



**HAL**  
open science

# Identification par les techniques des sous-espaces - application au diagnostic

Komi Midzodzi Pekpe

► **To cite this version:**

Komi Midzodzi Pekpe. Identification par les techniques des sous-espaces - application au diagnostic. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2004. Français. NNT: . tel-00008649v2

**HAL Id: tel-00008649**

**<https://theses.hal.science/tel-00008649v2>**

Submitted on 15 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Identification par les techniques des sous-espaces – application au diagnostic

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 décembre 2004

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine  
(spécialité automatique et traitement du signal)

par

Komi Midzodzi PEKPE

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	J. C. TRIGEASSOU	Professeur à l'Université de Poitiers
	A. ZOLGHADRI	Professeur à l'Université Bordeaux 1
<i>Examineurs :</i>	S. GENTIL	Professeur à l'INPG, Grenoble
	D. PEARSON	Professeur à l'Université de Saint Etienne
	G. MOUROT	Ingénieur de Recherche à l'INPL, Nancy
	J. RAGOT	Professeur à l'INPL, Nancy
<i>Invité</i>	K. GASSO	Maître de Conférence à l'INSA de Rouen



# *Remerciements*

*Ce travail est réalisé au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) à l'Institut national polytechnique de Lorraine (INPL).*

*Je remercie Messieurs les professeurs Ali ZOLGHADRI et Jean Claude TRIGEASSOU d'avoir accepté de rapporter cette thèse.*

*Je remercie Madame le Professeur Sylviane GENTIL et Monsieur le Professeur David PEARSON d'avoir bien voulu examiner ce travail.*

*Je remercie Monsieur Komi GASSO pour ses conseils et ses critiques constructives.*

*Je tiens à remercier Monsieur le Professeur José RAGOT pour son soutien et ses conseils qui ont permis la réalisation de ce travail. Je remercie Monsieur Gilles MOUROT pour sa disponibilité et ses précieux conseils.*

*Les " derniers mais non des moindres ", je remercie tous les membres de l'équipe de diagnostic et robustesse pour la bonne ambiance de travail.*



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
--------------------------	-----------

## Notations

1	Systèmes LTI . . . . .	xiii
2	Systèmes non linéaires . . . . .	xv
3	Détection et isolation de défauts . . . . .	xvi

## Introduction générale

**1**

1	Introduction . . . . .	1
2	Terminologie . . . . .	2
3	Surveillance des systèmes . . . . .	2
4	Caractérisation de fonctionnement . . . . .	4
4.1	Identification du modèle de bon fonctionnement . . . . .	4
4.2	Génération de résidus . . . . .	6
5	La détection . . . . .	6
6	Le diagnostic . . . . .	7
6.1	Isolation de défaut . . . . .	8
6.2	Identification de défaut . . . . .	9
7	Structuration du document . . . . .	9
7.1	Chapitre 1 . . . . .	10
7.2	Chapitre 2 . . . . .	10
7.3	Chapitre 3 . . . . .	11
7.4	Chapitre 4 . . . . .	11

## Chapitre 1

### Identification des systèmes linéaires

1.1	Introduction . . . . .	15
1.2	Les outils mathématiques . . . . .	16
1.3	Méthodes classiques des sous-espaces . . . . .	17
1.3.1	Formulation du problème . . . . .	17

1.3.2	Matrices du système . . . . .	18
1.3.3	Identification du système . . . . .	20
1.3.3.1	Estimation de la matrice d'observabilité et/ou la matrice des séquences d'état . . . . .	20
1.3.3.2	Détermination d'une réalisation du système . . . . .	22
1.3.3.2.1	Détermination d'une réalisation à partir de $\hat{X}_i$ . . . . .	22
1.3.3.2.2	Détermination d'une réalisation à partir des matrices $H_i$ et $\Gamma_i$ . . . . .	22
1.3.3.3	Objectif des méthodes classiques des sous-espaces . . . . .	23
1.4	Méthodes basées sur l'estimation des paramètres de Markov . . . . .	24
1.4.1	Identification du système . . . . .	24
1.4.1.1	Matrices du système . . . . .	25
1.4.1.2	Equations matricielles d'entrée et sortie . . . . .	25
1.4.1.3	Projection de matrice . . . . .	26
1.4.1.4	Relations linéaires par rapport aux paramètres de Markov . . . . .	26
1.4.1.5	Estimation des $2i$ premiers paramètres de Markov . . . . .	27
1.5	Nouvelles méthodes d'identification utilisant un modèle FIR . . . . .	30
1.5.1	Position du problème . . . . .	30
1.5.2	Première méthode . . . . .	30
1.5.2.1	Relation matricielle d'entrée-sortie . . . . .	30
1.5.2.2	Détermination des paramètres de Markov . . . . .	31
1.5.3	Réduction du nombre d'opérations par une décomposition QR . . . . .	34
1.5.4	Exemple d'application . . . . .	35
1.5.5	Deuxième méthode . . . . .	41
1.5.5.1	Identification du système . . . . .	41
1.5.6	Troisième méthode proposée . . . . .	43
1.5.6.1	Relation matricielle d'entrée et sortie . . . . .	44
1.5.6.2	Estimation de la matrice de Toeplitz inférieure et de la matrice de Hankel . . . . .	45
1.5.7	Exemples d'application . . . . .	48
1.6	Conclusion . . . . .	54

<p><b>Chapitre 2</b></p> <p><b>Identification des systèmes à commutations</b></p>
---

2.1	Introduction . . . . .	57
2.2	Des HH aux MIQP et à la reconnaissance de formes . . . . .	58
2.2.1	Les HH . . . . .	59

---

2.2.1.1	Algorithme de détermination des hyperplans (HFA "Hinge-Finding Algorithm") . . . . .	60
2.2.1.2	Détermination de plus de deux hyperplans . . . . .	61
2.2.2	Utilisation d'un coefficient de relaxation . . . . .	61
2.2.3	Utilisation des MIQP . . . . .	62
2.2.4	Utilisation de la reconnaissance de formes . . . . .	63
2.2.5	Difficultés des méthodes proposées dans la littérature . . . . .	63
2.3	Description des systèmes à commutations . . . . .	64
2.3.1	Modèle à état unique . . . . .	64
2.3.2	Modèle à états locaux découplés . . . . .	65
2.4	Identification des SAC avec les techniques de détection . . . . .	66
2.4.1	Position du problème . . . . .	66
2.4.2	Matrices du système . . . . .	67
2.4.3	Estimation des instants de commutations par les projections . . . . .	68
2.4.3.1	Relation matricielle d'entrée-sortie . . . . .	68
2.4.3.2	Génération de résidus . . . . .	69
2.4.3.3	Sensibilité du vecteur résidu aux ruptures de modèle . . . . .	69
2.4.3.4	Estimation des instants de commutations . . . . .	70
2.4.4	Utilisation d'une technique d'identification récursive des sous-espaces . . . . .	70
2.4.4.1	Méthode d'identification récursive des sous-espaces . . . . .	71
2.4.4.1.1	Relation matricielle d'entrée sortie . . . . .	71
2.4.4.1.2	Estimation récursive des paramètres . . . . .	72
2.4.4.1.3	Génération récursive des résidus . . . . .	73
2.4.4.1.4	Détection de changement de modèle . . . . .	74
2.4.5	Estimation des poids des modèles locaux . . . . .	75
2.4.6	Identification des paramètres de Markov des modèles locaux . . . . .	76
2.4.6.1	Equation matricielle d'entrée et sortie locale . . . . .	76
2.4.6.2	Calcul de la sortie locale . . . . .	76
2.4.6.3	Estimation des paramètres de Markov d'un modèle local . . . . .	76
2.4.7	Détermination des poids des données non classifiées . . . . .	77
2.4.7.1	Matrices de variance des paramètres de Markov . . . . .	77
2.4.7.2	Détermination des modèles "identiques" . . . . .	78
2.4.7.3	Fusion de modèles . . . . .	78
2.4.8	Détermination des réalisations des modèles locaux . . . . .	79
2.5	Exemple d'application . . . . .	80
2.5.1	Premier calcul des poids . . . . .	82
2.5.1.1	Fusion des modèles locaux . . . . .	82



2.6	Identification des SAC par l'utilisation d'hyperplans . . . . .	83
2.6.1	Position du problème . . . . .	83
2.6.2	Reformulation du problème . . . . .	83
2.6.3	Classification des données . . . . .	85
2.6.4	Identification des modèles locaux . . . . .	88
2.6.4.1	Calcul des poids . . . . .	88
2.6.4.2	Identification des modèles locaux . . . . .	88
2.7	Exemple d'application . . . . .	89
2.7.1	Calcul des matrices $\mathbf{n}_k$ définissant les hyperplans . . . . .	89
2.7.2	Classification des données . . . . .	94
2.8	Conclusion . . . . .	94

<b>Chapitre 3</b> <b>Identification des systèmes non-linéaires</b>
---

3.1	Introduction . . . . .	99
3.2	Description de l'approche . . . . .	100
3.3	Représentations sous forme d'état . . . . .	101
3.3.1	Multi-modèle à état unique . . . . .	101
3.3.2	Multi-modèle à modèles locaux découplés . . . . .	102
3.4	Position du problème . . . . .	102
3.5	Notations . . . . .	103
3.6	Identification du système . . . . .	104
3.6.1	Estimation des paramètres de Markov . . . . .	104
3.6.2	Estimation de l'ordre et des réalisations des modèles locaux . . . . .	107
3.7	Exemple . . . . .	108
3.8	Conclusion . . . . .	113

<b>Chapitre 4</b> <b>Diagnostic des systèmes dynamiques linéaires</b>
--

4.1	Introduction . . . . .	117
4.2	L'espace de parité . . . . .	118
4.2.1	Positionnement du problème . . . . .	118
4.2.2	Génération de résidus . . . . .	119
4.2.3	Sensibilité aux défauts de capteurs . . . . .	120
4.2.4	Choix de l'indice $i$ . . . . .	121
4.2.5	Exemple . . . . .	122
4.2.6	Robustesse . . . . .	125

---

4.2.7	Détection et isolation de défaut par le test de khi-deux . . . . .	127
4.3	L'Analyse en Composantes Principales . . . . .	128
4.3.1	Position du problème . . . . .	128
4.3.2	Génération de résidu . . . . .	128
4.3.3	Lien avec l'espace de parité [30] . . . . .	130
4.3.4	Influence de la non persistance des entrées . . . . .	130
4.3.5	Incertitude liée à la détermination de $\tilde{W}$ . . . . .	132
4.3.6	Détection de défaut . . . . .	132
4.4	Nouvelle méthode basée sur les projections géométriques . . . . .	133
4.4.1	Position du problème . . . . .	133
4.4.2	Matrices du système . . . . .	134
4.4.3	Détection de défauts de capteurs . . . . .	135
4.4.3.1	Annulation de l'influence des entrées . . . . .	135
4.4.3.2	Sensibilité aux fautes . . . . .	136
4.4.3.2.1	Condition de sensibilité . . . . .	136
4.4.3.2.2	Contrainte sur les dimensions des matrices . . . . .	139
4.4.3.3	Génération de résidus . . . . .	139
4.4.3.4	Détection de défaut . . . . .	140
4.4.4	Isolation de défauts de capteurs . . . . .	140
4.4.5	Exemple . . . . .	141
4.5	Conclusion . . . . .	148

<b>Conclusion générale</b>
----------------------------

<b>Annexe</b>
---------------

<b>Annexe A</b>
-----------------

<b>Annexe</b>
---------------

A.1	Algorithme ERA (Eigenvalue Realization Algorithm) [36] . . . . .	155
A.2	Annexe (équivalence des méthodes moindres carrés et des projections obliques) . . . . .	156

<b>Index</b>	<b>159</b>
--------------	------------

<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>
----------------------	------------



## Table des figures

1	les grandes étapes des méthodes de surveillance . . . . .	3
2	densité de probabilité d'apparition de défaut . . . . .	7
3	les différentes sortes de défauts qui peuvent affecter un système soumis à l'influence des bruits de système $b_s$ et de sorties $b_y$ . . . . .	8
1.1	les étapes de la méthode d'identification proposée par Chui et Maciejowski . . . . .	29
1.2	dispersion des pôles et zéros estimés par la méthode N4SID . . . . .	36
1.3	dispersion des pôles et zéros estimés par la méthode proposée par Chui et Maciejowski . . . . .	36
1.4	dispersion des pôles et zéros estimés par la première méthode . . . . .	37
1.5	écart type d'estimation des pôles de la méthode N4SID, la méthode de Chui et Maciejowski et la première des trois nouvelles méthodes d'identification des systèmes linéaires . . . . .	37
1.6	les réponses impulsionnelles discrètes obtenues par la méthode proposée par Chui et Maciejowski . . . . .	38
1.7	les réponses impulsionnelles discrètes obtenues par la méthode N4SID . . . . .	39
1.8	les réponses impulsionnelles discrètes obtenues par la première méthode . . . . .	40
1.9	les étapes communes des nouvelles méthodes des sous-espaces basées sur la stabilité de la matrice $A$ . . . . .	47
1.10	dispersion des pôles estimés par la première des trois nouvelles méthodes d'identification des systèmes linéaires . . . . .	49
1.11	dispersion des pôles estimés par la deuxième des trois nouvelles méthodes d'identification des systèmes linéaires . . . . .	49
1.12	dispersion des pôles estimés par la troisième des trois nouvelles méthodes d'identification des systèmes linéaires . . . . .	50
1.13	écart type d'estimation des pôles des trois nouvelles méthodes d'identification des systèmes linéaires . . . . .	50
1.14	les réponses impulsionnelles discrètes obtenues par la première méthode . . . . .	51
1.15	les réponses impulsionnelles discrètes obtenues par la deuxième méthode . . . . .	52
1.16	les réponses impulsionnelles discrètes obtenues par la troisième méthode . . . . .	53
2.1	représentation en dimension trois des hyperplans définis par l'équation : $y_k = \max(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k)$ . . . . .	59
2.2	représentation en dimension trois des hyperplans définies par l'équation : $y_k = \min(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k)$ . . . . .	60
2.3	illustration en dimension trois de la classification basée sur la reconnaissance de formes . . . . .	63
2.4	modélisation d'un SAC avec des modèles locaux découplés . . . . .	65
2.5	illustration du retard maximal à la détection . . . . .	75

2.6	estimation des instants de commutations . . . . .	81
2.7	dispersion des pôles estimés après la première estimation des poids . . . . .	81
2.8	dispersion des pôles estimés après la fusion . . . . .	82
2.9	exemple en dimension trois de deux hyperplans représentant deux modèles locaux et leur vecteurs normaux . . . . .	84
2.10	représentation en dimension trois de deux hyperplans représentant deux modèles locaux et leur vecteurs normaux . . . . .	85
2.11	illustration de la transitivité de la relation $\mathcal{R}$ . . . . .	86
2.12	représentation en dimension trois de la dispersion des vecteurs normaux estimés . . . . .	87
2.13	les entrées du système . . . . .	90
2.14	les sorties du système . . . . .	90
2.15	courbe représentant l'indice du modèle local actif à chaque instant . . . . .	91
2.16	courbe représentant la distance $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$ avec $f = 140, g = i + \rho, \dots, q$ . . . . .	91
2.17	courbe représentant la distance $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$ avec $f = 240, g = i + \rho, \dots, q$ . . . . .	92
2.18	courbe représentant la distance $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$ avec $f = 340, g = i + \rho, \dots, q$ . . . . .	92
2.19	classification avec $\epsilon = 0.1$ . . . . .	93
2.20	classification avec $\epsilon = 0.04$ . . . . .	93
3.1	exemple de fonctions de pondération . . . . .	100
3.2	les entrées du système . . . . .	109
3.3	les sorties du système . . . . .	109
3.4	Les fonctions d'activation . . . . .	110
3.5	valeurs singulières de la matrice $\mathbf{H}_{1,v}^0$ (modèle local 1), Eq. (3.32). . . . .	111
3.6	valeurs singulières de la matrice $\mathbf{H}_{2,v}^0$ (modèle local 2), Eq. (3.32). . . . .	111
3.7	valeurs singulières de la matrice $\mathbf{H}_{3,v}^0$ (modèle local 3), Eq. (3.32). . . . .	112
3.8	dispersion des pôles et zéros du modèle local 1 . . . . .	112
3.9	dispersion des pôles et zéros du modèle local 2 . . . . .	113
3.10	dispersion des pôles et zéros du modèle local 3 . . . . .	113
4.1	système surveillé . . . . .	119
4.2	les entrées du système . . . . .	123
4.3	les sorties du système . . . . .	123
4.4	les instants d'apparition des défauts sur les différentes sorties . . . . .	124
4.5	détection de défaut par l'espace de parité ( $i = 3$ ) à l'aide d'un test de khi-deux . . . . .	124
4.6	détection de défaut par l'espace de parité ( $i=9$ ) à l'aide d'un test de khi-deux . . . . .	125
4.7	détection de défaut par l'espace de parité ( $i=40$ ) à l'aide d'un test de khi-deux . . . . .	125
4.8	système surveillé . . . . .	134
4.9	illustration de la condition de sensibilité . . . . .	137
4.10	sorties du système . . . . .	142
4.11	entrées du système . . . . .	143
4.12	les instants d'apparition des défauts . . . . .	143
4.13	résultat obtenu par l'espace de parité avec le modèle exact du système simulé . . . . .	144
4.14	résultat obtenu par l'espace de parité basé sur un modèle incertain avec des incertitudes inférieures à 10% . . . . .	144
4.15	nouvelle méthode avec $i = 4$ et $L = 12$ . . . . .	144
4.16	nouvelle méthode avec $i = 4$ et $L = 16$ . . . . .	145
4.17	nouvelle méthode avec $i = 7$ et $L = 21$ . . . . .	145
4.18	nouvelle méthode avec $i = 17$ et $L = 28$ . . . . .	145

---

4.19	nouvelle méthode avec $i = 17$ et $L = 51$	146
4.20	nouvelle méthode avec $i = 17$ et $L = 102$	146
4.21	nouvelle méthode avec $i = 27$ et $L = 71$	146
4.22	nouvelle méthode avec $i = 27$ et $L = 135$	147
4.23	nouvelle méthode avec $i = 37$ et $L = 91$	147
4.24	nouvelle méthode avec $i = 37$ et $L = 185$	147
4.25	isolation de défaut par la nouvelle méthode avec $i = 17$ et $L = 102$	148



## 1 Systèmes LTI

$u_k \in \mathbb{R}^m$	≡ entrée du système
$x_k \in \mathbb{R}^n$	≡ état du système
$y_k \in \mathbb{R}^\ell$	≡ sortie du système
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m},$ $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}, D \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$	≡ matrices du système
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m},$ $F \in \mathbb{R}^{n \times m}, G \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$	≡ matrices du système ≡ matrices d'innovation
$e_k \in \mathbb{R}^\ell$	≡ innovation
$v_k \in \mathbb{R}^n$	≡ bruit d'état
$w_k \in \mathbb{R}^\ell$	≡ bruit de sortie
$U_{s/i} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$	≡ matrice de Hankel d'entrée ayant $i$ blocs lignes, commençant à l'instant $s$
$U_0, U_i, U_{2i} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$ $Y_{s/i} \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$	≡ matrice de Hankel d'entrée passée, future et avancée ≡ matrice de Hankel de sortie ayant $i$ blocs lignes, commençant à l'instant $s$
$Y_0, Y_i, Y_{2i} \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$ $X_0, X_i, X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times j}$ $V_0, V_i, V_{2i} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$	≡ matrice de Hankel de sortie passée, future et avancée ≡ matrice des séquences d'état passée, future et avancée ≡ matrice de Hankel des bruits de système passée, future et avancée
$V \in \mathbb{R}^{2mi \times j}$ $W_0, W_i, W_{2i} \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$ $W \in \mathbb{R}^{2\ell i \times j}$	≡ matrice de Hankel des bruits de système ≡ matrice de Hankel des bruits de sortie passée, futur et avancé ≡ matrice de Hankel des bruits de sortie



$E_0, E_i, E_{2i} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$	$\equiv$ matrice de Hankel d'innovation passée, future et avancée
$H_i \in \mathbb{R}^{\ell i \times mi}$	$\equiv$ matrice inférieure de Toeplitz du système
$H_i^v \in \mathbb{R}^{\ell i \times mi}$	$\equiv$ matrice inférieure de Toeplitz des bruits d'état
$\Delta_i \in \mathbb{R}^{n \times mi}$	$\equiv$ matrice de commandabilité rebours du système $\{A, B\}$
$\Delta_i^v \in \mathbb{R}^{n \times mi}$	$\equiv$ matrice de commandabilité rebours des bruits $\{A, I\}$
$\Gamma_i \in \mathbb{R}^{\ell i \times n}$	$\equiv$ matrice d'observabilité étendue
$\Pi_Z$	$\equiv$ matrice de projection sur l'espace engendré par les lignes de la matrice $Z$
$\Pi_{Z^\perp}$	$\equiv$ matrice de projection orthogonale à l'espace engendré par les lignes de la matrice $Z$
$Z^{(-)}$	$\equiv$ pseudo-inverse de Moore Penrose de la matrice $Z$
$\Phi_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} = \mathcal{A}\mathcal{B}^T$	$\equiv$ matrice de corrélation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
$T_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+\ell)i \times j}$	$\equiv$ matrice de Hankel passée
$Q_0 = \begin{pmatrix} T_0 \\ U_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2m+\ell)i \times j}$	$\equiv$ matrice de Hankel des mesures
$\Delta_k^c$	$\equiv$ matrice de commandabilité rebours $\{A, \bar{G}\}$
$\tilde{X}_i$	$\equiv$ matrice des séquences d'état de Kalman
$\Phi_U$	$\equiv$ matrice de Hankel inférieure et supérieure
$\Phi_L$	$\equiv$ matrice de Hankel inférieure et supérieure
$S = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_i \\ U_{2i} \\ Y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3m+\ell)i \times j}$	$\equiv$ matrice de Hankel des données
$R = \begin{pmatrix} Y_i \Pi_S \\ U_i \end{pmatrix}$	$\equiv$ matrice de Hankel des données
$\bar{U} \in \mathbb{R}^{ms \times j}$	$\equiv$ matrice des entrées définissant l'espace de la matrice des séquences d'état $X_0$
$I$	$\equiv$ matrice identité
$\text{int}(g)$	$\equiv$ désigne la partie entière du réel $g$

## 2 Systèmes non linéaires

$u_k \in \mathbb{R}^m$	$\equiv$ entrée du système
$x_{s,k} \in \mathbb{R}^n$	$\equiv$ état du système
$y_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$	$\equiv$ sortie du système
$A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_s \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$\equiv$ matrices du système
$C_s \in \mathbb{R}^{\ell \times n}, D_s \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$	
$v_{s,k} \in \mathbb{R}^n$	$\equiv$ bruit d'état
$w_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$	$\equiv$ bruit de sortie du modèle local $s$
$U_k \in \mathbb{R}^{mi \times j}$	$\equiv$ matrice de Hankel d'entrée,
$\underline{y}_k \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$	$\equiv$ matrice de sortie du système,
$\underline{y}_{s,k} \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$	$\equiv$ matrice de sortie du modèle local $s$
$X_{s,k} \in \mathbb{R}^{n \times j}$	$\equiv$ matrice des séquences du modèle local $s$
$\bar{V}_{s,k} \in \mathbb{R}^{ni \times f}$	$\equiv$ matrice de Hankel des bruits du modèle local $s$
$\underline{w}_{s,k} \in \mathbb{R}^{\ell \times f}$	$\equiv$ matrice des bruits de sortie du modèle local $s$
$P_{s,k} \in \mathbb{R}^{f \times f}$	$\equiv$ matrice de pondération du modèle local $s$
$\bar{u}_k \in \mathbb{R}^{mi}$	$\equiv$ vecteur des entrées
$\bar{v}_k \in \mathbb{R}^{ni}$	$\equiv$ vecteur des bruits d'état
$z_k = \begin{pmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell+mi}$	$\equiv$ vecteur des données
$\mathbf{n}_s \in \mathbb{R}^{\ell \times (mi+\ell)}$	$\equiv$ matrice définissant l'hyperplan correspondant au modèle local $s$
$H_{s,i}^v \in \mathbb{R}^{\ell \times n_s i}$	$\equiv$ matrice des paramètres des bruits
$\mathbf{H}_{\nu,s}^r \in \mathbb{R}^{\ell \nu \times m \nu}$	$\equiv$ matrice de Hankel des paramètres de Markov
$\Gamma_{s,i} \in \mathbb{R}^{\ell i \times n_s}$	$\equiv$ matrice d'observabilité du modèle local $s$
$C_{s,i} \in \mathbb{R}^{n_s \times mi}$	$\equiv$ matrice de commandabilité du modèle local $s$
$H_{s,i} \in \mathbb{R}^{\ell \times mi}$	$\equiv$ matrice des paramètres de Markov du modèle local $s$
$\Phi_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \mathcal{A}\mathcal{B}^T$	$\equiv$ matrice de corrélation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
$z_k = (z_{k-\rho+1} \ z_{k-\rho+2} \ \dots \ z_k) \in \mathbb{R}^{(mi+\ell) \times mi}$	$\equiv$ matrice de données
$\mathbf{Z} = \{z_k, k = \rho, \rho+1, \dots, q\}$	$\equiv$ ensemble contenant tous les vecteurs $z_k$
$\mathbf{N} = \{\mathbf{n}_k / \mathbf{n}_k \in \mathbb{R}^{\ell \times (mi+\ell)}, \mathbf{n}_k \perp z_k, z_k \in \mathbf{Z}^\alpha\}$	$\equiv$ ensemble contenant toutes les matrices $\mathbf{n}_k$
$\mathbf{N}_s$	$\equiv$ ensemble des vecteurs $\mathbf{n}_k$ appartenant à la classe $s$

### 3 Détection et isolation de défauts

- $\varphi_k \in \mathbb{R}^\ell$   $\equiv$  défaut de capteur
- $\bar{\varphi}_k \in \mathbb{R}^{\ell i}$   $\equiv$  vecteur obtenu par empilement des défauts
- $\bar{u}_k \in \mathbb{R}^{\ell i}$   $\equiv$  vecteur obtenu par empilement des entrées
- $\bar{y}_k \in \mathbb{R}^{\ell i}$   $\equiv$  vecteur obtenu par empilement des sorties
- $\bar{v}_k \in \mathbb{R}^{\ell i}$   $\equiv$  vecteur obtenu par empilement des bruits d'état
- $\bar{w}_k \in \mathbb{R}^{\ell i}$   $\equiv$  vecteur obtenu par empilement des bruits d'état
- $\Phi$   $\equiv$  matrice de Hankel des défauts  $\varphi_k$
- $\Delta M$   $\equiv$  incertitude de liée à la matrice  $M$
- $Z \in \mathbb{R}^{L \times 1}$   $\equiv$  matrice de sélection de la dernière colonne
- $S_h \in \mathbb{R}^{1 \times \ell}$   $\equiv$  matrice de sélection de la composante  $h$  du résidu

# Introduction générale

## 1 Introduction

Les systèmes de production peuvent être affectés par des défauts provenant de leurs composants externes ou de leurs composants internes (défaillance d'un moteur, défaillance ou dérive d'un capteur...). Une défaillance d'une partie du processus peut s'aggraver et paralyser ou endommager tout le système de production, ce qui peut entraîner des pertes en vies humaines et des dommages sur les plans écologique et économique. Il est alors indispensable de mettre en oeuvre des techniques fiables de surveillance de ces systèmes afin de détecter de façon précise l'apparition de signe de défaillance. L'opérateur humain intervient souvent dans la surveillance des systèmes de production ; cependant, du fait de la complexité sans cesse croissante de ces installations et des précisions requises dans ces systèmes, l'intervention de l'opérateur humain est susceptible d'engendrer des erreurs. Par exemple, dans les systèmes de grande dimension, on observe la présence de milliers de variables. De ce fait, on note un nombre important d'accidents (70% des accidents industriels selon les statistiques industrielles [68]) dû à l'opérateur humain qui ne peut analyser instantanément l'ensemble de ces variables. La majorité des dommages causés sont d'ordre mineur, mais coûtent des milliards d'euros chaque année [2] et [19].

Il est indispensable de trouver une solution à ce problème. Les techniques de l'automatique proposent des outils de surveillance des systèmes en temps réel, basés sur les mesures prélevées sur ces derniers. La littérature propose une multitude de méthodes pour aborder les problèmes de détection et d'isolation de défauts [68]. Ce sont les méthodes de détection et d'isolation de défauts à base de modèle qui retiendront notre attention. Pour détecter la présence d'un défaut, le comportement du système est comparé à celui du modèle mathématique et tout écart significatif dénote une modification de comportement éventuellement explicable par la présence d'un défaut. La différence entre le comportement du système et celui du modèle est exprimé sous forme d'un résidu. Afin d'isoler les défauts, le résidu est souvent structuré de manière à être sensible uniquement à un groupe de défauts. Pour obtenir le modèle mathématique utilisé dans ces méthodes de détection et d'isolation de défaut, les méthodes d'identification sont souvent utilisées afin de caractériser le modèle de bon fonctionnement du système et éventuellement son ou ses modèles de dysfonctionnement.

Ce chapitre commencera par une brève présentation des méthodes de surveillance à base de modèle. Puis il décrira les étapes de caractérisation de fonctionnement (permettant d'obtenir le modèle du système), de détection et d'isolation de défauts. Pour finir, il sera utile de présenter la structuration de cette thèse ainsi que les différents chapitres qu'elle comporte. Mais avant d'en arriver là, définissons la terminologie utilisée dans ce document - terminologie propre à l'automatique et en particulier au diagnostic.

## 2 Terminologie

La terminologie utilisée dans ce document est définie dans cette partie. Ces définitions ne constituent pas des références absolues dans le domaine du diagnostic. Le lecteur désireux de découvrir les détails et les limites de ces définitions pourra consulter les références [13], [3], [31], [81], [45], [1] et les sites Internet suivants :

<http://www.laas.fr/%7Ecombacau/SPSF/sursup.html>

<http://www-lag.ensieg.inpg.fr/ploix/glossaire/DiagnosticGlossaire.htm>

<http://w3.rt.e-technik.tu-darmstadt.de/publikationen/terminology.html>

**Système** : ensemble déterminé d'éléments discrets (composants, constituants) interconnectés ou en interaction [75].

**Modèle** : schéma, c'est-à-dire description mentale ou figurée (diagrammes, formules mathématiques, ...) représentant une classe de phénomènes et servant de support à l'investigation et/ou la communication. Ce terme sera utilisé pour désigner une description mathématique d'un système en vue d'expliquer son fonctionnement.

**Défaut** : n'importe quel état indésirable d'un composant ou d'un système. Un défaut n'implique pas nécessairement une défaillance [1].

**Faute** : action, volontaire ou non, dont le résultat est la prise en compte incorrecte (voire la non prise en compte) d'une directive, d'une contrainte exprimée par le cahier des charges.

**Défaillance** : perte partielle ou totale des fonctionnalités du système qui le rend incapable de délivrer le service pour lequel il a été conçu.

**Panne** : état d'un système incapable d'assurer le service spécifié à la suite d'une défaillance.

**Perturbation** : tout phénomène conçu comme normal influençant un processus, non ou mal représenté par un modèle de référence.

**Reconfiguration** : fonction consistant à changer la commande envoyée au système ou la disposition matérielle du système pour éviter (ou faire face à) une panne.

**Résidu** : signal conçu comme indicateur d'anomalies fonctionnelles ou comportementales.

## 3 Surveillance des systèmes

La surveillance d'un système consiste à déterminer l'apparition d'un ou plusieurs défauts dans ce système, à identifier l'élément en défaut, puis à définir les décisions à prendre pour corriger l'influence du défaut. La détection de défaut est l'élément qui déclenche les autres étapes de la surveillance notamment le diagnostic. Mais avant la détection de défaut, il est indispensable de caractériser le fonctionnement du système. Pour mieux comprendre le rôle que joue cette étape de caractérisation de fonctionnement, nous allons remonter à l'étymologie du mot diagnostic, puis nous allons décrire les différentes étapes de la procédure de surveillance.

La définition donnée par les instances nationales et internationales de normalisation [3] résume en quelques mots la signification du terme diagnostic en automatique :

" Le diagnostic est l'identification de la cause probable de la (ou des) défaillance(s) à l'aide d'un raisonnement logique fondé sur un ensemble d'informations provenant d'une inspection, d'un contrôle ou d'un test".

Cette définition met en évidence une étape d'observation qui consiste à recueillir les informations provenant du système, suivie d'une étape de détermination de la cause de cette défaillance

à partir d'un raisonnement logique fondé sur les informations obtenues. L'origine du mot diagnostic permet d'apporter quelques précisions : ce mot provient de deux mots grecs : "Dia", par, "Gnosis", connaissance. Dans la détermination de la cause de la défaillance intervient un raisonnement logique, mais aussi la connaissance que l'on a du système défaillant. Cette connaissance du système est obtenue par la modélisation ou l'identification, qui permet d'obtenir un modèle du système à partir des mesures recueillies sur le système sain (c-à-d sans défaut). Ce modèle permet de déterminer la cohérence des mesures recueillies sur le système et d'affirmer si le système fonctionne normalement ou non. Par extension on peut élaborer des modèles de mauvais fonctionnement du système : ces modèles caractérisent la plupart des pannes pouvant affecter ce dernier. Il existe d'autres techniques de diagnostic fondées sur d'autres types de connaissances qui ne sont pas basées sur la modélisation, telles les méthodes utilisant des paramètres statistiques du signal (moyenne, variance, ...). Toutefois, seules les méthodes de surveillance s'appuyant sur la modélisation retiendront notre attention.

La procédure de surveillance peut être subdivisée en sept étapes (les résultats d'une étape sont utilisés dans la suivante, figure (1)).

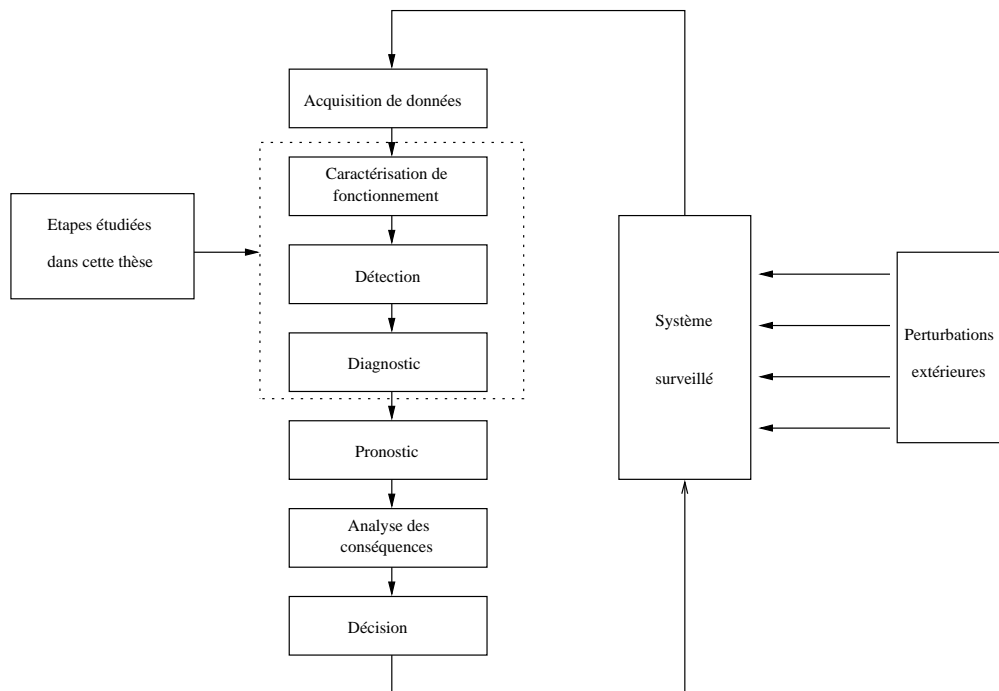


FIG. 1 – les grandes étapes des méthodes de surveillance

- la première étape est l'acquisition de données. Elle consiste à déterminer le nombre de capteurs et la période d'échantillonnage. La nature des signaux de commande peut également être déterminée dans cette étape de manière à exciter tous les modes du système.

- la deuxième étape est la caractérisation de fonctionnement. Elle consiste à extraire les informations nécessaires à la mise en forme des caractéristiques du fonctionnement normal (modèle de bon fonctionnement) ou anormal (modèle de mauvais fonctionnement) du système à partir des mesures recueillies lors de la phase d'acquisition de données. En général, le modèle de bon fonctionnement est obtenu à partir des données saines sous forme de modèle mathématique. L'écart entre le comportement actuel du système et celui de son modèle permet d'obtenir un résidu indicateur du bon fonctionnement du système.

- la détection constitue la troisième étape de cette procédure de surveillance. Utilisant le résidu précédemment obtenu, elle détermine si le système fonctionne normalement ou non. Une bonne méthode de détection doit être capable de détecter les défauts de faible amplitude avant que ceux-ci ne se propagent dans tout le système et n'entraînent des pannes. Elle doit, en outre, éviter de fréquentes fausses alarmes qui occasionneraient des arrêts et des reconfigurations inutiles du système et feraient perdre toute crédibilité aux résultats de cette procédure.

- le défaut étant détecté, la quatrième étape permet de localiser l'organe affecté par le défaut, le degré de sévérité et d'estimer la confiance du verdict : c'est le diagnostic.

- après l'étape de diagnostic, il faut prévoir les conséquences de l'apparition du défaut sur le comportement futur du système : c'est le pronostic.

- la sixième étape, suite logique de la précédente, est l'analyse des conséquences dues au défaut :

- la disponibilité et la sécurité du système,
- la qualité des fonctions du système,
- les conséquences économiques et les pannes induites.

- à partir des informations obtenues dans l'étape de l'analyse des conséquences, la dernière étape décidera des actions à entreprendre pour éviter la panne et limiter ou empêcher les dégâts. On peut recourir dans cette dernière étape à une reconfiguration.

Trois étapes de la procédure de surveillance présentée ci-dessus seront décrites dans les trois sections qui suivent et feront l'objet de cette thèse. Nous nous intéresserons en premier lieu à la caractérisation de fonctionnement.

## 4 Caractérisation de fonctionnement

La caractérisation de fonctionnement comporte deux tâches : la première consiste à recueillir des informations sur le fonctionnement du système, la deuxième est la génération d'un ensemble de résidus caractérisant le fonctionnement du système. Les informations sur le bon fonctionnement du système sont traduites sous forme de modèle mathématique dont les paramètres sont ajustés par des méthodes d'identification. Puis l'écart entre le comportement réel du système et son modèle issu de l'identification, donne un ensemble de résidus permettant, s'ils sont élaborés de façon adéquate, la détection et l'isolation des défauts qui affectent le système.

### 4.1 Identification du modèle de bon fonctionnement

Un système subit des influences ou des excitations provenant de l'extérieur ; nous appellerons ces excitations "entrées" du système. La réaction ou réponse du processus est mesurée par des capteurs et est appelée "sortie" du système. L'objectif recherché dans cette étape est d'élaborer un modèle mathématique reflétant fidèlement le comportement du système, c'est-à-dire un modèle capable de prédire la sortie du système si ce dernier subit l'influence d'une entrée donnée. Pour des raisons de simplicité, nous emploierons le terme "modèle" au lieu de "modèle mathématique" dans l'ensemble du document. La conception du modèle demande une certaine richesse des entrées envoyées au système et celles-ci doivent refléter l'ensemble des conditions d'utilisation du système. En effet, il faut que le modèle soit capable de reproduire le comportement du système quelle que soit la nature des entrées, d'où la nécessité d'avoir des informations sur le comportement du système dans toute sa plage de fonctionnement durant l'étape d'identification. L'identification des systèmes n'est pas une tâche aisée puisque ces derniers subissent l'influence des bruits qui peuvent affecter les entrées, les sorties ou la structure même du système que l'on cherche à

déterminer (figures (1) et (3)); de plus un système est rarement invariant dans le temps ce qui nécessite la remise à jour de son modèle.

Le modèle peut être obtenu en se fondant sur les lois régissant les phénomènes (physiques, chimiques, mécaniques ou autres) du système. Il s'agit de modèle de type "boîte blanche" ou modèle de connaissance. Les modèles de type "boîte grise" tiennent compte en partie de ces lois, tandis que les modèles "boîte noire" ne s'appuient pas sur de telles lois, mais sont élaborés uniquement à partir des mesures des entrées et sorties du système. Dans la suite nous nous intéresserons exclusivement à la modélisation "boîte noire".

Une formulation mathématique du problème de modélisation est la suivante :

étant donné l'espace des entrées  $U$ , l'espace des sorties  $Y$ , trouver une fonction  $G$  dépendant des paramètres  $\theta$  qui exprime les éléments  $y$  de l'espace  $Y$  sur la base de la connaissance des éléments  $u$  de l'espace  $U$  :

$$\begin{aligned} G : U &\rightarrow Y \\ u &\mapsto G(u, \theta) = y \end{aligned} \quad (1)$$

La détermination de cette fonction  $G$  peut se décomposer en trois phases :

- déterminer la structure de la fonction  $G$  : cela implique la détermination du type de modèle (modèle statique, dynamique linéaire ou non-linéaire) et son ordre dans le cas dynamique ;
- estimer les paramètres  $\theta$  de la fonction  $G$  à partir des mesures disponibles ;
- évaluer les performances de généralisation du modèle par des données de validation et définir son intervalle de confiance.

On s'intéressera dans ce document à l'identification des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires à temps discret. Pour identifier un système dynamique, on opte le plus souvent pour le choix d'un modèle dynamique linéaire. Une des raisons est que ce type de modèle est bien connu et que l'on dispose de méthodes fiables pour leur obtention notamment les techniques d'erreur de prédiction (Prediction-Error-Methods PEM) [47] qui ont fait leur preuve sur les systèmes réels [6], [63] et [18]. Les méthodes des sous-espaces proposées ces dernières années constituent une alternative aux méthodes PEM [74], [67], [53], [50] et [59]. Ces méthodes d'identification des sous-espaces ont suscité beaucoup d'intérêt au vu de leur simplicité (aucune utilisation des techniques d'optimisation non-linéaire, utilisation de la représentation d'état).

Le choix de la structure est déterminante pour obtenir un modèle performant dans toute sa plage de fonctionnement. Ainsi, un système qui a un comportement non-linéaire peut être approximé avec précision par un modèle linéaire uniquement dans une zone restreinte de sa plage de fonctionnement. Dès qu'on sort de cette zone, le modèle linéaire élaboré ne reflétera plus le comportement du système et il convient alors de réadapter le modèle à cette nouvelle plage de fonctionnement.

Ainsi, on peut partitionner l'espace de fonctionnement du système en plusieurs zones et élaborer des modèles linéaires valides dans chaque zone. Le comportement du système est décrit à un instant donné par un seul modèle local parmi l'ensemble des modèles locaux et le passage d'un modèle local à un autre se fait par des "sauts" [11], [37], [58] [62], [22], [55], et [56]. Ce type de modèle est adapté à l'identification des Systèmes à Commutations (SAC).

Si cette modélisation par commutations n'est pas concluante, on peut recourir à l'approche multi-modèle, dans laquelle les sauts sont remplacés par des transitions douces [34], [9] et [24]. Que ce soit dans l'approche multi-modèle ou dans les systèmes commutants, les méthodes des sous-espaces seront utilisées dans ce document pour élaborer les modèles linéaires dans chaque zone. L'utilisation des méthodes des sous-espaces permet d'aborder aisément le problème d'identification des systèmes non-linéaires MIMO.

Le modèle obtenu par identification dans notre étude doit servir à la détection et à l'isolation



de défauts affectant le système. Afin d'atteindre cet objectif, on génère un résidu reflétant le bon ou le mauvais fonctionnement du système.

## 4.2 Génération de résidus

Nous allons présenter dans ce paragraphe trois façons de générer des résidus. La première utilise l'estimation paramétrique : le résidu est obtenu par la différence entre les paramètres estimés et les paramètres de référence du modèle. Dans le cas où l'on ne dispose pas de paramètres de référence, on calcule la différence entre les paramètres estimés sur deux fenêtres d'observation différentes (l'une glissante et l'autre croissante par exemple).

La deuxième est basée sur l'estimation d'état : à partir d'une estimation de l'état on calcule la sortie du modèle, le résidu est l'écart entre la sortie du modèle et celle mesurée du système. Parmi les méthodes utilisant l'estimation d'état on peut citer le filtre de Kalman et les observateurs.

La troisième se base sur une équation de parité pour générer des résidus indicateurs de défaut. Cette technique de génération de résidu utilise les informations issues du modèle pour établir des relations de redondance dans laquelle l'action des entrées et de l'état inconnu ont été annulées.

Le résidu obtenu doit être sensible uniquement aux défauts. Or des perturbations sont susceptibles de transparaître dans le résidu ce qui peut entraver son utilisation pour détecter et isoler les défauts. Cela pose le problème de robustesse des résidus vis à vis des perturbations inconnues et des incertitudes de modélisation.

## 5 La détection

La détection est une étape déterminante dans la procédure de surveillance, car une détection précoce des défauts minimise le coût d'intervention (les moyens mis en oeuvre pour éviter la panne ou réparer le système). Elle consiste à déterminer à partir de l'analyse du résidu si le système fonctionne normalement ou non. Cette décision n'est pas aisée à prendre dans le cas réel où le système subit l'influence des bruits et des perturbations. Pour opérer une bonne détection, il faut supprimer ou minimiser l'action des perturbations déterministes du résidu : on obtient alors un résidu robuste. Dans la plupart des cas on ne cherchera pas à annuler l'influence des bruits comme c'est le cas pour les perturbations car on fait l'hypothèse qu'ils sont de moyenne nulle. Le résidu obtenu ne dépendra alors que de l'influence des bruits. L'apparition d'un défaut se traduira par le changement des moments statistiques du résidu (la moyenne ou variance par exemple). De par la nature aléatoire des bruits dont dépend le résidu, des outils statistiques comme le test d'hypothèse et les méthodes bayésiennes sont utilisés pour détecter l'apparition de défaut. La détection est un test binaire (dire si oui ou non le système fonctionne normalement) qui est réalisé avec une probabilité de succès : c'est la probabilité de bonne détection ( $P_{BD}$ ).

Malheureusement, la détection est toujours réalisée avec une certaine probabilité d'échec :

- probabilité de fausses alarmes ( $P_{FA}$ ) : c'est la probabilité de détecter un défaut quand il n'y en a pas. Ce type d'erreur est très préjudiciable car il fait perdre rapidement la confiance des superviseurs dans le détecteur (celui-ci annonçant des défauts fictifs). De plus, il peut conduire à des reconfigurations inutiles ou inappropriées et à l'arrêt en pure perte.

- probabilité de non détection ( $P_{ND}$ ) : c'est la probabilité d'omettre une défaillance qui existe et qui peut entraîner une panne.

Les risques d'erreurs dépendent des paramètres de réglage de la procédure de détection. La détection revient à dire si un vecteur  $\Theta$  appartient à une distribution correspondant à l'hypothèse  $H_0$  (fonctionnement normal) ou à celle correspondant à l'hypothèse  $H_1$  (fonctionnement anormal).  $\Theta$  est ici un vecteur dépendant du résidu. Le choix de la frontière séparant les espaces

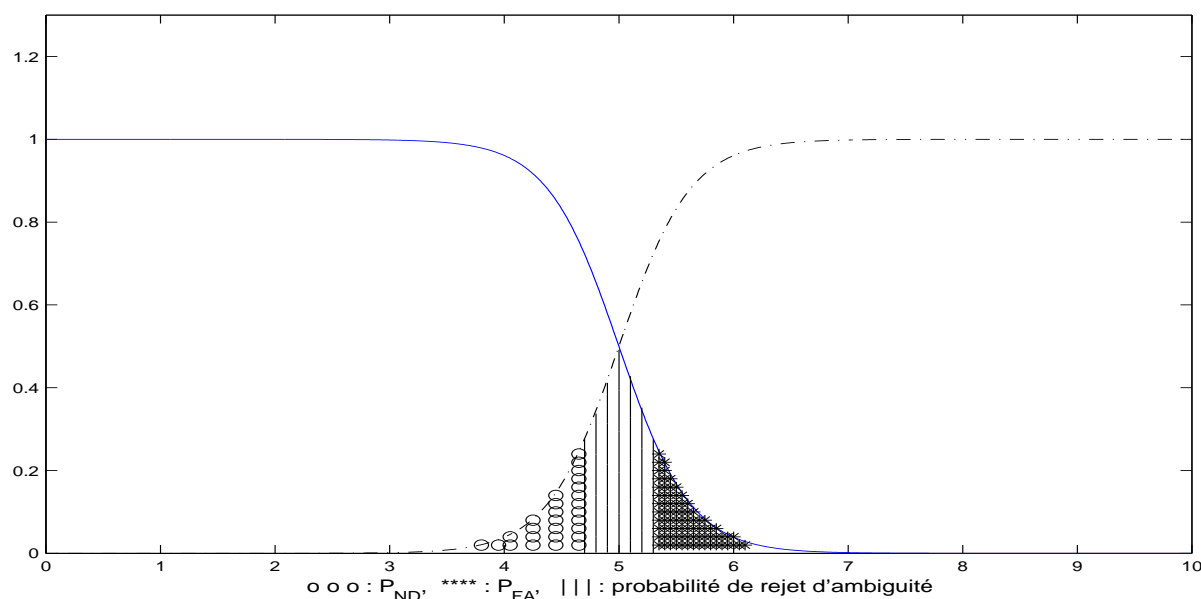


FIG. 2 — : densité de probabilité d'absence de défaut, -.- : densité de probabilité d'apparition de défaut

de décisions  $D_0$  (correspondant à  $H_0$ ) et  $D_1$  (correspondant à  $H_1$ ) est déterminant, puisqu'influant directement sur la probabilité de fausses alarmes ( $P_{FA}$ ) (déclarer que  $\Theta$  appartient à  $D_1$  alors qu'il appartient à  $D_0$ ) et la probabilité de non détection (classer  $\Theta$  dans  $D_0$  alors qu'il se trouve dans  $D_1$ ). Notons que dans le cas précédent  $D_0$  et  $D_1$  sont complémentaires. Le choix d'une frontière entre ces deux espaces peut s'avérer délicat dans certains cas ; il est alors possible d'introduire une zone d'incertitude, ce qui implique un temps de réponse : aucune décision ne sera prise tant que  $\Theta$  appartiendra à la zone d'incertitude. On parle alors de rejet d'ambiguïté (figure (2)). Une minimisation de  $P_{FA}$  et  $P_{ND}$  entraînera une augmentation de la zone d'incertitude, donc du temps de réponse. Il faut alors faire un compromis entre la détection précoce et la minimisation de la  $P_{FA}$  et de la  $P_{ND}$ .

La technique de détection doit posséder un certain nombre de qualités :

- sensibilité aux fautes : c'est l'aptitude de la technique à détecter des défauts de petite amplitude (avoir une faible probabilité de non détection),
- rapidité de détection : c'est la capacité de la méthode à détecter les défauts dès leur apparition (avoir un faible retard à la détection),
- robustesse aux bruits et aux perturbations : c'est l'aptitude de la technique à opérer en présence de bruits ou perturbations sur les entrées, les sorties ou le système tout en ayant une faible probabilité de fausses alarmes.

Après la détection d'un défaut, il faut déterminer le ou les éléments en défaut, ce problème sera abordé dans la section suivante, dans l'étape du diagnostic.

## 6 Le diagnostic

L'objectif principal du diagnostic est la détermination d'une cause d'un état critique (un ou plusieurs défauts). Il consiste à isoler et à identifier ce(s) défaut(s). On aurait alors pu penser que le diagnostic se résume en un problème de résolution inverse entre une cause et son effet : étant

donné un espace de paramètres inconnus  $X$  (toutes les causes possibles), un espace de grandeurs observables  $Z$  (tous les symptômes), une fonction  $F$  reliant les causes aux symptômes (Eq. (2)), déterminer la cause  $x = F^{-1}(z)$  connaissant les symptômes  $z$ .

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto F(x) = z \end{aligned} \tag{2}$$

Malheureusement, le problème physique est beaucoup plus compliqué, car les mesures ne sont pas exactes et leur nombre peut être insuffisant, des causes différentes peuvent engendrer les mêmes symptômes et finalement la fonction  $F$  n'est pas toujours inversible. Le problème se complique car l'on ne dispose pas directement, dans la plupart des cas, de la fonction  $F$ , mais on essaye de la déduire à partir du modèle (qui est une fonction reliant les entrées aux sorties (Eq. (1))).

### 6.1 Isolation de défaut

L'isolation de défaut implique la localisation de la (ou des) composante(s) en défaut et la détermination de l'instant d'apparition du (ou des) défaut(s). Ces objectifs sont atteints grâce à l'analyse des symptômes mis en évidence par le résidu.

Plusieurs défauts peuvent affecter le système (figure (3)) :

- 1- les défauts d'actionneurs ( $F_u$ ) affectent les entrées du système, les entrées ne correspondent pas à la commande agissant sur le système,
- 2- les défauts de capteurs ( $F_y$ ) concernent la sortie du système, les sorties mesurées ne sont pas conformes aux réponses du système,
- 3- les défauts affectant le système lui-même ( $F_s$ ) interviennent quand les paramètres du système changent, pouvant ainsi compromettre le fonctionnement de ce dernier.

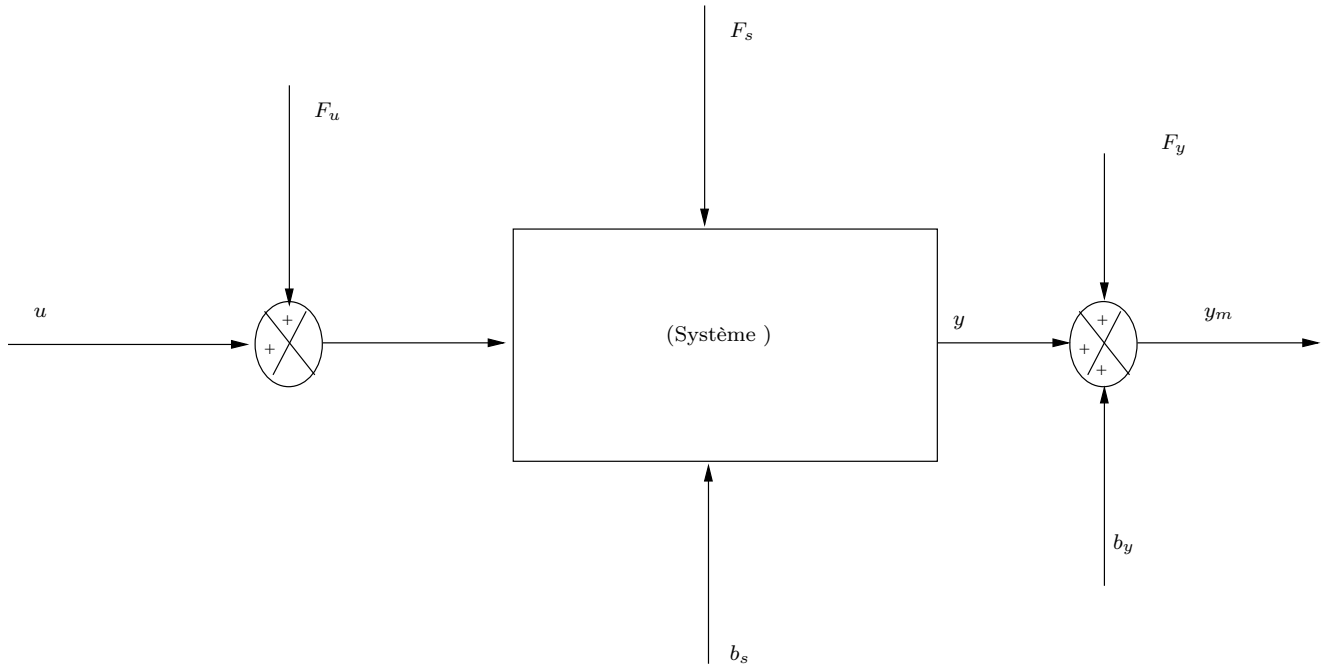


FIG. 3 – les différentes sortes de défauts qui peuvent affecter un système soumis à l'influence des bruits de système  $b_s$  et de sorties  $b_y$

La localisation de défaut consiste à déterminer lequel (ou lesquels) des trois défauts énumérés ci-dessus est (sont) apparu(s), puis à préciser quel(s) élément(s) dans le sous-ensemble défectueux est(sont) atteint(s). Cela entraînera la détermination du (ou des) capteur(s) en défaut s'il s'agit de défauts de capteurs par exemple. Ce but est généralement atteint en structurant le résidu [52], [14], [27], [26] et [29]. Le résidu de base ( $r_k$ ) est sensible en général à tous les défauts ( $d_1, d_2, \dots, d_s$ ,  $s$  étant le nombre de défauts) alors que les résidus structurés ( $r_k^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ) sont sensibles à un défaut ou à un groupe de défauts.

## 6.2 Identification de défaut

Identifier le(s) défaut(s) revient à déterminer l'amplitude du(des) défaut(s) et à déterminer son évolution probable. Cette procédure est déclenchée après l'isolation de défaut.

A présent que les étapes d'identification, de détection et de diagnostic sont décrites, voyons comment elles sont abordées dans cette thèse.

## 7 Structuration du document

Les cinq chapitres de cette thèse peuvent être rassemblés en deux groupes, le premier aborde les problèmes d'identification par les méthodes des sous-espaces tandis que le deuxième s'intéresse au problème de détection et d'isolation de défauts de capteurs.

Le modèle étant la base de plusieurs méthodes de diagnostic, il est indispensable de disposer de méthodes d'identification pour élaborer ce dernier. Ainsi, les trois premiers chapitres se proposent d'établir des méthodes d'identification des systèmes dynamiques linéaires multi-entrées multi-sorties (MIMO) destinées à l'élaboration de ces modèles.

L'identification des systèmes linéaires a été largement explorée et il existe plusieurs méthodes pour accomplir cette tâche, notamment les méthodes PEM qui sont largement utilisées [47], [6], [63], [18]. Or, les méthodes PEM utilisent des techniques d'optimisation non-linéaires qui, si elles sont mal initialisées, peuvent conduire à des minimums locaux. Les récentes méthodes d'identification des sous-espaces basées sur les outils de l'algèbre linéaire et qui ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années ([74], [67], [53], [50] et [59]) constituent une alternative aux méthodes PEM. Ces méthodes n'utilisent pas les techniques d'optimisation non-linéaires mais les outils de l'algèbre linéaire. Les méthodes d'identification des sous-espaces ont recours à des projections matricielles pour estimer les sous-espaces définis par les matrices du système. Elles utilisent la représentation sous forme d'équation d'état des systèmes linéaires, ce qui permet d'aborder avec beaucoup de simplicité l'étude des systèmes MIMO. La simplicité des méthodes d'identification des sous-espaces a une contrepartie : la précision des paramètres du système obtenue par les méthodes d'identification des sous-espaces n'égale pas celle obtenue par les méthodes PEM. Cette précision est suffisante dans certaines applications, mais si une plus grande précision est requise sur les paramètres du système, le modèle obtenu par les techniques des sous-espaces peut servir de condition initiale aux méthodes de type PEM. Cette combinaison des techniques des sous-espaces et des méthodes PEM permet de résoudre en partie le problème de convergence des algorithmes de type PEM.

La plupart des systèmes physiques étant non linéaires, il est nécessaire d'élaborer des techniques d'identification adaptées à ces systèmes. Malheureusement, l'extension des méthodes classiques des sous-espaces rencontre des difficultés liées aux dimensions importantes des matrices ou au nombre important de calculs à effectuer [69].

Une nouvelle formulation des méthodes des sous-espaces en vue de leur adaptation à l'identification des systèmes non-linéaires est alors nécessaire. C'est pourquoi nous proposons dans les

chapitres 1 à 3 de nouvelles méthodes d'identification des sous-espaces basées sur l'estimation des paramètres de Markov. Ces nouvelles méthodes ne passent pas par l'estimation d'un état intermédiaire. Elles sont présentées dans le cas linéaire ([53]) dans le chapitre 1, puis étendues à l'identification des systèmes à commutations et des systèmes non-linéaires avec l'approche multi-modèle ([54], [55], [56]) dans les deux chapitres suivants. Les méthodes proposées dans les chapitres 1 à 3 utilisent une paramétrisation parcimonieuse afin de minimiser la variance des paramètres estimés (voir [60], [59]).

La détection et l'isolation de défauts de capteurs sont abordées dans le chapitre 4. Deux méthodes à base de modèles, l'espace de parité et l'Analyse en Composantes Principales (ACP), proposées dans la littérature sont présentées tout d'abord. Les avantages et les handicaps de ces méthodes sont mis en évidence. Ensuite, nous introduisons une nouvelle méthode de détection et d'isolation des défauts de capteurs basée uniquement sur les signaux d'entrée et de sortie [57]. Cette méthode ne nécessite aucune estimation du modèle du système et est opérationnelle même dans le cas où les entrées ne sont pas persistantes.

## **7.1 Chapitre 1**

Il existe dans la littérature deux familles de méthodes d'identification des sous-espaces des systèmes linéaires invariants dans le temps. La première, que l'on peut qualifier de classique est basée sur l'estimation de la matrice d'observabilité et/ou de l'état. La deuxième famille de méthodes des sous-espaces se base sur la détermination des paramètres de Markov. Ce chapitre commence par une présentation des méthodes classiques avec une interprétation générale basée sur les travaux de Van Overschee et Bart De Moor [67]. Les méthodes d'identification basées sur l'estimation des paramètres de Markov sont ensuite abordées. Parmi les méthodes existant dans la littérature, la méthode proposée par Chui et Maciejowski est exposée. Puis trois nouvelles méthodes d'identification des sous-espaces qui constituent les contributions de cette thèse sont établies [53]. Ces nouvelles méthodes d'identification des sous-espaces s'appuient sur la stabilité de la matrice d'état pour approximer le système par un filtre impulsif à réponse finie ( FIR de l'anglais : Finite Impulse Response) alors que les méthodes qui existent jusqu'alors utilisent un modèle ARX (AutoRegressive with eXternal input) ou ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs). L'utilisation d'un FIR permet d'obtenir une estimation consistante des matrices du système même en présence de bruits colorés. Une paramétrisation parcimonieuse, évitant l'estimation des paramètres connus, est utilisée afin de réduire la variance des paramètres estimés. L'utilisation des paramètres de Markov permet d'obtenir une réalisation minimale et équilibrée à l'aide de l'algorithme ERA (Eigensystem Realization Algorithm, [36]). Le problème d'excitation persistante est résolu dans la dernière des trois méthodes proposées, dans laquelle cette condition d'excitation persistante est assouplie. Bien sûr, seuls les modes excités pourront être identifiés.

## **7.2 Chapitre 2**

Le second chapitre est dédié à l'identification des systèmes à commutations avec la technique des sous-espaces. Les systèmes à commutations sont modélisés par un multi-modèle avec des fonctions poids binaires. Les contributions de cette thèse ([55], [61] et [56]) concernent deux méthodes d'identification des systèmes à commutations. Ces méthodes supposent qu'il existe un temps minimum (temps de séjour) entre deux commutations. Ce temps de séjour permet l'utilisation des techniques de détection de rupture de modèle pour estimer les instants de commutation dans la première méthode. Deux techniques de détection de rupture de modèle sont exposées. La

première approxime la sortie par un FIR, puis annule l'influence des entrées par une projection orthogonale afin d'obtenir un résidu sensible aux changements dans la dynamique du système. La deuxième génère ce résidu grâce à une technique d'identification récursives des sous-espaces. Connaissant les instants de commutations, les techniques des sous-espaces sont utilisées pour estimer les paramètres de Markov des modèles locaux, puis une réalisation minimale et équilibrée de chaque modèle local est déterminée par l'algorithme ERA. La deuxième méthode proposée classe les données en se basant sur la répartition des vecteurs formés à partir de ces derniers dans l'espace des sorties et des régresseurs. Comme les vecteurs issus d'un même modèle local appartiennent tous à un même hyperplan, la classification est réalisée en regroupant les vecteurs appartenant au même hyperplan. Puis, l'identification des modèles locaux se fait de la même manière que dans la première méthode. Les deux méthodes proposées prennent en compte les changements d'ordre qui peuvent survenir lors des commutations, ce qui évite les problèmes de surparamétrisation ou de sous paramétrisation. En outre, elles ne nécessitent pas la connaissance des conditions initiales et leur coût de calcul est raisonnable.

### 7.3 Chapitre 3

L'identification des systèmes non-linéaires avec l'approche multi-modèle sera abordée dans le chapitre 3. La sortie du système est modélisée comme étant une somme pondérée des sorties de modèles locaux linéaires découplés. Dans cette étude, les fonctions poids ne sont plus binaires mais prennent leurs valeurs dans l'intervalle  $[0,1]$ . Les fonctions poids étant supposées connues, une technique des sous-espaces sera proposée pour identifier les modèles locaux. Cette méthode estime les paramètres de Markov des modèles locaux, soit par la méthode des moindres carrés, soit par des projections obliques. Elle utilise l'algorithme ERA pour déterminer une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux. La méthode des sous-espaces proposée [54] ne souffre pas du problème de dimension des matrices, contrairement aux méthodes d'identification des sous-espaces des systèmes non-linéaires proposées dans la littérature, notamment dans l'identification des systèmes bilinéaires et linéaires à paramètres variant dans le temps [69]. De plus, l'utilisation de modèles locaux découplés permet de prendre en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans le système.

### 7.4 Chapitre 4

Ce chapitre s'intéresse à la détection et à l'isolation de défaut de capteur des systèmes dynamiques linéaires. L'espace de parité et l'ACP sont deux méthodes de détection et d'isolation de défaut à base de modèle. La première utilise un modèle explicite du système tandis que la deuxième se sert d'un modèle implicite. Ce chapitre présente ces deux méthodes et souligne les difficultés que l'on peut rencontrer dans l'usage de celles-ci. Les incertitudes paramétriques par exemple peuvent perturber la qualité des résultats fournis par ces méthodes. Les solutions à ce problème proposées dans la littérature nécessitent la connaissance des directions des incertitudes, ce qui n'est pas toujours possible. Une solution aux problèmes rencontrés dans ces méthodes à savoir les incertitudes paramétriques et la non persistance des signaux d'entrée est apportée par la proposition d'une nouvelle méthode de détection et d'isolation de défaut de capteurs [57]. Cette méthode utilise la stabilité du système pour approximer sa sortie par un FIR, puis annule l'influence des entrées par une projection orthogonale. On obtient ainsi un résidu structuré permettant la détection et l'isolation des défauts de capteurs. Cette méthode n'utilise aucune estimation du modèle du système, ce qui évite les problèmes liés aux incertitudes de modélisation (incertitudes sur les paramètres du modèle). Elle peut être utilisée même s'il n'y pas suffisamment

d'information dans les entrées, c'est-à-dire si les entrées ne sont pas persistantes.

# 1

## Identification des systèmes linéaires



## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Les outils mathématiques</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Méthodes classiques des sous-espaces</b>	<b>17</b>
1.3.1	Formulation du problème	17
1.3.2	Matrices du système	18
1.3.3	Identification du système	20
<b>1.4</b>	<b>Méthodes basées sur l'estimation des paramètres de Markov</b>	<b>24</b>
1.4.1	Identification du système	24
<b>1.5</b>	<b>Nouvelles méthodes d'identification utilisant un modèle FIR</b>	<b>30</b>
1.5.1	Position du problème	30
1.5.2	Première méthode	30
1.5.3	Réduction du nombre d'opérations par une décomposition QR	34
1.5.4	Exemple d'application	35
1.5.5	Deuxième méthode	41
1.5.6	Troisième méthode proposée	43
1.5.7	Exemples d'application	48
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>54</b>

---

## 1.1 Introduction

Les méthodes d'identification des sous-espaces ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années [67], [51], [64], [17] et [78]. Basées sur des outils de l'algèbre linéaire, elles utilisent notamment les projections matricielles. Une propriété intéressante de ces méthodes est leur simplicité. En effet, elles ne font pas appel aux algorithmes d'optimisation non linéaires. La représentation d'état utilisée dans ces méthodes permet en outre d'aborder de manière simple et avec élégance le problème d'identification des systèmes linéaires MIMO.

La plupart des méthodes d'identification des sous-espaces passent par une étape d'estimation de la matrice d'observabilité étendue et/ou de la matrice des séquences d'état ; nous les appellerons "méthodes classiques" des sous-espaces. Ces méthodes comportent deux étapes :

- la première est la détermination de la matrice d'observabilité étendue et/ou de la matrice des séquences d'état,

- la deuxième étape est la détermination d'une réalisation du système soit à partir des matrices d'entrée, de sortie et de la matrice des séquences d'état estimée, soit à partir de la matrice d'observabilité étendue et de la matrice de Toeplitz inférieure, laquelle contient les paramètres de Markov.

Les récents travaux de Qin et de Ljung [60] ont montré que les paramètres estimés dans les méthodes classiques des sous-espaces comportent une grande variance due à l'estimation des paramètres connus. Ces paramètres connus correspondent aux contributions des entrées non causales ; bien évidemment ces contributions sont nulles. L'introduction des paramètres de Markov permet d'avoir une paramétrisation parcimonieuse ce qui évite l'utilisation des entrées non causales dans l'estimation. De plus, comme l'état résulte des entrées et des sorties, il semble normal d'utiliser directement les réponses impulsionnelles (ou paramètres de Markov) plutôt que de passer par un état intermédiaire, d'autant que la plupart des méthodes classiques utilisent ces paramètres de Markov pour estimer certaines matrices du système [67]. Ainsi, de nouvelles méthodes d'identification des sous-espaces basées sur les paramètres de Markov ont vu le jour [60], [53].

On s'intéressera dans ce chapitre uniquement à l'identification des systèmes linéaires discrets avec la méthode des sous-espaces. Ce chapitre commence par une présentation générale des méthodes classiques des sous-espaces, présentation qui sera basée sur les travaux de Van Overschee et Bart de Moor [65], [67]. Ces méthodes déterminent à partir des mesures des entrées et des sorties la matrice d'observabilité étendue et/ou la matrice des séquences d'état. L'ordre et une réalisation du système sont ensuite déterminés à partir de ces matrices.

Dans les sections suivantes, on s'intéressera aux méthodes d'identification des sous-espaces basées sur l'estimation des paramètres de Markov, méthodes qui englobent les techniques proposées dans cette thèse. La technique proposée par Chui et Maciejowski [17] utilisant un découpage des données en passé, futur et avancé sera présentée dans la section 1.4. Cette structuration en trois blocs permet la décorrélation des bruits, si la largeur de la fenêtre future est supérieure à celle de la corrélation des bruits.

Trois nouvelles méthodes d'identification des sous-espaces basées sur l'estimation des paramètres de Markov ([53]) sont proposées dans la section suivante. Ces méthodes utilisent un modèle FIR (filtre à réponse impulsionnelle : Finite Impulse Response) pour identifier le système. Grâce à la stabilité du système, sa sortie est exprimée en fonction des entrées pondérées par les paramètres de Markov. Ces derniers sont estimés par la méthode des moindres carrés et l'estimation obtenue est consistante même en présence de bruits colorés. Les méthodes proposées déterminent une réalisation minimale et équilibrée du système à partir des paramètres de Markov estimés grâce à l'algorithme ERA [36]. Une paramétrisation parcimonieuse est utilisée

dans ces méthodes lors de l'estimation des paramètres de Markov ; cette paramétrisation évite l'estimation des paramètres connus et réduit la variance des estimations, notamment quand la taille des échantillons est faible. Le problème d'excitation persistance est abordé dans la dernière des trois méthodes proposées. Cette dernière méthode utilise une matrice des entrées contenant un bloc triangulaire, ce qui réduit l'ordre de persistance des entrées. Notons toutefois que seules les modes excités seront identifiés dans cette méthode.

Ce chapitre commence par la définition des outils mathématiques utilisés dans l'ensemble du document.

## 1.2 Les outils mathématiques

Les notations et les outils mathématiques utilisés dans les méthodes des sous-espaces présentées dans cette thèse sont définis dans ce paragraphe.

La pseudo-inverse de Moore-Penrose d'une matrice  $N$  sera notée par  $N^{(-)}$  (1.1)

On définit l'opérateur  $\Pi_N$  qui projette l'espace des lignes d'une matrice (on suppose que les matrices utilisées sont de dimensions appropriées) sur l'espace des lignes d'une matrice  $N$  par :

$$\Pi_N = N^T (NN^T)^{(-)} N \quad (1.2)$$

La projection de l'espace des lignes d'une matrice  $M$  sur l'espace des lignes d'une matrice  $N$  sera représentée par l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$M\Pi_N = MN^T (NN^T)^{(-)} N \quad (1.3)$$

L'opérateur mathématique  $\Pi_{N^\perp}$  qui projette l'espace des lignes d'une matrice sur l'espace orthogonal à l'espace des lignes d'une matrice  $N$  est donné par :

$$\Pi_{N^\perp} = (I - \Pi_N) \quad (1.4)$$

La projection oblique de l'espace des lignes d'une matrice  $P$  sur l'espace des lignes d'une matrice  $N$  parallèlement à l'espace des lignes d'une matrice  $L$  est donnée par :

$$P/_L N = P\Pi_{L^\perp} (N\Pi_{L^\perp})^{(-)} N \quad (1.5)$$

Si  $N$  est une matrice, son estimation sera notée par  $\hat{N}$  (1.6)

L'espérance mathématique de la matrice  $N$  est notée par  $\mathbf{E}[N]$  (1.7)

Si on dispose d'un grand nombre  $j$  ( $j \rightarrow \infty$ ) de données ergodiques  $n_k$  et  $m_k$  alors l'espérance

mathématique de  $n_k m_k^T$  peut-être évaluée par :

$$\mathbf{E}_j[n_k m_k^T] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{j} \sum_{s=1}^j n_s m_s^T \right) \quad (1.8)$$

### 1.3 Méthodes classiques des sous-espaces

Une formulation générale des méthodes classiques des sous-espaces est présentée dans cette section. Les auteurs Van Overschee et Bart De Moor ont démontré que les méthodes N4SID (Numerical algorithm for Subspace State Space System IDentification) [44] [76], MOESP (Multivariable Output Error State sPace) [72], CVA (Canonical Variate Analysis) [43] [44], 4SID (subspace state system identification) basique et IV-4SID [77] peuvent s'interpréter dans une formulation unique avec le choix de deux matrices de pondération différentes. Ces méthodes, basées uniquement sur les mesures des entrées et sorties, établissent une relation matricielle exprimant les sorties en fonction de l'état et des entrées. Puis l'influence des entrées est annulée par une projection, et la matrice d'observabilité étendue et/ou la matrice des séquences d'états sont déterminées. Van Overschee et Bart De Moor ont démontré que la matrice des séquences d'état déterminée dans les méthodes N4SID, MOESP, CVA, 4SID basique et IV-4SID sont les mêmes mais exprimées dans des bases différentes déterminées par deux matrices de pondération. Deux méthodes d'estimation des paramètres du système sont couramment utilisées :

- la première détermine une réalisation du système à partir des matrices des séquences d'état,
- la seconde obtient cette réalisation en deux étapes en utilisant en premier la matrice d'observabilité étendue puis la matrice de Toeplitz contenant les paramètres de Markov du système.

Cette section présente la formulation du problème d'identification traité par les méthodes classiques des sous-espaces, suivie de la définition des matrices du système. Ensuite, les relations matricielles sur lesquelles se basent ces méthodes classiques sont présentées. La détermination de la matrice des séquences d'état et de la matrice d'observabilité étendue par la formulation unifiée proposée par Van Overschee et Bart De Moor est ensuite proposée. Finalement, les méthodes permettant la détermination d'une réalisation du système sont exposées.

#### 1.3.1 Formulation du problème

On considère le système Linéaire à Temps Invariant (LTI) discret suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + w_k \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée,  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$  la sortie,  $v_k \in \mathbb{R}^n$  et  $w_k \in \mathbb{R}^\ell$  sont respectivement des bruits d'état et de sortie du système et sont supposés stationnaires, blancs. On supposera en plus que les entrées sont déterministes et non corrélées avec les bruits de sortie et d'état.

L'objectif des techniques d'identification est de déterminer l'ordre  $n$  du système et d'obtenir une réalisation  $(A, B, C, D)$  du système, et ceci à partir de la seule connaissance d'un nombre fini  $q$  de mesures des entrées  $u_1, u_2, \dots, u_q$  et des sorties  $y_1, y_2, \dots, y_q$ .

#### Remarque 1.1.

*Le but recherché n'est pas de déterminer coûte que coûte les matrices  $A, B, C$  et  $D$  du système (1.9), mais une réalisation équivalente  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  où  $T$  est une matrice*

inversible. En effet, le système (1.10) décrit ci-dessous a les mêmes relations entrée-sortie que le système (1.9) :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= T^{-1}AT\bar{x}_k + T^{-1}Bu_k + T^{-1}v_k \\ y_k &= CT\bar{x}_k + Du_k + w_k \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $\bar{x}_k = T^{-1}x_k$

Cela implique qu'on ne peut obtenir à partir de la seule connaissance des entrées et des sorties, qu'un système  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$ , équivalent au système  $(A, B, C, D)$  de départ.

### 1.3.2 Matrices du système

Les matrices du système utilisées dans les méthodes des sous-espaces sont définies dans ce paragraphe. Deux indices entiers  $i$  et  $j$  seront utilisés dans la suite, ces indices vérifient la relation :

$$q = j + 2i - 1 \text{ et } i < j \quad (1.11)$$

où  $q$  est le nombre total des mesures des entrées ou des sorties.

La matrice de Hankel d'entrée est définie par :

$$U_{s/i} = \begin{pmatrix} u_{s+1} & u_{s+2} & \dots & u_{s+j} \\ u_{s+2} & u_{s+3} & \dots & u_{s+j+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{s+i} & u_{s+i+1} & \dots & u_{s+j+i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times j} \quad (1.12)$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté nous noterons  $U_{s/i}$  par  $U_s$ .

La matrice de Hankel d'entrée passée  $U_0$  ( $U_0 = U_{0/i}$ ) et la matrice de Hankel d'entrée future  $U_i$  ( $U_i = U_{i/i}$ ) obtenues à partir de la définition précédente sont égales à :

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{j+i-1} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & \dots & u_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{2i} & u_{2i+1} & \dots & u_{2i+j-1} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Une définition similaire est faite pour la matrice de Hankel de sortie  $Y_{s/i} \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$  et pour les matrices de Hankel de sortie passée  $Y_0$  ( $Y_0 = Y_{0/i}$ ) et sortie future  $Y_i$  ( $Y_i = Y_{i/i}$ ).

On définit la matrice de Hankel des mesures passée  $T_0 \in \mathbb{R}^{(m+\ell)i \times j}$  par :

$$T_0 = \begin{pmatrix} Y_0 \\ U_0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Une définition semblable est donnée pour la matrice de Hankel de bruit d'état passé  $V_0 \in \mathbb{R}^{ni \times j}$ , la matrice de Hankel de bruit d'état future  $V_i \in \mathbb{R}^{ni \times j}$ , la matrice de Hankel de bruit de

sortie passée  $W_0 \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$  et pour la matrice de Hankel de bruit future  $W_i \in \mathbb{R}^{\ell i \times j}$ .

La matrice des séquences d'état du système est donnée par :

$$X_s = (x_{s+1} \ x_{s+2} \ \dots \ x_{s+j}) \in \mathbb{R}^{n \times j} \quad (1.16)$$

il est à noter que  $X_0$  sera appelée la matrice des séquences d'état passée et  $X_i$  la matrice d'état future.

La matrice d'observabilité étendue ( $i > n$ ) est définie par :

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times n} \quad (1.17)$$

La matrice de commandabilité est définie par :

$$C_i = (B \ AB \ \dots \ A^{i-1}B) \in \mathbb{R}^{n \times mi} \quad (1.18)$$

La matrice de commandabilité rebours est donnée par :

$$\Delta_i = (A^{i-1}B \ A^{i-2}B \ \dots \ B) \in \mathbb{R}^{n \times mi} \quad (1.19)$$

La matrice de commandabilité rebours des bruits est donnée par :

$$\Delta_i^v = (A^{i-1} \ A^{i-2} \ \dots \ I) \in \mathbb{R}^{n \times ni} \quad (1.20)$$

On définit la matrice de Toeplitz inférieure du système par :

$$H_i = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times mi} \quad (1.21)$$

et la matrice de Toeplitz inférieure des bruits du système par :

$$H_i^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CA & C & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ CA^{i-2} & CA^{i-3} & \dots & C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times ni} \quad (1.22)$$

La condition de persistance d'excitation qui joue un rôle important en identification est définie dans le paragraphe qui suit.

**Définition 1.1.** : *persistance d'excitation*

Les séquences d'entrée sont persistantes d'ordre  $i$ , si la matrice  $\Phi_{(U_{0/i}, U_{0/i})}$  définie ci-dessous est de plein rang égal à  $mi$  :

$$\Phi_{(U_{0/i}, U_{0/i})} = \frac{1}{j} U_{0/i} U_{0/i}^T \quad (1.23)$$

où la matrice  $U_{0/i} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$  est définie par la relation (1.12).

**Remarque 1.2.**

La condition de persistance des signaux traduit la richesse des signaux d'excitation du système.

### 1.3.3 Identification du système

Les méthodes classiques des sous-espaces estiment d'abord la matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  et/ou la matrice des séquences d'état à partir d'une relation matricielle d'entrée-sortie. Elles déterminent ensuite une réalisation  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  du système à partir des matrices estimées. Ces deux étapes sont décrites dans les paragraphes suivants.

#### 1.3.3.1 Estimation de la matrice d'observabilité et/ou la matrice des séquences d'état

Pour estimer la matrice d'observabilité étendue et/ou la matrice des séquences d'état, les méthodes classiques des sous-espaces utilisent une relation matricielle exprimant la sortie du système, linéairement en fonction de l'état et des entrées. Grâce à une projection orthogonale, une estimation de la matrice d'observabilité étendue et/ou la matrice des séquences d'état peut être obtenue.

Enonçons, tout d'abord, la relation matricielle qui sert de base aux méthodes classiques des sous-espaces. Cette relation est introduite dans [20] et constitue la base des méthodes d'identification des sous-espaces des systèmes LTI. Elle est obtenue par des substitutions répétitives de l'équation (1.9) :

$$Y_i = \Gamma_i X_i + H_i U_i + H_i^v V_i + W_i \quad (1.24)$$

où les matrices de Hankel  $Y_i$ ,  $U_i$ ,  $V_i$ , et  $W_i$  sont définies comme dans les équations (1.12), et (1.14), et la matrice des séquences d'état  $X_i$  est définie par la relation (1.16).

Une estimation de la matrice  $\Gamma_i X_i$  est obtenue par une projection orthogonale effectuée de manière à supprimer l'influence des entrées dans l'équation (1.24) et à obtenir uniquement l'action de l'état :

$$Y_i \Pi_{U_i^\perp} = \Gamma_i X_i \Pi_{U_i^\perp} + H_i^v V_i \Pi_{U_i^\perp} + W_i \Pi_{U_i^\perp} \quad (1.25)$$

on rappelle que  $\Pi_{U_i^\perp} = I - U_i^T (U_i U_i^T)^{(-)} U_i$  (voir la section 1.2). Comme les bruits ne sont pas corrélés avec les entrées déterministes, on obtient :

$$\mathbf{E}[V_i \Pi_{U_i^\perp}] = \mathbf{E}[V_i] - \mathbf{E}[V_i U_i^T (U_i U_i^T)^{(-)} U_i] \quad (1.26)$$

$$\mathbf{E}[V_i \Pi_{U_i^\perp}] = 0 \quad (1.27)$$

on a de même :

$$\mathbf{E}[W_i \Pi_{U_i^\perp}] = 0 \quad (1.28)$$

Pour améliorer l'estimation de  $\Gamma_i X_i$  obtenue, deux matrices de pondérations  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{R}^{\ell_i \times \ell_i}$  et  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{R}^{j \times j}$  sont utilisées :

$$\mathcal{W}_1 Y_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \Gamma_i X_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_1 (H_i^v V_i \Pi_{U_i^\perp} + W_i \Pi_{U_i^\perp}) \mathcal{W}_2 \quad (1.29)$$

Ces matrices doivent vérifier les conditions suivantes :

- 1-  $\text{rang}(\mathcal{W}_1 \Gamma_i) = \text{rang}(\Gamma_i)$
- 2-  $\text{rang}(X_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2) = \text{rang}(X_i)$
- 3-  $\mathbf{E}[\mathcal{W}_1 (H_i^y V_i \Pi_{U_i^\perp} + W_i \Pi_{U_i^\perp}) \mathcal{W}_2] = 0$

Ainsi, ces deux matrices sont choisies de manière à conserver le rang de la matrice  $\Gamma_i X_i$  (conditions 1 et 2) et qu'il n'y ait pas corrélation entre ces matrices et les bruits (condition 3).

Ces conditions étant satisfaites, l'ordre du système "n" est donné par :

$$\text{rang}(\mathcal{W}_1 Y_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2) = n \quad (1.30)$$

La matrice d'observabilité étendue et des séquences d'état peuvent-être estimées de la manière suivante :

$$\mathcal{W}_1 \Gamma_i = \mathbf{U}_1 S_1^{1/2} \quad (1.31)$$

$$X_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2 = S_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T \quad (1.32)$$

où les matrices  $\mathbf{U}_1$ ,  $S_1$  et  $\mathbf{V}_1$  sont données par la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$\mathcal{W}_1 Y_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2 = (\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

dans laquelle  $S_1$  contient les valeurs singulières dominantes.

Si la matrice  $\mathcal{W}_2$  est convenablement choisie ( $\mathcal{W}_2$  vérifie les conditions 2 et 3) alors  $X_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2$  constitue une estimation de la matrice des séquences d'état :

$$\hat{X}_i = X_i \Pi_{U_i^\perp} \mathcal{W}_2 \quad (1.34)$$

La différence entre les grandes familles des sous-espaces à savoir N4SID ([44], [76]), MOESP ([72]), CVA ([43], [44]), 4SID basique et IV-4SID ([77]) se situe au niveau du choix des matrices de pondérations  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$ . Le tableau (1.1) montre la valeur prise par les matrices  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$  dans ces différentes méthodes.

Acronyme	$\mathcal{W}_1$	$\mathcal{W}_2$
N4SID	$I_{\ell i}$	$(T_0 \Pi_{U_i^\perp})^{(-)} T_0$
MOESP	$I_{\ell i}$	$(T_0 \Pi_{U_i^\perp})^{(-)} (T_0 \Pi_{U_i^\perp})$
CVA	$(Y_i \Pi_{U_i^\perp} (Y_i \Pi_{U_i^\perp})^T)^{-1/2}$	$(T_0 \Pi_{U_i^\perp})^{(-)} (T_0 \Pi_{U_i^\perp})$
4SID-basique	$I_{\ell i}$	$I_j$
IV-4SID	$I_{\ell i}$	$\Psi$

TAB. 1.1 – la valeur prise par les matrices de pondérations dans les différentes méthodes classiques des sous-espaces. La matrice  $\Psi$  de la méthode IV-4SID contient les instruments.

La justification de ce tableau est donnée dans les références suivantes [66], [67] et [32].

Comme la condition 3 n'est pas satisfaite dans les méthodes 4SID et IV-4SID, les estimations obtenues dans ces deux méthodes ne sont pas consistantes (voir [33]).



### 1.3.3.2 Détermination d'une réalisation du système

À présent que nous avons estimé la matrice d'observabilité  $\Gamma_i$  et/ou la matrice des séquences d'état, nous allons déterminer les matrices  $T^{-1}AT$ ,  $T^{-1}B$ ,  $CT$  et  $D$  du système. Il existe deux manières d'accomplir cette tâche : la première utilise les matrices des séquences d'état  $\hat{X}_i$  et  $\hat{X}_{i+1}$  (N4SID et CVA) et la deuxième se base sur l'estimation de la matrice d'observabilité de même que sur la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i$  contenant les paramètres de Markov (MOESP, 4SID basique et IV-4SID).

**1.3.3.2.1 Détermination d'une réalisation à partir de  $\hat{X}_i$**  Pour obtenir une réalisation  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  du système il faut disposer des matrices des séquences d'état  $\hat{X}_i$  et  $\hat{X}_{i+1}$  en plus des matrices de Hankel  $Y_i$  et  $U_i$ . La matrice des séquences d'état future  $\hat{X}_{i+1}$  est obtenue par la relation :

$$\hat{X}_{i+1} = \bar{S}_1^{1/2} \bar{\mathbf{V}}_1^T \quad (1.35)$$

où

$$(\bar{\mathbf{U}}_1 \ \bar{\mathbf{U}}_2) \begin{pmatrix} \bar{S}_1 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1^T \\ \bar{\mathbf{V}}_2^T \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{W}}_1 Y_{i+1/i-1} \Pi_{U_{i+1/i-1}^\perp} \bar{\mathcal{W}}_2 \quad (1.36)$$

Dans cette estimation, deux nouvelles matrices de pondération  $\bar{\mathcal{W}}_1$  et  $\bar{\mathcal{W}}_2$  sont utilisées de même que les matrices de Hankel  $Y_{i+1/i-1}$  et  $U_{i+1/i-1}$  qui sont définies comme dans l'équation (1.12). Il est clair que les matrices  $\hat{X}_i$ ,  $\hat{X}_{i+1}$ ,  $Y_{i-1/1}$  et  $U_{i-1/1}$  (les matrices  $Y_{i-1/1}$  et  $U_{i-1/1}$  étant définies comme dans l'équation (1.12)) vérifient la relation :

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i-1/1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1}AT & TB \\ CT^{-1} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_{i-1/1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_v \\ \rho_w \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

dans laquelle  $\rho_v$  et  $\rho_w$  représentent l'influence des bruits  $v_k$  et  $w_k$ . Les matrices  $T^{-1}AT$ ,  $T^{-1}B$ ,  $CT$ ,  $D$  sont alors obtenues par la minimisation grâce à la méthode des moindres carrés du critère  $J$  suivant :

$$J(T^{-1}AT, TB, CT^{-1}, D) = \left\| \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i-1/1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T^{-1}AT & TB \\ CT^{-1} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_{i-1/1} \end{pmatrix} \right\|_F^2 \quad (1.38)$$

Il est démontré dans [64] et [67] que les matrices des séquences d'état  $\hat{X}_i$  et  $\hat{X}_{i+1}$  sont solutions d'un banc de filtre de Kalman. Il est évident que si les conditions initiales sont mal choisies, les matrices des séquences d'état de Kalman  $\hat{X}_i$  et  $\hat{X}_{i+1}$  sont biaisées. Pour éviter ce biais et rendre les algorithmes robustes, des améliorations de cet algorithme sont proposées [67].

**1.3.3.2.2 Détermination d'une réalisation à partir des matrices  $H_i$  et  $\Gamma_i$**  L'estimation des matrices du système se fait en deux phases séparées dans les méthodes utilisant la matrice d'observabilité étendue et la matrice de Toeplitz inférieure. Tout d'abord, les matrices  $A$  et  $C$  sont estimées à partir de la matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  ; ensuite, les matrices  $B$  et  $D$  sont estimées à partir de la matrice de Toeplitz contenant les paramètres de Markov.

#### 1.3.3.2.2.1 Estimation des matrices $A$ et $C$

Il existe plusieurs méthodes d'estimation de ces deux matrices à partir de la connaissance de

la matrice  $\Gamma_i$ . L'une des plus utilisées est la suivante :

$$\hat{A} = (\underline{\Gamma}_i)^{(-)} \bar{\Gamma}_i, \text{ où } \underline{\Gamma}_i = \Gamma_i(1 : \ell(i-1), :) \text{ et } \bar{\Gamma}_i = \Gamma_i(\ell : \ell i, :) \quad (1.39)$$

et

$$\hat{C} = \underline{\Gamma}_i(1 : \ell, :) \quad (1.40)$$

Nous rappelons que les notations utilisées sont celles de matlab :  $M(r : s, :)$  désigne les lignes  $r$  à  $s$  de la matrice  $M$ .

### 1.3.3.2.2 Estimation des matrices $B$ et $D$

La matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  ne dépend que des matrices  $A$  et  $C$  (voir 1.17), l'estimation des matrices  $B$  et  $D$  nécessite alors l'utilisation d'une autre matrice à savoir la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i$  (voir (1.21)). En effet cette matrice contient les paramètres de Markov qui dépendent des matrices  $A$ ,  $C$ ,  $B$  et  $D$ . Ainsi en projetant à gauche l'équation (1.24) orthogonalement à la matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  et en la multipliant à droite par la matrice  $U_i^{(-)}$ , on obtient :

$$\Gamma_i^\perp Y_i U_i^{(-)} = \Gamma_i^\perp H_i + \Gamma_i^\perp (H_i^v V_i + W_i) U_i^{(-)} \quad (1.41)$$

Les bruits n'étant pas corrélés aux entrées nous avons :

$$\mathbf{E}[\Gamma_i^\perp Y_i U_i^{(-)}] = \Gamma_i^\perp H_i \quad (1.42)$$

Pour améliorer la consistance des estimations obtenues, la matrice orthogonale à la matrice d'observabilité étendue ( $\Gamma_i^\perp$ ) est calculée à partir des estimations  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$ .

L'équation (1.41) étant linéaire en  $B$  et  $D$  (voir (1.21)), une estimation de ces deux matrices est obtenue par la méthode des moindres carrés. Les détails de ce calcul sont exposés dans [15] et [67].

Pour diminuer le nombre d'opérations dans les méthodes classiques des sous-espaces, une décomposition QR est utilisée. Les détails de cette décomposition QR sont exposés dans [67] au chapitre 6.

### 1.3.3.3 Objectif des méthodes classiques des sous-espaces

L'objectif des méthodes d'identification est d'obtenir un modèle qui permet d'expliquer les sorties à partir de la connaissance des entrées. Ce but est atteint en général par la minimisation d'une "erreur de prédiction". En d'autres termes, ces techniques établissent un modèle qui commet une erreur minimale (suivant un critère déterminé) dans la prédiction des sorties futures, sachant que les sorties passées et/ou les entrées sont connues.

Ainsi les techniques d'identification des sous-espaces ont pour objectif de prédire les sorties futures  $Y_i$  en disposant des sorties passées  $Y_0$  et des entrées  $U_0$  et  $U_i$ . Pour atteindre ce but, on minimise l'erreur de prédiction suivant la norme de Frobenius. Cela revient à déterminer deux matrices  $L_T \in \mathbb{R}^{\ell i \times (m+\ell)i}$  et  $L_U \in \mathbb{R}^{\ell i \times m i}$  minimisant le critère  $J$  suivant :

$$J(L_T, L_U) = \left\| Y_i - (L_T \ L_U) \begin{pmatrix} T_0 \\ U_i \end{pmatrix} \right\|_F^2 \quad (1.43)$$

$$\text{où } \| \cdot \|_F^2 \text{ désigne la norme de Frobenius et } T_0 \text{ définie par la relation (1.15)} \quad (1.44)$$

Les travaux de Qin et Ljung ([60] et [59]) ont montré que la paramétrisation utilisée dans le

critère  $J$  défini dans la relation (1.43) n'est pas parcimonieuse. En effet, les termes connus sont estimés dans la matrice  $L_U$  ( $L_U \equiv H_i$ ). Ils correspondent aux zéros de la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i$  (voir (1.21)). En considérant le critère  $J$  bloc de ligne par bloc de ligne, Qin et Ljung ont démontré que les zéros de la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i$  correspondent aux contributions des entrées non causales. Pour rendre cette paramétrisation parcimonieuse, ces chercheurs ont proposé de considérer le critère  $J$  bloc de ligne par bloc de ligne.

## 1.4 Méthodes basées sur l'estimation des paramètres de Markov

Une alternative aux méthodes classiques d'identification des sous-espaces est l'utilisation des paramètres de Markov. Contrairement aux méthodes classiques des sous-espaces, les méthodes d'identification basées sur l'estimation des paramètres de Markov n'estiment pas la matrice des séquences d'état. Par contre, les outils mathématiques utilisés sont les mêmes que dans les méthodes classiques des sous-espaces, à savoir les projections matricielles. Les méthodes proposées par Chui et Maciejowski [17] et Bingulac [8] se situent dans cette famille de méthodes. Les grandes étapes de la méthode d'identification des sous-espaces proposée par Chui et Maciejowski feront l'objet de cette section. Leur méthode estime en premier la matrice de Toeplitz inférieure (contenant les  $i$  premiers paramètres de Markov), au lieu des matrices des séquences d'état et de la matrice d'observabilité étendue utilisées dans les méthodes classiques. Pour estimer cette matrice de Toeplitz inférieure, une structuration des données en trois blocs : "passées", "futures" et "avancées" sera utilisée ; on notera que les méthodes classiques n'utilisent que deux subdivisions "passée" et "future". La subdivision supplémentaire "avancée" permet l'utilisation d'une variable instrumentale qui annule l'influence des bruits si la fenêtre de corrélation des bruits est inférieure à celle des données futures. Les  $i$  paramètres de Markov obtenus à l'aide de la matrice de Toeplitz seront utilisés pour estimer les  $i$  paramètres de Markov suivants. L'utilisation des paramètres de Markov permet d'obtenir aisément une réalisation minimale et équilibrée à l'aide de l'algorithme ERA [36].

### 1.4.1 Identification du système

Contrairement aux méthodes classiques des sous-espaces, les méthodes d'identification basées sur l'estimation des paramètres de Markov n'estiment pas la matrice des séquences d'état. Elles estiment la matrice de Toeplitz et la matrice de Hankel contenant les paramètres de Markov, puis déterminent l'ordre et une réalisation du système à partir des paramètres de Markov obtenus.

La formulation du problème résolu par cette méthode est la même que dans le paragraphe 1.3.1, mais les états  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , les entrées  $u_k \in \mathbb{R}^m$ , les sorties  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$  et les bruits  $v_k \in \mathbb{R}^n$  et  $w_k \in \mathbb{R}^\ell$  sont supposés stationnaires, réels et de carré Lebesgue-intégrable. Les bruits  $v_k$  et  $w_k$  sont supposés non corrélés avec les entrées  $u_k$ . De plus la matrice  $A$  est supposée stable, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont comprises dans le cercle unité.

Les matrices utilisées dans la suite pour identifier le système sont définies dans le paragraphe suivant.

### 1.4.1.1 Matrices du système

Les matrices de Hankel inférieure  $\Phi_L \in \mathbb{R}^{\ell i \times m i}$  et supérieure  $\Phi_U \in \mathbb{R}^{\ell i \times m i}$  sont définies par :

$$\Phi_U = \begin{pmatrix} 0 & CA^{i-2}B & \dots & CAB & CB \\ 0 & 0 & \dots & CA^2B & CB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & CA^{i-2}B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

$$\Phi_L = \begin{pmatrix} CA^{i-1}B & 0 & \dots & 0 \\ CA^iB & CA^{i-1}B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{2i-2}B & CA^{2i-3}B & \dots & CA^{i-1}B \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

On définit les matrices des mesures  $Z_i$  et  $Z_{2i}$  suivantes

$$\begin{pmatrix} Z_i \\ Z_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_i \\ Y_{2i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_i & 0 \\ \Phi_U & H_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_{2i} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

$$S = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_i \\ U_{2i} \\ Y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3m+\ell)i \times j}, R = \begin{pmatrix} Y_i \Pi_S \\ U_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+\ell)i \times j}, Q = Z_i \Pi_S \in \mathbb{R}^{\ell i \times j} \quad (1.48)$$

Notons que la matrice  $S$  définie dans l'équation (1.48) servira d'instrument pour annuler l'influence des bruits.

### 1.4.1.2 Equations matricielles d'entrée et sortie

L'estimation des paramètres de Markov est obtenue à partir des équations matricielles d'entrée et sortie obtenues par des substitutions répétitives de l'équation (1.9) :

$$Y_0 = \Gamma_i X_0 + H_i U_0 + H_i^v V_0 + W_0 \quad (1.49)$$

$$Y_i = \Gamma_i X_i + H_i U_i + H_i^v V_i + W_i \quad (1.50)$$

$$Y_{2i} = \Gamma_i X_{2i} + H_i U_{2i} + H_i^v V_{2i} + W_{2i} \quad (1.51)$$

$$X_i = A^i X_0 + \Delta_i U_0 + \Delta_i^v V_0 \quad (1.52)$$

$$X_{2i} = A^i X_i + \Delta_i U_i + \Delta_i^v V_i \quad (1.53)$$

où les matrices de Hankel  $Y_0, Y_i, Y_{2i}, U_0, U_i, U_{2i}, V_0, V_i, V_{2i}, W_0, W_i, W_{2i}$  sont définies comme dans les équations (1.12), (1.13) et (1.14), et les matrices des séquences d'état  $X_i, X_{2i}$  et  $X_0$  sont définies par la relation (1.16).

Les relations matricielles d'entrée et sortie précédentes serviront de base à la méthode proposée par Chui et Maciejowski. La méthode proposée par ces deux chercheurs est présentée dans le paragraphe suivant.

### 1.4.1.3 Projection de matrice

L'estimation de deux matrices du système  $H_i$  et  $\Phi_L$  permettent de déterminer les  $2i$  premiers paramètres de Markov du système. Les  $i$  premiers paramètres de Markov ( $D, CB, \dots, CA^{i-2}B$ ) sont obtenus à partir de la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i$  tandis que les  $i$  restants ( $CA^{i-1}B, CA^iB, \dots, CA^{2i-2}B$ ) sont estimés à l'aide de la matrice de Hankel inférieure  $\Phi_L$ .

Une condition indispensable pour l'estimation des paramètres de Markov est que la matrice  $\Psi$  définie ci-dessous soit définie positive :

$$\Psi = E \left[ \begin{pmatrix} X_i \Pi_S \\ U_i \\ U_{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \Pi_S \\ U_i \\ U_{2i} \end{pmatrix}^T \right] \quad (1.54)$$

$$\Psi > 0 \quad (1.55)$$

Cette condition assure que les matrices utilisées dans la suite contiennent suffisamment d'information pour identifier le système, mais elle est malheureusement difficile à vérifier si on ne dispose pas de l'état.

Les  $i$  premiers paramètres de Markov sont déterminés en deux étapes :

- les actions de l'état sont annulées sur la matrice de sortie avancée  $Y_{2i}$  en réalisant une projection sur l'espace orthogonal de ces états, ce qui permet d'obtenir une relation linéaire par rapport aux  $i$  premiers paramètres de Markov,

- ces  $i$  premiers paramètres de Markov sont ensuite estimés par la méthode des moindres carrés à partir de la sortie projetée.

Les  $i$  derniers paramètres de Markov sont déterminés de manière similaire.

### 1.4.1.4 Relations linéaires par rapport aux paramètres de Markov

La relation (1.51) exprime la sortie en fonction de l'entrée et de l'état. Comme on ne connaît pas l'état, Chui et Maciejowski ont proposé d'annuler l'influence de ces états grâce à une projection orthogonale sur  $\Pi_S \Pi_{R^\perp}$  :

$$Y_{2i} \Pi_S \Pi_{R^\perp} = H_i U_{2i} \Pi_{R^\perp} \quad (1.56)$$

Les termes de bruits sont négligés puisque la matrice  $S$  est décorrélée des matrices des bruits  $V_{2i}$  et  $W_{2i}$  et l'état disparaît de cette relation puisque la matrice  $X_{2i} \Pi_S$  est orthogonale à la matrice  $\Pi_{R^\perp}$ . L'orthogonalité de ces deux matrices est démontrée dans [17].

La relation (1.56) est linéaire par rapport aux  $i$  premiers paramètres de Markov contenus dans la matrice de Toeplitz inférieure  $H_i$  (voir la relation (1.21)). Ces paramètres de Markov minimisant le critère  $J$  défini ci-dessous sont alors estimés par la méthode des moindres carrés :

$$J(h_{-1}, \dots, h_{i-2}) = \|Y_{2i} \Pi_S \Pi_{R^\perp} - H_i(h_{-1}, \dots, h_{i-2}) U_{2i} \Pi_{R^\perp}\|_F^2 \quad (1.57)$$

avec  $h_{-1} = D$ ,  $h_s = CA^s B$ ,  $s = 0, \dots, i-2$ . Les détails de cette estimation par la méthode des moindres carrés sont présentés dans le paragraphe suivant.

En procédant de manière similaire, on obtient une relation linéaire par rapport aux  $i$  paramètres de Markov restants. En substituant les relations (1.53) et (1.51) dans (1.47), nous obtenons :

$$Z_{2i} = \Gamma_i A^i X_i + \Phi_L U_i + \Gamma_i H_i^y V_{2i} + \Delta_i^y V_i + W_{2i} \quad (1.58)$$

puis on obtient la relation suivante en multipliant l'équation précédente par  $\Pi_S \Pi_{Q^\perp}$  :

$$Z_{2i} \Pi_S \Pi_{Q^\perp} = \Phi_L U_i \Pi_{Q^\perp} \quad (1.59)$$

La matrice  $\Pi_S$  étant décorrélée des matrices de bruits  $V_{2i}$ ,  $V_i$  et  $W_{2i}$  et la matrice  $X_i \Pi_S$  étant orthogonale à  $\Pi_{Q^\perp}$  (voir [17]), les  $i$  paramètres de Markov suivants  $(h_{i-1}, \dots, h_{2i-2})$  contenus dans la matrice  $\Phi_L$  (voir Eq. (1.46)) sont estimés par la méthode des moindres carrés grâce à la minimisation du critère  $J$  :

$$J(h_{i-1}, \dots, h_{2i-2}) = \|Z_{2i} \Pi_S \Pi_{Q^\perp} - \Phi_L(h_{i-1}, \dots, h_{2i-2}) U_i \Pi_{Q^\perp}\|_F^2 \quad (1.60)$$

avec  $h_s = CA^s B$ ,  $s = i - 1, \dots, 2i - 2$ .

Chui et Maciejowski ont proposé une méthode d'estimation en bloc des paramètres de Markov à partir des relations (1.56) et (1.59), cette méthode est exposée dans le paragraphe suivant.

#### 1.4.1.5 Estimation des $2i$ premiers paramètres de Markov

D'après la condition (1.55), les matrices  $U_{2i} \Pi_{R^\perp}$  et  $U_i \Pi_{Q^\perp}$  sont de plein rang ligne ce qui permet l'estimation des matrices  $H_i$  et  $\Phi_L$  à partir des relations (1.56) et (1.59).

Les  $i$  premiers paramètres de Markov sont estimés à partir de la relation (1.56).

Tout d'abord, on décompose les deux matrices utilisées dans l'équation (1.56) de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \vdots \\ \bar{S}_i \end{pmatrix} = Y_{2i} \Pi_S \Pi_{R^\perp} \text{ et } \begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_i \end{pmatrix} = U_{2i} \Pi_{R^\perp} \quad (1.61)$$

$$\text{avec } \bar{S}_r \in \mathbb{R}^{\ell \times j}, \bar{P}_r \in \mathbb{R}^{m \times j}, r = 1, \dots, i \quad (1.62)$$

à partir de (1.61) on forme deux matrices  $\bar{P}$  et  $\bar{S}$  :

$$\bar{S} = (\bar{S}_1 \ \bar{S}_2 \ \dots \ \bar{S}_i) \in \mathbb{R}^{\ell \times ji}, \bar{P} = \begin{pmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 & \dots & \bar{P}_i \\ 0 & \bar{P}_1 & \dots & \bar{P}_{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{P}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times ji} \quad (1.63)$$

On remarquera que  $\bar{P}$  est de plein rang du fait que  $U_{2i} \Pi_{R^\perp}$  est de plein rang (voir relation (1.55)). L'équation (1.56) est réécrite sous la forme :

$$\bar{S} = H \bar{P}, \text{ avec } H = (h_{-1} \ h_0 \ \dots \ h_{i-2}) \quad (1.64)$$

Finalement les  $i$  premiers paramètres de Markov  $h_{-1}, h_0, \dots, h_{i-2}$  sont estimés par la minimisation suivante :

$$\min_H \|\bar{S} - H \bar{P}\|_F^2 \quad (1.65)$$

dans laquelle on retient la solution donnée par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{H} = \bar{S} \bar{P}^{(-)} \quad (1.66)$$

Les  $i$  paramètres de Markov suivants  $(h_{i-1}, h_i, \dots, h_{2i-2})$  sont estimés de la même manière en

utilisant la relation (1.59).

Après avoir obtenu les paramètres de Markov, les algorithmes de Kung [41] ou ERA ("Eigensystem Realization Algorithm" exposé en annexe A.1) [36] peuvent être utilisés pour obtenir une réalisation du système.

### Méthode d'identification proposée par Chui et Maciejowski [17]

1. Construire les matrices :  $S = (U_0^T \ U_i^T \ U_{2i}^T \ Y_0^T)^T$ ,  $R = ((Y_i \Pi_S)^T \ U_i^T)^T$ ,  $Y_{2i} \Pi_S \Pi_{R^\perp}$
2. Calculer les matrices  $\bar{S}_r, \bar{P}_r$  ( $r = 1, \dots, i$ ) à partir de la décomposition :

$$(\bar{S}_1^T \ \bar{S}_2^T \ \dots \ \bar{S}_i^T)^T = Y_{2i} \Pi_S \Pi_{R^\perp}, \quad (\bar{P}_1^T \ \bar{P}_2^T \ \dots \ \bar{P}_i^T)^T = U_{2i} \Pi_{R^\perp}$$

3. Construire les matrices  $\bar{S}$  et  $\bar{P}$  en utilisation la relation (1.63)
4. Estimer les  $i$  premiers paramètres de Markov :

$$H = \bar{S} \bar{P}^T (\bar{P} \bar{P}^T)^{-1}, \quad H = (D \ CB \ \dots \ CA^{i-2} B)$$

5. Construire les matrices :  $Z_i = Y_i - H_i U_i$ ,  $Q = Z_i \Pi_S$ ,  $Z_{2i} \Pi_S \Pi_{Q^\perp}$
6. Calculer les matrices  $S_r$  et  $P_r$  ( $r = 1, \dots, i$ ) à partir de la décomposition :

$$(S_1^T \ S_2^T \ \dots \ S_i^T)^T = Z_{2i} \Pi_S \Pi_{Q^\perp}, \quad (P_1^T \ P_2^T \ \dots \ P_i^T)^T = U_i \Pi_{Q^\perp}$$

7. Construire les matrices  $P$  et  $S$  de la même manière que  $\bar{S}$  et  $\bar{P}$  (voir relation (1.63))
8. Estimer les  $i$  paramètres de Markov suivants :

$$\bar{H} = S P^T (P P^T)^{-1}, \quad \bar{H} = (CA^{i-1} B \ CA^i B \ \dots \ CA^{2i-2} B)$$

8. Utiliser l'algorithme ERA [36] pour estimer l'ordre et une réalisation du système :

- 8.1 construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_\nu^k$  ( $k = 0, 1$  et  $\nu = i - 1$ )

$$\mathbf{H}_\nu^k = \begin{pmatrix} CA^k B & \dots & CA^{k+\nu-1} B \\ CA^{k+1} B & \dots & CA^{k+\nu} B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{k+\nu-1} B & \dots & CA^{k+2\nu-2} B \end{pmatrix}$$

- 8.2 effectuer la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$\mathbf{H}_\nu^0 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \simeq U_1 S_1 V_1^T$$

- 8.3 calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_\nu = U_1 S_1^{1/2}$ , et celle de commandabilité  $\mathcal{C}_\nu = S_1^{1/2} V_1^T$

- 8.4 l'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$

- 8.5 la matrice  $CT$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_\nu$

- 8.6 la matrice  $T^{-1}B$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}_\nu$

- 8.7 la matrice  $T^{-1}AT$  est déterminée par la formule :  $T^{-1}AT = S_1^{-1/2} U_1^T \mathbf{H}_\nu^1 V_1 S_1^{-1/2}$

TAB. 1.2 – Les grandes lignes de la méthode d'identification des sous-espaces proposée par Chui et Maciejowski

Les différents étapes de la méthode d'identification proposée par Chui et Maciejowski sont présentées dans la figure (1.1).

### Méthodes proposées par Chui et Maciejowski

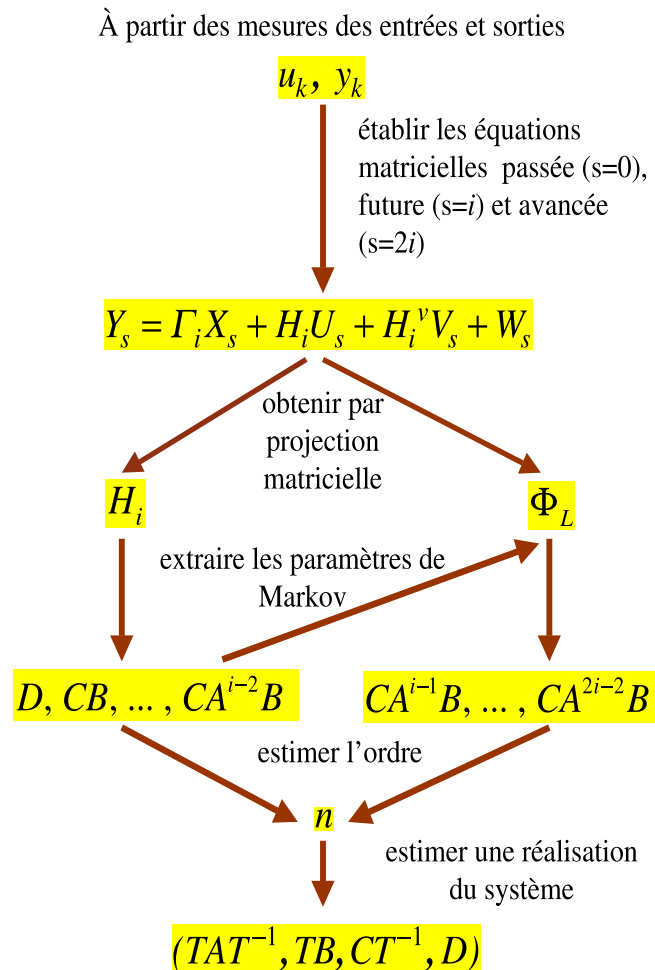


FIG. 1.1 – les étapes de la méthode d'identification proposée par Chui et Maciejowski

Pour diminuer le nombre d'opérations Chui et Maciejowski ont suggéré l'utilisation d'une décomposition QR. Les détails de cette décomposition QR sont exposés dans [17]. Les différentes étapes de la méthode d'identification proposée par Chui et Maciejowski sont représentées dans le tableau (1.2).



## 1.5 Nouvelles méthodes d'identification utilisant un modèle FIR

Les méthodes proposées dans cette section sont basées sur l'estimation des paramètres de Markov et font partie des contributions de cette thèse à l'identification des systèmes LTI par la méthode des sous-espaces [53]. Ces méthodes utilisent un modèle FIR pour identifier le système. Se basant sur la stabilité du système, la sortie de ce dernier est exprimée uniquement en fonction des entrées pondérées par les paramètres de Markov. Cette relation étant linéaire par rapport aux paramètres de Markov, une estimation de ces paramètres est obtenue par la méthode des moindres carrés. Comme les entrées ne sont pas corrélées avec les bruits, l'estimation obtenue est non biaisée même en présence de bruits colorés. Les paramètres de Markov estimés permettent d'obtenir une réalisation minimale et équilibrée du système à l'aide de l'algorithme ERA. Les méthodes proposées utilisent une paramétrisation parcimonieuse, ce qui réduit la variance d'estimation des paramètres surtout quand le nombre de données utilisées est faible.

Trois méthodes d'identification des sous-espaces basées sur l'estimation des paramètres de Markov sont proposées dans cette section. La première méthode exprime la sortie du système en fonction des entrées passées et futures alors que cette sortie est exprimée uniquement en fonction des entrées passées dans la deuxième méthode. La troisième méthode utilise une matrice des entrées contenant un bloc triangulaire dans l'expression de la sortie, ce qui réduit l'ordre requis, de la persistance des entrées.

Commençons par la présentation du problème d'identification qui est résolu dans ces trois méthodes.

### 1.5.1 Position du problème

Le problème d'identification résolu est le même que celui exposé dans le paragraphe 1.3.1 mais les bruits  $v_k$  et  $w_k$  sont cette fois-ci supposés colorés, centrés et indépendants des entrées  $u_k$ . De plus la matrice  $A$  est supposée stable, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont comprises dans le cercle unité.

### 1.5.2 Première méthode

La première méthode se base sur une relation matricielle exprimant les sorties du système uniquement en fonction des entrées pondérées par les paramètres de Markov, à l'aide d'un modèle FIR. La méthode se base sur la stabilité du système pour exprimer cette relation dans laquelle les puissances élevées de la matrice d'état  $A$  sont négligées. Les paramètres de Markov sont ensuite estimés à partir de cette relation matricielle. Une paramétrisation parcimonieuse est utilisée dans l'estimation des paramètres de Markov, ce qui permet de réduire la variance d'estimation. Les estimations obtenues sont consistantes même en présence de bruits colorés. Pour commencer, établissons la relation matricielle d'entrée-sortie qui sert de base à cette première méthode.

#### 1.5.2.1 Relation matricielle d'entrée-sortie

L'objectif étant d'atténuer l'influence de la matrice des séquences d'état passée  $X_0$ , on cherchera une expression de la sortie dans laquelle cette matrice sera pondérée par une puissance élevée de la matrice d'état  $A$ . Comme le système est stable, la matrice  $A^i$  tend exponentiellement vers zéro quand  $i$  croît et l'effet de la matrice des séquences d'état passée  $X_0$  qu'elle pondère devient négligeable.

Par des applications successives de l'équation (1.9), on obtient les deux équations :

$$Y_{s/r} = \Gamma_r X_s + H_r U_{s/r} + H_r^v V_{s/r} + W_{s/r} \quad (1.67)$$

$$X_s = A^i X_0 + \Delta_i U_0 + \Delta_i^v V_{0/i}, \text{ où } i = s - r \quad (1.68)$$

où les matrices  $Y_{s/r}$ ,  $U_{s/r}$ ,  $V_{s/r}$ ,  $W_{s/r}$ ,  $U_0$  et  $V_0$  sont définies comme dans les équations (1.12) et (1.13) et la matrice des séquences d'état  $X_s$  est définie dans la relation (1.16).

En substituant (1.68) dans (1.67), on obtient :

$$Y_{s/r} = \Gamma_r A^i X_0 + \Gamma_r \Delta_i U_0 + H_r U_{s/r} + H_r^v V_{s/r} + \Gamma_r \Delta_i^v V_0 + W_{s/r} \quad (1.69)$$

Pour  $i$  suffisamment grand on obtient en négligeant  $\Gamma_r A^i X_0$  :

$$Y_{s/r} \simeq \Gamma_r \Delta_i U_0 + H_r U_{s/r} + H_r^v V_{s/r} + \Gamma_r \Delta_i^v V_0 + W_{s/r} \quad (1.70)$$

où  $\Delta_i$  et  $\Delta_i^v$  définies respectivement par les relations (1.19) et (1.20), sont égales à :

$$\Delta_i = (A^{i-1}B \ A^{i-2}B \ \dots \ B) \in \mathbb{R}^{n \times mi}, \Delta_i^v = (A^{i-1} \ A^{i-2} \ \dots \ I) \in \mathbb{R}^{n \times ni} \quad (1.71)$$

Une estimation non biaisée des deux matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  peut être obtenue par la méthode des moindres carrés. On remarquera que  $\Gamma_r \Delta_i$  est une matrice qui contient  $r + i - 1$  paramètres de Markov :

$$\Gamma_r \Delta_i = \begin{pmatrix} CA^{i-1}B & CA^{i-2}B & \dots & CB \\ CA^iB & CA^{i-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{i+r-2}B & CA^{i+r-3}B & \dots & CA^{r-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times mi} \quad (1.72)$$

### 1.5.2.2 Détermination des paramètres de Markov

La relation (1.70) permet d'obtenir une estimation non biaisée des matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  par la minimisation du critère :

$$\min_{\Gamma_r \Delta_i, H_r} \left\| Y_{s/r} - (\Gamma_r \Delta_i \mid H_r) \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix} \right\|_F^2 \quad (1.73)$$

Nous retiendrons la solution donnée par la méthode des moindres carrés. Cette estimation n'est possible que si la matrice  $U_{0/s}$  ( $U_{0/s} = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}$ , voir les équations (1.12) et (1.13), on rappelle que  $s = i + r$ ) est de plein rang, ce qui implique que les entrées soient persistantes d'ordre  $r + i$ . L'estimation des matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** (*estimation des paramètres de Markov*)

Si les entrées sont persistantes d'ordre  $r + i$  alors une estimation non biaisée des matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  est donnée par :

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = Y_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.74)$$

**Preuve**

Nous allons démontrer que l'estimation des matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  obtenue est non biaisée. Pour cela, nous allons calculer l'espérance mathématique des matrices estimées :

$$\mathbf{E} \left[ \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) \right] = \mathbf{E} \left[ Y_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] \quad (1.75)$$

en substituant l'équation (1.70) dans la précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) \right] &= (\Gamma_r \Delta_i \mid H_r) + H_r^v \mathbf{E} \left[ V_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] + \Gamma_r \Delta_i^v \mathbf{E} \left[ V_0 \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[ W_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] \end{aligned} \quad (1.76)$$

Comme les entrées sont décorréllées des bruits d'état et de sortie de moyenne nulle, nous avons :

$$\mathbf{E} \left[ V_0 \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] = 0, \mathbf{E} \left[ V_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] = 0, \text{ et } \mathbf{E} \left[ W_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] = 0 \quad (1.77)$$

et l'estimation donnée par la formule (1.74) est non biaisée :

$$\mathbf{E} \left[ \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) \right] = (\Gamma_r \Delta_i \mid H_r) \quad (1.78)$$

■

**Améliorations des estimations** Les travaux des chercheurs Qin et Ljung [60] ont montré que l'estimation des termes connus (les zéros contenus dans la matrice Toeplitz inférieure  $H_i$  (voir Eq. (1.21)) dans les méthodes des sous-espaces augmente la variance des paramètres estimés. Pour éviter d'estimer ces termes connus, l'estimation des matrices est alors réalisée par bloc de lignes :

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_1 \mid \widehat{H}_{r1} \right) = Y_{s/1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/1} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.79)$$

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_2 \mid \widehat{H}_{r2} \right) = Y_{s+1/1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/2} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.80)$$

⋮

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_r \mid \widehat{H}_{rr} \right) = Y_{s+r-1/1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.81)$$

où les matrices  $U_{s/t}$  et  $Y_{s+t/1}$  ( $t = 1, \dots, r$ ) sont définies comme dans l'équation (1.12) et

$$\widehat{\Gamma_r \Delta_i} = \begin{pmatrix} (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_1 \\ (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_2 \\ \vdots \\ (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times mi}, \text{ (voir Eq. (1.72))} \quad (1.82)$$

$$(\Gamma_r \Delta_i)_t = (h_{t+i-2} \ h_{t+i-3} \ \dots \ h_{t-1}) \in \mathbb{R}^{\ell \times mi}, \quad (1.83)$$

$$H_{rt} = (h_{t-2} \ h_{t-3} \ \dots \ h_{-1}) \in \mathbb{R}^{\ell \times mr}, \quad (t = 1, \dots, r) \quad (1.84)$$

et les paramètres de Markov sont notés par :

$$h_{-1} = D, \ h_t = CA^t B, \ t = 0, 1, 2, \dots, r + i - 2 \quad (1.85)$$

### Première nouvelle méthode d'identification

1. Former les matrices  $Y_{s+t/1}$ ,  $U_{s/t}$ ,  $U_0$  ( $t = 1, \dots, r$ ) en se basant sur les relations (1.12) et (1.13)
2. Calculer les estimations des moindres carrés suivante :

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_t \mid \widehat{H}_{rt} \right) = Y_{s+t} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/t} \end{pmatrix}^{(-)}, \quad t = 1, \dots, r$$

3. Calculer les  $r + i - 1$  paramètres de Markov en prenant la moyenne des paramètres de Markov obtenus dans les matrices  $(\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_t$  et  $\widehat{H}_{rt}$  ( $t = 1, \dots, r$ ) estimés
4. Utiliser l'algorithme ERA [36] pour estimer l'ordre et une réalisation du système :
- 4.1 construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_\nu^k$  ( $k = 0, 1$  et  $\nu = \text{integer}((r + i - 1)/2)$ )

$$\mathbf{H}_\nu^k = \begin{pmatrix} CA^k B & \dots & CA^{k+\nu-1} B \\ CA^{k+1} B & \dots & CA^{k+\nu} B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{k+\nu-1} B & \dots & CA^{k+2\nu-2} B \end{pmatrix}$$

- 4.2 opérer la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$\mathbf{H}_\nu^0 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \simeq U_1 S_1 V_1^T$$

- 4.3 calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_\nu = U_1 S_1^{1/2}$ , et celle de commandabilité  $\mathcal{C}_\nu = S_1^{1/2} V_1^T$
- 4.4 l'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$
- 4.5 la matrice  $CT$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_\nu$
- 4.6 la matrice  $T^{-1}B$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}_\nu$
- 4.7 la matrice  $T^{-1}AT$  est déterminée par :  $T^{-1}AT = S_1^{-1/2} U_1^T \mathbf{H}_\nu^1 V_1 S_1^{-1/2}$

TAB. 1.3 – Les grandes étapes de la première nouvelle méthode d'identification des sous-espaces

Pour améliorer l'estimation des paramètres de Markov obtenus, on utilise leur moyenne. Après l'estimation des paramètres de Markov, l'ordre et une réalisation minimale sont déterminés par l'algorithme ERA.

Les grandes étapes de la méthode d'identification proposée dans ce paragraphe sont énumérées dans le tableau (1.3).

### 1.5.3 Réduction du nombre d'opérations par une décomposition QR

L'utilisation de la décomposition QR sera proposée d'abord dans l'estimation des paramètres de Markov avec une paramétrisation non parcimonieuse (théorème 1.1). Son extension à l'estimation des paramètres de Markov avec la paramétrisation parcimonieuse est donnée ensuite.

Considérons la décomposition QR :

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \\ Y_{s/r} \end{pmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{Q}^T \quad (1.86)$$

avec  $\mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{((r+i)m+\ell r) \times j}$  ( $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = I_{(r+i)m+\ell r}$ ) et  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{((r+i)m+\ell r) \times ((r+i)m+\ell r)}$  est une matrice triangulaire inférieure.

On a les égalités suivantes :

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(1 : m(i+r), :) \mathbf{Q}^T, \quad (1.87)$$

(où les notations utilisées sont celles de matlab :  $\mathbf{R}(1 : m(i+r), :)$  représente les lignes 1 à  $m(i+r)$  de la matrice  $\mathbf{R}$ )

$$Y_{s/r} = \mathbf{R}(m(i+r) + 1 : m(i+r) + \ell r, :) \mathbf{Q}^T \quad (1.88)$$

L'équation (1.1) devient :

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = Y_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.89)$$

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = Y_{s/r} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^T \left( \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/r} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \quad (1.90)$$

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = \mathbf{R}(m(i+r) + 1 : m(i+r) + \ell r, :) \underbrace{\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}}_I \mathbf{R}(1 : m(i+r), :)^T \times \quad (1.91)$$

$$\left( \mathbf{R}(1 : m(i+r), :) \underbrace{\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}}_I \mathbf{R}(1 : m(i+r), :)^T \right)^{-1} \quad (1.92)$$

finalemt l'estimation de la matrice  $\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right)$  est donnée par :

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) =$$

$$\mathbf{R}(m(i+r)+1 : m(i+r)+\ell r, :)\mathbf{R}(1 : m(i+r), :)^T \left( \mathbf{R}(1 : m(i+r), :)\mathbf{R}(1 : m(i+r), :)^T \right)^{-1} \quad (1.93)$$

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = \mathbf{R}(m(i+r)+1 : m(i+r)+\ell r, :) \mathbf{R}(1 : m(i+r), :)^{(-)} \quad (1.94)$$

Ce qui montre que dans le calcul de la matrice  $\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right)$  on a besoin de la seule connaissance de la matrice  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{((r+i)m+\ell r) \times ((r+i)m+\ell r)}$ , autrement dit, la matrice  $\mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{((r+i)m+\ell r) \times j}$  ne sera pas calculée. Comme on a souvent  $j \gg (r+i)m + \ell r$ , cela implique que la complexité du calcul et la mémoire utilisée sont considérablement réduites avec l'utilisation de la décomposition QR.

Dans l'estimation de la matrice  $\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right)$  par une paramétrisation parcimonieuse on utilise les égalités suivantes :

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ U_{s/t} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(1 : m(i+t), :) \mathbf{Q}^T \quad (1.95)$$

$$Y_{s+t-1/1} = \mathbf{R}(m(i+r) + (t-1)\ell + 1 : m(i+r) + \ell t, :) \mathbf{Q}^T, \quad t = 1, 2, \dots, r \quad (1.96)$$

ce qui amène à l'utilisation des matrices de dimensions réduites dans le calcul des paramètres de Markov dans les équations (1.79) à (1.81) :

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_1 \mid \widehat{H_{r1}} \right) = \mathbf{R}(m(i+r)+1 : m(i+r)+\ell, :) \mathbf{R}(1 : m(i+1), :)^{(-)} \quad (1.97)$$

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_2 \mid \widehat{H_{r2}} \right) = \mathbf{R}(m(i+r)+\ell+1 : m(i+r)+2\ell, :) \mathbf{R}(1 : m(i+2), :)^{(-)} \quad (1.98)$$

⋮

$$\left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_r \mid \widehat{H_{rr}} \right) = \mathbf{R}(m(i+r) + (r-1)\ell + 1 : m(i+r) + r\ell, :) \mathbf{R}(1 : m(i+r), :)^{(-)} \quad (1.99)$$

#### 1.5.4 Exemple d'application

Pour comparer les performances de la méthode présentée avec celles proposées dans la littérature (N4SID et la méthode proposée par Chui et Maciejowski), nous allons considérer le système suivant, emprunté de [59] :

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.67 & 0 & 0 \\ -0.67 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.67 & -0.67 \\ 0 & 0 & 0.67 & -0.67 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0.6598 & -0.5256 \\ 1.9698 & 0.4845 \\ 4.3171 & -0.4879 \\ -2.6436 & -0.3416 \end{pmatrix} u_k + v_k \quad (1.100)$$

$$y_k = \begin{pmatrix} -0.5749 & 1.0751 & -0.5275 & 0.1836 \\ -0.2977 & 0.1543 & 0.1159 & 0.0982 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} -0.7139 & 0.1174 \\ -0.3131 & 0.2876 \end{pmatrix} u_k + w_k \quad (1.101)$$

Nous avons généré  $q = 4000$  entrées et sorties du système. Les entrées  $u_k$  sont des signaux binaires pseudo-aléatoires (SBPA) de période d'horloge égale à 5 fois la période d'échantillonnage.

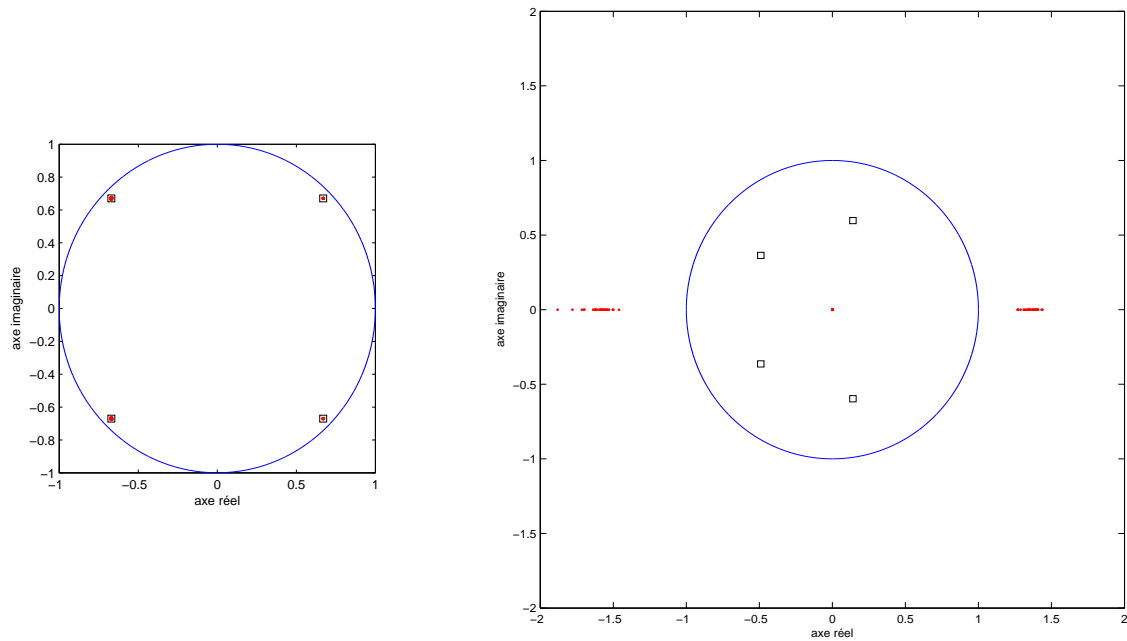


FIG. 1.2 –  
à gauche les pôles estimés par la méthode N4SID :  $\square$  pôles réels, \* pôles estimés  
à droite les zéros estimés par la même méthode :  $\square$  zéros réels, \* zéros estimés

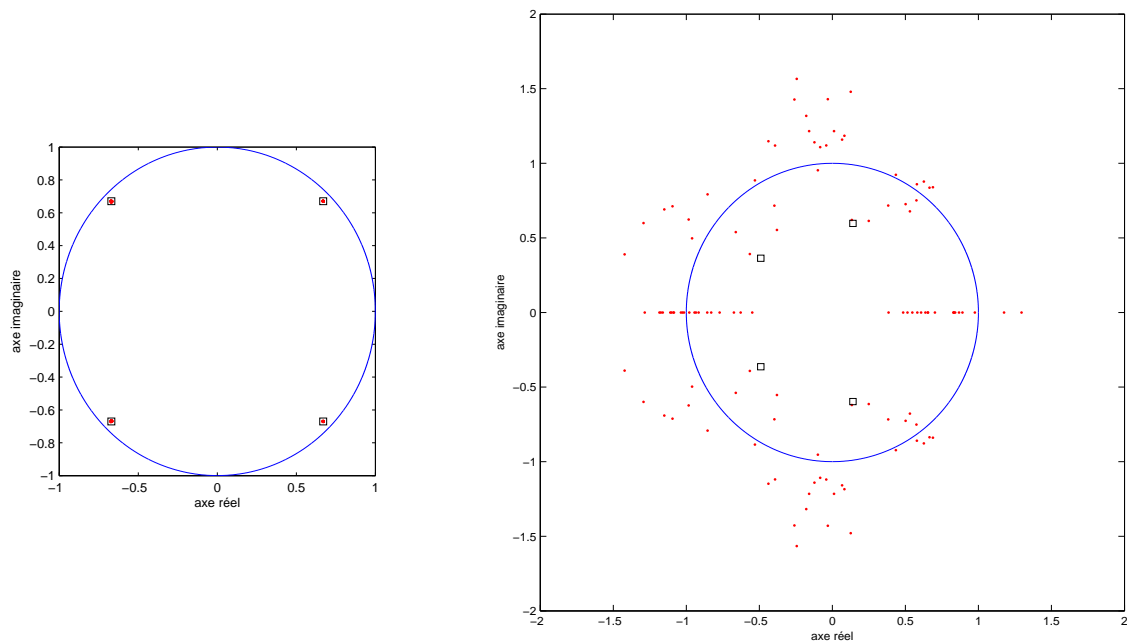


FIG. 1.3 –  
à gauche les pôles estimés par la méthode proposée par Chui et Maciejowski :  $\square$  pôles réels, \* pôles estimés  
à droite les zéros estimés par la même méthode :  $\square$  zéros réels, \* zéros estimés

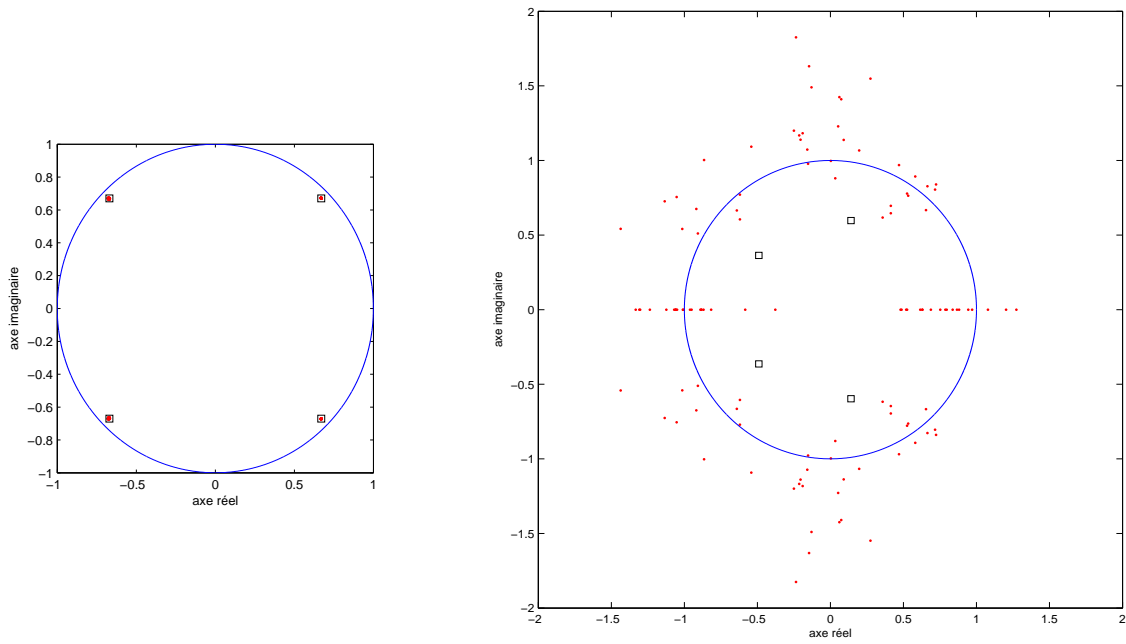


FIG. 1.4 –  
 à gauche les pôles estimés par la première méthode (voir paragraphe (1.5.2)) :  $\square$  pôles réels,  $*$  pôles estimés  
 à droite les zéros estimés par la même méthode :  $\square$  zéros réels,  $*$  zéros estimés

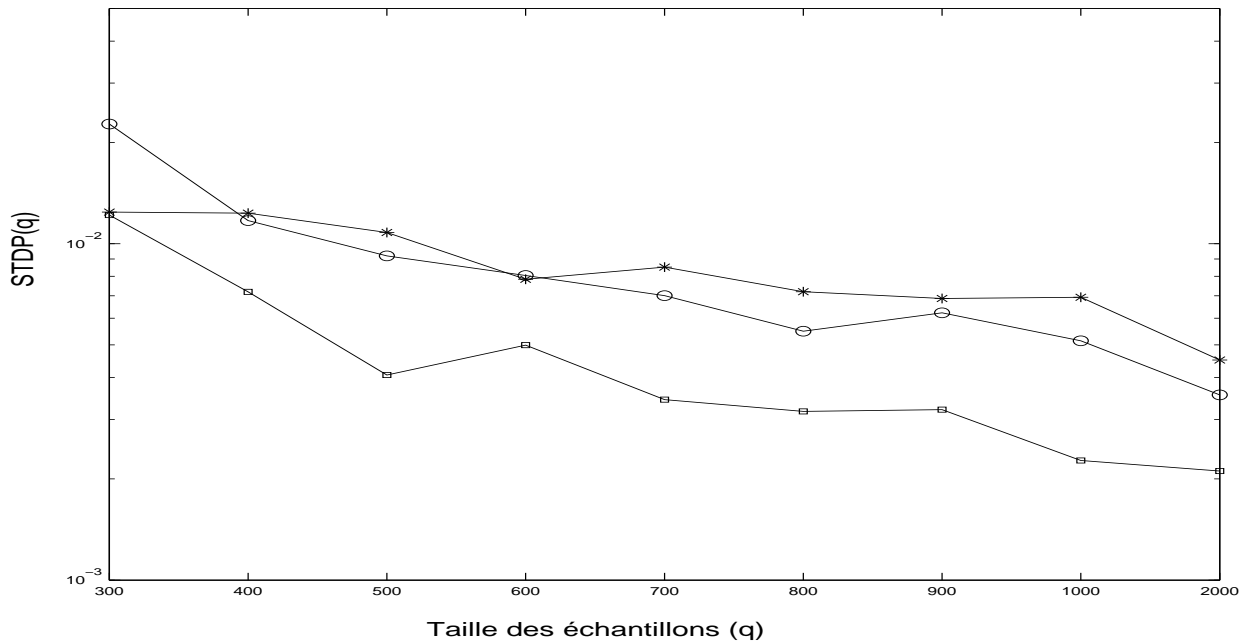


FIG. 1.5 – écart type d'estimation des pôles obtenus par :  
 la méthode N4SID (\*)  
 la méthode de Chui et Maciejowski (o)  
 la première méthode proposée (□)



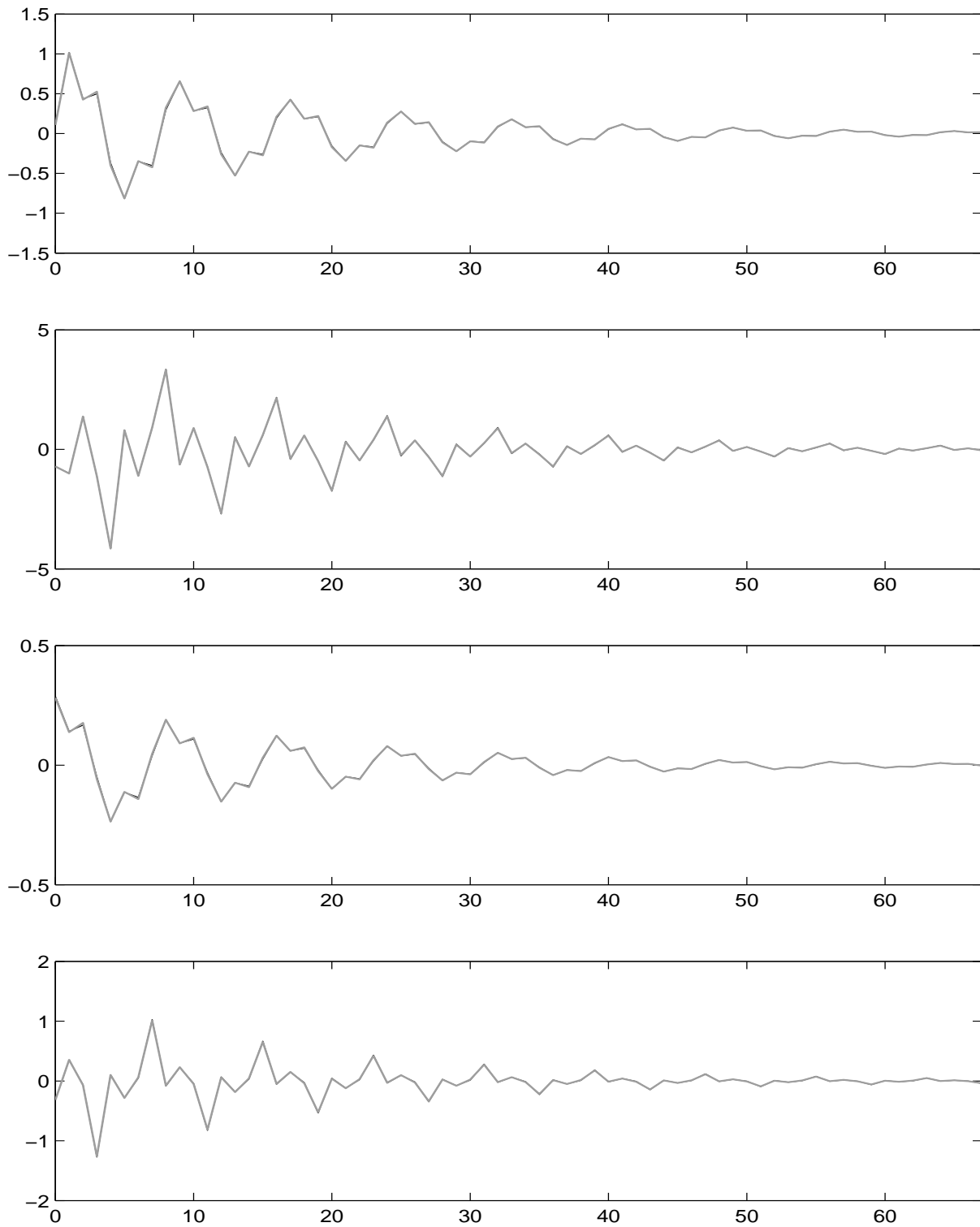


FIG. 1.6 – les valeurs nominales des RID du système (en noir) et les valeurs moyennes des RID obtenues par la méthode proposée par Chui et Maciejowski (en gris) lors de trente réalisations de Monte Carlo

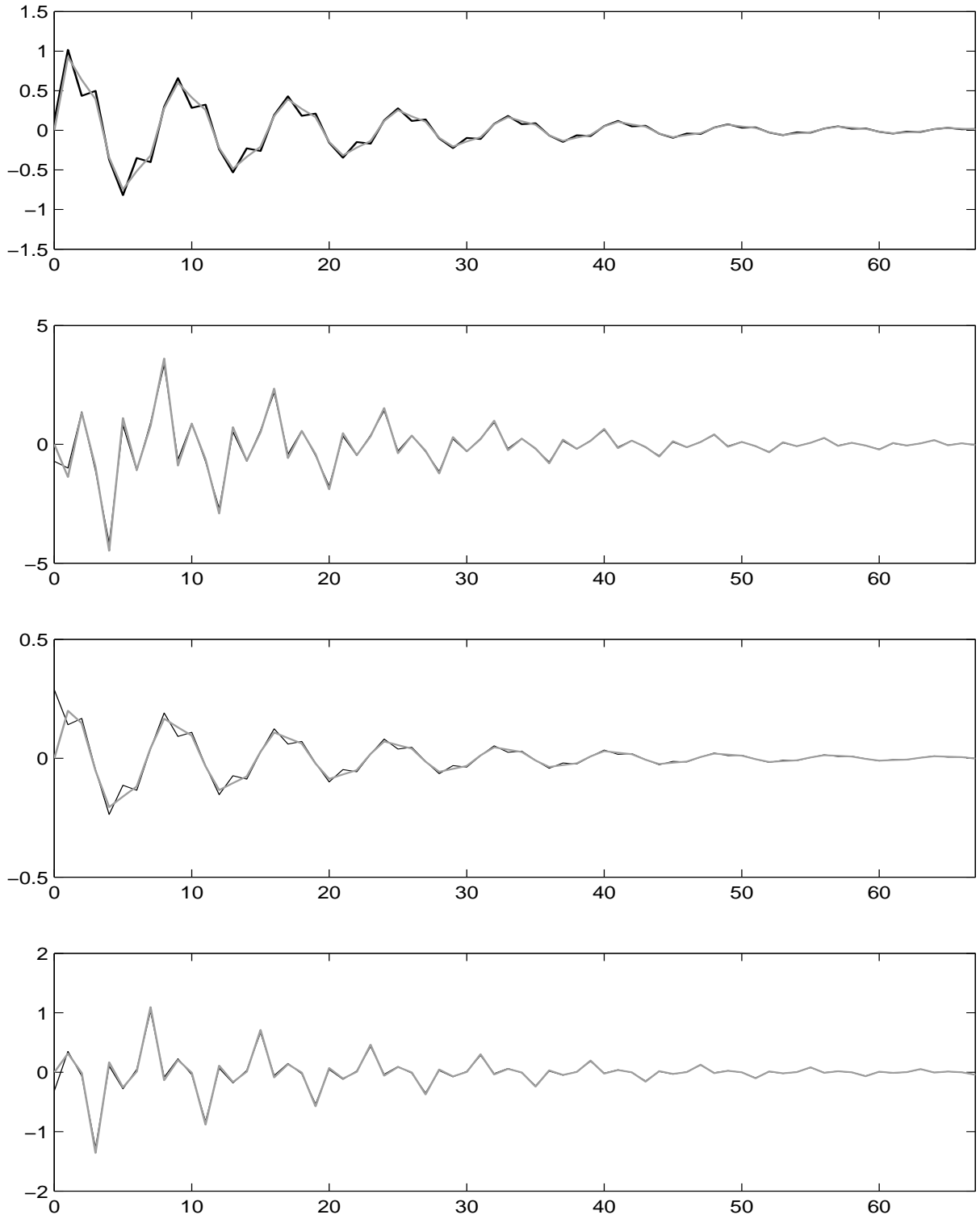


FIG. 1.7 – les valeurs nominales des RID du système (en noir) et les valeurs moyennes des RID obtenues la méthode N4SID (en gris) lors de trente réalisations de Monte Carlo

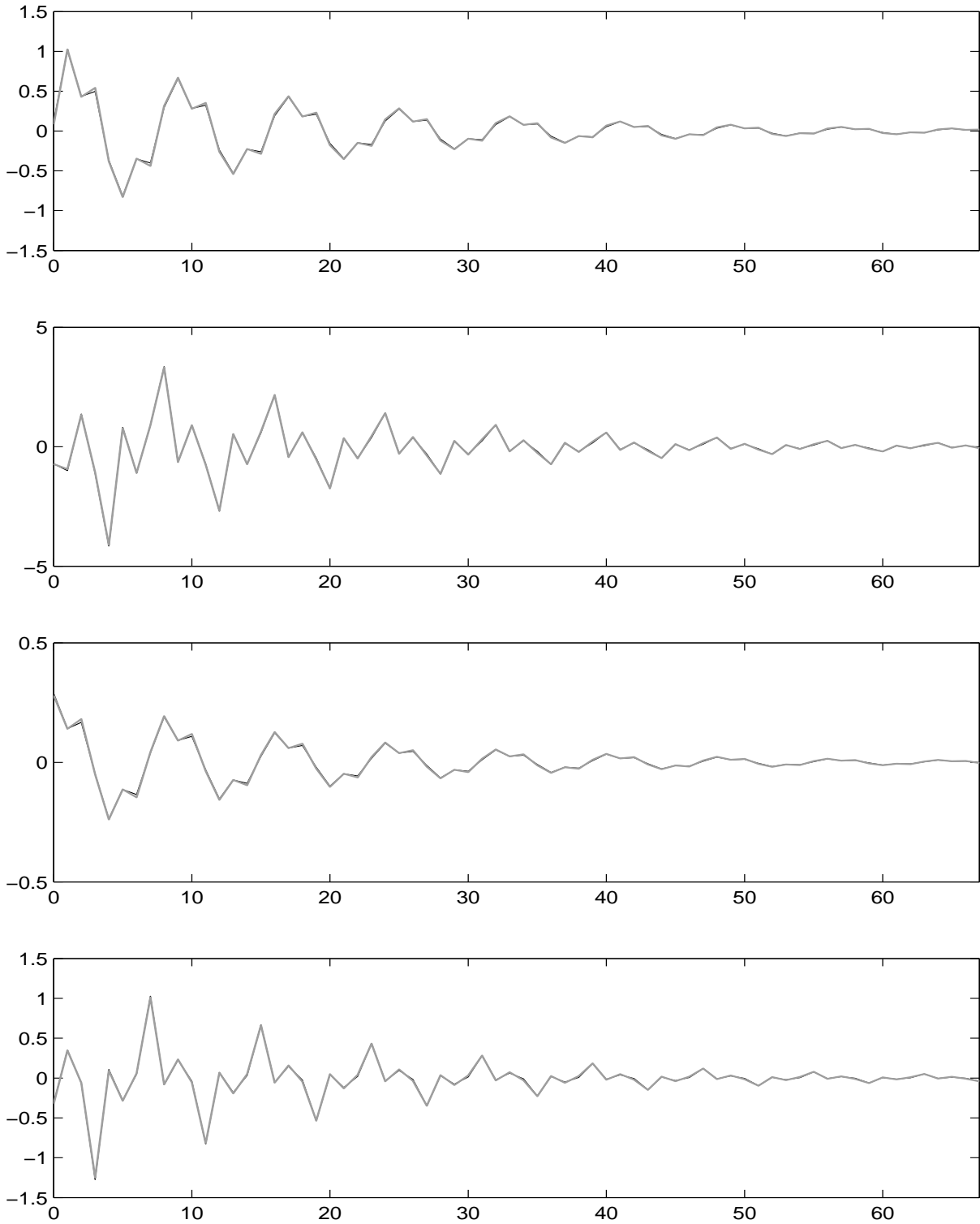


FIG. 1.8 – les valeurs nominales des RID du système (en noir) et les valeurs moyennes des RID obtenues par la première méthode (en gris) lors de trente réalisations de Monte Carlo

Les bruits  $v_k$  et  $w_k$  sont blancs, gaussiens de moyenne nulle de variance :  $\text{variance}(v_k) = 0.01$ ,  $\text{variance}(w_k) = 0.16$ . Les rapports signal sur bruit (RSB) de la première ( $y_k^1$ ) et de la deuxième

sortie ( $y_k^2$ ) du système respectivement par rapport aux bruits de sortie  $w_k^1$  (affectant la première sortie) et  $w_k^2$  (affectant la deuxième sortie) sont égaux à 19db.

Les pôles et zéros sont estimés par trois méthodes : la méthode N4SID, la méthode proposée par Chui et Maciejowski basée sur l'estimation des paramètres de Markov et la méthode proposée dans le paragraphe précédent. Dans cette dernière méthode les indices  $i$  et  $r$  sont tous les deux fixés à 34 et  $\|A^i\| = 0.16$ . Les pôles et les zéros estimés par chacune des trois méthodes pour 30 réalisations de Monte Carlo sont tracés dans le plan complexe dans les figures (1.2) à (1.4). Les trois méthodes utilisées estiment correctement les pôles du système mais n'arrivent pas déterminer ses zéros. On remarquera que  $\|A^i\|$  ( $\|A^i\| = 0.16$ ) n'est pas négligeable devant la variance de  $w_k$  ( $variance(w_k) = 0.16$ ) dans la méthode proposée, pourtant la méthode réussit à estimer correctement les pôles.

Les valeurs moyennes des réponses impulsionnelles discrètes (RID) obtenues par chacune des trois méthodes lors des 30 réalisations de Monte Carlo sont représentées sur les figures (1.6) à (1.8). Ces figures montrent une bonne estimation des RID par la première méthode et la méthode proposée par Chui et Maciejowski, rappelons que ces deux méthodes sont des méthodes basées sur l'estimation des RID. On note une moins bonne estimation des RID dans la méthode N4SID qui est une méthode basée sur l'estimation de l'état.

L'écart type d'estimation des pôles est défini par :

$$STDP(j) = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \left\| \hat{P}_j^s - P_0 \right\|_2 \quad (1.102)$$

avec  $M = 30$  est le nombre de réalisations de Monte Carlo,  $\hat{P}_j^s$  représente la  $s^{ième}$  estimation des pôles avec  $j$  données. Cet écart type d'estimation des pôles est tracée dans une base logarithmique (figure (1.5)) pour les trois méthodes utilisées. Les résultats montrent que la première méthode proposée dans cette section a le plus petit écart type d'estimation des pôles.

### 1.5.5 Deuxième méthode

Contrairement à la première méthode proposée, cette deuxième méthode n'utilise pas deux matrices de Hankel d'entrée mais une seule. L'ordre de la persistance d'excitation nécessaire à la mise en oeuvre de cette méthode n'est alors plus que d'ordre  $i$ . Cette persistance était d'ordre  $i + r$  dans la première méthode. Cette deuxième méthode se base sur une relation matricielle utilisant une matrice de sortie formée par un empilement des mesures sur un horizon  $j$  dans cette relation. Les effets de l'état sont atténués par les puissances élevées de la matrice d'état  $A$ . Cette méthode d'identification jouera un rôle important dans l'identification des systèmes non-linéaires notamment dans les chapitres 2 et 3.

#### 1.5.5.1 Identification du système

La sortie peut-être exprimée en fonction des entrées de la manière suivante :

$$y_k = CA^{i-1}x_{k-i+1} + CA^{i-2}Bu_{k-i+1} + \dots + CBu_{k-1} + Du_k + CA^{i-2}v_{k-i+1} + \dots + Cv_{k-1} + w_k \quad (1.103)$$

on peut négliger le terme  $CA^{i-1}x_{k-i+1}$  si :

$$\left\| CA^{i-1}x_{k-i+1} \right\|^2 \ll \min(variance(w_k)) \text{ si } i > i_0, i_0 \text{ étant un seuil donné} \quad (1.104)$$

**Deuxième nouvelle méthode d'identification**

1. Former les matrices  $U_{0/i}$  et  $Y_{i/1}$  (voir (1.107) et (1.108))
2. Estimer  $i$  paramètres de Markov par la méthode des moindres carrés :

$$\widehat{H}_i = Y_{i/1} U_{0/i}^{(-)}, \underline{H}_i = (CA^{i-2}B \ CA^{i-3}B \ \dots \ D)$$

3. Utiliser l'algorithme ERA [36] pour estimer l'ordre et une réalisation du système :

- 3.1 construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_\nu^k$  ( $k = 0, 1$  et  $\nu = \text{intg}(i/2)$ )

$$\mathbf{H}_\nu^k = \begin{pmatrix} CA^k B & \dots & CA^{k+\nu-1} B \\ CA^{k+1} B & \dots & CA^{k+\nu} B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{k+\nu-1} B & \dots & CA^{k+2\nu-2} B \end{pmatrix}$$

- 3.2 opérer la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$\mathbf{H}_\nu^0 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \simeq U_1 S_1 V_1^T$$

- 3.3 calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_\nu = U_1 S_1^{1/2}$ , et celle de commandabilité  $\mathcal{C}_\nu = S_1^{1/2} V_1^T$

- 3.4 l'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$

- 3.5 la matrice  $CT$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_\nu$

- 3.6 la matrice  $T^{-1}B$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}_\nu$

- 3.7 la matrice  $A$  est déterminée par la formule :  $T^{-1}AT = S_1^{-1/2} U_1^T \mathbf{H}_\nu^1 V_1 S_1^{-1/2}$

TAB. 1.4 – Les grandes lignes de la deuxième nouvelle méthode d'identification des sous-espaces

$$y_k \simeq CA^{i-2}Bu_{k-i+1} + \dots + CBu_{k-1} + Du_k + CA^{i-2}v_{k-i+1} + \dots + Cv_{k-1} + w_k \quad (1.105)$$

En empilant cette relation sur un horizon  $j$  on obtient :

$$Y_{i/1} = \underline{H}_i U_{0/i} + \underline{H}_i^v V_{0/i} + W_{i/1} \quad (1.106)$$

en utilisant la définition (1.12) :

$$U_{0/i} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

$$Y_{i/1} = (y_{i+1} \ y_{i+2} \ \dots \ y_{i+j}) \quad (1.108)$$

$$W_{i/1} = (w_{i+1} \ w_{i+2} \ \dots \ w_{i+j}) \quad (1.109)$$

et les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{H}_i &= (CA^{i-2}B \ CA^{i-3}B \ \dots \ D) \\ \underline{H}_i^v &= (CA^{i-2} \ CA^{i-3} \ \dots \ 0) \end{aligned} \quad (1.110)$$

Si la matrice  $U_{0/i}$  est de plein rang ligne, en d'autres termes, si les entrées sont persistantes d'ordre  $i$  alors une estimation de la matrice  $\widehat{H}_i$  est obtenue par la minimisation du critère :

$$J(\Gamma_i \Delta_s, H_i) = \min_{\Gamma_i \Delta_s, H_i} \|Y_{i/1} - \underline{H}_i U_{0/i}\|_F^2 \quad (1.111)$$

par la méthode des moindres carrés

$$\widehat{H}_i = Y_{i/1} U_{0/i}^{(-)} \quad (1.112)$$

L'estimation des moindres carrés est non biaisée, en effet l'espérance mathématique de la matrice  $\widehat{H}_i$  estimée est :

$$\mathbf{E} [\widehat{H}_i] = \underline{H}_i + H_i^v \mathbf{E} [V_{0/i} U_{0/i}^{(-)}] + \Gamma_i \Delta_i^v \mathbf{E} [W_{i/1} U_{0/i}^{(-)}]$$

puisque les entrées ne sont pas corrélées avec les bruits d'état et de sortie on a :

$$\mathbf{E} [V_{0/i} U_{0/i}^{(-)}] = 0, \text{ et } \mathbf{E} [W_{i/1} U_{0/i}^{(-)}] = 0 \quad (1.113)$$

ce qui donne :

$$\mathbf{E} [\widehat{H}_i] = \underline{H}_i \quad (1.114)$$

On déduit de cette estimation de  $\widehat{H}_i$ , les  $i$  paramètres de Markov  $CA^{i-2}B$ ,  $CA^{i-3}B$ , ...,  $D$ . La détermination de l'ordre et d'une réalisation  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  du système est réalisée comme dans la première méthode par l'algorithme ERA [36]. Cette deuxième méthode d'identification est résumée dans le tableau (1.4).

### 1.5.6 Troisième méthode proposée

Une persistance d'ordre  $i+r$  et  $i$  est requise respectivement dans la première méthode et la deuxième méthode. Comme  $i$  est choisi de manière à ce que les puissances égales ou supérieures à  $i$  de la matrice  $A$  soient négligeables, l'entier  $i$  peut devenir grand, en l'occurrence quand les pôles du système sont proches du cercle unité. La persistance d'ordre  $i$  et  $r+i$  des entrées peut faire défaut dans certains systèmes. Des conditions similaires sont requises dans certaines méthodes des sous-espaces [59], [38]. C'est pourquoi une troisième méthode est proposée, dans laquelle une persistance d'ordre réduit des entrées est requise. Bien entendu, la méthode proposée ne pourra identifier que les modes qui sont excités par les entrées. Tout comme les deux premières méthodes, cette dernière est basée sur une relation matricielle exprimant les sorties uniquement en fonction des entrées pondérées par les paramètres de Markov. Les entrées sont empilées dans une matrice contenant un bloc triangulaire ; cette matrice est alors de plein rang si les entrées ne sont pas identiquement nulles. Les paramètres de Markov du système sont estimés par la méthode des moindres carrés. Une réalisation minimale et équilibrée du système est déterminée à l'aide de l'algorithme ERA.

### 1.5.6.1 Relation matricielle d'entrée et sortie

L'objectif recherché est d'estimer les paramètres de Markov à partir de l'équation suivante :

$$Y_{0/r} = \Gamma_r X_0 + H_r U_{0/r} + H_r^v V_{0/r} + W_{0/r} \quad (1.115)$$

où les matrices de Hankel  $Y_{0/r}$ ,  $U_{0/r}$ ,  $V_{0/r}$  et  $W_{0/r}$  sont définies comme dans les équations (1.12), (1.13) et (1.14), la matrice des séquences d'état  $X_0$  est définie par la relation (1.16) et les matrices de Hankel  $H_r$  et  $H_r^v$  sont définies respectivement par les relations (1.21) et (1.22).

Dans l'équation (1.115), nous connaissons seulement les matrices de Hankel d'entrée  $U_{0/r}$  et de sortie  $Y_{0/r}$ . Pour estimer la matrice  $H_r$ , il faut déterminer la matrice des séquences d'état  $X_0$ . La stabilité du système nous permet d'atteindre cet objectif : les états  $x_k$  du système sont alors exprimés en fonction des entrées et de l'état initial  $x_1$  qui sera supposé nul. Dans cette expression les termes pondérés par les puissances élevées de la matrice d'état  $A$  sont négligés.

Pour obtenir cette expression de la matrice  $X_0$  commençons par exprimer l'état en fonction des entrées :

$$x_{k+1} = A^{k-1} B u_1 + A^{k-2} B u_2 + \dots + B u_k + A^{k-1} v_1 + A^{k-2} v_2 + \dots + v_k \quad (1.116)$$

Le système étant stable, les puissances élevées de la matrice d'état sont négligeables à partir d'un ordre  $i_0$  donné ( $A^i \simeq 0$ ,  $i \geq i_0$ ). On peut négliger ces termes si

$$\|A^{i-1} B u_k\|^2 \ll \min(\text{variance}(v_k)) \quad (1.117)$$

Les états peuvent s'écrire :

$$x_{k+1} \simeq A^{i-1} B u_{k-i+1} + A^{i-2} B u_{k-i+2} + \dots + B u_k + A^{i-1} v_{k-i+1} + A^{i-2} v_{k-i+2} + \dots + v_k, \text{ pour } k > i \quad (1.118)$$

En empilant les états sur une fenêtre d'observation de largeur  $j$  nous obtenons :

$$X_0 = \Delta_i \bar{\mathbf{U}} + \Delta_i^v \bar{\mathbf{V}} \quad (1.119)$$

où  $\Delta_i$  et  $\Delta_i^v$  sont définies respectivement par les relations (1.19) et (1.20) et où  $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$  est définie par :

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_1 & \dots & u_{j-i-1} & u_{j-i} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_1 & u_2 & \dots & u_{j-i} & u_{j-i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & u_1 & \dots & u_{i-2} & u_{i-1} & \dots & u_{j-3} & u_{j-2} \\ 0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{i-1} & u_i & \dots & u_{j-2} & u_{j-1} \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{mi \times j}$  est définie de la même manière que dans l'équation (1.120).

La relation matricielle d'entrée-sortie (1.115) peut s'écrire alors sous la forme :

$$Y_{0/r} = \Gamma_r \Delta_i \bar{\mathbf{U}} + H_r U_{0/r} + \Gamma_r \Delta_i^v \bar{\mathbf{V}} + H_r^v V_{0/r} + W_{0/r} \quad (1.121)$$

La relation précédente étant linéaire aux paramètres de Markov (voir la relation (1.21)), ces paramètres peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés.

### 1.5.6.2 Estimation de la matrice de Toeplitz inférieure et de la matrice de Hankel

Le théorème qui suit donne une estimation des paramètres de Markov.

**Théorème 1.2.** (estimation des paramètres de Markov)

Si l'état initial est nul et la matrice  $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}$  est de plein rang ligne alors une estimation non biaisée des matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  est donnée par :

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = Y_{0/r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.122)$$

#### Troisième nouvelle méthode d'identification

1. Former les matrices  $\bar{\mathbf{U}}, Y_{t/1}, U_{0/t}$  ( $t = 1, \dots, r$ ) en se basant sur les relations (1.12) et (1.120)
2. Calculer l'estimation des moindres carrés suivante :

$$\left( (\widehat{\Gamma_i \Delta_i})_r \mid \widehat{H_{ir}} \right) = Y_{r/1} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)}, \quad r = 1, \dots, i$$

3. Calculer les  $r + i$  paramètres de Markov en prenant la moyenne des paramètres de Markov obtenus dans les matrices  $(\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_t$  et  $\widehat{H_{rt}}$  ( $t = 1, \dots, r$ ) estimés
4. Utiliser l'algorithme ERA [36] pour estimer l'ordre et une réalisation du système :
- 4.1 construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_\nu^k$  ( $k = 0, 1$ ) et  $\nu = \text{integer}((i + r)/2)$  :

$$\mathbf{H}_\nu^k = \begin{pmatrix} CA^k B & \dots & CA^{k+\nu-1} B \\ CA^{k+1} B & \dots & CA^{k+\nu} B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{k+\nu-1} B & \dots & CA^{k+2\nu-2} B \end{pmatrix}$$

- 4.2 opérer la décomposition en valeurs singulières suivante :

$$\mathbf{H}_\nu^0 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \simeq U_1 S_1 V_1^T$$

- 4.3 calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_\nu = U_1 S_1^{1/2}$ , et celle de commandabilité  $\mathcal{C}_\nu = S_1^{1/2} V_1^T$
- 4.4 l'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$
- 4.5 la matrice  $CT$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_\nu$
- 4.6 la matrice  $T^{-1}B$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}_\nu$
- 4.7 la matrice  $T^{-1}AT$  est déterminée par :  $T^{-1}AT = S_1^{-1/2} U_1^T \mathbf{H}_\nu^1 V_1 S_1^{-1/2}$

TAB. 1.5 – Les différentes étapes de la troisième nouvelle méthode d'identification



**Remarque 1.3.** (condition de rang)

Pour  $r = 1$ , la matrice  $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}$  est toujours de plein rang dans le cas mono-entrée. Cette condition est vérifiée dans le cas multi-entrée si les entrées ne sont pas proportionnelles entre elles sur une fenêtre de largeur  $j$ .

**Preuve** A partir de la relation matricielle d'entrée-sortie (1.121), les matrices  $\Gamma_r \Delta_i$  et  $H_r$  peuvent être estimées par la méthode des moindres carrés :

$$\left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) = Y_{0/r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}_j \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^T \left( \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}^T & U_{0/r}^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \quad (1.123)$$

La solution des moindres carrés minimise le critère :

$$\min_{\Gamma_r \Delta_i, H_r} \left\| Y_{0/r} - \left( \Gamma_r \Delta_i \mid H_r \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix} \right\|_F^2 \quad (1.124)$$

Cette estimation est non biaisée puisque les entrées sont décorrélatées des bruits d'état et de sortie, ce qui implique :

$$\mathbf{E} \left[ \bar{\mathbf{V}} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^T \right] = 0, \mathbf{E} \left[ V_{0/r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^T \right] = 0, \text{ et } \mathbf{E} \left[ W_{0/r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^T \right] = 0 \quad (1.125)$$

et on obtient :

$$\mathbf{E} \left[ \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) \right] = \left( \Gamma_r \Delta_i \mid H_r \right) \quad (1.126)$$

puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \mid \widehat{H_r} \right) \right] &= \left( \Gamma_r \Delta_i \mid H_r \right) + \Gamma_r \Delta_i^v \mathbf{E} \left[ \bar{\mathbf{V}} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] + H_r^v \mathbf{E} \left[ V_{0/r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[ W_{0/r} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)} \right] \end{aligned}$$

■

**Améliorations des estimations** Tout comme dans la première méthode, la méthode d'estimation des matrices du système est améliorée pour éviter l'estimation des termes connus et diminuer ainsi la variance des paramètres de Markov. Les matrices du système sont alors estimées par bloc de ligne :

$$\left( \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \right)_1 \mid \widehat{H}_{r1} \right) = Y_{0/1} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/1} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.127)$$

$$\left( \left( \widehat{\Gamma_r \Delta_i} \right)_2 \mid \widehat{H}_{r2} \right) = Y_{1/1} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ U_{0/2} \end{pmatrix}^{(-)} \quad (1.128)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \left( (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_r \mid \widehat{H}_{rr} \right) = Y_{r/1} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ U_{0/r} \end{pmatrix}^{(-)} \end{aligned} \quad (1.129)$$

### Nouvelles méthodes utilisant un modèle FIR

À partir des mesures des entrées et sorties

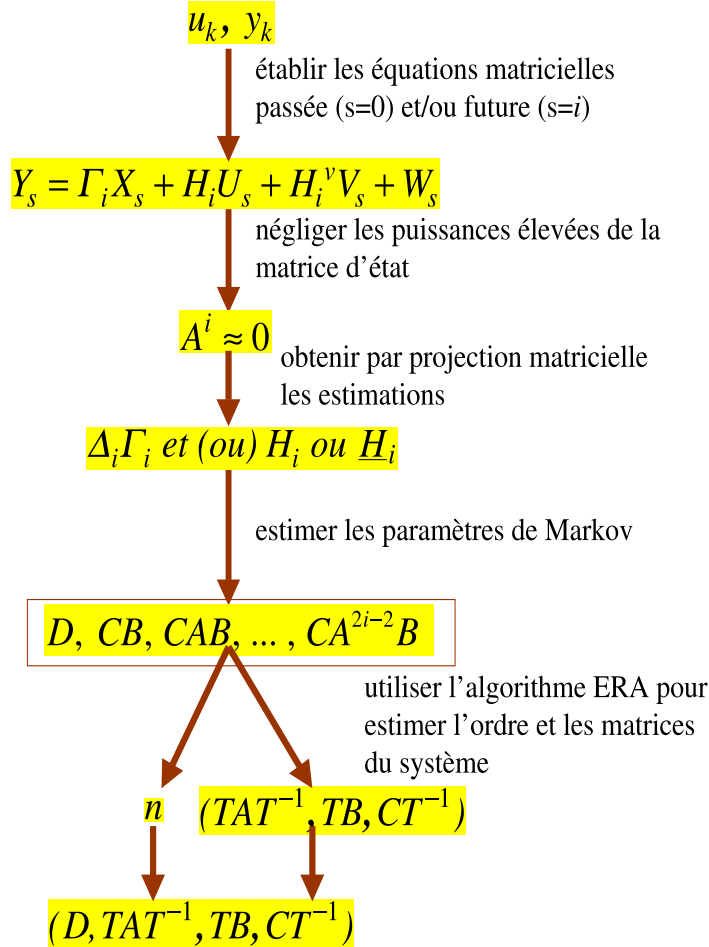


FIG. 1.9 – les étapes communes des nouvelles méthodes des sous-espaces basées sur la stabilité de la matrice  $A$

où les matrices  $U_{0/t}$  et  $Y_{t/1}$  ( $t = 1, \dots, r$ ) sont définies comme dans l'équation (1.12) et

$$\widehat{\Gamma_r \Delta_i} = \begin{pmatrix} (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_1 \\ (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_2 \\ \vdots \\ (\widehat{\Gamma_r \Delta_i})_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times mi}, \quad (1.130)$$

$$(\Gamma_r \Delta_i)_t = (h_{t+i-2} \ h_{t+i-3} \ \dots \ h_{t-1}) \in \mathbb{R}^{\ell \times mi}, \quad (1.131)$$

$$H_{rt} = (h_{t-2} \ h_{t-3} \ \dots \ h_{-1}) \in \mathbb{R}^{\ell \times mt}, \quad (t = 1, \dots, r) \quad (1.132)$$

les matrices  $h_r$  sont des paramètres de Markov définis par la relation (1.85).

Pour affiner l'estimation des paramètres de Markov obtenus, on utilisera leur moyenne. Une décomposition QR peut être utilisée dans cette troisième méthode pour réduire le nombre d'opérations dans l'estimation des paramètres de Markov (cf paragraphe 1.5.3).

Après l'estimation des paramètres de Markov, l'ordre et une réalisation minimale sont déterminés par l'algorithme ERA.

La méthode d'identification proposée dans ce paragraphe est résumée dans le tableau (1.5).

Les différentes parties communes des trois méthodes d'identification proposées sont présentées dans la figure (1.9).

### 1.5.7 Exemples d'application

Les performances des trois nouvelles méthodes d'identification des sous-espaces proposées sont comparées dans cet exemple. Nous reprenons de nouveau le système ((1.100) et (1.101)) dans lequel les entrées sont des signaux variant aléatoirement en amplitude et en durée. Le système subit l'influence des bruits  $v_k$  et  $w_k$  colorés centrés, obtenus par :

$$v_k = (1 - 0.7z^{-1})^2(1 + 0.6z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})\epsilon_k^v \quad (1.133)$$

$$w_k = (1 - 0.5z^{-1})^2(1 + 0.8z^{-1})^2\epsilon_k^w \quad (1.134)$$

où  $\epsilon_k^v \in \mathbb{R}^4$  et  $\epsilon_k^w \in \mathbb{R}^2$  sont des bruits blancs gaussiens. Le rapport signal sur bruit "RSB" des deux sorties par rapport aux bruits de sorties  $w_k$  est de 19db. Les matrices de variance et d'intercovariance des bruits sont :

$$R_v = \begin{pmatrix} 0.0044 & 0.0044 & 0.0044 & 0.0044 \\ 0.0044 & 0.0049 & 0.0046 & 0.0043 \\ 0.0044 & 0.0046 & 0.0052 & 0.0044 \\ 0.0044 & 0.0043 & 0.0044 & 0.0045 \end{pmatrix}$$

$$R_{v,w} = \begin{pmatrix} 0.0017 & 0.0015 & 0.0015 & 0.0017 \\ 0.0017 & 0.0016 & 0.0015 & 0.0017 \end{pmatrix}$$

$$R_w = \begin{pmatrix} 0.0190 & 0.0190 \\ 0.0190 & 0.0201 \end{pmatrix}$$

Nous avons ensuite réalisé 100 réalisations de Monte Carlo d'estimation des pôles et zéros du système avec un nombre de données ( $q$ ) égale à 4000 et les résultats sont montrés sur les figures (1.10) à (1.12). On remarque sur ces figures que les pôles sont correctement estimés alors que les zéros sont mal déterminés. Un même constat est réalisé dans l'exemple 1.5.4 où la méthode N4SID et la méthode proposée par Chui et Maciejowski sont utilisées pour identifier le système.

Les valeurs moyennes des réponses impulsionnelles discrètes (RID) obtenues par chacune des trois méthodes lors des 30 réalisations de Monte Carlo sont représentées sur les figures (1.14) à (1.16). Ces figures montrent que ces trois méthodes donnent des résultats similaires et une bonne estimation des RID.

Nous avons calculé l'écart type d'estimation des pôles estimés (voir Eq. (1.102)) par les trois méthodes proposées dans cette section et les résultats sont représentés sur la figure (1.13). Cette

figure montre que pour de faibles échantillons, la première méthode a le plus petit écart type d'estimation des pôles, alors que cette tendance s'inverse dès que la taille des échantillons devient grand.

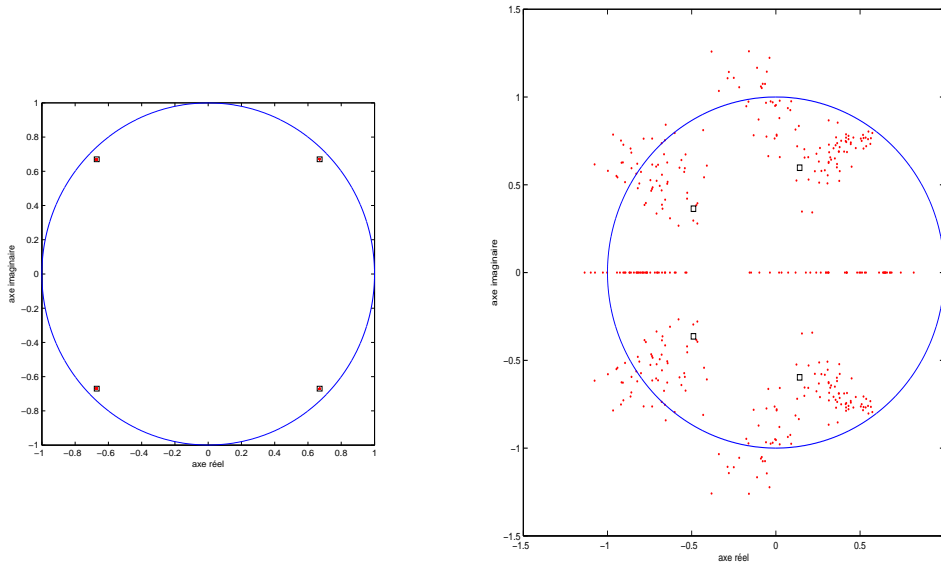


FIG. 1.10 –

à gauche les pôles estimés par la première méthode (voir paragraphe (1.5.2)) :  $\square$  pôles réels, \* pôles estimés  
 à droite les zéros estimés par la même méthode :  $\square$  zéros réels, \* zéros estimés

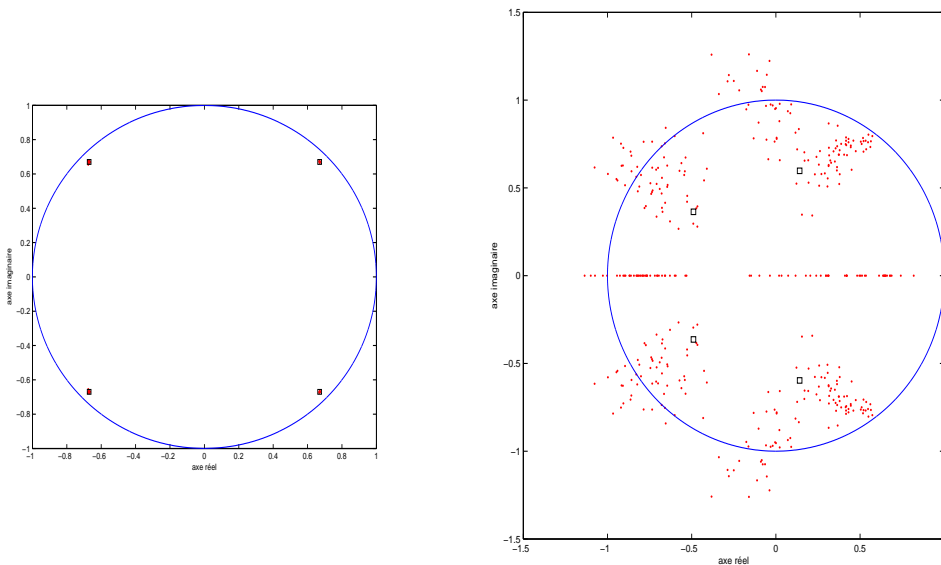


FIG. 1.11 –

à gauche les pôles estimés par la deuxième méthode (voir paragraphe (1.5.5)) :  $\square$  pôles réels, \* pôles estimés  
 à droite les zéros estimés par la même méthode :  $\square$  zéros réels, \* zéros estimés

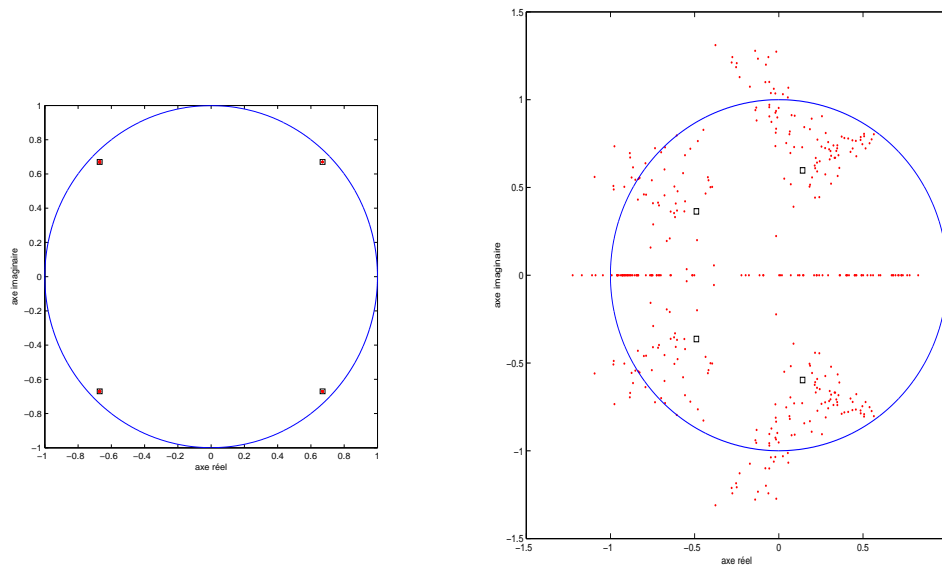


FIG. 1.12 –  
 à gauche les pôles estimés par la troisième méthode (voir paragraphe (1.5.5)) :  $\square$  pôles réels,  $*$  pôles estimés  
 à droite les zéros estimés par la même méthode :  $\square$  zéros réels,  $*$  zéros estimés

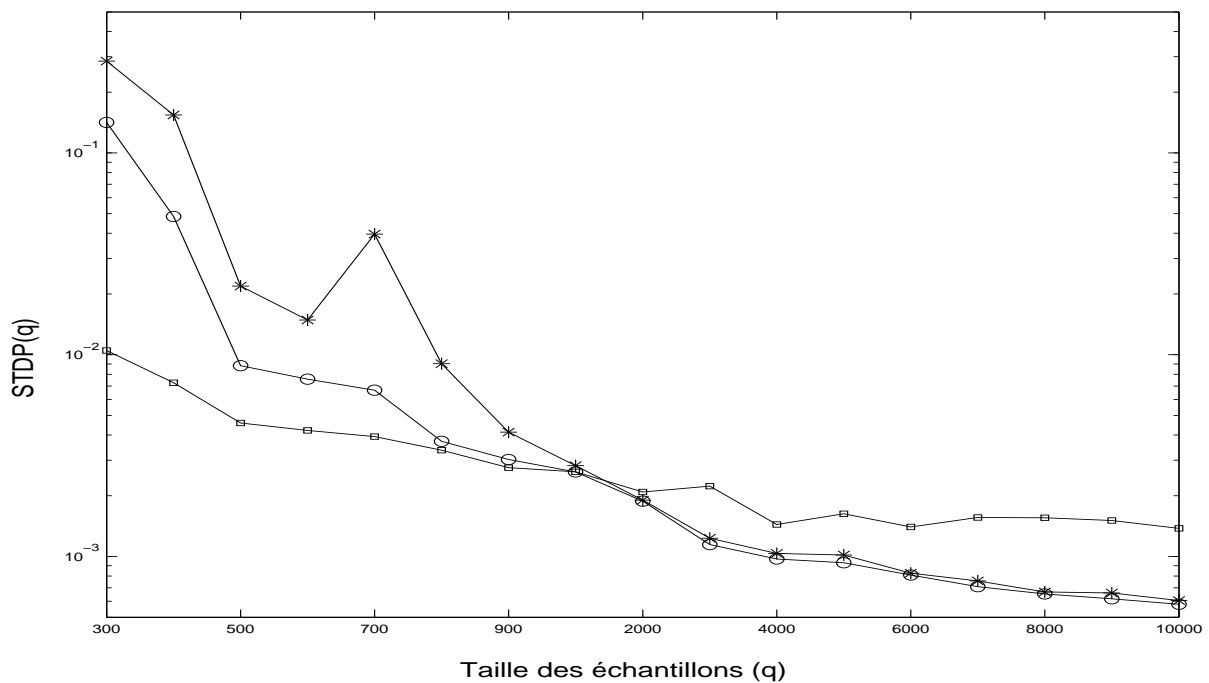


FIG. 1.13 – écart type d'estimation des pôles obtenus par :  
 la première méthode proposée ( $\square$ )  
 la deuxième méthode proposée ( $\circ$ )  
 la troisième méthode proposée ( $*$ )

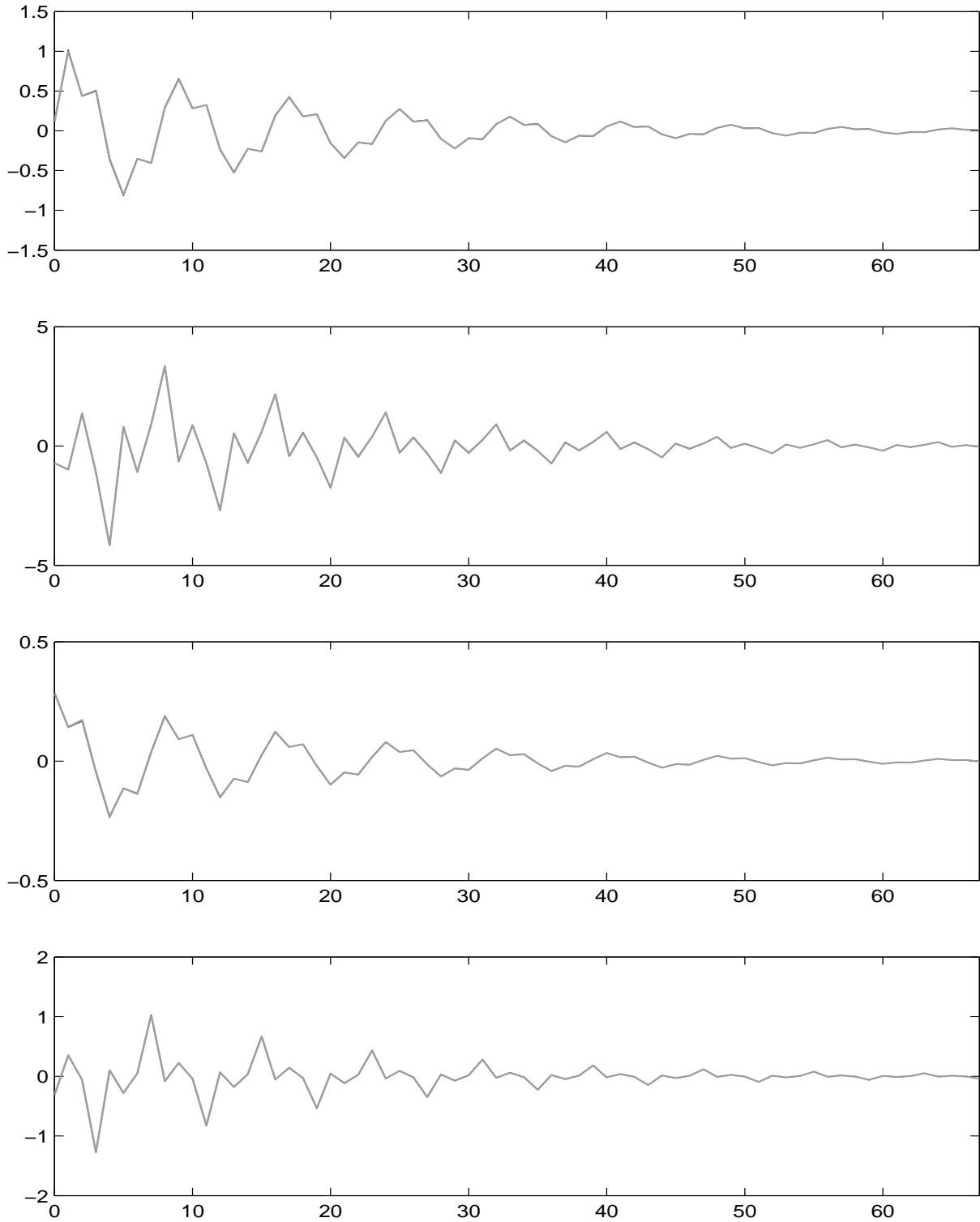


FIG. 1.14 – les valeurs nominales des RID du système (en noir) et les valeurs moyennes des RID obtenues par la première méthode (en gris) lors de cent réalisations de Monte Carlo

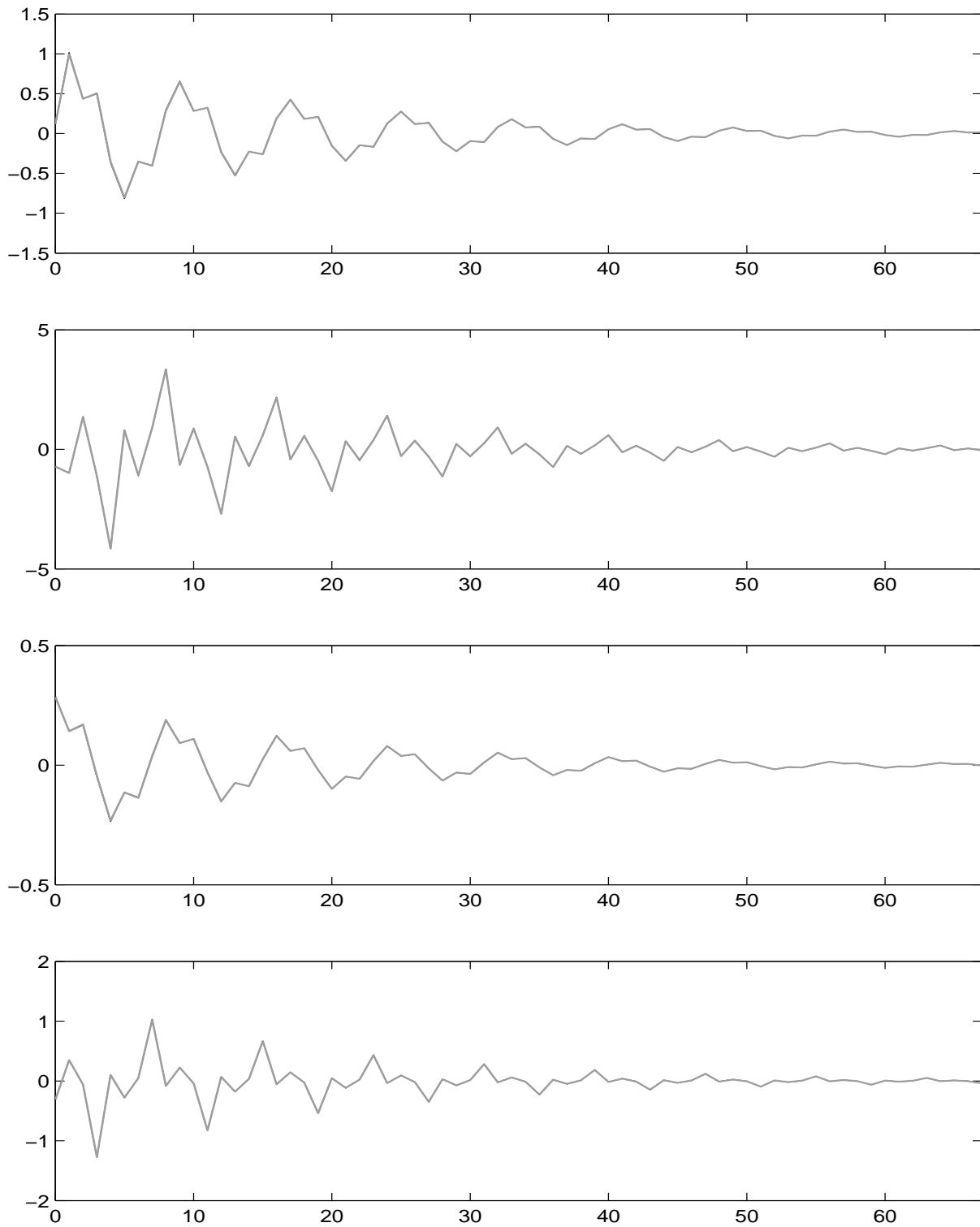


FIG. 1.15 – les valeurs nominales des RID du système (en noir) et les valeurs moyennes des RID obtenues par la deuxième méthode(en gris) lors de cent réalisations de Monte Carlo

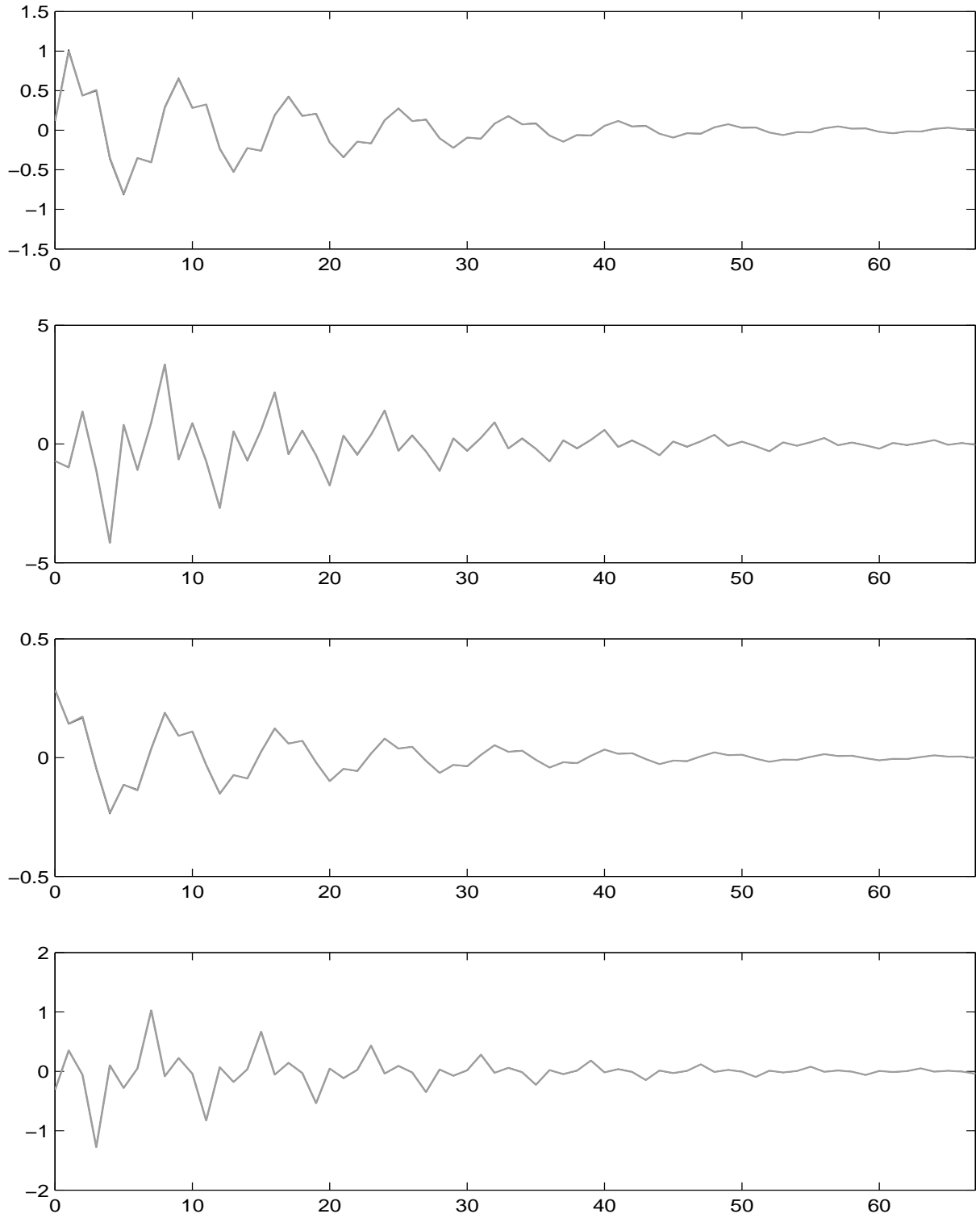


FIG. 1.16 – les valeurs nominales des RID du système (en noir) et les valeurs moyennes des RID obtenues par la troisième méthode (en gris) lors de cent réalisations de Monte Carlo



## 1.6 Conclusion

Les méthodes des sous-espaces d'identification des systèmes LTI ont fait l'objet de ce chapitre. Les méthodes classiques d'identification des sous-espaces ont été présentées dans une formulation générale. Ces méthodes classiques utilisent une estimation de la matrice d'observabilité et/ou des séquences d'état. Les matrices du système sont ensuite déterminées soit à partir de l'estimation de la matrice des séquences d'état, soit en utilisant la matrice d'observabilité et la matrice de Toeplitz inférieure.

Les méthodes d'identification des sous-espaces basées sur l'estimation des paramètres de Markov sont abordées dans les deux sections suivantes. En premier lieu, la méthode proposée par Chui et Maciejowski [17] est présentée. La méthode proposée par ces deux auteurs utilise trois partitions des données (passé, futur et avancé) au lieu de deux dans les méthodes classiques d'identification des sous-espaces, ce qui permet l'utilisation d'un instrument permettant d'annuler l'effet des bruits si la fenêtre de corrélation des bruits est inférieure à celle des données futures.

Une nouvelle approche utilisant une modélisation FIR a ensuite été proposée : ceci fait partie des contributions de cette thèse. Dans cette approche, la sortie du système est exprimée en fonction des entrées pondérées par les paramètres de Markov, et une estimation non biaisée de ces paramètres, même en présence de bruits colorés, est obtenue par la méthode des moindres carrés. Une réalisation minimale et équilibrée du système est obtenue par l'algorithme ERA. Trois méthodes utilisant cette approche sont proposées : elles tiennent compte des récents travaux de Qin et Ljung [60] portant sur l'identification des paramètres dans les méthodes des sous-espaces, ce qui permet de réduire la variance des paramètres estimés par l'utilisation d'une paramétrisation parcimonieuse. La première méthode utilise une structuration entrée/passée, alors qu'aucune structuration en données passées et futures n'est utilisée dans la deuxième méthode. Le problème d'excitation persistante est abordé dans la dernière des trois méthodes proposées, laquelle permet d'assouplir cette condition. Comme prévu, seuls les modes excités par les entrées sont estimés. Cette troisième méthode suppose que l'état initial est nul, alors que cette hypothèse n'existe pas dans les deux premières méthodes proposées. En effet, ces deux premières méthodes pondèrent l'état par les puissances élevées de la matrice d'état supposée stable, afin de la négliger.

Pour améliorer les méthodes proposées, il peut être envisagé d'intégrer la variance d'estimation dans la mise en oeuvre de l'algorithme ERA. En outre, il pourra être intéressant de tenter d'utiliser une paramétrisation parcimonieuse des matrices du système, telles les formes compagnes par exemple et ceci dans le but de réduire le nombre de paramètres estimés. Ces deux perspectives permettraient d'améliorer l'estimation des matrices du système.

# 2

## Identification des systèmes à commutations

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>2.2</b>	<b>Des HH aux MIQP et à la reconnaissance de formes</b>	<b>58</b>
2.2.1	Les HH	59
2.2.2	Utilisation d'un coefficient de relaxation	61
2.2.3	Utilisation des MIQP	62
2.2.4	Utilisation de la reconnaissance de formes	63
2.2.5	Difficultés des méthodes proposées dans la littérature	63
<b>2.3</b>	<b>Description des systèmes à commutations</b>	<b>64</b>
2.3.1	Modèle à état unique	64
2.3.2	Modèle à états locaux découplés	65
<b>2.4</b>	<b>Identification des SAC avec les techniques de détection</b>	<b>66</b>
2.4.1	Position du problème	66
2.4.2	Matrices du système	67
2.4.3	Estimation des instants de commutations par les projections	68
2.4.4	Utilisation d'une technique d'identification récursive des sous-espaces	70
2.4.5	Estimation des poids des modèles locaux	75
2.4.6	Identification des paramètres de Markov des modèles locaux	76
2.4.7	Détermination des poids des données non classifiées	77
2.4.8	Détermination des réalisations des modèles locaux	79
<b>2.5</b>	<b>Exemple d'application</b>	<b>80</b>
2.5.1	Premier calcul des poids	82
<b>2.6</b>	<b>Identification des SAC par l'utilisation d'hyperplans</b>	<b>83</b>
2.6.1	Position du problème	83
2.6.2	Reformulation du problème	83
2.6.3	Classification des données	85
2.6.4	Identification des modèles locaux	88
<b>2.7</b>	<b>Exemple d'application</b>	<b>89</b>
2.7.1	Calcul des matrices $\mathbf{n}_k$ définissant les hyperplans	89
2.7.2	Classification des données	94
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>94</b>

---

## 2.1 Introduction

Les systèmes à commutations (SAC) ont des comportements linéaires différents selon leur zone de fonctionnement. La zone de fonctionnement d'un SAC peut être alors partitionnée en sous-zones dans lesquelles le fonctionnement du SAC est donné par un modèle linéaire. Le passage d'une sous-zone à une autre se fait par "sauts". Il est donc logique de supposer que les SAC sont composés de plusieurs sous-systèmes linéaires qu'on appellera modèles locaux et qu'à un instant  $t$  le comportement de ces systèmes est généré par un modèle local qui est dit activé.

Le problème de l'identification des SAC peut être alors décomposé en trois parties :

- 1 - déterminer le nombre de modèles locaux,
- 2 - séparer les données en classes correspondant aux différents modèles locaux,
- 3 - identifier chaque modèle local.

Les étapes 1 et 2 constituent la classification de données. Dans ce document, les étapes 1 à 3 sont abordées, ce qui constitue un problème d'identification non supervisé.

Les SAC ont suscité beaucoup d'intérêt dans le domaine de la commande, et de l'analyse de la stabilité [35], [10] et du diagnostic [48]. Bien que ces différents domaines d'application ont besoin d'un modèle obtenu par identification, le domaine de l'identification des SAC reste le moins exploré. Différentes méthodes sont toutefois proposées dans la littérature pour résoudre ce problème. La différence entre ces méthodes se situe essentiellement dans la manière dont la classification est réalisée.

On notera la méthode de détermination des "hyperplans cachés" ("HH" de l'anglais "Hinging Hyperplanes") introduite par Breiman [11] qui est basée sur la détermination des hyperplans représentant les modèles locaux. Cette méthode fut améliorée successivement par Pucar et Sjöberg [58] d'une part et Bemporad *et al.* [7] d'autre part. Pucar et Sjöberg ont proposé l'utilisation d'un pas variable dans la mise en oeuvre de la méthode HH pour assurer la convergence vers un minimum local. Les améliorations apportées par Bemporad *et al.* assurent par contre la convergence vers le minimum global mais nécessitent un coût de calcul prohibitif. En effet, ces auteurs ont décomposé le problème de détermination des hyperplans en un problème d'optimisation sous contraintes inégalités et ont suggéré l'utilisation de la programmation quadratique en nombres entiers ("MIQP" de l'anglais "Mixed Integer Quadratic Program") pour assurer la convergence vers l'optimum global.

Ferrari-Trecate *et al.* [22] ont, quant à eux, suggéré l'utilisation des techniques de reconnaissance de formes avec la détermination du centre et la variance des ellipsoïdes contenant les données. Le calcul du centre et la variance des ellipsoïdes se fait de manière itérative et nécessite la connaissance du nombre de modèles locaux et des conditions initiales utilisées (centres et variances initiaux). Si ces conditions initiales sont mal choisies alors la convergence de la méthode n'est pas assurée. En outre, cette méthode peut subdiviser les données d'un même modèle local en plusieurs classes avec le risque d'obtenir des classes comportant un nombre insuffisant de données pour l'estimation des paramètres. Les méthodes HH et la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* ne prennent pas en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans le SAC, ce qui peut engendrer une surparamétrisation (ou sous-paramétrisation) des modèles locaux et entraîner des estimations non consistantes.

Deux méthodes d'identification sont proposées dans ce chapitre pour remédier aux problèmes rencontrés dans les méthodes existant dans la littérature. Elles commencent par la classification des mesures recueillies. Cette classification est basée soit sur des techniques de détection de rupture de modèle, soit sur la distribution des données dans l'espace des sorties et des régresseurs. Connaissant les classes, les modèles locaux sont ensuite estimés, la procédure d'estimation des paramètres des modèles locaux étant identique dans les deux méthodes proposées. Dans cette

thèse, les SAC sont modélisés comme étant une somme pondérée de modèles locaux complètement découplés, ce qui permet de prendre en compte les discontinuités de l'état et donc les changements d'ordre du SAC.

La première méthode proposée est basée sur l'estimation des instants de commutations à l'aide de techniques de détection de rupture de modèle, suivie de la classification des données et de l'identification des modèles locaux. Deux techniques de détection de changement de modèle sont exposées : la première approxime la sortie du modèle à l'aide d'un FIR, puis réalise une projection orthogonalement à l'espace ligne des entrées de manière à n'être sensible qu'aux bruits et aux changements dans la dynamique du système, tandis que la deuxième utilise une technique d'identification récursive des sous-espaces basée sur une estimation paramétrique. Les instants de commutations étant estimés par l'une des deux méthodes de détection de rupture proposées, le poids de chaque modèle local est calculé. La connaissance des poids permet l'estimation des paramètres de Markov et les modèles locaux "identiques" sont fusionnés, ce qui entraîne un nouveau calcul des poids. Les paramètres de Markov des modèles locaux sont estimés de nouveau à partir des nouveaux poids, puis on cherche à fusionner d'éventuels modèles locaux "identiques". Cette procédure de fusion et d'estimation des paramètres de Markov est répétée jusqu'à ce que la valeur des poids des modèles locaux ne change plus. Les paramètres de Markov estimés permettent d'obtenir une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux grâce à l'algorithme ERA. Cette première méthode prend en compte les retards à la détection inhérents aux méthodes de détection de rupture de modèle utilisées.

La deuxième méthode d'identification proposée dans ce chapitre se base sur la répartition des données dans "l'espace des données" (ou espace des sorties et des régresseurs), ces données étant formées par une agrégation des entrées et sorties. Les données générées par un modèle local appartiennent toutes à un même hyperplan. La méthode proposée détermine alors les hyperplans, et regroupe les données appartenant au même hyperplan. Le nombre d'hyperplans correspond au nombre de modèles locaux et les différents groupes de données correspondent aux différentes classes. Connaissant les données appartenant à chaque modèle local, le poids des modèles locaux est calculé et une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux est obtenue en suivant la même procédure que dans la première méthode.

## 2.2 Des HH aux MIQP et à la reconnaissance de formes

L'objectif de cette section est de montrer le principe des méthodes existant dans la littérature et de mettre en évidence les problèmes rencontrés dans ces méthodes (problèmes qui vont être résolus grâce aux deux méthodes proposées dans les sections suivantes).

Les méthodes d'identification nommées HH proposées par Breiman sont tout d'abord présentées. Les améliorations apportées par Pucar et Sjöberg [58] pour assurer la convergence de cette méthode vers un minimum local sont aussi décrites, de même que l'utilisation de la programmation quadratique en nombres entiers (MIQP) proposée par Bemporad *et al.* [7] pour assurer la convergence vers l'optimum global. La technique de classification proposée par Ferrari-Trecate *et al.* [22] est brièvement présentée. Les difficultés rencontrées dans ces deux méthodes sont évoquées, notamment, dans la méthode de Ferrari-Trecate *et al.*, les problèmes d'initialisation, de la connaissance du nombre de classes et du nombre d'éléments dans les classes, et, dans les méthodes HH, le coût de calculs exorbitant.

### 2.2.1 Les HH

Breiman [11] a proposé la méthode HH basée sur la détermination des hyperplans représentant les modèles locaux linéaires composant le système. L'identification du système revient à déterminer les hyperplans : chaque hyperplan correspondant à un modèle local.

La méthode HH se base sur une détermination des hyperplans deux à deux ; la méthode suppose que le système est composé de deux modèles locaux, elle les identifie puis rajoute deux autres hyperplans si c'est nécessaire, cette procédure est répétée jusqu'à convergence.

Intéressons-nous tout d'abord à la détermination des hyperplans dans le cas où le SAC est composé de deux modèles locaux. L'équation proposée par Breiman, dans ce cas, est de la forme :

$$y_k = \max(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k) \text{ ou } y_k = \min(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k), k = 1, \dots, q \quad (2.1)$$

où  $\theta^+$  et  $\theta^-$  sont les coefficients des deux hyperplans,  $q$  représente le nombre de données,  $\mathbf{x}_k$  est le vecteur de régression et les équations des deux hyperplans sont données par :

$$f_k^- = \theta^- \mathbf{x}_k, f_k^+ = \theta^+ \mathbf{x}_k \quad (2.2)$$

L'intersection des deux hyperplans est déterminée par l'équation suivante :

$$\Delta \mathbf{x}_k = 0 \text{ où } \Delta = \theta^- - \theta^+ \quad (2.3)$$

L'équation (2.1) implique que les données générées par deux modèles locaux sont limitées aux demi-hyperplans délimités par leur intersection. Un exemple en dimension trois est représenté sur les figures (2.1) et (2.2) : la figure (2.1) représente les hyperplans définis par l'équation  $y_k = \max(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k)$  et la figure (2.2) les hyperplans donnés par l'équation  $y_k = \min(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k)$ . On remarque sur la figure (2.1) que la sortie du système correspond bien à la plus grande valeur entre  $\theta^+ \mathbf{x}_k$  et  $\theta^- \mathbf{x}_k$  (les demi-hyperplans en gris), les demi-hyperplans correspondant à la plus petite valeur de  $\theta^+ \mathbf{x}_k$  et  $\theta^- \mathbf{x}_k$  sont ceux matérialisés en pointillés.

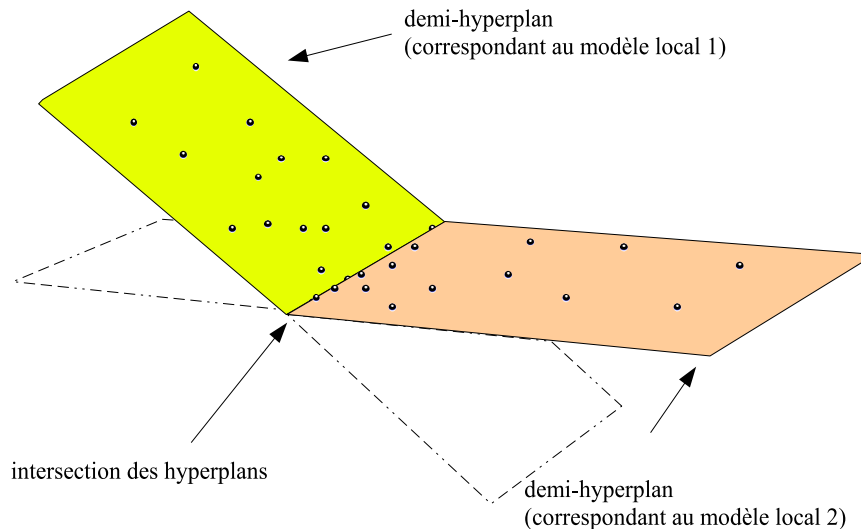


FIG. 2.1 – représentation en dimension trois des hyperplans définis par l'équation :  $y_k = \max(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k)$

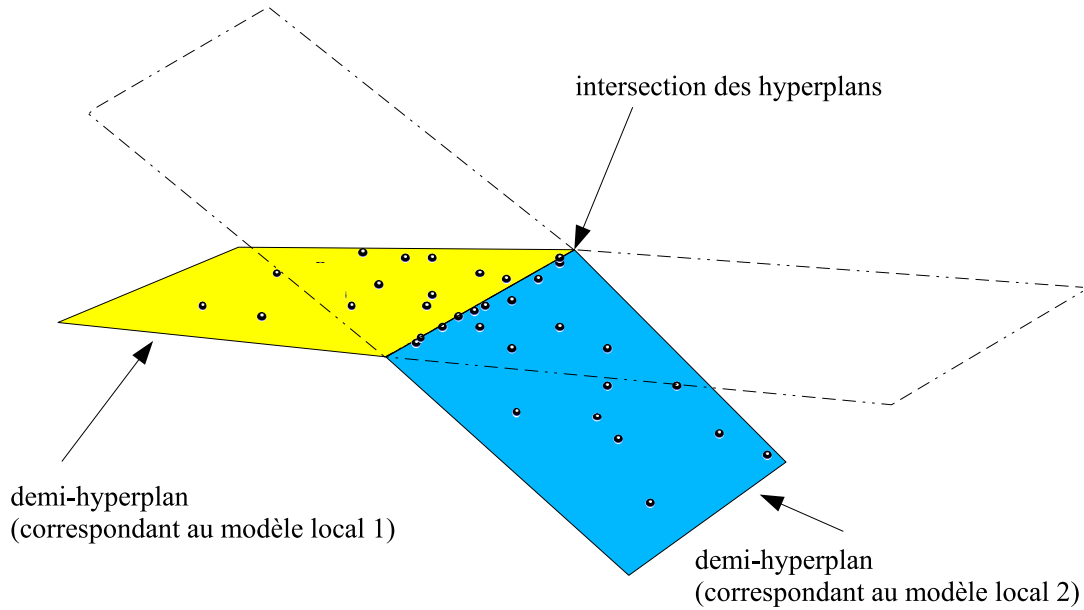


FIG. 2.2 – représentation en dimension trois des hyperplans définies par l'équation :  $y_k = \min(\theta^+ \mathbf{x}_k, \theta^- \mathbf{x}_k)$

On pourra identifier aisément les deux hyperplans si on connaît leur intersection. Puisque les données sont contenues dans deux demi-hyperplans ayant pour intersection :

$$\Delta \mathbf{x}_k = 0 \text{ où } \Delta = \theta^- - \theta^+ \quad (2.4)$$

il suffit de scinder les données en deux sous-ensembles complémentaires  $E_+$  et  $E_-$  :

$$E_+ = \{\mathbf{x}_k : \Delta \mathbf{x}_k \geq 0\}, \quad E_- = \{\mathbf{x}_k : \Delta \mathbf{x}_k < 0\} \text{ avec } \Delta = \theta^- - \theta^+ \quad (2.5)$$

et d'estimer par la méthode des moindres carrés, les coefficients  $\theta^-$  et  $\theta^+$  des hyperplans correspondant à ces deux sous-ensembles.

### 2.2.1.1 Algorithme de détermination des hyperplans (HFA "Hinge-Finding Algorithm")

Cet algorithme commence par un découpage arbitraire des données en deux sous-ensembles complémentaires  $E_+$  et  $E_-$ , en d'autres termes on fixe une frontière  $\Delta$  arbitraire :

$$\Delta \mathbf{x}_k = 0 \text{ où } \Delta = \theta^- - \theta^+ \quad (2.6)$$

Après cette initialisation, l'estimation des coefficients des deux hyperplans se fait en deux étapes :

- 1- on estime les coefficients  $\hat{\theta}^+$  de l'hyperplan correspondant aux données appartenant à  $E_+$

par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\theta}^+ = \sum_{\mathbf{x}_k \in E_+} y_k \mathbf{x}_k^T \left( \sum_{\mathbf{x}_k \in E_+} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \right)^{-1} \quad (2.7)$$

On procède de manière semblable avec les données appartenant à  $E_-$  :

$$\hat{\theta}^- = \sum_{\mathbf{x}_k \in E_-} y_k \mathbf{x}_k^T \left( \sum_{\mathbf{x}_k \in E_-} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \right)^{-1} \quad (2.8)$$

2- on réajuste les deux sous ensembles  $E_+$  et  $E_-$  en utilisant l'équation de classification (2.5).

3- on retourne à l'étape 1 jusqu'à la convergence des estimations des paramètres  $\hat{\theta}^-$  et  $\hat{\theta}^+$ .

Cet algorithme peut être utilisé pour déterminer plus de deux modèles locaux, comme cela est montré dans le paragraphe suivant.

### 2.2.1.2 Détermination de plus de deux hyperplans

S'il existe plus de deux hyperplans, la méthode HFA peut être utilisée de manière itérative. La détermination peut se faire de façon suivante :

1- estimer deux hyperplans expliquant la sortie du modèle par l'algorithme HFA.

2- si la performance du modèle obtenu n'est pas satisfaisante, calculer une nouvelle sortie  $\tilde{y}_k$  qui est la différence entre la sortie du système et les prédictions des modèles définis par les hyperplans déterminés aux étapes précédentes.

$$\tilde{y}_k = y_k - \sum_{r=1}^{h_0} \max(\theta_r^+ \mathbf{x}_k, \theta_r^- \mathbf{x}_k) \quad (2.9)$$

$h_0$  étant le nombre de couples d'hyperplans déjà déterminés.

3- aller à l'étape 1 tant que la performance du système n'est pas satisfaisante.

On détermine ainsi un nombre pair de modèles locaux composant le SAC. Malheureusement la convergence de l'algorithme proposé par Breiman dépend du découpage initial des données entre les deux hyperplans. Les travaux de Pucar et Sjöberg ont apporté une amélioration assurant la convergence de l'algorithme vers un minimum local.

### 2.2.2 Utilisation d'un coefficient de relaxation

Pucar et Sjöberg [58] ont démontré que l'algorithme HFA est un cas particulier de l'algorithme de Newton. Ils ont proposé alors d'utiliser un coefficient de relaxation afin d'assurer la convergence de l'algorithme vers un minimum local.

Soit  $\theta_k$  la valeur des coefficients des hyperplans obtenus dans l'algorithme HFA à la  $k^{\text{ème}}$  itération :

$$\theta_k = \begin{pmatrix} \theta_k^+ \\ \theta_k^- \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.2.1.1, l'algorithme HFA remet à jour les paramètres des hyperplans en remplaçant les anciennes valeurs ( $\theta_k^+$  et  $\theta_k^-$ ) de ces coefficients par des nouvelles ( $\hat{\theta}_{k+1}^+$  et  $\hat{\theta}_{k+1}^-$ ) estimées à partir du nouveau partitionnement des données.



Le vecteur de paramètres  $\theta_k$  est ainsi remis à jour en remplaçant son ancienne valeur par une nouvelle  $\hat{\theta}_{k+1}$  estimée à partir du nouveau partitionnement des données :

$$\theta_{k+1} = \hat{\theta}_{k+1} \quad (2.11)$$

Pucar et Sjöberg ont démontré que l'algorithme de Newton propose une actualisation des paramètres du système donnée par l'équation suivante :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + (\hat{\theta}_{k+1} - \theta_k) \quad (2.12)$$

ce qui est identique à la mise à jour proposée par Breiman (2.11).

Les deux auteurs ont proposé d'introduire un coefficient de relaxation  $\mu$  dans l'équation précédente :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \mu(\hat{\theta}_{k+1} - \theta_k) \quad (2.13)$$

Ils proposent de choisir  $\mu$  ( $\mu = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ ) de manière à assurer la décroissance du critère  $J$  ( $J(\theta_{k+1}^+, \theta_{k+1}^-) < J(\theta_k^+, \theta_k^-)$ ) défini ci-dessous :

$$J(\theta_{k+1}^+, \theta_{k+1}^-) = \frac{1}{2q} \sum_{t=1}^q (y_t - \max(\theta_{t+1}^- \mathbf{x}_t, \theta_{t+1}^+ \mathbf{x}_t))^2, \quad q \text{ étant le nombre de mesures utilisées} \quad (2.14)$$

ce qui assure la convergence de l'algorithme vers un minimum local.

Une méthode de résolution des HFA par la programmation quadratique en nombres entiers (MIQP) est proposée par Bemporad et ses coauteurs pour assurer la convergence vers un minimum global. Cette résolution est décrite dans le paragraphe qui suit.

### 2.2.3 Utilisation des MIQP

Bemporad *et al.* [7] ont proposé une résolution du problème de la détermination des hyperplans avec l'utilisation de la programmation quadratique en nombres entiers (MIQP) pour assurer la convergence vers l'optimum global. La méthode élaborée par ces auteurs peut être utilisée dans le cas où il n'y pas de données sur l'intersection des hyperplans (ce qui n'est pas le cas des méthodes précédentes). Le coût important de calcul restreint l'utilisation de cette méthode à un nombre faible de données.

Pour déterminer les hyperplans correspondant aux modèles locaux, Bemporad *et al.* ont suggéré de résoudre l'équation suivante :

$$\min_{\theta_s, \Lambda_s} \frac{1}{2q} \sum_{k=1}^q \left( \sum_{s=1}^{h_0} \|y_k - \theta_s \mathbf{x}_k\| p_s(\mathbf{x}_k) \right) \quad (2.15)$$

sous les contraintes  $p_s(\mathbf{x}_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda_s \mathbf{x}_k \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où  $\|\cdot\|$  représente la norme 2.

Cette équation est résolue par la MIQP qui assure la convergence vers un optimum global. Ce problème peut être aussi résolu par la programmation linéaire en nombres entiers (MILP) ; dans ce cas la norme utilisée dans l'équation (2.15) est la valeur absolue.

Il est bien connu que la complexité des algorithmes MIQP croît exponentiellement en fonction du nombre de données et de l'ordre du système. Les auteurs eux-mêmes reconnaissent que ce pro-

blème limite l'utilisation de la méthode aux échantillons de tailles très faibles. Ils recommandent par exemple, si l'on dispose de 100 données, de les subdiviser en 10 groupes de 10 données avant de les classifier [7].

#### 2.2.4 Utilisation de la reconnaissance de formes

Ferrari-Trecate *et al.* [22] ont proposé une méthode d'identification basée sur les techniques de classification. Cette méthode est fondée sur la recherche des centres et des variances des différentes classes. Elle suppose connu le nombre de classes et fixe les centres et les matrices de variance initiales. Elle suppose en outre que soit connu le nombre de données contenues dans chaque classe.

La technique proposée par Ferrari-Trecate *et al.* remet à jour de manière itérative les centres et les matrices de variance, cette mise à jour pouvant être réalisée par n'importe quel algorithme de classification. Il est bien connu que la convergence de ces algorithmes dépend des conditions initiales utilisées. En outre, cette méthode peut subdiviser les données provenant d'un même modèle local en plusieurs classes.

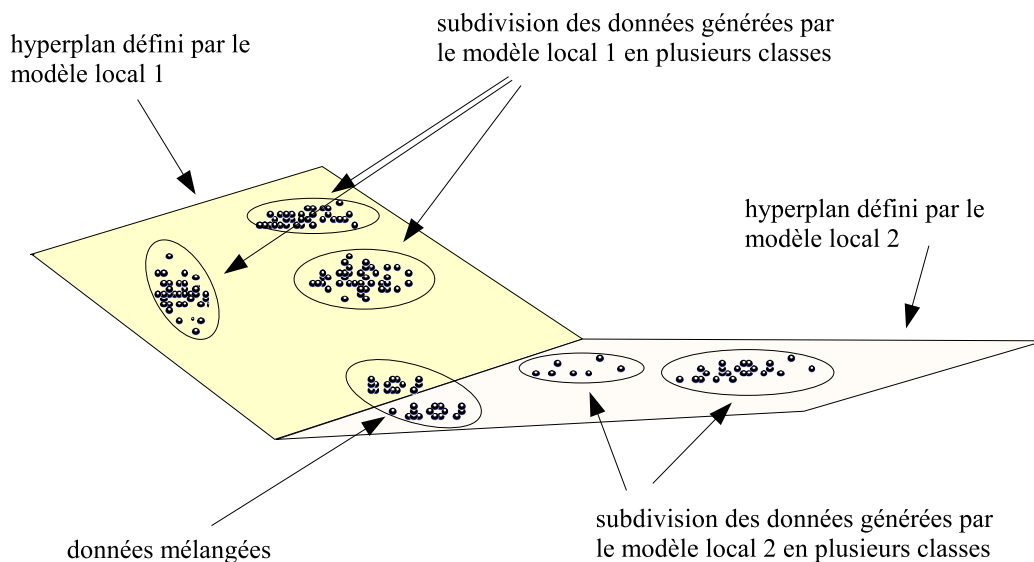


FIG. 2.3 – illustration en dimension trois de la classification basée sur la reconnaissance de formes

On peut alors obtenir des classes comportant un nombre insuffisant de données, ce qui entraînerait une estimation non consistante des centres et des dispersions de celles-ci. La méthode de classification proposée par Ferrari-Trecate *et al.* est illustrée sur la figure (figure (2.3)).

#### 2.2.5 Difficultés des méthodes proposées dans la littérature

Les méthodes HH (modifiées par Bemporad *et al.* [7]) identifient le SAC au prix d'un coût de calcul prohibitif, limitant leur utilisation à un nombre très faible de données. La méthode

proposée par Ferrari-Trecate *et al.*, basée sur la reconnaissance de formes, converge si le nombre de classes et le nombre d'éléments contenus dans ces classes sont connus et si l'on dispose de bonnes conditions initiales. Malheureusement, cette méthode peut découper en plusieurs classes les données issues d'un même modèle local, ce qui peut engendrer des classes avec des nombres insuffisants de données entraînant des estimations non consistantes des paramètres des modèles locaux correspondants.

Il peut arriver que les commutations entraînent un changement d'ordre du SAC, mais les méthodes HH et la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* ne tiennent pas compte de ce changement. Ces méthodes souffriront dans ce cas du problème de surparamétrisation (si l'ordre du système diminue) qui peut entraîner des estimations non consistantes, ou au contraire de pertes d'informations (si l'ordre du système augmente). Deux nouvelles méthodes d'identification des SAC sont alors proposées pour prendre en compte ce changement d'ordre. Ces méthodes ne souffrent pas de problème d'initialisation contrairement à la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.*. Elles ne supposent pas connu le nombre de modèles ; de plus, le nombre de calculs nécessaires à la mise en oeuvre de ces méthodes est raisonnable. Les données générées par un modèle local sont regroupées dans une seule classe.

Avant d'exposer les méthodes d'identification proposées dans ce chapitre, nous allons définir la représentation d'état utilisée.

## 2.3 Description des systèmes à commutations

Deux modélisations des SAC existent dans la littérature. La première considère le système à commutations comme étant une agrégation de modèles linéaires locaux possédant un état unique [62]. En revanche, la deuxième représentation suppose que le SAC est composé de modèles linéaires locaux ayant des états découplés [55]. Ces deux modélisations sont décrites dans les paragraphes suivants.

### 2.3.1 Modèle à état unique

Cette modélisation suppose que le SAC est composé de modèles locaux non découplés ayant un vecteur d'état unique  $x_k \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_s x_k + B_s u_k + v_k, \\ y_k &= C_s x_k + D_s u_k + w_k, \end{aligned} \quad s = 1, \dots, h \quad (2.16)$$

L'équation précédente peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sum_{s=1}^h p_{s,k} (A_s x_k + B_s u_k) + v_k \\ y_k &= \sum_{s=1}^h p_{s,k} (C_s x_k + D_s u_k) + w_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

où les poids  $p_{s,k}$  vérifient :

$$p_{s,k} \in \{0, 1\} \text{ et } \sum_{s=1}^h p_{s,k} = 1, \forall k \quad (2.18)$$

où :

- les matrices  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  et  $D_s$  représentent une réalisation du modèle local  $s$  ( $s = 1, \dots, h$ ),
- $p_{s,k}$  est le poids correspondant au modèle local  $s$  à l'instant  $k$ ,
- $y_k \in \mathbb{R}^m$  est la sortie du SAC,

-  $v_k \in \mathbb{R}^n$  et  $w_k \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement les bruits d'état et de sortie du modèle local  $s$ , supposés blancs gaussiens et indépendants des entrées.

On notera qu'ici, il n'y a pas d'états locaux mais un état global unique  $x_k$ . Cette modélisation comporte certains inconvénients :

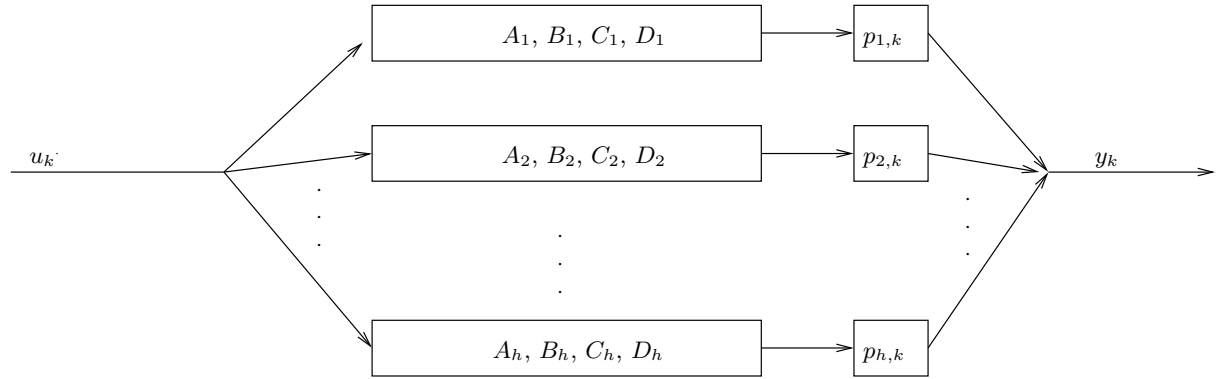
- elle suppose un état transitoire lors du changement de modèle, cet état transitoire étant engendré par le produit des matrices du modèle local précédant la commutation et le modèle local suivant la commutation,

- elle ne permet pas de prendre en compte les sauts dans l'état du système, elle ne prend donc pas en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir,

- elle ne permet pas de modéliser les systèmes commutant rapidement : on n'observera dans ce cas que des états transitoires.

Pour toutes ces raisons, une nouvelle modélisation est proposée dans la suite et adoptée dans ce chapitre. Cette modélisation prend en compte les points énumérés plus haut.

### 2.3.2 Modèle à états locaux découplés



$$\text{avec } p_{s,k} \in \{0, 1\} \quad \text{et } \sum_{s=1}^h p_{s,k} = 1, \forall k$$

FIG. 2.4 – modélisation d'un SAC avec des modèles locaux découplés

La représentation d'état proposée ici suppose que le SAC est composé de modèles locaux découplés et admet des vecteurs d'états  $x_{s,k}$  indépendants :

$$\begin{aligned} x_{s,k+1} &= A_s x_{s,k} + B_s u_k + v_{s,k} \\ y_{s,k} &= C_s x_{s,k} + D_s u_k + w_{s,k} \end{aligned} \quad (2.19)$$

et la sortie du SAC est une somme pondérée des sorties locales :

$$y_k = \sum_{s=1}^h p_{s,k} y_{s,k}, \text{ avec } \sum_{s=1}^h p_{s,k} = 1, \forall k \quad (2.20)$$

où :

-  $p_{s,k} \in \{0, 1\}$  est le poids (ou fonction poids) correspondant au modèle local  $s$  au temps  $k$ ,

- $x_{s,k} \in \mathbb{R}^{n_s}$  est l'état du modèle local  $s$ ,
- $y_{s,k} \in \mathbb{R}^m$  est la sortie du modèle local  $s$ ,
- $y_k \in \mathbb{R}^m$  est la sortie du SAC
- $v_{s,k} \in \mathbb{R}^{n_s}$  et  $w_{s,k} \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement les bruits d'état et de sortie du modèle local  $s$ , ces bruits sont blancs et indépendants des entrées.

La particularité de cette modélisation est qu'elle prend facilement en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans la dimension du vecteur d'état. Elle permet en outre d'identifier les SAC commutant rapidement puisqu'aucune transition n'est supposée lors des commutations.

## 2.4 Identification des SAC avec les techniques de détection

Soit le SAC modélisé par des modèles locaux complètement découplés (Eq. (2.19) et (2.20)). Le problème d'identification des SAC peut être subdivisé en deux tâches :

- déterminer les poids  $p_{s,k}$ , c'est-à-dire réaliser la classification,
- identifier les modèles locaux.

Ainsi cette section se subdivise en deux parties, la première proposant une méthode d'estimation des poids des modèles locaux et la seconde se basant sur la connaissance des poids pour identifier les modèles locaux.

Le poids des modèles locaux est calculé sur la base de la connaissance des instants de commutations. Deux méthodes d'estimation de ces instants de commutations seront proposées. Dans la première, les sorties approchées par un FIR sont projetées orthogonalement aux entrées ce qui génère un résidu dépendant des bruits et sensible aux ruptures de modèles [56]. La deuxième méthode utilise une technique d'identification récursive des sous-espaces pour estimer les instants de commutations [49]. Pour que ces techniques de détection de changement de modèle soient applicables, il faut que la fenêtre de temps durant laquelle les modèles locaux sont actifs soit supérieure à une durée minimale  $\tau$ . Ce temps minimum d'activation est appelé "temps de séjour".

Connaissant les instants de commutations, le calcul des poids se fait de la manière suivante : si un modèle est actif, alors son poids est égal à 1 et le poids des autres modèles locaux est fixé à zéro. L'identification des modèles locaux se fait dans l'une ou l'autre des méthodes par une technique des sous-espaces. Cette méthode est basée sur l'estimation des paramètres de Markov et l'utilisation de l'algorithme ERA [36] pour déterminer une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux.

Les méthodes proposées dans cette section ont fait l'objet des publications suivantes : [55], [61] et [56].

Avant d'exposer la technique d'identification proprement dite, le problème d'identification que l'on cherche à résoudre est présenté dans le paragraphe suivante.

### 2.4.1 Position du problème

Soit le SAC modélisé par les équations (2.19) et (2.20) dans lequel on suppose que chaque modèle local est stable et le temps de séjour (voir remarque (2.1))  $\tau_s$  ( $s = 1, \dots, h$ ) de chaque modèle local est supérieur à  $\tau$ .

Notre objectif est de déterminer les poids  $p_{s,k}$  (réaliser la classification), l'ordre et une réalisation ( $T^{-1}A_sT$ ,  $T^{-1}B_s$ ,  $C_sT$ ,  $D_s$ ) des  $h$  modèles locaux, avec  $T$  une matrice inversible (remarque 1.1 du chapitre 2).

La résolution de ce problème se fera en deux étapes :

- la première consiste à estimer les instants de commutations par les techniques de détection de rupture de modèle,
- la seconde se base sur la connaissance des instants de commutations pour classifier les données et identifier les modèles locaux.

**Remarque 2.1.**

*Le temps de séjour est la largeur minimale de la fenêtre de temps sur laquelle les modèles locaux restent actifs.*

**2.4.2 Matrices du système**

On utilisera dans la définition des matrices du système des entiers  $i$  et  $f$  vérifiant la relation :

$$mi < f \tag{2.21}$$

La condition (2.21) implique que les matrices des données définies dans la suite ont plus de colonnes que de lignes.

**Remarque 2.2.**

*L'entier  $f$  est une notation générique. Il prend la valeur  $L$  dans la technique de détection de rupture de modèle où il représente la largeur de la fenêtre glissante et la valeur  $j$  dans la méthode d'identification des modèles locaux, où il représente le nombre de "mesures pondérées" utilisées dans l'identification des modèles locaux.*

La matrice de sortie  $\underline{y}_k$  du SAC est définie par :

$$\underline{y}_k = (y_{k-f+1} \ y_{k-f+2} \ \dots \ y_k) \in \mathbb{R}^{\ell \times f} \tag{2.22}$$

Une définition similaire est donnée pour la matrice de sortie  $\underline{y}_{s,k} \in \mathbb{R}^{\ell \times f}$  du modèle local  $s$  et pour la matrice des bruits de mesure  $\underline{w}_{s,k} \in \mathbb{R}^{\ell \times f}$  du même modèle local.

La matrice des séquences d'état du  $s^{i\text{ème}}$  modèle local  $X_{s,k}$  et la matrice des poids  $P_{s,k}$  du même modèle local sont définies par :

$$\begin{aligned} X_{s,k} &= (x_{k+f+1} \ x_{k-f+2} \ \dots \ x_k) \in \mathbb{R}^{n_s \times f} \\ P_{s,k} &= \begin{pmatrix} p_{s,k-f+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{s,k-f+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{s,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{f \times f} \end{aligned} \tag{2.23}$$

On rappelle ici la définition de la matrice de Hankel d'entrée  $U_k$  :

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{k-f-i+2} & u_{k-f-i+3} & \dots & u_{k-i+1} \\ u_{k-f-i+3} & u_{k-f-i+4} & \dots & u_{k-i+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{k-f+1} & u_{k-f+2} & \dots & u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times f} \tag{2.24}$$

Une définition similaire est donnée pour la matrice de Hankel des bruits d'état  $V_k \in \mathbb{R}^{ni \times f}$ .

Les matrices d'observabilité  $\Gamma_{s,i}$  et de commandabilité  $\mathcal{C}_{s,i}$  du  $s^{i\text{ème}}$  modèle local sont définies par :

$$\Gamma_{s,i} = \begin{pmatrix} C_s \\ C_s A_s \\ \vdots \\ C_s A_s^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times n_s} \quad (2.25)$$

$$\mathcal{C}_{s,i} = (B_s \ A_s B_s \ \dots \ A_s^{i-1} B_s) \in \mathbb{R}^{n_s \times m_i}$$

Les matrices des paramètres de Markov de la partie déterministe du système  $H_{s,i}$  et des bruits d'état  $H_{s,i}^v$  sont définies par :

$$H_{s,i} = (C_s A_s^{i-2} B_s \ C_s A_s^{i-3} B_s \ \dots \ C_s B_s \ D_s) \in \mathbb{R}^{\ell \times m_i} \quad (2.26)$$

$$H_{s,i}^v = (C_s A_s^{i-2} \ C_s A_s^{i-3} \ \dots \ C_s \ 0) \in \mathbb{R}^{\ell \times n_s i}$$

### 2.4.3 Estimation des instants de commutations par les projections

L'objectif dans cette partie est d'estimer les instants de commutations du SAC. Pour estimer les instants de commutations, une technique de détection de rupture de modèle basée sur les projections orthogonales est établie. Une relation matricielle exprimant les sorties en fonction des entrées et des bruits à l'aide d'une modélisation FIR est établie, puis l'influence des entrées est annulée par une projection sur l'espace orthogonal aux entrées. Cette projection permet d'obtenir une matrice dépendant uniquement des bruits gaussiens et sensible aux changements dans la dynamique du système. La dernière colonne de cette matrice sera sélectionnée comme vecteur de résidu. Ce vecteur de résidu est alors évalué sur une fenêtre glissante et un test de khi-deux est mis en oeuvre pour détecter les ruptures de modèles (qui correspondent aux instants de commutations).

Ce paragraphe commence par la présentation de la relation matricielle entrée-sortie qui servira de base à la méthode de détection, puis la matrice de résidu est déterminée. Les conditions d'application de cette méthode de détection sont ensuite précisées. Finalement, la méthode de détection proprement dite est établie et son application à l'estimation des instants de commutations est réalisée.

#### 2.4.3.1 Relation matricielle d'entrée-sortie

Commençons par énoncer une remarque qui nous permettra d'obtenir la relation matricielle d'entrée-sortie.

#### Remarque 2.3.

*Si le modèle local  $s$  est actif sur une fenêtre  $[t-r, t]$  alors on a l'égalité :*

$$y_k = y_{s,k}, \quad \forall k \in [t-r, t] \quad (2.27)$$

Le modèle local  $s$  étant actif sur une fenêtre  $[k-t, k]$  ( $t \geq \tau > i$ , où  $\tau$  est le temps de séjour), on peut donc écrire :

$$y_{s,k} = C_s A_s^{i-1} x_{s,k-i} + C_s A_s^{i-2} B_s u_{k-i} + \dots + C_s B_s u_{k-1} + D_s u_k + C_s A_s^{i-2} v_{k-i} + \dots + C_s v_{k-1} + w_{s,k} \quad (2.28)$$

La stabilité du système permet de négliger le terme  $C_s A_s^{i-1} x_{s,k-i}$  si  $i$  est suffisamment grand, en l'occurrence si la condition suivante est vérifiée :

$$\|C_s A_s^{i-1} x_{s,k-i}\| \ll \min(\sqrt{\text{variance}(w_{s,k})}) \quad (2.29)$$

L'équation (2.28) devient :

$$y_{s,k} \simeq C_s A_s^{i-2} B_s u_{k-i} + \dots + C_s B_s u_{k-1} + D_s u_k + C_s A_s^{i-2} v_{k-i} + \dots + C_s v_{k-1} + w_{s,k} \quad (2.30)$$

En supposant  $\tau > i + L$  ( $\tau$  temps de séjour,  $L$  est la largeur de la fenêtre glissante qui va être utilisée dans la méthode de détection), on obtient :

$$\underline{y}_{s,k} \simeq H_{s,i} U_k + H_{s,i}^v V_k + \underline{w}_{s,k} \quad (2.31)$$

où la matrice  $\underline{y}_{s,k}$  est définie par l'équation (2.22) avec  $f = L$ . Si le modèle local est actif sur une fenêtre  $[k-t, k]$  ( $t \geq \tau > i + L$ ) alors la remarque (2.3) nous permet d'avoir l'égalité :

$$\underline{y}_{s,k} = \underline{y}_k \quad (2.32)$$

### 2.4.3.2 Génération de résidus

L'objectif est de supprimer l'influence des entrées dans l'équation (2.31) et d'obtenir ainsi une matrice de résidus dépendante des bruits. Pour atteindre ce but, cette équation est projetée orthogonalement aux entrées :

$$\underline{y}_{s,k} \Pi_{U_k^\perp} \simeq H_{s,i}^v V_k \Pi_{U_k^\perp} + \underline{w}_{s,k} \Pi_{U_k^\perp} \quad (2.33)$$

La dernière colonne de cette matrice est sélectionnée comme vecteur de résidu :

$$\varepsilon_{s,k} = \underline{y}_{s,k} \Pi_{U_k^\perp} Z, \text{ avec } Z = (0 \dots 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1} \quad (2.34)$$

Le vecteur  $\varepsilon_{s,k}$  est gaussien de moyenne nulle, puisqu'il est une combinaison linéaire de matrices gaussiennes  $V_k$  et  $\underline{w}_{s,k}$  de moyenne nulle.

Analysons dans les paragraphes qui suivent la condition d'existence et la sensibilité du vecteur résidu.

### 2.4.3.3 Sensibilité du vecteur résidu aux ruptures de modèle

L'expression du vecteur  $\varepsilon_{s,k}$  est donnée lors du changement de modèle et il est démontré qu'il n'est pas de moyenne nulle.

On adoptera la notation matlab  $Q(:, g)$  pour désigner la  $g^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $Q$ .

Voici l'expression de la matrice de sortie  $\underline{y}_{s,k}$  lors du changement de modèle (passage du modèle  $s$  au modèle  $s+1$ ). On supposera que la commutation est intervenue à l'instant  $k-r+1$  :

$$\underline{y}_{s,k} \simeq \sum_{t=k-L}^{k-r} H_{s,i} \bar{U}_k(t) + \sum_{t=k-r+1}^k H_{s+1,i} \bar{U}_k(t) + \zeta_{k,s} \quad (2.35)$$

où :

- $\zeta_{k,s}$  ( $\zeta_{k,s} = H_{s,i}^v V_k + \underline{w}_{s,k}$ ) est la matrice des bruits de moyenne nulle,
- $H_{s,i}$  et  $H_{s+1,i}$  sont les matrices de Hankel des modèles  $s$  et  $s+1$ ,



-  $U_k(t)$  est une matrice qui a pour  $t^{\text{ième}}$  colonne  $U_k(:,t)$  et des colonnes de zéros partout ailleurs :

$$\bar{U}_k(t) = (0 \dots 0 U_k(:,t) 0 \dots 0) \in R^{mi \times j} \quad (2.36)$$

L'équation (2.35) peut être réécrite sous la forme :

$$\underline{y}_{s,k} \simeq H_{s,i} U_k + \sum_{t=k-r+1}^k (H_{s+1,i} - H_{s,i}) \bar{U}_k(t) + \zeta_{k,s} \quad (2.37)$$

Le vecteur de résidu  $\varepsilon_{s,k}$  devient :

$$\underline{y}_{s,k} \Pi_{U_k^\perp} = \sum_{t=k-r+1}^k (H_{s+1,i} - H_{s,i}) \bar{U}_k(t) \Pi_{U_k^\perp} + \zeta_{k,s} \Pi_{U_k^\perp} \quad (2.38)$$

et son espérance mathématique :

$$\mathbf{E}[\underline{y}_{s,k} \Pi_{U_k^\perp}] = \sum_{t=k-r+1}^k (H_{s+1,i} - H_{s,i}) \bar{U}_k(t) \Pi_{U_k^\perp} \quad (2.39)$$

puisque la matrice des bruits  $\zeta_{k,s}$  est de moyenne nulle.

La relation précédente montre que le vecteur de résidu n'est pas en général de moyenne nulle s'il y a un changement de modèle.

#### 2.4.3.4 Estimation des instants de commutations

Nous avons démontré dans les paragraphes précédents que le vecteur de résidu  $\varepsilon_{s,k}$  (Eq. (2.34)) est gaussien de moyenne nulle s'il n'y pas de changement de modèle et de moyenne non nulle dans le cas contraire. Pour estimer les instants de commutations, nous avons choisi d'effectuer un test de khi-deux sur le vecteur  $\varepsilon_k$  de manière à détecter les changements intervenant dans le résidu.

Le vecteur  $\varepsilon_k$  étant gaussien de variance  $R_{\varepsilon_k}$  et de moyenne  $\mu_k$ , le terme  $\varpi_k$  ( $\varpi_k = \varepsilon_k^T R_{\varepsilon_k}^{-1} \varepsilon_k$ ) suit une loi de khi-deux avec  $\ell$  degrés de liberté. Les instants de commutations peuvent être estimés en opérant la comparaison suivante :

$$\text{si } \varpi_k \begin{cases} < \chi_{\ell,\alpha}^2 & \text{alors il n'y a pas de changement } (\mu_k = 0) \\ \geq \chi_{\ell,\alpha}^2 & \text{alors il y a un changement } (\mu_k \neq 0) \end{cases} \quad (2.40)$$

où  $\chi_{\ell,\alpha}^2$  est le seuil déterminé par la loi de khi-deux avec un degré de confiance  $\alpha$ .

#### 2.4.4 Utilisation d'une technique d'identification récursive des sous-espaces

La technique d'estimation des poids des modèles locaux proposée ici utilise le même principe que la méthode proposée précédemment. Elle suppose que chaque modèle local est actif sur une fenêtre de temps de largeur minimale  $\tau$ . Une technique récursive des sous-espaces de détection de changements de dynamique proposée par Oku [49] est utilisée pour estimer les instants de commutations. On rappelle que les instants de commutations correspondent aux changements de dynamique du système. Comme les techniques de détection de changement de dynamique souffrent généralement d'un retard, ce problème est pris en compte dans l'application de la technique de détection à l'estimation des poids.

La technique d'identification récursive des sous-espaces utilisée pour estimer les poids sera d'abord présentée, avant d'aborder son application à l'estimation des poids des modèles locaux.

#### 2.4.4.1 Méthode d'identification récursive des sous-espaces

Une méthode d'identification récursive des sous-espaces est utilisée pour détecter les changements de dynamique du système. Dans cette technique initialement proposée par Oku [49], la représentation du système était sous forme innovée. Cette méthode d'identification récursive des sous-espaces est adaptée dans la suite à l'identification récursive du système (2.19). Dans l'adaptation de la méthode proposée par Oku, seule la matrice  $A$  sera supposée stable, au lieu de  $(A - KC)$  ( $K$  matrice d'innovation) dans la méthode initiale.

Tout d'abord la relation matricielle qui est la charpente de cette méthode est établie. Ensuite la technique d'estimation récursive des paramètres du système est donnée. Puis le résidu indicateur de changement de modèle est généré et un test de détection (GMA Geometric Moving Average [5]) est effectué pour détecter les changements de modèles.

**2.4.4.1.1 Relation matricielle d'entrée sortie** Une relation entrée-sortie est proposée dans ce paragraphe, cette relation constituant la base de la méthode récursive de détection de changement. On suppose que le modèle  $s$  est actif sur l'intervalle  $[k - L - 2i + 2, k]$ , la relation est écrite alors pour un seul modèle linéaire.

A partir de l'équation (2.19) on peut établir les relations suivantes :

$$Y_{s,k} = \Gamma_{s,i} X_{s,k} + H_{s,i} U_k + H_{s,i}^v V_{s,k} + W_{s,k} \quad (2.41)$$

$$X_{s,k} = A_s^i X_{s,k-i} + \Delta_{s,i} U_{k-i} + \Delta_{s,i}^v V_{s,k-i} \quad (2.42)$$

avec :

$$\Delta_{s,i} = (A_s^{i-1} B_s \ A_s^{i-2} B_s \ \dots \ A_s B_s \ B_s) \quad (2.43)$$

$$\Delta_{s,i}^v = (A_s^{i-1} \ A_s^{i-2} \ \dots \ A_s \ 0) \quad (2.44)$$

et

$$Y_{s,k} = \begin{pmatrix} y_{s,k-L-i+2} & y_{s,k-L-i+3} & \dots & y_{s,k-i+1} \\ y_{s,k-L-i+3} & y_{s,k-L-i+4} & \dots & y_{s,k-i+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{s,k-L+1} & y_{s,k-L+2} & \dots & y_{s,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell_i \times L} \quad (2.45)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{y}_{s,k-L+1} & \bar{y}_{s,k-L+2} & \dots & \bar{y}_{s,k} \end{pmatrix}$$

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{k-L-i+2} & u_{k-L-i+3} & \dots & u_{k-i+1} \\ u_{k-L-i+3} & u_{k-L-i+4} & \dots & u_{k-i+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{k-L+1} & u_{k-L+2} & \dots & u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times L} \quad (2.46)$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{u}_{k-L+1} & \bar{u}_{k-L+2} & \dots & \bar{u}_k \end{pmatrix}$$

Des définitions similaires sont faites pour les matrices  $V_k$  et  $W_k$ , les autres matrices étant données dans le paragraphe 2.4.2.

On déduit des relations (2.42) et (2.41) l'égalité suivante :

$$Y_{s,k} = \Gamma_{s,i} A_s^i X_{s,k-i} + \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i} U_{k-i} + H_{s,i} U_k + \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v V_{s,k-i} + H_{s,i}^v V_{s,k} + W_{s,k} \quad (2.47)$$

Pour  $i$  suffisamment grand, le terme  $\Gamma_{s,i} A_s^i X_{s,k-i}$  peut être négligé puisque le modèle local est stable :

$$Y_{s,k} \simeq \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i} U_{k-i} + H_{s,i} U_k + \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v V_{s,k-i} + H_{s,i}^v V_{s,k} + W_{s,k} \quad (2.48)$$

On notera dans la suite :

$$\theta = \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i} \quad (2.49)$$

La relation (2.48) s'écrit alors :

$$Y_{s,k} \simeq \theta U_{k-i} + H_{s,i} U_k + \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v V_{s,k-i} + W_{s,k} \quad (2.50)$$

**2.4.4.1.2 Estimation récursive des paramètres** Un calcul récursif de la matrice  $\theta$  ( $\theta \equiv \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}$ ) est proposé dans ce paragraphe. Si les entrées sont persistantes d'ordre  $2i$ , alors une estimation de la matrice  $\theta$  ( $\theta \equiv \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}$ ) à partir de l'équation (2.50) est donnée par :

$$\hat{\theta} = Y_{s,k} \Pi_{U_k^\perp} U_{k-i}^T (U_{k-i} \Pi_{U_k^\perp} U_{k-i}^T)^{-1} \quad (2.51)$$

Les techniques récursives des sous-espaces calculent une mise à jour récursive de la matrice  $\theta$  ([73], [50] et [49]). Dans ce calcul  $\hat{\theta}_k$  est connu et on cherche à calculer  $\hat{\theta}_{k+1}$  disposant des mesures passées ( $U_{k-i+1}$ ,  $Y_{s,k-i+1}$ ) futures ( $U_k$ ,  $Y_{s,k}$ ) et de celles recueillies à l'instant  $k+1$  ( $\bar{u}_{k+1}$ ,  $\bar{y}_{s,k+1}$ ). Il est à noter que les vecteurs  $U_{k+1}$  et  $Y_{k+1}$  contiennent aussi des mesures recueillies à l'instant  $k+1$ . Le calcul récursif de  $\theta$  est proposé ci-dessous :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \beta_{k+1} (r_{k+1} + \hat{\theta}_k q_{k+1}) q_{k+1}^T \Psi_k^{-1} \quad (2.52)$$

$$\Psi_{k+1} = \frac{1}{\gamma} (\Psi_k - \beta_{k+1} \Psi_k q_{k+1} q_{k+1}^T \Psi_k) \quad (2.53)$$

$$P_{k+1} = \frac{1}{\gamma} (P_k - \alpha_{k+1} P_k \bar{u}_{k+1} \bar{u}_{k+1}^T P_k) \quad (2.54)$$

$$Y_{k+1} U_{k+1}^T = \gamma Y_k U_k^T + \bar{y}_{k+1} \bar{u}_{k+1}^T \quad (2.55)$$

$$U_{k-i+1} U_{k+1}^T = \gamma U_{k-i} U_k^T + \bar{u}_{k-i+1} \bar{u}_{k+1}^T \quad (2.56)$$

$$\alpha_{k+1} = (\gamma + \bar{u}_{k+1}^T P_k \bar{u}_{k+1})^{-1} \quad (2.57)$$

$$\beta_{k+1} = \left( \frac{1}{\alpha_k} + q_k^T \Psi_k q_k \right)^{-1} \quad (2.58)$$

$$r_{k+1} = \bar{y}_{k+1} - Y_k U_k^T P_k \bar{u}_{k+1} \quad (2.59)$$

$$q_{k+1} = U_{k-i} U_k^T P_k \bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-i+1} \quad (2.60)$$

$\gamma < 1$  est le facteur d'oubli exponentiel.

Les matrices  $\Psi_k$  et  $\Phi_k$  sont égales à :

$$\Psi_k = \left( U_{k-i} \Pi_{U_k^\perp} U_{k-i}^T \right)^{-1} \quad (2.61)$$

$$P_k = \left( U_k U_k^T \right)^{-1} \quad (2.62)$$

D'après la remarque précédente, les matrices  $\hat{\theta}_k$ ,  $\Psi_k$ ,  $Y_k U_k^T$  et  $U_{k-i} U_k^T$  peuvent être calculées hors ligne ; ces matrices convenablement calculées serviront de conditions initiales à l'estimation récursive de la matrice  $\theta$ .

Ce calcul récursif de  $\theta$  est utilisé dans le paragraphe suivant pour générer un résidu indicateur de rupture de modèle.

**2.4.4.1.3 Génération récursive des résidus** Le résidu calculé dans ce paragraphe constitue l'élément indicateur de la rupture de modèle. Le théorème qui suit propose une méthode de calcul de ce résidu. Il est à noter que ce théorème n'est qu'une adaptation du théorème 2 de l'article [49] aux systèmes linéaires comportant des bruits d'état et de sortie.

**Théorème 2.1.** *Sous les conditions suivantes :*

- les entrées  $u_k$  sont bornées, pseudo-stationnaires et persistantes d'ordre  $i$ ,
  - le modèle  $s$  est actif sur l'intervalle  $[k - L - 2i + 2, k]$  et est stable,
- on obtient :

$$r_{k+1} + \theta q_{k+1} \rightarrow \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v \bar{v}_{s,k-i+1} + \bar{w}_{s,k+1} \quad (2.63)$$

**Preuve**

En remplaçant l'équation (2.62) dans (2.59) nous obtenons :

$$r_{k+1} \equiv \bar{y}_{s,k+1} - Y_{s,k} U_k^T (U_k U_k^T)^{-1} \bar{u}_{k+1} \quad (2.64)$$

En écrivant l'équation (2.50) colonne par colonne, on obtient :

$$\bar{y}_{s,k+1} \simeq \theta \bar{u}_{k-i+1} + H_{s,i} \bar{u}_{k+1} + \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v \bar{v}_{s,k-i+1} + \bar{w}_{s,k+1} \quad (2.65)$$

Si on substitue (2.65) dans (2.64), on trouve :

$$r_{k+1} \simeq \theta \bar{u}_{k-i+1} + H_{s,i} U_{k+1} + \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v V_{s,k-i+1} + \bar{w}_{s,k+1} - Y_{s,k} U_k^T (U_k U_k^T)^{-1} \bar{u}_{k+1} \quad (2.66)$$

En remplaçant  $Y_{s,k}$  par son expression dans (2.48) et en tenant compte de (2.60), on trouve :

$$r_{k+1} + \theta q_{k+1} \simeq \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v \bar{v}_{s,k-i+1} + \bar{w}_{s,k+1} - (\Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v \bar{v}_{s,k-i+1} U_k^T - \bar{w}_{s,k+1} U_k^T) (U_k U_k^T)^{-1} \bar{u}_{k+1} \quad (2.67)$$

Comme les entrées ne sont pas corrélées avec les bruits on obtient :

$$(\Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v \bar{v}_{s,k-i+1} U_k^T - \bar{w}_{s,k+1} U_k^T) (U_k U_k^T)^{-1} \bar{u}_{k+1} \rightarrow 0 \quad (2.68)$$

Ce qui prouve le théorème.

**2.4.4.1.4 Détection de changement de modèle** Le théorème 2.1 permet d'obtenir le résidu :

$$\varepsilon_{s,k} = r_{k+1} + \theta q_{k+1} \quad (2.69)$$

$$\varepsilon_{s,k} = \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}^v V_{s,k-i+1} + \bar{w}_{s,k+1}. \quad (2.70)$$

Comme on ne connaît pas  $\theta$  qui est la matrice de Hankel exacte du système ( $\theta \equiv \Gamma_{s,i} \Delta_{s,i}$ ), elle est remplacée dans (2.69) par son estimation à l'instant  $k$ .

$$\varepsilon_{s,k} = r_{k+1} + \theta_k q_{k+1} \quad (2.71)$$

Ce résidu gaussien est centré en l'absence de défaut. La justification est directe puisque  $\varepsilon_k$  est une combinaison linéaire de vecteurs blancs, gaussiens et centrés. S'il y a un changement de modèle, la relation (2.63) n'est plus vérifiée et la variance  $\sigma_0$  du vecteur résidu  $\varepsilon_{s,k}$  change de manière significative [51]. Un algorithme détectant des sauts de variance est proposé dans la suite pour détecter les changements de modèles.

Le but de cet algorithme est de savoir laquelle de ces deux hypothèses est vérifiée :

$$\text{Hypothèses : } \begin{cases} H_0 : \text{Il n'y a pas de rupture de modèle} \\ H_1 : \text{il y a commutation} \end{cases} \quad (2.72)$$

Il est explicité dans le cas mono-sortie, l'extension au cas multi-sortie étant directe. L'algorithme de moyenne mobile géométrique (GMA [5]) dans le cas d'un changement dans la variance d'un signal est donné par :

$$g_k = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\beta}_r e_{k-r}, \quad e_k = \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \left( \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \frac{\varepsilon_k^2}{2} \quad (2.73)$$

où  $\bar{\beta}_r \equiv \lambda(1-\lambda)^r$  avec  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  désignent respectivement la variance du vecteur résidu  $\varepsilon_k$  avant et après le changement.

Si  $g_0 = 0$ , alors le calcul récursif de  $g_k$  est donné par :

$$g_k = (1-\lambda)g_{k-1} + \lambda e_k \quad (2.74)$$

On ne connaît pas  $\sigma_1$ , mais une estimation au sens du maximum de vraisemblance peut être obtenue à partir des relations (2.73) et (2.74) par :

$$g_k = \frac{\sup}{\hat{\sigma}_1} \left( \frac{\hat{\sigma}_1^2 - \sigma_0^2}{\hat{\sigma}_1^2 \sigma_0^2} \tilde{g}_k + \ln \frac{\sigma_0}{\hat{\sigma}_1} \right), \quad (2.75)$$

avec

$$\tilde{g}_k = (1-\lambda)\tilde{g}_{k-1} + \lambda \frac{\varepsilon_k^2}{2}, \quad \text{et } \tilde{g}_0 = 0 \quad (2.76)$$

On remarquera que le calcul récursif de  $\tilde{g}_k$  ne nécessite pas la connaissance de  $\sigma_1^2$ . Par un calcul simple on trouve que l'optimum calculé en (2.75) est atteint pour  $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{2\tilde{g}_k}$  ce qui donne :

$$g_k = \left( \frac{\tilde{g}_k}{\sigma_0^2} - \frac{1}{2} \right) + \ln \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\tilde{g}_k}} \quad (2.77)$$

Par conséquent, le choix de l'hypothèse  $H$  est réalisé de la manière suivante :

$$\text{si } g_k \begin{cases} < \eta, \text{ l'hypothèse } H_0 \text{ est choisi} \\ \geq \eta, \text{ l'hypothèse } H_1 \text{ est choisi} \end{cases} \quad (2.78)$$

$\eta$  étant un seuil convenablement choisi.

La méthode d'identification récursive des sous-espaces proposée dans ce paragraphe permet la détection des ruptures de modèle. Sa mise en oeuvre permet d'estimer alors les instants de commutations. Le paragraphe qui suit montre comment cette estimation est utilisée pour calculer le poids des modèles locaux.

### 2.4.5 Estimation des poids des modèles locaux

Les instants de commutations étant estimés par l'une des deux méthodes de détection de rupture de modèle proposées plus haut, le calcul des poids correspondant aux modèles locaux est direct : si un modèle  $s$  est supposé actif, son poids est fixé à 1 jusqu'à la prochaine commutation, et les poids des autres modèles sont fixés à 0. Après l'estimation des instants de commutations, les poids  $p_{s,k}$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) de tous les modèles locaux sont calculés.

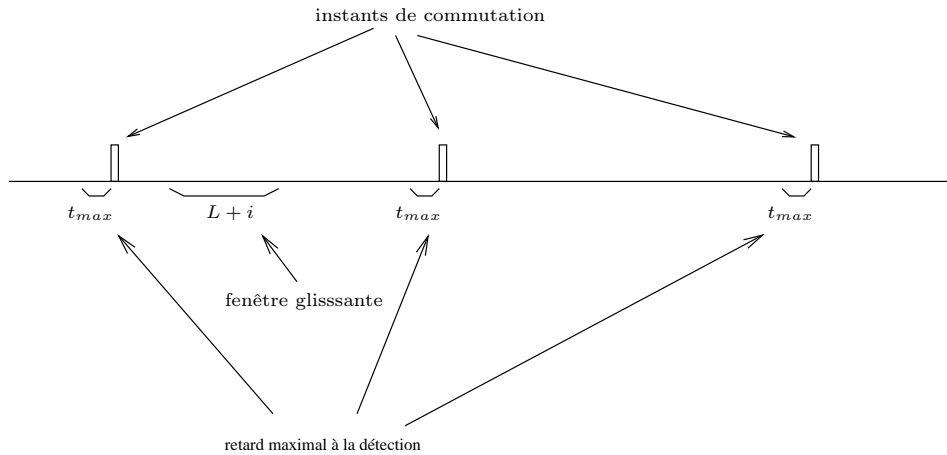


FIG. 2.5 – illustration de la fenêtre glissante utilisée dans la technique de détection basée sur les projections, du retard maximal à la détection et des instants de commutations

Soient  $k_1$  et  $k_2$  deux instants de commutations consécutifs. La détermination des classes des données sur l'intervalle  $[k_1, k_2]$  n'est pas évidente du fait de l'existence probable d'un retard à la détection comme l'illustre la figure (2.5). Si on note par  $t_{max}$  le retard maximal à la détection ( $t_{max}$  supposé connu) alors les points se situant sur l'intervalle,  $]k_2 - t_{max}, k_2[$  ne peuvent pas être classifiés sans la connaissance des modèles locaux. On notera toutefois que leur classe correspond soit au modèle actif avant l'instant de commutation (modèle  $s$ ) soit au modèle actif après cet instant de commutation (modèle  $s+1$ ). L'indice du modèle  $s$  est alors associé aux points recueillis sur l'intervalle  $]k_2 - t_{max}, k_2[$ . La classe de ces points n'est déterminée qu'après la première estimation des paramètres de Markov.

En tenant compte de la remarque précédente, le calcul des poids sur l'intervalle  $[k_1, k_2]$  est réalisé de la manière suivante :

- le poids du modèle local  $s$  supposé actif est fixé à 1 sur l'intervalle  $[k_1, k_2 - t_{max}]$  ( $p_{s,k} \leftarrow 1, k_1 \leq k \leq k_2 - t_{max}$ ),

- le poids des autres modèles est fixé à 0 sur le même intervalle ( $p_{r,k} \leftarrow 0, k_1 \leq k \leq k_2 - t_{max}, \forall r \neq s$ ),

- le poids de tous les modèles est fixé à 0 pour les points non classifiés se situant sur l'intervalle  $]k_2 - t_{max}, k_2[$ , ( $p_{r,k} \leftarrow 0, k_2 - t_{max} < k < k_2, \forall r$ ).

### 2.4.6 Identification des paramètres de Markov des modèles locaux

Connaissant les poids des modèles locaux composant le SAC, l'estimation de leurs paramètres de Markov est réalisée par une technique des sous-espaces. Cette estimation est basée sur une relation entrée-sortie établie dans le paragraphe qui suit.

#### 2.4.6.1 Equation matricielle d'entrée et sortie locale

Cette équation matricielle obtenue à partir de (2.31) permet d'exprimer la sortie du modèle local  $s$  pondérée par la matrice des poids  $P_{s,k}$  (relation (2.23)) en fonction des entrées et de l'état.

$$\underline{y}_{s,k} P_{s,k} \simeq H_{s,i} U_k P_{s,k} + H_{s,i}^v V_{s,k} P_{s,k} + \underline{w}_{s,k} P_{s,k} \quad (2.79)$$

où  $\underline{y}_{s,k}$  est définie comme dans la relation (2.22) et  $P_{s,k}$  par la relation (2.23).

**Rappel** : par rapport à l'équation (2.22),  $f$  est pris égal à  $j$  vérifiant la condition (2.21).

A partir de (2.79), les paramètres de Markov  $H_{s,i}$  seront estimés. Comme cette relation matricielle utilise la sortie locale  $\underline{y}_{s,k}$  du système, il est indispensable de la calculer.

#### 2.4.6.2 Calcul de la sortie locale

Comme les poids vérifient la condition de normalisation (2.20) et sont binaires, la propriété suivante est vérifiée :

$$(p_{g,k})^2 = p_{g,k} \text{ et } p_{g,k} \times p_{s,k} = 0, \text{ (si } g \neq s) \quad (2.80)$$

On établit alors le calcul de la sortie locale du modèle  $g$  :

$$y_k p_{g,k} = \sum_{s=1}^h (p_{s,k} y_{s,k}) p_{g,k} = y_{g,k} p_{g,k} \quad \forall k \in [1, q] \quad (2.81)$$

En empilant la relation précédente, on obtient :

$$\underline{y}_k P_{s,k} = \underline{y}_{s,k} P_{s,k} \quad (2.82)$$

#### 2.4.6.3 Estimation des paramètres de Markov d'un modèle local

L'estimation des paramètres de Markov est basée sur la minimisation du critère de l'erreur de prédiction  $J$  suivant, obtenu à partir de l'équation (2.79) :

$$J(H_{s,i}) = \frac{1}{2j} \sum_{k=1}^j \left( \sum_{s=1}^h p_{s,k} \|y_k - H_{s,i} U_k\|_2^2 \right) \quad (2.83)$$

La solution est donnée par la méthode des moindres carrés pondérées. Le théorème qui suit résume ce résultat.

**Théorème 2.2.** *Sous les conditions suivantes :*

1. le modèle local  $s$  est stable,
2. la matrice  $U_k P_{s,k}$  est de plein rang,
3. si  $i$  est suffisamment grand, pour que le terme  $C_s A_s^{i-1} X_{s,k-i} P_{s,k}$  soit négligeable,

on a :

$$\underline{y}_{s,k} P_{s,k} U_k^T (U_k P_{s,k} U_k^T)^{-1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_{s,k} \quad (2.84)$$

La condition 2 du théorème 2.2 peut être vue comme étant une condition de persistance des signaux du système.

Après cette estimation des paramètres de Markov des modèles locaux, la classe des données non classifiées (correspondant au retard à la détection) est déterminée. Le paragraphe suivant propose une méthode pour déterminer la classe de ces données.

### 2.4.7 Détermination des poids des données non classifiées

Le modèle local auquel appartiennent les points non classifiés est déterminé dans cette partie. Ces points sont recueillis dans les intervalles correspondant aux retards maximaux à la détection. Si le modèle local  $s$  est actif avant l'instant de changement  $t$ , les points recueillis dans  $[t-t_{\max}, t-1]$  sont affectés au modèle local minimisant l'erreur de sortie (2.85) parmi les modèles locaux  $s$  et  $s+1$  (modèle actif avant l'instant de commutation ( $s$ ) et modèle actif après l'instant de commutation ( $s+1$ )) :

$$\min_{r=s, s+1} \|y_k - H_{r,i} U_k\| \quad (2.85)$$

Cette dernière classification permet de déterminer la classe de toutes les données recueillies. Il est logique de réaliser une nouvelle estimation des paramètres de Markov des modèles locaux après la classification de toutes les données. Cette estimation est réalisée comme cela est proposé dans le paragraphe précédent.

## Fusion de modèles

Après la classification de toutes les données et l'estimation des modèles locaux, on recherche les modèles locaux "identiques" afin de les fusionner. Une comparaison des matrices des paramètres de Markov des différents modèles locaux  $H_{s,i}$  est réalisée afin de déterminer ces modèles "identiques". On commencera par estimer les matrices de variance de l'estimation de ces matrices. Ces matrices de variances seront utilisées pour définir une distance entre les paramètres de Markov des différents modèles locaux.

### 2.4.7.1 Matrices de variance des paramètres de Markov

La variance  $\Sigma_{H_{s,i}}$  de l'estimation de la matrice des paramètres de Markov du modèle local  $s$  ( $H_{s,i}$ ), est déterminée par :

$$\hat{\Sigma}_{H_{s,i}} = \mathbf{E}[(\hat{H}_{s,i} - H_{s,i})^T (\hat{H}_{s,i} - H_{s,i})] \quad (2.86)$$

$$\hat{\Sigma}_{H_{s,i}} = \mathbf{E}[(U_k^T (U_k U_k^T)^{-1})^T \varepsilon_{s,k}^T \varepsilon_{s,k} (U_k^T (U_k U_k^T)^{-1})] \quad (2.87)$$

où :

$$\varepsilon_{s,k} = \underline{y}_{s,k} p_{s,k} - \hat{\underline{y}}_{s,k} \quad (2.88)$$



$$\hat{\Sigma}_{H_{s,i}} = (U_k U_k^T)^{-1} U_k \mathbf{E}[\varepsilon_{s,k}^T \varepsilon_{s,k}] U_k^T (U_k U_k^T)^{-1} \quad (2.89)$$

si les bruits sont ergodiques, l'espérance mathématique  $\mathbf{E}[\varepsilon_{s,k}^T \varepsilon_{s,k}]$  peut être calculée par la formule :

$$\mathbf{E}[\varepsilon_{s,k}^T \varepsilon_{s,k}] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{j} \sum_{t=1}^j \varepsilon_{s,t}^T \varepsilon_{s,t} \right) \quad (2.90)$$

### 2.4.7.2 Détermination des modèles "identiques"

Le but de cette partie est de retrouver les modèles "identiques" et de les fusionner. Pour cela, on définit une distance entre les matrices des paramètres de Markov des modèles locaux  $\hat{H}_{s,i}$  (du modèle local  $s$ ) et  $\hat{H}_{r,i}$  (du modèle local  $r$ ) :

$$d(\hat{H}_{s,i}, \hat{H}_{r,i}) = \text{trace} \left( (\hat{H}_{s,i} - \hat{H}_{r,i}) \hat{\Sigma}_{H_{s,r}}^{-1} (\hat{H}_{s,i} - \hat{H}_{r,i})^T \right) \quad (2.91)$$

avec

$$\hat{\Sigma}_{H_{s,r}} = \frac{N_s}{N_s + N_r} \hat{\Sigma}_{H_{s,i}} + \frac{N_r}{N_s + N_r} \hat{\Sigma}_{H_{r,i}},$$

où  $N_s = \sum_{k=1}^j p_{s,k}$  et  $N_r = \sum_{k=1}^j p_{r,k}$ .

Si  $\eta$  est le seuil d'un test de  $\chi^2$  avec  $\ell$  degrés de liberté, alors on définit le test d'identité suivant.

#### Test d'identité

si  $d(\hat{H}_{s,i}, \hat{H}_{r,i}) \geq \eta$  alors les modèles  $s$  et  $r$  ne sont pas "identiques",

si  $d(\hat{H}_{s,i}, \hat{H}_{r,i}) < \eta$  alors les modèles  $s$  et  $r$  sont "identiques".

### 2.4.7.3 Fusion de modèles

Connaissant les modèles locaux "identiques", ces modèles seront dans un premier temps fusionnés. Ensuite une nouvelle estimation des paramètres de Markov des nouveaux modèles locaux est réalisée, suivie d'une nouvelle fusion. Cette procédure d'estimation des paramètres de Markov, recherche et fusion de modèles "identiques" est répétée jusqu'à ce qu'il n'y ait plus diminution du nombre de modèles locaux.

L'ensemble des modèles "identiques" au modèle local  $s_0$  est noté par  $\mathbb{E}_{s_0}$ . Dans la procédure de fusion, tous les modèles appartenant à  $\mathbb{E}_{s_0}$  sont remplacés par un seul modèle  $s_0^*$ . La fonction de pondération de ce nouveau modèle  $s_0^*$  est alors donnée par :

$$p_{s_0^*,k} = \sum_{s \in \mathbb{E}_{s_0}} p_{s,k}, \quad k \in [1, q] \quad (2.92)$$

Il faut ré-estimer les modèles locaux après leur fusion. En effet cette nouvelle détermination des modèles locaux améliore leur précision parce qu'un nombre plus important de points est utilisé. Il est également nécessaire de rechercher les modèles locaux "identiques" après la fusion car il peut exister des modèles "identiques" mais qui ne seront pas reconnus dans la première recherche du fait qu'il sont estimés par un nombre insuffisant de points.

Cette technique de fusion de modèles est résumée dans l'algorithme qui suit.

#### Algorithme 2.1. (fusion de modèle)

**Etape 1 :** (début)  $st \leftarrow 0$ ,

**Étape 2 : (estimation des paramètres de Markov)**

évaluer  $\hat{H}_{s,i}$  estimation des matrices  $H_{s,i}$  ( $s = 1, \dots, h$ ) en utilisant le théorème 2.2,

**Étape 3 : (test)**

réaliser le test d'identité sur les matrices  $\hat{H}_{s,i}$  ( $s = 1, \dots, h$ ) et construire les ensembles  $E_s$  des modèles "identiques".

**Étape 4 : (nouveau calcul des fonctions poids)**

pour tout ensemble  $E_s$  si  $\text{card}(E_s) > 1$  alors :

1)  $st \leftarrow 1$  ;

2)  $p_{s,k}^* \leftarrow \sum_{r \in \mathbb{E}_s} p_{r,k}$ , et supprimer les modèles  $r$ ,  $r \in E_s$  et  $r \neq s$ .

**Étape 5 : (réorganisation des indices)**

réorganiser les indices des modèles locaux.

**Étape 6 : (test d'arrêt)**

si  $st=1$  alors aller à l'étape 1,

si  $st=0$  alors arrêt.

Cette procédure permet la détermination automatique du nombre de modèles locaux du SAC. On peut alors estimer une réalisation d'état de chaque modèle local.

### 2.4.8 Détermination des réalisations des modèles locaux

L'objectif dans cette partie est de déterminer l'ordre  $n_s$  et une réalisation  $(A_s, B_s, C_s, D_s)$  des modèles locaux à partir de la connaissance des matrices des paramètres de Markov donnés par le théorème 2.2.

La matrice  $D_s$  est extraite directement de l'estimation de la matrice  $H_{s,i}$  (voir 2.26). L'algorithme ERA (Eigenvalue Realization Algorithm) [36] est utilisé pour déterminer l'ordre et une réalisation minimale et équilibrée.

**Détermination des matrices  $A_s, B_s, C_s$**

- Construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_{\nu,s}^0$  et  $\mathbf{H}_{\nu,s}^1$  qui contiennent les paramètres de Markov et sont définies par la formule générale (avec  $\nu = \text{intg}(i/2)$ , partie entière de  $i/2$ ) :

$$\mathbf{H}_{\nu,s}^\gamma = \begin{pmatrix} C_s A_s^\gamma B_s & \cdots & C_s A_s^{\gamma+\nu-1} B_s \\ C_s A_s^{\gamma+1} B_s & \cdots & C_s A_s^{\gamma+\nu} B_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_s A_s^{\gamma+\nu-1} B_s & \cdots & C_s A_s^{\gamma+2\nu-2} B_s \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

- Opérer la décomposition en valeurs singulières :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\nu,s}^0 &= (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \\ &\simeq U_1 S_1 V_1^T \end{aligned} \quad (2.94)$$

où  $S_2$  contient les valeurs singulières négligeables.

- L'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$ .
- Calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_{s,\nu} = U_1 S_1^{1/2}$  et celle de commandabilité  $C_{s,\nu} = S_1^{1/2} V_1^T$  (voir la relation (2.25)).
- La matrice  $C_{\nu,s}$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_{s,\nu}$  (voir (2.25)).
- La matrice  $B_s$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $C_{s,\nu}$  (voir (2.25)).

– La matrice  $A_s$  est donnée par :

$$A_s = S_1^{-1/2} U_1^T \mathbf{H}_{\nu,s}^1 V_1 S_1^{-1/2} \quad (2.95)$$

La méthode d'identification proposée dans cette section peut être résumée dans l'algorithme suivant.

**Algorithme 2.2.** (*identification basée sur les techniques de détection*)

**Etape 1 :** estimer les instants de commutations en utilisant l'une des deux méthodes de détection de rupture de modèle proposées dans les paragraphes (2.4.3) et (2.4.4),

**Etape 2 :** calculer les poids des modèles locaux (paragraphe (2.4.5)),

**Etape 3 :** estimer les paramètres de Markov des modèles locaux (théorème (2.2)),

**Etape 4 :** calculer le poids des données non classifiées (paragraphe 2.4.7),

**Etape 4 :** fusionner les modèles locaux "identiques" (algorithme (2.1)),

**Etape 5 :** estimer les paramètres de Markov des modèles locaux (théorème (2.2)),

**Etape 6 :** retourner à l'étape 4 jusqu'à ce que les poids ne varient plus,

**Etape 7 :** déterminer une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux (algorithme ERA (paragraphe 2.4.8)).

## 2.5 Exemple d'application

Considérons le système à commutations décrit par l'équation (2.19) dans laquelle les matrices  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  et  $D_s$  ( $s = 1, 2$ ) prennent les valeurs :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.31 & 0 \\ -0.32 & 0.31 & 0 \\ 0 & 0 & -0.18 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.7 \\ 0.71 & -0.5 \\ 0.8 & 0.47 \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -0.55 & 0.2 & 0.8 \\ 0.45 & 0.3 & 0.58 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.63 \\ -0.32 & 0.95 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.4 & 0 \\ 0.5 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.26 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.6 \\ 0.32 & -0.66 \\ 0.3 & 0.82 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.48 & 0.9 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.2 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Le premier modèle local ( $s = 1$ ) est actif sur les intervalles  $[1, 999]$  et  $[1800, 2499]$  et le deuxième ( $s = 2$ ) est actif sur les intervalles  $[1000, 1799]$  et  $[2500, 3500]$ . Les entrées sont des signaux binaires pseudo aléatoires (SBPA) ayant une période d'horloge égale à 5. Le rapport signal bruit (RSB) de la sortie est égal à  $30.3db$  et bruit de système ( $v_k$ ) a une variance égale à  $7 \times 10^{-4} I_3$  et nous disposons de  $q = 3500$  données.

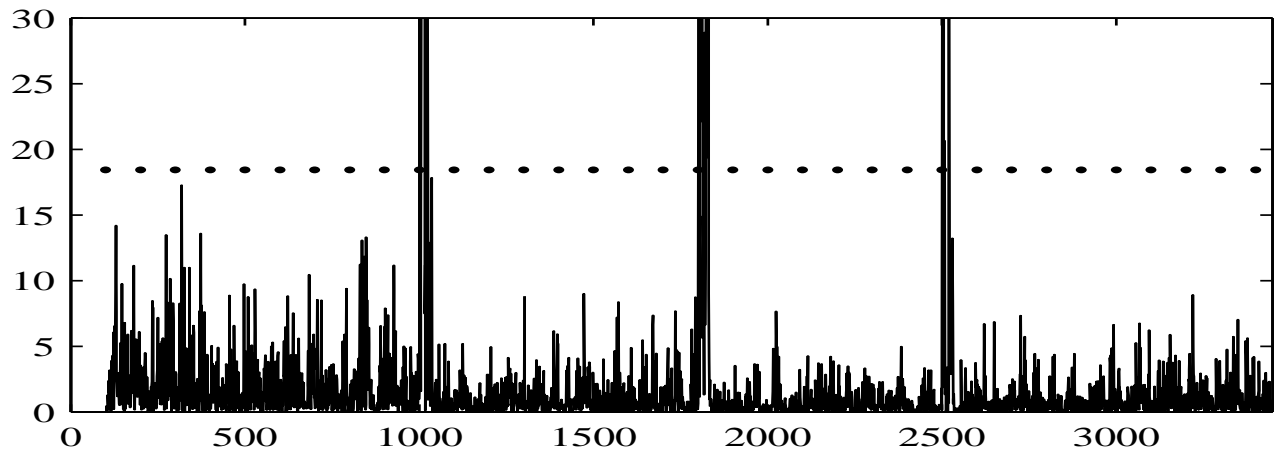


FIG. 2.6 – estimation des instants de commutations à l'aide d'un test de khi-deux, par la méthode de détection basée sur les projections

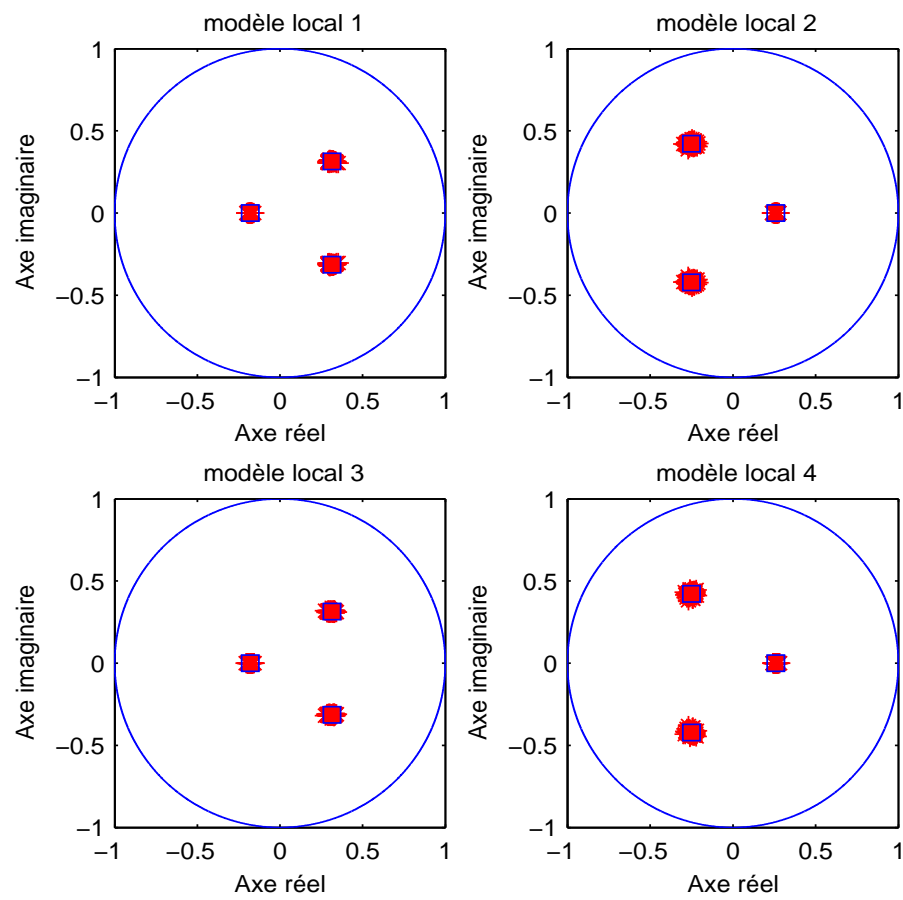


FIG. 2.7 – dispersion des pôles estimés après la première estimation des poids

### 2.5.1 Premier calcul des poids

Les instants de commutations sont estimés par la méthode de détection basée sur les projections (paragraphe 2.4.3) et les résultats sont montrés sur la figure (2.6) avec  $L = 38$  et  $i = 13$ . Le retard maximal à la détection est fixé à  $\frac{L}{2}$ . Les instants de commutations estimés sont : 1000, 1801, 2501. Les données appartenant aux intervalles  $]981, 999[$ ,  $]1782, 1801[$  et  $]2482, 2501[$  ne sont pas classifiées puisqu'elles correspondent aux retards à la détection. L'estimation de trois instants de commutations laisse supposer l'existence de quatre modèles locaux, le premier étant actif sur l'intervalle  $[1, 981]$ , le second sur l'intervalle  $[1000, 1782]$ , le troisième sur l'intervalle  $[1801, 2482]$  et le dernier sur l'intervalle  $[2501, 3500]$ .

Les paramètres de Markov des quatre modèles locaux sont estimés avec un choix de  $i = 13$ . Les classes des données non classifiées sont ensuite déterminées, puis les paramètres de Markov sont recalculés. Les pôles des quatre modèles locaux estimés lors de 100 réalisations de Monte Carlo sont tracés sur la figure (2.7). Cette figure nous laisse supposer que les modèles locaux 1 et 3 d'une part et les modèles locaux 2 et 4 d'autre part sont "identiques". Pour confirmer cela, réalisons le test d'identité (paragraphe 2.4.7.2).

#### 2.5.1.1 Fusion des modèles locaux

Le test d'identité (réalisé avec  $\eta = 18.4$ ) pour les 100 réalisations de Monte Carlo, confirme que les modèles locaux 1 et 3 (resp. 2 et 4) sont "identiques" puisque :

$$d(\hat{H}_{1,i}, \hat{H}_{2,i}) \in [28000, 38500]$$

$$d(\hat{H}_{1,i}, \hat{H}_{3,i}) \in [4, 12]$$

$$d(\hat{H}_{1,i}, \hat{H}_{4,i}) \in [27500, 38500]$$

$$d(\hat{H}_{2,i}, \hat{H}_{4,i}) \in [3, 13]$$

Les modèles locaux 1 et 3 (resp. 2 et 4) sont alors fusionnés (algorithme 2.1) et les paramètres de Markov des deux modèles locaux obtenus sont estimés. Les pôles des deux nouveaux modèles locaux estimés lors des 100 réalisations de Monte Carlo sont tracés sur la figure (2.8). Cette figure montre une amélioration de la variance des pôles estimés.

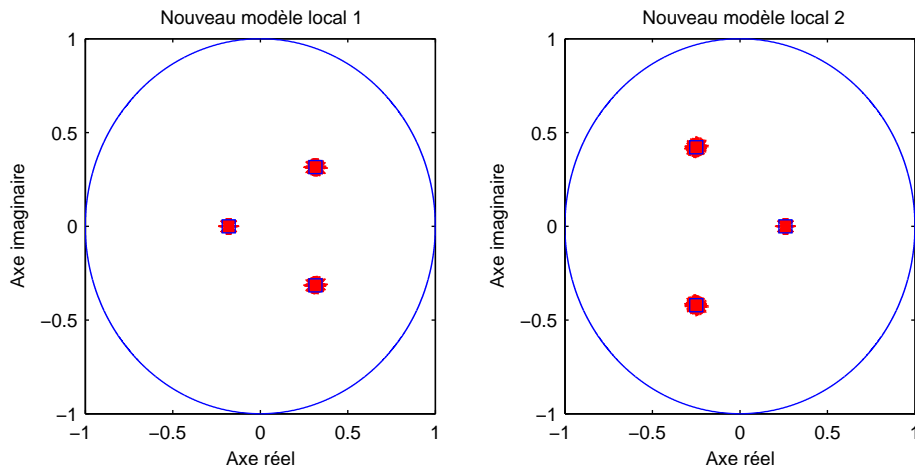


FIG. 2.8 – dispersion des pôles estimés après la fusion

## 2.6 Identification des SAC par l'utilisation d'hyperplans

Une technique d'identification des SAC basée sur la répartition des vecteurs formés à partir des mesures du système est proposée dans cette section. Cette technique se fonde sur le principe selon lequel les vecteurs formés à partir des données provenant d'un modèle local appartiennent tous à un même hyperplan de l'"espace des données" (ou espace des sorties et des régresseurs). La classification des données revient à déterminer ces hyperplans et à regrouper les vecteurs appartenant au même hyperplan. Le nombre d'hyperplans correspond alors au nombre de modèles locaux. Les classes étant déterminées, l'identification des modèles locaux se fait de la même manière que dans la section précédente.

### 2.6.1 Position du problème

Soit le SAC représenté par :

$$\begin{aligned} x_{s,k+1} &= A_s x_{s,k} + B_s u_k + v_{s,k} \\ y_{s,k} &= C_s x_{s,k} + D_s u_k + w_{s,k} \end{aligned} \quad (2.98)$$

et

$$y_k = \sum_{s=1}^h p_{s,k} y_{s,k}, \text{ avec } \sum_{s=1}^h p_{s,k} = 1, \forall k \quad (2.99)$$

avec  $v_{s,k}$  et  $w_{s,k}$  des bruits centrés et décorrélés des entrées  $u_k$ .

On suppose que chaque modèle local est stable, c'est-à-dire que les valeurs propres des matrices  $A_s$  ( $1 \leq s \leq h$ ) sont incluses dans le cercle unité. L'objectif est de déterminer les poids  $p_{s,k}$ , l'ordre et une réalisation  $(T^{-1}A_s T, T^{-1}B_s, C_s T, D_s)$  des  $h$  modèles locaux, avec  $T$  une matrice inversible (remarque 1.1).

### 2.6.2 Reformulation du problème

La relation (2.30) de la section précédente nous permet d'écrire en négligeant les puissances élevées de la matrice  $A$  :

$$y_{s,k} \simeq H_{s,i} U_k + H_{s,i}^v V_{s,k} + w_{s,k} \quad (2.100)$$

avec :

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{k-i+1} \\ u_{k-i+2} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, V_{s,k} = \begin{pmatrix} v_{k-i+1} \\ v_{k-i+2} \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$-H_{s,i} U_k + y_{s,k} \simeq H_{s,i}^v V_{s,k} + w_{s,k} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{n}_s z_k \simeq H_{s,i}^v V_{s,k} + w_{s,k} \quad (2.103)$$

avec :

$$\mathbf{n}_s = (-H_{s,i} \mid I_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell \times (mi+\ell)}, z_k = \begin{pmatrix} U_k \\ y_{s,k} \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

S'il n'y a pas de bruit, l'équation (2.103) devient :

$$\mathbf{n}_s z_k \simeq 0 \quad (2.105)$$

ce qui définit un hyperplan de  $\mathbb{R}^{\ell+mi}$ . D'après l'équation précédente tous les vecteurs  $z_k$  formés à partir des mesures recueillies sur un modèle local  $s$  appartiennent à un même hyperplan défini par la matrice  $\mathbf{n}_s$ . Un exemple en dimension trois est représenté sur la figure (2.9).

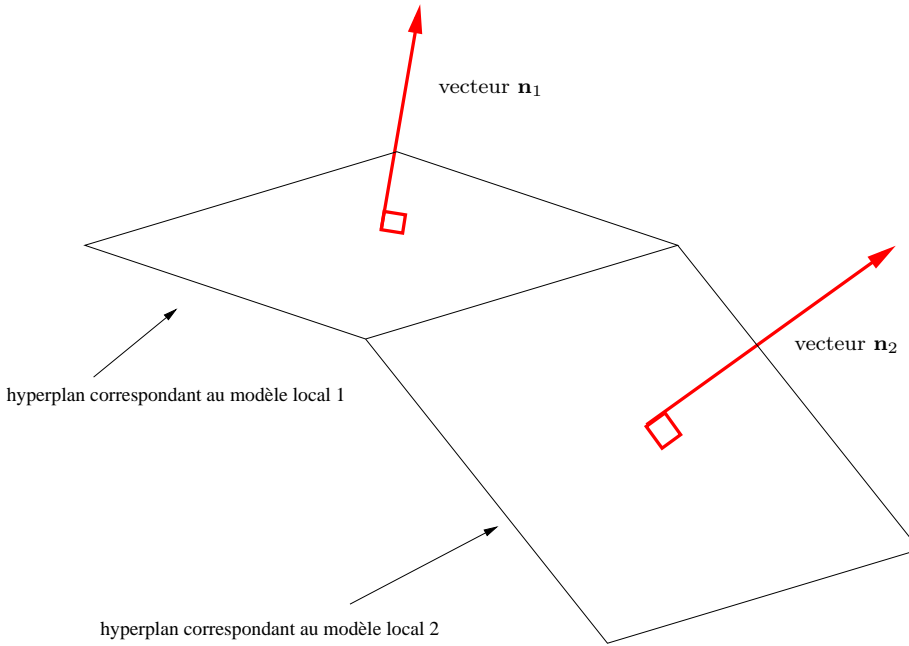


FIG. 2.9 – exemple en dimension trois de deux hyperplans représentant deux modèles locaux et leur vecteurs normaux

Classer les mesures recueillies revient à déterminer tous les vecteurs appartenant au même hyperplan. Ce but peut être atteint si on trouve les matrices  $\mathbf{n}_s$  déterminant les hyperplans. Or il existe une infinité de matrices orthogonales à un vecteur  $z_k$  ; pour assurer l'unicité de la solution ( $\mathbf{n}_s$ ), on supposera :

(1) que les entrées sont persistantes d'ordre  $\rho$  (les  $\rho$  vecteurs  $z_k$  consécutifs sont linéairement indépendants)

(2) on formera les matrices  $\underline{z}_k$  :

$$\underline{z}_k = (z_{k-\rho+1} \ z_{k-\rho+2} \ \dots \ z_k) \in R^{(mi+\ell) \times \rho}, \ \rho \geq mi + \ell \quad (2.106)$$

(3) on cherchera la matrice  $\mathbf{n}$  telle que  $\mathbf{n}$  soit orthogonale à  $\underline{z}_k$  :

$$\mathbf{n} \perp \underline{z}_k \quad (2.107)$$

$$\text{et } \mathbf{n} \text{ est de la forme } \mathbf{n} \equiv (H \mid I_\ell) \quad (2.108)$$

On remarquera que la détermination de la matrice  $\mathbf{n}$  revient à trouver une matrice unique  $H$  ( $H = -H_{s,i}$  voir la relation (2.104)).

Soit  $\mathbf{n}_s$  la matrice normal à l'hyperplan défini par le modèle local  $s$  ( $s = 1, 2, \dots, h$ ), le

problème de classification revient à regrouper les points  $z_k$  dans des classes  $\bar{C}_s$  tels que :

$$\bar{C}_s = \{z_k / z_k \perp \mathbf{n}_s\} \quad (2.109)$$

### 2.6.3 Classification des données

L'existence d'un temps minimal de séjour  $\tau$  supérieur à  $\rho + i$ , ( $\rho \geq mi + \ell$ ), permet de dire que la matrice  $\underline{z}_k$

$$\underline{z}_k = (z_{k-\rho+1} \ z_{k-\rho+2} \ \dots \ z_k) \in R^{(mi+\ell) \times \rho} \quad (2.110)$$

peut être obtenue uniquement par les données provenant d'un seul et même modèle local noté  $s$ . Si c'est le cas, cette matrice est orthogonale à  $\mathbf{n}_s$  ( $\mathbf{n}_s$  étant la matrice définissant l'hyperplan correspondant au modèle local  $s$ ).

La méthode de classification consiste à former les  $q - \rho$  ( $q$  étant le nombre de mesures) matrices  $\underline{z}_k$  ( $k = \rho, \rho + 1, \dots, q$ ) et à déterminer les  $q - \rho$  matrices  $\mathbf{n}_k$  ( $k = \rho, \rho + 1, \dots, q$ ) qui leur sont orthogonales de la manière suivante :

$$\mathbf{n}_k \equiv (H \mid I_\ell) \text{ et } \mathbf{n}_k \perp \underline{z}_k \quad (2.111)$$

La détermination des matrices  $\mathbf{n}_k$  définissant un même hyperplan est directe dans le cas déterministe. Si le système subit l'influence des bruits alors cette détermination devient délicate. L'angle entre deux matrices définissant un même hyperplan peut être important. La figure (2.10) illustre ce problème en dimension trois.

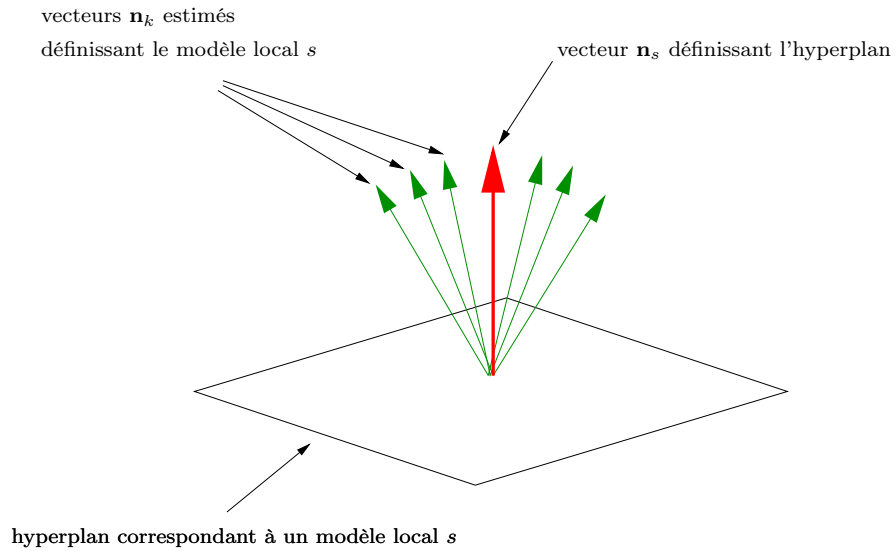


FIG. 2.10 – représentation en dimension trois de deux hyperplans représentant deux modèles locaux et leur vecteurs normaux

Pour accomplir cette tâche dans le cas stochastique, on définit les ensembles  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{N}$  suivants :

$$\mathbf{Z} = \{\underline{z}_k, k = \rho, \rho + 1, \dots, q\} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{n}_k / \mathbf{n}_k \in R^{\ell \times (mi+\ell)}, \mathbf{n}_k \perp \underline{z}_k, \underline{z}_k \in \mathbf{Z}\} \quad (2.113)$$

et on définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur l'ensemble  $\mathbf{N}$  :



- deux éléments  $\mathbf{n}_f$  et  $\mathbf{n}_h$  de  $\mathbf{N}$  sont en relation ( $\mathbf{n}_f \mathcal{R} \mathbf{n}_g$ ) si et seulement si il existe une suite finie  $\{\bar{\mathbf{n}}_k\}_k = \{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \dots, \bar{\mathbf{n}}_t\}$  d'éléments de  $\mathbf{N}$  telle que :

$$\mathbf{n}_f \mathcal{R} \mathbf{n}_g \Leftrightarrow \exists \{\bar{\mathbf{n}}_r \ (r = 1, 2, \dots, t)\} \text{ telle que :} \quad (2.114)$$

$$d(\mathbf{n}_f, \bar{\mathbf{n}}_1) < \epsilon, \ d(\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2) < \epsilon, \ \dots \ d(\bar{\mathbf{n}}_{k-1}, \bar{\mathbf{n}}_k) < \epsilon, \ d(\bar{\mathbf{n}}_k, \bar{\mathbf{n}}_{k+1}) < \epsilon \ \dots \ d(\bar{\mathbf{n}}_t, \mathbf{n}_g) < \epsilon$$

où  $\epsilon$  est un seuil fixé et  $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$  est une distance définie par :

$$d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g) = 1 - \frac{\|\mathbf{n}_f \mathbf{n}_g^T\|}{\|\mathbf{n}_f\| \|\mathbf{n}_g\|} \quad (2.115)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme.

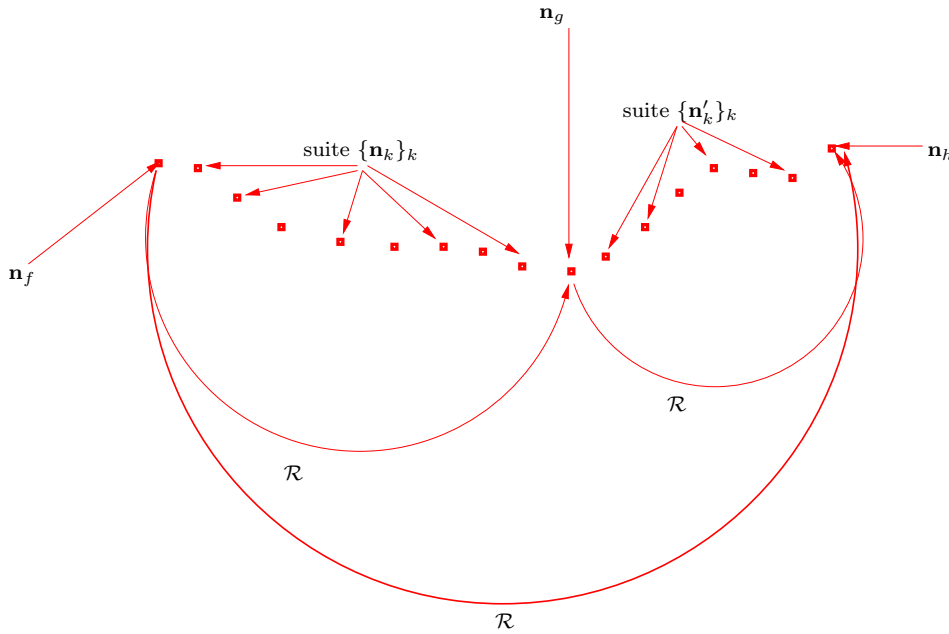


FIG. 2.11 – illustration de la transitivité de la relation  $\mathcal{R}$

Rappelons qu'une relation d'équivalence vérifie les trois conditions suivantes : réflexivité, symétrie et transitivité. Il est évident que les deux premières conditions sont vérifiées par la relation  $\mathcal{R}$ . Il ne reste plus qu'à démontrer la transitivité :

supposons que  $\mathbf{n}_f \mathcal{R} \mathbf{n}_g$  et  $\mathbf{n}_g \mathcal{R} \mathbf{n}_h$  et démontrons que  $\mathbf{n}_f \mathcal{R} \mathbf{n}_h$ . Comme  $\mathbf{n}_f \mathcal{R} \mathbf{n}_g$  il existe une suite finie  $\{\bar{\mathbf{n}}_k\}_k$  ( $\{\bar{\mathbf{n}}_k\}_k = \{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \dots, \bar{\mathbf{n}}_t\}$ ) de  $\mathbf{N}$  telle que la relation (2.114) est vérifiée. Il existe de même une suite  $\{\bar{\mathbf{n}}'_k\}_k$  ( $\{\bar{\mathbf{n}}'_k\}_k = \{\bar{\mathbf{n}}'_1, \bar{\mathbf{n}}'_2, \dots, \bar{\mathbf{n}}'_r\}$ ) d'éléments reliant  $\mathbf{n}_g$  et  $\mathbf{n}_h$  en respectant la même relation. La suite  $\{\bar{\mathbf{n}}''_k\}_k = \{\bar{\mathbf{n}}_k\}_k \cup \{\mathbf{n}_g\} \cup \{\bar{\mathbf{n}}'_k\}_k$  définie par :

$$\{\bar{\mathbf{n}}''_k\}_k = \{\bar{\mathbf{n}}''_1, \bar{\mathbf{n}}''_2, \dots, \bar{\mathbf{n}}''_t\} \quad (2.116)$$

avec

$$\bar{\mathbf{n}}''_1 = \bar{\mathbf{n}}_1, \ \bar{\mathbf{n}}''_2 = \bar{\mathbf{n}}_2, \ \dots, \ \bar{\mathbf{n}}''_t = \bar{\mathbf{n}}_t, \ \bar{\mathbf{n}}''_{t+1} = \mathbf{n}_g, \ \bar{\mathbf{n}}''_{t+2} = \bar{\mathbf{n}}'_1, \ \bar{\mathbf{n}}''_{t+3} = \bar{\mathbf{n}}'_2, \ \dots, \ \bar{\mathbf{n}}''_{t+r+1} = \bar{\mathbf{n}}'_r \quad (2.117)$$

relie  $\mathbf{n}_f$  à  $\mathbf{n}_h$  :

$$d(\mathbf{n}_f, \bar{\mathbf{n}}_1) < \epsilon, d(\mathbf{n}_1, \bar{\mathbf{n}}_2) < \epsilon, \dots, d(\mathbf{n}_t, \mathbf{n}_g) < \epsilon, d(\mathbf{n}_g, \bar{\mathbf{n}}_1') < \epsilon, d(\mathbf{n}_1', \bar{\mathbf{n}}_2') < \epsilon, \dots, d(\bar{\mathbf{n}}_r', \mathbf{n}_h) < \epsilon \quad (2.118)$$

d'où  $\mathbf{n}_f$  est en relation avec  $\mathbf{n}_h$ .

Cette transitivité est illustrée par la figure (2.11).

La relation  $\mathcal{R}$  partitionne l'ensemble  $\mathbf{N}$  (voir (2.113)) en  $h$  sous-ensembles  $\mathbf{N}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, h$ ). Le nombre de sous-ensembles  $\mathbf{N}_s$  dépend directement du choix du seuil  $\epsilon$ . Le choix de ce seuil est alors déterminant pour avoir une bonne classification. En effet si ce seuil est trop grand, presque toutes les matrices  $\mathbf{N}$  seront regroupées en une seule classe. Ce problème est illustré sur la figure (2.12) représentant la dispersion des vecteurs normaux issus de deux modèles locaux. On remarque que si le seuil  $\epsilon$  est choisi de manière que  $d(\mathbf{n}_{11}, \mathbf{n}_{12}) < \epsilon$  (ou de manière que  $d(\mathbf{n}_{21}, \mathbf{n}_{22}) < \epsilon$ ) alors tous les vecteurs normaux seront regroupés en une seule classe. Si ce seuil est convenablement choisi de manière à regrouper de proche en proche les vecteurs normaux alors on peut retrouver les deux classes. Mais s'il est trop petit on risque de subdiviser un même modèle local en plusieurs classes ce qui peut compromettre l'identification dans le cas où le niveau de bruit est important et les éléments de ces différentes classes peu nombreux.

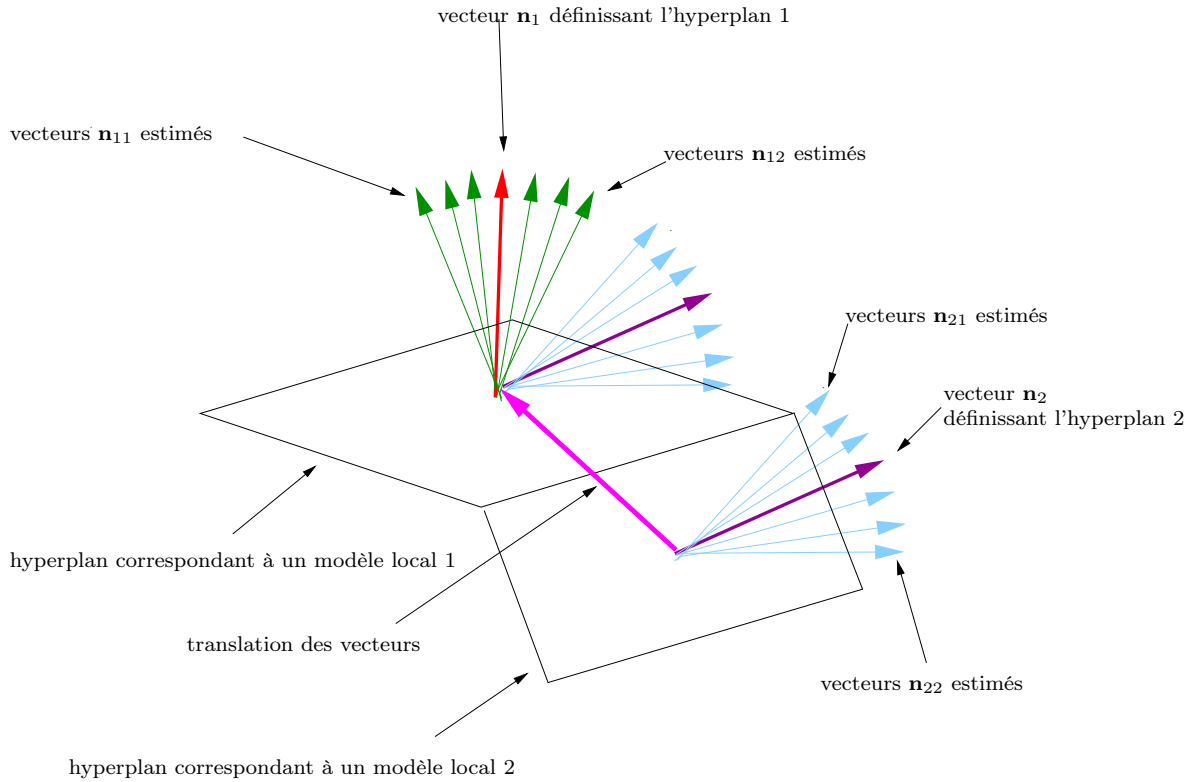


FIG. 2.12 – représentation en dimension trois de la dispersion des vecteurs normaux estimés, (nous avons opéré une translation pour avoir une meilleure vue des angles entre les vecteurs estimés)

Si  $\epsilon$  est bien choisi alors le nombre de modèles locaux est égal au nombre de classes déterminées.

La classification des indices des mesures appartenant à une classe  $s$  ( $s = 1, \dots, h$ ) est réalisée

de la manière suivante :

$$\mathbf{C}_s = \{k/k \in Z^+, \exists \mathbf{n} \in \mathbf{N}_s \text{ tel que } z_k \perp \mathbf{n}_s\} \quad (2.119)$$

$\mathbf{N}_s$  étant une classe de  $\mathbf{N}$  et  $Z^+$  est l'ensemble des entiers positifs.

## 2.6.4 Identification des modèles locaux

Afin d'identifier les modèles locaux, nous calculons les poids de ces modèles locaux en se basant sur les résultats de la classification accomplie précédemment. Connaissant les poids des modèles locaux, l'identification se fait de la même manière que dans la section précédente : on estime les paramètres de Markov des modèles locaux, on fusionne les modèles locaux "identiques", on estime de nouveau les paramètres de Markov des Modèles locaux et on refait une nouvelle fusion si c'est nécessaire. Cette procédure d'estimation et de fusion des paramètres de Markov des modèles locaux est répétées jusqu'à convergence.

### 2.6.4.1 Calcul des poids

Après la classification des données, nous calculons le poids des modèles locaux. Le calcul des poids se fait de manière directe : si un élément  $z_k \in \mathbf{C}_s$  alors le poids du modèle local  $s$  à l'instant  $k$  ( $p_{s,k}$ ) est égal à un et le poids des autres modèles locaux est fixé à zéro :

$$z_r \in \mathbf{C}_s \Rightarrow p_{s,k} \leftarrow 1 \text{ et } p_{r,k} \leftarrow 0 \text{ } r \neq s \quad (2.120)$$

### 2.6.4.2 Identification des modèles locaux

Disposant des poids, l'identification des modèles locaux se fait de la même manière que dans le paragraphe 2.4.6. Les paramètres de Markov des modèles locaux sont estimés grâce au théorème 2.2. Ensuite, les modèles locaux "identiques" sont fusionnés en utilisant l'algorithme 1 (fusion de modèle) et de nouveaux poids sont calculés. Les paramètres de Markov sont estimés de nouveau à l'aide des nouveaux poids calculés, puis on se sert de ces nouveaux paramètres de Markov pour fusionner les modèles locaux "identiques" et calculer de nouveaux poids. Cette procédure de fusion et d'estimation des paramètres de Markov est répétée jusqu'à convergence.

Après l'arrêt de la procédure d'estimation des paramètres de Markov, une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux est donnée par l'algorithme ERA (paragraphe 2.4.8).

La méthode de détermination de classes et d'identification des modèles locaux proposée dans cette section est résumée dans l'algorithme qui suit.

**Algorithme 2.3.** (identification basée sur la détermination des hyperplans)

**Etape 1 :** former les matrices  $\underline{z}_k$  en utilisant la relation (2.110),

**Etape 2 :** estimer les matrices  $\mathbf{n}_k$  vérifiant la condition (2.111),

**Etape 3 :** regrouper les matrices  $\mathbf{n}_k$  par la relation  $\mathcal{R}$  (Eq. 2.114),

**Etape 4 :** déterminer les classes (Eq. 2.119),

**Etape 5 :** calculer les poids des modèles locaux en utilisant la relation (2.120),

**Etape 6 :** estimer les paramètres de Markov des modèles locaux (théorème (2.2)),

**Etape 7 :** fusionner les modèles locaux "identiques" (algorithme (2.1)),

**Etape 8 :** retourner à l'étape 6 jusqu'à ce que les poids ne varient plus,

**Etape 9 :** déterminer une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux (algorithme ERA (paragraphe 2.4.8)).

## 2.7 Exemple d'application

Notre objectif dans cette section est de montrer sur un exemple la mise en oeuvre de la classification des données par la méthode de détermination des hyperplans proposée dans la section précédente. Pour cela, on considère le système (2.19 et 2.20) avec  $h = 3$  et où  $s$  prend la valeur 1 sur les intervalles  $[1, 199]$ ,  $[400, 499]$  et  $[700, 799]$ , la valeur 2 sur les intervalles  $[200, 299]$ ,  $[500, 599]$  et  $[800, 900]$  et la valeur 3 sur les intervalles  $[300, 399]$  et  $[600, 699]$  avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,9 \\ 1 & -1 \\ -1,5 & 2,3 \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 1,1 & 2 & 0 \\ -1,3 & 0,7 & 1,7 & 0 \\ 1,5 & 0,7 & -0,9 & 0 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ -0,6 & 1,4 \\ 1,3 & -0,75 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 1,1 \\ -1,3 & 0,7 \\ 1,5 & 0,7 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ -0,6 & 1,4 \\ 1,3 & -0,75 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = B_1, C_3 = C_1, D_3 = D_1$$

L'entrée  $u_k$  est une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) d'amplitudes variables. On simule le système avec un rapport signal sur bruit ( $RSB$ ) des sorties  $y_k$  par rapport aux bruits de mesures  $w_k$  égale à  $25db$ . Les figures (2.13) et (2.14) montrent respectivement les entrées et les sorties du système. A ces bruits de sortie s'ajoute un bruit de système  $v_k$  de covariance  $\text{var}(v_k) \simeq 7 \times 10^{-4} I_3$ ; la matrice de covariance des entrées est égale à  $\text{var}(w_k) \simeq 7 \times 10^{-2} I_2$ .

Nous disposons de  $q = 900$  mesures des entrées/sorties.

### 2.7.1 Calcul des matrices $\mathbf{n}_k$ définissant les hyperplans

On fixe  $i = 13$  dans la formation des vecteurs  $z_k$  (Eq. (2.104)) et  $\rho = 35$  dans la formation des matrices (Eq. (2.110)).

Les matrices  $\mathbf{n}_k$  ( $k = i + \rho, \dots, q$ ) sont estimées en utilisant l'équation (2.108) dans laquelle la norme  $\|\cdot\|$  est la norme 2.

Les distances  $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$  entre les matrices  $\mathbf{n}_f$  ( $f = i + \rho, \dots, q$ ) et  $\mathbf{n}_g$  ( $g = i + \rho, \dots, q$ ) estimées sont ensuite calculées. Les figures (2.16), (2.17) et (2.18) montrent ces distances calculées respectivement avec ( $f = 140, g = i + \rho, \dots, q$ ), ( $f = 240, g = i + \rho, \dots, q$ ) et ( $f = 340, g = i + \rho, \dots, q$ ). Ces figures laissent entrevoir l'existence de trois modèles locaux, nous allons opter dans la suite pour le choix d'un seuil ( $\epsilon$ ) qui nous permettra de retrouver ces trois classes.

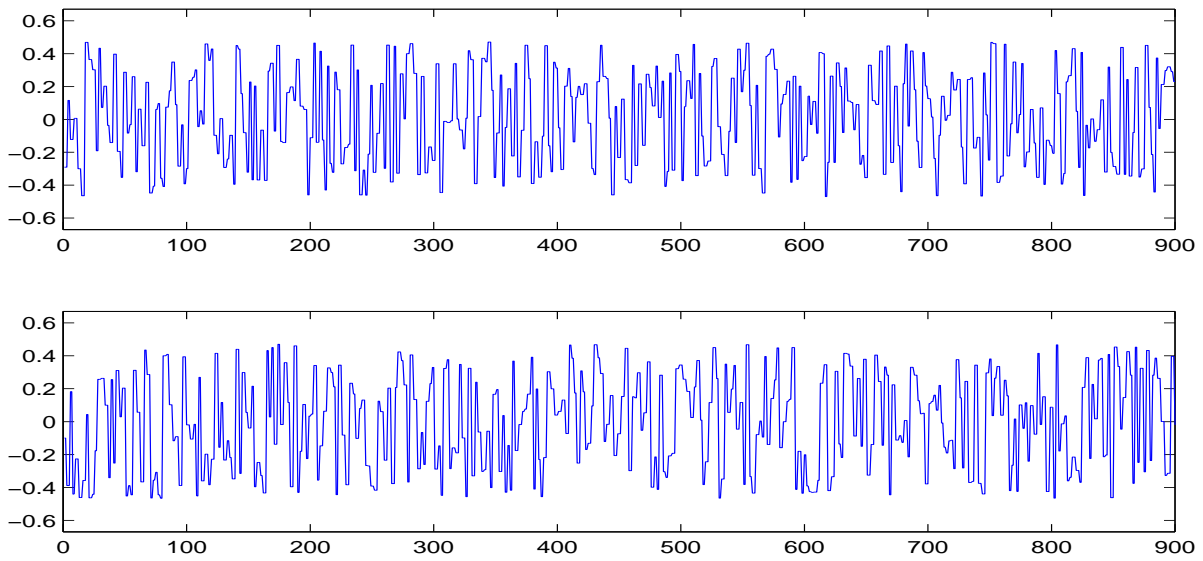


FIG. 2.13 – les entrées du système

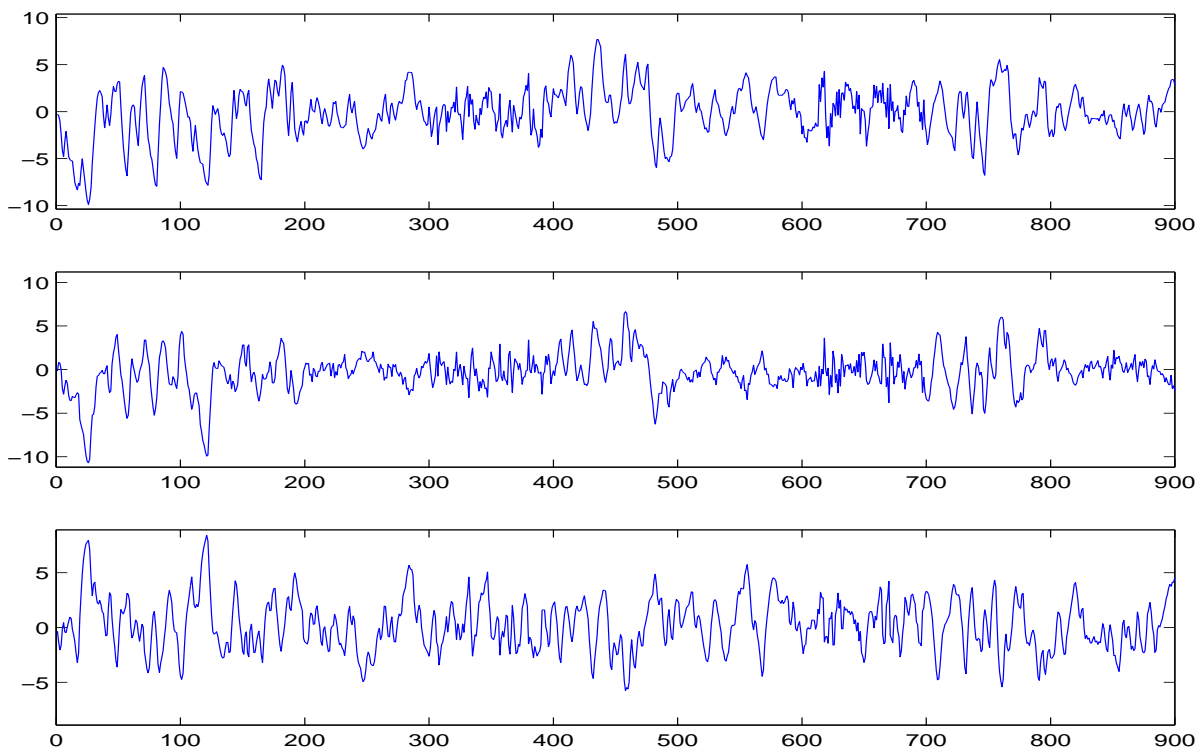


FIG. 2.14 – les sorties du système

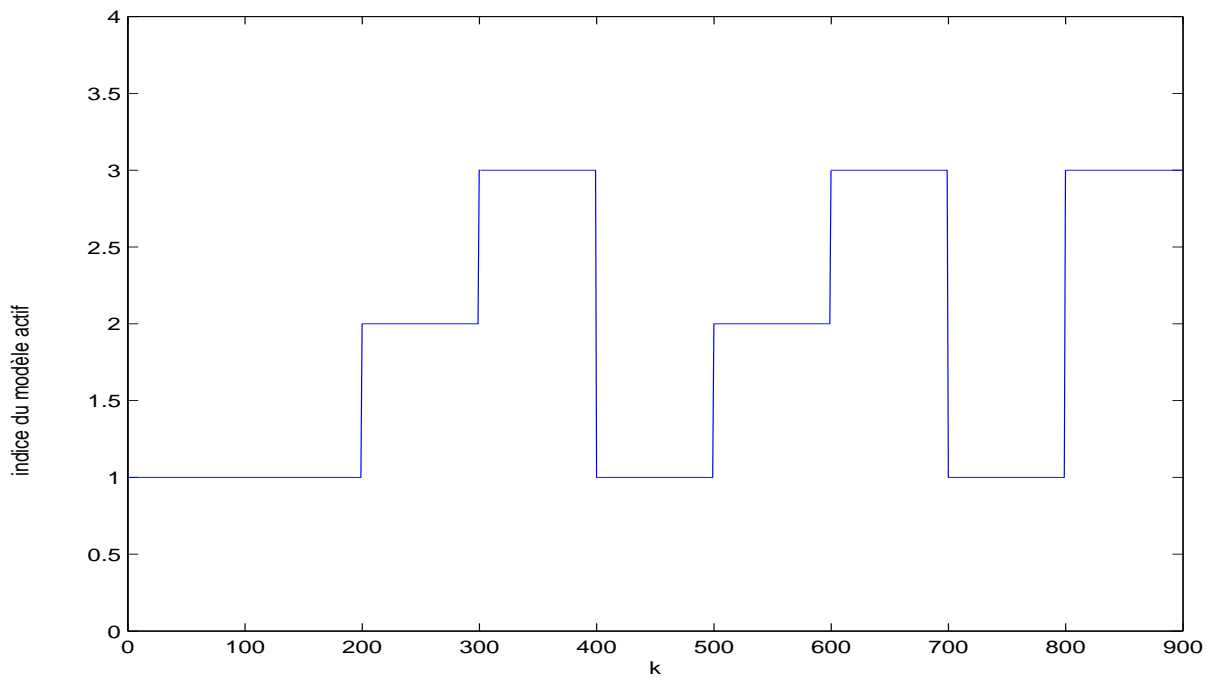
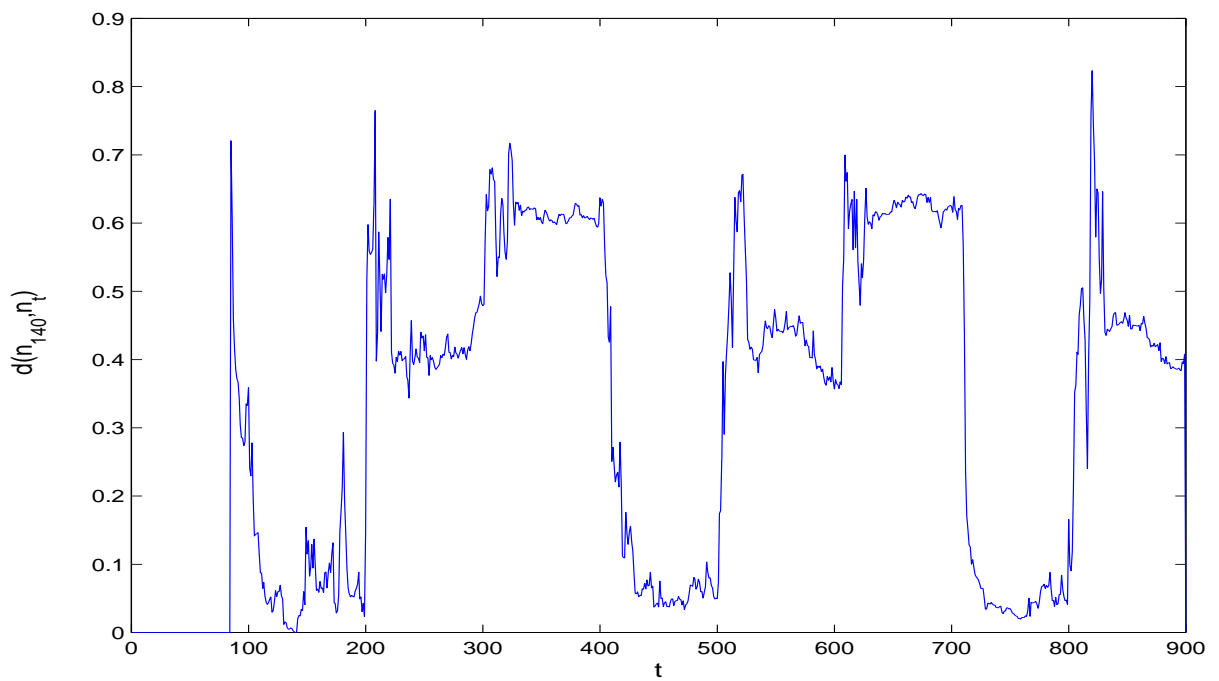


FIG. 2.15 – courbe représentant l'indice du modèle local actif à chaque instant

FIG. 2.16 – courbe représentant la distance  $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$  avec  $f = 140, g = i + \rho, \dots, q$

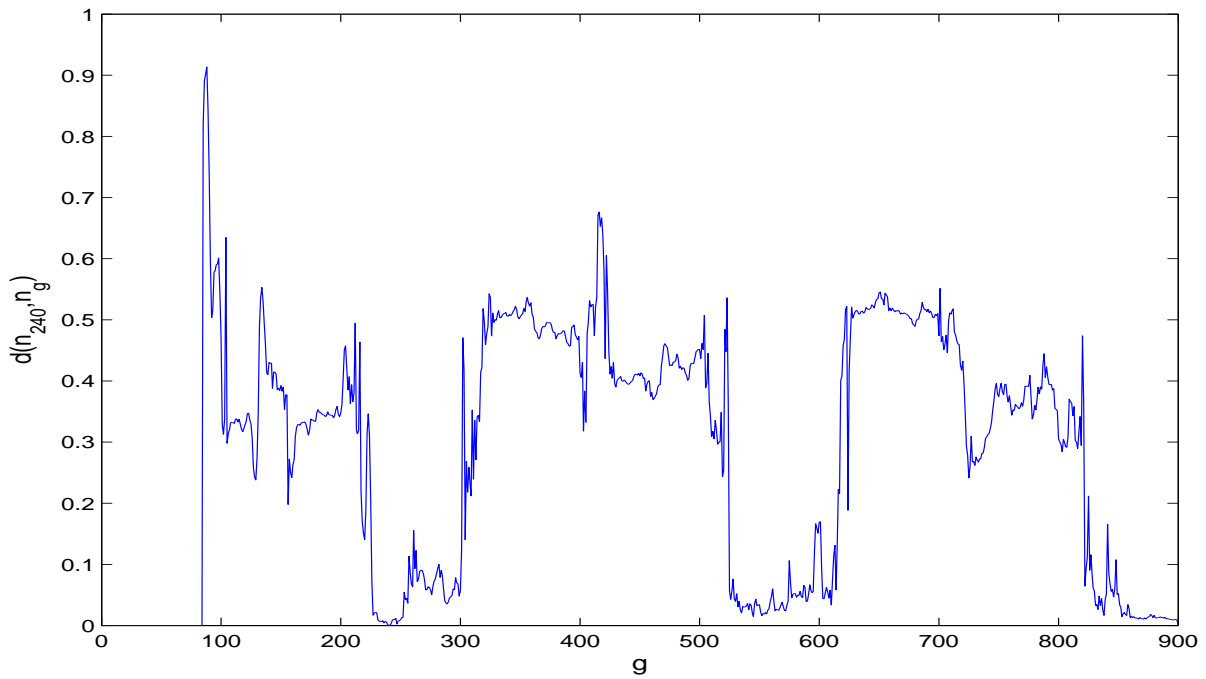


FIG. 2.17 – courbe représentant la distance  $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$  avec  $f = 240, g = i + \rho, \dots, q$

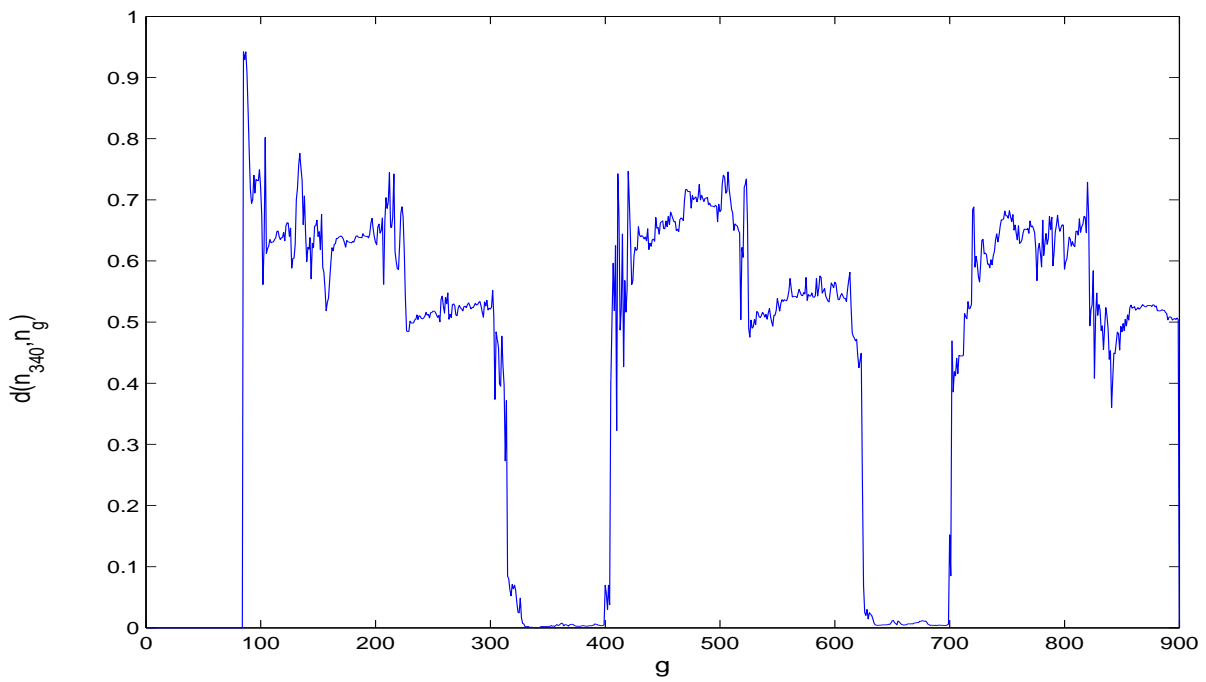


FIG. 2.18 – courbe représentant la distance  $d(\mathbf{n}_f, \mathbf{n}_g)$  avec  $f = 340, g = i + \rho, \dots, q$

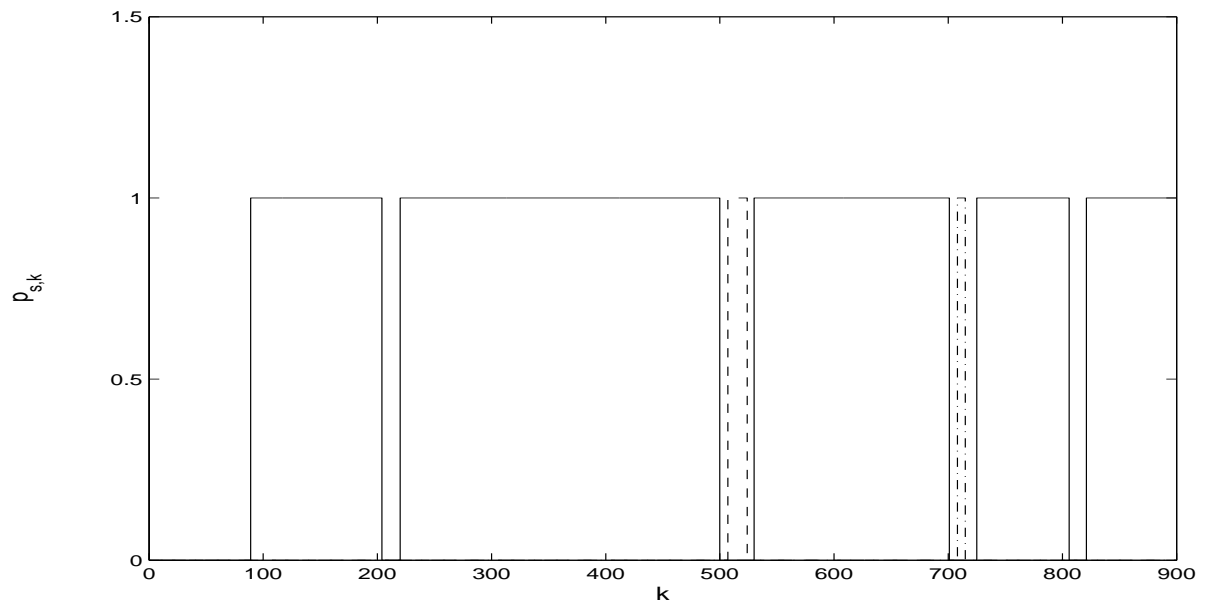


FIG. 2.19 – classification avec le choix du seuil  $\epsilon = 0.1$   
 modèle local 1 (—)  
 modèle local 2 (- -)  
 modèle local 3 (-.-)

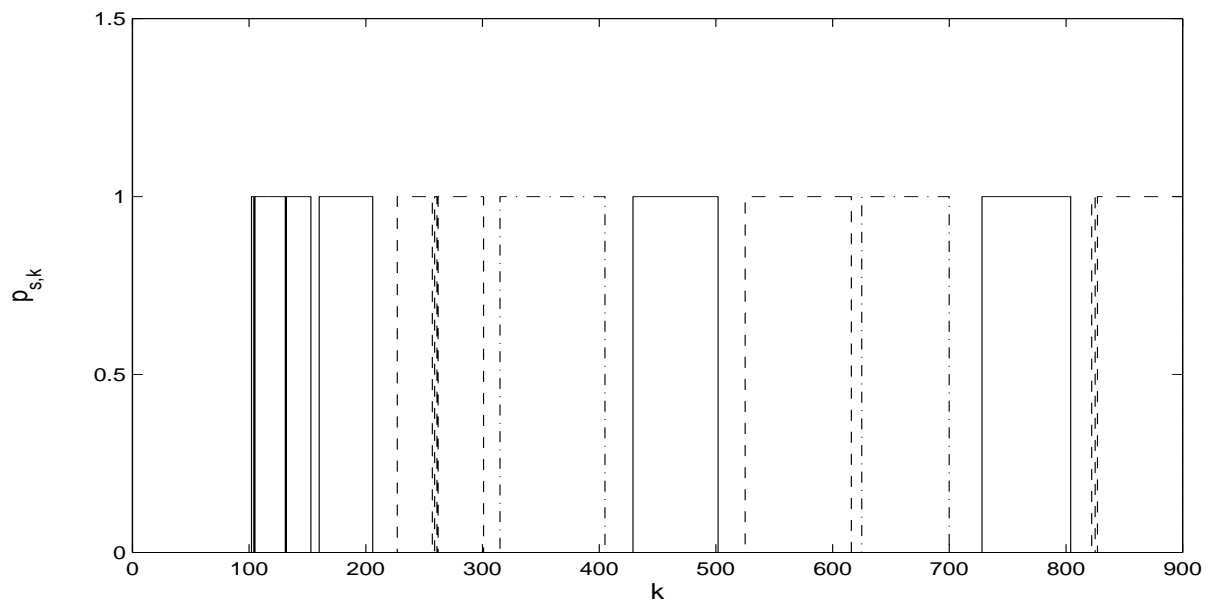


FIG. 2.20 – classification avec le choix du seuil  $\epsilon = 0.04$   
 modèle local 1 (—)  
 modèle local 2 (- -)  
 modèle local 3 (-.-)



### 2.7.2 Classification des données

On regroupe les matrices  $\mathbf{n}_k$  estimées en utilisant la relation (2.114). Pour classifier les données il faut déterminer le seuil  $\epsilon$  adéquat. Si on se base sur la courbe des distances entre les matrices  $\mathbf{n}_k$  représentées sur les figures (2.16) et (2.17), on peut être tenté de fixer ce seuil à 0.1, mais ce choix conduit à la détermination d'une classe prédominante et de deux petites classes dont les paramètres sont difficilement identifiables (ces deux classes comportent des nombres insuffisant de données) comme le montre la figure (2.19).

Nous avons donc opté pour un seuil plus faible en l'occurrence  $\epsilon = 0.04$  qui nous permet de retrouver les 3 classes, comme nous laisse présager les figures (2.16), (2.17) et (2.18). La classification obtenue avec ce seuil est représentée par la figure (2.20). Les trois classes sont correctement déterminées avec ce seuil. On remarque que les données recueillies autour des instants de commutations ne sont pas classées. Leur classe est déterminée en utilisant la même procédure que dans le paragraphe 2.4.7.

## 2.8 Conclusion

L'identification des systèmes à commutations par les techniques des sous-espaces est abordée dans ce chapitre. Les méthodes d'identification proposées dans la littérature ont été présentées et les difficultés rencontrées dans ces méthodes ont été soulignées. Les méthodes HH ("Hinging Hyperplanes") proposées par Breiman [11] sont présentées, de même que les améliorations apportées par Pucar et Sjöberg [58] d'une part et Bemporad *et al.* [7] d'autre part. La méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* [22] utilisant la reconnaissance des formes est aussi décrite. Dans les méthodes HH, l'utilisation de la MIQP, qui garantit la convergence vers l'optimum global, limite l'utilisation de la méthode à un nombre très faible de données. En revanche, la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* ne converge que si elle est bien initialisée et que le nombre de classes et le nombre d'éléments qu'elles contiennent sont connus. Cette méthode basée sur la reconnaissance de formes peut subdiviser une classe correspondant à un modèle local en plusieurs classes comportant un nombre faible de données, ce qui peut engendrer des problèmes de consistance d'estimation. En outre, les méthodes HH et la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* basée sur la reconnaissance de formes ne prennent pas en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans les SAC, ce qui peut entraîner une surparamétrisation ou une sous-paramétrisation des modèles locaux et conduire à des estimations non consistantes.

Pour apporter une solution aux problèmes évoqués, deux méthodes d'identification sont proposées : la première utilise les techniques de détection de rupture de modèle et la seconde se base sur la répartition des données dans l'espace des sorties et des régresseurs. Ces méthodes estiment d'abord les poids des modèles locaux, puis déterminent une réalisation minimale et équilibrée de ces modèles à partir de la connaissance des poids. Les deux méthodes proposées estiment les poids de manières différentes mais adoptent la même procédure de détermination des paramètres des modèles locaux.

La première méthode utilise les techniques de détection de rupture de modèle pour estimer les instants de commutations, puis les modèles locaux sont estimés à l'aide des techniques des sous-espaces. Deux techniques de détection sont exposées dans cette première méthode d'identification des SAC. La première technique de détection utilisée projette les sorties sur l'espace orthogonal à l'espace ligne des entrées pour générer des résidus sensibles aux ruptures de modèles. La deuxième technique de détection est une technique d'identification récursive des sous-espaces, cette technique permet d'obtenir un résidu dont la variance change considérablement lors des ruptures de modèle. Des tests statistiques sont effectués sur les résidus obtenus dans l'une ou l'autre

méthode de détection pour estimer les instants de commutations. Les techniques de détection de changements ont souvent un retard à la détection, ce qui empêche de déterminer avec exactitude les instants de commutations ; ce problème est pris en compte dans la première méthode d'identification proposée. Connaissant les instants de commutations, une technique des sous-espaces est proposée pour identifier les modèles locaux. Cette technique se base sur la connaissance des instants de commutations pour déterminer les poids des modèles locaux et estimer les paramètres de Markov. Les modèles locaux "identiques" sont fusionnés, puis les paramètres de Markov sont recalculés à l'aide des nouveaux poids obtenus par la fusion. Cette procédure de fusion et d'estimation des paramètres de Markov est répétée jusqu'à ce que la valeur des poids ne change plus. Enfin, une réalisation équilibrée et minimale est obtenue par l'algorithme ERA.

La deuxième méthode s'appuie sur la répartition des vecteurs de données dans l'espace des sorties et des régresseurs. Comme les vecteurs générés par un modèle local appartiennent tous à un même hyperplan, la classification est réalisée en déterminant le nombre d'hyperplans et les vecteurs appartenant au même hyperplan. Après la classification, les poids des modèles locaux sont calculés et l'identification des modèles locaux est réalisée de la même manière que dans la première méthode.

Dans les deux méthodes proposées, les modèles locaux qui composent le SAC sont supposés découplés, ce qui permet de tenir compte des changements d'ordre qui peuvent intervenir dans le système. De plus, les méthodes proposées n'ont pas besoin de conditions initiales ni de la connaissance du nombre de modèles locaux. En outre, le nombre d'opérations requises dans ces méthodes est raisonnable.

On peut envisager, dans une prochaine étude, l'élaboration d'une méthode adéquate de détermination d'un seuil : ce seuil devrait permettre de regrouper convenablement les matrices orthogonales des hyperplans.



# 3

## Identification des systèmes non-linéaires

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>99</b>
<b>3.2</b>	<b>Description de l'approche</b>	<b>100</b>
<b>3.3</b>	<b>Représentations sous forme d'état</b>	<b>101</b>
3.3.1	Multi-modèle à état unique	101
3.3.2	Multi-modèle à modèles locaux découplés	102
<b>3.4</b>	<b>Position du problème</b>	<b>102</b>
<b>3.5</b>	<b>Notations</b>	<b>103</b>
<b>3.6</b>	<b>Identification du système</b>	<b>104</b>
3.6.1	Estimation des paramètres de Markov	104
3.6.2	Estimation de l'ordre et des réalisations des modèles locaux	107
<b>3.7</b>	<b>Exemple</b>	<b>108</b>
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>

---

### 3.1 Introduction

Un système non-linéaire ne peut être représenté avec précision par un modèle linéaire que dans une zone restreinte de son espace de fonctionnement. En découpant cet espace en zones où le système peut être décrit par des modèles linéaires, le comportement du système peut être approché par une combinaison de ces modèles linéaires. L'approche multi-modèle se base sur ce principe : le comportement du système non-linéaire est donné par un ensemble de modèles affines locaux, valides dans des zones délimitées et la contribution de chaque modèle local est donnée par sa fonction d'activation (ou poids). Comme les modèles linéaires affines peuvent être centrés de manière à obtenir un modèle linéaire, nous parlerons dans la suite de modèles locaux linéaires au lieu de modèles locaux affines. Le problème d'identification revient alors à déterminer les fonctions d'activation et les modèles linéaires locaux. Différentes méthodes d'estimation des fonctions d'activation sont proposées dans la littérature [4], [23]. Ce chapitre est dédié à l'identification des modèles locaux, les poids des modèles locaux étant supposés connus. Dans un cadre plus général, la méthode proposée pourra être couplée avec les techniques d'estimation des poids pour identifier les systèmes non-linéaires.

Ces dernières années, des méthodes des sous-espaces ont été élaborées pour l'identification de certaines classes de systèmes non-linéaires. Ces méthodes utilisent la représentation d'état du système, ce qui permet d'aborder avec élégance le problème d'identification des systèmes non-linéaires MIMO alors que la plupart des méthodes proposées dans la littérature sont limitées aux systèmes MISO. Lacy et Bernstein [42] ont proposé des méthodes d'identification des sous-espaces des systèmes non-linéaires en les entrées mais linéaires par rapport aux états. Verdult *et al.* ont, de leur côté, présenté des méthodes d'identification des sous-espaces des systèmes bilinéaires [71] et des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps [69]. Un handicap majeur de ces méthodes proposées dans la littérature est la dimension importante des matrices utilisées et le nombre exorbitant de calculs. Cette contrainte limite l'application de ces méthodes aux systèmes de faible dimension. Il est alors nécessaire de revoir la formulation des méthodes des sous-espaces en vue d'une adaptation aux systèmes non-linéaires dans le cas général et de réduire la dimension des matrices utilisées (ou le volume des calculs).

Une nouvelle méthode d'identification des sous-espaces des systèmes non-linéaires avec l'approche multi-modèle est proposée dans ce chapitre. Basée sur la connaissance des mesures du système et des poids, cette nouvelle méthode identifie les modèles locaux. La méthode estime en premier lieu les paramètres de Markov, puis détermine une réalisation minimale équilibrée des modèles locaux à partir de ces derniers. La sortie du système est exprimée comme étant une somme pondérée de modèles FIR (les modèles locaux étant supposés stables), puis les paramètres de Markov sont estimés de deux manières :

- la première estime par projections successives, les paramètres de Markov des modèles locaux,
- la deuxième détermine en bloc tous les paramètres de Markov de tous les modèles locaux par une technique des moindres carrés.

Après l'estimation des paramètres de Markov, l'algorithme ERA est utilisé pour déterminer l'ordre et une réalisation de chaque modèle local. Cette méthode d'identification n'utilise pas d'algorithmes d'optimisation non-linéaires et sa mise en oeuvre est simple. Elle prend en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans la dynamique du système, comme l'illustre l'exemple proposé.

Ce chapitre commence par la description de l'approche multi-modèle et la présentation des différentes représentations d'état des multi-modèles dans la section suivante. Le problème d'identification abordé dans ce chapitre est décrit dans la section 4. Les matrices utilisées sont définies dans la cinquième section et la méthode d'identification proposée est donnée dans la section 6.

Finalement un exemple d'application de cette méthode est présentée dans la section 7.

### 3.2 Description de l'approche

Une description de l'approche multi-modèle dans le cas général est proposée dans cette section.

Considérons le système non-linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= G(x_k, u_k) \\ y_k &= F(x_k, u_k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $x_k$ ,  $u_k$  et  $y_k$  sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. La non-linéarité de la fonction représentée ci-dessus est déterminée par une variable  $z_k$  appelée variable d'activation. On subdivise l'espace de la variable d'activation en  $h$  zones dans lesquelles le système peut-être approximé par un modèle linéaire. On définit ensuite  $h$  fonctions  $f_s(\varphi_k)$  ( $\varphi_k$  vecteur de régression et  $s = 1, 2, \dots, h$ ) représentant des modèles locaux linéaires décrivant le comportement du système dans ces zones. Le comportement du modèle global  $F(\varphi_k)$  est obtenu par agrégation des  $h$  modèles locaux. La validité d'un modèle local  $f_s(\varphi_k)$  est déterminée par une fonction d'interpolation ou d'activation  $p_s(z_k)$  dépendant du vecteur  $z_k$  (on dira aussi fonction poids). Les fonctions d'interpolation  $p_s(z_k)$  vérifient la condition :

$$\sum_{s=1}^h p_s(z_k) = 1, \text{ et } 0 \leq p_s(z_k) \leq 1, \forall k \in [1, q] \quad (3.2)$$

si on dispose de  $q$  mesures des entrées et sorties. Dans la suite de ce chapitre on écrira  $p_{s,k}$  au lieu de  $p_s(z_k)$  pour des raisons de simplicité.

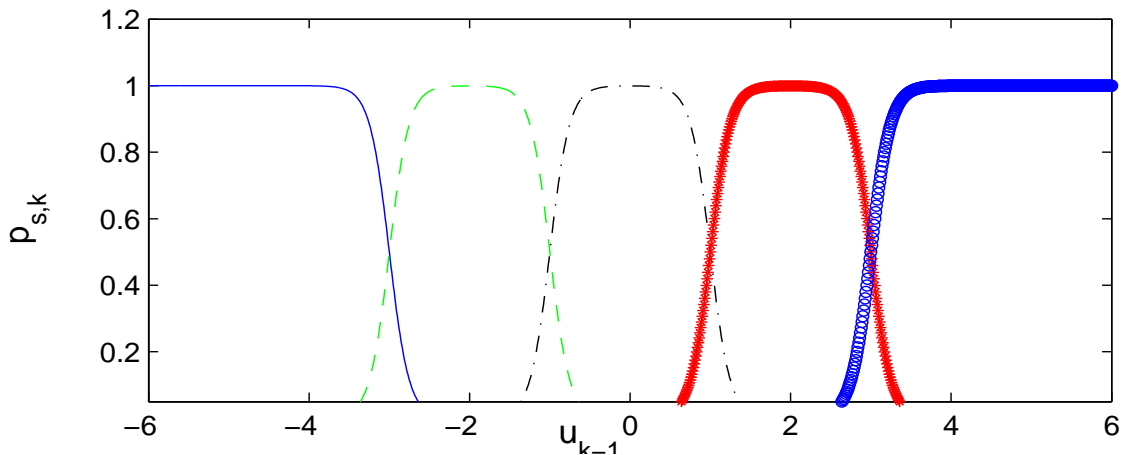


FIG. 3.1 – un exemple de fonctions de pondération avec  $z_k = u_{k-1} \in \mathbb{R}$  et  $h = 5$

La fonction  $p_{s,k}$  détermine le degré d'activation du modèle  $s$  qui lui est associé. Elle assure en outre le passage progressif d'un modèle local  $s$  aux modèles voisins. Cela implique que les fonctions  $p_{s,k}$  sont continues, contrairement aux fonctions de pondérations binaires définies dans la modélisation des systèmes à commutations.

Les fonctions de pondération déterminent une zone de l'espace de la variable d'activation  $z_k$  (appelée zone de fonctionnement) dans laquelle elles prennent des valeurs proches de 1 au centre et des valeurs voisines de 0 au bord comme cela est illustré sur la figure (3.1). La notion de zone de fonctionnement dans l'approche multi-modèle ne signifie pas forcément qu'on se trouve autour d'un point d'équilibre (ou d'un point stationnaire).

Une question se pose : peut-on représenter avec précision tous les systèmes non-linéaires (ne commutant pas) par une décomposition en somme pondérée de modèles locaux linéaires ? La réponse est donnée par les travaux de Johansen et Foss [34] qui, en s'appuyant sur une décomposition en série de Taylor de la fonction non-linéaire représentant le système, ont démontré sous certaines conditions les propriétés d'approximateur universel des multi-modèles. Ces deux chercheurs ont démontré qu'une fonction non-linéaire multi-variable peut être approximée avec une précision arbitraire  $\varepsilon$  et un nombre fini  $h$  de modèles locaux si les conditions suivantes sont vérifiées :

- les mesures des entrées et sorties sont bornées,
- les fonctions de validité ont un support localisé couvrant de façon dense l'espace de la variable d'activation,
- les modèles locaux sont les  $p$  premiers termes du développement en série de Taylor des fonctions  $F(x_k, u_k)$  et  $G(x_k, u_k)$  (Eq. (3.1)) autour de  $h$  points.
- Les fonctions  $F(x_k, u_k)$  et  $G(x_k, u_k)$  sont  $(p+1)$  fois dérivables et leur dérivée d'ordre  $(p+1)$  est bornée.

Ces conditions ne sont pas vérifiables dans les systèmes réels où on ne connaît pas les fonctions  $F(x_k, u_k)$  et  $G(x_k, u_k)$ . Une autre difficulté dans la mise en oeuvre de cette méthode est la détermination du nombre  $h$  de modèles locaux et leur position. De plus si l'espace de la variable d'activation  $z_k$  est de grande dimension, le nombre de modèles locaux nécessaire pour recouvrir cet espace explose.

Malgré ces contraintes, cette approche est utilisée avec succès dans l'identification des systèmes réels [23], [9].

Une seconde question se pose dans la mise en oeuvre de cette technique : quelle forme faut-il donner aux modèles locaux ? La réponse est multiple, deux approches existent dans la littérature concernant la représentation sous forme d'état. Intéressons-nous à chacune des ces approches dans la section suivante.

### 3.3 Représentations sous forme d'état

La première représentation utilise un vecteur d'état global tandis que la deuxième utilise des vecteurs d'états locaux découplés. Considérons chacune de ces représentations dans les paragraphes suivants.

#### 3.3.1 Multi-modèle à état unique

Cette première représentation suppose que le multi-modèle a un état  $x_k$  unique et global [70]. L'état global  $x_k$  étant une somme pondérée des "états" des modèles locaux :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sum_{s=1}^h p_{s,k} (A_s x_k + B_s u_k + v_{s,k}) \\ y_k &= \sum_{s=1}^h p_{s,k} (C_s x_k + D_s u_k + w_{s,k}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$  est la sortie du système,  $p_{s,k}$  est le degré d'activation correspondant à ce même modèle local et  $h$  indique le nombre de modèles locaux. Les vecteurs  $v_{s,k} \in \mathbb{R}^n$  et  $w_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$  sont



respectivement des bruits d'état et de sortie du  $s^{i\grave{e}me}$  modèle local, ces bruits étant centrés et décorrélés des entrées  $u_k$

Le problème d'identification que nous allons traiter consiste alors à déterminer les matrices  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$  et  $D_s$  ( $s = 1, 2, ..h$ ) à partir de  $q$  mesures des entrées et des sorties.

On peut considérer fictivement le terme  $A_s x_k + B_s u_k + v_{s,k}$  comme étant l'"état" du modèle local  $s$ . La modélisation donnée par l'équation (3.3) ne permet pas de prendre en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans les modèles locaux, c'est pourquoi nous proposons une nouvelle modélisation avec des vecteurs d'état complètement découplés.

### 3.3.2 Multi-modèle à modèles locaux découplés

Le multi-modèle est défini ici par une somme pondérée de modèles locaux complètement découplés. La sortie du multi-modèle peut s'écrire alors sous la forme :

$$y_k = \sum_{s=1}^h p_{s,k} y_{s,k} \quad (3.4)$$

où  $y_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$  est la sortie du  $s^{i\grave{e}me}$  modèle local,  $p_{s,k}$  est le degré d'activation correspondant à ce même modèle local et  $h$  indique le nombre de modèles locaux.

Chaque modèle local  $s$  est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x_{s,k+1} &= A_s x_{s,k} + B_s u_k + v_{s,k} \\ y_{s,k} &= C_s x_k + D_s u_k + w_{s,k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $x_{s,k} \in \mathbb{R}^{n_s}$  est le vecteur d'état du  $s^{i\grave{e}me}$  modèle local,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées et  $v_{s,k} \in \mathbb{R}^n$  et  $w_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$  sont respectivement des bruits d'état et de sortie du  $s^{i\grave{e}me}$  modèle local centrés et décorrélés des entrées  $u_k$ . Les modèles locaux peuvent donc avoir des états de dimension différentes.

Le problème d'identification de ces multi-modèles est exposé dans la section suivante.

## 3.4 Position du problème

On suppose que le système étudié est représenté par un multi-modèle dont la sortie est définie par :

$$y_k = \sum_{s=1}^h p_{s,k} y_{s,k} \quad (3.6)$$

où on rappelle que  $y_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$  est la sortie du  $s^{i\grave{e}me}$  modèle local,  $p_{s,k}$  est le degré d'activation correspondant à ce même modèle local et  $h$  indique le nombre de modèles locaux. La fonction d'activation dépend d'un vecteur d'activation  $z_k$  qui caractérise la zone de fonctionnement dans laquelle le système évolue.

Les degrés d'activation sont définis de telle manière qu'à chaque instant :

$$0 \leq p_{s,k} \leq 1, \quad \sum_{s=1}^h p_{s,k} = 1 \quad (3.7)$$

Chaque modèle local  $s$  est décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x_{s,k+1} &= A_s x_{s,k} + B_s u_k + v_{s,k} \\ y_{s,k} &= C_s x_k + D_s u_k + w_{s,k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Disposant de  $q$  mesures des entrées-sorties et des  $h$  fonctions d'activation supposées connues, notre objectif est d'identifier les  $h$  modèles locaux, i.e. déterminer :

- les ordres  $n_s$  des modèles locaux,
- les réalisations  $(A_s, B_s, C_s, D_s)$  des  $h$  modèles locaux.

Pour atteindre cet objectif, une méthode d'identification des sous-espaces utilisant une écriture matricielle particulière est proposée. Avant de présenter cette méthode, définissons les matrices qui seront utilisées dans la suite.

### 3.5 Notations

Soit  $q$ ,  $i$  et  $j$  trois entiers vérifiant :

$$q = i + j - 1, \text{ et } i > \max(n_s, s = 1, 2, \dots, h). \quad (3.9)$$

où l'on rappelle que  $n_s$  est la dimension du vecteur d'état du  $s^{\text{ième}}$  modèle local.

La matrice de sortie  $\underline{y}$  du multi-modèle est définie par :

$$\underline{y} = (y_i \ y_{i+1} \ \dots \ y_{i+j-1}) \in R^{\ell \times j} \quad (3.10)$$

Une définition similaire est donnée pour la matrice de sortie  $\underline{y}_s \in R^{\ell \times j}$  du modèle local  $s$  et pour la matrice des bruits de mesure  $\underline{w} \in R^{\ell \times j}$  du même modèle local.

La matrice des séquences d'état  $X_s$  du  $s^{\text{ième}}$  modèle local et la matrice des poids  $P_s$  du même modèle local sont définies par :

$$\begin{aligned} X_s &= (x_{s,i} \ x_{s,i+1} \ \dots \ x_{s,i+j-1}) \in R^{n \times f} \\ P_s &= \begin{pmatrix} p_{s,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{s,i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{s,i+j-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La matrice de Hankel d'entrée  $\bar{U}$  est définie par :

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \end{pmatrix} \in R^{mi \times j} \quad (3.12)$$

Une définition similaire est donnée pour la matrice de Hankel des bruits d'état  $\bar{V}_s \in R^{ni \times j}$  du modèle local  $s$ .

Les matrices d'observabilité  $\Gamma_{s,i}$  et de commandabilité  $\mathcal{C}_{s,i}$  du  $s^{\text{ième}}$  modèle local sont définies

par :

$$\Gamma_{s,i} = \begin{pmatrix} C_s \\ C_s A_s \\ \vdots \\ C_s A_s^{i-1} \end{pmatrix} \in R^{\ell i \times n_s} \quad (3.13)$$

$$C_{s,i} = (B_s \ A_s B_s \ \dots \ A_s^{i-1} B_s) \in R^{n_s \times m_i}$$

Les matrices des paramètres de Markov de la partie déterministe  $H_{s,i}$  et des bruits d'état  $H_{s,i}^v$  du modèle local  $s$  sont définies par :

$$\begin{aligned} H_{s,i} &= (C_s A_s^{i-2} B_s \ C_s A_s^{i-3} B_s \ \dots \ C_s B_s \ D_s) \in R^{\ell \times m_i} \\ H_{s,i}^v &= (C_s A_s^{i-2} \ C_s A_s^{i-3} \ \dots \ C_s \ 0) \in R^{\ell \times n_{s,i}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

La matrice des paramètres de Markov des  $h$  modèles locaux est donnée par :

$$H_i = (H_{1,i} \ H_{2,i} \ \dots \ H_{h,i}) \quad (3.15)$$

### 3.6 Identification du système

Afin d'identifier les modèles locaux composant le modèle global, nous allons estimer dans un premier temps les matrices  $H_{s,i}$  ( $s = 1, 2, \dots, h$ ) contenant les paramètres de Markov des modèles locaux. Puis, nous utilisons l'algorithme ERA (Eigenvalue Realization Algorithm) [36] pour déterminer l'ordre et les réalisations des  $h$  modèles locaux à partir des paramètres de Markov estimés.

#### 3.6.1 Estimation des paramètres de Markov

Une relation matricielle d'entrée-sortie sera établie pour chaque modèle local, puis les matrices des paramètres de Markov  $H_{s,i}$  ( $s = 1, 2, \dots, h$ ) seront estimées à partir de ces relations, la matrice des poids  $P_s$  (Eq. (3.11)) étant supposée connue.

#### Relation matricielle d'entrée-sortie locale

La relation matricielle (3.16) obtenue à partir des substitutions répétitives de l'équation (3.8), relie la matrice des séquences de sortie pondérée du modèle local  $s$  à la matrice des séquences d'état et aux matrices de Hankel d'entrée et de bruit de ce modèle.

$$\underline{y}_s P_s = C_s A_s^{i-1} X_s P_s + H_{s,i} \bar{U} P_s + H_{s,i}^v \bar{V}_s P_s + \underline{w}_s P_s \quad (3.16)$$

On peut noter une grande similitude entre la relation (3.16) et la relation matricielle classique des sous-espaces qui lie les matrices de Hankel d'entrée et sortie (voir [67] page 139 équation (5.4)). Il semblerait alors intéressant de faire une projection qui annulerait la matrice des séquences d'état pondérée et permettrait d'estimer la matrice  $H_{s,i}$  des paramètres de Markov du modèle local  $s$  (voir [53]). Malheureusement, la présence des degrés d'activation dans l'équation (3.16) ne permet pas de réaliser cette projection. De plus, la matrice des séquences d'état  $X_s$  du  $s^{\text{ième}}$  modèle local est inconnue.

Pour éviter d'estimer cette matrice des séquences d'état, nous supposons que chaque modèle local est stable. A partir d'un ordre  $i$  donné, nous pouvons négliger le terme  $C_s A_s^{i-1} X_s P_s$  (puisque

la matrice  $A_s$  est stable et la matrice  $P_s$  est bornée) et la relation entrée/sortie (3.16) devient :

$$\underline{y}_s P_s \simeq H_{s,i} \bar{U}_j P_s + H_{s,i}^v \bar{V}_s P_s + \underline{w}_s P_s \quad (3.17)$$

puisque les puissances élevées de la matrice d'état tendent vers zéro. Les sorties sont expliquées uniquement par les entrées, le modèle local est alors approché par un FIR (filtre à réponse impulsionnelle finie).

On peut alors estimer la matrice  $H_{s,i}$  des paramètres de Markov du modèle  $s$  par une technique des moindres carrés. Mais cela suppose la connaissance de la sortie de ce modèle (matrice  $\underline{y}_s$ ) dont nous ne disposons pas.

Dans la suite, nous proposons deux méthodes équivalentes pour estimer les  $h$  matrices  $H_{s,i}$  à partir de la sortie globale.

### Estimation des matrices des paramètres de Markov

Le théorème suivant permet d'estimer la matrice  $H_{s,i}$  des paramètres de Markov du modèle local  $s$  par une projection oblique.

**Théorème 3.1.** *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. les matrices  $A_s$  ( $s = 1, \dots, h$ ) sont stables,
2. la matrice  $\bar{U}_p$  est de plein rang

$$\bar{U}_p = (\bar{U}_{1,p}^T \ \bar{U}_{2,p}^T \ \dots \ \bar{U}_{h,p}^T)^T \in \mathbb{R}^{h(mi) \times j} \quad (3.18)$$

avec

$$\bar{U}_{1,p} = \bar{U} P_1, \quad \bar{U}_{2,p} = \bar{U} P_2, \dots, \bar{U}_{h,p} = \bar{U} P_h \quad (3.19)$$

alors

$$\underline{y} \Pi_{U_{s,p}^\perp} \left( \bar{U}_{s,p} \Pi_{U_{s,p}^\perp} \right)^{(-)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_{p,i} \quad (3.20)$$

où  $U_{s,p}$  est la matrice  $\bar{U}_p$  (éq. 3.18) privée de  $\bar{U}_{s,p}$  :

$$U_{s,p} = (\bar{U}_{1,p}^T \ \bar{U}_{2,p}^T \ \dots \ \bar{U}_{s-1,p}^T \ \bar{U}_{s+1,p}^T \ \dots \ \bar{U}_{h,p}^T)^T \in \mathbb{R}^{(h-1)mi \times j} \quad (3.21)$$

On pourra noter que la condition 2 est satisfaite si :

- $j > m \times i$
- l'entrée est d'excitation persistante d'ordre  $i$ ,
- aucune zone de fonctionnement n'est dépourvue de données, i.e.  $P_s$  ( $s = 1, \dots, h$ ) est différent de la matrice nulle,
- les zones de fonctionnement ne se recouvrent pas trop fortement, i.e.  $P_s \neq P_p$  ( $s \neq p$ ).

### Démonstration

Des égalités (3.6), (3.10) et (3.17), nous déduisons la sortie du multi-modèle :

$$\underline{y} \simeq \sum_{r=1}^h (H_{r,i} \bar{U}_{r,p} + H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \quad (3.22)$$

$$\underline{y} \simeq \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^h (H_{r,i} \bar{U}_{r,p}) + H_{s,i} \bar{U}_{s,p} + \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \quad (3.23)$$

Par projection, nous éliminons le terme  $\underline{U}_{s,p}$  (défini en (3.21)) :

$$\underline{y} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \simeq 0 + H_{s,i} \bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} + \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp}$$

La condition 2 du théorème permet d'obtenir une estimation de la matrice  $H_{s,i}$  en multipliant l'expression précédente à droite, par la matrice  $\left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp}\right)^{(-)}$  :

$$\underline{y} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp}\right)^{(-)} \simeq H_{s,i} + \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp}\right)^{(-)} \quad (3.24)$$

Calculons à présent l'espérance mathématique du terme  $b_1$  représentant l'influence des bruits  $(v_{s,k}$  et  $w_{s,k})$  sur l'estimation de la matrice  $H_{p,i}$  :

$$b_1 = \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp}\right)^{(-)}$$

En tenant compte de la symétrie et de l'idempotence de la matrice  $\Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp}$  et du fait que  $M^{(-)} = M^T (M M^T)^{-1}$ , nous avons :

$$b_1 = \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \bar{U}_{s,p}^T \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \bar{U}_{s,p}^T\right)^{-1}$$

$$b_1 = \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) (\bar{U}_{s,p}^T - \underline{U}_{s,p}^T (\underline{U}_{s,p} \underline{U}_{s,p}^T)^{-1} \underline{U}_{s,p} \bar{U}_{s,p}^T) \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \bar{U}_{s,p}^T\right)^{-1} \quad (3.25)$$

$$b_1 = \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \bar{U}_{s,p}^T \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \bar{U}_{s,p}^T\right)^{-1} - \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \underline{U}_{s,p}^T (\underline{U}_{s,p} \underline{U}_{s,p}^T)^{-1} \underline{U}_{s,p} \bar{U}_{s,p}^T \left(\bar{U}_{s,p} \Pi_{\underline{U}_{s,p}^\perp} \bar{U}_{s,p}^T\right)^{-1} \quad (3.26)$$

L'expression précédente permet de dire que l'espérance mathématique de  $b_1$  est nulle :

$$\mathbf{E}[b_1] = 0 \quad (3.27)$$

cette égalité découle du fait que les entrées sont décorrélatées des bruits  $v_{s,k}$  et  $w_{s,k}$ . ■

En utilisant le théorème (3.1), il est possible d'estimer l'une après l'autre les matrices des paramètres de Markov des modèles locaux. En vue de diminuer le nombre d'opérations effectuées dans l'estimation des matrices des paramètres de Markov, nous établissons dans la suite un théorème qui permet d'estimer toutes les matrices des paramètres de Markov en une seule étape.

### Estimation de la matrice $H_i$

L'estimation des  $h$  matrices des paramètres de Markov  $H_{p,i}$  ( $p = 1, 2, \dots, h$ ), est réalisée par la méthode des moindres carrés et le résultat obtenu est identique à celui obtenu par le théorème (3.1).

**Théorème 3.2.** *Si les conditions du théorème (3.1) sont vérifiées, alors :*

$$\underline{y} \bar{U}_p^T (\bar{U}_p \bar{U}_p^T)^{-1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_i \quad (3.28)$$

#### Démonstration

Des égalités (3.6) et (3.17), nous déduisons :

$$\underline{y} \simeq \sum_{r=1}^h (H_{r,i} \bar{U}_{r,p} + H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \quad (3.29)$$

$$\underline{y} \simeq (H_{1,i} \ H_{2,i} \ \dots \ H_{h,i}) \bar{U}_p + \sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \quad (3.30)$$

où  $\bar{U}_p$  est définie dans l'équation (3.18).

Une estimation non biaisée de la matrice  $H_i$  est donnée par la méthode des moindres carrés :

$$(H_{1,i} \ H_{2,i} \ \dots \ H_{h,i}) \simeq \underline{y} \bar{U}_p^T (\bar{U}_p \bar{U}_p^T)^{-1}$$

obtenue par la minimisation du critère  $J$  suivant :

$$J(H_{1,i}, H_{2,i}, \dots, H_{h,i}) = \|\underline{y} - (H_{1,i} \ H_{2,i} \ \dots \ H_{h,i}) \bar{U}_p\|_F^2 \quad (3.31)$$

En effet, l'espérance mathématique du terme additif dépendant du bruit :

$$\sum_{r=1}^h (H_{r,i}^v \bar{V}_r P_r + \underline{w}_r P_r) \bar{U}_p^T (\bar{U}_p \bar{U}_p^T)^{-1}$$

est nulle puisque les entrées sont indépendantes des bruits de moyenne nulle. ■

### 3.6.2 Estimation de l'ordre et des réalisations des modèles locaux

Disposant à présent des paramètres de Markov des  $h$  modèles locaux, nous pouvons déterminer l'ordre  $n_s$  et une réalisation  $(A_s, B_s, C_s, D_s)$  pour chaque modèle local  $s$ . Puisque les modèles locaux recherchés sont linéaires, nous pouvons utiliser les algorithmes développés dans le cas linéaire. Pour déterminer l'ordre et une réalisation minimale et équilibrée, nous avons adopté l'algorithme ERA [36] qui utilise les  $i$  paramètres de Markov de la matrice  $H_{s,i}$ .

#### Algorithme ERA

1. Construire les matrices de Hankel contenant les paramètres de Markov  $\mathbf{H}_{s,\nu}^0$  et  $\mathbf{H}_{s,\nu}^1$  :

$$\mathbf{H}_{s,\nu}^r = \begin{pmatrix} C_s A_s^r B_s & C_s A_s^{r+1} B_s & \dots & C_s A_s^{r+\nu-1} B_s \\ C_s A_s^{r+1} B_s & C_s A_s^{r+2} B_s & \dots & C_s A_s^{r+\nu} B_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_s A_s^{r+\nu-1} B_s & C_s A_s^{r+\nu} B_s & \dots & C_s A_s^{r+2\nu-2} B_s \end{pmatrix}$$

avec  $\nu = \text{int}(i/2)$

2. Réaliser la décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{H}_{s,\nu}^0 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \simeq U_1 S_1 V_1^T \quad (3.32)$$

où  $S_2$  contient toutes les valeurs singulières négligeables.

3. Déterminer l'ordre du modèle local et les matrices  $(A_s, B_s, C_s)$  :

- L'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$ .
- Calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_{s,\nu} = U_1 S_1^{1/2}$  et celle de commandabilité  $\mathcal{C}_{s,\nu} = S_1^{1/2} V_1^T$ .
- La matrice  $C_s$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_{s,\nu}$ .
- La matrice  $B_s$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}_{s,\nu}$ .
- La matrice  $A_s$  est donnée par :

$$A_s = S_1^{-1/2} U_1^T \mathbf{H}_{s,\nu}^1 V_1 S_1^{-1/2} \quad (3.33)$$

### 3.7 Exemple

Considérons le système ((3.6)-(3.8)) dans lequel les matrices du système prennent les valeurs :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,98 & -0,04 \\ -0,12 & 0,81 & -0,03 \\ -0,02 & -0,05 & -0,18 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,7 \\ 0,71 & -0,5 \\ 0,8 & 0,47 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} -0,55 & 0,2 & 0,8 \\ 0,45 & 0,3 & 0,58 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,63 \\ -0,32 & 0,95 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,61 & -0,75 & 0,34 \\ 1,43 & -0,75 & 0,59 \\ -0,64 & 0,55 & 0,24 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,6 \\ 0,32 & -0,66 \\ 0,3 & 0,82 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} -0,8 & -0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,48 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ -0,2 & -0,5 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & -0,8 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -0,67 & 0,91 \\ 0,58 & -0,39 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} -0,75 & -0,29 \\ 0,38 & 0,92 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} -0,26 & 0,58 \\ -0,81 & 0,19 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

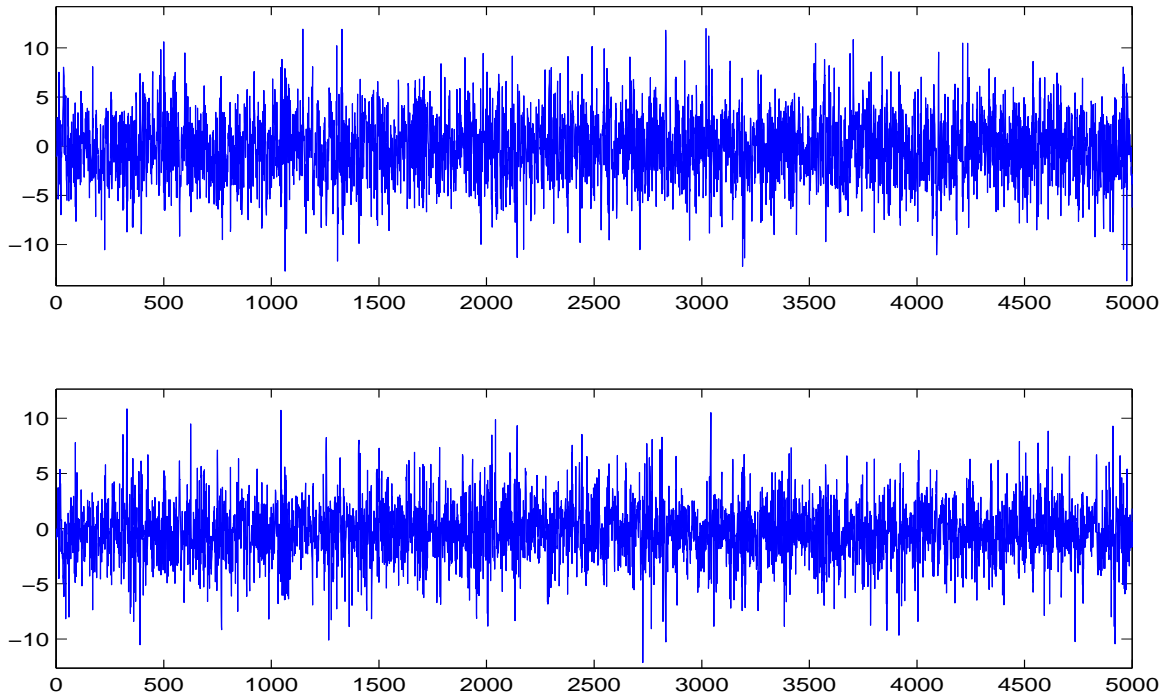


FIG. 3.2 – les entrées du système

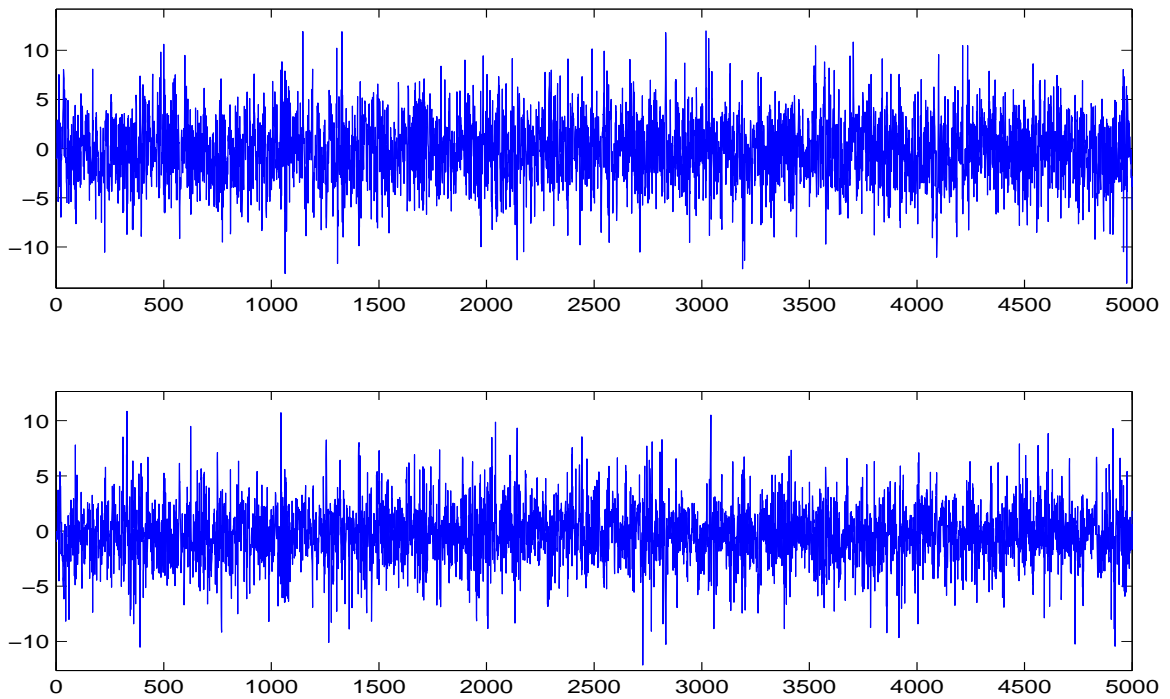


FIG. 3.3 – les sorties du système



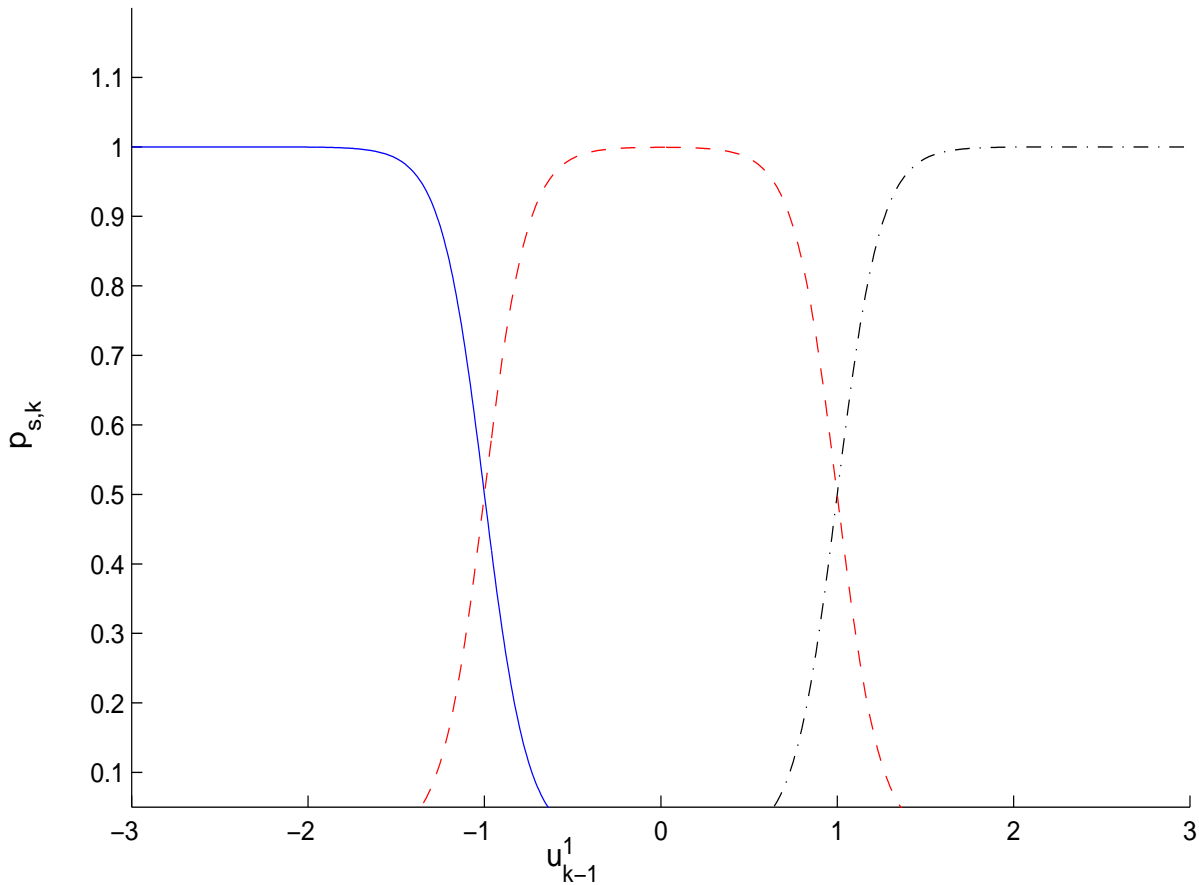


FIG. 3.4 – Les fonctions d’activation (— premier modèle; - - deuxième modèle; -.- troisième modèle)

Nous disposons de  $q = 3000$  mesures des entrées et sorties. Les entrées sont des séquences binaires pseudo-aléatoires (SBPA) d’amplitudes variables représentées sur la figure (3.2). Le vecteur  $v_k \in \mathbb{R}^2$  est un bruit blanc de variance  $\mathbf{E}(v_{s,k} v_{s,k}^T) = 0,001 \times I_{n_s}$ . Le rapport signal sur bruit est de  $17db$  pour la première sortie et  $18db$  pour la seconde sortie. Les deux sorties du système sont tracées sur la figure (3.3).

Les fonctions de pondération  $p_{s,k}$  des trois modèles locaux sont représentées sur la figure (3.4). La variable d’activation  $z_k$  est la première entrée retardée  $u_{k-1}^1$ .

### Détermination de l’ordre

Le tracé des valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}_{s,\nu}^0$  (Eq. (3.32)) nous permet de trouver les ordres “réels” : un ordre trois pour les deux premiers modèles locaux (figures (3.5) et (3.6)) et un ordre deux pour le troisième (figure (3.7)).

### Estimation des pôles

Les figures (3.8) à (3.10) visualisent dans le plan complexe la dispersion des pôles et des zéros estimés par la première méthode pour une simulation de Monte Carlo de 200 expériences. Les résultats obtenus par la seconde méthode sont identiques (les deux méthodes étant équivalentes).

Comme on le voit sur ces figures, les estimations obtenues sont proches des valeurs réelles.

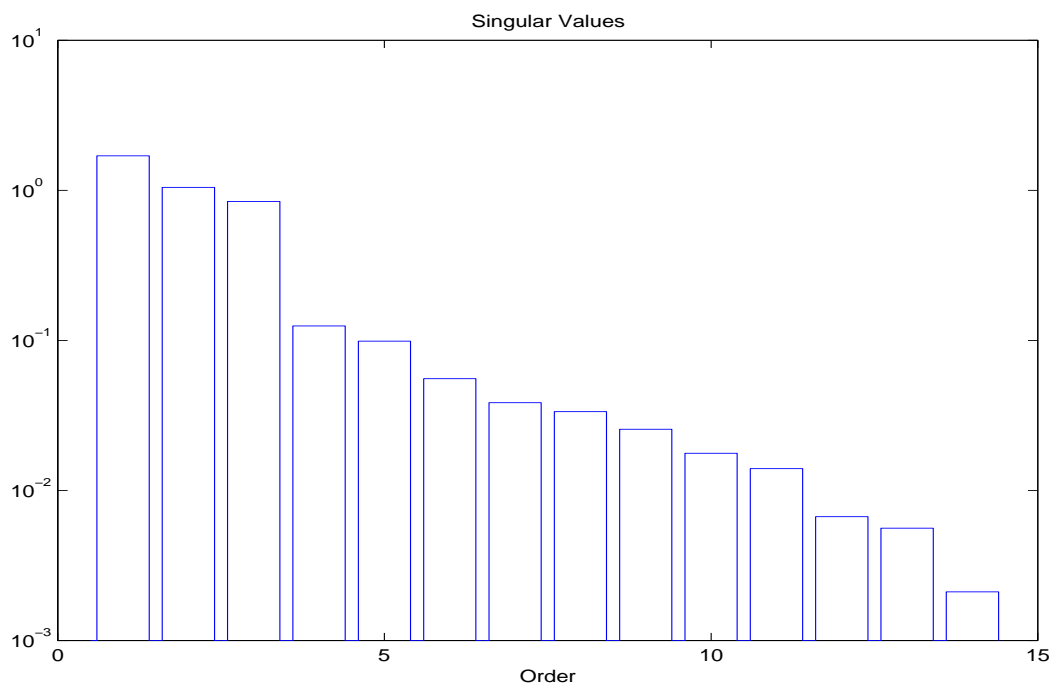


FIG. 3.5 – valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}_{1,v}^0$  (modèle local 1), Eq. (3.32).

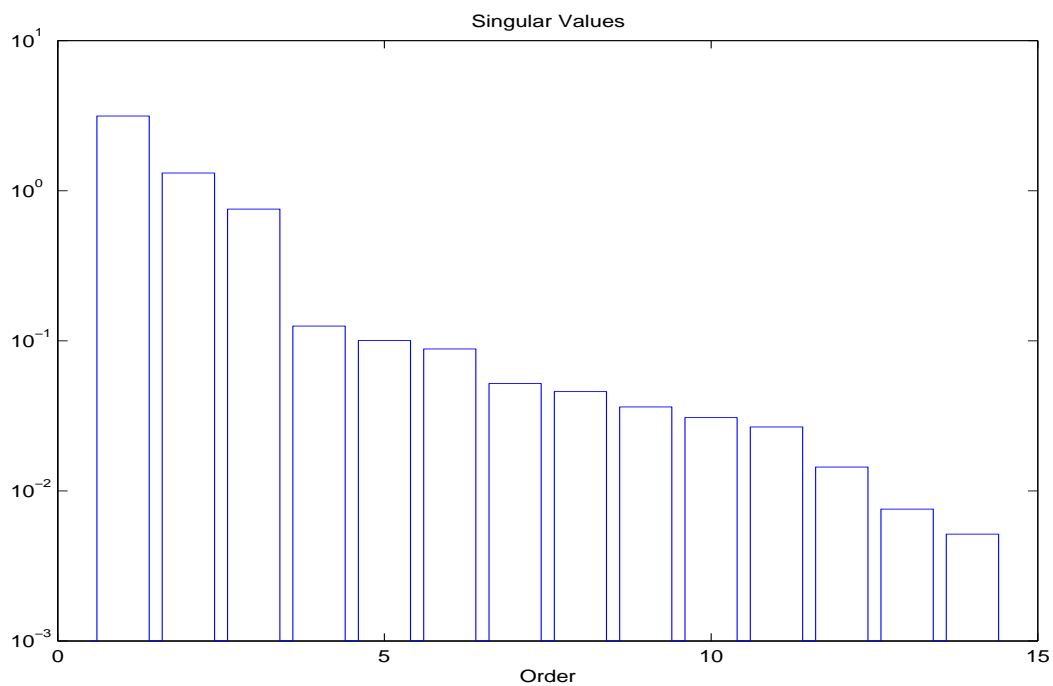


FIG. 3.6 – valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}_{2,v}^0$  (modèle local 2), Eq. (3.32).

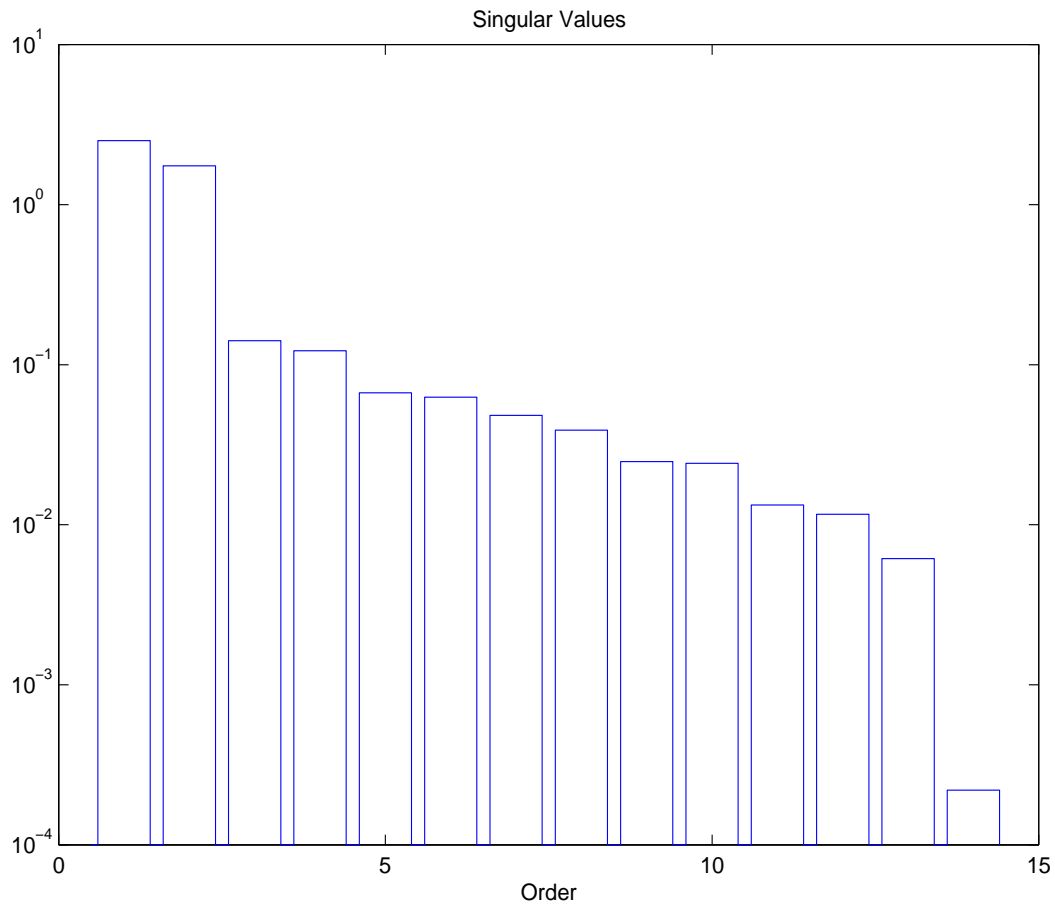


FIG. 3.7 – valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}_{3,v}^0$  (modèle local 3), Eq. (3.32).

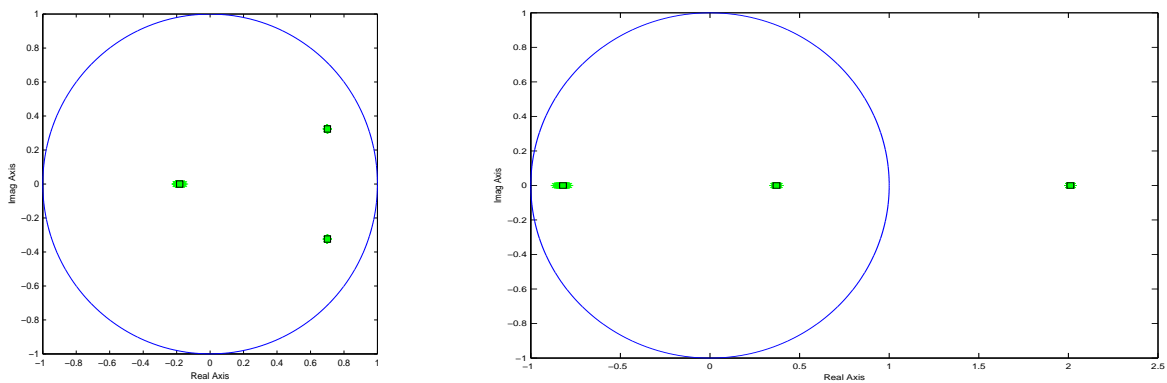


FIG. 3.8 – dispersion des pôles et zéros pour la simulation de Monte Carlo du modèle local 1  
à gauche les pôles estimés :  $\square$  pôles réels,  $*$  pôles estimés  
à droite les zéros estimés :  $\square$  zéros réels,  $*$  zéros estimés

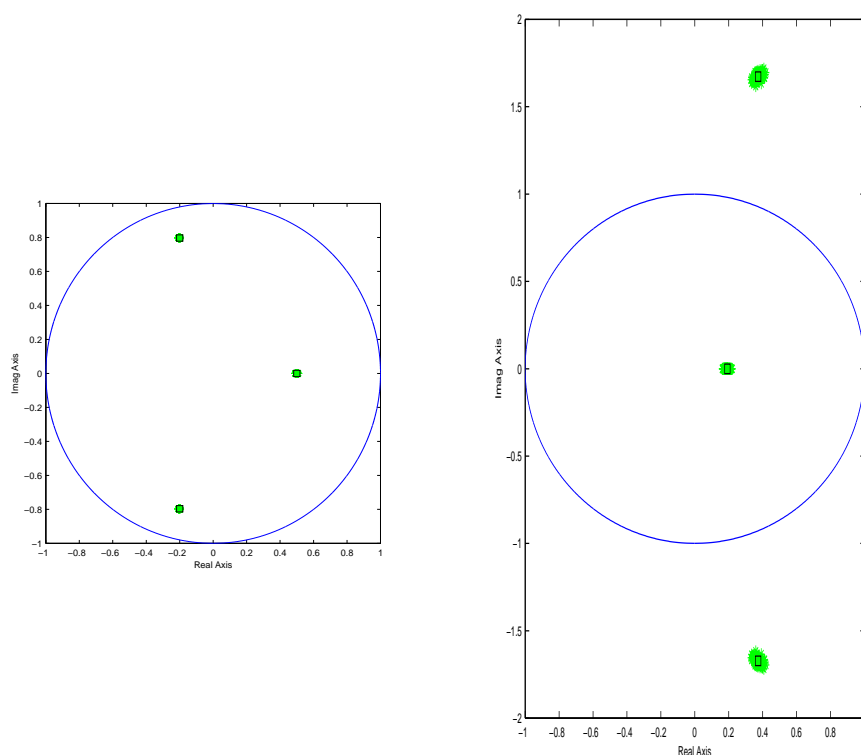


FIG. 3.9 – dispersion des pôles et zéros pour la simulation de Monte Carlo du modèle local 2  
à gauche les pôles estimés :  $\square$  pôles réels,  $*$  pôles estimés  
à droite les zéros estimés :  $\square$  zéros réels,  $*$  zéros estimés

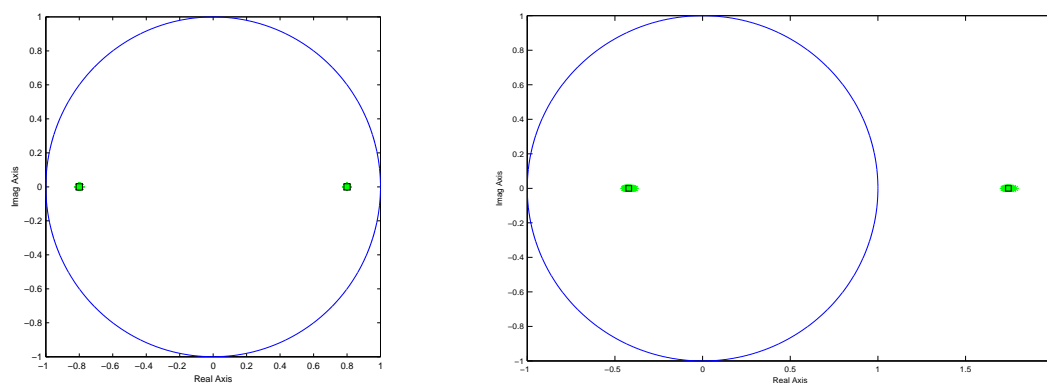


FIG. 3.10 – dispersion des pôles et zéros pour la simulation de Monte Carlo du modèle local 3  
à gauche les pôles estimés :  $\square$  pôles réels,  $*$  pôles estimés  
à droite les zéros estimés :  $\square$  zéros réels,  $*$  zéros estimés

### 3.8 Conclusion

Une méthode des sous-espaces d'identification d'une représentation multi-modèle des systèmes dynamiques non-linéaires MIMO est proposée dans ce chapitre. Dans l'approche multi-modèle, le système est représenté par une somme pondérée de modèles linéaires localement valides. Le problème de l'identification du système revient à estimer les modèles locaux et à déter-

miner leur poids. Dans ce chapitre, les poids sont fixés a priori et les modèles locaux supposés stables sont identifiés.

La méthode d'identification des modèles locaux est basée sur l'estimation des paramètres de Markov. Deux méthodes d'estimation équivalentes de ces paramètres sont proposées dans ce chapitre. La sortie du système est approchée par une somme pondérée de modèle FIR dans les deux méthodes. La première utilise les projections matricielles pour déterminer successivement les paramètres de Markov des modèles locaux. La deuxième estime simultanément tous les paramètres de Markov par la méthode des moindres carrés. A partir des paramètres de Markov estimés, l'ordre et une réalisation minimale et équilibrée de chaque modèle local sont déterminés par l'algorithme ERA.

La méthode d'identification proposée est adaptée à l'identification des systèmes MIMO alors que la plupart des méthodes proposées dans la littérature s'intéressent à l'identification des systèmes MISO. Cette méthode est applicable aux systèmes qui sont soumis à des bruits colorés centrés. De plus, la dimension des matrices utilisées dans cette méthode est faible comparée aux matrices intervenant dans les méthodes d'identification des sous-espaces proposées dans la littérature et destinées aux systèmes linéaires à paramètres variants. Cette méthode prend en compte les changements d'ordre pouvant intervenir dans la dynamique du système.

La méthode proposée peut être combinée avec les méthodes d'estimation des poids existant dans la littérature, ce qui rendrait possible une identification globale des systèmes non-linéaires. Ce domaine d'investigation reste à étudier pour déterminer les techniques d'estimation des poids appropriées, notamment celles qui garantissent la stabilité des modèles locaux.

# 4

## Diagnostic des systèmes dynamiques linéaires -approche par projections géométriques

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>4.2</b>	<b>L'espace de parité</b>	<b>118</b>
4.2.1	Positionnement du problème	118
4.2.2	Génération de résidus	119
4.2.3	Sensibilité aux défauts de capteurs	120
4.2.4	Choix de l'indice $i$	121
4.2.5	Exemple	122
4.2.6	Robustesse	125
4.2.7	Détection et isolation de défaut par le test de khi-deux	127
<b>4.3</b>	<b>L'Analyse en Composantes Principales</b>	<b>128</b>
4.3.1	Position du problème	128
4.3.2	Génération de résidu	128
4.3.3	Lien avec l'espace de parité [30]	130
4.3.4	Influence de la non persistance des entrées	130
4.3.5	Incertitude liée à la détermination de $\tilde{W}$	132
4.3.6	Détection de défaut	132
<b>4.4</b>	<b>Nouvelle méthode basée sur les projections géométriques</b>	<b>133</b>
4.4.1	Position du problème	133
4.4.2	Matrices du système	134
4.4.3	Détection de défauts de capteurs	135
4.4.4	Isolation de défauts de capteurs	140
4.4.5	Exemple	141
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>148</b>

---

## 4.1 Introduction

Les défauts de capteurs altèrent les informations recueillies sur les systèmes, c'est pourquoi leur détection et leur isolation sont essentielles à la validation des données fournies par les capteurs. Parmi les méthodes proposées dans la littérature, on peut citer, au nombre des plus utilisées, le filtre de Kalman, les observateurs, l'espace de parité et l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Ces deux dernières méthodes seront décrites, au vu des similitudes avec la méthode de détection et d'isolation de défaut de capteurs qui sera proposée dans la suite de chapitre.

La première section donne une présentation de la détection et de l'isolation de défaut de capteurs par l'espace de parité, et évoque les problèmes de robustesse auxquels on est confronté dans cette méthode.

La deuxième section, quant à elle, s'intéresse à la technique ACP qui n'utilise pas de modèle explicite du système mais identifie de manière implicite ce dernier, ce qui entraîne des problèmes d'incertitudes liées aux matrices utilisées. Les problèmes de persistance d'excitation et de détermination d'ordre existent aussi dans l'utilisation de cette méthode.

Le modèle mathématique des systèmes à surveiller est souvent obtenu par identification. Or la condition de persistance des signaux d'entrée indispensable aux méthodes d'identification ne peut pas être toujours vérifiée du fait des contraintes physiques liées à certains systèmes. Si cette condition de persistance des entrées n'est pas vérifiée, le modèle du système ne peut pas être élaboré et les méthodes de détection et d'isolation de défaut à base de modèle explicite (telles que l'espace de parité, les observateurs, le filtre de Kalman) ne seront pas utilisables. L'ACP applicable dans le cas où le modèle du système n'est pas disponible ne pourra non plus être utilisée si cette condition de persistance des signaux d'entrée n'est pas vérifiée. Comment détecter et isoler les défauts de capteurs des systèmes dans le cas où l'on ne connaît pas leur modèle et où leurs signaux d'entrées ne sont pas persistants ? Telle est la question qui sera abordée dans la section suivante.

Pour détecter les défauts de capteurs affectant les systèmes, un résidu sensible aux défauts est généré par projection géométrique. Afin d'obtenir ce résidu, la sortie du système est approchée par un FIR, la sortie est donc exprimée uniquement en fonction des entrées et des bruits. L'influence des entrées est supprimée par une projection sur l'espace orthogonal à l'espace ligne des entrées ; il ne reste plus que l'influence des bruits. Le résidu ainsi généré est de moyenne nulle en l'absence de défaut et de moyenne non nulle s'il y a apparition d'un défaut. Un test de saut de moyenne est alors réalisé sur ce résidu de manière à détecter les défauts affectant les capteurs. L'isolation de défaut se fait de manière directe puisque les résidus obtenus sont déjà structurés.

Il est à noter que les projections utilisées dans l'espace de parité sont réalisées sur l'espace orthogonal aux matrices du système ce qui impose la connaissance de ces matrices alors que celles utilisées dans ce chapitre ne nécessitent que la connaissance des entrées du système puisque cette projection est réalisée orthogonalement aux entrées. La méthode présentée ici ne souffre pas de problèmes liés aux incertitudes paramétriques rencontrés dans le diagnostic à base de modèle. En outre, aucune détermination d'ordre n'est nécessaire contrairement à l'ACP.

La méthode exposée dans ce chapitre a été utilisée pour détecter et isoler des défauts sur le modèle d'une installation de broyage de minerais [57].



## 4.2 L'espace de parité

L'espace de parité est l'une des techniques de diagnostic à base de modèle explicite les plus connues [16], [5], [25], [26] et [28]. Cette méthode est basée sur l'utilisation des outils de l'algèbre linéaire, notamment les projections matricielles pour générer un résidu centré en l'absence de défauts et de moyenne non nulle dans le cas contraire. Ce résidu est obtenu en retranchant successivement l'influence des entrées et de l'état sur la sortie du système. L'influence des entrées est retranchée directement puisque ces entrées sont connues de même que leur matrice d'action (matrice de Toeplitz inférieure). Comme la matrice d'interaction de l'état sur la sortie (la matrice d'observabilité) est connue, l'influence de l'état est annulée par projection sur l'espace orthogonale à cette matrice d'interaction. Ces projections sont réalisées orthogonalement à la matrice d'observabilité de manière à annuler l'influence de l'état sur la sortie. En l'absence de défaut le résidu ainsi obtenu ne reflète que l'action des bruits aléatoires et centrés. Si un défaut affecte le système et si sa direction n'est pas colinéaire à celle de l'état, alors son influence se traduira par un changement de la moyenne du résidu. Une structuration du résidu est réalisée ensuite afin de localiser le défaut.

Dans cette section, nous nous intéresserons uniquement à la détection et à l'isolation de défaut de capteurs par l'espace de parité. Cette présentation commence par une description du problème de détection et d'isolation de défaut de capteurs. Nous présenterons ensuite la solution proposée par l'espace de parité, à savoir la génération d'un résidu sensible aux défauts par des projections géométriques puis nous montrerons comment ce résidu peut être utilisé pour détecter et isoler les défauts de capteurs. Finalement une analyse de l'espace de parité dans le cas où le modèle du système est incertain sera exposée.

### 4.2.1 Positionnement du problème

On suppose connues les matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  du système ci-dessous :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + w_k \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  désigne les entrées,  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$  est la sortie du système.  $v_k \in \mathbb{R}^n$  et  $w_k \in \mathbb{R}^\ell$  sont respectivement les bruits du système et de sortie du système, ces bruits sont supposés gaussiens à moyenne nulle et indépendants des entrées  $u_k$ .

On suppose en outre que l'on dispose des mesures des entrées  $u_k$  et sorties  $y_k$ .

L'objectif est de détecter et d'isoler les défauts qui affectent les capteurs du système.

Lors de l'apparition d'un défaut de capteurs, le système (4.1) devient :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + w_k + \varphi_k \end{aligned} \quad (4.2)$$

où  $\varphi_k \in \mathbb{R}^\ell$  ( $\varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_k^1 \\ \varphi_k^2 \\ \vdots \\ \varphi_k^\ell \end{pmatrix}^T$ ) représente le défaut de capteurs. Isoler et détecter les défauts de

capteurs revient à déterminer la présence du terme  $\varphi_k$  et de la (des) composante(s) non nulle(s) de ce vecteur.

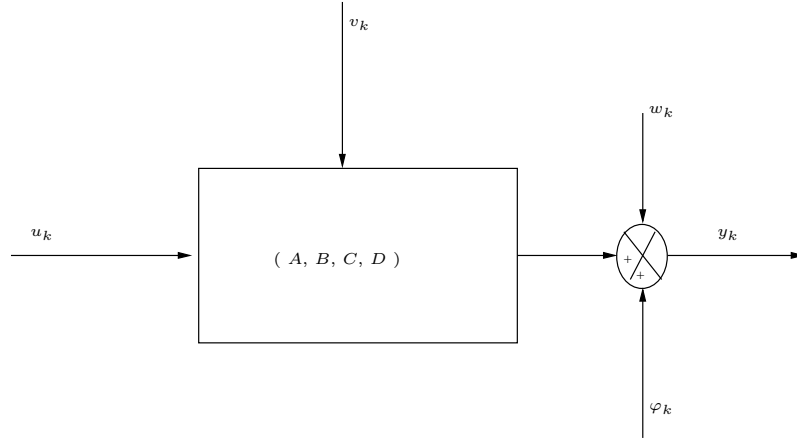


FIG. 4.1 – système surveillé

### 4.2.2 Génération de résidus

Pour détecter les défauts affectant les capteurs, l'espace de parité génère un résidu sensible aux défauts et insensible à l'entrée et à l'état du système si les matrices du système sont parfaitement connues. Une projection matricielle est ainsi utilisée pour annuler l'influence de l'état et de l'entrée du système sur la sortie du système. Cette sortie projetée dépend uniquement des bruits de mesure. Cette méthode est présentée dans deux contextes différents : lors d'une redondance matérielle, puis lors d'une redondance analytique.

- Si le nombre de capteurs est supérieur à l'ordre du système ( $\ell > n$ ) et le rang de la matrice  $C$  est égal à  $n$  (on parle de redondance matérielle) alors on peut générer directement un résidu sensible aux défauts à partir de l'équation (4.1). Pour obtenir la relation de parité, il suffit de multiplier la sortie par la matrice  $C^\perp$  :

$$\varepsilon_k = C^\perp(y_k - Du_k), \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_k = C^\perp w_k \quad (4.4)$$

Ce résidu est de moyenne nulle en l'absence de défaut mais sa moyenne est différente de zéro dès qu'apparaît un défaut dont la direction n'est pas colinéaire à la matrice  $C$  (c-à-d si  $C^\perp \varphi_k \neq 0$ ). Comme la dimension du sous-espace engendré par les colonnes de la matrice de parité  $C^\perp$  est égale à  $\ell - n$ , l'isolation des défauts à partir de ce résidu est impossible.

- Si le nombre de capteurs est inférieur à l'ordre du système et le système est observable ( $\ell < n$ ) alors la relation de parité est obtenue à partir d'une écriture matricielle permettant une redondance analytique : c'est le formalisme de Chow et Willsky [16]. De l'équation (4.1) on obtient par des répétitions successives :

$$\bar{y}_k = \Gamma_i x_{k-i-1} + H_i \bar{u}_k + H_i^v \bar{v}_k + \bar{w}_k \quad (4.5)$$

avec :

$$\bar{y}_k = \begin{pmatrix} y_{k-i+1} \\ y_{k-i+2} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i}, \bar{u}_k = \begin{pmatrix} u_{k-i+1} \\ u_{k-i+2} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m i}, \bar{v}_k = \begin{pmatrix} v_{k-i+1} \\ v_{k-i+2} \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n i} \quad (4.6)$$

$$\bar{w}_k = \begin{pmatrix} w_{k-i+1} \\ w_{k-i+2} \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i}, \Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times n}, H_i = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times m i}, \quad (4.7)$$

$$H_i^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-3} & CA^{i-4} & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n i \times n i} \quad (4.8)$$

On peut réécrire cette relation sous la forme :

$$\bar{y}_k - H\bar{u}_k = \Gamma_i x_{k-i+1} + H_i^v \bar{v}_k + \bar{w}_k \quad (4.9)$$

On choisit  $i$  supérieur ou égal à l'ordre du système ( $n$ ) pour que le rang de la matrice d'observabilité  $\Gamma_i$  soit égale à  $n$ .

En projetant l'équation précédente orthogonalement à l'espace formé par les colonnes de la matrices  $\Gamma_i$  on trouve :

$$\varepsilon_k = \Gamma_i^\perp (\bar{y}_k - H\bar{u}_k) \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_k = \Gamma_i^\perp H_i^v \bar{v}_k + \Gamma_i^\perp \bar{w}_k \quad (4.11)$$

$$\text{avec } \Gamma_i^\perp \in \mathbb{R}^{(\ell i - n) \times \ell i}, \Gamma_i^\perp \Gamma_i = 0 \text{ et } \text{rang}(\Gamma_i^\perp) = \ell i - n \quad (4.12)$$

L'isolation des défauts n'est possible que si  $\ell i - n \geq \ell$ , puisque  $\ell i - n$  correspond à la dimension du sous-espace engendré par les colonnes de la matrice  $\Gamma_i^\perp$ .

On remarque que le vecteur résidu  $\varepsilon_k$  obtenu est insensible à l'état initial  $x_{k-i-1}$ . Comme les vecteurs  $\bar{v}_k$  et  $\bar{w}_k$  sont gaussiens de moyenne nulle, le vecteur de résidu  $\varepsilon_k$  obtenu est aussi gaussien et centré. Il est évident que l'espérance mathématique de ce résidu est nulle en absence de défaut. Dans la suite de cette section, nous utiliserons le formalisme de Chow et Willsky [16], c'est à dire la relation de parité (4.10).

### 4.2.3 Sensibilité aux défauts de capteurs

Nous allons analyser l'expression du résidu  $\varepsilon_k$  lors de l'apparition de défaut de capteurs. Nous rappelons que l'indice  $i$  est choisi de manière à ce que  $\ell i - n \geq \ell$  afin de pouvoir isoler les défauts capteurs.

Lors de l'apparition d'un défaut, la relation (4.5) devient :

$$\Gamma_i^\perp (\bar{y}_k - H_i \bar{u}_k) = \Gamma_i^\perp H_i^s \bar{v}_k + \Gamma_i^\perp \bar{w}_k + \Gamma_i^\perp \bar{\varphi}_k \quad (4.13)$$

où  $\bar{\varphi}_k$  représente le vecteur de défaut défini par l'équation suivante :

$$\bar{\varphi}_k = \begin{pmatrix} \varphi_{k-i+1} \\ \varphi_{k-i+2} \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i}, \quad (4.14)$$

On distingue trois cas.

- Si la matrice de parité  $\Gamma_i^\perp$  est orthogonale au vecteur de défaut  $\bar{\varphi}_k$  ( $\Gamma_i^\perp \perp \bar{\varphi}_k$ ), alors le

défaut ne peut pas être détecté :

$$\Gamma_i^\perp(\bar{y}_k - H_i \bar{u}_k) = \Gamma_i^\perp H_i^v \bar{v}_k + \Gamma_i^\perp \bar{w}_k \quad (4.15)$$

d'où l'importance du choix de la matrice de parité.

- Si plus de  $\ell(i-1) - n$  lignes de la matrice de parité  $\Gamma_i^\perp$  sont orthogonales au vecteur de défaut  $\bar{\varphi}_k$  mais sans que toutes les lignes de la matrice de parité soient orthogonales au vecteur de défaut alors le défaut pourra être détecté sans être isolé.

- Si moins de  $\ell(i-1) - n$  lignes de la matrice de parité  $\Gamma_i^\perp$  sont orthogonales au vecteur de défaut  $\bar{\varphi}_k$  alors le défaut peut être détecté et isolé.

On utilise en général une matrice de synthèse  $\bar{W}$  pour maximiser l'influence des défauts et minimiser l'influence des perturbations. L'expression du résidu devient :

$$\varepsilon_k = \bar{W} \Gamma_i^\perp (\bar{y}_k - H \bar{u}_k) \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_k = \bar{W} \Gamma_i^\perp H_i^s \bar{v}_k + \bar{W} \Gamma_i^\perp \bar{w}_k + \bar{W} \Gamma_i^\perp \bar{\varphi}_k \quad (4.17)$$

L'espérance mathématique de ce résidu est :

$$\mathbf{E}[\varepsilon_k] = \bar{W} \Gamma_i^\perp \bar{\varphi}_k \quad (4.18)$$

L'apparition du défaut se manifestera alors par un saut dans la moyenne de  $\varepsilon_k$  qui passera de zéro à  $\bar{W} \Gamma_i^\perp \bar{\varphi}_k$ .

#### 4.2.4 Choix de l'indice $i$

Considérons l'équation (4.13) dans laquelle le défaut apparaît à l'instant  $k$  :

$$\Gamma_i^\perp H_i^s \bar{v} + \Gamma_i^\perp \bar{w} + \Gamma_i^\perp \bar{\varphi}_k = \sum_{t=1}^i \gamma_t \zeta_t \bar{v} + \sum_{t=1}^i \gamma_t w_t + \gamma_i^T \varphi_k \quad (4.19)$$

où

$$\Gamma_i^\perp = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_i), \quad H_i^s \bar{v} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_i \end{pmatrix} \bar{v} \quad (4.20)$$

et

$$\gamma_s \in \mathbb{R}^{(\ell i - n) \times \ell i}, \quad \zeta_s \in \mathbb{R}^{\ell \times n i}, \quad s = 1, \dots, i \quad (4.21)$$

Si les bruits  $v_k$  et  $w_k$  sont indépendants et stationnaires alors la variance du résidu  $\varepsilon_k$  (Eq. (4.17),  $\bar{W} = I$ ) est donnée par :

$$R_\varepsilon = \sum_{t=1}^i \gamma_t \zeta_t \Phi_V \zeta_t^T \gamma_t^T + \sum_{t=1}^i \gamma_t \Phi_W \gamma_t^T \quad (4.22)$$

où

$$\Phi_V = I_{i+1} \otimes \Phi_v, \quad \Phi_v = \mathbf{E}[v_k v_k^T] \quad (4.23)$$

$$\Phi_W = I_{i+1} \otimes \Phi_w, \quad \Phi_w = \mathbf{E}[w_k w_k^T] \quad (4.24)$$

et  $\otimes$  représente le produit de Kronecker défini dans le paragraphe suivant.

### Définition du produit de Kronecker

si  $M \in R^{p \times f}$  et  $N \in R^{g \times t}$  sont deux matrices quelconques, alors le produit de Kronecker de ces deux matrices est donné par la matrice  $M \otimes N$  de dimension  $pg \times ft$  suivante :

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{1,1}N & m_{1,2}N & \dots & m_{1,f}N \\ m_{2,1}N & m_{2,2}N & \dots & m_{2,f}N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p,1}N & m_{p,2}N & \dots & m_{p,f}N \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où  $m_{r,s}$  désigne l'élément de la ligne  $r$  et de la colonne  $s$  de la matrice  $M$ .

D'après cette relation, on constate que la variance du vecteur de résidu croît avec  $i$ . Si  $i$  est choisi trop grand, les défauts de faible amplitude ne pourront pas être détectés. En effet leur amplitude sera petite devant la variance du résidu.

En outre pour augmenter les chances d'avoir le vecteur de défaut dans l'espace colonne de  $\Gamma_i^\perp$ , il faut que cet espace ait une dimension ( $\ell i - n$ ) plus grande que  $\ell$ .

Pour avoir une bonne détectabilité, l'indice  $i$  doit être choisi plus grand que l'ordre du système ( $n$ ) et de manière que  $\ell i - n$  soit supérieur à  $\ell$ , tout en veillant à ce que cet indice ne soit pas trop grand. L'influence de ce choix peut être déterminant dans la méthode de détection, surtout quand les défauts sont de faible amplitude ou apparaissent sur une courte période de temps comme l'illustre l'exemple suivant.

#### 4.2.5 Exemple

Pour illustrer l'influence du choix du  $i$  sur la technique de détection de défaut, nous allons considérer le système d'ordre 3 suivant :

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & -0.4 \end{pmatrix} u_k + v_k \quad (4.26)$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.78 & 0.36 \\ 0.45 & 0.5 & 0.75 \\ 0.85 & 0.26 & 0.1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0.76 & 0.4 \\ 0.39 & 0.5 \\ 0.59 & 0.72 \end{pmatrix} u_k + w_k \quad (4.27)$$

dans lequel  $u_k \in R^{2 \times 1}$ ,  $w_k$  et  $y_k \in R^{3 \times 1}$ . Les bruits d'état  $v_k$  et de sortie  $w_k$  sont blancs gaussiens et ont pour variance :  $R_v = 4 \times 10^{-4} I_3$ ,  $R_w = 8.1 \times 10^{-3} I_3$ .

Le système est surveillé sur l'intervalle de temps  $[1, 600]$ .

Les défauts simulés sur le système sont les suivants :

- la première sortie est affectée sur l'intervalle  $[300, 310]$  par un défaut de capteur  $\varphi_k^1 = 0.20 \delta y^1$ , où  $\delta y^h$  est l'étendue de la  $h^{\text{ième}}$  sortie  $y_k$ .

- sur l'intervalle de temps  $[400, 410]$  la deuxième sortie est affectée par  $\varphi_k^2 = 0.20 \delta y^2$ .

- la troisième sortie est affectée sur l'intervalle  $[500, 510]$  par le défaut suivant :  $\varphi_k^3 = 0.20 \delta y^3$ .

Ces instants d'apparition des défauts sont illustrés sur la figure (4.4).

Le vecteur de résidu est obtenu par l'espace de parité avec différents choix de l'indice  $i$  ( $i = n = 3, 9, 40$ ) puis un test de khi-deux est réalisé pour détecter les défauts.

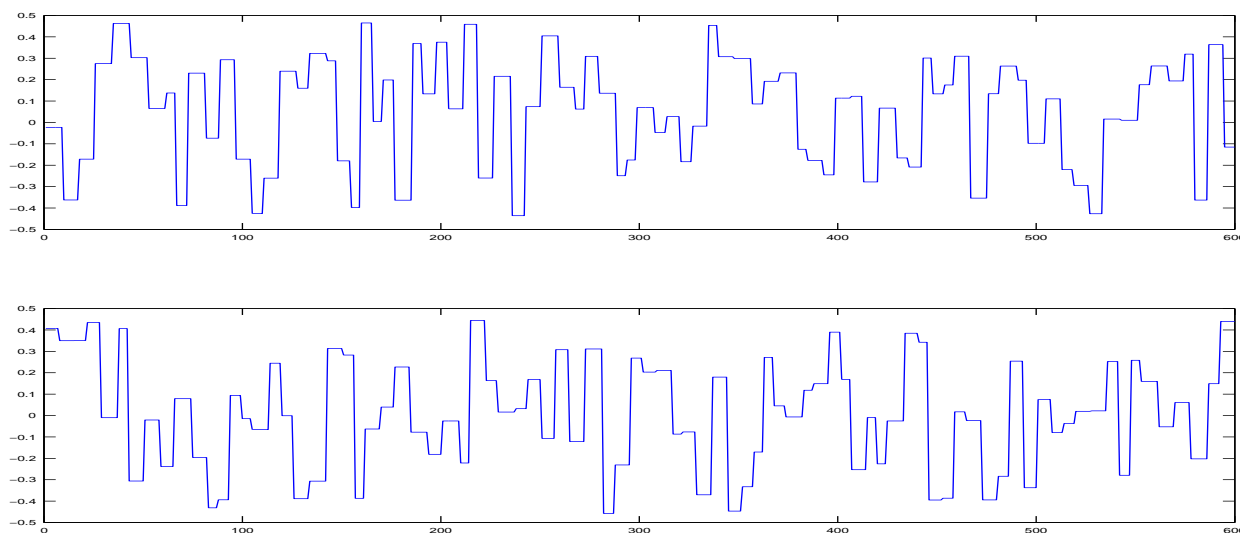


FIG. 4.2 – les entrées du système

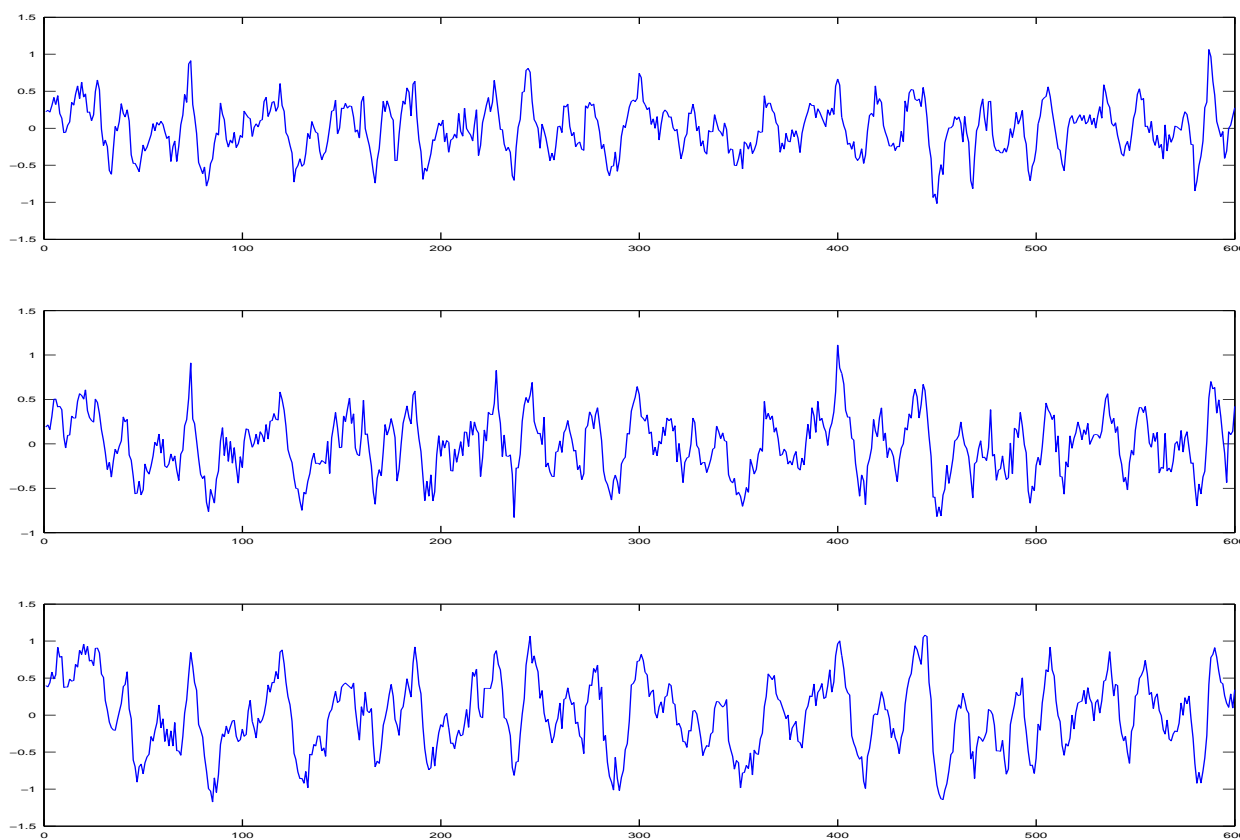


FIG. 4.3 – les sorties du système

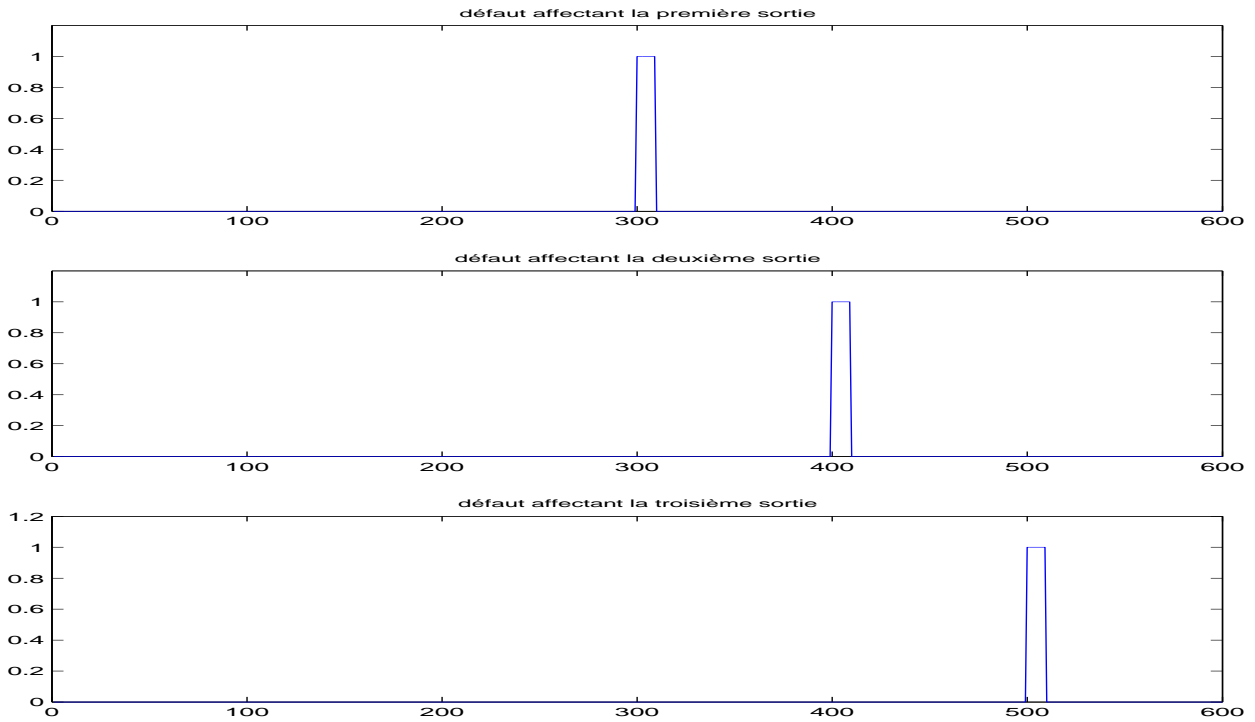


FIG. 4.4 – les instants d’apparition des défauts sur les différentes sorties

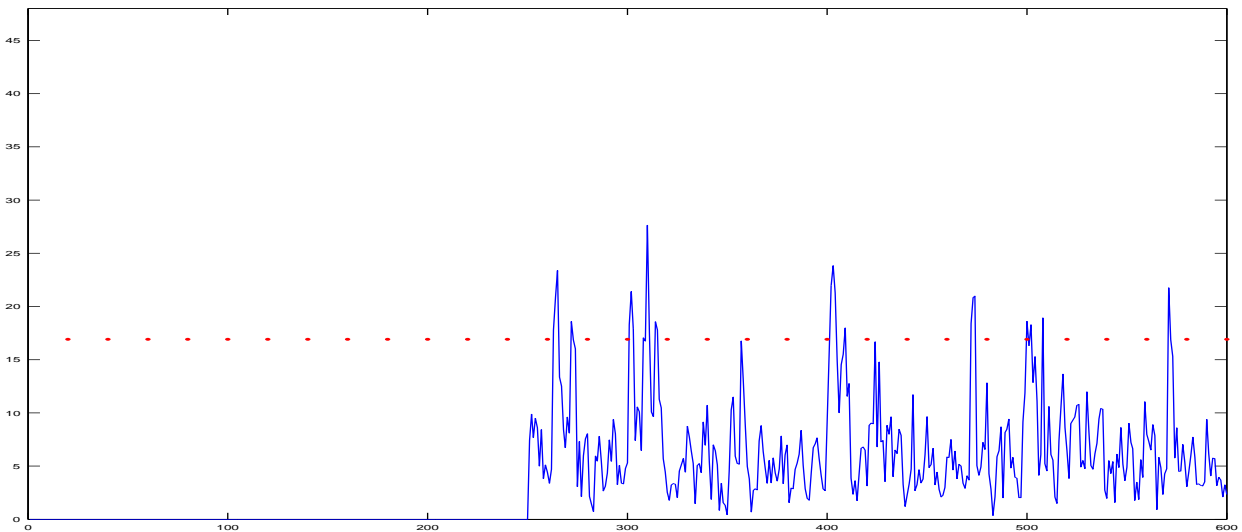


FIG. 4.5 – détection de défaut par l’espace de parité ( $i = 3$ ) à l’aide d’un test de khi-deux

Pour  $i = 3$  (égal à  $n$ , l’ordre du système), la matrice d’observabilité est de plein rang colonne égale à  $n$  mais on remarque sur la figure (4.5) qu’il y a plusieurs fausses alarmes. Cela est dû au fait que la dimension de l’espace colonne de  $\Gamma_i^\perp$  est petite devant celle de l’espace colonne de  $\Gamma_i$  (voir les équations (4.7) et (4.12)).

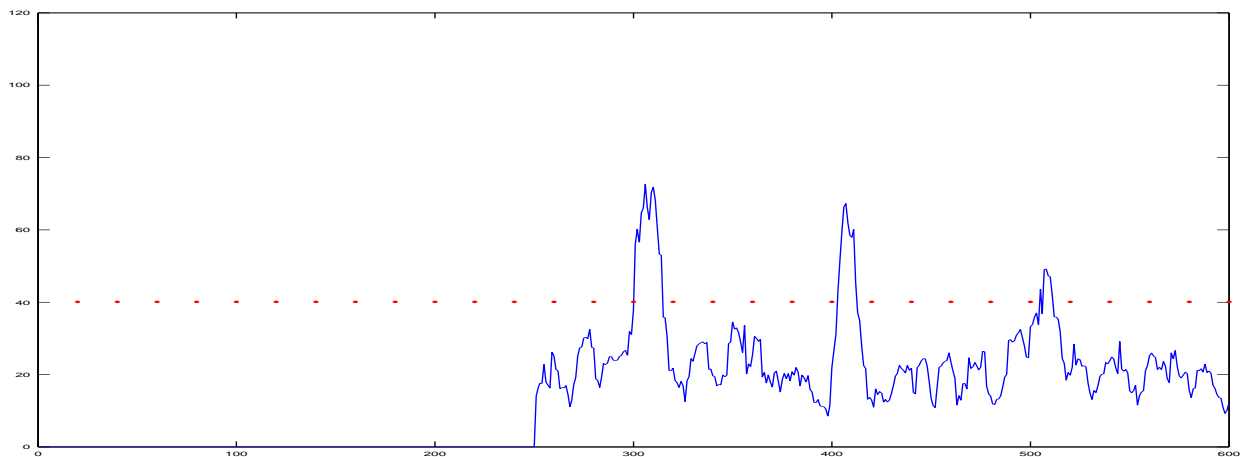


FIG. 4.6 – détection de défaut par l'espace de parité ( $i=9$ ) à l'aide d'un test de khi-deux

Pour  $i = 9$  (égal à  $3n$ , l'ordre du système), tous les défauts sont correctement détectés comme on peut le voir sur la figure (4.6). On peut remarquer que la dimension de l'espace colonne de la matrice  $\Gamma_i^\perp$  est grande devant celle de l'espace colonne de  $\Gamma_i$ .

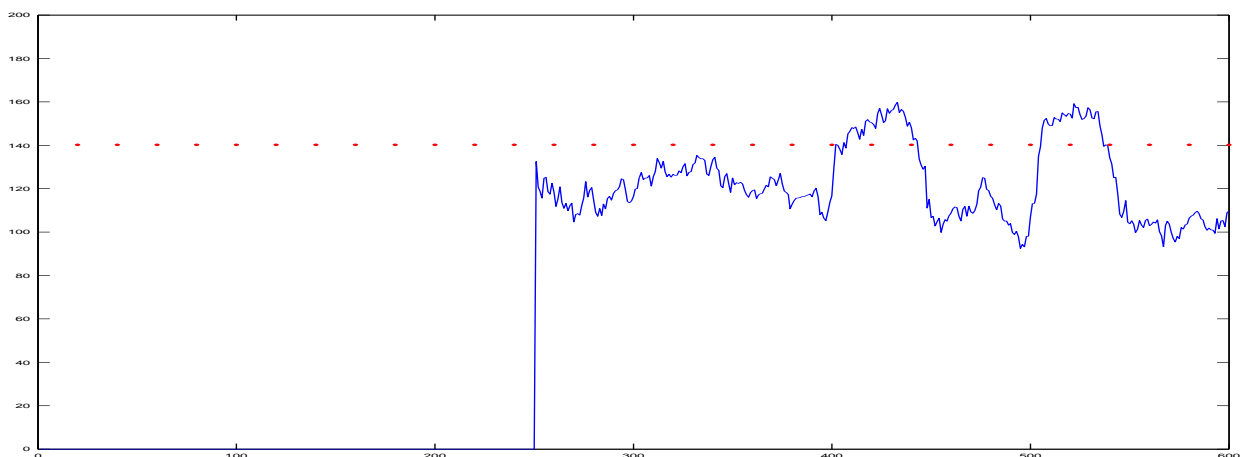


FIG. 4.7 – détection de défaut par l'espace de parité ( $i=40$ ) à l'aide d'un test de khi-deux

Pour  $i = 40$ , le premier défaut n'est pas détecté (figure (4.7)) même si la dimension de l'espace colonne de la matrice  $\Gamma_i^\perp$  est grande devant la dimension de l'espace colonne de  $\Gamma_i$ . Cela résulte du fait que l'amplitude des défauts devient faible devant l'écart type des bruits.

#### 4.2.6 Robustesse

L'espace de parité est basé sur l'utilisation d'un modèle mathématique du système surveillé. Ce modèle, obtenu en général par identification, comporte des incertitudes dues aux bruits de mesures ou aux dynamiques non modélisées. Cette incertitude de modélisation peut entraîner des fausses alarmes ou au contraire masquer les défauts qui peuvent affecter le système. Il est alors



important d'atténuer l'influence des incertitudes de modélisation dans la méthode de détection afin de la rendre robuste.

Nous allons poser dans cette partie le problème de robustesse de l'espace de parité et analyser les solutions proposées dans la littérature.

En tenant compte des erreurs de modélisation et des perturbations, l'équation (4.1) devient :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (B + \Delta B)u_k + Fp_k + v_k \\ y_k &= (C + \Delta C)x_k + (D + \Delta D)u_k + Gp_k + \varphi_k + w_k \end{aligned} \quad (4.28)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont les matrices obtenues lors de la modélisation,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  et  $\Delta D$  les incertitudes liées à ces matrices,  $F \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{\ell \times r}$  représentent les matrices de perturbation,  $p_k \in \mathbb{R}^r$  représente des perturbations assimilées à des bruits colorés et  $\varphi_k$  représente les défauts affectant le système.

L'objectif des méthodes robustes est de générer un résidu sensible aux défauts  $\varphi_k$  et insensible aux incertitudes de modélisation ( $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  et  $\Delta D$ ) et aux perturbations  $p_k$ .

En tenant compte des incertitudes de modélisation et des perturbations, l'équation de parité devient :

$$\bar{y}_k - H_i \bar{u}_k = \Gamma_i x_{k-i+1} + H_i^v \bar{v}_k + H_i^p \bar{p}_k + \bar{\varphi}_k + \bar{w}_k \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{aligned} H_i^p &= \begin{pmatrix} G & 0 & \dots & 0 \\ (C + \Delta C)F & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (C + \Delta C)(A + \Delta A)^{i-2}F & (C + \Delta C)(A + \Delta A)^{i-3}F & \dots & G \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times r i} \\ \bar{p}_k &= \begin{pmatrix} p_{k-i+1} \\ p_{k-i+2} \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r i} \end{aligned} \quad (4.30)$$

et où les matrices  $H_i$ ,  $\Gamma_i$ ,  $H_i^p$  dépendent de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  et de leur incertitude  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  et  $\Delta D$  inconnues.

Les méthodes proposées dans la littérature supposent connues les directions des perturbations (i.e. la matrice  $H_i^p$ ) et déterminent une matrice de parité  $\Upsilon$  orthogonale à la fois à  $\Gamma_i$  et à  $H_i^p$  :

$$\Upsilon(\bar{y}_k - H_i \bar{u}_k) = \Upsilon H_i^v \bar{v}_k + \Upsilon \bar{\varphi}_k + \Upsilon \bar{w}_k \quad (4.31)$$

cela suppose que le nombre de perturbations  $r$  est inférieur ou égale au nombre de capteurs  $\ell$  et que  $r i + n < \ell i$ .

Pour annuler l'effet des incertitudes de modélisation ( $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$  et  $\Delta D$ ), Zhengang *et al.* [80] ont proposé une technique qui regroupe l'influence des perturbations  $p_k$  et des incertitudes de modélisation. Il détermine ensuite une matrice de parité orthogonale à l'ensemble obtenu.

Zhengang *et al.* ont proposé de réécrire l'équation (4.28) sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \underbrace{(\Delta A \ \Delta B \ F)}_{\bar{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ p_k \end{pmatrix}}_{e_k} + v_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + \underbrace{(\Delta C \ \Delta D \ G)}_{\bar{G}} e_k + \varphi_k + w_k \end{aligned} \quad (4.32)$$

où  $\bar{F} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m+r)}$  et  $\bar{G} \in \mathbb{R}^{\ell \times (n+m+r)}$ . L'équation de parité devient :

$$\bar{y}_k - H_i \bar{u}_k = \Gamma_i x_{k-i+1} + H_i^e \bar{e}_k + \bar{\varphi}_k + H_i^v \bar{v}_k + \bar{w}_k \quad (4.33)$$

avec

$$H_i^e = \begin{pmatrix} \bar{G} & 0 & \dots & 0 \\ C\bar{F} & \bar{G} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}\bar{F} & CA^{i-3}\bar{F} & \dots & \bar{G} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell i \times (n+m+r)i}, \quad (4.34)$$

$$\bar{e}_k = \begin{pmatrix} e_{k-i+1} \\ e_{k-i+2} \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m+r)i} \quad (4.35)$$

Pour générer un résidu indépendant de l'état  $x_{k-i+1}$  et du terme de perturbation  $e_k$ , ces auteurs ont proposé de trouver une matrice  $W_\Psi$  orthogonale à  $\Psi$  ( $\Psi = (\Gamma_i \ H_i^e) \in \mathbb{R}^{\ell i \times ((n+m+r)i+n)}$ ) et d'annuler l'effet des incertitudes et des perturbations dans l'équation précédente à l'aide de cette matrice :

$$W_\Psi (I \ | \ -H_i) \begin{pmatrix} \bar{y}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix} = W_\Psi \bar{\varphi}_k + W_\Psi H_i^v \bar{v}_k + W_\Psi \bar{w}_k \quad (4.36)$$

Ils obtiennent ainsi un résidu insensible aux perturbations. La matrice  $W_\Psi (I \ | \ -H_i)$  joue le rôle de matrice de parité.

Malheureusement, dans la plupart des systèmes réels, on ne dispose pas de la matrice  $H_i^e$  et donc de la matrice  $\Psi$ . La raison est que les termes contenus dans la matrice  $H_i^e$  sont des termes d'incertitudes qui ne peuvent pas être complètement déterminés. Même dans le cas où cette matrice serait connue, comme  $\Psi$  ( $\Psi \in \mathbb{R}^{\ell i \times ((n+m+r)i+n)}$ ) comporte plus de colonnes que de lignes, la détermination d'une matrice non nulle  $W_\Psi$  annulant l'action de  $\Psi$  n'est possible que si ce dernier n'est pas de plein rang ligne.

Pour s'affranchir des problèmes liés aux incertitudes de modélisation, on pourra utiliser les méthodes de diagnostic n'utilisant pas de modèle explicite telles que l'ACP. Comme nous le verrons dans la section suivante, le problème d'incertitude paramétrique n'est pas complètement résolu dans l'ACP.

#### 4.2.7 Détection et isolation de défaut par le test de khi-deux

Le vecteur de résidu  $\varepsilon_k$  obtenu par l'espace de parité est centré et gaussien en l'absence de défaut ( $\varepsilon_k \sim N(0, R_\varepsilon)$ ) où  $R_\varepsilon$  désigne la variance de  $\varepsilon_k$ . S'il y a apparition d'un défaut dans le système, cela peut se traduire par un saut de moyenne ou de variance du vecteur de résidu.

Connaissant les propriétés statistiques du vecteur des résidus, on peut mettre en oeuvre des tests de détection de saut de moyenne ou de variance afin de détecter les défauts qui affectent le système. Il est proposé dans la littérature plusieurs techniques de détection de saut de moyenne et de variance [5] pour traiter ce problème.

Nous avons choisi d'utiliser ici le test de khi-deux pour détecter les défauts.

Comme le vecteur de résidu  $\varepsilon_k = W_\Psi(\bar{y} - H\bar{u})$  est centré gaussien et de variance  $R_{\varepsilon_k}$ , la variable suivante :

$$\omega_k = \varepsilon_k^T R_{\varepsilon_k}^{-1} \varepsilon_k \quad (4.37)$$

suit une loi de khi deux avec  $\ell i$  degrés de liberté. Les défauts sont détectés par le test suivant :

$$\text{si } \omega_k \begin{cases} < \chi_{\ell, \alpha}^2 & \text{alors il n'y a pas de défaut} \\ \geq \chi_{\ell, \alpha}^2 & \text{alors il y a apparition de défaut} \end{cases} \quad (4.38)$$

Le vecteur de résidu est souvent structuré afin de déterminer le capteur en défaut. La structuration peut être faite de manière à obtenir des résidus dédié (DOS de l'anglais : Dedicated Observer Scheme) : chacun des nouveaux résidus obtenus est sensible à un seul défaut capteur. La structuration peut être aussi réalisée de manière à ce que les nouveaux résidus obtenus soient sensibles à un ensemble de défauts capteurs et insensibles aux défauts des capteurs restants. Ces méthodes d'isolation de défauts sont présentées dans [52] et [26].

### 4.3 L'Analyse en Composantes Principales

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode adaptée à la détection et à l'isolation de défauts si aucun modèle n'est disponible. Cette technique est basée sur l'utilisation des mesures des entrées et sorties uniquement. Une matrice de données est construite à partir des mesures des entrées et sorties. Par une décomposition en valeurs singulières, l'ACP scinde cette matrice en deux parties, l'une représentant le modèle et l'autre les bruits. Le terme correspondant au modèle est déterminé à partir des valeurs singulières dominantes de la matrice des données et celui correspondant aux bruits est obtenu à partir des valeurs singulières négligeables. Un résidu est généré en utilisant les directions correspondant aux valeurs singulières négligeables de la matrice de données. Des tests statistiques sont alors réalisés sur le résidu obtenu afin de détecter et d'isoler les sauts de moyennes ou de variance du vecteur de résidu, sauts qui indiquent l'apparition des défauts dans le système.

#### 4.3.1 Position du problème

Etant donné le système linéaire discret donné par l'équation (4.1), dans lequel on ne connaît pas les matrices du système ( $A, B, C, D$ ), notre objectif est de détecter et d'isoler les défauts de capteurs qui affectent le système connaissant les entrées et sorties du système.

On dispose pour cela de  $q$  mesures des entrées et sorties uniquement.

#### 4.3.2 Génération de résidu

On définit la matrice des données  $Z_k$  par :

$$Z_k = \begin{pmatrix} Y_k \\ U_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\ell i + m i) \times j} \quad (4.39)$$

avec

$$Y_k = (\bar{y}_{k-j+1} \bar{y}_{k-j+2} \dots \bar{y}_k) \in \mathbb{R}^{\ell_i \times j}, U_k = (\bar{u}_{k-j+1} \bar{u}_{k-j+2} \dots \bar{u}_k) \in \mathbb{R}^{m_i \times j} \quad (4.40)$$

où  $\bar{u}_k$  et  $\bar{y}_k$  sont définies par l'équation (4.6).

Cette matrice des données est scindée en deux parties, le modèle ( $\hat{Z}_k$ ) et le bruit ( $\tilde{Z}_k$ ) :

$$Z_k = \hat{Z}_k + \tilde{Z}_k \quad (4.41)$$

$$= \bar{\Gamma} \bar{x}_k + \tilde{W} r_k \quad (4.42)$$

Les notations ont été choisies pour avoir une ressemblance avec l'approche basée sur le modèle (4.5).

Afin de déterminer les matrices  $\hat{Z}_k$  et  $\tilde{Z}_k$  une décomposition en valeurs singulières est réalisée sur la matrice de covariance de  $Z_k$  :

$$\hat{\Phi}_Z = \frac{1}{j} Z_k Z_k^T \quad (4.43)$$

$$= \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (4.44)$$

avec  $\mathbf{U}$  une matrice carré unitaire :

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = I_{\ell_i + m_i} \quad (4.45)$$

$\mathbf{S}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de la matrice  $\hat{\Phi}_Z$ . L'équation (4.44) peut être réécrite sous la forme :

$$\hat{\Phi}_Z = (\bar{\Gamma} \tilde{W}) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}^T \\ \tilde{W}^T \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

où  $\mathbf{S}_x$  contient les valeurs singulières dominantes de  $\mathbf{S}$ , les matrices  $\bar{\Gamma}$  et  $\tilde{W}$  vérifient :

$$\bar{\Gamma}^T \bar{\Gamma} = I_{n_x}, \tilde{W}^T \bar{\Gamma} = 0, \bar{\Gamma}^T \tilde{W} = 0, \tilde{W}^T \tilde{W} = I_{n_r}, \tilde{W} \tilde{W}^T + \bar{\Gamma} \bar{\Gamma}^T = I_{n_x + n_r} \quad (4.47)$$

$n_x$  et  $n_r$  désignent respectivement le nombre de valeurs singulières dominantes et le nombre de valeurs singulières négligeables contenues dans  $\mathbf{S}$ .

La détermination de l'ordre du système ( $n_x$ ) doit être précise car si on choisit un ordre inférieur à l'ordre du système on ne tient pas compte de certaines dynamiques du système et si on choisit un ordre supérieur à l'ordre du système on inclut les bruits dans le modèle du système. Malheureusement la détermination de cet ordre n'est pas une tâche aisée dans les systèmes comportant des bruits de mesure et de sortie. L'utilisation du critère d'Akaike peut donner des résultats satisfaisants dans certains cas (voir [46], [79]).

Les matrices  $\hat{Z}_k$  et  $\tilde{Z}_k$  de l'équation (4.41) sont obtenues par :

$$\hat{Z}_k = \bar{\Gamma} \bar{\Gamma}^T Z_k = \bar{\Gamma} \bar{x}_k \quad (4.48)$$

$$\tilde{Z}_k = \tilde{W} \tilde{W}^T Z_k = \tilde{W} r_k \quad (4.49)$$

Le premier terme  $\hat{Z}_k$  est obtenu par projection sur l'espace observable déterminé par les colonnes de la matrice  $\bar{\Gamma}$ . La matrice  $\bar{x}_k$  appelée par abus de langage "état", représente les coordonnées

de  $\tilde{Z}_k$  sur cet espace. Il est évident d'après l'équation (4.48) que l'"état" est déterminé par :

$$x_k = \bar{\Gamma}^T Z_k \quad (4.50)$$

Le terme suivant  $\tilde{Z}_k$  représente le bruit et ses coordonnées  $\varepsilon_k$  se trouvent dans un espace orthogonal aux colonnes de la matrice  $\bar{\Gamma}$ . Cet espace correspond à l'espace ligne de la matrice  $\tilde{W}$ . La matrice de résidu  $\varepsilon_k$  est déterminée à chaque instant en multipliant la matrice  $Z_k$  par la matrice  $\tilde{W}^T$  :

$$\varepsilon_k = \tilde{W}^T Z_k \quad (4.51)$$

Afin d'obtenir une matrice de covariance des résidus  $\bar{\varepsilon}_k$  unitaire, on calcule le vecteur résidu par la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_k = S_r^{-1/2} \tilde{W}^T Z_k \quad (4.52)$$

### 4.3.3 Lien avec l'espace de parité [30]

Si on considère l'équation suivante :

$$Y_k = \Gamma_i X_k + H_i U_k + H_i^v V_k + W_k \quad (4.53)$$

dans laquelle

$$X_k = (x_{k-j+1} \ x_{k-j+2} \ \dots \ x_k) \in \mathbb{R}^{n \times j} \quad (4.54)$$

et  $V_k \in \mathbb{R}^{n_i \times j}$  et  $W_k \in \mathbb{R}^{\ell_i \times j}$  sont définies de la même manière que  $Y_k$  (voir l'équation (4.40)).

Par une transformation, nous obtenons :

$$(I \mid -H_i) \begin{pmatrix} Y_k \\ U_k \end{pmatrix} = \Gamma_i X_k + H_i^v V_k + W_k \quad (4.55)$$

puis en multipliant cette équation par la matrice  $\Gamma_i^\perp$  nous trouvons :

$$\Gamma_i^\perp (I \mid -H_i) \begin{pmatrix} Y_k \\ U_k \end{pmatrix} = \Gamma_i^\perp H_i^v V_k + \Gamma_i^\perp W_k \quad (4.56)$$

avec

$$\Gamma_i^\perp \in \mathbb{R}^{(\ell_i - n) \times \ell_i} \text{ est de plein rang ligne} \quad (4.57)$$

Ce qui montre que la matrice de projection  $\tilde{W}$  générant les résidus correspond à la matrice :

$$\tilde{W}^T = \bar{M} (\Gamma_i^\perp \mid -\Gamma_i^\perp H_i), \text{ ou } \bar{M} \text{ est une matrice carré inversible} \quad (4.58)$$

L'ACP utilise alors une matrice de parité particulière  $\tilde{W}$  permettant la génération de résidu.

### 4.3.4 Influence de la non persistance des entrées

Considérons l'équation (4.51) dans le cas déterministe :

$$\tilde{W}^T Z_k = 0 \quad (4.59)$$

Déterminons dans les deux cas suivants la matrice  $\tilde{W}$ .

1) Les entrées sont persistantes d'ordre  $i$  et le système est observable : dans ce cas  $\text{rang}(Z_k) = mi +$

$n$  puisque :

$$Z_k = \begin{pmatrix} Y_k \\ U_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\ell+m)i \times j} \quad (4.60)$$

$$Z_k = \begin{pmatrix} \Gamma_i & H_i \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ U_k \end{pmatrix}, \text{ avec } X_k \in \mathbb{R}^{n \times j} \text{ et } U_k \in \mathbb{R}^{mi \times j} \quad (4.61)$$

Comme on a l'égalité :

$$\dim(\text{span}(Z_k)) + \dim(\text{null}(Z_k)) = (\ell + m)i \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow \dim(\text{null}(Z_k)) = \ell i - n \quad (4.63)$$

où  $\text{span}(M)$  signifie sous-espace engendré par les lignes de la matrice  $M$ ,  $\dim(E)$  signifie la dimension de l'espace  $E$  et  $\text{null}(M)$  désigne le noyau de la matrice  $M$ .

Or d'après l'équation (4.55), on a (dans le cas déterministe) :

$$\Gamma_i X_k = (I \mid -H_i) Z_k \quad (4.64)$$

$$\text{span}(\Gamma_i X_k) \subseteq \text{span}(Z_k) \quad (4.65)$$

or

$$\dim(\text{null}(Z_k)) = \ell i - n \text{ et } \dim(\text{null}(\Gamma_i X_k)) = \ell i - n \text{ (Eq. (4.57))} \quad (4.66)$$

d'où :

$$\text{span}(\Gamma_i X_k) = \text{span}(Z_k) \quad (4.67)$$

On peut alors déterminer une unique matrice  $\tilde{W}$  à une matrice multiplicative  $M$  près ( $M$  étant carrée et inversible) qui est orthogonale à  $\Gamma_i$  à partir de l'équation (4.56) et vérifiant la condition (4.57).

2) Les entrées ne sont pas persistantes et le système est observable : on a dans ce cas

$$\text{rang}(Z_k) < mi + n \quad (4.68)$$

$$\text{span}(Z_k) \subset \text{span}(\Gamma_i X_k) \quad (4.69)$$

et la dimension de l'espace orthogonal à  $Z_k$  est supérieur à  $\ell i - n$  :

$$\dim(\text{null}(Z_k)) > \ell i - n \quad (4.70)$$

$$\Rightarrow \dim(\text{null}(Z_k)) > \dim(\text{null}(\Gamma_i X_k)) \quad (4.71)$$

$$\text{span}(\text{null}(\Gamma_i X_k)) \subsetneq \text{span}(\text{null}(Z_k)) \quad (4.72)$$

Le problème de détermination de  $\tilde{W}$  n'est pas bien posé [12], la solution n'est pas unique et risque de ne pas être orthogonale à certaines directions de la matrice  $\Gamma_i$ , puisque certains éléments de  $\text{null}(Z_k)$  ne sont pas orthogonaux aux colonnes de la matrice  $\Gamma_i$ .

La condition de persistance d'excitation est alors indispensable à l'utilisation de l'ACP. En effet, l'ACP identifie implicitement le système car on peut déterminer l'ordre et les matrices du système à partir de la matrice  $\tilde{W}$  ( $\tilde{W}^T = \bar{M} (\Gamma_i^\perp \mid -\Gamma_i^\perp H_i)$ ) (voir [46], [79]).

Puisque l'ACP identifie de manière implicite le modèle du système, elle subit l'influence des incertitudes de modélisation. En effet, la matrice de parité  $\tilde{W}$  est déterminée avec une certaine incertitude. L'influence de cette incertitude est analysée dans le paragraphe qui suit.

### 4.3.5 Incertitude liée à la détermination de $\tilde{W}$

Soit  $\tilde{W}^*$  la matrice de parité parfaitement orthogonale à  $Z_k$  :

$$(\tilde{W}^*)^T Z_k = (\tilde{W}^*)^T H_i^v V_k + (\tilde{W}^*)^T W_k \quad (4.73)$$

Puisqu'étant obtenue par estimation, la matrice  $\tilde{W}$  obtenue par l'ACP (voir équation (4.46)) comporte une incertitude :

$$\tilde{W} = \tilde{W}^* + \Delta\tilde{W} \quad (4.74)$$

cela implique que le résidu obtenu est égal à :

$$\tilde{W}^T Z_k = (\tilde{W}^*)^T H_i^v V_k + (\tilde{W}^*)^T W_k + \Delta\tilde{W}^T Z_k \quad (4.75)$$

où  $Z_k$  dépend de l'état et de la commande.

On remarque alors que le résidu  $(\tilde{W}^T Z_k)$  n'est pas complètement insensible à l'état du système. L'influence de ce dernier peut engendrer des fausses alarmes dans la procédure de détection de défaut. Il est alors indispensable que les méthodes ACP prennent en compte cette incertitude dans la méthode de détection de manière à être robuste à l'influence de la dynamique non modélisée  $\Delta\tilde{W}\Gamma_i$ .

### 4.3.6 Détection de défaut

L'équation (4.52) permet d'obtenir un résidu  $\varepsilon_k$  gaussien et centré en l'absence de défaut :

$$\mathbf{E}[\bar{\varepsilon}_k] = \mathbf{E}[S_r^{-1/2}\tilde{W}^T Z_k] \quad (4.76)$$

ce qui devient d'après les équations (4.52), (4.39) et (4.58) :

$$\mathbf{E}[\bar{\varepsilon}_k] = \mathbf{E}[S_r^{-1/2}\tilde{W}^T H_i^v V_k] + \mathbf{E}[S_r^{-1/2}\tilde{W}^T W_k] \quad (4.77)$$

on obtient finalement :

$$\mathbf{E}[\bar{\varepsilon}_k] = 0, \text{ puisque } \mathbf{E}[V_k] = 0, \text{ et } \mathbf{E}[W_k] = 0 \quad (4.78)$$

Ce résidu n'est plus centré si un défaut affecte les capteurs. En effet s'il y a apparition de défaut, l'équation (4.53) devient :

$$Y_k = \Gamma_i X_k + H_i U_k + H_i^v V_k + W_k + \Phi_k \quad (4.79)$$

où  $\Phi_k \in \mathbb{R}^{\ell_i \times j}$  est la matrice de Hankel de défaut de capteurs définie de la même manière que  $Y_k$  (voir l'équation (4.40)).

L'expression du résidu devient :

$$\bar{\varepsilon}_k = S_r^{-1/2}\tilde{W}^T Z_k \quad (4.80)$$

$$\bar{\varepsilon}_k = S_r^{-1/2}\tilde{W}^T H_i^v V_k + S_r^{-1/2}\tilde{W}^T W_k + S_r^{-1/2}\tilde{W}^T \begin{pmatrix} \Phi_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

et son espérance mathématique est :

$$\mathbf{E}[\bar{\varepsilon}_k] = \mathbf{E}[\tilde{W}^T H_i^v V_k] + \mathbf{E}[\tilde{W}^T W_k] + \mathbf{E}[\tilde{W}^T \begin{pmatrix} \Phi_k \\ 0 \end{pmatrix}] \quad (4.82)$$

$$\mathbf{E}[\bar{\varepsilon}_k] = \tilde{W}^T \begin{pmatrix} \Phi_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

Des tests statistiques peuvent alors être appliqués pour détecter les sauts de moyenne de la matrice de résidu  $\varepsilon_k$ . La statistique SPE et la statistique de Hotelling  $T^2$  [21], [40], [39] sont souvent utilisées dans la littérature.

L'isolation de défaut se fait de la même manière que dans l'espace de parité.

## 4.4 Nouvelle méthode basée sur les projections géométriques

Comme nous venons de le voir dans les deux premières sections, les incertitudes de modélisation constituent une entrave aux méthode de diagnostic à base de modèle. En outre la condition de persistance d'excitation est indispensable pour l'utilisation de l'ACP ce qui limite son utilisation. C'est pourquoi nous proposons une nouvelle méthode de détection et d'isolation de défaut de capteurs utilisable même si les entrées ne sont pas persistantes et si le modèle du système n'est pas connu. Le modèle du système n'étant pas identifié explicitement ni implicitement, on n'est confronté à aucun problème lié aux incertitudes de modélisation. Notons toutefois que cette méthode ne prend pas en compte les perturbations déterministes qui peuvent influencer sur le système surveillé.

Le système étant stable, la sortie du système est approchée par un FIR et l'influence des entrées est ôtée par projection orthogonale, il ne reste plus que l'influence des bruits centrés. L'apparition d'un défaut transparait par un saut de moyenne sur la dernière colonne dans les conditions de sensibilité maximale. Cette dernière colonne est alors sélectionnée comme vecteur de résidu. Chaque composante du résidu obtenu étant sensible sensible à un seul défaut capteur l'isolation de défaut est directe.

### 4.4.1 Position du problème

Considérons le système LTI :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + w_k \end{aligned} \quad (4.84)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  désigne les entrées,  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$  est la sortie mesurée du système. Les vecteurs  $v_k \in \mathbb{R}^n$  et  $w_k \in \mathbb{R}^\ell$  sont respectivement les bruits d'état et de sortie du système. Ces bruits sont supposés gaussiens, de moyennes nulles et indépendants des entrées  $u_k$ .

L'entrée  $u_k$  est la somme des entrées déterministes  $u_k^*$  issues du calculateur, et des bruits d'entrées  $\tilde{u}_k$  supposés blancs gaussiens :

$$u_k = u_k^* + \tilde{u}_k \quad (4.85)$$

Disposant uniquement des mesures des entrées déterministes  $u_k^*$  et des sorties mesurées  $y_k$  notre objectif est de détecter et d'isoler les défauts qui affectent les capteurs du système.

Lors de l'apparition d'un défaut de capteurs, le système (4.84) devient :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + w_k + \varphi_k \end{aligned} \quad (4.86)$$



$\varphi_k \in \mathbb{R}^\ell$  ( $\varphi_k = (\varphi_k^1 \varphi_k^2 \dots \varphi_k^\ell)^T$ ) représentant le défaut de capteurs. Isoler et détecter les défauts de capteurs revient à déterminer la présence du terme  $\varphi_k$  et de la (des) composante(s) non nulle(s) de ce vecteur.

La figure (4.8) représente le système (4.84) soumis à l'influence des bruits  $\tilde{u}_k$ ,  $v_k$  et  $w_k$  et des défauts capteurs  $\varphi_k$ .

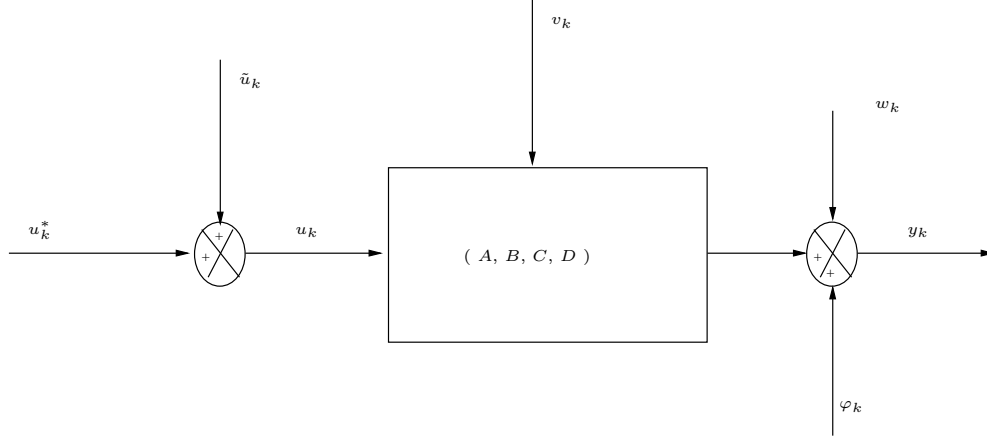


FIG. 4.8 – système surveillé

#### 4.4.2 Matrices du système

Les matrices utilisées dans la suite de ce chapitre sont référencées avec deux entiers  $i$  et  $L$ , ces deux entiers vérifiant des conditions définies dans les paragraphes qui suivent.

La matrice  $H_i$  des paramètres de Markov du système et la matrice  $H_i^s$  des paramètres de Markov de la partie stochastique du système sont définies par :

$$\begin{aligned} \underline{H}_i &= (CA^{i-2}B \dots CB D) \in \mathbb{R}^{\ell \times mi} \\ \underline{H}_i^v &= (CA^{i-2} \dots C 0) \in \mathbb{R}^{\ell \times ni} \end{aligned}$$

La matrice de sortie du système  $y_{k,L}$  et la matrice des bruits de sorties  $w_{k,L}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} y_{k,L} &= (y_{k-L+1} \ y_{k-L+2} \ \dots \ y_k) \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \\ w_{k,L} &= (w_{k-L+1} \ w_{k-L+2} \ \dots \ w_k) \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \end{aligned} \quad (4.87)$$

La matrice de Hankel de sortie  $U_L$  est définie par :

$$U_L = \begin{pmatrix} u_{k-i-L+2} & u_{k-i-L+3} & \dots & u_{k-i+1} \\ u_{k-i-L+3} & u_{k-i-L+4} & \dots & u_{k-i+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{k-L+1} & u_{k-L+2} & \dots & u_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times L}$$

La matrice de Hankel d'entrée déterministe  $U_L^* \in \mathbb{R}^{mi \times L}$ , la matrice de Hankel des bruits d'entrée  $\tilde{U}_L \in \mathbb{R}^{mi \times L}$  et la matrice de Hankel des bruits d'état  $V_L \in \mathbb{R}^{ni \times L}$  sont définies de manière similaire.

### 4.4.3 Détection de défauts de capteurs

Pour détecter les défauts de capteurs affectant le système, un résidu sensible aux défauts est généré par projection géométrique. Afin d'obtenir ce résidu, la sortie du système est approchée par un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR), la sortie est donc exprimée en fonction des entrées et des bruits. L'influence des entrées est supprimée par une projection sur l'espace orthogonal à l'espace ligne des entrées ; il ne reste plus que l'influence des bruits. Le résidu ainsi généré est de moyenne nulle en l'absence de défaut et de moyenne non nulle s'il y a apparition d'un défaut. Un test de saut de moyenne est alors réalisé sur le résidu de manière à détecter les défauts affectant le système.

#### 4.4.3.1 Annulation de l'influence des entrées

En utilisant la propriété de stabilité du système, nous allons exprimer les sorties du système uniquement en fonction des entrées et des bruits influant sur ce dernier.

Par des répétitions successives, la sortie du système (4.84) peut être exprimée de la manière suivante dans le cas déterministe ( $v_k \equiv w_k \equiv 0$ ) :

$$y_k = CA^{i-1}x_{k-i+1} + CA^{i-2}Bu_{k-i+1} + \dots + CBu_{k-1} + Du_k \quad (4.88)$$

Le système étant stable, le terme  $CA^{i-1}x_{k-i+1}$  peut être négligé si " $i$ " est suffisamment grand :

$$y_k \simeq CA^{i-2}Bu_{k-i+1} + \dots + CBu_{k-1} + Du_k \quad (4.89)$$

En compilant l'équation précédente sur un horizon  $L$  ( $L$  étant la largeur de la fenêtre glissante utilisée), nous obtenons :

$$y_{k,L} \simeq \underline{H}_i U_L \quad (4.90)$$

L'équation (4.90) peut être étendue au cas stochastique (les bruits d'état jouant le même rôle que les entrées) :

$$y_{k,L} \simeq \underline{H}_i U_L^* + \underline{H}_i \tilde{U}_L + \underline{H}_i^s V_L + w_{k,L} \quad (4.91)$$

L'influence des entrées  $u_k^*$  (voir l'équation (4.85)) est supprimée par une projection des sorties  $y_{k,L}$  sur l'espace orthogonal à l'espace des lignes des entrées  $U_L^*$  :

$$y_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp} \simeq \underline{H}_i \tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} + \underline{H}_i^s V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} + w_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp} \quad (4.92)$$

la matrice  $\Pi_{(U_L^*)^\perp}$  étant parfaitement connue à partir des entrées  $u_k^*$ . Cette projection peut être réalisée même si la matrice  $U_L^*$  n'est pas de plein rang ligne, c'est à dire si les entrées ne sont pas persistantes, à condition que  $mi < L$ .

Dans l'équation (4.92) il ne reste plus que l'influence des bruits  $\tilde{U}_L$ ,  $V_L$  et  $w_{k,L}$  qui sont blancs gaussiens et centrés. La matrice  $y_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp}$  est alors gaussienne puisqu'elle résulte d'une combinaison linéaire de matrices gaussiennes et centrées. L'espérance mathématique de cette matrice est donnée par :

$$\mathbf{E}[y_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp}] \simeq \mathbf{E}[\underline{H}_i \tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp}] + \mathbf{E}[\underline{H}_i^s V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp}] + \mathbf{E}[w_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp}] \quad (4.93)$$

$$\mathbf{E}[y_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp}] \simeq 0, \text{ puisque } \mathbf{E}[\tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp}] = 0, \mathbf{E}[V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp}] = 0, \mathbf{E}[w_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp}] = 0 \quad (4.94)$$

les entrées étant décorrelées des bruits centrés  $\tilde{U}_L$ ,  $V_L$  et  $w_{k,L}$ .

#### 4.4.3.2 Sensibilité aux fautes

Nous allons analyser, dans ce paragraphe, l'expression de la matrice  $y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp}$  lors de l'apparition d'un défaut de capteurs et nous démontrerons que cette matrice est sensible aux défauts.

Si un défaut affecte un capteur, le terme  $\varphi_k$  n'est pas nul dans l'équation (4.86). Pour des raisons de simplicité, nous supposons que le défaut affecte uniquement le capteur  $h$  et ceci à l'instant  $k$ ; l'extension au cas multi-défauts est directe. Le système (4.91) devient dans ce cas :

$$y_{k,L} \simeq \underline{H}_i U_L^* + \underline{H}_i \tilde{U}_L + \underline{H}_i^s V_L + w_{k,L} + \Phi \quad (4.95)$$

avec  $\Phi$  (matrice de Hankel de défaut) définie par :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \varphi_k^h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in R^{\ell \times L} \quad (4.96)$$

En projetant l'équation (4.95) sur l'espace orthogonal à l'espace ligne de  $U_L$ , nous obtenons :

$$y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp} \simeq \underline{H}_i \tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} + \underline{H}_i^s V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} + w_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp} + \Phi \Pi_{U_L^\perp} \quad (4.97)$$

Analysons à présent le terme  $\Phi \Pi_{U_L^\perp}$  :

$$\begin{aligned} \Phi \Pi_{U_L^\perp} &= \Phi - \Phi P \\ \Phi \Pi_{U_L^\perp} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ -\varphi_k^h P(h, k-L+1) & \dots & \varphi_k^h - \varphi_k^h P(h, L) \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.98)$$

où les matrices  $\Pi_{U_L^\perp}$  et  $P$  sont définies par :

$$\Pi_{U_L^\perp} = I - P, \quad P = U_L^T (U_L U_L^T)^{-1} U_L \quad (4.99)$$

et la notation  $P(i,j)$  désigne l'élément se trouvant sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $P$ .

**4.4.3.2.1 Condition de sensibilité** Si l'espace ligne de la matrice des défauts  $\Phi$  est inclus dans l'espace ligne des entrée  $U_L^*$  :

$$\text{span}(\Phi) \subset \text{span}(U_L^*) \quad (4.100)$$

(où  $\text{span}(M)$  est l'espace engendré par les lignes de la matrice  $M$ ) alors le terme  $\Phi \Pi_{U_L^\perp}$  disparaît dans la relation (4.97) et la matrice  $y_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp}$  n'est pas sensible aux défauts de capteurs.

**Exemple :** Afin d'illustrer la condition (4.100), on considère un système SISO ( $m = 1, \ell = 1$ ) quelconque (la dynamique du système n'intervenant pas dans la condition (4.100)) dont l'entrée  $u_k^*$  et le défaut  $\phi_k$  ( $\phi_k \equiv \varphi_k$ ) affectant ce système sont représentés sur la figure (4.9). Nous avons fixé  $i = 3$  et  $L = 5$  dans cet exemple. La matrice  $\Phi$  calculée à l'instant 11 ( $k = 11$ ) est :

$$\Phi = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2) \quad (4.101)$$

et la matrice de Hankel des entrées  $U_5^*$  à l'instant 11 ( $k = 11$ ) est :

$$U_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

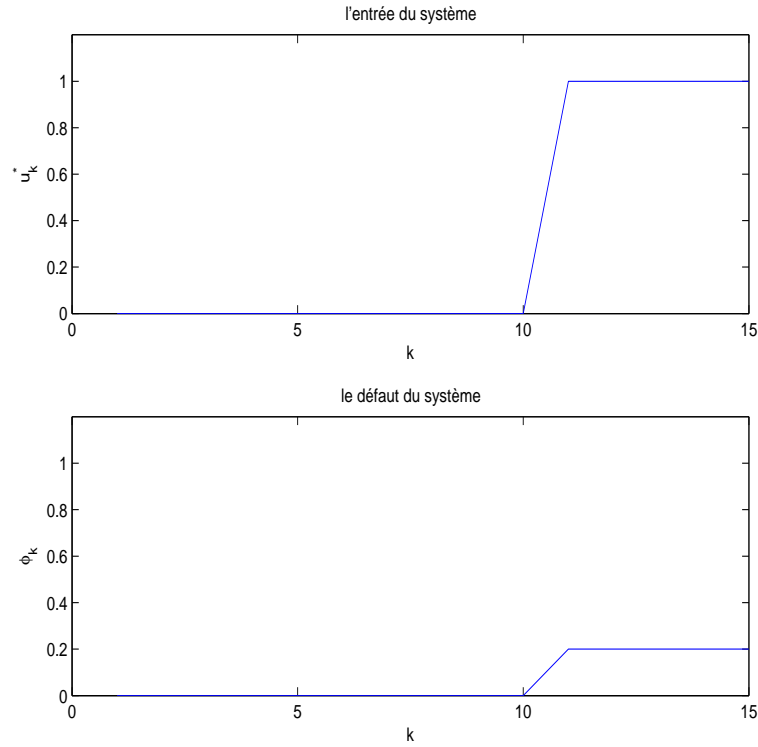


FIG. 4.9 – illustration de la condition de sensibilité

On remarque que la dernière ligne de la matrice  $U_5^*$  est proportionnelle à  $\Phi$  : la condition (4.100) est vérifiée et la matrice  $y_{11,5} \Pi_{(U_5^*)^\perp}$  n'est pas sensible au défaut  $\phi_k$ . Ce constat est vrai aux instants  $k = 12, \dots, 15$ , la matrice  $y_{k,5} \Pi_{(U_5^*)^\perp}$  n'est pas sensible au défaut  $\phi_k$  sur la fenêtre  $[10, 15]$  :

$$y_{12,5} \Pi_{(U_5^*)^\perp} \equiv 0 \quad (4.103)$$

$$y_{13,5}\Pi_{(U_5^*)^\perp} \equiv 0 \quad (4.104)$$

$$y_{14,5}\Pi_{(U_5^*)^\perp} \equiv 0 \quad (4.105)$$

$$y_{15,5}\Pi_{(U_5^*)^\perp} \equiv 0 \quad (4.106)$$

Si l'entrée  $u_k^*$  est différente de zéro avant l'apparition du défaut ( $u_k^* \neq 0, k \in [0, 10]$ ) alors la condition (4.100) n'est plus vérifiée et la matrice  $y_{k,5}\Pi_{(U_5^*)^\perp}$  est sensible au défaut  $\phi_k$ . Ce qui montre que la condition (4.100) n'est vérifiée que dans des cas très particuliers. Cela se justifie par la forme particulière de la matrice  $\Phi$  : toutes ses colonnes sont nulles sauf la dernière (voir (4.96)). En outre, il est évident que la condition (4.100) n'est pas vérifiée si les entrées sont persistantes d'ordre  $i$ .

**Remarque 4.1.**

Une condition similaire est imposée dans l'espace de parité. En effet, l'espace de parité opère la projection suivante (voir équation (4.13)) :

$$\epsilon_k = \Gamma_i^\perp (\bar{y}_k - H_i \bar{u}_k) \quad (4.107)$$

$$\epsilon_k = \Gamma_i^\perp H_i^s \bar{v}_k + \Gamma_i^\perp \bar{w}_k + \Gamma_i^\perp \bar{\varphi}_k \quad (4.108)$$

Si l'espace colonne du vecteur des défauts  $\bar{\varphi}_k$  est inclus dans l'espace colonne de la matrice  $\Gamma_i$  alors l'influence du défaut sur le résidu est annulée.

Une condition similaire est indispensable dans l'ACP aussi.

Par contre si la condition suivante est vérifiée :

$$\text{span}(\Phi) \not\subset \text{span}(U_L^*) \quad (4.109)$$

alors

$$\|\Phi \Pi_{(U_L^*)^\perp}\| \neq 0 \quad (4.110)$$

l'influence du défaut est observable sur le résidu obtenu.

La sensibilité maximale aux défauts est obtenue si la relation suivante est vérifiée :

$$\text{span}(\Phi) \subset \text{span}(\Pi_{(U_L^*)^\perp}) \quad (4.111)$$

Cette condition implique :

$$\Phi P \equiv 0, \text{ et } \Phi \Pi_{(U_L^*)^\perp} = \Phi \quad (4.112)$$

La relation (4.97) devient :

$$y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp} \simeq \underline{H}_i \tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} + \underline{H}_i^s V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} + w_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp} + \Phi \quad (4.113)$$

Calculons l'espérance mathématique de la sortie ainsi projetée :

$$\mathbf{E}[y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp}] = \Phi \quad (4.114)$$

puisque les bruits  $\tilde{U}_L$ ,  $V_L$  et  $w_{k,L}$  sont centrés et décorrélés des entrées.

On remarque que l'espérance mathématique de toutes les colonnes est nulle sauf pour la dernière (voir équation (4.96)). La dernière colonne est alors la seule sensible aux défauts.

**4.4.3.2.2 Contrainte sur les dimensions des matrices** La condition (4.111) implique que :

$$\dim(\text{span}(\Phi)) \leq \dim(\text{span}(\Pi_{(U_L^*)^\perp})) \quad (4.115)$$

où  $\dim(\mathbf{Q})$  est la dimension du sous-espace  $\mathbf{Q}$ .

La dimension des sous-espaces intervenant dans l'équation précédente est donnée ci-dessous.

Dans le cas de défauts multiples intervenant sur les capteurs on a l'inégalité suivante :

$$\dim(\text{span}(\Phi)) \leq \ell \quad (4.116)$$

Nous avons aussi l'inégalité suivante :

$$\dim(\text{span}(U_L^*)) \leq mi \quad (4.117)$$

ce qui implique que les entrées peuvent ne pas être persistantes.

D'autre part nous avons l'égalité suivante :

$$\dim(\text{span}(U_L^*)) + \dim(\text{span}(\Pi_{U_L^\perp})) = L \quad (4.118)$$

de laquelle nous déduisons :

$$L - mi \leq \dim(\text{span}(\Pi_{(U_L^*)^\perp})) \quad (4.119)$$

De ce qui précède (équation (4.115)-(4.119)), nous obtenons une condition nécessaire pour que la relation (4.111) soit vérifiée :

$$mi + \ell \leq L \quad (4.120)$$

**Remarque 4.2.**

*Nous avons vu que l'indice  $i$  doit être choisi afin que les puissances supérieures ou égale à  $i$  de la matrice d'état  $A$  soit négligeable. Ce choix peut être judicieux dans la détection de défauts de faible amplitude. Cependant, cet indice peut être choisi plus petit dans la détection de défauts de grande amplitude.*

**4.4.3.3 Génération de résidus**

Nous avons prouvé dans le paragraphe précédent que la dernière colonne de la matrice  $y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp}$  (voir (4.113)) a une sensibilité maximale aux défauts affectant le système si la condition (4.111) est vérifiée. Nous proposons alors de choisir cette colonne comme vecteur de résidu. La dernière colonne de la matrice  $y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp}$  est obtenue par l'utilisation d'une matrice de sélection  $Z$  :

$$\varepsilon_k = y_{k,L}\Pi_{(U_L^*)^\perp}Z, \quad Z = (0 \dots 0 \ 1)^T \in R^{L \times 1} \quad (4.121)$$

$$\varepsilon_k = \underline{H}_i \tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z + \underline{H}_i^s V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z + w_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z \quad (4.122)$$

#### 4.4.3.4 Détection de défaut

Nous avons démontré dans les paragraphes précédents que le vecteur de résidu  $\varepsilon_k$  (voir l'équation (4.121)) est gaussien de moyenne nulle en l'absence de défaut et de moyenne non nulle s'il y a apparition de défauts. Pour détecter la présence des défauts, nous avons choisi d'effectuer un test de khi-deux sur le vecteur  $\varepsilon_k$  de manière à détecter les changements intervenant dans le résidu, changements qui indiquent la présence de défauts. D'autres tests statistiques proposés dans [5] pourront être utilisés pour détecter les sauts dans la moyenne du résidu.

Le vecteur  $\varepsilon_k$  étant gaussien de variance  $R_{\varepsilon_k}$  et de moyenne  $\mu_k$ , le terme  $\varpi_k$  ( $\varpi_k = \varepsilon_k^T R_{\varepsilon_k}^{-1} \varepsilon_k$ ) suit une loi de khi-deux avec  $\ell$  degrés de liberté.

La matrice de variance peut être estimée par la relation (4.123) si les bruits sont ergodiques :

$$R_{\varepsilon_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{t=k-j+1}^k \varepsilon_t^T \varepsilon_t \quad (4.123)$$

Les défauts affectant le système peuvent être détectés en opérant la comparaison suivante :

$$\text{si } \varpi_k \begin{cases} < \chi_{\ell, \alpha}^2 & \text{alors il n'y a pas de défaut } (\mu_k = 0) \\ \geq \chi_{\ell, \alpha}^2 & \text{alors il y a apparition de défaut } (\mu_k \neq 0) \end{cases} \quad (4.124)$$

où  $\chi_{\ell, \alpha}^2$  est le seuil déterminé par la loi de khi-deux avec un degré de confiance  $\alpha$ .

#### Remarque 4.3.

*Cette méthode de détection peut être utilisée dans les systèmes dynamiques qui varient lentement puisque étant donné que les projections sont réalisées sur une fenêtre glissante sur laquelle le système peut être supposé linéaire.*

#### 4.4.4 Isolation de défauts de capteurs

Après avoir détecté un défaut, il faut en rechercher sa cause. Dans le cas d'un défaut de capteurs cela revient à identifier le ou les capteurs défaillants. Comme nous allons le démontrer dans la suite, le vecteur résidu  $\varepsilon_k$  ne nécessite pas de structuration, il suffit de considérer ses composantes une à une pour isoler le capteur en défaut.

La condition (4.109) étant vérifiée, si un défaut affecte le capteur  $h$  son effet ne se voit que sur la  $h^{ième}$  composante de  $\varepsilon_k$  :

$$\varepsilon_k = y_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z \quad (4.125)$$

Compte tenu de la forme particulière du vecteur de sélection  $Z$  et de (4.121) et (4.122) :

$$\varepsilon_k = \underline{H}_i \tilde{U}_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z + \underline{H}_i^s V_L \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z + w_{k,L} \Pi_{(U_L^*)^\perp} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_k^h - \varphi_k^h P(h, L) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

Comme  $\tilde{U}_L$ ,  $V_L$  et  $w_{k,L}$  sont tous des variables centrées, seule la moyenne de la  $h^{ième}$  composante du vecteur résidu  $\varepsilon_k$  est différente de zéro. Pour isoler les défauts, il suffit de considérer

les composantes de ce vecteur une à une : si un capteur est en défaut à un instant  $k$  alors la composante correspondante de  $\varepsilon_k$  ne sera pas de moyenne nulle.

Afin de tester individuellement les composantes du vecteur  $\varepsilon_k$ , nous définissons le résidu correspondant au capteur  $h$  ( $0 < h \leq \ell$ ) par :

$$\varepsilon_k^h = S_h \varepsilon_k \quad (4.127)$$

où  $S_h$  est un vecteur de sélection défini par :

$$S_h = (0 \dots 1 \dots 0) \in R^{1 \times \ell} \quad (4.128)$$

la valeur 1 apparaissant à la  $h^{\text{ième}}$  position..

Pour déterminer le ou les capteurs en défaut, nous appliquons l'algorithme FMA (Finite Moving Average algorithm) [5] sur les résidus scalaires  $\varepsilon_k^h$ . Bien évidemment d'autres tests pourront être utilisés pour identifier le(s) composante(s) en défaut.

Comme le résidu scalaire  $\varepsilon_k^h$  ( $0 < h \leq \ell$ ) est gaussien et centré, le filtre causal de coefficients  $\gamma_r$  ( $r = 0, \dots, N-1$ ,  $N$  horizon de localisation est en général différent de l'horizon de détection  $L$ ) restitue le signal :

$$g_k^h = \sum_{r=0}^{N-1} \gamma_r \varepsilon_{k-r}^h \quad (4.129)$$

inférieur à un seuil  $\eta^h$  (convenablement choisi) en l'absence des défauts. Si un changement intervient dans la moyenne de  $\varepsilon_k^h$  alors  $g_k^h$  sera supérieur à  $\eta^h$ . L'instant d'apparition de défaut  $t_a$  est alors donné par :

$$t_a = \min\{k : g_k^h \geq \eta^h\} \quad (4.130)$$

#### 4.4.5 Exemple

Un exemple de simulation est proposé dans cette section pour montrer les performances de la méthode présentée. Une comparaison avec les résultats obtenus par l'espace de parité, dans le cas où l'on dispose du modèle exact et dans le cas où le modèle est incertain, est présentée.

Le système simulé est le suivant :

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0.7 & -0.4 \end{pmatrix} u_k + v_k \quad (4.131)$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.78 & 0.36 \\ 0.45 & 0.5 & 0.75 \\ 0.85 & 0.26 & 0.1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0.76 & 0.4 \\ 0.39 & 0.5 \\ 0.59 & 0.72 \end{pmatrix} u_k + w_k \quad (4.132)$$

dans lequel  $u_k \in R^{2 \times 1}$  (pour raison de simplicité nous avons posé  $\tilde{u}_k = 0$  ce qui implique que  $u_k = u_k^*$ ),  $w_k$  et  $y_k \in R^{3 \times 1}$ . Le rapport signal bruit  $RSB(y_k^h, w_k^h)$  de la  $h^{\text{ème}}$  sortie  $y_k^h$  par rapport aux bruits  $w_k^h$  affectant la même sortie est donné par :  $RSB(y_k^1, w_k^1) \simeq 24db$ ,  $RSB(y_k^2, w_k^2) \simeq 26db$ ,  $RSB(y_k^3, w_k^3) \simeq 37db$ . Le bruit d'état  $v_k$  est blanc gaussien et de variance  $R_w = 3.10^{-4}I_3$ . Les entrées et les sorties du système sont respectivement représentées sur les figures (4.11) et (4.10).

Le système est surveillé sur l'intervalle de temps de [1, 4000].

Les défauts simulés sur le système sont les suivants :

- la première et la dernière sortie sont affectées simultanément sur l'intervalle [1000, 1050]



par un défaut de capteurs  $\varphi_k^1 = 0.10 \delta y^1$ ,  $\varphi_k^3 = 0.10 \delta y^3$ , où  $\delta y^h$  est l'étendue de la  $h^{\text{ième}}$  sortie  $y_k^h$ .

- sur l'intervalle de temps [2000, 2050] la deuxième sortie est affectée par  $\varphi_k^2 = 0.10 \delta y^2$ .

- la deuxième et la troisième sortie sont affectées simultanément sur l'intervalle [3000, 3050] par les défaut suivants :  $\varphi_k^2 = 0.10 \delta y^2$ ,  $\varphi_k^3 = 0.10 \delta y^3$ .

Ces instants d'apparition des défauts sont récapitulés sur la figure (4.12).

Les performances de la méthode proposée sont comparées à celles de l'espace de parité (voir les équations (4.10), (4.37) et (4.38)).

L'espace de parité est réalisé dans un premier temps avec le modèle exact et les résultats obtenus sont représentés sur la figure (4.13), puis avec un modèle incertain comportant des incertitudes inférieures à 10% de sa valeur nominale (voir la figure (4.14)).

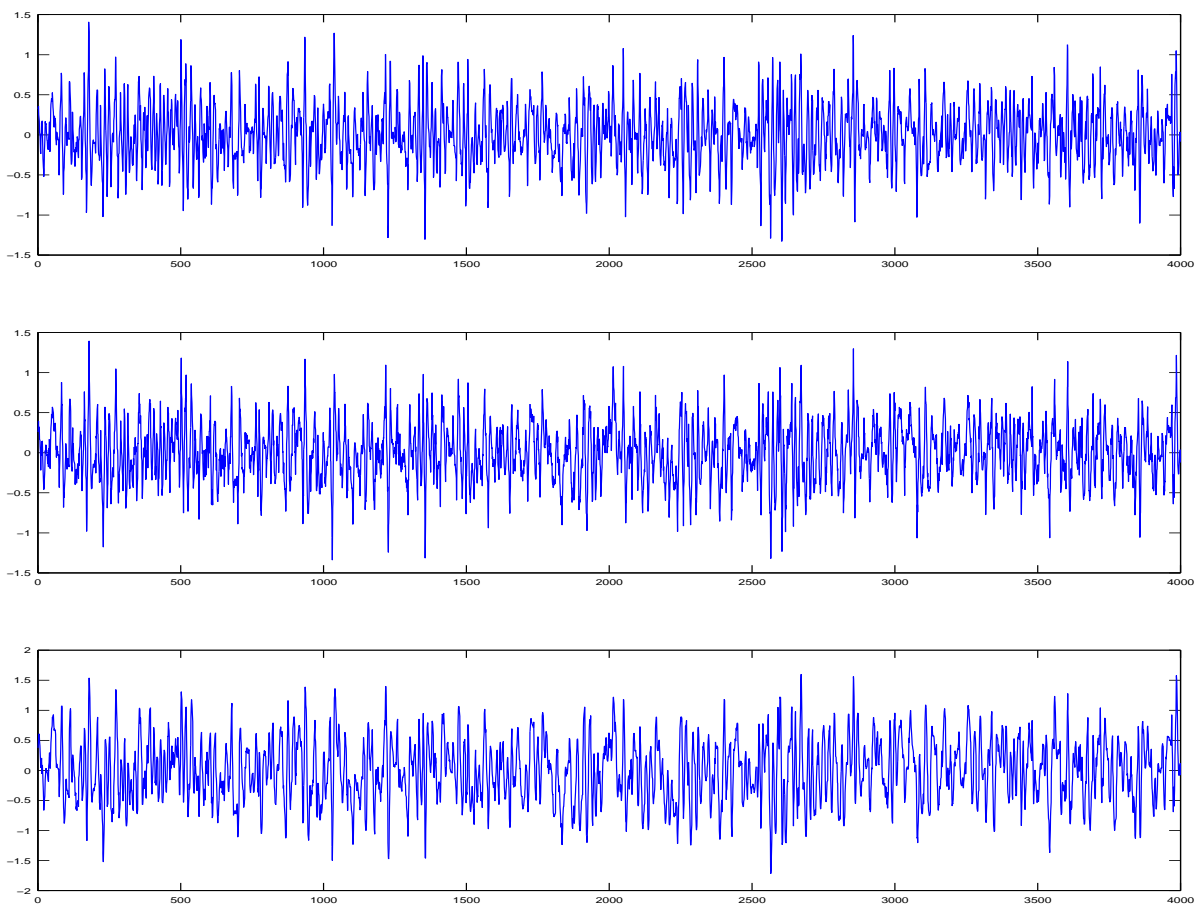


FIG. 4.10 – sorties du système

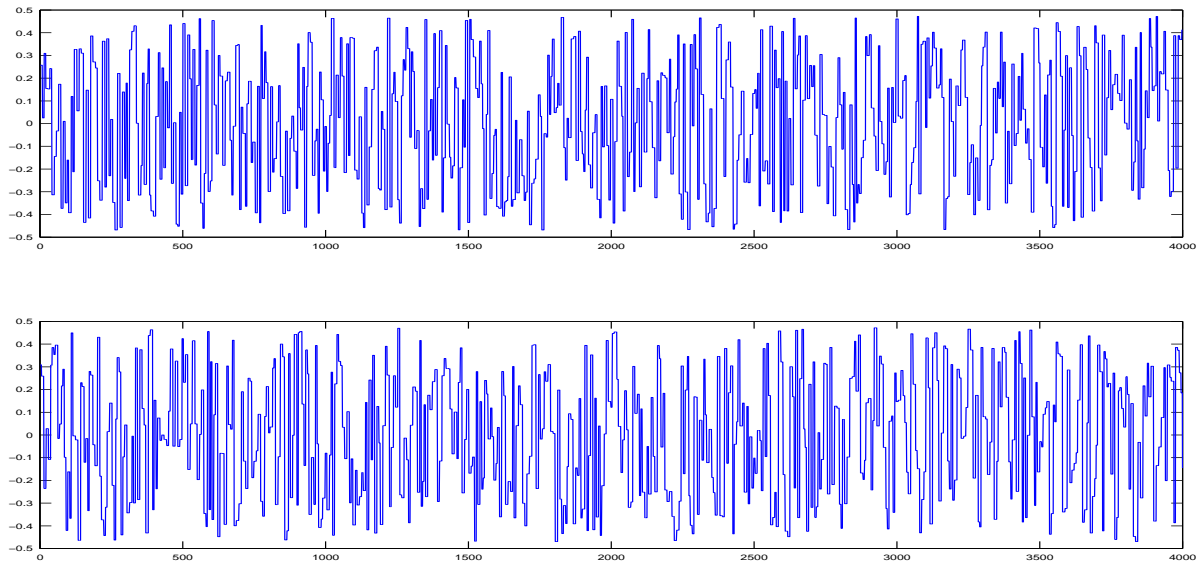


FIG. 4.11 – entrées du système

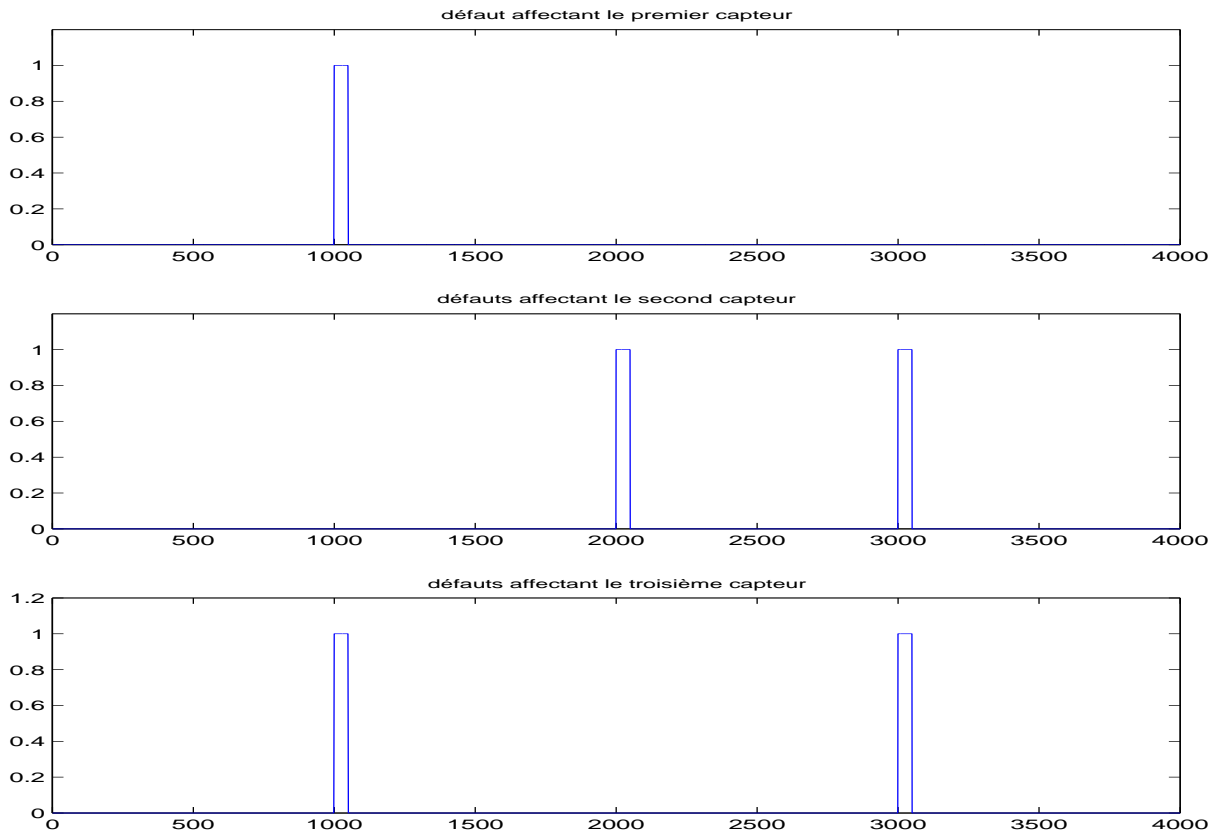


FIG. 4.12 – les instants d'apparition des défauts

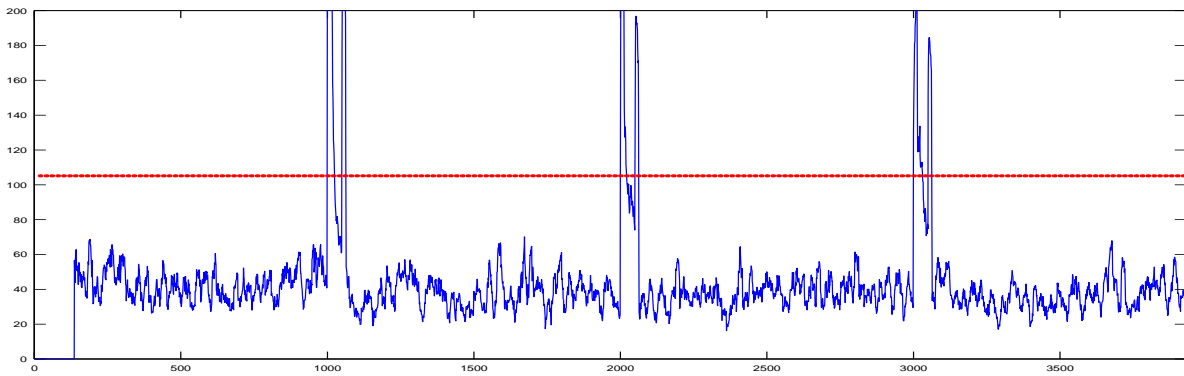


FIG. 4.13 – résultat obtenu par l'espace de parité avec le modèle exact du système simulé

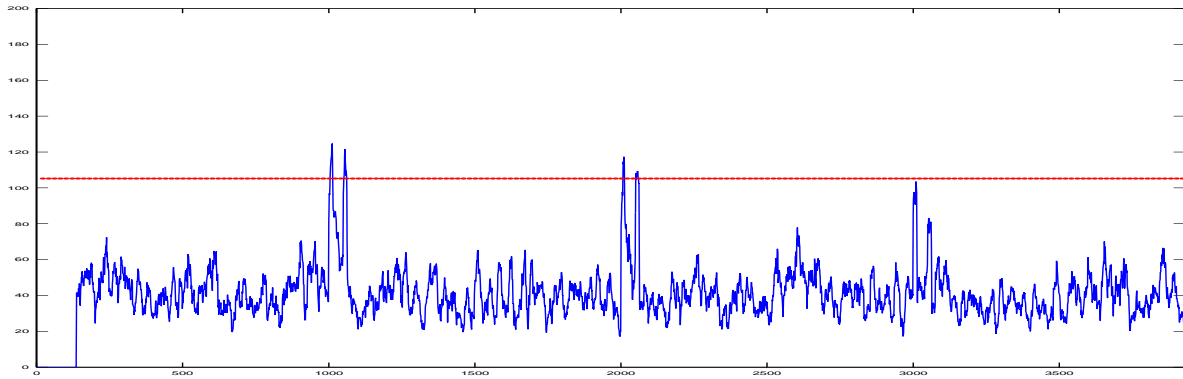


FIG. 4.14 – résultat obtenu par l'espace de parité basé sur un modèle incertain avec des incertitudes inférieures à 10%

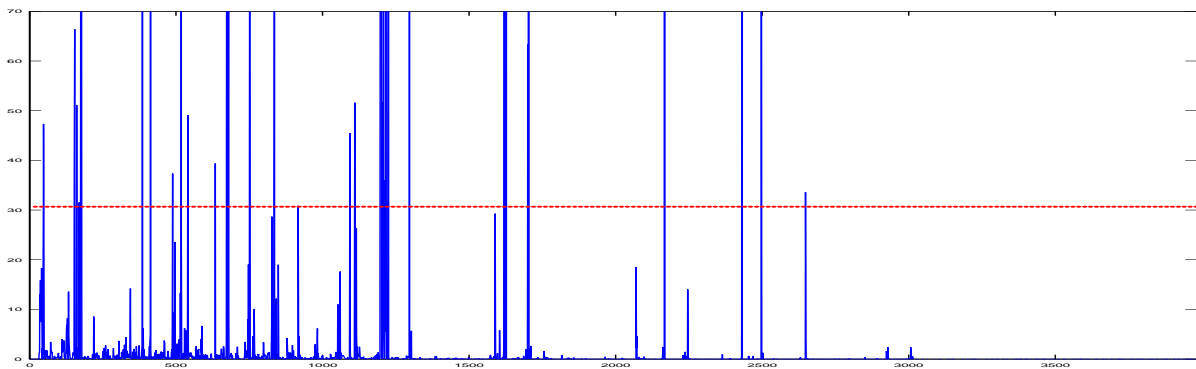


FIG. 4.15 – nouvelle méthode avec  $i = 4$  et  $L = 12$

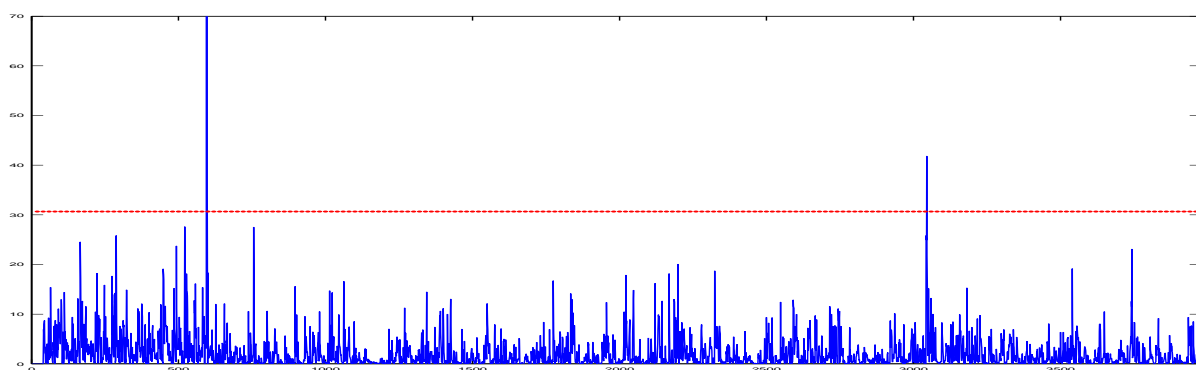


FIG. 4.16 – nouvelle méthode avec  $i = 4$  et  $L = 16$

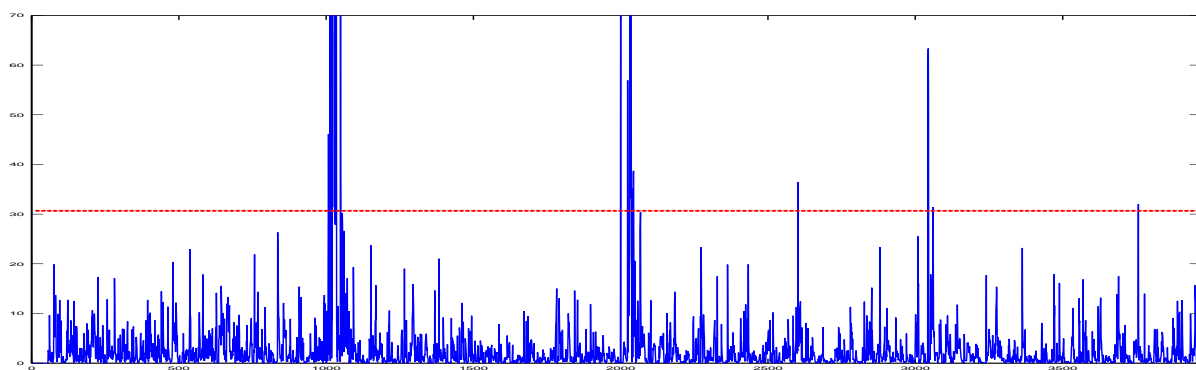


FIG. 4.17 – nouvelle méthode avec  $i = 7$  et  $L = 21$

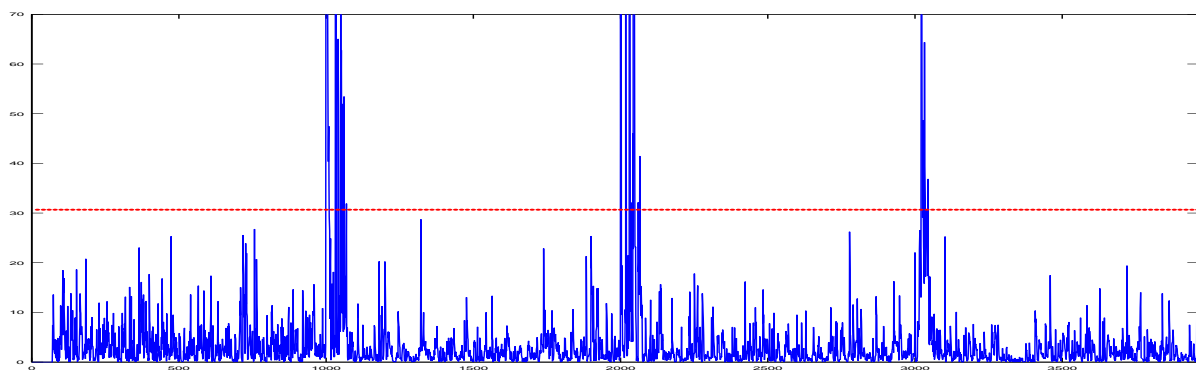


FIG. 4.18 – nouvelle méthode avec  $i = 17$  et  $L = 28$

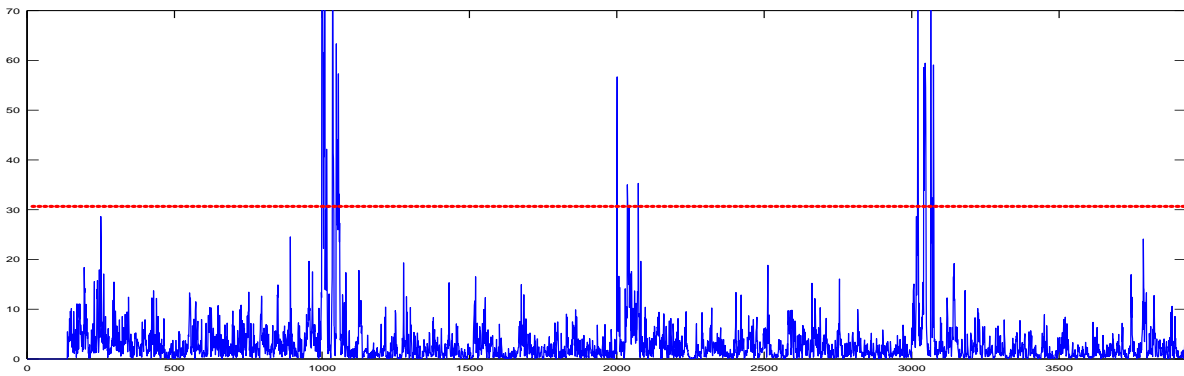


FIG. 4.19 – nouvelle méthode avec  $i = 17$  et  $L = 51$

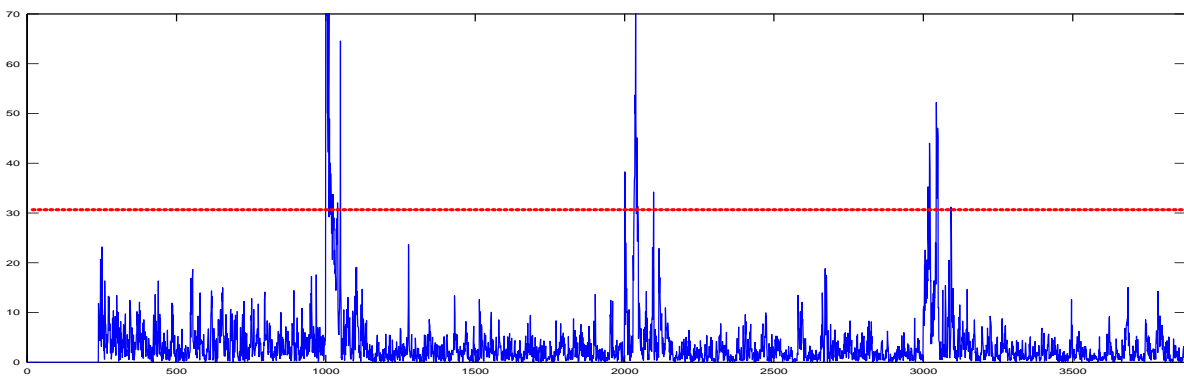


FIG. 4.20 – nouvelle méthode avec  $i = 17$  et  $L = 102$

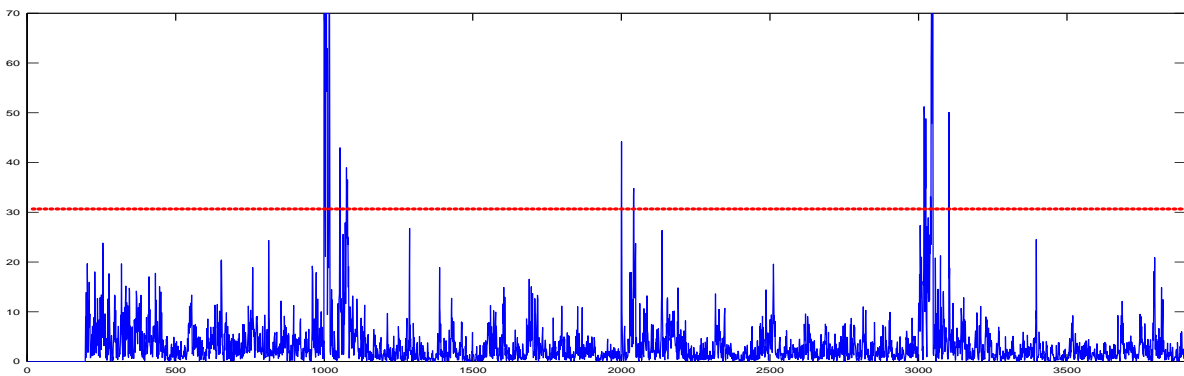


FIG. 4.21 – nouvelle méthode avec  $i = 27$  et  $L = 71$

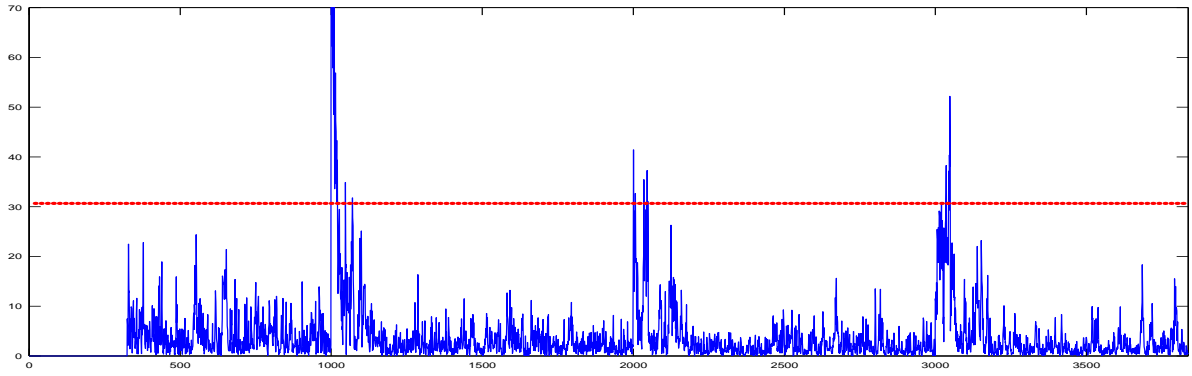


FIG. 4.22 – nouvelle méthode avec  $i = 27$  et  $L = 135$

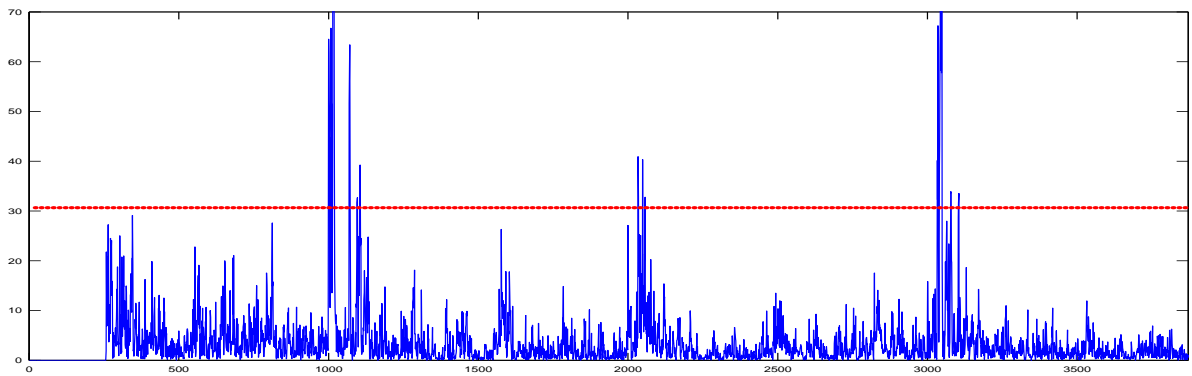


FIG. 4.23 – nouvelle méthode avec  $i = 37$  et  $L = 91$

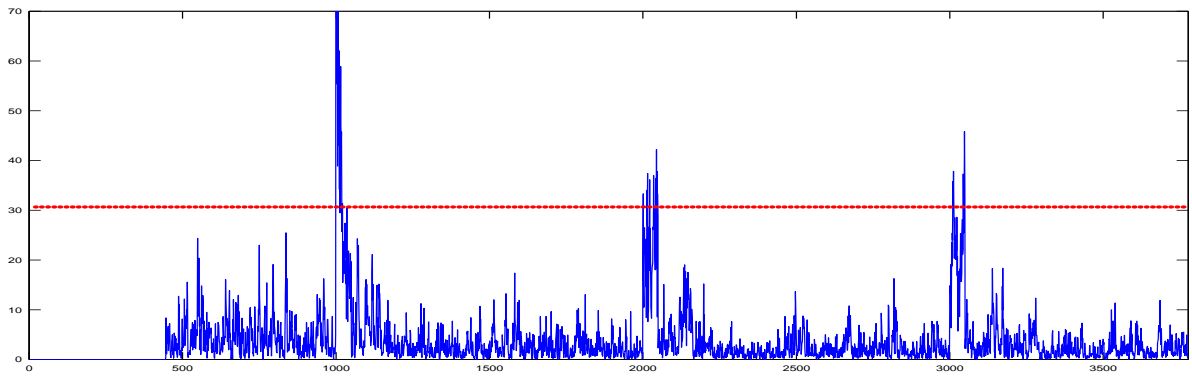


FIG. 4.24 – nouvelle méthode avec  $i = 37$  et  $L = 185$

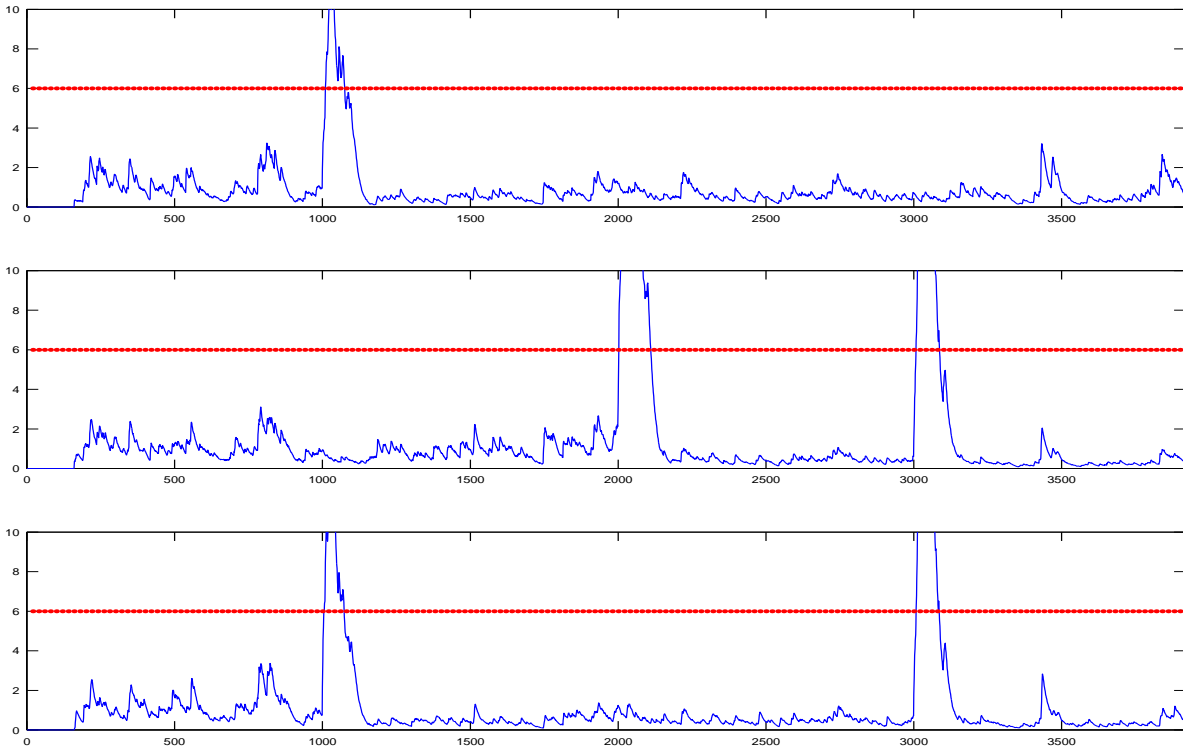


FIG. 4.25 – isolation de défaut par la nouvelle méthode avec  $i = 17$  et  $L = 102$

La méthode proposée est utilisée pour détecter les défauts (voir les équations (4.121) à (4.124)) simulés avec différentes valeurs des indices  $i$  et  $L$  dans les figures (4.15) à (4.24). Ces figures montrent que la méthode donne de bons résultats pour toute une plage de valeurs de  $i$  et de  $L$  ( $i \in [17, 37]$ ), on n'est donc pas confronté à la détermination d'un  $i$  (ou d'un  $L$ ) optimal. Les différentes figures montrent que la méthode proposée donne de bons résultats si  $i$  est supérieur à un seuil donné (pour que le terme  $CA^{i-1}x_{k-i+1}$  soit négligeable) et si la condition (4.120) est vérifiée.

La figure (4.25) montre les résultats de l'isolation des défauts, obtenus par la méthode proposée (voir les équations (4.127) à (4.130)) dans laquelle  $i = 17$  et  $L = 102$ . Cette figure montre que les défauts sont correctement isolés.

## 4.5 Conclusion

Une étude des méthodes de détection et d'isolation de défaut de capteurs basées sur la connaissance des signaux d'entrée et de sortie, soldée par la proposition d'une nouvelle méthode, est réalisée dans ce chapitre. L'ACP a retenu notre attention, puisqu'elle fait partie des méthodes de diagnostic basées sur les signaux d'entrée et de sortie. Cette étude a révélé que l'ACP estime le modèle du système de manière implicite et utilise le même principe que l'espace de parité. Ces deux méthodes, à savoir l'espace de parité et l'ACP, ont été analysées dans le contexte de détection et d'isolation de défaut de capteurs et les difficultés rencontrées dans ces méthodes ont été évoquées.

Cette analyse commence par une présentation de l'espace de parité, notamment la génération de résidu (par l'utilisation des projections matricielles) et l'utilisation du résidu généré (pour

la détection et l'isolation de défaut). L'espace de parité étant basé sur l'utilisation d'un modèle estimé, il est confronté au problème d'incertitude paramétrique et de dynamiques non modélisées. Ce problème a été abordé, de même que les solutions proposées dans la littérature pour le résoudre. Les insuffisances de ces solutions proposées ont été évoquées, notamment l'hypothèse de la connaissance des directions des incertitudes paramétriques et des dynamiques non modélisées.

La méthode de génération de résidu par l'ACP est décrite, puis les problèmes liés à la non persistance des entrées sont évoqués. Il est démontré en outre que si l'ACP ne suppose pas connues les matrices du système, elle les identifie de manière implicite, ce qui entraîne des incertitudes paramétriques et rend indispensable la condition de persistance d'excitation lors de cette étape.

Pour faire face aux difficultés rencontrées dans l'ACP, dans l'espace de parité et dans les méthodes de diagnostic à base de modèle en général, une nouvelle méthode de détection et d'isolation de défaut de capteurs, qui n'estime pas le modèle du système, est proposée.

Cette méthode se base sur la stabilité du système pour approximer sa sortie par un FIR et annule l'influence des entrées par une projection orthogonale. Le résidu obtenu ne dépend que des bruits de moyenne nulle ; il est donc centré en absence de défaut et de moyenne non nulle dès qu'un défaut apparaît.

L'isolation de défaut de capteurs est directe puisque le résidu obtenu est structuré par construction. En effet, une ligne du résidu est sensible uniquement au défaut affectant un seul capteur. L'isolation de défaut est réalisée en analysant individuellement les composantes du résidu.

La méthode proposée ne nécessite ni la connaissance des matrices du système ni la condition d'excitation persistante. Puisqu'aucun modèle n'est utilisé, on s'affranchit des problèmes induits par les incertitudes paramétriques. De plus, aucune étape de détermination d'ordre n'intervient dans cette méthode contrairement à l'ACP. La méthode proposée peut détecter les défauts systèmes, ce qui justifie leur utilisation pour l'estimation des instants de commutations dans les SAC dans le chapitre 2.

Plusieurs champs d'investigation restent cependant ouverts dans l'application de cette méthode. Tout d'abord, leur application à l'isolation de défaut d'actionneurs reste envisageable si l'on exprime les entrées du système en fonction de ses sorties et si l'on réalise une projection de ces entrées orthogonalement à l'espace des sorties. Leur adaptation à la détection et à l'isolation des défauts dans certains systèmes non-linéaires est réalisable dans certaines conditions : par exemple dans les SAC, la méthode proposée peut être utilisée pour détecter et isoler les défauts de capteurs à condition de connaître les instants de commutations.





## Conclusion générale

Les méthodes des sous-espaces d'identification des systèmes linéaires et non-linéaires sont proposées, suivies d'une présentation d'une nouvelle méthode de détection et d'isolation des défauts capteurs basée uniquement sur la connaissance des signaux entrée et sortie.

Dans le domaine de l'identification des systèmes linéaires, une présentation des méthodes classiques d'identification des sous-espaces est donnée. Ces méthodes classiques se fondent sur l'estimation de la matrice d'observabilité étendue et/ou de la matrice des séquences d'état pour identifier le système. Les travaux de Qin et Ljung [60] ont montré que la paramétrisation utilisée dans les méthodes classiques des sous-espaces n'est pas parcimonieuse, ce qui engendre des estimations ayant une grande variance, surtout quand le nombre de données utilisées est faible. L'utilisation des paramètres de Markov permet de rendre cette paramétrisation parcimonieuse. De plus, comme l'état résulte des entrées et sorties, il semble normal de se servir directement des paramètres de Markov au lieu de passer par un état intermédiaire, d'autant que les méthodes classiques des sous-espaces utilisent ces paramètres de Markov pour estimer certaines matrices du système. Ainsi, les méthodes des sous-espaces basées sur l'estimation des paramètres de Markov ont retenu notre attention dans la suite : la méthode utilisant une structuration en trois blocs proposée par Chui et Maciejowski est présentée, puis trois nouvelles méthodes d'identification qui font partie des contributions de cette thèse ont été établies.

Les trois nouvelles méthodes proposées dans l'identification des systèmes linéaires utilisent une modélisation FIR dans laquelle les sorties sont exprimées en fonction des entrées pondérées par les paramètres de Markov. Ces derniers sont estimés par la méthode des moindres carrés et les estimations obtenues sont consistantes même en présence de bruits colorés. Une paramétrisation parcimonieuse est utilisée dans l'estimation des paramètres de Markov, ce qui réduit leur variance, surtout quand le nombre de données utilisées est faible. Le problème de persistance des signaux d'entrée est évoqué et une méthode s'affranchissant de cette condition est proposée. Comme prévu, seuls les modes excités sont estimés. Les trois méthodes proposées déterminent une réalisation minimale et équilibrée du système à partir des paramètres de Markov estimés à l'aide de l'algorithme ERA.

Plusieurs améliorations peuvent cependant être apportées aux méthodes proposées. Ainsi, l'estimation utilisant une paramétrisation parcimonieuse, adoptée dans les trois nouvelles méthodes, peut être améliorée en estimant en une seule fois les paramètres de Markov, au lieu de l'estimation bloc par bloc proposée. De plus, l'algorithme ERA utilisé pour déterminer une réalisation du système peut être modifié pour tenir compte de la variance de ces paramètres. On peut également envisager, dans la mise en oeuvre de cet algorithme, de déterminer les matrices du système sous forme compagne par exemple, ce qui réduira le nombre de paramètres estimés.

En ce qui concerne l'identification des systèmes à commutations, un aperçu des méthodes d'identification des SAC proposées dans la littérature est donné, puis deux nouvelles méthodes d'identification sont proposées. Une brève présentation des méthodes HH ("Hinging Hyperplanes") initialement proposée par Breiman [11] est donnée, de même que les différentes améliorations suggérées dans la littérature pour assurer sa convergence. L'un des handicaps de cette

méthode ainsi modifiée est le nombre prohibitif de calculs dû à l'utilisation des MIQP [7]. La méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* basée sur la reconnaissance de formes est aussi décrite. Les données issues d'un même modèle local peuvent être alors subdivisées en plusieurs classes dans cette méthode, ce qui peut engendrer des classes contenant un nombre faible de données, compromettant ainsi l'identification des modèles locaux correspondants. De plus, la convergence des techniques de détermination d'ellipsoïdes utilisées dans la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.* [22] dépend des conditions initiales utilisées. Les changements d'ordre susceptibles d'intervenir dans les SAC ne sont pris en compte ni dans les méthodes HH ni dans la méthode proposée par Ferrari-Trecate *et al.*. Cela peut engendrer une surparamétrisation des modèles locaux ou au contraire une sous-paramétrisation de ces modèles entraînant des estimations non consistantes de leurs paramètres. Deux nouvelles méthodes d'identification des SAC basées sur une modélisation avec des modèles locaux complètement découplés sont alors établies pour faire face aux problèmes rencontrés dans les méthodes précédentes.

Ces deux méthodes ne requièrent la connaissance ni du nombre de modèles locaux, ni des conditions initiales. Elles tiennent compte des changements d'ordre qui peuvent intervenir dans les SAC.

La première méthode utilise les techniques de détection de rupture de modèle pour estimer les instants de commutations. Une procédure d'estimation des paramètres de Markov et de fusion de modèles "identiques" est répétée jusqu'à ce que la valeur des poids ne change plus. Finalement, une réalisation minimale et équilibrée est déterminée par l'algorithme ERA pour chaque modèle local.

La deuxième méthode se base sur la répartition des vecteurs formés à partir des données dans l'espace des sorties et des régresseurs pour réaliser la classification des données. Comme les vecteurs de données issus d'un modèle local appartiennent tous au même hyperplan, le problème de classification revient à déterminer le nombre d'hyperplans et à regrouper les données appartenant au même hyperplan. La classification étant ainsi réalisée, l'identification des modèles locaux se fait de la même manière que dans la première méthode.

Pour continuer ce travail, nous suggérerons l'élaboration d'une méthode de détermination d'un seuil adéquat de regroupement des matrices orthogonales aux hyperplans, dans la méthode de classification basée sur la répartition des vecteurs de données dans l'espace de régression. On pourra aussi, s'orienter vers l'utilisation d'une classification hiérarchique avec des indices adaptées et l'analyse de leur dendrogramme afin de déterminer les classes.

Dans le domaine de l'identification des systèmes non-linéaires avec l'approche multi-modèle, une méthode des sous-espaces d'identification des modèles locaux est établie. Le système non-linéaire est modélisé comme étant une somme pondérée de modèles linéaires locaux dans cette approche et la validité de chaque modèle local est déterminée par sa fonction de pondération. La méthode proposée suppose la fonction de pondération connue et identifie les modèles linéaires locaux. Les modèles locaux, supposés stables sont approchés par un FIR, la sortie du système est exprimée par une agrégation de modèles FIR et les paramètres de Markov des modèles locaux sont estimés. Cette estimation est réalisée soit par la méthode des moindres carrés qui estime ensemble de ces paramètres, soit par les projections obliques qui estiment les paramètres des modèles locaux l'un après l'autre. Enfin, une réalisation minimale et équilibrée des modèles locaux est déterminée par l'algorithme ERA. La méthode proposée prend en compte les changements d'ordre qui peuvent intervenir dans la dynamique du système. Cette méthode peut être intégrée dans une procédure globale d'identification des systèmes non-linéaires avec l'approche multi-modèle ; elle sera alors couplée avec les techniques d'estimation des poids des modèles locaux en vue de l'estimation des poids et des paramètres de ces modèles. Il serait judicieux alors d'utiliser

---

les méthodes garantissant la stabilité des modèles dans l'identification des modèles locaux.

Que ce soit pour les systèmes linéaires, les systèmes à commutations ou les systèmes non-linéaires dans le cas général, les méthodes proposées dans ce document sont capables d'élaborer des modèles mathématiques reflétant le comportement du système. Ce modèle pourra être utilisé dans les méthodes de diagnostic à base de modèle pour détecter et isoler les défauts capteurs du système.

Si le modèle du système n'est pas disponible ou ne peut pas être obtenu par les méthodes d'identification, alors les techniques de diagnostic à base de modèle ne pourront plus être utilisées. Il est nécessaire de disposer de méthodes pouvant détecter et isoler les défauts dans ce contexte.

Les méthodes de détection et d'isolation de défauts à base de modèle utilisent de manière explicite ou implicite le modèle du système. Ce modèle peut être obtenu directement par les méthodes d'identification, ce qui nécessite la condition de persistance d'excitation. Cette condition ne peut pas être remplie dans certains systèmes à cause des contraintes physiques. Les méthodes de détection qui utilisent le modèle de manière explicite ou implicite ne pourront pas être utilisées. Même si cette condition de persistance d'excitation est vérifiée, le modèle identifié comporte des incertitudes dues à l'influence des bruits. Ces problèmes ont été analysés dans le contexte de deux méthodes de diagnostic, à savoir l'espace de parité et l'ACP. Pour apporter une solution à ces problèmes, une méthode de détection et d'isolation de défauts de capteurs basée sur les projections géométriques est proposée. Cette méthode est basée uniquement sur la connaissance des signaux d'entrée et de sortie, elle ne nécessite ni la condition de persistance des signaux d'entrées, ni la connaissance du modèle du système. La méthode proposée s'affranchit ainsi des problèmes induits par les incertitudes paramétriques. Elle utilise un modèle FIR grâce auquel la sortie du système est exprimée en fonction des entrées déterministes. L'influence des entrées est ensuite supprimée par une projection orthogonale, de manière à obtenir un résidu dépendant uniquement des bruits centrés gaussiens. L'apparition d'un défaut sur les capteurs entraîne un changement dans la moyenne du résidu. Ce résidu est structuré par construction, ce qui permet l'isolation des défauts affectant les capteurs. La méthode de détection et d'isolation de défaut de capteurs proposée ne nécessite pas la détermination d'un ordre mais d'un indice dont la valeur peut être choisie dans une plage donnée.

La méthode proposée est capable de détecter les défauts du système, comme l'illustre leur application dans l'estimation des instants de commutations dans les SAC. Mais l'isolation des ces défauts à partir de ces projections reste un problème ouvert. En ce qui concerne l'isolation des défauts actionneurs, celle-ci peut être envisagée si les entrées sont exprimées en fonction des sorties par exemple.





## Annexe

### A.1 Algorithme ERA (Eigenvalue Realization Algorithm) [36]

L'algorithme ERA est décrit dans cette partie. Il permet d'obtenir l'ordre et une réalisation minimale et équilibrée  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$  du système à partir des paramètres de Markov. On suppose qu'on dispose de  $i$  paramètres de Markov avec :

$$i > 2n - 1 \quad (\text{A.1})$$

où  $n$  désigne l'ordre du système.

- Construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_\nu^0$  et  $\mathbf{H}_\nu^1$  qui contiennent les paramètres de Markov et sont définies par la formule générale (avec  $\nu = \text{intg}(i/2)$ ) :

$$\mathbf{H}_\nu^k = \begin{pmatrix} CA^k B & \dots & CA^{k+\nu-1} B \\ CA^{k+1} B & \dots & CA^{k+\nu} B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{k+\nu-1} B & \dots & CA^{k+2\nu-2} B \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

la condition (A.1) implique que les matrices  $\mathbf{H}_\nu^0$  et  $\mathbf{H}_\nu^1$  ont une dimension supérieure à  $n$ .

- Opérer la décomposition en valeurs singulières suivante  $\mathbf{H}_\nu^1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\nu^1 &= (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \\ &\simeq U_1 S_1 V_1^T \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où  $S_2$  contient les valeurs singulières négligeables.

- L'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières de la matrice  $S_1$ .
- Calculer la matrice d'observabilité  $\Gamma_\nu = U_1 S_1^{1/2}$  et celle de commandabilité  $\mathcal{C}_\nu = S_1^{1/2} V_1^T$ .
- La matrice  $CT$  est donnée par les  $\ell$  premières lignes de  $\Gamma_\nu$ .
- La matrice  $T^{-1}B$  est donnée par les  $m$  premières colonnes de  $\mathcal{C}_\nu$ .
- La matrice  $A$  est déterminée par :

$$T^{-1}AT = S_1^{-1/2}U_1^T \mathbf{H}_\nu^1 V_1 S_1^{-1/2}.$$

## A.2 Annexe (équivalence des méthodes moindres carrés et des projections obliques)

Supposons qu'on a la relation matricielle suivante :

$$Y = (L \ M) \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix} + B \quad (\text{A.4})$$

avec  $L \in \mathbb{R}^{s \times p}$  et  $M \in \mathbb{R}^{s \times f}$  et  $B$  représente un terme de bruit ou de perturbation.

Notre objectif ici est de démontrer que l'estimation des matrices  $M$  (resp.  $L$ ) par les moindres carrés :  $((L \ M) + B \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix})^{(-)} = Y \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}^{(-)} + B \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}^{(-)}$  par la minimisation de la norme :  $\min_{L,M} \|Y - (L \ M) \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}\|$  est identique à celle obtenue par les projections matricielles :

$$\hat{M} = Y \Pi_{W^\perp} (U \Pi_{W^\perp})^{(-)} + B \Pi_{W^\perp} (U \Pi_{W^\perp})^{(-)} \quad (\text{A.5})$$

(resp.  $L = Y \Pi_{U^\perp} (W \Pi_{U^\perp})^{(-)} + B \Pi_{U^\perp} (W \Pi_{U^\perp})^{(-)}$ ).

L'égalité sera prouvée dans le cas où on estime la matrice  $M$  par ces deux méthodes (moindres carrés et les projections matricielles), la démonstration dans le cas où l'on estime la matrice  $L$  est établie de façon similaire.

À partir de l'estimation des moindres carrés de la matrice  $M$ , et par des transformations équivalentes, on aboutira à l'estimation obtenue par projection matricielle :

$$\underbrace{(L \ M) + B \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}}_{\varphi}^{(-)} = Y \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}^{(-)} + B \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}^{(-)} \quad (\text{A.6})$$

$$= Y (W^T \ U^T) \begin{pmatrix} WW^T & WU^T \\ UW^T & UU^T \end{pmatrix}^{-1} + B (W^T \ U^T) \begin{pmatrix} WW^T & WU^T \\ UW^T & UU^T \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{A.7})$$

en utilisant le lemme d'inversion matricielle on obtient :

$$\varphi = Y (W^T \ U^T) \begin{pmatrix} (WW^T)^{-1} + (WW^T)^{-1} WU^T \Delta UW^T (WW^T)^{-1} - (WW^T)^{-1} WU^T \Delta \\ -\Delta UW^T (WW^T)^{-1} & \Delta \end{pmatrix} + B (W^T \ U^T) \begin{pmatrix} (WW^T)^{-1} + (WW^T)^{-1} WU^T \Delta UW^T (WW^T)^{-1} - (WW^T)^{-1} WU^T \Delta \\ -\Delta UW^T (WW^T)^{-1} & \Delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

avec

$$\Delta = (UU^T - UW^T (WW^T)^{-1} WU^T)^{-1} \quad (\text{A.9})$$

On peut alors déduire l'estimation de la matrice  $M$ , comme  $M \in \mathbb{R}^{s \times f}$  son estimation  $\hat{M}$  est donnée par les  $f$  dernières colonnes de la matrice  $\varphi$  :

$$\hat{M} = Y (W^T \ U^T) \begin{pmatrix} -(WW^T)^{-1} WU^T \Delta \\ \Delta \end{pmatrix} + B (W^T \ U^T) \begin{pmatrix} -(WW^T)^{-1} WU^T \Delta \\ \Delta \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{M} = Y(U^T \Delta - W^T (WW^T)^{-1} WU^T \Delta) + B(U^T \Delta - W^T (WW^T)^{-1} WU^T \Delta) \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{M} = Y(I - W^T (WW^T)^{-1} W)U^T \Delta + B(I - W^T (WW^T)^{-1} W)U^T \Delta \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \hat{M} = & Y(I - W^T (WW^T)^{-1} W)U^T (UU^T - UW^T (WW^T)^{-1} WU^T)^{-1} \\ & + B(I - W^T (WW^T)^{-1} W)U^T (UU^T - UW^T (WW^T)^{-1} WU^T)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{M} = Y\Pi_{W^\perp} U^T (U\Pi_{W^\perp} U^T)^{-1} + B\Pi_{W^\perp} U^T (U\Pi_{W^\perp} U^T)^{-1} \quad (\text{A.14})$$

En utilisant la symétrie et l'idempotence de la matrice de projection  $\Pi_{W^\perp}$  on obtient :

$$\hat{M} = Y\Pi_{W^\perp} (U\Pi_{W^\perp})^T (U\Pi_{W^\perp} (U\Pi_{W^\perp})^T)^{-1} + B\Pi_{W^\perp} (U\Pi_{W^\perp})^T (U\Pi_{W^\perp} (U\Pi_{W^\perp})^T)^{-1} \quad (\text{A.15})$$

D'autre part en utilisant la définition de la pseudo-inverse on trouve :

$$\hat{M} = Y\Pi_{W^\perp} (U\Pi_{W^\perp})^{(-)} + B\Pi_{W^\perp} (U\Pi_{W^\perp})^{(-)} \quad (\text{A.16})$$

Ce qui est l'estimation donnée par projection matricielle (Eq. (A.5)), d'où l'équivalence de ces deux estimations.





# Index

- 4SID basique, 17, 21
- ACP, 11, 117, 128
- CVA, 17, 21
- Défaillance, 2
- Défaut, 2
- Détection, 2, 6
- Diagnostic, 2, 7
- Dim, 131
- ERA, 10, 28, 30, 33, 42, 43, 45, 48, 79, 107, 155
- Erreur de prédiction, 5
- Espace de parité, 11, 118
- Faute, 2
- Filtre de Kalman, 6
- FIR, 10, 15, 30, 117, 135
- FMA, 141
- Fonction d'interpolation, 100
- Fonction de pondération, 100
- Fonction poids, 65, 100
- Formalisme de Chow et Willsky, 119
- GMA, 74
- HH, 57
- Identification, 4
- Identification de défaut, 9
- Isolation de défaut, 8
- IV-4SID, 17, 21
- Méthodes classiques, 15, 17
- Matrice d'observabilité étendue, 19
- Matrice de commandabilité des bruits, 19
- Matrice de commandabilité rebours, 19
- Matrice de Hankel d'entrée, 18
- Matrice de Hankel de bruit, 19
- Matrice de Hankel de sortie, 18
- Matrice de Toeplitz inférieure, 19
- Matrice de Toeplitz inférieure des bruits, 19
- Matrice des séquences d'état, 19
- MILP, 62
- MIQP, 58, 62
- Modèle, 2
- MOESP, 17, 21
- Multi-modèle, 5, 100
- N4SID, 17, 21
- Null, 131
- Observateur, 6
- Panne, 2
- PEM, 9
- persistance d'excitation, 19
- persistante d'excitation, 117, 130, 135
- Perturbation, 2, 6
- Poids, 65, 100
- Probabilité de bonne détection, 6
- Probabilité de fausses alarmes, 6
- Probabilité de non détection, 6
- Projection oblique, 16
- Projection orthogonale, 16
- Pseudo-inverse de Moore-Penrose, 16
- Résidu, 2, 6, 69, 73, 119, 128, 139
- Reconfiguration, 2
- Redondance analytique, 119
- Redondance matérielle, 119
- Rejet d'ambiguïté, 7
- Robustesse, 125
- SAC, 5, 57
- Sous-espaces, 9
- Span, 131, 137
- SPE, 133
- Statistique de Hotteling  $T^2$ , 133
- Surveillance, 2
- Système, 2
- Système linéaire, 5
- Système LTI, 17
- Temps de séjour, 66
- Test de khi-deux, 70, 128, 140



## Bibliographie

- [1] IEEE 1988. Ieee standard dictionary of electrical and electronics terms, 4th edition. *The Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York*, 1988.
- [2] AFCET. *Bureau of Labor Statistics. Occupational injuries and illnesses in the unites state by industry*. Washigton, DC : Gouvernement Printing Office, 1998.
- [3] AFNOR. A maintenance - concepts et définitions des activités de maintenance. Dans *Norme NF X 60-010*, page 28. Association Française de Normalisation, 1994.
- [4] R. BABUSKA et H. B. VERBRUGGEN. Identification of composite linear models via fuzzy clustering. pages 1593–1606. European Control Conference, 1995. Rome, Italy.
- [5] M. BASSEVILLE et I. NIKIFOROV. *Detection of Abrupt Changes -Theory and Applications*. Prentice Hall, N.J., 1993.
- [6] G. BASTIN et V. WERTZ. Identification of industrial plants : the prediction error method. *ATB Metallurgie*, 26(3) :85–94, 1986.
- [7] A. BEMPORAD, J. ROLL, et Ljung L.. Identification of hybrid systems via mixed-integer programming. 40th IEEE Conference on Decision and Control 2001, December 2001. Orlando, Florida.
- [8] S. BINGULAC et N. F. AL-MUTHAIRI. Mimo d-t system identification using subspace based methods. pages 296–300. International Conference on Industrial Technology(ICIT-20000), January 2000. Goa, India.
- [9] A. BOUKHRIS, G. MOUROT, et J. RAGOT. Non-linear dynamic system identification : a multiple model approach. *International Journal of Control*, 72(7/8) :591–604, 1999.
- [10] L. BRANICKY. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(4) :475–482, 1998.
- [11] L. BREIMAN. Hinging hyperplanes for regression, classification, and function approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39(3) :999–1013, 1993.
- [12] J. CAO et J. GERTLER. The effect of insufficient excitation in pca estimation. American Control Conference, May 2002. Anchorage, Alaska, USA.
- [13] J. N. CHATAIN. *Diagnostic par système expert, Traité des Nouvelles Technologies, série Diagnostic et Maintenance*. Hermès, Paris, 1993.
- [14] J. CHEN, R. J. PATTON, et H. ZHANG. Design of robust structured and directional residuals for fault isolation via unknown input observers. pages 348–353. European Control Conference, 1995. Rome, Italy.
- [15] C. T. CHOU et M. VERHAEGEN. Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models. *Automatica*, 33(10) :1857–1869, 1997.
- [16] A. Y. CHOW et A. WILLSKY. Analytically redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 7(29) :603–614, 1984.

- [17] N. L. C. CHUI et J. M. MACIEJOWSKI. Subspace identification—a markov parameter approach. Rapport technique, CUED/F-INFENG/TR.337, 1998.
- [18] A. CLAVEL. *Modélisation et identification paramétrique de systèmes hystérétiques. Application à la suspension des véhicules routiers*. Thèse de doctorat, université de Rennes 1, 2002.
- [19] National Safety COUNCIL. Injury facts. Injury facts 1999 Edition, 1999. Chicago : National Safety Council.
- [20] B. DE MOOR. *Mathematical concepts and techniques for modeling of static and dynamic systems*. PhD thesis, Departement of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1988.
- [21] R. S. DUNIA, J. QIN, T. F. EDGAR, et T. J. MCAVOY. Use of principal components analysis for sensor fault analysis. *Computers and Chemical Engineering*, 20(971) :713–718, 1996.
- [22] G. FERRARI-TRECATE, M. MUSELLI, D. LIBERATI, et M. MORARI. A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica*, 39(2) :205–217, 2003.
- [23] K. GASSO. *Identification de systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèle*. Thèse de l'INPL, France, 2000.
- [24] K. GASSO, G. MOUROT, et J. RAGOT. Structure identification in multiple model representation : elimination and merging of local models. 40th IEEE Conference on Decision and Control, December 2001. Orlando, Florida USA.
- [25] J. GERTLER. Fault detection and isolation using parity relations. *Control Engineering Practice*, 5(5) :653–661, 1997.
- [26] J. GERTLER. *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [27] J. GERTLER et M. KUNWER. Optimal residual decoupling for robust fault diagnosis. *International Journal of Control*, 61(2) :395–421, 1995.
- [28] D. X. L. GUO et T. JEINSCH. A characterization of parity space and its application to robust fault detection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2) :337–343, 1999.
- [29] F. GUSTAFSSON. Stochastic fault diagnosability in parity spaces. Invited paper to IFAC World Congress, 2002. Barcelona, Spain.
- [30] A. HAGENBLAD, F. GUSTAFSSON, et I. KLEIN. A comparison of two methods for stochastic fault detection : the parity space approach and principal component analysis. 13th IFAC Symposium on System Identification, December 2003. Rotterdam, The Netherlands.
- [31] Y. IWASAKI et H. A. SIMON. Causality and model abstraction. *Artificial Intelligence*, (67) :143–194, 1994.
- [32] M. JANSSON et B. WAHLBERG. On consistency of subspace based system identification methods. pages 181–186. 13th IFAC World Congress, July 1996. San Francisco, USA.
- [33] M. JANSSON et B. WAHLBERG. On consistency of subspace methods for system identification. *Automatica*, 34(12) :1507–1519, December 1998.
- [34] T. A. JOHANSEN et A. B. FOSS. Constructing narmax using armax. *International Journal of Control*, 58(5) :1125–1153, 1993.
- [35] M. JOHANSSON et A. RANTZER. Computation of piece-wise quadratic lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(3) :555–559, 1998.
- [36] C. JUANG. *Applied system identification*. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.

- 
- [37] P. JULIÁN, M. JORDÁN, et A. DESAGES. Canonical piecewise-linear approximation of smooth functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 45(5) :567–571, 1998.
- [38] T. KNUDSEN. Consistency analysis of subspace identification methods based on a linear regression approach. *Automatica*, 37(1) :81–89, 2001.
- [39] T. KOSKELA, M. VARSTA, J. HEIKKONEN, et K. KASKI. Recurrent som with local linear models in time series prediction. pages 167–172. 6th European Symposium on Artificial Neural Networks, 1998.
- [40] J. KRESTA, J. F. MACGREGOR, et T. E. MARLIN. Multivariate statistical monitoring of process operating performance. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 69(1) :35–47, 1991.
- [41] S. Y. KUNG. A new identification and model reduction algorithm via singular value decompositions. pages 705–714. Twelfth Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, 1978.
- [42] S. L. LACY et D. S. BERNSTEIN. Subspace identification for nonlinear systems that are linear in unmeasured states. pages 3518–3523. 40th IEEE Conference on Decision and control, December 2001. Orlando, FLorida, USA.
- [43] W. E. LARIMORE. Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control. pages 596–604. 29th IEEE Conference on Decision and control, 1990. Hawaii, USA.
- [44] W. E. LARIMORE. The optimality of canonical variate identification by example. volume 2, pages 151–156. SYSID'94, July 1994. Copenhagen, Denmark.
- [45] S. LEONHARDT et M. AYOUBI. Methods of fault diagnosis. *Control Engineering Practice*, 5(5) :683–692, 1999.
- [46] W. LI et S. J. QIN. Consistent dynamic pca based on errors-in-variables subspace identification. *Journal of Process Control*, 11(6) :661–678, 2001.
- [47] L. LJUNG. *System identification : theory for the users*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1999.
- [48] J. LUNZE. Diagnosis of quantized systems based on timed discrete-event model. *Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans*, 30(3) :322–335, 2000.
- [49] H. OKU. Application of a recursive subspace identification algorithm to change detection. 13th IFAC Symposium on System Identification, 2003. Rotterdam, The Netherlands.
- [50] H. OKU et H. KIMURA. Recursive 4sid algorithm using gradient type subspace tracking. *Automatica*, 38(6) :1035–1043, 2002.
- [51] H. OKU, G. NIJSSE, M. VERHAEGEN, et Verdult V.. Change detection in the dynamics with recursive subspace identification. 40th IEEE Conference on Decision and Control, December 2001. Orlando, Florida USA.
- [52] R. J. PATTON. robust model-based fault diagnosis : the state of the art. pages 1–24. IFAC SAFEPROCESS '94, June 1994. Helsinki, Finland.
- [53] K. M. PEKPE, K. GASSO, G. MOUROT, et J. RAGOT. Identification par la méthode des sous-espaces : utilisation des paramètres de markov. pages 417–422. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2002, juillet 2002. Nantes, France.
- [54] K. M. PEKPE, K. GASSO, G. MOUROT, et J. RAGOT. Identification d'une représentation multi-modèle des systèmes dynamiques non-linéaires par la méthode des sous-espaces. pages 417–422. Journées Doctorales de l'Automatique, JDA'03, Juin 2003. Valenciennes, France.

- [55] K. M. PEKPE, K. GASSO, G. MOUROT, et J. RAGOT. Subspace identification of switching model. 13th IFAC Symposium on System Identification, August 2003. Rotterdam, The Netherlands.
- [56] K. M. PEKPE, K. GASSO, G. MOUROT, et J. RAGOT. Identification of switching systems using change detection technique in the subspace framework. 43rd IEEE Conference on Decision and Control, December 2004. Atlantis, Bahamas.
- [57] K. M. PEKPE, G. MOUROT, et J. RAGOT. Subspace method for sensor fault detection and isolation-application to grinding circuit monitoring. 11th IFAC Symposium on automation in Mining, Mineral and Metal processing, September 2004. Nancy, France.
- [58] P. PUCAR et J. SJÖBERG. On the hinge-finding algorithm for hinging hyperplanes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(3) :1310–1319, 1998.
- [59] J. QIN, W. LIN, et L. LJUNG. A novel subspace identification approach with parsimonious parametrizations. Rapport technique, University of Texas at Austin, 2004. TWMCC-2004-06.
- [60] J. QIN et L. LJUNG. Parallel qr implementation of subspace identification with parsimonious models. 13th IFAC Symposium on System Identification, August 2003. Rotterdam, The Netherlands.
- [61] J. RAGOT, D. MAQUIN, et K. M. PEPKE. Signal segmentation and data classification. 10th International Workshop on Systems, Signals and Image processing, IWSSIP'03, September 2003. Prague, Czech Republic.
- [62] J. ROLL. *Local and Piecewise Affine Approaches to System Identification*. PhD. Thesis, Linköping University, Division of Automatic Control, Sweden, 2003.
- [63] M. ÖSTRING, S. GUNNARSSON, et M. NORRLÖF. Closed loop identification of the physical parameters of an industrial robot authors. 32nd International Symposium on Robotics, 2001.
- [64] P. VAN OVERSCHEE et B. DE MOOR. N4sid : Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica, Special Issue on Statistical Signal Processing and control*, 30(1) :75–93, 1994.
- [65] P. VAN OVERSCHEE et B. DE MOOR. A unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Automatica*, 31(12) :1853–1864, 1995.
- [66] P. VAN OVERSCHEE et B. DE MOOR. Choice of state-space basis in combined deterministic-stochastic subspace identification. *Automatica*, 31(12) :1877–1883, 1996.
- [67] P. VAN OVERSCHEE et B. DE MOOR. *Subspace identification for linear systems Theory Implementation Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [68] V. VENKATASUBRAMANIAN, R. RENGASWAMY, K. YIN, et S. N. KAVURI. Review of process fault diagnosis - parts i, ii, iii. *Computers and Chemical Engineering*, 27(3) :293–346, 2003.
- [69] V. VERDULT. *Nonlinear System Identification : A State-Space Approach*. University of Twente, Faculty of Applied Physics, (Enschede, The Netherlands) Twente University Press, 2002.
- [70] V. VERDULT et M. VERHAEGEN. Identification of a weighted combination of multivariable state space systems from input and output data. pages 4760–4765. 40th IEEE Conference on Decision and Control, December 2001. Orlando, Florida.
- [71] V. VERDULT, M. VERHAEGEN, et C. T. CHOU. Identification of mimo bilinear state space models using separable least squares. pages 838–842. American Control Conference, June 1999. San Diego, California.

- 
- [72] M. VERHAEGEN. Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica (Special Issue on Statistical Signal Processing and Control)*, 30(1) :61–74, 1994.
- [73] M. VERHAEGEN et E. DERPRETTERE. A fast recursive mimo state space model identification algorithm. pages 1349–1354. 30th IEEE Conference on Decision and Control, december 1991. Brighton, England.
- [74] M. VERHAEGEN et P. DEWILDE. Subspace model identification, part i : the output-error state space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*, 56 :1187–1210, 1992.
- [75] W. E. VESELY, F. F. GOLDBERG, et N. H. ROBERTS. *Fault tree Handbook*. U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, USA, 1981.
- [76] M. VIBERG, B. OTTERSTEN, B. WAHLBERG, et L. LJUNG. Performance of subspace based state space system identification methods. volume 7, pages 369–372. 12th IFAC World Congress, July 1993. Sydney, Australia.
- [77] M. VIBERG, B. OTTERSTEN, B. WAHLBERG, et L. LJUNG. Subspace methods in system identification. volume 1, pages 1–12. 10th IFAC Symposium on System Identification, July 1994. Copenhagen, Denmark.
- [78] M. VIBERG, B. WAHLBERG, et B. OTTERSTEN. Analysis of state space system identification methods based on instrumental variables and subspace fitting. *Automatica*, 33(9) :1603–1616, 1997.
- [79] J. WANG et S. J. QIN. A new subspace identification approach based on principal component analysis. *Journal of Process Control*, 12(8) :841–855, 2002.
- [80] H. ZHENGANG, L. WEIHUA, et S. L. SHAH. Robust fault diagnosis in the presence of process uncertainties. 15th International Foundation of Automatic Control (IFAC) World Congress, July 2002. Barcelona, Spain.
- [81] G. ZWINGELSTEIN. *Diagnostic des défaillances - Théorie et pratique pour les systèmes industriels, Traité des Nouvelles Technologies, série Diagnostic et Maintenance*. Hermès, Paris, 1995.