Soit $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \omega_j \in V^*$ telle que $\alpha \wedge \lambda = 0$. Alors :

$$0 = \xi_1 \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 + \xi_2 \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 + \xi_3 \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 + \xi_4 \omega_4 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + \sum_{i \geqslant 4} \xi_i \omega_i \wedge \lambda.$$

Nous en déduisons $\xi_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ i.e. $E_\lambda = \{0\}$.

D'autre part, nous avons $i_{X_1}\lambda = \omega_2$, $i_{X_2}\lambda = -\omega_1$, $i_{X_3}\lambda = \omega_4$ et $i_{X_4}\lambda = -\omega_3$, donc :

$$F_\lambda = \operatorname{Vect}(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}).$$

Ceci illustre bien le fait que l'inclusion de E_λ dans F_λ est stricte : $E_\lambda \subsetneq F_\lambda$ si λ n'est pas décomposable.

Nous pouvons conclure en résumant de la manière suivante :

$$\begin{cases} E_\lambda \underset{(1)}{\subseteq} F_\lambda = G_\lambda \\ 0 \leqslant \dim(E_\lambda) \underset{(2)}{\leqslant} k \underset{(3)}{\leqslant} \dim(F_\lambda) \leqslant n \end{cases}$$

avec égalité en (1), (2) ou en (3) si, et seulement si, λ est décomposable.

I.3.b Super-dérivations de l'algèbre extérieure

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension $n \geqslant 1$ sur un corps de caractéristique nulle $\mathbb{K}$. Dans toute cette partie, nous notons $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$ et $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ la base duale. Toutes les définitions des opérateurs et leurs propriétés élémentaires se trouvent dans [Kos50], mais nous énoncerons et démontrerons des propriétés plus générales dans le second chapitre.

Définition I.3.8. Une **super-dérivation** de degré $k \in \mathbb{Z}$ de $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ est une application linéaire :

$$D\colon \bigwedge(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$$

telle que :

i) $D\left(\bigwedge^p(\mathfrak{g}^*)\right) \subset \bigwedge^{p+k}(\mathfrak{g}^*)$ pour $p > 0$ et $D(\mathbb{K}) = \{0\}$;

ii) Si $\alpha \in \bigwedge^p(\mathfrak{g}^*)$ et $\beta \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$, alors :

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^{kp} \alpha \wedge (D\beta).$$

Nous notons $\mathscr{D}_k(\mathfrak{g})$ l'espace vectoriel des super-dérivations de degré k.

Remarque I.3.9. Nous avons déjà rencontré l'antidérivation i_X. Dans les termes de notre définition, l'endomorphisme i_X est élément de $\mathscr{D}_{-1}(\mathfrak{g})$, donc $\mathscr{D}_{-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. D'autre part, $\mathscr{D}_p(\mathfrak{g}) = \{0\}$ si $p \leqslant -2$. En effet, si $D \in \mathscr{D}_p(\mathfrak{g})$ avec $p \leqslant -2$, alors en particulier $D\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^* = \bigwedge^1(\mathfrak{g}^*)$ donc D est nulle car c'est une super-dérivation.

Nous notons alors $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k \geqslant -1} \mathscr{D}_k(\mathfrak{g})$. Les éléments de $\mathscr{D}_0(\mathfrak{g})$ sont les dérivations usuelles.

Rappel I.3.10. Une superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ muni d'une application bilinéaire $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ appelée **super-crochet de Lie** vérifiant les propriétés suivantes :

- $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{n+p}$;
- $[Y,X] = -(-1)^{np}[X,Y]$ (super-antisymétrie $\mathbb{Z}$-graduée) ;
- $(-1)^{nq}[X,[Y,Z]] + (-1)^{qp}[Z,[X,Y]] + (-1)^{pn}[Y,[Z,X]] = 0$ (identité de Jacobi $\mathbb{Z}$-graduée) ;

pour tous $X \in \mathfrak{g}_n$, $Y \in \mathfrak{g}_p$ et $Z \in \mathfrak{g}_q$, pour tous $n, p, q \in \mathbb{Z}$.

Compte-tenu de la super-antisymétrie, l'identité de Jacobi est équivalente à la relation :

$$[Z,[X,Y]] = [[Z,X],Y] + (-1)^{qn}[X,[Z,Y]].$$

Ainsi les endomorphismes adjoints $\mathrm{ad}(X)\colon Y \mapsto [X,Y]$ sont des super-dérivations de degré $\deg_{\mathbb{Z}}(X)$ du super-crochet de Lie.

L'espace $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ des super-dérivations de $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ est muni de sa structure d'**algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée**. Plus précisément :

Proposition I.3.11. *Si $D \in \mathscr{D}_k(\mathfrak{g})$ et $D' \in \mathscr{D}_\ell(\mathfrak{g})$, alors :*

$$[D,D'] := D \circ D' - (-1)^{k\ell} D' \circ D \in \mathscr{D}_{k+\ell}(\mathfrak{g}).$$

Soit $X \in \mathfrak{g}$. Notons L_X la **dérivation** de $\bigwedge(\mathfrak{g})$ qui prolonge la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$:

$$L_X(Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_k) = \sum_{r=1}^{k} Y_1 \wedge \ldots Y_{r-1} \wedge [X,Y_r] \wedge Y_{r+1} \ldots \wedge Y_k.$$

Nous désignons par $\mathscr{L}_X$ la transposée de $-L_X$: c'est une dérivation de $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$. Elle s'appelle la **dérivée de Lie**.

Soit ∂ l'endomorphisme linéaire de $\bigwedge(\mathfrak{g})$ tel que $\partial\left(\bigwedge^p(\mathfrak{g})\right) = \{0\}$ pour $p \leqslant 1$ et :

$$\partial(Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_k) = \sum_{\substack{r,s \in [\![1,k]\!] \\ r<s}} (-1)^{r+s+1} [Y_r,Y_s] \wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{Y_r} \wedge \ldots \wedge \widehat{Y_s} \wedge \ldots \wedge Y_k$$

(où $\widehat{Y_r}$ signifie que le terme Y_r est omis). L'endomorphisme ∂ abaisse le degré d'une unité. Notons d la transposée de $-\partial$. L'opérateur d se nomme la **différentielle extérieure**.

Remarque I.3.12. Si $\omega \in \bigwedge^1(\mathfrak{g}^*) \equiv \mathfrak{g}^*$ et $X,Y \in \mathfrak{g}$, alors $d\omega(X \wedge Y) = -\omega([X,Y])$.

Proposition I.3.13. *Avec les notations précédentes :*

i) La différentielle extérieure d est élément de $\mathscr{D}_1(\mathfrak{g})$: d élève le degré d'une unité et si $\alpha \in \bigwedge^p(\mathfrak{g}^*)$ et $\beta \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$, alors :

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta).$$

ii) Nous avons $d^2 = d \circ d = 0$.

iii) Nous disposons de la relation :

$$2d = \sum_{r=1}^{n} \omega_r \wedge \mathscr{L}_{X_r}.$$

iv) Soit $X \in \mathfrak{g}$. Alors

$$\mathscr{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X = [d, i_X] = [i_X, d].$$

*Cette identité est appelée **formule de Cartan**.*

v) Les opérateurs d et $\mathscr{L}_X$ commutent :

$$[\mathscr{L}_X, d] = 0.$$

Preuve. Voir [Kos50]. Nous énoncerons et démontrerons des propriétés similaires dans la partie II.2.d page 91. □

Lemme I.3.14. *Soit $X,Y \in \mathfrak{g}$. Nous avons :*

$$[i_X, \mathscr{L}_Y] = i_{[X,Y]}.$$

Preuve. Les opérateurs $[i_X, \mathscr{L}_Y]$ et $i_{[X,Y]}$ sont des super-dérivations de degré -1. Il suffit donc de montrer qu'ils coïncident sur les 1-formes. Prenons donc $\omega \in \mathfrak{g}^*$ et calculons :

$$\begin{aligned} [i_X, \mathscr{L}_Y](\omega) &= i_X \circ \mathscr{L}_Y(\omega) - \mathscr{L}_Y \circ i_X(\omega) \\ &= (\mathscr{L}_Y \omega)(X) - \underbrace{\mathscr{L}_Y(\omega(X))}_{0} \\ &= -\omega([Y,X]) \\ &= i_{[X,Y]}(\omega). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme I.3.15. *Soit $D \in \mathscr{D}_k(\mathfrak{g})$. Alors il existe un unique n-uplet $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ d'éléments de $\bigwedge^{k+1}(\mathfrak{g}^*)$ tel que $D = \sum_{r=1}^{n} \Omega_r \wedge i_{X_r}$.*

Preuve. Il suffit de considérer $\Omega_r = D(\omega_r)$, $r \in [\![1,n]\!]$ et de montrer que les super-dérivations D et $\sum_{r=1}^{n} \Omega_r \wedge i_{X_r}$ (de degré k) coïncident sur $\mathfrak{g}^*$. □

Définition I.3.16. Soit $D \in \mathscr{D}_k(\mathfrak{g})$. D'après le lemme I.3.15, $D = \sum_{r=1}^{n} \Omega_r \wedge i_{X_r}$ définit un $(k+1)$-crochet sur $\mathfrak{g}$ par la formule :

$$[Y_1, \dots, Y_{k+1}] = (-1)^k \sum_{r=1}^{n} \Omega_r(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{k+1}) X_r \tag{I.3}$$

(pour $Y_1, \dots, Y_{k+1} \in \mathfrak{g}$).

Remarque I.3.17. Nous avons :

$$\Omega_r(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{k+1}) = (D\omega_r)(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{k+1}) = (-1)^k \omega_r([Y_1, \dots, Y_{k+1}]).$$

La normalisation choisie nous permet donc de retrouver dans le cas $k = 1$ et $D = d$ la relation $(d\omega)(X \wedge Y) = -\omega([X,Y])$ ($\omega \in \mathfrak{g}^*$, $X, Y \in \mathfrak{g}$).

Énonçons une proposition donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un crochet défini à partir d'une super-dérivation vérifie l'identité (†).

Proposition I.3.18. *Soit $D \in \mathscr{D}_k(\mathfrak{g})$. Le $(k+1)$-crochet défini à partir de la super-dérivation D vérifie l'identité (†) si, et seulement si :*

$$[[i_{Y_k}, [i_{Y_{k-1}}, \dots [i_{Y_1}, D] \dots]], D] = 0$$

pour tous $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{g}$.

Preuve. Soit $j \in [\![1,n]\!]$ et $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{g}$ fixés. Notons $D' = [i_{Y_k}, [i_{Y_{k-1}}, \dots [i_{Y_1}, D] \dots]]$. Alors $D' \in \mathscr{D}_0$.

• Soit $Z \in \mathfrak{g}$. Nous avons :

$$(D'\omega_j)(Z) = (-1)^k \omega_j([Y_1, \dots, Y_k, Z]).$$

En effet, nous avons :

$$[i_{Y_1},D](\omega_j)(Z) = i_{Y_1}\circ D(\omega_j)(Z) \pm D\circ \underbrace{i_{Y_1}(\omega_j)}_{\omega_j(Y_1)\in\mathbb{C}}(Z) = i_{Y_1}\circ D(\omega_j)(Z)$$

et le résultat pour D' suit en itérant le procédé et en utilisant pour conclure le fait que :

$$i_{Y_k}\circ i_{Y_{k-1}}\circ\ldots\circ i_{Y_1}\circ D(\omega_j)(Z) = (D\omega_j)(Y_1\wedge\ldots\wedge Y_{k-1}\wedge Y_k\wedge Z) = (-1)^k\omega_j([Y_1,\ldots,Y_k,Z])$$

d'après la remarque I.3.17.
Comme D' est une dérivation, nous en déduisons par une récurrence sur p : si $\alpha\in\bigwedge^p(\mathfrak{g}^*)$:

$$(D'\alpha)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_p) = (-1)^k\sum_{i=1}^{p}\alpha(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{i-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_i]\wedge Z_{i+1}\wedge\ldots\wedge Z_p) \tag{I.4}$$

pour tous $Z_1,\ldots,Z_p\in\mathfrak{g}$. En effet, supposons la formule vraie pour $\beta\in\bigwedge^{p-1}(\mathfrak{g}^*)$ et montrons la pour $\alpha=\omega\wedge\beta$, où $\omega\in\mathfrak{g}^*$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
& D'(\omega\wedge\beta)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_p)\\
= \;& ((D'\omega)\wedge\beta)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_p) + (\omega\wedge(D'\beta))(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_p)\\
= \;& \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}(D'\omega)(Z_i)\beta(Z_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_p)\\
& +\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\omega(Z_i)(D'\beta)(Z_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_p)\\
= \;& (-1)^k\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\omega([Y_1,\ldots,Y_k,Z_i])\beta(Z_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_p)\\
& +(-1)^k\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\omega(Z_i)\left(\sum_{j=1}^{i-1}\beta\Big(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{j-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_j]\wedge Z_{j+1}\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_p\Big)\right.\\
& \left.+\sum_{j=i+1}^{p}\beta\Big(Z_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_{j-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_j]\wedge Z_{j+1}\wedge\ldots\wedge Z_p\Big)\right)\\
= \;& (-1)^k\sum_{j=1}^{p}\left((-1)^{j+1}\omega([Y_1,\ldots,Y_k,Z_j])\beta(Z_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_j}\wedge\ldots\wedge Z_p)\right.\\
& +\sum_{i=j+1}^{p}(-1)^{i+1}\omega(Z_i)\beta\Big(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{j-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_j]\wedge Z_{j+1}\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_p\Big)\\
& \left.+\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+1}\omega(Z_i)\beta\Big(Z_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Z_i}\wedge\ldots\wedge Z_{j-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_j]\wedge Z_{j+1}\wedge\ldots\wedge Z_p\Big)\right)\\
= \;& (-1)^k\sum_{j=1}^{p}(\omega\wedge\beta)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{j-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_j]\wedge Z_{j+1}\wedge\ldots\wedge Z_p).
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule est établie au rang p. #

• Calculons maintenant $[D',D](\omega_j)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{k+1})$ pour $Z_1,\ldots,Z_{k+1}\in\mathfrak{g}$. Nous avons $[D',D]=D'\circ D-D\circ D'$ car $D'\in\mathscr{D}_0$. Il vient :

$$\begin{aligned}(D\circ D')(\omega_j)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{k+1}) &= D(D'\omega_j)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{k+1})\\ &= (-1)^k(D'\omega_j)([Z_1,\ldots,Z_{k+1}])\\ &= \omega_j([Y_1,\ldots,Y_k,[Z_1,\ldots,Z_{k+1}]]),\end{aligned}$$

la seconde égalité provenant du fait que la forme $D'\omega_j$ est de degré 1 (nous utilisons alors la remarque I.3.17).

D'autre part, d'après la formule (I.4) et la remarque I.3.17 :

$$\begin{aligned}&(D'\circ D)(\omega_j)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{k+1})\\ = &(-1)^k\sum_{i=1}^{k+1}(D\omega_j)(Z_1\wedge\ldots\wedge Z_{i-1}\wedge[Y_1,\ldots,Y_k,Z_i]\wedge Z_{i+1}\wedge\ldots\wedge Z_{k+1})\\ = &\sum_{i=1}^{k+1}\omega_j([Z_1,\ldots,Z_{i-1},[Y_1,\ldots,Y_k,Z_i],Z_{i+1},\ldots,Z_{k+1}]).\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'équivalence de l'énoncé. □

I.3.c Crochets de Nambu

Dans toute cette partie, λ désigne un élément de $\bigwedge^k(\mathfrak{g}^*)$ ($k\in[\![1,n]\!]$) où $\mathfrak{g}$ désigne toujours une algèbre de Lie de dimension $n\geqslant 1$ sur un corps de caractéristique nulle $\mathbb{K}$. Considérons l'application :

$$\lambda\wedge d\colon \bigwedge(\mathfrak{g}^*)\to\bigwedge(\mathfrak{g}^*),\ \alpha\mapsto\lambda\wedge(d\alpha).$$

C'est une super-dérivation de degré $k+1$ de l'algèbre extérieure. Comme nous l'avons vu dans la première partie (définition I.3.16), la super-dérivation $\lambda\wedge d$ définit un $(k+2)$-crochet sur $\mathfrak{g}$. Nous nous proposons de trouver des conditions suffisantes sur λ pour que ce crochet vérifie l'identité (†). Pour cela, nous allons appliquer la proposition I.3.18. Mais il nous faut tout d'abord calculer l'expression $[i_{X_{k+1}},[i_{X_k},\ldots[i_{X_1},\lambda\wedge d]\ldots]]$ où $X_1,\ldots,X_{k+1}\in\mathfrak{g}$.

Lemme I.3.19. *Soit $X_1,\ldots,X_{k+1}\in\mathfrak{g}$ et $(D_\ell)_{\ell\in[\![0,k+1]\!]}$ la suite (finie) définie par :*

$$\begin{cases}D_\ell=[i_{X_\ell},D_{\ell-1}]\\ D_0=\lambda\wedge d.\end{cases}$$

Alors pour tout $\ell\in[\![0,k+1]\!]$, $D_\ell\in\mathscr{D}_{k+1-\ell}(\mathfrak{g})$ et, si nous notons :

$$\begin{cases}A_r^\ell=X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X_r}\wedge\ldots\wedge X_\ell & \textit{pour } r\in[\![1,\ell]\!]\\ A_{s,t}^\ell=X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X_s}\wedge\ldots\wedge\widehat{X_t}\wedge\ldots\wedge X_\ell & \textit{pour } s,t\in[\![1,\ell]\!] \textit{ avec } s<t,\end{cases}$$

nous avons l'expression de D_ℓ pour $\ell\in[\![0,k+1]\!]$:

$$D_\ell=i_{X_1\wedge\ldots\wedge X_\ell}(\lambda)\wedge d+(-1)^{k+1}\sum_{r=1}^{\ell}(-1)^r i_{A_r^\ell}(\lambda)\wedge\mathscr{L}_{X_r}+\sum_{\substack{s,t\in[\![1,\ell]\!]\\ s<t}}(-1)^{s+t}i_{A_{s,t}^\ell}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]}.$$

Notons que si $\ell=k+1$, le premier terme de cette somme est nul.

Preuve. Démontrons le résultat par récurrence sur ℓ. Nous initialisons la récurrence sur $\ell = 1$ et 2 car tous les termes ne sont pas présents dans la somme quand $\ell = 1$. Pour faciliter la compréhension de ces calculs, nous rappelons que les opérateurs i_X sont éléments de $\mathscr{D}_{-1}(\mathfrak{g})$ et les dérivées de Lie $\mathscr{L}_X$ sont éléments de $\mathscr{D}_0(\mathfrak{g})$ ($X \in \mathfrak{g}$).

• Si $\ell = 1$, la super-dérivation D_1 est de degré k et nous avons :

$$\begin{aligned} D_1 = [i_{X_1}, \lambda \wedge d] &= i_{X_1}(\lambda \wedge d) - (-1)^{-(k+1)}\lambda \wedge (d \circ i_{X_1}) \\ &= i_{X_1}(\lambda) \wedge d + (-1)^{-k}\lambda \wedge i_{X_1} \circ d + (-1)^k \lambda \wedge d \circ i_{X_1} \\ &= i_{X_1}(\lambda) \wedge d + (-1)^k [i_{X_1}, d] \\ &= i_{X_1}(\lambda) \wedge d + (-1)^k \lambda \wedge \mathscr{L}_{X_1} \end{aligned}$$

d'après la formule de Cartan (voir I.3.13).

• Si $\ell = 2$, $D_2 \in \mathscr{D}_{k-1}(\mathfrak{g})$ et nous avons :

$$\begin{aligned} D_2 &= [i_{X_2}, D_1] \\ &= i_{X_2} \circ D_1 - (-1)^{-k} D_1 \circ i_{X_2} \\ &= i_{X_2}(i_{X_1}(\lambda) \wedge d) + (-1)^k i_{X_2}(\lambda \wedge \mathscr{L}_{X_1}) - (-1)^k (i_{X_1}(\lambda) \wedge d) \circ i_{X_2} - (\lambda \wedge \mathscr{L}_{X_1}) \circ i_{X_2} \\ &= i_{X_2}(i_{X_1}(\lambda)) \wedge d + (-1)^{k-1} i_{X_1}(\lambda) \wedge (i_{X_2} \circ d) + (-1)^k i_{X_2}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_1} + \lambda \wedge (i_{X_2} \circ \mathscr{L}_{X_1}) \\ &\quad -(-1)^k i_{X_1}(\lambda) \wedge (d \circ i_{X_2}) - \lambda \wedge (\mathscr{L}_{X_1} \circ i_{X_2}) \\ &= i_{X_1 \wedge X_2}(\lambda) \wedge d + (-1)^{k+1} i_{X_1}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_2} + (-1)^k i_{X_2}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_1} + \lambda \wedge [i_{X_2}, \mathscr{L}_{X_1}] \\ &= i_{X_1 \wedge X_2}(\lambda) \wedge d + (-1)^{k+1} i_{X_1}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_2} + (-1)^k i_{X_2}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_1} - \lambda \wedge i_{[X_1, X_2]} \end{aligned}$$

car $[i_{X_2}, \mathscr{L}_{X_1}] = i_{[X_2, X_1]} = -i_{[X_1, X_2]}$ d'après I.3.14.

• Supposons la formule vraie jusqu'au rang ℓ et calculons $D_{\ell+1}$. Rappelons que $[i_X, i_Y] = i_{Y \wedge X} + i_{X \wedge Y}$ est une super-dérivation de degré -2 donc nulle et que $i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell}(\lambda) \in \bigwedge^{k-\ell}(\mathfrak{g}^*)$.

La super-dérivation D_ℓ est composée de trois types de termes distincts ; calculons leur crochet avec $i_{X_{\ell+1}}$. En ce qui concerne le premier type, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [i_{X_{\ell+1}}, i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell}(\lambda) \wedge d] &= i_{X_{\ell+1}}(i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell}(\lambda)) \wedge d + (-1)^{k-\ell} i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell}(\lambda) \wedge (i_{X_{\ell+1}} \circ d) \\ &\quad -(-1)^{k+1-\ell} i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell}(\lambda) \wedge (d \circ i_{X_{\ell+1}}) \\ &= i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell \wedge X_{\ell+1}}(\lambda) \wedge d + (-1)^{k-\ell} i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_{\ell+1}}. \end{aligned}$$

Soit $r \in [\![1, \ell]\!]$. En remarquant que $A_r^\ell \wedge X_{\ell+1} = A_r^{\ell+1}$, nous avons :

$$\begin{aligned} [i_{X_{\ell+1}}, i_{A_r^\ell}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_r}] &= i_{X_{\ell+1}}(i_{A_r^\ell}(\lambda)) \wedge \mathscr{L}_{X_r} + (-1)^{k-(\ell-1)} i_{A_r^\ell}(\lambda) \wedge (i_{X_{\ell+1}} \circ \mathscr{L}_{X_r}) \\ &\quad -(-1)^{k-(\ell-1)} i_{A_r^\ell}(\lambda) \wedge (\mathscr{L}_{X_r} \circ i_{X_{\ell+1}}) \\ &= i_{A_r^{\ell+1}}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_r} + (-1)^{k-\ell+1} i_{A_r^\ell}(\lambda) \wedge [i_{X_{\ell+1}}, \mathscr{L}_{X_r}] \\ &= i_{A_r^{\ell+1}}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_r} + (-1)^{k-\ell} i_{A_r^\ell}(\lambda) \wedge i_{[X_r, X_{\ell+1}]}. \end{aligned}$$

Fixons maintenant $s,t \in [\![1,\ell]\!]$ avec $s<t$. En remarquant que $A^{\ell}_{s,t} \wedge X_{\ell+1} = A^{\ell+1}_{s,t}$, il vient :

$$\begin{array}{rcl}
[i_{X_{\ell+1}}, i_{A^{\ell}_{s,t}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]}] & = & i_{X_{\ell+1}}(i_{A^{\ell}_{s,t}}(\lambda)) \wedge i_{[X_s,X_t]}] + (-1)^{k-(\ell-2)} i_{A^{\ell}_{s,t}}(\lambda) \wedge (i_{X_{\ell+1}} \circ i_{[X_s,X_t]}) \\
 & & -(-1)^{k-(\ell-2)-1} i_{A^{\ell}_{s,t}}(\lambda) \wedge (i_{[X_s,X_t]} \circ i_{X_{\ell+1}}) \\
 & = & i_{A^{\ell+1}_{s,t}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]}] + (-1)^{k-(\ell-2)} i_{A^{\ell}_{s,t}}(\lambda) \wedge \underbrace{[i_{X_{\ell+1}}, i_{[X_s,X_t]}]}_{0} \\
 & = & i_{A^{\ell+1}_{s,t}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]}.
\end{array}$$

Enfin, en remarquant que $X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell = A^{\ell+1}_{\ell+1}$, nous obtenons ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
D_{\ell+1} & = & [i_{X_{\ell+1}}, D_\ell] \\
 & = & [i_{X_{\ell+1}}, i_{X_1 \wedge \ldots \wedge i_{X_\ell}}(\lambda) \wedge d] \\
 & & +(-1)^{k+1} \displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} (-1)^r [i_{X_{\ell+1}}, i_{A^{\ell}_r}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_r}] \\
 & & + \displaystyle\sum_{\substack{s,t \in [\![1,\ell]\!] \\ s<t}} (-1)^{s+t} [i_{X_{\ell+1}}, i_{A^{\ell}_{s,t}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]}] \\
 & = & i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_\ell \wedge X_{\ell+1}}(\lambda) \wedge d + (-1)^{k-\ell} i_{A^{\ell+1}_{\ell+1}}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_{\ell+1}} \\
 & & +(-1)^{k+1} \displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} (-1)^r \left(i_{A^{\ell+1}_r}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_r} + (-1)^{k-\ell} i_{A^{\ell}_r}(\lambda) \wedge i_{[X_r,X_{\ell+1}]} \right) \\
 & & + \displaystyle\sum_{\substack{s,t \in [\![1,\ell]\!] \\ s<t}} (-1)^{s+t} i_{A^{\ell+1}_{s,t}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]} \\
 & = & i_{X_1 \wedge \ldots \wedge X_{\ell+1}}(\lambda) \wedge d + (-1)^{k+1} \displaystyle\sum_{r=1}^{\ell+1} (-1)^r i_{A^{\ell+1}_r}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{X_r} + \displaystyle\sum_{\substack{s,t \in [\![1,\ell+1]\!] \\ s<t}} (-1)^{s+t} i_{A^{\ell+1}_{s,t}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]}.
\end{array}$$

Ceci démontre la formule au rang $\ell+1$. □

Proposition I.3.20. *Soit $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{g}$. Avec les mêmes notations, nous avons l'expression du super-crochet $[D_{k+1}, D_0]$:*

$$\begin{array}{rcl}
[D_{k+1}, D_0] & = & \left(\displaystyle\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{k+1+r} \lambda(X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_r} \wedge \ldots \wedge X_{k+1}) \mathscr{L}_{X_r}(\lambda) \right. \\
 & & \left. + \displaystyle\sum_{1 \leqslant s<t \leqslant k+1} (-1)^{s+t} i_{X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_s} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_t} \wedge \ldots \wedge X_{k+1}}(\lambda) \wedge i_{[X_s,X_t]}(\lambda) \right) \wedge d \\
 & & + \displaystyle\sum_{1 \leqslant s<t \leqslant k+1} (-1)^{s+t} \lambda \wedge i_{X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_s} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_t} \wedge \ldots \wedge X_{k+1}}(\lambda) \wedge \mathscr{L}_{[X_s,X_t]} \\
 & & - \displaystyle\sum_{1 \leqslant s<t \leqslant k+1} (-1)^{s+t} \lambda \wedge \left(d \circ i_{X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_s} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_t} \wedge \ldots \wedge X_{k+1}}(\lambda) \right) \wedge i_{[X_s,X_t]}.
\end{array}$$

Preuve. Nous déduisons du lemme I.3.19 :

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= [i_{X_{k+1}},[i_{X_k},\dots[i_{X_1},\lambda\wedge d]\dots]] \\ &= \sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{k+1+r}\lambda(X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_r}\wedge\dots\wedge X_{k+1})\mathscr{L}_{X_r} \\ &\quad+\sum_{\substack{s,t\in[\![1,k+1]\!]\\ s<t}}(-1)^{s+t}i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $[D_{k+1},D_0]$:

$$\begin{aligned} [D_{k+1},D_0] &= \sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{k+1+r}\lambda(X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_r}\wedge\dots\wedge X_{k+1})[\mathscr{L}_{X_r},\lambda\wedge d] \\ &\quad+\sum_{s<t}(-1)^{s+t}[i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]},\lambda\wedge d]. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} [\mathscr{L}_{X_r},\lambda\wedge d] &= \mathscr{L}_{X_r}(\lambda)\wedge d+\lambda\wedge(\mathscr{L}_{X_r}\circ d)-\lambda\wedge(d\circ\mathscr{L}_{X_r}) \\ &= \mathscr{L}_{X_r}(\lambda)\wedge d+\lambda\wedge\underbrace{[\mathscr{L}_{X_r},d]}_{0} \\ &= \mathscr{L}_{X_r}(\lambda)\wedge d \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} &[i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]},\lambda\wedge d] \\ =\;& i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge\Big(i_{[X_s,X_t]}(\lambda)\wedge d+(-1)^k\lambda\wedge(i_{[X_s,X_t]}\circ d)\Big) \\ & -\lambda\wedge\Big(\big(d\circ i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\big)\wedge i_{[X_s,X_t]} \\ & -i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge(d\circ i_{[X_s,X_t]})\Big) \\ =\;& i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]}(\lambda)\wedge d \\ & +\lambda\wedge i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge\underbrace{[i_{[X_s,X_t]},d]}_{\mathscr{L}_{[X_s,X_t]}} \\ & -\lambda\wedge\big(d\circ i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\big)\wedge i_{[X_s,X_t]}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} [D_{k+1},D_0] &= \Bigg(\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{k+1+r}\lambda(X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_r}\wedge\dots\wedge X_{k+1})\mathscr{L}_{X_r}(\lambda) \\ &\quad+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant k+1}(-1)^{s+t}i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]}(\lambda)\Bigg)\wedge d \\ &\quad+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant k+1}(-1)^{s+t}\lambda\wedge i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge\mathscr{L}_{[X_s,X_t]} \\ &\quad-\sum_{1\leqslant s<t\leqslant k+1}(-1)^{s+t}\lambda\wedge\big(d\circ i_{X_1\wedge\dots\wedge\widehat{X_s}\wedge\dots\wedge\widehat{X_t}\wedge\dots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\big)\wedge i_{[X_s,X_t]}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition I.3.21. *Soit $\lambda \in \bigwedge^k(\mathfrak{g}^*) \setminus \{0\}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \lambda \wedge i_{X_1\wedge\ldots\wedge X_{k-1}}(\lambda) = 0 \\ \lambda \wedge (d \circ i_{X_1\wedge\ldots\wedge X_{k-1}}(\lambda)) = 0, \end{cases}$$

pour tous $X_1, \ldots, X_{k-1} \in \mathfrak{g}$. Alors :

1. *La k-forme λ est décomposable : il existe des formes linéaires $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathfrak{g}^*$ linéairement indépendantes telles que $\lambda = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$;*
2. *Le sous-espace $\mathfrak{h} := \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(\omega_j)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Remarque I.3.22. La seconde condition ci-dessus est appelée condition de Frobenius. Nous commentons la présence de cette condition de Frobenius dans la partie I.3.d.

Démonstration. Soit λ vérifiant les hypothèses de la proposition. D'après le lemme I.3.4, la k-forme λ est décomposable et il existe des formes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ linéairement indépendantes sur $\mathfrak{g}$ telles que $\lambda = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$. Alors la condition de Frobenius de l'énoncé se réduit à :

$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0, \qquad \forall\, j \in [\![1,k]\!]. \tag{I.5}$$

Nous allons démontrer que cette condition est équivalente au fait que $\mathfrak{h} = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(\omega_j)$ soit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

• Supposons la condition (I.5) vérifiée. Soit $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ et montrons que $[X_1, X_2] \in \mathfrak{h}$. Soit $\{X_3, \ldots, X_{k+2}\}$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ (nécessairement de dimension k car $\dim(\mathfrak{h}) = n-k$ puisque les formes sont linéairement indépendantes). Soit $j \in [\![1,k]\!]$ fixé. Nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= (d\omega_j \wedge (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)|X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k+2}) \\ &= \sum_{\substack{\ell,m\in[\![1,k+2]\!] \\ \ell<m}} (-1)^{\ell+m+1} d\omega_j(X_\ell \wedge X_m)\lambda(X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_\ell} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_m} \wedge \ldots \wedge X_{k+2}) \\ &= d\omega_j(X_1 \wedge X_2)\lambda(X_3 \wedge \ldots \wedge X_{k+2}) \\ &= -\omega_j([X_1, X_2])\lambda(X_3 \wedge \ldots \wedge X_{k+2}). \end{aligned}$$

Étant donné le choix réalisé pour les vecteurs $X_3, \ldots, X_{k+2}$, le scalaire $\lambda(X_3 \wedge \ldots \wedge X_{k+2})$ est non nul donc $[X_1, X_2] \in \mathfrak{h}$.

• Réciproquement, supposons que $\mathfrak{h}$ soit une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et soit $X_1, \ldots, X_{k+2} \in \mathfrak{g}$ linéairement indépendants. Notons, pour $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned} A_j &= \langle d\omega_j \wedge \lambda, X_1 \wedge \ldots \wedge X_{k+2} \rangle \\ &= \sum_{\substack{\ell,m\in[\![1,k+2]\!] \\ \ell<m}} (-1)^{\ell+m+1} d\omega_j(X_\ell \wedge X_m)\lambda(X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_\ell} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_m} \wedge \ldots \wedge X_{k+2}). \end{aligned}$$

Commençons par remarquer que les supplémentaires de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ sont tous de dimension k.

S'il y a trois vecteurs X_ℓ ou plus dans $\mathfrak{h}$, alors $A_j = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Si ce n'est pas le cas, comme $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}) = k$, il y a forcément deux vecteurs X_ℓ dans $\mathfrak{h}$ et les autres dans un supplémentaire. Quitte à renuméroter, nous pouvons supposer $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$. Alors :

$$A_j = -\omega_j([X_1,X_2])\lambda(X_3 \wedge \ldots \wedge X_{k+2}) = 0$$

pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, car $[X_1,X_2] \in \mathfrak{h}$. Nous en déduisons la condition (I.5). □

Théorème I.3.23. *Soit $\lambda \in \bigwedge^k(\mathfrak{g}^*) \setminus \{0\}$ vérifiant, pour tout $A \in \bigwedge^{k-1}(\mathfrak{g})$:*

$$\begin{cases} \lambda \wedge (i_A\lambda) = 0 \\ \lambda \wedge (d \circ (i_A\lambda)) = 0. \end{cases}$$

Alors le $(k+2)$-crochet défini à partir de la super-dérivation $\lambda \wedge d \in \mathscr{D}_{k+1}(\mathfrak{g})$ vérifie l'identité (†).

Démonstration. D'après la proposition I.3.21, nous avons :
• $\lambda = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, $\omega_j \in \mathfrak{g}^*$ ($j \in [\![1,k]\!]$) ;
• $\mathfrak{h} = \bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(\omega_j)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ (de codimension k).
Alors les deux derniers termes dans l'expression de $[D_{k+1}, D_0]$ s'annulent immédiatement. Nous allons montrer que, sous ces mêmes hypothèses, le terme en facteur de d s'annule également.

Soit $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{g}$. Explicitons le terme facteur de d dans $[D_{k+1}, D_0]$:

$$\begin{aligned} &\Bigg(\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^{k+1+r}\lambda(X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X_r}\wedge\ldots\wedge X_{k+1})\mathscr{L}_{X_r}(\lambda) \\ &+\sum_{\substack{s,t\in[\![1,k+1]\!]\\ s<t}}(-1)^{s+t}i_{X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X_s}\wedge\ldots\wedge\widehat{X_t}\wedge\ldots\wedge X_{k+1}}(\lambda)\wedge i_{[X_s,X_t]}(\lambda)\Bigg)(Y_1\wedge\ldots\wedge Y_k) \\ &=\sum_{r=1}^{k+1}\sum_{u=1}^{k}(-1)^{k+1+r+u}\lambda(X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X_r}\wedge\ldots\wedge X_{k+1})\lambda([X_r,Y_u]\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y_u}\wedge\ldots\wedge Y_k)+ \\ &\sum_{\substack{s,t\in[\![1,k+1]\!]\\ s<t}}\sum_{v=1}^{k}(-1)^{s+t+v+1}\lambda(X_1\wedge\ldots\wedge\widehat{X_s}\wedge\ldots\wedge\widehat{X_t}\wedge\ldots\wedge X_{k+1}\wedge Y_v)\lambda([X_s,X_t]\wedge Y_1\wedge\ldots\wedge\widehat{Y_v}\wedge\ldots\wedge Y_k). \end{aligned}$$

Notons T_1 le premier terme et T_2 le second. Soit V un supplémentaire (vectoriel) de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus V$. Alors $\dim(V) = k$. Nous allons examiner T_1 et T_2 selon la position des vecteurs X_u, Y_v par rapport à $\mathfrak{h}$ et V. Nous pouvons déjà remarquer que :
• s'il y a deux vecteurs X_u (ou plus) dans $\mathfrak{h}$, alors T_1 et T_2 sont nuls (en effet, si X_{u_1} et X_{u_2} sont dans $\mathfrak{h}$, alors $[X_{u_1}, X_{u_2}] \in \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie) ;
• s'il y a deux vecteurs Y_v (ou plus) dans $\mathfrak{h}$, alors T_1 et T_2 sont nuls ;
• les vecteurs $X_1, \ldots, X_{k+1}$ ne peuvent être dans V car $\dim(V) = k$.

Les cas à examiner sont donc les suivants (quitte à renuméroter les familles $\{X_u, u \in [\![1,k+1]\!]\}$ et $\{Y_v, v \in [\![1,k]\!]\}$) :

1. $Y_1 \in \mathfrak{h}$ et $X_1 \in \mathfrak{h}$;

2. $Y_v \in V \ \forall\, v \in [\![1,k]\!]\ X_{k+1} \in \mathfrak{h}$.

<u>Premier cas :</u> nous avons $Y_1, X_1 \in \mathfrak{h}$. Comme $Y_1 \in \mathfrak{h}$, $T_2 = 0$ et :

$$T_1 = \sum_{r=1}^{k+1} (-1)^{k+1-r+1} \lambda(X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_r} \wedge \ldots \wedge X_{k+1}) \lambda([X_r, Y_1] \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_k).$$

Comme $X_1 \in \mathfrak{h}$ et $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{h}$, nous obtenons $T_1 = 0$.

<u>Second cas :</u> nous pouvons supposer que la famille $\{Y_j, j \in [\![1,k]\!]\}$ constitue une base de V et nous avons $X_{k+1} \in \mathfrak{h}$. D'après les remarques précédentes, nous pouvons supposer que $X_1, \ldots, X_k \in V$, donc que $X_1 = Y_1, \ldots, X_k = Y_k$ en considérant le caractère multilinéaire des expressions T_1 et T_2. Les sommes pour $r \neq k+1$, $t \neq k+1$ et $v \neq s$ sont nulles et il reste :

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= \sum_{u=1}^{k} (-1)^u \lambda(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) \lambda([X_{k+1}, X_u] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_u} \wedge \ldots \wedge X_k) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{k} (-1)^k \lambda(\underbrace{X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_s} \wedge \ldots \wedge X_k \wedge X_s}_{(-1)^{k-s} X_1 \wedge \ldots \wedge X_k}) \lambda(\underbrace{[X_s, X_{k+1}]}_{-[X_{k+1}, X_s]} \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_s} \wedge \ldots \wedge X_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé, à savoir que $[D_{k+1}, D_0]$ est nul donc, d'après la proposition I.3.18, le crochet ainsi défini munit $\mathfrak{g}$ d'une structure de $(k+2)$-gèbre de Nambu. □

Exemple I.3.24. Prenons le cas de la forme linéaire trace sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m)$. La super-dérivation $-\operatorname{tr} \wedge d \in \mathscr{D}_2(\mathfrak{g})$ répond aux conditions du théorème I.3.23 et définit un 3-crochet de Nambu sur $\mathfrak{gl}(m)$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$ et $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (-\operatorname{tr} \wedge d)(\omega_j)(X \wedge Y \wedge Z) &= -(\operatorname{tr}(X) d\omega_j(Y \wedge Z) - \operatorname{tr}(Y) \wedge d\omega_j(X \wedge Z) + \operatorname{tr}(Z) \wedge d\omega_j(X \wedge Y)) \\ &= \omega_j(\operatorname{tr}(X)[Y,Z] - \operatorname{tr}(Y)[X,Z] + \operatorname{tr}(Z)[X,Y]). \end{aligned}$$

Ainsi, le 3-crochet

$$[X,Y,Z] = \operatorname{tr}(X)[Y,Z] - \operatorname{tr}(Y)[X,Z] + \operatorname{tr}(Z)[X,Y]$$

munit $\mathfrak{gl}(m)$ d'une structure de 3-gèbre de Nambu pour tout $m \geqslant 1$.

I.3.d Théorème de Frobenius

Nous avons rencontré dans la proposition I.3.21 les conditions de Frobenius :

$$d\alpha_j \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = 0$$

pour tout $j \in [\![1, j]\!]$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des formes linéaires sur V. D'autre part, l'espace vectoriel engendré par les applications adjointes associées à un crochet de Nambu constitue ce que l'on appelle une distribution involutive (les définitions sont rappelées ci-dessous). Et le théorème de Frobenius (basé sur les conditions ci-dessus) affirme qu'une distribution involutive est intégrable. Il apparaît donc un lien entre toutes ces notions, lien qu'il serait nécessaire d'approfondir. Nous nous contenterons dans cette partie de détailler les affirmations ci-dessus.

Dans toute cette partie, nous notons M une variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ de dimension $n \geqslant 1$. Les définitions et les énoncés du théorème de Frobenius sont empruntés aux ouvrages [Hic65] et [BC70]. Lorsque nous travaillerons avec des champs de vecteurs ou des formes différentielles, nous noterons les indices en exposant pour gagner en compréhension. Par exemple, X^1_x signifie que l'on a évalué le champ de vecteurs X^1 au point x.

Définition I.3.25. Une **distribution** est une application Π définie sur M et qui à chaque point x de M associe un sous-espace vectoriel Π_x de l'espace tangent T_xM vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x et des champs de vecteurs (lisses) $X^1, \ldots, X^p$ définis sur U et linéairement indépendants tels que :

$$\Pi_y = \mathrm{Vect}(X^1_y, \ldots, X^p_y)$$

pour tout $y \in U$. Les sous-espaces Π_x sont appelés les **feuilles** de la distribution

Définition I.3.26. La dimension d'une distribution Π est définie ponctuellement par la quantité $\dim(\Pi_x)$, $x \in U$.

Nous dirons que la distribution est de dimension r ($0 \leqslant r \leqslant n$) si, et seulement si, toutes les feuilles sont de dimension r.

Définition I.3.27. On dit qu'un champ de vecteurs X appartient à la distribution Π si, et seulement si, $X_x \in \Pi_x$ pour tout $x \in M$.

Définition I.3.28. Une distribution Π est dite **involutive** si, et seulement si, pour tous X, Y éléments de Π, le crochet de Lie des champs de vecteurs $[X, Y]$ appartient à Π.

Exemple I.3.29. Considérons un k-crochet de Nambu $[., \ldots, .]$ sur un espace vectoriel V. Écrivons l'identité (†) : pour tous $X_1, \ldots, X_{k-1}, Y_1, \ldots, Y_k \in V$, nous avons :

$$\begin{aligned}[X_1, \ldots, X_{k-1}, [Y_1, \ldots, Y_k]] &= \sum_{i=1}^{n-1} [Y_1, \ldots, Y_{i-1}, [X_1, \ldots, X_{k-1}, Y_i], Y_{i+1}, \ldots, Y_k] \\ &\quad + [Y_1, \ldots, Y_{k-1}, [X_1, \ldots, X_{k-1}, Y_k]]\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$[\mathrm{ad}_{X_1,\ldots,X_{k-1}}, \mathrm{ad}_{Y_1,\ldots,Y_{k-1}}](Y_k) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{ad}_{Y_1,\ldots,Y_{i-1},[X_1,\ldots,X_{k-1},Y_i],Y_{i+1},\ldots,Y_{k-1}}(Y_k).$$

Ainsi, la distribution engendrée par les endomorphismes adjoints $\mathrm{ad}_{X_1,\ldots,X_{k-1}}$ est involutive.

Définition I.3.30. Une distribution Π de dimension r est dite **intégrable** si, et seulement si, pour tout point $x \in M$, il existe une carte locale $(U; x_1, \ldots, x_n)$ en x telle que les champs coordonnés $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j \in [\![1, r]\!]$ forment une base de Π_y pour tout y appartenant à U.

Remarque I.3.31. Une distribution intégrable est involutive.

Nous disposons du théorème de Frobenius qui traite des distributions involutives. En voici deux énoncés :

Théorème I.3.32 (Frobenius). *Une distribution involutive est intégrable.*

Théorème I.3.33 (Frobenius). *Soit $\mathscr{I}$ un idéal différentiel de l'algèbre des formes différentielles (i.e. $d\mathscr{I} \subset \mathscr{I}$) engendré par $n-r$ formes différentielles $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-r}$ linéairement indépendantes et vérifiant les conditions de Frobenius :*

$$d\alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-r} = 0$$

pour tout $i \in [\![1, n-r]\!]$. Alors pour tout $m \in M$, il existe une carte locale $(y^1, \ldots, y^n)$ en m telle que les 1-formes différentielles $dy^{r+1}, \ldots, dy^n$ engendrent $\mathscr{I}$.

L'équivalence des deux énoncés repose en partie sur le lemme suivant dont nous avons déjà rencontré une version (lorsque la variété M est un espace vectoriel de dimension finie) :

Lemme I.3.34. *Avec les notations du théorème I.3.33, nous avons l'équivalence :*

$$d\alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^q = 0 \ \forall\ i \in [\![1, q]\!] \Longleftrightarrow W = \bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}(\alpha^i) \text{ est une distribution involutive.}$$

Preuve. La preuve est identique à celle effectuée dans la démonstration de la proposition I.3.21, c'est-à-dire qu'elle revient à compter le nombre de champs de vecteurs linéairement indépendants pouvant appartenir à la distribution W et à un supplémentaire (en l'occurrence, un supplémentaire local). En fait, il s'agit de réécrire la même preuve en évaluant systématiquement les champs de vecteurs et les formes différentielles en des points x de la variété. □

I.3.e Crochets de Leibniz correspondants

Soit $n \geqslant 3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ l'algèbre de Lie des matrices réelles de taille n et $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n)$ l'algèbre de Lie des matrices réelles de taille n et de trace nulle. Notons $m = \dim(\mathfrak{g}) = n^2$. Alors $\dim(\mathfrak{h}) = m - 1$. Considérons le 3-crochet de l'exemple I.3.24 :

$$[X, Y, Z] = \mathrm{tr}(X)[Y, Z] - \mathrm{tr}(Y)[X, Z] + \mathrm{tr}(Z)[X, Y]$$

pour $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Nous savons que ce crochet munit $\mathfrak{g}$ d'une structure de 3-gèbre de Nambu. Le crochet de Leibniz canoniquement associé est défini par :

$$\{F, G, H\}_\varphi = \Pi_\varphi(dF_\varphi \wedge dG_\varphi \wedge dG_\varphi) = (\varphi | [dF_\varphi, dG_\varphi, dH_\varphi])$$

pour $F,G,H \in \mathscr{A} = \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g}^*,\mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$. Nous avons réintroduit la notation de la remarque I.1.17 : le tenseur Π est un champ de coformes différentielles antisymétriques sur $\mathfrak{g}^*$ que nous appelons **tenseur de Leibniz**. Nous allons montrer que ce n'est pas un tenseur de Nambu-Poisson, et par conséquent que le crochet de Leibniz défini ci-dessus ne vérifie pas l'identité (†).

Définissons l'application adjointe : $\mathrm{ad}_{F,G}\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$, $H \mapsto \{F,G,H\}$ (pour F,G fixés dans $\mathscr{A}$) et soit $\mathscr{D}$ le sous-espace vectoriel de l'algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}(\mathscr{A})$ engendré par le système $\{\mathrm{ad}_{F,G}, F,G \in \mathscr{A}\}$. Nous allons expliciter un système générateur du sous-espace $\mathscr{D}$ constitué de champs de vecteurs sur $\mathfrak{g}^*$.

Commençons par remarquer que $\mathscr{D}$ est engendrée par les adjoints $\mathrm{ad}_{F,G}$ pour F,G linéaires. Étant donné que les formes linéaires sur $\mathfrak{g}^*$ sont en réalité les éléments de $\mathfrak{g}$, nous écrivons :

$$\mathscr{D} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{ad}_{X,Y}, X,Y \in \mathfrak{g}\}.$$

D'autre part, nous savons qu'une base de l'espace $\mathfrak{g}$ est constituée d'une base du sous-espace $\mathfrak{h}$ notée $\{X_i, i \in [\![1,m-1]\!]\}$ complétée par l'identité $X_m = \mathrm{id}$. Donc la distribution $\mathscr{D}$ est engendrée par $\{\mathrm{ad}_{X,Y}, X,Y \in \mathfrak{h}\}$ et $\{\mathrm{ad}_{X,\mathrm{id}}, X \in \mathfrak{h}\}$. Nous allons expliciter ces deux types de générateurs.

• <u>1er type –</u> Soit $X \in \mathfrak{h}$ fixé. Pour $F \in \mathscr{A}$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$, calculons :

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{X,\mathrm{id}}(F)_\varphi = \{X,\mathrm{id},F\}_\varphi &= \underbrace{\mathrm{tr}(X)}_{0}\{\mathrm{id},F\}_\varphi - \underbrace{\mathrm{tr}(\mathrm{id})}_{n}\{X,F\}_\varphi + \mathrm{tr}(dF_\varphi)\underbrace{\{X,\mathrm{id}\}_\varphi}_{0} \\ &= -n(\varphi|[X,dF_\varphi]).\end{aligned}$$

Notons $W_X\colon \mathfrak{g}^* \longrightarrow T\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ le champ de vecteurs correspondant défini par :

$$(W_X.F)_\varphi = -n(\varphi|[X,dF_\varphi])$$

pour $F \in \mathscr{A}$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$. Les champs W_X correspondent à l'action coadjointe de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$.

• <u>2ème type –</u> Soit $X,Y \in \mathfrak{h}$ fixés. Pour $F \in A$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ calculons :

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{X,Y}(F)_\varphi = \{X,Y,F\}_\varphi &= \underbrace{\mathrm{tr}(X)}_{0}\{Y,F\}_\varphi - \underbrace{\mathrm{tr}(Y)}_{0}\{X,F\}_\varphi + \mathrm{tr}(dF_\varphi)\{X,Y\}_\varphi \\ &= (\varphi|[X,Y])\,\mathrm{tr}(dF_\varphi).\end{aligned}$$

Notons $Z = [X,Y]$ (parcourant $\mathfrak{h}$) et $V_Z\colon \mathfrak{g}^* \longrightarrow T\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ le champ de vecteurs correspondant défini par :

$$(V_Z.F)_\varphi = (\varphi|[X,Y])\,\mathrm{tr}(dF_\varphi)$$

pour $F \in \mathscr{A}$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*$. Examinons les composantes de V_Z sur la base $\{\omega_i, i \in [\![1,m]\!]\}$ duale de la base $\{X_i, i \in [\![1,m]\!]\}$ de $\mathfrak{g}$ choisie. Pour $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ et $i \in [\![1,m]\!]$, nous avons :

$$\omega_i((V_Z)_\varphi) = (V_Z.X_i)_\varphi = (\varphi|Z)\,\mathrm{tr}(X_i) = \delta_{im}n(\varphi|Z)$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Donc les composantes de $(V_Z)_\varphi$ sont nulles sauf celle sur ω_m qui vaut $n(\varphi|Z)$. Or, $\omega_m = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tr}$ donc V_Z est le champ $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$, $\varphi \mapsto (\varphi|Z)\,\mathrm{tr}$. Par conséquent, la distribution engendrée par les champs V_Z pour Z parcourant $\mathfrak{h}$ est de dimension 1.

Nous avons ainsi exhibé un système de générateurs pour $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D} = \mathrm{Vect}\{W_X, V_Z, X, Z \in \mathfrak{h}\}.$$

Remarque I.3.35. Nous pouvons définir les champs W_X pour $X \in \mathfrak{g}$. En effet, $X \in \mathfrak{g}$ s'écrit de manière unique $\widetilde{X} + \lambda\,\mathrm{id}$ avec $\widetilde{X} \in \mathfrak{h}$ et $\lambda = \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(X)$ donc $W_X = W_{\widetilde{X}} + \lambda W_{\mathrm{id}}$ mais $W_{\mathrm{id}} = \mathrm{ad}_{\mathrm{id},\mathrm{id}} = 0$. Donc $W_X = W_{\widetilde{X}}$.

Pour $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\mathscr{D}_\varphi \neq \{0\}$, nous définissons une application linéaire $\Phi_\varphi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathscr{D}_\varphi$ en posant :

$$\Phi_\varphi(X_i) = (W_{X_i})_\varphi$$

pour tout $i \in [\![1,m]\!]$. L'application Φ_φ est surjective sur son image $\mathscr{D}'_\varphi = \mathrm{Vect}\{W_X, X \in \mathfrak{h}\}$ de dimension $\dim(\mathscr{D}_\varphi) - 1$ d'après ce qui précède et son noyau est $\mathrm{Ker}(\Phi_\varphi) = \{X \in \mathfrak{g} \;/\; (\varphi|[X,Y]) = 0 \;\forall\, Y \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{g}^\varphi$ (stabilisateur de φ sous l'action coadjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$). Nous en déduisons un isomorphisme :

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\varphi \simeq \mathscr{D}'_\varphi. \tag{I.6}$$

Supposons que Π soit un tenseur de Nambu-Poisson c'est-à-dire que le 3-crochet de Leibniz étudié vérifie l'identité (†). Alors d'après [Gau96], il existe un système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_m)$ sur la variété $\mathfrak{g}^*$ tel que, pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant $\Pi_\varphi \neq 0$, nous ayons :

$$\Pi_\varphi = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_\varphi \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_\varphi \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_\varphi$$

dans un voisinage de φ, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ($i \in [\![i,m]\!]$) désignant les champs de vecteurs $\mathfrak{g}^* \to T\mathfrak{g}^*$ correspondant au système de coordonnées.

Vu la nouvelle expression du tenseur Π, nous déduisons que :

$$\mathscr{D}_\varphi = \mathrm{Vect}\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_\varphi, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_\varphi, \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_\varphi \right\}$$

si $\mathscr{D}_\varphi \neq \{0\}$ donc les feuilles de la distribution $\mathscr{D}$ sont de dimension 0 ou 3. Par conséquent celles de $\mathscr{D}'$ sont de dimension 0 ou 2. Alors, d'après (I.6), le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\varphi$ est de dimension 0 ou 2 pour tout $\varphi \in \mathfrak{g}^*$. Mais ce quotient est isomorphe à l'espace tangent de l'orbite de φ sous l'action coadjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$. Or, d'après [CM93], la dimension de l'orbite coadjointe principale de $\mathfrak{gl}(n)$ est $(n^2-1) - (n-1) = n^2 - n$. Par conséquent, dès que n est supérieur ou égal à 3, il existe des orbites coadjointes de dimension strictement supérieure à 2 (par exemple, si $n = 3$, l'orbite principale est de dimension 6). Nous aboutissons donc à une contradiction (nous avions supposé $n \geqslant 3$). Donc Π est un tenseur de Leibniz linéaire mais n'est pas un tenseur de Nambu-Poisson.

Dans [DZ99] et [Vai99], il est fait mention de l'équivalence entre les tenseurs de Nambu-Poisson linéaires et les k-gèbres de Nambu de dimension finie, la classification des tenseurs de Nambu-Poisson linéaires devant par conséquent s'appliquer à classifier également les k-gèbres de Nambu. Mais l'exemple précédent contredit cette équivalence : nous avons exhibé une structure de Nambu-Lie dont la structure de Leibniz linéaire canoniquement associée ne vérifie pas l'identité fondamentale de Nambu. Donc la classification des k-gèbres de Nambu dans le cas général reste un problème ouvert.

I.4 Crochets définis par le polynôme standard, quantification

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples de crochets de Nambu construits à partir du polynôme antisymétrique sur les algèbres de Clifford d'indice pair $\mathscr{C}_{2n}$. Nous présentons également les tests que nous avons réalisés avec le logiciel Maple sur plusieurs algèbres de Lie de matrices de petite taille et leur résultat, positif ou négatif, pour établir si les crochets construits à partir des polynômes antisymétriques d'indice distincts vérifient l'identité (†).

Définition I.4.1. Soit A une algèbre associative et $n \geqslant 2$ un entier. Le **polynôme antisymétrique d'indice** n, ou **polynôme standard d'indice** n, noté P_n, est défini par :

$$P_n(X_1,\ldots,X_n) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(n)}$$

pour $(X_1,\ldots,X_n) \in A^n$. Le n-crochet construit à partir de P_n est :

$$[X_1,\ldots,X_n] := P_n(X_1,\ldots,X_n).$$

Proposition I.4.2. *Soit $n \geqslant 2$. Énonçons quelques propriétés des polynômes antisymétriques.*

i) Le polynôme P_n est n-linéaire et antisymétrique (i.e. alterné). Par conséquent, si $X_1,\ldots,X_n$ sont des vecteurs anticommutants de A (c'est-à-dire vérifiant $X_iX_j = -X_jX_i$, $i \neq j$), alors :

$$P_n(X_1,\ldots,X_n) = n!X_1\ldots X_n.$$

ii) Nous disposons d'une formule de récurrence pour le calcul des polynômes P_n :

$$P_n(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} X_k P_{n-1}(X_1,\ldots,\widehat{X_k},\ldots,X_n) \tag{I.7}$$

pour tous $X_1,\ldots,X_n \in A$.

iii) Nous disposons d'une identité spécifique lorsque l'une des variables est l'élément unitaire de l'algèbre :

$$P_{2n+1}(X_1,\ldots,X_{2n},1_A) = P_{2n}(X_1,\ldots,X_{2n})$$

pour tous $X_1,\ldots,X_{2n} \in A$ d'où $P_{2n}(X_1,\ldots,X_{2n-1},1_A) = 0$.

Preuve. La démonstration de ces propriétés est disponible dans [Jac75]. Cependant, nous démontrerons dans le deuxième chapitre (partie II.4 page 109) des identités plus générales dont celles-ci découlent. □

I.4.a Sur les algèbres de matrices

Nous indiquons dans cette partie les résultats des tests donnant le comportement des polynômes P_n sur les algèbres de Lie de matrices $\mathfrak{gl}(m)$, tests réalisés sur ordinateur grâce au logiciel Maple. Il s'agissait pour la machine de calculer l'identité de Nambu sur les matrices de la base canonique de $\mathfrak{gl}(m)$. Pour des raisons de temps de calcul, nous nous sommes limités à $n = 7$ et $m = 4$.

Énonçons un lemme qui restreint le nombre de tests à effectuer :

Lemme I.4.3. *Soit* $m \geqslant 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} B_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m)$ *avec* $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{gl}(r)$, $1 \leqslant r \leqslant m-1$. *Alors :*

$$P_n(A_1, \ldots, A_n) = \begin{pmatrix} P_n(B_1, \ldots, B_n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. C'est un corollaire immédiat du produit des matrices par blocs. □

Corollaire I.4.4. *Soit* $m \geqslant 2$. *Si le polynôme* P_n *vérifie l'identité de Nambu sur l'algèbre* $\mathfrak{gl}(m)$, *alors le polynôme* P_n *vérifie l'identité de Nambu sur les algèbres* $\mathfrak{gl}(r)$ *pour tout* $r \leqslant m-1$.

Remarque I.4.5. C'est principalement la contraposée du corollaire I.4.4 qui sera utile pour limiter le nombre de tests à effectuer.

Donnons enfin une borne à l'indice n des crochets défini à partir du polynôme P_n.

Théorème I.4.6 (Amitsur & Levitzki). *Le polynôme antisymétrique* P_{2n} *est identiquement nul sur l'algèbre* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *des matrices de taille* n.

Remarque I.4.7. La démonstration originale se trouve notamment dans [AL50] et [Jac75]. Citons également B. Kostant [Kos58, Kos81] qui a donné une autre démonstration basée sur la cohomologie, un meilleur indice concernant la sous-algèbre $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ et un théorème plus général portant sur toutes les représentations de dimension finie de l'algèbre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Nous présentons en appendice page 141 une autre démonstration due à S. Rosset [Ros76].

Notons que nous aurons l'occasion de revenir sur ce théorème dans le deuxième chapitre. Nous proposons en effet un énoncé applicable aux superalgèbres de Lie orthosymplectiques $\mathfrak{osp}(1, 2n)$ (théorème II.6.1 page 136) et une démonstration basée sur les idées de B. Kostant dans le cas classique.

Les résultats de nos calculs sont les suivants :

- **Le crochet défini par P_3 munit $\mathfrak{gl}(2)$ d'une structure de 3-gèbre de Nambu.**
- Les crochets définis par P_3, P_4 et P_5 ne vérifient pas l'identité (†) sur $\mathfrak{gl}(n)$, $n \geqslant 3$.
- Le crochet défini par P_6 ne vérifie pas l'identité (†) sur $\mathfrak{gl}(n)$, $n \geqslant 4$. Donc le crochet défini par P_7 ne la vérifie pas non plus d'après la proposition I.4.2 *iii)*.

I.4.b Sur les algèbres de Clifford

Dans cette partie, nous proposons une quantification de la structure de Nambu définie par le produit mixte I.2.1 par les algèbres de Clifford d'indice pair. Il s'agit de déterminer deux sous-espaces vectoriels W_n et W_n' de l'algèbre de Clifford $\mathscr{C}_{2n}$ tels que l'on ait :

- $[X_1, \ldots, X_{2n+1}] = P_{2n+1}(X_1, \ldots, X_{2n+1})$ pour tout $X_1, \ldots, X_{2n+1} \in W_n$,
- $[X_1, \ldots, X_{2n}] = P_{2n}(X_1, \ldots, X_{2n})$ pour tout $X_1, \ldots, X_{2n} \in W_n'$,

où le crochet désigne le produit mixte.

Commençons par énoncer un critère permettant de vérifier qu'une telle structure satisfait l'identité (†).

Proposition I.4.8. *Soit A une algèbre associative de dimension m. Soit $\{E_1,\dots,E_m\}$ une base (d'espace vectoriel) de A telle que :*

$$P_{m-1}(E_1,\dots,\widehat{E_i},\dots,E_m) = (-1)^{i+1}E_i,$$

pour tout $i \in [\![1,m]\!]$. Alors le $(m-1)$-crochet défini par P_{m-1} vérifie l'identité (†).

Preuve. Pour les besoins de la preuve, nous allons supposer que A est l'algèbre des polynômes sur un espace vectoriel V de dimension m, c'est-à-dire l'algèbre symétrique de son dual V^*. Les éléments $E_1,\dots,E_m$ de A sont alors les formes linéaires coordonnées de V. Soit $p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} E_i^2 \in A$, et considérons le m-crochet défini sur A par le jacobien (voir I.1.14). Alors, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$:

$$\mathrm{Jac}(p,E_1,\dots,\widehat{E_i},\dots,E_m) = (-1)^{i+1}E_i$$

car $\frac{\partial p}{\partial E_j} = E_j$ et $\frac{\partial E_i}{\partial E_j} = \delta_{ij}$ $(i,j \in [\![1,m]\!])$; il suffit alors de développer le déterminant suivant sa première colonne. Donc P_{m-1} est égal au localisé du jacobien sur le polynôme p. Par conséquent le crochet défini par P_{m-1} vérifie l'identité (†). □

Exemple I.4.9. Soit $\mathfrak{so}(3)$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille 3. Notons :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

une base. Nous avons les relations $[X,Y]=Z$, $[Y,Z]=X$ et $[X,Z]=-Y$. Nous nous trouvons donc dans les conditions d'application de la proposition I.4.8 qui prouve alors que $\mathfrak{so}(n)$ est une algèbre de Lie.

Définition I.4.10. L'**algèbre de Clifford** d'indice $n \geqslant 2$ notée $\mathscr{C}_n$ est définie comme étant un espace vectoriel réel de dimension 2^n muni d'un produit défini sur une base $\{E_1,\dots,E_n\}$ par les relations :

$$\begin{cases} E_iE_j = -E_jE_i \ (i \neq j) \\ E_iE_i = E_i^2 = -1, \end{cases}$$

pour $i,j \in [\![1,n]\!]$. Une telle base est appelée base canonique de l'algèbre $\mathscr{C}_n$.

Remarque I.4.11. Il existe un isomorphisme entre l'algèbre $\mathscr{C}_2$ et l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ (de base en tant qu'espace vectoriel $\{i,j,k,1\}$ avec $k = ij$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$). Une bijection est définie en envoyant E_1 sur i et E_2 sur j et les règles de calculs étant les mêmes dans les algèbres $\mathscr{C}_2$ et $\mathbb{H}$, cette bijection est un homomorphisme d'algèbres.

Théorème I.4.12. *Soit $n \geqslant 1$ et considérons l'algèbre de Clifford $\mathscr{C}_{2n}$. Notons $\{E_1, \ldots, E_{2n}\}$ la base canonique, et deux éléments particuliers de l'algèbre : $E_{2n+1} := E_1 \ldots E_{2n}$ et $E_{2n+2} := 1$. Alors le polynôme P_{2n+1} munit le sous-espace $W_n := \mathrm{Vect}(E_1, \ldots, E_{2n+2})$ d'une structure de $(2n+1)$-gèbre de Nambu.*

Lemme I.4.13. *Considérons l'algèbre de Clifford $\mathscr{C}_{2n}$ munie de sa base canonique $\{E_1, \ldots, E_{2n}\}$. Notons $E'_m := E_1 \ldots E_{2m}$ ($1 \leqslant m \leqslant n$). Alors :*

$$\begin{cases} E'_n E_i = -E_i E'_n, \ \forall\, i \in [\![1, 2n]\!] \\ E'^2_m = (-1)^m, \ \forall\, m \in [\![1, n]\!]. \end{cases}$$

Preuve. Calculons, pour $i \in [\![1, 2n]\!]$:

$$\begin{aligned} E'_n E_i &= E_1 \ldots E_{2n} E_i = (-1)^{2n-i} E_1 \ldots E_{i-1} E_i^2 E_{i+1} \ldots E_{2n} = (-1)^{i+1} E_1 \ldots \widehat{E_i} \ldots E_{2n} \ ; \\ E_i E'_n &= E_i E_1 \ldots E_{2n} = (-1)^{i+1} E_1 \ldots E_{i-1} E_i^2 E_{i+1} \ldots E_{2n} = (-1)^i E_1 \ldots \widehat{E_i} \ldots E_{2n}. \end{aligned}$$

Donc le vecteur E'_n anticommute avec les vecteurs E_i, $i \in [\![1, 2n]\!]$.

Pour montrer que $E'^2_m = (-1)^m$ pour $m \in [\![1, n]\!]$, nous procédons par récurrence sur m. Nous avons immédiatement, pour $m = 1$:

$$E'^2_1 = E_1 E_2 E_1 E_2 = -E_1^2 E_2^2 = -1.$$

D'autre part, si nous supposons $E'^2_{m-1} = (-1)^{m-1}$, il vient :

$$\begin{aligned} E'^2_m &= E_1 \ldots E_{2m} E_1 \ldots E_{2m} = (-1)^{2m-1} E_1 \ldots E_{2m-1} E_1 \ldots E_{2m-1} E_{2m}^2 = E_1 \ldots E_{2m-1} E_1 \ldots E_{2m-1} \\ &= (-1)^{2m-2} E_1 \ldots E_{2m-2} E_1 \ldots E_{2m-2} E_{2m-1}^2 = -(E_1 \ldots E_{2m-2})^2 = -(-1)^{m-1} = (-1)^m. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Démonstration (du théorème I.4.12). D'après la proposition I.4.8, si nous parvenons à déterminer une base $\{X_1, \ldots, X_{2n+2}\}$ du sous-espace W_n vérifiant :

$$P_{2n+1}(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{2n+2}) = (-1)^{i+1} X_i$$

pour tout $i \in [\![1, 2n+2]\!]$, nous aurons le résultat.

Nous allons chercher des réels (non nuls) a_i tels que, notant $X_i = a_i E_i$ ($i \in [\![1, 2n+2]\!]$), la famille de vecteurs $\{X_1, \ldots, X_{2n+2}\}$ soit une base du sous-espace W_n vérifiant la condition de la proposition I.4.8. Rappelons que par définition et d'après le lemme I.4.13, $E_i E_j = -E_j E_i$ pour tout $i, j \in [\![1, 2n+1]\!]$ et $E_{2n+2} = 1$ commute avec tous les vecteurs.

Les équations $P_{2n+1}(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots X_{2n+2}) = (-1)^{i+1} X_i$ donnent, compte-tenu de la proposition I.4.2 et du lemme I.4.13 :

• si $i = 2n+2$:

$$\begin{aligned} & P_{2n+1}(X_1, \ldots, X_{2n+1}) = (-1)^{2n+2+1} X_{2n+2} \\ \Longleftrightarrow \quad & a_1 \ldots a_{2n+1} P_{2n+1}(E_1, \ldots, E_{2n+1}) = -a_{2n+2} E_{2n+2} \\ \Longleftrightarrow \quad & a_1 \ldots a_{2n+1} (2n+1)! E_1 \ldots E_{2n} E_{2n+1} = -a_{2n+2} \\ \Longleftrightarrow \quad & (-1)^{n+1} (2n+1)! a_1 \ldots a_{2n+1} = a_{2n+2}; \end{aligned}$$

• si $i \in [\![1, 2n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
& P_{2n+1}(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots X_{2n+2}) = (-1)^{i+1}X_i \\
\iff\ & a_1\ldots\widehat{a_i}\ldots a_{2n+1}a_{2n+2}P_{2n+1}(E_1,\ldots,\widehat{E_i},\ldots,E_{2n+1},1) = (-1)^{i+1}a_iE_i \\
\iff\ & a_1\ldots\widehat{a_i}\ldots a_{2n+1}a_{2n+2}P_{2n}(E_1,\ldots,\widehat{E_i},\ldots,E_{2n+1}) = (-1)^{i+1}a_iE_i \\
\iff\ & a_1\ldots\widehat{a_i}\ldots a_{2n+1}a_{2n+2}(2n)!E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n+1} = (-1)^{i+1}a_iE_i.
\end{aligned} \tag{I.8}$$

Calculons $E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n+1}$. Si $i = 2n+1$, nous retrouvons E_{2n+1}. Si $i < 2n+1$:

$$\begin{aligned}
E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n+1} &= E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n}E_1\ldots E_{2n} \\
&= (-1)^{2n-1}E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n-1}E_1\ldots E_{2n-1}E_{2n}^2 \\
&= E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n-1}E_1\ldots E_{2n-1} \\
&= (-1)^{2n-2}E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n-2}E_1\ldots E_{2n-2}E_{2n-1}^2 \\
&= -E_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2n-2}E_1\ldots E_{2n-2} \\
&= \ldots \\
&= (-1)^kE_1\ldots\widehat{E_i}\ldots E_{2(n-k)}E_1\ldots E_{2(n-k)}
\end{aligned}$$

pour $k < n - \dfrac{i}{2}$. Si i est impair, par exemple $i = 2p-1$, nous prenons $k = n-p$ et obtenons :

$$\begin{aligned}
E_1\ldots\widehat{E_{2p-1}}\ldots E_{2n+1} &= (-1)^{n-p}E_1\ldots E_{2p-2}E_{2p}E_1\ldots E_{2p} \\
&= (-1)^{n-p}(-1)^{2p-1}E_1\ldots E_{2p-2}E_1\ldots E_{2p-1}E_{2p}^2 \\
&= (-1)^{n-p}\underbrace{(E_1\ldots E_{2(p-1)})^2}_{(-1)^{p-1}}E_{2p-1} \\
&= (-1)^{n-1}E_{2p+1}.
\end{aligned}$$

Si i est pair, par exemple $i = 2p$, nous prenons $k = n-p-1$ et obtenons :

$$\begin{aligned}
E_1\ldots\widehat{E_{2p}}\ldots E_{2n+1} &= (-1)^{n-p-1}E_1\ldots E_{2p-1}E_{2p+1}E_{2p+2}E_1\ldots E_{2p+2} \\
&= (-1)^{n-p-1}(-1)^{2p+1}E_1\ldots E_{2p-1}E_{2p+1}E_1\ldots E_{2p+1}E_{2p+2}^2 \\
&= (-1)^{n-p-1}E_1\ldots E_{2p-1}E_{2p+1}E_1\ldots E_{2p+1} \\
&= (-1)^{n-p-1}(-1)^{2p}E_1\ldots E_{2p-1}E_1\ldots E_{2p}E_{2p+1}^2 \\
&= (-1)^{n-p}E_1\ldots E_{2p-1}E_1\ldots E_{2p} \\
&= (-1)^{n-p}(-1)^{2p-2}(E_1\ldots E_{2(p-1)})^2E_{2p-1}^2E_{2p} \\
&= (-1)^nE_{2p}.
\end{aligned}$$

Reprenons l'équation (I.8). Si i est pair, nous obtenons :

$$a_1\ldots\widehat{a_i}\ldots a_{2n+1}a_{2n+2}(2n)!(-1)^nE_i = -a_iE_i.$$

Si i est impair, nous obtenons :

$$a_1 \dots \widehat{a_i} \dots a_{2n+1} a_{2n+2} (2n)! (-1)^{n-1} E_i = a_i E_i.$$

Ce sont finalement les mêmes équations. Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} (-1)^{n-1}(2n)! a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_{2n+2} = a_i, \ \forall\, i \in [\![1, 2n+1]\!] \\ (-1)^{n-1}(2n+1)! a_1 \dots a_{2n+1} = a_{2n+2}. \end{cases} \tag{I.9}$$

Pour $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, si nous divisons membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{1}{2n+1} \frac{a_{2n+2}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{2n+2}} \qquad \text{i.e.} \qquad a_{2n+2}^2 = (2n+1) a_i^2.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, les scalaires a_i^2 sont tous égaux ; notons $a > 0$ cette valeur commune. Si nous reportons cela dans la deuxième équation (préalablement élevée au carré), nous obtenons :

$$(2n+1) a = a_{2n+2}^2 = (2n+1)!^2 a^{2n+1} \qquad \text{i.e.} \qquad a^{2n} = \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}.$$

Nous devons pour conclure examiner le signe des réels a_i. Si n est impair, des solutions $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, 2n+2]\!]$ conviennent. Mais il peut exister des a_i négatifs, en nombre pair. Si n est impair, des solutions $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, 2n+2]\!]$ ne conviennent pas. Il faut un nombre impair de réels a_i négatifs. Nous proposons alors comme solutions :

• Si n est pair : pour $i \in [\![1, 2n+1]\!]$:

$$a_i = \left(\frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \right)^{\dfrac{1}{4n}}, \ a_{2n+2} = \sqrt{2n+1} \left(\frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \right)^{\dfrac{1}{4n}}.$$

• Si n est impair : pour $i \in [\![1, 2n+1]\!]$:

$$a_i = \left(\frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \right)^{\dfrac{1}{4n}}, \ a_{2n+2} = -\sqrt{2n+1} \left(\frac{1}{(2n)!(2n+1)!} \right)^{\dfrac{1}{4n}}.$$

Réciproquement, nous pouvons vérifier que ces valeurs des réels a_i satisfont le système d'équation (I.9).

□

Nous en déduisons le résultat intéressant suivant :

Corollaire I.4.14. *Munie du* 3*-crochet défini par le polynôme antisymétrique* P_3*, l'algèbre des quaternions* $\mathbb{H}$ *est une* 3*-gèbre de Nambu.*

Preuve. Dans le cas de $\mathscr{C}_2 = \mathbb{H}$, le sous-espace W_1 du théorème I.4.12 est engendré par $E_1 = i$, $E_2 = j$, $E_3 = ij = k$ et $E_4 = 1$, donc W_1 est égal à $\mathbb{H}$. □

Le théorème I.4.12 donne donc une solution au problème de recherche des enveloppes associatives pour la structure de Nambu définie par le polynôme standard d'indice impair. Mais grâce aux propriétés rappelée dans la proposition I.4.2, nous pouvons également donner une solution pour le polynôme standard d'indice pair :

Corollaire I.4.15. *Avec les notations du théorème I.4.12, le polynôme P_{2n} munit le sous-espace $W'_n :=$ $\mathrm{Vect}(E_1,\ldots,E_{2n+1})$ d'une structure de $2n$-gèbre de Nambu.*

Preuve. D'après le théorème I.4.12, le polynôme P_{2n+1} munit le sous-espace $W_n = \mathrm{Vect}(E_1,\ldots,E_{2n+2})$ d'une structure de $(2n+1)$-gèbre de Nambu car il existe une base $\{X_1,\ldots,X_{2n+2}\}$ de l'espace W_n telle que

$$P_{2n+1}(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{2n+2}) = (-1)^{i+1}X_i$$

pour tout $i \in [\![1,2n+2]\!]$. Rappelons que le vecteur X_{2n+2} est un multiple de l'unité, notons le $\alpha 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Rappelons également que $W_n = W'_n \oplus \mathbb{C}X_{2n+2}$. D'après la propriété iii) de la proposition I.4.2, nous obtenons :

$$\alpha P_{2n}(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{2n+1}) = (-1)^{i+1}X_i$$

pour tout $i \in [\![1,2n+1]\!]$, en localisant les égalités précédentes sur le vecteur X_{2n+2}.

Soit $\beta = \alpha^{1/(2n-1)}$ et $Y_i := \beta X_i$, pour $i \in [\![1,2n+1]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} P_{2n}(Y_1,\ldots,\widehat{Y_i},\ldots,Y_{2n+1}) &= \beta^{2n}P_{2n}(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{2n+1}) \\ &= (-1)^{i+1}\beta^{2n}\alpha^{-1}X_i \\ &= (-1)^{i+1}\beta^{2n-1}\alpha^{-1}Y_i \\ &= (-1)^{i+1}Y_i. \end{aligned}$$

D'après la proposition I.4.8, nous déduisons que le polynôme P_{2n} munit le sous-espace W'_n d'une structure de $2n$-gèbre de Nambu. □

Nous sommes donc parvenus à montrer que l'algèbre de Clifford d'indice pair est une enveloppe associative pour les structures définies par les polynômes standards, d'indices pairs ou impairs : toutes les n-structures définies sur l'espace $\mathbb{C}^{n+1}$ par le polynôme standard et localisées sur la fonction $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ sont quantifiables par l'algèbre de Clifford d'indice pair $\mathscr{C}_n$ (si n est pair) ou $\mathscr{C}_{n-1}$ (si n est impair). Mais ce résultat n'est qu'un exemple : il doit en exister d'autres, qu'il reste à trouver.

✠

Chapitre II

Super-antisymétrie et super-symétrie. Théorème d'Amitsur-Levitzki sur la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$

Dans ce deuxième chapitre, nous poursuivons l'étude des n-structures en cherchant à établir l'existence d'un théorème du type Amitsur-Levitzki (voir I.4.6) sur les superalgèbres de Lie de matrices. Nous prouvons que c'est impossible sur les superalgèbres de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$ (dans la section II.4.3) mais nous démontrons que c'est vrai sur les superalgèbres de Lie orthosymplectiques $\mathfrak{osp}(1,2n)$ [GPU03] en empruntant la démarche de B. Kostant dans le cas classique [Kos81], tout en faisant l'économie d'un théorème de Hopf-Koszul-Samelson sur les superalgèbres de Lie.

Avant d'en arriver là, nous définissons ce que nous appelons les algèbres super-extérieure et super-symétrique d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et nous démontrons les formules de cohomologie des superalgèbres de Lie. Nous énonçons diverses identités sur le polynôme super-antisymétrique qui est la généralisation naturelle du polynôme antisymétrique rencontré dans le premier chapitre. Enfin, en généralisant les travaux de H. Cartan [Car51] et C. Chevalley [Che52], nous définissons un opérateur de transgression dans le cas des superalgèbres de Lie, ce qui nous permettra de démontrer une super-version du théorème de Dynkin [Dyn59] avant de démontrer le théorème final II.6.1 qui établit l'existence d'une identité polynomiale sur les superalgèbres $\mathfrak{osp}(1,2n)$.

II.1 Algèbres super-extérieure et super-symétrique d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué

II.1.a Applications multilinéaires super-antisymétriques et super-symétriques

Pour commencer, nous reprenons la plupart des définitions et formules contenues dans [BP89], en rajoutant le cas super-symétrique qui n'est pas introduit. Les formules seront systématiquement données avec leur démonstration qui ne sont pas écrites dans [BP89].

Le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Définition II.1.1. Soit Δ un ensemble dénombrable. Un **espace vectoriel Δ-gradué** est un espace vectoriel V égal à la somme directe d'une famille de sous-espaces $\{V_\delta,\ \delta \in \Delta\}$. On note $V = \bigoplus_{\delta\in\Delta} V_\delta$. Un vecteur de V est dit **homogène** s'il est élément de l'un des sous-espaces V_δ.

Définition II.1.2. Dans le cas $\Delta = \mathbb{Z}_2$, on parle d'**espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué** $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$. Parmi les vecteurs homogènes, on distingue ceux de $V_{\bar{0}}$, dits **pairs** de ceux de $V_{\bar{1}}$, dits **impairs**.

Notation II.1.3. Dans le cas d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ de dimension finie, nous notons $n_{\bar{0}} := \dim(V_{\bar{0}})$ et $n_{\bar{1}} := \dim(V_{\bar{1}})$ sauf mention du contraire.

Remarque II.1.4. Les vecteurs homogènes d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué forment un système de générateurs de cet espace. Pour cette raison, tous les vecteurs considérés par la suite sont homogènes et la minuscule x désigne le $\mathbb{Z}_2$-degré du vecteur X noté en majuscule.

Remarque II.1.5. L'espace $\mathbb{C}$ lui-même peut être muni d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation. On considère en effet que le sous-espace des vecteurs impairs est réduit à $\{0\}$: $\mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$.

Définition II.1.6. Une **base d'homogènes** de l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ est une base $\{X_1, \ldots, X_{n_{\bar{0}}}, Y_1, \ldots, Y_{n_{\bar{1}}}\}$ de V telle que la famille $\{X_1, \ldots, X_{n_{\bar{0}}}\}$ soit une base de l'espace $V_{\bar{0}}$ et la famille $\{Y_1, \ldots, Y_{n_{\bar{1}}}\}$ soit une base de l'espace $V_{\bar{1}}$.

Définition II.1.7. Une application linéaire $U : V \to W$ entre deux espaces $\mathbb{Z}_2$-gradués $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ et $W = W_{\bar{0}} \oplus W_{\bar{1}}$ est dite de degré $u \in \mathbb{Z}_2$ si, et seulement si, $U(V_x) \subset W_{x+u}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_2$. Si $u = \bar{0}$, nous dirons que l'application U est **paire**, et qu'elle est **impaire** dans le cas contraire.

Dans toute cette partie, sauf mention explicite et locale du contraire, la lettre n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ et $W = W_{\bar{0}} \oplus W_{\bar{1}}$ deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués de dimension finies.

Définition II.1.8. Pour $n \geqslant 1$, soit $\mathscr{F}^n(V,W)$ l'espace des applications n-linéaires du produit $\times_n V$ dans l'espace W. L'espace $\mathscr{F}^n(V,W)$ est $\mathbb{Z}_2$-gradué : si $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$, l'application F est dite de degré $f \in \mathbb{Z}_2$ si, et seulement si :

$$\deg(F(X_1, \ldots, X_n)) = x_1 + \ldots + x_n + f,$$

pour tous $X_i \in V_{x_i}$ ($i \in [\![1,n]\!]$). Nous notons alors :

$$\mathscr{F}^n(V,W) = \mathscr{F}^n_{\bar{0}}(V,W) \oplus \mathscr{F}^n_{\bar{1}}(V,W)$$

la $\mathbb{Z}_2$-graduation.

Nous définissons :

$$\mathscr{F}(V,W) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{F}^n(V,W)$$

avec $\mathscr{F}^0(V,W) = W$ et $\mathscr{F}^n(V,W) = \{0\}$ si $n \leqslant -1$. Observons que $\mathscr{F}(V,W)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$ gradué. Le degré d'un élément F est noté $\deg(F) = (n, f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ si l'application F appartient au sous-espace $\mathscr{F}^n(V,W)$ et est de degré (sur $\mathbb{Z}_2$) égal à f.

Remarque II.1.9. L'espace dual V^* est naturellement $\mathbb{Z}_2$-gradué par le sous-espace des formes linéaires de degré $\overline{0}$:

$$(V^*)_{\overline{0}} = \{\varphi \in V^* \mid \deg(\varphi(X)) = x,\ \forall\, X \in V_x,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}_2\}$$

et le sous-espace des formes linéaires de degré $\overline{1}$:

$$(V^*)_{\overline{1}} = \{\varphi \in V^* \mid \deg(\varphi(X)) = x + \overline{1},\ \forall\, X \in V_x,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Soit $X \in V_x$ (non nul) et $\varphi \in V^*$ la forme linéaire duale de X. Notons φ_x et $\varphi_{x'}$ les composantes de degré x et $x' := x + \overline{1}$ de φ. Il vient :

$$\deg(\varphi_x(X)) = x + x = \overline{0} \qquad \text{et} \qquad \deg(\varphi_{x'}(X)) = x + x' = \overline{1}.$$

Étant donné la graduation de $\mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \{0\}$, nous en déduisons que $\varphi_{x'}(X) = 0$. Donc $\varphi_{x'}$ est identiquement nulle. Par conséquent $\varphi = \varphi_x$ est homogène de degré x. Nous en concluons que l'espace $(V^*)_{\overline{0}}$ (resp. $(V^*)_{\overline{1}}$) est isomorphe à l'espace $(V_{\overline{0}})^*$ (resp. $(V_{\overline{1}})^*$). En d'autres termes, la graduation de l'espace dual V^* s'écrit, sans ambiguïté :

$$V^* = V^*_{\overline{0}} \oplus V^*_{\overline{1}}.$$

Plus généralement, soit Ω une n-forme multilinéaire sur V et $X_1, \ldots, X_n$ des éléments (homogènes) de V. L'espace $\mathscr{F}^n(V,\mathbb{C})$ étant $\mathbb{Z}_2$-gradué, notons Ω_ω et $\Omega_{\omega'}$ les composantes homogènes de degré $\omega := x_1 + \ldots + x_n$ et $\omega' := \omega + \overline{1}$ de Ω. Nous avons $\deg(\Omega_{\omega'}(X_1, \ldots, X_n)) = \overline{1}$ mais $\Omega_{\omega'}(X_1, \ldots, X_n)$ appartient à $\mathbb{C}$ donc est nul. Par conséquent, la restriction de Ω à $V_{x_1} \times \ldots \times V_{x_n}$ est homogène de degré $x_1 + \ldots + x_n$.

Réciproquement, si Ω est homogène de degré ω alors soit $\Omega(X_1, \ldots, X_n) = 0$ soit $\omega = x_1 + \ldots + x_n$.

Notation II.1.10. De même que la minuscule x désigne le $\mathbb{Z}_2$-degré du vecteur X, les minuscules f et ω désignent respectivement le $\mathbb{Z}_2$-degré des applications multilinéaires F et Ω, et les symboles ϕ et θ désignent les $\mathbb{Z}_2$-degrés respectifs des formes linéaires φ et ϑ.

Définition II.1.11. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous définissons successivement :

$$\mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X}) := \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j) \text{ et } X_{\sigma(i)} \in V_{\overline{1}},\ X_{\sigma(j)} \in V_{\overline{1}}\},$$

$$K(\sigma, \mathscr{X}) := \mathrm{card}(\mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})),$$

$$\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) := (-1)^{K(\sigma, \mathscr{X})}.$$

La quantité $\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})$ est appelée la **super-signature** de σ par rapport à $\mathscr{X}$.

Notation II.1.12. À partir de maintenant, la lettre calligraphique $\mathscr{X}$ désigne un n-uplet de vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$.

Remarque II.1.13. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, m le nombre d'inversions de σ et $\{(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m)\}$ les couples d'inversions ($i_k < j_k$ et $\sigma(i_k) > \sigma(j_k)$, $k \in [\![1, m]\!]$). Alors :

$$K(\sigma, \mathscr{X}) = x_{\sigma(i_1)} x_{\sigma(j_1)} + \ldots + x_{\sigma(i_m)} x_{\sigma(j_m)}.$$

Par conséquent, si $X_i \in V_{\bar{0}}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, alors $\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) = 1$ et si $X_i \in V_{\bar{1}}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, alors $\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma)$ (signature de σ). La super-signature est donc une généralisation naturelle de la signature au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué.

Notons $\sigma \cdot \mathscr{X} = (X_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(n)})$ l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur le produit V^n par permutation des n-uplets.

Lemme II.1.14. *Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. Alors :*

1. $K(\sigma\sigma', \mathscr{X}) = K(\sigma, \mathscr{X}) + K(\sigma', \sigma^{-1} \cdot \mathscr{X}) \pmod 2$ *;*

2. $\varepsilon(\sigma\sigma', \mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\varepsilon(\sigma', \sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})$.

Preuve. Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. Notons $\mathscr{Y} = \sigma^{-1} \cdot \mathscr{X}$. Nous avons alors :

$$(Y_{\sigma'(1)}, \ldots, Y_{\sigma'(n)}) = \sigma'^{-1} \cdot \mathscr{Y} = (\sigma\sigma')^{-1} \cdot \mathscr{X} = (X_{\sigma\sigma'(1)}, \ldots, X_{\sigma\sigma'(n)}).$$

Commençons par examiner les trois ensembles $\mathscr{I}(\sigma\sigma', \mathscr{X})$, $\mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})$ et $\mathscr{I}(\sigma', \mathscr{Y})$.

• Soit $(i, j) \in \mathscr{I}(\sigma\sigma', \mathscr{X})$. Alors $i < j$, $\sigma\sigma'(i) > \sigma\sigma'(j)$ et $X_{\sigma\sigma'(i)}, X_{\sigma\sigma'(j)} \in V_{\bar{1}}$ i.e. $Y_{\sigma'(i)}, Y_{\sigma'(j)} \in V_{\bar{1}}$. Il y a deux cas à étudier.

⋄ (a) Supposons $\sigma'(i) < \sigma'(j)$. Nous obtenons $(i, j) \notin \mathscr{I}(\sigma', \mathscr{Y})$ (car $i < j$ et $\sigma'(i) < \sigma'(j)$) mais $(\sigma'(i), \sigma'(j)) \in \mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})$.

⋄ (b) Supposons $\sigma'(i) > \sigma'(j)$. Nous obtenons $(i, j) \in \mathscr{I}(\sigma', \mathscr{Y})$ (car $i < j$ et $\sigma'(i) > \sigma'(j)$) mais $(\sigma'(j), \sigma'(i)) \notin \mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})$ (car $\sigma\sigma'(j) < \sigma\sigma'(i)$).

• Soit $(u, v) \in \mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})$. Alors $u < v$, $\sigma(u) > \sigma(v)$ et $X_{\sigma(u)}, X_{\sigma(v)} \in V_{\bar{1}}$ i.e. $Y_u, Y_v \in V_{\bar{1}}$. D'autre part, il existe i et j éléments de $[\![1, n]\!]$ tels que $u = \sigma'(i)$ et $v = \sigma'(j)$.

⋄ (c) Supposons $i < j$. Nous obtenons $(i, j) \notin \mathscr{I}(\sigma', \mathscr{Y})$ (car $\sigma'(i) < \sigma'(j)$) mais $(i, j) \in \mathscr{I}(\sigma\sigma', \mathscr{X})$ (car $\sigma\sigma'(i) > \sigma\sigma'(j)$).

⋄ (d) Supposons $i > j$. Nous obtenons $(j, i) \in \mathscr{I}(\sigma', \mathscr{Y})$ (car $\sigma'(j) > \sigma'(i)$) mais $(j, i) \notin \mathscr{I}(\sigma\sigma', \mathscr{X})$ (car $\sigma\sigma'(j) < \sigma\sigma'(i)$).

• Soit $(i, j) \in \mathscr{I}(\sigma', \mathscr{Y})$. Alors $i < j$, $\sigma'(i) > \sigma'(j)$ et $Y_{\sigma'(i)}, Y_{\sigma'(j)} \in V_{\bar{1}}$ i.e. $X_{\sigma\sigma'(i)}, X_{\sigma\sigma'(j)} \in V_{\bar{1}}$.

⋄ (e) Supposons $\sigma\sigma'(i) < \sigma\sigma'(j)$. Nous obtenons $(i, j) \notin \mathscr{I}(\sigma\sigma', \mathscr{X})$ mais $(\sigma'(j), \sigma'(i)) \in \mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})$.

⋄ (f) Supposons $\sigma\sigma'(i) > \sigma\sigma'(j)$. Nous obtenons $(i, j) \in \mathscr{I}(\sigma\sigma', \mathscr{X})$ mais $(\sigma'(j), \sigma'(i)) \notin \mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X})$.

Notons E_α (et $\alpha = \mathrm{card}(E_\alpha)$) l'ensemble des couples (i,j) (resp. (j,i) dans le cas (d)) vérifiant l'une des six situations (α) ci-dessus. D'après les distinctions de cas précédentes, nous disposons des égalités ensemblistes :

$$E_a = E_c, \quad E_b = E_f, \quad E_d = E_e.$$

Par conséquent :

$$K(\sigma\sigma', \mathscr{X}) = a + b$$

et :

$$K(\sigma, \mathscr{X}) + K(\sigma', \mathscr{Y}) = c + d + e + f = a + b + 2e = a + b + 2f,$$

d'où le résultat. □

Nous pouvons désormais définir deux nouvelles actions sur l'espace des formes multilinéaires :

Corollaire II.1.15. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\mathscr{X} \in V^n$. Nous définissons trois actions du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathscr{F}^n(V,W)$:*
- *l'action classique $(\sigma \cdot F)(\mathscr{X}) = F(\sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})$;*
- *l'**action super-antisymétrique** : $(\sigma \underset{a}{\cdot} F)(\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})F(\sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})$;*
- *l'**action super-symétrique** : $(\sigma \underset{s}{\cdot} F)(\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma, \mathscr{X})F(\sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})$.*

Preuve. Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$ et $\mathscr{X}$ un n-uplet d'éléments homogènes de V. Nous avons :

$$\begin{aligned}
((\sigma\sigma') \underset{a}{\cdot} F)(\mathscr{X}) &= \varepsilon(\sigma\sigma')\varepsilon(\sigma\sigma', \mathscr{X})F((\sigma\sigma')^{-1} \cdot \mathscr{X}) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\varepsilon(\sigma', \sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})F(\sigma'^{-1} \cdot (\sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(\sigma' \underset{a}{\cdot} F)(\sigma^{-1} \cdot \mathscr{X}) \\
&= (\sigma \underset{a}{\cdot} (\sigma' \underset{a}{\cdot} F))(\mathscr{X}).
\end{aligned}$$

La démonstration est similaire dans le cas de l'action $\sigma \underset{s}{\cdot} F$. □

Définition II.1.16. Soit $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$. L'application F est dite **super-antisymétrique** (resp. **super-symétrique**) si, et seulement si :

$$\sigma \underset{a}{\cdot} F = F \qquad (\text{resp. } \sigma \underset{s}{\cdot} F = F)$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Remarque II.1.17. Ainsi, d'après la remarque II.1.13, une forme multilinéaire super-antisymétrique est antisymétrique (au sens classique) sur les vecteurs pairs et symétrique sur les impairs. De même, une forme multilinéaire super-symétrique est symétrique sur les pairs et antisymétrique sur les impairs.

Définition II.1.18. Pour $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$, nous définissons les **opérateurs linéaires de super-antisymétrisation** et **super-symétrisation** respectivement :

$$\mathrm{A}(F) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \underset{a}{\cdot} F \tag{II.1}$$

et :

$$\mathrm{S}(F) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \underset{s}{\cdot} F. \tag{II.2}$$

Lemme II.1.19.

1. *Les opérateurs linéaires* $\mathrm{A}_n := \frac{1}{n!}\mathrm{A}_{|\mathscr{F}^n(V,W)}$ *et* $\mathrm{S}_n := \frac{1}{n!}\mathrm{S}_{|\mathscr{F}^n(V,W)}$ *induits par* A *et* S *sur le sous-espace* $\mathscr{F}^n(V,W)$ *sont des projecteurs.*

2. *Pour tout* $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$*, l'application* $\mathrm{A}(F)$ *est super-antisymétrique et l'application* $\mathrm{S}(F)$ *est super-symétrique.*

Preuve. Nous rédigeons la démonstration pour l'opérateur A, celle pour l'opérateur S s'en déduisant immédiatement. L'argument essentiel est l'existence de l'action super-antisymétrique.
1. Soit $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$. Nous avons :

$$\mathrm{A}_n(\sigma \underset{a}{\cdot} F) = \frac{1}{n!}\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \tau \underset{a}{\cdot} (\sigma \underset{a}{\cdot} F) = \frac{1}{n!}\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (\tau\sigma) \underset{a}{\cdot} F = \frac{1}{n!}\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \pi \underset{a}{\cdot} F = \mathrm{A}_n(F)$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ donc :

$$\mathrm{A}_n(\mathrm{A}_n(F)) = \mathrm{A}_n(F).$$

2. D'autre part, calculons, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $F \in \mathscr{F}^n(V,W)$:

$$\sigma \underset{a}{\cdot} (\mathrm{A}(F)) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \sigma \underset{a}{\cdot} (\tau \underset{a}{\cdot} F) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (\sigma\tau) \underset{a}{\cdot} F = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \pi \underset{a}{\cdot} F = \mathrm{A}(F)$$

donc $\mathrm{A}(F)$ est super-antisymétrique. □

Notons :

$$\mathscr{A}^n(V,W) := \mathrm{A}(\mathscr{F}^n(V,W)) \quad \text{et} \quad \mathscr{S}^n(V,W) := \mathrm{S}(\mathscr{F}^n(V,W))$$

et :

$$\mathscr{A}(V,W) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{A}^n(V,W) \quad \text{et} \quad \mathscr{S}(V,W) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathscr{S}^n(V,W).$$

L'espace $\mathscr{A}(V,W)$ (resp. $\mathscr{S}(V,W)$) est appelé **espace des applications multilinéaires super-antisymétriques** (resp. **super-symétriques**) de V dans W. Les espaces $\mathscr{A}^n(V,W)$ et $\mathscr{S}^n(V,W)$ sont naturellement $\mathbb{Z}_2$-gradués, leur graduation étant notée :

$$\mathscr{A}^n(V,W) = \mathscr{A}^n_0(V,W) \oplus \mathscr{A}^n_1(V,W) \quad \text{et} \quad \mathscr{S}^n(V,W) = \mathscr{S}^n_0(V,W) \oplus \mathscr{S}^n_1(V,W).$$

Proposition II.1.20. *Soit $F \in \mathscr{F}(V,W)$. L'application F est super-antisymétrique (resp. super-symétrique) si, et seulement si, F appartient à l'espace $\mathscr{A}(V,W)$ (resp. $\mathscr{S}(V,W)$). En résumé : pour $F \in \mathscr{A}(V,W)$ (resp. $\mathscr{S}(V,W)$), nous avons alors :*

$$F \in \mathscr{A}^n(V,W) \Longleftrightarrow F(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})F(\mathscr{X}) \ \forall\ \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\ \mathscr{X} \in V^n$$

et

$$F \in \mathscr{S}^n(V,W) \Longleftrightarrow F(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma,\mathscr{X})F(\mathscr{X}) \ \forall\ \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\ \mathscr{X} \in V^n.$$

Preuve. Nous rédigeons la démonstration pour $\mathscr{A}(V,W)$, celle pour $\mathscr{S}(V,W)$ s'en déduisant immédiatement.

Soit $F \in \mathscr{A}^n_f(V,W)$. Nous avons déjà vu dans le lemme II.1.19 que les éléments de $\mathscr{A}(V,W)$ sont super-antisymétriques. D'autre part, si F est super-antisymétrique, nous avons par définition $\sigma \underset{a}{\cdot} F = F$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ donc $\mathrm{A}(F) = n!F$, ce qui signifie : $F \in \mathscr{A}(V,W)$. □

Remarque II.1.21. Cette proposition justifie la dénomination des espaces $\mathscr{A}(V,W)$ et $\mathscr{S}(V,W)$.

II.1.b Superalgèbres $\mathscr{A}(V)$ et $\mathscr{S}(V)$ des formes multilinéaires super-antisymétriques et super-symétriques

Étudions le cas $W = \mathbb{C}$. Nous allons munir les espaces $\mathscr{A}(V,\mathbb{C})$ et $\mathscr{S}(V,\mathbb{C})$ de produits associatifs vérifiant des relations de super-commutation.

Nous notons $\mathscr{F}(V) := \mathscr{F}(V,\mathbb{C})$, $\mathscr{A}(V) := \mathscr{A}(V,\mathbb{C})$ et $\mathscr{S}(V) := \mathscr{S}(V,\mathbb{C})$. Alors l'espace $\mathscr{F}(V)$ est isomorphe à l'espace dual gradué $T(V)^*$ de l'algèbre tensorielle $T(V)$ de V.

Proposition II.1.22. *Considérons le produit suivant défini sur $\mathscr{F}(V)$, appelé **super-produit** :*

$$(\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi)(X_1,\ldots,X_{n+p}) := (-1)^{\psi(x_1+\ldots+x_n)}\Omega(X_1,\ldots,X_n)\Psi(X_{n+1},\ldots,X_{n+p}), \tag{II.3}$$

où $\Omega \in \mathscr{F}^n_\omega(V)$, $\Psi \in \mathscr{F}^p_\psi(V)$ et $X_i \in V_{x_i}$ ($i \in [\![1,n+p]\!]$).

Alors $\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi \in \mathscr{F}^{n+p}_{\omega+\psi}(V)$ et l'espace $\mathscr{F}(V)$ devient une algèbre $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée associative.

Preuve. Soit $\Omega \in \mathscr{F}^n_\omega(V)$, $\Psi \in \mathscr{F}^p_\psi(V)$ et $\Upsilon \in \mathscr{F}^q_\upsilon(V)$. Considérons $\mathscr{X}' = (X_1,\ldots,X_n) \in V^n$, $\mathscr{X}'' = (X_{n+1},\ldots,X_{n+p}) \in V^p$, $\mathscr{X}''' = (X_{n+p+1},\ldots,X_{n+p+q}) \in V^q$ et $\mathscr{X} = (\mathscr{X}',\mathscr{X}'',\mathscr{X}''') \in V^{n+p+q}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}((\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi) \underset{s}{\otimes} \Upsilon)(\mathscr{X}) &= (-1)^{\upsilon(x_1+\ldots+x_{n+p})}(\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi)(\mathscr{X}',\mathscr{X}'')\Upsilon(\mathscr{X}''') \\ &= (-1)^{\upsilon(x_1+\ldots+x_n)}(-1)^{\upsilon(x_{n+1}+\ldots+x_{n+p})}(-1)^{\psi(x_1+\ldots+x_n)}\Omega(\mathscr{X}')\Psi(\mathscr{X}'')\Upsilon(\mathscr{X}''')\end{aligned}$$

et, puisque le degré de $\Psi \underset{s}{\otimes} \Upsilon$ vaut $(p+q,\psi+\upsilon)$:

$$\begin{aligned}(\Omega \underset{s}{\otimes} (\Psi \underset{s}{\otimes} \Upsilon))(\mathscr{X}) &= (-1)^{(\psi+\upsilon)(x_1+\ldots+x_n)}\Omega(\mathscr{X}')(\Psi \underset{s}{\otimes} \Upsilon)(\mathscr{X}'',\mathscr{X}''') \\ &= (-1)^{\psi(x_1+\ldots+x_n)}(-1)^{\upsilon(x_1+\ldots+x_n)}(-1)^{\upsilon(x_{n+1}+\ldots+x_{n+p})}\Omega(\mathscr{X}')\Psi(\mathscr{X}'')\Upsilon(\mathscr{X}''').\end{aligned}$$

D'où l'associativité. □

Remarque II.1.23. Les espaces vectoriels $T(V^*)$ et $T(V)^*$ sont clairement $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-gradués. Et il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-gradués $\Phi\colon T(V^*) \longrightarrow T(V)^*$; il est construit comme suit : pour $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in V^*$ (homogènes), l'application $\Phi(\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_n) \in T(V)^*$ est définie par :

$$\Phi(\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_n)(X_1\otimes\dots\otimes X_n) := (-1)^{\Delta(\phi,x)}\varphi_1(X_1)\dots\varphi_n(X_n)$$

pour tous $X_1,\dots,X_n \in V$ (homogènes) avec (rappel) $\deg(\varphi_i) = \phi_i$ ($i \in [\![1,n]\!]$), $\phi := {}^t(\phi_1\ \dots\ \phi_n)$, $x := {}^t(x_1\ \dots\ x_n)$, $M := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (de taille n) et $\Delta(\phi,x) := {}^t\phi Mx$. Un calcul explicite de $\Delta(\phi,x)$ donne :

$$\Delta(\phi,x) = {}^t\phi Mx = \sum_{j=2}^{n} \phi_j(x_1+\dots+x_{j-1}).$$

Dans la suite nous noterons plus simplement :

$$(\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_n)(X_1\otimes\dots\otimes X_n) = (-1)^{\Delta(\phi,x)}\varphi_1(X_1)\dots\varphi_n(X_n). \tag{II.4}$$

Proposition II.1.24. *Soit $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in V^*$ et $X_1,\dots,X_n \in V$. Alors :*

$$(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_1,\dots,X_n) = (\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_n)(X_1\otimes\dots\otimes X_n).$$

*Donc l'algèbre $\mathscr{F}(V)$ est isomorphe à l'algèbre $T(V^*)$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'espace $\mathscr{F}^n(V)$ est engendré par les formes multilinéaires $\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_n$ appelées **super-tenseurs élémentaires**.*

Preuve. Via l'isomorphisme entre $T(V^*)$ et $T(V)^*$ donné dans II.1.23, nous pouvons désormais noter que l'algèbre $\mathscr{F}(V)$ des formes multilinéaires sur V est isomorphe à l'algèbre $T(V^*)$, l'isomorphisme étant donné par :

$$\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_n \in T^n(V^*) \rightsquigarrow \varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_n \in \mathscr{F}^n(V).$$

En effet, calculons $\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_n$. Soit $X_1,\dots,X_n \in V$. Alors, compte-tenu de l'associativité du super-produit de l'algèbre $\mathscr{F}(V)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_1,\dots,X_n) \\
= \;& ((\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_{n-1}) \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_1,\dots,X_{n-1},X_n) \\
= \;& (-1)^{\phi_n(x_1+\dots+x_{n-1})}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_{n-1})(X_1,\dots,X_{n-1})\varphi_n(X_n) \\
= \;& (-1)^{\phi_n(x_1+\dots+x_{n-1})}(-1)^{\phi_{n-1}(x_1+\dots+x_{n-2})}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \dots \underset{s}{\otimes} \varphi_{n-2})(X_1,\dots,X_{n-2})\varphi_{n-1}(X_{n-1})\varphi_n(X_n) \\
= \;& \dots \\
= \;& (-1)^{\Delta(\phi,x)}\varphi_1(X_1)\dots\varphi_n(X_n) \\
= \;& (\varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_n)(X_1\otimes\dots\otimes X_n).
\end{aligned}$$

Ainsi l'application précédente est un isomorphisme d'algèbres puisque le produit de $T(V^*)$ est envoyé sur le super-produit de $\mathscr{F}(V)$.

D'autre part, puisque l'espace vectoriel $T^n(V^*)$ est engendrée par les tenseurs élémentaires $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$, l'espace $\mathscr{F}^n(V)$ est engendré par les images de ces tenseurs élémentaires qui sont les formes multilinéaires $\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n$, ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Le super-produit va nous permettre de définir une structure d'algèbre associative sur chacun des deux espaces $\mathscr{A}(V)$ et $\mathscr{S}(V)$. Voyons avant cela un lemme aidant au calcul de l'expression de ces produits.

Lemme II.1.25. *Soit $\Omega \in \mathscr{A}^n_\omega(V)$ et $\Psi \in \mathscr{A}^p_\psi(V)$. Notons :*

$$S_{n,p} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p} \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(n),\ \sigma(n+1) < \ldots < \sigma(n+p)\}$$

*l'ensemble des **battages** du groupe $\mathfrak{S}_{n+p}$ relatifs à n. Alors :*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}} \sigma \underset{a}{\cdot} (\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi) = n!p! \sum_{\sigma \in S_{n,p}} \sigma \underset{a}{\cdot} (\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi).$$

Nous disposons de la même égalité dans le cas super-symétrique.

Preuve. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des sous-ensembles à n éléments de $[\![1, n+p]\!]$. Nous notons $I = (i_1, \ldots, i_n)$ un élément de $\mathscr{I}$ avec $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n+p$ et, par suite, $I^C = (i_{n+1}, \ldots, i_{n+p})$ avec $1 \leqslant i_{n+1} < \ldots < i_{n+p} \leqslant n+p$. Un sous-ensemble $I \in \mathscr{I}$ étant donné, nous définissons le sous-ensemble suivant dans $\mathfrak{S}_{n+p}$:

$$S_I := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p} \mid \sigma([\![1,n]\!]) = I\}.$$

Remarquons que si $\sigma \in S_I$, alors nous avons également $\sigma([\![n+1, n+p]\!]) = I^C$. Nous obtenons ainsi immédiatement une partition du groupe symétrique : $\mathfrak{S}_{n+p} = \bigsqcup_{I \in \mathscr{I}} S_I$ et $\mathrm{card}(S_I) = n!p!$. Nous pouvons remarquer que S_I est en bijection avec $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_p$.

Soit $X_1, \ldots, X_{n+p} \in V$ et notons $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_{n+p})$, $\mathscr{X}' = (X_1, \ldots, X_n)$ et $\mathscr{X}'' = (X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$. D'après ce qui précède, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}} \sigma \underset{a}{\cdot} (\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi)(\mathscr{X}) \\
= & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\psi(x_{\sigma(1)} + \ldots + x_{\sigma(n)})} \Omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \Psi(X_{\sigma(n+1)}, \ldots, X_{\sigma(n+p)}) \\
= & \sum_{I \in \mathscr{I}} (-1)^{\psi(x_{i_1} + \ldots + x_{i_n})} \sum_{\sigma \in S_I} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \Omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \Psi(X_{\sigma(n+1)}, \ldots, X_{\sigma(n+p)}).
\end{aligned}$$

Notons que $\mathscr{I}$ est en bijection avec $S_{n,p}$: nous associons à $I = (i_1, \ldots, i_n)$ et à $I^C = (i_{n+1}, \ldots, i_{n+p})$ le battage τ_I défini par $\tau_I(k) = i_k$, $k \in [\![1, n+p]\!]$.

Soit $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathscr{I}$ et $\sigma \in S_I$ fixés. Soit π la permutation élément de $\mathfrak{S}_{n+p}$ définie par :

$$\pi(k) := \sigma^{-1}\tau(k),$$

$k \in [\![1,n+p]\!]$, où τ désigne la permutation τ_I . Remarquons que la restriction de π à $[\![1,n]\!]$ (resp. $[\![n+1,n+p]\!]$) notée π' (resp. π'') est une permutation de $[\![1,n]\!]$ (resp. $[\![n+1,n+p]\!]$) par définition de S_I. Comme Ω et Ψ sont super-antisymétriques, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
& \Omega(X_{i_1},\ldots,X_{i_n})\Psi(X_{i_{n+1}},\ldots,X_{i_{n+p}}) \\
= \;& \Omega(X_{\sigma\pi'(1)},\ldots,X_{\sigma\pi'(n)})\Psi(X_{\sigma\pi''(n+1)},\ldots,X_{\sigma\pi''(n+p)}) \\
= \;& \Omega((\sigma\pi')^{-1}\cdot\mathscr{X}')\Psi((\sigma\pi'')^{-1}\cdot\mathscr{X}'') \\
= \;& \Omega(\pi'^{-1}\cdot(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}'))\Psi(\pi''^{-1}\cdot(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}'')) \\
= \;& \varepsilon(\pi')\varepsilon(\pi',\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}')\varepsilon(\pi'')\varepsilon(\pi'',\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}'')\Omega(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}')\Psi(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}'')
\end{aligned}$$

où nous faisons un abus de notation $\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}' = (X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})$ et $\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}'' = (X_{\sigma(n+1)},\ldots,X_{\sigma(n+p)})$. Comme $\pi'([\![1,n]\!]) = [\![1,n]\!]$ et $\pi''([\![n+1,n+p]\!]) = [\![n+1,n+p]\!]$, nous avons :

$$\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi')\varepsilon(\pi'')$$

et :

$$\varepsilon(\pi,\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}) = \varepsilon(\pi',\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}')\varepsilon(\pi'',\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}'').$$

Or, d'après le lemme II.1.14 :

$$\varepsilon(\pi,\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma^{-1},\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X})\varepsilon(\tau,\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\varepsilon(\tau,\mathscr{X}).$$

Nous obtenons donc finalement :

$$\begin{aligned}
& \Omega(X_{i_1},\ldots,X_{i_n})\Psi(X_{i_{n+1}},\ldots,X_{i_{n+p}}) \\
= \;& \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau,\mathscr{X})\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\Omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})\Psi(X_{\sigma(n+1)},\ldots,X_{\sigma(n+p)}).
\end{aligned}$$

pour tout $\sigma \in S_I$. Donc :

$$\sum_{\sigma\in S_I} \sigma \underset{a}{\cdot} (\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi)(\mathscr{X}) = (-1)^{\psi(x_{i_1}+\ldots+x_{i_n})} n!p!\varepsilon(\tau_I)\varepsilon(\tau_I,\mathscr{X})\Omega(X_{i_1},\ldots,X_{i_n})\Psi(X_{i_{n+1}},\ldots,X_{i_{n+p}}).$$

D'où le résultat sur $\mathscr{A}(V)$.

Pour montrer l'égalité sur $\mathscr{S}(V)$, il suffit de réécrire la démonstration ci-dessus en retirant les signatures. □

Définition II.1.26. Le produit **super-extérieur** de deux éléments de $\mathscr{A}(V)$ est défini par :

$$\Omega\wedge\Psi := \frac{1}{n!p!}\mathrm{A}(\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi) = \sum_{\sigma\in S_{n,p}} \sigma \underset{a}{\cdot} (\Omega \underset{s}{\otimes} \Psi), \tag{II.5}$$

où $\Omega \in \mathscr{A}^n(V)$ et $\Psi \in \mathscr{A}^p(V)$.

Définition II.1.27. Le produit **super-symétrique** de deux éléments de $\mathscr{S}(V)$ est défini par :

$$\Omega\cdot\Psi := \frac{1}{n!p!}\,\mathrm{S}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi) = \sum_{\sigma\in S_{n,p}} \sigma\underset{s}{\cdot}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi), \tag{II.6}$$

où $\Omega\in\mathscr{S}^n(V)$ et $\Psi\in\mathscr{S}^p(V)$.

Énonçons maintenant un lemme technique en vue de démontrer l'associativité de ces deux produits.

Lemme II.1.28. *Pour tout $\Omega\in\mathscr{F}^n(V)$, $\Psi\in\mathscr{F}^p(V)$, nous avons :*

$$\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi) = \frac{1}{n!p!}\,\mathrm{A}(\mathrm{A}(\Omega)\otimes\mathrm{A}(\Psi))$$

(de même avec l'opérateur de super-symétrisation S*).*

Preuve. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et $\tau\in\mathfrak{S}_p$. Nous définissons $\sigma\otimes\tau$ comme étant une permutation appartenant à $\mathfrak{S}_{n+p}$ et agissant de la sorte : σ permute le sous-ensemble $[\![1,n]\!]$ et τ permute le sous-ensemble $[\![n+1,n+p]\!]$. Alors, notant $\mathscr{X}=(X_1,\dots,X_n)$ et $\mathscr{X}'=(X_{n+1},\dots,X_{n+p})$ un n-uplet et un p-uplet de vecteurs de V, nous avons :

$$\varepsilon(\sigma\otimes\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) \quad \text{et} \quad \varepsilon(\sigma\otimes\tau,(\mathscr{X},\mathscr{X}'))=\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\varepsilon(\tau,\mathscr{X}').$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\tau)\underset{a}{\cdot}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)(\mathscr{X},\mathscr{X}') &= \varepsilon(\sigma\otimes\tau)\varepsilon(\sigma\otimes\tau,(\mathscr{X},\mathscr{X}'))(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)((\sigma\otimes\tau)^{-1}\cdot(\mathscr{X},\mathscr{X}'))\\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau,\mathscr{X}')(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)(\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X},\tau^{-1}\cdot\mathscr{X}')\\ &= (\sigma\underset{a}{\cdot}\Omega)\underset{s}{\otimes}(\tau\underset{a}{\cdot}\Psi)(\mathscr{X},\mathscr{X}')\end{aligned}$$

car Ω n'agit que sur $\mathscr{X}$ et Ψ sur $\mathscr{X}'$, et $\tau\underset{a}{\cdot}\Psi$ est de même degré que Ψ.
Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(\Omega)\underset{s}{\otimes}\mathrm{A}(\Psi) &= \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma\underset{a}{\cdot}\Omega\right)\underset{s}{\otimes}\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\tau\underset{a}{\cdot}\Psi\right) = \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_p}(\sigma\underset{a}{\cdot}\Omega)\underset{s}{\otimes}(\tau\underset{a}{\cdot}\Psi)\\ &= \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_p}(\sigma\otimes\tau)\underset{a}{\cdot}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi).\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{A}(\mathrm{A}(\Omega)\underset{s}{\otimes}\mathrm{A}(\Psi)) = \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_p}\mathrm{A}((\sigma\otimes\tau)\underset{a}{\cdot}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)) = \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_p}\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi) = n!p!\,\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)$$

d'après le lemme II.1.19.

La démonstration dans le cas de S est identique, il suffit de remplacer l'action super-antisymétrique par l'action super-symétrique. $\square$

Proposition II.1.29. *Muni du produit super-antisymétrique, l'espace $\mathscr{A}(V)$ est une algèbre associative $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée et est engendré par les produits super-extérieurs de formes linéaires $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$). De plus, nous avons la relation de commutation :*

$$\Omega\wedge\Psi=(-1)^{np+\omega\psi}\,\Psi\wedge\Omega, \tag{II.7}$$

pour tous $\Omega\in\mathscr{A}^n_\omega(V)$ et $\Psi\in\mathscr{A}^p_\psi(V)$.

Preuve. Montrons l'associativité du produit super-extérieur. Soit $\Omega\in\mathscr{F}^p(V)$, $\Psi\in\mathscr{F}^q(V)$ et $\Upsilon\in\mathscr{F}^r(V)$. D'après le lemme II.1.28, nous avons :

$$\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)=\frac{1}{p!q!}\,\mathrm{A}(\mathrm{A}(\Omega)\underset{s}{\otimes}\mathrm{A}(\Psi))=\mathrm{A}(\Omega)\wedge\mathrm{A}(\Psi).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(\Omega\wedge\Psi)\wedge\Upsilon &= \frac{1}{p!q!}\,\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)\wedge\Upsilon=\frac{1}{p!q!(p+q)!r!}\,\mathrm{A}(\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)\underset{s}{\otimes}\Upsilon)\\ &\underset{II.1.28}{=} \frac{1}{p!q!(p+q)!^2r!^2}\,\mathrm{A}(\mathrm{A}^2(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)\underset{s}{\otimes}\mathrm{A}(\Upsilon))=\frac{1}{p!q!(p+q)!r!^2}\,\mathrm{A}(\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)\underset{s}{\otimes}\mathrm{A}(\Upsilon))\\ &= \frac{1}{p!q!r!}\,\mathrm{A}((\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)\underset{s}{\otimes}\Upsilon)=\frac{1}{p!q!r!}\,\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi\underset{s}{\otimes}\Upsilon).\end{aligned}$$

Nous obtenons également $\Omega\wedge(\Psi\wedge\Upsilon)=\dfrac{1}{p!q!r!}\,\mathrm{A}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi\underset{s}{\otimes}\Upsilon)$, ce qui démontre l'associativité du produit super-extérieur sur $\mathscr{A}(V)$.

Remarquons qu'en appliquant ce que nous avons obtenu ci-dessus à des formes $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in V^*$, nous obtenons :

$$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n=\mathrm{A}(\varphi_1\underset{s}{\otimes}\ldots\underset{s}{\otimes}\varphi_n).$$

Or, d'après la proposition II.1.24, l'espace $\mathscr{F}(V)$ est engendré par les super-tenseurs élémentaires. Par conséquent, l'espace $\mathscr{A}(V)$ est engendré par les images par A de ces tenseurs, c'est-à-dire les éléments $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n$ pour $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in V^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Montrons maintenant la relation de commutation. Soit $\Omega\in\mathscr{A}^n_\omega(V)$ et $\Psi\in\mathscr{A}^p_\psi(V)$.

<u>Premier cas :</u> Si $n=p=1$: soit $X,Y\in V$. Nous avons, compte tenu de la remarque II.1.9 :

$$\begin{aligned}(\Omega\wedge\Psi)(X,Y) &= (\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)(X,Y)-(-1)^{xy}(\Omega\underset{s}{\otimes}\Psi)(Y,X)\\ &= (-1)^{\psi x}\,\Omega(X)\Psi(Y)-(-1)^{xy}(-1)^{\psi y}\,\Omega(Y)\Psi(X)\\ &= (-1)^{\psi\omega}\,\Omega(X)\Psi(Y)-\Omega(Y)\Psi(X)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(\Psi\wedge\Omega)(X,Y) &= (-1)^{\omega x}\,\Psi(X)\Omega(Y)-(-1)^{xy}(-1)^{\omega y}\,\Psi(Y)\Omega(X)\\ &= (-1)^{\psi\omega}\,\Psi(X)\Omega(Y)-\Psi(Y)\Omega(X).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\Omega\wedge\Psi=(-1)^{\psi\omega+1}\,\Psi\wedge\Omega=(-1)^{\psi\omega+np}\,\Psi\wedge\Omega$

Deuxième cas : n et p quelconques. D'après ce qui précède, nous pouvons supposer $\Omega = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ et $\Psi = \vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_p$ avec $\omega = \phi_1 + \ldots + \phi_n$ et $\psi = \theta_1 + \ldots + \theta_p$. D'après le calcul dans le premier cas, nous obtenons, en faisant commuter successivement chacune des formes φ_i avec les formes $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p$:

$$\begin{aligned}
\Omega \wedge \Psi &= \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_p \\
&= (-1)^{\phi_n(\theta_1+\ldots+\theta_p)+p} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_p \wedge \varphi_n \\
&= (-1)^{\phi_n \psi + p} (-1)^{\phi_{n-1}\psi + p} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-2} \wedge \vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_p \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n \\
&= \ldots \\
&= (-1)^{\omega\psi + np}\, \Psi \wedge \Omega.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Nous disposons de résultats similaires sur l'algèbres des formes super-symétriques :

Proposition II.1.30. *Muni du produit super-symétrique, l'espace $\mathscr{S}(V)$ est une algèbre associative $\mathbb{Z}_2$-graduée (provenant de la $\mathbb{Z}_2$-graduation de V) et est engendré par les n-formes super-symétriques élémentaires $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Dans $\mathscr{S}(V)$, nous avons la relation de commutation :*

$$\Omega \cdot \Psi = (-1)^{\omega\psi}\, \Psi \cdot \Omega, \tag{II.8}$$

pour $\Omega \in \mathscr{S}(V)$ de degré ω et $\Psi \in \mathscr{S}(V)$ de degré ψ.

Preuve. Pour montrer l'associativité et exhiber un système de générateurs, nous procédons comme dans la preuve de la proposition II.1.29 en remplaçant A par S. La relation de commutation super-symétrique s'obtient également à partir de la preuve de la relation de commutation super-antisymétrique. Nous rappelons uniquement que si Ω, Ψ sont des formes linéaires, et X, Y deux vecteurs de V, alors :

$$\begin{aligned}
(\Omega \cdot \Psi)(X,Y) &= (-1)^{\psi x}\Omega(X)\Psi(Y) + (-1)^{xy}(-1)^{\psi y}\Omega(Y)\Psi(X) \\
&= (-1)^{\psi\omega}\Omega(X)\Psi(Y) + \Omega(Y)\Psi(X) \\
&= (-1)^{\psi\omega}(\Psi \cdot \Omega)(X,Y).
\end{aligned}$$

□

II.1.c Actions du groupe symétrique

Dans toute cette partie, les formes linéaires $\varphi \in V^*$ seront supposées homogènes (de degré ϕ, voir la remarque II.1.9). Nous rappelons que les opérateurs A et S sont définis sur l'espace dual gradué $T(V)^*$. Nous allons étendre leur définition à l'espace gradué $T(V^*)$ en définissant au préalable les notions de tenseur super-antisymétrique et super-symétrique compatibles avec l'isomorphisme défini entre les espaces gradués $T(V^*)$ et $T(V)^*$.

Notation II.1.31. Soit $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. Le vecteur $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ désignera le vecteur des degrés du n-uplet $\mathscr{X}$. Si $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ et $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, nous notons $|x| := x_1 + \ldots + x_n \in \mathbb{Z}_2$ et $x.y := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{Z}_2$.

Lemme II.1.32. *Soit $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Nous disposons de l'action $\sigma \cdot x = {}^t(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. Alors :*

$$\Delta(\sigma \cdot x, \sigma \cdot x) = \Delta(x, x).$$

Preuve. Par commodité d'écriture, montrons que $\Delta(\sigma^{-1} \cdot x, \sigma^{-1} \cdot x) = \Delta(x, x)$. Les calculs explicites donnent :

$$\Delta(x,x) = \sum_{j=2}^{n} x_j (x_1 + \ldots + x_{j-1}) \quad \text{et} \quad \Delta(\sigma^{-1} \cdot x, \sigma^{-1} \cdot x) = \sum_{j=2}^{n} x_{\sigma(j)} (x_{\sigma(1)} + \ldots + x_{\sigma(j-1)}).$$

Montrons l'égalité pour les transpositions $(i\ i+1)$ engendrant $\mathfrak{S}_n$ ($i \in [\![1, n-1]\!]$). Pour $\sigma = (i\ i+1)$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \Delta(\sigma^{-1} \cdot x, \sigma^{-1} \cdot x) \\
= \ & \sum_{j=2}^{i-1} x_j (x_1 + x_2 + \ldots + x_{j-1}) + x_{i+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}) + \\
& x_i (x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1}) + \sum_{j=i+2}^{n} x_j (x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + x_i + x_{i+2} + \ldots + x_{j-1}) \\
= \ & \Delta(x, x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Lemme II.1.33. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. Alors :*

$$\sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma^{-1}) \varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi}) (\varphi_{\sigma^{-1}(1)} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_{\sigma^{-1}(n)})(\mathscr{X}); \tag{II.9}$$

$$\sigma \underset{s}{\cdot} (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi}) (\varphi_{\sigma^{-1}(1)} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_{\sigma^{-1}(n)})(\mathscr{X}). \tag{II.10}$$

où $\underline{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. De plus, nous avons l'égalité :

$$\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi}). \tag{II.11}$$

dans les expressions (II.9) et (II.10).

Preuve. D'après la proposition II.1.24 :

$$\begin{aligned}
\sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(\mathscr{X}) &= \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \\
&= \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) (-1)^{\Delta(\phi, \sigma^{-1} \cdot x)} \varphi_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_n(X_{\sigma(n)}) \\
&= \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) (-1)^{\Delta(\phi, \sigma^{-1} \cdot x)} \varphi_{\sigma^{-1}(1)}(X_1) \ldots \varphi_{\sigma^{-1}(n)}(X_n).
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire $\phi_i = x_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ (sinon le terme correspondant est nul). Donc $\phi = \sigma^{-1} \cdot x$ et nous pouvons remplacer $\Delta(\phi, \sigma^{-1} \cdot x)$ par $\Delta(\phi, \phi)$ ou $\Delta(\sigma^{-1} \cdot x, \sigma^{-1} \cdot x) = \Delta(x,x)$ d'après le lemme II.1.32.

Montrons que :

$$\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})$$

Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X}) &= \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j),\ x_{\sigma(i)} = x_{\sigma(j)} = \overline{1}\} \\
&= \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j),\ \phi_i = \phi_j = \overline{1}\} \\
&= \{(\alpha,\beta) \in [\![1,n]\!]^2 \mid \alpha < \beta,\ \sigma^{-1}(\alpha) > \sigma^{-1}(\beta),\ \phi_{\sigma^{-1}(\alpha)} = \phi_{\sigma^{-1}(\beta)} = \overline{1}\} \\
&= \mathscr{I}(\sigma^{-1}, \underline{\varphi}).
\end{aligned}$$

Nous aboutissons donc à :

$$\sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(\mathscr{X}) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})\varphi_{\sigma^{-1}(1)} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_{\sigma^{-1}(n)}(\mathscr{X}).$$

D'où le résultat. La preuve de la formule (II.10) est obtenue en retirant les signatures. □

Corollaire II.1.34. *Nous en déduisons deux actions du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur l'espace $T^n(V^*)$; elles sont définies sur les tenseurs élémentaires par les expressions suivantes :*

$$\sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})\sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n); \tag{II.12}$$

$$\sigma \underset{s}{\cdot} (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})\sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n). \tag{II.13}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser le lemme II.1.33 et l'isomorphisme entre $\mathscr{F}(V)$ et $T(V^*)$ donné dans la proposition II.1.24. □

Remarque II.1.35. Ceci justifie que les actions super-antisymétrique et super-symétrique sont deux actions linéaires bien définies sur $T(V^*)$ par les formules (II.12) et (II.13). En effet, d'après le lemme II.1.33 et l'isomorphisme entre $\mathscr{F}(V)$ et $T(V^*)$ donné dans la proposition II.1.24, nous pouvons prolonger les formules :

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n \rightsquigarrow \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})\sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)$$

et :

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n \rightsquigarrow \varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})\sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)$$

par linéarité à $T^n(V^*)$, ce qui n'était pas évident a priori. Par conséquent, nous pouvons définir les opérateurs A et S sur les espaces $T^n(V^*)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) par les formules (II.1) et (II.2) : ce sont des opérateurs linéaires bien définis. Ils vérifient de la même manière :

$$\mathrm{A}(\sigma \underset{a}{\cdot} t) = \mathrm{A}(t) = \sigma \underset{a}{\cdot} (\mathrm{A}(t)) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(\sigma \underset{s}{\cdot} t) = \mathrm{S}(t) = \sigma \underset{s}{\cdot} (\mathrm{S}(t))$$

pour tout $t \in T^n(V^*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous pouvons alors réécrire la définition du produit super-extérieur (II.5) et celle du produit super-symétrique (II.6) pour des tenseurs de l'espace $T(V^*)$.

Remarque II.1.36. L'espace vectoriel $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ étant de dimension finie, il existe un isomorphisme entre V et V^{**}. Contrairement au cas classique, nous prenons ici la définition suivante : $X \in V \rightsquigarrow \widehat{X} \in V^{**}$ où :

$$\widehat{X}(\varphi) := (-1)^{\phi x} \varphi(X)$$

pour $\varphi \in V^*_\phi$ et $X \in V_x$. Compte-tenu de la remarque II.1.9 et du fait que $x^2 \equiv x \pmod 2$, nous pouvons nous contenter d'écrire $\widehat{X}(\varphi) = (-1)^x \varphi(X)$ ou $\widehat{X}(\varphi) = (-1)^\phi \varphi(X)$ suivant la situation.

Lemme II.1.37. *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n(\mathscr{X}) &= \mathrm{A}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(\mathscr{X}) && \text{(II.14)}\\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\Delta(\phi, \sigma^{-1}\cdot x)} \varphi_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_n(X_{\sigma(n)}) && \text{(II.15)}\\
&= (-1)^{|\phi|} \widehat{X}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) && \text{(II.16)}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n(\mathscr{X}) &= \mathrm{S}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(\mathscr{X}) && \text{(II.17)}\\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\Delta(\phi, \sigma^{-1}\cdot x)} \varphi_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_n(X_{\sigma(n)}) && \text{(II.18)}\\
&= (-1)^{|\phi|} \widehat{X}_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{X}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n). && \text{(II.19)}
\end{aligned}$$

Notons que nous pouvons remplacer l'expression $\Delta(\phi, \sigma^{-1} \cdot x)$ par $\Delta(\phi, \phi)$ ou par $\Delta(\sigma^{-1} \cdot x, \sigma^{-1} \cdot x) = \Delta(x, x)$ dans (II.15) et (II.18), et $(-1)^{|\phi|}$ par $(-1)^{|x|}$ dans (II.16) et (II.19).

Preuve. Rappelons que d'après la proposition II.1.29, nous avons $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n = \mathrm{A}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)$. Nous obtenons ainsi, en utilisant le lemme II.1.33 :

$$\begin{aligned}
& \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n(X_1, \ldots, X_n)\\
= \; & \mathrm{A}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_1, \ldots, X_n)\\
= \; & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_1, \ldots, X_n)\\
= \; & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})(-1)^{\Delta(\phi,\phi)} \varphi_{\sigma^{-1}(1)}(X_1) \ldots \varphi_{\sigma^{-1}(n)}(X_n)\\
= \; & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})(-1)^{\Delta(\phi,\phi)}(-1)^{x_1\phi_{\sigma^{-1}(1)} + \ldots + x_n\phi_{\sigma^{-1}(n)}} \widehat{X}_1(\varphi_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots \widehat{X}_n(\varphi_{\sigma^{-1}(n)})\\
= \; & (-1)^{|\phi|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\Delta(x, \sigma\cdot\phi)} \widehat{X}_1(\varphi_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots \widehat{X}_n(\varphi_{\sigma^{-1}(n)})\\
= \; & (-1)^{|\phi|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma^{-1} \underset{a}{\cdot} (\widehat{X}_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \widehat{X}_n)(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\\
= \; & (-1)^{|\phi|} \widehat{X}_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X}_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).
\end{aligned}$$

Même démarche pour $\mathscr{S}(V)$. □

Remarque II.1.38. Nous déduisons de ce qui précède un isomorphisme entre $T^n(V^*)^*$ et $T^n(V^{**}) \simeq T^n(V)$. Il est donné par :

$$\begin{aligned}
(X_1 \otimes \ldots \otimes X_n)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) &:= (\widehat{X_1} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \widehat{X_n})(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \\
&= (-1)^{\Delta(\widehat{x},\widehat{x})} \widehat{X_1}(\varphi_1) \ldots \widehat{X_n}(\varphi_n) \\
&= (-1)^{\Delta(x,x)} (-1)^{x.\phi} \varphi_1(X_1) \ldots \varphi_n(X_n) \\
&= (-1)^{x.\phi} (\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n)(X_1, \ldots, X_n)
\end{aligned}$$

car $\phi = x$ (dans le cas contraire, le résultat est nul). Nous pouvons écrire $(-1)^{|\phi|} = (-1)^{|x|}$ pour $(-1)^{x.\phi} = (-1)^{x_1\phi_1 + \ldots + x_n\phi_n}$.

Définition II.1.39. Soit $U \in \mathrm{End}(V,W)$ de degré u (où V et W sont des espaces $\mathbb{Z}_2$-gradués). La **super-transposition** de U, notée ${}^TU$, est une application linéaire de W^* dans V^* définie par :

$$ {}^TU(\varphi)(X) = (-1)^{\phi u} \varphi(U(X)) $$

pour tout $\varphi \in W^*_\phi$ et $X \in V$.

Remarque II.1.40. Notons que si U est de degré $u \in \mathbb{Z}_2$, alors ${}^TU$ est également de degré u.

Lemme II.1.41. *L'action super-antisymétrique définit une application linéaire paire de l'espace $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathscr{F}(V)$ dans lui-même donc nous pouvons considérer sa super-transposition qui est une application linéaire de $\mathscr{F}(V)^* \simeq T(V)$ dans lui-même donnée par la relation :*

$$ {}^T\sigma \underset{a}{\cdot} (X_1 \otimes \ldots \otimes X_n) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\sigma^{-1} \cdot (X_1 \otimes \ldots \otimes X_n) $$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$.

Nous avons une expression similaire pour la super-transposition de l'action super-symétrique, sans la signature.

Preuve. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ et $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in V^n$. D'après la remarque II.1.38, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& {}^T\sigma \underset{a}{\cdot} (X_1 \otimes \ldots \otimes X_n)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) \\
= \;& (-1)^0 (X_1 \otimes \ldots \otimes X_n)(\sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)) \\
= \;& (\widehat{X_1} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \widehat{X_n})(\sigma \underset{a}{\cdot} (\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)) \\
= \;& \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})(\widehat{X_1} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \widehat{X_n})(\varphi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\sigma^{-1}(n)}) \\
= \;& \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma^{-1}, \underline{\varphi})(-1)^{\Delta(x,\sigma\cdot\phi)} \widehat{X_1}(\varphi_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots \widehat{X_n}(\varphi_{\sigma^{-1}(n)}) \\
\underset{\substack{x=\sigma\cdot\phi \\ (II.11)}}{=} \;& \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\Delta(x,x)} \widehat{X_{\sigma(1)}}(\varphi_1) \ldots \widehat{X_{\sigma(n)}}(\varphi_n) \\
= \;& \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(\widehat{X_{\sigma(1)}} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \widehat{X_{\sigma(n)}})(\varphi_1, \ldots, \varphi_n). \\
= \;& \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(X_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes X_{\sigma(n)})(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Ainsi, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur les espaces $T^n(V)$ et $T^n(V^*) = T^n(V)^*$ (par les actions super-antisymétrique et super-symétrique) et l'action sur $T^n(V^*)$ est la contragrédiente de l'action sur $T^n(V)$:

$$(\sigma \underset{a,s}{\cdot} F)(t) = F(\sigma^{-1} \underset{a,s}{\cdot} t) \tag{II.20}$$

pour $F \in T^n(V^*)$ et $t \in T^n(V)$. Nous pouvons donc définir les notions de **tenseurs super-antisymétriques et super-symétriques** et les opérateurs A et S sont donnés sur les tenseurs de $T^n(V)$ par les formules habituelles. Comme conséquence de (II.20), nous avons :

$$\mathrm{A}(F)(t) = F(\mathrm{A}(t)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}(F)(t) = F(\mathrm{S}(t)),$$

pour tous $F \in T^n(V^*) = T^n(V)^* = \mathscr{F}^n(V)$ et $t \in T^n(V)$.

II.1.d Algèbre super-extérieure : construction formelle

Soit $n_{\bar{0}}, n_{\bar{1}} \in \mathbb{N}^*$ et A l'algèbre de base $\{E_{(I,I')},\ I \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar{0}}},\ I' \in \mathbb{Z}^{n_{\bar{1}}}\}$ avec le produit défini par :

$$E_{(I,I')} \wedge E_{(J,J')} = (-1)^{\Delta(I,J)} 0^{IJ} (-1)^{I'.J} E_{(I+J,I'+J')} \tag{II.21}$$

avec les notations :

$$\Delta(I,J) = \sum_{k=2}^{n_{\bar{0}}} i_k(j_1 + \ldots + j_{k-1})$$

(c'est la même forme bilinéaire définie dans la remarque II.1.23),

$$0^{IJ} := 0^{|IJ|} = 0^{i_1 j_1 + \ldots + i_{n_{\bar{0}}} j_{n_{\bar{0}}}}$$

et :

$$(-1)^{I'.J} := (-1)^{|I'||J|} \text{ avec } |I'||J| = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_{\bar{1}} \\ 1 \leqslant \ell \leqslant n_{\bar{0}}}} i'_k j_\ell.$$

Remarque II.1.42. A priori, nous devrions écrire $E_{(I+J \pmod 2), I'+J')}$ dans la formule (II.21). Or,

$$I + J = I + J \pmod 2 \Leftrightarrow IJ \neq 0 \Leftrightarrow 0^{IJ} = 0.$$

Donc nous pouvons nous contenter d'écrire $E_{(I+J,I'+J')}$.

Lemme II.1.43. *Le produit (II.21) est associatif.*

Preuve. Soit $I, J, K \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar{0}}}$ et $I', J', K' \in \mathbb{Z}^{n_{\bar{1}}}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(E_{(I,I')} \wedge E_{(J,J')}) \wedge E_{(K,K')} &= (-1)^{\Delta(I,J)} 0^{IJ} (-1)^{I'.J} E_{(I+J,I'+J')} \wedge E_{(K,K')} \\ &= (-1)^{\Delta(I,J)} 0^{IJ} (-1)^{I'.J} (-1)^{\Delta(I+J,K)} 0^{(I+J)K} (-1)^{(I'+J').K} E_{(I+J+K,I'+J'+K')}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_{(I,I')}\wedge(E_{(J,J')}\wedge E_{(K,K')}) &= (-1)^{\Delta(J,K)}0^{JK}(-1)^{J'.K}E_{(I,I')}\wedge E_{(J+K,J'+K')} \\ &= (-1)^{\Delta(J,K)}0^{JK}(-1)^{J'.K}(-1)^{\Delta(I,J+K)}0^{I(J+K)}(-1)^{I'.(J+K)}E_{(I+J+K,I'+J'+K')}. \end{aligned}$$

La forme Δ est bilinéaire donc $\Delta(I+J,K)+\Delta(I,J)=\Delta(J,K)+\Delta(I,J+K)$. D'autre part, puisque nous avons :

$$(I'+J').K=|I'+J'||K|=(|I'|+|J'|)|K|=|I'||K|+|J'||K|=I'.K+J'.K,$$

nous obtenons bien $(-1)^{I'.J+(I'+J').K}=(-1)^{J'.K+I'.(J+K)}$. Enfin :

$$0^{(I+J)K}=0^{|IK+JK|}=0^{|IK|+|JK|}$$

donc $0^{IJ+(I+J)K}=0^{JK+I(J+K)}$, d'où l'associativité du produit (II.21). □

Nous définissons un $\mathbb{Z}$-degré et un $\mathbb{Z}_2$-degré sur A :

$$\deg_{\mathbb{Z}}(E_{(I,I')}):=|I|+|I'| \qquad \deg_{\mathbb{Z}_2}(E_{(I,I')}):=\overline{|I'|}=|I'| \pmod 2.$$

Nous obtenons donc en fait un $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-degré que nous notons :

$$\deg(E_{(I,I')}):=(|I|+|I'|,\overline{|I'|}).$$

Remarque II.1.44. Examinons la formule du produit (II.21) sur des éléments de base particuliers :

$$\begin{aligned} E_{(I,0)}\wedge E_{(J,0)} &= (-1)^{\Delta(I,J)}0^{IJ}(-1)^0E_{(I+J,0)} \\ &= (-1)^{\Delta(I,J)}0^{IJ}E_{(I+J,0)}. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la formule du produit extérieur formel.

$$\begin{aligned} E_{(0,I')}\wedge E_{(0,J')} &= (-1)^0 0^0(-1)^0E_{(0,I'+J')} \\ &= E_{(0,I'+J')}. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la formule du produit symétrique. Enfin :

$$\begin{aligned} E_{(I,0)}\wedge E_{(0,J')} &= (-1)^0 0^0(-1)^0E_{(I,J')} \\ &= E_{(I,J')}. \\ E_{(0,I')}\wedge E_{(J,0)} &= (-1)^0 0^0(-1)^{I'.J}E_{(I',J)} \\ &= (-1)^{I'.J}E_{(I',J)}. \end{aligned}$$

En particulier, en notant $E_i:=E_{(I_i,0)}$ où $I_i=(\overline{0},\ldots,\overline{0},\overline{1}_i,\overline{0},\ldots,\overline{0})\in\mathbb{Z}_2^{n_{\overline{0}}}$ pour $i\in[\![1,n_{\overline{0}}]\!]$ et $E'_j:=E_{(0,I'_j)}$ où $I'_j=(0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^{n_{\overline{1}}}$ pour $j\in[\![1,n_{\overline{1}}]\!]$, nous avons :

$$\begin{cases} E_i\wedge E_i=0 \\ E_i\wedge E_j=-E_j\wedge E_i\ (i\neq j) \\ E'_i\wedge E'_j=E'_j\wedge E'_i \\ E_i\wedge E'_j=-E'_j\wedge E_i. \end{cases} \tag{II.22}$$

Ces constatations conduisent au résultat suivant :

Proposition II.1.45. *L'algèbre A est isomorphe à l'algèbre* $\bigwedge(V_{\bar{0}}) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar{1}})$ *résultant du produit tensoriel* $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$*-gradué des algèbres* $\bigwedge(V_{\bar{0}})$ *et* $\mathrm{S}(V_{\bar{1}})$.

Preuve. Soit $\{E_1,\dots,E_{n_{\bar{0}}}\}$ une base de $V_{\bar{0}}$ et $\{E'_1,\dots,E'_{n_{\bar{1}}}\}$ une base de $V_{\bar{1}}$. Nous en déduisons les bases canoniques $\{E_I, I\in\mathbb{Z}_2^{n_{\bar{0}}}\}$ de $\bigwedge(V_{\bar{0}})$ et $\{E_{I'}, I'\in\mathbb{Z}^{n_{\bar{1}}}\}$ de $\mathrm{S}(V_{\bar{1}})$. Rappelons que ce sont deux algèbres $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduées, les degrés étant donnés par : $\deg(E_I)=(|I|,\bar{0})$ et $\deg(E_{I'})=(|I'|,\overline{|I'|})$. Rappelons également les formules du produit sur les bases canoniques :

$$E_I\wedge E_J=(-1)^{\Delta(I,J)}0^{IJ}E_{I+J}\qquad\qquad E_{I'}E_{J'}=E_{I'+J'}.$$

L'application $\Phi\colon \bigwedge(V_{\bar{0}}) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar{1}})\to A$ définie sur la base par : $E_I\otimes E_{I'}\mapsto E_{(I,I')}$ est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels. Le produit dans $\bigwedge(V_{\bar{0}}) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar{1}})$ (pour leur structure $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée) est donné par :

$$\begin{aligned}(E_I\otimes E_{I'})(E_J\otimes E_{J'}) &= (-1)^{|I'||J|+|I'|0}(E_I\wedge E_J)\otimes(E_{I'}E_{J'})=(-1)^{|I'||J|}(E_I\wedge E_J)\otimes(E_{I'}E_{J'})\\ &= (-1)^{|I'||J|}(-1)^{\Delta(I,J)}0^{IJ}E_{I+J}\otimes E_{I'+J'}.\end{aligned}$$

D'après (II.21), son image par Φ est égale au produit $E_{(I,I')}\wedge E_{(J,J')}$ dans A. □

Remarque II.1.46. Comme la deuxième composante du degré des éléments de $\bigwedge(V_{\bar{0}})$ est nulle, nous pouvons nous contenter d'écrire le produit tensoriel $\mathbb{Z}$-gradué $\bigwedge(V_{\bar{0}})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathrm{S}(V_{\bar{1}})$ des deux algèbres $\bigwedge(V_{\bar{0}})$ et $\mathrm{S}(V_{\bar{1}})$ en considérant que $\deg(E_I)=|I|$ dans $\bigwedge(V_{\bar{0}})$ et $\deg(E_{I'})=|I'|$ dans $\mathrm{S}(V_{\bar{1}})$.

Nous notons $A=\bigwedge(V)$ et nous la nommons **algèbre super-extérieure** de V. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que si tous les éléments impairs (resp. pairs) sont nuls dans V, l'algèbre super-extérieure coïncide avec l'algèbre extérieure (resp. symétrique) de V.

Nous pouvons réécrire une base de $\bigwedge(V)$ en termes d'une base d'homogènes de $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$: si $\{X_1,\dots,X_{n_{\bar{0}}}\}$ est une base de $V_{\bar{0}}$ et $\{Y_1,\dots,Y_{n_{\bar{1}}}\}$ une base de $V_{\bar{1}}$, alors :

$$\{X_1^{i_1}\wedge\dots\wedge X_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}}\otimes {Y_1}^{j_1}\dots {Y_{n_{\bar{1}}}}^{j_{n_{\bar{1}}}},\ i_1,\dots,i_{n_{\bar{0}}}\in\mathbb{Z}_2,\ j_1,\dots,j_{n_{\bar{1}}}\in\mathbb{N}\}\text{ est une base de }\bigwedge(V)\tag{II.23}$$

Notons I l'idéal de $T(V)$ engendré par les tenseurs $X\otimes Y-(-1)^{1+xy}Y\otimes X$ pour tout $X\in V_x$ et $Y\in V_y$ (il s'agit de l'idéal des tenseurs super-antisymétriques) et considérons le quotient $T(V)/I$. Alors $T(V)/I$ vérifie les relations (II.22) et a pour système de générateurs les vecteurs $X_1^{i_1}\dots X_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}}Y_1^{j_1}\dots Y_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}}$ avec $i_1,\dots,i_{n_{\bar{0}}}\in\mathbb{Z}_2$ et $j_1,\dots,j_{n_{\bar{1}}}\in\mathbb{N}$.

L'algèbre super-extérieure $\bigwedge(V)$ et l'algèbre quotient $T(V)/I$ vérifient toutes deux la propriété universelle suivante : *si φ est une application linéaire de V dans une algèbre B telle que son image $\{\varphi(X), X\in V\}$ vérifie les relations (II.22), alors φ se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de $\bigwedge(V)$ (ou $T(V)/I$) dans B.*

Nous en déduisons que $\bigwedge(V)$ et $T(V)/I$ sont deux algèbres isomorphes.

II.1.e Isomorphismes entre la superalgèbre $\mathscr{A}(V)$ et l'algèbre super-extérieure

Soit $\{X_1,\dots,X_{n_{\bar 0}},Y_1,\dots,Y_{n_{\bar 1}}\}$ une base d'homogènes de V, et $\{\varphi_1,\dots,\varphi_{n_{\bar 0}},\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n_{\bar 1}}\}$ la base duale.

Définition II.1.47. Nous dirons qu'un n-uplet de vecteurs de la base $(X_{i_1},\dots,X_{i_k},Y_{j_1},\dots,Y_{j_\ell})$ $(k+\ell=n)$ est **ordonné** si $1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_k\leqslant n_{\bar 0}$ et $1\leqslant j_1\leqslant\dots\leqslant j_\ell\leqslant n_{\bar 1}$.

Remarque II.1.48. Compte-tenu des propriétés de symétrie des applications multilinéaires de $\mathscr{A}(V)$ ou de $\mathscr{S}(V)$, il est naturel de les évaluer sur de tels n-uplets ordonnés.

Dans l'algèbre des formes super-antisymétriques $\mathscr{A}(V)$, considérons l'espace $G_{\bar 0}$ (resp. $S_{\bar 1}$) des formes super-antisymétriques nulles dès que l'un des termes est dans $V_{\bar 1}$ (resp. $V_{\bar 0}$). Plus précisément :

$$G_{\bar 0}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}G_{\bar 0}^n \qquad\qquad S_{\bar 1}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}S_{\bar 1}^n$$

avec :

$$G_{\bar 0}^n=\{\Omega\in\mathscr{A}^n(V)\mid\Omega_{|V_{\bar 1}\times V\times\ldots\times V}=0\}$$

et :

$$S_{\bar 1}^n=\{\Psi\in\mathscr{A}^n(V)\mid\Psi_{|V_{\bar 0}\times V\times\ldots\times V}=0\}.$$

Rappelons qu'une forme $\Omega\in\mathscr{A}^n(V)$ est super-antisymétrique si et seulement si :

$$\Omega(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{Z})\Omega(Z_1,\dots,Z_n)$$

pour tout $\mathscr{Z}=(Z_1,\dots,Z_n)\in V^n$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. En utilisant la remarque II.1.13, nous pouvons alors écrire la condition de super-antisymétrie sur $G_{\bar 0}$ et $S_{\bar 1}$:

$$\Omega\in G_{\bar 0}^n\Longleftrightarrow\begin{cases}\Omega(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\Omega(Z_1,\dots,Z_n),\ \forall\, Z_i\in V_{\bar 0},\ \forall\,\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \Omega_{|V_{\bar 1}\times V\times\ldots\times V}=0\end{cases}\tag{II.24}$$

et :

$$\Psi\in S_{\bar 1}^n\Longleftrightarrow\begin{cases}\Psi(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)})=\Psi(Z_1,\dots,Z_n),\ \forall\, Z_i\in V_{\bar 1},\ \forall\,\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \Psi_{|V_{\bar 0}\times V\times\ldots\times V}=0\end{cases}.\tag{II.25}$$

Ainsi les éléments de $G_{\bar 0}$ (resp. $S_{\bar 1}$) sont antisymétriques (resp. symétriques) au sens usuel.

Proposition II.1.49. *Les sous-espaces $G_{\bar 0}$ et $S_{\bar 1}$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{A}(V)$.*

Preuve. En effet, écrivons le produit super-extérieur de deux éléments de $G_{\bar 0}$ (resp. $S_{\bar 1}$) : d'après la définition (II.5), nous avons :

$$\Omega\wedge\Omega'(Z_1,\dots,Z_{n+n'})=\sum_{\sigma\in S_{n,n'}}\varepsilon(\sigma)\Omega(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)})\Omega'(Z_{\sigma(n+1)},\dots,Z_{\sigma(n+n')})\tag{II.26}$$

pour $\Omega \in G_{\bar{0}}^{n}$, $\Omega' \in G_{\bar{0}}^{n'}$ et $Z_1, \ldots, Z_{n+n'} \in V_{\bar{0}}$. En effet, les termes $(-1)^{\omega'(z_{\sigma(1)}+\ldots+z_{\sigma(n)})}$ (voir (II.3)) sont égaux à 1 dans (II.26) car les degrés des vecteurs Z_i sont égaux à $\overline{0}$. Nous avons alors immédiatement $\Omega \wedge \Omega' \in G_{\bar{0}}$.

D'autre part :

$$\Psi \wedge \Psi'(Z_1, \ldots, Z_{n+n'}) = (-1)^{nn'} \sum_{\sigma \in S_{n,n'}} \Psi(Z_{\sigma(1)}, \ldots, Z_{\sigma(n)}) \Psi'(Z_{\sigma(n+1)}, \ldots, Z_{\sigma(n+n')}) \tag{II.27}$$

pour $\Psi \in S_{\bar{1}}^{n}$, $\Psi' \in S_{\bar{1}}^{n'}$ et $Z_1, \ldots, Z_{n+n'} \in V_{\bar{1}}$. Ici les termes $(-1)^{\psi'(z_{\sigma(1)}+\ldots+z_{\sigma(n)})}$ sont égaux à $(-1)^{nn'}$. En effet, les degrés des vecteurs Z_i sont égaux à $\overline{1}$ et compte-tenu de la remarque II.1.9, nous pouvons ainsi écrire $\psi' = z_{\sigma(n+1)} + \ldots + z_{\sigma(n+n')} = \overline{n'}$ et $\psi = z_{\sigma(1)} + \ldots + z_{\sigma(n)} = \overline{n}$. Nous en concluons que $\Psi \wedge \Psi' \in S_{\bar{1}}$. $\square$

Nous allons maintenant exhiber une base des espaces $G_{\bar{0}}$ et $S_{\bar{1}}$.

Lemme II.1.50. *Soit $\psi_1, \ldots, \psi_n \in V_{\bar{1}}^{*}$ et $Z_1, \ldots, Z_n \in V_{\bar{1}}$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n(Z_1, \ldots, Z_n) &= (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_1(Z_{\sigma(1)}) \ldots \psi_n(Z_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\psi_{\sigma(1)} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \psi_{\sigma(n)})(Z_1, \ldots, Z_n)
\end{aligned}$$

De plus, $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ est élément de $S_{\bar{1}}^{n}$.

Preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n(Z_1, \ldots, Z_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \mathscr{Z}) (\psi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \psi_n)(Z_{\sigma(1)}, \ldots, Z_{\sigma(n)}) \\
&= (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_1(Z_{\sigma(1)}) \ldots \psi_n(Z_{\sigma(n)}) \\
&= (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_{\sigma^{-1}(1)}(Z_1) \ldots \psi_{\sigma^{-1}(n)}(Z_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\psi_{\sigma(1)} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \psi_{\sigma(n)})(Z_1, \ldots, Z_n)
\end{aligned}$$

car $\varepsilon(\sigma, \mathscr{Z}) = \varepsilon(\sigma)$ et $\Delta(\underline{\psi}, \sigma^{-1} \cdot z) = (-1)^{n(n-1)/2}$. $\square$

Lemme II.1.51. *Notons $n = n_{\bar{1}}$. Soit $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, $k_0 := 0$, $k_p := j_1 + \ldots + j_p$ ($p \in [\![1, n]\!]$) et $k := k_n$. Soit $Z_1, \ldots, Z_k \in V_{\bar{1}}$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_n^{j_n}(Z_1, \ldots, Z_k) &= (-1)^{k(k-1)/2} j_1! \ldots j_n! \sum_{\sigma \in S_{j_1,\ldots,j_n}} \vartheta_1(Z_{\sigma(1)}) \ldots \vartheta_1(Z_{\sigma(k_1)}) \vartheta_2(Z_{\sigma(k_1+1)}) \ldots \\
&\qquad \ldots \vartheta_{n-1}(Z_{\sigma(k_{n-1})}) \vartheta_n(Z_{\sigma(k_{n-1}+1)}) \ldots \vartheta_n(Z_{\sigma(k)})
\end{aligned}$$

où $S_{j_1,\ldots,j_n}$ désigne l'ensemble des battages du groupe $\mathfrak{S}_k$ relatifs à $j_1, \ldots, j_n$:

$$S_{j_1,\ldots,j_n} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_k \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(k_1),\ \sigma(k_1+1) < \ldots < \sigma(k_2), \ldots,\ \sigma(k_{n-1}+1) < \ldots < \sigma(k)\}.$$

Preuve. D'après le lemme II.1.50, nous avons :

$$\begin{aligned}\vartheta_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_n^{j_n}(Z_1,\ldots,Z_k) &= (-1)^{k(k-1)/2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\vartheta_1(Z_{\sigma(1)})\ldots\vartheta_1(Z_{\sigma(k_1)})\vartheta_2(Z_{\sigma(k_1+1)})\ldots\\ &\quad\ldots\vartheta_{n-1}(Z_{k_{n-1}})\vartheta_n(Z_{\sigma(k_{n-1}+1)})\ldots\vartheta_n(Z_{\sigma(k)}).\end{aligned}$$

Mais les blocs $\vartheta_\ell(Z_{\sigma(k_{\ell-1}+1)})\ldots\vartheta_\ell(Z_{\sigma(k_\ell)})$ sont commutatifs. Nous pouvons donc rassembler des termes dans l'écriture précédente.

Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble de toutes les partitions de $[\![1,k]\!]$ en n sous-ensembles de cardinaux respectifs $j_1,\ldots,j_n$. Un ensemble $I\in\mathscr{J}$ est une collection $(I_1,\ldots,I_n)$ avec $|I_\ell|=j_\ell$ et $I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n=[\![1,k]\!]$. Nous avons $\mathrm{card}(\mathscr{J})=\dfrac{k!}{j_1!\ldots j_n!}$. Pour $I\in\mathscr{J}$, notons S_I l'ensemble des permutations :

$$\{\sigma\in\mathfrak{S}_k\mid\sigma([\![k_\ell+1,k_{\ell+1}]\!])=I_\ell,\ \forall\,\ell\in[\![0,n-1]\!]\}.$$

Alors $\{S_I,I\in\mathscr{J}\}$ est une partition du groupe $\mathfrak{S}_k$. Nous avons $\mathrm{card}(S_I)=j_1!\ldots j_n!$ et nous pouvons remarquer que S_I est en bijection avec $\mathfrak{S}_{j_1}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{j_n}$.

Soit $I=(I_1,\ldots,I_n)\in\mathscr{J}$ fixé et notons $I_\ell=\{a_1^\ell,\ldots,a_{j_\ell}^\ell\}$ avec $1\leqslant a_1^\ell<a_2^\ell<\ldots<a_{j_\ell}^\ell\leqslant k$. Il vient :

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in S_I}\vartheta_1(Z_{\sigma(1)})\ldots\vartheta_1(Z_{\sigma(k_1)})\vartheta_2(Z_{\sigma(k_1+1)})\ldots\ldots\vartheta_{n-1}(Z_{\sigma(k_{n-1})})\vartheta_n(Z_{\sigma(k_{n-1}+1)})\ldots\vartheta_n(Z_{\sigma(k)})\\ =\ & j_1!\ldots j_n!\vartheta_1(Z_{a_1^1})\ldots\vartheta_1(Z_{a_{j_1}^1})\vartheta_2(Z_{a_1^2})\ldots\ldots\vartheta_{n-1}(Z_{a_{j_{n-1}}^{n-1}})\vartheta_n(Z_{a_1^n})\ldots\vartheta_n(Z_{a_{j_n}^n}).\end{aligned}$$

D'où le résultat en faisant la somme sur $\mathscr{J}$ qui est en bijection avec l'ensemble des battages $S_{j_1,\ldots,j_n}$. □

Corollaire II.1.52. *Soit $j_1,\ldots,j_{n_1^-}\in\mathbb{N}$. Alors :*

$$\vartheta_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{n_1^-}^{j_{n_1^-}}(\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_{n_1^-},\ldots,Y_{n_1^-}}_{j_{n_1^-}})=(-1)^{r(r-1)/2}j_1!\ldots j_{n_1^-}!$$

où $k=j_1+\ldots+j_{n_1^-}$ et l'application $\vartheta_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{n_1^-}^{j_{n_1^-}}$ est nulle sur les autres k-uplets ordonnés de vecteurs de base.

Preuve. Notant $n=n_1^-$, $k_\ell=j_1+\ldots+j_\ell$ ($\ell\in[\![1,n]\!]$), $k=k_n$ et $(\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_n,\ldots,Y_n}_{j_n})=(Z_1,\ldots,Z_k)$, nous obtenons, d'après le lemme II.1.51 :

$$\begin{aligned}(\vartheta_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_n^{j_n})(Z_1,\ldots,Z_k) &= (-1)^{k(k-1)/2}j_1!\ldots j_n!\sum_{\sigma\in S_{j_1,\ldots,j_n}}\vartheta_1(Z_{\sigma(1)})\ldots\vartheta_1(Z_{\sigma(r_1)})\vartheta_2(Z_{\sigma(k_1+1)})\ldots\\ &\quad\ldots\vartheta_{n-1}(Z_{\sigma(k_{n-1})})\vartheta_n(Z_{\sigma(k_{n-1}+1)})\ldots\vartheta_n(Z_{\sigma(k)})\end{aligned}$$

Mais la somme se réduit aux battages $\sigma\in S_{j_1,\ldots,j_n}$ tels que $\sigma([\![1,k_1]\!])=[\![1,k_1]\!]$, $\sigma([\![k_1+1,k_2]\!])=[\![k_1+1,k_2]\!]$,..., $\sigma([\![k_{n-1}+1,k_n]\!])=[\![k_{n-1}+1,k_n]\!]$, c'est-à-dire à $\sigma=\mathrm{id}$. Il reste donc :

$$(\vartheta_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_n^{j_n})(\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_n,\ldots,Y_n}_{j_n})=(-1)^{r(r-1)/2}j_1!\ldots j_n!.$$

Le second point est évident. □

Proposition II.1.53. *Soit, d'une part, $k \in [\![0, n_{\bar{0}}]\!]$ et :*

$$\mathscr{B}_{\bar{0}}^{k} := \{\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k},\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n_{\bar{0}}\}$$

et, d'autre part, $\ell \in \mathbb{N}$ et :

$$\mathscr{B}_{\bar{1}}^{\ell} := \{\vartheta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{j_\ell},\ 1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_\ell \leqslant n_{\bar{1}}\},$$

avec la convention suivante : un produit d'un nombre nul de formes linéaire vaut 1. Alors la famille $\mathscr{B}_{\bar{0}}^{k}$ est une base de l'espace $G_{\bar{0}}^{k}$ et la famille $\mathscr{B}_{\bar{1}}^{\ell}$ est une base de l'espace $S_{\bar{1}}^{\ell}$. Par conséquent, $\mathscr{B}_{\bar{0}} := \bigcup_{k=0}^{n_{\bar{0}}} \mathscr{B}_{\bar{0}}^{k}$ est une base de l'espace $G_{\bar{0}}$ et $\mathscr{B}_{\bar{1}} := \bigcup_{\ell \geqslant 0} \mathscr{B}_{\bar{1}}^{\ell}$ est une base de l'espace $S_{\bar{1}}$.

Preuve. Les cas $k = 0$ et $\ell = 0$ sont clairs. Supposons donc $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$. D'après la proposition II.1.29, l'espace $\mathscr{A}(V)$ est engendré par les produits super-extérieurs d'éléments de V^*. Mais compte-tenu de la multilinéarité des expressions obtenues, nous pouvons restreindre la famille aux produits super-extérieurs d'éléments de la base de V^* choisie. D'autre part, d'après l'expression (II.15), les formes multilinéaires super-antisymétriques $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ (resp. $\vartheta_{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{j_\ell}$) sont éléments de $G_{\bar{0}}$ (resp. $S_{\bar{1}}$). Et compte-tenu des règles de commutation dans l'algèbre $\mathscr{A}(V)$, la famille $\mathscr{B}_{\bar{0}}^{k}$ (resp. $\mathscr{B}_{\bar{1}}^{\ell}$) est par conséquent génératrice de $G_{\bar{0}}^{k}$ (resp. $S_{\bar{1}}^{\ell}$).

Soit $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n_{\bar{0}}$. Toujours d'après l'expression (II.15), nous avons :

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \varphi_{i_1}(X_{j_{\sigma(1)}}) \ldots \varphi_{i_k}(X_{j_{\sigma(k)}})$$

(nous reconnaissons l'expression classique du déterminant). Donc :

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}) = 0$$

si $(j_1, \ldots, j_k) \neq (i_1, \ldots, i_k)$. Nous en concluons immédiatement que la famille $\mathscr{B}_{\bar{0}}^{k}$ est libre donc c'est une base de $G_{\bar{0}}^{k}$ (il suffit en effet de considérer une combinaison linéaire nulle de k-formes de la famille $\mathscr{B}_{\bar{0}}^{k}$ et de l'évaluer successivement sur de tels k-uplets de vecteurs ordonnés pour conclure quant à la nullité des coefficients de la combinaison linéaire).

Soit $j_1, \ldots, j_{n_{\bar{1}}} \geqslant 0$ (non tous nuls) et $\ell = j_1 + \ldots + j_{n_{\bar{1}}}$. D'après le corollaire II.1.52, nous avons :

$$\vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}}(\underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{j_1}, \ldots, \underbrace{Y_{n_{\bar{1}}}, \ldots, Y_{n_{\bar{1}}}}_{j_{n_{\bar{1}}}}) = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} j_1! \ldots j_{n_{\bar{1}}}! \neq 0$$

et le résultat est nul sur tout autre ℓ-uplet de vecteurs ordonnés. Par conséquent la famille $\mathscr{B}_{\bar{1}}^{\ell}$ est également libre et c'est une base de $S_{\bar{1}}^{\ell}$.

La dernière affirmation est claire par définition des espaces $G_{\bar{0}}$ et $S_{\bar{1}}$ comme somme directe de leurs sous-espaces d'éléments homogènes. □

Proposition II.1.54. *Il existe deux isomorphismes d'algèbres :*

$$G_{\bar{0}} \simeq \bigwedge(V_{\bar{0}}^*) \qquad et \qquad S_{\bar{1}} \simeq \mathrm{S}(V_{\bar{1}}^*).$$

Notons que ces isomorphismes d'algèbres envoient les sous-espaces homogènes $G_{\bar{0}}^n$ et $S_{\bar{1}}^n$ sur les sous-espaces $\bigwedge^n(V_{\bar{0}}^*)$ et $\mathrm{S}^n(V_{\bar{1}}^*)$ respectivement.

Preuve. 1) D'après la proposition II.1.53, la famille $\{\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k},\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n_{\bar{0}},\ k\in[\![0,n_{\bar{0}}]\!]\}$ est une base de l'espace $G_{\bar{0}}$. Mais c'est également une base de l'espace $\bigwedge(V_{\bar{0}}^*)$ en considérant les restrictions des formes φ_i à $V_{\bar{0}}$ (en effet, le produit super-extérieur de formes multilinéaires paires coïncide avec le produit extérieur classique de telles formes, d'après l'expression (II.26)). D'où le premier résultat.
2) D'après la proposition II.1.53, la famille $\{\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell},\ 1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_\ell\leqslant n_{\bar{1}},\ \ell\geqslant 0\}$ est une base de $S_{\bar{1}}$. Nous pouvons alors écrire (sur les bases) un isomorphisme entre l'espace $S_{\bar{1}}^n$ et l'espace $T_S^n(V_{\bar{1}}^*)$ des tenseurs symétriques de $V_{\bar{1}}^*$ homogènes de degré n ; d'après le lemme II.1.50, il a pour expression :

$$\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n\in S_{\bar{1}}^n \rightsquigarrow \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\psi_{\sigma(1)}\underset{s}{\otimes}\ldots\underset{s}{\otimes}\psi_{\sigma(n)}\in T_S^n(V_{\bar{1}}^*)$$

pour $\psi_1,\ldots,\psi_n$ élément de la base de $V_{\bar{1}}^*$. D'autre part, les espaces $T_S^n(V_{\bar{1}}^*)$ et $\mathrm{S}^n(V_{\bar{1}}^*)$ sont également isomorphes, via l'application $\Phi\colon \mathrm{S}(V_{\bar{1}}^*)\to T_S(V_{\bar{1}}^*)$ définie par :

$$\psi_1\ldots\psi_n\in\mathrm{S}^n(V_{\bar{1}}^*)\rightsquigarrow\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\psi_{\sigma(1)}\underset{s}{\otimes}\ldots\underset{s}{\otimes}\psi_{\sigma(n)}\in T_S^n(V_{\bar{1}}^*)$$

(en regardant $T_S(V_{\bar{1}}^*)$ dans l'algèbre $\mathscr{F}(V)$). Notons $*$ le produit sur $T_S(V_{\bar{1}}^*)$ transporté par Φ :

$$\Psi*\Psi'=\Phi(\Phi^{-1}(\Psi)\Phi^{-1}(\Psi'))$$

pour $\Psi,\Psi'\in T_S(V_{\bar{1}}^*)$. Soit $Z_1,\ldots,Z_n\in V_{\bar{1}}$. Comme $\Phi^{-1}(\varphi_i)=\varphi_i$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\psi_1*\ldots*\psi_n(Z_1,\ldots,Z_n) &= \Phi(\psi_1\ldots\psi_n)(Z_1,\ldots,Z_n)\\ &= (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\psi_{\sigma(1)}(Z_1)\ldots\psi_{\sigma(n)}(Z_n)\\ &= \psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n(Z_1,\ldots,Z_n).\end{aligned}$$

Donc les produits coïncident et l'isomorphisme construit entre $S_{\bar{1}}$ et $\mathrm{S}(V_{\bar{1}})$ est un isomorphisme d'algèbres. □

Remarque II.1.55. Soit $\Omega\in G_{\bar{0}}^n$ de degré $\omega=\bar{0}$, $\Psi\in S_{\bar{1}}^p$ de degré $\psi=\bar{p}$, et des vecteurs $X_1,\ldots,X_n\in V_{\bar{0}}$ et $X_{n+1},\ldots,X_{n+p}\in V_{\bar{1}}$. Soit $\mathscr{X}=(X_1,\ldots,X_{n+p})\in V^{n+p}$. Nous avons alors par définition :

$$\Omega\wedge\Psi(\mathscr{X})=\sum_{\sigma\in S_{n,p}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{\psi(x_{\sigma(1)}+\ldots+x_{\sigma(n)})}\Omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})\Psi(X_{\sigma(n+1)},\ldots,X_{\sigma(n+p)}).$$

Mais comme $\Omega\in G_{\bar{0}}$ et $\Psi\in S_{\bar{1}}$, la somme se réduit aux battages $\sigma\in S_{n,p}$ pour lesquels $\sigma([\![1,n]\!])=[\![1,n]\!]$ et $\sigma([\![n+1,n+p]\!])=[\![n+1,n+p]\!]$, c'est-à-dire au seul battage $\sigma=\mathrm{id}$. Ainsi :

$$\Omega\wedge\Psi(X_1,\ldots,X_{n+p})=\Omega(X_1,\ldots,X_n)\Psi(X_{n+1},\ldots,X_{n+p}). \tag{II.28}$$

De même :

$$\Psi \wedge \Omega(\mathscr{X}) = \sum_{\sigma \in S_{p,n}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{\omega(x_{\sigma(1)}+\ldots+x_{\sigma(p)})}\Psi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(p)})\Omega(X_{\sigma(p+1)},\ldots,X_{\sigma(n+p)}).$$

Mais la somme se réduit aux battages $\sigma \in S_{p,n}$ tels que $\sigma([\![1,p]\!]) = [\![n+1,n+p]\!]$ et $\sigma([\![p+1,n+p]\!]) = [\![1,n]\!]$ c'est-à-dire au seul battage $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & n+p \\ n+1 & \ldots & n+p & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Les couples d'inversions sont les $(i,p+j)$, $i \in [\![1,p]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$; il y en a np. Nous en déduisons également $\mathscr{I}(\sigma,\mathscr{X}) = (x_{n+1}+\ldots+x_{n+p})(x_1+\ldots+x_n) = \overline{0}$. Ainsi :

$$\Psi \wedge \Omega(\mathscr{X}) = (-1)^{np}\Omega(X_1,\ldots,X_n)\Psi(X_{n+1},\ldots,X_{n+p}).$$

Nous retrouvons en fait la règle de super-commutation $\Omega \wedge \Psi = (-1)^{np}\ \Psi \wedge \Omega$ car $\deg(\Omega) = (n,\overline{0})$ et $\deg(\Psi) = (p,\overline{p})$.

Lemme II.1.56. *Soit $k \in [\![0,n_{\overline{0}}]\!]$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n_{\overline{0}}$ et $j_1,\ldots,j_{n_{\overline{1}}} \in \mathbb{N}$. Nous avons :*

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\overline{1}}}^{j_{n_{\overline{1}}}}(X_{i_1},\ldots,X_{i_k},\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_{n_{\overline{1}}},\ldots,Y_{n_{\overline{1}}}}_{j_{n_{\overline{1}}}}) = (-1)^{r(r-1)/2}j_1!\ldots j_{n_{\overline{1}}}!$$

où $r = j_1+\ldots+j_{n_{\overline{1}}}$. De plus, l'application $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\overline{1}}}^{j_{n_{\overline{1}}}}$ s'annule sur les autres n-uplets ordonnés de vecteurs de la base ($n = k+r$).

Preuve. Si $k = 0$, le résultat est vrai d'après le corollaire II.1.52. Supposons donc $k \neq 0$. D'après l'expression (II.28), l'élément $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\overline{1}}}^{j_{n_{\overline{1}}}} \in \mathscr{A}^n(V)$ ($1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n_{\overline{0}}$, $j_\ell \in \mathbb{Z}$ avec $k+j_1+\ldots+j_{n_{\overline{1}}} = n$) s'annule sur les n-uplets de vecteurs (ordonnés) de la base de V sauf sur le n-uplet $(X_{i_1},\ldots,X_{i_k},\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_{n_{\overline{1}}},\ldots,Y_{n_{\overline{1}}}}_{j_{n_{\overline{1}}}})$ sur lequel il vaut :

$$\big(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(X_{i_1},\ldots,X_{i_k})\big)\big(\vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\overline{1}}}^{j_{n_{\overline{1}}}}(\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_{n_{\overline{1}}},\ldots,Y_{n_{\overline{1}}}}_{j_{n_{\overline{1}}}})\big).$$

Nous avons déjà :

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(X_{i_1},\ldots,X_{i_k}) = 1$$

(formule classique du déterminant).
D'autre part, d'après le corollaire II.1.52 :

$$\vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\overline{1}}}^{j_{n_{\overline{1}}}}(\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_{n_{\overline{1}}},\ldots,Y_{n_{\overline{1}}}}_{j_{n_{\overline{1}}}}) = (-1)^{r(r-1)/2}j_1!\ldots j_{n_{\overline{1}}}!.$$

D'où le résultat. Le second point est évident compte tenu du corollaire II.1.52. □

Théorème II.1.57. *Il existe un isomorphisme de superalgèbres $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduées :*

$$\mathscr{A}(V) \simeq \bigwedge(V_{\bar 0}^*) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar 1}^*) = \bigwedge(V^*), \tag{II.29}$$

(le produit tensoriel étant $\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-gradué).

Démonstration. D'après l'expression (II.23), la famille :

$$\{\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\otimes\vartheta_{j_1}\ldots\vartheta_{j_\ell},\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n_{\bar 0},\ 1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_\ell\leqslant n_{\bar 1},\ k\in[\![0,n_{\bar 0}]\!],\ \ell\geqslant 0\}$$

est une base de $\bigwedge(V^*) = \bigwedge(V_{\bar 0}^*) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar 1}^*)$.

D'autre part, d'après II.1.29, l'espace $\mathscr{A}(V)$ est engendrée par les produits super-extérieurs d'éléments de la base de V^*. Compte-tenu des relations de commutation dans l'algèbre $\mathscr{A}(V)$, nous déduisons que la famille :

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell},\ 1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n_{\bar 0},\ 1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_\ell\leqslant n_{\bar 1},\ k\in[\![0,n_{\bar 0}]\!],\ \ell\geqslant 0\right\}$$

est un système de générateurs de $\mathscr{A}(V)$. Nous allons maintenant démontrer que ce système de générateurs est une base de $\mathscr{A}(V)$.

D'après le lemme II.1.56, nous avons :

$$\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\vartheta_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{n_{\bar 1}}^{j_{n_{\bar 1}}}(X_{i_1},\ldots,X_{i_k},\underbrace{Y_1,\ldots,Y_1}_{j_1},\ldots,\underbrace{Y_{n_{\bar 1}},\ldots,Y_{n_{\bar 1}}}_{j_{n_{\bar 1}}}) = (-1)^{n(n-1)/2} j_1!\ldots j_{n_{\bar 1}}!$$

et le résultat est nul sur les autres n-uplets de vecteurs (ordonnés) de la base de V (avec $n = k + j_1 + \ldots + j_{n_{\bar 1}}$). Par conséquent la famille $\mathscr{B}$ est libre et c'est une base de $\mathscr{A}(V)$.

Nous pouvons désormais établir un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathscr{A}(V)$ et $\bigwedge(V^*) = \bigwedge(V_{\bar 0}^*) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar 1}^*)$ en donnant sa définition grâce aux bases respectives de $\mathscr{A}(V)$ et $\bigwedge(V^*)$: il envoie $\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell}$ sur $\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\otimes\vartheta_{j_1}\ldots\vartheta_{j_\ell}$.

Enfin, d'après la formule de commutation des formes super-antisymétriques (II.7), nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell})\wedge(\varphi_{i'_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i'_{k'}}\wedge\vartheta_{j'_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j'_{\ell'}})\\
=\ &\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\big((\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell})\wedge(\varphi_{i'_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i'_{k'}})\big)\wedge\vartheta_{j'_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j'_{\ell'}}\\
=\ &(-1)^{k'\ell+0\ell}\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\varphi_{i'_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i'_{k'}}\wedge\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell}\wedge\vartheta_{j'_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j'_{\ell'}}
\end{aligned}$$

et, d'autre part, d'après les règles de calcul dans $\bigwedge(V_{\bar 0}^*) \underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2}{\otimes} \mathrm{S}(V_{\bar 1}^*)$:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\otimes\vartheta_{j_1}\ldots\vartheta_{j_\ell})\wedge(\varphi_{i'_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i'_{k'}}\otimes\vartheta_{j'_1}\ldots\vartheta_{j'_{\ell'}})\\
=\ &(-1)^{k'\ell}\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\wedge\varphi_{i'_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i'_{k'}}\otimes\vartheta_{j_1}\ldots\vartheta_{j_\ell}\vartheta_{j'_1}\ldots\vartheta_{j'_{\ell'}}.
\end{aligned}$$

Donc l'isomorphisme ainsi construit entre $\mathscr{A}(V)$ et $\bigwedge(V^*)$ est bien un isomorphisme de super-algèbres $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduées. □

Remarque II.1.58. Soit $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in V^*$. Dans $\mathscr{A}(V) = \bigwedge(V^*)$, nous avons, d'après l'expression (II.14) :

$$\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n = \mathrm{A}(\vartheta_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \vartheta_n).$$

Compte-tenu des propriétés de A, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vartheta_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{\sigma(n)} &= \mathrm{A}(\vartheta_{\sigma(1)} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \vartheta_{\sigma(n)}) \\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \underline{\vartheta})\,\mathrm{A}(\sigma^{-1} \underset{a}{\cdot} (\vartheta_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \vartheta_n)) \\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \underline{\vartheta})\,\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n.\end{aligned}$$

Ainsi une n-forme $\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n$ est super-antisymétrique à la fois en tant qu'application multilinéaire et que tenseur élément de $\bigwedge(V^*)$.

Théorème II.1.59. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\bigwedge^n(V)^*$ et $\bigwedge^n(V^*) = \mathscr{A}^n(V)$. Il induit alors naturellement un isomorphisme entre les espaces $\bigwedge(V)^*$ et $\bigwedge(V^*) = \mathscr{A}(V)$.*

Démonstration. Supposons $n \geqslant 1$ et soit $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in V^*$ et $X_1, \ldots, X_n \in V$. D'après la relation (II.16), nous avons :

$$X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})X_1 \wedge \ldots \wedge X_n. \tag{II.30}$$

En effet :

$$\begin{aligned}& X_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge X_{\sigma(n)}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) \\ = \;& \widehat{X_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge \widehat{X_{\sigma(n)}}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) \\ = \;& (-1)^{|\theta|}\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \\ = \;& (-1)^{|\theta|}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n(\sigma \underset{a}{\cdot} (X_1, \ldots, X_n)) \\ = \;& (-1)^{|\theta|}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \vartheta_n(X_1, \ldots, X_n) \\ = \;& \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})X_1 \wedge \ldots \wedge X_n(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n).\end{aligned}$$

Ceci permet de définir une application linéaire $\Phi\colon F \in \bigwedge^n(V)^* \rightsquigarrow \Phi(F) = \widetilde{F} \in \mathscr{A}^n(V) = \bigwedge^n(V^*)$ par :

$$\widetilde{F}(Z_1, \ldots, Z_n) = F(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_n)$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ (en effet, la formule (II.30) assure la super-antisymétrie de $\widetilde{F}$).

Soit $k \in [\![0, n_{\bar{0}}]\!]$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n_{\bar{0}}$, $j_1, \ldots, j_{n_{\bar{1}}} \in \mathbb{N}$ avec $k + j_1 + \ldots + j_{n_{\bar{1}}} = n$. D'après le lemme II.1.56 :

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, \underbrace{Y_1, \ldots, Y_1}_{j_1}, \ldots, \underbrace{Y_{n_{\bar{1}}}, \ldots, Y_{n_{\bar{1}}}}_{j_{n_{\bar{1}}}}) = (-1)^{r(r-1)/2} j_1! \ldots j_{n_{\bar{1}}}!$$

(où $r = j_1 + \ldots + j_{n_{\bar{1}}}$) et l'élément $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}} \in \bigwedge^n(V^*) = \mathscr{A}^n(V)$ s'annule sur les autres n-uplets ordonnés de vecteurs de la base.

Ainsi la forme multilinéaire $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \vartheta_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge \vartheta_{n_{\bar 1}}^{j_{n_{\bar 1}}}$ est égal à l'image par Φ du covecteur de la base duale correspondant à $X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k} \wedge Y_1^{j_1} \wedge \ldots \wedge Y_{n_{\bar 1}}^{j_{n_{\bar 1}}}$ au coefficient multiplicateur $\dfrac{(-1)^{r(r-1)/2}}{j_1! \ldots j_{n_{\bar 1}}!}$ près. Donc Φ est surjective et comme les dimensions des sous-espaces $\bigwedge^n(V)^*$ et $\bigwedge^n(V^*) = \mathscr{A}^n(V)$ sont égales, Φ est bijective. □

Rappel II.1.60. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'isomorphisme entre $\bigwedge(E^*)$ et $\bigwedge(E)^*$ est construit à l'aide du déterminant (dont l'existence est liée à la dimension finie de l'algèbre extérieure) :

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) = \det((\omega_i(X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}),$$

$\omega_1, \ldots, \omega_k \in E^*$ et $X_1, \ldots, X_k \in E$.

Corollaire II.1.61. *Soit $j\colon \bigwedge(V^*) = \mathscr{A}(V) \to \bigwedge(V)^*$ l'isomorphisme réciproque. Nous avons :*

$$\begin{aligned} j(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) &= (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)(X_1, \ldots, X_n) \\ &= (-1)^{\Delta(\phi,\phi)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\varphi_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_n(X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

pour $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ et $X_1, \ldots, X_n \in V$.

Preuve. La première égalité provient de la définition de l'isomorphisme Φ, la deuxième égalité de l'expression (II.15). □

Nous nous trouvons désormais dans une situation similaire au cas classique. L'algèbre super-extérieure d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ est définie de manière à coïncider avec la notion d'algèbre extérieure si $V_{\bar 1} = \{0\}$. Et l'algèbre des formes multilinéaires super-antisymétriques (généralisation de l'antisymétrie) coïncide avec l'algèbre super-extérieure du dual V^* de l'espace V, munie d'un produit généralisant également le produit extérieur des formes multilinéaires. Enfin, comme dans le cas classique et malgré le fait qu'ils ne soient pas de dimension finie, les espaces $\bigwedge(V)^*$ et $\bigwedge(V^*)$ sont isomorphes.

II.1.f Algèbre super-symétrique : construction formelle

Nous allons tenter dans cette partie et la prochaine de construire l'algèbre super-symétrique de l'espace $\mathbb{Z}_2$-gradué V, en ayant toujours le souhait de généraliser ce que l'on connaît dans le cas classique.

Nous imitons la démarche de la section II.1.d. Soit A l'algèbre de base $\{E_{(I,I')},\ I \in \mathbb{Z}^{n_{\bar 0}},\ I' \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar 1}}\}$ avec le produit défini par :

$$E_{(I,I')} \cdot E_{(J,J')} = (-1)^{\Delta(I',J')} 0^{I'J'} E_{(I+J,I'+J')} \tag{II.31}$$

avec les notations de la partie II.1.d. La démonstration de l'associativité est identique.

Nous définissons un $\mathbb{Z}_2$-degré sur A :

$$\deg(E_{(I,I')}) = \overline{|I'|}.$$

Remarque II.1.62. Examinons la formule du produit (II.31) sur des éléments de base particuliers :

$$E_{(I,0)} \cdot E_{(J,0)} = E_{(I+J,0)}.$$

Nous reconnaissons la formule du produit symétrique.

$$E_{(0,I')} \cdot E_{(0,J')} = (-1)^{\Delta(I',J')} 0^{I'J'} E_{(0,I'+J')}.$$

Nous reconnaissons la formule du produit extérieur formel.

$$\begin{array}{rcl} E_{(I,0)} \cdot E_{(0,J')} & = & E_{(I,J')}. \\ E_{(0,I')} \cdot E_{(J,0)} & = & E_{(I',J)}. \end{array}$$

En particulier, si nous notons $E_i := E_{(I_i,0)}$ où $I_i = (0,\ldots,0,1_i,0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}^{n_{\bar{0}}}$ (pour $i \in [\![1,n_{\bar{0}}]\!]$) et $E'_j := E_{(0,I'_j)}$ où $I'_j = (\bar{0},\ldots,\bar{0},\bar{1}_j,\bar{0},\ldots,\bar{0}) \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar{1}}}$ (pour $j \in [\![1,n_{\bar{1}}]\!]$), nous avons :

$$\begin{cases} E_i \cdot E_j = E_j \cdot E_i \\ E'_i \cdot E'_i = 0 \\ E'_i \cdot E'_j = -E'_j \cdot E'_i \ (i \neq j) \\ E_i \cdot E'_j = E'_j \cdot E_i. \end{cases} \tag{II.32}$$

Ces constatations conduisent au résultat suivant :

Proposition II.1.63. *L'algèbre A est isomorphe au produit tensoriel (usuel)* $\mathrm{S}(V_{\bar{0}}) \otimes \bigwedge(V_{\bar{1}})$.

Preuve. Notons $\{E_1,\ldots,E_{n_{\bar{0}}}\}$ une base de $V_{\bar{0}}$ et $\{E'_1,\ldots,E'_{n_{\bar{1}}}\}$ une base de $V_{\bar{1}}$. Nous en déduisons les bases canoniques $\{E_I, I \in \mathbb{Z}^{n_{\bar{0}}}\}$ de $\mathrm{S}(V_{\bar{0}})$ et $\{E_{I'}, I' \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar{1}}}\}$ de $\bigwedge(V_{\bar{1}})$. Rappelons les formules du produit sur les bases canoniques :

$$E_I E_J = E_{I+J} \qquad\qquad E_{I'} \wedge E_{J'} = (-1)^{\Delta(I',J')} 0^{I'J'} E_{I'+J'}.$$

L'application $\Phi\colon \mathrm{S}(V_{\bar{0}}) \otimes \bigwedge(V_{\bar{1}}) \to A$ définie sur la base par : $E_I \otimes E_{I'} \mapsto E_{(I,I')}$ est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels. Le produit dans $\mathrm{S}(V_{\bar{0}}) \otimes \bigwedge(V_{\bar{1}})$ est donné par :

$$\begin{array}{rcl} (E_I \otimes E_{I'})(E_J \otimes E_{J'}) & = & (E_I E_J) \otimes (E_{I'} \wedge E_{J'}) \\ & = & (-1)^{\Delta(I,J)} 0^{IJ} E_{I+J} \otimes E_{I'+J'}. \end{array}$$

D'après l'expression (II.31), son image par Φ est égale au produit $E_{(I,I')} \cdot E_{(J,J')}$. $\square$

Nous notons $A = \mathrm{S}(V)$ et nous la nommons **algèbre super-symétrique** de V. Nous pouvons réécrire une base de l'algèbre $\mathrm{S}(V)$ en termes d'une base d'homogènes de $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$: si $\{X_1,\ldots,X_{n_{\bar{0}}}\}$ est une base de $V_{\bar{0}}$ et $\{Y_1,\ldots,Y_{n_{\bar{1}}}\}$ une base de $V_{\bar{1}}$, alors :

$$\{X_1^{i_1}\ldots X_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \otimes {Y_1}^{j_1} \wedge \ldots \wedge {Y_{n_{\bar{1}}}}^{j_{n_{\bar{1}}}},\ i_1,\ldots,i_{n_{\bar{0}}} \in \mathbb{N},\ j_1,\ldots,j_{n_{\bar{1}}} \in \mathbb{Z}_2\} \text{ est une base de } \mathrm{S}(V) \tag{II.33}$$

Notons I l'idéal de $T(V)$ engendré par les tenseurs $X \otimes Y + (-1)^{1+xy} Y \otimes X$ pour tout $X \in V_x$ et $Y \in V_y$ et considérons le quotient $T(V)/I$. Alors $T(V)/I$ vérifie les relations (II.32) et a pour système de générateurs les vecteurs $X_1^{i_1} \dots X_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} Y_1^{j_1} \dots Y_{n_{\bar{0}}}^{j_{n_{\bar{1}}}}$ avec $i_1, \dots, i_{n_{\bar{0}}} \in \mathbb{N}$ et $j_1, \dots, j_{n_{\bar{1}}} \in \mathbb{Z}_2$. Nous en déduisons que $\mathrm{S}(V)$et $T(V)/I$ sont deux algèbres isomorphes.

II.1.g Isomorphismes entre la superalgèbre $\mathscr{S}(V)$ et l'algèbre super-symétrique

Soit $\{X_1, \dots, X_{n_{\bar{0}}}, Y_1, \dots, Y_{n_{\bar{1}}}\}$ une base d'homogènes de V, et $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_{\bar{0}}}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n_{\bar{1}}}\}$ la base duale. Dans l'algèbre des formes super-symétriques $\mathscr{S}(V)$, considérons $S_{\bar{0}}$ (resp. $G_{\bar{1}}$) l'espace des formes super-symétriques nulles dès que l'un des termes est dans $V_{\bar{1}}$ (resp. $V_{\bar{0}}$). Plus précisément :

$$S_{\bar{0}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_{\bar{0}}^n \qquad\qquad G_{\bar{1}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} G_{\bar{1}}^n$$

avec :

$$S_{\bar{0}}^n = \{\Omega \in \mathscr{S}^n(V) \mid \Omega_{|V_{\bar{1}} \times V \times \dots \times V} = 0\}$$

et :

$$G_{\bar{1}}^n = \{\Psi \in \mathscr{S}^n(V) \mid \Psi_{|V_{\bar{0}} \times V \times \dots \times V} = 0\}.$$

Les applications de $S_{\bar{0}}$ (resp. $G_{\bar{1}}$) sont donc symétriques (resp. antisymétriques) sur $V_{\bar{0}}$ (resp. $V_{\bar{1}}$) et nulles ailleurs.

Proposition II.1.64. *Les sous-espaces $S_{\bar{0}}$ et $G_{\bar{1}}$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{S}(V)$.*

Preuve. En effet, écrivons le produit super-symétrique de deux éléments de $S_{\bar{0}}$ (resp. $G_{\bar{1}}$) : d'après la définition (II.6), nous avons :

$$\Omega \cdot \Omega'(Z_1, \dots, Z_{n+n'}) = \sum_{\sigma \in S_{n,n'}} \Omega(Z_{\sigma(1)}, \dots, Z_{\sigma(n)}) \Omega'(Z_{\sigma(n+1)}, \dots, Z_{\sigma(n+n')}) \tag{II.34}$$

pour $\Omega \in S_{\bar{0}}^n$, $\Omega' \in S_{\bar{0}}^{n'}$ et $Z_1, \dots, Z_{n+n'} \in V_{\bar{0}}$ et :

$$\Psi \cdot \Psi'(Z_1, \dots, Z_{n+n'}) = (-1)^{nn'} \sum_{\sigma \in S_{n,n'}} \varepsilon(\sigma) \Psi(Z_{\sigma(1)}, \dots, Z_{\sigma(n)}) \Psi'(Z_{\sigma(n+1)}, \dots, Z_{\sigma(n+n')}) \tag{II.35}$$

pour $\Psi \in G_{\bar{1}}^n$, $\Psi' \in G_{\bar{1}}^{n'}$ et $Z_1, \dots, Z_{n+n'} \in V_{\bar{1}}$.

La stabilité de $S_{\bar{0}}$ et $G_{\bar{1}}$ pour le produit super-symétrique est alors immédiate. □

Nous allons maintenant exhiber une base des espaces $S_{\bar{0}}$ et $G_{\bar{1}}$.

Lemme II.1.65. *Soit $\psi_1, \dots, \psi_n \in V_{\bar{0}}^*$ et $Z_1, \dots, Z_n \in V_{\bar{0}}$. Alors :*

$$\psi_1 \cdot \dots \cdot \psi_n(Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_1(Z_{\sigma(1)}) \dots \psi_n(Z_{\sigma(n)}). \tag{II.36}$$

De plus, $\psi_1 \cdot \dots \cdot \psi_n$ est élément de $S_{\bar{0}}^n$.

Preuve. D'après la remarque II.1.13, nous avons :

$$\begin{aligned}\psi_1 \cdot \ldots \cdot \psi_n(Z_1,\ldots,Z_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\psi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \psi_n)(Z_{\sigma(1)},\ldots,Z_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \psi_1(Z_{\sigma(1)})\ldots\psi_n(Z_{\sigma(n)})\end{aligned}$$

car $\varepsilon(\sigma,\mathscr{Z}) = 1$ et $\Delta(\underline{\psi},\sigma^{-1}\cdot z) = 0$. □

Nous avons un résultat similaire au calcul mené dans le lemme II.1.51.

Lemme II.1.66. *Soit $i_1,\ldots,i_{n_{\bar{0}}} \in \mathbb{N}$. Notons $n = n_{\bar{0}}$, $k_p = i_1 + \ldots + i_p$ ($p \in [\![1,n]\!]$) et $k = k_n$. Soit $Z_1,\ldots,Z_k \in V_{\bar{0}}$. Alors :*

$$\begin{aligned}\varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_n^{i_n}(Z_1,\ldots,Z_k) &= i_1!\ldots i_n! \sum_{\sigma\in S_{i_1,\ldots,i_n}} \varphi_1(Z_{\sigma(1)})\ldots\varphi_1(Z_{\sigma(k_1)})\varphi_2(Z_{\sigma(k_1+1)})\ldots \\ &\qquad \ldots\varphi_{n-1}(Z_{\sigma(k_{n-1})})\varphi_n(Z_{\sigma(k_{n-1}+1)})\ldots\varphi_n(Z_{\sigma(k)}).\end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve du lemme II.1.51 en remarquant l'absence du terme $(-1)^{k(k-1)/2}$ dans l'expression (II.36). □

Proposition II.1.67. *Soit, d'une part, $k \in \mathbb{N}$ et :*

$$\mathscr{B}_{\bar{0}}^k := \{\varphi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{i_k},\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n_{\bar{0}}\},$$

et, d'autre part $\ell \in [\![0,n_{\bar{1}}]\!]$ et :

$$\mathscr{B}_{\bar{1}}^\ell := \{\vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell},\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\ell \leqslant n_{\bar{1}}\},$$

avec la même convention que dans la proposition II.1.53. Alors la famille $\mathscr{B}_{\bar{0}}^k$ est une base de l'espace $S_{\bar{0}}^k$ et la famille $\mathscr{B}_{\bar{1}}^\ell$ est une base de l'espace $G_{\bar{1}}^\ell$. Par conséquent, $\mathscr{B} := \bigcup_{k\geqslant 0} \mathscr{B}_{\bar{0}}^k$ est une base de $S_{\bar{0}}$ et $\mathscr{B}_{\bar{1}} := \bigcup_{\ell=0}^{n_{\bar{1}}}$ est une base de $G_{\bar{1}}$.

Preuve. Supposons $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$. D'après la proposition II.1.30, l'espace $\mathscr{S}(V)$ est engendré par les produits super-symétriques d'éléments de V^*. Mais compte-tenu de la multilinéarité des expressions obtenues, nous pouvons restreindre la famille aux produits super-symétriques d'éléments de la base de V^* choisie. D'autre part, d'après l'expression (II.18), les formes multilinéaires super-symétriques $\varphi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{i_k}$ (resp. $\vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell}$) sont éléments de $S_{\bar{0}}$ (resp. $G_{\bar{1}}$). Et compte-tenu des règles de commutation dans l'algèbre $\mathscr{S}(V)$, la famille $\mathscr{B}_{\bar{0}}^k$ (resp. $\mathscr{B}_{\bar{1}}^\ell$) est par conséquent génératrice de $S_{\bar{0}}^k$ (resp. $G_{\bar{1}}^\ell$).

Soit $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant n_{\bar{1}}$. Toujours d'après l'expression (II.18), nous avons :

$$\vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell}(Y_{i_1},\ldots,Y_{i_\ell}) = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\vartheta_{j_1}(Y_{i_{\sigma(1)}})\ldots\vartheta_{j_k}(Y_{i_{\sigma(k)}}).$$

Donc :

$$\vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell}(Y_{j_1},\ldots,Y_{j_\ell}) = (-1)^{\ell(\ell-1)/2} \quad \text{et} \quad \vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell}(Y_{i_1},\ldots,Y_{i_\ell}) = 0$$

si $(i_1,\dots,i_\ell)\neq(j_1,\dots,j_\ell)$. Nous en concluons immédiatement que la famille $\mathscr{B}_{\bar 1}^{\ell}$ est libre donc c'est une base de $G_{\bar 1}^{\ell}$.

Soit $i_1,\dots,i_{n_{\bar 0}^-}\geqslant 0$ (non tous nuls) et $k=i_1+\dots+i_{n_{\bar 0}^-}$. D'après le lemme II.1.66, nous avons :

$$\varphi_1^{i_1}\cdot\dots\cdot\varphi_{n_{\bar 0}^-}^{j_{n_{\bar 0}^-}}(\underbrace{X_1,\dots,X_1}_{i_1},\dots,\underbrace{X_{n_{\bar 0}^-},\dots,X_{n_{\bar 0}^-}}_{i_{n_{\bar 0}^-}})=i_1!\dots i_{n_{\bar 0}^-}!$$

et le résultat est nul sur tout autre ℓ-uplet de vecteurs ordonnés. Par conséquent la famille $\mathscr{B}_{\bar 0}^{k}$ est également libre et c'est une base de $S_{\bar 0}^{k}$.

La dernière affirmation est claire par définition des espaces $S_{\bar 0}^-$ et $G_{\bar 1}^-$ comme somme directe de leurs sous-espaces d'éléments homogènes. □

Lemme II.1.68. *Soit $\psi_1,\dots,\psi_n\in V_{\bar 1}^{*}$ et $Z_1,\dots,Z_n\in V_{\bar 1}^-$. Alors :*

$$\psi_1\cdot\dots\cdot\psi_n(Z_1,\dots,Z_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)(\psi_{\sigma(1)}\underset{s}{\otimes}\dots\underset{s}{\otimes}\psi_{\sigma(n)})(Z_1,\dots,Z_n).\tag{II.37}$$

Preuve. D'après la remarque II.1.13, nous avons :

$$\begin{aligned}\psi_1\cdot\dots\cdot\psi_n(Z_1,\dots,Z_n)&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)(\psi_1\underset{s}{\otimes}\dots\underset{s}{\otimes}\psi_n)(Z_{\sigma(1)},\dots,Z_{\sigma(n)})\\&=(-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\psi_1(Z_{\sigma(1)})\dots\psi_n(Z_{\sigma(n)})\\&=(-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\psi_{\sigma^{-1}(1)}(Z_1)\dots\psi_{\sigma^{-1}(n)}(Z_n)\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)(\psi_{\sigma(1)}\underset{s}{\otimes}\dots\underset{s}{\otimes}\psi_{\sigma(n)})(Z_1,\dots,Z_n).\end{aligned}$$

□

Proposition II.1.69. *Il existe deux isomorphismes d'algèbres :*

$$S_{\bar 0}^-\simeq \mathrm{S}(V_{\bar 0}^{*})\qquad et\qquad G_{\bar 1}^-\simeq\bigwedge(V_{\bar 1}^{*}).$$

Notons que ces isomorphismes d'algèbres envoient les sous-espaces homogènes $S_{\bar 0}^{n}$ et $G_{\bar 1}^{n}$ sur les sous-espaces $\mathrm{S}^n(V_{\bar 0}^{*})$ et $\bigwedge^n(V_{\bar 1}^{*})$ respectivement.

Preuve. 1) D'après la proposition II.1.67, la famille $\{\varphi_{i_1}\cdot\dots\cdot\varphi_{i_k},\ 1\leqslant i_1\leqslant\dots\leqslant i_k\leqslant n_{\bar 0}^-,\ k\geqslant 0\}$ est une base de $S_{\bar 0}^-$. Mais c'est également une base de $\mathrm{S}(V_{\bar 0}^{*})$ en considérant les restrictions des formes φ_i à $V_{\bar 0}^-$ (en effet, le produit super-symétrique de formes multilinéaires paires coïncide avec le produit symétrique classique de telles formes, d'après l'expression (II.34)). D'où le premier résultat.
2) D'après la proposition II.1.67, la famille $\{\vartheta_{j_1}\cdot\dots\cdot\vartheta_{j_\ell},\ 1\leqslant j_1<\dots<j_\ell\leqslant n_{\bar 1}^-,\ \ell\in[\![0,n_{\bar 1}^-]\!]\}$ est une base de $G_{\bar 1}^-$. Nous pouvons alors écrire (sur les bases) un isomorphisme entre l'espace $G_{\bar 1}^{n}$ et l'espace $T_{AS}^{n}(V_{\bar 1}^{*})$ des tenseurs antisymétriques de $V_{\bar 1}^{*}$ homogènes de degré n ; d'après le lemme II.1.68, son expression est :

$$\psi_1\cdot\dots\cdot\psi_n\in G_{\bar 1}^{n}\rightsquigarrow\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\psi_{\sigma(1)}\underset{s}{\otimes}\dots\underset{s}{\otimes}\psi_{\sigma(n)}\in T_{AS}^{n}(V_{\bar 1}^{*})$$

pour $\psi_1,\ldots,\psi_n$ élément de la base de $V_{\bar{1}}^*$. D'autre part, les espaces $T_{AS}^n(V_{\bar{1}}^*)$ et $\bigwedge^n(V_{\bar{1}}^*)$ sont également isomorphes, via l'application $\Phi\colon \bigwedge(V_{\bar{1}}^*) \to T_{AS}(V_{\bar{1}}^*)$ définie par :

$$\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n \in \bigwedge^n(V_{\bar{1}}^*) \rightsquigarrow \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\psi_{\sigma(1)} \underset{s}{\otimes}\ldots\underset{s}{\otimes}\psi_{\sigma(n)} \in T_{AS}^n(V_{\bar{1}}^*)$$

(en regardant $T_{AS}(V_{\bar{1}}^*)$ dans l'algèbre $\mathscr{F}(V)$). Notons $*$ le produit sur $T_{AS}(V_{\bar{1}}^*)$ transporté par Φ :

$$\Psi * \Psi' = \Phi(\Phi^{-1}(\Psi)\Phi^{-1}(\Psi'))$$

pour $\Psi,\Psi' \in T_{AS}(V_{\bar{1}}^*)$. Soit $Z_1,\ldots,Z_n \in V_{\bar{1}}$. Comme $\Phi^{-1}(\varphi_i) = \varphi_i$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \psi_1 * \ldots * \psi_n(Z_1,\ldots,Z_n) &= \Phi(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n)(Z_1,\ldots,Z_n) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\psi_{\sigma(1)}(Z_1)\ldots\psi_{\sigma(n)}(Z_n) \\ &= \psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_n(Z_1,\ldots,Z_n). \end{aligned}$$

Donc les produits coïncident et l'isomorphisme construit entre $G_{\bar{1}}$ et $\bigwedge(V_{\bar{1}})$ est un isomorphisme d'algèbres. □

Remarque II.1.70. Soit $\Omega \in S_{\bar{0}}^p$, $\Psi \in G_{\bar{1}}^q$, $Z_1,\ldots,Z_p \in V_{\bar{0}}$ et $Z_{p+1},\ldots,Z_{p+q} \in V_{\bar{1}}$. Par un calcul similaire à celui mené dans la remarque II.1.55, nous obtenons :

$$\Omega\cdot\Psi(Z_1,\ldots,Z_{p+q}) = \Omega(Z_1,\ldots,Z_p)\Psi(Z_{p+1},\ldots,Z_{p+q}). \tag{II.38}$$

Lemme II.1.71. *Soit $i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}$, $\ell \in [\![0,n_{\bar{1}}]\!]$, et $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\ell \leqslant n_{\bar{1}}$. Nous avons :*

$$\varphi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}}\cdot\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell}(\underbrace{X_1,\ldots,X_1}_{i_1},\ldots,\underbrace{X_{n_{\bar{0}}},\ldots,X_{n_{\bar{0}}}}_{i_{n_{\bar{0}}}},Y_{j_1},\ldots,Y_{j_\ell}) = i_1!\ldots i_n!.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la remarque II.1.70 et le lemme II.1.66. □

Théorème II.1.72. *Il existe un isomorphisme de superalgèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées :*

$$\mathscr{S}(V) \simeq \mathrm{S}(V_{\bar{0}}^*)\otimes\bigwedge(V_{\bar{1}}^*) = \mathrm{S}(V^*), \tag{II.39}$$

(avec le produit tensoriel usuel).

Démonstration. D'après l'expression (II.33), la famille :

$$\{\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k}\otimes\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell},\ 1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n_{\bar{0}},\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_\ell\leqslant n_{\bar{1}},\ k\geqslant 0,\ \ell\in[\![0,n_{\bar{1}}]\!]\}$$

est une base de $\mathrm{S}(V^*) = \mathrm{S}(V_{\bar{0}}^*)\otimes\bigwedge(V_{\bar{1}}^*)$.

D'autre part, d'après la proposition II.1.30, l'espace $\mathscr{S}(V)$ est engendré par les produits super-symétriques d'éléments de la base de V^*. Compte-tenu des relations de commutation dans l'algèbre $\mathscr{S}(V)$, nous déduisons que la famille :

$$\mathscr{B} := \left\{\varphi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}\cdot\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell},\ 1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n_{\bar{0}},\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_\ell\leqslant n_{\bar{1}},\ k\geqslant 0,\ \ell\in[\![0,n_{\bar{1}}]\!]\right\}$$

est un système de générateurs de $\mathscr{S}(V)$. Nous allons maintenant démontrer que ce système de générateurs est une base de $\mathscr{S}(V)$.

D'après le lemme II.1.71, nous avons :

$$\varphi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{n_{\bar 0}}^{i_{n_{\bar 0}}}\cdot\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell}(\underbrace{X_1,\ldots,X_1}_{i_1},\ldots,\underbrace{X_{n_{\bar 0}},\ldots,X_{n_{\bar 0}}}_{i_{n_{\bar 0}}},Y_{j_1},\ldots,Y_{j_\ell})=i_1!\ldots i_{n_{\bar 0}}!$$

et le résultat est nul sur les autres n-uplets de vecteurs (ordonnés) de la base de V. Par conséquent la famille $\mathscr{B}$ est libre et c'est une base de $\mathscr{S}(V)$.

Nous pouvons ainsi établir un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathscr{S}(V)$ et $\mathrm{S}(V^*)=\mathrm{S}(V_{\bar 0}^*)\otimes\bigwedge(V_{\bar 1}^*)$; il envoie $\varphi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}\cdot\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell}$ sur $\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k}\otimes\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell}$.

Enfin, d'après la formule de commutation des formes super-antisymétriques (II.7), nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}
& (\varphi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}\cdot\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell})\cdot(\varphi_{i'_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i'_{k'}}\cdot\vartheta_{j'_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j'_{\ell'}})\\
= \; & \varphi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}\cdot\big((\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell})\cdot(\varphi_{i'_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i'_{k'}})\big)\cdot\vartheta_{j'_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j'_{\ell'}}\\
= \; & \varphi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}\cdot\varphi_{i'_1}\cdot\ldots\cdot\varphi_{i'_{k'}}\cdot\vartheta_{j_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j_\ell}\cdot\vartheta_{j'_1}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{j'_{\ell'}}
\end{aligned}$$

et, d'autre part, d'après les règles de calcul dans $\mathrm{S}(V_{\bar 0}^*)\otimes\bigwedge(V_{\bar 1}^*)$:

$$\begin{aligned}
& \varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k}\varphi_{i'_1}\ldots\varphi_{i'_{k'}}\otimes\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell}\wedge\vartheta_{j'_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j'_{\ell'}}\\
= \; & (\varphi_{i_1}\ldots\varphi_{i_k}\otimes\vartheta_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j_\ell}).(\varphi_{i'_1}\ldots\varphi_{i'_{k'}}\otimes\vartheta_{j'_1}\wedge\ldots\wedge\vartheta_{j'_{\ell'}}).
\end{aligned}$$

Donc l'isomorphisme ainsi construit entre $\mathscr{S}(V)$ et $\mathrm{S}(V^*)$ est bien un isomorphisme de super-algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées. □

Remarque II.1.73. Soit $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n\in V^*$. Dans $\mathscr{S}(V)=\mathrm{S}(V^*)$, nous avons, d'après l'expression (II.17) :

$$\vartheta_1\cdot\ldots\cdot\vartheta_n=\mathrm{S}(\vartheta_1\underset{s}{\otimes}\ldots\underset{s}{\otimes}\vartheta_n).$$

Compte-tenu des propriétés de S, nous obtenons :

$$\vartheta_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\vartheta_{\sigma(n)}=\varepsilon(\sigma,\underline{\vartheta})\vartheta_1\cdot\ldots\cdot\vartheta_n.$$

Théorème II.1.74. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathrm{S}^n(V)^*$ et $\mathrm{S}^n(V^*)=\mathscr{S}^n(V)$. Il induit alors naturellement un isomorphisme entre les espaces gradués $\mathrm{S}(V)^*$ et $\mathrm{S}(V^*)=\mathscr{S}(V)$.*

Démonstration. La démarche est similaire à la démonstration du théorème II.1.59. Supposons $n\geqslant 1$ et soit $Z_1,\ldots,Z_n\in V$. D'après la relation (II.19), nous avons :

$$Z_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot Z_{\sigma(n)}=\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})Z_1\cdot\ldots\cdot Z_n. \tag{II.40}$$

Ceci permet de définir une application linéaire $F \in \mathrm{S}^n(V)^* \rightsquigarrow \widetilde{F} \in \mathscr{S}^n(V) = \mathrm{S}^n(V^*)$ par :

$$\widetilde{F}(X_1, \ldots, X_n) = F(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ (en effet, la formule (II.40) assure la super-symétrie).

D'après le lemme II.1.71, l'élément $\varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \cdot \vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell} \in \mathrm{S}^n(V^*) = \mathscr{S}^n(V)$ $(1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\ell \leqslant n_{\bar{1}}$, $i_1, \ldots, i_{n_{\bar{0}}} \in \mathbb{N}$ avec $\ell + i_1 + \ldots + i_{n_{\bar{0}}} = n)$ s'annule sur les n-uplets de vecteurs (ordonnés) de la base de V sauf sur le n-uplet :

$$(\underbrace{X_1, \ldots, X_1}_{i_1}, \ldots, \underbrace{X_{n_{\bar{0}}}, \ldots, X_{n_{\bar{0}}}}_{i_{n_{\bar{0}}}}, Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_\ell})$$

sur lequel il vaut : $i_1! \ldots i_{n_{\bar{1}}}!$.

Ainsi l'élément $\varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \cdot \vartheta_{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{j_\ell}$ est égal à l'image par Φ du covecteur de la base duale correspondant à $X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \cdot Y_{j_1} \cdot \ldots \cdot Y_{j_\ell}$ au coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{i_1! \ldots i_{n_{\bar{0}}}!}$ près. Donc Φ est surjective et comme les dimensions des sous espaces $\mathrm{S}^n(V)^*$ et $\mathrm{S}^n(V^*) = \mathscr{S}^n(V)$ sont égales, Φ est bijective. $\square$

Nous avons donc réussi à définir une notion de super-symétrie et d'algèbre super-symétrique qui généralise le cas classique et qui coïncident, comme nous l'avions fait pour l'antisymétrie et l'algèbre extérieure.

II.2 Cohomologie des superalgèbres de Lie

Dans cette partie, nous traitons des superalgèbres de Lie et nous souhaitons généraliser la notion de différentielle extérieure au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué, en gardant à l'esprit que la définition doit coïncider avec celle de la différentielle extérieure dans le cas où les éléments impairs de la superalgèbre sont nuls. Grâce à la «différentielle super-extérieure» ainsi construite, nous pouvons alors définir la cohomologie d'une superalgèbre de Lie. Notons que nos formules sont identiques à celles données dans [FL84] mais sont ici toutes démontrées.

II.2.a Endomorphismes de l'algèbre super-extérieure

Rappel II.2.1. Nous avons rappelé la définition d'une superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée dans le rappel I.3.10 page 22. Les superalgèbres de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduées sont définies en remplaçant l'ensemble $\mathbb{Z}$ par l'ensemble $\mathbb{Z}_2$. Notons que si une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est $\mathbb{Z}$-graduée, elle est également $\mathbb{Z}_2$-graduée en considérant les sous-espaces $\mathfrak{g}_{\bar{0}} := \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}} := \bigoplus_{n\in 2\mathbb{Z}+1} \mathfrak{g}_n$.

Définition II.2.2. Une super-algèbre de Lie $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée est un espace vectoriel $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-gradué $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \xi\in\mathbb{Z}_2}} \mathfrak{g}^n_\xi$ muni d'une application bilinéaire $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ appelée **super-crochet de Lie** vérifiant les propriétés suivantes :

- la compatibilité du super-crochet avec la graduation :
$$[X,Y]\in\mathfrak{g}^{n+p}_{x+y}\ ;$$
- la super-antisymétrie $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée :
$$[Y,X] = -(-1)^{np+xy}[X,Y]\ ;$$
- l'identité de Jacobi $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée :
$$(-1)^{nq+xz}[X,[Y,Z]] + (-1)^{qp+zy}[Z,[X,Y]] + (-1)^{qn+yx}[Y,[Z,X]] = 0\ ;$$

pour tous $X\in\mathfrak{g}^n_x$, $Y\in\mathfrak{g}^p_y$ et $Z\in\mathfrak{g}^q_z$, pour tous $x,y,z\in\mathbb{Z}_2$.

Remarque II.2.3. Compte-tenu de la super-antisymétrie, l'identité de Jacobi est équivalente à la relation :
$$[Z,[X,Y]] = [[Z,X],Y] + (-1)^{qn+zx}[X,[Z,Y]].$$

Ainsi les endomorphismes adjoints $\mathrm{ad}(X)\colon Y\mapsto[X,Y]$ sont des super-dérivations de degré (n,x) (pour $X\in\mathfrak{g}^n_x$) du super-crochet de Lie.

Soit $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension finie. Notons $\mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ l'espace vectoriel des endomorphismes de la superalgèbre $\mathscr{A}(V)$. L'espace $\mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ est naturellement $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$-gradué : le degré (n, f) de $F \in \mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ est défini par :

$$\deg(F(\Omega)) = (n + p, f + \omega)$$

pour $\Omega \in \mathscr{A}^p_\omega(V)$. À partir de maintenant, tous les éléments de V ou de $\mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ sont supposés homogènes.

Proposition II.2.4. *L'espace End*$(\mathscr{A}(V))$ *muni du super-crochet défini par :*

$$[F,G] := F \circ G - (-1)^{np+fg} G \circ F \tag{II.41}$$

(avec $\deg(F) = (n, f)$, $\deg(G) = (p,g)$*) est une super-algèbre de Lie* $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$*-graduée notée* $\mathfrak{gl}(\mathscr{A}(V))$.

Preuve. Soit F et G des éléments de l'espace $\mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ de degrés respectifs (n, f) et (p,g). Le super-crochet est clairement bilinéaire et super-antisymétrique :

$$[F,G] = -(-1)^{np+fg}(G \circ F - (-1)^{np+fg} F \circ G) = -(-1)^{np+fg}[G,F].$$

Soit $H \in \mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ de degré (q,h). Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}
[H,[F,G]] &= [H,F\circ G] - (-1)^{np+fg}[H,G\circ F] \\
&= H\circ F\circ G - (-1)^{q(n+p)+h(f+g)} F\circ G\circ H \\
&\quad -(-1)^{np+fg}(H\circ G\circ F - (-1)^{q(n+p)+h(f+g)} G\circ F\circ H).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
[[H,F],G] + (-1)^{qn+hf}[F,[H,G]] &= H\circ F\circ G - (-1)^{p(n+q)+g(f+g)} G\circ H\circ F \\
&\quad -(-1)^{qn+hf}(F\circ H\circ G - (-1)^{p(n+q)+g(f+h)} G\circ F\circ H) \\
&\quad +(-1)^{qn+hf}(F\circ H\circ G - (-1)^{n(p+q)+f(g+h)} H\circ G\circ F) \\
&\quad -(-1)^{q(n+p)+h(f+g)}(F\circ G\circ H - (-1)^{n(p+q)+f(g+h)} G\circ H\circ F).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'identité de Jacobi. □

Remarque II.2.5. L'espace $\mathrm{End}(\mathscr{A}(V))$ est en fait une algèbre associative $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée (munie de la composition des endomorphismes) et le super-crochet de Lie est construit par analogie avec le cas des algèbres associatives $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}_2$)-graduées.

Considérons l'espace vectoriel $\mathscr{E} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{E}^n$ où $\mathscr{E}^n := \{0\}$ si $n \leqslant -2$, $\mathscr{E}^{-1} := V$ et $\mathscr{E}^n := \mathscr{A}^{n+1}(V,V)$ si $n \geqslant 0$. Les espaces $\mathscr{A}(V)\otimes V$ et $\mathscr{E}$ sont isomorphes via l'application $\Omega\otimes X \rightsquigarrow F_{\Omega\otimes X}$ définie par :

$$F_{\Omega\otimes X}(X_1,\ldots,X_{n+1}) := \Omega(X_1,\ldots,X_{n+1})X.$$

Si $\Omega \in \mathscr{A}_\omega^{n+1}(V,V)$ et $X \in V_x$, alors $F_{\Omega\otimes X} \in \mathscr{E}^n_{\omega+x}$. Chaque sous-espace $\mathscr{E}^n$ est $\mathbb{Z}_2$-gradué donc l'espace $\mathscr{E}$ est $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-gradué : $\mathscr{E} = \bigoplus\limits_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ f\in\mathbb{Z}_2}} \mathscr{E}^n_f$.

Nous définissons un produit sur $\mathscr{E}$ en posant :

$$(F*G)(X_1,\dots,X_{n+p+1}) := F(G(X_1,\dots,X_{p+1}),X_{p+2},\dots,X_{n+p+1}) \tag{II.42}$$

(pour $F \in \mathscr{E}^n$, $G \in \mathscr{E}^p$), une loi de composition par la relation :

$$F\circ G := \frac{1}{(p+1)!n!}\,\mathrm{A}(F*G) = \sum_{\sigma\in S_{p+1,n}} \sigma \underset{a}{\cdot} (F*G) \tag{II.43}$$

(pour $F \in \mathscr{E}^n$, $G \in \mathscr{E}^p$) et enfin un super-crochet :

$$[F,G] := F\circ G - (-1)^{np+fg} G\circ F \tag{II.44}$$

(pour $F \in \mathscr{E}^n_f$, $G \in \mathscr{E}^p_g$).

Remarque II.2.6. Pour $F,G \in \mathscr{E}$, nous avons $F\circ G \in \mathscr{E}$ mais cette loi de composition n'est pas associative. Néanmoins, d'après [BP89], nous avons :

$$(F\circ G)\circ H - F\circ(G\circ H) = (-1)^{pq+gh}((F\circ H)\circ G - F\circ(H\circ G))$$

pour $F \in \mathscr{E}^n_f$, $G \in \mathscr{E}^p_g$ et $H \in \mathscr{E}^q_h$.

Proposition II.2.7. *Le super-crochet (II.44) muni l'espace $\mathscr{E}$ d'une structure de super-algèbre de Lie $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée.*

Avant de démontrer cela, nous allons introduire les super-dérivations de l'algèbre $\mathscr{A}(V)$. Nous obtiendrons alors le résultat dans la proposition II.2.19 page 89.

II.2.b Super-dérivations de l'algèbre super-extérieure

Définition II.2.8. Soit $D \in \mathfrak{gl}(\mathscr{A}(V))$ homogène de degré (n,d). L'endomorphisme D est une super-dérivation de $\mathscr{A}(V)$ (pour le produit super-extérieur) si, et seulement si :

$$D(\Omega\wedge\Psi) = (D\Omega)\wedge\Psi + (-1)^{np+d\omega}\Omega\wedge(D\Psi),$$

pour tous $\Omega \in \mathscr{A}^p_\omega(V)$, $\Psi \in \mathscr{A}(V)$.

Nous notons $\mathscr{D}^n_d(V)$ l'espace des super-dérivations homogènes de degré (n,d) et :

$$\mathscr{D}(V) := \bigoplus_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ d\in\mathbb{Z}_2}} \mathscr{D}^n_d(V).$$

Voyons quelques exemples de super-dérivations :

Proposition II.2.9. *Soit $X \in V_x$. Considérons l'endomorphisme i_X de $\mathscr{A}(V)$ défini, pour $\Omega \in \mathscr{A}^n_\omega(V)$, par la relation :*

$$i_X(\Omega)(X_1,\dots,X_{n-1}) := (-1)^{x\omega}\Omega(X,X_1,\dots,X_{n-1})$$

pour $n \geqslant 1$ et $i_X(\Omega) = 0$ si $n = 0$ (nous avons alors $i_X\Omega \in \mathscr{A}^{n-1}_{\omega+x}(V)$).

L'opérateur i_X est une super-dérivation de degré $(-1,x)$ de $\mathscr{A}(V)$. En d'autre termes, si $\Omega \in \mathscr{A}^n_\omega(V)$ et $\Psi \in \mathscr{A}(V)$, alors :

$$i_X(\Omega\wedge\Psi) = i_X(\Omega)\wedge\Psi + (-1)^{x\omega-n}\Omega\wedge i_X(\Psi).$$

Preuve. Soit $X \in V_x$, $\Omega \in \mathscr{A}^n_\omega(V)$ et $\Psi \in \mathscr{A}^p_\psi(V)$ fixés. Soit $X_2,\dots,X_{n+p} \in V$. Par commodité d'écriture, nous notons $X_1 = X$ avec $x_1 = x$. Par définitions, nous avons :

$$\begin{aligned}
& i_X(\Omega\wedge\Psi)(X_2,\dots,X_{n+p}) \\
= \; & (-1)^{x(\omega+\psi)}\Omega\wedge\Psi(X_1,X_2,\dots,X_{n+p}) \\
= \; & (-1)^{x(\omega+\psi)}\sum_{\sigma\in S_{n,p}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{\psi(x_{\sigma(1)}+\dots+x_{\sigma(n)})}\Omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\Psi(X_{\sigma(n+1)},\dots,X_{\sigma(n+p)})
\end{aligned}$$

où $\mathscr{X} = (X_1,\dots,X_{n+p})$ et $S_{n,p}$ désigne l'ensemble des battages de $\mathfrak{S}_{n+p}$ relatifs à n.

Nous avons $S_{n,p} = S'_{n,p} \sqcup S''_{n,p}$ avec :

$$S'_{n,p} := \{\sigma \in S_{n,p} \mid \sigma(1) = 1\} \quad \text{et} \quad S''_{n,p} := \{\sigma \in S_{n,p} \mid \sigma(n+1) = 1\}.$$

Notons $\widetilde{S}_{n,p}$ l'ensemble des permutations σ de l'ensemble $[\![2,n+p]\!]$ telles que $\sigma(2) < \dots < \sigma(n)$ et $\sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+p)$. Soit $\sigma \in S'_{n,p}$. En notant $\widetilde{\sigma} := \sigma_{||[\![2,n+p]\!]}$, nous avons $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{S}_{n,p}$ et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\widetilde{\sigma})$. Si $\widetilde{\mathscr{X}} := (X_2,\dots,X_{n+p})$, nous obtenons : $\varepsilon(\sigma,\mathscr{X}) = \varepsilon(\widetilde{\sigma},\widetilde{\mathscr{X}})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{x(\omega+\psi)}\sum_{\sigma\in S'_{n,p}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{\psi(x_{\sigma(1)}+\dots+x_{\sigma(n)})}\Omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\Psi(X_{\sigma(n+1)},\dots,X_{\sigma(n+p)}) \\
= \; & \sum_{\sigma\in S'_{n,p}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{\psi(x_{\sigma(2)}+\dots+x_{\sigma(n)})}i_X\Omega(X_{\sigma(2)},\dots,X_{\sigma(n)})\Psi(X_{\sigma(n+1)},\dots,X_{\sigma(n+p)}) \\
= \; & \sum_{\widetilde{\sigma}\in \widetilde{S}_{n,p}}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\varepsilon(\widetilde{\sigma},\widetilde{\mathscr{X}})(-1)^{\psi(x_{\widetilde{\sigma}(2)}+\dots+x_{\widetilde{\sigma}(n)})}i_X\Omega(X_{\widetilde{\sigma}(2)},\dots,X_{\widetilde{\sigma}(n)})\Psi(X_{\widetilde{\sigma}(n+1)},\dots,X_{\widetilde{\sigma}(n+p)}) \\
= \; & i_X(\Omega)\wedge\Psi\;(X_2,\dots,X_{n+p}).
\end{aligned}$$

D'autre part, considérons la permutation élément de $\mathfrak{S}_{n+p}$:

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & n+p \\ n+1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+2 & \cdots & n+p \end{pmatrix}.$$

Les couples d'inversions de π sont les couples $(1,k)$ avec $k \in [\![2,n+1]\!]$ donc $\varepsilon(\pi) = (-1)^n$. Si $\sigma \in S''_{n,p}$, alors $\sigma\pi$ fixe 1 d'où, en utilisant le lemme II.1.14 :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\widetilde{\sigma\pi},\widetilde{\mathscr{X}}) &= \varepsilon(\sigma\pi,\mathscr{X}) \\
&= \varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\varepsilon(\pi,\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X}) \\
&= (-1)^{x_{\sigma(n+1)}(x_{\sigma(1)}+\ldots+x_{\sigma(n)})}\varepsilon(\sigma,\mathscr{X}) \\
&= (-1)^{x\omega}\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})
\end{aligned}$$

car soit $\Omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})=0$ soit $\omega = x_{\sigma(1)}+\ldots+x_{\sigma(n)} \pmod 2$ dans la somme. Remarquons de plus que :

$$\begin{cases}\sigma(1)<\ldots<\sigma(n)\\ \sigma(n+2)<\ldots<\sigma(n+p)\\ \sigma(n+1)=1\end{cases} \iff \begin{cases}\sigma\pi(2)<\ldots<\sigma\pi(n+1)\\ \sigma\pi(n+2)<\ldots<\sigma\pi(n+p)\\ \sigma\pi(1)=1\end{cases}.$$

Autrement dit, lorsque σ parcourt $S''_{n,p}$, $\tau=\sigma\pi$ parcourt l'ensemble des battages $\widetilde{S}_{n+1,p-1}$ (en conservant les notations précédentes).

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
&(-1)^{x(\omega+\psi)}\sum_{\sigma\in S''_{n,p}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{\psi(x_{\sigma(1)}+\ldots+x_{\sigma(n)})}\Omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})\Psi(X,X_{\sigma(n+2)},\ldots,X_{\sigma(n+p)}) \\
=\;&(-1)^{n}\sum_{\tau\in\widetilde{S}_{n+1,p-1}}\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau,\widetilde{\mathscr{X}})(-1)^{\psi(x_{\tau(2)}+\ldots+x_{\tau(n+1)})}\Omega(X_{\tau(2)},\ldots,X_{\tau(n+1)})i_X\Psi(X_{\tau(n+2)},\ldots,X_{\tau(n+p)}) \\
=\;&(-1)^{x\omega-n}\sum_{\tau\in\widetilde{S}_{n+1,p-1}}\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau,\widetilde{\mathscr{X}})(-1)^{(\psi+x)(x_{\tau(2)}+\ldots+x_{\tau(n+1)})}\Omega(X_{\tau(2)},\ldots,X_{\tau(n+1)})i_X\Psi(X_{\tau(n+2)},\ldots,X_{\tau(n+p)}) \\
=\;&(-1)^{x\omega-n}\Omega\wedge i_X\Psi\;(X_2,\ldots,X_{n+p}).
\end{aligned}$$

car on peut supposer $\omega = x_{\tau(2)}+\ldots+x_{\tau(n+1)} \pmod 2$ d'après la remarque II.1.9. D'où le résultat. □

Proposition II.2.10. *Soit $D\in\mathscr{D}^n_d(V)$ et $\Omega\in\mathscr{A}^p_\omega(V)$. Alors $\Omega\wedge D\colon \Psi\mapsto\Omega\wedge(D\Psi)$ est une superdérivation de degré $(n+p,d+\omega)$.*

Preuve. Soit $\Psi\in\mathscr{A}^q_\psi(V)$ et $\Upsilon\in\mathscr{A}^r_\upsilon(V)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(\Omega\wedge D)(\Psi\wedge\Upsilon) &= \Omega\wedge D(\Psi\wedge\Upsilon) \\
&= \Omega\wedge((D\Psi)\wedge\Upsilon+(-1)^{nq+d\psi}\Psi\wedge(D\Upsilon)) \\
&= (\Omega\wedge D)(\Psi)\wedge\Upsilon+(-1)^{nq+d\psi}(-1)^{pq+\omega\psi}\Psi\wedge(\Omega\wedge D)(\Upsilon) \\
&= (\Omega\wedge D)(\Psi)\wedge\Upsilon+(-1)^{((n+p)q+(d+\omega)\psi)}\Psi\wedge(\Omega\wedge D)(\Upsilon).
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Corollaire II.2.11. *Soit $\Omega\in\mathscr{A}^p_\omega(V)$ et $X\in V_x$. Alors $\Omega\wedge i_X\in\mathscr{D}^{p-1}_{\omega+x}(V)$.*

Remarque II.2.12. Nous pouvons remarquer que ce résultat n'est qu'une généralisation des super-dérivations ($\mathbb{Z}$-graduées) intervenant dans le lemme I.3.15 page 24.

Examinons maintenant la structure de l'espace des super-dérivations.

Proposition II.2.13. *Considérons l'espace $\mathscr{D}(V)$ des super-dérivations de la superalgèbre $\mathscr{A}(V)$. Muni du super-crochet des endomorphismes, l'espace $\mathscr{D}(V)$ est une sous-algèbre de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathscr{A}(V))$.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin de deux lemmes :

Lemme II.2.14. *L'espace $\mathscr{D}(V)$ est engendré par les super-dérivations de la forme $\Omega \wedge i_X$ introduites dans le corollaire II.2.11.*

Preuve. Considérons une base d'homogènes $\{X_1, \dots, X_{n_{\bar 0}+n_{\bar 1}}\}$ de V. Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_{\bar 0}+n_{\bar 1}}\}$ la base duale. D'après la remarque II.1.9, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_{\bar 0}+n_{\bar 1}}$ sont de degrés respectifs $x_1, \dots, x_{n_{\bar 0}+n_{\bar 1}}$.

Soit $D \in \mathscr{D}(V)$ et $\Omega_i = (-1)^{x_i} D(\varphi_i) \in \mathscr{A}(V)$, $i \in [\![1, n_{\bar 0}+n_{\bar 1}]\!]$. Soit $D' = \sum_{i=1}^{n_{\bar 0}+n_{\bar 1}} \Omega_i \wedge i_{X_i}$. L'application D' est une super-dérivation. Pour $j \in [\![1, n_{\bar 0}+n_{\bar 1}]\!]$, nous avons :

$$D'(\varphi_j) = (-1)^{x_j x_j} \Omega_j \varphi_j(X_j) = D(\varphi_j).$$

Ainsi les opérateurs linéaires D et D' sont deux super-dérivations qui coïncident sur V^* : ils sont donc égaux. □

Lemme II.2.15. *Soit $\Omega \in \mathscr{A}_\omega^{n+1}(V)$, $\Psi \in \mathscr{A}_\psi^{p+1}(V)$, $X \in V_x$ et $Y \in V_y$. Alors*

$$[\Omega \wedge i_X, \Psi \wedge i_Y] = (\Omega \wedge i_X \Psi) \wedge i_Y - (-1)^{np+dd'} (\Psi \wedge i_Y \Omega) \wedge i_X$$

avec $d = \omega + x$, $d' = \psi + y$.

Preuve. D'après la définition du super-crochet (II.41) et le corollaire II.2.11, nous avons :

$$\begin{aligned}
[\Omega \wedge i_X, \Psi \wedge i_Y] &= \Omega \wedge i_X(\Psi \wedge i_Y) - (-1)^{np+dd'} \Psi \wedge i_Y(\Omega \wedge i_X) \\
&= \Omega \wedge i_X(\Psi) \wedge i_Y + (-1)^{x\psi-(p+1)} \Omega \wedge \Psi \wedge i_X i_Y - (-1)^{np+dd'} \Psi \wedge i_Y(\Omega) \wedge i_X \\
&\quad -(-1)^{np+dd'} (-1)^{y\omega-(n+1)} \Psi \wedge \Omega \wedge i_Y i_X.
\end{aligned}$$

Soit $q \geqslant 2$, $\Upsilon \in \mathscr{A}_\upsilon^q(V)$ et $X_3, \dots, X_q \in V$. Notons $X_1 = X$, $X_2 = Y$ et τ la transposition $(1\ 2)$ élément de $\mathfrak{S}_q$. Alors :

$$\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau, \mathscr{X}) = -(-1)^{xy}.$$

Comparons maintenant $i_X i_Y(\Upsilon)$ avec $i_Y i_X(\Upsilon)$:

$$\begin{aligned}
i_X(i_Y \Upsilon)(X_3, \dots, X_q) &= (-1)^{x(\upsilon+y)} i_Y \Upsilon(X, X_3, \dots, X_q) \\
&= (-1)^{x(\upsilon+y)+\upsilon y} \Upsilon(Y, X, X_3, \dots, X_q) \\
&= \varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau, \mathscr{X})(-1)^{x(\upsilon+y)+\upsilon y} \Upsilon(X, Y, X_3, \dots, X_q) \\
&= -(-1)^{xy}(-1)^{y(x+\upsilon)} i_X \Upsilon(Y, X_3, \dots, X_q) \\
&= -(-1)^{xy} i_Y(i_X \Upsilon)(X_3, \dots, X_q).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$i_X i_Y = -(-1)^{xy} i_Y i_X.$$

D'autre part, d'après la proposition II.1.29, nous avons :

$$\Psi \wedge \Omega = (-1)^{(n+1)(p+1)+\omega\psi} \Omega \wedge \Psi.$$

En conséquence :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{np+dd'}(-1)^{y\omega-(n+1)}\Psi \wedge \Omega \wedge i_Y i_X \\
= \quad & (-1)^{np+(\omega+x)(\psi+y)+y\omega-(n+1)+(n+1)(p+1)+\omega\psi+xy+1}\Omega \wedge \Psi \wedge i_X i_Y \\
= \quad & (-1)^{x\psi+p+1}\Omega \wedge \Psi \wedge i_X i_Y
\end{aligned}$$

D'où :

$$(-1)^{x\psi-(p+1)}\Omega \wedge \Psi \wedge i_X i_Y - (-1)^{np+dd'}(-1)^{y\omega-n+1}\Psi \wedge \Omega \wedge i_Y i_X = 0.$$

D'où le résultat énoncé. □

Preuve de la proposition II.2.13 – D'après le lemme II.2.14, il suffit de montrer que le super-crochet de deux super-dérivations du type $\Omega \wedge i_X$ est une super-dérivation. Mais d'après le lemme II.2.15, le super-crochet de deux super-dérivations $\Omega \wedge i_X$ et $\Psi \wedge i_Y$ est somme de deux super-dérivations de ce type. D'où le résultat. □

II.2.c Super-algèbre de Lie des endomorphismes multilinéaires

Dans cette partie, nous allons justifier que le super-crochet défini en (II.44) munit l'espace $\mathscr{E}$ d'une structure de super-algèbre de Lie $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$-graduée. Pour ce faire, nous nous proposons de construire un isomorphisme de super-algèbres de Lie $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$-graduées $F \in \mathscr{E} \rightsquigarrow D_F \in \mathscr{D}(V)$.

Rappelons que via l'isomorphisme donné en introduction de cette partie, l'espace $\mathscr{E}$ est engendré par les tenseurs élémentaires $\Omega \otimes X$ avec $\Omega \in \mathscr{A}(V)$ et $X \in V$.

Lemme II.2.16. *Soit $F = \Omega \otimes X \in \mathscr{E}^n_{\omega+x}$ un tenseur élémentaire. Alors :*

$$^TF = (-1)^{x\omega}\Omega \wedge i_X$$

où (rappel) ^TF désigne la super-transposition de l'application F.

Preuve. Soit $X_1, \ldots, X_{n+1} \in V$ et $\varphi \in V^*_\phi$. D'après la définition II.1.39, il vient :

$$\begin{aligned}
{}^TF(\varphi)(X_1,\ldots,X_{n+1}) \quad &= \quad (-1)^{\phi(\omega+x)}\varphi(F(X_1,\ldots,X_{n+1})) \\
&= \quad (-1)^{\phi(\omega+x)}\Omega(X_1,\ldots,X_{n+1})\varphi(X) \\
&= \quad (-1)^{\phi\omega}\Omega(X_1,\ldots,X_{n+1})i_X(\varphi) \\
&\underset{x=\phi}{=} \quad (-1)^{x\omega}\Omega(X_1,\ldots,X_{n+1})i_X(\varphi) \\
&= \quad (-1)^{(x+\phi)(x_1+\ldots+x_{n+1})}(-1)^{x\omega}\Omega(X_1,\ldots,X_{n+1})i_X(\varphi) \\
&= \quad (-1)^{x\omega}(\Omega \wedge i_X)(\varphi)(X_1,\ldots,X_{n+1})
\end{aligned}$$

car $i_X\varphi \in \mathscr{A}^0_{\bar{0}}(V) = \mathbb{C}$ (ou est nul si $x \neq \phi$ et le résultat est vrai aussi). □

Une application linéaire $F\colon V \to V$ de degré f s'étend de manière naturelle sur $\mathscr{A}(V)$ en un opérateur linéaire T de même degré f par la formule :

$$T(\Psi)(X_1,\ldots,X_n) = -(-1)^{f\psi}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{f(x_1+\ldots+x_{i-1})}\Psi(X_1,\ldots,X_{i-1},F(X_i),X_{i+1},\ldots,X_n) \qquad \text{(II.45)}$$

($\Psi \in \mathscr{A}^n_\psi(V)$, $X_1,\ldots,X_n \in V$).

Proposition II.2.17. *Soit $\Omega \in \mathscr{A}^1_\omega(V) = V^*_\omega$, $X \in V_x$ et $F = \Omega\otimes X \in \mathscr{E}^0_{\omega+x}$ (i.e. l'application $F\colon V \to V$ est linéaire et de degré $\omega+x$). Alors l'opérateur $-(-1)^{x\omega}\Omega\wedge i_X$ vérifie la formule (II.45).*

Preuve. Soit $\Psi \in \mathscr{A}^n_\psi(V)$ et $\mathscr{X} = (X_1,\ldots,X_n) \in V^n$. Notons $\mathscr{X}_i = (X_1,\ldots,X_{i-1},X,X_{i+1},\ldots,X_n)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
(\Omega\wedge i_X)(\Psi)(X_1,\ldots,X_n) &= \Omega\wedge i_X(\Psi)(X_1,\ldots,X_n)\\
&= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(2)<\ldots<\sigma(n)}} \sigma\underset{a}{\cdot}(\Omega\underset{s}{\otimes} i_X(\Psi))(X_1,\ldots,X_n)\\
&= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma(2)<\ldots<\sigma(n)}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{x_{\sigma(1)}(x+\psi)}\Omega(X_{\sigma(1)})i_X(\Psi)(X_{\sigma(2)},\ldots,X_{\sigma(n)})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\sigma_i)\varepsilon(\sigma_i,\mathscr{X})(-1)^{x_i(x+\psi)}(-1)^{x\psi}\Omega(X_i)\Psi(\sigma_i^{-1}\cdot\mathscr{X}_i).
\end{aligned}$$

où σ_i est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n\\ i & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$. Les couples d'inversion de σ_i sont les $(1,j)$ avec $j \in [\![2,i]\!]$. Donc $\varepsilon(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$ et $\varepsilon(\sigma_i,\mathscr{X}) = (-1)^{x_i(x_1+\ldots+x_{i-1})}$. D'autre part, nous pouvons supposer $\omega = x_i$ dans la somme sinon le terme correspondant est nul. Ainsi, comme la forme Ψ est super-antisymétrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&(\Omega\wedge i_X)(\Psi)(X_1,\ldots,X_n)\\
={}& \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\sigma_i,\mathscr{X})\varepsilon(\sigma_i,\mathscr{X}_i)(-1)^{\omega(x+\psi)}(-1)^{x\psi}\Omega(X_i)\Psi(\sigma_i^{-1}\underset{a}{\cdot}\mathscr{X}_i)\\
={}& (-1)^{\omega(x+\psi)}(-1)^{x\psi}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\omega(x_1+\ldots+x_{i-1})}(-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})}\Omega(X_i)\Psi(\mathscr{X}_i)\\
={}& (-1)^{x\omega}(-1)^{\psi(x+\omega)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(\omega+x)(x_1+\ldots+x_{i-1})}\Psi(X_1,\ldots,X_{i-1},\Omega\otimes X(X_i),X_{i+1},\ldots,X_n).
\end{aligned}$$

d'où le résultat en multipliant par $-(-1)^{x\omega}$. □

Nous disposons désormais d'une application linéaire de l'espace $\mathscr{E}$ dans l'espace $\mathscr{D}(V)$ définie sur les tenseurs élémentaires par la relation :

$$F = \Omega\otimes X \in \mathscr{E}^p_{x+\omega} \rightsquigarrow D_F = -(-1)^{x\omega}\Omega\wedge i_X \in \mathscr{D}^p_{x+\omega}(V)$$

et prolongeant l'action naturelle des endomorphismes linéaires de V sur $\mathscr{A}(V)$ (en réalité la super-dérivation D_F est l'opposé de l'extension de l'application ${}^T F$ à la superalgèbre $\mathscr{A}(V)$).

Réciproquement, nous pouvons définir une application de l'espace $\mathscr{D}(V)$ dans l'espace $\mathscr{E}$ en associant à la super-dérivation $D = \Omega \wedge i_X \in \mathscr{D}^p_{\omega+x}(V)$ l'application $F_D = -(-1)^{x\omega}\Omega \otimes X \in \mathscr{E}^p_{\omega+x}$. Manifestement les deux applications construites sont réciproques l'une de l'autre et linéaires donc les espaces $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}(V)$ sont isomorphes.

Remarque II.2.18. Avec les notations précédentes, nous avons $x = d+\omega$ et nous pouvons supposer $\omega = x_1 + \ldots + x_{p+1}$ dans les lignes suivantes, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
(-1)^{x\omega}\Omega(X_1,\ldots,X_{p+1})X &= (-1)^{(d+x_1+\ldots+x_{p+1})(x_1+\ldots+x_{p+1})}\Omega(X_1,\ldots,X_{p+1})X \\
&= (-1)^{d(x_1+\ldots+x_{p+1})+(x_1+\ldots+x_{p+1})^2}\Omega(X_1,\ldots,X_{p+1})X \\
&= (-1)^{(d+1)(x_1+\ldots+x_{p+1})}\Omega(X_1,\ldots,X_{p+1})X.
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc donner une définition de F_D sans connaître la décomposition de D en homogènes $\Omega \wedge i_X$ mais juste en connaissant son degré d.

Théorème II.2.19. *Soit $F \in \mathscr{E}^n$, $G \in \mathscr{E}^p$. Alors :*

$$[D_F, D_G] = (-1)^{np} D_{[F,G]}. \tag{II.46}$$

Par conséquent le super-crochet défini en (II.44) est bien un super-crochet de Lie $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-gradué qui munit l'espace $\mathscr{E}$ d'une structure de super-algèbre de Lie $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduée. De plus, l'isomorphisme entre les espaces $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}(V)$ est un isomorphisme de super-algèbres de Lie $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2)$-graduées.

Preuve. Il suffit de démontrer la relation (II.46) sur les tenseurs élémentaires $F = \Omega \otimes X$ et $G = \Psi \otimes Y$ avec $\Omega \in \mathscr{A}^{n+1}_\omega(V)$, $\Psi \in \mathscr{A}^{p+1}_\psi(V)$, $X \in V_x$ et $Y \in V_y$. Nous avons $\deg(F) = (n, f)$ et $\deg(G) = (p, g)$ avec $f = \omega + x$ et $g = \psi + y$. Soit $X_1, \ldots, X_{n+p+1} \in V$.
D'après la définition (II.42), il vient :

$$\begin{aligned}
F * G(X_1,\ldots,X_{n+p+1}) &= F(G(X_1,\ldots,X_{p+1}), X_{p+2},\ldots,X_{n+p+1}) \\
&= \Psi(X_1,\ldots,X_{p+1})\Omega(Y, X_{p+2},\ldots,X_{n+p+1})X \\
&= (-1)^{\omega y}\Psi(X_1,\ldots,X_{p+1}) i_Y(\Omega)(X_{p+2},\ldots,X_{n+p+1})X \\
&= (-1)^{\omega y}(-1)^{(\omega+y)(x_1+\ldots+x_{p+1})}(\Psi \underset{s}{\otimes} i_Y(\Omega))(X_1,\ldots,X_{n+p+1})X \\
&= (-1)^{\omega y}(-1)^{(\omega+y)\psi}(\Psi \underset{s}{\otimes} i_Y(\Omega))(X_1,\ldots,X_{n+p+1})X
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
F * G &= (-1)^{\omega y + (\omega+y)\psi}(\Psi \underset{s}{\otimes} i_Y(\Omega)) \otimes X\ ; \\
G * F &= (-1)^{\psi x + (\psi+x)\omega}(\Omega \underset{s}{\otimes} i_X(\Psi)) \otimes Y.
\end{aligned}$$

Donc, par la définition (II.43) :

$$\begin{aligned} F \circ G &= (-1)^{\omega(y+\psi)+y\psi} \sum_{\sigma \in S_{p+1,n}} \sigma \underset{a}{\cdot} (\Psi \underset{s}{\otimes} i_Y(\Omega)) \otimes X \\ &= (-1)^{\omega g+y\psi} (\Psi \wedge i_Y(\Omega)) \otimes X \; ; \\ G \circ F &= (-1)^{\psi f+x\omega} (\Omega \wedge i_X(\Psi)) \otimes Y. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} [F,G] &= F \circ G - (-1)^{np+fg} G \circ F \\ &= (-1)^{\omega g+y\psi} (\Psi \wedge i_Y(\Omega)) \otimes X - (-1)^{np+fg+\psi f+x\omega} (\Omega \wedge i_X(\Psi)) \otimes Y. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} D_{[F,G]} &= -(-1)^{(\psi+y+\omega)x+\omega g+y\psi} \Psi \wedge i_Y(\Omega) \wedge i_X + (-1)^{(\omega+x+\psi)y+np+fg+\psi f+x\omega} \Omega \wedge i_X(\Psi) \wedge i_Y \\ &= -(-1)^{fg+\psi y+\omega x} \Psi \wedge i_Y(\Omega) \wedge i_X + (-1)^{np+\psi y+\omega x} \Omega \wedge i_X(\Psi) \wedge i_Y \\ &= (-1)^{\omega x+\psi y} ((-1)^{np} \Omega \wedge i_X(\Psi) \wedge i_Y - (-1)^{fg} \Psi \wedge i_Y(\Omega) \wedge i_X). \end{aligned}$$

D'autre part, le lemme II.2.15 nous donne directement le calcul de $[D_F, D_G]$ pour $F = \Omega \otimes X$ et $G = \Psi \otimes Y$:

$$\begin{aligned} [D_F, D_G] &= (-1)^{\omega x+\psi y} [\Omega \wedge i_X, \Psi \wedge i_Y] \\ &= (-1)^{\omega x+\psi y} (\Omega \wedge i_X \Psi \wedge i_Y - (-1)^{np+fg} \Psi \wedge i_Y \Omega \wedge i_X). \end{aligned}$$

D'où l'égalité (II.46). $\square$

Pour terminer cette partie, donnons la formule générale de l'application D_F :

Lemme II.2.20. *Soit $F \in \mathscr{E}^n_f$, $\Psi \in \mathscr{A}^p_\psi(V)$ et $X_1, \dots, X_{n+p} \in V$. Nous avons :*

$$D_F(\Psi)(\mathscr{X}) = -(-1)^{\psi f} \sum_{\sigma \in S_{n+1,p-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \Psi(F(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n+1)}), X_{\sigma(n+2)}, \dots, X_{\sigma(n+p)}) \quad \text{(II.47)}$$

où $\mathscr{X} = (X_1, \dots, X_{n+p})$.

Preuve. L'application F se décompose en somme de tenseurs élémentaires et la bijection $F \rightsquigarrow D_F$ est linéaire donc il suffit d'établir l'égalité pour $F = \Omega \otimes X$ avec $\Omega \in \mathscr{A}^{n+1}_\omega(V)$ et $X \in V_x$ (d'où $f = \omega + x$). Il vient :

$$\begin{aligned} & D_F(\Psi)(\mathscr{X}) \\ = \;& -(-1)^{\omega x} \Omega \wedge i_X(\Psi)(X_1, \dots, X_{n+p}) \\ = \;& -(-1)^{\omega x} \sum_{\sigma \in S_{n+1,p-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) (-1)^{(\psi+x)\overbrace{(x_{\sigma(1)} + \dots + x_{\sigma(n+1)})}^{\omega}} \Omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n+1)}) \\ & (-1)^{\psi x} \Psi(X, X_{\sigma(n+2)}, \dots, X_{\sigma(n+p)}) \\ = \;& -(-1)^{\psi(\omega+x)} \sum_{\sigma \in S_{n+1,p-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \Psi(\Omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n+1)}) X, X_{\sigma(n+2)}, \dots, X_{\sigma(n+p)}) \\ = \;& -(-1)^{\psi f} \sum_{\sigma \in S_{n+1,p-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \Psi(F(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n+1)}), X_{\sigma(n+2)}, \dots, X_{\sigma(n+p)}). \end{aligned}$$

□

II.2.d Cohomologie d'une super-algèbre de Lie

Lemme II.2.21. *Soit $F \in \mathscr{E}_{\bar{0}}^{1}$. Notons $\langle X,Y\rangle = F(X,Y)$, pour tous $X,Y \in V$. Alors $\langle .,.\rangle$ est un super-crochet de Lie sur V si, et seulement si, $[F,F] = 0$.*

Preuve. Commençons par remarquer que puisque $\deg(F) = (1,\bar{0})$, alors $\deg(\langle X,Y\rangle) = x+y$ si $X \in V_x$ et $Y \in V_y$. D'autre part $\langle .,.\rangle$ est super-antisymétrique puisque F l'est. Il reste à montrer que l'identité de Jacobi $\mathbb{Z}_2$-graduée est équivalente à la condition $F \circ F = 0$ (en effet, nous avons $[F,F] = 2F \circ F$).

Soit $\mathscr{X} = (X_1,X_2,X_3) \in V^3$. Notons $\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$, $\sigma_2 = (2\ 3)$ et $\sigma_3 = \mathrm{id}$ les trois éléments de l'ensemble des battages $S_{2,1}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
F \circ F(X_1,X_2,X_3) &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_3\\ \sigma(1)<\sigma(2)}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(F*F)(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},X_{\sigma(3)})\\
&= \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_3\\ \sigma(1)<\sigma(2)}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})F(F(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}),X_{\sigma(3)})\\
&= \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_1,\mathscr{X})F(F(X_2,X_3),X_1)+\varepsilon(\sigma_2)\varepsilon(\sigma_2,\mathscr{X})F(F(X_1,X_3),X_2)\\
&\quad +\varepsilon(\sigma_3)\varepsilon(\sigma_3,\mathscr{X})F(F(X_1,X_2),X_3)\\
&= (-1)^{x_1(x_2+x_3)}F(F(X_2,X_3),X_1)-(-1)^{x_2x_3}F(F(X_1,X_3),X_2)+F(F(X_1,X_2),X_3)\\
&= -F(X_1,F(X_2,X_3))+F(F(X_1,X_2),X_3))+(-1)^{x_1x_2}F(X_2,F(X_1,X_3))\\
&= -\langle X_1,\langle X_2,X_3\rangle\rangle+\langle\langle X_1,X_2\rangle,X_3\rangle+(-1)^{x_1x_2}\langle X_2,\langle X_1,X_3\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Nous supposons désormais que $V = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ est une superalgèbre de Lie munie d'un super-crochet de Lie noté $[X,Y]$. Notons $\mathrm{ad}(X)$ la représentation adjointe de la superalgèbre $\mathfrak{g}$. L'endomorphisme linéaire $\mathrm{ad}(X)$ (de degré x) s'étend naturellement à la superalgèbre $\mathscr{A}(\mathfrak{g})$ par la formule (II.45). Avec les notations de la partie précédente, l'extension de $\mathrm{ad}(X)$ à la superalgèbre $\mathscr{A}(\mathfrak{g})$ est $D_{\mathrm{ad}(X)}$.

Notons F_0 l'application $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ Alors $F_0 \in \mathscr{E}_{\bar{0}}^{1}$. Soit :

$$d := D_{F_0}.$$

L'opérateur d est une super-dérivation de degré $(1,\bar{0})$ de la superalgèbre $\mathscr{A}(\mathfrak{g})$. D'après le lemme II.2.21, nous avons :

$$d\circ d = \frac{1}{2}[d,d] = \frac{1}{2}[D_{F_0},D_{F_0}] = \frac{1}{2}D_{[F_0,F_0]} = 0$$

car $[F_0,F_0] = 0$. Ainsi :

$$d^2 = 0. \tag{II.48}$$

Définition II.2.22. La super-dérivation d s'appelle la **différentielle super-extérieure** de la superalgèbre $\mathscr{A}(\mathfrak{g})$. Elle est de degré $(1,\bar{0})$.

Lemme II.2.23. *Soit $\Omega \in \mathscr{A}^n(\mathfrak{g})$ et $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$. En notant $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, nous avons :*

$$d(\Omega)(\mathscr{X}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j}(-1)^{x_i(x_1+\ldots+x_{i-1})}(-1)^{x_j(x_1+\ldots+\widehat{x_i}+\ldots+x_{j-1})}\Omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_n) \tag{II.49}$$

où $\widehat{X_k}$ signifie que le terme correspondant est omis. En particulier :

$$d\varphi(X,Y) = -\varphi([X,Y]) \tag{II.50}$$

pour tout $\varphi \in \mathfrak{g}^*$, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Preuve. En appliquant l'expression (II.47), nous obtenons immédiatement :

$$\begin{aligned} d(\Omega)(\mathscr{X}) &= -\sum_{\sigma \in S_{2,n-2}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})\Omega(F_0(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), X_{\sigma(3)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \\ &= -\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varepsilon(\sigma_{(i,j)})\varepsilon(\sigma_{(i,j)}, \mathscr{X})\Omega(F_0(X_i, X_j), X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

où :

$$\sigma_{(i,j)} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i+1 & i+2 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ i & j & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n.$$

Les couples d'inversions de $\sigma_{(i,j)}$ sont $(1,k)$ pour $k \in [\![3, i+1]\!]$ et $(2,\ell)$ pour $\ell \in [\![3, j]\!]$. Donc :

$$\varepsilon(\sigma_{(i,j)}) = (-1)^{i-1+j-2} = (-1)^{i+j+1}$$

et :

$$\varepsilon(\sigma_{(i,j)}, \mathscr{X}) = (-1)^{x_i(x_1+\ldots+x_{i-1})+x_j(x_1+\ldots+\widehat{x_i}+\ldots+x_{j-1})}.$$

D'où la formule (II.49). □

Pour $X \in \mathfrak{g}_x$, notons $\mathscr{L}_X := D_{\mathrm{ad}(X)}$ l'endomorphisme appelé la **super-dérivée de Lie** suivant X. Ainsi l'opérateur $\mathscr{L}_X$ est égal à l'opposé de l'extension de $\mathrm{ad}(X)$ à la superalgèbre $\mathscr{A}(\mathfrak{g})$ et est élément de $\mathscr{D}^0_x(\mathfrak{g})$. Concrètement :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_X(\varphi)(Y) &= -{}^T\mathrm{ad}(X)(\varphi)(Y) \\ &= -(-1)^{\phi x}\varphi([X,Y]) \end{aligned} \tag{II.51}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{A}^1_\phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^*_\phi$ et $Y \in \mathfrak{g}$, et, d'après l'expression (II.45) :

$$\mathscr{L}_X(\Omega)(X_1, \ldots, X_n) = -(-1)^{x\omega}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})}\Omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_n) \tag{II.52}$$

pour $\Omega \in \mathscr{A}^n_\omega(\mathfrak{g})$, et $X_i \in \mathfrak{g}_{x_i}$, $i \in [\![1, n]\!]$.

Proposition II.2.24. *La super-dérivée de Lie définit une représentation de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans la superalgèbre des super-dérivations $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$.*

Preuve. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{L}_{[X,Y]} = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y]$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$. Comme ce sont deux super-dérivations de même degré $(0, x+y)$, il suffit de démontrer que l'égalité est vraie sur les formes linéaires sur $\mathfrak{g}$. Soit donc $\varphi \in \mathfrak{g}^*_\phi$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. D'après l'expression (II.51), il vient :

$$\mathscr{L}_{[X,Y]}(\varphi)(Z) = -(-1)^{\phi(x+y)}\varphi([[X,Y],Z])$$

et :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y](\varphi)(Z) &= \mathscr{L}_X(\mathscr{L}_Y(\varphi))(Z) - (-1)^{xy}\mathscr{L}_Y(\mathscr{L}_X(\varphi))(Z) \\
&= -(-1)^{x(y+\phi)}\mathscr{L}_Y(\varphi)([X,Z]) + (-1)^{xy+y(x+\phi)}\mathscr{L}_X(\varphi)([Y,Z]) \\
&= (-1)^{xy+\phi(x+y)}\varphi([Y,[X,Z]]) - (-1)^{\phi(x+y)}\varphi([X,[Y,Z]]).
\end{aligned}$$

Or, d'après l'identité de Jacobi, nous avons :

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + (-1)^{xy}[Y,[X,Z]].$$

Donc l'égalité $\mathscr{L}_{[X,Y]}(\varphi) = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y](\varphi)$ est vraie. □

Remarque II.2.25. Considérons la représentation contragrédiente $\check{\mathrm{ad}}$ définie sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ par l'expression :

$$\check{\mathrm{ad}}_X(\varphi)(Y) = -(-1)^{x\phi}\varphi(\mathrm{ad}(X)(Y)) = -(-1)^{x\phi}\varphi([X,Y]).$$

Alors la super-dérivée de Lie $\mathscr{L}_X$ est l'extension de la représentation contragrédiente à l'algèbre super-extérieure $\mathscr{A}(\mathfrak{g}) = \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$.

Voyons comment les formules classiques en cohomologie des algèbres de Lie (rappelées dans la proposition I.3.13 page 23) se transposent au cas des superalgèbres de Lie.

Lemme II.2.26. *Soit $X \in \mathfrak{g}_x$. Nous disposons de la formule de Cartan :*

$$\mathscr{L}_X = [i_X, d] = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

Preuve. L'opérateur $\mathscr{L}_X$ est une super-dérivation de degré $(0,x)$ et l'opérateur $[i_X, d]$ est également une super-dérivation de degré $(-1+1, x+\overline{0}) = (0,x)$ donc il suffit de démontrer qu'ils coïncident sur l'espace $\mathfrak{g}^*$. Soit $\varphi \in \mathfrak{g}^*_\phi$ et $Y \in \mathfrak{g}$. D'après l'expression (II.51), nous avons :

$$\mathscr{L}_X(\varphi)(Y) = -(-1)^{\phi x}\varphi([X,Y]).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
[d, i_X](\varphi)(Y) &= d(i_X(\varphi))(Y) + i_X(d\varphi)(Y) \\
&= (-1)^{\phi x}d(\varphi(X))(Y) + (-1)^{\phi x}d\varphi(X,Y) \\
&= 0 - (-1)^{\phi x}\varphi([X,Y]).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'égalité. □

Lemme II.2.27. *Soit $X \in \mathfrak{g}_x$. Les opérateurs $\mathscr{L}_X$ et d commutent.*

Preuve. Rappelons que $\deg(\mathscr{L}_X) = (0,x)$, $\deg(i_X) = (-1,x)$ et $\deg(d) = (1,\overline{0})$. Appliquant les formules de Cartan puis Jacobi, nous obtenons :

$$[d,\mathscr{L}_X] = [d,[i_X,d]] = [[d,i_X],d] + (-1)^1[i_X,[d,d]] = [\mathscr{L}_X,d]$$

car $d^2 = 0$ d'après l'expression (II.48). Mais le crochet des super-dérivations est super-antisymétrique, d'où :

$$[\mathscr{L}_X,d] = -(-1)^0[d,\mathscr{L}_X].$$

Donc $[\mathscr{L}_X,d] = 0$ i.e. $\mathscr{L}_X \circ d = d \circ \mathscr{L}_X$. □

Lemme II.2.28. *Soit $\{X_1,\dots,X_{n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}}\}$ une base d'homogènes de $\mathfrak{g}$ et $\{\varphi_1,\dots,\varphi_{n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}}\}$ la base duale. Alors :*

$$d = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}} \widetilde{\varphi}_i \wedge \mathscr{L}_{X_i} \tag{II.53}$$

où $\widetilde{\varphi}_i$ est la forme définie par : $\widetilde{\varphi}_i(X) = (-1)^{x_i x}\varphi_i(X)$ pour $X \in \mathfrak{g}_x$.

Preuve. Pour tout $i \in [\![1, n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}]\!]$, l'opérateur $\mathscr{L}_{X_i}$ est une super-dérivation donc $D := \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}} \widetilde{\varphi}_i \wedge \mathscr{L}_{X_i}$ est une super-dérivation d'après la proposition II.2.10. Montrons alors que D coïncide avec $2d$ sur l'espace $\mathfrak{g}^*$.

Soit $\varphi \in \mathfrak{g}^*_\phi$, $X \in \mathfrak{g}_x$ et $Y \in \mathfrak{g}_y$. Pour chaque $i \in [\![1, n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}]\!]$ et en appliquant l'expression (II.51), nous avons :

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\varphi}_i \wedge \mathscr{L}_{X_i}(\varphi)(X,Y) \\
= \ & (\widetilde{\varphi}_i \underset{s}{\otimes} \mathscr{L}_{X_i}(\varphi))(X,Y) - (-1)^{xy}(\widetilde{\varphi}_i \underset{s}{\otimes} \mathscr{L}_{X_i}(\varphi))(Y,X) \\
= \ & (-1)^{x_i x}(-1)^{(x_i+\phi)x}\varphi_i(X)\mathscr{L}_{X_i}(\varphi)(Y) - (-1)^{xy}(-1)^{x_i y}(-1)^{(x_i+\phi)y}\varphi_i(Y)\mathscr{L}_{X_i}(\varphi)(X) \\
= \ & -(-1)^{\phi x}(-1)^{\phi x_i}\varphi_i(X)\varphi([X_i,Y]) + (-1)^{xy}(-1)^{\phi y}(-1)^{\phi x_i}\varphi_i(Y)\varphi([X_i,X]) \\
= \ & -\big(\varphi_i(X)\varphi([X_i,Y]) - (-1)^{xy}\varphi_i(Y)\varphi([X_i,X])\big)
\end{aligned}$$

car soit le premier terme de la somme est nul, soit $x_i = x$ ($x_i = y$ dans le deuxième terme). Donc :

$$\begin{aligned}
D(\varphi)(X,Y) &= -\left(\varphi\left(\left[\sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}} \varphi_i(X)X_i, Y\right]\right) - (-1)^{xy}\varphi\left(\left[\sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}} \varphi_i(Y)X_i, X\right]\right)\right) \\
&= -\big(\varphi([X,Y]) - (-1)^{xy}\varphi([Y,X])\big) \\
&= -2\varphi([X,Y]) \\
&= 2d\varphi(X,Y)
\end{aligned}$$

d'après l'expression (II.50). □

Définition II.2.29. Une forme multilinéaire $\Omega \in \mathscr{A}(\mathfrak{g})$ est dite **invariante** (par l'action de $\mathfrak{g}$) si, et seulement si, elle vérifie :

$$\mathscr{L}_X(\Omega) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Corollaire II.2.30. *Soit $\Omega \in \mathscr{A}(\mathfrak{g})$ un invariant. Alors $d(\Omega) = 0$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme II.2.28. □

II.2.e Super-dérivations de l'algèbre super-extérieure

L'algèbre super-extérieure $\bigwedge(V)$ ayant été définie dans la section II.1.d, nous définissons les super-dérivations de la superalgèbre $\bigwedge(V)$ de la même manière que nous avons défini les super-dérivations de la superalgèbre $\mathscr{A}(V) = \bigwedge(V)^*$ dans la définition II.2.8.

Proposition II.2.31. *Soit U un endomorphisme de V de degré u. Il existe une et une seule super-dérivation D_U de la superalgèbre $\bigwedge(V)$ qui coïncide avec U sur $\bigwedge^1(V) = V$. Elle est définie par la formule :*

$$D_U(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{u(x_1+\ldots+x_{i-1})} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge U(X_i) \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_n \tag{II.54}$$

pour $X_1, \ldots, X_n \in V$. Remarquons que $\deg(D_U) = (0, u)$.

Preuve. Notons D_U la super-dérivation définie par :

$$D_U(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{u(x_1+\ldots+x_{i-1})} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge U(X_i) \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_n.$$

Soit D une super-dérivation de la superalgèbre $\bigwedge(V)$ coïncidant avec l'endomorphisme U sur l'espace V. D'une part, nous avons nécessairement $\deg(D) = (0, u)$. D'autre part, comme D est une super-dérivation, il vient :

$$\begin{aligned}
D(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) &= D(X_1) \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n + (-1)^{ux_1} X_1 \wedge D(X_2 \wedge \ldots \wedge X_n) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{u(x_1+\ldots+x_{i-1})} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge D(X_i) \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{u(x_1+\ldots+x_{i-1})} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge U(X_i) \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_n.
\end{aligned}$$

Donc D coïncide avec D_U sur un système de générateurs de $\bigwedge(V)$. Nous en déduisons l'égalité $D = D_U$. □

Supposons maintenant que $V = \mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie et reprenons les notations de la section II.2.d. Nous pouvons maintenant définir des opérateurs L_X et ∂ comme dans [Kos50].

Définition II.2.32. Soit $X \in \mathfrak{g}_x$. Notons L_X la super-dérivation de $\bigwedge(\mathfrak{g})$ qui prolonge $\mathrm{ad}(X)$. D'après II.2.31, L_X est donnée par :

$$L_X(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{i-1} \wedge [X, X_i] \wedge X_{i+1} \wedge \ldots \wedge X_n$$

pour $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$. Remarquons que $\deg(L_X) = (0, x)$.

Définition II.2.33. Soit ∂ l'endomorphisme de $\bigwedge(\mathfrak{g})$ tel que $\partial(\bigwedge^n(\mathfrak{g})) = \{0\}$ si $n \leqslant 1$ et :

$$\begin{aligned}\partial(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} & (-1)^{i+j+1} (-1)^{x_i(x_1+\ldots+x_{i-1})} (-1)^{x_j(x_1+\ldots+\widehat{x_i}+\ldots+x_{j-1})} [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{X_i} \\ & \wedge \ldots \wedge \widehat{X_j} \wedge \ldots \wedge X_n\end{aligned}$$

pour $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ si $n \geqslant 2$. Remarquons que $\deg(\partial) = (-1, \overline{0})$.

Compte-tenu de ces définitions et de l'isomorphisme entre les espaces $\bigwedge(V)^*$ et $\bigwedge(V^*) = \mathscr{A}(V)$, il apparaît alors que la dérivée de Lie $\mathscr{L}_X$ (voir (II.52)) et la différentielle super-extérieure d (voir (II.49)) sont les opposées des super-transpositions respectives des opérateurs L_X et ∂. Ainsi, les opérateurs $\mathscr{L}_X$ et d sont les généralisations naturelles de la dérivée de Lie et de la différentielle extérieure rencontrés dans [Kos50] et construits de cette manière.

II.3 Superalgèbre de Lie orthosymplectique $\mathfrak{osp}(1,2n)$

II.3.a Définition

Nous reprenons les résultats de [Sch79] II.4. Soit $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension finie, avec $n_{\bar 0} = \dim(V_{\bar 0})$ et $n_{\bar 1} = \dim(V_{\bar 1})$.

Rappel II.3.1. L'algèbre $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est $\mathbb{Z}_2$-graduée par les sous-espaces :

$$\mathrm{End}(V)_\alpha = \{U \in \mathrm{End}(V) \mid U(V_\beta) \subset V_{\alpha+\beta},\ \forall\, \beta \in \mathbb{Z}_2\},$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. La superalgèbre de Lie associée est notée $\mathfrak{gl}(V)$.

Nous pouvons donner une description matricielle de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. Une base d'homogènes de $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ étant donnée, nous pouvons écrire les éléments de $\mathfrak{gl}(V)$ comme les matrices $U = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ avec $A \in \mathscr{M}_{n_{\bar 0}}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{n_{\bar 0}, n_{\bar 1}}(\mathbb{C})$, $C \in \mathscr{M}_{n_{\bar 1}, n_{\bar 0}}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathscr{M}_{n_{\bar 1}, n_{\bar 1}}(\mathbb{C})$. La graduation de $\mathfrak{gl}(V)$ est alors donnée par les deux sous-espaces suivants :

$$\mathfrak{gl}(V)_{\bar 0} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right),\ A \in \mathscr{M}_{n_{\bar 0}}(\mathbb{C}),\ D \in \mathscr{M}_{n_{\bar 1}}(\mathbb{C}) \right\},$$

$$\mathfrak{gl}(V)_{\bar 0} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right),\ B \in \mathscr{M}_{n_{\bar 0}, n_{\bar 1}}(\mathbb{C}),\ C \in \mathscr{M}_{n_{\bar 1}, n_{\bar 0}}(\mathbb{C}) \right\}$$

Le crochet, dans la superalgèbre $\mathfrak{gl}(V)$, de deux matrices $X := \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ et $X' := \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$ s'écrit :

$$[X, X'] = \left(\begin{array}{c|c} AA' - A'A + BC' + B'C & BD' - B'D + AB' - A'B \\ \hline CA' - C'A + DC' - C'D & DD' - D'D + CB' - C'B \end{array}\right).$$

La superalgèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$-gradué définie ci-dessus est notée $\mathfrak{gl}(n_{\bar 0}, n_{\bar 1})$. Par définition, elle est isomorphe à $\mathfrak{gl}(V)$. Nous avons de plus :

$$\mathfrak{gl}(n_{\bar 0}, n_{\bar 1})_{\bar 0} \simeq \mathfrak{gl}(n_{\bar 0}, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(n_{\bar 1}, \mathbb{C})$$

et :

$$\dim(\mathfrak{gl}(n_{\bar 0}, n_{\bar 1})_{\bar 1}) = 2 n_{\bar 0} n_{\bar 1}.$$

Définition II.3.2. Soit $\gamma \colon V \to V$ l'application linéaire définie par : $\gamma(X) = (-1)^x X$ pour $X \in V_x$. La forme linéaire str est définie sur $\mathfrak{gl}(V)$ par :

$$\mathrm{str}(U) = \mathrm{tr}(\gamma U),$$

$U \in \mathfrak{gl}(V)$. Elle s'appelle la **super-trace**.

Remarque II.3.3. Nous en déduisons immédiatement :

$$\mathrm{str}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(D).$$

Proposition II.3.4. *L'application super-trace est paire et invariante par l'action adjointe de la super-algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(V)$ *:*

$$\mathrm{str}([U,U']) = 0$$

pour $U,U' \in \mathfrak{gl}(V)$*, ou, de manière équivalente :*

$$\mathrm{str}(UU') = (-1)^{uu'}\mathrm{str}(U'U).$$

Corollaire II.3.5. *La forme bilinéaire* $B\colon \mathfrak{gl}(V)\times\mathfrak{gl}(V) \to \mathbb{C}$ *définie par* $B(U,U') := \mathrm{str}(UU')$ *est super-symétrique.*

Définition II.3.6. Soit $m,n \in \mathbb{N}^*$ et $J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. L'**algèbre orthosymplectique** $\mathfrak{osp}(m,2n)$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(m,2n)$ définie par :

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathfrak{osp}(m,2n) \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tA = -A \\ {}^tB = JC \\ {}^tDJ + JD = 0 \end{cases}.$$

Énonçons immédiatement quelques propriétés des algèbres orthosymplectiques :

Théorème II.3.7.

1. *Les algèbres orthosymplectiques sont simples.*

2. *La forme bilinéaire* $(X,Y) \mapsto \mathrm{str}(XY)$ *est invariante et non-dégénérée sur* $\mathfrak{osp}(m,2n)$*.*

3. *La forme de Killing sur* $\mathfrak{osp}(m,2n)$ *est donnée par* $(X,Y) \mapsto (m-2n-2)\mathrm{str}(XY)$*.*

Théorème II.3.8. *Il existe un isomorphisme :*

$$\mathfrak{osp}(m,2n)_{\bar{0}} \simeq \mathfrak{so}(m,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}).$$

Nous avons également $\dim(\mathfrak{osp}(m,2n)_{\bar{1}}) = 2mn$.

La superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(m,2n)$ peut aussi être vue comme l'algèbre des invariants d'une forme bilinéaire super-symétrique. Plus précisément :

Proposition II.3.9. *Soit F la forme bilinéaire de matrice $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m,2n)$. La forme bilinéaire F est super-symétrique, paire et non dégénérée sur l'espace $\mathbb{Z}_2$-gradué $V := \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^{2n}$. Alors la superalgèbre $\mathfrak{osp}(m,2n)$ est égale à l'espace des éléments U de $\mathfrak{gl}(m,2n)_u$ vérifiant :*

$$F(U(X),Y) + (-1)^{ux} F(X,U(Y)) = 0$$

pour tous $X \in V_x$, $Y \in V$ et $x \in \mathbb{Z}_2$ et pour $u \in \mathbb{Z}_2$.

Remarque II.3.10. La proposition II.3.9 est en fait valable pour toute forme F bilinéaire, super-symétrique ou super-antisymétrique, paire et non dégénérée. En effet, si la forme F est super-symétrique, et puisque le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la matrice de F peut se réduire à la matrice donnée dans la proposition II.3.9. D'autre part, si la forme F est super-antisymétrique, nous pouvons ramener l'étude au cas super-symétrique en considérant la forme F' définie sur l'espace $\mathbb{Z}_2$-gradué $V' = V'_{\bar{0}} \oplus V'_{\bar{1}}$ par :

$$F'(X,Y) = F(Y,X)$$

pour tous $X,Y \in V$ où $V'_{\bar{0}} := V_{\bar{1}}$ et $V'_{\bar{1}} := V_{\bar{0}}$ (voir [Sch79] II.4.3.A).

Enfin, d'après [Sch79] III.3.1 :

Théorème II.3.11. *Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{osp}(1,2n)$ est complètement réductible.*

II.3.b Systèmes de racines

Rappel II.3.12. Soit $\mathfrak{l}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie. Une **sous-algèbre de Cartan** de $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale dont l'action sur $\mathfrak{l}$ via la représentation adjointe est diagonalisable. La décomposition correspondante de $\mathfrak{l}$ en sous-espaces propres s'écrit $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{l}_\alpha$ et est appelée la **décomposition de Cartan**. L'ensemble des valeurs propres non nulles Φ est un sous-ensemble fini de formes linéaires non nulles sur $\mathfrak{h}$ appelées **racines**. Le sous-espace propre correspondant à $\alpha \in \Phi$ est :

$$\mathfrak{l}_\alpha := \{X \in \mathfrak{l} \mid \mathrm{ad}(\mathfrak{h})(X) = \alpha(\mathfrak{h})X\}$$

et il est appelé l'**espace de racine** associé à $\alpha \in \Phi$.

Un sous-ensemble $\Delta \subset \Phi$ est appelé **base** si c'est une base de $\mathfrak{h}^*$ et si toute racine β appartient à Q^+ ou à $-Q^+$ où $Q^+ := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i$. Rappelons les propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \in \Phi$, $\dim(\mathfrak{l}_\alpha) = 1$;
- l'ensemble Φ engendre un réseau de rang égal à la dimension de $\mathfrak{h}$;
- l'ensemble Φ est symétrique par rapport à l'origine : si $\alpha \in \Phi$, alors $-\alpha \in \Phi$;
- l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_\alpha := \mathfrak{l}_\alpha \oplus \mathfrak{l}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}_{-\alpha}]$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$;

- les sous-algèbres de Lie $\mathfrak{n}^+ := \bigoplus_{\alpha\in Q^+\setminus\{0\}} \mathfrak{l}_\alpha$ et $\mathfrak{n}^- := \bigoplus_{\alpha\in -Q^+\setminus\{0\}} \mathfrak{l}_\alpha$ sont nilpotentes, et $\mathfrak{l} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ (décomposition triangulaire).

Pour tout $\alpha \in \Phi$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{l}_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{l}_{-\alpha}$ et $H_\alpha \in [\mathfrak{l}_\alpha, \mathfrak{l}_{-\alpha}]$ une base de $\mathfrak{s}_\alpha$ vérifiant les relations de commutation de $\mathfrak{sl}_2$ (i.e. $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ et $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$ c'est-à-dire $\alpha(H_\alpha) = 2$). Notons Ω_α l'hyperplan $\{\beta \in \mathfrak{h}^* \mid \beta(H_\alpha) = 0\}$ et σ_α la réflexion d'hyperplan Ω_α : $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ (la réflexion σ_α fixe Ω_α et envoie α sur $-\alpha$). Le groupe $\mathscr{W}$ engendré par ces réflexions est appelé le **groupe de Weyl** de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$. Nous avons les propriétés suivantes :

- le groupe $\mathscr{W}$ agit simplement transitivement sur les bases : si Δ' est une autre base, alors $\Delta' = \sigma(\Delta)$ pour un $\sigma \in \mathscr{W}$ et si $\sigma(\Delta) = \Delta$, alors $\sigma = \mathrm{id}$;
- si $\alpha \in \Phi$, il existe $\sigma \in \mathscr{W}$ tel que $\sigma(\alpha) \in \Delta$
- le groupe $\mathscr{W}$ est engendré par les réflexions σ_α avec $\alpha \in \Delta$.

Une théorie similaire existe pour les superalgèbres de Lie. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ une superalgèbre de Lie de dimension finie et $\mathfrak{h}_{\bar 0}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar 0}$. On note comme précédemment :

$$\mathfrak{g}_\xi^\alpha := \{X \in \mathfrak{g}_\xi \mid [H, X] = \alpha(H)X \ \forall\, H \in \mathfrak{h}_{\bar 0}\}$$

les sous-espaces de poids (pour tout $\xi \in \mathbb{Z}_2$). La sous-algèbre $\mathfrak{h}_{\bar 0}$ agit diagonalement sur les sous-espaces $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ et $\mathfrak{g}_{\bar 1}$. L'ensemble des racines de $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ (resp. $\mathfrak{g}_{\bar 1}$) par rapport à $\mathfrak{h}_{\bar 0}$ est noté $\Delta_{\bar 0}$ (resp. $\Delta_{\bar 1}$) et Δ désigne la réunion $\Delta_{\bar 0} \cup \Delta_{\bar 1}$. D'après [Kač77] et [Mus92], il existe une base $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ constituées de racines simples de $\mathfrak{g}$ i.e. linéairement indépendantes et pour toute racine $\alpha \in \Delta$, on a $\alpha \in Q^+$ ou $-\alpha \in Q^+$ où $Q^+ := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i$.

Soit $\mathfrak{h}$ le centralisateur de $\mathfrak{h}_{\bar 0}$ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha\in Q^+\setminus\{0\}} \mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{-\alpha\in Q^+\setminus\{0\}} \mathfrak{g}^\alpha$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ est une décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$. Cela signifie :

- $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{h}$ sont des sous-algèbres graduées de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{n}^-$ étant nilpotentes ;
- $\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{n}_{\bar 0}^- \oplus \mathfrak{h}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{n}_{\bar 0}^+$ est une décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ au sens classique ;
- $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$.

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe un unique $\mathfrak{b}$-module V_λ tel que $\mathfrak{n}^+ V_\lambda = 0$ et $[H, X] = \lambda(H)X$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_{\bar 0}$ et $X \in V_\lambda$. Soit $\mathbb{C}X_\lambda$ le $\mathfrak{b}_{\bar 0}$-module de dimension 1 où X_λ est tel que $\mathfrak{n}_{\bar 0}^+ X_\lambda = 0$ et $[H, X_\lambda] = \lambda(H)X_\lambda$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_{\bar 0}$. Les modules de Verma pour $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ et $\mathfrak{g}$ sont définis par :

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}_{\bar 0}) \underset{U(\mathfrak{b}_{\bar 0})}{\otimes} \mathbb{C}X_\lambda,$$

$$\widetilde{M}(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} V_\lambda.$$

Le module $M(\lambda)$ (resp. $\widetilde{M}(\lambda)$) possède un unique quotient simple (resp. simple gradué).

Le **groupe de Weyl** est enfin défini comme étant le groupe des permutations de l'ensemble des racines.

Examinons le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1,2n)$. Nous avons $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ et les éléments de la sous-algèbre $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ sont les matrices diagonales :

$$H(z_1,\ldots,z_n) := \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \ldots & \ldots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & z_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -z_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -z_n \end{pmatrix}$$

(avec $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}$) donc la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de dimension n et une base est donnée par $\{H_1,\ldots,H_n\}$ où :

$$H_i := H(0,\ldots,1_i,\ldots,0).$$

Notant $\{L_1,\ldots,L_n\}$ la base duale, nous choisissons comme système de racines simples l'ensemble suivant (voir [Kač77] 2.5.4) :

$$\{L_1 - L_2, L_2 - L_3, \ldots, L_{n-1} - L_n, L_n\}.$$

II.3.c La représentation adjointe tordue

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{A}_n$ l'algèbre de Weyl engendrée par les vecteurs $\{p_i, q_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ avec les relations :

$$[p_i,q_i]_{\mathscr{L}} = 1,\ \forall\, i \in [\![1,n]\!],$$

$$[p_i,p_j]_{\mathscr{L}} = [p_i,q_j]_{\mathscr{L}} = [q_i,q_j]_{\mathscr{L}} = 0,\ \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j,$$

où $[p,q]_{\mathscr{L}} := pq - qp$ (crochet de Lie classique). L'algèbre $\mathbb{A}_n$ est munie d'une structure $\mathbb{Z}_2$-graduée (les vecteurs $p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n$ sont de degré $\bar{1}$, et l'unité 1 est de degré $\bar{0}$) qui la transforme en une superalgèbre de Lie. Notons $[.,.]$ son crochet.

Définition II.3.13. L'action adjointe tordue de $\mathbb{A}_n$ sur elle-même est définie par :

$$\mathrm{ad}'(A)(B) := AB - (-1)^{a(b+1)}BA$$

pour $A,B \in \mathbb{A}_n$, $\deg_{\mathbb{Z}_2}(A) = a$, $\deg_{\mathbb{Z}_2}(B) = b$.

Proposition II.3.14. *L'action adjointe tordue est une représentation fidèle de la superalgèbre de Lie* $\mathbb{A}_n/\mathbb{C}.1$ *dans la superalgèbre de Lie des endomorphismes de* $\mathbb{A}_n$*. Autrement dit :*

$$\mathrm{ad}'(AB - (-1)^{ab}BA) \underset{(1)}{=} \mathrm{ad}'([A,B]) \underset{(2)}{=} [\mathrm{ad}'(A),\mathrm{ad}'(B)] \underset{(3)}{=} \mathrm{ad}'(A)\mathrm{ad}'(B) - (-1)^{ab}\mathrm{ad}'(B)\mathrm{ad}'(A).$$

Preuve. L'égalité (1) est claire (c'est le super-crochet de la superalgèbre de Lie $\mathbb{A}_n$). D'autre part, d'après la définition II.3.13, les endomorphismes $\mathrm{ad}'(A)$ sont de degré a si $A \in \mathbb{A}_n$ est de degré a. Donc l'égalité (3) n'est que l'écriture du super-crochet de Lie des endomorphismes. Il reste à démontrer l'égalité (2).

Soit $A,B,C \in \mathbb{A}_n$ de degrés respectifs $a,b,c \in \mathbb{Z}_2$. Calculons :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}'([A,B])(C) &= [A,B]C - (-1)^{(a+b)(c+1)}C[A,B] \\ &= ABC - (-1)^{ab}BAC - (-1)^{(a+b)(c+1)}CAB + (-1)^{(a+b)(c+1)+ab}CBA, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}'(A)\mathrm{ad}'(B)(C) &= \mathrm{ad}'(A)(BC - (-1)^{b(c+1)}CB) \\ &= ABC - (-1)^{a(b+c+1)}BCA - (-1)^{b(c+1)}ACB + (-1)^{b(c+1)+a(b+c+1)}CBA, \\ \mathrm{ad}'(B)\mathrm{ad}'(A)(C) &= \mathrm{ad}'(B)(AC - (-1)^{a(c+1)}CA) \\ &= BAC - (-1)^{b(a+c+1)}ACB - (-1)^{a(c+1)}BCA + (-1)^{a(c+1)+b(a+c+1)}CAB. \end{aligned}$$

Donc :

$$[ad'(A),\mathrm{ad}'(B)](C) = ABC - (-1)^{ab}BAC + (-1)^{b(c+1)+a(b+c+1)}CBA - (-1)^{a(c+1)+b(c+1)}CAB.$$

D'où l'égalité (2).

Quant au caractère injectif sur $\mathbb{A}_n/\mathbb{C}.1$, il suffit de remarquer que pour tout vecteur A de degré $\overline{1}$ dans $\mathbb{A}_n$, nous avons $\mathrm{ad}'(A)(1) = 2A$ et $\mathrm{ad}'(1) = 0$.. □

Soit $V_{\overline{1}} := \mathrm{Vect}(p_i, q_i, i \in [\![1,n]\!])$ et $\mathfrak{h} := V_{\overline{1}} \oplus [V_{\overline{1}}, V_{\overline{1}}]$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-superalgèbre de Lie de $\mathbb{A}_n$. Soit $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$ avec $V_{\overline{0}} := \mathbb{C}.1$. Nous avons $\mathrm{ad}'(\mathfrak{h})(V) \subset V$. Par exemple, pour $A,B \in V_{\overline{1}}$:

$$\begin{cases} \mathrm{ad}'(A)(B) = AB - BA = [A,B]_{\mathscr{L}}.1 \\ \mathrm{ad}'(A)(1) = 2A \end{cases}$$

avec $[A,B]_{\mathscr{L}} \in \mathbb{C}$ car de degré $\overline{0}$.

Nous définissons une forme bilinéaire $F : V \times V \to \mathbb{C}$ par :

$$\begin{cases} F(X,Y) = [X,Y]_{\mathscr{L}}, \ \forall\, X,Y \in V_{\overline{1}} \\ F(1,1) = -2 \end{cases}$$

et $F(X,1) = F(1,X) = 0$ si $X \in V_{\overline{1}}$. Comme $[p_i,q_i]_{\mathscr{L}} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la forme F est non dégénérée.

Remarque II.3.15. La forme F est super-symétrique :

$$F(X,Y) = [X,Y]_{\mathscr{L}} = -[Y,X]_{\mathscr{L}} = -F(Y,X)$$

si $X,Y \in V_{\overline{1}}$, les autres identités étant évidentes.

Lemme II.3.16. *La forme bilinéaire F est invariante par la représentation adjointe tordue, c'est-à-dire :*

$$F(\mathrm{ad}'(A)(B),C)+(-1)^{ab}F(B,\mathrm{ad}'(A)(C))=0$$

pour tout $A\in\mathfrak{h}$, $B,C\in V$.

Preuve. Puisque les sous-espaces $V_{\bar 0}^{-}$ et $V_{\bar 1}^{-}$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire F, il suffit de calculer l'expression ci-dessus dans quatre cas, suivants les degrés des vecteurs $A\in\mathfrak{h}$ et $B,C\in V$:

1. $A\in\mathfrak{h}_{\bar 1}^{-}=V_{\bar 1}^{-}$, $B\in V_{\bar 1}^{-}$, $C=1$:

$$\begin{aligned}F(\mathrm{ad}'(A)(B),1)+(-1)^{1}F(B,\mathrm{ad}'(A)(1)) &= F([A,B]_{\mathscr{L}}.1,1)-F(B,2A)\\ &= [A,B]_{\mathscr{L}}.(-2)-2[B,A]_{\mathscr{L}}\\ &= 0\,;\end{aligned}$$

2. $A\in\mathfrak{h}_{\bar 1}^{-}$, $B=1$, $C\in V_{\bar 1}^{-}$:

$$\begin{aligned}F(\mathrm{ad}'(A)(1),B)+F(1,\mathrm{ad}'(A)(B)) &= 2F(A,B)+F(1,[A,B]_{\mathscr{L}}.1)\\ &= 2[A,B]_{\mathscr{L}}-2[A,B]_{\mathscr{L}}\\ &= 0\,;\end{aligned}$$

3. $A=[P,Q]\in\mathfrak{h}_{\bar 0}^{-}=[V_{\bar 1}^{-},V_{\bar 1}^{-}]$, $B\in V_{\bar 1}^{-}$, $C\in V_{\bar 1}^{-}$:

$$\begin{aligned}&F(\mathrm{ad}'([P,Q])(B),C)+F(B,\mathrm{ad}'([P,Q])(C))\\ =\;& F(\mathrm{ad}'(P)\mathrm{ad}'(Q)(B),C)+F(\mathrm{ad}'(Q)\mathrm{ad}'(P)(B),C)+F(B,\mathrm{ad}'(P)\mathrm{ad}'(Q)(C))\\ &+F(B,\mathrm{ad}'(Q)\mathrm{ad}'(P)(C))\\ =\;& [Q,B]_{\mathscr{L}}F(2P,C)+[P,B]_{\mathscr{L}}F(2Q,C)+[Q,C]_{\mathscr{L}}F(B,2P)+[P,C]_{\mathscr{L}}F(B,2Q)\\ =\;& 2[Q,B]_{\mathscr{L}}[P,C]_{\mathscr{L}}+2[P,B]_{\mathscr{L}}[Q,C]_{\mathscr{L}}+2[Q,C]_{\mathscr{L}}[B,P]_{\mathscr{L}}+2[P,C]_{\mathscr{L}}[B,Q]_{\mathscr{L}}\\ =\;& 0.\end{aligned}$$

4. $A\in\mathfrak{h}_{\bar 0}^{-}$, $B=1$, $C=1$: puisque $\mathrm{ad}'(A)(1)=0$, l'identité est vérifiée. □

Ainsi $\mathfrak{h}$ est une superalgèbre de Lie agissant sur l'espace $\mathbb{Z}_2$-gradué V (par l'intermédiaire de la représentation ajointe tordue) et laissant invariante la forme bilinéaire super-symétrique non dégénérée et paire F sur V. La superalgèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est donc isomorphe à la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$, compte-tenu des dimensions de $V_{\bar 0}^{-}$ et $V_{\bar 1}^{-}$ (d'après la proposition II.3.9 et la remarque II.3.10). Comme conséquence de cet isomorphisme, nous avons :

Proposition II.3.17. *Si $X\in\mathfrak{osp}(1,2n)_{\bar 1}^{-}$, alors $X^3=0$.*

Preuve. D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que si $X \in V_{\bar{1}}$, alors $(\mathrm{ad}'(X)_{|V})^3 = 0$. Nous avons :

$$(\mathrm{ad}'(X))^2(1) = 2\mathrm{ad}'(X)(X) = 0$$

et, pour tout $Y \in V_{\bar{1}}$:

$$(\mathrm{ad}'(X))^3(Y) = (\mathrm{ad}'(X))^2([X,Y]_{\mathscr{L}}.1) = 2[X,Y]_{\mathscr{L}}.\mathrm{ad}'(X)(X) = 0$$

D'où le résultat. □

De manière plus générale :

Proposition II.3.18. *Soit* π *une représentation de dimension finie de la superalgèbre de Lie* $\mathfrak{osp}(1,2n)$*. Si* $X \in \mathfrak{osp}(1,2n)_{\bar{1}}$*, alors* $\pi(X)$ *est nilpotent.*

Preuve. Nous utilisons l'isomorphisme entre les superalgèbres de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$ et $\mathfrak{h}$ et nous supposons X non nul. Montrons tout d'abord qu'il existe une base de Darboux de l'espace $V_{\bar{1}}$ pour la forme bilinéaire non dégénérée $F' := F_{|V_{\bar{1}} \times V_{\bar{1}}}$ (i.e. pour $[.,.]_{\mathscr{L}}$) de premier élément X.

Comme $X_1 := X$ est non nul et F' est non dégénérée, il existe un vecteur Y_1 de $V_{\bar{1}}$ non nul et linéairement indépendant de X_1 tel que $F'(X_1,Y_1) = 1$ (en effet, F' est antisymétrique donc alternée). Soit W le sous-espace de $V_{\bar{1}}$ engendré par X_1 et Y_1, et soit :

$$W^{\perp} := \{Y \in V_{\bar{1}} \mid F(Z,Y) = 0 \; \forall \, Z \in W\}$$

son orthogonal pour la forme bilinéaire F. Montrons que $V_{\bar{1}} = W \oplus W^{\perp}$.

L'intersection $W \cap W^{\perp}$ est réduite à $\{0\}$: si $X \in W \cap W^{\perp}$, alors $X = \lambda X_1 + \mu Y_1$ (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) d'où $0 = F'(X,X_1) = -\mu$ et $0 = F'(X,Y_1) = \lambda$. Par conséquent $X = 0$.

D'autre part, pour tout $X \in V_{\bar{1}}$, notons F'_X la forme sur W définie par $F'_X(Y) = F'(X,Y)$. La forme bilinéaire F' étant non dégénérée (sur $V_{\bar{1}}$ donc sur W), elle induit un isomorphisme entre W et W^* (isomorphisme habituel $Y \in W \rightsquigarrow F'_Y \in W^*$). Soit $X \in V_{\bar{1}}$. Montrons qu'il se décompose sur W et $W^{\perp}$. D'après ce qui précède, F'_X étant élément de W^*, il existe $Y \in W$ tel que $F'_X = F'_Y$. Ainsi, $F'(X-Y,Z) = 0$ pour tout $Z \in W$. Par conséquent, $Y' := X - Y \in W^{\perp}$ et $X = Y + Y'$ est la décomposition cherchée. Ainsi, $V = W \oplus W^{\perp}$.

Fixons maintenant un vecteur $X_2 \in W^{\perp}$ non nul. De la même manière que ci-dessus, il existe $Y_2 \in W^{\perp}$ tel que $F'(X_2,Y_2) = 1$. En réitérant le procédé (n fois au total), nous construisons une base $\{X_1,Y_1,X_2,Y_2,\ldots,X_n,Y_n\}$ de $V_{\bar{1}}$ vérifiant $F'(X_i,Y_i) = 1$ et $F'(X_i,X_j) = F'(X_i,Y_j) = F'(Y_i,Y_j) = 0$. Considérons maintenant l'application linéaire Φ définie de $V_{\bar{1}}$ dans $\mathbb{A}_n$ par $X_i \rightsquigarrow p_i$ et $Y_i \rightsquigarrow q_i$. Par construction de la base de $V_{\bar{1}}$, l'application Φ est en fait un automorphisme de l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n$ (en effet, $V_{\bar{1}}$ est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathbb{A}_n$). Par conséquent, quitte à considérer $\pi \circ \Phi^{-1}$ au lieu de π, nous pouvons supposer $X = p_1$.

Considérons $\mathfrak{l} := \mathfrak{l}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{l}_{\bar{1}}$ où $\mathfrak{l}_{\bar{1}} := \mathrm{Vect}(p_1,q_1)$ et $\mathfrak{l}_{\bar{0}} := [\mathfrak{l}_{\bar{1}},\mathfrak{l}_{\bar{1}}]$. Alors $\mathfrak{l} \simeq \mathfrak{osp}(1,2)$. Soit $\rho := \pi_{|\mathfrak{l}}$: c'est une représentation de $\mathfrak{osp}(1,2)$; elle est par conséquent complètement réductible. Notons $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$

sa décomposition (finie) en composantes simples. Pour chaque $i \in I$, nous disposons donc d'un $\mathfrak{l}$-module simple V_i. D'après [BP91], le $\mathfrak{l}$-module V_i est de plus haut poids $\frac{n_i}{2}$ ($n_i \in \mathbb{N}$) et sa dimension est égale à $2n_i + 1$. D'autre part, si $v \in V_i$ est de poids $\frac{m_i}{2}$ avec $m_i \in [\![-n_i, n_i]\!]$, le poids de $\rho(p)(v)$ est égal à $\frac{m_i}{2} - \frac{1}{2}$. Par conséquent, pour tout $v \in V_i$:

$$\rho(p)^{\dim(V_i)}(v) = 0.$$

Nous en déduisons donc que si $d_0 = \max\{\dim(\rho_i), i \in I\}$, alors $\pi(p_1)^{d_0} = 0$. $\square$

II.3.d Cohomologie de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$ et invariants de l'algèbre super-extérieure

Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1,2n)$ et reprenons les notations de la partie II.2.e. L'opérateur $\mathscr{L}_X$ est la super-dérivée de Lie (II.52) et l'opérateur d est la différentielle super-extérieure (II.49). Rappelons que ce sont respectivement des super-dérivations de degré $(0,x)$ et $(1,\overline{0})$ de l'algèbre super-extérieure $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ et, d'après la proposition II.2.24, $\mathscr{L}$ est une représentation de la superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition II.3.19.
- Une **cochaîne** est un élément de la superalgèbre $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$;
- Un **cocycle** est un élément de l'espace $\mathrm{Ker}(d)$; notons $Z(\mathfrak{g}) := \mathrm{Ker}(d)$;
- Un **cobord** est un élément de l'espace $d(\bigwedge(\mathfrak{g}^*))$; notons $B(\mathfrak{g}) := \mathrm{Im}(d)$.
- L'**algèbre de cohomologie** $H(\mathfrak{g})$ est le quotient du sous-espace des cocycles par le sous-espace des cobords : $H(\mathfrak{g}) := Z(\mathfrak{g})/B(\mathfrak{g})$.

Remarque II.3.20. L'algèbre $H(\mathfrak{g})$ est $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$-graduée : la graduation sur $\mathbb{Z}$ est obtenue grâce aux sous-espaces $H^n(\mathfrak{g})$ des classes de cohomologie des n-cocycles et la $\mathbb{Z}_2$-graduation découle de celle de $\mathfrak{g}$. D'autre part, le produit dans $H(\mathfrak{g})$ est le produit de la superalgèbre $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ passé au quotient. Il y est défini sans ambiguïté car d est une super-dérivation de l'algèbre super-extérieure.

Définition II.3.21. Deux cochaînes Ω et Ψ sont dites **cohomologues** si et seulement s'il existe une cochaîne Υ telle que $\Omega - \Psi = d\Upsilon$. Les cochaînes Ω et Ψ appartiennent alors à la même classe de cohomologie, c'est-à-dire représentent le même élément dans l'algèbre $H(\mathfrak{g})$.

Concernant la cohomologie de $\mathfrak{g}$, nous disposons du théorème suivant qui est une reprise (démonstration y compris) de l'énoncé de [Kos50] :

Théorème II.3.22. *L'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{g})$ est isomorphe à la sous-algèbre de ses cochaînes invariantes $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.*

Le lemme suivant va nous permettre de démontrer ce théorème :

Lemme II.3.23.

1. *L'espace des cochaînes de* $\mathfrak{g}$ *est somme directe du sous-espace des cochaînes invariantes et du sous-espace engendré par* $\mathscr{L}_X(\bigwedge(\mathfrak{g}^*))$ *pour* X *parcourant* $\mathfrak{g}$.

2. *Tout cocycle invariant de* $\mathfrak{g}$ *et cohomologue à zéro est l'image par* d *d'une cochaîne invariante.*

3. *Toute classe de cohomologie de* $\mathfrak{g}$ *contient un cocycle invariant et un seul.*

Preuve. 1) Soit T le sous-espace des cochaînes de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathscr{L}_X(\bigwedge(\mathfrak{g}^*))$ lorsque X parcourt $\mathfrak{g}$. Le sous-espace T est stable par $\mathscr{L}$. Comme la représentation linéaire $\mathscr{L}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ est complètement réductible, il existe un supplémentaire stable $J \subset \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$. Alors toute cochaîne Ω de J est invariante. En effet, si $X \in \mathfrak{g}$, alors $\mathscr{L}_X(\Omega) \in J$ car J est stable et $\mathscr{L}_X(\Omega) \in T$ par définition. Donc $\mathscr{L}_X(\Omega) \in T \cap J = \{0\}$.

Inversement, toute cochaîne invariante est dans J. Soit en effet N le sous-espace des cochaînes invariantes appartenant à T. C'est un sous-espace stable donc il possède un supplémentaire stable N' dans $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$. Puisque $N \subset T$, ceci prouve que N est engendré par $\mathscr{L}_X(N)$ quand X parcourt $\mathfrak{g}$. En effet, considérons un générateur $\mathscr{L}_X(\Omega)$ de N (par définition de T), avec $\Omega \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$. Écrivons la décomposition $\Omega = \Omega' + \Omega''$ avec $\Omega' \in N$ et $\Omega'' \in N'$. Alors Ω'' est invariante car les sous-espaces N et N' sont stables par $\mathscr{L}$. Donc $\Omega = \mathscr{L}_X(\Omega')$ et N est bien engendré par $\mathscr{L}_X(N)$ quand X parcourt $\mathfrak{g}$. Mais par définition de N, $\mathscr{L}_X(N) = 0$ pour tout X, donc $N = \{0\}$. Ceci montre donc que J est exactement le sous-espace des cochaînes invariantes de $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$. D'où la première assertion.

2) Les sous-espaces T et J sont stables par d car $\mathscr{L}_X$ et d commutent d'après la proposition II.2.27. Par conséquent tout cocycle cohomologue à zéro dans J est dans dJ. En effet, soit Ω un tel cocycle : il existe une cochaîne Ψ telle que $\Omega = d\Psi$. Écrivons la décomposition $\Psi = \Psi' + \Psi''$ correspondant à la somme directe $\bigwedge(\mathfrak{g}^*) = J \oplus T$. Alors :

$$\Omega = d\Psi = d\Psi' + d\Psi'' \in J$$

avec $d\Psi \in J$ et $d\Psi'' \in T$. Donc $d\Psi'' = 0$ et $\Omega = d\Psi = d\Psi' \in dJ$.

Soit par ailleurs D le sous-espace des cocycles appartenant à T : $D = T \cap Z(\mathfrak{g})$. Le sous-espace D est stable par la représentation $\mathscr{L}$ et il est donc engendré par $\mathscr{L}_X(D)$ quand X parcourt $\mathfrak{g}$. Or, pour tout cocycle Ω de $\mathfrak{g}$, nous avons, d'après la formule de Cartan (proposition II.2.26) :

$$\mathscr{L}_X(\Omega) = d \circ i_X(\Omega) + i_X \circ d(\Omega) = d(i_X(\Omega)).$$

Donc tous les éléments de D sont cohomologues à zéro.

D'autre part, puisque T et J sont stables par d, les composantes d'un cocycle dans ces deux sous-espaces sont encore des cocycles (si $\Omega = \Omega' + \Omega''$, alors $0 = d\Omega = d\Omega' + d\Omega''$ d'où $d\Omega' = d\Omega'' = 0$). Nous en déduisons donc que tout cocycle est cohomologue à sa composante dans J, d'où la deuxième assertion.

3) Soit Ω un cocycle. Montrons qu'il est cohomologue à un cocycle invariant. D'après le premier point, nous disposons d'une unique décomposition $\Omega = \Omega' + \Omega''$ avec Ω' cocycle dans T et Ω'' cocycle

dans J. Mais d'après ce qui précède, Ω' est cohomologue à zéro. Donc Ω est cohomologue à Ω'', d'où la troisième assertion. □

Démonstration (du théorème II.3.22). D'après la proposition II.2.28 page 94, toute cochaîne invariante est un cocycle (invariant). Le lemme II.3.23 nous assure alors que toute classe de cohomologie de $\mathfrak{g}$ contient une cochaîne invariante et une seule. □

II.3.e Invariants de l'algèbre super-symétrique

De la même manière que nous avons étendu la représentation contragrédiente $\check{\mathrm{ad}}$ de la représentation adjointe d'une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ pour obtenir la représentation $\mathscr{L}$ (voir la remarque II.2.25 page 93), nous étendons $\check{\mathrm{ad}}$ à la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$; notons Θ la représentation obtenue. Pour $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme Θ_X est alors une super-dérivation de degré x de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ ayant la même expression que $\mathscr{L}_X$:

$$\Theta_X(F)(X_1,\ldots,X_n) = -(-1)^{xf}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\ldots+x_{j-1})}F(X_1,\ldots,X_{j-1},\mathrm{ad}(X)(X_j),X_{j+1},\ldots,X_n)$$

avec $F \in \mathrm{S}^n(\mathfrak{g}^*)$, $\deg(F) = f$ et $X,X_1,\ldots,X_n \in \mathfrak{g}$.

Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1,2n)$ et $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$. Concernant la structure de l'espace des invariants de l'algèbre super-symétrique de $\mathfrak{g}$, le théorème de restriction de Chevalley valable dans le cas classique est également applicable d'après [Ser99] :

Théorème II.3.24. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $\mathscr{W}$ le groupe de Weyl. Alors la restriction de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ induit un isomorphisme d'algèbres entre les sous-algèbres des éléments invariants $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$.*

Examinons la structure de la sous-algèbre des invariants $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$:

Proposition II.3.25. *Soit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ un système de racines simples de $\mathfrak{g}$. Notons $t_k := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{2k}$ des éléments particuliers de la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$, pour $k \geqslant 1$. Alors la sous-algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]$.*

Preuve. Nous avons vu dans la section II.3.b qu'il existait un système de racines simples $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ de $\mathfrak{g}$. C'est une base de $\mathfrak{h}^*$ donc l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ est l'algèbre des polynômes en les indéterminées α_i. Or, le groupe de Weyl $\mathscr{W}$ est engendré par les permutations et changements de signe des racines $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Par conséquent, les polynômes $t_1,\ldots,t_n$ sont des générateurs de $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$ comme algèbre de polynômes à n indéterminées. En effet, il est clair que t_k est élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$ et la famille des t_k est linéairement indépendante compte-tenu de leur degré (le polynôme t_k est homogène de degré $2k$). □

Nous en déduisons le corollaire suivant du théorème II.3.24 :

Corollaire II.3.26. *La sous-algèbre des invariants $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes à n indéterminées.*

Remarque II.3.27. Nous déterminerons dans le lemme II.6.3 page 136 des générateurs de l'algèbre de polynômes $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

Notant J_+ l'**idéal d'augmentation** de la sous-algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$ (c'est-à-dire l'idéal des polynômes de degré non nul), nous avons :

Proposition II.3.28. *Si $k \geqslant n+1$, le polynôme t_k est élément de J_+^2.*

Preuve. Soit $k \geqslant n+1$. Le polynôme t_k appartient à l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]$. Par conséquent, il existe un ensemble $\mathscr{I}$ de multi-indices $I=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n\setminus\{(0,\ldots,0)\}$ et des constantes $\lambda_I\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tels que :

$$t_k = \sum_{I\in\mathscr{I}} \lambda_I t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}.$$

Puisque le polynôme t_k est homogène de degré $2k$, le polynôme $t_1^{i_1}\ldots t_n^{i_n}$ est homogène de degré $2(i_1+2i_2+\ldots+ni_n)$.

Supposons que t_k n'appartienne pas à J_+^2. Comme t_k ne possède pas de terme constant, cela signifie qu'il existe un multi-indice $I=(0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0)$ tel que λ_I soit non nul. En terme de degré, nous avons alors $\deg(t_k)=\deg(t_j)$ i.e. $k=j$, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de tel multi-indice dans l'ensemble de sommation et t_k est, par conséquent, élément de J_+^2. $\square$

II.4 Identités super-symétriques et super-antisymétriques

Dans toute cette partie, $\mathscr{G}$ désignera une algèbre associative unitaire $\mathbb{Z}_2$-graduée. Les éléments X de $\mathscr{G}$ seront toujours supposés homogènes (de degré $x \in \mathbb{Z}_2$). Sauf mention locale et explicite du contraire, n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 1.

II.4.a Définition et propriétés

Définition II.4.1. Notons μ_n l'application n-linéaire : $(X_1, \ldots, X_n) \mapsto X_1 \ldots X_n$. L'application μ_n est élément de $\mathscr{F}_{\bar{0}}^{n}(\mathscr{G}, \mathscr{G})$. L'élément $A_n := \mathrm{A}(\mu_n)$ est appelé **polynôme super-antisymétrique** d'indice n sur $\mathscr{G}$. Concrètement :

$$A_n(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)}$$

pour $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{G}$. Nous définissons également le **polynôme super-symétrique** $S_n := \mathrm{S}(\mu_n)$:

$$S_n(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)}$$

pour $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{G}$.

Exemple II.4.2. Pour $X \in \mathscr{G}_x$ et $Y \in \mathscr{G}_y$, nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} A_2(X,Y) &= XY - (-1)^{xy} YX \\ S_2(X,Y) &= XY + (-1)^{xy} YX. \end{aligned}$$

Le polynôme A_2 est ainsi le super-crochet de Lie défini naturellement sur toute algèbre associative $\mathbb{Z}_2$-graduée. Si, de plus, $Z \in \mathscr{G}_z$, nous avons également :

$$\begin{aligned} A_3(X,Y,Z) = {} & XYZ - (-1)^{xy} YXZ - (-1)^{xy+xz+yz} ZYX - (-1)^{yz} XZY \\ & + (-1)^{x(y+z)} YZX + (-1)^{z(x+y)} ZXY. \end{aligned}$$

Remarque II.4.3. Si $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{G}_{\bar{0}}$, alors $A_n(X_1, \ldots, X_n)$ est le polynôme antisymétrique classique, déjà rencontré dans la partie I.4 page 38. Mais si $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{G}_{\bar{1}}$, alors $A_n(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(n)}$ n'est plus alterné, donc nous avons :

$$A_n(X, \ldots, X) = n! X^n$$

pour tout élément $X \in \mathscr{G}_{\bar{1}}$. Par conséquent, si la superalgèbre $\mathfrak{gl}(m,n)$ vérifiait une identité polynomiale de type Amitsur-Levitzki, tous ses éléments de degré $\bar{1}$ seraient nilpotents, ce qui est manifestement faux, par exemple pour la matrice :

$$\left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(m,n)_{\bar{1}}.$$

Cette obstruction est levée sur la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ grâce à la proposition II.3.17 page 103.

Nous nous proposons dans la suite de démontrer diverses identités vérifiées par les polynômes A_n et S_n.

Lemme II.4.4. *Soit $X_1,\ldots,X_n \in \mathscr{G}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.*
• *Le polynôme A_n est super-antisymétrique i.e.*

$$A_n(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})A_n(X_1,\ldots,X_n).$$

• *Le polynôme S_n est super-symétrique i.e.*

$$S_n(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma,\mathscr{X})S_n(X_1,\ldots,X_n).$$

Preuve. C'est évident par définition. □

Lemme II.4.5. *Soit $X_1,\ldots,X_{n+1} \in \mathscr{G}$. Alors :*

1. $A_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j+1}(-1)^{x_j(x_1+\ldots+x_{j-1})}X_jA_n(X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_{n+1}).$

2. $A_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}(-1)^{x_j(x_{j+1}+\ldots+x_{n+1})}A_n(X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_{n+1})X_j.$

3. $S_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{x_j(x_1+\ldots+x_{j-1})}X_jS_n(X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_{n+1}).$

4. $S_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{x_j(x_{j+1}+\ldots+x_{n+1})}S_n(X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_{n+1})X_j.$

Preuve.
1. Soit $\mathscr{X} = (X_1,\ldots,X_{n+1}) \in \mathscr{G}^{n+1}$ et $\mathscr{X}_i = (X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_{n+1}) \in \mathscr{G}^n$ ($i \in [\![1,n+1]\!]$).
(1) Pour $i \in [\![1,n+1]\!]$, nous définissons :

$$S^i_{n+1} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \mid \sigma(1) = i\}.$$

Alors nous disposons de la partition suivante du groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$: $\mathfrak{S}_{n+1} = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n+1} S^i_{n+1}$. D'autre part, l'ensemble S^i_{n+1} est en bijection avec le groupe $\mathfrak{S}^i_n$ des permutations de l'ensemble d'entiers $\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n+1\}$. En effet, à toute permutation $\sigma \in S^i_{n+1}$ nous associons une et une seule permutation $\widetilde{\sigma} \in \mathfrak{S}^i_n$ en posant :

$$\widetilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n+1 \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(i) & \sigma(i+1) & \ldots & \sigma(n+1) \end{pmatrix}.$$

Fixons $i \in [\![1,n+1]\!]$ et $\sigma \in S^i_{n+1}$. Exprimons la signature et la super-signature de $\widetilde{\sigma}$ en fonction de celles de σ. Les couples d'inversion de $\widetilde{\sigma}$ sont les suivants :
• $1 \leqslant r < s \leqslant i-1$ avec $\sigma(r+1) > \sigma(s+1)$ i.e. $2 \leqslant r < s \leqslant i$ avec $\sigma(r) > \sigma(s)$;
• $1 \leqslant r < i < s \leqslant n+1$ avec $\sigma(r+1) > \sigma(s)$ i.e. $2 \leqslant r \leqslant i < s \leqslant n+1$ avec $\sigma(r) > \sigma(s)$;

• $i+1 \leqslant r < s \leqslant n+1$ avec $\sigma(r) > \sigma(s)$.
Nous obtenons donc tous les couples d'inversions de la permutation σ sauf les couples $(1,s)$ avec $\sigma(s) \in \{1,2,\dots,i-1\}$ ($\sigma(s) < i = \sigma(1)$). Nous en déduisons :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i-1}\varepsilon(\widetilde{\sigma}) \text{ et } \varepsilon(\sigma,\mathscr{X}) = (-1)^{x_i(x_1+\dots+x_{i-1})}\varepsilon(\widetilde{\sigma},\mathscr{X}_i).$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\mathscr{X}) &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}(-1)^{x_i(x_1+\dots+x_{i-1})}X_i \sum_{\widetilde{\sigma}\in\mathfrak{S}_n^i} \varepsilon(\widetilde{\sigma})\varepsilon(\widetilde{\sigma},\mathscr{X}_i)X_{\widetilde{\sigma}(1)}\dots X_{\widetilde{\sigma}(i-1)}X_{\widetilde{\sigma}(i+1)}\dots X_{\widetilde{\sigma}(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}(-1)^{x_i(x_1+\dots+x_{i-1})}X_iA_n(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_{n+1}). \end{aligned}$$

2. Pour $i \in [\![1,n+1]\!]$, définissons :

$$S_{n+1}^i := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \mid \sigma(n+1) = i\}.$$

Alors $\mathfrak{S}_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{n+1} S_{n+1}^i$. D'autre part, S_{n+1}^i est en bijection avec le groupe $\mathfrak{S}_n^i$: à $\sigma \in S_{n+1}^i$, nous associons $\widetilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_n^i$ définie par :

$$\widetilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i-1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Les couples d'inversions de $\widetilde{\sigma}$ sont :
• $1 \leqslant r < s \leqslant i-1$ avec $\sigma(r) > \sigma(s)$;
• $1 \leqslant r < i < s \leqslant n+1$ avec $\sigma(r) > \sigma(s-1)$ i.e. $1 \leqslant r < i \leqslant s \leqslant n$ avec $\sigma(r) > \sigma(s)$;
• $i+1 \leqslant r < s \leqslant n+1$ avec $\sigma(r-1) > \sigma(s-1)$ i.e. $i \leqslant r < s \leqslant n$ avec $\sigma(r) > \sigma(s)$.
Par rapport aux couples d'inversions de la permutation σ, il manque donc les couples $(r,n+1)$ avec $\sigma(r) \in \{i+1,i+2,\dots,n+1\}$ ($\sigma(r) > \sigma(n+1) = i$). Donc :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n+1-i}\varepsilon(\widetilde{\sigma}) \text{ et } \varepsilon(\sigma,\mathscr{X}) = (-1)^{x_i(x_{i+1}+\dots+x_{n+1})}\varepsilon(\widetilde{\sigma},\mathscr{X}_i).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} A_{n+1}(\mathscr{X}) &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1-i}(-1)^{x_i(x_{i+1}+\dots+x_{n+1})} \sum_{\widetilde{\sigma}\in\mathfrak{S}_n^i} \varepsilon(\widetilde{\sigma})\varepsilon(\widetilde{\sigma},\mathscr{X}_i)X_{\widetilde{\sigma}(1)}\dots X_{\widetilde{\sigma}(i-1)}X_{\widetilde{\sigma}(i+1)}\dots X_{\widetilde{\sigma}(n+1)}X_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1-i}(-1)^{x_i(x_{i+1}+\dots+x_{n+1})}A_n(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_{n+1})X_i. \end{aligned}$$

Pour démontrer les identités (3) et (4), il suffit de reprendre les démonstrations ci-dessus en retirant tous les termes concernant les signatures. $\square$

Nous pouvons démontrer une identité plus puissante dont les formules de récurrence ci-dessus découlent. En effet, nous pouvons procéder comme dans la définition II.1.26 et définir un produit super-extérieur sur les applications multilinéaires sur $\mathscr{G}$.

Soit $F \in \mathscr{F}_f^n(\mathscr{G},\mathscr{G})$, $G \in \mathscr{F}_g^p(\mathscr{G},\mathscr{G})$ et $X_i \in \mathscr{G}_{x_i}$ $(i \in [\![1,n+p]\!])$. Nous définissons l'application produit $F \underset{s}{\otimes} G$ par :

$$F \underset{s}{\otimes} G(X_1,\dots,X_{n+p}) := (-1)^{g(x_1+\dots+x_n)} F(X_1,\dots,X_n)G(X_{n+1},\dots,X_{n+p})$$

et si F et G sont super-antisymétriques :

$$F \wedge G := \frac{1}{n!p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}} \sigma \underset{a}{\cdot} (F \underset{s}{\otimes} G) = \sum_{\sigma \in S_{n,p}} \sigma \underset{a}{\cdot} (F \underset{s}{\otimes} G)$$

ou super-symétriques :

$$F \cdot G := \frac{1}{n!p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p}} \sigma \underset{s}{\cdot} (F \underset{s}{\otimes} G) = \sum_{\sigma \in S_{n,p}} \sigma \underset{s}{\cdot} (F \underset{s}{\otimes} G).$$

Nous disposons des mêmes propriétés d'associativité et de commutation démontrées dans le cas des superalgèbres $\mathscr{F}(V)$, $\mathscr{A}(V)$ et $\mathscr{S}(V)$. Nous en déduisons alors les formules suivantes :

Lemme II.4.6. *Soit $n,p \geqslant 1$. Alors :*

$$A_{n+p} = A_n \wedge A_p \qquad \textit{et} \qquad S_{n+p} = S_n \cdot S_p.$$

Preuve. Soit $\mathscr{X} = (X_1,\dots,X_{n+p}) \in \mathscr{G}^{n+p}$. Notons $\mathscr{X}' = (X_1,\dots,X_n)$, $\mathscr{X}'' = (X_{n+1},\dots,X_{n+p})$. Puisque $A_p \in \mathscr{A}_0^n(\mathscr{G},\mathscr{G})$, il vient :

$$A_n \wedge A_p(X_1,\dots,X_{n+p}) = \frac{1}{n!p!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n+p}} \varepsilon(\pi)\varepsilon(\pi,\mathscr{X})A_n(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n)})A_p(X_{\pi(n+1)},\dots,X_{\pi(n+p)}).$$

Soit :

$$S'_{n,p} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+p} \mid \sigma([\![1,n]\!]) = [\![1,n]\!] \text{ et } \sigma([\![n+1,n+p]\!]) = [\![n+1,n+p]\!]\},$$

et pour $\sigma \in S'_{n,p}$, $\sigma' = \sigma_{|[\![1,n]\!]}$ et $\sigma'' = \sigma_{|[\![n+1,n+p]\!]}$.

En utilisant la notation abusive $\pi^{-1} \cdot \mathscr{X}' = (X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(m)})$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} & A_n(X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n)})A_p(X_{\pi(n+1)},\dots,X_{\pi(n+p)}) \\ = \quad & \sum_{\sigma \in S'_{n,p}} \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma',\pi^{-1}\cdot\mathscr{X}')\varepsilon(\sigma'')\varepsilon(\sigma'',\pi^{-1}\cdot\mathscr{X}'')X_{\pi\sigma(1)}\dots X_{\pi\sigma(n+p)} \end{aligned}$$

car :

$$\sigma \cdot \mu_{n+p}(\pi^{-1}\cdot\mathscr{X}) = \mu_{n+p}((\pi\sigma)^{-1}\cdot\mathscr{X})$$

et, dans l'expression $\varepsilon(\sigma,\pi^{-1}\cdot\mathscr{X}')$, la permutation σ agit sur les indices $1,2,\dots,m$.

Nous avons clairement $\mathrm{card}(S'_{n,p}) = n!p!$ et $S'_{n,p}$ est en bijection avec $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_p$. D'autre part si $\sigma \in S'_{n,p}$, alors :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma'')$$

et :

$$\varepsilon(\sigma,\mathscr{Y}) = \varepsilon(\sigma',\mathscr{Y}')\varepsilon(\sigma'',\mathscr{Y}'')$$

où $\mathscr{Y}'$ et $\mathscr{Y}''$ sont définis par $\mathscr{Y} = (\mathscr{Y}', \mathscr{Y}'') \in \mathscr{G}^n \times \mathscr{G}^p$ (il n'y a aucun couple d'inversion (a,b) tel que $a \leqslant n < b$). Donc :

$$\begin{aligned} A_n(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)}) A_p(X_{\pi(n+1)}, \dots, X_{\pi(n+p)}) &= \sum_{\sigma \in S'_{n,p}} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \pi^{-1} \cdot \mathscr{X}) X_{\pi\sigma(1)} \dots X_{\pi\sigma(n+p)} \\ &= \sum_{\sigma \in S'_{n,p}} (\sigma \underset{a}{\cdot} \mu_{n+p})(\pi^{-1} \cdot \mathscr{X}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_n \wedge A_p(\mathscr{X}) &= \frac{1}{n!p!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n+p}} \sum_{\sigma \in S'_{n,p}} (\pi \underset{a}{\cdot} (\sigma \underset{a}{\cdot} \mu_{n+p}))(\mathscr{X}) \\ &= \frac{1}{n!p!} \sum_{\sigma \in S'_{n,p}} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{n+p}} (\pi\sigma) \underset{a}{\cdot} \mu_{n+p}(\mathscr{X}) \\ &= \frac{1}{n!p!} \sum_{\sigma \in S'_{n,p}} A_{n+p}(\mathscr{X}) \\ &= A_{n+p}(X_1, \dots, X_{n+p}). \end{aligned}$$

Pour démontrer la formule relative aux polynômes S_n, il suffit de reprendre la démonstration ci-dessus en retirant les signatures. □

Nous poursuivons en donnant plusieurs identités vérifiées par les polynômes A_n et S_n, en généralisant les identités connues sur le polynôme antisymétrique classique P_n (voir [Kos58, Jac75]). De plus, un certain nombre de ces «super-identités» nous servira dans la dernière partie pour démontrer une version du théorème d'Amitsur-Levitzki sur les superalgèbres de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$.

Lemme II.4.7. *Notons $1_{\mathscr{G}}$ l'élément unité de l'algèbre $\mathscr{G}$. Soit $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{G}$. Alors :*

1. $A_{n+1}(X_1, \dots, X_n, 1_{\mathscr{G}}) = A_n(X_1, \dots, X_n)$ *si n est pair ;*
2. $A_{n+1}(X_1, \dots, X_n, 1_{\mathscr{G}}) = 0$ *si n est impair ;*
3. $S_{n+1}(X_1, \dots, X_n, 1_{\mathscr{G}}) = (n+1) S_n(X_1, \dots, X_n)$.

Preuve. Soit $\mathscr{X} = (X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \in \mathscr{G}^{n+1}$ et $\widetilde{\mathscr{X}} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathscr{G}^n$ où $X_{n+1} := 1_{\mathscr{G}}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} A_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S^i_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(i-1)} X_{\sigma(i+1)} \dots X_{\sigma(n+1)} \end{aligned}$$

où nous avons noté :

$$S^i_{n+1} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} \mid \sigma(i) = n+1\}.$$

Nous en déduisons la partition : $\mathfrak{S}_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{n+1} S^i_{n+1}$ et l'ensemble S^i_{n+1} est en bijection avec le groupe $\mathfrak{S}_n$ par l'application : $\sigma \in S^i_{n+1} \mapsto \widetilde{\sigma} = (\sigma\pi_i)_{|\llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathfrak{S}_n$ où :

$$\pi_i := (i \; i+1 \dots n+1) \in \mathfrak{S}_{n+1}$$

(l'injectivité est évidente et la bijectivité suit car $\mathrm{card}(S^i_{n+1}) = n! = \mathrm{card}(\mathfrak{S}_n)$). Nous avons immédiatement :

$$\varepsilon(\widetilde{\sigma}) = \varepsilon(\sigma\pi_i) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi_i) = (-1)^{n+1-i}\varepsilon(\sigma).$$

Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$ fixé et $\sigma \in S^i_{n+1}$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n+1 \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i-1) & n+1 & \sigma(i+1) & \dots & \sigma(n+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n+1 \\ \widetilde{\sigma}(1) & \dots & \widetilde{\sigma}(i-1) & n+1 & \widetilde{\sigma}(i) & \dots & \widetilde{\sigma}(n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(\sigma, \mathscr{X}) &= \{(a,b) \in [\![1, n+1]\!]^2 \mid 1 \leqslant a < b \leqslant n+1,\ \sigma(a) > \sigma(b) \text{ et } x_{\sigma(a)} = x_{\sigma(b)} = \overline{1}\} \\
&= \{(a,b) \in ([\![1, n+1]\!] \setminus \{i\})^2 \mid 1 \leqslant a < b \leqslant n+1,\ \sigma(a) > \sigma(b) \text{ et } x_{\sigma(a)} = x_{\sigma(b)} = \overline{1}\} \\
&\quad \cup \{a \in [\![1, i-1]\!] \mid \sigma(a) > \sigma(i) = n+1 \text{ et } x_{\sigma(a)} = x_{n+1} = \overline{1}\} \\
&\quad \cup \{b \in [\![i+1, n]\!] \mid n+1 = \sigma(i) > \sigma(b) \text{ et } x_{n+1} = x_{\sigma(b)} = \overline{1}\} \\
&= \{(a,b) \in ([\![1, n+1]\!] \setminus \{i\})^2 \mid 1 \leqslant a < b \leqslant n+1,\ \sigma(a) > \sigma(b) \text{ et } x_{\sigma(a)} = x_{\sigma(b)} = \overline{1}\} \\
&= \{(\alpha,\beta) \in [\![1, n]\!]^2 \mid 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n,\ \sigma\pi_i(\alpha) > \sigma\pi_i(\beta) \text{ et } x_{\sigma\pi_i(\alpha)} = x_{\sigma\pi_i(\beta)} = \overline{1}\} \\
&= \mathscr{I}(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mathscr{X}})
\end{aligned}$$

car les deux autres sous-ensembles sont vides puisque $x_{n+1} = \deg(1_{\mathscr{G}}) = \overline{0}$. Finalement :

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(X_1, \dots, X_n, 1_{\mathscr{G}}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \sum_{\widetilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\widetilde{\sigma})\varepsilon(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mathscr{X}}) X_{\widetilde{\sigma}(1)} \dots X_{\widetilde{\sigma}(n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A_n(X_1, \dots, X_n).
\end{aligned}$$

D'où le résultat en ce qui concerne A_n. Pour le polynôme S_n, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(X_1, \dots, X_n, 1_{\mathscr{G}}) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\widetilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\mathscr{X}}) X_{\widetilde{\sigma}(1)} \dots X_{\widetilde{\sigma}(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} S_n(X_1, \dots, X_n) \\
&= (n+1) S_n(X_1, \dots, X_n).
\end{aligned}$$

□

Notation II.4.8. Si $\mathscr{G}$ est une superalgèbre d'endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de dimension finie V, nous disposons de l'application super-trace (définie en II.3.2). Nous notons alors :

$$a_n(X_1, \dots, X_n) := \mathrm{str}(A_n(X_1, \dots, X_n)) \quad \text{et} \quad s_n(X_1, \dots, X_n) := \mathrm{str}(S_n(X_1, \dots, X_n))$$

pour $X_1,\dots,X_n \in \mathscr{G}$. Les applications a_n et s_n sont donc des formes n-linéaires respectivement super-antisymétrique et super-symétrique. La forme bilinéaire B désignera la forme $(X,Y) \mapsto \mathrm{str}(XY)$ (nous l'avons déjà rencontrée en II.3.5).

Lemme II.4.9. *Soit V un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et supposons que $\mathscr{G} = \mathfrak{gl}(V)$. Soit $X_1,\dots,X_n \in \mathscr{G}$. Alors :*

1. $a_n(X_1,\dots,X_n) = 0$ *si n est pair ;*
2. $a_n(X_1,\dots,X_n) = nB(A_{n-1}(X_1,\dots,X_{n-1}),X_n)$ *si n est impair ;*
3. $s_n(X_1,\dots,X_n) = nB(S_{n-1}(X_1,\dots,X_{n-1}),X_n)$.

Preuve. Nous allons utiliser le fait que l'application super-trace est super-symétrique. En effet, si $X \in \mathscr{G}_x$ et $Y \in \mathscr{G}_y$, alors :

$$\mathrm{str}(XY) = (-1)^{xy}\mathrm{str}(YX).$$

Notons $\mathscr{X} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathscr{G}^n$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$, $S_n^i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = n\}$. Comme $\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} S_n^i$, il vient :

$$\begin{aligned}
& a_n(X_1,\dots,X_n) \\
= & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\mathrm{str}(X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(n)}) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n^i} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\mathrm{str}\big((X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(i-1)}X_n)(X_{\sigma(i+1)}\dots X_{\sigma(n)})\big) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n^i} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{(x_{\sigma(1)}+\dots+x_{\sigma(i)})(x_{\sigma(i+1)}+\dots+x_{\sigma(n)})}\mathrm{str}(X_{\sigma(i+1)}\dots X_{\sigma(n)}X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(i-1)}X_n)
\end{aligned}$$

L'ensemble S_n^i est en bijection avec le groupe $\mathfrak{S}_{n-1}$ par l'application $\sigma \in S_n^i \mapsto \widetilde{\sigma} = (\sigma\pi^i)_{|[\![1,n-1]\!]} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ où π est le cycle $(1\ 2\ \dots\ n) \in \mathfrak{S}_n$. Nous avons $\varepsilon(\pi) = (-1)^{n-1}$ donc :

$$\varepsilon(\widetilde{\sigma}) = (-1)^{i(n-1)}\varepsilon(\sigma)$$

si $\sigma \in S_n^i$.

Notons que :

$$\pi^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-i & n-i+1 & \dots & n \\ i+1 & i+2 & \dots & n & 1 & \dots & i \end{pmatrix}$$

donc $\varepsilon(\pi^i,\mathscr{Y}) = (-1)^{(y_{i+1}+\dots+y_n)(y_1+\dots+y_i)}$ pour $\mathscr{Y} = (Y_1,\dots,Y_n) \in \mathscr{G}^n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_n(X_1,\dots,X_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n^i} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\varepsilon(\pi^i,\sigma^{-1}\cdot\mathscr{X})\mathrm{str}(X_{\sigma\pi^i(1)}\dots X_{\sigma\pi^i(n-1)}X_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i(n-1)}\mathrm{str}\left(\sum_{\widetilde{\sigma}\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\widetilde{\sigma})\varepsilon(\widetilde{\sigma},\mathscr{X})X_{\widetilde{\sigma}(1)}\dots X_{\widetilde{\sigma}(n-1)}\,X_n\right) \\
&= \mathrm{str}(A_{n-1}(X_1,\dots,X_{n-1})X_n)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i(n-1)}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons les formules (1) et (2) en remarquant que si $n = 2p$:

$$\sum_{i=1}^{2p} (-1)^{i(2p-1)} = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i = 0$$

et si $n = 2p+1$:

$$\sum_{i=1}^{2p+1} (-1)^{i(2p)} = 2p+1.$$

La formule (3) s'obtient en réécrivant les calculs ci-dessus sans les signatures. □

Corollaire II.4.10. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et I l'application multilinéaire définie par :*

$$I(X_1,\dots,X_{2p+1}) = B(A_{2p}(X_1,\dots,X_{2p}),X_{2p+1}).$$

Alors I est super-antisymétrique.

Preuve. C'est clair puisque d'après le lemme II.4.9, nous avons :

$$I(X_1,\dots,X_{2p+1}) = \frac{1}{2p+1} a_{2p+1}(X_1,\dots,X_{2p+1}).$$

□

Corollaire II.4.11. *Supposons n impair. Soit $\mathscr{X} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathscr{G}^n$. Alors :*

$$a_n(X_1,\dots,X_n) = (-1)^{j+1}(-1)^{x_n(x_j+\dots+x_{n-1})} nB(A_{n-1}(X_1,\dots,X_{j-1},X_{j+1},\dots,X_n),X_j).$$

Preuve. Soit $\pi = (n\; n-1\; \dots\; j+1\; j) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j-1 & n & j & \dots & n-1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$. Nous avons :

$$\varepsilon(\pi) = (-1)^{n-j} = (-1)^{j+1}$$

car n est impair et :

$$\varepsilon(\pi,\mathscr{X}) = (-1)^{x_n(x_j+\dots+x_{n-1})}.$$

Par conséquent, puisque le polynôme a_n est super-antisymétrique :

$$\begin{aligned} a_n(X_1,\dots,X_n) &= (-1)^{j+1}(-1)^{x_n(x_j+\dots+x_{n-1})} a_n(X_1,\dots,X_{j-1},X_{j+1},\dots,X_n,X_j) \\ &= (-1)^{j+1}(-1)^{x_n(x_j+\dots+x_{n-1})} nB(A_{n-1}(X_1,\dots,X_{j-1},X_{j+1},\dots,X_n),X_j) \end{aligned}$$

d'après le lemme II.4.9. □

Lemme II.4.12. *Soit $X_1,\dots,X_n \in \mathscr{G}$. Notons :*

$$\zeta(X_1,\dots,X_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})[X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}\dots X_{\sigma(n)}]$$

(l'application ζ est l'image par l'opérateur A *de l'application $(X_1,\dots,X_n) \mapsto [X_1,X_2\dots X_n]$). Alors :*

1. *$\zeta(X_1,\dots,X_n)=0$ si n est impair ;*

2. *$\zeta(X_1,\dots,X_n)=2A_n(X_1,\dots,X_n)$ si n est pair.*

Preuve. Soit $\pi := (1\ 2\ \dots\ n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$. Alors :

$$\varepsilon(\pi)=(-1)^{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\pi,\mathscr{Y})=(-1)^{y_1(y_2+\dots+y_n)}$$

pour $\mathscr{Y}=(Y_1,\dots,Y_n)\in\mathscr{G}^n$. Par conséquent :

$$\varepsilon(\sigma\pi,\mathscr{X})=(-1)^{x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}+\dots+x_{\sigma(n)})}\varepsilon(\sigma,\mathscr{X}).$$

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned}
\zeta(X_1,\dots,X_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}\dots X_{\sigma(n)} \\
&\quad -\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})(-1)^{x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}+\dots+x_{\sigma(n)})}X_{\sigma(2)}\dots X_{\sigma(n)}X_{\sigma(1)} \\
&= A_n(X_1,X_2,\dots,X_n)-(-1)^{n-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma\pi)\varepsilon(\sigma\pi,\mathscr{X})\mu_n((\sigma\pi)^{-1}\cdot\mathscr{X}) \\
&= A_n(X_1,X_2,\dots,X_n)-(-1)^{n-1}A_n(X_1,X_2,\dots,X_n).
\end{aligned}$$

D'où le résultat par parité de n. □

Remarque II.4.13. La formule (2) du lemme II.4.12 montre que $A_{2p}(X_1,\dots,X_{2p})$ est une combinaison linéaire de crochets, et nous retrouvons le premier résultat du lemme II.4.9 : $a_{2p}(X_1,\dots,X_{2p})=0$.

Lemme II.4.14. *Soit $X_1,\dots,X_{2n+1}\in\mathscr{G}$. Alors :*

1. $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})[X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}]\dots[X_{\sigma(2n-1)},X_{\sigma(2n)}]=2^nA_{2n}(X_1,\dots,X_{2n})$ *;*

2. *Pour tout $\ell\in[\![0,n]\!]$,*
$\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n+1}}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})[X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}]\dots[X_{\sigma(2\ell-1)},X_{\sigma(2\ell)}]X_{\sigma(2\ell+1)}[X_{\sigma(2\ell+2)},X_{\sigma(2\ell+3)}]\dots$
$\times[X_{\sigma(2n)},X_{\sigma(2n+1)}]=2^nA_{2n+1}(X_1,\dots,X_{2n+1})$

Preuve.
1. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, notons $\tau_i := (2i-1\ \ 2i)\in\mathfrak{S}_{2n}$ et pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n$, $\sigma_\alpha := \prod_{i=1}^{n}\tau_i^{\alpha_i}$.
Notons que :

$$\varepsilon(\sigma_\alpha)=(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} \text{ et } \varepsilon(\sigma_\alpha,\mathscr{Y})=(-1)^{\alpha_1y_1y_2+\dots+\alpha_ny_{2n-1}y_{2n}}$$

pour tout $\mathscr{Y}=(Y_1,\dots,Y_{2n})\in\mathscr{G}^{2n}$. Puisque l'on a : $[Y_1,Y_2]=Y_1Y_2-(-1)^{y_1y_2}Y_2Y_1$, il vient :

$$\begin{aligned}
[Y_1,Y_2]\dots[Y_{2n-1},Y_{2n}] &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\varepsilon(\sigma_\alpha)\varepsilon(\sigma_\alpha,\mathscr{Y})Y_{\sigma_\alpha(1)}\dots Y_{\sigma_\alpha(2n)} \\
&= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sigma_\alpha \underset{a}{\cdot}\mu_{2n}(Y_1,\dots,Y_{2n}).
\end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$. En posant $\mathscr{Y} = \sigma^{-1} \cdot \mathscr{X}$, il vient :

$$[X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}] \dots [X_{\sigma(2n-1)}, X_{\sigma(2n)}] = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sigma_\alpha \underset{a}{\cdot} \mu_{2n}(\sigma^{-1} \cdot \mathscr{X})$$

et :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})[X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}] \dots [X_{\sigma(2n-1)}, X_{\sigma(2n)}] &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \sigma \underset{a}{\cdot} (\sigma_\alpha \underset{a}{\cdot} \mu_{2n})(\mathscr{X}) \\
&= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} (\sigma\sigma_\alpha) \underset{a}{\cdot} \mu_{2n}(\mathscr{X}) \\
&= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} A_{2n}(X_1, \dots, X_{2n}) \\
&= 2^n A_{2n}(X_1, \dots, X_{2n}).
\end{aligned}$$

2. Pour montrer la deuxième identité, nous procédons de la même manière avec les transpositions $\tau_i := (2i-1 \ \ 2i) \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ pour $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\tau_i := (2i \ \ 2i+1) \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ pour $i \in [\![\ell+1, n]\!]$ et les permutations σ_α comme ci-dessus. En particulier, $\sigma_\alpha(2\ell+1) = 2\ell+1$. Nous avons alors :

$$\varepsilon(\sigma_\alpha, \mathscr{Y}) = (-1)^{\alpha_1 y_1 y_2 + \dots + \alpha_\ell y_{2\ell-1} y_{2\ell} + \alpha_{\ell+1} y_{2\ell+2} y_{2\ell+3} + \dots + \alpha_n y_{2n} y_{2n+1}}.$$

D'où :

$$[Y_1, Y_2] \dots [Y_{2\ell-1}, Y_{2\ell}] Y_{2\ell+1} [Y_{2\ell+2}, Y_{2\ell+3}] \dots [Y_{2n}, Y_{2n+1}] = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sigma_\alpha \underset{a}{\cdot} \mu_{2n+1}(\mathscr{Y}).$$

Nous concluons de la même manière. □

II.4.b Invariance

Rappel II.4.15. Une superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur les applications multilinéaires de l'espace $\mathscr{F}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\pi_X(F)(X_1, \dots, X_n) &= \mathrm{ad}(X)(F(X_1, \dots, X_n)) \\
&\quad -(-1)^{xf} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{x(x_1 + \dots + x_{i-1})} F(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_n),
\end{aligned}$$

pour $X, X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$, $F \in \mathscr{F}_f^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Supposons dans cette partie que $\mathscr{G} = \mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie.

Lemme II.4.16. *Le produit $\mu_n \in \mathscr{F}_0^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est invariant par $\mathfrak{g}$.*

Preuve. Démontrons l'identité du rappel II.4.15 par récurrence sur $n \geqslant 2$ (elle est triviale pour $n = 1$).
• Pour $n = 2$, nous avons d'une part :

$$[X, X_1 X_2] = X X_1 X_2 - (-1)^{x(x_1 + x_2)} X_1 X_2 X$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
[X,X_1]X_2+(-1)^{xx_1}X_1[X,X_2] &= XX_1X_2-(-1)^{xx_1}X_1XX_2+(-1)^{xx_1}X_1XX_2-(-1)^{x(x_1+x_2)}X_1X_2X \\
&= XX_1X_2-(-1)^{x(x_1+x_2)}X_1X_2X,
\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang 2.

• Supposons l'identité vraie jusqu'au rang $n-1$. Nous avons d'une part :

$$[X,X_1\dots X_n]=XX_1\dots X_n-(-1)^{x(x_1+\dots+x_n)}X_1\dots X_nX$$

et d'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\dots+x_{i-1})}X_1\dots X_{i-1}[X,X_i]X_{i+1}\dots X_n \\
= &\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{x(x_1+\dots+x_{i-1})}X_1\dots X_{i-1}[X,X_i]X_{i+1}\dots X_{n-1}\right)X_n \\
&+(-1)^{x(x_1+\dots+x_{n-1})}X_1\dots X_{n-1}[X,X_n] \\
= &([X,X_1\dots X_{n-1}])X_n+(-1)^{x(x_1+\dots+x_{n-1})}X_1\dots X_{n-1}[X,X_n] \\
= &XX_1\dots X_{n-1}X_n-(-1)^{x(x_1+\dots+x_{n-1})}X_1\dots X_{n-1}XX_n+(-1)^{x(x_1+\dots+x_{n-1})} \\
&X_1\dots X_{n-1}XX_n-(-1)^{x(x_1+\dots+x_{n-1}+x_n)}X_1\dots X_{n-1}X_nX \\
= &XX_1\dots X_n-(-1)^{x(x_1+\dots+x_n)}X_1\dots X_nX,
\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang n. □

Proposition II.4.17. *Les applications A_n, S_n, a_n et s_n sont invariantes.*

Preuve. Rappelons que $A_n=\mathrm{A}(\mu_n)$ et $S_n=\mathrm{S}(\mu_n)$. D'après le lemme II.4.16, nous avons :

$$\pi_X(\mu_n)(X_1,\dots,X_n)=0$$

pour tous $X,X_1,\dots,X_n\in\mathfrak{g}$. Il suffit donc de démontrer que A (resp. S) commute avec π_X pour obtenir le résultat, c'est-à-dire de démontrer que π_X commute avec l'action super-antisymétrique (resp. super-symétrique). Écrivons, pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et $F\in\mathscr{F}_f^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned}
\pi_X(\sigma\underset{a}{\cdot}F)(X_1,\dots,X_n) &= \mathrm{ad}(X)((\sigma\underset{a}{\cdot}F)(X_1,\dots,X_n)) \\
&\quad -(-1)^{xf}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\dots+x_{i-1})}(\sigma\underset{a}{\cdot}F)(X_1,\dots,[X,X_i],\dots,X_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X})\mathrm{ad}(X)(F(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})) \\
&\quad -(-1)^{xf}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\dots+x_{i-1})}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{Y}_i)F(Y^i_{\sigma(1)},\dots,Y^i_{\sigma(n)})
\end{aligned}$$

où $Y_i^i = [X, X_i]$ (de degré $x + x_i$) et $Y_\ell^i = X_\ell$ si $\ell \neq i$. Pour $\sigma = (j\ j+1) \in \mathfrak{S}_n$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \pi_X(\sigma \underset{a}{\cdot} F)(X_1, \ldots, X_n) \\
= \ & -(-1)^{x_j x_{j+1}} \mathrm{ad}(X)(F(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2}, \ldots, X_n)) \\
& +(-1)^{xf} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})} (-1)^{x_j x_{j+1}} F(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2} \ldots, X_n) \\
& +(-1)^{xf} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{j-1})} (-1)^{(x+x_j)(x_{j+1})} F(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, [X, X_j], X_{j+2}, \ldots, X_n) \\
& +(-1)^{xf} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_j)} (-1)^{x_j(x+x_{j+1})} F(X_1, \ldots, X_{j-1}, [X, X_{j+1}], X_j, X_{j+2}, \ldots, X_n) \\
& +(-1)^{xf} \sum_{i=j+2}^{n} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})} (-1)^{x_j x_{j+1}} F(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2}, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_n).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
& (\sigma \underset{a}{\cdot} (\pi_X(F)))(X_1, \ldots, X_n) \\
= \ & \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \pi_X(F)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \\
= \ & \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \mathrm{ad}(X)(F(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})) - \\
& (-1)^{xf} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X}) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{x(x_{\sigma(1)}+\ldots+x_{\sigma(i-1)})} F(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(i-1)}, [X, X_{\sigma(i)}], X_{\sigma(i+1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).
\end{aligned}$$

Avec $\sigma = (j\ j+1)$:

$$\begin{aligned}
& (\sigma \underset{a}{\cdot} (\pi_X(F)))(X_1, \ldots, X_n) \\
= \ & -(-1)^{x_j x_{j+1}} \mathrm{ad}(X)(F(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2}, \ldots, X_n)) \\
& +(-1)^{xf} (-1)^{x_j x_{j+1}} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})} F(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2}, \ldots, X_n) \\
& +(-1)^{xf} (-1)^{x_j x_{j+1}} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{j-1})} F(X_1, \ldots, X_{j-1}, [X, X_{j+1}], X_j, X_{j+2}, \ldots, X_n) \\
& +(-1)^{xf} (-1)^{x_j x_{j+1}} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{j-1}+x_{j+1})} F(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, [X, X_j], X_{j+2}, \ldots, X_n) \\
& +(-1)^{xf} (-1)^{x_j x_{j+1}} \sum_{i=j+2}^{n} (-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})} F(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, X_j, X_{j+2}, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_n).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité pour les permutations $(j\ j+1)$. Nous en déduisons que :

$$\sigma \underset{a}{\cdot} (\pi_X(F)) = \pi_X(\sigma \underset{a}{\cdot} F)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Nous trouvons également :

$$\sigma \underset{s}{\cdot} (\pi_X(F)) = \pi_X(\sigma \underset{s}{\cdot} F)$$

pour tout σ. Donc :

$$\mathrm{A}(\pi_X(F)) = \pi_X(\mathrm{A}(F)) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(\pi_X(F)) = \pi_X(\mathrm{S}(F)).$$

Ceci démontre l'invariance des polynômes A_n et S_n.

D'autre part, notant π' l'action sur $\mathscr{F}(\mathfrak{g})$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \pi'_X(a_n)(X_1,\dots,X_n) \\
= \quad & -\mathrm{str}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})}A_n(X_1,\dots,X_{i-1},[X,X_i],X_{i+1},\dots,X_n)\right) \\
= \quad & \mathrm{str}\left(\mathrm{ad}(X)(A_n(X_1,\dots,X_n)) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{x(x_1+\ldots+x_{i-1})}A_n(X_1,\dots,X_{i-1},[X,X_i],X_{i+1},\dots,X_n)\right) \\
= \quad & \mathrm{str}(\pi_X(A_n)(X_1,\dots,X_n)) \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

(car la super-trace est invariante) et de même pour s_n. □

II.4.c Stabilité de la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$

Rappel II.4.18. Rappelons que la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ laissant invariante une forme bilinéaire, paire, super-symétrique et non-dégénérée (voir la proposition II.3.9) :

$$\mathfrak{osp}(1,2n) = \mathfrak{osp}(1,2n)_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{osp}(1,2n)_{\bar{1}}$$

avec :

$$\mathfrak{osp}(1,2n)_u = \{U \in \mathfrak{gl}(1,2n)_u \mid F(U(X),Y) + (-1)^{ux}F(X,U(Y)) = 0 \ \forall\, X \in V_x,\ Y \in V, \forall\, x \in \mathbb{Z}_2)\}$$

où $V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{2n}$, $u \in \mathbb{Z}_2$.

Lemme II.4.19. *Soit* $X_1,\dots,X_m \in \mathfrak{osp}(1,2n)$. *Alors :*

1. $A_{4k+1}(X_1,\dots,X_{4k+1}) \in \mathfrak{osp}(1,2n)$ *(pour* $m = 4k+1$*) ;*
2. $A_{4k+2}(X_1,\dots,X_{4k+2}) \in \mathfrak{osp}(1,2n)$ *(pour* $m = 4k+2$*) ;*
3. $S_{2p+1}(X_1,\dots,X_{2p+1}) \in \mathfrak{osp}(1,2n)$ *(pour* $m = 2p+1$*).*

Preuve. Nous allons utiliser la condition du rappel II.4.18 en gardant les mêmes notations. Soit $Y \in V_y$, $Z \in V_z$ et $Y_1,\dots,Y_m \in \mathfrak{osp}(1,2n)$. Notons $\mathscr{Y} = (Y_1,\dots,Y_m)$. Alors comme $Y_1,\dots,Y_m \in \mathfrak{osp}(1,2n)$:

$$\begin{aligned}
F(Y_1Y_2\dots Y_mY,Z) &= -(-1)^{y_1(y_2+\ldots+y_m+y)}F(Y_2\dots Y_mY,Y_1Z) \\
&= \dots \\
&= (-1)^m(-1)^{y_1(y_2+\ldots+y_m+y)}(-1)^{y_2(y_3+\ldots+y_m+y)}\dots(-1)^{y_my}F(Y,Y_m\dots Y_1Z).
\end{aligned}$$

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ m & m-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_m$. Alors $\sigma \cdot \mu_m(Y_1,\dots,Y_m) = \mu_m(Y_m,\dots,Y_1) = Y_m\dots Y_1$.

• Si m est pair ($m = 2p$) : $\sigma = (1 \;\; 2p)(2 \;\; 2p-1)\dots(p \;\; p+1)$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ et les couples d'inversions de σ sont tous les couples $(i,j) \in [\![1,2p]\!]^2$ avec $i < j$. Par conséquent :

$$\varepsilon(\sigma,\mathscr{Y}) = (-1)^{y_1(y_2+\dots+y_{2p})+y_2(y_3+\dots+y_{2p})+\dots+y_{2p-1}y_{2p}}.$$

Ainsi :

$$F(\mu_{2p}(Y_1,\dots,Y_{2p})Y,Z) = (-1)^p(-1)^{y(y_1+\dots+y_{2p})}F(Y,(\sigma \underset{a}{\cdot} \mu_{2p})(Y_1,\dots,Y_{2p})).$$

En particulier, pour $\mathscr{Y} = \pi^{-1}\cdot(X_1,\dots,X_{2p})$ et en multipliant les deux membres de l'expression ci-dessus par le produit $\varepsilon(\pi)\varepsilon(\pi,\mathscr{X})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F((\pi \underset{a}{\cdot} \mu_{2p})(X_1,\dots,X_{2p})Y,Z) &= (-1)^p(-1)^{y(x_1+\dots+x_{2p})}F(Y,(\pi \underset{a}{\cdot}(\sigma \underset{a}{\cdot} \mu_{2p}))(X_1,\dots,X_{2p})) \\ &= (-1)^p(-1)^{y(x_1+\dots+x_{2p})}F(Y,((\pi\sigma) \underset{a}{\cdot} \mu_{2p})(X_1,\dots,X_{2p})). \end{aligned}$$

◇ Si p est impair ($p = 2k+1$, $m = 4k+2$), en faisant la somme sur le groupe $\mathfrak{S}_{4k+2}$, il vient :

$$\begin{aligned} F(A_{4k+2}(X_1,\dots,X_{4k+2})Y,Z) &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{4k+2}} F((\pi \underset{a}{\cdot} \mu_{4k+2})(X_1,\dots,X_{4k+2})Y,Z) \\ &= -(-1)^{y(x_1+\dots+x_{4k+2})}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{4k+2}} F(Y,((\pi\sigma) \underset{a}{\cdot} \mu_{4k+2})(X_1,\dots,X_{4k+2})) \\ &= -(-1)^{y(x_1+\dots+x_{4k+2})}F(Y,A_{4k+2}(X_1,\dots,X_{4k+2})Z). \end{aligned}$$

Donc $A_{4k+2}(X_1,\dots,X_{4k+2}) \in \mathfrak{osp}(1,2n)$.
Nous trouvons également :

$$F(S_{4k+2}(X_1,\dots,X_{4k+2})Y,Z) = (-1)^{y(x_1+\dots+x_{4k+2})}F(Y,S_{4k+2}(X_1,\dots,X_{4k+2})Z)$$

car la signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p = -1$ n'intervient pas.
◇ Si p est pair ($p = 2k$), nous trouvons :

$$F(A_{4k}(X_1,\dots,X_{4k})Y,Z) = (-1)^{y(x_1+\dots+x_{4k})}F(Y,A_{4k}(X_1,\dots,X_{4k})Z)$$

et la même égalité en remplaçant A_{4k} par S_{4k}.
• Si m est impair ($m = 2p+1$) : $\sigma = (1 \;\; 2p+1)(2 \;\; 2p)\dots(p \;\; p+2)$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$. Les couples d'inversions de σ sont les mêmes que dans le cas précédent donc nous avons toujours :

$$\varepsilon(\sigma,\mathscr{Y}) = (-1)^{y_1(y_2+\dots+y_{2p+1})+y_2(y_3+\dots+y_{2p+1})+\dots+y_{2p}y_{2p+1}}.$$

La signature $\varepsilon(\sigma)$ n'intervenant pas dans le calcul de S_{2p+1}, nous avons immédiatement :

$$S_{2p+1}(X_1,\dots,X_{2p+1}) \in \mathfrak{osp}(1,2n)$$

car $(-1)^m = -1$.

$\diamond$ Si p est pair ($p = 2k$, $m = 4k+1$) : $(-1)^p = 1$ mais $(-1)^m = -1$ donc :

$$F(\pi \underset{a}{\cdot} \mu_{4k+1}(X_1, \ldots, X_{4k+1})Y, Z) = -(-1)^{y(x_1+\ldots+x_{4k+1})} F(Y, (\pi\sigma) \underset{a}{\cdot} \mu_{4k+1}(X_1, \ldots, X_{4k+1})).$$

Par conséquent $A_{4k+1}(X_1, \ldots, X_{4k+1}) \in \mathfrak{osp}(1, 2n)$.
$\diamond$ Si p est impair ($p = 2k+1$, $m = 4k+3$) : $(-1)^m(-1)^p = 1$ donc $A_{4k+3}(X_1, \ldots, X_{4k+3})$ est super-symétrique par rapport à F. $\square$

Corollaire II.4.20. *Pour tous éléments $X_1, \ldots, X_m$ appartenant à $\mathfrak{osp}(1, 2n)$:*

1. $a_{4k+1}(X_1, \ldots, X_{4k+1}) = 0$ *(pour $m = 2k+1$) ;*

2. $a_{4k+2}(X_1, \ldots, X_{4k+2}) = 0$ *(pour $m = 4k+2$) ;*

3. $s_{2p+1}(X_1, \ldots, X_{2p+1}) = 0$ *(pour $m = 2p+1$).*

Preuve. En effet, les éléments de $\mathfrak{osp}(1, 2n)$ sont de super-trace nulle. $\square$

II.5 La transgression sur une superalgèbre de Lie

Il ne nous manque plus qu'un outil pour arriver à la démonstration du théorème final II.6.1 : un opérateur de transgression défini entre les algèbres super-symétrique et super-extérieure d'une super-algèbre de Lie et généralisant l'opérateur de transgression de H. Cartan [Car51] et C. Chevalley [Che52]. Cet opérateur étant défini, nous pourrons démontrer la version correspondante du théorème de Dynkin [Dyn59] reliant les invariants super-symétriques s_n aux invariants super-antisymétriques a_n.

II.5.a Définition et propriétés

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ une superalgèbre de Lie et d la différentielle super-extérieure définie sur $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ (cf. (II.49)). Notons $\{X_1, \ldots, X_{n_{\bar{0}}}, Y_1, \ldots, Y_{n_{\bar{1}}}\}$ une base d'homogènes de $\mathfrak{g}$ et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_{\bar{0}}},\ \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n_{\bar{1}}}\}$ la base duale. Nous considérons l'algèbre super-symétrique $\mathbb{Z}_2$-graduée :

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) = \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*_{\bar{0}}) \otimes \bigwedge(\mathfrak{g}^*_{\bar{1}})$$

et l'algèbre super-extérieure $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$-graduée :

$$\bigwedge(\mathfrak{g}^*) = \bigwedge(\mathfrak{g}^*_{\bar{0}}) \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*_{\bar{1}})$$

définies dans la section II.1.

Proposition II.5.1. *Il existe un homomorphisme d'algèbres* $s\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ *à valeurs dans la sous-algèbre de* $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ *engendrée par* $\{d\varphi_i, d\vartheta_j, i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!], j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]\}$ *tel que* $s(\varphi_i) = d\varphi_i$ *pour tout* $i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$ *et* $s(\vartheta_j) = d\vartheta_j$ *pour tout* $j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$.

Preuve. Vérifions que l'application linéaire $s\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ définie en posant $s(\varphi_i) := d\varphi_i$ ($i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$) et $s(\vartheta_j) := d\vartheta_j$ ($j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$) est un homomorphisme d'algèbres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments de $\mathrm{S}^n(\mathfrak{g}^*_{\bar{0}})$ (resp. $\bigwedge^n(\mathfrak{g}^*_{\bar{0}})$, $\mathrm{S}^n(\mathfrak{g}^*_{\bar{1}})$, $\bigwedge^n(\mathfrak{g}^*_{\bar{1}})$) sont de degré $\bar{0}$ (resp. $(n, \bar{0})$, $\bar{n}$, $(n, \bar{n})$). En conséquence, dans la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$, nous avons :

$$\deg(\varphi_i) = \bar{0},\ \forall\, i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!] \qquad \text{et} \qquad \deg(\vartheta_j) = \bar{1},\ \forall\, j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!].$$

D'où les relations :

- $\varphi_i \cdot \varphi_{i'} = \varphi_{i'} \cdot \varphi_i$ pour tous $i, i' \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$;
- $\vartheta_j \cdot \vartheta_{j'} = -\vartheta_{j'} \cdot \vartheta_j$ pour tous $j, j' \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$;
- $\varphi_i \cdot \vartheta_j = \vartheta_j \cdot \varphi_i$ pour tous $i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$ et $j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$.

La différentielle super-extérieure d est une super-dérivation de degré $(1, \bar{0})$ de l'algèbre super-extérieure $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ donc :

$$\deg(d\varphi_i) = (2, \bar{0}),\ \forall\, i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!] \qquad \text{et} \qquad \deg(d\vartheta_j) = (2, \bar{1}),\ \forall\, j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!].$$

Par conséquent, nous avons les relations :

- $(d\varphi_i) \wedge (d\varphi_{i'}) = (d\varphi_{i'}) \wedge (d\varphi_i)$ pour tous $i, i' \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$;
- $(d\vartheta_j) \wedge (d\vartheta_{j'}) = -(d\vartheta_{j'}) \wedge (d\vartheta_j)$ pour tous $j, j' \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$;
- $(d\varphi_i)(d\vartheta_j) = (d\vartheta_j) \wedge (d\varphi_i)$ pour tous $i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$ et $j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$.

Nous en déduisons que l'opérateur s est bien un homomorphisme d'algèbres. □

Remarque II.5.2. Tout élément de la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ possède un $\mathbb{Z}$-degré correspondant à l'isomorphisme entre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ et $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*_{\bar{0}}) \otimes \bigwedge(\mathfrak{g}^*_{\bar{1}})$ mais non compris dans la graduation définie. Nous notons donc :

$$\deg_{\mathbb{Z}}(P \otimes \Omega) = \deg_{\mathbb{Z}}(P) + \deg_{\mathbb{Z}}(\Omega)$$

ce $\mathbb{Z}$-degré, pour $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*_{\bar{0}})$ (munie du $\mathbb{Z}$-degré usuel des polynômes) et $\Omega \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*_{\bar{1}})$ (munie du $\mathbb{Z}$-degré usuel de l'algèbre extérieure). Le degré dans $\mathbb{Z}_2$ d'un élément P de la superalgèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ est noté :

$$\deg_{\mathrm{S}}(P).$$

Enfin, le degré d'un élément Ω de la superalgèbre $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$-graduée $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ est noté :

$$\deg_{\bigwedge}(\Omega) = (\deg_{\bigwedge,\mathbb{Z}}(\Omega), \deg_{\bigwedge,\mathbb{Z}_2}(\Omega)).$$

Remarque II.5.3. Soit $I = (i_1, \ldots, i_{n_{\bar{0}}}) \in \mathbb{Z}^{n_{\bar{0}}}$ et $J = (j_1, \ldots, j_{n_{\bar{1}}}) \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar{1}}}$. Nous notons :

$$\varphi^I \cdot \vartheta^J := \varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \cdot \vartheta_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}}.$$

Une base de l'algèbre super-symétrique $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ s'écrit alors :

$$\{\varphi^I \cdot \vartheta^J,\ I \in \mathbb{Z}^{n_{\bar{0}}},\ J \in \mathbb{Z}_2^{n_{\bar{1}}}\}.$$

L'action de l'opérateur s sur les éléments de base est :

$$s(\varphi^I \cdot \vartheta^J) = (d\varphi_1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (d\varphi_{n_{\bar{0}}})^{i_{n_{\bar{0}}}} \wedge (d\vartheta_1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (d\vartheta_{n_{\bar{1}}})^{j_{n_{\bar{1}}}}.$$

Pour $P = \varphi^I \cdot \vartheta^J$, nous en déduisons :

$$\deg_{\mathbb{Z}}(P) = |I| + |J|, \qquad \deg_{\mathrm{S}}(P) = \overline{|J|} \qquad \text{et} \qquad \deg_{\bigwedge}(s(P)) = (2(|I| + |J|), \overline{|J|}).$$

Lemme II.5.4. *Pour tout $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$, $d(s(P)) = 0$ i.e. $s(P)$ est un cocycle.*

Preuve. Nous faisons le calcul pour $P = \varphi^I \cdot \vartheta^J \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$:

$$d(s(\varphi^I \cdot \vartheta^J)) = d((d\varphi_1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (d\varphi_{n_{\bar{0}}})^{i_{n_{\bar{0}}}} \wedge (d\vartheta_1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (d\vartheta_{n_{\bar{1}}})^{j_{n_{\bar{1}}}}) = 0$$

car la super-dérivation d est de carré nul. □

Remarque II.5.5. De la même manière que nous avons défini les super-dérivations de l'algèbre super-extérieure en II.2.8, nous pouvons introduire les super-dérivations de l'algèbre super-symétrique. Ce sont des endomorphismes ayant un $\mathbb{Z}_2$-degré correspondant à la graduation de la superalgèbre et vérifiant la relation classique de super-dérivation d'un produit $P \cdot Q$ de deux éléments P et Q de la superalgèbre.

Définition II.5.6. Pour $i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$ et $j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$, considérons les super-dérivations $\dfrac{\partial}{\partial \varphi_i}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}^*)$ (de degré $\bar{0}$) et $\dfrac{\partial}{\partial \vartheta_j} = i_{Y_j}$ de $\bigwedge(\mathfrak{g}_{\bar{1}}^*)$ (de degré $\bar{1}$). Nous les prolongeons à la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$. Le **champ radial** est l'opérateur $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ défini par :

$$R := \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_j}.$$

Proposition II.5.7. *Le champ radial prolonge l'identité de l'espace* $\mathfrak{g}^*$ *sur la superalgèbre* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ *et c'est une super-dérivation de degré* $\bar{0}$ *de l'algèbre super-extérieure (c'est-à-dire une dérivation au sens classique du terme).*

Preuve. Le premier point est clair. Montrons que l'opérateur R est une super-dérivation de degré $\bar{0}$. Soit $P, Q \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ homogènes. Compte-tenu des relations de commutation (voir II.1.30 page 57) dans l'algèbre super-symétrique, nous avons :

$$\begin{aligned}
R(P \cdot Q) &= \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i} \cdot Q + P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} \right) + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j} \cdot Q + (-1)^{\deg_{\mathrm{S}}(P)} P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \vartheta_j} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi_i} + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta_j} \right) \cdot Q + P \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \cdot \frac{\partial Q}{\partial \varphi_i} + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \cdot \frac{\partial Q}{\partial \vartheta_j} \right) \\
&= R(P) \cdot Q + P \cdot R(Q).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme II.5.8. *Pour tout* $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$, *nous avons :*

$$R(P) = \deg_{\mathbb{Z}}(P) P.$$

Preuve. Soit $P = \varphi^I \cdot \vartheta^J$ un élément de base. Nous avons déjà $\deg_{\mathbb{Z}}(P) = |I| + |J|$ d'après la remarque II.5.3. D'autre part :

$$\begin{aligned}
R(P) &= \sum_{k=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_k \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_k} (\varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \cdot \vartheta^J) + \sum_{\ell=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_\ell \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_\ell} (\varphi^I \cdot \vartheta_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_{\bar{0}}} i_k \varphi_k \cdot \varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_k^{i_k - 1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_{\bar{0}}}^{i_{n_{\bar{0}}}} \cdot \vartheta^J \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n_{\bar{1}}} (-1)^{j_1 + \ldots + j_{\ell-1}} j_\ell \vartheta_\ell \cdot \varphi^I \cdot \vartheta_1^{j_1} \cdot \ldots \vartheta_\ell^{j_\ell - 1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_{n_{\bar{1}}}^{j_{n_{\bar{1}}}} \\
&= \sum_{k=1}^{n_{\bar{0}}} i_k \varphi^I \cdot \vartheta^J + \sum_{\ell=1}^{n_{\bar{1}}} j_\ell \varphi^I \cdot \vartheta^J \\
&= (|I| + |J|) P
\end{aligned}$$

et si une puissance i_k ou j_ℓ est nulle, les termes d'indices k ou ℓ dans les deux sommes sont nuls et nous obtenons la même égalité. $\square$

Définition II.5.9 (Transgression). Nous définissons l'opérateur de transgression comme suit :

$$t\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \bigwedge(\mathfrak{g}^*), \quad P \mapsto \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right).$$

Remarque II.5.10. La définition donnée de la transgression n'est pas intrinsèque. Nous verrons cependant dans la proposition II.5.19 qu'il existe une définition intrinsèque.

Lemme II.5.11. *L'application t est une s-dérivation i.e.*

$$t(PQ) = t(P) \wedge s(Q) + s(P) \wedge t(Q)$$

pour tous $P, Q \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$.

Preuve. Rappelons que les super-dérivations $\dfrac{\partial}{\partial \varphi_i}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \vartheta_j}$ sont respectivement de degré $\bar{0}$ et $\bar{1}$. Par définition de t, nous avons alors :

$$\begin{aligned} t(P\cdot Q) &= \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \wedge s\left(\frac{\partial (P\cdot Q)}{\partial \varphi_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \wedge s\left(\frac{\partial (P\cdot Q)}{\partial \vartheta_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \wedge \left[s\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right) \wedge s(Q) + s(P) \wedge s\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi_i}\right)\right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \wedge \left[s\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right) \wedge s(Q) + (-1)^{\deg_{\mathrm{S}}(P)} s(P) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial \vartheta_j}\right)\right] \end{aligned}$$

Or, d'après la remarque II.5.3, si $P = \varphi^I \cdot \vartheta^J$, alors nous avons :

$$\deg_{\mathrm{S}}(P) = \overline{|J|} \quad \text{et} \quad \deg_{\bigwedge}(s(P)) = (2(|I|+|J|), \overline{|J|}).$$

Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$ et $j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$, nous avons :

$$\varphi_i \wedge s(P) = s(P) \wedge \varphi_i$$

car $\deg_{\bigwedge}(\varphi_i) = (1, \bar{0})$ et :

$$\vartheta_j \wedge s(P) = (-1)^{\deg_{\mathrm{S}}(P)} s(P) \wedge \vartheta_j$$

car $\deg_{\bigwedge}(\vartheta_j) = (1, \bar{1})$. Nous pouvons donc conclure : $t(PQ) = t(P) \wedge s(Q) + s(P) \wedge t(Q)$. $\square$

Lemme II.5.12. *Pour tout $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$, nous avons :*

$$d(t(P)) = s(R(P)) = \deg_{\mathbb{Z}}(P) s(P).$$

Preuve. Nous avons, d'après le lemme II.5.4 :

$$\begin{aligned}
d(t(P)) &= \sum_{i=1}^{n_{\bar 0}} \left[d\varphi_i \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right) + (-1)^1 \varphi_i \wedge d\left(s\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right)\right)\right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_{\bar 1}} \left[d\vartheta_j \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right) + (-1)^1 \varphi_i \wedge d\left(s\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right)\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\bar 0}} d\varphi_i \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_{\bar 1}} d\vartheta_j \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\bar 0}} s(\varphi_i) \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_{\bar 1}} s(\vartheta_j) \wedge s\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_{\bar 0}} s\left(\varphi_i \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi_i}\right) + \sum_{j=1}^{n_{\bar 1}} s\left(\vartheta_j \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta_j}\right) \\
&= s(R(P)).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité provient du lemme II.5.8. $\square$

Corollaire II.5.13. *Pour tout $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$, $s(P)$ est un cobord.*

Rappel II.5.14. Si (V,π) est une représentation de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'espace $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ étant $\mathbb{Z}_2$-gradué, nous disposons de la représentation contragrédiente $(V^*, \check{\pi})$ définie par :

$$\check{\pi}_X(\varphi)(Z) := -(-1)^{x\phi}\varphi(\pi_X(Z))$$

pour $X \in \mathfrak{g}_x$, $Z \in \mathfrak{g}$ et $\varphi \in \mathfrak{g}^*_\phi$. Par conséquent $\check{\pi}_X = -{}^T\pi_X$.

Nous avons également une action de la superalgèbre $\mathfrak{g}$ sur l'espace $\mathrm{End}(V)$ par l'adjoint :

$$\mathrm{ad}(\pi_X)(F) = [\pi_X, F]$$

pour $F \in \mathrm{End}(V)$. Mais l'espace $\mathrm{End}(V)$ est isomorphe au produit tensoriel $V^* \otimes V$ via l'application :

$$\varphi \otimes T \in V^* \otimes V \rightsquigarrow (U \mapsto (-1)^{ut}\varphi(U)T) \in \mathrm{End}(V)$$

(que nous noterons $(\varphi \otimes T)(U) = (-1)^{ut}\varphi(U)T$).

D'autre part, nous disposons de la représentation $\check{\pi} \otimes \pi$ sur l'espace $V^* \otimes V$. Elle est définie par :

$$(\check{\pi} \otimes \pi)_X(\varphi \otimes T) := (\check{\pi}_X\varphi) \otimes T + (-1)^{x\phi}\varphi \otimes \pi_X(T).$$

Montrons que $\check{\pi} \otimes \pi = \mathrm{ad}\pi$. Soit $\varphi \in V^*$ et $T, U \in V$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(\check{\pi} \otimes \pi)_X(\varphi \otimes T)(U) &= ((\check{\pi}_X\varphi) \otimes T)(U) + (-1)^{x\phi}(\varphi \otimes \pi_X(T))(U) \\
&= (-1)^{ut}(\check{\pi}_X\varphi)(U)T + (-1)^{x\phi}(-1)^{(x+t)u}\varphi(U)\pi_X(T) \\
&= -(-1)^{ut+x\phi}\varphi(\pi_X(U))T + (-1)^{x\phi+(x+t)u}\varphi(U)\pi_X(T).
\end{aligned}$$

Mais $u = \phi$ dans le deuxième terme (sinon il est nul) donc :

$$(\check{\pi} \otimes \pi)_X(\varphi \otimes T)(U) = -(-1)^{ut+x\phi}\varphi(\pi_X(U))T + (-1)^{tu}\varphi(U)\pi_X(T).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
[\pi_X, \varphi \otimes T](U) &= \pi_X(\varphi \otimes T)(U) - (-1)^{x(t+\phi)}(\varphi \otimes T)\pi_X(U) \\
&= (-1)^{ut}\varphi(U)\pi_X(T) - (-1)^{x(t+\phi)+(x+u)t}\varphi(\pi_X(U))T \\
&= (-1)^{ut}\varphi(U)\pi_X(T) - (-1)^{x\phi+ut}\varphi(\pi_X(U))T.
\end{aligned}$$

D'où l'égalité $\check{\pi} \otimes \pi = \mathrm{ad}\pi$ (via l'isomorphisme $\mathrm{End}(V) \simeq V^* \otimes V$).

Notons enfin que l'image dans l'espace $V^* \otimes V$ de l'application identique de V est :

$$\mathrm{id} = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i' \otimes X_i' - \sum_{j=1}^{s} \vartheta_j' \otimes Y_j'$$

si $\{X_i', 1 \leqslant i \leqslant r\}$ (resp. $\{Y_j', 1 \leqslant j \leqslant s\}$) est une base de $V_{\bar{0}}$ (resp. $V_{\bar{1}}$) et $\{\varphi_i', 1 \leqslant i \leqslant r\}$ (resp. $\{\vartheta_j', 1 \leqslant j \leqslant s\}$) la base duale. Si $V = \mathfrak{g}$ et $\pi = \mathrm{ad}$, alors l'application identique id (de degré $\bar{0}$) est invariante :

$$\mathrm{ad}(\mathrm{ad}_X)(\mathrm{id})(Y) = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{id}](Y) = [X,Y] - [X,Y] = 0$$

pour $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Rappel II.5.15. Nous avons noté Θ (resp. $\mathscr{L}$) le prolongement de la représentation $\check{\mathrm{ad}}$ à la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ (resp. $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$). Rappelons que si $X \in \mathfrak{g}_x$, alors l'opérateur Θ_X (resp. $\mathscr{L}_X$) est une super-dérivation de la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ (resp. $\bigwedge(\mathfrak{g}^*)$) de degré x (resp. $(0,x)$).

Lemme II.5.16. *Pour tout $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ et $X \in \mathfrak{g}$, nous avons :*

$$s(\Theta_X(P)) = \mathscr{L}_X(s(P)).$$

Preuve. Soit $P, Q \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ et $X \in \mathfrak{g}$. Nous avons :

$$s(\Theta_X(P \cdot Q)) = s(\Theta_X(P)) \wedge s(Q) + (-1)^{x\deg_{\mathrm{S}}(P)} s(P) \wedge s(\Theta_X(Q))$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X(s(P \cdot Q)) &= \mathscr{L}_X(s(P) \wedge s(Q)) \\
&= \mathscr{L}_X(s(P)) \wedge s(Q) + (-1)^{x\deg_{\wedge,\mathbb{Z}_2}(s(P))} s(P) \wedge \mathscr{L}_X(s(Q)).
\end{aligned}$$

D'après la remarque II.5.3, nous avons :

$$\deg_{\mathrm{S}}(P) = \deg_{\wedge,\mathbb{Z}_2}(s(P)).$$

Il suffit donc de prouver le lemme sur les générateurs de l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$. Or, pour tout $i \in [\![1, n_{\bar{0}}]\!]$, nous avons :

$$s(\Theta_X(\varphi_i)) = d(\check{\mathrm{ad}}_X(\varphi_i))$$

et, d'après le lemme II.2.27 page 94 :

$$\mathscr{L}_X(s(\varphi_i)) = \mathscr{L}_X(d\varphi_i) = d(\mathscr{L}_X(\varphi_i)) = d(\check{\mathrm{ad}}_X(\varphi_i)).$$

Il en est de même avec les formes linéaires ϑ_j, pour tout $j \in [\![1, n_{\bar{1}}]\!]$. Nous en déduisons le résultat. □

Corollaire II.5.17. *Si $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ est invariant alors $s(P) \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ est également invariant. Autrement dit :*

$$P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \Longrightarrow s(P) \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}.$$

Soit D l'application linéaire de la superalgèbre $\mathfrak{g}$ dans l'espace des super-dérivations de la superalgèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ définie comme suit : si $X \in \mathfrak{g}$, l'opérateur D_X est le prolongement en une dérivation de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ de l'application $X^{**} \in (\mathfrak{g}^*)^*$ (nous rappelons que $X^{**}(\varphi) = (-1)^{x\phi}\varphi(X)$).

Remarque II.5.18. Si $X \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, par exemple $X = X_i$, alors $D_{X_i}(\varphi_k) = \varphi_k(X_i) = \delta_{ik}$ donc :

$$D_{X_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$$

et si $X \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, par exemple $X = Y_j$, alors $D_{Y_j}(\vartheta_k) = -\vartheta_k(Y_j) = -\delta_{jk}$ donc :

$$D_{Y_j} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta_j}.$$

Soit $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$. Nous définissons l'application $\tau_P \colon \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \to \bigwedge(\mathfrak{g}^*)$ par :

$$\tau_P(\varphi \otimes X) := \varphi \wedge s(D_X(P)).$$

Proposition II.5.19. *Soit $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$.*

1. *Nous avons l'égalité*

$$t(P) = \tau_P(\mathrm{id}),$$

ce qui montre que la définition de t est intrinsèque.

2. *De plus, si P est invariant, alors τ_P est un homomorphisme de $(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}, \check{\mathrm{ad}} \otimes \mathrm{ad})$ dans $(\bigwedge(\mathfrak{g}^*), \mathscr{L})$.*

Preuve.
1. Compte-tenu de la remarque II.5.18, nous pouvons réécrire la formule de la transgression : pour $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$:

$$t(P) = \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \wedge s(D_{X_i}P) - \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \wedge s(D_{Y_j}P) = \tau_P(\mathrm{id})$$

car $\mathrm{id} = \sum_{i=1}^{n_{\bar{0}}} \varphi_i \otimes X_i - \sum_{j=1}^{n_{\bar{1}}} \vartheta_j \otimes Y_j$.

2. Soit $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in \mathfrak{g}_\phi^*$, $T \in \mathfrak{g}_t$ et $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Alors, d'après le lemme II.5.16, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X(\tau_P(\varphi \otimes T)) &= \mathscr{L}_X(\phi \wedge s(D_T(P))) \\
&= \mathscr{L}_X(\varphi) \wedge s(D_T(P)) + (-1)^{x\phi} \varphi \wedge \mathscr{L}_X(s(D_T(P))) \\
&= \check{\mathrm{ad}}_X(\varphi) \wedge s(D_T(P)) + (-1)^{x\varphi} \varphi \wedge s(\Theta_X(D_T(P))) \\
&= \check{\mathrm{ad}}_X(\varphi) \wedge s(D_T(P)) + (-1)^{x\phi} \varphi \wedge s([\Theta_X, D_T](P)).
\end{aligned}$$

car $\Theta_X(P) = 0$. Or, pour toute forme linéaire $\vartheta \in \mathfrak{g}_\theta^*$, et puisque $\Theta_X(\vartheta) = \check{\mathrm{ad}}_X(\vartheta)$ est élément de $\mathfrak{g}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
[\Theta_X, D_T](\vartheta) &= \Theta_X(D_T(\vartheta)) - (-1)^{xt} D_T(\Theta_X(\vartheta)) \\
&= 0 - (-1)^{xt+(x+\theta)t} \check{\mathrm{ad}}_X(\vartheta)(T) \\
&= -(-1)^{\theta t} \check{\mathrm{ad}}_X(\vartheta)(T) \\
&= (-1)^{\theta(x+t)} \vartheta([X, T]) \\
&= D_{[X,T]}(\vartheta).
\end{aligned}$$

Donc les super-dérivations $[\Theta_X, D_T]$ et $D_{[X,T]}$ sont égales. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X(\tau_P(\varphi \otimes T)) &= \check{\mathrm{ad}}_X(\varphi) \wedge s(D_T(P)) + (-1)^{x\phi} \varphi \wedge s(D_{\mathrm{ad}X(T)}(P)) \\
&= \tau_P(\check{\mathrm{ad}}_X(\varphi) \otimes T + (-1)^{x\phi} \varphi \otimes \mathrm{ad}(X)(T)) \\
&= \tau_P((\check{\mathrm{ad}} \otimes \mathrm{ad})_X(\varphi \otimes T)).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire II.5.20.

1. *Si $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, alors $t(P) \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et $s(P) = 0$.*
2. *De plus, $t(1) = 0$ et $t(P) = 0$ pour tout polynôme P appartenant I_+^2 (où I_+ désigne l'idéal des éléments de degré strictement positif de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ appelé **idéal d'augmentation**).*

Preuve. Soit $P \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. D'après la proposition II.5.19, nous avons $t(P) = \tau_P(\mathrm{id})$. Mais l'application identique de $\mathfrak{g}$ est invariante par la représentation $\check{\mathrm{ad}} \otimes \mathrm{ad}$ d'après le rappel II.5.14. Alors, toujours d'après II.5.19, nous en déduisons $\mathscr{L}_X(t(P)) = 0$ pour tout X de $\mathfrak{g}$.

D'après II.5.12, $s(P) = \dfrac{1}{\deg_{\mathbb{Z}}(P)} d(t(P))$. Mais $t(P)$ est invariant donc c'est un cocycle d'après le lemme II.2.28 page 94. Donc $s(P) = 0$.

L'égalité $t(1) = 0$ découle directement de la définition II.5.9. Et, d'après le lemme II.5.11, si $P, Q \in I_+$, nous avons $t(PQ) = t(P) \wedge \underbrace{s(Q)}_{0} + \underbrace{s(P)}_{0} \wedge t(Q) = 0$. □

II.5.b Transgression d'une sous-algèbre

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}_{\bar{1}}}$ une superalgèbre de Lie et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ une sous-algèbre de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Soit $\{X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q\}$ une base d'homogènes de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_q\}$ la base duale telles que la famille $\{X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s\}$ soit une base d'homogènes de l'espace $\mathfrak{g}$ et la famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s\}$ soit une base d'homogènes de l'espace $\mathfrak{g}^*$ (avec $0 \leqslant r \leqslant p$ et $0 \leqslant s \leqslant q$).

Nous disposons des opérateurs de transgression respectivement $t_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ pour $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $t_{\mathfrak{g}}$ pour $\mathfrak{g}$. Le lien entre ces deux opérateurs est donné par la proposition suivante :

Proposition II.5.21. *Pour tout $n \geqslant 1$ et tout élément $P \in \mathrm{S}^n(\widetilde{\mathfrak{g}})$, nous avons :*

$$t_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(P)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} = t_{\mathfrak{g}}(P|_{\mathfrak{g}^n}).$$

Nous notons donc t la transgression de $\mathfrak{g}$ et de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sans distinction.

Preuve. Soit $P \in \mathrm{S}^n(\widetilde{\mathfrak{g}})$. D'après la définition II.5.9 et la remarque II.5.18, nous avons les expressions des deux opérateurs de transgression :

$$t_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(P) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \wedge s_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(D_{X_k}(P)) - \sum_{\ell=1}^{q} \vartheta_\ell \wedge s_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(D_{Y_\ell}(P))$$

et :

$$t_{\mathfrak{g}}(P|_{\mathfrak{g}^n}) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k \wedge s_{\mathfrak{g}}(D_{X_k}(P|_{\mathfrak{g}^n})) - \sum_{\ell=1}^{s} \vartheta_\ell \wedge s_{\mathfrak{g}}(D_{Y_\ell}(P|_{\mathfrak{g}^n}))$$

où $s_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ (resp. $s_{\mathfrak{g}}$) est l'homomorphisme d'algèbres $\mathrm{S}(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to \bigwedge(\widetilde{\mathfrak{g}})$ (resp. $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \bigwedge(\mathfrak{g})$) envoyant les formes φ_k sur $d\varphi_k$ et ϑ_ℓ sur $d\vartheta_\ell$ pour $k \in [\![1,p]\!]$ et $\ell \in [\![1,q]\!]$ (resp. $k \in [\![1,r]\!]$ et $\ell \in [\![1,s]\!]$).

Examinons un monôme $\varphi^I \vartheta^J = \varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_p^{i_p} \cdot \vartheta_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_q^{j_q} \in \mathrm{S}^n(\mathfrak{g})$: sa restriction $(\varphi^I \vartheta^J)|_{\mathfrak{g}^n}$ est nulle si l'une des puissances $i_{r+1}, \ldots, i_p, j_{s+1}, \ldots, j_q$ n'est pas nulle. Donc $P|_{\mathfrak{g}^n}$ est une combinaison linéaire de monômes $\varphi^{I'} \vartheta^{J'}$ avec $I' = (i_1, \ldots, i_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^r$ et $J' = (j_1, \ldots, j_s, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^s$.

D'autre part, nous avons immédiatement :

$$\big(\varphi_k \wedge s(D_{X_k}(P))\big)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} = 0,\ \forall\, k \geqslant r+1 \quad \text{et} \quad \big(\vartheta_\ell \wedge s(D_{Y_\ell}(P))\big)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} = 0,\ \forall\, \ell \geqslant s+1.$$

Donc :

$$t_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(P)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} = \sum_{k=1}^{r} \big(\varphi_k \wedge s_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(D_{X_k}(P))\big)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} - \sum_{\ell=1}^{s} \big(\vartheta_\ell \wedge s_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(D_{Y_\ell}(P))\big)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}}.$$

Reprenons un monôme $P = \varphi^I \vartheta^J$. Soit $k \in [\![1,r]\!]$ et $\ell \in [\![1,s]\!]$. Si $i_k \neq 0$ (i.e. si le terme d'indice k apparaît dans la somme), nous avons :

$$D_{X_k}(P) = i_k \varphi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_k^{i_k - 1} \cdot \ldots \cdot \varphi_p^{i_p} \cdot \vartheta^J$$

d'où :

$$\varphi_k \wedge s_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(D_{X_k}(P)) = i_k \varphi_k \wedge (d\varphi_1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (d\varphi_k)^{i_k - 1} \wedge \ldots \wedge (d\varphi_p)^{i_p} \wedge (d\vartheta)^J$$

et si $j_\ell \neq 0$ (i.e. si le terme d'indice ℓ intervient dans la somme), nous avons :

$$D_{Y_\ell}(P) = (-1)^{j_1+\ldots+j_{\ell-1}} j_\ell \varphi^I \cdot \vartheta_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_\ell^{j_\ell - 1} \cdot \ldots \cdot \vartheta_q^{j_q}$$

d'où :

$$\vartheta_\ell \wedge s_{\tilde{\mathfrak{g}}}(D_{Y_\ell}(P)) = (-1)^{j_1+\ldots+j_{\ell-1}} j_\ell \vartheta_\ell \wedge (d\varphi)^I \wedge (d\vartheta_1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (d\vartheta_\ell)^{j_\ell - 1} \wedge \ldots \wedge (d\vartheta_q)^{j_q}.$$

Par conséquent, comme $k \leqslant r$ et $\ell \leqslant s$, nous avons :

$$\big(\varphi_k \wedge s_{\tilde{\mathfrak{g}}}(D_{X_k}(P))\big)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} = 0$$

si l'une des puissances $i_{r+1}, \ldots, i_p, j_{s+1}, \ldots, j_q$ n'est pas nulle et de même pour $\big(\vartheta_\ell \wedge s_{\tilde{\mathfrak{g}}}(D_{Y_\ell}(P))\big)|_{\mathfrak{g}^{2n+1}}$. En effet, nous rappelons, par exemple, que :

$$d\varphi_k(X,Y) = -\varphi_k([X,Y]) = 0$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ car $[X,Y] \in \mathfrak{g}$.

Nous en déduisons finalement le résultat :

$$t_{\tilde{\mathfrak{g}}}(P)|_{\mathfrak{g}^{2n-1}} = t_{\mathfrak{g}}(P|_{\mathfrak{g}^n}).$$

□

II.5.c Super-version du théorème de Dynkin

Dans cette partie, nous supposons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(p,q)$. Nous savons d'après la proposition II.4.17 que $a_k \in \bigwedge(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et $s_k \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. Nous nous trouvons donc avec des données similaires au cas classique et nous présentons la généralisation d'un théorème de Dynkin du cas classique ([Dyn59], [Kos81]) :

Théorème II.5.22. *Soit $n \geqslant 1$. Alors :*

$$t(s_n) = (-1)^{n-1} n\, a_{2n-1}. \tag{II.55}$$

Démonstration. Notons M_{ij} les formes coefficients sur $\mathfrak{gl}(p,q)$ (de degré m_{ij}), $1 \leqslant i,j \leqslant p+q$. Par définition de la super-trace, nous avons :

$$\mathrm{str}(X) = \sum_{i=1}^{p} M_{ii}(X) - \sum_{i=p+1}^{p+q} M_{ii}(X) = \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i M_{ii}(X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ avec $\varepsilon_i := 1$ si $i \in [\![1,p]\!]$ et $\varepsilon_i := -1$ si $i \in [\![p+1,p+q]\!]$. Notons que si $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$, alors :

$$\begin{aligned}
M_{ii}(\mu_n)(X_1,\ldots,X_n) &= M_{ii}(X_1\ldots X_n) \\
&= \sum_{1\leqslant r_1,\ldots,r_{n-1}\leqslant p+q} M_{ir_1}(X_1)M_{r_1r_2}(X_2)\ldots M_{r_{n-1}i}(X_n) \\
&= \sum_R (-1)^{\Delta(m_{iR},m_{iR})}(M_{ir_1}\otimes M_{r_1r_2}\otimes\ldots\otimes M_{r_{n-1}i})(X_1\otimes X_2\otimes\ldots\otimes X_n) \\
&= \sum_R (-1)^{\Delta(m_{iR},m_{iR})}(M_{ir_1}\underset{s}{\otimes} M_{r_1r_2}\underset{s}{\otimes}\ldots\underset{s}{\otimes} M_{r_{n-1}i})(X_1,X_2,\ldots,X_n)
\end{aligned}$$

avec $m_{iR} := \begin{pmatrix} m_{ir_1} \\ m_{r_1r_2} \\ \vdots \\ m_{r_{n-1}i} \end{pmatrix}$ et R un multi-indice $(r_1, \ldots, r_{n-1})$ parcourant $[\![1, p+q]\!]^{n-1}$. Rappelons que le produit super-symétrique de n formes linéaires $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sur $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ est donné par :

$$\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n = \mathrm{S}(\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \varphi_2 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} \varphi_n).$$

Ainsi, puisque $s_n = \mathrm{str}(S_n) = \mathrm{str}(\mathrm{S}(\mu_n)) = \mathrm{S}(\mathrm{str}(\mu_n))$, nous obtenons :

$$s_n = \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i \sum_R (-1)^{\Delta(m_{iR}, m_{iR})} M_{ir_1} \cdot M_{r_1r_2} \cdot \ldots \cdot M_{r_{n-1}i},$$

égalité valable dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$.

D'après le lemme II.5.11, nous avons :

$$\begin{aligned} t(\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n) &= \sum_{\ell=1}^{n} s(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge s(\varphi_{\ell-1}) \wedge t(\varphi_\ell) \wedge s(\varphi_{\ell+1}) \wedge \ldots \wedge s(\varphi_n) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_{\ell-1} \wedge \varphi_\ell \wedge d\varphi_{\ell+1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_n. \end{aligned}$$

Donc :

$$t(s_n) = \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i \sum_R (-1)^{\Delta(m_{iR}, m_{iR})} \sum_{\ell=1}^{n} dM_{ir_1} \wedge \ldots \wedge dM_{r_{\ell-2}r_{\ell-1}} \wedge M_{r_{\ell-1}r_\ell} \wedge dM_{r_\ell r_{\ell+1}} \wedge \ldots \wedge dM_{r_{n-1}i},$$

avec $r_n = i$ (quand $\ell = n$).

Soit $\mathscr{X} = (X_1, \ldots, X_{2n-1}) \in \mathfrak{g}^{2n-1}$. Rappelons que si $\deg_{\mathbb{Z}_2}(\varphi_i) = \phi_i$, alors $\deg_{\mathbb{Z}_2}(d\varphi_i) = \phi_i$. Il vient :

$$\begin{aligned} & (d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_{\ell-1} \wedge \varphi_\ell \wedge d\varphi_{\ell+1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_n)(X_1, \ldots, X_{2n-1}) \\ = \; & \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(d\varphi_1 \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} d\varphi_{\ell-1} \underset{s}{\otimes} \varphi_\ell \underset{s}{\otimes} d\varphi_{\ell+1} \underset{s}{\otimes} \ldots \underset{s}{\otimes} d\varphi_n)(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(2n-1)}) \\ = \; & \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{(x_{\sigma(1)}+x_{\sigma(2)})(\phi_2+\ldots+\phi_n)} \ldots (-1)^{(x_{\sigma(2\ell-3)}+x_{\sigma(2\ell-2)})(\phi_\ell+\ldots+\phi_n)} \\ & (-1)^{x_{\sigma(2\ell-1)}(\phi_{\ell+1}+\ldots+\phi_n)}(-1)^{(x_{\sigma(2\ell)}+x_{\sigma(2\ell+1)})(\phi_{\ell+2}+\ldots+\phi_n)} \ldots (-1)^{(x_{\sigma(2n-4)}+x_{\sigma(2n-3)})\phi_n} \\ & d\varphi_1(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \ldots d\varphi_{\ell-1}(X_{\sigma(2\ell-3)}, X_{\sigma(2\ell-2)}) \varphi_\ell(X_{\sigma(2\ell-1)}) d\varphi_{\ell+1}(X_{\sigma(2\ell)}, X_{\sigma(2\ell+1)}) \\ & \ldots d\varphi_n(X_{\sigma(2n-2)}, X_{\sigma(2n-1)}) \\ = \; & \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\phi_1(\phi_2+\ldots+\phi_n)} \ldots (-1)^{\phi_{\ell-1}(\phi_\ell+\ldots+\phi_n)}(-1)^{\phi_\ell(\phi_{\ell+1}+\ldots+\phi_n)} \\ & (-1)^{\phi_{\ell+1}(\phi_{\ell+2}+\ldots+\phi_n)} \ldots (-1)^{\phi_{n-1}\phi_n}(-1)^{n-1}\varphi_1([X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}]) \ldots \varphi_{\ell-1}([X_{\sigma(2\ell-3)}, X_{\sigma(2\ell-2)}]) \\ & \varphi_\ell(X_{\sigma(2\ell-1)})\varphi_{\ell+1}([X_{\sigma(2\ell)}, X_{\sigma(2\ell+1)}]) \ldots \varphi_n([X_{\sigma(2n-2)}, X_{\sigma(2n-1)}]) \\ = \; & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma, \mathscr{X})(-1)^{\Delta(\phi,\phi)}\varphi_1([X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}]) \ldots \varphi_{\ell-1}([X_{\sigma(2\ell-3)}, X_{\sigma(2\ell-2)}]) \\ & \varphi_\ell(X_{\sigma(2\ell-1)})\varphi_{\ell+1}([X_{\sigma(2\ell)}, X_{\sigma(2\ell+1)}]) \ldots \varphi_n([X_{\sigma(2n-2)}, X_{\sigma(2n-1)}]) \end{aligned}$$

En remplaçant avec les formes coordonnées, il vient :

$$
\begin{aligned}
& t(s_n)(X_1,\ldots,X_{2n-1}) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i \sum_R (-1)^{\Delta(m_{iR},m_{iR})} \sum_{\ell=1}^{n} (dM_{ir_1}\wedge\ldots\wedge M_{r_{\ell-1}r_\ell}\wedge\ldots\wedge dM_{r_{n-1}i})(X_1,\ldots,X_{2n-1}) \\
= \quad & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X}) \sum_R (-1)^{\Delta(m_{iR},m_{iR})}(-1)^{\Delta(m_{iR},m_{iR})} M_{ir_1}([X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}])\ldots \\
& M_{r_{\ell-2}r_{\ell-1}}([X_{\sigma(2\ell-3)},X_{\sigma(2\ell-2)}]) M_{r_{\ell-1}r_\ell}(X_{\sigma(2\ell-1)}) M_{r_\ell r_{\ell+1}}([X_{\sigma(2\ell)},X_{\sigma(2\ell+1)}])\ldots \\
& M_{r_{n-1}i}([X_{\sigma(2n-2)},X_{\sigma(2n-1)}]) \\
= \quad & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n-1}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma,\mathscr{X}) M_{ii}\Big([X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)}]\ldots[X_{\sigma(2\ell-3)},X_{\sigma(2\ell-2)}]X_{\sigma(2\ell-1)}\times \\
& [X_{\sigma(2\ell)},X_{\sigma(2\ell+1)}]\ldots[X_{\sigma(2n-2)},X_{\sigma(2n-1)}]\Big) \\
\underset{II.4.14}{=} \quad & \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i \sum_{\ell=1}^{n} M_{ii}\Big(2^{n-1}[X_1,\ldots,X_{2n-1}]\Big) \\
= \quad & (-1)^{n-1} n \sum_{i=1}^{p+q} \varepsilon_i M_{ii}([X_1,\ldots,X_{2n-1}]) \\
= \quad & (-1)^{n-1} n\, a_{2n-1}(X_1,\ldots,X_{2n-1}).
\end{aligned}
$$

D'où le résultat : $t(s_n) = (-1)^{n-1} n\, a_{2n-1}$. $\square$

II.6 Théorème d'Amitsur-Levitzki sur la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1,2n)$, $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(1,2n)$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ un système de racines simples de la superalgèbre $\mathfrak{g}$ et $\mathscr{W}$ le groupe de Weyl. Rappelons que, d'après la proposition II.3.28, nous avons :

$$\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}} = \mathbb{C}[t_1,\dots,t_n]$$

où $t_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{2k}$ ($k \in [\![1,n]\!]$) et $t_{n+1} \in J_+^2$.

Nous allons démontrer une super-version du théorème d'Amitsur-Levitzki pour la superalgèbre $\mathfrak{g}$:

Théorème II.6.1. *Pour tous $X_1,\dots,X_{4n+2} \in \mathfrak{g}$, nous avons :*

$$A_{4n+2}(X_1,\dots,X_{4n+2}) = 0.$$

Cette identité est valable si $X_1,\dots,X_{4n+2} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ par le théorème classique d'Amitsur-Levitzki (théorème I.4.6 page 39). D'autre part, si $X_1 = \dots = X_{4n+2} = X \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, le résultat découle de la proposition II.3.17 page 103. Dans le cas général, le théorème II.6.1 va résulter de l'identité (II.55) et des lemmes II.4.19 et II.6.3 mais nous allons détailler la démonstration ci-après.

Proposition II.6.2. *Pour tout $k \geqslant 1$, l'isomorphisme de restriction $R\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$ envoie s_{2k} sur $2(2k)!t_k$. (Notons que nous considérons en réalité la restriction des polynômes invariants super-symétriques s_{2k} à la superalgèbre $\mathfrak{g}$.)*

Preuve. Rappelons que si l'on note $\{E_{i,j}, 1 \leqslant i,j \leqslant n_{\bar{0}}+n_{\bar{1}}\}$ la base canonique de l'algèbre $\mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{C})$, une base de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est constituée des matrices $H_i = E_{i,i} - E_{n+i,n+i}$ (de degré $\bar{0}$) pour $i \in [\![1,n]\!]$. Nous pouvons remarquer que $H_iH_j = 0$ si $i \neq j$. Donc le polynôme s_k est nul sur les k-uplets $(H_{i_1},\dots,H_{i_k})$ si $\mathrm{card}(\{i_1,\dots,i_k\}) > 1$. Calculons alors :

$$s_k(H_i,\dots,H_i) = k!\mathrm{tr}(H_i \dots H_i).$$

Le produit de k matrices H_i vaut $E_{i,i} + (-1)^k E_{n+i,n+i}$ donc $s_k(H_i,\dots,H_i) = k!(1+(-1)^k)$. Nous en déduisons l'égalité :

$$R(s_k) = k! \sum_{i=1}^{n} (1+(-1)^k)\alpha_i^k$$

i.e. $R(s_{2k+1}) = 0$ et $R(s_{2k}) = 2(2k)!t_k$. $\square$

Comme l'application $R\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^{\mathscr{W}}$ est un isomorphisme, nous en déduisons :

Corollaire II.6.3. *Nous avons $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[s_2,\dots,s_{2n}]$ et $s_{2n+2} \in I_+^2$ où les polynômes s_k s'entendent en restriction à $\mathfrak{g}$ (nous rappelons que I_+ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$).*

Nous pouvons désormais présenter la démonstration du théorème II.6.1.

Démonstration (théorème II.6.1). Puisque $s_{2n+2}|_{\mathfrak{g}^{2n+2}} \in I_+^2$, nous avons $t(s_{2n+2}) = 0$ sur la superalgèbre $\mathfrak{g}$ d'après le corollaire II.5.20. Alors, ayant confondu les transgressions de $\mathfrak{g}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$ grâce à la proposition II.5.21, nous déduisons du théorème II.5.22 le fait que $a_{4n+3} = 0$ sur la superalgèbre $\mathfrak{g}$. Mais d'après le lemme II.4.9, pour tous $X_1,\dots,X_{4n+3} \in \mathfrak{g}$, nous avons :

$$a_{4n+3}(X_1,\dots,X_{4n+3}) = (4n+3)B(A(X_1,\dots,X_{4n+2}),X_{4n+3}).$$

Or, d'après le lemme II.4.19, l'élément $A_{4n+2}(X_1,\dots,X_{4n+2})$ appartient à $\mathfrak{g}$ donc, d'après le théorème II.3.7 page 98, nous en concluons :

$$A_{4n+2}(X_1,\dots,X_{4n+2}) = 0$$

pour tous $X_1,\dots,X_{4n+2} \in \mathfrak{g}$. □

Le théorème d'Amitsur-Levitzki dans le cas classique donne en réalité le meilleur indice pour lequel le polynôme P_n s'annule car on peut facilement montrer que le polynôme P_{2n-1} n'est pas nul sur l'algèbre $\mathfrak{gl}(n)$. Nous n'avons malheureusement pas de meilleur indice pour notre énoncé. Mais nous pouvons donner les premiers résultats suivants :

Proposition II.6.4. *Le polynôme super-antisymétrique A_{4n} n'est pas identiquement nul sur* $\mathfrak{osp}(1,2n)$

Preuve. Supposons A_{4n} identiquement nul. En utilisant la réalisation de la superalgèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1,2n)$ dans l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n$ (cf. partie II.3.c), nous pouvons maintenant calculer l'action, via la représentation adjointe tordue, de l'élément $A_{4n}(X_1,\dots,X_{4n-1},X)$ de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^-$, où nous avons pris $X_1,\dots,X_{4n-1} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^-$ et $X \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^-$:

$$A_{4n}(X_1,\dots,X_{4n-1},X)(1) = 2P_{4n-1}(X_1,\dots,X_{4n-1})(X).$$

En effet, nous avons :

$$\mathrm{ad}'(X)(1) = 2X \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ad}'(X_i)(1) = [X_i,1]_{\mathscr{L}} = 0,\ \forall\, i \in [\![1,4n-1]\!],$$

et nous rappelons que la notation P_n désigne le polynôme antisymétrique classique. Par conséquent, puisque A_{4n} est identiquement nul, nous en déduisons que $P_{4n-1}(X_1,\dots,X_{4n-1})$ est nul en tant qu'opérateur sur les éléments de degré $\bar{1}$. Mais il est également nul sur les éléments de degré $\bar{0}$ (qui sont tous colinéaires à 1) et, par conséquent :

$$P_{4n-1}(X_1,\dots,X_{4n-1}) = 0$$

pour tout $X_1,\dots,X_{4n-1} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^-$. Donc sa trace est nulle. Mais sa trace est égale à l'image de l'invariant symétrique $\mathrm{tr}(X^{2n})$ par l'opérateur de transgression donc n'est pas nulle d'après le théorème de Hopf-Koszul-Samelson (voir par exemple [Kos97]). Nous aboutissons ainsi à une contradiction. En conséquence A_{4n} n'est pas identiquement nul. □

Proposition II.6.5. *Le polynômes super-antisymétrique A_{4n+1} n'est pas identiquement nul sur $\mathfrak{osp}(1,2n)$ pour les valeurs de n égales à 1, 2 ou 3.*

Preuve. Les calculs ont été réalisés avec le logiciel Maple à partir de la réalisation de la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ dans l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n$. Rappelons les notations : l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n$ est engendrée par le système $\{p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n\}$ et nous avons identifié la superalgèbre $\mathfrak{osp}(1,2n)$ à $\mathfrak{h} = V_{\bar{1}}^{-} \oplus [V_{\bar{1}}^{-},V_{\bar{1}}^{-}]$ agissant sur l'espace $V = V_{\bar{0}}^{-} \oplus V_{\bar{1}}^{-}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe tordue, avec $V_{\bar{1}}^{-} = \mathrm{Vect}(\{p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n\})$ et $V_{\bar{0}}^{-} = \mathbb{C}.1$.

Notons $y_i = [p_i,q_i] = p_iq_i + q_ip_i$ et $x_{j,j+1} = [p_j,q_{j+1}]$ des éléments particuliers de la superalgèbre $\mathbb{A}_n$ ($i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,n-1]\!]$).

• $n = 1$: Nous obtenons :

$$A_5(p_1,q_1,y_1,p_1,q_1)(p_1) = -2^6 p_1,$$

en considérant $A_5(p_1,q_1,y_1,p_1,q_1)$ comme un endomorphisme sur l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_1$, agissant grâce à la représentation adjointe tordue. Notons que ce calcul est réalisable «à la main», sans l'aide de la machine.

• $n = 2$: Nous obtenons :

$$A_9(p_1,q_1,y_1,p_1,q_1,x_{12},y_2,p_2,q_2)(p_2) = 2^{11} p_1.$$

• $n = 3$: Nous obtenons :

$$A_{13}(p_1,q_1,y_1,p_1,q_1,x_{12},y_2,p_2,q_2,x_{23},y_3,p_3,q_3)(p_3) = -2^{15}.3p_1.$$

Le dernier calcul a nécessité plusieurs heures sur les machines d'un centre de calcul, alors que les deux autres ont été immédiats. □

Nous conjecturons l'identité :

$$A_{4n+1}(p_1,q_1,y_1,p_1,q_1,x_{12},y_2,p_2,q_2,\ldots,x_{n,n-1},y_n,p_n,q_n)(p_n) = (-1)^n n! 2^{4n+2} p_1.$$

Mais en dehors des trois exemples donnés ci-dessus, nous n'avons pas réussi à réaliser le calcul dans le cas général.

Dans son article [Kos81], en se posant la question de chercher le meilleur indice pour les sous-algèbres de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, B. Kostant a démontré que le théorème d'Amitsur-Levitzki est vrai pour toute représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ et a même déterminé un meilleur indice pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$. Étant donné la proposition II.3.18 (qui fait tomber le contre-exemple concernant les éléments de degré impair nilpotents), nous espérons que l'identité reste valable pour chacune des représentations de dimension finie de $\mathfrak{osp}(1,2n)$.

Quant à la question de savoir si cette identité existe sur d'autres superalgèbres de Lie classiques, nos espoirs sont assez minces. En effet, la structure polynomiale des invariants est un des point-clés des démonstrations de B. Kostant ([Kos58], [Kos81]) et de la notre. Or, cela provient du fait que les supertraces des éléments de $\mathfrak{osp}(1,2n)$ sont en fait de simples traces. Mais dans le cas général, c'est différent, et nous risquons de ne pas pouvoir montrer que l'algèbre des invariants est finiment engendrée.

✠

Une démonstration du théorème d'Amitsur-Levitzki dans le cas classique

Nous présentons dans cette appendice une démonstration du théorème d'Amitsur-Levitzki dans le cas classique due à S. Rosset [Ros76]. Cette démonstration diffère de la démonstration originale [AL50, Jac75] et des démonstrations de B. Kostant [Kos58, Kos81]. Elle fait appel à des éléments antisymétriques extérieurs et utilise le théorème de Cayley-Hamilton sur un anneau commutatif et ne s'adapte pas au cas des superalgèbres de Lie.

Rappelons pour commencer l'énoncé du théorème :

Théorème (Amitsur-Levitzki). *Considérons, pour $k \geqslant 1$:*

$$P_k(M_1,\dots,M_k) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) M_{\sigma(1)}\dots M_{\sigma(k)}$$

défini pour $M_1\dots,M_k \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Alors P_{2n} est identiquement nul sur l'algèbre $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Pour mener à bien la démonstration, nous sommes amenés à introduire des éléments extérieurs à l'algèbre $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ qui anticommutent entre eux. L'intérêt de faire intervenir ces éléments est démontré dans le calcul précédant la formule (♣).

Soit donc V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et $\Lambda := \bigwedge(V)$ (la base de l'espace V, vue dans l'algèbre $\bigwedge(V)$, nous fournira les $2n$ éléments anticommutatifs). L'espace Λ est $\mathbb{Z}_2$-gradué par le sous-espace $\Lambda_{\bar{0}}$ de ses éléments de degré pair et le sous-espace $\Lambda_{\bar{1}}$ de ses éléments de degré impair.

Notons $A := \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ et $\widetilde{A} := \Lambda\otimes A$. L'espace $\widetilde{A}$ est l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients dans l'anneau Λ. L'espace $\widetilde{A}$ est muni d'un produit associatif :

$$(\omega_1\otimes M_1)(\omega_2\otimes M_2) := \omega_1\wedge\omega_2\otimes M_1M_2$$

pour tous tenseurs élémentaires $\omega_1\otimes M_1, \omega_2\otimes M_2 \in \widetilde{A}$.

Soit $S\colon \Lambda\to\Lambda$ définie par :

$$S(\omega) = (-1)^{p(p-1)/2}\omega$$

pour $\omega\in\Lambda^p$. L'application S est l'antipode :

$$S(\omega_1\wedge\omega_2) = S(\omega_2)\wedge S(\omega_1).$$

Soit $W := \mathbb{C}^n$ et $\widetilde{W} := \Lambda \otimes W$. L'espace $\widetilde{W}$ est, en fait, un Λ-module libre, et l'espace $\widetilde{A}$ agit sur le module $\widetilde{W}$ de la manière suivante :

$$(\omega \otimes M)(\omega' \otimes X) = \omega' \wedge S(\omega) \otimes M(X)$$

pour tous tenseurs élémentaires $\omega \otimes M \in \widetilde{A}$ et $\omega' \otimes X \in \widetilde{W}$. Avec cette définition, l'application $\omega \otimes M$ est Λ-linéaire, et l'espace $\widetilde{W}$ est un $\widetilde{A}$-module. La matrice de l'application $\omega \otimes M$ dans les bases canoniques est alors ωM.

Les espaces $\widetilde{W}$ et $\widetilde{A}$ sont $\mathbb{Z}_2$-gradués, respectivement par :

$$\widetilde{W}_{\bar{0}} := \Lambda_{\bar{0}} \otimes W \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{\bar{1}} := \Lambda_{\bar{1}} \otimes W,$$

et :

$$\widetilde{A}_{\bar{0}} := \Lambda_{\bar{0}} \otimes A \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{\bar{1}} := \Lambda_{\bar{1}} \otimes W.$$

Le sous-espace $\widetilde{A}_{\bar{0}}$ envoie le sous-espace $\widetilde{W}_{\xi}$ dans lui-même tandis que le sous espace $\widetilde{A}_{\bar{1}}$ l'envoie dans $\widetilde{W}_{\xi+1}$ (pour $\xi \in \mathbb{Z}_2$). Nous avons donc une structure de superalgèbre de Lie sur l'espace $\widetilde{A}$, définie, pour $\widetilde{M} = \omega \otimes M \in \widetilde{A}_m$ et $\widetilde{M}' = \omega' \otimes M' \in \widetilde{A}_{m'}$ par :

$$[\widetilde{M}, \widetilde{M}'] := \widetilde{M}\widetilde{M}' - (-1)^{mm'} \widetilde{M}'\widetilde{M}.$$

Détaillons l'expression du produit :

$$\begin{aligned}
[\widetilde{M}, \widetilde{M}'] &= \omega \wedge \omega' \otimes MM' - (-1)^{mm'} \omega' \wedge \omega \otimes M'M \\
&= \omega \wedge \omega' \otimes (MM' - M'M) \\
&= \omega \wedge \omega' \otimes [M, M']
\end{aligned}$$

car $\omega \in \Lambda_m$ et $\omega' \in \Lambda_{m'}$.

Lemme 1. *Soit $\widetilde{M} \in \widetilde{A}$. Alors $\widetilde{M} = 0$ si, et seulement si, $\widetilde{M}|_{\widetilde{W}_{\bar{0}}} = 0$.*

Preuve. Supposons que $\widetilde{M}|_{\widetilde{W}_{\bar{0}}} = 0$. Soit $\widetilde{X} \in \widetilde{W}_{\bar{1}}$. Il existe une décomposition en tenseur élémentaires $\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{p} \omega_i \otimes X_i$ avec $\omega_i \in \Lambda_{\bar{1}}$ et $X_i \in W \subset \widetilde{W}_{\bar{0}}$ (identifié avec $1 \otimes X_i \in \widetilde{W}_{\bar{0}}$) pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Alors :

$$\widetilde{M}(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^{p} \omega_i \wedge \underbrace{\widetilde{M}(X_i)}_{0} = 0.$$

□

Nous définissons une super-trace sur $\widetilde{A}$ par :

$$\operatorname{str}(\omega \otimes M) := \omega \operatorname{tr}(M).$$

Soit $\widetilde{M} = \omega \otimes M \in \widetilde{A}_m$ et $\widetilde{M}' = \omega' \otimes M' \in \widetilde{A}_{m'}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{str}((\omega \otimes M)(\omega' \otimes M')) &= \mathrm{str}(\omega \wedge \omega' \otimes MM') \\
&= \omega \wedge \omega' \,\mathrm{tr}(MM') \\
&= (-1)^{mm'} \omega' \wedge \omega \,\mathrm{tr}(M'M) \\
&= (-1)^{mm'} \mathrm{str}(\omega' \wedge \omega \otimes M'M) \\
&= (-1)^{mm'} \mathrm{str}((\omega' \otimes M')(\omega \otimes M)).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{str}(\widetilde{M}, \widetilde{M}') = (-1)^{mm} \mathrm{str}(\widetilde{M}'\widetilde{M})$$

et par conséquent :

$$\mathrm{str}([\widetilde{M}, \widetilde{M}']) = 0 \tag{$\spadesuit$}$$

pour tous $\widetilde{M}, \widetilde{M}' \in \widetilde{A}$.

Lemme 2. *Si* $\widetilde{M} \in \widetilde{A}_1^-$, *alors* $\mathrm{str}(\widetilde{M}^{2k}) = 0$ *pour tout* $k \geqslant 1$.

Preuve. En effet, puisque $\widetilde{M} \in \widetilde{A}_1^-$, nous avons $\widetilde{M}^2 = \dfrac{1}{2}[\widetilde{M}, \widetilde{M}]$ et, plus généralement :

$$\widetilde{M}^{2k} = \frac{1}{2}[\widetilde{M}, \widetilde{M}^{2k-1}].$$

Il suffit alors d'appliquer l'identité ($\spadesuit$). □

Notons $\{\omega_1 \dots, \omega_{2n}\}$ une base de l'espace vectoriel V. Nous avons donc :

$$\omega_i \wedge \omega_j = -\omega_j \wedge \omega_i$$

dans l'algèbre extérieure Λ, pour tous $i, j \in [\![1, 2n]\!]$ avec $i \neq j$.

Soit $M_1, \dots, M_{2n} \in A$ et notons :

$$\widetilde{M} := \omega_1 \otimes M_1 + \dots \omega_n \otimes M_n \in \widetilde{A}_1^-.$$

La matrice $N := \widetilde{M}^2 \in \widetilde{A}_0^-$ s'écrit :

$$N = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 2n} \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \otimes [M_{i_1}, M_{i_2}].$$

Plus généralement :

$$\begin{aligned}
N^n = \widetilde{M}^{2n} &= \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_{2n} \leqslant 2n} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{2n}} \otimes M_{i_1} \dots M_{i_{2n}} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(2n)} \otimes M_{\sigma(1)} \dots M_{\sigma(2n)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{2n} \otimes M_{\sigma(1)} \dots M_{\sigma(2n)}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widetilde{M}^{2n} = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{2n} \otimes P_{2n}(M_1, \ldots, M_{2n}). \qquad (\clubsuit)$$

Pour démontrer le théorème d'Amitsur-Levitzki, il suffit donc de prouver que $\widetilde{M}^{2n}$ est nulle. Or, $\widetilde{M}^{2n} = N^n$: il s'agit donc de montrer que $N^n = 0$. D'après le lemme 1, il suffit de montrer que la restriction N' de N à $\widetilde{W}_0^-$ est nulle. Mais $N \in \widetilde{A}_0^-$ et toutes ses puissances également : N et toutes ses puissances ont leur coefficients dans l'anneau commutatif Λ_0^-. Comme l'espace $\widetilde{W}_0^-$ est un Λ_0^--module, et $N' \colon \widetilde{W}_0^- \to \widetilde{W}_0^-$ est Λ_0^--linéaire, le théorème de Cayley-Hamilton s'applique ([Lan02]) et il suffit de montrer que le polynôme caractéristique $\Delta_{N'}(t) = \det(N' - tI_n)$ de N vaut $(-1)^n t^n$.

Dans le cas de matrices à coefficients dans $\mathbb{C}$, nous savons que le polynôme caractéristique d'une matrice $P \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ s'exprime comme un polynôme sans terme constant en les traces $\mathrm{tr}(P^k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Le lemme suivant nous permet de prolonger cette formule au cas présent des matrices à coefficients dans Λ.

Lemme 3. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\widetilde{E} = \Lambda_0^- \otimes E$. L'espace $\widetilde{E}$ est un Λ_0^--module libre de dimension finie (avec $\dim_{\mathbb{C}}(E) = \dim_{\Lambda_0^-}(\widetilde{E})$). Soit P une fonction polynomiale de $\widetilde{E}$ dans Λ_0^-. Si $P|_E = 0$, alors $P = 0$.*

Preuve. Nous allons raisonner par récurrence sur $n = \dim_{\Lambda_0^-}(\widetilde{E}) = \dim_{\mathbb{C}}(E)$. Notons $\{e_1, \ldots, e_q\}$ une base de Λ_0^- (comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

• Supposons $\dim_{\mathbb{C}}(E) = 1$. Alors nous pouvons supposer $E = \mathbb{C}$. Soit $P \colon \Lambda_0^- \to \Lambda_0^-$ polynomiale : $P = \sum_{i=1}^{p} \omega_i \widetilde{x}^{\,i}$ avec $\widetilde{x}, \omega_i \in \Lambda_0^-$. Par hypothèse, nous avons $P(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_i \lambda^i = 0, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Mais les vecteurs $\omega_i \in \Lambda_0^-$ se décomposent sur la base de Λ_0^- : $\omega_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_{i,j} e_j$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, avec $\mu_{i,j} \in \mathbb{C}$. Donc :

$$\sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_{i,j} \lambda^i \right) e_j = 0, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Par conséquent

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_{i,j} \lambda^i = 0, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$. Mais l'expression ci-dessus est un polynôme à coefficients complexes. Nous en déduisons que les nombres $\mu_{i,j}$ sont tous nuls donc les éléments ω_i de Λ_0^- sont tous nuls et $P = 0$.

• Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et supposons maintenant que la propriété soit vraie pour tout sous-module de dimension $n-1$ du Λ_0^--module $\widetilde{E} = \Lambda_0^- \otimes E$ de dimension n. Écrivons $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ les composantes d'un vecteur $\widetilde{x}$ de $\widetilde{W}$ sur la base canonique du module $\widetilde{E}$ (et du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E). Alors :

$$P(\widetilde{x}) = P(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n) = \sum_{i=1}^{p} P_i(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{n-1}) \widetilde{x}_n^{\,i}.$$

Pour $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ fixés, et en notant $\Lambda_i = P_i(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) \in \Lambda_0^-$, nous avons par hypothèse :

$$P(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i \lambda^i = 0,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Les éléments $\Lambda_i \in \Lambda_0^-$ admettent une décomposition sur la base de Λ_0^- : $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_{i,j} e_j$ avec $\mu_{i,j} \in \mathbb{C}$. Par conséquent :

$$\sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_{i,j} \lambda^i \right) e_j = 0,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$$

d'où, pour tout $j \in [\![1,q]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_{i,j} \lambda^i,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$$

et, comme précédemment : $\mu_{i,j} = 0$ pour tous $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$. Nous en concluons que $\Lambda_i = 0$ pour tous $i \in [\![1,p]\!]$. Par conséquent :

$$P_i(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) = 0,\ \forall\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

L'hypothèse de récurrence s'applique alors et conclut à la nullité des polynômes P_i sur Λ_0^- en entier. Donc $P = 0$. $\square$

En appliquant le lemme 3 avec $E = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, nous voyons que nous pouvons étendre la relation existant entre le polynôme caractéristique et les traces des puissances de la matrice dans le cas de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ au cas de $\widetilde{A}_0^- = \Lambda_0^- \otimes \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Pour conclure, il reste donc à montrer que les traces successives de la matrice $N = \widetilde{M}^2$ sont nulles. Mais, comme $N \in \widetilde{A}_0^-$, nous avons $\mathrm{tr}(N^k) = \mathrm{str}(N^k) = \mathrm{str}(\widetilde{M}^{2k}) = 0$ d'après le lemme 2. Par conséquent, le polynôme caractéristique de N est $(-1)^n t^n$ et le théorème de Cayley-Hamilton implique $N^n = 0$ i.e. $\widetilde{M}^{2n} = 0$, et, en conséquence :

$$P_{2n}(M_1,\dots,M_{2n}) = 0$$

pour tous $M_1,\dots,M_{2n} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Le théorème d'Amitsur-Levitzki est ainsi démontré. $\square$

✠

Bibliographie

[AL50] Shimshon A. Amitsur and Jacob Levitzki. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 :449–463, 1950.

[BC70] Frederick Brickell and R.S. Clark. Differentiable manifolds : an introduction. *Van Nostrand Reinhold Compagny London*, 1970.

[Bou48] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. VII. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre III : Algèbre multilinéaire*. Actualités Sci. Ind., no. 1044. Hermann et Cie., Paris, 1948.

[BP89] Hédi Benamor and Georges Pinczon. The graded Lie algebra structure of Lie superalgebra deformation theory. *Lett. Math. Phys.*, 18(4) :307–313, 1989.

[BP91] Hédi Benamor and Georges Pinczon. Extensions of representations of Lie superalgebras. *J. Math. Phys.*, 32(3) :621–629, 1991.

[Car51] Henri Cartan. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. In *Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950*, pages 57–71. Georges Thone, Liège, 1951.

[Che52] Claude Chevalley. The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2*, pages 21–24, Providence, R. I., 1952. Amer. Math. Soc.

[CM93] David H. Collingwood and William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[DFST97] Guiseppe Dito, Moshé Flato, Daniel Sternheimer, and Leon Takhtajan. Deformation quantization and Nambu mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 183(1) :1–22, 1997.

[Dyn59] Eugene B. Dynkin. Topological characteristics of homomorphisms of compact Lie groups. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 12 :301–342, 1959.

[DZ99] Jean-Paul Dufour and Nguyen Tien Zung. Linearization of Nambu structures. *Compositio Math.*, 117(1) :77–98, 1999.

[FF92] Moshé Flato and C. Fronsdal. *non publié*, 1992.

[Fil85] V. T. Filippov. n-Lie algebras. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 26(6) :126–140, 191, 1985.

[FL84] D. B. Fuch and D. A. Leĭtes. Cohomology of Lie superalgebras. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 37(12) :1595–1596, 1984.

[Gau96] Philippe Gautheron. Some remarks concerning Nambu mechanics. *Lett. Math. Phys.*, 37(1) :103–116, 1996.

[Gau98] Philippe Gautheron. Simple facts concerning Nambu algebras. *Comm. Math. Phys.*, 195(2) :417–434, 1998.

[GPU03] Pierre-Alexandre Gié, Georges Pinczon, and Rosane Ushirobira. Back to the Amitsur-Levitzki theorem : a super version for the Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(1,2n)$. *Lett. Math. Phys.*, 66 :141–155, 2003.

[Hic65] Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 3. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.

[Jac75] Nathan Jacobson. PI-*algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. An introduction, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 441.

[Kač77] Victor G. Kač. Lie superalgebras. *Advances in Math.*, 26(1) :8–96, 1977.

[Kos50] Jean-Louis Koszul. Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. *Bull. Soc. Math. France*, 78 :65–127, 1950.

[Kos58] Bertram Kostant. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory. *J. Math. Mech.*, 7 :237–264, 1958.

[Kos63] Bertram Kostant. Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. Math.*, 85 :327–404, 1963.

[Kos81] Bertram Kostant. A Lie algebra generalization of the Amitsur-Levitski theorem. *Adv. in Math.*, 40(2) :155–175, 1981.

[Kos97] Bertram Kostant. Clifford algebra analogue of the Hopf-Koszul-Samelson theorem, the ρ-decomposition $C(\mathfrak{g}) = \mathrm{End} V_\rho \otimes C(P)$, and the $\mathfrak{g}$-module structure of $\bigwedge \mathfrak{g}$. *Adv. Math.*, 125(2) :275–350, 1997.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[Mus92] Ian M. Musson. A classification of primitive ideals in the enveloping algebra of a classical simple Lie superalgebra. *Adv. Math.*, 91(2) :252–268, 1992.

[Nam73] Yoichiro Nambu. Generalized Hamiltonian dynamics. *Phys. Rev. D (3)*, 7 :2405–2412, 1973.

[NR66] Albert Nijenhuis and R. W. Richardson, Jr. Cohomology and deformations in graded Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 :1–29, 1966.

[Ros76] Shmuel Rosset. A new proof of the Amitsur-Levitski identity. *Israel J. Math.*, 23(2) :187–188, 1976.

[Row80] Louis H. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*, volume 84 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980.

[Sch79] Manfred Scheunert. *The theory of Lie superalgebras*, volume 716 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979. An introduction.

[Ser99] Alexander Sergeev. The invariant polynomials on simple Lie superalgebras. *Represent. Theory*, 3 :250–280 (electronic), 1999.

[Tak94] Leon Takhtajan. On foundation of the generalized Nambu mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 160(2) :295–315, 1994.

[Vai99] Izu Vaisman. A survey on Nambu-Poisson brackets. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 68(2) :213–241, 1999.

Index

Résumé

Dans cette étude, nous cherchons à établir des identités polynomiales dans le cadre de la combinatoire non-commutative. Dans un premier temps, nous présentons de nouvelles structures de Nambu-Lie, en classifiant totalement les $(n-1)$-structures sur l'espace $\mathbb{R}^n$, et en donnant une méthode permettant de construire des crochets de tout ordre sur une algèbre de Lie. Nous proposons également une quantification de l'une de nos structures, grâce aux polynômes standards et aux algèbres de Clifford d'indice pair. Dans un second moment, en généralisant la notion de polynôme standard au cas des algèbres graduées, nous cherchons à démontrer une version du théorème d'Amitsur-Levitzki sur les superalgèbres de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$ en suivant une démonstration de Kostant dans le cas classique. Nous sommes amenés à démontrer des super-versions des propriétés et résultats nécessaires à la démonstration dans le cas classique, notamment en définissant un super-opérateur de transgression de Cartan-Chevalley.

Mot-clés : Crochet de Nambu-Lie, algèbre de Lie, quantification, polynôme standard, algèbre de Clifford, théorème d'Amitsur-Levitzki, superalgèbres de Lie $\mathfrak{osp}(1,2n)$, transgression.

Abstract

In this thesis, we establish new polynomial identities in a non commutative combinatorial framework. In the first part, we present new Nambu-Lie structures by classifying all $(n-1)$-structures in $\mathbb{R}^n$ and we give a method for defining all-order brackets in Lie algebras. We are able to quantify one of our structures, thanks to standard polynomials and even Clifford algebras. In the second part of our work, we generalize the notion of standard polynomials to graded algebras, and we prove an Amitsur-Levitzki type theorem for the Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(1,2n)$ inspired by Kostant's cohomological interpretation of the classical theorem. We give super versions of properties and results needed in Kostant's proof, notably we define a super transgression operator generalizing Cartan-Chevalley's classical one.

Key-words : Nambu-Lie brackets, Lie algebra, quantification, standard polynomial, Clifford algebra, Amitsur-Levitzki theorem, Lie superalgebras $\mathfrak{osp}(1,2n)$, transgression.