

- Plan
- Présentation du problème
- Effet dual
- Quantification
- Mesure de la perte d'information
- Perturbation d'un problème stochastique
- Discrétisation d'un problème en information statique
- Conditions de Kuhn et Tucker
- Un problème de barrage

Contributions à la discrétisation des contraintes de mesurabilité pour les problèmes d'optimisation stochastique

Kengy Barty

École Nationale des Ponts et Chaussées

25 Juin 2004



- Présentation du problème
- Effet dual
- Quantification
- Mesure de la perte d'information
- Perturbation d'un problème stochastique
- Discrétisation d'un problème en information statique
- Conditions de Kuhn et Tucker
- Un problème de barrage

Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



Plan

- 1 Présentation du problème
- 2 Effet dual
- 3 Quantification
- 4 Mesure de la perte d'information
- 5 Perturbation d'un problème stochastique
- 6 Discrétisation d'un problème en information statique
- 7 Conditions de Kuhn et Tucker
- 8 Un problème de barrage



$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,u} \mathbb{E} \left(\overbrace{K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t)}^{J(u(\xi), \xi)} \right) \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle} \end{array} \right.$$

u_t est \mathcal{B}_t -mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$ -mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.



$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,u} \mathbb{E} \left(\overbrace{K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t)}^{J(u(\xi), \xi)} \right) \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle} \end{array} \right.$$

u_t est \mathcal{B}_t -mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$ -mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.



$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,u} \mathbb{E} \left(\overbrace{K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t)}^{J(u(\xi), \xi)} \right) \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle} \end{array} \right.$$

u_t est \mathcal{B}_t -mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$ -mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.



$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,u} \mathbb{E} \left(\overbrace{K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t)}^{J(u(\xi), \xi)} \right) \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle} \end{array} \right.$$

u_t est \mathcal{B}_t -mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$ -mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.



Formalisme minimal et questions

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{array} \right.$$

1. Comment discrétiser la contrainte informationnelle ?
2. Comment approcher le calcul de critère ?
3. Comportement asymptotique du problème discret



Formalisme minimal et questions

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{array} \right.$$

1. Comment discrétiser la contrainte informationnelle ?
2. Comment approcher le calcul de critère ?
3. Comportement asymptotique du problème discret



Formalisme minimal et questions

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{array} \right.$$

1. Comment discrétiser la contrainte informationnelle ?
2. Comment approcher le calcul de critère ?
3. Comportement asymptotique du problème discret



Formalisme minimal et questions

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{array} \right.$$

1. Comment discrétiser la contrainte informationnelle ?
2. Comment approcher le calcul de critère ?
3. Comportement asymptotique du problème discret



Les motivations ...

... sont les suivantes

- Discrétiser les contraintes informationnelles (σ -algèbre) ;
- Déterminer des approches numériques de type Variationnel pour résoudre des problèmes d'optimisation stochastique ;
- Résoudre numériquement des problèmes de grande taille.



Les motivations ...

... sont les suivantes

- Discrétiser les contraintes informationnelles (σ -algèbre) ;
- Déterminer des approches numériques de type Variationnel pour résoudre des problèmes d'optimisation stochastique ;
- Résoudre numériquement des problèmes de grande taille.



- Les problèmes en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u, \xi) \\ u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- Les problèmes avec structure d'information statique :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{cases} \quad \begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

- Les problèmes avec structure d'information dynamique :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}(u)\text{-mesurable} \end{cases} \quad \begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h(u, \cdot))\text{-mesurable} \end{cases}$$

- Les problèmes en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u, \xi) \\ u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- Les problèmes avec structure d'information statique :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

- Les problèmes avec structure d'information dynamique :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}(u)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h(u, \cdot))\text{-mesurable} \end{cases}$$



- Les problèmes en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u, \xi) \\ u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- Les problèmes avec structure d'information statique :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{cases} \quad \begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

- Les problèmes avec structure d'information dynamique :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}(u)\text{-mesurable} \end{cases} \quad \begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h(u, \cdot))\text{-mesurable} \end{cases}$$



Double effet de la commande

- Les commandes ont le double rôle d'optimiser un critère et de révéler de l'information
- Le cas L.Q, les valeurs prises par le processus x dépendent de u mais les σ -algèbres $\sigma(x_t)$ sont indépendantes de u (Wonham 1968 et Quadrat Viot).

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + C\xi_t$$





$$\sigma(u_1) = \sigma(u_2) \not\Rightarrow \mathcal{B}(u_1) = \mathcal{B}(u_2)$$



$$\sigma(u_1) = \sigma(u_2) \text{ et } \sigma(u_1) \subset \mathcal{B}(u_1) \not\Rightarrow \sigma(u_2) \subset \mathcal{B}(u_2)$$



$$\sigma(u_1) \subset \sigma(u_2) \text{ et } \sigma(u_2) \subset \mathcal{B}(u_2) \not\Rightarrow \sigma(u_1) \subset \mathcal{B}(u_1)$$





$$\sigma(u_1) = \sigma(u_2) \not\Rightarrow \mathcal{B}(u_1) = \mathcal{B}(u_2)$$



$$\sigma(u_1) = \sigma(u_2) \text{ et } \sigma(u_1) \subset \mathcal{B}(u_1) \not\Rightarrow \sigma(u_2) \subset \mathcal{B}(u_2)$$



$$\sigma(u_1) \subset \sigma(u_2) \text{ et } \sigma(u_2) \subset \mathcal{B}(u_2) \not\Rightarrow \sigma(u_1) \subset \mathcal{B}(u_1)$$





$$\sigma(u_1) = \sigma(u_2) \not\Rightarrow \mathcal{B}(u_1) = \mathcal{B}(u_2)$$



$$\sigma(u_1) = \sigma(u_2) \text{ et } \sigma(u_1) \subset \mathcal{B}(u_1) \not\Rightarrow \sigma(u_2) \subset \mathcal{B}(u_2)$$



$$\sigma(u_1) \subset \sigma(u_2) \text{ et } \sigma(u_2) \subset \mathcal{B}(u_2) \not\Rightarrow \sigma(u_1) \subset \mathcal{B}(u_1)$$



Ensemble des commandes admissibles

$$\mathbb{F}^{\text{ad}}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t \preceq h_t(u(\cdot), \cdot) \right\} ;$$

Hypothèses

- $h_t(u, \xi) = h_t(u_0, \dots, u_t, \xi)$ Causalité
- $\sigma(h_t) \subset \sigma(h_{t+1})$ Mémoire parfaite
- $\forall u, \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$ Absence d'effet dual en boucle ouverte



Ensemble des commandes admissibles

$$\mathbb{F}^{\text{ad}}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t \preceq h_t(u(\cdot), \cdot) \right\} ;$$

Hypothèses

- $h_t(u, \xi) = h_t(u_0, \dots, u_t, \xi)$ **Causalité**
- $\sigma(h_t) \subset \sigma(h_{t+1})$ **Mémoire parfaite**
- $\forall u, \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$ **Absence d'effet dual en boucle ouverte**



Ensemble des commandes admissibles

$$\mathbb{F}^{\text{ad}}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t \preceq h_t(u(\cdot), \cdot) \right\} ;$$

Hypothèses

- $h_t(u, \xi) = h_t(u_0, \dots, u_t, \xi)$ **Causalité**
- $\sigma(h_t) \subset \sigma(h_{t+1})$ **Mémoire parfaite**
- $\forall u, \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$ **Absence d'effet dual en boucle ouverte**



Ensemble des commandes admissibles

$$\mathbb{F}^{\text{ad}}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t \preceq h_t(u(\cdot), \cdot) \right\} ;$$

Hypothèses

- $h_t(u, \xi) = h_t(u_0, \dots, u_t, \xi)$ **Causalité**
- $\sigma(h_t) \subset \sigma(h_{t+1})$ **Mémoire parfaite**
- $\forall u, \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$ **Absence d'effet dual en boucle ouverte**



Théorème S.O.W.G

Soit $\{h_t\}_{t=0, \dots, T-1}$ une famille causale de fonctions d'observation à mémoire parfaite, ne possédant pas d'effet dual en boucle ouverte alors :

$$\mathbb{F}^{\text{nde}} = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t(\cdot) \preceq \mu_t(\cdot) \right\}.$$

\mathbb{F}^{nde} est le plus gros sous-ensemble de \mathbb{F}^{ad} tel que

$$\forall u \in \mathbb{F}^{\text{nde}} \Rightarrow \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$$



Théorème S.O.W.G

Soit $\{h_t\}_{t=0, \dots, T-1}$ une famille **causale** de fonctions d'observation à mémoire parfaite, ne possédant pas d'effet dual en boucle ouverte alors :

$$\mathbb{F}^{\text{nde}} = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t(\cdot) \preceq \mu_t(\cdot) \right\}.$$

\mathbb{F}^{nde} est le plus gros sous-ensemble de \mathbb{F}^{ad} tel que

$$\forall u \in \mathbb{F}^{\text{nde}} \Rightarrow \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$$



Théorème S.O.W.G

Soit $\{h_t\}_{t=0, \dots, T-1}$ une famille **causale** de fonctions d'observation à **mémoire parfaite**, ne possédant pas d'effet dual en boucle ouverte alors :

$$\mathbb{F}^{\text{nde}} = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t(\cdot) \preceq \mu_t(\cdot) \right\}.$$

\mathbb{F}^{nde} est le plus gros sous-ensemble de \mathbb{F}^{ad} tel que

$$\forall u \in \mathbb{F}^{\text{nde}} \Rightarrow \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$$



Théorème S.O.W.G

Soit $\{h_t\}_{t=0, \dots, T-1}$ une famille **causale** de fonctions d'observation à **mémoire parfaite**, ne possédant **pas d'effet dual en boucle ouverte** alors :

$$\mathbb{F}^{\text{nde}} = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t(\cdot) \preceq \mu_t(\cdot) \right\}.$$

\mathbb{F}^{nde} est le plus gros sous-ensemble de \mathbb{F}^{ad} tel que

$$\forall u \in \mathbb{F}^{\text{nde}} \Rightarrow \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$$



Théorème S.O.W.G

Soit $\{h_t\}_{t=0, \dots, T-1}$ une famille **causale** de fonctions d'observation à **mémoire parfaite**, ne possédant **pas d'effet dual en boucle ouverte** alors :

$$\mathbb{F}^{\text{nde}} = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathcal{U}^T \mid \forall t = 0, \dots, T-1 \quad u_t(\cdot) \preceq \mu_t(\cdot) \right\}.$$

\mathbb{F}^{nde} est le plus gros sous-ensemble de \mathbb{F}^{ad} tel que

$$\forall u \in \mathbb{F}^{\text{nde}} \Rightarrow \sigma(h_t(u, \cdot)) = \sigma(\mu_t)$$



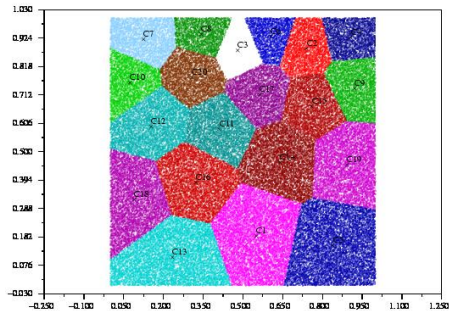
Quantification

Q quantifie un espace E si
 $Q : E \mapsto E$ et
 $\text{card}(\text{im}Q) < \infty$.

Classification de Voronoï

$$E = \{v_1, \dots, v_N\}$$

$$\min_{C_i} \min_{x_i} \sum_{i=1}^p \sum_{k \in C_i} \pi_k \|x_i - v_k\|_{\mathbb{R}^2}^2$$



Deux approches

Soit $h : \Xi \mapsto \mathcal{Y}$:

Quantification des bruits

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h \circ Q)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$Q : \Xi \rightarrow \Xi$$

Quantification de l'observation

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(Q \circ h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$$

u est $\sigma(h \circ Q)$ mesurable $\not\Rightarrow$ u est $\sigma(h)$ -mesurable



Deux approches

Soit $h : \Xi \mapsto \mathcal{Y}$:

Quantification des bruits

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h \circ Q)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$Q : \Xi \rightarrow \Xi$$

Quantification de l'observation

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(Q \circ h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$$

u est $\sigma(h \circ Q)$ mesurable $\not\Rightarrow$ u est $\sigma(h)$ -mesurable



Deux approches

Soit $h : \Xi \mapsto \mathcal{Y}$:

Quantification des bruits

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h \circ Q)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$Q : \Xi \rightarrow \Xi$$

Quantification de l'observation

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(Q \circ h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

$$Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$$

u est $\sigma(h \circ Q)$ mesurable $\not\Rightarrow$ u est $\sigma(h)$ -mesurable



Topologies sur $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{F}\}$

Convergence uniforme Boylan 1971

$$\sup_{|f| \leq 1} \mathbb{E} |\mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_n) - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})| \rightarrow 0$$

Convergence forte Neveu 1970

$$\forall f \in L^1, \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B}_n) \rightarrow \mathbb{E}(f \mid \mathcal{B})$$

Densité des tribus partition
(Cotter 1986)



Les métriques

Métrique de convergence uniforme KB 2002

$$\tau(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf \{ \mathbb{P}(A^c) \mid \mathcal{A} \cap A = \mathcal{B} \cap A, \quad A \in \mathcal{F} \}$$

Mesure du complémentaire du plus grand ensemble pour lequel les tribus trace coïncident.

Métrique de convergence forte Cotter 1986

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min(\mathbb{E}|\mathbb{E}(f_i \mid \mathcal{A}) - \mathbb{E}(f_i \mid \mathcal{B})|, 1)$$

Absence de valeur intrinsèque

Proposition KB 2002

Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B} alors $(\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

Proposition KB 2003

- Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergent fortement vers respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B} avec $\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i \subset \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ alors $(\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **converge fortement** vers $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
- Le résultat est faux si l'on remplace \vee par \cap .



Proposition KB 2002

Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B} alors $(\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

Proposition KB 2003

- Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergent fortement vers respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B} avec $\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i \subset \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ alors $(\mathcal{A}_i \vee \mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ **converge fortement** vers $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
- Le résultat est faux si l'on remplace \vee par \cap .



Résultat technique

Théorème KB 2002

- Soient $h_i : \Xi \mapsto \mathcal{Y}, \forall i \in \mathbb{N}$. Si $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h et si $\sigma(h_i) \subset \sigma(h)$ alors :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma(h_i) = \sigma(h)$$

- Soient $Q_i : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}$. Si $(Q_i \circ h)_{i \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h alors :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma(Q_i \circ h) = \sigma(h).$$

Résultat technique

Théorème KB 2002

- Soient $h_i : \Xi \mapsto \mathcal{Y}, \forall i \in \mathbb{N}$. Si $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h et si $\sigma(h_i) \subset \sigma(h)$ alors :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma(h_i) = \sigma(h)$$

- Soient $Q_i : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}$. Si $(Q_i \circ h)_{i \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h alors :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma(Q_i \circ h) = \sigma(h).$$



Nouvelle problématique

- Discrétiser l'information ;
- Mesurer la perte d'information due à la discrétisation ;
- Stabilité de la discrétisation.



Nouvelle problématique

- Discrétiser l'information ;
- Mesurer la perte d'information due à la discrétisation ;
- Stabilité de la discrétisation.



Nouvelle problématique

- Discrétiser l'information ;
- Mesurer la perte d'information due à la discrétisation ;
- Stabilité de la discrétisation.



Optimisation et quantification

Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de σ -algèbres qui converge fortement vers \mathcal{B} .

$$V(\mathcal{B}_i) = \min \{ \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \mid u \in L_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{B}_i), u(\xi) \in K \}$$

Question Sous quelles hypothèses suffisantes a-t-on
$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(\mathcal{B}_i) = V(\mathcal{B}) ?$$

Théorème KB 2003

Si $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}, \forall i \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \mathbb{E}J(u(\xi), \xi)$ est continue et K est convexe
alors $\lim_{i \rightarrow \infty} V(\mathcal{B}_i) = V(\mathcal{B})$.



Optimisation et quantification

Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de σ -algèbres qui converge fortement vers \mathcal{B} .

$$V(\mathcal{B}_i) = \min \{ \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \mid u \in L_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{B}_i), u(\xi) \in K \}$$

Question Sous quelles hypothèses suffisantes a-t-on
 $\lim_{i \rightarrow \infty} V(\mathcal{B}_i) = V(\mathcal{B})$?

Théorème KB 2003

Si $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}, \forall i \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \mathbb{E}J(u(\xi), \xi)$ est continue et K est convexe
alors $\lim_{i \rightarrow \infty} V(\mathcal{B}_i) = V(\mathcal{B})$.



Optimisation et quantification

Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de σ -algèbres qui converge fortement vers \mathcal{B} .

$$V(\mathcal{B}_i) = \min \{ \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \mid u \in L_{\mathcal{U}}^p(\mathcal{B}_i), u(\xi) \in K \}$$

Question Sous quelles hypothèses suffisantes a-t-on
$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(\mathcal{B}_i) = V(\mathcal{B}) ?$$

Théorème KB 2003

Si $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}, \forall i \in \mathbb{N}$, $u \mapsto \mathbb{E}J(u(\xi), \xi)$ est continue et K est convexe
alors $\lim_{i \rightarrow \infty} V(\mathcal{B}_i) = V(\mathcal{B})$.



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Traduction discrète de la contrainte de mesurabilité
Problème discret en boucle ouverte
Monte-Carlo (Wets, Dupačová, Shapiro...)
Convergence Globale

Discrétisation

Problème type

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h) \text{ mesurable} \end{cases}$$

Première étape Deuxième étape Troisième étape

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(Q_k \circ h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

Discrétisation de la contrainte de mesurabilité



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Traduction discrète de la contrainte de mesurabilité
Problème discret en boucle ouverte
Monte-Carlo (Wets, Dupačová, Shapiro...)
Convergence Globale

Discrétisation

Problème type

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h) \text{ mesurable} \end{cases}$$

Première étape **Deuxième étape** Troisième étape

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}\tilde{J}(u, \xi) \\ u \in \mathbb{R}^K \end{cases}$$

Formulation d'un problème en boucle ouverte



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Traduction discrète de la contrainte de mesurabilité
Problème discret en boucle ouverte
Monte-Carlo (Wets, Dupačová, Shapiro...)
Convergence Globale

Discrétisation

Problème type

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h) \text{ mesurable} \end{cases}$$

Première étape Deuxième étape **Troisième étape**

$$\begin{cases} \min \int \tilde{J}(u, \xi) \mathbb{P}^n(d\xi, \zeta) \\ u \in \mathbb{R}^K \end{cases}$$

Technique de Monte-Carlo



Discrétisation de la contrainte “ u est $\sigma(h)$ -mesurable”

Soient $Q_k : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ tel que $S_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{card}(\text{im}Q_k) < \infty$,
 $\text{im}Q_k = \{y_1, \dots, y_{S_k}\}$ et $j = 1, \dots, S_k$:

$$C_j^k \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \Xi \mid Q_k(h(\xi)) = y_j\} ;$$

alors $(C_j^k)_{j=1, \dots, S_k}$ est une partition de Ξ .

Contrainte discrète

$$u \text{ est } \sigma(Q_k \circ h) \text{ mesurable} \Leftrightarrow u(\xi) = \sum_{j=1}^{S_k} u_j \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi).$$



Problème discret "équivalent" en boucle ouverte

Problème discret après quantification

Pour $u = (u_1, \dots, u_{S_k}) \in K^{S_k}$ soit :

$$V(Q_k) = \min_{u \in K^{S_k}} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi) \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi) \right].$$



Intégration par rapport à une loi discrète

Problème discret après Monte-Carlo

$$V_n(Q_k) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{u_j} \int \sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi) \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi) \mathbb{P}^n(d\xi, \zeta).$$



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Traduction discrète de la contrainte de mesurabilité
Problème discret en boucle ouverte
Monte-Carlo (Wets, Dupačová, Shapiro...)
Convergence Globale

Étude de la convergence

$$|V - V_n(Q_k)| \leq \underbrace{|V - V(Q_k)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V(Q_k) - V_n(Q_k)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Traduction discrète de la contrainte de mesurabilité
Problème discret en boucle ouverte
Monte-Carlo (Wets, Dupačová, Shapiro...)
Convergence Globale

Étude de la convergence

$$|V - V_n(Q_k)| \leq \underbrace{|V - V(Q_k)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V(Q_k) - V_n(Q_k)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Traduction discrète de la contrainte de mesurabilité
Problème discret en boucle ouverte
Monte-Carlo (Wets, Dupačová, Shapiro...)
Convergence Globale

Étude de la convergence

$$|V - V_n(Q_k)| \leq \underbrace{|V - V(Q_k)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V(Q_k) - V_n(Q_k)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$



Hypothèses Wets et Dupačová 1988

- $S \stackrel{\text{def}}{=} \text{dom}J(\cdot, \xi)$ est indépendant de ξ ;
- $\forall u, J(u, \cdot)$ est continue ;
- $J(\cdot, \xi)$ est lipschitzienne sur S ;
- $(Z, \mathcal{Z}, \lambda)$ espace d'échantillons ;
- $(\mathcal{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de sous tribus de \mathcal{Z} ;
- $\forall \zeta \in Z, \mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ mesure discrète sur des tirages indépendants de ξ ;
- $\mathbb{P}^n(A, \cdot)$ est \mathcal{Z}^n mesurable.



Glivenko Cantelli

$$(\Xi^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{\Xi}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\mathbb{N}}), \quad \zeta = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i}$$

$(\mathbb{P}^n(\cdot, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la loi de ξ pour presque tout ζ .

$$V_n(Q_k) = \min_{u_j} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi_\ell) \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi_\ell)$$



Glivenko Cantelli

$$(\Xi^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{\Xi}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\mathbb{N}}), \quad \zeta = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i}$$

$(\mathbb{P}^n(\cdot, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la loi de ξ pour presque tout ζ .

$$V_n(Q_k) = \min_{u_j} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi_{\ell}) \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi_{\ell})$$



Erreur de Monte-Carlo

Proposition KB 2003

Sous Wets et Dupačová et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers \mathbb{P}

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$



Erreur de Monte-Carlo

Proposition KB 2003

Sous Wets et Dupačová et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers \mathbb{P}

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$



Erreur de Monte-Carlo

Proposition KB 2003

Sous Wets et Dupačová et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers \mathbb{P}

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$



Erreur de Monte-Carlo

Proposition KB 2003

Sous Wets et Dupačová et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers \mathbb{P}

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$



Erreur de quantification

Proposition KB 2003

On suppose que

- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- Le critère est continu par rapport aux variables de décisions

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(Q_k) = V$$



Erreur de quantification

Proposition KB 2003

On suppose que

- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- Le critère est continu par rapport aux variables de décisions

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(Q_k) = V$$



Erreur de quantification

Proposition KB 2003

On suppose que

- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- Le critère est continu par rapport aux variables de décisions

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(Q_k) = V$$



Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Théorème KB 2003

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers \mathbb{P} ;
-



Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Théorème KB 2003

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un **nombre fini de valeurs** ;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers \mathbb{P} ;
- Hypothèses de Wets Dupačová sont satisfaites.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$



Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Théorème KB 2003

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un **nombre fini de valeurs** ;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi** vers \mathbb{P} ;
- Hypothèses de Wets Dupačová sont satisfaites.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$



Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Théorème KB 2003

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un **nombre fini de valeurs** ;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi** vers \mathbb{P} ;
- Hypothèses de Wets Dupačová sont satisfaites.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$



Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Théorème KB 2003

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un **nombre fini de valeurs** ;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi** vers \mathbb{P} ;
- Hypothèses de Wets Dupačová sont satisfaites.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$



Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Théorème KB 2003

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers \mathbb{P} ;
- Hypothèses de Wets Dupačová sont satisfaites.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$



Condition d'optimalité sous des contraintes de projection

- H e.v.n ;
- $A : H \mapsto H$ opérateur de projection, fermé ;
- J localement lipschitzienne et A linéaire continu ;

$$\begin{cases} \min J(x) \\ Ax = x \end{cases}$$

Résultat KKT

\bar{x} solution alors il existe $\bar{p} \in H^*$ tel que :

$$A^*p = 0 \text{ et } \bar{p} \in \partial J(\bar{x})$$



En pratique

$$\begin{cases} \min J(x) \\ x \in L_{\mathbb{R}^n}^p(\Xi), p \neq \infty \\ \mathbb{E}(x | \mathcal{B}) = x \end{cases}$$

Résultat, Rockafellar 1976, Hiriart Urruty 1982

Si J est localement lipschitzienne, il existe $\bar{p} \in \partial J(\bar{x})$ et $\mathbb{E}(\bar{p} | \mathcal{B}) = 0$



Le cas de l'espérance conditionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,u} \mathbb{E} \left(\overbrace{K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t)}^{J(u(\xi), \xi)} \right) \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t \in L^P(\mathcal{G}_t) \end{array} \right.$$



Hypothèses

- $L(\cdot, \cdot, \xi_{t+1}, t)$ est $C^1(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m)$;
- $F(\cdot, \cdot, \xi_{t+1}, t)$ est $C^1(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m)$;
- K est $C^1(\mathbb{R}^\ell)$;
- il existe $c > 0$ tel que :

$$\|J'(u, \xi)\| \leq c(1 + \|u\|^{p-1})$$



Hypothèses

- $L(\cdot, \cdot, \xi_{t+1}, t)$ est $C^1(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m)$;
- $F(\cdot, \cdot, \xi_{t+1}, t)$ est $C^1(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m)$;
- K est $C^1(\mathbb{R}^\ell)$;
- il existe $c > 0$ tel que :

$$\|J'(u, \xi)\| \leq c(1 + \|u\|^{p-1})$$



Deux formes

Forme anticipative

$$\mathbb{E} \left((L'_u)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) + (F'_u)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) \lambda_{t+1} \mid \mathcal{G}_t \right) = 0,$$

$$\lambda_T = (K'_x)^\top(x_T)$$

$$\lambda_t = (L'_x)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) + (F'_x)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) \lambda_{t+1}$$



Forme adaptée

$$\mathbb{E} \left((L'_u)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) + (F'_u)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) \Lambda_{t+1} \mid \mathcal{G}_t \right) = 0,$$

$$\Lambda_T = (K'_x)^\top(x_T)$$

si $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$

$$\Lambda_t = \mathbb{E} \left((L'_x)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) + (F'_x)^\top(x_t, \bar{u}_t, \xi_{t+1}, t) \Lambda_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$$



Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.

Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.

Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.



Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.

Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.

Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.



Données

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \bar{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x})$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min(x(t) - v(t) + w(t+1), \bar{x})$, $t = 0, \dots, T-1$
dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.



Coût

Fonction coût

$p(t) \geq d(t + 1)$ l'excès de production est revendu

$p(t) < d(t + 1)$ déficit compensé par d'autres moyens

En résumé : $L(d(t + 1) - p(t), t)$ avec $L(\cdot, t)$ croissante



Production électrique

$$p = f(x, v) = v \times (x + \bar{x} - 2\underline{x})/2(\bar{x} - \underline{x}) .$$

$$f(\bar{x}, v) = v \text{ et } f(\underline{x}, v) = \frac{v}{2}$$

Coût intégral

$$L(y, t) = \tau(t + 1)(e^y - 1) .$$

Coût final

$$C(x) = 12(x - \bar{x})^2 .$$



Production électrique

$$p = f(x, v) = v \times (x + \bar{x} - 2\underline{x}) / 2(\bar{x} - \underline{x}) .$$

$$f(\bar{x}, v) = v \text{ et } f(\underline{x}, v) = \frac{v}{2}$$

Coût intégral

$$L(y, t) = \tau(t + 1)(e^y - 1) .$$

Coût final

$$C(x) = 12(x - \bar{x})^2 .$$



Production électrique

$$p = f(x, v) = v \times (x + \bar{x} - 2\underline{x}) / 2(\bar{x} - \underline{x}) .$$

$$f(\bar{x}, v) = v \text{ et } f(\underline{x}, v) = \frac{v}{2}$$

Coût intégral

$$L(y, t) = \tau(t + 1)(e^y - 1) .$$

Coût final

$$C(x) = 12(x - \bar{x})^2 .$$



Minimisation du coût de production

$$\min \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{T-1} L(d(t+1) - f(x(t), v(t)), t) + C(x(T)) \right]$$

sous les contraintes

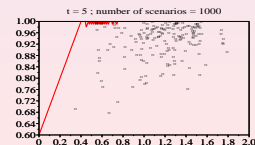
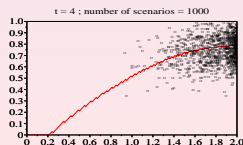
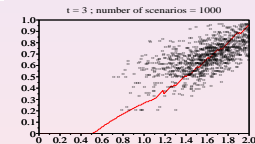
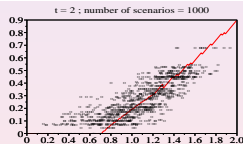
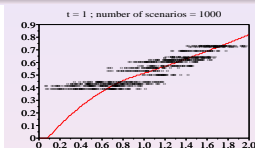
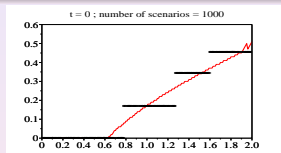
Les bruits $(d(t), w(t))_{t=0, \dots, T}$ sont indépendants.



Plan
Présentation du problème
Effet dual
Quantification
Mesure de la perte d'information
Perturbation d'un problème stochastique
Discrétisation d'un problème en information statique
Conditions de Kuhn et Tucker
Un problème de barrage

Conclusion

Résultats numériques



- Plan
- Présentation du problème
- Effet dual
- Quantification
- Mesure de la perte d'information
- Perturbation d'un problème stochastique
- Discrétisation d'un problème en information statique
- Conditions de Kuhn et Tucker
- Un problème de barrage**

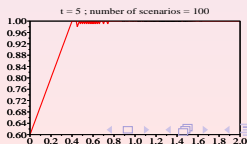
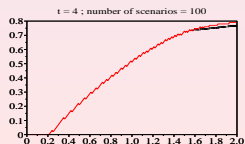
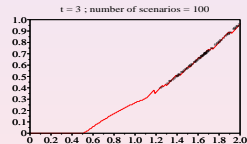
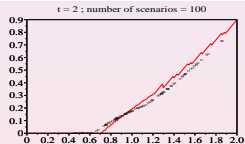
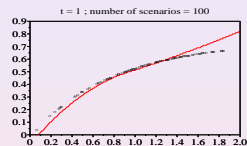
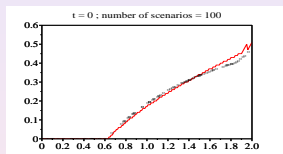
Conclusion

Exploiter l'Hamiltonien

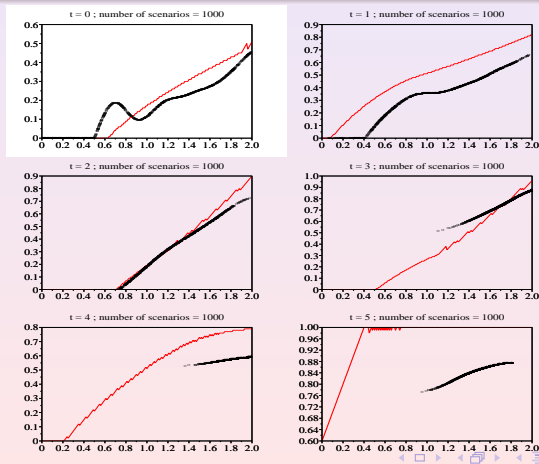
$$H(x_t, u_t) = \mathbb{E} \left(L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) + \lambda_{t+1}^\top F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \mid \xi_0, \dots, \xi_t \right),$$



Heuristique visant à s'affranchir de la quantification



Heuristique visant à s'affranchir de la quantification



Ouvertures

Recherches futures

- Exploiter les conditions d'optimalité pour développer des solutions numériques ;
- Synthèse de feedback.



Ouvertures

Recherches futures

- Exploiter les conditions d'optimalité pour développer des solutions numériques ;
- Synthèse de feedback.

