



HAL
open science

Critères de finitude homologique pour la non convergence des systèmes de réécriture de termes

Philippe Malbos

► **To cite this version:**

Philippe Malbos. Critères de finitude homologique pour la non convergence des systèmes de réécriture de termes. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. Français. NNT: . tel-00008784

HAL Id: tel-00008784

<https://theses.hal.science/tel-00008784>

Submitted on 15 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
-SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC-

THÈSE

présentée à l'Université Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc,
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité :
MATHÉMATIQUES

École doctorale :
INFORMATIONS, STRUCTURES ET SYSTÈMES

TITRE :

CRITÈRES DE FINITUDE HOMOLOGIQUE POUR LA NON CONVERGENCE DES SYSTÈMES DE RÉÉCRITURE DE TERMES

par

Philippe MALBOS

Soutenue le 28 janvier 2004 devant le jury composé de :

M. Pierre-Louis CURIEN	Université Paris 7
M. Philippe ELBAZ-VINCENT	Université Montpellier II
M. Eric GOUBAULT	CEA, Saclay
M. Daniel GUIN	Université Montpellier II
M. Yves LAFONT	Université de la Méditerranée
M. Timothy PORTER	University of Wales, Bangor

Membre invité : M. Jean SALLANTIN LIRMM, Montpellier

RAPPORTEURS

M. Eric GOUBAULT	CEA, Saclay
M. Yves LAFONT	Université de la Méditerranée
M. Timothy PORTER	University of Wales, Bangor

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mon directeur de thèse Daniel Guin, d'une part pour sa confiance et son aide, d'autre part pour la liberté et l'autonomie qu'il m'a accordé et sans lesquelles ce travail n'aurait pas pu être possible.

Je tiens à remercier Messieurs Philippe Elbaz-Vincent et Jean Sallantin pour les nombreuses discussions et conseils m'ayant permis d'avoir plus d'un regard sur plus d'une idée.

Je remercie Messieurs Eric Goubault, Yves Lafont et Timothy Porter pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je suis reconnaissant à Monsieur Pierre-Louis Curien de me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je remercie également Yves Guiraud avec lequel j'ai réalisé mes premiers pas en réécriture. Je garde les meilleurs souvenirs de cette période d'apprentissage.

Enfin, je tiens à remercier tous les membres de l'I3M et du LIRMM qui ont contribué et participé au groupe CATIA sans lequel ce travail n'aurait pas pu être possible.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Homologie des systèmes de calcul	9
1.1.1	La réécriture	9
1.1.2	Systèmes convergents	10
1.1.3	Espace des réductions	11
1.1.4	Invariants homologiques	12
1.1.5	Les critères de Squier	13
1.1.6	Le cas de la réécriture de termes	14
1.1.7	Applications	14
1.2	Développement et résultats principaux	15
1.3	Organisation du document et conventions	19
2	Réécriture sur les objets en monoïde	21
2.1	Introduction	21
2.1.1	La réécriture de mots	21
2.1.2	La réécriture de termes	22
2.2	Systèmes abstraits de réécriture	23
2.3	Réécriture sur les objets en monoïde	26
2.3.1	Objets en monoïde	26
2.3.2	Systèmes de réécriture dans une catégorie monoïdale	28
2.3.3	Le problème de mots dans un objet en monoïde	29
2.3.4	Paires critiques	29
2.3.5	Chaînes d'Anick pour un système de réécriture dans \mathbb{V}	30
2.4	Exemples	32
2.4.1	Systèmes de réécriture de mots	32
2.4.2	Réécriture sur une monade finitaire	33
2.5	Modules sur un \mathbb{V} -monoïde	35
2.5.1	Modules de Anick	35
3	Décidabilité des monoïdes et homologie	37
3.1	Une procédure de décision pour les monoïdes	37
3.2	Un critère de finitude homologique	39
3.2.1	Critères de finitude PF_*	40

3.2.2	La résolution de Squier	40
3.2.3	Contre-exemples	44
3.3	Les résolutions ordonnées	45
3.4	D'autres critères de finitude	46
4	Homologie des petites catégories et réécriture	49
4.1	Introduction	49
4.2	Catégories de foncteurs	50
4.2.1	Modules libres	50
4.2.2	Modules sur une catégorie additive	51
4.2.3	Produit tensoriel	51
4.2.4	Extensions de Kan	52
4.3	Catégories de type PF_*	52
4.3.1	Modules de type fini	52
4.3.2	Dérivations	53
4.4	Homologie des petites catégories	55
4.4.1	Système naturel de groupes abéliens	56
4.4.2	Homologie à coefficients dans les systèmes naturels	57
4.4.3	Homologie à coefficients dans les bimodules	59
4.5	Homologie des PROs	60
4.5.1	Système naturel monoïdal	61
4.5.2	Réduction du complexe standard	61
4.6	La résolution à quatre termes de Mitchell	63
4.6.1	La résolution de Lyndon-Mitchell	63
4.6.2	Application aux présentations convergentes	64
4.7	Calcul de l'homologie	69
4.8	La résolution de Kobayashi pour les petites catégories	70
4.8.1	Chaînes de Anick	71
5	Critères de finitude homologique en réécriture de termes	79
5.1	Introduction	79
5.2	Théories algébriques	82
5.2.1	Théories algébriques finitaires	82
5.2.2	Notations	82
5.2.3	Algèbres sur une théorie algébrique	83
5.3	Interprétation catégorique de la réécriture de termes	86
5.3.1	Théories libres	86
5.3.2	Théories présentées par générateurs et relations	87
5.3.3	Interprétation catégorique de la réécriture de termes	90
5.3.4	Paires critiques	91
5.3.5	Syntaxe 2-dimensionnelle	93
5.4	Homologie des théories algébriques	94
5.4.1	Des anneaux aux théories	95
5.4.2	L'homologie de MacLane des anneaux	96

5.4.3	Bimodules non additif sur une théorie algébrique	97
5.4.4	Homologie des théories à coefficients dans les bimodules non additifs	98
5.4.5	Interprétation en terme d'homologie de petites catégories	99
5.4.6	Homologie à coefficients dans les systèmes naturels cartésiens	100
5.4.7	Dérivations	101
5.5	Résolutions pour les théories équationnelles convergentes	102
5.5.1	La résolution à quatre termes	102
5.5.2	La résolution de Kobayashi	105
6	Exemple de calcul	107
7	Conclusions	111

Chapitre 1

Introduction

Les processus de calculs sont généralement étudiés sous leurs aspects logiques ou algorithmiques. Nous abordons, dans ce travail, une analyse algébrique de ces processus par la construction d'invariants homologiques pour la confluence.

L'apport principal de ce travail est la construction d'une condition de finitude homologique pour l'existence de présentations convergentes de type fini, par réécriture de termes de théories équationnelles du premier ordre. Nous montrons qu'une théorie équationnelle du premier ordre, admettant une présentation convergente et de type fini, est sémantiquement décrite par une théorie algébrique de type bi-PF $_{\infty}$.

Il s'agit d'un travail à l'interface de la réécriture et de l'algèbre homologique. Il est basé sur des méthodes initiées par Squier et Anick en réécriture de mots. D'une part ce travail contribue à l'étude des mécanismes de confluence en réécriture par la construction de conditions nécessaires de finitude, d'autre part il développe des techniques effectives permettant de construire de petites résolutions libres pour des théories équationnelles convergentes, constituant ainsi une méthode de calcul des groupes d'homologies de ces théories.

1.1 Homologie des systèmes de calcul

1.1.1 La réécriture

La compréhension algébrique des mécanismes de calcul nécessite un modèle mathématique les décrivant relativement au contexte dans lequel ils s'exécutent. La réécriture, introduite initialement pour l'étude combinatoire des relations d'équivalence, constitue un des plus anciens modèles abstraits du calcul. Un *système de réécriture* consiste en une classe d'objets et en un ensemble de couples de ces objets, formant un ensemble de transformations. Deux objets sont dits équivalents, s'ils sont joignables par une suite de ces transformations, [New42].

Notre étude porte sur les processus de réécriture dans les *théories équationnelles*. Elles constituent la classe des langages du premier ordre, dont le seul symbole prédicat est

l'égalité. Les équations définissant une théorie équationnelle sont remplacées par des transformations locales et orientées, appelées *règles de réécriture*. L'application successive de ces règles locales décrit un calcul dans la théorie.

Le modèle de la réécriture permet d'exprimer les principes fondamentaux régissant l'organisation des calculs. La réécriture permet ainsi une classification des théories selon les propriétés combinatoires sur les équations les définissant. La réécriture permet, notamment, d'identifier une sous-classe de la classe des théories décidables. L'objectif de ce travail est de caractériser algébriquement cette sous-classe.

1.1.2 Systèmes convergents

Les règles de réécriture, définies localement, doivent garantir un comportement global cohérent des calculs. Cette cohérence est essentielle pour les langages intervenant en programmation ou en logique. La *noëthérianité* et la *confluence* sont des principes fondamentaux de réécriture caractérisant ces propriétés de cohérence. Un système de réécriture est dit *noëthérien*, si tous les calculs qu'il définit terminent. Un système est dit *confluent*, si tous les calculs possibles sur un même terme, convergent vers un même autre terme. Nous dirons qu'un système est *convergent* s'il est à la fois *noëthérien* et *confluent*. Dans un système de réécriture convergent, tout terme se réduit en une unique *forme normale*.

C'est la raison pour laquelle l'égalité, dans une théorie équationnelle, est décidable s'il existe une présentation convergente et de type fini par générateurs et relations. Étant donnés deux termes de la théorie, l'algorithme des formes normales consiste à les réduire à leur unique forme normale respective. L'équivalence des deux termes est alors la conséquence de l'égalité des deux formes normales. De plus, le calcul de la forme normale d'un terme est décidable sous l'hypothèse de finitude de la présentation.

La réécriture constitue-t-elle une méthode universelle pour la décidabilité des théories équationnelles? En d'autres termes :

Question. *Étant donnée une présentation non convergente d'une théorie équationnelle décidable, existe-t-il une présentation convergente et de type fini équivalente ?*

Il est bien connu qu'il existe des théories décidables de type fini pour lesquelles il n'existe pas de procédure de décision par réécriture. C'est, par exemple, le cas pour les théories admettant un axiome de commutativité. Cependant, étant donné un *système de réécriture de termes*, comment évaluer l'obstruction à l'existence d'un système de réécriture de termes convergent et de type fini équivalent ?

L'existence d'une présentation d'une théorie équationnelle, par un système de réécriture de termes convergent et de type fini, est un problème indécidable en général. Knuth et Bendix, [Knu70], ont montré que tout système de réécriture de mots est équivalent à un système de réécriture de mots convergent. Cependant, l'algorithme de complétion, rajoutant les règles nécessaires pour assurer la confluence, peut ne pas terminer car le nombre de règles supplémentaires nécessaires peut être infini. Plus précisément, les propriétés de *noëthérianité* et de *confluence* pour les systèmes de type fini sont en général indépendamment indécidables. La propriété de confluence est décidable pour les systèmes *noëthériens* de type fini.

Enfin, l'existence d'un système de réécriture de termes convergent et de type fini n'est pas un invariant de structure. Une théorie équationnelle peut ne pas admettre de présentation convergente de type fini sur un ensemble fixé de générateurs. Mais par ajout de générateurs, on peut obtenir une présentation convergente de type fini, [Jan85, Kap85]. Par contre, la décidabilité d'une théorie équationnelle apparaît comme une propriété intrinsèque à la théorie et indépendante d'une présentation donnée. Ce constat est à l'origine de la méthode que nous allons employer.

1.1.3 Espace des réductions

L'idée directrice, que nous allons suivre, consiste à construire un critère pour la convergence, indépendamment d'une présentation donnée. Ce critère est construit à partir d'un analogue équationnel du graphe des réductions.

A tout système de réécriture, on associe son graphe des réductions. C'est le graphe dont les sommets sont en correspondance biunivoque avec les termes et dont les flèches sont données par les réductions élémentaires. Les chemins de ce graphe sont les chemins de réduction. Les propriétés de noëthérianité et de confluence s'expriment topologiquement sur ce graphe. Si le système est noëthérien, alors il n'existe pas de chemin de longueur infinie. Si le système est confluent, alors il existe une relation d'équivalence, définie sur l'ensemble des chemins parallèles, telle que tous les chemins du graphe de même source s'identifient par cette relation. Si le système est convergent et de type fini, alors cette relation d'équivalence est engendrée par un nombre fini de chemins parallèles. La confluence apparaît, de cette façon, comme une propriété de «finitude topologique» sur le graphe.

Caractériser l'existence d'une présentation convergente de type fini, pour une théorie équationnelle indépendamment d'une présentation donnée, nécessite de considérer un analogue équationnel du graphe des réductions, construit à partir de la théorie elle-même.

Nous allons illustrer la suite de cette partie introductive avec le cas de la réécriture dans un monoïde. Mais comme nous le verrons plus loin, la démarche est la même pour la réécriture dans une théorie équationnelle. Considérons un monoïde présenté par générateurs et relations. On construit le graphe non orienté, dont les sommets sont tous les mots du monoïde libre engendré par l'ensemble des générateurs et dont les arrêtes sont données par la clôture congruente des relations, c'est-à-dire toutes les équations possibles dans le monoïde.

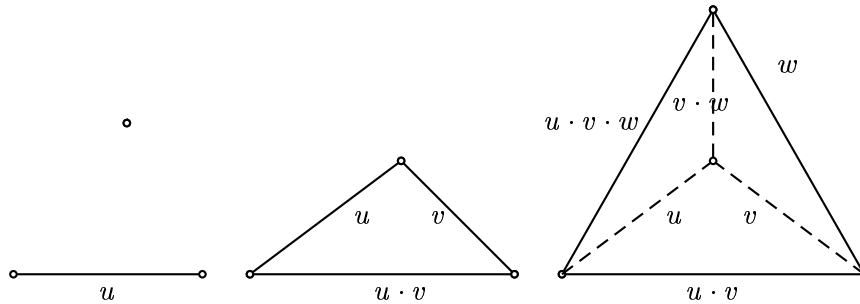
Les couples d'équations, portant sur un même mot, sont représentés par les zones de branchements de ce graphe. Les sommets du graphe correspondent aux 1-cellules et les arrêtes aux 2-cellules de l'espace classifiant du monoïde. La procédure de complétion consiste à construire, pour tout couple de 2-cellules reliées par une 1-cellule, une 3-cellule dont elles forment une partie du bord. Si le monoïde possède une présentation convergente et de type fini, ces 3-cellules sont construites à partir d'un nombre fini de 3-cellules élémentaires, correspondantes aux *paires critiques*.

1.1.4 Invariants homologiques

Nous caractérisons ce processus de complétion topologique par un invariant algébrique, appelé *l'homologie du monoïde*. Les invariants algébriques, introduits initialement en topologie, permettent de caractériser une structure algébrique, indépendamment de sa présentation, avec des méthodes de topologie combinatoire. Ici, l'idée est de capturer, dans l'homologie du monoïde, la propriété de convergence des relations du monoïde.

L'homologie des monoïdes peut être introduite de différentes façons. Nous ne donnons ici que quelques idées sur une construction simpliciale. On associe à un monoïde \mathbf{M} , un espace topologique $B\mathbf{M}$, appelé *classifiant* de \mathbf{M} , construit inductivement sur la longueur des mots de \mathbf{M} . Il ne contient qu'une seule 0-cellule, les 1-cellules sont en correspondance biunivoque avec les mots de \mathbf{M} et ont pour même bord la 0-cellule. Les 2-cellules correspondent aux équations dans le monoïde \mathbf{M} de la forme $u \cdot v = w$, où u, v et w sont trois mots de \mathbf{M} . Les 3-cellules correspondent aux équations $w' = u \cdot v \cdot w$ mettant en jeu quatre mots de \mathbf{M} et ainsi de suite pour les dimensions supérieures. Si on désigne respectivement par $[u]$, $[u, v]$ et $[u, v, w]$ de telles cellules, leur bord est une combinaison linéaire alternée des cellules de dimensions inférieures :

$$\begin{aligned}
 [u, v] &\stackrel{\partial}{\mapsto} [u] - [u \cdot v] + [v] \\
 [u, v, w] &\stackrel{\partial}{\mapsto} [u, v] - [u \cdot v, w] + [u, v \cdot w] - [v, w]
 \end{aligned}$$



Attention, dans ce schéma il faut considérer qu'il n'y a qu'une seule 0-cellule. L'homologie du monoïde \mathbf{M} , notée $H_*(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$, est définie comme l'homologie singulière de l'espace $B\mathbf{M}$.

Les équations dans le monoïde correspondent aux 2-cellules, les chevauchements de ces équations correspondent aux 3-cellules et les n -chevauchements aux n -cellules de cet espace. Les groupes d'homologie $H_*(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ vont permettre de caractériser combinatoirement des propriétés topologiques sur l'espace ainsi construit. Nous en donnons une interprétation pour les trois premiers degrés. Le groupe $H_1(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est le quotient du groupe abélien librement engendré par les symboles $[u]$, où u est un mot de \mathbf{M} , par les relations $[u] + [v] = [u \cdot v]$, pour tous $u, v \in \mathbf{M}$. Si \mathbf{M} possède un nombre fini de générateurs, le groupe

$H_1(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est de type fini. Autrement dit, l'espace BM peut-être construit en n'utilisant qu'un nombre fini de 1-cellules correspondantes aux générateurs.

Le groupe $H_2(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est le quotient du groupe abélien librement engendré par les symboles $[u, v]$, où u et v sont des mots de \mathbf{M} , vérifiant $[u] + [v] = [u \cdot v]$, par l'ensemble des relations :

$$[u, v] - [u \cdot v, w] + [u, v \cdot w] - [v, w] = 0, \quad u, v, w \in \mathbf{M}. \quad (1.1)$$

De la même façon, s'il n'y a qu'un nombre fini de relations, alors le groupe $H_2(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est de type fini et l'espace BM peut être construit à partir d'un nombre fini de 2-cellules correspondantes aux relations.

Qu'en est-t-il des dimensions supérieures? Le groupe $H_3(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est le quotient du groupe abélien librement engendré par les symboles $[u, v, w]$, satisfaisant la condition de cycle (1.1), par les relations $[t, u, v] - [t \cdot u, v, w] + [t, u \cdot v, w] - [t, u, v \cdot w] + [u, v, w] = 0$, pour tous mots t, u, v, w dans \mathbf{M} .

D'après la condition de cycle (1.1), la finitude de la base du groupe $H_3(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ dépend des chevauchements possibles entre les relations définissant le monoïde. Les 3-cellules minimales de l'espace BM correspondent aux paires critiques. Si les relations définissant \mathbf{M} n'engendrent qu'un nombre fini de paires critiques, alors toutes les 3-cellules peuvent être engendrées par un nombre fini de 3-cellules minimales et par suite $H_3(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est de type fini. C'est le cas si la présentation est convergente et de type fini. Le premier résultat mettant ce phénomène en évidence a été montré par Squier, [Squ87a], constituant ainsi la première démarche appliquant des techniques d'algèbre homologique à l'étude des mécanismes de confluence en réécriture.

1.1.5 Les critères de Squier

Dans ses travaux sur l'homologie des groupes de Artin, Squier, [Squ94a], développa une méthode combinatoire de construction de petites résolutions libres pour des monoïdes présentés par des systèmes de réécriture convergents. Cette méthode est basée sur le calcul différentiel libre de Fox. L'homotopie contractante de cette résolution reflète le défaut de convergence du système de réécriture. La construction de cette homotopie est analogue à la procédure de complétion de Knuth-Bendix. Si le système de réécriture est de type fini, alors cette résolution de longueur 3 est de type fini. On dit alors que le monoïde est de *type* PF_3 . Une conséquence immédiate est que le troisième groupe d'homologie du monoïde $H_3(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien de type fini. En construisant un monoïde décidable de type fini dont le troisième groupe d'homologie n'est pas de type fini, Squier répond négativement à la question de Jantzen, [Jan85], :

Question. *Un monoïde décidable de type fini possède-t-il une présentation convergente de type fini ?*

Depuis ces premiers travaux sur l'homologie des systèmes convergents, des généralisations ont été obtenues, mais toujours pour des systèmes de réécriture de mots, [Gro90, Kob90, Bro92, Coh97]. Il s'agit essentiellement de constructions qui étendent la méthode inductive de Squier aux n -chevauchements équivoques, montrant que les monoïdes, admettant une présentation convergente et de type fini satisfont la propriété PF_∞ .

Les critères homologiques PF_* sont nécessaires mais pas suffisants pour l'existence d'une présentation convergente et de type fini pour les monoïdes de type fini. C'est la raison pour laquelle d'autres critères de finitude homotopique, raffinant les critères homologiques, ont été introduits [Squ94b, Laf95, Wan00, Kob03]. Nous présentons un bref état de l'art de ces généralisations dans le chapitre 3.

Le critère de Squier a été étendu pour les systèmes de réécriture d'algèbres associatives par Anick [Ani86, Ani87] - il s'agit de travaux publiés avant ceux de Squier mais les publications de Squier sont posthumes et les travaux antérieurs à ceux d'Anick. Enfin, des généralisations des constructions de Brown, [Bro92], et de Kobayashi, [Kob90], à la réécriture sur des petites catégories ont été réalisées respectivement par Citterio, [Cit01], et Morace, [Mor95].

1.1.6 Le cas de la réécriture de termes

La généralisation de ces critères de finitude homologique à des systèmes algébriques mettant en jeu des opérations d'arité arbitraires, est restée un problème ouvert. Ce problème est posé dans [Squ94b, Laf91, Laf03] et le travail qui suit propose une solution. Nous montrons que les théories équationnelles du premier ordre, admettant une présentation par un système de réécriture de termes convergent et de type fini, satisfont le critère $bi-PF_\infty$.

Nous abordons cette généralisation par la voie de la sémantique fonctorielle des théories équationnelles de Lawvere, [Law63]. Nous interprétons un système de réécriture de termes du premier ordre par une présentation orientée d'une théorie algébrique finitaire au sens de Lawvere. Le cadre défini par Burroni dans [Bur93] est plus général que le point de vue que nous adoptons. Il interprète un système de réécriture de termes par une présentation orientée d'un PRO, i.e., une catégorie monoïdale stricte sur \mathbb{N} . Le but étant d'éliminer la propriété universelle des produits finis de la théorie algébrique. Cette approche est plus adaptée à l'étude des mécanismes de confluence tenant compte de la gestion des variables. Cependant, l'homologie des PROs, vus comme 2-catégories, reste encore mal comprise. La construction d'un nerf pour une ∞ -catégorie, proposée par Burroni dans [Bur94], voir aussi [Str87], et la résolution par polygraphes de ∞ -catégories de Métayer, [Met03], nous laissent espérer des développements possibles dans cette direction.

Une théorie algébrique s'interprète comme une monade finitaire sur la catégorie des ensembles. Nous pensons que les critères de finitude homologique de convergence restent valables pour toute forme de réécriture de nature associative et unitaire - c'est-à-dire les systèmes de réécriture sur des structures pouvant se réaliser comme objets en monoïde dans une catégorie monoïdale.

1.1.7 Applications

L'intérêt des systèmes de réécriture de termes est qu'ils constituent un paradigme de calcul suffisant pour constituer la sémantique algébrique des langages de programmation récursifs et des logiques du premier ordre.

En programmation, qui n'est pas du premier ordre en général, il apparaît de nombreux systèmes de réécriture du premier ordre permettant d'étudier les propriétés du calcul. Par exemple, l'étude du λ -calcul fait apparaître des systèmes de réécriture du premier ordre, notamment dédiés à la compréhension des opérations de substitutions, tels que le $\lambda\sigma$ -calcul, [Aba91]. Nous espérons que les critères de finitude homologique en réécriture de termes pourront avoir des applications dans cette direction.

Les critères de finitude homologique pour les systèmes de réécriture de PROs pourraient permettre l'utilisation des techniques homologiques pour les problèmes d'atteignabilité de configurations dans les réseaux d'automates, [Gru02, Gru01]. En effet, les PROs permettent d'interpréter sémantiquement des contextes de réécriture très variés, comme la réécriture sur les circuits booléens, les réseaux d'automates cellulaires ou encore les réseaux de Petri. Par exemple, un réseau d'automates cellulaires peut être décrit par un PRO, et l'ensemble des règles d'évolution non déterministe correspond à un système de réécriture sur ce PRO.

Comme le met en évidence Goubault dans sa thèse, la confluence en réécriture s'interprète comme un processus de réductions parallèles et rentre dans le cadre de l'étude des mécanismes de concurrence, [Gou95]. Notre approche vise à construire des conditions de finitude homologique pour les mécanismes de confluence en terme de foncteurs dérivés. Elle apparaît ainsi complémentaire à celle proposée par Goubault, [Gou95], en terme d'homologie cubique et par Goubault-Gaucher, [Gau03], en terme d'invariance de dihomotopie.

Nous espérons ainsi que les méthodes homologiques de Squier, dans le contexte de la réécriture de termes, auront un champ d'application plus important que dans le cas de la réécriture de mots.

1.2 Développement et résultats principaux

Nous présentons ici les étapes principales nous ayant permis d'obtenir notre résultat principal :

Théorème. *Une théorie équationnelle du premier ordre, admettant une présentation convergente et de type fini par un système de réécriture de termes, est sémantiquement décrite par une théorie algébrique de type $bi\text{-PF}_\infty$ sur \mathbb{Z} .*

Une théorie équationnelle du premier ordre \approx_E est sémantiquement décrite par une théorie algébrique au sens de Lawvere. C'est la donnée d'une petite catégorie \mathbb{A} , munie de produits finis, dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes sont engendrés par la signature de \approx_E et satisfont les relations de \approx_E . La théorie \approx_E se réalise syntaxiquement comme une algèbre sur \mathbb{A} , (cf. 5.2.3). La propriété de convergence, exprimée syntaxiquement sur \approx_E , s'exprime de façon équivalente en terme de présentation par générateurs et relations de la théorie \mathbb{A} , (cf. sec.5.3). Le critère de finitude pour l'existence d'une présentation convergente de type fini d'une théorie équationnelle porte ainsi sur la théorie algébrique associée.

Une théorie algébrique \mathbb{A} s'interprète comme une monade finitaire sur la catégorie des ensembles (cf. 5.2.5). Une théorie algébrique se réalise ainsi comme un objet en monoïde dans la catégorie monoïdale des endofoncteurs finitaires sur la catégorie des ensembles. Nous introduirons l'homologie d'une théorie algébrique relativement au cadre développé par Baues, Jibladze et Tonks, [Bau97], pour la cohomologie des objets en monoïde dans une catégorie monoïdale. Ce cadre constitue une façon générale d'introduire la (co)homologie des monoïdes, des algèbres, des petites catégories, des théories algébriques ou des opérades.

Si \mathbf{Th} désigne la catégorie des théories algébriques, d'après [Bau97], la catégorie des coefficients pour l'homologie d'une théorie algébrique \mathbb{A} est la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$ des objets en groupe abélien dans la catégorie des théories au-dessus de \mathbb{A} . Par suite, l'homologie de \mathbb{A} , à coefficient dans un objet M de $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$, est définie comme l'homologie du complexe, issu de la bar résolution dans la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$, de l'objet terminal de la catégorie \mathbf{Th}/\mathbb{A} .

Il existe une interprétation plus explicite de la catégorie des coefficients de \mathbb{A} et de l'homologie de \mathbb{A} . Jibladze montre que la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Nat}_c(\mathbb{A})$ des systèmes naturels cartésiens de groupes abéliens sur \mathbb{A} , [Jib01]. Un tel système sur \mathbb{A} est la donnée d'un foncteur D , de la catégorie des factorisations $F\mathbb{A}$ de la théorie \mathbb{A} , à valeurs dans \mathbf{Ab} et préservant les produits finis. Nous introduisons l'homologie de \mathbb{A} , en dualisant les constructions de [Bau85] pour la cohomologie d'une petite catégorie, comme l'homologie de la petite catégorie \mathbb{A} à coefficients dans un système naturel cartésien D (cf. 4.4.5). Cependant, jusqu'à ce jour, [Bau03], il n'existait pas d'interprétation de la cohomologie de \mathbb{A} en terme de foncteur dérivé dans la catégorie $\mathbf{Nat}_c(\mathbb{A})$. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes restreint à la catégorie des bimodules non additifs sur \mathbb{A} , pour laquelle, une telle interprétation a été donnée par Jibladze et Pirashvili, [Jib91].

Une théorie algébrique apparaît comme un anneau généralisé, [Wra70]. MacLane définit l'homologie des anneaux comme l'homologie du complexe cubique, introduit pour l'étude des systèmes multiplicatifs, [McL56]. Il existe une interprétation de la cohomologie de MacLane d'un anneau A en terme de foncteur dérivé Ext^* , dans la catégorie des *bimodules non additifs* sur A , [Jib91]. A partir de cette nouvelle interprétation, Jibladze et Pirashvili généralisent la cohomologie de MacLane des anneaux, à coefficient dans les bimodules non additifs, à la cohomologie des théories algébriques à coefficients dans les bimodules non additifs.

La catégorie des bimodules non additifs sur une théorie algébrique \mathbb{A} , désignée par $\mathcal{F}(\mathbb{A})$, est la catégorie des foncteurs de \mathbb{A}^{op} , à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$, des \mathbb{A} -algèbres dans \mathbf{Ab} . En dualisant les constructions de [Jib91], nous définissons l'homologie d'une théorie algébrique \mathbb{A} , à coefficient dans un objet M de $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ par, (cf. 5.4.6) :

$$H_*(\mathbb{A}, M) = \text{Tor}_*^{\mathcal{F}(\mathbb{A})}(I_{\mathbb{A}}^o, M),$$

où $I_{\mathbb{A}}^o : \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}}$ désigne le dual du plongement abélianisé de Yoneda, défini pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} par $I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n}) = \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{n})$.

L'homologie $H_*(\mathbb{A}, M)$ s'interprète en terme d'homologie de Hochschild-Mitchell de la catégorie \mathbb{A} , à coefficient dans le \mathbb{A} -bimodule \underline{M} associé à M préservant les produits en la

première variable. Il existe un isomorphisme (cf. 5.4.7) :

$$H_*(\mathbb{A}, M) \simeq H_*(\mathbb{A}, \underline{M}).$$

La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ est la plus petite catégorie permettant de donner un sens à une résolution libre associée à une présentation convergente de \mathbb{A} . Le critère de finitude PF_* de Squier pour un monoïde \mathbf{M} est un critère à gauche ; il considère une résolution libre de \mathbf{M} -modules à gauche du \mathbf{M} -module trivial \mathbb{Z} . Il existe aussi un critère PF_* à droite ; dans le cas où \mathbf{M} est un groupe, ces deux critères coïncident. De la même façon, nous pouvons considérer un critère PF_* à gauche, ou à droite, pour la réécriture sur une petite catégorie \mathbf{C} , en construisant des résolutions de \mathbf{C} -modules à droite, ou à gauche, du foncteur $\mathbb{Z} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ constant égal à \mathbb{Z} (cf. 4.3.3). Dans le cas des théories algébriques, le critère PF_* à droite, ou à gauche, est trivial en raison de la présence des produits finis (cf. sec.4.5.2). C'est la raison pour laquelle, nous devons considérer un critère PF_* bilatère. Une petite catégorie \mathbf{C} est dite de *type bi- PF_n* , si le \mathbf{C} -bimodule $\mathbb{Z}\mathbf{C}$ possède une résolution de \mathbf{C} -bimodules libres de type fini de longueur n .

Etant donnée une présentation convergente $\langle \Omega \mid R \rangle$ d'une théorie algébrique \mathbb{A} , notre objectif est de construire, en terme de cette présentation, une résolution libre du foncteur $I_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$, associant à tout objet \mathbf{n} le foncteur représentable $\mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{n}, -)$.

Un système de réécriture $\langle \Omega \mid R \rangle$ dans \mathbf{Th} est formé d'un \mathbb{N} -graphe Ω et d'un ensemble R , constitué de couples de chemins parallèles du graphe sous-jacent à la théorie algébrique $\mathbb{L}(\Omega)$ librement engendrée par Ω . Nous associons au système de réécriture $\langle \Omega \mid R \rangle$ un système de réécriture $\langle \Omega^c \mid R^c \rangle$ dans \mathbf{Cat} , où Ω^c et R^c sont respectivement les graphes cartésiens engendrés par les graphes Ω et R (cf. sec.5.3.2). Nous montrons que les propriétés de convergence du système $\langle \Omega \mid R \rangle$ restent conservées par le système $\langle \Omega^c \mid R^c \rangle$: si $\langle \Omega \mid R \rangle$ est convergent alors $\langle \Omega^c \mid R^c \rangle$ est convergent.

Une condition de finitude homologique pour la convergence d'une théorie algébrique est ainsi ramenée à une condition de finitude pour la convergence de la catégorie sous-jacente, présentée par graphe cartésien et relations cartésiennes.

Pour ces raisons, nous généralisons les critères de finitude homologique de Squier et Kobayashi à la réécriture sur des petites catégories. Nous montrons (cf. 4.6.3) :

Théorème. *Soient \mathbf{C} une petite catégorie de graphe générateur G , R un ensemble de règles sur \mathbf{C} et \mathbf{D} la catégorie obtenue comme quotient de \mathbf{C} par la relation de congruence sur \mathbf{C} engendrée par R . Si R est convergent et minimal, alors pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} admettant des coproduits indexés par les ensembles hom de \mathbf{D} et pour tout objet I de $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$, il existe une suite acyclique dans $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$:*

$$S_*(G, R) : I[\mathcal{P}] \xrightarrow{d_3} I[R] \xrightarrow{d_2} I[G] \xrightarrow{d_1} I[|G|] \xrightarrow{\epsilon} I \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{P} désigne l'ensemble des paires critiques de R , $I[X]$ désigne le \mathbf{D} -diagramme libre dans \mathcal{A} engendré par un sous-ensemble de morphismes X de \mathbf{D} et les opérateurs bords sont définis sur les générateurs par décomposition cubique.

Il est possible d'étendre «manuellement» cette résolution en tout degré, mais les calculs deviennent très rapidement complexes. Nous définissons l'opérateur bord d_4 pour les monoïdes dans la section ???. Il serait intéressant d'extraire à partir de ce début de résolution un complexe cubique, explicite en tout degré, mettant en jeu les chevauchements équivoques en toute dimension. Mais cette construction reste un problème ouvert.

Par ailleurs, nous montrons que la résolution inductive d'Anick-Kobayashi se généralise de la même façon à la réécriture de petites catégories. Nous généralisons la notion de n -chaîne d'Anick, introduite dans [Ani86], aux systèmes de réécriture monoïdaux, (cf. 2.3.11) et nous l'appliquons aux cas des petites catégories. En utilisant la méthode de Kobayashi pour la réécriture des monoïdes, [Kob90], nous montrons qu'il existe une résolution acyclique $K_*(G, R)$, du même type que précédemment, de longueur infinie mettant en jeu les n -chevauchements équivoques (cf. 4.8.12). En particulier, nous montrons que les petites catégories, admettant une présentation convergente de type fini, sont de type bi-PF $_{\infty}$. Un des intérêts de cette résolution, construite par induction noethérienne, est qu'elle constitue une méthode effective de calcul des groupes d'homologie de petites catégories.

On applique les résolutions ainsi obtenues à la présentation des théories algébriques. Etant donnée une présentation convergente $\langle \Omega \mid R \rangle$ d'une théorie algébrique \mathbb{A} , nous considérons le système de réécriture $\langle \Omega^c \mid R^c \rangle$ convergent dans **Cat** correspondant. Nous en déduisons les résolutions libres $S_*(\Omega^c, R^c)$ et $K_*(\Omega^c, R^c)$ du foncteur $I_{\mathbb{A}}$, dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$.

Cependant, le système de réécriture $\langle \Omega^c \mid R^c \rangle$ n'est pas de type fini, car il est formé d'un graphe composé d'une infinité de flèches et d'une infinité de relations, résultant de la structure induite par les produits finis. En utilisant le caractère additif de $\mathbb{Z}\mathbb{A}$, nous montrons (cf. 5.5.3) :

Proposition. *Soient X un sous-ensemble de morphismes d'une théorie algébrique \mathbb{A} et X^c le graphe cartésien engendré par X . Pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} et toute \mathbb{A} -algèbre I dans \mathcal{A} , il existe un isomorphisme de \mathbb{A} -algèbres dans \mathcal{A} :*

$$I[X] \simeq I[X^c],$$

où $I[X]$ désigne le \mathbb{A} -diagramme dans \mathcal{A} librement engendré par X .

Par suite, si le système de réécriture $\langle \Omega \mid R \rangle$ est de type fini, alors les résolutions $S_*(\Omega, R)$ et $K_*(\Omega, R)$ sont libres de type fini dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$. Nous montrons ainsi que les théories algébriques admettant une présentation convergente et de type fini sont de type bi-PF $_{\infty}$.

Les résolutions $S_*(\Omega, R)$ et $K_*(\Omega, R)$ permettent de calculer, de façon effective, les groupes d'homologie de théories algébriques, à coefficients dans les bimodules non additifs, à partir de présentations convergentes de type fini. En particulier, à partir de l'exemple de Squier, nous construisons un système de réécriture de termes, présentant une théorie algébrique de type fini et décidable, et n'admettant pas de système de réécriture de termes équivalent convergent et de type fini.

1.3 Organisation du document et conventions

Dans un premier chapitre, nous développons le cadre catégoriel dans lequel se place ce travail. Nous définissons la notion de *système de réécriture dans une catégorie monoïdale* et nous introduisons la notion de *chaînes de Anick*. L'avantage de ce point de vue est de réunir dans un même cadre, la réécriture de mots et la réécriture de termes. Cependant, nous n'avons pas encore de critères homologiques pour l'existence d'une présentation convergente de type fini d'un objet en monoïde. Dans la conclusion, nous présentons quelques idées dans cette direction.

Le chapitre 3 constitue un bref état de l'art sur les critères homologiques pour l'existence de présentation convergente de monoïdes ensemblistes. Nous rappelons la construction de Squier mettant en jeu les paires critiques. Il est difficile d'obtenir une résolution de Squier explicite mettant en jeu les n -chevauchements équivoques. Nous présentons, en fin de chapitre, une réponse partielle à ce problème avec les résolutions ordonnées introduite par Anick et Kobayashi.

Dans le chapitre 4, nous donnons une brève introduction au langage des catégories de modules sur une petite catégorie. Nous introduisons l'homologie de Hochschild-Mitchell comme cas particulier de l'homologie de Baues-Wirsching des petites catégories. Nous donnons quelques éléments pour étendre l'homologie de Baues-Wirsching aux PROs. Nous mettons en évidence que la catégorie des bimodules cartésiens est minimale pour le calcul de l'homologie d'une catégorie munie de produits finis. En utilisant les méthodes de Squier et Kobayashi, nous construisons des résolutions libres de petites catégories, admettant des présentations convergentes de type fini.

Dans le chapitre 5, nous introduisons l'interprétation sémantique de Lawvere des théories équationnelles du premier ordre. Nous interprétons un système de réécriture de termes du premier ordre comme une présentation orientée d'une théorie algébrique. Nous introduisons l'homologie des théories algébriques à coefficients dans les bimodules non additifs. Nous donnons une interprétation de cette homologie en terme d'homologie de Hochschild-Mitchell de la petite catégorie sous-jacente. Nous appliquons les constructions du chapitre précédent à la construction de résolutions libres de type fini de théories algébriques, admettant une présentation par un système de réécriture de termes convergent.

Dans le chapitre 6, à partir de l'exemple de Squier, nous construisons un système de réécriture de termes, présentant une théorie équationnelle de type fini et décidable, mais n'admettant pas de système convergent de type fini équivalent.

Tous les concepts et tous les outils d'algèbre homologique et de théorie de la réécriture sont introduits dans le cours du texte, rendant sa lecture autonome. Toutes les définitions, théorèmes, propositions ou lemmes non référencés sont de l'auteur. La référence renvoie,

dans la mesure du possible, à la source historique, sinon à une référence standard, indiquée dans ce cas par le symbole \flat .

Dans tout le texte, les constructions introduites portent sur des petits objets. Nous nous placerons dans l'axiomatique standard de Zermelo-Fraenkel de la théorie des ensembles avec l'axiome du choix. Nous désignerons respectivement par **Ens**, **Ab** et **Cat** la catégorie des petits ensembles, des petits groupes abéliens et des petites catégories. Pour toute catégorie \mathcal{C} , munie de produits finis, nous désignerons par **Ab**(\mathcal{C}), la catégorie des objets en groupe abélien dans \mathcal{C} .

Si \mathcal{C} est une catégorie, la notation d'appartenance, $w \in \mathcal{C}$, désignera que w est un morphisme de \mathcal{C} . La classe des objets de \mathcal{C} sera désignée par $|\mathcal{C}|$. Si $w \in \mathcal{C}$, nous désignerons par $\sigma(w)$ sa source et $\tau(w)$ son but. Si $p, q \in |\mathcal{C}|$, nous désignerons par $\mathcal{C}(p, q)$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} de source p et de but q .

Nous désignerons par \mathcal{C}_d la sous-catégorie discrète de \mathcal{C} , formée de tous les objets de \mathcal{C} , par \mathcal{C}^e la catégorie enveloppante $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ et par $\mathcal{C}^{\mathbf{C}}$ la catégorie des foncteurs d'une petite catégorie \mathbf{C} dans \mathcal{C} . Nous désignerons par $\mathbf{1}$ la catégorie ponctuelle munie d'un seul objet et d'une seule flèche et par $\epsilon_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{1}$ le foncteur canonique.

Chapitre 2

Réécriture sur les objets en monoïde

L'objet de ce chapitre est d'établir le cadre conceptuel dans lequel notre étude s'inscrit. La réécriture intervient dans de nombreux contextes, mais nous ne considérerons que les mécanismes de réécriture associatifs et unitaires dont le paradigme est la réécriture dans un monoïde.

Dans la section 2.2 nous faisons quelques rappels introductifs aux systèmes abstraits de réécriture. Nous définissons dans la section 2.3 la notion de système de réécriture dans une catégorie monoïdale et nous introduisons les chaînes d'Anick dans ce contexte. Nous montrons dans la section 2.4 que la réécriture dans une catégorie monoïdale permet de réunir dans un même cadre les réécritures de mots et de termes.

2.1 Introduction

La réécriture a été initialement introduite comme un outil combinatoire pour l'étude des relations d'équivalence abstrayant la nature des objets considérés, [New42]. Simultanément la réécriture a été développée pour l'étude des propriétés de cohérence dans les systèmes logiques, [Chu36], et dans les langages de programmation par la suite.

2.1.1 La réécriture de mots

En algèbre, la réécriture intervient, sous différentes formes, pour l'étude combinatoire des structures algébriques telles que les monoïdes, les groupes ou les algèbres, [Ber78]. La réécriture dans un monoïde est définie de la façon suivante.

On se donne un ensemble de générateurs $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots\}$, les mots dans le monoïde libre Σ^* sont définis comme les listes formées de ces générateurs $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ dont la concaténation est associative :

$$(a_1 \dots a_i b_1 \dots b_j)(c_1 \dots c_k) = (a_1 \dots a_i)(b_1 \dots b_j c_1 \dots c_k) = a_1 \dots a_i b_1 \dots b_j c_1 \dots c_k,$$

et unitaire :

$$(a_1 \dots a_n)1 = 1(a_1 \dots a_n) = a_1 \dots a_n,$$

où 1 désigne le mot vide. Une règle de réécriture est la donnée d'un couple $A = (u, v)$ de mots du monoïde libre Σ^* . Etant donné un ensemble de règles R , un calcul dans le monoïde libre Σ^* consiste à appliquer successivement les règles de R à un mot. Appliquer la règle A à un mot w consiste à reconnaître dans la liste de générateurs formant le mot w , une sous-liste correspondant au mot u et à la substituer par la liste correspondant au mot v .

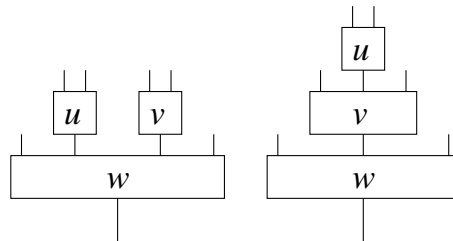
Les calculs dans une algèbre associative et unitaire peuvent se décrire de façon similaire. On considère le quotient de l'algèbre libre $k[X_1, \dots, X_n]$ par l'ideal engendré par les polynômes définissant les règles de réécriture.

Il s'agit dans ces deux cas de transformer des listes formées d'éléments de l'ensemble sous-jacent à la structure algébrique considérée, par application locale des règles de réécriture dérivées des axiomes de structure. La concaténation des listes est globale, c'est-à-dire que deux listes quelconques peuvent être concaténées.

Il peut aussi s'agir de transformer par réécriture des chemins orientés dans un arbre ou un graphe. Cette situation intervient dans l'étude des chemins de processus, en parallélisme ou en réécriture, en considérant le graphe des réductions dont les sommets sont les termes et les flèches sont les réductions élémentaires. Les objets à réécrire sont alors des listes formées de flèches et l'opération de concaténation de ces listes est définie localement. Ce calcul correspond à un calcul dans une petite catégorie présentée par le graphe, soumis à des relations sur les chemins parallèles du graphe.

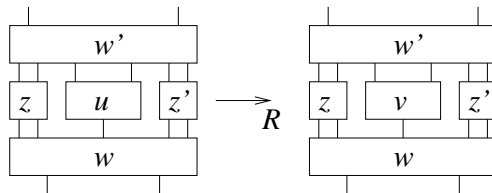
2.1.2 La réécriture de termes

La réécriture intervient aussi pour l'étude des processus de calculs dans les théories équationnelles. Une théorie équationnelle se décrit syntaxiquement comme une algèbre universelle sur une théorie algébrique ou une opérade. Il s'agit alors, dans ce cas, de réécriture de termes. L'opération de composition des éléments de l'algèbre est plus complexe que dans la réécriture de mots mais reste une opération associative et unitaire. Avec trois termes u, v, w , on peut former d'autres termes de la façon suivante :



La notion de théorie algébrique sera développée dans la section 5.2.1.

Le calcul dans une théorie équationnelle est de la même nature que dans un monoïde. La différence majeure est que la structure des termes est plus complexe en raison de la présence de variables et que l'opération de composition des termes est opéradique. Si u et v désignent deux termes, une règle $u \rightarrow v$ s'applique de la façon suivante :



où z, z', w et w' désignent des diagrammes formés de termes. Nous développons cette interprétation catégorique de la réécriture de termes dans la section 5.3. Nous verrons qu'une théorie équationnelle s'interprète par une monade finitaire sur la catégorie des ensembles, dont la multiplication décrit l'opération de composition des termes et l'unité décrit la notion de variable.

Enfin, la réécriture peut porter sur des structures plus complexes définies comme des algèbres sur des catégories monoïdales. Ces catégories permettent des interprétations sémantiques de systèmes plus complexes tels que les réseaux automates ou les réseaux booléens. Cependant, la compréhension algébrique des mécanismes de calcul dans ces catégories reste encore un problème difficile.

Tous ces processus de réécriture s'interprètent dans le cadre algébrique de la réécriture sur les objets en monoïde dans une catégorie monoïdale. Sont ainsi réunies dans une même approche la réécriture de mots et la réécriture de termes. Les concepts abstraits de réécriture ainsi que les problèmes décisionnels, tels que le problème de mots, s'énoncent pour la réécriture sur les objets en monoïde.

Interpréter un système de réécriture comme un système de réécriture sur un objet en monoïde dans une catégorie monoïdale présente un double intérêt. En effet, le produit de la catégorie monoïdale permet :

- de décrire sémantiquement les notions de contexte et de substitution,
- de décrire la catégorie des modules sur l'objet en monoïde présenté par le système de réécriture. La catégorie des modules correspond à la catégorie des coefficients dans laquelle est construite la résolution associée à une présentation convergente du monoïde.

Un des objectifs de notre démarche est de montrer que les critères de finitude homologique pour la présentation des monoïdes établis par Squier restent encore valables pour la présentation des objets en monoïde. Cet objectif n'est pas encore atteint en raison de la complexité de la catégorie des modules pour un objet en monoïde quelconque. Il nous reste à généraliser le calcul différentiel libre de Fox aux objets en monoïde, en utilisant la définition de dérivation de [Bau97], 4.7.. Ensuite, nous devons déterminer, pour un objet en monoïde donné, la famille des générateurs projectifs de sa catégorie de modules.

2.2 Systèmes abstraits de réécriture

Afin de fixer la terminologie et les notations, nous rappelons quelques faits élémentaires sur les systèmes abstraits de réécriture et nous renvoyons à [Klo92], ou [Ter03], chap. 1,

pour un exposé complet, ou encore à [Ber78] pour une lecture algébrique du lemme de Newman.

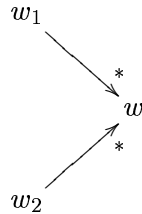
Newman introduit en 1942, [New42], un modèle permettant de traiter les systèmes de réécriture en abstrayant le contexte dans lequel les processus de réécriture prennent effet.

2.2.1 Définition ([New42]). Un *système abstrait de réécriture* est la donnée d'un couple $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$ où \mathcal{T} est un ensemble d'*objets* et \rightarrow une relation binaire sur \mathcal{T} dont les éléments sont appelés *règles de réduction*.

Si (u, v) est un élément de \rightarrow , on dit que *u se réduit en v* et on désigne par $u \rightarrow v$ ce couple.

A tout système abstrait $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$ on associe un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ dont les objets sont ceux de \mathcal{T} et les flèches sont définies par les éléments de \rightarrow . Les chemins de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ sont appelés *chemins de réduction*. Les objets de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ constituent les chemins de longueur nulle. La *longueur* d'un chemin F de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ est l'entier naturel n tel que F s'écrive comme la composée de n flèches de longueur non nulle. L'ensemble des chemins de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ forme la clôture transitive et réflexive de la relation \rightarrow et est désigné par \rightarrow^* . Réduire un objet t de \mathcal{T} consiste à parcourir un chemin dans $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ de source t .

Les composantes connexes du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{T})$, vu comme un espace topologique, forment la clôture symétrique de \rightarrow^* désignée par \leftrightarrow^* . Les feuilles du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ sont appelées les objets *irréductibles* de $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$. Un objet non irréductible est dit *réductible*. Une *forme normale* d'un objet w de \mathcal{T} est un irréductible de \mathcal{T} qui est le but d'un chemin de source w . Deux objets w_1 et w_2 de \mathcal{T} sont dits *joignables* s'il existe un branchement dans $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ de base $\{w_1, w_2\}$:



Deux systèmes de réécriture $(\mathcal{T}, \rightarrow_1)$ et $(\mathcal{T}, \rightarrow_2)$ seront dits *équivalents* si pour tous objets u et v de \mathcal{T} on a $u \leftrightarrow_1^* v$ si et seulement si, $u \leftrightarrow_2^* v$.

Les notions de confluence et de noëthérianité sont centrales en théorie de la réécriture et dans cette étude. Nous les considérons dans ce travail comme des propriétés de nature géométrique sur le système de réécriture.

2.2.2 Définition ([Klo92]). Un système abstrait de réécriture $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$ est dit *noëthérien*, ou *fortement normalisant*, si la longueur d'un chemin quelconque de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ est finie.

Notamment, dans un système noëthérien tout terme possède au moins une forme normale. La propriété suivante, introduite par Church et Rosser dans l'étude du λ -calcul, [Chu36], assure l'unicité de cette forme normale.

2.2.3 Définition ([Klo92]_b). Un système abstrait de réécriture $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$ est dit

- i) de *Church-Rosser* si deux objets quelconques d'une composante connexe de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ sont joignables,
- ii) *confluent* si les buts de deux chemins quelconques de même source dans $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ sont joignables,
- iii) *localement confluent* si les buts de deux flèches quelconques de même source dans $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ sont joignables.

La propriété de confluence s'exprime sous l'une des formes suivantes :

2.2.4 Lemme ([Klo92]_b). *Pour tout système de réécriture $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) \rightarrow est de *Church-Rosser*,
- ii) \rightarrow est *confluente*.

Par le lemme de Newman, dans les systèmes noëthériens la propriété de confluence se réduit à celle de confluence locale.

2.2.5 Lemme ([New42], Thm.3). *Pour tout système noëthérien $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) \rightarrow est *confluente*,
- ii) \rightarrow est *localement confluente*.

2.2.6 Définition ([Klo92]_b). Un système de réécriture est dit *convergent* s'il est noëthérien et s'il vérifie l'une des assertions de 2.2.4.

Dans un système de réécriture convergent $\langle \mathcal{T} \mid \rightarrow \rangle$, si w_1 et w_2 désignent des feuilles de deux chemins de $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ de même source, alors $w_1 = w_2$. En particulier, tout objet w possède une unique forme normale que nous désignerons par \hat{w} .

Nous rappelons le principe d'induction noëthérienne qui sera utilisé dans la suite pour la construction des homotopies contractantes dans les résolutions.

2.2.7 Proposition ([Baa98]_b). *Soient T un ensemble muni d'une relation noëthérienne $>$ et P un prédicat sur T . Si, pour tout élément t de T , l'assertion :*

tout élément s de T tel que $t > s$ vérifie P ,

entraîne que t satisfait le prédicat P , alors tout élément t de T satisfait le prédicat P .

2.3 Réécriture sur les objets en monoïde

Les systèmes abstraits de réécriture ne possèdent pas suffisamment de structure pour modéliser la réécriture dans un monoïde ou une théorie équationnelle. Il est nécessaire d'introduire, dans le premier cas, la notion de concaténation de mots et, dans le second cas, les notions de contexte et de substitution.

Dans cette section, nous définissons la notion de système de réécriture sur un objet en monoïde dans une catégorie monoïdale. La catégorie monoïdale permet de décrire, d'une part la notion de contexte et de relation congruente, d'autre part la catégorie des modules de Anick engendrés par les chevauchements équivoques.

2.3.1 Objets en monoïde

Nous rappelons qu'une *catégorie monoïdale (stricte)* $\mathbb{V} = (\mathbf{V}, \square, I)$ est formée d'une catégorie \mathbf{V} , d'un foncteur $\square : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ et d'un objet I de \mathbf{V} tels qu'il existe des identités fonctorielles en les objets X, Y, Z de \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} (X \square Y) \square Z &= X \square (Y \square Z), \\ X \square I &= X = I \square X. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.3.1 Définition ([McL71]_b). Un *objet en monoïde* dans une catégorie monoïdale \mathbb{V} , ou \mathbb{V} -monoïde, est la donnée d'un triplet (M, μ, η) , où M est un objet de \mathbf{V} et $\mu : M \square M \rightarrow M$, $\eta : I \rightarrow M$ sont deux morphismes de \mathbf{V} tels que les deux diagrammes suivants soient commutatifs dans \mathbf{V} :

$$\begin{array}{ccc} M \square M \square M & \xrightarrow{\mu \square 1_M} & M \square M \\ \downarrow 1_M \square \mu & & \downarrow \mu \\ M \square M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I \square M & \xrightarrow{\eta \square 1_M} & M \square M \\ \downarrow 1_M & & \downarrow \mu \\ M & & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & M \square I \\ & \xleftarrow{1_M \square \eta} & \\ & & \downarrow 1_M \\ & & M \end{array}$$

Un morphisme de \mathbb{V} -monoïdes $\phi : (M, \mu, \eta) \rightarrow (M', \mu', \eta')$ est un morphisme $\phi : M \rightarrow M'$ de \mathbf{V} tel que les diagrammes suivants soient commutatifs dans \mathbf{V} :

$$\begin{array}{ccc} M \square M & \xrightarrow{\phi \square \phi} & M' \square M' \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu' \\ M & \xrightarrow{\phi} & M' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta' \\ & & I \end{array}$$

On désignera par $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})$ la catégorie des \mathbb{V} -monoïdes et des morphismes de \mathbb{V} -monoïdes.

2.3.2 Exemples. Dans le cas non strict, i.e., pour lequel les relations (2.1) sont des isomorphismes, on a deux exemples génériques :

- i) Les produits finis munissent la catégorie **Ens** d'une structure de catégorie monoïdale et la catégorie des objets en monoïde associée est la catégorie des monoïdes, désignée par **Mon**.

ii) La catégorie $\mathbf{Mod}(k)$ des k -modules, sur un anneau commutatif k , munie du produit tensoriel \otimes_k , est monoïdale d'unité k . Ses objets en monoïde sont les k -algèbres associatives et unitaires.

Dans le cas strict, nous considérerons l'exemple suivant :

iii) La catégorie $\mathbf{End}(\mathcal{C})$ des endofoncteurs sur une catégorie \mathcal{C} , munie de la composition des foncteurs et de l'unité $1_{\mathcal{C}}$, est une catégorie monoïdale non symétrique dont les objets en monoïde sont les monades sur \mathcal{C} .

2.3.3 Lemme ([McL71]_b, VII. 3.2). *Soit $\mathbb{V} = (\mathbf{V}, \square, I)$ une catégorie monoïdale, le foncteur oublie :*

$$U : \mathbf{Mon}(\mathbb{V}) \longrightarrow \mathbf{V}, \quad (2.2)$$

associant à tout \mathbb{V} -monoïde (M, μ, η) l'objet sous-jacent M , reflète toutes les limites de \mathbf{V} . De plus, si \mathbb{V} possède des coproduits dénombrables et si le produit \square commute aux coproduits à gauche et à droite, alors le foncteur U possède un adjoint à gauche $\mathcal{L} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{Mon}(\mathbb{V})$.

Si X est un objet de \mathbf{V} , l'objet en monoïde libre engendré par X est donné par le triplet $\mathcal{L}(X) = (L(X), \cdot_X, e_X)$, où $L(X)$ est le coproduit des itérés de X :

$$L(X) = \coprod_{n \geq 0} X^{\square n}, \quad \text{avec } X^{\square n} = X^{\square n-1} \square X.$$

La multiplication

$$\cdot_X : \coprod_{n \geq 0} X^{\square n} \square \coprod_{m \geq 0} X^{\square m} \longrightarrow \coprod_{p \geq 0} X^{\square p}$$

est obtenue par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_n X^{\square n} \square \coprod_m X^{\square m} & \longrightarrow & \coprod_{n,m} X^{\square n} \square X^{\square m} \\ & \searrow \cdot_X & \downarrow \\ & & \coprod_p X^{\square p} \end{array}$$

dont le morphisme horizontal est induit par la commutation de \square aux coproduits et le morphisme vertical est induit par les identités $X^{\square n} \square X^{\square m} = X^{\square n+m}$. En raison de l'associativité de \cdot_X , nous omettrons le parenthésage et nous noterons par $u \cdot v \cdot w$ l'expression $u \cdot (v \cdot w)$. L'unité e_X est donnée par la première inclusion

$$e_X : I \longrightarrow \coprod_{n \geq 0} X^{\square n}.$$

2.3.2 Systèmes de réécriture dans une catégorie monoïdale

Dans toute cette section, $\mathbb{V} = (\mathbf{V}, \square, I)$ désigne une catégorie monoïdale où \mathbf{V} est une catégorie concrète, i.e., il existe un foncteur fidèle $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Ens}$. On suppose de plus que \mathbf{V} est finiment complète et cocomplète et que le produit \square commute aux coproduits.

Soit (T, μ, η) la monade sur \mathbf{V} induite par l'adjonction $\mathcal{L} \dashv U$, (2.2). Pour tout objet X de \mathbf{V} , on a $T(X) = \coprod_{n \geq 0} X^{\square n}$ et, pour tout $x \in X$, $\eta_X(x) = x$ est le mot dans $T(X)$ correspondant à x . Le morphisme $\mu_X : T(T(X)) \rightarrow T(X)$ est déterminé par la counité de l'adjonction $\mathcal{L} \dashv U$: pour tout entier naturel i , pour tous entiers n_1, \dots, n_i et tous éléments $u_k^l \in X$:

$$\mu_X((u_1^1 \dots u_{n_1}^1) \cdot \dots \cdot (u_1^i \dots u_{n_i}^i)) = u_1^1 \dots u_{n_1}^1 \dots u_1^i \dots u_{n_i}^i.$$

Si X est un objet de \mathbf{V} , on considère la T -algèbre $(T(X), \mu_X)$ libre sur X ; les éléments de $T(X)$ sont appelés les *termes* et la multiplication μ_X est appelée la *composition* des termes.

La catégorie des T -algèbres possédant les mêmes limites que \mathbf{V} , on peut énoncer :

2.3.4 Définition.

- i) Un *système de réécriture dans* \mathbb{V} est la donnée d'un couple $\langle X \mid R \rangle$, où X est un objet de \mathbf{V} et R est une relation binaire sur l'objet $T(X)$, i.e., $\mathcal{U}(R)$ est une partie de $\mathcal{U}(T(X)) \times \mathcal{U}(T(X))$, où \mathcal{U} désigne le foncteur fidèle $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Ens}$.
- ii) La *relation de réduction engendrée par* R est la plus petite relation binaire sur l'objet $T(X)$, désignée par \rightarrow_R , contenant R et compatible avec l'action de μ_X . En d'autres termes, si w, w' sont des éléments de $T(X)$, on a $w \rightarrow_R w'$ s'il existe $(r, s) \in R$ et deux éléments u et v de $T(X)$ tels que :

$$w = \mu_X(u \cdot r \cdot v), \quad w' = \mu_X(u \cdot s \cdot v).$$

Un système de réécriture $\langle X \mid R \rangle$ sera dit *noéthrien* (resp. *confluent*) si le système abstrait $\langle T(X) \mid \rightarrow_R \rangle$ est noéthrien (resp. confluent).

D'après le lemme 2.3.3, la catégorie $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})$ est finiment complète. Les produits finis dans $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})$ sont induits par ceux de \mathbf{V} . Précisément, soient $\mathcal{M}_i = (M_i, \mu_i, \eta_i)$, $i = 1, 2$, deux \mathbb{V} -monoïdes : désignons par $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, les deux projections issues du produit dans \mathbf{V} . Le \mathbb{V} -monoïde $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ est obtenu comme l'objet $M_1 \times M_2$ de \mathbf{V} , muni de la multiplication μ et de l'unité η définies par les diagrammes produits dans \mathbf{V} :

$$\begin{array}{ccccc} M_1 \square M_1 & \xleftarrow{\pi_1 \square \pi_1} & M_1 \times M_2 \square M_1 \times M_2 & \xrightarrow{\pi_2 \square \pi_2} & M_2 \square M_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu_2 \\ M_1 & \xleftarrow{\pi_1} & M_1 \times M_2 & \xrightarrow{\pi_2} & M_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & I & \\ \eta_1 \swarrow & \downarrow \eta & \searrow \eta_2 \\ M_1 & \xleftarrow{\pi_1} & M_1 \times M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \end{array}$$

De l'existence des coégalisateurs dans $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})$ induits par ceux de \mathbf{V} via le foncteur \mathcal{L} , nous déduisons :

2.3.5 Proposition. *Pour tout système de réécriture $\langle X \mid R \rangle$ dans \mathbb{V} , il existe un \mathbb{V} -monoïde \mathcal{M} et un morphisme de \mathbb{V} -monoïdes $p_X : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant : pour tout \mathbb{V} -monoïde \mathcal{N} , tout morphisme de \mathbb{V} -monoïdes $f : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{N}$ tel que $f(u) = f(v)$ si $(u, v) \in R$, se factorise de façon unique via le morphisme p_X :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X) & \xrightarrow{p_X} & \mathcal{M} \\ & \searrow f & \swarrow \exists! \\ & & \mathcal{N} \end{array}$$

Démonstration. Le morphisme p_X est obtenu comme le coégalisateur dans $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})$

$$\mathcal{L}(R) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} \mathcal{L}(X) \xrightarrow{p_X} \mathcal{M}$$

où $\mathcal{L}(R)$ est le sous \mathbb{V} -monoïde de $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X)$ librement engendré par R et où π_1 et π_2 désignent la première et deuxième projection. \square

Le \mathbb{V} -monoïde \mathcal{M} est obtenu comme le quotient du monoïde libre $\mathcal{L}(X)$ par la clôture réflexive, symétrique et transitive \leftrightarrow_R^* de la relation \rightarrow_R :

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}(X) / \leftrightarrow_R^* .$$

2.3.6 Définition. Le \mathbb{V} -monoïde \mathcal{M} de la proposition 2.3.5 est dit présenté par le système de réécriture $\langle X \mid R \rangle$. Deux systèmes de réécriture dans \mathbb{V} seront dits équivalents s'ils présentent le même \mathbb{V} -monoïde.

2.3.3 Le problème de mots dans un objet en monoïde

Soit $\langle X \mid R \rangle$ une présentation d'un \mathbb{V} -monoïde \mathcal{M} , le problème de mots dans \mathcal{M} est le problème de décision suivant :

Instance : u et v sont deux éléments de $\mathcal{L}(X)$,

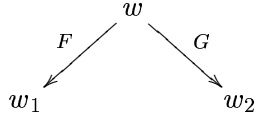
Question : A-t-on $p_X(u) \approx p_X(v)$ dans \mathcal{M} ?

2.3.4 Paires critiques

Soit $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture dans \mathbb{V} . Une *paire* est la donnée d'un couple $\langle F, G \rangle$ de réductions élémentaires portant sur un même terme. Une paire est dite *critique* si le couple $\langle F, G \rangle$ décrit l'une des situations suivantes :

- i) (*ambiguïté d'inclusion*) : $F = A$ et $G = u \cdot B \cdot v$, avec $A = (u \cdot w \cdot v, w_1)$ et $B = (w, w_2)$;
- ii) (*ambiguïté de chevauchement*) : $F = A \cdot v$ et $G = u \cdot B$, avec $A = (u \cdot w, w_1)$, $B = (w \cdot v, w_2)$ et où w, u et v ne sont pas dans l'image de e_X .

Une paire critique $\langle F, G \rangle$



est dite *convergente* si w_1 et w_2 sont joignables.

Compléter un système de réécriture en un système convergent consiste à orienter les règles en un système noethérien et à rajouter autant de règles que nécessaire pour résoudre toutes les paires critiques. Le lemme, dit des «paires critiques», s'étend à la réécriture monoïdale :

2.3.7 Lemme. *Un système de réécriture dans une catégorie monoïdale \mathbb{V} est localement confluent si et seulement si toutes ses paires critiques convergent.*

Il est donc important de connaître l'ensemble des paires critiques. Il existe deux formes de paire critique. La notion suivante nous permet de n'en considérer qu'une.

2.3.8 Définition ([Squ87a]). Un système de réécriture $\langle X \mid R \rangle$ est dit *minimal* s'il vérifie les deux assertions suivantes :

- i) pour tout $(u, v) \in R$, v est irréductible,
- ii) la partie gauche d'une règle quelconque A de R n'est réductible que par A .

L'assertion ii) équivaut à dire que la partie gauche d'une règle de R n'apparaît pas comme sous-mot de la partie gauche d'une autre règle de R .

Le théorème de Squier, [Squ87a], 2.4, s'étend de la façon suivante :

2.3.9 Lemme. *Soit $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture convergent (resp. convergent de type fini) dans une catégorie monoïdale \mathbb{V} . Alors, il existe un système minimal $\langle X \mid R' \rangle$ convergent (resp. convergent de type fini) équivalent à $\langle X \mid R \rangle$.*

Démonstration. Nous renvoyons à [Squ87a], 2.4. L'ensemble des règles R' est obtenu à partir de R par suppression des règles redondantes, en considérant l'ensemble des réductibles minimaux. \square

Par définition, dans un système de réécriture minimal les paires critiques sont les ambiguïtés de chevauchement.

2.3.5 Chaînes d'Anick pour un système de réécriture dans \mathbb{V}

En général, un système de réécriture de type fini, i.e., possédant un nombre fini de règles, n'est pas toujours équivalent à un système convergent de type fini. Une obstruction à l'existence d'un tel système réside dans l'infinité éventuelle des paires critiques résultant de l'ajout des nouvelles règles. Pour décrire cette obstruction nous utilisons la notion de chaîne d'Anick, permettant de manipuler les n -chevauchements critiques. La définition des antichaînes d'Anick est directement inspirée de la preuve du lemme 2.3.9.

Soient \mathbf{V} une catégorie monoïdale, X un objet de \mathbf{V} et \prec une relation d'ordre sur $T(X)$. En adaptant les constructions de [Ani86], 1, pour les algèbres associatives et unitaires on pose :

2.3.10 Définition.

- i) Un *idéal ordonné* dans l'ensemble ordonné $(T(X), \prec)$ est la donnée d'une partie N de $T(X)$ telle que pour tout élément w de N , $u \prec w$ implique $u \in N$.
- ii) Si N est un idéal ordonné dans $(T(X), \prec)$, l'ensemble des *antichaînes* de N dans $T(X)$ est l'ensemble :

$$A_N(X, \prec) = \{v \in T(X) \setminus N \mid u \prec v \text{ et } u \neq v \text{ impliquent } u \in N\}.$$

2.3.11 Définition. L'ensemble des *n-chaînes d'Anick* de N dans $T(X)$ est l'ensemble :

$$C_n(X, \prec) := \{(v_n, \dots, v_1) \mid v_1 \in X \text{ et } v_i \in N, v_i \cdot v_{i-1} \in A_N(X, \prec) \text{ pour } i \geq 2\}.$$

Par convention, $C_0(X, \prec)$ est l'objet terminal de \mathbf{V} .

Le lemme 2.3.13 suivant assure que l'ensemble des antichaînes $A_N(X, \prec)$ est défini de façon unique par l'idéal N et inversement.

2.3.12 Définition. Soit $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture dans une catégorie monoïdale \mathbf{V} . La *relation d'ordre préfixe* \prec sur $T(X)$ est définie en posant :

- $u \prec v$ si et seulement si,
- il existe $s \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u = a_1 \cdots a_s$ et $v = a_1 \cdots a_n$, $a_i \in X$,
- ou $u = e_X(a)$, $a \in I$.

Dans toute la suite de cette section, \prec désignera l'ordre préfixe.

2.3.13 Lemme. Soit N un idéal ordonné dans $(T(X), \prec)$. Alors $w \in T(X) \setminus N$ si et seulement si, il existe une antichaîne v dans $A_N(X, \prec)$ telle que $v \prec w$.

Démonstration. La preuve est la même que celle pour les algèbres, [Ani86], 1.2.. S'il existe une antichaîne v telle que $v \prec w$, alors, par définition, $v \notin N$, et donc nécessairement $w \notin N$. Inversement, soit $w \notin N$. Il existe un élément $v \prec w$ de longueur minimale telle que $v \notin N$. Les éléments u tels que $u \prec v$ sont des éléments de N , par suite v est une antichaîne. \square

2.3.14 Lemme. Soit N un idéal ordonné dans $(T(X), \prec)$ et soient u et v deux éléments de N tels que $u \cdot v \in T(X) \setminus N$. Il existe alors une décomposition unique dans $T(X)$, $u \cdot v = u \cdot u' \cdot w$, avec $u \cdot u' \in A_I(X, \prec)$, $u' \in N$ et $w \in T(X)$.

Démonstration. D'après le lemme 2.3.13, il existe une antichaîne u_1 telle que $u_1 \prec u \cdot v$. Nécessairement u_1 s'écrit sous la forme $u \cdot u'$, car $u \in N$. Pour montrer l'unicité de u_1 , supposons qu'il existe une autre antichaîne $u_2 = u \cdot u''$ telle que $u_2 \prec u \cdot v$ et $u_1 \neq u_2$. Alors, on a $u \cdot u' \prec u \cdot u''$ et $u \cdot u' \in T(X) \setminus N$, ce qui est absurde, d'où l'unicité. \square

L'ensemble Fn des éléments R -irréductibles de $T(X)$ forme un idéal ordonné de $(T(X), \prec)$. Nous désignerons par $A(X, R)$ l'ensemble des antichaînes $A_{\text{Fn}}(X, \prec)$. Les antichaînes correspondent dans ce cas aux éléments R -réductibles dans $T(X)$ dont tous les préfixes sont R -irréductibles. Dans la suite, nous considérerons les n -chaînes d'Anick relativement à cet idéal. D'après le lemme 2.3.13, un élément w de $T(X)$ est R -réductible si et seulement s'il existe une antichaîne u dans $A(X, R)$ telle que $u \prec w$.

Le résultat suivant montre que les paires critiques et les n -chevauchements équivoques sont entièrement déterminés par l'ensemble des antichaînes $A(X, R)$.

2.3.15 Lemme. *Soit $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture minimal dans \mathbb{V} et dont aucune partie gauche de R n'est formée d'un élément de X , alors :*

- i) $C_1(X, R) = X$,
- ii) $C_2(X, R)$ est en correspondance biunivoque avec R ,
- iii) $C_3(X, R)$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des paires critiques de R .

Démonstration. Par définition une 2-chaîne est un couple (v_2, v_1) tel que $v_2 \in X$ et $v_2 \cdot v_1$ est dans $A(X, R)$. Donc il existe u_1 et u_2 dans $T(X)$ et $(u, v) \in R$ tels que $v_2 \cdot v_1 = u_1 \cdot u \cdot u_2$. Tous les préfixes de $v_2 \cdot v_1$ sont R -irréductibles donc, il existe $a \in I$ tel que $u_2 = e_X(a)$. Par ailleurs, supposons que u_1 ne soit pas dans l'image de e_X , alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $u_1 \in X^{\square^n}$. Or $v_2 \in X$, par suite u est un sous-mot de v_1 , ce qui est impossible par irréductibilité de v_1 . Donc u_1 est dans l'image de e_X et $v_2 \cdot v_1 = u$ est une partie gauche de règle de R . Inversement, par minimalité, toute partie gauche u d'une règle de R s'écrit de façon unique $u = v_2 \cdot v_1$, avec $v_2 \in X$ et v_1 irréductible. L'assertion ii) en résulte.

Si R est minimal, alors toutes les paires critiques sont des ambiguïtés de chevauchement de la forme $\langle A \cdot u_2, u_1 \cdot B \rangle$ avec $u_1 \cdot v \xrightarrow{A} w_1$ et $v \cdot u_2 \xrightarrow{B} w_2$ et, alors, (u_1, v, u_2) est une 3-chaîne. Inversement toute 3-chaîne définit une ambiguïté de chevauchement, d'où l'assertion iii). \square

Notons que la minimalité de R est une condition nécessaire car, sinon, on peut avoir la situation suivante : $(w, w') \in R$ avec $w = u \cdot v$ et $(u, u') \in R$, et w ne définit pas une 2-chaîne.

2.3.16 Remarque. L'ensemble des antichaînes $A_I(X, R)$, et par suite l'ensemble des n -chaînes $C_n(X, R)$, dépendent de l'ordre que nous considérons, ici l'ordre préfixe. Il serait intéressant de considérer un autre ordre afin d'obtenir des résolutions de Kobayashi plus petites. Dans la même idée, il serait intéressant de construire les n -chaînes d'Anick avec un autre idéal que celui des formes normales Fn .

2.4 Exemples

2.4.1 Systèmes de réécriture de mots

i) Les systèmes de réécriture dans la catégorie **Ens**, munie de la structure monoïdale induite par les produits finis, sont les systèmes de réécriture de mots.

ii) Soient k un anneau commutatif et $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture dans la catégorie des k -modules $\mathbf{Mod}(k)$, munie de la structure monoïdale induite par \otimes_k . L'algèbre $(T(X), \mu_X)$ est l'algèbre tensorielle engendrée par X et \leftarrow^*_R correspond à l'idéal bilatère engendré par les éléments $u - v$ tels que $(u, v) \in R$.

iii) Soit O un ensemble : on désigne par $\mathbf{Gph}(O)$ la catégorie formée des O -graphes, i.e., les graphes dont l'ensemble des objets est O , et des morphismes de O graphes. La catégorie $\mathbf{Gph}(O)$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Ens}/O \times O$ des ensembles au-dessus de $O \times O$. Si $G : F \rightarrow O \times O$ et $G' : F' \rightarrow O \times O$ sont deux O -graphes, le produit $G \times_O G'$ est défini par la composée $\pi \circ p^* : F \times_O F' \rightarrow O \times O$, où p^* est donné par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} F \times_O F' & \xrightarrow{p^*} & O \times O \times O \\ \downarrow & & \downarrow 1 \times \delta \times 1 \\ F \times F' & \xrightarrow{G \times G'} & O \times O \times O \times O \end{array}$$

et π est la première ou deuxième projection de $O \times O \times O$ sur $O \times O$. Le produit \times_O munit la catégorie $\mathbf{Gph}(O)$ d'une structure monoïdale dont l'unité est la diagonale $\delta : O \rightarrow O \times O$. Les objets en monoïde dans $\mathbf{Gph}(O)$ sont les O -catégories.

Les produits finis de $\mathbf{Gph}(O)$ s'identifient aux produits fibrés au-dessus de $O \times O$ dans \mathbf{Ens} . Un système de réécriture dans $\mathbf{Gph}(O)$ est un couple $\langle G \mid R \rangle$ formé d'un graphe G et d'un ensemble R de couples de chemins parallèles de G .

2.4.2 Réécriture sur une monade finitaire

Nous montrons dans cette partie comment interpréter un système de réécriture de termes comme un système de réécriture dans la catégorie $\mathbf{End}_f(\mathbf{Ens})$ des endofoncteurs finitaires sur la catégorie des ensembles.

Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des colimites filtrées, i.e. des colimites relativement à une catégorie dont tous les diagrammes finis sont la base d'un cône. Un endofoncteur sur \mathcal{C} est dit *finitaire* s'il préserve les colimites filtrées. Une monade sur (T, μ, η) sur \mathcal{C} est dite finitaire si T est finitaire. Les endofoncteurs finitaires sur \mathcal{C} forment une sous-catégorie fermée pour la composition de la catégorie des endofoncteurs de \mathcal{C} : on désigne par $\mathbf{End}_f(\mathcal{C})$ cette catégorie. La catégorie des objets en monoïde dans la catégorie des endofoncteurs finitaires sur \mathcal{C} forme la catégorie des monades finitaires sur \mathcal{C} .

Un objet c de \mathcal{C} est dit *finiment présentable* si le foncteur représentable $\mathcal{C}(c, _) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est finitaire. On désigne par \mathcal{C}_{fp} la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} constituée des objets finiments présentables. Une catégorie \mathcal{C} est dite *localement finiment présentable* si elle est cocomplète et si la catégorie \mathcal{C}_{fp} est petite et dense dans \mathcal{C} . Par exemple, les catégories \mathbf{Ens} , \mathbf{Ab} , $\mathbf{Mod}(k)$, \mathbf{Gph} ou \mathbf{Cat} sont localement finiments présentables.

Désignons par \mathcal{N} le squelette de la catégorie \mathcal{C}_{fp} , on a les plongements :

$$\mathcal{N} \xrightarrow{I} \mathcal{C}_{\text{fp}} \xrightarrow{J} \mathcal{C}.$$

2.4.1 Définition. Une *signature sur \mathcal{C}* est un foncteur $\Omega : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$. Pour tout objet \mathbf{n} de \mathcal{N} , $\Omega(\mathbf{n})$ est appelé le \mathcal{C} -objet des opérations n -aires.

Une théorie algébriques finitaire au sens de Lawvere est sémantiquement décrite par une monade finitaire sur la catégorie **Ens** : il existe une équivalence entre la catégorie des théories algébriques finitaires et celle des monades finitaires sur **Ens**, (cf. proposition 5.2.5).

Afin de décrire un système de réécriture dans la catégorie $\text{End}_f(\mathbf{Ens})$, nous considérons une autre interprétation de la catégorie $\text{End}_f(\mathbf{Ens})$.

Le résultat suivant, dû à Kelly, montre qu'un foncteur sur \mathcal{C} est finitaire lorsqu'il est l'extension de Kan à gauche de sa restriction à \mathcal{C}_{fp} .

2.4.2 Théorème ([Kel82], 7.6). *Soit \mathcal{C} une catégorie localement finiment présentable, un endofoncteur T sur \mathcal{C} est finitaire si et seulement s'il est l'extension de Kan à gauche de TJ relativement au plongement $J : \mathcal{C}_{\text{fp}} \hookrightarrow \mathcal{C}$. De plus, le plongement J induit une équivalence de catégories :*

$$\mathcal{C}^{\mathcal{C}_{\text{fp}}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Lan}_J} \\ \xleftarrow{\text{Res}_J} \end{array} \text{End}_f(\mathcal{C}),$$

où Res_J est la restriction relativement à J et Lan_J l'extension de Kan à gauche relativement à J .

Si $H : \mathcal{C}_{\text{fp}} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur et a est un objet de \mathcal{C} , alors le foncteur Lan_J est défini par :

$$(\text{Lan}_J H)(a) = \mathcal{C}(J, a) \otimes_{\mathcal{C}_{\text{fp}}} H.$$

La catégorie $\mathcal{C}^{\mathcal{C}_{\text{fp}}}$ est munie d'une structure monoïdale Δ définie de la façon suivante. Si H et K sont deux objets de $\mathcal{C}^{\mathcal{C}_{\text{fp}}}$, alors :

$$H \Delta K := (\text{Lan}_J H)(\text{Lan}_J K)J.$$

Le produit Δ est associatif d'unité J . L'équivalence du théorème 2.4.2, entre les catégories monoïdales $(\mathcal{C}^{\mathcal{C}_{\text{fp}}}, \Delta, J)$ et $(\text{End}_f(\mathcal{C}), \circ, 1_{\mathcal{C}})$, préserve la structure monoïdale. La catégorie des monades finitaires sur \mathcal{C} est ainsi équivalente à la catégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{C}^{\mathcal{C}_{\text{fp}}})$.

Nous renvoyons à [Kel93],4, pour les détails de ces constructions.

Considérons le cas où $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$. La catégorie \mathbf{Ens}_{fp} s'identifie à la catégorie des ensembles finis et on a un plongement $I : \mathbb{N}_d \hookrightarrow \mathbf{Ens}_{\text{fp}}$ de la catégorie discrète des entiers naturels \mathbb{N}_d dans \mathbf{Ens}_{fp} . D'après le lemme 2.3.3, le foncteur oublie :

$$\mathbf{Mon}(\mathbf{Ens}^{\mathbf{Ens}_{\text{fp}}}) \xrightarrow{U} \mathbf{Ens}^{\mathbf{Ens}_{\text{fp}}} \xrightarrow{\mathbf{Ens}^I} \mathbf{Ens}^{\mathbb{N}_d},$$

associant à toute monade finitaire T la suite $(T(n))_{n \in \mathbb{N}_d}$, possède un adjoint à gauche \mathbb{L} . D'après le lemme 2.3.3, si $\Omega : \mathbb{N}_d \rightarrow \mathbf{Ens}$ est une signature, alors l'objet en monoïde libre engendré par Ω est $(\mathbb{L}(\Omega), \mu, \eta)$ défini par :

$$\mathbb{L}(\Omega) = \coprod_{n \geq 0} \Omega^{\Delta n}, \quad \text{avec } \Omega^{\Delta 0} = J, \quad \Omega^{\Delta n+1} = (J \coprod \Omega) \Delta \Omega^{\Delta n},$$

où η est l'inclusion $J \hookrightarrow \coprod_{n \geq 0} \Omega^{\Delta n}$ et la multiplication $\mu : \mathbb{L}(\Omega) \Delta \mathbb{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{L}(\Omega)$ est induite par les morphismes $\Omega^{\Delta n} \Delta \Omega^{\Delta m} \xrightarrow{\mu_{n,m}} \Omega^{\Delta n+m}$.

Cette construction correspond à la construction de la théorie algébrique libre donnée en 5.3.1 et basée sur le graphe cartésien Ω^c engendré par Ω vue comme un \mathbb{N} -graphe. Les éléments de $\Omega^{\Delta n}$ correspondent aux termes de profondeur au plus n , avec la terminologie de 5.3.1.

Un système de réécriture de termes s'interprète comme un système de réécriture de théories algébriques, la réciproque n'est pas vraie. Par suite un système de réécriture de termes s'interprète comme un système de réécriture dans la catégorie monoïdale $(\mathbf{Ens}^{\mathbf{Ens}_{\text{tp}}}, \Delta, J)$.

2.5 Modules sur un \mathbb{V} -monoïde

D'après Quillen [Qui70], voir aussi [Bec67], une catégorie des coefficients pour la (co)homologie d'un \mathbb{V} -monoïde \mathcal{M} est la catégorie des objets en groupe abélien dans $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})/\mathcal{M}$. Notons que, sous l'hypothèse où \mathbf{V} est munie de produits fibrés, la notion d'objets en groupe abélien a un sens dans $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})/\mathcal{M}$.

Une autre description est donnée dans [Bau97] en terme de \mathcal{M} -biobjets. Si ${}^{\mathcal{M}}\mathbf{V}^{\mathcal{M}}$ est la catégorie des \mathcal{M} -biobjets dans \mathbf{V} :

2.5.1 Lemme ([Bau97], 1.5). *Pour tout monoïde \mathcal{M} dans \mathbf{V} , on a une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{Ab}(\mathbf{Mon}(\mathbb{V})/\mathcal{M}) \approx \mathbf{Ab}({}^{\mathcal{M}}\mathbf{V}^{\mathcal{M}}/M).$$

2.5.1 Modules de Anick

Soit $\mathcal{M} = (M, \mu, \eta)$ un \mathbb{V} -monoïde. Le foncteur oublie

$$U : {}^{\mathcal{M}}\mathbf{V}^{\mathcal{M}}/M \longrightarrow \mathbf{V}/M$$

possède un adjoint à gauche F , défini par :

$$F(X \xrightarrow{x} M) = M \square X \square M \xrightarrow{1 \square x \square 1} M \square M \square M \xrightarrow{\mu(1 \square \mu)} M.$$

2.5.2 Lemme ([Bau97]). *Le foncteur oublie :*

$$U : \mathbf{Ab}({}^{\mathcal{M}}\mathbf{V}^{\mathcal{M}}/M) \longrightarrow {}^{\mathcal{M}}\mathbf{V}^{\mathcal{M}}/M$$

possède un adjoint à gauche $(_)_{ab}$, appelé foncteur d'abélianisation.

Soient $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture dans \mathbb{V} et $C_n(X, R)$ l'ensemble des n -chaînes de Anick. Désignons par \mathcal{M} le \mathbb{V} -monoïde présenté par $\langle X \mid R \rangle$ et par $\mu^n : M^{\square n} \longrightarrow M$ le produit n -ième itéré du produit μ .

On considère le morphisme dans \mathbf{V} :

$$c_n := C_n(X, R) \xrightarrow{\mu^n} T(X) \xrightarrow{\pi} M$$

où π désigne la projection dans \mathbf{V} de $T(X)$ sur M .

Avec les notations précédentes :

2.5.3 Définition. Soit $\langle X \mid R \rangle$ un système de réécriture dans \mathbb{V} . Le n -ième module de Anick de $\langle X \mid R \rangle$ est l'objet en groupe abélien $(F(c_n))_{ab}$ dans la catégorie $\mathbf{Mon}(\mathbb{V})/(\mathcal{L}(X)/\leftarrow^*_R)$.

Chapitre 3

Décidabilité des monoïdes et homologie

Ce chapitre dresse un état de l'art sur les critères de finitude homologique pour la convergence des systèmes de réécriture de monoïdes (ensemblistes). Nous rappelons la construction de la résolution de Squier dans la section 3.2.

Pour la réécriture de mots dans les monoïdes, des généralisations de la méthode de Squier ont été obtenues par plusieurs auteurs, nous en faisons l'inventaire dans la section 3.4. Ces méthodes ont été introduites pour obtenir des critères de finitude pour la convergence, mais restent essentiellement des méthodes effectives de calcul de l'homologie des monoïdes à partir de présentations convergentes.

Dans ce chapitre, nous précisons l'idée suivante.

La procédure de complétion de Knuth-Bendix, pour un système de réécriture, est interprétée par une résolution acyclique formée de modules librement engendrés par les chevauchements équivoques. L'opérateur bord décompose ces chevauchements et l'homotopie contractante recompose à chaque étape, par le choix d'une forme normale, les défauts de confluence locale.

3.1 Une procédure de décision pour les monoïdes

Nous renvoyons le lecteur à [Squ87b] pour un exposé plus complet sur les critères homologiques contraignant l'existence de présentations convergentes, dans le cas de la réécriture de mots, ou encore à [Laf91] pour un exposé introductif.

Soient \mathbf{M} un monoïde et (Σ, \approx) une présentation de \mathbf{M} par générateurs et relations. On désigne par Σ^* le monoïde libre engendré par Σ et par \bar{u} l'image d'un mot u de Σ^* par la projection $\Sigma^* \rightarrow \mathbf{M}$. Le problème de mots dans \mathbf{M} est le problème de décision suivant :

Instance : u et v sont deux mots de Σ^* .

Question : A-t-on $\bar{u} \approx \bar{v}$ dans \mathbf{M} ?

L'algorithme de la forme normale est une procédure permettant de résoudre le problème de mots dans \mathbf{M} . Il est basé sur le résultat suivant :

3.1.1 Proposition ([Baa98]_b). *Un système de réécriture $\langle \Sigma \mid R \rangle$ constitue une procédure de décision pour le problème de mots dans un monoïde \mathbf{M} , s'il satisfait aux assertions suivantes :*

- i) *R est fini,*
- ii) *R est convergent,*
- iii) *$\langle \Sigma \mid R \rangle$ est une présentation de \mathbf{M} .*

L'assertion ii) assure que tout représentant dans Σ^* d'un mot de \mathbf{M} admet une unique forme normale dans Σ^* . L'assertion i) assure que le calcul de cette forme normale est décidable.

Ainsi, la réécriture constitue-t-elle une méthode universelle pour la décidabilité dans un monoïde? Autrement dit :

3.1.2 Question. *Un monoïde de type fini avec un problème de mots décidable admet-il une présentation convergente de type fini par réécriture ?*

Cette question est restée longtemps un problème ouvert. Seule était connue une réponse négative partielle :

3.1.3 Proposition ([Jan85, Kap85]). *Il existe un système de réécriture $\langle \Sigma \mid R \rangle$ vérifiant les deux assertions suivantes :*

- i) *le monoïde présenté par $\langle \Sigma \mid R \rangle$ possède un problème de mots décidable,*
- ii) *il n'existe pas de système de réécriture $\langle \Sigma \mid R' \rangle$ équivalent à $\langle \Sigma \mid R \rangle$ convergent et de type fini.*

Démonstration. Des contre-exemples permettent de montrer cette proposition. Kapur et Narendran, [Kap85], montrent que le monoïde \mathbf{M} , présenté par le système :

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad R = \{aba \approx bab\},$$

ne possède pas de présentation convergente de type fini sur le même nombre de générateurs. De plus, ils montrent que le système :

$$\Sigma' = \{a, b, c\}, \quad R' = \{ab \approx c, ca \approx bc\},$$

est équivalent à $\langle \Sigma \mid R \rangle$. Le système $\langle \Sigma' \mid R' \rangle$ peut être complété en un système convergent de type fini en considérant les règles

$$ab \rightarrow c, \quad ca \rightarrow bc, \quad bcb \rightarrow cc, \quad ccb \rightarrow acc.$$

Par suite le monoïde \mathbf{M} est décidable.

Un autre contre-exemple est donné par Jantzen, [Jan85], avec le système :

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad R = \{abba \approx 1\},$$

n'admettant pas de système équivalent convergent de type fini sur Σ , mais équivalent au système convergent :

$$\Sigma' = \{c, d, x, y\}, \quad R' = \left\{ \begin{array}{llll} cd \approx 1, & xy \approx 1, & cx \approx yc, & dx \approx yd, \\ dc \approx 1, & yx \approx 1, & cy \approx xc, & dy \approx xd \end{array} \right\}.$$

□

Ce résultat montre qu'en changeant le nombre des générateurs, il est possible d'extraire d'une présentation non convergente une présentation convergente et de type fini. Nous reformulons la question 3.1.2 :

3.1.4 Question. *Soit $\langle \Sigma \mid R \rangle$ une présentation non convergente d'un monoïde décidable, existe-t-il une présentation convergente de type fini équivalente ?*

Une réponse affirmative à 3.1.4 aurait pour conséquence que pour les monoïdes décidables l'algorithme de la forme normale constituerait toujours une procédure de décision pour le problème de mots.

En utilisant des arguments de nature homologique, Squier répond négativement à la question 3.1.4, [Squ87a]. La proposition 3.1.3 montre que l'existence d'une présentation convergente de type fini, pour un monoïde, est une propriété intrinsèque au monoïde et indépendante d'une présentation donnée. L'idée développée par Squier est d'encapsuler cette propriété dans une propriété sur l'homologie du monoïde, qui est un invariant indépendant de la présentation.

3.2 Un critère de finitude homologique

3.2.1 Théorème ([Squ87a]). *Il existe un monoïde de type fini dont le problème de mots est décidable et qui n'admet pas de présentation convergente de type fini.*

La preuve de ce résultat est faite en deux temps. Dans un premier temps Squier construit, à partir d'une présentation convergente d'un monoïde, une résolution libre. Cette résolution, plus petite que la résolution standard, reflète les propriétés combinatoires de chevauchement des règles du système de réécriture. Squier construit cette résolution en étendant le calcul différentiel libre de Fox, [Fox53]. Ainsi, à tout système de réécriture convergent $\langle \Sigma \mid R \rangle$ d'un monoïde \mathbf{M} est associé une résolution libre de longueur 4 du \mathbf{M} -module trivial \mathbb{Z} . Si le système de réécriture est de type fini, alors la résolution est de type fini. On dit alors que le monoïde \mathbf{M} est dit de type PF_3 sur \mathbb{Z} .

Une conséquence immédiate est que le troisième groupe d'homologie $H_3(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ du monoïde \mathbf{M} est de type fini. La résolution ainsi construite mesure, d'une certaine façon, l'obstruction à l'existence d'une présentation convergente de type fini pour un monoïde.

La deuxième étape de la preuve de 3.2.1 consiste alors, à construire un monoïde décidable dont le troisième groupe d'homologie n'est pas de type fini.

3.2.1 Critères de finitude PF_*

Nous renvoyons le lecteur à [Bie76], [Bro82], chap. VIII, et [Lod00] pour les conditions PF_* dans le cas des groupes. Nous développerons cette notion plus en détail dans la section 4.3.

3.2.2 Définition ([Bie76]_b). Un monoïde \mathbf{M} est dit PF_n à gauche (resp. à droite) si le \mathbf{M} -module à gauche (resp. à droite) trivial \mathbb{Z} possède une résolution partielle de \mathbf{M} -modules à gauche (resp. à droite) projectifs de type fini :

$$P_n \rightarrow P_{n-1} \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Tous les monoïdes sont de type PF_0 en considérant l'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}\mathbf{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\epsilon(u) = 1$. Un monoïde finiment engendré est de type PF_1 . En effet l'idéal d'augmentation de \mathbf{M} est un \mathbf{M} -module librement engendré par l'ensemble des générateurs. La réciproque est vrai dans le cas des groupes mais pas dans le cas des monoïdes, [Squ87b], 3. Ex.3. . Les monoïdes admettant une présentation finie, sont de type PF_2 . Cependant, la réciproque est fausse dans le cas des monoïdes et reste un problème ouvert dans le cas des groupes. On renvoie aux références citées précédemment pour la condition PF_2 dans le cas des groupes. Les conditions PF_n à gauche et PF_n à droite sont équivalentes dans le cas des groupes, mais pas dans le cas des monoïdes.

Il est important de remarquer qu'en général, la condition PF_n n'implique pas la condition PF_{n+1} . Le premier exemple est donné par Stallings, [Sta63], avec la construction d'un groupe de type fini dont le troisième groupe d'homologie n'est pas de type fini.

Si un monoïde \mathbf{M} est de type PF_n , $n \geq 0$, alors les groupes abéliens $H_k(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ sont de type fini, pour tout entier $k \leq n$. En effet, l'homologie d'un monoïde \mathbf{M} à coefficients dans un \mathbf{M} -module M , définie comme l'homologie singulière de l'espace classifiant de \mathbf{M} à coefficient dans \mathbf{M} , s'interprète en terme de foncteur dérivé Tor :

$$H_*(\mathbf{M}, M) \simeq \text{Tor}_*^{\mathbf{M}}(\mathbb{Z}, M).$$

3.2.2 La résolution de Squier

La preuve du théorème 3.2.1 est obtenue à partir du résultat suivant et du contre-exemple 3.2.6.

3.2.3 Théorème ([Squ87a], 4.1). *Tout monoïde admettant une présentation convergente de type fini est de type PF_3 sur \mathbb{Z} .*

La preuve de 3.2.3 consiste à construire une résolution libre mettant en jeu l'ensemble des paires critiques.

3.2.4 Lemme. *Soient \mathbf{M} un monoïde et $\langle \Sigma \mid R \rangle$ une présentation convergente et minimale de \mathbf{M} . Si \mathcal{P} désigne l'ensemble des paires critiques de $\langle \Sigma \mid R \rangle$, alors il existe une résolution de \mathbf{M} -modules à gauche libres du \mathbf{M} -module trivial \mathbb{Z} :*

$$S_*(\Sigma, R) : \mathbb{Z}\mathbf{M}[\mathcal{P}] \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\mathbf{M}[R] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\mathbf{M} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Démonstration. Pour tout mot w du monoïde libre Σ^* , nous désignons par \bar{w} l'image de w par la projection $p : \Sigma^* \rightarrow \mathbf{M}$, par $\bar{1}$ l'unité de \mathbf{M} et par \hat{w} l'unique représentant irréductible de \bar{w} dans Σ^* .

Les morphismes d_2 , d_1 et ϵ de $S_*(\Sigma, R)$ sont donnés par le calcul différentiel libre de Fox [Fox53] et l'acyclicité en $\mathbb{Z}\mathbf{M}$ et $\mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma]$ ne nécessite pas l'hypothèse de convergence de R . Considérons donc, pour tout mot \bar{w} de \mathbf{M} , un représentant arbitraire \tilde{w} dans Σ^* .

Le morphisme ϵ est l'augmentation de \mathbf{M} définie par $\epsilon(\bar{w}) = 1$, pour tout mot \bar{w} de \mathbf{M} , et admet pour section le morphisme de \mathbb{Z} -module $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}$ défini par $\eta(1) = \bar{1}$. Désignons par $[a]$, $a \in \Sigma$, les générateurs du \mathbf{M} -module à gauche $\mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma]$ librement engendré par Σ . Le bord d_1 est le morphisme de \mathbf{M} -module à gauche défini par :

$$d_1([a]) = \bar{a} - \bar{1}.$$

Le morphisme d_1 satisfait trivialement l'identité $\epsilon d_1 = 0$.

Pour tout élément a de Σ , considérons la dérivation $\frac{\bar{\partial}}{\partial a}$ sur Σ^* , à valeurs dans $\mathbb{Z}\mathbf{M}$, définie par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^* & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial a}} & \mathbb{Z}\Sigma^* \\ & \searrow \frac{\bar{\partial}}{\partial a} & \downarrow \mathbb{Z}p \\ & & \mathbb{Z}\mathbf{M} \end{array}$$

où l'application $\frac{\bar{\partial}}{\partial a}$ est définie inductivement par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial a} &= 1, \quad \frac{\partial b}{\partial a} = 0, \quad \text{si } b \neq a, \\ \frac{\partial uv}{\partial a} &= \frac{\partial u}{\partial a} + u \frac{\partial v}{\partial a}, \quad \text{pour tous } u, v \in \Sigma^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'opérateur $[\] : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma]$ s'étend de façon unique en une dérivation gauche sur Σ^* , à valeurs dans le \mathbf{M} -module $\mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma]$, en posant pour tout $w \in \Sigma^*$:

$$[w] = \sum_{a \in \Sigma} \frac{\bar{\partial} w}{\partial a} [a].$$

On déduit des relations (3.2) que $[\]$ vérifie, pour tous mots u et v de \mathbf{M} , les formules :

$$[uv] = [u] + \bar{u}[v], \quad [1] = 0.$$

L'homotopie $s_0 : \mathbb{Z}\mathbf{M} \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$ est le morphisme de \mathbb{Z} -modules défini en posant, pour tout mot \bar{w} de \mathbf{M} , $s_0(\bar{w}) = [\tilde{w}]$. Le morphisme s_0 est bien défini et satisfait la relation d'homotopie $d_1 s_0 + \eta \epsilon = 1_{\mathbb{Z}\mathbf{M}}$.

Désignons par $[[A]]$, $A \in R$, les générateurs du \mathbf{M} -module libre $\mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$ engendré par l'ensemble des règles R . Le bord d_2 est le morphisme de \mathbf{M} -modules défini en posant, pour tout $r \xrightarrow{A} s \in R$:

$$d_2([[r \xrightarrow{A} s]]) = [r] - [s],$$

et satisfait trivialement la relation $d_1 d_2 = 0$. Pour tout mot \bar{w} dans \mathbf{M} , on a $w \leftrightarrow_R^* \tilde{w}$. Il existe donc une suite de chemins de réduction, éventuellement en zig-zag, notée $C(w)$, reliant w au représentant \tilde{w} de \bar{w} :



Le crochet $\llbracket \]$ s'étend à la relation de réduction \rightarrow_R en posant, pour tous $A \in R$ et $u, v \in \Sigma^*$,

$$\llbracket uAv \rrbracket = \bar{u}\llbracket A \rrbracket,$$

et, par suite, à la clôture congruente \rightarrow_R^* , en posant pour tous chemins de réductions élémentaires $F_1 * F_2 * \dots * F_n$:

$$\llbracket F_1 * F_2 * \dots * F_n \rrbracket = \sum_{i=1}^n \llbracket F_i \rrbracket.$$

L'homotopie contractante $s_1 : \mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma] \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$ est le morphisme de \mathbb{Z} -modules défini pour tout $\bar{w}[a] \in \mathbb{Z}\mathbf{M}[\Sigma]$ par : $s_1(\bar{w}[a]) = \llbracket C(\tilde{w}a) \rrbracket$. Le morphisme s_1 vérifie la relation d'homotopie $d_2 s_1 + s_0 d_1 = 1_{\mathbb{Z}\mathbf{M}[R]}$.

L'hypothèse de convergence n'intervient que pour la construction du dernier bord de la suite $\mathcal{S}_*(\Sigma, R)$. Dans la suite, nous supposons que la présentation $\langle \Sigma \mid R \rangle$ est convergente. Nous supposons aussi, sans perte de généralité d'après le lemme 2.3.9, que la présentation $\langle \Sigma \mid R \rangle$ est minimale.

On considère pour tout mot \bar{w} de \mathbf{M} l'unique représentant irréductible \hat{w} dans Σ^* . Ainsi, $C(w)$ est un chemin de réduction, i.e., ne mettant en jeu que des réductions dans le même sens.

Par hypothèse de minimalité, le \mathbf{M} -module $\mathbb{Z}\mathbf{M}[\mathcal{P}]$ est librement engendré par les ambiguïtés de chevauchement de la forme : $\langle Au_2, u_1 B \rangle$, avec $u_1 v \xrightarrow{A} w_1, vu_2 \xrightarrow{B} w_2 \in R$. Le morphisme de \mathbf{M} -modules à gauche $d_3 : \mathbb{Z}\mathbf{M}[\mathcal{P}] \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$ est défini par :

$$d_3(\langle Au_2, u_1 B \rangle) = \bar{u}_1 \llbracket B \rrbracket + \llbracket C(u_1 w_2) \rrbracket - \llbracket A \rrbracket - \llbracket C(w_1 u_2) \rrbracket.$$

Par construction d_3 satisfait l'identité $d_2 d_3 = 0$.

L'homotopie contractante $s_2 : \mathbb{Z}\mathbf{M}[R] \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}[\mathcal{P}]$ est définie par induction noethérienne. Nous définissons une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$ en posant, pour tous éléments $\bar{u}\llbracket r \xrightarrow{A} s \rrbracket$ et $\bar{v}\llbracket r' \xrightarrow{B} s' \rrbracket$ dans $\mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$, $\bar{u}\llbracket A \rrbracket \geq \bar{v}\llbracket B \rrbracket$ s'il existe un chemin de réduction $\hat{u}r \rightarrow_R^* \hat{v}r'w$, éventuellement trivial, où w est un mot de Σ^* . On note $\bar{u}\llbracket A \rrbracket > \bar{v}\llbracket B \rrbracket$ si $\bar{u}\llbracket A \rrbracket \geq \bar{v}\llbracket B \rrbracket$ et si $\hat{u}r \neq \hat{v}r'$. La relation d'ordre $>$ s'étend aux combinaisons linéaires en posant pour tous

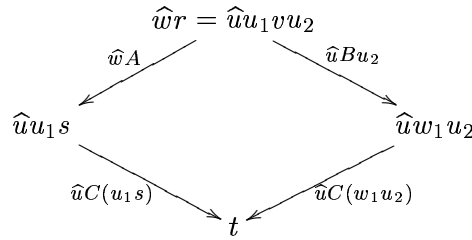
$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i \bar{u}_i \llbracket A_i \rrbracket, \quad \text{et} \quad y = \sum_{j \in J} \beta_j \bar{v}_j \llbracket B_j \rrbracket,$$

$x > y$ si, pour tout $j \in J$, il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} \llbracket A_{i_0} \rrbracket > v_j \llbracket B_j \rrbracket$. Par noéthérianité de \rightarrow_R , la relation $>$ est noéthérienne sur $\mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$.

Soit $\overline{w} \llbracket r \xrightarrow{A} s \rrbracket \in \mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$, si A est la seule réduction possible sur $\widehat{w}r$ on pose :

$$s_2(\overline{w} \llbracket r \xrightarrow{A} s \rrbracket) = 0.$$

Supposons que pour tout $X \in \mathbb{Z}\mathbf{M}[R]$ tel que $X \leq \overline{w} \llbracket r \xrightarrow{A} s \rrbracket$, $s_2(X)$ soit déjà construite. S'il existe une autre réduction sur $\widehat{w}r$, par minimalité de R , il existe une décomposition dans Σ^* : $\widehat{w}r = \widehat{u}u_1vu_2$, avec $B = (u_1v, w_1) \in R$ et $r = vu_2$. Par hypothèse, la paire critique $\langle u_1A, Bu_2 \rangle$ est confluente :

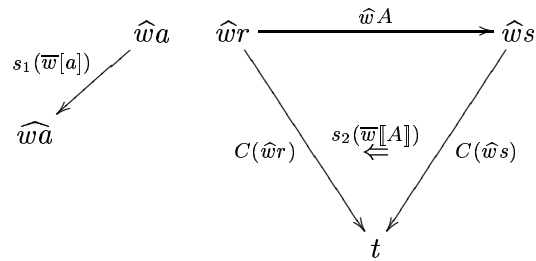


Nous posons alors :

$$s_2(\overline{w} \llbracket A \rrbracket) = \overline{u} \langle u_1A, Bu_2 \rangle - s_2(\overline{u}C(u_1s)) + s_2(\overline{u}C(w_1u_2)).$$

Le morphisme s_2 est bien défini car $\overline{u}C(u_1s) \leq \overline{w} \llbracket r \xrightarrow{A} s \rrbracket$ et $\overline{u}C(w_1u_2) \leq \overline{w} \llbracket r \xrightarrow{A} s \rrbracket$. Ainsi défini, le morphisme s_2 vérifie la relation : $d_3s_2 + s_1d_2 = 1$. \square

3.2.5 Remarque. L'image $s_1(\overline{w} \llbracket a \rrbracket)$ s'interprète comme un chemin de réduction. De la même façon $s_2(\overline{w} \llbracket A \rrbracket)$ s'interprète comme une réduction du second ordre entre chemins de réduction :



Nous renvoyons à [Laf91], 5.11, pour plus de détails sur cette interprétation.

Par ailleurs, la résolution acyclique $S_*(\Sigma, R)$ peut s'interpréter topologiquement par un espace contractile obtenu à partir de l'espace classifiant du monoïde \mathbf{M} par ajout de dégénérescences. Cette opération est décrite dans [Bro92] sous la terminologie de «schema de contraction».

3.2.3 Contre-exemples

La condition PF_2 n'implique pas la condition PF_3 , un contre exemple est donné par Stallings, [Sta63], avec un groupe de type fini et dont le troisième groupe d'homologie n'est pas de type fini. Il existe donc des monoïdes de type fini n'admettant pas de présentation convergente de type fini. L'idée de Squier fut donc de construire un monoïde \mathbf{M} de type fini, décidable et tel que le groupe $H_3(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ n'est pas de type fini.

Le principe consiste à construire un jeu de règles contenant une famille infinie $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que l'ensemble forme un système noëthérien et confluent. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation P_n doit s'exprimer en fonction d'une même relation P_{n_0} afin que la présentation soit de type fini. Alors, par convergence, le problème de mot dans le monoïde défini par cette présentation est décidable.

Enfin, en l'absence de triple critiques, le bord d_3 de la suite (3.1) est injectif, [Squ87a], Thm. 3.2. . Il suffit alors de choisir les règles de telle façon qu'il n'existe pas de triples critiques et que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fasse apparaître une infinité de paires critiques. Sous ces conditions, le troisième groupe d'homologie du monoïde ne peut être de type fini.

3.2.6 Exemple ([Squ87a], 4.5). Soient k un entier naturel et \mathbf{M}_k le monoïde présenté par le système de réécriture $\langle \Sigma_k \mid R_k \rangle$ avec

$$\Sigma_k = \{a, b, t, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\},$$

et R_k est formé de l'ensemble des règles

$$\begin{array}{lll} P_n : at^n b \rightarrow 1, & A_i : x_i a \rightarrow atx_i, & T_i : x_i t \rightarrow tx_i, \\ B_i : x_i b \rightarrow bx_i, & Q_i : x_i y_i \rightarrow 1, & \end{array}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \dots, k\}$. Pour tout k , \mathbf{M}_k est finiment engendré et, pour tout $k \geq 1$, \mathbf{M}_k est finiment présenté. Par ailleurs, pour tout $k \geq 0$, l'ensemble des relations R_k est convergent. Par suite, pour tout $k \geq 0$, le monoïde \mathbf{M}_k possède un problème de mots décidable. Enfin, pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe une paire critique :

$$\begin{array}{ccc} & x_i a t^n b & \\ x_i P_i \swarrow & & \searrow A_i t^n b \\ x_i & & atx_i t^n b \end{array}$$

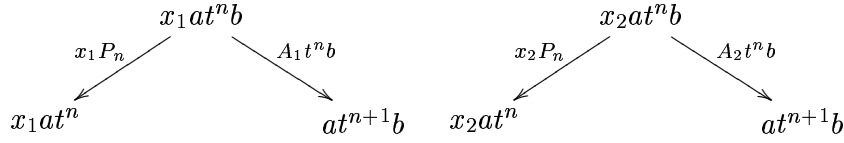
L'ensemble R_k n'admet pas de triples critiques, par suite, pour tout entier k , $H_3(\mathbf{M}_k, \mathbb{Z}) = \text{Ker}(1 \otimes d_3)$ est le groupe abélien libre de base :

$$\begin{aligned} & \{ \langle P_n, A_i \rangle - \langle P_n, A_0 \rangle + n(\langle P_1, A_i \rangle - \langle P_1, A_1 \rangle) + \\ & (1 - n)(\langle P_0, A_i \rangle - \langle P_0, A_1 \rangle) \mid n \geq 2, i \geq 2 \}. \end{aligned}$$

Lafont-Prouté ont extrait de l'exemple 3.2.6 un exemple minimal avec $k = 2$, [Laf91], 3.6. :

$$\Sigma_2 = \{a, b, t, x_1, x_2\}, \quad R = \{at^n b \xrightarrow{P_2} at^n, x_1 a \xrightarrow{A_1} at, x_2 a \xrightarrow{A_2} at\}.$$

L'ensemble R engendre deux familles infinies de paires critiques :



3.2.7 Remarque. Il est difficile, pour un entier $n \geq 4$ quelconque, de construire de façon explicite un opérateur bord d_n mettant en jeu les n -chevauchements critiques et prolongeant la résolution $S_*(\Sigma, R)$. La construction d'une telle résolution explicite en tous degrés reste un problème ouvert.

3.3 Les résolutions ordonnées

Des généralisations de la résolution de Squier aux degrés supérieurs, mettant en jeu les n -chevauchements équivoques, ont été obtenues par plusieurs auteurs dans le cas de la réécriture des monoïdes. Ces résolutions sont construites par induction noethérienne et les opérateurs bords ne sont pas définis de façon explicites.

Anick, [Ani86], introduit une méthode générale basée sur la notion d'antichaîne pour construire de telles résolutions. Il l'applique aux algèbres associatives unitaires et augmentées sur un corps qui admettent une présentation convergente. Cette construction est étendue aux algèbres de chemins, [Ani87]. Groves, [Gro90], propose une construction en termes de complexe cubique. Brown, [Bro92], construit une résolution explicite par voie topologique en utilisant la méthode de «compression» du classifiant.

Tous les travaux cités ci-dessus ont pour but de montrer que si un monoïde possède une présentation convergente et de type fini, alors il est de type PF_∞ . Une conséquence immédiate est que les groupes d'homologie $H_n(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ d'un tel monoïde \mathbf{M} sont de type fini pour tout $n \geq 0$.

La construction la plus proche de celle de Squier est celle donnée par Kobayashi, [Kob90]. Pour des présentations convergentes et minimales les trois premiers crans de la résolution de Kobayashi sont les mêmes que ceux de la résolution de Squier.

La résolution de Kobayashi généralise la résolution de Squier en tous degrés en considérant pour, tout $n \geq 2$, les n -chevauchements critiques. De plus, elle est construite à partir d'un système de réécriture convergent de monoïdes munis d'une action à gauche d'un système de réécriture à droite minimal. Autrement dit, c'est une résolution associée à un système de réécriture dans un monoïde non libre. C'est une résolution ordonnée construite en tous degrés par induction noethérienne : les opérateurs bords ainsi que les homotopies contractantes sont définies par induction et ne sont pas donnés de façon explicite. La construction explicite d'un opérateur bord en tous degrés pour une résolution utilisant les antichaînes de Anick reste à ce jour un problème ouvert.

Un des intérêts de cette résolution est qu'elle est implémentable. Une implémentation en langage C a été réalisée par Buchheit dans le but de calculer, en tous degré, l'homologie des monoïdes munis de présentation convergente de type fini, [Buc91].

Soit $\langle \Sigma \mid S \rangle$ un système de réécriture de monoïde, la relation de *réduction à droite* \rightarrow_S^d engendrée par S est définie en posant, pour tous $x, y \in \Sigma^*$, $x \rightarrow_S^d y$ s'il existe $(u, v) \in S$ et $w \in \Sigma^*$ tels que $x = uw$ et $y = vw$. On dit que S est à *préfixes libres* si, pour tous $(u, v), (u', v') \in S$, u n'est pas un préfixe de u' .

Soit $\rightarrow_{R \cup S}$ la relation de réduction $\rightarrow_R \cup \rightarrow_S^d : S$ est dit convergent sur R si $\rightarrow_{R \cup S}$ est convergente et S est dit R -réduit si, pour tout $(u, v) \in S$, u et v sont R -irréductibles.

Avec les notations précédentes :

3.3.1 Théorème ([Kob90], 3.1). *Soient \mathbf{M} un monoïde, $\langle \Sigma \mid R \rangle$ une présentation convergente de \mathbf{M} et $\langle \Sigma \mid S \rangle$ un système de réécriture à droite, R -réduit et convergent sur R tels que $R \cup S$ est fini. Si \mathbf{N} est le monoïde obtenu par quotient de Σ^* par la relation de congruence engendrée par \rightarrow , alors, pour tout anneau commutatif k , le \mathbf{M} -module à droite $k\mathbf{N}$ est de type PF_∞ .*

3.4 D'autres critères de finitude

La question 3.1.2 résolue, la suivante reste encore un problème ouvert :

3.4.1 Question. *Existe-t-il un invariant caractérisant la classe des monoïdes décidables admettant une présentation convergente de type fini ?*

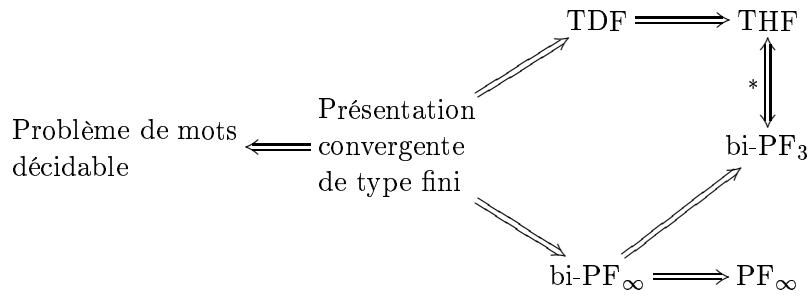
Il ne peut pas s'agir de la condition de finitude PF_∞ car le monoïde \mathbf{M}_1 de l'exemple 3.2.6 est décidable et de type PF_∞ . De plus, le monoïde \mathbf{M}_1 n'admet pas de présentation convergente de type fini, [Squ94b], Sec. 6..

Il est donc nécessaire de construire des critères de finitude plus restrictifs. Le critère Type de Dérivation Fini (TDF) introduit par Squier est le plus «fin» connu. Il consiste à munir le graphe des réductions d'une base d'homotopie sur les chemins de réductions parallèles permettant d'identifier les chemins de même source. On dit que la présentation est TDF si cette base d'homotopie est finiment engendrée. Autrement dit, si deux chemins de réductions quelconques de même source peuvent se transformer l'un en l'autre par un nombre fini de déformations élémentaires. Squier montre que les monoïdes admettant une présentation convergente et de type fini satisfont à la propriété TDF, [Squ94b]. Cremanns et Otto ont montré que tout monoïde TDF est de type PF_3 , [Cre94].

Il existe un autre critère de finitude homotopique plus faible introduit par Wang et Pride, appelé Type d'Homotopie Finie (THF), [Wan00]. Les monoïdes TDF sont THF. L'intérêt du critère homotopique THF est qu'il est équivalent au critère homologique bi-PF_3 pour les monoïdes de type fini. Ce résultat est montré par Kobayashi et Otto dans [Kob03].

Les principaux invariants pour la classification des monoïdes de type fini, décidables et

convergenents sont résumés sur le schéma suivant :



3.4.2 Remarque. L'équivalence des critères de finitude bi-PF_3 et THF pour les monoïdes de type fini suggère de trouver une équivalence du critère de finitude TDF avec un critère de finitude (co)homologique. L'intérêt de ces derniers est qu'ils sont en général plus facilement calculables.

Nous finissons ce chapitre en forme d'état de l'art par le problème toujours ouvert :

3.4.3 Question. *Le critère type de dérivation fini est-il suffisant pour l'existence d'une présentation convergente de type fini ?*

Chapitre 4

Homologie des petites catégories et réécriture

Dans ce chapitre, nous généralisons les résolutions libres de Squier (3.1) et Kobayashi (3.3.1) à une petite catégorie présentée par un système de réécriture convergent. Ces constructions seront utilisées, dans le chapitre suivant, dans le cas de la réécriture de termes.

Afin de fixer la terminologie, la section 4.2 est consacrée à quelques rappels sur la notion de module sur une catégorie préadditive. Pour un exposé complet, nous renvoyons le lecteur à [Mit72]. La section 4.4 constitue un bref rappel sur l'homologie et la cohomologie des petites catégories. Nous généralisons, dans la section 4.6, la résolution de Squier et dans la section 4.8 la résolution de Kobayashi.

4.1 Introduction

La première construction de petites résolutions, pour des algèbres de chemins munies de présentations convergentes, a été donnée par Anick, [Ani87], comme généralisation des techniques basées sur les antichaînes introduites dans [Ani86] pour les algèbres associatives. Morace, [Mor95], donne une généralisation de la résolution de Kobayashi aux petites catégories. Enfin, Citterio, [Cit01], généralise la méthode de Brown de «compression» du classifiant, à l'espace classifiant d'une petite catégorie munie d'une présentation convergente.

En théorie des représentations des algèbres de dimension finie, un des intérêts des petites catégories, présentées par graphes et relations, est qu'elles permettent de construire des petites résolutions projectives de modules sur l'algèbre des chemins de la catégorie, [Bar01, Ani87].

En informatique, les algèbres de chemins interviennent pour modéliser des algèbres de processus dans les automates, [Gou95], ou des structures de données avec, par exemple, les «champs basés sur une structure de groupe», [Gia96], ou encore, des processus de réduction en réécriture. Dans tous ces cas, on s'intéresse aux quotients de ces algèbres.

4.2 Catégories de foncteurs

Dans cette section, A désignera un anneau commutatif, \mathbf{Mod} la catégorie des A -modules et \otimes le produit tensoriel sur A .

Une A -catégorie est la donnée d'une petite catégorie \mathcal{C} , munie d'une structure de A -module sur chacun de ses ensembles de morphismes $\mathcal{C}(p, q)$, telle que la composition dans \mathcal{C} soit A -bilinéaire. La A -catégorie enveloppante de \mathcal{C} est la catégorie $\mathcal{C}^e = \mathcal{C}^{\text{op}} \otimes_A \mathcal{C}$.

Un \mathcal{C} -module à droite sur A est la donnée d'un foncteur covariant $M : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Mod}$. On dit que x est un élément du module M , s'il existe un objet p de \mathcal{C} tel que $x \in M(p)$. L'action à droite de \mathcal{C} sur M est définie en posant, pour tout morphisme $w \in \mathcal{C}(p, q)$, $x.w := M(w)(x)$. Par contravariance de M , pour tous morphismes composables w et w' , on a $x.(ww') = (x.w)w'$ et $x.1_p = x$.

De la même façon, un \mathcal{C} -module à gauche sur A est un foncteur covariant $M : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}$, l'action à gauche est définie par $w.x = M(w)(x)$. Un \mathcal{C} -bimodule est la donnée d'un \mathcal{C}^e -module à gauche. Si $x \in M$, on notera $(w, w').x := M(w, w')(x) = w'.x.w$ l'action de \mathcal{C}^e sur M . Si M est un \mathcal{C} -bimodule, on désignera par $u^* = M(u, 1)$ l'action contravariante de u et par $v_* = M(1, v)$ l'action covariante de v . Nous désignerons par $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ la catégorie des \mathcal{C} -modules à gauche sur A . Pour toute \mathbb{Z} -catégorie \mathcal{A} on a les isomorphismes : $(\mathcal{A}^A)^{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{A}^{A \otimes_A \mathcal{C}} \simeq \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$. Par suite, la catégorie des A -foncteurs de \mathcal{C} dans \mathbf{Mod} est isomorphe à la catégorie des foncteurs additifs de \mathcal{C} dans \mathbf{Ab} . Si \mathbf{C} est une petite catégorie, \mathbf{AC} désigne la A -catégorie librement engendrée par \mathbf{C} , i.e., les objets de \mathbf{AC} coïncident avec ceux de \mathbf{C} et, pour tous objets p et q , $\mathbf{AC}(p, q)$ est la A -module libre engendré par $\mathbf{C}(p, q)$.

4.2.1 Modules libres

La catégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ est abélienne et l'isomorphisme de Yoneda pour les A -modules, $\text{Hom}_A(A, M) \simeq M$, se généralise aux \mathcal{C} -modules en un isomorphisme :

$$\mathbf{Mod}(\mathcal{C})(\mathcal{C}, M) \simeq M,$$

naturel en M . L'ensemble des foncteurs représentables $\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{C}(p, -) \mid p \in |\mathcal{C}|\}$ forme, ainsi, un ensemble générateur de petits projectifs pour la catégorie des \mathcal{C} -modules à gauche $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$. Autrement dit, les projectifs de $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ sont des sommes ou des facteurs directs de sommes de modules de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.

Un ensemble $X = \{x_i \in M \mid i \in I\}$ forme une famille génératrice d'un \mathcal{C} -module à gauche M s'il existe un épimorphisme de \mathcal{C} -modules à gauches :

$$\bigoplus_{\substack{i \in I \\ p_i \in |\mathcal{C}|}} \mathcal{C}(p_i, -) \longrightarrow M,$$

associant x_i à 1_{p_i} , où pour tout $i \in I$, $x_i \in M(p_i)$. Le module M est dit libre de base X si cet épimorphisme est un isomorphisme de \mathcal{C} -modules à gauches :

$$M \simeq \bigoplus_{\substack{i \in I \\ p_i \in |\mathcal{C}|}} \mathcal{C}(p_i, -).$$

De façon équivalente, le module M est libre de base $\{x_i \mid i \in I\}$ si tout élément x de M se décompose de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i,$$

où, si $x \in M(p)$, pour tout $i \in I$, $x_i \in M(p_i)$ et $w_i \in \mathcal{C}(p_i, p)$.

Un module M est dit de *type fini* s'il possède un ensemble fini de générateurs et *cyclique* s'il n'en possède qu'un seul.

4.2.2 Modules sur une catégorie additive

Une \mathbb{Z} -catégorie est dite *additive* si elle possède des produits finis. Toute \mathbb{Z} -catégorie, munie de produits finis, possède aussi des sommes et ces sommes coïncident, à isomorphisme près, avec les produits. En particulier, si \mathbf{C} est une petite catégorie munie de produits finis, alors $\mathbb{Z}\mathbf{C}$ est additive. En notant $p+q$ la somme de p et q dans $\mathbb{Z}\mathbf{C}$, il existe un isomorphisme $j : p+q \xrightarrow{\sim} p \times q$. On désignera par $l_1^{p+q} : p \rightarrow p+q$ et $l_2^{p+q} : q \rightarrow p+q$ les morphismes de $\mathbb{Z}\mathbf{C}$ solutions du problème universel de somme. Pour tout morphisme $w : p \rightarrow n$ et $w' : q \rightarrow n$ dans $\mathbb{Z}\mathbf{C}$, on note $(w, w') : p+q \rightarrow n$ l'unique morphisme de $\mathbb{Z}\mathbf{C}$ tel que $(w, w')l_1^{p+q} = w$ et $(w, w')l_2^{p+q} = w'$. Il existe un isomorphisme canonique de \mathbf{C} -modules à gauche :

$$\Phi : \mathbb{Z}\mathbf{C}(p+q, -) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\mathbf{C}(p, -) \oplus \mathbb{Z}\mathbf{C}(q, -),$$

associant, à tout morphisme v de $\mathbb{Z}\mathbf{C}$ et de source $p+q$, l'élément (vl_1^{p+q}, vl_2^{p+q}) .

Par suite, si \mathbf{C} est munie de produits finis, tous les \mathbf{C} -modules à gauche (resp. à droite) de type fini sont cycliques.

4.2.3 Produit tensoriel

Le produit tensoriel, sur une petite catégorie \mathbf{C} , est le bifoncteur préservant les colimites en les deux variables :

$$- \otimes_{\mathbf{C}} - : \mathbf{Mod}(\mathbf{C}^{\text{op}}) \otimes \mathbf{Mod}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Mod}$$

défini pour tout \mathbf{C} -module à droite M et tout \mathbf{C} -module à gauche N par :

$$M \otimes_{\mathbf{C}} N = \bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} M(p) \otimes N(p) / Q$$

où Q est le sous-module de $\bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} M(p) \otimes N(p)$ librement engendré par les éléments :

$$x \cdot w \otimes y - x \otimes w \cdot y, \quad w \in \mathbf{C}(q, p), \quad x \in M(p), \quad y \in N(q).$$

Par l'isomorphisme de Yoneda, $\mathbf{Mod}(\mathbf{C})(\mathbf{AC}(p, -), N) \simeq N(p)$, il existe deux isomorphismes fonctoriels en p , M et N dans \mathbf{Mod} :

$$\begin{array}{ll} M \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{AC}(p, -) \simeq M(p) & \mathbf{AC}(=, p) \otimes_{\mathbf{C}} N \simeq N(p) \\ m \otimes t \mapsto M(t)(m) & t \otimes n \mapsto N(t)(n) \end{array}$$

4.2.4 Extensions de Kan

Les \mathbf{C} -modules librement engendrés par une famille d'objets de \mathbf{C} ou de morphismes de \mathbf{C} sont construits à partir des extensions de Kan additives. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux \mathbb{Z} -catégories, $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur additif et \mathcal{A} une catégorie abélienne. Désignons par $\text{Res}_U : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ le foncteur associant à tout \mathcal{C} -module M le \mathcal{D} -module MU , alors :

4.2.1 Proposition ([Mit72]_b, sec.6). *Le foncteur Res_U possède un adjoint à gauche $\text{Lan}_U : \mathcal{A}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ défini par :*

$$\text{Lan}_U M(q) = M \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C}(U, q). \quad (4.1)$$

Le foncteur Lan_U est appelé l'*extension additive de Kan à gauche* le long de U . La counité $\epsilon_{_}$ de cette adjonction est induite par l'isomorphisme de Yoneda. Pour tout \mathcal{C} -module \bar{M} , le morphisme de \mathcal{C} -modules $\epsilon_M : M(-) \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{C}(-, =) \rightarrow M(=)$ est appelée l'augmentation de M relativement à U .

4.2.2 Exemples. Soit $\mathbb{Z}U_p$ le foncteur additif engendré par le foncteur $U_p : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{C}$ constant égal à p . Alors $\text{Res}_{\mathbb{Z}U_p}$ est le foncteur évaluation en p et le foncteur $\text{Lan}_{\mathbb{Z}U_p} : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathbf{C})$, noté Lan_p , est donné, pour tout groupe abélien A , par :

$$\text{Lan}_p A(=) = \bigoplus_{\mathbf{C}(p,=)} A.$$

La counité $\epsilon_{\mathbb{Z}U_p} : \mathbb{Z}\mathbf{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ est l'augmentation dans $\mathbf{Mod}(\mathbf{C})$ du \mathbf{C} -module trivial \mathbb{Z} telle que $\epsilon(w) = 1$ pour tout morphisme w de $\mathbb{Z}\mathbf{C}$.

De la même façon, si $\mathbb{Z}U$ est le foncteur additif associé au plongement $U : \mathbf{C}_d \hookrightarrow \mathbf{C}$ de la sous-catégorie discrète, alors pour tout \mathbf{C} -module F , $\text{Res}_{\mathbb{Z}U} F = (F(p))_{p \in |\mathbf{C}|}$ et $\text{Lan}_{\mathbb{Z}U}$ est donné, pour toute famille de groupes abéliens $(A_p)_{p \in |\mathbf{C}|}$, par :

$$\text{Lan}_U A(=) = \bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} \bigoplus_{\mathbf{C}(p,=)} A_p.$$

4.3 Catégories de type PF*

4.3.1 Modules de type fini

4.3.1 Définition. Une résolution $P_* \rightarrow M$ dans $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ est dite de *type fini* si chaque module P_i est de type fini. Soit n un entier naturel, un \mathcal{C} -module M est dit de *type PF_n*, s'il existe une résolution projective partielle de longueur n et de type fini :

$$P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M$$

dans $\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$.

En adaptant la preuve de [Bro82], VIII. 4.3., on a :

4.3.2 Lemme. *Pour tout \mathcal{C} -module M et tout entier naturel n , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) M est de type PF_n ,
- ii) il existe une résolution partielle de longueur n de modules libre de rang fini

$$L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow M,$$

- iii) M est de type fini et pour toute résolution projective partielle de longueur $k < n$ de type fini

$$P_k \xrightarrow{d_k} P_{k-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow M,$$

le \mathcal{C} -module $\text{Ker } d_k$ est de type fini.

Un \mathcal{C} -module M sera dit de type PF_∞ s'il est de type PF_n pour tout entier $n \geq 0$.

Le critère PF_* pour une petite catégorie \mathbf{C} s'énonce relativement à l'une des catégories suivantes (cf. [Bau85], 1.16.) :

$$F\mathbf{C} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^e \xrightarrow{p} \mathbf{C} \xrightarrow{q} \pi\mathbf{C} \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{1}$$

où $F\mathbf{C}$ est la catégorie des factorisations de \mathbf{C} définie en 4.4.1, \mathbf{C}^e est la catégorie enveloppante, $\pi\mathbf{C}$ le groupoïde fondamental de \mathbf{C} et $\mathbf{1}$ la catégorie ponctuelle et où les flèches horizontales désignent les projections canoniques.

4.3.3 Définition. Soient A un anneau commutatif et n un entier naturel, une petite catégorie \mathbf{C} est dite :

- i) PF_n sur A , si le $F\mathbf{C}$ -module trivial $A : F\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Mod}$ est de type PF_n ,
- ii) bi-PF_n sur A , si $A\mathbf{C}$ est de type PF_n en tant que \mathbf{C} -bimodule sur A ,
- iii) PF_n à gauche (resp. à droite) sur A si le \mathbf{C} -module à gauche (resp. à droite) trivial A est PF_n .

4.3.4 Remarque. Aucune étude n'aborde le critère PF_n dans le cas i). Si \mathbf{C} est de type bi-PF_n sur \mathbb{Z} , alors en tensorisant par $A\mathbf{C}$ sur $\mathbb{Z}\mathbf{C}$, \mathbf{C} est de type PF_n sur A . Nous dirons que \mathbf{C} est de type PF_n , si \mathbf{C} est de type PF_n sur \mathbb{Z} . Si \mathbf{C} est bi-PF_n , alors \mathbf{C} est PF_n à gauche et à droite.

4.3.2 Dérivations

Soient \mathbf{C} une petite catégorie et M un \mathbf{C} -bimodule, une *dérivation* de \mathbf{C} dans M est la donnée d'une famille d'applications :

$$(d_{p,q} : \mathbf{C}(p, q) \rightarrow M(p, q))_{p, q \in |\mathbf{C}|},$$

telle que, pour tout diagramme $r \xleftarrow{v} q \xleftarrow{u} p$ dans \mathbf{C} , on ait :

$$d(vu) = d(v).u + v.d(u)$$

4.3.5 Lemme ([Mit72], 27.1). Soient G un graphe et $\mathbf{L}(G)$ la catégorie librement engendrée par G . Pour tout $\mathbf{L}(G)$ -bimodule M , toute famille $(a \mapsto [a])_{a \in G}$, avec $[a] \in M(\sigma(a), \tau(a))$, s'étend de façon unique en une dérivation de $\mathbf{L}(G)$ dans M , en posant, pour toutes flèches a et b composables dans G : $[ab] = [a].b + a.[b]$.

En particulier, pour tout chemin $\xleftarrow{a_1} \xleftarrow{a_2} \dots \xleftarrow{a_n}$ dans G on a l'identité :

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = \sum_{i=1}^n a_1 a_2 \dots a_{i-1} . [a_i] . a_{i+1} \dots a_n.$$

4.3.6 Proposition. On a les assertions suivantes :

- i) Une catégorie est de type bi-PF₀ si et seulement si elle possède un nombre fini d'objets.
- ii) Toute catégorie finiment engendrée est de type bi-PF₁,
- iii) Toute catégorie finiment présentée est de type bi-PF₂.

Démonstration. On montre i) en considérant le \mathbf{C} -bimodule libre

$$L_0 := \bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} \text{Lan}_p \mathbb{Z}\mathbf{C}(-, p);$$

de base les objets de \mathbf{C} . En désignant, pour tout objet p de \mathbf{C} , par $[p]$ la p -ième injection de $\mathbb{Z}\mathbf{C}(-, p) \otimes \mathbb{Z}\mathbf{C}(p, =)$ dans L_0 , on définit le morphisme de \mathbf{C} -bimodules $\epsilon : L_0 \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{C}$ en posant :

$$\epsilon[p] = 1_p.$$

Le morphisme de \mathbf{C} -modules à gauche $\eta : \mathbb{Z}\mathbf{C} \rightarrow L_0$ défini par $\eta(w) = w[\tau(w)]$ est une section de ϵ et ϵ est un épimorphisme de \mathbf{C} -bimodules.

Afin de montrer ii), on considère l'idéal d'augmentation $I_{\mathbf{C}}$ de ϵ , i.e. $I_{\mathbf{C}} = \text{Ker } \epsilon$. En tant que \mathbf{C} -bimodule, $I_{\mathbf{C}}$ est libre de base $\{[\tau(w)]w - w[\sigma(w)] \mid w \in \mathbf{C}\}$. En effet, il est clair que pour tout $w \in \mathbf{C}$, $[\tau(w)]w - w[\sigma(w)] \in I_{\mathbf{C}}$ et que tous ces éléments sont linéairement indépendants. Par ailleurs, tout $x \in I_{\mathbf{C}}$, s'écrit $x = \sum_{o \in |\mathbf{C}|} v_o[o]u_o$ avec $\tau(u_o) = \sigma(v_o) = o$ et $\sum_{o \in |\mathbf{C}|} v_o u_o = 0$ et on a $x = \sum_o v_o([o]u_o - u_o[o])$. Soit G un graphe générateur de \mathbf{C} , tout $w \in \mathbf{C}$ s'écrit comme un chemin dans G et, pour toutes flèches a et b de G , on a :

$$[\tau(a)]ab - ab[\sigma(b)] = ([\tau(a)]a - a[\sigma(a)])b + a([\tau(b)]b - b[\sigma(b)])$$

par suite $\{[\tau(a)]a - a[\sigma(a)] \mid a \in G\}$ forme une base de $I_{\mathbf{C}}$:

$$I_{\mathbf{C}} \simeq \bigoplus_{a \in G} \text{Lan}_{\tau(a)} \mathbb{Z}\mathbf{C}(-, \sigma(a)).$$

L'assertion iii) est une conséquence de la résolution à quatre termes (4.7). Soient $\langle G \mid R \rangle$ une présentation de \mathbf{C} et

$$L_1 := \bigoplus_{a \in G} \text{Lan}_{\tau(a)} \mathbb{Z}\mathbf{C}(-, \sigma(a))$$

le \mathbf{C} -bimodule librement engendré par les flèches de G . En notant $[a]$ l'inclusion $\mathbb{Z}\mathbf{C}(-, \sigma(a)) \hookrightarrow L_1(-, \tau(a))$, on définit un morphisme de \mathbf{C} -bimodules $d_1 : L_1 \rightarrow L_0$ en posant $d_1[a] = a[\sigma(a)] - [\tau(a)]a$. On montre que le \mathbf{C} -bimodule $\text{Ker } d_1$ est librement engendré par $\{[u] - [v] \mid (u, v) \in R\}$. Ce dernier point est une conséquence de l'acyclicité en L_1 de la résolution (4.7). \square

4.3.7 Remarque. Les réciproques des assertions i) et ii) sont fausses en général. Pour $n \leq 2$, le critère bi-PF $_n$ est une condition de finitude pour l'existence d'une présentation de type fini. Pour les entiers $n \geq 2$ le critère bi-PF $_n$ est relié aux propriétés de confluence de la catégorie.

4.4 Homologie des petites catégories

Comme pour les monoïdes, l'homologie d'une petite catégorie \mathbf{C} peut être définie à partir de l'homologie singulière de son espace classifiant $B\mathbf{C}$. Soit $L : \pi\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un système local de coefficients L , alors l'homologie de \mathbf{C} à coefficient dans \mathbb{L} est définie par $H_*(\mathbf{C}, L) = H_*^{\text{sing}}(B\mathbf{C}, L)$, [Qui73]. Cependant, l'existence d'un objet initial ou terminal dans \mathbf{C} rend contractile l'espace $B\mathbf{C}$ et par suite l'homologie $H_*(\mathbf{C}, L)$ est triviale. Plus généralement, si \mathbf{C} est munie d'une structure additionnelle mettant en jeu des propriétés universelles, comme par exemple des produits finis, l'homologie de \mathbf{C} à coefficient dans un \mathbf{C} -module n'est pas adaptée pour les mêmes raisons. On montre que si \mathbf{C} est munie de produits finis, alors l'homologie $H_*(\mathbf{C}, M)$ de \mathbf{C} à coefficients dans un \mathbf{C} -module M est triviale.

C'est la raison pour laquelle, il est nécessaire de considérer une catégorie plus large de coefficients. Indépendamment du contexte des petites catégories, Quillen introduit, dans [Qui70], une construction générale pour la (co)homologie d'un objet X d'une catégorie \mathcal{C} en termes de foncteurs dérivés dans la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathcal{C}/X)$, des objets en groupes abéliens dans la catégorie des objets de \mathcal{C} au dessus de X . Baues et Wirsching appliquent cette construction à la catégorie \mathbf{Cat} des petites catégories, [Bau97]. Si \mathbf{C} est une petite catégorie, la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Cat}/\mathbf{C})$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathbf{C})$ des systèmes naturels sur \mathbf{C} . La (co)homologie de \mathbf{C} , à coefficient dans un système naturel, est définie comme la (co)homologie du complexe standard issu du nerf de \mathbf{C} dans la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathbf{C})$ et s'interprète en termes de foncteurs dérivés, [Bau97].

En appliquant la même démarche à la catégorie \mathbf{PRO} des PROs, on obtient un résultat analogue. Si \mathbb{P} est un PRO, alors la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{PRO}/\mathbb{P})$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Nat}_t(\mathbb{P})$ des systèmes naturels monoïdaux sur \mathbb{P} .

Nous n'aborderons pas la résolution de Squier dans la catégorie des systèmes naturels mais dans la catégorie des bimodules. La projection canonique $F\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^e$ induit un plongement de la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathbf{C}^e)$ des \mathbf{C} -bimodules dans $\mathbf{Nat}(\mathbf{C})$. La restriction de la (co)homologie de Baues-Wirsching, relativement à ce plongement, est la (co)homologie introduite par Mitchell, comme généralisation de l'homologie de Hochschild des algèbres, et appelée homologie de Hochschild-Mitchell, [Mit72].

Le résolution standard, issue du nerf $N_{\natural}(\mathbf{C})$, est en général trop grande pour refléter les propriétés combinatoires de \mathbf{C} . C'est la raison pour laquelle, comme dans le cas des monoïdes, le but est de construire des résolutions les plus petites possibles.

4.4.1 Système naturel de groupes abéliens

4.4.1 Définition ([Bau85]_b). La *catégorie des factorisations*, d'une petite catégorie \mathbf{C} , est la catégorie $F\mathbf{C}$ dont les objets sont les morphismes de \mathbf{C} et dont les morphismes de w dans w' dans $F\mathbf{C}$ sont les couples (u, v) de morphismes de \mathbf{C} tels que le diagramme suivant soit commutatif dans \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccc} p' & \xrightarrow{u} & q' \\ w \uparrow & & \uparrow w' \\ p & \xleftarrow{v} & q \end{array}$$

La composition et les unités sont définies de façon naturelle.

4.4.2 Définition ([Bau85]_b). Un *système naturel de groupes abéliens sur \mathbf{C}* est un foncteur $D : F\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Pour tout morphisme u dans \mathbf{C} , on désignera par u^* le morphisme de groupes abéliens $D(u, 1)$ et par u_* le morphisme de groupes abéliens $D(1, u)$.

Un système naturel est donc défini par la donnée d'une famille de groupes abéliens $(D_w)_{w \in \mathbf{C}}$ et pour tout diagramme commutatif dans \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccc} p' & \xrightarrow{u} & q' \\ w \uparrow & & \uparrow w' \\ p & \xleftarrow{v} & q \end{array}$$

d'un morphisme de groupes abéliens :

$$D(u, v) = u^* v_* : D_w \rightarrow D_{u w v} = D_{w'}.$$

Nous désignerons par $\mathbf{Nat}(\mathbf{C})$ la catégorie des systèmes naturels sur \mathbf{C} . L'isomorphisme $F\mathbf{C} \simeq F\mathbf{C}^{\text{op}}$ induit un isomorphisme de catégories :

$$\mathbf{Nat}(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{Nat}(\mathbf{C}^{\text{op}}).$$

Les systèmes naturels de groupes abéliens apparaissent comme les coefficients naturels pour la (co)homologie des petites catégories. Soit $\mathbf{Cat}/\underline{\mathbf{C}}$ la sous-catégorie pleine de \mathbf{Cat}/\mathbf{C} formée des foncteurs qui sont constants sur les objets.

4.4.3 Proposition ([Bau85, Bau97]). *Pour toute petite catégorie \mathbf{C} il existe une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{Nat}(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Ab}(\mathbf{Cat}/\underline{\mathbf{C}}).$$

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [Bau85, Bau97], ou encore [Jib02]. Nous n'exhibons ici que les foncteurs établissant cette équivalence.

A tout système naturel D sur \mathbf{C} est associé l'*extension linéaire triviale* $\mathbf{C} \rtimes D$ de \mathbf{C} par D définie de la façon suivante. Les objets de $\mathbf{C} \rtimes D$ sont ceux de \mathbf{C} , pour tous objets p et q dans \mathbf{C} ,

$$\mathbf{C} \rtimes D(p, q) = \coprod_{w \in \mathbf{C}(p, q)} D_w.$$

La composition dans $\mathbf{C} \rtimes D$ est définie par la structure abélienne de D . Si $u \in \mathbf{C} \rtimes D(p, q)$ et $v \in \mathbf{C} \rtimes D(q, r)$, alors il existe un diagramme $r \xleftarrow{w'} q \xleftarrow{w} p$ dans \mathbf{C} tel que $u \in D_w$ et $v \in D_{w'}$; la composée vu est définie comme l'élément $w'^* \cdot u + w_* \cdot v$ de $D_{w'w}$. Enfin, l'identité dans $\mathbf{C} \rtimes D$ d'un objet p est donnée par l'élément nul de D_{1_p} . La structure d'objet en groupe abélien de $\mathbf{C} \rtimes D$ dans $\mathbf{Cat}/\simeq \mathbf{C}$ est induite par celle de D .

Inversement, soit $(p : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C}, +, -, 0)$ un objet en groupe abélien dans $\mathbf{Cat}/\simeq \mathbf{C}$. On y associe un système naturel D sur \mathbf{C} en posant, pour tout morphisme w de \mathbf{C} , $D_w = p^{-1}(w)$. La structure de groupe abélien sur D_w est induite par celle de p :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{-}{\circlearrowleft} & & \\
 \mathbf{E} \times \mathbf{E} & \xrightarrow{+} & \mathbf{E} & \xleftarrow{0} & \mathbf{C} \\
 & \searrow^{p \times p} & \downarrow p & \nearrow 1_{\mathbf{C}} & \\
 & & \mathbf{C} \times \mathbf{C} & & \\
 & & \searrow \circ & & \\
 & & & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

Si $u, v \in p^{-1}(w)$, alors $u + v := +(u, v)$, $-u = -(u)$ et $0 = 0(w)$. \square

Dans la section 4.5, nous étudierons les objets en groupe abélien dans des sous-catégories pleines de $\mathbf{Cat}/\simeq \mathbf{C}$ fermées pour les produits finis.

4.4.2 Homologie à coefficients dans les systèmes naturels

Le nerf d'une catégorie \mathbf{C} est l'ensemble simplicial $N_{\mathfrak{h}}(\mathbf{C})$ dont les n -simplexes sont formés des suites de n morphismes composables dans \mathbf{C} et dont les opérateurs faces $N_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{d_i^n} N_{n-1}(\mathbf{C})$ sont définis, pour tout n -simplexe $\sigma = p_n \xleftarrow{y_n} p_{n-1} \leftarrow \cdots \leftarrow p_1 \xleftarrow{y_1} p_0$, en posant :

$$\begin{aligned}
 d_i^n(\sigma) &= p_n \xleftarrow{y_n} p_{n-1} \leftarrow \cdots \xleftarrow{u_{i+1}u_i} \cdots \xleftarrow{y_1} p_0, \quad \text{si } 0 < i < n, \\
 d_0^n(\sigma) &= p_n \xleftarrow{y_n} p_{n-1} \leftarrow \cdots \xleftarrow{y_2} p_1, \\
 d_n^n(\sigma) &= p_{n-1} \xleftarrow{u_{n-1}} p_1 \leftarrow \cdots \xleftarrow{y_1} p_0.
 \end{aligned}$$

Les opérateurs faces d_i^n satisfont la relation présimpliciale

$$d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n, \quad \text{si } i < j. \quad (4.2)$$

Soit $\mathbf{Nat}(\mathbf{C}^{\text{op}})$ la catégorie des factorisations de la catégorie \mathbf{C}^{op} . A tout système naturel $D : F\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$, nous associons un complexe de chaînes $(C_*(\mathbf{C}, D), d_*)$ défini par :

$$C_n(\mathbf{C}, D) = \bigoplus_{\sigma \in N_n(\mathbf{C})} D_\sigma, \quad (4.3)$$

où D_σ désigne l'image par D du morphisme composé $u_n \circ \cdots \circ u_1$ associé au simplexe $\sigma = p_n \xleftarrow{u_n} p_{n-1} \leftarrow \cdots \leftarrow p_1 \xleftarrow{u_1} p_0$.

En désignant, pour tout n -simplexe σ , par ι_σ l'inclusion de D_σ dans $C_n(\mathbf{C}, D)$, l'opérateur bord

$$d_n : C_n(\mathbf{C}, D) \rightarrow C_{n-1}(\mathbf{C}, D)$$

est défini, pour tout n -simplexe $\sigma = p_n \xleftarrow{u_n} p_{n-1} \xleftarrow{u_{n-1}} \cdots p_1 \xleftarrow{u_1} p_0$, par :

$$d_n \iota_\sigma = \iota_{d_0^n(\sigma)} u_{1*} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \iota_{d_i^n(\sigma)} + (-1)^n \iota_{d_n^n(\sigma)} u_n^*. \quad (4.4)$$

4.4.4 Lemme. *L'opérateur d , défini par (4.4), satisfait la relation $d^2 = 0$.*

Démonstration. Soient n un entier et $\sigma = \xleftarrow{u_n} \xleftarrow{u_{n-1}} \cdots \xleftarrow{u_2} \xleftarrow{u_1}$ un n -simplexe dans \mathbf{C} . Avec les notations précédentes et en utilisant la relation présimpliciale (4.2) du nerf $N_{\natural}(\mathbf{C})$, on a :

$$\begin{aligned} d_{n-1} d_n \iota_\sigma &= d_{n-1} [\iota_{d_0^n(\sigma)} u_{1*} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \iota_{d_i^n(\sigma)} + (-1)^n \iota_{d_n^n(\sigma)} u_n^*] \\ &= [\iota_{d_0^{n-1} d_0^n(\sigma)} u_{2*} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \iota_{d_j^{n-1} d_0^n(\sigma)} + (-1)^{n-1} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_0^n(\sigma)} u_n^*] u_{1*} \\ &\quad - [\iota_{d_0^{n-1} d_1^n(\sigma)} (u_2 u_1)_* + \sum_{l=1}^{n-2} (-1)^l \iota_{d_l^{n-1} d_1^n(\sigma)} + (-1)^{n-1} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_1^n(\sigma)} u_n^*] \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^i [\iota_{d_0^{n-1} d_i^n(\sigma)} u_{1*} + \sum_{q=1}^{n-2} (-1)^q \iota_{d_q^{n-1} d_i^n(\sigma)} + (-1)^{n-1} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_i^n(\sigma)} u_n^*] \\ &\quad + (-1)^{n-1} [\iota_{d_0^{n-1} d_{n-1}^n(\sigma)} u_{1*} + \sum_{p=1}^{n-2} (-1)^p \iota_{d_p^{n-1} d_{n-1}^n(\sigma)} + (-1)^{n-1} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_{n-1}^n(\sigma)} (u_n u_{n-1})^*] \\ &\quad + (-1)^n [\iota_{d_0^{n-1} d_n^n(\sigma)} u_{1*} + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \iota_{d_k^{n-1} d_n^n(\sigma)} + (-1)^{n-1} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_n^n(\sigma)} u_{n-1}^*] u_n^* \end{aligned}$$

Après simplification dans l'expression précédente, le facteur de u_{1*} est

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \iota_{d_j^{n-1} d_0^n}(\sigma) + \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^i \iota_{d_0^{n-1} d_i^n}(\sigma) + (-1)^{n-1} \iota_{d_0^{n-1} d_{n-1}^n}(\sigma) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \iota_{d_j^{n-1} d_0^n}(\sigma) + \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^i \iota_{d_{i-1}^{n-1} d_0^n}(\sigma) + (-1)^{n-1} \iota_{d_{n-2}^{n-1} d_0^n}(\sigma) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \iota_{d_j^{n-1} d_0^n}(\sigma) - \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \iota_{d_i^{n-1} d_0^n}(\sigma) = 0.
 \end{aligned}$$

Le facteur de u_n^* est

$$\begin{aligned}
 & (-1)^n \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_1^n}(\sigma) + \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^{i+n-1} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_i^n}(\sigma) + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k+n} \iota_{d_k^{n-1} d_n^n}(\sigma) \\
 &= (-1)^n \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_1^n}(\sigma) - \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^{i+n} \iota_{d_{n-1}^{n-1} d_i^n}(\sigma) - (-1)^n \iota_{d_1^{n-1} d_n^n}(\sigma) + \sum_{k=2}^{n-2} (-1)^{k+n} \iota_{d_k^{n-1} d_n^n}(\sigma) = 0
 \end{aligned}$$

Les autres termes forment l'expression

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{l=1}^{n-2} (-1)^l \iota_{d_l^{n-1} d_1^n}(\sigma) + \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^i \sum_{q=1}^{n-2} (-1)^q \iota_{d_q^{n-1} d_i^n}(\sigma) + (-1)^{n-1} \sum_{p=1}^{n-2} (-1)^p \iota_{d_p^{n-1} d_{n-1}^n}(\sigma) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-2} (-1)^{i+q} \iota_{d_q^{n-1} d_i^n}(\sigma) = 0.
 \end{aligned}$$

Par suite $d_{n-1} d_n \iota_\sigma = 0$.

□

4.4.5 Définition. L'homologie d'une petite catégorie \mathbf{C} à coefficients dans un système naturel de groupes abéliens D sur \mathbf{C}^{op} est définie par :

$$H_*(\mathbf{C}, D) = H_*(C_*(\mathbf{C}, D), d_*).$$

4.4.3 Homologie à coefficients dans les bimodules

Soient M un \mathbf{C} -bimodule et p la projection canonique $F\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}^e$. L'homologie de \mathbf{C} à coefficient dans M est définie par $H_*(\mathbf{C}, M) = H_*(\mathbf{C}, Mp)$. En d'autres termes, $H_n(\mathbf{C}, M)$ est l'homologie du complexe de chaînes $(C_*(\mathbf{C}, M), \partial_*)$ défini de la façon suivante. Si σ désigne le n -simplexe $p_n \xleftarrow{u_n} p_{n-1} \leftarrow \cdots \xleftarrow{u_1} p_0$, pour tout entier $n \geq 0$, on définit $C_n(\mathbf{C}, M) := \bigoplus_{\sigma \in N_n(\mathbf{C})} M(p_n, p_0)$. En désignant par $\iota_\sigma : M(p_n, p_0) \hookrightarrow C_n(\mathbf{C}, M)$ la σ -ième

injection, l'opérateur bord $d_n : C_n(\mathbf{C}, M) \rightarrow C_{n-1}(\mathbf{C}, M)$ est défini par :

$$d_n \iota_\sigma = \iota_{d_0^n(\sigma)} u_{1*} + \sum_{i=1}^{n-1} \iota_{d_i^n(\sigma)} + \iota_{d_n^n(\sigma)} u_n^*.$$

En particulier, $H_0(\mathbf{C}, M) = \bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} M(p, p) / \text{Im } d_1$ s'identifie au foncteur cofin de M . Une base de $H_0(\mathbf{C}, M)$ est formée des $(\iota_{p_1}, \dots, \iota_{p_n}, \dots)$ où $\iota_{p_i} : M(p_i, p_i) \hookrightarrow \bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} M(p, p)$ satisfaisant aux relations :

$$\iota_q M(q, w) = \iota_p M(w, p), \quad \text{pour tout } q \xleftarrow{w} p \in \mathbf{C}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M(q, q) & & \\
 & \swarrow \iota_q & & \nwarrow M(q, w) & \\
 \bigoplus_{p \in |\mathbf{C}|} M(p, p) & & & & M(q, p) \\
 & \swarrow \iota_p & & \nwarrow M(w, p) & \\
 & & M(p, p) & &
 \end{array}$$

Si $\sigma = q' \xleftarrow{v} p \xleftarrow{w} q$ alors :

$$d_2 \iota_\sigma = \iota_v M(q', w) - \iota_{vw} + \iota_w M(v, q).$$

Notons que si \overline{M} désigne l'image du \mathbf{C} -bimodule M par l'isomorphisme $\mathbf{Ab}^{\mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{C}} \simeq \mathbf{Ab}^{\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{\text{op}}}$, alors, par définition, on a un isomorphisme $H_*(\mathbf{C}, M) \simeq H_*(\mathbf{C}^{\text{op}}, \overline{M})$.

On peut définir $H_*(\mathbf{C}, M)$ en terme de foncteurs dérivés. En effet, la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathbf{C}^e)$ est abélienne et possède suffisamment de projectifs. Soit

$$\text{Tor}_*^{\mathbf{C}^e} : \mathbf{Mod}(\mathbf{C}^e) \times \mathbf{Mod}(\mathbf{C}^e) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

le foncteur dérivé du bifoncteur $- \otimes_{\mathbf{C}^e} -$. Pour tous \mathbf{C} -bimodules M et N on a :

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{C}^e}(M, N) = H_n(X_\bullet \otimes_{\mathbf{C}^e} N) = H_n(M \otimes_{\mathbf{C}^e} Y_\bullet) \quad (4.5)$$

où $X_\bullet \rightarrow M$ et $Y_\bullet \rightarrow N$ sont des résolutions projectives de \mathbf{C} -bimodules.

En dualisant la preuve de [Bau85], 8.5, on montre que :

4.4.6 Proposition. *Pour toute petite catégorie \mathbf{C} et tout \mathbf{C} -bimodule M on a un isomorphisme :*

$$H_*(\mathbf{C}, M) \simeq \text{Tor}_*^{\mathbf{C}^e}(\mathbb{Z}\mathbf{C}, M).$$

Les groupes $H_*(\mathbf{C}, M)$ peuvent ainsi être calculés à partir de résolutions projectives de \mathbf{C} -bimodules de $\mathbb{Z}\mathbf{C}$.

4.5 Homologie des PROs

4.5.1 Définition. Un PRO est une petite catégorie monoïdale stricte $(\mathbb{P}, \otimes, \mathbf{0})$ dont l'ensemble des objets s'identifie à l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} et dont le produit monoïdal est induit par l'addition des entiers.

Un foncteur de PROs est un foncteur monoïdal strict constant sur les objets. Nous désignerons par **PRO** la catégorie des PROs et des morphismes de PROs.

4.5.1 Système naturel monoïdal

Un système naturel monoïdal de groupes abéliens sur un PRO \mathbb{P} est un système naturel $D : F\mathbb{P} \rightarrow \mathbf{Ab}$ vérifiant, pour tous morphismes w et w' de \mathbb{P} :

$$D_{w \otimes w'} = D_w \oplus D_{w'}.$$

Désignons par $\mathbf{Nat}_t(\mathbb{P})$ la catégorie des systèmes naturels monoïdaux sur un PRO \mathbb{P} . On a :

4.5.2 Lemme. *Pour tout PRO \mathbb{P} , il existe une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{Nat}_t(\mathbb{P}) \approx \mathbf{Ab}(\mathbf{PRO}/\mathbb{P}).$$

Démonstration. L'équivalence résulte immédiatement de l'équivalence 4.4.3 et du fait que la catégorie \mathbf{PRO}/\mathbb{P} est une sous-catégorie pleine de \mathbf{Cat}/\mathbb{P} fermée pour les produits. Les objets en groupe abélien dans \mathbf{PRO}/\mathbb{P} sont donc obtenus à partir de ceux de \mathbf{Cat}/\mathbb{P} . Soit $(\mathbb{E} \xrightarrow{p} \mathbb{P}, +, -, 0)$ un objet en groupe abélien dans \mathbf{PRO}/\mathbb{P} et soit $D_w = p^{-1}(w)$ le système naturel correspondant par 4.4.3. Alors pour tous morphismes w et w' de \mathbb{P} , il existe un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\varphi : D_{w \otimes w'} \simeq D_w \oplus D_{w'},$$

défini par $\varphi(z) = (z|_{\sigma(w)}, z|_{\sigma(w')})$. □

4.5.3 Définition. L'homologie d'un PRO \mathbb{P} à coefficients dans un système naturel monoïdal $D : F\mathbb{P}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est définie par :

$$H_*(\mathbb{P}, D) = H_*(C_*(\mathbb{P}, D), d_*),$$

où $C_*(\mathbb{P}, D)$ désigne le complexe défini en (4.3).

4.5.2 Réduction du complexe standard

Soit \mathbb{P} un PRO tel que l'objet $\mathbf{0}$ soit terminal. Il existe donc un morphisme $\mathbf{0} \xleftarrow{\epsilon} \mathbf{1}$ de \mathbb{P} tel que tout morphisme $\mathbf{1} \xleftarrow{w} \mathbf{n}$ de \mathbb{P} vérifie $\epsilon w = \epsilon_n$, où ϵ_n désigne le morphisme $\epsilon \otimes \dots \otimes \epsilon$.

4.5.4 Lemme. *Si $\mathbf{0}$ est terminal dans \mathbb{P} , alors, pour tout foncteur $M : \mathbb{P} \rightarrow \mathbf{Ab}$ préservant l'objet terminal $\mathbf{0}$, on a :*

$$H_*(\mathbb{P}, M) = 0.$$

Démonstration. Si M préserve l'objet terminal $\mathbf{0}$, alors, pour tout objet \mathbf{p} de \mathbb{P} , $M(\epsilon_p) : M(\mathbf{p}) \rightarrow 0$ est un morphisme nul dans la catégorie \mathbf{Ab} .

Considérons le complexe de chaînes $C_*(\mathbb{P}, M)$ formé par les sommes :

$$C_n(\mathbb{P}, M) = \bigoplus_{\mathbf{p}_n \leftarrow \dots \leftarrow \mathbf{p}_0 \in N_n(\mathbb{P})} M(\mathbf{p}_0), \quad n \leq 0$$

muni de l'opérateur bords $d_n : C_n(\mathbb{P}, M) \longrightarrow C_{n-1}(\mathbb{P}, M)$, défini, pour tout n -simplexe $\sigma = \mathbf{p}_n \xleftarrow{u_n} \dots \xleftarrow{u_1} \mathbf{p}_0$ de \mathbb{P} , par :

$$d_n \iota_\sigma = \iota_{d_0^n(\sigma)} M(u_1) + \sum_{i=1}^n \iota_{d_i^n(\sigma)},$$

où ι_σ désigne la σ -ième injection de $M(\mathbf{p}_0)$ dans $C_n(\mathbb{P}, M)$.

L'homologie de \mathbb{P} , à coefficients dans M , est donnée par $H_*(\mathbb{P}, M) = H_*(C_*(\mathbb{P}, M))$. En particulier, $H_0(\mathbb{P}, M) = \bigoplus_{\mathbf{p} \in |\mathbb{P}|} M(\mathbf{p}) / \text{Im } d_1$ avec $d_1 : \bigoplus_{w \in \mathbb{P}} M(w) \longrightarrow \bigoplus_{\mathbf{p} \in |\mathbb{P}|} M(\mathbf{p})$ défini par

$$d_1 \iota_w = \iota_{\mathbf{p}} M(\sigma(w)) - \iota_{\mathbf{q}}, \text{ pour tout morphisme } \mathbf{p} \xleftarrow{w} \mathbf{q} \text{ dans } \mathbb{P}.$$

Pour tout objet \mathbf{p} de \mathbb{P} , comme $M(\epsilon_{\mathbf{p}}) = 0$, on a $\iota_0 M(\epsilon_{\mathbf{p}}) - \iota_{\mathbf{p}} = -\iota_{\mathbf{p}} \in \text{Im } d_1$. Par suite, pour tout représentant $(x_0, \dots, x_{\mathbf{p}}, \dots)$ d'une classe d'homologie dans $H_0(\mathbb{P}, M)$, on a $x_{\mathbf{p}} = 0$ et donc $H_0(\mathbb{P}, M) \simeq M(\mathbf{0}) = 0$. \square

La situation est différente concernant l'homologie à coefficient dans les bimodules. On suppose toujours que le PRO \mathbb{P} possède l'objet terminale $\mathbf{0}$. Considérons $\mathbf{Ab}^{\mathbb{P}^{\text{op}} \times \mathbb{P}}$ la catégorie des \mathbb{P} -bimodules préservant l'objet terminal en la deuxième variable et les produits monoïdaux en la deuxième variable :

i) $M(-, \epsilon_{\mathbf{p}}) = 0$,

ii) $M(-, w \otimes w') \simeq M(-, w) \oplus M(-, w')$.

D'après 4.4.3, on a $H_0(\mathbb{P}, M) = \bigoplus_{\mathbf{p} \in |\mathbb{P}|} M(\mathbf{p}, \mathbf{p}) / \text{Im } d_1$ avec, pour tout morphisme $\mathbf{p} \xleftarrow{w} \mathbf{q}$ dans \mathbb{P} :

$$d_1 \iota_w = \iota_{\mathbf{p}} w_* - \iota_{\mathbf{q}} w^*. \quad (4.6)$$

Désignons par $\pi = \epsilon \otimes 1_{\mathbf{p}}$ la première projection de \mathbf{p} sur $\mathbf{p} - \mathbf{1}$ dans \mathbb{P} . Le \mathbb{P} -bimodule M étant monoïdal en la deuxième variable, π induit un morphisme surjectif de groupes abéliens :

$$\pi_* : M(\mathbf{p} - \mathbf{1}, \mathbf{p}) \longrightarrow M(\mathbf{p} - \mathbf{1}, \mathbf{p} - \mathbf{1}).$$

Désignons par $\pi^* : M(\mathbf{p} - \mathbf{1}, \mathbf{p}) \longrightarrow M(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ l'action contravariante de π .

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_{\mathbf{p}}, \dots)$ un représentant d'une classe d'homologie de $H_0(\mathbb{P}, M)$. Si y désigne l'image réciproque par π_* de $x_{\mathbf{p}-1}$, alors d'après (4.6), $x_{\mathbf{p}-1} = \pi^*(y)$. Par suite, une p -ième composante quelconque s'exprime en terme de la $p - 1$ -ième.

Si dans le PRO \mathbb{P} , tous les objets sont obtenus comme produits d'un même objet $\mathbf{1}$, alors :

$$H_0(\mathbb{P}, M) \simeq M(\mathbf{1}, \mathbf{1}) / \{w^* a - w_* a \mid w \in \mathbb{P}(\mathbf{p}, \mathbf{1}), a \in M(\mathbf{1}, \mathbf{1})\}.$$

Sinon,

$$H_0(\mathbb{P}, M) \simeq \bigoplus_{\mathbf{q} \in I} M(\mathbf{q}, \mathbf{q}) / \{w^* a - w_* a \mid w \in \mathbb{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), a \in M(\mathbf{q}, \mathbf{q})\}$$

où I désigne l'ensemble des objets de \mathbb{P} indécomposables par produit.

4.6 La résolution à quatre termes de Mitchell

4.6.1 La résolution de Lyndon-Mitchell

Soit G un groupe présenté par un ensemble Σ de générateurs et soumis aux relations R . Toutes les relations s'écrivent sous la forme $(r, 1)$, l'ensemble R s'identifie ainsi à une partie du groupe libre engendré par Σ . Désignons par \mathcal{F} l'ensemble des suites finies $(u_i, r_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$, formées d'éléments u_i, r_i du monoïde libre Σ^* et satisfaisant :

$$u_1 r_1 u_1^{-1} u_2 r_2 u_2^{-2} \cdots u_k r_k u_k^{-1} = 1,$$

avec r_i ou r_i^{-1} dans R .

Lyndon, [Lin50], construit une résolution de G -modules :

$$\mathbb{Z}G[\mathcal{F}] \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}G[R] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}G[\Sigma] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

où ϵ désigne l'augmentation de G et les bords d_i sont les morphismes de G -modules définis, en utilisant les notations du lemme 3.2.4, par

$$d_1([a]) = \bar{a} - 1, \quad d_2([r]) = \sum_{a \in \Sigma} \frac{\partial r}{\partial a} [a], \quad d_3([(u_i, r_i)_{i \in I}]) = \sum_{i \in I} \bar{u}_i [r_i].$$

Mitchell généralise la suite de Lyndon aux petites catégories de la façon suivante. Soit G un graphe, désignons par \mathbf{G}_0 la catégorie libre engendrée par G et, pour tout entier n , par \mathbf{G}_{n+1} la catégorie des fractions de \mathbf{G}_n . On considère la colimite \mathbf{G}_∞ dans \mathbf{Cat} des \mathbf{G}_n . Soit R un ensemble de relations dans \mathbf{G}_∞ et \mathbf{G} la catégorie obtenue par quotient de \mathbf{G}_∞ par R . On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des cycles de réductions (u_i, r_i, s_i, v_i) dans \mathbf{G}_∞ décrivant les chemins de réduction fermés :

$$w = u_1 r_1 v_1 \rightarrow u_1 s_1 v_1 = u_2 r_2 v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow u_n r_n v_n \rightarrow u_n s_n v_n = w$$

où $u_i, v_i \in \mathbf{G}_\infty$ et $(r_i, s_i) \in R$. Alors, avec ces notations :

4.6.1 Théorème ([Mit72], 28.1). *Pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} et pour tout foncteur $D : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{A}$, il existe une résolution de D dans $\mathcal{A}^{\mathbf{G}}$:*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{(u,r,s,v) \in \mathcal{F}} \text{Lan}_{\tau(u)} D(\sigma(v)) &\xrightarrow{d_3} \bigoplus_{(r,s) \in R} \text{Lan}_{\tau(r)} D(\sigma(r)) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{a \in G} \text{Lan}_{\tau(a)} D(\sigma(a)) \\ &\xrightarrow{d_1} \bigoplus_{p \in |G|} \text{Lan}_p D(p) \xrightarrow{\epsilon} D \end{aligned}$$

où les morphismes de \mathbf{G} -modules sont définis fonctoriellement, pour tout objet q de \mathbf{G} , par :

$$\begin{aligned} \epsilon(q)i(\bar{w}) &:= D(\bar{w}), \\ d_1(q)[\bar{w}, a] &:= i(\bar{w}a) - i(\bar{w})D(\bar{a}), \\ d_2(q)[\bar{w}, r \xrightarrow{A} s] &:= [\bar{w}, r] - [\bar{w}, s], \\ d_3(q)(\langle \bar{w}, (u, r, s, v) \rangle) &:= \sum_{i=1}^n [\bar{w}u_i, (r_i, s_i)] D(\bar{v}_i), \end{aligned}$$

où $i(\bar{w})$, $[\bar{w}, a]$, $[\bar{w}, r \xrightarrow{A} s]$ et $\langle \bar{w}, (u, r, s, v) \rangle$ désignent les inclusions dans les coproduits des termes correspondant de la suite.

4.6.2 Application aux présentations convergentes

Dans cette section, en généralisant la construction de Mitchell, nous construisons la résolution de Squier pour un foncteur $I : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{A}$, où \mathcal{A} est une catégorie abélienne et \mathbf{D} une petite catégorie présentée par un système de réécriture convergent et minimal.

Nous rappelons que si \mathbf{D} est une petite catégorie et \mathcal{A} une catégorie abélienne avec des coproduits indexés par les ensembles hom de \mathbf{D} , alors, pour tout objet p de \mathbf{D} , le foncteur évaluation $\text{Res}_p : \mathcal{A}^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathcal{A}$ possède un adjoint à gauche $\text{Lan}_p : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbf{D}}$ défini, pour tout objet A de \mathcal{A} , par :

$$\text{Lan}_p A(=) = \bigoplus_{\mathbf{D}(p,=)} A.$$

Dans la suite, pour tout foncteur $I : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{A}$ et pour tout ensemble de morphismes X de \mathbf{D} , nous désignerons par $I[X]$ le foncteur

$$\bigoplus_{x \in X} \text{Lan}_{\tau(x)} I(\sigma(x)) : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Pour tout morphisme x de X et pour tout morphisme $w \in \mathbf{D}(\tau(x), q)$, nous désignerons par $[w, x]$ la w -ième injection de $I(\sigma(x))$ dans $I[X](q)$ et par $[x]$ l'injection de $I(\sigma(x))$ dans $I[X](\tau(x))$. Si $r \xrightarrow{A} s$ désigne une règle sur des morphismes de \mathbf{D} , nous noterons $\sigma(A) = \sigma(r)$ et $\tau(A) = \tau(r)$. De la même façon, si $\langle A, B \rangle$ est une paire critique, nous noterons $\sigma(\langle A, B \rangle) = \sigma(A)$ et $\tau(\langle A, B \rangle) = \tau(A)$.

4.6.2 Lemme. Soient G un graphe, $\mathbf{L}(G)$ la catégorie libre engendrée par G et I un objet de $\mathcal{A}^{\mathbf{L}(G)}$. La famille $([a])_{a \in G}$ s'étend de façon unique en une dérivation de $\mathbf{L}(G)$ dans le $\mathbf{L}(G)$ -bimodule $\mathcal{A}(I, I[G])$, i.e., une famille d'applications :

$$([\]_{p,q} : \mathbf{L}(G)(p, q) \rightarrow \mathcal{A}(I(p), I[G](q)))_{p,q \in |G|}$$

satisfaisant, pour tout diagramme $q \xleftarrow{u} p \xleftarrow{v} r$ dans $\mathbf{L}(G)$, l'identité :

$$[uv] = I[G](u)[v] + [u]I(v) :$$

$$\begin{array}{ccc} I[G](p) & \xrightarrow{I[G](u)} & I[G](q) \\ [v] \uparrow & \nearrow [uv] & \uparrow [u] \\ I(r) & \xrightarrow{I(v)} & I(p) \end{array}$$

Démonstration. C'est une application immédiate du lemme 4.3.5. \square

D'après 2.4.1, iii), une règle de réécriture sur une petite catégorie \mathbf{D} est la donnée d'un couple de morphismes parallèles de \mathbf{D} .

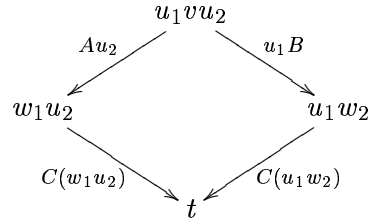
4.6.3 Théorème. Soient \mathbf{C} une petite catégorie et G un graphe générateur de \mathbf{C} . Soient R un ensemble de règles sur \mathbf{C} et \leftrightarrow_R^* la relation de congruence sur \mathbf{C} engendrée par R . On désigne par \mathbf{D} la petite catégorie obtenue par quotient de \mathbf{C} par \leftrightarrow_R^* .

Si R est convergente et minimale, alors, pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} , munie de coproduits indexés par les ensembles hom de \mathbf{D} , et pour tout objet I de $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$, en désignant par \mathcal{P} l'ensemble des paires critiques de R , il existe une suite acyclique dans $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$:

$$S_*(G, R) : \bigoplus_{\langle A, B \rangle \in \mathcal{P}} \text{Lan}_{\tau(A)} I(\sigma(A)) \xrightarrow{d_3} \bigoplus_{A \in R} \text{Lan}_{\tau(A)} I(\sigma(A)) \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{a \in G} \text{Lan}_{\tau(a)} I(\sigma(a)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{p \in |G|} \text{Lan}_p I(p) \xrightarrow{\epsilon} I \longrightarrow 0 \quad (4.7)$$

dont les morphismes de \mathbf{D} -modules sont définis fonctoriellement en posant, pour tout objet q de \mathbf{D} :

- i) $\epsilon(q)[\bar{w}, p] = I(\bar{w})$, pour tout $\bar{w} \in \mathbf{D}(p, q)$,
- ii) $d_1(q)[\bar{w}, a] = [\bar{w}a, \sigma(a)] - [\bar{w}, \tau(a)]I(a)$, pour tous $a \in G$ et $\bar{w} \in \mathbf{D}(\tau(a), q)$,
- iii) $d_2(q)[\bar{w}, r \xrightarrow{A} s] = [\bar{w}, r] - [\bar{w}, s]$, pour tous $A \in R$ et $w \in \mathbf{D}(\tau(A), q)$,
- iv) $d_3(q)[\bar{w}, \langle Au_2, u_1B \rangle] = [\bar{w}u_1, B] + [\bar{w}, C(u_1w_2)] - [\bar{w}, C(w_1u_2)] - [\bar{w}, A]I(u_2)$, pour toute paire critique $\langle Au_2, u_1B \rangle$, avec $u_1v \xrightarrow{A} w_1, vu_2 \xrightarrow{B} w_2 \in R$, et tout $\bar{w} \in \mathbf{D}(\tau(A), q)$, où $C(u_1w_2)$ et $C(w_1u_2)$ sont les chemins résiduels définis par le diagramme de confluence suivant :



Nous remarquerons que l'acyclicité de la suite (4.7), aux trois premiers crans, ne nécessite pas que l'ensemble de règles R soit convergent.

Démonstration. Nous renommons les termes de la suite (4.7) en considérant les conventions ci-dessus : suivante :

$$I[\mathcal{P}] \xrightarrow{d_3} I[R] \xrightarrow{d_2} I[G] \xrightarrow{d_1} I[|G|] \xrightarrow{\epsilon} I \longrightarrow 0.$$

Désignons par \bar{w} l'image d'un morphisme w de \mathbf{C} par la projection $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$. Nous associons à tout morphisme \bar{w} de \mathbf{D} un représentant \tilde{w} dans \mathbf{C} .

La donnée de $\eta(q) = [1_q, q]$, pour tout objet q de \mathbf{D} , définit une section de $\epsilon(q)$; par suite ϵ est un épimorphisme dans $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$.

Pour tout diagramme $\xleftarrow{w} \xleftarrow{a}$ dans \mathbf{C} , avec $a \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon(q)d_1(q)[\bar{w}, a] &= \epsilon(q)([\bar{w}a, \sigma(a)] - [\bar{w}, \tau(a)]I(a)), \\ &= I(\bar{w}a) - I(\bar{w})I(a) = 0, \end{aligned}$$

et par suite $\epsilon d_1 = 0$. L'homotopie contractante $s_0 : I[|G|] \longrightarrow I[G]$ est définie en posant, pour tout objet q de \mathbf{D} et tout $\bar{w} \in \mathbf{D}(p, q)$:

$$s_0(q)[\bar{w}, p] = [1_{\tau(w)}, \tilde{w}].$$

On a les identités :

$$\begin{aligned} d_1(q)s_0(q)[\bar{w}, p] &= [\bar{w}, p] - [1_q, q]I(\bar{w}), \\ &= [\bar{w}, p] - \eta(q)\epsilon(q)[\bar{w}, p]. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite (4.7) est acyclique en $I[|G|]$.

Soit $q \xleftarrow{\bar{w}} p \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \overset{A}{\uparrow} \\ \xleftarrow{r} \end{array} o$ un diagramme dans \mathbf{C} , avec $A \in R$. On a :

$$\begin{aligned} d_1(q)d_2(q)[\bar{w}, A] &= d_1(q)([\bar{w}, r] - [\bar{w}, s]), \\ &= [\bar{w}r, o] - [\bar{w}, p]I(\bar{r}) - [\bar{w}s, o] + [\bar{w}, p]I(\bar{s}), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le crochet $[1_{\tau(A)}, A] : I(\sigma(A)) \hookrightarrow I[R](\tau(A))$, $A \in R$, s'étend formellement à la relation de réduction \rightarrow_R engendrée par R : pour toute règle A et tous morphismes u, v de \mathbf{C} tels que les composées soient possibles dans l'expression suivante, on a :

$$[1, uAv] = [\bar{u}, A]I(v).$$

Par suite, $[\bar{w}, -]$ s'étend additivement à la clôture transitive \rightarrow^*_R en posant :

$$[\bar{w}, F * G] = [\bar{w}, F] + [\bar{w}, G].$$

L'homotopie contractante $s_1 : I[G] \longrightarrow I[R]$ est définie fonctoriellement en posant, pour tout injection $[\bar{w}, a] : I(\sigma(a)) \hookrightarrow I[G](q)$

$$s_1(q)[\bar{w}, a] = [1_{\tau(w)}, C(\tilde{w}a)]$$

où $C(\tilde{w}a)$ est donné par la composée, éventuellement en zig-zag, de chemins de réductions joignant $\tilde{w}a$ et $\tilde{w}a$. Il existe toujours un tel élément dans $I[R]$, en considérant $\tilde{w}a \leftarrow^*_R wa \leftarrow^*_R \tilde{w}a$, on a :

$$[C(\tilde{w}a)] = [\tilde{w}a \rightarrow^* wa] - [\tilde{w}a \rightarrow^* wa].$$

L'homotopie s_1 consiste donc à choisir formellement pour tout morphisme \bar{w} dans \mathbf{D} un chemin de réduction du morphisme w de \mathbf{C} vers le représentant \tilde{w} dans \mathbf{C} . On a :

$$\begin{aligned} d_2(q)s_1(q)[\bar{w}, a] &= [\tilde{w}a] - [\tilde{w}a], \\ &= [\bar{w}, a] + [\tilde{w}]I(a) - [\tilde{w}a], \\ &= [\bar{w}, a] - s_0(q)d_1(q)[\bar{w}, a]; \end{aligned}$$

car $s_0(q)d_1(q)[\bar{w}, a] = s_0(q)([\bar{w}a, \sigma(a)] - [\bar{w}, \tau(a)]I(a)) = [\widehat{w}a] - [\widehat{w}]I(a)$.

L'ensemble R étant minimal, toutes les paires critiques sont des ambiguïtés de chevauchement de la forme $\langle Au_2, u_1B \rangle$ avec $u_1v \xrightarrow{A} w_1$, $vu_2 \xrightarrow{B} w_2 \in R$.

Avec les notations du théorème, on a :

$$\begin{aligned} d_2(q)d_3(q)[\bar{w}, \langle Au_2, u_1B \rangle] &= d_2(q)([\bar{w}u_1, B] + [\bar{w}, C(u_1w_2)] - [\bar{w}, C(w_1u_2)] - [\bar{w}, A]I(u_2)), \\ &= [\bar{w}u_1, vu_2] - [\bar{w}u_1, w_2] + [\bar{w}, u_1w_2] - [\bar{w}, t] - [\bar{w}, w_1u_2] \\ &\quad + [\bar{w}, t] - [\bar{w}, u_1v]I(u_2) + [\bar{w}, w_1]I(u_2), \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'acyclicité en $I[R]$ est montrée en construisant une homotopie contractante $s_2 : I[R] \rightarrow I[\mathcal{P}]$. La construction est sur le même principe qu'en 3.2.2. La relation de réduction $\xrightarrow{*}_R$ sur \mathbf{C} induit une relation d'ordre noëthérien sur le \mathbf{D} -module $I[R]$. Soient $r \xrightarrow{A} s$ et $r' \xrightarrow{B} s'$ deux règles de R . Pour toute injections $[\bar{w}, A] : I(\sigma(r)) \hookrightarrow I[R](\tau(u))$, $[\bar{v}, B] : I(\sigma(r')) \hookrightarrow I[R](\tau(v))$, on pose :

$$[\bar{u}, A] \geq [\bar{v}, B]$$

s'il existe un chemin de réduction dans \mathbf{C} $u\hat{r} \xrightarrow{*}_R \hat{v}r'w$, où w est un morphisme de \mathbf{C} . On étend la relation \geq en un ordre noëthérien sur $I[R]$ en utilisant l'ordre multi-ensemble et en considérant les combinaisons linéaires d'injections à valeurs dans $I[R]$ (cf. preuve du lemme 3.2.4).

Pour tout diagramme $q \xleftarrow{\bar{w}} \tau(r) \xleftarrow{\begin{array}{c} s \\ \widehat{A} \uparrow \\ r \end{array}} \sigma(r)$ dans \mathbf{C} , avec $A \in R$, on définit $s_2(q)[\bar{w}, A]$ par induction noëthérienne à partir de la décomposition de $\bar{w}A$, comme la combinaison linéaire des paires critiques élémentaires formant le diagramme de confluence :

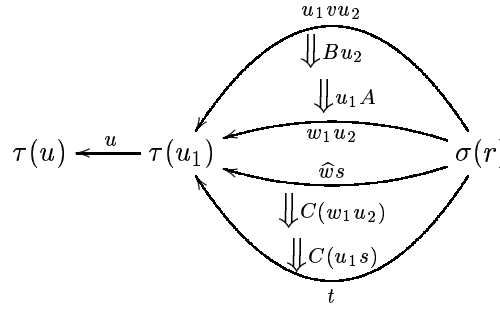
$$\begin{array}{ccc} \widehat{w}r & \xrightarrow{\widehat{w}A} & \widehat{w}s \\ \searrow C(\widehat{w}r) & & \swarrow C(\widehat{w}s) \\ & \widehat{w}r = \widehat{w}s & \end{array}$$

Si A est la seule réduction portant sur le chemin $\widehat{w}r$, on pose :

$$s_2([\bar{w}, r \xrightarrow{A} s]) = 0.$$

Sinon, il existe une décomposition dans \mathbf{C} $\widehat{w}r = \widehat{u}u_1vu_2$ et une règle $B = (u_1v, w_1)$ dans R , avec $r = vu_2$. La paire critique $\langle u_1A, Bu_2 \rangle$ étant convergente, on pose :

$$s_2([\bar{w}, r \xrightarrow{A} s]) := \bar{u}(u_1A, Bu_2) - s_2([\bar{u}, C(u_1s)]) + s_2([\bar{u}, C(w_1u_2)]).$$



On a :

$$\begin{aligned}
 d_3(q)s_2(q)[\bar{w}, A] &= d_3(q)([\bar{u}, \langle u_1 A, B u_2 \rangle] - s_2(q)[\bar{u}, C(u_1 s)] + s_2(q)[\bar{u}, C(w_1 u_2)]), \\
 &= [\bar{w}, A] - [\bar{u}, B]I(u_2) + s_1(q)d_2(q)[\bar{u}, C(u_1 s)] - s_1(q)d_2(q)[\bar{u}, C(w_1 u_2)], \\
 &= [\bar{w}, A] - ([\bar{u}, B]I(u_2) - [C(\hat{u}u_1 s)] + [C(\hat{u}w_1 u_2)]).
 \end{aligned}$$

Or, on a $s_1(q)d_2(q)[\bar{w}, A] = s_1(q)([\bar{w}, r] - [\bar{w}, s])$ et par ailleurs

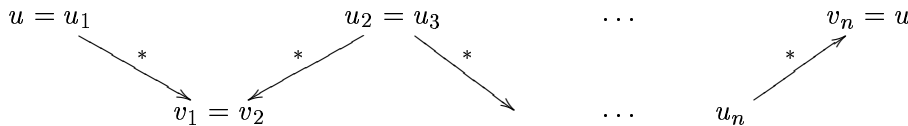
$$[C(\hat{w}r)] = [\bar{u}, B]I(u_2) + [C(\hat{u}w_1 u_2)].$$

Par suite, on a $d_3(q)s_2(q)[\bar{w}, A] = [\bar{w}, A] - s_1(q)d_2(q)[\bar{w}, A]$. L'acyclicité de la suite (4.7) en $I[R]$ en résulte. \square

4.6.4 Remarque. Plus généralement, on peut définir le morphisme de \mathbf{D} -bimodules d_3 sur les chemins de réduction dans \mathbf{C} . On rappelle que les éléments de $\rightarrow^* R$ sont les chemins de réduction de la forme :

$$\begin{aligned}
 u &= v_1 r_1 u_1 \xrightarrow{v_1 A_1 u_1} v_1 s_1 u_1 = v_2 r_2 u_2 \xrightarrow{v_2 A_2 u_2} \dots \\
 &\dots v_{n-1} s_{n-1} u_{n-1} = v_n r_n u_n \xrightarrow{v_n A_n u_n} v_n s_n u_n = v,
 \end{aligned}$$

avec $u_i, v_i \in \mathbf{C}$ et $r_i \xrightarrow{A_i} s_i \in R$. Un *cycle de réduction* est la donnée d'une suite $(C(u_k, v_k, \epsilon))_{k=1, \dots, n}$ de chemins de réduction de u_k à v_k tels que $v_k = u_{k+1}$ pour $1 \leq k < n$ et $v_n = u_1$. Le paramètre $\epsilon \in \{-1, +1\}$ prend la valeur $+1$ si le chemin est pris dans le «bon» sens dans le cycle et -1 sinon.



Si q est un objet de \mathbf{C} et $C = (C(u_i^k, A_i^k, v_i^k, \epsilon^k))_{i \in I_k, k=1, \dots, n}$ un cycle de réduction avec $A_i^k : r_i^k \rightarrow s_i^k$, alors, pour tout morphisme $q \xleftarrow{\bar{w}} \tau(v_i^k)$ de \mathbf{C} , on pose :

$$d_3(q)[\bar{w}, C] = \sum_{k=1}^n (-1)^{\epsilon^k} \sum_{i \in I_k} [\bar{w}v_i^k, A_i^k]I(u_i^k).$$

Si C est un cycle, on a $d_2(q)d_3(q)[\bar{w}, C] = 0$.

En posant $\mathbf{C} = \mathbf{L}(G)$, $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}^{\mathbf{D}^{\text{op}}}$ et $I = \mathbb{Z}\mathbf{D}$ dans le théorème 4.6.3 on a :

4.6.5 Corollaire. *Si une petite catégorie \mathbf{D} admet une présentation convergente et minimale $\langle G \mid R \rangle$, alors la suite*

$$\begin{aligned} S_{\bullet}(G, R) : \bigoplus_{\{A, B\} \in \mathcal{P}} \text{Lan}_{\tau(A)} \mathbb{Z}\mathbf{D}(-, \sigma(A)) &\xrightarrow{d_3} \bigoplus_{A \in R} \text{Lan}_{\tau(A)} \mathbb{Z}\mathbf{D}(-, \sigma(A)) \\ &\xrightarrow{d_2} \bigoplus_{a \in G} \text{Lan}_{\tau(a)} \mathbb{Z}\mathbf{D}(-, \sigma(a)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{p \in |G|} \text{Lan}_p \mathbb{Z}\mathbf{D}(-, p) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}\mathbf{D} \end{aligned} \quad (4.8)$$

est une résolution libre de \mathbf{D} -bimodules de $\mathbb{Z}\mathbf{D}$. De plus, si R est fini, alors $S_{\bullet}(G, R)$ est de type fini et \mathbf{D} est de type bi-PF₃.

Avec $\mathbf{C} = \mathbf{L}(\Sigma)$, où Σ est un graphe avec un seul objet, $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ et $I = \mathbb{Z}$, alors la résolution (4.7) est celle de Squier pour les monoïdes (cf. 3.2.2).

4.7 Calcul de l'homologie

L'homologie d'une petite catégorie \mathbf{C} peut être calculée à partir d'une présentation convergente de type fini $\langle G \mid R \rangle$ en utilisant la résolution $S_{\bullet}(G, R)$ du théorème 4.6.5.

D'après 4.4.6, on a pour tout \mathbf{C} -bimodule M : $H_*(\mathbf{C}, M) \simeq \text{Tor}_*^{\mathbf{C}^e}(\mathbb{Z}\mathbf{C}, M)$. Nous rappelons que pour tout sous-ensemble X de morphismes de \mathbf{C} , on a un isomorphisme de groupes abéliens :

$$M \otimes_{\mathbf{C}^e} \bigoplus_{x \in X} \text{Lan}_{\tau(x)} \mathbb{Z}\mathbf{C}(-, \sigma(x)) (=) \simeq \bigoplus_{x \in X} M(\sigma(x), \tau(x)),$$

associant à tout $m \otimes v.[x].u$ l'élément $[x]u.m.v$, où dans le premier membre $[x]$ désigne l'injection de $\mathbb{Z}\mathbf{C}^e((\sigma(x), \tau(x)), (-, =))$ dans $\bigoplus_{x \in X} \text{Lan}_{\tau(x)} \mathbb{Z}\mathbf{C}(-, \sigma(x)) (=)$ et dans le second membre l'injection de $M(\sigma(x), \tau(x))$ dans $\bigoplus_{x \in X} M(\sigma(x), \tau(x))$. Le complexe $M \otimes_{\mathbf{C}^e} S_{\bullet}(G, R)$ est donné par :

$$\bigoplus_{\langle P, Q \rangle \in \mathcal{P}} M(\sigma(P), \tau(P)) \xrightarrow{\partial_3} \bigoplus_{A \in R} M(\sigma(A), \tau(A)) \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{a \in G} M(\sigma(a), \tau(a)) \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{p \in |G|} M(p, p)$$

où :

$$\begin{aligned} \partial_1[a] &= [\sigma(a)]M(\sigma(a), a) - [\tau(a)]M(a, \tau(a)), \quad \text{pour tout } a \in G; \\ \partial_2[A] &= [r] - [s], \quad \text{pour tout } r \xrightarrow{A} s \in R; \\ \partial_3[\langle P, Q \rangle] &= [P] + [Q \setminus P] - [P \setminus Q] - [Q], \quad \text{pour tout } \langle P, Q \rangle \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

4.7.1 Corollaire. Soit \mathbf{C} une petite catégorie : pour tout \mathbf{C} -bimodule M ,

- i) si \mathbf{C} est libre, alors $H_1(\mathbf{C}, M) = \bigoplus_{a \in G} M(\sigma(a), \tau(a))$,
- ii) si \mathbf{C} admet une présentation sans paire critique, alors $H_2(\mathbf{C}, M) = \bigoplus_{A \in R} M(\sigma(A), \tau(A))$,
- iii) si \mathbf{C} admet une présentation sans triple critique, alors $H_3(\mathbf{C}, M) = \bigoplus_{\langle P, Q \rangle \in \mathcal{P}} M(\sigma(P), \tau(P))$,
- iv) si \mathbf{C} admet une présentation convergente et de type fini et si M est de type fini, alors le groupe $H_3(\mathbf{C}, M)$ est de type fini.

Démonstration. Si \mathbf{C} est libre, alors \mathbf{C} n'admet aucune relation et le morphisme de \mathbf{C} -bimodules d_1 de la résolution (4.8) est injectif. L'assertion i) en résulte.

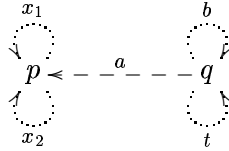
De la même façon, si \mathbf{C} n'admet pas de paire critique, alors le morphisme d_2 de la résolution (4.8) est injectif, par suite l'assertion ii) est vérifiée.

On sait (cf. [Squ87a], Thm. 3.2.) que le morphisme d_3 de la résolution (4.8) est injectif si R n'engendre pas de triple critique, d'où l'assertion iii).

L'assertion iv) est immédiate. \square

4.7.2 Remarque. La réciproque de l'assertion iv) n'est pas vraie en général.

Les calculs se font comme dans le cas des monoïdes. Considérons l'exemple 3.2.6 avec le graphe G :



où x_1, x_2, a et t sont des chemins avec les mêmes règles que dans 3.2.6 :

$$R = \{at^n b \xrightarrow{P_n} at^n, x_1 a \xrightarrow{A_1} at, x_2 a \xrightarrow{A_2} at\}.$$

Soient \mathbf{C} la catégorie $\mathbf{L}(G) / \leftarrow^*_R$ et \mathbb{Z} le \mathbf{C} -bimodule trivial, i.e., pour tout objet (p, q) et tout morphisme (u, v) de \mathbf{C}^e , $\mathbb{Z}(p, q) = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}(u, v) = 1_{\mathbb{Z}}$. On montre que $H_3(\mathbf{C}, \mathbb{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par la famille :

$$\{\langle x_1 P_n, A_1 t^n b \rangle - \langle x_2 P_n, A_2 t^n b \rangle, n \in \mathbb{N}\}.$$

4.8 La résolution de Kobayashi pour les petites catégories

Nous appliquons, dans cette partie, la méthode de construction par induction de résolutions libres de Kobayashi, basée sur les chaînes de Anick, à la réécriture de petites catégories. On montre que les petites catégories, et par conséquent les monoïdes, munies d'une présentation convergente de type fini sont de type bi-PF $_{\infty}$. Par suite, leur homologie de Hochschild-Mitchell est de type fini en tout degré. Une construction analogue a été publiée pour la première fois par Morace, [Mor95], mais ayant abordé cette généralisation avant la connaissance de son travail nous donnons les détails de la construction. Un résumé

est donné dans [Mal03]. Cette résolution sera mise en œuvre, par la suite, pour les théories algébriques, donnant ainsi une résolution effective pour le calcul de leur homologie.

Soient \mathbf{C} une petite catégorie et G un graphe générateur de \mathbf{C} . On considère un ensemble R de règles sur \mathbf{C} tel que la relation de réduction \rightarrow_R sur \mathbf{C} , engendrée par R , soit convergente. Désignons par Fn l'ensemble des morphismes de \mathbf{C} irréductibles par \rightarrow_R et par \mathbf{D} la catégorie obtenue comme quotient de \mathbf{C} par la relation de congruence \leftrightarrow_R^* sur \mathbf{C} engendrée par R . Nous désignerons par \bar{w} l'image d'un morphisme w de \mathbf{C} par la projection $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ et par \hat{w} sa forme normale.

4.8.1 Chaînes de Anick

L'ensemble des antichaînes de R dans \mathbf{C} est l'ensemble :

$$A_{\text{Fn}}(\mathbf{C}, R) = \{v \in \mathbf{C} \setminus \text{Fn} \mid u \preceq v \text{ et } u \neq v \text{ impliquent } u \in \text{Fn}\}$$

où \preceq est l'ordre préfixe sur les chemins de \mathbf{C} . Pour tout entier $n \geq 1$, d'après 2.3.11, l'ensemble des n -chaînes de Anick de R est défini par :

$$C_n = \{(v_n, \dots, v_1) \mid v_1 \in G, v_i \in \text{Fn}, \text{ et } v_i v_{i-1} \in A_{\text{Fn}}(\mathbf{C}, R), \text{ pour } i \geq 2\},$$

où $\times_{|\mathbf{C}|}$ désigne le produit fibré au-dessus des objets de \mathbf{C} . Pour $n = 0$, on pose $C_0 = |G|$. Une n -chaîne est une suite de morphismes composables et R -irréductibles dans \mathbf{C} et dont la composée de deux d'entre eux est un réductible par R minimal pour l'ordre \preceq :

$$\begin{array}{ccccccc} \xleftarrow{v_n} & \xleftarrow{v_{n-1}} & \xleftarrow{v_{n-2}} & \dots & \xleftarrow{v_2} & \xleftarrow{v_1} \\ \hline \hline \end{array}$$

Dans la suite, pour une n -chaîne $c_n = (v_n, \dots, v_1)$, nous noterons $\sigma(c_n) = \sigma(v_1)$ et $\tau(c_n) = \tau(v_n)$ et, si aucune confusion n'est possible, nous désignerons aussi par c_n le morphisme composé $v_n \dots v_1$ dans \mathbf{C} .

Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne, munie de coproduits indexés par les ensembles de morphismes de \mathbf{D} , et I un foncteur de \mathbf{D} dans \mathcal{A} . Pour tout entier $n \geq 0$, considérons le foncteur $I[C_n] : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{A}$ défini par :

$$I[C_n] = \bigoplus_{c_n \in C_n} \text{Lan}_{\tau(c_n)} I(\sigma(c_n)),$$

où Lan_p désigne le foncteur adjoint à gauche du foncteur évaluation $\text{Res}_p : \mathcal{A}^{\mathbf{D}} \rightarrow \mathcal{A}$. Pour tout diagramme $q \xleftarrow{\bar{u}} \tau(c_n) \xleftarrow{c_n} \sigma(c_n)$ dans \mathbf{D} , où c_n est une n -chaîne, on désignera par $[\bar{u}, c_n]$ la u -ième injection de $I(\sigma(c_n))$ dans $I[C_n](q)$.

4.8.1 Relation noëthérienne. Soit q un objet de \mathbf{D} , pour tous diagrammes $q \xleftarrow{\bar{u}} \tau(c_n) \xleftarrow{c_n} \sigma(c_n)$ et $q \xleftarrow{\bar{v}} \tau(c_m) \xleftarrow{c_m} \sigma(c_m)$ dans \mathbf{D} , où c_n est une n -chaîne et c_m une m -chaîne, on pose :

$$\begin{array}{l} [\bar{u}, c_n] \geq [\bar{v}, c_m] \\ (\text{resp. } [\bar{u}, c_n] > [\bar{v}, c_m]) \end{array}$$

s'il existe un morphisme w dans \mathbf{C} , de source $\sigma(c_n)$ et de but $\sigma(c_m)$, et un chemin de réduction dans $\mathbf{C} : \widehat{u}c_n \xrightarrow{*} \widehat{v}c_m w$ (resp. et $\widehat{u}c_n \neq \widehat{v}c_m w$) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tau(c_n) & \xleftarrow{c_n} & \sigma(c_n) \\
 & \swarrow \bar{u} & & & \vdots \\
 q & & & & w \\
 & \searrow \bar{v} & & & \vdots \\
 & & \tau(c_m) & \xleftarrow{c_m} & \sigma(c_m)
 \end{array}$$

On étend la relation \geq au coproduit ensembliste $\coprod_{n \geq 0} I[C_n](q)$ en posant, pour tous morphismes de \mathcal{A} ,

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i [\bar{u}^i, c_n^i] \in I[C_n](q), \quad y = \sum_{j \in J} \beta_j [\bar{v}^j, d_m^j] \in I[C_m](q), \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$$

$x \geq y$, si pour tout $j \in J$, il existe $i_0 \in I$ tel que :

$$[\bar{u}^{i_0}, c_n^{i_0}] \geq [\bar{v}^j, d_m^j].$$

Notons que si $x \in I[C_n](q)$ et $y \in I[C_m](q')$, avec $q \neq q'$, alors x et y ne sont pas comparables par \geq .

4.8.2 Lemme. *La relation \geq est une relation noëthérienne sur l'ensemble $\coprod_{n \geq 0} I[C_n](q)$ et compatible pour l'action à gauche de \mathbf{D} .*

Démonstration. En reprenant les notations précédentes, si $[\bar{u}, c_n] \geq [\bar{v}, c_m]$ alors, par définition, pour tout $\bar{w} \in \mathbf{D}(q, q')$ on a : $[\bar{w}\bar{u}, c_n] \geq [\bar{w}\bar{v}, c_m]$. \square

Nous construisons par induction noëthérienne, relativement à \geq , une suite acyclique dans $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$:

$$K_*(\mathbf{C}, R) : \dots \longrightarrow I[C_n] \xrightarrow{d_n} I[C_{n-1}] \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} I[C_0] \xrightarrow{\epsilon} I \longrightarrow 0.$$

4.8.3 Définition. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et $C_* = (C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1})_{n \geq 1}$ un complexe de chaînes dans \mathcal{A} . Soit \geq une relation d'ordre sur $\coprod_{n \geq 0} C_n$. Le complexe C_* est

dit *ordonné* si, pour toute n -chaîne c_n , on a $d_n(c_n) \leq c_n$. Une homotopie contractante $i_* : C_* \longrightarrow C_{*+1}$ est dite *réductrice* si, pour toute n -chaîne c_n , on a $i_n(c_n) \leq c_n$. Un complexe de chaînes ordonné, muni d'une homotopie contractante réductrice, est dit *acyclique ordonné*.

4.8.4 Lemme. *La suite*

$$K_1(\mathbf{C}, R) : I[C_1] \xrightarrow{d_1} I[C_0] \xrightarrow{\epsilon} I \longrightarrow 0,$$

où les morphismes ϵ et d_1 sont donnés en 4.6.3, est acyclique dans $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$ et les morphismes d_1 et i_0 sont réducteurs.

Démonstration. L'acyclicité a été montrée en 4.6.3.

Le morphisme d_1 est réducteur, car pour toute flèche a dans G et tout morphisme \bar{w} dans \mathbf{D} de source $\tau(a)$, on a :

$$d_1(q)[\bar{w}, a] = [\bar{w}a, \sigma(a)] - [\bar{w}, \tau(a)]I(a) \leq [\bar{w}, a].$$

Une homotopie contractante réductrice $i_0 : I[C_0] \rightarrow I[C_1]$ est définie en posant, pour tout morphisme $\bar{w} \in \mathbf{D}(p, q)$, $i_0(q)[\bar{w}, p] = [1_{\tau(w)}, \hat{w}]$. L'application $i_0(q)$ satisfait la relation $i_0(q)[\bar{w}, p] \leq [\bar{w}, p]$. Par suite $K_1(\mathbf{C}, R)$, est acyclique et ordonnée. \square

4.8.5 Hypothèse d'induction. Soit $n \geq 1$ un entier, on suppose que la résolution $K_n(\mathbf{C}, R)$ soit construite et ordonnée jusqu'à l'ordre n :

$$K_n(\mathbf{C}, R) : I[C_n] \xrightarrow{d_n} I[C_{n-1}] \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} I[C_0] \xrightarrow{\epsilon} I \rightarrow 0.$$

En notant $i_k : I[C_k] \rightarrow I[C_{k+1}]$ l'homotopie contractante, on considère l'hypothèse d'induction : si q est un objet de \mathbf{D} et $\bar{w} \in \mathbf{D}(\tau(u_n), q)$:

$$(H_n(q)) : \begin{cases} \text{si } \hat{w}u_n \text{ est réductible, alors } i_{n-1}d_n[\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)] < [\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)], \\ \text{si } \hat{w}u_n \text{ est irréductible, alors } i_{n-1}d_n[\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)] = [\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)]. \end{cases}$$

4.8.6 Lemme. Pour tout objet q de \mathbf{D} , les opérateurs $d_1(q)$ et $i_0(q)$ satisfont $(H_0(q))$.

Démonstration. Par définition de i_0 et d_1 , on a

$$i_0(q)d_1(q)[\bar{w}, a] = [1_{\tau(w)}, \hat{w}a] - [1_{\tau(w)}, \hat{w}]I(a).$$

Si $\hat{w}a$ est irréductible, alors on a la décomposition : $[1_{\tau(w)}, \hat{w}a] = [\bar{w}, a] + [1_{\tau(w)}, \hat{w}]I(a)$, d'où $i_0(q)d_1(q)[\bar{w}, a] = [\bar{w}, a]$.

Si $\hat{w}a$ est réductible, en posant $\hat{w} = b_1 \dots b_s$, comme $[\ , -]$ est une dérivation, on a :

$$[1_{\tau(w)}, \hat{w}]I(a) = \sum_{i=1}^s [\overline{b_1 \dots b_{i-1}}, b_i]I(\overline{b_{i+1} \dots b_s a}).$$

Il existe $t \in \{1, \dots, s\}$ tel que $b_t \dots b_s a$ soit réductible, d'où $[1_{\tau(w)}, \hat{w}]I(a) < [\bar{w}, a]$. Par ailleurs, $[1_{\tau(w)}, \hat{w}a] < [\bar{w}, a]$, par suite

$$i_0(q)d_1(q)[\bar{w}, a] < [\bar{w}, a].$$

\square

4.8.7 Définition. Soit $n \geq 1$ un entier. L'opérateur bord d_{n+1} est le morphisme de \mathbf{D} -modules $d_{n+1} : I[C_{n+1}] \rightarrow I[C_n]$ défini fonctoriellement par la formule :

$$d_{n+1}(q)[\bar{w}, (u_{n+1}, u_n, \dots, u_1)] := [\overline{w}u_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] - I[C_n](\bar{w})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{w}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)],$$

où

$$\begin{array}{c}
 p \xleftarrow{u_{n+1}} \xleftarrow{u_n} \dots \xleftarrow{u_1} \\
 \swarrow \bar{w} \\
 q
 \end{array}$$

est un diagramme dans \mathbf{D} dont $(u_{n+1}, u_n, \dots, u_1)$ est une $n + 1$ -chaîne.

4.8.8 Définition. Soit $n \geq 1$ un entier, supposons que pour tout objet p de \mathbf{D} , $(H_n(p))$ soit vraie et que $K_n(\mathbf{C}, R)$ soit donnée. L'homotopie contractante $i_n : I[C_n] \rightarrow I[C_{n+1}]$ est définie fonctoriellement et par induction noethérienne. Soit

$$\begin{array}{c}
 \xleftarrow{u_n} \xleftarrow{u_{n-1}} \xleftarrow{u_1} \\
 \swarrow w \\
 q
 \end{array}$$

un diagramme dans \mathbf{D} , où (u_n, \dots, u_1) est une n -chaîne. On distingue deux cas.

i) Si $\widehat{w}u_n$ est irréductible, alors :

$$i_n(q)[\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)] := 0;$$

ii) si $\widehat{w}u_n$ est réductible, d'après le lemme 2.3.14, il existe une unique décomposition dans $\mathbf{C} : \widehat{w}u_n = vu_{n+1}u_n$ telle que u_{n+1} soit irréductible et $u_{n+1}u_n \in A_{\text{Fn}}(\mathbf{C}, R)$, alors :

$$\begin{aligned}
 i_n(q)[\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)] &:= [\bar{v}, (u_{n+1}, u_n, \dots, u_1)] \\
 &+ i_n(q)I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 q \xleftarrow{\bar{w}} \xleftarrow{u_n} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{u_1} \\
 \swarrow \bar{v} \quad \searrow u_{n+1} \\
 p
 \end{array}$$

4.8.9 Remarque. Notons que le morphisme $i_n(q)$ est bien défini car $u_{n+1}u_n$ est réductible et, par hypothèse $(H_n(p))$, on a :

$$i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] < [\bar{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)],$$

et par suite

$$I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] < I[C_n](\bar{v})[\bar{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] = [\bar{w}, (u_n, \dots, u_1)].$$

Notons aussi, qu'ainsi défini, i_n n'est pas un morphisme de \mathbf{D} -modules.

4.8.10 Lemme. Si pour tout objet p de \mathbf{D} la suite $K_n(\mathbf{C}, R)(p)$ est acyclique, ordonnée et si l'hypothèse $(H_n(p))$ est vraie, alors pour tout objet q de \mathbf{D} , la suite $K_{n+1}(\mathbf{C}, R)(q)$ est acyclique et ordonnée.

Démonstration. Dans la suite, nous utiliserons la relation

$$d_n(p)i_{n-1}(p)d_n(p) = d_n(p), \quad (4.9)$$

conséquence de l'acyclicité de $K_n(\mathbf{C}, R)(p)$ en $I[C_{n-1}](p)$:

$$d_n(p)i_{n-1}(p) + i_{n-2}(p)d_{n-1}(p) = 1_{I[C_{n-1}](p)}.$$

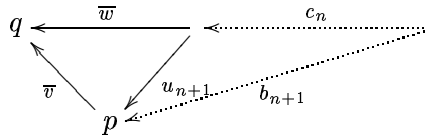
Soit q un objet de \mathbf{D} , montrons que $d_n(q)d_{n+1}(q) = 0$. Par définition de d_{n+1} , pour toute n -chaîne c_n , il existe une $n-1$ -chaîne d_{n-1} telle que :

$$d_{n+1}(q)[\bar{w}, c_n] = [\bar{w}', d_{n-1}] - i_{n-1}(q)d_n(q)[\bar{w}', d_{n-1}].$$

La relation $d_n(q)d_{n+1}(q) = 0$ s'en déduit par la relation (4.9).

On montre l'acyclicité de $K_{n+1}(\mathbf{C}, R)(q)$ en $I[C_n](q)$ par induction. Soit $[\bar{w}, c_n]$, où $c_n = (u_n, \dots, u_1)$ est une n -chaîne. On distingue deux cas selon la réductibilité de $\widehat{w}u_n$.

Si $\widehat{w}u_n$ est réductible, par définition de i_n il existe une $n+1$ chaîne b_{n+1}



telle que :

$$i_n(q)[\bar{w}, c_n] = [\bar{v}, b_{n+1}] + i_n(q)I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n], \quad (4.10)$$

avec $I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] < [\bar{w}, c_n]$. Par hypothèse d'induction, on a :

$$d_{n+1}(q)i_n(q)I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] = I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] - i_{n-1}(q)d_n(q)I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n]. \quad (4.11)$$

On a :

$$\begin{aligned} i_{n-1}(q)d_n(q)I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] &= i_{n-1}(q)I[C_{n-1}](\bar{v})d_n(p)i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] \\ &\quad (\text{par naturalité de } d_n) \\ &= i_{n-1}(q)I[C_{n-1}](\bar{v})d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] \quad (\text{par (4.9)}) \\ &= i_{n-1}(q)d_n(q)[\bar{w}, c_n] \quad (\text{par naturalité de } d_n) \end{aligned}$$

De l'identité (4.10) on déduit que :

$$\begin{aligned} d_{n+1}(q)i_n(q)[\bar{w}, c_n] &= d_{n+1}(q)[\bar{v}, b_{n+1}] + d_{n+1}(q)i_n(q)I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n], \\ &\stackrel{4.11}{=} d_{n+1}(q)[\bar{v}, b_{n+1}] + I[C_n](\bar{v})i_{n-1}(p)d_n(p)[\bar{u}_{n+1}, c_n] - i_{n-1}(q)d_n(q)[\bar{w}, c_n] \end{aligned}$$

or $d_{n+1}(q)[\bar{v}, b_{n+1}] = [\bar{w}, c_n] - i_{n-1}(q)d_n(q)[\bar{w}, c_n]$, par suite :

$$d_{n+1}(q)i_n(q)[\bar{w}, c_n] = [\bar{w}, c_n] - i_{n-1}(q)d_n(q)[\bar{w}, c_n]. \quad (4.12)$$

Par ailleurs, si $\widehat{w}u_n$ est irréductible, d'après $(H_n(q))$, on a $i_{n-1}(q)d_n(q)[\overline{w}, c_n] = [\overline{w}, c_n]$ et $i_n(q)[\overline{w}, c_n] = 0$ par définition de $i_n(q)$, par suite l'identité (4.12) est aussi vérifiée et $K_{n+1}(\mathbf{C}, R)$ est acyclique en $I[C_n](q)$.

Enfin, les morphismes d_{n+1} et i_n sont réducteurs par définition. Ainsi la suite $K_{n+1}(\mathbf{C}, R)$ est acyclique et ordonnée. \square

4.8.11 Lemme. *Pour tout objet q de \mathbf{D} , les opérateurs $d_{n+1}(q)$ et $i_n(q)$ satisfont $(H_{n+1}(q))$.*

Démonstration. Soient $\overline{w} \in \mathbf{D}(p, q)$ et $[\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)] \in I[C_{n+1}](q)$. Par définition de $d_{n+1}(q)$ on a :

$$d_{n+1}(q)[\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)] = [\overline{w}u_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] - I[C_n](\overline{w})i_{n-1}(p)d_n(p)[\overline{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)].$$

D'une part comme $u_{n+1}u_n$ est réductible, on a, par application de $(H_{n-1}(p))$,

$$I[C_n](\overline{w})i_{n-1}(p)d_n(p)[\overline{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] < [\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)],$$

et d'autre part si $\widehat{w}u_{n+1}$ est réductible, on a

$$[\overline{w}u_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] < [\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)],$$

d'où $d_{n+1}(q)[\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)] < [\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)]$ et comme $i_n(q)$ est réducteur on a :

$$i_n(q)d_{n+1}(q)[\overline{w}, (\overline{u}_{n+1}, u_n, \dots, u_1)] < [\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)].$$

Par ailleurs, si $\overline{w}u_{n+1}$ est irréductible, on a par définition de $i_n(q)$:

$$\begin{aligned} i_n(q)d_{n+1}(q)[\overline{w}, (u_{n+1}, \dots, u_1)] &= i_n(q)[\overline{w}u_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)] \\ &\quad - i_n(q)I[C_n](\overline{w})i_{n-1}(p)d_n(p)[\overline{u}_{n+1}, (u_n, \dots, u_1)], \\ &= [\overline{w}, (u_{n+1}, u_n, \dots, u_1)]. \end{aligned}$$

\square

On a donc montré le résultat suivant :

4.8.12 Théorème. *Soient \mathbf{C} une petite catégorie et G un graphe générateur de \mathbf{C} . Soit R un ensemble de règles convergentes sur \mathbf{C} . Si \mathbf{D} désigne la catégorie obtenue comme quotient de \mathbf{C} par la relation de congruence \leftrightarrow_R^* engendrée par R , alors, pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} et tout objet I de $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$, la résolution $K_*(\mathbf{C}, R)$ est une résolution acyclique de I dans $\mathcal{A}^{\mathbf{D}}$.*

4.8.13 Proposition. *Avec les hypothèses du théorème 4.8.12, si, de plus, R est fini et que I est un générateur projectif, alors la résolution $K_*(\mathbf{C}, R)$ est libre de type fini.*

Démonstration. Si R est fini, alors pour tout entier n l'ensemble des n -chaînes C_n est fini. Les objets $I[C_n]$ sont des sommes finies de générateurs projectifs. \square

4.8.14 Corollaire. *Une petite catégorie \mathbf{D} , admettant une présentation convergente et de type fini, est de type $bi\text{-PF}_\infty$.*

Démonstration. Soit $\langle G \mid R \rangle$ une présentation convergente de type fini de \mathbf{D} , il suffit de prendre $\mathbf{C} = \mathbf{L}(\Sigma)$ et $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}^{\mathbf{D}^{\text{op}}}$ dans le théorème précédent. \square

4.8.15 Corollaire. *Un monoïde \mathbf{M} , admettant une présentation convergente de type fini, est de type $bi\text{-PF}_\infty$.*

Chapitre 5

Critères de finitude homologique en réécriture de termes

Ce chapitre contient le résultat principal de cette thèse. Nous montrons qu'une théorie équationnelle, admettant une présentation convergente par un système de réécriture de termes de type fini, est sémantiquement décrite par une théorie algébrique de type bi-PF_∞ sur \mathbb{Z} .

La réécriture de termes est introduite généralement de façon syntaxique. Nous interprétons en 5.3 un système de réécriture de termes comme un système de réécriture de théories algébriques. Dans la section 5.4 nous définissons la notion de type de présentation PF_n pour une théorie algébrique. Nous établissons les critères bi-PF_∞ pour les théories algébriques convergentes dans la section 5.5.

5.1 Introduction

L'interprétation syntaxique classique de la réécriture de termes est basée sur les notions de termes, de contextes et de substitutions. Une signature Ω est définie par la donnée d'une suite $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles, où chaque Ω_n est un ensemble définissant les opérations n -aires. La Ω -algèbre $A_\Omega(X)$, librement engendrée par un ensemble de variables X , est construite inductivement par ajout des termes construits sur l'ensemble X :

$$\frac{}{x \in A_\Omega(X)} x \in X, \quad \frac{t_1, \dots, t_n \in A_\Omega(X)}{f(t_1, \dots, t_n) \in A_\Omega(X)} f \in \Omega(\mathbf{n}, \mathbf{1})$$

5.1.1 Définition ([Baa98]_b). Soient Ω une signature, X un ensemble dénombrable de variables et E une relation binaire sur $A_\Omega(X)$. Une *théorie équationnelle* sur E est la donnée d'une relation binaire \approx_E sur $A_\Omega(X)$ définie par

$$\approx_E := \{(u, v) \in A_\Omega(X) \times A_\Omega(X) \mid E \models u \approx v\},$$

où $E \models u \approx v$ signifie que la relation $u \approx v$ est vraie dans tous les modèles de E . En d'autres termes, pour toute Ω -algèbre $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(E)$ et tout morphisme de Ω -algèbre $\phi : A_\Omega(X) \rightarrow \mathcal{A}$ on a : $\phi(u) = \phi(v)$.

5.1.2 Définition ([Baa98],). Un *système de réécriture de termes* est la donnée d'un couple $\langle \Omega \mid R \rangle$ formé d'une signature Ω et d'une relation binaire R sur $A_\Omega(X)$, telle que, pour tout élément (u, v) de R , le terme u ne soit pas une variable et toutes les variables du terme v apparaissent dans le terme u .

La relation de réduction \rightarrow_R sur $A_\Omega(X)$ engendrée par R est définie de la façon suivante. Pour tous termes w et w' dans $A_\Omega(X)$, on a $w \rightarrow_R w'$ si et seulement s'il existe une règle (u, v) dans R , une position p dans le terme w et un morphisme de Ω -algèbres $s : A_\Omega(X) \rightarrow A_\Omega(X)$, tels que le terme w' soit obtenu par substitution du terme $s(u)$ dans w , à la position p , par le terme $s(v)$:

$$w|_p = s(u) \text{ et } w' = w[s(v)]_p.$$

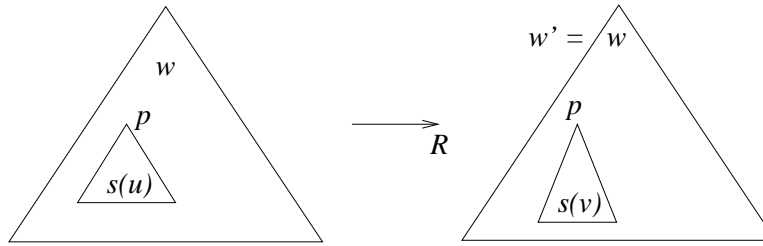


FIG. 5.1 –

Un critère de finitude homologique, pour la convergence d'une théorie équationnelle, nécessiterait, avec l'interprétation syntaxique, de considérer une catégorie de modules pour chaque théorie. Par exemple, considérer les modules sur un groupe ou sur une algèbre de Lie pour caractériser la convergence de la théorie des groupes ou de la théorie des algèbres de Lie.

De plus, la propriété de confluence, dans une théorie équationnelle, porte sur la composition des opérations définissant la théorie.

Ce sont les raisons pour lesquelles, nous considérons un point de vue abstrayant la notion de variable et ne tenant compte que de la composition des opérations. Nous considérons l'interprétation sémantique suivante :

$$\begin{aligned} \text{variable} &\rightsquigarrow \emptyset, \\ \text{substitution} &\rightsquigarrow \text{composition de morphismes}, \\ \text{algèbre des termes} &\rightsquigarrow \text{algèbre de chemins}. \end{aligned}$$

Un terme w d'arité n s'interprète comme un morphisme de \mathbf{n} dans $\mathbf{1}$. Les termes sont obtenus par composition «opéradique» des morphismes. Il y a deux façons associatives de construire les morphismes selon le schéma de la figure 5.2 décrivant les deux situations suivantes :

$$w(\dots, u(), \dots, v(), \dots), \quad w(\dots, v(\dots, u(), \dots), \dots).$$

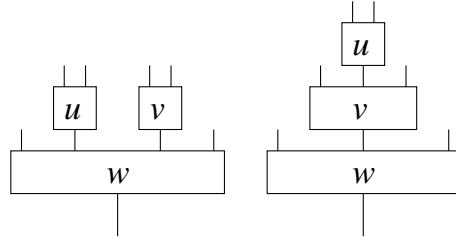


FIG. 5.2 –

Si R est un ensemble de règles de réécriture, alors la relation de réduction \rightarrow_R s'interprète comme l'ensemble des couples de flèches parallèles obtenus par clôture congruente relativement à ces deux compositions. Si $(u, v) \in R$, alors pour tous morphismes w, w', z, z' tels que les composées soient possibles, on a :

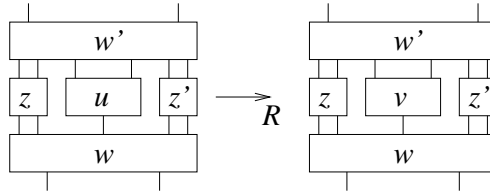


FIG. 5.3 –

Cette interprétation des théories équationnelles d'une seule sorte et du premier ordre est celle proposée par Lawvere [Law63]. Elle est construite sur la structure de petite catégorie munie de produits finis. Cette approche est à l'origine de la «logique catégorielle». Un système de réécriture de termes s'interprète comme un système de réécriture de cette catégorie.

Nous étudions le critère de finitude pour la convergence d'une théorie équationnelle relativement à l'interprétation sémantique de Lawvere. Nous utilisons pour cela le cadre cohomologique défini par Jibladze et Pirashvili pour les théories algébriques [Jib91].

Cependant, l'interprétation d'un système de réécriture de termes comme un système de réécriture sur une théorie algébrique oublie les mécanismes de gestion des variables intervenant pour des systèmes de réécriture de termes non linéaires à gauche. La prise en compte de la gestion des variables dans la présentation nécessite de considérer les règles présentant la structure induite par les produits finis. En effet, ce sont les morphismes induits par les produits finis qui permettent d'interpréter les opérations d'échange, de duplication ou d'effacement de variables dans un terme.

C'est l'objet de l'approche de Burroni, [Bur93]. Il interprète une théorie équationnelle comme une algèbre sur un PRO, présenté par la signature de la théorie équationnelle et la signature engendrant les produits finis soumis aux relations de la théorie et des produits finis. Lafont donne une présentation convergente de type fini de ces relations. Nous revenons sur cette interprétation en 5.3.5.

5.2 Théories algébriques

Cette section est consacrée à quelques brefs rappels sur la structure de théorie algébrique. Nous renvoyons le lecteur à [Sch72], Chap.18, ou encore [Wra70] pour un exposé complet.

5.2.1 Théories algébriques finitaires

Soit \mathbf{Nat} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Ens} dont les objets sont les entiers naturels, vus comme des ensembles finis, $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $n := \{0, 1, \dots, n-1\}$. La catégorie \mathbf{Nat} possède des coproduits finis, induits par ceux de \mathbf{Ens} , et par suite, la catégorie opposée \mathbf{Nat}^{op} , notée \mathbb{N} , des produits finis.

5.2.1 Définition ([Law63]). Une *théorie algébrique (finitaire) avec une sorte* est la donnée d'une petite catégorie \mathbb{A} dont les objets sont indexés par les entiers et munie d'un foncteur $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$ constant sur les objets et préservant les produits finis.

5.2.2 Remarque. Pour les théories avec plusieurs sortes, au lieu de considérer la catégorie \mathbf{Nat} , on considère la catégorie \mathbf{Nat}^I , où I désigne l'ensemble des sortes. Il est possible d'établir nos constructions sur des théories avec plusieurs sortes, [Bau03], Sec. 4. Cependant, pour des raisons de simplicité nous ne considérons que des théories avec une seule sorte.

Dans la suite, la catégorie \mathbb{N} sera identifiée avec son image dans \mathbb{A} . Les objets de \mathbb{A} seront ainsi désignés par les entiers naturels $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{n}, \dots$, où n parcourt l'ensemble des entiers naturels. Tout objet \mathbf{n} est le produit de n copies de l'objet $\mathbf{1}$. On désignera par $\pi_1^n, \dots, \pi_n^n : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}$ les n projections correspondantes. Le produit vide $\mathbf{0}$ est un objet terminal dans \mathbb{A} et $\epsilon_n : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{0}$ désigne l'unique morphisme de \mathbf{n} dans $\mathbf{0}$. Le morphisme ϵ_n est appelé *effaceur*. Le morphisme $\langle 1, 1 \rangle : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ sera noté δ et est appelé le *duplicateur*.

Un morphisme $\mathbf{1} \xleftarrow{w} \mathbf{n}$ de \mathbb{A} est appelé *terme d'arité n* de la théorie \mathbb{A} . Tout morphisme $\mathbf{m} \xleftarrow{w} \mathbf{n}$ de \mathbb{A} se décompose en termes d'arité n par l'isomorphisme

$$\pi : \mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \simeq \prod_m \mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{1})$$

défini par $\pi(w) = (\pi_1^m w, \dots, \pi_m^m w)$, en un n -uplet de termes d'arité n .

Un morphisme de théories algébriques $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est défini comme un foncteur constant sur les objets et préservant les produits finis. Les théories algébriques et les morphismes de théories algébriques forment une catégorie que l'on désignera par \mathbf{Th} . La théorie algébrique \mathbb{N} constitue l'objet initial dans \mathbf{Th} . La catégorie \mathbf{Th} est complète et cocomplète, [Sch72], 18.1.13.

5.2.2 Notations

On représente un morphisme $\mathbf{m} \xleftarrow{u} \mathbf{n}$ de \mathbb{A} par un diagramme :

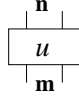


FIG. 5.4 –

L'effaceur ϵ , la diagonale et le permutateur $\tau : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$, correspondant à la symétrie du produit, sont respectivement représentés par les diagrammes :

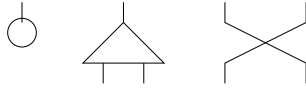


FIG. 5.5 –

Pour tous morphismes d'une théorie algébrique $\mathbf{n} \xleftarrow{u} \mathbf{m}$ et $\mathbf{n}' \xleftarrow{v} \mathbf{m}'$, nous désignons par $u \times v$ le morphisme $\mathbf{n} \times \mathbf{n}' \xleftarrow{\langle u\pi_1^{n \times n'}, v\pi_2^{n \times n'} \rangle} \mathbf{m} \times \mathbf{m}'$. On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_0 \times u &= u \times \mathbf{1}_0 = u, & \mathbf{1}_p \times \mathbf{1}_q &= \mathbf{1}_{p \times q}, \\ (u \times v)(u' \times v') &= uu' \times vv', & (\mathbf{1}_q \times v)(u \times \mathbf{1}_{p'}) &= u \times v = (u \times \mathbf{1}_{q'})(\mathbf{1}_p \times v). \end{aligned}$$

La dernière relation, appelée *relation d'isotopie*, décrit les transformations suivantes :

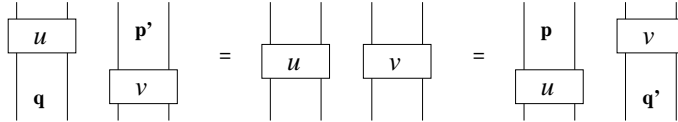


FIG. 5.6 –

5.2.3 Algèbres sur une théorie algébrique

5.2.3 Définition ([Law63]). Soient \mathbb{A} une théorie algébrique et \mathcal{C} une catégorie munie de produits finis. Une *algèbre de \mathbb{A} dans \mathcal{C}* , ou *\mathbb{A} -algèbre*, est un foncteur de \mathbb{A} dans \mathcal{C} préservant les produits finis.

Une \mathbb{A} -algèbre A dans \mathcal{C} est entièrement déterminée par la donnée de l'objet $A(\mathbf{1})$ de \mathcal{C} et d'une famille de morphismes de \mathcal{C} , $(w_A : A(\mathbf{1})^n \rightarrow A(\mathbf{1}))$, indexée par les morphismes w de \mathbb{A} et satisfaisant les relations de \mathbb{A} . Un morphisme d'algèbres $f : A \rightarrow B$ est une transformation naturelle de A sur B , telle que $w_B f^n = f w_A$, où f^n désigne le n -produit $f \times \dots \times f$. Les \mathbb{A} -algèbres dans \mathcal{C} et les transformation naturelles de \mathbb{A} -algèbres forment une catégorie, désignée par $\mathbf{Alg}_{\mathcal{C}}(\mathbb{A})$, ou encore $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ dans le cas où $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$.

Désignons par J le plongement de la catégorie $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ dans la catégorie $\mathbf{Ens}^{\mathbb{A}}$. Le plongement de Yoneda $\mathcal{Y}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathbb{A}}$ se factorise par J et par le foncteur

$$I_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) \tag{5.1}$$

défini par $I_{\mathbb{A}}(\mathbf{n}) = \mathbb{A}(\mathbf{n}, -)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) & \xhookrightarrow{J} & \mathbf{Ens}^{\mathbb{A}} \\ & \swarrow I_{\mathbb{A}} & \nearrow \mathcal{Y}_{\mathbb{A}} \\ & \mathbb{A}^{\text{op}} & \end{array}$$

Le foncteur $I_{\mathbb{A}}$ est un plongement plein, dense et préserve les coproduits finis, [Sch72], 18.2.2. Il induit ainsi une équivalence entre la catégorie \mathbb{A}^{op} et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ formée des \mathbb{A} -algèbres libres de type fini. Une \mathbb{A} -algèbre libre de type fini s'exprime comme coproduits finis de l'algèbre $I_{\mathbb{A}}(\mathbf{1})$.

Tout morphisme de théories algébriques $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ induit un foncteur $f^{\flat} : \mathbf{Alg}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{A})$, appelé *foncteur algébrique*, obtenu par restriction du foncteur $\mathbf{Ens}^f : \mathbf{Ens}^{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathbb{A}}$. Les propriétés des foncteurs algébriques sont résumées dans le lemme suivant :

5.2.4 Lemme ([Sch72], 18.5.3). *Tout foncteur algébrique $f : \mathbf{Alg}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ est fidèle, préserve et reflète les isomorphismes, les limites, les monomorphismes et les colimites filtrées. Tout foncteur algébrique f possède un adjoint à gauche $f_* : \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{B})$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{\text{op}} & \xrightarrow{f^{\text{op}}} & \mathbb{B}^{\text{op}} \\ I_{\mathbb{A}} \downarrow & & \downarrow I_{\mathbb{B}} \\ \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) & \xrightarrow{f_*} & \mathbf{Alg}(\mathbb{B}) \end{array}$$

Par suite, le foncteur f_* envoie le générateur $I_{\mathbb{A}}(\mathbf{1})$ de $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ sur le générateur $I_{\mathbb{B}}(\mathbf{1})$ de $\mathbf{Alg}(\mathbb{B})$.

En particulier, le foncteur algébrique oublié $U_{\mathbb{A}} : \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{Ens}$, induit par l'unique morphisme de théories $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}$, possède un adjoint à gauche $L_{\mathbb{A}} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\text{op}} & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{A}}^{\text{op}}} & \mathbb{A}^{\text{op}} \\ I_{\mathbb{N}} \downarrow & & \downarrow I_{\mathbb{A}} \\ \mathbf{Ens} & \xrightarrow{L_{\mathbb{A}}} & \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) \end{array}$$

En tant qu'adjoint à gauche, le foncteur $L_{\mathbb{A}}$ préserve toutes les colimites. De plus, la catégorie \mathbf{Ens} étant localement finiment présentable, on a pour tout ensemble X :

$$L_{\mathbb{A}}(X) = \lim_{\substack{X_0 \subset X \\ \text{card} X_0 < \infty}} L_{\mathbb{A}}(X_0). \quad (5.2)$$

De l'adjonction $L_{\mathbb{A}} \dashv U_{\mathbb{A}}$, on déduit l'interprétation monadique d'une théorie algébrique. Désignons par $(T_{\mathbb{A}}, \mu_{\mathbb{A}}, \eta_{\mathbb{A}})$ la monade sur la catégorie \mathbf{Ens} induite par l'adjonction

$L_{\mathbb{A}} \dashv U_{\mathbb{A}}$. Si X est un ensemble, $T_{\mathbb{A}}(X)$ forme l'ensemble des termes sur \mathbb{A} en les variables dans X . D'après (5.2), la monade $T_{\mathbb{A}}$ est finitaire : $T_{\mathbb{A}}(X) = \bigcup_{\substack{X_0 \subseteq X \\ \text{card } X_0 < \infty}} T_{\mathbb{A}}(X_0)$. En d'autres

termes, les termes de $T_{\mathbb{A}}(X)$ ne contiennent qu'un nombre fini de variables.

L'unité de l'adjonction $\eta : 1 \rightarrow T_{\mathbb{A}}$ est définie par $\eta(x) = x$ et exprime que toute variable est un terme.

La counité $\epsilon : L_{\mathbb{A}}U_{\mathbb{A}} \rightarrow 1$ induit une transformation naturelle $\mu = U_{\mathbb{A}}(\epsilon_{\mathbb{A}}.L_{\mathbb{A}})$ correspondante à la composition des termes. Pour tout ensemble X , l'application $\mu_X = U_{\mathbb{A}}(\epsilon_{F_{\mathbb{A}}(X)}) : T_{\mathbb{A}}^2(X) \rightarrow T_{\mathbb{A}}(X)$ est définie inductivement par :

$$\mu_X(x) = x, \quad \mu_X(w(t_1, \dots, t_n)) = w(\mu_X(t_1), \dots, \mu_X(t_n)).$$

L'associativité

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathbb{A}}^3(X) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T_{\mathbb{A}}^2(X) \\ \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\ T_{\mathbb{A}}^2(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T_{\mathbb{A}}(X) \end{array}$$

correspond à l'associativité de la composition des termes :

$$w(u_1, \dots, u_n)(t_1^1, \dots, t_{n_1}^1, \dots, t_1^k, \dots, t_{n_k}^k) = w(u_1(t_1^1, \dots, t_{n_1}^1), \dots, u_n(t_1^k, \dots, t_{n_k}^k))$$

A tout morphisme de théories algébriques $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ correspond une transformation naturelle $T_f : T_{\mathbb{A}} \rightarrow T_{\mathbb{B}}$ définie par :

$$T_{f_X}(x) = x, \quad T_{f_X}(w(t_1, \dots, t_n)) = f(w)(T_{f_X}(t_1), \dots, T_{f_X}(t_n)).$$

La catégorie des $T_{\mathbb{A}}$ -algèbres est équivalente à la catégorie $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$.

Le résultat suivant, reliant l'interprétation syntaxique et l'interprétation sémantique d'une théorie équationnelle, permet d'interpréter une théorie algébrique comme un objet en monoïde.

5.2.5 Proposition (b). *Le foncteur $\mathcal{S} : \mathbf{Th} \rightarrow \mathbf{Mon}(\text{End}_f(\mathbf{Ens}))$, associant à toute théorie algébrique \mathbb{A} la monade finitaire $(T_{\mathbb{A}}, \mu_{\mathbb{A}}, \eta_{\mathbb{A}})$ sur \mathbf{Ens} et à tout morphisme f la transformation naturelle T_f , possède un adjoint à droite $\mathbb{S} : \mathbf{Mon}(\text{End}_f(\mathbf{Ens})) \rightarrow \mathbf{Th}$. De plus les foncteurs \mathcal{S} et \mathbb{S} forment une équivalence de catégories.*

Démonstration. La théorie algébrique interne $\mathbb{S}(T)$ d'une monade finitaire (T, μ, η) est définie en posant, pour tout entier n , $\mathbb{S}(T)(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = (\bigcup_{\text{card } X=n} T(X))^m$ et la composition des morphismes dans $\mathbb{S}(T)$ est induite par la multiplication μ . L'unité $\eta : 1 \rightarrow \mathbb{S}\mathcal{S}$ de l'adjonction $\mathcal{S} \dashv \mathbb{S}$ est l'isomorphisme défini en posant, pour toute théorie algébrique \mathbb{A} :

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{S}(T_{\mathbb{A}}), \\ \mathbf{n} \xrightarrow{w} \mathbf{1} &\mapsto w(1, \dots, n). \end{aligned}$$

□

5.3 Interprétation catégorique de la réécriture de termes

Dans cette section, nous rappelons la construction d'une théorie algébrique présentée par générateurs et relations. Il existe plusieurs constructions du foncteur théorie algébrique libre selon l'utilisation désirée. Nous utilisons la construction proposée par Schubert dans [Sch72], 18.1.6, et nous formalisons la notion de graphe cartésien.

5.3.1 Théories libres

Désignons par \mathbb{N}_d la catégorie discrète des entiers naturels, une signature est la donnée d'un foncteur de \mathbb{N}_d dans **Ens** ; nous adoptons la définition suivante :

5.3.1 Définition. Un \mathbb{N} -*graphe* est la donnée d'une structure graphe sur le graphe sous-jacent à la catégorie \mathbb{N}_d . Une *signature* est la donnée d'un \mathbb{N} -graphe dont toutes les flèches, appelées *opérations*, sont de but **1**.

La théorie algébrique $\mathbb{L}(\Omega)$, librement engendrée par une signature Ω , est construite comme le quotient de la catégorie librement engendrée par la signature Ω^c des opérations dérivées de Ω , décrites ci-dessous, par l'ensemble des relations $\mathbb{C}(\Omega)$ correspondantes aux produits finis. La signature Ω^c est construite inductivement à partir de Ω .

Désignons par N le graphe sous-jacent à la théorie initiale \mathbb{N} dans lequel on a omit toutes les flèches de but \mathbf{n} pour $n > 1$. Le graphe N ne contient donc que les projections $\pi_i^n : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}$, $n \geq 1$ et les effaceurs $\epsilon_n : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{0}$, $n \geq 0$. Nous désignons par Ω^0 la somme amalgamée $\Omega \coprod_{|\mathbb{N}|} N$ obtenue à partir de N en ajoutant formellement toutes les flèches correspondantes aux opérations de Ω .

Les *opérations dérivées de profondeur 1* sont construites de la façon suivante. Les flèches du graphe Ω^0 forment les opérations dérivées de profondeur 1 et de but **0** ou **1**. Les opérations dérivées de profondeur 1 de \mathbf{n} dans \mathbf{m} pour $m > 1$ sont obtenues comme des m -uplets de flèches w_i de Ω^0 de source \mathbf{n} et de but **1**, notés $\langle w_1, \dots, w_n \rangle : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$. L'ensemble des opérations dérivées de profondeur 1 forme un graphe que l'on note Ω^1 .

Les *opérations dérivées de profondeur $k > 1$* sont construites récursivement à partir de celles de profondeur $k - 1$.

Supposons que les opérations dérivées de profondeur $k - 1$ soient construites et forment un graphe noté Ω^{k-1} . Les opérations dérivées de profondeur k de \mathbf{n} dans **0** sont les chemins de longueur 2 dans Ω^{k-1} de but **0** :

$$\mathbf{n} \xrightarrow{w} \mathbf{m} \xrightarrow{\epsilon_m} \mathbf{0}.$$

Les opérations dérivées de profondeur k de \mathbf{n} dans **1** sont les chemins de longueur 2 dans le graphe Ω^{k-1}

$$\mathbf{n} \xrightarrow{w} \mathbf{m} \xrightarrow{w'} \mathbf{1},$$

où w' est de profondeur 1 et w de profondeur $k - 1$. Les opérations dérivées de profondeur k de \mathbf{n} dans \mathbf{m} pour $m > 1$ sont les m -uplets

$$\langle w_1, \dots, w_m \rangle : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$$

d'opérations dérivées de profondeur k de \mathbf{n} dans **1**.

5.3.2 Définition. La signature Ω^c est la somme amalgamée $\coprod_{k \geq 0}^{\mathbb{N}} \Omega^k$ de tous les graphes Ω^k et est appelé le *graphe cartésien* engendré par Ω . Les flèches de Ω^c sont appelées les *opérations dérivées de Ω* .

5.3.3 Définition. Soit Ω une signature, on désigne par $C(\Omega)$ l'ensemble des relations suivantes sur le graphe Ω^c :

$$C_0(\Omega) \quad \epsilon_0 = 1_0, \pi_1^1 = 1_1,$$

$$C_1(\Omega) \quad \text{pour tout entier } n \geq 2, \langle \pi_1^n, \dots, \pi_n^n \rangle = 1_n,$$

$$C_2(\Omega) \quad \text{pour tout entier } n \geq 2 \text{ et toute famille } (w_i)_{i=1, \dots, n} \text{ de flèches de } \Omega^c, \pi_j^n \langle w_1, \dots, w_n \rangle = w_j,$$

$$C_3(\Omega) \quad \text{pour tout } n \geq 2 \text{ et toute famille } (w_i)_{i=1, \dots, n} \text{ de flèches de } \Omega^c, \epsilon_n \langle w_1, \dots, w_n \rangle = \epsilon_m,$$

$$C_4(\Omega) \quad \text{pour toutes flèches } u \text{ et } v \text{ de } \Omega^c \text{ de but } \mathbf{m}, \text{ si pour tout } j \in \{1, \dots, m\}, \pi_j^m u = \pi_j^m v, \text{ alors } u = v,$$

$$C_5(\Omega) \quad \text{pour toutes flèches } u, v, w \text{ de } \Omega^c, \langle u, v \rangle w = \langle uw, vw \rangle.$$

5.3.4 Proposition ([Sch72]_b). *Le foncteur oublié*

$$U : \mathbf{Th} \longrightarrow \mathbf{Ens}^{\mathbb{N}_d},$$

associant à toute théorie sa signature interne $(\mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{1}))_{n \in \mathbb{N}}$, possède un adjoint à gauche $\mathbb{L} : \mathbf{Ens}^{\mathbb{N}_d} \longrightarrow \mathbf{Th}$.

La théorie $\mathbb{L}(\Omega)$ est appelée la *théorie algébrique libre* dont les opérations sont définies par la signature Ω et ne vérifient aucun axiome.

Démonstration. La théorie $\mathbb{L}(\Omega)$ est obtenue comme la catégorie présentée par $\langle \Omega^c \mid C(\Omega) \rangle$. Si $\mathbf{n} \xleftarrow{u} \mathbf{m}$ et $\mathbf{m} \xleftarrow{v} \mathbf{p}$ sont deux opérations dérivées de Ω^c de profondeurs respectives r et s , alors le morphisme composé dans $\mathbb{L}(\Omega)$, $\mathbf{n} \xleftarrow{uv} \mathbf{p}$, est une opération dérivée de profondeur $r + s$ construite inductivement sur s .

Pour toute théorie algébrique \mathbb{A} et tout morphisme de signature $f : \Omega \longrightarrow U(\mathbb{A})$, il existe un unique morphisme de théories algébriques $g : \mathbb{L}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{A}$ tel que $U(g) = f$ et vérifiant $U(g)i_\Omega = f$, où i_Ω est l'inclusion du graphe Ω dans le graphe $U\mathbb{L}(\Omega)$. Le morphisme f est constant sur les objets, donc g est construit comme le foncteur constant sur les objets et est défini inductivement sur les morphismes en posant $g(\epsilon_{\mathbf{p}}) = \epsilon_{\mathbf{p}}$, $g(\pi_i^n) = \pi_i^n$ et, pour toutes flèches u, v de Ω^c , $g(\langle u, v \rangle) = \langle g(u), g(v) \rangle$. Le morphisme g est bien défini car pour toutes flèches u, v de Ω^c telles que $u = v$ dans $\mathbf{L}(\Omega^c)$, on a nécessairement $g(u) = g(v)$ par définition de g . \square

5.3.2 Théories présentées par générateurs et relations

Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} deux théories, la théorie produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est définie en posant, pour tous objets \mathbf{n} et \mathbf{m} , $\mathbb{A} \times \mathbb{B}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \times \mathbb{B}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$.

Une *relation de congruence* sur une théorie algébrique \mathbb{A} est une sous-théorie Γ de \mathbb{A}^2 telle que $U(\Gamma)$ est une relation d'équivalence sur $U(\mathbb{A})$, i.e., pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} , $\Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{1})$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{1})$. Si $(u, v) \in \mathbb{A}^2$ est un diagramme dans \mathbb{A} , on note $u \sim v \pmod{\Gamma}$ si $(u, v) \in \Gamma$ et \bar{u} pour la classe d'équivalence de u . L'ensemble des classes d'équivalences, modulo Γ , forme la théorie algébrique quotient de \mathbb{A} par Γ , notée \mathbb{A}/Γ . L'application quotient $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\Gamma$ est un morphisme de théories.

5.3.5 Définition. Soit Ω une signature, une Ω -relation est la donnée d'un couple de chemins parallèles de buts $\mathbf{1}$ de la signature interne $UL(\Omega)$ de la théorie libre $\mathbb{L}(\Omega)$.

Soit R un ensemble de Ω -relations, désignons par \approx_R la plus petite relation de congruence sur $\mathbb{L}(\Omega)$ contenant R . Un élément (u, v) de \approx_R peut être représenté par une 2-cellule :

$$\mathbf{n} \begin{array}{c} \xleftarrow{v} \\ \parallel \\ \xleftarrow{u} \end{array} \mathbf{m} .$$

Un ensemble R de Ω -relations peut être vue comme une Ω -signature dont les flèches de \mathbf{n} dans $\mathbf{1}$ sont toutes les Ω -relations sur $UL(\Omega)(\mathbf{n}, \mathbf{1})$.

5.3.6 Proposition. La relation de congruence \approx_R est la petite catégorie présentée par $\langle R^c \mid C(R) \rangle$, où R^c est le graphe cartésien engendré par R et $C(R)$ les relations correspondantes définies en 5.3.3.

Si $A \in R(\mathbf{o}, \mathbf{m})$ et $B \in R(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, alors $BA \in \approx_R(\mathbf{o}, \mathbf{n})$:

$$\mathbf{n} \begin{array}{c} \xleftarrow{v'} \\ \parallel B \\ \xleftarrow{v} \end{array} \mathbf{m} \quad \mathbf{m} \begin{array}{c} \xleftarrow{u'} \\ \parallel A \\ \xleftarrow{u} \end{array} \mathbf{o} \quad \mathbf{n} \begin{array}{c} \xleftarrow{v'u'} \\ \parallel BA \\ \xleftarrow{vu} \end{array} \mathbf{o}$$

Si $A \in R(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ et $B \in R(\mathbf{n}, \mathbf{m}')$, alors $\langle A, B \rangle \in \approx_R(\mathbf{n}, \mathbf{m} \times \mathbf{m}')$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{n} & \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \parallel A \\ \xrightarrow{u'} \end{array} & \mathbf{m} \\ & \begin{array}{c} \parallel \langle A, B \rangle \\ \parallel \langle A, B \rangle \\ \parallel \langle A, B \rangle \end{array} & \\ \mathbf{n} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\langle u, v \rangle} \\ \parallel \langle A, B \rangle \\ \xrightarrow{\langle u', v' \rangle} \end{array} & \mathbf{m} \times \mathbf{m}' \\ & \begin{array}{c} \parallel \langle A, B \rangle \\ \parallel \langle A, B \rangle \\ \parallel \langle A, B \rangle \end{array} & \\ \mathbf{n} & \begin{array}{c} \xleftarrow{v'} \\ \parallel B \\ \xleftarrow{v} \end{array} & \mathbf{m}' \end{array}$$

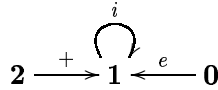
5.3.7 Proposition. Pour toute signature Ω et tout ensemble de Ω -identités R , il existe une théorie algébrique \mathbb{A} et un épimorphisme $p : \mathbb{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{A}$ de théories tels que, pour toute théorie algébrique \mathbb{B} , tout morphisme de théories $f : \mathbb{L}(\Omega) \rightarrow \mathbb{B}$ vérifiant $f(\alpha) = f(\beta)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in R$ se factorise de façon unique par p :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(\Omega) & \xrightarrow{p} & \mathbb{A} \\ & \searrow f & \swarrow \exists! \\ & & \mathbb{B} \end{array}$$

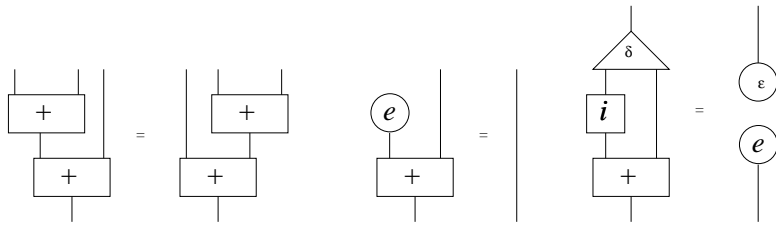
Démonstration. Le morphisme p , satisfaisant la propriété, est donné par le coégalisateur dans **Th** des deux projections $p_i : \approx_R \rightarrow \mathbb{L}(\Omega)$, $i = 1, 2$, données par $p_1(u, v) = u$ et $p_2(u, v) = v$. \square

5.3.8 Définition. Avec les notations de la proposition précédente, on dit que la théorie algébrique \mathbb{A} est présentée par générateurs Ω et relations R .

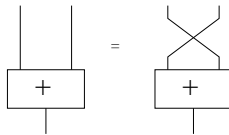
5.3.9 Exemple. La théorie algébrique des groupes \mathbb{G} est présentée par la signature définie par le graphe



et l'ensemble des relations :

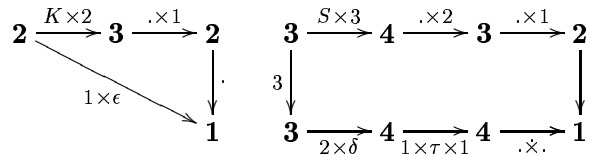


La théorie des groupes abéliens, notée \mathbb{Z} , est obtenue en rajoutant la relation de commutativité à la théorie des groupes :



5.3.10 Exemple. La logique combinatoire est la théorie algébrique présentée par la signature $\{\mathbf{2} \dashrightarrow \mathbf{1}, \mathbf{0} \xrightarrow{S} \mathbf{1}, \mathbf{0} \xrightarrow{K} \mathbf{1}, \mathbf{0} \xrightarrow{I} \mathbf{1}\}$ avec les identités suivantes :

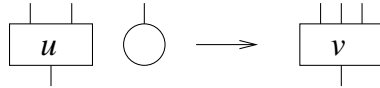
$$((S.x).y).z \approx (x.z).(y.z), \quad (K.x).y \approx x, \quad I.x \approx x$$



La logique combinatoire est indécidable et ne possède donc pas de présentation convergente de type fini.

5.3.3 Interprétation catégorique de la réécriture de termes

Un système de réécriture de termes $\langle \Omega \mid R \rangle$, défini syntaxiquement en 5.1.2, s'interprète comme un système de réécriture dans la catégorie **Th**. Cependant, en général un système de réécriture dans **Th** n'est pas un système de réécriture de termes au sens de 5.1.2. En effet, si $\mathbf{n} \xrightarrow{u} \mathbf{1}$ et $\mathbf{n} + \mathbf{1} \xrightarrow{v} \mathbf{1}$ sont des opérations, il est impossible d'interpréter syntaxiquement la règle de réécriture suivante :



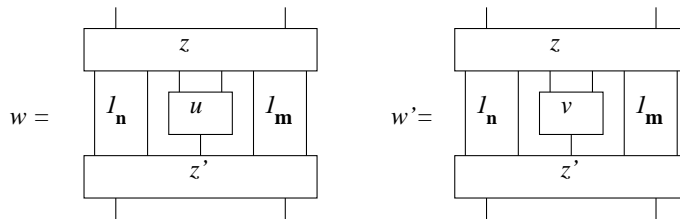
De la définition 2.3.4, on déduit :

5.3.11 Définition. Soit R un ensemble de Ω -relations, la *relation de réduction* \rightarrow_R sur $\mathbb{L}(\Omega)$ engendrée par R est définie par :

- i) si $(u, u') \in R$, alors $u \rightarrow_R u'$,
- ii) si $u \xrightarrow{A}_R u'$, alors, pour tous morphismes v, w dans $\mathbb{L}(\Omega)$ tels que les composées soient possibles et avec $v \neq \epsilon_n$, $vuw \xrightarrow{vAw}_R vu'w$,
- iii) si $u \rightarrow_R u'$ et $v \rightarrow_R v'$, alors $\langle u, v \rangle \rightarrow_R \langle u', v' \rangle$.

5.3.12 Proposition. Un système de réécriture de termes $\langle \Omega \mid R \rangle$ est convergent si et seulement si la relation \rightarrow_R est convergente sur $\mathbb{L}(\Omega)$.

Un terme w se réduit par \rightarrow_R en une étape en w' s'il existe $(u, v) \in R$, $n, m \in \mathbb{N}$ et $z, z' \in \mathbb{L}(\Omega)$ tels que :

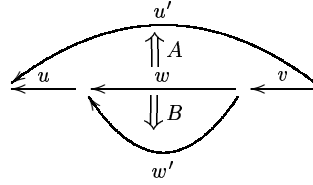


Pour tout $u, v \in \mathbb{L}(\Omega)$ on a : $\bar{u} = \bar{v}$ dans $\mathbb{L}(\Omega)/\mathbb{L}(R)$ si et seulement si $u \leftrightarrow^*_R v$.

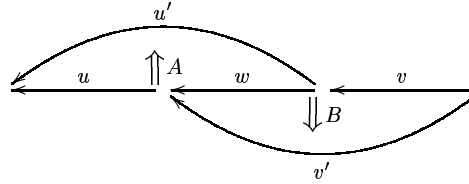
5.3.13 Proposition. Si R est fini et \rightarrow_R convergente, alors \approx_R est décidable.

5.3.4 Paires critiques

Les paires critiques pour un système de réécriture $\langle \Omega \mid R \rangle$ dans la catégorie **Th** sont définies en 2.3.4. Elles sont soit sous la forme d'une ambiguïté d'inclusion



soit sous la forme d'une ambiguïté de chevauchement



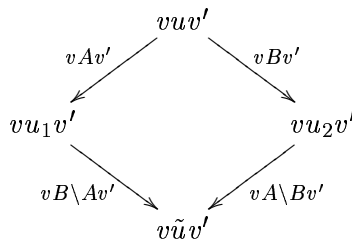
Désignons par \mathcal{P} l'ensemble des paires critiques du système de réécriture $\langle \Omega \mid R \rangle$. On identifie l'ensemble \mathcal{P} à une signature, en posant pour tous objets \mathbf{n} et \mathbf{m} , $\mathcal{P}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ est l'ensemble des paires critiques sur les morphismes w de $\mathbb{L}(\Omega)$ de source \mathbf{n} et but \mathbf{m} . La signature \mathcal{P}^c est formée de l'ensemble des paires critiques obtenues à partir de celles de \mathcal{P} par clôture cartésienne.

Si $\langle u \xrightarrow{A} u_1, u \xrightarrow{B} u_2 \rangle$ est une paire critique dans \mathcal{P} , alors pour tous morphismes v et v' de $\mathbb{L}(\Omega)$, on a :

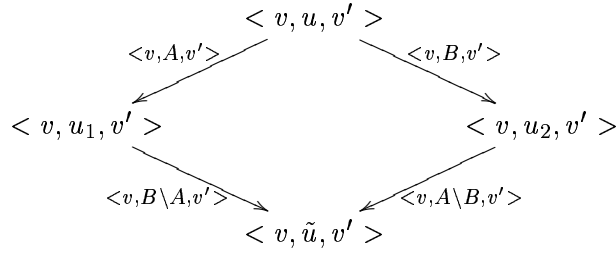
$$\langle vAv, vBv' \rangle, \langle \langle v, A, v' \rangle, \langle v, B, v' \rangle \rangle \in \mathcal{P}^c.$$

Si la paire critique $\langle A, B \rangle$ est convergente, de chemins résiduels $A \setminus B$ et $B \setminus A$, alors on a les diagrammes de confluence :

- pour tous $v, v' \in \mathbb{L}(R)$, $\langle vAv, vBv' \rangle$ est une paire critique convergente :



- pour tous $v, v' \in \mathbb{L}(R)$, $\langle v, A, v' \rangle, \langle v, B, v' \rangle$ est une paire critique convergente :



5.3.14 Exemple. La théorie des groupes \mathbb{G} , définie en 5.3.9, admet une présentation convergente. Orientons les relations de 5.3.9 de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll}
 + (+ \times 1) \xrightarrow{A} + (1 \times +), & \\
 + (0 \times 1) \xrightarrow{U_g} 1, & + (1 \times 0) \xrightarrow{U_d} 1, \\
 + (- \times 1) \delta \xrightarrow{I_g} 0\epsilon, & + (1 \times -) \delta \xrightarrow{I_d} 0\epsilon.
 \end{array}$$

Avec ces relations, il apparaît une paire critique :

$$e \xleftarrow{I_g} 0 + (- \times 1) \delta 0 \equiv + (1 \times 0) - 0 \xrightarrow{U_d} -0.$$

On rajoute donc la règle $-0 \xrightarrow{I_0} 0$. On a aussi la paire critique :

$$1 \xleftarrow{I_g} + (+ \times 1) (- \times 1 \times 1) (\delta \times 1) (- \times 1) \delta \xrightarrow{A} - - .$$

On rajoute donc la règle $-- \xrightarrow{I_-} 1$. Pour la paire critique

$$+ (1 \times +) (1 \times - \times 1) (\delta \times 1) \xrightarrow{A(1 \times - \times 1)(\delta \times 1)} + (+ \times 1) (1 \times - \times 1) (\delta \times 1) \xrightarrow{+I_d} + (0 \times 1) (\epsilon \times 1) \xrightarrow{U_g(\epsilon \times 1)} \epsilon \times 1$$

on rajoute la règle

$$+ (1 \times +) (1 \times - \times 1) (\delta \times 1) \xrightarrow{B} \epsilon \times 1.$$

De la même façon on rajoute les règles

$$- + \rightarrow + (- \times -), \quad + (- \times +) \rightarrow \epsilon \times 1.$$

L'ensemble de ces règles munissent \mathbb{G} d'une présentation convergente.

5.3.15 Exemple. A la différence de la réécriture de mots, il existe des exemples élémentaires de théories équationnelles de type fini et décidables n'admettant pas de procédure de décision par réécriture. En particulier, la théorie définie par la signature :

$$\Omega = \{ \mathbf{2} \xrightarrow{f} \mathbf{1}, \mathbf{0} \xrightarrow{0} \mathbf{1} \},$$

et les identités :

$$f(x, y) \approx f(y, x), \quad f(x, 0) \approx 0,$$

n'admet pas de présentation par un système de réécriture convergent et de type fini.

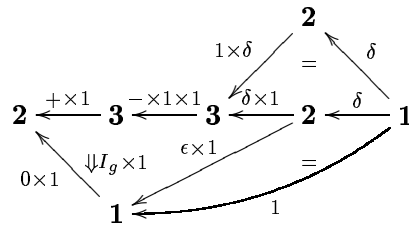
5.3.5 Syntaxe 2-dimensionnelle

L'interprétation d'un système de réécriture de termes comme un système de réécriture de théories algébriques oublie la gestion des variables dans les termes. Les variables à l'intérieur d'un terme sont organisées à l'aide des morphismes induits par la structure des produits finis que sont l'effaceur $\epsilon : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0}$, le duplicateur $\delta : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$ et le permutateur $\tau : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}$.

Considérons la présentation $\langle \Omega \mid R \rangle$ de la théorie des groupes en 5.3.14. La règle

$$+(- \times 1)\delta \xrightarrow{I_g} 0\epsilon$$

n'induit pas dans la catégorie $\mathbf{L}(\Omega^c)/\mathbf{L}(C(\Omega))$ de nouvelle paire critique :



Alors que dans la catégorie $\mathbf{L}(\Omega^c)$, il apparaît des paires critiques liées au fait que la règle I_g n'est pas linéaire à gauche. Si nous considérons la règle $(\delta \times 1)\delta \rightarrow (1 \times \delta)\delta$, il apparaît la paire critique représentée par la figure 5.7.

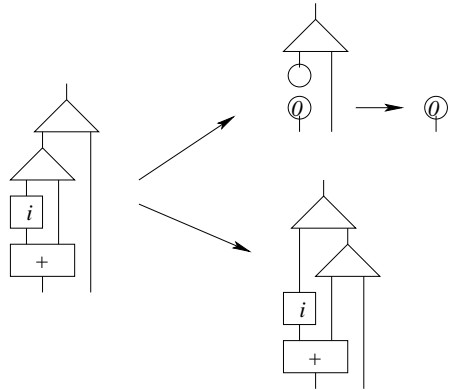


FIG. 5.7 – Non linéarité de la théorie des groupes

L'interprétation d'un système de réécriture de termes comme un système de réécriture dans la catégorie \mathbf{Th} s'adapte ainsi plus particulièrement aux systèmes de réécriture de termes linéaires à gauche et non contractants. En effet, dans les systèmes de réécriture linéaires à gauche les parties gauches de règles ne contiennent pas de duplicateur et le problème de gestion de variables ne se pose pas.

Cependant, tout dépend du point de vue que nous considérons pour l'étude de la convergence dans les théories équationnelles. La prise en compte des règles entre les morphismes

δ , ϵ et σ des produits finis n'intervient pas toujours dans les algorithmes de complétion. La présentation convergente de type fini 5.3.14 de la théorie des groupes constitue une procédure de décision pour la théorie des groupes et ce indépendamment de l'existence d'une présentation convergente et de type fini de cette théorie dans la catégorie des PROs.

La prise en compte de la gestion des variables nécessite d'interpréter un système de réécriture de termes comme un système de réécriture dans la catégorie des PROs. Il existe un foncteur libre \mathbb{L}_P de la catégorie des signatures $\mathbf{Ens}^{\mathbb{N}_d}$ dans la catégorie \mathbf{PRO} . En établissant, dans [Bur93], les relations

- $l_1)$ $(\delta \times 1)\delta = (1 \times \delta)\delta$,
- $l_2)$ $(\epsilon \times 1)\delta = 1$,
- $l_3)$ $(1 \times \epsilon)\delta = 1$,
- $l_4)$ $\sigma\sigma = \mathbf{1}_2$,
- $l_5)$ $(\sigma \times 1)(1 \times \sigma)(\sigma \times 1) = (1 \times \sigma)(\sigma \times 1)(1 \times \sigma)$,
- $l_6)$ $(\delta \times 1)\sigma = (1 \times \sigma)(\sigma \times 1)(1 \times \delta)$,
- $l_7)$ $(1 \times \delta)\sigma = (\sigma \times 1)(1 \times \sigma)(\delta \times 1)$,
- $l_8)$ $(\epsilon \times 1)\sigma = 1 \times \epsilon$,
- $l_9)$ $(1 \times \epsilon)\sigma = \epsilon \times 1$,
- $l_{10})$ $\sigma\delta = \delta$,

Burroni montre que, si \emptyset est la signature vide, alors la théorie libre initiale $\mathbb{N} = \mathbb{L}(\emptyset)$ est obtenue comme le quotient du PRO libre $\mathbb{L}_P(\emptyset)$ par la relation de congruence engendrée par la conjonction des relations l_1 - l_{10} .

De plus, pour tout signature Ω , en définissant pour toute flèche u de Ω les relations :

- $l_1(u))$ $\delta u = (u \times u)\delta_n$, avec $\delta_n : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{2n}$,
- $l_2(u))$ $\epsilon u = \epsilon_n$, avec $\epsilon_n : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{0}$,
- $l_3(u))$ $\sigma(u \times 1) = (1 \times u)\sigma_{n,1}$, avec $\sigma_{p,q} : \mathbf{p} \times \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p} \times \mathbf{q}$,

Burroni obtient un foncteur quotient $B : \mathbf{PRO} \rightarrow \mathbf{Th}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{L}_P & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{PRO} & \xrightarrow{B} & \mathbf{Th} \xleftarrow{\mathbb{L}} \mathbf{Ens}^{\mathbb{N}_d} \end{array}$$

L'étude des propriétés de convergence dépend ainsi du foncteur libre considéré. Dans la section suivante, nous définissons un critère de finitude relativement au foncteur \mathbb{L} .

5.4 Homologie des théories algébriques

Dans cette section, nous introduisons l'homologie d'une théorie algébrique à coefficients dans les bimodules non additifs. Nous donnons une interprétation de cette homologie en terme d'homologie de Hochschild-Mitchell de la petite catégorie sous-jacente.

La théorie (co)homologique des théories algébriques que nous abordons peut s'introduire relativement au cadre (co)homologiques des objets en monoïde, défini par Baues, Jibladze et Tonks dans [Bau97], en considérant l'interprétation monadique des théories algébriques donnée par la proposition 5.2.5.

La cohomologie $H^*(\mathbb{A}, M)$ d'une théorie algébrique \mathbb{A} , à coefficients dans un \mathbb{A} -bimodule non additif M , a été introduite par Jibladze et Pirashvili, [Jib91], comme généralisation de la cohomologie de MacLane des anneaux, à coefficients dans les bimodules non-additifs. Nous rappelons ces constructions dans les sections 5.4.2 et 5.4.4.

De la même façon, en dualisant ces constructions, nous définissons en 5.4.6, l'homologie $H_*(\mathbb{A}, M)$ d'une théorie algébrique \mathbb{A} , à coefficients dans les bimodules non additifs. Nous montrons, proposition 5.4.7, qu'il existe un isomorphisme $H_*(\mathbb{A}, M) \simeq H_*(\mathbb{A}^{\text{op}}, \underline{M})$, où $H_*(\mathbb{A}^{\text{op}}, \underline{M})$ est l'homologie de Hochschild-Mitchell de la petite catégorie \mathbb{A}^{op} , définie en 4.4.3, à coefficients dans le \mathbb{A} -bimodule \underline{M} , cartésien en la première variable, associé à M .

La catégorie des bimodules non additifs est triviale pour certaines théories algébriques, par suite l'homologie que nous considérons est triviale pour ces théories. Ce fait nécessite de considérer une catégorie plus large de coefficients. D'après [Bec67, Qui70] la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$ apparaît comme une bonne candidate pour la catégorie des coefficients abéliens. Cependant, il n'existe que depuis peu, [Bau03], une interprétation de la (co)homologie d'une théorie algébrique en terme de foncteurs dérivés dans $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$. Nous ne considérerons pas cette homologie et nous ne ferons que quelques brèves remarques dans la partie 5.4.6.

5.4.1 Des anneaux aux théories

On associe à tout anneau A la théorie algébrique dont les algèbres sont les modules à gauche sur l'anneau A . Cette théorie est définie par la signature :

$$\mathbf{2} \xrightarrow{+} \mathbf{1} \xleftarrow{0} \mathbf{0}$$

où, pour tout élément x de $A - \{1\}$, x désigne une opération unaire et où les opérations $+, -, 0$ satisfont aux relations de la théorie \mathbb{Z} des groupes abéliens données dans l'exemple 5.3.9, ainsi qu'aux relations :

$$x+ = +(x \times x), \quad x \in A - \{1\}.$$

Cette correspondance est fonctorielle. A tout morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ est associé un foncteur $f_* : \mathbf{Mod}(B) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$ munissant tout B -module M d'une action à gauche de A définie par $a.x = f(a).x$.

Il existe ainsi un plongement plein, de la catégorie des anneaux associatifs et unitaires dans la catégorie des théories algébriques :

$$\mathbf{Ann} \hookrightarrow \mathbf{Th}.$$

Ce plongement suggère de voir une théorie algébrique comme une généralisation naturelle d'anneau. De nombreux résultats dans la catégorie des anneaux se généralisent, par ce plongement, aux théories algébriques. Nous renvoyons à [Wra70] pour un exposé introductif complet sur cette correspondance.

L'homologie d'une théorie algébrique peut s'introduire relativement à cette correspondance à partir de l'homologie de MacLane des anneaux.

5.4.2 L'homologie de MacLane des anneaux

L'homologie de MacLane d'un anneau A , à coefficients dans un A -bimodule M , est définie comme l'homologie de Hochschild de l'anneau différentiel gradué $Q_*(A)$, associé au complexe cubique de MacLane, [McL56], :

$$H_*^{\text{ML}}(A, M) := H_*^{\text{H}}(Q_*(A), M).$$

Une construction complète de cette homologie est donné dans [Lod02], 13.2.8., ou encore [Jib91], sec.1.

Soit $\underline{\mathbf{M}}(A)$ la catégorie des A -modules à gauche libres de type fini, nous désignons par $\mathcal{F}(A)$ la catégorie des foncteurs de $\underline{\mathbf{M}}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(A)$. Le foncteur à valeurs additives $M \mapsto M \otimes_A -$ définit un plongement de la catégorie des A -bimodules dans $\mathcal{F}(A)$. En raison de ce plongement, la catégorie $\mathcal{F}(A)$ est parfois appelée la catégorie des « A -bimodules non additifs», (cf. [Lod02], 13.1.). La catégorie $\mathcal{F}(A)$ est abélienne et possède suffisamment de projectifs et d'injectifs.

Soit $I^o : \underline{\mathbf{M}}(A)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$ le foncteur dual défini par $I^o(X) = \text{Hom}_A(X, A)$. L'homologie de MacLane de l'anneau A s'interprète en terme de foncteur dérivé Tor dans la catégorie $\mathcal{F}(A)$. Pour tout A -bimodule M , il existe un isomorphisme canonique, [Lod02], 13.2.16., :

$$H_*^{\text{ML}}(A, M) \simeq \text{Tor}_*^{\underline{\mathbf{M}}(A)}(I^o, M \otimes_A -).$$

De cette interprétation résulte la définition :

5.4.1 Définition ([Lod02]_b, 13.2.17). L'homologie de MacLane d'un anneau A à coefficients dans $M : \underline{\mathbf{M}}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$ est définie par :

$$H_*^{\text{ML}}(A, M) := \text{Tor}_*^{\underline{\mathbf{M}}(A)}(I^o, M),$$

où $\text{Tor}_*^{\underline{\mathbf{M}}(A)}(I^o, M) = H_*(I^o \otimes_{\underline{\mathbf{M}}(A)} M)$ et où le bifoncteur $- \otimes_{\underline{\mathbf{M}}(A)} -$ est défini dans la section 4.2.3.

5.4.2 Remarque. Il existe les mêmes isomorphismes en cohomologie. Pour tout A -bimodule M , il existe un isomorphisme, [Jib91], Thm.A, :

$$H_{\text{ML}}^*(A, M) := H_{\text{H}}^*(Q_*(A), M) \simeq \text{Ext}_{\underline{\mathbf{M}}(A)}^*(I, M \otimes_A -).$$

où, I désigne le plongement de catégories de $\underline{\mathbf{M}}(A)$ dans $\mathbf{Mod}(A)$.

5.4.3 Bimodules non additif sur une théorie algébrique

Jibladze et Pirashvili généralisent, [Jib91], l'homologie de MacLane des anneaux à coefficients dans les modules non additifs relativement au plongement $\mathbf{Ann} \hookrightarrow \mathbf{Th}$ de 5.4.1. Cette construction est basée sur l'analogie, pour une théorie algébrique, de la notion de module non additif sur un anneau.

Soit \mathbb{A} une théorie algébrique, le plongement de Yoneda, (5.1), $I_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ établit une équivalence de catégories entre la catégorie \mathbb{A}^{op} et la sous-catégorie de $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$, formée des \mathbb{A} -algèbres libres de type fini. La catégorie \mathbb{A}^{op} constitue ainsi l'analogie de la catégorie $\underline{\mathbf{M}}(A)$ dans le cas général.

Relativement à la correspondance 5.4.1, on obtient un analogue à la catégorie des A -modules à gauche, en considérant la catégorie des algèbres sur la théorie $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{A}$, où \mathbb{Z} désigne la théorie des groupes abéliens et \otimes le produit de Kroneker, [Sch72], 18.7.4.

La théorie $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{A}$ est formée des opérations $+$, $-$, 0 de la théorie algébrique des groupes abéliens, des opérations définissant \mathbb{A} et vérifiant les axiomes de \mathbb{Z} et de \mathbb{A} ainsi que les axiomes de compatibilités des opérations de \mathbb{A} avec celles de \mathbb{Z} et des opérations de \mathbb{Z} avec celles de \mathbb{A} . La catégorie des algèbres sur $\mathbb{A} \otimes \mathbb{Z}$ s'identifie à la catégorie des objets en groupe abélien dans la catégorie $\mathbf{Alg}(\mathbb{A})$, ou de façon équivalente, des \mathbb{A} -algèbres dans la catégorie \mathbf{Ab} .

Du lemme 5.2.4 on déduit l'existence d'un foncteur algébrique d'abélianisation :

$$(-)_{ab} : \mathbf{Alg}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A})),$$

obtenu comme l'adjoint à gauche du foncteur algébrique $U : \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A})) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbb{A})$ induit par l'unique morphisme de théories $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

5.4.3 Définition ([Jib91]). La catégorie des foncteurs de \mathbb{A}^{op} dans $\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$ est appelée la catégorie des \mathbb{A} -bimodules non additifs et sera notée $\mathcal{F}(\mathbb{A})$.

La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ est isomorphe à la catégorie $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A} \times \mathbb{A}^{\text{op}}}$, des \mathbb{A} -bimodules préservant les produits en la première variable, par le foncteur associant à tout \mathbb{A} -bimodule non additif M , le \mathbb{A} -bimodule \underline{M} défini par $\underline{M}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = M(\mathbf{m})(\mathbf{n})$. Par suite, la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ est abélienne et possède suffisamment de projectifs. Pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} et tout objet A de $\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$, l'adjonction $(-)_{ab} \dashv U$ induit un isomorphisme de groupes abéliens, fonctoriel en chacune des variables, [Jib91], 4.4, :

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))}((I_{\mathbb{A}})_{ab}(\mathbf{n}), A) \simeq A(\mathbf{n}).$$

En particulier, $(I_{\mathbb{A}})_{ab}$ est un objet projectif de $\mathcal{F}(\mathbb{A})$.

5.4.4 Définition. Soit n un entier naturel, une théorie algébrique \mathbb{A} est dite de type $bi\text{-PF}_n$ sur \mathbb{Z} , si le foncteur $(I_{\mathbb{A}})_{ab}$ est de type PF_n dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$.

Les catégories $\mathcal{F}(\mathbb{A})$, $(\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}})^{\mathbb{A}}$ et $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}} \times \mathbb{A}}$ étant isomorphes, une théorie algébrique \mathbb{A} est de type $bi\text{-PF}_n$ si et seulement si le foncteur $I_{\mathbb{A}}^o$ est de type PF_n dans $(\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}})^{\mathbb{A}}$ et si et seulement si le \mathbb{A} -bimodule cartésien $\mathbb{Z}\mathbb{A}$ est de type PF_n dans $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}} \times \mathbb{A}}$.

Dans la suite, certains calculs seront faits à coefficients dans le module non additif trivial. On pose :

5.4.5 Définition. Le \mathbb{A} -module non additif trivial sur une théorie algébrique \mathbb{A} est le foncteur $\mathbb{Z} : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$ tel que, pour tous objets \mathbf{n} et \mathbf{m} de \mathbb{A} , on ait : $\mathbb{Z}(\mathbf{n})(\mathbf{m}) = \mathbb{Z}^m$.

L'action bilatère triviale de \mathbb{A} sur \mathbb{Z} est définie de la façon suivante. Si $u \in \mathbb{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et $v \in \mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$, alors, en considérant la diagonale $\langle 1, \dots, 1 \rangle : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}(\mathbf{p}, \mathbf{n})$, on a l'identité :

$$v. \langle 1, \dots, 1 \rangle_{\mathbf{n}} . u = \langle 1, \dots, 1 \rangle_{\mathbf{m}} .$$

5.4.4 Homologie des théories à coefficients dans les bimodules non additifs

La cohomologie d'une théorie algébrique \mathbb{A} , à coefficients dans un \mathbb{A} -bimodule non additif M , généralisant la cohomologie 5.4.2, est définie par Jibladze et Pirashvili, [Jib91], 4.2, comme foncteur dérivé de $\text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{A})}((I_{\mathbb{A}})_{ab}, M)$:

$$H^*(\mathbb{A}, M) := \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathbb{A})}^*((I_{\mathbb{A}})_{ab}, M).$$

Nous définissons de la même façon l'homologie de \mathbb{A} à coefficients dans M . Pour cela nous considérons le foncteur dual de $(I_{\mathbb{A}})_{ab}$:

$$I_{\mathbb{A}}^o : \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}},$$

défini fonctoriellement en posant, pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} ,

$$I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n})(-) := \text{Hom}_{\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))}((I_{\mathbb{A}})_{ab}(\mathbf{n}), (I_{\mathbb{A}})_{ab}(-)).$$

En d'autres termes, d'après (5.4.3) on a

$$I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n})(-) = (\mathbb{A}(-, \mathbf{n}))_{ab} = \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{n}).$$

Ici la catégorie $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}}$ correspond à la catégorie des \mathbb{A} -modules à droite. En effet, il existe une équivalence de catégories $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}} \approx \mathbf{Alg}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{Z})$.

Considérons le bifoncteur :

$$- \otimes_{\mathbb{A}^e} - : (\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}})^{\mathbb{A}} \otimes \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))^{\mathbb{A}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

défini en (4.2.3). On construit le complexe de groupes abéliens $I_{\mathbb{A}}^o \otimes_{\mathbb{A}^e} M \simeq M \otimes_{\mathbb{A}^e} I_{\mathbb{A}}^o$ et on pose :

5.4.6 Définition. L'homologie d'une théorie algébrique \mathbb{A} à coefficients dans un \mathbb{A} -bimodule non additif $M : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$ est définie par :

$$H_*(\mathbb{A}, M) := \text{Tor}_*^{\mathcal{F}(\mathbb{A})}(I_{\mathbb{A}}^o, M) = H_*(M \otimes_{\mathbb{A}^e} I_{\mathbb{A}}^o).$$

5.4.5 Interprétation en terme d'homologie de petites catégories

L'homologie d'une théorie \mathbb{A} admet une interprétation en terme de l'homologie de Hochschild-Mitchell de \mathbb{A} , vue comme petite catégorie munie de produits finis. Soient M un \mathbb{A} -bimodule non additif et \underline{M} le \mathbb{A} -module cartésien en la première variable associé, alors il existe un isomorphisme, [Jib91], 4.6 :

$$H^*(\mathbb{A}, M) \simeq H^*(\mathbb{A}^{\text{op}}, \underline{M})$$

où $H^*(\mathbb{A}^{\text{op}}, \underline{M})$ est la cohomologie de Hochschild-Mitchell de la catégorie \mathbb{A}^{op} .

On montre de façon duale un isomorphisme analogue en homologie.

5.4.7 Proposition. *Soit \mathbb{A} une théorie algébrique. Pour tout \mathbb{A} -bimodule non additif M , il existe un isomorphisme :*

$$H_*(\mathbb{A}, M) \simeq H_*(\mathbb{A}^{\text{op}}, \underline{M})$$

où $H_*(\mathbb{A}^{\text{op}}, \underline{M})$ désigne l'homologie de Hochschild-Mitchell de \mathbb{A}^{op} définie en 4.4.3.

Démonstration. Si \mathcal{A} est une catégorie de modules et \mathbf{C} une petite catégorie, alors, pour tous \mathbf{C} -modules $N : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}$ et $M : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{A}$, il existe une suite spectrale :

$$E_{pq}^2 = H_p(\mathbf{C}, \text{Tor}_q^{\mathcal{A}}(N, M)) \Rightarrow \text{Tor}_{p+q}^{\mathcal{A}^{\mathbf{C}}}(N, M), \quad (5.3)$$

où $\text{Tor}_q^{\mathcal{A}}(N, M)$ est le \mathbf{C} -bimodule défini par : $(n, m) \mapsto \text{Tor}_q^{\mathcal{A}}(N(n), M(m))$.

Si N est projectif, alors $\text{Tor}_q^{\mathcal{A}}(N, M) = 0$ pour $q > 0$ et $\text{Tor}_0^{\mathcal{A}}(N, M) = N \otimes_{\mathcal{A}} M$, par suite, de la suite spectrale (5.3) on extrait un isomorphisme :

$$H_*(\mathbf{C}, N \otimes_{\mathcal{A}} M) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{A}^{\mathbf{C}}}(N, M). \quad (5.4)$$

Le \mathbb{A} -module $I_{\mathbb{A}}^o : \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}}$ est projectif car par définition

$$I_{\mathbb{A}}^o(+)(-) = \text{Hom}_{\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))}((I_{\mathbb{A}})_{ab}(+), (I_{\mathbb{A}})_{ab}(-))$$

et $(I_{\mathbb{A}})_{ab}(+)$ est projectif. Donc de l'isomorphisme (5.4) on déduit, que pour tout module $M : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{A}}$, il existe un isomorphisme :

$$H_*(\mathbb{A}^{\text{op}}, I_{\mathbb{A}}^o \otimes_{\mathbb{A}^{\text{op}}} M) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{F}(\mathbb{A})}(I_{\mathbb{A}}^o, M).$$

Par ailleurs, du lemme 5.4.8 suivant on déduit les isomorphismes

$$I_{\mathbb{A}}^o \otimes_{\mathbb{A}^{\text{op}}} M \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))}((I_{\mathbb{A}})_{ab}(+), M(-)) \simeq \underline{M}(-, +).$$

L'isomorphisme de la proposition en résulte.

En adaptant la preuve de [Bou70], A.II.77, Cor. on obtient le résultat suivant :

5.4.8 Lemme. *Soient \mathbf{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et P un générateur projectif dans $\mathcal{A}^{\mathbf{C}}$. Soient M et E deux \mathbf{C} -modules à gauche à valeurs dans \mathcal{A} tel que E soit projectif de type fini. Alors, il existe isomorphisme de \mathbf{C} -bimodules à valeur dans \mathcal{A} fonctoriel en chacune des variables :*

$$\mathcal{A}(E, P) \otimes_{\mathbf{C}} M \simeq \mathcal{A}(E, M)$$

associant à $\alpha \otimes y$ la transformation naturelle $x \mapsto \alpha(x).y$

□

5.4.9 Remarque. Il existe un isomorphisme de catégorie :

$$\mathbf{Ab}^{\mathbb{A} \times \mathbb{A}^{\text{op}}} \simeq \mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}} \times \mathbb{A}},$$

associant à tout \mathbb{A} -bimodule cartésien en la première variable \underline{M} le \mathbb{A} -bimodule cartésien en la deuxième variable \overline{M} défini par $\overline{M}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \underline{M}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$.

De la proposition 5.4.7, on a l'isomorphisme pour tout \mathbb{A} -bimodule non additif :

$$H_*(\mathbb{A}, M) \simeq H_*(\mathbb{A}, \overline{M}).$$

Ainsi, d'après 4.4.6, l'homologie de \mathbb{A} peut être calculée à l'aide de résolutions projectives de \mathbb{A} -bimodules de $\mathbb{Z}\mathbb{A}$: $H_*(\mathbb{A}, M) = \text{Tor}_*^{\mathbb{A}^e}(\mathbb{Z}\mathbb{A}, \overline{M})$.

5.4.6 Homologie à coefficients dans les systèmes naturels cartésiens

Pour certaines théories algébriques, la catégorie des bimodules non additifs est ponctuelle, c'est le cas de la théorie des anneaux unitaires. Pour ces théories, l'homologie définie en 5.4.6 est donc triviale. C'est une conséquence d'un fait général dû au théorème de Eckmann-Hilton. Un objet en monoïde dans la catégorie des monoïdes est un monoïde commutatif. Autrement dit, dans une catégorie cartésienne \mathcal{C} , pour tout objet A muni de deux structures multiplicatives unitaires (u, e) et (u', e') :

$$A \times A \xrightarrow{u} A \xleftarrow{e} 0, \quad A \times A \xrightarrow{u'} A \xleftarrow{e'} 0,$$

telles que $u' : A \times A \rightarrow A$ est un morphisme compatible avec la structure de A , i.e.,

$$u'(u(x, x'), u(y, y')) = u(u'(x, y), u'(x', y')),$$

alors $u = u'$, $e = e'$ et u est associative et commutative.

Considérons la théorie algébrique \mathbb{H} définie par la signature :

$$\Omega_{\mathbb{H}} = \mathbf{2} \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xleftarrow{+} \\ \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{e} \end{array} \mathbf{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{e} \end{array} \mathbf{0}$$

et soumise aux relations :

- i) $(+, -, 0)$ vérifie les axiomes de la théorie des groupes abéliens,
- ii) $a(e \times \mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_1$,
- iii) $a(+ \times \mathbf{1}_1) = +(a \times a)(\mathbf{1}_1 \times \delta \times \mathbf{1}_1)$.

Sous l'hypothèse $e = 0$, la théorie \mathbb{H} est contractile, i.e., pour tout morphisme $f : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ dans \mathbb{H} , on a $f = 0\epsilon_{\mathbf{n}}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} +(a(0 \times \mathbf{1}_1) \times \mathbf{1}_1) &= +(a(0 \times \mathbf{1}_1) \times a(e \times \mathbf{1}_1)), \\ &= a(+ (0 \times e), \mathbf{1}_1), \\ &= a(e, \mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_1. \end{aligned}$$

D'où $a(0 \times \mathbf{1}_1) = 0$. Si $e = 0$, on a :

$$f = a(e \times f) = a(0, f) = a(0, \mathbf{1}_1)f = 0f = 0\epsilon_{\mathbf{n}}.$$

D'après le théorème de Eckmann-Hilton, on en déduit que $\mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{H})) = \mathbf{1}$.

La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ des modules non additifs sur une théorie \mathbb{A} n'étant qu'une sous catégorie de la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$, on peut considérer une homologie de \mathbb{A} à coefficients dans la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$. La catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Th}/\mathbb{A})$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{Nat}_c(\mathbb{A})$ des systèmes naturels cartésiens sur \mathbb{A} , (cf. 4.5.1).

Un système naturel cartésien de groupes abéliens sur \mathbb{A} est un système naturel $D : F\mathbb{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ vérifiant :

- i) pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} , $D_{\epsilon_{\mathbf{n}}} = 0$,
- ii) pour tout morphisme $w \in \mathbb{A}(\mathbf{m}, \mathbf{n} \times \mathbf{n}')$, $D_w \simeq D_{\pi_1^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}} \times D_{\pi_2^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}}$,

où $\pi_1^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$ et $\pi_2^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$ désignent respectivement les projections de $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$ sur \mathbf{n} et \mathbf{n}' .

L'homologie des théories algébriques du type de \mathbb{H} doit être calculée comme l'homologie de Baues-Wirsching de la catégorie \mathbb{H} à coefficients dans $\mathbf{Nat}_c(\mathbb{H})$.

5.4.7 Dérivations

5.4.10 Définition. Soient \mathbb{A} une théorie algébrique et $M : \mathbb{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}(\mathbf{Alg}(\mathbb{A}))$ un \mathbb{A} -bimodule non additif. Une *dérivation de \mathbb{A} dans M* est la donnée d'une famille :

$$(d_n : \mathbb{A}(\mathbf{n}, \mathbf{1}) \rightarrow \overline{M}(\mathbf{n}, \mathbf{1}))_{n \in |\mathbb{A}|}$$

vérifiant pour tout diagramme $\mathbf{1} \xleftarrow{w} \mathbf{n} \xleftarrow{\langle w_1, \dots, w_n \rangle} \mathbf{m}$ dans \mathbb{A} , avec $w_i \in \mathbb{A}(\mathbf{m}, \mathbf{1})$:

$$d_m(w \langle w_1, \dots, w_n \rangle) = d_n(w) \cdot \langle w_1, \dots, w_n \rangle + w \cdot \langle d_m(w_1), \dots, d_m(w_n) \rangle.$$

5.4.11 Proposition. Soit d une dérivation de \mathbb{A} dans M . Pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} , on a :

- i) $d(\pi_i^{\mathbf{n}}) = 0$,
- ii) $d(\mathbf{1}_{\mathbf{n}}) = 0$,
- iii) $d(\epsilon_{\mathbf{n}}) = 0$,

Pour tous morphismes u et v de \mathbb{A} on a :

- iv) $d(\langle u, v \rangle) = \langle d(u), d(v) \rangle$,
- v) $d(u \times v) = d(u) \times d(v)$.

Démonstration. De l'identité $d(\mathbf{1}_{\mathbf{1}}) = d(\mathbf{1}_{\mathbf{1}}) + d(\mathbf{1}_{\mathbf{1}})$, on déduit que $d(\mathbf{1}_{\mathbf{1}}) = 0$. De l'identité $\pi_i^{\mathbf{n}} \langle \mathbf{1}_{\mathbf{1}}, \dots, \mathbf{1}_{\mathbf{1}} \rangle = \mathbf{1}_{\mathbf{n}}$, découle l'identité

$$d(\mathbf{1}_{\mathbf{n}}) = 0 = d(\pi_i^{\mathbf{n}}) \cdot \langle \mathbf{1}_{\mathbf{1}}, \dots, \mathbf{1}_{\mathbf{1}} \rangle + \pi_i^{\mathbf{n}} \cdot \langle d(\mathbf{1}_{\mathbf{1}}), \dots, d(\mathbf{1}_{\mathbf{1}}) \rangle,$$

dont est déduite la relation i). La relation ii) est conséquence de i) et de l'identité $\mathbf{1}_{\mathbf{n}} = \langle \pi_1^{\mathbf{n}}, \dots, \pi_1^{\mathbf{n}} \rangle$. Le groupe abélien $\overline{M}(\mathbf{n}, \mathbf{0})$ est trivial, par suite $d(\epsilon_{\mathbf{n}}) = 0$.

La relation **iv)** est une conséquence immédiate de la définition. Enfin, la relation **v)** est obtenue en considérant les identités :

$$d(u \times v) = d \langle u\pi_1, v\pi_2 \rangle = \langle d(u\pi_1), d(v\pi_2) \rangle = \langle d(u)\pi_1, d(v)\pi_2 \rangle = d(u) \times d(v).$$

□

5.4.12 Proposition. *Soient Ω une signature et $\mathbb{L}(\Omega)$ la théorie libre engendrée par Ω . Pour tout $\mathbb{L}(\Omega)$ -bimodule non additif M , toute famille $(d(a) \in \overline{M}(\sigma(a), \tau(a)))_{a \in \Omega}$ s'étend, de façon unique, en une dérivation de $\mathbb{L}(\Omega)$ dans M .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la construction du graphe cartésien en 5.3.1 et du lemme 4.3.5 . □

5.5 Résolutions pour les théories équationnelles convergentes

L'objet de cette section est d'appliquer la résolution à quatre termes (4.8) à la présentation des théories équationnelles du premier ordre. Nous montrons que les théories algébriques définissant une théories équationnelles du premier ordre admettant une présentation convergente de type fini sont de type bi-PF $_{\infty}$.

On en déduit un critère de finitude sur les groupes d'homologie de ces théories. Les résolutions construites, dans cette section, nous permettrons de calculer des groupes d'homologies de théories dans le chapitre suivant.

5.5.1 La résolution à quatre termes

Soient $\langle \Omega \mid R \rangle$ un système de réécriture de théories algébriques et \mathbb{A} la théorie présentée par $\langle \Omega \mid R \rangle$. D'après 5.3.6, la théorie algébrique \mathbb{A} est obtenue comme quotient de la catégorie $\mathbf{L}(\Omega^c)/\mathbf{L}(C(\Omega))$ par la catégorie $\mathbf{L}(R^c)/\mathbf{L}(C(R))$, où $-^c$ est la construction graphe cartésien et C l'ensemble des relations définies en 5.3.3.

D'après 5.4.6 l'homologie de \mathbb{A} est calculée à partir d'une résolution projective du foncteur $I_{\mathbb{A}}^o$ dans la catégorie $(\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{op}})^{\mathbb{A}}$. En appliquant le théorème 4.6.3, on déduit le résultat suivant :

5.5.1 Théorème. *Soit $\langle \Omega \mid R \rangle$ une présentation convergente et minimale d'une théorie algébrique \mathbb{A} , alors la suite*

$$\begin{aligned} S_*(\Omega^c, R^c) : \bigoplus_{\{P,Q\} \in \mathcal{P}^c} \text{Lan}_{\tau(P)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(P)) &\xrightarrow{d_3} \bigoplus_{A \in R^c} \text{Lan}_{\tau(A)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(A)) \\ &\xrightarrow{d_2} \bigoplus_{a \in \Omega^c} \text{Lan}_{\tau(a)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(a)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{\mathbf{n} \in |\mathbb{A}|} \text{Lan}_{\mathbf{n}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n}) \xrightarrow{\epsilon} I_{\mathbb{A}}^o \end{aligned} \quad (5.5)$$

dont les morphismes sont définis en 4.6.3, est une résolution libre de $I_{\mathbb{A}}^o$ dans $(\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{op}})^{\mathbb{A}}$.

On rappelle de 4.2.2, que la $\mathbb{Z}\mathbb{A}$ -catégorie $\mathbb{Z}\mathbb{A}$, engendrée par \mathbb{A} , est additive. En particulier, tout objet \mathbf{n} de $\mathbb{Z}\mathbb{A}$ se décompose en une somme de n -termes $\mathbf{1} + \dots + \mathbf{1}$. Nous désignons par $\iota_i^n : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n}$ la i -ième injection de $\mathbf{1}$ dans \mathbf{n} . Il existe un isomorphisme de \mathbb{A} -modules à gauche

$$\Phi^n : \mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{n}, -) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_n \mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{1}, -) \quad (5.6)$$

associant à tout terme v de $\mathbb{Z}\mathbb{A}$ de source \mathbf{n} l'élément $(v\iota_1^n, \dots, v\iota_n^n)$.

Pour tous morphismes $\mathbf{m} \xleftarrow{u} \mathbf{n}$ et $\mathbf{m}' \xleftarrow{u'} \mathbf{n}'$ de \mathbb{A} , on note $u + u' = (\iota_1^{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}, u, \iota_2^{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}, u')$ et $\nabla = (1, 1) : \mathbf{1} + \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1}$. Dans la catégorie $\mathbb{Z}\mathbb{A}$, on a les identités :

$$\pi_k^{\mathbf{2}} j \iota_l^{\mathbf{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0_{\mathbf{1}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $0_{\mathbf{p}}$ désigne l'élément neutre du groupe $\mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et j l'isomorphisme $\mathbf{1} + \mathbf{1} \simeq \mathbf{1} \times \mathbf{1}$.

5.5.2 Lemme. *Soit \mathbb{A} une théorie algébrique. Il existe un isomorphisme canonique de \mathbb{A} -algèbres dans $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{op}}$:*

$$\bigoplus_{\mathbf{n} \in |\mathbb{A}|} \text{Lan}_{\mathbf{n}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n}) \simeq \text{Lan}_{\mathbf{1}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{1}).$$

Démonstration. Désignons par M le \mathbb{A} -bimodule $\bigoplus_{\mathbf{n} \in |\mathbb{A}|} \text{Lan}_{\mathbf{n}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n})$ et montrons que M est libre de rang 1. On a :

$$M \simeq \bigoplus_{\mathbf{n} \in |\mathbb{A}|} \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{n}) \otimes \mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{n}, =).$$

En désignant par $[\mathbf{n}]$ la n -ième injection de $\text{Lan}_{\mathbf{n}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{n})$ dans M , la famille $\{[\mathbf{n}] \mid \mathbf{n} \in |\mathbb{A}|\}$ forme une famille de générateurs du \mathbb{A} -bimodule M . L'isomorphisme $\mathbb{A}(\mathbf{p}, \mathbf{n}) \simeq \prod_n \mathbb{A}(\mathbf{p}, \mathbf{1})$, fonctoriel en \mathbf{p} , induit un isomorphisme de \mathbb{A} -modules à droite

$$\Psi_n : \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{n}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_n \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{1})$$

associant le n -uplet $(\pi_1^n u, \dots, \pi_n^n u)$ à tout terme u de $\mathbb{Z}\mathbb{A}$ de but \mathbf{n} . Le morphisme Φ^n , défini en (5.6), et le morphisme Ψ_n sont des isomorphismes de modules libres, ils induisent donc un isomorphisme canonique de \mathbb{A} -bimodules

$$\Psi_n \otimes \Phi^n : \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{n}) \otimes \mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{n}, -) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\mathbb{A}(\mathbf{1}, -),$$

tel que $\Psi_n \otimes \Phi^n(u \otimes v) = \sum_{i, j=1,1}^{n,n} \pi_i^n u \otimes v \iota_j^n$, par suite $[\mathbf{n}] = \sum_{i, j=1,1}^{n,n} \iota_j^n [\mathbf{1}] \pi_i^n$ et $M \simeq \text{Lan}_{\mathbf{1}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{1})$ est un \mathbb{A} -bimodule libre de rang 1. \square

Plus généralement on a :

5.5.3 Lemme. Soient \mathbb{A} une théorie algébrique, X un sous-ensemble de morphismes de \mathbb{A} et X^c le graphe cartésien engendré par X . Pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} et pour toute \mathbb{A} -algèbre I dans \mathcal{A} , il existe un isomorphisme de \mathbb{A} -algèbres dans \mathcal{A} :

$$\bigoplus_{x \in X^c} \text{Lan}_{\tau(x)} I(\sigma(x)) \simeq \bigoplus_{x \in X} \text{Lan}_{\tau(x)} I(\sigma(x)).$$

Démonstration. Cela revient à montrer que, pour tout objet \mathbf{m} de \mathbb{A} , il existe un isomorphisme dans \mathcal{A} :

$$\bigoplus_{x \in X^c} \bigoplus_{\mathbb{A}(\tau(x), \mathbf{m})} I(\sigma(x)) \simeq \bigoplus_{x \in X} \bigoplus_{\mathbb{A}(\tau(x), \mathbf{m})} I(\sigma(x)). \quad (5.7)$$

Pour tout diagramme $\mathbf{m} \xleftarrow{w} \tau(x) \xleftarrow{x} \sigma(x)$ dans \mathbb{A} , désignons par $[w, x]$ l'injection de $I(\sigma(x))$ dans le premier membre de (5.7). Montrons que l'injection $[w, x]$ s'exprime comme combinaison linéaire d'injections $[w, x_i]$, où les x_i sont des flèches parcourant X .

Par construction du graphe cartésien X^c (cf. 5.3.1), toute opération dérivée de profondeur $k \geq 1$ dans X^c , de source \mathbf{n} et de but \mathbf{m} , se décompose en un m -uplet $\langle x_1, \dots, x_m \rangle : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ formé d'opérations dérivées $x_i : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}$ de profondeur k . On a un isomorphisme :

$$\bigoplus_{x \in X^c} \bigoplus_{\mathbb{A}(\tau(x), \mathbf{m})} I(\sigma(x)) \simeq \bigoplus_{x \in X^c} \mathbb{Z}\mathbb{A}(\tau(x), \mathbf{m}) \otimes I(\sigma(x)).$$

Dans la catégorie additive $\mathbb{Z}\mathbb{A}$, on a l'identité :

$$l_1^{\mathbf{m}} \pi_1^{\mathbf{m}} + \dots + l_m^{\mathbf{m}} \pi_n^{\mathbf{n}} = 1_{\mathbf{m}}.$$

On en déduit la décomposition dans la catégorie $\mathbb{Z}\mathbb{A}$

$$\langle x_1, \dots, x_m \rangle = l_1^{\mathbf{m}} x_1 + \dots + l_m^{\mathbf{m}} x_m,$$

et par suite $[w, \langle x_1, \dots, x_m \rangle] = \sum_{i=1}^m [w l_i^{\mathbf{m}}, x_i]$.

La famille $([1_{\tau(x)}, x])_{x \in X}$ s'étend formellement et de façon unique aux chemins de X^c en posant, pour tout chemin $\overleftarrow{x'} \leftarrow \overleftarrow{x}$ dans X^c :

$$[1_{\tau(x')}, x'x] = [x', x] + [1_{\tau(x')}, x'] I(x). \quad (5.8)$$

Les opérations dérivées de profondeur $k > 1$ de X^c , de source \mathbf{n} et de but $\mathbf{1}$, se décomposent sous la forme d'un chemin de longueur 2 dans la signature X^c , $\mathbf{1} \xleftarrow{x'} \mathbf{m} \xleftarrow{x} \mathbf{n}$, où x est de profondeur $k-1$ et x' de profondeur 1. De l'identité (5.8), on déduit que les générateurs de profondeur k s'expriment comme combinaison linéaire de générateurs de profondeur $k-1$.

De la même façon, une opération dérivée de profondeur k , de source \mathbf{n} et de but $\mathbf{0}$, est un chemin de longueur 2, $\mathbf{0} \xleftarrow{\epsilon_{\mathbf{m}}} \mathbf{m} \xleftarrow{x} \mathbf{n}$, où x est une opération dérivée de profondeur $k-1$. Or, dans la catégorie $\mathbb{Z}\mathbb{A}$ on a l'identité $\epsilon_{\mathbf{m}} = 0$, d'où :

$$[1_{\mathbf{0}}, \epsilon_{\mathbf{m}} x] = [\epsilon_{\mathbf{m}}, x] + [1_{\mathbf{0}}, \epsilon_{\mathbf{m}}] I(x) = 0.$$

Reste à étudier les termes de X^c de profondeur 1 et de but $\mathbf{1}$. Leur ensemble est formé des flèches de X , des projections $\pi_i^{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{1}$. Or, pour tout objet \mathbf{n} dans \mathbb{A} on a : $[1_{\mathbf{1}}, \pi_i^{\mathbf{n}}] = 0$. Il ne reste donc que les opérations de X , le lemme en découle. \square

De 5.5.1 on déduit :

5.5.4 Corollaire. *Une théorie algébrique \mathbb{A} admettant une présentation convergente et de type fini est de type bi-PF₃.*

Démonstration. Notons que nous avons omis l'hypothèse de minimalité sur la présentation car, d'après 2.3.9, pour tout système convergent de type fini, il existe un système convergent minimal et de type fini équivalent.

Supposons donc que $\langle \Omega \mid R \rangle$ soit un système convergent minimal et de type fini présentant la théorie \mathbb{A} . La suite (5.5) est donc une résolution de $I_{\mathbb{A}}^o$. Par ailleurs, des lemmes 5.5.2 et 5.5.3 on déduit que la suite (5.5) est isomorphe à la suite :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\{P,Q\} \in \mathcal{P}} \text{Lan}_{\tau(P)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(P)) \xrightarrow{d_3} \bigoplus_{A \in R} \text{Lan}_{\tau(A)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(A)) \xrightarrow{d_2} \\ \bigoplus_{a \in \Omega} \text{Lan}_{\tau(a)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(a)) \xrightarrow{d_1} \text{Lan}_{\mathbf{1}} I_{\mathbb{A}}^o(\mathbf{1}) \xrightarrow{\epsilon} I_{\mathbb{A}}^o. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pour tout objet \mathbf{n} de \mathbb{A} , $(I_{\mathbb{A}}^o)(\mathbf{n}) = \mathbb{Z}\mathbb{A}(-, \mathbf{n})$ est un générateur projectif de $\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}}$, de plus si Ω et R sont finis, alors \mathcal{P} est fini, par suite la résolution 5.9 est de type fini dans $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ et \mathbb{A} est bi-PF₃. \square

5.5.2 La résolution de Kobayashi

On peut construire de façon analogue la résolution de Kobayashi, 4.8.12, pour un système de réécriture convergent de théories algébriques.

Soit $\langle \Omega \mid R \rangle$ un système de réécriture de théories algébriques. On montre en utilisant le lemme 5.5.3, que la résolution $K_*(\Omega^c, R^c)$ de 4.8.12, construite à partir des chaînes de Anick $A_{\text{Fn}}(\Omega^c, R^c)$, est isomorphe à la résolution $K_*(\Omega, R)$. D'où :

5.5.5 Théorème. *Soient \mathbb{A} une théorie algébrique et $\langle \Omega \mid R \rangle$ une présentation convergente de \mathbb{A} . Alors le complexe*

$$\left(\bigoplus_{c_n \in C_n(\Omega, R)} \text{Lan}_{\tau(c_n)} I_{\mathbb{A}}^o(\sigma(c_n)), d_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

où $C_n(\Omega, R)$ est l'ensemble des n -chaînes de Anick de R et où l'opérateur bord d_n est défini en 4.8.7, est une résolution de $I_{\mathbb{A}}^o$ dans la catégorie $(\mathbf{Ab}^{\mathbb{A}^{\text{op}}})_{\mathbb{A}}$.

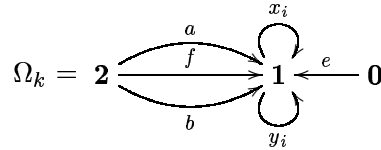
5.5.6 Corollaire. *Toute théorie algébrique \mathbb{A} admettant une présentation convergente et de type fini est de type bi-PF_∞.*

Chapitre 6

Exemple de calcul

A partir de l'exemple de Squier, [Squ87a], 4.5, nous construisons une théorie algébrique non unaire, i.e, qui n'est pas un monoïde, décidable et nous montrons par les mêmes arguments homologiques qu'elle n'admet pas de présentation convergente de type fini.

Soit k un entier naturel, considérons la théorie algébrique \mathbb{S}_k présentée par la signature :



où $i \in \{1, \dots, k\}$, soumise à l'ensemble des relations :

$$R_k = \{P_n, A_i, T_i, B_i, Q_i \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, k\}\}$$

définies par la figure 6.1

6.0.7 Proposition.

- i) Si $k \geq 1$, alors \mathbb{S}_k est de type fini.
- ii) Si $k \geq 0$, alors R_k est noëthérien.
- iii) Si $k \geq 0$, alors R_k est localement confluent.

Démonstration. On montre i) par récurrence sur n . On montre que, pour tout $k \geq 1$, la relation P_{n+1} est déduite de la relation P_n , voir figure 6.2.

Afin de montrer ii), on considère une relation d'ordre $>$ sur les flèches de Ω_k avec $x_i > f$, $x_i > b$ et $x_i > e$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} x_i f &> f(x_i \times 1), & x_i b &> b(x_i \times 1), \\ x_i y_i &> 1, & x_i a &> a(f \times e)(x_i \times 1), \\ a(f \times e)^n(b \times 1) &> \bar{1}.^3 \end{aligned}$$

Par suite R_k est noëthérien.

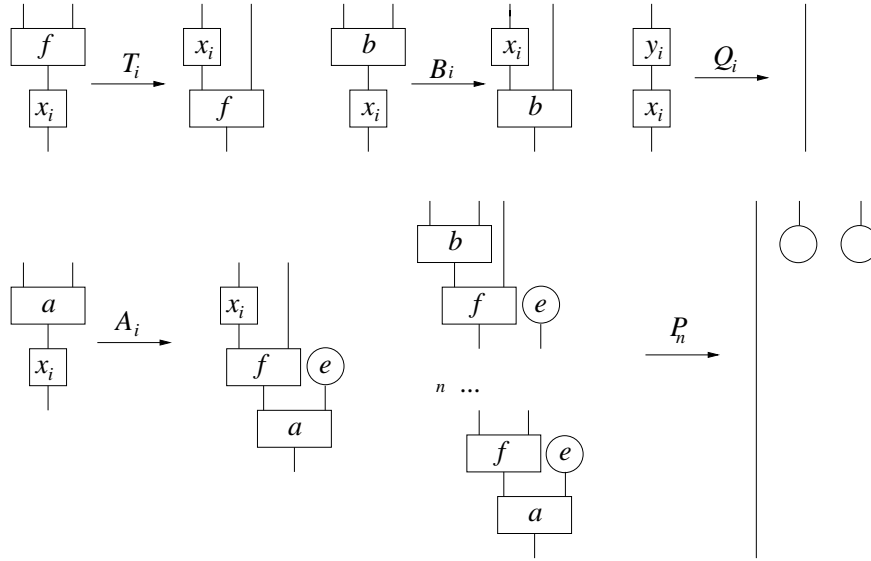


FIG. 6.1 – Relations R_k

Pour iii), remarquons qu'il n'y a qu'une seule famille de paires critiques :

$$\{\langle A_i, x_i P_n \rangle, i = 1, \dots, k\}$$

qui sont convergentes, voir figure 6.3 □

6.0.8 Proposition. *Si $k \geq 2$, alors \mathbb{S}_k n'est pas PF_3 .*

Démonstration. Soit $k \geq 2$, l'ensemble de règles R_k n'engendre pas de triplet critique. Donc d'après [Squ87a], Thm. 3.2, on a $\text{Ker } d_3 = 0$, où d_3 désigne l'opérateur bord de la suite (4.8). Si \mathbb{Z} est le \mathbb{S}_k -module non additif trivial défini en 5.4.5, on a :

$$H_3(\mathbb{S}_k, \mathbb{Z}) = \text{Ker}(1_{\mathbb{Z}} \otimes d_3).$$

Or pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} d_3 \langle A_i, x_i P_n \rangle &= [x_i, P_n] - [A_i] \mathbb{ZS}_k(-, (f \times e)^{n-1}(b \times 1)) - \\ &\quad \sum_{l=1}^n [a(f \times e)^l, T_i] \mathbb{ZS}_k(-, (f \times e)^{n-l}(b \times 1)) \\ &\quad - [a(f \times e)^{n+1}, B_i] - [P_{n+1}] \mathbb{ZS}_k(-, x_i). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(1_{\mathbb{Z}} \otimes d_3) \langle A_i, x_i P_n \rangle = [P_n] - [A_i] - n[T_i] - [B_i] - [P_{n+1}].$$

Par suite $H_3(\mathbb{S}_k, \mathbb{Z})$ est le \mathbb{Z} -module libre de base :

$$\{\langle P_n, A_i \rangle - \langle P_n, A_0 \rangle + n(\langle P_1, A_i \rangle - \langle P_1, A_1 \rangle) + (1-n)(\langle P_0, A_i \rangle - \langle P_0, A_1 \rangle), | n \geq 2, i \geq 2\}.$$

Par conséquent \mathbb{S}_k ne peut être PF_3 et ne possède pas de présentation convergente de type fini. □

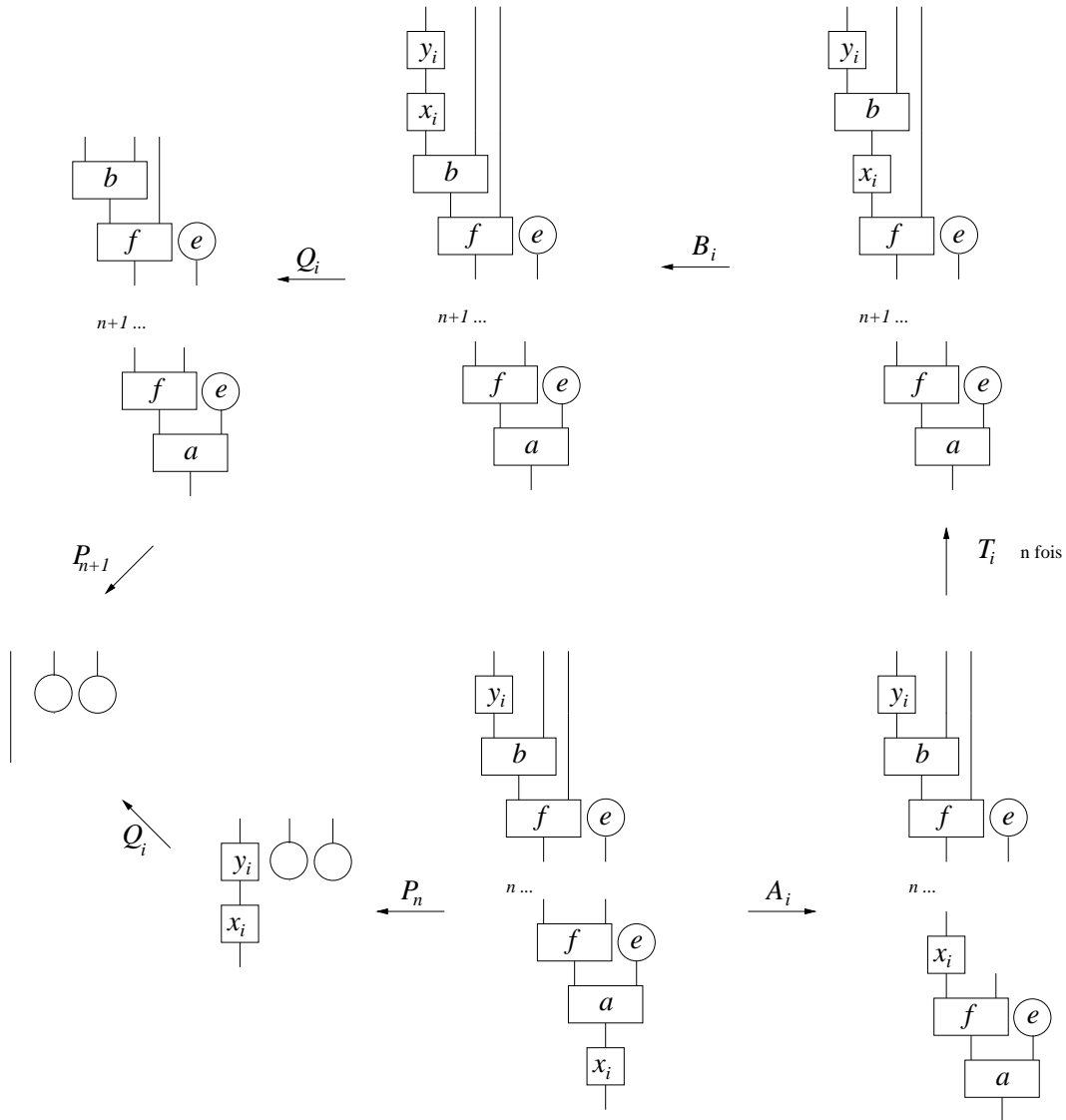
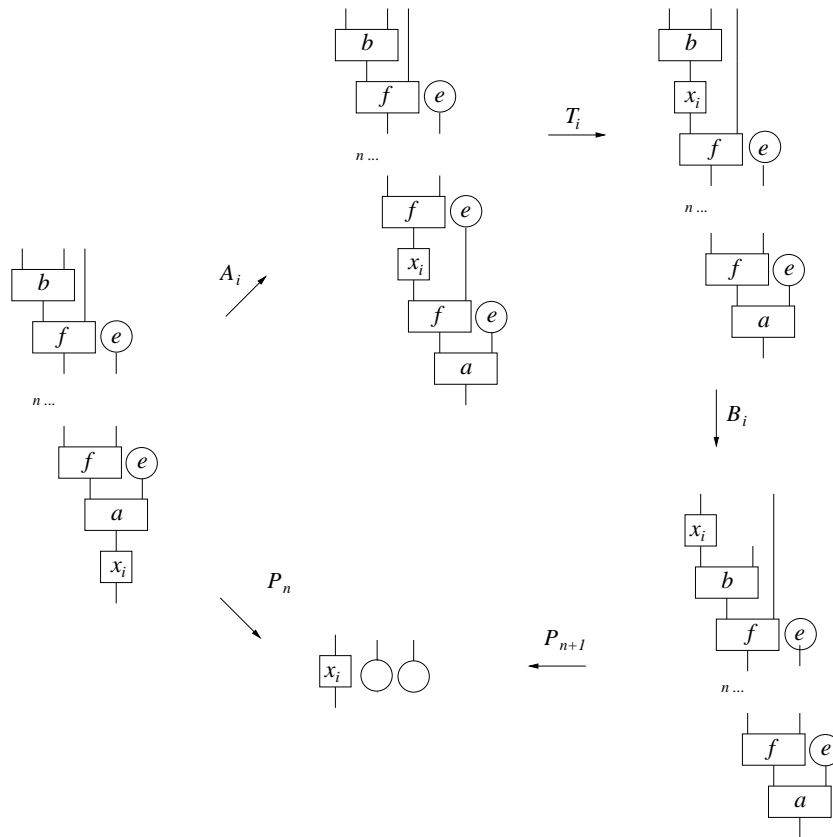


FIG. 6.2 – Relation P_{n+1} en fonction de P_n

FIG. 6.3 – Confluence de $\langle A_i, x_i P_n \rangle$

Chapitre 7

Conclusions

Le résultat principal de ce travail est la généralisation des critères de finitude de Squier et Kobayashi aux théories algébriques. Nous montrons que les théories algébriques, admettant une présentation convergente et de type fini, sont de type bi-PF_∞ .

La méthode de construction de résolutions libres pour obtenir ce critère est la même que celle de Squier et Kobayashi. La difficulté essentielle consiste à déterminer la catégorie des coefficients adéquate dans laquelle sont construites les résolutions. La méthodologie, développée dans le chapitre 2, permettant d'identifier la catégorie des coefficients d'un système de réécriture devrait être appliquée à d'autres contextes de réécriture.

En effet, nous pensons que le critère PF_∞ reste encore valable pour les systèmes de réécriture sur les objets en monoïde dans une catégorie monoïdale. Nous avons introduit la notion de chaîne de Anick pour un système de réécriture dans une catégorie monoïdale. Etant donné un objet en monoïde \mathcal{M} dans une catégorie monoïdale non abélienne \mathbb{V} , il nous reste à déterminer sous quelles conditions, sur la catégorie \mathbb{V} , la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{Mon}(\mathbb{V})/\mathcal{M})$ possède suffisamment de projectifs et à expliciter ses générateurs projectifs. Dans cette direction, il est nécessaire de généraliser le calcul différentiel libre de Fox aux objets en monoïde, en utilisant la notion de dérivation sur un objet en monoïde défini dans [Bau97], 4.7.

Les critères de finitude obtenus dans ce travail sont partiels pour deux raisons essentielles.

Le critère obtenu pour la convergence d'un système de réécriture de termes relativement à l'interprétation sémantique de Lawvere ne tient pas compte de la gestion des variables. Burroni interprète un système de réécriture de termes comme un système de réécriture dans la catégorie des PROs, [Bur93]. Une théorie équationnelle est une algèbre sur un PRO \mathbb{P} , engendré par la signature de la théorie et la signature des produits finis, soumis aux relations de la théorie équationnelle et des produits finis. Un critère de finitude homologique, tenant compte de la gestion des variables, s'énonce en terme de résolution libre de l'abélianisé du foncteur $1_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ dans la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{PRO}/\mathbb{P})$. Il reste alors à exprimer l'homologie d'un PRO, définie en 4.5.3, en terme de foncteur dérivé sur la catégorie $\mathbf{Ab}(\mathbf{PRO}/\mathbb{P})$.

Par ailleurs, certaines théories algébriques \mathbb{G} possèdent une catégorie de bimodules cartésiens $\mathcal{F}(\mathbb{G})$ ponctuelle, cf. 5.4.6. Un critère de finitude, pour ces théories, nécessite d'élargir la catégorie des coefficients en considérant la catégorie des systèmes naturels cartésiens sur la catégorie \mathbb{G} . Nous devons pour cela, dans un premier temps, donner une interprétation de l'homologie d'une théorie en terme de foncteurs dérivés Tor , sur la catégorie des systèmes naturels cartésien, (cf. [Bau03]). Ensuite, afin d'appliquer la construction des résolutions acycliques, obtenues en 4.6.3 et 4.8.12, nous devons associer à une présentation convergente (resp. de type fini) $\langle \Omega \mid R \rangle$ d'une théorie algébrique \mathbb{A} , une présentation convergente (resp. de type fini) de la catégorie des factorisations $F\mathbb{A}$.

L'aspect effectif de la résolution de Kobayashi n'a pas été abordé dans ce travail. Une implémentation de cette résolution a été réalisée dans le cas de la réécriture de monoïdes, permettant de calculer les groupes d'homologie d'un monoïde admettant une présentation convergente de type fini, [Buc91]. Nous espérons que la généralisation que nous proposons permettra de calculer de façon effective l'homologie des théories algébriques.

Les critères de finitude homologique PF_* ne constituent pas une condition nécessaire à l'existence de présentations convergentes de type fini. Ils ne donnent donc qu'une caractérisation partielle de la classe des théories équationnelles décidables par la réécriture. Cependant, ils présentent l'intérêt d'être calculables. Le critère homotopique de type de dérivation fini introduit par Squier, [Squ94b], est plus fin que les critères de finitude PF_* . Nous devons trouver un compromis entre l'effectivité des critères homologiques et une caractérisation homotopique complète des mécanismes de confluence. Une première démarche dans ce sens est la condition de finitude de type d'homotopie fini qui est équivalente au critère bi-PF_3 pour les monoïdes de type fini, [Kob03]. Mais aussi, il semble important, à cette étape, de prolonger de façon explicite le complexe cubique de Squier et de le relier à des complexes existants, dédiés aux calculs de l'homologie des systèmes multiplicatifs, [Eil51].

Bibliographie

- [Aba91] **M. Abadi, L. Cardelli, P.-L. Curien, J.-J. Lévy.** *Explicit substitutions*, Journal of Functional Programming, 1 (4), 375-416, (1991).
- [Ani86] **D.J. Anick.** *On the homology of associative algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, 296 (2), 641-659, (1986).
- [Ani87] **D.J. Anick, E.L. Green.** *On the homology of quotients of path algebras*, Communications in Algebra, 15, 309-341, (1987).
- [Baa98] **F. Baader, T. Nipkow.** *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, (1998).
- [Bar01] **M.J. Bardzell.** *Noncommutative Gröbner bases and Hochschild cohomology*, dans “Symbolic computation : Solving equations in algebra, geometry, and engineering”, Contemporary Mathematics, 286, 227-240, (2001).
- [Bau85] **H.-J. Baues, G. Wirsching.** *Cohomology of small categories*, Journal of Pure and Applied Algebra, 38, 187-211, (1985).
- [Bau97] **H.-J. Baues, M. Jibladze, A. Tonks.** *Cohomology of Monoids in Monoidal Categories*, dans “Operads : Proceedings of renaissance conferences”, Contemporary Mathematics, 202, 137-165, (1997).
- [Bau03] **H.-J. Baues, M. Jibladze, T. Pirashvili.** *Strengthening track theories*, arXiv/math.CT/0307185, (2003).
- [Bec67] **J. Beck.** *Triples, Algebras and Cohomology*, Ph.D. thesis, Columbia University, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 2, 1-59, (2003), (1967).
- [Ber78] **G.M. Bergman.** *The Diamond Lemma for Ring Theory*, Advances in Mathematics, 29, 178-218, (1978).
- [Bie76] **R. Bieri.** *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Mathematics Notes, London, (1976).
- [Bou70] **N. Bourbaki.** *Éléments de Mathématiques, Algèbre, Chapitres 1 à 3*, Masson, Paris, (1970).
- [Bro82] **K.S. Brown.** *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87, Springer-Verlag, (1982).
- [Bro92] **K.S. Brown.** *The Geometry of Rewriting Systems : A Proof of the Anick-Groves-Squier Theorem*, Algorithms and classification in combinatorial group theory, Berkeley 1989, Publ., Math. Sci. Res. Inst. 23, 137-163, (1992).
- [Buc91] **M. Buchheit.** *Algorithmen zur Berechnung von Invarianten für konvergente Wortersetzungssysteme*, Diplomarbeit, Fachbereich Informatik, Universität Kaiserslautern, (1991).

- [Bur93] **A. Burroni.** *Higher-dimensional word problems with applications to equational logic*, Theoretical Computer Science 115, 43-62, (1993).
- [Bur94] **A. Burroni, J. Penon.** *Une construction d'un nerf des ∞ -catégories*, Catégories, Algèbres, Esquisses et Néo-Esquisses, 45-55, Université de Caen, (1994).
- [Cit01] **M.G. Citterio.** *Classifying spaces of categories and term rewriting*, Theory and Applications of Categories, 9, 92-105, (2001).
- [Coh97] **D.E. Cohen.** *String rewriting and homology of monoids*, Mathematical Structures in Computer Science, 7, No.3, 207-240, (1997).
- [Chu36] **A. Church, J.B. Rosser.** *Some properties of conversion*, Transactions of the American Mathematical Society, 39, 472-482, (1936).
- [Cre94] **R. Cremanns, F. Otto.** *Finite derivation type implies the homological finiteness condition FP_3* , Journal of Symbolic Computation, 18, 91-112, (1994).
- [Eil51] **S. Eilenberg, S. MacLane.** *Homology theories for multiplicative systems*, Transactions of the American Mathematical Society, 71, 294-330, (1951).
- [Fox53] **R.H. Fox.** *Free differential calculus. I : Derivation in the free group ring.*, Annals of Mathematics, (2) 57, 547-560, (1953).
- [Gau03] **P. Gaucher, E. Goubault.** *Topological Deformation of Higher Dimensional Automata*, Homology, Homotopy and Applications, 5 (2), 39-82, (2003).
- [Gia96] **J.-L. Giavitto, O. Michel, J. Sansonnet.** *Group-based fields*, dans Parallel Symbolic Languages and Systems, 1068, 209-215, (1996).
- [Gou95] **E. Goubault.** *The Geometry of Concurrency*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, (1995).
- [Gro90] **J.R.J. Groves.** *Rewriting Systems and Homology of Groups*, 3rd Int. Conf. Theory Groups Rel. Top., Canberra/Aust. 1989, Lecture Notes in Mathematics, 1456, 114-141, (1990).
- [Gru01] **F. Gruau, P. Malbos.** *Une règle d'évolution sur réseau d'automates satisfaisant le cahier des charges d'une partie de la Machine Cellulaire*, rapport de recherche, LIRMM, Montpellier, RR-01-284, 36 pages, (2001).
- [Gru02] **F. Gruau, P. Malbos.** *The Blob : A Basic Topological Concept for "Hardware-free" Distributed Computation*, Dans C.S. Calude, M.J. Dinneen, and F. Peper, eds., Unconventional Models of Computation, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2509, 151-163, (2002).
- [Jan85] **M. Jantzen.** *A note on a special one-rule semi-Thue system*, Information Processing Letters, 21 (3), 135-140, (1985).
- [Jib91] **M.A. Jibladze, T.I. Pirashvili.** *Cohomology of algebraic theories*, Journal of Algebra, 137 (2), 253-296, (1991).
- [Jib01] **M. Jibladze.** *Homotopy types for "gros" toposes*, Dissertation, Université Catholique de Louvain, (2001).
- [Jib02] **M. Jibladze, T. Pirashvili.** *Linear extensions and nilpotence of Maltsev theories*, Preprint, arXiv :math.CT/0203084, (2002).
- [Kap85] **D. Kapur, P. Narendran.** *A Finite Thue System with Decidable Word Problem and without Equivalent Finite Canonical System*, Theoretical Computer Science, 39, 123-133, (1985).
- [Kel82] **G.M. Kelly.** *Structures defined by finite limits in the enriched context*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 23, 3-42, (1982).
- [Kel93] **G.M. Kelly, A.J. Power.** *Adjunctions whose counits are coequalizers and presentations of finitary monads*, Journal of Pure and Applied Algebra, 89, 163-179, (1993).

- [Klo92] **J.W. Klop.** *Term Rewriting Systems*, Chap. 1 de Handbook of Logic in Computer Science, vol. 2, S. Abramsky, D. Gabbay, T. Maibaum, eds., Oxford University Press, Oxford, 1-117, (1992).
- [Knu70] **D. Knuth, P. Bendix.** *Simple word problems in universal algebra*, dans J. Leech ed., "Computational Problems in Abstract Algebra", Pergamon Press, (1970).
- [Kob90] **Y. Kobayashi.** *Complete rewriting systems and homology of monoid algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, 65, 263-275, (1990).
- [Kob03] **Y. Kobayashi, F. Otto.** *For finitely presented monoids the homological finiteness conditions FHT and bi-PF₃ coincide*, Journal of Algebra, 264, 327-341, (2003).
- [Laf91] **Y. Lafont, A. Prouté.** *Church-Rosser property and homology of monoids*, Mathematical Structures in Computer Science, 1 (3), 297-326, (1991).
- [Laf95] **Y. Lafont.** *A new finiteness condition for monoids presented by complete rewriting systems (after Craig C. Squier)*, Journal of Pure and Applied Algebra, 98 (3), 229-244, (1995).
- [Laf03] **Y. Lafont.** *Towards an Algebraic Theory of Boolean Circuits*, Journal of Pure and Applied Algebra, 184 (2-3), 257-310, (2003).
- [Law63] **F. W. Lawvere.** *Functorial semantics of algebraic theories*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., 50, 869-872, (1963).
- [Lin50] **R.C. Lyndon.** *Cohomology theory of groups with a single defining relation*, Annals of Mathematics, 52, 650-665, (1950).
- [Lod00] **J.-L. Loday.** *Homotopical syzygies*, dans "Une dégustation topologique : Homotopy theory in the Swiss Alps", Contemporary Mathematics, 265, 99-127, (2000)..
- [Lod02] **J.-L. Loday.** *Cyclic Homology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 301, second edition, Springer, (2002).
- [McL56] **S. MacLane.** *Homologie des anneaux et des modules*, Colloque de topologie de algèbre, 55-80, Louvain, Belgique, (1956).
- [McL71] **S. MacLane.** *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer, (1971).
- [Mal03] **P. Malbos.** *Rewriting Systems and Hochschild-Mitchell Homology*, Toulouse 2002, Geometric and Topological methods in Concurrency and distributed systems theory, GETCO 2002, édité par P. Cousot, L. Fajstrup, E. Goubault, M. Herlihy, M. Raussen, V. Sassone. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 81, 14 pages, (2003).
- [Met03] **F. Métayer.** *Resolutions by Polygraphs*, Theory and Applications of Categories, 11 (7), 148-184, (2003).
- [Mit72] **B. Mitchell.** *Rings with Several Objects*, Advances in Mathematics, 8, 1-161, (1972).
- [Mor95] **F. Morace.** *Finitely presented categories and homology*, Prépublication de l'Institut Fourier, 295, (1995).
- [New42] **M.H.A. Newman.** *On theories with a combinatorial definition of 'equivalence'*, Annals of Mathematics, 43 (2), 223-243, (1942).
- [Qui73] **D. Quillen.** *Higher algebraic K-theory I*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 341, 85-147, (1973).
- [Qui70] **D. Quillen.** *On the (co-)homology of commutative rings*, Applications of Categorical Algebra, Proc. Sympos. Pure Math, XVII, 65-87, (1970).
- [Squ87a] **C.C. Squier.** *Word problems and a homological finiteness condition for monoids*, Journal of Pure and Applied Algebra, 49, 201-217, (1987).

- [Squ87b] **C.C. Squier, F. Otto.** *The word problem for finitely presented monoids and finite canonical rewriting systems*, dans 2nd Int. Conf. RTA 1987, Lecture Notes in Computer Science, 256, (1987).
- [Squ94a] **C.C. Squier.** *The homological algebra of Artin groups*, *Mathematica Scandinavica*, 75 (1), 5-43, (1994).
- [Squ94b] **C.C. Squier.** *A finiteness condition for rewriting systems*, Révisé par F. Otto, Y. Kobayashi, *Theoretical Computer Science*, 131 (2), 271-294, (1994).
- [Sch72] **H. Schubert.** *Categories*, Springer-Verlag, (1972).
- [Sta63] **J. R. Stallings.** *A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated*, *American Journal of Mathematics*, 85, 541-543, (1963).
- [Str87] **R. Street.** *The algebra of oriented simplexes*, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 49, 283-335, (1987).
- [Ter03] **Terese.** *Term Rewriting Systems*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 55, Cambridge University Press, (2003).
- [Wan00] **X. Wang, S.J. Pride.** *Second order Dehn functions of groups and monoids*, *International Journal of Algebra and Computation*, 10 (4), 425-456, (2000).
- [Wra70] **G.C. Wraith.** *Algebraic theories*, *Lectures Notes Series Aarhus Universitet*, 22, (1970).

Résumé :

L'algorithme de complétion de Knuth-Bendix permet, dans certains cas, d'utiliser les systèmes de réécriture pour décider le problème du mot dans un monoïde. Le problème du mot est alors réduit à un calcul de forme normale. Cependant, tous les monoïdes décidables ne peuvent pas être résolus de cette façon. Un programme, initié par Squier, vise à caractériser par des invariants algébriques la classe des monoïdes décidables par réécriture.

L'objectif de cette thèse est d'étendre ce travail à la réécriture de termes.

Nous établissons des conditions de finitude homologique pour l'existence de présentations convergentes de type fini par réécriture de termes de théories équationnelles du premier ordre avec une sorte. Une théorie équationnelle est sémantiquement décrite par une théorie algébrique au sens de Lawvere. Nous introduisons l'homologie de ces théories à coefficients dans les bimodules non additifs, comme généralisation de l'homologie de MacLane des anneaux. Cette homologie admet une interprétation en terme d'homologie de Hochschild-Mitchell de la petite catégorie sous-jacente. Nous généralisons les résolutions libres de Squier et Kobayashi, établies en réécriture de mots, à la réécriture de petites catégories. En utilisant ces résolutions, nous montrons qu'une théorie algébrique admettant une présentation convergente de type fini est de type bi-PF $_{\infty}$. Nous construisons une théorie équationnelle, non unaire, décidable et n'admettant pas de présentation convergente de type fini.

Mots clefs : Systèmes de réécriture, Théories algébriques, Algèbre Homologique.

Summary :

We construct homological finiteness conditions for the existence of finite type convergent presentations by rewriting of one-sorted and first-order equational theories. An equational theory is semantically described by an algebraic theory in the sense of Lawvere. Generalising the MacLane homology of rings, we introduce the homology of such an algebraic theory with coefficients in non additive bimodules. This homology can be interpreted in terms of Hochschild-Mitchell homology of the underlying small category. We generalise the free resolutions of Squier and Kobayashi from the string rewriting to the rewriting of morphisms in small categories. By using these resolutions, we prove that any algebraic theory admitting a finite type convergent presentation is of type bi-FP8. We construct a decidable non unitary equational theory which does not admit a finite type convergent presentation.

Keywords : Rewriting Systems, Algebraic Theories, Homological Algebra.
